

# Методы оптимизации.

## Семинар 3. Проекция точки на множество, отделимость, опорная гиперплоскость

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,  
Факультет Управления и Прикладной Математики

19 сентября 2017 г.

- Аффинная оболочка и аффинное множество
- Выпуклая оболочка и выпуклое множество
- Коническая оболочка и выпуклый конус
- Операции, сохраняющие выпуклость

# Внутренности множества

## Внутренность множества

Внутренность множества  $G$  состоит из точек из  $G$ , таких что:

$$\text{int}G = \{x \in G \mid \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset G\},$$

где  $B(x, \varepsilon) = \{y \mid \|x - y\| \leq \varepsilon\}$

## Относительная внутренность

Относительной внутренностью множества  $G$  называют следующее множество:

$$\text{relint}G = \{x \in G \mid \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap \text{aff}G \subseteq G\}$$

Вопрос: зачем нужна концепция относительной внутренности?

Найти относительные внутренности следующих множеств

1.  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$

2.  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 \leq 1, \alpha_i > 0, i = 1, \dots, n\}$

3.  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 = 1, \alpha_i > 0, i = 1, \dots, n\}$

4.  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1, x_3 = 0\}$

# Проекция точки на множество

## Расстояние между точкой и множеством

Расстоянием  $d$  от точки  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  до замкнутого множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  по норме  $\|\cdot\|$  является

$$d(\mathbf{a}, X, \|\cdot\|) = \inf\{\|\mathbf{a} - \mathbf{y}\| \mid \mathbf{y} \in X\}$$

## Проекция точки на множество

Проекцией точки  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  на множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  по норме  $\|\cdot\|$  будем называть такую точку  $\pi_X(\mathbf{a}) \in X$ , что

$$\pi_X(\mathbf{a}) = \arg \min_{\mathbf{y} \in X} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Вопросы: единственна ли проекция? Если нет, то в каких случаях единственна? Какая связь между единственностью проекции и выпуклостью множества?

# Факты о проекциях

## Критерий проекции

Точка  $\pi_X(\mathbf{a}) \in X$  является проекцией точки  $\mathbf{a}$  на множество  $X \Leftrightarrow \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{a} - \pi_X(\mathbf{a})\|, \forall \mathbf{x} \in X$ .

## Критерий проекции для нормы $\ell_2$

Точка  $\pi_X(\mathbf{a}) \in X$  является проекцией точки  $\mathbf{a}$  на множество  $X \Leftrightarrow \langle \pi_X(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \pi_X(\mathbf{a}) \rangle \geq 0, \forall \mathbf{x} \in X$ .

1. Проекция на шар  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_* \leq 1\}$  в различных нормах
2. Проекция на плоскость  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = b\}$
3. Проекция на аффинное множество  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \text{rank}(\mathbf{A}) = m\}$

# Отделимость выпуклых множеств

## Определение

Пусть  $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^n$  произвольные множества. Они называются:

- отделимыми, если  $\exists \mathbf{p}, \beta : \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle \geq \beta \geq \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle, \forall \mathbf{x}_1 \in X_1$  и  $\forall \mathbf{x}_2 \in X_2$ .
- собственно отделимыми, если они отделимы и  $\exists \mathbf{x}_1^* \in X_1$  и  $\exists \mathbf{x}_2^* \in X_2 : \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1^* \rangle > \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2^* \rangle$
- сильно отделимыми, если  $\exists \mathbf{p} \neq 0$  и  $\beta :$   
$$\inf_{\mathbf{x}_1 \in X_1} \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle > \beta > \sup_{\mathbf{x}_2 \in X_2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle$$
- строго отделимы, если  $\forall \mathbf{x}_1 \in X_1$  и  $\forall \mathbf{x}_2 \in X_2 :$   
$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle > \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle.$$

## Разделяющая гиперплоскость

Разделяющей гиперплоскостью для множеств  $X_1, X_2$  является такая гиперплоскость  $\{\mathbf{x} | \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$ , что  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle \geq \beta$  для всех  $\mathbf{x}_1 \in X_1$  и  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle \leq \beta$  для всех  $\mathbf{x}_2 \in X_2$



# Факты об отделимости

## Существование

Пусть  $X_1$  и  $X_2$  выпуклые не пересекающиеся множества, тогда существует разделяющая их гиперплоскость.

## Критерий для выпуклых множеств

Два выпуклых множества, таких что по крайней мере одно из них открыто, не пересекаются тогда и только тогда, когда существует разделяющая гиперплоскость.

## Критерий сильной отделимости

Два выпуклых множества сильно отделимы тогда и только тогда когда расстояние между ними положительно.

1. Построить разделяющую гиперплоскость для множеств  $X_1, X_2$ :  $X_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 > 1, x_1 > 0\}$ ,  $X_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq 9 + \frac{4}{x_1 - 1}\}$ .
2. Критерий разрешимости системы строгих линейных неравенств  $\mathbf{Ax} < \mathbf{b}$  как не пересечение аффинного множества  $\{\mathbf{b} - \mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$  и множества  $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid y_i > 0\}$
3. Пример двух замкнутых выпуклых не пересекающихся множеств, которые не являются строго отделимыми

# Опорная гиперплоскость

## Опорная гиперплоскость

Гиперплоскость  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$  называется опорной к множеству  $X$  в граничной точке  $\mathbf{x}_0$ , если  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq \beta = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_0 \rangle$  для всех  $\mathbf{x} \in X$ .

## Собственно опорная гиперплоскость

Гиперплоскость  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$  называется опорной к множеству  $X$  в точке  $\mathbf{x}_0$ , если она опорная и  $\exists \tilde{\mathbf{x}} \in X$ :  $\langle \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle > \beta$ .

## Теорема об опорной гиперплоскости

В любой граничной (относительно граничной) точке выпуклого множества существует опорная (собственно опорная) гиперплоскость.

1. Выразить множество  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x_1 x_2 \geq 1\}$  как пересечение гиперплоскостей
2. Построить опорную гиперплоскость к множеству  $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid e^{x_1} \leq x_2\}$  в точке  $x_0 = (0, 1)$
3. Найти уравнение гиперплоскости опорной к множеству  $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geq x_1^2 + x_2^2\}$  и отделяющей его от точки  $x_0 = (-5/4, 5/16, 15/16)$

- Внутренность и относительная внутренность выпуклого множества
- Проекция точки на множество
- Отделимость выпуклых множеств
- Опорная гиперплоскость