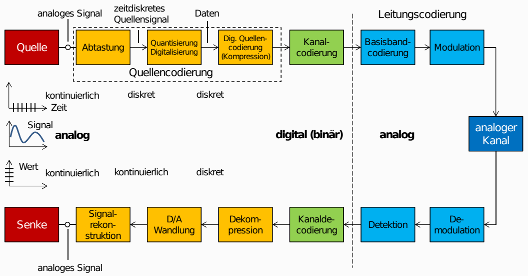
# Industrielle Kommunikation

## Allgemeines

Quelle → Sender → Kanal → Empfänger → Senke

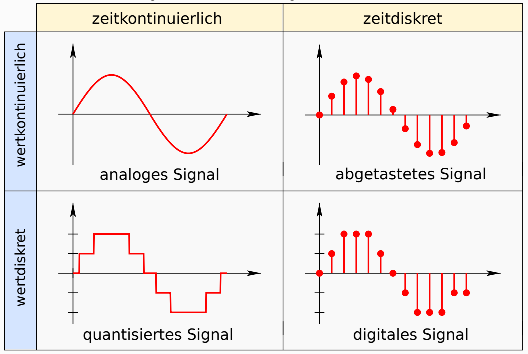



Signal → A/D Wandlung: Abtastung → Digitaler Bitstrom → D/A Wandlung: $\pm 1$ Gewichtete NF Impulse $\pm g_s(t)$ → Modulation: Verschiebung ins Trägerband → AWGN Kanal → Detektor → Bitstrom

## 1. Signale

### 1.1. Arten von Signalen

**deterministisch:** durch Funktionen beschreibbar, enthalten kein Nachricht.
**stochastisch:** zufälliger Verlauf, überträgt Information




Vorteile digitales Signal: Kompression, Verschlüsselung, Fehlerkorrektur

## 2. Abtastung von Signalen

| Bezeichnung | Symbol | Einheit |
|---|---|---|
| Signalstufen | $V$ | $[V] = 1$ |
| Bandbreite | $B$ | $[B] = 1Hz$ |
| Datenrate / Bitrate | $R_b$ | $[R_b] = 1bps$ |
| Sendepegel (Signal) | $P_S$ | $[P_S] = 1W$ oder $[P_{S,dBm}] = 1dBm$ |
| Rauschpegel (Noise) | $P_N$ | $[P_N] = 1W$ oder $[P_{N,dBm}] = 1dBm$ |
| Interefrenzpegel | $P_I$ | $[P_I] = 1W$ oder $[P_{I,dBm}] = 1dBm$ |
| Signal-Rausch-Verhältnis | $SNR = \frac{P_S}{P_N}$ | $[SNR] = 1$ oder $[SNR_{dB}] = 1dB$ |
| Signal-Intefrenz-Rausch-Verhältnis | $SINR = \frac{P_S}{P_I + P_N}$ | $[SINR] = 1$ oder $[SINR_{dB}] = 1dB$ |

(**S**ignal-**T**o-**N**oise-**R**atio), Signal zu Rauschabstand $SNR_{(dB)}$
$SNR_{dB} = 10\log_{10}(SNR)dB = P_{S,dBm} - P_{N,dBm}$

(**S**ignal-**T**o-**I**nterference-**A**nd-**N**oise-**R**atio) $SINR_{(dB)}$
$SINR = \frac{P_S}{P_I + P_N}$
$SINR_{dB} = 10\log_{10}(SINR)dB$
$SINR_{dB} = P_{S,dBm} - P_{I,dBm} - P_{N,dBm}$

### 2.1. Nyquist-Abtasttheorem

$R_{b,max} = 2Bld(V)\frac{bit}{s}$

### 2.2. Shannon-Abtasttheorem

$R_{b,max} = Bld(1 + SNR)\frac{bit}{s}$ mit $[SNR] = 1$

## 3. Dämpfung/Verstärkung, dB-Rechnung

### 3.1. Leistungspegel

Leistung: $P = \frac{U^2}{R} = I^2R$
Leistungspegel:
$L_{P,dB} = 10log\frac{P_2}{P_1}dB = 20log\frac{U_2}{U_1}dB = 20log\frac{I_2}{I_1}dB$
$L_{P,dBm} = 10log\frac{P}{1mW}dBm$
$1dBm = 1dBmW = 30dB\mu W = 60dBnW$
Verstärkung[dB] $= L_{P,dB}$; Dämpfung[dB] $= -L_{P,dB}$

Logarithmische Rechenregeln:
$x = a \cdot log_b(c \cdot d)$
$x = log_b c \cdot d^a = log_b c^a + log_b d^a$
$b^x = (c \cdot d)^a = c^a \cdot d^a$
$\sqrt[a]{(b^x)} = c \cdot d$
Durch $x = (\frac{1}{x})^{-1}$ ergeben sich die Rechenregeln für Subtraktion und Division.

### 3.2. Umrechnung dB

| Verhältnis $\frac{P_2}{P_1}$ | Verstärkung[dB] | Dämpfung[dB] |
|---|---|---|
| $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$ | -30 | +30 |
| $\frac{1}{20}$ | -13 | +13 |
| $\frac{1}{10} = 10^{-1}$ | -10 | +10 |
| $\frac{1}{4}$ | -6 | +6 |
| $\frac{1}{2}$ | -3 | +3 |
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | +3 | -3 |
| 4 | +6 | -6 |
| 8 | +9 | -9 |
| 10 | +10 | -10 |
| $1000 = 10^3$ | +30 | -30 |

### 3.3. Rechenregeln dB bzw. dBi und dBm

| | | |
|---|---|---|
| dB ∓ dB(i) | = | dB |
| dBm ∓ dB(i) | = | dBm |
| dBm - dBm | = | dB |
| dBm + dBm | = | undefiniert |

## 4. Baud-, Bit-/Übertragungsrate, Durchsatz

### 4.1. Definitionen

| Bezeichnung | Symbol | Einheit |
|---|---|---|
| Datenmenge in bit | $D_b = 8D_B$ | $[D_b] = 1bit$ |
| Datenmenge in Byte | $D_B$ | $[D_B] = 1Byte = 8bit$ |
| Signalstufen | V | [V] = 1 |
| Baudrate / Schrittgeschwindigkeit | $R_{baud}$ | $[R_{baud}] = 1Hz$ |
| Bitrate/Brutto-Übertragungsrate | $R_b = R_{baud} \cdot ld(V)bit$ | $[R_b] = 1bps = 1\frac{bit}{s}$ |
| Durchsatz/Netto-Übertragungsrate, effektiv | $R_{eff} = \frac{D_b}{t_{ges}}$ | $[R_{eff}] = 1bps$ |

Signalstufen V; Anzahl der möglichen annehmbaren Werte eines diskr. Signals pro Schritt
Zeit $t_{ges}$ ab Sendestart einer Datenmenge $D_b$ bis zum vollständigen Empfang, abhängig von verwendeten Protokollen

## 5. Leitungstheorie

Leitungstheorie **relevant für** $l >= 0,1\lambda$

### 5.1. Definitionen

Leitungslänge $l$ mit $[l] =$ m
Belagsgrößen: $R', L', G', C'$ als Widerstands-, Induktivitäts-, Ableitungs-, Kapazitätsbelag
Bsp: $R = R' \cdot l$ mit $[R'] = \frac{\Omega}{m}$
Wellenimpedanz $\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{(R' \cdot j\omega L')}{(G' \cdot j\omega C')}}$
Wellenlänge $\lambda$ mit $[\lambda] =$ m
Ausbreitungsgeschwindigkeit $v = \lambda \cdot f$ mit $[v] =$ m/s
Ausbreitungskonstante $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' \cdot j\omega L')(G' \cdot j\omega C')}$ mit $[\gamma] = \frac{1}{m}$

### 5.2. Leitungsmodell

### 5.3. Formeln

## 6. Wellen und Antennen

Indizes: **E**(empfänger), **i**(sotroper Kugelstrahler), **r**(adius), **S**(ender)

### 6.1. Poynting-Vektor

Poynting-Vektor $\vec{S}$ ist Vektor der Leistungsflussdichte mit $[S] = 1\frac{W}{m^2}$
$\vec{S}(x,y,z,t) = \vec{E}(x,y,z,t) \times \vec{H}(x,y,z,t)$
Für harmonische Zeitvorgänge und EM-Wellen ($\vec{E} \sphericalangle \vec{H} = \frac{\pi}{2}$) gilt:
$\underline{S} = S = \frac{1}{2}\underline{E} \cdot \underline{H}^* = \frac{1}{2}\underline{H}^2 Z_F = \frac{1}{2}\frac{Z_F}{\underline{E}^2}$ mit $E, H \in \mathbb{C}$
Wellenwiderstand im Vakuum $Z_F = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 376,73\Omega$
$S_i = |\vec{S}| = \frac{P_S}{4\pi r^2}$
Richtfaktor $D_i = \frac{S_{r,max}}{S_i} = 4\pi r^2 \frac{S_{r,max}}{P_S}$
i.d.R. angegeben als $D_{i,log} = 10logD_i dBi$
Antennengewinn $G = \eta D_i$ i.d.R. angegeben in dB
Antennenwirkfläche $A_W = \frac{\lambda^2}{4\pi}G$ mit der Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{f}$
Bsp. Empfangs- und Sendeantenne im Abstand r zueinander:
$P_E = P_S \cdot G_S \cdot G_E(\frac{\lambda}{4\pi r})^2$

## 7. OSI-Modell

# 8. Zugriffsverfahren, Sicherungsschicht

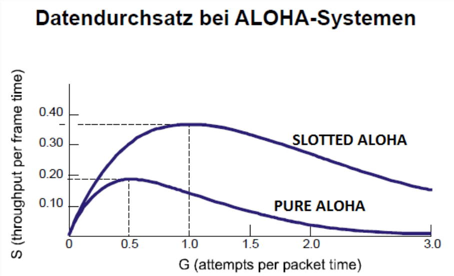
## 8.1. Definitionen

| Bezeichnung | Symbol | Einheit |
|---|---|---|
| Paketgröße in bit | $D_P$ | $[D_P] = 1bit$ |
| Rahmenzeit für ein Paket | $\tau = \frac{D_P}{R_b}$ | $[\tau] = 1s$ |
| Signallaufzeit (transmission time) | $t_t$ | $[t_t] = 1s$ |
| Round-Trip-Time/-Delay | $RTT = RTD = 2 \cdot t_t$ | $[t_t] = 1s$ |
| durchschnittliche Paketsende-Rate | $\lambda$ | $[\lambda] = 1Hz$ |
| Input, zu sendende Pakete | $I$ | $[I] = 1$ |
| Kanalauslastung / Gesamt Übertragungsversuche | $G = \lambda \cdot \tau$ | $[G] = 1$ |
| Throughput, kein Konflikt | $S$, ideal $S = G$ | $[S] = 1$ |

Bei keinen verlorenen Pakete gilt $I = S$
Anzahl Übertragungsversuche bzw. Kanalauslastung $G = \lambda \cdot \tau$
Anzahl erfolgreich übertragener Pakete pro Rahmenzeit $S$, ideal $S = G$

## 8.2. Zugriffsverfahren

Ziel: Medienzugangskontrolle durch Paket-Kollisionsvermeidung und -endteckung




**Pure ALOHA** Zufällige Sendung von Paketen durchschnittlich alle $\frac{1}{\lambda}$ mit Paketen der zeitlichen Rahmenlänge $\tau$

Potentielle Kollisionszeit $= 2\tau$
$S = G \cdot e^{-2G}$ mit $S_{max}(G = G_{max} = 0,5) = 0,184$
**Slotted ALOHA** Zufälliges Senden von Paketen durschnittlich alle $\frac{1}{\lambda}$ zu Beginn eines Zeitslots mit Paketen der zeitlichen Rahmenlänge $\tau$

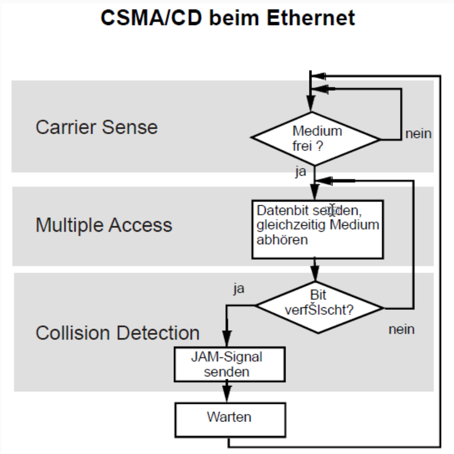
Potentielle Kollisionszeit $= \tau$
$S = G \cdot E^{-G}$ mit $S_{max}(G = G_{max} = 1) = 0,368$

**1-persistent CSMA** (Carrier Sense Multiple Access)
regelmäßige Überprüfung auf freien Kanal, wenn frei, dann Paketsendung mit Wahrscheinlichkeit 1

**Non-persistent CSMA** (Carrier Sense Multiple Access )
unregelmäßige Überprüfung auf freien Kanal, wenn frei, dann Paketsendung mit Wahrscheinlichkeit 1

**p-persistent CSMA** (Carrier Sense Multiple Access )
regelmäßige Überprüfung auf freien Kanal, wenn frei, dann Paketsendung mit Wahrscheinlichkeit p

**CSMA/CD** (Carrier Sense Multiple Access / Collision Detection)
Bestimmung Ethernet: Min. Nachrichtenlänge > Max. Konfliktdauer oder ev. künstl. Nachrichtenverlängerung mit Padding Bits




## 8.3. Sicherungsschicht

**Stop and Wait**
Senden eines Pakets, Warten auf Bestätigung (ACK), Senden des nächsten Pakets, usw.
$R_{eff} = \frac{D_P}{\frac{D_P}{R_b} + 2t_t}$ wenn $t_t$ für Hin- und Rückweg gleich.

**Pipelining**
Fenstergröße $D_W$ in bits bestehend aus $n$ Paketen

Bestätigung von Paket 1 muss ankommen, bevor die Fenstergröße in bits versendet wurde, damit keine Wartezeiten anfallen.

Fall 1 (ideal): Für $\frac{D_W}{R_b} \leq \frac{D_P}{R_b} + 2t_t$
gilt: $R_{eff} = R_b$
Fall 2 (Wartezeiten): Für $\frac{D_W}{R_b} < \frac{D_P}{R_b} + 2t_t$
gilt $R_{eff} = \frac{D_W}{\frac{D_b}{R_b} + 2 \cdot t_t}$

**Go-back ohne Puffer**
Sender überträgt, wenn nach Senden eines Pakets und Verstreichen eines Timeout-Intervall kein ACK für das Paket einging, sämtliche Daten ab dem unbestätigten Rahmen neu.

**Go-back-n mit Puffer**
Genauso wie ohne Puffer, nur das nach Erhalt des ACK für das erneut gesandte Paket beim ersten noch nicht gesendeten Paket weiter gesendet wird.

**Selective repeat** Bei Nichtüertragung eines Pakets wird nach Timeout-Intervall nur das nicht korrekt übertragene Paket neu gesandt, alle weiteren werden gepuffert.

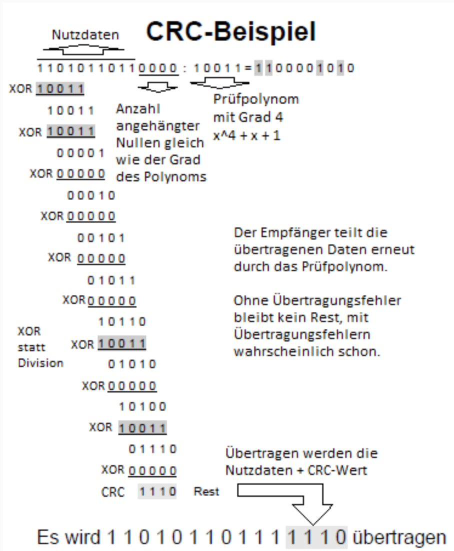
**HDLC (High Level Data Link Control)**

HDLC-Rahmenformat

| Flag | Adresse | Steuerfeld | Nutzdaten | CRC | Flag |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 Bit | 8 | 8 oder 16 | variabel | 16 oder 32 | 8 |

Flag: 01111110; Bit stuffing (Bitstopfen) um Flag eindeutig zu halten

**CRC C**yclic **R**edundancy **C**heck




# 9. Codierung

Komprimierung: Falls Bitstrom nicht gleichverteilt und mit Gedächtnis
Maximale Kompression: Bits gleichverteilt, ohne Gedächtnis
Entropie: kein Code kann für $Z$ eine geringere mittlere Codewortlänge finden als $H(z) = \sum \mathrm{P}(z) \,\mathrm{ld}\left(\frac{1}{\mathrm{P}(z)}\right)$

## 9.1. Kompression

Kleiner Verlust bei unkodierten Bitstrom. Großer Gewinn bei Kodierung.
Bsp: Feste Blocklänge mit Statusbit am Anfang: Kodiert/Unkodiert

## 9.2. Digitale Quellencodierung (Kompression)

Arten von Kodierern:
**Verteilung Bekannt:** Huffman Code, Morse, Arithmetic
**Universal:** Lempel-Ziv (ZIP), PPM, BWT(bZip)
**Transform:** Fouriertransformation (JPG,GIF,PNG,MP3)

## 9.3. Kanalcodierung

Single-Parity-Check: 1 Bit pro 2 bit zusätzlich: XOR$(x_1, x_2)$
Daraus ergibt sich eine Effizienz von $\frac{2}{3}$

FEC: Forward Error Correction liefert Fehlererkennung und Korrektur.
Beispiele: Paritätsbit, CRC, Reed-Solomon-Codes, LDPC, Polar Codes

## 9.4. Informationsgehalt und Entropie

Info vom Symbol $s_i$: $I_i = -\log_2 \mathrm{P}(X_Q = s_i) = -\log_2 p_i$
Entropie von $X_Q$: $H(X_Q) = \mathrm{E}[I] = -\sum\limits_{i=0}^{M-1} p_i \log_2 p_i \left[\frac{\text{bit}}{\text{Symbol}}\right]$
Mittlere Codewortlänge $\bar{l} = \mathrm{E}[l] = \sum\limits_{i=0}^{n-1} p_i l_i$
Die minimale mittlere Codewortlänge $\bar{l} \geq H(x_Q)$

## 9.5. Hamming-Code(N,n)

N Nachrichtenbits mit $N = 2^k - 1 = n + k$
n Datenbits
k Paritybits

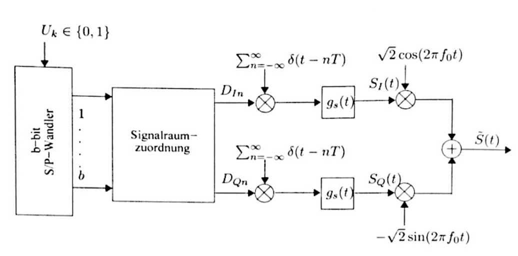
## 9.6. Huffmann-Code

# 10. Lineare, digitale Modulation

## 10.1. Allgemeines

Informationsfluss:
Info-Quelle -¿ Codierung -¿ Modulation -¿ Kanal -¿ Demodulation -¿ Decodierung -¿ Info-Senke

## 10.2. Modulation und Signalraumzuordnung




Moduliertes Sendesignal

$\tilde{S}(t) = S_I(t)\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t) - S_Q(t)\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t)$

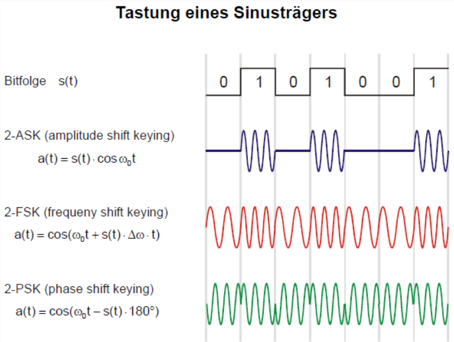
$= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{I_n} g_s(t-nT)\right] \sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t)$

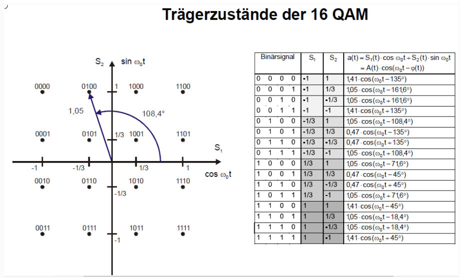
$- \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{Q_n} g_s(t-nT)\right] \sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t)$

## 10.3. Modulationsarten

Amplitudenmodulation ASK
Frequenzmodulation FSK (Winkelmodulation)
Phasenmodulation PSK (Winkelmodulation)
Quadraturmodulation QAM

Modulation mit Sinusträger: $a(t) = A(t) \cdot cos(\omega_0 t - \phi(t))$ Amplitudenmodulation wirkt sich nur auf $A(t)$ aus
Winkelmodulation wirkt sich nur auf $\phi(t)$




| Binärsignal | $S_1$ | $S_2$ | $a(t) = S_1(t) \cdot \cos\omega_0 t + S_2(t) \cdot \sin\omega_0 t = A(t) \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi(t))$ |
|---|---|---|---|
| 0 0 0 0 | -1 | 1 | $1{,}41 \cdot \cos(\omega_0 t - 135°)$ |
| 0 0 0 1 | -1 | 1/3 | $1{,}05 \cdot \cos(\omega_0 t - 161{,}6°)$ |
| 0 0 1 0 | -1 | -1/3 | $1{,}05 \cdot \cos(\omega_0 t + 161{,}6°)$ |
| 0 0 1 1 | -1 | -1 | $1{,}41 \cdot \cos(\omega_0 t + 135°)$ |
| 0 1 0 0 | -1/3 | 1 | $1{,}05 \cdot \cos(\omega_0 t - 108{,}4°)$ |
| 0 1 0 1 | -1/3 | 1/3 | $0{,}47 \cdot \cos(\omega_0 t - 135°)$ |
| 0 1 1 0 | -1/3 | -1/3 | $0{,}47 \cdot \cos(\omega_0 t + 135°)$ |
| 0 1 1 1 | -1/3 | -1 | $1{,}05 \cdot \cos(\omega_0 t + 108{,}4°)$ |
| 1 0 0 0 | 1/3 | 1 | $1{,}05 \cdot \cos(\omega_0 t - 71{,}6°)$ |
| 1 0 0 1 | 1/3 | 1/3 | $0{,}47 \cdot \cos(\omega_0 t - 45°)$ |
| 1 0 1 0 | 1/3 | -1/3 | $0{,}47 \cdot \cos(\omega_0 t + 45°)$ |
| 1 0 1 1 | 1/3 | -1 | $1{,}05 \cdot \cos(\omega_0 t + 71{,}6°)$ |
| 1 1 0 0 | 1 | 1 | $1{,}41 \cdot \cos(\omega_0 t - 45°)$ |
| 1 1 0 1 | 1 | 1/3 | $1{,}05 \cdot \cos(\omega_0 t - 18{,}4°)$ |
| 1 1 1 0 | 1 | -1/3 | $1{,}05 \cdot \cos(\omega_0 t + 18{,}4°)$ |
| 1 1 1 1 | 1 | -1 | $1{,}41 \cdot \cos(\omega_0 t + 45°)$ |

**Spread Spectrum** durch Direct Sequence (DS) oder Frequency Hopping (HS)
Schützt vor Schmalbandstörern (Militär) und freuquenz-selektives Fading (Mobilfunk)

## 10.4. On-Off Keying (OOK)

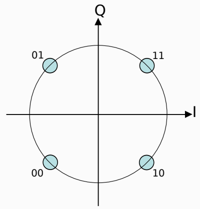
Intensitätsmodulation mit $b = 1$ (Laser an oder aus)

Mittlere Energie pro Symbol: $E_s = \frac{A_{\text{on}}^2}{2}$

## 10.5. Amplitude Shift Keying ($M$-ASK)

Für $M$ Stufen mit Abstand $\Delta$ gilt: $\mathrm{E}[D_I^2] = \frac{\Delta^2(M^2-1)}{12}$

## 10.6. Phase Shift Keying (PSK)




$d_I^2 + d_Q^2 = r^2$ (meist $r = 1$)
$E_s = \mathrm{E}[D_I^2 + D_Q^2] \int_0^T |g_s(t)|^2 \,\mathrm{d}t$

Offset: verhindert harte Übergänge (Nicht durch Null)
Gray-Codierung zwischen benachbarten Symbolen: Fehler in der Symbolerkennung hat nur geringe Bitfehler

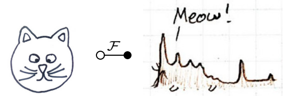
### 10.6.1. DPSK

Differentielle binäre Phasenmodulation
0: Phase bleibt gleich, 1: Phase ändert sich

## 10.7. Quadraturamplitudenmodulation ($M$-QAM)

Für $M$ Stufen und Abstand $\Delta$: $\mathrm{E}[D_I^2 + D_Q^2] = \frac{\Delta^2(M-1)}{6}$

Auch wichtig:



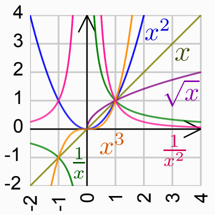


# Eigene Notizen:

# Anhang

## 11. Mathematik

### 11.1. Polynome $P(x) \in \mathbb{R}[x]_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ vom Grad $n$




**Gerade** durch Punkt $P(x_0, y_0)$: $y = m(x - x_0) + y_0$

**Quadratisch:** $y = ax^2 + bx + c$

Mitternachtsformel für Nullstellen:

$$\boxed{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

### 11.2. Exponentialfunktion und Logarithmus

$a^x = e^{x \ln a}$ $\quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ $\quad \ln x \le x - 1$

$\ln(x^a) = a \ln(x)$ $\quad \ln(\frac{x}{a}) = \ln x - \ln a$ $\quad \log(1) = 0$

### 11.3. Sinus, Cosinus $\quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

| $x$ / $\varphi$ | $0$ / $0°$ | $\pi/6$ / $30°$ | $\pi/4$ / $45°$ | $\pi/3$ / $60°$ | $\frac{1}{2}\pi$ / $90°$ | $\pi$ / $180°$ | $1\frac{1}{2}\pi$ / $270°$ | $2\pi$ / $360°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| cos | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| tan | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\pm\infty$ | $0$ | $\mp\infty$ | $0$ |

Additionstheoreme

$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$

$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\sin(x) = \tan(x)\cos(x)$

Stammfunktionen

$\int x\cos(x)\,dx = \cos(x) + x\sin(x)$

$\int x\sin(x)\,dx = \sin(x) - x\cos(x)$

$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$

$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$

$\int \cos(x)\sin(x) = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$ $\quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ $\quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

### 11.4. Integralgarten

Partielle Integration: $\int uw' = uw - \int u'w$

Substitution: $\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$

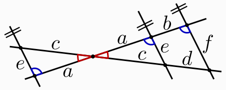
| $F(x) - C$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{q+1}x^{q+1}$ | $x^q$ | $qx^{q-1}$ |
| $\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}$ | $\sqrt{ax}$ | $\frac{a}{2\sqrt{ax}}$ |
| $x\ln(ax) - x$ | $\ln(ax)$ | $\frac{a}{x}$ |
| $\frac{1}{a^2}e^{ax}(ax-1)$ | $x \cdot e^{ax}$ | $e^{ax}(ax+1)$ |
| $\frac{a^x}{\ln(a)}$ | $a^x$ | $a^x\ln(a)$ |
| $-\cos(x)$ | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
| $\cosh(x)$ | $\sinh(x)$ | $\cosh(x)$ |
| $\mathrm{Si}(x)$ | $\mathrm{sinc}(x)$ | $\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$ |
| $-\ln\lvert\cos(x)\rvert$ | $\tan(x)$ | $\frac{1}{\cos^2(x)}$ |

$\int e^{at}\sin(bt)\,dt = e^{at}\frac{a\sin(bt)+b\cos(bt)}{a^2+b^2}$

$\int xe^{ax^2}\,dx = \frac{1}{2a}e^{ax^2}$ $\quad \int t^2e^{at}\,dt = \frac{(ax-1)^2+1}{a^3}e^{at}$

| $2^1$ | $2^2$ | $2^3$ | $2^4$ | $2^5$ | $2^6$ | $2^7$ | $2^8$ | $2^{16}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 65536 |

## 12. Geometrie $\quad a^2 + b^2 = c^2$



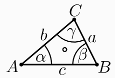

**Strahlensatz:**

$a : b = c : d \quad \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{e}{f}$

Innenwinkelsumme im $n$-Eck: $(n-2) \cdot 180°$

**Allg. Dreieck** $\triangle ABC$ mit Seiten $a, b, c$ und Winkel $\alpha, \beta, \gamma$:




Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$

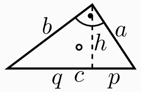
Sinussatz: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Projektionssatz: $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$

Höhe $h_c = a\sin\beta = b\sin\alpha$ $\quad$ Fläche $A = \frac{1}{2}h_c c = \frac{1}{2}h_a a$

Schwerpunkt: $x_S = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)$ $\quad y_S = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$

**Rechtwinkliges Dreieck** $\triangle ABC$ mit $\gamma = 90°$ bei $C$



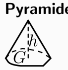

Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz: $h^2 = pq$

Kathetensatz: $a^2 = pc$

$a = c\sin\alpha = c\cos\beta = b\tan\alpha$

**Pyramide** mit beliebiger Grundfläche $G$



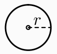

$V = \frac{1}{3}G \cdot h$

SP: liegt auf $h$ mit $y_S = h/4$

**Zylinder/Prisma**

$V = G \cdot h$

$M = U \cdot h$




**Kreis:** $A = \pi r^2$ $\quad U = 2\pi r$

**Kugel:** $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad O = 4\pi r^2$

Kreissehne: $s = 2r\sin(\alpha/2)$

## 13. Stochastik

### 13.1. Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbf{P})$

Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, \mathrm{P})$ besteht aus

| | | |
|---|---|---|
| **Ergebnismenge** | $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ | Ergebnis $\omega_j \in \Omega$ |
| **Ereignisalgebra** | $\mathbb{F} = \{A_1, A_2, \dots\}$ | Ereignis $A_i \subseteq \Omega$ |
| **Wahrscheinlichkeitsmaß** | $\mathrm{P} : \mathbb{F} \to [0,1]$ | $\mathrm{P}(A) = \frac{\lvert A\rvert}{\lvert\Omega\rvert}$ |

Es gilt: $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

**Bedingte Wahrscheinlichkeit** für $A$ falls $B$ bereits eingetreten ist:

$\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

Multiplikationssatz: $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B)\,\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A)$

**Erwartungswert:** $\mathrm{E}[X] = \mu = \sum x_i P(x_i) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\,dx$

**Varianz:** $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2$

Standard Abweichung $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$

**Covarianz:** $\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])] = \mathrm{Cov}[Y, X]$

**Binominialverteilung** (diskret, $n$ Versuche, $k$ Treffer):

$P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $\quad \mu = np$ $\quad \sigma^2 = np(1-p)$

**Korrelation** ist ein Maß für den linearen Zusammenhang von Variablen

Kreuzkorrelation von $X$ und $Y$: $\boxed{r_{xy} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}}$

### 13.2. Normalverteilung

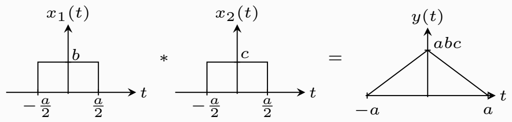
PDF: $\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}}$

$\mathrm{E}(X) = \mu$ (Erwartungswert) $\quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ (Varianz) $\quad \varphi_X(\omega) = e^{j\omega\mu - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$ (Charakt. Funktion)

## 14. Signale

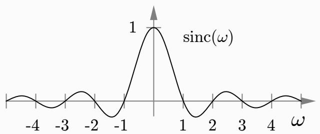
### 14.1. Faltung von Signalen

$$\boxed{x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau)\,d\tau}$$




$\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_A}\right) * \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_A}\right) = T_A\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_A}\right)$

### 14.2. sinc-Singal




$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \mathrm{si}(\pi x)$

FT:

$\mathrm{sinc}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{rect}(f)$

## 15. Fouriertransformation

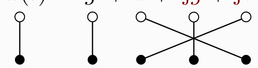
$$\boxed{\underset{\text{Zeitbereich}}{x(t)} \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \underset{\text{Frequenzspektrum}}{X(f)} := \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt}$$

### 15.1. Eigenschaften der Fouriertrafo

| | |
|---|---|
| Linearität: | $\alpha x(t) + \beta g(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \alpha X(f) + \beta G(f)$ |
| Zeitverschiebung: | $x(t - \tau) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} e^{-j2\pi f\tau}X(f)$ |
| Frequenzversch. | $e^{j2\pi f_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X(f - f_0)$ |
| Vertauschung: | $U^*(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} u^*(f)$ |
| Stauchung | $x(ct) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \frac{1}{\lvert c\rvert}X(\frac{f}{c})$ |
| Ableitung | $x^{(n)}(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} (j2\pi f)^n X(f)$ |
| Integral | $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \left(\frac{1}{2}\delta(f) - \frac{j}{2\pi f}\right)X(f)$ |
| Faltung: | $(x * g)(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X(f) \cdot G(f)$ |
| Parseval: | $\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t) \cdot u_2^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(f) \cdot U_2^*(f)\,df$ |
| Energie: | $E = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert u(t)\rvert^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert U(f)\rvert^2\,df$ |

Zusammenhang zwischen geraden und ungeraden Signalanteilen:

$$x(t) = g + u + jg + ju$$

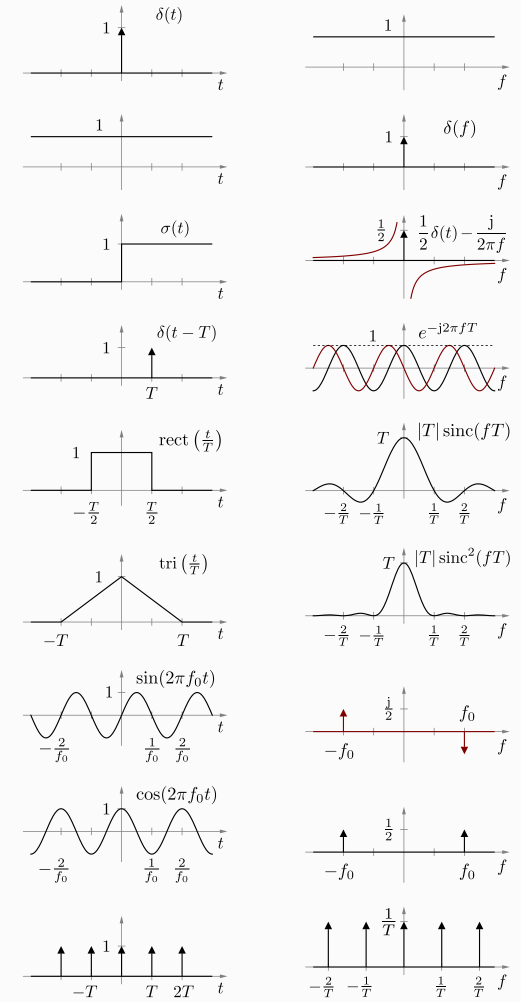


$$X(f) = G + U + jG + jU$$

$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X(f) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} x(-t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X(-f)$

Bei periodischen Signalen: Fourierreihen!

### 15.2. Wichtige Fouriertransformationen




### 15.3. Weitere Paare

| $f(t)$ | $F(\omega)$ | $f(t)$ | $F(\omega)$ |
|---|---|---|---|
| $\lvert t^n\rvert$ | $\frac{2n!}{(i\omega)^{n+1}}$ | $\mathrm{sinc}(\frac{t}{T})$ | $T\,\mathrm{rect}(fT)$ |
| $t^n$ | $2\pi i^n\delta^{(n)}(\omega)$ | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$ | $\frac{1}{(a+i\omega)^n}$ |
| | | $\exp(-\alpha t)$ | $\frac{1}{i2\pi f+\alpha}$ |

## 16. E-Technik

### 16.1. title

## 17. Naturkonstanten

Konstanten...