Linear Algebra Note of *3Blue1Brown Course*

`Jmsu` https://hello.jmsu.me

Linear Transformation

> 在二维空间下
>
> **向量** $\vec{V}$: 向量指从原点到 （x, y）的线段
>
> **基向量** $\hat{i}, \hat{j}$: 所有的向量都可以视为 向量与基向量的结合
>
> - $\hat{i}$: x轴的基向量
> - $\hat{j}$: y轴的基向量

基向量的改变变换了整个的向量空间，这种变化同样作用于向量上。

如何对向量进行线性变换

> **最基本的二维向量空间**
>
> $$\begin{gathered} \hat{i}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \hat{j}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \\ \vec{V}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \end{gathered} \tag{1}$$
>
> 此向量空间的 $\vec{V}$ 为： $\begin{bmatrix}\hat{i} & \hat{j}\end{bmatrix} \cdot \vec{V}$ 展开如下
>
> $$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1x+0y\\0x+1y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \tag{2}$$
>
> 可以看出 向量并没有发生改变， 因为其处于最基本的二维向量空间下
>
> $$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1x+0y\\0x+1y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$
>
> 如上图，也体现了矩阵乘法的必要条件之一: `基向量矩阵的列` （即 基向量维数） **=** `向量矩阵行数` （即 向量维数）

如果基向量发生了变换，向量同基向量进行相同的变换

> **对向量进行线性变换**
>
> 假设
>
> $$\begin{aligned} &\hat{i} = \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} \quad \hat{j} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} \\ &\vec{V} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$
>
> 在此向量空间下，向量 $\vec{V}$ 如下变换
>
> $$\begin{bmatrix}4&3\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4x+3y\\2x+2y\end{bmatrix} \tag{4}$$

如何对向量进行复合线性变换

如果需要对某向量进行两次或更多次的复合线性变换，那么可以首先合并各次变换的基向量矩阵

> **多个基向量矩阵 对向量进行 多次线性变换**
>
> 假设对向量 $\vec{V}$ 进行两次变换 如下
>
> $$\begin{bmatrix}2&6\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \tag{5}$$
>
> 那么可以从两个角度理解这种复合变换
>
> 1.
>
> $$\begin{bmatrix}2&6\\-2&1\end{bmatrix}\boxed{\begin{bmatrix}4&3\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}$$
>
> 首先对$\vec{V}$进行线性变换后，再对其变换后的结果进行二次变换
>
> 2.
>
> $$\boxed{\begin{bmatrix}2&6\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\2&2\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$
>
> 首先计算两个基向量矩阵的乘积，再将其结果对向量进行变换
>
> 根据这个特性，可以看出：矩阵的乘法的 `结合律` 成立 👈
>
> 对矩阵 ABC 有

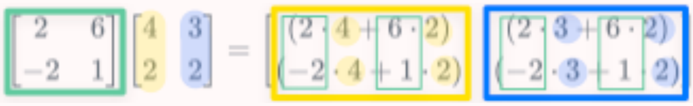
$$A(BC) = (AB)C \tag{6}$$

矩阵乘法 Multiplication of Matrix

对于 *公式(5)* 第二种计算方法，其涉及到两个矩阵的乘法，按照上文将矩阵列视为基变量的矩阵的视角，可以将矩阵乘法分解为如下形式

续 *公式(5)*

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 4 + 6 \cdot 2) & (2 \cdot 3 + 6 \cdot 2) \\ (-2 \cdot 4 + 1 \cdot 2) & (-2 \cdot 3 + 1 \cdot 2) \end{bmatrix} \tag{7}$$



将右侧矩阵分解为列向量，分别用左侧绿色部分的矩阵对其进行线性变换

其相乘结果的每一列都对应着 对每列向量的线性变换结果