

# Методы оптимизации.

## Семинар 8. Разные конусы.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,  
Факультет Управления и Прикладной Математики

24 октября 2016 г.

- Субдифференциал
- Условный субдифференциал
- Нормальный конус

# Конус возможных направлений

## Определение

Конусом возможных направлений для множества  $G \subset \mathbb{R}^n$  в точке  $\mathbf{x}_0 \in G$  будем называть такое множество  $\Gamma(\mathbf{x}_0|G) = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{s} \in G, 0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}(\mathbf{s})\}$ , где  $\bar{\alpha}(\mathbf{s}) > 0$ .

## Определение для выпуклого множества

Конусом возможных направлений для *выпуклого* множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  в точке  $\mathbf{x}_0 \in X$  будем называть такое множество  $\Gamma(\mathbf{x}_0|X) = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{s} = \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \lambda > 0, \forall \mathbf{x} \in X\}$ .

Какая связь между нормальным конусом и конусом возможных направлений?

## Полезный факт

Пусть  $G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \varphi_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = \overline{0, n-1}; \varphi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i = 0, i = \overline{n, m}\}$ . Тогда если  $\varphi_i(\mathbf{x})$  выпуклы и множество  $G$  регулярно, то

$\Gamma(\mathbf{x}_0 | G) = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n | \nabla \varphi_i(\mathbf{x}_0)^T \mathbf{s} \leq 0, i \in I, \mathbf{a}_i^T \mathbf{s} = 0, i = \overline{n, m}\}$   
и

$$\Gamma^*(\mathbf{x}_0 | G) = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \left| \mathbf{p} = \sum_{i=n}^m \lambda_i \mathbf{a}_i - \sum_{i \in I} \mu_i \nabla \varphi_i(\mathbf{x}_0) \right. \right\},$$

где  $\lambda_i \in \mathbb{R}, \mu_i \geq 0, \mathbf{x}_0 \in G$  и  
 $I = \{i : \varphi_i(\mathbf{x}_0) = 0, i = \overline{0, n-1}\}$ .

Найти  $\Gamma(\mathbf{x}_0 | X)$  и  $\Gamma^*(\mathbf{x}_0 | X)$  следующих множества:

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + 2x_2^2 \leq 3, x_1 + x_2 = 0\}.$$

# Касательный конус

## Определение

Касательным конусом к множеству  $G$  в точке  $x_0 \in \overline{G}$  называется следующее множество  $T(x_0|G) = \{\lambda z | \lambda > 0, \exists \{x_k\} \subset G, x_k \rightarrow x_0, x_k \neq x_0, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - x_0}{\|x_k - x_0\|_2} = z\}$

## Пояснение

Касательный конус состоит из всех направлений, по которым можно сходиться к точке  $x_0$  по последовательностям из множества  $G$ .

## Лемма

Если  $G$  — выпуклое множество, то  $T(x_0|G) = \Gamma(x_0|G)$ .

Пусть множество

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \varphi_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = \overline{0, n-1} \quad \varphi_i(\mathbf{x}) = 0, i = \overline{n, m}\}$$

регулярно, тогда

$$T(\mathbf{x}_0|G) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n | \nabla \varphi_i^T(\mathbf{x}_0)\mathbf{z} \leq 0, i \in I, \quad \nabla \varphi_i^T(\mathbf{x}_0)\mathbf{z} = 0, i = \overline{n, m}\}$$

и

$$T^*(\mathbf{x}_0|G) = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \left| \mathbf{p} = \sum_{i=n}^m \lambda_i \nabla \varphi_i(\mathbf{x}_0) - \sum_{i \in I} \mu_i \nabla \varphi_i(\mathbf{x}_0) \right. \right\},$$

где  $\mu_i \geq 0$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $I = \{i | \varphi_i(\mathbf{x}_0) = 0, i = \overline{0, n-1}\}$

Пример: найти  $T(\mathbf{x}_0|G)$  и  $T^*(\mathbf{x}_0|G)$  для множества

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1^2 + 2x_2^2 = 1\}$$

# Острый экстремум

## Определение

Точка  $\mathbf{x}^*$  — точка острого минимума функции  $f$  на множестве  $G$ , если существует  $\gamma > 0$ :

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \gamma \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2, \quad \forall \mathbf{x} \in G.$$

## Лемма

Пусть  $f$  — дифференцируемая функция на  $G \subset \mathbb{R}^n$ . Точка  $\mathbf{x}^*$  — точка острого минимума функции  $f$  на множестве  $G$  тогда и только тогда, когда существует такое  $\alpha > 0$ , что  $\nabla f^T(\mathbf{x}^*)\mathbf{z} \geq \alpha > 0$ ,  $\mathbf{z} \in T(\mathbf{x}^*|G)$ ,  $\|\mathbf{z}\|_2 = 1$ .

## Примеры

- $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \text{extr}_G, \quad G = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 = 2, x_1 + x_2 \leq 1\}$
- $x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{extr}_G$

- Конус возможных направлений
- Касательный конус
- Острый экстремум