Методы оптимизации. Семинар 9. Сопряжённые функции

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

7 ноября 2017 г.

Напоминание

- Конус возможных направлений
- Касательный конус
- Острый экстремум

Определение

Снова сопряжённое?

- Ранее были рассмотрены сопряжённые (двойственные) множества и, в частности, конусы
- Сейчас будут рассмотрены сопряжённые (двойственные) функции
- Далее будет введена двойственная оптимизационная задача

Определение

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Функция $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется сопряжённой функцией к функции f и определена как

$$f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in dom\ f} (\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{x} - f(\mathbf{x})).$$

Область определения f^* — это множество таких $\mathbf{y}$, что супремум конечен.

Свойства и интерпретации

- Сопряжённая функция f^* всегда выпукла как супремум линейных функций независимо от выпуклости f
- Неравенство Юнга-Фенхеля: $\mathbf{y}^\intercal \mathbf{x} \leq f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$
- Если f — дифференцируема, то $f^*(\mathbf{y}) = \nabla f^\intercal(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^* - f(\mathbf{x}^*)$, где $\mathbf{x}^*$ даёт супремум.
- Геометрический смысл

Примеры

1. Линейная функция: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b$
2. Отрицательная энтропия: $f(x) = x \log x$
3. Индикаторная функция множества S: $I_S(x) = 0$ iff $x \in S$
4. Норма: $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$.
5. Квадрат нормы: $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2$

Резюме

- Сопряжённые функции
- Неравенство Юнга-Фенхеля и другие свойства
- Примеры