

# Методы оптимизации.

## Семинар 2. Выпуклые множества.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,  
Факультет Управления и Прикладной Математики

12 сентября 2017 г.

- Предмет и задача курса
- Общая постановка задачи математического программирования
- Примеры задач оптимизации:
  - линейное программирование
  - метод наименьших квадратов
  - выпуклая оптимизация
- Чем хороши выпуклые задачи?

# Аффинное множество

## Аффинное множество

Множество  $A$  называется аффинным, если для любых  $x_1, x_2 \in A$  и  $\theta \in \mathbb{R}$  точка  $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in A$ .

Примеры:  $\mathbb{R}^n$ , гиперплоскость, точка.

## Аффинная комбинация точек

Пусть  $x_1, \dots, x_k \in G$ , тогда точка  $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k$  при  $\sum_{i=1}^k \theta_i = 1$  называется аффинной комбинацией точек  $x_1, \dots, x_k$ .

## Аффинная оболочка точек

Множество  $\left\{ \sum_{i=1}^k \theta_i x_i \mid x_i \in G, \sum_{i=1}^k \theta_i = 1 \right\}$  называется аффинной оболочкой множества  $G$  и обозначается  $\text{aff}(G)$ .

## Утверждение 1

Множество является аффинным тогда и только тогда, когда в него входят все аффинные комбинации его точек.

## Утверждение 2

Множество является аффинным тогда и только тогда, когда его можно представить в виде  $\{x | Ax = b\}$ .

# Выпуклое множество

## Выпуклое множество

Множество  $C$  называется выпуклым, если

$$\forall x_1, x_2 \in C, \theta \in [0, 1] \rightarrow \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in C.$$

$\emptyset$  и  $\{x_0\}$  также считаются выпуклыми.

Примеры:  $\mathbb{R}^n$ , аффинное множество, луч, отрезок.

## Выпуклая комбинация точек

Пусть  $x_1, \dots, x_k \in G$ , тогда точка  $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k$  при

$\sum_{i=1}^k \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$  называется выпуклой комбинацией точек  $x_1, \dots, x_k$ .

## Выпуклая оболочка точек

Множество  $\left\{ \sum_{i=1}^k \theta_i x_i \mid x_i \in G, \sum_{i=1}^k \theta_i = 1, \theta_i \geq 0 \right\}$  называется выпуклой оболочкой множества  $G$  и обозначается  $\text{conv}(G)$ .

# Операции, сохраняющие выпуклость

- Пересечение любого (конечного или бесконечного) числа выпуклых множеств — выпуклое множество
- Образ аффинного отображения выпуклого множества — выпуклое множество
- Линейная комбинация выпуклых множеств — выпуклое множество
- Декартово произведение выпуклых множеств — выпуклое множество

# Примеры

Проверьте на аффинность и выпуклость следующие множества:

1. Полупространство:  $\{\mathbf{x} | \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq c\}$
2. Многоугольник:  $\{\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} \preceq \mathbf{b}, \mathbf{C}\mathbf{x} = 0\}$
3. Шар по норме в  $\mathbb{R}^n$ :  $B(r, x_c) = \{\mathbf{x} | \|\mathbf{x} - x_c\| \leq r\}$
4. Эллипсоид:  
 $\mathcal{E}(x_c, \mathbf{P}, r) = \{\mathbf{x} | (\mathbf{x} - x_c)^T \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - x_c) \leq r^2\}$
5. Множество симметричных  
положительно-определённых матриц:  
 $\mathbf{S}_+^n = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} | \mathbf{X}^T = \mathbf{X}, \mathbf{X} \succeq 0\}$
6.  $\{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} | \text{Tr}(\mathbf{X}) = \text{const}\}$
7. Гиперболическое множество:  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n | \prod_{i=1}^n x_i \geq 1\}$

## Конус (выпуклый)

Множество  $C$  называется конусом (выпуклым конусом), если

$$\forall x \in C, \theta \geq 0 \rightarrow \theta x \in C$$

$$(\forall x_1, x_2 \in C, \theta_1, \theta_2 \geq 0 \rightarrow \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C)$$

Примеры:  $\mathbb{R}^n$ , аффинное множество, проходящее через 0, луч.

## Коническая (неотрицательная) комбинация точек

Пусть  $x_1, \dots, x_k \in G$ , тогда точка  $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k$  при  $\theta_i \geq 0$  называется конической (неотрицательной) комбинацией точек  $x_1, \dots, x_k$ .

## Коническая оболочка точек

Множество  $\left\{ \sum_{i=1}^k \theta_i x_i \mid x_i \in G, \theta_i \geq 0 \right\}$  называется конической оболочкой множества  $G$  и обозначается  $\text{cone}(G)$ .



# Примеры конусов

1.  $S_+^n$
2. Нормальный конус:  $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| \leq t\}$   
Для  $\ell_2$ -нормы называется конусом второго порядка  
или Лоренцевым конусом
3. Конкретные примеры с числами

- Аффинное множество
- Выпуклое множество
- Конус
- Методы проверки свойств конкретных множеств