

“Optimización Minera de las leyes de corte basado en el Gradiente Reducido Generalizado”

Humberto Flores Páez // Correo: humberto.flores@gmail.com // Fecha: 02 de febrero del 2022.
Departamento de Ingeniería en Minas, Facultad de Ingeniería, Universidad de Santiago de Chile.

Resumen

El presente trabajo se basa en la creación de tres programas computacionales en el entorno de Python, los cuales son capaces de entregar una estrategia al consumo de reservas minerales que permiten obtener el máximo Valor Presente Neto para una determinada operación a cielo abierto basada en la venta del elemento metálico de Cobre. El primer programa obtiene la política óptima de leyes de corte, basada en el algoritmo clásico de Lane. Los últimos dos programas implementan el enfoque del Gradiente Reducido Generalizado; el primer programa llamado “GRG Iterativo” permite incrementar el valor numérico de la ley de corte obtenido de la solución clásica de Lane en aras de maximizar el VAN, mientras que el segundo programa denominado “GRG Multi Año” permite incrementar el valor del VAN obtenido con el enfoque clásico de Lane en un 6% aproximadamente, esto es gracias a la optimización de la política de leyes de corte, en la cual se busca aquella ley de corte que permite que el gradiente de la función matemática que regula el VAN sea lo más cercano a cero y esta búsqueda se hace año a año, actualizando los recursos minerales del rajo en función de su agotamiento, de forma adicional, cada uno de los 3 programas desarrollados permite que el usuario incorpore un costo de rehabilitación para el botadero de estériles, y además toma en consideración que si existe un excedente de concentrado que deba tratar la Fundición & Refinería, se crea un mercado intermedio para la venta de concentrados de cobre. La solución obtenida estará basada en parámetros económicos, técnicos y de capacidades referentes al elemento de interés y de la distribución del tonelaje en función de las leyes del mineral, considerando en todo momento tres etapas dentro del sistema minero; mina, Planta Concentradora y Fundición & Refinería.

Introducción

A lo largo de la historia de la minería, siempre ha existido la inquietud del minero de conocer qué proporción de lo que extrae, es considerado como un mineral y que parte es denominada como estéril, esto hoy en día es conocido como la política de leyes de corte, y ella influye en gran medida en los flujos de caja anuales y en el VAN de cualquier proyecto. Debido a la importancia que tiene esta política de leyes de corte, se vuelve imperativo encontrar alguna forma rápida, oportuna y programable para poder obtener esta ley de corte de la manera más eficaz posible y esto es viable a través de las herramientas computacionales existentes.

La idea detrás del proyecto es construir un algoritmo en un lenguaje de programación que permita encontrar la ley de corte óptima para cada uno de los periodos de la vida útil de una operación a cielo abierto, para esto, se empleara el algoritmo de Lane (Lane, 1988), el cual, permite identificar las diferentes leyes de corte teniendo en consideración una gran cantidad de parámetros económicos y técnicos que deben ser respetados, asumiendo un mercado de venta de metal de cobre y un mercado intermedio para la venta de concentrados, por lo cual existirán los procesos mina, planta concentradora y la refinería.

El entorno en el cual el algoritmo se desarrollará será mediante el lenguaje de programación Python (Python Software Foundation, 2021), el cual posee una escritura rápida, escalable y robusta, lo cual es perfecto para llevar a cabo una gran secuencia de iteraciones con múltiples ecuaciones, ideal para lograr algoritmos iterativos. Permite plasmar ideas, conceptos y encadenar algoritmos en pocas líneas de código. Además de que tiene a su disposición un variado entorno, con

múltiples librerías y accesos, las cuales permiten introducir información numérica y lógica, así como bases de datos a partir de archivos csv y xlsx, a través del módulo Pandas. Esto resulta muy eficaz para introducir la información proveniente de la curva tonelaje-ley del depósito, así como las capacidades de los procesos y los diferentes parámetros económicos que gobiernan el problema del consumo de reservas mineras.

El presente proyecto de investigación tiene por objetivo principal el desarrollo de un software computacional que sea capaz de encontrar la ley de corte óptima para poder hallar una estrategia al consumo de reservas mineras, incorporando herramientas matemáticas como el método del Gradiente Reducido Generalizado (GRG) que permitirá maximizar el valor del VAN, y obtener las leyes de corte óptima anuales y el plan de producción. Con la herramienta matemática del GRG, se creará un nuevo algoritmo que será capaz de buscar la ley de corte óptima a través de un enfoque diferente a como lo hace Lane, e incluso será posible establecer comparaciones entre estos dos algoritmos matemáticos a modo de encontrar aquel algoritmo que sea capaz de entregar el mejor valor presente neto de una determinada operación minera.

Un propósito adicional del presente estudio es la inclusión de un costo de remediación ambiental, el cual está representado por el costo que se incurre en la rehabilitación del espacio que ocupara a futuro el botadero minero, este espacio usualmente queda yermo y sin opción a que pueda ser ocupado en el futuro esto, debido a la propia composición química del material estéril, por lo anterior, se decidió incluir dentro del código de programación un costo que represente la acción reparadora que la empresa debe tener frente a este pasivo

ambiental, para transformar un botadero de estériles, en un espacio rico en vegetación y que pueda ser aprovechado por la naturaleza y las comunidades.

Optimización de las leyes de corte basadas en el programa “Algoritmo de Lane”

El algoritmo de Lane es un modelo matemático que permite encontrar una solución al problema del consumo de reservas minerales, tal que permita maximizar el valor presente de los flujos actualizados al momento inicial, para ello se debe encontrar una ley de corte específica que cumpla tal propósito (Ahmadi, 2018). La fortaleza del algoritmo es que considera la depreciación del dinero a lo largo del tiempo, por lo tanto, si consideramos un recurso mineral llamado “R” y asumimos que en un instante de tiempo T durante la vida de la mina, extraemos una porción “P” del recurso “R”, el beneficio obtenido actualizado al tiempo inicial será:

$$PV_P(t=0) = \frac{P}{(1+d)^T} \quad (1)$$

Y “W” será la porción del recurso “R” que faltará por extraer, donde el beneficio actualizado será:

$$PV_W(t=0) = \frac{W}{(1+d)^T} \quad (2)$$

Por lo tanto, la suma de la ecuación 1 y 2 será el valor presente neto:

$$V = PV_P + PV_W = \frac{P+W}{(1+d)^T} \quad (3)$$

Lo que hace Lane es realizar la suposición de que cuando el tiempo tiende a cero, se cumple:

$$(1+d)^T = 1 + T \cdot d \quad (4)$$

Reemplazando la ecuación 4 en 3, tenemos:

$$P + W = V + VTd \quad (5)$$

Pero el Valor Presente Neto será la diferencia entre la ganancia total menos la porción del recurso “R” que aun no se ha explotado (“W”).

$$VAN = P - VAN \cdot d \cdot T \quad (6)$$

Según Lane, para conocer el verdadero valor del VAN que maximiza esta función, debemos conocer el beneficio, la tasa de descuento y a su vez el mismo VAN, pero aquí es donde se produce una paradoja, ya que para hallar el VAN debemos conocer el VAN, por lo tanto, para solucionar esta contradicción haremos uso de la programación dinámica, donde asumiremos un $VAN_{inicial} = 0$ y a partir de la función “v”, donde:

$$v = I - C - d \cdot T \cdot VAN_k \quad (7)$$

Obtendremos cada uno de los aportes que realiza a esta función cada etapa que compone a la operación minera. La operación minera se compone de tres etapas o sistemas; mina, planta concentradora y fundición & refinación, donde el flujo de material es extraído desde la mina, después solo el material considerado como mineral es enviado a la planta concentradora, de esta etapa se obtiene el concentrado de cobre, el cual es enviado a la fundición & refinación, donde se obtiene

el metal fino de cobre, considerando como elemento mineral el cobre.

Cada una de estas etapas posee una capacidad limitada y diferente entre ellas, por lo que a cada etapa le tomará un tiempo diferente en procesar cada uno de estos flujos, el tiempo que necesita la mina será denominado como t_m , el que emplea la planta será t_c y el que requiere la fundición & refinación es de t_r . A partir de estos tres tiempos, se define el tiempo global de toda la operación minera, el cual corresponderá al tiempo máximo entre las tres etapas.

$$Tiempo\ Global = Max(t_m, t_c, t_r) \quad (8)$$

Expresando nuevamente la ecuación 7, tenemos la expresión del valor presente neto.

$$v = (s - r) \cdot Qr - Qm \cdot m - Qc \cdot c - h \cdot (Qm - Qc) - (f + Vd) \cdot T \quad (9)$$

La ecuación 9 dependerá del tiempo, cada una de estas variables corresponden a las expresadas en la Tabla A1, el tiempo está regulado por tres etapas diferentes, por lo que tendremos tres ecuaciones que muestran el aporte de valor presente según sea el tiempo, véase Tabla A2.

Las tres ecuaciones que regulan el aporte de valor económico de cada etapa, dependerá en gran medida del valor de la ley de corte que exista, por lo tanto, si asumimos que cada una de estas funciones depende de una ley de corte específica, definida como “g”, es posible encontrar el punto máximo de cada una de estas tres funciones de aporte del VAN, derivándolas con respecto a la cantidad de mineral procesado, e igualándolas a cero se obtienen las llamadas leyes de corte económicas definidas por Lane (ver Tabla A3), las cuales permiten hallar la ley de corte óptima para cada sistema maximizando el aporte de valor presente que entrega cada etapa. De la misma forma, existen las llamadas leyes de corte del balance que representan aquella ley de corte que hace igualar dos ecuaciones de aporte del VAN para cualquiera de las tres etapas, es decir, se obtiene la ley de corte del balance entre las etapas mina-planta “ g_{mc} ”, que es valor numérico de la ley de corte cuando ambas curvas de función de aporte del VAN se interceptan, la ley de corte “ g_{mr} ” que representa la ley de corte cuando la curva de valor de la mina se intercepta con la refinación y por último la ley de corte “ g_{cr} ” que será aquella ley de corte que muestra cuando el aporte de valor dado por la planta y la refinación son iguales (véase Tabla A4).

Para efectos de la presente investigación, se asume en primer lugar que la capacidad de la mina es ilimitada, por lo cual, el tiempo global jamás estará limitado por el tiempo en que la mina se demore en extraer el recurso mineral. Por otro lado, se decide incluir un mercado intermedio para la venta de concentrados de cobre, por lo que se solo se venderá dicho concentrado si el flujo de concentrado que debe fundir y refinar el sistema de Fundición & Refinería es mayor a la capacidad que posee este sistema para tratar dicha cantidad de concentrado y transformarlo a cobre refinado, es decir, todo el concentrado de cobre que no puede ser tratado en la unidad de Fundición & Refinación, será vendido como concentrado de cobre,

aportando un valor extra al negocio (ver Figura A1), definiremos la cantidad de concentrado como:

$$q_{conc} = \frac{Q_r - R}{ley\ del\ concentrado \cdot (1 - Perdida\ metalurgica)} \quad (10)$$

Por lo tanto, se tendrá la siguiente situación:

$$S = \begin{cases} Si\ Q_r - R > 0, Se\ vende\ concentrado\ de\ cobre. \\ Si\ Q_r - R \leq 0, No\ se\ vende\ concentrado\ de\ cobre. \end{cases} \quad (11)$$

Cabe destacar que en ambas situaciones descritas por la ecuación 11, siempre se venderá cobre refinado, independientemente si existe o no concentrado de cobre disponible para la venta. A partir de la adición de este nuevo mercado intermedio para concentrados de cobre, el tiempo global tampoco dependerá de t_r , ya que el flujo de concentrado que sale de la planta concentradora no estará limitado por la capacidad de la etapa de Fundición & Refinería (R).

Debido a que los flujos de toda la operación minera solo dependerán del tiempo de la planta concentradora t_c , la función de aporte del valor económico solo existirá para la planta. Debido a esto, existirá una única ley de corte optima dada por la siguiente ecuación:

$$g_{planta} = \frac{c + \frac{f + VAN_k \cdot d}{c} - h}{(s - r) \cdot y} \quad (12)$$

Y una única función que regulara el valor presente neto:

$$v_{planta} = \left\{ (s - r) * y * \bar{g} + h - c - \frac{f + Vd}{c} \right\} * Qc - m * Qm \quad (13)$$

La ecuación 12 incorpora el costo de rehabilitación del botadero minero, donde el termino VAN_k , corresponde al valor del VAN en una determinada iteración "k", donde para la primera iteración $k=1$, tendremos que el $VAN_{k=1} = 0$. Asumiendo esta primera solución de arranque o de inicio para el VAN, calculamos una ley de corte para la primera iteración con la ecuación 12, la cual la evaluamos en la expresión 13 para determinar el nuevo valor del VAN para la segunda iteración ($k=2$) y este nuevo valor del VAN ($VAN_{k=2}$) es reingresado a la ecuación 12 para determinar un nuevo valor de ley de corte, este proceso se hace de forma sucesiva hasta que el valor del VAN converja, lo que en programación se establece definiendo un error, el cual es definido por la siguiente ecuación:

$$\varepsilon = |VAN_{k+1} - VAN_k| \quad (14)$$

El algoritmo desarrollado dejara de iterar cuando se cumpla la siguiente condición:

$$\varepsilon \leq \varepsilon_{establecido} \quad (15)$$

Donde el $\varepsilon_{establecido}$ debe ser un numero pequeño, como por ejemplo 0,01.

Este procedimiento se hace para cada año, hasta consumir en su totalidad todos los recursos, de esta forma se obtendrá una ley de corte optima para cada año, obteniendo una colección de leyes de corte que corresponderá a la política optima de leyes de corte.

Optimización de las leyes de corte basadas en el método del Gradiente Reducido Generalizado

El gradiente reducido generalizado es un método matemático que permite encontrar la solución a un problema de optimización matemática cuyas restricciones son de naturaleza no lineales (Rao, 2009), la clave de este método es encontrar el valor numérico del gradiente de la función objetivo, cabe destacar que la función objetivo dependerá de varias variables, por lo tanto, el gradiente corresponderá a la derivada parcial evaluada en un determinado punto, tal que evaluando el gradiente en aquel punto, el valor del gradiente es cero o muy cercano a cero. La clave del algoritmo GRG es realizar sucesivas iteraciones hasta que el valor del gradiente será muy cercano a cero, esto nos asegura que nos encontramos en el punto de máximo o mínimo de la función objetivo.

Este método matemático es el empleado para resolver el problema del consumo de recursos minerales, ya que es un problema en el cual intervienen una gran cantidad de variables económicas y técnicas, además de que se presentan restricciones referentes a las capacidades de las etapas que componen la operación minera en su conjunto.

Optimización de leyes de corte usando el programa "GRG Iterativo"

Este nuevo método matemático permite obtener una solución al problema del consumo de reservas minerales. Esto se realiza potenciando la solución encontrada por el algoritmo de Lane, adicionando un factor optimizante " σ " a la ecuación de ley de corte optima definida por Lane (ecuación 12), de esta forma se genera una nueva ecuación que regula la ley de corte optima:

$$g_{optimo} = \frac{c + \frac{f + VAN_k \cdot d}{c} - h + \sigma}{(s - r) \cdot y} \quad (16)$$

Donde σ es el llamado factor optimizante, la idea del programa es desarrollar el mismo "Algoritmo de Lane", pero adicionándole un valor numérico extra llamado " σ ", el cual ira incrementando la ley de corte obtenida a través de la solución del algoritmo de Lane, para determinar si existe un valor numérico positivo de ley de corte " g_{opt} " que sea mayor que la ley de corte optima entregada por el anterior algoritmo de Lane y que al mismo tiempo este nuevo valor de ley de corte " g_{opt} " sea capaz de aumentar el VAN total entregado por el enfoque de Lane.

Para llevar a cabo lo anterior, se crea un vector que corresponderá a todo el conjunto de valores que tomara la variable " σ " (ecuación 17).

$$\sigma = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4;; 9,7; 9,8; 9,9; 10] \quad (17)$$

Se comienza por el valor 0 hasta llegar al 10, con pasos numéricos de 0,1, es decir, se evalúa todo el Algoritmo de Lane con la ecuación 16 asignándole un valor a σ de 0 que corresponderá a la iteración $k=1$, que para este caso en específico será el mismo "Algoritmo de Lane" y se procederá a calcular el valor del VAN hasta consumir la totalidad de los recursos mineros, de esta forma obtenemos un valor del VAN para la primera iteración ($VAN_{k=1}$), después el programa guardara la

información del plan minero resultante y de su VAN asignándole como iteración $k=1$, posteriormente, se hace variar el valor de la variable σ , por lo que ahora σ es igual a 0.1 y este valor numérico se agrega en la ecuación 16 para obtener una nueva ley de corte optima y con ello un nuevo plan minero (solución) usando el mismo algoritmo de Lane, obteniendo un nuevo valor numérico del VAN con la ecuación 13 ($VAN_{k=2}$), donde el programa guardara esta nueva solución, de esta forma el programa crea múltiples planes mineros (soluciones), donde a cada plan minero le corresponderá un valor específico de VAN y de σ , donde para cada iteración el valor de σ cambiara a través de la siguiente ecuación:

$$\sigma_{iteracion\ i} = \sigma_{iteracion\ i-1} + \text{paso} \quad (18)$$

El programa es capaz de almacenar, con un vector definido desde el 0 hasta 10 y con paso de 0,1 un total de 100 VANES, donde cada uno de esos VANES, corresponde a un plan minero en específico y de toda esa colección de planes mineros, el programa escogerá aquel plan minero o solución que reporte el mayor valor del VAN. De esta forma este nuevo programa es capaz de potenciar el valor numérico de la ley de corte, al mismo tiempo que incrementa el valor del VAN para un determinado proyecto minero.

Optimización de leyes de corte usando el programa “GRG Multi Año”

En aras de poder llevar el método matemático del Gradiente Reducido Generalizado al límite y poder usar todo el poder de procesamiento computacional que permite el entorno de Python, se decide construir un programa similar al “GRG Iterativo”, denominado como “GRG Multi Año”, el cual se basara en probar cada valor numérico de leyes de cortes dentro de un intervalo definido, con un paso pequeño con el objetivo de encontrar aquella ley de corte que permita obtener el máximo valor del VAN (Nieto y Bascetin, 2006) (ver Figura A2), por lo cual, se evaluara una gran cantidad de valores numéricos de leyes de cortes en la función matemática que regula el beneficio económico anual (ecuación 19).

$$\text{Beneficio Anual} = s \cdot q_r + p_{conc} \cdot q_{conc} - (c + m - h) \cdot Q_c - (h) \cdot Q_m - (f) \cdot \frac{Q_c}{c} \quad (19)$$

El nuevo programa comenzara calculando una serie de valores de leyes de cortes, definidos por la siguiente ecuación.

$$g_{Multi\ Año} = \frac{c-h+RO}{(s-r) \cdot y} \quad (20)$$

Donde “RO” es el Nuevo Factor Optimizante y corresponderá a un vector que comenzará desde el valor 0 hasta llegar al 30, con pasos de 0,01.

Para la primera iteración, el valor de RO es de cero, por lo que la ley de corte es exactamente igual a la ley de corte marginal, una vez calculado el valor de esta ley de corte, el programa calculara el valor del beneficio anual con la formula 19 y posteriormente es capaz de obtener el valor del VAN con la expresión 21:

$$VAN = \sum_{i=0}^{Tiempo\ max} \frac{\text{beneficio anual}}{(1+d)^i} \quad (21)$$

Una vez se obtenga el valor del VAN para la primera iteración, el programa guardara este valor del VAN y procederá a calcular la ley de corte cuando “RO” sea igual a 0,01, por lo que se obtendrá una nueva ley de corte con la ecuación 20 para la segunda iteración ($k=2$) con este valor se calcula el beneficio anual y el VAN que será el VAN correspondiente a la iteración $k=2$, de esta forma el programa seguirá realizando una serie de iteraciones hasta completar todo el vector definido para “RO”.

$$RO = [0; 0,01; 0,02; 0,03; \dots; 29,98; 29,99; 30] \quad (22)$$

De esta forma, se evaluarán un total de 3001 leyes de cortes diferentes, y se escogerá aquella ley de corte que permita obtener el máximo valor del VAN. Este procedimiento se realiza año a año, hasta completar el agotamiento de los recursos minerales.

El hecho de tener que evaluar toda una colección de leyes de cortes en la ecuación 19 presenta una gran ventaja, y es que nos permite encontrar una solución más exacta a la “verdadera solución” y también el algoritmo permite entregar un determinado tipo de solución, dependiendo de lo que desee el usuario del programa, ya que una vez que obtengamos para cada año un conjunto de valores numéricos de leyes de cortes y a cada ley de corte esta asignado un valor del VAN, podemos escoger la ley de corte que hace maximizar el VAN o podemos escoger la ley de corte que hace maximizar el VAN, pero con la restricción de mantener de forma constante el movimiento de materiales o movimiento mina, de esta forma, se obtendrán dos variantes para el mismo programa “GRG Multi Año”, ya que existirá un factor optimizante llamado “RO”, que hace variar e incrementar la ley de corte marginal, aumentándola hasta un determinado valor de ley de corte optima, la cual permite obtener el máximo valor del VAN o obtener el mayor valor posible del VAN con la restricción de que el movimiento mina sea constante. Esta última variante o modalidad del programa se realiza obteniendo para el primer año la ley de corte optima a través de la búsqueda y evaluación del vector “RO” en la ecuación 20 que permite hallar el máximo valor del VAN, y para los demás años, la ley de corte deberá tener el mismo valor numérico que el del primer año, de esta forma se asegura que la política de leyes de corte es constante a lo largo del tiempo, lo que hace un movimiento mina constante, este proceso se realiza hasta el agotamiento de los recursos minerales, por lo que para esta ultima variante solo se debe buscar para el primer año el valor específico de “RO” que hace máximo el VAN, y ese valor de “RO” se debe dejar como constante para todos los demás periodos a futuro (ver Figura A3).

Análisis y Resultados

Con el fin de analizar y comparar la solución minera que reportan cada uno de los tres programas desarrollados en el entorno de Python, se decide incorporar una base de datos ficticia, la cual posee su propia distribución de recursos minerales, la cual posee un único elemento mineral que será el Cobre y será llamada “Esmeralda”, la cual se encuentra definida por la Tabla A5 además de contar con parámetros económicos y técnicos son los definidos por la Tabla A6.

Cabe destacar que los recursos minerales de “Esmeralda” obedecen a una distribución del tipo logarítmica decreciente, característica de los pórfidos cupríferos en Chile, lo que hace el estudio mas realista. Del mismo modo, se adicionan a los programas una serie de variables económicas como lo es el precio del cobre, tasa de descuento, precio de venta del concentrado de cobre el cual se encuentra definido por la siguiente ecuación:

$$P_{conc} = s \cdot ley_{conc} \cdot FURE - (TC + RC + Otros) \quad (23)$$

Donde:

ley_{conc} : Ley de cobre contenida en el concentrado en %.

FURE : Recuperación asociada a la pérdida del proceso de fundición y recuperación.

TC : Cargos de Tratamiento.

RC : Cargo de Refinación.

Otros : Otros cargos asociados a impurezas o castigos.

Para efectos de la presente investigación, se ha definido que el valor del TC sea de 126 usd/TMS y el del RC sea de 12,6 usd/lb, estos valores son obtenidos a través de la investigación de Wood Mackenzie (Enami y Comisión Presidencial, 2016) el cual establece que estos son los costos en el largo plazo usando una metodología del precio incentivo que asegura una rentabilidad del 12% para una nueva empresa de fundición y refinación China con tecnología del mismo país. También se ha decidido a modo de simplificación del problema que el concentrado de cobre es puro, por lo cual, no posee impurezas asociadas a elementos penalizables como el Arsénico. Se incorporará además la deducción metalúrgica, la cual esta presente en la ecuación 23 a través del termino FURE, que representa la recuperación del metal fino de cobre a través de la etapa de Fundición & Refinación, esta etapa posee una pérdida llamada “pérdida metalúrgica”, donde el valor promedio de esta pérdida para concentrados que poseen un 30% de cobre es del 3.5% (Comisión Chilena del Cobre, 2021), por lo tanto, este ultimo valor es el asumido como pérdida metalúrgica, por lo que el parámetro FURE es de un 96.5%.

Inserción del costo de rehabilitación del botadero minero

Con la finalidad de que los programas desarrollados sean capaces de entregarle al usuario una solución lo más cercana a la realidad del problema minero, se decide incorporar un costo asociado a la futura remediación medioambiental que debe tener un botadero de estériles, ya que la presente investigación aborda la problemática sobre una operación minera a rajo abierto.

Para lograr tal propósito, se asignará un costo denominado como “h”, el cual representara los usd que se deben gastar en las futuras labores de remediación medioambiental por cada tonelada de estéril que se extraerá desde el rajo y que será depositada en el botadero de estériles. Existen múltiples estudios que dan una aproximación al valor numérico de “h”, por ejemplo, en la mina invierno, este costo “h” es de 18204 usd/Ha (Martínez Valdéz, 2020) para una mina a cielo abierto de carbón y estudios australianos indican que este costo oscila

entre los 105.714 usd/Ha y los 84.571 usd/Ha para una situación de costos altos y bajos respectivamente (Lechner, Kassulke y Unger, 2016). El costo “h” usualmente es medido en las unidades de “usd/Ha”, pero para su incorporación a las ecuaciones que gobiernan el problema del consumo de recursos minerales se hace imperativo poder llevarlas a usd/ton de estéril.

Para poder llevar a cabo una correcta transformación de unidades para el costo “h”, se busca una relación entre la superficie que efectivamente se rehabilitara y la cantidad de tonelaje de estéril que el botadero es capaz de albergar, por lo que se define que el costo “h”, será calculado a través de la ecuación 24:

$$h \left[\frac{usd}{ton} \right] = h' \left[\frac{usd}{Ha} \right] \cdot R \left[\frac{Ha}{Mton} \right] \cdot 10^{-6} \left[\frac{Mton}{ton} \right] \quad (24)$$

Donde:

h : Costo de rehabilitación del botadero en usd/ton de estéril

h' : Costo de rehabilitación del botadero en usd/Ha.

R : Factor de Transformación en Ha/Millones de toneladas.

La idea detrás de la ecuación 24, es que el usuario pueda colocar cualquier valor de h, que se encuentre en usd/ton de estéril, pero como este costo es usualmente medido en usd/Ha, se debe conocer el valor del parámetro “R” que hace posible la transformación del costo “h”. Para lograr tal propósito se decide modelar una gran cantidad de botaderos mineros del tipo torta en el software Vulcan Maptek (Maptek Pty, 2016), donde se establece que el valor del factor “R” depende en gran medida del área basal del botadero, denominada como (“A”) y de la altura final (“H”) que posee el botadero minero, a su vez, la altura final dependerá de la altura de cada banco y del número de bancos que se desee construir, pero el problema se simplifica asumiendo que solo existirán dos variables “A” y “H”, las cuales hacen variar el valor de R. Se decide construir en Vulcan Maptek un total de 24 botaderos del tipo torta, segmentándolos en 4 casos, donde cada caso contenga 6 botaderos y para cada caso el valor de la altura es fijo, pero el área sea variable, los resultados de la modelación son los expuestos por la Tabla A7.

De los resultados obtenidos, se llega a que el valor del factor “R” es inversamente proporcional al área basal del botadero “A” y a la altura de este “H”, es decir, que mientras más grande sea la altura de un botadero, menor será la media del valor del factor “R” y a su vez, mientras mayor sea el área basal de un botadero, menor es el factor “R” (ver Figura A4). La razón detrás de que el factor “R” disminuya cuando crezca el área basal o la altura, es que al aumentar cualquiera de estas dos últimas variables, la cantidad de tonelaje que es capaz de albergar el botadero de estériles es mayor, pero la velocidad con la que crece el área superficial del botadero es menor en comparación a la tasa con la que aumenta el tonelaje, es por esta razón que el factor “R” decrece cuando cualquiera de las dos variables “área basal” o “altura” del botadero aumenta. El valor del factor “R” oscila aproximadamente entre 2,2 y 1,09. En aras de insertar de obtener un valor numérico para “h”, se escoge de forma arbitraria un botadero de 60 metros, para lo cual, el valor del promedio de “R” es de 1,5

Ha/Mton, y asumiendo un valor de h' de 18204 usd/Ha, se obtiene el valor de 0,0273 usd/ton de estéril.

La distribución “Esmeralda” en conjunto con los parámetros de la Tabla A6, representan la “información de entrada” que recibirán los tres programas desarrollados en el entorno de Python, el objetivo es que cada uno de estos tres programas reciban la misma información, con el objetivo de analizar las diferencias, limitaciones y fortalezas de cada uno de los algoritmos propuestos.

Soluciones de los tres programas desarrollados

El primer programa denominado como “Algoritmo de Lane” entrega una estrategia optima al consumo de recursos minerales, la cual es evidenciada en la Tabla A8 y Tabla A9, esta solución entrega un valor del VAN al año 1 de 1917,379 MUSD, en la cual, la política de leyes de corte obedece a un vector de leyes de corte decrecientes en el tiempo, con un total de 8 periodos (ver Figura A5), en donde, el tonelaje de materiales es decreciente a lo largo del tiempo, cumpliéndose el llenado de la planta en los 7 periodos de un total de 8, ya que en el ultimo se encuentra el “Ramp Down” del proyecto. También es posible evidenciar solo en los primeros 3 años existe un mercado de concentrados de cobre, ya que solo en estos años, la cantidad de concentrado que produce la planta concentradora es mayor a la cantidad que puede recibir la unidad de Fundición & Refinería.

El segundo programa “GRG Iterativo” logra obtener una solución diferente a la del primer programa, logrando obtener un VAN al año 1 de 1969,161 MUSD, con un vector de leyes de corte decrecientes en el tiempo (ver Tabla A10 y Tabla A11), logrando incrementar en VAN reportado por “Algoritmo de Lane” en un 2,7% aproximadamente. La respuesta de que este ultimo algoritmo logre un aumento del VAN con respecto al “Algoritmo de Lane”, está en la incorporación del factor optimizante “ σ ” en la ecuación 16, ya que esta variable es capaz de elevar los valores numéricos de las leyes de corte optimas reportadas por el “Algoritmo de Lane” (ver Figura A5), de esta forma, al incrementar los valores de la política de leyes de corte, el mineral que es enviado a planta posee una mayor ley media, a pesar de que exista una menor cantidad de mineral (producto de la elevación de las leyes de corte), este aumento en la ley media, hace que el contenido de cobre fino se incremente y aumente la cantidad de concentrado de cobre que puede venderse en un mercado intermedio, de esta forma, aumenta el beneficio anual y con ello también el VAN. De la misma forma, al elevarse la ley de corte, aumenta la exigencia de la planta concentradora, por lo que existe una menor cantidad de mineral disponible del recurso mineral “Esmeralda”, por lo tanto, la planta se demorara menos tiempo en procesar esta nueva cantidad de mineral, por lo que la vida de la mina se reduce a 7 periodos.

La solución obtenida con el último programa, denominado como “GRG Multi Año” logra una solución estratégica (ver Tabla A12 y Tabla A13) que alcanza un VAN al año 1 de 2037,035 MUSD, con un vector de leyes de cortes constante durante los primeros cuatro periodos hasta decaer en el quinto y sexto año (ver Figura A5). La clave de este

ultimo programa consiste en la incorporación del “Nuevo Factor Optimizante” llamado “RO” en la ecuación 20, el cual permite evaluar una gran cantidad de valores numéricos de leyes de cortes e ir evaluando ley por ley en la expresión del beneficio anual (ecuación 19) y calcular para cada ley de corte el valor del VAN, de esta forma el programa almacena para el primer año un conjunto de VANES y elige aquella ley de corte que logra maximizar el VAN. Este procedimiento se realiza año tras año, hasta consumir la totalidad de los recursos, por esta razón se logra que los valores numéricos que componen la política de leyes de cortes sean más grandes en comparación a los reportados por el “Algoritmo de Lane” y por el “GRG Iterativo”.

La razón por la cual el vector de leyes de corte se este algoritmo “GRG Multi Año” es constante a diferencia del vector de leyes de corte decreciente que reportan las soluciones del “Algoritmo de Lane” y “GRG Iterativo” (ver Figura A5), se halla en que el programa “GRG Multi Año” toma como solución de arranque la ley de corte marginal y en ningún momento toma la solución definida por Lane, en cambio el programa “GRG Iterativo” solo se basa en potenciar la solución definida por el “Algoritmo de Lane”, por lo que su solución de arranque es la propia solución del programa “Algoritmo de Lane”. El incremento en los valores numéricos que componen la política de leyes de cortes que entrega el programa “GRG Multi Año”, va de la mano con un aumento en la cantidad de concentrado de cobre vendido en el mercado intermedio, ya que para esta estrategia existen 4 periodos en los que se vende concentrado de cobre, esto es debido al aumento de la ley media producto del incremento en las leyes de cortes, lo que también hace que el recurso mineral sea consumido con una mayor rapidez ya que la cantidad catalogado como “mineral” del recurso “esmeralda” es menor, por lo que la planta empleara un menor tiempo en procesar esta menor cantidad de mineral, pero a su vez el tonelaje de material movido por la mina se incrementa ya que la cantidad de estéril crece ya que la razón estéril/mineral ha aumentado producto de la elevación en la política de leyes de cortes. El hecho de incrementar y potenciar los valores del vector “leyes de cortes”, hace que el programa “GRG Multi Año” logre aumentar el valor del VAN reportado por el “Algoritmo de Lane” en un 6,24%.

Como se logra evidenciar, los programas desarrollados bajo el enfoque del Gradiente Reducido Generalizado logran incrementar el valor del VAN, ya sea empleando cualquiera de los dos programas, pero en especifico el programa “GRG Multi Año”, logra potenciar al máximo los valores de las leyes de cortes, ya que ocupa una solución inicial diferente a la de los demás algoritmos. El hecho de que este ultimo programa sea capaz de encontrar la solución más cercana a la real, es gracias al uso de la capacidad de cálculo que posee el software Python en conjunto con la capacidad computacional, donde solo para el primer año este programa necesita de un total de 3001 iteraciones, en comparación al “Algoritmo de Lane”, el cual solo necesita alrededor de 20 iteraciones por año, esto ultimo hace que el “Algoritmo de Lane” a pesar de que su solución entregue un valor del VAN menor en comparación a los algoritmos basados en GRG, la ejecución del código del programa “Algoritmo de Lane” en el entorno

de Python sea bastante más rápida en comparación a los programas desarrollados bajo los algoritmos del tipo GRG, lo cual, es una ventaja importante del “Algoritmo de Lane”. Para acelerar el tiempo de ejecución de los programas basados en la metodología “GRG”, se usa una aplicación de editor de códigos de programación llamada “Visual Studio Code” (Microsoft, 2022), la cual permite aumentar la velocidad, con la cual, el entorno de Python ejecuta y lee las múltiples líneas de código que componen los programas, ya que esta aplicación maximiza el uso de la memoria RAM y GPU usada para correr los programas empleados en el ordenador, de esta forma, por ejemplo, para el programa “GRG Multi Año”, el uso de la herramienta “Visual Studio Code” ocupando en todo momento el lenguaje Python, permite correr el programa en aproximadamente 17 minutos, en comparación a las 2 horas y 15 minutos empleadas cuando solo se ocupa el interprete IDLE de Python, usando un procesador Intel Core i5, con una memoria RAM de 8 GB con Windows 10, ocupando en ambos casos la base de datos “Esmeralda” (Tabla A5) y los parámetros técnicos y económicos de la Tabla A6, por lo cual, la aplicación “Visual Studio Code” permite disminuir el tiempo de procesamiento de los programas basados en “GRG” en un 87,4% aproximadamente, por lo cual, se recomienda su uso para los dos programas que emplean el algoritmo del Gradiente Reducido Generalizado.

Adición del efecto de las economías de escalas

El presente estudio también contempla la inclusión de las llamadas “economías de escalas”, las cuales se definen en economía como una situación, en la cual, “cuando una determinada empresa es capaz de duplicar su producción por un coste menos del doble” (Pindyck y Rubinfeld, 2009), esta situación, le aporta a una determinada operación minera en el largo plazo, que cuando esta empresa, sea capaz de incrementar sus niveles productivos o extractivos de un determinado material desde el rajo, el costo de extracción de aquel material disminuye, esto ultimo se ve reflejado en la diferencia extractiva entre el mineral y el estéril. Para una explotación a cielo abierto, la cantidad de material considerado como estéril es mayor que la catalogada como mineral, producto de esto, año a año, la mina deberá disponer de una mayor dotación de equipos y personal para la extracción, movilización del material estéril, desde el rajo al botadero minero, producto de esta situación, en el largo plazo, como la cantidad de estéril es mayor que la del mineral, los costos incurridos en la extracción del estéril por unidad de tonelada serán menores, debido a que los equipos incurridos en la extracción de este material son de un mayor tamaño y capacidades y por lo mismo su rendimiento será más alto en comparación a los equipos dedicados a la extracción del mineral. Debido a esta situación, se decide realizar una diferenciación del costo de extracción mina, diferenciando entre el costo asociado a la extracción del mineral “m” y el costo de extracción del material estéril “e”.

A modo de incorporar las “economías de escalas” a los tres programas desarrollados en Python, se decide incorporar el costo “e” a las ecuaciones que regulan la ley de corte optima y el beneficio anual para cada programa. También se asumirán los siguientes valores iniciales para cada una de estas variables económicas, las cuales son las expuestas por la Tabla A14.

Los resultados de la incorporación de las “economías de escalas” en los tres programas son satisfactorios, debido a que la segmentación del costo de extracción del material, en mineral y en estéril, ayuda a incrementar el valor del VAN para cada uno de los programas empleados, en específico para el programa “Algoritmo de Lane”, la adición del costo “e” hace incrementar el valor del VAN en un 5,71%, para el programa “GRG Iterativo” el valor del VAN aumenta en un 4,33% y por ultimo para el “GRG Multi Año” el VAN se incrementa en un 4,96%. (ver Figura A6). Debido a esto, independientemente del programa seleccionado, siempre la adición de las economías de escalas permitirá aumentar el Valor Presente Neto de una operación minera, por lo cual, las empresas debiesen enfocar sus esfuerzos para disminuir sus costos de extracción del material estéril para el largo plazo, ya que esto hace que sus beneficios anuales sean incrementados y con el ello el valor final del VAN.

Con el propósito de cuantificar el crecimiento observado en el valor del VAN cuando el costo de extracción del estéril “e” disminuye y el costo asociado a la extracción del mineral “m” se mantiene constante, se crean dos escenarios adicionales, donde el primero contempla un costo “e” de 2 usd/ton de estéril y el segundo un costo “e” de 1,5 usd/ton de estéril, considerando para ambos casos siempre un costo de extracción del mineral de 3,5 usd/ton de mineral y donde todos los demás parámetros económicos se consideraran como constantes.

Los resultados de este último análisis son expuestos por la Tabla A15, donde es posible apreciar que a medida que el valor del costo de extracción del estéril “e” disminuye, el valor del VAN aumenta, independientemente del programa empleado. Pero también es posible evidenciar que el incremento del VAN es inversamente proporcional a la disminución que experimenta el costo “e”.

Para cuantificar la disminución que experimenta el costo “e” en cada caso, se definirá la variable “ δ ” la cual se define por la ecuación 25.

$$\delta (\text{delta}) = m - e \quad (25)$$

Donde:

δ : Diferencia entre los costos de extracción de los dos tipos de materiales.

m : Costo de extracción del mineral (usd/ton de mineral).

e : Costo de extracción del estéril (usd/ton de estéril).

Por ejemplo, si consideramos el caso cuando existen economías de escalas en donde “m” es igual a 3,5 usd/ton de mineral y “e” vale 2,5 usd/ton de estéril, el valor de “ δ ” es de 1 y el incremento que experimenta el VAN era del 5,71%, 4,33% y 4,96% para el programa “Algoritmo de Lane”, “GRG Iterativo” y “GRG Multi Año” respectivamente con respecto al valor del VAN cuando no existen economías de escalas. Pero cuando este último costo disminuye en un 20% y llega a valer 2 usd/ton de estéril, por lo cual “ δ ” vale 1,5, el valor del VAN se incrementa en un 8,87%, 6,47% y 7,55% para el programa “Algoritmo de Lane”, “GRG Iterativo” y “GRG Multi Año” respectivamente con respecto al valor del VAN cuando no existen economías de escalas. Pero si el valor del costo “e” disminuye en un

40% con respecto al costo original de 2,5 usd/ton de estéril y llega a valer 1,5 usd/ton de estéril, por lo cual “ δ ” vale 2, el valor del VAN se incrementa en un 11,87%, 8,92% y 10,09% para el programa “Algoritmo de Lane”, “GRG Iterativo” y “GRG Multi Año” respectivamente con respecto al valor del VAN cuando no existen economías de escalas, por lo que existe una relación entre el decrecimiento que experimenta el costo “ e ” y el aumento del VAN (ver Tabla A16), donde decrecimientos en el valor del parámetro “ e ”, producirán incrementos en el valor del VAN siguiendo una proporción característica (ver Figura A7).

Los tres programas desarrollados en el entorno de Python le ofrecen al usuario una interfaz gráfica (GUI) en la cual pueden colocar los datos de los parámetros técnicos y económicos que gobiernan el problema. La distribución de tonelaje – ley debe ser creada por el usuario en un archivo del tipo “csv”, el cual será leído posteriormente por el programa. La solución obtenida a través de la ejecución de cualquiera de los tres programas será almacenada en un archivo Excel (xlsx) y contendrá toda la información referente a la estrategia minera que optimiza el consumo de recursos minerales, donde el usuario podrá consultar los valores económicos como el VAN y el beneficio anual para cada año, así como la política óptima de leyes de cortes, la ley media, el tonelaje de material que debe mover la mina, la cantidad de mineral enviado a planta concentradora, y la cantidad de producto de cobre fino así como de concentrado de cobre vendido en el mercado intermedio.

Agradecimientos

Agradecimientos especiales a todas las personas que han invertido esfuerzo, tiempo y dedicación en todas las investigaciones y estudios realizados en el pasado que han contribuido a la realización del presente trabajo.

Agradecimientos al profesor José Ascencio Castillo por apoyar la realización de este tema de investigación.

Agradecimientos a la facultad de Ingeniería y al departamento de Ingeniería en Minas de la Universidad de Santiago de Chile.

Referencias

Comisión Chilena del Cobre. 2021. *Exportación de concentrados de cobre: caracterización de condiciones comerciales*. Santiago de Chile : Dirección de Estudios y Políticas Públicas, 2021. 2021-A-4664.

Ahmadi, Mohammad Reza. 2018. *Cutoff grade optimization based on maximizing net present value using a computer model*. 68-75, Qazvin, Iran : Elsevier, 2018, Vol. 17.

Enami y Comisión Presidencial. 2016. *Documento del grupo de mercados de concentrados de cobre de la Comisión Presidencial para el futuro de las fundiciones y refinerías de Codelco y Enami*. Santiago, Chile : s.n., 2016.

Lane, Kenneth. 1988. *The economic definition of ore, cutoff grade in theory and practice*. Londres : Mining Journal Books Limited, 1988.

Maptek Pty. 2016. *Maptek Vulcan 10.1 Workbench*. [Software] Brisbane, Queensland : Brisbane, Queensland, 2016.

Martínez Valdéz, María Fernanda. 2020. *Planificación de operaciones para rehabilitación de botaderos de estériles en explotación de carbón en Isla Riesco*. Concepción, Chile. : Universidad de Concepción, 2020. Tesis para optar al título de Ingeniera Civil en Minas.

Microsoft. 2022. *Microsoft Visual Studio Code*. [Software] Seattle : Seattle, 2022.

Nieto, Antonio y Bascetin, Atac. 2006. *Mining cutoff grade strategy to optimise NPV based on multiyear GRG iterative factor*. 59-64, Estambul, Turquía. : Institute of Materials, Minerals and Mining, 2006, Mining Technology, Vol. 115.

Pindyck, Robert S. y Rubinfeld, Daniel L. 2009. *Microeconomía. Séptima Edición*. Madrid, España : Pearson Education S.A., 2009. pág. 888. 978-84-832-2706-0.

Python Software Foundation. 2021. *Python 3.9.7*. [Software] Amsterdam : Amsterdam, 2021.

Rao, Singiresu S. 2009. *Engineering optimization: theory and practice / Singiresu S Rao. 4th ed*. Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, Inc, 2009. ISBN 978-0-470-18352-6.

Lechner, Alex Mark, Kassulke, Owen y Unger, Corinne. 2016. *Spatial assessment of open cut mining progressive rehabilitation to support the monitoring of rehabilitation liabilities*. 234-243, Queensland, Australia : Elsevier, 2016, Vol. 50.

Apéndices

Las Figuras y Tablas mencionadas con la sigla A, sirven de apoyo a la información presentada y pueden consultarse en cualquier momento en el archivo adjunto llamado “*Apéndice: Optimización Minera de las leyes de corte basado en el Gradiente Reducido Generalizado*”.