

Методы оптимизации. Семинар 5. Векторное дифференцирование

Александр Катруца

Московский физико-технический институт
Факультет Управления и Прикладной Математики

3 октября 2017 г.

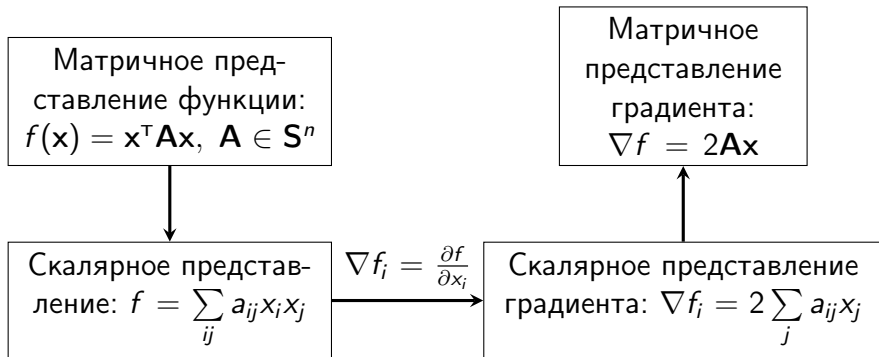
- Сопряжённые множества
- Свойства сопряжённых множеств
- Лемма Фаркаша

Основные определения

Более подробно смотрите [здесь](#). Пусть $f : D \rightarrow E$,
производная $\frac{\partial f}{\partial x} \in G$:

| D | E | G | Название |
|---------------------------|----------------|---------------------------|--|
| \mathbb{R} | \mathbb{R} | \mathbb{R} | Производная, $f'(x)$ |
| \mathbb{R}^n | \mathbb{R} | \mathbb{R}^n | Градиент, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ |
| \mathbb{R}^n | \mathbb{R}^m | $\mathbb{R}^{n \times m}$ | Якобиан, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ |
| $\mathbb{R}^{m \times n}$ | \mathbb{R} | $\mathbb{R}^{m \times n}$ | $\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}$ |

Также квадратная $n \times n$ матрица вторых производных
 $\mathbf{H} = [h_{ij}]$ в случае $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется гессиан и равна
$$h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$



Примеры

1. Линейная функция: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$
2. Квадратичная форма: $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x}$
3. Квадрат ℓ_2 нормы разности: $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$
4. Детерминант: $f(\mathbf{X}) = \det \mathbf{X}$
5. След: $f(\mathbf{X}) = \text{Tr}(\mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{B})$
6. $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{s})^T \mathbf{W} (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{s})$
7. $f(\mathbf{A}) = (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{s})^T \mathbf{W} (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{s})$
8. $f(\mathbf{s}) = (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{s})^T \mathbf{W} (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{s})$

Сложная функция

Пусть $f(\mathbf{x}) = g(u(\mathbf{x}))$, тогда $\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}}$

Важно смотреть на размерности и понимать как записывать $\frac{\partial g}{\partial u}$.

Примеры:

1. ℓ_2 норма вектора: $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2$
2. Экспонента: $f(\mathbf{x}) = -e^{-\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$

- Производная по скаляру
- Производная по вектору
- Производная по матрице
- Производная сложной функции