Методы оптимизации. Семинар 4. Сопряжённые множества. Лемма Фаркаша.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

26 сентября 2017 г.

Напоминание

- Внутренность и относительная внутренность выпуклого множества
- Проекция точки на множество
- Отделимость выпуклых множеств
- Опорная гиперплоскость

Сопряжённое множество

Сопряжённое множество

Сопряжённым (двойственным) к множеству $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество X^*, что

$$X^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \ \forall \mathbf{x} \in X\}.$$

Сопряжённый конус

Если $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — конус, тогда

$$X^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \ \forall \mathbf{x} \in X\}.$$

Сопряжённое подпространство

Если X — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, тогда

$$X^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 0, \ \forall \mathbf{x} \in X\}.$$

Факты о сопряжённых множествах

Theorem

Пусть X — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$X^{**} = \overline{conv\,(X \cup \{0\})}.$$

Theorem

Пусть X — замкнутое выпуклое множество, включающее 0. Тогда $X^{**} = X$.

Theorem

Пусть $X_1 \subset X_2$, тогда $X_2^* \subset X_1^*$.

Примеры

Найти сопряжённые к следующим множествам:

1. Неотрицательный октант: $\mathbb{R}^n_+$
2. Конус положительных полуопределённых матриц: $\mathbf{S}^n_+$
3. $\{(x_1, x_2) | |x_1| \leq x_2\}$
4. $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \|x\|_2 \leq r\}$
5. $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} | \|x\| \leq t\}$

Лемма Фаркаша

Lemma (Фаркаш)

Пусть $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *и* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$*. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:*

$$1)\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \ \mathbf{x} \geq 0$$

$$2)\ \mathbf{pA} \geq 0,\ \ \langle \mathbf{p}, \mathbf{b} \rangle < 0$$

Важное следствие

Пусть $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

$$1)\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$2)\ \mathbf{pA} = 0,\ \ \langle \mathbf{p}, \mathbf{b} \rangle < 0,\ \ \mathbf{p} \geq 0$$

Применение

Если в задаче линейного программирования на минимум допустимое множество непусто и целевая функция ограничена на нём снизу, то задача имеет решение.

Геометрическая интерпретация

Геометрия леммы Фаркаша

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ при $\mathbf{x} \geq 0$ означает, что $\mathbf{b}$ лежит в конусе, натянутым на столбцы матрицы $\mathbf{A}$
$\mathbf{pA} \geq 0$, $\langle \mathbf{p}, \mathbf{b} \rangle < 0$ означает, что существует разделяющая гиперплоскость между вектором $\mathbf{b}$ и конусом из столбцов матрицы $\mathbf{A}$.

Резюме

- Сопряжённые множества
- Свойства сопряжённых множеств
- Лемма Фаркаша