论文笔记

ElegantLaTeX 经典之作

作者：程会

组织：ElegantLaTeX Program

时间：March 18, 2020

版本：3.10*

Victory won’t come to us unless we go to it. — M. Moore

目　　录

第 1 章 PGC 算法

1.1 PGC 相位生成载波调制实现原理分析

干涉输出信号可以表示为

$$I = A + Bcos[Ccos(\omega_o t) + \varphi(t)] \tag{1.1}$$

其中载波信号为 $Ccos\omega_o t$,$\varphi(t)$ 为待测信号和环境漂移共同引起得相位变化。$Ccos\omega_o t+\varphi(t)$ 处于相位上，故将其看作相位变化，事实上载波信号和待测信号处于同等地位，由于载波频率远远高于待测信号，故可以认为它载着待测信号。这就体现了相位载波的含义。

对于1.1进行贝塞尔函数展开得

$$\begin{aligned} I =& A + B\left\{\left[J_o(C) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(C)cos2k\omega_o t\right]cos\varphi(t)\right. \\ &\left. - 2\left[\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(C)cos(2k+1)\omega_o t\right]sin\varphi(t)\right\} \end{aligned} \tag{1.2}$$

由式1.2可知，干涉输出信号 I，当 $\varphi(t) = 0$ 时，信号 I 中只存在 ω_o 的偶次谐波项；当 $\varphi(t) = \pi/2$ 时，信号 I 中只存在 ω_o 的奇次谐波项。$\varphi(t)$ 可以表示为

$$\varphi(t) = Dcos\omega_s t + \varphi_o(t) \tag{1.3}$$

其中，$Dcos\omega_s t$ 为待测信号幅度，$\varphi_o(t)$ 为环境噪声引起的相位变化。同理，$cos\varphi(t)$、$sin\varphi(t)$ 按贝塞尔函数展开

$$\begin{aligned} cos\varphi(t) =& \left[J_o(D) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(D)cos2k\omega_s t\right]cos\varphi_o(t) \\ &- \left[2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{2k+1}(D)cos(2k+1)\omega_s t\right]sin\varphi_o(t) \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} sin\varphi(t) =& \left[J_o(C) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(C)cos2k\omega_o t\right]sin\varphi_o(t) \\ &+ 2\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{2k+1}(C)cos(2k+1)\omega_o t\right]cos\varphi_o(t) \end{aligned} \tag{1.5}$$

由式1.4、1.5可以看出，当 $\varphi_o(t) = k\pi(k = 0, 1, 2\cdots)$ 时，输出干涉信号频谱中，偶（奇）次角频率 ω_s 出现在偶（奇）次角频率 ω_o 的两侧；当 $\varphi_o(t) = k\pi+\pi/2(k = 0, 1, 2\cdots)$ 时，频谱上偶（奇）次角频率 ω_s 出现在奇（偶）次角频率 ω_o 的两侧，待测信号的信息包含在奇（偶）次角频率 ω_o 的两侧的边带频谱中，它们或以 ω_o 偶次角频率，或以 ω_o 奇次角频率为中心。从而实现了相位生成载波调制。

未加载波调制前，当 $\varphi(t) = k\pi(k = 0, 1, 2\cdots)$ 时，$cos\varphi(t) = 1$；$\varphi(t) = k\pi+\pi/2(k = 0, 1, 2\cdots)$ 时，$cos\varphi(t) = 0$。此时干涉信号将发生消隐或畸变，无法从中解调将待测信号。

根据以上分析，加入载波信号后，即使出现 $\varphi_o(t)=k\pi$ 或 $\varphi(t)=k\pi+\pi/2$ 也不会发生信号的消隐或畸变，从而实现抗相位衰落。这就是进行相位生成载波调制的原因和意义所在。

1.2 PGC 解调算法原理分析及相关参数选取

传统的 PGC 解调算法分为微分交叉相乘（DCM）算法和反正切（Arctan）算法两种。以下将分别对两种解调算法进行详细分析，并分别对两种算法中的一些参数的选取原则进行详细的理论分析，如最佳相位调制度的选取、系统最低采样频率及系统解调动态范围上限等。

1.2.1 PGC 解调算法原理分析

DCM 解调算法的思路是将干涉信号分别与单倍频和二倍频混频低通滤波后，得到一对相互正交的余弦项和正弦项，然后再经过微分交叉相乘相减、积分、高通滤波后实现待测信号的解调。具体过程如下：干涉信号分别与幅度分别为 G、H，角频率为 ω_o 和 $2\omega_o$ 的载波混频、低通滤波后得到

$$-BGJ_1(C)\sin\varphi(t) \tag{1.6}$$

$$-BHJ_2(C)\cos\varphi(t) \tag{1.7}$$

经过微分交叉相乘相减积分处理后的信号为

$$B^2GHJ_1(C)J_2(C)\varphi(t) \tag{1.8}$$

再通过高通滤波器得到了待测信号，即 DCM 算法解调输出为

$$DB^2GHJ_1(C)J_2(C)\cos\omega_s t \tag{1.9}$$

待测信号被解调出来，只是幅值变化了一个系数 $B^2GHJ_1(C)J_2(C)$。为了减小输出结果对贝塞尔函数的依赖关系，通过选择适当的载波信号幅度即相位调制度 C，使得 $J_1(C)J_2(C)$ 取得极大值，且当 C 值稍有变化时系统解调输出幅值变化不大，再可以通过幅度补偿实现待测信号的完全解调。

Arctan 算法与 DCM 算法相同之处在于：二者都是分别与单倍频和二倍频混频低通滤波后得到两个相互正交的余弦项和正弦项。不同之处在于：反正切算法是将得到的两个正交项进行除法运算得到正切信号，然后对正切信号进行反正切算法，最后经过高通滤波实现信号的解调。

具体分析过程如下：干涉信号与载波混频低通后得到的正交项如式1.6、1.7，对两式相除后得到

$$GJ_1(C)/HJ_2(C)\cdot tan\varphi(t) \tag{1.10}$$

求反正切再经高通滤波后得到

$$GJ_1(C)/HJ_2(C)\cdot Dcos\omega_s t \tag{1.11}$$

实现对待测信号的解调。

第 2 章 基于波数扫描的傅立叶变换白光干涉测量术

2.1 光纤白光干涉光谱信号在波长域上的啁啾特性

在波长域中沿着扫描波长分布的白光干涉光谱信号通常可以表示为

$$g(\lambda) = a(\lambda) + b(\lambda)cos(2\pi f_\lambda + \pi) \tag{2.1}$$

其中 λ 表示扫描波长，f_λ 表示波长域中干涉光谱信号的频率，$f_\lambda = 2d^2/\lambda^2$，d 为光纤法珀传感器的腔长，2d 即为光纤法珀传感器的光程差。$a(\lambda)$ 是由宽带光源引入的背景光信号，$b(\lambda)$ 是白光干涉条纹的对比度变化，与光纤法珀腔中的光纤端面的反射有关。相位项中的常数 π 由法珀腔中的第二个端面的反射引入。波长域白光干涉光谱的周期可以表示为

$$T_\lambda = \lambda^2/(2d) \tag{2.2}$$

当光纤法珀传感器的腔长 d 一定时，干涉光谱的周期随扫描波长非线性地变化。

2.2 基于波数扫描的傅立叶变换白光干涉测量术

2.2.1 波数域傅立叶变换白光干涉测量原理

由于白光干涉光谱的相位与扫描波长之间是反比的关系，干涉光谱信号的频率与扫描波长之间存在非线性关系，因此可以采用波数作为变量来重新描述白光干涉光谱。白光干涉光谱在波数域可以表示为

$$g(k) = a(k) + b(k)cos(2\pi f_0 k + \pi) \tag{2.3}$$

其中 k 表示波数，波数 k 与波长 λ 之间是反比关系，$k = 1/\lambda_0$。f_0 是波数域中白光干涉光谱信号的频率，$f_0 = 2d$。在波数域上白光干涉光谱的周期为

$$T = 1/(2d) \tag{2.4}$$

可以看出，在波数域中白光干涉光谱的周期不随波数的变化而改变，只与光纤法珀传感器的光程差有关。当光纤法珀传感器的光程差一定时，可以认为白光干涉光谱的周期 T 为一个恒定值。因此沿波数分布的白光干涉光谱信号是一个等周期信号，光谱信号中不存在啁啾。在对白光干涉光谱信号进行傅立叶变换时，不会因为啁啾而引起傅立叶频谱展宽。根据欧拉公式，方程**??**可以写为如下形式

第 3 章 贝塞尔函数

3.1 贝塞尔函数的引出

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\nabla^2 u=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right), & \rho<R, 0\le\theta\le 2\pi, t>0 \\ u(\rho,\theta,0)=\varphi(\rho,\theta), & \rho<R, 0\le\theta\le 2\pi \\ u(R,\theta,t)=0, & 0\le\theta\le 2\pi, t>0 \end{cases} \tag{3.1}$$

n 阶贝塞尔函数

$$\begin{cases} x^2y''+xy'+\left(x^2-n^2\right)y=0, \quad x<\sqrt{\lambda}R \\ y(\sqrt{\lambda}R)=0, |y(0)|<\infty \end{cases} \tag{3.2}$$

3.2 贝塞尔方程的求解

n 阶贝塞尔方程 n 任意实数或复数

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-n^2\right)y=0$$

假设 $n\ge 0$，令：

$$y=x^c(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k+\cdots)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{c+k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[(c+k)(c+k-1)+(c+k)+(x^2-n^2)\right]a_kx^{c+k}\right\}=0$$

$$(c^2-n^2)a_0x^c+\left[(c+1)^2-n^2\right]+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[(c+k)^2-n^2\right]a_k+a_{k-2}\right\}x^{c+k}=0$$

从而有

$$(c^2-n^2)a_0=0$$

$$\left[(c+1)^2-n^2\right]a_1=0$$

$$\left[(c+k)^2-n^2\right]a_k+a_{k-2}=0$$

由上三式可得

$$c=n$$

$$a_1=a_3=a_5=\cdots=0$$

$$a_k=\frac{-a_{k-2}}{k(2n+k)}$$

令：

$$a_0 = \frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$$

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$$

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

当 p 为正整数时

$$\Gamma(p+1) = p!$$

当 p 为负整数或零时

$$\Gamma(p) \to \infty$$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)} \quad n \geq 0$$

n 阶第一类贝塞尔函数

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \quad n \geq 0$$

当 n 为正整数时 $\Gamma(n+m+1) = (n+m)!$

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \quad n = 0, 1, 2\cdots$$

$c = -n$ 时

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-n+m+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2m} \quad n \neq 1, 2\cdots$$

n 阶第一类贝塞尔函数

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \quad n \geq 0$$

3.3 著名的贝塞尔展开公式

$$e^{izcos\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z)e^{in\theta}$$

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$$

$$e^{izcos\theta} = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z)cos(n\theta)$$

$$cos(zcos\theta) = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(z)cos(2n\theta)$$

$$sin(zcos\theta) = -2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n-1}(z)cos\left[(2n-1)\theta\right]$$

$$cos(zsin\theta) = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z)cos(2n\theta)$$

$$sin(zsin\theta) = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z)sin\left[(2n-1)\theta\right]$$

第 4 章 傅里叶变换解调原理研究

多光束干涉原理，反射光的光强分布为

$$I_r = \frac{2R(1 - cos\frac{4\pi l}{\lambda})}{1 + R^2 - 2Rcos\frac{4\pi l}{\lambda}} \tag{4.1}$$

可以用双光束干涉代替多光束干涉, 此时

$$1 + R^2 - 2Rcos\frac{4\pi l}{\lambda} \approx 1$$

式4.1为：

$$I_r = 2R\left[1 - cos(\frac{4\pi}{\lambda}l)\right] I_0 \tag{4.2}$$

由于光波长 λ、光频率 v 和光速 c 之间存在如下关系

$$v = \frac{c}{\lambda} \tag{4.3}$$

将式4.3代入式4.2，则有

$$I_r = 2R\left[1 - cos(\frac{4\pi vl}{c})\right] I_0 \tag{4.4}$$

在工程实际应用中, 理想宽带光源是不存在的, 任何一种实际光源所发出的光中各波长的强度是不同的, 其强度随波长的分布呈近似高斯分布, 其表达式为

$$I_0(\lambda) = I_0 e^{-\frac{(\lambda-\lambda_p)^2}{B_\lambda^2}} \tag{4.5}$$

式中,，λ_p 是光源光谱的峰值波长,，B_λ 是光源光谱带宽所决定的高斯函数的半宽度. 当峰值波长 $\lambda_p = 825nm$，光谱半宽度 $B_\lambda = 40nm$。将式4.5代入式4.2,，可以得到实际光源条件下；光纤法-珀传感器双光束干涉输出光强表达式为

$$I_r(\lambda) = 2RI_0\left[1 - cos(\frac{4\pi l}{\lambda})\right] e^{-\frac{(\lambda-\lambda_p)^2}{B_\lambda^2}} \tag{4.6}$$

$v = \frac{c}{\lambda}$ 代入式4.5，则式4.5变为

$$I_0(v) = I_0 e^{\frac{(v-v_p)^2}{-2(\sigma_\lambda v v_p/c)^2}} \tag{4.7}$$

式中，$v_p = c/\lambda_p$，$\sigma_\lambda = \frac{B}{\sqrt{2}}$，也就是说实际光源强度对光频率 v 来说已不是高斯分布, 如果将上式中指数部分的变量展开为泰勒级数

$$\frac{v - v_p}{v} = \frac{v - v_p}{v_p} - \frac{(v - v_0)^2}{v_p} + \cdots\cdots = \frac{v - v_p}{v_p}(1 - \frac{v - v_p}{v_p} + \cdots\cdots) \tag{4.8}$$

取一阶近似, 代入式4.7, 得

$$I_0(v) = I_0 exp\left[-\frac{(v - v_p)^2}{2\sigma_{v^2}}\right] \tag{4.9}$$

式中，$\sigma_v = \frac{\sigma_\lambda v_p}{c}$ 显然，高斯光源强度对光频率 v 仍可近似成高斯分布, 其傅里叶变换为

$$F\left[I_0(v)\right] = \sqrt{2\pi}\sigma_v I_0 exp(-jv_p\Omega) \cdot exp(-\sigma_v^2\Omega^2/2) \tag{4.10}$$

根据傅里叶变换的卷积定理

$$F\left[f_1(t)f_2(t)\right] = \frac{1}{2\pi}F_1(j\Omega) * F_2(j\Omega) \tag{4.11}$$

式4.6的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(j\Omega) =& 2\sqrt{2\pi}RI_0\sigma_v\left[exp(-jv_p\Omega)exp(\frac{-\sigma_v^2\Omega^2}{2})\right] + \\ & \sqrt{2\pi}RI_0\sigma_v\left\{exp\left[-j(\Omega-\frac{4\pi l}{c}v_p)\right]exp\left[-\frac{\sigma_v^2(\Omega-\frac{4\pi l}{c})^2}{2}\right]\right\} + \\ & \sqrt{2\pi}RI_0\sigma_v\left\{exp\left[-j(\Omega+\frac{4\pi l}{c})v_p\right]exp\left[-\frac{\sigma_v^2(\Omega+\frac{4\pi l}{c})^2}{2}\right]\right\}\end{aligned} \tag{4.12}$$

4.1 高斯函数的傅里叶变换

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-\pi t^2} \\ F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} exp(-j2\pi ut)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t^2+j2ut)}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi((t+ju)^2-(ju)^2)}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u^2}e^{-\pi(t+ju)^2}dt \\ &= e^{-\pi u^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+ju)^2}dt \\ &= e^{-\pi u^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+ju)^2}d(t+ju) \\ &= e^{-\pi u^2} \end{aligned} \tag{4.13}$$

证明

$$I_0(v) = I_0 e^{-\frac{(v-v_p)^2}{2\sigma_v^2}} \tag{4.14}$$

$$I_r(v) = 2R\left[1 - cos\frac{4\pi lv}{c}\right] I_0(v) \tag{4.15}$$

$$F\left[I_r(v)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} 2RI_0\left[1 - cos\frac{4\pi lv}{c}\right] e^{-\frac{(v-v_p)^2}{2\sigma_v^2}} e^{-j\Omega v} dv \tag{4.16}$$

$$= 2RI_0\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\frac{(v-v_p)^2}{2\sigma_v^2}+j\Omega v\right]} dv - \int_{-\infty}^{\infty} cos\frac{4\pi lv}{c} e^{-\left[\frac{(v-v_p)^2}{2\sigma_v^2}+j\Omega v\right]} dv\right\} \tag{4.17}$$

$$cos\frac{4\pi lv}{c} = \frac{e^{j\frac{4\pi lv}{c}} + e^{-j\frac{4\pi lv}{c}}}{2} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
&=2RI_0 e^{-j\Omega v_p} e^{-\sigma_v^2\Omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(v-v_p+j\sigma_v\Omega)^2}{2\sigma_v^2}} d(v - v_p + i\sigma_v\Omega) - \\
&RI_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{4\pi lv}{c}} e^{-\left[\frac{(v-v_p)^2}{2\sigma_v^2}+j\Omega v\right]} dv + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{4\pi lv}{c}} e^{-\left[\frac{(v-v_p)^2}{2\sigma_v^2}+j\Omega v\right]} dv \\
&=2\sqrt{2\pi}RI_0\sigma_v e^{-j\Omega v_p} e^{-\frac{\sigma_v^2\Omega^2}{2}} + \\
&RI_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left[v-v_p+\sigma_v^2 j(\Omega-\frac{4\pi l}{c})\right]^2}{2\sigma_v^2}} d(v - v_p + \sigma_v^2 j(\Omega - \frac{4\pi l}{c})) e^{-\frac{-\sigma_v^2(\Omega-\frac{4\pi l}{c})^2}{2}} e^{-v_p j(\Omega-\frac{4\pi l}{c})} + \\
&RI_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left[v-v_p+\sigma_v^2 j(\Omega+\frac{4\pi l}{c})\right]^2}{2\sigma_v^2}} d(v - v_p + \sigma_v^2 j(\Omega + \frac{4\pi l}{c})) e^{-\frac{-\sigma_v^2(\Omega+\frac{4\pi l}{c})^2}{2}} e^{-v_p j(\Omega+\frac{4\pi l}{c})}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left[I_r(v)\right] =& 2\sqrt{2\pi}RI_0\sigma_v e^{-j\Omega v_p} e^{-\frac{\sigma_v^2\Omega^2}{2}} + \\
&\sqrt{2\pi}RI_0\sigma_v\left\{exp\left[-j(\Omega - \frac{4\pi l}{c}v_p)\right] exp\left[-\frac{\sigma_v^2(\Omega - \frac{4\pi l}{c})^2}{2}\right]\right\} + \\
&\sqrt{2\pi}RI_0\sigma_v\left\{exp\left[-j(\Omega + \frac{4\pi l}{c})v_p\right] exp\left[-\frac{\sigma_v^2(\Omega + \frac{4\pi l}{c})^2}{2}\right]\right\}
\end{aligned} \tag{4.20}$$