

# Методы оптимизации.

## Семинар 10. Условия оптимальности.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт  
Факультет Управления и Прикладной Математики

21 ноября 2017 г.

- Сопряжённые функции
- Неравенство Юнга-Фенхеля
- Примеры сопряжённых функций

## Вопрос 0

Когда существует решение оптимизационной задачи?

## Вопрос 1

Как проверить, что точка является решением оптимизационной задачи?

## Вопрос 2

Из каких условий можно найти решение оптимизационной задачи?

## Теорема Вейерштрасса

Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  компактное множество и пусть  $f(x)$  непрерывная функция на  $X$ . Тогда точка глобального минимума функции  $f(x)$  на  $X$  существует.

Эта теорема гарантирует, что решение подавляющего большинства разумных задач существует.

## Определение

Условием оптимальности будем называть некоторое выражение, выполнимость которого даёт необходимое и (или) достаточное условие экстремума.

Классы задач:

- Общая задача минимизации
- Задача безусловной минимизации
- Задача минимизации с ограничениями типа равенств
- Задача минимизации с ограничениями типа равенств и неравенств

# Общая задача минимизации

## Задача

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in X}$$

## Критерий оптимальности

Пусть  $f(x)$  определена на множестве  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда

1. если  $x^*$  точка минимума  $f(x)$  на  $X$ , то  $0 \in \partial_X f(x^*)$
2. если для некоторой точки  $x^* \in X$  существует субдифференциал  $\partial_X f(x^*)$  и  $0 \in \partial_X f(x^*)$ , то  $x^*$  — точка минимума  $f(x)$  на  $X$ .

Какие недостатки у приведённого критерия?

- $\mathbf{x}^T \mathbf{x} + \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|_2 \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}, \alpha > 0$
- $\mathbf{x}^T \mathbf{x} + \alpha \|\mathbf{c}^T \mathbf{x} - b\|_2 \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}, \alpha > 0$
- Ограничение на допустимое множество

$$\begin{aligned} (x+2)^2 + |y+3| &\rightarrow \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \\ \text{s.t. } 8 + 2x - y &\leq 0 \end{aligned}$$

# Задача безусловной минимизации

Задача:  $f(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$ .

## Критерий оптимальности для выпуклых функций

Пусть  $f(x)$  выпуклая функция на  $\mathbb{R}^n$ . Тогда точка  $x^*$  решение задачи безусловной минимизации  $\Leftrightarrow 0 \in \partial f(x^*)$ .

## Следствие

Если  $f(x)$  выпукла и дифференцируема на  $\mathbb{R}^n$ . Тогда точка  $x^*$  решение задачи безусловной минимизации  $\Leftrightarrow \nabla f(x^*) = 0$ .

## Достаточное условие для невыпуклых функций

Пусть  $f$  дважды дифференцируема на  $\mathbb{R}^n$  и  $x^*$  такая что  $\nabla f(x^*) = 0$ . Тогда если  $\nabla^2 f(x^*) \succ 0$ , то  $x^*$  точка строгого локального минимума  $f(x)$  на  $\mathbb{R}^n$ .



- $x_1 e^{x_1} - (1 + e^{x_1}) \cos x_2 \rightarrow \min$

- Функция Розенброка:

$$(1 - x_1)^2 + \alpha \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}^2)^2 \rightarrow \min, \alpha > 0$$

- $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 + e^{x_1 + x_2} \rightarrow \min$

## Задача

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } g_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

## Лагранжиан

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

## Критерий оптимальности

Пусть  $f(x)$  и  $g_i(x)$  дважды дифференцируемы в точке  $x^*$  и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности  $x^*$ . Пусть также  $\nabla_x L(x^*, \lambda) = 0$ . Тогда если  $\mathbf{h}^T \nabla^2 L(x^*, \lambda) \mathbf{h} > 0$ , где  $\mathbf{h} \in T(x^* | G)$  — касательный конус, то  $x^*$  — точка локального минимума.

# Возможные варианты

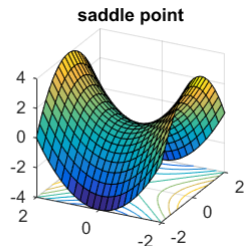
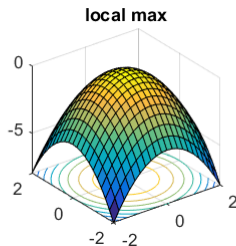
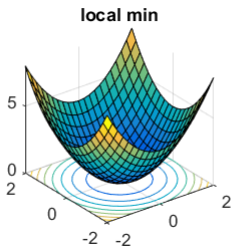


Рисунок взят из блога

<http://www.offconvex.org/2016/03/22/saddlepoints/>

- $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^4 \rightarrow \text{extr}_{\mathbf{x} \in G}, G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}^T \mathbf{x} = 1\},$   
 $\alpha_i > 0, c_i > 0$
- $x_1 + 4x_2 + 9x_3 \rightarrow \text{extr}_{\mathbf{x} \in G}, G = \left\{ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1 \right\}$

## Задача

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{s.t. } g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

## Лагранжиан

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x)$$

## Необходимое условие (Каруша-Куна-Такера)

Пусть  $x^*$  решение задачи математического программирования, и функции  $f, h_j, g_i$  дифференцируемы. Тогда найдутся такие  $\mu^*$  и  $\lambda^*$ , что выполнены следующие условия:

- $g_i(x^*) = 0$
- $h_j(x^*) \leq 0$
- $\mu_j^* \geq 0$
- $\mu_j^* h_j(x^*) = 0$
- $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$

Если задача выпуклая, то это же условие является достаточным.

# Условия оптимальности (cont'd)

Если задача невыпуклая, то

## Достаточное условие первого порядка

Если для стационарной точки  $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  число активных неравенств  $|J|$  такое что  $n = m + |J|$  и  $\mu_j > 0, j \in J$ , то эта точка является точкой минимума.

## Достаточное условие второго порядка

Если в задаче математического программирования число активных ограничений меньше размерности задачи, то точка  $x^*$  является решением задачи, если выполнены условия

$$z^T \nabla_{xx}^2 L(x^*) z > 0$$

для

- $z \neq 0$  и  $\nabla g_i^T(x^*)z = 0$
- при  $j \in J$  и  $\mu_j > 0, \nabla h_j^T(x^*)z = 0$
- при  $j \in J$  и  $\mu_j = 0, \nabla h_j^T(x^*)z \leq 0$

# Примеры

- Пример 1

$$\text{extr}(x_1 - 3)(x_2 - 2)$$

$$\text{s.t. } x_1 + 2x_2 = 4$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

- Пример 2

$$\text{extr} \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{x_i}$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$$

$$x_i > 0, b > 0, c_i > 0, a_i > 0$$

- Пример 3

$$\text{extr}(x_1 x_3 - 2x_2)$$

$$\text{s.t. } 2x_1 - x_2 - 3x_3 \leq 10$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

$$x_2 \geq 0$$



- Существование решения оптимизационной задачи
- Условия оптимальности для
  - общей задачи оптимизации
  - задачи безусловной оптимизации
  - задачи оптимизации с ограничениями типа равенств
  - задачи оптимизации с ограничениями типа равенств и неравенств