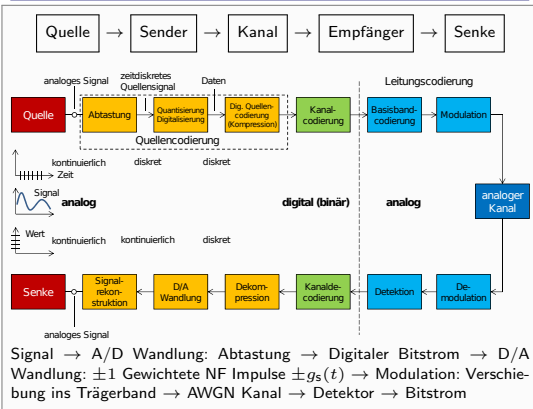


Allgemeines

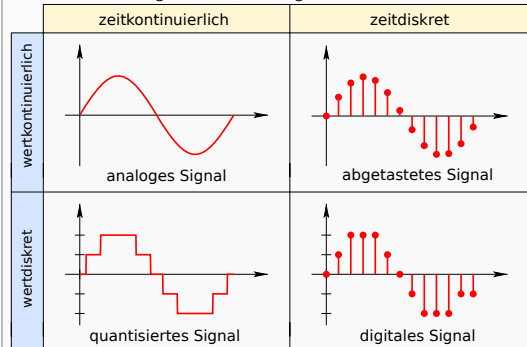


1. Signale

1.1. Arten von Signalen

deterministisch: durch Funktionen beschreibbar, enthalten kein Nachricht.

stochastisch: zufälliger Verlauf, überträgt Information



Vorteile digitales Signal: Kompression, Verschlüsselung, Fehlerkorrektur

2. Abtastung von Signalen

Bezeichnung	Symbol	Einheit
Signalstufen	V	$[V] = 1$
Bandbreite	B	$[B] = 1 \text{ Hz}$
Datenrate / Bitrate	R_b	$[R_b] = 1 \text{ bps}$
Sendepegel (Signal)	P_S	$[P_S] = 1 \text{ W}$ oder $[P_{S,dBm}] = 1 \text{ dBm}$
Rauschpegel (Noise)	P_N	$[P_N] = 1 \text{ W}$ oder $[P_{N,dBm}] = 1 \text{ dBm}$
Interferenzpegel	P_I	$[P_I] = 1 \text{ W}$ oder $[P_{I,dBm}] = 1 \text{ dBm}$
Signal-Rausch-Verhältnis	$SNR = \frac{P_S}{P_N}$	$[SNR] = 1$ oder $[SNR_{dB}] = 1 \text{ dB}$
Signal-Interferenz-Rausch-Verhältnis	$SINR = \frac{P_S}{P_I + P_N}$	$[SINR] = 1$ oder $[SINR_{dB}] = 1 \text{ dB}$

(Signal-To-Noise-Ratio), Signal zu Rauschabstand SNR_{dB}
 $SNR_{dB} = 10 \log_{10}(SNR) \text{ dB} = P_{S,dBm} - P_{N,dBm}$

(Signal-To-Interference-And-Noise-Ratio) $SINR_{dB}$

$$SINR = \frac{P_S}{P_I + P_N}$$

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10}(SINR) \text{ dB}$$

$$SINR_{dB} = P_{S,dBm} - P_{I,dBm} - P_{N,dBm}$$

2.1. Nyquist-Abtasttheorem

$$R_{b,max} = 2 \text{ Bld}(V) \frac{\text{bit}}{s}$$

2.2. Shannon-Abtasttheorem

$$R_{b,max} = \text{Bld}(1 + SNR) \frac{\text{bit}}{s} \text{ mit } [SNR] = 1$$

3. Dämpfung/Verstärkung, dB-Rechnung

3.1. Leistungspegel

$$\text{Leistung: } P = \frac{U^2}{R} = I^2 R$$

Leistungspegel:

$$L_{P,dB} = 10 \log \frac{P_2}{P_1} \text{ dB} = 20 \log \frac{U_2}{U_1} \text{ dB} = 20 \log \frac{I_2}{I_1} \text{ dB}$$

$$L_{P,dBm} = 10 \log \frac{P}{1 \text{ mW}} \text{ dBm}$$

$$1 \text{ dBm} = 1 \text{ dBmW} = 30 \text{ dB}\mu\text{W} = 60 \text{ dBnW}$$

$$\text{Verstärkung[dB]} = L_{P,dB}; \text{ Dämpfung[dB]} = -L_{P,dB}$$

Logarithmische Rechenregeln:

$$x = a \cdot \log_b(c \cdot d)$$

$$x = \log_b c \cdot d^a = \log_b c^a + \log_b d^a$$

$$b^x = (c \cdot d)^a = c^a \cdot d^a$$

$$\sqrt[a]{b^x} = c \cdot d$$

Durch $x = (\frac{1}{x})^{-1}$ ergeben sich die Rechenregeln für Subtraktion und Division.

3.2. Umrechnung dB

Verhältnis $\frac{P_2}{P_1}$	Verstärkung[dB]	Dämpfung[dB]
$\frac{1}{1000} = 10^{-3}$	-30	+30
$\frac{1}{20} = 10^{-1}$	-13	+13
$\frac{1}{10} = 10^{-1}$	-10	+10
$\frac{1}{4} = 10^{-0.6}$	-6	+6
$\frac{1}{2} = 10^{-0.3}$	-3	+3
1	0	0
2	+3	-3
4	+6	-6
8	+9	-9
10	+10	-10
1000 = 10^3	+30	-30

3.3. Rechenregeln dB bzw. dBi und dBm

$\text{dB} \mp \text{dB}(i) = \text{dB}$
$\text{dBm} \mp \text{dB}(i) = \text{dBm}$
$\text{dBm} - \text{dBm} = \text{dB}$
$\text{dBm} + \text{dBm} = \text{undefiniert}$

4. Baud-, Bit-/Übertragungsrate, Durchsatz

4.1. Definitionen

Bezeichnung	Symbol	Einheit
Datenmenge in bit	$D_b = 8 D_B$	$[D_b] = 1 \text{ bit}$
Datenmenge in Byte	D_B	$[D_B] = 1 \text{ Byte} = 8 \text{ bit}$
Signalstufen	V	$[V] = 1$
Baudrate / Schrittgeschwindigkeit	R_{baud}	$[R_{baud}] = 1 \text{ Hz}$
Bitrate/Brutto-Übertragungsrate	$R_b = R_{baud} \cdot \text{ld}(V) \text{ bit}$	$[R_b] = 1 \text{ bps} = 1 \frac{\text{bit}}{s}$
Durchsatz/Netto-Übertragungsrate, effektiv	$R_{eff} = \frac{D_b}{t_{ges}}$	$[R_{eff}] = 1 \text{ bps}$

Signalstufen V ; Anzahl der möglichen annehmbaren Werte eines disk. Signals pro Schritt
 Zeit t_{ges} ab Sendestart einer Datenmenge D_b bis zum vollständigen Empfang, abhängig von verwendeten Protokollen

5. Leitungstheorie

Leitungstheorie relevant für $l \geq 0, 1 \lambda$

5.1. Definitionen

Leitungslänge l mit $[l] = \text{m}$

Belagsgrößen: R', L', G', C' als Widerstands-, Induktivitäts-, Ableitungs-, Kapazitätsbelag
 Bsp: $R = R' \cdot l$ mit $[R'] = \frac{\Omega}{\text{m}}$

$$\text{Wellenimpedanz } Z_L = \sqrt{\frac{(R' \cdot j\omega L')}{(G' \cdot j\omega C')}} = \frac{\Omega}{\text{m}}$$

Wellenlänge λ mit $[\lambda] = \text{m}$

Ausbreitungsgeschwindigkeit $v = \lambda \cdot f$ mit $[v] = \text{m/s}$

$$\text{Ausbreitungskonstante } \gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' \cdot j\omega L')(G' \cdot j\omega C')}$$

$$\text{mit } [\gamma] = \frac{1}{\text{m}}$$

5.2. Leitungsmodell

5.3. Formeln

6. Wellen und Antennen

Indizes: E(empfänger), i(isotroper Kugelstrahler), r(adius), S(ender)

6.1. Poynting-Vektor

Poynting-Vektor \vec{S} ist Vektor der Leistungsflussdichte mit $[S] = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

$$\vec{S}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y, z, t) \times \vec{H}(x, y, z, t)$$

Für harmonische Zeitvorgänge und EM-Wellen ($\vec{E} \perp \vec{H} = \frac{\pi}{2}$) gilt:

$$\vec{S} = S = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{H}^* = \frac{1}{2} \vec{H}^2 Z_F = \frac{1}{2} \frac{Z_F}{E^2} \text{ mit } E, H \in \mathbb{C}$$

Wellenwiderstand im Vakuum $Z_F = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 376, 73 \Omega$

$$S_i = |\vec{S}| = \frac{P_S}{4\pi r^2}$$

$$\text{Richtfaktor } D_i = \frac{S_{r,max}}{S_i} = 4\pi r^2 \frac{S_{r,max}}{P_S}$$

i.d.R. angegeben als $D_{i,log} = 10 \log D_i \text{ dBi}$

Antennengewinn $G = \eta D_i$ i.d.R. angegeben in dB

Antennenwirkfläche $A_W = \frac{\lambda^2}{4\pi} G$ mit der Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{f}$

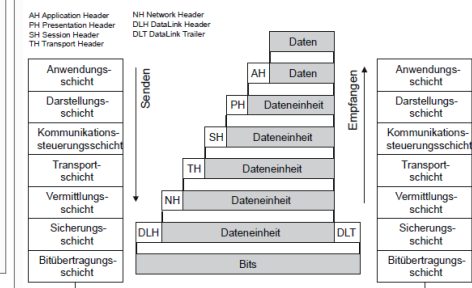
Bsp. Empfangs- und Sendeanenne im Abstand r zueinander:

$$P_E = P_S \cdot G_S \cdot G_E \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2$$

7. OSI-Modell (Open-System-Interface)

Ein- und Entkapselung der Daten in den 7 OSI-Schichten

Einkapselung von Daten



Beispiel-Trace und Header-Verkapselung:

8. Zugriffsverfahren, Sicherungsschicht

8.1. Definitionen

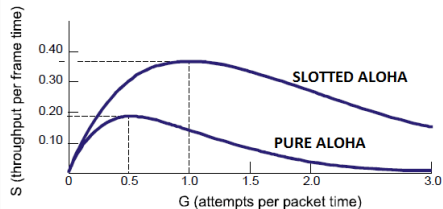
Bezeichnung	Symbol	Einheit
Paketgröße in bit	D_P	$[D_P] = 1\text{bit}$
Rahmenzeit für ein Paket	$\tau = \frac{D_P}{R_b}$	$[\tau] = 1\text{s}$
Signallaufzeit (transmission time)	t_t	$[t_t] = 1\text{s}$
Round-Trip-Time/-Delay	$\begin{matrix} RTT & = \\ RTD & = \end{matrix}$	$[t_t] = 1\text{s}$
durchschnittliche Paketsende-Rate	λ	$[\lambda] = 1\text{Hz}$
Input, zu sendende Pakete	I	$[I] = 1$
Kanalauslastung / Gesamt Übertragungsversuche	$G = \lambda \cdot \tau$	$[G] = 1$
Throughput, kein Konflikt	$\begin{matrix} S, \text{ ideal } S = \\ G \end{matrix}$	$[S] = 1$

Bei keinen verlorenen Pakete gilt $I = S$
Anzahl Übertragungsversuche bzw. Kanalauslastung $G = \lambda \cdot \tau$
Anzahl erfolgreich übertragener Pakete pro Rahmenzeit S , ideal $S = G$

8.2. Zugriffsverfahren

Ziel: Medienzugangskontrolle durch Paket-Kollisionsvermeidung und -entdeckung

Datendurchsatz bei ALOHA-Systemen



Pure ALOHA Zufällige Sendung von Paketen durchschnittlich alle $\frac{1}{\lambda}$ mit Paketen der zeitlichen Rahmenlänge τ

Potentielle Kollisionszeit $= 2\tau$
 $S = G \cdot e^{-2G}$ mit $S_{max}(G = G_{max} = 0,5) = 0,184$
Slotted ALOHA Zufälliges Senden von Paketen durchschnittlich alle $\frac{1}{\lambda}$ zu Beginn eines Zeitslots mit Paketen der zeitlichen Rahmenlänge τ

Potentielle Kollisionszeit $= \tau$
 $S = G \cdot e^{-G}$ mit $S_{max}(G = G_{max} = 1) = 0,368$

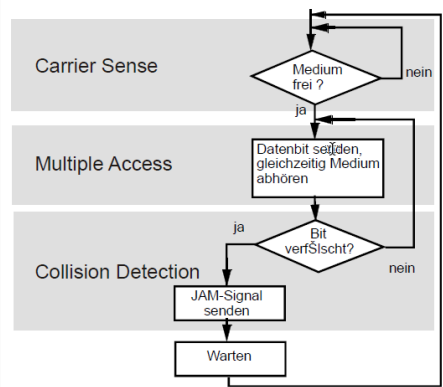
1-persistent CSMA (Carrier Sense Multiple Access)
regelmäßige Überprüfung auf freien Kanal, wenn frei, dann Paketsendung mit Wahrscheinlichkeit 1

Non-persistent CSMA (Carrier Sense Multiple Access)
unregelmäßige Überprüfung auf freien Kanal, wenn frei, dann Paketsendung mit Wahrscheinlichkeit 1

p-persistent CSMA (Carrier Sense Multiple Access)
regelmäßige Überprüfung auf freien Kanal, wenn frei, dann Paketsendung mit Wahrscheinlichkeit p

CSMA/CD (Carrier Sense Multiple Access / Collision Detection)
Bestimmung Ethernet: Min. Nachrichtenlänge > Max. Konfliktdauer oder ev. künstl. Nachrichtenverlängerung mit Padding Bits

CSMA/CD beim Ethernet



8.3. Sicherungsschicht

Stop and Wait

Senden eines Pakets, Warten auf Bestätigung (ACK), Senden des nächsten Pakets, usw.

$$R_{eff} = \frac{D_p}{\frac{D_p}{R_b} + 2t_t}$$
 wenn t_t für Hin- und Rückweg gleich.

Pipelining

Fenstergröße D_W in bits bestehend aus n Paketen

Bestätigung von Paket 1 muss ankommen, bevor die Fenstergröße in bits versendet wurde, damit keine Wartezeiten anfallen.

Fall 1 (ideal): Für $\frac{D_W}{R_b} \leq \frac{D_P}{R_b} + 2t_t$

gilt: $R_{eff} = R_b$

Fall 2 (Wartezeiten): Für $\frac{D_W}{R_b} < \frac{D_P}{R_b} + 2t_t$

$$R_{eff} = \frac{D_W}{\frac{D_W}{R_b} + 2 \cdot t_t}$$

Go-back ohne Puffer

Sender überträgt, wenn nach Senden eines Pakets und Verstreichen eines Timeout-Intervall kein ACK für das Paket einging, sämtliche Daten ab dem unbestätigten Rahmen neu.

Go-back-n mit Puffer

Genauso wie ohne Puffer, nur das nach Erhalt des ACK für das erneut gesandte Paket beim ersten noch nicht gesendeten Paket weiter gesendet wird.

Selective repeat Bei Nichtübertragung eines Pakets wird nach Timeout-Intervall nur das nicht korrekt übertragene Paket neu gesandt, alle weiteren werden gepuffert.

HDLC (High Level Data Link Control)

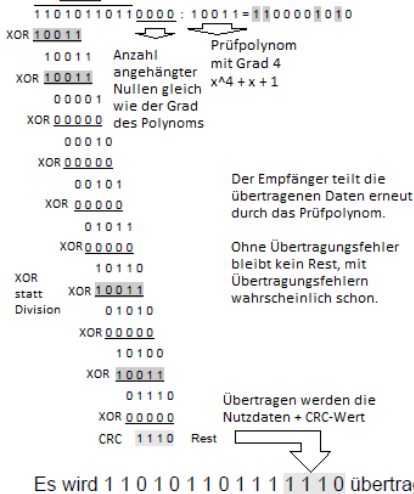
HDLC-Rahmenformat

Flag	Adresse	Steuerfeld	Nutzdaten	CRC	Flag
8 Bit	8	8 oder 16	variabel	16 oder 32	8

01111110; Bit stuffing (Bitstopfen) um Flag eindeutig zu halten

CRC Cyclic Redundancy Check

CRC-Beispiel



9. Codierung

Komprimierung: Falls Bitstrom nicht gleichverteilt und mit Gedächtnis
Maximale Kompression: Bits gleichverteilt, ohne Gedächtnis
Entropie: kein Code kann für Z eine geringere mittlere Codewortlänge finden als $H(z) = \sum P(z) \text{ld} \left(\frac{1}{P(z)} \right)$

9.1. Kompression

Kleiner Verlust bei unkodierten Bitstrom. Großer Gewinn bei Kodierung.
Bsp: Feste Blocklänge mit Statusbit am Anfang: Kodiert/Unkodiert

9.2. Digitale Quellencodierung (Kompression)

Arten von Kodierern:

Verteilung Bekannt: Huffman Code, Morse, Arithmetic

Universal: Lempel-Ziv (ZIP), PPM, BWT(bZip)

Transform: Fouriertransformation (JPG,GIF,PNG,MP3)

9.3. Kanalcodierung

Single-Parity-Check: 1 Bit pro 2 bit zusätzlich: $\text{XOR}(x_1, x_2)$
Daraus ergibt sich eine Effizienz von $\frac{2}{3}$

FEC: Forward Error Correction liefert Fehlererkennung und Korrektur.

Beispiele: Paritätsbit, CRC, Reed-Solomon-Codes, LDPC, Polar Codes

9.4. Informationsgehalt und Entropie

Info vom Symbol s_i : $I_i = -\log_2 P(X_Q = s_i) = -\log_2 p_i$

$$\text{Entropie von } X_Q: H(X_Q) = E[I] = - \sum_{i=0}^{M-1} p_i \log_2 p_i \left[\frac{\text{bit}}{\text{Symbol}} \right]$$

$$\text{Mittlere Codewortlänge } \bar{l} = E[l] = \sum_{i=0}^{n-1} p_i l_i$$

Die minimale mittlere Codewortlänge $\bar{l} \geq H(x_Q)$

9.5. Hamming-Code(N,n)

N Nachrichtenbits mit $N = 2^k - 1 = n + k$

n Datenbits

k Paritybits

9.6. Huffman-Code

10. Lineare, digitale Modulation

10.1. Allgemeines

Informationsfluss:

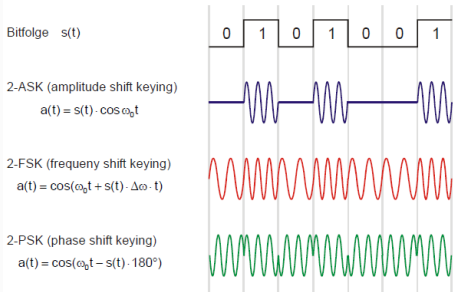
Info-Quelle -> Codierung -> Modulation -> Kanal -> Demodulation -> Decodierung -> Info-Senke

10.2. Modulationsarten

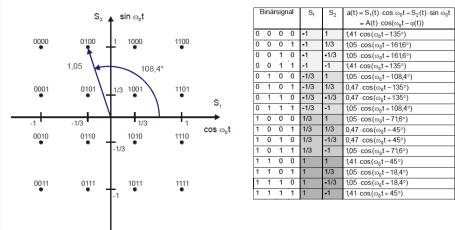
Amplitudenmodulation ASK
Frequenzmodulation FSK (Winkelmodulation)
Phasenmodulation PSK (Winkelmodulation)
Quadraturmodulation QAM

Modulation mit Sinusträger: $a(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_0 t - \phi(t))$ Amplitudenmodulation wirkt sich nur auf $A(t)$ aus
Winkelmodulation wirkt sich nur auf $\phi(t)$

Tastung eines Sinusträgers



Trägerzustände der 16 QAM



Spread Spectrum durch Direct Sequence (DS) oder Frequency Hopping (HS)

Schützt vor Schmalbandstörern (Militär) und frequenz-selektives Fading (Mobilfunk)

10.3. On-Off Keying (OOK)

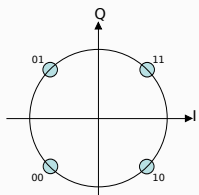
Intensitätsmodulation mit $b = 1$ (Laser an oder aus)

Mittlere Energie pro Symbol: $E_s = \frac{A_{on}^2}{2}$

10.4. Amplitude Shift Keying (M-ASK)

Für M Stufen mit Abstand Δ gilt: $E[D_I^2] = \frac{\Delta^2(M^2-1)}{12}$

10.5. Phase Shift Keying (PSK)



$$d_I^2 + d_Q^2 = r^2 \quad (\text{meist } r = 1)$$
$$E_s = E[D_I^2 + D_Q^2] \int_0^T |g_s(t)|^2 dt$$

Offset: verhindert harte Übergänge (Nicht durch Null)
Gray-Codierung zwischen benachbarten Symbolen: Fehler in der Symbolerkennung hat nur geringe Bitfehler

10.5.1. DPSK

Differentielle binäre Phasenmodulation

0: Phase bleibt gleich, 1: Phase ändert sich

10.6. Quadraturamplitudenmodulation (M-QAM)

Für M Stufen und Abstand Δ : $E[D_I^2 + D_Q^2] = \frac{\Delta^2(M-1)}{6}$

11. Weiteres, IP, etc.

11.1. IP-Adressen

$IP-Adresse = Netzwerkadresse + Hostadresse$

IP-Adresse UND Netzwerkmaske = Netzwerkadresse inkl. vorangestellte(s) Bit(s) für die Adressklasse

Genormte Länge von 32 bit für eine IP-Adresse

Schreibweise meist in 4 Oktett-Form mit 4 durch Punkte getrennte dezimale 8-Bit-Zahlen (0...255)

Klasse	führende Bits	Wert des 1. Bytes	Bits für Netz-adresse	Bits für Host-adresse	max. Rechner-zahl
A	0	1 - 126	7	24	ca. 16 Mill.
B	10	128 - 191	14	16	ca. 65000
C	110	192 - 223	21	8	ca. 250
D	1110	224 - 239	Multicast (Hostgruppe): 28 Bits		
E	1111	reserviert für Forschungszwecke			

Localhost = 127.0.0.1

Netzwerkadresse, alle bits der Hostadresse sind 0

Broadcastadresse, alle bits der Hostadresse sind 1

Subnetting

Unterteilung eines Klasse A-, B- oder C-Netzes in Subnetze

Die Subnetzmaske unterteilt die Bits für die Host-Adresse in eine Subnetzwerkadresse und die eigentliche Rechneradresse.

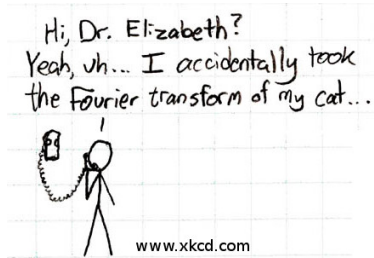
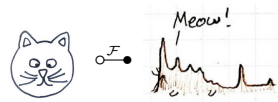
$IP-Adresse = Netzwerkadresse + Subnetzwerkadresse + eig. Rechneradresse$

IP-Adresse UND Subnetzmaske = Netzwerkadresse + Subnetzadresse inkl. vorangestellte(s) Bit(s) für die Adressklasse

11.2.

11.3.

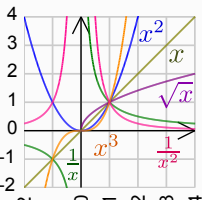
Auch wichtig:



Eigene Notizen: $\Phi \Xi$

12. Mathematik

12.1. Polynome $P(x) \in \mathbb{R}[x]_n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ vom Grad n



Gerade durch Punkt $P(x_0, y_0)$:
 $y = m(x - x_0) + y_0$

Quadratisch: $y = ax^2 + bx + c$
Mitternachtsformel für Nullstellen:
 $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

12.2. Exponentialfunktion und Logarithmus

$a^x = e^{x \ln a}$ $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ $\ln x \leq x - 1$

$\ln(x^a) = a \ln(x)$ $\ln(\frac{x}{a}) = \ln x - \ln a$ $\log(1) = 0$

12.3. Sinus, Cosinus $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\pi$	π	$1\frac{1}{2}\pi$	2π
φ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	0

Additionstheoreme

 $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$ $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ $\sin(x) = \tan(x) \cos(x)$

Stammfunktionen

 $\int x \cos(x) dx = \cos(x) + x \sin(x)$ $\int x \sin(x) dx = \sin(x) - x \cos(x)$ $\int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x) \cos(x))$ $\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x) \cos(x))$ $\int \cos(x) \sin(x) dx = -\frac{1}{2} \cos^2(x)$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

12.4. Integralarten

Partielle Integration: $\int u w' = u w - \int u' w$
Substitution: $\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(t) dt$

$F(x) - C$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1} x^{q+1}$	x^q	$q x^{q-1}$
$\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}$	\sqrt{ax}	$\frac{a}{2\sqrt{ax}}$
$x \ln(ax) - x$	$\ln(ax)$	$\frac{a}{x}$
$\frac{1}{a^2} e^{ax} (ax - 1)$	$x \cdot e^{ax}$	$e^{ax} (ax + 1)$
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x \ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\text{Si}(x)$	$\text{sinc}(x)$	$\frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$
$-\ln \cos(x) $	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

$\int e^{at} \sin(bt) dt = e^{at} \frac{a \sin(bt) + b \cos(bt)}{a^2 + b^2}$ $\int x e^{ax^2} dx = \frac{1}{2a} e^{ax^2}$ $\int t^2 e^{at} dt = \frac{(ax-1)^2 + 1}{a^3} e^{at}$

2 ¹	2 ²	2 ³	2 ⁴	2 ⁵	2 ⁶	2 ⁷	2 ⁸	2 ¹⁶
2	4	8	16	32	64	128	256	65536

13. Geometrie $a^2 + b^2 = c^2$

Strahlensatz:
 $a : b = c : d$ $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{e}{f}$

Innenwinkelsumme im n -Eck: $(n - 2) \cdot 180^\circ$

Allg. Dreieck $\triangle ABC$ mit Seiten a, b, c und Winkel α, β, γ :

Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$

Sinussatz: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

Projektionssatz: $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$

Höhe $h_c = a \sin \beta = b \sin \alpha$ Fläche $A = \frac{1}{2} h_c c = \frac{1}{2} h_a a$
Schwerpunkt: $x_S = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)$ $y_S = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$

Rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit $\gamma = 90^\circ$ bei C

Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz: $h^2 = pq$

Kathetensatz: $a^2 = pc$

$a = c \sin \alpha = c \cos \beta = b \tan \alpha$

Pyramide mit beliebiger Grundfläche G **Zylinder/Prisma**

$V = \frac{1}{3} G \cdot h$ $V = G \cdot h$

SP: liegt auf h mit $y_S = h/4$ $M = U \cdot h$

Kreis: $A = \pi r^2$ $U = 2\pi r$
Kugel: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ $O = 4\pi r^2$
Kreissehne: $s = 2r \sin(\alpha/2)$

14. Stochastik

14.1. Der Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathbb{F}, P)
Ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathbb{F}, P) besteht aus

Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ **Ergebnis** $\omega_j \in \Omega$

Ereignisalgebra $\mathbb{F} = \{A_1, A_2, \dots\}$ **Ereignis** $A_i \subseteq \Omega$

Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \mathbb{F} \rightarrow [0, 1]$ $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Es gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit für A falls B bereits eingetreten ist:
 $P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Multiplikationssatz: $P(A \cap B) = P(A|B) P(B) = P(B|A) P(A)$

Erwartungswert: $E[X] = \mu = \sum x_i P(x_i) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x) dx$
Varianz: $\text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$
Standard Abweichung $\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}$

Covarianz: $\text{Cov}[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = \text{Cov}[Y, X]$

Binominalverteilung (diskret, n Versuche, k Treffer):
 $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ $\mu = np$ $\sigma^2 = np(1 - p)$

Korrelation ist ein Maß für den linearen Zusammenhang von Variablen

Kreuzkorrelation von X und Y :
 $r_{xy} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

14.2. Normalverteilung

PDF: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $x \in \mathbb{R}$

$E(X) = \mu$ Erwartungswert

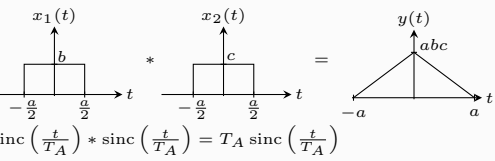
$\text{Var}(X) = \sigma^2$ Varianz

$\varphi_X(\omega) = e^{j\omega\mu - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$ Charakt. Funktion

15. Signale

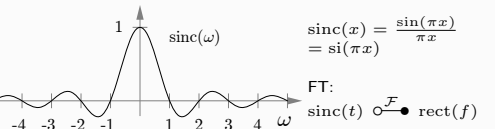
15.1. Faltung von Signalen

$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$



$\text{sinc}\left(\frac{t}{T_A}\right) * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_A}\right) = T_A \text{sinc}\left(\frac{t}{T_A}\right)$

15.2. sinc-Signal



$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$
 $\text{si}(\pi x)$
FT: $\text{sinc}(t) \circ^{\mathcal{F}} \bullet \text{rect}(f)$

16. Fouriertransformation

$x(t) \circ^{\mathcal{F}} \bullet X(f) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt$

Zeitbereich Frequenzspektrum

16.1. Eigenschaften der Fouriertrafo

Linearität: $\alpha x(t) + \beta g(t) \circ^{\mathcal{F}} \bullet \alpha X(f) + \beta G(f)$

Zeitverschiebung: $x(t - \tau) \circ^{\mathcal{F}} \bullet e^{-j2\pi f \tau} X(f)$

Frequenzversch.: $e^{j2\pi f_0 t} \circ^{\mathcal{F}} \bullet X(f - f_0)$

Vertauschung: $U^*(t) \circ^{\mathcal{F}} \bullet u^*(f)$

Stauchung: $x(ct) \circ^{\mathcal{F}} \bullet \frac{1}{|c|} X\left(\frac{f}{c}\right)$

Ableitung: $x^{(n)}(t) \circ^{\mathcal{F}} \bullet (j2\pi f)^n X(f)$

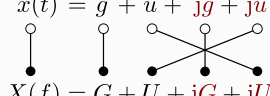
Integral: $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \circ^{\mathcal{F}} \bullet \left(\frac{1}{j2\pi f} \delta(f) - \frac{1}{j2\pi f}\right) X(f)$

Faltung: $(x * g)(t) \circ^{\mathcal{F}} \bullet X(f) \cdot G(f)$

Parseval: $\int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) \cdot u_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} U_1(f) \cdot U_2^*(f) df$

Energie: $E = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |U(f)|^2 df$

Zusammenhang zwischen geraden und ungeraden Signalanteilen:

$x(t) = g + u + jg + ju$  $X(f) = G + U + jG + jU$

$x(t) \circ^{\mathcal{F}} \bullet X(f)$ $x(t) \circ^{\mathcal{F}} \bullet x(-t) \circ^{\mathcal{F}} \bullet X(-f)$
Bei periodischen Signalen: Fourierreihen!

16.2. Wichtige Fouriertransformationen

Zeitfunktion	Spektrum

16.3. Weitere Paare

$f(t)$	$F(\omega)$	$f(t)$	$F(\omega)$
$ t^n $	$\frac{2n!}{(i\omega)^{n+1}}$	$\text{sinc}(\frac{t}{T})$	$T \text{rect}(fT)$
t^n	$2\pi i^n \delta^{(n)}(\omega)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(a+i\omega)^n}$
		$\exp(-\alpha t)$	$\frac{1}{i2\pi f + \alpha}$

17. E-Technik

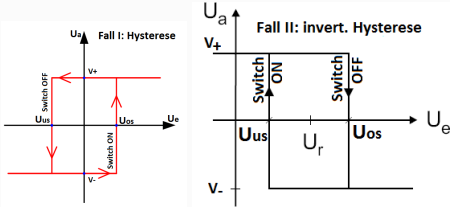
17.1. OP-Amp-Schaltung mit Hysterese

U_m als Spannung am Minus-Pin
 U_p als Spannung am Plus-Pin
 U_a als Ausgangsspannung
 U_e als Eingangsspannung
 $U_b = V_+$ als pos. Versorgungsspannung des Op-Amps.
 V_- als neg. Versorgungsspannung des OP-Amps U_{os} = Spannung der oberen Schaltschwelle
 U_{us} = Spannung der unteren Schaltschwelle

Positive Rückkopplung beim OP-Amp bedeutet:
Für $U_p > U_m$ gilt $U_a = V_+ = U_b$
Für $U_p < U_m$ gilt $U_a = V_-$ (meistens = GND)

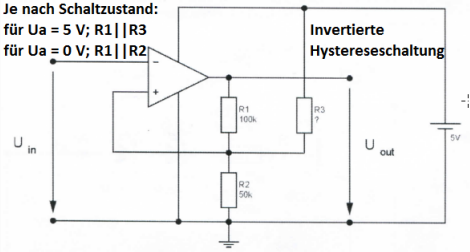
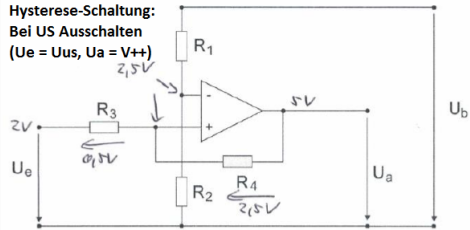
Annahme: Pos. Versorgungsspannung = U_b , neg. Versorgungsspannung = 0 V (GND)

1. Fallunterscheidung Hysterese (I) mit U_e am Plus-Pin und invertierte Hysterese (II) mit U_e am Minus-Pin
Fall I : $\lim_{U_e \rightarrow \infty} U_a = V_+$
Fall II : $\lim_{U_e \rightarrow \infty} U_a = V_-$



2. Bedingung an der unteren (US) und oberen (OS) Schaltschwelle ($U_m = U_p$) einstellen in Abhängigkeit der Art der Hysterese (I oder II):
(I) US: $U_e = U_{us}; U_a = V_+$
(I) OS: $U_e = U_{os}; U_a = V_-$
(II) US: $U_e = U_{us}; U_a = V_-$
(II) OS: $U_e = U_{os}; U_a = V_+$

Beispiele:



3. Beide Gleichung für die verschiedenen Schaltschwellen gleichsetzen und auflösen.

17.2. Transistor-Verstärkerschaltung

18. Naturkonstanten

Konstanten...

