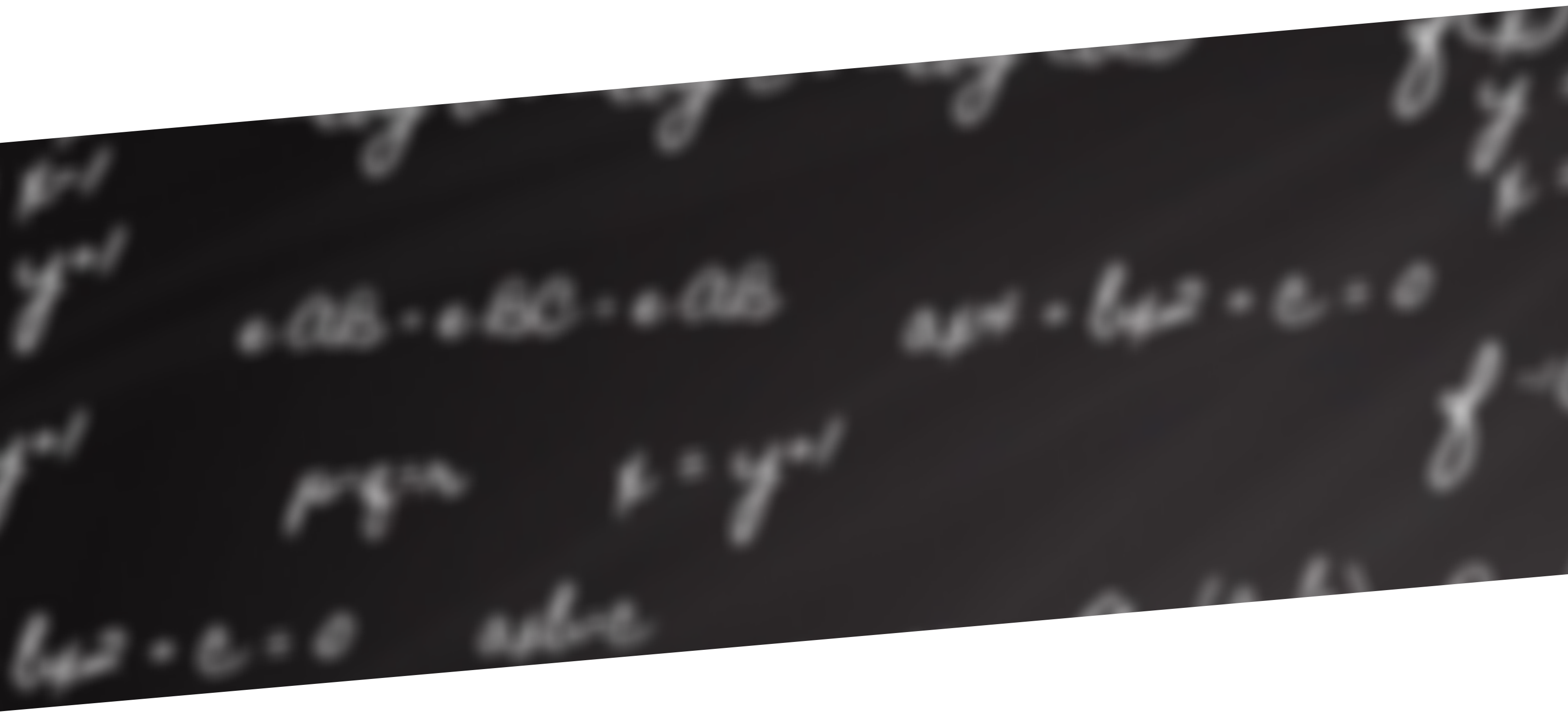
MATEMÁTICAS

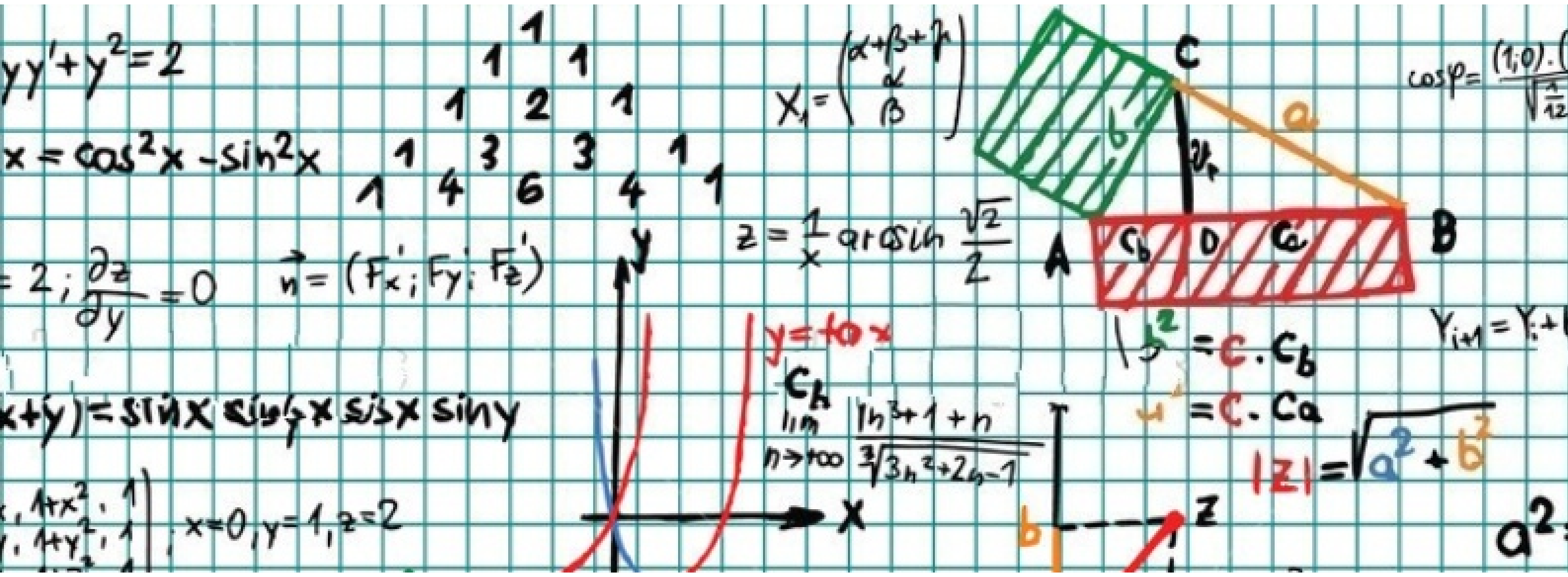
Unidad 4



Índice

Siempre es recomendable mirar el libro para contrastar la información de este librito, así como preguntar al profesor acerca de dudas y contenido.

1 Vectores: Definición, operaciones y combinación lineal



Definimos un vector como un segmento que tiene su origen en el punto A y su extremo en el punto B. A este, se le asocia su **módulo** (lo largo que es), su **sentido** y **dirección**. Así pues, cuando tienen misma direcciñon y sentido de les llama **equipolentes**.

Coordenadas

Definimos las coordenadas de un vector como las coordenadas del extremo menos su origen:

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

Así mismo:

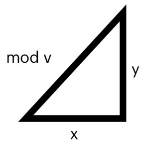
A = (2,5)
B = (8,7)

$$\overrightarrow{AB} = (8,7) - (2,5)$$

(6,2)

Módulo

Si sabemos (x, y) de un vector, podemos calcular su módulo con Tales:



$\vec{v} = (x,y)$

$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Normalizar:

$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Cuando su módulo es 1, este es **unitario**. Convertir en unitario es normalizar, para hacerlo hay que dividir x, y entre su módulo individualmente.

Vector opuesto

$$-\vec{u} = (-x,-y)$$

Así mismo:

$\vec{u} = (2,5)$

$-\vec{u} = (-2,-5)$

Suma de vectores

$\vec{u} = (2,5)$

$\vec{v} = (6,9)$

$\vec{u} + \vec{v} = (2,5) + (6,9)$

(8,14)

Multiplicación de vectores

$\vec{u} = (2,5)$ $\vec{u} = (x,y)$

$3\vec{u} = (6,15)$ $3\vec{u} = (3x,3y)$

Combinación lineal

"u" es combinación lineal de **"v" y "w"** si hay 2 números **(A y B)** que, si **multiplican "v" y "w"**, serán **"u"**.

$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$

Es decir:

(14,9) = 2(3,2) + 1(8,5)

(En este caso son dependientes)

Dependencia

Dos vectores son dependientes cuando son **proporcioneles**. Para saber esto, podemos dividir **"x^1" entre "x^2"** e **"y^1" entre "y^2"**; si son **iguales**, serán dependientes, de lo contrario, **independientes**.

Base

La base se define como el conjunto de **vectores** que pueden generar **cualquier vector** de ese **espacio**, y se encuentra formada por **i=(1,0)** y **j=(0,1)**.

Notas:

2 Producto escalar de vectores.

Producto escalar

Definimos el producto escalar de dos vectores ("u" y "v") como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{V}| \cdot |\vec{U}| \cdot \cos \alpha$$

Donde **α** es el ángulo entre **"u"** y **"v"**.

Por tanto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} \cdot \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Propiedades

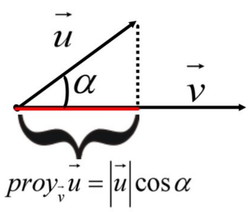
$$|\vec{u}|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$$

Si $\vec{u}=0 \; o \; \vec{v}=0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

Si $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

Proyección ortogonal

El producto escalar de dos vectores, gráficamente hablando, es el módulo de un vectir por la proyeccion ortogonal del otro sobre él.



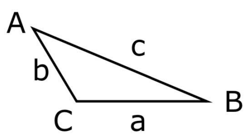
$$proy_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Ángulo de dos vectores

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Área de un triángulo

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\, ab\,\text{sen}C$$



Notas:

3 Aplicaciones de los vectores

Tres puntos alineados

Consideramos los puntos **A, B y C alineados** cuando **AB** y **AC** son **proporcionales**.

Punto medio

Dados los puntos A y B, obtenemos el punto medio de AB de la siguiente forma:

$$A(a_1, a_2) \quad B(b_1, b_2)$$

$$M_{\overline{AB}} = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right)$$

Rectas en el plano 4

Toda recta está compuesta por un punto (p) y un vector (v), que nos indica su dirección.

Vectorial

$$\vec{x} = \vec{p} + \alpha \vec{v} \Rightarrow (x, y) = (p_1, p_2) + \alpha (v_1, v_2)$$

Paramétrica

$$\begin{cases} x = p_1 + \alpha v_1 \\ y = p_2 + \alpha v_2 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Continua

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$$

General o implícita

$$Ax + By + C = 0 \quad \vec{v} = (-B, A)$$

Explícita

$$y = mx + n$$

Punto-pendiente

$$y - p_2 = m(x - p_1)$$