

# Методы оптимизации.

## Семинар 7. Субдифференциал.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,  
Факультет Управления и Прикладной Математики

17 октября 2017 г.

- Выпуклая функция
- Надграфик и множество подуровня функции
- Критерии выпуклости функции
- Неравенство Йенсена

## Зачем?

Важным свойством непрерывной выпуклой функции  $f$  является то, что в выбранной точке  $x$  для всех  $y \in \text{dom } f$  выполнено неравенство:

$$f(y) - f(x) \geq \langle a, y - x \rangle$$

для некоторого вектора  $a$ , то есть касательная к графику функции является **глобальной** оценкой снизу для функции.

- Если  $f$  дифференцируема, то  $a = \nabla f(y)$ .
- Что делать, если  $f$  недифференцируема?

## Субградиент

Вектор  $\mathbf{a}$  называется субградиентом функции  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  в точке  $\mathbf{x}$ , если

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \geq \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle$$

для всех  $\mathbf{y} \in X$ .

## Субдифференциал

Множество субградиентов функции  $f$  в точке  $\mathbf{x}$  называется субдифференциалом  $f$  в  $\mathbf{x}$  и обозначается  $\partial f(\mathbf{x})$ .

## Теорема Моро-Рокафеллара

Пусть  $f_i(\mathbf{x})$  — выпуклые функции на выпуклых множествах  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда, если  $\bigcap_{i=1}^n \text{relint}(G_i) \neq \emptyset$  то функция

$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(\mathbf{x})$ ,  $a_i > 0$  имеет субдифференциал  $\partial_G f(\mathbf{x})$

на множестве  $G = \bigcap_{i=1}^n G_i$  и  $\partial_G f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{G_i} f_i(\mathbf{x})$ .

## Если функция — максимум

Если  $f(\mathbf{x}) = \max_{i=1, \dots, m} (f_i(\mathbf{x}))$ , тогда

## Теорема Моро-Рокафеллара

Пусть  $f_i(\mathbf{x})$  — выпуклые функции на выпуклых множествах  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда, если  $\bigcap_{i=1}^n \text{relint}(G_i) \neq \emptyset$  то функция

$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(\mathbf{x})$ ,  $a_i > 0$  имеет субдифференциал  $\partial_G f(\mathbf{x})$

на множестве  $G = \bigcap_{i=1}^n G_i$  и  $\partial_G f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{G_i} f_i(\mathbf{x})$ .

## Если функция — максимум

Если  $f(\mathbf{x}) = \max_{i=1, \dots, m} (f_i(\mathbf{x}))$ , тогда

$\partial_G f(\mathbf{x}) = \text{Conv} \left( \bigcup_{i \in \mathcal{J}(\mathbf{x})} \partial_G f_i(\mathbf{x}) \right)$ , где

$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \{i = 1, \dots, m \mid f_i(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\}$

Найдите субдифференциал для следующих функций.

- Модуль:  $f(x) = |x|$
- Норма  $\ell_2$ :  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2$
- Скалярный максимум:  $f(x) = \max(e^x, 1 - x)$
- Векторный максимум:  $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{c}^T \mathbf{x}|$
- $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{c}_1^T \mathbf{x}| + |\mathbf{c}_2^T \mathbf{x}|$

# Условный субдифференциал

## Определение

Множество  $\{\mathbf{a} | f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geq \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle, \forall \mathbf{x} \in X\}$  называется субдифференциалом  $f$  в  $\mathbf{x}_0$  на множестве  $X$  и обозначается  $\partial_X f(\mathbf{x}_0)$ .

## Как перейти от безусловного субдифференциала к условному?

Если  $f$  — выпуклая функция, то рассмотрим функцию  $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \delta(\mathbf{x}|X)$ , которая тоже выпуклая. Тогда

$$\partial g(\mathbf{x}_0) = \partial_X f(\mathbf{x}_0) = \partial f(\mathbf{x}_0) + \partial \delta(\mathbf{x}_0|X).$$

Найдём  $\partial \delta(\mathbf{x}_0|X)$ :

$$\delta(\mathbf{x}|X) - \delta(\mathbf{x}_0|X) \stackrel{\mathbf{x} \in X}{=} 0 \geq \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle$$

## Нормальный конус

Множество  $N(\mathbf{x}_0|X) = \{\mathbf{a} | \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \leq 0, \forall \mathbf{x} \in X\}$  называется нормальным конусом к множеству  $X$  в точке  $\mathbf{x}_0$ .

Тогда  $\partial_X f(\mathbf{x}_0) = \partial f(\mathbf{x}_0) + N(\mathbf{x}_0|X)$



- $f(x) = |x|$ ,  $X = \{-1 \leq x \leq 1\}$
- $f(\mathbf{x}) = |x_1 - x_2|$ ,  $X = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 2\}$

- Субградиент
- Субдифференциал
- Условный субдифференциал
- Методы вычислений