[redacted]

-62-

L.H.

INGENIERO CIVIL

Enrique D. Fliess

Profesor titular de Estabilidad y Hormigón Armado I de la Escuela Superior Técnica del Ejército.
Ex profesor titular de Estabilidad de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.
Ex director del Departamento de Estabilidad de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.
Jefe del Departamento de Investigaciones del Instituto del Cemento Portland Argentino.

Estabilidad

segundo curso

EDITORIAL KAPELUSZ
MORENO 372 · BUENOS AIRES

COLECCIÓN UNIVERSITARIA
Serie: Ciencias Naturales

Están prohibidas y penadas por la ley la reproducción y la difusión totales o parciales de esta obra, en cualquier forma, por medios mecánicos o electrónicos, inclusive por fotocopia, grabación magnetofónica y cualquier otro sistema de almacenamiento de información, sin el previo consentimiento escrito del editor.

Todos los derechos reservados por (©, 1971) EDITORIAL KAPELUSZ S.A. Buenos Aires. Hecho el depósito que establece la ley 11.723.

Segunda edición, marzo de 1974.

LIBRO DE EDICION ARGENTINA. Printed in Argentina.

ISBN 950-13-3101-6

Índice general

Prólogo XI
Prefacio XIII

1. Introducción a la resistencia de materiales

1.1. Conceptos generales 1
1.2. Concepto de tensión 2
1.3. Régimen de tensiones en un punto 3
1.4. Tensiones normales y tangenciales 4
1.5. Convenciones de signos, símbolos y denominaciones 5
1.6. Relación entre las tensiones correspondientes a dos caras . . . 7
1.7. Equilibrio del cubo elemental sujeto a tensiones 9

2. El estado elástico triple o espacial

2.1. Tensiones en un plano cualquiera 15
2.2. Tensiones y planos principales 17
2.3. Cuádrica indicatriz de tensiones 21
2.4. Determinación de las tensiones y direcciones principales . . . 22
2.5. Expresiones del estado de tensión en un punto en función de las tensiones principales 24
2.6. Tensiones tangenciales máximas 25
2.7. Invariantes de tensión 28
2.8. Tensiones octaédricas 29
2.9. Representación gráfica del estado triaxial de tensión 31
2.9.1. Elipsoide de Lamé 31
2.9.2. Cuádrica directriz de tensiones 37
2.9.3. Cuádrica de tensiones de Cauchy 38
2.9.4. La circunferencia de Mohr para el estado elástico espacial . 41
2.9.5. Estado de tensión correspondiente al haz de planos cuyo eje es una dirección principal. Estudio gráfico 52
2.10. El tensor de tensiones 54

3. El estado elástico doble o plano

3.1. Tensiones en un plano cualquiera 59
3.2. Tensiones y planos principales 61
3.3. Máximas tensiones tangenciales 63
3.4. Expresión de las tensiones en función de las tensiones principales 65
3.5. Invariantes de tensión para el estado elástico plano 66
3.6. Casos particulares del estado elástico plano 67
3.7. Representación gráfica del estado elástico plano 68
3.7.1. Elipse de Lamé o elipse de tensiones 68
3.7.2. Cónicas auxiliares 69
3.7.3. Representación polar de tensiones 78
3.7.4. Circunferencia de Mohr 81

4. El estado simple de tensión

4.1. Tensiones normal y tangencial para un plano cualquiera . . . 97
4.2. Representación gráfica del estado elástico simple. Circunferencia de Mohr 99

5. Estado de deformación del sólido continuo

5.1. Conceptos generales 103
5.2. Deformaciones en el entorno de un punto 103
5.3. Deformaciones lineales específicas y distorsiones 106
5.4. El tensor deformación 114
5.5. Las ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones . . . 118
5.6. El estado de deformación en el entorno de un punto 119
5.7. Deformaciones específicas y distorsiones máximas y mínimas . 123
5.8. Circunferencia de deformaciones 124

6. Relaciones entre tensiones y deformaciones

6.1. Conceptos generales 127
6.2. La ley de Hooke y las constantes elásticas 128
6.3. Deformación volumétrica 129
6.4. Generalización de la ley de Hooke 131
6.5. Relación entre E, G y μ 132
6.6. Módulo de elasticidad volumétrico 135

7. Propiedades mecánicas de los materiales

7.1. Consideraciones generales 139
7.2. El diagrama tensión – deformación 140

7.3. Diagramas ideales 144
7.4. La ley exponencial de Bach 146
7.5. Los valores de las constantes elásticas 146
7.6. El diagrama tensión – deformación para el acero 148
7.7. El límite aparente de fluencia 153
7.8. Características mecánicas de los materiales 155
7.9. El coeficiente de seguridad 158
7.10. Factores que afectan el coeficiente de seguridad 159

8. El dimensionamiento de elementos estructurales

8.1. Conceptos generales 163
8.2. El equilibrio interno en un sólido de alma llena 165

9. Solicitación axil (Tracción y compresión simples)

9.1. Planteo del problema 169
9.2. Resolución del problema 170
9.3. Las deformaciones en la solicitación axil 175
9.4. Régimen de tensiones para un punto de un sólido sujeto a solicitación axil 175
9.5. Influencia del peso propio en la solicitación axil 176
9.6. Sólido de igual resistencia a solicitación axil 178
9.7. Deformación de un sólido de sección constante teniendo en cuenta el efecto del peso propio 181
9.8. El problema de las tres barras 182
9.9. Tensiones por variación de temperatura en una barra doblemente empotrada 186
9.10. Tensiones en tubos de pared delgada 187
9.10.1. Planteo del problema 187
9.10.2. Determinación de las tensiones circunferenciales 189
9.10.3. Deformaciones radial y circunferencial en un conducto de pared delgada 190
9.10.4. Tensiones en conductos cerrados 191
9.11. Tubos de pared gruesa 193
9.11.1. Conceptos generales 193
9.11.2. Cálculo de las tensiones en tubos de pared gruesa 194
9.11.3. Valores máximos y mínimos de las tensiones y casos particulares 197
9.11.4. Límites de aplicabilidad de las fórmulas para tubos de pared delgada 200
9.11.5. Deformaciones en tubos de pared gruesa 201
9.11.6. Tensiones inducidas por encamisado 204
9.11.7. Caso en que el radio exterior es muy grande con relación al interior 210
9.11.8. Tubos de pared gruesa en régimen plástico. Autozunchaje . 212

10. Solicitación por torsión

10.1. Planteo del problema 219
10.2. La hipótesis de Coulomb 220
10.3. Torsión de la sección circular llena 221
10.4. Relación entre M_t y las tensiones tangenciales 223
10.5. Angulo de torsión 226
10.6. Tensiones principales 227
10.7. La sección anular 228
10.8. Comparación entre la sección anular y la circular llena 229
10.9. Sección tubular de pared delgada simplemente conexa 232
10.10. Sección tubular de pared delgada, múltiplemente conexa . . . 238
10.11. La sección rectangular sujeta a torsión 241
10.12. Secciones elíptica y triangular 245
10.13. Torsión en secciones abiertas de pared delgada. (Perfiles laminados) 246
10.14. La analogía de la membrana 250
10.15. Analogía hidrodinámica 256
10.16. Tensiones secundarias en la torsión 257
10.17. Torsión en el período plástico 264

11. Solicitación por flexión simple

11.1. Conceptos generales 271
11.2. Flexión pura normal 272
11.2.1. Dimensionado de secciones 277
11.2.2. Verificación de secciones 282
11.2.3. Deformaciones en la flexión pura normal 286
11.2.4. Cambio de forma de la sección 299
11.3. Flexión pura oblicua 300
11.3.1. Determinación del eje neutro 302
11.3.2. Flexión oblicua en función de dos flexiones normales . . . 304
11.3.3. Verificación y proyecto de secciones solicitadas a flexión oblicua 307
11.4. Energía de deformación en la flexión 308
11.5. Flexión y corte 311
11.5.1. Consideraciones generales 311
11.5.2. La teoría de Jouravski generalizada 313
11.5.3. Tensiones tangenciales en la sección rectangular 315
11.5.4. Tensiones tangenciales en secciones simétricas de contorno curvilíneo 318
11.5.5. Tensiones tangenciales en la sección circular llena 322
11.5.6. Tensiones tangenciales en la sección triangular 323
11.5.7. Alabeo de secciones solicitadas por flexión y corte 325
11.5.8. Tensiones tangenciales en la sección doble T 325
11.5.9. Centro de corte 330

11.6. Las tensiones principales en flexión y corte 336
11.7. Curvas isostáticas 339
11.7.1. Ecuación diferencial de las curvas isostáticas 340
11.7.2. Determinación gráfica de las isostáticas 341
11.8. Curvas isóclinas 344
11.9. Flexión en el período plástico 345
11.9.1. Materiales con límite de fluencia definido 345
11.9.2. Determinación del momento de rotura 348
11.9.3. Expresión del momento de plastificación parcial 348
11.9.4. Coeficientes de forma 350
11.9.5. Momentos de rotura y plastificación parcial y coeficiente de forma para distintas secciones 350
11.9.6. Tensiones residuales 357
11.9.7. Zona de plastificación en vigas solicitadas a flexión 359
11.9.8. Materiales sin límite de fluencia definido 363
11.9.9. Secciones con un solo eje de simetría 368

12. Solicitación por flexión compuesta

12.1. Conceptos generales 373
12.2. Flexión compuesta en régimen elástico 373
12.2.1. Planteo y solución del problema para el caso general de flexión compuesta oblicua 373
12.2.2. Determinación gráfica del diagrama de tensiones normales . 378
12.2.3. Flexión compuesta oblicua considerada como suma de dos flexiones normales 379
12.2.4. Reciprocidad entre centro de presión y eje neutro 381
12.2.5. Núcleo central 386
12.2.6. Determinación del núcleo central 388
12.2.7. Núcleo central de las secciones más comunes 389
12.2.8. Flexión compuesta normal en régimen elástico 396
12.2.9. Línea de influencia y superficie de influencia de las tensiones normales 400
12.3. Flexión compuesta en secciones de materiales que no admiten tensiones de tracción 402
12.3.1. Consideraciones generales 402
12.3.2. Flexión compuesta normal, en secciones sin zona de tracción 402
12.3.3. La sección circular hueca sin zona de tracción 408
12.3.4. Flexión compuesta oblicua en secciones sin zona de tracción 411
12.4. Flexión compuesta en régimen plástico o anelástico 415
12.4.1. Consideraciones generales 415
12.4.2. Análisis de la sección rectangular 416
12.4.3. Curva de interacción para plastificación total de la sección rectangular 417
12.4.4. Curvas de interacción para plastificación parcial de la sección rectangular 419
12.4.5. Diagramas de interacción 424

12.4.6. Caso general de una sección cualquiera 429
12.4.7. Curva de interacción para plastificación total de una sección cualquiera 432
12.4.8. Curvas de interacción para plastificación parcial de una sección cualquiera 434
12.4.9. Curvas de interacción para una sección trapecial 435

13. Flexión combinada con torsión

13.1. Conceptos generales 441
13.2. Flexión y torsión en la sección circular llena 442
13.3. Flexión y torsión en la sección circular hueca 445
13.4. Caso de la sección circular llena cuando existe esfuerzo normal 445
13.5. Resortes helicoidales de sección circular 447
13.5.1. Resortes de espiras cerradas 448
13.5.2. Resortes de espiras abiertas 453

14. Flexión en piezas de gran curvatura

14.1. Conceptos generales 455
14.2. Planteo del problema 455
14.3. Método de la sección transformada 458
14.4. Solución de Winkler-Bach 464
14.5. Determinación analítica del coeficiente α 470
14.5.1. Coeficientes para la sección rectangular 471
14.5.2. Coeficiente α para la sección circular llena 472
14.5.3. Coeficiente α para la sección triangular 474
14.5.4. Coeficiente α para la sección elíptica 475
14.6. Determinación gráfica del coeficiente 476
14.7. Piezas solicitadas axilmente 479
14.8. Flexión compuesta en piezas de gran curvatura 482
14.9. Tensiones radiales en vigas de gran curvatura 484
14.10. Tensiones en vigas de secciones T, doble T y tubulares 489

15. Teorías de rotura de los cuerpos

15.1. Consideraciones generales 491
15.2. Concepto de rotura 493
15.3. Las principales teorías de rotura 495
15.4. La energía interna de deformación 496
15.4.1. Estado simple de tensión 497
15.4.2. Corte puro 498

15.4.3. Combinación de σ_1 y τ 499
15.4.4. Caso de dos tensiones principales 499
15.4.5. Caso de tres tensiones principales 500
15.4.6. Componentes de la energía total de deformación 501
15.5. Teoría de la máxima tensión principal 507
15.6. Teoría de la máxima tensión de corte 510
15.7. Teoría de la máxima deformación específica principal 512
15.8. Teoría de la energía total de deformación 514
15.9. Teoría de la máxima energía de distorsión 517
15.10. Teoría de la máxima tensión tangencial octaédrica 519
15.11. Teoría de la máxima tensión normal 520
15.12. Teoría de Mohr 522
15.13. Comparación de las distintas teorías de rotura 528

16. Solicitación por fatiga

16.1. Concepto del problema 533
16.2. Tipos de tensión en la solicitación por fatiga. Definiciones . . 535
16.3. Resistencia a la fatiga. Curva de Wöhler 538
16.4. Diagramas de fatiga. Interpretación de los resultados experimentales 540
16.5. Diagrama de Weyrauch 545
16.6. Diagrama de Smith 546
16.7. Dimensionado de piezas sujetas a solicitaciones cíclicas . . . 551
16.7.1. Fatiga por solicitación axil 552
16.7.2. Fatiga por flexión 554

17. Solicitaciones dinámicas

17.1. Planteo del problema 559
17.2. Solicitación dinámica axil 562
17.3. Solicitación dinámica por flexión 566
17.4. Solicitación dinámica por torsión 570
17.5. Análisis comparativo entre solicitaciones estática y dinámica . 573
17.6. Influencia de la inercia de la pieza que soporta el impacto . . 577
17.7. Coeficiente de impacto 581

18. Concentración de tensiones

18.1. Concepto del problema 583
18.2. Concentración de tensiones originadas por un agujero circular, para solicitación axil 584
18.3. Concentración de tensiones originadas por un agujero elíptico, en solicitación axil 592
18.4. Efectos de entalladura y de cambio de sección 595

18.5. Diagramas de Neuber 609
18.6. Factor efectivo de concentración de tensiones. Sensibilidad de entalladura 613
18.7. Factores que influyen sobre k_e y α 615
18.8. Concentración de tensiones en la torsión de barras de pared delgada 618

Prólogo

El Segundo Curso de "ESTABILIDAD" que publica el Profesor Ingeniero Enrique Fliess continúa el estudio de la Estática de los Cuerpos Rígidos y de la Teoría de Estructuras de los sistemas isostáticos aparecido anteriormente, de acuerdo con la misma filosofía respecto a lo que debe ser un texto destinado a la enseñanza técnica superior, obteniendo así un conjunto coherente que va llevando al estudiante a través de la Ciencia de las Construcciones.

Como siempre que se desea escribir un texto o planear el desarrollo de un curso, que a los efectos es lo mismo, se presentan al docente varias alternativas sobre la secuencia de sus temas y sobre formas o métodos para desarrollarlos, para cuya elección deben tenerse en cuenta, especialmente, el contenido de la materia y el objetivo o destino de la misma, pero, además, las características generales del resto de la enseñanza y la estimación del nivel en que debe ser útil.

Desde este último punto de vista, que sería el primero a resolver al emprender tan ardua tarea, podríamos decir como dice el Ingeniero U. Meoli en el prólogo del Primer Curso, –"...que se trata de la opción entre hacer prevalecer el interés de los más o el de los mejores..."–, siempre en menor número. A mi manera de ver la opción hecha por el Ingeniero Fliess es buena, es la mejor para un libro de texto, pues realiza un desarrollo detallado y metódico de todos los puntos básicos, enfatizando el aspecto físico de manera que el estudiante medio capte bien claramente los conceptos fundamentales.

Al entrar al estudio de los fenómenos producidos por las fuerzas aplicadas a los cuerpos deformables, el autor ha debido elegir entre dos procesos o secuencias en una alternativa que se nos presenta continuamente: El orden a establecer entre el estudio de la Resistencia de Materiales clásica y el de la Teoría Matemática de la Elasticidad, entre lo particular y lo general. Pueden darse argumentos en uno y otro sentido y todos valederos, lo cual ha hecho que a veces la solución oscile de uno a otro extremo como está pasando en nuestro medio.

En este aspecto, se ha optado por una solución intermedia: El contenido responde a un programa que excede del de un curso de Resistencia de Materiales propiamente dicho y se sitúa en un intermedio entre el de éste y el de la Teoría Matemática de la Elasticidad en el sentido en que los ha separado Timoshenko, al comenzar con el estudio detallado del estado tensional y de deformación en estado doble y triple. En esa forma consigue entrar con mucha claridad en problemas avanzados como los cubiertos en extensos capítulos referentes a piezas de gran curvatura, solicitaciones variables y dinámicas, teorías de rotura y referencias a algunos casos típicos de concentración de tensiones. Asimismo, ha tenido la inmejorable idea de incluir una introducción al problema de la seguridad de las estructuras en su capítulo siete.

En esa elección ha influido como es natural el contenido y la secuencia de programas de los diversos cursos de Estabilidad y de Estructuras que integran el Plan de Estudios al cual se destina, en cuya definición entran una serie de factores que no dependen exclusivamente, ni a veces primordialmente, del docente directo del curso.

Las dudas que se podrían presentar sobre el punto anterior no se presentan sobre la elección del método matemático utilizado para desarrollar los conceptos básicos. Estoy firmemente convencido de que cuando se trata de hacer entrar al alumno en el campo de los fundamentos de la Resistencia de Materiales *es mucho más conveniente trabajar con las componentes de las tensiones y deformaciones que con su representación tensorial para obtener resultados efectivos, sin que la parte formal oscurezca la conceptual, y cuando es decisivo hacer comprender* claramente el sentido físico de cada una de esas componentes *y cuando inevitablemente deberemos volver a esas formas para realizar la aplicación de las fórmulas o de los criterios desarrollados.*

Ello no obsta para que, paralela o previamente, puedan existir cursos de Mecánica del Continuo encarada en su forma más general y con la herramienta matemática más compacta como es la del cálculo tensorial, a la manera de Sokolnikoff, Landau, etc., lo cual es posiblemente una buena solución para la formación científica del estudiante y para poder encarar satisfactoriamente cursos más avanzados.

ING. JULIO RICALDONI

Prefacio

Cuando en mayo de 1963 apareció "Estabilidad I", decía en su "Prefacio" que faltaba completar la obra con los capítulos de "Resistencia de Materiales", que en aquel entonces integraban los programas del primer curso de Estabilidad correspondientes a las carreras que no fueran la de Ingeniería Civil que se dictaban en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires. Transcurridos ocho años, la agrupación de temas y la contextura de los cursos que se dictan en el "Departamento de Estabilidad" han sufrido modificaciones. En consecuencia, "Estabilidad II" completa los temas que se dictan en el curso de "Estabilidad I", único para las carreras de Ingeniería Civil, Electromecánica, Naval e Industrial y se adecua también al programa de "Elementos de Estabilidad".

Aparte de ello responde perfectamente al programa de "Estabilidad General" que se dicta en la Escuela Superior Técnica del Ejército y tengo la esperanza que determinados capítulos puedan ser de utilidad para el curso de "Estabilidad II" de nuestra Facultad.

Repito una vez más lo que dijera al comenzar el "Prefacio de Estabilidad I": es una obra que no pretende ser original, ni menos aún una obra científica. El lector interesado puede encontrar los temas que trata, mucho mejor desarrollados en cualquier libro de la especialidad. Sólo es una recopilación ordenada de mis clases dictadas en la Facultad de Ingeniería y en la Escuela Superior Técnica y su único objeto es que resulte de utilidad a mis alumnos, a quienes la dedico. De ser así, se habrá logrado el objetivo que me guió al escribirla.

Para terminar, dejo constancia de mi reconocimiento al Ing. José I. Rodríguez Escalante, Jefe de Trabajos Prácticos de la Cátedra a mi cargo, por la lectura de parte de los originales y las observaciones efectuadas a los mismos. Además, agradezco muy especialmente a mi colaborador en el Departamento de Estabilidad, Ingeniero Ricardo Colobraro, por el empeño y minuciosidad con que verificara y corrigiera los errores tipográficos de la primera edición.

ENRIQUE D. FLIESS
Ingeniero Civil

1. INTRODUCCIÓN A LA RESISTENCIA DE MATERIALES

1.1. Conceptos generales

En el curso de Estabilidad I se ha estudiado el equilibrio de los sólidos, supuestos estos rígidos e indeformables. Tales sólidos no existen, como sabemos, en la naturaleza. Todos, en mayor o menor grado, experimentan deformaciones bajo el efecto de las cargas exteriores, originándose en el interior del sólido, fuerzas moleculares. De la distinta naturaleza de éstas, de su equilibrio y de la forma de establecer su valor, nos ocuparemos en el curso de Estabilidad II que desarrollamos a continuación.

Imaginemos un sólido continuo, homogéneo e isótropo que ocupa un volumen V y se halla delimitado por una superficie F. Para un instante de tiempo t, el sólido se halla solicitado por *fuerzas exteriores*, que pueden ser de dos naturalezas distintas, a saber:

1°) Fuerzas de masa o de volumen

Si dv es un elemento de volumen y dm su masa, la densidad media de dicho volumen será:

$$\gamma = \frac{dm}{dv} \qquad [1.1]$$

En dicho volumen actúa una fuerza que, en general, es del mismo orden de magnitud que éste, es decir, un infinitésimo, cuya intensidad será:

$$P\,dm = P\gamma\,dv, \qquad [1.2]$$

donde P resulta ser una fuerza unitaria, es decir, una fuerza por unidad de masa. A estas fuerzas se las denomina *fuerzas de volumen* o *fuerzas de masa*, por actuar distribuidas en la totalidad del volumen del sólido. Ejemplo de tales fuerzas son las gravitacionales, las fuerzas de inercia y las electromagnéticas.

2°) Fuerzas de superficie

Como su nombre lo indica, estas fuerzas actúan sobre la superficie de los cuerpos, exteriormente. Si ds es un elemento de superficie podemos admitir que sobre dicho elemento actúa una fuerza elemental $p \cdot ds$, donde p es una fuerza por unidad de superficie, que se la denomina *presión* o *esfuerzo de contacto* o *presión* simplemente. Tales fuerzas derivan de las acciones mutuas que se desarrollan por contacto entre dos cuerpos o por acciones exteriores sobre la superficie de los mismos. Las fuerzas de superficie pueden también ser puntuales, en cuyo caso se las denomina concentradas.

1 . 2 . Concepto de tensión

Sea el sólido de figura 1.1, que supondremos homogéneo e isótropo, que suponemos se encuentra sujeto a la acción de un sistema de fuerzas exteriores (de superficie) P_i en equilibrio. Consideremos en el interior del sólido un punto

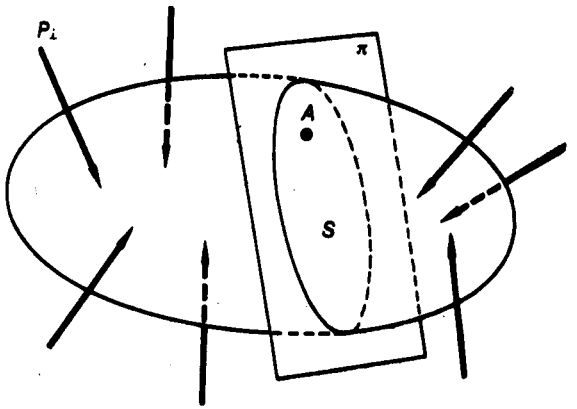


Fig. 1.1

material A y un plano cualquiera que contenga a A. Dicho plano define en el sólido una sección S. Si imaginamos separada la parte derecha del sólido conjuntamente con las fuerzas que actúan sobre la misma, se rompe el equilibrio de la parte izquierda. Para restituirlo es necesario aplicar al baricentro de la sección la resultante y el par de reducción con respecto al mismo, de las fuerzas suprimidas, figura 1.2, las que representan el conjunto de acciones mutuas que transmite la parte derecha, suprimida, a la parte izquierda considerada. Ahora bien, estas acciones no se ejercen de una a otra parte del sólido como acciones concentradas, sino que lo son *punto a punto* de la parte derecha a la izquierda y recíprocamente.

Consideremos nuevamente el punto A y en él un entorno de superficie ΔF, figura 1.3. Sobre dicho elemento de superficie se transmite de un lado a otro de la sección una fuerza elemental ΔP. Establecido el cociente $\Delta P/\Delta F$ hagamos tender ΔF a cero. Al límite de dicho cociente, cuando ΔF tiende a cero lo denominaremos *tensión* en el punto A, es decir

$$\boxed{\left(\lim \frac{\Delta P}{\Delta F}\right)_{\Delta F \to 0} = \frac{dP}{dF} = \rho} \qquad [1.3]$$

La tensión tiene la dimensión de una fuerza por unidad de superficie y se la mide indistintamente en kg/cm^2; kg/mm^2 o t/cm^2 según sea la magnitud relativa de la misma.

La tensión es una magnitud vectorial, por ser necesarios tres parámetros para definirla: intensidad, dirección y sentido; en consecuencia, es representable mediante vectores.

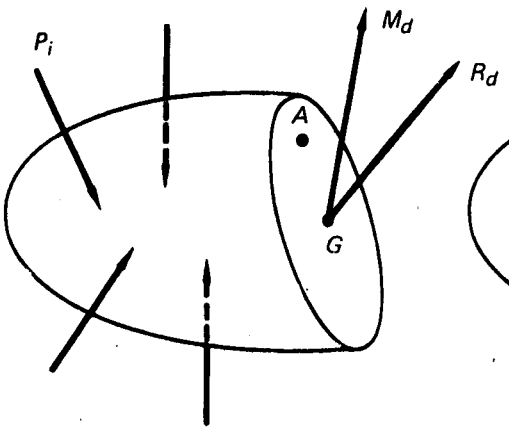


Fig. 1.2

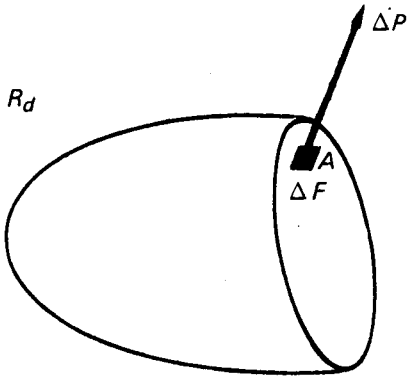


Fig. 1.3

1 . 3 . Régimen de tensiones en un punto

Hemos visto que al considerar un punto A del interior de un sólido y un plano que lo contiene, al elemento dF de superficie del entorno del punto corresponde una cierta tensión ρ con una determinada orientación respecto del plano.

Si variamos la inclinación del plano (figura 1.4), la tensión cambiará, y serán

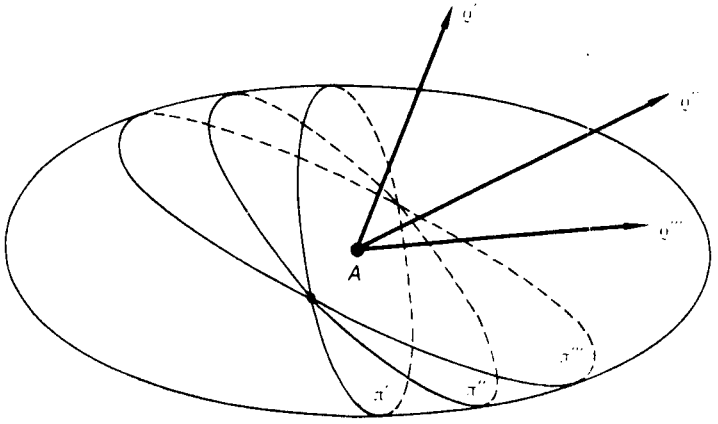


Fig. 1.4

otras su intensidad y dirección, pudiendo llegar a cambiar también su sentido. Resulta así que a un punto determinado del interior de un sólido corresponden infinitas tensiones, cada una de ellas subordinada a un plano determinado.

A dicho conjunto de tensiones que corresponden a un punto se denomina *régimen de tensiones o estado de tensión* en el punto considerado.

Distinguiremos en lo que sigue tres distintos estados de tensión, a saber:

a) Si al variar el plano que se considera, la tensión varía en intensidad, dirección y sentido, teniendo el vector tensión cualquier orientación en el espacio, diremos que estamos ante un *estado triple de tensión, estado triaxial de tensión* o un *estado espacial de tensión*, siendo las tres denominaciones equivalentes.

b) Cuando al variar el plano considerado los vectores representativos de las tensiones varían de dirección, intensidad y sentido, pero se mantienen *paralelos* a un plano determinado, estamos ante un *estado plano de tensión, estado doble de tensión* o *estado biaxial de tensión*, indistintamente.

c) Si al considerar los infinitos planos que pasan por un punto, las correspondientes tensiones se mantienen todas *paralelas a una misma dirección*, el estado elástico se denomina *estado simple de tensión, estado lineal de tensión* o *estado axil de tensión*.

1.4. Tensiones normales y tangenciales

Consideremos un punto A, figura 1.5, de un sólido sujeto a cargas exteriores en equilibrio, un plano π que lo contiene y el vector ρ, representativo de la tensión

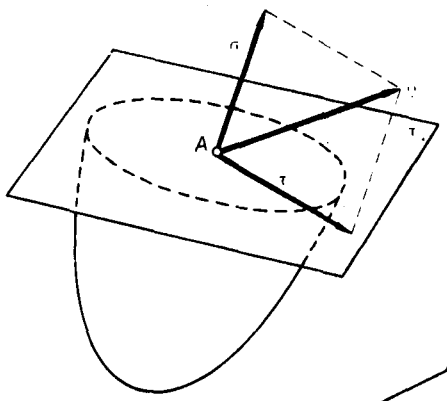


Fig. 1.5

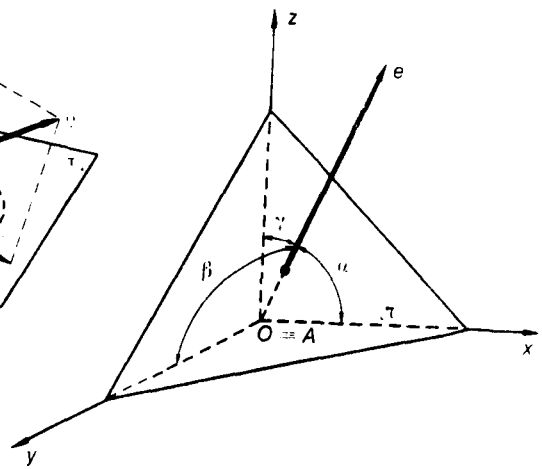


Fig. 1.6

que actúa sobre dicho plano y que se denomina *tensión resultante*. Descomponiendo el vector en dos direcciones, una normal al plano considerado y otra contenida en el mismo, obtenemos dos componentes de tensión denominadas *tensión normal y tensión tangencial*, que designaremos en lo sucesivo con las letras griegas σ y τ, respectivamente. Resulta evidente que al variar el plano considerado, como varía ρ, también lo harán σ y τ, y existirán planos determinados para los cuales las componentes de tensión alcanzarán valores máximos o mínimos, llegando en ciertos casos también a anularse.

1.5. Convenciones de signos, símbolos y denominaciones

Consideremos, figura 1.6, un punto A de un sólido y hagamos coincidir con el mismo el origen O de una terna x, y, z de ejes coordenados. Supongamos un plano π cualquiera que contenga al punto.

En la figura, y para facilitar la representación gráfica hemos desplazado el plano π, el que en realidad pasa por A. La orientación del plano en el espacio queda definida por la dirección de su normal exterior e, que forma con los ejes coordenados los ángulos α, β, γ, cuyos cosenos indicaremos con l, m y n, es decir

$$\left.\begin{aligned} l &= \cos\alpha \\ m &= \cos\beta \\ n &= \cos\gamma \end{aligned}\right\} \qquad [1.4]$$

los que, por otra parte, cumplen la condición $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Sea ahora la figura 1.7 donde también hemos hecho corresponder el punto A en estudio con una terna de ejes coordenados x, y, z y consideremos un cubo elemental de aristas unitarias del que tres caras coinciden con los tres planos coordenados.

Cuando en un sólido consideramos un plano que origina una sección, quedan definidas en ésta dos caras que corresponden a las partes izquierda y derecha, y en las que actúan vectores ρ opuestos, uno para cada cara. Estos, descompuestos, nos dan las componentes normal σ y tangencial τ de la tensión. En consecuencia, en la figura 1.7 podemos imaginar que las caras paralelas dos a dos del cubo elemental corresponden a las caras originadas por el corte del sólido por tres planos paralelos a los planos coordenados. De ahí que, en cada cara del cubo actuarán tensiones σ y τ, esta última descompuesta según las direcciones de los ejes coordenados paralelos a la cara considerada, y que para cada par de caras paralelas, serán opuestos los de una cara con respecto a los de la paralela.

Diremos en lo que sigue que una cara es positiva cuando lo es su normal exterior, y negativa en caso contrario, siendo positiva la normal exterior cuando lo sea su proyección sobre el eje que le sea paralelo. En la figura 1.7 son positivas las caras *BGEF*, *DHEG* y *CFEH* y negativas las tres restantes.

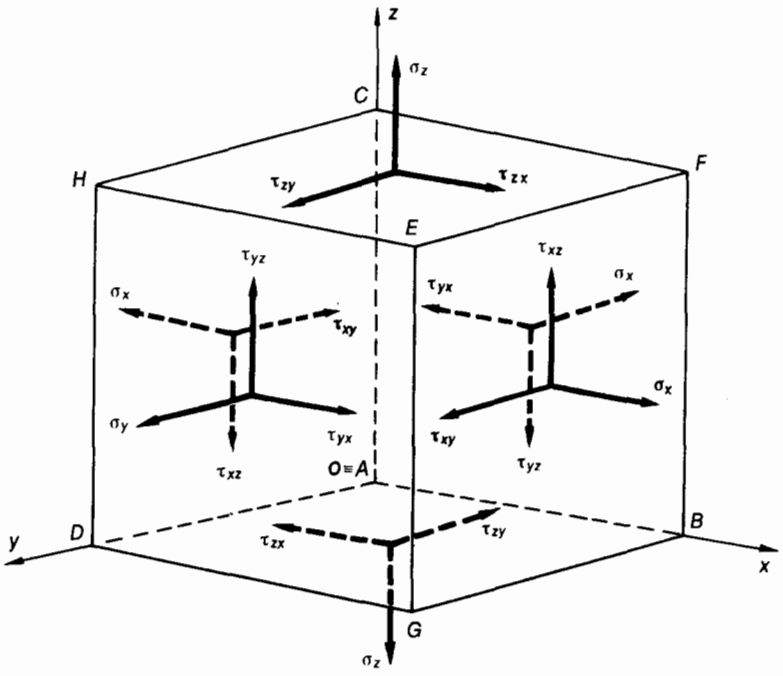


Fig. 1.7

En lo que sigue, individualizaremos las tensiones normales con un subíndice, que corresponde a la dirección del eje con respecto al cual es paralela, es decir, al eje normal a la cara en que actúa la tensión. De acuerdo con la convención indicada, la tensión normal a la cara *BGEF* de figura 1.7 la designamos con σ_x, por ser la cara normal al eje x.

En lo que respecta a las tensiones tangenciales, su individualización requiere dos subíndices: el primero de ellos indica la dirección del eje normal a la cara en que actúa la tensión, y el segundo corresponde a la dirección del eje a la cual es paralela la tensión. Así por ejemplo en la cara *BGEF* de figura 1.7, las dos componentes de la tensión tangencial se individualizan como τ_{xy} y τ_{xz}. Ambas llevan como primer subíndice x por actuar en una cara normal al eje x. La primera de ellas tiene como segundo subíndice y por estar dirigida paralelamente a este eje mientras que la segunda lleva z, por ser la paralela al eje z.

Consideremos ahora el signo de las tensiones. Para *caras positivas,* las tensiones serán *positivas* cuando lo sean sus respectivas proyecciones sobre los ejes que les sean paralelos, mientras que para las *caras negativas,* las tensiones serán *positivas* cuando las proyecciones de las mismas sean *negativas.* Ello puede observarse en la figura 1.7, donde se han supuesto positivas todas las tensiones, tanto normales como tangenciales. En efecto, en la cara *BGEF,* que es una cara

positiva por serlo su normal exterior, tanto el vector representativo de σ_x como los de τ_{xy} y τ_{xz} tienen proyecciones positivas sobre los ejes coordenados, y, en consecuencia, de acuerdo con la convención anterior, son positivas. En cambio, en la cara *ADHC*, que es negativa por tener proyección negativa su normal exterior, tanto el vector representativo de σ_x como los de τ_{xy} y τ_{xz} tienen proyecciones negativas sobre los ejes coordenados, y, en consecuencia, de acuerdo con la convención, son positivas.

En la figura 1.8 σ_x y τ_{xy} son negativas por actuar en una cara positiva y tener proyecciones negativas sobre los ejes. En cambio, τ_{xz} es positiva porque lo es su proyección sobre el eje z. Por lo que respecta al signo de las tensiones normales, observemos que el sentido de las que hemos considerado positivas

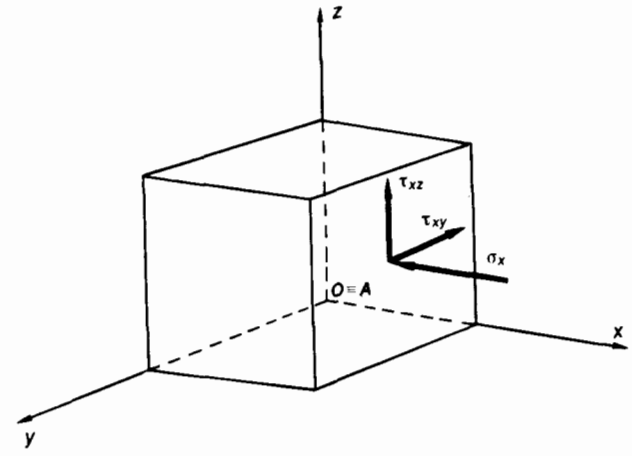


Fig. 1.8

corresponde a un esfuerzo de tracción sobre la cara. En cambio, el vector representativo de una tensión negativa se dirige hacia la cara, es decir, la comprime, y corresponde a un esfuerzo de compresión. Existe así concordancia con los signos de los esfuerzos de tracción y compresión.

1 . 6 . Relación entre las tensiones correspondientes a dos caras

Sea la figura 1.9, un punto A de un sólido, materializado el punto por una esfera de radio infinitésimo, y supongamos el prisma formado por tres pares de caras paralelas dos a dos y tangentes a la esfera. Los lados del paralelogramo de la figura representan las trazas de dos pares de caras, mientras que el tercer

par es paralelo al plano de la figura. Llamemos r', r'' y r''' a los radios normales a los tres pares de caras paralelas. Además supondremos que las áreas de las seis caras son iguales a la unidad y que en cada cara actúan tensiones ρ', ρ'', ρ'''. El peso del prisma lo suponemos despreciable en comparación con las fuerzas que actúan sobre cada cara, derivadas de la existencia de las tensiones ρ', ρ'' y ρ''', por ser el primero un infinitésimo de tercer orden, mientras que las últimas son de segundo orden. El punto A pertenece a un sólido en equilibrio y en consecuencia debe encontrarse en equilibrio bajo la acción de las fuerzas que lo solicitan. Para que ello se cumpla, es necesario que estas últimas cumplan con las correspondientes condiciones de equilibrio, de las que sólo nos interesa en este caso la que expresa la nulidad de momentos respecto de un eje coincidente con el radio r''', normal al plano de la figura, y cuya traza es el punto A. Los momentos de las fuerzas originadas por ρ''' son nulos por cortar las fuerzas al eje, restando por considerar solamente los momentos de las fuerzas correspondientes a ρ' y ρ''. Si hacemos la longitud $\overline{BC}$ igual a la unidad y tomamos momentos de estas dos últimas fuerzas, teniendo en cuenta el teorema de Varignon, llegamos a que el momento de las fuerzas ρ' vale $\rho' \cos(\rho' r'')$ y el de las fuerzas ρ'', $\rho'' \cos(\rho'' r')$. El equilibrio exige que la suma de los momentos sea nula, es decir

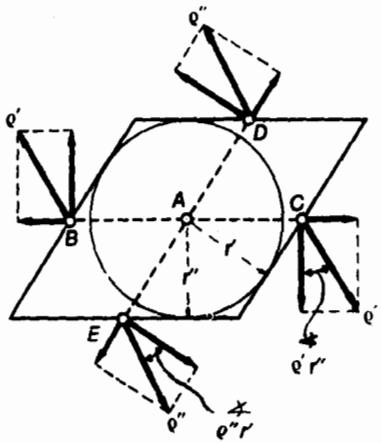


Fig. 1.9

$$\rho' \cos(\rho' r'') = \rho'' \cos(\rho'' r') \qquad [1.5]$$

Esta expresión puede interpretarse como sigue: *Dadas dos caras cualesquiera, sobre las que actúan tensiones ρ' y ρ'', la proyección de una cualquiera de ellas sobre la normal a la cara en que actúa la otra es igual a la proyección de la segunda sobre la normal a la cara en que actúa la primera.*

Consideremos nuevamente un prisma elemental, figura 1.10.

Supongamos que una de las tensiones, la ρ' por ejemplo, esté dirigida según la dirección de la otra cara, es decir, la cara en que actúa ρ''. Demostraremos a continuación que si ello ocurre, necesariamente la tensión ρ'' debe ser paralela a la cara en que actúa ρ'.

Para demostrarlo, admitamos por un momento que ello no ocurra y que

ρ'' tenga una dirección cualquiera. De ser así, el prisma no se encuentra en equilibrio. En efecto, tomando momentos respecto del eje normal al plano de la figura cuya traza es A, la suma debiera ser nula. Ello no se cumple porque, si bien los momentos de las fuerzas ρ son nulos por cortar ambas al eje, no ocurre lo mismo con los momentos de ρ''. En efecto, descompuestas estas tensiones en dos componentes, una paralela a BC y la otra normal, las primeras dan momento nulo por cortar al eje, y las segundas, en cambio, tienen un momento de valor $\rho'' \cos(\rho'' r')$. En consecuencia, el cumplimiento de las condiciones de equilibrio exige que las tensiones ρ'' sean paralelas a la cara en que actúan las tensiones ρ'. Las caras que cumplen la condición anterior se denominan *caras conjugadas*, y se concluye finalmente que la dirección de la tensión que actúa sobre una cara determinada corresponde a la dirección conjugada de esta última.

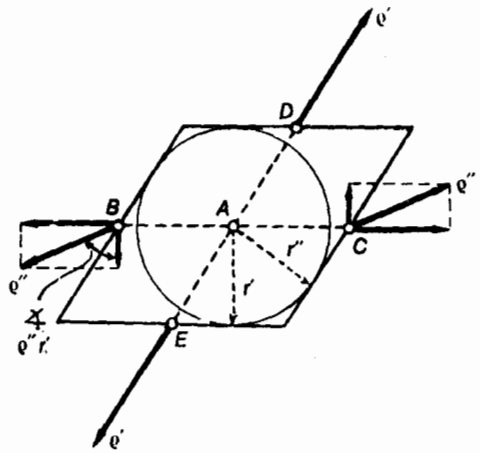


Fig. 1.10

1.7. Equilibrio del cubo elemental sujeto a tensiones

Consideremos, figura 1.11, un punto A correspondiente a un sólido sujeto a tensiones, punto que hacemos coincidir con el origen de una terna de ejes coordenados x, y, z, y tres planos ortogonales que pasen por el punto, coincidentes con los planos coordenados. Supongamos ahora un segundo punto B, del mismo sólido, de coordenadas dx, dy, dz. Si ahora imaginamos tres planos ortogonales, paralelos a los anteriores y que pasan por B, tenemos definido el cubo elemental de figura 1.11, de aristas dx, dy y dz. Admitimos que las funciones que definen las variaciones de las tensiones normales y tangenciales en los puntos del sólido responden a funciones continuas y derivables. En consecuencia, si en la cara dy–dz que pasa por A, actúan la tensión normal σ_x y las tensiones tangenciales τ_{xy} y τ_{xz}, en la cara paralela que pasa por B y que dista dx de la anterior, dichas tensiones se habrán incrementado y sus respectivos valores serán:

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx; \quad \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx; \quad \text{y} \quad \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx.$$

Análogamente, las tensiones en las dos caras restantes que pasan por A se habrán incrementado al considerar las caras paralelas, siendo sus correspondientes valores los que aparecen en la figura 1.11.

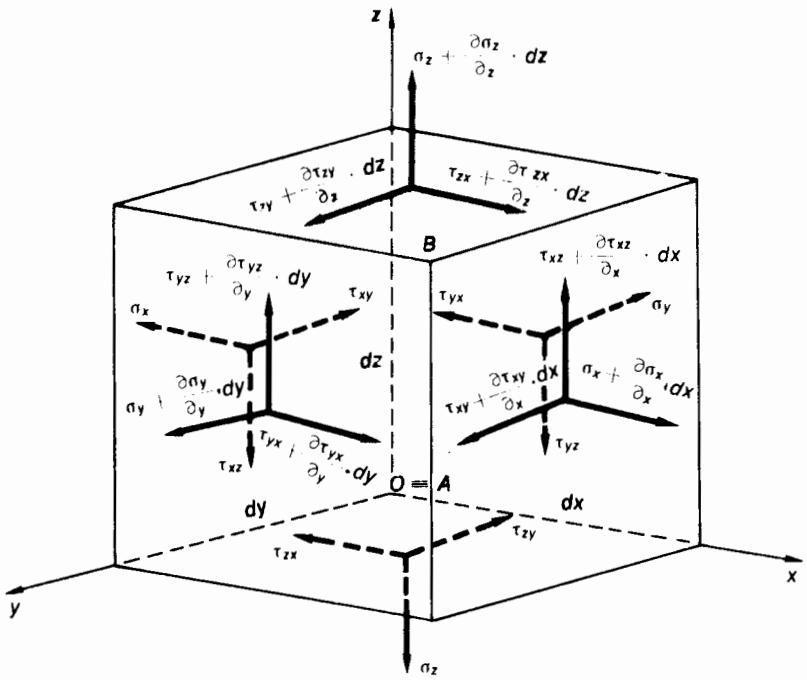


Fig. 1.11

El cubo elemental, aparte de las fuerzas derivadas de las tensiones que actúan en las caras del mismo, se encuentra sometido a una fuerza de masa, que se supone aplicada en el baricentro del mismo. Llamemos X, Y, Z a las componentes de dicha fuerza de masa por unidad de volumen, según los tres ejes coordenados. El equilibrio del cubo elemental exige que se cumplan las correspondientes condiciones, que, en este caso, son seis, por tratarse de un sistema gauso de fuerzas, las que pueden expresarse mediante tres condiciones de nulidad de momentos respecto de tres ejes cualesquiera y tres condiciones de nulidad de proyecciones sobre los mismos.

Planteemos primeramente las condiciones de nulidad de proyección:

a) sobre el eje x:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy\, dz - \sigma_x\, dy\, dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx\, dz - \tau_{yx}\, dx\, dz +$$

$$+ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dy\, dx - \tau_{zx}\, dy\, dx + X\, dx\, dy\, dz = 0 \qquad [1.6]$$

b) sobre el eje y:

$$\left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy\right) dx\, dz - \sigma_y\, dx\, dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx\right) dy\, dz - \tau_{xy}\, dy\, dz +$$

$$+ \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz\right) dx\, dy - \tau_{zy}\, dx\, dy + Y\, dx\, dy\, dx = 0 \qquad [1.7]$$

c) sobre el eje z:

$$\left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz\right) dx\, dy - \sigma_z\, dx\, dy + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx\right) dy\, dz - \tau_{xz}\, dy\, dz +$$

$$+ \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy\right) dx\, dz - \tau_{yz}\, dx\, dz + Z\, dx\, dy\, dz = 0. \qquad [1.8]$$

Simplificando términos iguales en cada una de las tres ecuaciones, y dividiendo por dx, dy, dz, llegamos a las siguientes expresiones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [1.9]$$

denominadas *ecuaciones de equilibrio* y que constituyen un sistema de tres ecuaciones con nueve incógnitas, que no puede resolverse sin recurrir a ecuaciones adicionales.

Como veremos de inmediato, en realidad las incógnitas son sólo seis. Para justificarlo, planteamos las tres ecuaciones de momentos respecto de tres ejes cualesquiera, eligiendo para ello tres ejes ortogonales paralelos a los coordenados y que pasen por el baricentro del cubo elemental. Consideremos primeramente los momentos respecto del eje paralelo al eje x. De todos estos momentos, serán nulos los correspondientes a aquellas fuerzas que corten o sean paralelas al eje considerado, resultando como expresión de momentos la siguiente:

$$\tau_{yz}\,dx\,\frac{dy}{2}\,dz + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\,dy\right)dx\,\frac{dy}{2}\,dz - \tau_{zy}\,dx\,dy\,\frac{dz}{2} -$$

$$-\left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\,dz\right)dy\,dx\,\frac{dz}{2} = 0 \qquad [1.10]$$

Desarrollando y sumando se tiene:

$$\tau_{yz}\,dx\,dy\,dz + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\,dx\,\frac{dy^2}{2}\,dz - \tau_{zy}\,dx\,dy\,dz - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\,dx\,dy\,\frac{dz^2}{2} = 0. \quad [1.11]$$

Ahora bien, los términos que contienen dy^2 y dz^2 son infinitésimos de orden superior con respecto a los restantes y pueden despreciarse, resultando finalmente, luego de simplificar:

$$\tau_{yz} - \tau_{zy} = 0 \qquad [1.12]$$

Análogamente, tomando momentos respecto de ejes paralelos a los ejes y y z obtenemos, respectivamente:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{zx} - \tau_{xz} &= 0 \\ \tau_{xy} - \tau_{yx} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [1.13]$$

Las expresiones [1.12] y [1.13] pueden escribirse como sigue:

$$\left\{\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \end{aligned}\right\} \qquad [1.14]$$

que constituyen las expresiones analíticas del *teorema de Cauchy*, cuyo enunciado es el siguiente:

En dos planos normales cualesquiera, cuya intersección define una arista, las componentes normales a esta de las tensiones tangenciales que actúan en dichos planos, son de igual intensidad y concurren o se alejan de la arista.

Esta última consideración surge de la diferencia de signos de los términos que aparecen en las ecuaciones [1.12] y [1.13], lo que por otra parte es exigido por el hecho de que, para que exista equilibrio, los momentos derivados de las tensiones tangenciales de subíndices permutados, deben tener sentidos de giro contrario. Teniendo en cuenta las igualdades derivadas del teorema de Cauchy, las expresiones [1.9], se transforman en las siguientes ecuaciones de equilibrio, en donde aparecen como incógnitas σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [1.15]$$

El establecimiento del estado tensional en un sólido sujeto a cargas, exige conocer para todos los puntos del mismo, los valores de las seis componentes de tensión mencionados, es decir, del *tensor de tensión* en cada punto. Para resolver el problema pueden seguirse dos caminos. Uno, que implica la resolución exacta del problema, es materia de la Teoría Matemática de la Elasticidad, que utilizando tres ecuaciones complementarias de compatibilidad entre las deformaciones que las tensiones provocan, dispone de un sistema de seis ecuaciones entre seis incógnitas que le permiten, conocidas las condiciones de contorno de cada caso, resolver si es posible el correspondiente problema tensional. El proceso es largo y complejo y en muchos casos no tiene solución rigurosa, escapando por otra parte a los alcances del presente trabajo, su planteo y desarrollo ulterior.

El segundo camino, que seguiremos nosotros, es el de la denominada Resistencia de Materiales, que resuelve el problema tensional partiendo de hipótesis suficientemente aproximadas, aplicables a los distintos casos particulares de solución y apóyandose en leyes cuya validez, dentro de ciertos límites, ha sido verificada experimentalmente.

2. EL ESTADO ELÁSTICO TRIPLE O ESPACIAL

2 . 1 . Tensiones en un plano cualquiera

Supongamos un punto material A perteneciente a un sólido y hagamos pasar por el mismo tres planos ortogonales y un cuarto plano oblicuo, cuya dirección queda definida por la de su normal exterior e, de la que se conocen sus cosenos directores l, m y n, fig. 2.1. El plano oblicuo, que en realidad pasa por A, ha sido desplazado con el objeto de facilitar la representación gráfica

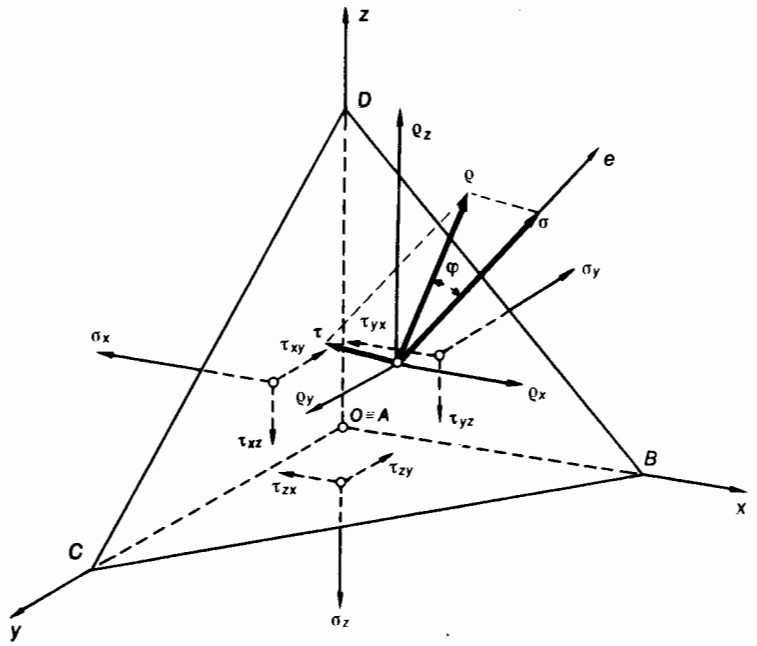


Fig. 2.1

de las magnitudes en juego. Queda definido así un tetraedro elemental, del que

hacemos coincidir el vértice A con el origen de coordenadas y los tres planos ortogonales con los planos coordenados. Si admitimos que el área de la cara inclinada es unitaria, las áreas de las caras ortogonales ACD, ABD y ABC resultan respectivamente iguales a los cosenos directores l, m y n. Supongamos además conocidas las tensiones normales σ_x, σ_y y σ_z y tangenciales τ_{xy}, τ_{xz} y τ_{yz} que actúan en las caras ortogonales. El problema que analizaremos a continuación consiste en establecer las relaciones que permitan conocer los valores de la tensión resultante ρ y de sus componentes σ y τ, que actúan sobre la cara inclinada. Para ello consideremos primeramente la tensión ρ descompuesta en tres componentes paralelas a los ejes coordenados, que llamaremos ρ_x, ρ_y y ρ_z. El equilibrio del tetraedro exige que la suma de las proyecciones de las fuerzas derivadas de ρ y de las tensiones que actúan en las tres caras ortogonales sean nulas. Tenemos así que, por ser el área de la cara inclinada igual a la unidad, la fuerza resultante será ρ y sus proyecciones directamente ρ_x, ρ_y y ρ_z.

Análogamente, para las caras ortogonales las fuerzas serán las respectivas tensiones multiplicadas por las áreas de las caras que correspondan, que como se dijo, valen l, m y n. Resulta en consecuencia, por proyección sobre los ejes x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} \rho_x &= \sigma_x\, l + \tau_{yx}\, m + \tau_{zx}\, n \\ \rho_y &= \tau_{xy}\, l + \sigma_y\, m + \tau_{zy}\, n \\ \rho_z &= \tau_{xz}\, l + \tau_{yz}\, m + \sigma_z\, n \end{aligned}\right\} \qquad [2.1]$$

expresiones que vinculan las tensiones conocidas, que actúan en las caras ortogonales, con la tensión incógnita ρ. En efecto, sabemos que

$$\rho = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2}\,, \qquad [2.2]$$

de donde, elevando al cuadrado cada una de las expresiones [2.1] y reemplazando en la [2.2] se tiene finalmente:

$$\rho = \sqrt{(\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)\,l^2 + (\sigma_y^2 + \tau_{yx}^2 + \tau_{yz}^2)\,m^2 + (\sigma_z^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)\,n^2 + 2\,(\sigma_x\,\tau_{yx} + \sigma_y\,\tau_{xy} + \tau_{xz}\,\tau_{yz})\,lm + 2\,(\sigma_x\,\tau_{zx} + \sigma_z\,\tau_{xz} + \tau_{xy}\,\tau_{zy})\,ln + 2\,(\sigma_y\,\tau_{zy} + \sigma_z\,\tau_{yz} + \tau_{yx}\,\tau_{zx})\,mn}. \qquad [2.3]$$

Llamando φ al ángulo que forma la dirección de ρ con la normal e al plano en que actúa, y que coincide con la dirección de σ, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \rho \cos\varphi \\ \tau &= \rho \operatorname{sen}\varphi \end{aligned}\right\} \qquad [2.4]$$

El valor de $\cos\varphi$ puede calcularse mediante los ángulos que forma la dirección de ρ con los ejes coordenados, que llamaremos α_ρ, β_ρ y γ_ρ y de los cosenos directores de la normal e del plano considerado, l, m y n. En efecto, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_\rho &= \frac{\rho_x}{\rho} \\ \cos\beta_\rho &= \frac{\rho_y}{\rho} \\ \cos\gamma_\rho &= \frac{\rho_z}{\rho} \end{aligned}\right\} \qquad [2.5]$$

y en consecuencia por una conocida fórmula de trigonometría

$$\cos\varphi = l\cos\alpha_\rho + m\cos\beta_\rho + n\cos\gamma_\rho\,. \qquad [2.6]$$

Conocido $\cos\varphi$, la determinación de $\operatorname{sen}\varphi$ es inmediata y consecuentemente la de σ y τ.

Si deseamos expresar σ y τ en función de las tensiones que actúan en las caras ortogonales, recordemos que la proyección de la resultante de un sistema de fuerzas sobre una dirección cualquiera es igual a la suma de las proyecciones de las componentes. Luego proyectando ρ sobre la dirección de σ e igualando la suma de las proyecciones de ρ_x, ρ_y y ρ_z resulta:

$$\sigma = \rho\cos\varphi = \rho_x\, l + \rho_y\, m + \rho_z\, n\,, \qquad [2.7]$$

por ser precisamente l, m y n los cosenos de los ángulos que forman con σ las direcciones de ρ_x, ρ_y y ρ_z, al ser estas últimas paralelas a los ejes coordenados.

Reemplazando en [2.7] las tres componentes de ρ por sus valores dados por las [2.1] se tiene:

$$\sigma = \sigma_x\, l^2 + \sigma_y\, m^2 + \sigma_z\, n^2 + 2\,(\tau_{xy}\, lm + \tau_{xz}\, ln + \tau_{yz}\, mn) \qquad [2.8]$$

y, finalmente

$$\tau = \sqrt{\rho^2 - \sigma^2}\,. \qquad [2.9]$$

Es decir que, para el caso general, quedan perfectamente determinadas σ y τ para un plano arbitrario, conocidas las tensiones σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, y τ_{yz} que actúan sobre una terna de caras ortogonales.

2.2 Tensiones y planos principales

Hemos visto que al cambiar la orientación del plano considerado, varía la tensión resultante aplicada al mismo, y consecuentemente sus componentes

normal y tangencial. Entre los infinitos planos que pasan por un punto, habrá planos para los cuales la tensión normal σ adquiere sus valores algebraicos máximo y mínimo. Es evidente que para dichos planos la tensión resultante coincide en dirección con la tensión normal, de donde para los mismos la tensión tangencial es nula.

Dado que en dichos planos la tensión tangencial es nula, en virtud del teorema de Cauchy los mismos deben ser ortogonales, y por la misma razón, en el plano normal a ambos tampoco puede existir tensión tangencial, por lo que la tensión resultante en el mismo también coincide con la tensión normal, que en este caso se denomina tensión intermedia.

Tales planos se denominan *planos principales*, las tensiones que ocurren en los mismos, *tensiones principales*, y las direcciones de estas últimas, *direcciones principales.*

Para los planos principales, las expresiones [2.1] que definen el estado de tensión en un punto, al ser nulas las tensiones tangenciales, se transforman en

$$\begin{aligned} \rho_x &= \sigma_i\, l \\ \rho_y &= \sigma_i\, m \\ \rho_z &= \sigma_i\, n, \end{aligned} \qquad [2.10]$$

donde σ_i corresponde a la tensión principal considerada.

Reemplazando los valores de las [2.10] en las [2.1] se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_i\, l &= \sigma_x\, l + \tau_{yx}\, m + \tau_{zx}\, n \\ \sigma_i\, m &= \tau_{xy}\, l + \sigma_y\, m + \tau_{zy}\, n \\ \sigma_i\, n &= \tau_{xz}\, l + \tau_{yz}\, m + \sigma_z\, n \end{aligned}\right\} \qquad [2.11]$$

o también, por transposición de términos,

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_i)\, l + \tau_{yx}\, m + \tau_{zx}\, n &= 0 \\ \tau_{xy}\, l + (\sigma_y - \sigma_i)\, m + \tau_{zy}\, n &= 0 \\ \tau_{xz}\, l + \tau_{yz}\, m + (\sigma_z - \sigma_i)\, n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [2.12]$$

Llegamos así a un sistema simultáneo de tres ecuaciones homogéneas entre las incógnitas l, m y n, que definen la dirección del plano que corresponde a σ_i, en función de las tensiones normales y tangenciales que ocurren en tres caras ortogonales. Para que l, m y n tengan valores distintos de la solución trivial:

$$l = m = n = 0, \qquad [2.13]$$

es condición necesaria y suficiente que el determinante de los coeficientes sea nulo:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_i \end{vmatrix} = 0. \qquad [2.14]$$

Desarrollando el determinante y agrupando los términos en función de σ_i, llegamos a la ecuación cúbica:

$$\sigma_i^3 - \sigma_i^2\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma_i\,(\sigma_x\,\sigma_y + \sigma_x\,\sigma_z + \sigma_y\,\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2) -$$
$$- (\sigma_x\,\sigma_y\,\sigma_z + 2\,\tau_{xy}\,\tau_{yz}\,\tau_{zx} - \tau_{xy}^2\,\sigma_z - \tau_{xz}^2\,\sigma_y - \tau_{zy}^2\,\sigma_x) = 0. \qquad [2.15]$$

Esta ecuación, denominada *ecuación característica de las tensiones principales*, posee tres raíces σ_1, σ_2 y σ_3 que indican, como ya es sabido, la existencia para un estado tridimensional de tensiones, de tres tensiones principales y consecuentemente, de tres planos principales, siempre que las tres raíces sean reales. Ello ocurre siempre, lo que justificaremos a continuación. En efecto, que una de las raíces es real surge de inmediato de las consideraciones siguientes:

La ecuación [2.15] tomará un valor positivo si se elige a σ_i lo suficientemente grande y positiva, y un valor negativo si se la hace negativa y lo suficientemente grande, por predominar el término cúbico sobre los restantes. Es decir, que habrá por lo menos un valor de σ_i, real, que satisface la ecuación [2.15], raíz que designaremos σ_3.

Establecida la existencia de una raíz real, y con el objeto de constatar si las dos restantes también lo son, consideremos un nuevo sistema de ejes coordenados x', y', z' y hagamos coincidir z' con la dirección de σ_3, es decir, suponemos $\sigma_{z'} = \sigma_3$ y consecuentemente $\tau_{z'y'} = \tau_{z'x'} = 0$.

En este caso las ecuaciones [2.12] se transforman en:

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_{x'} - \sigma_i)\, l + \tau_{y'x'}\, m &= 0 \\ \tau_{x'y'}\, l + (\sigma_{y'} - \sigma_i)\, m &= 0 \\ (\sigma_{z'} - \sigma_i)\, n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [2.16]$$

El sistema [2.16] tendrá soluciones no nulas para l, m y n, siempre que el determinante de los coeficientes sea nulo, es decir si:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{x'} - \sigma_i & \tau_{y'x'} & 0 \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} - \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z'} - \sigma_i \end{vmatrix} = 0. \qquad [2.17]$$

Desarrollando el determinante llegamos a

$$(\sigma_{z'} - \sigma_i)\,[(\sigma_{x'} - \sigma_i)(\sigma_{y'} - \sigma_i) - \tau^2_{x'y'}] = 0, \qquad [2.18]$$

o también

$$(\sigma_{z'} - \sigma_i)\,[\sigma_i^2 - \sigma_i(\sigma_{x'} + \sigma_{y'}) + (\sigma_{x'}\sigma_{y'} - \tau^2_{x'y'})] = 0. \qquad [2.19]$$

La ecuación se satisface en primer término para $\sigma_{z'} = \sigma_3$, lo que ya se sabía, y en segundo lugar para

$$\sigma_i^2 - \sigma_i(\sigma_{x'} + \sigma_{y'}) + (\sigma_{x'}\sigma_{y'} - \tau^2_{x'y'}) = 0, \qquad [2.20]$$

cuyas raíces son

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{x'} + \sigma_{y'}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x'} - \sigma_{y'}}{2}\right)^2 + \tau^2_{x'y'}}\,. \qquad [2.21]$$

Es evidente que tanto σ_1 como σ_2 son reales, por cuanto el discriminante $[(\sigma_{x'} - \sigma_{y'})/2]^2 + \tau^2_{x'y'}$ es siempre positivo.

Como conclusión tenemos que para todo estado triple de tensiones existen *tres planos principales*, cuyas normales exteriores se denominan *direcciones principales*, y sobre los que actúan tensiones normales exclusivamente, denominadas *tensiones principales*.

En lo que sigue supondremos siempre (salvo indicación en contrario) que:

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3. \qquad [2.22]$$

Tres casos pueden presentarse en lo que respecta a las raíces de la ecuación característica de las tensiones principales, a saber:

a) Las tres raíces son distintas $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$

b) Hay dos raíces iguales: $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$

c) Las tres raíces son iguales: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Si las tres raíces son distintas, es decir, si:

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3, \qquad [2.23]$$

las tres tensiones principales ocurren en tres planos ortogonales entre sí, existiendo tensiones tangenciales en los planos restantes. Si en cambio dos raíces son iguales, por ejemplo:

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3, \qquad [2.24]$$

las tensiones correspondientes a planos normales al plano en que actúa σ_1,

resultan iguales entre sí e iguales a $\sigma_2 = \sigma_3$ constituyendo la dirección de σ_1 el eje del haz de planos. Finalmente, cuando las tres raíces son iguales, es decir

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3, \qquad [2.25]$$

las tensiones en los infinitos planos que pasan por el punto son iguales entre sí e iguales a las tensiones principales, no existiendo en este caso ningún plano con tensiones tangenciales. Este estado de tensión se denomina *hidrostático*.

2.3. Cuádrica indicatriz de tensiones

Consideremos la superficie de una cuádrica tal, que la longitud $\overline{OA}$ de un segmento paralelo a la dirección de la normal exterior de un plano cualquiera siendo A un punto de la cuádrica y O el centro de la misma, coincidente con el origen de los ejes coordenados, sea igual a la inversa de la raíz cuadrada del valor absoluto de la tensión normal correspondiente al plano considerado y dada por la expresión

$$\sigma = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}\, l m + 2\tau_{xz}\, l n + 2\tau_{yz}\, m n\,, \qquad [2.26]$$

es decir

$$\overline{OA} = \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}}\,, \qquad [2.27]$$

Las coordenadas de A serán:

$$\left.\begin{aligned} x &= \overline{OA}\cdot l \\ y &= \overline{OA}\cdot m \\ z &= \overline{OA}\cdot n, \end{aligned}\right\} \qquad [2.28]$$

por ser $\overline{OA}$ paralelo a e.

De [2.28] se tiene.

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{x}{\overline{OA}} \\ m &= \frac{y}{\overline{OA}} \\ n &= \frac{z}{\overline{OA}} \end{aligned}\right\} \qquad [2.29]$$

que reemplazadas en [2.26] conducen a

$$\sigma = \sigma_x \frac{x^2}{\overline{OA}^2} + \sigma_y \frac{y^2}{\overline{OA}^2} + \sigma_z \frac{z^2}{\overline{OA}^2} + 2\tau_{xy} \frac{xy}{\overline{OA}^2} + 2\tau_{xz} \frac{xz}{\overline{OA}^2} + 2\tau_{yz} \frac{yz}{\overline{OA}^2}, \qquad [2.30]$$

y finalmente, teniendo en cuenta la [2.27]:

$$\sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{xy} xy + 2\tau_{xz} xz + 2\tau_{yz} yz = \pm 1, \qquad [2.31]$$

ecuación que representa una cuádrica, particular para cada estado de tensión.

Variando la orientación de la terna de ejes, es posible hallar una para la cual se anulen los términos en τ_{xy}, τ_{yz} y τ_{xz}. Tales ejes, que llamaremos x', y' y z', corresponden a las direcciones principales y para ellos la [2.31] toma la forma siguiente:

$$\sigma_1 x'^2 + \sigma_2 y'^2 + \sigma_3 z'^2 = \pm 1. \qquad [2.32]$$

2.4. Determinación de las tensiones y direcciones principales

La ecuación [2.15], característica de las tensiones principales, nos permite determinar en valor y signo las tres tensiones principales, bastando para ello calcular las tres raíces σ_1, σ_2 y σ_3.

Conocido el valor de las tensiones principales, es necesario conocer sus direcciones, es decir, las de las normales exteriores de los planos en que actúan, que son los planos principales. Para ello es necesario calcular los tres cosenos directores de cada una de las direcciones principales. Se ha visto en el parágrafo anterior, que para que l, m y n tuviesen valores no nulos, era necesario que el determinante de los coeficientes de la [2.12] fuera igual a cero. Es decir, que si queremos calcular la dirección principal 1, debe tenerse

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_1 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_1 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad [2.33]$$

que es el determinante [2.14] en el que se ha reemplazado σ_i por σ_1 por cuanto precisamente queremos determinar la dirección σ_1, y que corresponde al sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1) l_1 + \tau_{yx} m_1 + \tau_{zx} n_1 &= 0 \\ \tau_{xy} l_1 + (\sigma_y - \sigma_1) m_1 + \tau_{zy} n_1 &= 0 \\ \tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} m_1 + (\sigma_z - \sigma_1) n_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [2.34]$$

Llamando Δ_1, Δ_2 y Δ_3 a los tres menores complementarios de la primera fila, se tiene:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sigma_y - \sigma_1 & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \sigma_z - \sigma_1 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_1 \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{vmatrix}, \qquad [2.35]$$

y en consecuencia, desarrollando el determinante por la primera fila:

$$(\sigma_x - \sigma_1)\Delta_1 - \tau_{yx}\Delta_2 + \tau_{zx}\Delta_3 = 0. \qquad [2.36]$$

Comparando [2.36] con la primera de las [2.34] resulta:

$$\frac{l_1}{\Delta_1} = \frac{m_1}{\Delta_2} = \frac{n_1}{\Delta_3} = K \qquad [2.37]$$

siendo K una constante no nula, a determinar.

De la [2.37]:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= K\Delta_1 \\ m_1 &= K\Delta_2 \\ n_1 &= K\Delta_3 \end{aligned}\right\} \qquad [2.38]$$

y teniendo en cuenta que $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, elevando al cuadrado las [2.38] y sumando resulta:

$$K^2\Delta_1^2 + K^2\Delta_2^2 + K^2\Delta_3^2 = 1, \qquad [2.39]$$

de donde:

$$K = \frac{1}{\pm\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}, \qquad [2.40]$$

y finalmente reemplazando [2.40] en las [2.38] obtenemos los valores de los cosenos directores de la dirección σ_1:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \pm\frac{\Delta_1}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}} \\ m_1 &= \pm\frac{\Delta_2}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}} \\ n_1 &= \pm\frac{\Delta_3}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}} \end{aligned}\right\} \qquad [2.41]$$

Para determinar los cosenos directores de las direcciones de σ_2 y σ_3 bastará reemplazar en las expresiones de Δ_1, Δ_2 y Δ_3 el valor de σ_1 por los de σ_2 ó σ_3, según el caso.

2.5. Expresiones del estado de tensión en un punto en función de las tensiones principales

Si hacemos coincidir los ejes coordenados con las direcciones principales se tiene

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 \\ \sigma_y &= \sigma_2 \\ \sigma_z &= \sigma_3 \\ \tau_{xy} = \tau_{xz} &= \tau_{yz} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [2.42]$$

y en consecuencia la [2.1] se transforma en:

$$\left.\begin{aligned} \rho_x &= \sigma_1\, l \\ \rho_y &= \sigma_2\, m \\ \rho_z &= \sigma_3\, n \end{aligned}\right\} \qquad [2.43]$$

y por ser $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ la [2.3] se convierte en:

$$\rho = \sqrt{\sigma_1^2\, l^2 + \sigma_2^2\, m^2 + \sigma_3^2\, n^2}\,. \qquad [2.44]$$

y finalmente, por las mismas razones resulta:

$$\sigma = \sigma_1\, l^2 + \sigma_2\, m^2 + \sigma_3\, n^2. \qquad [2.45]$$

Recordando que:

$$\tau = \sqrt{\rho^2 - \sigma^2}\,, \qquad [2.46]$$

reemplazando ρ y σ por sus valores dados por las [2.44] y [2.45] y teniendo en cuenta que la suma de los cuadrados de los cosenos es igual a la unidad, se tiene:

$$\tau = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2\, l^2\, m^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\, l^2\, n^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\, m^2\, n^2} \qquad [2.47]$$

o también, expresando n en función de l y m:

$$\tau^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)\, l^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)\, m^2 + \sigma_3^2 - \\ - [(\sigma_1 - \sigma_3)\, l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)\, m^2 + \sigma_3]^2 \qquad [2.48]$$

2.6. Tensiones tangenciales máximas

La expresión [2.48] nos da τ en función de las variables independiente l y m. Derivando la [2.48] respecto de dichas variables e igualando a cero obte nemos las condiciones de máximo y mínimo de τ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial l} &= 2(\sigma_1^2 - \sigma_3^2)\, l - \\ &\quad - 4(\sigma_1 - \sigma_3)[(\sigma_1 - \sigma_3)\, l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)\, m^2 + \sigma_3]\, l = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial m} &= 2(\sigma_2^2 - \sigma_3^2)\, m - \\ &\quad - 4(\sigma_2 - \sigma_3)[(\sigma_1 - \sigma_3)\, l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)\, m^2 + \sigma_3]\, m = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [2.49$$

Analizaremos a continuación las soluciones de este sistema de ecuaciones.

1°) Para el caso en que las tres tensiones principales son distintas, es decir $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$, las soluciones son

$$l = m = 0; \qquad n = \pm 1. \qquad [2.50]$$

Reemplazando estos valores en las [2.45] y [2.48], resultan:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \sigma_3 \\ \tau &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [2.51]$$

es decir, una cara principal. A un resultado semejante llegaríamos si expresamos τ en función de l, n o m, n según el caso, obteniendo con ello las otras dos caras principales.

Si en la segunda de las [2.49] hacemos $l = 0$ resulta:

$$2(\sigma_2^2 - \sigma_3^2)\, m - 4(\sigma_2 - \sigma_3)\, m\, [(\sigma_2 - \sigma_3)\, m^2 + \sigma_3] = 0 \qquad [2.52]$$

$$(\sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) = 2(\sigma_2 - \sigma_3)[(\sigma_2 - \sigma_3)\, m^2 + \sigma_3], \qquad [2.53]$$

luego simplificando, las soluciones son:

$$\left.\begin{aligned} l &= 0 \\ (\sigma_2 + \sigma_3) - 2[(\sigma_2 - \sigma_3)\, m^2 + \sigma_3] &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [2.54]$$

o sea que:

$$\sigma_2 - \sigma_3 = 2(\sigma_2 - \sigma_3)\, m^2, \qquad [2.55]$$

de donde:

$$m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad [2.56]$$

y por ser $l = 0$ resulta:

$$n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad [2.57]$$

Estos cosenos directores corresponden a dos planos bisectores de los planos principales $\sigma_1 \sigma_2$ y $\sigma_1 \sigma_3$.

Si hacemos sucesivamente $m = 0$ y $n = 0$ llegamos a las otras series de soluciones, correspondientes a planos bisectores de los restantes pares de planos principales.

Para la solución:

$$\left.\begin{aligned} l &= 0 \\ m = n &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \qquad [2.58]$$

obtenemos el valor de la tensión tangencial máxima reemplazando los valores de las [2.58] en la [2.48]:

$$\tau_1^2 = \frac{(\sigma_2^2 - \sigma_3^2)}{2} + \sigma_3^2 - \left[\frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2} + \sigma_3\right]^2, \qquad [2.59]$$

o sea, desarrollando y simplificando:

$$\tau_1^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2, \qquad [2.60]$$

de donde:

$$\tau_1 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \qquad [2.61]$$

Reemplazando los valores de [2.58] en la [2.45] obtenemos el valor de la tensión normal en el plano en que ocurre τ_1, es decir:

$$\sigma = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}. \qquad [2.62]$$

Procediendo en forma análoga, llegamos para los dos planos restantes en que ocurren $\tau_{\text{máx.}}$ a:

$$\left\{\begin{aligned} \tau_2 &= \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} && [2.63] \\ \tau_3 &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, && [2.64] \end{aligned}\right.$$

y

a los que corresponden las tensiones normales:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \\ \sigma &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \end{aligned}\right\} \qquad [2.65]$$

respectivamente.

2°). Cuando dos de las tensiones principales son iguales entre sí, es decir, si se tiene $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$, la expresión [2.48] se transforma en:

$$\tau^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)\, l^2 + \sigma_3^2 - [(\sigma_1 - \sigma_3)\, l^2 + \sigma_3]^2, \qquad [2.66]$$

resultando en este caso τ función solamente de l e independiente de m. Derivando respecto de l e igualando a cero:

$$\partial\tau/\partial l = 2\,(\sigma_1^2 - \sigma_3^2)\, l - 4\,(\sigma_1 - \sigma_3)\, l\, [(\sigma_1 - \sigma_3)\, l^2 + \sigma_3] = 0 \qquad [2.67]$$

Una solución es $l = 0$ y las caras resultan entonces independientes de m y n. El valor de la tensión tangencial es en este caso $\tau = 0$, es decir, que estamos ante lo que ya sabíamos, o sea que todas las caras que forman el haz de planos de eje coincidente con el x son caras principales a las que corresponde $\tau = 0$.

Dividiendo la [2.67] por $2l$ se obtiene:

$$(\sigma_1^2 - \sigma_3^2) = 2\,(\sigma_1 - \sigma_3)\, [(\sigma_1 - \sigma_3)\, l^2 + \sigma_3] \qquad [2.68]$$

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \sigma_3 = (\sigma_1 - \sigma_3)\, l^2, \qquad [2.69]$$

y finalmente:

$$l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad [2.70]$$

Para esta solución, la tensión tengencial máxima, que ocurre en los planos igualmente inclinados respecto de x, se obtiene, reemplazando en [2.66] l por su valor de la [2.70]

$$\tau^2 = \frac{(\sigma_1^2 - \sigma_3^2)}{2} + \sigma_3^2 - \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} + \sigma_3\right]^2 \qquad [2.71]$$

de donde, por simples transformaciones algebraicas se llega a:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} . \qquad [2.72]$$

3°). Finalmente, si las tres tensiones principales son iguales entre sí, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, lo que corresponde al estado de tensión hidrostático, la ecuación [2.48], que da el valor de la tensión tangencial en un plano cualquiera, se anula y se tiene $\tau = 0$, lo que significa que todos los planos posibles que pasan por el punto, son planos principales con tensiones tangenciales nulas, es decir, mínimas, no existiendo planos de tensiones tangenciales máximas.

2 . 7 . Invariantes de tensión

Recordemos la ecuación característica de las tensiones principales:

$$\sigma_i^3 - \sigma_i^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma_i (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2) -$$

$$- (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2) = 0 \qquad [2.73]$$

Cualquiera sea la terna de ejes que se adopte, es evidente que las tensiones principales son siempre las mismas. En consecuencia es necesario que los coeficientes de la ecuación característica sean constantes, de donde se tiene que:

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ J_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 \\ J_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \end{aligned}\right\} \qquad [2.74]$$

son magnitudes constantes, independientes de la terna elegida y que denominaremos en lo sucesivo *invariantes de tensión*. El invariante J_3 puede expresarse en forma de determinante:

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \qquad [2.75]$$

Cuando se adoptan como ejes coordenados las tres direcciones principales, las tensiones tangenciales se anulan y los invariantes de tensión se transforman en:

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ J_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \\ J_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned}\right\} \qquad [2.76]$$

Este último invariante, expresado como determinante, toma la siguiente forma:

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \qquad [2.77]$$

La consideración de las [2.74] y [2.76] nos permite llegar a la siguiente consideración, que se cumple para todo estado de tensión:

La suma de las tensiones normales correspondientes a tres caras ortogonales, es constante e igual a la suma de las tensiones principales.

2 . 8 . Tensiones octaédricas

Consideremos un punto A (figura 2.2) y su estado elástico, caracterizado por las tres tensiones principales σ_1, σ_2, σ_3, e imaginemos una terna cartesiana O, x, y, z cuyo origen hacemos coincidir con A y que orientamos en forma tal

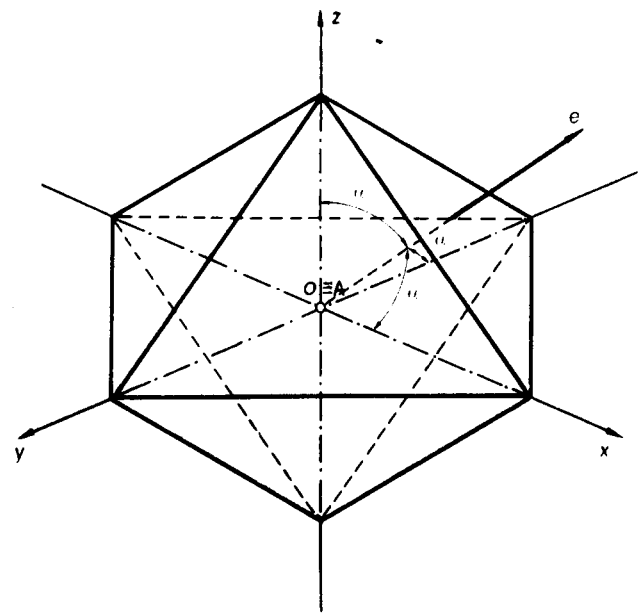


Fig 2.2

que los tres ejes se correspondan con las tres direcciones principales, es decir, $x \equiv 1$, $y \equiv 2$, $z \equiv 3$.

Supongamos los ocho planos pasantes por A y cuyas orientaciones sean tales que se tenga, para sus normales exteriores:

$$l = m = n = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad [2.78]$$

Si bien todos los planos pasan por A, por razones de facilidad de representación los imaginamos desplazados y formando un octaedro regular (figura 2.2). El valor del ángulo α que forma la normal exterior de cada plano con cada uno de los ejes coordenados vale

$$\alpha = 54^\circ\ 45' \qquad [2.79]$$

Para ciertos problemas, en especial para el desarrollo de alguna de las teorías de rotura de los cuerpos, interesa conocer el valor de la tensión resultante y de las tensiones normal y tangencial en las caras del octaedro, tensiones que se denominan *tensiones octaédricas* y que distinguiremos con el subíndice "oct.".

Según la [2.44], la tensión resultante ρ en función de las tres tensiones principales tenía por expresión:

$$\rho = \sqrt{\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2} \qquad [2.80]$$

Como para el caso que nos ocupa es:

$$l^2 = m^2 = n^2 = \frac{1}{3} \qquad [2.81]$$

reemplazando, resulta

$$\rho_{\text{oct.}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3}} \qquad [2.82]$$

Análogamente, la expresión de la tensión normal era:

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \qquad [2.83]$$

que, por sustitución de la [2.78] se transforma en:

$$\sigma_{\text{oct.}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \qquad [2.84]$$

Por otra parte, teníamos:

$$\tau = \sqrt{\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - [\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2]^2} \qquad [2.85]$$

que, por sustitución de $l^2 = m^2 = n^2 = \frac{1}{3}$ nos da:

$$\tau_{\text{oct.}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \qquad [2.86]$$

o también:

$$\tau_{\text{oct.}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 6(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} \qquad [2.87]$$

Finalmente, recordando las expresiones del primero y segundo invariante de tensión, dadas por las [2.76], las [2.84] y [2.87], se transforman, respectivamente en:

$$\sigma_{\text{oct.}} = \tfrac{1}{3} J_1 \qquad [2.88]$$

$$\tau_{\text{oct.}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{2J_1^2 - 6J_2}. \qquad [2.89]$$

Si los ejes coordenados, en lugar de coincidir con las direcciones principales, tienen direcciones cualesquiera, los datos del problema ya no serán las tensiones principales σ_1, σ_2, σ_3, sino las tensiones normales y tangenciales σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}, correspondientes a las caras normales a la dirección de los ejes coordenados. En este caso es fácil establecer las expresiones de las tensiones octaédricas normal y tangencial, observando que en las [2.84] y [2.87] intervienen solamente los invariantes J_1 y J_2. Será cuestión, entonces, de reemplazar en las expresiones de $\sigma_{\text{oct.}}$ y $\tau_{\text{oct.}}$ los valores de los invariantes en función de las tensiones principales por los correspondientes en función de σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz} y τ_{yz}.

Llegamos, así, a:

$$\sigma_{\text{oct.}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \qquad [2.90]$$

$$\tau_{\text{oct.}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 6(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2)} \qquad [2.91]$$

y por simples transformaciones algebraicas:

$$\tau_{\text{oct.}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \qquad [2.92]$$

2.9. Representación gráfica del estado triaxial de tensión

2.9.1. Elipsoide de Lamé

Las expresiones de las componentes de la tensión resultante en función de las tensiones principales son las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \rho_x &= \sigma_1 l \\ \rho_y &= \sigma_2 m \\ \rho_z &= \sigma_3 n \end{aligned}\right\} \qquad [2.93]$$

que nos permiten deducir los valores de los tres cosenos directores:

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{\rho_x}{\sigma_1} \\ m &= \frac{\rho_y}{\sigma_2} \\ n &= \frac{\rho_z}{\sigma_3} \end{aligned}\right\} \qquad [2.94]$$

Recordando que $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, elevando las [2.94] al cuadrado y sumando resulta:

$$\frac{\rho_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{\rho_y^2}{\sigma_2^2} + \frac{\rho_z^2}{\sigma_3^2} = 1 \qquad [2.95]$$

Si suponemos ρ_x, ρ_y, ρ_z coincidentes con las coordenadas x, y, z de un sistema con origen en el punto considerado, la [2.95] se transforma en

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1 \qquad [2.96]$$

que es la ecuación de un elipsoide cuyos semiejes valen, respectivamente $\pm\,\sigma_1$, $\pm\,\sigma_2$, $\pm\,\sigma_3$. La superficie definida por la [2.96] se denomina *elipsoide de Lamé*, y tiene la propiedad de que todo radio vector dirigido del centro del elipsoide a un punto cualquiera A de su superficie, de coordenadas (x, y, z), congruentes con los valores correspondientes de ρ_x, ρ_y, ρ_z, es igual a la tensión resultante ρ, que actúa en un cierto plano que pasa por O (figura 2.3).

Cuando dos de las tensiones principales son iguales entre sí, el elipsoide se transforma en elipsoide de revolución, con eje coincidente con la tercera tensión principal. Si, finalmente, las tres tensiones principales son iguales entre sí, se tiene una esfera como caso particular, para el que todos los radios vectores son iguales entre sí e iguales a las tensiones principales.

El elipsoide de Lamé nos da únicamente el vector tensión resultante, en intensidad y dirección, pero no nos da la orientación de la cara sobre la que actúa la misma.

Teniendo en cuenta que en la expresión [2.96] aparecen las tensiones principales elevadas al cuadrado, se deduce que el elipsoide de Lamé es independiente del signo de aquéllas. En otras palabras, los estados de tensión cuyas tensiones principales son iguales en valor absoluto, pero difieren en signo, están representados por un mismo elipsoide de Lamé.

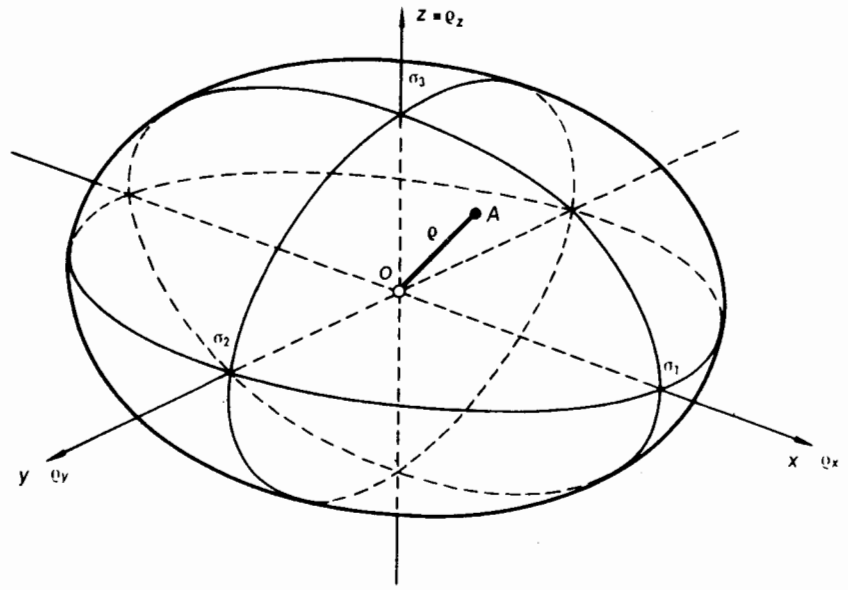


Fig. 2.3

El elipsoide nos permite, conocida la orientación de una cara determinada, determinar la intensidad de la tensión resultante, pero no su dirección. La construcción correspondiente es la que ilustra la figura 2.4, donde aparece el elipsoide de tensiones relativo a un estado de tensión cuyas tensiones principales son σ_1, σ_2 y σ_3. Supongamos un plano π tangente en T al elipsoide

Si por O trazamos una normal al plano, la misma cortará a éste en el punto S. El segmento $\overline{OS}$ representa la intensidad de la tensión resultante que actúa sobre el plano π. Para justificar lo anterior bastará demostrar que:

$$\overline{OS} = \sqrt{\sigma_1^2\, l^2 + \sigma_2^2\, m^2 + \sigma_3^2\, n^2} \qquad [2.97]$$

que es la expresión de la tensión resultante que actúa sobre un plano cuya normal exterior e tiene por cosenos directores a l, m y n.

Para demostrarlo, recordemos que en toda superficie definida por una función $\phi(x, y, z) = 0$ los cosenos directores de la normal e en un punto de la misma tienen por expresiones:

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{1}{K}\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ m &= \frac{1}{K}\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ n &= \frac{1}{K}\frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad [2.98]$$

donde:

$$K = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2} \qquad [2.99]$$

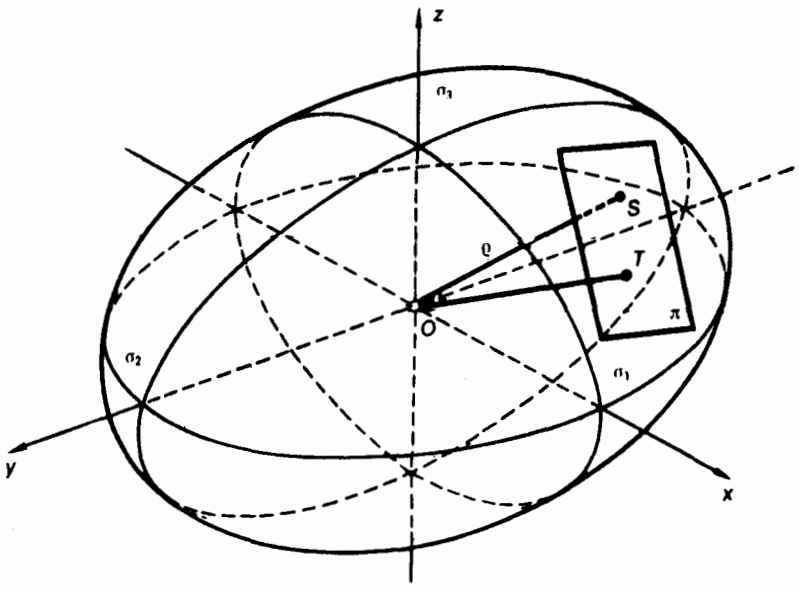


Fig. 2.4

En consecuencia, si hacemos de la [2.96]:

$$\phi = \frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} - 1 = 0 \qquad [2.100]$$

derivando respecto de las tres variables tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{2x}{\sigma_1^2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{2y}{\sigma_2^2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{2z}{\sigma_3^2} \end{aligned}\right\} \qquad [2.101]$$

valores estos que, reemplazados en la [2.99], nos dan:

$$K = 2\sqrt{\frac{x^2}{\sigma_1^4} + \frac{y^2}{\sigma_2^4} + \frac{z^2}{\sigma_3^4}} \qquad [2.102]$$

que permite obtener los tres valores de los cosenos directores de e:

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{x}{\sigma_1^2\sqrt{\frac{x^2}{\sigma_1^4} + \frac{y^2}{\sigma_2^4} + \frac{z^2}{\sigma_3^4}}} \\ m &= \frac{y}{\sigma_2^2\sqrt{\frac{x^2}{\sigma_1^4} + \frac{y^2}{\sigma_2^4} + \frac{z^2}{\sigma_3^4}}} \\ n &= \frac{z}{\sigma_3^2\sqrt{\frac{x^2}{\sigma_1^4} + \frac{y^2}{\sigma_2^4} + \frac{z^2}{\sigma_3^4}}} \end{aligned}\right\} \qquad [2.103]$$

Pero como por construcción $\overline{OS} \parallel e$, dichos valores resultan ser los tres cosenos directores de $\overline{OS}$.

Si x, y, z son las coordenadas de T, los cosenos directores de $\overline{OT}$ serán:

$$\left.\begin{aligned} l' &= \frac{x}{\overline{OT}} \\ m' &= \frac{y}{\overline{OT}} \\ n' &= \frac{z}{\overline{OT}} \end{aligned}\right\} \qquad [2.104]$$

y finalmente, el coseno del ángulo $\overset{\measuredangle}{SOT}$ que forman los segmentos $\overline{OS}$ y $\overline{OT}$ entre sí:

$$\cos \overset{\measuredangle}{SOT} = ll' + mm' + nn' \qquad [2.105]$$

la que, una vez reemplazados los valores dados por la [2.103] y [2.104] se transforma en:

$$\cos \widehat{SOT} = \frac{\dfrac{x^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{y^2}{\sigma_2^2} + \dfrac{z^2}{\sigma_3^2}}{\overline{OT}\sqrt{\dfrac{x^2}{\sigma_1^4} + \dfrac{y^2}{\sigma_2^4} + \dfrac{z^2}{\sigma_3^4}}} \qquad [2.106]$$

Pero por ser $\overline{OS}$ normal al plano π:

$$\overline{OT} \cos \widehat{SOT} = \overline{OS} = \frac{\dfrac{x^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{y^2}{\sigma_2^2} + \dfrac{z^2}{\sigma_3^2}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{\sigma_1^4} + \dfrac{y^2}{\sigma_2^4} + \dfrac{z^2}{\sigma_3^4}}} \qquad [2.107]$$

Ahora bien, observando la [2.96] vemos que por ser el miembro izquierdo igual a la unidad, su raíz cuadrada también será unitaria, por lo que podemos escribir:

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = \sqrt{\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2}} \qquad [2.108]$$

o también:

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = \sqrt{\sigma_1^2\left(\frac{x^2}{\sigma_1^4}\right) + \sigma_2^2\left(\frac{y^2}{\sigma_2^4}\right) + \sigma_3^2\left(\frac{z^2}{\sigma_3^4}\right)} \qquad [2.109]$$

que reemplazada en [2.107] conduce a:

$$\overline{OS} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2\left(\dfrac{x^2}{\sigma_1^4}\right) + \sigma_2^2\left(\dfrac{y^2}{\sigma_2^4}\right) + \sigma_3^2\left(\dfrac{z^2}{\sigma_3^4}\right)}{\dfrac{x^2}{\sigma_1^4} + \dfrac{y^2}{\sigma_2^4} + \dfrac{z^2}{\sigma_3^4}}} \qquad [2.110]$$

Elevando al cuadrado las [2.103] y reemplazando en [2.110] llegamos finalmente a:

$$\overline{OS} = \sqrt{\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2} \qquad [2.111]$$

que es lo que queríamos demostrar.

2.9.2. Cuádrica directriz de tensiones

Hemos visto en 2.9.1 que el elipsoide de Lamé dá únicamente la tensión resultante, pero no la dirección del plano sobre el que actúa la misma. Para conocer la orientación de dicho plano, es necesario recurrir a construcciones auxiliares, una de las cuales es la denominada cuádrica directriz de tensiones, debida a Cauchy, y cuya ecuación es:

$$\frac{x^2}{\sigma_1} + \frac{y^2}{\sigma_2} + \frac{z^2}{\sigma_3} = \pm 1 \qquad [2.112]$$

La construcción es la siguiente:

Dada una dirección, la paralela a la misma trazada por el centro del elipsoide de Lamé determina en su intersección con éste un punto A (figura 2.3) y la longitud del segmento $\overline{OA}$ nos da el valor de la tensión ρ de dirección $\overline{OA}$. Supuesto dibujada la cuádrica directriz de tensiones con el mismo centro O, prolongando el radio vector $\overline{OA}$ hasta su intersección con aquella en A', el plano tangente en este punto a la cuádrica directriz será el plano sobre el que actúa ρ. Es decir que ρ y su plano se comportan como elementos conjugados en la cuádrica directriz.

Para justificar la construcción anterior bastará demostrar que el plano tangente en A' a la cuádrica directriz es paralelo al plano en que actúa ρ, recordando que este último y ρ son elementos conjugados.

Si x', y', z' son las coordenadas de A', la ecuación del plano tangente en dicho punto tiene por expresión:

$$\frac{xx'}{\sigma_1} + \frac{yy'}{\sigma_2} + \frac{zz'}{\sigma_3} = \pm 1 \qquad [2.113]$$

y la correspondiente al radio vector que define a A':

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} \qquad [2.114]$$

Por otra parte tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \rho_x &= \sigma_1 l \\ \rho_y &= \sigma_2 m \\ \rho_z &= \sigma_3 n \end{aligned}\right\} \qquad [2.115]$$

de donde:

$$\frac{\rho_x}{\sigma_1 l} = \frac{\rho_y}{\sigma_2 m} = \frac{\rho_z}{\sigma_3 n} = 1 \qquad [2.116]$$

Además, como A' pertenece al radio vector coincidente con ρ, resulta:

$$\frac{\rho_x}{x'} = \frac{\rho_y}{y'} = \frac{\rho_z}{z'} \qquad [2.117]$$

Dividiendo miembro a miembro la [2.116] por la [2.117]:

$$\frac{x'}{\sigma_1 l} = \frac{y'}{\sigma_2 m} = \frac{z'}{\sigma_3 n} \qquad [2.118]$$

Como el plano sobre el que actúa ρ pasa por el origen y los cosenos directores de su normal son l, m y n, su ecuación será:

$$x \cdot l + y \cdot m + z \cdot n = 0 \qquad [2.119]$$

Pero de la [2.118] vemos que existe proporcionalidad entre x'/σ_1 y l; y'/σ_2 y m, y z'/σ_3 y n, por lo que la [2.119] se transforma en:

$$\frac{x x'}{\sigma_1} + \frac{y y'}{\sigma_2} + \frac{z z'}{\sigma_3} = 0 \qquad [2.120]$$

expresión esta que nos dice que el plano definido por ella, que es el plano sobre el que actúa ρ, es paralelo al definido por la [2.113], que es el plano tangente a la cuadrática directriz de tensiones, con lo que queda justificada la construcción indicada.

Se hace notar que el miembro derecho de la [2.113] tiene dos signos. Cuando las tres tensiones principales son del mismo signo corresponde tomar el segundo miembro positivo, si son positivas, y negativo cuando son negativas, resultando en ambos casos la cuádrica un elipsoide. Si, en cambio, una o dos de las tensiones principales son negativas, deberán considerarse para el miembro derecho ambos signos, resultando así dos hiperboloides conjugados.

2.9.3. Cuádrica de tensiones de Cauchy

En 2.3 nos hemos ocupado de esta cuádrica, denominándola cuádrica indicatriz de tensiones. Volvemos ahora sobre ella a efectos de analizar en detalle los distintos casos que pueden presentarse.

La ecuación de esta cuádrica, también debida a Cauchy, referida a las direcciones principales es:

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2 = \pm 1 \qquad [2.121]$$

y goza de la propiedad de que la longitud del segmento $\overline{OA}$ definido por el centro de la cuádrica y un punto A de su superficie, intersección con ésta de la paralela trazada por O a una dirección dada, es inversamente proporcional a la

raíz cuadrada de la tensión normal que actúa sobre un plano que es normal a la dirección dada, figura 2.5, es decir:

$$\overline{OA} = \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \qquad [2.122]$$

Analizaremos a continuación los casos posibles en lo que respecta a las tensiones principales y al signo que corresponda tomar para el miembro derecho de la [2.121].

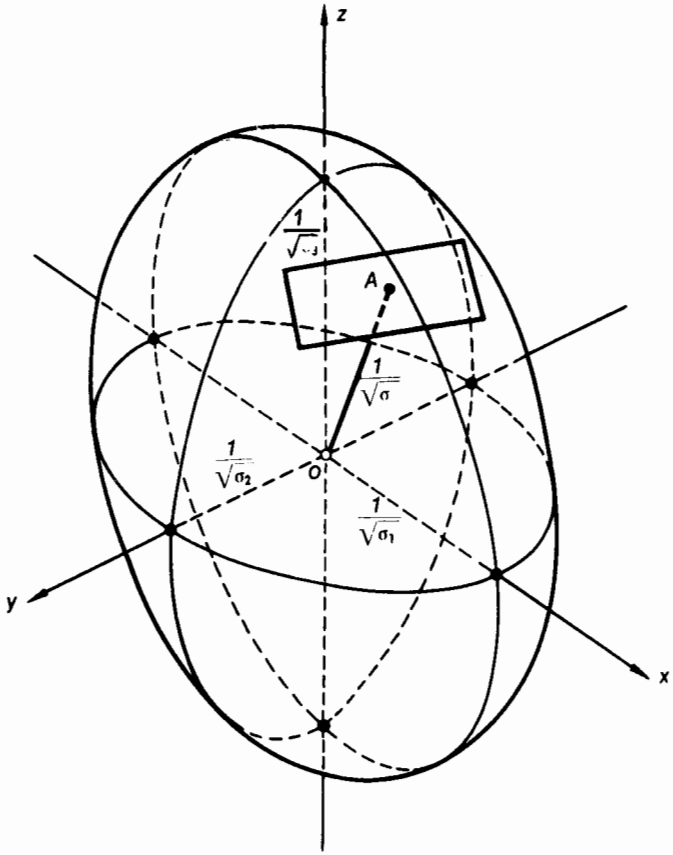


Fig. 2.5

a) $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3 > 0$. Las tres tensiones principales son positivas, es decir, de tracción. Corresponde en este caso tomar el signo positivo para el miembro

derecho, resultando la cuádrica un elipsoide, que puede ser de revolución en caso que dos de las tensiones principales sean iguales, o degenerar en una esfera si lo son las tres. Es evidente que en este caso *todas* las tensiones posibles son iguales y positivas y que no pueden existir planos de corte puro porque ello significaría $\sigma = 0$. Los semiejes del elipsoide valen en este caso $\pm 1/\sqrt{|\sigma_1|}$ $\pm 1/\sqrt{|\sigma_2|}$; $\pm\sqrt{|\sigma_3|}$.

b) $0 > \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$. Las tres tensiones principales son negativas, es decir de compresión, por lo que corresponde tomar en la [2.121] el signo negativo. En este caso, la cuádrica es también un elipsoide siendo válidas consideraciones análogas a las del caso (a).

c) $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 > 0 > \sigma_3$. Una de las tensiones principales es de compresión, es decir, negativa. En este caso pueden tomarse para el miembro derecho los dos signos. Si se adopta el positivo, la cuádrica es un hiperboloide de una napa, que se transforma en otro de dos napas cuando se elige el signo negativo, figura 2.6.

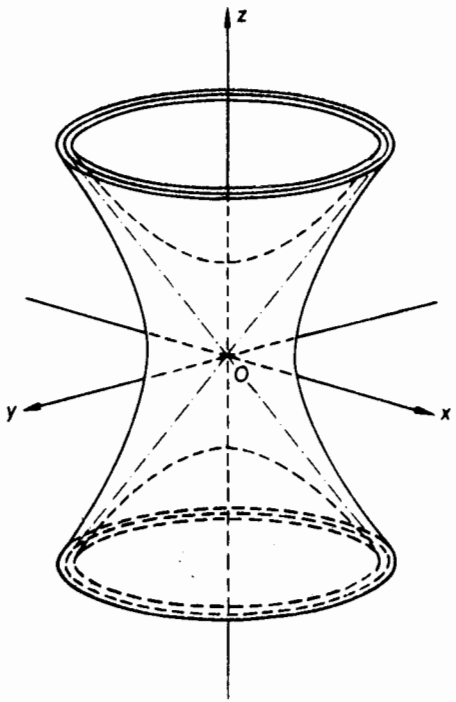


Fig. 2.6

Ambas cuádricas resultan ser asintóticas al cono de ecuación:

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2 = 0 \qquad [2.123]$$

Cuando el punto considerado tiende a ubicarse sobre el cono asintótico, $\overline{OA} \to \infty$ y en consecuencia:

$$\frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \to \infty \qquad [2.124]$$

lo que indica que $\sigma \to 0$. Ello significa que en los planos normales a las generatrices del cono la tensión normal es nula y en los mismos sólo existen tensiones tangenciales, es decir se trata de planos de corte o resbalamiento máximo.

Todos los puntos que se encuentran sobre el hiperboloide de dos napas definen planos normales al radio vector respectivo, a los que corresponden tensiones normales negativas, es decir de compresión, mientras que los planos que corresponden a puntos ubicados sobre el

hiperboloide de una napa, se encuentran solicitados por tensiones positivas o de tracción. En este caso si dos de las tensiones principales son iguales, los hiperboloides son de revolución

d) $\sigma_1 > 0 > \sigma_2 \geqslant \sigma_3$. Dos de las tensiones principales son negativas, es decir, de compresión. Es un caso análogo al anterior en que también se tienen dos hiperboloides, uno de una napa y el otro de dos, que resultan de tomar respectivamente, los signos negativo y positivo para el segundo miembro de la [2.121].

Los radios vectores que se apoyan sobre el hiperboloide de una napa definen planos sobre los que actúan tensiones normales de compresión (negativas), y los que lo hacen sobre el de dos napas, se refieren a planos con tensiones de tracción, positivas.

Análogamente, las generatrices del cono asintótico definen planos normales a las mismas que son planos de resbalamiento o corte máximo.

En el caso (c) el eje de los hiperboloides coincide con el eje z (dirección principal σ_3) mientras que en el que nos ocupa, lo es el eje x (dirección principal σ_1).

e) $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$; $\sigma_3 = 0$. Una tensión principal nula. Corresponde este caso al estado elástico plano y será analizado más adelante, en el capítulo correspondiente.

f) $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\sigma_3 \neq 0$. Dos tensiones principales nulas. Nos encontramos ante un estado elástico simple y será considerado al tratar en detalle este estado de tensión.

2.9.4. La circunferencia de Mohr para el estado elástico espacial

Las representaciones gráficas del estado tridimensional de tensión analizadas en los parágrafos anteriores, no resultan prácticas por tratarse de representaciones espaciales, lo que hace difícil y engorrosa su utilización. Nos ocuparemos ahora de una forma mucho más simple y expeditiva de representar el estado triple de tensión, debida a Otto Mohr, y que está expuesta en el capítulo V de sus *Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik*. La ventaja de la representación de Mohr reside en la circunstancia de ser una representación bidimensional de un problema de tres dimensiones.

Para la justificación del trazado de las circunferencias de Mohr correspondientes al estado elástico triple de tensión, seguiremos a Durelli, Phillips y Tsao, por considerar que la forma como encaran el problema, en el capítulo correspondiente de su *Analysis of Stress and Strain*, es una de las más simples y claras que es posible encontrar en la literatura sobre el tema.

Recordemos las expresiones que definen la tensión resultante ρ y la tensión normal σ en función de las tensiones principales. Ambas, conjuntamente con la ecuación de condición de los cosenos directores de una dirección dada, configuran el siguiente esquema:

$$\left.\begin{aligned} \sigma^2 + \tau^2 = \rho^2 &= \sigma_1^2\, l^2 + \sigma_2^2\, m^2 + \sigma_3^2\, n^2 \\ \sigma &= \sigma_1\, l^2 + \sigma_2\, m^2 + \sigma_3\, n^2 \\ 1 &= l^2 + m^2 + n^2 \end{aligned}\right\} \qquad [2.125]$$

El problema que queremos resolver es el de determinar la orientación de un plano al que corresponden las tensiones σ y τ, partiendo de las tensiones principales. Es decir que nuestras incógnitas serán l^2, m^2 y n^2. Llamando Δ el discriminante del sistema [2.125] tenemos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sigma_1^2\,(\sigma_2 - \sigma_3) - \sigma_2^2\,(\sigma_1 - \sigma_3) + \sigma_3^2\,(\sigma_1 - \sigma_2) \qquad [2.126]$$

y en consecuencia:

$$\left.\begin{aligned} l^2 &= \frac{\begin{vmatrix} \sigma^2 + \tau^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} \\ m^2 &= \frac{\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma^2 + \tau^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 & \sigma & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} \\ n^2 &= \frac{\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma^2 + \tau^2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} \end{aligned}\right\} \qquad [2.127]$$

Resolviendo los determinantes y simplificando se llega finalmente a:

$$\left.\begin{aligned} l^2 &= \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ m^2 &= \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ n^2 &= \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{aligned}\right\} \qquad [2.128]$$

Estas tres ecuaciones pueden escribirse en la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \tau^2 + \sigma^2 - \sigma(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\,\sigma_3 - l^2\,(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) = 0 \\ \tau^2 + \sigma^2 - \sigma(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_1\,\sigma_3 - m^2\,(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) = 0 \\ \tau^2 + \sigma^2 - \sigma(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\,\sigma_2 - n^2\,(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [2.129]$$

o también, luego de una serie de transformaciones

$$\left.\begin{aligned} \tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + l^2\,(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) \\ \tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + m^2\,(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) \\ \tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + n^2\,(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) \end{aligned}\right\} \qquad [2.130]$$

las que también pueden expresarse como sigue:

$$\left.\begin{aligned} \tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 &= \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 l^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 [1 - l^2] \\ \tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 &= \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 m^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 [1 - m^2] \\ \tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 &= \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 n^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 [1 - n^2] \end{aligned}\right\} [2.131]$$

Para una determinada terna de valores de las tensiones principales, la primera de las [2.131] representa una familia de circunferencias en el plano σ, τ, cuyo centro se encuentra sobre el eje σ a una distancia igual a $\frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)$ y donde l es un parámetro. Dicha familia esta limitada por las dos circunferencias que corresponden a los valores extremos que puede asumir l, que son 0 y 1, es decir:

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \qquad [2.132]$$

y

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 = \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 \qquad [2.133]$$

y cuyos radios son respectivamente $\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$ y $\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)$.

Las restantes ecuaciones [2.131] representan otras dos familias de circunferencias, tambien con el centro sobre el eje σ, limitadas por aquellas que, en cada caso, corresponden a los valores extremos de los parámetros m y n, y que, como en el caso analizado antes, son también 0 y 1. Las abscisas de los centros de ambas familias son $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$ para la segunda y $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ para la tercera. En cuanto a los radios de las circunferencias extremas, tenemos para la segunda familia $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ para $m = 0$ y $\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$ para $m = 1$, y para la tercera familia $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ y $\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ para $n = 0$ y $n = 1$ respectivamente.

En la figura 2.7 hemos representado por sus circunferencias extremas las tres familias, referidas a un sistema de ejes coordenados σ y τ.

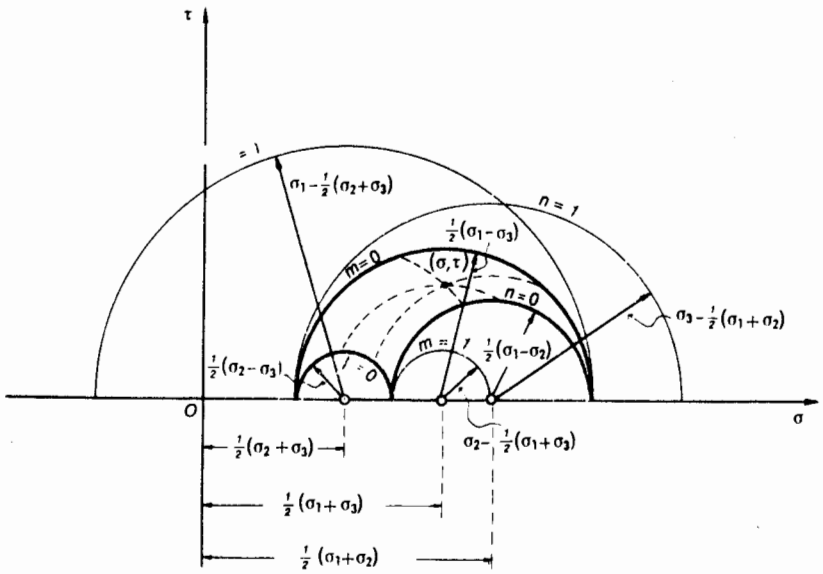


Fig. 2.7

El punto representativo de las tensiones normales y tangenciales que corresponden a un plano dado debe caer sobre circunferencias pertenecientes a cada una de las tres familias (de acuerdo con los valores de los tres parámetros l, m y n que definen el plano considerado) comprendidas entre las circunferencias límites,

es decir debe ser un punto del interior o del contorno del triángulo curvilíneo sombreado en figura 2.7, y sobre el mismo deben cortarse las tres circunferencias que corresponden a los valores de los parámetros l, m y n relativos al plano considerado.

Las tres circunferencias que delimitan al triángulo curvilíneo se denominan *circunferencias fundamentales* o *principales* y se corresponden en el elipsoide de Lamé con las tres elipses principales obtenidas como intersecciones de los planos principales con el elipsoide.

La construcción de Mohr nos permite determinar las tensiones σ y τ que actúan en un plano cualquiera, cuyos cosenos directores son l, m y n, o inversamente, determinar el plano que corresponde a dos tensiones dadas.

Dado un plano definido por su normal e, de cosenos directores l, m y n, corresponden al mismo tres circunferencias definidas por las ecuaciones [2.130] o [2.131] para dichos valores particulares de los parámetros. Los radios de las tres circunferencias están dados por las raíces cuadradas de los segundos miembros de la [2.130]:

$$\left.\begin{aligned} R_{1,2} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + n^2\,(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \\ R_{1,3} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + m^2\,(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ R_{2,3} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + l^2\,(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \end{aligned}\right\} \qquad [2.134]$$

Dichas tres circunferencias se cortan sobre un punto P, figura 2.8, cuyas coordenadas σ, τ corresponden respectivamente a las tensiones normal y tangencial que actúan sobre el plano dado, correspondiendo la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos σ y τ al vector representativo de la tensión resultante ρ. Sin embargo, no es necesario calcular los radios $R_{1,2}$, $R_{1,3}$ y $R_{2,3}$ para trazar las tres circunferencias que determinan el punto P que define las trazas correspondientes al plano dado. El punto $P(\sigma, \tau)$ puede encontrarse en forma gráfica, como veremos a continuación.

Supongamos trazadas las tres circunferencias fundamentales, figura 2.9, con diámetros $\sigma_1 - \sigma_3$; $\sigma_1 - \sigma_2$ y $\sigma_2 - \sigma_3$. En correspondencia con los puntos representativos de σ_1, σ_2 y σ_3 levantemos tres normales al eje σ, que representen respectivamente los ejes x, y y z. Los datos del problema son los ángulos α, β y γ que forma la normal e al plano considerado con los ejes coordenados y cuyos cosenos directores son l, m y n. Por C tracemos una recta que forme con x el ángulo α. Dicha recta cortará la circunferencia fundamental σ_1, σ_3 en E y a

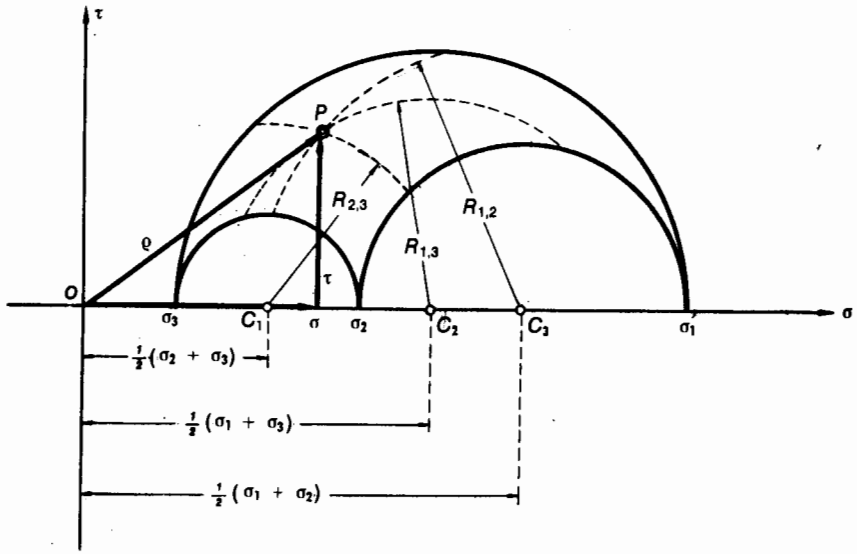


Fig. 2.8

la σ_1, σ_2 en E'. Con centro en C_1 y radio $\overline{C_1E}$ trazamos un arco de circunferencia que pasará por E y E'. Análogamente, por A trazamos una recta que forme con z el ángulo γ. Esta recta cortará en F la circunferencia σ_1, σ_3 y en F' a la σ_2, σ_3. Trazando con centro en C_3 y radio $\overline{C_3F}$ el arco de circunferencia $\widehat{FF'}$, este corta al arco $\widehat{EE'}$ en un punto P. Demostraremos a continuación que las coordenadas de este punto son σ y τ y que la longitud del segmento $\overline{OP}$ es precisamente el valor de la tensión resultante ρ.

En el triángulo AEC tenemos $\overline{AC} = \sigma_1 - \sigma_3$ y $\overline{EC} = \overline{AC}$ sen $\alpha =$ $= (\sigma_1 - \sigma_3)$ sen α. Análogamente, en el triángulo ECC_1 resulta:

$$\overline{C_1C} = \overline{OC} - \overline{OC_1} = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \qquad [2.135]$$

$$\overline{C_1E}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{C_1C}^2 - 2 \cdot \overline{EC} \cdot \overline{C_1C} \text{ sen } \alpha. \qquad [2.136]$$

Teniendo en cuenta que $C_1E = C_1P$, reemplazando valores llegamos a:

$$\overline{C_1P}^2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \text{ sen}^2\alpha + \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 - 2(\sigma_1 - \sigma_3)\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 \text{sen}^2\,\alpha \qquad [2.137]$$

La [2.137], luego de algunas transformaciones algebraicas, puede escribirse como sigue:

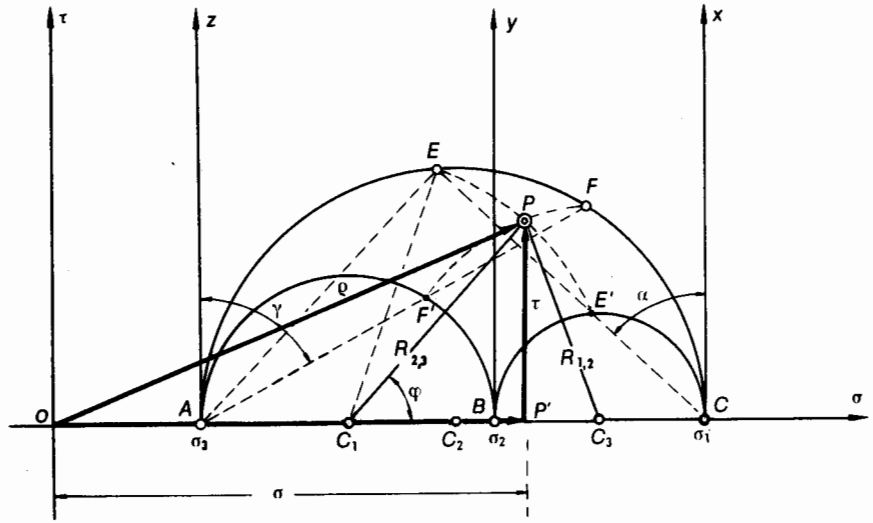


Fig. 2.9

$$\overline{C_1P}^2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{4} + (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)\, l^2. \qquad [2.138]$$

Consideraciones análogas nos conducirían a que:

$$\overline{C_3P}^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4} + (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)\, n^2 \qquad [2.139]$$

y también a (no representado en figura 2.9):

$$\overline{C_2P}^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{4} + (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)\, m^2. \qquad [2.140]$$

Si comparamos las expresiones anteriores con las [2.134], vemos que son las mismas, es decir:

$$\overline{C_2P} = R_{1,3}; \quad \overline{C_3P} = R_{1,2} \quad \text{y} \quad \overline{C_1P} = R_{2,3} \qquad [2.141]$$

o sea, que las tres circunferencias trazadas en la forma indicada se cortan sobre un punto P, cuyas coordenadas son σ y τ.

Por otra parte, si hacemos:

$$\left.\begin{aligned} \overline{C_3C_1} &= d_1 = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \\ \overline{OC_1} &= d_2 = \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2} \end{aligned}\right\} \qquad [2.142]$$

en el triángulo C_1PC_3 resulta:

$$R_{1,2}^2 = R_{2,3}^2 + d_1^2 - 2\,R_{2,3}\,d_1\,\cos\varphi \qquad [2.143]$$

en el OPC_1:

$$\left.\begin{aligned} \overline{OP}^2 &= \overline{OC_1}^2 + R_{2,3}^2 + 2\,R_{2,3}\,\overline{OC_1}\,\cos\varphi = \\ &= d_2^2 + R_{2,3}^2 + 2\,d_2\,R_{2,3}\,\cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad [2.144]$$

De la [2.143]:

$$\cos\varphi = \frac{R_{2,3}^2 + d_1^2 - R_{1,2}^2}{2d_1\,R_{2,3}} \qquad [2.145]$$

y reemplazando en [2.144]:

$$\overline{OP}^2 = d_2^2 + R_{2,3}^2 + d_2\,\frac{R_{2,3}^2 + d_1^2 - R_{1,2}^2}{d_1} \qquad [2.146]$$

Multiplicando ambos miembros por d_1 y factoreando:

$$d_1\,\overline{OP}^2 = (d_1 + d_2)(R_{2,3}^2 + d_1\,d_2) - d_2\,R_{1,2}^2 \qquad [2.147]$$

Substituyendo d_1, d_2, $R_{2,3}^2$ y $R_{1,2}^2$ por sus valores dados por las [2.134] y [2.142] se llega finalmente a:

$$\overline{OP}^2 = \sigma_1^2\,l^2 + \sigma_2^2\,m^2 + \sigma_3^2\,n^2 \qquad [2.148]$$

es decir:

$$\overline{OP}^2 = \rho^2 \qquad [2.149]$$

Además:

$$OP' = \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2} + R_{2,3}\,\cos\varphi = \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2} + \frac{R_{2,3}^2 + d_1^2 - R_{1,2}^2}{2d_1} \qquad [2.150]$$

de la que se obtiene finalmente por reemplazo de valores:

$$\overline{OP'} = \sigma_1\,l^2 + \sigma_2\,m^2 + \sigma_3\,n^2 \qquad [2.151]$$

es decir:

$$\overline{OP'} = \sigma \qquad [2.152]$$

lo que comprueba la corrección de la construcción.

De las tres circunferencias fundamentales, se acostumbra a llamar "Circunferencia de Mohr" a la mayor, es decir la que tiene por diámetro $\sigma_1 - \sigma_3$ y que corresponde al estado de tensión en el haz de planos que tiene por eje la dirección de la tensión principal intermedia σ_2, siendo la abscisa de su centro $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$. Esta circunferencia goza de la propiedad que los infinitos puntos P representativos de tensiones, son interiores a la misma o caen sobre ella. Observando la figura 2.10 vemos que para cada circunferencia fundamental existe un punto P al que corresponde la máxima tensión tangencial relativa.

Dichos puntos se encuentran sobre la vertical del centro de cada circunferencia y sus valores son:

$$\left.\begin{aligned} \tau' &= \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2} \\ \tau'' &= \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} \\ \tau''' &= \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \end{aligned}\right\} \qquad [2.153]$$

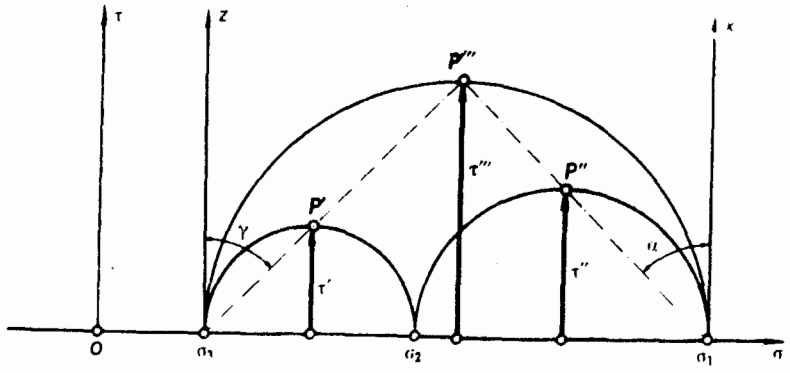


Fig. 2.10

De los tres valores, el mayor, que corresponde a $\tau_{máx.}$ es el tercero, es decir:

$$\tau_{máx.} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \qquad [2.154]$$

que como puede observarse, es *independiente* de la tensión intermedia σ_2 y

ocurrirá en planos inclinados a 45° con respecto de los planos principales. Para dichos planos el valor de la tensión normal es:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \qquad [2.155]$$

cosa que ya habíamos visto anteriormente.

La construcción de Mohr es completa en sí, pues aparte de permitirnos calcular la intensidad de la tensión resultante que actúa sobre un plano dado, permite además establecer su dirección, sobre la base de los ángulos α', β' y γ' que forma esta última con respecto a las direcciones principales.

Si llamamos l', m' y n' a los cosenos directores de la dirección de ρ respecto de las tres direcciones principales y recordamos la [1.5] que establece la reciprocidad entre las proyecciones de las tensiones que actúan en dos caras, podemos escribir:

$$\left.\begin{aligned} \rho l' &= \sigma_1 l \\ \rho m' &= \sigma_2 m \\ \rho n' &= \sigma_3 n \end{aligned}\right\} \qquad [2.156]$$

Consideremos ahora la figura 2.11, donde se han representado las tres circunferencias fundamentales correspondientes a un estado de tensión definido por sus tres tensiones principales σ_1, σ_2 y σ_3.

Para un plano determinado por los tres cosenos directores l, m y n de su normal exterior, el punto representativo es P y σ, τ y ρ las correspondientes tensiones normal, tangencial y resultante, respectivamente.

Tracemos por O una circunferencia de diámetro $\overline{OP}$ y prolonguemos las tres rectas que definen a P y forman los ángulos α, β y γ con las direcciones principales. Con centro en O tracemos ahora tres arcos de circunferencia que resulten tangentes en A', B' y C' a las tres rectas mencionadas y llamemos A'', B'' y C'' a las intersecciones de dichas circunferencias con la de diámetro $\overline{OP}$.

Demostraremos a continuación que los ángulos $\widehat{A''OP}$; $\widehat{B''OP}$ y $\widehat{C''OP}$ son respectivamente iguales a α', β' y γ'.

En el triángulo $AA'O$, rectángulo en A' es:

$$\widehat{A'OA} = \alpha \qquad [2.157]$$

por ser sus lados respectivamente normales a las rectas que forman el ángulo α, y en consecuencia:

$$\overline{OA'} = \overline{OA} \cos \alpha = \sigma_1 l \qquad [2.158]$$

y, en virtud de la primera de las [2.156]:

$$\overline{OA'} = \rho l' \qquad [2.159]$$

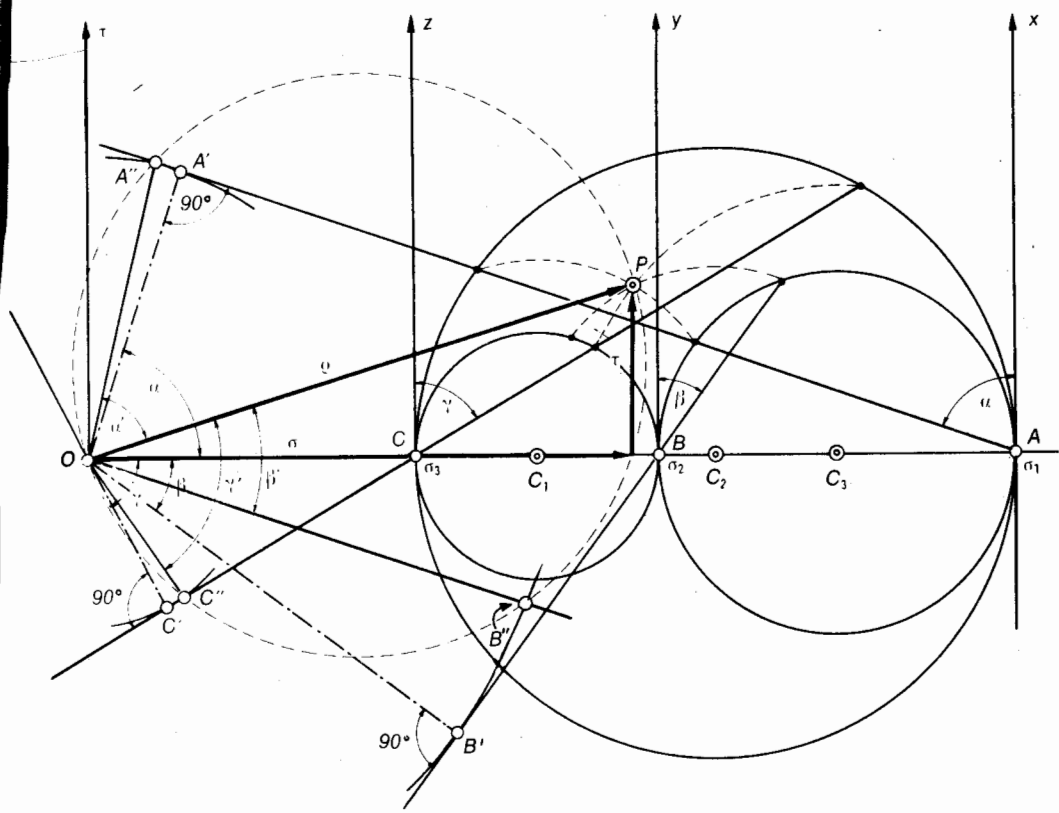


Fig. 2.11

Si consideramos ahora el triángulo $PA''O$, rectángulo en A'' por ser inscripto en una semicircunferencia, resulta:

$$\overline{OA''} = \rho \cos \widehat{A''OP} \qquad [2.160]$$

y como $OA'' = OA'$ por construcción, igualando las [2.159] y [2.160] se tiene

$$\cos \widehat{A''OP} = l' \qquad [2.161]$$

y en consecuencia:

$$\widehat{A''OP} = \alpha' \qquad [2.162]$$

Por consideraciones análogas, llegaríamos a que:

$$\left.\begin{aligned} \widehat{B''OP} &= \beta' \\ \widehat{C''OP} &= \gamma' \end{aligned}\right\} \qquad [2.163]$$

Los tres ángulos α', β' y γ' están ligados por la relación $l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1$ por lo que les corresponden en las circunferencias, construcciones similares a las relativas a los ángulos α, β y γ. De ahí que exista un punto P' ligado a los mismos, correspondiente con el punto P, ligado a α, β y γ. Ambos puntos se denominan *puntos asociados* y suministran toda la información necesaria a la solución del problema, a saber:

a) los ángulos que forma la normal exterior al plano dado con las direcciones principales;

b) los ángulos que forma la dirección de la tensión resultante con las direcciones principales;

c) la intensidad de la tensión resultante y de sus componentes normal y tangencial.

2.9.5. Estado de tensión correspondiente al haz de planos cuyo eje es una dirección principal. Estudio gráfico

Supongamos, figura 2.12, un haz de planos que pase por el punto $A \equiv O$ y que tenga por eje la dirección principal 2. Dichos planos resultan en consecuencia

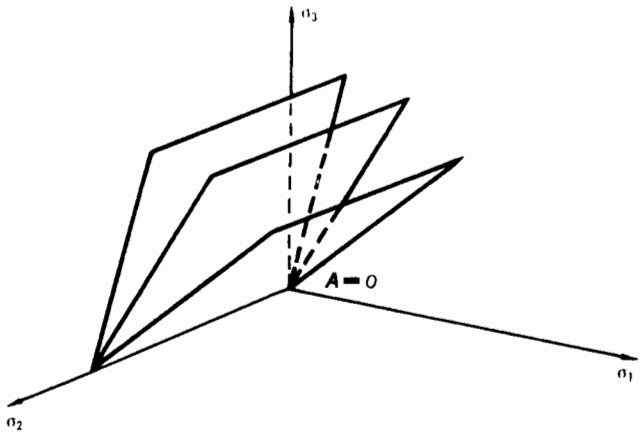


Fig. 2.12

normales al plano principal definido por las direcciones de σ_1 y σ_3, y como en este último, por ser plano principal, no hay tensiones tangenciales, en virtud del teorema de Cauchy las tensiones resultantes de los planos del haz serán paralelas al plano principal $\sigma_1 - \sigma_3$. Por otra parte, para uno cualquiera de los planos, su ángulo director respecto de σ_2 es igual a 90° y consecuentemente $m = 0$.

En este caso particular el lugar geométrico de los puntos N que definen las tensiones en los planos del haz, es la circunferencia fundamental σ_1, σ_3.

Para hallar el punto N, representativo de las tensiones que ocurren en un plano π, figura 2.13, de normal exterior e bastará trazar por C la recta e que forma con la dirección $x \equiv \sigma_1$ el ángulo director α y que corta en N a la circunferencia. Las coordenadas de N, $\overline{ON'}$ y $\overline{NN'}$ representan, respectivamente, las tensiones normal σ y tangencial τ que actúan en el plano π de normal exterior e. Las trazas del haz de planos de eje σ_2 forman el haz de rectas de centro C.

Supongamos ahora que por B llevamos una paralela a la *verdadera* dirección de σ_1 y por C una normal a la misma, que coincidirá con la traza del plano principal π_1 en que actúa σ_1. Ambas rectas se cortarán sobre la circunferencia en un punto P, denominado *primer polo de Mohr*. Este punto es el centro de la radiación de rectas que constituyen las trazas del haz de planos analizados.

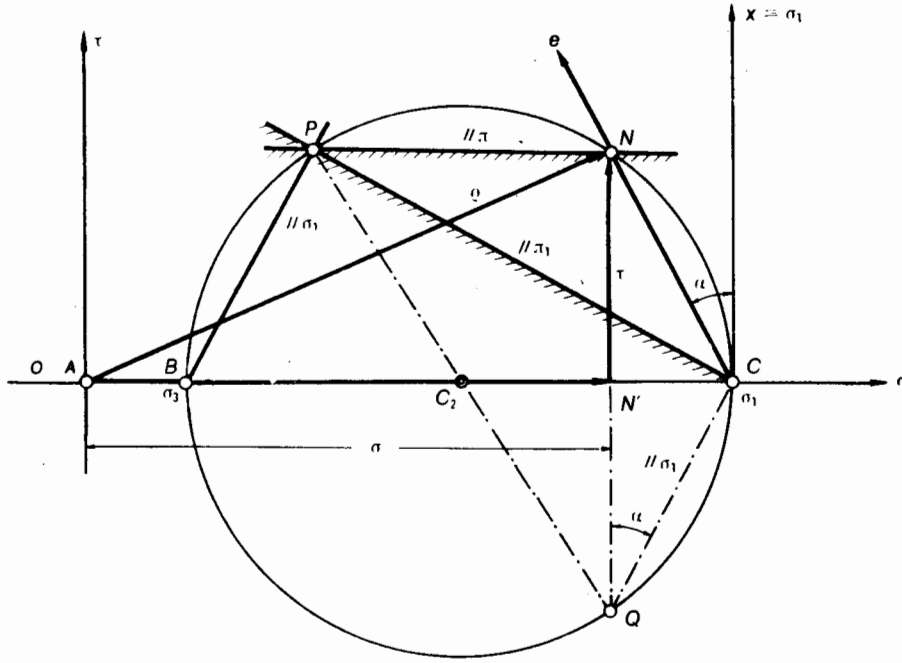


Fig. 2.13

En consecuencia, si por P trazamos una paralela a la traza de uno de los planos considerados, el π por ejemplo, la misma cortará a la circunferencia en N, cuyas coordenadas corresponden a las tensiones normal y tangencial que actúan en el plano π.

Para demostrarlo, consideremos el punto Q, diametral de P. Uniendo Q con N y C, resulta el ángulo $\overset{\measuredangle}{CQN}$ inscripto en el arco CN y en consecuencia igual a α, por ser este último semiinscripto en el mismo arco de la misma circunferencia. En consecuencia, como QC es paralela a la verdadera dirección de σ_1, NQ resulta ser la dirección de la normal e del elemento plano considerado, y como $\overset{\measuredangle}{PNQ}$ es recto en N por estar inscripto en una semicircunferencia, resulta $PN \perp NQ$, es decir que PN es paralela a la traza de π.

Para completar el problema, faltaría solamente determinar la dirección de la tensión resultante, con respecto a la traza del plano π. Ello será objeto de un estudio detallado al analizar el estado elástico plano, en el capítulo correspondiente, ya que el análisis que hemos efectuado corresponde, en realidad, a un estado elástico plano.

2 . 10 . El tensor de tensiones

Las ecuaciones [2.1] definen el estado de tensión en un punto.

Si disponemos las nueve coordenadas (coeficientes de los tres cosenos directores) en forma matricial:

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad [2.164]$$

obtenemos la representación de una magnitud denominada *tensor de tensión*, cuyas nueve componentes son las nueve componentes de la tensión ρ, y que designaremos T.

Haremos a continuación algunas consideraciones sobre operaciones con tensores, limitándonos a las estrictamente necesarias para la comprensión de los desarrollos ulteriores.

Si se consideran dos estados de tensión y se los superpone, las tensiones resultantes en los planos del triedro coordenado se obtienen como sumas geométricas de las tensiones correspondientes a los estados que se suman, lo que equivale a sumar algebraicamente las componentes de tensión según los ejes coordenados. Como cada estado de tensión está representado por un tensor, se sigue que

la suma de dos tensores será un nuevo tensor cuyas componentes serán iguales a la suma de las componentes correspondientes de ambos tensores, por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix} \qquad [2.165]$$

Análogamente, será posible descomponer un tensor en otros dos, lo que constituye la operación inversa de la anterior, existiendo en este caso infinitas soluciones.

Damos a continuación un ejemplo de descomposición que presenta interés práctico:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{13}+a_{31}) \\ \frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}) & a_{22} & \frac{1}{2}(a_{23}+a_{32}) \\ \frac{1}{2}(a_{13}+a_{31}) & \frac{1}{2}(a_{23}+a_{32}) & a_{33} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(a_{12}-a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{13}-a_{31}) \\ -\frac{1}{2}(a_{12}-a_{21}) & 0 & \frac{1}{2}(a_{23}-a_{32}) \\ -\frac{1}{2}(a_{13}-a_{31}) & -\frac{1}{2}(a_{23}-a_{32}) & 0 \end{bmatrix} \qquad [2.166]$$

En el caso indicado el primer tensor componente se denomina *simétrico*, por existir simetría de sus términos con respecto a la diagonal principal, y el segundo, *antimétrico*, por cuanto los términos simétricamente dispuestos tienen el mismo valor absoluto pero signo contrario. Simbólicamente, la ecuación anterior puede escribirse:

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_s + \mathrm{T}_a \qquad [2.167]$$

Si llamamos a_0 al promedio de los términos de la diagonal principal de un tensor simétrico, es decir:

$$a_0 = \frac{(a_{11}+a_{22}+a_{33})}{3} \qquad [2.168]$$

es posible efectuar la siguiente descomposición, de interés también en las aplicaciones prácticas:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} - a_0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - a_0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - a_0 \end{bmatrix} \qquad [2.169]$$

El primer tensor componente se denomina *tensor esférico* y el segundo *tensor desviador.*

Volviendo ahora al tensor de tensiones tenemos:

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad [2.170]$$

que, si lo referimos a una terna de direcciones principales, se transforma en

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \qquad [2.171]$$

Descompongamos ahora el tensor de tensiones [2.170] en un tensor esférico y otro desviador, lo que siempre es posible por ser el tensor de tensiones simétrico. Tendremos así:

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix} \qquad [2.172]$$

en el que:

$$\sigma_0 = \tfrac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \tfrac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \tfrac{1}{3} J_1 \qquad [2.173]$$

siendo J_1 el primer invariante de tensión del estado elástico triple visto en 2.7. El tensor esférico corresponde a un estado esférico de tensión, denominado así por cuanto las componentes de tensión no cambian para una rotación cualquiera de los ejes.

El segundo tensor, el desviador, cuando los ejes coordenados coinciden con direcciones principales, toma la forma:

$$T_D = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_0 \end{bmatrix} \qquad [2.174]$$

El tensor desviador corresponde a un estado de corte puro, es decir, sin tensiones normales. Puede demostrarse que es condición necesaria y suficiente para que un estado de tensión sea de corte puro que el primer invariante sea nulo, es decir $J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0$. Para el tensor desviador de la [2.172], el primer invariante tiene por expresión:

$$\begin{aligned} J_1'' &= (\sigma_x - \sigma_0) + (\sigma_y - \sigma_0) + (\sigma_z - \sigma_0) = \\ &= J_1 - 3\sigma_0 \end{aligned} \qquad [2.175]$$

pero como $\sigma_0 = \frac{1}{3} J_1$ resulta:

$$J_1'' = J_1 - 3 \times \frac{1}{3} J_1 = 0 \qquad [2.176]$$

es decir, que el estado de tensión definido por el tensor [2.174] es un estado de corte puro.

El tensor esférico tiene tres invariantes que son, teniendo en cuenta las [2.76]:

$$\left.\begin{aligned} J_1' &= 3\sigma_0 \\ J_2' &= 3\sigma_0^2 \\ J_3' &= \sigma_0^3 \end{aligned}\right\} \qquad [2.177]$$

y los correspondientes al tensor desviador:

$$\left.\begin{aligned} J_1'' &= 0 \\ J_2'' &= -\frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] \\ J_3'' &= \frac{1}{27}\left[(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)\right] \end{aligned}\right\} \qquad [2.178]$$

3. EL ESTADO ELÁSTICO DOBLE O PLANO

3 . 1 . Tensiones en un plano cualquiera

En el presente capítulo nos ocuparemos del estudio del estado elástico plano, doble o biaxial.

En 1.3 definimos el estado elástico doble o plano como aquel estado elástico para el cual, al variar el plano considerado la tensión resultante se mantenía paralela a un plano determinado. Supongamos que dicho plano sea el x, y; en tal caso las expresiones [2.1] de las componentes de la tensión resultante ρ se transforman en:

$$\left.\begin{aligned} \rho_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m \\ \rho_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m \end{aligned}\right\} \qquad [3.1]$$

por cuanto, para este estado elástico se cumple que:

$$\left\{ \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0 \right. \qquad [3.2]$$

La [2.7], que establecía el valor de σ en función de las componentes ρ_x, ρ_y y ρ_z, al anularse ρ_z, se reduce a:

$$\sigma = \rho_x l + \rho_y m \qquad [3.3]$$

y teniendo en cuenta las [3.1]:

$$\sigma = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + 2\tau_{xy} lm \qquad [3.4]$$

Ahora bien, para el estado elástico plano el tetraedro elemental que nos sirve de figura de análisis, se transforma en un prisma triangular de espesor unitario, con dos caras paralelas al plano x, y, y una inclinada normal a dicho plano, esta última unitaria, figura 3.1.

Razones prácticas hacen que, para el estado elástico doble, convenga substituir $\cos\beta$ por el seno de su complemento, es decir:

$$\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha \qquad [3.5]$$

con lo que la [3.4] se transforma en:

$$\sigma = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \operatorname{sen}^2\alpha + 2\tau_{xy} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \qquad [3.6]$$

y además, utilizar el ángulo que forman las caras en lugar del de sus normales.

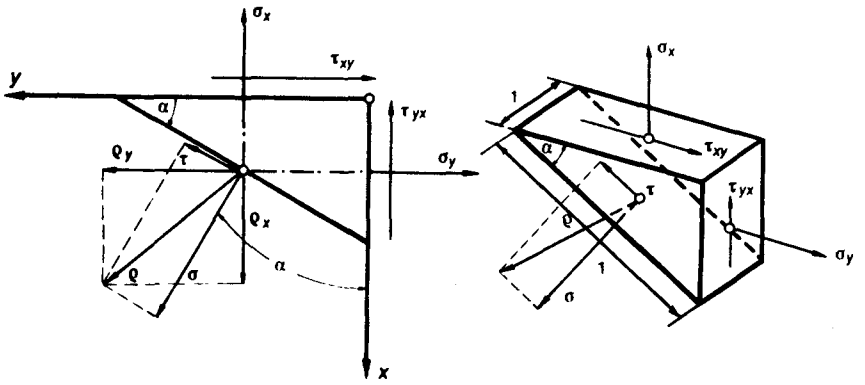


Fig. 3.1

Veamos ahora la expresión de τ. Podríamos deducirla recordando que

$$\tau = \sqrt{\rho^2 - \sigma^2} \qquad [3.7]$$

pero, razones de simplicidad hacen preferible seguir el camino siguiente:

Utilizaremos en lo sucesivo la siguiente convención de signos para las tensiones

a) *Tensiones normales.* Diremos que una tensión normal es positiva si es de tracción, y negativa cuando lo es de compresión. En el primer caso el vector representativo estará dirigido hacia afuera de la cara considerada, y en el segundo, hacia el interior.

b) *Tensiones tangenciales.* Admitiremos como positivas, aquellas tensiones tangenciales cuyo sentido sea tal que produzcan un momento positivo con respecto a un punto ubicado en el interior del prisma, y negativas las que tengan momento negativo. Así en el caso de figura 3.1 son positivas, σ, τ, σ_x, σ_y, y τ_{xy}, mientras que τ_{yx} es negativa.

Sentado lo anterior, recordemos que τ es la proyección de ρ sobre el plano de la sección y, teniendo en cuenta que la proyección de ρ es igual a la suma de las proyecciones de sus componentes ρ_x y ρ_y, podemos escribir:

$$\tau = \rho_y \cos\alpha - \rho_x \operatorname{sen}\alpha \qquad [3.8]$$

y reemplazando ρ_x y ρ_y por sus valores de la [3.1]:

$$\tau = \tau_{xy} \cos^2\alpha - \tau_{xy} \operatorname{sen}^2\alpha + \sigma_y \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha - \sigma_x \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \qquad [3.9]$$

$$\tau = \tau_{xy} \cos 2\alpha - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} (\operatorname{sen} 2\alpha) \qquad [3.10]$$

En consecuencia, las dos ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \operatorname{sen}^2\alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \\ \tau &= \tau_{xy} \cos 2\alpha + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \operatorname{sen} 2\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad [3.11]$$

nos definen las tensiones normal y tangencial que ocurren en un plano que forma un ángulo α con el plano en que actúa σ_x. Es evidente que al variar el plano variarán ambas tensiones, y lógicamente, existirán planos para los cuales σ y τ alcanzarán máximos y mínimos.

3.2 Tensiones y planos principales

Interesa precisamente conocer el valor de las tensiones máximas y mínimas y la orientación del plano en que ocurren las mismas.

Para ello consideremos la primera de las [3.11] y derivemos con respecto a α. Tendremos así:

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = -2\sigma_x \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + 2\sigma_y \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha \qquad [3.12]$$

Igualando a cero la derivada, obtendremos la expresión de una función de un cierto ángulo α_1, que corresponde a un plano para el que se cumple la [3.12]. Sacando factor común $\operatorname{sen} 2\alpha_1$, se tiene:

$$\operatorname{sen} 2\alpha_1 (\sigma_y - \sigma_x) + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha_1 = 0 \qquad [3.13]$$

de donde transponiendo términos y multiplicando por -1:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad [3.14]$$

Podemos llegar a la misma expresión sobre la base de las consideraciones siguientes:

El valor máximo (mínimo) de la tensión normal, ocurre para aquellos planos en que τ se anula. En consecuencia, si hacemos la segunda de las [3.11] igual

a cero, y despejamos el valor de tg 2α llegamos a una expresión idéntica a la [3.14].

Volviendo a esta última fórmula, vemos que existen dos valores del ángulo $2\alpha_1$, que difieren entre sí de π y que satisfacen la ecuación [3.14]. En consecuencia, existirán dos valores de α_1, que difieren de $\pi/2$ y que también satisfacen la ecuación. Esos dos ángulos α_1 y $\alpha_1 + (\pi/2)$ corresponden a dos planos ortogonales que son los planos principales.

Veamos ahora el valor de dichas tensiones principales. Para las caras principales, por ser nulas las tensiones tangenciales, las [3.1] se transforman en:

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \sigma_i l \\ p_y &= \sigma_i m \end{aligned}\right\} \qquad [3.15]$$

y reemplazando estos valores en las [3.1]:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_i l &= \sigma_x l + \tau_{yx} m \\ \sigma_i m &= \tau_{xy} l + \sigma_y m \end{aligned}\right\} \qquad [3.16]$$

o también:

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_i) l + \tau_{yx} m &= 0 \\ \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma_i) m &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [3.17]$$

Para que las [3.17] tengan soluciones distintas de la trivial de l y m nulos, es necesario que el determinante de sus coeficientes sea nulo:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i \end{vmatrix} = 0 \qquad [3.18]$$

es decir:

$$(\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2 = 0 \qquad [3.19]$$

o, lo que es lo mismo:

$$\sigma_i^2 - \sigma_i (\sigma_x + \sigma_y) + (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0. \qquad [3.20]$$

Ecuación de segundo grado que resuelta nos da los valores de σ_i que corresponden a las dos tensiones principales σ_1 y σ_2:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x + \sigma_y)^2}{4} - (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2)} \qquad [3.21]$$

y finalmente:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} \qquad [3.22]$$

es decir:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} \qquad [3.23]$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} \qquad [3.24]$$

Si reemplazamos en la expresión [3.10] de τ el valor de tg $2\alpha_1$, dado por la [3.14], poniendo sen $2\alpha_1$ y cos $2\alpha_1$ en función de tg $2\alpha_1$:

$$\tau = \tau_{xy} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_1}} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_1}} \qquad [3.25]$$

$$\tau = \tau_{xy} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_1}}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_1} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_1 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_1}}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_1} \qquad [3.26]$$

$$\tau = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_1}}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_1} \left[\tau_{xy} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right] = 0 \qquad [3.27]$$

es decir, que llegamos a lo que ya sabíamos: que las tensiones tangenciales en los planos principales son nulas.

3.3. Máximas tensiones tangenciales

Determinaremos a continuación la orientación de los planos en que ocurren las máximas tensiones tangenciales y los valores que adquieren las mismas.

Derivando la [3.10] respecto de α:

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = -2\tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha - (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha \qquad [3.28]$$

e igualando a cero para un determinado valor $\alpha = \alpha_2$, por transposición de términos resulta:

$$-2\tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha_2 = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha_2 \qquad [3.29]$$

de donde:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_2 = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\,\tau_{xy}} \qquad [3.30]$$

Existen dos ángulos $2\alpha_2$ que difieren de π y que satisfacen la ecuación y en consecuencia dos ángulos α_2 que difieren de $\pi/2$, que lógicamente la satisfacen. Los ángulos α_2 y $\alpha_2 + \pi/2$ definen dos planos ortogonales que son los planos de corte máximo. Para determinar el valor que en ellos adquiere τ, ponemos la [3.10] en función de tg $2\alpha_2$:

$$\tau_{\max.} = \tau_{xy}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_2}} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_2}}\,. \qquad [3.31]$$

Reemplazando tg $2\alpha_2$ por su valor de la [3.30]:

$$\tau_{\max.} = \left[\tau_{xy} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4\tau_{xy}}\right]\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4\tau_{xy}^2}}} \qquad [3.32]$$

$$\tau_{\max.} = \left[\tau_{xy} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4\tau_{xy}}\right]\frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \qquad [3.33]$$

$$\tau_{\max.} = \frac{2\tau_{xy}^2}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \qquad [3.34]$$

Multiplicando y dividiendo el primer término del segundo miembro por 2, racionalizando el denominador y simplificando llegamos a:

$$\tau_{\max.} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}\,, \qquad [3.35]$$

como expresión de las tensiones tangenciales máxima y mínima. El doble signo indica que en una cara la tensión es positiva (máxima) y en la cara ortogonal, de acuerdo con el teorema de Cauchy, negativa (mínima).

Si comparamos las expresiones [3.14] y [3.30] vemos que se cumple:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha_2}\,, \qquad [3.36]$$

o, lo que es lo mismo

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 = -1. \qquad [3.37]$$

Esta expresión indica que el par de planos ortogonales α_1 es bisector del par

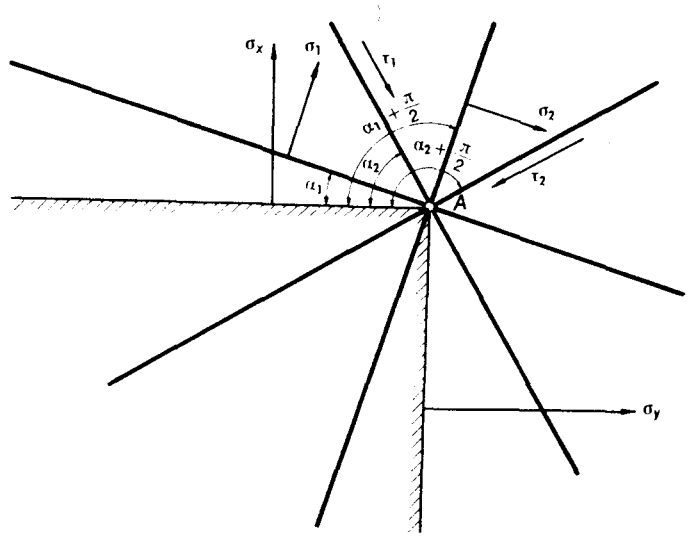


Fig. 3.2

de planos α_2. En otras palabras, los planos principales se encuentran orientados a 45° con respecto de los planos en los que ocurren las tensiones tangenciales máximas, lo que puede observarse en detalle en figura 3.2

3.4. Expresión de las tensiones en función de las tensiones principales

Si los planos de referencia son los planos principales, como para éstos las tensiones tangenciales se anulan, las [3.11] se transforman en:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \operatorname{sen}^2\alpha \\ \tau &= \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad [3.38]$$

Por otra parte, la [3.35], que es la expresión de las tensiones tangenciales máximas, en función de las principales toma la forma siguiente:

$$\tau_{\max} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2). \qquad [3.39]$$

Si recordamos que:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ \operatorname{sen}^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{aligned}\right\} \qquad [3.40]$$

y reemplazando en la primera de las [3.38] obtenemos:

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1 \cos 2\alpha}{2} + \frac{\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2}{2} \cos 2\alpha \qquad [3.41]$$

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \qquad [3.42]$$

que es una expresión más práctica de σ en función de las tensiones principales.

3.5. Invariantes de tensión para el estado elástico plano

La ecuación [3.20], característica de las tensiones principales para el estado elástico plano, es independiente del sistema de ejes coordenados adoptado. En consecuencia, los coeficientes de sus términos deben ser constantes, obteniéndose así los dos invariantes que caracterizan el estado elástico plano:

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y \\ J_2 &= \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 . \end{aligned}\right\} \qquad [3.43]$$

Si referimos el estado de tensión a las tensiones principales, resulta:

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 \\ J_2 &= \sigma_1 \sigma_2 , \end{aligned}\right\} \qquad [3.44]$$

de donde, comparando [3.43] con [3.44]:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 &= \sigma_x + \sigma_y = \text{cte.} \\ \sigma_1 \sigma_2 &= \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 \end{aligned}\right\} \qquad [3.45]$$

Otra relación que interesa conocer es el cuadrado de la diferencia de las raíces de la ecuación característica de las tensiones principales, que resulta de restar la [3.24] de la [3.23] y elevar al cuadrado, obteniéndose con ello:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 . \qquad [3.46]$$

3.6. Casos particulares del estado elástico plano

1o.) Si las dos tensiones principales son iguales en intensidad y signo, es decir, si se tiene:

$$\sigma_1 = \sigma_2 \qquad [3.47]$$

la [3.42] se transforma en:

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \text{cte.} \qquad [3.48]$$

y la segunda de las [3.38] en:

$$\tau = 0 , \qquad [3.49]$$

es decir, que cualquiera sea el plano considerado, la tensión es independiente del mismo e igual a las tensiones principales. Este estado de tensión corresponde al estado hidrostático del estado triple de tensión.

2o.) Las dos tensiones principales son de igual intensidad pero de signo contrario, es decir:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 \qquad [3.50]$$

Para este caso resulta:

$$\sigma = \sigma_1 \cos 2\alpha = -\sigma_2 \cos 2\alpha \qquad [3.51]$$

$$\tau = \sigma_2 \operatorname{sen} 2\alpha = -\sigma_1 \operatorname{sen} 2\alpha . \qquad [3.52]$$

En el cuadro siguiente hemos resumido los valores σ y τ para valores particulares de α:

α	σ	τ
0	$\sigma_1 = -\sigma_2$	0
$\pi/4$	0	$\sigma_2 = -\sigma_1$
$\pi/2$	$-\sigma_1 = \sigma_2$	0
$3\pi/4$	0	$-\sigma_2 = \sigma_1$

Puede observarse de los valores del cuadro que, para este caso, figura 3.3, en los planos diagonales (a 45° con los planos principales) la tensión normal es nula, existiendo sólo tensiones tangenciales. A este estado particular de tensión se lo denomina *resbalamiento simple.*

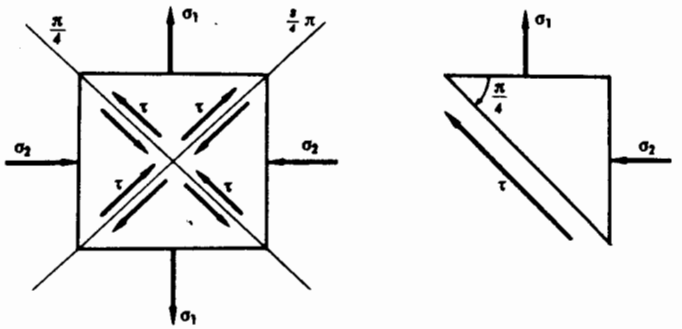


Fig. 3.3

3.7. Representación gráfica del estado elástico plano

3.7.1. Elipse de Lamé o elipse de tensiones

Hemos visto en [3.15] que:

$$\left.\begin{aligned} \rho_x &= \sigma_1 l \\ \rho_y &= \sigma_2 m \end{aligned}\right\} \qquad [3.53]$$

Recordando que $l^2 + m^2 = 1$, si dividimos por σ_1 la primera de las [3.53] y por σ_2 la segunda, elevamos al cuadrado y sumamos, obtenemos:

$$\frac{\rho_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{\rho_y^2}{\sigma_2^2} = 1. \qquad [3.54]$$

Esta expresión a la que podemos también llegar si en la [2.95] hacemos $\rho_z = 0$, es la equivalente de la [2.96] correspondiente al estado elástico triple. Haciendo $\rho_x \equiv x$ y $\rho_y \equiv y$, la [3.54] se transforma en:

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} = 1, \qquad [3.55]$$

que es la ecuación de una elipse, denominada *elipse de tensiones* o *elipse de Lamé*. Esta elipse, análogamente a lo que ocurre en el estado elástico triple con su elipsoide homónimo, tiene la propiedad de que el radio vector que va del

centro (coincidente con el origen de coordenadas) a un punto cualquiera A de la misma, figura 3.4, representa en magnitud, la tensión resultante ρ, que actúa sobre un cierto plano π. La elipse no nos da directamente información sobre la orientación del mencionado plano.

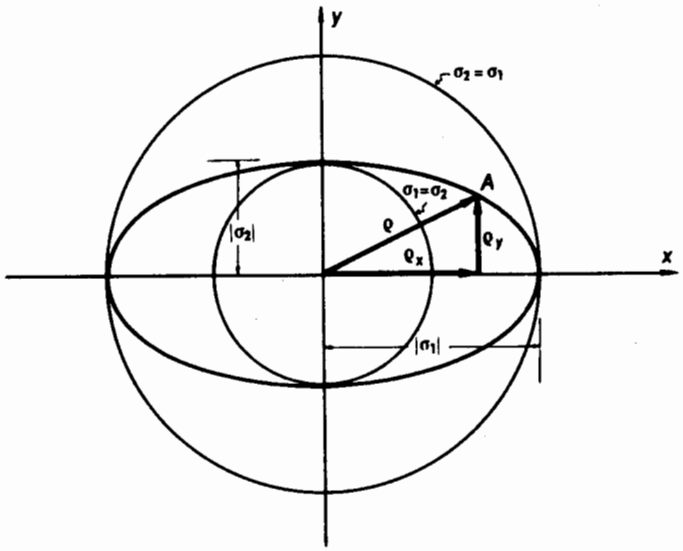


Fig. 3.4

Cualquiera sea el signo de las tensiones principales que definen el estado de tensión representado por la elipse, ésta es siempre la misma. Cuando las dos tensiones principales son iguales en valor absoluto, sean o no de igual signo, la elipse degenera en una circunferencia de radio igual al valor común de las tensiones principales.

3.7.2. Cónicas auxiliares

La elipse de Lamé tiene el inconveniente de no dar directamente la orientación del plano en que ocurre la tensión resultante. Para obtener dicha orientación es necesario recurrir a construcciones auxiliares.

a) *Procedimiento de las dos circunferencias*

Construida la elipse de Lamé correspondiente a un par de tensiones principales, figura 3.5, con centro en O tracemos las dos circunferencias de radios $|\sigma_1|$ y $|\sigma_2|$. El vector $\overline{OA}$ representa, como sabemos, la intensidad de una cierta

tensión ρ que actúa sobre un determinado plano π. Para hallar la traza de π, tracemos por A paralelas a los ejes coordenados hasta cortar a las dos circunferencias en M y N. Uniendo M con N, la recta así determinada pasa por O y es normal a la traza del plano π buscado. Inversamente, dado el plano π, si queremos conocer la tensión ρ resultante que actúa sobre el mismo, bastará

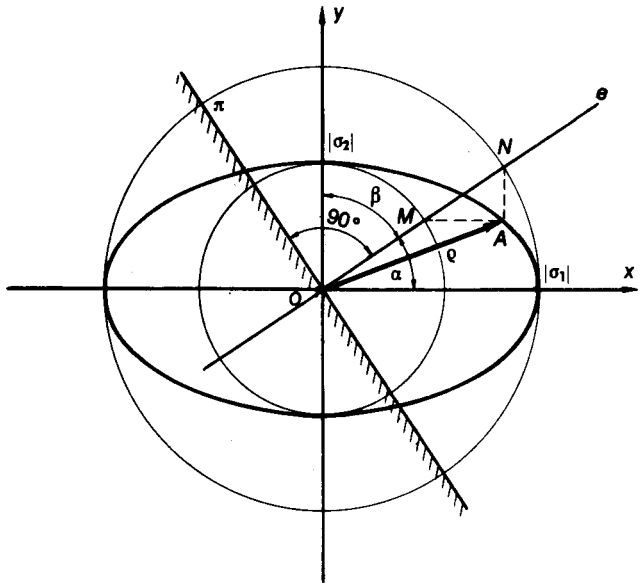


Fig. 3.5

trazar por O la normal e cuya intersección con las dos circunferencias define los puntos M y N. Trazadas por éstos paralelas a los ejes coordenados, éstas se cortan sobre un punto A que pertenece a la elipse y el vector $\overline{OA}$ nos dará la tensión ρ buscada. La demostración es simple, como veremos a continuación. Llamando α y β los ángulos que forma la normal e con los ejes x e y, respectivamente, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} x_N &= |\sigma_1| \cos\alpha = x_A \\ y_M &= |\sigma_2| \cos\beta = |\sigma_2| \operatorname{sen}\alpha = y_A \end{aligned}\right\} \qquad [3.56]$$

Comparando las expresiones [3.56] con la [3.53] vemos que, por ser $\cos\alpha = l$ y $\cos\beta = m$, las coordenadas del punto A, determinado en la forma descripta, coinciden con los valores de ρ_x y ρ_y y que en consecuencia el vector $\overline{OA}$ representa la intensidad de la tensión resultante ρ.

b) ***Procedimiento de la cónica directriz***

Consideremos la expresión:

$$\frac{x^2}{\sigma_1} + \frac{y^2}{\sigma_2} = \pm 1, \qquad [3.57]$$

que se corresponde con la [2.112], haciendo en esta $z = 0$. Cuando las dos tensiones principales son positivas, $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 > 0$, corresponde tomar el signo positivo en el miembro derecho y la cónica resulta ser una elipse de semiejes $\pm\sqrt{|\sigma_1|}$; $\pm\sqrt{|\sigma_2|}$.

Análogamente, si ambas tensiones principales son negativas, es decir si $0 > \sigma_1 \geqslant \sigma_2$, debe tomarse el signo negativo y la cónica resulta también en este caso una elipse de iguales semiejes que la anterior.

Finalmente si una de las tensiones principales es negativa, $\sigma_1 > 0 > \sigma_2$, la cónica se compone de dos hipérbolas conjugadas, una correspondiente al signo positivo y otra al negativo.

En la figura 3.6 hemos representado, superpuestas, para el caso $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 > 0$ las dos cónicas, es decir, la cónica directriz de tensiones y la elipse de Lamé.

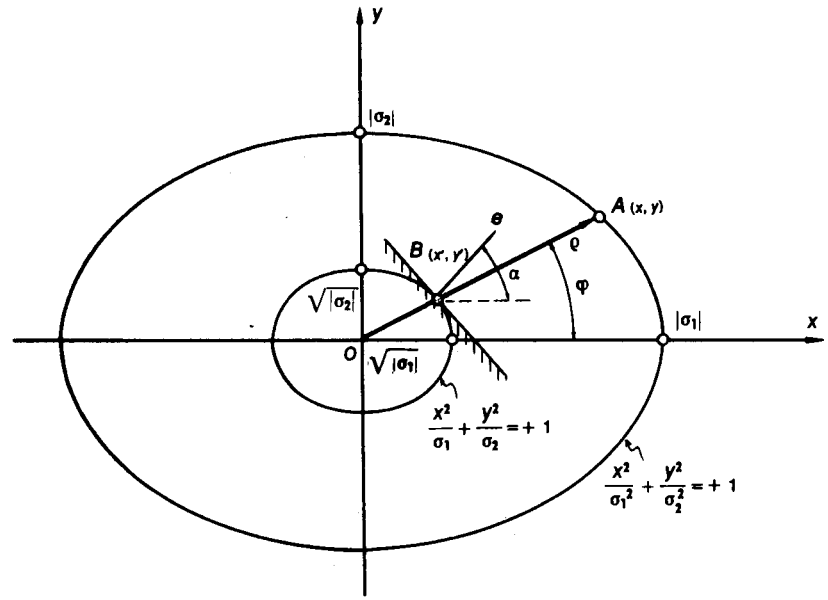


Fig. 3.6

Sea $\overline{OA} = \rho$ el vector representativo de la tensión resultante de un plano π cuya traza deseamos determinar. Si por B, intersección de la dirección de $\overline{OA}$

con la cónica directriz, trazamos la tangente a esta última, dicha tangente, de normal exterior e, será la traza del plano buscado. En efecto, si α es el ángulo que forma e con el eje x y φ el de $\overline{OA}$ con el mismo eje, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\rho_x}{\sigma_1} = \frac{\overline{OA}\cos\varphi}{\sigma_1} \\ \operatorname{sen}\alpha &= \frac{\rho_y}{\sigma_2} = \frac{\overline{OA}\operatorname{sen}\varphi}{\sigma_2} \end{aligned}\right\} \qquad [3.58]$$

pero:

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{x'}{\overline{OB}} \\ \operatorname{sen}\varphi &= \frac{y'}{\overline{OB}} \end{aligned}\right\} \qquad [3.59]$$

luego reemplazando:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}\cdot\frac{x'}{\sigma_1} \\ \operatorname{sen}\alpha &= \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}\cdot\frac{y'}{\sigma_2} \end{aligned}\right\} \qquad [3.60]$$

Si hacemos ahora:

$$\psi = \frac{x^2}{\sigma_1} + \frac{y^2}{\sigma_2} \pm 1 = 0, \qquad [3.61]$$

el coseno del ángulo que forma la normal en un punto cualquiera de la cónica [3.61] con el eje x tiene por expresión:[1]

$$\cos\alpha_0 = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2}}, \qquad [3.62]$$

y el correspondiente al eje y:

$$\cos\beta_0 = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2}}. \qquad [3.63]$$

[1] Ver fórmula [2.98] para el estado elástico triple.

Derivando la [3.61] respecto de x e y:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= \frac{2x}{\sigma_1} \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= \frac{2y}{\sigma_2} \end{aligned}\right\} \qquad [3.64]$$

Con ello, para la normal en B, de coordenadas x', y', las expresiones [3.62] y [3.63] toman la forma:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_0 &= \frac{\dfrac{x'}{\sigma_1}}{\sqrt{\dfrac{x'^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{y'^2}{\sigma_2^2}}} \\ \cos\beta_0 &= \frac{\dfrac{y'}{\sigma_2}}{\sqrt{\dfrac{x'^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{y'^2}{\sigma_2^2}}} \end{aligned}\right\} \qquad [3.65]$$

Teniendo en cuenta que:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} &= \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x'^2 + y'^2}} \\ \frac{x}{x'} &= \frac{y}{y'} \end{aligned}\right\} \qquad [3.66]$$

y que además:

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} = 1$$

se llega a:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x'^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{y'^2}{\sigma_2^2}}}. \qquad [3.67]$$

Reemplazando en las [3.60] se tiene:

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{x'}{\sigma_1}}{\sqrt{\dfrac{x'^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{y'^2}{\sigma_2^2}}} \qquad \cos\beta = \frac{\dfrac{y'}{\sigma_2}}{\sqrt{\dfrac{x'^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{y'^2}{\sigma_2^2}}} \qquad [3.68]$$

y comparando con la [3.65]

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos\alpha_0\\ \cos\beta &= \cos\beta_0\end{aligned}\right\} \qquad [3.69]$$

lo que demuestra la corrección de la construcción.

c) *Método de la tangente*

Sea la elipse de tensiones de semiejes $|\sigma_1|$, $|\sigma_2|$ de figura 3.7 y supongamos se nos pida el valor de la tensión resultante ρ que actúa sobre un plano π.

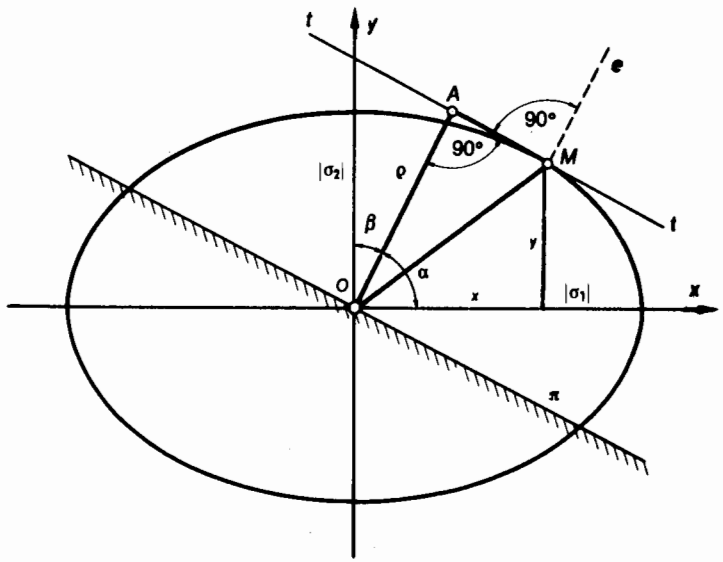


Fig. 3.7

Ubicada la traza del plano π, trazamos la recta t–t paralela a la misma, y tangente a la elipse en M. Si luego trazamos por O la normal $\overline{OA}$ a t–t, el radio vector OA nos da la intensidad de la tensión ρ que actúa sobre el plano π, es decir:

$$\overline{OA} = \rho \qquad [3.70]$$

Para demostrarlo, hagamos:

$$\varphi = \frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} - 1 = 0. \qquad [3.71]$$

Si llamamos α al ángulo que forma la normal a la elipse en un punto dado con **el eje x, y β al** correspondiente al eje y, tenemos:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{1}{K}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\ \cos\beta &= \frac{1}{K}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\end{aligned}\right\} \qquad [3.72]$$

donde:

$$K = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}.$$

Sean x e y las coordenadas de M. Tendremos:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{2x}{\sigma_1^2}; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{2y}{\sigma_2^2}\\ &K = 2\sqrt{\frac{x^2}{\sigma_1^4} + \frac{y^2}{\sigma_2^4}}\end{aligned}\right\} \qquad [3.73]$$

y

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{x/\sigma_1^2}{\sqrt{\dfrac{x^2}{\sigma_1^4} + \dfrac{y^2}{\sigma_2^4}}}\\ \cos\beta &= \frac{y/\sigma_2^2}{\sqrt{\dfrac{x^2}{\sigma_1^4} + \dfrac{y^2}{\sigma_2^4}}}\end{aligned}\right\} \qquad [3.74]$$

Por ser $\overline{OA} \parallel e$, $\cos\alpha$ y $\cos\beta$ resultan ser los cosenos directores de $\overline{OA}$.

Llamando ahora $\measuredangle MOA$ al ángulo que forman $\overline{OM}$ y $\overline{OA}$ se tiene:

$$\overline{OA} = \overline{OM}\cdot\cos\measuredangle MOA \qquad [3.75]$$

pero los cosenos directores de $\overline{OM}$ valen:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_M &= \frac{x}{\overline{OM}}\\ \cos\beta_M &= \frac{y}{\overline{OM}}\end{aligned}\right\} \qquad [3.76]$$

de donde, por ser

$$\cos \widehat{MOA} = \cos\alpha \cos\alpha_M + \cos\beta \cos\beta_M. \qquad [3.77]$$

resulta:

$$\cos \widehat{MOA} = \frac{\dfrac{x^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{y^2}{\sigma_2^2}}{\overline{OM}\sqrt{\dfrac{x^2}{\sigma_1^4} + \dfrac{y^2}{\sigma_2^4}}} \qquad [3.78]$$

El numerador de esta expresión es la [3.55], que por ser igual a la unidad es a la vez igual a su raíz cuadrada. En consecuencia:

$$\overline{OM} \cdot \cos \widehat{MOA} = \overline{OA} = \sqrt{\frac{\dfrac{x^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{y^2}{\sigma_2^2}}{\dfrac{x^2}{\sigma_1^4} + \dfrac{y^2}{\sigma_2^4}}} \qquad [3.79]$$

$$\overline{OA} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2\left(\dfrac{x^2}{\sigma_1^4}\right) + \sigma_2^2\left(\dfrac{y^2}{\sigma_2^4}\right)}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{\sigma_1^4} + \dfrac{y^2}{\sigma_2^4}}} \qquad [3.80]$$

y finalmente, teniendo en cuenta las [3.74] elevadas al cuadrado:

$$\overline{OA} = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2\alpha + \sigma_2^2 \cos^2\beta}. \qquad [3.81]$$

es decir:

$$\overline{OA} = \rho.$$

d) *Cónica indicatriz de tensiones*

Al analizar el problema tridimensional llegamos en 2.3 a establecer la ecuación de una cuádrica que, referida a ejes coincidentes con las direcciones principales, tenía por expresión:

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2 = \pm 1, \qquad [3.82]$$

la que poseía la propiedad de que el radio vector $\overline{OA}$ comprendido entre el centro de la cuádrica y un punto A de su superficie tenía por valor:

$$\overline{OA} = \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}}, \qquad [3.83]$$

es decir, la inversa de la raíz cuadrada del módulo de la tensión normal que actúa sobre un plano normal a la dirección $\overline{OA}$.

Si retrotraemos el problema al estado elástico plano, es decir, si hacemos $\sigma_3 = 0$, la [3.82] se transforma en:

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 = \pm 1 \qquad [3.84]$$

ecuación de una cónica denominada cónica indicatriz de tensiones normales.

Cuando ambas tensiones principales son del mismo signo, la cónica es una elipse de semiejes $1/\sqrt{|\sigma_1|}$; $1/\sqrt{|\sigma_2|}$, correspondiendo tomar el signo positivo para el miembro derecho si las dos tensiones son de tracción, y el negativo si lo son de compresión. En cambio, la cónica estará constituida por dos hipérbolas equiláteras conjugadas cuando las tensiones son de signo contrario, correspondiendo tomar los dos signos para el miembro derecho.

En la figura 3.8 se han representado las hipérbolas correspondientes al caso $\sigma_1 > 0 > \sigma_2$, debiéndose tomar para el par de hipérbolas simétricas respecto del eje y el signo *menos*, y el *más* para las conjugadas.

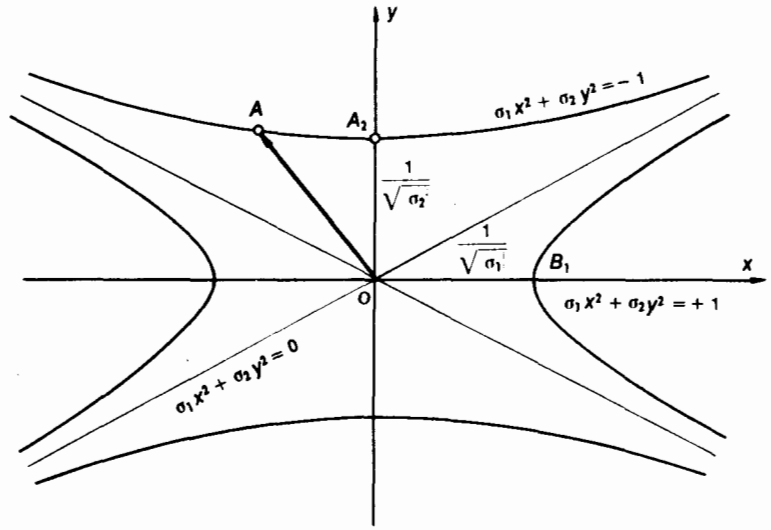


Fig. 3.8

Las tensiones correspondientes a radios vectores cuyo extremo se apoye sobre puntos del primer par de hipérbolas serán negativas (de compresión), y positivas (de tracción) las que correspondan a vectores que lo hagan sobre puntos del par de hipérbolas simétricas respecto del eje x.

Ambas hipérbolas son asintóticas del par de rectas de ecuación:

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 = 0. \qquad [3.85]$$

Las tensiones normales sobre planos cuyas normales coincidan con la dirección de dichas rectas, serán nulas, por cuanto, si $\overline{OA}$ es la longitud del radio vector que se apoya sobre una de las hipérbolas como para dicha dirección el punto de contacto es impropio, resulta:

$$\overline{OA} = \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} = \infty \qquad [3.86]$$

y en consecuencia, para que se cumpla la [3.86] debe ser:

$$\sigma = 0. \qquad [3.87]$$

Dichos planos de tensión normal nula son a la vez planos de tensión tangencial máxima, es decir, son los planos de corte máximo o planos principales de corte.

3.7.3. Representación polar de tensiones

Una forma de representar gráficamente la variación de las tensiones normal y tangencial que facilita grandemente la visualización de las mismas, consiste en la denominada representación polar de tensiones, que desarrollaremos a continuación.

Sea un estado plano de tensión definido por sus tensiones principales $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ y del que en figura 3.9 hemos representado la elipse de Lamé y la cónica directriz de tensiones.

Como sabemos, el vector $\overline{OA}$ que se apoya sobre la elipse de Lamé nos da el valor de la tensión ρ de dirección $\overline{OA}$, y la tangente en A' a la cónica directriz, la paralela a la traza del plano a que corresponde ρ. Si por O trazamos la normal $\overline{OA''}$ a la traza de π y proyectamos el extremo del vector ρ (punto A) sobre $\overline{OA''}$ y su normal trazada por O, obtendremos los puntos A''' y A_0. Los segmentos $\overline{OA'''}$ y $\overline{OA_0}$ así obtenidos representan, respectivamente, las componentes normal σ y tangencial τ correspondientes al plano π, es decir:

$$\left.\begin{aligned} \overline{OA'''} &= \sigma \\ \overline{OA_0} &= \tau \end{aligned}\right\} \qquad [3.88]$$

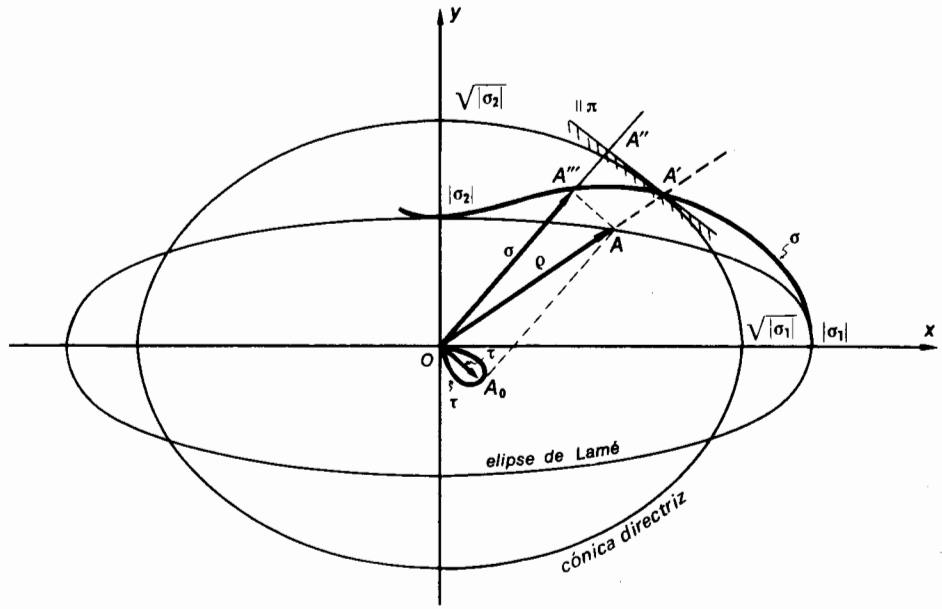


Fig. 3.9

Repitiendo la operación para otras direcciones de ρ obtendremos sucesiones de puntos A''' y A_0 que unidos por medio de líneas continuas nos dan dos diagramas polares, uno correspondiente a σ y el otro a τ.

Si recordamos las expresiones:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau &= \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \operatorname{sen} 2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad [3.89]$$

de las tensiones σ y τ en función de las tensiones principales, vemos que la primera no altera su valor al cambiar α por $-\alpha$ ni tampoco si se sustituye α por $\pi - \alpha$. Es decir, que la curva polar representativa de σ será simétrica respecto de los ejes x e y y, en consecuencia, también lo será respecto del origen O. En lo que respecta a la curva representativa de τ, vemos que no cambia su valor si se reemplaza α por $-\alpha$. De ahí que resulte simétrica respecto de ambos ejes coordenados pero también de las bisectrices de los cuadrantes, por cuanto τ mantiene su valor si se reemplaza α por $(\pi/2) - \alpha$.

La curva polar de σ debe pasar por los extremos de los semiejes de la

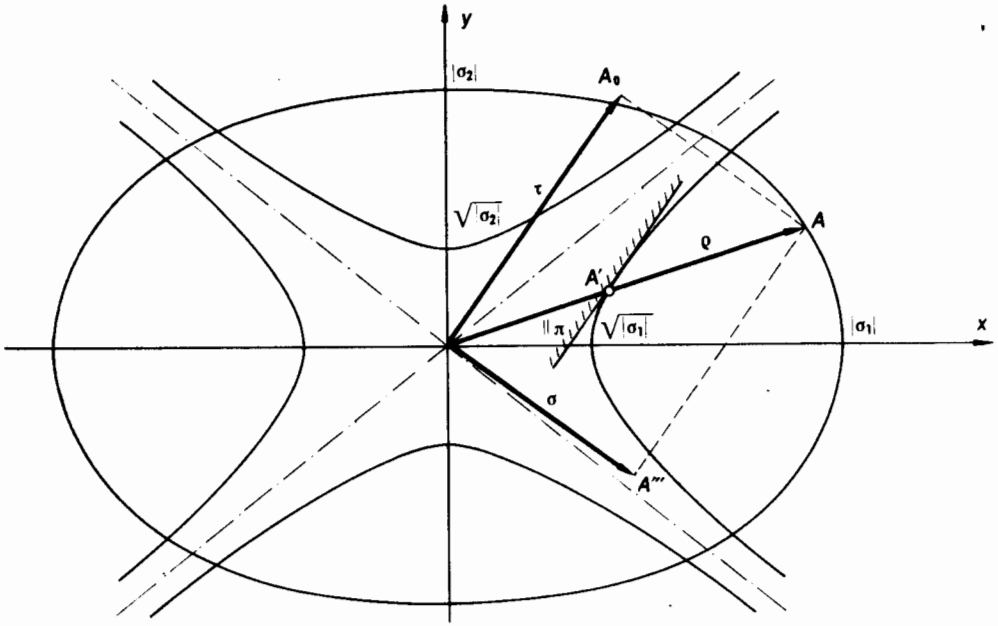


Fig. 3.10 a.

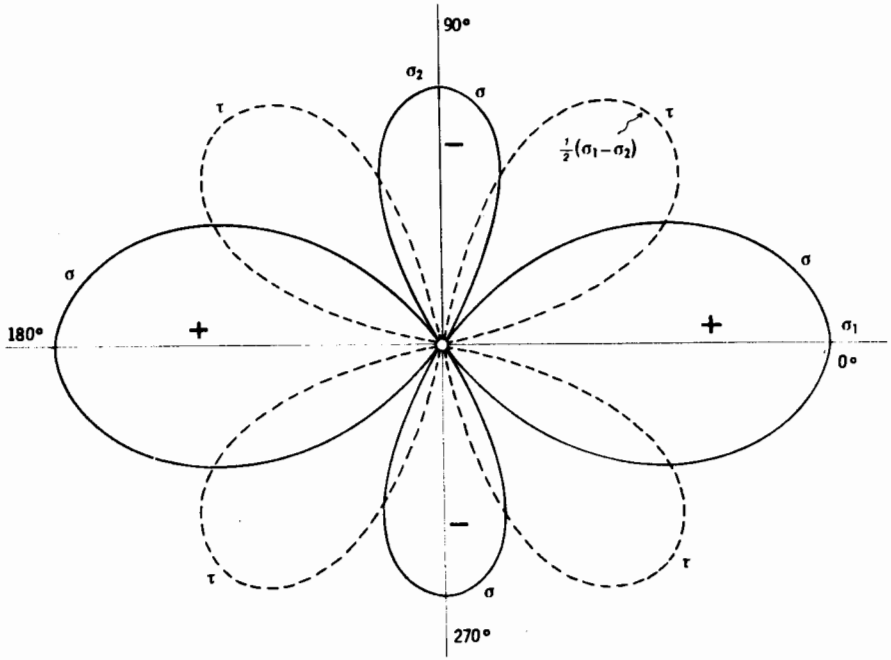


Fig. 3.10 b.

elipse de Lamé, ya que los mismos corresponden a los valores de σ_1 y σ_2, que son los máximos valores de las tensiones normales. En cuanto a la curva de τ, debe ser tangente a los ejes coordenados y pasar por un máximo en correspondencia con las bisectrices de los cuadrantes.

En la figura 3.10 b hemos representado las curvas polares correspondientes al caso en que $\sigma_1 > 0 > \sigma_2$, es decir, cuando la cónica directriz de tensiones degenera en dos hipérbolas equiláteras conjugadas. Dada la simetría de ambas curvas sólo es necesario determinar la parte correspondiente a un cuadrante, obteniéndose el resto por simple reproducción.

3.7.4. Circunferencia de Mohr

3.7.4.1. Trazado y justificación

Recordemos las fórmulas [3.11] que definen las tensiones normal y tangencial correspondientes a un plano que forma un cierto ángulo α con el plano cuya normal coincide con x:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \operatorname{sen}^2\alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \\ \tau &= \tau_{xy} \cos 2\alpha - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad [3.90]$$

Teniendo en cuenta que:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\alpha &= \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \\ \operatorname{sen}^2\alpha &= \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \end{aligned}\right\} \qquad [3.91]$$

resultan las siguientes expresiones en función del arco doble:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\operatorname{sen} 2\alpha \\ \tau &= -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\operatorname{sen} 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad [3.92]$$

o también:

$$\left.\begin{aligned} \sigma - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} &= \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\operatorname{sen} 2\alpha \\ \tau &= -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\operatorname{sen} 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad [3.93]$$

Si elevamos al cuadrado cada una de las expresiones [3.93] y sumamos miembro a miembro, resulta:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2, \qquad [3.94]$$

que es la ecuación de una circunferencia en función de los parámetros σ_x, σ_y y τ_{xy}, cuyo centro se encuentra ubicado sobre el eje σ a una abscisa $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ y cuyo radio vale $\sqrt{[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2}$.

En la figura 3.11 se ha representado, con centro en C, la circunferencia de radio:

$$\overline{CQ} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \qquad [3.95]$$

donde las coordenadas de Q son precisamente σ_x y τ_{xy} y las del simétrico Q', σ_y y $-\tau_{xy}$. Demostraremos a continuación que las coordenadas de T tienen el valor dado por las [3.92] y que, en consecuencia, representan σ y τ.

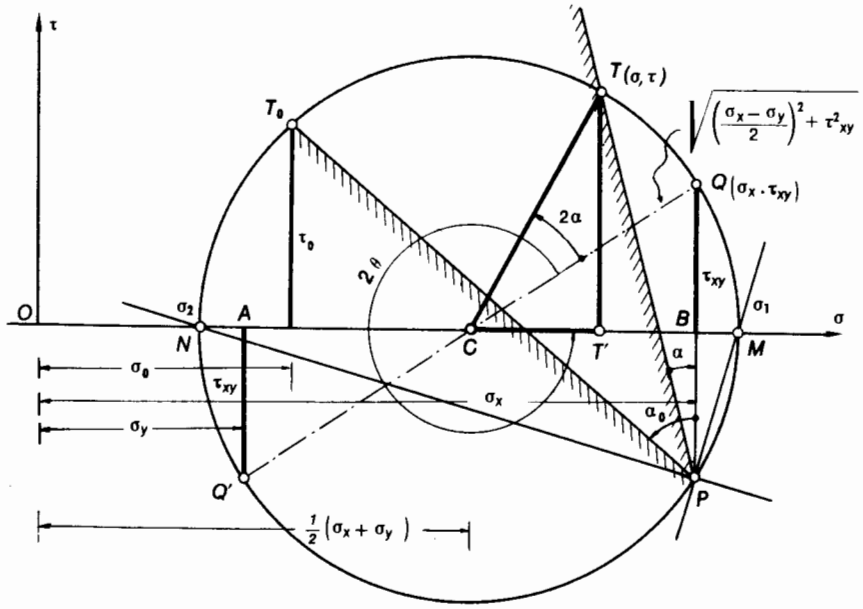


Fig. 3.11

Llamando 2α el ángulo, medido en sentido inverso, que forma $\overline{CT}$ con $\overline{CQ}$, se tiene, con la notación de figura 3.11:

$$\overline{OT'} = \overline{OC} + \overline{CT}\cos(2\pi - 2\theta + 2\alpha) = \overline{OC} + \overline{CT}\,[\cos(2\pi - 2\theta)\cos 2\alpha - \\ - \operatorname{sen}(2\pi - 2\theta)\operatorname{sen} 2\alpha] \qquad [3.96]$$

pero de la figura se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \cos(2\pi - 2\theta) &= \frac{\overline{CB}}{\overline{CQ}} \\ \operatorname{sen}(2\pi - 2\theta) &= \frac{\overline{QB}}{\overline{CQ}} \end{aligned}\right\} \qquad [3.97]$$

de donde reemplazando en [3.96]:

$$\overline{OT'} = \overline{OC} + \overline{CT}\left(\frac{CB}{CQ}\cos 2\alpha - \frac{QB}{CQ}\operatorname{sen} 2\alpha\right) \qquad [3.98]$$

pero:

$$\left.\begin{aligned} \overline{CT} &= \overline{CQ} \\ \overline{CB} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \\ \overline{QB} &= \tau_{xy} \\ \overline{OC} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \end{aligned}\right\} \qquad [3.99]$$

Substituyendo en [3.98], simplificando y teniendo en cuenta que en la figura 3.11 el ángulo 2α se mide en sentido contrario al de la figura 3.1, por lo que es necesario reemplazar sen 2α por $-$ sen 2α, resulta:

$$\overline{OT'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\operatorname{sen} 2\alpha, \qquad [3.100]$$

que comparada con la [3.92] nos dice que:

$$\overline{OT'} = \sigma \qquad [3.101]$$

Análogamente:

$$\overline{TT'} = \overline{CT}\operatorname{sen}(2\pi - 2\theta + 2\alpha) = \\ = \overline{CT}\,[\operatorname{sen}(2\pi - 2\theta)\cos 2\alpha + \cos(2\pi - 2\theta)\operatorname{sen} 2\alpha], \qquad [3.102]$$

y teniendo en cuenta las [3.97]:

$$\overline{TT'} = CT\left(\frac{\overline{QB}}{\overline{CQ}}\cos 2\alpha + \frac{\overline{CB}}{\overline{CQ}}\operatorname{sen} 2\alpha\right). \qquad [3.103]$$

Considerando que $\overline{CT} = \overline{CQ}$; $\overline{QB} = \tau_{xy}$ y $\overline{CB} = (\sigma_x - \sigma_y)/2$ y recordando además lo expresado con respecto al sentido de medición del ángulo 2α que obliga a cambiar sen 2α por $-$ sen 2α, resulta:

$$\overline{TT'} = \tau_{xy}\cos 2\alpha - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\operatorname{sen} 2\alpha, \qquad [3.104]$$

Comparando con la segunda de las [3.92] llegamos finalmente a que:

$$\overline{TT'} = \tau \qquad [3.105]$$

Observando la figura vemos que el punto T queda determinado por la intersección con la circunferencia de la recta $\overline{TP}$ trazada a partir de P, simétrico de Q, formando un ángulo α con $\overline{QP}$. El punto P corresponde al que hemos definido como *primer polo de Mohr* y la recta $\overline{TP}$ es la traza del plano sobre el que actúan σ y τ.

Hemos llegado así a que las abscisas de los puntos de la circunferencia, determinados por las intersecciones con ésta de las paralelas a las trazas de los planos trazadas por el polo, corresponden a las tensiones normales que actúan en dichos planos, y las correspondientes ordenadas, a las tensiones tangenciales. Del análisis de la figura surge que el mayor valor que puede tomar la tensión normal es $\overline{OM}$, y el menor $\overline{ON}$. En consecuencia, dichas abscisas corresponden a los valores de las tensiones principales σ_1 y σ_2. Obsérvese, además, que para los puntos M y N las ordenadas, es decir, las tensiones τ, son nulas, lo que corresponde precisamente a los planos principales. En consecuencia, las rectas PM y PN constituyen las paralelas a las trazas de los planos principales.

Si quisiéramos hallar las tensiones normal y tangencial σ_0 y τ_0 que actúan sobre un plano que forma un ángulo α_0 con el plano de σ_x y τ_{xy}, bastará trazar por P, polo de la circunferencia, una recta PT_0 que forma con la PQ un ángulo α_0, y las coordenadas del punto T_0 de intersección con la circunferencia, serán las tensiones buscadas.

3.7.4.2. Determinación de la dirección de la tensión ρ

La solución completa del problema exige conocer la orientación de la tensión resultante con respecto a la cara en que actúa. Para hallar dicha dirección, utilizaremos indistintamente dos construcciones gráficas, que describimos a continuación.

a) *Utilización del punto simétrico*

Supongamos construida la circunferencia de Mohr para las tensiones σ_x, σ_y y τ_{xy} que actúan en dos planos ortogonales, uno vertical y otro horizontal, y sea P_1 el primer polo de Mohr, figura 3.12.

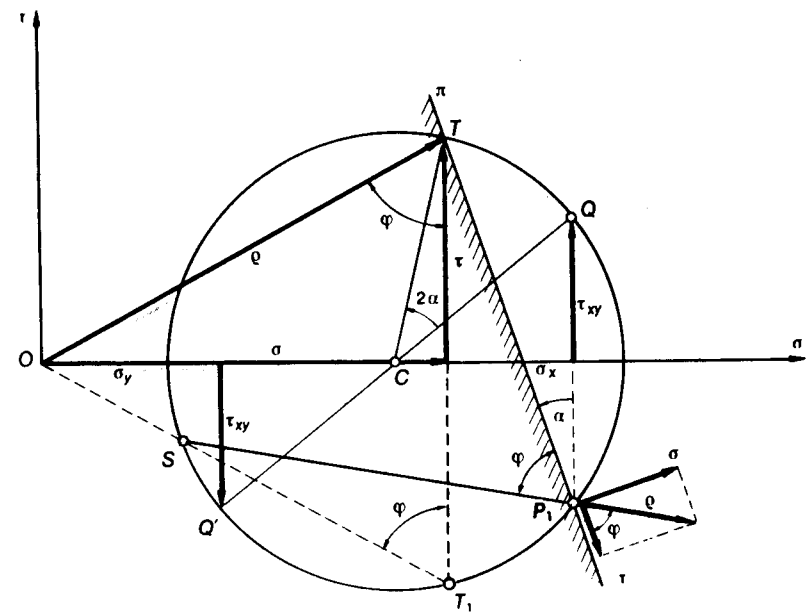


Fig. 3.12

Sea π la paralela a la traza de un plano que forma un ángulo α con el plano correspondiente a σ_x. Dicha traza corta a la circunferencia en el punto T, cuyas coordenadas son σ y τ. Compuestas ambas nos dan el valor de la tensión resultante ρ y su sentido.

Como τ coincide en dirección con la del plano en que actúa ρ, el ángulo φ de inclinación de ρ con dicho plano es igual al ángulo de ρ con τ, es decir $T_1\overset{\measuredangle}{T}O$. Si tomamos T_1 simétrico de T y lo unimos con O, el ángulo $T\overset{\measuredangle}{T_1}O$ también valdrá φ. Ahora bien, el lado OT_1 corta a la circunferencia en S. Uniendo S con P_1, la dirección SP_1 es la dirección de ρ respecto del plano cuya traza es π. En efecto, el ángulo $T\overset{\measuredangle}{T_1}S$ está inscripto en la circunferencia y abarca el arco $\widehat{ST}$. El ángulo $T\overset{\measuredangle}{P_1}S$, también es inscripto en la misma circun-

ferencia y abarca el mismo arco $\widehat{ST}$, y en consecuencia será igual al $\widehat{TT_1S}$, valiendo también φ. Y como uno de sus lados es la paralela a la traza del plano π, el otro, necesariamente, nos debe dar la dirección de ρ. Puede observarse la concordancia de signo de σ y τ. En efecto, las dos coordenadas de T son positivas y en consecuencia lo serán σ y τ. Por otra parte, al descomponer en P_1, ρ en sus componentes σ y τ, resulta σ dirigida hacia afuera del plano (tracción = positiva), y en cuanto a τ, tiende a producir un momento positivo con respecto de un punto del interior del prisma, por lo que en consecuencia será positiva.

b) *Utilización del 2° polo de Mohr*

La segunda construcción utiliza las propiedades de un punto, denominado *segundo polo de Mohr*. Si en la construcción de figura 3.13 trazamos por el origen O las tangentes a la circunferencia y unimos los puntos de tangencia J y K mediante una recta, esta cortará al eje σ en un punto P_2 que se denomina *segundo polo de Mohr*.

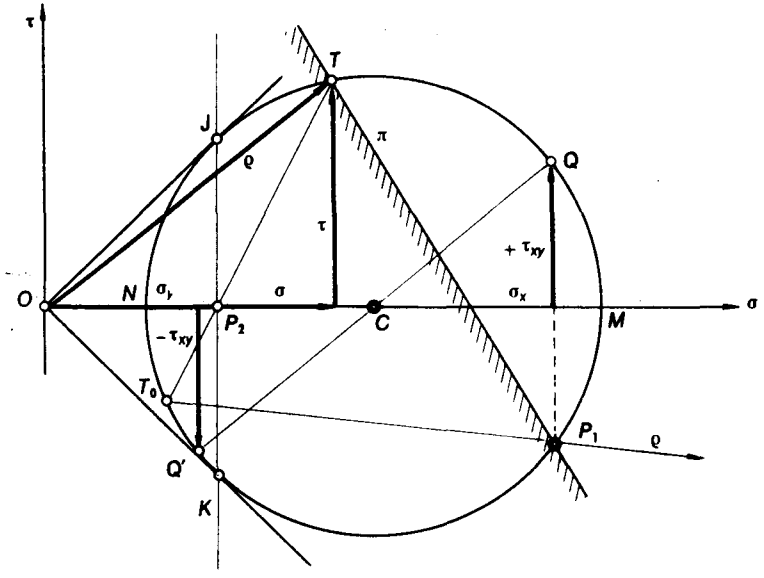


Fig. 3.13

Sea π la paralela a la traza del plano para el cual interesa conocer ρ. Las coordenadas de T son, como sabemos, las tensiones σ y τ y su resultante ρ. Uniendo T con P_2, la prolongación de dicha recta corta a la circunferencia en un punto T_0, que unido con P_1 nos da la dirección de ρ.

En figura 3.14 hemos trazado la circunferencia de Mohr para el caso en que se tenga:

$$\sigma_x > 0 > \sigma_y\,, \qquad [3.106]$$

es decir, cuando una de las tensiones es de compresión.

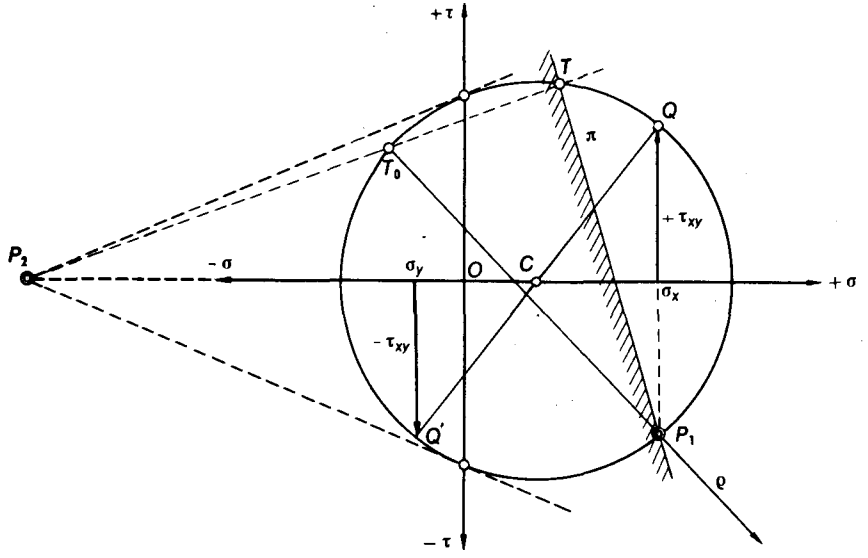


Fig. 3.14

En la construcción de figura 3.13, la recta JK y el origen O se comportan como polo y polar respectivamente y el punto P_2 y el eje τ en forma semejante. En consecuencia, en la construcción de figura 3.14, para hallar el segundo polo será necesario hallar el polo de la polar τ, para lo cual bastará trazar las tangentes a la circunferencia por los puntos en que el eje τ corte a esta última. Dichas tangentes interceptan al eje σ en el punto P_2 que es el segundo polo buscado. El resto de la construcción necesaria para determinar la dirección de ρ es la misma vista antes, lo que nos exime de mayores comentarios.

De las dos construcciones descriptas, es preferible la primera por ser más exacta, por cuanto la segunda exige el trazado de por lo menos una tangente, lo que siempre trae aparejado cierto grado de inseguridad.

3.7.4.3. Construcción de la circunferencia de Mohr

Supongamos conocidas las tensiones σ_x, σ_y, τ_{xy} en dos planos ortogonales, figura 3.15 (a). De acuerdo con la figura suponemos $\sigma_x > \sigma_y > 0$, $\tau_{xy} < 0$ y

$\tau_{yx} > 0$. Veamos la forma práctica de construir la circunferencia y de determinar ambos polos.

A partir de O se lleva un segmento sobre el semieje positivo de las σ, que en una cierta escala representa a σ_x.

Otro tanto hacemos con σ_y, obteniendo los puntos A y B. Luego, a partir de A, y con su signo, negativo en el caso que nos ocupa, llevamos un segmento representativo de τ_{xy}, lo que nos da el punto Q.

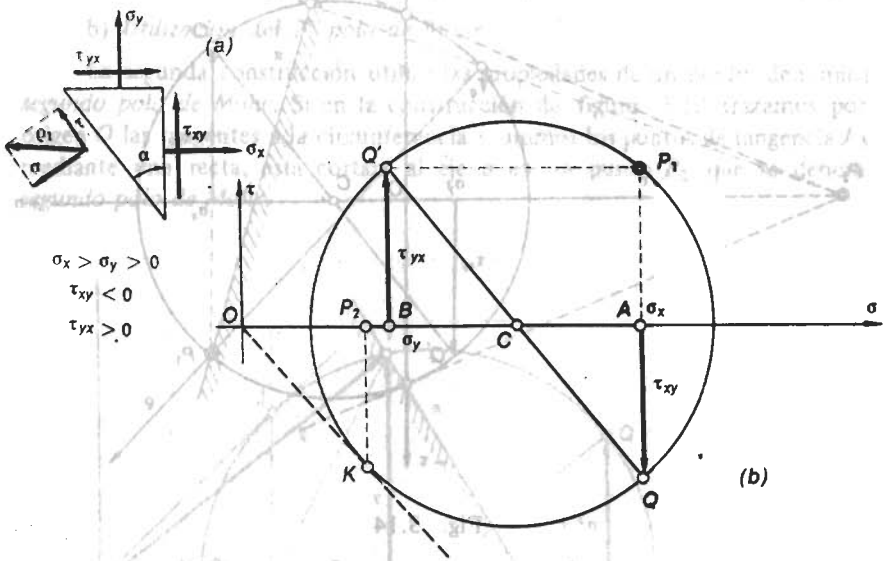


Fig. 3.15

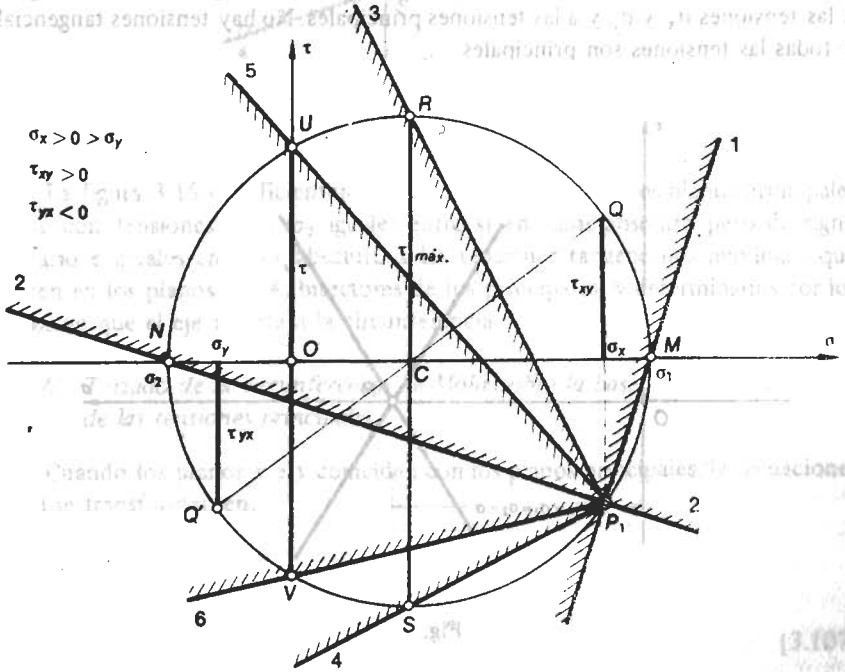
Procediendo en la misma forma con τ_{yx}, obtenemos Q'. Uniendo Q con Q', la recta así determinada nos da, en su intersección con el eje σ, el punto C, centro de la circunferencia, que trazamos con radio $\overline{CQ}$. Veamos ahora la determinación de los polos. La del segundo es inmediata, bastando para ello, de acuerdo con lo visto anteriormente, trazar por O la tangente a la circunferencia y proyectar sobre el eje σ el punto K de tangencia. La proyección de K será P_2, segundo polo de Mohr.

Para la determinación del primer polo de Mohr, recordemos que las paralelas a las trazas de los planos dados, trazadas por el primer polo, cortan la circunferencia en puntos cuyas coordenadas son las tensiones buscadas σ y τ. En consecuencia, si la cara del prisma de figura 3.15. (a), sobre la que actúa σ_x es una cara vertical, trazando por Q, cuyas coordenadas son σ_x y $-\tau_{xy}$, una paralela a la traza del plano, es decir, una recta vertical, la misma debe pasar por P_1.

Análogamente si trazamos por Q' de coordenadas σ_y, τ_{yx} una paralela a la traza de la cara correspondiente, es decir, una horizontal, la misma deberá pasar por el primer polo de Mohr, el que se encontrará sobre la circunferencia y en la intersección de las dos rectas mencionadas.

3.7.4.4. *Determinación de las tensiones principales y de los planos de tensión tangencial máxima y de resbalamiento puro*

Sea la circunferencia de Mohr de figura 3.16, donde una de las tensiones utilizadas para la construcción es negativa, y P_1 su primer polo. Hemos definido como tensiones principales a las tensiones máxima y mínima que pueden ocurrir en un estado de tensión dado. Es evidente que, si en la circunferencia de Mohr las tensiones normales están dadas por las abscisas de los puntos de la circunferencia, el punto de mayor abscisa será el M y el de menor (algebraicamente) el N. En consecuencia, los segmentos OM y ON corresponden respectivamente a las dos tensiones principales σ_1 y σ_2 y los planos principales tendrán trazas cuyas paralelas serán las rectas *1* y *2* que pasando por M y N concurren a P_1.



La tensión tangencial está dada, como sabemos, por las ordenadas de los puntos de la circunferencia, siendo la mayor de ellas la CR. En consecuencia, el punto R y su simétrico S definen las trazas de los planos 3 y 4 que serán los planos de tensiones tangenciales máximas.

Finalmente, existen en este caso, planos para los cuales la tensión normal σ es nula. Es lógico que ello ocurra por cuanto vemos que la tensión σ puede ser positiva o negativa. Los puntos U y V de abscisas nulas, nos determinan las trazas de los planos *5* y *6*, que se denominan *planos de resbalamiento puro* por no existir en ellos más que tensiones tangenciales.

3.7.4.5. Casos particulares de la circunferencia de Mohr

Analizaremos a continuación, distintos casos particulares que pueden presentarse en el trazado de la circunferencia de Mohr.

Supongamos primeramente que las dos tensiones normales son iguales en intensidad y signo, en cuyo caso $\tau_{xy} = 0$ (ver par. 3.6, 1°). Es evidente que en tal caso, como puede observarse en figura 3.17, la circunferencia de Mohr se reduce a un punto resultando las tensiones para cualquier plano iguales entre sí e iguales a las tensiones σ_x y σ_y y a las tensiones principales. No hay tensiones tangenciales y todas las tensiones son principales.

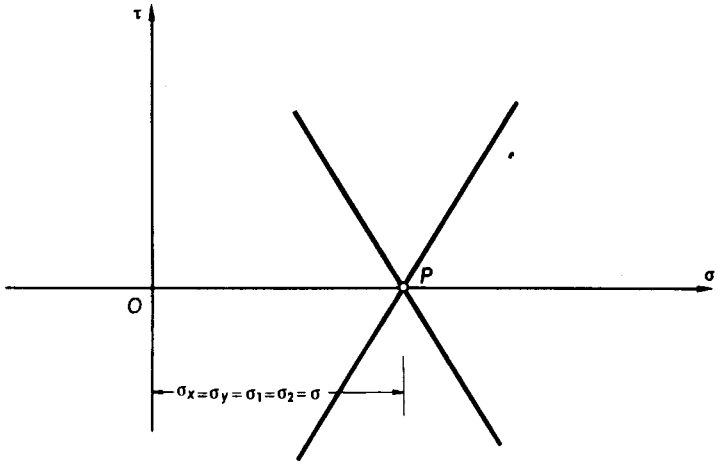


Fig. 3.17

Si, en cambio, las dos tensiones son opuestas $\sigma_x = -\sigma_y$, estamos ante el caso que ilustra la figura 3.18 que se conoce como estado de tensión de resbalamiento simple y del que nos ocupamos con anterioridad.

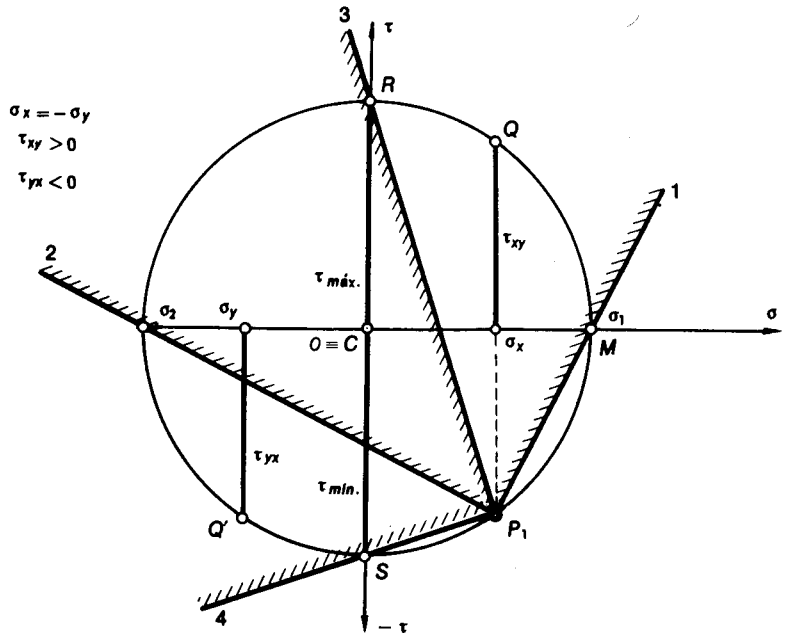


Fig. 3.18

La figura 3.18 es suficientemente explicativa. Existen dos planos principales *1* y *2* con tensiones σ_1 y σ_2 iguales entre sí en valor absoluto pero de signo contrario e iguales en valor absoluto a las tensiones tangenciales máximas, que ocurren en los planos *3* y *4*, bisectores de los principales, y determinados por los puntos en que el eje τ corta a la circunferencia.

3.7.4.6. Trazado de la circunferencia de Mohr sobre la base de las tensiones principales

Cuando los planos x e y coinciden con los planos principales, las ecuaciones [3.92] se transforman en:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau &= \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad [3.107]$$

o también en:

$$\left.\begin{aligned} \sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau &= \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad [3.108]$$

Elevando al cuadrado y sumando:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2, \qquad [3.109]$$

que es la ecuación de una circunferencia de radio $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$ y cuyas coordenadas al centro son 0 y $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$. En la figura 3.19 hemos representado la correspondiente circunferencia. Vemos que en ella el primer polo de Mohr se ha desplazado hasta coincidir con el punto M, representativo de la tensión σ_1, que actúa en un plano vertical. Para un plano π que forme un ángulo diedro de medida α con el plano principal 1, su traza define el punto Q, cuyas coordenadas, como demostraremos a continuación, cumplen las [3.107].

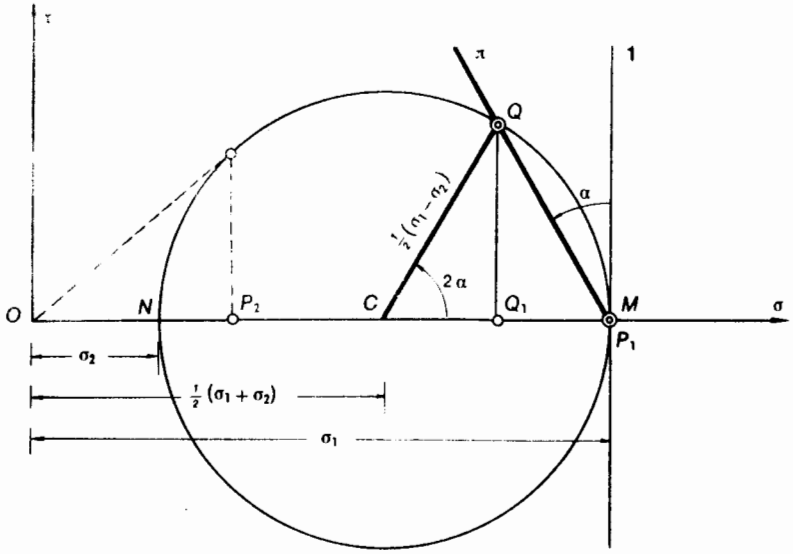


Fig. 3.19

En efecto, tenemos:

$$\overline{OQ_1} = \overline{OC} + \overline{CQ_1} = \overline{OC} + \overline{CQ} \cdot \cos 2\alpha, \qquad [3.110]$$

pero:

$$\left.\begin{aligned} \overline{OC} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \\ \overline{CQ} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \end{aligned}\right\} \qquad [3.111]$$

y en consecuencia:

$$\overline{OQ_1} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha. \qquad [3.112]$$

Comparando la [3.112] con la primera de las [3.107] resulta:

$$\overline{OQ_1} = \sigma \qquad [3.113]$$

Análogamente:

$$\overline{QQ_1} = \overline{CQ} \operatorname{sen} 2\alpha. \qquad [3.114]$$

y reemplazando $\overline{CQ}$ por su valor de la segunda de las [3.111]:

$$\overline{QQ_1} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \operatorname{sen} 2\alpha. \qquad [3.115]$$

Pero, recordando que por la forma de medir los ángulos debemos reemplazar sen 2α por $-$ sen 2α:

$$\overline{QQ_1} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha, \qquad [3.116]$$

que, por su similitud con la segunda de las [3.107] nos dice que:

$$\overline{QQ_1} = \tau. \qquad [3.117]$$

Cuando las dos tensiones principales son de igual intensidad y signo contrario, es decir $\sigma_1 = -\sigma_2$ la circunferencia de Mohr toma la forma de figura 3.20, coincidiendo en su primer polo con el punto M representativo de σ_1.

Este estado de tensión corresponde a lo que hemos denominado *resbalamiento simple*, y para este caso en los dos planos inclinados a 45° con los planos principales, sólo existen tensiones tangenciales. Como puede observarse en la figur el segundo polo de Mohr resulta ser impropio.

A una representación análoga se llega si partimos de dos planos en los cuales sólo existen tensiones tangenciales, figura 3.21.

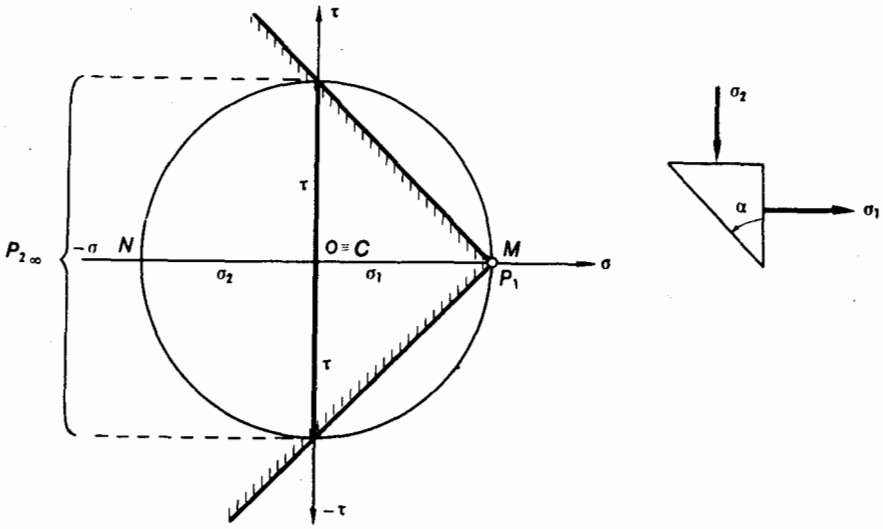


Fig. 3.20

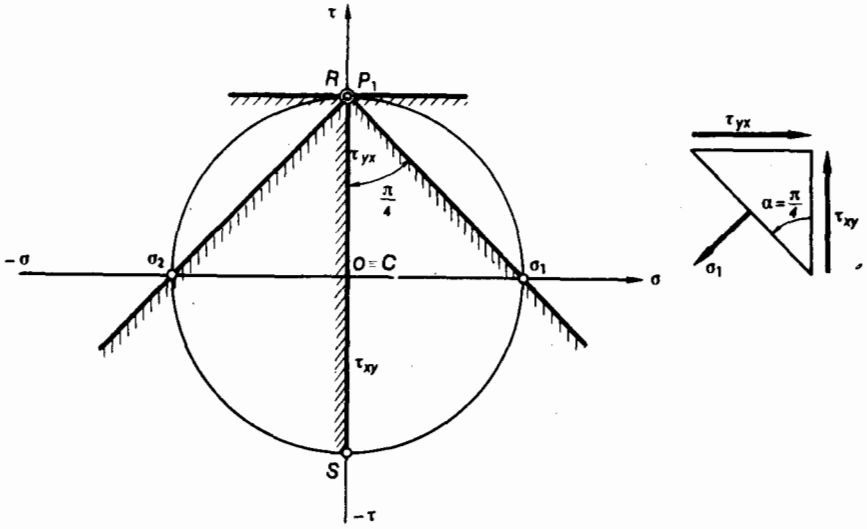


Fig. 3.21

En este caso, el primer polo coincide con el punto R, representativo del plano y, y se tiene que las tensiones principales ocurren para planos inclinados a 45° con los planos cuyas tensiones son las τ_{xy} y τ_{yx} dadas.

Finalmente, consideremos el caso en que ambas tensiones principales sean iguales, en valor absoluto y signo. En tal caso, la circunferencia de Mohr degenera en un punto, en el que también se confunden los dos polos de Mohr. Estamos ante un caso de tensión análogo al de tensión hidrostática espacial, pero plano, en el que para cualquier plano de tensión se reduce a una tensión normal, igual para todos ellos y que a la vez es tensión principal.

3.7.4.7. Existencia de las tres circunferencias de Mohr en el estado elástico plano

Hemos definido el estado elástico plano como aquel estado elástico para el cual una de las tensiones principales es nula y donde, como consecuencia, la tensión resultante resulta paralela a un plano determinado. La tensión principal que se anula varía según sea el signo de las no nulas, en razón de ser:

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3 \qquad [3.118]$$

En efecto, si las dos tensiones principales son positivas, la tensión nula es σ_3; si, en cambio, ambas son negativas, lo es σ_1, y finalmente si las dos tensiones son de signo contrario, se anula σ_2.

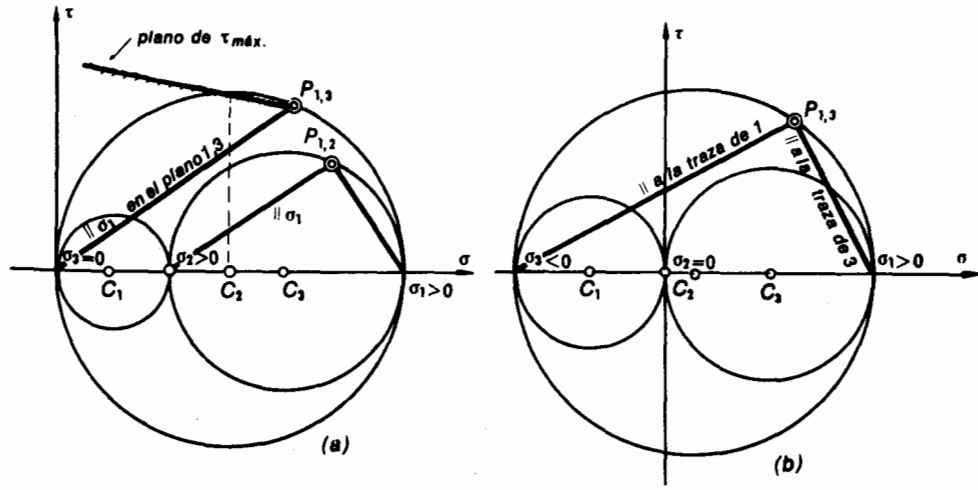


Fig. 3.22

Siempre que nos encontremos ante un estado plano de tensión continúan subsistiendo las tres circunferencias. Ello se suele perder de vista y es opinión muy difundida que, para el estado plano de tensión, las solicitaciones más importantes ocurren para los elementos planos paralelos a la dirección principal no solicitada.

Lo expresado se pone en evidencia en la figura 3.22 (a) y (b). La primera corresponde al caso de $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 > 0$ y $\sigma_3 = 0$. La circunferencia correspondiente al estado plano es la de diámetro $\sigma_1 - \sigma_2$ con centro en C_3, pero vemos que existen las otras dos, de las cuales la mayor es la denominada *circunferencia fundamental* o *principal* y es a la que corresponden las solicitaciones tangenciales mayores, a igualdad de tensiones normales.

La figura 3.22 (b) corresponde al caso en que $\sigma_1 > 0 > \sigma_3$ y $\sigma_2 = 0$. En este caso la circunferencia principal es la correspondiente al estado doble de tensión de diámetro $\sigma_1 + \sigma_3$. Para este caso, como la circunferencia fundamental es la de diámetro $\sigma_1 + \sigma_3$, se cumple efectivamente que los elementos planos más interesantes son aquellos que forman un haz de planos en torno a la dirección principal no solicitada, es decir, los que son paralelos a σ_2.

4. EL ESTADO SIMPLE DE TENSIÓN

4.1. Tensiones normal y tangencial para un plano cualquiera

Hemos definido el estado elástico o de tensión simple como aquel estado para el cual la tensión resultante se mantenía paralela a una dirección determinada, o también aquel para el cual dos de las tensiones principales se anulaban.

Si para el estado elástico simple resulta:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \qquad [4.1]$$

se anulan las dos últimas de las [2.43] y se tiene:

$$\rho_x = \rho = \sigma_1 l, \qquad [4.2]$$

y de la [2.45]:

$$\sigma = \sigma_1 l^2 = \sigma_1 \cos^2 \alpha. \qquad [4.3]$$

Finalmente, teniendo en cuenta la [2.46]:

$$\tau = \sqrt{\rho^2 - \sigma^2} = \sqrt{\sigma_1{}^2 l^2 - \sigma_1{}^2 l^4}, \qquad [4.4]$$

$$\tau = \sigma_1 l \sqrt{1 - l^2} = \sigma_1 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \qquad [4.5]$$

Si hacemos coincidir la dirección 1 con el eje x tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \sigma_x \cos^2 \alpha \\ \tau &= \sigma_x \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2} \\ \rho &= \sigma_x \cos \alpha \end{aligned}\right\} \qquad [4.6]$$

En figura 4.1 hemos considerado un elemento plano de normal coincidente con la dirección x y sobre el que actúa solamente la tensión σ_x (coincidente como hemos dicho con σ_1). Para otro plano cualquiera, que forma un ángulo α con el plano considerado, las tensiones σ y τ tienen por resultante una tensión que llamaremos ρ_α y que coincide en dirección con σ_x.

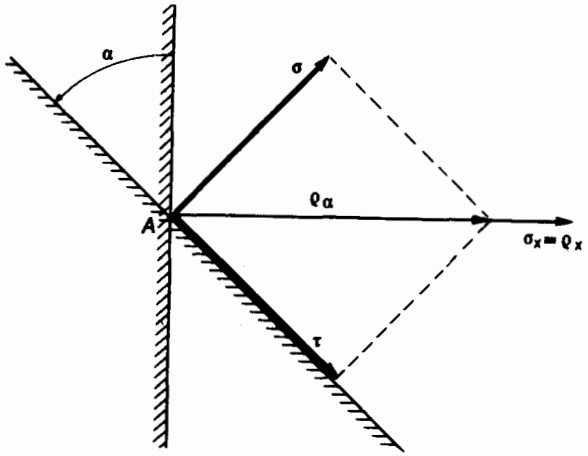


Fig. 4.1

Derivando respecto de α la primera de las [4.6] e igualando a cero:

$$\left.\frac{d\sigma}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_1} = -\ \sigma_x\, 2 \operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha \Big|_{\alpha=\alpha_1} = 0, \qquad [4.7]$$

que se cumple para $2\alpha_1 = 0$ y $2\alpha_1 = \pi$, de donde los valores máximo y mínimo de σ se obtendrán para $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_1 = \pi/2$. Para el primero de ellos:

$$\sigma = \sigma_x, \qquad [4.8]$$

y para el segundo:

$$\sigma = 0. \qquad [4.9]$$

Para dichos planos se cumple que la tensión tangencial es nula, como es fácil de observar, reemplazando los valores de α que anulan la [4.7] en la segunda de las [4.6].

En lo que respecta a la tensión tangencial, derivando respecto de α la segunda de las [4.6]:

$$\left.\frac{d\tau}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_2} = \sigma_x \cos 2\alpha \Big|_{\alpha=\alpha_2} = 0, \qquad [4.10]$$

vemos que esta expresión se anula para $2\alpha_2 = \pi/2$ y $2\alpha_2 = \frac{3}{2}\pi$, o sea $\alpha_2 = \pi/4$ y $\alpha_2 = \frac{3}{4}\pi$, es decir, para los planos que bisecan los planos principales. Los valores de τ para los mismos son:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{\sigma_x}{2} \\ \tau_{\min} &= -\frac{\sigma_x}{2} \end{aligned}\right\} \qquad [4.11]$$

4.2. Representación gráfica del estado elástico simple. Circunferencia de Mohr

Para el estado elástico simple, la única representación gráfica de las que hemos analizado para los estados elásticos triple y doble, que presenta interés, es la que corresponde a la circunferencia de Mohr. La elipse de Lamé, al anularse las tensiones principales σ_2 y σ_3, reduce su expresión a:

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} = 1, \qquad [4.12]$$

o sea:

$$x = \pm\ \sigma_1, \qquad [4.13]$$

que representa un segmento de recta, coincidente con el eje x y de longitud $2\sigma_1$. Análogamente, tanto la cónica directriz como la indicatriz reducen sus expresiones a:

$$\frac{x^2}{\sigma_1} = \pm 1, \qquad [4.14]$$

$$x = \pm\sqrt{\sigma_1}, \qquad [4.15]$$

es decir, que las cónicas degeneran en segmentos de rectas, coincidentes con el eje x y de longitudes $2\sqrt{|\sigma_1|}$ y $2/\sqrt{|\sigma_1|}$, respectivamente.

Veamos ahora la circunferencia de Mohr. La primera de las [4.6] representa la ecuación de una circunferencia en coordenadas polares.

En figura 4.2 hemos representado dicha circunferencia llevando a partir de O sobre el eje σ el diámetro $\overline{OA} = \sigma_1$. Sea π la paralela a la traza de un plano que forma un ángulo α con el plano principal *1*. Dicha paralela define sobre la circunferencia el punto T. Por simples razones geométricas, se tiene que $\widehat{ACT} = 2\alpha$ y $\widehat{COT} = \alpha$.

En consecuencia resulta:

$$\left.\begin{aligned} \overline{OT} &= \overline{OA}\cos\alpha \\ \overline{OT_0} &= \overline{OT}\cos\alpha \\ \overline{TT_0} &= \overline{OT}\operatorname{sen}\alpha \end{aligned}\right\} \qquad [4.16]$$

de donde, reemplazando:

$$\left.\begin{aligned} \overline{OT_0} &= \overline{OA}\cos^2\alpha \\ \overline{TT_0} &= \overline{OA}\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\overline{OA}\,\text{sen}\,2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad [4.17]$$

y como $\overline{OA} = \sigma_1$, resulta finalmente:

$$\left.\begin{aligned} \overline{OT} &= \sigma_1\cos\alpha \\ \overline{OT_0} &= \sigma_1\cos^2\alpha \\ \overline{TT_0} &= \sigma_1\frac{\text{sen}\,2\alpha}{2} \end{aligned}\right\} \qquad [4.18]$$

que por comparación con las [4.6] nos permiten concluir que:

$$\left.\begin{aligned} \overline{OT} &= \rho \\ \overline{OT_0} &= \sigma \\ \overline{TT_0} &= \tau \end{aligned}\right\} \qquad [4.19]$$

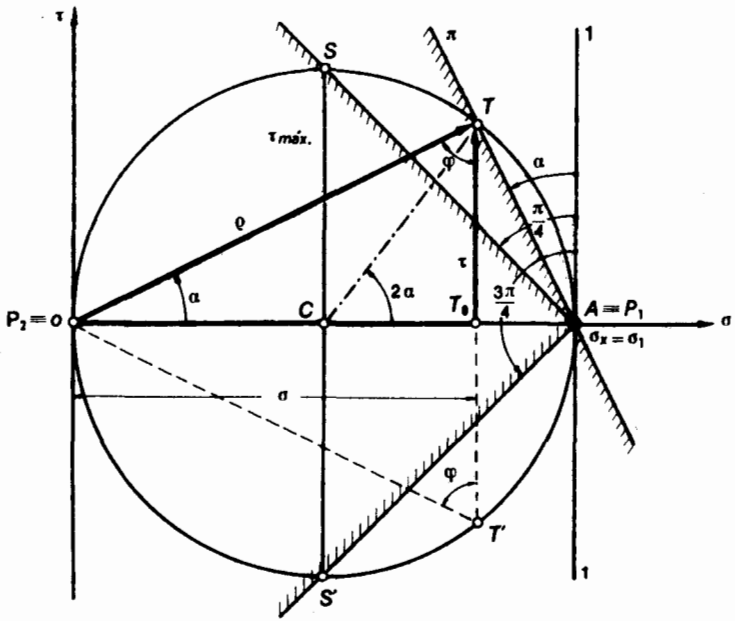


Fig. 4.2

La circunferencia nos dice que los planos principales forman ángulos α iguales a cero y a un recto y que $\tau_{máx.}$ ocurre para planos que forman ángulos de $\frac{1}{4}\pi$ y $\frac{3}{4}\pi$, siendo su valor $\frac{1}{2}\sigma_x$ y $-\frac{1}{2}\sigma_x$ como habíamos visto antes.

Como se verá más adelante, el estado elástico simple se presenta en los ensayos de tracción y comprensión simple y constituye un estado elástico que es frecuente encontrar en la práctica de la ciencia de las construcciones.

5. ESTADO DE DEFORMACIÓN DEL SÓLIDO CONTINUO

5 . 1 . Conceptos generales

El concepto de sólido rígido e indeformable, utilizado en Estática para deducir las leyes que rigen a la misma, pierde su validez cuando se entra a considerar el dominio de la Resistencia de Materiales. En efecto, en la Naturaleza, los cuerpos sometidos a la acción de fuerzas exteriores se deforman y la distancia entre dos puntos o la orientación relativa de dos elementos planos no permanece más fija e invariable, sino que se modifica: el cuerpo experimenta una *deformación*. Esta deformación, como veremos más adelante, se compone de tres partes: un corrimiento, una rotación y una deformación propiamente dicha o *deformación pura*. Las dos primeras corresponden a un movimiento rígido del sólido, para el cual dos puntos cualesquiera no modifican su distancia relativa y no nos interesa ocuparnos de las mismas. Lo haremos sólo de la deformación pura, que en lo que sigue, por razones de simplicidad de expresión, llamaremos simplemente *deformación*.

En el presente capítulo nos ocuparemos de establecer las leyes que rigen las deformaciones continuas, es decir, aquellas deformaciones para las cuales a dos puntos infinitamente próximos del sólido antes de la deformación, corresponden luego de ocurrida la misma, dos puntos también infinitamente próximos.

5 . 2 . Deformaciones en el entorno de un punto

Sea A, figura 5.1, un punto arbitrario de un sólido continuo sujeto a tensiones y x_A, y_A, z_A sus coordenadas respecto de una terna de referencia. Si A' es la posición que ocupa A luego de la deformación y u, v y w las componentes según los tres ejes coordenados del corrimiento a experimentado por A, las coordenadas de A' serán:

$$\left.\begin{aligned} x_A' &= x_A + u \\ y_A' &= y_A + v \\ z_A' &= z_A + w \end{aligned}\right\} \qquad [5.1]$$

Existe pues entre los puntos A correspondientes a la posición inicial y los puntos A' correspondientes a la posición final, una correspondencia biunívoca de punto a punto, la que quedará determinada si se conocen las funciones:

$$\left.\begin{aligned} u &= u\,(x, y, z) \\ v &= v\,(x, y, z) \\ w &= w\,(x, y, z) \end{aligned}\right\} \qquad [5.2]$$

que definen los corrimientos de los puntos del sólido continuo. Consideremos ahora un entorno del punto A y en él un segundo punto B (figura 5.1), infinitamente próximo a A. Si ds es la distancia entre A y B y dx, dy, dz sus tres componentes ortogonales, las coordenadas del último de los puntos mencionados serán:

$$\left.\begin{aligned} x_B &= x_A + dx \\ y_B &= y_A + dy \\ z_B &= z_A + dz \end{aligned}\right\} \qquad [5.3]$$

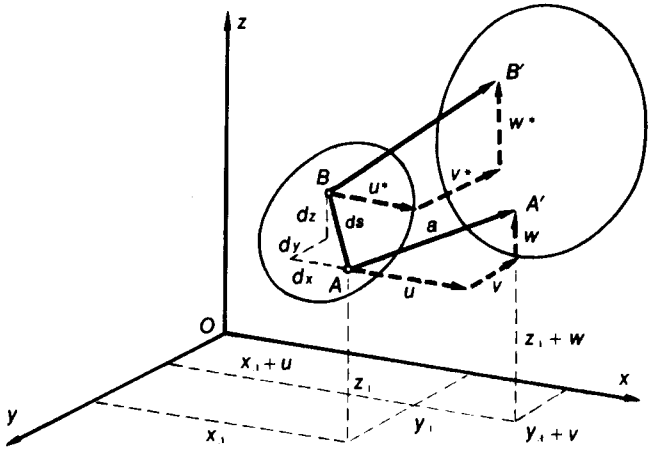


Fig. 5.1

El punto B pasará a la posición B' como consecuencia de la deformación y su corrimiento tendrá por componentes:

$$\left.\begin{aligned} u^* &= u + du = u\,(x + dx; y + dy; z + dz) \\ v^* &= v + dv = v\,(x + dx; y + dy; z + dz) \\ w^* &= w + dw = w\,(x + dx; y + dy; z + dz) \end{aligned}\right\} \qquad [5.4]$$

El estudio de las deformaciones supone que las funciones que definen los corrimientos son continuas y derivables y en consecuencia podremos desarrollar las tres funciones u^*, v^* y w^* en serie de Taylor, limitando el desarrollo a los términos de primer orden obteniendo en consecuencia:

$$\left.\begin{aligned} u^* &= u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \\ v^* &= v + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz \\ w^* &= w + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz \end{aligned}\right\} \qquad [5.5]$$

Las coordenadas de B' serán $x_A + dx + u^*$; $y_A + dy + v^*$; $z_A + dz + w^*$, y referidas al punto A:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= u + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \\ \Delta v &= v + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz \\ \Delta w &= w + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz \end{aligned}\right\} \qquad [5.6]$$

expresiones que nos dicen que las coordenadas de B' son funciones lineales de las de B. De ello podemos concluir que al quedar en todo sólido continuo definida una cierta superficie por una determinada función $\varphi\,(x, y, z)$, la superficie deformada se obtendrá, dada la correspondencia biunívoca existente, materializando la transformación lineal establecida por las tres ecuaciones [5.6]. Análogamente, es posible establecer la misma conclusión para una línea cualquiera y su deformada.

Por otra parte, en toda transformación lineal, las expresiones algebraicas conservan su orden, lo que permite asegurar que para todo entorno infinitésimo del punto A un plano se transforma en otro plano, y como la intersección de dos planos define una recta, se sigue que toda recta se transformará en otra recta. Consecuentemente, dos rectas paralelas continuarán siendo paralelas luego de la deformación, ocurriendo lo mismo con dos planos paralelos, con lo que un

paralelepípedo se trasformará en otro, una circunferencia en una elipse, una esfera en un elipsoide, etc.

5 . 3 . Deformaciones lineales específicas y distorsiones

Sea el cubo elemental de figura 5.2 de aristas dx, dy, dz perteneciente a un sólido elástico continuo. Por efecto de las tensiones que lo solicitan, el cubo infinitésimo se desplaza y deforma. Como consecuencia de ello varían las longitudes de sus aristas y cambian los ángulos diedros formados por sus caras, originariamente rectos. Para establecer el valor de la deformación sufrida por el cubo, es necesario conocer el valor de las variaciones de longitud experimentadas por sus aristas y las variaciones de los ángulos *BAF*, *DAF*, y *DAB*.

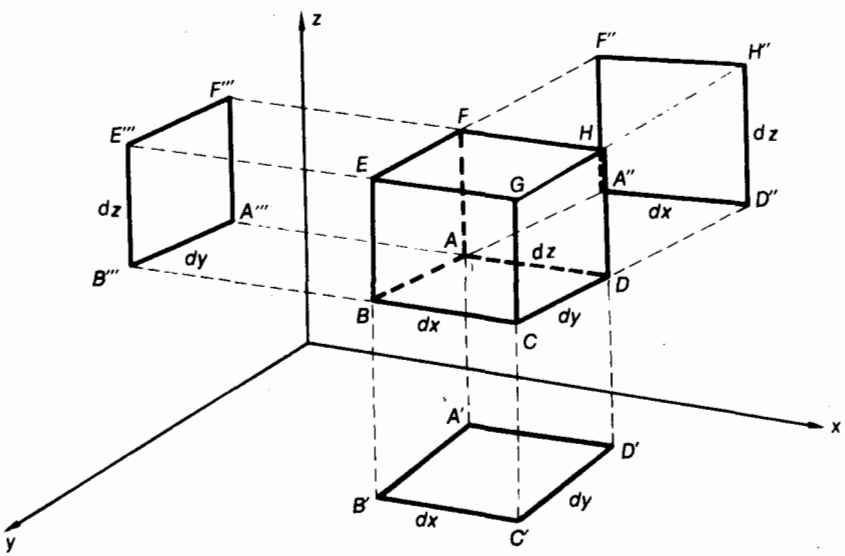


Fig. 5.2

A la variación de longitud de una arista, sea esta un alargamiento o un acortamiento, referida a la longitud inicial, la denominaremos *deformación específica* o simplemente *deformación*, y a la variación angular entre las aristas, con respecto a su orientación primitiva, es decir, ortogonal, *distorsión*.

A efectos de facilitar el estudio de la deformación del paralelepípedo elemental, estudiaremos las deformaciones de las tres proyecciones del mismo sobre

los planos coordenados. Ello nos permitirá formarnos un juicio acerca de la naturaleza de la deformación experimentada por el paralelepípedo.

En lo que sigue, designaremos con ϵ la deformación específica o unitaria y con γ la distorsión o deformación angular.

Consideremos, figura 5.3, la proyección sobre el plano xy del prisma de figura 5.2 (se hace notar que se ha cambiado la designación de los vértices del cuadrado proyección). En la figura se ha hecho coincidir el vértice A con el origen de coordenadas. Como se ha dicho, el cubo se encuentra sujeto a tensiones normales y tangenciales, experimentando en consecuencia deformaciones específicas lineales y distorsiones, pasando de la posición original *ABCD*

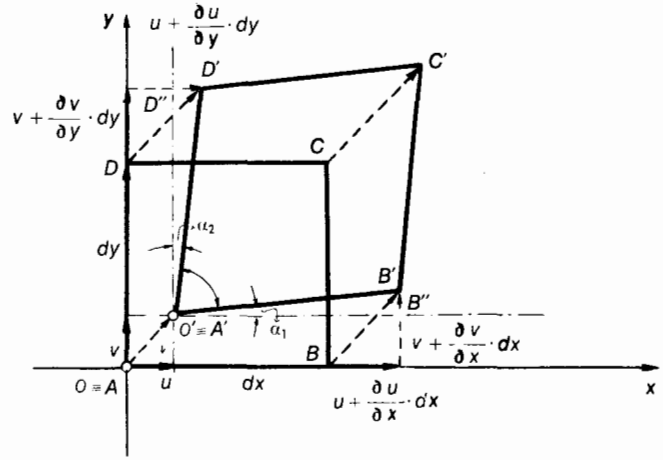


Fig. 5.3

a la posición y forma final $A'B'C'D'$, habiéndose modificado la longitud de los lados y ocurrido variaciones angulares entre los mismos. Los vectores *corrimiento* de los vértices serán $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ y $\overline{DD'}$. Cada uno de esos corrimientos admite una componente sobre cada eje coordenado. Hemos dicho que los corrimientos responden a funciones continuas y derivables, y siendo u y v las componentes del corrimiento de A según x e y respectivamente, las correspondientes al vértice B serán:

$$\left.\begin{aligned} u^* &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ v^* &= v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \end{aligned}\right\} \qquad [5.7]$$

y las del vértice D:

$$\left.\begin{aligned} u^{**} &= u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ v^{**} &= v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{aligned}\right\} \qquad [5.8]$$

Consideremos ahora las deformaciones específicas o corrimientos por unidad de longitud. De acuerdo con su definición serán iguales a la relación entre el incremento de longitud y la longitud inicial, teniéndose de acuerdo con ello, para la dirección x:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}\right\} \qquad [5.9]$$

y para la dirección y:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad [5.10]$$

Análogamente, si consideramos las proyecciones del paralelepípedo sobre los planos coordenados restantes, llegaremos a:

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad [5.11]$$

es decir, que los tres corrimientos específicos serán:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad [5.12]$$

Volviendo a figura 5.3, consideremos ahora las variaciones angulares o distorsiones, que distinguiremos con dos subíndices, correspondientes estos al plano en que aquélla tiene lugar.

Para el plano x, y, la distorsión γ_{xy} es igual a la suma de los ángulos $B'\overset{\measuredangle}{O'}B''$ y $D'\overset{\measuredangle}{O'}D''$. Por tratarse de ángulos infinitésimos, podemos escribir:

$$\operatorname{tg} B'\overset{\measuredangle}{O'}B'' = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx}, \qquad [5.13]$$

despreciando infinitésimos de orden superior.

Análogamente:

$$\operatorname{tg} D'\overset{\measuredangle}{O'}D'' = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial y} dy - u}{dy}, \qquad [5.14]$$

y en consecuencia:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} B'\overset{\measuredangle}{O'}B'' &= \frac{\partial v}{\partial x} \\ \operatorname{tg} D'\overset{\measuredangle}{O'}D'' &= \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad [5.15]$$

Por tratarse de ángulos infinitésimos:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} B'\overset{\measuredangle}{O'}B'' &\cong B'\overset{\measuredangle}{O'}B'' = \alpha_1 \\ \operatorname{tg} D'\overset{\measuredangle}{O'}D'' &\cong D'\overset{\measuredangle}{O'}D'' = \alpha_2 \end{aligned}\right\} \qquad [5.16]$$

de donde, por ser $\alpha_1 + \alpha_2 = \gamma_{xy}$:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad [5.17]$$

Consideraciones análogas para las dos proyecciones restantes del paralelepípedo sobre los planos x, z e y, z, nos conducirían a las distorsiones correspondientes a dichos planos cuyas expresiones son:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{zy} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad [5.18]$$

Llegamos así a la conclusión de que las distorsiones o variaciones angulares están dadas por la suma de las derivadas parciales cruzadas del corrimiento correspondiente a un eje con respecto al otro, para el par de ejes que definen el plano para el cual se calcula la distorsión.

Los ángulos α_1 y α_2 que corresponden a las proyecciones de la distorsión sobre el plano x, y, pueden ser descompuestos en la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}\gamma_{xy} + \theta_z \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2}\gamma_{xy} - \theta_z \end{aligned}\right\} \qquad [5.19]$$

por cuanto la suma miembro a miembro de ambas expresiones nos conduce a la [5.17].

Como puede observarse en la secuencia de figura 5.4, la interpretación de la [5.19] es la siguiente: la variación que experimenta el ángulo $B''O'D''$ puede considerarse como resultante de una deformación pura materializada por el giro en sentidos opuestos de los lados $O'D''$ y $O'B''$ de $\gamma_{xy}/2$ cada uno de ellos y

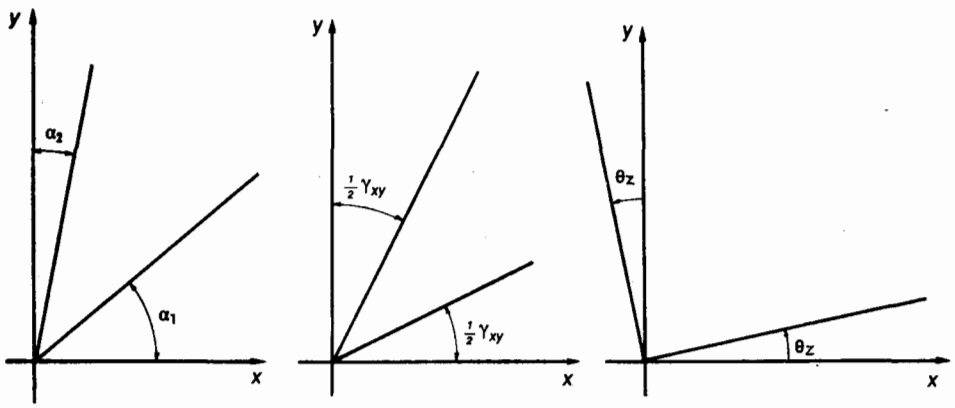


Fig. 5.4

una rotación en torno de un eje que pasa por O', para la cual ambos lados del cuadrado giran en sentido inverso de un mismo ángulo θ_z. Eliminando γ_{xy} entre las dos ecuaciones [5.19] se llega a:

$$\theta_z = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2), \qquad [5.20]$$

y teniendo en cuenta que:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\partial v}{\partial x} \\ \alpha_2 &= \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad [5.21]$$

resulta finalmente:

$$\theta_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad [5.22]$$

Un razonamiento análogo efectuado con las proyecciones sobre los otros dos planos nos conduciría a que las dos rotaciones restantes tienen por expresión:

$$\left.\begin{aligned} \theta_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \theta_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} \qquad [5.23]$$

Consideremos nuevamente las expresiones [5.5] que nos dan el corrimiento del punto B en función del correspondiente al A. Si de las expresiones que definen las deformaciones ϵ_i, las distorsiones γ_{ij} y las rotaciones θ_i en función de las derivadas parciales de u, v y w despejamos los valores de las nueve derivadas parciales obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \epsilon_x & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2}\gamma_{xy} - \theta_z & \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{2}\gamma_{xz} + \theta_y \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2}\gamma_{xy} + \theta_z & \frac{\partial v}{\partial y} &= \epsilon_y & \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{2}\gamma_{zy} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{2}\gamma_{xz} - \theta_y & \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{2}\gamma_{zy} + \theta_x & \frac{\partial w}{\partial z} &= \epsilon_z \end{aligned}\right\} \qquad [5.24]$$

valores que reemplazados en las [5.5] y reagrupando términos nos permiten llegar a las expresiones:

$$\left.\begin{aligned} u^* &= u + (\theta_y\,dz - \theta_z\,dy) + \left(\epsilon_x\,dx + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\,dy + \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\,dz\right) \\ v^* &= v + (\theta_z\,dx - \theta_x\,dz) + \left(\epsilon_y\,dy + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\,dx + \tfrac{1}{2}\gamma_{zy}\,dz\right) \\ w^* &= w + (\theta_x\,dy - \theta_y\,dx) + \left(\epsilon_z\,dz + \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\,dx + \tfrac{1}{2}\gamma_{zy}\,dy\right) \end{aligned}\right\} \quad [5.25]$$

que pueden expresar en la forma simplificada siguiente:

$$\left.\begin{aligned} u^* &= u + u_1 + u_2 \\ v^* &= v + v_1 + v_2 \\ w^* &= w + w_1 + w_2 \end{aligned}\right\} \quad [5.26]$$

En otras palabras, el corrimiento a^* de componentes u^*, v^*, w^*, puede suponerse como resultante de otros tres:

$$a^* = a + a_1 + a_2, \quad [5.27]$$

tales que para los mismos se cumpla:

$$\left.\begin{aligned} a &= u + v + w \\ a_1 &= u_1 + v_1 + w_1 \\ a_2 &= u_2 + v_2 + w_2 \end{aligned}\right\} \quad [5.28]$$

El primero de ellos es independiente del punto considerado, por consiguiente expresa una *traslación rígida*, para la cual todos los puntos experimentan el mismo corrimiento.

El segundo tiene por componentes:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \theta_y\,dz - \theta_z\,dy \\ v_1 &= \theta_z\,dx - \theta_x\,dz \\ w_1 &= \theta_x\,dy - \theta_y\,dx \end{aligned}\right\} \quad [5.29]$$

y corresponde a un corrimiento derivado de una *rotación* θ en torno del origen de coordenadas, cuyas componentes son θ_x, θ_y, θ_z. Observando la figura 5.5 vemos que $B_1B_1' = \theta \cdot A'B_1$, es decir, que se trata del momento estático de

la rotación θ respecto B_1 cuyas componentes según los tres ejes coordenados están dadas por los menores de segundo orden de la matriz:

$$\begin{vmatrix} \breve{e}_x & \breve{e}_y & \breve{e}_z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} \quad [5.30]$$

cuyo desarrollo coincide con las [5.29]

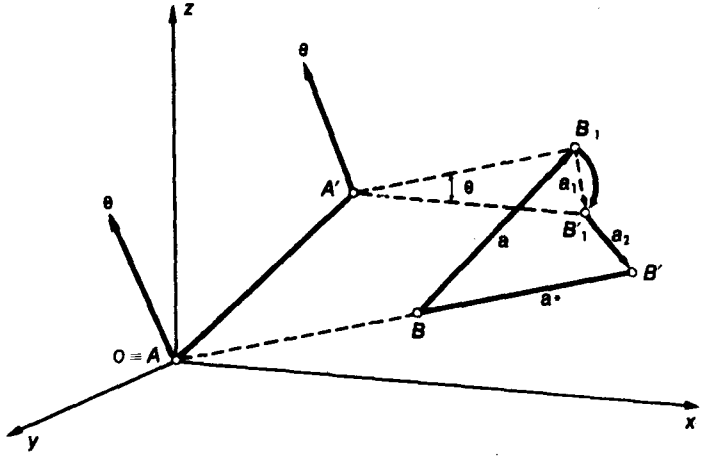


Fig. 5.5

Los corrimientos a y a_1 corresponden a un desplazamiento rígido del sólido; por el primero de ellos, un punto tal como el B pasa a ocupar la posición B_1, fig. 5.5. Por el segundo, consecuencia de la rotación θ, se traslada a la posición B_1', que no es la final. Esta posición es alcanzada en mérito al tercer corrimiento, el a_2, cuyas componentes son:

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= \epsilon_x\,dx + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\,dy + \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\,dz \\ v_2 &= \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\,dx + \epsilon_y\,dy + \tfrac{1}{2}\gamma_{zy}\,dz \\ w_2 &= \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\,dx + \tfrac{1}{2}\gamma_{zy}\,dy + \epsilon_z\,dz \end{aligned}\right\} \quad [5.31]$$

Para nuestro estudio, el único corrimiento que realmente interesa es el tercero, que corresponde a lo que hemos denominado *deformación pura,* y que es la única que modifica la posición relativa de los puntos del sólido.

5 . 4 . El tensor deformación

Las ecuaciones [5.5] nos dicen que las componentes según los ejes coordenados del incremento del corrimiento experimentado por el punto considerado tiene por expresión:

$$\left.\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz \end{aligned}\right\} \qquad [5.32]$$

Por ser du, dv y dw funciones lineales y homogéneas de las coordenadas dx, dy y dz, sus nueve coeficientes en las [5.32] corresponden a las coordenadas de un tensor, que en general no es ni simétrico ni antimétrico y cuya expresión es:

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad [5.33]$$

Al estudiar en 2.10 el tensor de tensiones, vimos que todo tensor podía descomponerse en otros dos tensores, uno simétrico y otro antimétrico (veáse [2.166]). En consecuencia, procediendo de acuerdo con ello, podemos descomponer al tensor T dado por la [5.33] en dos tensores, uno simétrico y otro antimétrico cuyas respectivas expresiones son:

$$\mathrm{T}_{\text{def.}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad [5.34]$$

y

$$\mathrm{T}_{\text{rot.}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix} \qquad [5.35]$$

Si en las expresiones de ambos tensores reemplazamos las derivadas parciales, sus sumas y sus diferencias por las correspondientes expresiones dadas por las [5.12]; [5.17]; [5.18]; [5.22] y [5.23], tenemos:

$$\mathrm{T}_{\text{def.}} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} \qquad [5.36]$$

y

$$\mathrm{T}_{\text{rot.}} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \qquad [5.37]$$

Si observamos las coordenadas del primer tensor –el simétrico– vemos que las mismas se corresponden con los coeficientes de las [5.31] que definen la deformación pura. En consecuencia, a este tensor, lo denominaremos *tensor deformación*, y el mismo nos dice del carácter tensorial de la deformación pura. El segundo tensor, antimétrico, resulta ser el que define la rotación dada por las [5.29], y lo denominaremos *tensor rotación*. No nos ocuparemos del mismo, por cuanto no interesa a los efectos de nuestro estudio, limitándonos a hacerlo con el tensor deformación.

Para el primer tensor existen tres direcciones en las que se cumple que las distorsiones son nulas, es decir:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{zy} = 0 \qquad [5.38]$$

y a las que corresponden deformaciones específicas lineales que denominaremos principales, designándolas con ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3, suponiendo además que se tenga siempre, algebraicamente, $\epsilon_1 \geqslant \epsilon_2 \geqslant \epsilon_3$. A dichas direcciones se las conoce con el nombre de *direcciones principales de deformación* y *planos principales* a los que les son normales.

Cuando el tensor de deformación se refiere a los ejes principales, se simplifica su configuración en virtud de ser nulas las distorsiones, tomando la forma siguiente:

$$T_{\text{def.}} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \qquad [5.39]$$

El hecho que, para las direcciones principales, se anulen las distorsiones, significa que dichas direcciones ortogonales antes de la deformación, continúan siéndolo después de ocurrida ésta. Ello significa que un cubo elemental se transforma en un paralelepípedo rectángulo.

El primer invariante del tensor deformación tiene por expresión:

$$J_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3, \qquad [5.40]$$

que coincide, como veremos más adelante, con la expresión de la deformación volumétrica ϵ_V.

Si las tres deformaciones principales son iguales, es decir, si se tiene:

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \frac{\epsilon_V}{3}, \qquad [5.41]$$

el estado de deformación se denomina de *deformación uniforme*, se corresponde con un estado hidrostático o esférico de tensión y para el mismo no existen distorsiones en ninguna dirección, pudiendo decirse que todas las direcciones son principales de deformación. Su tensor representativo es un tensor esférico de expresión:

$$T_{\text{esf.}} = \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_V}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon_V}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon_V}{3} \end{bmatrix} \qquad [5.42]$$

y constituye una de las componentes del tensor deformación. La segunda componente es el *tensor desviador*, que corresponde a lo que se denomina estado de distorsión pura, para el que se cumple que la deformación volúmetrica es nula, es decir,

$$\epsilon_V = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0. \qquad [5.43]$$

La expresión del tensor desviador es la siguiente:

$$T_{\text{des.}} = \begin{bmatrix} \epsilon_x - \frac{\epsilon_V}{3} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y - \frac{\epsilon_V}{3} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z - \frac{\epsilon_V}{3} \end{bmatrix} \qquad [5.44]$$

Si los ejes de referencia elegidos coinciden con las direcciones principales de deformación, la descomposición del tensor de deformación en los tensores esférico y desviador toma la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_V}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon_V}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon_V}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 - \frac{\epsilon_V}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 - \frac{\epsilon_V}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 - \frac{\epsilon_V}{3} \end{bmatrix} \qquad [5.45]$$

que nos dice que la deformación experimentada por un sólido se compone de la deformación volumétrica, correspondiente al estado de deformación uniforme, y del cambio de forma, debido al estado de distorsión pura; para la primera no existe cambio de forma y para la segunda, de volumen.

5 . 5 . Las ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones

Las ecuaciones [5.12], [5.17] y [5.18] nos dan las expresiones de las deformaciones específicas y de las distorsiones en función de los corrimientos u, v y w. Es evidente que las deformaciones específicas y las distorsiones no pueden ser independientes las unas de las otras. Fijadas las deformaciones específicas ϵ, las distorsiones γ no pueden ser arbitrarias. A los efectos de establecer una relación funcional que vincule las deformaciones específicas con las distorsiones, derivemos la primera de las [5.12] dos veces con respecto a y y la segunda dos veces respecto a x, obteniendo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 v}{\partial y\, \partial x^2} \end{aligned}\right\} \qquad [5.46]$$

Si derivamos ahora la [5.17] primero respecto a x y luego a y, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y\, \partial x^2} \qquad [5.47]$$

Reemplazando los términos del segundo miembro de la [5.47] por sus valores dados por las [5.46] se tiene:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2}. \qquad [5.48]$$

Operando en forma similar con las restantes expresiones [5.12] y con las [5.18] llegamos finalmente a:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\, \partial z} &= \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} \end{aligned}\right\} \qquad [5.49]$$

Las expresiones [5.46], y [5.49] constituyen las denominadas *ecuaciones de compatibilidad* entre deformaciones y distorsiones, de gran importancia para el estudio de la Teoría Matemática de la Elasticidad.

5 . 6 . El estado de deformación en el entorno de un punto

Analizaremos el problema que nos ocupa, para el estado plano de deformación, es decir, para aquel estado de deformación en el cual una de las deformaciones principales es nula.

Si consideramos un punto perteneciente a un sólido sujeto a un estado plano de deformación, es evidente que las deformaciones específicas y las distorsiones variarán según la dirección que se considere. Analizaremos en primer término, la variación con la dirección considerada, de las deformaciones específicas ϵ.

Supongamos, fig. 5.6, un prisma elemental de espesor unitario y de

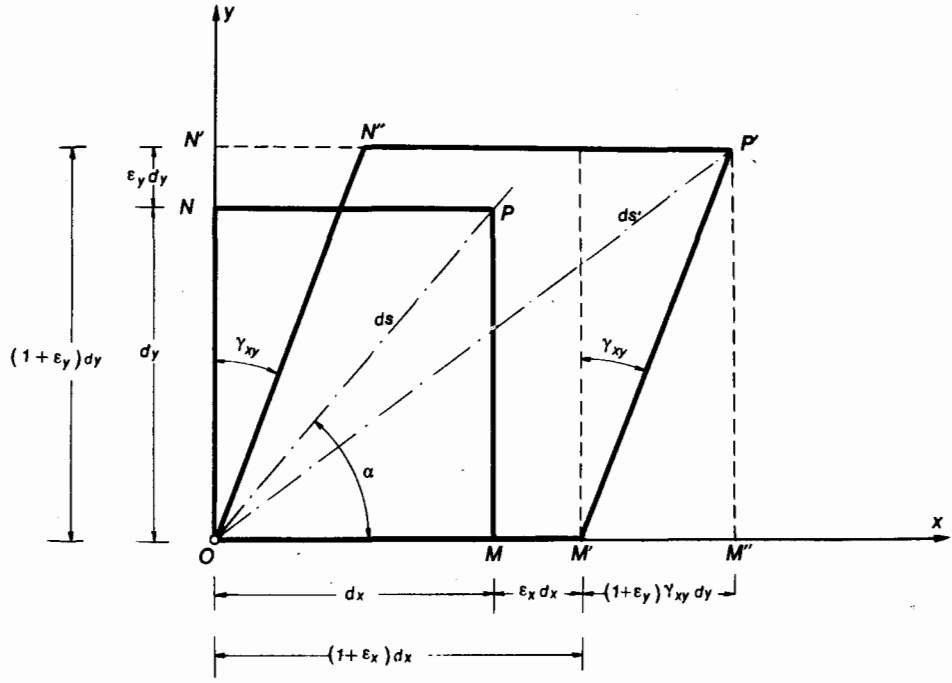


Fig. 5.6

lados dx, dy y sea ds su diagonal, cuya dirección forma con el eje x un ángulo α. Si ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} son las deformaciones específicas en las direcciones x e y y la

distorsión en el plano xy respectivamente, nos proponemos hallar una relación entre dichas magnitudes, que nos de el valor de la deformación específica ϵ_α correspondiente a la dirección de la diagonal ds.

Por efecto de la deformación, el prisma $OMPN$ adquiere la forma $OM'P'N''$, y en el triángulo $OM''P'$, rectángulo en M'' se tiene:

$$\overline{OP'}^2 = \overline{OM''}^2 + \overline{P'M''}^2 \qquad [5.50]$$

Pero de la figura resulta:

$$\overline{OP'}^2 = (ds + \epsilon_\alpha\, ds)^2 = (1 + 2\epsilon_\alpha)\, ds^2, \qquad [5.51]$$

despreciando infinitésimos de orden superior.

Análogamente tenemos:

$$\overline{P'M''}^2 = (1 + \epsilon_y)^2\, dy^2 = (1 + 2\epsilon_y)\, dy^2 \qquad [5.52]$$

$$\overline{OM''}^2 = (1 + \epsilon_x)^2 dx^2 + 2(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)\gamma_{xy}\, dx\, dy + (1 + \epsilon_y)^2 \gamma_{xy}^2\, dy^2 \qquad [5.53]$$

y también:

$$\overline{OM''}^2 = (1 + 2\epsilon_x) dx^2 + 2\gamma_{xy}\, dx\, dy. \qquad [5.54]$$

Pero:

$$dx = ds \cdot \cos\alpha$$
$$dy = ds \cdot \operatorname{sen}\alpha \qquad [5.55]$$

de donde, reemplazando las [5.51], [5.52], [5.54], y [5.55] en la [5.50] llegamos luego de simplificar ds^2, a la expresión:

$$\epsilon_\alpha = \epsilon_x \cos^2\alpha + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\alpha + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha, \qquad [5.56]$$

o también:

$$\epsilon_\alpha = \epsilon_x \cos^2\alpha + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\alpha + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha. \qquad [5.57]$$

Esta expresión presenta una gran similitud con la primera de las expresiones [3.11], que nos da el valor de la tensión normal sobre un plano cuya normal forma un ángulo α con la dirección x, existiendo una correspondencia entre las tensiones normales σ_x y σ_y, con las deformaciones específicas ϵ por una parte, y de la tensión tangencial con la distorsión por la otra, con la única diferencia que la distorsión aparece en la ecuación afectada del factor $\frac{1}{2}$.

Veamos ahora la variación de la distorsión γ con la dirección considerada. Consideraremos la distorsión γ_α como suma de los efectos correspondientes a un estado de distorsión pura con otro de deformación lineal pura, es decir:

$$\gamma_\alpha = \gamma_\alpha' + \gamma_\alpha''. \qquad [5.58]$$

Analizaremos en primer término el efecto de la distorsión pura.

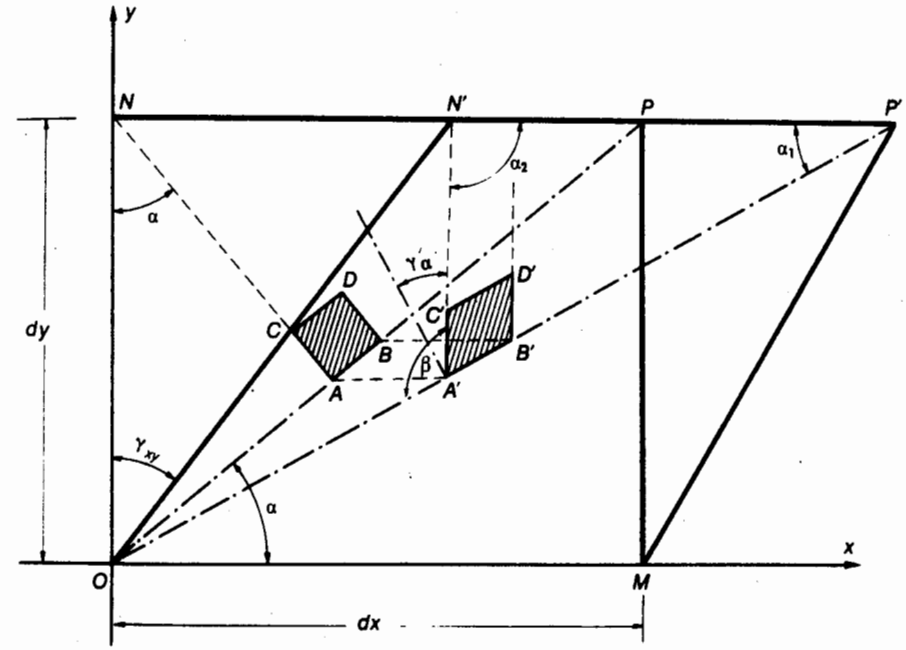


Fig. 5.7

Sea el prisma de espesor unitario y lados dx, dy de figura 5.7, que experimenta una distorsión γ_{xy}. Como consecuencia de la misma, el prisma experimenta cambio de forma pero no de volumen, y los puntos N y P pasan a ocupar las posiciones N' y P'.

Si consideramos un cuadrado elemental $ABCD$ apoyado sobre la diagonal OP que forma el ángulo α con el eje x, como consecuencia de la distorsión, toma la forma $A'B'C'D'$, y los lados normales a OP forman ahora con la nueva posición de la diagonal un ángulo β. Con la notación de la figura podemos escribir:

$$\gamma'_\alpha = \operatorname{tg}\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right] = -\operatorname{cotg}\beta = -\operatorname{cotg}(\alpha_1 + \alpha_2), \qquad [5.59]$$

o también:

$$\gamma'_\alpha = -\frac{1 - \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 - 1}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}. \qquad [5.60]$$

Expresando $\operatorname{tg}\alpha_1$ y $\operatorname{tg}\alpha_2$ en función de los elementos de figura 5.7 y mediante una serie de transformaciones trigonométricas de las que prescindimos,[1] se llega finalmente a:

$$\gamma'_\alpha = \gamma_{xy} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}\gamma_{xy}^2 \operatorname{sen} 2\alpha. \qquad [5.61]$$

Pero, teniendo en cuenta que γ_{xy} es muy pequeña, podemos suponer su cuadrado aproximadamente igual a cero, resultando finalmente:

$$\gamma'_\alpha = \gamma_{xy} \cos 2\alpha. \qquad [5.62]$$

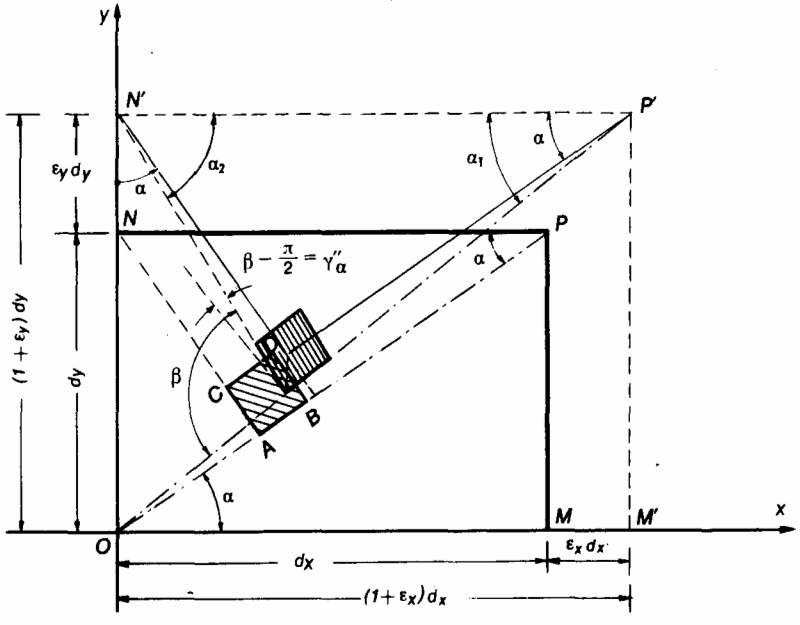


Fig. 5.8

[1] Remitimos al lector interesado a *Resistencia de Materiales* de A. M. Guzmán, La Plata 1967 y a *Advanced Mechanics of Materials* de Glenn Murphy.

Consideremos ahora, figura 5.8, la distorsión originada por las deformaciones lineales ϵ_x y ϵ_y.

De la figura resulta:

$$\gamma''_\alpha = \operatorname{tg}\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right] = -\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) =$$

$$= -\operatorname{cotg}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 - 1}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}. \qquad [5.63]$$

Reemplazando $\operatorname{tg}\alpha_1$ y $\operatorname{tg}\alpha_2$ por sus valores en función de ϵ_x y ϵ_y que resultan de la figura, y luego de una serie de transformaciones algebraicas, en las que se desprecian infinitésimos de orden superior y se admiten como despreciables los valores de ϵ_x y ϵ_y frente a la unidad, resulta:

$$\gamma''_\alpha = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \operatorname{sen} 2\alpha. \qquad [5.64]$$

En consecuencia, sumando las [5.62] y [5.64] se llega finalmente a la siguiente expresión para γ_α:

$$\gamma_\alpha = \gamma'_\alpha + \gamma''_\alpha = (\epsilon_y - \epsilon_x) \operatorname{sen} 2\alpha + \gamma_{xy} \cos 2\alpha \qquad [5.65]$$

similar a la segunda de las expresiones [3.11], con la diferencia que en lugar de $\frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)$ aparece $(\epsilon_y - \epsilon_x)$.

5 . 7 . Deformaciones específicas y distorsiones máximas y mínimas

Las expresiones [5.57] y [5.65] nos dan los valores de ϵ_α y γ_α en función del ángulo α que define la dirección estudiada. Es evidente que al variar α, varían ambos valores que, evidentemente para determinados valores de α, alcanzarán valores máximos o mínimos.

Si derivamos la [5.57] respecto de α e igualamos a cero dicha derivada, llegamos a:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \qquad [5.66]$$

Existen dos valores de α_1 que difieren de $\pi/2$ y que satisfacen la ecuación [5.66], que corresponden a las dos direcciones principales de deformación. Reemplazada la [5.66] en la [5.57], previa expresión de $\cos^2\alpha$ y $\operatorname{sen}^2\alpha$ en función del arco doble, se llega, luego de una serie de transformaciones algebraicas,

análogas a las vistas para el estado elástico plano, a las siguientes expresiones, que dan los valores de las deformaciones específicas principales:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \\ \epsilon_2 &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \end{aligned}\right\} \qquad [5.67]$$

Procediendo en forma similar con la expresión [5.65], llegamos a:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_2 = \frac{\epsilon_y - \epsilon_x}{\gamma_{xy}} \qquad [5.68]$$

expresión que reemplazada en forma similar en [5.65] conduce finalmente a los valores de las distorsiones máxima y mínima:

$$\gamma_{\substack{\text{máx.}\\ \text{mín.}}} = \pm\sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}. \qquad [5.69]$$

Es de hacer notar que α_1 y α_2 cumplen con la condición:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = -\operatorname{cotg} 2\alpha_2 . \qquad [5.70]$$

es decir, que α_1 y α_2 difieren de 45°, situación análoga a la establecida en el estado elástico plano para los planos principales y los planos de tensión tangencial máxima.

5 . 8 . Circunferencia de deformaciones

La similitud de expresiones entre σ_α y ϵ_α por una parte, y τ_α con γ_α por la otra, hace que, análogamente a lo visto para el estado elástico plano, el estado de deformación plano pueda ser representado gráficamente mediante una *circunferencia* análoga a la de Mohr y que designaremos como circunferencia *de deformaciones.* Su construcción es similar a la circunferencia de tensiones de Mohr, con la única diferencia que en la circunferencia de deformaciones, en lugar de llevar como ordenadas los valores de τ_{xy}, se llevan los valores $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$. Para el trazado de la circunferencia de deformaciones es necesario establecer una convención de signos para las deformaciones específicas y para las distorsiones. En lo que sigue supondremos como positivas las primeras, cuando signifiquen un aumento de longitud, y como negativas las opuestas, mientras

que admitiremos como positivas las distorsiones que correspondan a una disminución del valor del ángulo de 90° que formen dos caras orientadas según los ejes x e y. La construcción de la circunferencia es en un todo similar a la de la circunferencia de Mohr para tensiones, con la única diferencia, repetimos, que en lugar de llevar como ordenadas los valores de τ_{xy} se lleva $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$. En la figura 5.9 se ilustra mediante un ejemplo, el trazado de la circunferencia de deformaciones partiendo de un estado dado de deformación ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}, para el cual se han supuesto las tres magnitudes positivas.

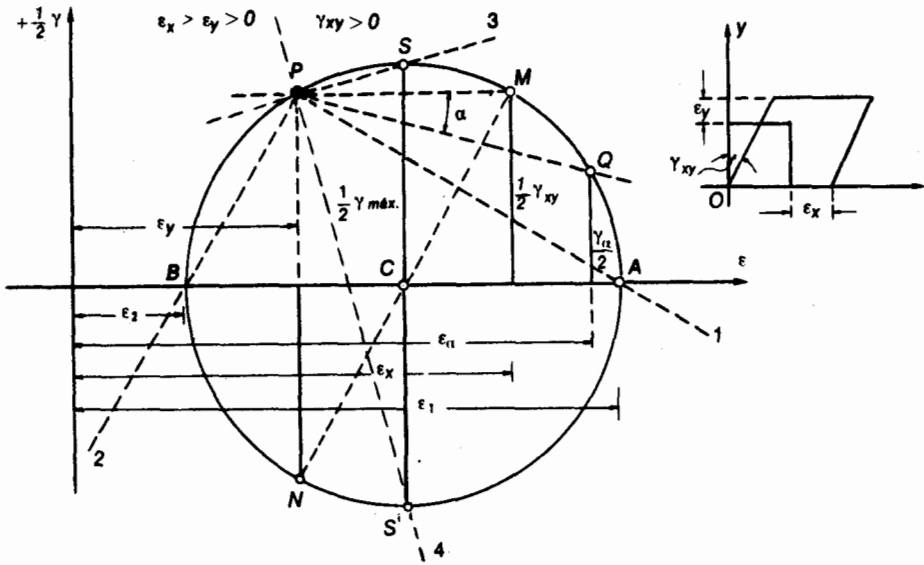


Fig. 5.9

La determinación del polo de la circunferencia de deformaciones se realiza en forma semejante a la correspondiente a la circunferencia de Mohr. En esta, por los puntos cuyas coordenadas son las tensiones en las dos caras ortogonales de referencia, se trazan paralelas a las correspondientes direcciones, cuya intersección determina sobre la circunferencia el primer polo de Mohr. En el caso que nos ocupa, se trazan por los puntos M y N, cuyas coordenadas definen las deformaciones específicas y distorsiones en las direcciones x e y respectivamente, dos rectas paralelas a estas últimas, cuya intersección P es el polo de la circunferencia de deformaciones. Para la dirección PQ que forma un ángulo α con la dirección x, las coordenadas de Q dan los valores de la deformación específica ϵ_α y de la distorsión $\frac{1}{2}\gamma_\alpha$. Análogamente, las direcciones *1* y *2* corresponden, respectivamente, a las deformaciones es-

pecíficas máxima y mínima ϵ_1 y ϵ_2 y las direcciones ortogonales *3* y *4* a las direcciones de $\frac{1}{2}\gamma_{\text{máx.}}$.

Interesa en ciertos casos, conocer las expresiones de ϵ_α y γ_α en función de las deformaciones específicas máximas. Para ello, si en la [5.57] reemplazamos $\text{sen}^2\,\alpha$ y $\cos^2\alpha$ por sus correspondientes expresiones en función del arco doble se tiene:

$$\epsilon_\alpha = \tfrac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) + \tfrac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y)\cos 2\alpha + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\,\text{sen}\,2\alpha. \qquad [5.71]$$

Luego si suponemos que las direcciones x e y se corresponden respectivamente con la *1* y *2*, por ser para las mismas $\gamma_{xy} = 0$, la [5.71] se transforma en

$$\epsilon_\alpha = \tfrac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \tfrac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)\cos 2\alpha, \qquad [5.72]$$

que es precisamente la expresión de ϵ_α en función de las deformaciones principales.

En cuanto a γ_α si procedemos en forma similar con la [5.65] obtenemos como expresión de γ_α en función de ϵ_1 y ϵ_2, por ser $\gamma_{xy} = 0$ en este caso:

$$\gamma_\alpha = (\epsilon_2 - \epsilon_1)\,\text{sen}\,2\alpha. \qquad [5.73]$$

6. RELACIONES ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES

6.1. Conceptos generales

En los capítulos anteriores hemos estudiado el equilibrio de las tensiones y la geometría de las pequeñas deformaciones, fenómenos estos representables por sendos tensores simétricos: el tensor de tensión [2.164] y el tensor de deformación [5.36]. Es evidente que entre ambos tensores debe existir una correlación, por cuanto las deformaciones son originadas por las tensiones.

Cada una de las seis coordenadas del tensor deformación es función de las correspondientes al tensor de tensión, funciones que no pueden ser cualesquiera.

Para materiales isótropos, por razones de simetría, existe coincidencia entre las direcciones principales de los dos estados, por lo que, expresados ambos tensores en función de sus coordenadas principales, es decir:

$$\mathrm{T} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \mathrm{T}_{\text{def.}} = \begin{vmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{vmatrix} \qquad [6.1]$$

podemos escribir:

$$\mathrm{T}_{\text{def.}} = F(\mathrm{T}) \qquad [6.2]$$

donde F es la función que vincula ambos estados, expresión esta equivalente a la siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_1 &= F_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \\ \epsilon_2 &= F_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \\ \epsilon_3 &= F_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \end{aligned}\right\} \qquad [6.3]$$

donde F_1, F_2 y F_3 son funciones independientes de la orientación de las direcciónes principales y particulares para cada tipo de material.

Es objeto de la Resistencia de Materiales, el establecer las relaciones que

vinculan las tensiones con las deformaciones partiendo de hipótesis simplificativas, pero suficientemente exactas y cuya validez ha sido verificada experimentalmente.

6 . 2 . La ley de Hooke y las constantes elásticas

La denominada "ley de Hooke"[1] constituye la base de la Resistencia de Materiales y es válida dentro de lo que se denomina régimen elástico. La ley de Hooke establece una relación lineal entre tensiones y deformaciones, y su expresión, para deformaciones específicas lineales es:

$$\epsilon = \alpha\,\sigma, \qquad [6.4]$$

donde α es el coeficiente de proporcionalidad entre las tensiones normales y las deformaciones específicas que las mismas originan.

Esta forma de expresar la *ley de Hooke* no es la más conveniente.

El coeficiente α es un coeficiente de deformación y conceptualmente corresponde a la deformación específica originada por una tensión unitaria. Su valor depende de las características mecánicas del material de que se trate, y su magnitud es muy pequeña.

Por eso se prefiere utilizar su inversa:

$$\alpha = \frac{1}{E} \qquad [6.5]$$

de donde la [6.4] se transforma en:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \qquad [6.6]$$

La constante E se denomina *módulo de Young* o *módulo de elasticidad longitudinal* y dentro de los límites que definen su validez es constante para un mismo material. Es la más importante de las cuatro constantes elásticas.

Si en la [6.6] suponemos $\sigma = E$, resulta $\epsilon = 1$, es decir, que el módulo de elasticidad puede interpretarse como el valor de la tensión normal que da origen a una deformación específica unitaria o en otras palabras, la tensión que produce un alargamiento o acortamiento, según el caso, igual a la longitud inicial. Esta tensión, por su magnitud, resulta físicamente incompatible con los materiales que se conocen. Por ello, conceptualmente es preferible la [6.4] como expresión de la ley de Hooke, aunque resulte más conveniente la [6.6] desde un punto de vista práctico.

Cuando se trata de distorsiones puras, la ley de Hooke tiene una expresión

tva.

similar a la [6.6]. En este caso vincula las tensiones tangenciales con las distorsiones en la forma siguiente:

$$\boxed{\gamma = \frac{\tau}{G}} \qquad [6.7]$$

donde G, módulo de elasticidad transversal que es la segunda constante elástica, puede ser imaginado como el valor de la tensión tangencial que origina una distorsión unitaria.

Toda deformación específica en una determinada dirección provoca otra, de signo contrario en direcciones normales, cualquiera sea el estado de tensión de que se trate. A la relación entre la deformación transversal y la longitudinal se la denomina *coeficiente de Poisson* y se la designa con μ, tercera constante elástica, es decir:

$$\frac{\epsilon_t}{\epsilon_l} = \mu, \qquad [6.8]$$

o también por su inversa m:

$$\mu = \frac{1}{m}. \qquad [6.9]$$

Existe una cuarta constante elástica K, denominada constante volumétrica, de deformación cúbica o módulo de elasticidad volumétrico, de la que nos ocuparemos más adelante. Estas cuatro constantes elásticas, distintas según el material que se trate, no son independientes las unas de las otras, sino que existen relaciones funcionales que las relacionan, es decir, que dadas dos de ellas, las otras dos quedan determinadas.

6 . 3 . Deformación volumétrica[1]

Sea el cubo elemental de figura 6.1, de aristas de longitud unitaria, perteneciente a un sólido sujeto a un estado triple de tensión. Como consecuencia del mismo, el cubo se encuentra sujeto a deformaciones que modifican su volúmen.

El aumento de longitud de las aristas (suponemos deformaciones positivas), por tratarse de longitudes unitarias, corresponde directamente a las deformaciones específicas $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$.

Si $V = 1$ es el volumen inicial del cubo elemental, el nuevo volumen, luego de la deformación, será:

[1] Denominada también deforn

$$V' = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) \qquad [6.10]$$

y el incremento de volumen:

$$\Delta V = V' - V = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) - 1 \qquad [6.11]$$

Desarrollando la [6.11] resulta:

$$\Delta V = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \epsilon_y \epsilon_x + \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z - 1 . \qquad [6.12]$$

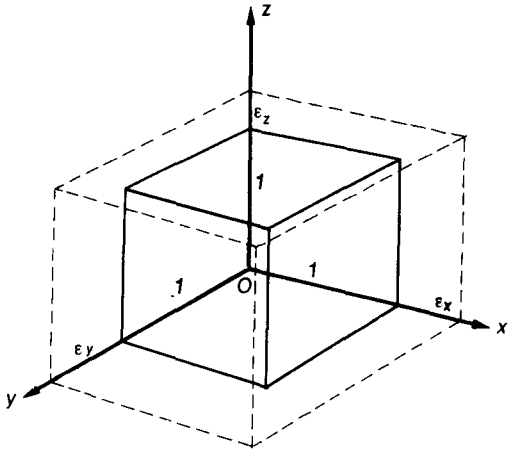


Fig. 6.1

Teniendo en cuenta que los productos de dos o tres deformaciones específicas son despreciables con relación a una de ellas por tratarse de infinitésimos de orden superior, la [6.12] se transforma en:

$$\Delta V = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z . \qquad [6.13]$$

Dividiendo por V, obtenemos la deformación específica volumétrica que, por ser $V = 1$, está dada directamente por la [6.13]

$$\epsilon_V = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z . \qquad [6.14]$$

Esta expresión se corresponde con la del primer invariante del tensor deformación [5.40] y en consecuencia podemos escribir:

$$\epsilon_V = J_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 . \qquad [6.15]$$

6.4. Generalización de la ley de Hooke

Supongamos nuevamente un cubo elemental de aristas unitarias, figura 6.2, cuyas caras se encuentran sujetas a tensiones $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$.

Como consecuencia de las mismas el cubo se deformará y sus aristas experimentarán alargamientos (positivos o negativos) que, por tratarse de longitudes unitarias, son directamente las deformaciones específicas ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z. La deformación ϵ_x no es sólo consecuencia de σ_x, sino también de σ_y y σ_z en virtud del efecto del coeficiente de Poisson, de modo que podemos escribir;

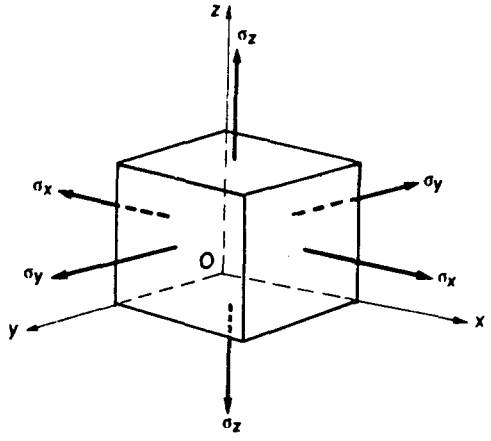


Fig. 6.2

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) , \qquad [6.16]$$

teniendo en cuenta que la deformación transversal es de signo contrario a la longitudinal. Análogamente, para las otras dos direcciones, resulta:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned}\right\} \qquad [6.17]$$

Sacando factor común $1/E$, las [6.16] y [6.17] se transforman en:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned}\right\} \qquad [6.18]$$

que constituyen las expresiones de la ley generalizada de Hooke.

Los términos entre barras tienen la dimensión de una tensión por ser μ adimensional. Podemos así imaginar tres tensiones ideales, actuando en las direcciones x, y, z, capaces de originar respectivamente las deformaciones específicas ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z, iguales a:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xi} &= \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) \\ \sigma_{yi} &= \sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z) \\ \sigma_{zi} &= \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned}\right\} \qquad [6.19]$$

con lo que las [6.18] se trasforman en:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_{xi}}{E} \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_{yi}}{E} \\ \epsilon_z &= \frac{\sigma_{zi}}{E} \end{aligned}\right\} \qquad [6.20]$$

Para el estado elástico plano, las expresiones de la ley generalizada de Hooke se simplifican. Si trabajamos en el plano (x, y) las [6.18] se transforman en:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\,\sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\,\sigma_x) \end{aligned}\right\} \qquad [6.21]$$

6 . 5 . Relación entre E, G y μ

Estableceremos a continuación una relación funcional que vincule entre sí las tres primeras constantes elásticas: E, G y μ. Para ello supongamos un estado plano de resbalamiento puro, fig. 6.3, es decir, un estado plano de tensión donde, en dos caras ortogonales sólo existen tensiones normales σ_x y σ_y tales que:

$$\sigma_x = -\sigma_y . \qquad [6.22]$$

Supongamos $\sigma_x < 0$ y $\sigma_y > 0$.

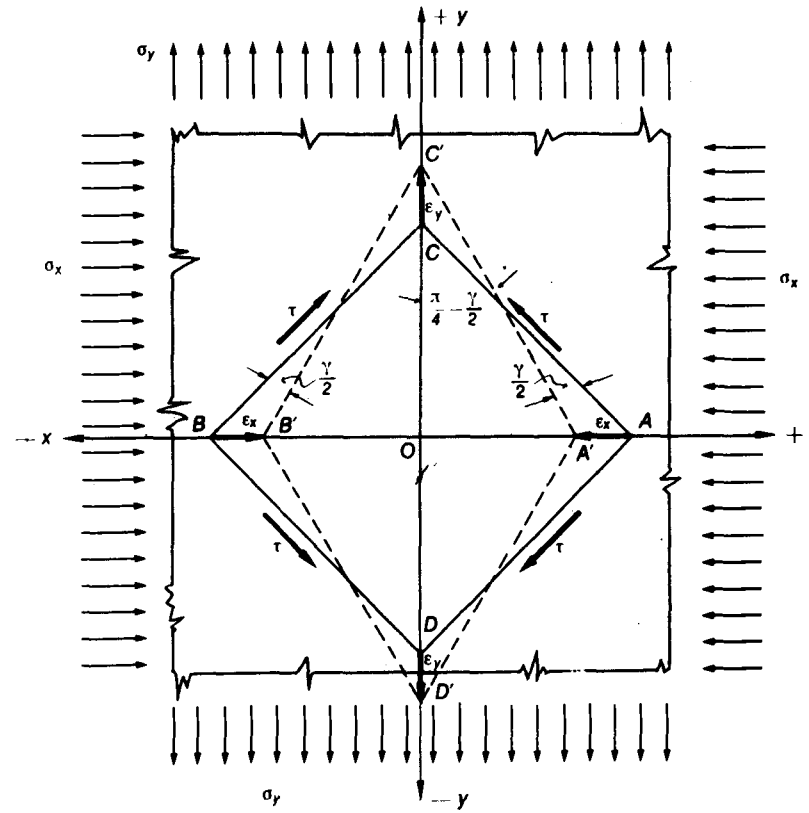


Fig. 6.3

Imaginemos ahora un prisma cuadrado de espesor unitario $ABCD$ cuyas semidiagonales tengan una longitud unitaria, es decir:

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = 1 , \qquad [6.23]$$

y orientadas sus caras a 45° con las direcciones x e y. Sobre estas caras, como sabemos, actuarán tensiones tangenciales de valor:

$$|\tau| = |\sigma_x| = |\sigma_y| . \qquad [6.24]$$

Como consecuencia de las tensiones normales σ_x y σ_y, el prisma se deforma y sus lados pasan a ocupar la posición $A'B'C'D'$.

El corrimiento del punto A, por ser $\overline{OA}$ unitaria, será ϵ_x, y ϵ_y el del punto C por razones análogas.

La variación angular del ángulo $A\overset{\measuredangle}{C}B$ será precisamente la distorsión γ y se tendrá:

$$A'\overset{\measuredangle}{C'}O = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}. \qquad [6.25]$$

Además:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 + \epsilon_x}{1 + \epsilon_y}, \qquad [6.26]$$

o también:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \epsilon_x}{1 + \epsilon_y} \qquad [6.27]$$

Pero $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$ y $\operatorname{tg}(\gamma/2) \cong \gamma/2$ por ser γ muy pequeño.

En consecuencia:

$$\frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \epsilon_x}{1 + \epsilon_y}. \qquad [6.28]$$

Pero, de acuerdo con las [6.21]:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\,\sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\,\sigma_x) \end{aligned}\right\} \qquad [6.29]$$

y teniendo en cuenta la [6.22]:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E}(1 + \mu) \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E}(1 + \mu) \end{aligned}\right\} \qquad [6.30]$$

Pero por ser $\sigma_x < 0$ en el caso que nos ocupa, es $\epsilon_x < 0$ y $\epsilon_y > 0$, luego para que la [6.28] se satisfaga, debe tenerse:

$$\frac{\gamma}{2} = \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}(1 + \mu). \qquad [6.31]$$

De la [6.24] $|\tau| = |\sigma_x|$, y recordando la [6.7], resulta:

$$\frac{\tau}{2G} = \frac{\tau}{E}(1 + \mu) \qquad [6.32]$$

y finalmente simplificando τ e invirtiendo términos:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \qquad [6.33]$$

6.6. Módulo de elasticidad volumétrico

Supongamos un cubo elemental de aristas unitarias, pertenecientes a un sólido sujeto a un estado elástico hidrostático, es decir, un estado elástico para el que se cumple:

$$-p = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z. \qquad [6.34]$$

Esta presión hidrostática p origina una deformación del cubo elemental, deformación que por su naturaleza es volumétrica. Por analogía con la ley de Hooke podemos escribir:

$$\epsilon_V = -\frac{p}{K} \qquad [6.35]$$

donde K es la constante elástica que se designa con el nombre de ***módulo de elasticidad volumétrico***, precisamente porque relaciona la deformación volumétrica con la presión hidrostática p.

En la expresión [6.35], ϵ_V es adimensional, lo que exige que, dado que la dimensión de p es la de una tensión, también lo sea la dimensión de K, con lo que esta resulta ser una magnitud de igual naturaleza que E.

De la [6.15], reemplazando en la misma las deformaciones específicas por sus valores dados por los [6.18] llegamos a:

$$\epsilon_V = \frac{1}{E}(1 - 2\mu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad [6.36]$$

o también:

$$\epsilon_V = \frac{1}{E}(1 - 2\mu)J_1, \qquad [6.37]$$

y recordando que:

$$E = 2G(1 + \mu), \qquad [6.38]$$

se tiene:

$$\epsilon_V = \frac{J_1(1 - 2\mu)}{2G(1 + \mu)}. \qquad [6.39]$$

Si $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$, el primer invariante se transforma en:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -3p, \qquad [6.40]$$

de donde, reemplazando en [6.36]:

$$\epsilon_V = -\frac{3p}{E}(1 - 2\mu) = -\frac{p}{K} \qquad [6.41]$$

y finalmente, eliminando p y despejando K:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}. \qquad [6.42]$$

Es evidente que K no puede alcanzar nunca un valor infinito. En efecto, de ser así, la expresión [6.35] conduciría para ϵ_V a un valor nulo lo que significaría la existencia de materiales absolutamente rígidos e indeformables, lo que es contrario a la naturaleza.

Si $0 < K < \infty$, el denominador de la [6.42] debe ser > 0, lo que exige que:

$$1 - 2\mu > 0, \qquad [6.43]$$

es decir:

$$2\mu < 1, \qquad [6.44]$$

o, lo que es lo mismo:

$$\mu < 0{,}5. \qquad [6.45]$$

Hemos llegado así a una conclusión interesante: el coeficiente de Poisson debe necesariamente ser menor de 0,5.

Ello, por otra parte, resulta evidente. En efecto, consideremos la expresión [6.41], donde p se supone de compresión y conduce a una deformación volumétrica negativa como es lógico que sea. Si el material del sólido que nos ocupa tuviera un coeficiente de Poisson $\mu > 0{,}5$, de acuerdo con la [6.42], el valor de K resultaría negativo y, en consecuencia, de acuerdo con la [6.41] ϵ_V positivo, lo que es contrario a la realidad.

7. PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES

7 . 1 . Consideraciones generales

La determinación de las constantes elásticas correspondientes a los distintos materiales, se efectúa experimentalmente sobre la base de ensayos que, al mismo tiempo, permiten conocer el comportamiento del material sujeto a tensiones hasta alcanzar la rotura.

A los efectos de poder medir los resultados, es necesario que el sólido sobre el que se efectúa el ensayo esté sometido a un estado de tensión simple que, por otra parte, debe repetirse para todos sus puntos.

Es por ello que para metales se acostumbra a utilizar el ensayo denominado de tracción (o compresión) simple, para el cual se emplea una barra de sección circular, de características normalizadas que se somete a un esfuerzo axil de tracción y en la que se miden, por una parte, las tensiones normales que ocurren en sus puntos (campo de tensión uniforme) y por otra, los alargamientos específicos (acortamientos cuando la solicitación es de compresión).

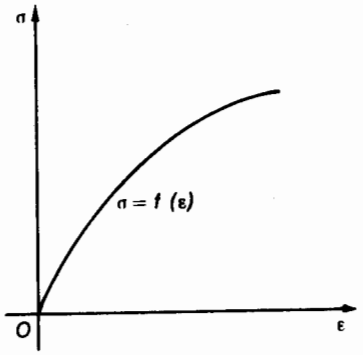


Fig. 7.1

El ensayo nos permite conocer pares de valores correspondientes σ, ϵ. Si en un par de ejes coordenados, llevamos en abscisas los valores de ϵ y en ordenadas los correspondientes valores de σ, fig. 7.1, el lugar geométrico de los puntos obtenidos constituye el denominado "diagrama de tensión–deformación" que permite visualizar el comportamiento de un determinado material sujeto a tensiones hasta alcanzar la rotura.

7.2. El diagrama tensión–deformación

En la naturaleza podemos distinguir tres tipos de materiales: dúctiles, frágiles y plásticos. Cada uno de ellos presenta distinto diagrama tensión–deformación.

En la figura 7.2 hemos representado un diagrama típico de un material dúctil, donde cabe distinguir tres zonas perfectamente caracterizadas: una primera, recta, denominada período elástico; una segunda zona, de "fluencia o escurrimiento", caracterizada porque en la misma aumentan las deformaciones sin incremento de tensión, y finalmente una tercera, la zona de las grandes deformaciones, conocida como "período plástico o anelástico" que se extiende hasta alcanzar la rotura.

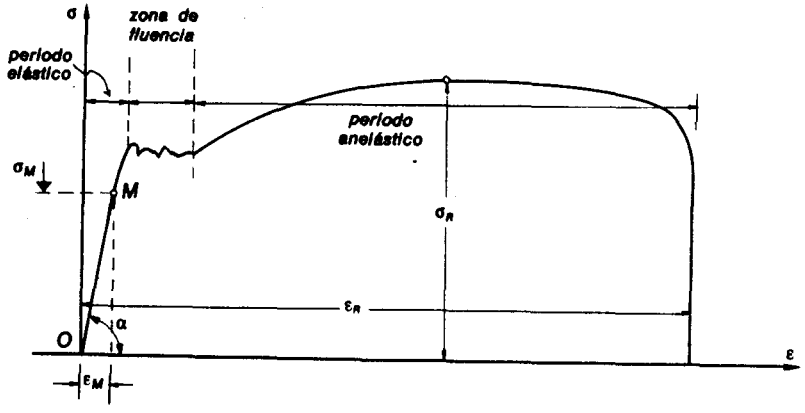


Fig. 7.2

Consideremos un punto cualquiera M ubicado sobre la recta que define el período elástico. Sus coordenadas serán σ_M y ϵ_M y la tangente al ángulo α que forma la recta con el eje horizontal, que mide su pendiente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_M}{\epsilon_M}. \qquad [7.1]$$

Según la expresión de la ley de Hooke, la relación [7.1] nos da precisamente el valor del módulo de elasticidad, es decir, que se tiene:

$$E = \operatorname{tg} \alpha. \qquad [7.2]$$

En la figura 7.3 hemos reproducido la parte del diagrama de figura 7.2, correspondiente a los períodos elástico y de fluencia, a los efectos de poder analizar más en detalle sus características.

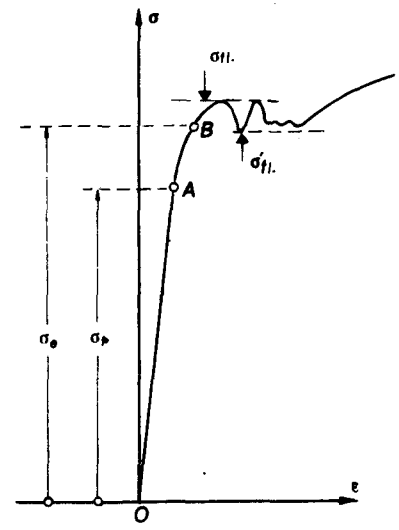


Fig. 7.3

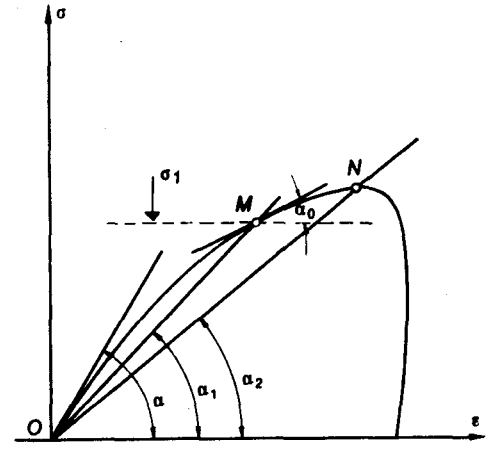


Fig. 7.4

El punto A, límite de la parte recta del diagrama, se denomina *límite de proporcionalidad* por cuanto, hasta alcanzar el mismo, existe proporcionalidad entre tensiones y deformaciones. La tensión que corresponde al mismo se designa con σ_p. A partir del punto A y al aumentar la tensión, el diagrama adquiere una cierta curvatura, no muy pronunciada, hasta llegar al punto B denominado *límite de elasticidad* cuya tensión se indica con σ_e. El límite de elasticidad se caracteriza por el hecho que, hasta llegar al mismo, el material se comporta elásticamente, pese a que en la zona AB no existe más proporcionalidad entre tensiones y deformaciones. Esto significa que, una vez alcanzado en el diagrama el punto B, si se descarga el material, el punto representativo del estado de carga, recorre el diagrama en sentido inverso hasta el origen, sin que se registren deformaciones permanentes.

En general los límites de proporcionalidad y de elasticidad difieren muy poco entre sí, razón por la que los puntos A y B prácticamente se confunden en los diagramas.

Si, a partir del límite de elasticidad, continúa aumentando la tensión, el diagrama continúa curvándose hasta alcanzar la tensión correspondiente al *límite de fluencia* $\sigma_{fl.}$

Alcanzado este límite el material fluye, es decir, aumentan las deformaciones sin que exista aumento de tensión. En realidad el fenómeno no es tan simple, sino que en realidad la tensión oscila entre dos valores límites, muy cercanos entre sí, denominados *límites de fluencia superior* e *inferior*, respectivamente.

Investigaciones realizadas han demostrado que ambos límites de fluencia resultan afectados por variables inherentes al ensayo, aunque el límite de fluencia inferior lo es en una medida menor.

La velocidad de aplicación de la carga, el tipo de cabeza de la probeta de ensayo, y las variaciones de la sección de la misma influyen considerablemente sobre el límite superior de fluencia y muy poco en el inferior. Las condiciones superficiales de la probeta, así como también la existencia de rayaduras y picaduras, afectan sensiblemente el límite superior. En consecuencia, se acostumbra a definir como tensión de fluencia de un material que presenta ambos límites, al valor de la tensión correspondiente al inferior, por ser más independiente de las condiciones en que se efectúa el ensayo.

Una vez finalizado el período de fluencia o escurrimiento cuya extensión es función del tipo de material, comienza el *período anelástico* o de las grandes deformaciones, en el cual la tensión aumenta hasta alcanzar un valor máximo σ_R, denominada *tensión de rotura*, a partir del cual la tensión disminuye hasta que se alcanza una determinada deformación de rotura ϵ_R y se produce la rotura física.

Al valor de σ_R se lo considera como índice de la resistencia del material, si bien para materiales dúctiles no es en realidad la máxima tensión que se origina en la probeta sometida a ensayo.

En efecto, alcanzando el valor de la deformación específica correspondiente a σ_R, comienza a manifestarse en la probeta un fenómeno denominado "estricción".

La estricción consiste en la reducción de una sección transversal de la pieza que, por razones de simetría, debiera estar ubicada en el centro de la probeta, pero que por razones de falta de homogeneidad del material o de defectos de ejecución de la probeta, puede desplazarse hacia los extremos de la misma. Esta reducción de sección, progresiva con el aumento de carga, hace que las tensiones aumenten y que, en realidad, el diagrama efectivo en lugar de presentar su concavidad hacia abajo, muestre un punto de inflexión en las vecindades de σ_R y cambie su curvatura, presentando una rama creciente hasta alcanzar la deformación de rotura ϵ_R.

Los diagramas tensión–deformación presentan la forma de figura 7.2 por cuanto las tensiones σ que se llevan como ordenadas, se calculan sobre la base de suponer la sección transversal constante, con el área de la inicial.

Un ejemplo de material dúctil con diagrama similar al de figura 7.2, lo constituyen los aceros con bajo contenido de carbono, y sus aleaciones.

Más adelante nos ocuparemos en detalle del diagrama tensión–deformación para los aceros de distintos tipos.

Existen otros materiales, los frágiles, para los cuales el diagrama σ–ϵ es una curva continua sin límite de fluencia definido. Tal el caso de los aceros denominados de alto límite de fluencia, para los cuales este último valor es convencional, como veremos más adelante.

En otro tipo de materiales, como ser el hormigón, el diagrama es curvo sin poseer tramos rectos (fig. 7.4).

En este caso no puede hablarse de módulo de elasticidad único, como para los materiales que responden a la ley de Hooke.

Cabe distinguir tres valores del módulo de elasticidad:

a) *Módulo al origen o inicial*

Dado por la tangente del ángulo α que forma la tangente a la curva σ–ϵ, en correspondencia con el origen de coordenadas.

b) *Módulo instantáneo o tangente*

Cuyo valor lo da la pendiente de la tangente a la curva σ–ϵ, en el punto correspondiente a la tensión para la cual se quiere conocer el módulo E.

Si se tiene:

$$\sigma = f(\epsilon), \qquad [7.3]$$

el módulo instantáneo de elasticidad resulta de la expresión:

$$E = \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{d\sigma}{d\epsilon}, \qquad [7.4]$$

y es una función de la tensión.

c) *Módulo secante*

El módulo secante también es función de la tensión que se considere y viene dado por el valor de la tangente trigonométrica del ángulo α_1, (fig. 7.4) definido por ejemplo, por la secante $\overline{OM}$ que corta a la curva en el punto M correspondiente a la tensión σ_1.

Existen otros materiales, el cobre por ejemplo, que presentan diagramas tensión–deformación similares al de figura 7.4.

El diagrama tensión–deformación correspondiente a un material frágil difiere fundamentalmente del de un material dúctil. En la figura 7.5 hemos

representado un diagrama de este tipo, que se caracteriza por no presentar un límite de fluencia definido para el cual, además, el límite de rotura se encuentra muy cercano al límite de proporcionalidad. Por otra parte, la deformación de rotura es de un valor reducido en comparación con el correspondiente a un material dúctil.

En los materiales frágiles, la rotura se produce bruscamente, sin grandes deformaciones previas que anuncien la inminencia de la misma y producida aquella no presenta zonas de estricción.

7 . 3 . Diagramas ideales

Los diagramas vistos en el parágrafo anterior no resultan prácticos para trabajar con ellos, sobre todo cuando se analiza el problema del dimensionado de secciones en régimen plástico o anelástico.

Es por ello que se los reemplaza por diagramas idealizados, debidos a Prandtl, que resumen las características fundamentales de cada uno de los tres tipos de materiales.

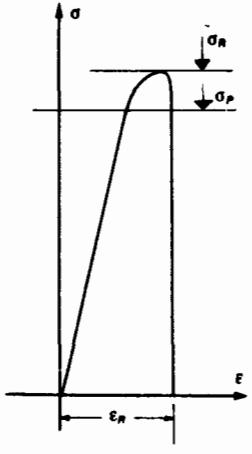


Fig. 7.5

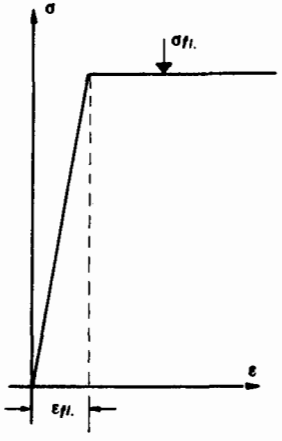


Fig. 7.6

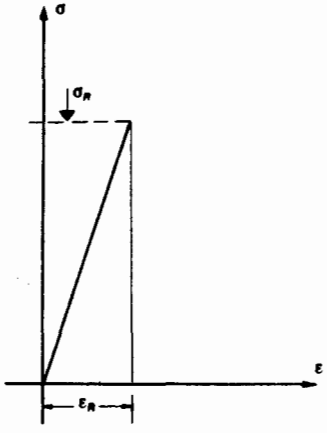


Fig. 7.7

En la figura 7.6 hemos representado el diagrama ideal correspondiente a un material dúctil. Se compone de dos tramos rectos: uno, inclinado, corresponde al período elástico del material, en el que su pendiente nos da el valor del correspondiente módulo de elasticidad; el otro, horizontal, materializa el período de

escurrimiento o fluencia. Se prescinde del tercer período, el anelástico o de las grandes deformaciones, por cuanto no interesa a los efectos prácticos. En efecto, para un material dúctil, la deformación que corresponde a la iniciación de la fluencia $\epsilon_{fl.}$, es muy pequeña en comparación con la que corresponde al final de la misma, de modo que, cuando el material se encuentra dentro de este período, las deformaciones que experimenta la pieza o parte de estructura a la que pertenece, son de una magnitud tal que la hace inadecuada para la función para la que ha sido proyectada.

Se está ante lo que se denomina la rotura estructural, que no coincide con la rotura física, para la que es condición *sine qua non*, que exista separación de partes.

Hemos dicho que un material frágil se caracteriza porque el valor de su tensión en el límite de rotura es muy cercano a la correspondiente al límite de proporcionalidad y que la deformación de rotura es pequeña, es decir, no existen grandes deformaciones. La figura 7.7 muestra el diagrama ideal que corresponde precisamente a estas características: un tramo recto, de pendiente igual al módulo de elasticidad, que se extiende hasta alcanzar el límite de rotura σ_R y donde se prescinde del tramo curvo previo a la misma, por ser su importancia despreciable.

Finalmente tenemos los materiales plásticos.

Este tipo de material se caracteriza por ser su elasticidad muy pequeña, despreciable para algunos, y mostrar grandes deformaciones permanentes. Tales por ejemplo el plomo, la arcilla, el lacre a una determinada temperatura, los compuestos asfálticos etc. El diagrama ideal correspondiente a este tipo de material, puede observarse en la figura 7.8. Es una recta paralela al eje de las

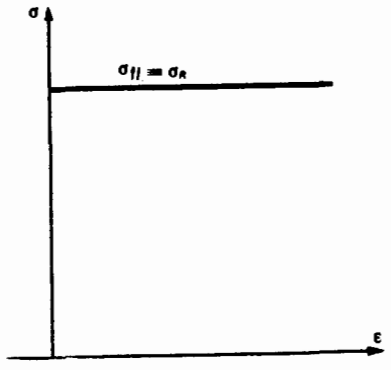


Fig. 7.8

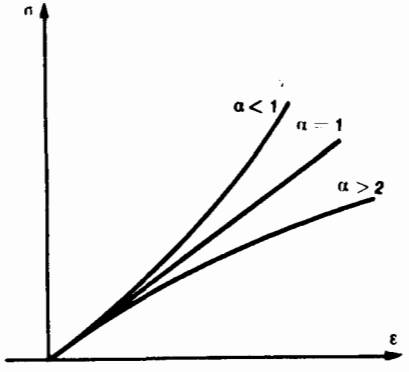


Fig. 7.9

ϵ y cuyo significado es el siguiente: si a un material absolutamente plástico se lo somete a una carga (tensión) determinada se deforma indefinidamente sin que el incremento de deformación exija un aumento de carga.

7.4. La ley exponencial de Bach

Los materiales cuyo diagrama tensión–deformación es similar al de figura 7.4, no responden a la ley de Hooke, es decir, no existe para ellos proporcionalidad entre tensiones y deformaciones.

Bach[1] sobre la base de numerosos ensayos, propuso como relación funcional entre σ y ϵ para este tipo de materiales, la ley que lleva su nombre y cuya expresión es la siguiente:

$$\sigma^{\alpha} = \epsilon \cdot E, \qquad [7.5]$$

donde el exponente α varía de acuerdo con el material que se trate, y puede ser igual, menor o mayor que la unidad.

Si $\alpha = 1$, la relación es lineal y estamos ante un material que responde a la ley de Hooke.

Para los materiales cuyo diagrama σ–ϵ presenta las características del de figura 7.4, el coeficiente α resulta mayor que la unidad. Finalmente, si $\alpha < 1$, el diagrama tensión–deformación afecta la forma que muestra la figura 7.9.

La idea original de establecer una ley distinta a la de Hooke corresponde, no a Bach, sino a Bülfinger, quien en 1735, aventuró la hipótesis sobre la base de experiencias propias, de una ley de variación parabólica.

Posteriormente a Bach, V. Sokolovsky enuncia la relación variable entre σ y ϵ en una forma distinta a la de Bach, cuya expresión es:

$$\sigma = k \cdot \epsilon^{m}. \qquad [7.6]$$

7.5. Los valores de las constantes elásticas

En parágrafos anteriores hemos mencionado cuatro constantes elásticas: E, G, μ y K.

La de más fácil determinación es la primera. Para las restantes es posible conocer su valor en función de los correspondientes a las dos primeras sobre la base de las relaciones que los vinculan.

En los cuadros siguientes damos los valores de E y G para los materiales

[1] C. Bach: *Elastizität u. Festigkeit*, Berlín, 1889 (hay traducción italiana).

más corrientes, así como también en un tercer cuadro, los del exponente α de la expresión exponencial de Bach.

Corresponde hacer notar que, en lo que respecta al hormigón, los valores que se indican son sólo valores medios, que se consignan únicamente a título informativo.

En efecto, el hormigón es un material de condiciones muy particulares, un "pseudo–sólido". Sus características elásticas varían con su composición, la relación agua–cemento, las condiciones de curado, la edad, el tipo de agregados inertes utilizados y la magnitud de la tensión para la cual se determinan.

CUADRO I

MÓDULO DE ELASTICIDAD LONGITUDINAL E

Material	E (kg/cm^2)	*Material*	E (kg/cm^2)
Acero (en promedio)	2 a 2,2 x 10^6 2,1 x 10^6	Duraluminio	0,67 a 0,73 x 10^6
Cobre	1,16 a 1,30 x 10^6	Aluminio	0,76 x 10^6
Latón	0,8 a 0,97 x 10^6	Magnesio	0,45 x 10^6
Bronce	1,1 x 10^6	Fundición	0,75 x 10^6
Bronce al manganeso	0,94 a 1,2 x 10^6	Fundición templada	1,7 x 10^6
Granito (compresión)	0,50 x 10^6	Vidrio Jena	0,7 a 0,78 x 10^6
Hormigón	0,14 a 0,35 x 10^6	Estaño	0,40 x 10^6
Zinc	0,87 a 1,2 x 10^6	Metal blanco	0,26 x 0,30 x 10^6

CUADRO II

MÓDULO DE ELASTICIDAD TRANSVERSAL G

Material	G (kg/cm^2)	*Material*	G (kg/cm^2)
Acero	0,81 x 10^6	Bronce	0,45 x 10^6
Acero fundido	0,83 x 10^6	Latón	0,36 x 10^6
Fundición templada	0,68 x 10^6	Duraluminio	0,28 x 10^6
Fundición gris	0,29 x 10^6	Siluminio	0,30 x 10^6
Cobre	0,43 x 10^6	Magnesio	0,18 x 10^6

CUADRO III

EXPONENTES DE LA FÓRMULA DE BACH

Material	α	*Material*	α
Hormigón (valor medio, α es función de diversas variables)	1,15	Bronce	1,028
Cobre	1,098	Fundición	1,07 a 1,08
Latón	1,085	Cuero	0,7

En lo que respecta al coeficiente de Poisson, su valor también es función de la naturaleza del material. No obstante, su variación es relativamente reducida. Para materiales isótropos su valor varía entre 0,25 y 0,33 aproximadamente. Según *Krüger*, para el acero *Siemens–Martín* el valor de μ oscila entre 0,303 y 0,286 aumentando con la temperatura hasta acercarse al valor límite de 0,50 para temperaturas vecinas al punto de fusión.

Adams y *Coker* encontraron los siguientes valores de μ: mármol 0,25–0,28, granito 0,20–0,15; fundición 0,25.

Para el hormigón se acostumbra a tomar $\mu = 0{,}167$ o, en ciertos casos y a los efectos de simplificación de desarrollos, $\mu = 0$.

7 . 6 . El diagrama tensión–deformación para el acero

El conocimiento detallado del diagrama tensión–deformación para los distintos tipos de aceros, interesa especialmente en el estudio de la Resistencia de Materiales.

Según su composición (contenido de carbono–metales aleados) el acero puede presentar los dos tipos fundamentales de diagramas, es decir, el correspondiente a los materiales dúctiles (fig. 7.2) o el de los frágiles (fig. 7.5).

Los aceros con bajo contenido de carbono, impropiamente denominados "aceros dulces", presentan el primer tipo de diagrama.

A continuación analizaremos el diagrama tensión–deformación correspondiente a un acero común de construcción p. ej: St. 37, (fig. 7.10).

En este diagrama interesa destacar dos aspectos: la relación entre la tensión en el límite de fluencia y la tensión de rotura, por una parte, y los valores relativos de las deformaciones específicas correspondientes a puntos característicos del diagrama: límite de proporcionalidad, principio y fin del período de escurrimiento y deformación de rotura.

Para un acero del tipo que nos ocupa, la tensión en el límite de proporcionalidad oscila entre 2.100 y 2.200 kg/cm^2.

Teniendo en cuenta que el módulo de elasticidad tiene un valor promedio de 2.100.000 kg/cm^2, la deformación específica correspondiente a σ_p es del orden de 0,001 mm/mm o, como se acostumbra a expresar las deformaciones específicas, 0,1%.

El comienzo de la fluencia ocurre cuando la deformación específica alcanza un valor comprendido entre 0,15 y 0,20%, pero más cercano a este último. El escurrimiento continúa hasta que la deformación específica es del orden del 2%. Estos valores, comparados, nos dan una idea de la magnitud relativa de los períodos elásticos y de fluencia: este último es del orden de 20 veces el primero y ello justifica ampliamente la hipótesis simplificativa que conduce al diagrama ideal de σ–ϵ para materiales dúctiles.

Finalmente, el valor de la deformación de rotura es considerablemente mayor que los anteriores, pues oscila entre el 25% y el 30%.

Estos valores indican claramente el porqué los materiales dúctiles "avisan" (permítase la expresión) la proximidad de la rotura física: antes de alcanzarse la misma, las deformaciones son de un orden de magnitud tal que la estructura no se encuentra más en condiciones aptas para cumplir los fines para los cuales fuera proyectada. Los materiales dúctiles presentan una característica muy interesante por sus proyecciones en la tecnología mecánica: nos referimos al proceso denominado endurecimiento mecánico o por trabajo en frío.

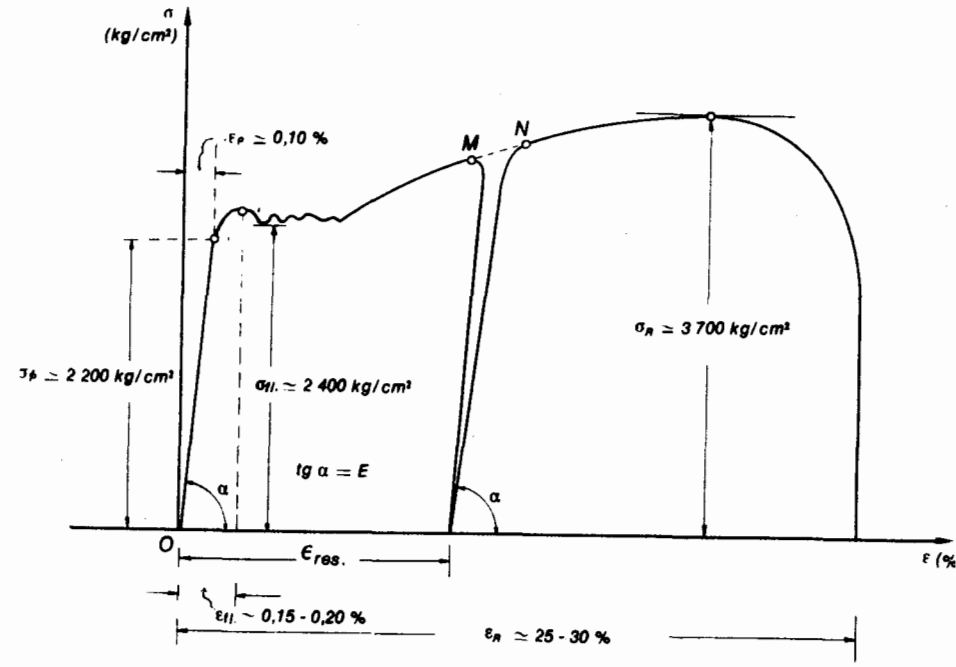


Fig. 7.10

Consideremos nuevamente el diagrama de figura 7.10. Si al material para el cual fuera trazado, una vez alcanzado el límite de elasticidad, se lo descarga, el punto representativo del estado correspondiente recorre al diagrama en sentido inverso y para $\sigma = 0$, resulta $\epsilon = 0$, es decir, no existe *deformación permanente.*

No ocurre lo mismo, en cambio, si la tensión alcanza un valor superior al correspondiente al límite de fluencia, sea que esté comprendido dentro de los límites de deformación del mismo, o bien que corresponda a un punto del

diagrama en la zona de recuperación mecánica, es decir, en el período plástico o de grandes deformaciones.

Si alcanzado un punto tal como el M de figura 7.10 se descarga la probeta. el punto representativo del estado no recorre el diagrama de carga en sentido inverso, sino que lo hace según una recta sensiblemente paralela a la recta que define el período elástico. Es evidente que al anularse el valor de la tensión resulte una deformación residual, denominada *deformación permanente* y cuya magnitud depende del valor de σ alcanzado. Si una vez descargada la pieza, reiteramos la carga, pueden presentarse dos casos:

a) que la tensión alcanzada en la primera carga sea tal que su correspondiente deformación específica ϵ_M resulte menor que la correspondiente al fin del período de fluencia;

b) que la deformación específica alcanzada sea superior al límite indicado en (a). El primer caso está ilustrado en figura 7.11 y el segundo en figura 7.10.

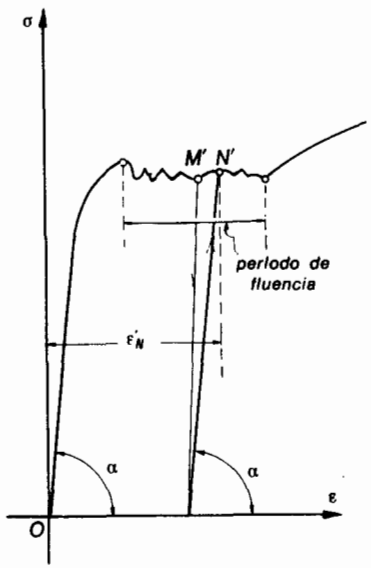


Fig. 7.11

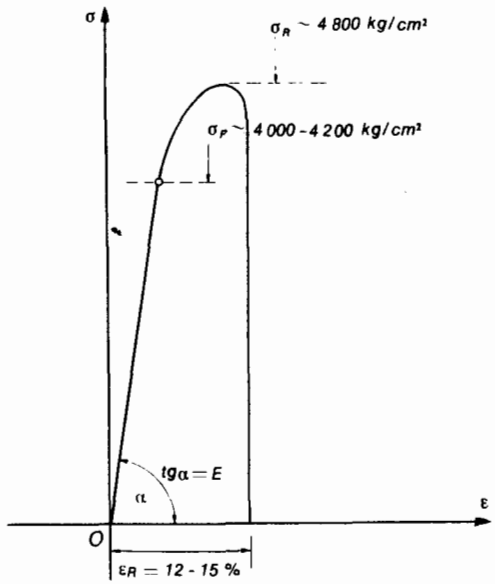


Fig. 7.12

En ambos casos, al reiterarse la carga, el punto representativo recorre nuevamente una recta que forma un ángulo α con el eje ϵ. Ello indica, como es lógico, que el módulo E de elasticidad del material no ha variado, es decir, que este mantiene su elasticidad.

En el caso (a), al reiterar la carga, el punto representativo llega hasta N' (fig. 7.11) y luego, si continuamos aumentando la carga, el material fluye, pero

en una medida menor que si no hubiera estado sometido al proceso que describimos y continúa recorriendo el mismo diagrama tensión–deformación en la zona anelástica.

Si, en cambio, nos encontramos en el caso (b), al alcanzar el punto N, el material continúa comportándose como al principio, pero sin experimenta ahora el fenómeno de fluencia.

Y lo que es muy importante desde un punto de vista tecnológico, el nuevo diagrama de carga presenta una zona recta que se prolonga hasta un valor $\sigma_p' > \sigma_p$: el material se ha *endurecido* y ha adquirido características frágiles. Este fenómeno, como dijimos antes, se denomina de *endurecimiento mecánico* o *por trabajo en frío.*

Prácticamente se consigue producir este fenómeno, sea por la laminación en frío (caso de planchuelas, flejes o perfiles), por estirado en frío o por torsión.

El estirado (trafilado) se utiliza para endurecer alambres o barras circulares finas, y la torsión especialmente para barras redondas (sobre todo conformadas superficialmente, para hormigón armado).

Para los aceros con contenido de carbono más elevado o aceros aleados, el diagrama difiere substancialmente del que acabamos de analizar, y se asemeja al correspondiente a los materiales frágiles.

Estos aceros, denominados "duros", presentan las siguientes características:

a) sus límites de proporcionalidad y de elasticidad son más elevados que para los aceros dúctiles;

b) no poseen un límite de fluencia definido ni tampoco zonas de escurrimiento;

c) la deformación de rotura se reduce considerablemente.

Un diagrama similar presentan los aceros endurecidos mecánicamente, por ejemplo por torsión. La figura 7.12 muestra el diagrama correspondiente a un acero común de construcción, luego de endurecido por torsión.

Este diagrama muestra una considerable elevación del límite de proporcionalidad, un aumento algo menor de la resistencia a la rotura, una considerable reducción de la deformación de rotura y la ausencia del límite de fluencia.[1]

Por esta razón se suele designar a estos materiales como materiales sin límite de fluencia definido.

[1] Se debe hacer notar que tanto este diagrama como los anteriores, se han presentado deformados, o sea, que la parte recta que corresponde al período elástico de los mismos se ha presentado en una escala horizontal distinta que la utilizada para la zona de fluencia y anelástica. En efecto, la magnitud de las deformaciones en el período elástico es muy inferior a las de los restantes y de emplearse la misma escala dicha parte del diagrama se confundiría prácticamente con el eje de ordenadas.

Como veremos más adelante al tratar el concepto de coeficiente de seguridad, para estos materiales interesa definir un valor de tensión que se corresponda, conceptualmente, con la tensión en el límite de escurrimiento de los

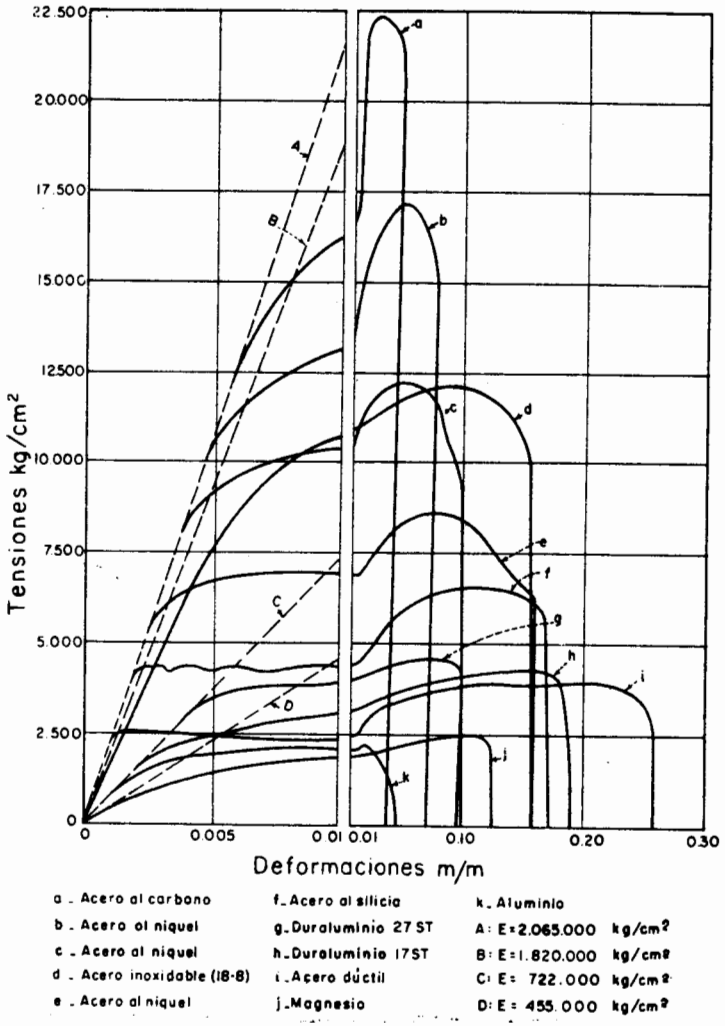


Fig. 7.13

materiales dúctiles. Este valor, del que nos ocuparemos en detalle en el parágrafo siguiente, se conoce con el nombre de "límite aparente de fluencia" o también "límite convencional de fluencia".

A título ilustrativo, en figura 7.13 hemos reproducido de J. Marin *Mechanical Properties of Materials and Design* una figura que muestra superpuestos los diagramas reales tensión–deformación correspondientes a distintos tipos de acero, desde uno dúctil de bajo contenido de carbono hasta uno de elevada resistencia, incluyendo, además, los correspondientes a otros materiales.

En dicha figura puede observarse claramente como, a medida que aumenta la calidad del material, entendiéndose por tal su resistencia a rotura, disminuye la zona de escurrimiento hasta desaparecer, y como aumenta el límite de fluencia, sea real o convencional, y la medida en que se reduce la deformación de rotura.

7.7. El límite aparente de fluencia

En el parágrafo anterior mencionamos la necesidad de establecer, para materiales carentes de un límite de fluencia definido, un valor de tensión que, conceptualmente, equivaliera a la tensión correspondiente al límite de fluencia de los materiales dúctiles. Este valor límite de tensión se denomina "límite aparente" o también "límite convencional" de fluencia del material.

Existen dos formas de definir el límite aparente de fluencia, basadas ambas en un concepto de deformación, es decir, que se considera como valor del límite de fluencia al valor de la tensión para la cual la deformación específica alcanza un valor perfectamente definido.

Veremos a continuación ambas formas de definir al límite aparente de fluencia, las que se conocen como "límite Johnson" la primera y "límite 0,2%" la segunda.

a) *Límite Johnson*

El límite Johnson se define como el valor de la tensión normal σ para el cual, en el punto correspondiente del diagrama σ–ϵ, la pendiente de la tangente a la curva es un 50% menor que la de la tangente en el origen. En otras palabras, dicho límite define el valor de la tensión para la cual el módulo de elasticidad del material al origen supera en un 50% al módulo de elasticidad tangente correspondiente a dicha tensión.

La figura 7.14 ilustra gráficamente los conceptos anteriores.

En la misma, el punto M define el límite de Johnson y la correspondiente tensión constituye el límite aparente o convencional de fluencia, para esta forma de definir dicho límite.

Prácticamente, para determinar el punto M se procede de la forma

siguiente. Trazado el diagrama $\sigma-\epsilon$, si el material responde a la ley de Hooke, es decir, si posee un período elástico con diagrama $\sigma-\epsilon$ recto, para un valor cualquiera de σ se traza una horizontal que corte al diagrama en el punto B.

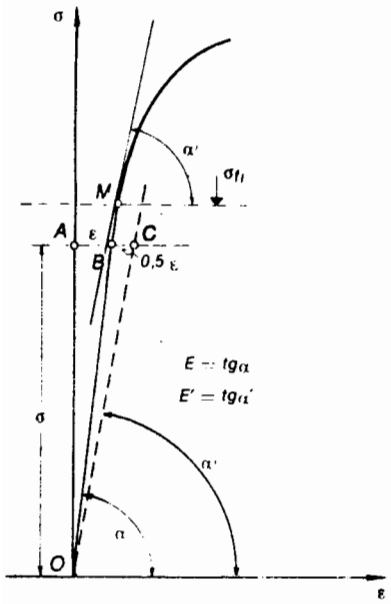


Fig. 7.14

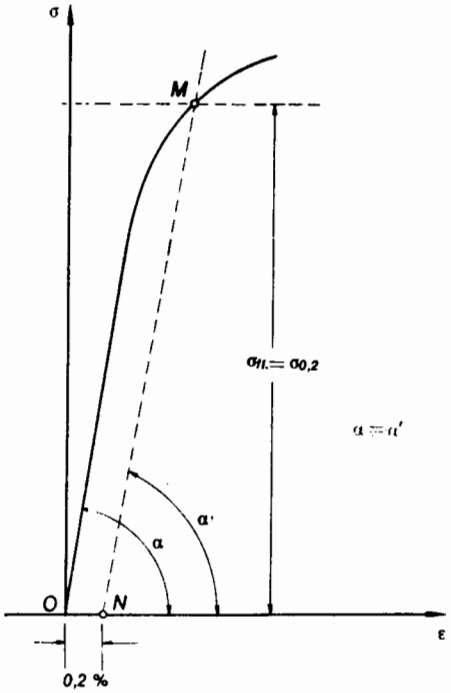


Fig. 7.15

El segmento $\overline{AB}$, en la escala de abscisas, nos da el valor de ϵ que corresponde a σ. Llevando a partir de B y sobre la misma horizontal, un segmento igual a $0{,}5\,\epsilon$, su extremo C unido con el origen nos da una recta cuya pendiente es 50% menor que la recta que corresponde al período elástico.

Trazando luego una tangente a la parte curva del diagrama paralela a la recta $\overline{OC}$, el punto de tangencia M determina el valor de la tensión correspondiente al límite aparente de fluencia o límite Johnson.

Si, en cambio, se tratara de un material que en ningún momento responde a la ley de Hooke, el procedimiento para la determinación del límite Johnson es similar. La única diferencia reside en el hecho que es necesario primeramente trazar la tangente a la curva en el origen para obtener el valor del módulo

de elasticidad inicial o al origen, que correspondería a la pendiente de la recta $\overline{OB}$ de figura 7.14. El resto del procedimiento es igual al explicado anteriormente.

b) *Límite 0,2%*

La determinación del límite Johnson se encuentra sujeta a menudo a considerable error, debido a la dificultad de establecer con suficiente exactitud el punto M de tangencia.

Es por ello que se ha recurrido a otra forma de definir el límite aparente de fluencia, que consiste en establecer el valor de la tensión para la cual la deformación específica permanente o residual que resulta al descargar el material, tiene un valor determinado, y considerar a dicha tensión como límite aparente de fluencia.

La "American Society for Testing Materials" (A.S.T.M.) especifica en sus normas para ciertos materiales 0,2% como valor de la deformación específica permanente que corresponde al límite aparente de fluencia, valor que ha sido adoptado universalmente para los aceros, razón por la cual a este límite se acostumbra a designar como límite 0,2%.

La figura 7.15 muestra la forma de determinar gráficamente dicho límite.

Trazado el diagrama tensión–deformación, se lleva sobre el eje de las abscisas, en la escala correspondiente, el valor $\epsilon = 0{,}002 = 0{,}2\%$ y por su extremo se traza una recta paralela a la recta que define el período elástico (NM en fig. 7.15). Dicha recta corta al diagrama en el punto M, que define al límite aparente de fluencia como límite 0,2%, y la ordenada correspondiente a dicho punto corresponde al valor de la tensión convencional de fluencia.

Para otros materiales, la A.S.T.M. define al límite aparente de fluencia como la tensión que corresponde a una deformación específica *total* de 0,5%, lo que equivale a una deformación específica permanente de 0,35%.

7 . 8 . Características mecánicas de los materiales

En parágrafos anteriores nos hemos ocupado, aunque sin definirla expresamente, de una de las principales propiedades mecánicas de los materiales: su resistencia mecánica. En los materiales frágiles es determinante la tensión de rotura; en los dúctiles, la correspondiente a la fluencia. Ambas caracterizan, en cada caso, la capacidad de resistencia mecánica de un material. Pero, aparte de resistencia, los materiales poseen otras propiedades mecánicas tan importantes como la resistencia, de las que nos ocuparemos a continuación. Estas propiedades son las siguientes:

a) *Rigidez*

El término rigidez[1] se emplea para definir la propiedad que en mayor o menor grado poseen los materiales, de oponerse a su deformación; su medida viene dada por el valor de su módulo de elasticidad. Cuanto mayor sea este último tanto menos deformable resulta ser el material.

b) *Ductilidad*

Al tratar los diagramas tensión–deformación hemos utilizado el concepto de *ductilidad*, que puede definirse como medida de la deformabilidad del material en el período anelástico.

Cuanto mayor sea la capacidad de deformación que posea un material antes de alcanzar la rotura, tanto mayor será su ductilidad.

c) *Resiliencia*

La capacidad de un determinado material para restituir la energía almacenada durante su deformación dentro de los límites del período elástico, se denomina *resiliencia*, y su medida viene dada por la energía almacenada, por

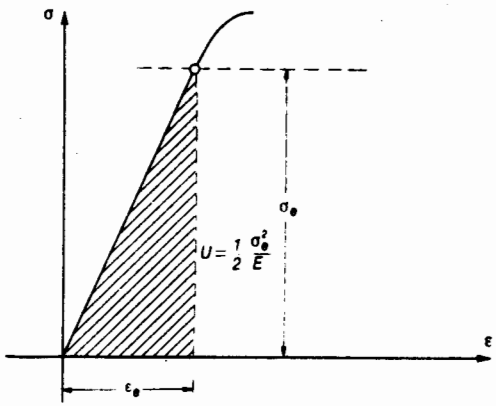


Fig. 7.16

unidad de volumen, hasta alcanzar el límite de elasticidad. Como veremos más adelante, al tratar en detalle la energía de deformación, si σ_e es la tensión

[1] No debe confundirse este concepto de *rigidez* con el que aparece en el cálculo de estructuras, donde para una barra se entiende por tal el cociente entre el momento de inercia de su sección y su longitud.

correspondiente al límite de elasticidad de un material y E su módulo de elasticidad, la expresión de dicha energía será:

$$u = \frac{\sigma_e^2}{2E} \qquad [7.7]$$

por cuanto la energía de deformación correspondiente a una determinada tensión σ_e está dada por el área comprendida entre el diagrama tensión–deformación y el eje de las abscisas, y limitada por la vertical correspondiente a la tensión (figura 7.16), es decir:

$$u = \frac{1}{2}\sigma_e \epsilon_e \,, \qquad [7.8]$$

y como $\epsilon_e = \sigma_e/E$, reemplazando se obtiene la expresión [7.7], que también se denomina módulo de resiliencia.

d) *Tenacidad*

La *tenacidad* de un material es la capacidad del mismo para absorber energía en el período anelástico, o de las grandes deformaciones, hasta alcanzar la rotura. Análogamente con lo que acontece con la resiliencia, su valor viene dado por la totalidad del área encerrada por el diagrama tensión–deformación y el eje de las abscisas, hasta la deformación de rotura.

Si se tiene en cuenta lo reducido del valor de la deformación que corresponde a la iniciación de la fluencia en relación con la de rotura, y que el incremento de tensión entre fluencia y rotura es relativamente reducido, puede asimilarse el diagrama a un rectángulo, por lo que el valor de la tenacidad resultaría ser el producto de la tensión de rotura por la deformación máxima.

Si esta última se expresa porcentualmente, obtenemos el *índice de tenacidad.*

e) *Dureza*

La propiedad mecánica denominada *dureza* caracteriza la capacidad de un material para resistir acciones mecánicas del tipo de la abrasión, punzonado (penetración), incisión y corte. Se la mide experimentalmente mediante máquinas especiales denominadas máquinas de dureza, que dan valores relativos de la misma según escalas que responden al tipo de dureza que se considere: Brinell, Rockwell, etcétera.

Las características mecánicas que hemos mencionado tienen gran importancia en la tecnología porque permiten seleccionar los materiales de acuerdo con las mismas para adecuarlas a los usos a los que se destinan.

Es así que las máquinas herramientas exigen materiales que al par de gran rigidez posean dureza. La falta de rigidez se traduce en poca precisión de trabajo y la poca dureza en desgaste prematuro.

La ductilidad es imprescindible en todos aquellos casos en que puedan ocurrir aumentos bruscos de tensión, en que sean de presumir tensiones secundarias no previstas en el proyecto o puedan existir fuertes concentraciones de tensión y es precisamente la ductilidad del material la que hace que este pueda absorber por deformación dichos aumentos de tensión sin que se originen inconvenientes para la estructura.

La resiliencia interesa en todos aquellos elementos estructurales o partes mecánicas que puedan estar sujetas a fuerzas de impacto o cargas dinámicas. Tal el caso de los resortes, bielas y en general mecanismos de automotores.

La tenacidad de un material es un índice de si una carga dinámica excesiva puede ser absorbida por la pieza o si conduce a la rotura de la misma.

De ahí su importancia en los materiales destinados a la fabricación de rieles, ejes, engranajes, etc.

7.9. El coeficiente de seguridad

Dimensionar una estructura o parte de estructura, o un elemento de máquina o mecanismo, significa determinar las dimensiones de sus secciones transversales de modo que en ningún punto de las mismas las tensiones normales o tangenciales superen valores determinados. Estos valores, denominados tensiones admisibles, harán que su comportamiento quede comprendido dentro de determinados márgenes de seguridad, tanto en lo que se refiere a probabilidad de rotura como a que se originen deformaciones incompatibles con el destino de la estructura o elemento de máquina de que se trate.

Es evidente que si se dimensiona una pieza de modo que el valor de las tensiones se encuentre cercano al correspondiente a la de rotura, la probabilidad de ruina se transforma casi en certeza.

En los materiales dúctiles el valor determinante no es ya la tensión de rotura sino la correspondiente al límite de fluencia o escurrimiento. En efecto, superado dicho límite, las deformaciones permanentes alcanzan una magnitud que las hace inadecuadas para el destino para el que fueran proyectadas. Por esa razón, para este tipo de materiales, se admite a la tensión en el límite de fluencia como estado límite, considerándose que para ella la estructura ha alcanzado lo que se denomina *la rotura estructural.*

Por estas razones, las tensiones de trabajo, es decir, las tensiones que ocurren en los distintos puntos de un elemento estructural o de máquinas,

deben quedar por debajo de los valores de la tensión de rotura para los materiales frágiles y de la fluencia para los dúctiles.

Si los materiales fueran absolutamente homogéneos y su calidad constante y perfectamente determinadas sus características mecánicas y, por otra parte, se conocieran con exactitud las cargas que solicitan a la estructura, y los procedimientos de cálculo fueran tales que permitieran conocer perfectamente los valores de los esfuerzos característicos y no se cometieran errores numéricos de cálculo; en una palabra, si pudieran tenerse en cuenta con absoluta certeza todos los factores que pueden afectar el cálculo de una estructura y además pudiera garantizarse una perfecta ejecución de la misma, bastaría introducir en el cálculo de dimensionamiento una tensión ligeramente inferior a la de rotura o de fluencia, para poder admitir que la estructura no corre peligro de ruina. Ello en realidad, no ocurre y por esta razón es necesario tener en cuenta una reducción en los valores de las tensiones a utilizar, afectando a las de rotura o escurrimiento de un factor denominado *coeficiente de seguridad.*

7.10. Factores que afectan el coeficiente de seguridad

En realidad el coeficiente de seguridad incluye dos factores, uno de *ignorancia* y otro de *incertidumbre.*

El factor de *ignorancia* contempla las fallas o imperfecciones de nuestro conocimiento: falta de exactitud de los procedimientos de cálculo, conocimiento imperfecto de la respuesta de una estructura a determinado tipo de solicitación, errores numéricos posibles en el cálculo, etc.

En cambio, la *incertidumbre* involucra variables imposibles de establecer con precisión, tales la evaluación de las cargas actuantes, el conocimiento exacto de la calidad de materiales etc.

Con el perfeccionamiento experimentado en los últimos años por los métodos de cálculo y sobre todo, por la utilización de las computadoras electrónicas, el factor ignorancia ha podido reducirse apreciablemente, no ocurriendo lo mismo con la incertidumbre, factor que no es posible eliminar totalmente, y sí sólo encuadrarlo dentro de límites determinados.

Como consecuencia del avance experimentado por la tecnología de los materiales, el perfeccionamiento de las técnicas constructivas y el afinamiento de los procedimientos de cálculo, ha sido posible reducir el valor de los coeficientes de seguridad, obteniéndose con ello una apreciable economía de proyecto al par que estructuras más esbeltas, pero con igual margen de seguridad.

Existen dos criterios por seguir en lo que respecta al establecimiento del coeficiente de seguridad (o de incertidumbre, por lo que hemos visto), según sea el método de dimensionamiento adoptado.

Como se verá más adelante, existen dos criterios para dimensionar secciones:[1]

a) dimensionado en régimen elástico;

b) dimensionado en régimen plástico.

En el primer caso el dimensionado se realiza suponiendo que las tensiones responden a la ley de Hooke y por coeficiente de seguridad se entiende la relación entre la tensión de rotura y la tensión de trabajo o tensión admisible para materiales frágiles, o entre la tensión de fluencia y la admisible para los dúctiles, es decir:

$$\left.\begin{aligned} \nu &= \frac{\sigma_{\text{rot.}}}{\sigma_{\text{adm.}}} \\ \nu &= \frac{\sigma_{\text{fl.}}}{\sigma_{\text{adm.}}} \end{aligned}\right\} \qquad [7.9]$$

En cambio, para el régimen plástico el coeficiente de seguridad se basa en un concepto un tanto distinto, pues relaciona lo que se conoce como máxima carga estructural con la carga de trabajo, entendiéndose por carga estructural la que produce la rotura o falla estructural. En este caso el concepto de carga puede ser una fuerza o un momento, es decir, que el coeficiente de seguridad resulta ser:

$$\left.\begin{aligned} \nu &= \frac{P_{\text{rot.}}}{P_{\text{adm.}}} \\ \nu &= \frac{M_{\text{rot.}}}{M_{\text{adm.}}} \end{aligned}\right\} \qquad [7.10]$$

Es evidente que el valor de ν, cualquiera sea el criterio de cálculo que se adopte, debe ser mayor que la unidad, por cuanto un coeficiente de seguridad igual a uno significaría la certidumbre, tanto en el conocimiento del material como en la apreciación de las cargas y la exactitud del método de cálculo.

El coeficiente de seguridad depende de distintos factores, de origen diverso, entre los cuales se cuentan como fundamentales los que se enumeran a continuación:

[1] El mismo concepto existe para el cálculo de esfuerzos característicos en sistemas de alma llena: por una parte el cálculo elástico o estático, es decir, el procedimiento elástico, y por la otra el denominado cálculo plástico de estructuras, mucho más racional por cuanto contempla el comportamiento real de las mismas.

a) *La uniformidad de calidad y la homogeneidad de los materiales.*

b) *La adecuada elección de las hipótesis y métodos de cálculo, así como también de la estructura ideal que reemplaza a la real.*

c) *La posibilidad de incurrir en errores numéricos o de otro tipo durante el desarrollo del cálculo.*

d) *Errores en la estimación del valor de las cargas y en la apreciación de su modo de actuar.*

e) *Destino y permanencia en el tiempo de la estructura.*

f) *Defectos propios del proceso de ejecución de la estructura.*

Analizaremos a continuación en detalle cada uno de los factores que influyen el coeficiente de seguridad, de los cuales los (a), (b), (c), (d), y (f) presentan la característica común de ser funciones del azar por la indeterminación de sus valores. La fijación de estos últimos es objeto del cálculo de probabilidades.[1]

Es evidente que la homogeneidad varía para un mismo material, lo que influye en la dispersión de los resultados de los ensayos de calidad, que son los que permiten establecer las características de resistencia de los mismos. En ese sentido, el avance experimentado en la tecnología de fabricación de los materiales, ha hecho que los mismos resultan actualmente más homogéneos.

Pero también existen diferencias de homogeneidad entre los distintos materiales. Es así que los aceros, por la técnica de su fabricación presentan, para una determinada calidad, menor dispersión de valores que los hormigones, por ejemplo. Y dentro de los hormigones, los elementos prefabricados resultan de una homogeneidad mayor que las estructuras moldeadas *in situ*. De modo que el factor que estamos analizando pesará más en el coeficiente de seguridad de una estructura de hormigón que en el de una de acero.

La influencia del factor (b) es evidente por sí misma y no necesita mayor comentario. Cuanto más se acerque en su configuración la estructura ideal, adoptada para el cálculo, a la real, y cuanto más correctas y cercanas a la realidad resulten las hipótesis del cálculo, tanto más exactos serán los resultados alcanzados. Lo mismo ocurre con el factor (c). Con respecto a éste cabe decir que, como ya se mencionó antes, la introducción de la computación automática ha reducido considerablemente su influencia.

La importancia de la evaluación correcta de las cargas se pone de manifiesto en dos formas distintas: por una imperfecta determinación de sus magnitudes o por una incorrecta estimación de su modo de actuar. Es evidente, por otra parte, la distinta influencia que tienen las cargas permanentes y las sobrecargas accidentales, por cuanto las primeras son de determinación más precisa que las segundas.

[1] Véase *La determinación del Coeficiente de seguridad en las distintas obras*, A. Páez Balaca. Madrid.

No es lo mismo proyectar una estructura destinada a una obra permanente que hacerlo para otra transitoria o de duración limitada. Para estas últimas la probabilidad de ruina es menor que para las primeras y en consecuencia es posible adoptar coeficientes de seguridad menores. En lo que respecta al destino de la estructura y la importancia y magnitud de los daños derivados de un colapso total o parcial de la misma, estas circunstancias influyen al coeficiente de seguridad en el sentido que hacen necesario tener en cuenta para fijar sus valores, el riesgo de pérdida de vidas humanas y algunos otros factores de tipo psicológico.

Finalmente es necesario tener en cuenta la influencia del factor (f) que considera la diferencia que siempre existe entre la estructura que se proyecta y la que se ejecuta. Ello se manifiesta por una parte en diferencias de dimensiones, que siempre existen, y por otra en defectos de dosificación de un hormigón, de colocación de una armadura o de ejecución de una soldadura.

Los reglamentos de construcciones de acero y de hormigón armado de los distintos países, fijan los valores de las tensiones admisibles, es decir, los coeficientes de seguridad. Aquellos que han incorporado el dimensionamiento plástico o de rotura a sus especificaciones, incluyen también los coeficientes de seguridad que responden a este criterio de cálculo.

Algunos reglamentos para estructuras de hormigón armado, como el *Code of Practice* del American Concrete Institute, establecen coeficientes de seguridad que tienen en cuenta, por separado y en distinta medida, los efectos de las cargas permanentes y de las sobrecargas accidentales.

En lo que respecta a los coeficientes de seguridad que conducen a las tensiones admisibles, sus valores varían aproximadamente entre 1,65 y 3. Los valores utilizados para el dimensionado por el método de cálculo plástico o a la rotura pueden ser aun menores.

Escapa a los alcances de la presente obra entrar en detalle acerca de los valores reglamentarios para los distintos materiales, criterios de cálculo, forma de solicitación y destino de la estructura o elemento de máquina.

Al estudiar en detalle las distintas formas de solicitación, se indicarán, para los materiales más comunes, las tensiones admisibles que se utilizan corrientemente, sin perjuicio de consultar, para una formación más completa, las normas y prescripciones reglamentarias.

8. EL DIMENSIONAMIENTO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES

8 . 1 . Conceptos generales

Al estudiar en el curso de Estabilidad I las piezas de alma llena y las estructuras de barras vimos que, para una sección cualquiera de las mismas, podían definirse cuatro esfuerzos característicos, a saber:

1) esfuerzo normal o axil,

2) momento torsor,

3) momento flexor,

4) esfuerzo de corte.

Todos ellos son originados por la reducción al baricentro de la sección, de las fuerzas actuantes a uno u otro lado de la misma. En efecto, dicha reducción transforma ambos sistemas parciales de fuerzas en pares opuestos y en dos fuerzas, también opuestas, aplicadas estas últimas en el centro de reducción, que habitualmente se elige coincidente con el baricentro de la sección considerada.

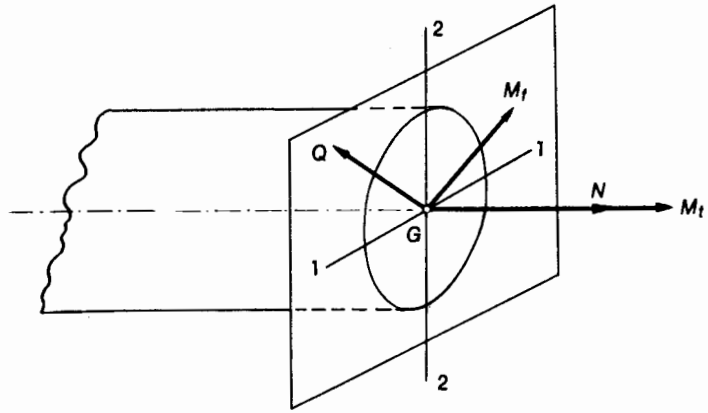


Fig. 8.1

En figura 8.1 se han representado los vectores representativos de las cuatro magnitudes características mencionadas, correspondientes a la reducción al baricentro G de las fuerzas ubicadas a la derecha de la sección.

Los esfuerzos característicos pueden existir solos o combinados. El primer caso corresponde a lo que se conoce como "casos simples de resistencia" o "solicitaciones simples", y el segundo a lo que se denomina "casos de resistencia compuesta". Cuando sólo existe una resultante de reducción y su dirección es normal al plano de la sección, la solicitación se denomina de "compresión" o "tracción" simples, o, también, "solicitación axil" (fig. 8.2*a*).

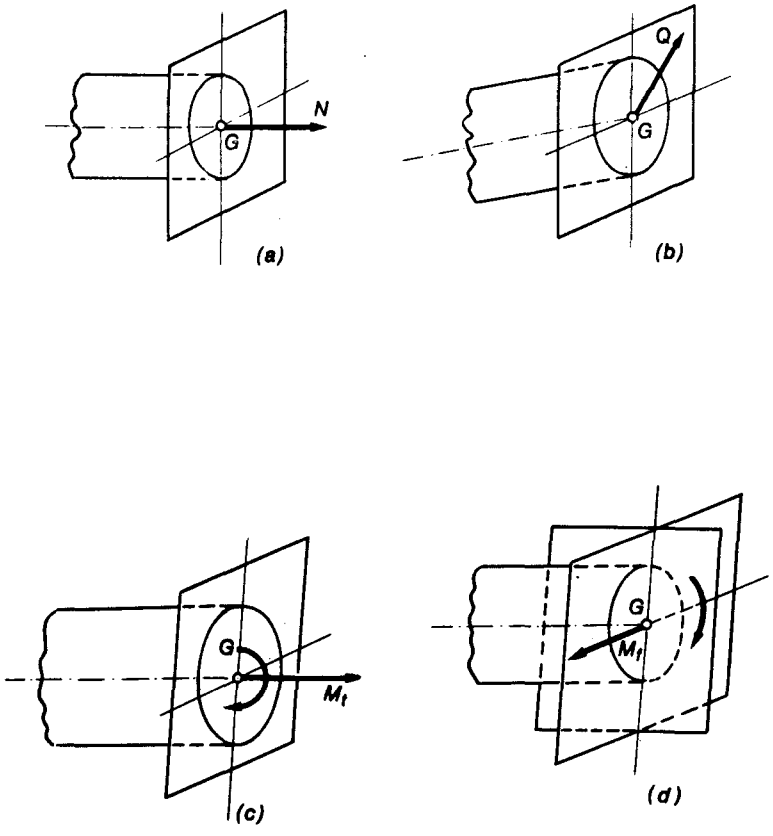


Fig. 8.2

Si la resultante de reducción está contenida en el plano de la sección, la solicitación es por "corte simple" o "corte puro", siempre que el par de reducción sea nulo (fig. 8.2 *b*).

Cuando el sistema se reduce a un par y la resultante de reducción es nula, existen dos posibilidades: que el par actúe en el plano de la sección o en un plano normal a la misma. La primera posibilidad corresponde a la solicitación por "torsión" y la segunda, a la "flexión pura" (figs. 8.2 *c* y *d*). Estas cuatro posibilidades corresponden a los casos simples de resistencia. Su combinación conduce a los de resistencia compuesta. De éstos, los más comunes e importantes son los derivados de combinar flexión con esfuerzo de corte y flexión con esfuerzo axil, que se conocen con los nombres de flexión y corte (algunos autores la denominan flexión recta) y flexión compuesta, respectivamente.

La flexión con o sin esfuerzo de corte, pero sin esfuerzo normal, se denomina "flexión simple". Otra combinación de esfuerzos característicos que suelen presentarse en la práctica, sobre todo en el caso de ejes que transmiten potencia, es aquella en que actúan simultáneamente un par flexor, un par torsor y un esfuerzo de corte.

Las distintas formas de solicitación y sus combinaciones dan origen, en el plano de la sección, a tensiones normales y tangenciales. Es objeto de la Resistencia de Materiales, el determinar los valores de las tensiones originadas por las distintas formas de solicitación. En los capítulos siguientes nos ocuparemos de este problema en forma detallada, tanto para las solicitaciones simples como para sus combinaciones más importantes.

El estudio de las tensiones que ocurren en los puntos de una sección de una pieza de alma llena, lo efectuaremos en primer lugar suponiendo que el comportamiento de la misma responde a lo que hemos designado como "régimen o período elástico". Es decir, admitiremos que los materiales se comportan elásticamente, que existe para ellos proporcionalidad entre tensiones y deformaciones, y que la relación de proporcionalidad responde a la ley de Hooke.

$$\sigma = E\,\epsilon. \qquad [8.1]$$

El análisis de este mismo problema, cuando las tensiones que ocurren en la sección superan el límite de fluencia del material, es decir, el análisis en "régimen anelástico" o "régimen plástico", se estudiará para cada forma de solicitación, a continuación del análisis en régimen elástico.

8 . 2 . El equilibrio interno en un sólido de alma llena

Sea figura 8.3 *a* y *b* una sección cualquiera de un sólido de alma llena sujeto a un sistema de fuerzas en equilibrio. Al reducir al baricentro G de la sección las fuerzas que actúan a la derecha y a la izquierda de la misma, se obtienen dos pares y dos fuerzas, en equilibrio, cuyas componentes corresponden a un momento flexor M_f, un momento torsor M_t, un esfuerzo normal N y un

esfuerzo de corte Q. En la figura 8.3 *a* se han representado las componentes del par y de la resultante de reducción de las fuerzas de la derecha de la sección y se ha hecho coincidir el origen de coordenadas con el baricentro de aquélla, orientando el semieje positivo de la x normal a la sección y hacia afuera de la misma, y los ejes z e y según las direcciones principales de inercia. El vector representativo del par torsor está dirigido según el eje x resultando en consecuencia:

$$M_t \equiv M_x. \qquad [8.2]$$

Por otra parte, el par flexor en general actúa en un plano que no contiene a ninguno de los ejes coordenados z, y. En consecuencia, su vector representativo ubicado en el plano z, y, puede descomponerse en dos vectores componentes M_z y M_y, representativos de pares que actúan en planos normales a los ejes z e y. La fuerza normal N coincide en dirección con el eje x y en lo que respecta a Q contenida en el plano z, y, puede también ser descompuesta en sus componentes Q_z y Q_y.

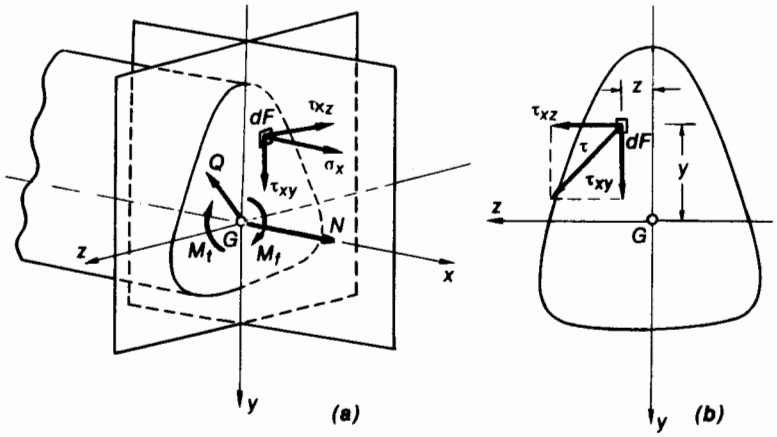


Fig. 8.3

Es decir que, en última instancia, hemos descompuesto la resultante de reducción en tres componentes $N_x \equiv N$; Q_y; Q_z y al par de reducción en tres pares componentes $M_x \equiv M_t$; M_y y M_z.

Como se ha visto al definir el concepto tensión, las acciones que se transmiten de uno a otro lado de la sección considerada, no lo son en realidad en forma de fuerzas o pares sino como acciones mutuas, de punto a punto, en todo el recinto de la sección, acciones que no son otra cosa que las tensiones resultantes ρ.

Estas tensiones, descompuestas en sus componentes normal y tangencial nos dan las tensiones σ y τ, la primera normal a la sección y la segunda contenida en el plano de la misma. Esta última, cuya dirección es en general cualquiera, puede ser descompuesta en sus componentes τ_{xz} y τ_{xy} dirigidas según los ejes coordenados (fig. 8.3 *b*).

En consecuencia, sobre cada elemento infinitésimo de superficie tendremos actuando tres fuerzas elementales dirigidas según los ejes coordenados (fig. 8.4) cuyas expresiones son las siguientes:

según x: $\boxed{dN = \sigma\, dF}$ [8.3]

según y: $\boxed{dQ_y = \tau_{xy}\, dF}$ [8.4]

según z: $\boxed{dQ_z = \tau_{xz}\, dF}$ [8.5]

Considerando que en la sección existen infinitos elementos de superficie, nos encontramos ante un sistema de infinitas fuerzas elementales, que debe ser

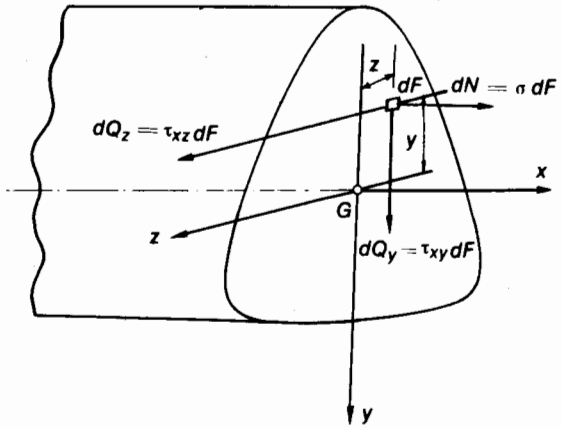


Fig. 8.4

equivalente al sistema formado por los esfuerzos característicos que los originan. En consecuencia, deben satisfacer las 6 condiciones necesarias y suficientes para la equivalencia de los sistemas gausos de fuerzas. En este caso, conviene expresar la equivalencia en forma de tres ecuaciones de igualdad de proyecciones sobre los ejes x, y, z y tres ecuaciones de igualdad de momentos respecto de los mismos. Planteadas las ecuaciones correspondientes, resultan para las condiciones de igualdad de proyecciones las siguientes expresiones:

$$\left.\begin{aligned} N &= \int_F \sigma\, dF \\ Q_y &= \int_F \tau_{xy}\, dF \\ Q_z &= \int_F \tau_{xz}\, dF \end{aligned}\right\} \qquad [8.6]$$

Si z e y son las coordenadas del elemento de superficie, las condiciones de igualdad de momentos resultan ser las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} M_t = M_x &= \int_F (\tau_{xy} \cdot z + \tau_{xz} \cdot y)\, dF \\ M_y &= \int_F \sigma \cdot z\, dF \\ M_z &= \int_F \sigma \cdot y\, dF \end{aligned}\right\} \qquad [8.7]$$

Según sean el esfuerzo o los esfuerzos característicos que han de considerarse, de acuerdo con la forma de solicitación de la sección, habrá una o varias de las ecuaciones [8.6] y [8.7] que resulten idénticamente nulas, utilizándose las restantes para resolver el problema que plantea la Resistencia de Materiales y que consiste en establecer una relación funcional entre las tensiones que ocurren en una sección de un sólido de alma llena y las causas que las originan, o sea, los esfuerzos característicos.

En lo que sigue, nos ocuparemos de establecer dichas relaciones para los distintos casos de solicitación y de la forma de aplicarlas a la resolución de los distintos problemas que plantea la técnica.

9. SOLICITACIÓN AXIL
(Tracción y compresión simples)

9 . 1 . Planteo del problema

La solicitación axil corresponde al caso en que al reducir las fuerzas que actúan a un lado de la sección, sólo existe una resultante de reducción normal al plano de aquélla, y que esta circunstancia se repite para todas las secciones del sólido. Tal el caso de una barra de eje rectilíneo, de sección constante o variable, solicitada en sus secciones extremas por fuerzas opuestas de intensidad P, aplicadas en los baricentros de las secciones extremas y normales a ellas. Si las fuerzas están dirigidas hacia las secciones la solicitación es por compresión simple (fig. 9.1 *a*) y si ambas se alejan, lo es por tracción (fig. 9.1 *b*). Para una sección cualquiera s–s (fig. 9.1 *c*), la resultante de las fuerzas de un lado de la sección es siempre P y por coincidir su recta de acción con el eje de la pieza resultará normal a aquella y pasará por su baricentro, En consecuencia, para todas las secciones resulta $N = P$.

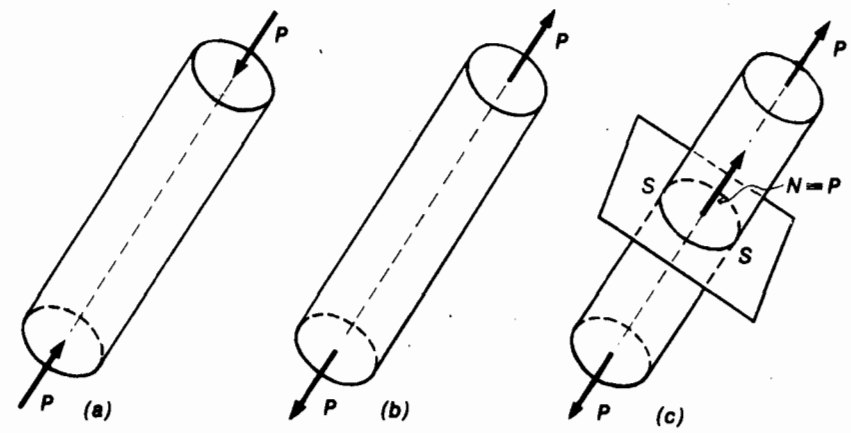


Fig. 9.1

Al no existir ni momento flexor, ni momento torsor ni tampoco esfuerzo de corte, resultan $Q = M_f = M_t = 0$ y en consecuencia, las ecuaciones de equivalencia [8.6] y [8.7] se transforman en las siguientes:

$$\left\{\begin{array}{ll} N = \int_F \sigma\, dF & 0 = \int_F (\tau_{xy} \cdot z + \tau_{xz} \cdot y)\, dF \\ 0 = \int_F \tau_{xy}\, dF & 0 = \int_F \sigma \cdot z\, dF \\ 0 = \int_F \tau_{xz}\, dF & 0 = \int_F \sigma \cdot y\, dF \end{array}\right\} \qquad [9.1]$$

Como se verá en el parágrafo siguiente de estas seis ecuaciones sólo interesa la primera, que es la que nos conducirá a la resolución del problema tensional. Las cinco restantes resultan ser idénticamente nulas para el caso de solicitación axil.

9.2. Resolución del problema

La hipótesis fundamental en que nos apoyaremos es la proporcionalidad entre tensiones y deformaciones, es decir, la ley de *Hooke*. En segundo lugar admitiremos que una sección normal se mantiene plana y paralela a sí misma luego de la deformación experimentada por la pieza, lo que ha sido verificado experimentalmente en elementos solicitados por tracción o compresión simple, para secciones alejadas de los extremos, de acuerdo con el *principio de Saint Venant*, ya que en éstos la solicitación en forma de dos fuerzas concentradas crea zonas de perturbación. El principio de Saint Venant, de gran aplicación en los problemas derivados de la teoría de la Elasticidad, puede enunciarse como sigue:[1] "Si se reemplazan las fuerzas que actúan sobre una zona reducida de la superficie de un sólido elástico por otro sistema estáticamente equivalente actuando en la misma zona, este cambio origina una modificación substancial del estado de tensión local, pero no influye en el estado de tensión en secciones ubicadas a una distancia que, en comparación con las dimensiones lineales de la zona de carga, sea grande". En el caso de la solicitación axil, si suponemos la misma originada por dos fuerzas P concentradas, aplicadas en los baricentros de las secciones extremas, éstas se encontrarán libres de tensiones en todos los puntos, salvo en los de aplicación de las fuerzas exteriores. A medida que consideramos secciones sucesivas que se van alejando de las extremas la distribución se modifica y entra en régimen para secciones ubicadas a una distancia aproximadamente igual a la máxima dimensión lineal de la sección extrema. A partir de la sección en que la distribución de tensiones no varía, admitimos la constancia de las secciones planas.

Veamos a que nos conduce esta hipótesis cierta por cuanto, como dijimos ha sido verificada experimentalmente.

[1] Se reproduce el enunciado dado por Timoshenko en su libro *Theory of Elasticity* por considerarlo sumamente claro.

Si la sección se mantiene plana y paralela a sí misma, los elementos infinitésimos de su volumen no pueden sufrir distorsiones o, de existir éstas, deben ser constantes y del mismo signo para todos los elementos superficiales. Pero si $\gamma = 0$, resulta $\tau = 0$, y si $\gamma = \text{Cte.}$, se tiene $\tau = \text{Cte.}$ Si esta última hipótesis fuera cierta, la 2a. y 3a. de las [9.1] se transformarían en:

$$\left.\begin{array}{l} \tau_{xy} \int_F dF = 0 \\ \tau_{xz} \int_F dF = 0 \end{array}\right\} \qquad [9.2]$$

y simplificando por ser $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \text{Cte.}$:

$$\int_F dF = F = 0, \qquad [9.3]$$

lo que, evidentemente es una incongruencia, por cuanto el área de la sección no puede ser nula.

En consecuencia debe necesariamente verificarse que $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$, lo que hace que la segunda, tercera y cuarta de las [9.1] resulten idénticamente nulas.

Consideremos ahora, fig. 9.2, dos secciones $s-s$ y $s'-s'$ separadas de una distancia l antes de la deformación originada por la fuerza normal N. Si suponemos la sección $s-s$ fija, la sección $s'-s'$ se desplazará paralelamente a sí misma de una longitud Δl pasando a ocupar la posición $s''-s''$. Antes de con-

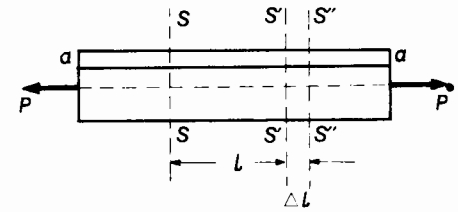


Fig. 9.2

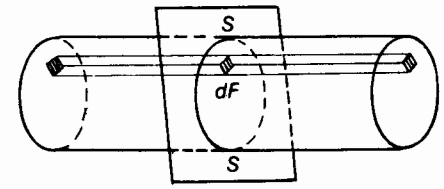


Fig. 9.3

tinuar con nuestro desarrollo definiremos qué es lo que entenderemos en lo sucesivo por "fibra". Sea el sólido de eje rectilíneo de la figura 9.3, de sección constante y consideremos en una de ellas, la $s-s$ por ejemplo, un elemento

superficial dF. Al desplazarse la sección generando el sólido, el elemento infinitésimo origina a su vez un cilindro elemental de base dF y altura igual a la longitud del sólido. Ese cilindro elemental constituye lo que designaremos como "fibra". Volviendo a la figura 9.2, una fibra cualquiera como ser la a–a, experimentará una deformación específica:

$$\epsilon_a = \frac{\Delta l}{l}. \qquad [9.4]$$

Ahora bien, todas las fibras de la sección, cuyas longitudes originales eran l, experimentan el mismo aumento de longitud Δl y en consecuencia resulta:

$$\epsilon = \text{Cte.} \qquad [9.5]$$

es decir, que las deformaciones específicas, en la zona alejada de los extremos según el principio de Saint Venant, son constantes para todas las fibras de la sección. En consecuencia, de acuerdo con la ley de Hooke, si ϵ = Cte., resulta:

$$\sigma = E\epsilon = \text{Cte.} \qquad [9.6]$$

Por ser σ = Cte., la primera de las ecuaciones [9.1] se puede escribir:

$$N = \sigma \int_F dF \qquad [9.7]$$

pero:

$$\int_F dF = F, \qquad [9.8]$$

y en consecuencia:

$$N = \sigma F, \qquad [9.9]$$

o también:

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{F}}, \qquad [9.10]$$

que es la ecuación fundamental de la solicitación axil.

La constancia del valor de σ, satisface las dos últimas ecuaciones [9.1]. En efecto, si σ = Cte., resulta:

$$\left.\begin{aligned} \sigma \int_F z\, dF &= 0 \\ \sigma \int_F y\, dF &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [9.11]$$

Las integrales anteriores corresponden a los momentos estáticos del área de la

sección con respecto a los ejes y y z respectivamente, momentos estáticos que son nulos por ser los ejes mencionados, baricéntricos.

En consecuencia, las ecuaciones [9.11] resultan idénticamente nulas y por consiguiente, se satisfacen.

La ecuación [9.10] nos dice que la repartición de tensiones normales en la solicitación axil es uniforme y que el valor de las mismas es igual al cociente entre la fuerza y el área de la sección.

Esta expresión nos permite resolver los dos problemas fundamentales de la solicitación axil: el del dimensionamiento de una pieza, y el de la verificación de la misma.

El problema del dimensionamiento se plantea en los términos siguientes: Determinar la sección transversal de una barra o elemento estructural, solicitado por una fuerza axil N de modo que en ningún punto de la misma se supere el valor de la tensión admisible que corresponde al material que la constituye. Es decir que debe tenerse:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leqslant \sigma_{\text{adm.}}, \qquad [9.12]$$

de donde el área buscada para la sección, resulta:

$$F_{\text{nec.}} \geqslant \frac{N}{\sigma_{\text{adm.}}} \qquad [9.13]$$

El problema inverso o de verificación, consiste en determinar si las tensiones que ocurren en una pieza de sección dada, originadas por una fuerza axil determinada superan o no el valor de la tensión admisible para el material. En consecuencia debe tenerse:

$$\sigma_{\text{adm.}} \geqslant \frac{N}{F} = \sigma. \qquad [9.14]$$

El valor de las tensiones admisibles en solicitación axil varía según el material que se considere. A título ilustrativo damos a continuación algunos valores correspondientes a los materiales más comunes, haciendo notar que para algunos de ellos, la tensión admisible es la misma, tanto para compresión como para tracción, mientras que para otros, difiere. Entre los primeros se cuentan el acero, el cobre, el aluminio, en general los materiales metálicos, mientras que los materiales de origen pétreo y, en general los frágiles, se cuentan entre los segundos. Para el hormigón, las tensiones admisibles tanto a la tracción como a la compresión, varían con la resistencia del mismo a una u otra forma de solicitación, variando la relación entre las resistencias a la tracción y la compresión entre 0,08 y 0,12.

Existe un tercer tipo de materiales, la madera, que es anisótropo desde el punto de vista de su resistencia, que varía según que la solicitación se efectúe en la dirección de las fibras o normalmente a ellas, y en este último caso es necesario distinguir entre tensiones normales a los anillos de crecimiento anual o coincidente con ellos. Estas diferencias de resistencia son tanto más acentuadas cuanto más blanda es la madera.

CUADRO IV

TENSIONES ADMISIBLES CORRESPONDIENTES A LOS MATERIALES MÁS COMUNES PARA CARGAS ESTÁTICAS (kg/cm²)

Material		*Material*	
Acero común de construcción.	1400	Plomo (tracción)	150–300
id. id., cuando se consideran esfuerzos secundarios	1800	id. id. (compresión)	500
Madera (roble) compresión paralela a las fibras	80	Zinc.	200
id. id., perpendicular a las fibras.	35	Cobre	1400
id. id., tracción paralela a las fibras.	100	Cobre laminado	800
Madera (pino), compresión paralela a las fibras.	60	Hormigón (compresión)	45–150
id. id., perpendicular a las fibras.	15	Hormigón (tracción)	5–10
id. id., tracción paralela a las fibras.	100	Acero de alta resistencia.	2400–3000

Se hace notar que si bien la fórmula [9.10] es válida cualquiera sea el signo de σ, es decir, tanto para solicitaciones de tracción como de compresión, para estas últimas tiene sus limitaciones. En efecto, en los sólidos sujetos a compresión, la fórmula [9.10] pierde su validez cuando la "esbeltez" de la pieza supera valores determinados, que dependen del tipo y calidad del material con que está construida, entendiéndose por esbeltez, la relación:

$$\lambda = \frac{l}{i}, \qquad [9.15]$$

donde l es la longitud de la pieza e i el radio de giro mínimo de su sección transversal. A partir de dichos valores de la esbeltez se presenta el fenómeno de la *inestabilidad del equilibrio* o *pandeo*, cuyo estudio constituye un capítulo especial de la Estabilidad, produciéndose la rotura de la pieza para tensiones muy inferiores a las de rotura por compresión.

9 . 3 . Las deformaciones en la solicitación axil

La determinación del alargamiento total que experimenta una barra de eje rectilíneo solicitada axialmente, se efectúa combinando la expresión [9.10] con la correspondiente a la ley de Hooke. Recordando que:

$$\boxed{\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}} \qquad [9.16]$$

y teniendo en cuenta que:

$$\sigma = \frac{N}{F} \qquad [9.17]$$

resulta, reemplazando σ en la [9.16]:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{EF} \qquad [9.18]$$

y finalmente:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} \qquad [9.19]$$

que no es más que la expresión de la ley de Hooke para el caso de solicitación axil.

La deformación específica longitudinal está dada por:

$$\epsilon_l = \frac{N}{EF} \qquad [9.20]$$

y por tratarse de un estado de solicitación simple, la deformación específica transversal resulta simplemente:

$$\epsilon_t = -\mu\epsilon_l = -\frac{\mu N}{EF}\,. \qquad [9.21]$$

9 . 4 . Régimen de tensiones para un punto de un sólido sujeto a solicitación axil

Por tratarse de un estado simple de tensión, el régimen de las tensiones para todos los puntos de una sección queda definido por las expresiones [4.6] establecidas en el capítulo 4, que se reproducen a continuación:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_x \cos^2 \alpha \\ \tau_\alpha &= \sigma_x \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2} \\ \rho_\alpha &= \sigma_x \cos \alpha \end{aligned}\right\} \qquad [9.22]$$

donde σ_x coincide con la tensión normal calculada mediante la [9.10], y σ_α, τ_α y ρ_α son los valores que corresponden a un plano que forma un ángulo α con el plano de la sección. Como se ha visto en el capítulo 4, $\sigma_x = \sigma_1$ es la tensión normal máxima, siendo nula σ_2. En lo que respecta a las tensiones tangenciales máxima y mínima, estas ocurren en planos a 45° y 135° con el plano de la sección y su valor es $\pm \frac{1}{2} \sigma_x$.

9.5. Influencia del peso propio en la solicitación axil

Al deducir la fórmula [9.10] sólo hemos tenido en cuenta las fuerzas exteriores, prescindiendo del efecto que pudiera tener el peso propio de la estructura. Ello es admisible cuando esta última influencia es despreciable en relación a las tensiones originadas por las cargas exteriores, lo que ocurre cuando las dimensiones de la pieza son reducidas.

A continuación deduciremos la expresión que permite calcular las tensiones originadas en una barra por una carga axil exterior y por su peso propio.

Sea la barra de figura 9.4 de sección constante F y longitud l suspendida en su extremo superior y sujeta en la sección inferior a la acción de una fuerza P axil. Si γ es el peso unitario del material del que está constituida la barra, la fuerza normal que solicita la sección $1-1$ ubicada a una distancia x del extremo, será la resultante de P y del peso de dicha porción de la barra, o sea:

$$N = P + \gamma F \cdot x \qquad [9.23]$$

y la tensión correspondiente:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} = \frac{P}{F} + \gamma \cdot x \qquad [9.24]$$

Para $x = 0$, $\sigma_x = \sigma_0$, siendo:

$$\sigma_0 = \frac{P}{F} \quad , \qquad [9.25]$$

y en consecuencia:

$$\sigma_x = \sigma_0 + \gamma \cdot x. \qquad [9.26]$$

La tensión máxima ocurre en la sección extrema superior para $x = l$, es decir:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \sigma_0 + \gamma l. \qquad [9.27]$$

Finalmente, la fórmula para el dimensionamiento la obtenemos reemplazando la [9.25] en la [9.27] y despejando F:

$$F = \frac{P}{\sigma_{\text{máx.}} - \gamma l} \quad . \qquad [9.28]$$

Ahora bien, $\sigma_{\text{máx.}}$ no puede, en ningún caso, superar el valor de $\sigma_{\text{adm.}}$ por lo que resulta:

$$F_{\text{nec.}} \geqslant \frac{P}{\sigma_{\text{adm.}} - \gamma l} \quad . \qquad [9.29]$$

La expresión [9.29] nos permite establecer el límite de utilización de la barra de sección constante. En efecto, cuando $\sigma_{\text{adm.}} = \gamma l$, el denominador se

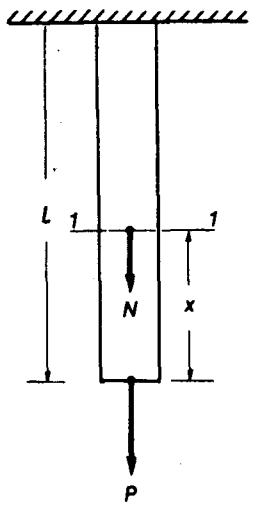


Fig. 9.4

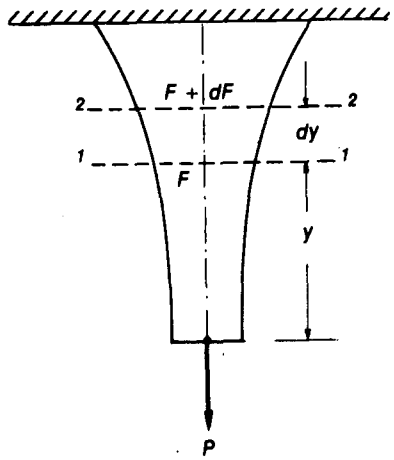


Fig. 9.5

anula y $F_{\text{nec.}}$ adquiere un valor infinito. En consecuencia, la longitud límite resulta ser:

$$l_{\text{máx.}} \leqslant \frac{\sigma_{\text{adm.}}}{\gamma} \qquad [9.30]$$

A partir de esta longitud es necesario recurrir a las barras de sección variable. Por otra parte, cuando las dimensiones de la barra son grandes y la influencia del peso propio considerable, el proyectar la barra con sección constante resulta antieconómico por cuanto el material no se aprovecha al máximo, desde el punto de vista de sus condiciones resistentes.

9 . 6 . Sólido de igual resistencia a solicitación axil

Se entiende por sólido de igual resistencia a tracción o compresión aquel para el cual por efecto de la carga exterior combinada con el peso propio, las tensiones que se originan en todos sus puntos son constantes. Esta condición conduce, como se verá, a un sólido de sección variable.

Sea figura 9.5 un sólido suspendido de su extremo superior, sujeto a la acción de una fuerza axil P aplicada en el baricentro de su sección inferior. Supondremos, además, que la magnitud de P sea tal que las dimensiones resultantes para el sólido obliguen a tener en cuenta el efecto de su peso propio.

Nos proponemos dimensionar las secciones transversales del sólido de forma que las tensiones normales σ resulten constantes para cualquier punto de cualquier sección que se considere. Ello conduce, como ya se ha dicho, a secciones de área variable por cuanto es necesario tener en cuenta el efecto del peso propio. Supongamos dos secciones *1–1*; *2–2*, fig. 9.5, separadas de dy, y situadas a una distancia y del extremo del sólido donde actúa la fuerza P. En la figura 9.6 hemos representado el elemento de volumen delimitado por las secciones *1–1* y *2–2* que distan dy y cuyas áreas, distintas, valen respectivamente F y $F + dF$.

El volumen elemental, por pertenecer a un sólido en equilibrio, debe a su vez estar en equilibrio. Si γ es el peso unitario del material del sólido, el peso de dicho volumen, despreciando infinitésimos de orden superior, será:

$$dG = \gamma\, dV = \gamma F\, dy. \qquad [9.31]$$

Por otra parte, si lo que proyectamos es un sólido de igual resistencia, las tensiones σ en las secciones *1–1* y *2–2* deberán ser las mismas. El equilibrio del elemento de volumen de figura 9.6 exige que la suma de las proyecciones de las fuerzas actuantes sobre el eje y sea nula.

En consecuencia resulta:

$$\sigma F + dG - \sigma (F + dF) = 0 \qquad [9.32]$$

de donde:

$$dG = \sigma\, dF \qquad [9.33]$$

y, reemplazando dG por su igual de la [9.31], se tiene:

$$\gamma F\, dy = \sigma\, dF, \qquad [9.34]$$

o también:

$$\frac{\gamma}{\sigma} dy = \frac{dF}{F} \qquad [9.35]$$

expresión que integrada nos da:

$$\frac{\gamma}{\sigma} y + C = \ln F, \qquad [9.36]$$

o también:

$$F = e^{(\gamma/\sigma)y + C} = e^{C} \cdot e^{(\gamma/\sigma)y}, \qquad [9.37]$$

y haciendo $K = e^{C}$, tenemos finalmente:

$$F = K e^{(\gamma/\sigma)y}. \qquad [9.38]$$

La expresión [9.38] nos da la ley de variación del área de la sección del sólido de igual resistencia a tracción y a compresión.

El valor de la constante K lo obtenemos de las condiciones de borde. Para $y = 0$, podemos admitir en primera aproximación, si llamamos F_0 a la sección extrema inferior, que:

$$F_0 = \frac{P}{\sigma}. \qquad [9.39]$$

y como $(\gamma/\sigma)\, y = 0$ para $y = 0$, se tiene:

$$F = F_0 = \frac{P}{\sigma} = K, \qquad [9.40]$$

de donde:

$$K = \frac{P}{\sigma}, \qquad [9.41]$$

valor que reemplazando en la [9.38] conduce a:

$$F = \frac{P}{\sigma} e^{(\gamma/\sigma)y}. \qquad [9.42]$$

Si la sección es cuadrada, de área $F = a^2$, su lado resulta ser:

$$a = \left(\frac{P}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\gamma y/2\sigma} \qquad [9.43]$$

Si, en cambio se trata de una sección rectangular de ancho b = Cte. y altura h, la ley de variación para esta última es:

$$h = \frac{P}{\sigma b} e^{\gamma y/\sigma} \qquad [9.44]$$

y finalmente, si se tratara de una barra de sección circular de diámetro d, la variación del mismo será:

$$d = 2\sqrt{\frac{P}{\sigma\pi}} \cdot e^{\gamma y/2\sigma} \qquad [9.45]$$

En ciertos problemas puede interesar conocer el volumen del sólido de igual resistencia, para una altura dada del mismo. Este volumen puede calcularse

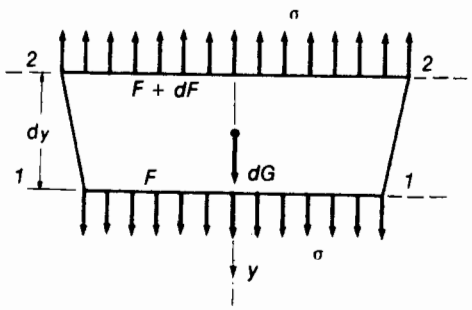


Fig. 9.6

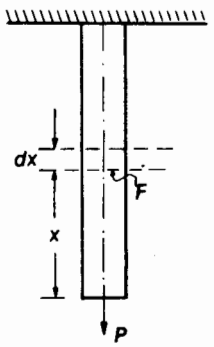


Fig. 9.7

fácilmente si consideramos que la diferencia de áreas entre las secciones extremas, multiplicada por la tensión σ, constante, es igual al peso total del sólido, es decir que si F_0 y F_1 son las áreas de las secciones extremas se tiene:

$$\sigma (F_1 - F_0) = \gamma V, \qquad [9.46]$$

de donde:

$$V = \frac{\sigma}{\gamma}\left(F_1 - F_0\right). \qquad [9.47]$$

9.7. Deformación de un sólido de sección constante teniendo en cuenta el efecto del peso propio

Sea el sólido prismático de figura 9.7 y supongamos un elemento de longitud del mismo dx situado a una distancia x del extremo inferior y supongamos al sólido solicitado por la fuerza exterior P.

Si la longitud del elemento es dx y la tensión que lo solicita σ, su alargamiento $d\Delta x$ será:

$$d\Delta x = \frac{\sigma}{E} dx, \qquad [9.48]$$

por ser $\epsilon_x = \sigma/E$ el alargamiento específico originado por σ. Ahora bien, de acuerdo con la [9.24]:

$$\sigma = \frac{P + \gamma F x}{F}, \qquad [9.49]$$

y, en consecuencia:

$$d\Delta x = \frac{1}{EF}(P + \gamma F x)\, dx. \qquad [9.50]$$

El alargamiento total que sufre la pieza si l es su longitud, lo obtendremos integrando la [9.50] entre los límites 0 y l. En consecuencia resultará:

$$\Delta l = \frac{1}{EF} \int_0^l (P + \gamma F x)\, dx, \qquad [9.51]$$

e integrando:

$$\Delta l = \frac{1}{EF}\left(Pl + \frac{1}{2}\gamma F l^2\right), \qquad [9.52]$$

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{l}{2EF}\,\gamma F l, \qquad [9.53]$$

es decir, que el efecto del peso propio en la deformación, es equivalente al de una fuerza concentrada de la mitad de su intensidad aplicada en su extremo libre.

9 . 8 . El problema de las tres barras

La determinación de los esfuerzos en tres barras concurrentes a un punto, originados por una fuerza P, también concurrente, es un problema estáticamente indeterminado por cuanto como sabemos, no es posible con los elementos de la Estática descomponer una fuerza en tres direcciones concurrentes. En efecto, se trata de un problema de tres incógnitas (los tres esfuerzos desconocidos), y para los sistemas concurrentes en el plano las condiciones necesarias y suficientes para su equilibrio son dos, de modo que sólo es posible plantear dos ecuaciones de condición.

Sea por ejemplo el sistema de figura 9.8 constituido por tres barras articuladas

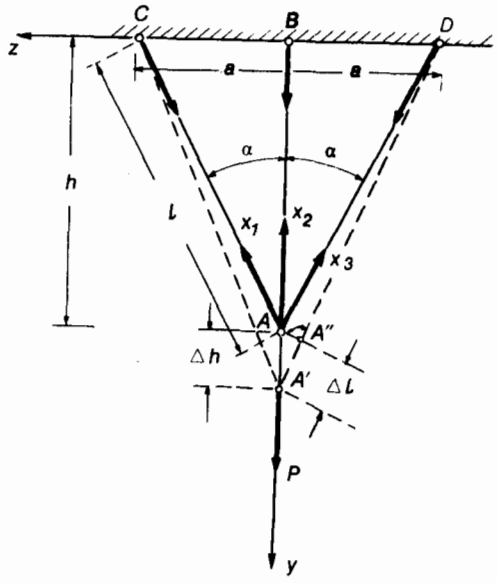


Fig. 9.8

entre sí en el punto A y a tierra por sus otros extremos. Supongamos que en A actúe una fuerza vertical P y que el sistema sea simétrico respecto del eje vertical y, es decir, que se cumple que $\overline{CB} = \overline{BD}$ y que además, el material de las barras $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ y sus respectivas secciones F_1 y F_3 sean los mismos pudiendo diferir la sección F_2 de barra $\overline{AB}$ y el material de la misma. Si llamamos X_1, X_2 y X_3 a los esfuerzos incógnitos en las tres barras que constituyen el sistema, de acuerdo con la notación de la figura, la ecuación de nulidad de proyecciones sobre el eje z tiene por expresión:

$$X_1 \operatorname{sen}\alpha - X_3 \operatorname{sen}\alpha = 0, \qquad [9.54]$$

de donde:

$$|X_1| = |X_3|. \qquad [9.55]$$

Condición ésta que, por razones de simetría, era evidente.

La segunda ecuación de equilibrio, es decir, la de nulidad de proyección sobre el eje y, conduce a:

$$-X_1 \cos\alpha - X_3 \cos\alpha - X_2 + P = 0, \qquad [9.56]$$

que, teniendo en cuenta la [9.55] se transforma en:

$$2X_1 \cos\alpha + X_2 = P. \qquad [9.57]$$

Nos encontramos, pues, ante un problema de una ecuación con dos incógnitas.

La ecuación complementaria que nos permite resolver el problema, la obtenemos analizando la deformación que experimenta el sistema. Por efecto de la fuerza P, las tres barras aumentan de longitud y por razones de simetría de figura y de materiales, los alargamientos que experimentan las barras laterales $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ son iguales entre sí, por lo que el punto se desplaza sobre el eje de simetría y pasa a ocupar la posición A' como consecuencia del alargamiento Δh experimentado por la barra $\overline{AB}$. De acuerdo con la ley de *Hooke*, si X_2 es el esfuerzo que solicita a la barra $\overline{AB}$, su alargamiento total será:

$$\Delta h = \frac{X_2 h}{E_2 F_2}, \qquad [9.58]$$

donde E_2 y F_2 son, respectivamente, el módulo de elasticidad y el área de la sección de la barra.

Análogamente, si E_1 y F_1 son los valores del módulo de elasticidad y

de la sección de las barras $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$, el alargamiento experimentado por éstas (igual para ambas) resulta ser:

$$\Delta l = \frac{X_1 l}{E_1 F_1} \cdot \qquad [9.59]$$

Proyectando A sobre $A'D$ obtenemos el punto A'' y despreciando infinitésimos de orden superior, podemos admitir que $\overline{AD} = \overline{A''D}$ y que, además, $\widehat{BAD} \cong \widehat{BA'D} = \alpha$. En consecuencia:

$$\Delta l = \Delta h \cos \alpha, \qquad [9.60]$$

de donde, reemplazando los valores de las [9.58] y [9.59] resulta:

$$\frac{X_1 l}{E_1 F_1} = \frac{X_2 h}{E_2 F_2} \cos \alpha, \qquad [9.61]$$

y finalmente:

$$X_1 = X_2 \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \cdot \frac{h}{l} \cos \alpha, \qquad [9.62]$$

valor que reemplazado en la [9.57] nos da:

$$2 X_2 \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \cdot \frac{h}{l} \cos^2 \alpha + X_2 = P \qquad [9.63]$$

De la figura 9.8 tenemos:

$$h = l \cos \alpha, \qquad [9.64]$$

luego, reemplazando en [9.63] y simplificando:

$$X_2 \left(2 \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \cos^3 \alpha + 1 \right) = P, \qquad [9.65]$$

y finalmente:

$$X_2 = \frac{P}{2 \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \cos^3 \alpha + 1}, \qquad [9.66]$$

y como:

$$X_1 = X_3 = \frac{P - X_2}{2 \cos \alpha} \qquad [9.67]$$

reemplazando el valor de X_2 dado por la [9.66] obtenemos finalmente:

$$X_1 = X_3 = \frac{P}{2 \cos \alpha} \left[1 - \frac{1}{2 \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \cos^3 \alpha + 1} \right]. \qquad [9.68]$$

Si las tres barras fueran del mismo material, es decir, si $E_1 = E_2 = E_3$, las [9.66] y [9.68] se transforman en:

$$X_2 = \frac{P}{\frac{F_1}{F_2} 2 \cos^3 \alpha + 1}, \qquad [9.69]$$

y

$$X_1 = X_3 = \frac{P}{2 \cos \alpha} \left[1 - \frac{1}{2 \frac{F_1}{F_2} \cos^3 \alpha + 1} \right]. \qquad [9.70]$$

Finalmente, si las tres barras tuvieran igual sección, además de ser del mismo material, tendríamos:

$$X_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}, \qquad [9.71]$$

y

$$X_1 = X_3 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}. \qquad [9.72]$$

Para el caso particular en que el ángulo α fuera muy pequeño, es decir, si las direcciones de las tres barras tendieran a confundirse resultaría:

$$\cos \alpha \simeq 1, \qquad [9.73]$$

y de las [9.71] y [9.72] resultaría:

$$X_1 = X_2 = X_3 = \frac{P}{3}, \qquad [9.74]$$

eso es que, como es lógico, la carga exterior P se reparte por partes iguales entre las tres barras.

Otro caso particular lo constituye aquel en que la separación a (figura 9.8) es muy grande en relación con la longitud h de la barra vertical. En este caso α tiende a $\pi/2$ y $\cos\alpha$ a 0, con lo que la barra central absorbe la mayor parte de la fuerza P. El caso límite de $\alpha = \pi/2$ supone las barras laterales horizontales, situación esta en la que no pueden absorber ningún esfuerzo, transmitiéndose la totalidad de la fuerza P a la barra central. Ello se pone en evidencia analizando las expresiones [9.69] y [9.70]. Para $\cos\alpha = 0$ el denominador de la primera se hace igual a la unidad, resultando:

$$X_2 = P, \qquad [9.75]$$

y en la segunda de las expresiones mencionadas, se anula el término entre barras, lo que conduce a:

$$X_1 = X_3 = 0. \qquad [9.76]$$

9.9. Tensiones por variación de temperatura en una barra doblemente empotrada

Sea una barra de sección constante F, longitud l y módulo de elasticidad E, empotrada en sus extremos (figura 9.9).

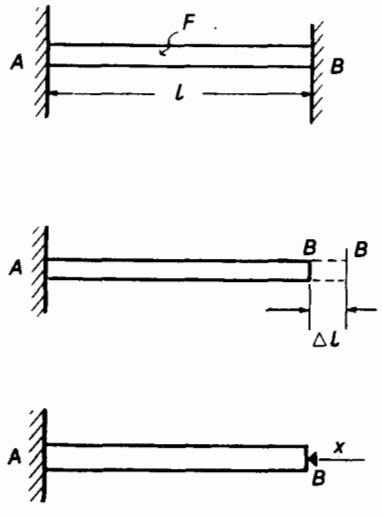


Fig. 9.9

Supongamos que la barra sufre un aumento uniforme de temperatura.

Si no existiera el empotramiento la barra aumentaría su longitud de:

$$\Delta l = \alpha l \Delta t \qquad [9.77]$$

donde α es el coeficiente de dilatación lineal del material de la barra. En las reales condiciones de sustentación, dicho corrimiento no puede producirse. En consecuencia, para anularlo debemos aplicar en B una fuerza axil X, capaz de producir una deformación de igual intensidad y signo contrario a Δl y que no es otra cosa que la reacción del empotramiento. La expresión del corrimiento originado por X es:

$$\Delta l' = \frac{Xl}{EF}, \qquad [9.78]$$

y como, por razones de compatibilidad, debe tenerse:

$$\Delta l + \Delta l' = 0, \qquad [9.79]$$

reemplazando en [9.79] los valores dados por las [9.77] y [9.78]:

$$\alpha l \Delta t = -\frac{Xl}{EF}, \qquad [9.80]$$

de donde:

$$X = -\alpha \Delta t \cdot E \cdot F, \qquad [9.81]$$

la tensión normal:

$$\sigma = \frac{X}{F} = -\alpha E \Delta t. \qquad [9.82]$$

Cuando se trata de un aumento de temperatura, $\Delta t > 0$ y $\sigma < 0$, es decir, tensión de compresión.

En cambio, si $\Delta t < 0$, eso es, cuando hay disminución de temperatura, resulta $\sigma > 0$ o sea tracción.

9.10. Tensiones en tubos de pared delgada

9.10.1. Planteo del problema

Supongamos un tubo de longitud indefinida, de radio interior r_i y de un espesor e de pared, pequeño en relación con r_i (fig. 9.10), sujeto a una presión interior p_i. Precisamente por suponer la longitud grande, podemos admitir un estado de deformación plana, es decir que la deformación específica longitudinal ϵ_l es nula o constante.

En un punto del espesor de la pared se originan dos tensiones: una radial σ_r y otra circunferencial σ_t (fig. 9.11).

Dichas tensiones varían a lo largo del espesor e de la pared según leyes determinadas. La tensión radial σ_r, en el borde interno alcanza el valor de p_i y se anula en el borde externo.

La tensión circunferencial σ_t, también varía entre ambos bordes pero, por

ser el espesor de la pared reducido en relación al radio, sus valores extremos varían poco y puede admitirse para esta tensión una distribución uniforme en el espesor de la pared. Por otra parte, como veremos, el valor de σ_t es grande con relación a p_i y por ende también con respecto a σ_r, por lo que esta última

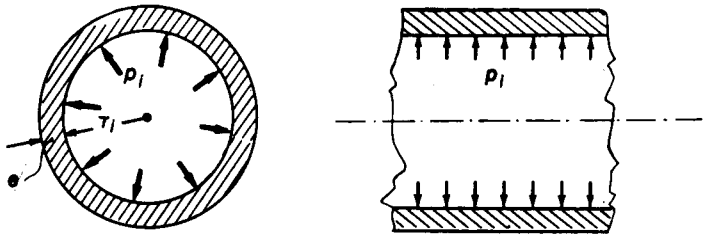


Fig. 9.10

puede despreciarse sin mayor error. De ahí que desarrollaremos el problema suponiendo que sólo existen tensiones circunferenciales uniformemente distribuidas en el espesor de la pared.

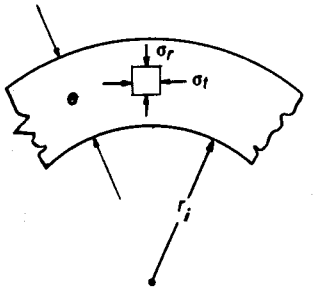


Fig. 9.11

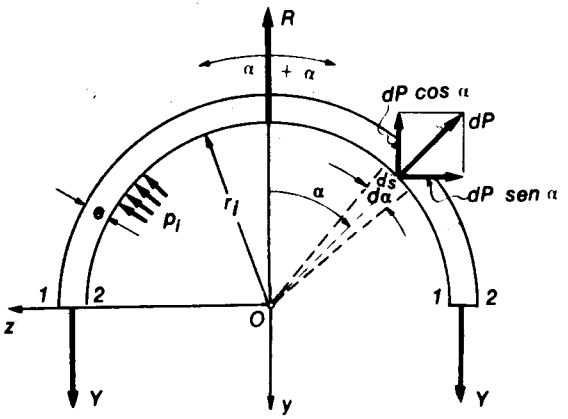


Fig. 9.12

9.10.2. Determinación de las tensiones circunferenciales

Consideremos dos secciones normales del conducto separadas de una distancia unitaria (fig. 9.12). Supongamos ahora la misma cortada por un plano diametral *1–2*. Sobre cada una de las secciones *1–2*, de espesor e y profundidad 1, actuarán fuerzas resultantes Y, de intensidad:

$$Y = \sigma_t e, \qquad [9.83]$$

que deberán equilibrar a la resultante R de los efectos de la presión p_i sobre la superficie interior del conducto. Si ds es una longitud elemental de la superficie interior, sobre el área $ds \cdot 1$ actuará una fuerza elemental:

$$dP = p_i\, ds, \qquad [9.84]$$

cuyas componentes según los ejes coordenados z, y (figura 9.12) valen, respectivamente:

$$\left.\begin{aligned} dP_z &= dP \operatorname{sen} \alpha = p_i \operatorname{sen} \alpha\, ds \\ dP_y &= dP \cos \alpha = p_i \cos \alpha\, ds \end{aligned}\right\} \qquad [9.85]$$

y teniendo en cuenta que $d\,s = r_i d\,\alpha$, reemplazando resulta:

$$\left.\begin{aligned} dP_z &= p_i\, r_i \operatorname{sen} \alpha\, d\alpha \\ dP_y &= p_i\, r_i \cos \alpha\, d\alpha \end{aligned}\right\} \qquad [9.86]$$

El equilibrio del semiconducto exige que la suma de las proyecciones sobre ambos ejes de las fuerzas actuantes sean nulas, o sea:

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_i\, r_i \operatorname{sen} \alpha\, d\alpha &= 0 \\ 2Y - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_i\, r_i \cos \alpha\, d\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [9.87]$$

La primera de las [9.87] se satisface por cuanto la integral es nula.

En cuanto a la segunda, teniendo en cuenta que p_i y r_i son constantes, puede escribirse:

$$2 p_i\, r_i \int_0^{\pi/2} \cos \alpha\, d\alpha = 2Y, \qquad [9.88]$$

o también, integrando y simplificando:

$$Y = p_i\, r_i \operatorname{sen} \alpha \Big|_0^{\pi/2} = p_i\, r_i. \qquad [9.89]$$

Finalmente reemplazando Y por su valor de la [9.83] y despejando σ_t:

$$\sigma_t = \frac{p_i\, r_i}{e}. \qquad [9.90]$$

La expresión [9.90] confirma la hipótesis de partida, es decir, el poder prescindir de las tensiones radiales σ_r, despreciándolas por su reducido valor frente a σ_t. En efecto, recordemos que el máximo valor de σ_r es p_i y que, de acuerdo con la [9.90], el valor de σ_t resulta de afectar al de p_i con un coeficiente, r_i/e muy grande, por ser r_i mucho mayor que e, por hipótesis.

La fórmula [9.90] es de verificación por cuanto permite, conocidas las dimensiones del conducto y la presión que lo solicita, calcular la tensión circunferencial σ_t y establecer si su valor es inferior a la tensión admisible para el material del conducto, es decir, si:

$$\sigma_t = \frac{p_i\, r_i}{e} \leqslant \sigma_{\text{adm.}} \qquad [9.91]$$

Dicha expresión nos permite también proyectar el conducto, es decir, dado el radio y la presión interiores, determinar el espesor e de su pared. La fórmula del cálculo es, en este caso, la siguiente:

$$e \geqslant \frac{p_i\, r_i}{\sigma_{\text{adm.}}} \qquad [9.92]$$

Las tensiones σ_t son siempre positivas (tracción) cuando las origina una presión interior, y negativas (compresión) cuando la presión es exterior.

9 . 10 . 3 . Deformaciones radial y circunferencial en un conducto de pared delgada

De acuerdo con la expresión de la ley de Hooke, la deformación específica circunferencial será:

$$\epsilon_t = \frac{\sigma_t}{E} = \frac{p_i\, r_i}{E e}, \qquad [9.93]$$

y el aumento de longitud del desarrollo de la sección del conducto:

$$\Delta s = 2\pi\, r_i\, \epsilon_t\,. \qquad [9.94]$$

Ahora bien, a este aumento de longitud corresponde un incremento del radio r_i cuya expresión es:

$$\Delta r_i = \frac{\Delta s}{2\pi} = r_i\, \epsilon_t\,, \qquad [9.95]$$

y la correspondiente deformación específica radial:

$$\epsilon_r = \frac{\Delta r_i}{r_i} = \epsilon_t\,. \qquad [9.96]$$

Las deformaciones específicas radial y tangencial en un tubo de pared delgada son, pues, iguales en valor y signo, que será positivo cuando las mismas estén originadas por una presión interior, y negativo cuando la presión actúe sobre la superficie exterior del conducto, comprimiéndolo.

9 . 10 . 4 . Tensiones en conductos cerrados

Cuando se trata de un cilindro cerrado por sus extremos y sujeto a una presión interior p_i, las fórmulas deducidas para los conductos abiertos son aplicables para secciones alejadas de los extremos, para las cuales, de acuerdo con el principio de *Saint Venant*, desaparece el efecto de la perturbación de borde originada por la existencia de los cierres extremos. Para las secciones cercanas a los extremos, es necesario tener en cuenta momentos flexores que originan tensiones de flexión, pero cuya determinación escapa a los alcances de la presente obra. Por otra parte, la perturbación de borde impide la libre deformación radial del cilindro en las secciones extremas lo que hace inaplicables las fórmulas anteriores.

Para las secciones alejadas de los extremos, como dijimos, son aplicables las fórmulas que dan los valores de σ_t y $\epsilon_t = \epsilon_r$. Pero la existencia de los cierres extremos sobre los que actúa también la presión p_i, origina tensiones longitudinales σ_l (fig. 9.13) uniformemente distribuidas sobre el área de la sección transversal del conducto.

La fuerza resultante que actúa sobre los cierres extremos es:

$$R = p_i \pi r_i^2 \qquad [9.97]$$

y el área de la sección transversal del conducto sobre la que se reparte uniformemente la fuerza R es aproximadamente:

$$F = 2\pi r_i e. \qquad [9.98]$$

En consecuencia, la tensión longitudinal valdrá:

$$\sigma_l = p_i \frac{\pi r_i^2}{2\pi r_i e} \qquad [9.99]$$

y simplificando:

$$\sigma_l = p_i \frac{r_i}{2e}. \qquad [9.100]$$

Observemos que:

$$\sigma_l = \tfrac{1}{2}\sigma_t, \qquad [9.101]$$

o sea que, para el dimensionado, es siempre determinante la tensión circuferencial.

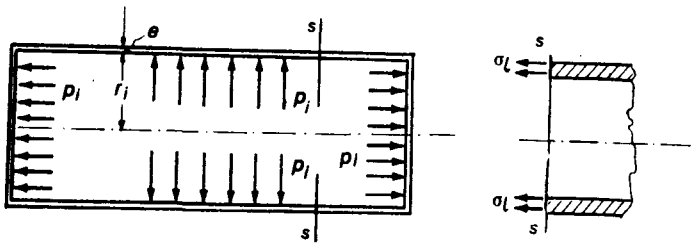


Fig. 9.13

Un elemento de volumen infinitésimo, en el espesor de la pared, se encuentra en realidad sujeto a un estado triple de tensiones, siendo tensiones principales precisamente σ_t, σ_r y σ_l, ya que en las caras donde actúan, por razones de simetría no existen tensiones tangenciales. Pero como hemos supuesto que, con suficiente aproximación $\sigma_r = 0$, el estado elástico por considerar es plano. Para el mismo, interesa conocer los valores de las tensiones tangenciales máximas y mínimas. Recordando la [3.39] tenemos:

$$\tau_{\text{máx.}} = \pm \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2), \qquad [9.102]$$

y como hemos admitido que $\sigma_1 > \sigma_2$ y en nuestro caso ambas tensiones son de igual signo y

$$\sigma_t > \sigma_l, \qquad [9.103]$$

resulta haciendo $\sigma_t = \sigma_1$ y $\sigma_l = \sigma_2$:

$$\tau_{\text{máx.}} = \pm \tfrac{1}{2}(\sigma_t - \sigma_l), \qquad [9.104]$$

y reemplazando valores:

$$\tau_{\text{máx.}} = \pm \tfrac{1}{2}\left(\frac{p_i r_i}{e} - \frac{p_i r_i}{2e}\right) \qquad [9.105]$$

y finalmente:

$$\tau_{\text{máx.}} = \pm \frac{p_i r_i}{4e}, \qquad [9.106]$$

tensiones estas que ocurren en planos orientados a 45° con respecto a los que corresponden a σ_t y σ_l, y para los cuales la tensión normal se obtiene aplicando la primera de las [3.38].

Recordando que para $\alpha = 45°$ ó $\alpha = 135°$ resulta ser $\text{sen}^2\,\alpha = \cos^2\alpha = 0{,}5$, obtenemos finalmente:

$$\sigma = \frac{3\,p_i r_i}{4e}. \qquad [9.107]$$

9 . 11 . Tubos de pared gruesa

9 . 11 . 1 . Conceptos generales

Al analizar el problema de los tubos de pared delgada, establecimos que, por efectos de una presión interior p_i (o exterior p_e) se originaban en un punto de la pared dos tensiones, una radial σ_r y otra circunferencial σ_t, si el tubo era abierto. Cuando el tubo tiene sus extremos cerrados aparece una tercera tensión longitudinal σ_l.

Llegamos también a la conclusión que, como consecuencia del pequeño espesor de la pared en relación al radio interior, puede admitirse, sin mayor error, una distribución uniforme de la tensión σ_t, y despreciarse la radial σ_r.

Cuando el espesor del tubo aumenta, esta hipótesis ya no es más admisible y es necesario, no sólo tener en cuenta la tensión radial σ_r, sino también la verdadera ley de la variación de σ_t en el espesor de la pared.

En los parágrafos siguientes desarrollaremos la solución debida a *Lamé*,

planteándola para el caso general en que existan tensiones interiores p_i y exteriores p_e, para deducir luego los casos particulares y ocuparnos más adelante de los problemas de encamisado y autozunchado, de interés para el proyecto de tubos y recipientes cilíndricos sometidos a muy altas presiones y en especial en problemas relativos a bocas de fuego.

9 . 11 . 2 . Cálculo de las tensiones en tubos de pared gruesa

Sea el tubo de longitud indefinida de figura 9.14, de radios r_i y r_e, cuyo espesor de pared es grande con respecto a las restantes dimensiones, y sujeto a presiones interior p_i y exterior p_e, que pueden actuar conjunta o independientemente. En un elemento infinitésimo, ubicado a una distancia r del centro de la sección ocurren dos tensiones σ_r y σ_t, ambas funciones de r_i, r_e, p_i y p_e.

A los efectos de establecer la relación funcional que vincula las tensiones σ_r y σ_t con las características geométricas de la sección y las presiones que solicitan a la misma, analizaremos el equilibrio de un tubo de espesor infinitésimo dr incluido en el espesor del tubo, fig. 9.15.

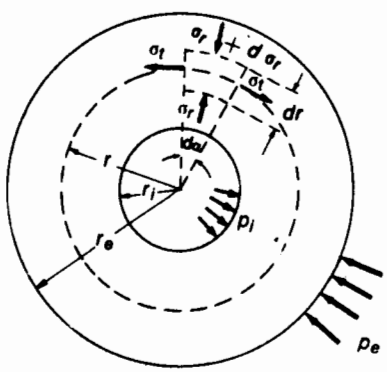


Fig. 9.14

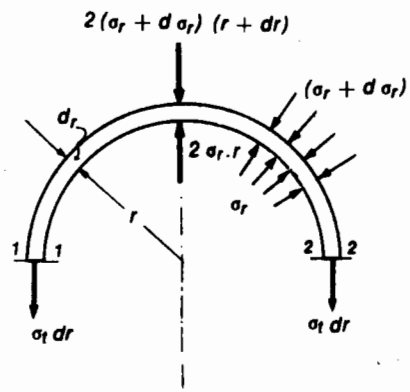


Fig. 9.15

Supuesto aislado el tubo de espesor dr y cortado por un plano diametral deberá existir equilibrio entre las fuerzas que actúan en las secciones *1–1* y *2–2* y las resultantes de las fuerzas originadas por las presiones exterior e interior, que, para este caso, son respectivamente $\sigma_r + d\sigma_r$ y σ_r.

Es así que, proyectando sobre un eje vertical tenemos, de acuerdo con la correspondiente fórmula para tubos de pared delgada:

$$2\sigma_t\, dr + 2(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) - 2\sigma_r r = 0 \qquad [9.108]$$

Efectuando productos, simplificando valores iguales y despreciando infinitésimos de orden superior, llegamos a:

$$\sigma_t\, dr + \sigma_r\, dr + r\, d\sigma_r = 0, \qquad [9.109]$$

o también:

$$\sigma_t + \sigma_r = -r\,\frac{d\sigma_r}{dr}. \qquad [9.110]$$

A los efectos de determinar los valores de σ_t y σ_r necesitamos plantear una segunda ecuación entre ambas variables.

Para ello recurriremos a una condición de deformación, para cuyo planteo admitimos la existencia de un estado plano de deformación, suponiendo que la deformación específica longitudinal es la misma para todas las fibras:

$$\epsilon_l = \text{Cte.} \qquad [9.111]$$

lo cual implica la constancia de las secciones planas luego de la deformación, condición cierta para los tubos de extremos abiertos y suficientemente exacta para los cerrados, en secciones alejadas de las zonas perturbadas de los extremos.

En consecuencia, de acuerdo con la generalización de la ley de Hooke resulta:

$$\epsilon_l = \frac{\mu}{E}(\sigma_r - \sigma_t), \qquad [9.112]$$

y por ser ϵ_l, μ y E constantes:

$$\sigma_t - \sigma_r = 2k, \qquad [9.113]$$

donde por facilidad de desarrollos posteriores, se ha hecho:

$$2k = -\frac{E\,\epsilon_l}{\mu}. \qquad [9.114]$$

En consecuencia, el sistema de ecuaciones que resuelve al problema es:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t + \sigma_r &= -r\,\frac{d\sigma_r}{dr} \\ \sigma_t - \sigma_r &= 2k \end{aligned}\right\} \qquad [9.115]$$

Eliminando σ_t entre ambas:

$$2\sigma_r = -2k - r\frac{d\sigma_r}{dr} \qquad [9.116]$$

o también, transponiendo términos y multiplicando por r:

$$2kr = -2\sigma_r r - r^2\frac{d\sigma_r}{dr} \qquad [9.117]$$

expresión que también puede escribirse:

$$-2kr = \frac{d(r^2\sigma_r)}{dr}, \qquad [9.118]$$

que integrada resulta:

$$r^2\sigma_r = -kr^2 + k_1, \qquad [9.119]$$

donde k_1 es la constante de integración.

Finalmente de [9.119] resulta:

$$\sigma_r = \frac{k_1}{r^2} - k, \qquad [9.120]$$

y de [9.115]:

$$\sigma_t = \frac{k_1}{r^2} + k. \qquad [9.121]$$

Las condiciones límite corresponden a $r = r_i$ y $r = r_e$, donde $\sigma_r = p_i$ y $\sigma_r = p_e$ respectivamente. En consecuencia, la [9.120] se transforma en:

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \frac{k_1}{r_i^2} - k \\ p_e &= \frac{k_1}{r_e^2} - k \end{aligned}\right\} \qquad [9.122]$$

de donde:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= (p_e - p_i)\frac{r_i^2 r_e^2}{r_i^2 - r_e^2} = (p_i - p_e)\frac{r_i^2 r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \\ k &= \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \end{aligned}\right\} \qquad [9.123]$$

y finalmente substituyendo en las [9.120] y [9.121]:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{(p_i - p_e)\dfrac{r_i^2 r_e^2}{r^2} - (p_i r_i^2 - p_e r_e^2)}{r_e^2 - r_i^2} \\ \sigma_t &= \frac{(p_i - p_e)\dfrac{r_i^2 r_e^2}{r^2} + (p_i r_i^2 - p_e r_e^2)}{r_e^2 - r_i^2} \end{aligned}\right\} \qquad [9.124]$$

que constituyen las expresiones de la solución de *Lamé*.

9.11.3. Valores máximos y mínimos de las tensiones y casos particulares

Analizando la expresión de σ_t en las [9.124] vemos que para que σ_t sea máxima, es necesario que r sea mínimo y viceversa. El mínimo valor de r es r_i y el máximo, r_e. En consecuencia:

$$\left.\begin{aligned} \text{máx } \sigma_t &= \frac{(p_i - p_e)r_e^2 + (p_i r_i^2 - p_e r_e^2)}{r_e^2 - r_i^2} \\ \text{mín } \sigma_t &= \frac{(p_i - p_e)r_i^2 + (p_i r_i^2 - p_e r_e^2)}{r_e^2 - r_i^2} \end{aligned}\right\} \qquad [9.125]$$

o también, simplificando:

$$\left.\begin{aligned} \text{máx } \sigma_t &= \frac{p_i(r_e^2 + r_i^2) - 2p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \\ \text{mín } \sigma_t &= \frac{2p_i r_i^2 - p_e(r_e^2 + r_i^2)}{r_e^2 - r_i^2} \end{aligned}\right\} \qquad [9.126]$$

En lo que respecta a las tensiones radiales, es necesario considerar dos casos:

a) $p_i > p_e$

b) $p_i < p_e$

En el primer caso, el primer término del numerador de la expresión de

σ_r de las [9.124] es positivo y para que σ_r resulte máximo es necesario que r sea mínimo, o sea, $r = r_i$. Es fácil ver que, reemplazando r_i en la expresión indicada y simplificando se llega a:

$$\text{máx } \sigma_r = p_i, \qquad [9.127]$$

y que, para $r = r_e$ resulta:

$$\text{mín } \sigma_r = p_e. \qquad [9.128]$$

Análogamente, si $p_e > p_i$, los términos se invierten y se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \text{máx } \sigma_r &= p_e \\ \text{mín } \sigma_r &= p_i \end{aligned}\right\} \qquad [9.129]$$

Consideraremos ahora los casos particulares en que actúa solamente una de las dos presiones.

a) *Presión interior solamente*

Para este caso tenemos:

$$p_i \neq 0 \qquad p_e = 0, \qquad [9.130]$$

en consecuencia, las [9.124] se transforman en:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_i r_i^2\left(\dfrac{r_e^2}{r^2} - 1\right)}{r_e^2 - r_i^2} \\ \sigma_t &= \frac{p_i r_i^2\left(\dfrac{r_e^2}{r^2} + 1\right)}{r_e^2 - r_i^2} \end{aligned}\right\} \qquad [9.131]$$

Para σ_t los valores máximo y mínimo corresponden respectivamente a $r = r_i$ y $r = r_e$.

$$\text{máx } \sigma_t = \frac{p_i r_i^2\left(\dfrac{r_e^2}{r_i^2} + 1\right)}{r_e^2 - r_i^2} = p_i \frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \qquad [9.132]$$

$$\text{mín } \sigma_t = \frac{2 p_i r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}. \qquad [9.133]$$

En lo que respecta a σ_r, para $r = r_e$ resulta, como es lógico, $\sigma_r = 0$, correspondiendo el valor máximo a $r = r_i$, que reemplazado en la primera de las [9.131] conduce a $\sigma_r = p_i$.

b) *Presión exterior solamente*

Cuando solamente actúa presión exterior, es $p_e \neq 0$, $p_i = 0$ de las [9.124]:

$$\sigma_t = \frac{-p_e r_e^2\left(\dfrac{r_i^2}{r^2} + 1\right)}{r_e^2 - r_i^2} \qquad [9.134]$$

y

$$\sigma_r = \frac{-p_e r_e^2\left(\dfrac{r_i^2}{r^2} - 1\right)}{r_e^2 - r_i^2} \qquad [9.135]$$

Los valores extremos de σ_t resultan:

$$\text{máx } \sigma_t = -\frac{2 p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \qquad [9.136]$$

para $r = r_i$ y

$$\text{mín } \sigma_t = -p_e \frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \qquad [9.137]$$

para $r = r_e$.

Puede observarse que, en este caso, existe un cambio de signo para σ_t,

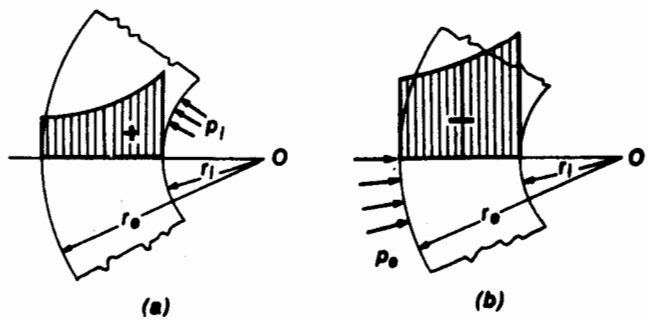


Fig. 9.16

que resulta ser de compresión en lugar de tracción. No ocurre lo mismo con σ_r que mantiene su signo, como es fácil ver en la [9.135], por cuanto siempre se tiene $(r_i^2/r^2) \leqslant 1$, y con ello el término entre paréntesis es siempre negativo, con lo que el numerador resulta positivo, y σ_r con el signo supuesto en la fig. 9.14.

En la figura 9.16, *a* y *b*, se han reproducido los diagramas correspondientes a la variación de σ_t, para presiones p_i y p_e actuando independientemente, y suponiendo $p_i = p_e$ y $r_e = 2r_i$.

Interesa conocer en ambos casos la relación entre las tensiones extremas. Cuando sólo actúa p_i, dicha relación vale:

$$\alpha_1 = \frac{\text{máx } \sigma_t}{\text{mín } \sigma_t} = \frac{r_e^2 + r_i^2}{2r_i^2} = 0{,}5\left(1 + \frac{r_e^2}{r_i^2}\right). \qquad [9.138]$$

Si en cambio, sólo existe presión exterior p_e la relación es:

$$\alpha_2 = \frac{2r_e^2}{r_e^2 + r_i^2}. \qquad [9.139]$$

9.11.4. Límites de aplicabilidad de las fórmulas para tubos de pared delgada

Analizaremos a continuación hasta qué relación e/r_i es posible aplicar las fórmulas para tubos de pared delgada sin que el error cometido en la determinación de σ_t resulte excesivo.

Para ello, determinaremos la relación que existe entre las tensiones máx σ_t en un tubo sujeto a presión interior p_i, determinadas por las fórmulas correspondientes a paredes gruesas y delgadas. Llamando β a dicha relación, tenemos;

$$\beta = \frac{p_i \dfrac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}}{p_i \dfrac{r_i}{e}}, \qquad [9.140]$$

o también:

$$\beta = \frac{e}{r_i} \cdot \frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}. \qquad [9.141]$$

Pero, si tenemos en cuenta que $r_e = r_i + e$, reemplazando, desarrollando los cuadrados y simplificando, resulta:

$$\beta = \frac{1 + \dfrac{e}{r_i} + \dfrac{e^2}{r_i^2}}{1 + \dfrac{e}{2r_i^2}}, \qquad [9.142]$$

que en primera aproximación puede escribirse:

$$\beta = 1 + \frac{e}{2r_i} + \frac{3}{4} \cdot \frac{e^2}{r_i^2} \qquad [9.143]$$

y si hacemos $e = mr_i$, reemplazando llegamos a:

$$\beta = 1 + \frac{1}{2}m + \frac{3}{4}m^2. \qquad [9.144]$$

En el cuadro siguiente hemos resumido los valores de β en función de m:

CUADRO V

$m =$	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
$\beta =$	1	1,027	1,057	1,092	1,130	1,172	1,217	1,267

Vemos que a partir de $m = 0{,}20$, el error cometido en la evaluación de σ_t cuando se utiliza la fórmula para tubos de pared delgada, es superior al 13%. A este respecto, las especificaciones de la A.S.M.E.[1] establecen como límites de m para la utilización de la fórmula para tubos de pared delgada, los siguientes valores:

$$m = \frac{e}{r_i} \leqslant 0{,}2 \qquad \text{para tuberías}$$

$$m = \frac{e}{r_i} \leqslant 0{,}1 \qquad \text{para calderas.}$$

9.11.5. Deformaciones en tubos de pared gruesa

Los tubos de pared gruesa, al igual que los de pared delgada, se deforman por efectos de las presiones a que se encuentran sometidos (presiones interna o externa o ambas actuando simultáneamente).

Dicha deformación se traduce en corrimientos radiales, de los que

[1] American Society of Mechanical Engineers.

fundamentalmente, interesan los correspondientes a puntos de las superficies interior y exterior.

Consideremos, fig. 9.17, un cilindro elemental, en el interior de un cilindro de pared gruesa, de espesor e, sujeto a las tensiones σ_r de compresión y σ_t de tracción originadas por las presiones p_i y p_e.

El alargamiento específico circunferencial será:

$$\epsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\,\sigma_r), \qquad [9.145]$$

y el alargamiento total experimentado por el desarrollo del anillo elemental:

$$\Delta s = 2\pi r \epsilon_t = \frac{2\pi r}{E}(\sigma_t - \mu\,\sigma_r), \qquad [9.146]$$

y en consecuencia, la variación del radio r:

$$\Delta r = \frac{\Delta s}{2\pi} = r\epsilon_t = \frac{r}{E}\left(\sigma_t - \mu\,\sigma_r\right) \qquad [9.147]$$

Reemplazando los valores de σ_t y σ_r por sus iguales de las expresiones [9.124] y teniendo en cuenta que σ_r es negativo (de compresión):

$$\Delta r = \frac{r}{E(r_e^2 - r_i^2)}\left[\left(1+\mu\right)\left(p_i - p_e\right)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^2} + \right.$$
$$\left. + \left(1-\mu\right)\left(p_i r_i^2 - p_e r_e^2\right)\right]. \qquad [9.148]$$

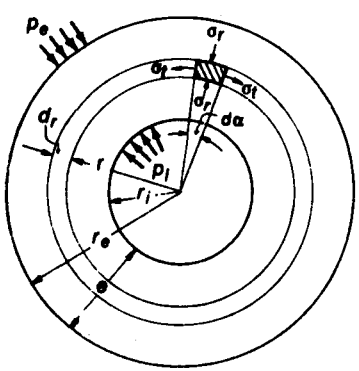


Fig. 9.17

Interesan, como veremos más adelante al estudiar el problema del encamisado, dos corrimientos radiales muy particulares:

a) el corrimiento radial de un punto de la superficie *interior* cuando sólo actúa presión interior;

b) el corrimiento radial de un punto de la superficie *exterior* cuando sólo actúa presión exterior.

Para obtener estos valores bastará anular en la [9.148] p_e en

el primer caso y p_i en el segundo, y hacer r igual respectivamente a r_i o r_e.

Se llega así a:

para el caso (a)

$$\Delta r_i = \frac{p_i r_i}{E}\left(\frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} + \mu\right), \qquad [9.149]$$

y *para el caso (b)*

$$\Delta r_e = -\frac{p_e r_e}{E}\left(\frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} - \mu\right). \qquad [9.150]$$

En lo que respecta a la máxima deformación específica, ésta corresponde a la dirección circunferencial y ocurre en las fibras de la pared interior donde σ_t es máxima. Para un tubo de extremos abiertos resulta:

$$\epsilon_{\text{máx.}} = \epsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \mu\,\sigma_r\right). \qquad [9.151]$$

y como $\epsilon_t = \epsilon_r$, el valor de $\epsilon_{\text{máx.}}$ resulta de dividir por r_i la [9.149]:

$$\epsilon_{\text{máx.}} = \frac{p_i}{E}\left(\frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} + \mu\right). \qquad [9.152]$$

Si el tubo fuera de extremos cerrados, podemos admitir que la fuerza resultante que se ejerce sobre los elementos de cierre de los extremos se reparte uniformemente sobre el área de la sección transversal.

Se tiene así, llamando R a dicha resultante, como expresión de la tensión longitudinal σ_l:

$$\sigma_l = \frac{R}{\pi(r_e^2 - r_i^2)} \qquad [9.153]$$

y como:

$$R = \pi(p_e r_e^2 - p_i r_i^2), \qquad [9.154]$$

resulta finalmente:

$$\sigma_l = \frac{p_e r_e^2 - p_i r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \qquad [9.155]$$

En este caso para secciones alejadas de los extremos el corrimiento radial resulta:

$$\Delta r = \frac{r}{E}\left[\sigma_t - \mu\,(\sigma_r + \sigma_l)\right], \qquad [9.156]$$

transformándose la [9.148] en:

$$\Delta r = \frac{r}{E\,(r_e^2 - r_i^2)}\left[(1+\mu)\,(p_i - p_e)\,\frac{r_i^2\,r_e^2}{r^2} + \right.$$

$$\left. + (1-2\mu)\,(p_i r_i^2 - p_e r_e^2)\right] \qquad [9.157]$$

y finalmente, para $p_e = 0$ y $r = r_i$:

$$\Delta r_i = \frac{p_i r_i}{E}\left[\frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} + \mu\left(1 - \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}\right)\right] \qquad [9.158]$$

Análogamente, para $p_i = 0$ y $r = r_e$:

$$\Delta r_e = -\frac{p_e r_e}{E}\left[\frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} - \mu\left(1 + \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}\right)\right] \qquad [9.159]$$

La deformación específica máxima resulta ser, en el caso que nos ocupa:

$$\epsilon_{\text{máx.}} = \epsilon_t = \frac{1}{E}\left[\sigma_t - \mu\,(\sigma_r + \sigma_l)\right] \qquad [9.160]$$

y en consecuencia:

$$\epsilon_{\text{máx.}} = \frac{p_i}{E}\left[\frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} + \mu\left(1 - \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}\right)\right] \qquad [9.161]$$

9 . 11 . 6 . Tensiones inducidas por encamisado

Cuando se dimensiona un tubo de pared gruesa en régimen elástico, en cualquier punto de la pared, el valor de la tensión sea circunferencial, radial o longitudinal, no debe superar al de la tensión admisible del material. Supongamos, por ejemplo, el caso de un tubo de pared gruesa, solicitado únicamente por presión interior. En tal caso se debe tener según la [9.132]:

$$\text{máx}\ \sigma_t = p_i\,\frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \leqslant \sigma_{\text{adm.}} \qquad [9.162]$$

$$\text{máx}\ \sigma_r = p_i \leqslant \sigma_{\text{adm.}} \qquad [9.163]$$

Ahora bien, máx σ_t es siempre mayor que máx σ_r, de modo que la presión interior nunca puede alcanzar el valor de $\sigma_{\text{adm.}}$. Para que ello ocurriera, sería necesario que el espesor fuera infinito como es fácil ver si reemplazamos en la [9.162] r_e por $r_i + e$. Efectuando los cuadrados y luego de algunas transformaciones simples, llegamos a:

$$\frac{\sigma_{\text{adm.}}}{p_i} = 1 + \frac{1}{\dfrac{e}{r_i} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e}{r_i}\right)^2}. \qquad [9.164]$$

Cuando $p_i = \sigma_{\text{adm.}}$, el miembro izquierdo se hace igual a la unidad. Para que ello se cumpla, es necesario que se anule el segundo término del miembro derecho, lo que sólo ocurre si $e = \infty$. Ello nos permite concluir que para grandes presiones interiores se requieren espesores considerables de pared, con lo que la estructura resulta antieconómica. En efecto, al analizar la ley de variación de las tensiones circunferenciales, vimos que estas decrecen rápidamente hacia la periferia, con lo que toda la zona exterior resulta solicitada por tensiones muy inferiores a la admisible, de modo que el material está mal aprovechado.

Con el objeto de mejorar en parte la situación y conseguir una distribución de tensiones no tan diferenciada, se recurre al proceso denominado *encamisado* o *zunchado en caliente*, que consiste en construir el tubo en dos partes: una interior, el tubo propiamente dicho, y otra exterior, la camisa. Esta última tiene un radio interior ligeramente inferior al radio exterior del tubo, de modo que calentándola se dilata, o sea aumenta su diámetro lo necesario para permitir la introducción del tubo.

Al enfriarse, la camisa se contrae comprimiendo al tubo. Se originan así presiones de contacto entre ambos que producen tensiones circunferenciales de tracción en la camisa y de compresión en el tubo. Al superponer estas tensiones previas con las debidas a la presión interior, éstas se reducen en la zona correspondiente al tubo y se incrementan en la camisa, con lo que se consigue reducir la diferencia entre tensiones extremas y un mayor aprovechamiento del material.

Analizaremos a continuación paso a paso el proceso del encamisado. Sea figura 9.18 un tubo de pared gruesa constituido por un tubo interior y una camisa exterior. Para la camisa, sus radios exterior e interior son r_e y r_m respectivamente y para el tubo interior, $r_m + \Delta r$ y r_i, es decir que el radio exterior del tubo difiere del interior de la camisa de un valor Δr, muy pequeño, del orden de pocas centésimas de milímetro. Una vez dilatada la camisa e introducido el tubo, aquella al enfriarse se contrae y ejerce sobre el tubo una presión de contacto p_m que actúa sobre su superficie exterior. Por reacción

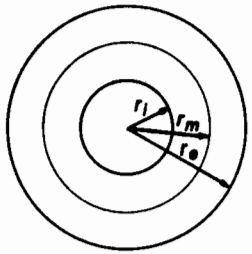


Fig. 9.18

sobre la superficie interior de la camisa se origina una presión opuesta a la indicada.

Al entrar en contacto ambos cilindros, el radio interior de la camisa, dilatado, no recupera su longitud inicial, sino que experimenta un incremento Δ'_r, que no es otra cosa que el corrimiento Δr_i dado por [9.149] y que para el caso que nos ocupa toma la siguiente expresión:

$$\Delta'_r = \frac{p_m r_m}{E}\left(\frac{r_e^2 + r_m^2}{r_e^2 - r_m^2} + \mu\right) \qquad [9.165]$$

Simultáneamente, el radio exterior del tubo interior se acorta de Δ''_r, valor que se corresponde con Δr_e de la [9.150] cuya expresión en este caso es:

$$\Delta''_r = -\frac{p_m r_m}{E}\left(\frac{r_m^2 + r_i^2}{r_m^2 - r_i^2} - \mu\right) \qquad [9.166]$$

Es evidente que, por razones de compatibilidad y considerando solamente sus valores absolutos, debemos tener:

$$\Delta r = \Delta'_r + \Delta''_r. \qquad [9.167]$$

Reemplazando valores y simplificando:

$$\Delta r = \frac{2 r_m^3 p_m}{E}\left[\frac{r_e^2 - r_i^2}{(r_e^2 - r_m^2)(r_m^2 - r_i^2)}\right] \qquad [9.168]$$

y finalmente despejando p_m:

$$p_m = \frac{\Delta r E}{2 r_m^3} \cdot \frac{(r_e^2 - r_m^2)(r_m^2 - r_i^2)}{(r_e^2 - r_i^2)}. \qquad [9.169]$$

Esta presión de contacto origina tensiones circunferenciales residuales, de tracción en la camisa y de compresión en el tubo interior, cuyas expresiones son respectivamente,

para la camisa:

$$\sigma'_t = \frac{p_m r_m^2}{r_e^2 - r_m^2}\left(\frac{r_e^2}{r^2} + 1\right) \qquad [9.170]$$

$$\text{máx } \sigma'_t = p_m \frac{r_e^2 + r_m^2}{r_e^2 - r_m^2} \qquad [9.171]$$

$$\text{mín } \sigma'_t = 2 p_m \frac{r_m^2}{r_e^2 - r_m^2} \qquad [9.172]$$

para el tubo:

$$\sigma''_t = -\frac{p_m r_m^2\left(\frac{r_i^2}{r^2} + 1\right)}{r_m^2 - r_i^2} \qquad [9.173]$$

$$\text{máx } \sigma''_t = -\frac{2 p_m r_m^2}{r_m^2 - r_i^2} \qquad [9.174]$$

$$\text{mín } \sigma''_t = -p_m \frac{r_m^2 + r_i^2}{r_m^2 + r_i^2} \qquad [9.175]$$

En figura 9.19 hemos representado los diagramas de tensiones residuales correspondientes a las expresiones [9.170] y [9.173] y en línea punteada el diagrama de las tensiones causadas por la presión interior p_i en el tubo de espesor total igual a la suma de los espesores del tubo interior y de la camisa, cuya expresión es:

$$\sigma'''_t = \frac{p_i r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}\left(\frac{r_e^2}{r^2} + 1\right), \qquad [9.176]$$

con un valor máximo en la superficie interior de:

$$\text{máx } \sigma'''_t = p_i \frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}. \qquad [9.177]$$

Para $r = r_m$, el valor de σ'''_t es:

$$\sigma'''_{tm} = p_i \frac{r_i^2}{r_m^2}\left(\frac{r_e^2 + r_m^2}{r_e^2 - r_i^2}\right), \qquad [9.178]$$

y finalmente:

$$\text{mín}\ \sigma_t''' = 2p_i \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}. \qquad [9.179]$$

Cuando actúa p_i, se suman las tensiones, y se obtienen los siguientes valores extremos, fig. 9.20.

en A:

$$\sigma_{t_A} = p_i \frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} - \frac{2p_m r_m^2}{r_m^2 - r_i^2} \qquad [9.180]$$

en B:

$$\sigma''_{t_B} = p_i \frac{r_i^2}{r_m^2}\left(\frac{r_e^2 + r_m^2}{r_e^2 - r_i^2}\right) - p_m \frac{r_m^2 + r_i^2}{r_m^2 - r_i^2} \qquad [9.181]$$

$$\sigma'_{t_B} = p_i \frac{r_i^2}{r_m^2}\left(\frac{r_e^2 + r_m^2}{r_e^2 - r_i^2}\right) + p_m \frac{r_e^2 + r_m^2}{r_e^2 - r_m^2} \qquad [9.182]$$

en C:

$$\sigma_{t_C} = 2p_i \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} + 2p_m \frac{r_m^2}{r_e^2 - r_m^2} \qquad [9.183]$$

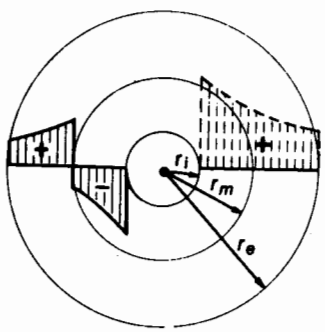


Fig. 9.19

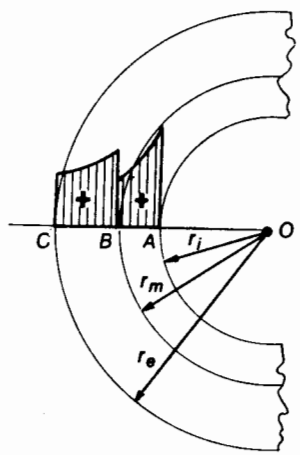


Fig. 9.20

La presión p_m como surge de la expresión [9.169], es función de Δr cuyo valor puede fijarse de modo que la temperatura necesaria para producirse la dilatación de la camisa no sobrepase valores que conduzcan a tensiones residuales superiores al límite de fluencia del material.

Es evidente que desde el punto de vista de la economía de proyecto conviene que:

$$\sigma_{t_A} = \sigma'_{t_B} = \sigma_{\text{adm.}} \qquad [9.184]$$

es decir, que se debe cumplir:

$$p_i \frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} - 2p_m \frac{r_m^2}{r_m^2 - r_i^2} = \sigma_{\text{adm.}}, \qquad [9.185]$$

$$p_i \frac{r_i^2}{r_m^2}\left(\frac{r_e^2 + r_m^2}{r_e^2 - r_i^2}\right) + p_m \frac{r_e^2 + r_m^2}{r_e^2 - r_m^2} = \sigma_{\text{adm.}} \qquad [9.186]$$

Estamos ante un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas p_m, r_e y r_m. La tercera ecuación a utilizar es la [9.169] que relaciona esas tres incógnitas con los valores datos $p_i, r_i, \sigma_{\text{adm.}}$ y con Δr que se fija *a priori* de acuerdo con las condiciones del problema.

Eliminando p_m entre las [9.185] y la [9.186] se llega a una ecuación de cuarto grado en r_e:

$$a_1 r_e^4 + a_2 r_e^2 + a_r = 0, \qquad [9.187]$$

donde los tres coeficientes son funciones de p_i, r_i, r_m y $\sigma_{\text{adm.}}$.[1]

Resuelta la [9.187] en r_e^2, se obtiene:

$$r_e^2 = f(r_m^2), \qquad [9.188]$$

que nos da pares de valores r_e, r_m que satisfacen las [9.185] y [9.186]. De todos ellos, interesa conocer el mínimo valor de r_e, por razones de economía de material. Para ello derivamos la [9.188] respecto de r_m, derivada que igualada a cero nos da una ecuación cuadrática en r^2_m que es la condición de mínimo.

Resuelta esa ecuación se llega finalmente a los siguientes valores mínimos de r_m y r_e:

$$\left.\begin{aligned} r_m &= k r_i \\ r_e &= k^2 r_i \end{aligned}\right\} \qquad [9.189]$$

donde:

$$k^2 = \frac{1 + \lambda + 2\sqrt{1 + \lambda}}{3 - \lambda}, \qquad [9.190]$$

siendo $\lambda = p_i / \sigma_{\text{adm.}}$.

[1] El desarrollo completo del cálculo de la relación óptima entre r_e y r_m puede verse en *Advanced Mechanics of Materials* de F. B. Seely y J.O. Smith, J. Wiley and Sons.

9.11.7. Caso en que el radio exterior es muy grande con relación al interior

Las fórmulas [9.131] nos dan los valores de las tensiones radiales y circunferenciales para los tubos de pared gruesa solicitados por presión interior únicamente. La tensión radial σ_r es negativa y la σ_t positiva, de modo que teniendo en cuenta esta circunstancia podemos escribir dichas expresiones como sigue:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p_i r_i^2\left(\dfrac{r_e^2}{r^2}-1\right)}{r_e^2-r_i^2} \\ \sigma_t &= +\frac{p_i r_i^2\left(\dfrac{r_e^2}{r^2}+1\right)}{r_e^2-r_i^2} \end{aligned}\right\} \qquad [9.191]$$

o también:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_i r_i^2\left(1-\dfrac{r_e^2}{r^2}\right)}{r_e^2-r_i^2} \\ \sigma_t &= \frac{p_i r_i^2\left(1+\dfrac{r_e^2}{r^2}\right)}{r_e^2-r_i^2} \end{aligned}\right\} \qquad [9.192]$$

Ahora bien, observando las ecuaciones [9.192], vemos que podemos expresar ambas tensiones mediante una única fórmula complexiva:

$$\sigma_{t,r} = \frac{p_i r_i^2\left(1 \pm \dfrac{r_e^2}{r^2}\right)}{r_e^2-r_i^2} \qquad [9.193]$$

o también desarrollando el paréntesis:

$$\sigma_{t,r} = \frac{p_i r_i^2}{r_e^2-r_i^2} \pm \frac{p_i \dfrac{r_i^2 r_e^2}{r^2}}{r_e^2-r_i^2}. \qquad [9.194]$$

Si el radio exterior es muy grande con relación al interior, podemos admitir que:

$$r_e^2 - r_i^2 \cong r_e^2, \qquad [9.195]$$

luego, para este caso, la [9.194] se transforma en:

$$\sigma_{t,r} = p_i \frac{r_i^2}{r_e^2} \pm \frac{p_i r_i^2}{r^2} \qquad [9.196]$$

Y en el límite, cuando $r_e \to \infty$:

$$\sigma_{t,r} \cong \pm p_i \frac{r_i^2}{r^2}. \qquad [9.197]$$

Esta expresión nos dice que para un tubo de pared infinitamente gruesa, las tensiones radiales y tangenciales son, en todos los puntos, de igual intensidad y sentido contrario, constituyendo un estado elástico de resbalamiento simple. Los diagramas de tensiones son asintóticos a los radios y son iguales y de signo contrario, (fig. 9.21).

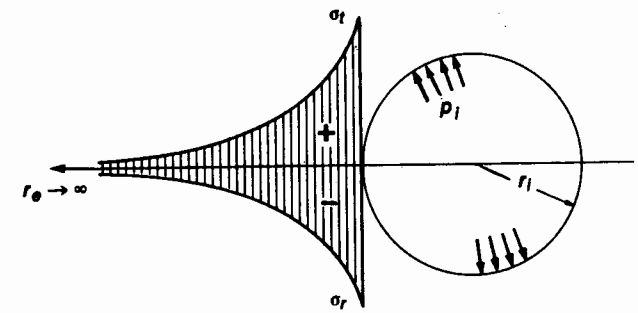


Fig. 9.21

Los valores máximos resultan ser:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{t\,\text{máx.}} &= +p_i \\ \sigma_{r\,\text{máx.}} &= -p_i \end{aligned}\right\} \qquad [9.198]$$

Como puede observarse en la figura, los diagramas de las tensiones σ_r y σ_t decrecen rápidamente con r, puesto que este último valor aparece elevado al cuadrado en el denominador de la expresión común para ambas.

Si suponemos:

$$r = 5r_i, \qquad [9.199]$$

reemplazando en [9.197] obtenemos:

$$\sigma'_{t,r} = \pm\, 0{,}04 p_i\,, \qquad [9.200]$$

es decir, que a tal distancia del centro las tensiones alcanzan a valer sólo el 4% de las tensiones máximas. Para la mayoría de los casos prácticos una aproximación de los resultados de dicho orden de magnitud es más que suficiente, dada la incertidumbre acerca del valor exacto de las constantes elásticas de los materiales. Un tubo cuya relación de radios sea:

$$\frac{r_e}{r_i} \geqslant 5\,, \qquad [9.201]$$

puede considerarse como de pared de espesor infinito.

Esta circunstancia es de suma importancia en la práctica, pues permite determinar con suficiente exactitud la distribución de tensiones en piezas que respondan a los casos tales como los que muestra la figura 9.22 o similares, siempre que la distancia entre el centro de un tubo y el borde de otro sea igual o mayor que cinco veces el radio de los mismos.

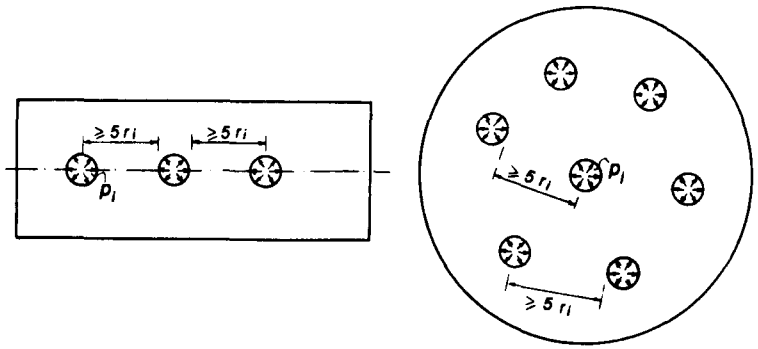


Fig. 9.22

9 . 11 . 8 . Tubos de pared gruesa en régimen plástico. Autozunchaje

Si en un tubo de pared gruesa sujeto solamente a presión interior, aumentamos p_i hasta un valor p_i' tal que la tensión circunferencial máxima alcance el valor límite de fluencia del material, tendremos:

$$\sigma_t = \frac{p_i r_i^2 \left(\dfrac{r_e^2}{r^2} + 1\right)}{r_e^2 - r_i^2} \qquad [9.202]$$

y el valor de p_i' será, de acuerdo con la [9.132]

$$p_i' = \frac{r_e^2 - r_i^2}{r_e^2 + r_i^2}\,\sigma_{fl.} \qquad [9.203]$$

En el borde exterior de la sección, tendremos, para $p_i = p_i'$

$$\text{mín}\ \sigma_t = 2\sigma_{fl.}\frac{r_i^2}{r_e^2 + r_i^2}\,. \qquad [9.204]$$

con una distribución de tensiones como la que muestra la figura 9.23

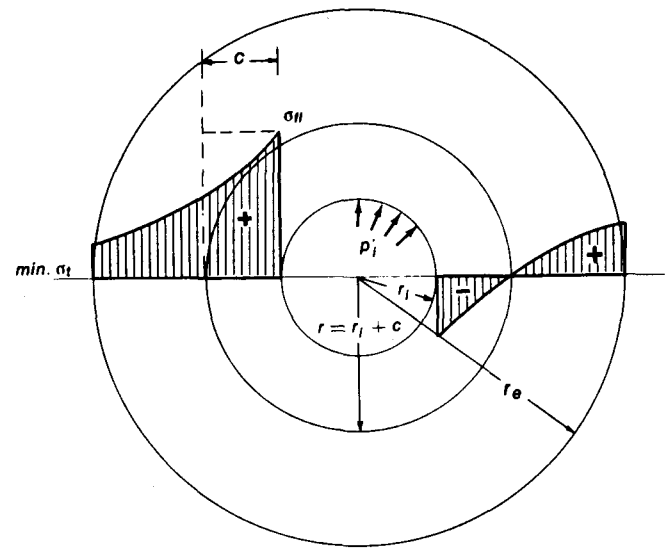


Fig. 9.23

Si la presión interior aumenta sobre el valor de p_i' hasta alcanzar un cierto valor:

$$p_i'' > p_i', \qquad [9.205]$$

se producirá una penetración plástica c, por cuanto será mayor el número de fibras que, en profundidad, experimentan una deformación circunferencial tal que su deformación específica alcance el valor de la correspondiente a la fluencia del material.

El tubo, en el espesor c, se encontrará plastificado. Si llegada esa situación se suprime la presión p_i'', la parte del tubo no plastificada se descarga linealmente y produce sobre las fibras plastificadas un esfuerzo interno radial de compresión, que origina en la zona de penetración plástica c tensiones de *compresión* residuales. Aparece en consecuencia, un *estado propio de tensiones*, en equilibrio de por sí, cuyo diagrama es aproximadamente el de la derecha de la figura 9.22.

Si hacemos actuar nuevamente una presión interna p_i las tensiones residuales del estado propio de tensiones, de signo contrario en la parte interior del tubo a las debidas a p_i, se suman a estas últimas, de modo que es posible alcanzar un valor p_i mucho mayor, antes de alcanzar en el borde interior tensiones peligrosas, que si no se hubiese efectuado el tratamiento previo, denominado *autozunchaje*.

Si se continúa aumentando el valor de la presión interior, llega un momento en que la penetración plástica es total:

$$c = r_e - r_i, \qquad [9.206]$$

y la presión interior que corresponde a dicho estado, se denomina presión de plastificación y se la indica con $p_{fl.}$

El cálculo del valor de $p_{fl.}$ puede realizarse sobre la base de la ecuación [9.110], pero suponiendo que tanto σ_t como σ_r son del mismo signo (positivas), en cuyo caso la ecuación se transforma en:

$$\sigma_t - \sigma_r = r\,\frac{d\sigma_r}{dr}. \qquad [9.207]$$

Para determinar las tensiones σ_t y σ_r en un punto cualquiera para el estado de plastificación total, necesitamos una ecuación complementaria.

Si admitimos la constancia de $\tau_{fl.}$ en cada punto de la sección del tubo, aunque continúe el escurrimiento plástico, podemos escribir:

$$\tau_{fl.} = \frac{1}{2}\left(\sigma_t - \sigma_r\right) = \text{Cte.} \qquad [9.208]$$

por ser σ_t y σ_r tensiones principales.

Combinando la [9.208] con [9.207] obtenemos:

$$\frac{2\,\tau_{fl.}}{r} = \frac{d\sigma_r}{dr}, \qquad [9.209]$$

o también:

$$d\sigma_r = 2\,\tau_{fl.}\frac{dr}{r}, \qquad [9.210]$$

que integrada nos da:

$$\sigma_r = 2\,\tau_{fl.}\ln r + C. \qquad [9.211]$$

Es evidente que, tanto en el período elástico como en el plástico, para $r = r_e$ resulta $\sigma_r = 0$.

En consecuencia, de la [9.211]:

$$C = -\,2\,\tau_{fl.}\ln r_e \qquad [9.212]$$

y finalmente:

$$\sigma_r = 2\,\tau_{fl.}\ln\frac{r}{r_e} \qquad [9.213]$$

que nos da la ley de variación de σ_r con la distancia al centro. Para $r = r_i$, o sea, para la superficie interior del tubo resulta:

$$\sigma_r = -\,p_{fl.}, \qquad [9.214]$$

de donde:

$$p_{fl.} = -\,2\,\tau_{fl.}\ln\frac{r_i}{r_e} \qquad [9.215]$$

Calcularemos a continuación las tensiones circunferenciales. Para ello reemplacemos en [9.208] σ_r por su valor de la [9.213];

$$\tau_{fl.} = \frac{1}{2}\left[\sigma_t - 2\,\tau_{fl}\ln\left(\frac{r}{r_e}\right)\right] \qquad [9.216]$$

de donde:

$$\sigma_t = 2\,\tau_{fl.}\left[1 + \ln\left(\frac{r}{r_e}\right)\right]. \qquad [9.217]$$

En el borde exterior, donde $r = r_e$ resulta:

$$\ln\frac{r}{r_e} = \ln 1 = 0, \qquad [9.218]$$

y

$$\sigma_t = 2\,\tau_{fl.} \qquad [9.219]$$

Para dicho punto resulta:

$$\sigma_r = 0. \qquad [9.220]$$

En el borde interior, para $r = r_i$, las expresiones de ambas tensiones son:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= 2\,\tau_{fl.}\left(1 + \ln\frac{r_i}{r_e}\right) \\ \sigma_r &= 2\,\tau_{fl.}\ln\frac{r_i}{r_e} \end{aligned}\right\} \qquad [9.221]$$

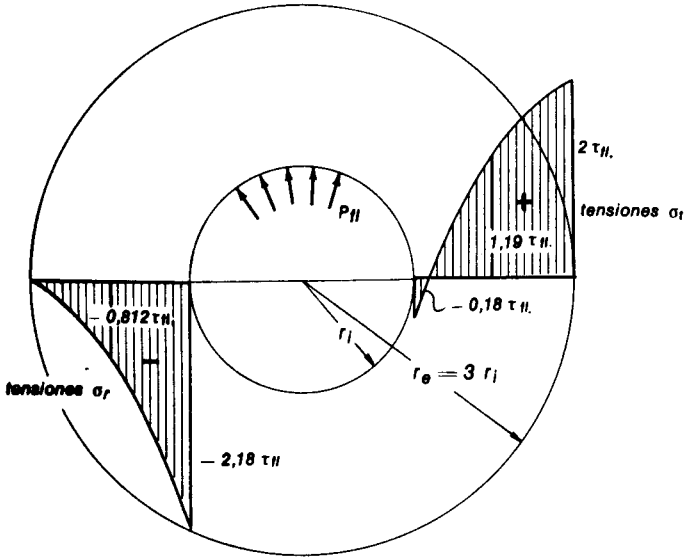


Fig. 9.24

En la figura 9.24 hemos representado, a título ilustrativo, los diagramas de distribución de las tensiones σ_r y σ_t, para plastificación total, de un tubo de pared gruesa, cuyos radios están en la siguiente relación:

$$r_e = 3\,r_i. \qquad [9.222]$$

10. SOLICITACIÓN POR TORSIÓN

10.1. Planteo del problema

Una sección está solicitada por *torsión* cuando, al reducir a su baricentro los sistemas de fuerzas actuantes sobre el sólido prismático a uno u otro lado de la sección, sólo se obtiene un par que yace en el plano de la sección como se observa en figura 10.1.

En este caso, las condiciones de equivalencia [8.6] y [8.7] resultan ser las siguientes:

$$\left.\begin{array}{ll} \int_F \sigma_x \, dF = 0; & \int_F (\tau_{xy}\, z + \tau_{xz}\, y)\, dF = M_t \\ \int_F \tau_{xy}\, dF = 0; & \int_F \sigma_x\, z dF = 0 \\ \int_F \tau_{xz}\, dF = 0; & \int_F \sigma_x y dF = 0 \end{array}\right\} \qquad [10.1]$$

La solución rigurosa del problema de la torsión se debe a *Saint Venant*[1], quien estudió la torsión de una barra de sección rectangular mediante el establecimiento de la correspondiente función de tensión de Airy. Esta forma de encarar la resolución del problema pertenece al dominio de la Teoría Matemática de la Elasticidad y escapa a los alcances de la presente obra. No obstante ello, volveremos sobre el tema más adelante, al ocuparnos de las secciones llenas no circulares.

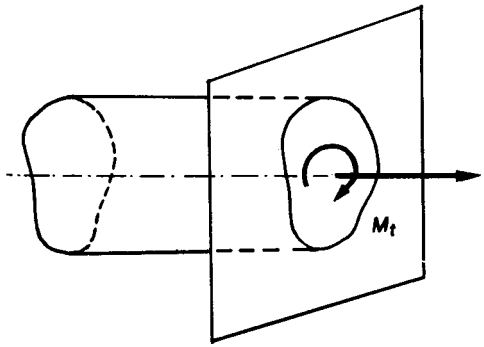


Fig. 10.1

Desarrollaremos primeramente las soluciones correspondientes a secciones para las cuales es válida la hipótesis de *Coulomb*, a saber:

a) sección circular llena,

b) sección circular hueca,

y, además, las secciones tubulares de pared delgada, simple y múltiplemente

[1] *Comptes Rendues*, nov. 20 – 1843.

conexas, para ocuparnos luego de otro tipo de secciones y finalmente dar una breve reseña de dos analogías aplicables a la solución de problemas de torsión: *la analogía de la membrana* y la *analogía hidrodinámica*. Estas analogías resultan de mucho interés para el estudio de la torsión en piezas de formas cualesquiera, que no responden a ninguna de las clásicas comunes.

10 . 2 . La hipótesis de Coulomb

La hipótesis de Coulomb, verificada experimentalmente para las secciones circulares llenas y huecas, establece que:

a) las secciones normales al eje de la pieza permanecen planas y paralelas a sí mismas, luego de la deformación por torsión;

b) luego de la deformación, las secciones mantienen su forma.

Como corolario de lo anterior resulta que al mantener su forma las secciones (que experimentan rotaciones relativas las unas respecto de las otras), las rectas trazadas sobre ellas continúan siendo rectas y los ángulos mantienen su medida.

Finalmente al girar las secciones manteniéndose planas, las generatrices rectilíneas de la superficie lateral del cilindro se transforman en hélices de paso muy grande.

Analizaremos a continuación las ecuaciones [10.1]. Admitamos por un momento la existencia de tensiones normales, o sea:

$$\sigma_x \neq 0 . \qquad [10.2]$$

De ser ello cierto, la distribución de σ_x sobre la sección no puede ser uniforme porque en tal caso, si:

$$\sigma_x = \text{Cte.} \neq 0 , \qquad [10.3]$$

resultaría:

$$\int \sigma_x \, dF \neq 0 , \qquad [10.4]$$

y no se satisfaría la primera de las [10.1]. Para que ello ocurra σ_x debería ser variable, su distribución simétrica con respecto al centro de la sección y, además, tendría que haber cambio de signo de las tensiones. Pero, de ser así, en virtud de la ley de Hooke, las deformaciones específicas ϵ no serían constantes para los distintos puntos de la sección. La misma se alabearía y no cumpliría con la primera premisa de la hipótesis de Coulomb. Por ello debe necesariamente cumplirse:

$$\sigma_x = 0 . \qquad [10.5]$$

Con ello, la primera, quinta y sexta de las ecuaciones [10.1] resultan idénticamente nulas.

En consecuencia, sólo resta por considerar las siguientes igualdades, que son las que resuelven el problema de la torsión en piezas de sección circular:

$$\left.\begin{aligned} &\int_F \tau_{xy} \, dF = 0 \\ &\int_F \tau_{xz} \, dF = 0 \\ &\int_F (\tau_{xy} \cdot z + \tau_{xz} \cdot y) dF = M_t \end{aligned}\right\} \qquad [10.6]$$

10 . 3 . Torsión de la sección circular llena

Sea figura 10.2 una sección circular de un sólido prismático de radio R solicitado por un par torsor M_t. Como consecuencia de éste, hemos visto que en la sección sólo se originan tensiones tangenciales, las que deben satisfacer las ecuaciones [10.6]. Para que ello ocurra, es necesario que exista una distribución antimétrica de las tensiones a lo largo de los diámetros de la sección.

Admitamos por un momento como posible, una distribución de tensiones a lo largo de un diámetro, como la que muestra la figura 10.3 *a*.

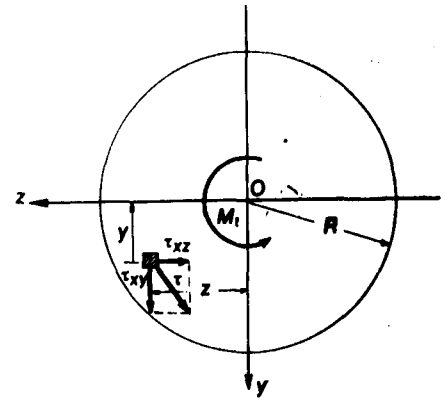


Fig. 10.2

De acuerdo con esta hipótesis sobre la cara superior del cubo infinitésimo en correspondencia con el punto B del diámetro considerado, actúa una tensión τ, de dirección oblicua con respecto al radio de la sección. Dicha tensión puede descomponerse en τ_{xy} normal al radio y τ_{xz} dirigida según este último. Pero, de acuerdo con el teorema de *Cauchy*, de existir esta tensión, daría origen a una tensión τ_{zx} en la cara externa del cubo, coincidente con el plano tangente al cilindro según la generatriz que pasa por B, debiendo ser $|\tau_{zx}| = |\tau_{xz}|$. Ahora bien, como por hipótesis la superficie exterior del cilindro se encuentra libre de cargas exteriores, el equilibrio del sistema exige que:

$$\tau_{zx} = 0, \qquad [10.7]$$

y como consecuencia:

$$\tau_{xz} = 0, \qquad [10.8]$$

de donde:

$$\tau = \tau_{xy}. \qquad [10.9]$$

Es decir que, para el punto B la tensión tangencial debida al par torsor debe ser normal al radio.

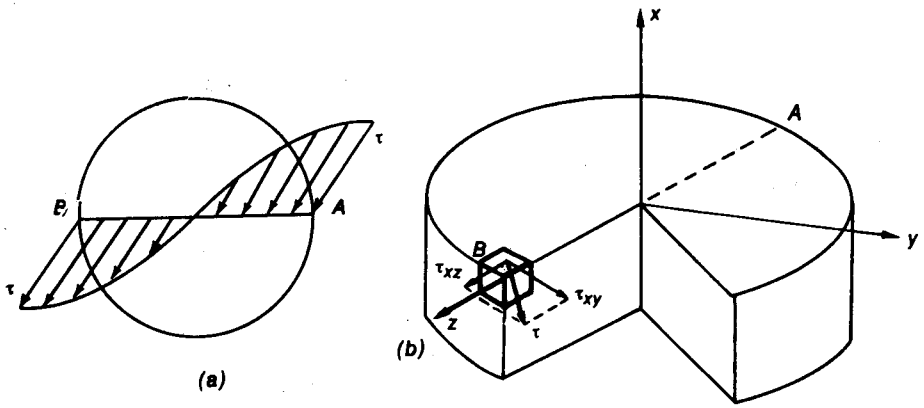


Fig. 10.3

Al no existir en B componente de τ dirigida según el radio, no puede existir tensión tangencial en la cara del cubo infinitésimo paralela a la exterior, y en consecuencia, en el elemento inmediato y en todos los sucesivos, las tensiones tangenciales necesariamente deben ser normales al radio. Esta condición podemos establecerla también sobre la base de las siguientes consideraciones:

De existir a lo largo del radio tensiones τ_{xz}, los elementos infinitésimos sobre los que actúan sufrirían distorsiones:

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \qquad [10.10]$$

y dado que, por la condición de antimetría, las tensiones τ_{xz} deberían anularse en el centro de la sección, para luego cambiar de signo, ello conduciría (fig. 10.4) a un alabeo de la sección, lo que es contrario a la hipótesis de *Coulomb*. En consecuencia, necesariamente las tensiones τ_{xz} deben ser nulas.

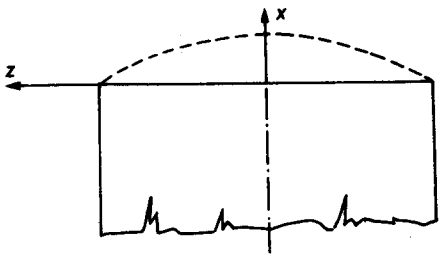


Fig. 10.4

De lo visto, llegamos a que para la sección circular llena sujeta a torsión:

a) sólo existen tensiones tangenciales;

b) su distribución a lo largo de un diámetro es antimétrica;

c) su dirección es normal al radio.

10 . 4 . Relación entre M_t y las tensiones tangenciales

Supongamos dos secciones normales de una barra cilíndrica sujeta a torsión, separadas de una distancia unitaria (fig. 10.5). En ellas actúan sendos pares

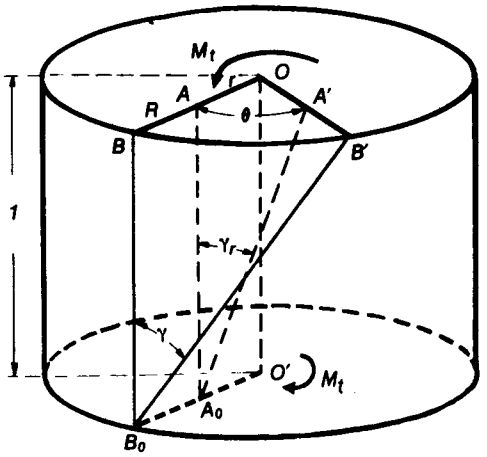


Fig. 10.5

torsores M_t, opuestos. Por su efecto, las secciones experimentarán rotaciones infinitésimas relativas, manteniéndose planas y paralelas entre sí. Supongamos fija la sección inferior, con lo que la rotación relativa entre ambas secciones se transforma en la rotación absoluta de la sección superior, que designaremos con θ y cuya medida denominaremos *ángulo específico de torsión*.

Como consecuencia del giro de la sección superior, un punto A situado a una distancia r del centro de la misma, pasará a ocupar la posición A', y otro punto B del contorno de radio R lo hará a la B'. Simultáneamente, la fibra AA_0 pasará a la posición A_0A' generando el ángulo infinitésimo γ_r y lo mismo ocurrirá con la generatríz exterior BB_0 que girará de γ, *ángulo de distorsión* de la sección. Por tratarse de giros y corrimientos infinitésimos podemos escribir:

$$\widehat{AA'} = r\theta \cong \gamma_r \cdot 1\,, \qquad [10.11]$$

de donde:

$$\theta = \frac{\gamma_r}{r}. \qquad [10.12]$$

Análogamente tenemos:

$$\widehat{BB'} = R\theta \cong \gamma \cdot 1\,, \qquad [10.13]$$

o también:

$$\theta = \frac{\gamma}{R}. \qquad [10.14]$$

Comparando [10.12] con [10.14]:

$$\frac{\gamma_r}{\gamma} = \frac{r}{R}, \qquad [10.15]$$

y recordando que:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \qquad [10.16]$$

reemplazando en [10.15] tenemos:

$$\frac{\tau_r}{\tau_{\text{máx.}}} = \frac{r}{R} \qquad [10.17]$$

de donde:

$$\boxed{\tau_r = \frac{r}{R}\,\tau_{\text{máx.}}} \qquad [10.18]$$

expresión que nos dice que la variación de τ a lo largo del radio es lineal en función de la distancia al centro de donde $\tau_{\text{máx.}}$ es la tensión tangencial en el borde de la sección. La distribución resulta ser la que muestra la figura 10.6.

Consideremos ahora un elemento de superficie (fig. 10.7) dF qe una sección circular, ubicado a una distancia r del centro y sea τ_r la correspondiente tensión tangencial. Como consecuencia de la linealidad de las tensiones, si $\bar{\tau}$

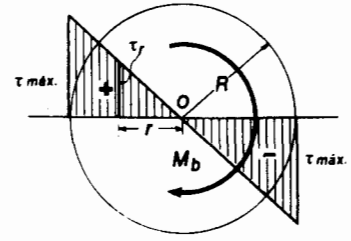


Fig. 10.6

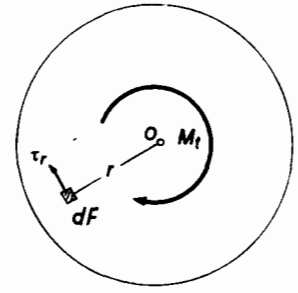


Fig. 10.7

es la tensión que corresponde a un elemento de superficie situado a una distancia unitaria, debe tenerse:

$$\tau_r = r\,\bar{\tau}\,. \qquad [10.19]$$

Por otra parte, si la tercera de las ecuaciones [10.6] la expresamos en función de la tensión resultante τ_r que actúa sobre el elemento de superficie, la misma se transformará en:

$$\int_F \tau_r\, r\, dF = M_t\,, \qquad [10.20]$$

y reemplazando τ_r por su valor de la [10.19]:

$$M_t = \bar{\tau} \int_F r^2\, dF, \qquad [10.21]$$

o también:

$$M_t = \bar{\tau} J_p\,, \qquad [10.22]$$

donde J_p es el momento de inercia polar del área de sección respecto de su centro. Finalmente, reemplazando en [10.22] $\bar{\tau}$ por su valor tomado de la [10.19]:

$$\boxed{M_t = \frac{\tau_r}{r} J_p\,,} \qquad [10.23]$$

y finalmente:

$$\tau_r = \frac{M_t}{J_p} r \qquad [10.24]$$

y la tensión máxima, que corresponde a $r = R$:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{M_t}{J_p} R. \qquad [10.25]$$

Si $D = 2R$ es el diámetro de la sección, resulta:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}, \qquad [10.26]$$

de donde, reemplazando, llegamos a:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{16 M_t}{\pi D^3}, \qquad [10.27]$$

que es la expresión que vincula al par torsor con las tensiones tangenciales máximas que ocurren en la sección y que permite, tanto verificar si en una sección dada las tensiones quedan por debajo de los valores admisibles, como dimensionarla para condiciones de seguridad dadas.

En el primer caso debe tenerse:

$$\frac{16 M_t}{\pi D^3} \leqslant \tau_{\text{adm.}}, \qquad [10.28]$$

y en el segundo:

$$D \geqslant \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi \tau_{\text{adm.}}}}. \qquad [10.29]$$

10 . 5 . Ángulo de torsión

En determinados problemas, interesa conocer el valor de la rotación relativa de las secciones extremas de una barra circular sujeta a torsión.

Tal rotación relativa se denomina *ángulo de torsión* y su expresión es, si llamamos θ al ángulo de torsión específica:

$$\Theta = \theta l, \qquad [10.30]$$

donde l es la distancia que separa las secciones consideradas.

Si, en la [10.14], reemplazamos γ por su expresión en función de $\tau_{\text{máx.}}$, resulta:

$$\theta = \frac{\tau_{\text{máx.}}}{RG}, \qquad [10.31]$$

y teniendo en cuenta la [10.25]:

$$\theta = \frac{M_t}{GJ_p}, \qquad [10.32]$$

de donde:

$$\Theta = \frac{M_t l}{GJ_p}. \qquad [10.33]$$

o también:

$$\Theta = \frac{32 M_t l}{\pi D^4 G}. \qquad [10.34]$$

y

$$\theta = \frac{32 M_t}{\pi D^4 G}. \qquad [10.35]$$

El producto GJ_p se denomina rigidez a la torsión de la sección y puede interpretarse como el valor del par torsor que origina un ángulo específico de torsión unitario, como surge de la [10.32] si en la misma se hace $\theta = 1$, resultando con ello:

$$M_t = GJ_p. \qquad [10.36]$$

10 . 6 . Tensiones principales

Sea figura 10.8 *a* un cubo elemental ubicado en el borde de una sección circular sujeta a torsión. De acuerdo con lo que hemos visto, en las caras superior e inferior existen tensiones τ_{xy}, que originan, conforme al teorema de Cauchy en las caras laterales las correspondientes tensiones τ_{yx}, encontrándose libres de tensiones las caras anterior y posterior (figura 10.8 *b*).

Esta situación se repite para todos los puntos de la superficie del cilindro y también, pero con valores de τ_{xy} decrecientes para los puntos ubicados sobre cilindros interiores concéntricos. Es decir, que todos los puntos del cilindro se encuentran sujetos al estado plano de tensión que hemos denominado de resbalamiento simple y que se caracteriza por:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_z = 0 \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \end{aligned}\right\} \qquad [10.37]$$

Para este estado de tensión, las tensiones principales resultan iguales en valor absoluto y de signo contrario, e iguales al valor común de las tensiones tangenciales, o sea:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = |\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|, \qquad [10.38]$$

y actúan en planos a 45° con los planos de las secciones. De ahí que, para un cilindro sujeto a torsión, las trayectorias de las tensiones principales o líneas isostáticas[1] resulten ser hélices inclinados a 45° con respecto a las generatrices del cilindro (figura 10.8 c). Existen en realidad dos familias de hélices, ortogonales entre sí: una que corresponde a las isostáticas de tracción y otra a las de compresión.

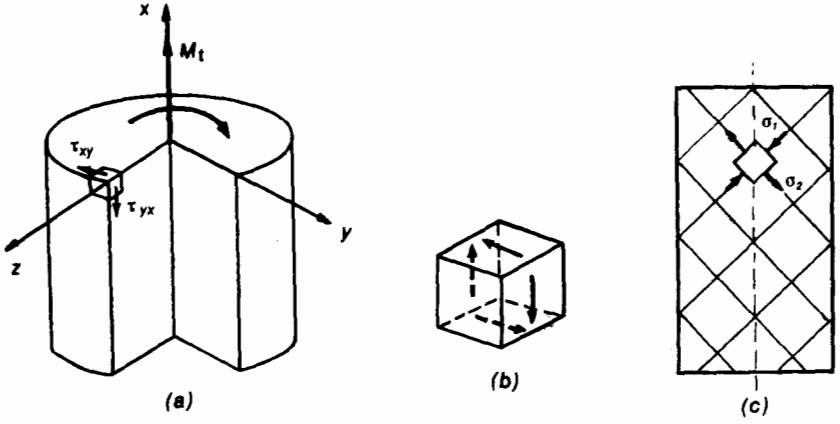


Fig. 10.8

La circunstancia que las isostáticas son hélices, explica el porqué, para materiales frágiles, en la rotura las superficies de fractura resultan ser superficies helicoidales.

10 . 7 . La sección anular

El análisis de la sección circular anular sujeta a torsión, se efectúa partiendo de las fórmulas deducidas para la sección circular llena. En efecto, si suponemos la sección anular de radios extremos R_1 y R_2 de figura 10.9 la expresión [10.20] es aplicable a la misma, con la única condición de limitar la variación de r entre

[1] Lugares geométricos de los puntos de iguales tensiones principales.

R_1 y R_2. En consecuencia, la integral de [10.21] representa la diferencia de los momentos de inercia polares de los círculos R_2 y R_1, es decir, el momento de inercia polar J_{p_0} de la corona circular. De acuerdo con ello resulta, si D_1 y D_2 son los correspondientes diámetros:

$$J_{p_0} = \frac{\pi D_2^4}{32} - \frac{\pi D_1^4}{32} = \frac{\pi}{32}\left(D_2^4 - D_1^4\right), \qquad [10.39]$$

valor que reemplazado en [10.25] conduce a:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{32 M_t}{\pi (D_2^4 - D_1^4)} R, \qquad [10.40]$$

o también, teniendo en cuenta que en este caso $R = D_2/2$:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{16 M_t}{\pi D_2^3 \left(1 - \dfrac{D_1^4}{D_2^4}\right)}. \qquad [10.41]$$

Para las secciones anulares, las expresiones del ángulo total y específico de torsión, resultan ser, respectivamente:

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= \frac{32 M_t l}{\pi G (D_2^4 - D_1^4)} \\ \theta &= \frac{32 M_t}{\pi G (D_2^4 - D_1^4)} \end{aligned}\right\} \qquad [10.42]$$

10 . 8 . Comparación entre la sección anular y la circular llena

Observando el diagrama de tensiones de figura 10.6 vemos que éstas, para los puntos cercanos al centro, son de valor reducido por lo que su colaboración para resistir al par torsor es escasa. En cambio, en la sección anular, figura 10.9, las tensiones varían entre dos límites τ_e y τ_i que si el espesor no es muy grande, difieren poco. De ahí que la sección anular conduzca a un mayor aprovechamiento del material, y en consecuencia, a una solución más económica.

Estableceremos a continuación la relación de superficies entre una sección

llena y una anular, solicitadas por un mismo par torsor y para una misma tensión admisible.

Para la sección circular llena debe ser:

$$\tau_{\text{máx.}} = \tau_{\text{adm.}} = \frac{16\,M_t}{\pi D^3}\,, \qquad [10.43]$$

y para la anular equivalente:

$$\tau_{\text{máx.}} = \tau_{\text{adm.}} = \frac{16\,M_t}{\pi D_2^3\left(1-\dfrac{D_1^4}{D_2^4}\right)} \qquad [10.44]$$

Igualando ambas expresiones:

$$\frac{16\,M_t}{\pi D^3} = \frac{16\,M_t}{\pi D_2^3\left(1-\dfrac{D_1^4}{D_2^4}\right)}\,, \qquad [10.45]$$

de donde:

$$D^3 = D_2^3\left(1-\frac{D_1^4}{D_2^4}\right), \qquad [10.46]$$

y

$$D = D_2\sqrt[3]{1-\frac{D_1^4}{D_2^4}} \qquad [10.47]$$

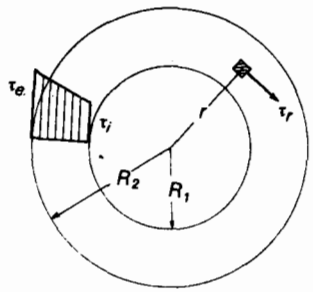


Fig. 10.9

Estableceremos a continuación la relación volúmenes por unidad de longitud, que resulta ser igual a la relación de áreas entre ambas secciones y que constituye un índice de la economía relativa que implica la sección anular sobre la llena. Ello también se traduce en una reducción de peso, de mucha importancia en determinados casos.

El área de la sección llena vale:

$$F_l = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi D_2^2}{4}\left(1-\frac{D_1^4}{D_2^4}\right)^{2/3}, \qquad [10.48]$$

y la correspondiente a la anular:

$$F_a = \frac{\pi}{4}(D_2^2 - D_1^2). \qquad [10.49]$$

Llamando k a la relación entre ambas:

$$k = \frac{F_l}{F_a} = \frac{D_2^2\left(1-\dfrac{D_1^4}{D_2^4}\right)^{2/3}}{D_2^2 - D_1^2} \qquad [10.50]$$

o también:

$$k = \frac{\left(1-\dfrac{D_1^4}{D_2^4}\right)^{2/3}}{1-\dfrac{D_1^2}{D_2^2}} \qquad [10.51]$$

Haciendo $\alpha = D_1/D_2$ y luego de algunas transformaciones, llegamos finalmente a la expresión:

$$k = \sqrt[3]{\frac{(1+\alpha^2)^2}{1-\alpha^2}}\,, \qquad [10.52]$$

donde como es fácil de observar es siempre $k > 1$.

Consideremos a título de ejemplo una sección anular tal que $D_2 = 2\,D_1$, o sea, $\alpha = 0{,}50$. Introduciendo este valor en la [10.52] obtenemos:

$$k = 1{,}28, \qquad [10.53]$$

es decir, la pieza de sección maciza es, en este caso, un 28% más pesada que la de sección anular equivalente.

Interesa también en ciertos casos conocer la relación de rigideces entre la correspondiente a la sección llena y la de la anular. Si llamamos k_1 a dicha relación obtenemos:

$$k_1 = \frac{G\,J_{pl}}{G\,J_{p_a}} = \frac{J_{pl}}{J_{p_a}}, \qquad [10.54]$$

de donde:

$$k_1 = \frac{D^4}{D_2^4 - D_1^4}\,, \qquad [10.55]$$

y como de la [10.47] para secciones equivalentes teníamos:

$$D = D_2 \sqrt[3]{1 - \frac{D_1^4}{D_2^4}}, \qquad [10.56]$$

reemplazando y simplificando:

$$k_1 = \sqrt[3]{1 - \frac{D_1^4}{D_2^4}} = \sqrt[3]{1 - \alpha^4}. \qquad [10.57]$$

Como necesariamente es $\alpha < 1$, resulta siempre $k_1 < 1$, es decir, que para secciones equivalentes, la rigidez de la anular es mayor que la de la llena. Para el ejemplo anterior, con $\alpha = 0{,}50$ tenemos:

$$k_1 = 0{,}975, \qquad [10.58]$$

La sección anular es pues, en este caso aproximadamente un 2,5% más rígida (menor ángulo de torsión) que la maciza equivalente.

10.9. Sección tubular de pared delgada simplemente conexa

Experimentalmente se ha comprobado que, para aquellas secciones huecas, de forma cualquiera, en las cuales el espesor de pared es reducido en relación con las restantes dimensiones de la sección, la hipótesis enunciada por Coulomb es válida. Para tales secciones se cumple, entonces, la condición de la conservación de las secciones planas y el mantenimiento de su forma.

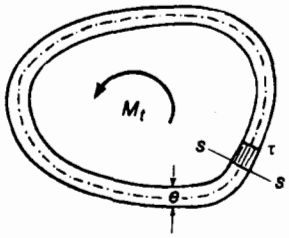


Fig. 10.10

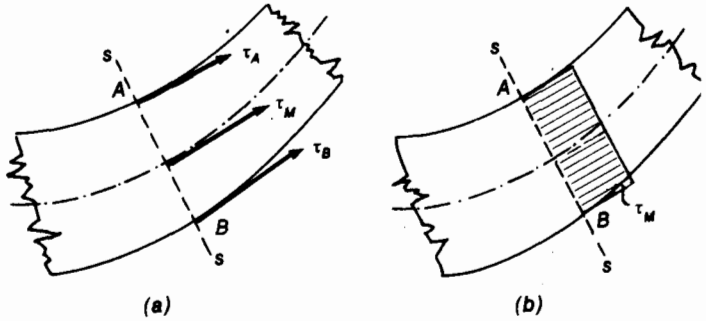


Fig. 10.11

Supongamos, fig. 10.10, una sección tubular de forma arbitraria pero de paredes muy delgadas con relación a la menor dimensión de la misma, sujeta a los efectos de un par M_t.

Admitamos, además, que el espesor e de la pared del tubo varía en forma continua.

Si consideramos un corte s–s de la pared del tubo, cuyo entorno hemos ampliado en la figura 10.11 *a*, tenemos que, en realidad, la tensión τ variará a través del espesor de la pared, tanto en intensidad como en dirección. En efecto, si A es un punto de la superficie interior y B otro de la exterior, es evidente que, al encontrarse este último más alejado del centro de rotación de la sección, su distorsión será mayor que la de A y, en consecuencia, también resultará $|\tau_B| > |\tau_A|$.

Por otra parte, de acuerdo con el teorema de Cauchy, tanto en A como en B, la tensión tangencial debe necesariamente estar orientada según la correspondiente tangente al contorno de la sección. En consecuencia, a lo largo de $\overline{AB}$, la tensión variará, tanto en dirección como en intensidad, según una ley que desconocemos y de casi imposible determinación. No obstante ello, y a los efectos prácticos, dado el reducido espesor e de la pared, y la poca diferencia entre las direcciones de τ_A y τ_B, podemos establecer, sin mayor error, lo siguiente:

a) que la tensión tangencial τ se mantiene constante en intensidad y dirección a lo largo del espesor de la pared; y

b) que la dirección de τ coincide con la de la tangente al contorno medio de la sección, en el corte considerado.

Es decir, que podemos admitir la distribución uniforme de τ que muestra la figura 10.11 *b*.

Sea ahora la sección de figura 10.12. Sobre un elemento de su superficie de espesor e, longitud ds y área:

$$dF = e\,ds, \qquad [10.59]$$

actúa una fuerza elemental:

$$dT = \tau e\,ds, \qquad [10.60]$$

cuya dirección coincide con la de τ, o sea, con la tangente al contorno medio en el punto considerado.

En consecuencia, si elegimos un punto cualquiera O del plano de la sección y llamamos r la distancia al mismo de dT, la ecuación [10.20] que establece la equivalencia del par torsor con el momento de las fuerzas internas adquiere, en este caso, la forma:

$$M_t = \int_F r\,dT = \int_F r e \tau\,ds. \qquad [10.61]$$

A los efectos de poder efectuar la integración de la [10.61] imaginemos cortada la sección por dos planos verticales *1–1* y *2–2* normales cada uno de ellos al contorno medio, y aislemos una de las partes en que ha resultado dividido el tubo, de la que a la vez consideraremos sólo el trozo delimitado por dos secciones separadas de una longitud unitaria (fig. 10.13).

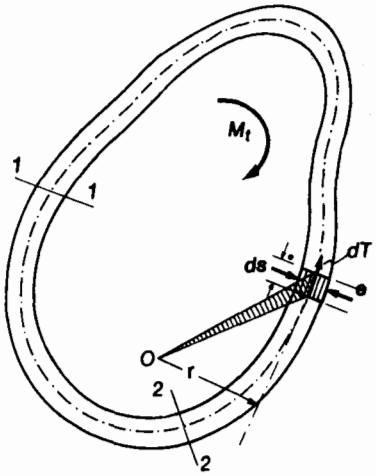


Fig. 10.12

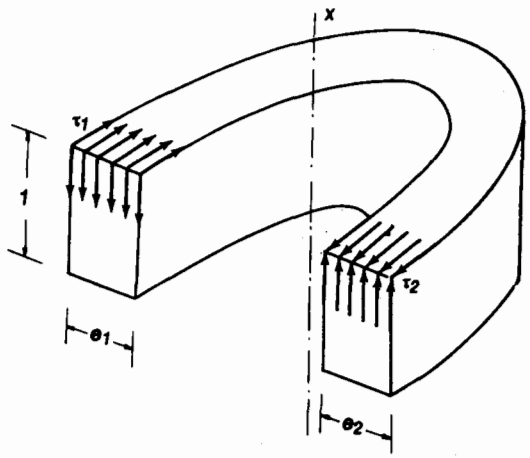


Fig. 10.13

Sobre cada una de las caras verticales actuarán tensiones tangenciales uniformemente repartidas que, de acuerdo con el teorema de Cauchy, resultan ser iguales a los que en correspondencia con cada corte aparecen en el plano de la sección. Dichas tensiones dan origen a dos fuerzas elementales verticales, de intensidad $e_1 \cdot \tau_1 \cdot 1$ y $e_2 \cdot \tau_2 \cdot 1$ respectivamente. Ahora bien, como el elemento de tubo que estamos considerando pertenece a un sólido en equilibrio, debe, a su vez, estar también en equilibrio, lo que exige la nulidad de las proyecciones de las fuerzas que actúan sobre cualquier eje.

En consecuencia, proyectando sobre un eje x–x paralelo al eje del tubo debe tenerse:

$$\tau_1 e_1 - \tau_2 e_2 = 0\,, \qquad [10.62]$$

o también

$$\tau_1 e_1 = \tau_2 e_2\,, \qquad [10.63]$$

y como los cortes *1–1* y *2–2* fueron elegidos arbitrariamente, concluimos que:

$$\tau e = \text{Cte.} \qquad [10.64]$$

Esta condición hace que la [10.61] se transforme en:

$$M_t = \tau e \int_F r\,ds\,, \qquad [10.65]$$

pero de figura 10.12:

$$r\,ds = 2\,d\omega\,, \qquad [10.66]$$

donde $d\omega$ es el área del triángulo elemental de base ds y cuyo vértice coincide con el centro O de momentos.

En consecuencia:

$$M_t = 2\tau e \int_F d\omega = 2\tau e\,\Omega\,, \qquad [10.67]$$

en donde Ω representa el área de la superficie delimitada por el *contorno medio* de la sección. En consecuencia:

$$\tau = \frac{M_t}{2\,\Omega\,e}\,. \qquad [10.68]$$

Es evidente que en la [10.68] τ será máxima cuando e sea mínima. Esta expresión permite tanto verificar una sección de pared delgada como proyectar su espesor e, supuesto constante. En ambos casos debe resultar $\tau \leqslant \tau_{\text{adm.}}$.

Otra magnitud que interesa conocer es el valor del ángulo específico de torsión θ. En el caso que nos ocupa, la determinación del valor de θ la efectuaremos igualando los trabajos interno y externo de deformación. El primero corresponde al trabajo del par torsor M_t. Si sobre un par de ejes coordenados llevamos como ordenadas los valores crecientes del par torsor y en abscisas los correspondientes ángulos específicos de torsión, el diagrama resultante, para valores de $\tau_{\text{max.}}$ comprendidos dentro del período elástico del material, es el que muestra la figura 10.14, es decir, una recta que pasa por el origen de coordenadas, por cuanto existe una relación lineal entre M_t y θ.

Para un determinado valor de M_t al que corresponde un determinado ángulo específico de torsión θ, a un incremento dM_t corresponde una variación $d\theta$ del ángulo específico de torsión, y el trabajo desarrollado, salvo infinitésimos de orden superior que despreciamos, será por unidad de volumen:

$$du = M_t\,d\theta\,, \qquad [10.69]$$

y cuando el par torsor crece de cero a M_t:

$$u = \int_0^\theta M_t\,d\theta\,. \qquad [10.70]$$

La expresión [10.70] representa el área encerrada por el diagrama (M_t, θ), el eje de abscisas y el valor de M_t alcanzando:

$$u_e = \frac{1}{2} M_t \theta . \qquad [10.71]$$

El trabajo interno de deformación es, en este caso, el trabajo desarrollado por las tensiones τ. Teniendo en cuenta que dentro de los límites del período elástico la variación de τ responde a la ley de *Hooke*, la expresión del corres-

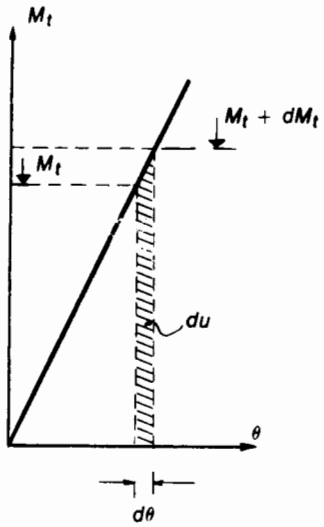


Fig. 10.14

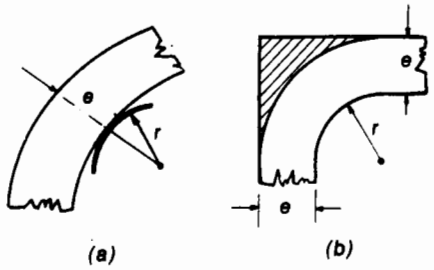


Fig. 10.15

pondiente trabajo de deformación es semejante a la [7.7] relativa al trabajo de deformación en solicitación axil, de modo que tenemos:

$$u_i = \frac{1}{2} \int_V \frac{\tau^2 \, dV}{G} . \qquad [10.72]$$

En consecuencia, como debe ser:

$$u_e = u_i , \qquad [10.73]$$

resulta:

$$\frac{M_t}{2} \theta = \frac{1}{2} \int_V \frac{\tau^2 \, dV}{G} . \qquad [10.74]$$

Pero en el caso que nos ocupa:

$$dV = 1 \cdot ds \cdot e , \qquad [10.75]$$

de donde:

$$\frac{M_t}{2} \theta = \frac{1}{2} \int_S \frac{\tau^2 \, ds \, e}{G} \qquad [10.76]$$

Reemplazando τ^2 por su igual de [10.68]:

$$\frac{M_t}{2} \theta = \frac{1}{2G} \int_S \frac{M_t^2 \, e}{4 \Omega^2 e^2} ds , \qquad [10.77]$$

y simplificando:

$$\theta = \frac{M_t}{4 G \Omega^2} \int_S \frac{ds}{e} . \qquad [10.78]$$

El valor de la integral puede calcularse con suficiente aproximación reemplazándola por una sumatoria, ya que, en general no se conoce la ley de variación e en función de s:

$$\theta = \frac{M_t}{4 G \Omega^2} \sum_1^n \frac{\Delta s}{e_m} , \qquad [10.79]$$

para cuya evaluación bastará dividir el perímetro medio en elementos Δs y considerar para cada uno de ellos su espesor medio e_m. Si hacemos Δs = Cte., la [10.79] se transforma en:

$$\theta = \frac{M_t \Delta s}{4 G \Omega^2} \sum_1^n \frac{1}{e_m} . \qquad [10.80]$$

Finalmente, cuando se trata de una sección de paredes de espesor e constante, de la [10.78] resulta:

$$\theta = \frac{M_t \, s}{4 G \Omega^2 e} . \qquad [10.81]$$

donde s es la longitud del perímetro medio de la sección

La fórmula [10.78] es válida cuando el radio de curvatura r es mayor que el espesor e en el punto considerado (fig. 10.15 *a*). Cuando ello no ocurre, no es admisible una distribución uniforme de τ en el espesor de la pared, por

cuanto dicha tensión puede alcanzar valores considerables en el borde interno de la misma para radios de curvatura pequeños, tendiendo a los valores infinitos cuando el radio tiende a cero, ya que estamos ante un problema de concentración de tensiones.

El coeficiente de la concentración de tensiones que ha de aplicarse a la tensión τ obtenida con la [10.68] puede expresarse con suficiente aproximación por:

$$k = \frac{\lambda}{\ln(1+\lambda)}, \qquad [10.82]$$

donde:

$$\lambda = \frac{e}{r}. \qquad [10.83]$$

Cuando la sección es de forma tal que, en alguna parte de ella, existen ángulos vivos salientes, se desprecia la parte rayada de figura 10.15 *b*, por cuanto prácticamente no afecta los resultados del cálculo.

10 . 10 . Sección tubular de pared delgada múltiplemente conexa

Designaremos como secciones tubulares múltiplemente conexas aquellas secciones cuyas paredes se encuentran vinculadas entre sí por tabiques intermedios de reducido espesor.

Sea, por ejemplo, la sección que muestra la figura 10.16, en la que existe

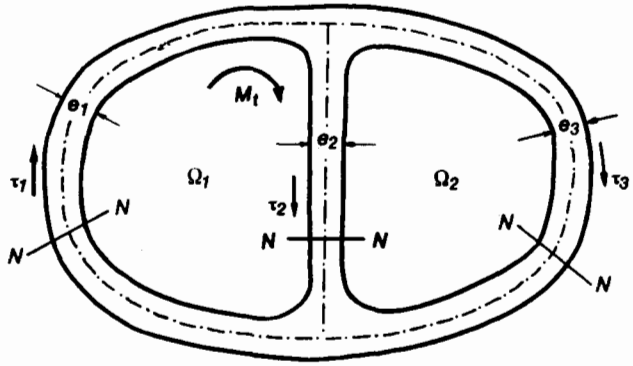


Fig. 10.16

un tabique intermedio, y que, en consecuencia, es doblemente conexa. Supondremos constantes los espesores de cada uno de los recintos y del tabique intermedio, que llamaremos, respectivamente e_1, e_2 y e_3.

Si τ_1, τ_2 y τ_3 son los correspondientes valores de las tensiones tangenciales, con los sentidos que aparecen en la figura, al efectuar cortes cualesquiera, como los *N–N*, y establecer el equilibrio de una de las partes, por proyección sobre un eje normal a la sección debemos tener:

$$\tau_1 e_1 = \tau_2 e_2 + \tau_3 e_3 , \quad (3) \qquad [10.84]$$

Por otra parte, si s_1, s_2 y s_3 son las longitudes medias de los recintos abiertos *A1B*, *B2A* y *B3A* respectivamente, y r la distancia a un punto arbitrario

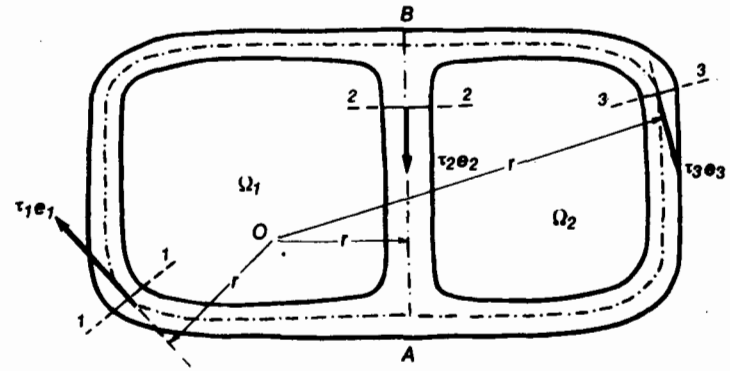


Fig. 10.17

O de las fuerzas elementales (fig. 10.17), tomando momentos respecto de *O* resulta:

$$M_t = \int_{s_1} r e_1 \tau_1 \, ds_1 + \int_{s_2} r e_2 \tau_2 \, ds_2 + \int_{s_3} r e_3 \tau_3 \, ds_3 , \qquad [10.85]$$

o también, por la constancia de $\tau_i e_i$:

$$M_t = \tau_1 e_1 \int_{s_1} r \, ds_1 + \tau_2 e_2 \int_{s_2} r \, ds_2 + \tau_3 e_3 \int_{s_3} r \, ds_3 . \qquad [10.86]$$

Pero, de la [10.84]:

$$\tau_2 e_2 = \tau_1 e_1 - \tau_3 e_3 \qquad [10.87]$$

valor que reemplazado en la [10.86] conduce a:

$$M_t = \tau_1 e_1 \int_{s_1} r\,ds_1 + \tau_1 e_1 \int_{s_2} r\,ds_2 - \tau_3 e_3 \int_{s_2} r\,ds_2 + \tau_3 e_3 \int_{s_3} r\,ds_3\,, \qquad [10.88]$$

o también:

$$M_t = \tau_1 e_1 \left(\int_{s_1} r\,ds_1 + \int_{s_2} r\,ds_2 \right) + \tau_3 e_3 \left(\int_{s_3} r\,ds_3 - \int_{s_2} r\,ds_2 \right). \qquad [10.89]$$

Recordando que $r\,ds_i$ representa el doble del área del triángulo elemental de base ds_i y altura r, si llamamos Ω_1 y Ω_2 a las áreas encerradas por los recintos medios cerrados $A1BA$ y $B3AB$ respectivamente, la [10.89] se transforma en:

$$M_t = 2\Omega_1 \tau_1 e_1 + 2\Omega_2 \tau_3 e_3\,, \qquad [10.90]$$

(1)

por lo que hemos llegado a una ecuación con dos incógnitas: τ_1 y τ_3.

Para obtener las ecuaciones adicionales que nos permitan resolver el problema, recurrimos a las [10.68] y [10.78], relativas a la sección simplemente conexa. Despejando e de la primera, resulta:

$$e = \frac{M_t}{2\Omega\tau}\,, \qquad [10.91]$$

valor que reemplazado en la segunda conduce a:

$$\theta = \frac{M_t}{4G\Omega^2} \int_s \frac{2\Omega\tau\,ds}{M_t}\,, \qquad [10.92]$$

o, también:

$$\theta = \frac{1}{2G\Omega} \int_s \tau\,ds, \qquad [10.93]$$

de donde:

$$\int_s \tau\,ds = 2G\Omega\theta\,. \qquad [10.94]$$

Esta relación es válida tanto para la sección simplemente conexa como para cada uno de los recintos cerrados parciales de las múltiplemente conexas, lo que es fácil de demostrar mediante la analogía de la membrana.

Aplicándola en nuestro caso a los recintos cerrados Ω_1 y Ω_2 y, teniendo en cuenta la constancia de las τ_i y sus correspondientes signos, llegamos finalmente a:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 s_1 + \tau_2 s_2 &= 2G\Omega_1\theta \\ \tau_3 s_3 - \tau_2 s_2 &= 2G\Omega_2\theta \end{aligned}\right\} \qquad [10.95]$$

(2)

Estas ecuaciones, junto con las [10.84] y [10.90] constituyen un sistema de cuatro ecuaciones, entre las incógnitas τ_1, τ_2, τ_3 y θ, que resuelven el problema.

Si se tratara de una sección con un número de conexiones mayor de dos, se dispondría siempre del número necesario de ecuaciones para su resolución, por cuanto, aparte de las ecuaciones [10.84] y [10.90] con mayor número de incógnitas, plantearíamos la [10.94] a cada recinto cerrado parcial, lo que nos daría las ecuaciones complementarias.

10 . 11 . La sección rectangular sujeta a torsión

Sea la sección de figura 10.18 *a*, de lados a y b, solicitada por un par torsor M_t, que origina tensiones tangenciales τ, variables de punto a punto en dirección e intensidad.

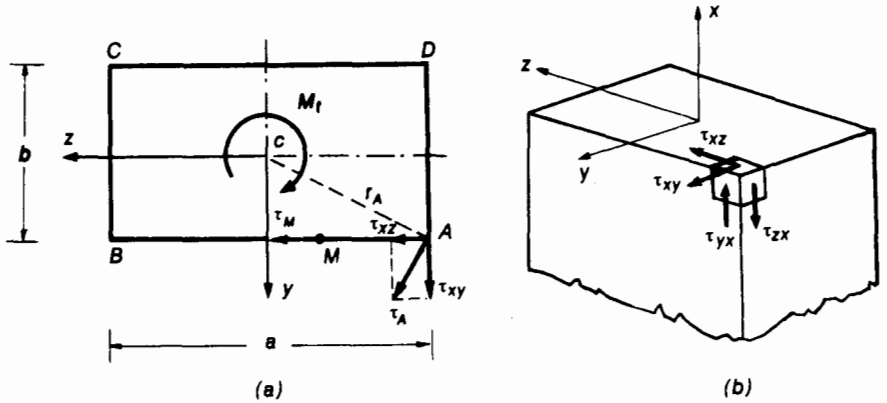


Fig. 10.18

Si la teoría desarrollada por Coulomb para la torsión de la sección circular fuera válida para la rectangular, en un punto tal como el A, vértice de la sección, debería existir una tensión τ_A, normal y proporcional al radio vector r_A, que admitiría dos componentes: τ_{xy} y τ_{xz}, normales respectivamente a los lados a y b. De acuerdo con el teorema de Cauchy, las mismas darían origen a tensiones τ_{yx} y τ_{zx} actuantes sobre las caras laterales del sólido, lo que es contrario a la hipótesis, ya que dichas caras se encuentran libres de toda forma de solicitación. De existir estas tensiones, no habría equilibrio. En consecuencia, τ debe ser nula en el punto A, ocurriendo lo mismo para los tres vértices restantes B, C, y D.

Para otro punto cualquiera del contorno, tal como el M por ejemplo, existe una tensión tangencial, que en virtud del teorema de Cauchy, debe estar dirigida según AB. En consecuencia, concluimos que, a lo largo de los lados de la sección rectangular, las tensiones están orientadas en la dirección de los

mismos, y crecen en valor absoluto de cero para un vértice hasta alcanzar un máximo, para decrecer hasta anularse en el vértice opuesto. Dicho valor máximo, por razones de simetría, se presenta en el centro del lado considerado.

Recordando que el valor del ángulo de distorsión tiene por expresión:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \qquad [10.96]$$

resulta que en los elementos de volumen infinitésimo correspondientes a los vértices y al centro de la sección,[1] la distorsión es nula, aumentando su valor en forma continua a lo largo de los lados y hacia el centro de la sección. Como consecuencia de ello, la sección no puede permanecer plana y se alabea, adoptando la forma que, aproximadamente, muestra la figura 10.19.

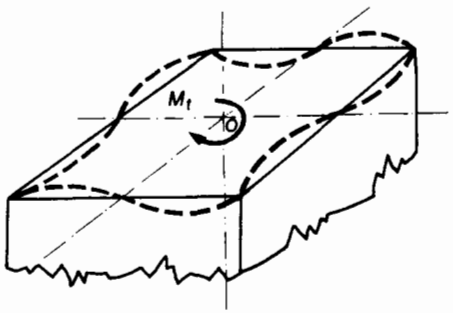


Fig. 10.19

Teniendo en cuenta que a lo largo de los ejes principales de inercia de la sección, las tensiones tangenciales son normales a ellos, por razones de simetría, resulta que no existen componentes de τ dirigidas según aquéllos.

Como consecuencia de ello, no se producen distorsiones en las direcciones de los ejes, que, luego de la deformación por torsión, se mantienen rectos y en el plano primitivo de la sección. De lo expuesto, deducimos que la hipótesis de Coulomb no es aplicable a la sección rectangular ni a otros tipos de secciones que difieran de la circular.

La solución exacta del problema de la torsión con carácter general y aplicable a cualquier tipo de sección, se debe a Saint Venant. Pertenece al dominio de la Teoría Matemática de la Elasticidad y por lo tanto, su desarrollo detallado escapa a los alcances de la presente obra.

La solución de Saint Venant, aplicada al caso de la sección rectangular, establece que la máxima tensión tangencial ocurre en el centro del lado mayor,[2] y su expresión es:

[1] Por coincidir el centro de la sección con la traza del eje de torsión, la tensión en el mismo es nula.

[2] Si la teoría de Coulomb fuera válida, de acuerdo con ella la máxima tensión se presentaría en el punto más alejado del centro.

$$\tau_{\text{máx.}} = \alpha \frac{M_t}{a\,b^2}, \qquad [10.97]$$

donde a y b son los lados de la sección y α un coeficiente cuyo valor en función de la relación $k = a/b$ figura en el cuadro VI. Según Saint Venant, el ángulo específico de torsión tiene por expresión:

$$\theta = \beta \frac{M_t}{G\,a\,b^3}. \qquad [10.98]$$

En el cuadro VI aparecen también los valores de β para distintas relaciones k.

Reemplazando en la [10.97] el valor de M_t dado por la [10.98] resulta:

$$\tau_{\text{máx.}} = \kappa\, G\,\theta\, b, \qquad [10.99]$$

donde $\kappa = \alpha/\beta$

CUADRO VI

k	1,00	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	4,00	6,00	8,00	10,00	∞
α	4,80	4,33	4,19	4,07	3,88	3,74	3,55	3,35	3,26	3,19	3,00
β	7,11	5,10	4,68	4,36	4,02	3,80	3,55	3,35	3,26	3,19	3,00

Puede observarse en el cuadro de valores que para $k \geqslant 4$ resulta $\alpha = \beta$ y en consecuencia:

$$\tau_{\text{máx.}} = G\,\theta\, b. \qquad [10.100]$$

Para α y β pueden tomarse con suficiente aproximación los valores dados por las fórmulas siguientes, debidas también a Saint Venant:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 3 + \frac{1{,}8}{k} \\ \beta &= \frac{3}{1 - \dfrac{0{,}63}{k}} \end{aligned}\right\} \qquad [10.101]$$

Para valores de k mayores de 3, es preferible utilizar la expresión:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{3 M_t}{(a - 0{,}63\,b)\,b^2}, \qquad [10.102]$$

por ser más exacta.

La tensión máxima sobre el lado menor es función de la correspondiente al lado mayor, es decir:

$$\tau'_{\text{máx.}} = \delta\, \tau_{\text{máx.}}\,, \qquad [10.103]$$

con los siguientes valores de δ en función de $k = a/b$.

k	1,0	1,50	2,00	2,50	3,00	4,00	6,00	8,00	10,00	∞
δ	1,0	0,859	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

La sección rectangular presenta dos casos particulares: cuadrada y rectangular muy alargada. Para la sección cuadrada resultan las expresiones siguientes:

$$\tau_{\text{máx.}} = \tau'_{\text{máx.}} = 4{,}804\,\frac{M_t}{a^3} \qquad [10.104]$$

$$\theta = 7{,}114\,\frac{M_t}{G\,a^4} \qquad [10.105]$$

Para la segunda, de especial interés como veremos más adelante, cuando $a \gg b$ podemos escribir con suficiente aproximación:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{3\,M_t}{a\,b^2} = \theta\, G\, b \qquad [10.106]$$

$$\theta = \frac{3\,M_t}{G\,a\,b^3} \qquad [10.107]$$

En la figura 10.20 se muestran en forma aproximada los diagramas representativos de la variación de τ a lo largo de los ejes principales, de los lados y de las diagonales de una sección rectangular, a los efectos de hacer notar la diferencia que presentan con respecto a los correspondientes a la sección circular.

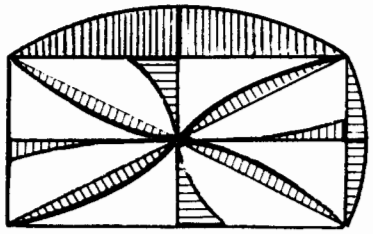


Fig. 10.20

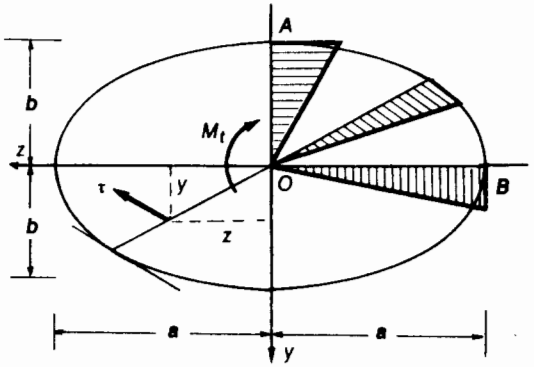


Fig. 10.21

10 . 12 . Secciones elíptica y triangular

Para una sección elíptica de semiejes a y b (mayor y menor, respectivamente) solicitada por un par torsor de momento M_t, la solución exacta de Saint Venant, da para la tensión tangencial en un punto de coordenadas z, y (figura 10.21) la siguiente expresión:

$$\tau = \frac{2M_t}{\pi\, a b}\sqrt{\frac{z^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}\,. \qquad [10.108]$$

La tensión en A, extremo del semieje menor, la obtenemos haciendo en la [10.108] $z = 0$ e $y = b$:

$$\tau_A = \frac{2M_t}{\pi\, a b^2}\,. \qquad [10.109]$$

Análogamente, para B, extremo del semieje mayor, la tensión se obtiene haciendo en la misma expresión $z = a$ e $y = 0$:

$$\tau_B = \frac{2M_t}{\pi\, a^2 b}\,. \qquad [10.110]$$

Como $a > b$, resulta:

$$\tau_A > \tau_B\,. \qquad [10.111]$$

Es fácil ver en la [10.108] que la variación de τ a lo largo de un diámetro cualquiera es lineal, con un coeficiente de proporcionalidad distinto para cada uno de ellos. Además, la dirección de la tensión en los puntos del contorno, coincide con la de la tangente al mismo en el punto considerado, en virtud del teorema de Cauchy. Por otra parte, del desarrollo teórico surge que las trayectorias de tensiones son elipses homotéticas del contorno de la sección, lo que significa que, para un punto interior cualquiera, la dirección de la tensión es paralela a la tangente al contorno en el extremo del diámetro que contiene al punto.

El ángulo específico de torsión se obtiene de la expresión:

$$\theta = \frac{M_t}{\pi G}\cdot\frac{a^2 + b^2}{a^3\, b^3}\,. \qquad [10.112]$$

Análogamente a lo que ocurre con la sección rectangular, la sección elíptica se alabea al variar las distorsiones en sentido radial, por cuanto existen componentes de τ dirigidas según los diámetros, salvo en los semiejes mayor y menor donde son nulas.

Es por ello que los ejes de la elipse se mantienen rectos y en el plano original de la sección. En el caso de figura 10.22, para un par torsor positivo los puntos ubicados en los cuadrantes positivos (+) experimentan corrimientos hacia arriba, y los que corresponden a cuadrantes negativos (−), hacia abajo.

Para la sección triangular equilátera, la solución de Saint Venant indica que la tensión tangencial máxima corresponde al punto medio del lado a (fig. 10.23), siendo su valor y el correspondiente al ángulo específico de torsión, los siguientes:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{20\,M_t}{a^3}, \qquad [10.113]$$

$$\theta = \frac{80}{\sqrt{3}} \cdot \frac{M_t}{G a^4}. \qquad [10.114]$$

Las tensiones son nulas para el baricentro de la sección (centro de torsión) y para los vértices, y sus distribuciones a lo largo de una mediana y una paralela baricéntrica a uno de los lados, aparecen indicadas en la figura 10.23. En cuanto

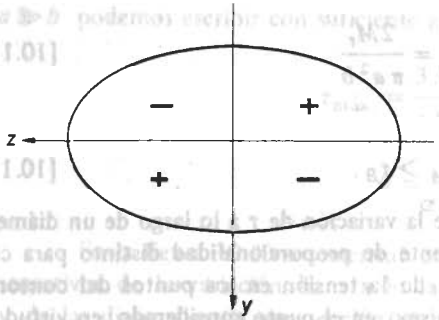


Fig. 10.22

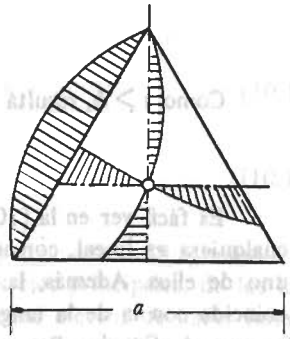


Fig. 10.23

a la dirección de las tensiones diremos que a lo largo de la mediana, son paralelas a la base correspondiente, y para la recta paralela a la base, están dirigidas al vértice opuesto. Finalmente, a lo largo de los lados, las tensiones varían desde cero en los extremos (vértices) hasta un máximo en el centro del lado, y están orientadas en la dirección de este último.

10.13. Torsión en secciones abiertas de pared delgada (Perfiles laminados)

En construcciones mecánicas y sobre todo aeronáuticas, es muy común el cálculo de la torsión de secciones de formas varias, pero en general de reducido espesor y abiertas, como por ejemplo, las que muestra la figura 10.24.

La analogía de la membrana, de la que nos ocuparemos más adelante, conduce, para secciones tales como las de figura 10.24 suponiendo constante el espesor de cada una de sus partes, con suficiente aproximación a una distribución lineal de tensiones a través de su espesor. Además, la analogía mencionada muestra que las tensiones varían muy poco si se suponen enderezados los perfiles de modo de transformarse en rectángulos muy alargados.

Fig. 10.24

En consecuencia, serán de aplicación, tanto para determinar la tensión tangencial máxima como para establecer el valor del ángulo específico de torsión, las fórmulas [10.106] y [10.107] deducidas al estudiar la sección rectangular alargada, transformadas en la forma siguiente:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{3\,M_t}{S e^2} = \theta\, G e. \qquad [10.115]$$

$$\theta = \frac{3\,M_t}{G S e^3}, \qquad [10.116]$$

donde e es el espesor de la pared del perfil y S la longitud del desarrollo de su línea media. Por ejemplo, si se trata de un perfil U (fig. 10.25), con la notación indicada resulta:

$$S = 2\left(b - \frac{e}{2}\right) + (h - e) \qquad [10.117]$$

de donde:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{3\,M_t}{e^2\,[(2b - e) + (h - e)]} = \frac{3\,M_t}{e^2\,(2b + h) - 2e^3}. \qquad [10.118]$$

Los perfiles de pared delgada abiertos, resultan ser menos resistentes y mucho más deformables que los cerrados de igual forma. A título de ejemplo, compararemos a continuación dos secciones anulares de igual radio interior y espesor de pared, una cerrada y otra con un corte transversal, es decir, abierta (fig. 10.26, a y b).

Para la sección cerrada, de acuerdo con la [10.68] tenemos:

$$\tau_{\text{máx.}} \cong \frac{M_t}{2\,\Omega\, e}, \qquad [10.119]$$

y con $\Omega = \pi R_m^2$:

$$\tau_{\text{máx.}} \cong \frac{M_t}{2\pi R_m^2 e} \qquad [10.120]$$

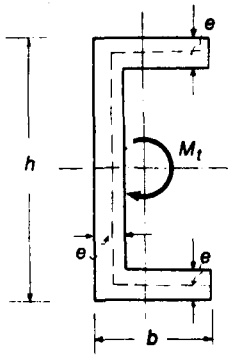


Fig. 10.25

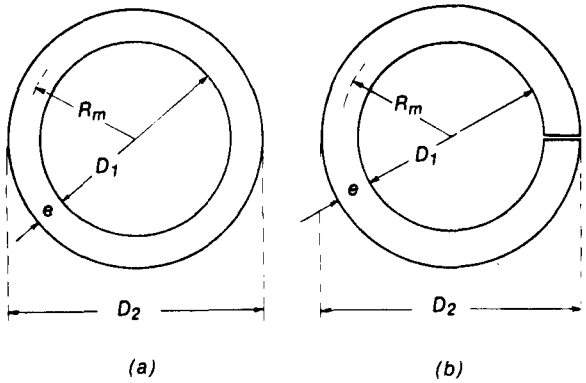


Fig. 10.26

Para la sección abierta, según la [10.115]

$$\tau'_{\text{máx.}} = \frac{3M_t}{Se^2}, \qquad [10.121]$$

y como $S = 2\pi R_m$

$$\tau'_{\text{máx.}} = \frac{3M_t}{2\pi R_m e^2}. \qquad [10.122]$$

Luego, la relación k entre tensiones máximas, resulta:

$$k = \frac{\tau'_{\text{máx.}}}{\tau_{\text{máx.}}} = \frac{3M_t\, 2\pi R_m^2 e}{2\pi R_m e^2 M_t}, \qquad [10.123]$$

o también:

$$k = \frac{3R_m}{e}. \qquad [10.124]$$

Para $R_m = 5e$ se tiene:

$$k = 15, \qquad [10.125]$$

o sea que, a igualdad de dimensiones y de solicitación, la tensión resulta ser 15 veces mayor en la sección abierta que en la cerrada:

Para el ángulo específico de torsión, la expresión correspondiente a la sección cerrada es:

$$\theta = \frac{M_t S}{4G\Omega^2 e}, \qquad [10.126]$$

donde:

$$\left.\begin{aligned} S &= 2\pi R_m \\ \Omega^2 &= \pi^2 R_m^4 \end{aligned}\right\} \qquad [10.127]$$

valores estos que reemplazados en la [10.126] conducen a:

$$\theta = \frac{M_t}{2\pi G R_m^3 e}. \qquad [10.128]$$

Para la sección abierta tenemos:

$$\theta' = \frac{3M_t}{GSe^3}, \qquad [10.129]$$

y con $S = 2\pi R_m$, resulta:

$$\theta' = \frac{3M_t}{2\pi G R_m e^3}. \qquad [10.130]$$

La relación k_0 entre ambos ángulos de torsión es, en consecuencia:

$$k_0 = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{3M_t\, 2\pi G R_m^3 e}{2\pi G R_m e^3 M_t}. \qquad [10.131]$$

o también:

$$k_0 = 3\left(\frac{R_m}{e}\right)^2. \qquad [10.132]$$

Para la misma relación analizada, $R_m = 5e$, tenemos:

$$k_0 = 75, \qquad [10.133]$$

eso es, el ángulo específico de torsión correspondiente a la sección abierta es, a igualdad de condiciones, 75 veces mayor que para la sección cerrada. De ahí que, siempre, la rigidez a torsión de las secciones huecas cerradas sea mucho mayor que la correspondiente a las abiertas.

Cuando se trata de secciones formadas por rectángulos de espesor distinto para cada uno de ellos, la expresión del ángulo específico de torsión es similar a la [10.116], con la única diferencia que $S \cdot e^3$ se reemplaza por $\Sigma\, s_i \cdot e_i^3$, o sea:

$$\theta = \frac{3M_t}{G\,\Sigma\, s_i e_i^3}. \qquad [10.134]$$

donde s_i y e_i son, respectivamente, la longitud y el espesor de cada uno de los rectángulos que constituyen el perfil.

En lo que respecta a la tensión máxima, de acuerdo con la [10.115], resulta que debe ocurrir en el borde del rectángulo de mayor espesor, y su valor será:

$$\tau_{\text{máx.}} = G\theta\, e_{\text{máx.}}\,, \qquad [10.135]$$

de donde, reemplazando θ por su igual de la [10.134], llegamos finalmente a:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{3 M_t\, e_{\text{máx.}}}{\Sigma\, s_i\, e_i^3}\,, \qquad [10.136]$$

y para el borde del rectángulo de espesor e_i:

$$\tau_i = \frac{3 M_t\, e_i}{\Sigma\, s_i\, e_i^3}\,. \qquad [10.137]$$

Llamando:

$$J_t = \frac{1}{3}\,\Sigma\, s_i\, e_i^3\,, \qquad [10.138]$$

las expresiones [10.134], [10.136] y [10.137] se transforman respectivamente en:

$$\theta = \frac{M_t}{G J_t}\,. \qquad [10.139]$$

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{M_t}{J_t}\, e_{\text{máx.}} \qquad [10.140]$$

y

$$\tau_i = \frac{M_t}{J_t}\, e_i\,. \qquad [10.141]$$

que responden a una configuración análoga a las correspondientes a la sección circular llena, pero en la que, en lugar de J_p aparece J_t, que tiene la misma dimensión de un momento de segundo orden y que podemos imaginar como un momento de inercia ficticio.

10 . 14 . La analogía de la membrana

Existen en la Mecánica determinados problemas que, aunque difieren en su esencia y naturaleza física, pueden ser expresados analíticamente por las mismas ecuaciones diferenciales. En consecuencia es posible, en esos casos, establecer analogías que faciliten su resolución.

En ciertos casos la solución de un problema, es decir, el establecimiento de una relación funcional entre dos variables z e y, exige la integración de una ecuación diferencial, generalmente en derivadas parciales, de gran complejidad, y para la cual, a veces, sólo es posible lograr soluciones aproximadas. En cambio, la naturaleza física de un segundo problema, análogo a otro en su expresión analítica, permite una interpretación simple de las relaciones que vinculan las mismas variables, hecho este que posibilita el establecer en forma sencilla las leyes que rigen al primer problema. Un ejemplo de lo anterior lo constituye el problema de la torsión. Su solución exacta se debe, como hemos dicho, a Saint Venant; incluye cualquier forma de sección y pertenece al dominio de la Teoría Matemática de la Elasticidad. Se basa sobre el establecimiento de una determinada función ϕ, denominada "función de Airy" o "función de tensión", entre las variables z e y, coordenadas del punto para el cual se busca conocer las tensiones τ_{xz} y τ_{xy}. Esta función ϕ debe satisfacer la ecuación diferencial que gobierna el problema de la torsión, cuya ecuación fundamental es:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta\,, \qquad [10.142]$$

teniéndose, además:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \qquad M_t = 2\iint \phi\, dz\, dy \right\} \qquad [10.143]$$

Conocida ϕ, las expresiones [10.143] resuelven completamente el problema. La dificultad reside, precisamente, en conocer, para cada caso la función ϕ que, aparte de satisfacer la [10.142], debe cumplir con las condiciones de borde de cada problema particular.

En el problema de la torsión, la denominada "analogía de la membrana", debida a L. Prandtl, permite determinar con facilidad las tensiones tangenciales, aparte del establecimiento del valor del ángulo específico de torsión, todo ello para secciones de forma cualquiera, por cuanto existe similitud funcional entre la ecuación [10.142] y la que define la forma que toma una membrana elástica fijada por sus bordes y sometida a una presión interior uniforme, como veremos a continuación.

Sea, fig. 10.27, un contorno cualquiera cerrado con una membrana elástica, sujeta interiormente a la acción de una presión uniforme p. Por efecto de esta presión, la membrana se deforma como muestra la figura 10.27, y en ella aparecen esfuerzos de tracción, cuyo valor por unidad de longitud llamamos N.

Un elemento de superficie dz, dy de la membrana debe necesariamente

encontrarse en equilibrio bajo la acción de la resultante de la presión p que actúa sobre el elemento considerado, y los esfuerzos que solicitan los cuatro lados del elemento. Es decir, que la suma de las proyecciones de las fuerzas sobre un eje cualquiera, el x por ejemplo, debe ser nula.

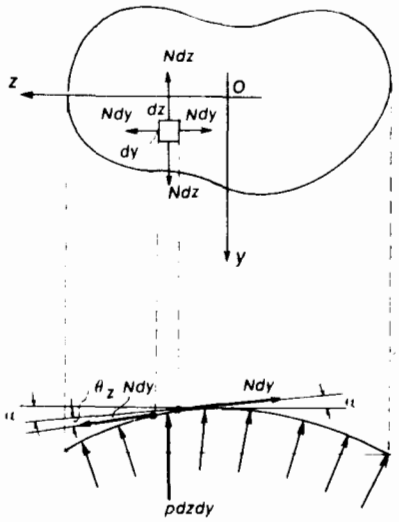


Fig. 10.27

Efectuando un corte en la membrana por el elemento dz, dy, paralelo al eje z, aparecen dos fuerzas, figura 10.27, de valor $N \cdot dy$, tangentes a la membrana y cuyas direcciones difieren de un ángulo infinitésimo θ_z.

Análogamente, un corte paralelo al eje y, pone en evidencia dos esfuerzos $N \cdot dz$, cuyas direcciones difieren de θ_y. Ahora bien, θ_z y θ_y corresponden a las variaciones de pendiente de dos tangentes sucesivas en las direcciones z e y, respectivamente. En consecuencia, si x es la coordenada del punto de la superficie de la membrana considerado, con respecto a la posición inicial, resulta:

$$\left.\begin{aligned} \theta_z &= -\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\, dz \\ \theta_y &= -\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\, dy \end{aligned}\right\} \qquad [10.144]$$

Si α es el ángulo que la dirección de uno de los esfuerzos $N dy$ forma con el eje z (o según el caso, $N \cdot dz$ con el eje y), el esfuerzo opuesto formará un ángulo $\alpha + \theta_z$ (o $\alpha + \theta_y$). En consecuencia, proyectando sobre el eje x y teniendo en cuenta que, por ser las ordenadas x infinitésimas, el esfuerzo debido a p que actúa sobre el elemento de área $dF = dz \cdot dy$ se proyecta en verdadera magnitud, salvo infinitésimos de orden superior, resulta:

$$p\, dy\, dz + N\, dz \operatorname{sen} \alpha + N\, dy \operatorname{sen} \alpha - N\, dz \operatorname{sen} (\alpha + \theta_y) - \\ - N\, dy \operatorname{sen} (\alpha + \theta_z) = 0. \qquad [10.145]$$

Pero, por ser α, θ_z y θ_y infinitésimos:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &\cong \alpha \\ \operatorname{sen} (\alpha + \theta_z) &\cong \alpha + \theta_z \\ \operatorname{sen} (\alpha + \theta_y) &\cong \alpha + \theta_y \end{aligned}\right\} \qquad [10.146]$$

de donde, reemplazando en [10.145] y simplificando:

$$p\, dy\, dz - N\theta_z\, dy - N\theta_y\, dz = 0, \qquad [10.147]$$

y, finalmente, teniendo en cuenta las [10.144]:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = -\frac{p}{N}. \qquad [10.148]$$

Si llamamos V al volumen encerrado entre el plano de referencia y la membrana deformada, su valor será:

$$V = \iint_F x\, dz\, dy. \qquad [10.149]$$

Por otra parte para un elemento de superficie de coordenadas x, y, z, las pendientes de las tangentes a las generatrices según dos direcciones ortogonales paralelas a los ejes z e y, tienen las siguientes expresiones:

$$\left.\begin{aligned} F_z' &= \frac{\partial x}{\partial z} \\ F_y' &= \frac{\partial x}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad [10.150]$$

Comparando las [10.148], [10.149] y [10.150] con las tres [10.143] y la [10.142] llegamos a las conclusiones siguientes, que constituyen la base de la analogía de la membrana, en la hipótesis que para los puntos del contorno de la sección son nulas la función ϕ y las ordenadas x de la superficie de la membrana deformada:

1o.) Las ecuaciones diferenciales que gobiernan la distribución de tensiones en la torsión, por una parte, y la superficie deformada de la membrana por la otra, son idénticas.

2o.) Si el valor que adquiere la función de tensión ϕ en cada punto se lleva como ordenada, el volumen encerrado por la superficie así generada y el plano de referencia, corresponde a la mitad del momento del par torsor y es igual al volumen encerrado por la membrana deformada.

3o.) Cada componente ortogonal de la tensión tangencial en un punto de la sección, se corresponde con la pendiente de la tangente a la superficie de la membrana, en la dirección normal al punto considerado.

En consecuencia, para resolver el problema de la torsión de una sección dada, bastará fijar una membrana elástica (caucho, película jabonosa o similar) por su contorno, que debe corresponder a la forma de la sección en estudio, deformarla mediante una presión interior p y medir, utilizando un dispositivo

mecánico especial, las ordenadas en distintos puntos. Estas ordenadas nos darán el valor de la función ϕ en cada punto, y mediante las [10.149] y las [10.150] obtendremos las tensiones correspondientes y el valor del par torsor, este último proporcional al volumen encerrado por la membrana. El detalle y descripción de los equipos utilizados para la aplicación de la analogía de la membrana constituye un capítulo especial de la Extensometría y escapa de los alcances de la presente obra.

A título de ejemplo, aplicaremos a continuación la analogía de la membrana a dos casos particulares que no requieren el uso de instrumental: la sección rectangular muy alargada y una sección cualquiera de pared delgada simplemente conexa.

Consideremos en primer término la sección rectangular alargada de la figura 10.28 *a*, sujeta a un par torsor de momento M_t. Si imaginamos una membrana

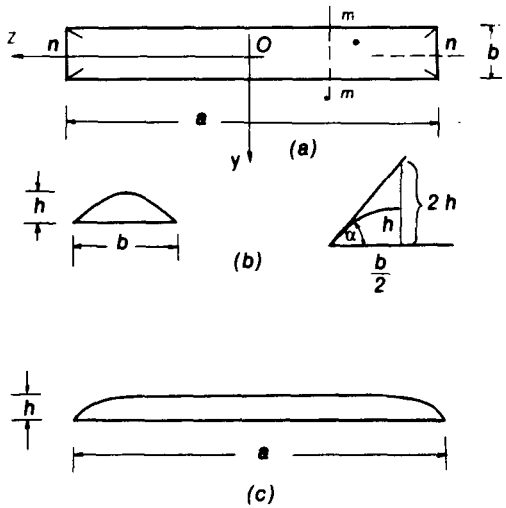


Fig. 10.28

de igual forma en planta, fijada por sus bordes y deformada por una presión interior p, por ser su ancho b reducido en relación con su altura a podemos admitir sin mayor error:

1o.) que la sección transversal m–m corresponde aproximadamente a una parábola cuadrática de flecha h, y

2o.) que la sección transversal n–n puede asimilarse a un rectángulo de base a y altura h, despreciando las pequeñas diferencias de los extremos.

En consecuencia:

$$V \cong \frac{2}{3} bha, \qquad [10.151]$$

y como, por comparación de las [10.143] y [10.149]:

$$M_t = 2V, \qquad [10.152]$$

resulta:

$$M_t = \frac{4}{3} bah. \qquad [10.153]$$

Por otra parte, la pendiente de la tangente a la parábola en los bordes de la sección vale:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{b/2} = \frac{4h}{b}, \qquad [10.154]$$

de donde resulta:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial x}{\partial y} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{4h}{b} \qquad [10.155]$$

Eliminando h entre las [10.153] y [10.155] tenemos:

$$\tau_{xz} = \frac{3 M_t}{ab^2}, \qquad [10.156]$$

expresión idéntica a la [10.106].

Consideremos ahora la sección tubular de pared delgada simplemente conexa de figura 10.29, solicitada por un par torsor de momento M_t. Si imaginamos cubierta la sección por una membrana elástica sometida a una presión interior p, se deforma como muestra la figura. En la zona hueca de la misma, al no haber tensiones resulta:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0, \qquad [10.157]$$

de modo que podemos imaginarnos la deformación de la membrana como un plano paralelo al plano inicial de referencia, y distante h de este último.

Por otra parte, dado el pequeño espesor e de la pared del tubo, podemos admitir

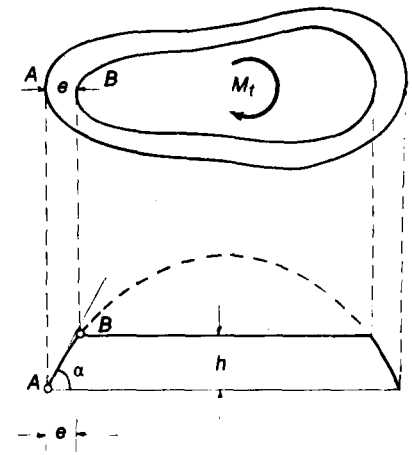


Fig. 10.29

sin mayor error que la sección transversal de la superficie de la membrana deformada es una recta, y que las tangentes en A y B tienen en consecuencia la misma pendiente:

$$\operatorname{tg} \alpha_A = \operatorname{tg} \alpha_B = \frac{h}{e}, \qquad [10.158]$$

de modo que resulta:

$$\tau_A = \tau_B = \frac{h}{e}. \qquad [10.159]$$

Si Ω es el área cuyo perímetro es el contorno medio de la sección, el volumen encerrado será con suficiente aproximación:

$$V = \Omega h, \qquad [10.160]$$

de donde:

$$V = \Omega \tau_A e = \Omega \tau_B e, \qquad [10.161]$$

y teniendo en cuenta que $M_t = 2V$, resulta finalmente:

$$M_t = 2\Omega \tau_A e, \qquad [10.162]$$

o también:

$$\tau_A = \frac{M_t}{2\Omega e}, \qquad [10.163]$$

expresión idéntica a la deducida para la sección tubular de pared delgada simplemente conexa.

10 . 15 . Analogía hidrodinámica

La analogía hidrodinámica, debida a *Greenhill*, se basa en esta circunstancia: si un recipiente cilíndrico, cuya sección normal es igual a la de una barra sujeta a torsión, se llena con un líquido incompresible y sin rozamiento, al someter éste a un movimiento plano de circulación en régimen laminar, las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que rigen el movimiento son las mismas a que conduce el estudio riguroso de la torsión. En consecuencia, surge una analogía entre las velocidades de las partículas de líquido por una parte y las tensiones tangenciales por otra.

La analogía hidrodinámica interesa desde un punto de vista cualitativo, por cuanto la resolución de las ecuaciones diferenciales presenta las mismas dificultades que las del problema elástico. Pero el fenómeno hidráulico es más intuitivo que el elástico y su interpretación facilita la comprensión de determinados problemas que se presentan en la torsión. Así por ejemplo, es fácil deducir que las tensiones en el contorno deben estar dirigidas según las tangentes a éste,

por cuanto en el fenómeno hidráulico, en los bordes el escurrimiento ocurre siguiéndolos. La analogía permite también establecer que en secciones con ángulos agudos, en el entorno de los mismos, tal el caso del vértice del perfil L de figura 10.30, no pueden existir tensiones (zonas rayadas).

En las mismas, en el fenómeno hidráulico, no hay circulación de fluido; son zonas muertas, de velocidad nula, y en consecuencia, por la analogía entre velocidades y tensiones tangenciales, estas últimas deben también ser nulas.

En la analogía hidrodinámica, las líneas de corriente se corresponden con las trayectorias de tensiones. Además, como el movimiento se supone uniforme, el caudal para cualquier sección debe mantenerse constante.

En consecuencia, resulta que, en una sección rectangular, para mantener la constancia del caudal, las velocidades a través de un semieje menor deben ser mayores que a través de uno mayor, por lo que las tensiones tangenciales para los puntos de este último son menores que para los del primero.

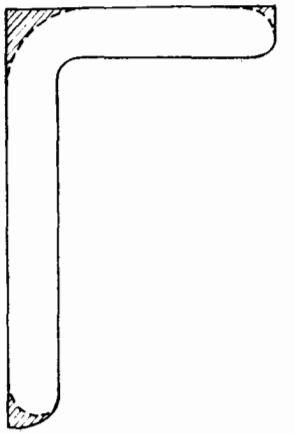


Fig. 10.30

10 . 16 . Tensiones secundarias en la torsión

Al estudiar la sección circular llena sujeta a torsión, partimos de la hipótesis de la conservación de las secciones planas (Coulomb) y establecimos que las generatrices se transformaban en hélices de un mismo paso. Consecuentemente, las fibras interiores también se transforman en hélices, de pendiente variable con su distancia al eje de la pieza, que se mantiene recto. Supongamos por un momento que la distancia entre dos secciones separadas de una distancia unitaria, no varía como consecuencia de la torsión (fig. 10.31). En este caso, una fibra del contorno tal como la AB pasa a ocupar la posición $A'B$ y experimenta un alargamiento que por ser su longitud unitaria, es directamente su alargamiento específico, y cuyo valor resulta:

$$\epsilon = \overline{A'B} - \overline{AB}. \qquad [10.164]$$

De la figura:

$$\overline{A'B} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AA'}^2}, \qquad [10.165]$$

y como:

$$\overline{AB} = 1; \quad \overline{AA'} = R\theta \qquad [10.166]$$

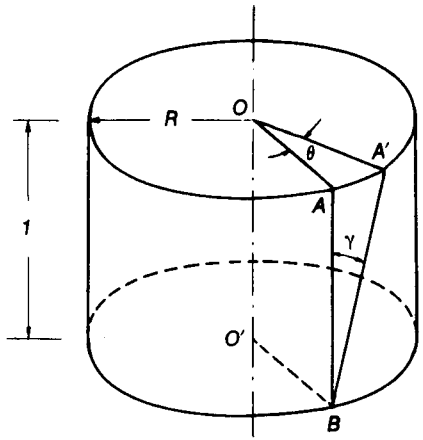


Fig. 10.31

reemplazando:

$$\overline{A'B} = \sqrt{1 + R^2\,\theta^2}\,, \qquad [10.167]$$

y finalmente de [10.164]:

$$\epsilon = \sqrt{1 + R^2\,\theta^2} - 1\,. \qquad [10.168]$$

Desarrollando la raíz en serie de potencias y tomando solamente los dos primeros términos, en virtud de la pequeñez de θ, resulta:

$$\epsilon = 1 + \frac{R^2\,\theta^2}{2} - 1 = \frac{R^2\,\theta^2}{2}\,, \qquad [10.169]$$

y de acuerdo con la ley de Hooke:

$$\sigma = E\,\epsilon = \frac{E R^2\,\theta^2}{2}\,. \qquad [10.170]$$

Para una fibra genérica interior, situada a una distancia r del eje de la pieza, el problema es análogo y la tensión normal que se origina en ella, tiene la siguiente expresión, similar en un todo a la [10.170]:

$$\sigma_r = \frac{E r^2\,\theta^2}{2}\,, \qquad [10.171]$$

Al ser ambas expresiones de la tensión normal funciones del radio correspondiente, resulta que la [10.170] corresponde al valor máximo de la tensión normal secundaria, es decir:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{E R^2\,\theta^2}{2}\,, \qquad [10.172]$$

y recordando que:

$$\tau_{\text{máx.}} = G\,\theta\,R\,, \qquad [10.173]$$

se tiene, reemplazando en [10.172]:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{E}{2}\cdot\frac{\tau^2_{\text{máx.}}}{G^2}\,, \qquad [10.174]$$

y para una fibra cualquiera situada a la distancia r del eje:

$$\sigma_r = \frac{E}{2G^2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \tau^2_{\text{máx.}}\,. \qquad [10.175]$$

La hipótesis que las secciones mantengan sus distancias relativas luego de la deformación por torsión, exige que, además del par torsor M_t, actúe una fuerza normal de magnitud:

$$N = \int_F \sigma_r\,dF\,, \qquad [10.176]$$

pues, de lo contrario, las fibras mantendrían su longitud y las secciones se acercarían experimentando la barra un acortamiento. Como consecuencia de ello, para una fibra situada a una distancia r, la expresión real de la tensión normal secundaria, ya no será más la [10.175], sino la misma corregida:

$$\sigma_r = \frac{E}{2G^2}\,\tau^2_{\text{máx.}}\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \epsilon_0\,E\,. \qquad [10.177]$$

Como no existe esfuerzo axil alguno, por razones de equilibrio la suma de las proyecciones de las fuerzas elementales $\sigma_r\,dF$ sobre un eje coincidente con la pieza, debe ser nula.

Teniendo en cuenta que la inclinación de las hélices respecto de las generatrices es muy pequeña, las fuerzas elementales dirigidas según aquellas, se proyectan en verdadera magnitud, resultando:

$$\int_F \sigma_r\,dF = 0\,. \qquad [10.178]$$

Si hacemos (fig. 10.32):

$$dF = r\,d\theta\,dr\,, \qquad [10.179]$$

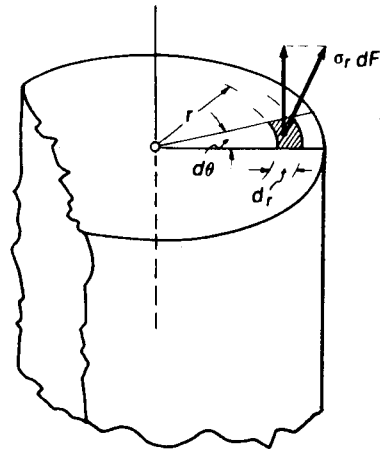


Fig. 10.32

teniendo en cuenta la [10.175], la [10.178] se transforma en:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R E\left[\frac{\tau^2_{\text{máx.}}}{2G^2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \epsilon_0\right] r\,d\theta\,dr\,. \qquad [10.180]$$

Integrando respecto de r resulta:

$$\int_0^{2\pi} d\theta\left(\frac{E\,\tau^2_{\text{máx.}}}{8G^2}\,R^2 - \frac{E\,\epsilon_0}{2}\,R^2\right) = 0\,, \qquad [10.181]$$

y con respecto a θ:

$$2\pi\left(\frac{E\,\tau^2_{\text{máx.}}\,R^2}{8G^2}-\frac{E\,\epsilon_0\,R^2}{2}\right)=0\,. \qquad [10.182]$$

Finalmente, simplificando y despejando ϵ_0:

$$\epsilon_0=\frac{\tau^2_{\text{máx.}}}{4G^2}\,. \qquad [10.183]$$

Reemplazando este valor de ϵ_0 en la [10.177], obtenemos las tensiones normales secundarias en la sección circular cuya expresión es:

$$\sigma_r=\frac{E}{G^2}\cdot\frac{\tau^2_{\text{máx.}}}{4}\left[2\left(\frac{r}{R}\right)^2-1\right]. \qquad [10.184]$$

$\sigma_{\text{máx.}}$ corresponde a $r=R$, el perímetro de la sección, y su valor es:

$$\sigma_{\text{máx.}}=\frac{E}{G^2}\cdot\frac{\tau^2_{\text{máx.}}}{4}=\frac{E}{4}\;\gamma^2_{\text{máx.}}\,. \qquad [10.185]$$

Comparando la [10.185] con la [10.174] se ve claramente que cuando las secciones están impedidas de acercarse, las tensiones normales secundarias se duplican.

Estas tensiones secundarias, cuando los ángulos de torsión son pequeños y τ se mantiene dentro del período elástico, son de valor reducido. A título de ejemplo, determinaremos $\sigma_{\text{máx.}}$ para una barra circular de acero, admitiendo los siguientes valores:

$$\tau_{\text{máx.}}=600\ \text{kg/cm}^2$$
$$E=2\,100\,000\ \text{kg/cm}^2$$
$$G=800\,000\ \text{kg/cm}^2$$

Reemplazando estos valores en la [10.185] resulta:

$$\sigma_{\text{máx.}}=\frac{2{,}1\times 36\times\overline{10}^{10}}{4\times 64\times\overline{10}^{10}}=0{,}3\ \text{kg/cm}^2\,, \qquad [10.186]$$

que, como se ve, es un valor despreciable.

Para $r=0$, en el centro de la sección, la [10.184] se transforman en

$$\sigma_r=-\frac{E}{G^2}\cdot\frac{\tau^2_{\text{máx.}}}{4}\,, \qquad [10.187]$$

es decir, que la tensión cambia de signo.

Igualando a cero la [10.184] obtenemos el radio de la circunferencia donde la tensión secundaria se anula:

$$2\left(\frac{r_1}{R}\right)^2=1 \qquad [10.188]$$

también

$$r_1=\frac{\sqrt{2}}{2}R=0{,}707R\,. \qquad [10.189]$$

Si bien para la sección circular llena las tensiones normales secundarias carecen de importancia, no ocurre lo mismo con las secciones rectangulares, especialmente las alargadas, donde, como veremos a continuación, para determinadas relaciones de lados pueden alcanzar un orden de magnitud similar al de las tensiones tangenciales. Con la notación de figura 10.33 y sobre la base de consideraciones análogas a las efectuadas para la sección circular, llegamos a la siguiente expresión para la tensión normal en una fibra que dista y del centro, admitiendo que las secciones se desplazan la una respecto de la otra:

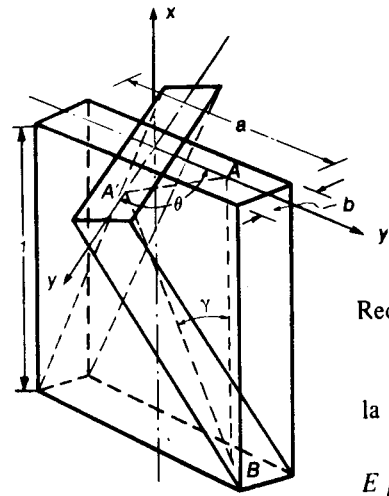


Fig. 10.33

$$\sigma_x=E\left(\frac{y^2\theta^2}{2}-\epsilon_0\right). \qquad [10.190]$$

La condición de equilibrio [10.178] resulta, en este caso, por ser $dF=b\,dy$:

$$E\int_{-a/2}^{a/2}\left(\frac{y^2\theta^2}{2}-\epsilon_0\right)b\,dy=0\,. \qquad [10.191]$$

Recordando que para la sección rectangular alargada:

$$\tau_{\text{máx.}}=G\theta b\,, \qquad [10.192]$$

la [10.191] se transforma en:

$$E\int_{-a/2}^{a/2}\left(\frac{y^2\,\tau^2_{\text{máx.}}}{2G^2b^2}-\epsilon_0\right)b\,dy=0\,, \qquad [10.193]$$

o también: en:

$$\frac{\tau^2_{\text{máx.}}}{2G^2b}\int_{-a/2}^{a/2}y^2\,dy=\epsilon_0\,ab\,, \qquad [10.194]$$

$$\epsilon_0=\frac{\tau^2_{\text{máx.}}}{24\,G^2}\cdot\frac{a^2}{b^2}\,. \qquad [10.195]$$

Finalmente, reemplazando en [10.190] ϵ_0 y θ por sus valores de las [10.192] y [10.195], resulta:

$$\sigma_x=E\left(\frac{\tau^2_{\text{máx.}}}{2G^2b^2}\,y^2-\frac{\tau^2_{\text{máx.}}}{24\,G^2}\cdot\frac{a^2}{b^2}\right), \qquad [10.196]$$

o también:

$$\sigma_x = \frac{E}{24G^2}\,\tau^2_{\text{máx.}}\,\frac{a^2}{b^2}\left(12\frac{y^2}{a^2} - 1\right). \qquad [10.197]$$

σ_x alcanza su mayor valor cuando y es máxima, es decir, para $y = \frac{1}{2}a$, resultando:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \tau^2_{\text{máx.}}\,\frac{E}{12G^2}\cdot\frac{a^2}{b^2}, \qquad [10.198]$$

y su valor mínimo para $y = 0$, o sea, en el centro de la sección, donde adquiere un valor negativo:

$$\sigma_{\text{mín.}} = -\tau^2_{\text{máx.}}\,\frac{E}{24G^2}\cdot\frac{a^2}{b^2}, \qquad [10.199]$$

variando entre ambos límites según las ordenadas de una parábola de 2° grado, como muestra el diagrama de figura 10.34.

Para secciones muy esbeltas, $\sigma_{\text{máx.}}$ puede alcanzar valores no despreciables. Por ejemplo, para una sección rectangular de una barra de acero, con $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2; $G = 8 \times 10^5$ kg/cm^2; $\tau_{\text{adm.}} = 800$ kg/cm^2 y una relación $a/b = 15$, la expresión [10.198] nos conduce a:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{8^2 \times 2{,}1 \times 15^2 \times 10^{10}}{12 \times 8^2 \times 10^{10}} = 39{,}5 \text{ kg/cm}^2, \qquad [10.200]$$

valor del orden del 5% de $\tau_{\text{máx.}}$: Por otra parte, si la sección es muy esbelta (a/b muy grande) antes de alcanzarse el valor $\tau_{\text{máx.}} = \tau_{\text{adm.}}$ el ángulo específico de torsión θ adquiere valores considerables y el alabeo de la sección es muy pronunciado.

En consecuencia, la inclinación de las tensiones σ_x con respecto al eje de la pieza es tal que sus componentes según el plano de la sección no pueden despreciarse. El ángulo que la tensión σ_x correspondiente a una fibra situada a una distancia y del centro de la sección forma con su dirección primitiva es, fig. 10.35, γ_y, cuyo valor, por ser unitaria la separación entre las secciones consideradas, resulta:

$$\gamma_y = y \cdot \theta. \qquad [10.201]$$

Luego, σ_x tendrá como componente tangencial según el plano de la sección:

$$\sigma_0 = \sigma_x \operatorname{sen}\gamma_y = \sigma_x \operatorname{sen}(y \cdot \theta). \qquad [10.202]$$

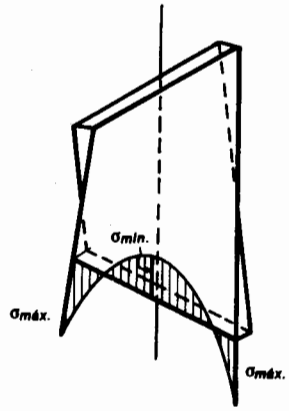


Fig. 10.34

que por, ser γ_y pequeño y en consecuencia $\operatorname{sen}\gamma_y \cong \gamma_y$, se transforma en:

$$\sigma_0 = \sigma_x\, y\, \theta. \qquad [10.203]$$

Esta componente σ_0 colabora con las tensiones tangenciales para equilibrar el par torsor, contribuyendo con un par auxiliar cuyo momento vale:

$$M'_t = \int_{-a/2}^{a/2} \sigma_x\, y^2\, \theta\, b\, dy, \qquad [10.204]$$

donde $b \cdot dy$ corresponde al área elemental dF, en que se supone a σ_x uniformemente distribuida.

Si en la [10.195] reemplazamos $\tau_{\text{máx.}}$ por su valor de la [10.192], resulta:

$$\epsilon_0 = \frac{\theta^2 a^2}{24}, \qquad [10.205]$$

que introducida en la [10.190] da:

$$\sigma_x = E\left(\frac{y^2\theta^2}{2} - \frac{\theta^2 a^2}{24}\right). \qquad [10.206]$$

Reemplazando esta última expresión en la [10.204]:

$$M'_t = \frac{E\theta^3 b}{2}\int_{-a/2}^{a/2}\left(y^4 - \frac{y^2 a^2}{12}\right)dy. \qquad [10.207]$$

Integrando, obtenemos finalmente:

$$M'_t = \frac{Eb\theta^3}{360}\,a^5. \qquad [10.208]$$

En consecuencia, la expresión del par torsor, que puede absorber una sección rectangular muy esbelta es, teniendo en cuenta las tensiones normales secundarias:

$$M_t = \frac{Gab^3\theta}{3} + \frac{Eb\theta^3}{360}\,a^5. \qquad [10.209]$$

Si recordamos que:

$$G = \frac{\mu}{2(1+\mu)}\,E,$$

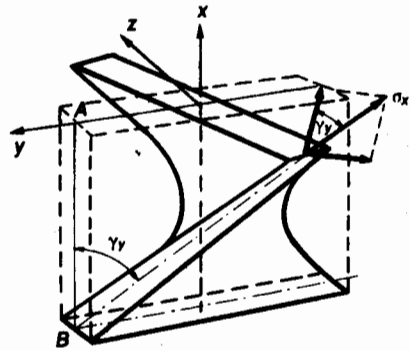


Fig. 10.35

reemplazando este valor en la [10.209] y luego de algunas transformaciones, llegamos finalmente a:

$$M_t = \frac{E b a}{6}\left(\frac{\mu}{1+\mu} b^2 \theta + \frac{\theta^3}{60} a^4\right). \qquad [10.210]$$

Esta expresión muestra que, para secciones muy esbeltas (b reducido en relación con a), la influencia de las tensiones secundarias puede llegar a ser del mismo orden de magnitud que las tangenciales. En efecto, para este tipo de secciones, antes de llegar al límite de elasticidad del material, los valores de θ pueden ser grandes y aparecen en el término correctivo de la expresión de M_t, elevados a la tercera potencia.

10 . 17 . Torsión en el período plástico

En los parágrafos anteriores hemos analizado el comportamiento de distintas secciones sujetas a torsión suponiendo que las distorsiones γ eran de magnitud tal que, para ningún punto de la sección, el valor de la tensión tangencial superara el valor de $\tau_{fl.}$.

Admitimos, pues, que el comportamiento de la sección quedaba comprendido dentro de los límites del período elástico. Analizamos ahora el mismo problema, limitado a las secciones circular llena y hueca, para el caso que las

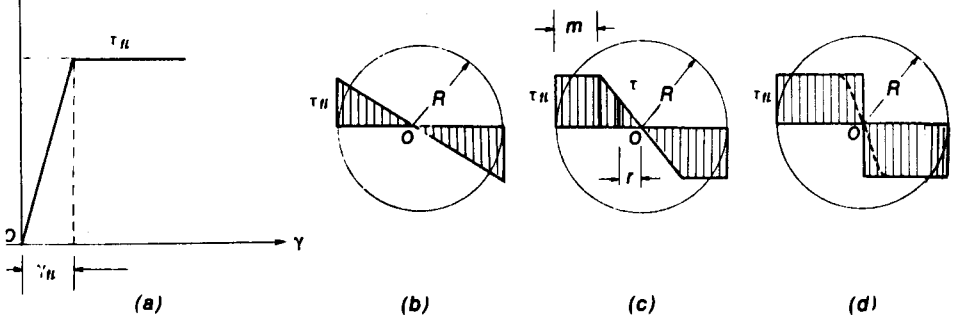


Fig. 10.36

es decir, cuando nos encontramos en el período plástico o anelástico. Suponiendo se trate de un material dúctil, el diagrama τ, γ tiene la forma que muestra la figura 10.36*a* y responde a un diagrama ideal.

Si el valor del par torsor aumenta, llega un momento en que la tensión máxima, en el borde de la sección, alcanza el límite de fluencia con repartición lineal de tensiones (fig. 10.36 *b*). El momento de dicho par lo denominamos *momento torsor de fluencia* o también *momento de plastificación.*

Si el momento continúa aumentando, en las fibras cercanas al borde de la sección las distorsiones van sucesivamente alcanzando el valor de $\gamma_{fl.}$ pero las tensiones se mantienen constantes en la zona en que $\gamma = \gamma_{fl.}$ e iguales a $\tau_{fl.}$, zona designada con m en figura 10.36 *c* y denominada *penetración plástica.* Si M_t continúa aumentando, se hace mayor la zona de penetración hasta alcanzar el valor $m = R$, figura 10.36 *d*. Se dice entonces que la sección se encuentra *totalmente plastificada* y el diagrama ideal de tensiones correspondientes es el que muestra la figura 10.36 *d*: un rectángulo de altura $\tau_{fl.}$. El diagrama real es el que muestra en línea punteada la figura mencionada, pero, a los efectos prácticos. podemos admitir sin mayor error la repartición rectangular de tensiones. El momento del par que conduce a obtener dicho diagrama se denomina *momento de plastificación total* o *momento de rotura* de la sección. Esta última designación responde al hecho que, cuando se alcanza dicho momento, la sección es incapaz de absorber una mayor solicitación, se deforma sin aumento de carga, y aunque no exista separación física de parte alguna, se encuentra rota desde un punto de vista estructural.[1]

Estableceremos a continuación el valor del momento torsor de rotura para la sección circular llena. Para ello consideremos, figura 10.37, en una sección totalmente plastificada por torsión, un elemento superficial dF situado a una distancia r del centro de la sección delimitado por dos radios que difieren de $d\theta$ y dos circunferencias concentricas separadas de dr. Resulta con ello:

$$dF = r\,dr\,d\theta. \qquad [10.211]$$

Sobre dicho elemento actúa una tensión que por otra parte es constante para toda la sección por encontrarse esta totalmente plastificada. Tomando momentos respecto de O, tenemos:

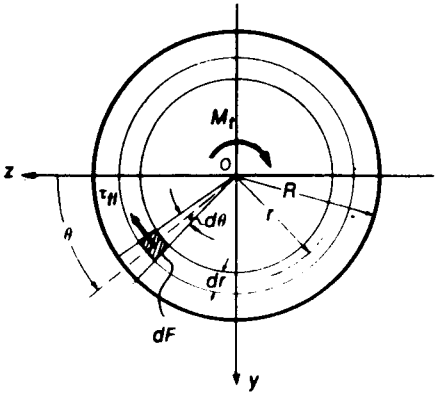


Fig. 10.37

[1] Se ha pretendido utilizar entre nosotros el término "momento último" traduciendo literalmente del inglés *ultimate moment* como se designa en este idioma el momento de rotura. Entendemos inadecuada dicha expresión, y que es preferible que utilizamos.

$$dM_R = \tau_{fl.} r^2 \, dr \, d\theta \qquad [10.212]$$

y el momento de rotura se obtiene integrando la [10.212] sobre toda la superficie:

$$M_R = \int_0^{2\pi} \int_0^R \tau_{fl.} r^2 \, dr \, d\theta \qquad [10.213]$$

Resolviendo la integral:

$$M_R = \tfrac{2}{3} \pi R^3 \tau_{fl.} \qquad [10.214]$$

y con $R = \frac{1}{2} D$

$$M_R = \frac{\pi D^3}{12} \tau_{fl.} \, . \qquad [10.215]$$

El valor del momento admisible lo obtenemos afectando el del momento de rotura con un coeficiente de seguridad ν

$$M_{adm.} = \frac{M_R}{\nu} \, . \qquad [10.216]$$

Interesa comparar el valor del momento de rotura dado por la [10.215] con el del momento que corresponde al comienzo de la plastificación de la sección, es decir, aquel momento para el cual en la fibra más alejada del centro de la sección se tiene $\tau_{máx.} = \tau_{fl.}$, con repartición lineal de tensiones. Ese momento tiene por expresión:

$$M_{fl.} = \frac{\pi D^3}{16} \tau_{fl.} \, , \qquad [10.217]$$

expresión similar a la [10.27] en la que se ha reemplazado τ por $\tau_{fl.}$. Llamando m la relación entre ambos momentos, resulta:

$$m = \frac{M_R}{M_{fl.}} = \frac{16}{12} = 1{,}33, \qquad [10.218]$$

lo que nos dice que existe una reserva de resistencia del 33% desde que comienza la plastificación hasta la rotura total, reserva que implica la posibilidad de una cierta sobresolicitación de la sección por sobre los valores admitidos, sin mayor peligro para la estabilidad del elemento.

Para la sección anular de radios R_2 y R_1, el problema se plantea en forma similar (fig. 10.38), llegándose a la expresión:

$$M_R = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \tau_{fl.} r^2 \, dr \, d\theta \, , \qquad [10.219]$$

de la misma configuración que la [10.213] con la única diferencia que, en este caso, los límites de integración para r son R_1 y R_2, radios interno y externo, respectivamente. Efectuando la integración:

$$M_R = \frac{2}{3} \pi \tau_{fl.} (R_2^3 - R_1^3) \, , \qquad [10.220]$$

o también:

$$M_R = \frac{\pi}{12} \tau_{fl.} (D_2^3 - D_1^3) \, , \qquad [10.221]$$

$$M_R = \frac{\pi}{12} \tau_{fl.} D_2^3 \left(1 - \frac{D_1^3}{D_2^3}\right), \qquad [10.222]$$

y, finalmente, la relación m_0 con el momento que corresponde al comienzo de la plastificación:

$$m_0 = \frac{M_R}{M_{fl.}} = 1{,}33 \, \frac{\left(1 - \dfrac{D_1^3}{D_2^3}\right)}{\left(1 - \dfrac{D_1^4}{D_2^4}\right)} \, . \qquad [10.223]$$

Si en la expresión anterior hacemos $D_1/D_2 = n$, ésta se transforma en:

$$m_0 = 1{,}33 \, \frac{1 - n^3}{1 - n^4} \qquad [10.224]$$

Para $n = 0$, es decir $D_1 = 0$, o sea sección circular llena, la [10.224] resulta idéntica con la [10.218].

Si $n = 0{,}5$, o sea, si el diámetro exterior es el doble del interior, resulta:

$$m_0 = 1{,}33 \, \frac{1 - 0{,}125}{1 - 0{,}0625} = 1{,}24 \, , \qquad [10.225]$$

es decir que, a medida que se reduce el espesor de la sección anular, disminuye la reserva de resistencia.

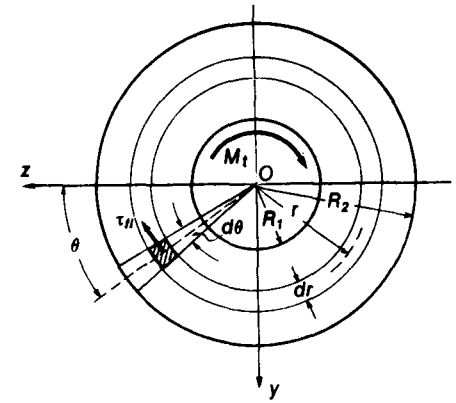


Fig. 10.38

Analizaremos a continuación el comportamiento a torsión de una sección circular llena cuando la plastificación es sólo parcial (fig. 10.39) es decir cuando existen fibras para las cuales $\tau_r = \tau_{fl.}$ hasta una profundidad m medida desde el borde la sección denominada *penetración plástica*. Para las fibras situadas a distancias del centro de la sección inferiores a $(R - m)$, las tensiones se mantienen dentro de los límites del período elástico y su valor es:

$$\tau_r = \tau_{fl.} \frac{r}{R - m} \, . \qquad [10.226]$$

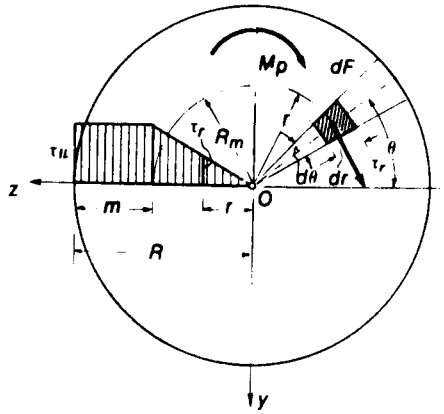


Fig. 10.39

La condición de igualdad de momentos entre fuerzas interiores y exteriores resulta:

$$M_P = \int \tau_r \, r \, dF, \qquad [10.227]$$

donde M_p es el momento de plastificación parcial y como antes $dF = r\,d\theta\,dr$. En consecuencia, reemplazando:

$$M_P = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \tau_r \, r^2 \, dr = 2\pi \int_0^R \tau_r \, r^2 \, dr. \qquad [10.228]$$

La integral de [10.228] debemos descomponerla en dos, teniendo en cuenta que en parte de la sección τ_r varía según la [10.226] y en el resto es constante e igual a $\tau_{fl.}$, resultando con ello:

$$M_p = 2\pi \left(\int_0^{R-m} \frac{\tau_{fl.} \, r^3}{R-m} \, dr + \int_{R-m}^{R} \tau_{fl.} \, r^2 \, dr \right). \qquad [10.229]$$

Integrando:

$$M_P = 2\pi \, \tau_{fl.} \left(\frac{r^4}{4(R-m)} \Big|_0^{R-m} + \frac{r^3}{3} \Big|_{R-m}^{R} \right) \qquad [10.230]$$

y finalmente:

$$M_P = 2\pi \tau_{fl.} \left(\frac{R^3}{3} - \frac{(R-m)^3}{12} \right), \qquad [10.231]$$

expresión que nos da el valor del par torsor que produce una penetración plástica m en la sección.

Para $m = 0$, comienzo de las plastificación, la [10.231] coincide con la [10.217] como es fácil de comprobar, mientras que para $m = R$, para plastificación total, se anula el segundo término del corchete y la [10.231] se transforma en la [10.215].

11. SOLICITACIÓN POR FLEXIÓN SIMPLE

11. 1. Conceptos generales

En el capítulo 8 designamos con el nombre de flexión simple, a la forma de solicitación para la cual la reducción al baricentro de la sección considerada de las fuerzas que actuaban a uno y otro lado de la misma, se limitaba a dos pares normales al plano de aquélla, con o sin esfuerzo de corte. En el primer caso estábamos ante una solicitación de *flexión pura* y en el segundo, en una de *flexión y corte.*

Como se verá en lo que sigue, desde el punto de vista de la determinación de las tensiones normales que se originan en las secciones solicitadas por flexión simple cualquiera sea su forma, el planteo del problema es el mismo, por lo que deduciremos a continuación las relaciones que vinculan a los pares flexores con las tensiones que originan, para el caso de flexión pura.

Designaremos con el nombre de *plano de flexión* al plano en que actúan los pares flexores y *línea de fuerzas* a la traza de dicho plano con el plano de la sección.

En el estudio de la flexión simple pueden presentarse dos casos:

a) que la línea de fuerzas coincida con uno de los ejes principales de inercia de la sección;

b) que tal línea forme un cierto ángulo α con ese eje.

En el primer caso estamos ante una solicitación por *flexión simple normal* y en el segundo, por *flexión simple oblicua.* Ambas formas de solicitación las analizaremos en detalle en los parágrafos siguientes.

Primeramente nos ocuparemos de la flexión pura normal, para hacerlo luego con la flexión simple oblicua, y finalmente desarrollaremos la flexión normal combinada con esfuerzos de corte, todo ello dentro de lo que hemos denominado régimen elástico, eso es, suponiendo que las tensiones que se desarrollan no superan el valor del límite de fluencia del material, sea éste definido o convencional.

Finalmente nos ocuparemos del problema de la flexión simple en régimen plástico, es decir cuando la solicitación de la sección es de una magnitud tal que el valor de la tensión, en por lo menos un punto de la misma, sobrepasa el límite de fluencia del material.

11 . 2 . Flexión pura normal

Sea (fig. 11.1) una sección F de un sólido de alma llena, solicitada por un par flexor de momento M que en ella origina tensiones. Suponemos que la línea de fuerzas coincide con uno de los ejes principales de inercia de la sección. Por ser nulos los esfuerzos de corte y normal, las ecuaciones de equivalencia [8.6], [8.7] en el caso que nos ocupa tienen las siguientes expresiones:

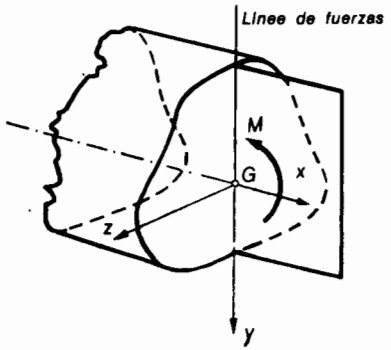


Fig. 11.1

$$\left.\begin{aligned} &\int_F \sigma_x \, dF = 0 \\ &\int_F \tau_{xy} \, dF = 0 \\ &\int_F \tau_{xz} \, dF = 0 \\ &\int_F (\tau_{xy} z + \tau_{xz} y) \, dF = 0 \\ &\int_F \sigma_x z \, dF = 0 \\ &\int_F \sigma_x y \, dF = M \end{aligned}\right\} \quad [11.1]$$

Estas expresiones por sí solas no resuelven el problema que nos interesa, es decir, el establecimiento de una relación funcional entre la solicitación externa, el momento flexor, y las tensiones que el mismo origina en la sección, sino que es necesario recurrir a hipótesis relativas al comportamiento de la sección, suficientemente exactas y verificadas experimentalmente.

Como hemos dicho antes, analizaremos primeramente el problema de la flexión en régimen elástico; supondremos que nos encontramos dentro de los límites de validez de la ley de Hooke, y que admitimos proporcionalidad entre tensiones y deformaciones específicas.

Como hipótesis fundamental de la flexión admitiremos la de *Bernouilli–Navier* que establece que en la flexión, *las secciones normales al eje de la pieza se mantienen planas a través de las deformaciones y giran en torno a un eje denominado eje neutro, que pertenece a la sección.*

Al mantenerse planas[1] las secciones, no pueden originarse distorsiones en los elementos de la misma y en consecuencia por ser $\tau = \gamma G$ no existen tensiones tangenciales.

Por esta razón, la 2a., 3a. y 4a. de las [11.1] resultan idénticamente nulas, restando solamente las tres expresiones en que aparece la tensión normal σ_x.

Consideremos ahora dos secciones consecutivas *1–1* y *2–2* de una barra de eje rectilíneo, sujeta a flexión pura, separadas de una distancia unitaria y donde

[1] Como veremos más adelante, esta premisa no es cierta para el caso en que exista esfuerzo de corte, pero si suficientemente exacta para los fines prácticos.

sobre cada sección actúan pares opuestos de momento M. Por tratarse de flexión normal, la línea de fuerzas coincide con uno de los ejes principales de inercia de la sección con el que también superpondremos el eje y de una terna cuyo eje z se corresponda con el eje neutro $n-n$, que forma un ángulo β con la línea de fuerzas.

De acuerdo con la hipótesis de Bernouilli–Navier, las secciones giran en torno a ejes y se mantienen planas. Para nuestro estudio supondremos fija la sección *1–1* y consideraremos la rotación relativa de la sección *2–2* (fig. 11.2 a) con respecto a la *1–1*.

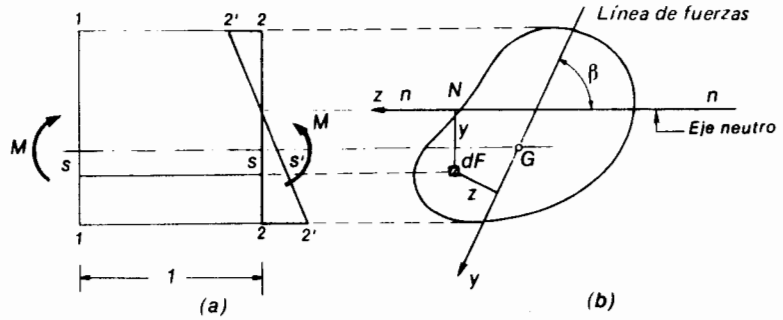


Fig. 11.2

Designaremos en lo que sigue como *fibra* al tubo elemental engendrado por un elemento de superficie al trasladarse entre dos secciones cualesquiera.

Una fibra cualquiera $s-s$ experimentará un alargamiento o un acortamiento según su posición en la sección que, por ser su longitud original unitaria, corresponderá directamente al alargamiento específico ϵ. Como puede observarse, al mantenerse planas las secciones, los alargamientos de las distintas fibras varían linealmente en función de su distancia al eje neutro.

Si llamamos ϵ_x al alargamiento de las fibras situadas a una distancia unitaria del eje neutro, el correspondiente a las fibras situado a la distancia y será:

$$\epsilon_x = y \, \bar{\epsilon}_x \, . \qquad [11.2]$$

y, de acuerdo con la ley de *Hooke*, la tensión σ que corresponde a las fibras situadas a la distancia y será:

$$\sigma_x = E \, \epsilon_x = E y \, \bar{\epsilon}_x , \qquad [11.3]$$

y llamando $\bar{\sigma} = E\bar{\epsilon}_x$, tenemos finalmente:

$$\sigma_x = y \, \bar{\sigma} \, . \qquad [11.4]$$

Reemplazando el valor de σ_x dado por la [11.4] en las 1a, 5a y 6a de las expresiones [11.1] resulta:

$$\left.\begin{aligned} &\int_F y\,\bar{\sigma}\,dF = 0 \\ &\int_F y\,z\,\bar{\sigma}\,dF = 0 \\ &\int_F y^2\,\bar{\sigma}\,dF = M \operatorname{sen}\beta \end{aligned}\right\} \qquad [11.5]$$

o también por ser $\bar{\sigma}$ = cte:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\sigma}\int_F y\,dF = 0 \\ &\bar{\sigma}\int_F yz\,dF = 0 \\ &\bar{\sigma}\int_F y^2\,dF = M \operatorname{sen}\beta \end{aligned}\right\} \qquad [11.6]$$

Analizando las dos primeras expresiones, vemos que por ser $\bar{\sigma}$ distinta de cero, debe necesariamente ser:

$$\left.\begin{aligned} &\int y\,dF = 0 \\ &\int yz\,dF = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [11.7]$$

La primera, por tratarse de un momento estático nulo, nos dice que el eje z, coincidente con el eje neutro debe, necesariamente, ser baricéntrico, y la segunda, que es la expresión del momento centrífugo de la sección respecto de los ejes z e y, establece que ambos son conjugados de inercia.

Ahora bien, el eje y coincide con la línea de fuerzas, y el z con el eje neutro, además por tratarse de flexión normal, el eje y es principal de inercia. En consecuencia, para la flexión pura normal se cumple que:

1) el eje neutro es baricéntrico;

2) el eje neutro es conjugado de inercia de la línea de fuerzas, y como ésta coincide con un eje principal de inercia, ambos ejes son normales, y se tiene $\beta = 90°$.

Estamos ante la situación que muestra la figura 11.3 *c*, donde hemos representado el diagrama que nos da la variación de las tensiones normales sobre la sección. Este diagrama es lineal y afín al diagrama que aparece en la

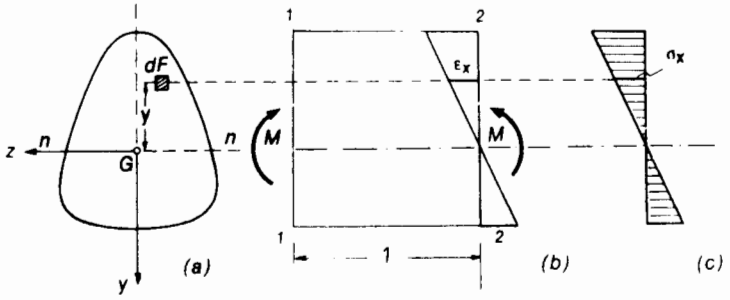


Fig. 11.3

figura 11.3 *b*, relativo a la variación de las deformaciones específicas de las fibras, que también es lineal.

Falta establecer la relación que vincula al par flexor con las tensiones normales σ_x y con las características geométricas de la sección.

Para ello recurrimos a la tercera de las [11.6] donde la integral representa el momento de inercia de la sección respecto del eje neutro, y por ser $\beta = \frac{\pi}{2}$:

$$\bar{\sigma}\,J_n = M. \qquad [11.8]$$

Reemplazando $\bar{\sigma}$ por su valor de la [11.4]:

$$\frac{\sigma_x}{y}\,J_n = M, \qquad [11.9]$$

y finalmente:

$$\sigma_x = \frac{M}{J_n}\,y, \qquad [11.10]$$

que nos da el valor de la tensión σ_x producida por el par flexor M en las fibras situadas a una distancia y del eje neutro.

La observación de la figura 11.3 nos dice que, para el par de pares con los sentidos que aparecen en ella y que corresponden a un momento flexor positivo (por definición), las fibras ubicadas *por encima* del eje neutro experimentan acortamientos, mientras que las situadas *por debajo* se alargan. Consecuentemente, las tensiones normales originadas serán respectivamente de compresión (negativas) o de tracción (positivas), y por ser J_n una magnitud positiva, para el par de ejes coordenados adoptados cuando M es positivo, σ_x tiene el signo de y. Si, en cambio, prescindimos del signo de y y consideramos solamente su valor absoluto, la expresión de σ_x en función del momento flexor será:

$$\sigma_x = \pm\frac{M}{J_n}\,y. \qquad [11.11]$$

Resulta evidente que, de todos los valores de σ_x que se originan en la sección, interesan los mayores, y por ser las tensiones proporcionales a su distancia al eje neutro, resulta que las tensiones máximas ocurrirán en las fibras más alejadas de aquél. Llamaremos $\sigma_{\text{máx.}}$ la máxima tensión positiva, y $\sigma_{\text{mín.}}$ la máxima negativa, eso es, la tensión cuyo valor es el que más se aleja del anterior. Si y_1 e y_2 son las distancias de las fibras más alejadas del eje neutro (fig. 11.4) las expresiones que nos dan los valores correspondientes de las tensiones son:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\text{máx.}} &= +\frac{M}{J_n}\,y_1 \\ \sigma_{\text{mín.}} &= -\frac{M}{J_n}\,y_2 \end{aligned}\right\} \qquad [11.12]$$

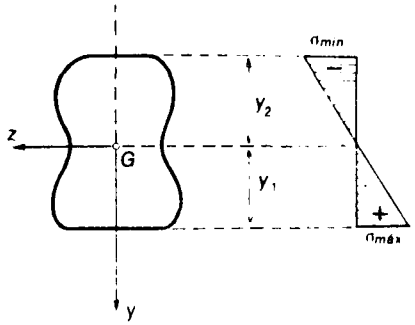


Fig. 11.4

Cuando la sección es tal que el eje neutro es a la vez eje de simetría resulta:

$$y_1 = y_2 = y_{máx.} \qquad [11.13]$$

y en consecuencia:

$$|\sigma_{máx.}| = |\sigma_{mín.}|, \qquad [11.14]$$

transformándose las [11.12] en la siguiente expresión única:

$$\sigma_{\substack{máx.\\mín.}} = \pm \frac{M}{J_n} y_{máx.} \qquad [11.15]$$

Si hacemos:

$$\frac{J_n}{y_{máx.}} = W, \qquad [11.16]$$

donde W resulta ser una magnitud cuya dimensión es el cubo de una longitud (cm^3 por ejemplo), la [11.15] se transforma en:

$$\sigma_{\substack{máx.\\mín.}} = \pm \frac{M}{W} \qquad [11.17]$$

W se conoce como *módulo resistente* de la sección.

Puede también extenderse el concepto de módulo resistente al caso de secciones cuyo eje neutro no sea eje de simetría.

Por ejemplo, si en las [11.12] hacemos.

$$\left.\begin{aligned} \frac{J_n}{y_1} &= W_1 \\ \frac{J_n}{y_2} &= W_2 \end{aligned}\right\} \qquad [11.18]$$

se transforman en:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{máx.} &= +\frac{M}{W_1} \\ \sigma_{mín.} &= -\frac{M}{W_2} \end{aligned}\right\} \qquad [11.19]$$

donde los valores W_1 y W_2, representan módulos resistentes para las zonas de tracción y compresión respectivamente.

La fórmula de la flexión, en cualquiera de sus dos expresiones:

$$\sigma_{\substack{máx.\\mín.}} = \pm \frac{M}{J_n} y_{máx.} = \pm \frac{M}{W}, \qquad [11.20]$$

nos permite resolver dos problemas de suma importancia:

a) el dimensionado de secciones solicitadas a flexión;

b) la verificación de una sección determinada.

De ambos problemas nos ocuparemos a continuación.

11.2.1. Dimensionado de secciones

El dimensionado de una sección sujeta a flexión es un problema fundamental del cálculo de estructuras. Consiste en determinar las dimensiones de una sección dada, de modo que las tensiones normales que se originan, no superen los valores admisibles que establecen los reglamentos pertinentes para el tipo de estructura de que se trate, para el destino de ésta y la naturaleza del material empleado.

Debemos distinguir entre los materiales cuya resistencia es la misma a la tracción que a la compresión, y aquellos en que ambas resistencias son distintas.

Al primer caso corresponde el acero y, en general, los materiales dúctiles, y al segundo los frágiles, que normalmente poseen mayor resistencia a la compresión que a la tracción.

En el caso de la madera, la resistencia varía según sea la dirección de las tensiones con respecto a la de las fibras, pero se acostumbra a tomar un valor de la tensión admisible sin diferenciar si es de compresión o de tracción.

Para secciones de acero, en la fórmula de flexión puede prescindirse del signo, por cuanto las tensiones admisibles a tracción y a compresión son iguales.

Si se trata de proyectar una sección solicitada por un momento flexor dado M, sus características geométricas deben ser tales que la tensión normal máxima sea igual o menor que la admisible, es decir:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{M}{J_n} y_{\text{máx.}} \leqslant \sigma_{\text{adm.}} \qquad [11.21]$$

Si la sección es simétrica respecto del eje neutro y está constituida por un material de igual tensión admisible a tracción que compresión, tendremos:

$$\sigma_{\text{adm.}} = \frac{M}{W_{\text{nec.}}}, \qquad [11.22]$$

o también:

$$W_{\text{nec.}} = \frac{M}{\sigma_{\text{adm.}}}. \qquad [11.23]$$

El módulo resistente W es función de las características geométricas de la sección. A continuación daremos las expresiones de W correspondientes a distintas secciones de uso corriente.

1º) *Sección cuadrada*

a) Con respecto a un eje baricéntrico paralelo a un lado:

$$W = \frac{J}{a/2} = \frac{2a^4}{12a} = \frac{a^3}{6} \qquad [11.24]$$

b) Con respecto a un eje baricéntrico paralelo a una diagonal:

$$W = \frac{2J}{\sqrt{2}\,a} = \frac{2a^4}{\sqrt{2}\,12a} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \qquad [11.25]$$

2º) *Sección rectangular de base b y altura h*

Con respecto a un eje baricéntrico paralelo a la base:

$$W = \frac{2J}{h} = \frac{2bh^3}{12h} = \frac{bh^2}{6}. \qquad [11.26]$$

3º) *Sección circular llena*

Con respecto a un diámetro

$$W = \frac{2J}{D} = \frac{\pi D^3}{32}. \qquad [11.27]$$

4º) *Sección circular hueca*

$$W = \frac{2J}{D_2} = \frac{2\pi(D_2^4 - D_1^4)}{64D_2} = \frac{\pi D_2^3}{32}\left(1 - \frac{D_1^4}{D_2^4}\right) \qquad [11.28]$$

Determinado el valor necesario de W, si la sección responde a uno de los tipos anteriores, se determinan sus dimensiones como sigue:

1º) *Sección cuadrada*

$$a = \sqrt[3]{6\,W_{\text{nec.}}} \qquad [11.29]$$

2º) *Sección circular llena*

$$D = \sqrt[3]{\frac{32\,W_{\text{nec.}}}{\pi}} \qquad [11.30]$$

3º) *Sección circular hueca*

En este caso es necesario establecer *a priori* la relación de sus diámetros. Si llamamos α a dicha relación, es decir si:

$$\alpha = \frac{D_1}{D_2}, \qquad [11.31]$$

resulta, para el valor del diámetro externo:

$$D_2 = \sqrt[3]{\frac{32\,W_{\text{nec.}}}{\pi(1-\alpha^4)}} \qquad [11.32]$$

4º) *Sección rectangular*

En este caso el problema tiene dos incógnitas: b y h, por lo que es necesario establecer *a priori* una relación entre ambas magnitudes.

La sección rectangular sujeta a flexión se utiliza principalmente en vigas de madera o de hormigón. El proyecto y cálculo de estas últimas cuando son armadas, escapa a los alcances de la presente obra.

En cuanto a las de madera, las escuadrías comunes responden a relaciones de lados iguales generalmente a 1:3 ó 1:4. Generalizando llamaremos β a la relación base/altura:

$$\beta = \frac{b}{h}, \qquad [11.33]$$

en consecuencia, $b = \beta h$ y reemplazando en [10.26]:

$$W = \frac{\beta h^3}{6} \qquad [11.34]$$

de donde:

$$h = \sqrt[3]{\frac{6\,W_{nec.}}{\beta}} \qquad [11.35]$$

La expresión [11.20] nos dice que, para un determinado valor del momento flexor, la tensión máxima será tanto menor cuanto mayor sea el momento de inercia de la sección con respecto al eje neutro.

Para secciones de igual área, el momento de inercia respecto de un eje baricéntrico será tanto mayor cuanto más alejada de aquél se encuentre distribuida la superficie de la sección. Por ello ha dado origen a los denominados "perfiles laminados" de acero, o también "perfiles normales", utilizados en construcciones metálicas tanto civiles como mecánicas y navales.

Existen numerosos tipos de perfiles laminados, los que se encuentran normalizados en lo que respecta a sus dimensiones. Estos perfiles aparecen tabulados en los principales manuales de Ingeniería[1], y en dichas tablas, aparte de las dimensiones de la sección, se dan las coordenadas del baricentro, los momentos de inercia, módulos resistentes y radios de giro respecto de dos ejes ortogonales y de los ejes principales de inercia.

Los tipos de sección más comunes son los que muestra la figura 11.5 y cuyas designaciones son:

(a) (b) (c) (d) (e) (f)

Fig. 11.5

a) perfil doble **T**; b) perfil **U**; c) perfil **L** de alas desiguales; d) perfil **L** de alas iguales; e) perfil **Z** y f) perfil *Grey* o *Differdingen*, o también doble **T** de alas anchas, todos ellos constituidos por un *alma*, vertical, de pequeño espesor, y una o dos *alas*, según el caso, horizontales, dispuestas en los extremos del alma.

[1] Véase, p. ej. Hütte, *Manual del Ingeniero*, *Stahl im Hochbau*, Foerster: *Estática de las Construcciones*; Schleicher, *Manual del Ingeniero*, etc.

31901 - ESTABILIDAD II

De este modo se consigue aumentar el momento de inercia de la sección, con un área reducida.

El cálculo directo o de proyecto de la sección, se realiza como sigue.

Determinado mediante la expresión [11.23] el $W_{nec.}$, y elegido un tipo de perfil normal, se busca en la tabla correspondiente el número de perfil cuyo módulo resistente sea igual o mayor que el necesario, de modo que se cumpla:

$$W \geqslant W_{nec.} \qquad [11.36]$$

y con ello se tiene resuelto el problema.

En ciertos casos especiales interesa un máximo aprovechamiento del material, por razones económicas, de modo que es necesario proyectar la pieza, o elemento constructivo o mecánico, de forma tal que para todas las secciones la máxima tensión normal sea igual a la tensión admisible. Ello conduce a piezas de sección variable por que, salvo el caso de solicitación por flexión pura, el momento flexor varía de sección a sección y, consecuentemente, de acuerdo con la [11.23] al variar M, también varía $W_{nec.}$ y con él las dimensiones de la sección.

A título de ejemplo, analizaremos a continuación una viga de sección rectangular empotrada en su extremo y sujeta a dos casos distintos de carga:

1) carga concentrada P en el extremo libre, y

2) carga distribuida q sobre toda la luz de la viga (fig. 11.6).

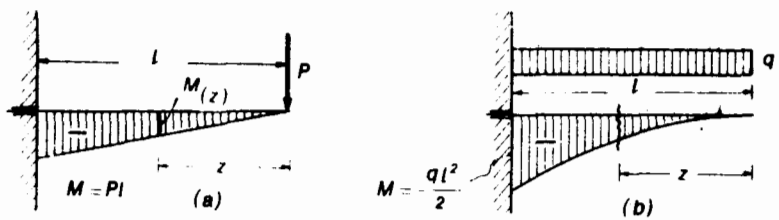


Fig. 11.6

En el caso (a), para una sección ubicada a una abscisa z del extremo libre tenemos:

$$M_{(z)} = -Pz\,. \qquad [11.37]$$

Teniendo en cuenta que para la sección rectangular:

$$W = \frac{b\,h^2}{6}\,, \qquad [11.38]$$

reemplazando en la [11.23] resulta:

$$\frac{b h^2}{6} = \frac{M_{(z)}}{\sigma_{\text{adm.}}} = \frac{Pz}{\sigma_{\text{adm.}}} \qquad [11.39]$$

de donde:

$$b h^2 = 6 \frac{Pz}{\sigma_{\text{adm.}}} \qquad [11.40]$$

En este caso se presentan dos posibilidades, a saber: que se mantenga constante el ancho y varíe la altura, o la situación inversa, que se mantenga h y varíe el ancho de la sección.

La primera variante conduce a:

$$h_{(z)} = \sqrt{\frac{6Pz}{b\,\sigma_{\text{adm.}}}}\,, \qquad [11.41]$$

y la segunda a:

$$b_{(z)} = \frac{6Pz}{h^2\,\sigma_{\text{adm.}}}\,. \qquad [11.42]$$

En el primer caso la altura varía en función de una parábola de grado $\frac{1}{2}$ y en el segundo, la variación del ancho es lineal.

Para el caso (b) tenemos:

$$M_{(z)} = -\frac{q\,z^2}{2}\,, \qquad [11.43]$$

de donde:

$$\frac{b h^2}{6} = \frac{q\,z^2}{2\,\sigma_{\text{adm.}}}\,. \qquad [11.44]$$

Si mantenemos constante b, la variación de la altura es:

$$h_{(z)} = \sqrt{\frac{3\,q}{b\,\sigma_{\text{adm.}}}} \cdot z \qquad [11.45]$$

es decir, lineal. En cambio, si mantenemos constante la altura, resulta:

$$b_{(z)} = \frac{3q}{h^2\,\sigma_{\text{adm.}}} \cdot z^2\,, \qquad [11.46]$$

o sea, parabólica.

11 . 2 . 2 . Verificación de secciones

En ciertos casos, conocidas la forma y las dimensiones de una sección y además el valor del momento flexor que la solicita, es necesario verificar si la máxima tensión normal supera o no el valor de la tensión admisible. Como en este caso se conoce el módulo resistente de la sección, sea por cálculo previo partiendo de su forma y dimensiones, o se lo obtenga de tablas (caso de perfiles

laminados), aplicamos directamente las fórmulas [11.19] o [11.21] según el caso, obteniendo el valor de $\sigma_{\text{máx.}}$ que debe resultar:

$$\sigma_{\text{máx.}} \leqslant \sigma_{\text{adm.}} \qquad [11.47]$$

Otro caso que suele presentarse es aquel para el cual, dada una determinada sección de un cierto material, se pide determinar el máximo valor del momento flexor que es capaz de soportar sin sobrepasar en ningún punto la máxima tensión admisible. En este caso, como conocemos el módulo resistente de la sección y la tensión admisible, de la [11.23] despejamos:

$$M_{\text{adm.}} = \sigma_{\text{adm.}}\,W. \qquad [11.48]$$

Analizaremos a continuación el caso de la sección cuadrada, para la cual, si bien el momento de inercia respecto de cualquier eje baricéntrico es constante, no ocurre lo mismo con el módulo resistente.

Sea, por ejemplo, la sección cuadrada de lado a de figura 11.7, sujeta a un mismo momento flexor M cuya línea de fuerzas coincide en un caso con el eje vertical paralelo a un lado (a) y en el otro, con una diagonal (b).

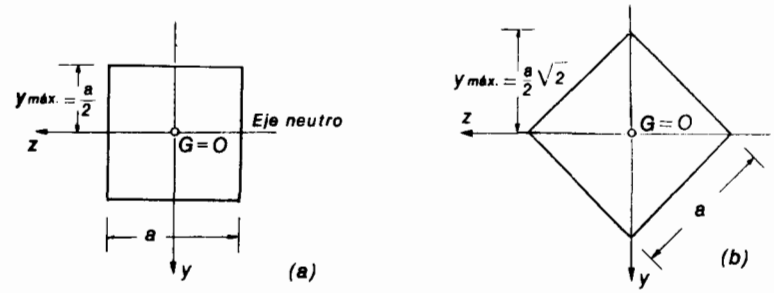


Fig. 11.7

Para ambos casos:

$$J_n = \frac{a^4}{12}\,, \qquad [11.49]$$

pero los valores de los módulos resistentes varían, teniéndose:

caso a

$$W = \frac{a^3}{6}\,, \qquad [11.50]$$

caso b

$$W = \frac{2a^4}{12\sqrt{2}\,a} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}\,, \qquad [11.51]$$

y las correspondientes tensiones máximas:

caso a

$$\sigma'_{\text{máx.}} = \pm \frac{6\,M}{a^3}\,, \qquad [11.52]$$

caso b

$$\sigma''_{\text{máx.}} = \pm \frac{6\sqrt{2}}{a^3}\,M. \qquad [11.53]$$

La relación entre ambas tensiones resulta ser:

$$k = \frac{\sigma''_{\text{máx.}}}{\sigma'_{\text{máx.}}} = \sqrt{2} \cong 1{,}41\,, \qquad [11.54]$$

es decir que, para la sección cuadrada, cuando la línea de fuerzas coincide con una de las diagonales, la tensión máxima de flexión resulta ser 41% mayor que si aquella coincide con un eje paralelo a un lado.

Consideremos nuevamente la sección cuadrada, dispuesta en forma que la línea de fuerzas coincida con una diagonal (fig. 11.8).

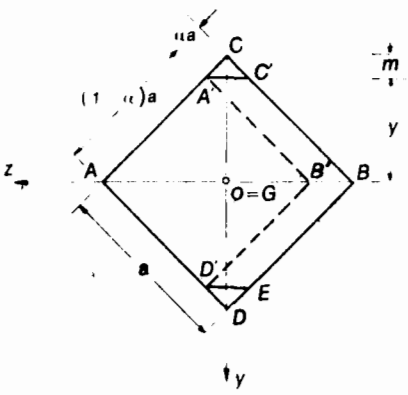


Fig. 11.8

Si en dicha sección suprimimos los vértices C' y D' cortando con rectas paralelas al eje z, el módulo resistente aumenta hasta un cierto valor para luego disminuir, como veremos a continuación.

Estableceremos en primer lugar la expresión del módulo resistente W' en función de α, fracción menor que la unidad, a su vez función de m, distancia del plano de corte al vértice, para luego por derivación calcular el valor de α que hace máximo a W.

El momento de inercia de la sección $AA'C'BED'$, con los vértices C' y D' cortados, con respecto del eje z (fig. 11.8) es igual a la suma de los momentos de inercia del cuadrado $AA'B'D'$ y de los paralelogramos $A'C'BB'$ y $BB'D'E$, estos últimos iguales entre sí.

Llamando αa la parte del lado que se suprime, con la notación de la figura resulta:

$$J'_z = \frac{a^4}{12}(1-\alpha)^4. \qquad [11.55]$$

$$J''_z = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,\alpha a\left[\frac{a}{2}\sqrt{2}\,(1-\alpha)\right]^3 = \frac{a^4}{3}\,\alpha\,(1-\alpha)^3, \qquad [11.56]$$

y finalmente:

$$J_z = \frac{a^4\,(1-\alpha)^3}{12}\,[4\alpha + (1-\alpha)] = \frac{a^4}{12}\,(1+3\alpha)\,(1-\alpha)^3\,. \qquad [11.57]$$

El valor correspondiente del módulo resistente es:

$$W = \frac{J_z}{y} = \frac{a^4}{12y}\,(1+3\alpha)\,(1-\alpha)^3\,, \qquad [11.58]$$

y como:

$$y = \frac{a\,(1-\alpha)\sqrt{2}}{2}\,, \qquad [11.59]$$

resulta:

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{2a^4\,(1+3\alpha)\,(1-\alpha)^3}{12a\,(1-\alpha)\sqrt{2}} \\ W &= \frac{\sqrt{2}}{12}\,a^3\,(1+3\alpha)\,(1-\alpha)^2 \end{aligned}\right\} \qquad [11.60]$$

Al variar α, varía W y el valor de la variable que hace máximo a W lo obtendremos derivando respecto de α la expresión [11.60] e igualando a cero:

$$\frac{dW}{d\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{12}\,a^3\,[(1-\alpha)^2\cdot 3 - 2\,(1+3\alpha)\,(1-\alpha)] = 0\,, \qquad [11.61]$$

de donde:

$$\alpha = \frac{1}{9} \cong 0{,}111\,. \qquad [11.62]$$

Reemplazando este valor de α en la [11.60] obtenemos:

$$W_{\text{máx.}} = 1{,}053\,\frac{\sqrt{2}}{12}\,a^3 = 1{,}053\,W. \qquad [11.63]$$

Se observa que, si a la sección cuadrada dispuesta con una diagonal coincidente con la línea de fuerzas se le cortan los vértices superior e inferior a una distancia igual a 1/9 de la longitud de la semidiagonal, el módulo resistente de la sección aumenta en un 5,3%, y consecuentemente, para un mismo valor del momento flexor las tensiones máximas se reducen del mismo porcentual.

11.2.3. Deformaciones en la flexión pura normal

En el planteo del problema de la flexión vimos que las secciones giran las unas respecto de las otras. Tal es lo que ocurre con la sección *2–2* con respecto de la *1–1*, fig. 11.9, donde θ mide el giro relativo de una sección respecto de la otra.

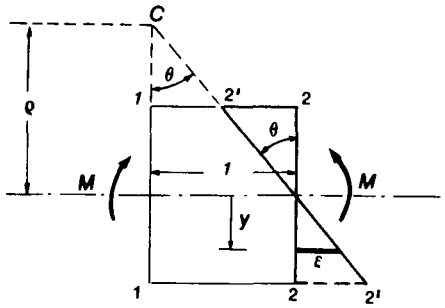


Fig. 11.9

Teniendo en cuenta que la separación entre ambas secciones es unitaria, el alargamiento de la fibra situada a una distancia y del eje neutro es directamente ϵ, deformación específica.

Si llamamos ρ al radio de curvatura de la sección deformada, con la notación de la figura tenemos:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon}{y}, \qquad [11.64]$$

y recordando que:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{M}{EJ_n} y, \qquad [11.65]$$

reemplazando resulta:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_n}, \qquad [11.66]$$

ecuación fundamental de las deformaciones por flexión, que relaciona la curvatura de la sección con la solicitación de ésta, sus características geométricas y la naturaleza del material de la pieza.

Esta expresión es válida para ambas formas de flexión simple normal, por

cuanto la existencia de un esfuerzo de corte no afecta la curvatura de la pieza. En consecuencia, la [11.66] nos da el valor de la curvatura de la deformada del eje de la pieza, denominada *línea elástica.*

Estableceremos a continuación la relación funcional que gobierna la deformación del eje de la pieza y que nos permite calcular los corrimientos verticales experimentados por los baricentros de las distintas secciones. Para ello, analizaremos la viga simplemente apoyada de figura 11.10, deformada por efectos de

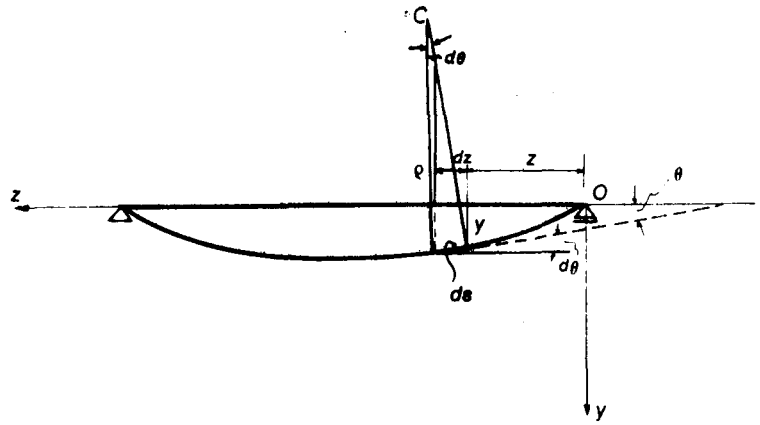


Fig. 11.10

un sistema de cargas arbitrarias (no representado en la figura). Una sección cualquiera, ubicada a una abscisa z, experimenta una rotación absoluta θ, medida por el ángulo que forma la tangente a la elástica en correspondencia con el baricentro de la sección, con el eje de la pieza antes de la deformación. Además, su baricentro sufre un corrimiento vertical y. La sección situada a una distancia dz de la anterior, gira respecto de ésta de un ángulo $d\theta$ y si ρ es el radio de curvatura de la línea elástica, resulta:

$$ds = \rho\, d\theta, \qquad [11.67]$$

también:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}. \qquad [11.68]$$

Teniendo en cuenta que los valores de θ son muy pequeños, podemos admitir, sin mayor error, que:

$$ds \cong dz, \qquad [11.69]$$

y reemplazando:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz}. \qquad [11.70]$$

Por otra parte tenemos que:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dz}, \qquad [11.71]$$

y por ser la deformación infinitésima, la inclinación de las tangentes a la elástica también lo es, y en consecuencia podemos escribir:

$$\theta \cong \operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dz}, \qquad [11.72]$$

de donde reemplazando en [11.70] llegamos a:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz} = \frac{d^2y}{dz^2}. \qquad [11.73]$$

Ahora bien, para los ejes coordenados adoptados, vemos que a valores crecientes de z corresponden valores decrecientes de θ. En consecuencia, en la [11.73] debemos afectar el segundo miembro del signo menos, obteniendo:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2y}{dz^2} \qquad [11.74]$$

Reemplazando en la anterior $1/\rho$ por su valor de la [11.66] llegamos finalmente a:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{M_{(z)}}{EJ_n} \qquad [11.75]$$

que es la ecuación diferencial de la línea elástica.

Esta expresión es aplicable solamente cuando los corrimientos y son muy reducidos. En caso contrario, para elementos estructurales de poca rigidez donde los valores de y son considerables, es necesario tener en cuenta la expresión rigurosa de la curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d^2y}{dz^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad [11.76]$$

que conduce a la siguiente expresión para la línea elástica:

$$\frac{\dfrac{d^2y}{dz^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{M_{(z)}}{EJ_n} \qquad [11.77]$$

Como es fácil de observar, la [11.77] se transforma en la [11.75] para

pequeñas deformaciones. En efecto, si y es reducida, también lo es dy/dz, y su cuadrado es despreciable en comparación con la unidad, con lo que el denominador de la [11.77] resulta de valor unitario.

Conocida en cada caso la función que define la variación del momento flexor, por integración de la [11.75] se determina la correspondiente ecuación de la línea elástica, que permite establecer el corrimiento máximo o flecha máxima, cuyo conocimiento es de importancia.

En efecto, al proyectar una estructura no basta que las dimensiones de sus secciones se determinen de forma tal que las tensiones no sobrepasen los valores admisibles. En determinados casos, es necesario hacerlo de modo que los máximos corrimientos no superen determinados valores, por razones estéticas o constructivas. A continuación, estableceremos las ecuaciones de la línea elástica para distintos elementos estructurales y diversos estados de carga.

a) Viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida (fig. 11.11)

La expresión del momento flexor en una sección genérica situada a la abscisa z es:

$$M_{(z)} = \frac{1}{2}\, p \cdot (lz - z^2) \qquad [11.78]$$

en consecuencia, la [11.75] resulta en este caso:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{p}{EJ_n}\,(lz - z^2) \qquad [11.79]$$

Admitiendo la constancia de E y J_n, integrando tenemos:

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{p}{2EJ_n}\left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right) + C \qquad [11.80]$$

$$y = -\frac{p}{2EJ_n}\left(\frac{lz^3}{6} - \frac{z^4}{12}\right) + C \cdot z + C_1 \qquad [11.81]$$

Las constantes de integración las determinaremos en función de las condiciones de contorno.

Es evidente que, dadas las condiciones de sustentación, para $z = 0$ y $z = l$ debe tenerse $y = 0$. En consecuencia, si:

$$z = 0: \qquad C_1 = 0 \qquad [11.82]$$

y si

$$z = l: \qquad 0 = -\frac{p}{2EJ_n}\left(\frac{l^4}{6} - \frac{l^4}{12}\right) + Cl \qquad [11.83]$$

y finalmente:

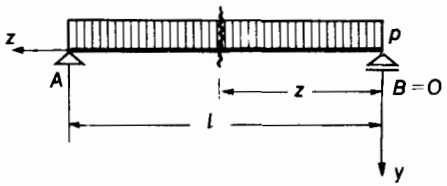


Fig. 11.11

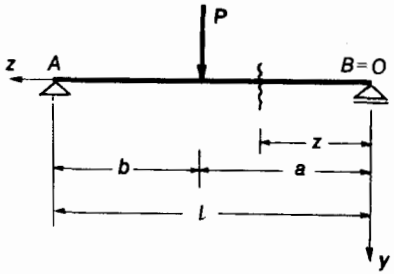


Fig. 11.12

$$C = \frac{p\,l^3}{24\,EJ_n} \qquad [11.84]$$

En consecuencia, la ecuación de la línea elástica resulta:

$$y = -\frac{p}{2\,EJ_n}\left(\frac{lz^3}{6} - \frac{z^4}{12}\right) + \frac{p\,l^3}{24\,EJ_n} \cdot \qquad [11.85]$$

o también:

$$y = \frac{p\,l^4}{24\,EJ_n}\left(\frac{z^4}{l^4} - 2\frac{z^3}{l^3} + \frac{z}{l}\right) \qquad [11.86]$$

Calcularemos ahora la flecha máxima:

Es evidente que para que y sea máxima, debe ser $dy/dz = 0$.

Reemplazando en la [11.80] C por su valor de la [11.84] e igualando a cero, obtenemos finalmente:

$$z = \frac{l}{2}. \qquad [11.87]$$

Ello era por demás evidente, por cuanto, por razones de simetría de figura y de carga, la elástica de deformación debe ser simétrica respecto del centro de la luz y, en consecuencia, la flecha máxima debe corresponder con éste. Reemplazando el valor de z dado por la [11.87] en la [11.86] llegamos a la expresión de la flecha máxima.

$$f_{\text{máx.}} = \frac{5}{384}\,\frac{pl^4}{EJ_n} \qquad [11.88]$$

b) *Viga simplemente apoyada con una carga concentrada* (fig. 11.12)

Analizaremos el caso general de una carga concentrada en una posición cualquiera $z = a$, fig. 11.12.

Debemos considerar dos posibilidades para la expresión del momento flexor:

1) $0 < z < a$

$$M_{(z)} = \frac{Pb}{l}\,z \qquad [11.89]$$

2) $a < z < l$

$$M_{(z)} = \frac{Pa}{l}\,(l - z) \qquad [11.90]$$

En el primer caso tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dz^2} &= -\frac{Pb}{lEJ_n}\,z \\ \frac{dy}{dz} &= -\frac{Pbz^2}{2lEJ_n} + C \\ y &= -\frac{Pb\,z^3}{6lEJ_n} + C\cdot z + C_1 \end{aligned}\right\} \qquad [11.91]$$

y en el segundo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dz^2} &= -\frac{Pa}{lEJ_n}\,(l - z) \\ \frac{dy}{dz} &= -\frac{Pa}{lEJ_n}\left(lz - \frac{z^2}{2}\right) + C' \\ y &= -\frac{Pa}{lEJ_n}\left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) + C'\cdot z + C'_1 \end{aligned}\right\} \qquad [11.92]$$

Para la determinación de las constantes de integración procederemos como sigue:

Para $z = 0$ debe anularse la tercera de las [11.91]. En consecuencia:

$$C_1 = 0 \qquad [11.93]$$

En razón de la continuidad entre ambos tramos de la elástica, debemos tener, para $z = a$, que ambas expresiones de y deben ser iguales, ocurriendo lo mismo con las primeras derivadas, por ser única la tangente a la elástica en dicho punto. En consecuencia, reemplazando en las correspondientes expresiones z por a, luego de algunas transformaciones, llegamos a:

$$C = C' - \frac{Pa^2}{2EJ_n} \qquad [11.94]$$

y

$$C_1' = -\frac{Pa^3}{6EJ_n} \qquad [11.95]$$

Finalmente, para $z = l$, debe anularse la tercera de las [11.92]. En consecuencia, reemplazando resulta finalmente:

$$C = \frac{P \cdot a}{6lEJ_n}(2l^2 + a^2 - 3al). \qquad [11.96]$$

Conocidos los valores de las cuatro constantes de integración, las expresiones de las ecuaciones de la elástica correspondientes a ambos tramos son:

a) para $0 < z < a$:

$$y = -\frac{Pbz^3}{6lEJ_n} + \frac{P \cdot a}{6lEJ_n}(2l^2 + a^2 - 3al)z. \qquad [11.97]$$

b) para $a < z < l$:

$$y = -\frac{P \cdot a}{lEJ_n}\left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) + \frac{P \cdot a}{6lEJ_n}(2l^2 + a^2 - 3al)z + \frac{Pa^2z}{2EJ_n} - \frac{Pa^3}{6EJ_n} \qquad [11.98]$$

Para el caso particular que la carga P actúe en el centro de la luz, es decir si $a = b = l/2$, la [11.97] se transforma en:

$$y = \frac{P}{12EJ_n}\left(\frac{3}{4}zl^2 - z^3\right), \qquad [11.99]$$

y la [11.98] en:

$$y = -\frac{P}{12EJ_n}(3lz^2 - z^3) + \frac{P}{12EJ_n}\left(2l^2 + \frac{l^2}{4} - \frac{3}{2}l^2\right)z +$$

$$+ \frac{Pl^2}{8EJ_n}z - \frac{Pl^3}{48EJ_n} = \frac{Pl^3}{48EJ_n}\left(4\frac{z^3}{l^3} - 12\frac{z^2}{l^2} + 9\frac{z}{l} - 1\right) \qquad [11.100]$$

Por razones de simetría la flecha máxima resulta en el centro de la luz, o sea para $z = l/2$, valor que reemplazado en las [11.99] u [11.100] nos conduce, como es lógico, al mismo valor de la flecha máxima:

$$y = \frac{Pl^3}{48EJ_n}. \qquad [11.101]$$

c) *Viga empotrada con una carga en el extremo libre* (fig. 11.13)

Para una sección ubicada a una abscisa z del extremo (origen de coordenadas), el momento flexor vale:

$$M_{(z)} = -Pz. \qquad [11.102]$$

En consecuencia, la ecuación diferencial de la elástica será en este caso:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{Pz}{EJ_n}, \qquad [11.103]$$

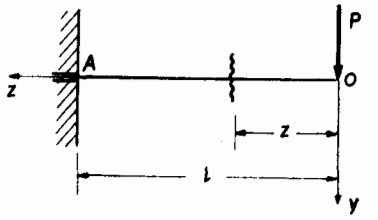


Fig. 11.13

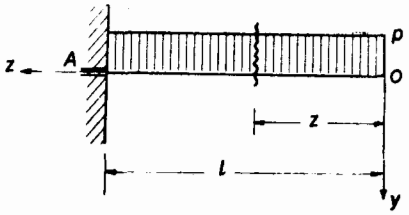


Fig. 11.14

que integrada conduce a:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dz} &= \frac{Pz^2}{2EJ_n} + C \\ y &= \frac{Pz^3}{6EJ_n} + C \cdot z + C_1 \end{aligned}\right\} \qquad [11.104]$$

Por existir en A un empotramiento, la flecha en dicho punto debe ser nula y la tangente a la elástica, horizontal.

En consecuencia, para $z = l$ deben ser:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dz} &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [11.105]$$

Reemplazando dicho valor de z en las [11.104] tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Pl^2}{2EJ_n} + C = 0 \\ \frac{Pl^3}{6EJ_n} + Cl + C_1 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [11.106]$$

de donde:

$$C = -\frac{Pl^2}{2EJ_n} \qquad [11.107]$$

y

$$C_1 = \frac{Pl^3}{3EJ_n} \qquad [11.108]$$

Finalmente, reemplazando en la 2a. de las [11.104] llegamos a la ecuación de la elástica:

$$y = \frac{P}{6EJ_n}(z^3 - 3zl^2 + 2l^3). \qquad [11.109]$$

La flecha máxima corresponde a $z = 0$ y su valor resulta ser:

$$y_{\text{máx.}} = \frac{Pl^3}{3EJ_n}. \qquad [11.110]$$

d) *Viga empotrada con carga uniformemente distribuida* (fig. 11.14)

En este caso el momento flexor en una sección ubicada a una distancia z del origen vale:

$$M_{(z)} = -p\frac{z^2}{2}, \qquad [11.111]$$

y la ecuación diferencial de la elástica:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{pz^2}{2EJ_n} \qquad [11.112]$$

que integrada conduce a:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{pz^3}{6EJ_n} + C \qquad [11.113]$$

$$y = \frac{pz^4}{24EJ_n} + C \cdot z + C_1 \qquad [11.114]$$

Para $z = l$ debe ser, por las condiciones de sustentación:

$$y = \frac{dy}{dz} = 0 \qquad [11.115]$$

En consecuencia, de las [11.113] y [11.114] resulta:

$$C = -\frac{pl^3}{6EJ_n}, \qquad [11.116]$$

y

$$C_1 = \frac{pl^4}{6EJ_n} - \frac{pl^4}{24EJ_n} = \frac{pl^4}{8EJ_n}, \qquad [11.117]$$

y finalmente, reemplazando los valores de las constantes en la [11.114] obtenemos la ecuación de la elástica, cuya expresión es la siguiente:

$$y = \frac{p}{24EJ_n}(z^4 - 4l^3z + 3l^4). \qquad [11.118]$$

La flecha máxima corresponde a $z = 0$ y su valor es:

$$y_{\text{máx.}} = \frac{pl^4}{8EJ_n}. \qquad [11.119]$$

e) *Viga empotrada con carga lineal de diagrama triangular*

A este caso corresponden dos variantes en lo que respecta a la forma del diagrama de cargas, como puede observarse en la figura 11.15. En la 1a. variante,

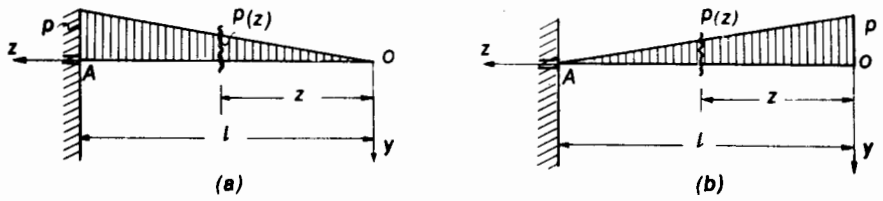


Fig. 11.15

la ordenada de carga es nula en correspondencia con el extremo libre de la viga (a), y en la segunda lo es en el extremo empotrado (b). Analizaremos a continuación ambas variantes.

Variante 1a.)

La expresión del momento flexor es:

$$M_{(z)} = -\frac{pz^3}{6l}, \qquad [11.120]$$

y la correspondiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{pz^3}{6lEJ_n}, \qquad [11.121]$$

que por sucesivas integraciones conduce a:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{pz^4}{24\,lEJ_n} + C \qquad [11.122]$$

$$y = \frac{pz^5}{120\,lEJ_n} + C \cdot z + C_1 \qquad [11.123]$$

Para $z = l$ debemos tener:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dz} &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [11.124]$$

de donde:

$$C = -\frac{pl^3}{24\,EJ_n} \qquad [11.125]$$

y

$$C_1 = \frac{pl^4}{30\,EJ_n}. \qquad [11.126]$$

Finalmente, reemplazando estos valores en la [11.123] llegamos a la ecuación de la elástica:

$$y = \frac{p}{120\,EJ_n\,l}\,(z^5 - 5zl^4 + 4l^5), \qquad [11.127]$$

y su valor máximo para $z = 0$:

$$y_{\text{máx.}} = \frac{pl^4}{30\,EJ_n} \qquad [11.128]$$

Variante 2a.)

En este caso, la ordenada de carga, en correspondencia con la sección de abscisa z, vale:

$$p(z) = \frac{l-z}{l}\,p, \qquad [11.129]$$

de donde, la expresión del momento flexor resulta ser:

$$M(z) = -\left[\frac{pz^2}{3EJ_n} + \frac{p(l-z)}{6lEJ_n}z^2\right] \qquad [11.130]$$

La correspondiente ecuación diferencial es:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{pz^2}{3EJ_n}\left(1 + \frac{l-z}{2l}\right), \qquad [11.131]$$

que integrada da:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{p}{3EJ_n}\left(\frac{z^3}{3} + \frac{z^3}{6} - \frac{z^4}{8l}\right) + C \qquad [11.132]$$

$$y = \frac{p}{3EJ_n}\left(\frac{z^4}{8} - \frac{z^5}{40l}\right) + C_z + C_1 \qquad [11.133]$$

Obtenemos los valores de las constantes de integración haciendo en ambas expresiones $z = l$, valor para el cual, tanto la función como su derivada primera se anulan.

En consecuencia, llegamos a los siguientes valores para las constantes:

$$C = -\frac{pl^3}{8EJ_n}, \qquad [11.134]$$

$$C_1 = \frac{11}{120} \cdot \frac{pl^4}{EJ_n}, \qquad [11.135]$$

y por último, la expresión de la ecuación de la elástica:

$$y = \frac{p}{120\,lEJ_n}\,(-z^5 + 5z^4 l - 15zl^4 + 11l^5). \qquad [11.136]$$

Finalmente, la flecha máxima, que corresponde a $z = 0$ resulta:

$$y_{\text{máx.}} = \frac{11}{120}\,\frac{pl^4}{EJ_n}. \qquad [11.137]$$

Comparando esta flecha máxima con la dada por [11.128], vemos que resulta ser 2,75 veces mayor que aquella.

f) ***Viga simplemente apoyada con carga lineal de diagrama triangular*** (fig. 11.16)

La expresión del momento flexor, en este caso:

$$M(z) = \frac{p}{6}\left(lz - \frac{z^3}{l}\right). \qquad [11.138]$$

y la ecuación diferencial de la elástica:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{p}{6EJ_n}\left(lz - \frac{z^3}{l}\right), \qquad [11.139]$$

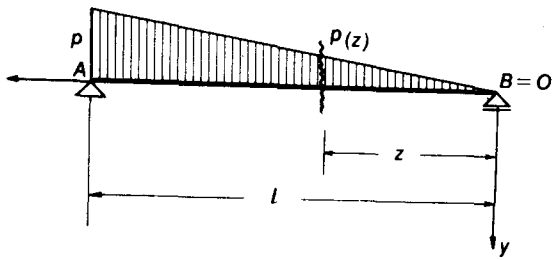


Fig. 11.16

Integrando:

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{p}{6EJ_n}\left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^4}{4l}\right) + C \qquad [11.140]$$

$$y = -\frac{p}{6EJ_n}\left(\frac{lz^3}{6} - \frac{z^5}{20l}\right) + C_z + C_1 \qquad [11.141]$$

en consecuencia:

$$C_1 = 0 \qquad [11.142]$$

y

$$C = +\frac{p}{6EJ_n}\left(\frac{l^3}{6} - \frac{l^3}{20}\right), \qquad [11.143]$$

o, también:

$$C = +\frac{7}{360}pl^3. \qquad [11.144]$$

Reemplazando la [11.141] llegamos a la ecuación de la elástica:

$$y = -\frac{p}{6EJ_n}\left(lz^3 - \frac{z^5}{20l}\right) + \frac{7}{360}pl^3z. \qquad [11.145]$$

La flecha máxima la determinamos igualando a cero la primera derivada de [11.145]

$$\frac{p}{6EJ_n} = \frac{lz^2}{2} - \frac{z^4}{4l} - \frac{7}{360}\cdot\frac{pl^3}{EJ_n} = 0. \qquad [11.146]$$

Despejando el valor de z obtenemos:

$$z = 0{,}519\,l, \qquad [11.147]$$

que reemplazado en la [11.145] nos conduce a la flecha máxima cuyo valor es:

$$y_{\text{máx.}} = 0{,}00652\,\frac{pl^4}{EJ_n}. \qquad [11.148]$$

11.2.4. Cambio de forma de la sección

La hipótesis de *Bernouilli–Navier*, sobre la que se apoya el estudio de la flexión, establece la conservación de las secciones planas, pero no hace referencia alguna de si éstas mantienen o no su forma. Como veremos, las secciones no mantienen su forma en la deformación por flexión, por cuanto experimentan deformaciones transversales. Analizaremos a continuación qué ocurre en una sección sujeta a flexión pura que, por razones de facilidad de comprensión, supondremos rectangular.

Sea, a título de ejemplo, la sección de figura 11.17 solicitada por un par flexor de momento M.

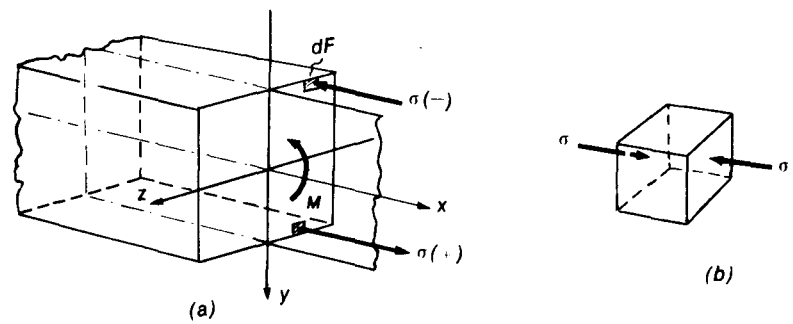


Fig. 11.17

Una fibra cualquiera, correspondiente al borde superior, por ejemplo (fig. 11.18), está solicitada por una tensión σ, cuyo valor es función de su distancia al eje neutro y que origina una deformación específica longitudinal

e_x. A esta deformación corresponde, en virtud de la ley de *Hooke* generalizada, una transversal e_z de valor:

$$e_z = -\frac{e_x}{\mu}, \qquad [11.149]$$

igual para todas las fibras situadas a una misma distancia del eje neutro. Ahora bien, como las deformaciones longitudinales e_x son negativas para las fibras situadas por encima del eje neutro y positivas para las que lo son por debajo, en las deformaciones específicas transversales se invierten los signos, de acuerdo con la [11.149]. En consecuencia, la sección se ensancha transversalmente en la zona comprimida y se acorta en la traccionada, curvándose como muestra la figura 11.18.

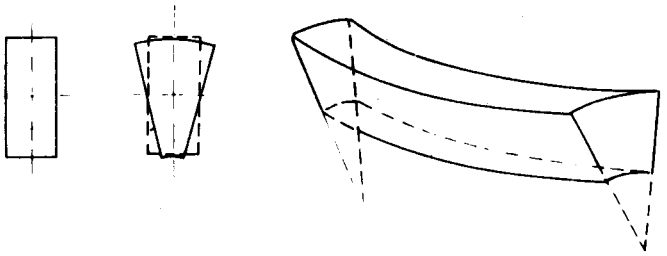


Fig. 11.18

El centro de curvatura de las secciones deformadas queda situado del lado opuesto al centro de curvatura de la línea elástica.

La deformación transversal es despreciable y no se tiene en cuenta al calcular el momento de inercia de la sección que interviene en la fórmula de flexión.

11.3. Flexión pura oblicua

La flexión pura oblicua corresponde al caso donde la línea de fuerzas no coincide con un eje principal de inercia (fig. 11.19).

Llamando z e y las distancias de un elemento de superficie dF a la línea de fuerzas y eje neutro respectivamente, llegamos a las siguientes ecuaciones de equivalencia análogas a la [11.6] pero donde en las dos primeras hemos eliminado por división σ:

$$\begin{cases} \int_F y\,dF = 0 \\ \int_F zy\,dF = 0 \\ z\int_F y^2 dF = M \text{ sen } \beta \end{cases} \qquad [11.150]$$

Las dos primeras expresiones nos dicen que, para flexión oblicua:

a) el eje neutro es baricéntrico;

b) la dirección del eje neutro es conjugada de inercia de la línea de fuerzas.

Reemplazando en la tercera de las [11.150] $\bar{\sigma}$ por su valor dado por la [11.4], llegamos a la fórmula que nos expresa el valor de las tensiones normales en la flexión oblicua, teniendo en cuenta que la integral representa el momento de inercia de la sección respecto del eje neutro:

$$\boxed{\sigma = \pm \frac{M \text{ sen } \beta}{J_n}} \qquad [11.151]$$

El doble signo indica que existen tensiones de compresión (−) y de tracción (+) según que las fibras, para M positivo, se encuentren ubicadas por encima o por debajo del eje neutro, respectivamente.

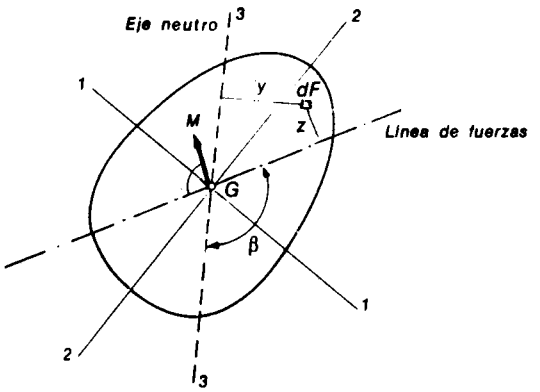


Fig. 11.19

La utilización de la fórmula [11.151] exige el conocimiento previo de la dirección del eje neutro, es decir, del ángulo β que forma con la línea de fuerzas, pues sólo entonces estaremos en condiciones de calcular el valor de J_n que ha de introducirse en la fórmula.

11.3.1. Determinación del eje neutro

La dirección del eje neutro puede determinarse gráfica o analíticamente, como veremos a continuación:

a) *Procedimiento gráfico*

La determinación gráfica de la dirección del eje neutro se efectúa utilizando la circunferencia de inercia de Mohr.

Si se conoce *a priori* la dirección de los ejes principales de inercia de la sección, cuando ésta no tiene elementos de simetría, o si la sección es simétrica por lo menos respecto de un eje, bastará calcular los momentos de inercia principales J_1 y J_2 y efectuar sobre aquéllos la construcción.

Tal el caso de figura 11.20 donde hemos efectuado la construcción de la circunferencia sobre el eje *2–2*, previo cálculo de J_1 y J_2. Ubicado, el polo en la

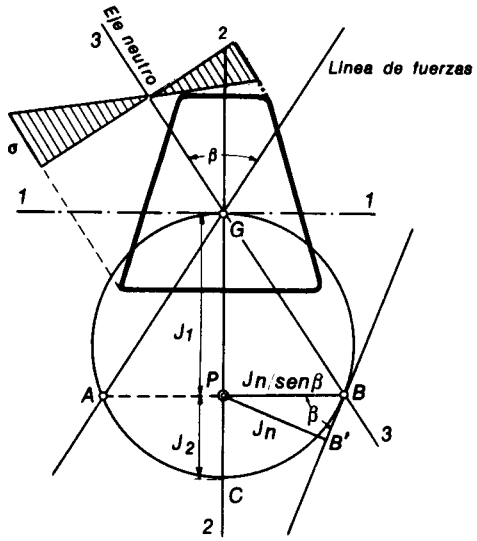


Fig. 11.20

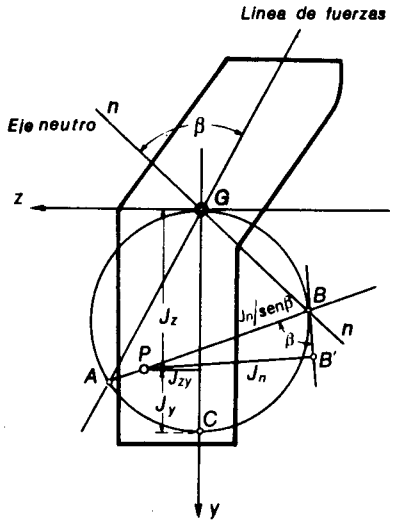


Fig. 11.21

forma conocida, determinamos la intersección A de la línea de fuerzas con la circunferencia de Mohr. Trazando la cuerda $\overline{AP}$, la misma determina en su otro extremo la intersección B con la circunferencia, que unido con G, baricentro de la sección, nos da la dirección conjugada de la línea de fuerzas, la cual, de acuerdo con lo visto es el eje neutro de la sección.

Si en cambio, no se conoce la dirección de los ejes principales de inercia, la circunferencia de Mohr se construye partiendo de los valores de J_z, J_y y J_{zy} como muestra la figura 11.21. z e y son un par de ejes coordenados ortogonales cualesquiera, cuyo origen coincide con el baricentro G de la sección.

En nuestro ejemplo es evidente que:

$$\left.\begin{aligned} J_z &> J_y \\ J_{zy} &> 0 \end{aligned}\right\} \qquad [11.152]$$

Construida la circunferencia de Mohr en la forma conocida, la cuerda $\overline{AP}$ determina el punto B que unido con G nos da el eje neutro correspondiente a la línea de fuerzas supuesta. Si, en las figuras 11.20 u 11.21, trazamos las tangentes en B a las correspondientes circunferencias de Mohr las perpendiculares a las mismas trazadas por P nos determinan los segmentos $\overline{PB'}$, que, leídos en las escalas de las circunferencias, nos dan los valores de J_n, es decir, el momento de inercia de la sección respecto del eje neutro.

Ahora bien, la expresión [11.151] puede escribirse también en la forma siguiente:

$$\sigma = \pm \frac{M}{\dfrac{J_n}{\operatorname{sen}\beta}}\, y \qquad [11.153]$$

El término $J_n/\operatorname{sen}\beta$ puede obtenerse directamente de la circunferencia de Mohr.

Llamamos β al ángulo ($<\frac{1}{2}\pi$) que forma la línea de fuerzas con el eje neutro.

En las figuras 11.20 y 11.21, los ángulos AGB son iguales a β por opuestos por el vértice y son ángulos inscriptos en la circunferencia que abarcan el arco ACB. Los ángulos ABB' son semiinscriptos en las mismas circunferencias y abarcan también los arcos ACB. En consecuencia:

$$\widehat{AGB} = \widehat{ABB'} = \beta \qquad [11.154]$$

De ahí que en ambas circunferencias tengamos:

$$\overline{PB'} = \overline{PB}\operatorname{sen}\beta \qquad [11.155]$$

y en consecuencia

$$\overline{PB} = \frac{\overline{PB'}}{\operatorname{sen}\beta} \qquad [11.156]$$

y por ser:

$$\overline{PB'} = J_n \qquad [11.157]$$

resulta finalmente:

$$\overline{PB} = \frac{J_n}{\operatorname{sen}\beta} \qquad [11.158]$$

es decir, el denominador de la ecuación [11.153].

b) *Procedimiento analítico*

El procedimiento analítico para la determinación de la dirección del eje neutro se basa en el cálculo del ángulo γ, conocida la línea de fuerzas en función de las características geométricas de la sección [fig. 11.22].

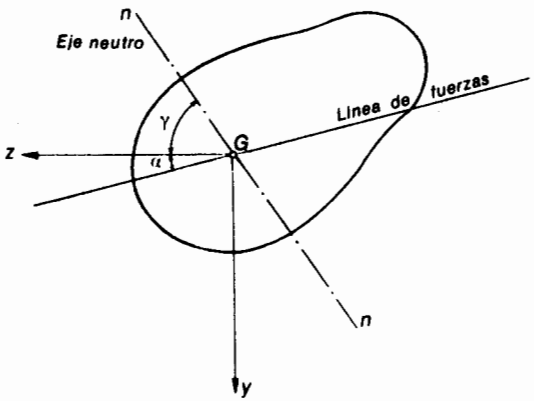


Fig. 11.22

Para ello recordemos, con la notación de la figura 11.22, la expresión que vincula los ángulos que forman con el eje z dos ejes conjugados.[1]

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{J_z - \operatorname{tg}\alpha\, J_{zy}}{J_{zy} - \operatorname{tg}\alpha\, J_y} \qquad [11.159]$$

De acuerdo con esta expresión, una vez fijados los ejes z e y y calculados J_z, J_y y J_{zy}, la determinación de γ es inmediata, por cuanto α es dato del problema.

Cuando se conoce *a priori* la dirección de los ejes principales de inercia, conviene hacer coincidir los ejes z e y con aquéllos.

En ese caso resulta:

$$\left.\begin{aligned} J_z &= J_1 \\ J_y &= J_2 \\ J_{zy} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [11.160]$$

y la [11.159] se trasforma en:

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{J_1}{J_2 \operatorname{tg}\alpha} = -\frac{J_1}{J_2}\operatorname{cotg}\alpha. \qquad [11.161]$$

11.3.2. Flexión oblicua en función de dos flexiones normales

La expresión [11.151] resulta de fácil aplicación cuando se trata de verificar las condiciones de trabajo de una sección, es decir, cuando el problema se refiere al cálculo de las tensiones máximas debidas a un momento flexor determinado.

En cambio no es práctica para el proyecto de secciones. En efecto, cuando se conoce el momento flexor y se fija la tensión de trabajo (igual o menor que la tensión admisible) la [11.151] se trasforma en:

[1] Ver *Estabilidad I*, del autor, cap. 4.2, pág. 205, Ed. Kapelusz.

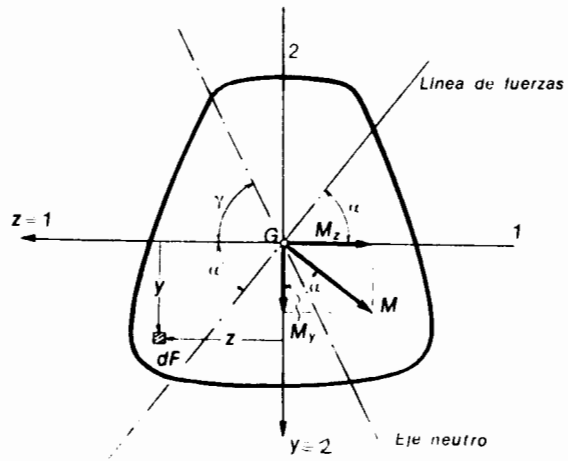
$$\frac{J_n}{y_{\text{máx.}}\operatorname{sen}\beta} = \frac{M}{\sigma_{\text{adm}}} \qquad [11.162]$$

y para una determinada forma de sección, tanto J_n como $y_{\text{máx.}}$ y sen β dependen de sus dimensiones. De modo que la solución del problema sólo puede efectuarse por tanteos, fijando las dimensiones y verificando luego si la sección satisface la condición.

$$\sigma_{\text{máx.}} \leqslant \sigma_{\text{adm.}} \qquad [11.163]$$

Es por ello que resulta más conveniente descomponer la flexión oblicua en dos flexiones normales y calcular las tensiones por superposición de efectos, como veremos a continuación.

Sea la sección de figura 11.23 sujeta a la acción de un par flexor de momento M cuya línea de fuerzas no coincide con ninguno de los ejes principales.



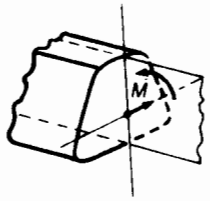


Fig. 11.23

El vector $\overline{M}$ representativo del par flexor, actúa normalmente a la línea de fuerzas, y es posible descomponerlo en dos vectores $\overline{M_z}$ y $\overline{M_y}$ orientados según las direcciones de los ejes principales de inercia.

Cada uno de estos pares constituye por sí una solicitación de flexión normal, por cuanto las respectivas líneas de fuerzas coinciden con uno de los ejes principales (*1–1* para $\overline{M_y}$ y *2–2* para $\overline{M_z}$) resultando ser el eje conjugado el correspondiente eje neutro (*1–1* para $\overline{M_z}$ y *2–2* para $\overline{M_y}$).

En consecuencia, para una fibra cualquiera dF de coordenadas z e y,

obtenemos la tensión normal σ como suma algebraica de las tensiones originadas por cada flexión parcial actuando independientemente:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = -\frac{M_z}{J_1} y + \frac{M_y}{J_2} z. \qquad [11.164]$$

En lo que respecta a los signos de ambos términos del miembro derecho de la [11.164] ellos surgen de las siguientes consideraciones:

Para el caso de la figura, el par flexor $\overline{M}$ indicado produce en el elemento dF ubicado en las cercanías del borde inferior una tensión de tracción, o sea, positiva. En consecuencia, la suma de ambos términos debe ser positiva. De acuerdo con el sistema de ejes adoptados, las coordenadas del elemento dF son positivas, lo mismo que $\overline{M}_y$. En cambio, $\overline{M}_z$ es negativo. En consecuencia, por ser los momentos de inercia magnitudes positivas, es necesario afectar al término donde aparece M_z del signo menos (–), para que, al introducir en la [11.164] M_z y M_y con sus signos, resulte σ con el signo que efectivamente le corresponde.

Si α es el ángulo que la dirección del vector $\overline{M}$ forma con el eje *2–2*, que es igual al que forma la línea de fuerzas con el *1–1*, resulta:

$$\left.\begin{aligned} M_z &= M \operatorname{sen} \alpha \\ M_y &= M \cos \alpha \end{aligned}\right\} \qquad [11.165]$$

valores que reemplazados en la [11.164] conducen a:

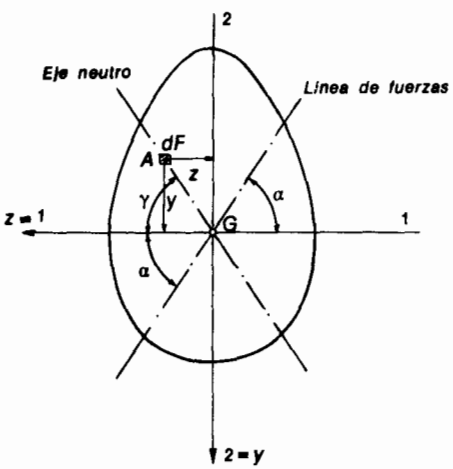


Fig. 11.24

$$\sigma = M\left(z\frac{\cos\alpha}{J_2} - y\frac{\operatorname{sen}\alpha}{J_1}\right). \qquad [11.166]$$

Esta expresión nos permite calcular la ecuación del eje neutro. En efecto, para las fibras en correspondencia con este último, la tensión debe ser nula. En consecuencia, haciendo $\sigma = 0$ en la [11.166] resulta:

$$\frac{z}{J_2}\cos\alpha = \frac{y \operatorname{sen}\alpha}{J_1}, \qquad [11.167]$$

de donde:

$$|y| = \left| z\frac{J_1}{J_2}\operatorname{cotg}\alpha \right|, \qquad [11.168]$$

ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas, que coincide con el baricentro (fig. 11.24).

Ahora bien, cotg α es mayor que cero, y como para el punto A del eje neutro z es positiva e y negativa, debemos afectar la [11.168] del signo menos, resultando en definitiva:

$$y = -z\frac{J_1}{J_2}\operatorname{cotg}\alpha \qquad [11.169]$$

Pero de la figura:

$$\frac{y}{z} = \operatorname{tg}\gamma \qquad [11.170]$$

donde γ es el ángulo que forma el eje neutro con el eje z. En consecuencia, resulta finalmente:

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{J_1}{J_2}\operatorname{cotg}\alpha \qquad [11.171]$$

expresión idéntica a la [11.161]

11 . 3. 3 . Verificación y proyecto de secciones solicitadas a flexión oblicua

Análogamente a lo visto en flexión normal, para la flexión oblicua pueden presentarse dos problemas:

a) verificar si las tensiones de una determinada sección no sobrepasan los valores admisibles;

b) establecer las dimensiones de una sección de forma dada de modo que la máxima tensión no supere el valor de la tensión admisible.

La resolución del primer problema se puede efectuar tanto con la ecuación [11.151] como con la [11.164], pues en ambas, todos sus elementos son conocidos (los momentos de inercia se toman de tablas, caso de los perfiles laminados, o se calculan fácilmente) y la única incógnita es la tensión máxima, que cuando se utiliza la [11.151] se obtiene gráficamente trazando el diagrama de tensiones normales (veáse fig. 11.20).

Para el segundo caso, conviene utilizar la expresión [11.164] , si bien cuando la sección no tiene ejes de simetría es necesario proceder por aproximaciones sucesivas. El problema se simplifica enormemente cuando la sección es simétrica, por ejemplo para secciones rectangulares y perfiles doble T. Para estas secciones las máximas tensiones positivas y negativas resultan de igual valor absoluto, y teniendo en cuenta que en esos casos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{J_z}{y} &= W_z \\ \frac{J_y}{z} &= W_y \end{aligned}\right\} \qquad [11.172]$$

la [11.164] se transforma en:

$$|\sigma| = \left|\frac{M_z}{W_z}\right| + \left|\frac{M_y}{W_y}\right| \qquad [11.173]$$

y finalmente en:

$$|\sigma| = \frac{M_z}{W_z}\left(1 + \frac{W_z}{W_y}\cdot\frac{M_y}{M_z}\right) \qquad [11.174]$$

La relación W_z/W_y varía para los perfiles normales doble T entre 6,5 para el perfil No. 8 (8 cm de altura) y 10,3 para el No. 55 (55 cm de altura). Por ello, para el dimensionamiento, una vez establecidos los valores de M_z y M_y, se fija un valor medio comprendido entre los valores extremos de la relación, a juicio del proyectista y se despeja de la [11.174] el valor de W_z.

$$W_z = \frac{M_z}{\sigma_{\text{adm}}}\left(1 + \frac{W_z}{W_y}\cdot\frac{M_y}{M_z}\right) \qquad [11.175]$$

Conocido W_z, se busca en la tabla de perfiles laminados aquel cuyo valor de W_z se aproxime más por exceso al valor calculado, y se verifica luego si la relación real de módulos resistentes se corresponde con la adoptada o si difiere de ella. En este último caso se repite el cálculo pero esta vez utilizando la relación que corresponde al perfil real, y de esta manera en uno o dos pasos se llega a la solución buscada.

Para los perfiles *Grey* de alas anchas, la relación de módulos varía entre 3,28 para el perfil No. 18 que es el más reducido que se lamina, y 6,4 para el No. 55.

11.4. Energía de deformación en la flexión

Si consideramos dos secciones infinitamente próximas de una barra prismática sujeta a flexión pura, ésta se deforma y las secciones experimentan una rotación relativa $d\theta$. En el ámbito de validez de la ley de Hooke, las rotaciones absolutas θ de una determinada sección son proporcionales al momento

del par que la solicita, y la representación gráfica de dicha relación es una recta que pasa por el origen de coordenadas (fig. 11.25).

Al incrementarse la rotación de $d\theta$ el par M efectúa un trabajo:

$$d\Phi = M\,d\theta\,, \qquad [11.176]$$

representado por el área del rectángulo elemental rayado de figura 11.25. El trabajo total, para una rotación θ será, en consecuencia:

$$\Phi = \frac{1}{2}\int_0^\theta M\,d\theta\,. \qquad [11.177]$$

Ahora bien, de acuerdo con la [11.66] tenemos:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_n} \qquad [11.178]$$

y recordando que $1/\rho = d\theta/dx$, llegamos a:

$$d\theta = \frac{M}{EJ_n}\,dx\,. \qquad [11.179]$$

Reemplazando el valor de $d\theta$, dado por la [11.179], en [11.177], resulta:

$$\Phi = \int_0^l \frac{M^2\,dx}{2EJ_n} \qquad [11.180]$$

como expresión de la energía de deformación absorbida en la flexión cuando

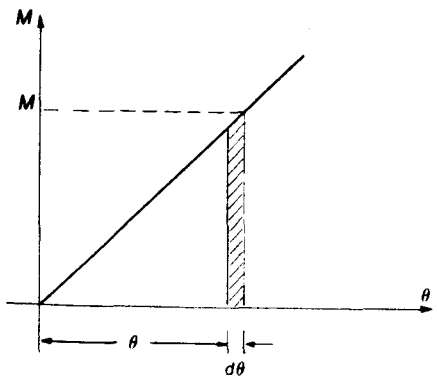


Fig. 11.25

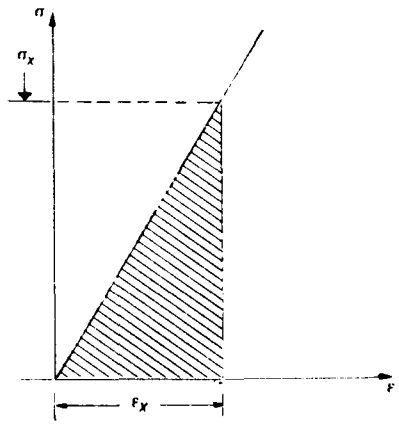


Fig. 11.26

el par flexor crece de cero a s

La expresión [11.180] la hemos deducido partiendo del trabajo externo de deformación, producido por el par flexor. Como se verá a continuación, es posible llegar a la misma expresión de la energía partiendo del trabajo interno, o sea del trabajo que desarrollan las tensiones normales, únicas existentes en el caso que nos ocupa.

Si σ_x es la tensión en una fibra situada a la distancia y del eje neutro, y ϵ_x la correspondiente deformación específica, para el período elástico, de acuerdo con la ley de Hooke la relación entre ambas magnitudes es lineal. En consecuencia, su diagrama representativo será una recta que pase por el origen de coordenadas, como puede observarse en la figura 11.26. En dicho diagrama, el área de la zona rayada representa el trabajo interno de deformación por unidad de volumen, desarrollado hasta alcanzarse la tensión σ_x, es decir que, para un volumen infinitésimo dV el trabajo elemental será:

$$du = \frac{\sigma_x \epsilon_x}{2} dV \qquad [11.181]$$

El trabajo total lo obtenemos integrando sobre todo el volumen:

$$U = \int_V \frac{\sigma_x \epsilon_x}{2} dV \qquad [11.182]$$

De acuerdo con la ley de Hooke:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad [11.183]$$

y, además:

$$\sigma_x = \frac{M}{J_n} y \qquad [11.184]$$

de donde, reemplazando estos valores en la [11.182] tenemos:

$$U = \int_V \frac{M^2 y^2}{2EJ_n^2} dV \qquad [11.185]$$

o, también, teniendo en cuenta que $dV = dx \cdot dF$:

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ_n^2} \cdot \int_F y^2 dF \qquad [11.186]$$

Pero $\int_F y^2 dF = J_n$, de donde:

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ_n} \qquad [11.187]$$

expresión idéntica a la [11.180].

11.5. Flexión y corte

11.5.1. Consideraciones generales

Cuando, al reducir al baricentro de una sección dada las fuerzas que actúan a uno u otro lado de la misma, se obtienen dos pares opuestos normales a la sección y dos fuerzas opuestas contenidas en el plano de ella, es decir, si existen simultáneamente un momento flexor y un esfuerzo de corte, la solicitación se denomina de *flexión y corte*.

En este caso las ecuaciones de equivalencia [8.6] y [8.7] se trasforman en

$$\left.\begin{array}{ll} \int_F \sigma_x dF = 0 & \int_F (\tau_{xz} y + \tau_{xz} z) dF = 0 \\ \int_F \tau_{xy} dF = Q_y & \int_F \sigma_x y dF = M_z \\ \int_F \tau_{xz} dF = Q_z & \int_F \sigma_y z dF = M_y \end{array}\right\} \qquad [11.188]$$

De estas ecuaciones, la primera y las dos últimas son las mismas que analizamos para el caso de la flexión pura. Las tres restantes no son nulas en este caso por la existencia de un esfuerzo de corte, que origina tensiones tangenciales en el plano de la sección.

El estudio de las tensiones de corte se basa en la denominada "*teoría de Jouravski*",[1] quien desarrolla, en un trabajo sobre puentes sistema *How*, una teoría sobre la resistencia de *piezas rectangulares*, tanto de madera como de hierro, constituidas de láminas superpuestas vinculadas entre sí. Resulta interesante destacar que Jouravski calcula los esfuerzos de resbalamiento longitudinales pero no se ocupa de las tensiones que ocurren en el plano de la sección. La extensión de la teoría de *Jouravski* a la determinación de las tensiones tangenciales en el plano de la sección se debe a Collignon, razón por la cual se acostumbra a designar con el nombre de "*fórmula de* Collignon" a la fórmula clásica utilizada para el cálculo de las tensiones tangenciales debidas a la flexión.

El *corte puro*, que es aquella solicitación donde en el plano de la sección sólo existen dos fuerzas opuestas, o sea, cuando actúa solamente un esfuerzo de corte siendo nulas las restantes características, sólo se presenta en contadas ocasiones.

Un ejemplo de ello lo constituye el pórtico de figura 11.27.

En las secciones M–M y N–N, donde las rectas de acción de las reacciones de vínculo cortan al eje del dintel del pórtico, los momentos flexores son nulos, pero existen esfuerzos axiles y de corte.

[1] M. Jouravski, *Annales des ponts*.

Para el caso que analizamos, no interesan los primeros, por cuanto conducen a tensiones normales σ, que no influyen en las tensiones tangenciales τ. En consecuencia, estamos ante un caso de corte puro para el cual son aplicables las fórmulas que deduciremos a continuación, porque, como veremos, son independientes del valor de las tensiones normales. No ocurre lo mismo cuando la solicitación por corte puro tiene su origen en fuerzas de cizallamiento. Tal el caso de figura 11.28 donde una barra está solicitada por las mandíbulas de una

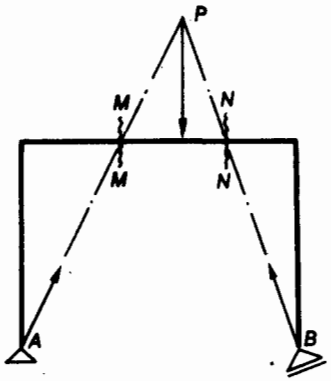


Fig. 11.27

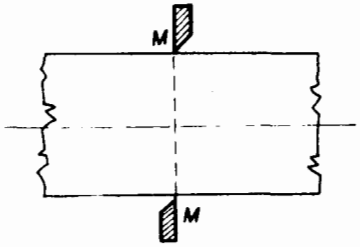


Fig. 11.28

cizalla que tiende a cortarla por la sección M–M y que escapa a las hipótesis de la resistencia de materiales.

Cuando se trata de pernos o remaches que vinculan planchuelas o chapas solicitadas axilmente, existen, según el caso, una o varias secciones donde se admite que existe corte puro, fig. 11.29 *a* y *b*. Ello, en realidad, no es cierto por cuanto las fuerzas axiles N no actúan el en plano de corte, como lo exige la definición de corte puro. En efecto, N, fuerza normal que solicita las chapas o planchuelas es, en realidad, la resultante de los esfuerzos elementales $\sigma\, dF$, derivados de las tensiones normales σ distribuidos uniformemente sobre el espesor de la chapa. Por ello, sus rectas de acción coinciden con los ejes de las chapas y en las secciones de corte s–s aparecen momentos de flexión (fig. 11.29 *c* y *d*).

En estos casos se admite una distribución uniforme de las tensiones tangenciales y se utiliza para calcular su valor la expresión:

$$\tau = \frac{Q}{F} \qquad [11.189]$$

donde Q es el esfuerzo de corte que solicita a la sección, y F el área de ésta. El valor de τ así obtenido es un valor medio de la tensión que, según la forma de la misma, difiere del valor máximo real.

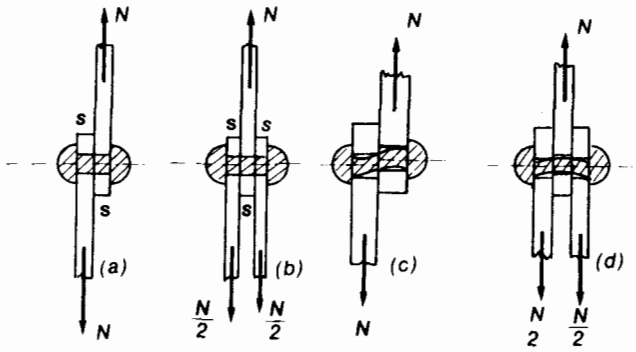


Fig. 11.29

11 . 5 . 2 . La teoría de Jouravski generalizada

Consideremos dos secciones de una pieza prismática sujeta a flexión y corte, separadas de dx (fig. 11.30).

En la sección 1–1 actúan un momento flexor M y un esfuerzo de corte Q. En la 2–2, el momento flexor será $M + dM$ mientras que el esfuerzo de corte mantiene su valor Q, siendo $dM = Q \cdot dx$.

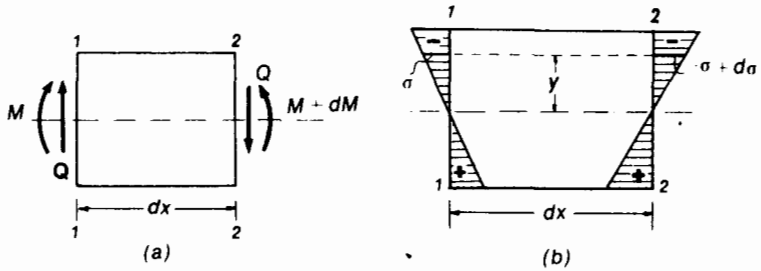


Fig. 11.30

Como consecuencia de la flexión, en una fibra situada a una distancia y del eje neutro, se originarán en la sección 1–1 tensiones normales:

$$\sigma = \frac{M}{J_n} y \qquad [11.190]$$

y en la *2–2:*

$$\boxed{\sigma + d\sigma = \frac{M + dM}{J_n}\, y.} \qquad [11.191]$$

Supongamos ahora separada una parte del prisma de longitud dx por una superficie cilíndrica, como muestra la figura 11.31 *a*. En la parte rayada de la sección *1 – 1* actúan las tensiones dadas por la [11.190], que originan fuerzas elementales:

$$dN = \sigma dF \qquad [11.192]$$

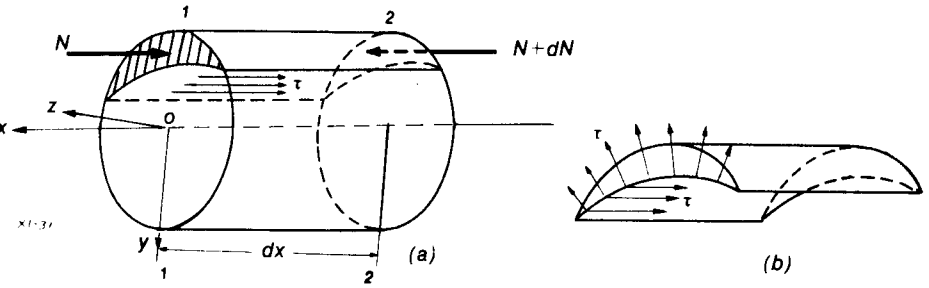


Fig. 11.31

cuya resultante N tiene por expresión:

$$N = \int_F \sigma dF = \int_F \frac{M}{J_n}\, y\, dF \qquad [11.193]$$

En la sección *2–2*, la resultante de los esfuerzos elementales será:

$$N + dN = \int_F \frac{M + dM}{J_n}\, y\, dF \qquad [11.194]$$

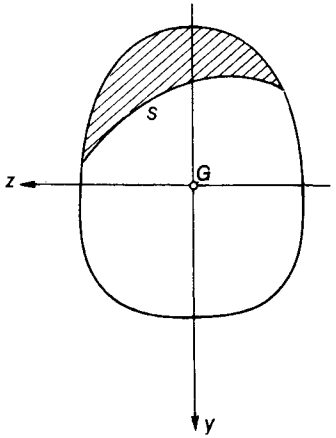


Fig. 11.32

Ambas fuerzas son coaxiles y su resultante será:

$$dN = \int_F \frac{dM}{J_n}\, y\, dF. \qquad [11.195]$$

La fuerza elemental dN tiende a deslizar la parte del prisma ubicada por encima de la superficie cilíndrica con respecto al resto del mismo.

A esta acción se oponen tensiones tangenciales τ que actúan sobre la superficie curva de separación.

En lo que respecta a dichas tensiones, que se denominan *tensiones longitudinales* de resbalamiento, admitiremos:

a) que su dirección es paralela al eje de la pieza;

b) que varían en forma continua sobre la superficie curva.

Si llamamos s la longitud de la curva de intersección de la superficie con el plano de una de las secciones (fig. 11.32), la resultante de los esfuerzos elementales originados por las tensiones τ valdrá:

$$dT = dx \int_s \tau\, ds. \qquad [11.196]$$

Razones de equilibrio conducen a que:

$$|dN| = |dT| \qquad [11.197]$$

de donde, reemplazando valores:

$$\int_F \frac{dM}{J_n}\, y\, dF = dx \int_s \tau\, ds \qquad [11.198]$$

Ahora bien, tanto dM como J_n son valores constantes para la sección, luego:

$$\frac{dM}{J_n} \int_F y\, dF = dx \int_s \tau\, ds \qquad [11.199]$$

de donde:

$$\int_s \tau\, ds = \frac{dM}{dx}\, \frac{1}{J_n} \int_F y\, dF \qquad [11.200]$$

Recordando que $(dM/dx) = Q$ y que $\int_F y\, dF$ es el momento estático de la superficie rayada ubicada por encima de la curva s, con respecto al eje neutro de la sección, la [11.200] se trasforma en:

$$\int_s \tau\, ds = \frac{Q S_n^s}{J_n} \qquad [11.201]$$

Ahora bien:

$$\int_s \tau\, ds = \tau_m \cdot s \qquad [11.202]$$

donde τ_m es el valor medio de la tensión de resbalamiento longitudinal. Luego, reemplazando en la [11.201] llegamos finalmente a:

$$\boxed{\tau_m = \frac{Q S_n^s}{s J_n}} \qquad [11.203]$$

De acuerdo con el teorema de Cauchy, las tensiones τ de resbalamiento longitudinal dan origen en el plano de la sección a tensiones tangenciales, normales en cada punto de la curva s a su correspondiente tangente y cuyo valor medio está dado precisamente por la expresión [11.203].

11 . 5 . 3 . Tensiones tangenciales en la sección rectangular

Sea la sección rectangular de ancho b y altura h (fig. 11.33) sujeta a la acción de un esfuerzo de corte Q acompañado de flexión. Para el plano

longitudinal de traza s-s, ubicado a una distancia y del eje neutro, las tensiones rasantes longitudinales pueden suponerse constantes en todo el ancho b de la pieza. En consecuencia, de acuerdo con el teorema de Cauchy, en el plano de la sección y a lo largo de la recta s–s las tensiones tangenciales resultan normales a ésta y uniformemente distribuidas a lo largo de la misma, pero variando en altura en función de y. Conforme con lo anterior, la [11.203] se trasforma en:

$$\boxed{\tau_{xy} = \frac{Q\,S_n^y}{b\,J_n}} \qquad [11.204]$$

Para la sección rectangular tenemos:

$$\left\{\begin{aligned} S_n^y &= \frac{b}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \\ J_n &= \frac{b\,h^3}{12} \end{aligned}\right\} \qquad [11.205]$$

Valores estos que reemplazados en [11.204] conducen, luego de algunas trasformaciones a:

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{b\,h}\left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right] \qquad [11.206]$$

La variación de τ_{xy} sobre la altura de la sección responde, como se ve, a una ley parabólica de segundo grado.

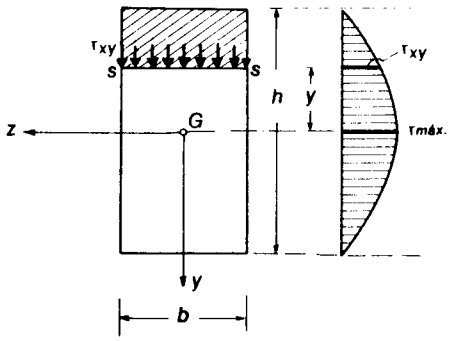


Fig. 11.33

Para $y = \pm\,\frac{1}{2}\,h$, en los bordes superior e inferior de la sección, la [11.206] se anula, resultando $\tau_{xy} = 0$.

Ello es lógico que ocurra, por cuanto de ser en dichos puntos $\tau_{xy} \neq 0$, de acuerdo con el teorema de Cauchy aparecerían en las caras superior e inferior de la pieza prismática tensiones de resbalamiento longitudinal que no podrían ser equilibradas, por cuanto dichas caras, por hipótesis, se hallan libres de fuerzas exteriores.

Para $y = 0$, en correspondencia con las fibras ubicadas sobre el eje neutro, el término entre barras de la expresión [11.206] adquiere su mayor valor y τ_{xy} se hace máxima, resultando:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{b\,h} \qquad [11.207]$$

Pero, por ser $b\,h = F$, área de la sección, tenemos:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{F} \qquad [11.208]$$

es decir, que la tensión tangencial máxima para la sección rectangular, es un 50% mayor que la que resulta de admitir una repartición uniforme. En la expresión [11.205] hemos tomado para S_n^y el valor del momento estático con respecto del eje neutro, de la parte de la sección situada por encima del nivel y (zona rayada fig. 11.33).

Si llamamos $S_n^{y'}$ el momento estático del área de la sección ubicada por debajo de s–s con respecto al eje neutro, resulta:

$$S_n^y + S_n^{y'} = 0 \qquad [11.209]$$

de donde:

$$S_n^y = -S_n^{y'}\,. \qquad [11.210]$$

Si, en la [11.204], sustituimos la [11.210] tenemos:

$$\tau_{xy} = -\frac{Q\,S_n^{y'}}{b\,J_n}\,. \qquad [11.211]$$

La diferencia de signos para τ_{xy} responde a lo que realmente ocurre con las tensiones rasantes longitudinales τ_{yx}. En efecto, si imaginamos un corte longitudinal de la pieza por el plano a nivel y, y separadas ambas partes (fig. 11.34), en la cara de $ABA'B'$ las tensiones rasantes longitudinales τ_{yx} concurren a la arista de intersección de ambos planos y originan en el de la sección tensiones τ_{yx} que tambien deben concurrir a dicha arista, dirigidas en el sentido positivo de las y. En cambio. para la cara $CDC'D'$ razones de equilibrio exigen que las tensiones τ_{yx} se alejen de la arista, pues deben equilibrarse con las tensiones que aparecen en la cara $ABA'B'$, y dichas tensiones τ_{yx} son precisamente,

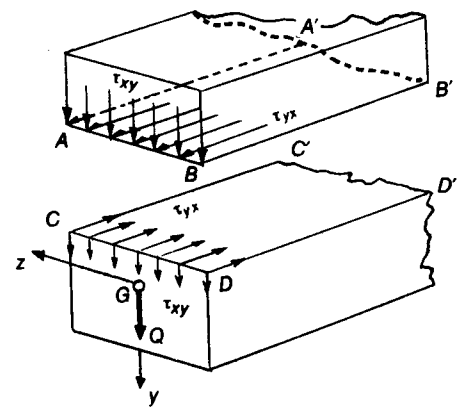


Fig. 11.34

las calculadas con la fórmula [11.211] y que dan origen, en el plano de la sección, a tensiones τ_{xy} que deben alejarse de la arista y que, en consecuencia, también están dirigidas según el semieje positivo de las y.

En consecuencia, para el cálculo de las tensiones tangenciales en el plano de la sección resulta indistinto considerar para S_n^y cualquiera de las dos partes en que la recta s–s divide la sección.

11.5.4. Tensiones tangenciales en secciones simétricas de contorno curvilíneo

Al analizar en el parágrafo anterior las tensiones tangenciales en la sección rectangular, admitimos que, en el plano de la sección, sólo existían tensiones τ_{xy} y que las τ_{xz} eran nulas.

Ello sólo se cumple en realidad, para los puntos M, N y C (fig. 11.35)

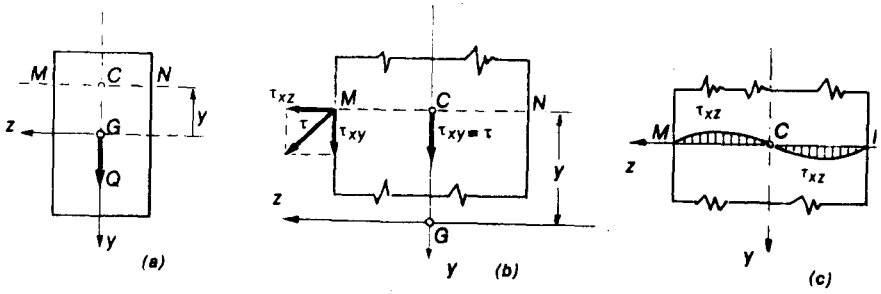


Fig. 11.35

para el nivel y. En efecto, para el punto C, razones de simetría hacen que, necesariamente, $\tau \equiv \tau_{xy}$ y consecuentemente $\tau_{xz} = 0$. En cuanto a los puntos M y N, si para los mismos la tensión τ tuviera, por ejemplo, la dirección que muestra la figura 11.35 b, admitiría una componente τ_{xz} normal al borde vertical de la sección, que, a la vez, daría origen en las caras laterales a tensiones τ_{zx} que no pueden existir por razones de equilibrio, ya que hemos partido de la hipótesis que dichas caras están libres de toda solicitación exterior. En consecuencia, necesariamente, tanto para M como para N debemos tener:

$$\left.\begin{aligned} \tau &\equiv \tau_{xy} \\ \tau_{xz} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [11.212]$$

Para los puntos intermedios, debemos contar con la existencia de ten-

siones τ_{xz} cuya ley de variación desconocemos, pero que deben responder a un diagrama tal que a ambos lados del punto C (fig. 11.35 c), su signo sea contrario. En efecto, al ser $Q_z = 0$ la tercera de las [11.188] se trasforma en:

$$\int_F \tau_{xz}\, dF = 0\,, \qquad [11.213]$$

lo que exige que, para $\tau_{xz} \neq 0$, las tensiones tangenciales sean opuestas en uno y otro lado del eje y.

Si el ancho b de la sección es reducido, el máximo valor que pueden alcanzar las tensiones τ_{xz} es pequeño, y en consecuencia, es posible admitir, para secciones delgadas, que son nulas.

Cuando el espesor de la sección rectangular es considerable ya no es posible despreciar las tensiones τ_{xz}, cuya ley de distribución sobre el ancho de la sección es objeto de la teoría matemática de la elasticidad y por ello, escapa a los alcances de la presente obra.

No obstante, para secciones simétricas de contorno curvilíneo es posible determinar con facilidad dichas tensiones partiendo de la hipótesis de una distribución lineal. Sea, por ejemplo, la sección que muestra la figura 11.36, solicitada por flexión y corte. De acuerdo con la teoría de Jouravski, en el plano $ABA'B'$ (fig. 11.36 b) se originan tensiones τ_{yx} de resbalamiento longitudinales, normales a la arista AB, a las que, según el teorema de Cauchy, corresponden en el plano de la sección, tensiones τ_{xy} normales a la arista AB y uniformemente distribuidas a lo largo de la misma.

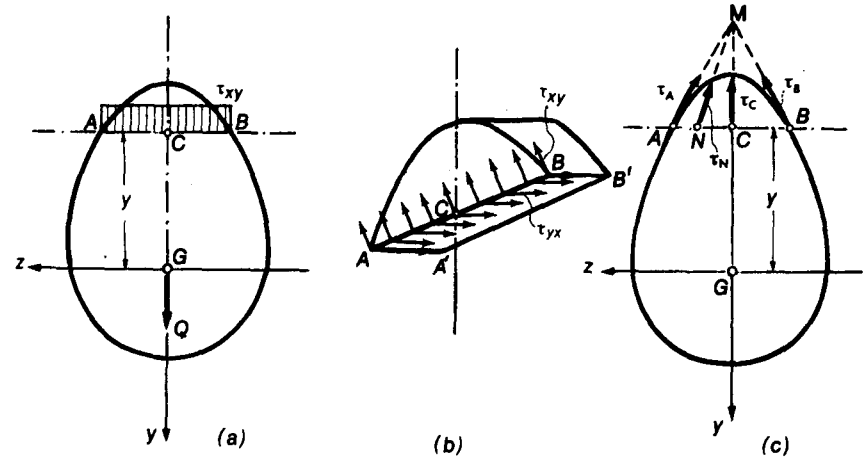


Fig. 11.36

Ahora bien, para los puntos A y B las tensiones tangenciales así determinadas, no pueden ser las tensiones tangenciales resultantes. En efecto, de serlo, admitirían dos componentes: una, τ_n, normal a la tangente al contorno en el punto A, y la segunda, τ_t, dirigida según esta última (fig. 11.37 *a*). A la vez, a la tensión τ_n, por el teorema de Cauchy correspondería una tensión τ_n' (fig. 11.37 *b*) normal a la tangente al contorno, pero actuando sobre

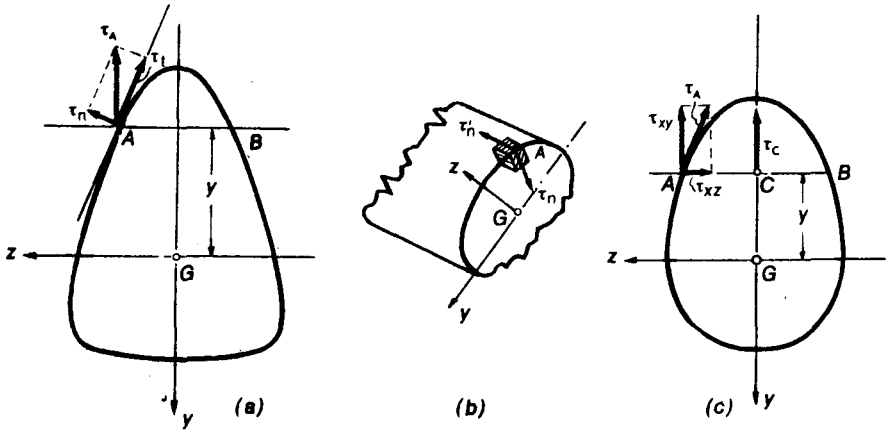


Fig. 11.37

el plano tangente a la superficie lateral según la generatriz que pasa por A. Esta tensión no puede existir, por cuanto, por hipótesis, la superficie lateral del elemento prismático se encuentra libre de solicitaciones. En consecuencia, debe ser:

$$\tau_n' = \tau_n = 0\,, \qquad [11.214]$$

o sea, que para los puntos A y B las tensiones tangenciales resultantes τ_A y τ_B, están dirigidas según las respectivas tangentes al contorno de la sección.

La tensión τ_{xy} resulta ser, con ello, la componente vertical de τ_A (o τ_B). existiendo además una tensión horizontal τ_{xz}.

En C, por razones de simetría, debe ser $\tau_C \equiv \tau_{xy}$ y $\tau_{xz} = 0$. La tensión tangencial horizontal varía entre dos valores extremos, en A y B, de signo contrario anulándose en correspondencia con el eje de simetría. Admitir que la ley de variación de τ_{xz} es lineal (fig. 11.38), equivale a suponer que las tensiones tangenciales resultantes a lo largo de la línea AB concurren al punto M (fig. 11.36 *c*), determinado por la intersección de la dirección de τ_A (o τ_B) con el eje de simetría de la sección.

Consideremos un punto N de coordenadas z, y (fig. 11.39) y en él

sean τ_{xy} y τ_{xz} las dos componentes de la tensión tangencial. Con la notación de la figura resulta:

$$\frac{\tau_{xz}}{z} = \frac{\tau_{xy}}{\overline{MC}}\,, \qquad [11.215]$$

o también:

$$\tau_{xz} = \frac{\tau_{xy}}{\overline{MC}} \cdot z\,. \qquad [11.216]$$

Pero, tanto τ_{xy}, dado por la fórmula de Jouravski, como $\overline{MC}$ son constantes para los puntos ubicados al nivel y. Podemos, pues, escribir:

$$\tau_{xz} = k \cdot z\,, \qquad [11.217]$$

o sea que la variación τ_{xz} responde a una ley lineal.

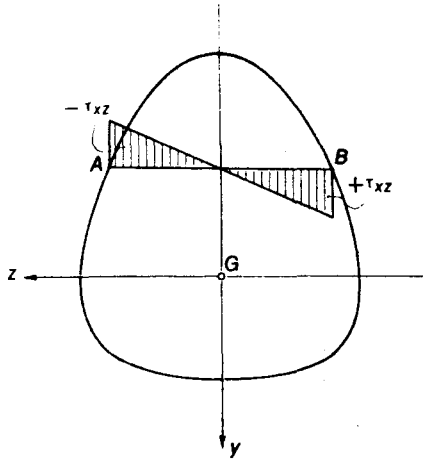


Fig. 11.38

Como consecuencia de lo anterior concluimos que, para el tipo de secciones que nos ocupa, la fórmula de Jouravski, nos da el valor de las componentes

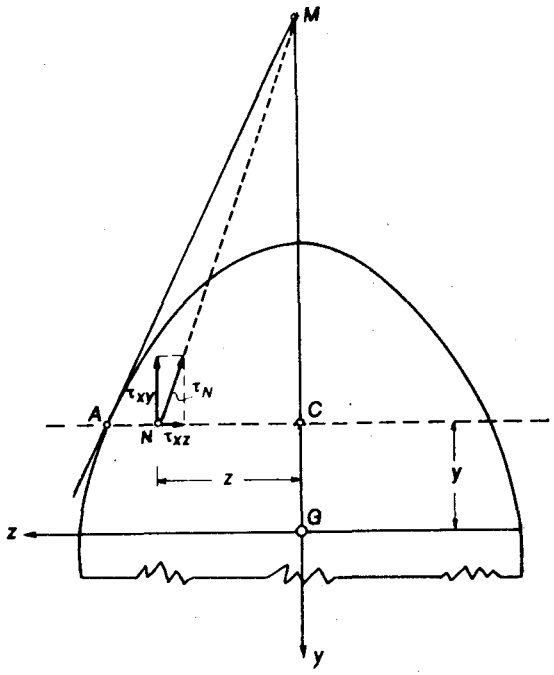


Fig. 11.39

verticales de las tensiones tangenciales en los distintos puntos de la sección. En cuanto a las tensiones resultantes, obtenemos su magnitud desproyectando los valores de τ_{xy} sobre la dirección de τ_N, que, a su vez, queda determinada uniendo el punto considerado, con la intersección del eje de simetría vertical con la dirección de la tangente al contorno al nivel y.

11.5.5. Tensiones tangenciales en la sección circular llena

Sea la sección circular de figura 11.40 sujeta a flexión y corte, de radio R. Como hemos visto, la fórmula de Jouravski:

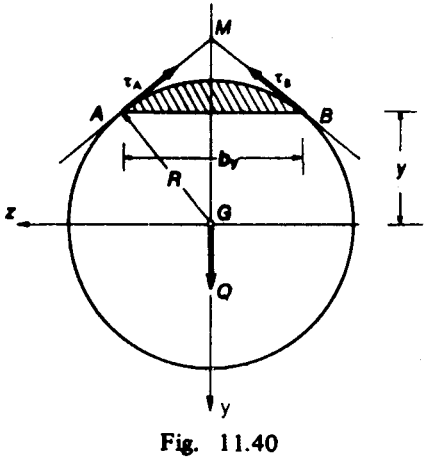


Fig. 11.40

$$\tau_{xy} = \frac{Q S_n^y}{b_y J_n}, \quad [11.218]$$

nos da, en este caso, el valor de las componentes verticales de las tensiones tangenciales dirigidas según rectas que concurren al punto M.

Para la sección circular resulta:

$$\left.\begin{aligned} b_y &= 2\sqrt{R^2 - y^2} \\ J_n &= \frac{\pi R^4}{4} \end{aligned}\right\} \quad [11.219]$$

Por otra parte, de acuerdo con la figura 11.41:

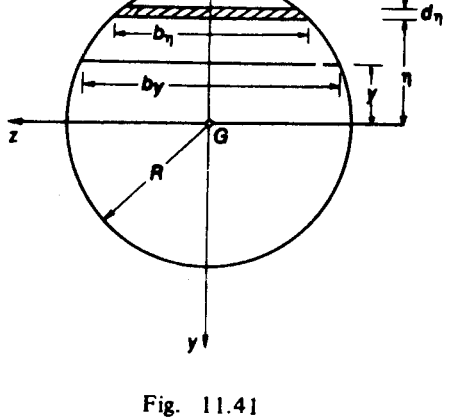


Fig. 11.41

$$dS_n^y = b_\eta \, \eta \, d\eta \quad [11.220]$$

y

$$S_n^y = \int_y^R b_\eta \, \eta \, d\eta, \quad [11.221]$$

y en consecuencia:

$$S_n^y = 2\int_y^R \sqrt{R^2 - \eta^2}\, \eta \, d\eta, \quad [11.222]$$

$$S_n^y = \tfrac{2}{3}(R^2 - \eta^2)^{3/2} \Big|_y^R = \tfrac{2}{3}(R^2 - y^2)^{3/2} \quad [11.223]$$

Reemplazando los valores de las [11.219] y [11.223] en la [11.218]:

$$\tau_{xy} = \frac{2Q(R^2 - y^2)^{3/2} \times 4}{3 \times 2(R^2 - y^2)^{1/2} \pi R^4}, \quad [11.224]$$

y finalmente:

$$\tau_{xy} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q(R^2 - y^2)}{\pi R^4}. \quad [11.225]$$

Para $y = \pm R$, es decir, en los extremos superior e inferior de la sección resulta, como es lógico $\tau_{xy} = 0$.

Las tensiones tangenciales máximas corresponden al eje neutro, para el cual $y = 0$, de donde:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F}, \quad [11.226]$$

expresión que nos dice que la tensión tangencial máxima es superior en un 33% a la que resulta de suponer una distribución uniforme (Q/F) sobre la sección.

11.5.6. Tensiones tangenciales en la sección triangular

En el caso de la sección triangular, las tensiones tangenciales a lo largo de los bordes deben, necesariamente, estar dirigidas según estos últimos porque de no serlo (fig. 11.42a) habría una componente τ_n normal al borde, que daría origen a una tensión longitudinal sobre la superficie lateral. De acuerdo

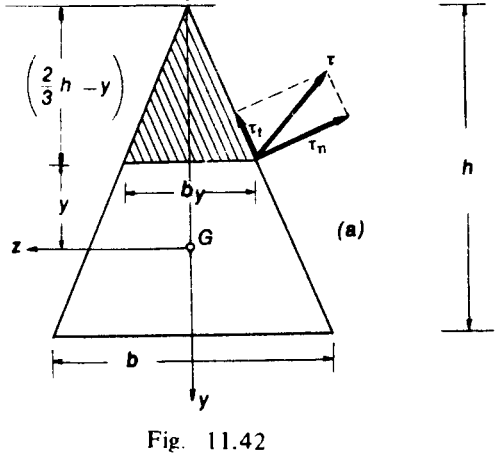


Fig. 11.42

con el teorema de Cauchy ésta no puede existir. El valor de la componente vertical de τ resulta de la fórmula de Jouravski, y si recordamos que con la notación de la figura es:

$$\left.\begin{aligned} J_n &= \frac{b\,h^3}{36} \\ b_y &= \frac{b}{h}\left(\frac{2}{3}h + y\right) \\ S_n^{\,y} &= \frac{1}{3}\,b_y\left(\frac{2}{3}h + y\right)\left(\frac{h}{3} - y\right) \end{aligned}\right\} \qquad [11.227]$$

Reemplazando en:

$$\tau_{xy} = \frac{Q\,S_n^{\,y}}{b_y\,J_n}, \qquad [11.228]$$

resulta:

$$\tau_{xy} = \frac{12\,Q}{bh}\left(\frac{2}{3} + \frac{y}{h}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{y}{h}\right). \qquad [11.229]$$

τ_{xy} se anula para $y = \frac{2}{3}h$ e $y = -\frac{1}{3}h$, en correspondencia con el vértice y la base del triángulo, como es lógico que sea. Derivando la [11.229] respecto de y e igualando a cero

$$\frac{d\tau_{xy}}{dy} = \frac{12\,Q}{bh^3}\left(\frac{h}{3} - 2y\right) = 0, \qquad [11.230]$$

de donde $y = -\frac{1}{6}h$ es la distancia al baricentro en que ocurre el máximo valor de τ_{xy}, que obtenemos reemplazando y por $\frac{1}{6}h$ en la [11.229]:

$$\tau_{xy\,\text{máx.}} = \frac{3\,Q}{b\,h}. \qquad [11.231]$$

Teniendo en cuenta que para el triángulo $F = \frac{1}{2}bh$, sustituyendo resulta

$$\tau_{xy\,\text{máx.}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{Q}{F}, \qquad [11232]$$

es decir que el valor máximo de la componente vertical de la tensión tangencial, es un 50% mayor que el que resulta de admitir una repartición uniforme:

$$\tau_{xy} = \frac{Q}{F}. \qquad [11.233]$$

En lo que respecta a las componentes τ_{xz}, admitimos una variación lineal a lo ancho de la sección, o sea, que suponemos que las tensiones τ en puntos situados a un nivel y del eje neutro, concurren al vértice de la sección.

11.5.7. Alabeo de secciones solicitadas por flexión y corte

La hipótesis de Bernouilli–Navier, admitida para el desarrollo de la teoría de la flexión, supone la constancia de las secciones planas y es exacta en el caso de la flexión pura. Para la flexión con corte esta hipótesis no se cumple, como veremos a continuación, si bien se la admite como suficientemente aproximada a los efectos prácticos.

Sea, por ejemplo, una viga solicitada por flexión y corte (fig. 11.43) en una de cuyas secciones, supuestas rectangulares, se originan tensiones tangen- sección responde a una ley parabólica. (fig. 11.43 *c*) con un máximo en corres-

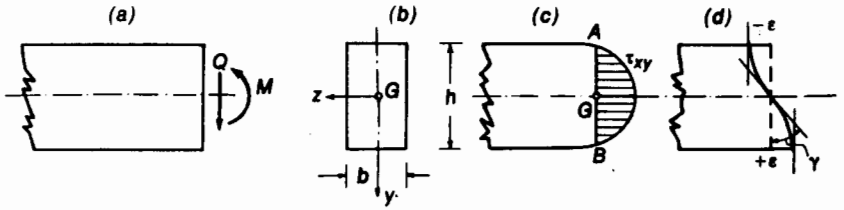


Fig. 11.43

pondencia con las fibras situadas en el eje neutro y valores nulos en los bordes superior e inferior. Recordando la relación $\gamma = \tau/G$ que vincula las tensiones tangenciales con las distorsiones, resulta que los elementos planos ubicados en correspondencia con los bordes superior e inferior de la sección no sufren distorsión alguna por ser en ellos nulas las tensiones tangenciales. En consecuencia, se mantienen paralelos a la posición primitiva de la sección. En cambio, a medida que nos acercamos al eje neutro, crecen las tensiones tangenciales y con ellas las distorsiones, hasta alcanzar un valor máximo para los elementos planos en correspondencia con el eje neutro, para luego ir decreciendo hasta alcanzar nuevamente un valor nulo en correspondencia con el borde inferior. Como consecuencia de ello, la sección no puede mantenerse plana ya que los sucesivos elementos de superficie de la sección experimentan distorsiones (giros) de distinta magnitud, es decir, la sección se alabea. No obstante, como dijimos antes, por ser las distorsiones de magnitud infinitésima en comparación con las dimensiones de la sección, puede suponerse sin mayor error que ésta se mantiene plana.

11.5.8. Tensiones tangenciales en la sección doble T

Sea la sección de figura 11.44 que idealiza un perfil laminado doble T.

Para un corte s– s, situado a un nivel y medido desde el eje neutro de la sección,

las tensiones tangenciales quedan definidas por la fórmula de Jouravski. Con la notación de la figura resulta:

$$J_n = \frac{b h^3}{12}\left[1-\left(1-\frac{e}{b}\right)\left(1-\frac{2t}{h}\right)^3\right], \qquad [11.234]$$

y para el corte s–s en correspondencia con el alma:

$$S_n^y = \frac{b t}{2}(h-t) + \frac{e}{2}\left[\left(\frac{h}{2}-t\right)^2 - y^2\right], \qquad [11.235]$$

y finalmente:

$$\tau_{xy} = \frac{12Q}{b h^3 e}\cdot\frac{\dfrac{b t}{2}(h-t)+\dfrac{e}{2}\left[\left(\dfrac{h}{2}-t\right)^2-y^2\right]}{\left[1-\left(1-\dfrac{e}{b}\right)\left(1-\dfrac{2t}{h}\right)^3\right]} \qquad [11.236]$$

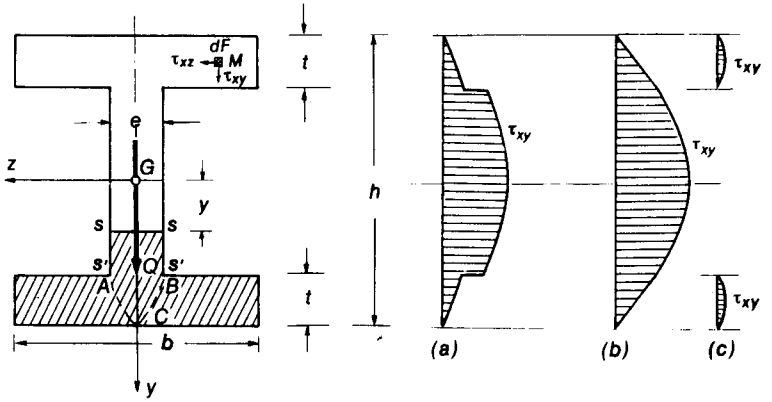


Fig. 11.44

Esta expresión es válida para los niveles y correspondientes al alma. Para los cortes s'–s' en correspondencia con las uniones de las alas con el alma, donde $y = \frac{1}{2}h - t$, la [11.236] se transforma en:

$$\tau_{xy} = \frac{6Q\,t\,(h-t)}{h^3 e\left[1-\left(1-\dfrac{e}{b}\right)\left(1-\dfrac{2t}{h}\right)^3\right]} \qquad [11.237]$$

y para $y = 0$ adquiere su valor máximo:

$$\tau_{xy\,\text{máx.}} = \frac{6Q\left[b\,t\,(h-t)+e\left(\dfrac{h}{2}-t\right)^2\right]}{b h^3 e\left[1-\left(1-\dfrac{e}{b}\right)\left(1-\dfrac{2t}{h}\right)^3\right]} \qquad [11.238]$$

Como puede observarse, la variación de τ_{xy} entre ambos valores es parabólica y responde al diagrama de figura 11.44 *a*.

En lo que respecta a las tensiones tangenciales que se originan en las alas, su determinación procede en la forma que veremos a continuación.

Es común, en muchos textos, extender la validez de la expresión [11.236] a las alas. De esta manera, si consideramos los niveles comprendidos entre $y = \frac{1}{2}h - t$ e $y = \frac{1}{2}h$, la correspondiente expresión de la fórmula de Jouravski resulta:

$$\tau_{xy} = \frac{6Q\left(\dfrac{h^2}{4}-y^2\right)}{b h^3\left[1-\left(1-\dfrac{e}{b}\right)\left(1-\dfrac{2t}{h}\right)^3\right]}. \qquad [11.239]$$

Para $y = \frac{1}{2}h$ es lógico y fácil de observar que:

$$\tau_{xy} = 0. \qquad [11.240]$$

En correspondencia con s'–s' y para $y = \frac{1}{2}h - t$, resulta:

$$\tau_{xy} = \frac{6Q\,t\,(h-t)}{b h^3\left[1-\left(1-\dfrac{e}{b}\right)\left(1-\dfrac{2t}{h}\right)^3\right]}. \qquad [11.241]$$

Comparando los valores de τ_{xy} dados por las [11.237] y [11.241] vemos que éstas se encuentran en la relación de b/e, es decir, que al nivel s'–s' se produce una discontinuidad del diagrama de tensiones τ_{xy}, tal como muestra la figura 11.44 *a*, llegando así a una incongruencia. En efecto, es evidente que, de acuerdo con la [11.241] a lo largo del borde interior del ala del perfil debe existir una tensión τ_{xy} originando, de acuerdo con el teorema de Cauchy, tensiones rasantes longitudinales sobre la superficie interior de aquella, donde, por tratarse de una superficie libre de solicitaciones exteriores, no puede haber tensiones.

La situación real es la siguiente: en un punto tal como el M, de la superficie de una de las alas, existen tensiones τ_{xy} y τ_{xz}. Las primeras, salvo en la zona aproximadamente triangular ABC de unión de ala y alma, varían según diagramas parabólicos que se anulan en correspondencia de los bordes superior e inferior del ala (fig. 11.44 *c*), y su valor máximo es reducido por lo que pueden despreciarse. Para la zona ABC puede admitirse que varían linealmente desde el valor en correspondencia con s'–s' dado por la [11.237] hasta anularse en el borde inferior del perfil.

En cuanto a las tensiones τ_{xz}, su magnitud es tal que no pueden ser despreciadas y juegan un papel importante en aquellas secciones para las que la línea de fuerzas coincide con un eje principal de inercia que no es eje de simetría de la sección.

Desarrollaremos a continuación las expresiones que nos permiten establecer su ley de variación a lo largo de las alas.

Supongamos el mismo perfil de figura 11.44, al que efectuamos un corte vertical en una de sus alas (fig. 11.45 *a*) y del que separamos la parte exterior

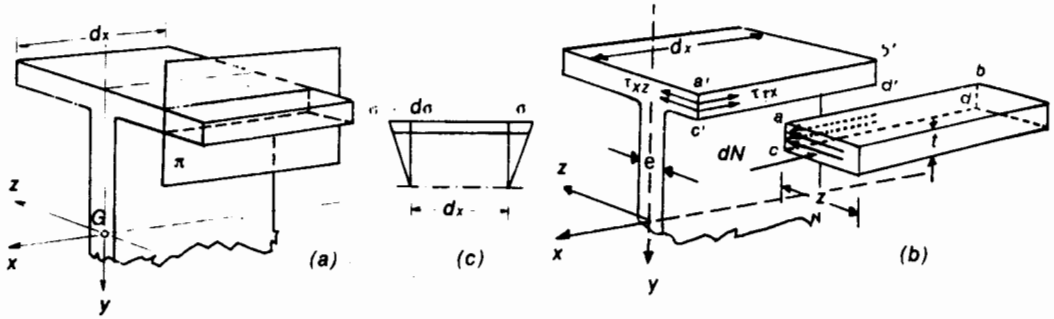


Fig. 11.45

[fig. 11.45 *b*]. Como el perfil se encuentra solicitado por flexión, sobre la cara normal posterior se originan tensiones normales (fig. 11.45 *c*):

$$\sigma = \frac{M}{J_n} y, \qquad [11.242]$$

y en la cara anterior:

$$\sigma + d\sigma = \frac{M + dM}{J_n} y. \qquad [11.243]$$

Las fuerzas elementales $(\sigma + d\sigma)\,dF$ y $\sigma\, dF$ admiten dos resultantes coaxiles, cuyas expresiones son:

$$N + dN = \int_{(h/2)-t}^{h/2} \frac{z\,(M + dM)}{J_n}\, y dy. \qquad [11.244]$$

para la cara anterior y:

$$N = \int_{(h/2)-t}^{h/2} z \frac{M}{J_n}\, y\, dy \qquad [11.245]$$

para la posterior. Por ser de signo contrario, su suma nos da la fuerza dN que tiende a deslizar la parte externa del ala con respecto al resto del perfil según el plano π, cuya expresión es:

$$dN = \int_{(h/2)-t}^{(h/2)} z y \frac{dM}{J_n}\, dy \qquad [11.246]$$

o también:

$$dN = \frac{dM}{J_n} \int_{(h/2)-t}^{h/2} z\, y\, dy = z \frac{dM}{J_n} \frac{y^2}{2} \Bigg|_{(h/2)-t}^{h/2} \qquad [11.247]$$

En esta expresión la integral representa el momento estático respecto del eje neutro de la parte de ala de base z.

Reemplazando los límites de integración llegamos finalmente a:

$$dN = \frac{S_n^z}{J_n}\, dM = \frac{dM}{J_n} \cdot \frac{z\,t}{2}\,(h - t). \qquad [11.248]$$

Ahora bien, en la cara *a, b, c, d* se originan tensiones τ_{zx} de resbalamiento longitudinal, opuestas al deslizamiento, que suponemos paralelas al eje x y uniformemente distribuidas sobre la cara. Estas tensiones conducen a un esfuerzo resultante $\tau_{zx} \cdot t \cdot dx$, que por razones de equilibrio debe ser igual a dN:

$$\frac{dM}{J_n} S_n^z = \tau_{zx}\, t\, dx = dM \cdot \frac{z}{2}\, t\, \frac{(h - t)}{J_n}. \qquad [11.249]$$

de donde:

$$\tau_{zx} = \frac{dM}{dx} \frac{S_n^z}{t \cdot J_n} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{z}{2} \cdot \frac{(h - t)}{J_n} \qquad [11.250]$$

Recordando que $Q = dM/dx$ y teniendo en cuenta el valor de J_n dado por la [11.234] obtenemos finalmente:

$$\tau_{zx} = \frac{6\,Q\,(h - t)\,z}{b\,h^3 \left[1 - \left(1 - \frac{e}{b}\right)\left(1 - \frac{2t}{h}\right)^3\right]}. \qquad [11.251]$$

Ahora bien, de acuerdo con el teorema de Cauchy, en el plano del ala se originan tensiones $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ que, de acuerdo con la [11.251] varían linealmente desde cero (extremo del ala, para $z = 0$) hasta un máximo en correspondencia con el borde del alma, donde $z = \frac{1}{2}(b - e)$:

$$\tau_{xz\,\text{máx.}} = \frac{3\,Q\,(h - t)\,(b - e)}{b\,h^3 \left[1 - \left(1 - \frac{e}{b}\right)\left(1 - \frac{2t}{h}\right)^3\right]}. \qquad [11.252]$$

La figura 11.46 muestra los diagramas correspondientes a las cuatro semialas, donde es fácil de ver que, para las semialas superiores, sujetas a tensiones normales de compresión, las tensiones τ_{xz} están dirigidas hacia el eje del perfil, es decir hacia el alma, mientras que para las inferiores, por ser las tensiones normales de tracción, las tensiones τ_{xz} cambian de signo y se alejan del eje del perfil.

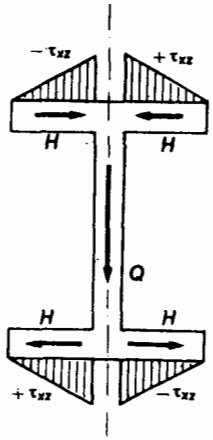


Fig. 11.46

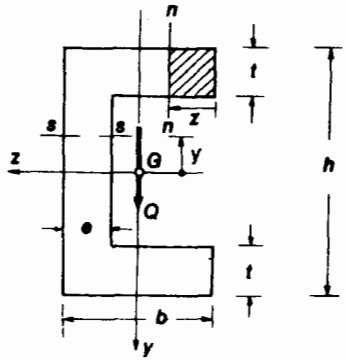


Fig. 11.47

Razones de simetría hacen que, para cada una de las alas, los esfuerzos horizontales H derivados de las tensiones τ_{xz} se anulen entre sí por ser opuestos y el esfuerzo de corte Q se equilibre prácticamente con la resultante de los esfuerzos elementales originados en el alma por las tensiones τ_{xy}.

11.5.9. Centro de corte

Consideremos el perfil [de figura 11.47, sujeto a flexión y corte, y en el que la línea de fuerzas coincide con el eje y, principal de inercia pero *no de simetría*. Admitamos por un momento que, para esta sección sea válida la teoría de Jouravski. Con la notación de la figura tenemos:

$$\left.\begin{aligned} J_n &= \frac{bh^3}{12}\left[1-\left(1-\frac{e}{b}\right)\left(1-\frac{2t}{h}\right)^3\right] \\ S_n^y &= \frac{e}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)+(b-e)\frac{t}{2}(h-t) \end{aligned}\right\} \qquad [11.253]$$

de donde, para el nivel y, las tensiones tangenciales τ_{xy} en el alma resultan:

$$\tau_{xy} = \frac{6Q\left[e\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)+(b-e)\,t\,(h-t)\right]}{ebh^3\left[1-\left(1-\frac{e}{b}\right)\left(1-\frac{2t}{h}\right)^3\right]} \qquad [11.254]$$

Para el corte n–n del ala superior, situado a una distancia z del extremo de la misma, se tiene:

$$S_n^z = z\int_{(h/2)-t}^{h/2} y\,dy = z\,(h-t)\frac{t}{2} \qquad [11.255]$$

Como puede observarse, tanto la expresión de J_n como la de S_n^z son las mismas que las establecidas para la sección doble T en el parágrafo anterior. Ello es lógico, por cuanto ambas secciones sólo difieren en la posición relativa del alma respecto al eje baricéntrico vertical. En consecuencia:

$$\tau_{xz} = \frac{Q\,S_n^z}{J_n\,t} = \frac{6Q\,(h-t)\,z}{bh^3\left[1-\left(1-\frac{e}{b}\right)\left(1-\frac{2t}{h}\right)^3\right]}. \qquad [11.256]$$

La figura 11.48 *a* muestra la distribución de las tensiones τ_{xy} en el alma y τ_{xz} en las alas; las flechas indican sus respectivos sentidos.

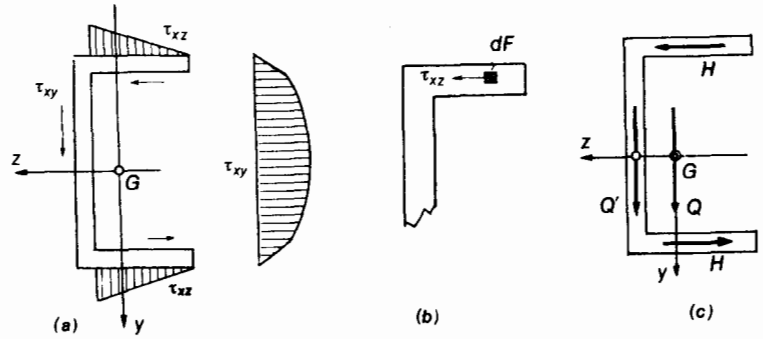


Fig. 11.48

La distribución de las tensiones τ_{xz} sobre las alas es triangular y su valor máximo, en correspondencia con la unión del ala con el alma, es decir, para $z =$

$$\tau_{xz\,\text{máx.}} = \frac{6\,Q\,(h-t)\,(b-e)}{b\,h^3\left[1-\left(1-\frac{e}{b}\right)\left(1-\frac{2\,t}{h}\right)^3\right]}, \qquad [11.257]$$

y la fuerza resultante sobre toda la superficie del ala:

$$H = \frac{1}{2}\,(b-e)\,t\,\tau_{xz\,\text{máx.}} \qquad [11.258]$$

Por razones de simplicidad, expresaremos $\tau_{xz\,\text{máx.}}$ en función de J_n:

$$\tau_{xz} = \frac{Q\,(h-t)}{2J_n}\,z$$

$$\tau_{xz\,\text{máx.}} = \frac{Q\,(h-t)\,(b-e)}{2\,J_n} \qquad [11.259]$$

y reemplazando en [11.258]:

$$H = \frac{Q\,(h-t)\,t\,(b-e)^2}{4\,J_n}. \qquad [11.260]$$

Las fuerzas horizontales H, iguales en valor absoluto para ambas alas pero de signos contrarios, tienen los sentidos que aparecen en figura 11.48 *c* cuando Q, esfuerzo de corte, tiene sentido positivo, dirigido hacia abajo. Ambas forman un par de momento:

$$M_H = H\,(h-t) = \frac{Q\,(h-t)^2\,(b-e)^2\,t}{4\,J_n}. \qquad [11.261]$$

El esfuerzo Q', resultante de los esfuerzos elementales en el alma, es, como dijimos, igual al esfuerzo de corte Q.

Analizaremos a continuación si se cumplen o no las condiciones de equivalencia entre los esfuerzos exteriores e interiores de la sección. Los primeros son el momento flexor M_z y el esfuerzo de corte Q. Los esfuerzos interiores son las dos fuerzas H, la resultante Q' de los esfuerzos en el alma y las resultantes D y Z del diagrama de tensiones normales. Las condiciones de equivalencia las expresaremos en forma de tres ecuaciones de igualdad de proyecciones sobre los tres ejes x, y, z, fig. 11.49', y tres ecuaciones de igualdad de momentos respecto de los mismos ejes, es decir:

1) proyección sobre el eje x:

$$Z - D = 0$$

2) proyección sobre el eje y:

$$Q' = Q$$

3) proyección sobre el eje z:

$$H - H = 0$$

4) momento respecto del eje z:

$$D \cdot \mathfrak{z} = Z \cdot \mathfrak{z} = M_z$$

5) momento respecto del eje y:

$$0 = 0$$

6) momento respecto del eje x:

$$Q' \cdot \delta' + H \cdot (h-t) \neq 0 \qquad [11.262]$$

Como puede observarse, la última de las condiciones de equivalencia no se satisface; en consecuencia, la hipótesis de la que partimos, la aplicabilidad a esta sección de la teoría de Jouravski, no es válida. De modo que no podemos admitir la hipótesis de Bernoulli–Navier de la conservación de las secciones planas, lo que por otra parte resulta evidente. En efecto, la sección está solicitada por un par torsor cuyo momento es igual a M_H dado por la [11.261] y en consecuencia se alabea.

Por tratarse de una sección cuyos elementos constituyentes son de poco espesor el alabeo es considerable y las tensiones normales secundarias inducidas, pueden llegar a ser de importancia y deben sumarse a las debidas a la flexión.

La forma de calcular las tensiones normales debidas al par ficticio de torsión ha sido tratada anteriormente en el capítulo correspondiente a Torsión.

Si el plano de flexión en lugar de pasar por el baricentro G de la sección, lo hace por un punto O (fig. 11.49) situado sobre el eje de simetría de la sección y desplazado de la recta de acción de Q' de una distancia $\delta = M_H/Q' = M_H/Q$ hacia la izquierda de la sección, de modo que exista coincidencia de signos de los momentos M_H y de Q aplicado en O respecto del eje x, entonces la 6a. de las [11.262] se satisface como es fácil de observar. En consecuencia, será válida la teoría de Jouravski, y las tensiones de τ_{xy} y τ_{xz} podrán determinarse mediante la fórmula de Coilignon.

Al punto O determinado en la forma indicada se lo denomina *centro de corte* de la sección.

Cuando se trata de un perfil ángulo de alas iguales, para el que la línea de fuerzas coincide con el eje de momento de inercia mínimo (fig. 11.50) el centro de corte coincide con la intersección de las líneas medias de las alas. En efecto, en cada una de ellas, las tensiones tangenciales deben estar dirigidas según los ejes de las mismas y en consecuencia los esfuerzos totales tienen dicha dirección y su resultante pasa por la intersección de sus respectivas rectas de acción que coinciden con los ejes de alas del perfil.

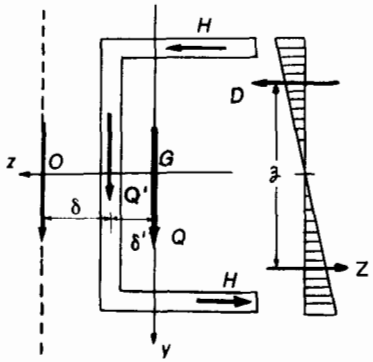


Fig. 11.49

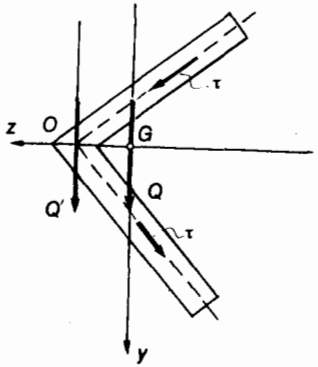


Fig. 11.50

Consideremos ahora el caso de un perfil doble T asimétrico y supongamos que la línea de fuerzas coincide con el eje de momento de inercia mínimo (fig. 11.51).

Para un nivel $s_1 - s_1$, en las alas mayores tenemos

$$\tau'_{xy} = \frac{Q\, S_n'^{\,y}}{t_1\, J_n}\,, \qquad [11.263]$$

y para el $s_2 - s_2$ en las menores :

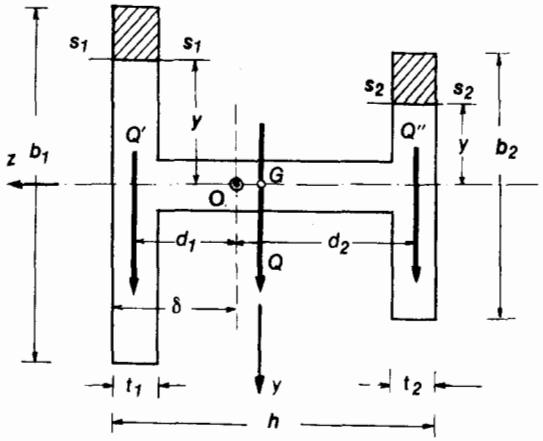


Fig. 11.51

$$\tau''_{xy} = \frac{Q\, S_n''^{\,y}}{t_2\, J_n}\,. \qquad [11.264]$$

Las tensiones máximas corresponden al eje neutro, para el que:

$$\left.\begin{aligned} S_n'^{\,y} &= \frac{t_1\, b_1^2}{8} \\ S_n''^{\,y} &= \frac{t_2\, b_2^2}{8} \end{aligned}\right\} \qquad [11.265]$$

y reemplazando:

$$\left.\begin{aligned} \tau'_{xy\,\text{máx.}} &= \frac{Q\, b_1^2}{8\, J_n} \\ \tau''_{xy\,\text{máx.}} &= \frac{Q\, b_2^2}{8\, J_n} \end{aligned}\right\} \qquad [11.266]$$

Las fuerzas resultantes Q' y Q'' sobre cada una de las alas valen:

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{2}{3}\, t_1\, b_1\, \tau'_{xy\,\text{máx.}} = \frac{Q}{J_n} \cdot \frac{t_1\, b_1^3}{12} \\ Q'' &= \frac{2}{3}\, t_2\, b_2\, \tau''_{xy\,\text{máx.}} = \frac{Q}{J_n} \cdot \frac{t_2\, b_2^3}{12} \end{aligned} \qquad [11.267]$$

La resultante de ambas, cortará al eje horizontal de simetría en el centro de torsión O. Si llamamos d_1 y d_2 las distancias a éste desde las rectas de acción de Q' y Q'', debemos tener por tratarse de un sistema de fuerzas paralelas:

$$Q'\, d_1 = Q''\, d_2\,, \qquad [11.268]$$

o también:

$$\frac{Q}{J_n} \cdot \frac{t_1\, b_1^3}{12}\, d_1 = \frac{Q}{J_n} \cdot \frac{t_2\, b_2^3}{12}\, d_2\,. \qquad [11.269]$$

y finalmente, simplificando y recordando que $J_1 = t_1 b_1^3/12$ y $J_2 = t_2 b_2^3/12$ son los valores de los momentos de inercia de las alas respecto del eje neutro:

$$J_1\, d_1 = J_2\, d_2\,. \qquad [11.270]$$

Pero

$$\left.\begin{aligned} d_1 + d_2 &= h - \frac{1}{2}\,(t_1 + t_2) \\ d_2 &= h - \frac{1}{2}\,(t_1 + t_2) - d_1 \end{aligned}\right\} \qquad [11.271]$$

de donde:

$$d_1 = \frac{J_2}{J_1}\left[h - \frac{1}{2}(t_1 + t_2) - d_1\right] \qquad [11.272]$$

$$d_1 = \frac{\left[h - \frac{1}{2}(t_1 + t_2)\right]\frac{J_2}{J_1}}{1 + \frac{J_2}{J_1}} \qquad [11.273]$$

y con respecto al borde del ala mayor:

$$\delta = \frac{t_1}{2} + \frac{\left[h - \frac{1}{2}(t_1 + t_2)\right]\frac{J_2}{J_1}}{1 + \frac{J_2}{J_1}} \qquad [11.274]$$

11 . 6 . Las tensiones principales en flexión y corte

Sea figura 11.52, una sección solicitada por flexión y corte, que, por razones de simplicidad supondremos rectangular.

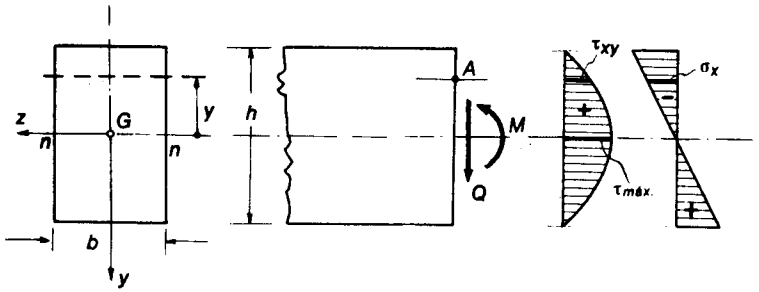


Fig. 11.52

En las fibras situadas a una distancia y del eje neutro actuarán una tensión normal σ_x y una tangencial τ_{xy} que, para los sentidos de M y Q indicados tendrán los signos que aparecen en los respectivos diagramas de fig. 11.52. Dichos valores serán constantes para todas las fibras situadas a un mismo nivel y, y si, por otra parte, consideramos que $\sigma_z = \sigma_y = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, podemos admitir que a los puntos A corresponde un estado elástico plano. Si ahora aislamos el prisma infinitésimo que corresponde a un punto A, su solicitación será la que indica la figura 11.53 *a*.

El problema tiene por objeto determinar las tensiones principales y sus direcciones, para los distintos puntos de la sección.

En este caso, por ser $\sigma_y = 0$ su expresión genérica, es:

$$\sigma_{1,2} = -\frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}\,, \qquad [11.275]$$

y su determinación gráfica resulta del trazado de la circunferencia de Mohr de figura 11.53 *b*. Sobre el plano principal *P–1* actúa la tensión principal σ_1

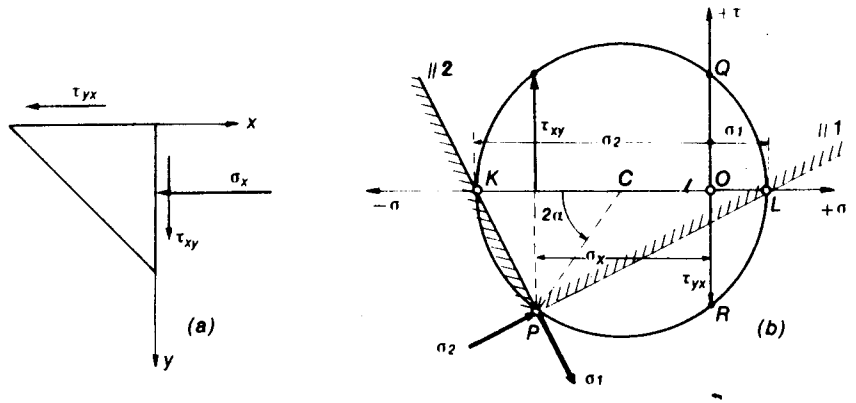


Fig. 11.53

de tracción y sobre el *P–2*, la σ_2 de compresión, cuyas direcciones son normales a los planos respectivos y aparecen indicadas con sus sentidos en la figura.

Desarrollaremos a continuación una construcción gráfica simple, debida a M. Ritter, conocida como *diagrama de Ritter* que permite, conocidos los diagramas de σ_x y τ_{xy} para la sección determinar los correspondientes a σ_1 y σ_2 y además, sus direcciones.

Sea la sección $S–S'$ de una viga sujeta a flexión y corte, y AGA' y SLS' los diagramas de tensiones normales σ_x y tangenciales τ_{xy} respectivamente. Tracemos la recta BGB', cuyas ordenadas respecto de $S–S'$ representan los valores $\frac{1}{2}\sigma_x$. Para un nivel cualquiera y, la paralela al eje baricéntrico en su intersección con los diagramas $\frac{1}{2}\sigma_x$, τ_{xy} y el eje $S–S'$ define los puntos C, N y O respectivamente. Con centro en O y radio ON rebatimos N sobre $S–S'$ obteniendo Q y con centro en C trazamos la semicircunferencia KQL, de radio CQ.

Los segmentos $\overline{OL}$ y $\overline{OK}$ representan, respectivamente σ_1 y σ_2, tensiones principales. En efecto, por construcción tenemos que $\overline{OQ} = \overline{ON} = \tau_{xy}$; $\overline{OC} = \frac{1}{2}\sigma_x$; $\overline{CQ} = \sqrt{\frac{1}{4}\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2} = \overline{CK} = \overline{CL}$.

En consecuencia:

$$\left.\begin{aligned} \overline{OL} &= -\overline{OC} + \overline{CL} = -\frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ \overline{OK} &= -\overline{OC} - \overline{CK} = -\frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \end{aligned}\right\} \qquad [11.276]$$

es decir:

$$\left.\begin{aligned} \overline{OL} &= \sigma_1 \qquad \text{(tracción)} \\ \overline{OK} &= \sigma_2 \qquad \text{(compresión)} \end{aligned}\right\} \qquad [11.277]$$

por cuanto los segundos miembros de las [11.276] son idénticos con los de la [11.275].

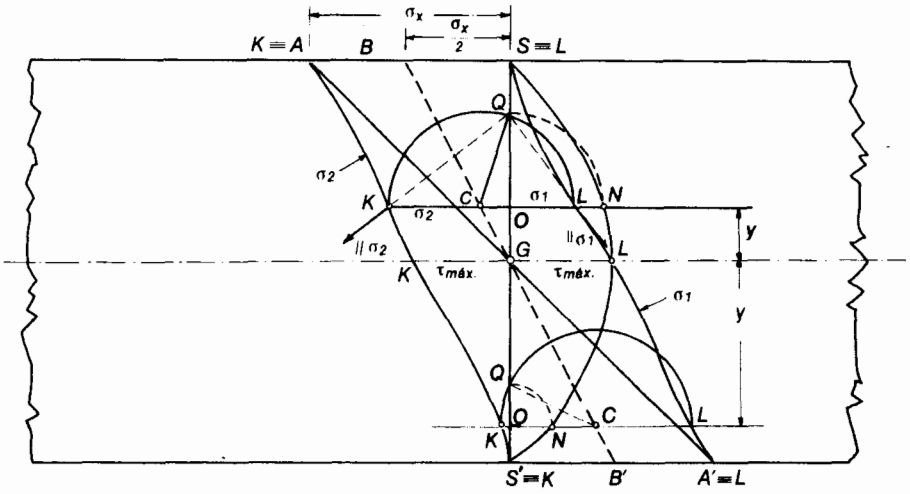


Fig. 11.54

Uniendo Q con L y K, obtenemos las direcciones de σ_1 y σ_2 respectivamente. En efecto, si comparamos la construcción de figura 11.54, que acabamos de describir, con la circunferencia de Mohr de figura 11.53, vemos que se trata en ambos casos de la misma construcción, con la única diferencia que en la construcción de Ritter hemos llevado $-\tau_{yx}$ para definir el punto Q, existiendo plena concordancia en los restantes elementos de las dos construcciones.

La dirección QL de figura 11.54 es paralela, como es fácil de observar, a la dirección PK de figura 11.53, que es la dirección del plano principal *2* y, en consecuencia, es también la dirección de σ_1. Lo mismo ocurre con la dirección QK, que es la de σ_2.

Repitiendo la construcción para distintos niveles y obtenemos una serie de puntos K y L que unidos constituyen los diagramas de σ_1 y σ_2, que aparecen en figura 11.54. Corresponde hacer notar que, para los bordes superior e inferior de la sección, por ser $\tau_{xy} = 0$, resulta $|\sigma_1| = |\sigma_2| = |\sigma_x|$, mientras que para el eje neutro, donde $\sigma_x = 0$, el estado elástico corresponde al denominado de resbalamiento simple, para el que se cumple que $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{xy}$ estando σ_1 y σ_2 orientadas a 45° con respecto del plano de la sección.

11.7. Curvas isostáticas

Sea un sólido sujeto a un estado plano de tensión y consideremos en él una serie de secciones I–I; II–II; etc. (fig. 11.55).

Conocidos los estados de tensión en puntos A_i, B_i, C_i, . . . situados sobre dichas secciones, podemos determinar en cada uno de ellos, sea gráficamente,

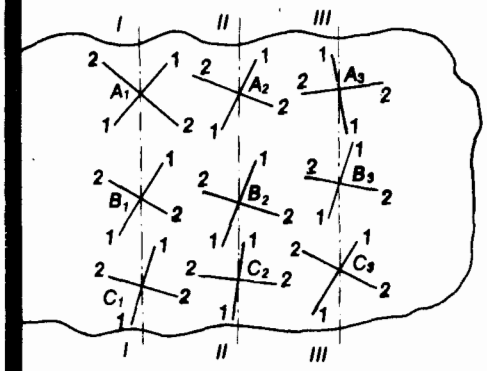


Fig. 11.55

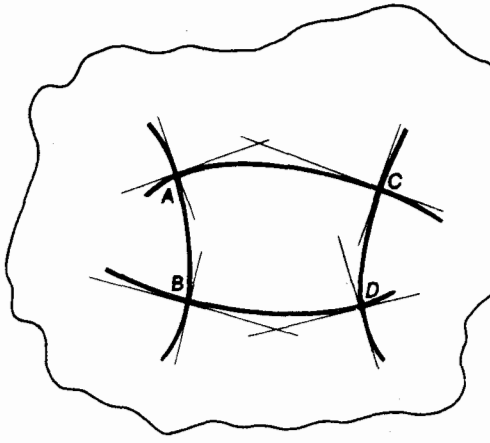


Fig. 11.56

sea analíticamente, las tensiones principales σ_1, σ_2 y sus correspondientes direcciones.

Si las secciones son lo suficientemente próximas y en ellas los puntos muy cercanos, prolongando las rectas que definen las direcciones principales hasta cortarse, obtendremos poligonales, cuyas envolventes constituyen las curvas denominadas *isostáticas* o también *trayectorias de tensiones principales* (fig. 11.56), cuya propiedad fundamental reside en el hecho que, en cualquier

punto de las mismas la tangente nos da la dirección de una de las tensiones principales, siendo la segunda de dirección ortogonal. En consecuencia por el punto considerado pasará una segunda curva isostática, resultando así dos familias de curvas isostáticas, ortogonales.

La ortogonalidad de las isostáticas pierde validez en determinados puntos, denominados *singulares* o *isotrópicos*. Son *isotrópicos* aquellos puntos para los cuales $\sigma_1 = \sigma_2$, es decir, donde ambas tensiones principales son de igual intensidad y signo. Para ellos el radio de la circunferencia de Mohr es nulo y la dirección de las tensiones principales resulta indeterminada, por cuanto todos los planos que pasan por el punto, son planos principales.

En los bordes libres, sin solicitación exterior, el mismo borde constituye la isostática de una de las familias, mientras que las de la segunda familia resultan ser normales al borde. Ello puede observarse en la figura 11.57, donde se han reproducido las isostáticas de una viga rectangular simplemente apoyada, solicitada por dos cargas concentradas.

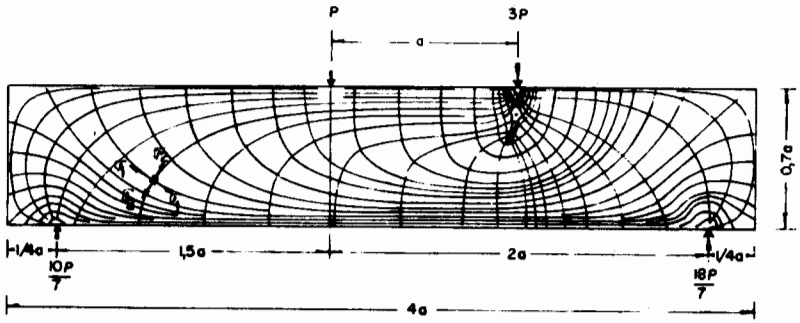


Fig. 11.57

11.7.1. Ecuación diferencial de las curvas isostáticas

Para determinar la función que define las curvas isostáticas utilizaremos la expresión deducida, al analizar el estado plano de tensión, para definir la dirección de las tensiones principales:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad [11.278]$$

Admitiremos en lo que sigue que la variación de α_1 es continua y expresamos la [11.278] en función del arco simple obtenido:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2\operatorname{tg}\alpha_1}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_1} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad [11.279]$$

Ahora bien, si φ es la función que define la variación del ángulo α_1, su representación gráfica será, evidentemente, la curva isostática que buscamos y su derivada φ' nos dará para un punto determinado el valor de $\operatorname{tg}\alpha_1$. En consecuencia, teniendo en cuenta la [11.279]:

$$\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha_1}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_1} = \frac{2\varphi'}{1 - (\varphi')^2} \qquad [11.280]$$

o también:

$$(\varphi')^2 + \varphi' \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\tau_{xy}} - 1 = 0 \qquad [11.281]$$

La [11.281] es una ecuación diferencial de primer orden, cuadrática, de coeficientes variables, que, salvo casos particulares, sólo es integrable por aproximaciones.

11.7.2. Determinación gráfica de las isostáticas

Analizaremos a continuación un procedimiento gráfico, simple, para el trazado de las isostáticas como envolventes de las poligonales constituidas por las direcciones principales.

Supongamos, fig. 11.58, una viga de sección rectangular en voladizo,

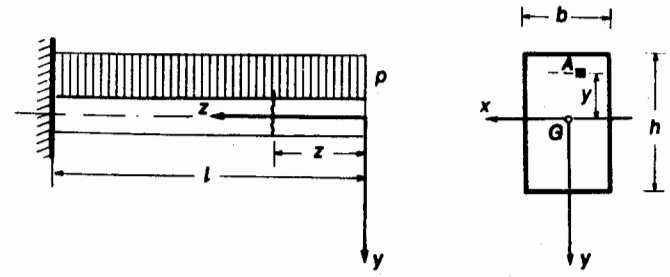


Fig. 11.58

sujeta a una carga distribuida uniforme p. Con la notación de la figura, para una sección ubicada a una distancia z del extremo libre, el par de reducción de las fuerzas de la derecha vale:

$$M_{(z)} = \frac{1}{2}\, p\, z^2 \qquad [11.282]$$

y la fuerza tangencial (no el esfuerzo de corte que es negativo):

$$Q_{(z)} = p\, z\,. \qquad [11.283]$$

En consecuencia, las tensiones normal σ_z y tangencial τ_{zy} para un punto genérico A situado a una distancia y del eje neutro, tendrán por expresiones[1]:

$$\sigma_z = \frac{M_{(z)}}{J_n}\, y = \frac{p z^2 y}{2 J_n} \qquad [11.284]$$

y

$$\tau_{zy} = \frac{Q_{(z)}\, S_n^y}{b J_n} = \frac{1}{2}\, \frac{p z \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{J_n} \qquad [11.285]$$

Recordando la [11.278] que da la dirección de las tensiones principales en el punto, teniendo en cuenta que para este caso $\sigma_y = 0$ y reemplazando los valores de σ_z y τ_{zy} dados por las [11.284] y [11.285] llegamos a:

$$\operatorname{tg} 2\,\alpha_1 = \frac{2\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{z\, y} \qquad [11.286]$$

Esta expresión nos permite calcular fácilmente las direcciones de las tensiones principales a distintos niveles (valores variables de y), y en una serie de secciones (valores variables de z).

El procedimiento operativo es el siguiente: se divide la luz de la viga en una serie de intervalos iguales, efectuando lo mismo con la altura, obteniéndose así una malla como muestra la figura 11.59.

Se fija luego un intervalo $z = l/n$ y se calculan los sucesivos valores de $\operatorname{tg} 2\alpha_1$ para los distintos valores $y = h/m$, $2h/m$, $3h/m$ etc., teniendo en cuenta el signo de y (positivo debajo del eje neutro y negativo por encima).

Se determinan luego los dos valores α_1 y $\alpha_1 + (\pi/2)$ que corresponden a las dos direcciones principales en cada punto.

La determinación de α_1 y $\alpha_1 + (\pi/2)$ puede realizarse también gráficamente mediante el trazado del diagrama de Ritter para cada una de las secciones, en la forma descripta en el parágrafo 11.6.

[1] Se hace notar el cambio del subíndice x por z, por cambio de ejes de referencia.

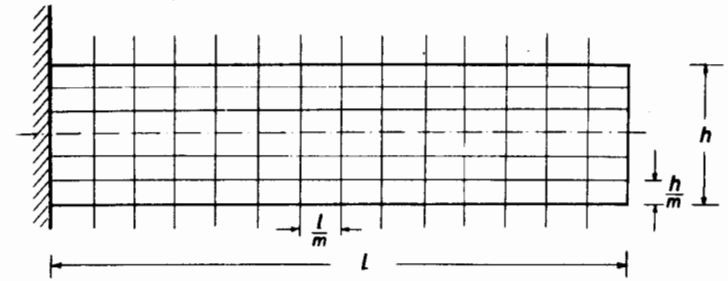


Fig. 11.59

Estamos ahora en condiciones de proceder al trazado gráfico de las curvas isostáticas. Para ello aislamos un trozo de malla, figura 11.60, donde en cada nudo hemos dibujado las direcciones de las tensiones σ_1, por ejemplo:

Comenzando el trazado por la isostática que pasa por *1*, de la misma conocemos su tangente en *1* y sabemos además que corta al intervalo *2–6* en un punto intermedio N, que no conocemos y donde tampoco conocemos

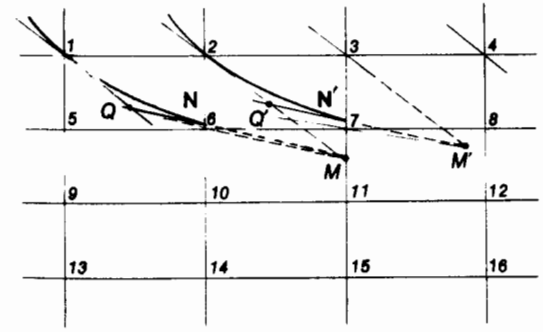


Fig. 11.60

la dirección de la tensión principal. Como la variación de las inclinaciones de las tensiones principales a lo largo de una sección responde a una función continua, podemos admitir que las direcciones principales entre *2* y *6* concurren a un mismo punto con las de éstas. Además, como la curvatura de la isostática entre *1* y *6* varía muy poco, podemos asimilar la curva a un arco de circunferencia, y por ello, las longitudes de los segmentos de tangentes en los extremos del arco *1N* resultan iguales:

$$\overline{1Q} = \overline{QN} \qquad [11.287]$$

En consecuencia, sobre la base de las dos propiedades enunciadas de las isostáticas, para determinar la posición de *N* y la dirección de la tangente en el mismo, a la isostática, procedemos como sigue:

a) se determina la intersección *M* de las direcciones principales en *2* y *6*;

b) apoyando una regla en *M*, se la hace pivotear en torno al mismo hasta encontrar una posición tal que resulte $\overline{NQ} = \overline{1Q}$

El punto *N* así determinado será el punto por donde pasa la isostática buscada y la dirección de su tangente será $\overline{NM}$. En la figura se ha repetido la construcción para el punto *N'*.

11 . 8 . Curvas isóclinas

Las curvas isóclinas se definen como el lugar geométrico de los puntos de igual inclinación de las tensiones principales. Su expresión analítica es:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \text{Cte.} \qquad [11.288]$$

Dando valores a α_1, variables entre 0 y 90° se obtiene una familia de curvas isóclinas.

En el caso del ejemplo analizado en 11.7.2 tenemos:

$$\frac{2\left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right)}{zy} = k, \qquad [11.289]$$

y despejando *y*:

$$y = \frac{kz}{4}\left(\pm\sqrt{1 + \frac{4h^2}{k^2z^2}} - 1\right), \qquad [11.290]$$

donde *k* es un parámetro que define el orden de la isóclina.

En la práctica, la determinación de las isóclinas se realiza generalmente por medio de la fotoelasticidad. En la figura 11.61 hemos reproducido de M. M. Frocht[1] la red de isóclinas correspondiente a la viga de la figura 11.57.

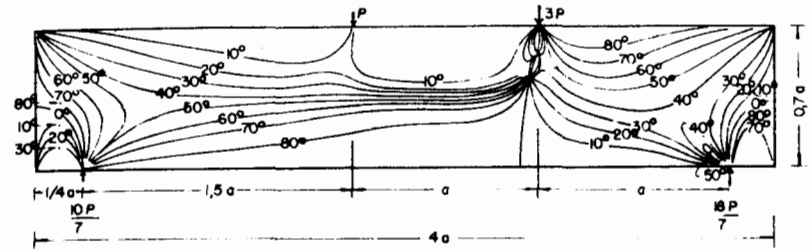


Fig. 11.61

11 . 9 . Flexión en el período plástico

11 . 9 . 1 . Materiales con límite de fluencia definido

Consideremos una sección cualquiera de una pieza prismática sujeta a flexión. Por razones de simplicidad, supondremos que la flexión sea pura y normal y, además, que la sección posea dos ejes de simetría. Como hemos visto, en las distintas fibras se originan tensiones normales cuya expresión es:

$$\sigma = \frac{M}{J_n}\,y, \qquad [11.291]$$

y las correspondientes deformaciones específicas:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}, \qquad [11.292]$$

expresiones válidas mientras se cumpla:

[1] M. M. Frocht, *Photoelasticity*. J Wiley & Sons.

$$\sigma < \sigma_{fl.} \qquad [11.293]$$

es decir, mientras la sección se encuentre solicitada en régimen elástico.

Supongamos que el material de la pieza posea un límite de fluencia definido y que su diagrama tensión–deformación, idealizado, sea el de figura 11.62.

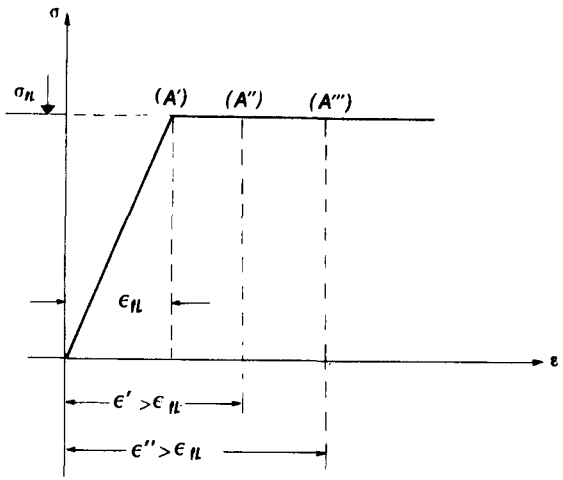


Fig. 11.62

Para un determinado valor del par flexor, en las fibras más alejadas A la deformación específica alcanza el valor de $\epsilon_{fl.}$ (fig. 11.63 *a*) y de acuerdo con el diagrama de figura 11.62 la tensión normal máxima adquiere simultáneamente el valor $\sigma_{fl.}$ del límite de fluencia (fig. 11.63 *b*). Llamando $M_{fl.}$ el momento de dicho par tendremos:

$$\sigma_{fl.} = \frac{M_{fl.}}{J_n} y_{máx.} \qquad [11.294]$$

Si aumentamos el valor del par sobre el valor $M_{fl.}$, la deformación específica de los puntos A resulta:

$$\epsilon > \epsilon_{fl.} \qquad [11.295]$$

y el punto representativo en el diagrama tensión deformación de figura 11.62 es ahora A''. Pero, el diagrama nos dice que la tensión no ha aumentado y se mantiene igual al límite de fluencia, circunstancia esta que es válida también para todas las fibras donde $\epsilon > \epsilon_{fl.}$; eso es en una profundidad c medida desde los bordes externos de la sección. En consecuencia, el diagrama de tensiones

será el que muestra la figura 11.63 *d*. Se ha producido en la sección una penetración plástica c y se dice que la sección está parcialmente plastificada, existiendo un núcleo elástico de altura $h - 2c$.

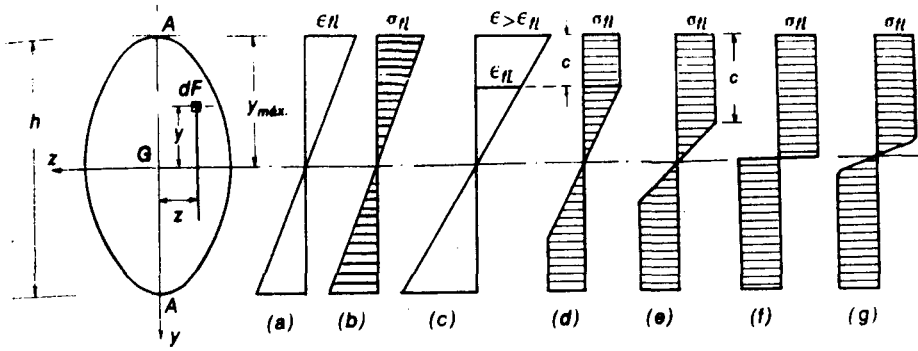


Fig. 11.63

Si aumentamos el par flexor, es mayor el número de fibras donde $\epsilon > \epsilon_{fl.}$ y $\sigma = \sigma_{fl.}$, aumentando con ello la profundidad de la penetración plástica c y disminuyendo la altura del núcleo elástico (fig. 11.63 *e*), hasta alcanzar un valor límite del par flexor que corresponde a una plastificación total de la sección: $c = h/2$ (fig. 11.63 *f*).

Ese valor del par flexor (M_R) se denomina *momento de rotura* de la sección. Se considera que una vez alcanzado, la sección ha agotado su capacidad de absorción de cargas y se produce la *rotura estructural*. Incrementando el valor del par sobre M_R continúan aumentando las deformaciones específicas sin que lo hagan las tensiones. Se producen giros relativos considerables de las secciones y se forma en la pieza prismática un mecanismo cinemático que se conoce con el nombre de *articulación plástica* y que constituye uno de los elementos fundamentales del *cálculo plástico de estructuras*. Si bien para la sección totalmente plastificada, a los efectos prácticos, se admite como diagrama ideal de tensiones el de figura 11.63 *f*, en realidad el diagrama real se asemeja al de figura 11.63 *g*. La diferencia entre el diagrama real y el ideal está ubicada en las cercanías del eje neutro, razón por la cual influye poco en la determinación del valor del momento de rotura y en consecuencia es perfectamente lícito reemplazar al diagrama real por el ideal.

11.9.2. Determinación del momento de rotura

Supongamos la sección de figura 11.63 totalmente plastificada. En cada elemento dF actuará una fuerza elemental $\sigma_{fl.}\,dF$. El conjunto de las mismas y el par M_R son equivalentes, equivalencia que exige el cumplimiento de las tres ecuaciones:

a) de proyección sobre el eje x

$$\int_F \sigma_{fl.}\,dF = 0\,, \qquad [11.296]$$

b) de momentos respecto del eje neutro

$$\int_F \sigma_{fl.}\,y\,dF = M_R\,, \qquad [11.297]$$

c) de momentos respecto de la línea de fuerzas

$$\int_F \sigma_{fl.}\,z\,dF = 0\,. \qquad [11.298]$$

La primera y tercera ecuación se satisfacen por la doble simetría de la sección. En cuanto a la segunda, precisamente por la simetría de la sección, podemos transformarla como sigue:

$$M_R = \int_F \sigma_{fl.}\,y\,dF = 2\int_{F/2} \sigma_{fl.}\,y dF, \qquad [11.299]$$

y por ser $\sigma_{fl.}$ constante:

$$M_R = 2\,\sigma_{fl.}\int_{F/2} y dF, \qquad [11.300]$$

expresión donde la integral representa el momento estático con respecto del eje neutro de la mitad de la sección; en consecuencia:

$$M_R = 2\,\sigma_{fl.}\,S_n^{F/2}\,. \qquad [11.301]$$

11.9.3. Expresión del momento de plastificación parcial

Sea la sección doblemente simétrica de figura 11.64, sujeta a un par de momento M^* que produce una plastificación parcial con una profundidad de penetración c.

La ecuación [11.297] adquiere, en este caso, la expresión siguiente:

$$M^* = 2\left[\int_0^{(h/2)-c} \sigma \cdot y \cdot dF + \int_{(h/2)-c}^{(h/2)} \sigma_{fl.}\,y\,dF\right] \qquad [11.302]$$

Ahora bien, de la figura resulta:

$$\sigma = \frac{\sigma_{fl.}}{\frac{h}{2} - c}\,y\,, \qquad [11.303]$$

de donde, reemplazando en [11.302]:

$$M^* = 2\left[\frac{\sigma_{fl.}}{\frac{h}{2} - c}\int_0^{(h/2)-c} y^2 dF + \sigma_{fl.}\int_{(h/2)-c}^{(h/2)} y\,dF\right] \qquad [11.304]$$

o también:

$$M^* = \sigma_{fl.}\left(\frac{1}{\frac{h}{2} - c}\,J_0 + 2S_n'\right) \qquad [11.305]$$

donde:

J_0 = momento de inercia respecto del eje neutro de la parte de sección correspondiente al núcleo elástico;

S_n' = momento estático respecto del eje neutro de cada una de las partes de la sección correspondiente a la penetración plástica.

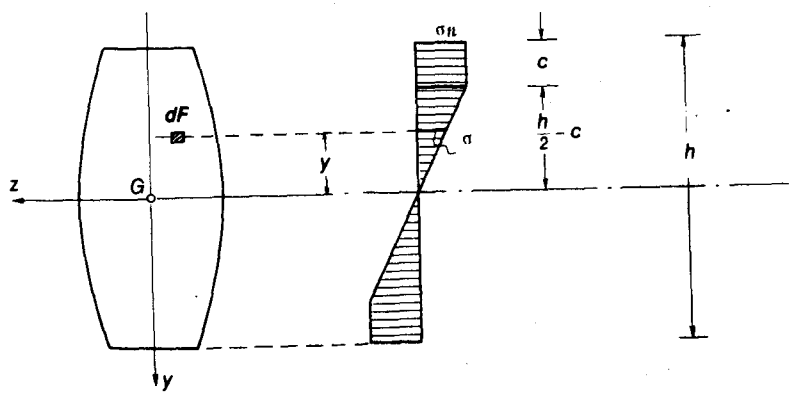


Fig. 11.64

11.9.4. Coeficientes de forma

Cuando se proyecta una sección en régimen elástico, es determinante el momento que hemos denominado de fluencia, para el cual se alcanza en las fibras más alejadas del eje neutro la tensión de fluencia. Ese momento constituye, para dicha hipótesis, el momento límite.

Sin embargo, el cálculo a rotura o en régimen plástico indica que las distintas secciones poseen una reserva de resistencia antes de producirse el colapso de la sección. La reserva de resistencia está medida por la relación entre el momento de rotura y el momento de fluencia:

$$\kappa = \frac{M_R}{M_{fL}} \quad . \qquad [11.306]$$

La relación κ se denomina *coeficiente de forma* de la sección, pues es variable en función de la forma y disposición de la misma, como veremos más adelante. Su expresión genérica, para secciones con doble simetría, resulta de dividir la [11.301] por $2\,\sigma_{fL} J_n/h = M_{fL}$, llegándose con ello a:

$$\kappa = \frac{S_n^{F/2}}{J_n} h \,, \qquad [11.307]$$

expresión que, como se ve, es independiente de la naturaleza del material de la sección y sólo función de las características geométricas.

Interesa conocer también la relación κ_0 entre el momento de plastificación parcial M^* y el momento de fluencia M_{fL}, que reemplazando valores resulta ser:

$$\kappa_0 = \frac{1}{\left(1 - \frac{2c}{h}\right)} \cdot \frac{J_0}{J_n} + \frac{S_n'}{J_n} h \qquad [11.308]$$

11.9.5 Momentos de rotura y plastificación parcial y coeficiente de forma para distintas secciones

11.9.5.1. Secciones rectangular y cuadrada

Para la sección rectangular de ancho b y altura h resulta:

$$S_n^{F/2} = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{b h^2}{8} \qquad [11.309]$$

de donde:

$$M_R = 2\,\sigma_{fL} \frac{b h^2}{8} = \sigma_{fL} \frac{b h^2}{4} \qquad [11.310]$$

$$\kappa = \frac{12 b h^2 h}{8 b h^3} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \,. \qquad [11.311]$$

Para la sección rectangular existe pues, hasta alcanzar el colapso, una reserva de resistencia del 50% con respecto a la iniciación de la fluencia.

En cuanto al momento de plastificación parcial, para una penetración plástica c tenemos (fig. 11.65):

$$\left.\begin{aligned} J_0 &= \frac{b\,(h - 2c)^3}{12} \\ S_n' &= b\,c\left(\frac{h}{2} - \frac{c}{2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad [11.312]$$

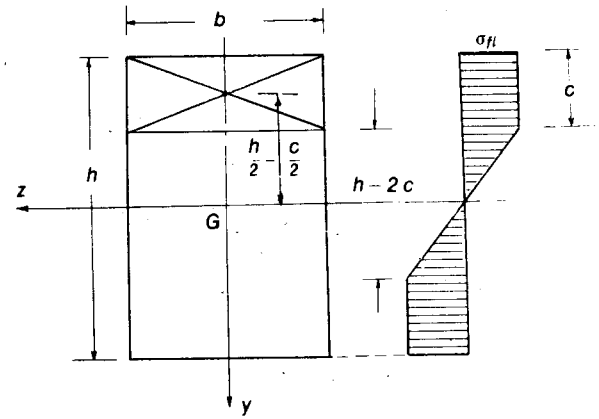


Fig. 11.65

valores que reemplazados en [11.305] nos dan:

$$M^* = \sigma_{fL}\left[\frac{2}{h - 2c} \cdot \frac{b\,(h - 2c)^3}{12} + b\,c\,(h - c)\right] \qquad [11.313]$$

$$M^* = \sigma_{fL}\left[\frac{b}{6}\,(h - 2c)^2 + b\,c\,h\left(1 - \frac{c}{h}\right)\right] \qquad [11.314]$$

$$M^* = \sigma_{fl.} \frac{b h^2}{6} \left[1 + \frac{2c}{h} \left(1 - \frac{c}{h} \right) \right] \qquad [11.315]$$

Los casos límites de [11.315] son:

a) $c = 0$, que corresponde al comienzo de la plastificación, trasformándose la [11.315] en:

$$M^* = \sigma_{fl.} \frac{b h^2}{6} = M_{fl.} \qquad [11.316]$$

b) $c = h/2$, plastificación total. Reemplazando este valor de c en [11.315] llegamos al mismo valor de la [11.310]

$$M^* = \sigma_{fl.} \frac{b h^2}{4} = M_R \,. \qquad [11.317]$$

Para la sección cuadrada basta reemplazar en las expresiones correspondientes bh^2 por a^3, si a es el lado del cuadrado. El coeficiente κ resulta ser el mismo que para la sección rectangular como es fácil de observar.

Resulta interesante analizar la sección cuadrada cuando la línea de fuerzas coincide con una de las diagonales. En este caso resulta, $y_{máx.} = \sqrt{2}/2$. en consecuencia:

$$M_{fl.} = \sigma_{fl.} \frac{a^4}{12a} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \sigma_{fl.} a^3 \frac{\sqrt{2}}{12} \qquad [11.318]$$

Por otra parte:

$$S_n^{F/2} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2 \cdot 3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \,. \qquad [11.319]$$

En consecuencia:

$$M_R = \sigma_{fl.} \, 2 \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{\sigma_{fl.} a^3 \sqrt{2}}{6} \,, \qquad [11.320]$$

y el coeficiente de forma de la sección:

$$\kappa = \frac{M_R}{M_{fl.}} = 2 \,. \qquad [11.321]$$

Es decir, que la sección cuadrada, solicitada a flexión según una diagonal posee una reserva de resistencia al colapso doble que la misma sección cuando la línea de fuerzas es paralela a los lados.

11.9.5.2. Sección circular llena

Si d es el diámetro de la sección, la expresión [11.223] se trasforma para $y = 0$ (caso del semicírculo) en:

$$S_n^{F/2} = \frac{2}{3} \left[\left(\frac{d}{2} \right)^2 \right]^{3/2} = \frac{d^3}{12} \,, \qquad [11.322]$$

y en consecuencia:

$$M_R = 2 \, \sigma_{fl.} \frac{d^3}{12} = \sigma_{fl.} \frac{d^3}{6} \,. \qquad [11.323]$$

Para la sección circular $h = d$, y

$$J_n = \frac{\pi d^4}{64} \,, \qquad [11.324]$$

luego:

$$\kappa = \frac{64 d^4}{12 \pi d^4} = \frac{16}{3\pi} \cong 1{,}7 \,. \qquad [11.325]$$

Este valor del coeficiente de forma, comparado con el correspondiente a la sección rectangular, nos dice que la sección circular llena posee una reserva de resistencia mayor que aquella.

Determinamos a continuación el valor del momento M^* de plastificación parcial para una penetración plástica c (fig. 11.66).

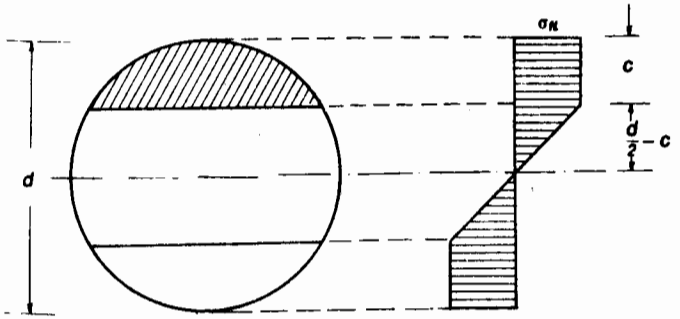


Fig. 11.66

Con la notación de la figura resulta $h = d$ y:

$$S'_n = \frac{2}{3}\left[\frac{d^2}{4} - \left(\frac{d}{2} - c\right)^2\right]^{3/2} = \frac{2}{3} c^{3/2} (d - c)^{3/2} \qquad [11.326]$$

$$J_0 = \frac{d^4}{16}\left\{\frac{1}{2} \text{arc sen}\left(1 - \frac{2c}{d}\right) + \left[2\left(1 - \frac{2c}{d}\right)^2 - 1\right]\left(1 - \frac{2c}{d}\right)\sqrt{\frac{c}{d}\left(1 - \frac{c}{d}\right)}\right\} \qquad [11.327]$$

y finalmente:

$$M^* = \sigma_{\text{fl.}} \left\{ \frac{d^3}{16\,[1 - (2c/d)]} \text{ arc sen}\left(1 - \frac{2c}{d}\right) + \right.$$

$$\left. + \left[2\left(1 - \frac{2c}{d}\right)^2 - 1\right]\frac{d^3}{8} \sqrt{\frac{c}{d}\left(1 - \frac{c}{d}\right)} + \frac{4}{3}(c \cdot d)^{3/2}\left(1 - \frac{c}{d}\right)^{3/2}\right\} \qquad [11.328]$$

Los casos límites de esta expresión corresponden a:

a) $c = 0$, comienzo de la plastificación;

b) $c = d/2$, plastificación total.

Para el caso (a), en la [11.328] se anulan todos los términos en c, y al ser arc sen $1 = \pi/2$, resulta;

$$M^* = \sigma_{\text{fl.}} \frac{\pi d^3}{32} = M_{\text{fl.}} \qquad [11.329]$$

Cuando $c = d/2$, o sea, para plastificación total, el límite del cociente:

$$\frac{\text{arc sen}\left(1 - \frac{2c}{d}\right)}{\left(1 - \frac{2c}{d}\right)} \qquad [11.330]$$

tiende a 1 y la [11.328] toma el valor:

$$M^* = \sigma_{\text{fl.}} \frac{d^3}{6} = M_R \qquad [11.331]$$

11.9.5.3. Sección doble T

Sea la sección de figura 11.67, donde para mayor generalidad hemos supuesto que el espesor del alma es distinto del de las alas: $e \neq t$.

Para este tipo de sección en lo que respecta a plastificación parcial debemos distinguir dos casos:

a) que la penetración c resulte menor que el espesor t del ala, de modo que sólo resulte plastificada parte del espesor de ésta última;

b) que la penetración c sea mayor que el espesor t del ala, y, en consecuencia, la plastificación afecte, además de la totalidad de las alas, una parte del alma.

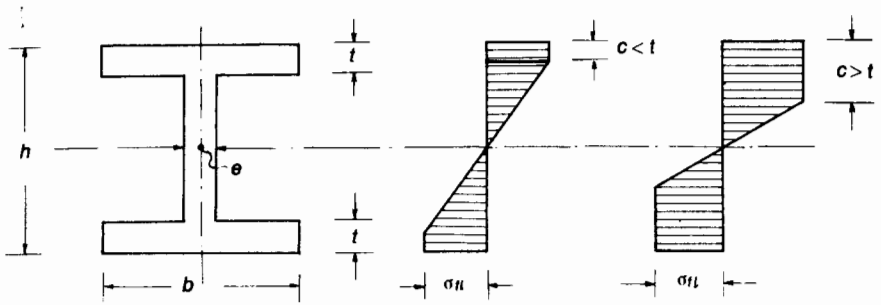


Fig. 11.67

Analizaremos a continuación ambos casos por separado.

Caso a) $c < t$

Para este caso tenemos:

$$J_0 = \frac{b\,(h - 2c)^3}{12} - \frac{(b - e)\,(h - 2t)^3}{12} =$$

$$= \frac{bh^3}{12}\left[\left(1 - \frac{2c}{h}\right)^3 - \left(1 - \frac{e}{b}\right)\left(1 - \frac{2t}{h}\right)^3\right] \qquad [11.332]$$

$$S'_n = bc\left(\frac{h}{2} - \frac{c}{2}\right) = \frac{bc}{2}(h - c) = \frac{bch}{2}\left(1 - \frac{c}{h}\right), \qquad [11.333]$$

y de acuerdo con la [11.305]:

$$M^* = \sigma_{\text{fl.}} \left\{ \frac{bh^2}{6}\left[\left(1 - \frac{2c}{h}\right)^2 - \frac{\left(1 - \frac{e}{b}\right)}{\left(1 - \frac{2c}{h}\right)}\left(1 - \frac{2t}{h}\right)^3\right] + bch\left(1 - \frac{c}{h}\right)\right\} \qquad [11.334]$$

Como es fácil observar para $e = b$ –sección rectangular– la [11.334] se transforma en la [11.315]

Caso b) $c \geqslant t$

En este caso es:

$$J_0 = \frac{e h^3}{12}\left(1 - \frac{2c}{h}\right)^3, \qquad [11.335]$$

y

$$S_n' = \frac{b\,t\,h}{2}\left(1 - \frac{e}{b}\right)\left(1 - \frac{t}{h}\right) + \frac{1}{2}\,e\,c\,h\left(1 - \frac{c}{h}\right) \qquad [11.336]$$

En consecuencia, reemplazando en [11.305]:

$$M^* = \sigma_{fl.}\left[\frac{e h^2}{6}\left(1 - \frac{2c}{h}\right)^2 + b\,t\,h\left(1 - \frac{e}{b}\right)\left(1 - \frac{t}{h}\right) + \frac{e\,c\,h}{2}\left(1 - \frac{c}{h}\right)\right], \qquad [11.337]$$

expresión que para $e = b$ (sección rectangular) se trasforma en la [11.315].

Para la sección doble T tenemos que:

$$S_n F/2 = \frac{b\,h^2}{8}\left[1 - \left(1 - \frac{e}{b}\right)\left(1 - \frac{2t}{h}\right)^2\right]. \qquad [11.338]$$

de donde resulta la siguiente expresión para el momento de rotura, de acuerdo con la [11.301]:

$$M_R = \sigma_{fl.}\,\frac{b\,h^2}{4}\left[1 - \left(1 - \frac{e}{b}\right)\left(1 - \frac{2t}{h}\right)^2\right] \qquad [11.339]$$

y finalmente, el coeficiente de forma de la sección, según la [11.307]

$$\kappa = \frac{3}{2}\cdot\frac{1 - \left(1 - \frac{e}{b}\right)\left(1 - \frac{2t}{h}\right)^2}{1 - \left(1 - \frac{e}{b}\right)\left(1 - \frac{2t}{h}\right)^3} \qquad [11.340]$$

Como es fácil de observar, la expresión anterior toma, para $e = b$, sección rectangular, el valor:

$$\kappa = \frac{3}{2} = 1{,}5, \qquad [11.341]$$

dado por la [11.311]

11.9.6. Tensiones residuales

Sea la sección de figura 11.68 solicitada a flexión, y supongamos que el par flexor alcance un valor que origine una penetración plástica c, a la que corresponda un momento de plastificación parcial M^*.

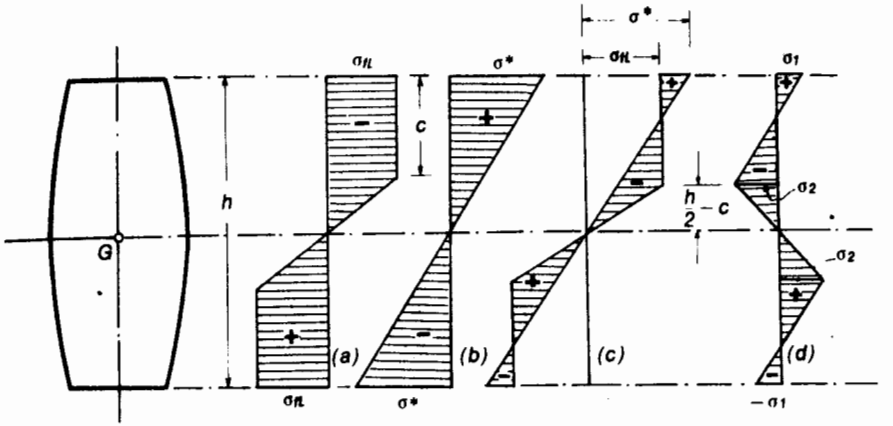


Fig. 11.68

Admitamos para el material de la sección, un diagrama ideal σ–ϵ como el de la figura 11.69 y supongamos que, al alcanzar el par flexor el valor de M^*, el punto A sea el representativo de las deformaciones específicas de las fibras más alejadas del eje neutro, es decir, de los bordes extremos de la sección. El diagrama de tensiones originadas por M^* es el que muestra la figura 11.68 *a*.

Si alcanzado el punto A, descargamos la sección, el diagrama representativo de la descarga será la recta AA', de igual pendiente que el correspondiente a la zona elástica OA_0 del período de carga. Ello significa que en la sección la variación de las tensiones de descarga responde a una ley lineal (fig. 11.68 *b*) con un valor máximo:

$$\sigma^* = \frac{M^*}{J_n}\cdot\frac{h}{2}. \qquad [11.342]$$

Por ser $M^* > M_{fl.}$ resulta

$$\sigma^* > \sigma_{fl.} \qquad [11.343]$$

y de signo contrario.

En consecuencia, al efectuarse la descarga, se superponen las tensiones y el diagrama resultante es el diagrama suma, el que aparece en figura 11.68 *c* como tal y rectificado en figura 11.68 *d*.

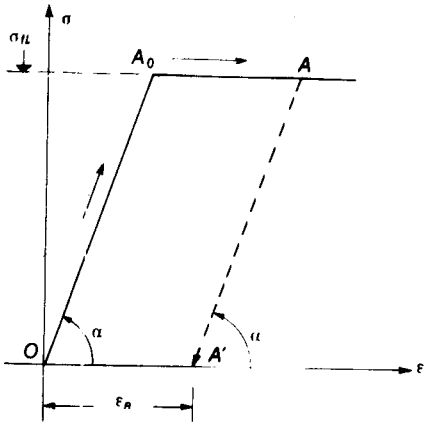


Fig. 11.69

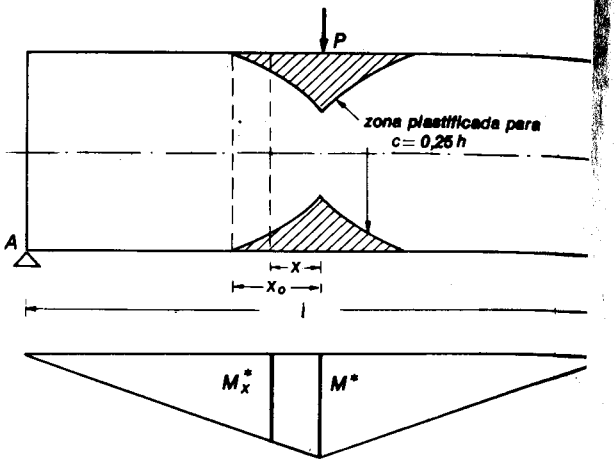


Fig. 11.70

Nos encontramos ante el siguiente hecho: una vez descargada la sección, ésta se encuentra solicitada por tensiones normales, denominadas *residuales* que constituyen de por sí un sistema en equilibrio, pues cumple con las condiciones de nulidad de proyección y de momentos, sin que existan solicitaciones exteriores. Los estados de tensión de esta naturaleza se designan como *estados propios* de tensión.

Los valores máximos σ_1 y σ_2 de las tensiones residuales tienen las siguientes expresiones:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma^* - \sigma_{fL} \\ \sigma_2 &= \sigma_{fL} - \sigma_0 \end{aligned}\right\} \qquad [11.344]$$

donde σ^* está dada por la [11.342] y σ_0 es la tensión al nivel $(h/2) - c$, en el diagrama lineal de descarga:

$$\sigma_0 = \frac{M^*}{J_n}\left(\frac{h}{2} - c\right). \qquad [11.345]$$

En el caso particular de la sección rectangular tenemos, si c es la penetración plástica:

$$M^* = \sigma_{fL}\frac{bh^2}{6}\left[1 + \frac{2c}{h}\left(1 - \frac{c}{h}\right)\right] \qquad [11.346]$$

$$\sigma^* = \frac{6M^*}{bh^2} = \sigma_{fL}\left[1 + \frac{2c}{h}\left(1 - \frac{c}{h}\right)\right] \qquad [11.347]$$

y

$$\sigma_0 = \frac{12M^*}{bh^3}(0{,}5h - c) = \sigma_{fL}\left(1 - \frac{2c}{h}\right)\left[1 + 2\frac{c}{h}\left(1 - \frac{c}{h}\right)\right] \qquad [11.348]$$

En consecuencia, reemplazando en las [11.344] tenemos finalmente:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{fL}\frac{2c}{h}\left(1 - \frac{c}{h}\right) \\ \sigma_2 &= \sigma_{fL}\left[1 - 2\frac{c^2}{h^2}\left(3 - 2\frac{c}{h}\right)\right] \end{aligned}\right\} \qquad [11.349]$$

La importancia de las tensiones residuales producidas por una primera flexión que, superando el límite de fluencia del material origine en la sección una penetración plástica c, consiste en el hecho que permiten aumentar el par flexor (del mismo signo) que signifique un comportamiento elástico de aquélla.

Ello surge de inmediato del diagrama de figura 11.68 *c*.

11.9.7. Zona de plastificación en vigas solicitadas a flexión

Consideremos la viga de sección rectangular de figura 11.70 y supongamos que la carga P alcanza un valor tal que la sección más solicitada –la central– se encuentra parcialmente plastificada, con una penetración plástica c.

El correspondiente momento flexor valdrá:

$$M^* = \sigma_{fL}\frac{bh^2}{6}\left(1 + \frac{2c}{h} - \frac{2c^2}{h^2}\right) \qquad [11.350]$$

donde b y h corresponden respectivamente al ancho y altura de la sección. Llamando K al término entre paréntesis, que adquiere un valor definido para cada penetración c, la [11.350] se trasforma en:

$$M^* = \sigma_{fL}\frac{bh^2}{6}K. \qquad [11.351]$$

En una sección que diste x de la central, por ser menor el momento flexor, la penetración plástica correspondiente que designaremos con c_x, también será menor que la correspondiente a la sección central.

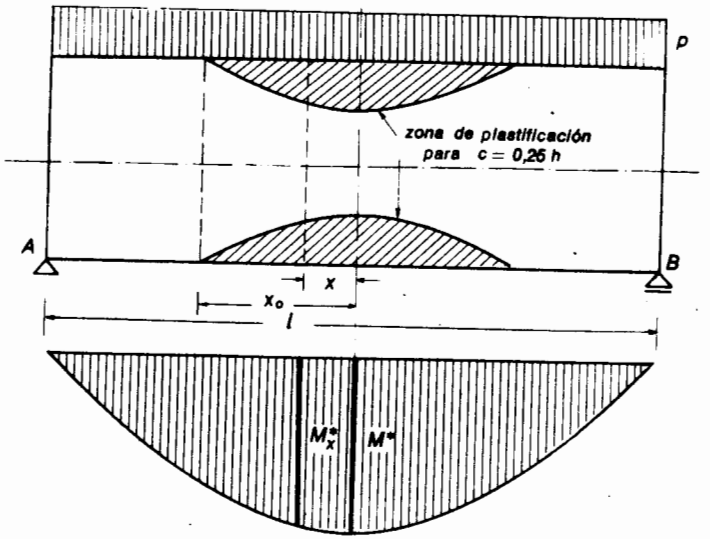


Fig. 11.71

Interesa conocer la expresión de c_x en función de x, pues su representación gráfica conduce a curvas, simétricas con respecto a los dos ejes de la viga, que delimitan la zona plastificada de ésta del núcleo elástico.

Si llamamos M_x^* al momento de plastificación parcial en la sección de abscisa x, su expresión será:

$$M_x^* = M^*\left(1 - \frac{2x}{l}\right) \qquad [11.352]$$

o también:

$$M_x^* = \sigma_{fL}\,\frac{b\,h^2}{6}\left(1 - \frac{2x}{l}\right)K. \qquad [11.353]$$

pero de la [11.350]:

$$M_x^* = \sigma_{fL}\,\frac{b\,h^2}{6}\left(1 + 2\,\frac{c_x}{h} - 2\,\frac{c_x^2}{h^2}\right). \qquad [11.354]$$

Igualando [11.353] y [11.354] y simplificando:

$$\left(1 + 2\,\frac{c_x}{h} - 2\,\frac{c_x^2}{h^2}\right) = \left(1 - \frac{2x}{l}\right)K, \qquad [11.355]$$

expresión que, luego de algunas trasformaciones conduce a:

$$\frac{c_x^2}{h^2} - \frac{c_x}{h} + \frac{1}{2}\left[K\left(1 - \frac{2x}{l}\right) - 1\right] = 0, \qquad [11.356]$$

ecuación de segundo grado que resuelta nos da como expresión de c_x:

$$c_x = \frac{h}{2}\left\{1 - \sqrt{1 + 2\left[1 - \left(1 - \frac{2x}{l}\right)K\right]}\right\} \qquad [11.357]$$

El límite de la zona plastificada corresponde a $c_x = 0$, valor para el que la [11.357] se trasforma en:

$$\sqrt{1 + 2\left[1 - \left(1 - \frac{2x_0}{l}\right)K\right]} = 1 \qquad [11.358]$$

que nos permite finalmente despejar el valor de la abscisa x_0 que define dicha sección:

$$x_0 = \frac{K - 1}{2K}\,l. \qquad [11.359]$$

En la figura 11.70 se han representado las curvas límites de plastificación para $c = 0{,}25\,h$, a lo que corresponde:

$$\left.\begin{aligned} K &= 1{,}375 \\ x_0 &= 0{,}1361\,l \end{aligned}\right\} \qquad [11.360]$$

Para plastificación total de la sección central, si $c = 0{,}5\,h$, resulta:

$$\left.\begin{aligned} K &= 1{,}50 \\ c_x &= \frac{h}{2}\left(1 - \sqrt{6\,\frac{x}{l}}\right) \end{aligned}\right\} \qquad [11.361]$$

y

$$x_0 = 0{,}167\,l. \qquad [11.362]$$

Analizaremos a continuación el caso de la viga rectangular simplemente apoyada, pero solicitada por una carga uniformemente repartida de intensidad p.

En la notación de la figura 11.71 tenemos:

$$M_x^* = \frac{p\,l^2}{8}\left(1 - 4\,\frac{x^2}{l^2}\right) = M^*\left(1 - 4\,\frac{x^2}{l^2}\right) \qquad [11.363]$$

Por otra parte, pará una penetración c en la sección central M^* está dado por la [11.351].

Teniendo en cuenta la [11.354] llegamos a:

$$\left(1 + 2\,\frac{c_x}{h} - 2\,\frac{c_x^2}{h^2}\right) = \left(1 - 4\,\frac{x^2}{l^2}\right)K, \qquad [11.364]$$

y finalmente:

$$c_x = \frac{h}{2}\left\{1 - \sqrt{1 - 2\left[\left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right)K - 1\right]}\right\} \qquad [11.365]$$

La abscisa límite, para penetración nula $c_x = 0$ resulta ser en este caso:

$$x_0 = \sqrt{\frac{K-1}{4K}}\, l. \qquad [11.366]$$

Para $c = 0{,}25\,h$ en la sección central tenemos:

$$\left.\begin{aligned} K &= 1{,}375 \\ x_0 &= 0{,}261\, l \end{aligned}\right\} \qquad [11.367]$$

En la figura 11.71 se han representado las correspondientes curvas límite.

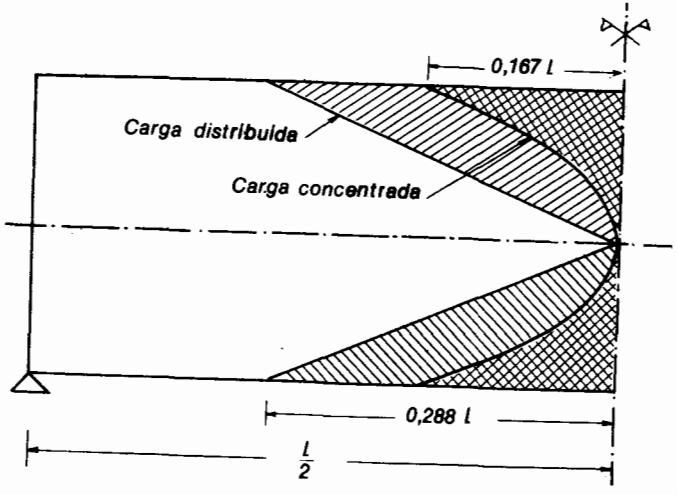


Fig. 11.72

Finalmente, para $c = 0{,}5\,h$, es decir, plastificación total de la sección central, resulta:

$$\left.\begin{aligned} K &= 1{,}5 \\ x_0 &= 0{,}288\, l \end{aligned}\right\} \qquad [11.368]$$

$$c_x = \frac{h}{2}\left(1 - \sqrt{12\frac{x^2}{l^2}}\right) = \frac{h}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\sqrt{12}\right) \qquad [11.369]$$

En la figura 11.72, hemos representado para media viga y a los efectos comparativos, las curvas límite de plastificación para $c = 0{,}5\,h$ correspondientes a carga concentrada en el centro de la luz y carga uniformemente distribuida.

11.9.8. Materiales sin límite de fluencia definido

Analizaremos en el presente parágrafo el comportamiento a flexión en el período anelástico de secciones correspondientes a piezas cuyo material no presente un límite de fluencia definido y sí el convencional denominado límite 0,2%. Para estos materiales, el diagrama σ–ϵ idealizado es, como hemos visto, el que muestra la figura 11.73.

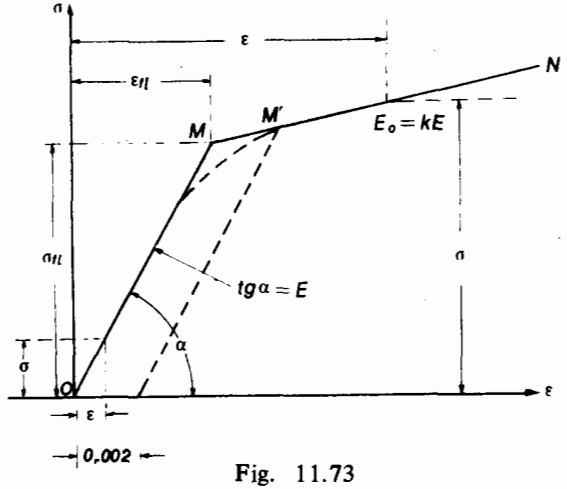


Fig. 11.73

Admitamos que el punto M defina el límite de fluencia convencional.[1] De acuerdo con la ley de Hooke, por ser los tramos OM y MN rectos, tendremos para $0 < \epsilon < \epsilon_f$ (tramo OM):

$$\sigma = E\,\epsilon\,, \qquad [11.370]$$

para $\epsilon_{fl.} < \epsilon < \epsilon_R$ (tramo MN):

[1] En realidad el punto que define el límite convencional 0,2% es el M', pero por razones de simplicidad y sin mayor error, podemos considerar como tal al M.

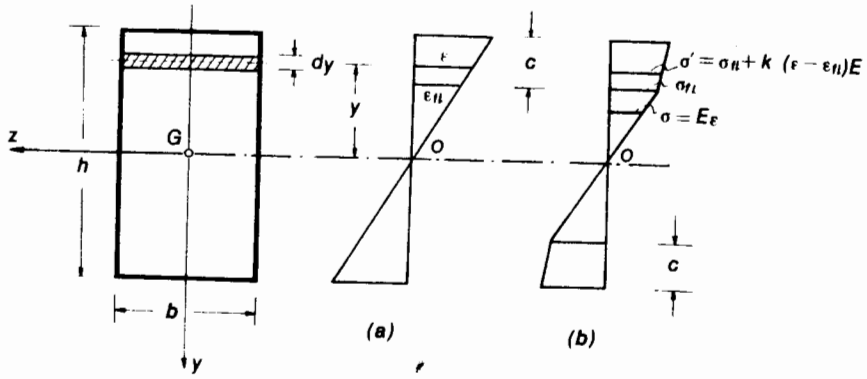


Fig. 11.74

$$\sigma = \sigma_{fl.} + kE(\epsilon - \epsilon_{fl.}). \qquad [11.371]$$

Analizaremos primeramente una viga de sección rectangular sujeta a flexión pura, y supongamos que el par flexor tenga un momento de valor tal que resulte para las fibras extremas de la sección (fig. 11.74):

$$\epsilon > \epsilon_{fl.} \qquad [11.372]$$

con una penetración plástica c.

Ahora bien, en virtud de las características del diagrama $\sigma-\epsilon$ de figura 11.73, si bien el diagrama de deformaciones específicas es lineal (fig. 11.74 *a*) el correspondiente a las tensiones normales es el que muestra la figura 11.74 *b*.

Si M_0^* es el momento del par que origina la penetración plástica c, su expresión genérica será:

$$M_0^* = 2\left[\int_0^{(h/2)-c} \sigma y\, dF + \int_{(h/2)-c}^{(h/2)} \sigma' y\, dF\right] \qquad [11.373]$$

que para el caso de la sección rectangular se trasforma en:

$$M_0^* = 2b\left[\int_0^{(h/2)-c} \sigma y\, dy + \int_{(h/2)-c}^{(h/2)} \sigma' y\, dy\right] \qquad [11.374]$$

Con la notación de la figura resulta:

$$\sigma = \frac{2y}{h\left(1 - \frac{2c}{h}\right)}\sigma_{fl.} \qquad [11.375]$$

y

$$\sigma' = \sigma_{fl.}\left[(1-k) + k\frac{2y}{h\left(1-\frac{2c}{h}\right)}\right] \qquad [11.376]$$

Valores que reemplazados en [11.374] nos conducen a:

$$M_0^* = 2b\,\sigma_{fl.}\left\{\frac{2}{h\left(1-\frac{2c}{h}\right)}\int_0^{h/2-c} y^2\, dy + \right.$$

$$\left. + \int_{h/2-c}^{h/2}\left[(1-k) + k\frac{2y}{h\left(1-\frac{2c}{h}\right)}\right] y\, dy\right\} \qquad [11.377]$$

Efectuando las integrales, llegamos finalmente a:

$$M_0^* = \sigma_{fl.}\left[\frac{J_0}{\left(\frac{h}{2}-c\right)} + 2(1-k)S_n' + \frac{k\,J_0'}{\left(\frac{h}{2}-c\right)}\right] \qquad [11.378]$$

donde J_0' es el momento de inercia de la zona plastificada de la sección.

El coeficiente k tiene dos valores límites que son:

$$\left.\begin{aligned} k &= 0 \\ k &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad [11.379]$$

que corresponden respectivamente a un diagrama de tensión–deformación con límite de fluencia definido y a variación lineal de tensiones.

Para $k = 0$, como es fácil de observar, la [11.378] se trasforma en la [11.305] mientras que para $k = 1$, su expresión resulta, por ser $c = 0$ para este caso:

$$M_0^* = \frac{2\sigma_{fl.}}{h}\left(J_0 + J_0'\right) = \sigma_{fl.}\frac{J_n}{\frac{1}{2}h} \qquad [11.380]$$

la fórmula clásica de la flexión según la hipótesis de Bernouilli–Navier, donde J_n representa el momento de inercia respecto del eje neutro de la totalidad de la sección.

Teniendo en cuenta que, para la sección rectangular de ancho b y altura h se tiene:

$$J_0 = \frac{b\,(h-2c)^3}{12} = \frac{b\,h^3}{12}\left(1-\frac{2c}{h}\right)^3 \qquad [11.381]$$

$$J_0' = \frac{b\,h^3}{12}\left[1-\left(1-\frac{2c}{h}\right)^3\right] \qquad [11.382]$$

$$S_n' = \frac{b\,c}{2}\,(h-c) \qquad [11.383]$$

Reemplazando estos valores en la [11.378] y luego de algunas trasformaciones, llegamos a:

$$M_0^* = \sigma_{fl.}\frac{b\,h^2}{6}\left[\left(1+\frac{2c}{h}-2\frac{c^2}{h^2}\right)+k\left(\frac{1}{1-\frac{2c}{h}}-\left\{1+\frac{2c}{h}-2\frac{c^2}{h^2}\right\}\right)\right] \qquad [11.384]$$

Pero $\sigma_{fl.}\,bh^2/6 = M_{fl.}$ y recordando que hemos llamado $K = 1 + (2c/h) - 2c^2/h^2$, resulta finalmente:

$$\frac{M_0^*}{M_{fl.}} = K + k\left(\frac{1}{1-\frac{2c}{h}} - K\right). \qquad [11.385]$$

Ahora bien, como se tiene:

$$K = \frac{M^*}{M_{fl.}}, \qquad [11.386]$$

resulta finalmente:

$$\frac{M_0^*}{M_{fl.}} = \frac{M^*}{M_{fl.}} + k\left(\frac{1}{1-\frac{2c}{h}} - \frac{M^*}{M_{fl.}}\right). \qquad [11.387]$$

La fórmula anterior la hemos deducido para una sección rectangular pero, como veremos a continuación, es completamente general para cualquier forma de sección que admita dos ejes de simetría normal.

La [11.378] puede escribirse como sigue:

$$M_0^* = \sigma_{fl.}\left[\frac{J_0}{\frac{h}{2}-c} + 2S_n' + k\left(\frac{J_0'}{\frac{h}{2}-c} - 2S_n'\right)\right] \qquad [11.388]$$

Si al término entre paréntesis afectado por k le sumamos y restamos $J_0/(\frac{1}{2}h - c)$, tenemos:

$$M_0^* = \sigma_{fl.}\left[\frac{J_0}{\frac{h}{2}-c} + 2S_n' + k\left(\frac{J_0'+J_0}{\frac{h}{2}-c} - \frac{J_0}{\frac{h}{2}-c} - 2S_n'\right)\right] \qquad [11.389]$$

Recordando la [11.305]:

$$M_0^* = M^* + k\left(\sigma_{fl.}\frac{J_0'+J_0}{\frac{h}{2}-c} - M^*\right) \qquad [11.390]$$

Pero $J_0' + J_0 = J_n$, y

$$\sigma_{fl.}\frac{J_n}{\frac{h}{2}-c} = \frac{2J_n}{h\left(1-\frac{2c}{h}\right)}\sigma_{fl.}, \qquad [11.391]$$

o también:

$$\sigma_{fl.}\frac{J_n}{\frac{h}{2}-c} = \frac{M_{fl.}}{1-\frac{2c}{h}} \qquad [11.392]$$

de donde, reemplazando en [11.390]

$$M_0^* = M^* + k\left(\frac{1}{1-\frac{2c}{h}}\,M_{fl.} - M^*\right) \qquad [11.393]$$

y dividiendo miembro a miembro por $M_{fl.}$

$$\frac{M_0^*}{M_{fl.}} = \frac{M^*}{M_{fl.}} + k\left(\frac{1}{1-\frac{2c}{h}} - \frac{M^*}{M_{fl.}}\right) \qquad [11.394]$$

expresión idéntica a la [11.387].

11 . 9 . 9 . Secciones con un solo eje de simetría

En los parágrafos anteriores hemos analizado problemas relativos al comportamiento a flexión en el período plástico de secciones con dos ejes de simetría. Nos ocuparemos ahora del planteo del problema para aquellas secciones sujetas a flexión pura normal que poseen un único eje de simetría que coincide con la línea de fuerzas, suponiendo se trate de materiales con límite de fluencia definido, para los que puede admitirse el diagrama $\sigma-\epsilon$ ideal de figura 11.62.

Consideremos la sección de la figura 11.75, solicitada por un par flexor de momento M. Como consecuencia de la asimetría de la sección, las deformaciones específicas en las fibras más alejadas no son iguales. Al aumentar M las

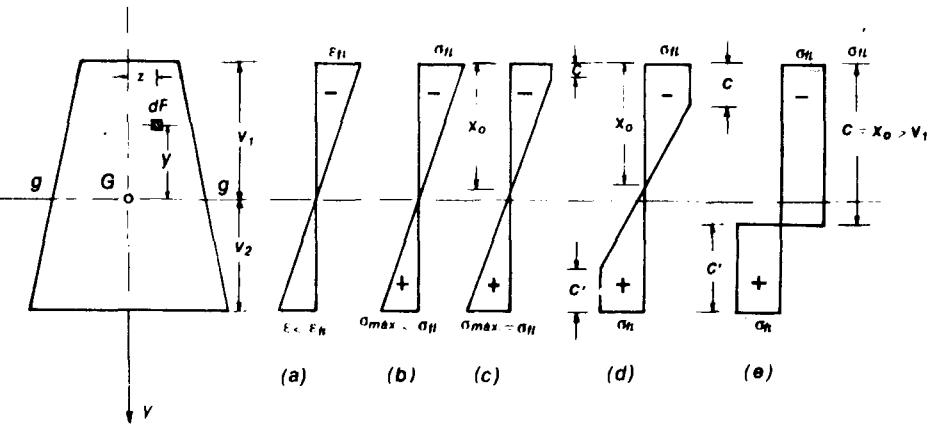


Fig. 11.75

fibras situadas a la distancia v_1 alcanzarán el valor $\epsilon_{fl.}$ cuando para las situadas a la distancia v_2 se tendrá aún $\epsilon < \epsilon_{fl.}$ (fig. 11.75 *a*).

Simultáneamente, en virtud de la ley de Hooke, las fibras situadas a la distancia v_1 alcanzarán una tensión cuyo valor será igual al límite de fluencia $\sigma_{fl.}$ del material (fig. 11.75 *b*) mientras que el de las tensiones en las fibras situadas por debajo del eje neutro será $\sigma < \sigma_{fl.}$ (fig. 11.75 *b*).

El valor del momento que conduce a esta situación será el que corresponde al comienzo de plastificación:

$$M_{fl.} = \frac{\sigma_{fl.}\,J_n}{v_1}\,. \qquad [11.395]$$

Si continuamos aumentando el valor del momento por sobre el de $M_{fl.}$ se producirá en las fibras más solicitadas, una penetración plástica c y en las fibras inferiores se alcanzará la tensión de fluencia $\sigma_{fl.}$ (fig. 11.75 *c*), para luego originarse una penetración plástica c' en la parte inferior de la sección (fig. 11.75 *d*). Finalmente para $M = M_R$ se llegará a la plastificación total de la sección (fig. 11.75 *e*).

Como consecuencia de la asimetría de la sección, es evidente, que al producirse una penetración plástica, el eje neutro ya no será más baricéntrico. Ello surge claramente del análisis del diagrama de tensiones para plastificación total. En efecto, la condición de equivalencia establecida por la igualdad de proyecciones sobre un eje normal al plano de la sección nos dice que las resultantes de compresión y de tracción deben ser iguales:

$$D = Z \qquad [11.396]$$

y como ambas están representadas por los respectivos volúmenes de tensiones, si llamamos F_C y F_T las áreas de las zonas comprimida y traccionada, respectivamente, resulta:

$$F_C\,\sigma_{fl.} = F_T\,\sigma_{fl.} \qquad [11.397]$$

de donde:

$$F_C = F_T \qquad [11.398]$$

es decir que, para plastificación total, el eje neutro divide a la sección en dos zonas de igual área. Como consecuencia tenemos que el eje neutro no puede ser baricéntrico, pues un eje baricéntrico divide a la sección en dos áreas de igual momento estático con respecto al eje.

11 . 9 . 9 . 1 . Expresión del momento de rotura

Con la notación de la figura 11.76 tenemos:

a) Proyección sobre el eje x

$$\sigma_{fl.}\left[-\int_{\nu_1}^{x_0-\nu_1} dF+\int_{x_0-\nu_1}^{\nu_2} dF\right]=0 \qquad [11.399]$$

b) Momentos respecto del eje y:

$$-\sigma_{fl.}\left[\int_{-\nu_1}^{x_0-\nu_1} z\,dF-\int_{x_0-\nu_1}^{\nu_2} z\,dF\right]=0 \qquad [11.400]$$

c) Momentos respecto del eje z:

$$-\sigma_{fl.}\left[\int_{-\nu_1}^{x_0-\nu_1} y\,dF-\int_{x_0-\nu_1}^{\nu_2} y\,dF\right]=M_R \qquad [11.401]$$

De la primera resulta:

$$\int_{\nu_1}^{x_0-\nu_1} dF=\int_{x_0-\nu_1}^{\nu_2} dF \qquad [11.402]$$

es decir, $F_C = F_T$ igualdad a la que habíamos llegado antes.

La segunda de las ecuaciones es la que nos da la dirección del eje neutro, que por tratarse de flexión pura normal, resulta ser perpendicular a la línea de fuerzas, coincidente con el eje de simetría de la sección.

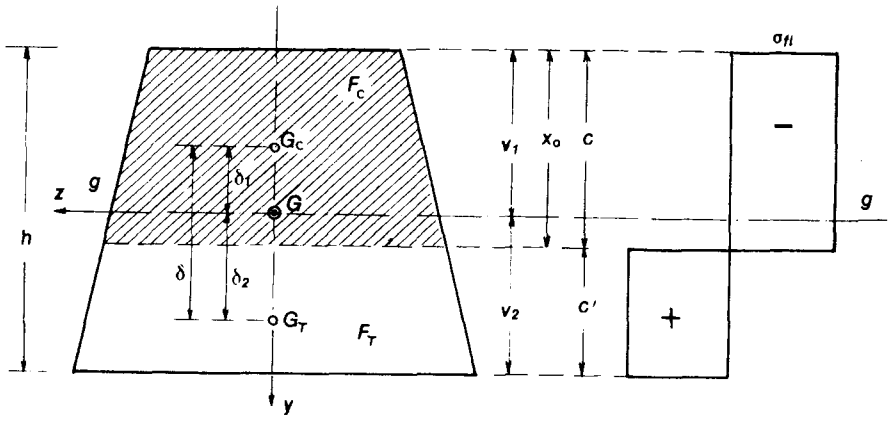


Fig. 11.76

Finalmente, la tercera ecuación podemos escribirla como sigue:

$$\sigma_{fl.}\left[\int_{x_0-\nu_1}^{-\nu_1} y\,dF+\int_{x_0-\nu_1}^{\nu_2} y\,dF\right]=M_R \qquad [11.403]$$

pero:

$$\int_{x_0-\nu_1}^{-\nu_1} y\,dF=S_g^C \qquad [11.404]$$

e

$$\int_{x_0-\nu_1}^{\nu_2} y\,dF=S_g^T \qquad [11.405]$$

Es decir, los momentos estáticos de las áreas de las zonas comprimida y traccionada, respectivamente, respecto al eje baricéntrico g–g. De acuerdo con la figura 11.76, dichos momentos estáticos pueden expresarse como sigue:

$$S_g^C = F_C\,\delta_1 \qquad [11.406]$$
$$S_g^T = F_T\,\delta_2$$

En consecuencia, reemplazando valores en la [11.403] y teniendo en cuenta que:

$$F_T = F_C = F/2 \qquad [11.407]$$

llegamos finalmente a:

$$M_R = \frac{\sigma_{fl.}}{2} F\delta\,. \qquad [11.408]$$

11.9.9.2. Coeficiente de forma de la sección

Análogamente a lo establecido en 11.9.4. para las secciones con doble simetría, en el caso que nos ocupa definimos como coeficiente de forma de la sección a la relación entre el momento de rotura y el de fluencia, es decir:

$$\kappa = \frac{M_R}{M_{fl.}} \qquad [11.409]$$

Reemplazando en la anterior los valores de M_R y $M_{fl.}$ dados por las [11.408] y [11.395] respectivamente, tenemos:

$$\kappa = \frac{F\delta}{2J_n}\nu_1 \qquad [11.410]$$

11.9.9.3. Expresión del momento de plastificación parcial para sección con un eje de simetría

Para este caso debemos distinguir dos posibilidades:

a) Penetración plástica c a partir del borde más solicitado de la sección y tensiones $\sigma < \sigma_{fl.}$ en el resto de las fibras de la sección (fig. 11.75 c).

b) Penetraciones plásticas c y c' en los bordes superior e inferior, respectivamente (fig. 11.75 d).

Un tercer caso, de transición entre los mencionados y que constituye en realidad el límite del caso (a), es aquel para el cual en el borde inferior se alcanza el límite de fluencia, es decir $\sigma_{\text{máx.}} = \sigma_{\text{fl.}}$.

El establecimiento del valor del momento de plastificación parcial M^* para cada uno de los tres casos, en función de las penetraciones plásticas c y c', así como la determinación de la posición del eje neutro x_0, que como dijéramos no es baricéntrico, se obtiene planteando las ecuaciones de equivalencia ya utilizadas

$$\left.\begin{aligned} \int_F \sigma\, dF &= 0 \\ \int_F \sigma\, y\, dF &= M^* \end{aligned}\right\} \qquad [11.411]$$

12. SOLICITACIÓN POR FLEXIÓN COMPUESTA

12.1. Conceptos generales

Se define la flexión compuesta como aquella solicitación para la cual actúa sobre la sección una fuerza normal excéntrica. La reducción de esta fuerza normal al baricentro origina un par de reducción, de modo que también es posible definir la flexión compuesta como la solicitación constituida por un par flexor y un esfuerzo axil. Cuando se emplea la primera forma de definir la flexión compuesta, suele designársela como comprensión (o tracción) excéntrica.

Teniendo en cuenta las dos formas de definir la flexión compuesta, será posible desarrollar el problema de la determinación de las tensiones normales por dos caminos distintos.

Cuando se considera que la flexión compuesta es debida a un par y a una solicitación axil, es posible resolver el problema de la determinación de las tensiones sumando las debidas a cada uno de estos estados simples. Es el procedimiento denominado de superposición de efectos. En cambio, si partimos de considerar una fuerza excéntrica, el camino a seguir consiste en el planteo de las condiciones de equivalencia entre fuerzas exteriores y esfuerzos internos, ecuaciones que resueltas nos conducen a la solución del problema. En lo que sigue, utilizaremos esta forma de encarar el problema de la flexión compuesta y lo haremos partiendo del caso más general de la flexión compuesta oblicua en régimen elástico, para luego deducir las correspondientes expresiones para flexión compuesta normal.

Más adelante nos ocuparemos de la flexión compuesta en régimen plástico para finalmente analizar el problema de aquellas secciones cuyo material no admite tensiones de tracción.

12.2. Flexión compuesta en régimen elástico

12.2.1. Planteo y solución del problema para el caso general de flexión compuesta oblicua

Sea, figura 12.1 la sección trasversal en una barra solicitada por una fuerza normal N de compresión cuya recta de acción corta al plano de la sección en un

punto C, que denominaremos *centro de presión*. La recta CG determina la *línea de fuerzas* y la distancia de C al baricentro G la designaremos *excentricidad* e. Admitimos la validez de la hipótesis de Bernouilli–Navier y de la ley de Hooke. En consecuencia, la sección girará en torno a un eje $n-n$ de su plano y tendremos una distribución lineal de las tensiones normales que serán nulas en las fibras en correspondencia con el eje neutro, para alcanzar sus valores máximos en las fibras más alejadas del mismo. Hemos supuesto que el centro de presión no queda ubicado sobre uno de los ejes principales de inercia, de modo que el eje neutro ocupará una posición y dirección cualesquiera.

Consideremos ahora en un punto A un elemento de superficie dF, sobre el que actúa una tensión σ.

Estamos ante dos sistemas de fuerzas paralelas en el espacio: uno, el constituido por las infinitas fuerzas elementales $\sigma \cdot dF$ y el otro por la solicitación exterior N, sistemas que deben ser equivalentes.

Su equivalencia la expresaremos mediante una condición de igualdad de proyecciones sobre un eje normal a la sección y dos condiciones de igualdad de momentos respecto a los ejes neutro y línea de fuerzas, por cuanto las tres condiciones restantes conducen a ecuaciones idénticamente nulas al no existir tensiones τ. Las expresiones son las siguientes:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_F \sigma\, dF = N \\ &\int_F \sigma\, v\, dF = N(e' + s') \\ &\int_F \sigma\, u\, dF = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [12.1]$$

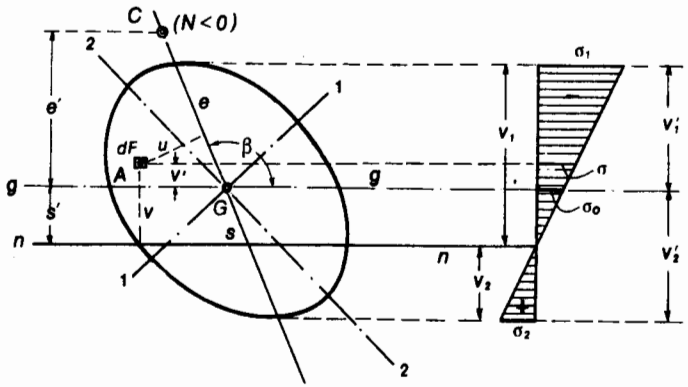


Fig. 12.1

Si $g-g$ es el eje baricéntrico paralelo a la dirección del eje neutro y llamamos σ_0 a la tensión en las fibras ubicadas en correspondencia con el mismo, tendremos:

$$\frac{\sigma_0}{s'} = \frac{\sigma}{v} \qquad [12.2]$$

o también:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{s'} v \qquad [12.3]$$

Teniendo en cuenta que σ_0 y s' son valores constantes, si reemplazamos la [12.3] en la tercera de las [12.1] resulta:

$$\frac{\sigma_0}{s'} \int_F u\, v\, dF = 0 \qquad [12.4]$$

es decir:

$$\int_F u\, v\, dF = 0 \qquad [12.5]$$

expresión que corresponde al momento centrífugo de la sección respecto del eje neutro y de la línea de fuerzas, que al ser nulo establece que ambos ejes tienen direcciones conjugadas.

Hemos establecido así la dirección del eje neutro. Reemplazando ahora la [12.3] en la primera de las [12.1] tenemos:

$$\frac{\sigma_0}{s'} \int_F v\, dF = N \qquad [12.6]$$

Pero, por representar la integral el momento de primer orden de la sección con respecto al eje neutro podemos escribir:

$$\int_F v\, dF = F \cdot s' \qquad [12.7]$$

y reemplazando en [12.6] y simplificando s':

$$\sigma_0 F = N \qquad [12.8]$$

o también:

$$\sigma_0 = \frac{N}{F} \qquad [12.9]$$

Esta última expresión nos dice que la tensión en las fibras situadas sobre la paralela baricéntrica al eje neutro es constante e independiente de la posición de N, es decir, de la excentricidad e.

Finalmente, reemplazando la [12.3] en la segunda de las [12.1] tenemos

$$\frac{\sigma_0}{s'}\int_F v^2\,dF = N(e' + s') \qquad [12.10]$$

Pero:

$$\int_F v^2\,dF = J_n \qquad [12.11]$$

de donde:

$$\frac{\sigma_0}{s'}J_n = N(e' + s') \qquad [12.12]$$

De acuerdo con el teorema de Steiner:

$$J_n = J_g + Fs'^2, \qquad [12.13]$$

valor que reemplazado en [12.12] nos da:

$$\frac{\sigma_0}{s'}J_g + Fs'\sigma_0 = Ne' + Ns'. \qquad [12.14]$$

Pero:

$$\sigma_0 F = N, \qquad [12.15]$$

Luego:

$$\frac{\sigma_0}{s'}J_g + Ns' = Ne' + Ns', \qquad [12.16]$$

y simplificando:

$$\frac{\sigma_0 J_g}{s'} = Ne' \qquad [12.17]$$

Si en la expresión anterior reemplazamos σ_0/s' por su igual σ/v de la [12.2], llegamos a:

$$\frac{\sigma J_g}{v} = Ne' \qquad [12.18]$$

Pero:

$$v = v' + s',$$

luego:

$$\sigma J_g = Ne'v' + Ne's', \qquad [12.19]$$

y

$$\sigma = \frac{Ne'}{J_g}v' + \frac{Ne'}{J_g}s'. \qquad [12.20]$$

Si ahora reemplazamos en [12.17] σ_0 por su igual N/F y expresamos J_g en función del radio de giro baricéntrico $J_g = F \cdot i_g^2$ resulta:

$$\frac{N}{Fs'}Fi_g^2 = Ne' \qquad [12.21]$$

y simplificando:

$$i_g^2 = |s'e'|, \qquad [12.22]$$

que nos dice que el radio de giro de la sección respecto de la paralela baricéntrica al eje neutro es media proporcional entre las distancias del centro de presión al baricentro y de este al eje neutro. Hemos así encontrado una expresión que nos define la posición del eje neutro y nos permite ubicarlo, sea gráficamente o analíticamente.

Reemplazando en el segundo término del miembro derecho de la [12.20] J_g por $F \cdot i_g^2$ resulta:

$$\sigma = \frac{Ne'}{J_g}v' + \frac{Ne's'}{Fi_g^2}, \qquad [12.23]$$

pero de la [12.22]:

$$\frac{|s'e'|}{i_g^2} = 1, \qquad [12.24]$$

luego:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Ne'}{J_g}v', \qquad [12.25]$$

o también, teniendo en cuenta que $e' = e \operatorname{sen}\beta$:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Ne \operatorname{sen}\beta}{J_g}v' \qquad [12.26]$$

En esta expresión, tanto N como v' deben introducirse con el signo que les corresponda. Si como en el caso analizado N es de compresión y consideramos que v' puede ser positiva o negativa, resulta finalmente:

$$\sigma = -\frac{N}{F} \pm \frac{Ne \operatorname{sen}\beta}{J_g}v'. \qquad [12.27]$$

Si hacemos:

$$Ne = M, \qquad [12.28]$$

reemplazando tenemos:

$$\sigma = -\frac{N}{F} \pm \frac{M \operatorname{sen}\beta}{J_g}v'. \qquad [12.29]$$

Las tensiones máximas (positiva y negativa) corresponderán a las fibras más alejadas del eje neutro, es decir, para $v' = v_1'$, y $v' = v_2'$, resultando con ello:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{N}{F} - \frac{M \operatorname{sen} \beta}{J_g} v_1' \\ \sigma_2 &= -\frac{N}{F} + \frac{M \operatorname{sen} \beta}{J_g} v_2' \end{aligned}\right\} \qquad [12.30]$$

La expresión [12.29] nos dice que la tensión σ en una fibra determinada resulta de superponer dos tensiones parciales:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'', \qquad [12.31]$$

donde σ' corresponde a una tensión uniformemente distribuida e igual a σ_0 y σ'' es la tensión normal originada por el par de momento $M = Ne$.

12.2.2. Determinación gráfica del diagrama de tensiones normales

Sea la sección de figura 12.2 solicitada por la fuerza normal de compresión N, aplicada en el centro de presión C.

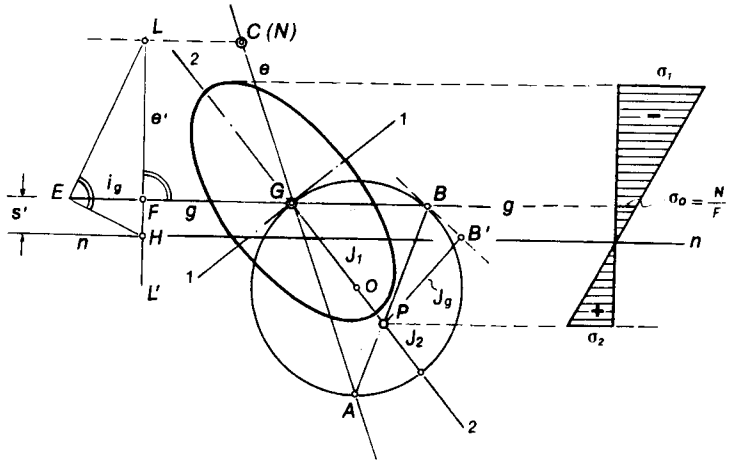


Fig. 12.2

Supongamos conocidos los momentos de inercia principales $J_1 > J_2$ y construida sobre el eje *2–2* la circunferencia baricéntrica de Mohr.

Uniendo A, punto en donde la línea de fuerzas corta a la circunferencia,

con el polo P y prolongando dicha recta hasta cortar nuevamente a la circunferencia de Mohr, obtenemos un punto B, que unido con G, nos da la paralela baricéntrica g–g al eje neutro.

Conocida la dirección del eje neutro, para determinar su posición necesitamos conocer i_g y por ende J_g. Este último valor lo obtenemos trazando la tangente en B a la circunferencia de Mohr y bajando por P la perpendicular PB' a la misma.

El valor de J_g estará dado por la longitud del segmento PB' leído en la escala de la circunferencia de Mohr. Conocido J_g resulta de inmediato:

$$i_g = \sqrt{\frac{J_g}{F}}. \qquad [12.32]$$

De acuerdo con la [12.24] la distancia s' entre el eje neutro y el baricentro es extrema proporcional entre i_g y e'. Efectuada la correspondiente construcción gráfica (fig. 12.2) obtenemos la posición del eje neutro n–n. Conocido éste, el trazado del diagrama de tensiones normales es inmediato. Bastará para ello determinar el valor $\sigma_0 = N/F$, y llevar su ordenada representativa a partir de una recta normal a n–n, que será el eje de referencia del diagrama. Uniendo el extremo de dicha ordenada con el punto en que el eje neutro corta al de referencia, obtendremos el diagrama de tensiones normales buscado. El diagrama queda limitado por las paralelas al eje neutro, tangentes extremas a la sección. En cuanto a los signos del mismo, si $N < 0$, el diagrama será negativo en la parte situada del lado del centro de presión, y positivo del opuesto.

Si $N > 0$, los signos del diagrama se invierten.

12.2.3. Flexión compuesta oblicua considerada como suma de dos flexiones normales

Sea la sección de figura 12.3 sujeta a la acción de la fuerza normal excéntrica N. Si hacemos coincidir con los ejes principales de inercia *1–1*; *2–2* un par de ejes coordenados z, y y llamamos α al ángulo que forma la dirección de la línea de fuerzas con el eje principal *1–1*, las coordenadas del centro de presión C resultan ser:

$$\left.\begin{aligned} e_y &= e \operatorname{sen} \alpha \\ e_z &= e \cos \alpha \end{aligned}\right\} \qquad [12.33]$$

Multiplicando ambos miembros de las [12.33] por N, y teniendo en cuenta que $\overline{M}$ es el vector representativo del momento del par flexor Ne, resulta:

$$\left.\begin{aligned} N e_y &= N e \operatorname{sen} \alpha = M \operatorname{sen} \alpha = M_z \\ N e_z &= N e \cos \alpha = M \cos \alpha = M_y \end{aligned}\right\} \qquad [12.34]$$

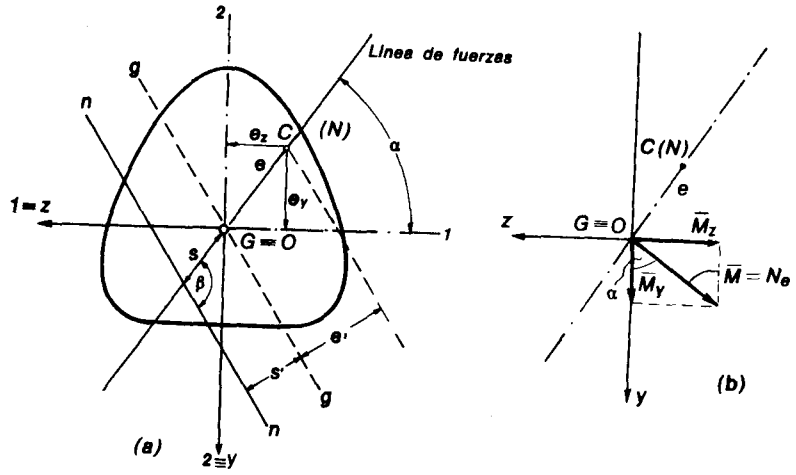


Fig. 12.3

Ahora bien, la expresión [12.29] nos dice que la tensión normal σ en un punto genérico A (fig. 12.4) es igual a la suma de dos tensiones:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma^* \qquad [12.35]$$

una, σ_0 debida a la solicitación axil, o sea la fuerza normal actuando en el baricentro G de la sección, y la restante, σ^* originada por el par flexor generado por la reducción de N al baricentro G. Esta última solicitación es de flexión oblicua, y de acuerdo con lo visto en el capítulo correspondiente, la expresión resultante para la tensión σ será:

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z.} \qquad [12.36]$$

Reemplazando en [12.36] los valores M_z y M_y por sus iguales de las [12.34] tenemos:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{N e_y}{J_z} y + \frac{N e_z}{J_y} z \qquad [12.37]$$

Recordando que:

$$\left.\begin{aligned} J_z &= F i_z^2 \\ J_y &= F i_y^2 \end{aligned}\right\} \qquad [12.38]$$

reemplazando en [12.37] y sacando factor común N/F llegamos a:

$$\sigma = \frac{N}{F}\left(1 + \frac{e_y}{i_z^2} y + \frac{e_z}{i_y^2} z\right) \qquad [12.39]$$

expresión que nos permite llegar a obtener la ecuación del eje neutro. En efecto, si z_n e y_n son las coordenadas de un punto cualquiera de éste último y si tenemos en cuenta que para el mismo $\sigma = 0$, de la [12.39] resulta:

$$\boxed{0 = \frac{N}{F}\left(1 + \frac{e_y}{i_z^2} y_n + \frac{e_z}{i_y^2} z_n\right)} \qquad [12.40]$$

o también:

$$1 + \frac{e_y y_n}{i_z^2} + \frac{e_z z_n}{i_y^2} = 0. \qquad [12.41]$$

que es la ecuación buscada del eje neutro.

Si en la expresión anterior hacemos $z_n = 0$, tenemos

$$y_n = -\frac{i_z^2}{e_y}, \qquad [12.42]$$

Análogamente, para $y_n = 0$, resulta:

$$z_n = -\frac{i_y^2}{e_z}. \qquad [12.43]$$

Las [12.42] y [12.43] nos dan, pues, los valores de las distancias del baricentro a los puntos en que el eje neutro corta los ejes coordenados. El signo (−) que afecta las expresiones anteriores indica que las distancias y_n y z_n se miden a partir de G en sentidos contrarios a los de e_y y e_z respectivamente.

La determinación gráfica del eje neutro, sobre la base de las expresiones [12.42] y [12.43] es muy simple. Los ejes z e y son los principales de inercia de la sección. Bastará calcular J_1 y J_2 para obtener de inmediato i_z e i_y. Una vez hallados los radios de giro principales, mediante la conocida construcción de la media proporcional, se hallan los puntos M y N en que el eje neutro corta los ejes principales, como puede observarse en la figura 12.5.

12.2.4. Reciprocidad entre centro de presión y eje neutro

La expresión [12.25] podemos escribirla como sigue:

$$\sigma = \frac{N}{F}\left(1 + \frac{e'}{i_g^2} v'\right) \qquad [12.44]$$

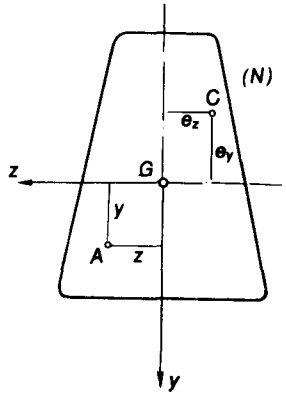


Fig. 12.4

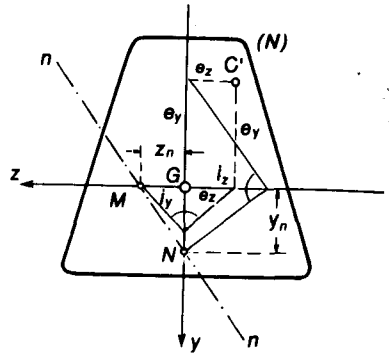


Fig. 12.5

Para el eje neutro:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= 0 \\ v' &= s' \end{aligned}\right\} \qquad [12.45]$$

Luego, reemplazando en [12.44]:

$$0 = \frac{N}{F}\left(1 + \frac{e'}{i_g^2}s'\right), \qquad [12.46]$$

de donde:

$$i_g^2 = -e's', \qquad [12.47]$$

expresión similar a la [12.22] pero donde el segundo miembro resulta afectado del signo (—) que indica que s' y e' son de distinto signo. Es decir, que el centro de presión y el eje neutro se encuentran ubicados de distinto lado con respecto al baricentro G, y sus respectivas distancias a éste último se encuentran en una relación constante.

Por otra parte, como:

$$\left.\begin{aligned} e' &= e \operatorname{sen}\beta \\ s' &= s \operatorname{sen}\beta \end{aligned}\right\} \qquad [12.48]$$

reemplazando en [12.47] tenemos:

$$es = -\frac{i_g^2}{\operatorname{sen}^2\beta} = -K. \qquad [12.49]$$

Esta expresión nos dice que, si para una línea dada de fuerzas desplazamos sobre ésta el centro C de presión, el eje neutro lo hace paralelamente a sí mismo en forma tal de mantener la relación [12.49]. Si el centro C de presión se aleja del baricentro y pasa a ocupar las sucesivas posiciones C', C'', etc., el eje neutro se le acerca (posiciones n'–n', n''–n''). Análogamente, si C se acerca al baricentro (posiciones C_1, C_2, etc.) el eje neutro se aleja (n_1–n_1, n_2–n_2, etc.) según se observa en la fig. 12.6.

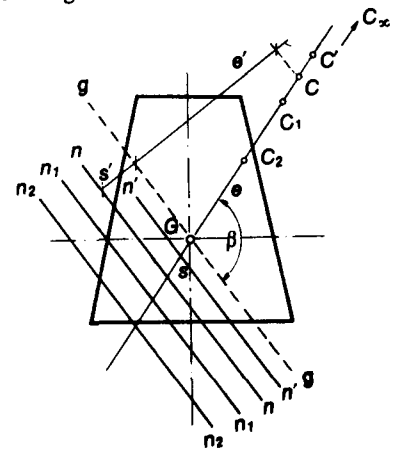


Fig. 12.6

Existen dos posiciones límites para el centro de presión, a saber:

$$\left.\begin{aligned} e &= \infty \\ e &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [12.50]$$

En el primer caso, para que se satisfaga la [12.49] debemos tener:

$$s = 0 \qquad [12.51]$$

Pero $s = 0$ significa que el eje neutro es baricéntrico y por otra parte, por ser $e = \infty$, la recta de acción de N es la impropia del plano, es decir, que estamos ante una solicitación de *flexión simple* oblicua.

Para $e = 0$, resulta $s = \infty$ lo cual significa que la solicitación es *axil*, ya que la recta de acción de N es baricéntrica. Por otra parte, $s = \infty$ corresponde a un eje neutro impropio, o sea que durante la deformación la sección gira en torno a una recta impropia, es decir, se desplaza paralelamente a sí misma, lo que precisamente constituye la hipótesis de Coulomb, formulada al analizar el problema de solicitación axil.

Considerados desde un punto de vista geométrico, el centro de presión y el eje neutro resultan ser polo y antipolar, respectivamente, de la polaridad

proyectiva relativa a la elipse central de inercia y cuyo centro es el baricentro de la sección.

Consideremos ahora nuevamente la ecuación del eje neutro.

$$\frac{e_y}{i_z^2} y_n + \frac{e_z}{i_y^2} z_n + 1 = 0 . \qquad [12.52]$$

La ordenada y la abscisa de los puntos en que dicho eje corta los de referencia, son, como hemos visto:

$$\left.\begin{aligned} y_n &= -\frac{i_z^2}{e_y} \\ z_n &= -\frac{i_y^2}{e_z} \end{aligned}\right\} \qquad [12.53]$$

Permutando términos, las expresiones anteriores pueden escribirse como sigue:

$$\left.\begin{aligned} e_y &= -\frac{i_z^2}{y_n} \\ e_z &= -\frac{i_y^2}{z_n} . \end{aligned}\right\} \qquad [12.54]$$

fórmulas semejantes a las [12.53]. Esta igualdad de expresiones podemos interpretarla en la forma siguiente:

Si al punto C (fig. 12.7) centro de presión de coordenadas e_z, e_y, le corresponde el eje neutro n–n, definido por las coordenadas z_n e y_n, al punto C_0, considerado como centro de presión, le corresponde como eje neutro la recta n_0–n_0 definida por las coordenadas e_z, e_y.

Consideremos ahora la expresión [12.37]:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{N e_y}{J_z} y + \frac{N e_z}{J_y} z . \qquad [12.55]$$

Si A es un punto de la sección de coordenadas z, y (fig. 12.8) y e_z, e_y, las correspondientes al centro de presión C, por ser en [12.55] ambos pares de valores permutables entre sí, la [12.55] nos dice que la tensión en A, cuando la fuerza normal N actúa en C, es igual a la tensión en C cuando la

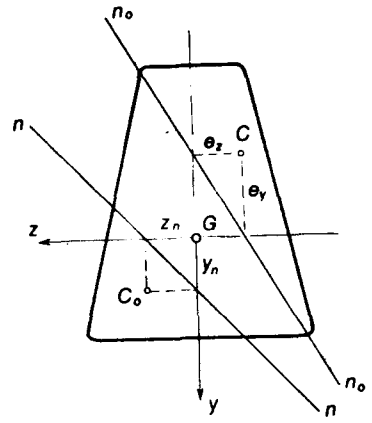


Fig. 12.7

fuerza normal actúa en A. Es decir que, en el problema que nos ocupa, es válido y se cumple el principio de reciprocidad de Maxwell que, simbólicamente podemos expresar de la forma siguiente:

$$\sigma_A^C = \sigma_C^A . \qquad [12.56]$$

Finalmente, consideremos que el centro de presión C se desplaza a lo largo de la recta a–a, que corta a los ejes principales de inercia de la sección en A y B (fig. 12.9).

Sea C una posición cualquiera del centro de presión. La fuerza normal N admite dos componentes aplicadas en A y B respectivamente. En consecuencia, para un punto cualquiera de la sección el efecto de N aplicada en C será igual a la suma de los efectos de sus respectivas componentes apli-

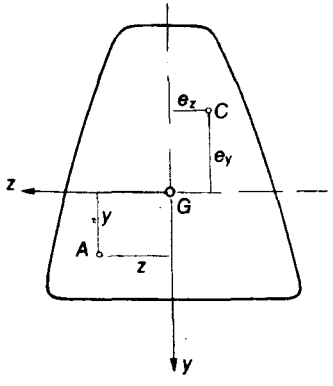


Fig. 12.8

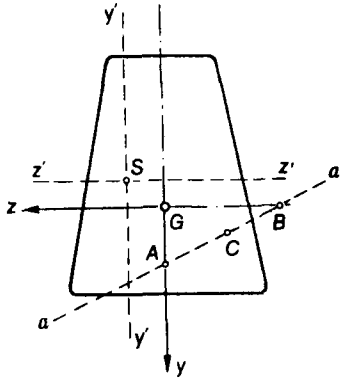


Fig. 12.9

cadas en A y B. Ahora bien, por ser z e y ejes principales de inercia, los ejes neutros correspondientes a los centros de presión A y B serán respectivamente paralelos a z e y ($z'-z'$ e $y'-y'$ en fig. 12.9).

De modo que, cualquiera sea la posición de C sobre la recta AB, siempre existirán componentes de N en A y B y el punto S será un punto de tensión nula por pertenecer a $z'-z'$ e $y'-y'$. En consecuencia concluimos que, cuando *el centro de presión se desplaza sobre una recta el eje neutro gira en torno a un punto.* Esta propiedad recíproca entre centro de presión y eje neutro es de suma importancia, y la aplicaremos al analizar más adelante el trazado del núcleo central de una sección.

12.2.5. Núcleo central

Sea ahora la sección de figura 12.10 *a* y *1–1* una línea de fuerzas cualquiera, y sea C_1 la posición del centro de presión que corresponde a un eje neutro n_1-n_1 tal que resulte tangente al contorno de la sección en A_1.

Para otra línea de fuerzas *2–2* habrá otro centro de presión C_2, al que corresponde un eje neutro n_2-n_2 tangente en A_2 y así sucesivamente para las infinitas direcciones que puede tener la línea de fuerzas.

Al lugar geométrico de los infinitos centros de presión así concebidos. se lo denomina *contorno del núcleo central*, y al área encerrada por el mismo, *núcleo central* de la sección.

Corresponde aclarar que si se trata de una sección del tipo de figura 12.10 *b*

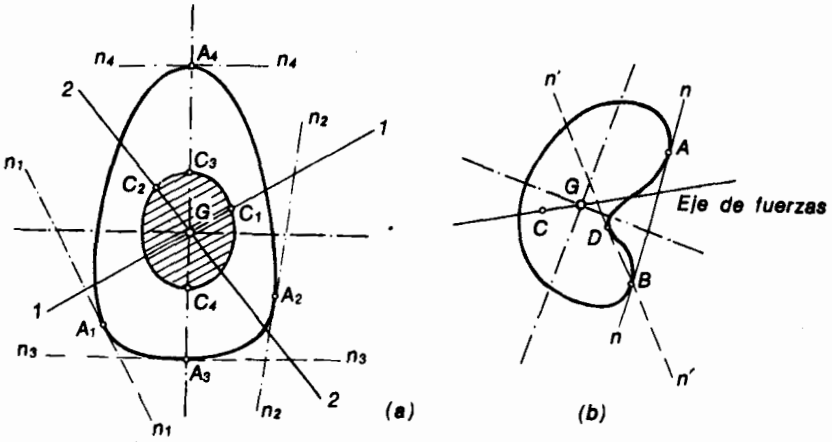


Fig. 12.10

sólo deberán considerarse aquellos ejes neutros que, siendo tangentes al contorno, *no lo corten*, tal como ocurre con el eje $n'-n'$, que si bien es tangente en D, corta sin embargo a la figura, por lo que debe descartarse para la determinación del núcleo central, como veremos más adelante.

Supongamos que en la sección de figura 12.11 para la línea de fuerzas indicada, el centro de presión se encuentre en el contorno del núcleo central (punto C). El correspondiente eje neutro $n-n$ tendrá una dirección conjugada de la línea de fuerzas, y por lo que hemos visto será tangente en A al contorno de la sección. Conocido el eje neutro, calculamos la tensión en el baricentro:

$$\sigma_0 = \frac{N}{F}, \qquad [12.57]$$

y podemos representar el diagrama de tensiones normales σ en la forma conocida (fig. 12.11 *a*).

Este diagrama es de un solo signo (compresión en este caso) y tiene ordenada nula en correspondencia con el borde inferior de la sección.

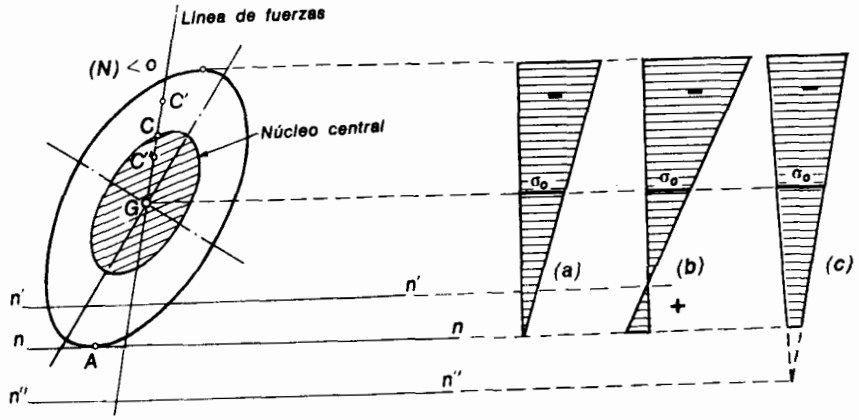


Fig. 12.11

Si ahora desplazamos el centro de presión hacia afuera del núcleo central hasta ocupar la posición C' por ejemplo, el eje neutro se desplazará paralelamente hacia el baricentro y cortará la sección. El correspondiente diagrama de tensión será el que muestra la figura 12.11 *b* (σ_0 no varía), con ordenadas positivas y negativas, es decir, que al cortar el eje neutro a la sección se originan en ésta tensiones de tracción.

En cambio, si el desplazamiento del centro de presión se efectúa hacia el interior del núcleo central (punto C'' por ejemplo) el eje neutro se alejará del baricentro y será exterior a la sección, manteniéndose sin embargo paralelo a su dirección primitiva.

El correspondiente diagrama de tensiones será el de figura 12.11 *c*, con ordenadas de un mismo signo y ninguna nula.

Como consecuencia de lo visto podemos definir también el núcleo central como sigue:

Se denomina núcleo central de una sección al lugar geométrico de los puntos que, tomados como centros de presión, originan en aquélla tensiones de un mismo signo.

Surge de inmediato la importancia que el conocimiento del núcleo central tiene para el estudio de la flexión compuesta de secciones de materiales que, como la mampostería y el hormigón simple, no trabajan en forma satisfactoria a la tracción. En efecto, conocido el núcleo central, bastará ubicar el centro de presión y establecer si pertenece o no al núcleo central. En el primer caso habrá tensiones de un sólo signo, mientras que en el segundo se originarán tanto tracciones como compresiones.

12.2.6. Determinación del núcleo central

Nos ocuparemos a continuación de la forma de determinar en la práctica el núcleo central para distintas secciones, empleando procedimientos gráficos y analíticos.

El trazado del núcleo central de una sección dada se efectúa determinando los denominados radios nucleares, empleando la expresión [12.47] que establece la relación entre las distancias al baricentro, del centro de presión y del correspondiente eje neutro.

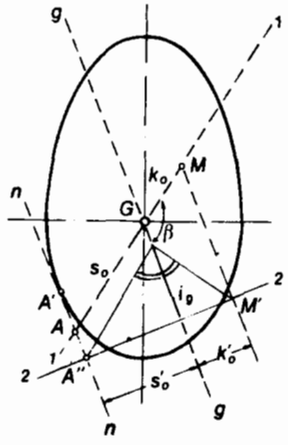


Fig. 12.12

Supongamos la sección de figura 12.12 y que para la dirección $1-1$ considerada como línea de fuerzas, la recta baricéntrica conjugada sea $g-g$ y $n-n$ la tangente al contorno de la sección, paralela a $g-g$. Si M es el centro de presión correspondiente a $n-n$, será también, de acuerdo con la definición de núcleo central, un punto de su contorno.

Para hallar la posición de M sobre la recta $1-1$ utilizamos la [12.47] reemplazando en ella s' por s_0' y e' por k_0' (fig. 12.12). En consecuencia resulta:

$$k_0' = -\frac{i_g^2}{s_0'} \qquad [12.58]$$

y si llamamos k_0, radio nuclear, a la distancia GM:

$$k_0 = \frac{k_0'}{\operatorname{sen}\beta} = -\frac{i_g^2}{s_0' \operatorname{sen}\beta}, \qquad [12.59]$$

y teniendo en cuenta que:

$$s_0' = s_0 \operatorname{sen}\beta, \qquad [12.60]$$

reemplazando tenemos:

$$k_0 = -\frac{i_g^2}{s_0 \operatorname{sen}^2\beta}. \qquad [12.61]$$

Gráficamente, la determinación de M procede utilizando la construcción de la media proporcional. Si sobre la recta $2-2$, normal a $g-g$, llevamos a partir de su intersección con esta última, y en la escala de la figura un segmento igual a i_g, uniendo su extremo con A'' y trazando luego la normal, ésta determina sobre $2-2$ el punto M' que proyectado sobre $1-1$ nos da el punto M buscado. Repitiendo la construcción para otras direcciones de la línea de fuerzas obtenemos una sucesión de puntos M que unidos con trazo continuo nos determinan el contorno del núcleo central y, en consecuencia, a este último.

12.2.7. Núcleo central de las secciones más comunes

En lo que sigue determinaremos los núcleos centrales de las secciones que se utilizan más comúnmente en la ciencia de las construcciones.

a) *Secciones cuadrada y rectangular.*

Analizaremos a continuación la sección rectangular de figura 12.13 de ancho b y altura h, de la que la sección cuadrada constituye un caso particular donde $b = h = a$, lado del cuadrado.

Si consideramos la recta n_1-n_1 tangente al borde inferior, por ser paralela a la dirección principal $1-1$, su dirección conjugada coincidirá con la dirección principal $2-2$, de modo que el centro de presión relativo a n_1-n_1, que será un punto del eje central, se encontrará sobre $2-2$.

Ahora bien, para el rectángulo, el valor del radio de giro respecto de $1-1$, que es el que interesa para determinar el centro de presión relativo a n_1-n_1 vale:

$$i_1^2 = \frac{h^2}{12}, \qquad [12.62]$$

y como consecuencia en este caso por ser $\beta = \pi/2$

$$s = s_0' = \frac{h}{2}, \qquad [12.63]$$

reemplazando valores en [12.61]:

$$k_0 = -\frac{2h^2}{12h} = -\frac{h}{6}. \qquad [12.64]$$

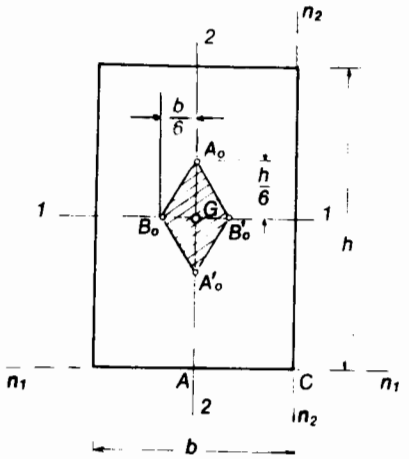


Fig. 12.13

Análogamente, para n_2-n_2, coincidente con el lado mayor del rectángulo, el correspondiente radio nuclear será, por similitud:

$$k_0 = -\frac{b}{6}, \qquad [12.65]$$

que nos define el punto B_0 del núcleo central. Consideraciones similares nos permiten llegar a los puntos simétricos A_0' B_0'

Como veremos a continuación, en el caso de la sección rectangular basta conocer estos cuatro puntos para obtener el núcleo central. En efecto, en el parágrafo 12.2.4, llegamos a la conclusión que, si el centro de presión se desplazaba sobre una recta, los correspondientes ejes neutros giraban en torno a un punto.

La inversa de la premisa anterior también es cierta, es decir que si el eje neutro gira en torno a un punto determinado, el correspondiente centro de presión se desplaza sobre una recta.

En el caso de la figura 12.13, la recta n_1-n_1, considerada como eje neutro, pasa a ocupar la posición n_2-n_2, girando de 90° en torno al punto C. En consecuencia, de acuerdo con lo anterior, la trayectoria descripta por el punto A_0 para alcanzar la posición B_0 será la recta A_0 B_0. Consideraciones similares nos llevan a concluir que para la sección rectangular, el núcleo central será un rombo, cuyos semiejes, radios nucleares, son iguales a $b/6$ y $h/6$.

Para el cuadrado, caso particular del rectángulo, el núcleo central será también un cuadrado, cuyos radios nucleares valdrán $a/6$ si a es el lado del mismo, y con los vértices ubicados sobre los ejes de simetría de la sección.

b) *Sección triangular*

En el triángulo, las direcciones conjugadas de los lados, son las correspondientes medianas. En consecuencia, el eje n_1-n_1 coincidente con la base AB del triángulo le corresponde un centro de presión relativo C_0 ubicado

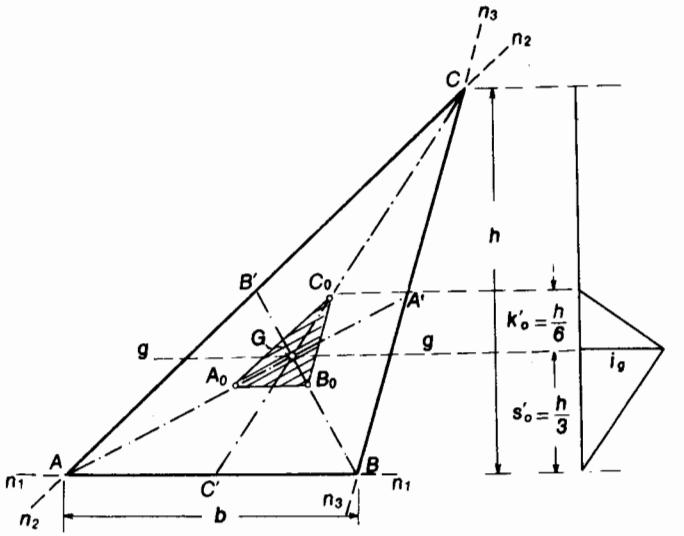


Fig. 12.14

sobre la mediana CC' y situado a una distancia k_0 del baricentro igual a:

$$k_0' = -\frac{i_g^2}{s_0'}. \qquad [12.66]$$

Pero, en el caso que nos ocupa:

$$\left.\begin{aligned} i_g^2 &= \frac{h^2}{18} \\ s_0' &= \frac{h}{3} \end{aligned}\right\} \qquad [12.67]$$

valores que reemplazados en [12.66] nos dan finalmente:

$$k_0' = -\frac{h}{6} \qquad [12.68]$$

Trazando una paralela a $g-g$, a una distancia $k_0' = -(h/6)$ su intersección con CC' nos determina el punto C_0, que será un punto del núcleo central. Procediendo análogamente con los ejes n_2-n_2 y n_3-n_3 obtenemos los puntos A_0 y B_0, que unidos entre sí y con C_0 nos determinan el núcleo central buscado que será un triángulo de lados paralelos a los de la sección. En la figura se ha representado, además, la construcción gráfica para la determinación de C_0.

c) *Polígono irregular*

Si la sección tiene la forma de un polígono irregular de un número cualquiera de lados, trazadas las rectas coincidentes con cada lado y determinadas las direcciones conjugadas correspondientes, mediante la circunferencia de Mohr, se determinan sobre ellos los puntos I, II, . . ., V, sea analítica o gráficamente, dichos puntos son los vértices del núcleo central, que resulta así ser un polígono irregular, de igual número de lados que el que constituye la sección.

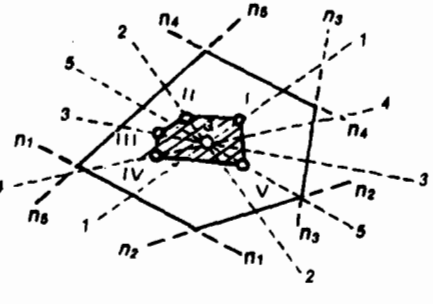


Fig. 12.15

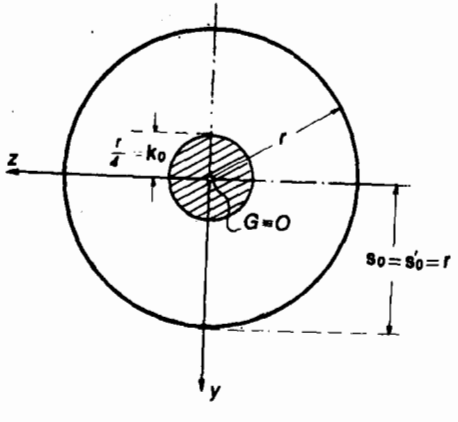


Fig. 12.16

d) *Sección circular llena*

En la sección circular llena, si r es su radio, resulta:

$$i_g = \frac{r}{2}, \qquad [12.69]$$

de donde, por ser todos los ejes baricéntricos principales de inercia:

$$k_0 = k_0' = -\frac{r^2}{4 s_0}, \qquad [12.70]$$

y como (fig. 12.16):

$$s_0 = r, \qquad [12.71]$$

resulta:

$$k_0 = -\frac{r^2}{4r} = -\frac{r}{4}. \qquad [12.72]$$

El núcleo central resulta ser un círculo de radio igual a la cuarta parte del radio de la sección.

e) *Sección circular hueca*

Para este tipo de sección tenemos:

$$J_g = \frac{\pi R^4}{4}(1 - \alpha^4), \qquad [12.73]$$

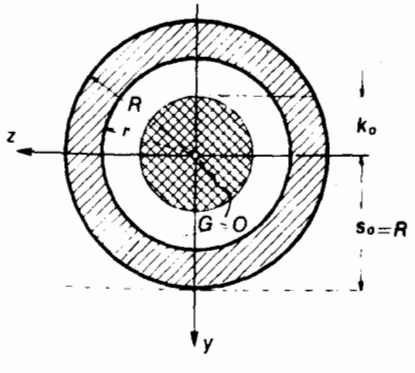


Fig. 12.17

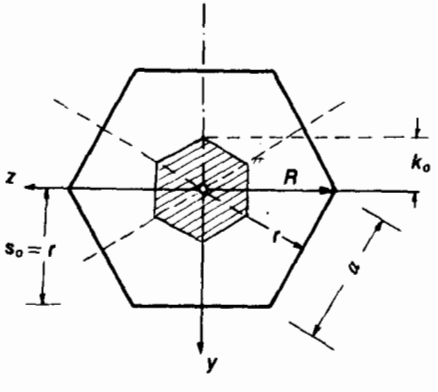


Fig. 12.18

donde R = *radio* exterior y $\alpha = r/R$ es la relación entre radios interior y exterior. Análogamente:

$$F = \pi R^2 (1 - \alpha^2), \qquad [12.74]$$

de donde:

$$i_g^2 = \frac{R^2}{4}(1 + \alpha^2), \qquad [12.75]$$

y, como $s_0 = R$, resulta reemplazando valores:

$$k_0 = -\frac{R^2}{4R}(1 + \alpha^2), \qquad [12.76]$$

o también:

$$k_0 = -\frac{R}{4}(1 + \alpha^2). \qquad [12.77]$$

Los valores límites de k_0 son:

1) para $r = 0$ (sección llena), es decir, $\alpha = 0$:

$$k_0 = -\frac{R}{4}, \qquad [12.78]$$

donde k_0 coincide con el valor dado por la [12.72], teniendo en cuenta que para dicho caso $r = R$.

2) Cuando $r \to R$, o sea, para secciones huecas de paredes muy delgadas, α tiende a la unidad y consecuentemente:

$$k_0 \to -\frac{R}{2} \qquad [12.79]$$

f) *Sección poligonal regular*

Para las secciones constituidas por polígonos regulares el momento de inercia respecto a cualquier eje baricéntrico es constante e igual a:

$$J_g = \frac{F}{48}(12r^2 + a^2) \qquad [12.80]$$

donde:

F = área de la sección,

r = radio de la circunferencia inscripta (apotema),

a = lado del polígono.

En consecuencia:

$$i_g^2 = \frac{J_g}{F} = \frac{12r^2 + a^2}{48}, \qquad [12.81]$$

de donde, como $s_0 = r$ (fig. 12.18):

$$k_0 = -\frac{12r^2 + a^2}{48r} = -\frac{r}{4}\left(1 + \frac{a^2}{12r^2}\right). \qquad [12.82]$$

Teniendo en cuenta que para un polígono regular de n lados, se tiene

$$a = 2r \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}, \qquad [12.83]$$

reemplazando en la [12.82]

$$k_0 = -\frac{r}{4}\left[1 + \frac{\operatorname{tg}^2(\pi/n)}{3}\right] = -k\frac{r}{4}. \qquad [12.84]$$

En el cuadro siguiente hemos consignado los valores de k para polígonos regulares de número creciente de lados entre $n = 5$ y $n = 40$.

n	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30	35	40
k	1,183	1,111	1,076	1,057	1,044	1,035	1,027	1,015	1,008	1,005	1,004	1,003	1,002

Como puede observarse en los valores de la tabla, el valor del coeficiente k tiende a la unidad al aumentar el número de lados, y ya para $n = 20$ puede considerarse el polígono como una sección circular pues el error cometido en la determinación de k_0 es inferior al 1%.

De lo expuesto concluimos que el núcleo central correspondiente a una sección poligonal regular es también un polígono regular, del mismo número de lados, inscripto en una circunferencia de radio k_0 y girado de (π/n) con respecto a la figura de la sección.

g) *Sección doble* T

Para este tipo de sección, el núcleo central es similar al de la sección rectangular, un rombo cuyos vértices se encuentran ubicados sobre los ejes principales de inercia de la sección.

En efecto, hemos definido al núcleo central como el lugar geométrico de los centros de presión que corresponden a ejes neutros tangentes a la sección y que no la cortan. En consecuencia, para la sección doble T de figura 12.19, los ejes neutros límites que hay que tener en cuenta son *1–1; 2–2; 3–3* y *4–4*, a los que corresponden como centros de presión los puntos I, II, III, y IV

respectivamente, que son a la vez los vértices del núcleo central y cuya determinación procede en la forma explicada en parágrafos anteriores.

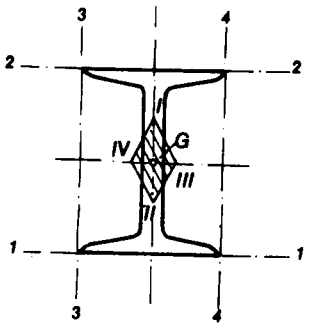


Fig. 12.19

12.2.8. Flexión compuesta normal en régimen elástico

Cuando la línea de fuerzas coincide con un eje principal de inercia, estamos ante flexión compuesta normal. En este caso, por ser $\beta = \pi/2$ ya que el eje neutro debe ser normal a la línea de fuerzas, la ecuación [12.27] se trasforma en:

$$\sigma = -\frac{N}{F} \pm \frac{Ne}{J_g} v', \qquad [12.85]$$

y la [12.61] en:

$$k_0 = -\frac{i_g^2}{s_0}. \qquad [12.86]$$

En lo que respecta a la flexión compuesta normal, interesa especialmente el caso de la sección rectangular de ancho b y altura h por ser común en la práctica. Para la misma:

$$\left.\begin{aligned} J_g &= \frac{bh^3}{12} \\ F &= bh \end{aligned}\right\} \qquad [12.87]$$

de donde:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= -\frac{N}{bh} \pm \frac{12Ne}{bh^3} v' \\ \sigma &= -\frac{N}{bh}\left(1 \mp \frac{12e}{h^2} v'\right) \end{aligned}\right\} \qquad [12.88]$$

Las tensiones máximas (de ambos signos) tienen las siguientes expresiones, teniendo en cuenta que para esta sección es $v'_{\text{máx.}} = \pm h/2$:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{N}{bh}\left(1 + \frac{12e}{h^2} \cdot \frac{h}{2}\right) = -\frac{N}{bh}\left(1 + 6\frac{e}{h}\right) \\ \sigma_2 &= -\frac{N}{bh}\left(1 - \frac{12e}{h^2} \cdot \frac{h}{2}\right) = -\frac{N}{bh}\left(1 - 6\frac{e}{h}\right) \end{aligned}\right\} \qquad [12.89]$$

La segunda de las expresiones [12.89] resulta particularmente interesante por cuanto permite establecer el valor límite de la excentricidad e que conduce un diagrama sin tensiones de tracción, es decir, cuando el eje neutro resulta tangente a la sección. Para dicho valor de e que llamaremos e_0, resulta $\sigma_2 = 0$. En consecuencia:

$$\left.\begin{aligned} \frac{6e_0}{h} &= 1 \\ e_0 &= \frac{h}{6} \end{aligned}\right\} \qquad [12.90]$$

Valor que coincide con el del radio k_0 dado por la [12.64].

Momentos nucleares (caso general)

El núcleo central permite determinar en forma simple las tensiones extremas en una sección cualquiera. Consideremos por ejemplo la sección de figura 12.20.

Sea C el centro de presión sobre el que actúa la fuerza normal N, supuesta de compresión. En consecuencia y–y será la línea de fuerzas y g–g la paralela baricéntrica al eje neutro, es decir, direcciones conjugadas.

Trazando las tangentes al contorno paralelas a g–g, obtenemos los puntos más solicitados O y U, cuyas distancias al baricentro G son respectivamente e_o y e_u.

La tensión en U vale:

$$\sigma_u = -\frac{N}{F} + \frac{Ne'}{J_g} e_u. \qquad [12.91]$$

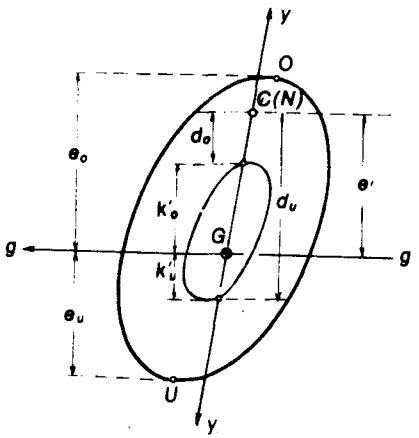


Fig. 12.20

Conforme a la definición de módulo resistente podemos hacer:

$$\frac{J_g}{e_u} = W_{gu}\,, \qquad [12.92]$$

y recordando que:

$$|\,k_0'\,e_u\,| = i_g^2 = \frac{J_g}{F}, \qquad [12.93]$$

resulta también:

$$\frac{J_g}{e_u} = k_0'\,F, \qquad [12.94]$$

y finalmente:

$$W_{gu} = k_0'\,F, \qquad [12.95]$$

Consideraciones análogas nos llevan, con la notación de figura 12.20, a concluir que, para el punto O tenemos:

$$\sigma_0 = -\frac{N}{F} - \frac{N\,e'}{J_g}\,e_0 \qquad [12.96]$$

y

$$W_{g0} = k_u'\,F = \frac{J_g}{e_0} \qquad [12.97]$$

En consecuencia, si reemplazamos valores en las expresiones de las tensiones de borde σ_o y σ_u llegamos a:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_u &= -\frac{N\,k'_0}{W_{gu}} + \frac{N\,e'}{W_{gu}} \\ \sigma_0 &= -\frac{N\,k'_u}{W_{g0}} - \frac{N\,e'}{W_{g0}} \end{aligned}\right\} \qquad [12.98]$$

o también:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_u &= -\frac{N}{W_{gu}}\,(k'_0 - e') = \frac{N}{W_{gu}}\,(e' - k'_0) \\ \sigma_0 &= -\frac{N}{W_{g0}}\,(k'_u + e') = -\frac{N}{W_{g0}}\,(e' + k'_u) \end{aligned}\right\} \qquad [12.99]$$

pero, por ser:

$$\left.\begin{aligned} e' - k'_0 &= d_0 \\ e' + k'_u &= d_u \end{aligned}\right\} \qquad [12.100]$$

reemplazando llegamos a:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{N}{W_{gu}}\,d_0 \\ \sigma_0 &= -\frac{N}{W_{g0}}\,d_u \end{aligned}\right\} \qquad [12.101]$$

Haciendo:

$$\left.\begin{aligned} N\,d_0 &= M_0 \\ N\,d_u &= M_u \end{aligned}\right\} \qquad [12.102]$$

donde M_o y M_u son los denominados *momentos nucleares*, las expresiones [12.101] se transforman finalmente en:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_0 &= -\frac{M_u}{W_{g0}} \\ \sigma_u &= +\frac{M_0}{W_{gu}} \end{aligned}\right\} \qquad [12.103]$$

expresiones similares a las deducidas para la flexión simple, y en las que las tensiones resultan ser funciones de una única magnitud estática: los momentos nucleares. Su utilización resulta conveniente en aquellos casos de secciones para

los cuales puede variar no sólo la intensidad de la fuerza normal, sino también la posición del centro de presión.

En efecto, en estos casos, de utilizarse las expresiones binomias de las tensiones, las solicitaciones más desfavorables resultan de la combinación más desfavorable de los de cada uno de los miembros de la fórmula. En cambio, empleando los momentos nucleares, el problema se reduce a determinar únicamente sus valores más desfavorables. Corresponde, sin embargo, hacer notar que las fórmulas en que intervienen los momentos nucleares, no dan las tensiones sobre toda la sección, sino solamente las tensiones extremas. En general, en las aplicaciones prácticas, estos valores son suficientes.

12.2.9. Línea de influencia y superficie de influencia de las tensiones normales

Sea la sección de figura 12.21 y A el centro de presión donde actúa una fuerza normal N de compresión, y de *intensidad unitaria*, es decir $N = -1$.

En correspondencia con el baricentro de la sección, el valor de la tensión será:

$$\overline{\sigma_0} = -\frac{1}{F} \qquad [12.104]$$

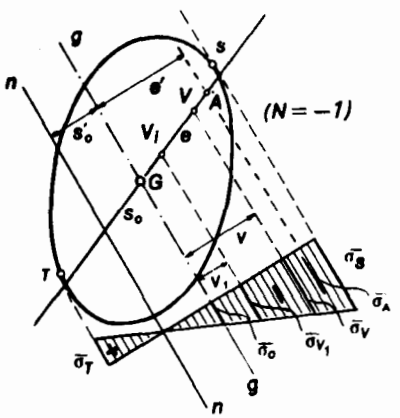


Fig. 12.21

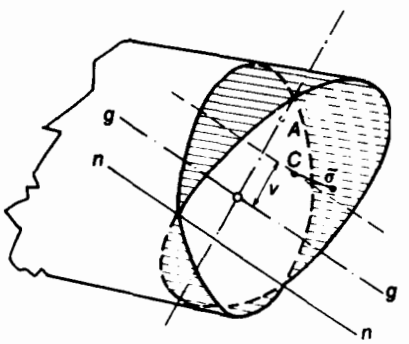


Fig. 12.22

donde F = área de la sección, y el diagrama de tensiones será el que muestra la figura 12.21. En una fibra situada a la distancia v de la paralela baricéntrica g–g, la tensión será:

$$\overline{\sigma_v} = -\frac{1}{F}\left(1 + \frac{e'v}{i_g^2}\right) \qquad [12.105]$$

Ahora bien, de acuerdo con el principio de reciprocidad de Maxwell (expresión [12.56]), dado que e' y v son magnitudes permutables en la [12.105], resulta:

$$\overline{\sigma_v}^A = \overline{\sigma_A}^V. \qquad [12.106]$$

Análogamente, para otra ordenada v_1, es

$$\overline{\sigma_{v_1}}^A = \overline{\sigma_A}^{V_1} \qquad [12.107]$$

Es decir, que las ordenadas del diagrama representan los valores de las tensiones en A, cuando el centro de presión se desplaza a lo largo de una determinada línea de fuerzas, la GA en el caso que nos ocupa. Y como el diagrama lo hemos trazado para una fuerza unitaria, el mismo resulta ser la *línea de influencia* de la tensión en A, (conforme a la definición de línea de influencia), originada por una fuerza que se desplaza a lo largo de la línea de fuerzas GA.

Ahora bien, la ordenada $\overline{\sigma_v}$ del diagrama de tensiones de figura 12.21 representa no sólo la tensión en el V sino en todos aquellos puntos, como ser V', V'', V''', etc., que se encuentran situados sobre la paralela a g–g situada a la distancia v de la ordenada. Y lo mismo ocurre con las restantes ordenadas del diagrama.

Si en correspondencia con cada punto de la sección, llevamos normalmente una ordenada que represente el valor de la tensión $\overline{\sigma}$ correspondiente, los extremos de cada una definen un lugar geométrico que, como es lógico, es un plano, que corta a la sección según el eje neutro y delimita un volumen que es lo que se define como *volumen de tensiones* (figura 12.22).

Dicho plano, referido al plano de la sección constituye la *superficie* de influencia de la tensión en A.

En efecto, en el parágrafo 12.2.4 vimos que, en forma general, de acuerdo con el teorema de Maxwell, se cumplía que:

$$\sigma_A^C = \sigma_C^A, \qquad [12.108]$$

o sea, que la tensión en el punto A para una fuerza actuando en C es igual a la tensión en este último punto cuando A es el centro de presión, es decir $\overline{\sigma}$.

En consecuencia, si se desea trazar la superficie de influencia (o línea de influencia para una línea de fuerzas dada) de la tensión en un punto de una sección solicitada a flexión compuesta, bastará trazar el diagrama de tensiones suponiendo al punto considerado como centro de presión.

12.3. Flexión compuesta en secciones de materiales que no admiten tensiones de tracción

12.3.1. Consideraciones generales

Existen materiales, como el hormigón simple y la mampostería de ladrillos que si bien trabajan perfectamente a la compresión, en cambio resisten muy poco a la tracción.

En tales casos, al verificar secciones sujetas a flexión compuesta, es necesario proceder a una revisión de los conceptos vistos al considerar secciones de materiales homogéneos e isótropos y desarrollar una teoría partiendo del hecho que, para tales secciones las condiciones de equivalencia se deben satisfacer teniendo en cuenta solamente tensiones de compresión y prescindiendo por completo de las de tracción.

Es evidente que el avance de la técnica constructiva ha hecho que cada vez más se prescinda de la utilización de la mampostería y del hormigón simple en la construcción de grandes estructuras, materiales estos que han sido prácticamente suplantados por el hormigón armado o precomprimido. No obstante ello, y por considerar que el tema reviste un interés académico, desarrollaremos a continuación el problema de la determinación de las tensiones en este tipo de secciones, comenzando por el caso más simple, el de la flexión compuesta normal.

En lo que sigue y por razones de simplicidad de expresión, designaremos a este tipo de sección como *secciones sin zona de tracción.*

12.3.2. Flexión compuesta normal, en secciones sin zona de tracción

a) *Solución analítica*

Consideremos la sección de figura 12.23 solicitada por una fuerza normal N, de compresión, aplicada en el centro de presión C situado sobre el eje principal de inercia $2-2$ y *fuera del núcleo central.*

En consecuencia, el eje neutro, normal a la línea de fuerzas, cortará a la sección y en ésta se originarán tensiones de tracción, con un máximo en correspondencia con el punto B, de valor

$$\sigma_B = -\frac{N}{F}\left(1 - \frac{e}{i_g^2}\,\nu_2\right) \qquad [12.109]$$

Ahora bien, de acuerdo con la hipótesis, dichas tensiones son incompatibles con el material, de modo que la equivalencia entre N, fuerza exterior

y el conjunto de infinitas fuerzas interiores originadas por las tensiones σ, debe satisfacerse exclusivamente mediante las tensiones de compresión. Resulta evidente que el eje neutro correspondiente a un diagrama donde $\sigma < 0$ que satisface la premisa anterior, ya no será el $n-n$ sino otro, el n_1-n_1 por ejemplo (fig. 12.23). Supongamos que el diagrama de tensiones normales sea el de figura 12.23 *b*.

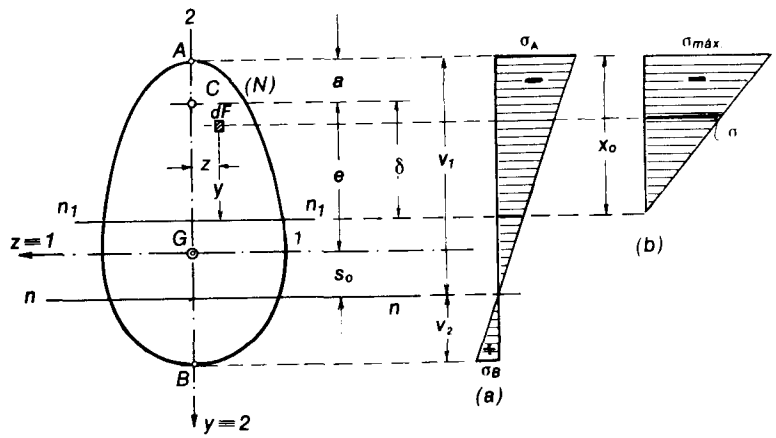


Fig. 12.23

En una fibra situada a una distancia y de n_1-n_1 la correspondiente tensión σ origina un esfuerzo elemental $\sigma\,dF$, y las tres condiciones de equivalencia que se deben plantear, por tratarse de fuerzas paralelas, serán, con la notación de la figura:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{x_0} \sigma\,dF &= N \\ \int_0^{x_0} \sigma\,y\,dF &= N\,(x_0 - a) \\ \int_0^{x_0} \sigma\,z\,dF &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [12.110]$$

La tercera ecuación no interesa, por cuanto conduce a que el eje neutro y la línea de fuerzas resultan ser direcciones conjugadas.

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{\sigma_{máx.}}{\sigma} = \frac{x_0}{y}, \qquad [12.111]$$

de donde:

$$\sigma = \sigma_{máx.}\,\frac{y}{x_0}, \qquad [12.112]$$

reemplazando en las dos primeras de las [12.110] resulta:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma_{\text{máx.}}}{x_0} \int_0^{x_0} y\, dF &= N \\ \frac{\sigma_{\text{máx.}}}{x_0} \int_0^{x_0} y^2\, dF &= N(x_0 - a) \end{aligned}\right\} \qquad [12.113]$$

Dividiendo miembro a miembro la segunda por la primera de las [12.113] resulta:

$$x_0 - a = \frac{\int_0^{x_0} y^2\, dF}{\int_0^{x_0} y\, dF} \qquad [12.114]$$

Pero:

$$\int_0^{x_0} y^2\, dF = J_{n_1}^{x_0} \qquad [12.115]$$

y

$$\int_0^{x_0} y\, dF = S_{n_1}^{x_0} \qquad [12.116]$$

Es decir, los momentos de inercia y estático de la parte comprimida de la sección, respecto del eje neutro, de donde:

$$x_0 - a = \frac{J_{n_1}^{x_0}}{S_{n_1}^{x_0}} \qquad [12.117]$$

Como:

$$x_0 - a = \delta \qquad [12.118]$$

resulta finalmente:

$$\delta = \frac{J_{n_1}^{x_0}}{S_{n_1}^{x_0}} \qquad [12.119]$$

expresión que nos define la posición del eje neutro, en función de las características geométricas de la sección.

Conocido δ (y consecuentemente $J_{n_1}^{x_0}$) la determinación de $\sigma_{\text{máx.}}$ es inmediata, sobre la base de la segunda de las [12.113]

$$\sigma_{\text{máx.}} = (N\delta / J_{n_1}^{x_0})\, x_0. \qquad [12.120]$$

La expresión anterior es, en su contextura, similar a la que da la tensión máxima en la flexión simple normal, por cuanto el producto $N \cdot \delta$ puede asimilarse a un momento, ya que corresponde a una fuerza por una distancia.

En el caso de una sección rectangular (fig. 12.24) tenemos:

$$\left.\begin{aligned} S_{n_1}^{x_0} &= \frac{b x_0^2}{2} \\ J_{n_1}^{x_0} &= \frac{b x_0^3}{3} \end{aligned}\right\} \qquad [12.121]$$

de donde:

$$\delta = \frac{b x_0^3}{3} \cdot \frac{2}{b x_0^2} \qquad [12.122]$$

y

$$\delta = \frac{2 x_0}{3}, \qquad [12.123]$$

y como:

$$\delta = x_0 - a, \qquad [12.124]$$

resulta finalmente:

$$x_0 = 3a. \qquad [12.125]$$

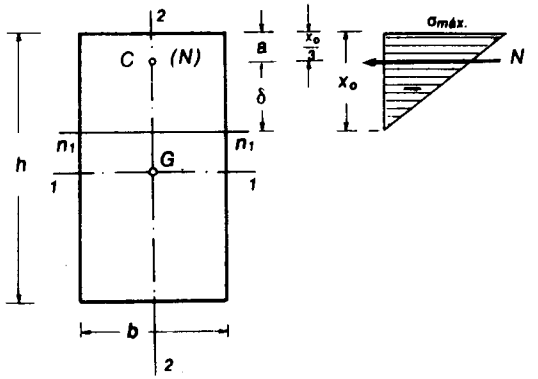


Fig. 12.24

En consecuencia, reemplazando en [12.120] los valores dados por las [12.121], [12.123] y [12.125], el valor de la tensión máxima resulta ser:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{2N}{3ba}. \qquad [12.126]$$

Pero $3a = x_0$, y si hacemos:

$$F_0 = b\, 3a = b x_0, \qquad [12.127]$$

resulta finalmente:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{2N}{F_0}. \qquad [12.128]$$

Como el ancho de la sección es constante, la resultante del volumen de tensiones queda ubicada, por razones de simetría, sobre el eje principal $2-2$ y a una distancia del borde superior igual a $x_0/3$, coincidente con C.

b) *Solución gráfica*

La determinación de la posición del eje neutro n_1-n_1, es decir, el cálculo de δ, puede realizarse gráficamente por el procedimiento que muestra la figura 12.25 y que, en última instancia, se reduce a la interpretación gráfica de la expresión [12.119] que puede escribirse también:

$$J_{n_1}^{x_0} = \delta\, S_{n_1}^{x_0} \,. \qquad [12.129]$$

Dividida la sección en fajas horizontales y determinados los baricentros $g_1, g_2, \ldots, g_n$ de las figuras resultantes (que pueden asimilarse a trapecios y segmentos parabólicos) supondremos aplicadas en cada una de ellos, fuerzas ficticias, normales al eje de simetría de la sección y de intensidades $F_1, F_2, \ldots, F_n$ proporcionales a las respectivas áreas.

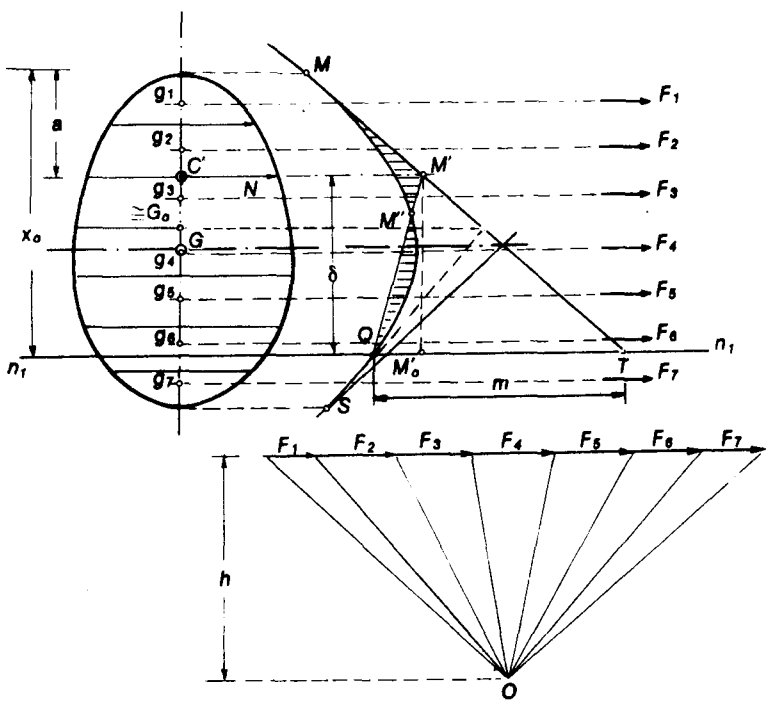


Fig. 12.25

Luego, con una distancia polar h construimos los polígonos de fuerzas y funicular del sistema ficticio, cuya envolvente será la curva funicular correspondiente.

Sea C el centro de presión y M' el punto donde la horizontal trazada por el primero corta a la tangente en M a la curva funicular (o sea al primer lado del polígono funicular trazado).

Si por M' trazamos una recta que corte a la curva funicular en Q, tal que las áreas $MM'M''$ y $M''Q$ resulten iguales, demostraremos a continuación que la normal n_1-n_1 a la línea de fuerzas trazada por Q es el eje neutro buscado.

Conforme con una propiedad del polígono funicular[1] el segmento $\overline{QT} = m$ representa, en la escala correspondiente, el momento estático con respecto a n_1-n_1 de la parte de la sección situada por *encima* de este último eje. Y si n_1-n_1 es el eje neutro, tendremos:

$$m\,(\text{cm}) \cdot \text{Esc.}\, S = S_{n_1}^{x_0} \qquad [12.130]$$

Por otra parte, de acuerdo con el método de Mohr para la determinación de momentos de inercia,[2] en el caso de la figura 12.25, el área encerrada por la curva funicular, la tangente extrema superior a ésta y el eje considerado, en la escala correspondiente, nos da el momento de inercia de la sección respecto de este último.

En el caso que nos ocupa, tal área es la limitada por el tramo $MM''Q$ de curva funicular, el eje n_1-n_1 y la prolongación de la recta MM', y corresponde al momento de inercia respecto de n_1-n_1 de la fracción de superficie ubicada *por encima* de n_1-n_1. Es evidente que si n_1-n_1 es el eje neutro buscado, dicho momento de inercia no será otro que $J_{n_1}^{x_0}$ y tendremos:

$$\text{Sup.}\, MM''QT \cdot \text{Esc.}\, J = J_{n_1}^{x_0} \qquad [12.131]$$

Ahora bien, en la construcción de figura 12.25, las dos superficies rayadas son de igual área, en consecuencia:

$$\text{Sup.}\, MM''QT = \text{Sup.}\, M'QT \qquad [12.132]$$

Pero:

$$\text{Sup.}\, M'QT = \tfrac{1}{2}\, m\, \overline{M'M'_0} \qquad [12.133]$$

luego, teniendo en cuenta las [12.131] y [12.132]:

$$\tfrac{1}{2}\, m\, \overline{M'M'_0} \cdot \text{Esc.}\, J = J_{n_1}^{x_0} \qquad [12.134]$$

De la [12.130]:

[1] Ver *Estabilidad I* del autor, págs. 207 y sigs.
[2] *Op. cit.*, pág. 209.

$$m = \frac{S_{n_1}^{x_0}}{\text{Esc. } S} \qquad [12.135]$$

luego, reemplazando y trasponiendo términos:

$$\overline{M'M_0'} = \frac{J_{n_1}^{x_0}}{S_{n_1}^{x_0}} \cdot \frac{2 \text{ Esc.} S}{\text{Esc.} J} \qquad [12.136]$$

Pero, en el procedimiento de Mohr:

$$\begin{aligned} \text{Esc.} S &= \text{Esc. fuerzas} \times \text{Esc. long.} \times h \\ \text{Esc.} J &= 2 \text{ Esc. fuerzas} \times (\text{Esc. long.})^2 \times h \end{aligned} \qquad [12.137]$$

Luego reemplazando en [12.136] y simplificando, llegamos finalmente a:

$$\overline{M'M_0'} \times \text{Esc. long.} = \frac{J_{n_1}^{x_0}}{S_{n_1}^{x_0}} = \delta \qquad [12.138]$$

es decir, que la distancia $\overline{M'M_0'}$ representa, en la escala del dibujo, la magnitud δ, dada por la [12.119], que define la posición del eje neutro.

12 . 3 . 3 . La sección circular hueca sin zona de tracción

En esta sección sólo puede existir flexión compuesta normal, en virtud de su simetría central. Presenta interés especial por cuanto es la sección que aparece en las chimeneas de mampostería que, como es lógico, trabajan a la flexión compuesta.

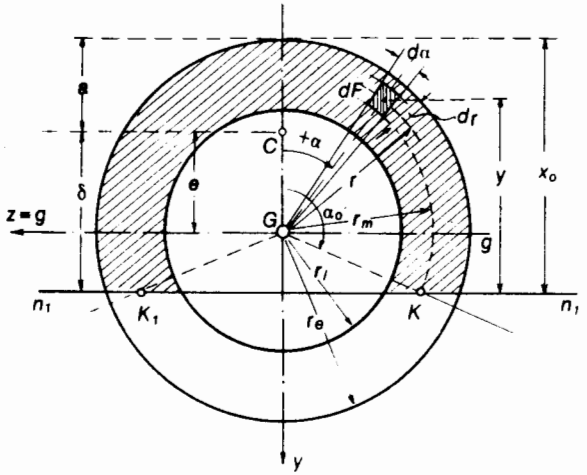


Fig. 12.26

Determinaremos a continuación el valor de δ para la sección de figura 12.26

Si n_1-n_1 es el eje neutro buscado para el cálculo de $J_{n_1}^{x_0}$ y $S_{n_1}^{x_0}$, podemos reemplazar sin mayor error la superficie anular limitada por n_1-n_1 por la que lo es por los radios $\overline{GK}$ y $\overline{GK_1}$, donde K y K_1 son los puntos de intersección de n_1-n_1 con el radio medio:

$$r_m = \frac{1}{2}(r_i + r_e) \qquad [12.139]$$

Con la notación de la figura, tenemos:

$$S_{n_1}^{x_0} = \int_{F_0} y\, dF, \qquad [12.140]$$

donde:

$$\left.\begin{aligned} y &= r(\cos\alpha - \cos\alpha_0) \\ dF &= r\, dr\, d\alpha \end{aligned}\right\} \qquad [12.141]$$

y en consecuencia:

$$S_{n_1}^{x_0} = 2\int_0^{\alpha_0}\int_{r_i}^{r_e} r^2 (\cos\alpha - \cos\alpha_0)\, d\alpha\, dr, \qquad [12.142]$$

$$S_{n_1}^{x_0} = \frac{2}{3}(r_e^3 - r_i^3)(\text{sen}\,\alpha_0 - \alpha_0 \cos\alpha_0) \qquad [12.143]$$

Pero:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_0 &= \frac{\delta - e}{r_m}; \\ \text{sen}\,\alpha_0 &= \sqrt{1 - \left(\frac{\delta - e}{r_m}\right)^2}, \end{aligned}\right\} \qquad [12.144]$$

luego:

$$S_{n_1}^{x_0} = \frac{2}{3}(r_e^3 - r_i^3)\left[\sqrt{1 - \left(\frac{\delta - e}{r_m}\right)^2} - \frac{\delta - e}{r_m} \cdot \text{arc cos}\left(\frac{\delta - e}{r_m}\right)\right] \qquad [12.145]$$

o también:

$$S_{n_1}^{x_0} = \frac{2}{3} r_e^3 \left(1 - \frac{r_i^3}{r_e^3}\right)\left[\sqrt{1 - \left(\frac{\delta - e}{r_m}\right)^2} - \frac{\delta - e}{r_m} \cdot \text{arc cos}\left(\frac{\delta - e}{r_m}\right)\right] \qquad [12.146]$$

Por otra parte:

$$J_{n_1}^{x_0} = \int_{F_0} y^2\, dF, \qquad [12.147]$$

de donde, teniendo en cuenta las [12.141]:

$$J_{n_1}^{x_0} = 2\int_0^{\alpha_0}\int_{r_i}^{r_e} r^3 (\cos\alpha - \cos\alpha_0)^2\, d\alpha\, dr \qquad [12.148]$$

que integrada nos conduce a:

$$J_{n_1}^{x_0} = \frac{1}{2}\left(r_e^4 - r_i^4\right)\left[\alpha_0\left(\frac{1}{2} + \cos^2\alpha_0\right) - \frac{3}{2}\cdot \operatorname{sen}\alpha_0 \cos\alpha_0\right] \quad [12.149]$$

o también:

$$J_{n_1}^{x_0} = \frac{1}{2}\, r_e^4\left(1 - \frac{r_i^4}{r_e^4}\right)\left\{\arccos\left(\frac{\delta - e}{r_m}\right)\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{\delta - e}{r_m}\right)^2\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2}\cdot\frac{\delta - e}{r_m}\cdot\sqrt{1 - \left(\frac{\delta - e}{r_m}\right)^2}\right\} \quad [12.150]$$

Finalmente:

$$\delta = \frac{J_{n_1}^{x_0}}{S_{n_1}^{x_0}} = 3\, r_e\, \frac{\left(1 - \frac{r_i^4}{r_e^4}\right)}{\left(1 - \frac{r_i^3}{r_e^3}\right)}\cdot$$

$$\frac{\arccos\left(\frac{\delta - e}{r_m}\right)\cdot\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{\delta - e}{r_m}\right)^2\right] - \frac{3}{2}\cdot\frac{\delta - e}{r_m}\sqrt{1 - \left(\frac{\delta - e}{r_m}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta - e}{r_m}\right)^2} - \frac{\delta - e}{r_m}\cdot\arccos\left(\frac{\delta - e}{r_m}\right)} \quad [12.151]$$

Un caso particular que interesa es aquel para el cual el eje neutro $n_1 - n_1$ pasa por el baricentro de la sección total.

Para este caso, de acuerdo con la notación de la figura 12.26 debemos tener:

$$\delta = e \quad [12.152]$$

de donde:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta - e}{r_m} &= 0, \\ \arccos\left(\frac{\delta - e}{r_m}\right) &= \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{1 - \left(\frac{\delta - e}{r_m}\right)^2} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad [12.153]$$

y en consecuencia, reemplazando en [12.151]:

$$\frac{\delta}{r_e} = 2{,}36\cdot\frac{\left(1 - \frac{r_i^4}{r_e^4}\right)}{\left(1 - \frac{r_i^3}{r_e^3}\right)} \quad [12.154]$$

El valor límite de la excentricidad corresponde a

$$e = k_0 \quad [12.155]$$

donde:

$$k_0 = \frac{r_e}{4}\left[1 + \left(\frac{r_i}{r_e}\right)^2\right] \quad [12.156]$$

es el valor del radio del núcleo central de la sección. En efecto, de ser:

$$e < k_0 \quad [12.157]$$

el centro de presión sería interior al núcleo central y la sección trabajaría a la compresión en todos sus puntos al no cortar el eje neutro a ella. Estaríamos así ante un caso corriente de flexión compuesta normal.

En *Hütte–Manual del ingeniero,* tomo I, pág. 700,[1] aparecen dos tablas que permiten calcular para secciones anulares la posición del eje neutro y la máxima tensión de compresión. Dichas tablas son de doble entrada, en función de e/r_e y r_i/r_e y dan, la primera los valores de x_0/r_e y en la segunda los $\sigma_{\text{máx.}}/\sigma_0$, donde $\sigma_0 = N/F$, siendo F el área total de la sección anular.

12.3.4. Flexión compuesta oblicua en secciones sin zona de tracción

El problema de la determinación de la posición del eje neutro, resulta en este caso mucho más complejo que para la flexión normal.

Sea la sección de figura 12.27, donde el centro de presión C no pertenece a un eje principal de inercia.

El planteo del problema es similar al correspondiente al caso corriente de flexión compuesta oblicua, con la única diferencia que, para el caso presente, las integrales que establecen la equivalencia entre fuerzas interiores y exteriores,

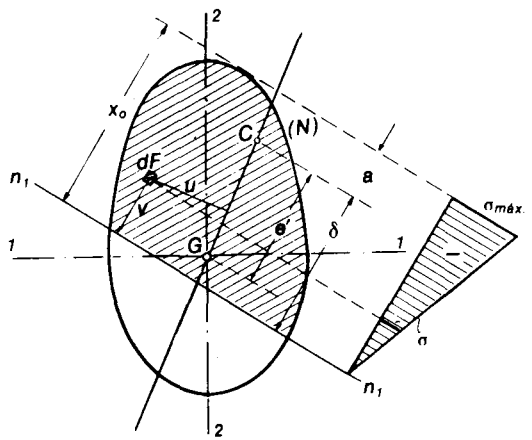


Fig. 12.27

se extienden solamente a la parte activa de la sección, es decir, a la zona comprimida de ésta.

[1] Traducción castellana de la XXIVa. edición alemana.

Tenemos, pues, con la notación de la figura:

$$\left.\begin{aligned} \int_{F_0} \sigma\, dF &= N \\ \int_{F_0} \sigma v\, dF &= N\delta \\ \int_{F_0} \sigma u\, dF &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [12.158]$$

Haciendo $\sigma = \bar{\sigma} v$, donde $\bar{\sigma}$ es la tensión a la distancia unitaria, las anteriores se transforman en:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}\int_{F_0} v\, dF &= N \\ \bar{\sigma}\int_{F_0} v^2\, dF &= N\delta \\ \bar{\sigma}\int_{F_0} u v\, dF &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [12.159]$$

La tercera de las [12.159] nos dice que el eje neutro y línea de fuerzas son direcciones conjugadas de inercia, con relación a la *superficie activa* de la sección. Como no conocemos *a priori* ni la posición ni la dirección del eje neutro, el problema sólo podrá en el caso general, resolverse por aproximaciones sucesivas.

Para ello habrá que estimar una dirección posible del eje neutro y sobre la base de ésta determinar su posición, verificando a continuación si se satisfacen las dos primeras ecuaciones [12.159] cuya interpretación conceptual es la siguiente:

a) El volumen de tensiones normales resultante debe ser igual a N, fuerza normal.

b) La recta de acción de N debe coincidir con la de la resultante del volumen de tensiones, es decir, que la proyección del baricentro de este último sobre el plano de la sección debe coincidir con el centro de presión C.

El problema conviene resolverlo gráficamente, eligiendo una dirección probable para el eje neutro, tomando como base la dirección conjugada de la línea de fuerzas que corresponde a la *sección total.* La ubicación del eje neutro se efectúa gráficamente mediante el procedimiento descripto en 12.2.2. Una vez determinada la posición de $n_1 - n_1$, se verifica si se cumple que:

$$\int_{F_0} \sigma\, dF = N, \qquad [12.160]$$

y si la resultante del volumen de tensiones pasa por el centro de presión. Si las diferencias son reducidas, puede aceptarse como eje neutro al así determinado. En caso contrario se varía la dirección del supuesto eje neutro y se repite el cálculo hasta alcanzar un resultado satisfactorio para la coincidencia de N con el volumen del diagrama de tensiones.

Una vez conocida la posición y dirección del eje neutro $n_1 - n_1$, la determinación de $\sigma_{\text{máx.}}$ es inmediata, por lo que no es necesario insistir sobre el particular.

Para la sección rectangular, que es una de las secciones de mayor interés práctico, el problema de la determinación previa de la posible dirección del eje neutro, ha sido estudiada por diversos autores, entre otros *Pohl, Engesser* y *Henkel.*

Resumiremos a continuación dichos resultados, referidos a la figura 12.28, considerando las distintas posiciones relativas que puede ocupar el centro de presión C:

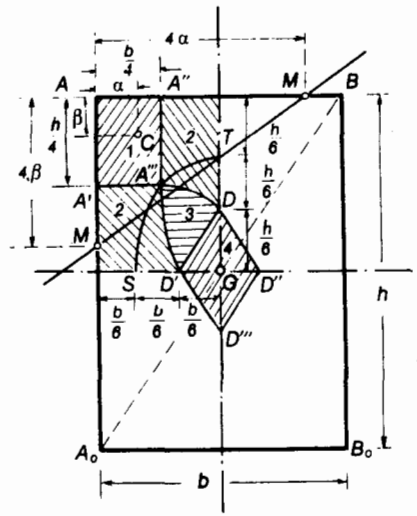


Fig. 12.28

a) Cuando el centro de presión C queda comprendido dentro del rectángulo $AA'A''A'''$ (indicado con I) y sus coordenadas respecto del vértice A son α y β, el eje neutro será una recta que corta los lados del rectángulo concurrentes a A a distancias del mismo iguales a 4α y 4β (puntos M). La máxima tensión corresponde al punto A y su valor es:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{N}{\alpha\beta}. \qquad [12.161]$$

Los casos límites son los siguientes:

α) Si el centro de presión se desplaza sobre la recta $A'A'''$, el eje neutro pasa por A_0.

β) Cuando el centro de presión coincide con A''', el eje neutro es la recta A_0B y la tensión máxima, que también corresponde al punto A, vale:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{6N}{hb} \qquad [12.162]$$

b) Si el centro de presión cae dentro de cualquiera de las dos superficies indicadas con *2* (fig. 12.28), el eje neutro corta a dos lados *opuestos* de la sección, de modo que la sección activa (comprimida) resulta ser un cuadrilátero.

c) Cuando C cae dentro del triángulo curvilíneo $A'''DD'$ marcado con *3* en la figura, el eje neutro corta los lados del rectángulo que concurren a B_0, resultando con ello una zona comprimida pentagonal.

d) Cuando C cae en la zona *4*, el eje neutro es exterior a la sección y ésta trabaja totalmente a la compresión.[1]

Tanto para el caso (b) como para el (c) resulta:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{Nk}{\alpha\beta} \qquad [12.163]$$

donde:

$$k \cong 1 - \left(\frac{4\lambda - 1}{3}\right)^2 \qquad [12.164]$$

Siendo λ el mayor de los valores:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{\alpha}{b} \\ \lambda &= \frac{\beta}{h} \end{aligned}\right\} \qquad [12.165]$$

Los límites de variación de k son los siguientes:

zona 2:

$$0{,}89 < k < 1 \qquad [12.166]$$

zona 3:

$$0{,}926 < k < 1 \qquad [12.167]$$

Las curvas que delimitan las superficies *2* y *3* son aproximadamente parábolas cúbicas, cuyas tangentes coinciden con los lados del núcleo central y del rectángulo que delimita la zona 1.

La línea $SA'''T$ y sus simétricas delimitan una superficie denominada *segundo núcleo* o *núcleo exterior* que tiene la propiedad que, cuando C coincide con el contorno del núcleo exterior, la zona comprimida tiene un área igual a la mitad de la correspondiente a la sección rectangular.

Dicha curva límite, compuesta de ocho trozos, resulta ser exterior a la elipse cuyos semiejes valen $b/3$ y $h/3$.

Cuando la fuerza normal actúa en un punto del contorno del núcleo central, la tensión máxima resulta ser, como es fácil de verificar:

[1] Ello es lógico por cuanto el rombo $DD'D''D'''$ constituye el núcleo central de la sección.

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{2N}{bh}, \qquad [12.168]$$

mientras que si lo hace en un punto del contorno del núcleo exterior, dicho valor oscila entre:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{4N}{bh}, \qquad [12.169]$$

para N aplicada en S o T y:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{6N}{bh}, \qquad [12.170]$$

cuando lo está en A'''.

12 . 4 . Flexión compuesta en régimen plástico o anelástico

12 . 4 . 1 . Consideraciones generales

Al analizar en el capítulo 11 la solicitación por flexión simple vimos que si se incrementaba el momento flexor, llegaba a un valor que conducía a que en las fibras más solicitadas la tensión normal alcanzase el límite de fluencia del material.

Si éste poseía un límite de fluencia definido, al aumentar el momento por encima de dicho valor límite, la tensión en las fibras extremas se mantenía constante e igual al límite de fluencia.

Simultáneamente comenzaba el proceso denominado de *plastificación* de la sección: aumentaba la zona de la sección donde las fibras trabajaban a una tensión igual al límite de fluencia, hasta llegar a la plastificación total, a partir de la cual la sección es incapaz de absorber un incremento de momento, formándose lo que se denomina una *articulación plástica.*

En la solicitación por flexión compuesta se plantea un problema similar, pero más complejo por cuanto son dos las causas que concurren a producir las tensiones: el par flexor M y el esfuerzo axil N, y pueden existir distintas combinaciones de valores de los mismos que conduzcan a un comienzo de la plastificación de la sección y finalmente a su plastificación total.

En lo que sigue desarrollaremos el problema de la flexión compuesta en régimen plástico para el caso de la flexión normal, comenzando por la sección rectangular, por estimar que por razones de facilidad de interpretación del problema, es preferible analizar exhaustivamente en primer término el caso más simple. Analizaremos detalladamente el planteo del problema y el trazado de los

diagramas de interacción y luego efectuaremos el planteo para el caso general de una sección cualquiera.

12 . 4 . 2 . Análisis de la sección rectangular

Sea la sección de figura 12.29 y supongamos que esté solicitada por un par flexor de momento M y un esfuerzo axil N de tracción. Cada una de estas

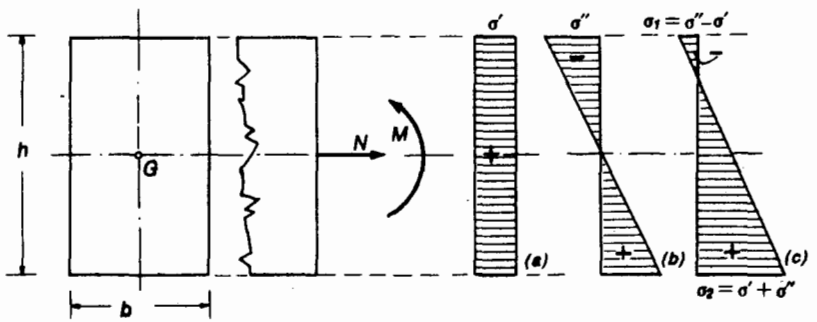


Fig. 12.29

solicitaciones origina tensiones normales, cuyos valores máximos son:

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= \frac{N}{F} \\ \sigma'' &= \pm \frac{M}{J_g} \cdot \frac{h}{2} \end{aligned}\right\} \qquad [12.171]$$

donde F e J_g son respectivamente el área y el momento de inercia de la sección.

La tensión máxima, por superposición de ambos estados, se produce en este caso en las fibras del borde inferior y vale:

$$\sigma_2 = \sigma' + \sigma'' = \frac{N}{F} + \frac{M}{J_g} \cdot \frac{h}{2}. \qquad [12.172]$$

Para una determinada combinación de valores de N y M, la tensión σ_2 alcanza el valor de la tensión de fluencia y estamos ante el comienzo de la plastificación de la sección, teniéndose:

$$\frac{N}{F} + \frac{M}{J_g} \cdot \frac{h}{2} = \sigma_{fl.} \qquad [12.173]$$

Dividiendo miembro a miembro por $\sigma_{fl.}$:

$$\frac{N}{F\sigma_{fl.}} + \frac{M}{J_g\,\sigma_{fl.}} \cdot \frac{h}{2} = 1 \qquad [12.174]$$

Pero en la solicitación axil es:

$$F\,\sigma_{fl.} = N_{fl.} \qquad [12.175]$$

y en la flexión simple normal:

$$\frac{2\,\sigma_{fl.}\,J_g}{h} = M_{fl.}\,, \qquad [12.176]$$

o sea, los valores del esfuerzo axil y del momento del par flexor que originan el comienzo de la plastificación.

En el caso de la solicitación axil, la plastificación de la sección es total ya que todas las fibras entran simultáneamente en fluencia. En consecuencia, reemplazando dichas expresiones en [12.174] tenemos:

$$\frac{N}{N_{fl.}} + \frac{M}{M_{fl.}} = 1\,. \qquad [12.177]$$

La ecuación anterior representa la totalidad de las posibles combinaciones de N con M que conducen al comienzo de la plastificación de la sección.

En este caso, como solamente han alcanzado el límite de fluencia las fibras más alejadas del eje neutro, la penetración plástica es;

$$c = 0\,. \qquad [12.178]$$

Pero, como veremos en el parágrafo siguiente, es posible establecer expresiones similares a la [12.177] para distintas penetraciones plásticas c, incluso el caso de penetración total que corresponde a la plastificación total de la sección.

Dichas expresiones representan curvas (que en el caso de la dada por la [12.177] degeneran en una recta) denominadas curvas de interacción entre N y M, y que definen todas las combinaciones posibles entre dichos parámetros que conducen a una dada penetración plástica. La representación gráfica del conjunto de dichas curvas se designa con el nombre de diagramas de interacción.

12 . 4 . 3 . Curva de interacción para plastificación total de la sección rectangular

Cuando N y M alcanzan simultáneamente valores tales que, para los mismos, la tensión en la totalidad de las fibras de la sección sea igual al límite de fluencia

del material, es decir, que la sección está totalmente plastificada, el diagrama de tensiones es el que muestra la figura 12.30.

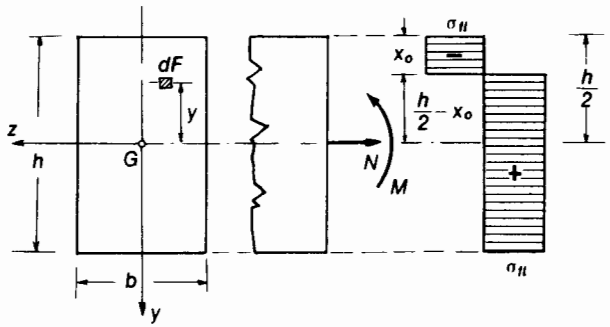


Fig. 12.30

Cuando $N = 0$, o sea, si tenemos flexión pura, resulta $x_0 = h/2$ y el valor del momento M será el de plastificación total para esta forma de solicitación:

$$M_R = \sigma_{fl.} \frac{b h^2}{4} . \qquad [12.179]$$

Si, en cambio, $M = 0$, es decir, para solicitación axil, resulta:

$$N_{fl} = \sigma_{fl.} b h , \qquad [12.180]$$

que constituyen los valores límites del problema. Para valores intermedios de M y N, obtendremos la expresión de una curva que deduciremos planteando para el caso en estudio las condiciones de equivalencia siguientes:

a) Proyección sobre el eje x:

$$-\int_{-h/2}^{-(h/2 - x_0)} \sigma_{fl.}\, dF + \int_{-(h/2 - x_0)}^{h/2} \sigma_{fl.}\, dF = N \qquad [12.181]$$

b) Momentos respecto de z:

$$\int_{-h/2}^{-(h/2 - x_0)} \sigma_{fl.}\, y\, dF + \int_{-(h/2 - x_0)}^{h/2} \sigma_{fl.}\, y\, dF = M \qquad [12.182]$$

Evaluadas las integrales, teniendo en cuenta la constancia de $\sigma_{fl.}$ y que $dF = b \cdot dy$, obtenemos:

$$N = \sigma_{fl.} b (h - 2x_0) , \qquad [12.183]$$

y

$$M = \sigma_{fl.} b (h x_0 - x_0^2) . \qquad [12.184]$$

De la primera:

$$x_0 = \frac{h}{2} - \frac{N}{2 b \sigma_{fl.}} , \qquad [12.185]$$

que reemplazado en [12.184] nos da finalmente:

$$M = \sigma_{fl.} \frac{b h^2}{4} - \frac{N^2}{4 b \sigma_{fl.}} \qquad [12.186]$$

Dividiendo ambos miembros por $\sigma_{fl.}\, bh^2/4$ resulta:

$$\frac{M}{\sigma_{fl.} \frac{b h^2}{4}} + \frac{N^2}{b^2 h^2 \sigma_{fl.}^2} = 1 . \qquad [12.187]$$

Pero, para la sección rectangular se tiene:

$$\sigma_{fl.} \frac{b h^2}{4} = M_R = \frac{3}{2} M_{fl.} \qquad [12.188]$$

y

$$b^2 h^2 \sigma_{fl.}^2 = N_{fl.}^2 , \qquad [12.189]$$

en consecuencia, reemplazando dichos valores en la [12.187], llegamos finalmente a:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{M}{M_{fl.}} + \left(\frac{N}{N_{fl.}}\right)^2 = 1 , \qquad [12.190]$$

como expresión de la curva de interacción para plastificación total de la sección rectangular.

12.4.4. Curvas de interacción para plastificación parcial de la sección rectangular

Cuando la combinación del par flexor con el esfuerzo axil que solicitan la seccion es tal que no sólo la tensión en la fibra mas solicitada ha alcanzado el límite de fluencia del material, sino que ello también ocurre en fibras interiores, estamos ante plastificación parcial en flexión compuesta.

En tal caso, fig. 12.31, existe en la sección un núcleo elástico αh, que corresponde a las fibras donde existe proporcionalidad entre tensiones y deformaciones, o sea que para las mismas se cumple:

$$\sigma_{máx.} < \sigma_{fl.} \qquad [12.191]$$

y una cierta penetración plástica.

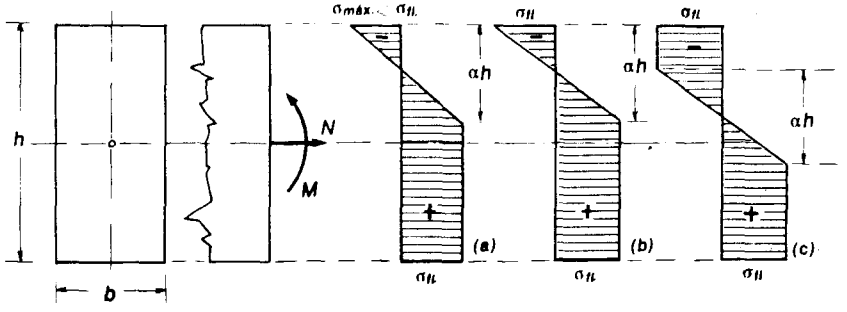


Fig. 12.31

En la plastificación parcial en flexión compuesta podemos distinguir tres casos (fig. 12.31):

Caso a) La plastificación se produce a partir de uno de los bordes de la sección y la tensión en el borde opuesto es inferior al límite de fluencia.

Caso b) Igual situación que para el caso *a*, pero con la diferencia que la tensión en el borde opuesto al plastificado alcanza el valor del límite de fluencia.

Caso c) La plastificación se produce a partir de ambos bordes, existiendo en el interior de la sección un núcleo elástico.

El caso *b* constituye en realidad el caso límite entre los casos *a* y *c*.

Desarrollaremos a continuación las expresiones analíticas de las curvas de interacción correspondientes a cada uno de los casos mencionados.

12.4.4.1. *Curvas de interacción para el caso a).*

Con la notación de la figura 12.32 las ecuaciones de equivalencia resultan ser:

a) *Proyección sobre el eje x (normal a la sección)*

$$\int_F \sigma\, dF = N = b\,h\,\sigma_{fl.} - \frac{b\,h}{2}\alpha\,(\sigma_{máx.} + \sigma_{fl.}) = b\,h\,\sigma_{fl.}\left[1 - \frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{\sigma_{máx.}}{\sigma_{fl.}}\right)\right] \qquad [12.192]$$

b) *Momentos respecto de g–g*

$$\int_F \sigma\, y\, dF = M = \frac{1}{2}\,b\,h\,\alpha\left(\sigma_{máx.} + \sigma_{fl.}\right)\left(\frac{h}{2} - \frac{\alpha}{3}h\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,b\,h^2\,\sigma_{fl.}\cdot\alpha\left(1 + \frac{\sigma_{máx.}}{\sigma_{fl.}}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3}\right) \qquad [12.193]$$

Ahora bien, para la sección rectangular, como sabemos, el esfuerzo axil que origina la fluencia, vale $N_{fl.} = b\,h\,\sigma_{fl.}$ y el par flexor que, en flexión simple

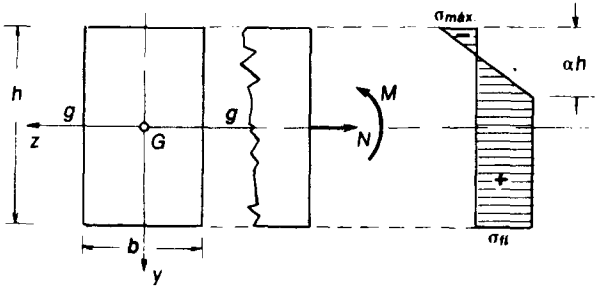


Fig. 12.32

conduce al comienzo de la plastificación, tiene por expresión:

$$M_{fl.} = \frac{b\,h^2}{6}\,\sigma_{fl.} \qquad [12.194]$$

Dividiendo miembro a miembro las [12.192] y [12.193] por $N_{fl.}$ y $M_{fl.}$ respectivamente resulta:

$$\frac{N}{N_{fl.}} = 1 - \frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{\sigma_{máx.}}{\sigma_{fl.}}\right) \qquad [12.195]$$

$$\frac{M}{M_{fl.}} = \frac{3}{2}\alpha\left(1 - \frac{2}{3}\alpha\right)\left(1 + \frac{\sigma_{máx.}}{\sigma_{fl.}}\right) \qquad [12.196]$$

De la primera tenemos:

$$\frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{\sigma_{máx.}}{\sigma_{fl.}}\right) = 1 - \frac{N}{N_{fl.}} \qquad [12.197]$$

valor que reemplazado en la segunda nos da:

$$\frac{M}{M_{fl.}} = \left(3 - 2\alpha\right)\left(1 - \frac{N}{N_{fl.}}\right) \qquad [12.198]$$

es decir, una familia de rectas definidas por el parámetro α.

12.4.4.2. Curvas de interacción para el caso c).

Con la notación de figura 12.33, donde hemos designado con v la penetración plástica que corresponde al borde superior, las condiciones de equivalencia (proyección sobre un eje normal a la sección y momentos respecto de g–g) toman la forma siguiente:

a) *Proyección sobre el eje x (normal a la sección):*

$$\int_F \sigma\, dF = N = b\,h\,\sigma_{fl.} - b\,\sigma_{fl.}\,(2v + \alpha h) \qquad [12.199]$$

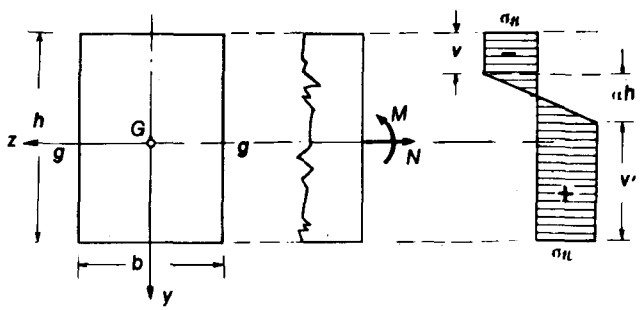


Fig. 12.33

b) *Momentos respecto del eje g–g:*

$$\int_F \sigma\, y\, dF = M = 2\,b\,v\,\sigma_{fl.}\left(\frac{h}{2} - \frac{v}{2}\right) + b\,h\,\alpha\,\sigma_{fl.}\left(\frac{h}{2} - v - \frac{\alpha h}{3}\right) \qquad [12.200]$$

o también:

$$M = b\,h^2\,\sigma_{fl.}\left[(1-\alpha)\frac{v}{h} + \frac{\alpha}{6}\,(3 - 2\alpha) - \frac{v^2}{h^2}\right] \qquad [12.201]$$

Dividiendo miembro a miembro las dos expresiones anteriores por las correspondientes a $N_{fl.}$ y $M_{fl.}$ respectivamente, llegamos a:

$$\frac{N}{N_{fl.}} = 1 - \frac{2v}{h} - \alpha \qquad [12.202]$$

y

$$\frac{M}{M_{fl.}} = 6\,(1-\alpha)\,\frac{v}{h} + \alpha\,(3 - 2\alpha) - 6\,\frac{v^2}{h^2}\,. \qquad [12.203]$$

De la [12.202]:

$$\frac{v}{h} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{N}{N_{fl.}} - \alpha\right). \qquad [12.204]$$

Valor que reemplazado en la [12.203] conduce, luego de algunas transformaciones a:

$$\frac{M}{M_{fl.}} = 3\,(1-\alpha)\left(1 - \frac{N}{N_{fl.}} - \alpha\right) - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{N}{N_{fl.}} - \alpha\right)^2 + \alpha\,(3 - 2\alpha) \qquad [12.205]$$

expresión de las curvas de interacción buscadas en función del parámetro α.

12.4.4.3. Curva interpretativa del caso b):

En las expresiones [12.198] y [12.205] aparece el parámetro α y para cada valor del mismo existe una correlación entre las curvas correspondientes a ambas ecuaciones.

Dicha correlación responde a la representación funcional de un mismo fenómeno: las combinaciones de N y M, que conducen a una plastificación parcial, de núcleo elástico αh y penetración plástica $(1-\alpha)h$. Dichas correlaciones representan una parte que responde a una función lineal (ecuación [12.198]) y una parte curva (ecuación [12.205]). El punto común a ambas funciones es el que corresponde al caso (b) que participa de las condiciones que caracterizan a los casos (a) y (c).

Estas condiciones son, como sabemos para el (a), plastificación de un lado de la sección, y para el (c), de ambos lados. Para cada valor del parámetro α corresponde un punto, y el lugar geométrico de éstos constituye la curva representativa del caso (b) que determinaremos a continuación.

De acuerdo con la figura 12.34, y partiendo de las condiciones de equivalencia, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} N &= \sigma_{fl.}\,b\,h\,(1-\alpha) \\ M &= \sigma_{fl.}\,b\,h^2\,\alpha\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3}\right) \end{aligned}\right\} \qquad [12.206]$$

Dividiendo miembro a miembro por las correspondientes expresiones de $N_{fl.}$ y $M_{fl.}$ resulta:

$$\left.\begin{aligned} \frac{N}{N_{fl.}} &= (1-\alpha) \\ \frac{M}{M_{fl.}} &= 3\,\alpha\,(1 - \frac{2}{3}\alpha) \end{aligned}\right\} \qquad [12.207]$$

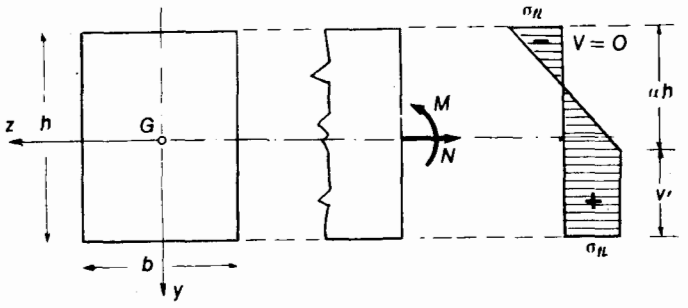


Fig. 12.34

Despejando α de la primera de las [12.207]:

$$\alpha = 1 - \frac{N}{N_{fl.}} \qquad [12.208]$$

y reemplazando en la segunda obtenemos finalmente:

$$\frac{M}{M_{fl.}} = \left(1 - \frac{N}{N_{fl.}}\right)\left(1 + 2\,\frac{N}{N_{fl.}}\right) \qquad [12.209]$$

parábola de 2o. grado en $(N/N_{fl.})$.

12.4.5. Diagramas de interacción

La interpretación gráfica de las curvas de interacción para una determinada sección, recibe el nombre de *diagrama de interacción.* Cada forma de sección tiene su propio diagrama. En lo que sigue, desarrollaremos el correspondiente a la sección rectangular, remitiendo al lector interesado en conocer o utilizar los diagramas para otras formas de sección al capítulo correspondiente de *F. B. Seely–J. O. Smith, Advanced Mechanics of Materials.*

Para el trazado del diagrama de interacción utilizaremos además de las expresiones [12.177] y [12.190] las [12.198], [12.205] y [12.209]. Ahora bien, en las [12.198] y [12.205] aparece el parámetro que define el núcleo elástico de la sección, pero por razones prácticas es preferible trasformarlas de modo que en ellas aparezca la penetración plástica total c, que según el caso considerado, tiene las siguientes expresiones.

Casos a) y b)

$$c = v' = (1 - \alpha)\,h. \qquad [12.210]$$

Caso c)

$$c = v + v' = (1 - \alpha)\,h. \qquad [12.211]$$

de donde, para los tres casos:

$$\alpha = 1 - \frac{c}{h} \qquad [12.212]$$

Las expresiones [12.198] y [12.205] se trasforman respectivamente en:

$$\frac{M}{M_{fl.}} = \left(1 + 2\frac{c}{h}\right)\left(1 - \frac{N}{N_{fl.}}\right) \qquad [12.213]$$

y

$$\frac{M}{M_{fl.}} = 1 + \frac{c}{h}\left(1 - \frac{c}{2h}\right) - \frac{3}{2}\,\frac{N^2}{N_{fl.}^2} \qquad [12.214]$$

mientras que la [12.209] mantiene su expresión, por cuanto es independiente de α.

El diagrama de interacción, lo referiremos a un par de ejes coordenados ortogonales, fig. 12.35, llevando como abscisas los valores N/N_{fl} y como ordenadas los correspondientes a $M/M_{fl.}$.

La recta:

$$\frac{M}{M_{fl.}} + \frac{N}{N_{fl.}} = 1 \qquad [12.215]$$

que correlaciona los pares de valores de N y M que corresponden al comienzo de la plastificación, pasa por los puntos A, de coordenadas:

$$\left.\begin{aligned} \frac{N}{N_{fl.}} &= 0 \\ \frac{M}{M_{fl.}} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad [12.216]$$

y B, definido por:

$$\left.\begin{aligned} \frac{M}{M_{fl.}} &= 0 \\ \frac{N}{N_{fl.}} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad [12.217]$$

La parábola:

$$\frac{2}{3}\,\frac{M}{M_{fl.}} + \left(\frac{N}{N_{fl.}}\right)^2 = 1 \qquad [12.218]$$

define otro estado límite: el de la plastificación total. Como puede observarse,

para $M/M_{fl.} = 0$, resulta según la misma $N/N_{fl.} = 1$, es decir, que la parábola pasa por B.

Para $N/N_{fl.} = 0$ se tiene:

$$\frac{M}{M_{fl.}} = 1{,}5 \qquad [12.219]$$

valor que concuerda con el establecido al estudiar en flexión simple la plastificación total de la sección rectangular. En consecuencia, pasa por el punto C.

Derivando la [12.218] respecto de $\dfrac{N}{N_{fl.}}$ tenemos:

$$\frac{2}{3}\,\frac{d\left(\dfrac{M}{M_{fl.}}\right)}{d\left(\dfrac{N}{N_{fl.}}\right)} + 2\,\frac{N}{N_{fl.}} = 0 \qquad [12.220]$$

$$\frac{d\left(\dfrac{M}{M_{fl.}}\right)}{d\left(\dfrac{N}{N_{fl.}}\right)} = -\,3\,\frac{N}{N_{fl.}} \qquad [12.221]$$

de acuerdo con lo cual, $M_{fl.}$ pasará por un máximo para $N_{fl.} = 0$, es decir, que en correspondencia con el punto C la tangente a la parábola será horizontal.

Consideremos ahora las ecuaciones [12.213] y [12.214]. Estas, para cada valor de c, es decir para penetraciones plásticas preestablecidas, representan una recta la primera y una parábola la segunda, con un punto común, y en dicho punto la recta es tangente a la parábola. El lugar geométrico de los puntos comunes de la familia de parábolas con sus rectas correpondientes, es precisamente, la parábola definida por la ecuación [12.209] que reproducimos a continuación y que hemos representado en línea de puntos en la figura 12.35.

$$\frac{M}{M_{fl.}} = \left(1 - \frac{N}{N_{fl.}}\right)\left(1 + 2\,\frac{N}{N_{fl.}}\right) \qquad [12.222]$$

Como es fácil de observar, la función se anula para $N/N_{fl.} = 1$, y adquiere un valor unitario para $N/N_{fl.} = 0$, es decir, pasa por A y B, y su valor máximo responde a $N/N_{fl.} = 0{,}25$, donde $M/M_{fl.} = 1{,}125$.

En el gráfico de figura 12.35 hemos representado las curvas de interacción correspondientes a penetraciones plásticas iguales a:

$$\frac{c}{h} = 0{,}1;\ \ 0{,}2;\ \ 0{,}3;\ \ 0{,}4\ \ \text{y}\ \ 0{,}5.$$

Los puntos de intersección de la familia de curvas de interacción con la parábola [12.209] aparecen indicados en la figura con A_1, A_2 . . ., A_5, y los valores que alcanzan las parábolas para $N/N_{fl.} = 0$ son los siguientes:

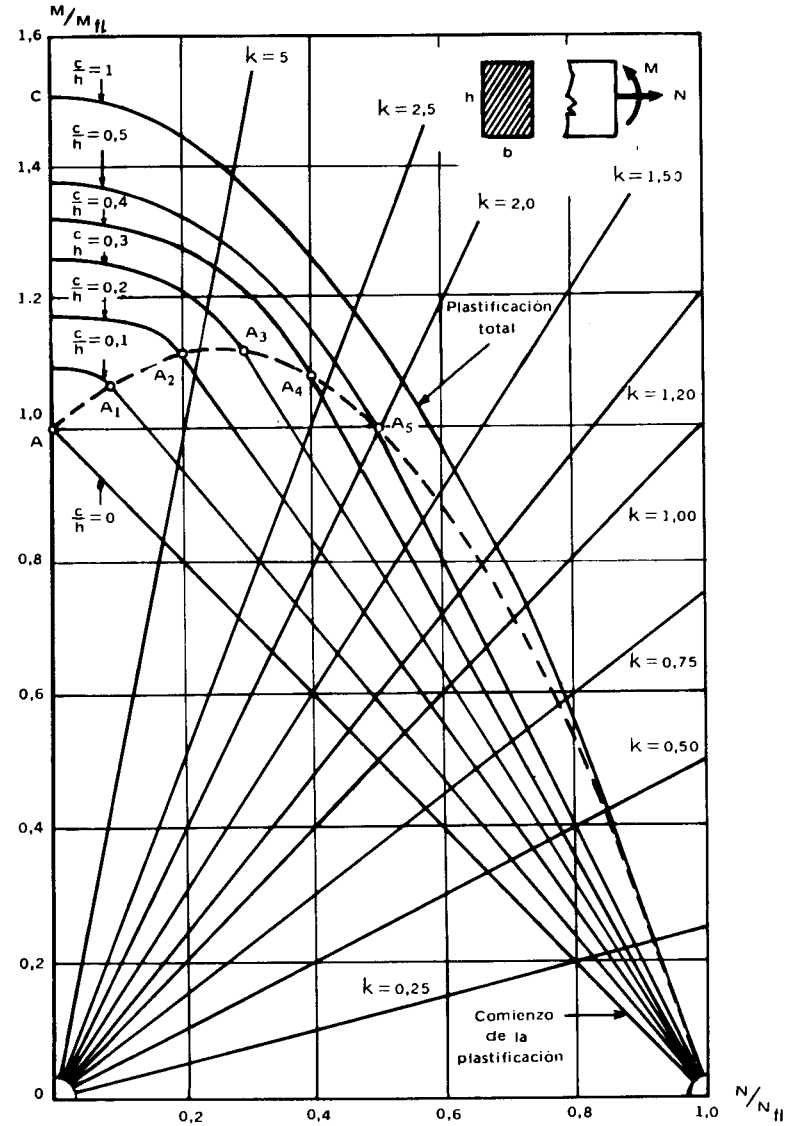


Fig. 12.35

$$\frac{c}{h} = 0{,}5;\ \ 0{,}4;\ \ 0{,}3;\ \ 0{,}2;\ \ 0{,}1$$

$$\frac{M}{M_{\text{fl.}}} = 1{,}375;\ \ 1{,}32;\ \ 1{,}255;\ \ 1{,}18;\ \ 1{,}095$$

En general, en las secciones solicitadas por flexión compuesta, la excentricidad de la fuerza normal N se mantiene constante:

$$\frac{M}{N} = e = \text{cte.} \qquad [12.223]$$

Por otra parte, para una determinada sección rectangular, también resulta constante el cociente:

$$\frac{M_{\text{fl.}}}{N_{\text{fl.}}} = \frac{\sigma_{\text{fl.}}\, b h^2}{6\,\sigma_{\text{fl.}}\, b h} = \frac{h}{6} \qquad [12.224]$$

En consecuencia, dividiendo miembro a miembro la [12.223] por la [12.224]:

$$\frac{M/N}{M_{\text{fl.}}/N_{\text{fl.}}} = \frac{M}{N} \cdot \frac{N_{\text{fl.}}}{M_{\text{fl.}}} = \frac{6e}{h} = \text{cte.} \qquad [12.225]$$

o también:

$$\frac{M}{M_{\text{fl.}}} : \frac{N}{N_{\text{fl.}}} = k \qquad [12.226]$$

que representa una familia de rectas, que pasa por el origen de coordenadas en función del parámetro k, que a la vez lo es de la excentricidad e.

Los diagramas de interacción facilitan considerablemente el proyecto y verificación de sección en flexión compuesta, como veremos a continuación.

Dos son los problemas fundamentales que pueden presentarse:

a) Dada una determinada sección rectangular de un material con límite de fluencia definido, determinar cuál es el valor del esfuerzo axil, que para una excentricidad dada, conduce a una determinada penetración plástica c.

b) Si una sección rectangular está solicitada por un par flexor M y un esfuerzo axil N, determinar cuál es el grado de plastificación de dicha sección.

En el primer caso, como conocemos e, excentricidad, calculamos:

$$k = \frac{6e}{h} \qquad [12.227]$$

Por el punto de intersección de la recta que corresponde al k dado por la [12.227] con la curva de interacción definida por el valor de c, dato del problema,

trazamos una vertical que nos da sobre el eje de abscisas un valor $\frac{N}{N_{\text{fl.}}}$. Como $N_{\text{fl.}}$ es conocido, el valor de N es inmediato.

En el segundo problema, calculamos los valores $\frac{M}{M_{\text{fl.}}}$ y $\frac{N}{N_{\text{fl.}}}$. Por el punto definido por ambos valores pasa una curva de interacción (determinada en general por interpolación) cuyo parámetro c nos da el valor de la penetración plástica buscada.

Finalmente, el diagrama de interacción nos permite establecer en forma inmediata el régimen de trabajo de una sección solicitada por flexión compuesta.

Dados M y N, como conocemos $M_{\text{fl.}}$ y $N_{\text{fl.}}$, ubicamos en el diagrama el punto cuyas coordenadas sean $\frac{M}{M_{\text{fl.}}}$ y $\frac{N}{N_{\text{fl.}}}$.

Si el punto cae por debajo de la recta AB, las tensiones en la totalidad de las fibras de la sección son inferiores al límite de fluencia y cuando queda ubicado sobre dicha recta, en las fibras más solicitadas se ha alcanzado dicho límite. En cambio, si el punto resulta ubicado entre la recta AB y la curva límite de plastificación total, la sección soporta una penetración plástica cuya magnitud depende del parámetro c que corresponda, y finalmente si se encuentra sobre la curva límite, la plastificación es total.

12 . 4 . 6 . Caso general de una sección cualquiera

Consideramos en primer término una sección de forma arbitraria con un solo eje de simetría coincidente con la línea de fuerza (fig. 12.36) solicitada por un par flexor M y un esfuerzo axil N.

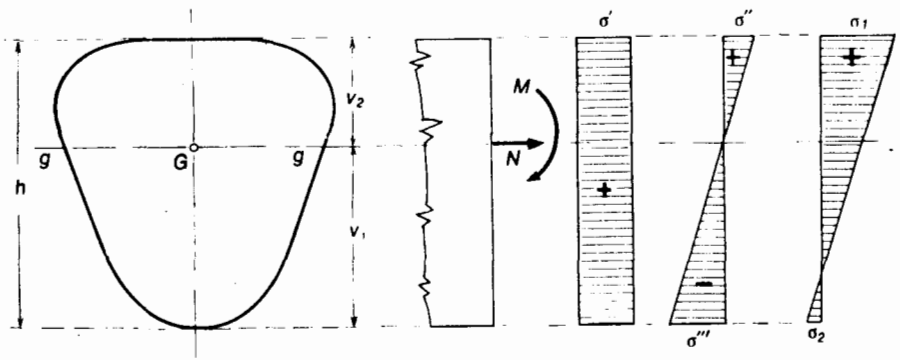


Fig. 12.36

Con la notación de la figura tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= \frac{N}{F} \\ \sigma'' &= +\frac{M}{J_g}\,\nu_2 \\ \sigma''' &= -\frac{M}{J_g}\,\nu_1 \end{aligned}\right\} \qquad [12.228]$$

admitiendo que σ', σ'', σ''' son menores que $\sigma_{fl.}$.

Supongamos por un momento que los valores relativos de M y N sean tales que al superponer los diagramas de tensiones resulte:

$$\sigma' + \sigma''' = \sigma_{fl.}. \qquad [12.229]$$

es decir:

$$-\frac{M}{J_g}\,\nu_1 + \frac{N}{F} = -\,\sigma_{fl.} \qquad [12.230]$$

Por otra parte sabemos que:

$$\left.\begin{aligned} M_{fl.} &= \frac{\sigma_{fl.}\,J_g}{\nu_1} \\ N_{fl.} &= \sigma_{fl.}\;F \end{aligned}\right\} \qquad [12.231]$$

Luego, si dividimos la [12.230] por $\sigma_{fl.}$ resulta:

$$-\frac{M}{J_g\,\sigma_{fl.}}\,\nu_1 + \frac{N}{F\,\sigma_{fl.}} = -\,1 \qquad [12.232]$$

y teniendo en cuenta las [12.231]:

$$-\frac{M}{M_{fl.}} + \frac{N}{N_{fl.}} = -\,1 \qquad [12.233]$$

o también

$$\frac{M}{M_{fl.}} - \frac{N}{N_{fl.}} = 1 \qquad [12.234]$$

Ahora bien, pueden existir valores de N tales que conduzcan al comienzo de plastificación de las fibras del borde de la sección más cercano al eje baricéntrico, es decir que se verifique:

$$\sigma' + \sigma'' = \sigma_{fl.} \qquad [12.235]$$

En tal caso, de acuerdo con las [12.228] resulta:

$$\frac{N}{F} + \frac{M}{J_g}\,\nu_2 = +\,\sigma_{fl.} \qquad [12.236]$$

Si dividimos ambos miembros por $\sigma_{fl.}$:

$$\frac{N}{F\,\sigma_{fl.}} + \frac{M}{J_g\,\sigma_{fl.}}\,\nu_2 = +\,1 \qquad [12.237]$$

Pero:

$$J_g\,\sigma_{fl.} = M_{fl.}\,\nu_1 \qquad [12.238]$$

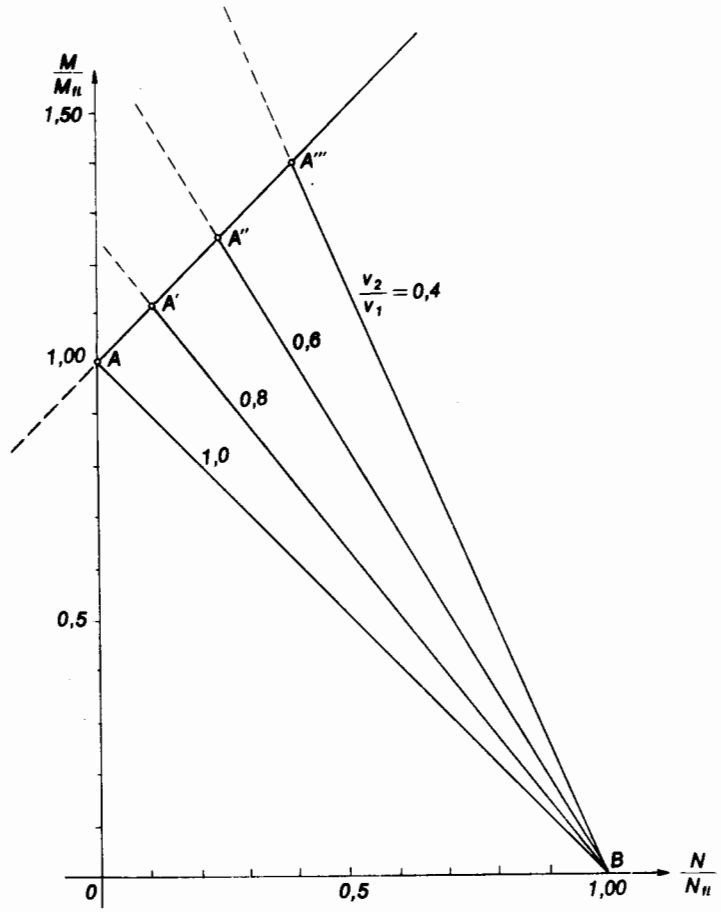


Fig. 12.37

de donde:

$$\frac{M}{M_{fl.}}\,\frac{\nu_2}{\nu_1}+\frac{N}{N_{fl.}}=1 \qquad [12.239]$$

Las ecuaciones [12.234] y [12.239] definen: la primera una recta AA'', que pasa por A y por $N/N_{fl.}=-1$ para $M/M_{fl.}=0$, y la segunda una familia de rectas que pasa por B, (fig. 12.37) y de inclinaciones variables con la relación ν_2/ν_1, y que para $\nu_2/\nu_1 = 1$, caso de la sección con dos ejes de simetría, conduce a la recta límite AB, que determinamos al analizar la sección rectangular. En la figura 12.37 hemos representado las rectas correspondientes a las relaciones:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1}=0{,}4;\ \ 0{,}6;\ \ 0{,}8;\ \ \text{y}\ \ 1{,}00$$

De lo visto deducimos que para las secciones con un sólo eje de simetría, el comienzo de la plastificación resulta definido por dos tramos de recta, es decir las quebradas $AA'B$, $AA''B$, $AA'''B$, etc., según sea la relación ν_2/ν_1.

12.4.7. Curva de interacción para plastificación total de una sección cualquiera

Analizaremos a continuación el caso correspondiente a plastificación total de una sección con un sólo eje de simetría (fig. 12.38).

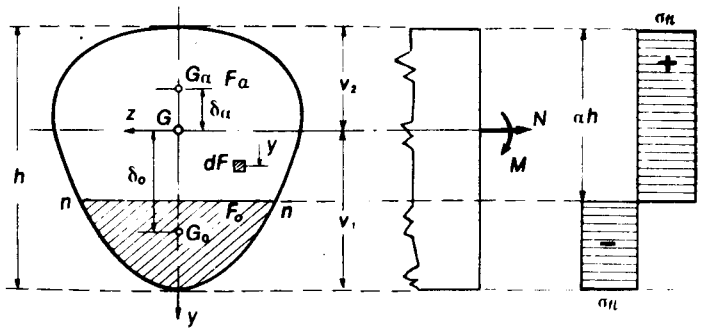


Fig. 12.38

Llamando αh la distancia que define la posición del eje neutro con respecto a uno de los bordes de la sección, las expresiones de las condiciones de equivalencia que interesan resultan ser las siguientes:

a) proyección sobre el eje x:

$$\int_{-\nu_2}^{\alpha h-\nu_2}\sigma_{fl.}\,dF-\int_{(\alpha h-\nu_2)}^{\nu_1}\sigma_{fl.}\,dF=N \qquad [12.240]$$

b) momentos respecto del eje z:

$$\int_{-\nu_2}^{0}\sigma_{fl.}\,y\,dF-\int_{0}^{(\alpha h-\nu_2)}\sigma_{fl.}\,y\,dF+\int_{(\alpha h-\nu_2)}^{\nu_1}\sigma_{fl.}\,y\,dF=M \qquad [12.241]$$

Teniendo en cuenta la constancia de $\sigma_{fl.}$, si llamamos F al área total de la sección y F_α al área delimitada por αh y cuyo diagrama de tensiones es positivo, la [12.240] puede escribirse como sigue:

$$F\sigma_{fl.}-2\,\sigma_{fl.}\,(F-F_\alpha)=N. \qquad [12.242]$$

o también:

$$2\,\sigma_{fl.}\,F_\alpha-F\,\sigma_{fl.}=N \qquad [12.243]$$

Dividiendo miembro a miembro por $F\sigma_{fl.}$, y recordando que $F\sigma_{fl.}=N_{fl.}$ resulta:

$$2\,\frac{F_\alpha}{F}-1=\frac{N}{N_{fl.}} \qquad [12.244]$$

o también:

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{N}{N_{fl.}}\right)=\frac{F_\alpha}{F}=f(\alpha). \qquad [12.245]$$

Análogas consideraciones conducen a que, en última instancia, la [12.241] se trasforme en:

$$-2\,\sigma_{fl.}\int_{F_0}y\,dF=M \qquad [12.246]$$

La integral que aparece en la [12.246] corresponde al momento estático del área F_0 rayada de la sección (delimitada por αh) con respecto al eje baricéntrico paralelo al eje neutro:

$$\int_{F_0}y\,dF=S_g^{F_0} \qquad [12.247]$$

Pero:

$$S_g^{F_0}=F_0\,\delta_0 \qquad [12.248]$$

llamando δ_0 la distancia entre el baricentro G de la sección total y el correspondiente al área rayada delimitada por αh.

En consecuencia, de [12.248] y [12.246] resulta:

$$-2\,\sigma_{fl.}\,F_0\,\delta_0=M \qquad [12.249]$$

o también, por ser $F_0\,\delta_0=-F_\alpha\delta_\alpha$:

$$M=2\,\sigma_{fl.}\,F_\alpha\delta_\alpha. \qquad [12.250]$$

Dividiendo miembro a miembro esta última expresión por la primera de las [12.231] obtenemos:

$$\frac{M}{M_{\text{fl.}}} = \frac{2F_\alpha\,\delta_\alpha v_1}{J_g} = \left(1 + \frac{N}{N_{\text{fl.}}}\right)\frac{\delta_\alpha v_1}{i_g^2} = \varphi(\alpha) \qquad [12.251]$$

por cuanto δ_α también es función de α. Eliminando para cada tipo de sección el parámetro α entre la [12.245] y la [12.251] obtenemos, en cada caso, una expresión de $M/M_{\text{fl.}}$ en función de $N/N_{\text{fl.}}$, que es la ecuación de la correspondiente curva de interacción para plastificación total.

12.4.8. Curvas de interacción para plastificación parcial de una sección cualquiera

Como viéramos en el parágrafo 12.4.4 cuando los valores de M y N son tales que en la sección existe un núcleo elástico αh y una cierta penetración plástica $(1 - \alpha)h$, existen las posibilidades que muestra la figura 12.39, derivadas de la asimetría de la sección. Las mismas se reducen a tres, cuando la sección posee dos ejes de simetría.

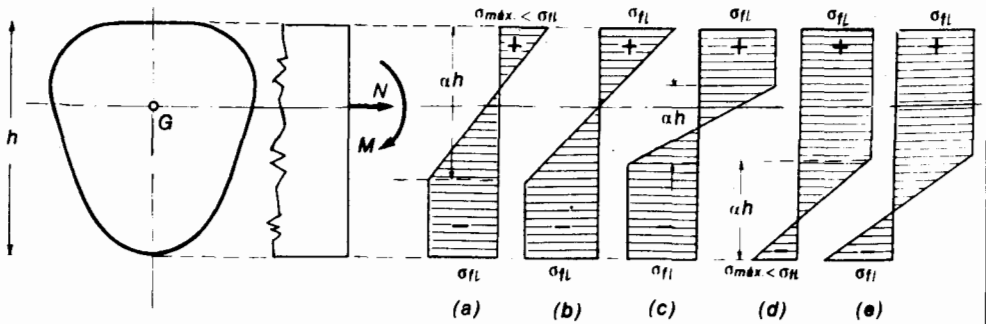


Fig. 12.39

Para cada uno de los cinco casos el problema de la determinación de la curva de interacción se resuelve planteando las ecuaciones de equivalencia:

$$\left.\begin{aligned} N &= \int_F \sigma\, dF \\ M &= \int_F \sigma \cdot y\, dF \end{aligned}\right\} \qquad [12.252]$$

que divididas miembro a miembro por las expresiones de $N_{\text{fl.}}$ y $M_{\text{fl.}}$ nos conducen a dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{N}{N_{\text{fl.}}} &= f(\alpha h) \\ \frac{M}{M_{\text{fl.}}} &= \varphi(\alpha h) \end{aligned}\right\} \qquad [12.253]$$

que nos permiten llegar en ciertos casos a fórmulas explícitas:

$$\frac{M}{M_{\text{fl.}}} = \phi\left(\frac{N}{N_{\text{fl.}}}\right) \qquad [12.254]$$

para cada valor del parámetro αh.

En otros casos, por la complejidad de las expresiones a que se llega, es preferible determinar la curva por puntos.

A título de ejemplo, aplicaremos los conceptos anteriores, a una sección trapecial, solicitada a flexión compuesta en régimen anelástico.

12.4.9. Curvas de interacción para una sección trapecial

Sea la sección trapecial de la figura 12.40 y admitamos para la misma $b = 2b_0$ y $h = 3b$ es decir, las mismas relaciones de bases y altura que corresponden

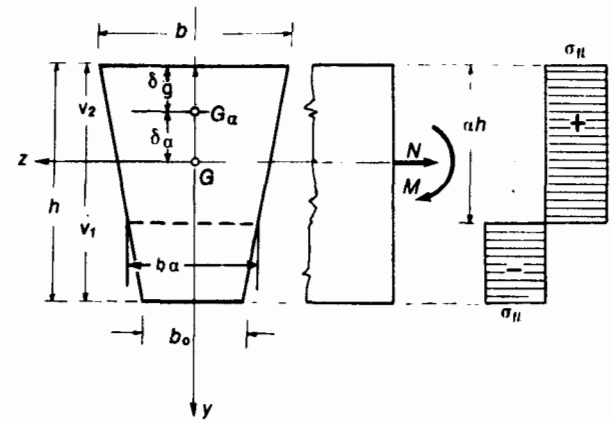


Fig. 12.40

a la sección cuyos diagramas de interacción aparecen en *Advanced Mechanics of Materials* de *Seely–Smith*. Analizaremos a continuación los casos que corresponden a comienzo de plastificación, y plastificación total de la sección. Prescindiremos del análisis detallado de los casos correspondientes a plastificación parcial de la sección por cuanto conducen a un formuleo muy amplio y ajeno a los objetos de nuestro trabajo.

Para la relación de dimensiones supuesta resulta:

$$v_1 = \frac{5}{3}\,b; \quad v_2 = \frac{4}{3}\,b \qquad [12.255]$$

y en consecuencia para el comienzo de la plastificación, las expresiones de las rectas que la definen serán en este caso:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{M}{M_{fl.}} - \frac{N}{N_{fl.}} = 1 \\ &\frac{4}{5}\,\frac{M}{M_{fl.}} + \frac{N}{N_{fl.}} = 1 \end{aligned}\right\} \qquad [12.256]$$

o sea la quebrada $AA'B$ de la figura 12.37.

Para plastificación total de la sección resulta:

$$F_\alpha = \frac{1}{2}\,(b + b_\alpha)\,\alpha h \qquad [12.257]$$

y como $b_\alpha = b\,(1 - \frac{1}{2}\alpha)$ y $F = \frac{9}{4}\,b^2$, reemplazando valores llegamos a:

$$\frac{F_\alpha}{F} = \frac{2}{3}\left(2 - \frac{\alpha}{2}\right)\alpha = \frac{2}{3}\left(2\alpha - \frac{\alpha^2}{2}\right) \qquad [12.258]$$

y, en consecuencia, de la [12.245]:

$$f(\alpha) = \frac{2}{3}\left(2\alpha - \frac{\alpha^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{N}{N_{fl.}}\right) \qquad [12.259]$$

Como es fácil de observar, para $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$ las [12.259] adquieren, respectivamente los valores:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{N}{N_{fl.}} = -1 \\ \text{y} \quad &\frac{N}{N_{fl.}} = +1 \end{aligned}\right\} \qquad [12.260]$$

que satisfacen las condiciones del diagrama de figura 12.40 y corresponden a solicitaciones axiles por compresión y tracción, respectivamente.

Por otra parte, la expresión [12.259], nos permite determinar el valor de α que define la posición del eje neutro para plastificación total en flexión pura. En este caso, por ser $N = 0$, resulta $N/N_{fl.} = 0$ y en consecuencia de la [12.259] tenemos:

$$\frac{2}{3}\left(2\alpha - \frac{\alpha^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad [12.261]$$

de donde:

$$\alpha^2 - 4\alpha + \frac{3}{2} = 0 \qquad [12.262]$$

y finalmente:

$$\alpha = 0{,}42 \qquad [12.263]$$

es decir:

$$x_0 = \alpha h = 0{,}42\,h \qquad [12.264]$$

Para plastificación total en flexión compuesta, con los datos supuestos para el caso analizado, resulta $J_g = \frac{13}{8}\,b^4$ y:

$$\delta_g = \frac{\alpha h}{3} \cdot \frac{b + 2b_\alpha}{b + b_\alpha} = \frac{6 - 2\alpha}{4 - \alpha}\,\alpha b, \qquad [12.265]$$

pero

$$\delta_\alpha = v_2 - \delta_g = \left(\frac{4}{3} - \frac{6 - 2\alpha}{4 - \alpha}\,\alpha\right) b \qquad [12.266]$$

o también:

$$\delta_\alpha = \frac{16 - 22\alpha + 6\alpha^2}{12 - 3\alpha}\,b. \qquad [12.267]$$

Reemplazando en la [12.251] los valores de J_g, δ_α y v_1, luego de simplificar llegamos finalmente a:

$$\frac{M}{M_{fl.}} = \frac{40}{39}\,(8 - 11\alpha + 3\alpha^2)\,\alpha = \varphi(\alpha) \qquad [12.268]$$

Para $N/N_{fl.} = 0$ (flexión pura), es decir, cuando $\alpha = 0{,}42$, el valor de $M/M_{fl.}$ resulta ser:

$$\frac{M}{M_{fl.}} = 1{,}68. \qquad [12.269]$$

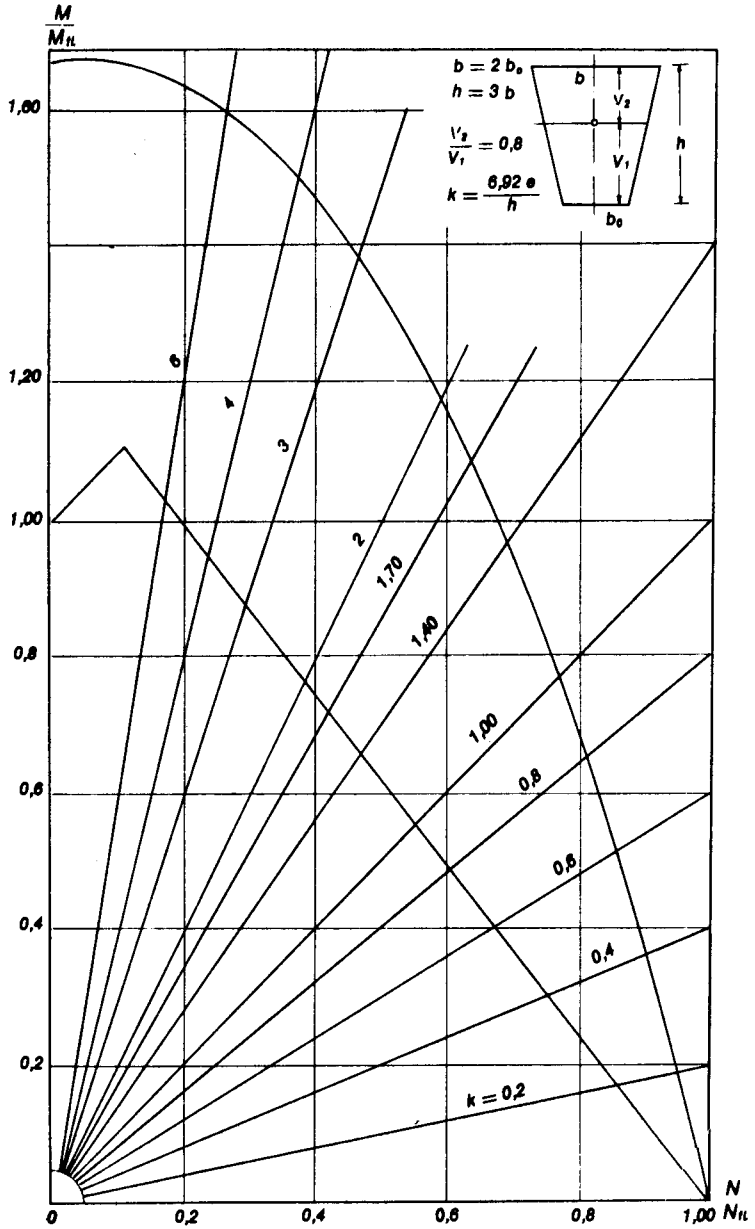


Fig. 12.41

Estableceremos a continuación la expresión de $M/M_{fl.}$ en función de $N/N_{fl.}$, eliminando el parámetro α entre las ecuaciones [12.259] y [12.268]. De la primera resulta, por tratarse de una ecuación de 2° grado en α:

$$\alpha = 2\left[1 - \sqrt{1 - \frac{3}{8}\left(1 + \frac{N}{N_{fl.}}\right)}\right] \qquad [12.270]$$

Haciendo:

$$K = \sqrt{1 - \frac{3}{8}\left(1 + \frac{N}{N_{fl.}}\right)} \qquad [12.271]$$

la [12.270] se transforma en:

$$\alpha = 2(1 - K) \qquad [12.272]$$

valor que introducido en la [12.268] nos da:

$$\frac{M}{M_{fl.}} = \frac{80}{39}\left[8 - 22(1 - K) + 12(1 - K)^2\right][1 - K] \qquad [12.273]$$

y finalmente:

$$\frac{M}{M_{fl.}} = \frac{160}{39}\left[-1 + 7K^2 - 6K^3\right] \qquad [12.274]$$

Reemplazando K por su valor de la [12.271] obtenemos finalmente:

$$\frac{M}{M_{fl.}} = \frac{160}{39}\left[6 - \frac{21}{8}\left(1 + \frac{N}{N_{fl.}}\right) - 6\left\{1 - \frac{3}{8}\left(1 + \frac{N}{N_{fl.}}\right)\right\}^{\frac{3}{2}}\right] \qquad [12.275]$$

El valor máximo de $M/M_{fl.}$ no ocurre como en la sección rectangular (con doble simetría) para $N/N_{fl.} = 0$, precisamente debido a la asimetría de la sección.

Derivando la [12.275] respecto a $N/N_{fl.}$ e igualando a cero, se llega al valor de $N/N_{fl.} = 0{,}0535$ que hace máxima la función [12.275] siendo su valor:

$$\frac{M}{M_{fl.}} = 1{,}695 \qquad [12.276]$$

En la figura 12.41 se han representado las rectas correspondientes a comienzo de la plastificación como también la familia de rectas de excentricidad constante, para las cuales resulta en el caso analizado:

$$k = \frac{e}{h} \cdot \frac{90}{13} = 6{,}92\,\frac{e}{h} \qquad [12.277]$$

13. FLEXIÓN COMBINADA CON TORSIÓN

13 . 1 . Conceptos generales

Cuando al reducir las fuerzas que solicitan un sólido al baricentro de una sección cualquiera del mismo, se obtienen dos pares opuestos cuyos vectores momento tienen una dirección oblicua con respecto al plano de aquélla (fig. 13.1), estamos ante una solicitación de flexión con torsión.

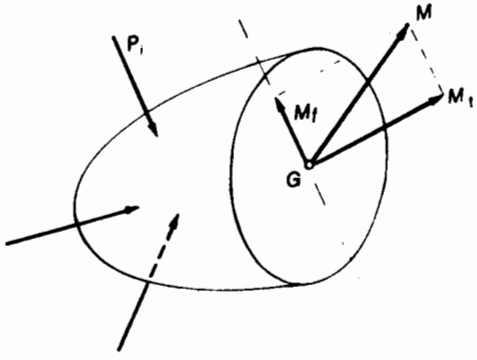


Fig. 13.1

El vector M puede descomponerse en dos vectores componentes: uno M_t normal al plano de la sección, que corresponde al momento torsor, y otro M_f, contenido en el plano de la sección, que es el vector representativo del momento flexor.

Consecuentemente se originan tensiones normales σ debidas a M_f y tangenciales τ originadas por la torsión, cuya combinación da origen a estados planos de tensión, cuyas tensiones principales son determinantes para el dimensionado o verificación de las piezas sujetas a esta forma de solicitación.

La flexión combinada con torsión se presenta en distintos problemas de la práctica, pero interesan fundamentalmente dos, que son de los que nos ocuparemos en el presente capítulo: los ejes y árboles de trasmisión y los resortes.

En realidad, cabe efectuar una distinción entre eje y árbol de trasmisión. En los primeros, aparte de los esfuerzos de corte, que siempre existen originados por el propio peso del eje, sólo existen momentos flexores y de torsión, cuya importancia relativa depende del caso particular al que corresponda el problema. En cambio, en los árboles que accionan hélices, si bien existe flexión, ésta es de importancia secundaria, lo mismo que los esfuerzos de corte, por cuanto son debidos al peso propio, predominando el par torsor y apareciendo una tercera solicitación que corresponde al esfuerzo axil originado por el empuje de la hélice.

En general, las secciones más utilizadas en este tipo de solicitación son las circulares, llena o hueca, razón por la cual nos limitaremos al análisis de éstas.

13 . 2 . Flexión y torsión en la sección circular llena

Sea una pieza de sección circular llena, empotrada en un extremo y sujeta en el extremo libre a la acción de un par torsor de momento M_t y a otro flexor M_f [fig. 13.2].

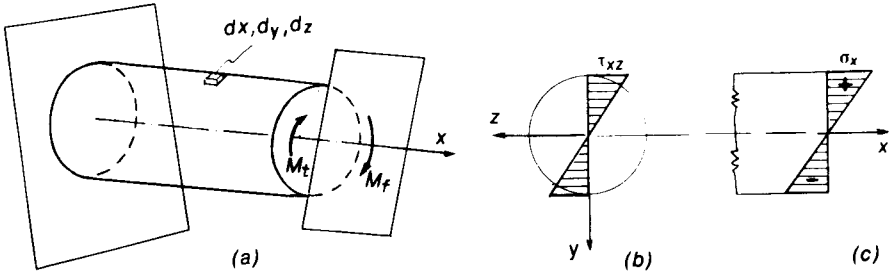


Fig. 13.2

Como consecuencia del momento torsor, en una sección cualquiera se originan tensiones tangenciales, normales al radio de ella, y con un valor máximo de:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{M_t}{J_p} \cdot \frac{d}{2}, \qquad [13.1]$$

o expresando J_p en función del diámetro:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{16 M_t}{\pi d^3}, \qquad [13.2]$$

igual para todos los puntos del contorno de la sección.

Por otra parte, el momento flexor origina tensiones normales:

$$\sigma = \frac{M_f}{J_g} y, \qquad [13.3]$$

cuyo valor máximo ocurre en la fibra más alejada, siendo su valor, si J_g lo expresamos en función de d, diámetro de la sección:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{32 M_f}{\pi d^3}. \qquad [13.4]$$

Consideremos ahora un cubo infinitésimo ubicado en correspondencia con la generatriz superior de la figura 13.2

Su solicitación será la que muestra la figura 13.3, y corresponde a un estado

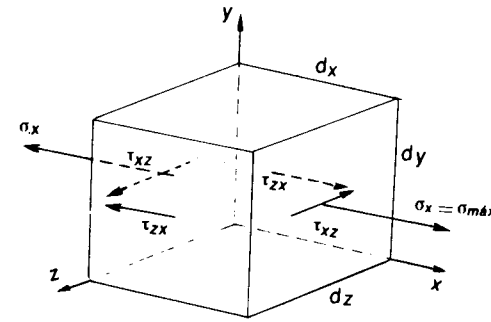


Fig. 13.3

elástico plano, cuyas tensiones principales valdrán para un punto cualquiera:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xz}^2} \qquad [13.5]$$

Para los elementos más solicitados, que en el caso que nos ocupa son los ubicados en las generatrices superior e inferior, resulta:

$$\sigma_x = \sigma_{\substack{\text{máx.}\\ \text{mín.}}} = \pm \frac{32 M_f}{\pi d^3}, \qquad [13.6]$$

$$\tau_{xz} = \tau_{\text{máx.}} = \frac{16 M_t}{\pi d^3}. \qquad [13.7]$$

Si reemplazamos estos valores en la [13.5] obtenemos los siguientes valores de las máximas tensiones principales.

$$\sigma_1 = \frac{16 M_f}{\pi d^3} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{32 M_f}{\pi d^3}\right)^2 + 4\left(\frac{16 M_t}{\pi d^3}\right)^2} \qquad [13.8]$$

$$\sigma_2 = \frac{16 M_f}{\pi d^3} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{32 M_f}{\pi d^3}\right)^2 + 4\left(\frac{16 M_t}{\pi d^3}\right)^2} \qquad [13.9]$$

y finalmente, introduciendo $\frac{1}{2}$ dentro del radical y sacando factor común $(16/\pi d^3)^2$, obtenemos finalmente:

$$\sigma_{1,2} = \frac{16}{\pi d^3}\left[M_f \pm \sqrt{(M_f)^2 + (M_t)^2}\right] \qquad [13.10]$$

Si imaginamos un momento ideal:

$$M_i = \frac{1}{2}\left[M_f + \sqrt{(M_f)^2 + (M_t)^2}\right] \qquad [13.11]$$

La máxima tensión principal determinante puede expresarse mediante la siguiente fórmula, similar a la de la flexión simple:

$$\sigma_1 = \frac{32 M_i}{\pi d^3} \qquad [13.12]$$

Recordando la fórmula de la máxima tensión tangencial correspondiente al estado elástico plano:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad [13.13]$$

y reemplazando en ésta los valores de la [13.10] llegamos a:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{16}{\pi d^3}\sqrt{M_f^2 + M_t^2} \qquad [13.14]$$

13.3. Flexión y torsión en la sección circular hueca

En el caso de la sección circular hueca utilizada, como hemos visto en el capítulo correspondiente a "Torsión", por razones de economía, las expresiones a que se llega son similares. En efecto, llamando D y d a los diámetros externo e interno respectivamente, tenemos:

$$\sigma_x = \sigma_{\substack{\text{máx.}\\ \text{mín.}}} = \pm \frac{32 M_f D}{\pi (D^4 - d^4)} = \pm \frac{32 M_f}{\pi D^3 \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)} \qquad [13.15]$$

y

$$\tau_{xz} = \tau_{\text{máx.}} = \frac{16 M_t D}{\pi (D^4 - d^4)} = \frac{16 M_t}{\pi D^3 \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)} \qquad [13.16]$$

Si hacemos:

$$n = \frac{d}{D} \qquad [13.17]$$

las [13.15] y [13.16] se transforman en:

$$\sigma_{\substack{\text{máx.}\\ \text{mín.}}} = \pm \frac{32 M_f}{\pi D^3 (1 - n^4)} \qquad [13.18]$$

y

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{16 M_t}{\pi D^3 (1 - n^4)} \qquad [13.19]$$

En consecuencia, para la sección anular las expresiones [13.10] y [13.12] se trasforman en:

$$\sigma_{1,2} = \frac{16}{\pi D^3 (1 - n^4)}\left[M_f \pm \sqrt{(M_f)^2 + (M_t)^2}\right] \qquad [13.20]$$

y

$$\sigma_1 = \frac{32 M_i}{\pi D^3 (1 - n^4)} \qquad [13.21]$$

Finalmente:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{16}{\pi D^3 (1 - n^4)}\sqrt{(M_f)^2 + (M_t)^2} \qquad [13.22]$$

13.4. Caso de la sección circular llena cuando existe esfuerzo normal

Supongamos la misma pieza analizada anteriormente pero, además, sujeta a un esfuerzo normal N (caso de los árboles de trasmisión). En este caso, además

de las tensiones de flexión y de torsión dadas por las expresiones [13.2] y [13.4] aparece una tensión normal uniformemente repartida:

$$\sigma_N = \frac{N}{F} = \frac{4N}{\pi d^2}. \qquad [13.23]$$

En consecuencia, el elemento infinitésimo de la generatriz superior (o inferior) se encuentra solicitado como muestra la figura 13.4.

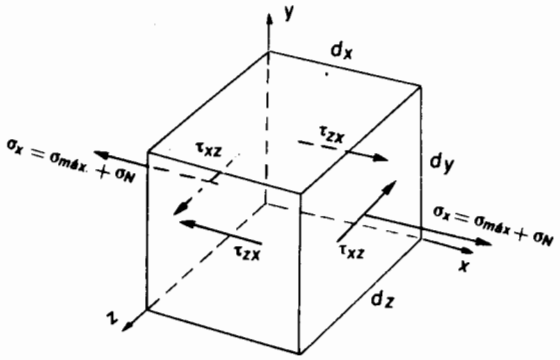


Fig. 13.4

En consecuencia, la tensión normal resultante será:

$$\sigma_x = \frac{32M_f}{\pi d^3} + \frac{4N}{\pi d^2}, \qquad [13.24]$$

y en consecuencia;

$$\sigma_1 = \frac{16M_f}{\pi d^3} + \frac{2N}{\pi d^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{32M_f}{\pi d^3} + \frac{4N}{\pi d^2}\right)^2 + 4\left(\frac{16M_t}{\pi d^3}\right)^2} \qquad [13.25]$$

$$\sigma_2 = \frac{16M_f}{\pi d^3} + \frac{2N}{\pi d^2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{32M_f}{\pi d^3} + \frac{4N}{\pi d^2}\right)^2 + 4\left(\frac{16M_t}{\pi d^3}\right)^2} \qquad [13.26]$$

o también:

$$\sigma_{1,2} = \frac{16}{\pi d^3}\left[\left(M_f + \frac{Nd}{8}\right) \pm \sqrt{M_f^2\left(1 + \frac{Nd}{8M_f}\right)^2 + M_t^2}\right] \qquad [13.27]$$

y finalmente, teniendo en cuenta la excentricidad $e = M_f/N$:

$$\sigma_{1,2} = \frac{16M_f}{\pi d^3}\left[\left(1 + \frac{d}{8e}\right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{d}{8e}\right)^2 + \left(\frac{M_t}{M_f}\right)^2}\right] \qquad [13.28]$$

Si hacemos análogamente a [13.11]:

$$M_i' = \frac{M_f}{2}\left[\left(1 + \frac{d}{8e}\right) + \sqrt{\left(1 + \frac{d}{8e}\right)^2 + \left(\frac{M_t}{M_f}\right)^2}\right] \qquad [13.29]$$

podemos expresar la tensión principal máxima en función del momento ideal [13.29] con la siguiente expresión similar a la de la flexión simple:

$$\sigma_1 = \frac{32M_i'}{\pi d^3} \qquad [13.30]$$

13 . 5 . Resortes helicoidales de sección circular

Supongamos una sección circular llena, que se desplaza manteniendo su baricentro sobre una hélice, y siendo su plano constantemente normal a la tangente a la misma. Habremos así engendrado un resorte helicoidal, que podrá ser de espiras abiertas o cerradas (fig. 13.5 *a* y *b*). Un resorte será de espiras cerradas cuando el paso de la hélice es reducido con respecto a su diámetro, en cuyo caso las espiras pueden considerarse, prácticamente como planas.

Si, en cambio, el paso es grande, el resorte será de espiras abiertas. La diferencia entre ambos reside en el hecho que en los resortes de espiras cerradas,

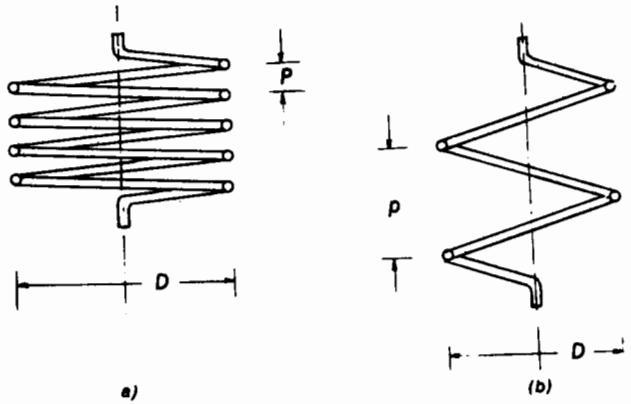


Fig. 13.5

pueden despreciarse, como veremos, los momentos flexores que se originan, mientras que en los de espiras abiertas no.

13 . 5 . 1 . Resortes de espiras cerradas

Sea el resorte de figura 13.6 solicitado por la fuerza axil N. Dos son los problemas que deben resolverse:

a) determinación de las tensiones que se desarrollan en el resorte;

b) cálculo del alargamiento o acortamiento que experimenta el resorte, según que la fuerza N lo extienda o comprima, respectivamente.

Resueltos estos problemas, estaremos en condiciones de calcular las dimensiones necesarias de un resorte destinado a soportar una carga N, entendiéndose por tales el diámetro, paso y número de espiras y la sección trasversal de la barra o alambre que lo constituya.

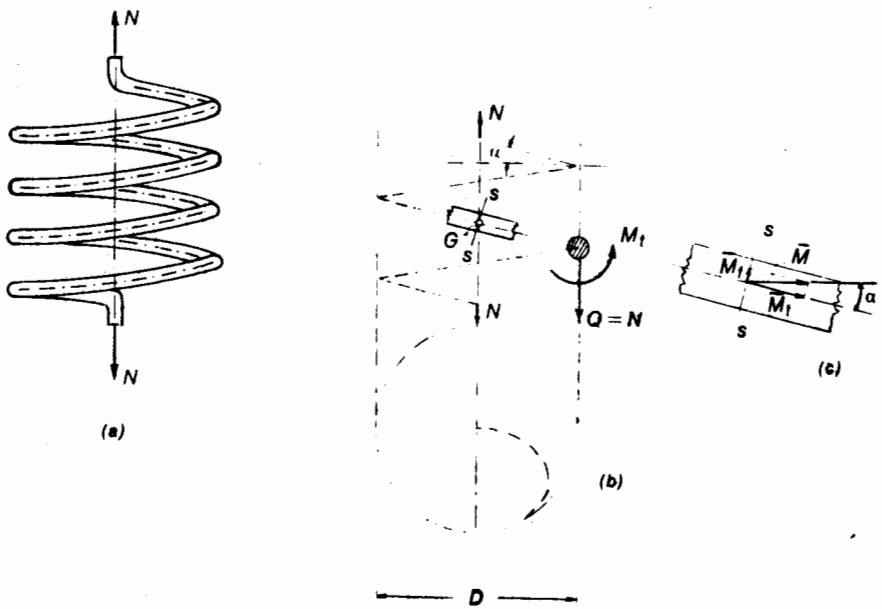


Fig. 13.6

Al reducir la fuerza N al baricentro de una sección genérica s–s (fig. 13.6 b y c) se origina un par de reducción de momento M cuyo vector representativo es normal al plano definido por el baricentro G y la recta de acción de N

(eje del resorte). Dicho momento es constante para cualquier sección que se considere.

Como puede observarse en la figura 13.6 c el vector $\bar{M}$ puede descomponerse en dos vectores componentes $\bar{M}_f$ y $\bar{M}_t$, cuyos respectivos valores son, si llamamos α la pendiente de la tangente a la hélice en la sección considerada:

$$\left.\begin{aligned} M_t &= M \cos \alpha \\ M_f &= M \operatorname{sen} \alpha \end{aligned}\right\} \qquad [13.31]$$

Si el resorte es de espiras cerradas, la pendiente de éstas es muy pequeña, y resulta:

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha &\simeq 1 \\ \operatorname{sen} \alpha &\simeq 0 \end{aligned}\right\} \qquad [13.32]$$

de modo que $M_f \cong 0$ y $M_t \cong M$.

En definitiva, la sección trasversal de la espira del resorte resulta solicitada (fig. 13.6 c) por un par torsor de momento:

$$M_t = M = \frac{ND}{2} = NR, \qquad [13.33]$$

y un esfuerzo de corte de valor:

$$Q = N. \qquad [13.34]$$

El par torsor origina tensiones tangenciales con la distribución y signo que muestra la figura 13.7 a mientras que el esfuerzo de corte Q conduce, en primera aproximación, al diagrama de figura 13.7 b.

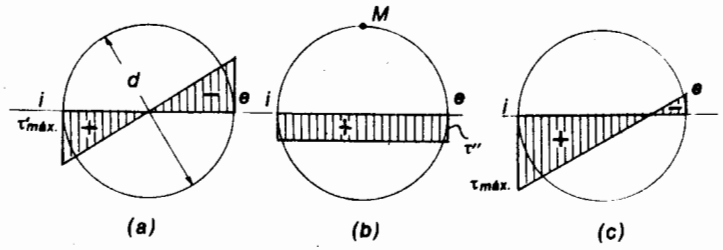


Fig. 13.7

La máxima tensión tangencial debida a la torsión vale, como sabemos:

$$\tau'_{máx.} = \frac{16 M_t}{\pi d^3} \qquad [13.35]$$

donde d es el diámetro de la barra. Teniendo en cuenta la [13.33] en el punto i del borde interior de la barra, el valor de la tensión tangencial debida a la torsión vale:

$$\tau'_{\text{máx.}} = \frac{16NR}{\pi d^3} = \frac{8ND}{\pi d^3}. \qquad [13.36]$$

En lo que respecta a las tensiones tangenciales debidas al esfuerzo de corte Q en primera aproximación podemos suponerlas uniformemente distribuidas sobre la sección F de la barra y su valor será:

$$\tau'' = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4N}{\pi d^2}. \qquad [13.37]$$

Su diagrama, a lo largo del diámetro horizontal i–e será el que muestra la figura 13.7 b. Como se ha dicho en el capítulo correspondiente, esta distribución no es compatible con la realidad, pues significaría que en el punto M existe una tensión tangencial vertical incompatible con lo postulado por Cauchy.

El diagrama de tensiones tangenciales resultantes es el que muestra la figura 13.7 c que corresponde a un resorte traccionado. La máxima tensión tangencial, que ocurre en el punto i del borde interior de la sección tiene por expresión:

$$\tau_{\text{máx.}} = \tau'_{\text{máx.}} + \tau'' = \frac{8ND}{\pi d^3} + \frac{4N}{\pi d^2}, \qquad [13.38]$$

o también:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{4N}{\pi d^2}\left(1 + \frac{2D}{d}\right), \qquad [13.39]$$

y si hacemos:

$$\frac{D}{d} = m, \qquad [13.40]$$

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{4N}{\pi d^2}(1 + 2m). \qquad [13.41]$$

La expresión [13.41] puede escribirse, y conviene hacerlo, en la forma siguiente, deducida también de la [13.38]:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{\text{máx.}} &= \frac{8ND}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{2D}\right) \\ \tau_{\text{máx.}} &= \frac{16NR}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{4R}\right) \end{aligned}\right\} \qquad [13.42]$$

En esta expresión el término $d/4R$ corresponde a la influencia de las

tensiones originadas por el esfuerzo de corte $Q = N$. Como puede observarse será tanto menor cuanto mayor sea el diámetro del resorte en relación con el diámetro de la barra que lo constituye. Es así que en los resortes de suspensión de los *boggies* de los vagones ferroviarios donde el diámetro d es grande en relación con D, el esfuerzo de corte tiene una influencia considerable en el valor de la tensión tangencial máxima.

En la expresión [13.38] el primer término que corresponde a la influencia del par torsor, ha sido deducido sobre la hipótesis de una barra circular sujeta a torsión. Esta hipótesis supone que la distorsión de los elementos ubicados sobre el contorno de la sección, es la misma para todos ellos. En el caso del resorte, que es en realidad una pieza curva, por ser la fibra a–a_1 de mayor longitud que la b–b_1 (fig. 13.8) al girar la sección π' respecto de π de un ángulo $d\theta$, la distorsión γ' es menor que la γ que corresponde a la fibra interior. En consecuencia, como:

$$\tau = \gamma G, \qquad [13.43]$$

resulta que, en la realidad, las tensiones en las fibras interiores son mayores

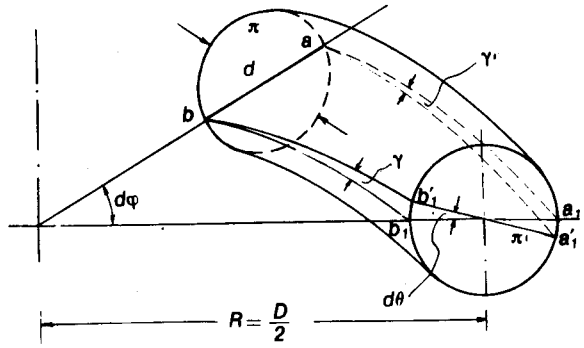


Fig. 13.8

que en las externas. Según *V. Roever*[1] la tensión máxima en el borde interior de la espira del resorte tiene por expresión:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{16NR}{\pi d^3}\left(\frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0{,}615}{m}\right) \qquad [13.44]$$

donde $m = \dfrac{D}{d}$

[1] Kr. Deutsche Ingenieure, Vol. 57, 13

Calcularemos a continuación, la expresión que gobierna la deformación del resorte.

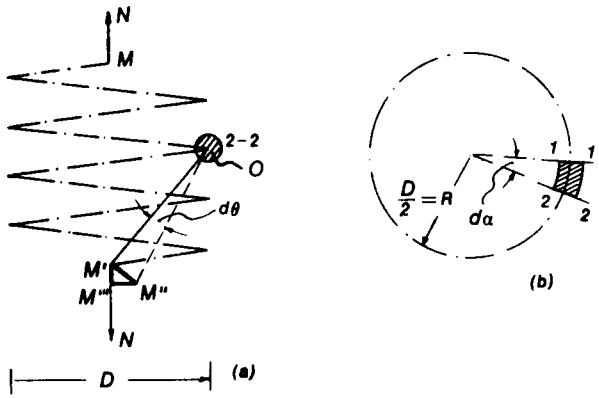


Fig. 13.9

Consideremos dos secciones consecutivas *1–1*, *2–2* separadas por un ángulo infinitésimo $d\alpha$ (fig. 13.9 *b*). La sección *2–2* gira con respecto de la *1–1* un ángulo de torsión $d\theta$. Como consecuencia de ello, si O es el centro de la sección *2–2*, la recta OM' describe el arco infinitésimo $d\theta$ y pasa a ocupar la posición OM''.

De la teoría de la torsión en secciones circulares tenemos, en este caso:

$$d\theta = \frac{M_t \cdot ds}{GJ_p} = \frac{NR \cdot R\,d\alpha}{GJ_p}, \qquad [13.45]$$

y como consecuencia de dicho giro el punto M', punto de aplicación de la fuerza N, pasa a ocupar la posición M''. Interesa conocer su componente vertical $M'M'''$. Si llamamos l la distancia OM', resulta:

$$\frac{l}{R} = \frac{\overline{M'M''}}{\overline{M'M'''}} \qquad [13.46]$$

de donde:

$$\overline{M'M'''} = \frac{\overline{M'M''} \cdot R}{l}, \qquad [13.47]$$

y reemplazando $\overline{M'M''}$ por su valor:

$$\overline{M'M''} = l\,d\theta \qquad [13.48]$$

$$\overline{M'M'''} = R \cdot d\theta \qquad [13.49]$$

o también teniendo en cuenta la [13.45]:

$$\overline{M'M'''} = \frac{NR^3}{GJ_p}\,d\alpha. \qquad [13.50]$$

El corrimiento vertical δ del punto M' será, si n es el número de espiras:

$$\delta = n\int_0^{2\pi} \frac{NR^3}{GJ_p}\,d\alpha \qquad [13.51]$$

o también:

$$\delta = \frac{2\pi n NR^3}{GJ_p}, \qquad [13.52]$$

y teniendo en cuenta que para la sección circular de diámetro d:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}, \qquad [13.53]$$

$$\delta = \frac{64\,nNR^3}{Gd^4} \qquad [13.54]$$

13 . 5 . 2 . Resortes de espiras abiertas

Cuando el paso P de la hélice generatriz del resorte es grande con respecto al diámetro de éste, el resorte se denomina de espiras abiertas.

En este caso, el ángulo α que mide la pendiente de la tangente a la hélice, es de una magnitud tal que no puede despreciarse la componente $M_f = M \operatorname{sen} \alpha$.

En este caso, el esfuerzo de corte $Q = N$ por su influencia relativa puede despreciarse, y la solicitación de las secciones resulta de flexión y torsión, problema analizado en el parágrafo 13.2.

Si bien en realidad la influencia de la flexión correspondería analizarla como en una pieza curva, considerando que en general el radio de curvatura es grande, puede admitirse la flexión como si fuera una pieza prismática de eje recto.

Para el caso presente:

$$\left.\begin{aligned} M_f &= M \operatorname{sen} \alpha = NR \operatorname{sen} \alpha \\ M_t &= M \cos \alpha = NR \cos \alpha \end{aligned}\right\} \qquad [13.55]$$

valores que reemplazados en [13.10] nos dan:

$$\sigma_{1,2} = \frac{16}{\pi d^3}\left[NR \operatorname{sen}\alpha \pm \sqrt{(NR \operatorname{sen}\alpha)^2 + (NR\cos\alpha)^2}\right] \qquad [13.56]$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{16}{\pi d^3}\,(NR \operatorname{sen}\alpha \pm NR), \qquad [13.57]$$

y finalmente:

$$\sigma_{1,2} = \frac{16NR}{\pi d^3}\,(\operatorname{sen}\alpha \pm 1) \qquad [13.58]$$

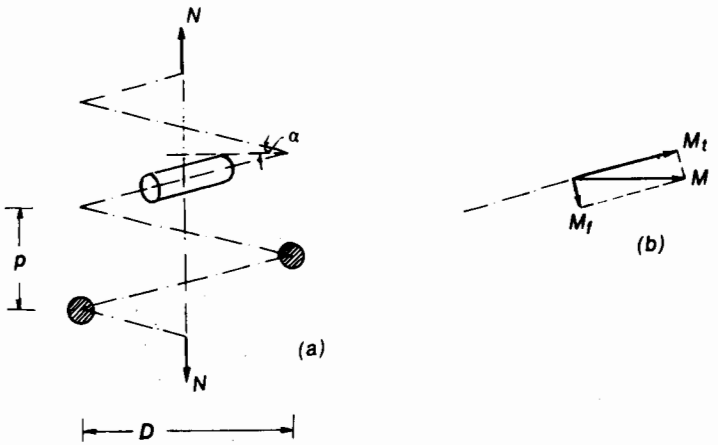


Fig. 13.10

Teniendo en cuenta que si P es el paso de la hélice, resulta:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{P}{2\sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 + (2R)^2}} \qquad [13.59]$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4R}{P}\right)^2}}, \qquad [13.60]$$

reemplazando:

$$\sigma_{1,2} = \frac{16NR}{\pi d^3}\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4R}{P}\right)^2}} \pm 1\right]. \qquad [13.61]$$

14. FLEXIÓN EN PIEZAS DE GRAN CURVATURA

14.1. Conceptos generales

Al estudiar en el capítulo 11 la teoría de la flexión partimos, entre otras, de la hipótesis que se trataba de piezas prismáticas, para las cuales el lugar geométrico de los baricentros de las sucesivas secciones es una recta.

La teoría desarrollada, partiendo de este concepto, y aceptando la hipótesis de Bernouilli–Navier de la conservación de las secciones planas, nos condujo, dentro de los límites de la validez de la ley de Hooke, a una ley lineal para la distribución de las tensiones normales sobre los planos de las secciones.

Cuando el lugar geométrico de los baricentros de las sucesivas secciones es una curva, la distribución lineal de tensiones no se cumple pese a que se mantiene la validez de la ley de Hooke y de la hipótesis de Bernouilli–Navier, No obstante ello, como veremos más adelante, si el radio de curvatura en correspondencia con la sección considerada es grande,[1] el error cometido al calcular las tensiones mediante las expresiones correspondientes a las piezas de eje recto es despreciable.

14.2. Planteo del problema

Sea una pieza de eje de gran curvatura, que en el caso más general responda a una ley cualquiera, sujeta a flexión pura normal (fig. 14.1).

Para analizar la distribución de tensiones normales en una sección cualquiera A–A, consideremos la circunferencia tangente a la misma, y supongamos que su radio sea R.

En lo que sigue admitiremos:

a) que es válida la hipótesis de Bernouilli–Navier de que las secciones se mantienen planas luego de la deformación por flexión girando en torno a un eje de su plano, el eje neutro, y

b) que las tensiones se mantienen dentro del período elástico, o sea que admitimos la validez de la ley de Hooke.

[1] Si el eje de la pieza no es una circunferencia, corresponde considerar el radio del círculo tangente o del círculo osculador según corresponda.

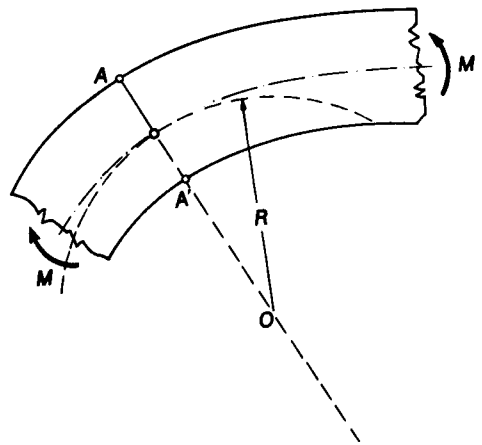


Fig. 14.1

Sentado lo anterior, consideremos dos secciones infinitamente próximas, que formen entre sí un ángulo $d\varphi$ (fig. 14.2).

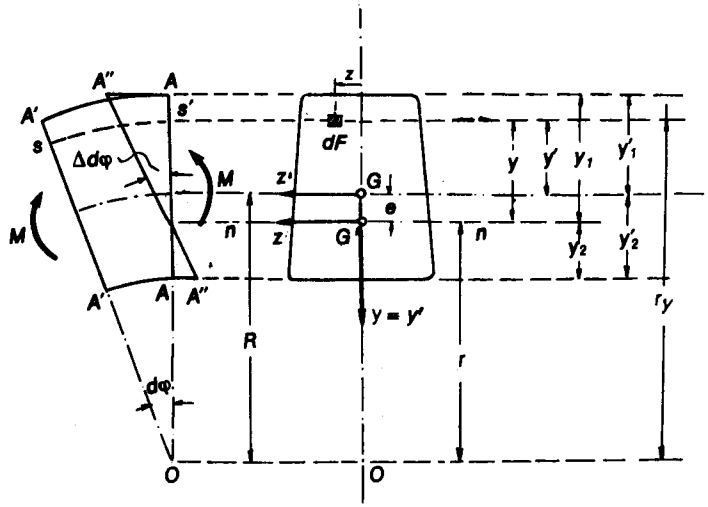


Fig. 14.2

Supongamos fija la sección $A'-A'$ y que la $A-A$, por efecto del par flexor M gire de un cierto ángulo infinitésimo $\Delta\, d\varphi$ en torno del eje neutro $n-n$ que, por coincidir la línea de fuerzas con un eje principal de inercia será normal al mismo. Además admitamos en el plano de la sección, dos pares de ejes coordenados, z', y' y z, y, cuyos orígenes coincidan respectivamente con el baricentro G de la sección y con la intersección de $n-n$ con el eje de simetría de la misma.

Para una fibra $S-S$, de radio de curvatura r_y, su acortamiento[1] valdrá:

$$\Delta S = y \cdot \Delta\, d\varphi \qquad [14.1]$$

y por ser su longitud:

$$\overline{SS} = r_y \cdot d\varphi \qquad [14.2]$$

la correspondiente deformación específica será:

$$\epsilon_y = \frac{\Delta S}{\overline{SS}} = \frac{y \cdot \Delta\, d\varphi}{r_y d\varphi} \qquad [14.3]$$

o también si llamamos r al radio de las fibras ubicadas en correspondencia con el eje neutro, y teniendo en cuenta el signo de y:

$$\epsilon_y = \frac{y \cdot \Delta\, d\varphi}{(r - y)\, d\varphi} \qquad [14.4]$$

De acuerdo con la ley de Hooke:

$$\sigma = \epsilon E \qquad [14.5]$$

y en consecuencia, la tensión en correspondencia con las fibras ubicadas a una distancia y del eje neutro valdrán:

$$\sigma = E\, \epsilon_y = \frac{E y\, \Delta\, d\varphi}{r_y d\varphi} = \frac{E y \Delta d\varphi}{(r - y) d\varphi} \qquad [14.6]$$

Por ser E, $\Delta d\varphi$ y $d\varphi$ constantes para todas las fibras de la sección, la [14.6] puede escribirse:

$$\sigma = K \frac{y}{r - y} \qquad [14.7]$$

expresión que nos dice que la variación de σ no responde a una ley lineal, sino hiperbólica.

Considerando un elemento dF, sobre el que actúa la tensión normal σ, el planteo de las tres ecuaciones de equivalencia nos conduce a las siguientes expresiones:

[1] O alargamiento según sea su posicion relativa con respecto al eje neutro.

a) Proyección sobre el eje x.

$$\int_F \sigma\, dF = K \int_F \frac{y\, dF}{r-y} = 0 \qquad [14.8]$$

b) Momentos respecto del eje y (línea de fuerzas)

$$\int_F \sigma z\, dF = K \int_F \frac{z y\, dF}{r-y} = 0 \qquad [14.9]$$

c) Momentos respecto del eje z (eje neutro)

$$\int_F \sigma y\, dF = K \int \frac{y^2\, dF}{r-y} = M. \qquad [14.10]$$

Estas tres ecuaciones son las que nos permiten resolver el problema, que consiste en establecer la dirección y posición del eje neutro y determinar una relación entre la solicitación exterior (el par flexor en este caso) y las tensiones que se desarrollan en la sección, en función de las características geométricas de ésta.

Para la resolución de las ecuaciones [14.8] a [14.10] seguiremos dos procedimientos distintos:

a) el método de la sección trasformada, debido a *Rèsal;*

b) el procedimiento de *Winkler–Bach.*

14 . 3 . Método de la sección trasformada

Si en las ecuaciones [14.8] a [14.10], reemplazamos:

$$r - y = r_y\,, \qquad [14.11]$$

y multiplicamos y dividimos por R, obtenemos finalmente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{K}{R}\int_F y\, \frac{R}{r_y}\, dF &= 0 \\ \frac{K}{R}\int_F z y\, \frac{R}{r_y}\, dF &= 0 \\ \frac{K}{R}\int_F y^2\, \frac{R}{r_y}\, dF &= M \end{aligned}\right\} \qquad [14.12]$$

En las expresiones anteriores, tanto K como R son constantes y si bien r_y es variable con y, el cociente R/r_y es una magnitud adimensional, variable, que modifica el área elemental, de modo que podemos escribir:

$$\frac{R}{r_y}\, dF = dF_0\,, \qquad [14.13]$$

donde dF_0 es un elemento de área trasformada. Teniendo en cuenta esta condición y la constancia de K/R, las [14.12] se trasforman en:

$$\left.\begin{aligned} \int_{F_0} y\, dF_0 &= 0 \\ \int_{F_0} z y\, dF_0 &= 0 \\ \frac{K}{R}\int_{F_0} y^2\, dF_0 &= M \end{aligned}\right\} \qquad [14.14]$$

La primera de las expresiones anteriores representa el momento estático de la sección trasformada respecto del eje neutro n–n (fig. 14.2), y como dicho momento estático es nulo, resulta que el eje neutro pasa por el baricentro de la sección trasformada.

La segunda de las ecuaciones [14.14] corresponde al momento centrífugo de la sección trasformada respecto del eje neutro y de la línea de fuerzas. Al ser nulo, ambas direcciones resultan conjugadas de inercia. En el caso que nos ocupa, como el eje y es de simetría, es a la vez principal de inercia, y en consecuencia el eje neutro resulta normal a la línea de fuerzas.

La determinación de la sección trasformada es simple y puede efectuarse tanto numéricamente como en forma gráfica.

a) *Solución numérica*

Sea la sección de la figura 14.3. Por razones de simetría podemos hacer

$$dF = b_y\, d_y\,, \qquad [14.15]$$

y de acuerdo con la [14.13]:

$$dF_0 = \frac{R}{r_y}\, dF = \frac{R}{r_y}\, b_y\, d_y\,, \qquad [14.16]$$

o también:

$$dF_0 = b'_y\, dy\,, \qquad [14.17]$$

donde:

$$b'_y = \frac{R}{r_y}\, b_y\,, \qquad [14.18]$$

nos da la ley de variación del ancho de la sección trasformada en función de r_y.

Para:

$$r_y = R, \qquad [14.19]$$

resulta:

$$b'_y = b_y, \qquad [14.20]$$

es decir que a nivel del baricentro G de la sección original, ésta y la sección trasformada tienen el mismo ancho.

Para la parte de la sección ubicada por encima del baricentro se tiene:

$$r_y > R, \qquad [14.21]$$

y en consecuencia, de acuerdo con la [14.18]:

$$b'_y < b_y. \qquad [14.22]$$

Análogamente, para la parte ubicada por debajo del baricentro, donde $r_y < R$, resulta:

$$b'_y > b_y. \qquad [14.23]$$

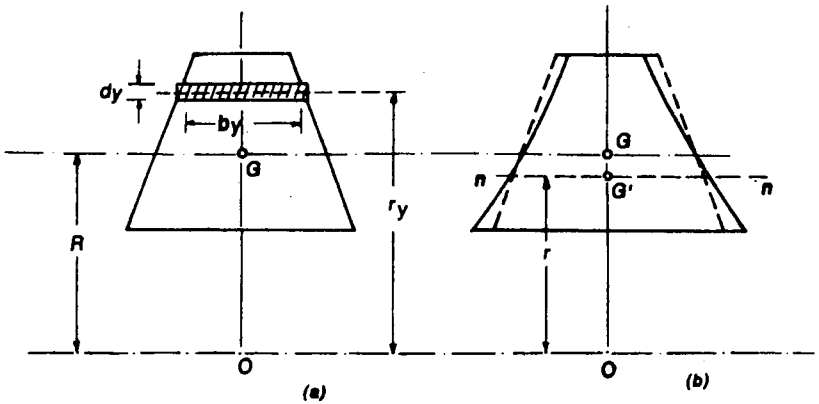


Fig. 14.3

En la figura 14.3 *b* hemos representado en línea de puntos la sección original y en línea llena la sección trasformada, por cuyo baricentro G' pasa el eje neutro n–n.

En consecuencia, conocida la forma de la sección trasformada, bastará determinar su baricentro G' para que quede determinada la posición del eje neutro.

Considerando ahora la tercera de las ecuaciones [14.14], observamos que

la integral representa, con la notación de la figura 14.2, el momento de inercia de la sección trasformada, con respecto del eje neutro:

$$\int_{F_0} y^2 \, dF_0 = J_n^0 \qquad [14.24]$$

de donde reemplazando este valor obtenemos:

$$\frac{K}{R} J_n^0 = M, \qquad [14.25]$$

expresión que nos permite despejar el valor de K:

$$K = \frac{M}{J_n^0} R. \qquad [14.26]$$

Finalmente, introduciendo este valor en la [14.7] obtenemos:

$$\sigma = \frac{M}{J_n^0} \cdot \frac{R}{r-y} y. \qquad [14.27]$$

En la expresión anterior, la única variable es y, que debe introducirse con el signo que corresponda a las fibras consideradas, lo mismo que M, al que corresponde el signo del momento flexor solicitante, mientras que las restantes magnitudes, que son valores constantes, son todas positivas.

En el caso de la figura 14.4, donde el momento flexor es positivo, el signo de σ depende del de y.

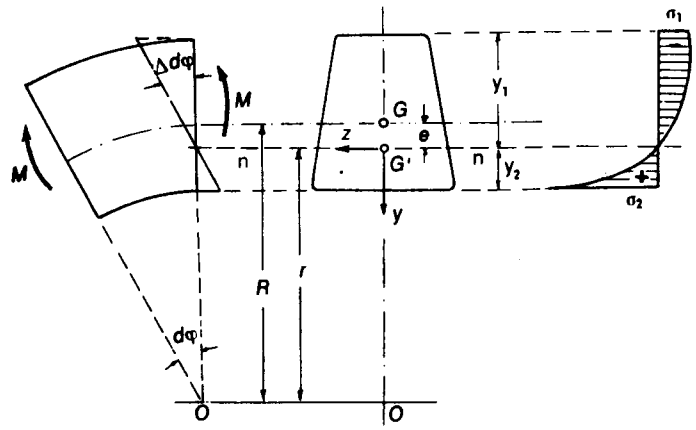


Fig. 14.4

Para $y = 0$ (eje neutro) la [14.27], como es lógico, se anula. En cambio, para $y = +r$, la tensión teóricamente alcanzaría un valor infinito y el diagrama de tensiones resulta asintótico al eje normal a la sección que pasa por el centro de curvatura. Los valores extremos de σ ocurren en los bordes de la sección y sus expresiones son:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{M}{J_n^0} \cdot \frac{R}{r+y_1} y_1 \\ \sigma_2 &= \frac{M}{J_n^0} \cdot \frac{R}{r-y_2} y_2 \end{aligned}\right\} \qquad [14.28]$$

donde y_1 e y_2 son las ordenadas extremas y han sido introducidas en las fórmulas con sus correspondientes signos.

Si e es la distancia del eje neutro al baricentro de la sección, la tensión en las fibras en correspondencia con este último la obtenemos reemplazando en la [14.27]:

$$y = -e, \qquad [14.29]$$

$$\sigma_G = -\frac{M}{J_n^0} \cdot \frac{R}{r+e} e, \qquad [14.30]$$

pero teniendo en cuenta que:

$$|R| = |r| + |e|, \qquad [14.31]$$

llegamos finalmente a:

$$\sigma_G = -\frac{M}{J_n^0} e. \qquad [14.32]$$

b) *Solución gráfica*

La solución gráfica que desarrollaremos a continuación, se refiere exclusivamente a la determinación de la sección trasformada, pues una vez conocida ésta, la determinación de su baricentro y el cálculo de las tensiones, se realiza en la misma forma descripta en el apartado (a) para la solución numérica.

El procedimiento se basa en la interpretación gráfica de la ecuación [14.18]. Si dividimos por dos ambos miembros resulta:

$$\frac{b'_y}{2} = \frac{R}{r_y} \cdot \frac{b_y}{2} \qquad [14.33]$$

Consideremos en la figura 14.5 un nivel y de radio de curvatura r_y que define en la sección un ancho:

$$\overline{CC} = b_y. \qquad [14.34]$$

Proyectando el extremo C desde el centro de curvatura O sobre el eje baricéntrico obtenemos C' que proyectamos en C'' sobre C–C.

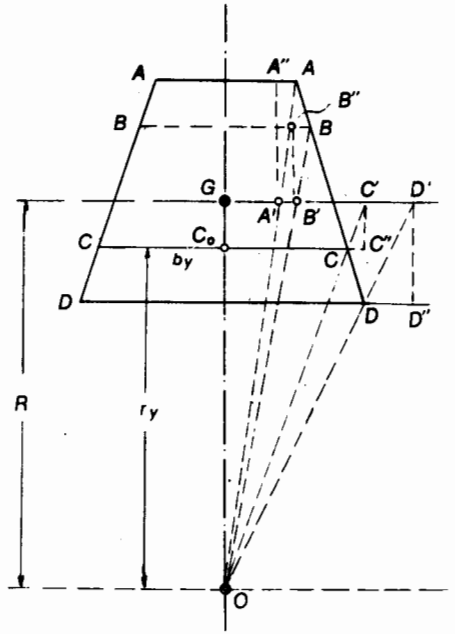


Fig. 14.5

Resultan así los triángulos OC_0C y OGC', semejantes por construcción. En ellos se cumple:

$$\frac{\overline{OG}}{\overline{OC_0}} = \frac{\overline{GC'}}{\overline{C_0C}} \qquad [14.35]$$

y como:

$$\overline{GC'} = \overline{C_0C''} \qquad [14.36]$$

reemplazando:

$$\frac{\overline{OG}}{\overline{OC_0}} = \frac{\overline{C_0C''}}{\overline{C_0C}} \qquad [14.37]$$

y despejando $\overline{C_0C''}$:

$$\overline{C_0C''} = \frac{\overline{C_0C} \cdot \overline{OG}}{\overline{OC_0}}, \qquad [14.38]$$

pero:

$$\left.\begin{aligned} \overline{C_0\,C} &= \frac{b_y}{2} \\ \overline{O\,G} &= R \\ \overline{O\,C_0} &= r_y \end{aligned}\right\} \qquad [14.39]$$

de donde, substituyendo en [14.38]:

$$\overline{C_0\,C''} = \frac{b_y}{2}\cdot\frac{R}{r_y}, \qquad [14.40]$$

que comparada con la [14.33] nos dice que:

$$\overline{C_0\,C''} = \frac{b'_y}{2}, \qquad [14.41]$$

y en consecuencia:

$$b'_y = 2\,\overline{C_0\,C''}. \qquad [14.42]$$

Repitiendo la construcción para una serie de niveles, tal como se observa en figura 14.5, es posible determinar rápidamente el contorno de la sección trasformada.

14 . 4 . Solución de Winkler–Bach.

La solución denominada de Winkler–Bach, se basa en la determinación del valor de K que ha de introducirse en la expresión [14.7]. En esta expresión hay dos incógnitas: K y r, radio de curvatura del eje neutro que, una vez conocido, determina su posición.

Para resolver el problema, calcularemos en primer lugar la integral que aparece en la ecuación [14.10]:

$$I_1 = \int_F \frac{y^2\,dF}{r-y}. \qquad [14.43]$$

Desarrollando el cociente, la integral se transforma en:

$$\int_F \frac{y^2\,dF}{r-y} = -\int_F\left(y - \frac{ry}{r-y}\right)dF = -\int_F y\,dF + r\int_F \frac{y}{r-y}\,dF. \qquad [14.44]$$

Pero de acuerdo con la [14.8]

$$\int_F \frac{y\,dF}{r-y} = 0, \qquad [14.45]$$

y por otra parte, si e es la distancia entre el baricentro G y el eje neutro n–n (fig. 14.2), teniendo en cuenta su signo y que $\int_F y\,dF$ representa el momento de primer orden del área de la sección respecto del eje neutro, resulta:

$$-\int_F y\,dF = Fe, \qquad [14.46]$$

donde F es el área de la sección.

En consecuencia:

$$I_1 = Fe \qquad [14.47]$$

valor que reemplazado en [14.10] nos conduce a:

$$M = KFe, \qquad [14.48]$$

o también:

$$K = \frac{M}{Fe}, \qquad [14.49]$$

y finalmente, introduciendo este valor de K en la [14.7]:

$$\sigma = \frac{y}{r-y}\cdot\frac{M}{Fe} \qquad [14.50]$$

Esta expresión contiene como única incógnita la excentricidad del eje neutro e, pues, de acuerdo con la figura 14.2 y teniendo en cuenta los signos correspondientes, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} r &= R - e \\ R &= r + e \end{aligned}\right\} \qquad [14.51]$$

En consecuencia, y de acuerdo con la notación de la figura 14.2:

$$\left.\begin{aligned} y &= y' - e \\ r - y &= r - y' + e = R - y' \end{aligned}\right\} \qquad [14.52]$$

Consideremos ahora la ecuación [14.8] y evaluemos la integral que en ella aparece. Teniendo en cuenta las expresiones [14.52] obtenemos:

$$\int_F \frac{y}{r-y}\,dF = \int_F \frac{y'-e}{r-y}\,dF = \int_F \frac{y'\,dF}{R-y'} - e\int_F \frac{dF}{R-y'} = 0. \qquad [14.53]$$

En esta expresión, el cociente $y'/(R-y')$, si bien es variable, es un factor numérico que afecta a dF, de modo que podemos escribir:

$$\int_F \frac{y'}{R-y'}\,dF = \int_F d\,(\alpha F) = \alpha F \qquad [14.54]$$

En cuanto a la integral afectada del signo (−) en la [14.53] puede escribirse:

$$\int_F \frac{dF}{R-y'} = \frac{1}{R}\int_F \left(1 + \frac{y'}{R-y'}\right) dF \qquad [14.55]$$

o también:

$$\int_F \frac{dF}{R-y'} = \frac{F}{R} + \frac{1}{R}\int_F \frac{y'\,dF}{R-y'}. \qquad [14.56]$$

Pero la integral del 2o. miembro no es otra que la [14.54]. En consecuencia:

$$\int_F \frac{dF}{R-y'} = \frac{F}{R} + \frac{\alpha F}{R} = (1+\alpha)\frac{F}{R}, \qquad [14.57]$$

luego, reemplazando en la [14.8] los valores calculados, tenemos:

$$\int_F \frac{y\,dF}{r-y} = \alpha F - (1+\alpha)\frac{F}{R}e = 0, \qquad [14.58]$$

de donde:

$$e = \frac{\alpha}{(1+\alpha)}R. \qquad [14.59]$$

Si en la [14.50] reemplazamos los valores dados por las [14.52] obtenemos:

$$\sigma = \frac{y}{r-y}\cdot\frac{M}{Fe} = \frac{y'-e}{R-y'}\cdot\frac{M}{Fe} = \frac{M}{(R-y')F}\left(\frac{y'}{e} - 1\right). \qquad [14.60]$$

Teniendo en cuenta la [14.59] resulta:

$$\frac{y'}{e} - 1 = \frac{y'(1+\alpha)}{\alpha R} - 1 = \frac{y' + \alpha(y' - R)}{\alpha R}, \qquad [14.61]$$

o también:

$$\frac{y'}{e} - 1 = \frac{y' - \alpha(R-y')}{\alpha R}. \qquad [14.62]$$

Valor que reemplazado en la [14.60] nos conduce a:

$$\sigma = \frac{M}{(R-y')F}\cdot\frac{y' - \alpha(R-y')}{\alpha R} = \frac{M}{(R-y')F}\left(\frac{y'}{\alpha R} - \frac{R-y'}{R}\right) \qquad [14.63]$$

y finalmente a:

$$\sigma = \frac{M}{FR}\left[\frac{y'}{(R-y')\alpha} - 1\right], \qquad [14.64]$$

donde:

$$\alpha = \frac{1}{F}\int_F \frac{y'\,dF}{R-y'}. \qquad [14.65]$$

La ventaja de la fórmula [14.64] es evidente por cuanto, para calcular la tensión en una fibra determinada, no es necesario conocer *a priori* la posición del eje neutro, es decir, el valor e, ya que las distancias y' se miden en este caso a partir del eje baricéntrico paralelo al eje neutro. Sólo se requiere evaluar la integral [14.65] que da el valor de α, característico para cada forma de sección.

Discutiremos a continuación la expresión [14.64].

Para $y' = e$, en correspondencia con el eje neutro, resulta:

$$\frac{y'}{(R-y')\alpha} = \frac{e}{(R-e)\alpha}, \qquad [14.66]$$

y reemplazando el valor de e dado por la [14.59]:

$$\frac{y'}{(R-y')\alpha} = \frac{R\alpha}{\alpha(1+\alpha)R\left(1 - \dfrac{\alpha}{1+\alpha}\right)} = 1, \qquad [14.67]$$

con lo cual el término entre paréntesis de la [14.64] se anula y resulta como es lógico:

$$\sigma = 0. \qquad [14.68]$$

Si $y' = 0$, o sea, para las fibras ubicadas sobre la paralela baricéntrica al eje neutro, resulta de la [14.64]:

$$\sigma_G = -\frac{M}{FR}. \qquad [14.69]$$

En el caso límite teórico para el cual:

$$y' \to R, \qquad [14.70]$$

resulta de la [14.64] que:

$$\sigma \to \infty, \qquad [14.71]$$

es decir que el diagrama de tensiones normales es asintótico al eje normal a la sección que pasa por su centro de curvatura.

A la misma conclusión habíamos llegado al discutir la solución de *Rèsal*. de la sección trasformada.

Si y_1' e y_2' son las ordenadas extremas (veáse figura 14.2), las tensiones límites resultan ser:

a) *borde superior:* $y' = y_1' < 0$

$$\sigma_1 = -\frac{M}{FR}\left[\frac{y_1'}{(R + y_1')\,\alpha} + 1\right] \qquad [14.72]$$

b) *borde inferior:* $y' = y_2' > 0$

$$\sigma_2 = \frac{M}{FR}\left[\frac{y_2'}{(R - y_2')\,\alpha} - 1\right] \qquad [14.73]$$

Para valores intermedios de y', se presentan los casos siguientes:

y'	$\dfrac{y'}{(R-y')\alpha}$	σ
$y_1' < y' < 0$	<0	<0
$0 < y' < e$	<1	<0
$e < y' < y_2'$	>1	>0

El diagrama representativo de la distribución de tensiones es el que, aproximadamente, muestra la figura 14.6, similar como es lógico, al de figura 14.4, por cuanto ambos corresponden a la interpretación gráfica de dos procedimientos distintos para la resolución de un mismo problema.

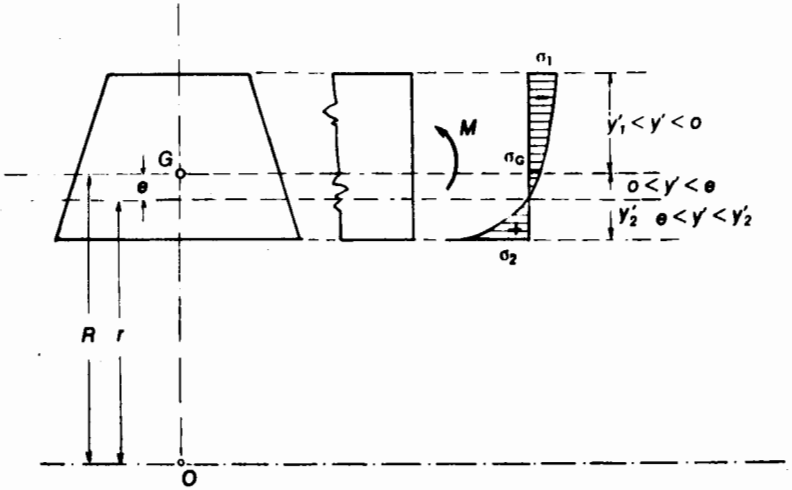


Fig. 14.6

El caso límite en que $R = \infty$, corresponde a la flexión simple normal en piezas prismáticas, y entonces debemos tener que:

$$\sigma = \frac{M}{FR}\left(\frac{y'}{(R-y')\alpha} - 1\right) = \frac{M}{J_g}y'. \qquad [14.74]$$
$$R \to \infty$$

En efecto, la expresión anterior podemos escribirla como sigue:

$$\sigma = \frac{M}{FR\,(R-y')\,\alpha}y' - \frac{M}{FR}. \qquad [14.75]$$

Ahora bien, consideremos la expresión:

$$\int_F \frac{y'^2\,dF}{R-y'} = -\left[\int_F y'\,dF - \int_F \frac{Ry'}{R-y'}\,dF\right] =$$
$$= -\int_F y'\,dF + R\int_F \frac{y'}{R-y'}\,dF. \qquad [14.76]$$

De las dos últimas integrales, la primera es nula por corresponder al momento de primer orden de la sección respecto de un eje baricéntrico. En cuanto a la segunda, es idéntica salvo el factor R, a la [14.54] y en consecuencia:

$$\int_F \frac{y'^2\,dF}{R-y'} = R\alpha F. \qquad [14.77]$$

Reemplazando en el primer término del segundo miembro de la [14.75] $R\alpha F$ por su igual de [14.77]:

$$\sigma = \frac{My'}{(R-y')\displaystyle\int_F \frac{y'^2\,dF}{R-y'}} - \frac{M}{FR}, \qquad [14.78]$$

o también:

$$\sigma = \frac{M\,y'}{\left(1-\dfrac{y'}{R}\right)\displaystyle\int_F \frac{y'^2\,dF}{1-(y'/R)}} - \frac{M}{FR}. \qquad [14.79]$$

Cuando $R \to \infty$, es decir, cuando el eje de la pieza tiende a ser recto, M/FR e y'/R se anulan y la expresión anterior se trasforma en:

$$\sigma = \frac{My'}{\int_F y'^2\,dF} = \frac{M}{J_g}y', \qquad [14.80]$$

que no es otra que la ley de distribución de tensiones normales de piezas de eje recto.

Cuando el radio de curvatura es muy grande y se cumple:

$$y' \ll R, \qquad [14.81]$$

puede aceptarse sin mayor error que:

$$R - y' \cong R, \qquad [14.82]$$

y en consecuencia de la [14.77] resulta:

$$R\alpha F \cong \frac{1}{R}\int_F y'^2\, dF = \frac{J_g}{R} \qquad [14.83]$$

de donde:

$$\alpha = \frac{J_g}{FR^2}, \qquad [14.84]$$

valor que reemplazado en [14.64] y teniendo en cuenta que hemos supuesto $R - y' \cong R$, nos da:

$$\sigma = \frac{M}{FR}\left(\frac{FR^2 y'}{J_g R} - 1\right), \qquad [14.85]$$

o también:

$$\sigma = \frac{M}{J_g} y' - \frac{M}{FR}, \qquad [14.86]$$

es decir, la fórmula de la flexión simple normal, afectada del término correctivo M/FR.

Esta fórmula puede utilizarse con suficiente aproximación cuando se cumple que:

$$0{,}10 \leqslant \frac{h}{R} \leqslant 0{,}20, \qquad [14.87]$$

donde h es la altura de la sección.

Si $h/R < 0{,}10$, es posible utilizar solamente el primer término de la [14.86] suponiendo con ello la pieza del eje recto, sin mayor error.

En cambio, cuando $h/R > 0{,}20$, es necesario recurrir a la fórmula exacta sea a la que corresponde a la solución de *Rèsal* o la de *Winkler–Bach*, pues de lo contrario, el error cometido excede de los límites admitidos.

14 . 5 . Determinación analítica del coeficiente α

La determinación del valor del coeficiente α puede efectuarse tanto gráfica como analíticamente. La determinación gráfica es de interés para aquellas

secciones cuyo contorno no responde a una ley determinada. En cambio, la solución analítica, mucho más expeditiva, es de aplicación en aquellas secciones que responden a formas geométricas definidas. Desarrollaremos a continuación, la determinación del valor de α para las secciones de formas geométricas más comunes en la práctica para ocuparnos luego de la forma de encarar gráficamente la determinación del valor de α.

14 . 5 . 1 . Coeficiente α para la sección rectangular

Sea la sección rectangular de figura 14.7, de ancho b y altura h, donde:

$$\left.\begin{aligned} dF &= b \cdot dy' \\ F &= bh \end{aligned}\right\} \qquad [14.88]$$

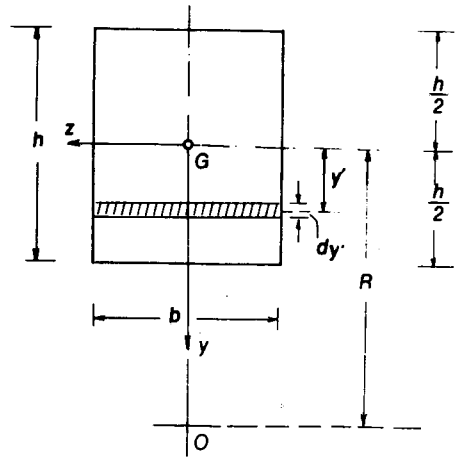


Fig. 14.7

valores que reemplazados en la expresión [14.65] nos dan:

$$\alpha = \frac{1}{bh}\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{y' b\, dy'}{R - y'} \qquad [14.89]$$

o también:

$$\alpha = -\frac{1}{h}\left[\int_{-h/2}^{+h/2} dy' - R\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{dy'}{R - y'}\right] \qquad [14.90]$$

e integrando:

$$\alpha = -1 + \frac{R}{h} \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} \qquad [14.91]$$

o también:

$$\alpha = -1 + \frac{R}{h} \ln \frac{1 + \frac{h}{2R}}{1 - \frac{h}{2R}} \qquad [14.92]$$

Desarrollando el logaritmo en serie de potencias tenemos:

$$\ln \frac{1 + \frac{h}{2R}}{1 - \frac{h}{2R}} = \frac{h}{R}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2R}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2R}\right)^4 + \cdots\right] \qquad [14.93]$$

Si R es suficientemente grande con relación a h, altura de la sección, basta tomar los dos primeros términos de la serie, pues los restantes son despreciables. En consecuencia, reemplazando en [14.92] resulta:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &\cong -1 + \left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2R}\right)^2\right] \\ \alpha &\cong \frac{h^2}{12R^2} \end{aligned}\right\} \qquad [14.94]$$

14.5.2. Coeficiente α para la sección circular llena

Para la sección circular llena se tiene:

$$dF = b_{y'}\, d_{y'} \qquad [14.95]$$

y si ρ es el radio del círculo resulta:

$$b_{y'} = 2\sqrt{\rho^2 - y'^2} \qquad [14.96]$$

En consecuencia, por ser $F = \pi\rho^2$:

$$\alpha = \frac{2}{\pi\rho^2} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{y'\sqrt{\rho^2 - y'^2}\, dy'}{R - y'} \qquad [14.97]$$

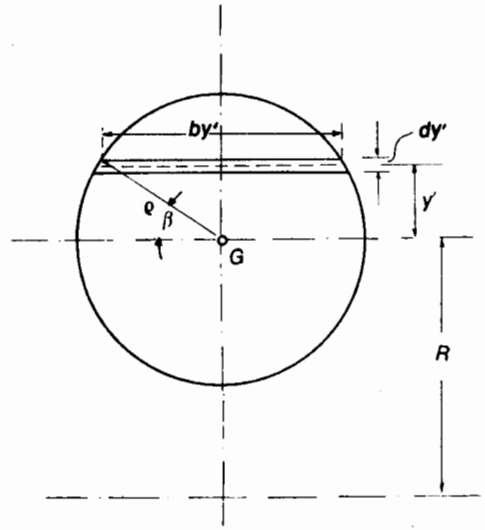


Fig. 14.8

haciendo:

$$y' = \rho \operatorname{sen} \beta, \qquad [14.98]$$

la [14.97] se trasforma en:

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}\beta \cos^2\beta\, d\beta}{(R/\rho) - \operatorname{sen}\beta} \qquad [14.99]$$

Reemplazando $\cos^2\beta = 1 - \operatorname{sen}^2\beta$:

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}^3\beta}{(R/\rho) - \operatorname{sen}\beta}\, d\beta \qquad [14.100]$$

o también:

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\operatorname{sen}^2\beta + \frac{R}{\rho}\operatorname{sen}\beta + \left(\frac{R^2}{\rho^2} - 1\right) + \frac{\frac{R}{\rho}\left(\frac{R^2}{\rho^2} - 1\right)}{\operatorname{sen}\beta - (R/\rho)}\right] d\beta \qquad [14.101]$$

que integrada nos da finalmente:

$$\alpha = 1 + 2\left(\frac{R^2}{\rho^2} - 1\right) - 2\frac{R}{\rho}\sqrt{\frac{R^2}{\rho^2} - 1} \qquad [14.102]$$

14.5.3. Coeficiente α para la sección triangular

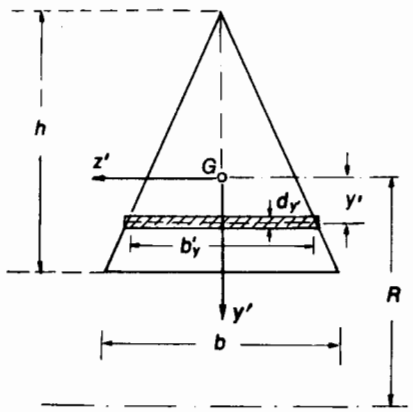


Fig. 14.9

En el triángulo de figura 14.9 se tiene:

$$dF = b'_y\, d'_y \qquad [14.103]$$

y

$$b'_y = \frac{2}{3}b + y'\frac{b}{h} \qquad [14.104]$$

En consecuencia resulta:

$$\alpha = \frac{1}{F}\int_F \frac{y'\,dF}{R - y'} = \frac{2}{bh}\int_{-2/3\,h}^{h/3} \frac{y'\left(\frac{2}{3}b + y'\frac{b}{h}\right)}{R - y'}\,dy' \qquad [14.105]$$

$$\alpha = \frac{4}{3h}\int_{-2/3\,h}^{h/3} \frac{y'}{R - y'}\,dy' + \frac{2}{h^2}\int_{-2/3\,h}^{h/3} \frac{y'^2}{R - y'}\,dy'. \qquad [14.106]$$

Integrada la expresión [14.107], luego de una serie de trasformaciones, nos conduce finalmente a:

$$\alpha = 2\frac{R}{h}\left(\frac{2}{3} + \frac{R}{h}\right)\ln\left|\frac{1 + \frac{2h}{3R}}{1 - \frac{h}{3R}}\right| - 2\frac{R}{h} - 1\,. \qquad [14.107]$$

14.5.4. Coeficiente α para la sección elíptica

Sea la sección elíptica de figura 14.10, con su eje mayor coincidente con la línea de fuerzas. Si $h/2$ y $b/2$ son los semiejes de la elipse:

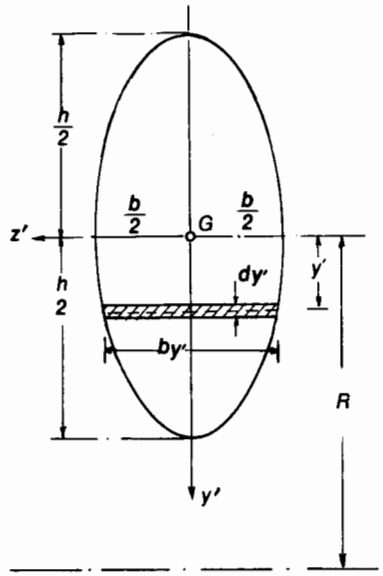


Fig. 14.10

la ecuación del contorno de la sección será:

$$\frac{4z'^2}{b^2} + \frac{4y'^2}{h^2} = 1\,, \qquad [14.108]$$

de donde:

$$z' = \pm\frac{b}{2}\sqrt{1 - \frac{4y'^2}{h^2}}\,, \qquad [14.109]$$

$$b_{y'} = b\sqrt{1 - \frac{4y'^2}{h^2}}\,, \qquad [14.110]$$

y

$$dF = b_y' \, d_y' \, . \qquad [14.111]$$

En consecuencia la expresión de α resulta ser para este caso. teniendo en cuenta que para la elipse $F = \pi bh/4$

$$\alpha = \frac{4}{\pi bh} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{y' b_y' d_{y'}}{R - y'} \, , \qquad [14.112]$$

o también:

$$\alpha = \frac{4}{\pi h} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{y' \sqrt{1 - (4y'^2/h^2)}}{R - y'} \, dy' \qquad [14.113]$$

Esta expresión, integrada, nos da finalmente:

$$\alpha = 1 + 2\left(4\frac{R^2}{h^2} - 1\right) - 4\frac{R}{h}\sqrt{\frac{4R^2}{h^2} - 1} \, . \qquad [14.114]$$

Si la línea de fuerzas coincide con el eje menor de la elipse, la fórmula indicada para la determinación de α será la [14.114] reemplazando únicamente h por b.

El valor de α correspondiente a otras formas de sección ha sido determinado analíticamente por *Wilson* y *Quereau*. En *Advanced Mechanics of Materials* de *Seely–Smith*, figura una tabla con las expresiones correspondientes a catorce secciones distintas (incluidas las que hemos analizado nosotros) con la única diferencia que la función α se la designa con Z.

14 . 6 . Determinación gráfica del coeficiente α

Para ciertas formas de secciones, en especial aquellas cuyo contorno no responde a una ley determinada, la determinación del valor del coeficiente α resulta prácticamente imposible, siendo necesario recurrir a procedimientos gráficos o gráfico–numéricos.

A continuación desarrollaremos un procedimiento gráfico, que permite determinar con relativa facilidad el valor de α para una sección cualquiera.

Supongamos la sección de figura 14.11, cuyo centro de curvatura sea O, y dividámosla en fajas paralelas de espesor $\Delta y'$. Determinemos los anchos medios b_y' de cada faja y proyectemos desde O, centro de curvatura los extremos A_i' sobre el eje baricéntrico en A_i''.

Proyectando ahora A_i'' sobre A_iA_i' en A_i''' obtenemos un segmento:

$$\overline{A_i' A_i'''} = z \, , \qquad [14.115]$$

que llevamos, con su signo, horizontalmente a partir de un eje E–E.

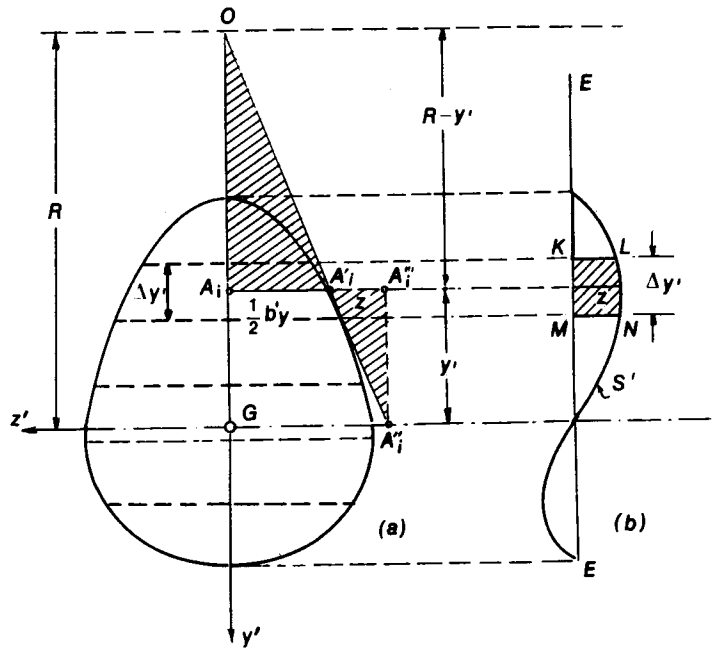


Fig. 14.11

De la comparación de los triángulos $\overset{\triangle}{OA_i A_i'}$ y $\overset{\triangle}{A_i'' A_i''' A_i'}$

$$\frac{\overline{OA_i}}{\overline{A_iA_i'}} = \frac{\overline{A_i'' A_i'''}}{\overline{A_i' A_i'''}} \, , \qquad [14.116]$$

pero, con la notación de la figura:

$$\left.\begin{aligned} \overline{OA_i} &= R - y' \\ \overline{A_iA_i'} &= \tfrac{1}{2}\, b_{y'} \\ \overline{A_i'' A_i'''} &= y' \\ \overline{A_i' A_i'''} &= z \end{aligned}\right\} \qquad [14.117]$$

de donde reemplazando:

$$\frac{R-y'}{\frac{1}{2}b_y'}=\frac{y'}{z} \qquad [14.118]$$

de donde:

$$z=\frac{1}{2}b_y'\frac{y'}{R-y'}\,. \qquad [14.119]$$

Repitiendo la operación con las restantes fajas de espesor $\Delta y'$ el lugar geométrico de los extremos de los segmentos z nos define una curva S que como es fácil de observar en la figura, se anula para los extremos de la sección y en correspondencia con el eje baricéntrico de la misma.

Consideremos ahora el elemento de superficie $KLNM$ delimitado por la curva S, el eje E–E y el ancho de faja $\Delta y'$.

Su área valdrá:

$$\Delta\Omega \cong z\,\Delta y', \qquad [14.120]$$

y el área total encerrada por la curva S y el eje E–E:

$$\Omega=\sum_1^n \Delta\Omega=\sum_1^n z\,\Delta y' \qquad [14.121]$$

Pero de acuerdo con la [14.119]:

$$\Omega=\sum_1^n \frac{1}{2}\frac{b_y' y'\,\Delta y'}{R-y'}=\frac{1}{2}\sum_1^n \frac{b_y' y'\,\Delta y'}{R-y'} \qquad [14.122]$$

y

$$2\Omega=\sum_1^n \frac{b_y' y'\,\Delta y'}{R-y'} \qquad [14.123]$$

pero, si F es el área de la sección, resulta:

$$\Delta F=b_y'\,\Delta y', \qquad [14.124]$$

luego:

$$2\Omega=\sum_1^n \frac{y'\,\Delta F}{R-y'} \qquad [14.125]$$

y dividiendo ambos miembros por F, área de la sección:

$$\frac{2\Omega}{F}=\frac{1}{F}\sum_1^n \frac{y'\,\Delta F}{R-y'} \qquad [14.126]$$

Ahora bien, el segundo miembro es la expresión en términos finitos, de:

$$\alpha=\frac{1}{F}\int_F \frac{y'\,dF}{R-y'} \qquad [14.127]$$

en consecuencia resulta:

$$\alpha=\frac{2\Omega}{F} \qquad [14.128]$$

Es evidente que, cuanto mayor sea el número de fajas en que se divida la sección, tanto mayor será la aproximación alcanzada en la determinación del valor de α.

14.7. Piezas solicitadas axilmente

Supongamos que la sección de figura 14.12 perteneciente a una pieza curva de radio de curvatura R, se encuentre solicitada por una fuerza normal N aplicada en el baricentro de la sección.

En este caso, las expresiones [14.8] y [14.10] se transforman en:

$$\int_F \sigma\,dF=K\int_F \frac{y\,dF}{r-y}=N \qquad [14.129]$$

$$\int_F \sigma y\,dF=K\int_F \frac{y^2\,dF}{r-y}=Ne \qquad [14.130]$$

Dividiendo miembro a miembro resulta:

$$\frac{\int_F \frac{y^2\,dF}{r-y}}{\int_F \frac{y\,dF}{r-y}}=e, \qquad [14.131]$$

y de acuerdo con las [14.52]:

$$\frac{\int_F \frac{(y'-e)^2\,dF}{R-y'}}{\int_F \frac{(y'-e)\,dF}{R-y'}}=e \qquad [14.132]$$

Desarrollando las integrales tenemos:

$$\frac{\int_F \frac{y'^2\,dF}{R-y'}-2e\int_F \frac{y'\,dF}{R-y'}+e^2\int \frac{dF}{R-y'}}{\int_F \frac{y'\,dF}{R-y'}-e\int \frac{dF}{R-y'}}=e \qquad [14.133]$$

Pero de acuerdo con las [14.54] y [14.57] la [14.133] se trasforma en:

$$\frac{\displaystyle\int_F \frac{y'^2\,dF}{R-y'} - 2e\alpha F + e^2(1+\alpha)\frac{F}{R}}{\alpha F - e(1+\alpha)\dfrac{F}{R}} = e, \qquad [14.134]$$

o también:

$$\int_F \frac{y'^2\,dF}{R-y'} = 3e\alpha F - 2e^2(1+\alpha)\frac{F}{R} \qquad [14.135]$$

Por otra parte:

$$\int_F \frac{y'^2\,dF}{R-y'} = -\int_F y'\,dF + R\int_F \frac{y'}{R-y'}\,dF, \qquad [14.136]$$

pero $\int_F y'\,dF = 0$, luego:

$$\int_F \frac{y'^2\,dF}{R-y'} = R\alpha F, \qquad [14.137]$$

valor que reemplazado en [14.135] nos da:

$$R\alpha F = 3e\alpha F - 2e^2(1+\alpha)\frac{F}{R}. \qquad [14.138]$$

Despejando α de la [14.59] y reemplazando en la [14.138] llegamos finalmente a la igualdad:

$$Re = e^2, \qquad [14.139]$$

igualdad que se satisface únicamente si:

$$R = e. \qquad [14.140]$$

Como e es la distancia del baricentro al eje neutro de la sección y R el radio de curvatura de las fibras baricéntricas, al coincidir ambos valores, ello significa que, si una sección de una pieza curva se encuentra solicitada por una fuerza normal aplicada en el baricentro de la sección, esta gira en torno de un eje neutro que *pasa por el centro de curvatura.*

Veamos ahora a que conduce esta circunstancia en lo que respecta la distribución de tensiones, y consideremos para ello la sección de figura 14.12.

Al coincidir el eje neutro con el centro de curvatura, una sección tal como la $1-1$ gira en torno de aquel y pasa a ocupar la posición $1'-1'$ y una fibra genérica AA', de radio de curvatura r_y y longitud:

$$ds = r_y\,d\varphi, \qquad [14.141]$$

sufre un acortamiento (o alargamiento, según el signo de N).

$$\Delta ds = r_y\,\Delta d\varphi, \qquad [14.142]$$

El alargamiento específico resultante es:

$$\epsilon_y = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}, \qquad [14.143]$$

es decir, independiente del radio de curvatura de la fibra y, en consecuencia, constante para todas las fibras de la sección.

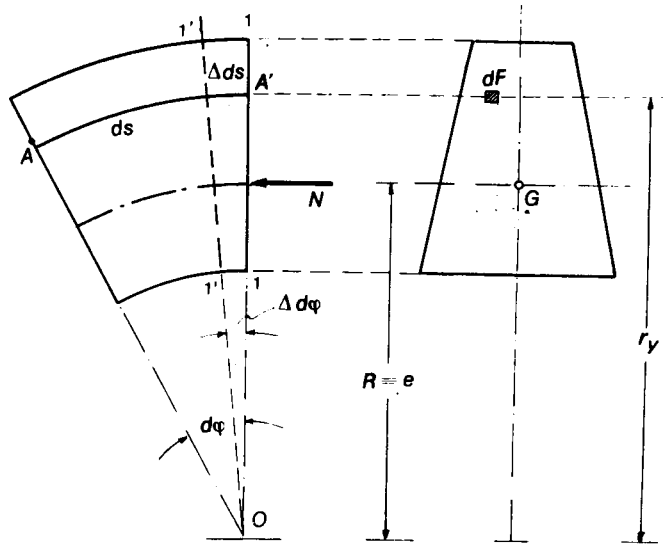


Fig. 14.12

Como, de acuerdo con la ley de Hooke:

$$\sigma_0 = E\,\epsilon_y, \qquad [14.144]$$

resulta para toda la sección:

$$\sigma_0 = \text{Cte.}, \qquad [14.145]$$

y de la [14.8]:

$$\int_F \sigma_0 \, dF = \sigma_0 \int_F dF = N \qquad [14.146]$$

y finalmente:

$$\sigma_0 = \frac{N}{F}. \qquad [14.147]$$

14 . 8 . Flexión compuesta en piezas de gran curvatura.

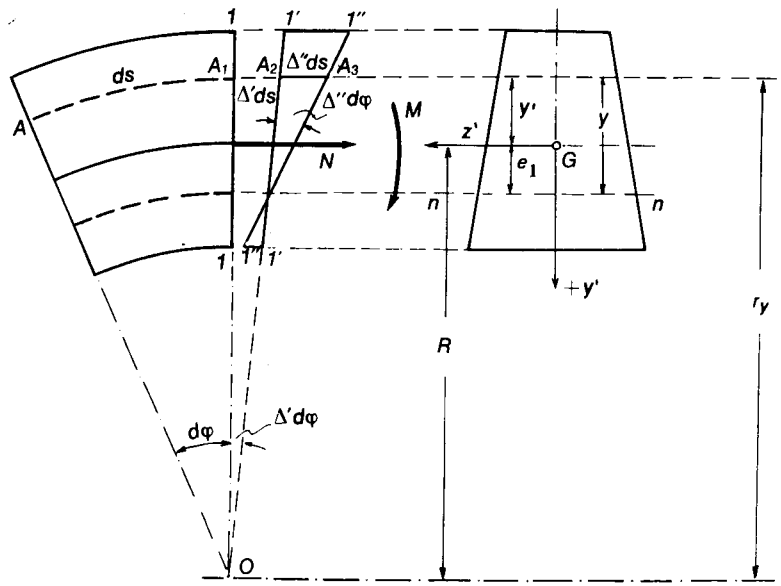


Fig. 14.13

Supongamos la sección de figura 14.13, sujeta a la acción de una fuerza axil N aplicada en el baricentro y un par flexor M.

De acuerdo con lo visto en el parágrafo anterior, por efecto de la fuerza normal N la sección $1-1$ gira en torno del centro de curvatura O y pasa a ocupar la posición $1'-1'$ y luego, por efecto del par, gira en torno del eje neutro $n-n$ y se dispone según $1''-1''$.

Una fibra tal como la $A-A_1$, de radio de curvatura r_y, cuya longitud es:

$$ds = r_y \, d\varphi, \qquad [14.148]$$

como consecuencia del efecto de N sufre un primer alargamiento:

$$\Delta' ds = r_y \, \Delta' d\varphi. \qquad [14.149]$$

y luego, por la acción del par, al girar el plano de la sección en torno de $n-n$, un segundo corrimiento:

$$\Delta'' ds = y \, \Delta'' d\varphi. \qquad [14.150]$$

El alargamiento específico total de la fibra AA, se compone de dos partes:

$$\epsilon = \epsilon' + \epsilon''. \qquad [14.151]$$

La primera es la originada por la deformación axil:

$$\epsilon' = \frac{\Delta' ds}{ds} = \frac{\Delta' d\varphi}{d\varphi} \qquad [14.152]$$

La segunda, es consecuencia de la flexión pero, para la misma, debemos tener presente que la longitud de la fibra no es más ds sino este valor incrementado de $\Delta' ds$:

$$\epsilon'' = \frac{\Delta'' ds}{ds + \Delta' ds} = \frac{y \, \Delta'' d\varphi}{r_y \, (d\varphi + \Delta' d\varphi)} \qquad [14.153]$$

En consecuencia:

$$\epsilon = \epsilon' + \epsilon'' = \frac{\Delta' d\varphi}{d\varphi} + \frac{y \, \Delta'' d\varphi}{r_y \, d\varphi \left(1 + \dfrac{\Delta' d\varphi}{d\varphi}\right)}, \qquad [14.154]$$

y de acuerdo con la ley de Hooke, la tensión resultante en las fibras situadas à la distancia y del eje neutro, será:

$$\sigma = E\epsilon = E \frac{\Delta' d\varphi}{d\varphi} + \frac{E y . \Delta'' d\varphi}{r_y \, d\varphi \left(1 + \dfrac{\Delta' d\varphi}{d\varphi}\right)}. \qquad [14.155]$$

Desde un punto de vista riguroso correspondería plantear las ecuaciones [14.8] a [14.10], introduciendo el valor de σ dado por la [14.155].

Pero si tenemos en cuenta que en el denominador del 2° término de la [14.155] puede hacerse sin mayor error:

$$1 + \frac{\Delta' d\varphi}{d\varphi} \simeq 1, \qquad [14.156]$$

la [14.155] se trasforma en:

$$\sigma = E \frac{\Delta' d\varphi}{d\varphi} + \frac{E y \Delta'' d\varphi}{r_y \, d\varphi} \qquad [14.157]$$

donde $E\,\Delta' d\varphi/d\varphi$ no es más que la [14.144] y el segundo término corresponde a la [14.6], es decir, a la tensión originada por la flexión que en este caso designaremos con σ_1. En consecuencia de la [14.157] resulta:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \qquad [14.158]$$

En la flexión compuesta de piezas de eje de gran curvatura es aplicable, pues, la ley de superposición de efectos, y es posible calcular las tensiones sumando las originadas por la solicitación axil con las debidas a la flexión. Se aplicará, en consecuencia, la fórmula:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{FR}\left[\frac{y'}{(R-y')\,\alpha} - 1\right] \qquad [14.159]$$

donde N, M e y' deben introducirse con el signo que corresponda.

Si llamamos e_0 la excentricidad de N respecto del baricentro de la sección, la [14.159] se trasforma en:

$$\sigma = \frac{N}{F}\left[1 + \frac{e_0}{R}\left(\frac{y'}{(R-y')\,\alpha} - 1\right)\right] \qquad [14.160]$$

Para flexión compuesta, el eje neutro ya no se encontrará más a la distancia e del baricentro, como en el caso de flexión pura, sino a una nueva distancia que llamaremos e_1.

Si en la [14.160] hacemos y' igual a la distancia del eje neutro al baricentro

$$y' = e_1 \qquad [14.161]$$

debe resultar $\sigma = 0$. En consecuencia:

$$\frac{N}{F}\left[1 + \frac{e_0}{R}\left(\frac{e_1}{(R-e_1)\,\alpha} - 1\right)\right] = 0, \qquad [14.162]$$

de donde:

$$e_1 = \frac{R^2}{e_0} \cdot \frac{\alpha}{(1+R\alpha)}, \qquad [14.163]$$

expresión en la que e_0 debe introducirse con el signo que le corresponda.

14.9. Tensiones radiales en vigas de gran curvatura

En los parágrafos precedentes nos hemos ocupado de la determinación de las tensiones normales en planos que pasan por el centro de curvatura de la pieza.

Pero en las piezas curvas, aparte de dichas tensiones existen otras, también normales, que actúan sobre planos concéntricos con el eje.

Sea una pieza de directriz circular (fig. 14.14) solicitada por flexión pura.

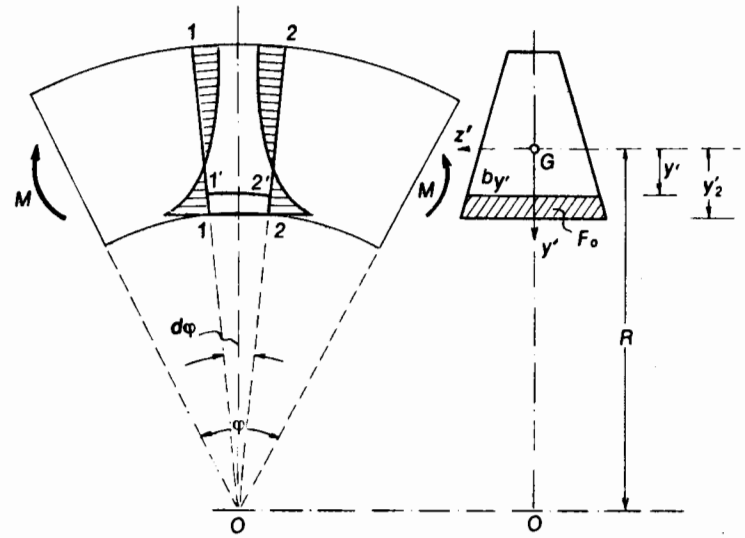


Fig. 14.14

En dos secciones *1–1* y *2–2* cuyo ángulo al centro sea $d\varphi$, los diagramas de tensiones serán aproximadamente los que muestra la figura 14.14.

Consideremos el elemento de volumen delimitado por la superficie curva inferior, la paralela a la distancia y' del baricentro y las dos secciones *1–1* y *2–2*.

Tanto la superficie curva inferior de la pieza, como la superior se encuentran libres de tensiones normales, porque no actúan sobre las mismas cargas exteriores, pero no ocurre lo mismo sobre la cara curva *1'–2'* donde, como veremos a continuación, aparecen tensiones normales de dirección radial, que denominaremos *tensiones radiales* σ_r. Supongamos aislado el elemento de volumen, y estudiemos su equilibrio (fig. 14.15).

Si F_0 es la superficie rayada de figura 14.14, las fuerzas T de figura 14.15 valen:

$$T = \int_{y'_2}^{y'} \sigma\, dF_0\,. \qquad [14.164]$$

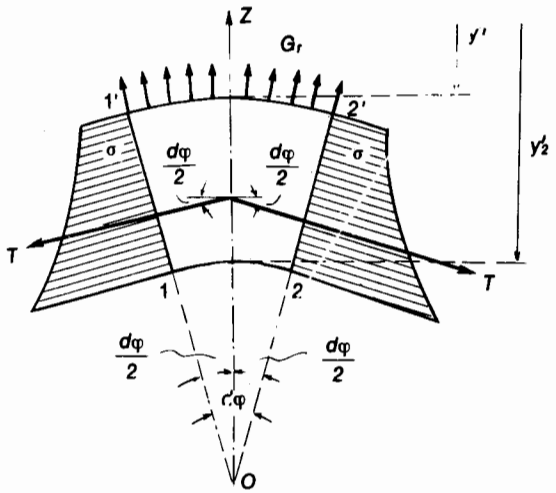


Fig. 14.15

y la fuerza Z resultante de las fuerzas elementales que actúan sobre la superficie curva $1'$–$2'$ de ancho $b_{y'}$ será:

$$Z = \sigma_r b_{y'} (R - y') \, d\varphi \qquad [14.165]$$

Proyectando sobre el eje y':

$$Z = 2T \operatorname{sen} \frac{d\varphi}{2}. \qquad [14.166]$$

como:

$$\operatorname{sen} \frac{d\varphi}{2} \simeq \frac{d\varphi}{2}, \qquad [14.167]$$

reemplazando resulta:

$$\sigma_r b_{y'} (R - y') \, d\varphi = T \, d\varphi, \qquad [14.168]$$

o también:

$$\sigma_r = \frac{T}{b_{y'} (R - y')}. \qquad [14.169]$$

En consecuencia, para conocer la ley de variación de σ_r es necesario previamente determinar el valor de T. Para ello, reemplazamos en la [14.164] σ por su igual de la [14.64]:

$$T = \int_{y'}^{y'_2} \frac{M}{FR} \left(\frac{y'}{(R - y')\,\alpha} - 1 \right) dF_0 \qquad [14.170]$$

$$T = -\frac{M}{FR} \int_{y'}^{y'_2} dF_0 + \frac{M}{FR\alpha} \int_{y'}^{y'_2} \frac{y'}{(R - y')} dF_0 \,. \qquad [14.171]$$

En la expresión [14.171] la primera integral representa el área F_0 rayada en figura 14.14. Dicha área es función de y' y a la vez de la forma de la sección.

En consecuencia podemos escribir:

$$-\frac{M}{FR} \int_{y'}^{y'_2} dF_0 = -\frac{M}{FR} F_0^{(y')} \,. \qquad [14.172]$$

En cuanto a la segunda integral, su contextura es la misma que la dada por la [14.54], con la única diferencia que varían los límites de integración. En consecuencia, procediendo de manera análoga resulta:

$$\int_{y'}^{y'_2} \frac{y'}{R - y'} dF_0 = \alpha_0 F_0^{(y')} \,. \qquad [14.173]$$

En consecuencia, resulta finalmente:

$$T = -\frac{M}{FR} F_0^{(y')} + \frac{M}{FR\alpha} \alpha_0 F_0^{(y')} \qquad [14.174]$$

o también:

$$T = \frac{M}{FR} F_0^{(y')} \left(\frac{\alpha_0}{\alpha} - 1 \right) \qquad [14.175]$$

con:

$$\alpha_0 = \frac{1}{F_0^{(y')}} \int_{y'}^{y'_2} \frac{y' \, dF_0}{R - y'} \qquad [14.176]$$

A título de ejemplo calcularemos a continuación las tensiones radiales para una pieza curva de sección rectangular (fig. 14.16).

Para este caso resulta:

$$\left.\begin{aligned} b_{y'} &= b = \text{Cte.} \\ y_2' &= \frac{h}{2} \\ dF_0 &= b\,dy' \\ F_0^{(y')} &= b\left(\frac{h}{2} - y'\right) \end{aligned}\right\} \qquad [14.177]$$

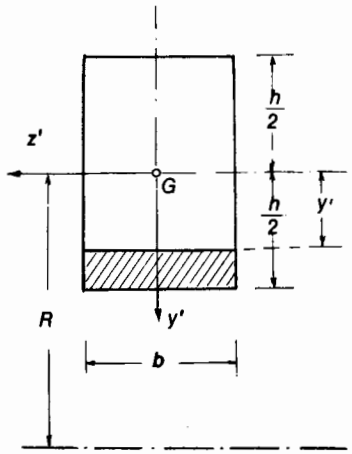


Fig. 14.16

Reemplazando en la [14.176]

$$\alpha_0 = \frac{1}{b\left(\frac{h}{2} - y'\right)} \int_{y'}^{h/2} \frac{by'dy'}{R - y'} \qquad [14.178]$$

La integral una vez evaluada resulta:

$$\int_{y'}^{h/2} \frac{y'\,dy'}{R - y'} = y' - \frac{h}{2} - R \ln \left| \frac{1 - \frac{h}{2R}}{1 - \frac{y'}{R}} \right| \qquad [14.179]$$

y en consecuencia:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\left(\frac{h}{2} - y'\right)} \left[y' - \frac{h}{2} + R \ln \left| \frac{1 - \frac{y'}{R}}{1 - \frac{h}{2R}} \right| \right] \qquad [14.180]$$

Para $y' = -h/2$, el valor de α_0 coincide con el de α dado por la [14.92], como puede constatarse fácilmente efectuando en la [14.180] la substitución correspondiente.

Con $F = bh$, y teniendo en cuenta además la [14.94] el valor de T resulta ser, luego de algunas trasformaciones:

$$T = \frac{12MR}{h^3} \left[R \ln \left| \frac{1 - \frac{y'}{R}}{1 - \frac{h}{2R}} \right| - \frac{h}{2}\left(1 - \frac{2y'}{h}\right)\left(1 + \frac{h^2}{12R^2}\right) \right] \qquad [14.181]$$

y finalmente, reemplazando en [14.169]:

$$\sigma_r = \frac{12M}{bh^3\left(1 - \frac{y'}{R}\right)} \left[R \ln \left| \frac{1 - \frac{y'}{R}}{1 - \frac{h}{2R}} \right| - \frac{h}{2}\left(1 - \frac{2y'}{h}\right)\left(1 + \frac{h^2}{12R^2}\right) \right] \qquad [14.182]$$

que nos da la ley de variación de σ_r en la altura de la sección. Como puede observarse la expresión [14.182] se anula para $y' = \pm h/2$ como es lógico que sea.

14 . 10 . Tensiones en vigas de secciones T, doble T y tubulares

Tanto la solución de Rèsal como la de Winkler–Bach, cuando se las aplica a secciones constituidas por combinaciones de rectángulos alargados, conducen a errores considerables en los valores de las tensiones circunferenciales.

Ello se debe a la circunstancia que en el caso de la sección doble T por ejemplo (fig. 14.17) las tensiones normales a la sección deforman las alas

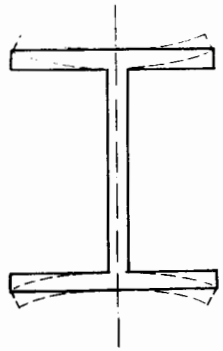


Fig. 14.17

radialmente, originando tensiones secundarias que alteran la distribución que resulta de aplicar las fórmulas desarrolladas en el presente capítulo.

El problema escapa a los alcances de la presente obra y remitimos al lector interesado a Seely–Smith[1] y muy especialmente a dos trabajos del *Prof. Ing. Julio Ricaldoni,* aparecidos en las *Memorias de las IX·Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural.*[2]

[1] *Advanced Mechanics of Materials.*

[2] Publicación de la Facultad de Ingeniería y Agrimensura, Montevideo 1964.

15. TEORÍAS DE ROTURA DE LOS CUERPOS

15 . 1 . Consideraciones generales

¿Cuáles son las causas que condicionan el comienzo de la fluencia y la rotura de un material? Tal es el título del capítulo V de la obra magistral[1] donde Mohr desarrolla su conocida teoría de rotura de los cuerpos.

Creemos perfectamente formulada la pregunta, sobre todo en la época en que Mohr desarrollaba su teoría (1906), pues desde que en 1776 Coulomb, hace más de 190 años, publicó un primer esbozo de teoría tratando de justificar las causas que conducen a la rotura de los cuerpos, no existía una respuesta clara al problema.

Se ha trabajado mucho al respecto y se han enunciado un sinnúmero de teorías relativas al tema. Con el objeto de justificarlas se han realizado innumerables ensayos de laboratorio, tendientes a justificar una u otra de las teorías relacionadas con este interesante tema de suma importancia para la técnica, en todos sus aspectos.

Las teorías con que se pretende justificar la rotura de los cuerpos se basan en distintos conceptos. A continuación enunciaremos las principales teorías de rotura reunidas en seis grupos fundamentales. Esta recopilación de teorías fue uno de los objetos de un "Seminario" que en 1946 organizó la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, bajo la dirección del Ing. *Francisco García Olano* y en la que participó el autor.

Las principales teorías de rotura pueden agruparse como sigue:

a) teorías basadas en tensiones,

b) teorías basadas en deformaciones específicas,

c) teorías basadas en tensiones tangenciales en particular,

d) teorías cuyo fundamento es la energía de deformación,

e) teorías empíricas varias,

f) teorías que se apoyan en la estructura de la materia.

[1] "Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenzen und den Bruch eines Materials? " Otto Mohr. *Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik.* Berlín, W.E. y Sohn, 3ra. ed. 1928.

En un interesante artículo sobre el tema, el Ing. Francisco García Olano efectuó un estudio detallado del cual, por considerarlo de interés, reproducimos la nómina de las distintas teorías de Rotura[1] con sus respectivos autores.

a) *Teorías basadas en tensiones*

01. Máxima tensión principal positiva (Galileo y Leibnitz).
02. Máxima tensión principal (positiva o negativa) (Rankine y Lamé).
03. Máxima tensión normal (Marin).
04. Máxima tensión principal combinada con la máxima tensión normal (Marin).

b) *Teorías basadas en deformaciones específicas*

05. Máxima deformación específica principal positiva (Poncelet y Saint Venant).
06. Máximas deformaciones específicas positivas y negativas (Grashof, Rèsal y Bach).
07. Máxima distorsión (Marin).
08. Máxima distorsión combinada con la máxima deformación específica (Marín).

c) *Teorías basadas en tensiones tangenciales en particular*

09. Máxima tensión tangencial (Saint Venant–Guest).
10. Teoría generalizada de Coulomb (frotamiento interno proporcional).
11. Teoría de Mohr (curva intrínseca).

d) *Teorías cuyo fundamento es la energía de deformación*

12. Máxima energía total de deformación (Beltrami–Haigh).
13. Máxima energía de distorsión (Huber–Hencky–von Mises).
14. Teoría que combina las energías de distorsión y deformación total.
15. Máxima energía de deformación cúbica (Marin).
16. Teoría de la energía de distorsión como función de la tensión normal media (Schleicher).

e) *Teorías empíricas varias*

17. Teoría de Saudel.

[1] Francisco García Olano, "El problema de la Rotura. Sus aspectos físicos." *Revista de la Unión Matemática Argentina.* Vol. XIV, págs. 371–88, Buenos Aires 1950.

18. Teoría de Wehage.
19. Teoría de la máxima deformación volumétrica (Marín).
20. Teoría de Becker.
21. Teoría de Noms para la madera de pino.
22. Teoría del comportamiento plástico de materiales no isótropos (Brandtzaeg).
23. Teoría de Griffith de las fisuras diminutas.

f) *Teorías que se apoyan en la estructura de la materia*

24. Grupo de teorías que parten de consideraciones técnicas, sobre las fuerzas atómicas o de energía superficial. Entre sus diversos autores mencionaremos a M. Polanyi, F. Zwicky; J. H. de Boers, R. Homoink y otros.

En realidad no puede asegurarse que exista una única teoría que justifique cómo y porqué rompen todos los materiales. Rigurosamente hablando, a cada material corresponde una teoría de rotura propia. No obstante ello y siempre refiriéndose a materiales isótropos, puede decirse que es posible reunirlos en dos grandes grupos: los materiales frágiles y los dúctiles. Estos responden en líneas generales a dos teorías de rotura: la teoría de Mohr para los primeros y la de *Huber–Hencky–von Mises,* para los segundos, aunque en cierto modo la teoría de Mohr pareciera ser más general.

15 . 2 . Concepto de rotura

Antes de entrar a considerar en detalle entre las 24 teorías enunciadas en el parágrafo anterior, aquellas más utilizadas en la práctica y compararlas con los resultados experimentales efectuados con el objeto de poner en claro el fenómeno de la rotura de los cuerpos, trataremos de establecer qué debemos entender por rotura de un material.

En este sentido los criterios sustentados por los distintos autores que se han ocupado del tema difieren.

En los países de habla anglosajona se utiliza el término *failure*.

Los alemanes emplean la palabra *Bruch* o *Bruchgefahr*[1].

Failure puede significar muchos conceptos según sea el material de que se trate, o aun para un mismo material: cambio inadmisible de forma con respecto al destino supuesto; falla; valor límite de una tensión, de una deformación, de

[1] Peligro de rotura.

una expresión de energía interna; una combinación de cualquiera de ellas.

Si consideramos para un material dado la curva tensión–deformación, algunos autores suponen que se ha alcanzado la rotura cuando se ha llegado:

a) al límite de proporcionalidad,

b) al límite de elasticidad,

c) al límite de fluencia,

d) al límite convencional de fluencia,

e) al límite de rotura.

Es evidente que alcanzar el límite de elasticidad o el límite de proporcionalidad no pueden considerarse criterios de rotura por cuanto, salvo en aquellos materiales cuyas características los aproximan a los idealmente frágiles, alcanzados dichos límites, existe un margen considerable hasta llegar a la rotura física.

Creemos como más correcto decir que un material ha alcanzado la rotura cuando llega a un límite de solicitación tal que las tensiones alcanzan un valor para el cual el material ya no es más utilizable para el fin al que se lo destina. En el caso de un material dúctil, la rotura (*failure* o *Bruch*) corresponde al límite de fluencia porque para ese material comienzan las grandes deformaciones sin aumento de solicitación. Para un material frágil prácticamente puede decirse que la rotura coincide con la rotura física.

Englobando ambos conceptos, diremos que un material ha alcanzado el estado de rotura cuando se produce lo que denominaremos la rotura estructural, o sea, el estado para el cual la estructura a la que pertenece el material no cumple más las condiciones para las que fuera proyectada.

Algunos autores, entre ellos Féodossiev[1], denominan las teorías de rotura "teorías del estado límite" entendiendo por estado límite aquel estado de tensión para el cual existe un cambio o variación cualitativos de las características de un material, o sea pasaje de un estado mecánico a otro. Es evidente que esta forma de definir la rotura de un material coincide con la que hemos mencionado anteriormente. En efecto, para un material dúctil, alcanzado el límite de fluencia, comienzan las grandes deformaciones incompatibles en una estructura con el funcionamiento de ella. Para uno frágil, prácticamente se alcanza la separación física en la sección más solicitada y ello conduce al colapso de la estructura.

Existen diversas formas de rotura, aparte de las mencionadas. Por considerarlo de interés, reproducimos a continuación los distintos tipos de rotura establecidos por *Orowan.*[2]

[1] V. Féodossiev, *Résistance des matériaux* (traducción francesa del original ruso).

[2] E. Orowan, "Reports on progress in physics", *Physical Society of London,* Vol. XII. Londres, 1949.

a) *Rotura frágil.* Ocurre en materiales absolutamente frágiles, por *clivaje* y bajo ciertas condiciones, en materiales dúctiles (piezas con entalladuras).

b) *Rotura por ruptura.* Ocurre en materiales dúctiles especialmente laminados y corresponde a una localización de la deformación plástica en una zona determinada.

c) *Rotura fibrosa.* Un ejemplo de esta forma de rotura es el que muestra el ensayo de tracción simple de una barra circular de material dúctil. Prodúcese, al alcanzarse la rotura, una estricción de la sección, y al producirse la separación física una mitad de la probeta muestra una forma troncocónica y la otra la complementaria denominada "copa". En el fondo de esta última, la superficie vista con fuerte aumento muestra un aspecto *fibroso* sobre una superficie normal al eje de la pieza.

d) *Rotura por corte o deslizamiento.* En el caso (c) el borde de la *copa* es una superficie cónica, cuya inclinación corresponde a los planos de γ máxima. Es característica en los materiales dúctiles, por corte (torsión).

e) *Rotura por fatiga.* Se caracteriza por ser el plano de fractura normal a la tensión máxima y se asemeja a la rotura frágil, aun en materiales dúctiles.

f) *Fractura por "creep".* Solamente ocurre a altas temperaturas y se trata de una fractura viscosa intergranular.

Aparte de los tipos mencionados de roturas existen otros en que intervienen fenómenos moleculares que no encuadran dentro de los alcances de la presente obra.

15 . 3 . Las principales teorías de rotura

Las distintas teorías de rotura han sido desarrolladas teniendo en cuenta los estados múltiples de tensión. Para un estado simple de tensión el problema del establecimiento de la seguridad a la rotura es sencillo; basta determinar la tensión que produce la rotura, sea por tracción, compresión o corte, afectar los resultados de un determinado coeficiente de seguridad y con ello se obtiene un criterio respecto a la seguridad que se dispone.

En cambio, el problema se modifica si consideramos un elemento estructural o una pieza de una máquina o mecanismo, sujeto a un estado múltiple de tensiones. En estos casos, y ello es lo que se hace en el planteo de las distintas teorías de rotura, es necesario establecer como término de comparación un estado simple de solicitación. Y lo más sencillo consiste en tomar como término de comparación el ensayo de tracción simple, por la sencillez de su realización, que permite obtener una tensión σ que Féodossiev[1] define como tensión

[1] *Op. cit.*

equivalente o tensión de comparación, que corresponde a aquella tensión que origina en la probeta el mismo peligro de rotura que para el estado considerado.

En los parágrafos que siguen desarrollaremos las teorías de rotura más utilizadas en la práctica.

La mayor parte de ellas falla por el hecho que sus autores han pretendido aplicar fórmulas y desarrollos obtenidos sobre la base de la teoría de la elasticidad, extendiéndolos más allá de su campo de validez, como por ejemplo en el caso de materiales donde la rotura ocurre cuando se encuentran en evidente estado plástico o experimentan grandes deformaciones.

Las teorías de las que nos ocuparemos por ser, repetimos, las más usadas en la práctica, son las siguientes:

1) *Teoría de la máxima tensión principal.*
2) *Teoría de la máxima tensión de corte.*
3) *Teoría de la máxima deformación específica principal.*
4) *Teoría de la energía total de deformación.*
5) *Teoría de la máxima energía de distorsión.*
6) *Teoría de la tensión tangencial octaédrica.*
7) *Teoría de la máxima tensión normal.*
8) *Teoría de Mohr.*

Desarrollaremos analíticamente cada teoría por separado, utilizando la representación gráfica debida a *Westergaard*[1] y *Haigh*[2], para luego compararlas superponiéndolas en un único diagrama, donde ubicaremos los puntos representativos de los ensayos realizados a los efectos de comprobar el mayor o menor grado de aproximación de las distintas teorías. A este respecto los ensayos de mayor importancia son los realizados por *Lode*[3] y en especial por *Roš* y *Eichinger*[4]. Previamente y por ser necesario a la interpretación de algunas teorías que expondremos, desarrollaremos algunos conceptos relativos al trabajo de deformación o energía interna de deformación correspondiente a los distintos estados de solicitación.

15 . 4 . La energía interna de deformación

La energía interna de deformación o energía potencial elástica por unidad

[1] H. M. Westergaard, *The Resistance of Ductile Materials to Combined Stresses in Two or Three Directions Perpendicular to One another.* I. Franklin Institute, Mayo 1920.

[2] B. P. Haigh, "The strain–energy function and the elastic limit". *Engineering*, Londres, 1920.

[3] W. Lode, *Zeitschrift für Physik*, 32–1913, V.D.I. Mitt. Forschungsarbeiten, H. 303–1928.

[4] M. Roš y A. Eichinger, *Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr*, E.M.P.A.

de volumen en un punto de un sólido sujeto a un estado de tensión cualquiera, es una cierta función, tanto de la tensión en el punto como de la correspondiente deformación específica. Si llamamos u a dicha energía potencial elástica, su expresión será:

$$u = f(\sigma, \epsilon) \qquad [15.1]$$

Esta energía de deformación se compone de dos partes:

$$u = u_v + u_d , \qquad [15.2]$$

donde u_v es la energía necesaria para producir el *cambio de volumen* del elemento infinitésimo considerado, y u_d la que origina el *cambio de forma* o *distorsión* del mismo, denominada también energía de distorsión.

Analizaremos en primer término las expresiones de la energía total de de deformación para distintas formas de solicitación.

15 . 4 . 1 . Estado simple de tensión

Supongamos figura 15.1 un elemento unitario solicitado por una tensión principal σ_1.

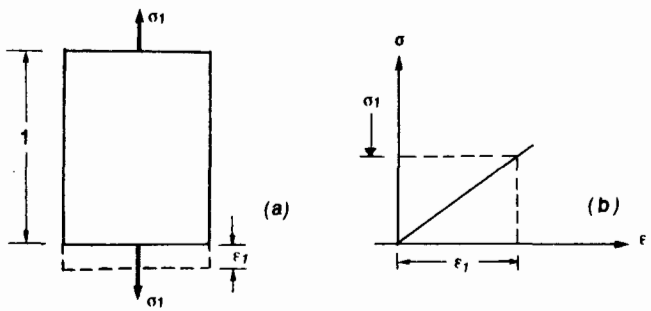


Fig. 15.1

Como consecuencia, el elemento unitario experimenta una deformación específica ϵ_1 y el correspondiente diagrama σ–ϵ es el que muestra la figura 15.1 *b*.

La energía total absorbida, por unidad de volumen, hasta alcanzar la tensión σ_1 será:

$$u = \frac{1}{2}\sigma_1 \epsilon_1 , \qquad [15.3]$$

y como, por encontrarnos en régimen elástico:

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} , \qquad [15.4]$$

resulta finalmente:

$$u = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{E} . \qquad [15.5]$$

15 . 4 . 2 . Corte puro

Si suponemos el elemento unitario de figura 15.2 cuyas caras están solicitadas exclusivamente por la tensión tangencial τ el elemento se distorsiona como muestra la figura, y el trabajo realizado por τ que es la energía absorbida, será:

$$u = \frac{1}{2}\gamma\tau . \qquad [15.6]$$

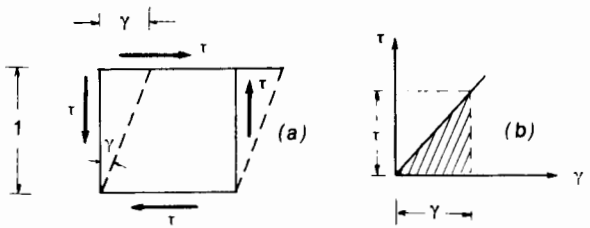


Fig. 15.2

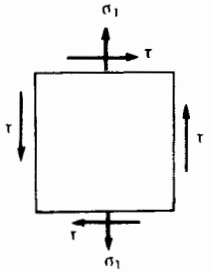


Fig. 15.3

Pero teniendo en cuenta que:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \qquad [15.7]$$

resulta finalmente:

$$u = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G} \qquad [15.8]$$

15 . 4 . 3 . Combinación de σ_1 y τ

En este caso, que corresponde a la figura 15.3, la energía total de deformación será la suma de las correspondientes a los dos casos anteriores:

$$u = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{E} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G} . \qquad [15.9]$$

15 . 4 . 4 . Caso de dos tensiones principales

Supongamos un elemento unitario solicitado por las tensiones principales σ_1 y σ_2 (fig. 15.4). Como consecuencia de éstas se originan las deformaciones específicas principales ϵ_1 y ϵ_2, cuyas expresiones son las siguientes:

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} , \qquad [15.10]$$

$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} , \qquad [15.11]$$

y la energía de deformación:

$$u = \frac{1}{2}\sigma_1 \epsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2 \epsilon_2 \qquad [15.12]$$

y reemplazando los valores de ϵ_1 y ϵ_2 dados por las [15.10] y [15.11] llegamos a:

$$u = \frac{1}{2E} \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_2\right) . \qquad [15.13]$$

En el caso que $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$, es decir, para el estado de tensión denominada de resbalamiento simple, la [15.13] se trasforma como sigue:

$$u = \frac{1}{2E} \left(2\sigma_1^2 + 2\mu\sigma_1^2\right) = \frac{(1+\mu)}{E} \sigma^2 \qquad [15.14]$$

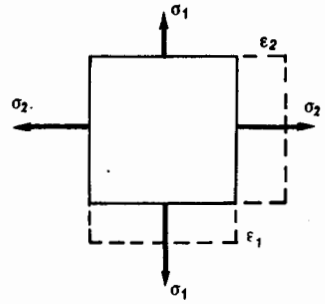


Fig. 15.4

Si recordamos que:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \qquad [15.15]$$

y tenemos en cuenta que para este estado de tensiones:

$$|\sigma_1| = |\sigma_2| = |\tau|, \qquad [15.16]$$

reemplazando las [15.15] y [15.16] en la [15.14] llegamos finalmente a.

$$u = \frac{\tau^2}{2G}, \qquad [15.17]$$

como es lógico que sea.

Si:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma, \qquad [15.18]$$

la [15.13] se transforma en:

$$u = \frac{1-\mu}{E}\sigma^2 \qquad [15.19]$$

15.4.5. Caso de tres tensiones principales

Sea el cubo unitario de figura 15.5, solicitado por las tres tensiones principales σ_1, σ_2, σ_3 que originan las deformaciones principales ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 respectivamente.

Las expresiones de las tres deformaciones específicas son las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \epsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ \epsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned}\right\} \qquad [15.20]$$

La energía total de deformación será la suma de las que corresponden a cada tensión principal:

$$u = \frac{\sigma_1\epsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2\epsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3\epsilon_3}{2} \qquad [15.21]$$

Reemplazando las [15.20] en las [15.21] luego de algunas trasformaciones llegamos a:

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)\right] \qquad [15.22]$$

Cuando:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma \qquad [15.23]$$

o sea, para el estado de tensión denominado hidrostático, la [15.22] se trasforma en:

$$u = \frac{3(1-2\mu)}{2E}\sigma^2 \qquad [15.24]$$

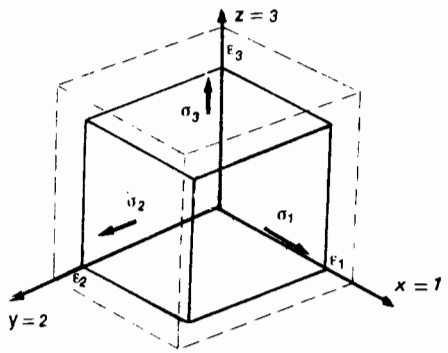


Fig. 15.5

15.4.6. Componentes de la energía total de deformación

Supongamos un cubo unitario solicitado por tres tensiones principales σ_1, σ_2, σ_3 que originan las deformaciones específicas principales ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 (fig. 15.6).

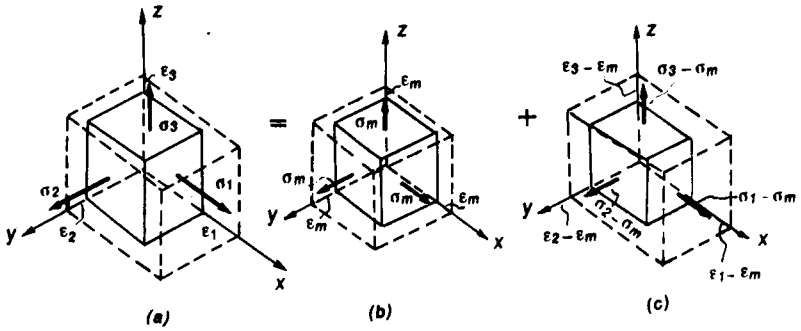


Fig. 15.6

Si llamamos tensión media σ_m y deformación específica media ϵ_m a los valores:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \qquad [15.25]$$

y

$$\epsilon_m = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{3} \qquad [15.26]$$

podemos imaginar el estado de tensión definido por las tres tensiones principales σ_1, σ_2 y σ_3, con sus correspondientes deformaciones específicas principales ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 como suma de dos estados de tensión (fig. 15.6).

a) un primer estado, hidrostático, para el cual:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1^* = \sigma_2^* = \sigma_3^* = \sigma_m \\ \epsilon_1^* = \epsilon_2^* = \epsilon_3^* = \epsilon_m \end{aligned}\right\} \qquad [15.27]$$

b) un segundo estado definido por tensiones, según las direcciónes x, y, z, iguales a:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^* &= \sigma_1 - \sigma_m \\ \sigma_y^* &= \sigma_2 - \sigma_m \\ \sigma_z^* &= \sigma_3 - \sigma_m \end{aligned}\right\} \qquad [15.28]$$

respectivamente, que originan las deformaciones específicas principales

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_x^* &= \epsilon_1 - \epsilon_m \\ \epsilon_y^* &= \epsilon_2 - \epsilon_m \\ \epsilon_z^* &= \epsilon_3 - \epsilon_m \end{aligned}\right\} \qquad [15.29]$$

El estado de tensión definido por σ_m es el que origina el cambio de volumen del cubo elemental.

En efecto, en el capítulo 6 al estudiar el primer invariante del tensor deformación vimos que la deformación específica volumétrica tenía por expresión:

$$\epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \qquad [15.30]$$

Para el caso que nos ocupa –para el estado de tensión (a)– tenemos de acuerdo con la segunda de las [15.27]:

$$\epsilon_v = 3\,\epsilon_m = \epsilon_1^* + \epsilon_2^* + \epsilon_3^* \,. \qquad [15.31]$$

En cambio, el estado de tensión (b) definido por las tensiones $\sigma_i - \sigma_m$ no produce cambio de volumen en el elemento, sino sólo cambio de forma, es decir, distorsión. Para justificarlo calculemos a continuación el valor de la deformación específica volumétrica correspondiente a este estado de tensión. Tenemos así:

$$\epsilon_v^* = \epsilon_x^* + \epsilon_y^* + \epsilon_z^* \,, \qquad [15.32]$$

y como:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_x^* &= \epsilon_1 - \epsilon_m \\ \epsilon_y^* &= \epsilon_2 - \epsilon_m \\ \epsilon_z^* &= \epsilon_3 - \epsilon_m \end{aligned}\right\} \qquad [15.33]$$

reemplazando en la [15.32]:

$$\epsilon_v^* = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - 3\epsilon_m \,. \qquad [15.34]$$

Pero de acuerdo con la [15.26]

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 3\epsilon_m \,, \qquad [15.35]$$

luego:

$$\epsilon_v^* = 0 \,. \qquad [15.36]$$

Hemos visto que la energía total de deformación se compone de dos partes:

$$u = u_v + u_d \,, \qquad [15.37]$$

una, u_v, que origina un cambio de volumen; la otra, u_d, que es la que produce el cambio de forma. Calculemos la primera para el estado triple de tensión definido por las tensiones principales σ_1, σ_2, σ_3.

Por definición tenemos:

$$u_v = \frac{1}{2}\sigma_m\,\epsilon_m + \frac{1}{2}\sigma_m\,\epsilon_m + \frac{1}{2}\sigma_m\,\epsilon_m = \frac{1}{2}\sigma_m\,(3\epsilon_m) \qquad [15.38]$$

pero según la [15.31] $3\epsilon_m = \epsilon_v$ luego reemplazando:

$$u_v = \frac{1}{2}\sigma_m \epsilon_v = \frac{1}{2}\sigma_m (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) . \qquad [15.39]$$

Pero:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \epsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ \epsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned}\right\} \qquad [15.40]$$

por otra parte:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \qquad [15.41]$$

luego reemplazando [15.40] y [15.41] en la [15.39], luego de algunas trasformaciones algebraicas llegamos finalmente a:

$$\epsilon_v = \frac{1}{E}[\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 2\mu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)] , \qquad [15.42]$$

o también:

$$\epsilon_v = \frac{(1 - 2\mu)}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) , \qquad [15.43]$$

y en función de σ_m:

$$\epsilon_v = \frac{(1 - 2\mu)}{E} 3\sigma_m . \qquad [15.44]$$

Por analogía con la ley de Hooke podemos escribir:

$$\frac{\sigma_m}{\epsilon_v} = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} = E_v , \qquad [15.45]$$

donde E_v es una nueva constante elástica que se conoce con el nombre de *módulo de elasticidad volumétrico.*

Finalmente, de acuerdo con la [15.39]:

$$u_v = \frac{1}{2}\sigma_m \epsilon_v = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma_m^2}{E_v} = \frac{(1 - 2\mu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{6E} \qquad [15.46]$$

Conocida la expresión de la energía volumétrica o energía de cambio de volumen, es fácil deducir, por diferencia, la energía de distorsión o de cambio de forma. En efecto, sabemos que $u_d = u - u_v$, y como de acuerdo con la [15.22] la energía total de deformación vale:

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] , \qquad [15.47]$$

resulta:

$$u_d = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] - \frac{(1 - 2\mu)}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \qquad [15.48]$$

Esta diferencia, luego de una serie de trasformaciones algebraicas, nos permite llegar a la siguiente expresión final de la energía de distorsión para el estado triple de tensión:

$$u_d = \frac{(1 + \mu)}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] . \qquad [15.49]$$

Es evidente que para el estado de tensión hidrostático, no puede haber cambio de forma y sí sólo de volumen. En tal caso debe cumplirse que:

$$\left.\begin{aligned} u_d &= 0 \\ u &= u_v \end{aligned}\right\} \qquad [15.50]$$

Para este estado de tensión, como sabemos, es:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma . \qquad [15.51]$$

En consecuencia, si reemplazamos estos valores en las [15.46] y [15.49] obtenemos respectivamente:

$$u_v = \frac{(1 - 2\mu)}{6E}(3\sigma)^2 = \frac{3}{2}\,\frac{(1 - 2\mu)}{E}\sigma^2 , \qquad [15.52]$$

expresión concordante con la [15.24] y:

$$u_d = 0 . \qquad [15.53]$$

Para el estado elástico simple, donde se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &\neq 0 \\ \sigma_2 &= \sigma_3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [15.54]$$

sustituyendo estos valores en la [15.49] llegamos a:

$$u_d = \frac{1 + \mu}{3E}\sigma_1^2 , \qquad [15.55]$$

y recordando que la energía total de deformación para este caso vale:

$$u = \frac{1}{2E}\sigma_1^2 , \qquad [15.56]$$

por diferencia llegamos a:

$$u_v = u - u_d = \frac{1}{2E}\cdot\sigma_1^2 - \frac{1+\mu}{3E}\cdot\sigma_1^2 \qquad [15.57]$$

$$u_v = \frac{1-2\mu}{6E}\sigma_1^2 . \qquad [15.58]$$

Para el estado elástico plano donde $\sigma_3 = 0$, las expresiones [15.46] y [15.49], de las energías de deformación por cambio de volumen y de forma, respectivamente, se trasforman en:

$$\left.\begin{aligned} u_v &= \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2)^2 \\ u_d &= \frac{1+\mu}{3E}(\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2) \end{aligned}\right\} \qquad [15.59]$$

respectivamente, cuya suma, como es fácil de verificar, concuerda con la [15.13].

Si consideramos un estado elástico plano equivalente al hidrostático triaxial:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma , \qquad [15.60]$$

las [15.59] se trasforman en:

$$u_v = \frac{2}{3}\left(\frac{1-2\mu}{E}\right)\sigma^2 , \qquad [15.61]$$

y

$$u_d = \frac{1+\mu}{3E}\sigma^2 . \qquad [15.62]$$

Para $\sigma_1 = -\sigma_2$ –resbalamiento simple– tenemos:

$$u_v = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma-\sigma)^2 = 0 \qquad [15.63]$$

$$u_d = \frac{1+\mu}{3E}(3\sigma^2) = \frac{1+\mu}{E}\sigma^2 , \qquad [15.64]$$

expresión idéntica a la [15.14].

Finalmente, para el estado elástico simple, donde:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_2 &= \sigma_3 = 0 \\ \sigma_1 &= \sigma \neq 0 \end{aligned}\right\} \qquad [15.65]$$

la expresión de la energía por cambio de volumen resulta ser:

$$u_v = \frac{1-2\mu}{6E}\sigma^2 , \qquad [15.66]$$

y la correspondiente al cambio de forma:

$$u_d = \frac{1+\mu}{3E}\sigma^2 . \qquad [15.67]$$

Resulta de interés comparar la expresión [15.14] que corresponde a la energía total de deformación del estado de resbalamiento simple, donde $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$, y la [15.67]. Ambas corresponden a energía consumida para el cambio de forma, ya que en el resbalamiento simple no hay cambio de volumen como hemos visto. Si extendemos el valor de las tensiones hasta la fluencia del material, tendremos, igualando expresiones:

$$\frac{1+\mu}{E}\cdot\tau_{fl.}^2 = \frac{1+\mu}{3E}\cdot\sigma_{fl.}^2 \qquad [15.68]$$

de donde:

$$\tau_{fl.} = \frac{\sigma_{fl.}}{\sqrt{3}} = 0{,}577\,\sigma_{fl.} \qquad [15.69]$$

Esta relación de valores, como veremos más adelante, ha sido comprobada experimentalmente para materiales dúctiles.

15 . 5 . Teoría de la máxima tensión principal

Esta teoría se supone que fue formulada por *Rankine* y su enunciado es el siguiente:

La deformación anelástica de un punto cualquiera de un sólido solicitado por un estado cualquiera de tensión, comienza sólo cuando la máxima tensión principal en el punto considerado, alcanza un valor igual al de la tensión en el límite de fluencia (en tracción o compresión simples) con total prescindencia de las tensiones, normales o tangenciales, que puedan existir en otros planos.

Esta teoría, en lo que respecta a los materiales frágiles, conduce a resultados razonablemente satisfactorios. En estos materiales la rotura es frágil y no rompen por fluencia. Para los materiales dúctiles, si se la aplica, los resultados están reñidos con los resultados experimentales.

Analizaremos a continuación su aplicación a ambos tipos de materiales.

a) *Materiales dúctiles*

Para un estado de solicitación simple resulta de la teoría que la rotura ocurre cuando:

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_{fl.}, \qquad [15.70]$$

lo que es cierto para el ensayo de tracción simple. Ahora bien, si consideramos un estado doble de tensión, particularmente el denominado de resbalamiento simple, encontramos que:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau, \qquad [15.71]$$

y como de acuerdo con el enunciado de la teoría, la rotura ocurre cuando:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau = \sigma_{fl.}, \qquad [15.72]$$

resulta como consecuencia que, de acuerdo con la teoría, debería cumplirse que:

$$\tau_{fl.} = \sigma_{fl.}. \qquad [15.73]$$

La experiencia demuestra que la igualdad [15.73] no se cumple en la práctica, sino que en realidad se tiene:

$$\tau_{fl.} \lll \sigma_{fl.}. \qquad [15.74]$$

y que la teoría de Rankine no es aplicable a los materiales dúctiles.

b) *Materiales frágiles*

Como dijimos antes, para este tipo de materiales, donde prácticamente no existe fluencia, esta teoría, dentro de ciertas limitaciones, es aplicable.

Consideremos primeramente un estado triaxial de tensiones. La expresión analítica del criterio de rotura de Rankine es la siguiente:

$$\begin{array}{llll} \text{para} & \sigma_1 > \sigma_2 \text{ y } \sigma_1 > \sigma_3 & \text{debe ser} & \sigma_1 = \pm\sigma_{fl.}{}^{1} \\ \text{para} & \sigma_2 > \sigma_1 \text{ y } \sigma_2 > \sigma_3 & \text{debe ser} & \sigma_2 = \pm\sigma_{fl.} \\ \text{para} & \sigma_3 > \sigma_1 \text{ y } \sigma_3 > \sigma_2 & \text{debe ser} & \sigma_3 = \pm\sigma_{fl.} \end{array} \qquad [15.75]$$

Si el estado elástico es plano, siendo $\sigma_3 = 0$, la condición de rotura de Rankine es la siguiente:

[1] Entendemos, generalizando por $\sigma_{fl.}$, la tensión que origina la rotura del material.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{para } \sigma_1 > \sigma_2 \text{ debe ser} & \sigma_1 = \pm\sigma_{fl.} \\ \text{para } \sigma_2 > \sigma_1 \text{ debe ser} & \sigma_2 = \pm\sigma_{fl.} \end{array}\right\} \qquad [15.76]$$

definiendo la rotura del material la mayor de las dos tensiones principales.

En la figura 15.7 hemos interpretado esta teoría según la representación de Westergaard[1]. Adoptando un par de ejes coordenados, donde en abscisas llevamos los valores $\sigma_1/\sigma_{fl.}$ y en ordenadas los de $\sigma_2/\sigma_{fl.}$, obtenemos cuatro rectas paralelas, dos al eje de abscisas y dos al de ordenadas, a los que cortan en los puntos ± 1 por cuanto de las [15.76] resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} = \pm 1 \\[2ex] \dfrac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} = \pm 1 \end{array}\right\} \qquad [15.77]$$

De satisfacer los resultados experimentales a esta teoría, los puntos representativos de los mismos debieran coincidir (en la medida de la aproximación lógica para los resultados experimentales) con alguna de las cuatro rectas, lo que, como veremos más adelante, en general sólo se cumple con aproximación en ciertos materiales de rotura frágil.

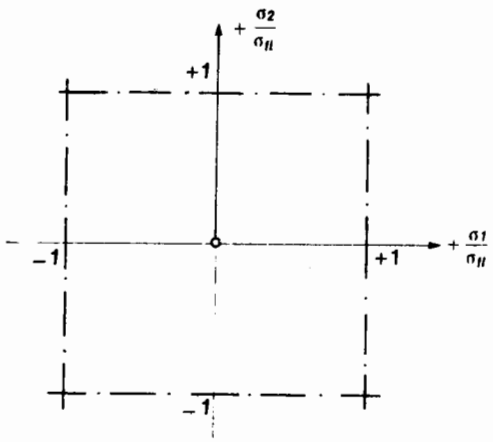


Fig. 15.7

[1] *Op. cit.*

15 . 6 . Teoría de la máxima tensión de corte

Esta teoría fue desarrollada por Guest[1] aunque según Navier en su *Resumé des leçons,* 1ra. parte (1883) fue Coulomb quien puso en duda la hipótesis de Rankine y sugirió que la rotura obedecía a tensiones de corte.

Puede enunciarse la teoría de Guest como sigue:

La rotura de un material comienza cuando, en un punto cualquiera de un material sujeto a un estado múltiple de tensiones, la máxima tensión de corte alcanza el valor de la máxima tensión de corte que ocurre en un ensayo de tracción simple.

Para el estado triple de tensión las tensiones máximas de corte tienen las siguientes expresiones:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{\text{máx.}} &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \\ \tau_{\text{máx.}} &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \\ \tau_{\text{máx.}} &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \end{aligned}\right\} \qquad [15.78]$$

Para el estado de solicitación simple, al alcanzarse la fluencia resulta:

$$\tau_{\text{máx.}} = \pm \frac{\sigma_{\text{fl.}}}{2}. \qquad [15.79]$$

En consecuencia, la condición de rotura de Coulomb–Guest para el estado triple de tensión será:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm \sigma_{\text{fl.}} \\ \sigma_1 - \sigma_3 &= \pm \sigma_{\text{fl.}} \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \pm \sigma_{\text{fl.}} \end{aligned}\right\} \qquad [15.80]$$

Para el estado plano de tensión, suponiendo $\sigma_3 = 0$, las [15.80] se trasforman en:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm \sigma_{\text{fl.}} \\ \sigma_1 &= \pm \sigma_{\text{fl.}} \\ \sigma_2 &= \pm \sigma_{\text{fl.}} \end{aligned}\right\} \qquad [15.81]$$

Entre estas tres expresiones, la elección de la que define el comienzo de la rotura depende del signo de σ_1 y σ_2. Si ambas son de signo contrario, será

[1] Guest J. J., On the Strenght of Ductile Materials under combined Stress, *Philosophical Magazine* No. 216, 1900.

determinante la primera de las [15.81]. En cambio, si el signo es igual para ambas, lo será la ecuación que corresponda a la mayor tensión principal. En figura 15.8 hemos realizado la representación Westergaard correspondiente a esta teoría, que responde a las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{fl.}}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{\text{fl.}}} &= \pm 1 \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{fl.}}} &= \pm 1 \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_{\text{fl.}}} &= \pm 1 \end{aligned}\right\} \qquad [15.82]$$

Como puede observarse, la teoría de Guest es independiente de la ley de Hooke y supone que para la fluencia o rotura los valores de las tensiones son los mismos sin tener en cuenta si la rotura ocurre por tracción o por compresión.

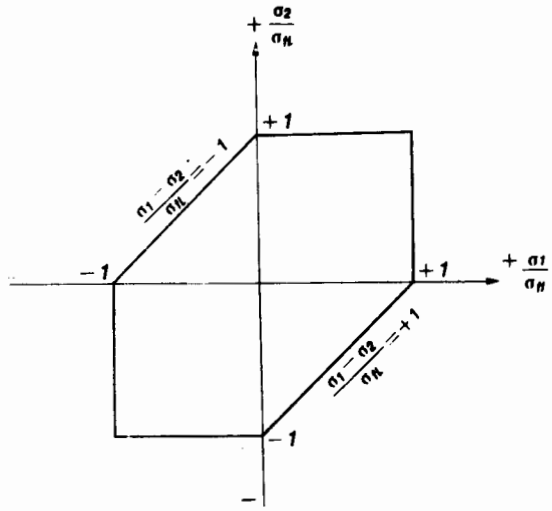


Fig. 15.8

Para ciertos materiales dúctiles y en general, cuando las tensiones tangenciales son preponderantes, esta teoría conduce a resultados aceptables. Actualmente ha sido superada por otras teorías como ser la de Mohr y la de la máxima energía de distorsión. Una falla de esta teoría se pone en evidencia si las tres tensiones principales son de tracción y de valores parecidos. En tal caso las tensiones tangenciales resultantes serían mínimas y la rotura sería frágil (por tracción) y no por escurrimiento en planos de $\tau_{\text{máx.}}$ como supone la teoría.

15 . 7 . Teoría de la máxima deformación específica principal

Propuesta por Saint–Venant, esta teoría establece que *la rotura de un cuerpo sujeto a un determinado estado de tensión ocurre cuando la deformación específica en la dirección de la máxima tensión principal alcanza el valor de la máxima deformación específica que corresponde a la rotura por tracción simple.*

Las deformaciones específicas principales, para un estado triple de tensión tienen, como hemos visto, las siguientes expresiones:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_1 &= \pm \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] \\ \epsilon_2 &= \pm \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)\right] \\ \epsilon_3 &= \pm \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)\right] \end{aligned}\right\} \qquad [15.83]$$

Teniendo en cuenta que la máxima deformación específica en el ensayo de tracción simple es la que corresponde al comienzo de la fluencia del material

$$\epsilon_{\text{máx.}} = \frac{\sigma_{\text{fl.}}}{E} \qquad [15.84]$$

la teoría de Saint–Venant nos dice que la rotura comenzará cuando ocurra el mayor de los tres valores

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_{\text{máx.}} \\ \epsilon_2 &= \epsilon_{\text{máx.}} \\ \epsilon_3 &= \epsilon_{\text{máx.}} \end{aligned}\right\} \qquad [15.85]$$

Reemplazando los valores de $\epsilon_{\text{máx.}}$ y de las deformaciones específicas principales dados por las [15.83] y [15.84], la condición de rotura de Saint–Venant resulta ser, para el estado triple de tensiones:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 - \mu\sigma_2 - \mu\sigma_3 &= \pm\,\sigma_{\text{fl.}} \\ \sigma_2 - \mu\sigma_1 - \mu\sigma_3 &= \pm\,\sigma_{\text{fl.}} \\ \sigma_3 - \mu\sigma_1 - \mu\sigma_2 &= \pm\,\sigma_{\text{fl.}} \end{aligned}\right\} \qquad [15.86]$$

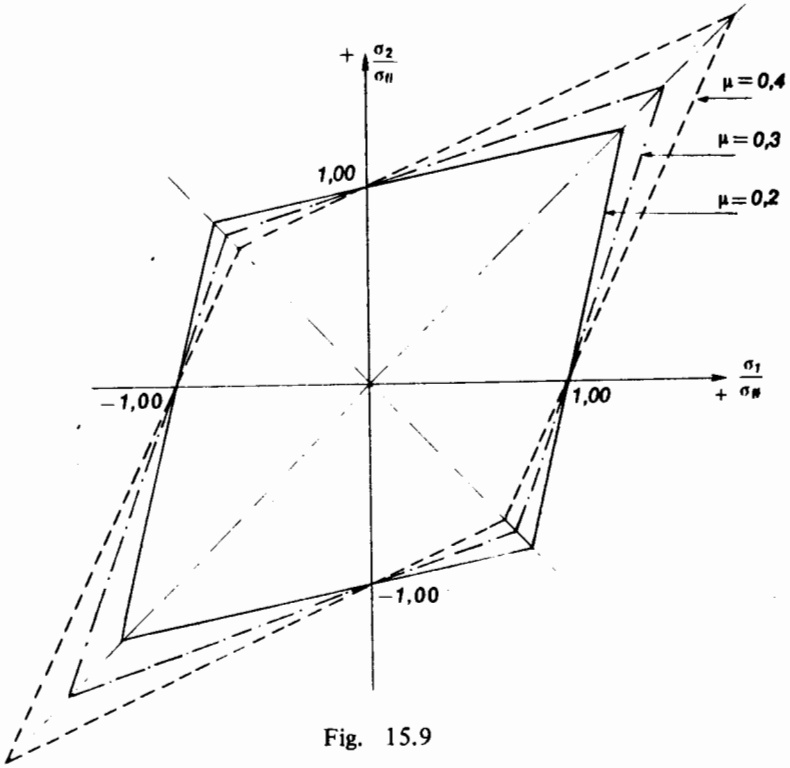


Fig. 15.9

Para el estado elástico plano, con $\sigma_3 = 0$, las [15.86] se reducen a:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 - \mu\sigma_2 &= \pm\,\sigma_{\text{fl.}} \\ \sigma_2 - \mu\sigma_1 &= \pm\,\sigma_{\text{fl.}} \end{aligned}\right\} \qquad [15.87]$$

Como puede observarse, las expresiones anteriores son funciones del coeficiente de Poisson y en consecuencia, varían con el material. En la figura 15.9 hemos efectuado la representación de esta teoría en el diagrama de Westergaard, para tres valores de μ:

$$\left.\begin{aligned} \mu &= 0{,}20 \\ \mu &= 0{,}30 \\ \mu &= 0{,}40 \end{aligned}\right\} \qquad [15.88]$$

a los efectos de poner de manifiesto la influencia de dicha constante elástica. Dividiendo ambos miembros de las [15.87] por $\sigma_{fl.}$ y teniendo en cuenta la dualidad de signos resultan las cuatro rectas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} - \mu \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} &= +1 \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} - \mu \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} &= -1 \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} - \mu \frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} &= +1 \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} - \mu \frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} &= -1 \end{aligned}\right\} \qquad [15.89]$$

La teoría de Saint–Venant se basa en la ley de Hooke y en consecuencia, sólo permite considerar como rotura al comienzo de la fluencia. Requiere como la de Guest, que las tensiones de fluencia en tracción y compresión sean iguales. Para materiales frágiles, donde el límite de rotura es cercano al de fluencia, esta teoría conduce a una cierta aproximación con la realidad y significa evidentemente un avance con respecto a la teoría de la máxima tensión principal.

15 . 8 . Teoría de la energía total de deformación

Se la denomina también teoría de Beltrami; sugerida en un principio por este autor[1] fue desarrollada por Haigh y Huber. Su enunciado es el siguiente:

En un punto cualquiera de un sólido sujeto a un estado dado de tensión el comienzo de la plastificación ocurre cuando la energía total de deformación por unidad de volumen, correspondiente al estado de tensión dado, es igual a la energía total de deformación unitaria que corresponde a la solicitación por tracción simple, para el límite de fluencia.

Para un estado triple de tensión, definido por las tensiones principales σ_1, σ_2 y σ_3, de acuerdo con la [15.22], la energía total de deformación por unidad de volumen vale:

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\,(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)\right] \qquad [15.90]$$

[1] E. Beltrami, "Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici." *Op. Mat. Rendiconti 1885.*

y para solicitación axil, al alcanzarse el límite de fluencia:

$$u = \frac{1}{2E}\,\sigma_{fl.}^2 \qquad [15.91]$$

De acuerdo con la teoría de Beltrami ambas energías deben ser iguales, de donde, luego de simplificar llegamos a:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\,(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) = \sigma_{fl.}^2 \qquad [15.92]$$

Para el estado elástico plano, donde $\sigma_3 = 0$, la [15.92] se trasforma en:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu\,\sigma_1\sigma_2 = \sigma_{fl.}^2 \qquad [15.93]$$

Dividiendo la anterior por $\sigma_{fl.}^2$ resulta:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}}\right)^2 - 2\mu\,\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_{fl.}^2} = 1 \qquad [15.94]$$

expresión de una elipse en la representación gráfica de Westergaard, cuyos ejes están inclinados a 45° con respecto a los coordenados. La intersección de la elipse con la recta de ecuación:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} \qquad [15.95]$$

nos da dos puntos, extremos de la elipse, de coordenadas:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} = \frac{\sqrt{2\,(1-\mu)}}{2\,(1-\mu)} \qquad [15.96]$$

y la con respecto al eje ortogonal, de ecuación:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} = -\frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} \qquad [15.97]$$

los puntos:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} = -\frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} = \frac{\sqrt{2\,(1+\mu)}}{2\,(1+\mu)} \qquad [15.98]$$

En consecuencia, los semiejes de la elipse representativa de la teoría de Beltrami serán:

semieje mayor:

$$a = \frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{1-\mu}}{1-\mu} \qquad [15.99]$$

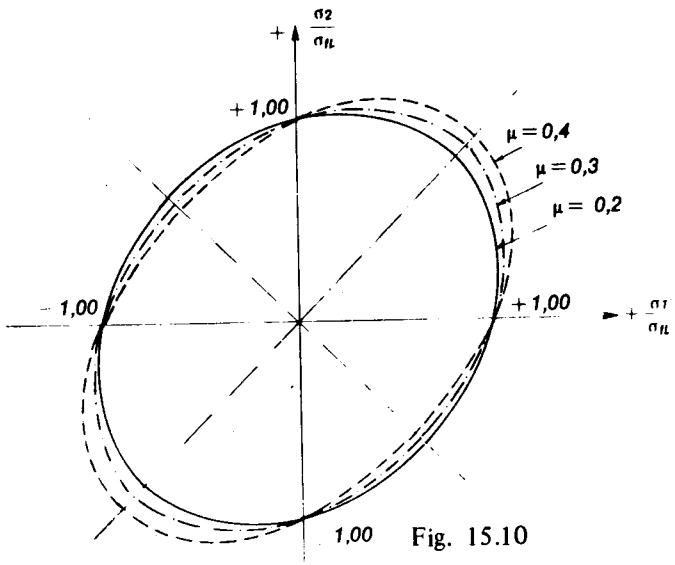


Fig. 15.10

semieje menor:

$$b = \frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{1+\mu}}{1+\mu} \qquad [15.100]$$

Por otra parte, es fácil observar que la elipse corta los ejes coordenados en los puntos ± 1. En la figura 15.10 hemos representado las elipses que corresponden, en la teoría de Beltrami a μ = 0,20, 0,30 y 0,40.

Esta teoría, lo mismo que las dos anteriores, admite la validez de la ley de Hooke y supone que los límites de fluencia en tracción y compresión tienen igual valor.

Los ensayos de *Bridgman* han demostrado la inexactitud de esta teoría: En efecto, en ella se supone que el comienzo de la fluencia es función de la energía total de deformación. Los ensayos efectuados por el citado autor, han permitido alcanzar presiones triaxiales hidrostáticas muy elevadas, con energías de deformación total mucho mayores que la correspondiente a fluencia en la solicitación simple, sin que se observaran indicios del comienzo del escurrimiento plástico. Y la naturaleza nos da un ejemplo de la inexactitud de la teoría, pues si consideramos guijarros sumergidos en las fosas marinas más profundas, prácticamente puede admitirse que las tres tensiones principales son iguales y de elevado valor y sin embargo no sufren efecto alguno.

Estas circunstancias hicieron pensar que no toda la energía de deformación influía en el comienzo de la fluencia de los materiales, y dieron origen a la teoría que comentamos en el parágrafo siguiente.

15 . 9 . Teoría de la máxima energía de distorsión

La teoría de la máxima energía de distorsión, también denominada teoría de Huber–Hencky y von Mises, es como hemos dicho, la que mejor interpreta los resultados de ensayos de rotura efectuados con materiales dúctiles. Enunciada primeramente por Huber[1] fue desarrollada posteriormente en 1913 por von Mises y en 1924 por Hencky, esta teoría establece que *en un cuerpo sujeto a un estado cualquiera de tensión, el comienzo de la fluencia en un punto del cuerpo, ocurre solamente cuando la energía de distorsión por unidad de volumen correspondiente a dicho estado de tensión, alcanza el valor de la energía de distorsión de la solicitación por tracción simple, cuando se alcanza el límite de fluencia.*

Para el estado triple de tensión de acuerdo con la [15.49], la energía de distorsión tiene por expresión:

$$u_d = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \qquad [15.101]$$

y para la solicitación axil por tracción, según la [15.55] al alcanzarse $\sigma_{fl.}$, la energía de distorsión vale:

$$u_d = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_{fl.}^2 \qquad [15.102]$$

Igualando estas últimas expresiones y simplificando llegamos a:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\,\sigma_{fl.}^2 \qquad [15.103]$$

expresión conocida también con el nombre de *condición de plasticidad de von Mises.*

Si consideramos un estado elástico plano donde $\sigma_3 = 0$, la [15.103] se trasforma en:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 2\,\sigma_{fl.}^2 \qquad [15.104]$$

o también, desarrollando el cuadrado y simplificando:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_{fl.}^2 \qquad [15.105]$$

A los efectos de la representación gráfica de Westergaard, dividamos la [15.105] por $\sigma_{fl.}^2$:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}}\right)^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_{fl.}^2} = 1 \qquad [15.106]$$

[1] M. T. Huber, "Die spezifische Formänderungsarbeit als Mass der Anstrengung eines Materials", *Czasopismo technicze*, Lemberg 1904.

ecuación que, como en el caso de la teoría de Beltrami–Haigh, también representa una elipse cuyos ejes están inclinados de 45° con los ejes coordenados, pero que es independiente del coeficiente de Poisson.

La elipse corta los ejes coordenados en los puntos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} &= \pm 1 \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} &= \pm 1 \end{aligned}\right\} \qquad [15.107]$$

y las coordenadas de los extremos de los semiejes mayores, las obtenemos mediante la intersección de la elipse con la recta:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} \qquad [15.108]$$

Como es fácil deducir, dichas coordenadas son (fig. 15.11):

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} = 1; \qquad \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} = 1 \qquad [15.109]$$

y

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} = -1; \qquad \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} = -1 \qquad [15.110]$$

y la longitud del semieje mayor es $\sqrt{2}$.

En cuanto al semieje menor, lo obtenemos por intersección de la elipse con la recta:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} = -\frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} \qquad [15.111]$$

lo que nos conduce a las siguientes coordenadas para los puntos de intersección:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \qquad \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad [15.112]$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \qquad \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad [15.113]$$

y la correspondiente longitud del semieje menor es $\sqrt{6}/3$. En la figura 15.11 se muestra la elipse representativa de la teoría de Huber–Hencky–von Mises.

El caso de los cuerpos sometidos a grandes presiones hidrostáticas que no muestran principio de fluencia, encuentra justificación en la teoría de Huber–

Hencky–von Mises. En efecto, de acuerdo con la [15.49], cuando se cumple que:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3, \qquad [15.114]$$

la energía de distorsión es nula y la totalidad de la energía absorbida es utilizada para el cambio de volumen. En consecuencia, al no existir energía de distorsión, de acuerdo con la correspondiente teoría, no puede haber comienzo de fluencia y no existe rotura.

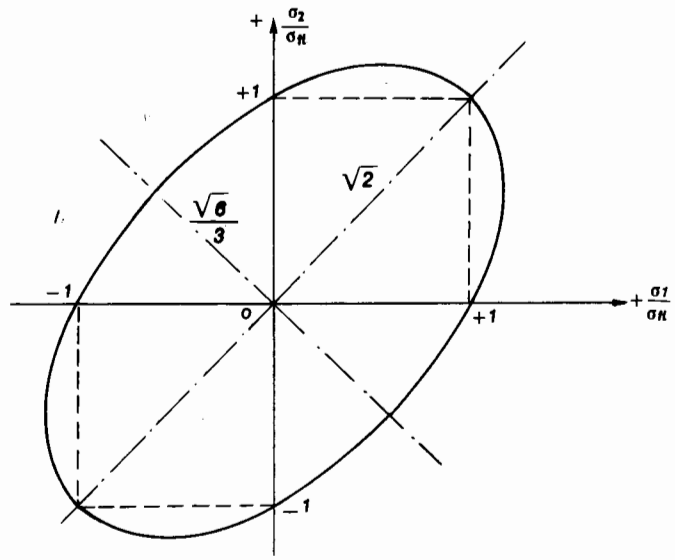


Fig. 15.11

15 . 10 . Teoría de la máxima tensión tangencial octaédrica

En realidad, esta teoría no es más que una forma distinta de interpretar la teoría de Huber–Hencky–von Mises. Esta última plantea el problema de la rotura en función de la energía de distorsión. En cambio, como veremos a continuación, la teoría que nos ocupa lo hace en término de tensiones.

Recordemos la expresión de la tensión tangencial octaédrica.

$$\tau_{oct.} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \qquad [15.115]$$

Si multiplicamos y dividimos el miembro derecho de la [15.115] por $\sqrt{(1+\mu)/6E}$ resulta:

$$\tau_{oct.} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6E}{1+\mu}}\sqrt{\frac{1+\mu}{6E}\,[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}. \qquad [15.116]$$

Pero el segundo subradical no es más que la expresión de la energía de distorsión dada por la [15.101]; en consecuencia:

$$\tau_{oct.} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6E}{1+\mu}\,u_d}\,. \qquad [15.117]$$

Pero de acuerdo con el enunciado de Huber–Hencky–von Mises el comienzo de la fluencia ocurre cuando u_d alcanza el valor:

$$u_d = \frac{1+\mu}{3E}\,\sigma_{fl.}^2\,. \qquad [15.118]$$

En consecuencia, reemplazando este valor en la [15.117]:

$$\tau_{oct.} = \frac{1}{3}\sqrt{2\sigma_{fl.}^2}$$

$$\tau_{oct.} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\sigma_{fl.} = 0{,}47\,\sigma_{fl.}. \qquad [15.119]$$

Según la teoría de la tensión tangencial octaédrica el comienzo de la fluencia ocurre, pues, cuando se alcanza el valor dado por la [15.116].

La representación gráfica de esta teoría, en el diagrama de Westergaard, es idéntica a la figura 15.11 por cuanto ésta no es más que otra forma de presentar la teoría del máximo trabajo de distorsión.

15 . 11 . Teoría de la máxima tensión normal

Esta teoría desarrollada por Marin[1] no es más que una modificación de la teoría de la máxima tensión principal. Su objeto es tratar de explicar porque para determinados materiales la rotura no se produce en planos normales a la dirección de la mayor de las tensiones principales, y para ello supone la existencia de un frotamiento interno entre las partículas que constituyen el material.

Según la hipótesis de Marin, en un plano dado la máxima tensión normal es función de las fuerzas originadas por la fricción interna.

Designando φ al coeficiente de fricción interna, para un estado plano de tensión, si admitimos como criterio de rotura que el comienzo de la fluencia ocurre cuando la máxima tensión normal alcanza el valor de $\sigma_{fl.}$ en el estado de solicitación axil, las expresiones de la teoría de Marin[2] son las siguientes:

[1] J. Marin, *Mechanical Properties of Materials and Design.* Mac Graw Hill, 1942.

[2] Una de las varias debidas a este autor.

para $\sigma_1 > \sigma_2$:

$$\sigma_1 + \sigma_2\,\frac{\varphi-\sqrt{\varphi^2+1}}{\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}} = \pm\,\sigma_{fl.}, \qquad [15.120]$$

para $\sigma_2 > \sigma_1$:

$$\sigma_2 + \sigma_1\,\frac{\varphi-\sqrt{\varphi^2+1}}{\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}} = \pm\,\sigma_{fl.}. \qquad [15.121]$$

Como lo manifiesta su autor, esta teoría, en el caso de materiales frágiles, como ser fundición, se acerca más a los resultados experimentales que la teoría de la máxima tensión principal.

Uno de los principales interrogantes de la teoría reside en la determinación del valor del coeficiente φ de fricción interna. En la figura 15.12 hemos efectuado la representación gráfica de la teoría en el diagrama de Westergaard, en la hipótesis de $\varphi = 0{,}25$. En este caso las expresiones [15.120] y [15.121] se trasforman en:

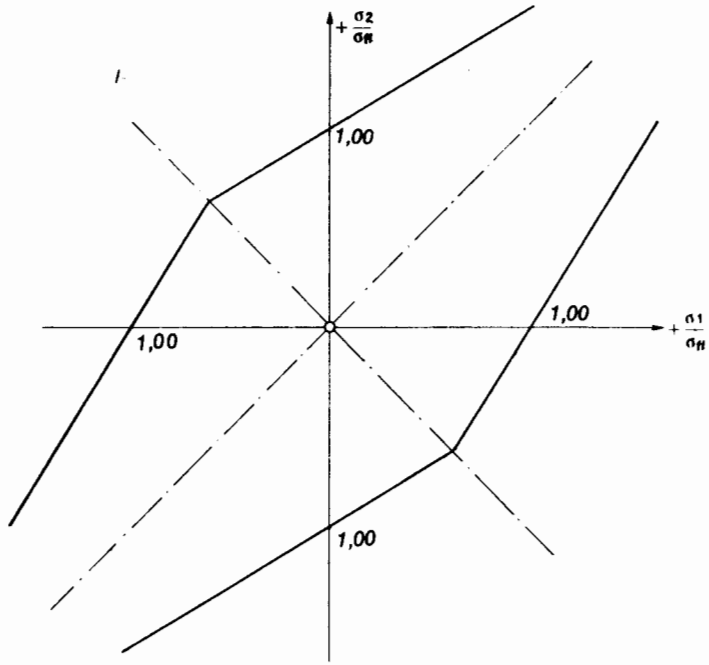


Fig. 15.12

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 - 0{,}61\,\sigma_2 &= \pm\,\sigma_{fl.}\\ \sigma_2 - 0{,}61\,\sigma_1 &= \pm\,\sigma_{fl.}\end{aligned}\right\} \qquad [15.122]$$

y dividiendo ambos miembros por $\sigma_{fl.}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} - 0{,}61\,\frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} &= \pm 1 \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} - 0{,}61\,\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} &= \pm 1 \end{aligned}\right\} \qquad [15.123]$$

15 . 12 . Teoría de Mohr

En el apartado 9 del capítulo V de su obra[1] enuncia Mohr su teoría de rotura, en la siguiente forma: *"Los límites de fluencia y de rotura de un material quedan definidos por las tensiones que se desarrollan en los planos de deslizamiento y fractura."* Mohr supone y con razón, como lo demuestra la experiencia, que el mecanismo de rotura de los cuerpos depende no sólo de las tensiones tangenciales sino que influyen también las tensiones normales.

La teoría de Mohr es más general que las anteriores, por cuanto es aplicable tanto a los materiales frágiles como a los dúctiles, aunque responde más a las características de rotura de los primeros.[2]

Para completar la idea de Mohr, consideremos en un cuerpo sujeto a tensiones un punto en estado límite, tanto de fluencia como de rotura, y sean σ y τ las componentes de tensión en el plano en que se producirán aquellas *inmediatamente* antes que las mismas ocurran. Si mantenemos σ constante, es evidente que, para sobrepasar el estado límite, es necesario aumentar τ, pues una disminución de su valor no haría alcanzar dicho estado.

Ello condujo a Mohr a ampliar su hipótesis de rotura con el concepto siguiente:

"La tensión tangencial en el plano de fractura o escurrimiento alcanza para el estado límite un valor máximo, que es función de la correspondiente tensión normal y de las características del material."

Supongamos un punto sujeto a un determinado estado de tensión y hagamos crecer homotéticamente las tres tensiones principales σ_1, σ_2 y σ_3 hasta alcanzar la rotura, si se trata de un material frágil, o el comienzo de la fluencia, si es dúctil. Alcanzado el estado de rotura, dibujemos la circunferencia principal de

[1] *Op. cit.*

[2] También se utiliza la teoría de rotura de Mohr en Mecánica de Suelos para el estudio de la capacidad portante de los mismos.

Mohr de centro O_1, figura 15.13 que como sabemos depende sólo de las tensiones extremas σ_1 y σ_3 y no de σ_2 y supongamos ambas de compresión.

Repitiendo el concepto para otros estados de tensión, obtendremos toda una familia de circunferencias límite que corresponden todas a estados de rotura. En la figura 15.13 hemos representado algunas de ellas, para un material frágil del tipo del hormigón. La de centro O_2 corresponde a compresión simple ($\sigma_3 \neq 0$; $\sigma_1 = 0$) y la de centro O_3 a tracción simple. La de centro O_4 representa la circunferencia que corresponde a tracción doble, y la de centro O al resbalamiento simple donde $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$.

La curva envolvente de la familia de circunferencias que corresponden a la fluencia o rotura del material, se designa como *envolvente de Mohr* o curva de *resistencia intrínseca* del material que será tangente a las distintas circunferencias en los puntos M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, etc.

Para el estado de tensión representado por la circunferencia de centro O_1, el colapso se produce según dos planos, que forman un mismo ángulo con respecto a uno de los planos principales, y en los cuales las tensiones actuantes son (σ, τ) y $(\sigma, -\tau)$.

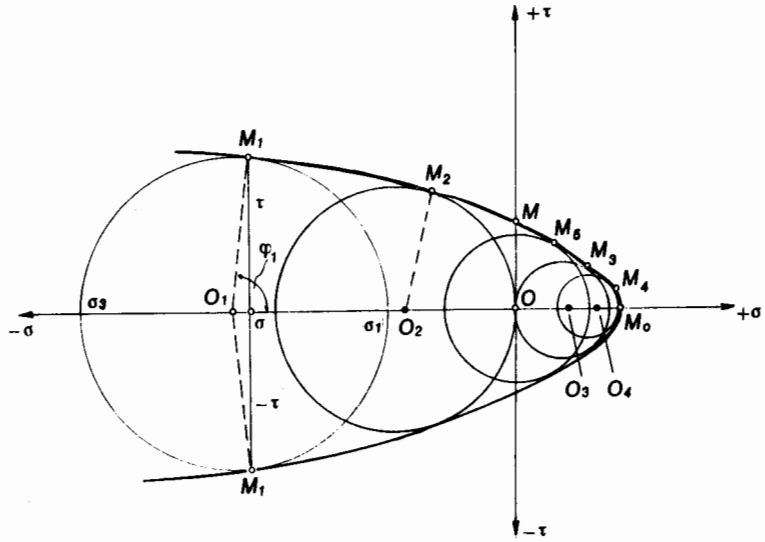


Fig. 15.13

Existen en la curva intrínseca dos puntos particulares: el M y el M_0. El primero representa la tensión τ de corte puro, y el segundo un estado de *tracción triple*. Ambos, en la práctica son imposibles de realizar.

La teoría de rotura de Mohr puede resumirse como sigue:

Conocida la curva de resistencia intrínseca de un material, un estado dado de tensión será determinante de la fluencia o rotura si la correspondiente circunferencia de Mohr *corta* o es *tangente* a la primera. Si es interior a la curva de resistencia intrínseca no existe peligro de colapso del material y el coeficiente de seguridad será tanto mayor cuanto más alejada de la curva intrínseca resulte la circunferencia.

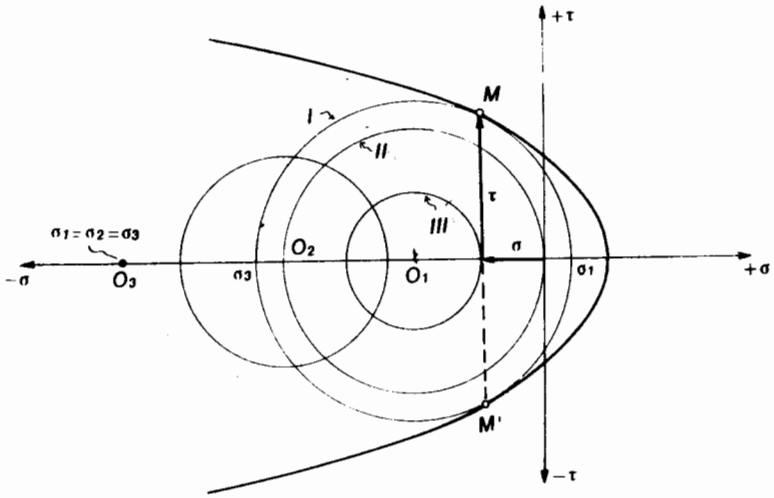


Fig. 15.14

En la figura 15.14 hemos representado una curva de resistencia intrínseca, correspondiente a un determinado material, supuesta conocida. Los tres estados de tensión cuyas circunferencias homotéticas de centro O_1 hemos designado con I, II y III responden a distintos grados de seguridad, uno de ellos, el de circunferencia I, es un estado de rotura porque la misma es tangente a la curva de resistencia intrínseca y las tensiones que ocurren en el plano de rotura son σ y τ. En cambio, los estados II y III no conducen a la rotura del material por ser interiores a la curva de resistencia intrínseca.

De los dos estados mencionados al III corresponde un mayor coeficiente de seguridad que al II, por encontrarse más alejado de la curva.

En dicha figura el punto O_3 representa el estado de tensión denominado hidrostático, para el cual:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 < 0 . \qquad [15.124]$$

Es evidente que, de acuerdo con la teoría de Mohr, dicho estado de tensión

nunca puede conducir ni a la fluencia ni a la rotura, y es aquí donde encuentra su principal justificación el hecho que los guijarros sumergidos a grandes profundidades o en el interior de las montañas no muestren signos de fluencia ni de rotura.

La dificultad que presenta la teoría de Mohr reside en el hecho que es necesario conocer la curva de resistencia intrínseca y su conocimiento sólo es posible por vía experimental.

Existen tres ensayos de fácil realización: los de compresión y tracción puras y el de resbalamiento simple:

La determinación de la resistencia a la tracción pura, para los materiales frágiles, que en un principio era un tanto difícil de realizar por la dificultad de amarre de las probetas, actualmente se efectúa mediante un ensayo simple, el denominado de compresión diametral debido al Ing. *Lobo Carneiro*, que consiste en romper un cilindro cargado según dos aristas diametrales.

La tensión de rotura por resbalamiento simple se obtiene sobre la base de un ensayo de torsión pura en un tubo de sección cilíndrica de pared delgada, donde $\sigma_1 = -\sigma_1 = \tau$.

En la figura 15.15, hemos representado las tres circunferencias de Mohr, correspondientes a los citados ensayos de rotura para un material frágil hipotético en el que la resistencia a tracción es mucho menor que la de compresión.

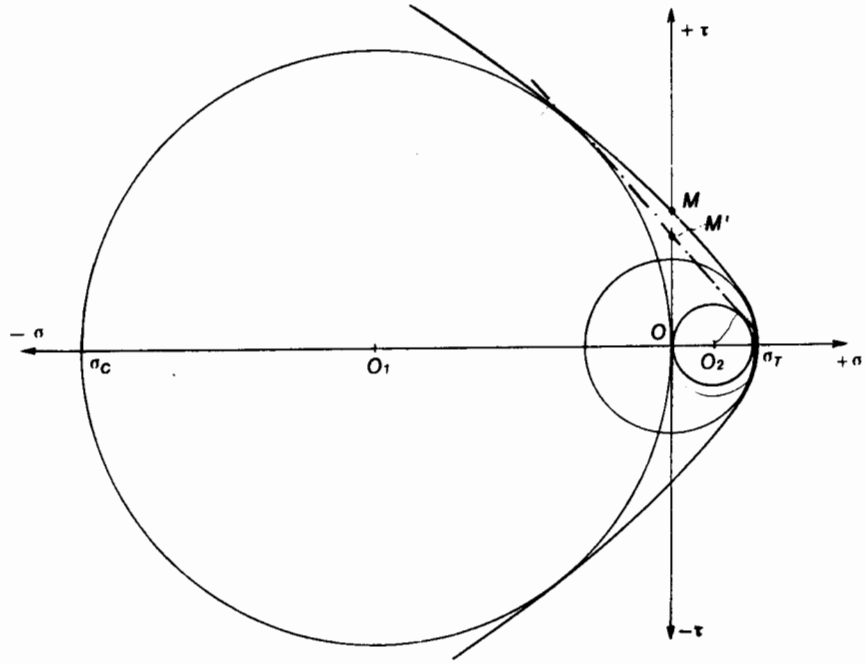


Fig. 15.15

Como puede observarse, la curva intrínseca (trazo lleno) corta al eje τ en el punto M, que difiere muy poco del punto M', intersección con dicho eje de la recta tangente común a los círculos de Mohr correspondiente a tracción y compresión pura. En consecuencia, se puede en primera aproximación reemplazar la curva verdadera por dichas tangentes. Para esta hipótesis, interesa conocer el valor de la tensión de rotura por resbalamiento simple, para cuya determinación en función de σ_T y σ_C (resistencias a tracción y compresión simples, respectivamente) nos remitimos a figura 15.16.

Interesa calcular el valor $\overline{OQ} = \overline{OQ'} = \tau_R$.

Tenemos:

$$\overline{LM} = \overline{MN} = \overline{MO} = \frac{\overline{LN}}{2} \qquad [15.125]$$

Pero por ser $\overline{O_1T} = \overline{LN}$, resulta:

$$\overline{MO} = \frac{1}{2}\overline{O_1T} = \frac{1}{2}\overline{O_1O_2}\cos\theta\,. \qquad [15.126]$$

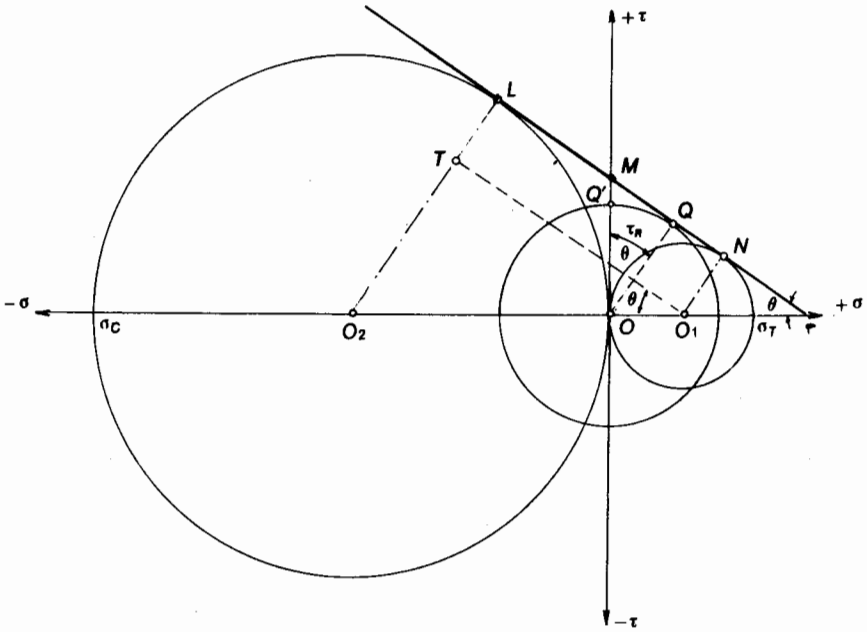


Fig. 15.16

Por otra parte:

$$\overline{OQ} = \overline{MO}\cos\theta\,, \qquad [15.127]$$

de donde:

$$\overline{OQ} = \frac{1}{2}\overline{O_1O_2}\cos^2\theta\,, \qquad [15.128]$$

Además:

$$\cos^2\theta = \left(\frac{\overline{O_1T}}{\overline{O_1O_2}}\right)^2 \qquad [15.129]$$

y

$$\overline{O_1T}^2 = \overline{O_1O_2}^2 - \overline{O_2T}^2\,. \qquad [15.130]$$

Reemplazando valores tenemos:[1]

$$\left.\begin{aligned}\overline{O_1O_2} &= \frac{1}{2}(\sigma_T - \sigma_C)\\ \overline{O_2T} &= \frac{1}{2}(\sigma_T + \sigma_C)\end{aligned}\right\} \qquad [15.131]$$

$$\overline{O_1T}^2 = \frac{1}{4}(\sigma_T - \sigma_C)^2 - \frac{1}{4}(\sigma_T + \sigma_C)^2 = -\sigma_T\sigma_C \qquad [15.132]$$

$$\cos^2\theta = -4\,\frac{\sigma_T\sigma_C}{(\sigma_T - \sigma_C)^2}\,, \qquad [15.133]$$

y finalmente:

$$\tau_R = \overline{OQ'} = -\frac{\sigma_T\sigma_C}{(\sigma_T - \sigma_C)^2}\,. \qquad [15.134]$$

En el caso de un material dúctil, como el acero, donde:

$$|\,\sigma_T\,| = |\,\sigma_C\,|\,, \qquad [15.135]$$

de acuerdo con lo visto, la envolvente de Mohr resulta ser un par de rectas paralelas al eje de las σ (fig. 15.17).

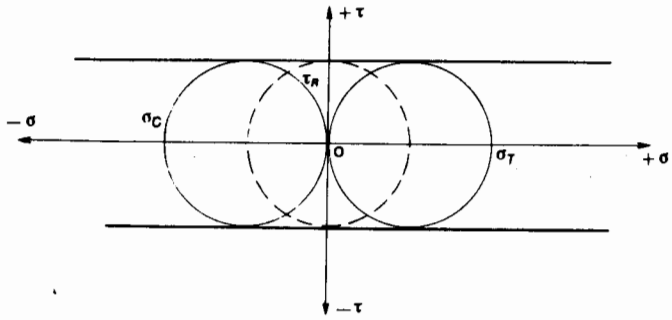


Fig. 15.17

y en consecuencia:

[1] Teniendo en cuenta los signos de σ_T y σ_C.

$$\tau_R = 0{,}50\,\sigma_T \qquad [15.136]$$

en contraposición con el valor $\tau_R = 0{,}577$, que dan los resultados experimentales en ensayos de torsión en tubos de pared delgada.

15 . 13 . Comparación de las distintas teorías de rotura

Con el objeto de comparar entre sí las distintas teorías de rotura en la figura 15.18 hemos superpuesto las respectivas representaciones gráficas según Westergaard (*con excepción* de las de Marin y Mohr) limitadas a los cuadrantes donde $\sigma_1/\sigma_{fl.} > 0$ y considerando para las teorías de Beltrami–Haigh y Saint–Venant solamente el caso $\mu = 0{,}3$.

En el mismo diagrama hemos ubicado los puntos representativos de pares de valores $\sigma_1/\sigma_{fl.}$, $\sigma_2/\sigma_{fl.}$ obtenidos en ensayos efectuados por Roš y Eichinger, Lode, Cook y Robertson y Taylor y Quinney, con distintos materiales.

Salvo los ensayos con fundición realizados por Cook y Robertson que satisfacen la teoría de Rankine de la máxima tensión principal, la mayor parte de los ensayos diagramados responde bien a la hipótesis de rotura de Huber–Hencky–von Mises, de la máxima energía de distorsión.

Resulta también interesante, efectuar una comparación entre los valores límites (rotura o fluencia) obtenidos aplicando las distintas teorías de rotura a dos formas simples de solicitación: tracción simple y torsión. Si todas las teorías fueran equivalentes, dichos resultados deberían ser iguales, lo que no ocurre en la realidad, como veremos a continuación.

a) *Teoría de la máxima tensión principal*

En el ensayo de tracción simple la tensión normal coincide con la máxima tensión principal, luego en la rotura es determinante $\sigma_{fl.}$. En la torsión, como sabemos, el estado de solicitación es de resbalamiento simple, donde se cumple que $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$. En consecuencia, en la rotura resulta determinante $\tau_{fl.}$ y de la comparación de ambos ensayos resulta:

$$\sigma_{fl.} = \tau_{fl.} \qquad [15.137]$$

b) *Teoría de la máxima tensión de corte*

En la tracción simple tenemos:

$$\tau_{máx.} = \frac{1}{2}\sigma_1 \qquad [15.138]$$

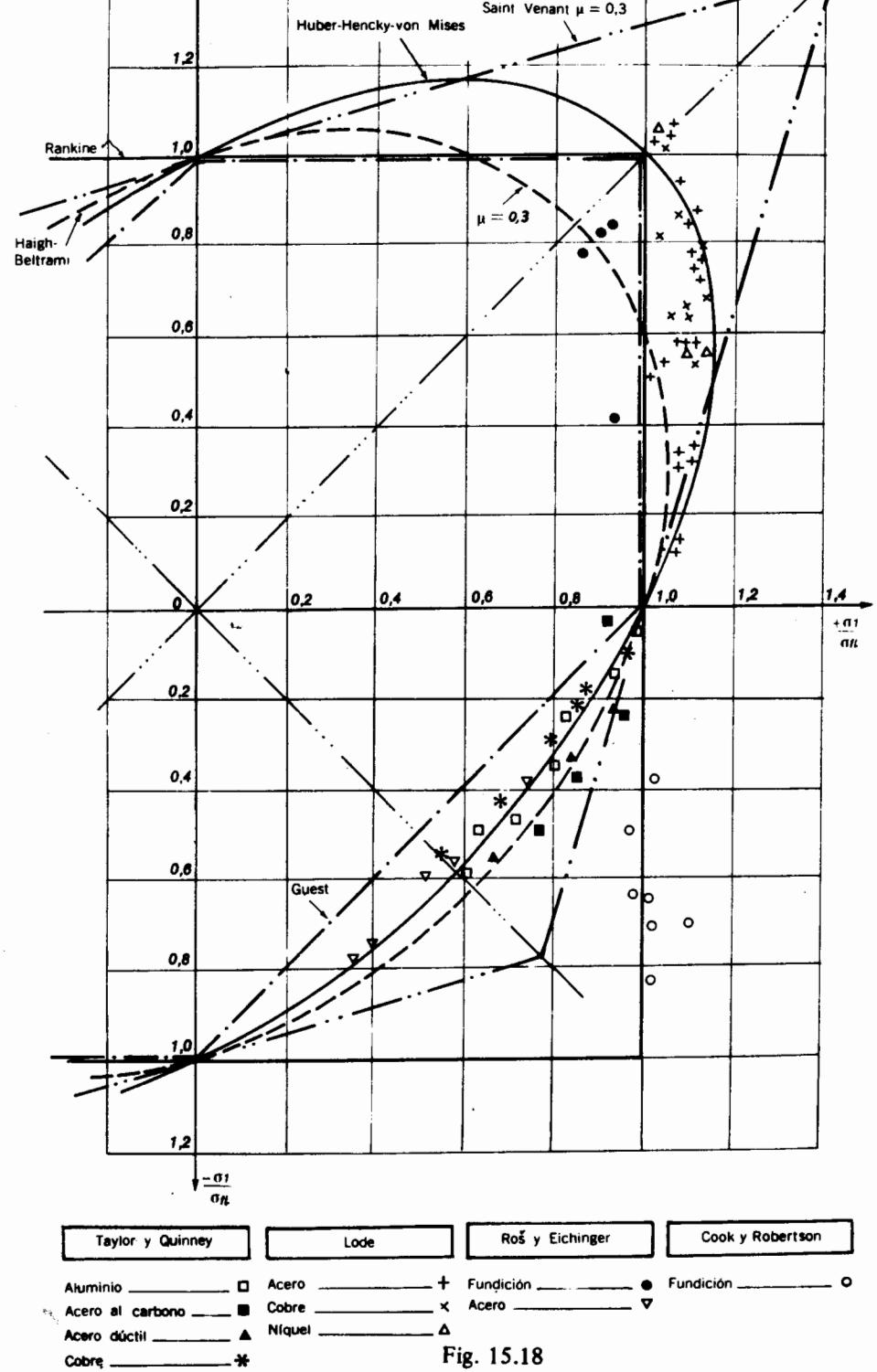


Fig. 15.18

es decir, que la tensión determinante sería $\frac{1}{2}\,\sigma_{fl.}$

En cambio, en el ensayo a torsión, es determinante $\tau_{fl.}$ de ahí que resulte según esta teoría:

$$0{,}50\,\sigma_{fl.} = \tau_{fl.}\,. \qquad [15.139]$$

c) *Teoría de la máxima deformación específica principal*

Para la tracción simple resulta:

$$\epsilon_{máx.} = \frac{\sigma_{máx.}}{E}\,, \qquad [15.140]$$

y en consecuencia el valor determinante de la rotura es $\sigma_{fl.}/E$. En lo que respecta a la torsión, tenemos:

$$\epsilon_{máx.} = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2)\,, \qquad [15.141]$$

y por ser $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$ reemplazando llegamos a:

$$\epsilon_{máx.} = \frac{1+\mu}{E}\,\tau\,. \qquad [15.142]$$

Admitiendo $\mu = 0{,}3$ la deformación determinante de la rotura resulta ser $(1{,}3\,/E)\,\tau_{fl.}$, e igualando este valor con el de la solicitación por tracción simple, obtenemos que según esta teoría debe ser:

$$\tau_{fl.} = 0{,}77\,\sigma_{fl.}\,. \qquad [15.143]$$

Para $\mu = 0{,}25$, resulta:

$$\tau_{fl.} = 0{,}80\,\sigma_{fl.} \qquad [15.144]$$

d) *Teoría de la máxima energía total de deformación*

La energía de deformación en solicitación axil es de acuerdo con la [15.91]

$$u = \frac{1}{2E}\,\sigma^2 \qquad [15.145]$$

de modo que el valor determinante de la rotura es $(1/2\,E)\,\sigma_{fl.}{}^2$. Para la solicitación por torsión, por ser $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$, resulta:

$$u = \frac{\tau^2\,(1+\mu)}{E} \qquad [15.146]$$

y el valor determinante para $\mu = 0{,}3$ es $(1{,}3/E)\,\tau_{fl.}^2$. En consecuencia, debe ser:

$$\frac{1}{2E}\,\sigma_{fl.}{}^2 = \frac{1{,}3\,\tau_{fl.}^2}{E}\,, \qquad [15.147]$$

de donde:

$$\tau_{fl.} = 0{,}62\sigma_{fl.}\,, \qquad [15.148]$$

valor que para $\mu = 0{,}25$ se trasforma en:

$$\tau_{fl.} = 0{,}632\sigma_{fl.}\,, \qquad [15.149]$$

e) *Teoría de la máxima energía de distorsión*

Para el estado de tracción simple, la energía de distorsión vale:

$$u_d = \frac{1+\mu}{3E}\,\sigma^2\,, \qquad [15.150]$$

y en consecuencia, el valor determinante de la rotura será $[(1+\mu)/3E]\,\sigma_{fl.}^2$.

En la torsión, de acuerdo con la [15.59] para $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$ resulta:

$$u_d = \frac{1+\mu}{E}\,\tau^2 \qquad [15.151]$$

y en la rotura, el valor determinante es $[(1+\mu)\,/E]\,\tau_{fl.}^2$, que igualado con el dado por la [15.150] nos da:

$$\frac{1+\mu}{E}\,\tau_{fl.}{}^2 = \frac{1+\mu}{3E}\,\sigma_{fl.}{}^2\,, \qquad [15.152]$$

o también:

$$\tau_{fl.} = 0{,}577\sigma_{fl.} \qquad [15.153]$$

La teoría de la máxima tensión tangencial octaédrica, como hemos dicho antes, conduce al mismo resultado por lo que no la aplicamos en detalle.

Finalmente, recordemos [15.136] que la teoría de Mohr nos dice que para materiales con igual límite de fluencia en tracción que en compresión, $\tau_{fl.} = 0{,}50\,\sigma_{fl.}$

Resumiendo tenemos las siguientes relaciones entre $\tau_{fl.}$ y $\sigma_{fl.}$ para las distintas teorías:

Teoría	*Relación entre* $\tau_{fl.}$ y $\sigma_{fl.}$
Rankine	$\tau_{fl.} = \sigma_{fl.}$
Guest	$\tau_{fl.} = 0{,}5\ \sigma_{fl.}$
Saint–Venant $\mu = 0{,}25$	$\tau_{fl.} = 0{,}80\ \sigma_{fl.}$
Saint–Venant $\mu = 0{,}30$	$\tau_{fl.} = 0{,}77\ \sigma_{fl.}$
Beltrami $\mu = 0{,}25$	$\tau_{fl.} = 0{,}632\ \sigma_{fl.}$
Beltrami $\mu = 0{,}30$	$\tau_{fl.} = 0{,}620\ \sigma_{fl.}$
Huber-Hencky-von Mises	$\tau_{fl.} = 0{,}577\ \sigma_{fl.}$
Tensión octaédrica	$\tau_{fl.} = 0{,}577\ \sigma_{fl.}$
Mohr para $\sigma_C = \sigma_T$	$\tau_{fl.} = 0{,}50\ \sigma_{fl.}$

Como dijimos, si todas las teorías fueran similares, las relaciones entre $\tau_{fl.}$ y $\sigma_{fl.}$ debieran resultar las mismas para todas ellas, lo que, como es fácil de observar, no ocurre, variando la relación entre 0,50 y 1,00.

Para materiales dúctiles, los resultados experimentales arrojan valores de la relación $\tau_{fl.}/\sigma_{fl.}$ variables, con un valor promedio del orden de 0,57 sensiblemente coincidente con el de 0,577 obtenido de la aplicación de las teorías de la máxima energía de distorsión o de la máxima tensión tangencial octaédrica, lo que las confirma como las más adecuadas para este tipo de material mientras que la de Mohr lo es para los materiales frágiles.

En realidad, como lo expresa Roš, en su trabajo en colaboración con Eichinger "Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr", no existe una única teoría de rotura válida para todos los materiales sino que cada uno posee su propio mecanismo de rotura.

16. SOLICITACIÓN POR FATIGA

16 . 1 . Concepto del problema

En ciertas estructuras, y en especial en elementos de máquinas, las acciones que las solicitan no actúan estáticamente como hemos supuesto en los capítulos precedentes, sino que lo hacen en forma dinámica, variable con el tiempo. Estas solicitaciones pueden significar tres problemas fundamentales:

a) solicitaciones por fatiga,

b) solicitaciones de acción dinámica,

c) problemas originados por vibraciones.

Nos ocuparemos en este capítulo, del primer problema. Si bien el tema, dado su carácter experimental, es de incumbencia de la asignatura denominada Estudio y Conocimiento de Materiales, lo desarrollaremos en forma sucinta, por entender que, en una obra que se ocupe de la Resistencia de Materiales, no puede dejar de ser tratado.

Consideraremos, por ejemplo, el caso del eje de un vehículo que soporta dos cargas simétricas que trasmite a tierra por intermedio de dos ruedas (fig. 16.1).

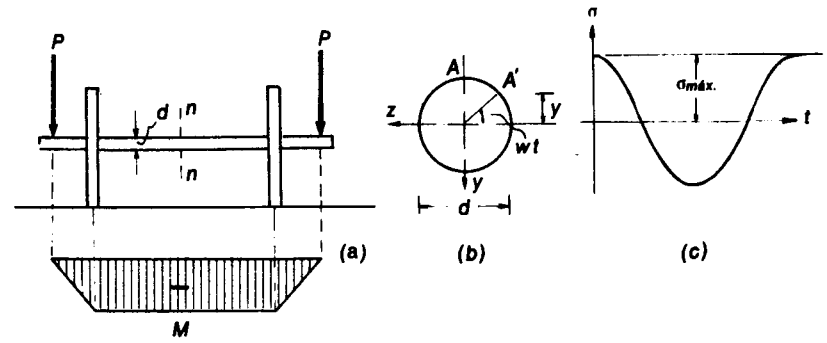


Fig. 16.1

Una sección tal como la n–n, soporta un momento flexor M y, para

un instante determinado, el punto A, ubicado en el borde superior de la sección, está solicitado por una tensión normal:

$$\sigma = \frac{M}{J_z} y, \qquad [16.1]$$

donde y, vale $y = d/2$.

Ahora bien, si el eje gira con una velocidad angular ω, trascurrido un tiempo t el punto A pasará a ocupar la posición A' y su distancia al eje neutro valdrá:

$$y = \frac{d}{2} \text{ sen } (90° - \text{cot}) \qquad [16.2]$$

y, en consecuencia:

$$\sigma = \frac{M}{J_z} \cdot \frac{d}{2} \text{ sen } (90° - \text{cot}) \qquad [16.3]$$

es decir, que la tensión variará, con el tiempo, según una función sinusoidal de una amplitud igual a $\sigma_{\text{máx.}}$.

Otro ejemplo de solicitación cíclica lo constituye la biela del mecanismo biela–manivela, la que se encuentra sujeta a solicitaciones alternadas de tracción y compresión, variables en el tiempo.

En determinados casos, las solicitaciones alternadas ocurren en forma continuada durante prolongados períodos de tiempo, como por ejemplo en los ejes de locomotoras y vagones, rieles, cigüeñales, bielas, dientes de engranajes, resortes de válvulas, etc. En cambio, en ciertas estructuras, como ser los puentes ferroviarios, la variación de las tensiones ocurre en períodos de tiempo relativamente cortos en relación con la vida de la estructura y el aumento del valor de las tensiones por sobre las tensiones de origen estático, es relativamente reducido.

El problema de la fatiga ha sido estudiado fundamentalmente por *Wöhler*, aunque se conocen experiencias efectuadas por *Fairbrain* que datan de 1864.

Una importante contribución al conocimiento del problema de la fatiga se debe a *Bauschinger*, quien estudió el efecto sobre el límite de fluencia de tensiones alternadas cuyo valor sobrepasaba al de aquél.

En lo que respecta al mecanismo de rotura por fatiga, se han propuesto diversas teorías para justificarlo.

La rotura por fatiga, aun en materiales dúctiles, es de fractura frágil, similar a la que ocurre en materiales frágiles por efecto de cargas estáticas. Por esta razón, en un principio se pensó que la repetición alternada de la solicitación, originaba un cambio en la naturaleza del material. Se suponía que este *cristalizaba*. Posteriormente, el uso del microscopio en el estudio de la estructura de los metales, permitió comprobar que tal suposición era falsa y que, en las

superficies de rotura por fatiga no había evidencia alguna de una modificación de la estructura cristalina del material. En cambio, pudo demostrarse la existencia de zonas de deslizamiento y de fisuras progresivas.

Actualmente se admite que la rotura por fatiga es una fractura progresiva, que se inicia en un punto o zona de fuerte concentración de tensiones, cuyo origen obedece a irregularidades superficiales, a cambios bruscos de forma, a la existencia de fisuras internas microscópicas o a inclusiones también microscópicas de granos de escoria, en el caso de los metales.

Es evidente la importancia de esta forma de rotura, por cuanto la existencia de una ligera fisura puede ser el factor desencadenante de su extensión en una medida tal que conduzca al colapso de la pieza.

16.2. Tipos de tensión en la solicitación por fatiga. Definiciones

Distinguiremos dos tipos fundamentales de solicitaciones repetidas:

a) cargas pulsatorias,

b) cargas oscilantes.

En las primeras, la tensión varía entre dos valores extremos sin cambiar de signo. En cambio, para las segundas los valores extremos son de distinto signo.

Cada uno de ellos admite un caso particular, lo que nos conduce a los cuatro tipos de cargas, representadas en la figura 16.2:

Tipo I : Carga pulsatoria.

Tipo II : Carga pulsatoria intermitente (se caracteriza por ser nula una de las tensiones extremas).

Tipo III : Carga oscilante.

Tipo IV : Carga oscilante alternada (se caracteriza por ser las tensiones extremas opuestas).

En lo que sigue, llamaremos $\sigma_{\text{máx.}}$, o tensión superior, a la máxima tensión en valor absoluto, y $\sigma_{\text{mín.}}$ o tensión inferior, a la mínima, también en valor absoluto, con independencia del signo. Además haremos:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\text{máx.}} + \sigma_{\text{mín.}}}{2}, \qquad [16.4]$$

tensión media y:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\text{máx.}} - \sigma_{\text{mín.}}}{2}, \qquad [16.5]$$

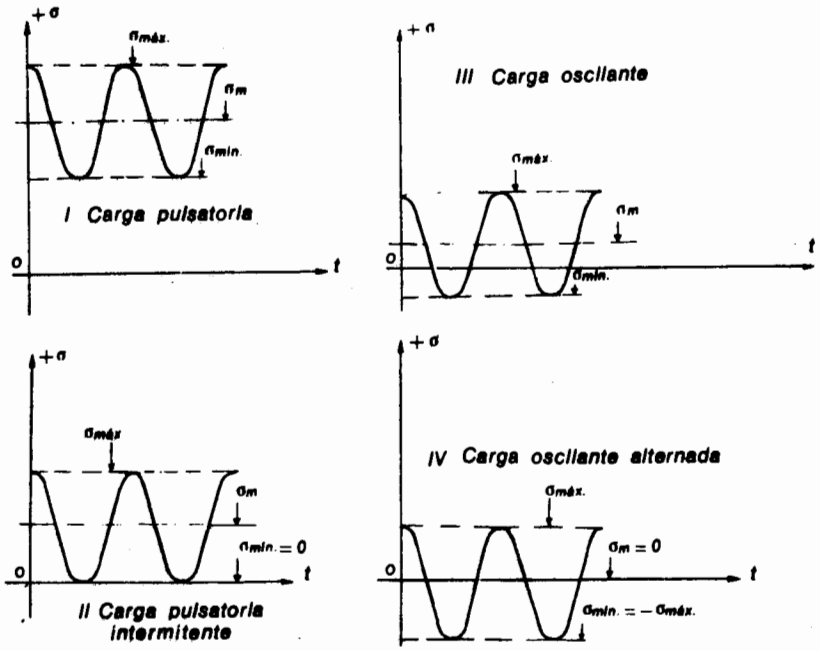


Fig. 16.2

de donde $\sigma_{\text{máx.}} = \sigma_m + \sigma_a$ y $\sigma_{\text{mín.}} = \sigma_m - \sigma_a$; σ_a es la amplitud de la tensión dinámica, denominada también tensión variable.

Es evidente que para el tipo II, carga pulsatoria intermitente, resulta

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\text{mín.}} &= 0 \\ \sigma_m &= \frac{1}{2}\,\sigma_{\text{máx.}} \\ \sigma_a &= \frac{1}{2}\,\sigma_{\text{max.}} \end{aligned}\right\} \qquad [16.6]$$

y para el tipo IV, carga oscilante alternada:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\text{máx.}} &= -\,\sigma_{\text{mín.}} \\ \sigma_m &= 0 \\ \sigma_a &= \sigma_{\text{máx.}} = -\,\sigma_{\text{mín.}} \end{aligned}\right\} \qquad [16.7]$$

Llamaremos *coeficiente del ciclo* la relación:

$$\frac{\sigma_{\text{mín.}}}{\sigma_{\text{máx.}}} = r. \qquad [16.8]$$

Para el caso II, donde $\sigma_{\text{mín.}} = 0$ resulta $r = 0$; en cambio, para el IV, se tiene $r = -1$.

La experiencia indica que la resistencia de fatiga depende sólo *de la amplitud* de la tensión dinámica, y del valor de la tensión media, pero no de la ley de variación *entre las tensiones extremas y sólo muy poco de la frecuencia.*[1]

Para un dado material, la resistencia a la rotura es, pues, la misma para cualquiera de las leyes de variación que muestra la figura 16.3.

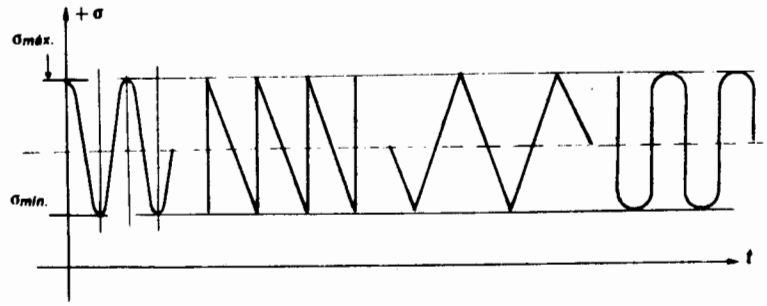


Fig. 16.3

Un ciclo de tensión correspondiente a cualquiera de los cuatro tipos de cargas mencionados, puede ser considerado como resultante de la superposición de dos tensiones: una, constante, de valor σ_m, y otra, oscilante alternada, de amplitud σ_a (fig. 16.4).

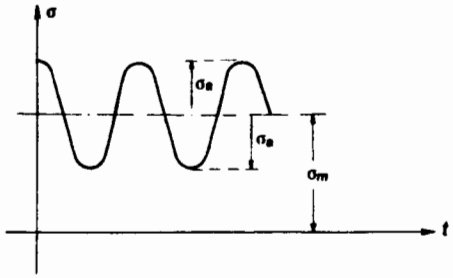


Fig. 16.4

[1] Variaciones de frecuencia entre 200 y 5.000 ciclos por minuto, prácticamente no influyen en la resistencia a la fatiga. *Jenkins* y *Lehman* han encontrado un aumento de la misma de sólo un 15% variando la frecuencia de 3 000 a 120 000 ciclos por minuto.

16 . 3 . Resistencia a la fatiga. Curva de Wöhler

Siguiendo la norma DIN 50.100 definiremos como *resistencia de fatiga* a la máxima amplitud de la tensión dinámica (variable) que superpuesta en ambos sentidos a la tensión media (estática) puede actuar un número ilimitado de reiteraciones, sin provocar la rotura de la probeta ni una deformación plástica superior a la admisible.

Como casos particulares de la resistencia de fatiga tenemos:

a) *Resistencia de oscilación:* es la que corresponde al caso IV y para el cual la tensión media es igual a cero y la tensión dinámica oscila entre dos valores iguales pero de distinto signo. La designaremos en lo que sigue σ_F.

b) *Resistencia de pulsación*: corresponde al caso II, para el cual una de las tensiones extremas es nula. Designaremos esta resistencia con σ_U.

La resistencia de fatiga, que se determina experimentalmente, es siempre inferior a la resistencia determinada en un ensayo estático. Depende, como hemos dicho, no de la tensión máxima a que se encuentre sometida la probeta, sino de la tensión media y de la amplitud de la tensión variable.

La determinación de la resistencia de fatiga se efectúa mediante el trazado del denominado diagrama de Wöhler.

Para ello se somete una probeta del material que queremos ensayar a una carga variable, generalmente de los tipos II ó IV, de una amplitud σ_a y una tensión media σ_m prefijadas, y se determina el número N de ciclos para el cual se produce la rotura por fatiga. Se repite el ensayo para otros valores de σ_a y σ_m, determinándose los correspondientes valores de N. Dichos pares de valores se representan en un diagrama, llevando en abscisas, generalmente en escala logarítmica, los valores de N que han conducido a la rotura por fatiga, y en ordenadas el valor de $\sigma_{máx.}$ correspondiente a cada caso. Se obtiene así una curva del tipo del que esquemáticamente muestra la figura 16.5, asimptótica de un determinado valor de $\sigma_{máx.}$ que es precisamente la llamada resistencia de fatiga del material para el tipo de solicitación para el cual fue trazado el diagrama.

Es evidente que para $N = 0$ el valor de la resistencia a la fatiga coincide con el de la resistencia estática.

La experiencia indica por otra parte que existen materiales capaces de resistir un número ilimitado de ciclos. Por ello cuando el número de los mismos alcanza un cierto valor sin que se produzca la rotura, se adopta dicho valor como valor límite experimental.

La norma DIN 50.100 fija como números límite de ciclos, 10^8 para metales livianos y 10^7 para los aceros.

Cuando se trata de aceros templados muy duros, o materiales no ferrosos, no es posible definir con certeza un valor límite de este tipo. Por esta razón

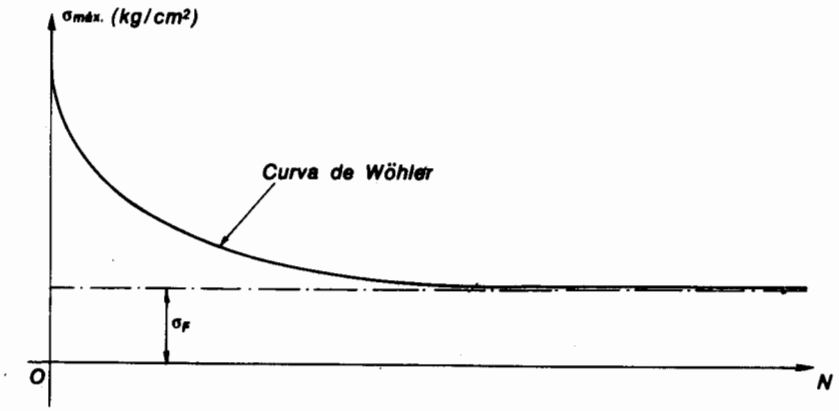


Fig. 16.5

se ha adoptado una resistencia de fatiga convencional, que corresponde a la tensión para la cual la probeta resiste 10^8 ciclos.

Dado que la determinación de la resistencia de fatiga es un tanto compleja, se ha tratado de vincularla mediante fórmulas empíricas con las características mecánicas determinadas por ensayos estáticos.

Es así que para aceros se admite como resistencia de oscilación:

$$\sigma_F \cong 0{,}5\, \sigma_T\,, \qquad [16.9]$$

donde σ_T corresponde a la resistencia a la tracción estática, y σ_F a la resistencia de fatiga para carga oscilante alternada.

Para aceros de muy alta resistencia y para el mismo tipo de solicitación, puede admitirse aproximadamente:

$$\sigma_F \cong 4.000 + \frac{1}{6}\,\sigma_T \quad (\mathrm{kg/cm^2})\,. \qquad [16.10]$$

En el caso de metales no ferrosos, la variación de la resistencia de fatiga es mayor que para los aceros, oscilando entre 0,25 y 0,50 de σ_T. En ensayos de torsión, siempre para solicitaciones oscilantes alternadas, se puede admitir:

$$\tau_F \cong 0{,}2 \;\text{ a }\; 0{,}3\, \sigma_T\,. \qquad [16.11]$$

Existen diversos factores que afectan la resistencia a la fatiga. Ya hemos mencionado la influencia de la frecuencia de los ciclos de carga.

El endurecimiento por trabajo en frío, como ser laminado o estirado, tiene

un efecto no despreciable sobre la resistencia de fatiga, que en ciertos casos puede llegar a incrementos del 30% o aun del 50%. El tamaño de la probeta y los tratamientos térmicos también influyen en los valores de σ_F, así como también la posibilidad de corrosión, que influye en sentido negativo, eso es, reduciendo su valor.

Las temperaturas elevadas reducen la resistencia de fatiga, y se ha observado para un determinado tipo de duraluminio una reducción del 70% para una temperatura de 260° C con relación a la obtenida a una temperatura ambiente de 24° C.

Los tres valores $\sigma_F, \sigma_U, \sigma_R$ (resistencia de rotura estática) se encuentran en una cierta relación, que fue fijada en un principio por Bach en:

$$\sigma_R : \sigma_U : \sigma_F = 3 : 2 : 1 , \qquad [16.12]$$

pero que actualmente, sobre la base de un mayor número de experiencias, se ha establecido aproximadamente en:

$$\sigma_R : \sigma_U : \sigma_F = 2 : 1{,}2 : 1 . \qquad [16.13]$$

16.4. Diagramas de fatiga. Interpretación de los resultados experimentales

La mayor parte de los valores experimentales obtenidos en ensayos de flexion, corresponden a cargas oscilantes alternadas, para las cuales $\sigma_m = 0$ y $\sigma_{máx.} = -\sigma_{mín.}$ pero, en realidad, para una mejor interpretación de la resistencia a la fatiga, interesa conocer la influencia de σ_m, lo que hace necesario disponer de resultados experimentales que contemplen la mayor cantidad posible de combinaciones de las tensiones superior e inferior. Ello se logra mediante ensayos en máquinas de fatiga (pulsadores) que trabajan por solicitación axil.

Supongamos conocidos, para un determinado material, la resistencia de rotura estática σ_R y la de fatiga σ_F, correspondiente esta última a distintas tensiones medias σ_m y tensiones variables σ_a, y ubiquemos los puntos representativos en un diagrama cartesiano, en cuyas abscisas llevamos los valores σ_m/σ_R y en ordenadas σ_a/σ_F (fig. 16.6).

El punto de ordenada nula y abscisa + 1,00 representa la rotura por tracción estática, por cuanto para él se cumple simultáneamente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma_m}{\sigma_R} &= 1{,}00 \\ \frac{\sigma_a}{\sigma_F} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [16.14]$$

lo que significa $\sigma_m = \sigma_R$ y tensión variable σ_a nula, es decir, una solicitación por tensión constante. Análogamente, el punto de abscisa − 1,00 y ordenada nula, corresponde a la rotura por compresión estática.

El punto de abscisa nula y ordenada + 1,00 corresponde a la solicitación del caso IV, *Carga oscilante alternada*, o sea, a la resistencia de oscilación, por cuanto para tal punto se cumple:

$$\sigma_m = 0 \qquad [16.15]$$

y

$$\sigma_F = \sigma_{máx.} = \sigma_a . \qquad [16.16]$$

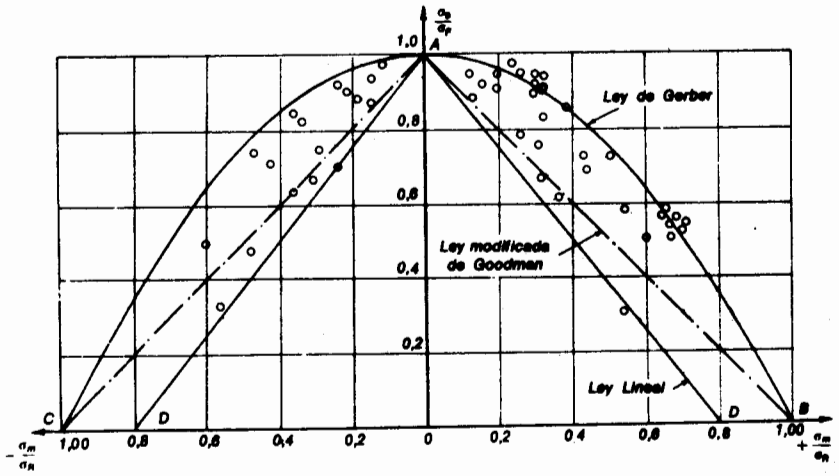


Fig. 16.6

En la figura 16.6 se han ubicado los puntos representativos de una serie de ensayos de fatiga, correspondientes a distintos pares de relaciones σ_a/σ_F y σ_m/σ_R, tomados de J. Marin[1].

La interpretación analítica de los resultados ha sido objeto de los esfuerzos de distintos investigadores. Marin menciona ocho interpretaciones empíricas distintas, de las cuales sólo tres son de interés relativo y las desarrollaremos a continuación.

[1] J. Marin, *Mechanical properties of materials and design*, pág. 134.

En primer término consideraremos la denominada *ley de Goodman*, expresión empírica que relaciona la variación de la tensión variable σ_a en función de la tensión media σ_m.

Goodman supone que dicha función está representada en el diagrama por las rectas que unen el punto A con los puntos B y C (fig. 16.6) y cuya expresión analítica es:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_F} = 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_R} . \qquad [16.17]$$

Si llamamos α la relación experimental entre la resistencia de oscilación y la de rotura estática:

$$\alpha = \frac{\sigma_F}{\sigma_R} , \qquad [16.18]$$

la [16.17] puede escribirse:

$$\sigma_a = \sigma_F - \alpha \sigma_m . \qquad [16.19]$$

Como puede observarse en la figura 16.6, los resultados experimentales se apartan bastante con respecto a la ley de Goodman.

La otra ley, muy utilizada, es la debida a *Gerber*, quien supone una variación parabólica de ecuación:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_F} = 1 - \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_R}\right)^2 , \qquad [16.20]$$

o también, expresada en función de α:

$$\sigma_a = \sigma_F - \alpha \frac{\sigma_m^2}{\sigma_R} , \qquad [16.21]$$

La mayor parte de los resultados experimentales que aparecen en el gráfico de figura 16.6 quedan comprendidos entre la recta de Goodman y la curva de Gerber. Ahora bien, existen puntos representativos de ensayos que quedan por debajo de ambas, lo que indica que para determinadas combinaciones de tensiones, tanto la expresión de Goodman como la de Gerber conducen a resultados por debajo del límite de seguridad.

Por otra parte, resulta un tanto ilógico, para el caso de las cargas estáticas, definir el colapso del material por la tensión de rotura en lugar de hacerlo por la tensión en el límite de fluencia. En este sentido se han propuesto dos expresiones empíricas que vinculen el punto A con el punto que, sobre el eje de abscisas corresponda al límite de fluencia del

material. Una de ellas responde a una ley parabólica y la otra, a una función lineal.

Esta última, debida a *Soderberg*, es la generalmente adoptada, y su expresión es:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_F} = 1 - k \frac{\sigma_m}{\sigma_R} , \qquad [16.22]$$

donde k, coeficiente mayor que la unidad, es igual a:

$$k = \frac{\sigma_R}{\sigma_{fl.}} . \qquad [16.23]$$

Introduciendo el valor de α, la [16.22] se trasforma en:

$$\sigma_a = \sigma_F - \alpha k \sigma_m . \qquad [16.24]$$

Reemplazando k en la [16.22] obtenemos:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_F} = 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_{fl.}} . \qquad [16.25]$$

Normalmente se adopta como valor de k:

$$k = 1{,}25 , \qquad [16.26]$$

lo que nos conduce para $\sigma_a / \sigma_F = 0$ a:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_R} = 0{,}80 , \qquad [16.27]$$

en lugar de 1,00 como corresponde a las leyes de Goodman y Gerber, resultando definido así el punto D sobre el eje de las abscisas, que unido con el A nos da la recta que corresponde a la denominada ley lineal de Soderberg.

La expresión de Soderberg es la más aconsejable para las aplicaciones prácticas, sobre todo cuando se trata de proyectar piezas sometidas a solicitaciones cíclicas.

En determinados casos, conviene expresar la tensión máxima en función de la media, en lugar de hacerlo mediante la relación entre las tensiones variable y media.

Para ello recordemos que:

$$\sigma_a = \sigma_{máx.} - \sigma_m , \qquad [16.28]$$

valor que reemplazado en [16.24] nos da:

$$\sigma_{máx.} = \sigma_F + \sigma_m (1 - \alpha k) , \qquad [16.29]$$

y haciendo:

$$\alpha \cdot k = q, \qquad [16.30]$$

$$\sigma_{\text{máx.}} = \sigma_F + (1 - q)\,\sigma_m\,, \qquad [16.31]$$

y dividiendo miembro a miembro por σ_F:

$$\frac{\sigma_{\text{máx.}}}{\sigma_F} = 1 + (1 - q)\,\frac{\sigma_m}{\sigma_F}\,, \qquad [16.32]$$

o también:

$$\frac{\sigma_{\text{máx.}}}{\sigma_F} = 1 + \left(\frac{1}{\alpha} - k\right)\frac{\sigma_m}{\sigma_R} \qquad [16.33]$$

Las expresiones, derivadas de las leyes de Goodman y Gerber, que se corresponden con la [16.33] son respectivamente:

$$\frac{\sigma_{\text{máx.}}}{\sigma_F} = 1 + \left(\frac{1}{\alpha} - k\right)\frac{\sigma_m}{\sigma_R}\,. \qquad [16.34]$$

y

$$\frac{\sigma_{\text{máx.}}}{\sigma_F} = 1 + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\sigma_m}{\sigma_R}\right)\frac{\sigma_m}{\sigma_R} \qquad [16.35]$$

En la figura 16.7 hemos representado estas tres relaciones a título ilustrativo para $k = 1{,}25$ y $\alpha = 0{,}40$.

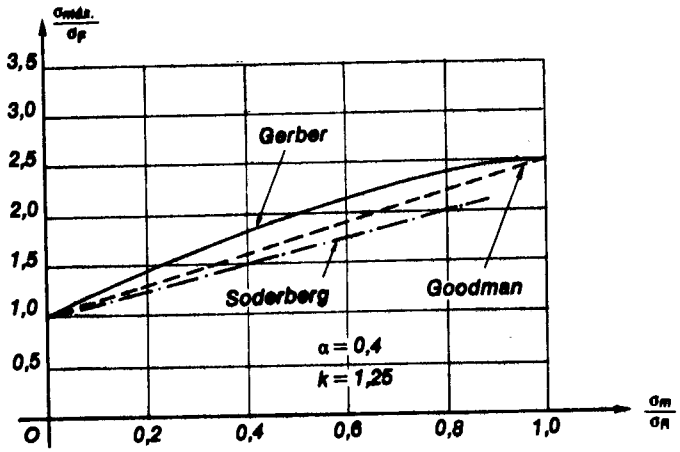


Fig. 16.7

16 . 5 . Diagrama de Weyrauch

Otra forma de interpretar gráficamente el comportamiento de los materiales a la solicitación por fatiga es el denominado diagrama de *Weyrauch*.

Este autor utiliza un par de ejes coordenados, donde en abscisas lleva los valores de $\sigma_{\text{mín.}}$ y como ordenadas los de $\sigma_{\text{máx.}}$

En este diagrama, la tensión $\sigma_{\text{mín.}}$ puede leerse como ordenada trazando por el origen una recta a 45° cuyas ordenadas, iguales a las correspondientes abscisas ($\sigma_{\text{mín.}}$), constituyen el límite inferior de las tensiones (fig. 16.8).

Cuando $\sigma_{\text{mín.}} = 0$, estamos ante una solicitación pulsatoria intermitente con $\sigma_{\text{máx.}} = \sigma_u$ (punto A de fig. 16.8) para una solicitación de tracción. Para la correspondiente de compresión, el punto representativo es el B, como es fácil de observar en el diagrama.

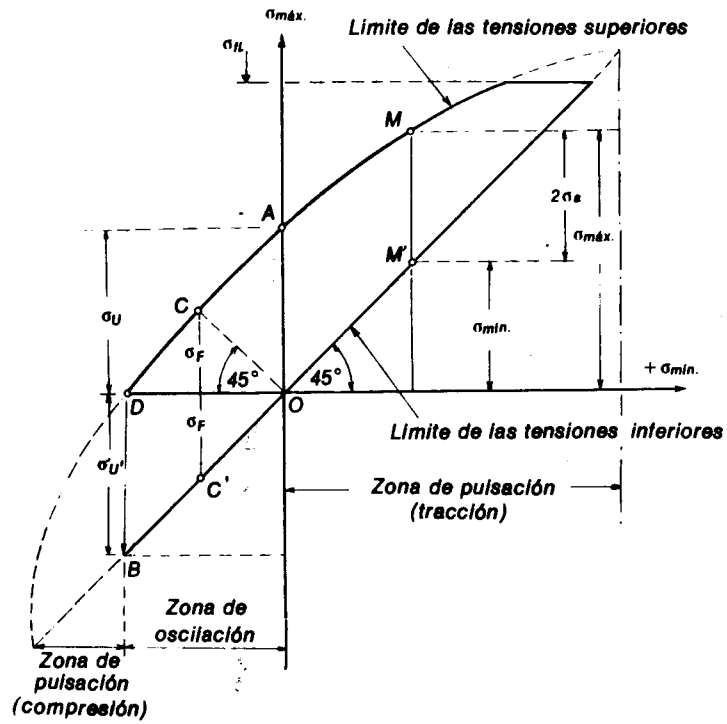


Fig. 16.8

La curva *CAM* es la curva límite superior y sus ordenadas corresponden a $\sigma_{máx.}$, mientras que la recta a 45° limita los valores de $\sigma_{mín.}$

Para un punto tal como el *M*, el intervalo *MM'* representa el doble de la tensión dinámica o variable. La resistencia de fatiga para la solicitación por carga oscilante alternada la obtenemos trazando por el origen *O* una recta a 45°, normal a la anterior, y su intersección con la curva límite superior nos da el punto *C* cuya ordenada es σ_F.

El diagrama de Weyrauch se limita superiormente por la tensión correspondiente al límite de fluencia del material, y en él quedan definidas tres zonas: de pulsación positiva (tracción), de oscilación y de pulsación negativa (compresión). Esta última puede o no ser simétrica con la primera, según que las características mecánicas del material en tracción y compresión sean o no iguales. En el diagrama de figura 16.8 hemos admitido esta última suposición.

16 . 6 . Diagrama de Smith

De entre todos los diagramas de fatiga propuestos por distintos investigadores y cuyo objeto es obtener una representación gráfica que resuma los valores de las resistencias de fatiga obtenidas mediante las curvas de Wöhler que corresponden a las distintas zonas de solicitación, el más difundido en *Alemania* es el denominado *diagrama de Smith.*

Para su construcción se procede en la forma siguiente: sobre un par de ejes coordenados ortogonales se llevan en abscisas los valores de las tensiones medias σ_m y en ordenadas los de las tensiones superior $\sigma_{máx.}$ e inferior $\sigma_{mín.}$ correspondientes a las respectivas tensiones medias.

En consecuencia, los extremos de las ordenadas ($\sigma_{máx.}$ y $\sigma_{mín.}$) constituyen dos lugares geométricos que son las curvas límites de las tensiones superiores e inferiores.

Las ordenadas definidas por una recta a 45° que pasa por el origen, corresponden, lo mismo que las respectivas abscisas, a las tensiones medias σ_m, y dicha recta divide en partes iguales a la doble amplitud σ_a. Es decir, que la distancia de cada curva límite a la recta mencionada corresponde al valor de la tensión variable o dinámica σ_a, correspondientes a las distintas resistencias de fatiga.

En la figura 16.9 hemos reproducido un diagrama de Smith que responde aproximadamente a las características de un acero común de construcción tipo St 37 con 3 700 kg/cm² de límite de rotura estática, 2 600 kg/cm² de límite de fluencia[1], definido en este caso, y de una resistencia de fatiga, del tipo *IV. Carga oscilante alternada, del orden de 1 200 kg/cm²*.

Para un material de estas características mecánicas, el diagrama es simétrico para el tercer cuadrante con relación al primero, por lo que, en figura 16.9 sólo hemos reproducido la parte correspondiente al primero de ellos.

[1] Este valor corresponde a la tensión superior de fluencia, que puede también llegar a 2 800 kg/cm².

Para una carga oscilante alternada, caso IV, (resistencia a oscilaciones) tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_m &= 0 \\ \sigma_{máx.} &= \sigma_{mín.} = \sigma_F \end{aligned}\right\} \qquad [16.36]$$

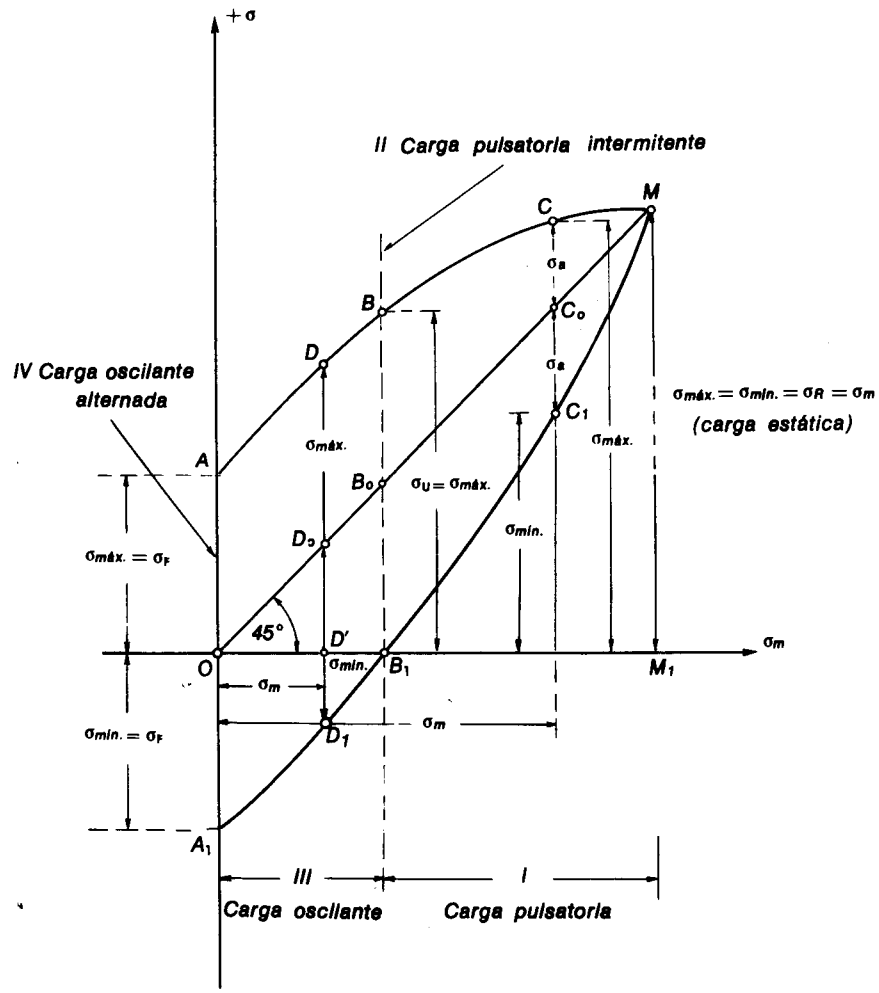


Fig. 16.9

y su representación en el diagrama de Smith corresponde a los puntos A y A_1.

El caso de la rotura estática (supongamos por tracción) es aquel para el cual se cumple que:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \sigma_{\text{mín.}} = \sigma_R = \sigma_m \qquad [16.37]$$

y que, en el diagrama que estamos analizando, está representado por el punto M.

El caso *II Carga pulsatoria intermitente* (resistencia a pulsaciones) está representado por los puntos B y B_1, donde:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\text{máx.}} &= \sigma_u \\ \sigma_{\text{mín.}} &= 0 \\ \sigma_m &= \frac{1}{2}\,\sigma_{\text{máx.}}\,. \end{aligned}\right\} \qquad [16.38]$$

Para obtener puntos intermedios que nos permitan el trazado de las curvas límite superior e inferior, se recurre a los resultados de ensayos de fatiga variando σ_m y σ_a. La zona comprendida entre O y B_1 corresponde a las solicitaciones debidas a cargas del tipo III, mientras que la delimitada por B_1 y M_1, lo es para las del tipo I. Consideremos ahora, una vez trazadas las curvas límites, el punto D_0 de la recta a 45° OM. Tendremos:

$$\left.\begin{aligned} \overline{DD'} &= \sigma_{\text{máx.}} \\ \overline{D'D_1} &= \sigma_{\text{mín.}} \end{aligned}\right\} \qquad [16.39]$$

La distancia $\overline{D_0D'}$ vale, según hemos visto:

$$\overline{D_0D'} = \overline{OD'} = \sigma_m\,, \qquad [16.40]$$

luego resulta:

$$\overline{DD_0} = \sigma_{\text{máx.}} - \sigma_m = \sigma_a \qquad [16.41]$$

y además:

$$\overline{D'D_0} - \overline{D'D_1} = \overline{D_0D_1} = \sigma_m - \sigma_{\text{mín.}} = \sigma_a\,, \qquad [16.42]$$

teniendo en cuenta el signo de ambas magnitudes. De ahí que las curvas límite superior e inferior resulten simétricas respecto de la recta a 45°.

La zona más desfavorable de trabajo del material es la comprendida entre O y B_1, donde existe cambio de signo de las tensiones.

Por otra parte, para el dimensionamiento de fatiga, tanto de elementos estructurales, como de piezas de máquinas y mecanismos la experiencia indica que no conviene que la tensión superior supere el límite de fluencia del material. De modo que, en la práctica, el diagrama de Smith resulta modificado como

muestra la figura 16.10, teniendo en cuenta esta última condición y las de simetría a que debe responder el diagrama.

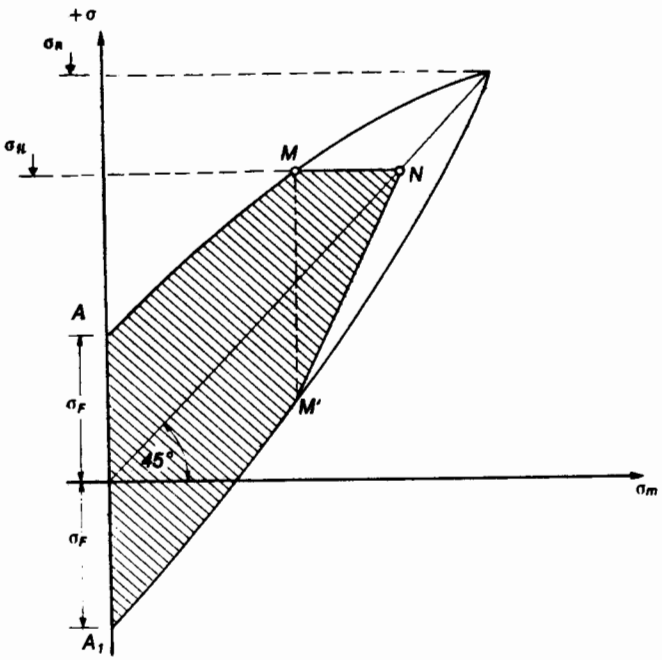


Fig. 16.10

Trazando una horizontal por la ordenada correspondiente a $\sigma_{fl.}$, ella corta a la curva límite superior en el punto M y a la recta a 45° en el N. Trazando por M una vertical, su intersección con la curva límite inferior nos define el punto M' que unido con el N nos completa, con el segmento $\overline{MN}$ la limitación del diagrama de Smith, cuya zona útil aparece rayada en la figura.

Si bien este diagrama está constituido por dos curvas, cuyo trazado exige la realización de toda una serie de ensayos para distintos σ_m y en los que se varía σ_a, la reducida curvatura de las mismas hace que puedan ser reemplazadas por segmentos de recta, sin mayor error. Ello simplifica grandemente el trazado del diagrama de Smith, como veremos a continuación, por cuanto sólo es necesario conocer ciertos puntos que corresponden a determinadas formas de solicitación.

Admitiendo, como lo establecen numerosos investigadores, que la tensión variable σ_a correspondiente a la resistencia pulsatoria intermitente es del orden del 80% de la resistencia a las oscilaciones σ_F:

$$\sigma_a^U = 0{,}80\,\sigma_F\,, \qquad [16.43]$$

bastará conocer los valores de $\sigma_{fl.}$ y σ_F (límites de fluencia y resistencia de fatiga para el caso *IV, Carga oscilante alternada*, respectivamente) para poder trazar el diagrama aproximado. Para ello, previo trazado de la recta a 45°, llevamos sobre el eje de ordenadas, fig. 16.11, los valores de σ_F en tracción y compresión (puntos A y A_1), y el del límite de fluencia (punto S).

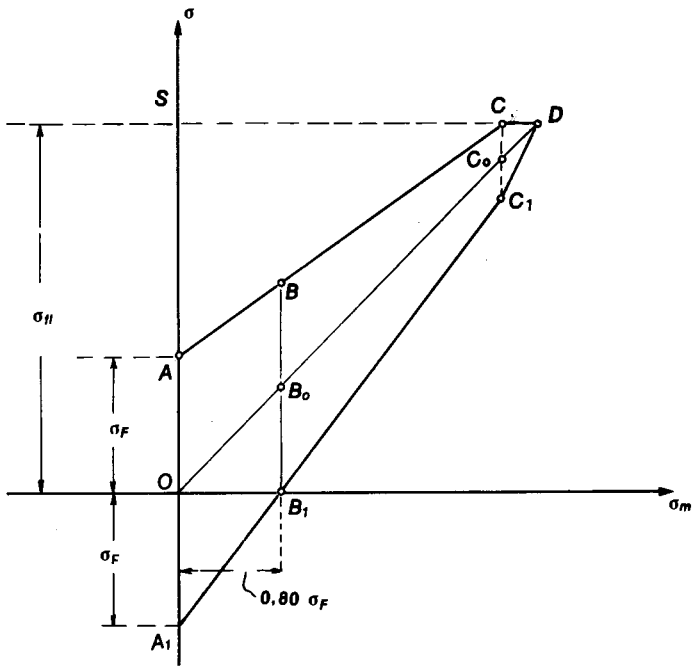


Fig. 16.11

Luego llevamos sobre el eje de abscisas, el segmento

$$\overline{OB_1} = \sigma_m = 0{,}80\,\sigma_F\,. \qquad [16.44]$$

Por B_1 levantamos una perpendicular, sobre la que llevamos el segmento

$$\overline{B_1B} = 2\,\overline{OB_1} = 1{,}60\,\sigma_F\,, \qquad [16.45]$$

que nos define el punto B.

La recta AB, en su intersección con la horizontal por S nos determina el punto C. Su simétrico C_1 respecto de la recta a 45°, unido con D y con A_1 nos completa el diagrama aproximado, pero suficientemente exacto, de Smith. Como control, la recta A_1C_1 debe pasar por B_1.

Como vemos, el trazado aproximado del diagrama de Smith, sólo requiere conocer el límite de fluencia del material y su resistencia de fatiga σ_F determinada mediante un ensayo de carga oscilante alternada, que puede ser una flexión rotativa.

Para materiales distintos del acero, en especial aquellos cuyas características mecánicas en tracción y compresión son distintas, como en el caso de la fundición, el diagrama de Smith resulta asimétrico.

16.7. Dimensionado de piezas sujetas a solicitaciones cíclicas

A los efectos de proceder al dimensionado de piezas sujetas a la acción de solicitaciones cíclicas, utilizaremos a título de ejemplo el criterio de Soderberg cuya expresión en función de $\sigma_{máx.}$, de acuerdo con la [16.31] es:

$$\sigma_{máx.} = \sigma_F + (1 - q)\,\sigma_m\,, \qquad [16.46]$$

donde:

$$\left.\begin{aligned} q &= \alpha k \\ k &= \frac{\sigma_R}{\sigma_{fl.}} \\ \alpha &= \frac{\sigma_F}{\sigma_R} \end{aligned}\right\} \qquad [16.47]$$

y en consecuencia:

$$q = \frac{\sigma_F}{\sigma_{fl.}}\,, \qquad [16.48]$$

relación perfectamente definida para cada tipo de material.

La expresión [16.46] vincula la tensión superior con la resistencia a la fatiga para cargas oscilantes alternadas y la constante q del material.

Si dimensionáramos la pieza o elemento estructural partiendo del valor $\sigma_{máx.}$ dado por la [16.46], como en su expresión aparece σ_F, que es una tensión de rotura, estaríamos calculando para un estado límite, que, por razones de seguridad, no es admisible. En consecuencia, debemos afectar al valor σ_F de un coeficiente de seguridad, que dependerá del tipo de solicitación, destino de la estructura y de todos aquellos factores que influyen en su determinación y que hemos analizado en el capítulo 7.

Si llamamos ν al coeficiente de seguridad adoptado tendremos:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{\sigma_F}{\nu} + (1-q)\,\sigma_m\,, \qquad [16.49]$$

que dividida por la tensión admisible para cargas estáticas se trasforma en:

$$\frac{\sigma_{\text{máx.}}}{\sigma_{\text{adm.}}} = \frac{\sigma_F}{\nu\,\sigma_{\text{adm.}}} + (1-q)\frac{\sigma_m}{\sigma_{\text{adm.}}}\,, \qquad [16.50]$$

Teniendo en cuenta que, de acuerdo con la definición de coeficiente de seguridad es:

$$\nu\sigma_{\text{adm.}} = \sigma_{\text{fl.}}\,, \qquad [16.51]$$

reemplazando llegamos a:

$$\frac{\sigma_{\text{máx.}}}{\sigma_{\text{adm.}}} = \frac{\sigma_F}{\sigma_{\text{fl.}}} + (1-q)\frac{\sigma_m}{\sigma_{\text{adm.}}}\,. \qquad [16.52]$$

o también teniendo en cuenta la [16.48]:

$$\frac{\sigma_{\text{máx.}}}{\sigma_{\text{adm.}}} = q + (1-q)\frac{\sigma_m}{\sigma_{\text{adm.}}}\,, \qquad [16.53]$$

que es la fórmula para el dimensionamiento según el criterio de Soderberg.

A continuación aplicaremos la [16.53] a los casos de solicitación axil y de flexión pura.

16 . 7 . 1 . Fatiga por solicitación axil

Supongamos una pieza sometida a la acción de una solicitación axil P, variable entre los límites $P_{\text{máx.}}$ y $P_{\text{mín.}}$.

En consecuencia será:

$$P_m = \frac{1}{2}(P_{\text{máx.}} + P_{\text{mín.}})\,. \qquad [16.54]$$

Si F es el área de la sección trasversal, resulta:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\text{máx.}} &= \frac{P_{\text{máx.}}}{F} \\ \sigma_{\text{mín.}} &= \frac{P_{\text{mín.}}}{F} \end{aligned}\right\} \qquad [16.55]$$

y reemplazando en la [16.53]:

$$\frac{P_{\text{máx.}}}{\sigma_{\text{adm.}}F} = q + (1-q)\frac{P_m}{F\sigma_{\text{adm.}}}\,. \qquad [16.56]$$

Despejando el área F, llegamos a la siguiente fórmula de dimensionamiento:

$$F = \frac{1}{q\,\sigma_{\text{adm.}}}\,[P_{\text{máx.}} - P_m\,(1-q)]\,, \qquad [16.57]$$

o también:

$$F = \frac{P_{\text{máx.}}}{\sigma_{\text{adm.}}}\left[\frac{1}{q} - \frac{P_m}{P_{\text{máx.}}}\left(\frac{1}{q} - 1\right)\right]\,, \qquad [16.58]$$

Para poner de manifiesto la influencia del tipo de solicitación, analizaremos cinco casos distintos de solicitación, suponiendo un acero dúctil, tipo St 37, donde podemos admitir:

$$q = \frac{\sigma_F}{\sigma_{\text{fl.}}} \cong \frac{1.200}{2.400} = 0{,}50\,. \qquad [16.59]$$

Reemplazando dicho valor en la [16.58] resulta:

$$F = \frac{P_{\text{máx.}}}{\sigma_{\text{adm.}}}\left(2 - \frac{P_m}{P_{\text{máx.}}}\right)\,. \qquad [16.60]$$

Consideremos en primer término la solicitación más desfavorable, que corresponde a la carga oscilante alternada, para la cual:

$$\left.\begin{aligned} P_{\text{máx.}} &= -P_{\text{mín.}} \\ P_m &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [16.61]$$

Con dichos valores la [16.60] se trasforma en:

$$F_1 = \frac{2P_{\text{máx.}}}{\sigma_{\text{adm.}}}\,, \qquad [16.62]$$

Si ahora consideramos el caso más favorable, que es la solicitación estática, donde:

$$P_{\text{máx.}} = P_{\text{mín.}} = P_m\,, \qquad [16.63]$$

obtenemos:

$$F_2 = \frac{P_{\text{máx.}}}{\sigma_{\text{adm.}}} \qquad [16.64]$$

como era lógico esperar.

Vemos que, para la carga oscilante alternada, es necesario duplicar el área

de la sección con respecto a la requerida por la misma carga máxima actuando en forma estática.

Supongamos ahora una solicitación pulsatoria intermitente. Para ella tendremos:

$$\left.\begin{aligned} P_{\text{mín.}} &= 0 \\ P_m &= \frac{P_{\text{máx.}}}{2}, \end{aligned}\right\} \qquad [16.65]$$

valores que reemplazados en [16.60] nos dan:

$$F_3 = \frac{1{,}5 P_{\text{máx.}}}{\sigma_{\text{adm.}}}, \qquad [16.66]$$

Si consideramos una solicitación oscilante, para la cual:

$$P_{\text{máx.}} = -2P_{\text{mín.}}, \qquad [16.67]$$

la carga media resulta:

$$P_m = 0{,}25 P_{\text{máx.}}, \qquad [16.68]$$

y

$$F_4 = 1{,}75 \frac{P_{\text{máx.}}}{\sigma_{\text{adm.}}}, \qquad [16.69]$$

Finalmente para una carga pulsatoria donde:

$$\left.\begin{aligned} P_{\text{máx.}} &= 2P_{\text{mín.}} \\ P_m &= 0{,}75 P_{\text{máx.}}, \end{aligned}\right\} \qquad [16.70]$$

la sección necesaria resulta ser:

$$F_5 = 1{,}25 \frac{P_{\text{máx.}}}{\sigma_{\text{adm.}}}, \qquad [16.71]$$

Como puede observarse, las solicitaciones más desfavorables son las que corresponden a inversiones de signos de la solicitación y entre ellas la más peligrosa, y que en consecuencia exige una mayor sección, es la oscilante alternada.

16.7.2. Fatiga por flexión

Supongamos una pieza de momento de inercia constante y una sección de ella solicitada por un par flexor variable entre dos valores límites $M_{\text{máx.}}$ y $M_{\text{mín.}}$. A estos valores corresponderá un par de momento promedio:

$$M_m = \frac{1}{2}(M_{\text{máx.}} + M_{\text{mín.}}). \qquad [16.72]$$

Si W es el módulo resistente de la sección, será:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{M_{\text{máx.}}}{W} \qquad [16.73]$$

y

$$\sigma_m = \frac{M_m}{W}, \qquad [16.74]$$

valores que introducidos en la [16.53] nos dan:

$$\frac{M_{\text{máx.}}}{W\sigma_{\text{adm.}}} = q + (1-q)\frac{M_m}{W\sigma_{\text{adm.}}} \qquad [16.75]$$

y despejando W, luego de las mismas trasformaciones del caso anterior llegamos finalmente a:

$$W = \frac{M_{\text{máx.}}}{\sigma_{\text{adm.}}}\left[\frac{1}{q} - \frac{M_m}{M_{\text{máx.}}}\left(\frac{1}{q} - 1\right)\right], \qquad [16.76]$$

El criterio de aplicación de esta fórmula es el mismo que para la [16.58]. La única diferencia reside en que, para un mismo material, el valor de q difiere según la forma de solicitación. Así, para un acero St 42, el valor de q para flexión es de 0,63 y se reduce a 0,54 para solicitación axil.

A título de ejemplo, aplicaremos la expresión [16.76] a un eje de sección circular solicitado en un caso por carga oscilante alternada, luego por carga pulsatoria intermitente y finalmente por carga estática. Admitiendo 0,63 como valor de q, la [16.76] se trasforma en:

$$W = \frac{M_{\text{máx.}}}{\sigma_{\text{adm.}}}\left(1{,}6 - 0{,}6\frac{M_m}{M_{\text{máx.}}}\right). \qquad [16.77]$$

a) *Carga oscilante alternada*

Para este caso es:

$$\left.\begin{aligned} M_{\text{máx.}} &= -M_{\text{mín.}} \\ M_m &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad [16.78]$$

luego:

$$W = 1{,}6 \frac{M_{\text{máx.}}}{\sigma_{\text{adm.}}}, \qquad [16.79]$$

y teniendo en cuenta que para la sección circular es:

$$W = \frac{\pi d^3}{32}, \qquad [16.80]$$

resulta:

$$d_1 = 2{,}52 \sqrt[3]{\frac{M_{\text{máx.}}}{\sigma_{\text{adm.}}}}. \qquad [16.81]$$

b) *Carga pulsatoria intermitente*

Para este tipo de carga se tiene, como sabemos:

$$\left.\begin{aligned} M_{\text{mín.}} &= 0 \\ M_m &= \frac{1}{2} M_{\text{máx.}}, \end{aligned}\right\} \qquad [16.82]$$

de donde, de la [16.77] resulta:

$$W = 1{,}3 \frac{M_{\text{máx.}}}{\sigma_{\text{adm.}}}, \qquad [16.83]$$

y finalmente:

$$d_2 = 2{,}46 \sqrt[3]{\frac{M_{\text{máx.}}}{\sigma_{\text{adm.}}}}. \qquad [16.84]$$

c) *Carga estática*

En este caso es:

$$M_{\text{máx.}} = M_{\text{mín.}} = M_m, \qquad [16.85]$$

con lo que la [16.77] se trasforma en:

$$W = \frac{M_{\text{máx.}}}{\sigma_{\text{adm.}}} \qquad [16.86]$$

y

$$d_3 = 2{,}16 \sqrt[3]{\frac{M_{\text{máx.}}}{\sigma_{\text{adm.}}}}, \qquad [16.87]$$

Los tres diámetros calculados están en la relación:

$$d_3 : d_2 : d_1 = 1 : 1{,}14 : 1{,}17, \qquad [16.88]$$

y las correspondientes áreas en:

$$F_3 : F_2 : F_1 = 1 : 1{,}30 : 1{,}39, \qquad [16.89]$$

de modo que, entre la solicitación más desfavorable (oscilante alternada) y la más favorable (estática) existe para el caso analizado una diferencia de sección del 39%.

17. SOLICITACIONES DINÁMICAS

17 . 1 . Planteo del problema

Al iniciar el estudio del capítulo 16, expresamos que, en ciertos casos, las acciones que solicitan a los elementos estructurales, mecanismos o piezas de máquinas, lo hacían en forma variable con el tiempo, y dentro de los tres problemas fundamentales que significaban esta forma de actuar las cargas, nos ocupamos de las denominadas "solicitaciones por fatiga". En el presente capítulo desarrollaremos los efectos originados por las llamadas "solicitaciones por acción dinámica".

Las acciones dinámicas dependen fundamentalmente de la velocidad de aplicación de las cargas. Si éstas actúan durante un tiempo muy prolongado, su efecto difiere del que resulta de un tiempo de aplicación extremadamente reducido. La respuesta del material a la solicitación, aunque ésta sea de igual intensidad en ambos casos, es distinta para cada uno de ellos. En el primer caso estamos ante el fenómeno denominado *creep* en inglés, *kriechen* en alemán y que entre nosotros se define como *fluencia lenta*. Es un proceso complejo, donde la temperatura tiene una importancia grande y del que no nos ocuparemos. El segundo caso corresponde a lo que se denomina "impacto de alta velocidad", o "cargas dinámicas" y donde el comportamiento del material es completamente distinto del que corresponde al originado por una carga estática. Pero existe aún una tercera forma de solicitación del tipo dinámico, y es aquella que, si bien no puede considerarse como una carga estática, la duración del tiempo de aplicación es tal que permite al material solicitado, una respuesta donde éste exhibe características mecánicas similares a las que corresponden a una carga estática.

Esta forma de solicitación se denomina "impacto de baja velocidad" o "cargas de impacto".

Las cargas dinámicas se distinguen de las estáticas por el hecho de originar modificaciones tanto en la magnitud de las tensiones como en las deformaciones a que dan lugar, afectando también la forma y límite de rotura del material.

En general, la deformación de rotura por impacto se reduce en forma considerable, especialmente cuando existe concentración de tensiones, en cuyo caso la energía de deformación absorbida resulta ser mucho menor, lo cual se traduce en un cambio en la forma de rotura.

En efecto, al reducirse la deformación específica de rotura, se disminuye la ductilidad del material y aumenta su fragilidad.

Es así que, ciertos elementos de máquinas, cuando rompen por cargas de impacto, muestran fractura frágil pese a estar constituidas por materiales dúctiles.

Las experiencias realizadas por distintos investigadores muestran incrementos del límite de fluencia y de la tensión de rotura, obtenidos en ensayos efectuados con cargas dinámicas en relación a los correspondientes a cargas estáticas. A título informativo, trascribimos a continuación dos cuadros de valores, tomados de J. Marin[1], donde aparecen, para distintos materiales, las relaciones de tensiones de fluencia y de rotura, obtenidos mediante las dos formas de solicitación.

RELACIÓN ENTRE LÍMITES DE FLUENCIA

Investigador	*Material*	*Relación entre los límites de fluencia dinámico y estático*
B. Hopkinson	Alambre de acero	1,68
B. Hopkinson	Alambre de cobre	1,28
A. Dinnik	Acero	1,85
N. Nemiloff	Acero	1,90
E. Davidenkoff	Acero	1,23–1,44
E. Meyer	Hierro	1,60
N. Davidenkoff y K. Jurieff	Acero	1,10–1,43

En lo que respecta al *aumento del valor de la tensión de rotura,* las relaciones experimentales están detalladas en el cuadro de página 561.

Finalmente, las cargas dinámicas producidas por el impacto de un cuerpo en movimiento, pueden originar en la estructura o en parte de ella, efectos vibratorios. Si la carga dinámica se repite en forma periódica, y su frecuencia

[1] Marin, *Mechanical Properties of Materiales and Design.*

RELACIÓN ENTRE TENSIONES DE ROTURA

Investigador	*Material*	*Relación entre las tensiones de rotura dinámica y estática*	*Tipo de solicitación*
Plank	Acero	1,46	Tracción
Meyer	Hierro	1,12	Tracción
Meyer	Acero	1,06	Tracción
Meyer	Bronce	1,81	Tracción
Meyer	Cobre	1,13	Tracción
Seehose	Acero	1,14	Compresión
Seehose	Cobre	1,15	Compresión
Seehose	Bronce	1,02	Compresión
Seehose	Hierro	1,11	Compresión

coincide con el período propio de vibración del elemento que recibe el impacto o se le aproxima mucho, puede éste entrar en resonancia. De ocurrir este fenómeno se originan deformaciones de considerable magnitud que en general conducen al colapso de la estructura. Este fenómeno tiene especial importancia en piezas de máquinas y estructuras aeronáuticas y son muchos los casos de puentes colgantes, donde el efecto del viento, mejor dicho de las ráfagas, ha hecho que la estructura entrara en resonancia, generalmente por vibraciones del tipo torsional, con colapso como resultado final.

La circunstancia que, tanto el límite de fluencia como el de rotura, para el caso de una solicitación dinámica, resultan incrementados con respecto correspondientes a cargas estáticas, hace pensar en la posibilidad de un aumento en el valor de las tensiones admisibles a considerar para el dimensionado.

Sin embargo, existe una serie de factores que hacen que no puede aceptarse un aumento de las tensiones admisibles para cargas dinámicas y que se tomen los mismos valores, o en ciertos casos, aún menores, que los determinandos para cargas estáticas. En primer término, hay que tener presente que ambas formas de solicitación son de naturaleza distinta.

Por otra parte, en el caso de la solicitación estática, lo que actúa es una carga perfectamente definida, mientras que para solicitación dinámica ocurre una trasferencia de una cierta cantidad de energía cinética.

Además, una falta de homogeneidad del material, localizada, conduce a efectos distintos para ambos tipos de solicitación, por cuanto, para la solicitación dinámica, la energía de deformación disminuye considerablemente como consecuencia de la menor deformación.

Hay que tener presente también que el error en la apreciación del valor de las cargas dinámicas es mucho mayor que para las estáticas, por cuanto las primeras dependen de una serie de factores de difícil apreciación.

Finalmente, si por efectos de la solicitación dinámica se sobrepasa el límite de fluencia del material, resulta una deformación permanente, que se suma a las que ocurren al reiterarse el impacto, lo que hace mucho más peligrosa esta situación que en el caso de la carga estática, por cuanto la deformación acumulada puede alcanzar valores inadmisibles.

Todas estas razones conducen, como hemos dicho, a que convenga reducir las tensiones admisibles para el proyecto y dimensionamiento de piezas y elementos de máquinas sujetos a cargas dinámicas.

La determinación en forma rigurosa de las tensiones que se originan como consecuencia de las cargas dinámicas, resulta compleja y en cierto modo, un tanto indefinida. Por ello se recurre a soluciones suficientemente aproximadas. En los parágrafos siguientes nos ocuparemos de algunos casos simples.

17 . 2 . Solicitación dinámica axil

Consideremos el ejemplo básico de una barra de sección F, longitud l, suspendida de un extremo, que soporta en el opuesto el impacto de un peso Q que cae de una altura h (fig. 17.1).

La solución rigurosa del problema exige tener en cuenta el peso total de la barra y del tope del extremo inferior. Pero, como es normal que ocurra, si dicho peso es despreciable respecto al peso Q de la masa móvil que origina el impacto, se puede plantear la solución aproximada, pero suficientemente exacta, que desarrollaremos a continuación.

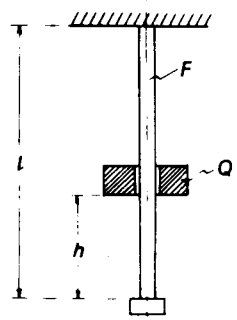


Fig. 17.1

Al producirse el impacto, la masa móvil posee una velocidad v, función de la altura de caída h que se reduce a cero mientras la barra se deforma axilmente. Ello significa que la energía cinética de la masa Q en el momento del impacto se trasforma en energía de deformación. Admitiremos que la trasformación es total, que *toda* la energía cinética se consume en deformar la barra, lo que en realidad no es cierto, pues hay parte de ella que se disipa de otras maneras. Si Δl es el alargamiento total que experimenta la barra como consecuencia del impacto, el trabajo desarrollado por Q será:

$$\Phi_1 = Q\,(h + \Delta l)\,, \qquad [17.1]$$

Supongamos ahora una carga estática P que, actuando en forma gradual, origine la misma deformación total Δl.

El trabajo desarrollado en este caso será:

$$\Phi_2 = \frac{P\Delta l}{2}. \qquad [17.2]$$

Dicha carga se denomina *carga estática equivalente* y es obvio que debe cumplirse, por hipótesis, que:

$$\Phi_1 = \Phi_2\,, \qquad [17.3]$$

o sea:

$$Q\,(h + \Delta l) = \frac{P\Delta l}{2}. \qquad [17.4]$$

Pero:

$$P = \sigma \cdot F\,, \qquad [17.5]$$

y de acuerdo con la ley de Hooke:

$$\sigma = E\epsilon = \frac{\Delta l}{l}\,E\,, \qquad [17.6]$$

valor que reemplazado en [17.5] nos da:

$$P = \frac{F\Delta l}{l}E\,, \qquad [17.7]$$

de donde:

$$Q\,(h + \Delta l) = \frac{FE\,(\Delta l)^2}{2l}\,, \qquad [17.8]$$

y finalmente:

$$(\Delta l)^2\,\frac{FE}{2l} - \Delta l Q - hQ = 0\,, \qquad [17.9]$$

o también:

$$(\Delta l)^2 - \frac{2lQ}{FE}\,\Delta l - \frac{2lhQ}{FE} = 0\,, \qquad [17.10]$$

Despejando Δl:

$$\Delta l = \frac{Ql}{EF} + \sqrt{\left(\frac{Ql}{EF}\right)^2 + \frac{2Qlh}{EF}}\,, \qquad [17.11]$$

Si llamamos $\Delta l'$ a la deformación total producida por una carga estática de intensidad Q, la [17.11] puede escribirse como sigue:

$$\Delta l = \Delta l' + \sqrt{(\Delta l')^2 + 2h\,\Delta l'}\,, \qquad [17.12]$$

Recordando que la velocidad del cuerpo de peso Q en el momento del impacto, que hemos llamado v, vale:

$$v = \sqrt{2gh}, \qquad [17.13]$$

tenemos:

$$h = \frac{v^2}{2g}, \qquad [17.14]$$

de donde, reemplazando en la [17.12] resulta finalmente:

$$\Delta l = \Delta l' + \sqrt{(\Delta l')^2 + \frac{v^2}{g}\,\Delta l'}. \qquad [17.15]$$

Según la ley de Hooke:

$$\sigma = \frac{\Delta l}{l} E, \qquad [17.16]$$

de donde, la tensión normal desarrollada en el momento del impacto resulta ser:

$$\sigma = \frac{E}{l}\left[\Delta l' + \sqrt{(\Delta l')^2 + \frac{v^2}{g}\,\Delta l'}\right]. \qquad [17.17]$$

En general, h resulta considerablemente mayor que $\Delta l'$ y con más razón que $(\Delta l')^2$, de modo que en primera aproximación podemos admitir:

$$\sigma = \frac{E}{l}\sqrt{\frac{v^2}{g}\,\Delta l'}, \qquad [17.18]$$

y recordando que:

$$\Delta l' = \frac{Ql}{EF} \qquad [17.19]$$

introduciendo este valor en la [17.18] resulta finalmente, como expresión de la tensión σ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E}{Fl} \cdot \frac{Qv^2}{2g}}. \qquad [17.20]$$

En la [17.20] la tensión σ es función directa, como es lógico, de la intensidad de Q y de la altura de caída. Pero aparte de ello, a igualdad de estos últimos factores, puede observarse que puede disminuir si se reduce el módulo de elasticidad o bien si aumenta el volumen de la pieza, que es igual a $F \cdot l$. Entonces, para una barra de un determinado material cuya sección F se mantenga, las tensiones originadas por una carga Q que cae de una altura h, pueden reducirse si se aumenta la longitud de la barra, o a la inversa, si se mantiene la longitud, debe aumentarse la sección.

Teniendo en cuenta la [17.14], la fórmula [17.20] puede escribirse también en la forma siguiente:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E}{Fl} \cdot Qh}. \qquad [17.21]$$

Consideremos ahora el caso particular donde la carga dinámica actúa súbitamente, es decir, cuando $v = 0$. En tal caso, la [17.17] se trasforma en:

$$\sigma = \frac{E}{l}\left[\Delta l' + \sqrt{(\Delta l')^2}\right], \qquad [17.22]$$

que es:

$$\sigma = \frac{2E\,\Delta l'}{l}. \qquad [17.23]$$

Recordando que:

$$\frac{E\,\Delta l'}{l} = E\,\epsilon_E = \sigma_E, \qquad [17.24]$$

es la tensión estática correspondiente a la deformación ϵ_E originada por la carga Q actuando en forma estática, llegamos a la conclusión que:

$$\sigma = 2\,\sigma_E, \qquad [17.25]$$

es decir, que la carga de impacto, cuando actúa en forma instantánea, sin que exista velocidad de impacto, origina tensiones dobles de las que produce la misma carga actuando en forma gradual.

La expresión [17.21] también puede expresarse en función de la energía de deformación, admitiendo, como lo hemos hecho, que la totalidad de la energía potencial debida a la carga Q que cae de la altura h se trasforma en aquella.

La expresión de la energía de deformación por unidad de volumen es, para solicitación axil:

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}, \qquad [17.26]$$

y la total para la barra de volumen $V = F \cdot l$:

$$U = \frac{\sigma^2}{2E}\,F \cdot l \qquad [17.27]$$

de donde:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E}{Fl}\,U} \qquad [17.28]$$

y como $U = Qh$, reemplazando llegamos a una expresión idéntica a la [17.21].

17 . 3 . Solicitación dinámica por flexión

El problema de la determinación de las tensiones de flexión originadas por cargas de acción dinámica es muy complejo, por cuanto es función del tipo y distribución de las cargas y de la configuración y grado de hiperestaticidad de la estructura.

Nos limitaremos en consecuencia, y a los efectos de suministrar al lector una idea del problema, al caso de una viga simplemente apoyada donde se desprecia la influencia del peso propio.

Supondremos la misma hipótesis admitida para el impacto por solicitación axil, es decir que no hay pérdida de energía y que la totalidad de la energía trasmitida se trasforma en energía de deformación.

Supongamos, figura 17.2, una viga simplemente apoyada, de luz l, sujeta en su punto medio al impacto de una carga concentrada Q que cae de una altura h.

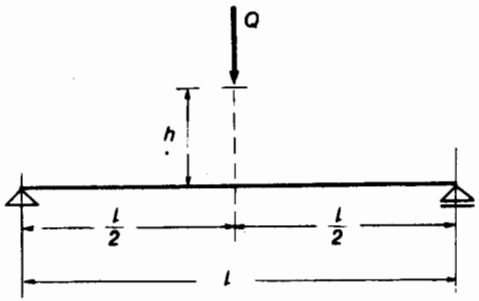


Fig. 17.2

Despreciamos las deformaciones localizadas de contacto, entre carga y superficie de la viga, que también absorben energía, y suponemos que las elásticas de deformación de la viga, son semejantes para una carga estática y para la misma actuando en forma dinámica.

Si f_d es la flecha que se origina en el centro de la viga por efecto de la carga Q de impacto; la carga estática equivalente P, capaz de producir en la viga la misma flecha máxima será:

$$P = \frac{48EJ}{l^3} f_d \,, \qquad [17.29]$$

donde J es el momento de inercia de la sección trasversal de la viga respecto del eje neutro, supuesto constante para toda la luz.

El trabajo desarrollado por P, que es igual a la energía de deformación absorbida por la viga, es:

$$\Phi_2 = \frac{P}{2} f_d = \frac{24EJ}{l^3} f_d^2 \,, \qquad [17.30]$$

y el correspondiente a Q que cae de una altura h, será:

$$\Phi_1 = Q\,(h + f_d). \qquad [17.31]$$

Por hipótesis, ambos trabajos deben ser iguales y, en consecuencia:

$$Q\,(h + f_d) = \frac{24EJ}{l^3} f_d^2 \,, \qquad [17.32]$$

$$f_d^2 - \frac{Ql^3}{24EJ} f_d - \frac{Ql^3 h}{24EJ} = 0 \,, \qquad [17.33]$$

de donde:

$$f_d = \frac{Ql^3}{48EJ} + \sqrt{\left(\frac{Ql^3}{48EJ}\right)^2 + \frac{Ql^3 h}{24EJ}} \,, \qquad [17.34]$$

pero:

$$\frac{Ql^3}{48EJ} = f_s \qquad [17.35]$$

flecha originada en el centro de la luz por la carga Q actuando como carga estática y, además, recordando que:

$$v = \sqrt{2gh} \,, \qquad [17.36]$$

es la velocidad de impacto de la carga Q, reemplazando en la [17.34] tenemos:

$$f_d = f_s + \sqrt{f_s^2 + \frac{Ql^3 v^2}{48gEJ}} \,, \qquad [17.37]$$

o también

$$f_d = f_s + \sqrt{f_s^2 + f_s \frac{v^2}{g}} \,, \qquad [17.38]$$

expresión similar a la [17.15].

Calculemos ahora las tensiones normales de origen dinámico que se desarrollan en la sección. La fórmula de la flexión simple normal nos dice que si $y_{\text{máx.}}$ es la distancia de la fibra más alejada del eje neutro, resulta:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{M_{\text{máx.}}}{J} y_{\text{máx.}} \,, \qquad [17.39]$$

que para nuestro caso se trasforma en:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{Pl}{4J}\, y_{\text{máx.}}, \qquad [17.40]$$

Pero, de acuerdo con la [17.29], hemos supuesto que:

$$P = \frac{48EJ}{l^3} f_d, \qquad [17.41]$$

luego, reemplazando resulta:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{12E}{l^2}\, y_{\text{máx.}}\, f_d. \qquad [17.42]$$

Ahora bien, en general, para el caso de pequeñas deformaciones, f_s y en consecuencia f_s^2, son despreciables en relación con h. De ahí que podamos trasformar la [17.38] en primera aproximación en:

$$f_d = \sqrt{\frac{v^2}{g} f_s} = \sqrt{2hf_s}\,, \qquad [17.43]$$

Pero por la [17.35]:

$$f_d = \sqrt{\frac{Ql^3}{24EJ}\, h}\,, \qquad [17.44]$$

y reemplazando en la [17.42]:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{12E}{l^2}\, y_{\text{máx.}} \sqrt{\frac{Ql^3}{24EJ}\, h}\,, \qquad [17.45]$$

o también:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \sqrt{\frac{6QEh}{lJ}\, y^2_{\text{máx.}}}. \qquad [17.46]$$

Para la sección rectangular, de ancho b y altura d tenemos:

$$\left.\begin{aligned} J &= \frac{bd^3}{12} \\ y^2_{\text{máx.}} &= \frac{d^2}{4} \\ F &= bd \end{aligned}\right\} \qquad [17.47]$$

de donde:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \sqrt{\frac{18E}{lF} Qh} \qquad [17.48]$$

y para la circular de diámetro D:

$$\left.\begin{aligned} J &= \frac{\pi D^4}{64} \\ y^2_{\text{máx.}} &= \frac{D^2}{4} \\ F &= \frac{\pi D^2}{4}\,, \end{aligned}\right\} \qquad [17.49]$$

de donde, reemplazando en la [17.46]:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \sqrt{\frac{24E}{lF} Qh}\,. \qquad [17.50]$$

Comparando la [17.50] con la [17.48] vemos que a igualdad de área de las secciones trasversales y de los demás factores que intervienen en ambas expresiones, las tensiones máximas desarrolladas por acción dinámica, para la sección circular son un 11,6% mayores que las originadas en las secciones rectangulares.

En el caso particular, en que la carga dinámica actúa súbitamente (analizado en solicitación axil dinámica) podemos admitir que la velocidad v es nula, en consecuencia la [17.38] se trasforma en:

$$f_d = 2f_s \qquad [17.51]$$

La flecha originada por la carga Q actuando súbitamente duplica, pues, a la flecha producida por la misma carga si actuara en forma estática.

Teniendo en cuenta la [17.42] resulta para este caso:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{24E}{l^2}\, y_{\text{máx.}}\, f_s, \qquad [17.52]$$

y reemplazando f_s de la [17.35]:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{Ql}{2J}\, y_{\text{máx.}}\,, \qquad [17.53]$$

En cambio, si Q actuara como una carga estática, la expresión de $\sigma_{\text{máx.}}$, sería

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{Ql}{4J}\, y_{\text{máx.}}\,, \qquad [17.54]$$

es decir, la mitad del valor anterior. La conclusión a que llegamos es que para el caso de la flexión, a igual que para solicitación axil, la aplicación súbita de la

carga duplica el valor de las tensiones originadas por la misma carga actuando en forma estática.

17 . 4 . Solicitación dinámica por torsión

Esta forma de solicitación se presenta en diversos problemas de la técnica y uno de los casos más frecuentes es el de los árboles que trasmiten potencia, cuando el par motor es aplicado bruscamente. Un ejemplo de ello lo constituye el acoplamiento de un eje al mecanismo motor mediante un embrague. Cuando el embrague se acciona bruscamente, la potencia actúa en forma dinámica. Si representamos la potencia trasmitida como el producto del par motor M_t, por una cierta rotación Θ ($M_t \cdot \Theta$ = energía cinética), el trabajo desarrollado será:

$$\Phi_1 = M_t (\Theta + \theta l) , \qquad [17.55]$$

donde θ es el ángulo específico de torsión del eje y l la longitud de éste: en consecuencia, θl representa el ángulo total de torsión por deformación elástica, figura 17.3. Por razones obvias de simplicidad, supondremos en lo que sigue, un árbol de sección circular llena, haciendo notar que los mismos conceptos son aplicables a árboles de cualquier tipo de sección.

Supongamos ahora un par de torsión de momento M_t', que actuando en forma estática, es capaz de producir un trabajo igual al anterior:

$$\Phi_2 = \Phi_1 = \frac{M_t' \theta l}{2} . \qquad [17.56]$$

En consecuencia, debemos tener:

$$M_t (\Theta + \theta l) = \frac{M_t' \theta l}{2} \qquad [17.57]$$

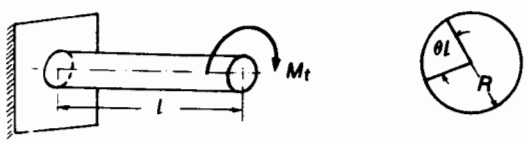


Fig. 17.3

Ahora bien, para la sección circular llena, la máxima tensión tangencial debida al par M_t', actuando en forma estática, ocurre en el borde de la sección y su expresión es:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{M_t'}{J_p} R = \gamma_{\text{máx.}} G , \qquad [17.58]$$

de donde

$$M_t' = \frac{\tau_{\text{máx.}}}{R} J_p = \frac{\gamma_{\text{máx.}} G J_p}{R} , \qquad [17.59]$$

pero:

$$\gamma_{\text{máx.}} = \theta R , \qquad [17.60]$$

de donde:

$$M_t' = \frac{\theta R G J_p}{R} = \theta G J_p . \qquad [17.61]$$

y reemplazando esta última expresión en la [17.57] resulta:

$$M_t \Theta + M_t \theta l = \frac{(\theta l)^2 G J_p}{2l} , \qquad [17.62]$$

o también:

$$(\theta l)^2 - \frac{2M_t l}{G J_p} \theta l - \frac{2M_t l}{G J_p} \Theta = 0 . \qquad [17.63]$$

Finalmente, despejando θl, ángulo total de torsión:

$$\theta l = \frac{M_t l}{G J_p} + \sqrt{\left(\frac{M_t l}{G J_p}\right)^2 + \frac{2 M_t l \Theta}{G J_p}} \qquad [17.64]$$

Pero:

$$\theta_s = \frac{M_t}{G J_p} , \qquad [17.65]$$

llamando θ_s al ángulo específico de torsión originado por M_t actuando en forma estática. En consecuencia, reemplazando esta última expresión en la [17.64] llegamos a:

$$\theta l = \theta_s l + \sqrt{(\theta_s l)^2 + 2\theta_s l \Theta} \qquad [17.66]$$

y dividiendo miembro a miembro por l

$$\theta = \theta_s + \sqrt{\theta_s^2 + 2\theta_s \frac{\Theta}{l}} , \qquad [17.67]$$

De las [17.58] y [17.60] tenemos:

$$\tau_{\text{máx.}} = \theta R G\,, \qquad [17.68]$$

en consecuencia:

$$\tau_{\text{máx.}} = RG\left(\theta_s + \sqrt{\theta_s^2 + \frac{2\theta_s\Theta}{l}}\right) \qquad [17.69]$$

En general, análogamente a lo que hemos aceptado para las solicitaciones axil y de flexión dinámica, θ_s es despreciable ante Θ. En consecuencia, en primera aproximación podemos admitir:

$$\tau_{\text{máx.}} = RG\sqrt{\frac{2\theta_s\Theta}{l}} \qquad [17.70]$$

y reemplazando θ_s por su igual de [17.65]:

$$\tau_{\text{máx.}} = RG\sqrt{\frac{2M_t}{GJ_p}\,\frac{\Theta}{l}} \qquad [17.71]$$

$$\tau_{\text{máx.}} = \sqrt{\frac{2M_t R^2 G}{lJ_p}\,\Theta}. \qquad [17.72]$$

Pero:

$$M_t\Theta = \Phi, \qquad [17.73]$$

es la energía trasmitida por torsión, y si recordamos que para la sección circular llena es:

$$J_p = \frac{\pi R^4}{2}\,, \qquad [17.74]$$

reemplazando estas dos últimas expresiones en la [17.72] llegamos a:

$$\tau_{\text{máx.}} = \sqrt{\frac{4G\Phi}{l\pi R^2}}\,, \qquad [17.75]$$

o, también, si F es el área de la sección trasversal:

$$\tau_{\text{máx.}} = 2\sqrt{\frac{G\Phi}{Fl}}\,. \qquad [17.76]$$

Cuando el par torsor actúa en forma instantánea, $\Theta = 0$. En este caso la [17.69] se trasforma en:

$$\tau_{\text{máx.}} = 2RG\theta_s\,. \qquad [17.77]$$

Pero:

$$RG\theta_s = \tau'_{\text{máx.}}\,, \qquad [17.78]$$

donde $\tau_{\text{máx.}}$ es la máxima tensión tangencial originada por el par M_t actuando

estáticamente. En consecuencia, y análogamente a lo establecido para los casos de solicitación axil y de flexión dinámicas resulta:

$$\tau_{\text{máx.}} = 2\tau'_{\text{máx.}}\,, \qquad [17.79]$$

es decir que un par torsor actuando en forma dinámica y aplicado súbitamente, duplica las tensiones originadas por el mismo par cuando lo hace en forma gradual.

17 . 5 . Análisis comparativo entre solicitaciones estática y dinámica

La resistencia que ofrece una barra de determinada sección a una solicitación estática P, depende únicamente de la tensión máxima que se origina; ésta puede ser, según los casos, la misma para todas las secciones, para una sección determinada o también para un único punto. En cambio, cuando la solicitación es de origen dinámico, la resistencia es función, aparte de la tensión máxima, de dos condiciones fundamentales, a saber:

a) la uniformidad en la distribución de tensiones, y

b) el volumen del sólido que absorbe el impacto.

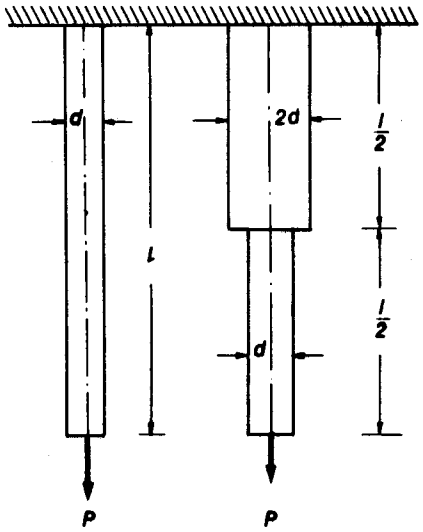


Fig. 17.4

Analicemos primero la condición (a). Supongamos las dos barras de figura 17.4, de las cuales una es de sección uniforme en toda su longitud, y la otra en su mitad inferior es de igual diámetro que la primera, mientras que en la mitad superior, el diámetro se duplica.

Si la carga P que solicita las barras es una carga estática, ambas barras son equivalentes desde el punto de vista de las tensiones máximas que se desarrollan, por cuanto éstas son funciones del área menor:

$$\sigma = \frac{4P}{\pi d^2}, \qquad [17.80]$$

En cambio, si la carga actúa en forma de impacto de baja velocidad, la situación es distinta por cuanto, como veremos a continuación, el valor de la carga capaz de originar en ambas barras una misma tensión σ preestablecida, es completamente distinta para cada una de ellas.

Si la tensión preestablecida es σ, en la barra de sección uniforme será la misma para todos los puntos y la energía de deformación que es capaz de absorber será:

$$U_1 = \frac{\sigma^2}{2E} Fl, \qquad [17.81]$$

donde F, es el área de la sección trasversal. En cambio, si F_0 es el área de la sección de la mitad superior de la segunda barra, tendremos:

$$F_0 = 4F, \qquad [17.82]$$

y la tensión σ_0 en los puntos de dicha mitad superior será:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{4}, \qquad [17.83]$$

En consecuencia, la energía de deformación que es capaz de absorber la segunda barra será:

$$U_2 = \frac{\sigma^2}{2E}\frac{Fl}{2} + \frac{\sigma_0^2}{2E} F_0 \frac{l}{2} \qquad [17.84]$$

y reemplazando valores:

$$U_2 = \frac{\sigma^2}{2E}\frac{Fl}{2}\left(1 + \frac{4}{16}\right), \qquad [17.85]$$

$$U_2 = \frac{20}{64}\frac{Fl}{E}\sigma^2, \qquad [17.86]$$

valor que comparado con el [17.81] nos dice que:

$$U_2 = \frac{5}{8} U_1, \qquad [17.87]$$

o sea, que la capacidad de absorción de energía de impacto de la barra de sección uniforme es aproximadamente un 60% mayor que para la segunda. Consideremos ahora la segunda condición, la influencia del volumen del sólido. Supongamos la barra de figura 17.5 *a* donde $F_1 = 2F_2$ y $l_1 = 2l_2$. Si σ_2 es la tensión en la parte de barra de sección F_2, la correspondiente a la de área F_1 será:

$$\sigma_1 = \sigma_2 \frac{F_2}{F_1}, \qquad [17.88]$$

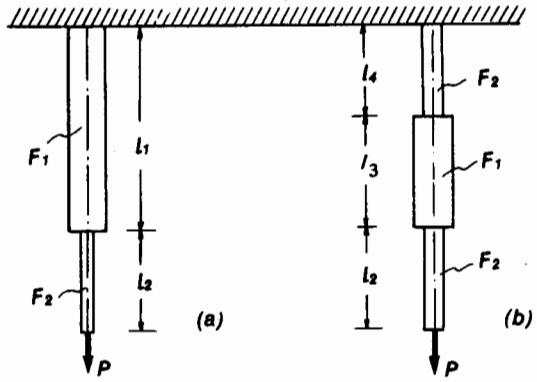


Fig. 17.5

o sea:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\sigma_2 \qquad [17.89]$$

y la energía total de deformación que es capaz de absorber para que la tensión máxima resulte:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \sigma_2, \qquad [17.90]$$

será:

$$U_1 = \frac{\sigma_2^2}{2E} F_2 l_2 + \frac{\sigma_1^2}{2E} F_1 l_1, \qquad [17.91]$$

o también:

$$U_1 = \frac{\sigma_2^2}{2E} F_2 l_2 + \frac{\sigma_2^2}{8E} 2F_2 2l_2 \ , \qquad [17.92]$$

$$U_1 = \frac{\sigma_2^2 F_2 l_2}{E} \ . \qquad [17.93]$$

Supongamos ahora la misma barra a la cual en su tercio superior hemos reducido la sección a la mitad (fig. 17.5 *b*). Entonces tendremos:

$$l_2 = l_3 = l_4 = \frac{l}{3} \ . \qquad [17.94]$$

La tensión normal en el tercio superior será ahora σ_2. La energía total de deformación será en este caso, para $\sigma_{\text{máx.}} = \sigma_2$:

$$U_2 = \frac{\sigma_2^2}{2E} F_2 l_2 + \frac{\sigma_1^2}{2E} F_1 l_3 + \frac{\sigma_2^2}{2E} F_2 l_4 \ , \qquad [17.95]$$

o también:

$$U_2 = \frac{\sigma_2^2 F_2 l_2}{2E} + \frac{\sigma_2^2}{8E} l_2 2F_2 + \frac{\sigma_2^2}{2E} F_2 l_2 \qquad [17.96]$$

$$U_2 = \frac{\sigma_2^2 F_2 l_2}{2E} + \frac{\sigma_2^2 l_2 2F_2}{8E} + \frac{\sigma_2^2}{2E} F_2 l_2 \ , \qquad [17.97]$$

y finalmente:

$$U_2 = \frac{\sigma_2^2 F_2 l_2}{2E} \left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} \frac{\sigma_2^2 F_2 l_2}{E} \ , \qquad [17.98]$$

es decir:

$$U_2 = \frac{5}{4} U_1 \ , \qquad [17.99]$$

Llegamos así a la conclusión que la reducción del volumen de la barra ha incrementado su capacidad de absorción de energía de impacto por cuanto existe un mayor volumen de material solicitado por tensiones más elevadas.

Veamos finalmente el siguiente ejemplo que pone de manifiesto en forma simple la influencia del volumen en la capacidad de absorción de energía de impacto.

Sea, fig. 17.6, dos barras de igual diámetro, pero una de ellas de longitud doble de la otra. Si las barras están solicitadas por cargas estáticas, ambas tienen la misma resistencia, por cuanto sus secciones trasversales son iguales. En cambio, la capacidad de absorber energía de impacto no es la misma, como veremos a continuación.

Llamemos U_a y U_b las energías de impacto que son capaces de absorber las barras *a* y *b* respectivamente. Tenemos entonces:

$$\left.\begin{aligned} U_a &= \frac{\sigma^2}{2E} F_a l_a \ , \\ U_b &= \frac{\sigma^2}{2E} F_b l_b \ . \end{aligned}\right\} \qquad [17.100]$$

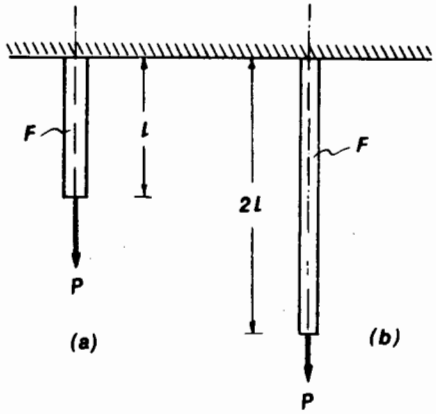


Fig. 17.6

A igualdad de tensiones en ambas barras, dividiendo miembro a miembro y teniendo en cuenta que:

$$\left.\begin{aligned} F_a &= F_b \ , \\ l_b &= 2l_a \ , \end{aligned}\right\} \qquad [17.101]$$

llegamos a:

$$\frac{U_a}{U_b} = \frac{l_a}{l_b} = \frac{1}{2} \ , \qquad [17.102]$$

o, también:

$$U_b = 2\,U_a \ , \qquad [17.103]$$

La barra larga es capaz, en el caso analizado, de absorber una energía de impacto doble de la de la barra corta.

17 . 6 . Influencia de la inercia de la pieza que soporta el impacto

Al analizar en el parágrafo 17.2 el impacto de una masa Q admitimos que la totalidad de la energía cinética que la animaba al producirse el impacto, se trasformaba en energía de deformación, prescindiendo de la inercia de la barra

que absorbía el impacto. Ello, como dijimos, puede admitirse cuando la masa Q es considerablemente mayor que la de la barra.

Estudiaremos a continuación el caso donde no puede despreciarse la inercia de la barra, por ser su masa no despreciable frente a la de Q.

Remitiéndonos a la figura 17.1, llamemos q al peso de la barra por unidad de longitud. Si m_1 y m_2 son. respectivamente, las masas del peso Q y de la barra, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{Q}{g}\,, \\ m_2 &= \frac{ql}{g}\,. \end{aligned}\right\} \qquad [17.104]$$

Al producirse el impacto, la masa m_1 se halla animada de la velocidad v, mientras que la barra se encuentra en reposo. Por tratarse de un choque central, y de acuerdo con el teorema de la conservación de la cantidad de movimiento, luego del choque ambas masas se desplazan a una misma velocidad v_0 tal que se cumpla:

$$m_1 v = (m_1 + m_2) v_0\,, \qquad [17.105]$$

o, también:

$$\frac{Q}{g} v = \left(\frac{Q}{g} + \frac{ql}{g}\right) v_0\,, \qquad [17.106]$$

de donde:

$$v_0 = \frac{Q}{Q + ql} v\,. \qquad [17.107]$$

La expresión anterior sería cierta si la barra no tuviera su extremo superior fijo, pues entonces todos sus puntos estarían animados de la misma velocidad. Pero, en el caso que nos ocupa, el problema es más complejo por cuanto, luego del impacto, el extremo superior permanece fijo, es decir, su velocidad es nula, mientras que su otro extremo esta animado de la velocidad v_0. Entre ambos extremos, la velocidad varía según una ley que desconocemos, pero que con suficiente aproximación supondremos lineal (fig. 17.7).

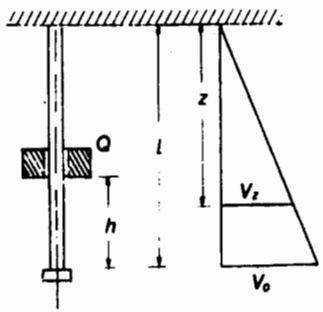


Fig. 17.7

En consecuencia será:

$$v_z = v_0 \frac{z}{l}\,. \qquad [17.108]$$

La energía cinética de la masa real de la barra, con velocidad variable, será:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{q}{g} v_z^2\, dz\,, \qquad [17.109]$$

o, también:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{q}{g} \frac{z^2}{l^2} v_0^2\, dz = \frac{ql}{6g} v_0^2 \qquad [17.110]$$

Supongamos ahora una masa ideal M_i, equivalente a la de la barra, concentrada en su extremo inferior, de velocidad única v_0 e igual energía cinética. De acuerdo con esta hipótesis, debe cumplirse:

$$\frac{ql}{6g} v_0^2 = \frac{M_i v_0^2}{2}\,, \qquad [17.111]$$

y, en consecuencia:

$$M_i = \frac{ql}{3g}\,. \qquad [17.112]$$

Ahora bien, dicha masa ideal, si llamamos P_i a una carga ideal, será igual a:

$$M_i = \frac{P_i}{g}\,, \qquad [17.113]$$

de donde, igualando las dos expresiones de M_i llegamos a:

$$P_i = \frac{ql}{3}\,. \qquad [17.114]$$

Aplicando el teorema de la conservación de la cantidad de movimiento, la [17.106] se trasforma en:

$$\frac{Q}{g} v = \left(\frac{Q}{g} + \frac{ql}{3g}\right) v_0\,. \qquad [17.115]$$

Simplificando y trasponiendo términos, encontramos que:

$$v_0 = \frac{Q}{Q + \frac{ql}{3}} v = \frac{1}{1 + \frac{ql}{3Q}} v\,. \qquad [17.116]$$

La energía cinética de las masas cuando se mueven juntas es:

$$\frac{1}{2}\frac{\left(Q+\frac{ql}{3}\right)}{g}v_0^2=\frac{\left(Q+\frac{ql}{3}\right)}{2g}\cdot\frac{v^2}{\left(1+\frac{ql}{3Q}\right)^2}, \qquad [17.117]$$

o, también:

$$\frac{1}{2}\frac{\left(Q+\frac{ql}{3}\right)}{g}v_0^2=\frac{Qv^2}{2g}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{ql}{3Q}\right)}, \qquad [17.118]$$

que, en primera aproximación, debe ser igual a Qh. Luego, igualando valores y simplificando, resulta:

$$h=\frac{v^2}{2g}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{ql}{3Q}\right)}. \qquad [17.119]$$

Si en la [17.12] reemplazamos h por su igual de [17.119] obtenemos:

$$\Delta l=\Delta l'+\sqrt{(\Delta l')^2+\frac{\Delta l' v^2}{g}\left(\frac{1}{1+\frac{ql}{3Q}}\right)}, \qquad [17.120]$$

y, análogamente, la [17.17] se trasforma en:

$$\sigma=\frac{E}{l}\left[\Delta l'+\sqrt{(\Delta l')^2+\frac{\Delta l' v^2}{g}\left(\frac{1}{1+\frac{ql}{3Q}}\right)}\right], \qquad [17.121]$$

Para el caso de la flexión, consideraciones análogas a las efectuadas para solicitación axil, cuando se tiene en cuenta la inercia de la viga,[1] conducen a la siguiente expresión de la flecha en el centro de la luz.

$$f_d=f_s+\sqrt{f_s^2+\left(\frac{f_s v^2}{g}\right)\left[\frac{1}{1+\frac{17}{35}\left(\frac{ql}{Q}\right)}\right]} \qquad [17.122]$$

[1] Nos remitimos al caso analizado en 17.3.

17.7. Coeficiente de impacto

La expresión [17.12] puede también escribirse en la siguiente forma:

$$\Delta l=\Delta l'\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta l'}}\right), \qquad [17.123]$$

donde:

$$\varphi=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta l'}} \qquad [17.124]$$

es el denominado *coeficiente de impacto*. Reemplazando en esta última expresión $h=v^2/2g$ resulta:

$$\varphi=1+\sqrt{1+\frac{v^2}{g\Delta l'}}, \qquad [17.125]$$

expresión que pone de manifiesto la influencia de la velocidad de impacto, tanto en las deformaciones como en las tensiones que se originan.

Cuando se tiene en cuenta la inercia de la barra que soporta la acción dinámica, la expresión del coeficiente de impacto es:

$$\varphi_0=1+\sqrt{1+\frac{v^2}{g\Delta l'}\left(\frac{1}{1+\frac{ql}{3Q}}\right)}. \qquad [17.126]$$

Puede observarse que, cuanto mayor es la masa de la barra en relación a la que produce el impacto, tanto menor es el término entre barras y, en consecuencia, se reduce el coeficiente de impacto y con él las tensiones originadas por la acción dinámica.

En el caso de la flexión de una viga simplemente apoyada con carga en el centro, el coeficiente de impacto, sin tener en cuenta la inercia de la viga, resulta de la [17.38], y su expresión es:

$$f_d=f_s\left(1+\sqrt{1+\frac{v^2}{gf_s}}\right), \qquad [17.127]$$

$$\varphi=1+\sqrt{1+\frac{v^2}{gf_s}}. \qquad [17.128]$$

Cuando la inercia de la viga debe necesariamente considerarse, el coeficiente de impacto es:

$$\varphi_0 = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{gf_s}\left(\frac{1}{1 + \frac{17}{35}\frac{ql}{Q}}\right)} \qquad [17.129]$$

donde también aparece la influencia favorable de la masa de la viga en relación con la masa que produce el impacto.

18. CONCENTRACIÓN DE TENSIONES

18 . 1 . Concepto del problema

Al estudiar en el capítulo *9, Solicitación axil*, la distribución de tensiones en la sección de una barra suficientemente alejada de la zona perturbada de los extremos, admitimos para las tensiones normales una distribución uniforme. En el análisis de la flexión en régimen elástico, la combinación de la ley de Hooke con la hipótesis de Bernouilli–Navier, nos condujo a una repartición lineal de tensiones, y finalmente, en el estudio de las tensiones para secciones torsionadas que satisfacen la condición de Coulomb, llegamos a una repartición lineal antimétrica de las tensiones tangenciales en el plano de la sección. En lo que respecta a las tensiones principales correspondientes a este último caso, resultaron iguales en valor absoluto y de signos contrarios, e inclinadas a 45° siendo sus trayectorias hélices y constituyendo un campo uniforme de tensiones.

La existencia de una discontinuidad en la sección, sea ésta un orificio, una entalladura en todas sus formas o una variación brusca de sección, hechos todos ellos muy comunes en la práctica, da origen a perturbaciones en la distribución de las tensiones. Aparecen así las denominadas *concentraciones de tensiones*, y sus correspondientes diagramas presentan los llamados *picos de tensión*, originados por grandes deformaciones localizadas en pequeñas zonas de la sección.

La relación entre la tensión máxima en una pieza que presenta una discontinuidad, y la que corresponde a la misma pieza cuanto ésta no existe, se denomina *factor de concentración de tensiones*, y en lo que respecta al mismo cabe distinguir dos posibilidades: el factor teórico k_t y el efectivo k_e. El primero resulta de valores obtenidos aplicando conceptos teóricos derivados de la teoría matemática de elasticidad, de resultados experimentales obtenidos sobre la base de ensayos fotoelasticimétricos o bien mediante cualquier otra técnica de laboratorio, como por ejemplo extensometría mecánica o eléctrica, procedimiento de las membranas frágiles, etc. En cambio, en el coeficiente efectivo k_e intervienen además de la geometría de la discontinuidad, las características mecánicas del material, y su determinación se efectúa por vía experimental.

El análisis del problema de la concentración de tensión es muy complejo, y son muchos los investigadores que de él se han ocupado. Entre otros, citaremos a *Kirsch, Jeffery, Weber, Sadowsky, Buckley*, y muy en especial a *H. Neuber* quien en una obra magistral[1] analiza y desarrolla el problema de la concentración de tensiones para toda una serie de casos particulares y es autor de un diagrama conocido como *diagrama de Neuber*, reproducido más adelante, que permite determinar en forma simple los factores de concentración de tensiones para toda una serie de discontinuidades de secciones, comúnmente encontrados en los problemas que se presentan en la práctica.

En los parágrafos que siguen, analizaremos algunos casos comunes de concentración de tensiones reproduciendo distintos gráficos experimentales, entre ellos los diagramas de Neuber, para finalmente estudiar el problema de la discontinuidad de las secciones en lo que respecta al factor efectivo de concentración de tensiones y al denominado coeficiente de sensibilidad de entalladura y los factores que los afectan.

18 . 2 . Concentración de tensiones originadas por un agujero circular, para solicitación axil

Supongamos una chapa de espesor unitario, indefinida, sujeta a un estado plano de tensión, fig. 18.1, caracterizado por:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y &= p \\ \sigma_z &= 0 \\ \tau_{zy} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [18.1]$$

y que en ella exista una discontinuidad constituida por un agujero circular de radio R.

Para un punto M, de coordenadas θ y r, las correspondientes tensiones, de acuerdo con la solución de Kirsch[2] son:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{p}{2}\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{p}{2}\left(1+3\frac{R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \\ \sigma_r &= \frac{p}{2}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{p}{2}\left(1-4\frac{R^2}{r^2}+3\frac{R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \\ \tau_{rt} &= \frac{p}{2}\left(1+2\frac{R^2}{r^2}-3\frac{R^4}{r^4}\right)\operatorname{sen} 2\theta \end{aligned}\right\} \qquad [18.2]$$

[1] H. Neuber, *Kerbspannungslehre*. Berlin, J. Springer, 1937.
[2] G. Kirsch, "Die Theorie der Elastizität und der Bedürfnisse der Festigkeitslehre", *Zeit. Verein Deutscher Ingenieure*, vol. 42, 1898.

Interesan las distribuciones de tensiones a lo largo de los ejes z e y, y, en especial los valores σ_t y σ_r en los puntos A y B (fig. 18.1).

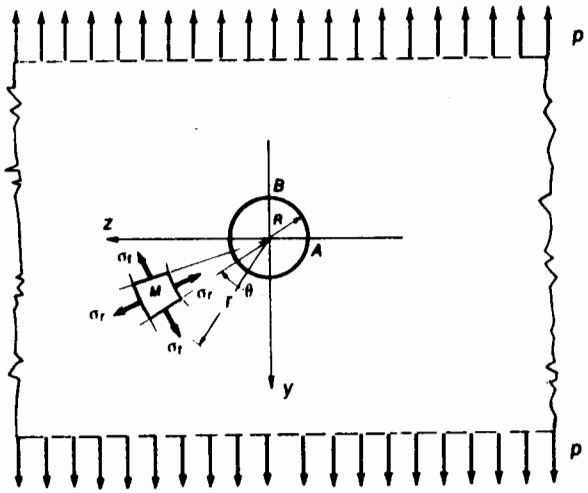


Fig. 18.1

Analizaremos primeramente las distribuciones de tensiones en una sección cuya traza coincida con el eje z. Para el mismo resulta:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{2} \\ \cos 2\theta &= -1 \\ \operatorname{sen} 2\theta &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [18.3]$$

y en consecuencia:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= \sigma_y = \frac{p}{2}\left(2+\frac{R^2}{r^2}+3\frac{R^4}{r^4}\right) \\ \sigma_r &= \sigma_z = \frac{p}{2}\left(3\frac{R^2}{r^2}-3\frac{R^4}{r^4}\right) = \frac{3}{2}p\left(\frac{R^2}{r^2}-\frac{R^4}{r^4}\right) \\ \tau_{rt} &= \tau_{zy} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [18.4]$$

Para el punto A, donde $r = R$, las [18.4] toman los siguientes valores:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y &= 3p \\ \sigma_r &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [18.5]$$

Como puede observarse, el diagrama de σ_y es asimptótico del valor:

$$\sigma_y = p \qquad [18.6]$$

y el correspondiente a $\sigma_r = \sigma_z$ a:

$$\sigma_z = \sigma_r = 0. \qquad [18.7]$$

El máximo valor de σ_r lo obtenemos derivando la segunda de las [18.4] respecto de r e igualando a cero:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{3p}{2}\left(-2\frac{R^2}{r^3} + \frac{4R^4}{r^5}\right) = 0 \qquad [18.8]$$

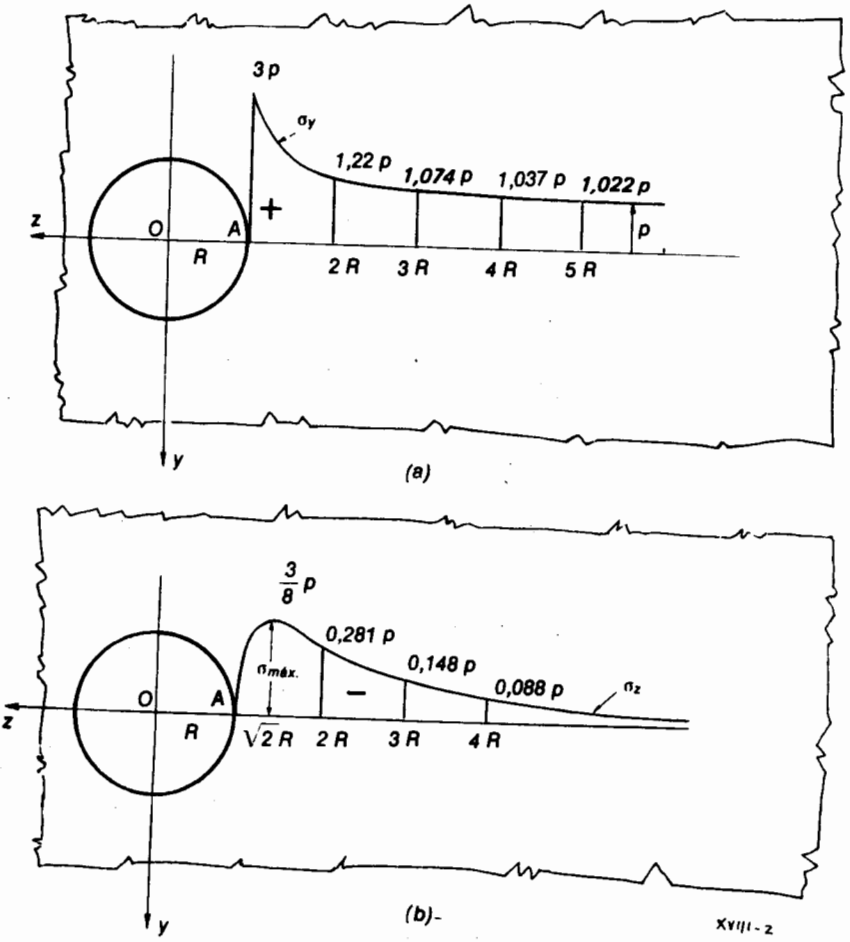


Fig. 18.2

$$r = \sqrt{2}\,R = 1{,}414R \qquad [18.9]$$

y

$$\sigma_{z\,\text{máx.}} = \frac{3}{2}p\left(\frac{R^2}{2R^2} - \frac{R^4}{4R^4}\right), \qquad [18.10]$$

$$\sigma_{z\,\text{máx.}} = \frac{3}{8}p\,. \qquad [18.11]$$

En la figura 18.2, hemos representado, los diagramas de σ_y y σ_z. Como puede observarse, a una distancia del centro del agujero igual a $4R$, los valores de σ_y prácticamente son iguales a p y en cuanto a los de σ_z son despreciables.

Veamos ahora la distribución a lo largo del eje y. En este caso $\theta = 0$ y en consecuencia las [18.2] se transforman en:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= \sigma_z = \frac{p}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\left(1 - 3\frac{R^2}{r^2}\right) \\ \sigma_r &= \sigma_y = \frac{p}{2}\left(2 - 5\frac{R^2}{r^2} + 3\frac{R^4}{r^4}\right) \\ \tau_{rt} &= \tau_{zy} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [18.12]$$

Para el punto B donde $r = R$, resulta:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_y = 0 \\ \sigma_t &= \sigma_z = -p \end{aligned}\right\}; \qquad [18.13]$$

En lo que respecta a la distribución de las tensiones σ_y y σ_z a lo largo del eje y, ellas aparecen reproducidas en la figura 18.3 *a* y *b*.

El diagrama de σ_z muestra un cambio de signo y se hace máximo para $y = 2{,}45\,R$, y tiende, para $y = \infty$, asintóticamente al valor $\sigma_z = 0$. En cambio, el diagrama de σ_y tiene un solo signo (tracción en el caso que nos ocupa) y tiende asintóticamente $\sigma_y = p$.

Analizaremos a continuación los casos particulares siguientes:

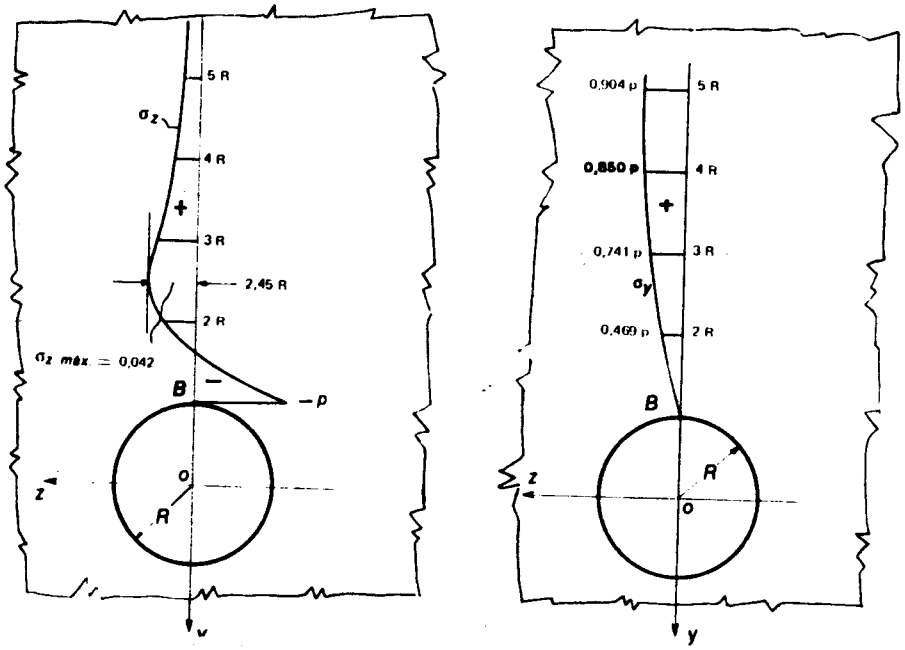
a) $\sigma_y = \sigma_z = p$,

b) $\sigma_y = -\sigma_z = p$.

En el primer caso (fig. 18.4), para el punto A, la tensión σ_y será la resultante de la superposición de los dos estados de tensión. Tendremos:

$$\sigma'_{y_A} = 3p\,, \qquad [18.14]$$

mientras que la tensión en A debida a $\sigma_z = p$ será igual a la correspondiente a la dirección z originada en B por $\sigma_y = p$, es decir:



(a) Fig. 18.3 (b)

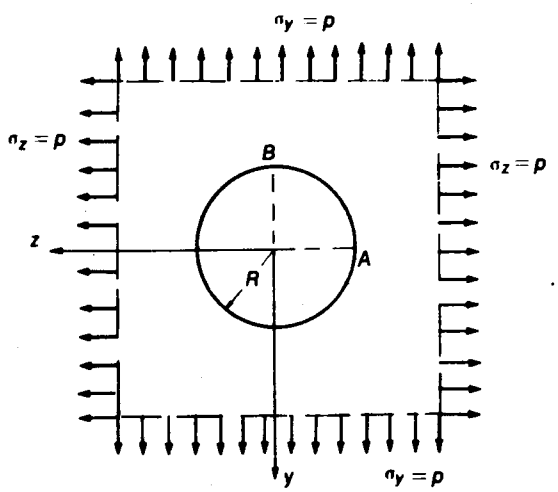


Fig. 18.4

$$\sigma_{y_A}'' = -p. \qquad [18.15]$$

En consecuencia:

$$\sigma_{y_A} = 3p - p = 2p. \qquad [18.16]$$

Por un razonamiento análogo llegamos a que:

$$\sigma_{z_B} = 2p. \qquad [18.17]$$

o sea, que para el caso analizado en cualquier punto del contorno del agujero, la tensión normal al radio es constante e igual a $2p$, mientras, como es lógico, la tensión radial es nula.

Veamos ahora el caso (b), que corresponde al estado de tensión que hemos denominado de resbalamiento simple.

Tendremos (fig. 18.5):

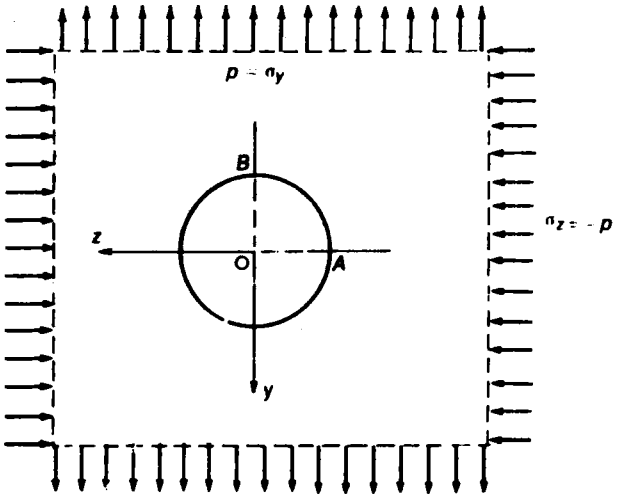


Fig. 18.5

por efecto de $p = \sigma_y$

$$\left.\begin{array}{ll} en\ A: & \sigma_{y_A}' = +3p \\ en\ B: & \sigma_{z_B}' = -p \end{array}\right\} \qquad [18.18]$$

Como consecuencia de $\sigma_z = -p$:

$$\left.\begin{array}{ll} en\ A: & \sigma_{y_A}'' = +p \\ en\ B: & \sigma_{z_B}'' = -3p \end{array}\right\} \qquad [18.19]$$

y las tensiones resultantes serán:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{y_A} &= 4p\\ \sigma_{z_B} &= -4p\end{aligned}\right\} \qquad [18.20]$$

Estas dos últimas expresiones nos permiten calcular la concentración de tensiones originadas en un eje de sección circular, sujeto a torsión, atravesado por un agujero diametral, cuyo radio es 4 veces menor que la cuarta parte del desarrollo del perímetro del eje.

En la solicitación por torsión, las tensiones tangenciales máximas ocurren en el borde de la sección, y originan tensiones principales, iguales en valor absoluto entre sí y a la tensión tangencial pero de signo contrario e inclinadas a 45° con respecto a las generatrices. En consecuencia, si el eje se encuentra perforado por un agujero diametral (fig. 18.6) el estado de tensión en los bordes del agujero corresponde al caso (b) analizado y las tensiones principales se cuadruplican.

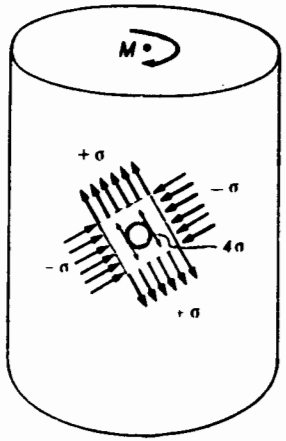


Fig. 18.6

En el diagrama de figura 18.2 *a* puede observarse que a una distancia del centro del agujero igual a $5R$, el valor de la tensión σ_y es aproximadamente igual a p. Es decir, que el efecto de la existencia del agujero circular, prácticamente desaparece para los puntos que disten más de $5R$ del centro de aquél.

En consecuencia, si en lugar de tratarse de una chapa indefinida, consideramos una cuya ancho b sea:

$$b \geqslant 5d\ , \qquad [18.21]$$

donde d es el diámetro del agujero (fig. 18.7), solicitada por una fuerza axil N que origina tensiones $p = N/F$, siendo F el área de la sección trasversal, en secciones suficientemente alejadas de la zona perturbada de los extremos, podemos admitir en la sección afectada por el agujero la repartición de tensiones de figura 18.7 con un máximo $\sigma_{y\,\text{máx.}} = 3p$.

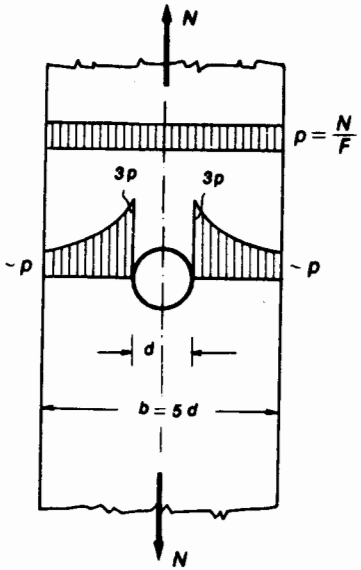


Fig. 18.7

En este caso, el factor teórico de concentración de tensiones k_t vale:

$$k_t = \frac{3p}{p} = 3 \qquad [18.22]$$

y está referido a la tensión uniforme p, calculada para la totalidad de la sección, sin descontar la parte no existente de la misma debida a la existencia del agujero.

Cuando la relación b/d es menor que cinco, la aplicación de la solución teórica conduce a errores, tanto mayores cuanto menor sea dicha relación. En estos casos, la determinación del factor de concentración de tensiones debe realizarse por procedimientos experimentales. A título de ejemplo, trascribimos en el cuadro siguiente, los valores de k_e (factor experimental) y k_t (factor teórico de concentración de tensiones para el caso $b = 3{,}3d$, cuya representación gráfica aparece en figura 18.8). La tensión media de referencia p corresponde a la sección

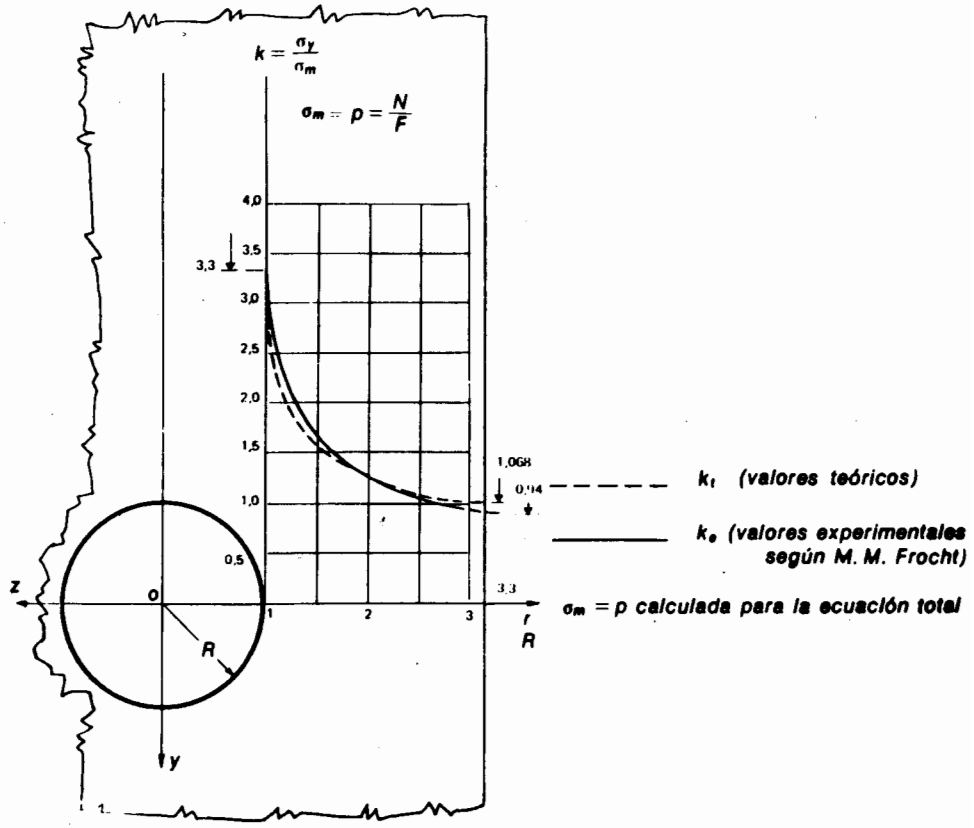


Fig. 18.8

total, sin descontar la sección correspondiente al agujero. Los valores de k_e han

sido tomados de *Frocht*[1] y los teóricos k_t calculados mediante la expresión [18.4] correspondiente a σ_y. Como puede observarse, el error cometido considerando la solución teórica para ancho infinito es del 10% en defecto.

r/R	1	1,5	2	2,5	3	3,3
k_e	3,30	1,76	1,30	1,07	0,97	0,94
k_t	3,00	1,52	1,22	1,12	1,07	1,06

18 . 3 . Concentración de tensiones originadas por un agujero elíptico, en solicitación axil

La solución del problema tensional originado por la existencia de un agujero elíptico se debe a *Inglis*[2] y la transcripción de la misma puede seguirse en *E. Butty, Tratado de Elasticidad Teórico–Técnica.*

Es necesario considerar dos casos, según que la dirección de la tensión

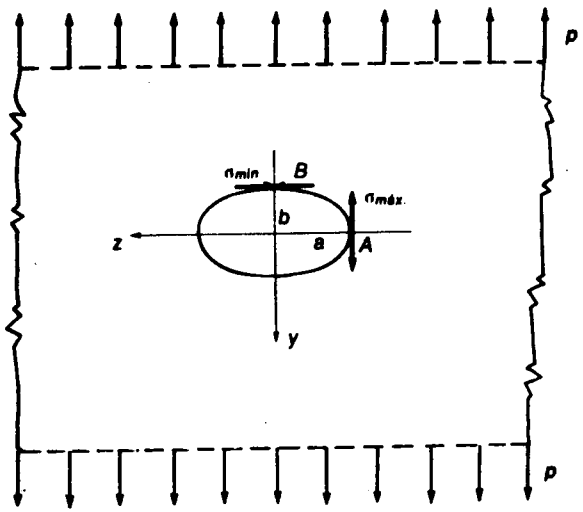


Fig. 18.9

[1] M. M. Frocht, *Photoelasticity*, vol I, pág, 231. Ed. J. Wiley and Sons.

[2] C. E. Inglis, "Some special cases of two dimensional–stress or strain", *Trans. of the Inst. of Naval Architects*, 1922.

uniforme p correspondiente a secciones no perturbadas coincida con el semieje menor o mayor de la elipse.

El planteo y ulterior desarrollo del problema escapa a los alcances de la presente obra, pues pertenece, específicamente a la teoría de la elasticidad.

En consecuencia, nos limitaremos a reproducir las expresiones que dan los valores máximos y mínimos en los bordes del agujero, en correspondencia con los semiejes mayor y menor. Consideremos en primer término, el caso de un agujero elíptico, cuyo semieje menor coincide con la dirección de la tensión uniforme p de las secciones no perturbadas (fig. 18.9).

La tensión máxima ocurre en el punto A, extremo del semieje mayor y su expresión es:

$$\sigma_{y\,\text{máx.}} = p\left(1 + 2\,\frac{a}{b}\right), \qquad [18.23]$$

y la mínima corresponde al punto B y su valor es:

$$\sigma_{z\,\text{mín.}} = -\,p\,. \qquad [18.24]$$

En el segundo caso, la tensión uniforme p en las secciones no perturbadas es paralela al semieje mayor a (fig. 18.10).

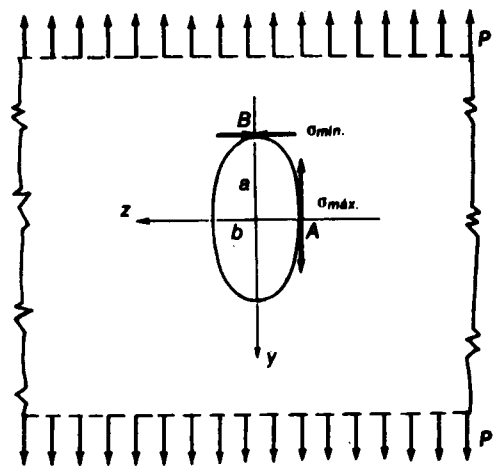


Fig. 18.10

La tensión máxima aparece en el punto A, extremo del semieje menor b y su expresión es:

$$\sigma_{y\,\text{máx.}} = +p\left(1 + 2\frac{b}{a}\right), \qquad [18.25]$$

y en lo que respecta a la tensión mínima, corresponde al punto B, siendo su valor:

$$\sigma_{z\,\text{mín.}} = -p\,. \qquad [18.26]$$

De ambos casos, interesa muy especialmente el primero, por cuanto es el que conduce a tensiones mayores. En el cuadro siguiente figuran los valores de $\sigma_{y\,\text{máx.}}$ en el punto A de figura 18.9, para distintas relaciones de a/b.

a/b	1	2	5	10	50	100	1 000	10 000
$\frac{\sigma_{y\,\text{máx.}}}{p}$	3	5	11	21	101	201	2 001	20 001

La relación $a/b = 1$ corresponde al agujero circular y el valor 3 coincide con el de k_t determinado antes para este caso.

De la tabla anterior puede observarse como, al aumentar la relación a/b, es decir, al disminuir el ancho del agujero con relación a su longitud, aumenta el factor teórico de concentración de tensiones k_t.

Esta circunstancia es de capital importancia, pues explica porqué la existencia de una fisura puede conducir a la rotura de una pieza sujeta a solicitación axil. En efecto, supongamos la chapa de figura 18.11 sujeta a una solicitación axil que origina una tensión uniforme p.

Admitamos que, por una causa fortuita, como puede ser una contracción de origen térmico, una falla de fabricación, un problema de falta de homogeneidad o tensiones derivadas de la contracción de fraguado en el caso del hormigón, se origina una fisura capilar s–s, de sólo 5 mm de longitud y de un espesor de 0,01 mm. Dicha fisura puede sin mayor error, asimilarse a un agujero elíptico de semieje $a = 2{,}5$ mm y $b = 0{,}005$ mm. Por su disposición corresponde al primer caso analizado y la relación a/b es:

$$\frac{a}{b} = \frac{2{,}5}{0{,}005} = 500 \qquad [18.27]$$

Para esta relación a/b, el factor teórico de concentración de tensiones vale de acuerdo con la [18.23]:

$$k_t = \frac{\sigma_{y\,\text{máx.}}}{p} = 1.001\,, \qquad [18.28]$$

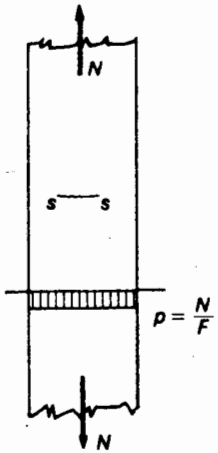


Fig. 18.11

es decir, que la tensión p, que normalmente es una tensión admisible, inferior a los límites de fluencia o de rotura del material de la pieza, en los bordes de la fisura resulta multiplicada por mil. Ello hace que la fisura, al sobrepasarse considerablemente la resistencia a rotura del material, se extienda y el proceso se trasforme en progresivo, pues al aumentar la longitud de la fisura, aumenta la relación a/b y con ella el factor k_t y en consecuencia $\sigma_{y\,\text{máx.}}$

18 . 4 . Efectos de entalladura y de cambio de sección

Denominamos efecto de entalladura, al incremento de tensión originado por la existencia de una muesca, que puede ser uni o bilateral (fig. 18.12 a y b).

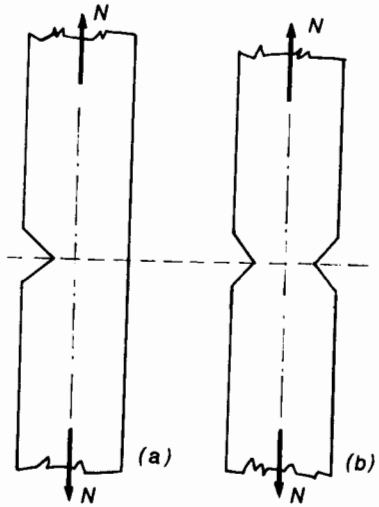


Fig. 18.12

La existencia de una entalladura origina una concentración de tensiones en la sección que a ella corresponde. Cuando es unilateral, existe un pico de tensiones normales, mientras que si existen dos entalladuras, los picos de tensión son dos, uno para cada una de ellas. En estos casos el factor de concentración de tensiones se suele determinar experimentalmente, en general por fotoelasticimetría, aunque se conocen soluciones teóricas para determinadas formas de entalladura.

El valor del factor de concentración de tensiones depende de la forma de la entalladura y de la relación de profundidad con el ancho de la pieza en la cual se presenta la entalladura. La figura 18.13 muestra distintos tipos que pueden presentarse en la práctica.

En el caso (a) el factor k_t depende de la relación ρ/b, donde ρ es el radio de la entalladura. En el (b) influyen además las relaciones ρ/d y d/b.

En el caso (c) aparte de la relación d/b, que define la profundidad de la entalladura, el valor del coeficiente k_t de concentración de tensiones es función del ángulo α y del radio de curvatura ρ del fondo de la entalladura. En cuanto al caso (d) corresponde destacar que la máxima tensión ocurre no en el punto A,

como en los casos anteriores, sino en B y es función de la relación d/b. Aparte de ello, en este caso influye en el valor del factor de concentración de tensiones

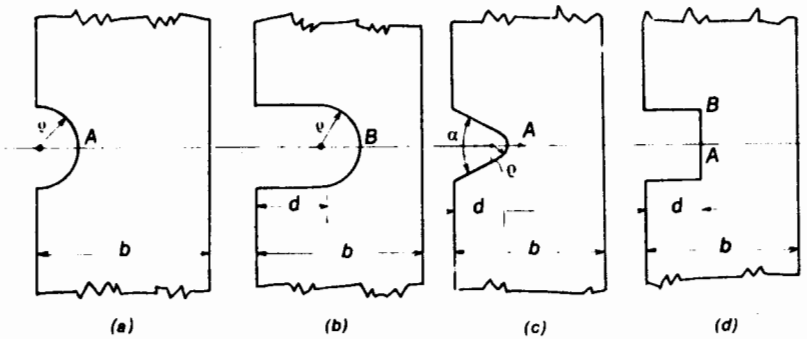


Fig. 18.13

la naturaleza del vértice B. Si éste forma una arista perfecta, estamos ante un caso teórico que conduciría a una tensión muy elevada, que lógicamente no puede existir y que conduce a una plastificación local con una redistribución de tensiones en la sección. Si en cambio, las caras a 90° se identifican mediante un arco de circunferencia, el factor k_t resulta influido por el radio de curvatura de la identificación.

Por otra parte, la forma de solicitación también influye en el valor del factor de concentración de tensiones, para una determinada geometría de la entalladura. Es así que en el caso (a) de figura 18.14 cuya sección crítica se encuentra solicitada por una fuerza axil, el factor k_t difiere de los correspondientes a los casos (b) y (c), donde dicha sección está solicitada por flexión pura y compuesta respectivamente.

El cambio de sección corresponde, como su nombre lo indica, al caso de una variación brusca del ancho de la sección (fig. 18.15), originándose una concentración de tensiones en los puntos A. Si la identificación es en ángulo recto, la tensión en A alcanza un valor muy elevado, que origina, como en el caso similar de la entalladura, una plastificación local con redistribución de tensiones. Por ello, para disminuir el valor del coeficiente k_t, la identificación de ambas secciones se efectúa mediante una curva, que generalmente es un arco de circunferencia de radio ρ. El valor del coeficiente k_t es función de la relación b/B entre los anchos de las secciones y, además, del radio de curvatura ρ de la identificación.

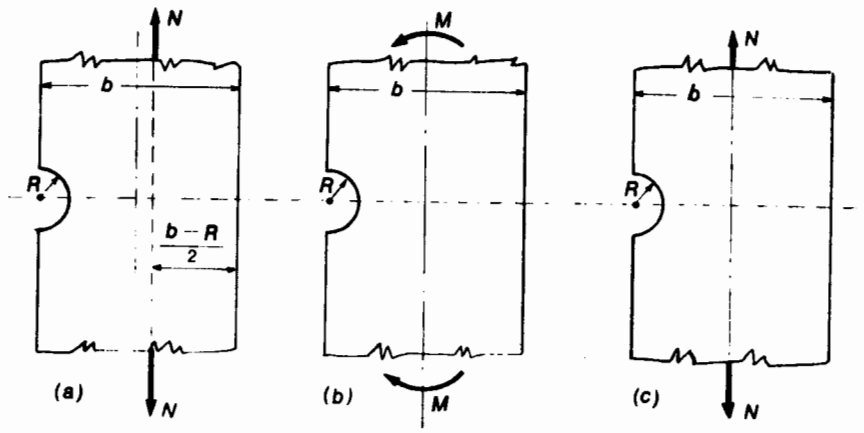


Fig. 18.14

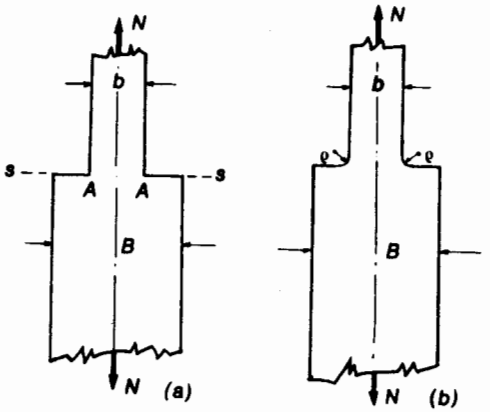


Fig. 18.15

Los factores de concentración de tensiones, para cambios de sección, se han determinado en forma teórica y experimental. En la figura 18.16 reproducimos un gráfico con la variación del factor k_t para doble entalladura semicircular y cambio de sección con transiciones circulares, en función de las relaciones de dimensiones de aquéllas con el ancho o los anchos de las secciones, determinadas sobre la base de ensayos fotoelasticimétricos. En el cuadro siguiente reproducimos de *Filonenko–Boroditch*[1] los valores del factor k_t, para el caso (b)

[1] M. M. Filonenko–Boroditch; S. M. Izlumov; B. A. Olisov; I. N. Kudriazev; L. I. Malguinov; *Kurs soprotivlenia materialov*. Moscú, 1956.

de figura 18.16 tomando como tensión de comparación la correspondiente a la zona de ancho b.

B/b \ ρ/b	0,125	0,188	0,25	0,375	0,50
3	2,7	2,3	2,0	1,8	1,6
2,5	2,6	2,2	1,9	1,7	1,5
2	2,3	2,0	1,7	1,5	1,4
1,5	2,0	1,8	1,6	1,4	1,3

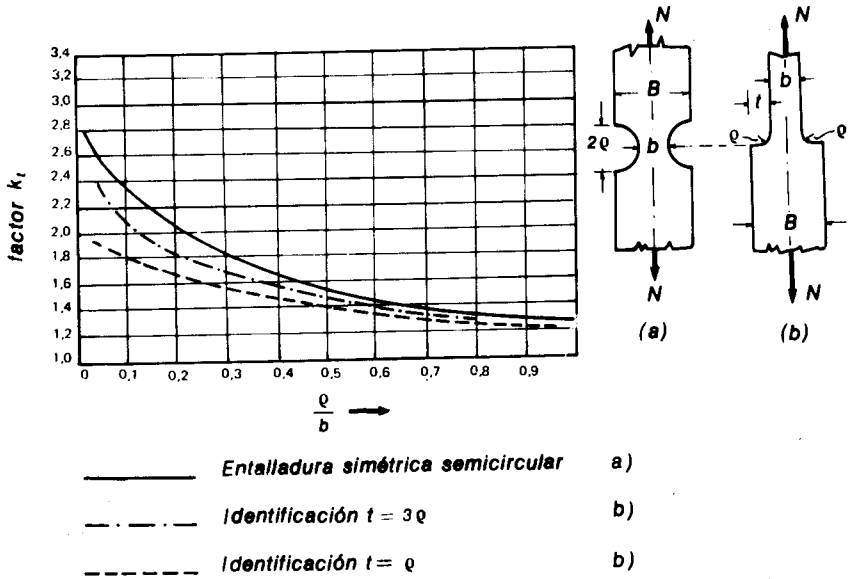


Fig. 18.16

En la figura 18.17 hemos reproducido la curva de tensiones, determinada por Frocht[1] para el caso de doble entalladura profunda de bordes paralelos y fondo semicircular. Como puede observarse, el factor de concentración de tensiones

[1] *Op. cit.*, Vol. I, pág. 237.

alcanza el valor de 5,1 en el fondo de la entalladura y para el eje de la pieza 1,10. Para entalladuras unilaterales y solicitación axil centrada con la sección no alterada de la pieza, es decir, flexión compuesta en la entalladura, el autor en colaboración con el Ing. *Mariano Lassalle*[1] determinó fotoelasticimétricamente

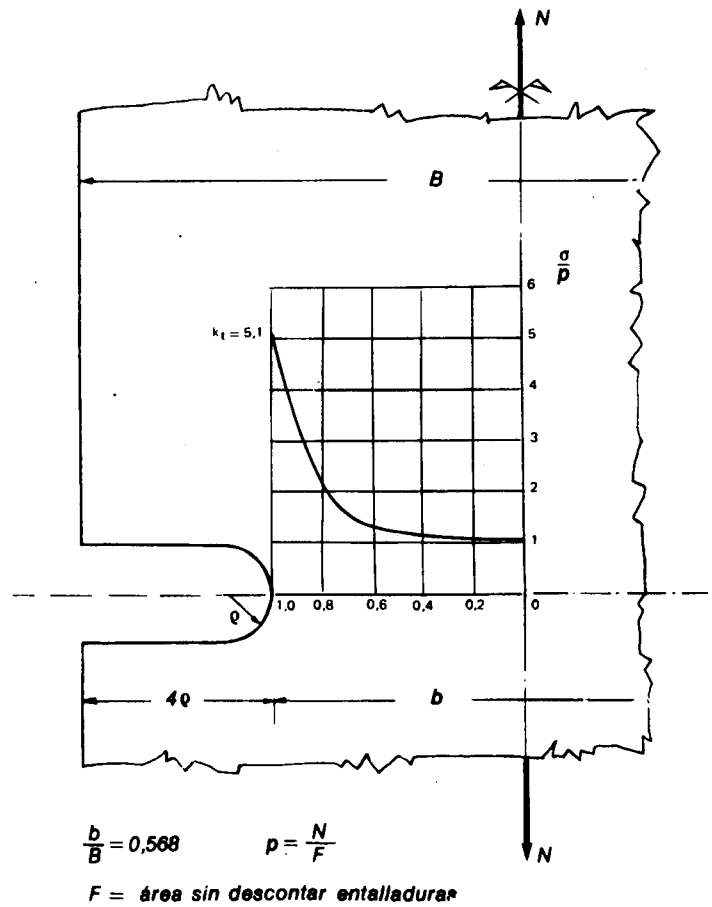


Fig. 18.17

el factor de concentración de tensiones en las tres entalladuras que muestra la figura 18.18. Hacemos la salvedad que para la rectangular, la concentración de tensiones se determinó para el eje de simetría de la entalladura y no para su borde, donde el valor de k_t debe ser mayor.

[1] E. Fliess y M. Lassalle, "Repartición de tensiones en las juntas a plano de dilatamiento de los pavimentos de hormigón de cemento portland". *La Ingeniería*, No. 810, 1942.

Para los tres casos, la profundidad de la entalladura es aproximadamente $\frac{1}{3}$ del ancho total, o sea, una relación $(b/B) = \frac{2}{3}$.

En las figuras 18.19, 18.20 y 18.21 aparecen reproducidos los diagramas de σ_y, correspondientes a los casos (a), (b) y (c) respectivamente. Puede observarse que para el primero y el último, el factor de concentración de tensiones es aproximadamente:

$$k_t = 4{,}2 \ , \qquad [18.29]$$

mientras que para el segundo, su valor es:

$$k_t = 4{,}0 \ . \qquad [18.30]$$

Con respecto a este último valor, ya hicimos notar que en los vértices entrantes de la entalladura, el valor de k_t debe ser mayor.

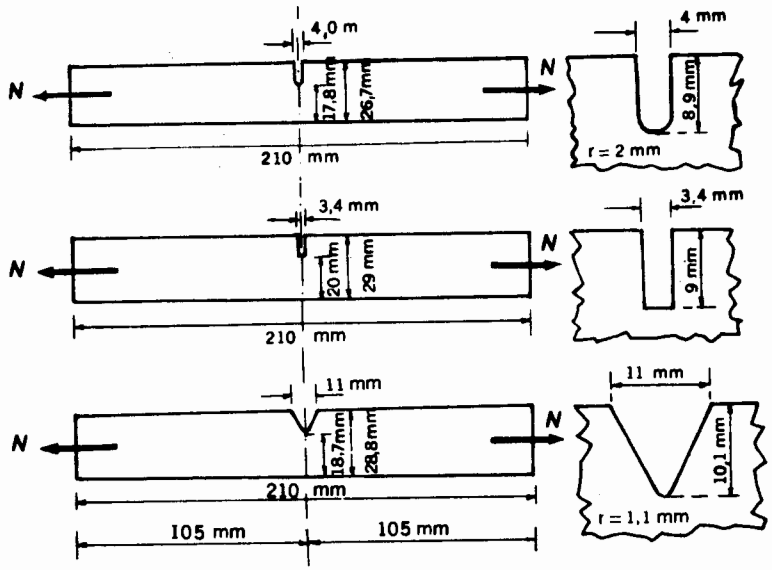


Fig. 18.18

Otro aspecto que corresponde destacar es el cambio de signo de la tensión, que se justifica por tratarse de una solicitación donde aparece un par flexor.

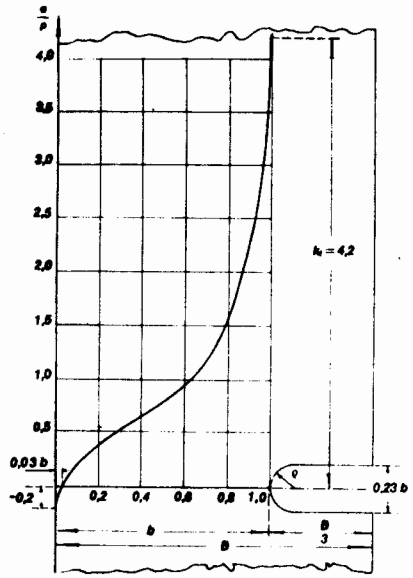


Fig. 18.19

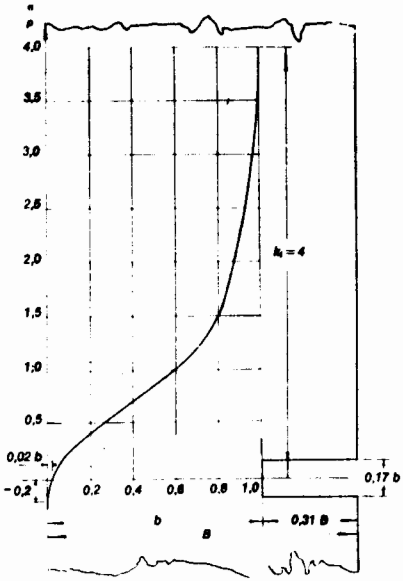


Fig. 18.20

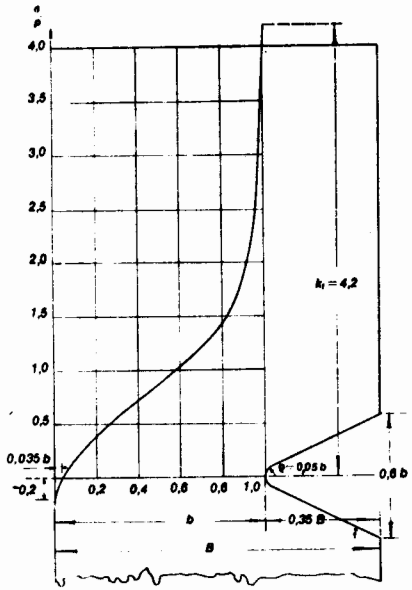


Fig. 18.21

Analizaremos a continuación el caso de doble entalladura simétrica muy profunda, cuyo estudio teórico ha sido realizado por Neuber. Al aumentar la profundidad de la entalladura, el factor de concentración de tensiones tiende a un valor límite, independiente de aquélla, pero que es función de la curvatura del fondo de la entalladura. En el caso que nos ocupa, la geometría de la entalladura es de importancia relativa, por lo cual Neuber, por razones de simplificación de los desarrollos, la supone de forma hiperbólica.

Cuando la solicitación es axil, la expresión k_t a que llega Neuber y que corresponde al pico de tensión en el fondo de la entalladura, es la siguiente:

$$k_t = \frac{\sigma_{\text{máx.}}}{p} = \frac{2\left(\frac{b}{2\rho} + 1\right)\sqrt{\frac{b}{2\rho}}}{\left(\frac{b}{2\rho} + 1\right) \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{b}{2\rho}} + \sqrt{\frac{b}{2\rho}}}, \qquad [18.31]$$

donde b es el ancho de la sección en correspondencia con las entalladuras. Puede observarse que k_t es función de la relación $b/2\rho$, y que su valor es tanto mayor cuanto menor es el radio ρ de curvatura del fondo de la entalladura. En el cuadro siguiente figuran los valores de k_t para distintas relaciones $b/2\rho$ (fig. 18.22). Hacemos notar que, en la relación $k_t = \sigma_{\text{máx.}}/p$ el valor de p ha sido calculado para la sección de ancho b y no para la sección total no perturbada, como lo fue en los casos analizados anteriormente.

VALORES DE k_t EN FUNCIÓN DE $b/2\rho$ PARA SOLICITACIÓN AXIL

$b/2\rho$	0	5	10	15	20	25	30
k_t	1	2,97	4,05	5,00	5,71	6,41	7,02

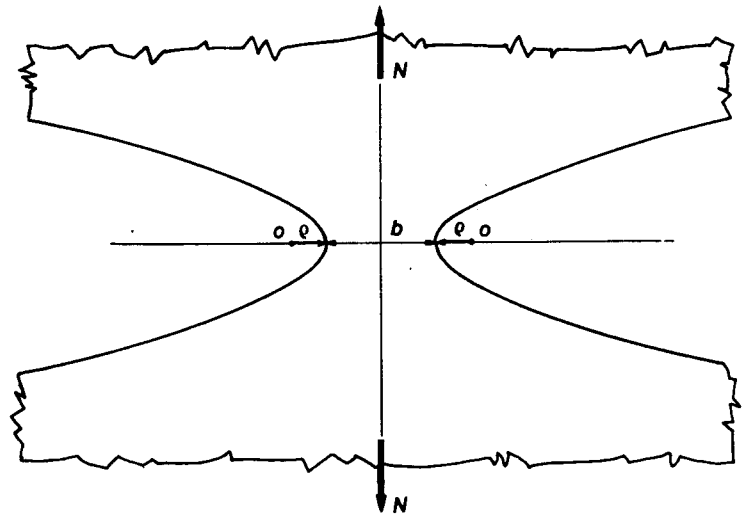


Fig. 18.22

En la figura 18.23 hemos representado gráficamente la expresión [18.31].

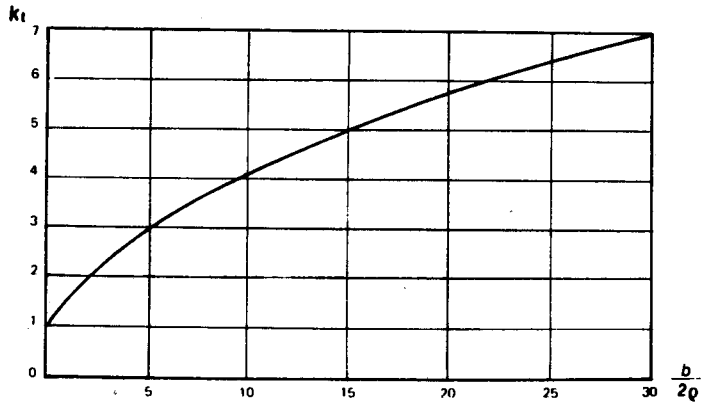


Fig. 18.23

Si, en cambio, la solicitación es de flexión pura, la expresión del factor de concentración de tensiones k_t es, con la notación de figura 18.22:

$$k_t = \frac{\sigma_{\text{máx.}}}{p} = \frac{4\,\dfrac{b}{2\rho}\cdot\sqrt{\dfrac{b}{2\rho}}}{3\left[\sqrt{\dfrac{b}{2\rho}} + \left(\dfrac{b}{2\rho} - 1\right)\ \text{arc tg}\ \sqrt{\dfrac{b}{2\rho}}\right]}, \qquad [18.32]$$

donde p, tensión de comparación, es la tensión máxima de flexión, admitiendo la repartición lineal de tensiones según la hipótesis de Bernouilli–Navier:

$$p = \frac{6M}{db^2} \qquad [18.33]$$

siendo d el espesor de la pieza. En el cuadro adjunto hemos consignado los valores de k_t para distintas relaciones $b/2\rho$, cuya representación gráfica aparece en figura 18.24.

VALORES DE k_t EN FUNCION DE $b/2\rho$ PARA SOLICITACION DE FLEXION

$b/2\rho$	0	5	10	15	20	25	30
k_t	1	2,19	2,91	3,38	3,95	4,39	4,83

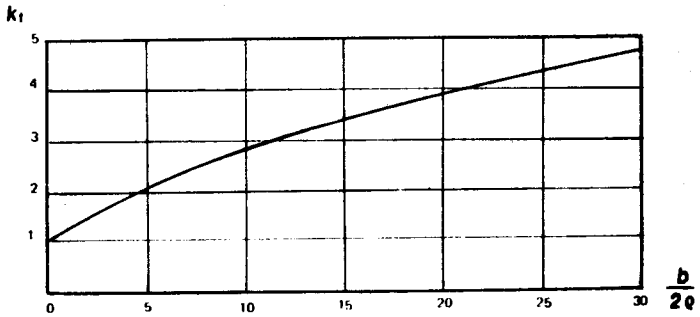


Fig. 18.24

Cuando se trata de entalladuras simétricas semicirculares (fig. 18.25), los factores de concentración de tensiones para flexión determinados experimentalmente[1] para distintas relaciones b/ρ, figuran en el cuadro siguiente:

VALORES DE k_t EN FUNCION DE b/ρ PARA DOBLE ENTALLADURA SEMICIRCULAR EN FLEXIÓN

b/ρ	1	1,11	1,25	1,43	1,67	2,00	2,50	3,34	5	10
k_t	1,15	1,16	1,17	1,20	1,24	1,29	1,35	1,44	1,58	1,87

La distribución de tensiones normales no es lineal y su diagrama es aproximadamente el que muestra la figura 18.25.

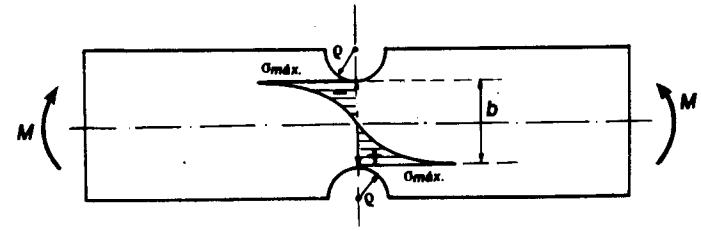


Fig. 18.25

Como expresión teórica suficientemente exacta, puede utilizarse la siguiente debida a Neuber:

$$k_t = \sqrt{0{,}355\,\frac{b}{\rho} + 0{,}85} + 0{,}08. \qquad [18.34]$$

Para el mismo tipo de entalladuras pero solicitada por una fuerza axil en lugar de flexión, los autores citados dan los siguientes valores experimentales para k_t, referido a la sección de ancho b.

[1] Ver Filonenko–Boroditch, *op. cit.*

FACTOR k_t PARA ENTALLADURA SEMICIRCULAR SIMÉTRICA EN SOLICITACIÓN AXIL

ρ/b	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
k_t	1,22	1,26	1,30	1,34	1,41	1,52	1,64	1,80	2,02	2,32

y la correspondiente expresión teórica:

$$k_t = \frac{\sigma_{máx.}}{p} = \sqrt{0{,}8\frac{b}{\rho} + 1{,}2} - 0{,}1 \qquad [18.35]$$

En el caso de entalladura profunda unilateral hiperbólica de círculo osculador de radio ρ, para solicitación axil es aplicable para determinar el valor k_t la expresión [18.31] correspondiente a doble entalladura, referida la tensión de comparación a la sección neta en la entalladura, siempre que la recta de acción de la fuerza normal N diste del borde no afectado por aquella una distancia e, (fig. 18.26), definida por la expresión:

$$e = \frac{b\sqrt{\frac{b}{\rho}\left(1+\frac{b}{\rho}\right)}}{\left(1+\frac{b}{\rho}\right)\text{arc tg}\sqrt{\frac{b}{\rho}} + \sqrt{\frac{b}{\rho}}} \qquad [18.36]$$

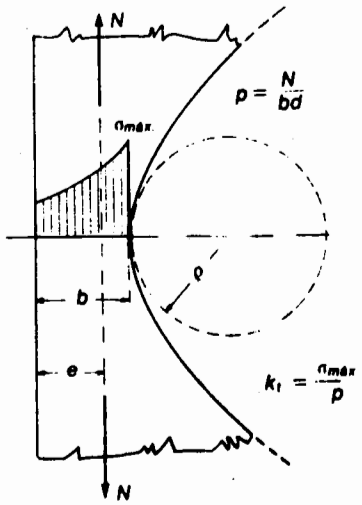


Fig. 18.26

En el cuadro siguiente figuran los valores de la relación e/b en función de b/ρ cuya representación gráfica aparece en figura 18.27.

b/ρ	0	5	10	15	20	30	40	50
$\frac{e}{b}$	0,50	0,603	0,617	0,624	0,626	0,630	0,631	0,632

Puede observarse que, a medida que el radio de curvatura ρ del círculo osculador disminuye con relación al ancho de la sección neta en la entalladura, la excentricidad e tiende asintóticamente al valor 0,653.

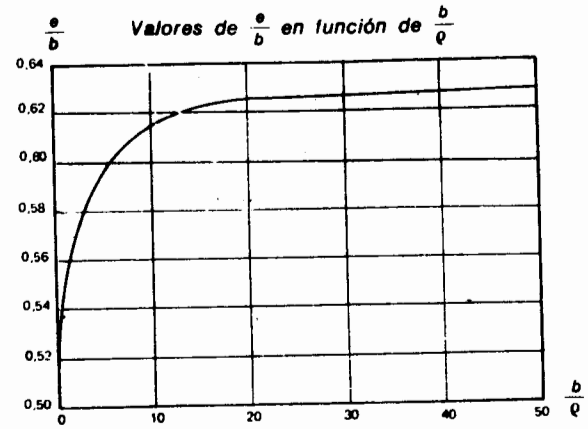


Fig. 18.27

Para el caso particular:

$$e = \frac{b}{2}, \qquad [18.37]$$

el factor de concentración de tensiones tiene por expresión:

$$k_t = \frac{\alpha_1 - 2m}{1 - \frac{m}{\sqrt{\frac{b}{\rho}+1}}}, \qquad [18.38]$$

donde:

$$m = \frac{\alpha_1 - \sqrt{\frac{b}{\rho} + 1}}{\frac{4}{3\alpha_2}\sqrt{\frac{b}{\rho} + 1} - 1} \qquad [18.39]$$

En las expresiones anteriores α_1, es el valor de k_t dado por la [18.31], o sea el factor de concentración de tensiones para solicitación axil y entalladura simétrica profunda, y α_2 el correspondiente a la expresión [18.32], es decir, el mismo caso pero para solicitación por flexión pura. La figura 18.28 reproduce la curva de k_t en función de b/ρ para el caso que nos ocupa.

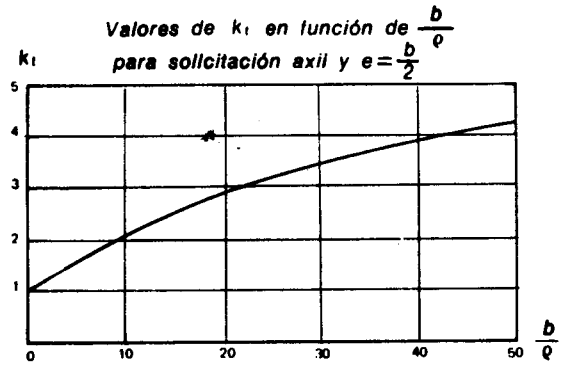


Fig. 18.28

Finalmente debemos considerar el caso para el que no se conoce la recta de acción de las fuerzas N. Aquí es aplicable la expresión [18.31] siempre que resulte impedida la deformación (curvatura) del borde recto de la pieza, no afectado por la entalladura.

Si la solicitación es por flexión pura la expresión de k_t a que llega Neuber es:

$$k_t = \frac{2\left(\frac{b}{\rho} + 1\right) - \alpha_1\sqrt{\frac{b}{\rho} + 1}}{\frac{4}{\alpha_2}\left(\frac{b}{\rho} + 1\right) - 3\alpha_1} \qquad [18.40]$$

donde α_1 y α_2 corresponden, como en las [18.38] y [18.39] a los correspondientes factores de concentración de tensiones para entalladura profunda simétrica en solicitación axil y flexión pura respectivamente.

En la figura 18.29 aparece la curva representativa de k_t en función de b/ρ para este caso.

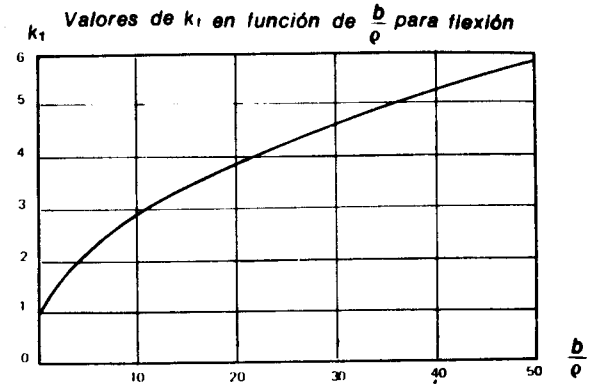


Fig. 18.29

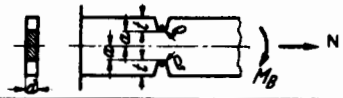
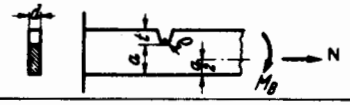
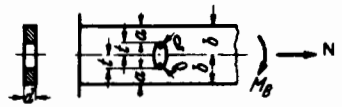
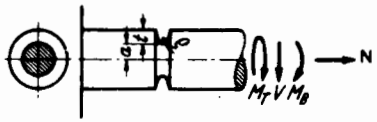
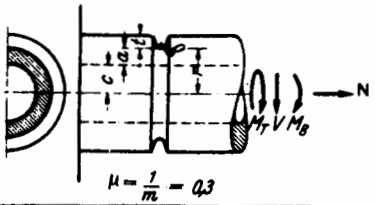
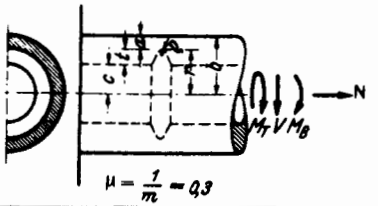
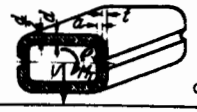
18 . 5 . Diagramas de Neuber

En los parágrafos anteriores nos hemos ocupado del problema de la concentración de tensiones originada por la existencia de agujeros circulares o elípticos, entalladuras simples o dobles, cambios bruscos de sección, etcétera, en chapas sujetas a estados planos de tensión. El problema de la concentración de tensiones se presenta también en elementos tridimensionales y ha sido estudiado por Neuber para algunos casos particulares. Los resultados obtenidos para los valores de los factores teóricos de concentración de tensiones, así como también los correspondientes al caso de entalladuras simples y dobles y agujeros en chapas planas, han sido resumidos por el citado autor en los gráficos conocidos en la literatura técnica por *diagramas de Neuber* que aparecen en figura 18.31 y 18.32,

El primero de ellos corresponde a los cuatro primeros tipos de las entalladuras reproducidas en figura 18.30, mientras que el segundo permite calcular los valores de k_T para los cuatro últimos casos de la mencionada tabla, o sea, para secciones huecas de revolución en combinación con el primer gráfico.

Hacemos notar que la notación que aparece en la tabla de figura 18.30 es la original de Neuber y para determinadas magnitudes no coincide con la que hemos empleado en nuestro texto. Hemos preferido mantenerla, por cuanto no afecta mayormente la interpretación de los diagramas y ha facilitado su reproducción.

Aclararemos mediante ejemplos, la forma práctica de utilizar los diagramas de Neuber.

Caso	Tipo de entalladura	Forma de solicitación	Tensión de comparación nominal	coeficiente $\sqrt{\frac{t}{\rho}}$ Escala	coeficiente $\sqrt{\frac{a}{\rho}}$ Curva	coeficiente auxiliar $\sqrt{\frac{t}{\rho}}$ Curva
1		TRAC.	$\frac{N}{2da}$	b	1	—
		FLEX.	$\frac{3M_B}{2da^2}$	b	2	—
2		TRAC.	$\frac{N}{da}$	b	3	—
		FLEX.	$\frac{6M_B}{da^2}$	b	4	—
3		TRAC.	$\frac{N}{2da}$	b	5	—
		FLEX.	$\frac{3M_B t}{2d(b^3-t^3)}$	a	5	—
4	 $\mu = \frac{1}{m} = 0{,}3$	TRAC.	$\frac{N}{\pi a^2}$	b	6	—
		FLEX.	$\frac{4M_B}{\pi a^3}$	b	7	—
		CORTE	$\frac{1{,}23V}{\pi a^2}$	a	8	—
		TORS.	$\frac{2M_T}{\pi a^3}$	a	9	—
5	 $\mu = \frac{1}{m} = 0{,}3$	TRAC.	$\frac{N}{\pi(r^2-c^2)}$	b	5	1
		FLEX.	$\frac{4M_B r}{\pi(r^4-c^4)}$	b	5	2
		CORTE	$\frac{(1{,}23r^2+2{,}77c^2)V}{\pi(r^4-c^4)}$	a	10	3
		TORS.	$\frac{2M_T r}{\pi(r^4-c^4)}$	a	10	4
6	 $\mu = \frac{1}{m} = 0{,}3$	TRAC.	$\frac{N}{\pi(b^2-r^2)}$	b	5	5
		FLEX.	$\frac{4M_B r}{\pi(b^4-r^4)}$	b	5	6
		CORTE	$\frac{(2{,}77b^2+1{,}23r^2)V}{\pi(b^4-r^4)}$	a	10	7
		TORS.	$\frac{2M_T r}{\pi(b^4-r^4)}$	a	10	8
7		TRAC.	$\frac{V}{\pi a r}$	a	10	—
		FLEX.	$\frac{M_T}{2\pi a r^2}$	a	10	—
8	 sección hueca simetrica cualquiera	CORTE	$\frac{VS}{2aJ}$ 1)	a	10	—
		TORS.	$\frac{M_T}{2aF}$ 2)	a	10	—

OBSERVACIONES

1) S = Momento estático de la mitad de la sección respecto del eje neutro.
J = Momento de inercia de la sección respecto del eje neutro.

2) F = Área encerrada por el perímetro medio (punteado de la sección).

Fig. 18.30

Diagrama de Neuber para secciones llenas

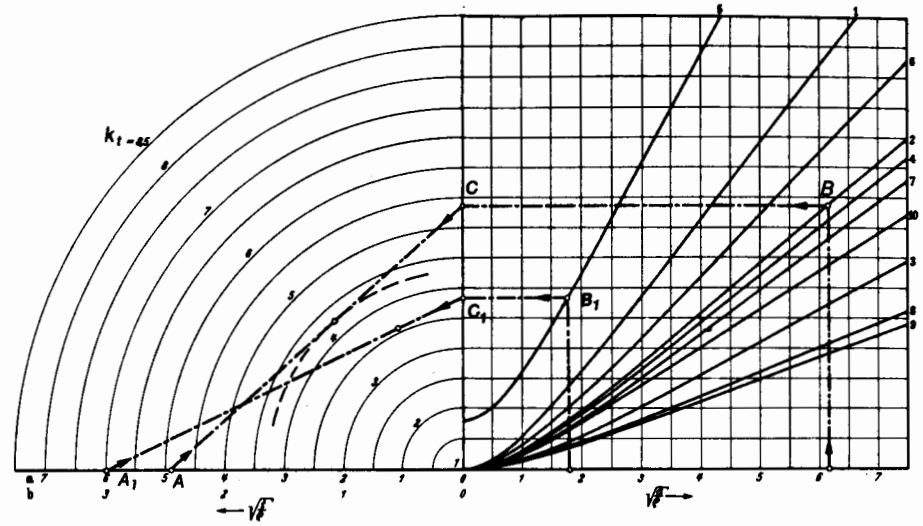


Fig. 18.31

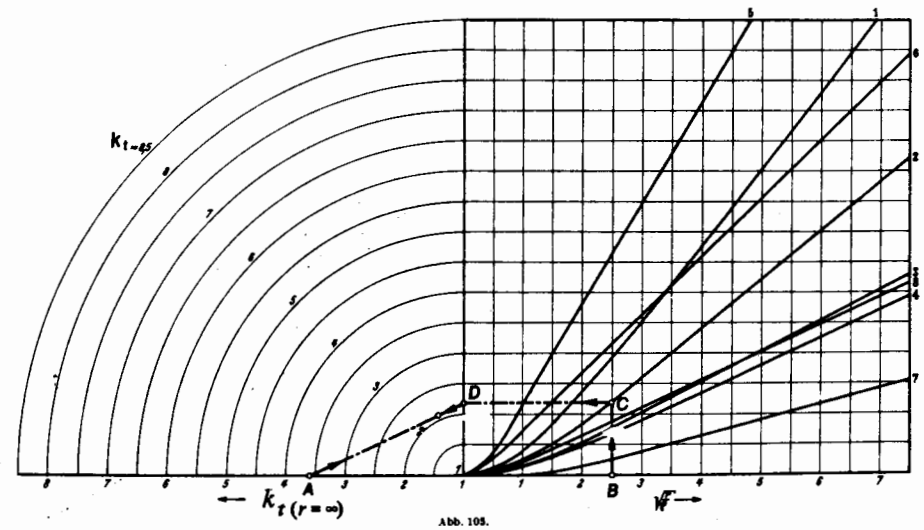


Diagrama de Neuber para secciones huecas de revolución

Fig. 18.32

Supongamos primeramente una entalladura simétrica, en una pieza sujeta a flexión pura (caso *1* de figura 18.30) y supongamos los siguientes valores:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{t}{\rho}} &= 2{,}45\\ \sqrt{\frac{a}{\rho}} &= 6{,}16\end{aligned}\right\} \qquad [18.41]$$

De acuerdo con la tabla de figura 18.30, para el caso analizado corresponde entrar al gráfico de figura 18.31, con el valor de 2,45 en la escala *b* (punto *A*). Luego, por la abscisa $\sqrt{a/\rho} = 6{,}16$, se levanta una vertical hasta encontrar en *B* la curva 2 que, según la tabla de figura 18.30 es la que corresponde utilizar para flexión en el caso *1*. Trazando por *B* una horizontal, ésta define sobre el eje de ordenadas un punto *C* que unido con *A* nos determina la recta *AC*, tangente a un arco de circunferencia de centro *O* (punteado) cuyo orden 4,28 (obtenido por interpolación) nos da el valor del coeficiente teórico de concentración de tensiones:

$$k_t = 4{,}28\ . \qquad [18.42]$$

Sea ahora una pieza correspondiente al caso 5, solicitada a flexión, para la cual se cumple:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{t/\rho} &= 3\\ \sqrt{a/\rho} &= 1{,}80\\ \sqrt{r/\rho} &= 2{,}50\end{aligned}\right\} \qquad [18.43]$$

De acuerdo con la tabla de figura 18.30 corresponde entrar con el valor $\sqrt{t/\rho} = 3$ en la escala *b* de abscisas (punto A_1). Luego, por el punto de abscisa 1,80 de la escala de $\sqrt{a/\rho}$ levantamos una vertical hasta cortar en B_1 la curva *5* que, de acuerdo con la tabla, es la que corresponde al caso que nos ocupa.

Proyectando B_1 sobre el eje de ordenadas, obtenemos el punto C_1 que unido con A_1 nos da la recta A_1C_1, tangente al arco de circunferencia de centro *O* y de orden 3,60 (punteado en la figura). Ahora bien, los casos *1* a *4* de la tabla de figura 18.30 suponen $r = \infty$, es decir que el valor $k_t = 3{,}60$ que hemos calculado no es el factor teórico real, por cuanto en el caso que analizamos *r* no tiene un valor infinito. En consecuencia, para determinar el verdadero valor del coeficiente de concentración de tensiones, entramos al gráfico de figura 18.32 con la abscisa:

$$k_{t\,(r=\infty)} = 3{,}60\ , \qquad [18.44]$$

que corresponde al punto *A* en la escala de los $k_{t\,(r=\infty)}$, y por otra parte, por la abscisa $\sqrt{r/\rho} = 2{,}50$ (punto *B*) levantamos una perpendicular hasta cortar

en la curva *2* que, de acuerdo con la tabla de fig. 18.30 es la que corresponde al caso analizado.

La horizontal por *C*, en su intersección con el eje de ordenadas, nos da el punto *D*. La recta *DA*, es tangente a un arco de circunferencia de centro en *1*, y cuyo radio, de orden de magnitud 2,08, nos da el valor del coeficiente teórico real de concentración de tensiones.

$$k_t = 2{,}08\ . \qquad [18.45]$$

18 . 6 . Factor efectivo de concentración de tensiones. Sensibilidad de entalladura

En los parágrafos anteriores nos hemos ocupado del factor teórico de concentración de tensiones k_t, correspondiente a un material elástico ideal y sólo función de la geometría de la entalladura, agujero o discontinuidad de sección y del tipo de solicitación, pero independiente de la naturaleza del material y de su comportamiento mecánico bajo carga.

Sin embargo, en muchos casos dicho factor teórico no constituye un índice de la influencia que sobre la probabilidad de rotura tiene una concentración de tensiones. Es decir, que la tensión máxima calculada sobre la base del valor de k_t que corresponde al caso analizado, no es la tensión efectiva que indica la proximidad de la rotura estructural.

Esta última depende, como dijimos, aparte de la geometría del elemento (forma y dimensiones relativas de la entalladura), del tipo de carga y de la naturaleza del material.

La concentración efectiva de tensiones se obtiene como producto de la tensión nominal de comparación, determinada en forma usual suponiendo que no exista discontinuidad en la sección, por el denominado *factor efectivo* de concentración de tensiones k_e, que en general, para una discontinuidad dada, es menor que el factor teórico k_t correspondiente a la misma discontinuidad.

La determinación de los valores de k_e ocurre por vía experimental. Para ello se someten a un mismo tipo de solicitación (tracción, flexión, corte, torsión o sus combinaciones) dos probetas similares o series de probetas similares, una de ellas con la entalladura o discontinuidad cuya influencia se desea determinar, y la otra sin ellas. Para ambas series se determinan las cargas de rotura, que denominaremos N_{R_e} y N_R para las probetas con discontinuidades y sin ellas respectivamente.

Es lógico que la rotura en ambos tipos de probetas, por tratarse de un mismo material, ocurra para la misma tensión de rotura. Pero como la existencia de una discontinuidad origina una concentración de tensiones, en las probetas

en que exista una entalladura por ejemplo, la tensión que origina la rotura se alcanzará a una carga menor.

$$N_R > N_{R_e} \,. \qquad [18.46]$$

En consecuencia, el factor efectivo de concentración de tensiones será la relación entre las tensiones originadas por ambas cargas en el supuesto que para la segunda no existiera la discontinuidad en la sección:

$$k_e = \frac{N_R}{N_{R_e}} \,. \qquad [18.47]$$

La concentración efectiva de tensiones, o sea, la máxima tensión que se produce como consecuencia de una discontinuidad, puede considerarse como suma de la tensión nominal de comparación (que ocurriría en la pieza de no existir la discontinuidad), mas una fracción del incremento de la tensión máxima teórica que ocurriría en la sección con la misma discontinuidad con respecto a la nominal.

Este concepto del factor efectivo de concentración de tensiones puede expresarse analíticamente de la forma siguiente.

Si llamamos:

σ_e, tensión máxima efectiva,

σ_t, tensión máxima teórica,

p, tensión nominal de comparación,

k_e, factor efectivo de concentración de tensiones,

k_t, factor teórico de concentración de tensión,

tendremos, teóricamente, como consecuencia de la discontinuidad:

$$\sigma_t - p = k_t p - p = p\,(k_t - 1) \,. \qquad [18.48]$$

Por otra parte, de acuerdo con lo dicho anteriormente:

$$\sigma_e = p + \alpha p\,(k_t - 1) \,, \qquad [18.49]$$

donde α es el porcentaje mencionado, que denominaremos *coeficiente de sensibilidad* de la entalladura o discontinuidad. Pero, por otra parte:

$$\sigma_e = k_e p \,, \qquad [18.50]$$

en consecuencia, reemplazando en [18.49]:

$$k_e p = p + \alpha p\,(k_t - 1) \,, \qquad [18.51]$$

de donde:

$$k_e = 1 + \alpha\,(k_t - 1) \qquad [18.52]$$

Como puede observarse, el factor efectivo de concentración de tensiones es función del coeficiente de sensibilidad.

Por su parte, como veremos más adelante, α depende de diversos factores y su valor puede variar entre 0 y 1. Su expresión es:

$$\alpha = \frac{k_e - 1}{k_t - 1} \,, \qquad [18.53]$$

$\alpha = 1$ significa $k_e = k_t$ y $\alpha = 0$, $k_e = 1$. En el primer caso, el material se comporta como un material ideal por cuanto los factores teóricos y efectivo de concentración de tensiones tienen el mismo valor. En cambio, en el segundo, el material por sus características tecnológicas es indiferente a la existencia o no de una discontinuidad, por cuanto el factor efectivo de concentración de tensiones es nulo.

18.7. Factores que influyen sobre k_e y α

Como hemos manifestado en el parágrafo anterior, los valores de k_e y consecuentemente los de α se determinan mediante ensayos.

Estos ensayos han puesto de manifiesto la influencia de diversos factores sobre el valor de α, que resumimos a continuación:

a) la naturaleza del material,

b) el tipo de solicitación,

c) la existencia de tensiones residuales,

d) el gradiente de tensiones.

En lo que respecta al caso (a), para un mismo tipo de entalladura y carga estática, el valor de α difiere según se trate de materiales dúctiles o frágiles.

Para materiales dúctiles, en lugares donde teóricamente debiera existir una fuerte concentración de tensiones con un k_t elevado, que generalmente conduce a una tensión igual o mayor que $\sigma_{fl.}$, se produce un relajamiento por fluencia del material, con redistribución de tensiones, especialmente para metales y temperaturas ordinarias y cargas estáticas. Dicha redistribución de tensiones tiene su origen, como hemos dicho, en una fluencia localizada por deslizamientos en planos intercristalinos. La consecuencia es un valor reducido de k_e lo que conduce a coeficientes de sensibilidad α reducidos, variables entre 0 y 0,1.

Tratándose de materiales frágiles, el problema cambia; el coeficiente de

sensibilidad es más elevado por cuanto no ocurre el fenómeno de fluencia, variando entre 0,5 y 1.

Para ciertos materiales, como la fundición gris, con inclusiones de grafito, α es muy reducido puesto que la existencia de las inclusiones permite que se originen planos de deslizamiento.

En lo que respecta al tipo de solicitación, el coeficiente de sensibilidad varía para un mismo material y tipo de discontinuidad, según se encuentre sometido a cargas estáticas, o cargas de acción dinámica, sean éstas de fatiga o de impacto.

Para las cargas de fatiga, la rotura ocurre como fractura frágil progresiva localizada, aunque se trate de un material dúctil, porque la capacidad del material para redistribuir tensiones se reduce considerablemente. Para ciclos de carga relativamente grandes, el valor de α varía entre 0,5 y 1,00.

En el caso de las cargas de impacto, la existencia de una concentración de tensiones reduce la capacidad del elemento para absorber energía. La energía de deformación que puede ser absorbida por unidad de volumen, en el período elástico es, como vimos anteriormente, $\frac{1}{2}\sigma^2/E$, de modo que, si en una pequeña zona (la de concentración de tensiones), las tensiones son muy elevadas como consecuencia de la existencia de una discontinuidad, la energía trasmitida por el impacto, es absorbida en su mayor parte en dicha zona, antes que el resto de la sección pueda colaborar absorbiendo energía. En tal caso, en la pequeña zona de concentración de tensiones, el valor de éstas puede sobrepasar considerablemente el límite de fluencia del material, produciendo la rotura aunque se trate de un material dúctil.

La existencia de tensiones residuales influye en el valor de α. Si ellas son del mismo signo que las originadas por la solicitación exterior, se suman a éstas aumentando el valor de $\sigma_{máx.}$ en la zona de concentración. En consecuencia, aumenta α que puede alcanzar valores considerables. En cambio, si las tensiones son de signo contrario, el pico de tensión disminuye, y con el, el valor de α que puede llegar a ser nulo.

La razón de la influencia que el gradiente de tensiones, es decir la pendiente del diagrama en la zona de concentración donde ocurre la tensión máxima, tiene sobre el valor de α, no está aun perfectamente aclarada. Una posible explicación reside en el hecho que la máxima tensión originada por la discontinuidad ocurre en uno o varios puntos del fondo de la misma, mientras que para los puntos vecinos la tension disminuye, tanto mas cuanto mayor sea la pendiente del diagrama, eso es, el gradiente de tensión. De modo que si el gradiente es de un valor elevado, la tensión disminuye muy rápidamente y en puntos cercanos al fondo de la entalladura alcanza valores muy próximos a los de la tensión nominal de comparación.

Para discontinuidades de los tipos estudiados (agujeros, cambios de sección y entalladuras) la expresión del gradiente i de tensión en el fondo de la discontinuidad puede expresarse aproximadamente por:

$$i = \frac{2{,}5\,\sigma_{máx.}}{\rho} = \frac{2{,}5\,k_t}{\rho}\,p\,. \qquad [18.54]$$

Para una determinada tensión nominal de comparación p y un cierto tipo de entalladura definido por un valor k_t, el gradiente i del diagrama, en la zona de concentración aumenta al disminuir ρ, es decir, al ser mayor la curvatura. De modo que en puntos muy próximos al borde de la entalladura, la tensión disminuye considerablemente y, en consecuencia, la redistribución de tensiones que tiene por objeto reducir las tensiones máximas, no encuentra mayor obstáculo por cuanto la zona afectada es muy pequeña. Para estos casos, en que el gradiente de tensiones es grande, el valor de α es reducido.

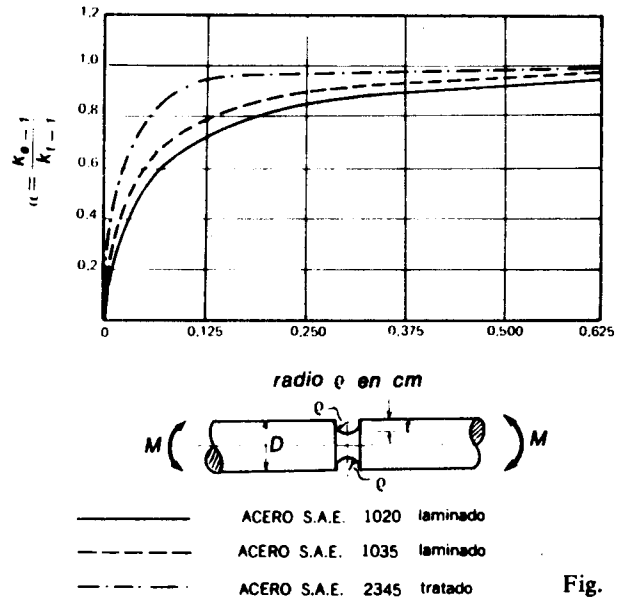


Fig. 18.33

La expresión [18.54] permite en cierto modo, explicar el hecho comprobado experimentalmente, que el factor efectivo de concentración de tensiones es tanto menor cuanto más reducido es el radio de curvatura ρ del fondo de la entalladura.

En la figura 18.33 puede observarse la variación del coeficiente de sensibilidad en función del radio de una entalladura circular de un eje sujeto a una solicitación oscilante alternada (flexión rotativa).

Remitimos al lector interesado en conocer los valores de los factores efectivos de concentración de tensión k_e, a la tabla XVII del libro *Formulas for Stress and Strain* de *R. J. Roark*, donde figuran los valores de k_e correspondientes a distintos tipos de discontinuidades para toda una serie de materiales.

Stress and Strain de *R. J. Roark,* donde figuran los valores de k_e correspondientes a distintos tipos de discontinuidades para toda una serie de materiales.

18.8. Concentración de tensiones en la torsión de barras de pared delgada

En la torsión de barras de pared delgada se origina una concentración de tensiones tangenciales en los ángulos entrantes de la sección, y el valor del factor k_t es función de la relación entre el radio de curvatura ρ de la identificación del ángulo entrante y el espesor de la pared e (fig. 18.34).

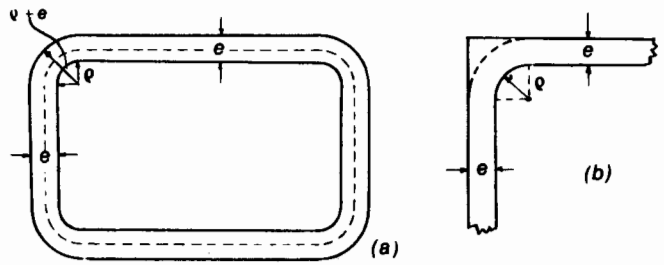


Fig. 18.34

Para el caso de secciones abiertas (perfiles U, L, Z, etc.) el factor de concentración de tensiones tangenciales puede calcularse mediante la denominada fórmula de *Trefftz*[1]:

$$k_t = 1{,}74 \sqrt[3]{\frac{e}{\rho}}\,, \qquad [18.55]$$

donde ρ y e tienen los significados de la figura. Para los perfiles laminados comunes, esta fórmula da una aproximación aceptable, pues conduce a valores que coincidan suficientemente con los obtenidos experimentalmente. En este caso, la tensión nominal de comparación es $\tau_{máx.}$ que ocurre, como hemos visto anteriormente, en el centro del borde del rectángulo de mayor espesor.

Si la sección es cerrada, simplemente conexa y de paredes de espesor constante, el factor de concentración de tensiones está dado por la siguiente expresión debida a Timoshenko[2]:

[1] y [2] Filonenko–Boroditch, *op. cit.*

Índice alfabético

acero, diagrama, 148.
aceros duros, 151.
admisibles, tensiones, 174.
alternada, carga, 535.
analogía, hidrodinámica, 256.
–, de la membrana, 250.
Airy, función de, 251.
anelástico, período, 140, 142.
ángulo, específico de torsión, 224.
– de distorsión, 224.
–de torsión, 226.
articulación plástica, 347, 415.
autozunchaje, 212.
axil, solicitación, 169.
–, solicitación dinámica, 562.

Bach, ley exponencial de, 146.
Bauschinger, efecto, 534.
Beltrami, teoría de, 514.
Bernouilli, hipótesis de, 272, 604.
Butty, 592.
bruchgefahr, 493.

cambio, de forma de una sección, 299.
–, de sección, 595.
característica, ecuación, 19.
características mecánicas, 155.
carga alternada, 535, 541.
– de impacto, 560.
– intermitente, 535, 548.
– oscilante, 535, 550.
– pulsatoria, 535,548.
casos de resistencia, simple, 164.
– compuesta, 164.
Cauchy, cuádrica de, 38.
– teorema de, 12.
centro de corte, 330.
– de presión, 374.
ciclo, coeficiente de, 536.
cíclicas, solicitaciones, 551.
circunferencia, de deformaciones, 124.
–, de Mohr, 81.
–, estado plano, casos particulares, 90.
–, estado plano, construcción, 87.
–, estado simple, 99.
–, estado triple o espacial, 41.
–, estado plano, existencia de tres, 95.
coeficiente α, determinación analítica, 470.
–, determinación gráfica, 476.
–, sección circular, 472.
–, sección elíptica, 475.
–, sección rectangular, 471.
–, sección triangular, 474.
coeficiente de ciclo, 536.
– de forma, 350, 371.
– de Poisson, 129.
– de seguridad, 158.
comparación de secciones anular y circular, 229.
compatibilidad de deformaciones, 118.
compresión simple, 169.
concentración de tensiones, 583.
–, agujero circular, 584.
–, agujero elíptico, 592.
–, factor, 583,
–, factor teórico, 583, 591.
–, factor efectivo, 583, 613.
–, factor experimental, 591.
–, torsión en barras de pared delgada, 618.
condiciones de equivalencia, 167.
conductos cerrados, tensiones, 191.
cónica directriz, 71.
–indicatriz, 76.
cónicas auxiliares, 69.
constante volumétrica, 129.
constantes elásticas, 128, 146.
convención de signos, 5.
corrimientos, 107.
corte, centro de, 330.
– puro, 498.
Coulomb, hipótesis, 219.
– teoría de, 510.
creep, 559.
cuádrica directriz, 37.
– indicatriz, 21.
– de tensiones de Cauchy, 38.
cubo elemental, equilibrio, 9.
curvas de interacción, con un eje de simetría,
–, comienzo de plastificación, 429, 435.
–, plastificación parcial, 419, 434.
–, plastificación total, 417, 432, 437.
curvas isóclinas, 344.
– isostáticas, 339.
–, ecuación diferencial, 340.
curva de Wöhler, 538.

deformación, direcciones principales, 116.

. energía, 496.
permanente, 150.
pura, 114.
tensor, 114.
– volumétrica, 129.
deformaciones, circunferencia, 190.
– en flexión, 286.
– en el entorno de un punto, 103.
– específicas máximas y mínimas, 123.
– lineales específicas, 106.
–, planos principales, 190.
–, radiales, 190.
–, solicitación axil, 175.
–, tubo de pared delgada, 190.
–, tubo de pared gruesa, 201.
diagramas de fatiga, 540.
– de interacción, 424.
– ideales, 144.
diagrama de Neuber, 584.
– de Smith, 546.
– tensión-deformación, 140.
–, para el acero, 148.
– de Weyrauch, 545.
dimensionamiento de elementos estructurales, 163.
dimensionado de secciones, 277, 307.
dinámicas, solicitaciones, 559.
direcciones principales, 18.
directriz, cuádrica, 37.
distorsiones, 106.
–máximas y mínimas, 123.
ductilidad, 156.

ecuación característica, 19.
– diferencial, isostática, 340.
– diferencial, línea elástica, 288.
ecuaciones de compatibilidad, 13, 118.
– de equilibrio, 11.
efecto de entalladura, 595.
eje neutro, 272.
–, determinación, 302, 377.
elástica, línea, 287.
elasticidad, límite, 141.
elástico, período, 140.
elementos estruct., dimensionamiento, 163.
elipse de Lamé, 68.
elipsoide de Lamé, 32.
encamisado, tensiones inducidas, 204.
endurecimiento mecánico, 151.
energía de deformación, flexión, 308.
– interna de deformación, 496.
Engesser, 412.
entalladura, efecto, 595.
– sensibilidad, 613.
equilibrio, cubo elemental, 9.
–, ecuaciones, 11.
– interno, 165.
equivalencia, condiciones, 167, 272.
esfuerzos característicos, 163.
estado, de deformación, 103, 119.
– elástico plano, 59.
– elástico plano rep. gráfica, 68.
– elástico triple o espacial, 15.
– elástico simple, 97, 497.
estados propios de tensión, 358.
excentricidad, 374.
– constante, rectas, 428.

factor de ignorancia, 159.
– de incertidumbre, 159.
– de concentración de tensiones, 583.
failure, 493.
fatiga, diagramas, 540.
– flexión, 554.
– resistencia, 538.
– solicitación axil, 552.
– solicitación por, 533, 535.
Filonenko-Boroditch, 597.
flexión, energía de deformación, 308.
–, fatiga, 554.
– período plástico, 345.
– compuesta normal sin zona de tracción, 402.
– compuesta oblicua sin zona de tracción. 411.
– compuesta oblicua, 373.
– compuesta oblicua en función de dos flexiones normales, 379.
– compuesta en régimen elástico, 373.
– compuesta en régimen plástico, 415.
– compuesta, piezas curvas, 482.
– y corte, 271, 311.
– oblicua, función de dos normales, 304.
– oblicua, proyecto de secciones, 307.
– oblicua, verificación, 307.
– pura, 272.
– pura normal, deformación, 286.
– oblicua, 300.
– simple, 271.
– simple normal, 271.
– simple oblicua, 271.
– simple, período plástico, 345, 363.
– simple, piezas curvas, 482.
– simple, tensiones normales, 275.
– simple, solicitación dinámica, 566.
– y torsión; momento ideal, 444.
– y torsión, sección circular, 442.
– y torsión, sección anular, 445.
fluencia, lenta, 559.
–, límite de, 141.
– límite inferior, 142.
–, límite superior, 142.
fuerzas de masa, 1.
– de superficie, 1.

Goodman, ley de, 542.
Greenhill, 256.
Guest, teoría de, 510.
Gerber, ley de, 542.

Haigh, representación de, 496.
– teoría de, 514.
Hencky, teoría de, 493, 517.
Henkel, 412.
hipótesis de Bernouilli, 272, 299.
– de Coulomb, 220.
Hooke, ley de, 128.
Huber, Hencky, v. Mises, teoría, 493, 517.

impacto, carga de, 560.
–, inf. de la inercia, 559.
indicatriz, cuádrica, 21.
inercia, influencia en el impacto, 577.
interacción, diagramas, 424.
intermitente, carga, 535, 548.
invariantes de deformación, 116.
– de tensión, 28, 66.
isóclinas, curvas, 344.
isostáticas, curvas, 339.
– determinación gráfica, 341.
isotrópicos, puntos, 340.

Jouravski, teoría de, 313.

kriechen, 559.

Lamé, ecuaciones, 197.
– elipse, 68.
– elipsoide, 32.
Lassalle, 599.
límite de elasticidad, 141.
– de fluencia, 141.
– aparente de fluencia, 153.
– 0,2 por ciento, 153, 155.
– de Johnson, 153.
– de proporcionalidad, 141.
límites de fluencia, relaciones, 560.
línea de fuerzas, 271.
– elástica, 287.
– elástica, casos varios, 289.
Lode, ensayos de, 496.
ley de Bach, 146.
– de Gerber, 542.
– de Goodman, 542.
– de Hooke, 128.
–, de Hooke, generalización, 131.
– de Soderberg, 543, 551.

Marin, teoría de, 520.
materiales que no admiten tracción, 402.
método de la sección transformada, 458.
– de Rèsal, 458.
módulo de elasticidad, inicial, 143.
–, longitudinal, 128.
–, secante, 143.
–, tangente, 143.
–, transversal, 129.
–, volumétrico, 129, 135.
módulo, resistente, 276.
– de Young, 128.
Mohr, circunferencia, estado plano, construcción, 87.s,
– circunferencia, estado simple, 99.
– circunferencia, estado triple, 41.
– primer polo, 53.
– teoría de, 522.
momento ideal, 447.
– de rotura, 347, 348, 350, 369.
– de plastificación parcial, 348, 350, 371.
– torsor, 223.
momentos nucleares, 397.

Navier, hipótesis, 272, 604.
Neuber, 602, 605.
– diagramas, 584, 609.
nucleares, momentos, 397.
–, radios, 388.
núcleo central, 386,
– central, contorno, 386.
– central, determinación, 388.
– exterior, 414.

oblicua, flexión, 300.
oscilante, carga, 535, 550.
– resistencia, 538.

perfiles laminados, 246.
– normales, 280
período, elástico, 140.
– plástico o anelástico, 140.
– plástico, flexión compuesta, 415.
– plástico, flexión simple, 345.
– plástico, torsión, 264.
peso propio, influencia (sol. axil), 176.
piezas curvas, solicitación axil, 479.
–, flexión compuesta, 482.
plano de flexión, 271.
planos, haz de eje principal, 52.
– principales, 17, 61, 98.
– principales de deformación, 116.
plástico, período, 140.
plastificación parcial, momento, 348.
Pohl, 412.
Poisson, coeficiente de 129.
polar, representación, 78.
polo de Mohr (1°), 53, 84.
– de Mohr (2°), 86.
Prandtl, analogía, 251.

primer polo de Mohr, 53, 84.
principales, direcciones, 18.
– planos, 17, 61, 98.
– tensiones, 17, 24, 61.
principio de Maxwell, 384.
– de Saint Venant, 170.
problema de las tres barras, 182.
procedimiento de Winkler-Bach, 458.
propiedades mecánicas, 140.
proporcionalidad, límite de, 141.
pulsatoria, carga, 535, 548.
puntos isotrópicos, 340.
– singulares, 340.

radios nucleares, 388.
Rankine, teoría de, 507.
reciprocidad, centro de presión y eje neutro, 381.
– tensiones, 8.
– principio de Maxwell, 385.
relación entre E, G y μ, 132.
relaciones entre tensiones y def., 127.
representación polar, 78.
Rèsal, método de, 458.
resiliencia, 156.
resistencia a la fatiga, 538.
resortes de espiras abiertas, 453.
–, cerradas, 448.
– helicoidales de sec. circular, 447.
rigidez, 156.
Ritter, diagrama de, 337.
Roark, 618.
rotura, concepto, 493.
– estructural, 347.
– teorías, 491.
– tensión de, 142.

Saint-Venant, principio de, 170.
– solución en torsión, 242.
– teoría, 512.
sección abierta delgada, torsión, 246.
– anular, torsión, 228.
– circular llena, torsión, 221.
– circular hueca, sin zona de tracción, 408.
– elíptica, torsión, 245.
– rectangular, flex. comp. en régimen plástico, 416.
– rectangular, torsión, 241.
– transformada, 458.
– trapecial, c. de interacción, 435.
sección triangular, torsión, 245.
– tubular de pared delgada, 232, 238.
segundo núcleo, 414.
– polo de Mohr, 86.
seguridad, coeficiente, 158.
sensibilidad de entalladura, 613.
símbolos, 5.
Smith, diagrama de, 546.
Soderberg, ley de, 543, 551.
solicitación, axil, 164, 169.
– axil, deformaciones, 175.
– dinámica axil, 562.
– axil por fatiga, 552.
– axil, inf. del p. propio, 176, 181.
– axil, problema de las tres barras, 182.
– axil, sólido de igual resistencia, 178.
– axil, tubos de pared delgada, 187. s.
– en piezas de gran curvatura, 455.
– dinámica por flexión, 566.
– dinámica por torsión, 570.
solicitaciones estática y dinámica, comparación, 573.s,
solicitación por fatiga, 533, 535.
– por flexión compuesta, 373.
– por flexión y torsión, 441.
– por torsión, 219.
solicitaciones cíclicas, 551.
– dinámicas, 559.
sólido de alma llena, equilibrio interno, 165.
– de igual resistencia en solicitación axil, 178.

tensión, concepto, 2.
tensión-deformación, diagrama, 140.
tensión de rotura, 142.
tensiones de rotura, relaciones, 561.
tensión, estado propio de, 358.
– estado simple, 98.
– invariantes de, 28, 66.
– normal, 4.
– octaédrica, 29.
– régimen o estado de, 3, 24.
– relación entre dos caras, 6.
– resultante, 5.
– tangencial, 4.
– tangencial máxima, 25, 63, 98.
– tensor de, 13.
tensiones admisibles, 174.
– concentración, 584.
– conductos cerrados, 191.
– en tubos de pared delgada, 187.
– en un plano cualquiera, 15, 59, 98.
– en un punto, 3.
– inducidas (encamisado), 204.
– normales, diagrama, 378.
– normales, flexión simple, 275.
– normales, líneas de inf., 400.
– normales, sup. de inf., 400.
– normales, piezas curvas, 464.
– principales, 17, 24, 61, 227.
– principales, flexión y corte, 336.
– principales, torsión, 227.
– principales, trayectorias, 339.
– radiales, piezas curvas, 484.

– residuales, 357.
– reciprocidad, 8.
– secundarias, torsión, 257.
– tangenciales, sec. circ., 322.
– tangenciales, doble T, 325.
– tangenciales, sec., rect., 315.
– tangenciales, sección simétrica curva, 318.s,
– tangenciales, sec., triang., 323.
– tubos de pared gruesa, 194.
– volumen de, 401.
tensor antimétrico, 55.
– deformación, 114.
– deformación, invariantes, 116.
– de tensiones, 13, 54.
– desviador, 56.
– esférico, 56.
– simétrico, 55.
– rotación, 116.
teorema de Cauchy, 12.
teorías de rotura máx. tensión tg. oct., 519.s,
–, máx. energ. de distorsión, 517.
–, energía total de deform., 514.
–, máx. deform. esp. ppal., 512.
–, máx. tensión de corte, 510.
–, máx. tensión normal, 520.
–, máx. tensión ppal., 507.
teorías de rotura, 491.
– de rotura, comparación, 528.
teoría de Mohr, 522.
– de Jouravski, 313.
Timoshenko, 618.
torsión, analogía de la membrana, 258.
– analogía hidrodinámica, 256.
– ángulo específico, 224.
– concentración de tensiones, 618.
– ecuaciones de equivalencia, 219.
– período plástico, 264.
– secciones abiertas delgadas, 246.
– sección anular, 228.
– secc. circular, 221.
– sec. rectangular, 241.
– sec. elíptica y triangular, 245.
– solicitación dinámica, 570.
– tensiones principales, 227.
– tensiones secundarias, 257.
tracción simple, 169.
trayectorias de tensiones ppales., 339.
Treffz, 618.
tubos de pared delgada, deformaciones, 190.
–, tensiones, 187.
tubos de pared gruesa, radio int., 210.
–, casos part., 197.
–, deformaciones, 201.
–, tensiones, 194.
–, tens. máx. y mín., 197.
–, en régimen plástico, 212.

verificación de secciones, 282, 307.
vigas de gran curvatura, tens. radial, 484.
volumen de tensiones, 401.
von Mises, teoría de, 493, 517.

Westergaard, representación de, 496, 509.
Weyrauch, diagrama, 545.
Winkler-Bach, método de, 458, 464, 470, 489.
Wöhler, curva de, 534, 546.

Young, módulo de, 128.

zunchado en caliente, 205.

Indice de personas

Adams: 148.
Airy: 219, 251.

Bach: 146, 147, 458, 464, 470, 489, 492, 540.
Bauschinger: 534.
Becker: 493.
Beltrami: 492, 514, 515, 517, 528, 532.
Bernouilli: 272, 273, 279, 325, 366, 374, 455, 583, 604.
Boers: 493.
Boroditch: 597, 605, 618.
Brandtzaeg: 493.
Bridgman: 515.
Brigell: 157.
Buckley: 584.
Bülfinger: 146.
Butty: 592.

Cauchy: 12, 37, 38, 53, 64, 221, 227, 233, 234, 241, 245, 315, 316, 319, 320, 323, 327, 329, 450.
Coker: 148.
Collignon: 311, 333.
Cook: 528, 529.
Coulomb: 219, 220, 222, 232, 241, 257, 383, 491, 492, 510, 583.

Davidenkoff: 560.
Dinnik: 560.
Durelli: 41.

Eichinger: 496, 528, 529, 532.
Engesser: 412.

Féodossiev: 494, 495.
Filonenko: 597, 605, 618.
Foerster: 280.
Fairbrain: 534.
Fliess: 599.
Frocht: 591, 592.

Galileo: 492.
García Olano: 492.
Gerber: 541, 542, 543, 544.
Goodman: 541, 542, 543, 544.
Grashof: 492.
Griffith: 493.
Guest: 492, 514, 515, 517, 528, 532.
Guzmán: 122.

Haigh: 492, 496, 514, 517, 528.
Hencky: 492, 493, 516, 519, 528, 529, 532.
Henkel: 412.
Homoink: 493.
Hooke: 128, 131, 143, 146, 165, 172, 175, 183, 195, 236, 272, 300, 308, 310, 363, 369, 374, 455, 457, 513, 583.
Hopkinson: 560.
How: 311.
Huber: 492, 493, 514, 516, 528, 529, 532.

Inglis: 592.

Jeffert: 584.
Jenkins: 537.
Johnson: 153, 155.
Jouravski: 311, 313, 319, 321, 323, 325, 326, 330, 333.
Jurieff: 560.

Kirsch: 584.
Krüger: 148.

Lamé: 31, 32, 37, 68, 193, 197, 492.
Lassalle: 599.
Lehman: 537.
Leibniz: 492.
Lobo Carneiro: 525.
Lode: 496, 528, 529.

Marin: 153, 492, 520, 528, 541, 560.
Maxwell: 384, 401.
Meyer: 560, 561.
Mohr: 41, 45, 49, 50, 53, 81, 84 a 93, 95, 99, 124, 125, 302, 303, 337, 338, 340, 378, 379, 407, 408, 491, 492, 511, 521 a 528, 531, 532.
Murphy: 122.

Navier: 272, 273, 279, 325, 333, 366. 374, 455, 510, 583, 604.
Nemiloff: 560.
Neuber: 584, 602, 605, 608, 609, 611.
Noms: 493.

Orowan: 494.

Páez Balaca: 161.
Phillips: 41.
Plank: 561.
Pohl: 412.
Poisson: 129, 148. 512, 517.
Polanyi: 493.
Poncelet: 492.
Prandtl: 251.

Quereau: 476.
Quinney: 528, 529.

Rankine: 492, 507, 508, 510, 428, 532.
Rèsal: 458, 467, 470, 589, 592.
Ricaldoni: 490.
Ritter: 337, 338, 342.
Roark: 618.
Robertson: 528, 529.
Rockwell: 157.
Roever: 451.
Rös: 496, 528, 529, 532.

Sadowsky: 584.
Saint Venant: 170, 172, 191, 242, 243, 245, 246, 251, 492, 512, 513, 528, 529, 532.
Saudel: 492.
Schleicher: 280, 492.
Seehose: 561.
Seely: 209, 476.
Smith: 209, 476, 546, 548, 549, 551.
Soderberg: 543, 551.
Sokolovsky: 146.

Taylor: 105, 528, 529.
Timoshenko: 170, 618.
Trefftz: 618.
Tsao: 41.

Varignon: 8.
von Mises: 492, 493, 516, 517, 519, 528, 529, 532.

Weber: 584.
Wehage: 493.
Westergaard: 496, 509, 511, 513, 514, 517, 520, 521.
Weyrauch: 545, 546.
Wilson: 476.
Winkler: 458, 464, 470, 489.
Wöhler: 534, 538, 539, 546.

Young: 128.

Zwicky: 493.