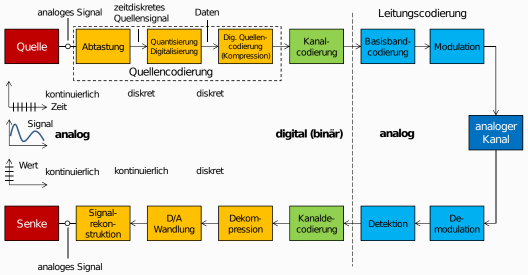
Industrielle Kommunikation

Anmerkung: Layout und weiteres für eine freiere Wissensgesellschaft erklaut. ☮

Allgemeines

Quelle → Sender → Kanal → Empfänger → Senke



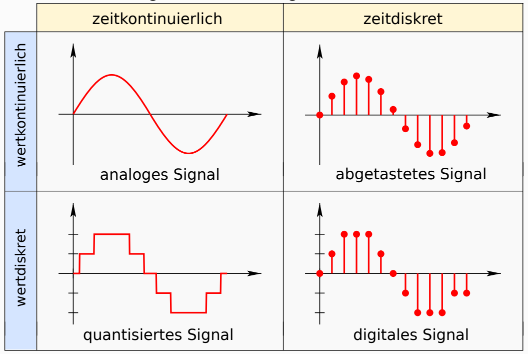
Signal → A/D Wandlung: Abtastung → Digitaler Bitstrom → D/A Wandlung: ± 1 Gewichtete NF Impulse $\pm g_s(t)$ → Modulation: Verschiebung ins Trägerband → AWGN Kanal → Detektor → Bitstrom

1. Signale

1.1. Arten von Signalen

deterministisch: durch Funktionen beschreibbar, enthalten kein Nachricht.

stochastisch: zufälliger Verlauf, überträgt Information



Vorteile digitales Signal: Kompression, Verschlüsselung, Fehlerkorrektur

2. Abtastung von Signalen

Bezeichnung	Symbol	Einheit
Signalstufen	V	$[V] = 1$
Bandbreite	B	$[B] = 1Hz$
Datenrate / Bitrate	R_b	$[R_b] = 1bps$
Sendepegel (Signal)	P_S	$[P_S] = 1W$ oder $[P_{S,dBm}] = 1dBm$
Rauschpegel (Noise)	P_N	$[P_N] = 1W$ oder $[P_{N,dBm}] = 1dBm$
Interefrenzpegel	P_I	$[P_I] = 1W$ oder $[P_{I,dBm}] = 1dBm$
Signal-Rausch-Verhältnis	$SNR = \frac{P_S}{P_N}$	$[SNR] = 1$ oder $[SNR_{dB}] = 1dB$
Signal-Intefrenz-Rausch-Verhältnis	$SINR = \frac{P_S}{P_I + P_N}$	$[SINR] = 1$ oder $[SINR_{dB}] = 1dB$

(**S**ignal-**T**o-**N**oise-**R**atio), Signal zu Rauschabstand $SNR_{(dB)}$

$SNR_{dB} = 10\log_{10}(SNR)dB = P_{S,dBm} - P_{N,dBm}$

(**S**ignal-**T**o-**I**nterference-**A**nd-**N**oise-**R**atio) $SINR_{(dB)}$

$SINR = \frac{P_S}{P_I + P_N}$

$SINR_{dB} = 10\log_{10}(SINR)dB$

$SINR_{dB} = P_{S,dBm} - P_{I,dBm} - P_{N,dBm}$

2.1. Nyquist-Abtasttheorem

$R_{b,max} = 2Bld(V)\frac{bit}{s}$

2.2. Shannon-Abtasttheorem

$R_{b,max} = Bld(1 + SNR)\frac{bit}{s}$ mit $[SNR] = 1$

3. Dämpfung/Verstärkung, dB-Rechnung

3.1. Leistungspegel

Leistung: $P = \frac{U^2}{R} = I^2 R$

Leistungspegel:

$L_{P,dB} = 10log\frac{P_2}{P_1}dB = 20log\frac{U_2}{U_1}dB = 20log\frac{I_2}{I_1}dB$

$L_{P,dBm} = 10log\frac{P}{1mW}dBm$

$1dBm = 1dBmW = 30dB\mu W = 60dBnW$

Verstärkung[dB] $= L_{P,dB}$; Dämpfung[dB] $= -L_{P,dB}$

Logarithmische Rechenregeln:

$x = a \cdot log_b(c \cdot d)$

$x = log_b c \cdot d^a = log_b c^a + log_b d^a$

$b^x = (c \cdot d)^a = c^a \cdot d^a$

$\sqrt[a]{(b^x)} = c \cdot d$

Durch $x = (\frac{1}{x})^{-1}$ ergeben sich die Rechenregeln für Subtraktion und Division.

3.2. Umrechnung dB

Verhältnis $\frac{P_2}{P_1}$	Verstärkung[dB]	Dämpfung[dB]
1000^{-1}	-30	+30
20^{-1}	-13	+13
10^{-1}	-10	+10
4^{-1}	-6	+6
2^{-1}	-3	+3
1	0	0
2	+3	-3
4	+6	-6
10	+10	-10
20	+13	-13
1000	+30	-30

3.3. Rechenregeln dB bzw. dBi und dBm

dB ∓ dB(i)	=	dB
dBm ∓ dB(i)	=	dBm
dBm - dBm	=	dB
dBm + dBm	=	undefiniert

4. Baud-, Bit-/Übertragungsrate, Durchsatz

4.1. Definitionen

Bezeichnung	Symbol	Einheit
Datenmenge in bit	$D_b = 8D_B$	$[D_b] = 1bit$
Datenmenge in Byte	D_B	$[D_B] = 1Byte = 8bit$
Signalstufen	V	[V] = 1
Baudrate / Schritt-geschwindigkeit	R_{baud}	$[R_{baud}] = 1Hz$
Bitrate/Brutto-Übertragungsrate	$R_b = R_{baud} \cdot ld(V)bit$	$[R_b] = 1bps = 1\frac{bit}{s}$
Durchsatz/Netto-Übertragungsrate, effektiv	$R_{eff} = \frac{D_b}{t_{ges}}$	$[R_{eff}] = 1bps$

Signalstufen V; Anzahl der möglichen annehmbaren Werte eines diskr. Signals pro Schritt

Zeit t_{ges} ab Sendestart einer Datenmenge D_b bis zum vollständigen Empfang, abhängig von verwendeten Protokollen

5. Leitungstheorie

Leitungstheorie **relevant für** $l >= 0,1\lambda$

5.1. Definitionen

Leitungslänge l mit $[l]$ = m

Belagsgrößen: R', L', G', C' als Widerstands-, Induktivitäts-, Ableitungs-, Kapazitätsbelag

Bsp: $R = R' \cdot l$ mit $[R'] = \frac{\Omega}{m}$

Wellenimpedanz $\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{(R' \cdot j\omega L')}{(G' \cdot j\omega C')}}$

Wellenlänge λ mit $[\lambda]$ = m

Ausbreitungsgeschwindigkeit $v = \lambda \cdot f$ mit $[v]$ = m/s

Ausbreitungskonstante $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' \cdot j\omega L')(G' \cdot j\omega C')}$ mit $[\gamma] = \frac{1}{m}$

5.2. Leitungsmodell

5.3. Formeln

6. Wellen und Antennen

Indizes: **E**(empfänger), **i**(sotroper Kugelstrahler), **r**(adius), **S**(ender)

6.1. Poynting-Vektor

Poynting-Vektor $\vec{S}$ ist Vektor der Leistungsflussdichte mit $[S] = 1\frac{W}{m^2}$

$\vec{S}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y, z, t) \times \vec{H}(x, y, z, t)$

Für harmonische Zeitvorgänge und EM-Wellen ($\vec{E} \sphericalangle \vec{H} = \frac{\pi}{2}$) gilt:

$\underline{S} = S = \frac{1}{2}\underline{E} \cdot \underline{H}^* = \frac{1}{2}\underline{H}^2 Z_F = \frac{1}{2}\frac{Z_F}{\underline{E}^2}$ mit $E, H \in \mathbb{C}$

Wellenwiderstand im Vakuum $Z_F = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 376,73\Omega$

$S_i = |\vec{S}| = \frac{P_S}{4\pi r^2}$

Richtfaktor $D_i = \frac{S_{r,max}}{S_i} = 4\pi r^2 \frac{S_{r,max}}{P_S}$

i.d.R. angegeben als $D_{i,log} = 10logD_i dBi$

Antennengewinn $G = \eta D_i$ i.d.R. angegeben in dB

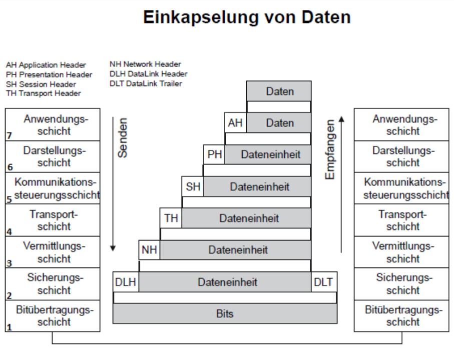
Antennenwirkfläche $A_W = \frac{\lambda^2}{4\pi}G$ mit der Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{f}$

Bsp. Empfangs- und Sendeantenne im Abstand r zueinander:

$P_E = P_S \cdot G_S \cdot G_E(\frac{\lambda}{4\pi r})^2$

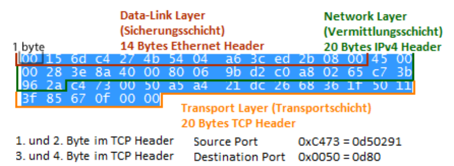
7. OSI-Modell (Open-System-Interface)

Ein- und Entkapselung der Daten in den 7 OSI-Schichten



Beispiel-Protokolle der verschiedenen Schichten in Anhang2.

Beispiel-Trace und Header-Verkapselung:



8. Def. für Zugriffsverfahren, Sicherungsschicht

8.1. Definitionen

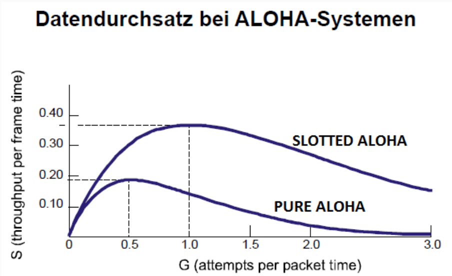
Bezeichnung	Symbol	Einheit
Paketgröße in bit	D_P	$[D_P] = 1bit$
Rahmenzeit für ein Paket	$\tau = \frac{D_P}{R_b}$	$[\tau] = 1s$
Signallaufzeit (transmission time)	t_t	$[t_t] = 1s$
Round-Trip-Time/-Delay	$RTT = RTD = 2 \cdot t_t$	$[t_t] = 1s$
durchschnittliche Paketsende-Rate	λ	$[\lambda] = 1Hz$
Input, zu sendende Pakete	I	$[I] = 1$
Kanalauslastung / Gesamt Übertragungsversuche	$G = \lambda \cdot \tau$	$[G] = 1$
Throughput, kein Konflikt	S, ideal $S = G$	$[S] = 1$

Bei keinen verlorenen Pakete gilt $I = S$
Anzahl Übertragungsversuche bzw. Kanalauslastung $G = \lambda \cdot \tau$
Anzahl erfolgreich übertragener Pakete pro Rahmenzeit S, ideal $S = G$

9. Zugriffsverfahren

9.1. ALOHA, pure and slotted

Ziel: Medienzugangskontrolle durch Paket-Kollisionsvermeidung und -endteckung



Pure ALOHA Zufällige Sendung von Paketen durchschnittlich alle $\frac{1}{\lambda}$ mit Paketen der zeitlichen Rahmenlänge τ

Potentielle Kollisionszeit $= 2\tau$
$S = G \cdot e^{-2G}$ mit $S_{max}(G = G_{max} = 0,5) = 0,184$
Slotted ALOHA Zufälliges Senden von Paketen durschnittlich alle $\frac{1}{\lambda}$ zu Beginn eines Zeitslots mit Paketen der zeitlichen Rahmenlänge τ

Potentielle Kollisionszeit $= \tau$
$S = G \cdot e^{-G}$ mit $S_{max}(G = G_{max} = 1) = 0,368$

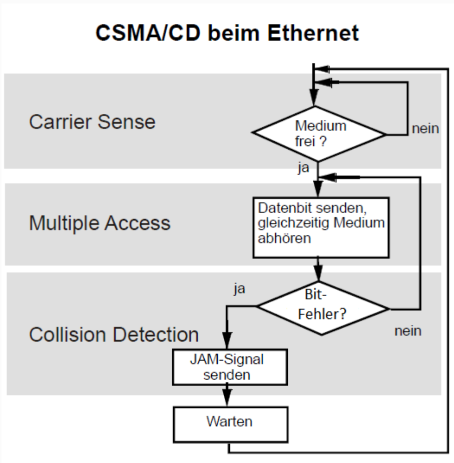
9.2. CSMA: Carrier Sense Multiple Access

1-persistent CSMA
regelmäßige Überprüfung auf freien Kanal, wenn frei, dann Paketsendung mit Wahrscheinlichkeit 1

Non-persistent CSMA
unregelmäßige Überprüfung auf freien Kanal, wenn frei, dann Paketsendung mit Wahrscheinlichkeit 1

p-persistent CSMA
regelmäßige Überprüfung auf freien Kanal, wenn frei, dann Paketsendung mit Wahrscheinlichkeit p

CSMA/CD (Carrier Sense Multiple Access / Collision Detection)
Bestimmung Ethernet: Min. Nachrichtenlänge > Max. Konfliktdauer oder ev. künstl. Nachrichtenverlängerung mit Padding Bits



10. Sicherungsschicht

10.1. Stop and Wait

Senden eines Pakets, Warten auf Bestätigung (ACK), Senden des nächsten Pakets, usw.
$R_{eff} = \frac{D_P}{\frac{D_P}{R_b} + 2t_t}$ wenn t_t für Hin- und Rückweg gleich.

10.2. Pipelining

Fenstergröße D_W in bits bestehend aus n Paketen

Bestätigung von Paket 1 muss ankommen, bevor die Fenstergröße in bits versendet wurde, damit keine Wartezeiten anfallen.

Fall 1 (ideal): Für $\frac{D_W}{R_b} \leq \frac{D_P}{R_b} + 2t_t$
gilt: $R_{eff} = R_b$
Fall 2 (Wartezeiten): Für $\frac{D_W}{R_b} < \frac{D_P}{R_b} + 2t_t$
gilt $R_{eff} = \frac{D_W}{\frac{D_b}{R_b} + 2 \cdot t_t}$

10.3. Go-back ohne Puffer

Sender überträgt, wenn nach Senden eines Pakets und Verstreichen eines Timeout-Intervall kein ACK für das Paket einging, sämtliche Daten ab dem unbestätigten Rahmen neu.

10.4. Go-back-n mit Puffer

Genauso wie ohne Puffer, nur das nach Erhalt des ACK für das erneut gesandte Paket beim ersten noch nicht gesendeten Paket weiter gesendet wird.

10.5. Selective repeat

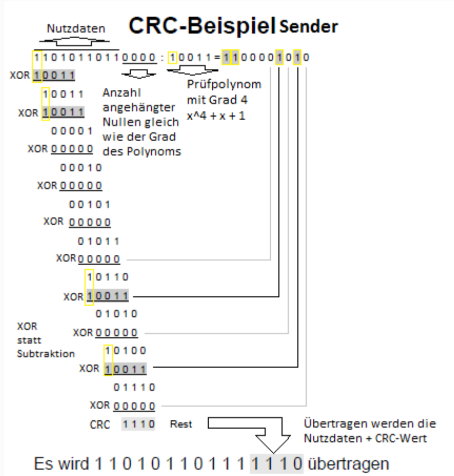
Bei Nichtüertragung eines Pakets wird nach Timeout-Intervall nur das nicht korrekt übertragene Paket neu gesandt, alle weiteren werden gepuffert.

10.6. HDLC (High Level Data Link Control)

Flag: 01111110; Bit stuffing (Bitstopfen) um Flag eindeutig zu halten

10.7. CRC

Cyclic Redundancy Check
Sender und Empfänger verwenden das gleiche Prüfpolynom!



Empfänger: Überprüfen der Empfangsdaten (Nutzdaten + CRC-Wert) auf Übertragungsfehler
Empfangsdaten mit XOR statt Subtraktion durch's Prüfpolynom dividieren: 2 Fälle für's Ergebnis möglich
I. Mit Rest: Übertragungsfehler
II. Ohne Rest: wahrscheinlich kein Übertragungsfehler

11. Codierung

Komprimierung: Falls Bitstrom nicht gleichverteilt und mit Gedächtnis
Maximale Kompression: Bits gleichverteilt, ohne Gedächtnis
Entropie: kein Code kann für Z eine geringere mittlere Codewortlänge finden als $H(z) = \sum \mathrm{P}(z) \,\mathrm{ld}\left(\frac{1}{\mathrm{P}(z)}\right)$

11.1. Kompression

Kleiner Verlust bei unkodierten Bitstrom. Großer Gewinn bei Kodierung.
Bsp: Feste Blocklänge mit Statusbit am Anfang: Kodiert/Unkodiert

11.2. Digitale Quellencodierung (Kompression)

Arten von Kodierern:
Verteilung Bekannt: Huffman Code, Morse, Arithmetic
Universal: Lempel-Ziv (ZIP), PPM, BWT(bZip)
Transform: Fouriertransformation (JPG,GIF,PNG,MP3)

11.3. Kanalcodierung

Single-Parity-Check: 1 Bit pro 2 bit zusätzlich: XOR(x_1, x_2)
Daraus ergibt sich eine Effizienz von $\frac{2}{3}$

FEC: Forward Error Correction liefert Fehlererkennung und Korrektur.
Beispiele: Paritätsbit, CRC, Reed-Solomon-Codes, LDPC, Polar Codes

11.4. Informationsgehalt und Entropie

Info vom Symbol s_i: $I_i = -\log_2 \mathsf{P}(X_Q = s_i) = -\log_2 p_i$

Entropie von X_Q: $H(X_Q) = \mathsf{E}[I] = -\sum\limits_{i=0}^{M-1} p_i \log_2 p_i \left[\frac{\text{bit}}{\text{Symbol}}\right]$

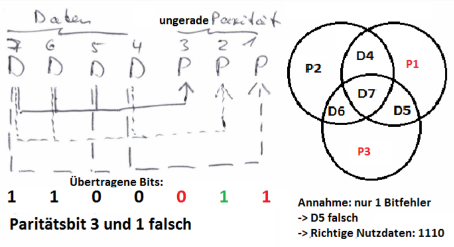
Mittlere Codewortlänge $\bar{l} = \mathsf{E}[l] = \sum\limits_{i=0}^{n-1} p_i l_i$

Die minimale mittlere Codewortlänge $\bar{l} \geq H(x_Q)$

11.5. Hamming Code(N,n)

N Nachrichtenbits mit $N = 2^k - 1 = n + k$
n Datenbits
k Paritybits

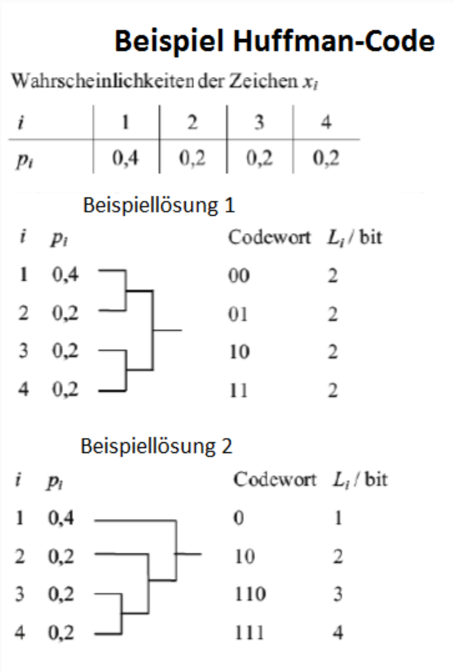
Beispielübertragung mit Hamming(7,4):



Allgemein:

11.6. Huffmann Code

Sortieren nach Wahrscheinlichkeit und Codewortlänge (kurzes Codewort hohe Wahrscheinlichkeit)
Anleitung für manuelle visuelle Erstellung mittels eines "Huffman-Baums":
1. Zeichen (und/oder Knoten) mit der niedrigsten Wahrscheinlichkeit durch Leitungen verbinden
2. Beide Wahrscheinlichkeiten für die des Knotens addieren
3. weiter mit 2. bis alle verbunden sind (Gesamtwahrscheinlichkeit 1)
4. Für die neuen Codewörter nach Huffmann: rückwärts bei jeder Verzweigung eine 1 für den wahrscheinlicheren Zweig und eine 0 für den unwahrscheinlicheren
5. Das erste Bit des Codeworts des Zeichens x_i nach Huffmann ist die gesetzte 0 oder 1 bei der ersten Verzweigung hin zum Zeichen x_i. Das nächste Bit entsprechend der nächsten Verzweigung, usw.



11.7. Reed-Solomon Code

12. Lineare, digitale Modulation

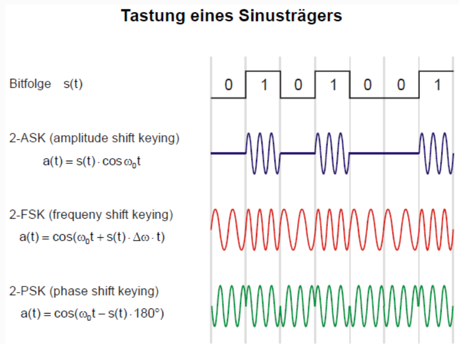
12.1. Allgemeines

Informationsfluss:
Info-Quelle →Codierung →Modulation →Kanal →Demodulation →Decodierung →Info-Senke

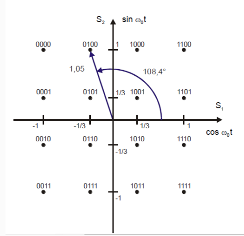
12.2. Modulationsarten

Amplitudenmodulation ASK
Frequenzmodulation FSK (Winkelmodulation)
Phasenmodulation PSK (Winkelmodulation)
Quadraturmodulation QAM

Modulation mit Sinusträger: $a(t) = A(t) \cdot cos(\omega_0 t - \phi(t))$ Amplitudenmodulation wirkt sich nur auf $A(t)$ aus
Winkelmodulation wirkt sich nur auf $\phi(t)$



Trägerzustände der 16 QAM



Binärsignal				S_1	S_2	$a(t) = S_1(t) \cdot \cos\omega_0 t + S_2(t) \cdot \sin\omega_0 t = A(t) \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi(t))$
0	0	0	0	-1	1	$1{,}41 \cdot \cos(\omega_0 t - 135°)$
0	0	0	1	-1	1/3	$1{,}05 \cdot \cos(\omega_0 t - 161{,}6°)$
0	0	1	0	-1	-1/3	$1{,}05 \cdot \cos(\omega_0 t + 161{,}6°)$
0	0	1	1	-1	-1	$1{,}41 \cdot \cos(\omega_0 t + 135°)$
0	1	0	0	-1/3	1	$1{,}05 \cdot \cos(\omega_0 t - 108{,}4°)$
0	1	0	1	-1/3	1/3	$0{,}47 \cdot \cos(\omega_0 t - 135°)$
0	1	1	0	-1/3	-1/3	$0{,}47 \cdot \cos(\omega_0 t + 135°)$
0	1	1	1	-1/3	-1	$1{,}05 \cdot \cos(\omega_0 t + 108{,}4°)$
1	0	0	0	1/3	1	$1{,}05 \cdot \cos(\omega_0 t - 71{,}6°)$
1	0	0	1	1/3	1/3	$0{,}47 \cdot \cos(\omega_0 t - 45°)$
1	0	1	0	1/3	-1/3	$0{,}47 \cdot \cos(\omega_0 t + 45°)$
1	0	1	1	1/3	-1	$1{,}05 \cdot \cos(\omega_0 t + 71{,}6°)$
1	1	0	0	1	1	$1{,}41 \cdot \cos(\omega_0 t - 45°)$
1	1	0	1	1	1/3	$1{,}05 \cdot \cos(\omega_0 t - 18{,}4°)$
1	1	1	0	1	-1/3	$1{,}05 \cdot \cos(\omega_0 t + 18{,}4°)$
1	1	1	1	1	-1	$1{,}41 \cdot \cos(\omega_0 t + 45°)$

Spread Spectrum durch Direct Sequence (DS) oder Frequency Hopping (HS)
Schützt vor Schmalbandstörern (Militär) und freuquenz-selektives Fading (Mobilfunk)

12.3. On-Off Keying (OOK)

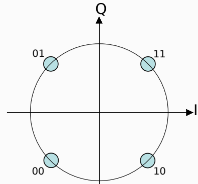
Intensitätsmodulation mit $b = 1$ (Laser an oder aus)

Mittlere Energie pro Symbol: $E_s = \frac{A_{\text{on}}^2}{2}$

12.4. Amplitude Shift Keying (M-ASK)

Für M Stufen mit Abstand Δ gilt: $\mathsf{E}[D_I^2] = \frac{\Delta^2(M^2-1)}{12}$

12.5. Phase Shift Keying (PSK)



$d_I^2 + d_Q^2 = r^2$ (meist $r = 1$)
$E_s = \mathsf{E}[D_I^2 + D_Q^2] \int_0^T |g_s(t)|^2 \,\mathrm{d}t$

Offset: verhindert harte Übergänge (Nicht durch Null)
Gray-Codierung zwischen benachbarten Symbolen: Fehler in der Symbolerkennung hat nur geringe Bitfehler

12.5.1. DPSK

Differentielle binäre Phasenmodulation
0: Phase bleibt gleich, 1: Phase ändert sich

12.6. Quadraturamplitudenmodulation (M-QAM)

Für M Stufen und Abstand Δ: $\mathsf{E}[D_I^2 + D_Q^2] = \frac{\Delta^2(M-1)}{6}$

13. Weiteres, IP, etc.

13.1. IPv4-Adressen

$IP-Adresse = Netzwerkadresse + Hostadresse$
IP-Adresse UND Netzwerkmaske = Netzwerkadresse inkl. vorangestellte(s) Bit(s) für die Adressklasse
Genormte Länge von 32 bit für eine IP-Adresse
Schreibweise meist in 4 Oktett-Form mit 4 durch Punkte getrennte dezimale 8-Bit-Zahlen (0...255)

Klasse	führende Bits	Wert des 1. Bytes	Bits für Netz-adresse	Bits für Host-adresse	max. Rechner-zahl
A	0	1 – 126	7	24	ca. 16 Mill.
B	10	128 – 191	14	16	ca. 65000
C	110	192 – 223	21	8	ca. 250
D	1110	224 – 239	Multicast (Hostgruppe): 28 Bits		
E	1111	reserviert für Forschungszwecke			

Klasse	Netz Adressraum	Netz max.Zahl	Host Adressraum	Host max.Zahl
A	0 bis 126	127	0.0.1 bis 255.255.254	2^{24}-2 =16777216-2
B	128.0 bis 191.255	16384	0.1 bis 255.254	2^{16}-2=65536-2
C	192.0.0 bis 223.255.255	2 097 152	1 bis 254	2^{8}-2=256-2
D			224.0.0.0 bis 239.255.255.254	2^{28}-2 =268 435 454

Localhost = 127.0.0.1
Netzwerkadresse, alle bits der Hostadresse sind 0
Broadcastadresse, alle bits der Hostadresse sind 1

Subnetting
Unterteilung eines Klasse A-, B- oder C-Netzes in Subnetze
Die Subnetzmaske unterteilt die Bits für die Host-Adresse in eine Subnetzwerkadresse und die eigentliche Rechneradresse.
$IP-Adresse = Netzwerkadresse + Subnetzwerkadresse + eig.Rechneradresse$
IP-Adresse UND Subnetzmaske = Netzwerkadresse + Subnetzadresse inkl. vorangestellte(s) Bit(s) für die Adressklass

Wichtig: Router die zwei Netzsegmente koppeln benötigen 2 IP-Adressen.

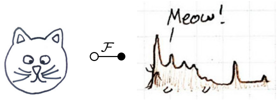
VLSM?

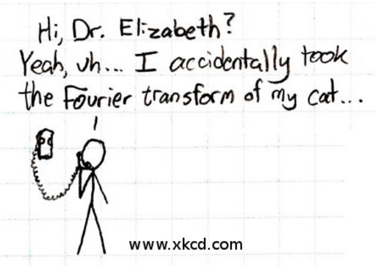
13.2. Router, Hubs, Switches

13.3.

14. Offtopic und Notizen

Auch wichtig:





Eigene Notizen:

Aufruf: Bildet euch! Bildet andere! Bildet banden!
Außerdem: ΦΞ♡4Ⓐ
Für Liebe und Anarchie. Gegen Ausbeuter*innen und Kriegstreiber*innen, durch (anti-)systemisches Vorgehen wie z.B. Angriffen auf menschenverachtende, umweltzerstörende, Tiere quälende/mordende Infrastruktur à la Grenzzäune, Abschiebeknäste, Kohlegruben, Schlachtfabriken und ähnliches oder z.B. durch Aufbrechen von Denkmustern einer archaischen Asozialisation die solch Gräuel erzeugen oder z.B. solidarische Gegenkonzepte für ein gutes Leben für alle, welche die bestehenden Verhältnisse ins Wanken bringen. Natürlich ohne invidiuellen Terror à la RAF. Langer beschreibender Text, um die Political Correctness zu wahren.

4 the Lulz: Heisenberg, Schroeder and Ohm are in a car
They get pulled over. Heisenberg is driving and the cop asks him "Do you know how fast you were going?"

No, but I know exactly where I am" Heisenberg replies.

The cop says "You were doing 55 in a 35." Heisenberg throws up his hands and shouts "Great! Now I'm lost!"

The cop thinks this is suspicious and orders him to pop open the trunk. He checks it out and says "Do you know you have a dead cat back here?"

"We do now, asshole!ßhouts Schrodinger.

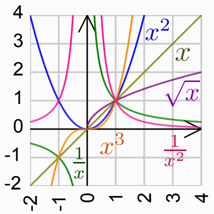
The cop moves to arrest them. Ohm resists.

Anhang

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^{16}
2	4	8	16	32	64	128	256	65536

15. Mathematik

15.1. Polynome $P(x) \in \mathbb{R}[x]_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ vom Grad n



Gerade durch Punkt $P(x_0, y_0)$:
$y = m(x - x_0) + y_0$

Quadratisch: $y = ax^2 + bx + c$
Mitternachtsformel für Nullstellen:

$$\boxed{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

15.2. Exponentialfunktion und Logarithmus

$b^a = x$	$\log_b(1) = 0$	$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$
$log_b x = a$	$\log(10) = 1$	$\ln(\frac{x}{a}) = \ln x - \ln a$
$\ln(x^c) = c\ln(x)$	$\ln e = 1$	$\ln(x \cdot a) = \ln x + \ln a$

15.3. Sinus, Cosinus $\quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

x / φ	0 / $0°$	$\pi/6$ / $30°$	$\pi/4$ / $45°$	$\pi/3$ / $60°$	$\frac{1}{2}\pi$ / $90°$	π / $180°$	$1\frac{1}{2}\pi$ / $270°$	2π / $360°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	0

Additionstheoreme	Stammfunktionen
$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$	$\int x\cos(x)\,dx = \cos(x) + x\sin(x)$
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$	$\int x\sin(x)\,dx = \sin(x) - x\cos(x)$
$\sin 2x = 2\sin x\cos x$	$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$	$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$
$\sin(x) = \tan(x)\cos(x)$	$\int \cos(x)\sin(x) = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$

$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \sin y\cos x \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$
$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y \qquad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

15.4. Integralgarten

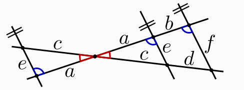
Partielle Integration: $\int uw' = uw - \int u'w$
Substitution: $\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$

$F(x) - C$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1}x^{q+1}$	x^q	qx^{q-1}
$\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}$	$\sqrt{ax}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax}}$
$x\ln(ax) - x$	$\ln(ax)$	$\frac{a}{x}$
$\frac{1}{a^2}e^{ax}(ax-1)$	$x \cdot e^{ax}$	$e^{ax}(ax+1)$
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x\ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\mathrm{Si}(x)$	$\mathrm{sinc}(x)$	$\frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

$\int e^{at}\sin(bt)\,dt = e^{at}\frac{a\sin(bt) + b\cos(bt)}{a^2+b^2}$

$\int xe^{ax^2}\,dx = \frac{1}{2a}e^{ax^2} \qquad \int t^2e^{at}\,dt = \frac{(ax-1)^2+1}{a^3}e^{at}$

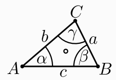
16. Geometrie $\quad a^2 + b^2 = c^2$



Strahlensatz:
$a : b = c : d \qquad \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{e}{f}$

Innenwinkelsumme im n-Eck: $(n-2) \cdot 180°$

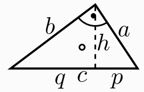
Allg. Dreieck $\triangle ABC$ mit Seiten a, b, c und Winkel α, β, γ:



Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$
Sinussatz: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$
Projektionssatz: $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$

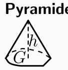
Höhe $h_c = a\sin\beta = b\sin\alpha \qquad$ Fläche $A = \frac{1}{2}h_c c = \frac{1}{2}h_a a$
Schwerpunkt: $x_S = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) \quad y_S = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$

Rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit $\gamma = 90°$ bei C



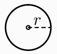
Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$
Höhensatz: $h^2 = pq$
Kathetensatz: $a^2 = pc$
$a = c\sin\alpha = c\cos\beta = b\tan\alpha$

Pyramide mit beliebiger Grundfläche G



$V = \frac{1}{3}G \cdot h$
SP: liegt auf h mit $y_S = h/4$

Zylinder/Prisma
$V = G \cdot h$
$M = U \cdot h$



Kreis: $A = \pi r^2 \qquad U = 2\pi r$
Kugel: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad O = 4\pi r^2$
Kreissehne: $s = 2r\sin(\alpha/2)$

17. Stochastik

KÜRZEN

17.1. Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbf{P})$

Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, \mathrm{P})$ besteht aus

Ergebnismenge	$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$	Ergebnis $\omega_j \in \Omega$
Ereignisalgebra	$\mathbb{F} = \{A_1, A_2, \ldots\}$	Ereignis $A_i \subseteq \Omega$
Wahrscheinlichkeitsmaß	$\mathrm{P} : \mathbb{F} \to [0, 1]$	$\mathrm{P}(A) = \frac{\lvert A\rvert}{\lvert\Omega\rvert}$

Es gilt: $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit für A falls B bereits eingetreten ist:
$\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$
Multiplikationssatz: $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B)\,\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A)$

Erwartungswert: $\mathrm{E}[X] = \mu = \sum x_i P(x_i) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\,dx$

Varianz: $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2$
Standard Abweichung $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$

Covarianz: $\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])] = \mathrm{Cov}[Y, X]$

Binominialverteilung (diskret, n Versuche, k Treffer):
$P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad \mu = np \qquad \sigma^2 = np(1-p)$

Korrelation ist ein Maß für den linearen Zusammenhang von Variablen

Kreuzkorrelation von X und Y: $\boxed{r_{xy} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X\sigma_Y}}$

17.2. Normalverteilung

PDF: $\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in \mathbb{R}}$

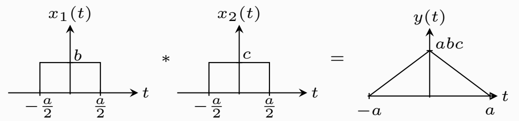
$\mathrm{E}(X) = \mu$ Erwartungswert	$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ Varianz	$\varphi_X(\omega) = e^{j\omega\mu - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$ Charakt. Funktion

18. Signale

Löschen?

18.1. Faltung von Signalen

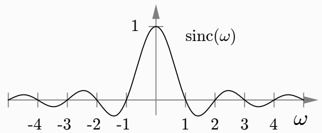
$$\boxed{x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau)\,d\tau}$$



$\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_A}\right) * \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_A}\right) = T_A\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_A}\right)$

Löschen?

18.2. sinc-Singal



$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$
$= \mathrm{si}(\pi x)$

FT:
$\mathrm{sinc}(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \mathrm{rect}(f)$

19. Fouriertransformation Löschen?

$$\boxed{\underset{\text{Zeitbereich}}{x(t)} \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \underset{\text{Frequenzspektrum}}{X(f)} := \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt}$$

19.1. Eigenschaften der Fouriertrafo

Linearität:	$\alpha x(t) + \beta g(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \alpha X(f) + \beta G(f)$
Zeitverschiebung:	$x(t - \tau) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} e^{-j2\pi f\tau}X(f)$
Frequenzversch.	$e^{j2\pi f_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X(f - f_0)$
Vertauschung:	$U^*(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} u^*(f)$
Stauchung	$x(ct) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \frac{1}{\lvert c\rvert}X(\frac{f}{c})$
Ableitung	$x^{(n)}(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} (j2\pi f)^n X(f)$
Integral	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \left(\frac{1}{2}\delta(f) - \frac{j}{2\pi f}\right)X(f)$
Faltung:	$(x * g)(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X(f) \cdot G(f)$
Parseval:	$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t) \cdot u_2^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(f) \cdot U_2^*(f)\,df$
Energie:	$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert u(t)\rvert^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert U(f)\rvert^2\,df$

Zusammenhang zwischen geraden und ungeraden Signalanteilen:

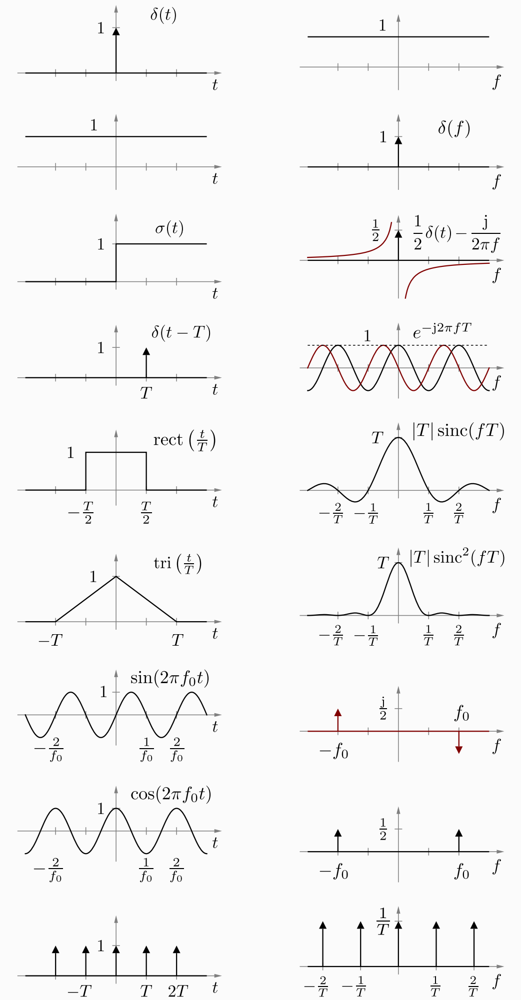
$$x(t) = g + u + jg + ju$$

$$X(f) = G + U + jG + jU$$

$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X(f) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} x(-t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X(-f)$
Bei periodischen Signalen: Fourierreihen!

19.2. Wichtige Fouriertransformationen

Zeitfunktion | Spektrum



19.3. Weitere Paare

$f(t)$	$F(\omega)$	$f(t)$	$F(\omega)$
$\lvert t^n \rvert$	$\frac{2n!}{(\mathrm{i}\omega)^{n+1}}$	$\operatorname{sinc}(\frac{t}{T})$	$T\operatorname{rect}(fT)$
t^n	$2\pi \mathrm{i}^n \delta^{(n)}(\omega)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a+\mathrm{i}\omega)^n}$
		$\exp(-\alpha t)$	$\frac{1}{\mathrm{i}2\pi f+\alpha}$

20. E-Technik

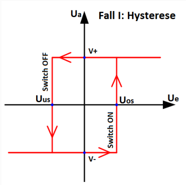
20.1. OP-Amp-Schaltung mit Hysterese

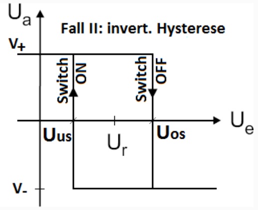
U_m als Spannung am Minus-Pin
U_p als Spannung am Plus-Pin
U_a als Ausgangsspannung
U_e als Eingangsspannung
$U_b = V_+$ als pos. Versorgungsspannung des Op-Amps.
V_- als neg. Versorgungsspannung des OP-Amps U_{os} = Spannung der oberen Schaltschwelle
U_{us} = Spannung der unteren Schaltschwelle

Positive Rückkopplung beim OP-Amp bedeutet:
Für $U_p > U_m$ gilt $U_a = V_+ = U_b$
Für $U_p > U_m$ gilt $U_a = V_-$ (meistens = GND)

Annahme: Pos. Versorgungsspannung = U_b, neg. Versorgungsspannung = 0 V (GND)

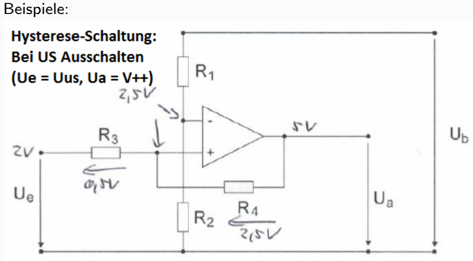
1. Fallunterscheidung Hysterese (I) mit U_e am Plus-Pin und invertierte Hysterese (II) mit U_e am Minus-Pin
Fall I : $\lim\limits_{U_e \to \infty} U {=} V_+$
Fall II : $\lim\limits_{U_e \to \infty} U_a = V_-$

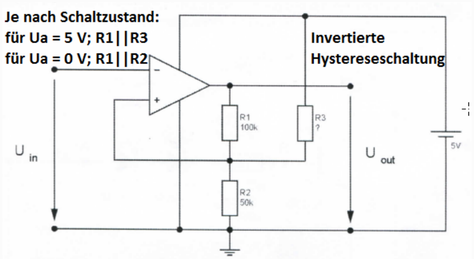




2. Bedingung an der unteren (US) und oberen (OS) Schaltschwelle ($U_m = U_p$) einstellen in Abhängigkeit der Art der Hysterese (I oder II):
(I) US: $U_e = U_{us}; U_a = V_+$
(I) OS: $U_e = U_{os}; U_a = V_- +$
(II) US: $U_e = U_{us}; U_a = V_-$
(II) OS: $U_e = U_{os}; U_a = V_+$

Beispiele:





3. Beide Gleichung für die verschiedenen Schaltschwellen gleichsetzen und auflösen.

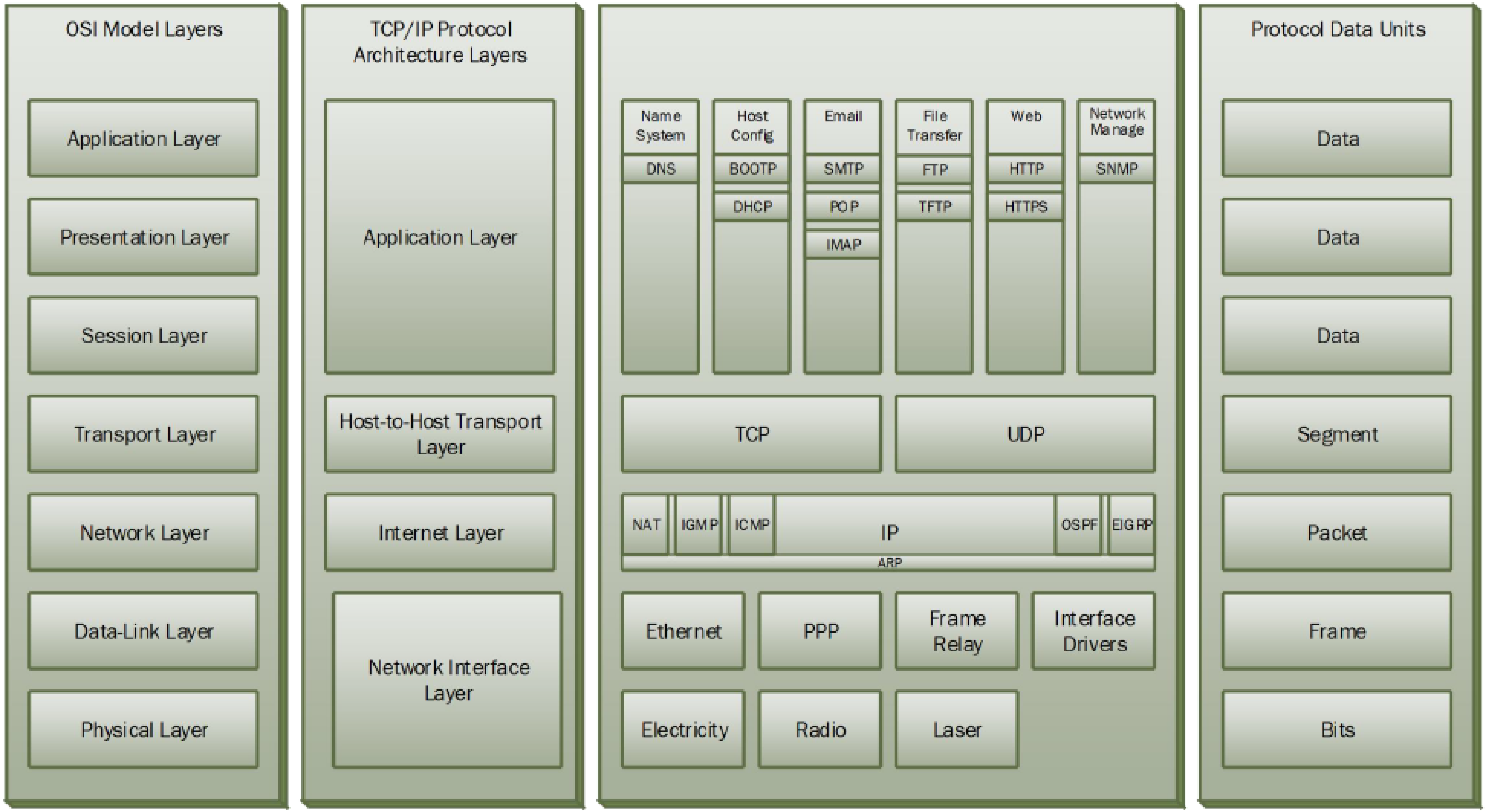
20.2. Transistor-Verstärkerschaltung

20.3. Ersatzspannungsquellen

21. Naturkonstanten

Konstanten...

OSI vs. Internet-Protokollhierarchie



Als Anhang für die Abgabe der Klausur

Definitionen

Bezeichnung	Symbol	Einheit
Datenmenge in bit	$D_b = 8D_B$	$[D_b] = 1bit$
Datenmenge in Byte	D_B	$[D_B] = 1Byte = 8bit$
Signalstufen	V	[V] $= 1$
Baudrate / Schrittgeschwindigkeit	R_{baud}	$[R_{baud}] = 1Hz$
Bitrate/Brutto-Übertragungsrate	$R_b = R_{baud} \cdot ld(V)bit$	$[R_b] = 1bps = 1\frac{bit}{s}$
Durchsatz/Netto-Übertragungsrate, effektiv	$R_{eff} = \frac{D_b}{t_{ges}}$	$[R_{eff}] = 1bps$

Signalstufen V; Anzahl der möglichen annehmbaren Werte eines diskr. Signals pro Schritt

Zeit t_{ges} ab Sendestart einer Datenmenge D_b bis zum vollständigen Empfang, abhängig von verwendeten Protokollen