

Методы оптимизации.

Семинар 9. Сопряжённые функции

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

7 ноября 2017 г.

- Конус возможных направлений
- Касательный конус
- Острый экстремум

Определение

Снова сопряжённое?

- Ранее были рассмотрены сопряжённые (двойственные) множества и, в частности, конусы
- Сейчас будут рассмотрены сопряжённые (двойственные) функции
- Далее будет введена двойственная оптимизационная задача

Определение

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Функция $f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется сопряжённой функцией к функции f и определена как

$$f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \text{dom } f} (\mathbf{y}^T \mathbf{x} - f(\mathbf{x})).$$

Область определения f^* — это множество таких \mathbf{y} , что супремум конечен.

- Сопряжённая функция f^* всегда выпукла как супремум линейных функций независимо от выпуклости f
- Неравенство Юнга-Фенхеля: $\mathbf{y}^T \mathbf{x} \leq f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$
- Если f — дифференцируема, то $f^*(\mathbf{y}) = \nabla f^T(\mathbf{x}^*) \mathbf{x}^* - f(\mathbf{x}^*)$, где \mathbf{x}^* даёт супремум.
- Геометрический смысл

Примеры

- Линейная функция: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + b$
- Отрицательная энтропия: $f(x) = x \log x$
- Индикаторная функция множества S : $I_S(x) = 0$ iff $x \in S$
- Норма: $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$.
- Квадрат нормы: $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2$

- Сопряжённые функции
- Неравенство Юнга-Фенхеля и другие свойства
- Примеры