Cosas a recordar

$$\frac{D}{d} = c + \frac{R}{d} \quad \Big| \quad \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

un día vi una vaca vestida de uniforme

u = polinomio / logaritmo

dv = el resto

Ejemplo 1:

$$\int \underbrace{x}_{dv} \underbrace{\ln(x+1)}_{u} \, dx$$

Determinamos cual es dv y u

$$x \rightarrow \frac{x^2}{2}$$

$$\ln(x+1) \rightarrow \frac{1}{x+1} \, dx$$

Calculamos la derivada de u y la integral de dv

$$\ln(x+1) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x+1} \, dx$$

Aplicamos la fórmula y sacamos fuera de la integral los números sin incógnita

$$\frac{x^2 \ln(x+1)}{2} - \int \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{x+1} \, dx$$

Como el numerados es mayor que el denominador, aplicamos la fórmula que lo despeja

$$\frac{x^2 \ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+1} \, dx$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^2} & x+1 \\ \cancel{-x^2} \cancel{-x} & x-1 \\ \cancel{-x} & \\ \cancel{x} + 1 & \\ \cancel{-x} - 1 & \\ // & \end{array}$$

$D = x^2$

$d = x + 1$

$c = x - 1$

$r = 1$

$$x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{x^2 \ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2} \int x - 1 + \frac{1}{x+1} \, dx$$

$$\frac{x^2 \ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) + C \right)$$

Integramos con las fórmulas que ya conocemos

$$\frac{x^2 \ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) + C \right)$$

Arreglamos

Resultado:

$$\boxed{\int x \cdot \ln(x+1) \, dx = \frac{x^2 \ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) + C \right)}$$

Ejemplo 2 (doble):

$$\int x^2 \cdot 2^x \, dx$$

u $\quad$ dv

Determinamos cual es dv y u

$x^2 \to 2x$

$2^x \to \frac{2^x}{\ln(2)} \, dx$

Calculamos la derivada de u y la integral de dv

$$x^2 \cdot \frac{2^x}{\ln(2)} - \int \frac{2^x}{\ln(2)} \cdot 2x \, dx$$

Aplicamos la fórmula

$$\frac{x^2 \cdot 2^x}{\ln(2)} - \int \frac{2}{\ln(2)} \cdot x 2^x \, dx$$

Sacamos fuera de la integral los números sin incógnita

$$\frac{x^2 \cdot 2^x}{\ln(2)} - \frac{2}{\ln(2)} \left\{ \int x \cdot 2^x \, dx \right\}$$

u $\quad$ dv

$x \to 1$

$$x \cdot \frac{2^x}{\ln(2)} - \int \frac{2^x}{\ln(2)} \cdot \cancel{x} \, dx$$

$$x \cdot \frac{2^x}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)} \int 2^x \, dx$$

Repetimos los pasos anteriores

$$\frac{x^2 \cdot 2^x}{\ln(2)} - \frac{2}{\ln(2)} \left(\frac{x 2^x}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{2^x}{\ln(2)} \right)$$

Integramos con las fórmulas que ya conocemos

Resultado:

$$\boxed{\frac{x^2 \cdot 2^x}{\ln(2)} - \frac{2x 2^x}{(\ln(2))^2} + \frac{2}{(\ln(2))^2} \cdot \frac{2^x}{\ln(2)} + C}$$

Arreglamos

Ejemplo 3 (cíclico):

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx$$
$u \quad dv$

Determinamos cual es dv y u

$e^x \to e^x$

$\cos x \to \sin x \, dx$

Calculamos la derivada de u y la integral de dv

$$e^x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot e^x \, dx$$
$dv \quad u$

Aplicamos la fórmula

$e^x \to e^x$

$\sin x \to -\cos x \, dx$

Repetimos los pasos anteriores porque sigue dando multiplicación

$$e^x \cdot \sin x - \left(e^x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot e^x \, dx \right)$$

Aplicamos la fórmula

$$e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \cos x \, dx$$

Nos damos cuenta de que hemos llegado al un número idéntico al del enunciado

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx = I$$

Llamamos al enunciado I

$$I = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x - I$$

Cambiamos por I

$$2I = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x$$

Despejamos

$$I = \frac{e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x}{2} + C$$

Resultado:

$$\boxed{\int e^x \cdot \cos x \, dx = \frac{e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x}{2} + C}$$

Arreglamos