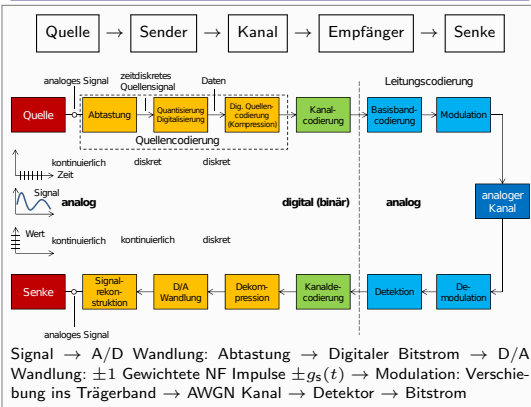


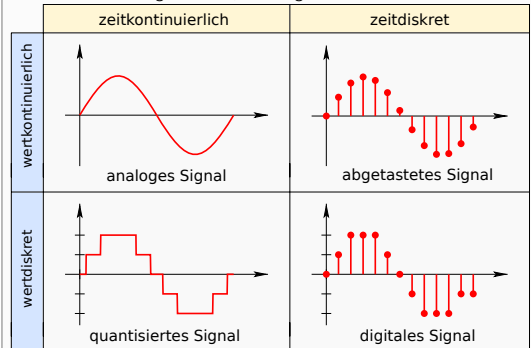
Allgemeines



1. Signale

1.1. Arten von Signalen

deterministisch: durch Funktionen beschreibbar, enthalten kein Nach-richt.
stochastisch: zufälliger Verlauf, überträgt Information



Vorteile digitales Signal: Kompression, Verschlüsselung, Fehlerkorrektur

1.2. Sonstiges

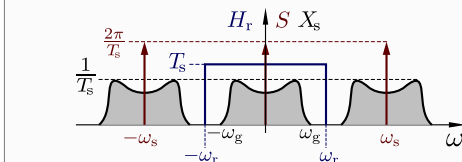
Autokorrelation $r_V(\tau) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} S_V(f)$ **Leistungsdichtespektrum**
 $x(t), y(t)$ sind orthogonal, falls $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt = 0$
Kompl. Fehlerfunktion $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau$

2. Abtastung von Signalen

Abtasttheorem

Signal $x(t)$, Abtastfunktion $s(t) = T_A \sum \delta(t - nT_s)$,
Tiefpassfilter $h_r(t)$

Vorgang Zeitbereich Frequenzbereich
Abtasten: $x_s(t) = s(t) \cdot x(t)$ $X_s(\omega) = S(\omega) * X(\omega)$
Rekonstr. $x_r(t) = h_r(t) * x_s(t)$ $X_r(\omega) = H_r(\omega) \cdot X_s(\omega)$



Bandbreite ω_g , Abtastfrequenz ω_s

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq 2\omega_g \quad \omega_g \leq \omega_r \leq \omega_s - \omega_g$$

Abtastoperator: $\mathbb{A}\{x(t)\} = x(t) \cdot T_A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_A)$

Rekonstruktion: $x_r(t) = T_A \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_A) \cdot h_r(t - nT_A)$

Abbruchfehler: $|\Delta| = \left| \frac{x_r(t) - x(t)}{x(t)} \right|$

Periodisierungsoperator: $\mathbb{P}\{X(f)\} = X(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T_A})$

Ideale Abtastung: $\mathbb{A}\{x(t)\} \stackrel{f_A=1/T_A}{\longleftrightarrow} \mathbb{P}\{X(f)\}$

3. Quantisierung und Digitalisierung

wertkontinuierliche Sequenz von (zeitdiskreten) Abtastwerten wird abge-bildet auf wertdiskrete Sequenz.

$$x(nT_A) \text{ mit } n \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x_Q} x_Q(nT_A)$$

3.1. Allgemeines

Quantisierungsfunktion $\underline{x}_Q = Q(\underline{x})$

Bildet Vektoren $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ auf eine Menge S ab mit $|S| = M$
Man benötigt $m = \lceil \log_2 M \rceil$ bits um \underline{x}_Q zu repräsentieren.
Intervall $I_i = [g_i, g_{i+1})$ enthält Reprodwert s_i

Skalare Quantisierer: $N = 1$ Vektor Quantisierer: $N > 1$

Quantisierungsfehler: $q(\underline{x}) = \underline{x}_Q - \underline{x} = s_i - x$

(besteht aus granularem Rauschen und Überlastungsrauschen)

3.2. Skalare Quantisierung $N = 1$

m Bits für einen ($N = 1$) Abtastwert

Quantisierungsfehler $q(x) = x_Q - x = x_Q(nT_A) - x(nT_A)$

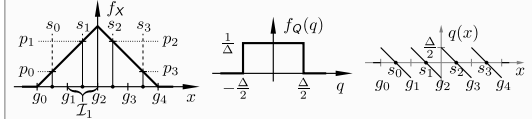
$$\text{Quantisierungsfehlerleistung: } P_Q = \int q(x)^2 f_X(x) dx = \sum_{s_i} \int_{g_i}^{g_{i+1}} (s_i - x)^2 f_X(x) dx$$

Optimales s_i (setze $\frac{\partial P_Q}{\partial s_i} \stackrel{!}{=} 0$):

$$s_i = \frac{\int_{g_i}^{g_{i+1}} x f_X(x) dx}{\int_{g_i}^{g_{i+1}} f_X(x) dx} = E[X | x \in I_i]$$

3.3. Lineare Quantisierung

Spezialfall der skalaren Quantisierung mit gleich großen Quantisierungsintervallen Δ .



$$\text{Es gilt für PDF: } \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx \stackrel{!}{=} 1$$

Gleich große Quantisierungsintervalle $I_i = [g_i, g_{i+1})$ mit Breite Δ
 $\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2^m} = g_{i+1} - g_i$

Reproduktionswerte s_i in der Mitte der Intervalle (midriser)

$$s_i = \frac{2i - M + 1}{2} \Delta$$

Auftrittswahrscheinlichkeit p_i der Quantisierungsstufe s_i

$$p_i = \int_{g_i}^{g_{i+1}} f_X(x) dx$$

$$\text{Signalleistung } P_X = E[X^2] = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^2 f_X(x) dx$$

Gleichverteilung: $P_X = \frac{x_{\max}^2}{3}$ Sinusförmig: $P_S = \frac{x_{\max}^2}{2}$

$$\text{Fehlerleistung } P_Q = E[Q^2] = \int_{-\infty}^{\infty} q(x)^2 f_Q(q) dq$$

Bei gleichverteiltem Quantisierungsfehler: $P_Q = \frac{\Delta^2}{12}$

$$\text{Signal-Noise-Ratio: } \text{SNR}_Q = \frac{P_X}{P_Q}$$

$$\text{SNR}_Q = \frac{P_X}{P_Q} = \begin{cases} \frac{x_{\max}^2/3}{\Delta^2/12} = 2^{2m} & \text{bei gleichverteiltem Signal} \\ \frac{x_{\max}^2/2}{\Delta^2/12} = \frac{3}{2} 2^{2m} & \text{bei sinusförmigem Signal} \end{cases}$$

Signal zu Quantisierungsrauschabstand $\text{SNR}_{Q\text{dB}}$

$$\text{SNR}_{Q\text{dB}} = 10 \log_{10}(\text{SNR}_Q) \text{ dB} = m \cdot 6 \text{ dB}$$

(CD, 16 bit : 96 dB)

3.4. Nichtlineare Quantisierung

A-law-Kennlinie (Europa) und μ -law-Kennlinie (USA)

$$C(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \ln(A)} \cdot |x| \cdot \text{sgn}(x) & 0 \leq |x| \leq \frac{x_{\max}}{A} \\ \frac{1 + \ln(\frac{A \cdot |x|}{x_{\max}})}{1 + \ln(A)} \cdot |x| \cdot \text{sgn}(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$A = 87.5 = 24 \text{ dB}$$

3.4.1. Pulse Coded Modulation PCM

Abtastung + skalare Quantisierung: $\text{SNR}_Q = \frac{P_X}{P_Q} = 2^{2m}$

3.4.2. Differentielle PCM (DPCM)

Differenz zu vorhergesagtem Wert wird quantisiert.

Prädiktion 0.ter Ordnung: Kann bei schnellen, großen Änderungen nicht mehr folgen. Gut geeignet für Signale mit hoher zeitlicher Konzentration \rightarrow schmales Spektrum.

3.4.3. Delta-Modulation (Hohe Überabtastung)

1-Bit-Quantisierung: $e_Q(nT_s) = \pm \Delta$

Kann den Wert nicht Konstant halten, Tiefpass am Empfänger nötig

3.4.4. Sigma-Delta-Modulator

Σ : Summe/Integral Δ : 1-bit-Quantisierer

3.5. Optimale skalare Quantisierung

Lloyd-Max-Algorithmus

- Wähle Startwerte für alle $s_i^{(0)}$
- Intervallgrenzen: $g_i^{(t+1)} = \frac{s_i^{(t)} + s_{i+1}^{(t)}}{2} \quad i = 1, \dots, M-1$
- Reprod. Werte: $s_i^{(t+1)} = E[X | X \in I_i] \quad i = 0, \dots, M-1$
- Fehlerleistung $P_Q^{(t+1)} = E[Q^2]$ mit $s_i^{(t+1)}$ und $g_i^{(t+1)}$
- Berechne relative Änderung $\delta^{(t)} = \frac{P_Q^{(t+1)} - P_Q^{(t)}}{P_Q^{(t)}}$

3.6. Informationsgehalt und Entropie

Info vom Symbol s_i : $I_i = -\log_2 P(X_Q = s_i) = -\log_2 p_i$

Entropie von X_Q : $H(X_Q) = E[I] = -\sum_{i=0}^{M-1} p_i \log_2 p_i \quad \left[\frac{\text{bit}}{\text{Symbol}} \right]$

Mittlere Codewortlänge $\bar{l} = E[l] = \sum_{i=0}^{n-1} p_i l_i$

Die minimale mittlere Codewortlänge $\bar{l} \geq H(X_Q)$

4. Dämpfung/Verstärkung, dB-Rechnung

4.1. Leistungspegel

$$\text{Leistung: } P = \frac{U_R^2}{R} = I^2 R$$

Leistungspegel:

$$L_{P, \text{dB}} = 10 \log \frac{P_2}{P_1} \text{ dB} = 20 \log \frac{U_2}{U_1} \text{ dB} = 20 \log \frac{I_2}{I_1} \text{ dB}$$

$$L_{P, \text{dBm}} = 10 \log \frac{P}{1 \text{ mW}} \text{ dBm}$$

$$1 \text{ dBm} = 1 \text{ dBmW} = 30 \text{ dBmW} = 60 \text{ dBmW}$$

$$\text{Verstärkung [dB]} = L_{P, \text{dB}}; \text{ Dämpfung [dB]} = -L_{P, \text{dB}}$$

Logarithmische Rechenregeln:

$$x = a \cdot \log_b(c \cdot d) = \log_b c^a + \log_b d^a$$

$$b^x = (c \cdot d)^a = c^a \cdot d^a$$

$$\sqrt[q]{b^x} = c \cdot d$$

Durch $x = (\frac{1}{x})^{-1}$ ergeben sich die Rechenregeln für Subtraktion und Division.

4.2. Umrechnung dB

Verhältnis $\frac{P_2}{P_1}$	Verstärkung [dB]	Dämpfung [dB]
$\frac{1}{1000} = 10^{-3}$	-30	+30
$\frac{1}{20} = 10^{-1}$	-13	+13
$\frac{1}{10} = 10^{-1}$	-10	+10
$\frac{1}{4}$	-6	+6
$\frac{1}{2}$	-3	+3
1	0	0
2	+3	-3
4	+6	-6
8	+9	-9
10	+10	-10
1000 = 10 ³	+30	-30

4.3. Rechenregeln dB und dBm

dB \mp dB	=	dB
dBm \mp dB	=	dBm
dBm - dBm	=	dB
dBm + dBm	=	undefiniert

5. Baud-, Bit- und Übertragungsraten

5.1. Definitionen

Signalstufen = Anzahl der möglichen annehmbaren Werte eines diskreten Signals pro Schritt
binäre Datenmenge in bit (binary digit) mit bit-Anzahl $\in \mathbb{N}$
1 Byte [1B] = 8 bit [8b] = 2^8
Baudrate[Hz] = Schrittgeschwindigkeit
Bitrate[bps] = $\frac{Bps}{8} = V \cdot \text{Baudrate}$

6. Leitungstheorie

Leitungstheorie relevant für $l \geq 0, 1 \lambda$

6.1. Definitionen

Leitungslänge l mit $[l] = m$
Belagsgrößen: R', L', G', C' als Widerstands-, Induktivitäts-, Ableitungs-, Kapazitätsbelag
Bsp: $R = R' \cdot l$ mit $[R'] = \frac{\Omega}{m}$
Wellenimpedanz $Z_L = \sqrt{\frac{(R' \cdot j\omega L')}{(G' \cdot j\omega C')}}$
Wellenlänge λ mit $[\lambda] = m$
Ausbreitungsgeschwindigkeit $v = \lambda \cdot f$ mit $[v] = m/s$
Ausbreitungskonstante $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' \cdot j\omega L')(G' \cdot j\omega C')}$ mit $[\gamma] = \frac{1}{m}$

6.2. Leitungsmodell

7. Codierung

Komprimierung: Falls Bitstrom nicht gleichverteilt und mit Gedächtnis
Maximale Kompression: Bits gleichverteilt, ohne Gedächtnis
Entropie: kein Code kann für Z eine geringere mittlere Codewortlänge finden als $H(z) = \sum P(z) \log_2 \left(\frac{1}{P(z)} \right)$

7.1. Kompression

Kleiner Verlust bei unkodierten Bitstrom. Großer Gewinn bei Kodierung.
Bsp: Feste Blocklänge mit Statusbit am Anfang: Kodiert/Unkodiert

7.2. Digitale Quellencodierung (Kompression)

Arten von Kodierern:

Verteilung Bekannt: Huffman Code, Morse, Arithmetik

Universal: Lempel-Ziv (ZIP), PPM, BWT(bZip)

Transform: Fouriertransformation (JPG, GIF, PNG, MP3)

7.3. Kanalcodierung

Single-Parity-Check: 1 Bit pro 2 bit zusätzlich: XOR(x_1, x_2)
Daraus ergibt sich eine Effizienz von $\frac{2}{3}$

FEC: Forward Error Correction liefert Fehlererkennung und Korrektur.

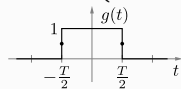
Beispiele: Paritätsbit, CRC, Reed-Solomon-Codes, LDPC, Polar Codes

8. Basisbandübertragung

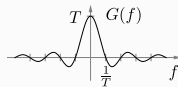
8.1. Impulsformen

8.1.1. Rechteckimpuls $\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$:

$$g_{NRZ}(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } |t| < \frac{T}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{für } |t| = \frac{T}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



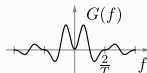
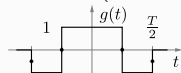
$$G_{NRZ}(f) = T \text{sinc}(fT)$$



8.1.2. Manchester Impuls:

$$g(t) = -g_{NRZ}(t) + 2g_{NRZ}(2t) = \begin{cases} 1, & \text{für } |t| < \frac{T}{4} \\ 0, & \text{für } |t| = \frac{T}{4} \\ -1, & \text{für } \frac{T}{4} < |t| < \frac{T}{2} \\ -\frac{1}{2}, & \text{für } |t| = \frac{T}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$G(f) = T \left(\frac{\sin(\pi f \frac{T}{2})}{\pi f \frac{T}{2}} - \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right)$$

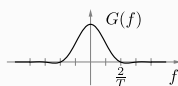
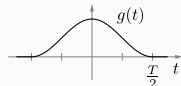


Mittelwert Null, kein Gleichanteil

8.1.3. cos²-Impuls:

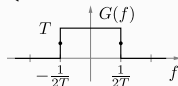
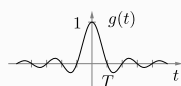
$$g(t) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi t}{T}\right), & \text{für } |t| < \frac{T}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$G(f) = \frac{T}{2} \frac{\cos(\pi f \frac{T}{2})}{1 - (fT)^2} \frac{\sin(\pi f \frac{T}{2})}{\pi f \frac{T}{2}}$$



8.1.4. sinc-Impuls: $\text{sinc}(x) = \text{si}(\pi x)$

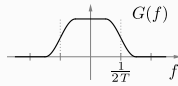
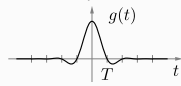
$$g(t) = \frac{\sin(\pi \frac{t}{T})}{\pi \frac{t}{T}} = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \quad G(f) = \begin{cases} T, & \text{für } |f| < \frac{1}{2T} \\ \frac{T}{2}, & \text{für } |f| = \frac{1}{2T} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



8.1.5. „Nyquist roll-off“-Impuls:

$$g(t) = \frac{\sin(\pi \frac{t}{T})}{\pi \frac{t}{T}} \cdot \frac{\cos(\alpha \pi \frac{t}{T})}{1 - 4\alpha^2 (\frac{t}{T})^2}$$

$$G(f) = \begin{cases} \frac{T}{2} [1 + \cos(\frac{\pi T}{\alpha} (|f| - \frac{1-\alpha}{2T}))], & \text{für } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \frac{T}{2}, & \text{für } \frac{1-\alpha}{2T} < |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



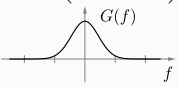
8.1.6. Root-Raised-Cosine:

Meist genutzter Filter (Wurzel-Nyquist)

8.1.7. Gauß-Impuls:

$$g(t) = \exp\left[-\pi\left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2\right]$$

$$G(f) = \Delta t \cdot \exp\left(-\pi(\Delta t f)^2\right) = \frac{1}{\Delta f} \exp\left(-\pi\left(\frac{f}{\Delta f}\right)^2\right)$$



8.2. Energie wichtiger Impulse mit Amplitude A

$$E_S\{\text{rect}(\frac{t}{\alpha T})\} = A^2 \alpha |T| \quad E_S\{\text{tri}(\frac{t}{\alpha T})\} = \frac{2}{3} \alpha |T| A^2 \\ E_S\{\text{sinc}(\frac{t}{\alpha T})\} = A^2 |\alpha| |T| \quad \text{Rampe 0 bis } \alpha T: \frac{\alpha}{3} |T| A^2$$

8.3. Bandbreite

Absolut: Alle positiven Frequenzen
B₉₉ Bandbreite: 99% der Signalenergie bzw. -leistung liegen in diesem Bandbreitenbereich (geht auch mit 90%)
B_{6dB} Bandbreite: Bis Hälfte des Spektrums $G(f)$
B_{3dB} Bandbreite: Bis Hälfte der Leistung
B_N Äquivalente Rauschbandbreite

Bandbreiteneffizienz (Effizienz des Modulationsverfahrens):

$$\eta = \frac{\text{Übertragungsrate}}{\text{NF Bandbreite}} \quad [\eta] = \frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}}$$

$$\text{Beispiel GSM: } \eta = 0.88 \frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}}, \quad \text{LTE: } \eta = \frac{3 \text{ Gbit/s}}{100 \text{ MHz}} = 30 \frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}}$$

8.4. Frequenz-Zeit-Unschärfe

Ein Signal kann nicht gleichzeitig hart Band- und Zeitbegrenzt sein!
Unschärfe: $T_D \cdot B_0 \geq \frac{1}{4\pi}$

Nach Trägheitsradius definiert. (Integral $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 g_s^2 dt$ konvergiert)

Schrankenfunktion für Spektrum:

Falls das Zeitsignal in der n -ten Ableitung das erste mal einen Sprung aufweist, gilt für das Betragsspektrum:

$$|X(f)| \propto \frac{1}{|f|^{n+1}} \quad \text{für große } |f|$$

Anmerkung: n kann auch negativ sein! Bsp: $\delta(t) \Rightarrow n = -1$

8.5. Nyquist Bedingungen

8.5.1. 1. Bedingung: Kein Symbolübersprechen

$$\text{Impulsantwort } g[nT] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Fordert maximale vertikale Öffnung des Auges

Impuls Nullstellen: $\pm 1T, \pm 2T, \pm 3T, \dots$

$$\text{Zeitbereich: } A\{g(t)\} = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT) \cdot \delta(t - nT) = T \cdot \delta(t)$$

$$\text{Frequenzbereich: } P\{G(f)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(f - \frac{k}{T}) = T$$

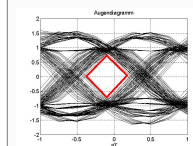
8.5.2. 2. Bedingung: Verschärfung 1. Bedingung

$$\text{Impulsantwort } g\left[k\frac{T}{2}\right] = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ g\left[\frac{T}{2}\right] & k = \pm 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Fordert maximale horizontale Öffnung des Auges

Zusätzliche Impuls Nullstellen: $\pm 1.5T, \pm 2.5T, \pm 3.5T, \dots$

8.6. Augendiagramm



Bestimmung des Augendiagramm (4 Durchläufe): Für die Bereiche $[-T_A, 0]$ und $[0, T_A]$ werden die relevanten Pulse so überlagert (positiv oder negativ), dass das Auge minimal wird. Daraus ergibt sich die Überlagerungstabelle.

	D_{-2}	D_{-1}	D_1	D_{-1}	D_1	D_2
Beispiel mit 1 Vor- und 2 Nachläufern:	+1	-1	-1	-1	-1	+1
	-1	+1	+1	+1	+1	-1

Vertikale Öffnung A_v : Maß für Empfindlichkeit gegenüber Rauschen
Horizontale Öffnung A_h : Maß für Empfindlichkeit gegenüber Schwankungen des Abtastzeitpunkts

8.7. Korrelation

Ein Maß für die Ähnlichkeit zweier Signale $x(t), y(t)$ bei Verschiebung.

$$\text{Korrelationskoeffizient } \rho_{xy} = \frac{E_{xy}}{\sqrt{E_x \cdot E_y}} = \frac{\varphi_{xy}(0)}{\sqrt{\varphi_x(0) \cdot \varphi_y(0)}}$$

Es gilt: Korreliert $\rho = 1$, Orthogonal $\rho = 0$, Antipodisch $\rho = -1$

Kreuzkorrelationsfkt. zwischen zueinander verschobenen Signalen:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \varphi_{yx}(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

Zusammenhang mit Faltung: $\varphi_{xy}(\tau) = x(-t) * y(t)|_{t=\tau}$

Autokorrelationsfkt. AKF ist Kreuzkorrelation mit sich selbst ($y = x$):

$$\varphi_x(\tau) = \varphi_{xx}(\tau) \quad \text{Anwendung: Erkennen von Perioden}$$

Energiebeziehung: $E_{x,y} = \rho_{x,y} \sqrt{E_x E_y}$ mit

$$\text{Energie } E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x df = \varphi_{xx}(0) \quad (\text{endl. Sig.})$$

$$\text{Leistung } P_x = E[X^2] = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)^2 dt \quad (\text{period. Sig.})$$

Leistungsdichtespektrum $\Phi_x(f)$ ist definiert als $\varphi_x \circ \mathcal{F} \bullet \Phi(f)$

Periodische Signale: $\overline{\varphi}_{xy}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t + \tau) dt$

Stochastische Signale: $\varphi_X Y(\tau) = E[X(t) \cdot Y(t + \tau)]$

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(f) df = \varphi_X(0) = \text{Var}[X] + E[X]^2 = \sigma_X^2 + \mu_X^2$$

9. Analoger Übertragungskanal

$$r(t) = h(t) * s(t) \quad R(f) = H(f) \cdot S(f)$$

$$\text{Verzerrungsfrei: } h(t) = h_0 \delta(t - t_0) \quad H(f) = h_0 e^{-i2\pi f t_0}$$

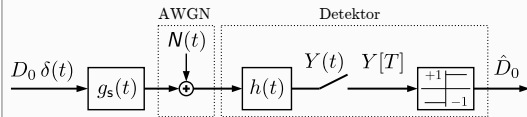
9.1. AWGN – Additive White Gaussian Noise

Weißes Rauschen N enthält alle Frequenzen. Thermisch: $N_0 = k_B T$

PDF	$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}$	
LDS:	$\Phi_N(f) := \frac{N_0}{2}$	für $f < 10 \text{ GHz}$
AKF:	$\varphi_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$	$\Rightarrow 0$ für $\tau \neq 0$
Leistung	$P_N = \int \Phi_N df = \sigma^2 = B \cdot N_0$	

Äquivalente Rauschbandbreite B_N : Bandbreite eines idealen Tiefpasses, der die selbe Rauschleistung P_N erzeugt, wie das reale Tiefpassfiltersystem.

10. Detektion im Rauschen



gewähltes Bit \hat{D}_n eines tatsächlichen Bits $D_n = \{1, 0\}$

Ziel: $P(\hat{D}_n \neq D_n)$ soll minimal sein.

Lösung: maximiere SNR zum Abtastzeitpunkt nT

Rauschleistung nach Filterung mit $h(t)$:

$$P_N = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_N |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

$$\rightarrow \text{mit Satz von Parseval gilt: } P_N = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt$$

$$\text{momentane Signalleistung: } P_s(t) = |y_s(t)|^2$$

$$\text{mittlere Signalleistung: } P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |y_s(t)|^2 dt$$

10.1. Matched Filter

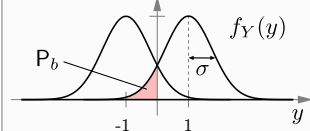
Signalangepasster Filter damit Signal im AWGN Kanal zum Abtastzeitpunkt die maximale SNR hat. Impulsantwort des Matched Filters:

$$h_{MF}(t) = K \cdot g_s^*(T - t) \quad (\text{entspricht gewendetem Sendepuls})$$

$$H_{MF}(f) = K \cdot G_s^*(f) \cdot e^{-j2\pi f T}$$

$$\text{Maximum SNR: } \frac{P_s}{P_N} = \frac{2E_s}{N_0}$$

10.2. Fehlerwahrscheinlichkeit P_b



$$P_b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{z_0}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = Q(z_0) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{1}{2} \text{SNR}}\right)$$

Substituiere z_0

$$\text{Für matched Filter: } P_b = Q(\sqrt{P_s/P_n}) = Q(\sqrt{Y_s/\sigma_N^2}) = Q(\sqrt{2E_s/N_0}) = Q(\sqrt{\text{SNR}})$$

10.3. Zeitdiskreter AWGN-Kanal

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_N^2}{A^2} = \frac{N_0}{2E_s} = \frac{1}{\text{SNR}}$$

10.4. Unabhängiges (unkorreliertes) Rauschen

Falls die erste Nyquistbedingung erfüllt und maximale SNR:

\Rightarrow Die Folge abgetasteter Rauschanteile ist unabhängig!

11. Lineare, digitale Modulation

11.1. Allgemeines

Dimensionen: Phase (sin/cos), Polarisation (hori/vert)

Die meisten Medien übertragen um eine Trägerfrequenz f_0 (Bandpass)

Bandpass-Sendesignal (moduliert mit $S(t)$):

$$\hat{S}(t) = A(t) \sqrt{2} \cos(2\pi(f_0 + F(t))t + \varphi_0(t))$$

Inphasenteil (Cosinusträger) $S_I(t) = A(t) \cos(\varphi'(t))$

Quadraturanteil (Sinusträger) $S_Q(t) = A(t) \sin(\varphi'(t))$

$$\text{Amplitude: } |A(t)| = \sqrt{S_I^2(t) + S_Q^2(t)}$$

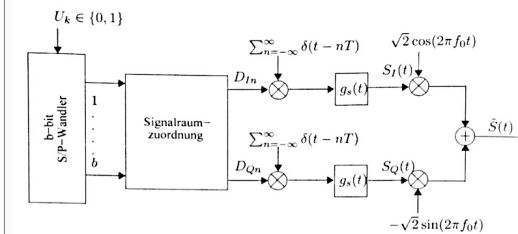
$$\text{Phase: } \varphi'(t) = \arctan \frac{S_Q(t)}{S_I(t)}$$

$$\text{Mittl. Energie pro Symbol: } \bar{E}_S = E[D_{I_n}^2 + D_{Q_n}^2] \cdot \underbrace{\int_0^T |g_s(t)|^2 dt}_{E_{g_s}}$$

$$\text{Energie je Bit: } E_{\text{bit}} = \frac{\bar{E}_S}{\# \text{ Bits}}$$

Anfälligkeit gegenüber Rauschen: d_{\min}

11.2. Modulation und Signalraumzuordnung



Moduliertes Sendesignal

$$\hat{S}(t) = S_I(t) \sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t) - S_Q(t) \sqrt{2} \sin(2\pi f_0 t)$$

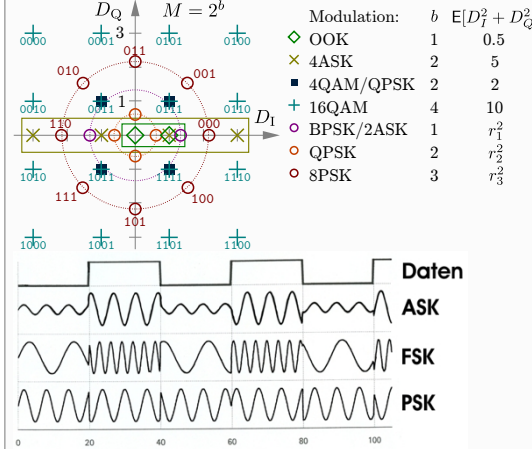
$$= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{I_n} g_s(t - nT) \right] \sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t) - \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{Q_n} g_s(t - nT) \right] \sqrt{2} \sin(2\pi f_0 t)$$

11.3. Modulationsarten

linear: AM $A(t)$, ASK, PSK

nicht linear: FM $F(t)$, PM $\varphi(t)$, FSK

Probleme: Nichtlineare Verstärker verzerren Raumpunkte



11.4. On-Off Keying (OOK)

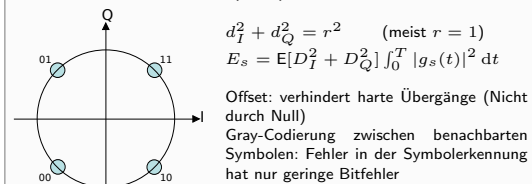
Intensitätsmodulation mit $b = 1$ (Laser an oder aus)

$$\text{Mittlere Energie pro Symbol: } E_s = \frac{A_{\text{on}}^2}{2}$$

11.5. Amplitude Shift Keying (M-ASK)

$$\text{Für } M \text{ Stufen mit Abstand } \Delta \text{ gilt: } E[D_I^2] = \frac{\Delta^2(M^2 - 1)}{12}$$

11.6. Phase Shift Keying (PSK)



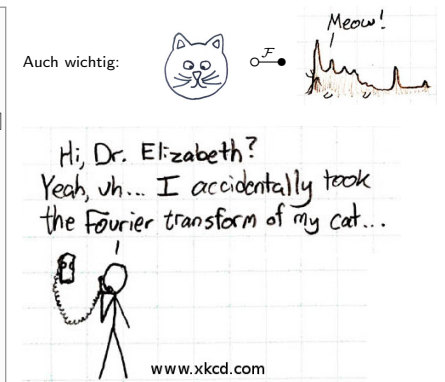
11.6.1. DPSK

Differentielle binäre Phasenmodulation

0: Phase bleibt gleich, 1: Phase ändert sich

11.7. Quadraturamplitudenmodulation (M-QAM)

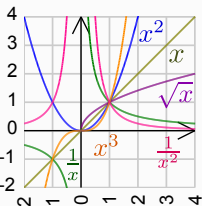
$$\text{Für } M \text{ Stufen und Abstand } \Delta: E[D_I^2 + D_Q^2] = \frac{\Delta^2(M-1)}{6}$$



Eigene Notizen:

12. Mathematik

12.1. Polynome $P(x) \in \mathbb{R}[x]_n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ vom Grad n



Gerade durch Punkt $P(x_0, y_0)$:
 $y = m(x - x_0) + y_0$

Quadratisch: $y = ax^2 + bx + c$
Mitternachtsformel für Nullstellen:
 $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

12.2. Exponentialfunktion und Logarithmus

$a^x = e^{x \ln a}$ $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ $\ln x \leq x - 1$

$\ln(x^a) = a \ln(x)$ $\ln(\frac{x}{a}) = \ln x - \ln a$ $\log(1) = 0$

12.3. Sinus, Cosinus $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\frac{1}{2}\pi$	π	$1\frac{1}{2}\pi$	2π
φ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°

\sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
\cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
\tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	0

Additionstheoreme

 $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$ $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ $\sin(x) = \tan(x) \cos(x)$

Stammfunktionen

 $\int x \cos(x) dx = \cos(x) + x \sin(x)$ $\int x \sin(x) dx = \sin(x) - x \cos(x)$ $\int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x) \cos(x))$ $\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x) \cos(x))$ $\int \cos(x) \sin(x) = -\frac{1}{2} \cos^2(x)$

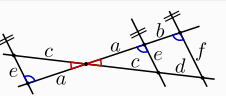
12.4. Integralgärten

Partielle Integration: $\int u w' = u w - \int u' w$
Substitution: $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt$

$F(x) - C$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1} x^{q+1}$	x^q	$q x^{q-1}$
$\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}$	\sqrt{ax}	$\frac{a}{2\sqrt{ax}}$
$x \ln(ax) - x$	$\ln(ax)$	$\frac{a}{x}$
$\frac{1}{a^2} e^{ax} (ax - 1)$	$x \cdot e^{ax}$	$e^{ax} (ax + 1)$
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x \ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\text{Si}(x)$	$\text{sinc}(x)$	$\frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$
$-\ln \cos(x) $	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

$\int e^{at} \sin(bt) dt = e^{at} \frac{a \sin(bt) + b \cos(bt)}{a^2 + b^2}$ $\int x e^{ax^2} dx = \frac{1}{2a} e^{ax^2}$ $\int t^2 e^{at} dt = \frac{(ax-1)^2 + 1}{a^3} e^{at}$

13. Geometrie $a^2 + b^2 = c^2$



Strahlensatz:
 $a : b = c : d$ $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{e}{f}$

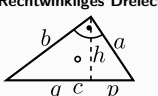
Innenwinkelsumme im n -Eck: $(n - 2) \cdot 180^\circ$

Allg. Dreieck $\triangle ABC$ mit Seiten a, b, c und Winkel α, β, γ :

Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$
Sinussatz: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$
Projektionssatz: $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$


Höhe $h_c = a \sin \beta = b \sin \alpha$ Fläche $A = \frac{1}{2} h_c c = \frac{1}{2} h_a a$
Schwerpunkt: $x_S = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)$ $y_S = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$


Rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit $\gamma = 90^\circ$ bei C



Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$
Höhensatz: $h^2 = pq$
Kathetensatz: $a^2 = pc$
 $a = c \sin \alpha = c \cos \beta = b \tan \alpha$

Pyramide mit beliebiger Grundfläche G **Zylinder/Prisma**

 $V = \frac{1}{3} G \cdot h$ $SP: \text{liegt auf } h \text{ mit } y_S = h/4$

 $V = G \cdot h$ $M = U \cdot h$

Kreis: $A = \pi r^2$ $U = 2\pi r$
Kugel: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ $O = 4\pi r^2$
Kreissehne: $s = 2r \sin(\alpha/2)$

14. Stochastik

14.1. Der Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathbb{F}, P)
Ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathbb{F}, P) besteht aus

Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ **Ergebnis** $\omega_j \in \Omega$
Ereignisalgebra $\mathbb{F} = \{A_1, A_2, \dots\}$ **Ereignis** $A_i \subseteq \Omega$
Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \mathbb{F} \rightarrow [0, 1]$ $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Es gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit für A falls B bereits eingetreten ist:
 $P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Multiplikationssatz: $P(A \cap B) = P(A|B) P(B) = P(B|A) P(A)$

Erwartungswert: $E[X] = \mu = \sum x_i P(x_i) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x) dx$
Varianz: $\text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$
Standard Abweichung $\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}$

Covarianz: $\text{Cov}[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = \text{Cov}[Y, X]$

Binominalverteilung (diskret, n Versuche, k Treffer):
 $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ $\mu = np$ $\sigma^2 = np(1 - p)$

Korrelation ist ein Maß für den linearen Zusammenhang von Variablen

Kreuzkorrelation von X und Y :
 $r_{xy} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

14.2. Normalverteilung

PDF: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $x \in \mathbb{R}$

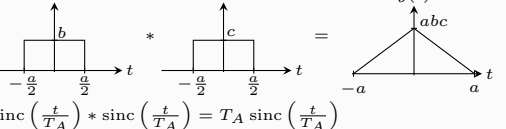
$E(X) = \mu$ $\text{Var}(X) = \sigma^2$ $\varphi_X(\omega) = e^{j\omega\mu - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$

Erwartungswert Varianz Charakt. Funktion

15. Signale

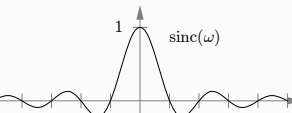
15.1. Faltung von Signalen

$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$



$\text{sinc}\left(\frac{t}{T_A}\right) * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_A}\right) = T_A \text{sinc}\left(\frac{t}{T_A}\right)$

15.2. sinc-Signal

 $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \text{si}(\pi x)$
FT: $\text{sinc}(t) \circ^{\mathcal{F}} \bullet \text{rect}(f)$

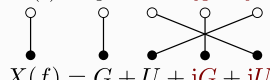
16. Fouriertransformation

$x(t) \circ^{\mathcal{F}} \bullet X(f) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$
Zeitbereich Frequenzspektrum

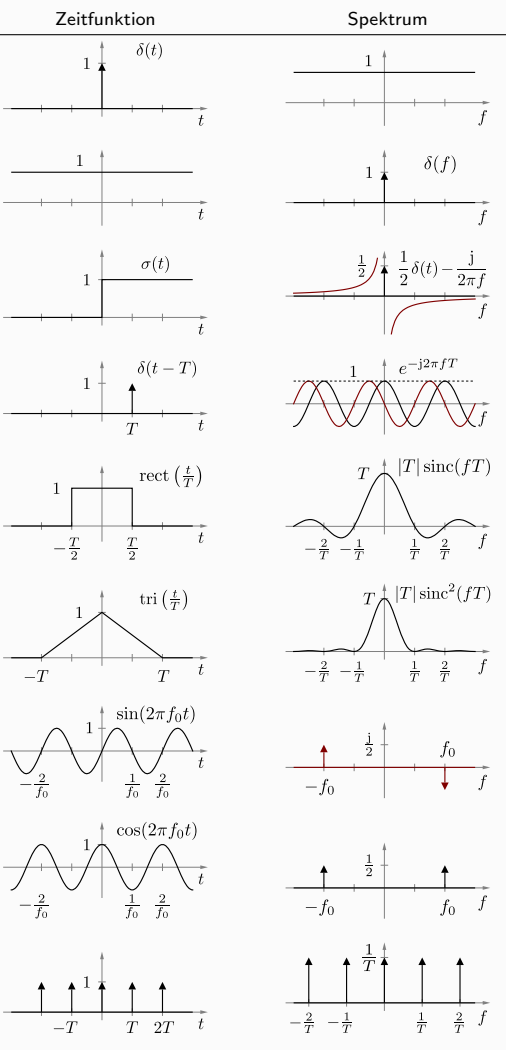
16.1. Eigenschaften der Fouriertrafo

Linearität: $\alpha x(t) + \beta g(t) \circ^{\mathcal{F}} \bullet \alpha X(f) + \beta G(f)$
Zeitverschiebung: $x(t - \tau) \circ^{\mathcal{F}} \bullet e^{-j2\pi f\tau} X(f)$
Frequenzversch.: $e^{j2\pi f_0 t} \circ^{\mathcal{F}} \bullet X(f - f_0)$
Vertauschung: $U^*(t) \circ^{\mathcal{F}} \bullet u^*(f)$
Stauchung: $x(ct) \circ^{\mathcal{F}} \bullet \frac{1}{|c|} X\left(\frac{f}{c}\right)$
Ableitung: $x^{(n)}(t) \circ^{\mathcal{F}} \bullet (j2\pi f)^n X(f)$
Integral: $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \circ^{\mathcal{F}} \bullet \left(\frac{1}{j2\pi f} \delta(f) - \frac{1}{j2\pi f}\right) X(f)$
Faltung: $(x * g)(t) \circ^{\mathcal{F}} \bullet X(f) \cdot G(f)$
Parseval: $\int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) \cdot u_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} U_1(f) \cdot U_2^*(f) df$
Energie: $E = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |U(f)|^2 df$

Zusammenhang zwischen geraden und ungeraden Signalanteilen:

$x(t) = g + u + jg + ju$
 $X(f) = G + U + jG + jU$
 $x(t) \circ^{\mathcal{F}} \bullet X(f) \circ^{\mathcal{F}} \bullet x(-t) \circ^{\mathcal{F}} \bullet X(-f)$
Bei periodischen Signalen: Fourierreihen!

16.2. Wichtige Fouriertransformationen



16.3. Weitere Paare

$f(t)$	$F(\omega)$	$f(t)$	$F(\omega)$
$ t^n $	$\frac{2n!}{(i\omega)^{n+1}}$	$\text{sinc}(\frac{t}{T})$	$T \text{rect}(fT)$
t^n	$2\pi i^n \delta^{(n)}(\omega)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(a+i\omega)^n}$
		$\exp(-\alpha t)$	$\frac{1}{i2\pi f + \alpha}$