

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Ingeniería Civil en Minas



**Desarrollo de un algoritmo computacional para la optimización de leyes de
corte con mercado intermedio de venta de concentrados y costos de
rehabilitación en minera a cielo abierto**

Humberto Andrés Flores Páez

Profesor Guía: José Ascencio Castillo

Memoria para optar al Título de Ingeniero Civil
en Minas.

Santiago-Chile

2021

RESUMEN

El presente trabajo aborda el desarrollo computacional de un nuevo enfoque matemático que permita obtener la política de leyes de corte para una operación a cielo abierto, con el fin de maximizar el valor presente neto. En aras de cumplir este objetivo, se desarrolla en una primera instancia el algoritmo propuesto por Lane en el entorno de Python, el cual contempla la venta de metal fino de cobre en conjunto con un mercado intermedio para la venta de concentrados de cobre. Además, se incorpora el costo de remediación ambiental del botadero de estériles. Tomando una base de datos, que considera una distribución de recursos llamada “Esmeralda”, la cual posee 198,9 Mton de recursos con una distribución logarítmica decreciente, característico de los pórfidos cupríferos en Chile. Los resultados del algoritmo de Lane en Python arrojan un vector de leyes de corte decrecientes, con un VAN de 1.917,379 MUSD. Implementando el modelo matemático optimizante del Gradiente Reducido Generalizado en Python, es posible crear dos nuevos programas. El primero, denominado como “GRG Iterativo”, es capaz de reportar un vector de leyes de corte decrecientes, pero con valores más elevados que los resultantes con el enfoque de Lane, lo que permite incrementar el VAN en un 2,70% alcanzando un VAN de 1.969,161 MUSD. El segundo programa desarrollado es el “GRG Multi Año”, que es capaz de aumentar la ley de corte optima en cada uno de los periodos de la vida de la mina, en comparación a la solución reportada por los dos algoritmos anteriores, de esta forma, se logra incrementar el VAN en un 6,24% con respecto a la solución reportada por Lane, donde se alcanza un VAN de 2.037,035 MUSD. Estos últimos algoritmos logran elevar el VAN debido a una extracción más acelerada de los recursos minerales, a través del incremento en los valores del vector leyes de corte.

De forma adicional se incorporan las economías de escalas, por lo cual, el costo de extracción del estéril es menor que el asociado a la extracción del mineral, donde para el largo plazo es recomendable que la empresa logre y aspire a una economía de escala, ya que por cada 1 usd/ton que se logre disminuir el costo de extracción del estéril, manteniendo constante el costo de extracción del mineral, el VAN del proyecto aumenta en un 5,71%, 4,33% y 4,96% para el enfoque de Lane, GRG Iterativo y GRG Multi Año respectivamente. También se ha incluido un análisis de sensibilidad, el cual arroja que la variable económica más sensible es el precio del cobre, seguido por el costo mina, costo planta, tasa de descuento y costo de rehabilitación del botadero, en orden decreciente de sensibilidad tanto para el algoritmo de Lane como para el GRG Multi Año.

Palabras claves: Leyes de corte, Algoritmos matemáticos computacionales, Mercado de concentrados, Aspectos económicos, Minería a cielo abierto.

DEDICATORIA

Quiero dedicar este trabajo a mi Padre Humberto, a mi Madre Marianela, a mis hermanos Sebastián y Víctor, a mi conejito Totito y a mi abuelo Abdón que del cielo me están acompañando...

Deseo dedicar este trabajo a todas las personas que día a día, se esfuerzan por sus sueños y sus metas, a aquellas personas luchadoras que demuestran que nada es imposible, si estas leyendo esto, yo para lograr los programas que a continuación leerás y conocerás, falle 1000 veces, pero a la vez número 1001 pude tener éxito, la vida no es un mundo de rosas, arcoíris y solo de dicha, el mundo es un lugar muy oscuro, tenebroso, sufrido y constantemente nos pone a prueba dándonos golpes que nos derribaran y nos podrán en el piso, esta en ti, si tu deseas permanecer siempre en ese piso y morir acostado y abatido, o levantarte aunque sea por un instante ínfimo de tiempo para resistir los golpes y ponerte de pie; yo para lograr esto, sufrí, perdí amigos, perdí a mi amor, perdí a seres queridos y amados, llore, me caí, sufrí, sentí odio a mí mismo y engendre dolor a mis semejantes, pero después de todo, de eso se trata esto, de vivir y de sufrir, de perdonarse y seguir adelante y luchar hasta el final por nuestros “verdaderos sueños”, si llegaste hasta acá, es porque eres especial, y quiero decirte que aunque tu fracasas en algo, siempre la vida te dará la oportunidad de volver a tener la revancha que mereces y si quedase poco tiempo, tranquilo la muerte no es el final de tu existencia..., disfruta el viaje y no la meta..., ya que el viaje es largo, sufrido, pero también alegre y lleno de sorpresas, en cambio, la meta es efímera y fugaz.

AGRADECIMIENTOS

La verdad me es prácticamente imposible nombrar en una sola pagina a todas las personas que contribuyeron y me enriquecieron como persona y ser humano y que me han apoyado a lo largo de todo este gran camino. Quiero agradecer en primera instancia a mi familia, que me han apoyado incondicionalmente en cada uno de los momentos de mi vida, dándome apoyo, aliento, garra y las fuerzas para salir adelante cuando el camino se pone oscuro y difícil, a mi Padre Humberto por sus sabios consejos, su empuje e incondicional apoyo el cual a través de sus incontables horas recibiendo bebes a un nuevo mundo me ha entregado la herramienta del estudio y del esfuerzo, a mi Madre Marianela por su ternura, dedicación, aguante infinito, paciencia y por sobre todo ser un pilar fundamental en todo este gran proceso, la cual muchas veces me dio su hombro para llorar mis penas, a mi hermano Sebastián por su entrega, su dedicación, por abrir la puerta de mi cuarto y sacarme una sonrisa o una carcajada cuando todo parecía perdido, y estaba sumido en la más absoluta de las tristezas, por sus incontables caminatas relajadoras al centro de “San Beka” donde la pasábamos genial y disfrutando de chistes y anécdotas que llenan el espíritu y reconfortan el alma, a mi hermano Víctor, por su apoyo incondicional a la distancia el cual es mi motor, y que me recordaba que había algo por lo cual seguir peleando hasta el final, por nuestras conversaciones en el centro de Vallenar, por aquellos recuerdos entrañables e inolvidables en la población “el Edén” y a mi conejito Totito el cual siempre entraba a mi cuarto, después de un día agotador a regalarme momentos entrañables llenos de ternura y cariño, el cual me daba su buena suerte en cada uno de los pasos de mi vida.

En segunda instancia quiero agradecer a mis amigos, los cuales me han apoyado, ayudado y acarreado a lo largo de todo este proceso, en especial al Luchito, Mauri, Víctor, Seba, Nicolas, Camilo, entre muchos mas que me es imposible nombrar por falta de espacio, pero que me han dado hermosas experiencias, jamás olvidare cuando me regalaron aquella hermosa mochila en el primer año, así como las tardes de ping-pong, así como los campeonatos de Mitos y Leyendas o las pichangas de futbol, y porque no las noches memorables en el foro griego, así como también las noches en vela estudiando para los exámenes, y las muchas horas de conversación, anécdotas y chistes en las bibliotecas. Son muchos recuerdos hermosos que agradezco haber vivido y que los tendré para siempre en mi memoria.

En última instancia quiero agradecer a todas aquellas personas que de alguna u otra forma, con su esfuerzo y dedicación fueron pilares fundamentales durante la vida universitaria, como el “tío de las pizzas”, que me quitaba el hambre cuando las horas de estudio eran interminables, al “tío Meme”, el cual siempre apañaba en las impresiones, a todos los tíos y tías del aseo, los cuales se encargaban de que pudiera contemplar bellos pastos y hermosos paisajes después de una jornada matadora. A los profesores, los cuales nos daban las herramientas, conocimientos y consejos para enfrentar la vida con optimismo y esperanza.

TABLA DE CONTENIDO

CAPÍTULO 1. GENERALIDADES	1
1.1 INTRODUCCIÓN	1
1.2 OBJETIVOS DEL ESTUDIO Y ALCANCES	2
1.2.1 Objetivo Principal	2
1.2.2 Objetivos Específicos	2
1.2.3 Alcances	2
CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS Y MARCO TEÓRICO	4
2.1 INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN DINÁMICA Y AL ENTORNO DE PYTHON	4
2.2 INTRODUCCIÓN A LA PLANIFICACIÓN MINERA Y POLÍTICA DE LEYES DE CORTE	7
2.3 ALGORITMO DE LANE.	10
2.3.1 Determinación de las Leyes de Corte del Balance	15
2.4 GRADIENTE REDUCIDO GENERALIZADO	20
CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL MERCADO DE CONCENTRADOS DE COBRE	27
3.1 PROCESOS PARA LA OBTENCIÓN DEL COBRE	27
3.2 MERCADO DE CONCENTRADOS DE COBRE	28
3.3 DETERMINACIÓN DEL PRECIO DEL CONCENTRADO DE COBRE	34
CAPÍTULO 4. COSTO DE REHABILITACIÓN DEL BOTADERO	39
4.1 BOTADERO DE ESTÉRILES	39
4.2 DISEÑO Y TAMAÑOS DEL BOTADERO	40
4.3 ACTIVIDADES BÁSICAS DE REHABILITACIÓN DE UN BOTADERO DE ESTÉRILES	41
4.3.1 Suavizamiento de la Superficie del Botadero	42
4.3.2 Reperfilamiento	42
4.3.3 Carguío y Transporte de Suelo Vegetal	43
4.3.4 Instalación de Suelo Vegetal	43
4.4 TAMAÑO Y DISEÑO DEL BOTADERO	44
4.4.1 Metodología para introducir el costo de rehabilitación en el programa optimizante	45
CAPÍTULO 5. DESARROLLO DE LOS ALGORITMOS COMPUTACIONALES EN EL ENTORNO DE PYTHON	53
5.1 ADICION DEL MERCADO INTERMEDIO DE CONCENTRADOS DE COBRE	64
5.2 PROCEDIMIENTOS Y CÁLCULOS A PARTIR DEL ALGORITMO DE LANE	65
5.3 ALGORITMO GRG ITERATIVO	75
5.4 ALGORITMO GRG MULTI AÑO CON RESULTADOS	82

CAPÍTULO 6. INCORPORACIÓN DE LAS ECONOMÍAS DE ESCALAS EN LOS ALGORITMOS DESARROLLADOS	93
6.1 ALGORITMO DE LANE CON ECONOMÍAS DE ESCALAS	94
6.2 ALGORITMO “GRG ITERATIVO” CON ECONOMÍAS DE ESCALAS	98
6.3 ALGORITMO “GRG MULTI AÑO” CON ECONOMÍAS DE ESCALAS	100
6.4 ANÁLISIS ESPECIAL INCORPORANDO ECONOMÍAS DE ESCALAS.....	102
CAPÍTULO 7. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD	106
7.1 ALGORITMO DE LANE	106
7.2 ALGORITMO “GRG MULTI AÑO”	112
7.3 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD ESPECIAL	116
7.3.1 Algoritmo de Lane	117
7.3.2 Algoritmo GRG Multi Año	118
CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	121
8.1 CONCLUSIONES	121
8.2 RECOMENDACIONES	125
BIBLIOGRAFÍA	127
ANEXOS	129
ANEXO A: MERCADO DEL COBRE	130
ANEXO B: DETERMINACIÓN DEL FACTOR “R” PARA BOTADERO DE ESTÉRILES	132
ANEXO C: ANÁLISIS ESPECIAL ECONOMÍAS DE ESCALAS.....	133
ANEXO D: ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD	135

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1: Simbología de variables usadas en las ecuaciones a lo largo del proyecto.	12
Tabla 3.1: Producción Chilena de cobre por tipo de producto en el año 2019.....	29
Tabla 3.2: Volúmenes exportados en KTM de cobre fino en el año 2019.....	30
Tabla 3.3: Valores de los embarques de exportación de cobre por productos para el año 2019.	33
Tabla 3.4: Valores de deducción metalúrgica, según su modalidad y tramo de ley de cobre en concentrado.	35
Tabla 3.5: Lista de elementos químicos penalizables en el concentrado de cobre.	36
Tabla 4.1: Parámetros constantes para la determinación del factor "R".	47
Tabla 4.2: Resultados del factor R para altura constante de 40 metros.	49

Tabla 4.3: Resultados de los valores del factor "R" para cada botadero según el caso estudiado.	51
Tabla 5.1: Parámetros de entrada a cada uno de los algoritmos desarrollados.	53
Tabla 5.2: Distribución Inicial a modo de ejemplo.	55
Tabla 5.3: Distribución inicial con ley media.	56
Tabla 5.4: Ejemplo de obtención de ley media cuando la ley optima está dentro de un intervalo.	56
Tabla 5.5: Tonelaje de material extraído, mineral enviado a planta, fino producido y estéril según la ley de corte en %.	58
Tabla 5.6: Distribuciones de leyes ajustadas para año 2.	63
Tabla 5.7: Parámetros fijos para cálculo del precio del concentrado.	65
Tabla 5.8: Distribución de tonelaje según intervalos de leyes de cobre, Base de datos: "Esmeralda"	65
Tabla 5.9: Parámetros técnicos y económicos como entrada al algoritmo computacional.	66
Tabla 5.10: Información computable que procesa el programa optimizante según la distribución "Esmeralda"	67
Tabla 5.11: Interpolación Lineal para hallar el valor de la ley media a través de la base de datos "Esmeralda"	70
Tabla 5.13: Resultados de valores económicos y leyes usando el algoritmo de Lane.	73
Tabla 5.14: Resultados del tonelaje de material extraído, mineral procesado y cobre vendido empleando el algoritmo de Lane.	74
Tabla 5.15: Resultados del factor optimizante, valores económicos y leyes usando el algoritmo GRG Iterativo.	79
Tabla 5.16: Resultados del tonelaje de material extraído, mineral procesado y cobre vendido empleando el algoritmo GRG Iterativo.	79
Tabla 5.17: Resultados del factor optimizante, valores económicos y leyes por año utilizando el algoritmo GRG Multi año.	86
Tabla 5.18: Resultados del tonelaje de material extraído, mineral procesado y cobre vendido en cada año utilizando el algoritmo GRG Multi año.	86
Tabla 6.1: Valores económicos del costo de extracción del mineral y estéril insertados en el algoritmo de Lane.	96
Tabla 6.2: Resultados de valores económicos y leyes empleando el algoritmo de Lane sobre la base de datos "Esmeralda" con economías de escalas.	96
Tabla 6.3: Resultados del tonelaje de material extraído, mineral procesado y cobre vendido usando el algoritmo de Lane sobre la base de datos "Esmeralda" con economías de escalas.	97
Tabla 6.4: Resultados del factor optimizante, valores económicos y leyes empleando el algoritmo "GRG Iterativo" sobre la base de datos "Esmeralda" con economías de escalas.	98

Tabla 6.5: Resultados del tonelaje de material extraído, mineral procesado y cobre vendido usando el algoritmo “GRG Iterativo” sobre la base de datos "Esmeralda" con economías de escalas.	99
Tabla 6.6: Resultados del factor optimizante, valores económicos y leyes empleando el algoritmo “GRG Multi año” sobre la base de datos "Esmeralda" con economías de escalas.....	100
Tabla 6.7: Resultados del tonelaje de material extraído, mineral procesado y cobre vendido usando el algoritmo “GRG Multi año” sobre la base de datos "Esmeralda" con economías de escalas.	100
Tabla 6.8: Efecto de la variación del costo de extracción del estéril sobre el VAN, considerando cada uno de los tres algoritmos desarrollados.	103
Tabla 6.9: Incremento porcentual del VAN tomando como caso base el escenario donde no existen economías de escalas.	104
Tabla 7.1: Parámetros económicos definidos como Caso Base para el análisis de sensibilidad.	107
Tabla 7.2: Valores resultantes de la regresión lineal para cada variable económica según grafico de sensibilidad, empleando el algoritmo de Lane.....	108
Tabla 7.4: Efecto en el precio del concentrado y en el VAN cuando varía el precio del cobre.	108
Tabla 7.5: Variaciones porcentuales del VAN cuando cambia el valor de las variables económicas estudiadas empleando el Algoritmo de Lane.....	111
Tabla 7.6: Valores de la pendiente de cada parámetro económico según la regresión lineal. .	113
Tabla 7.7: Variaciones porcentuales del VAN cuando cambia el valor de las variables económicas estudiadas empleando el Algoritmo “GRG Multi Año”.	115
Tabla 7.8: Valores del VAN y de la cantidad total de estéril según varía el costo de rehabilitación del botadero usando el Algoritmo de Lane.	118
Tabla 7.9: Valores del VAN y de la cantidad total de estéril según varía el costo de rehabilitación del botadero usando el Algoritmo “GRG Multi Año”.	119

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: P y W en el tiempo.....	11
Figura 2.2: Valor presente vs ley de corte, Caso N°1.....	17
Figura 2.3: Valor presente vs ley de corte, Caso N°2.....	18
Figura 2.4: Valor presente vs ley de corte, Caso N°3.....	19
Figura 3.1: Diagrama de los procesos para obtener los productos a partir del mineral de cobre.	28
Figura 3.2: Producción Chilena de Cobre segmentada por productos en el tiempo.	29

Figura 3.3: Importaciones de cobre mundial en kTM de cobre fino por países.....	31
Figura 3.4: Importaciones mundiales de concentrado de cobre por países.	32
Figura 3.5: Producción por países de cobre mina en kilo TM de cobre fino en el año 2019 y su participación en porcentaje.	33
Figura 3.6: Cargo de Tratamiento y Refinería Combinado para el concentrado de cobre por semestre, para periodo 2001-2020.	37
Figura 4.1: Botadero tipo ladera.	40
Figura 4.2: Botadero tipo quebrada.	41
Figura 4.3: Botadero tipo torta.	41
Figura 4.5: Actividades básicas para la rehabilitación de un botadero minero.	42
Figura 4.6: Método de reperfilamiento de talud.	43
Figura 4.7: Diseño de un botadero.	45
Figura 4.7: Diseño de botadero minero desarrollado en software Maptek Vulcan 10.0.....	47
Figura 4.8: Área Real a revegetar de un botadero minero.	48
Figura 4.9: Área base del botadero minero.	48
Figura 4.10: Factor R vs Área real Ha para cada altura.	50
Figura 5.1: Ley media vs ley de corte para distribución inicial.	57
Figura 5.2: Diagrama del mercado total minero.	61
Figura 5.3: Distribución del tonelaje según la ley de corte %Cu de la base de datos "Esmeralda".	66
Figura 5.4: Representación del tonelaje real que se debe tomar según la ley de corte dentro de un intervalo en la distribución "Esmeralda".....	69
Figura 5.5: Movimiento de materiales extraídos en el rajo por año, empleando el algoritmo de Lane.	75
Figura 5.6: Valor presente neto vs Factor Optimizante " σ " con paso de 0.1.	78
Figura 5.7: Ley de corte vs Años, Caso algoritmo de Lane vs "GRG Iterativo".	80
Figura 5.8: Movimiento de materiales desde el rajo por año, usando el algoritmo "GRG Iterativo".	81
Figura 5.9: Beneficio Anual vs Años, Caso Algoritmo de Lane vs "GRG Iterativo".....	82
Figura 5.10: Representación gráfica del efecto de la inserción del factor optimizante en la mejora del VAN.	85
Figura 5.11: VAN vs Factor optimizante para el primer año usando el algoritmo "GRG Multi año".	87
Figura 5.12: Movimiento de materiales desde el rajo por año, empleando el algoritmo "GRG Multi Año".....	88
Figura 5.13: Ley de corte vs Años, Caso algoritmo de Lane vs "GRG Multi Año".	89
Figura 5.14: Beneficio Anual vs Años, Caso algoritmo de Lane vs "GRG Multi Año".	89
Figura 5.15: Ley de corte vs Años, Caso algoritmo "GRG Iterativo" vs "GRG Multi Año".	90

Figura 5.16: Beneficio Anual vs Años, Caso algoritmo "GRG Iterativo" vs "GRG Multi Año".	91
Figura 6.1: Efecto de la inclusión de las "economías de escalas" en cada algoritmo desarrollado.	102
Figura 6.2: Incremento Porcentual del VAN vs Costo de extracción del estéril.	104
Figura 7.1: Gráfico de sensibilidad utilizando el algoritmo de Lane.	107
Figura 7.2: Grafico de sensibilidad usando el algoritmo "GRG Multi año".	112
Figura 7.3: Relación entre el VAN y el estéril acumulado vs Costo de rehabilitación de un botadero empleando Algoritmo de Lane.	118
Figura 7.4: Relación entre el VAN y el estéril acumulado vs Costo de rehabilitación de un botadero empleando Algoritmo "GRG Multi Año".	119

CAPÍTULO 1. GENERALIDADES

1.1 INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia de la minería, siempre ha existido la inquietud del minero de conocer qué proporción de lo que extrae, es considerado como un mineral y que parte es denominada como estéril, esto hoy en día es conocido como la política de leyes de corte, y ella influye en gran medida en los flujos de caja anuales y en el VAN de cualquier proyecto. Debido a la importancia que tiene esta política de leyes de corte, se vuelve imperativo encontrar alguna forma rápida, oportuna y programable para poder obtener esta ley de corte de la manera más eficaz posible y esto es viable a través de las herramientas computacionales existentes.

La idea detrás del proyecto es construir un algoritmo en un lenguaje de programación que permita encontrar la ley de corte óptima para cada uno de los periodos de la vida útil de una operación a cielo abierto, para esto, se empleara el algoritmo de Lane, el cual, permite identificar las diferentes leyes de corte teniendo en consideración una gran cantidad de parámetros económicos y técnicos que deben ser respetados, asumiendo un mercado de venta de metal de cobre y un mercado intermedio para la venta de concentrados, por lo cual existirán los procesos mina, planta concentradora y la refinería.

El entorno en el cual el algoritmo se desarrollará será mediante el lenguaje de programación Python, el cual posee una escritura rápida, escalable y robusta, lo cual es perfecto para llevar a cabo una gran secuencia de iteraciones con múltiples ecuaciones, ideal para lograr algoritmos iterativos. Permite plasmar ideas, conceptos y encadenar algoritmos en pocas líneas de código. Además de que tiene a su disposición un variado entorno, con múltiples librerías y accesos, las cuales permiten introducir información numérica y lógica, así como bases de datos a partir de archivos csv y xlsx, a través del módulo Pandas. Esto resulta muy eficaz para introducir la información proveniente de la curva tonelaje-ley del depósito, así como las capacidades de los procesos y los diferentes parámetros económicos que gobiernan el problema del consumo de reservas mineras.

El presente proyecto de investigación tiene por objetivo principal el desarrollo de un software computacional que sea capaz de encontrar la ley de corte óptima para poder hallar una estrategia al consumo de reservas mineras, incorporando herramientas matemáticas como el método del Gradiente Reducido Generalizado que permitirá maximizar el valor del VAN, y obtener las leyes de corte optima anuales y el plan de producción. Con la herramienta matemática del Gradiente Reducido Generalizado, se creará un nuevo algoritmo que será capaz de buscar la ley de corte optima a través de un enfoque diferente a como lo hace Lane, e incluso será posible establecer comparaciones entre estos dos algoritmos matemáticos a modo de encontrar aquel algoritmo que sea capaz de entregar el valor presente neto de una determinada operación minera.

Un propósito adicional del presente estudio es la inclusión de un costo de remediación ambiental, el cual está representado por el costo que se incurre en la rehabilitación del espacio que ocupara a futuro el botadero minero, este espacio usualmente queda yermo y sin opción a que pueda ser ocupado en el futuro esto, debido a la propia composición química del material estéril, por lo anterior, se decidió incluir dentro del código de programación un costo que represente la acción reparadora que la empresa debe tener frente a este pasivo ambiental, para transformar un botadero de estériles, en un espacio rico en vegetación y que pueda ser aprovechado por la naturaleza y las comunidades.

1.2 OBJETIVOS DEL ESTUDIO Y ALCANCES

1.2.1 Objetivo Principal

Crear un programa computacional a través del lenguaje de programación Python, que sea capaz de entregar la ley de corte optima y una estrategia real para el consumo de reservas mineras, contemplando adicionalmente un mercado intermedio para la venta de concentrados.

1.2.2 Objetivos Específicos

Conocer los alcances del proceso de la programación para el objeto de la ley de corte optima.

- Establecer con claridad las diferentes ecuaciones que regulan los algoritmos a utilizar.
- Utilizar la herramienta Python como el vehículo para desarrollar el programa.
- Identificar los errores que pueden existir en la programación y regular la convergencia del algoritmo para que permita obtener un valor claro y definitivo de la ley de corte optima.
- Introducir el concepto de la sostenibilidad ambiental a través del costo de rehabilitación del botadero en un rajo abierto.
- Utilización del Algoritmo del Gradiente Reducido Generalizado para poder maximizar el valor del VAN en cada una de las iteraciones.
- Identificar aspectos que puedan ser considerados como mejoras en la programación, o como alternativas para futuros proyectos semejantes.

1.2.3 Alcances

En presente trabajo de investigación contempla los siguientes parámetros y alcances metodológicos con respecto a la creación del programa y sus variables de entrada.

- Se asumirá que el programa desarrollado contempla una situación minera a cielo abierto no convencional, en la cual, la capacidad mina es ilimitada, y que la planta concentradora será el cuello de botella de todos los flujos.

- Se incorporará un mercado intermedio para la venta de concentrados de cobre para apoyar las ventas por el metal fino, debido a esto, la refinería no limita con respecto a su tiempo.
- Se incorpora un costo de rehabilitación de botadero, el cual, es esta en usd/Ha, por lo cual se diseña un factor R que sea capaz de relacionar el área superficial de un botadero con respecto al tonelaje de estéril que es capaz de almacenar dicho botadero, pero para efectos del presente proyecto, solo se contemplara un diseño de botadero tipo torta.
- Las variables de entradas asignadas a los múltiples algoritmos desarrollados serán constantes a lo largo de toda la vida de la operación minera.
- El principal input de los programas corresponderá a una distribución de tonelaje según intervalos de leyes de cobre.
- Solo se contemplará la venta de un único metal, que será el cobre.
- Para la valorización de concentrado de cobre, solo se valorizará un único metal, que será el cobre y se asumirá que el concentrado es limpio, es decir, que no posee impurezas que representen un castigo en su precio.
- Se asume que el concentrado no posee un descuento asociado a la humedad que contiene, ya que la finalidad del presente trabajo es la maximización del valor presente neto a partir de nuevos algoritmos para determinar la política de leyes de corte optimas, y se encuentra fuera del alcance, establecer un mayor grado de precisión del precio del concentrado.

CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS Y MARCO TEÓRICO

2.1 INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN DINÁMICA Y AL ENTORNO DE PYTHON

Con el pasar del tiempo han existido muchas maneras de resolver los problemas que han aquejado a la humanidad, el avance sistemático de la ciencia en el pasado siglo ha permitido sembrar una gran cantidad de conocimientos científicos y tecnológicos como es el caso de la programación, el cual fue iniciado por Alan Turing (1912-1954), el cual sentó las bases de la informática y la programación con el desarrollo del primer computador electrónico programable además de diversas contribuciones al área de la computación y la inteligencia artificial. Alan sembró la semilla de lo que sería nuestro actual mundo, el cual es regido y gobernado por sistemas electrónicos, computadoras, internet y diversas herramientas que han permitido lograr grandes avances en la ciencia, además de una mejor conectividad global.

El desarrollo de la programación desde finales de la segunda guerra mundial, aumento las ansias de lograr mejoras en esta ciencia, alimentado por la carrera científica y armamentista durante la guerra fría, en aras de un desarrollo más profundo de la programación. Ante esta necesidad Richard E. Bellman en el año 1950 introdujo por primera vez el término “Programación Dinámica”.

La programación dinámica es una técnica matemática que se utiliza para la solución de problemas matemáticos determinados, en los cuales se toma una serie de decisiones de forma secuencial, los cuales sirven para reducir el tiempo de ejecución de un algoritmo. Para esto la programación toma un gran problema y lo divide en subproblemas más pequeños, los cuales en su conjunto representan el problema total, y la clave es optimizar la solución que entrega cada uno de estos problemas, de esta forma es posible encontrar la solución óptima del gran problema. El dicho “divide y vencerás” es el slogan de esta técnica ya que utiliza diversas herramientas matemáticas como lo es, el algebra lineal, cálculo infinitesimal, teoría de redes, etc. para lograr obtener la mejor solución a cada subproblema y posteriormente se enlazan estos subproblemas a través de cálculos recursivos para formar el gran problema.

La teoría que rige el comportamiento de la programación dinámica es el Principio de Optimalidad, el cual nos indica que un gran problema es posible descomponerlo en varias etapas utilizando cálculos recursivos. En donde una política optima tendrá la propiedad de que independientemente de las decisiones tomadas para llegar a un estado en particular, en una etapa específica, las decisiones restantes representan una política óptima para abandonar ese estado.

Características de los problemas de programación dinámica:

- Independiente del estado en el que nos encontremos, una política óptima para las etapas restantes es independiente de la política adoptada en las etapas anteriores (Principio de Optimalidad).

- El procedimiento para solucionar el problema arranca encontrando una política (solución) óptima para la última etapa.
- Se debe disponer de una relación recursiva que es capaz de identificar la política óptima para la etapa $n+1$, dada la política óptima de la etapa n .
- Los problemas pueden ser expresados en términos de subproblemas más pequeños.

Anteriormente se empleó el término “optimizar”, el cual para efectos de la programación dinámica hace referencia a la búsqueda de la mejor solución posible dentro de muchas soluciones alternativas que en su conjunto representan el espacio factible de soluciones. El proceso de optimización puede ser visto como una secuencia de decisiones que nos llevan a la solución correcta. Entonces, si existe una secuencia de decisiones, y siempre somos capaces de conocer la decisión que debe tomarse a continuación para obtener la secuencia óptima, el problema es capaz de resolverse y de obtener la solución optimizante, tomando una decisión correcta detrás de otra decisión correcta lo que se conoce como “estrategia voraz”.

Aunque en el desarrollo de los problemas, no sea posible aplicar esta “estrategia voraz”, se cumplirá el principio de optimalidad de Bellman que dicta que “dada una secuencia óptima de decisiones, toda subsecuencia de ella es, a su vez óptima”. Para tal caso es posible ir tomando muchas decisiones elementales y tener la confianza de que cada una de estas es la óptima, pero si es el caso, será preciso contemplar muchas secuencias de decisiones hasta dar con la correcta. Existen problemas matemáticos, en los cuales para encontrar la solución verdadera es preciso pasar por muchas etapas, las cuales se vuelven tediosas e incluso en algunos casos imposibles de resolver debido al gran número de subetapas que presenta, debido a esto, la programación computacional es capaz de acelerar significativamente el tiempo de cálculo para cada una de estas subetapas y obteniendo la solución verdadera.

Para desarrollar y calcular la solución a muchos de los problemas matemáticos que existen en la actualidad, se emplean lenguajes de programación que facilitan y acortan el tiempo de cálculo, entre los más comunes se encuentran el lenguaje R, C++, Python, entre otros. Todos los lenguajes anteriores son capaces de desarrollar y solucionar problemas matemáticos complejos y tienen la propiedad de almacenar variables en un espacio virtual creado específicamente para aquello.

Para el desarrollo del programa computacional se escoge el lenguaje de programación Python, extraído de Python Software Foundation (Países Bajos), software Python 3.9.7 (2021) esto es debido a que en la actualidad existen muchos recursos educativos y herramientas que ayudan a acelerar la curva de aprendizaje en este lenguaje, posee una gran cantidad de librerías, las cuales ayudan a resolver diversas operaciones y funciones matemáticas, desde funciones trigonométricas hasta cálculo diferencial e integral, las cuales son posibles de integrar al código de programación en cualquier instante. También este lenguaje presenta un entorno que es

amigable y claro para el usuario ya que el intérprete de Python utiliza palabras especiales en ingles que permiten generar diversas acciones dentro del programa, como lo es, introducir valores por pantalla, generar gráficos y ecuaciones mediante funciones programables y crear ciclos iterativos, en los cuales se repite una función específica y acelera sustancialmente el tiempo en que calcula una operación matemática. Debido a todo esto, Python es ideal para el desarrollo de algoritmos recursivos.

Es posible definir un algoritmo como “una expresión matemática de un trabajo que hay que realizar, formada por datos, condiciones y acciones. Es una lista de acciones relacionadas que deben ejecutarse, una especie de receta para automatizar una acción” (Gómez, 2010).

La recursividad es una técnica en donde una función matemática es capaz de llamarse a sí misma. Un ejemplo de esto es el factorial de un número. El factorial de un número, consiste en multiplicar un numero entero por el numero entero antes de él, y ese número, por el numero exactamente antes de él, hasta llegar al uno.

$$Factorial(n) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - k) \quad (\text{Ec. 2.1})$$

Donde:

n : Número natural.

k : Número natural límite de la secuencia.

Para la ecuación (2.1) se establecen:

$$Factorial(0) = 1$$

$$Factorial(1) = 1$$

Usando la ecuación 2.1 y los valores establecidos para factorial de cero y uno tenemos:

$$Factorial(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Pero también puede ser escrito como:

$$Factorial(3) = 3 \cdot factorial(2) = 3 \cdot 2 \cdot factorial(1) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Como es posible apreciar, cada vez que llamamos a la función factorial de un numero “n” esta es capaz de descomponerse en más funciones, introduciendo en ella el entero menor al valor introducido inicialmente, esto es un ejemplo de una función recursiva y Python es capaz de almacenar en su memoria el factorial de 1 y con ello trabajar la función de forma que sea capaz de invocarse a sí misma.

Python es un lenguaje muy atractivo para quienes comienzan en el mundo de la programación y permite un amplio abanico de aplicaciones de forma sencilla. Python se define como un lenguaje

multiparadigma (Laca, 2021), ello es porque es capaz de admitir más de un modelo de desarrollo, entre sus principales características, destacan las siguientes:

- Imperativo: es aquel que se basa en describir el estado del programa y permite modificaciones mediante condiciones o instrucciones de código que son proporcionados a la máquina (computador) para que realice una determinada tarea.
- Funcional: paradigma basado en el uso de funciones matemáticas las cuales permiten cambiar y producir variaciones en un programa mediante la mutación de variables. Esto último le brinda al usuario un entorno en donde puede ingresar datos de entrada (inputs) que serán procesados por el programa y este le devolverá datos que serán de salida (outputs).
- Orientado a objetos: Dentro de la programación efectuada en Python existirán objetos los cuales manipulan los datos de entrada para obtener resultados de salida específicos, en donde cada objeto representa una función específica y también se ofrece la posibilidad se agrupar varios objetos en librerías, las cuales ofrecen soluciones a múltiples problemas.
- Tipado Dinámico: Este paradigma hace referencia al hecho de que una variable puede tomar diferentes valores en diferentes momentos. En este lenguaje de programación, las variables que son declaradas se diferencian entre sí por el contenido y no por el contenedor, es decir, lo que importa es lo que una determinada variable contiene y represente y no la variable en sí.

2.2 INTRODUCCIÓN A LA PLANIFICACIÓN MINERA Y POLÍTICA DE LEYES DE CORTE

El objetivo general del presente estudio es el desarrollo de una herramienta computacional que permita obtener la política óptima de leyes de corte en conjunto con el plan de producción minero que maximice el valor presente neto de una determinada operación, debido a esto es importante conocer el significado tanto de planificación minera como de ley de corte.

Según la definición formal, “la planificación minera se encarga de diseñar la mejor estrategia productiva en función de los recursos minerales existentes y de establecer la mejor estrategia de negocios por la compañía minera” (Rubio, 2006). Esta estrategia productiva permite cuantificar la cantidad de material que debe mover la mina, así como la cantidad de metal fino y derivados que es posible vender en los mercados, entrega la política de leyes de corte, así como una aproximación de la flota de equipos que deben emplearse para llevar a cabo el movimiento de mineral y de estéril. Debido a la importancia que cobra esta estrategia productiva, esta información se resume en el programa de producción minero, el cual es un elemento bancable, es decir, que sirve para pedir financiamiento a los bancos y a inversionistas para la construcción del proyecto en sí, ya que este documento acredita la factibilidad de un emprendimiento, desarrollo y futuras optimizaciones de un determinado proyecto minero.

La planificación minera está fuertemente condicionada por la política de leyes de corte, ya que estas leyes permiten saber exactamente qué cantidad del recurso mineral es considerado como mineral y estéril en cada uno de los periodos de la vida de la mina. Las leyes de corte afectan directamente los flujos de caja anuales y por ende impactan en el valor actual neto de cualquier proyecto a cielo abierto.

La ley de corte es a su vez, una medida geológica y técnica en la cual, intervienen importantes parámetros económicos referentes a la producción del mineral, su posterior procesamiento y venta del metal. La ley de corte no solo se define por las características geológicas de un yacimiento y por los avances en la tecnología empleada para extraer y procesar el recurso minero, sino que también dependerá de los costos y precios de los metales. Por lo cual, intervienen tanto variables propias de la empresa como elementos económicos ajenos al control de una empresa minera. La ley de corte se define como cualquier calificación, que por cualquier motivo específico, se utiliza para separar dos fuentes de acción: extraer o abandonar, procesar o enviar a botadero (Taylor, 1972).

A su vez cualquier optimización de la política de leyes de corte, requerirá el conocimiento de los costos operativos, secuencia de extracción, operación minera, procesamiento, capacidades y restricciones de los procesos, así como la distribución de leyes de un determinado depósito.

La ley de corte corresponde al grado mínimo requerido para que un mineral o metal sea extraído económicamente, donde el material que se encuentre por encima de esta ley se considera como mineral, mientras que el material que este por debajo de esta ley se considera como estéril. La ley de corte es posible expresarla en las siguientes unidades:

- g/t (gramos por tonelada).
- \$/t (dólares por tonelada).
- % (Porcentaje de metal).

Para el presente estudio, solo se asumirá un único elemento metálico que representará al recurso mineral y será el cobre, por lo cual, su ley de corte como su ley media serán expresados en porcentaje.

La manera más simple de determinar la ley de corte es a través del cálculo del punto de equilibrio, es decir, cuando los ingresos y los costos son exactamente iguales, esta metodología requiere poca información y se prefiere como una primera estimación a la ley de corte de un proyecto. Este método no es recomendable en planificación a largo plazo, ya que no toma en cuenta la capacidad de producción, así como la tasa de descuento. Como una primera aproximación a esta metodología se definirá la ley de corte marginal y operativa (Freites, 2017).

Ley de Corte Marginal: Es aquella ley de establecer un beneficio marginal positivo y define el material que por debajo de esta ley no debe ser procesado independientemente si el material fue

extraído o no. Donde el material por encima de esta ley es capaz de pagar los costos de procesamiento y de venta. Cabe destacar que, para el caso de las operaciones a cielo abierto, los costos de extracción del mineral y del estéril, no son considerados dentro de la ley de corte marginal, donde esta ley de corte marginal determina si el material debe enviarse a la planta concentradora o al botadero después de ser minado. Se expresa a través de la ecuación 2.2.

$$\text{Ley de corte marginal} = \frac{c}{(s-r) \cdot y} \quad (\text{Ec. 2.2})$$

Ley de corte Operativa: Esta ley de corte es capaz de cubrir el costo de extracción mina, así como el costo de la planta procesadora. Todo bloque que tenga una ley superior a la ley de corte operativa se considera como mineral. Esta ley corresponde al grado mínimo que es capaz de pagar los costos de minado, procesamiento y de venta del metal. Si la ley de un bloque es menor a la ley de corte operativa, el bloque no se extrae si no se está en la obligación de hacerlo. La expresión que regula esta ley es descrita por la ecuación 2.3.

$$\text{Ley de corte operativa} = \frac{c+m}{(s-r) \cdot y} \quad (\text{Ec. 2.3})$$

Donde:

- m : Costo de extracción del material.
- c : Costo de procesamiento del mineral.
- s : Precio de venta del metal.
- r : Costo de venta y mercado del metal.
- y : Recuperación de la planta concentradora del metal.

Las leyes de corte expuestas anteriormente representan la forma más sencilla y practica de determinar la ley de corte. En la realidad existen un numero mucho más grande de parámetros económicos y técnicos que intervienen en el cálculo de la ley de corte, ya que, en la planificación de largo plazo, se hace fundamental la inclusión de las restricciones de capacidades, así como de la tasa de descuento, lo que conlleva a obtener la ley de corte mediante otras metodologías, las cuales poseen complejidad variable. Cabe destacar que la política de leyes de corte, se crean en aras de alcanzar un objetivo determinado y específico, como puede ser la maximización de los beneficios anuales, los beneficios totales, el valor presente neto o incluso el logro de un movimiento de materiales parejo a lo largo de la vida de la mina. Es importante destacar que la ley de corte no se calcula con el fin de obtener una solución definitiva, ya que la ley de corte es una variable estratégica que tiene repercusiones en el diseño de la mina y es capaz de adaptarse a los cambios que sufre el entorno económico y financiero de la empresa.

2.3 ALGORITMO DE LANE.

En nuestros tiempos la planificación minera es fundamental, ya que permite crear una serie de secuencias que definen la forma en como explotar un determinado recurso mineral. Uno de los objetivos principales en planificación es lograr obtener la mayor cantidad de beneficio, maximizando los flujos futuros de la operación, para lograr esto, se vuelve crucial la determinación de la política de leyes de corte optimas, que serán los parámetros que permitan distinguir entre el material que ira a botadero y el mineral cuyo destino es la planta concentradora. El algoritmo de Kennett Lane es usado para poder determinar esta política de leyes de corte optimizante, ya que este algoritmo es capaz de maximizar los flujos futuros de beneficio incorporando al mismo tiempo el costo de oportunidad a través de una tasa de descuento, introduciendo el concepto del valor del dinero en el tiempo y la depreciación de este (Lane, 1988).

Para poder aplicar una función que maximice el valor del VAN, es preciso introducir una serie de conceptos fundamentales:

Sea P , el valor del beneficio obtenido en un tiempo $T = t$ resultante de la extracción de una cantidad de material Q_m , y sea W , el valor del beneficio obtenido por los minerales restantes después del tiempo $T = t$.

Sea P_1 el beneficio obtenido en el tiempo $T = 1$, P_2 el beneficio obtenido en $T = 2$, será denominado W_1 la suma del beneficio de todos los P_i donde $i > 1$ y W_2 la suma del beneficio P_i donde $i > 2$ de todos los tonelajes remanentes.

El valor presente de P y W llevados a un tiempo $T = 0$ serán los descritos por las ecuaciones 2.4 y 2.5.

$$PV_P(t = 0) = \frac{P}{(1+d)^T} \quad (\text{Ec. 2.4})$$

$$PV_W(t = 0) = \frac{W}{(1+d)^T} \quad (\text{Ec. 2.5})$$

Donde:

P : Beneficio obtenido hasta un tiempo t .

W : Beneficio obtenido después del tiempo t .

d : Tasa de descuento (%).

t : Tiempo (años).

La siguiente ilustración, muestra de manera gráfica el valor de P y W , llevados al año 0 además del efecto que tiene la tasa de descuento d , disminuyendo el valor de W y P al ser llevados desde un tiempo $T = t$ a $T = 0$.

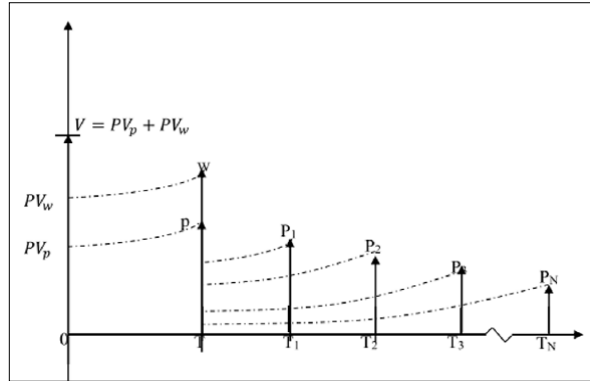


Figura 2.1: P y W en el tiempo.
Fuente: Hustrulid, Kuchta y R, 2013.

En el tiempo inicial, donde T es igual a cero, el valor presente se representará por V, entonces el valor presente será la suma de las ecuaciones 2.4 y 2.5, resultando en la ecuación 2.6.

$$V = PV_p + PV_w \quad (\text{Ec. 2.6})$$

Desarrollando la ecuación 2.6 tenemos que:

$$V = PV_p + PV_w = \frac{P}{(1+d)^T} + \frac{W}{(1+d)^T} = \frac{P+W}{(1+d)^T}$$

$$W + P = V * (1+d)^T$$

Asumiendo que el tiempo es un valor pequeño, se cumple que:

$$(1+d)^T = 1 + T * d$$

Incorporando esta última expresión, resulta lo siguiente:

$$W + P = V * (1+d)^T = V + VTd$$

$$W = V + VTd - P$$

Dado que el valor neto de las reservas remanentes en un tiempo T = t es igual a W y la diferencia entre el valor presente neto en el tiempo T = 0 y T = t, estará dada por la siguiente expresión:

$$\text{diferencia} = v = V - W$$

Despejando la diferencia denominada como “v” en el desarrollo matemático, llegamos a la siguiente expresión, definida por la ecuación 2.7.

$$v = V - (V + VTd - P) = P - VTd \quad (\text{Ec. 2.7})$$

Llegado a este punto es fundamental definir el valor de P, el cual, representará el beneficio anual. La operación minera en su conjunto estará definida por tres etapas o sistemas los cuales serán la mina, la planta concentradora y la Fundición – Refinería. Cada una de estas tres etapas tendrán

costos y capacidades limitadas, las cuales afectarán directamente en el cálculo de las leyes de corte optimas. Se define el valor de P por la ecuación 2.8.

$$P = \text{ingreso} - \text{costos} \quad (\text{Ec. 2.8})$$

Desarrollando matemáticamente la ecuación 2.8, se tiene lo siguiente:

$$\text{Ingreso} = (s - r) * Qr$$

$$\text{Costos} = Qm * m + Qc * c + h * (Qm - Qc) + f * T$$

$$P = (s - r) * Qr - \{Qm * m + Qc * c + h * (Qm - Qc) + f * T\}$$

Y el valor de la diferencia “v” o valor presente neto será el descrito por la ecuación 2.9:

$$v = (s - r) * Qr - Qm * m - Qc * c - h * (Qm - Qc) - f * T - VTd \quad (\text{Ec. 2.9})$$

En la ecuación anterior, se define T como la duración de cada uno de los periodos de producción, Qm es la cantidad de material (mineral más estéril) que se deben extraer de la mina, Qc es la cantidad de mineral enviado a la planta concentradora, Qr la cantidad de producto final refinado, f son los costos fijos por cada unidad de tiempo T, s es el precio de venta del metal, m el costo mina por cada tonelada de material, c el costo de la planta concentradora por cada tonelada de mineral, r es el costo de fundir y refinar cada unidad del producto final, d es la tasa de descuento y h es el costo de rehabilitación del botadero por cada unidad de estéril.

Tabla 2.1: Simbología de variables usadas en las ecuaciones a lo largo del proyecto.

Simbología	Definición	Unidad
Qm	Material minado	Toneladas
Qc	Mineral procesado	Toneladas
Qr	Metal Producido	Toneladas
M	Capacidad de la mina	Ton/año
C	Capacidad de planta procesadora	Ton/año
R	Capacidad de la Refinería	Ton/año
m	Costo Mina	Usd/ton de material
c	Costo planta	Usd/ton de mineral
r	Costo Refinería	Usd/ton de metal fino
f	Costos fijos	Usd/año
T	Años de producción	Años
y	Recuperación de la concentradora	Porcentaje
d	Tasa de descuento	Porcentaje
h	Costo de rehabilitación del botadero	Usd/ton de estéril

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Para poder maximizar el valor del VAN, se debe maximizar v, y cuando aumentemos el valor de v, se llegará a un punto en donde la mina o la planta o la fundición - refinería será un sistema limitante o incluso puede darse que dos sistemas son limitantes de forma simultánea, resultando en un cuello de botella, y condicionando los valores de Qm, Qc y Qr.

Debido a lo anterior es que se hace indispensable analizar el valor de v cuando cada uno de los tres sistemas anteriores es la limitante.

Si la etapa limitante es la mina, el tiempo queda definido por la ecuación 2.10.

$$T = \frac{Qm}{M} \quad (\text{Ec. 2.10})$$

Reemplazando la ecuación 2.10 en 2.9, se obtendrá la función de valor cuando la mina es la limitante:

$$v_{mina} = (s - r) * Qr - Qm * m - Qc * c - h * (Qm - Qc) - f * \frac{Qm}{M} - V * \frac{Qm}{M} * d$$

Reordenando la expresión anterior llegamos a la ecuación 2.20 que representa el aporte de valor presente que realiza la mina:

$$v_{mina} = (s - r) * Qr - Qm * m - Qc * c - h * (Qm - Qc) - (f + Vd) \frac{Qm}{M}$$

Por otro lado, se define que la cantidad de cobre fino obtenido a partir del mineral estará dada por la ecuación 2.11.

$$Qr = Qc * y * \bar{g} \quad (\text{Ec. 2.11})$$

Reemplazando la ecuación 2.11 en la última expresión del valor presente de la mina tenemos:

$$v_{mina} = (s - r) * Qc * y * \bar{g} - Qm * m - Qc * c - h * (Qm - Qc) - \left(\frac{f + Vd}{M} \right) Qm$$

Reordenando esta última expresión, llegamos a la ecuación 2.12, que representa el valor presente verdadero que aporta la mina.

$$v_{mina} = \{(s - r) * y * \bar{g} + h - c\} * Qc - \left\{ m + h + \frac{f + Vd}{M} \right\} * Qm \quad (\text{Ec. 2.12})$$

La ecuación anterior muestra el aporte de valor presente por parte de la mina, pero si la limitante cambia y fuese la planta concentradora la que limita, el tiempo estará dado por la ecuación 2.13.

$$T = \frac{Qc}{C} \quad (\text{Ec. 2.13})$$

Empleando la misma metodología matemática, es posible formular la ecuación de valor presente cuando la planta concentradora es la limitante mostrada por la ecuación 2.14.

$$v_{planta} = \left\{ (s - r) * y * \bar{g} + h - c - \frac{f + Vd}{C} \right\} * Qc - m * Qm \quad (\text{Ec. 2.14})$$

Por último, si la limitante es la fundición – refinería, el tiempo estará definido por la ecuación 2.15.

$$T = \frac{Qr}{R} \quad (\text{Ec. 2.15})$$

Reemplazando la ecuación 2.15 en 2.9 y desarrollando matemáticamente, se llega a la siguiente expresión que regula el aporte de valor presente por parte de la Fundición y Refinería, mostrado por la ecuación 2.16.

$$v_{refineria} = \left[\left\{ s - r - \left(\frac{f+Vd}{R} \right) \right\} * y * \bar{g} - c + h \right] Qc - m * Qm \quad (\text{Ec. 2.16})$$

Para encontrar la ley de corte optima, se debe maximizar el valor de v , pero v es representado por tres ecuaciones, " V_{mina} ", " V_{planta} " y " $V_{refineria}$ ", las cuales dependen a su vez de múltiples variables. Para determinar el punto óptimo (máximo valor de cada función de valor presente) se debe hacer uso de la herramienta del cálculo infinitesimal, que dice que para encontrar el punto más alto (máximo) de una función se debe derivar con respecto a su variable e igualarla a cero. En este caso la variable con respecto a la cual se derivarán las tres funciones anteriores corresponderá al valor de Qc , ya que este valor representa la cantidad de mineral enviado a la planta de procesamiento, por lo tanto, se realiza el siguiente tratamiento matemático con la ecuación 2.12.

$$\frac{dv_{mina}}{dQc} = (s - r) * y * \bar{g} + h - c$$

Igualando esta última ecuación a cero, tenemos:

$$(s - r) * y * \bar{g} + h - c = 0$$

Despejando la ley media llegamos a una ecuación que permite conocer la ley de corte que hace máxima la función de valor presente de la mina y que la llamaremos como ley de corte económica de la mina y estará descrita por la ecuación 2.17.

$$g_{mina} = \frac{c-h}{(s-r)*y} \quad (\text{Ec. 2.17})$$

La expresión 2.17 corresponde a la ecuación que define la ley de corte económica si la limitante del proceso es la mina.

Del mismo modo anterior, se calculan las otras leyes de corte:

$$\frac{dv_{planta}}{dQc} = (s - r) * y * \bar{g} + h - \left(c + \frac{f + Vd}{C} \right)$$

$$\frac{dv_{planta}}{dQc} = (s - r) * y * \bar{g} + h - \left(c + \frac{f + Vd}{C} \right) = 0$$

La ecuación 2.18 representa aquella ley que maximiza el valor presente que aporta la etapa de la planta concentradora y se llamara ley de corte económica de la planta.

$$g_{planta} = \frac{c + \frac{f+Vd}{C} - h}{(s-r)*y} \quad (\text{Ec. 2.18})$$

$$\frac{dv_{refineria}}{dQ_c} = \left\{ s - r - \left(\frac{f + Vd}{R} \right) \right\} * y * \bar{g} - c + h$$

$$\frac{dv_{refineria}}{dQ_c} = \left\{ s - r - \left(\frac{f + Vd}{R} \right) \right\} * y * \bar{g} - c + h = 0$$

$$g_{refineria} = \frac{c-h}{\left\{ s - r - \left(\frac{f + Vd}{R} \right) \right\} * y} \quad (\text{Ec. 2.19})$$

La ecuación 2.19 representa la ley que permite maximizar el aporte de valor presente que entrega el sistema de la Fundición y Refinería, y se llamara ley de corte económica de la fundición y refinería.

2.3.1 Determinación de las Leyes de Corte del Balance

La ley de corte optima no es necesariamente el valor máximo de la función de valor para cada uno de los sistemas, ya que existe el caso en donde la capacidad limitante no está dado solo por una etapa, y serán dos etapas los que limitarán los flujos de materiales. Es posible obtener tres leyes de corte llamadas leyes de balance, la primera viene dada por el balance que existe entre la mina y la planta definida como g_{mc} y que relaciona la cantidad de mineral procesado y la cantidad de material minado (C/M), el equilibrio existente entre la planta y la refinería g_{rm} , que representa la cantidad de metal fino recuperado a partir del tonelaje de mineral (R/C). Y por último se tiene el balance entre la refinería y la mina, que representa la cantidad de metal fino a partir del tonelaje de material que es capaz de mover la mina. Se definirán las siguientes leyes del balance.

Ley de balance para el sistema mina - concentradora:

Esta ley de corte se obtiene igualando las funciones de valor de la mina y de la concentradora, de esta forma, se comienza desde la siguiente expresión:

$$v_{mina} = v_{planta} \quad (\text{Ec. 2.20})$$

Desarrollando la Ecuación 2.20, tenemos:

$$\begin{aligned} \{(s-r) * y * \bar{g} - c\} * Q_c - \left\{ m + \frac{f + Vd}{M} \right\} * Q_m &= \left\{ (s-r) * y * \bar{g} - c - \frac{f + Vd}{C} \right\} * Q_c - m * Q_m \\ (s-r) * y * \bar{g} * Q_c - m * Q_m - \left(\frac{f + Vd}{M} \right) * Q_m &= (s-r) * y * \bar{g} * Q_c - c * Q_c - Q_c * \left(\frac{f + Vd}{C} \right) - m * Q_m \end{aligned}$$

Eliminando términos algebraicos y despejando tenemos:

$$-\left(\frac{f + Vd}{M} \right) * Q_m = -Q_c * \left(\frac{f + Vd}{C} \right)$$

$$\frac{C}{M} * Q_m = Q_c * \frac{(f + Vd)}{(f + Vd)}$$

$$\frac{C}{M} * Q_m = Q_c$$

El termino Q_m es la cantidad de material movido por la mina y Q_c la cantidad de mineral obtenido a partir de Q_c , por lo que es posible expresar Q_c a través de la siguiente expresión donde g es la ley de corte y donde el termino $(1 - g)$ representa todo material que está por encima de una determinada ley de corte y Q_c es la cantidad de mineral que corresponderá a todo el tonelaje de material que se encuentre por encima de una determinada ley de corte “ g ”.

$$Q_c = Q_m \cdot (1 - g)$$

$$\frac{C}{M} \cdot Q_m = Q_m \cdot (1 - g)$$

Desarrollando la última expresión se llega a la ecuación 2.21 que representa la ley de corte del balance entre las etapas de la mina y la planta concentradora.

$$g_{mc} = 1 - \frac{C}{M} \quad (\text{Ec. 2.21})$$

Ley de balance para el sistema concentradora - refinería:

Para la determinación de esta ley, se comienza igualando las ecuaciones de valor de la planta y de la refinería (ecuación 2.22) y desarrollando matemáticamente del mismo modo que para la ley del balance entre la mina y la planta, es posible llegar a la siguiente ecuación 2.23, que representa la ley de corte entre la planta y la refinería.

$$v_{planta} = v_{refinería} \quad (\text{Ec. 2.22})$$

$$g_{cr} = \frac{2R}{C} - 1 \quad (\text{Ec. 2.23})$$

Ley de balance para el sistema mina – refinería:

La obtención de la última ley de balance se obtiene de igual forma que para las otras leyes del balance, igualando las ecuaciones de valor de la mina y de la refinería (ecuación 2.24) y desarrollando matemáticamente, se obtiene la ecuación 2.25 que representara la ley de corte del balance entre la refinería y la mina.

$$v_{mina} = v_{refinería} \quad (\text{Ec. 2.24})$$

$$g_{rm} = \left(1 - \frac{2R}{M}\right)^{0.5} \quad (\text{Ec. 2.25})$$

En los cálculos anteriores se han obtenido un total de 6 leyes de corte, tres son económicas, dependiendo de la capacidad, costos, precios y recuperación, las cuales provienen del tratamiento de derivar la ecuación de Valor con respecto a cada uno de los 3 procesos limitantes y las otras tres son las del balance, aquellas que solo dependen de la distribución de la ley del mineral y de la capacidad de cada uno de los tres sistemas (constantes). El siguiente objetivo es determinar la ley de corte optima, para ello se deben obtener tres leyes a partir de las seis anteriores como sigue: Como existen 3 procesos que intervienen dentro del proceso minero; la

mina, la planta y la fundición & refinería, es posible analizar la combinación resultante de dos de estos tres procesos, por lo cual, se tendrá que analizar la combinación entre la mina y la planta, entre la planta y la refinería y, por último, entre la mina y la refinería.

En primer lugar, se analizará la relación entre la función de valor para la combinación de la mina y la planta concentradora, donde se tendrán 3 casos claramente marcados.

Caso N°1

A partir de la Figura 2.2, se tienen las curvas de valor para la mina (V_m) y para la concentradora (V_c), el punto donde ambas se interceptan (A) corresponde al valor de la ley de corte del balance g_{mc} , la cual representa aquel punto donde ambas funciones de valor se hacen iguales y donde aquel valor es posible calcularlo a través de la ecuación 2.21.

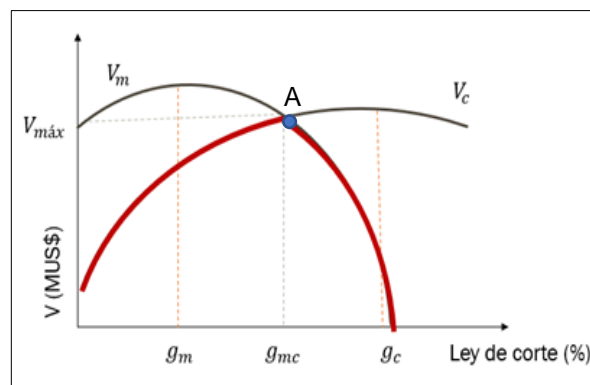


Figura 2.2: Valor presente vs ley de corte, Caso N°1.
Fuente: Ahmadi, 2018.

Se aprecia además la meseta de cada función, en donde proyectado su valor al eje X, es posible obtener dos valores adicionales de ley de corte, una ley que representa un punto donde las etapas mina y concentradora están operando a plena capacidad g_{mc} (Punto A), una segunda ley dada por g_m que es la ley de corte que hace máximo el valor de la función V_m y una tercera ley de corte g_c que es aquella que hace máximo el valor de la función V_c , según esto, se debe determinar ahora aquella ley que represente la combinación entre estos dos procesos limitantes y al mismo tiempo obtengamos el valor máximo de V . según la figura 2.2 se aprecia una zona cuando la ley de corte es menor a g_{mc} , en donde V_c siempre es menor que V_m , el hecho de que V_c sea menor que V_m , se da porque cuando la ley de corte es mayor que cero y menor que g_{mc} , el tiempo que le toma a la concentradora procesar el mineral dada una ley de corte "x" cuando x pertenece al intervalo $[0, g_{mc}]$ es mayor que el tiempo que le toma a la mina en mover el material, por lo tanto cuando V_c sea menor que V_m , todo el proceso estará limitado por la concentradora.

Cuando el valor de la ley de corte "x" toma valores entre $[g_{mc}, \text{infinito}]$ se aprecia que V_c es mayor que V_m , por lo tanto, el tiempo que le toma a la planta en procesar el mineral será menor que el tiempo que le toma a la mina en extraer el material. Debido a esto se dice que la mina es la

limitante. Lo que se desea encontrar es una curva que represente la situación de la empresa minera, lo cual estará dado, por la curva roja de la Figura 2.2, y el valor verdadero de la ley de corte para la combinación mina-concentradora será aquella que haga máximo el beneficio y que al mismo tiempo se encuentre dentro de esta curva roja que representa la situación donde se respetan ambas limitantes del proceso minero. Y la ley de corte entre los dos sistemas corresponderá a la mediana entre las tres leyes de corte (ecuación 2.26 y 2.27).

Si se cumple que:

$$g_m < g_{mc} < g_c \quad (\text{Ec. 2.26})$$

$$G_{mc} = g_{mc} \quad (\text{Ec. 2.27})$$

Caso N°2

En la Figura 2.3 se aprecia que para el intervalo de ley de corte entre cero y g_{mc} , la curva V_c está por debajo de V_m , por lo tanto, en este intervalo, la limitante del proceso es la planta concentradora, ya que tiene en todo momento un valor más pequeño para el beneficio y esto es porque el tiempo que le toma a la concentradora es mayor en comparación al tiempo que le toma a mina. Y durante el intervalo de leyes de corte que comprende desde g_{mc} hasta infinito, se aprecia que la curva V_c es mayor que la curva V_m , por lo que la limitante del proceso es la mina, ahora se debe analizar la curva roja de la Figura 2.3 la cual representa la situación donde se respetan las limitantes de los dos procesos, y en esta curva roja el valor máximo de V es cuando la ley de corte es g_c .

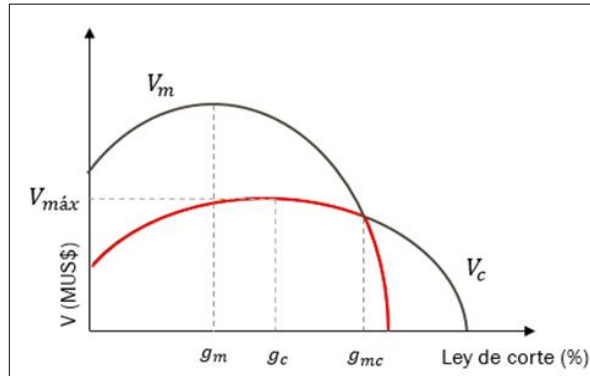


Figura 2.3: Valor presente vs ley de corte, Caso N°2.
Fuente: Ahmadi, 2018.

Cabe destacar que el punto donde ambas curvas se interceptan será la ley de corte del balance, definida por la ecuación 2.21 y está representada por g_{mc} . Además, una vez que se obtienen las tres leyes de corte g_m , g_c y g_{mc} , la ley de corte entre los dos sistemas corresponderá a la mediana entre los tres valores, dado por las ecuaciones 2.28 y 2.29.

$$g_m < g_c < g_{mc} \quad (\text{Ec. 2.28})$$

$$G_{mc} = g_c \quad (\text{Ec. 2.29})$$

Caso N°3

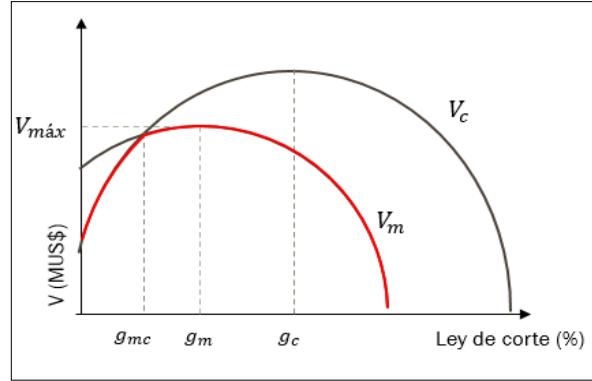


Figura 2.4: Valor presente vs ley de corte, Caso N°3.
Fuente: Ahmadi, 2018.

Del mismo modo que en los dos casos anteriores, se tienen dos curvas, V_m (valor de la mina) y V_c (valor de la planta), en donde se calculan para cada curva su valor máximo, el cual corresponderá a una determinada ley de corte, en específico a g_m y g_c respectivamente. Además, se calcula la ley de corte de balance, la cual estará dada por la intercepción de ambas curvas y su valor numérico estará dado por la ecuación 2.21. Una vez obtenida estas tres leyes de corte, se ordenan de menor a mayor y la mediana se escoge como la ley de corte óptima entre el sistema mina-concentradora. Esto es posible resumirlo con la ecuación 2.30 y 2.31.

$$g_{mc} < g_m < g_c \quad (\text{Ec. 2.30})$$

$$G_{mc} = g_m \quad (\text{Ec. 2.31})$$

El procedimiento anterior es posible replicarlo para cada una de las dos combinaciones de sistemas restantes, que serían para la mina – Refinería y planta – refinería, aplicando esta metodología para obtener los valores de G_{mc} , G_{mr} y G_{cr} , es posible seguir las siguientes tres condiciones resumidas para cada combinación entre dos etapas de un total de 3.

$$G_{mc} = \begin{cases} g_m & \text{si } (g_{mc} \leq g_m) \\ g_c & \text{si } (g_{mc} \geq g_c) \\ g_{mc} & \text{si lo anterior no se cumple} \end{cases}$$

$$G_{cr} = \begin{cases} g_r & \text{si } (g_{cr} \leq g_r) \\ g_c & \text{si } (g_{cr} \geq g_c) \\ g_{cr} & \text{si lo anterior no se cumple} \end{cases}$$

$$G_{mr} = \begin{cases} g_m & \text{si } (g_{mr} \leq g_m) \\ g_r & \text{si } (g_{mr} \geq g_r) \\ g_{mr} & \text{si lo anterior no se cumple} \end{cases}$$

Una vez que es posible obtener el valor numérico de las tres expresiones anteriores, se calculara la verdadera ley de corte como la mediana de los 3 valores resultantes de las 3 expresiones anteriores (G_{mc} , G_{cr} y G_{mr}), donde esta ley de corte está definida por la ecuación 2.32.

$$G_{optimo} = \text{valor medio } (G_{mc}, G_{cr}, G_{mr}) \quad (\text{Ec. 2.32})$$

Una vez que se obtiene el valor óptimo de ley de corte a través del algoritmo anterior, esta ley sirve para obtener un valor presente neto, este valor del VAN es ingresado nuevamente en la ecuación de ley de corte, lo cual nos dará una nueva ley, y este proceso se repite de forma recursiva hasta que el valor del VAN converge a un valor fijo.

A partir de todo lo descrito, el algoritmo de Lane trabaja de forma iterativa para obtener el valor de ley de corte óptima para cada periodo, suponiendo que existe una determinada distribución de material y leyes disponible y los parámetros económicos son invariantes a lo largo del tiempo.

2.4 GRADIENTE REDUCIDO GENERALIZADO

El método del gradiente reducido generalizado (GRG) es una extensión del método del gradiente reducido el cual sirve para encontrar una solución a problemas que poseen solo restricciones lineales (Rao, 2009). Para analizar este método matemático plantearemos el siguiente problema:

$$\text{Minimizar } f(X) \quad (\text{Ec. 2.33})$$

Sujeto a:

$$h_j(X) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (\text{Ec. 2.34})$$

$$l_k(X) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (\text{Ec. 2.35})$$

$$x_i^{(l)} \leq x_i \leq x_i^{(u)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{Ec. 2.36})$$

$$x_{n+j} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (\text{Ec. 2.37})$$

Donde:

$f(X)$: Función objetivo.

$h_j(X)$: Restricciones expresadas a través de inecuaciones.

$l_k(X)$: Restricciones expresadas a través de ecuaciones.

j : Numero de restricciones expresadas a través de inecuaciones.

k : Numero de restricciones expresadas a través de ecuaciones.

x_i : Variable independiente.

$x_i^{(l)}$: Limite inferior del intervalo donde habita la variable independiente.

$x_i^{(u)}$: Limite superior del intervalo donde habita la variable independiente.

Se agregan las variables de holgura para cambiar las restricciones de inecuaciones a ecuaciones, por lo cual, el problema queda definido solo por restricciones que contienen ecuaciones:

$$g_j(X) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m + l \quad (\text{Ec. 2.7})$$

$$x_i^{(l)} \leq x_i \leq x_i^{(u)}, \quad i = 1, 2, \dots, n + m \quad (\text{Ec. 2.8})$$

Donde:

$g_j(X)$: Restricciones expresadas en ecuaciones más las expresadas en inecuaciones incorporando las variables de holguras.

x_i : Variables del problema que incluyen las originales más las variables de holgura.

Como se puede apreciar, g contendrá la suma de las restricciones que estaban en inecuaciones y en ecuaciones. Y la variable de holgura puede tomar cualquier valor entre 0 hasta un número muy grande (infinito) para cada una de las restricciones que estaban expresadas en inecuaciones.

El método GRG está sustentado en la idea de la eliminación de variables usando restricciones que solo estén expresadas en ecuaciones. Donde teóricamente una variable puede ser reducida del set x_i ($i = 1, 2, \dots, n + m$) para cada restricción escrita en términos de ecuaciones para las $(m + l)$ variables. Llegado a este punto es conveniente dividir las $(m + l)$ variables en dos conjuntos de forma arbitraria según se ilustra en las ecuaciones 2.41, 2.42 y 2.43.

$$X = Y \cup Z = \text{total de variables} \quad (\text{Ec. 2.41})$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \text{variables independientes o de diseño} \quad (\text{Ec. 2.42})$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = \text{variables dependientes o de estado} \quad (\text{Ec. 2.43})$$

Donde las variables independientes no dependen de las variables dependientes, pero las variables dependientes si dependen de las independientes usadas para satisfacer las restricciones que existen en la ecuación 2.39.

Ahora consideraremos el primer cambio que se hará sobre la función objetivo y sobre las restricciones, el cual contempla la introducción de derivadas parciales sobre la función objetivo y sobre la restricción para cada variable independiente y dependiente.

$$df(X) = \sum_{i=1}^{n-l} \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot dy_i + \sum_{i=1}^{m+l} \frac{\partial f}{\partial z_i} \cdot dz_i = \nabla_Y^T \cdot f dY + \nabla_Z^T \cdot f dZ \quad (\text{Ec. 2.44})$$

$$dg_i(X) = \sum_{j=1}^{n-l} \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \cdot dy_j + \sum_{j=1}^{m+l} \frac{\partial g_i}{\partial z_j} \cdot dz_j \quad (\text{Ec. 2.45})$$

Donde también es posible expresarlas como:

$$dg = [C] \cdot dY + [D] \cdot dZ \quad (\text{Ec. 2.46})$$

Donde:

$$\nabla_Y f = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial y_{n-l}} \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 2.47})$$

$$\nabla_Z f = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_1} \\ \frac{\partial f}{\partial z_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial z_{m+l}} \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 2.48})$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_{n-l}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{m+l}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_{m+l}}{\partial y_{n-l}} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 2.49})$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial z_{m+l}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{m+l}}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial g_{m+l}}{\partial z_{m+l}} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 2.50})$$

$$dY = \begin{Bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dy_{n-l} \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 2.51})$$

$$dZ = \begin{Bmatrix} dz_1 \\ dz_2 \\ \vdots \\ dz_{m+l} \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 2.52})$$

Asumiendo que todas las restricciones originales dadas por la ecuación 2.39, satisfacen al vector X , ($g(X) = 0$), el cambio en el vector representado por dX , debe corresponder a $dg = 0$, de esta forma se mantiene la viabilidad en $X + dX$, la ecuación que expresa a dg , es posible expresarla como:

$$dZ = -[D]^{-1} \cdot [C] \cdot dY \quad (\text{Ec. 2.53})$$

El cambio en la función objetivo cuando cambian los valores de X , están dados por la ecuación 2.44, el cual puede ser expresada insertando la última ecuación 2.53 en la ecuación que define la función objetivo (2.44), quedando como:

$$df(X) = (\nabla_Y^T f - \nabla_Z^T f [D]^{-1} [C]) dY \quad (\text{Ec. 2.54})$$

Lo que es lo mismo que:

$$\frac{df}{dY}(X) = G_R \quad (\text{Ec. 2.55})$$

Donde:

$$G_R = \nabla_Y f - ([D]^{-1}[C])^T \nabla_Z f \quad (\text{Ec. 2.56})$$

Esta última expresión es conocida como el gradiente reducido generalizado. Geométricamente, el gradiente reducido puede ser representado como una proyección del gradiente n dimensional original sobre la región factible compuesta por $n-m$ dimensiones, descrita por las variables de diseño o independientes. Se sabe que la condición necesaria para que exista un mínimo para la función objetivo es que los componentes del gradiente desaparezcan. Del mismo modo, respetando todas las restricciones, la función asumirá su valor mínimo cuando los componentes del gradiente reducido sean cero. El gradiente reducido puede ser utilizado para generar una dirección de búsqueda denominada como "S" el cual sirve para reducir el valor de la función objetivo, sujeta a las restricciones, similar a como funciona el gradiente de una función cualquiera f , se tendrá su ∇f el cual sirve para encontrar el mínimo o máximo valor de la función la cual no está sujeta a restricciones. Para lo anterior, debe escogerse la longitud del paso adecuada la cual se llamará " λ " la cual minimizará el valor de f a lo largo de la dirección de búsqueda S. Para cualquier valor específico de λ , el vector variable Z se actualizará usando la ecuación (2.51), teniendo en cuenta que la ecuación (2.53) se basa en una aproximación lineal al problema no lineal original, por lo que puede pasar de que para las restricciones pueden no ser exactamente igual a cero cuando estamos en el paso λ , es decir, $dg \neq 0$. Por lo tanto, cuando Y se mantiene fijo, para mantener:

$$g_i(X) + dg_i(X) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m + l \quad (\text{Ec. 2.57})$$

Debemos tener:

$$g(X) + dg(X) = 0 \quad (\text{Ec. 2.58})$$

Usando la ecuación 2.53, para expresar dg tenemos:

$$dZ = [D]^{-1}(-g(X) - [C]dY) \quad (\text{Ec. 2.59})$$

El valor de dZ , esta dado por la ecuación 2.59, el cual puede ser usado para actualizar el valor de Z como:

$$Z_{\text{actualizado}} = Z_{\text{anterior}} + dZ \quad (\text{Ec. 2.60})$$

Las restricciones evaluadas en el vector X actualizado y el procedimiento para encontrar el valor de dZ (usando la ecuación 2.59, se repite hasta que dZ sea lo suficientemente pequeño. La ecuación 2.59 puede ser considerada como el método de Newton para resolver ecuaciones simultáneas para dZ .

Pasos para aplicar el algoritmo:

- Especificar cuáles serán las variables de diseño (independientes) y las de estado (dependientes). Se comienza con un vector de prueba inicial llamado “X”, en el cual hay que identificar las variables de diseño y de estado (Y y Z) para el problema respetando lo siguiente:
 - Las variables dependientes deben seleccionarse con el fin de evitar una singularidad de la matriz $[D]$
 - Como las variables de estado se ajustan constantemente durante el proceso iterativo para mantener la factibilidad, cualquier componente de X que sea igual a su límite inferior o superior debe asignarse inicialmente como una variable de diseño.
 - Como algunas restricciones están expresadas como desigualdades, existirán variables de holguras, las cuales deben designarse como variables de estado. Sin embargo, si el valor inicial de cualquier variable de estado cero (el cual corresponde al valor límite inferior) debe ser designado como una variable de diseño.
- En este paso se debe calcular el valor del gradiente reducido generalizado. El GRG se determinará usando la ecuación 2.56. Las derivadas involucradas en la ecuación 2.56 se pueden evaluar numéricamente, si es necesario.
- Se debe probar la convergencia. Si todos los componentes números que componen al GRG son cercanos a cero, se puede considerar que el método ha convergido y que el vector actual X puede ser interpretado como la solución óptima del problema. Para ello la siguiente prueba puede ser usada:

$$\|G_R\| \leq \varepsilon \quad (\text{Ec. 2.61})$$

Donde ε es un numero pequeño. Si esta relación no ha sido satisfecha, debe dirigirse al paso 4.

- Se debe determinar una dirección de búsqueda para la solución. El GRG se puede utilizar de forma similar a como funciona el gradiente de una función objetivo sin restricciones para generar una búsqueda adecuada respetando una dirección “S”. Si usamos el método del descenso más empinado, el vector S se determina como:

$$S = -G_R \quad (\text{Ec. 2.62})$$

- Se debe encontrar el valor mínimo a lo largo de la dirección de búsqueda. Existen muchos procedimientos de minimización dimensional, que sirven para hallar un mínimo local de f a lo largo de la dirección de búsqueda S, el siguiente procedimiento se puede utilizar convenientemente:

- Se debe encontrar una estimación del paso λ , como la distancia a la restricción lado más cercano. Cuando consideramos las variables de diseño, tenemos:

$$\lambda = \begin{cases} \frac{y_i^{(u)} - (y_i)_{viejo}}{s_i} & \text{si } s_i > 0 \\ \frac{y_i^{(l)} - (y_i)_{viejo}}{s_i} & \text{si } s_i < 0 \end{cases} \quad (\text{Ec. 2.63})$$

Donde: s_i , es el componente i-ésimo de S. De forma similar cuando las variables de estado son consideradas tenemos a partir de la ecuación (2.53) que:

$$dZ = -[D]^{-1} \cdot [C] \cdot dY \quad (\text{Ec. 2.64})$$

Reemplazando $dY = \lambda S$, la ecuación 2.53 nos entrega la dirección de búsqueda para las variables Z como:

$$T = -[D]^{-1} \cdot [C] S \quad (\text{Ec. 2.65})$$

Por lo tanto:

$$\lambda = \begin{cases} \frac{z_i^{(u)} - (z_i)_{viejo}}{t_i} & \text{si } t_i > 0 \\ \frac{z_i^{(l)} - (z_i)_{viejo}}{t_i} & \text{si } t_i < 0 \end{cases} \quad (\text{Ec. 2.66})$$

Donde t_i es el componente i-ésimo de T.

- El valor mínimo encontrado para λ , según la ecuación 2.63, hace que algunas variables de diseño alcancen su límite inferior o superior, el cual será identificado como λ_1 . De la misma forma, el valor mínimo de λ , dado por la ecuación 2.66 hará que alguna variable de estado alcance su nivel más bajo o su límite superior y será denominado como λ_2 . El valor más pequeño para λ_1 o para λ_2 se puede utilizar como un límite superior sobre el valor de λ para iniciar un procedimiento de minimización unidimensional. El método de la interpolación cuadrática se puede utilizar convenientemente para encontrar la longitud del paso optima λ^* .
- Se debe encontrar un nuevo vector X, llamado como X_{nuevo} :

$$X_{nuevo} = \begin{Bmatrix} Y_{viejo} + dY \\ Z_{viejo} + dZ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_{viejo} + \lambda^* \cdot S \\ Z_{viejo} + \lambda^* \cdot S \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 2.67})$$

Si el vector X_{nuevo} correspondiente a λ^* se considera inviable, entonces Y_{nuevo} se considera como constante y el vector Z_{nuevo} se modifica usando la ecuación 2.59 con $dZ = Z_{nuevo} - Z_{viejo}$. Finalmente, cuando se logra encontrar la convergencia con la ecuación 2.59 encontramos que:

$$X_{nuevo} = \begin{Bmatrix} Y_{viejo} + \Delta Y \\ Z_{viejo} + \Delta Z \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 2.68})$$

Y después de debe volver al paso 1, repitiendo el proceso hasta que se cumpla:

$$\|G_R\| \leq \varepsilon \quad \textbf{(Ec. 2.69)}$$

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL MERCADO DE CONCENTRADOS DE COBRE

3.1 PROCESOS PARA LA OBTENCIÓN DEL COBRE

El proceso de producción del cobre (ver Figura 3.1) comienza con la extracción del mineral de cobre, el cual puede ser a través de la minería a cielo abierto, minería subterránea o el proceso de lixiviación. Es importante destacar que usualmente el mineral de cobre no suele exportarse como tal, debido a la baja ley que presenta este producto. Una vez obtenido el mineral de cobre, se debe conocer el tipo de mineral de cobre extraído, el cual puede ser oxidado o sulfurado y dependiendo de esto, el mineral se dirige a un determinado proceso productivo.

Si el mineral extraído corresponde a un óxido, el proceso que le corresponde es el de la hidrometalurgia, el cual comienza con la lixiviación del mineral en pilas o canchas en las cuales se riega el mineral por medio del goteo o aspersores con una solución lixivante, el cual es ácido sulfúrico y el producto de este proceso es una solución denominada como PLS, la cual circula hacia el proceso de extracción por solventes, la cual a través de un extractante es capaz de separar el cobre que contiene la solución PLS, de las sustancias impuras, y obtener una solución electrolítica rica en cobre, la cual es dirigida hacia la nave de electroobtención, mediante una corriente eléctrica es capaz de acumular el cobre en el cátodo y así es posible obtener los cátodos de cobre con un 99,99% de pureza.

Cuando el mineral es sulfurado, este mineral es dirigido a una etapa de chancado y molienda en la cual se reduce la granulometría del mineral para lograr el grado de liberación de la partícula de mineral, el cual corresponde a aquel tamaño bajo el cual todas las partículas valiosas (cobre) se encuentran libres, sin asociaciones con ganga. Una vez que esta etapa logra acercarse a este tamaño de liberación, el material resultante es llevado a la etapa de flotación, en donde el material es colocado en celdas adicionando una serie de compuestos químicos, los que permiten que el cobre flote por medio de burbujas y se aloje en la superficie de la solución y la ganga quede por debajo. Una vez obtenido el cobre de la etapa de flotación, este es dirigido hacia espesadores y filtros, los cuales disminuyen la cantidad de agua que presenta esta solución y es capaz de obtener el denominado concentrado de cobre, el cual contiene alrededor de un 10% de humedad.

El producto de concentrado de cobre puede ser vendido como un producto comercializable, el cual tiene un precio definido por una serie de variables, adicionalmente este concentrado de cobre puede ser utilizado para la producción de cátodos de cobre fino, en donde el concentrado de cobre es llevado a la fundición, lugar que es capaz de producir cobre blíster con un 99.3% de cobre y ánodos de cobre con un 99.7% de pureza, además la fundición es capaz de procesar la chatarra de cobre, la cual considera todos los elementos de cobre que son reciclados para volver a transformarlos en cobre. Los ánodos de cobre obtenidos en la fundición son llevados a la refinería en donde a través de la electrefinación es posible obtener los cátodos de cobre con un

99.99% de cobre y además se obtiene el denominado barro anódico, el cual contiene diversos metales, pero está compuesto principalmente por plata y usualmente contiene entre un 12% y 40% de plata y entre un 0.1% y 0.63% de oro.

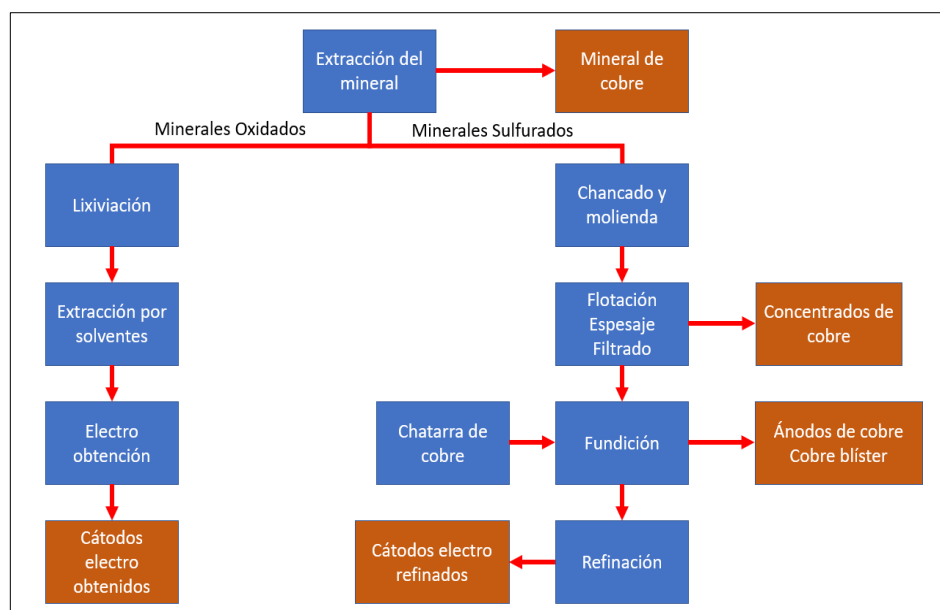


Figura 3.1: Diagrama de los procesos para obtener los productos a partir del mineral de cobre.
Fuente: Comisión Económica para América Latina, 2019.

3.2 MERCADO DE CONCENTRADOS DE COBRE

Los concentrados de cobre corresponden al producto resultante de la etapa de la flotación, espesado y filtrado el cual posee un aspecto de arena de color opaco que contiene alrededor de un 30% de cobre. Este concentrado se utiliza para producir ánodos de cobre y cobre blíster en la planta de tratamiento y finalmente cátodos electrorefinados en la refinería. El concentrado de cobre es un elemento crucial para el mercado chileno, la producción total de cobre fino de mina en el año 2019 alcanza los 5.787,4 KTM, alrededor del 72,7% de todo ese cobre mina producido por el país, es concentrado de cobre y el resto (27,3%) son cátodos eletrobttenidos. Del total de concentrado que producido por Chile que corresponde a los 4.207,2 KTM de cobre fino, el 24,03% se enviar a la fundición y refinación para poder producir 688,9 KTM de cátodos electrorefinados y 322,3 KTM de otros productos creados por la fundición como lo es el cobre blíster, por lo que el 75,97% del total de concentrado producido por Chile es el que se vende efectivamente como concentrado de cobre y a nivel global representa el 55,22% de toda la producción chilena, alcanzando la cifra de 3.196 KTM. Lo anterior se ilustra en la Tabla 3.1, la cual indica que para el año 2019, el principal producto minero de cobre que produce el país corresponde a concentrado de cobre, seguido por los cátodos eletrobttenidos, cátodos electrorefinados y otros productos de fundición.

Tabla 3.1: Producción Chilena de cobre por tipo de producto en el año 2019.

Producto	Miles de TM de cobre fino	Porcentaje del total
Producción Mina Total	5.787,40	100,00%
Producción de cátodos SX-EW	1.580,20	27,30%
Producción de concentrado mina	4.207,20	72,70%
Otros productos Fundición	322,30	5,57%
Concentrado (Producto final)	3.196,00	55,22%
Producción de cátodos E.R.	688,90	11,90%
Total, de cátodos E.R. + SX/EW	2.269,10	39,21%

Fuente: Elaboración Propia sobre la base de Comisión Chilena del Cobre, 2019.

En el tiempo se observa que la producción total de cobre mina del país ha ido creciendo con descensos relativos, pero de forma global ha ido al alza la producción (ver Figura 3.2). Se observa además que la producción de concentrados de cobre como producto final ha ido aumentando en el tiempo, ya que a partir del año 2011 se evidencia una fuerte alza en los volúmenes producidos de este producto de cobre y ha ido incrementando en el tiempo, y las proyecciones evidencian que la producción de este producto minero seguirá al alza. Mientras que la producción de cátodos electrolíticos se mantiene relativamente constante, con leves descensos en su producción entre el año 2018 y 2019, esto es debido a la limitada capacidad de refinerías que posee el país, esto sumado a que China controla gran parte de la línea productiva de refinerías, hace que el costo de refinar en Chile sea más caro que en China, por lo que las empresas se sienten más atraídas a vender producto de concentrado de cobre que seguir aumentando los volúmenes de producción de cobre refinado.

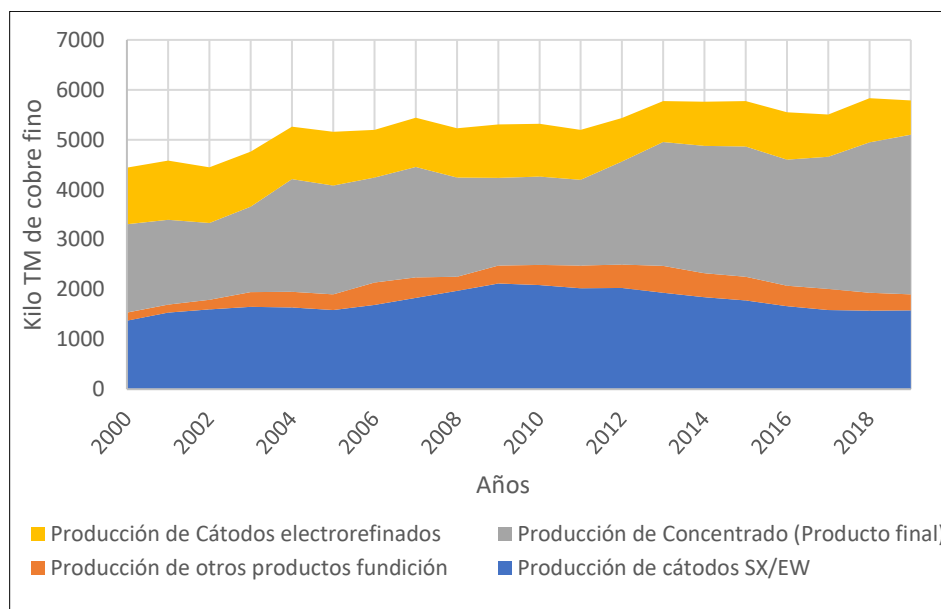


Figura 3.2: Producción Chilena de Cobre segmentada por productos en el tiempo.

Fuente: Elaboración propia sobre la base de Comisión Chilena del Cobre, 2019.

Cabe destacar que todos los datos referentes a las cantidades productivas en KTM de cobre fino pueden consultarse en el Anexo A.

Sumado a la cantidad producida por el país, se expone a continuación los volúmenes físicos de exportación que Chile realiza en el año 2019, donde se aprecia claramente que el producto más exportado es el concentrado de cobre, alcanzando la cifra de 3.514,01 KTM seguido por las exportaciones de cátodos, cobre blíster y chatarra de cobre (ver Tabla 3.2).

Tabla 3.2: Volúmenes exportados en KTM de cobre fino en el año 2019.

Tipo de producto exportado	Tipo de productos exportados Miles de TM de cobre fino	Porcentaje del total
Exportaciones totales de cobre fino	5.837,395	100,000%
Concentrados	3.514,008	60,198%
Cátodos	2.190,793	37,530%
Cobre Blíster	131,071	2,245%
Chatarra de cobre	1,479	0,025%
RAF	0,044	0,001%

Fuente: Elaboración propia sobre la base de Comisión Chilena del Cobre, 2019.

Se aprecia que del total exportado de cobre fino (5.837,395 KTM), aproximadamente el 60,2% corresponde a concentrados de cobre, cifra bastante alta, seguida por las exportaciones de cátodos que se llevan el 37,53% (engloban a los cátodos electrorefinados y eletrobttenidos) y en menor proporción se encuentra el cobre blíster, chatarra de cobre y el cobre RAF.

La producción chilena de cobre y los valores de exportación muestran que el producto de venta principal para Chile son los concentrados de cobre, todo indica que este producto seguirá siendo el principal debido a la tendencia al alza que posee la producción de concentrados en Chile y los volúmenes físicos de exportación de este producto a lo largo del tiempo, en la cual a partir del año 2011 es posible apreciar un aumento sostenido de los niveles de producción para este producto comercializable, donde las proyecciones indican que la producción de concentrado de cobre aumentara en un 47,8% para el año 2030 con respecto a los niveles de producción de concentrados registrados en el 2018, donde las predicciones indican que para el año 2030, el porcentaje de concentrado de cobre exportado será del 67,66% de todo el cobre exportado nacional. En el futuro se espera que la cantidad producida de concentrados sin refinar lleguen a los 4,74 millones de toneladas de cobre fino, en comparaciones a los 3.5 millones de toneladas de cobre fino registrados en el 2019.

La producción de concentrados de cobre ira en aumento en el futuro, en comparación con la producción de cátodos electrodepositados y cátodos electrorefinados, los cuales ha ido disminuyendo a partir del 2012 hasta la fecha. Para el caso de la producción de cátodos electrodepositados se estima que sufrirán una disminución del 52,6% con respecto a su producción en el 2018, hacia el año 2030 (Comisión Chilena del Cobre, 2019), debido a la

inexistencia de nuevos proyectos hidrometalúrgicos en el futuro, mientras la producción de cátodos electrolíticos se estima que se mantendrá relativamente constante hacia el año 2030. La razón de no incrementar la cantidad de cobre refinado es debido a múltiples factores, pero principalmente se debe al poco apoyo que muestra el país para lograr un fortalecimiento de la industria de fundiciones y refinerías Chilenas, ya que últimamente se ha producido un debilitamiento en esta industria, debido a pérdidas económicas, gestión deficiente y al poco cumplimiento de estándares medioambientales globales, debido a esto, es que aumenta la preferencia de la venta de un producto de concentrados, en el cual China es el principal comprador de concentrado de cobre, seguido por Japón. Por otro lado, China es líder en capacidad de fundición a nivel mundial lo que genera una situación de dependencia con el país asiático, ya que China con la mayor capacidad de fundición y refinerías que posee, es capaz de disminuir sus costos totales, por lo que el precio que impone por concepto de tarifas TC y RC es menor que el resto de los países, incluido Chile. Debido a esta situación, a muchas empresas mineras chilenas les sale más rentable enviar concentrado a China, que tratarlo en Chile. Además, debido a la hegemonía que posee China en la industria de fundiciones y refinerías a nivel mundial, hace que sean ellos quienes regulen las tarifas de cobro por tratar y refinar el concentrado en su país y esto claramente afecta el precio del concentrado de cobre chileno, así como los beneficios totales generados por las empresas que venden este producto. (Minería Chilena, 2015).

Con respecto a las importaciones de concentrados de cobre, China es el país líder en importaciones de cobre a nivel mundial, llevándose el 44,3%, 49,2% y el 52,3% del cobre total que demanda el mundo en los años 2017, 2018 y 2019 respectivamente (ver Figura 3.3).

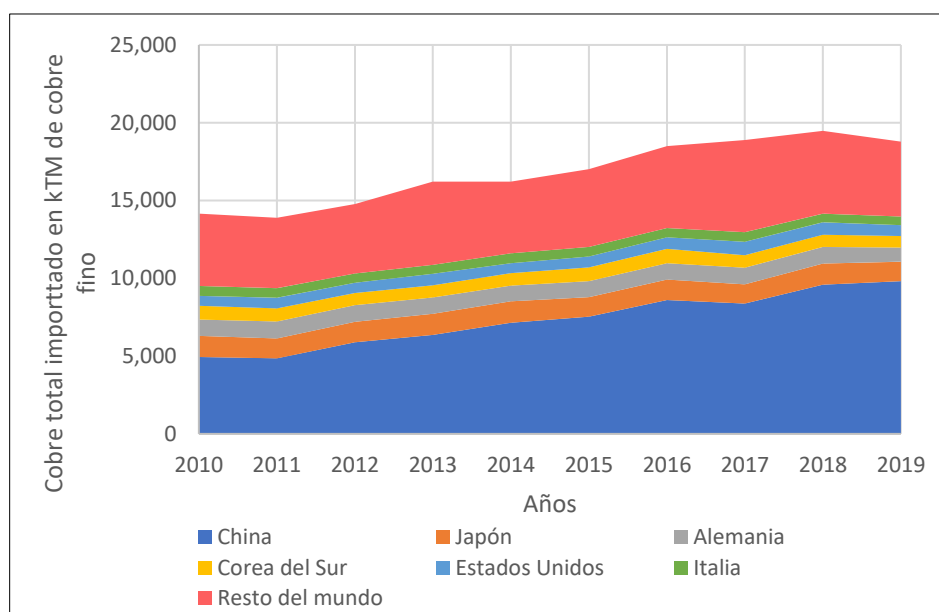


Figura 3.3: Importaciones de cobre mundial en kTM de cobre fino por países.
Fuente: Elaboración propia sobre la base de Comisión Chilena del Cobre, 2019.

China es a su vez el país líder en importaciones de concentrados de cobre (ver figura 3.4) llegando a importar un total de 5.505,811 miles de TM de concentrado de cobre en el año 2019, seguidos por Japón, esto quiere decir que del total de cobre que importa China (9.813,8 miles de TM de cobre fino en el año 2019), el 56,10% corresponde a importaciones de concentrado de cobre. Lo anterior se relaciona con el hecho de que China es el principal productor de cobre de fundición, donde su participación en la elaboración de este producto de cobre alcanza el 34,3%, 35,8% y el 39,5% en los años 2017, 2018 y 2019 respectivamente, solo seguidos por Japón. Adicionalmente China también es el principal productor de cobre refinado el cual posee una participación mundial en este producto de cobre del 40% en el 2019, seguido por Chile que alcanza el 9,6% en el mismo año.

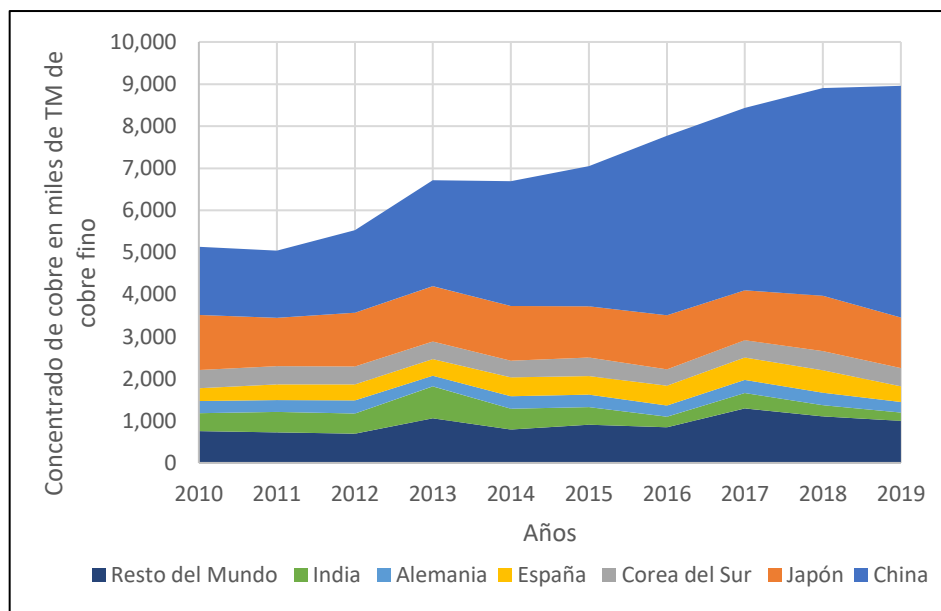


Figura 3.4: Importaciones mundiales de concentrado de cobre por países.

Fuente: Elaboración propia sobre la base de Comisión Chilena del Cobre, 2019.

La participación chilena en la producción mundial de cobre es del 28,7% para el año 2018, valor no menor, ya que Chile es el país líder en la producción de cobre mundial (ver Figura 3.5), es por esto, que resulta relevante determinar que productos específicos dentro de la producción de cobre son los más determinantes a la hora de contribuir un mayor beneficio económico para el país, donde los concentrados de cobre representan el pilar fundamental de la economía minera Chilena (ver Tabla 3.3), donde se llevan el 56,43% del valor total de embarques de cobre en el año 2019.

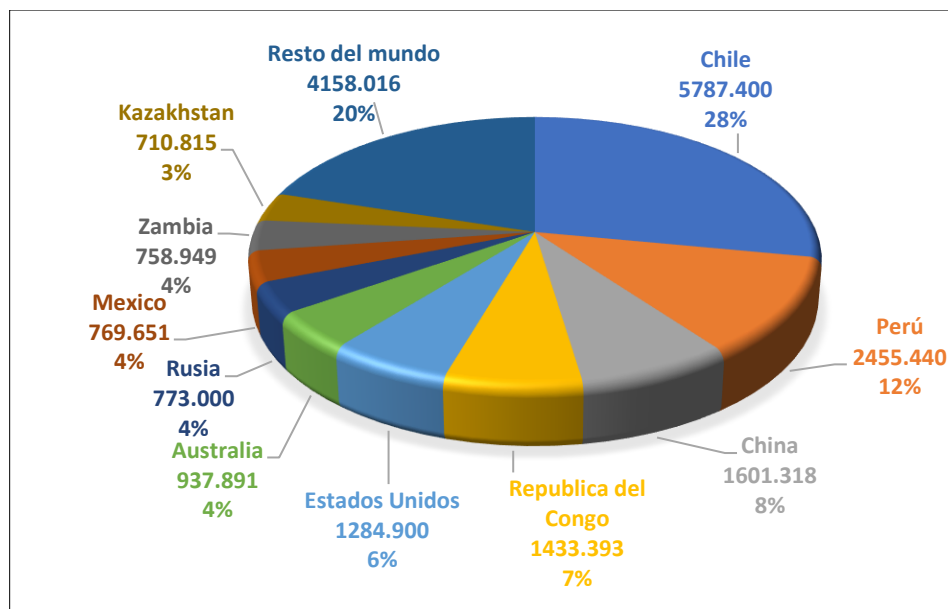


Figura 3.5: Producción por países de cobre mina en kilo TM de cobre fino en el año 2019 y su participación en porcentaje.

Fuente: Elaboración propia sobre la base de Comisión Chilena del Cobre, 2019.

Tabla 3.3: Valores de los embarques de exportación de cobre por productos para el año 2019.

Tipo de producto exportado	Valor de los embarques en MUSD FOB	Porcentaje del total
Exportaciones totales de cobre fino	31.831,227	100,000%
Concentrados	17.961,568	56,428%
Cátodos	13.050,790	41,000%
Cobre Blíster	812,759	2,553%
Chatarra de cobre	5,877	0,018%
RAF	0,234	0,001%

Fuente: Elaboración propia sobre la base de Comisión Chilena del Cobre, 2019.

Debido al rol fundamental que juega el mercado de los concentrados de cobre, es que se decide incorporarlos dentro del análisis de las leyes de corte optimas que presenta un determinado proyecto minero, ya que el mercado de concentrados representa un eslabón fundamental para la economía minera del país y la incorporación de este mercado resulta crucial dentro del posterior análisis y creación del algoritmo optimizante de leyes de corte.

Es importante destacar que a pesar de que Chile es el principal productor de concentrados de cobre, existe competencia en este mercado y llega de la mano de nuestro país vecino Perú, el cual es el segundo productor de cobre de mina a nivel mundial, alcanzando una producción de 2.455,4 miles de toneladas métricas en cobre fino en el año 2019. Lo llamativo de Perú es su alta tasa de crecimiento en los niveles productivos. Para un horizonte temporal que comprende desde el 2010 hasta el 2018, la producción de cobre de Perú ha crecido en un 95,39% en comparación con los 7,61% de Chile, lo anterior es debido a múltiples factores, como un aumento en los proyectos mineros del país vecino, así como les fuertes inyecciones que ha recibido su industria

minera. En los concentrados de cobre, Perú produce alrededor de 2204 miles de toneladas métricas de concentrados transables (Comisión Económica para América Latina, 2019).

3.3 DETERMINACIÓN DEL PRECIO DEL CONCENTRADO DE COBRE

El precio del concentrado de cobre guarda una estrecha relación con los procesos que se requieren para transformar el concentrado de cobre en cátodos de cobre fino, ya que el precio del metal rojo a nivel mundial es valorizado por la bolsa de metales de Londres (BML) y esta bolsa mundial fija un determinado valor referencial para la libra de cobre.

El precio del concentrado de cobre será calculado a través de la ecuación 3.1.

$$\text{Precio del concentrado de cobre} = P_{\text{metal}} - D \quad (\text{Ec. 3.1})$$

Donde:

P_{metal} : Precio asociado al metal de interés en el concentrado de cobre (usd/ton).

D : Descuentos asociados al concentrado.

En donde específicamente el precio del metal contenido en el concentrado estará dado por la ecuación 3.2.

$$P_{\text{metal}} = (P_m * L * FURE) + (P_{om} * L_{om} * Fure_{om}) \quad (\text{Ec. 3.2})$$

Donde:

P_m : Precio del cobre fijado por la BML. (usd/ton)

L : Ley de cobre contenido en el concentrado (%).

$FURE$: Perdida por el proceso de fundición y refinación (%).

P_{om} : Precio del otro metal.

L_{om} : Ley del otro metal contenido en el concentrado (% o ppm).

$Fure_{om}$: Recuperación del otro metal después del proceso de fundición y refinación (%).

Donde P_m corresponde al precio del cobre fijado por la BML, L es la ley de cobre contenido en el concentrado, la sigla “om” corresponde al otro metal que este incluido dentro del concentrado, el cual puede ser plata, oro, etc., el cual posee su propio precio (P_{om}), su ley contenida (L_{om}) y su recuperación en la refinación ($Fure_{om}$). Para efectos del algoritmo computacional la base de datos solo considera la inclusión de un solo metal (cobre) ya que el propósito de la investigación es la determinación de leyes que maximicen el algoritmo de Lane y la adición de otros metales se encuentra fuera del alcance del estudio.

La sigla $FURE$ hace referencia al porcentaje del valor del metal pagado después de la aplicación de una “deducción metalúrgica estándar” que cubre las pérdidas de cobre en los procesos de

fundición y refinería, este valor se define en los contratos de concentrados y usualmente es posible incorporarlos en tres modalidades:

- **Porcentaje:** El contenido del metal pagable disminuye en un determinado porcentaje, para el presente proyecto el metal solo corresponderá al cobre. Por ejemplo, si la deducción metalúrgica es del 3,6% esto conlleva a que el cobre pagable corresponde al 96,4% del cobre contenido en el concentrado.
- **Unidad:** Establece un número que se descuenta de forma directa a la ley de cobre del concentrado. Por ejemplo, si se establece una deducción metalúrgica de 2 unidades, y el contenido de cobre es del 29% de cobre, se considera pagable solo el cobre contenido equivalente a una ley del 27%.
- **Mixto:** En este caso se aplican deducciones metalúrgicas en términos de unidades y porcentajes, en conjunto.

En los múltiples contratos de exportación de concentrados de cobre, es posible apreciar que en la mayoría de los contratos poseen modalidad mixta para definir la deducción metalúrgica, donde el valor de la deducción metalúrgica dependerá directamente de la ley contenida de cobre en el concentrado, para el caso de la modalidad en porcentaje, el valor de la media de la deducción metalúrgica es inversamente proporcional a la ley de cobre del concentrado. Es posible observar el comportamiento de los valores de la deducción metalúrgica a través de medidas estadísticas, segmentando en tres tramos la ley de cobre del concentrado (ver Tabla 3.4).

Tabla 3.4: Valores de deducción metalúrgica, según su modalidad y tramo de ley de cobre en concentrado.

Contenido de cobre	Modalidad Deducción Metalúrgica	Mínimo	Media	Máximo	Desviación. Estándar.
Ley Cu < 25%	Porcentaje	1,50	7,06	81,00	12,72
	Unidad	1,00	1,08	1,10	0,04
25% <= Ley Cu < 30%	Porcentaje	1,00	3,50	3,62	1,07
	Unidad	1,00	1,00	1,00	-
Ley Cu >= 30%	Porcentaje	1,00	3,30	10,00	0,42
	Unidad	1,00	1,00	1,00	-

Fuente: Comisión Chilena del Cobre, 2021.

Para efectos de la presente investigación se incorporará la deducción metalúrgica dentro de los descuentos para calcular el precio del concentrado de cobre y solo con el fin de incorporar la deducción metalúrgica al futuro código en Python, se establece que el valor de la deducción metalúrgica será de 3,5% para toda la evaluación económica futura.

Las deducciones corresponden a todos los procesos por los cuales debe pasar el concentrado de cobre para llegar a ser un cátodo de cobre fino, el cual tiene un valor referenciado por la Bolsa de Metales de Londres. El valor del TC y RC son el cargo de tratamiento en la fundición y el cargo de refinación correspondientemente y el termino Otros se refiere a otros cargos que usualmente

corresponden a multas y penalidades por los elevados niveles de contaminantes que puede presentar el concentrado de cobre y las deducciones se encuentran definidas por la ecuación 3.3.

$$\text{deducciones} = TC + RC + \text{Otros} \quad (\text{Ec. 3.3})$$

Donde:

TC : Cargos por tratamiento (usd/TMS).

RC : Cargos por Refinación (cusd/lb).

Otros : Otros cargos asociados a impurezas o castigos.

El contaminante con mayor frecuencia dentro de los concentrados de cobre es el arsénico, para el cual, alrededor del 63,3%, 67.3% y 62.6% del tonelaje total de concentrado de cobre posee arsénico en los contratos para los años 2018, 2019 y 2020 respectivamente (Comisión Chilena del Cobre, 2021), además existen otros elementos penalizables como lo es el Zinc, Cloro, Mercurio, Antimonio, Flúor, entre otros. Estos elementos al encontrarse en cantidades mayores a las permitidas (ver Tabla 3.5), son consideradas como contaminantes e incluso cuando la cantidad de arsénico es mayor al 0,5% china prohíbe el ingreso de dicho concentrado.

Tabla 3.5: Lista de elementos químicos penalizables en el concentrado de cobre.

Elemento penalizable	Máximo nivel permitido	Unidad
Arsénico	0,2	%
Mercurio	5	ppm
Flúor	300	ppm
Bismuto	0,2	%
Cloro	300	ppm
Cinc	3	%
Antimonio	0,05	%

Fuente: Lagos, 2016.

El principal destino de los concentrados de cobre producidos en Chile es China con un 54,8% del total en el año 2018, cifra que ha ido en aumento hasta el año 2020, el cual llega hasta el 63% del total. Los cargos TC/RC estarán fijados por las fundiciones y refinerías de los países que compran concentrado, China es el principal comprador de concentrado, este determina los valores empleados a usar como TC/RC según los cargos que imponga el país asiático. Cabe destacar que este país es el que impone los TC/RC más bajos en comparación a otros países que poseen fundiciones y refinerías en el mundo. A continuación, se presentan los siguientes valores de TC/RC a lo largo del tiempo.

A partir de la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, es posible observar la variación del precio TC/RC combinado desde enero del 2001 hasta enero del 2020, diferenciando los cargos según el tipo de contrato estipulado para las transacciones de concentrado de cobre,

donde es posible observar dos contratos, el contrato anual, donde se establecen contratos a largo plazo los cuales corresponden a aproximadamente el 80% del tonelaje total de concentrado y el spot, el cual corresponde a ventas puntuales y representan el 20% de todo el concentrado, el cual es transado en un mercado donde los cargos TC/RC son bastantes más volátiles que en el caso de los contratos anuales.

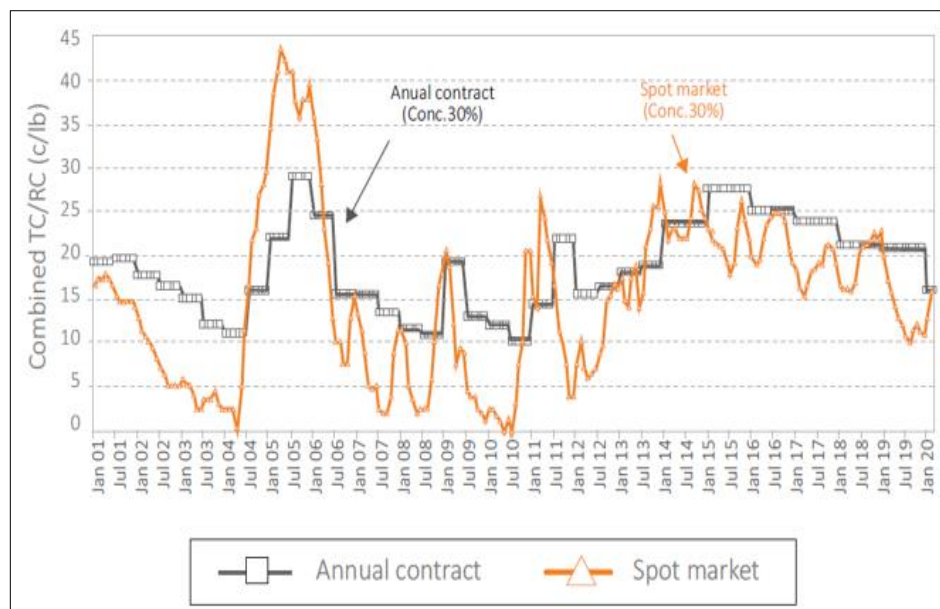


Figura 3.6: Cargo de Tratamiento y Refinería Combinado para el concentrado de cobre por semestre, para periodo 2001-2020.

Fuente: Centro de Estudios del Cobre y la Minería, 2020.

El valor para el TC y el RC asumido para determinar el precio del concentrado de cobre y que servirá como un parámetro input en los futuros programas optimizantes de leyes de corte, será considerado como el TC/RC de largo plazo, el cual estará definido por los estudios de proyección de los cargos TC/RC realizados por Wood Mackenzie (Lagos, 2016). La proyección realizada por Wood Mackenzie considera una modelación futura usando el modelo de precio incentivo, el cual consiste en realizar una evaluación económica, considerando la construcción de nuevas fundiciones y refinerías en China o ampliaciones de estas, y determinar un precio de TC/RC para este mercado chino, que garantice una rentabilidad del 12% para este nuevo proyecto ficticio. El resultado es que el valor de TC/RC a largo plazo debiese estar ubicado en una banda que va desde los 30 a 35 cUSD/lb combinado o de 108/10,8 a 126/12,6 de costo de fusión (TC) y refinación (RC), por lo cual, tomando un escenario conservador (costos altos), se asumirá que el costo a largo plazo para los cargos de fusión será de 126 USD/TMS y de refinación será de 12.6 cUSD/lb el cual se establecerá como parámetro input en los futuros programas optimizantes a desarrollar en Python y estos valores de TC/RC serán usados para determinar el precio de venta del concentrado de cobre.

Para efectos del cálculo, el valor del RC tiene que estar en las mismas unidades que el TC y esto se realiza mediante la siguiente transformación:

$$RC \left[\frac{usd}{tms} \right] = RC \left[\frac{cusd}{lb} \right] * \frac{2205 lb}{1 tonelada} * \frac{1 usd}{100 cusd} * ley\ del\ concentrado\ [%] * FURE\ [%] \quad (\text{Ec. 3.4})$$

Asumiendo una deducción metalúrgica del 3,5%, el valor de FURE es del 96,5% y para efectos del estudio del algoritmo computacional empleado en Python, se asumirá una ley del concentrado constante del 30%, por el cual el valor del cargo de refinación RC es de 80,4318 usd/TMS. Por lo cual, el valor combinado de TC/RC es de 206,432 usd/TMS. Además, se considera que el concentrado vendido a través del mercado intermedio corresponde a un concentrado limpio, es decir uno que cumple con los niveles permitidos de impurezas.

CAPÍTULO 4. COSTO DE REHABILITACIÓN DEL BOTADERO

Con la finalidad de que los algoritmos desarrollados a lo largo del presente estudio puedan entregar una solución, lo más cercana posible a la realidad minera, se decide incorporar un costo asociado a la futura rehabilitación ambiental que debe tener un botadero de estériles a cielo abierto. Para lograr este objetivo, se decide investigar las diferentes operaciones y sus costos aproximados para las labores que son necesarias para la remediación ambiental de estos espacios mineros.

Para la determinación del costo de rehabilitación de cualquier botadero minero, es imperativo conocer la geometría y el diseño que tendrá el respectivo botadero de estériles, ya que el costo para poder rehabilitar la zona afectada estará estrechamente ligada al área superficial que tendrá el botadero propiamente tal, y esta área a su vez, dependerá del diseño de construcción del botadero.

4.1 BOTADERO DE ESTÉRILES

El botadero minero corresponde a un depósito de material fragmentado de estéril, el cual proviene de una operación minera, este material no posee concentraciones de mineral de interés. La disposición de estos materiales fragmentados conlleva a múltiples problemas y necesidades, uno de ellos, está relacionado con la seguridad que debe cumplirse para mantener la estabilidad de los taludes en estas construcciones, así como la disposición de un lugar que sea capaz de albergar las grandes cantidades de tonelajes de material estéril. La elección de un lugar apropiado para poder depositar este material estéril debe estar sustentada en aspectos técnicos, ambientales y socioeconómicos, entre los aspectos más importantes a cumplirse son:

- En primer lugar, la distancia que debe recorrer el camión para trasladar el material estéril desde la mina al botadero debe ser la mínima posible, ya que el transporte de estériles representa un costo el cual es directamente proporcional a la distancia que recorren los equipos de carguío, además la distancia afecta al rendimiento de los equipos de carguío.
- En segunda instancia el lugar escogido dependerá de las condiciones geomecánicas y geológicas existentes, ya que generalmente los botaderos albergan una gran cantidad de toneladas, los cuales generan perturbaciones en las capas superiores y aledañas de tierra cercanas al emplazamiento del botadero, por lo cual, debe evitarse los siniestros geomecánicos, como hundimientos o deslizamientos de material.
- Como último, el sector escogido para el botadero no debe presentar una importancia económica en el presente y en el futuro, ya que un yacimiento el día de hoy puede ser no rentable económicamente, pero en el futuro eso puede cambiar, por ende, se debe tener claridad si en el lugar emplazado para el botadero existe un potencial recurso económico

a futuro. También es importante que el sector escogido no represente un daño ambiental real o en potencia.

4.2 DISEÑO Y TAMAÑOS DEL BOTADERO

El botadero presenta múltiples parámetros de diseño, los cuales condicionan su forma, volumen, superficie y el transporte del material estéril. Estos parámetros deben ser determinados por exhaustivos estudios de topografía, geotécnicos y geomecánicos que permitan determinar el correcto diseño que debe tener un determinado botadero.

Para el diseño de un botadero existen muchas formas, las más comunes son las siguientes:

- Botadero en laderas: es el método de construcción de botaderos más comúnmente empleado, ya que consiste en utilizar la topografía natural del cerro para realizar la descarga del material, el estéril es colocado en los bordes (laderas) del cerro, en donde se efectúan una serie de bancos (ver Figura 4.1). La gran ventaja es que generalmente el acceso a cada uno de estos niveles es a través del mismo cerro, lo que hace más fácil el transporte de los equipos mineros, además este tipo de construcción es uno de los métodos más simples para realizar la descarga del material estéril, así como la mantención y estabilidad de los taludes.

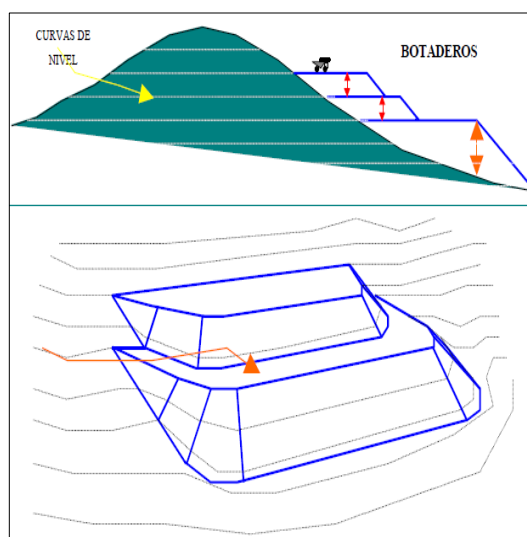


Figura 4.1: Botadero tipo ladera.
Fuente: Vásquez, Galdames y Le-Feaux, 2012.

- Botadero en quebradas: Existen casos en donde la topografía del sector da lugar a quebradas naturales, depresiones existentes entre dos montículos de tierra, en donde es posible depositar el material estéril, ya que la propia geometría del sector lo permite, al igual que el caso anterior, el diseño de estos botaderos contempla una serie de niveles (bancos). Cabe destacar que es preciso hacer un acabado estudio del sector para

descartar riesgos potenciales como los deslizamientos de material e impactos sobre los cauces de agua que generalmente están en dichas quebradas (ver Figura 4.2).

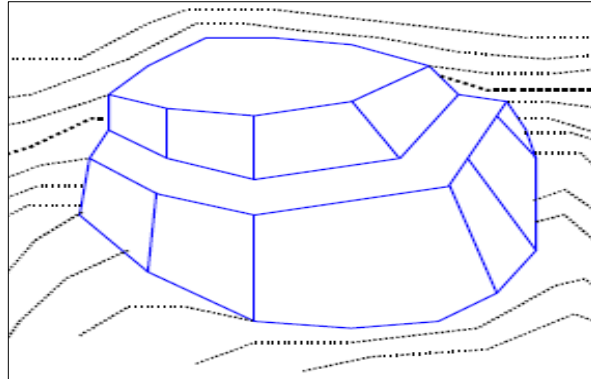


Figura 4.2: Botadero tipo quebrada.
Fuente: Vásquez, Galdames y Le-Feaux, 2012.

- **Botadero tipo torta:** A diferencia de los casos anteriores existen circunstancias en donde no se dispone de laderas cercanas en donde se puedan depositar los materiales estériles, por ende, se recurre a la construcción de pilas o tortas de acopio (ver Figura 4.3). Para ello se necesita que se diseñen las correctas vías de tránsito que deben tener los vehículos y equipos para que se movilicen entre cada uno de los bancos que dispondrá este tipo de botadero, para ello es indispensable el uso de rampas. Este tipo de construcción de botadero le aporta al diseño una mayor estabilidad, ya que se disminuye el ángulo del talud final y se consigue una mayor compactación del material estéril (Martínez, 2020).

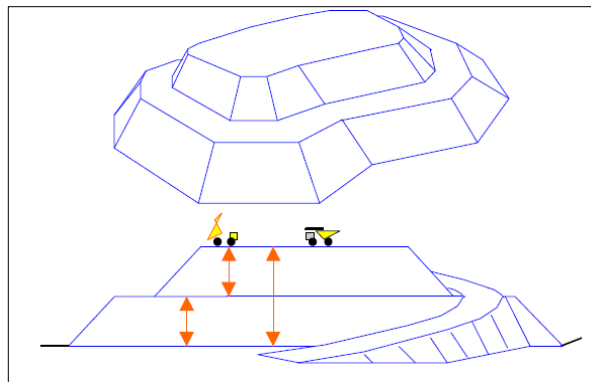


Figura 4.3: Botadero tipo torta.
Fuente: Vásquez, Galdames y Le-Feaux, 2012

4.3 ACTIVIDADES BÁSICAS DE REHABILITACIÓN DE UN BOTADERO DE ESTÉRILES

Es posible distinguir 4 actividades básicas que se deben llevar a cabo para el proceso de la rehabilitación del botadero y estas son las representadas en la Figura 4.4.

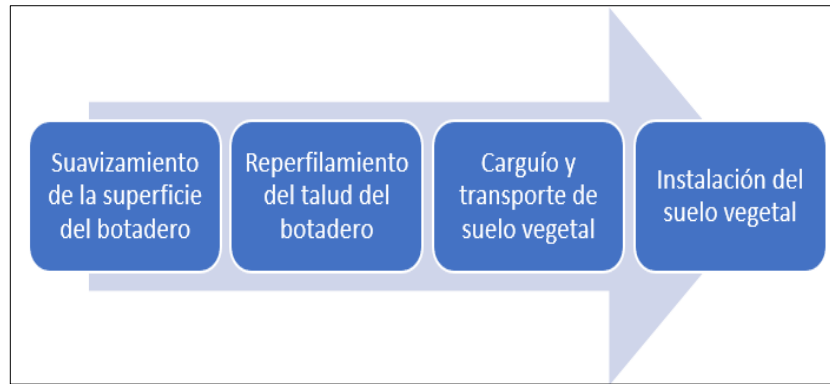


Figura 4.4: Actividades básicas para la rehabilitación de un botadero minero.
Fuente: Martínez, 2020.

4.3.1 Suavizamiento de la Superficie del Botadero

En la superficie del botadero, los camiones que transportan el material estéril muchas veces descargan el material estéril en el piso, por lo cual, se genera una superficie irregular, ya que está formada por las múltiples descargas que han realizado cada uno de los camiones, para verter el estéril en el botadero. Para la rehabilitación del botadero, se requiere la instalación de suelo vegetal, este suelo vegetal necesita depositarse sobre una superficie lo más pareja y plana posible, ya que esto ayuda mucho a la compactación y a la uniformidad de la vegetación que crecerá a futuro en el mismo suelo. Debido a lo anterior, es importante la realización de una tarea de suavizamiento, el equipo ideal para esta labor es un Bulldozer, el cual debe ejercer una gran presión sobre la capa de material estéril en la que se encuentra y deberá realizar sucesivos cortes del material, a modo de emparejar lo máximo posible la superficie. Cabe destacar que el trabajo del bulldozer no dejara completamente plana la superficie, pero el mismo tránsito de los equipos generaran la compactación necesaria para que el terreno quede en óptimas condiciones.

4.3.2 Reperfilamiento

La geometría que poseen los botaderos usualmente contempla bancos, los cuales tienen una altura determinada y poseen un ángulo de cara de banco cercano al ángulo de reposo natural de los materiales (aprox. 37°), por lo que la inclinación de la superficie de la cara del banco es alta, lo cual, dificulta mucho los trabajos que realizan los equipos que deben instalar el suelo vegetal sobre la superficie de estéril. Debido a esto, es importante lograr una disminución del ángulo de la cara del banco, ya que esto hará que los equipos puedan transitar y trabajar de forma correcta, además que contribuyen a lograr una modificación del aspecto visual que posee el botadero a uno más cercano a un cerro, lo que aporta una belleza paisajística.

La operación de reperfilamiento consiste en desplazar el material estéril ubicado en la cresta del banco hasta el pie del mismo banco (ver Figura 4.5), de esta forma se disminuye el ángulo de talud del banco. La cantidad de material que debe ser desplazado estará condicionado por la

altura del banco, el ángulo de reposo natural que presente la cara del banco, así como el ángulo final al que quiere llegarse. Lo anterior esta descrito por la ecuación 4.1.

$$x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{\tan(\alpha)} - \frac{h}{\tan(\beta)} \right) \quad (\text{Ec. 4.1})$$

Donde:

- x : Distancia de reperfilamiento (m).
- h : Altura del banco de estéril (°).
- α : Angulo de talud deseado (°).
- β : Angulo de talud natural de reposo del material estéril (°).

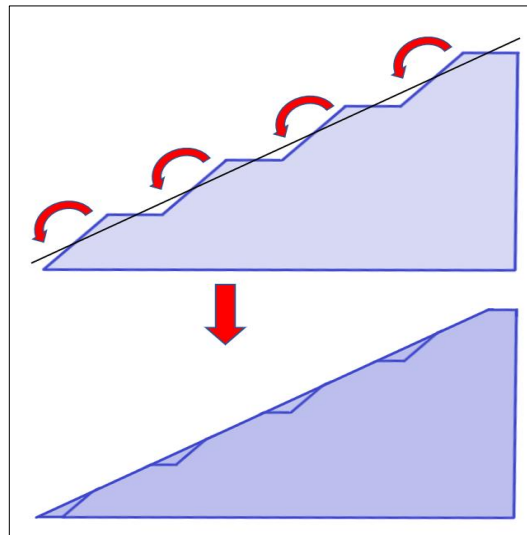


Figura 4.5: Método de reperfilamiento de talud.
Fuente: Martínez, 2020.

4.3.3 Carguío y Transporte de Suelo Vegetal

Esta operación consiste en movilizar el suelo vegetal que se encuentra en un determinado acopio, el cual puede ser uno o varios, hasta el lugar del botadero. Para efectos de la presente investigación, se tomará en cuenta que solo existe un acopio de suelo vegetal. Esta actividad debe ser realizada por excavadoras y camiones, los cuales trabajaran en conjunto para cargar el material vegetal y para que el material pueda atravesar una determinada distancia hasta llegar al botadero. Cabe destacar que el número de equipos y el tipo de maquinaria utilizado puede variar según las condiciones operacionales y económicas del proyecto minero.

4.3.4 Instalación de Suelo Vegetal

Esta operación consiste en la inserción e instalación de suelo vegetal en la superficie del botadero, este suelo es depositado por los camiones a través del volteo de este, el cual puede ser colocado en una superficie plana o en la creta del talud reperfilado del botadero, el cual se

distribuye a través de un equipo Bulldozer, el cual debe ejercer una presión sobre el suelo a modo de provocar una distribución uniforme sobre el mismo. Cabe destacar que el equipo empleado para esta operación debe tal, que sea capaz de ejercer una presión sobre el suelo vegetal para poder lograr una distribución pareja del mismo, pero que no comprima demasiado el suelo vegetal, ya que este necesita ser lo más esponjado posible para que exista una correcta aireación dentro de la cubierta vegetal.

Cabe mencionar que el suelo almacenado en los acopios posee una densidad estimada de 1,7 ton/m³, la cual es mayor a la densidad que posee el suelo vegetal en estado suelto, la cual es de 1,6 ton/m³. Este último valor es el que se utiliza para poder determinar la masa de suelo vegetal requerido para cubrir la superficie real del botadero y así poder lograr una revegetación de suelo en este y cumplir con la rehabilitación. Una vez calculada el área del botadero, es posible determinar el volumen de suelo vegetal que se requerirá para poder cubrir el botadero, para ello se necesita conocer el valor del espesor del suelo vegetal, este valor es variable, pero un espesor de 0,5 m asegura una revegetación óptima (Martínez, 2020).

Cabe destacar que las dos primeras actividades se realizan sobre el material estéril y las últimas dos, es sobre la cubierta vegetal.

4.4 TAMAÑO Y DISEÑO DEL BOTADERO

Es posible clasificar un botadero minero de acuerdo con su tamaño y a sus parámetros de diseño, ambos definirán la forma y estabilidad del botadero.

A partir del tamaño es posible agruparlos en 3 categorías:

- Grandes: Botaderos que poseen una altura mayor a los 30 m.
- Medianos: Botaderos que poseen una altura mayor a 20 m y menor a 30 m.
- Pequeños: Botaderos que poseen una altura mayor a 15 y menor a 20 m.

Los botaderos dependen en gran medida de las características que presenten los parámetros de diseño, estos parámetros deben estar definidos por estudios geotécnicos, topográficos y operacionales, los cuales determinen las dimensiones finales de estos parámetros (ver Figura 4.7), entre los principales elementos de diseño de un botadero destacan los siguientes:

- Banco: Es definido como la unidad básica de un botadero, el cual posee una determinada altura y ángulo.
- Berma: corresponde a la distancia existente entre el pie de un banco y la cresta del banco que esta justo debajo de él. Y debe diseñarse de forma que pueda contener futuros derrames de material estéril.

- Angulo del banco: es aquel ángulo formado por la línea que comienza por el pie del banco hasta la cresta del mismo banco y la horizontal, usualmente corresponde al ángulo de reposo del material estéril.
- Rampa: es un elemento que se encuentra en el botadero minero y permite la movilidad y el desplazamiento de los equipos mineros a través de los múltiples bancos que existan dentro del mismo.

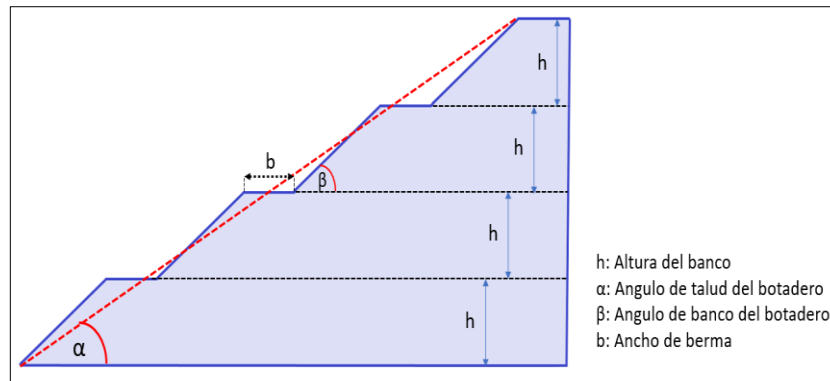


Figura 4.6: Diseño de un botadero.

Fuente: Martínez, 2020.

4.4.1 Metodología para introducir el costo de rehabilitación en el programa optimizante

El cálculo del valor del costo de rehabilitación de un botadero minero (usd/Ha), necesita de un análisis minucioso, el cual depende de muchos factores, entre los principales se encuentran:

- Geometría del botadero minero
- Área superficial que ocupa el botadero
- Cantidad de botaderos mineros
- Dotación de equipos necesarios para el trabajo
- Distancia entre el acopio de suelo vegetal y el botadero
- Espesor óptimo de suelo vegetal para el proceso de revegetación
- Valores de arriendo o compra de equipos de transporte, acarreo y movilidad del material
- Volumen de material estéril por áreas involucradas en el reperfilamiento
- Disposición y orden de las descargas a piso efectuadas por los camiones en el botadero
- Rendimiento operacional de cada uno de los equipos

Debido a la gran cantidad de variables que afectan el cálculo de la determinación del costo de rehabilitación de un botadero minero, este cálculo requiere de una investigación más avanzada y el cálculo de este valor se encuentra fuera del alcance de la presente investigación, pero para efectos de determinar el impacto en el ámbito económico y en la planificación minera, la cual corresponde a la solución que entregara el futuro programa optimizante, se hace imperativo la inserción de este costo de rehabilitación dentro de la modelación matemática del problema que

optimizara las leyes de corte, debido a esto, se decide asumir un costo de rehabilitación que es extraído de una investigación realizada en la mina Invierno por Martínez (2020), la cual arroja un valor para el costo de rehabilitación de 18.204 usd/Ha, este valor fue obtenido realizando las cuatro actividades antes mencionadas (suavizamiento, reperfilamiento, carguío e instalación del suelo vegetal).

El objetivo es insertar el costo de rehabilitación del botadero dentro del futuro código que será creado en el lenguaje de programación Python para obtener el vector de leyes de corte optimas, las cuales incluirán el costo de rehabilitación dentro del algoritmo optimizante, para ello es necesario que el costo de rehabilitación (h) se encuentre en (usd/ton de estéril) y no en (usd/Ha). La razón de esto es que cuando el costo de rehabilitación se encuentra en usd/Ton de estéril, esto permite una mayor facilidad en la inserción del costo “h” dentro de las ecuaciones que regulan los algoritmos que optimizan las leyes de corte, en específico del algoritmo de Lane, ya que este último trabaja con una expresión del beneficio, la cual busca su maximización, para ello incorpora múltiples costos, los cuales están asociados a tonelajes de mineral y estéril extraídos, y no a las superficies que estos materiales ocupan. Además, el costo para rehabilitar un botadero tiene directa relación con el tonelaje de estéril que este alberga, ya que, a mayor tonelaje de estéril, mayor es el tamaño del botadero, y con ello más grande es la superficie que debe rehabilitarse, por lo que el costo de rehabilitación dependerá en gran medida del tonelaje de estéril que necesite contener. Además, si es posible expresar este costo de rehabilitación en usd/Ton de estéril, es posible analizar a futuro el efecto que tiene este costo sobre la política de leyes de corte, ya que al estar este costo es usd/Ton de estéril, permite que este costo este inserto dentro de la ecuación que regula la ley de corte (Ver Capítulo 3.3).

Para llevar el costo de rehabilitación “h” de (usd/Ha) a (usd/ton de estéril) se debe conocer la relación existente entre la superficie que presenta un determinado botadero y la cantidad de material que alberga el mismo. Para ello se definirá un factor llamado “R” el cual simboliza la razón que existe entre una hectárea de la superficie de un botadero y un millón de toneladas de material estéril contenidas en el botadero. Lo anterior se resume en la ecuación 4.2:

$$\text{costo de rehabilitacion "H"} \left[\frac{\text{usd}}{\text{ton}} \right] = h \left[\frac{\text{usd}}{\text{Ha}} \right] * R \left[\frac{\text{Ha}}{\text{Mton}} \right] * \frac{1}{1000000} \left[\frac{\text{Mton}}{\text{ton}} \right] \quad (\text{Ec. 4.2})$$

Donde:

h : Costo de rehabilitación (usd/Ha).

R : Razón entre una hectárea y un millón de toneladas de material estéril.

H : Costo de rehabilitación (usd/ton).

Debido a lo anterior, es importante conocer la relación existente entre la superficie del botadero y el tonelaje de material de estéril que este ocupa, esta relación dependerá en gran medida del tipo de botadero que se esté analizando, ya que esto afectará la geometría y el diseño del

botadero propiamente tal. Para obtener el valor del factor “R” se ocupa el diseño de botadero tipo torta, ya que es el que posee los mayores factores de seguridad, debido a que presenta una mayor estabilidad y compactación del material de estéril. Como el factor “R” dependerá en gran medida del diseño que posea, se ha decidido elaborar una serie de botaderos en el software minero Vulcan, extraído de Maptek Pty (Australia), software Vulcan Maptek 10.0 (2016), tomando en cuenta un botadero tipo torta, el cual nos entrega la superficie exacta del botadero, así como la cubicación del volumen y tonelaje de material estéril que existe en dicho botadero.

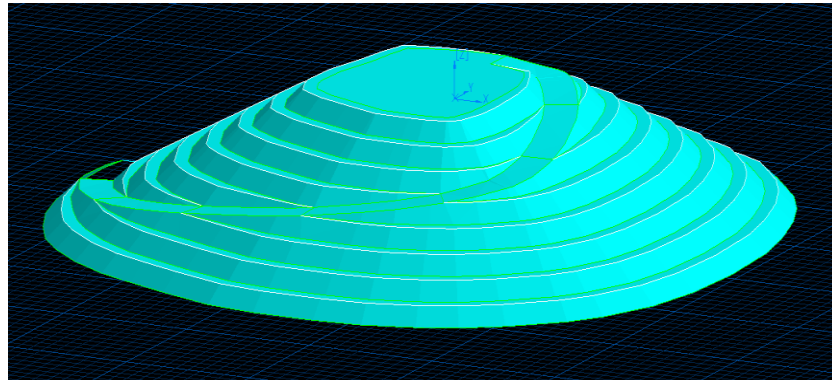


Figura 4.7: Diseño de botadero minero desarrollado en software Maptek Vulcan 10.0.
Fuente: Elaboración Propia, 2021.

A través del modelamiento del diseño del botadero en el programa Vulcan, se concluye que el valor del factor “R” depende en gran medida del área basal del botadero, denominada como (“A”) y de la altura final (“H”) que posee el botadero minero, a su vez, la altura final dependerá de la altura del banco y del número de bancos que se desee construir.

Cabe destacar que existen otros parámetros importantes en el diseño del botadero, como lo es el ángulo del banco, el valor de la berma, el ancho de la rampa e inclinación de la rampa, estos influyen directamente en el valor de “R”, pero en un menor grado en comparación con las variables “A” y “H”, por lo que solo se tomaran en cuenta estas últimas dos variables, dejando como constantes las demás variables.

Tabla 4.1: Parámetros constantes para la determinación del factor “R”.

Parámetro de Diseño Constante	Valor	Unidad
Angulo de banco	37	grados
Berma	10	metros
Ancho de la rampa	25	Metros
Angulo de rampa	10	%

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Para el diseño del botadero, se considera que el material de estéril posee una densidad in situ de 2,7 ton/m³, pero una vez extraído este estéril del depósito mineral, el estéril sufre una disminución

de la densidad producto del esponjamiento del material después de la tronadura, alcanzando una densidad aproximada de 1,92 ton/m³. Posteriormente, este material debe ser cargado en camiones y depositado en el botadero donde es compactado por equipos especializados para esta labor, en donde el valor de la densidad aumenta hasta 2,1 ton/m³, el cual será la densidad del estéril compactado en el botadero, y el valor considerado a lo largo del proceso de obtención del factor “R” (Vásquez, Galdames y Le Feaux, 2012).

Como el factor “R” dependerá en gran medida de las variables área real (“A”) y altura final (“H”), es importante analizar el comportamiento que presenta el factor “R” a medida que varían estas dos variables.

Cabe destacar que el área efectiva a rehabilitar de un botadero (ver Figura 4.8), es el área que comprenderá la superficie por donde circulan los camiones y en donde se depositará el futuro suelo vegetal para la etapa de rehabilitación de este, y el área basal, comprende la proyección del botadero sobre el suelo plano o sobre la topografía del sector, donde estará inserto el botadero (ver Figura 4.9).

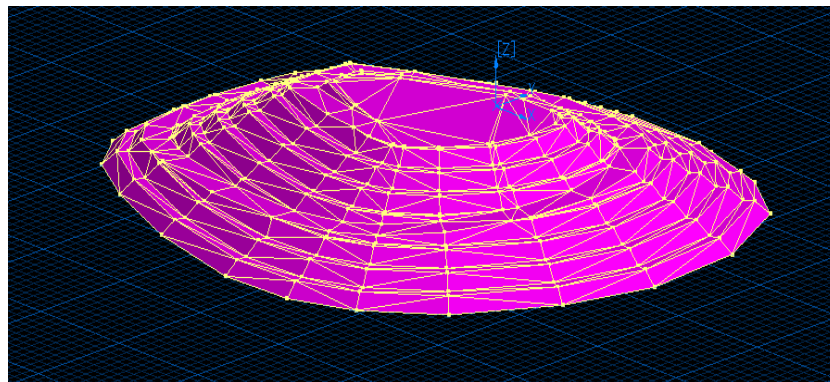


Figura 4.8: Área Real a revegetar de un botadero minero.
Fuente: Elaboración Propia, 2021.

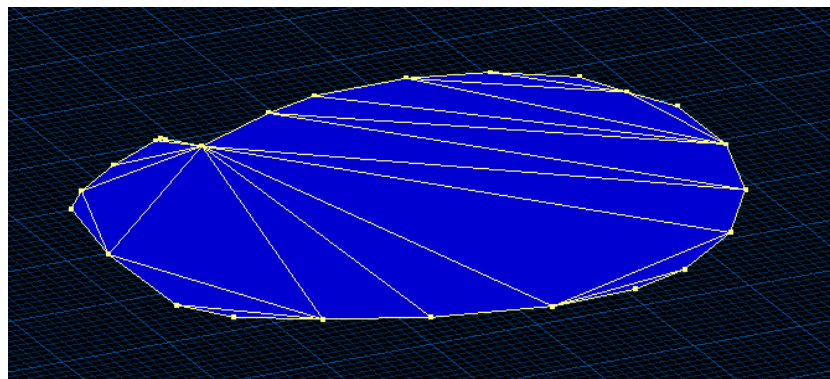


Figura 4.9: Área base del botadero minero.
Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Podemos definir el factor R como una función que depende de dos variables, por lo tanto, se analizará la variación de una variable manteniendo como constante otra, de forma de ir

conociendo el comportamiento del factor R en función de una sola variable. Para lo anterior se considerarán cuatro casos, para cada uno de estos casos de estudio, la altura se considera como una constante para cada caso en específico, y la altura cambiara de acuerdo con el caso que se esté analizando. Así es posible analizar el efecto que posee la variación del área basal en el factor “R” para cada caso específico. Para llevar a cabo lo anterior se modela en el software Vulcan Maptek un total de 6 botaderos para cada uno de los casos, para el primer caso se tienen los siguientes datos expuestos por la tabla Tabla 4.2.

Tabla 4.2: Resultados del factor R para altura constante de 40 metros.

Botadero	Altura total m	Área Base Ha	Área Real Ha	Volumen m3	Tonelaje Mton	Factor R Ha/Mton
Botadero 1	40,00	14,779	15,995	3.441.016	7,226	2,213
Botadero 2	40,00	19,133	20,657	4.813.160	10,108	2,044
Botadero 3	40,00	24,166	25,891	6.287.180	13,203	1,961
Botadero 4	40,00	29,774	31,756	8.093.203	16,996	1,868
Botadero 5	40,00	38,128	40,462	10.785.130	22,649	1,786
Botadero 6	40,00	55,332	58,256	16.412.807	34,467	1,690
Botadero 7	40,00	67,193	70,488	20.427.800	42,898	1,643

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

La anterior tabla muestra el comportamiento que posee el factor R a medida que aumenta el área basal del botadero, cabe destacar que cada botadero posee una altura de 40 metros, en la cual, para cada uno de estos, se hizo variar el área basal, el cual a medida que aumenta, claramente aumentara el área real. Los datos de los demás casos se encuentran en el apartado anexos B. Es posible observar que a medida que aumenta el área real, disminuye el valor del factor R, cabe destacar que el factor R, es el cociente entre el área real Ha y el tonelaje Mton, pero a medida que aumenta el área real, también aumenta el tonelaje, ya que mientras más área posea el botadero, más grande se hace este, y es capaz de albergar una mayor cantidad de tonelaje. La razón de que el factor R disminuya a medida que aumenta el área basal, es porque la velocidad con la que aumenta el área real es menor en comparación a la velocidad con la que aumenta el tonelaje de estéril, ya que si comparamos el botadero 1 con el botadero 4, podemos observar que existe un delta de área real de 15,761 Ha lo que representa un aumento del 98,53% con respecto al área real del botadero 1; pero si analizamos el tonelaje entre los mismos botaderos, es posible establecer que existe un incremento de 9,77 Mton lo que representa un aumento del 135,19 % lo que induce a que la tasa de crecimiento del tonelaje es mayor en comparación a la del área real, lo que hace que el valor del factor R disminuya a medida de que aumente el valor del área real superficial del botadero y a su vez aumente el área basal.

El comportamiento anterior se repite para los demás casos, cuando la altura es de 50 m (caso 2), 60 m (caso 3) y 80 m (caso 4). A partir del comportamiento que presenta el factor R a medida que varía el área real superficial, se decide construir un gráfico que permita incorporar las dos variables que rigen el comportamiento de R, como se ilustra en la Figura 4.10.

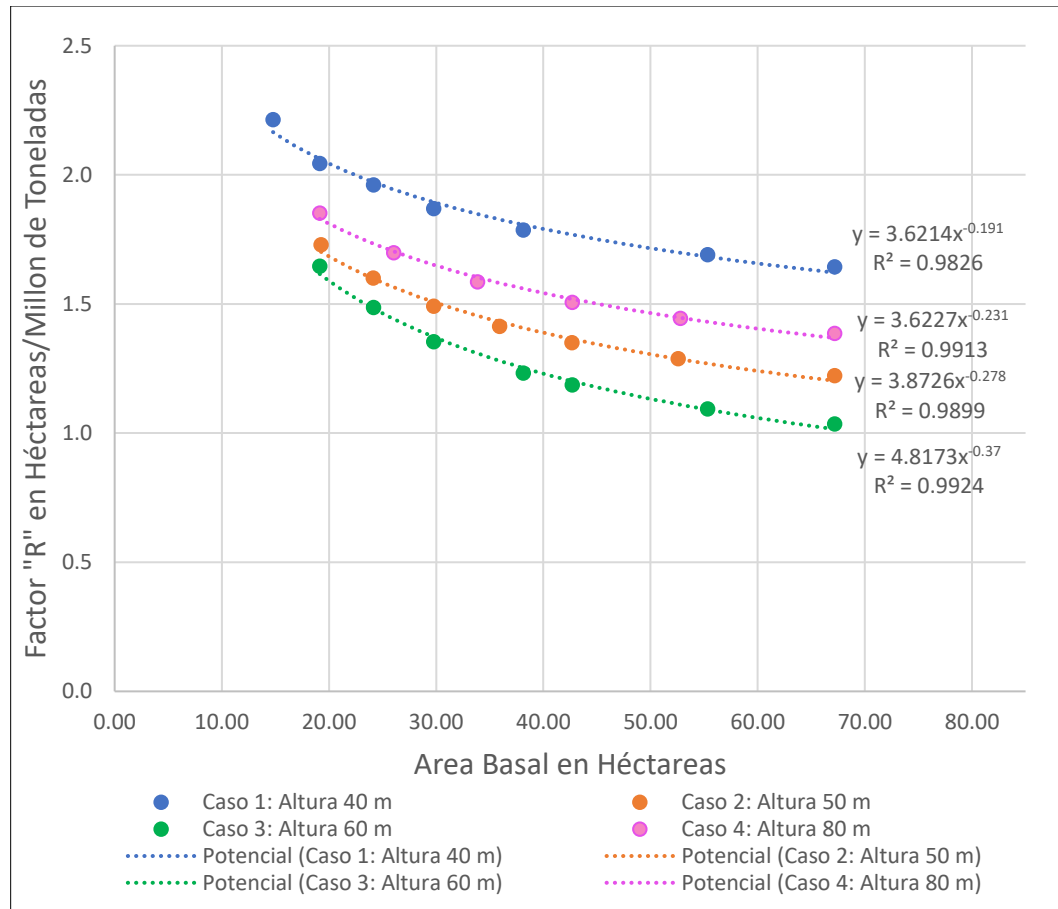


Figura 4.10: Factor R vs Área real Ha para cada altura.

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Según la figura anterior, es posible evidenciar que, para cada uno de los casos, cuando el valor del área basal se incrementa, disminuye el valor del factor R, esta relación inversamente proporcional se repite para cada uno de los escenarios, y además es posible notar que para cada uno de los cuatro casos se pueden modelar a través de una función matemática, en particular se emplea un modelo potencial, el cual se expresa en la ecuación 4.3.

$$f(x) = a \cdot x^b \quad (\text{Ec. 4.3})$$

Donde:

- a : Constante del modelo potencial.
- b : Constante exponencial del modelo potencial.
- x : Variable del modelo potencial asumida como el área basal.

Para cada caso el valor del R-cuadrado es cercano a uno, por lo que la regresión es bastante aceptable. Según el comportamiento de R, a medida que la altura del botadero crece, la curva modelada tiende más a la zona inferior (disminuye), y cuando la altura disminuye, la naturaleza de R se acerca hacia la zona superior (incrementa). Debido a lo anterior es posible deducir que

la variable “H” (altura del botadero) se encuentra dentro de la gráfica de forma análoga a como se encuentra la altura en las curvas de nivel topográficas, ya que, por ejemplo, para cualquier punto dentro de la curva naranja, la altura siempre es de 50 metros, del mismo modo que para la curva gris, la altura siempre es de 80 metros.

A continuación, se ilustra los valores resultantes del factor R para cada caso, teniendo en consideración que, por cada caso, se han realizado un total de 6 botaderos, los cuales presentan una altura constante para cada caso específico.

Tabla 4.3: Resultados de los valores del factor "R" para cada botadero según el caso estudiado.

Parámetro	Caso 1: Altura 40 m	Caso 2: Altura 50 m	Caso 3: Altura 60 m	Caso 4: Altura 80 m
Factor R botadero 1	2,213	1,852	1,730	1,646
Factor R botadero 2	2,044	1,698	1,601	1,487
Factor R botadero 3	1,961	1,585	1,491	1,354
Factor R botadero 4	1,868	1,506	1,413	1,232
Factor R botadero 5	1,786	1,445	1,350	1,186
Factor R botadero 6	1,690	1,385	1,288	1,093
promedio	1,927	1,579	1,479	1,333
varianza muestral	0,029	0,025	0,023	0,035
desviación típica	0,171	0,158	0,150	0,188
CV %	8,889	10,000	10,163	14,075

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Según la Tabla 4.3, el valor de R depende de 2 grandes variables, el área basal del botadero y de la altura que posea el botadero. Además, es posible notar que los resultados obtenidos para el factor R, cuando se evalúa un caso en específico (altura constante) presenta valores de R que muestran homogeneidad, ya que el coeficiente de variación es bajo por lo que el valor de la media es representativo para cada distribución de datos resultantes de R para cada caso. Debido a que es necesario asumir un valor referencial para R el cual permita transformar los costos de rehabilitación de usd/Ha a usd/Ton de estéril, se debe escoger un caso en particular de los 4 presentados de forma que sea capaz de entregar un valor de R.

Para efectos de incluir esta variable en el código fuente en Python, que sea capaz de representar el costo de rehabilitación del botadero, se ha decidido tomar el caso de una altura predeterminada de botadero de 60 metros, a partir de esto, el valor promedio de R es de aproximadamente 1,5 Ha/Ton de estéril. Cabe destacar que la altura seleccionada solo obedece a un criterio arbitrario, ya que la selección de la altura del botadero dependerá en gran medida de los criterios de diseño, geomecánicos y económicos que se contemplen para la creación de este espacio minero.

El valor del costo de rehabilitación que ingresará el programa será:

$$h = 18.204 \frac{\text{usd}}{\text{Ha}} \cdot 1,5 \frac{\text{Ha}}{\text{Mton}} \cdot \frac{1 \text{ Mton}}{1.000.000 \text{ ton}}$$

$$h = 0,027306 \frac{usd}{ton\ de\ esteril}$$

Este valor resultante para el costo de rehabilitación del botadero es de 0,027306 usd/ton de estéril y será asignado como una variable de entrada para los futuros algoritmos a desarrollar en el entorno de Python.

CAPÍTULO 5. DESARROLLO DE LOS ALGORITMOS COMPUTACIONALES EN EL ENTORNO DE PYTHON

En el presente capítulo se dará inicio al proceso de codificación en el lenguaje de programación Python 3.9.7 empleando el algoritmo de Lane, para ello se deben conocer todas las ecuaciones que regulan el algoritmo. El programa base contempla la entrada de los siguientes parámetros (ver Tabla 5.1), los cuales serán la información input sobre la que se ejecutaran las diversas líneas de código, así como las ecuaciones y algoritmos que rigen la estructura de ejecución en el entorno de Python 3.9.7.

Tabla 5.1: Parámetros de entrada a cada uno de los algoritmos desarrollados.

Simbología	Definición	Unidad
M	Capacidad de mina anual	Ton de material/año
C	Capacidad de planta anual	Ton de mineral/año
R	Capacidad de la refinera anual	Ton de metal fino/año
m	Costo mina	usd/ton de material
c	Costo planta	usd/ton de mineral
r	Costo refinera	usd/ton de metal fino
s	Precio de venta	usd/ton de cobre
y	Recuperación de la planta	Porcentaje
f	Costos fijos anuales	usd/año
d	Tasa de descuento	Porcentaje
h	Costo de rehabilitación del botadero	usd/ton de estéril
leyconc	Ley del concentrado de cobre	Porcentaje
TC	Costos de tratamiento	usd/ton de concentrado seco
RC	Costos de refinera	usd/ton de concentrado seco

Fuente Elaboración Propia, 2021.

Además de estos parámetros económicos y técnicos, el programa necesita la información de la distribución del tonelaje de acuerdo con la ley del elemento de interés. A partir de esta distribución, se calculará la marca de clase y la ley media para cada uno de los intervalos de leyes que existan, con el objeto de encontrar una solución concreta al problema del consumo de recursos minerales.

Determinación de las leyes de corte económicas:

El primer paso en la ejecución del algoritmo es calcular las leyes de corte económicas que rigen el problema, esto se hará con las siguientes ecuaciones:

$$\text{ley de corte para mina} = \frac{c-h}{(s-r)*y} \quad (\text{Ec. 5.1})$$

$$\text{ley de corte para planta} = \frac{c-h + \frac{(f+Vd)}{C}}{[(s-r)*y]} \quad (\text{Ec. 5.2})$$

$$\text{ley de corte refinería} = \frac{c-h}{\left[(s-r)*y - \frac{(f+Vd)}{R}*y\right]} \quad (\text{Ec. 5.3})$$

Llegados a este punto, cabe destacar que el algoritmo debe trabajar para un mercado que vende metal fino de cobre y además debe contemplar un mercado intermedio para la venta de concentrados, esto significa que el sistema estará compuesto por la mina, la planta concentradora y la refinería, donde la capacidad de la refinería nunca será la limitante del proceso, ya que cuando el flujo de concentrado llegue a la refinería, esta última tendrá una capacidad de producción dada de “R”, si el flujo que llega a la refinería es q_r , y en el caso de que q_r sea menor o igual a “R” la refinería será capaz de tratar este flujo por completo y solo existirá el mercado de venta de metal fino de cobre, pero cuando q_r sea mayor a R existirá una cantidad llamada delta, el cual será: “ $q_r - R$ ” y esta cantidad no la puede procesar la refinería ya que no tiene la capacidad para eso, por ende en este punto es donde surge la venta del concentrado de cobre, ya que para este último caso, esta cantidad llamada delta, es posible venderla como un concentrado de cobre y obtener beneficios adicionales.

Por lo anterior, la ley de corte económica de la refinería no será considerada para la determinación del valor de la ley de corte óptima, ya que independiente del valor que tome “R”, siempre será posible vender todo el flujo q_r .

Además, se tiene que este algoritmo se emplea para una mina a cielo abierto, por lo cual, se asume que la capacidad de la mina siempre será mayor a la capacidad de la planta concentradora, por lo cual, no tiene sentido incluir la ley de corte económica de la mina, ya que la capacidad de la mina no representa una limitante con respecto al proceso completo. Por ende, el algoritmo optimizante no considerara dentro de la obtención de la ley de corte óptima, la fórmula de la ley económica de la mina y solo considerara la ley de corte económica de la planta ya que, es este proceso, el que limita todos los flujos que se deben considerar para el beneficio económico.

Para la ecuación de la ley de corte de la concentradora, se considera que para la primera iteración el VAN inicial es igual a cero.

Para el algoritmo de Lane clásico se tienen las leyes de corte de balance, las cuales son la resultante de igualar la función de beneficio entre cada uno de los procesos. Las cuales son:

$$g_{mc} = 1 - \frac{c}{M} \quad (\text{Ec. 5.4})$$

$$g_{cr} = \frac{2R}{c} - 1 \quad (\text{Ec. 5.5})$$

$$g_{rm} = \left(1 - \frac{2R}{M}\right)^{0.5} \quad (\text{Ec. 5.6})$$

Estas ecuaciones anteriores muestran la ley de corte óptima cuando dos sistemas están exactamente balanceados entre ellos, por ejemplo, si $g_{mc} = 0,4$, significa que, a una ley de 0,4,

está a plena capacidad la mina y al mismo tiempo opera a plena capacidad la planta procesadora, por lo cual, estamos en el punto óptimo, ya que ambos sistemas están trabajando a una capacidad en la cual maximizan su utilización.

Cabe destacar que estas leyes no serán consideradas, ya que como solo tenemos un sistema limitante, el cual es la planta concentradora, no resulta lógico comparar la ecuación del beneficio entre cada uno de los 3 sistemas para obtener las leyes de corte del balance, ya que todo el complejo minero solo dependerá de la capacidad de planta.

Es por lo anterior que la determinación de la ley de corte óptima, se hará solo a través de la ley de corte económica de la planta, de forma iterable, vale decir, que el proceso comenzara asumiendo que el valor del VAN para la primera iteración es cero, con esto se obtendrá una ley de corte económica de la planta ($k = 1$), donde k es el número de iteraciones, con este valor de ley de corte, es posible obtener los flujos de material, mineral, metal fino y si existe concentrado, además de los años y el valor del beneficio anual, con esto se obtiene un valor del VAN para la iteración " k " igual a uno, este valor del VAN el cual es distinto de cero, se coloca en la ecuación de la ley de corte de la planta, obteniendo una nueva ley de corte (cuando " k " es igual a 2) y con esto es posible obtener un nuevo valor del VAN, y así sucesivamente, el proceso comenzara a repetir el cálculo hasta lograr que el valor del VAN tienda a un valor fijo, una vez que el VAN converge, la ley de corte que hace que este VAN converja será la ley de corte óptima para el primer año.

$$G_{optimo} = \text{ley de corte de la planta } (k = n) \quad (\text{Ec. 5.7})$$

Una vez obtenido el valor de la ley de corte óptima, se procede a determinar el valor del Q_m , Q_c y del Q_r , que serán la cantidad de material, mineral y producto que se debe obtener respectivamente en la totalidad de los años.

Consideremos a modo de ejemplo la distribución inicial de leyes de cobre (ver tabla 5.2):

Tabla 5.2: Distribución Inicial a modo de ejemplo.

Intervalos de leyes en %Cu	Marca de Clase %Cu	Toneladas
0,00-0,10	0,05	100
0,10-0,20	0,15	120
0,20-0,30	0,25	125
0,30-0,40	0,35	140
0,40-0,50	0,45	150
0,50-0,60	0,55	145
0,60-0,70	0,65	130
0,70-0,80	0,75	105
0,80-0,90	0,85	100
0,90-1,00	0,95	90

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

La suma del tonelaje de recursos a partir de la Tabla 5.2 es de 1.205 toneladas, a continuación, se procede a calcular la ley media para cada uno de los intervalos a través de la siguiente formula.

$$Ley\ media\ (intervalo\ n) = \frac{\sum_{i=1}^n (marca\ de\ clase * toneladas)}{\sum_{i=1}^n toneladas} \quad (\text{Ec. 5.8})$$

De este modo tenemos que la ley media es la descrita por la Tabla 5.3.

Tabla 5.3: Distribución inicial con ley media.

Intervalos de leyes %Cu	Marca de Clase %Cu	Toneladas	Ley Media %Cu
0,00-0,10	0,05	100	0,485
0,10-0,20	0,15	120	0,524
0,20-0,30	0,25	125	0,570
0,30-0,40	0,35	140	0,616
0,40-0,50	0,45	150	0,668
0,50-0,60	0,55	145	0,725
0,60-0,70	0,65	130	0,785
0,70-0,80	0,75	105	0,845
0,80-0,90	0,85	100	0,897
0,90-1,00	0,95	90	0,950

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

De esta forma es posible obtener el vector de leyes medias para cada uno de los intervalos de leyes (ver Tabla 5.3). En este punto, es importante conocer una relación que permita obtener el valor de la ley media para cualquier valor de ley de corte, una opción tentadora es realizar una regresión lineal de los datos y de esta forma obtener una ecuación lineal que permita ajustarse al conjunto de datos, como lo muestra la Figura 5.1, en la cual, un ajuste lineal sería una buena opción para este conjunto de datos, pero en la realidad, el comportamiento de la ley media vs la ley de corte no es del tipo lineal, y para este problema, se empleara el uso de una interpolación lineal en donde para cualquier valor de ley de corte optima, esta se ubicara entre una ley de corte superior y una ley de corte inferior que coincidirán con los valores de la marca de clase, y a estos últimos estarán ligados a los valores resultantes de la ley media de la Tabla 5.3 para cada uno de estos dos valores de la marca de clase de ley de corte. Por ejemplo, si la ley de corte en la iteración “k” es de 0,22%, estarán ligados los siguientes valores descritos por la Tabla 5.4.

Tabla 5.4: Ejemplo de obtención de ley media cuando la ley optima está dentro de un intervalo.

Marca de Clase de la Ley de Corte %Cu	Ley Media %Cu
0,15	0,524
0,22	X
0,25	0,57

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

A partir de la Tabla 5.4, el valor de “X” será el valor verdadero de la ley media cuando la ley de corte es de 0,22, para su cálculo se empleará el uso de la interpolación lineal entre el valor de la marca de clase superior, el cual es de 0,25 y el del inferior que es de 0,15 (ver Figura 5.1), utilizando la siguiente ecuación:

$$\text{Ley media \%} = \frac{(G_{opt} - G_{inf})}{(G_{sup} - G_{inf})} * (Leyms - Leymi) + Leymi \quad (\text{Ec. 5.9})$$

Donde:

G_{opt} : Ley de corte buscada (%).

G_{inf} : Ley de corte ubicada en el límite inferior del tramo al que pertenece la ley de corte buscada (%).

G_{sup} : Ley de corte ubicada en el límite superior del tramo al que pertenece la ley de corte buscada (%).

$Leymi$: Ley media ubicada en el límite inferior al tramo asociado a su ley de corte inferior a la ley de corte buscada (%).

$Leyms$: Ley media ubicada en el límite superior al tramo asociado a su ley de corte superior a la ley de corte buscada (%).

Reemplazando los datos de la Tabla 5.4 en la ecuación 5.9 tenemos:

$$X = \frac{(0,22 - 0,15)}{(0,25 - 0,15)} * (0,570 - 0,524) + 0,524 = 0,5562$$

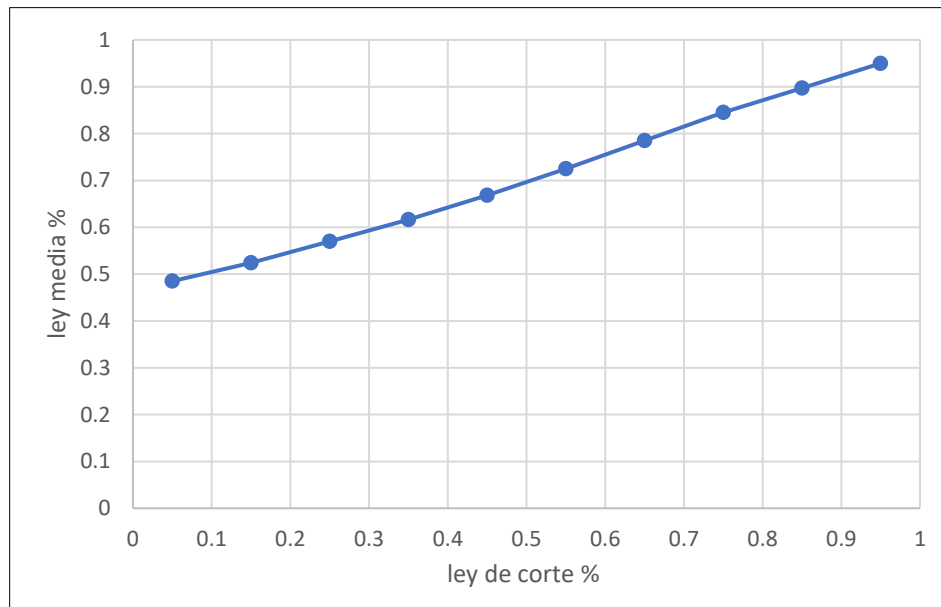


Figura 5.1: Ley media vs ley de corte para distribución inicial.

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Para determinar los valores de Q_m , Q_c y Q_r , es preciso obtener el valor de la ley de corte optima, este valor determinara cada una de las cantidades que debe mover la mina, la planta y la refinería.

A través de la distribución de tonelajes inicial (Tabla 5.3), es posible calcular los tonelajes acumulados para cada uno de los intervalos de leyes.

El tonelaje de mineral (Q_c), corresponderá a la suma del tonelaje de cada uno de los intervalos de leyes que estén sobre la ley de corte óptimo calculado, descrito por la ecuación 5.10.

$$Q_c(Goptimo) = \sum_{k=k^*}^n \text{Tonelaje de material}_k \quad (\text{Ec. 5.10})$$

El tonelaje de estéril (T_e), será la suma del tonelaje que se encuentre en cada uno de los intervalos de leyes de corte, los cuales sean menores al valor de la ley de corte óptima.

$$Ton\ de\ esteril\ (Goptimo) = \sum_{k=1}^{k^*} \text{Tonelaje de esteril}_k \quad (\text{Ec. 5.11})$$

La razón estéril mineral, estará definida por:

$$REM = \frac{E}{M} = \frac{T_e}{Q_c} \quad (\text{Ec. 5.12})$$

La cantidad de material total movido por la mina será siempre la cantidad total de material que posea el rajo en un determinado periodo i , por lo tanto, para el primer periodo la cantidad de Q_m será la suma de toda la distribución de tonelajes en la base de datos iniciales (Tabla 5.2) para el año 1, este valor de Q_m es de 1.205 toneladas de material total.

$$Q_m = \text{Cantidad de material total que posea el rajo en el periodo } i \quad (\text{Ec. 5.13})$$

Y, por último, la cantidad de producto fino de metal estará definido por:

$$Q_r = Q_c * y * \text{ley media}(Goptimo) \quad (\text{Ec. 5.14})$$

Con las anteriores ecuaciones es posible construir la siguiente Tabla 5.5 que reúne todos los valores anteriores:

Tabla 5.5: Tonelaje de material extraído, mineral enviado a planta, fino producido y estéril según la ley de corte en %.

Marca de Clase de la Ley de corte %Cu	Qm	Qc	Qr	Estéril	Razón E/M
0,05	1.205	1.205	514,14	0	0,000
0,15	1.205	1.105	509,74	100	0,090
0,25	1.205	985	493,90	220	0,223
0,35	1.205	860	466,40	345	0,401
0,45	1.205	720	423,28	485	0,674
0,55	1.205	570	363,88	635	1,114
0,65	1.205	425	293,70	780	1,835
0,75	1.205	295	219,34	910	3,085
0,85	1.205	190	150,04	1.015	5,342
0,95	1.205	90	75,24	1.115	12,389

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Por ejemplo, si el valor del Goptimo es de 0.5%, se busca este valor de Goptimo en la Tabla 5.5 y se obtiene que el Qm es de 1.205 ton de material, Qc es 570 ton de mineral y Qr corresponde a 413,5 ton de metal fino. Cabe destacar que para cualquier valor de ley de corte obtenida a través de la ecuación de ley de corte económica de la concentradora, el valor de Qm es siempre 1.205 ton de material (mineral más estéril), esto se debe a que como el sistema analizado es una mina a cielo abierto, independiente de la ley de corte que tengamos, siempre se debe extraer toda la cantidad de material que posea el rajo, por lo tanto, el valor de Qm solo dependerá de la cantidad de material que esté disponible en un determinado año de operación y no de la ley de corte optima calculada.

Como se conoce cada una de las capacidades de los 3 sistemas, es posible obtener el tiempo requerido por cada uno de los sistemas, pero como el único sistema que representa el cuello de botella de la operación minera es la planta concentradora, se calcula el tiempo en función de la planta concentradora a través de la ecuación 5.15.

$$T_c = \frac{Q_c}{C} \quad (\text{Ec. 5.15})$$

Donde:

Tc : Tiempo de la planta concentradora (años).

Qc : Mineral removido en toda la vida de la mina (Ton).

C : Capacidad de la planta concentradora (Ton).

Una vez obtenido este tiempo, es posible definir cada uno de los flujos de material (qm), de mineral (qc), de metal fino (qr) y si existe de concentrado (qconc).

A partir de este punto es preciso definir el alcance del mercado al que está sujeto el algoritmo de programación, y ese es, el de un mercado principal que sea capaz de vender metal fino de cobre, el cual se produce a través de la refinuría que es parte del sistema minero, pero adicionalmente existe un mercado intermedio que debe ser contemplado dentro del negocio minero y este corresponde a la venta de concentrado de cobre. Este mercado solo existirá si la refinuría opera a su máxima capacidad y si además existe un flujo que no es capaz de procesar por esta última unidad, es decir, que el sector definido por la fundición y refinuría se queda corto, ya que la cantidad de flujo de producto fino que debiese producir la refinuría a partir del material proveniente del proceso de concentración, llamado como “qr” es mayor a la capacidad de este último sistema “R”. Debido a que el flujo de producto “qr” no debe estar limitado por la capacidad de la refinuría, ya que si qr es mayor a R, se vende concentrado, es preciso que el tiempo solo este definido por el tiempo de la concentradora, y no contemple el tiempo de la refinuría, ya que si el tiempo global contempla este último sistema, el valor de qr siempre será menor o igual al de R, ya que para calcular el tiempo de la refinuría se considera la capacidad de este sistema y de ser así jamás

existiría un mercado intermedio, es decir, no existiría el concentrado de cobre. A partir de esto es fundamental definir el nuevo tiempo Global:

$$Tiempo\ Global = T_c \quad (\text{Ec. 5.16})$$

Una vez obtenido el tiempo global, el programa calcula los flujos de material, mineral y producto para cada uno de los 3 sistemas respectivamente, en donde:

$$q_m = \frac{Q_m}{T_c} \quad (\text{Ec. 5.17})$$

$$q_c = \frac{Q_c}{T_c} \quad (\text{Ec. 5.18})$$

$$q_r = \frac{Q_r}{T_c} \quad (\text{Ec. 5.19})$$

Donde:

q_m : Cantidad de material movido por la mina en un año (ton material/año).

q_c : Cantidad de mineral que necesita la concentradora en un año (ton de mineral/año).

q_r : Cantidad de producto fino que debe producir la unidad de fundición y refinación (ton de cobre fino/año).

Una vez obtenido los tres flujos anteriores, cabe destacar que siempre se cumplirá que la planta concentradora está operando a toda capacidad ya que la ley de corte económica está calculada a través de la planta concentradora y el tiempo siempre estará definido de modo que se respete el llenado total de la planta en todos los años.

Así a partir, de los valores obtenidos para q_m , q_c y q_r , es posible definir el beneficio anual. El propósito del programa es definir el vector de leyes de corte que maximice el valor del VAN para un mercado que considere la venta del metal de cobre, pero adicionalmente se contempla la existencia de un mercado intermedio para la venta de concentrado de cobre. Este concentrado de cobre se venderá solo si la refinación opera a su máxima capacidad y además cuando el flujo de producto final anual (q_r) sea mayor a la capacidad de la refinación (R), es decir, cuando exista un excedente, ya que de esta forma existirá una cantidad de flujo que la refinación no puede procesar y a ese flujo se le llamara como delta, es decir, la cantidad de q_r que la refinación no es capaz de procesar.

$$Si\ \Delta\ (delta) > 0 \quad (\text{Ec. 5.20})$$

Entonces existe concentrado y se define su cantidad a través de la ecuación 5.21.

$$q_{conc} = \frac{q_r - R}{ley\ del\ concentrado \cdot (1 - Perdida\ metalurgica)} \quad (\text{Ec. 5.21})$$

$$b = p * q_{conc} + (s - r) * Q_r - c * Q_c - m * Q_m - h(Q_m - Q_c) - f \quad (\text{Ec. 5.21})$$

$$Si\ \Delta\ (delta) \leq 0 \quad (\text{Ec. 5.22})$$

Entonces no existe concentrado que puede venderse y se define el beneficio anual a través de las ecuaciones 5.24, 5.25 y 5.26.

$$b = p * q_{conc} + (s - r) * q_r - c * q_c - m * q_m - h(q_m - q_c) - f \quad (\text{Ec. 5.23})$$

$$b = p * 0 + (s - r) * q_r - c * q_c - m * q_m - h(q_m - q_c) - f \quad (\text{Ec. 5.24})$$

$$b = (s - r) * q_r - c * q_c - m * q_m - h(q_m - q_c) - f \quad (\text{Ec. 5.25})$$

Donde:

Δ : Diferencia entre la cantidad de fino de cobre total y la capacidad de la refinería ($q_r - R$).

b : Beneficio anual (usd).

p : Precio del concentrado (usd/ton de concentrado).

A partir de lo anterior existirán dos vías para el cálculo del beneficio anual, la primera contempla el mercado principal de venta de metal de cobre adicionando un mercado intermedio para la venta de concentrados de cobre, mientras que el otro camino, cuando q_r es menor o igual a R y en este caso, no existirá concentrado que pueda venderse, por lo que solo existe el mercado de venta del metal de cobre (ver Figura 5.2)

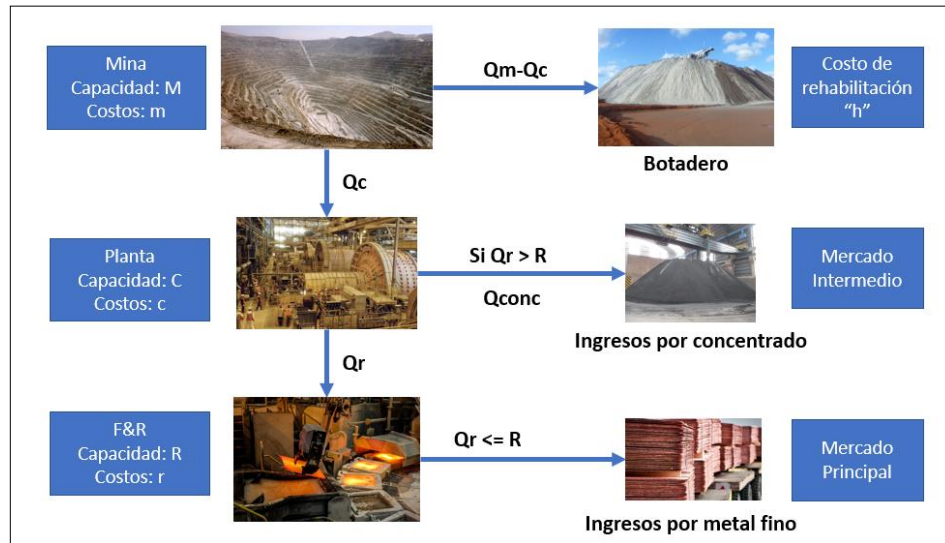


Figura 5.2: Diagrama del mercado total minero.

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Una vez obtenido el valor de b, el algoritmo procede a calcular el valor del VAN, tomando en consideración el tiempo global y la tasa de descuento d, según la ecuación 5.27:

$$VAN = \sum_{i=0}^{Tiempo\ max} \frac{b}{(1+d)^i} \quad (\text{Ec. 5.26})$$

Una vez obtenido el valor del VAN, para la primera iteración del primer año, este valor llamado como VAN ($k=1$), se debe reingresar a la ecuación de la ley de corte económica de la planta, para

obtener el nuevo valor de la ley de corte óptima para la iteración 2, contemplando el efecto que tiene la tasa de descuento en el dinero en la formula del VAN, así como el valor del tiempo en esta.

Una vez obtenida la ley de corte de la planta con la ecuación 5.28, se obtiene el valor de la ley de corte optima, una vez obtenido este valor, se obtiene un nuevo valor para Qm, Qc y Qr, y a partir de Qc y de la capacidad C, se obtiene el tiempo global de todo el sistema minero y sus respectivos flujos qm, qc y qr.

$$\text{Ley de corte para planta} = \frac{c-h+\frac{(f+VAN_1*d)}{C}}{[(s-r)*y]} \quad (\text{Ec. 5.27})$$

Con estos nuevos datos, se obtiene un nuevo valor del beneficio anual, a partir del cual, se obtiene un nuevo valor para el VAN, llamado VAN (k=2). Este nuevo valor del van (k=2) es nuevamente introducido en la fórmula de la ley de corte económica de la planta, donde se repite el proceso iterativo, esta secuencia se realiza hasta que el valor del VAN converja, para ello se define un error en el proceso de programación.

$$\text{error} = |VAN(i) - VAN(i-1)| \quad (\text{Ec. 5.28})$$

Y la condición para que el programa deje de iterar estará dada por la ecuación 5.30:

$$\text{error} \leq 0,01 \quad (\text{Ec. 5.29})$$

Cuando se cumpla la condición anterior, el algoritmo se detendrá y arrojará el valor verdadero del VAN y de la ley de corte óptima para el primer año.

Una vez obtenido los dos valores anteriores, también se obtiene la cantidad de tonelaje de material qm, que se extrae el primer año, este valor de qm, servirá para poder calcular una nueva distribución del tonelaje, restando al tonelaje total de material del recurso explotable, la cantidad extraída el primer año (qm), así es posible determinar la cantidad de material que queda para el año 2.

Debido a que la distribución del tonelaje no es homogénea para cada uno de los intervalos de leyes de cobre estudiados, es preciso que la cantidad extraída el primer año (qm), se le descuenta a cada uno de los intervalos, de forma proporcional a la cantidad de tonelaje inicial que tenga cada uno de los intervalos de leyes. De esta forma se define un vector P(x) que corresponderá a los pesos que tiene cada uno de los intervalos, según la frecuencia de tonelaje que presente cada uno de estos intervalos (ver Tabla 5.6).

A partir de la distribución anterior, se tiene que el tonelaje total de material es de 1.205 ton. Si para el primer año se llega que el valor de qm es de 100 ton de material removido, esta cantidad de material (1.205 ton) se debe descontar a cada uno de los 10 intervalos de leyes de forma proporcional a la cantidad de toneladas que tenga cada uno de los intervalos. Para esto se creará

una nueva columna denominada como $P(x)$, la cual representa el peso que tiene cada intervalo con respecto al tonelaje total y es posible representarlo en la Tabla 5.6.

Tabla 5.6: Distribuciones de leyes ajustadas para año 2.

Intervalos de leyes %Cu	Toneladas Año 1	$P(x)$	$P(x)*q_m$	Tonelaje restante para el Año 2
0,00-0,10	100	0,083	8,299	91,701
0,10-0,20	120	0,100	9,959	110,041
0,20-0,30	125	0,104	10,373	114,627
0,30-0,40	140	0,116	11,618	128,382
0,40-0,50	150	0,124	12,448	137,552
0,50-0,60	145	0,120	12,033	132,967
0,60-0,70	130	0,108	10,788	119,212
0,70-0,80	105	0,087	8,714	96,286
0,80-0,90	100	0,083	8,299	91,701
0,90-1,00	90	0,075	7,469	82,531
SUMA	1.205,000	1,000	100,000	1.105,000

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Ahora la columna llamada tonelaje remanente corresponderá a la totalidad de los recursos que dispondrá el algoritmo para el año 2, de esta forma, se calculará a través de las fórmulas de leyes de corte un nuevo valor inicial para la ley de corte. Considerando que el tonelaje a trabajar para esta iteración es de 1.105 ton, una vez obtenido el valor de la ley de corte, se calcularán los nuevos valores para Q_m , Q_c y Q_r a través de sus respectivas formulas y a través de esto es posible obtener 3 tiempos para cada uno de los procesos, donde se obtiene el tiempo máximo y se calculan los flujos de cada uno de los 3 procesos; q_m , q_c y q_r . Con estos tres valores es posible obtener el beneficio anual, con el cual se calcula un nuevo VAN, el cual a través del lenguaje de programación, introducirá este VAN obtenido, dentro de las ecuaciones de leyes de corte económicas para obtener un nuevo Goptimo, este proceso iterativo se detendrá hasta que el error entre los VANES sea menor o igual a la tolerancia exigida, una vez que se cumpla la tolerancia, el programa entregará el valor del VAN para el segundo año y el valor del Goptimo así como los flujos para cada uno de los tres procesos que gobiernan el problema.

Con la misma metodología es posible replicar el procedimiento para cada uno de los años, hasta que el valor del VAN converja y exista tonelaje de material que sea explotable. De esta forma el programa entregará una salida, que corresponderá al vector de leyes de corte que maximicen los flujos futuros de la operación, así como las cantidades de tonelaje removido por la mina, procesado por la planta y la cantidad de producto de metal de cobre y concentrado en cada uno de los periodos. El output más importante es el plan de producción, así como el vector de leyes de corte.

5.1 ADICION DEL MERCADO INTERMEDIO DE CONCENTRADOS DE COBRE

El programa desarrollado contempla un ingreso extra si se cumple la condición de que $q_r > R$, es decir, si la cantidad de cobre fino contenido en el mineral procesado por la planta concentradora (q_r) es mayor a lo que puede producir la unidad de Fundición y Refinería (R), existirá un mercado intermedio para la venta de concentrado de cobre que representara el exceso de q_r que no sea capaz de producir la Fundición y Refinería, debido a esta situación, es fundamental definir la metodología empleada para el cálculo del precio del concentrado. Para valorizar los concentrados de cobre, es preciso definir un precio para el concentrado de cobre, donde los descuentos, el precio del concentrado y su ley serán fundamentales para encontrar dicho valor.

A partir de lo anterior, como existe un mercado intermedio que vende concentrados de cobre, si el flujo que llega a la refinería es mayor a la capacidad de esta, los descuentos asociados al concentrado serán los cargos por el tratamiento de concentrados asociados a la fundición (TC), los cargos por la refinación (RC) y la pérdida metalúrgica, estas tres deducciones son las que se incorporaran dentro de los descuentos para determinar el precio del concentrado de cobre en la futura modelación del problema del consumo de recursos minerales en Python.

Además de los descuentos anteriores, existe un costo asociado al flete, el cual puede ser terrestre si se vende a una refinería nacional o marítimo si se decide vender el concentrado a una fundición y refinería extranjera, donde el costo asociado al flete y seguro de la carga deberá ser pagado según el tipo de contrato que sea estipulado entre ambas partes (vendedor y comprador). Donde a grandes rasgos existen dos modalidades, la primera denominada como CIF, en el cual el vendedor (productor minero) asume los costos de seguro y fletes hasta el puerto de destino (puerto del comprador), y el comprador asume los gastos de descarga del concentrado y transporte hasta su fundición o refinería, y la segunda modalidad es del tipo FOB en la cual se establece que el comprador es quien asume los costos del flete marítimo y del seguro (Asociación Latinoamericana de Zinc, 2011). Cabe destacar que la determinación de un tipo de contrato en específico va más allá del tema propuesto, por lo que la inclusión de los costos de fletes y seguros en la determinación del precio del concentrado de cobre esta fuera del alcance del proyecto, ya que la finalidad de la presente investigación es el desarrollo de un modelo matemático y computacional en Python que permita maximizar el valor presente neto y se ha considerado que la incorporación de estos costos son parte de una investigación más profunda y secundaria que no obedece a los objetivos del presente trabajo.

Cabe destacar que existe un descuento asociado al nivel de contaminantes que posee el concentrado (ver Tabla 3.5), como por ejemplo una cantidad de arsénico que exceda los límites permitidos, pero para efectos del presente estudio, se considera que el concentrado no presenta contaminantes y corresponde a un concentrado limpio.

Nótese que la ley del concentrado, las tarifas TC y RC y la pérdida metalúrgica serán inputs al programa y sus valores son los expuestos en la Tabla 5.7. El valor asumido como TC y RC, son los calculados por la metodología de Wood Mackenzie (2016) expuestos en el capítulo 3, asumidos como los costos a largo plazo en el cargo de tratamiento y refinación. Además, el valor de la deducción metalúrgica se considera como 3,5 %, el cual, corresponde a la media expuesta en el capítulo 3 (revisar Tabla 3.4).

Tabla 5.7: Parámetros fijos para cálculo del precio del concentrado.

Parámetro Económico	Valor	Unidad
Cargo de tratamiento (TC)	126	Usd/TMS
Cargo de refinación (RC)	12,6	cusd/lb
Pérdida metalúrgica	3,5	%

Fuente: Comisión Económica para América Latina, 2019 y Lagos, 2016.

A partir de lo anterior, las ecuaciones que regulan el precio de venta del concentrado son las expuestas en el capítulo 3, las cuales abarcan desde la 3.1 a la 3.4, donde se asumirá que la ley del concentrado de cobre sea del 30%, con una pérdida metalúrgica del 3,5%, por lo que el precio de venta para el concentrado de cobre es de 1.708,611 usd/ton de concentrado, el cual será constante a lo largo de todo el desarrollo computacional en Python.

5.2 PROCEDIMIENTOS Y CÁLCULOS A PARTIR DEL ALGORITMO DE LANE

El desarrollo del algoritmo de Lane se efectuará en un entorno de Python 3.9.7, donde se usará la programación dinámica para poder efectuar todo el aparataje de fórmulas y algoritmos necesarios para poder obtener la convergencia del valor presente año a año y de esta forma obtener el vector de leyes de corte optimas (COG) decrecientes en el tiempo.

Para lo anterior es necesario definir una base datos inicial, la cual llamaremos “Esmeralda” (ver Tabla 5.8) y estará definida por su distribución de tonelajes y leyes de cobre:

Tabla 5.8: Distribución de tonelaje según intervalos de leyes de cobre, Base de datos: "Esmeralda".

Ley Mínima %Cu	Ley Máxima %Cu	Tonelaje
0	0,002	60.000.000
0,002	0,004	52.000.000
0,004	0,006	23.000.000
0,006	0,008	17.000.000
0,008	0,01	12.000.000
0,01	0,012	9.700.000
0,012	0,014	6.700.000
0,014	0,016	8.900.000
0,016	0,018	4.000.000
0,018	0,03	5.600.000

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

La base de datos “Esmeralda” posee un tonelaje total de 198,9 millones, y además la distribución del tonelaje en sus intervalos obedece a un comportamiento logarítmico (ver Figura 5.3), lo cual es típico de los yacimientos de cobre y de oro que existen en el mundo, por lo cual, es una representación fiable del comportamiento que poseen los yacimientos de pórfidos cupríferos en Chile.

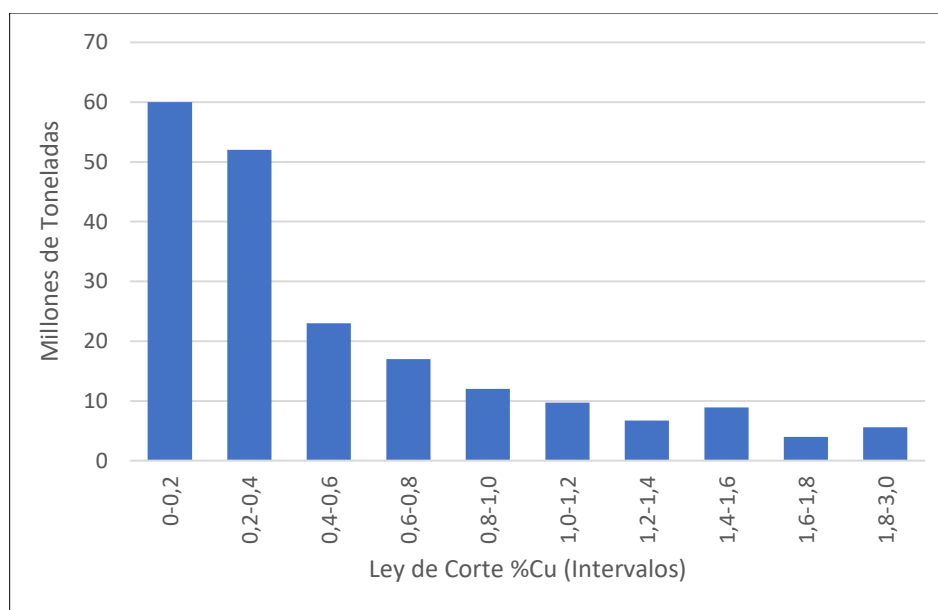


Figura 5.3: Distribución del tonelaje según la ley de corte %Cu de la base de datos "Esmeralda".
Fuente: Elaboración Propia, 2021.

La base de datos estará condicionada por los parámetros económicos y técnicos (ver Tabla 5.9):

Tabla 5.9: Parámetros técnicos y económicos como entrada al algoritmo computacional.

Parámetros Económicos	Valor	Unidad
Costo mina	3,5	usd/ton
Costo planta	6,5	usd/ton
Costo venta	1.100	usd/ton de cobre fino
Precio de venta cobre fino	6.615	usd/ton de cobre fino
Costos fijos	20.000.000	usd/año
Tasa de descuento	10%	
Recuperación	88%	
Capacidad mina (M)	---	
Capacidad planta C	15.000.000	ton/año
Capacidad de Refinería R	100.000	ton/año
Precio de venta concentrado	1.708,611	usd/ton de concentrado
Ley del concentrado	30%	
Costos de rehabilitación	0,027306	usd/ton de estéril
Tonelaje total del deposito	198.900.000	toneladas

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

El primer paso en el algoritmo de Lane es la obtención de la ley de corte económica en el primer periodo para la primera iteración (k), para esto se emplea la ecuación 5.31.

$$\text{Ley de corte (iteración } k = 1) = \frac{c-h+\frac{(f+VAN(k=1)*d)}{C}}{[(s-r)*y]} \quad (\text{Ec. 5.30})$$

En la primera iteración el valor del VAN (k=1) es cero, por ende, la expresión se reduce a:

$$\text{Ley de corte (iteración 1)} = \frac{c-h+\frac{f}{C}}{[(s-r)*y]} \quad (\text{Ec. 5.31})$$

En la primera iteración, el valor de la ley de corte es de 0,161% este valor de ley de corte de la primera iteración es buscado en la siguiente Tabla 5.10.

Tabla 5.10: Información computable que procesa el programa optimizante según la distribución "Esmeralda".

Ley de Corte Mínima %Cu	Ley de Corte Máxima %Cu	Toneladas	Marca de Clase %Cu	Ley Media %Cu	Qm (Toneladas de material)	Qc (Toneladas de Mineral)	Qr (Toneladas de cobre fino)
0	0,2	60.000.000	0,1	0,547	198.900.000	198.900.000	957.176
0,2	0,4	52.000.000	0,3	0,740	198.900.000	138.900.000	904.376
0,4	0,6	23.000.000	0,5	1,003	198.900.000	86.900.000	767.096
0,6	0,8	17.000.000	0,7	1,184	198.900.000	63.900.000	665.896
0,8	1	12.000.000	0,9	1,360	198.900.000	46.900.000	561.176
1	1,2	9.700.000	1,1	1,518	198.900.000	34.900.000	466.136
1,2	1,4	6.700.000	1,3	1,679	198.900.000	25.200.000	372.240
1,4	1,6	8.900.000	1,5	1,816	198.900.000	18.500.000	295.592
1,6	1,8	4.000.000	1,7	2,108	198.900.000	9.600.000	178.112
1,8	3	5.600.000	2,4	2,400	198.900.000	5.600.000	118.272

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

El valor de la ley de corte para la primera iteración es de 0,161% el cual es buscado en la Tabla 5.10 y es posible notar que ningún valor de la columna "Ley de Corte Mínima" coincide exactamente con la ley de corte de 0,161%. Para obtener el valor de Qm, al igual que en el Capítulo 5.1, independiente de la ley de corte, el valor de Qm corresponderá a la totalidad de los recursos en un año en específico, por lo que Qm es la suma de la columna "Toneladas", resultando en un valor de 198.9 millones de toneladas para una ley de corte de 0,161%.

Para el cálculo del Qc, el cual representa la cantidad de mineral que existe a partir de la ley de corte de 0,161%, por lo tanto, podemos darnos cuenta de que la ley de corte obtenida se encuentra dentro de un intervalo de leyes de corte, en específico, se encuentra entre la ley de corte 0% y 0,2%, por lo tanto, podemos inferir a priori de que el tonelaje de mineral será toda la proporción que se encuentre por encima de la ley de corte de 0,2% que corresponde al límite superior de la ley de corte optima (0,161%), por ende, en una primera instancia el valor de Qc será igual a la suma de cada uno de los tonelajes de la columna "Toneladas" y esta suma

comprenderá desde la segunda fila hasta la última fila, resultando en un valor de Q_c de 138,9 millones de toneladas.

El valor de Q_c , representa el tonelaje que se encuentra sobre una ley de 0,2% y que es denominado como “mineral”, pero en realidad, la ley de corte en la primera iteración es de 0,161% y no de 0,2%, por lo tanto, el hecho de que Q_c sea igual a 138,9 millones de toneladas, no es el valor más cercano a la realidad, por lo tanto, es preciso incorporar una fracción del tonelaje que se encuentra en el intervalo de leyes de corte entre 0 % y 0,2%, ya que el valor de 0,161% se encuentra en realidad entre ambos los extremos del intervalo y el valor verdadero de Q_c , debiese ser mayor que los 138,9 millones de toneladas, ya que debe incorporar una fracción de tonelaje correspondiente a ese intervalo de leyes de corte. Para lo anterior es preciso definir un parámetro denominado como “F” que representara un porcentaje del tonelaje de material en el intervalo justo donde se encuentre la ley de corte optima, que, en este caso, corresponde al primer intervalo. Para definir este factor “F”, debemos encontrar la proporción de tonelaje que representa la ley de 0,161%, y se realizara como sigue, definiendo un término llamado “delta”, por la ecuación 5.33.

$$\delta = leysup - leymin \quad (\text{Ec. 5.32})$$

Donde:

$leysup$: Ley de corte asociada al límite superior del tramo donde se encuentre la ley de corte % en la Tabla 5.10.

$leymin$: Ley de corte asociada al límite inferior del tramo donde se encuentre la ley de corte % en la Tabla 5.10.

En este caso:

$$\delta = 0,2\% - 0\%$$

$$\delta = 0,2\%$$

Y se define un valor llamado “beta”, el cual es definido por la ecuación 5.34.

$$\beta = leyo_{pt} - leymin \quad (\text{Ec. 5.33})$$

Donde:

$leyo_{pt}$: Ley de corte optima buscada (%).

$leymin$: Ley de corte asociada al límite inferior del tramo donde se encuentra la ley de corte % en la Tabla 5.10.

$$\beta = 0,161\% - 0\%$$

$$\beta = 0,161\%$$

Donde el factor “F” se definirá de la siguiente forma, descrita por la ecuación 5.35.

$$F = \left| 1 - \frac{\beta}{\delta} \right| \quad (\text{Ec. 5.34})$$

Donde:

δ : Diferencia entre la ley de corte superior e inferior, los cuales son los límites del intervalo al que pertenece la ley de corte optima.

β : Diferencia entre la ley de corte optima buscada y la ley de corte mínima en un tramo específico.

$$F = \left| 1 - \frac{0,161\%}{0,2\%} \right|$$

$$F = 0,195 = 19,5\%$$

Este valor de F representa la fracción del tonelaje en el intervalo de leyes de corte que comprende desde 0% a 0,2% y que debe multiplicarse por este factor F. Este nuevo tonelaje debe agregarse a los 138,9 millones de toneladas que era el valor a priori de Qc. Para una mayor comprensión, la línea roja (ver Figura 5.4) representa la ubicación de la ley de corte óptima para 0,161% en la distribución de “Esmeralda”, en donde todo lo que se encuentre dentro del rectángulo verde es la cantidad de tonelaje que debiese considerar el valor de Qc y dentro del rectángulo se considera una fracción del tonelaje que está definido por el intervalo 0% al 0,2%.

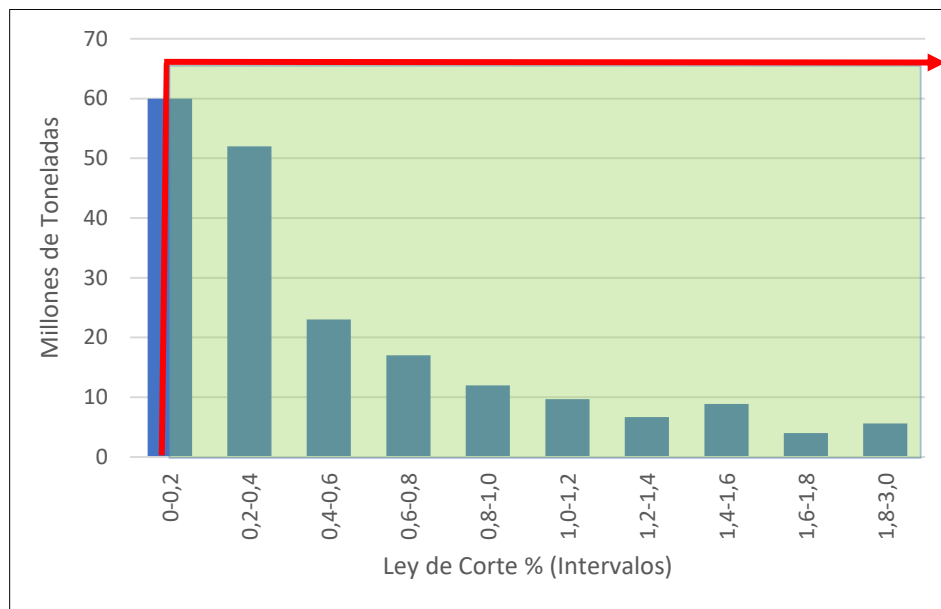


Figura 5.4: Representación del tonelaje real que se debe tomar según la ley de corte dentro de un intervalo en la distribución "Esmeralda".

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Por lo cual, la expresión que regula el valor de Qc para cualquier ley de corte será la descrita por la ecuación 5.36.

$$Qc_{real} = Qc_{(limite\ superior\ de\ COG(k))} + F * tonalaje_{(intervalo\ de\ COG(k))} \quad (\text{Ec. 5.35})$$

Donde:

n : Número total de intervalos que posee la distribución de tonelaje.

COG : Ley de corte optima en la iteración “k” (%).

i : intervalos de la distribución de leyes.

Evaluando los datos tenemos lo siguiente:

$$Qc_{real} = 138.900.000 + 0,196 * 60.000.000$$

$$Qc_{real} = 150.647.131,789 \text{ Toneladas}$$

El valor de Q_r representa el tonelaje de metal fino que es capaz de producir la refinería a partir de la cantidad Q_c , y este valor lo podemos calcular según la ecuación 5.14.

Esta ley media es calculada de la misma forma como fue expuesta en el Capítulo 5.1 y es con el método de la interpolación lineal donde, se ubica el límite superior y el inferior de la ley de corte optima (0,161%) en los intervalos de leyes de la Tabla 5.10 considerando la columna llamada “Marca de clase”, relacionándolo con los valores de la columna “Ley media” de la misma tabla, a continuación, se detalla el proceso de la interpolación lineal.

La Tabla 5.11 relaciona la marca de clase con la ley media en aquellos intervalos en donde está ubicada la ley de corte óptima para la primera iteración, en donde se debe encontrar aquella ley media que le corresponde el valor de 0,161%, por lo cual, se emplea la interpolación lineal de la ecuación 5.9.

Tabla 5.11: Interpolación Lineal para hallar el valor de la ley media a través de la base de datos “Esmeralda”.

Marca de Clase de la Ley de Corte %Cu	Ley Media %Cu
0,1	0,547
0,161	X
0,3	0,74

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Reemplazando los datos de la Tabla 5.11 en la ecuación 5.9 tenemos:

$$X = \frac{(0,161 - 0,1)}{(0,3 - 0,1)} * (0,740 - 0,547) + 0,547$$

$$X = 0,605\%$$

El resultado anterior corresponde a la ley media cuando la ley de corte es de 0,161% y esto tiene sentido ya que a medida que aumenta la ley de corte, aumenta el valor de la ley media y este valor buscado debe estar entre 0,547% y 0,740%.

Asumiendo una recuperación de la planta concentradora fija del 88%, se obtiene el valor de Q_r con la ecuación 5.14.

$$Q_r = 150.647.131,789 * 0,88 * 0,605\%$$

$$Q_r = 802.813,373 \text{ ton de metal fino.}$$

Una vez que se obtiene el valor de Q_m , Q_c y Q_r , se debe calcular el tiempo para así poder determinar la cantidad de flujo que existe en cada uno de los sistemas, el tiempo debe estar limitado solo por la planta concentradora, ya que se asume que la mina posee una capacidad de movimiento de material muy grande en comparación con la capacidad de tratamiento del mineral por parte de la planta y se hace el supuesto de que siempre la planta concentradora es la limitante del proceso, relacionando la operación minera solo entre la planta y la mina, ya que la refinería a pesar de tener una capacidad de tratamiento bastante menor que planta, la refinería jamás será una limitante del proceso minero ya que independiente de la capacidad que posea la refinería, todo el concentrado que sale de la planta concentradora es posible aprovecharlo, ya que la refinería tratara toda la cantidad de concentrado hasta llegar a su límite de producción ("R") y lo transformara a un metal fino de cobre el cual será vendido, pero la cantidad de concentrado que no pueda tratar la refinería, será posible venderlo como concentrado de cobre a través de la inclusión de un mercado intermedio de concentrados, por lo que, independiente de la capacidad de la refinería, siempre será posible vender todo el material de concentrado que salga de la planta concentradora.

Por lo anterior, el tiempo solo se calculará en base al valor de Q_c y la capacidad de la concentradora según la ecuación 5.15, resultando lo siguiente:

$$Tiempo = \frac{150.647.131,789 \text{ Toneladas}}{15.000.000 \frac{\text{toneladas}}{\text{año}}}$$

$$Tiempo = 10,043 \text{ años}$$

Ahora con este tiempo calculado es posible determinar el valor del flujo de material (q_m) utilizando la ecuación 5.17 como sigue:

$$q_m = \frac{198.900.000 \text{ toneladas}}{10,043 \text{ años}}$$

$$q_m = 19.804.558,936 \frac{\text{toneladas de material}}{\text{año}}$$

Ahora se determina la cantidad de mineral que necesita procesar la planta concentradora anualmente, según la ecuación 5.18:

$$q_c = \frac{150.647.131,789 \text{ toneladas}}{10,043 \text{ años}}$$

$$q_c = 15.000.000 \frac{\text{toneladas de mineral}}{\text{año}}$$

Como se puede apreciar el valor de q_c es exactamente igual a la capacidad de la planta concentradora, por lo que se respeta el hecho de que la planta concentradora trabaje a toda capacidad y no exista capacidad ociosa o saturada en este sistema.

Por último, se calcula la cantidad de cobre fino que debe producir la fundición y refinería en un año, mediante la ecuación 5.19.

$$q_r = \frac{802.813,373 \text{ ton de metal fino}}{10,043 \text{ años}}$$

$$q_r = 79.936,474 \frac{\text{ton de metal fino}}{\text{año}}$$

Una vez calculado los valores de cada uno de los flujos anuales, es posible determinar si existe alguna cantidad de concentrado que no pueda procesar la refinería, como la refinería posee una capacidad de producción de fino limitada y es de 100.000 Ton, el valor obtenido de q_r es menor a la capacidad de producción de la refinería, esto significa que la refinería se encuentra en condiciones para poder producir todo el volumen “ q_r ” de metal fino, por lo que no necesita un mercado intermedio de concentrados. Cuando “ q_r ” sea mayor que la capacidad de producción de la fundición y refinería, entonces se generará un excedente (“ q_r-R ”), el cual debe ser vendido como concentrado de cobre y será determinado a través de la ecuación 5.21.

Llegado a este punto es preciso calcular el valor del beneficio anual resultante a partir de los flujos y de los parámetros económicos establecidos en la Tabla 5.9 a través de la ecuación 5.26:

$$\text{beneficio anual} = 253.902.507,034 \text{ usd}$$

Como se obtiene el valor del beneficio anual, se debe calcular el valor presente para la primera iteración, el cual dependerá del valor del beneficio anual, del tiempo y de la tasa de descuento.

$$VAN(k = 1) = 1.720.356.291,705 \text{ usd}$$

Una vez obtenido el valor del VAN para la primera iteración, se debe calcular el error para la programación dinámica, el cual estará definido según la ecuación 5.29. El error para el algoritmo de Lane será el valor absoluto de la diferencia entre el VAN en la iteración 1, menos el valor del VAN en la iteración 0, como el VAN inicial siempre es de cero, tenemos lo siguiente:

$$\text{error} = |1.720.356.291,705 - 0|$$

$$\text{error} = 1.720.356.291,705$$

El algoritmo de Lane es un método iterativo en el cual, el proceso del cálculo de la ley de corte optima, se debe recalcular constantemente a través de la ecuación de ley de corte económica (ecuación 5.2), ecuación que depende del valor del VAN, como en la primera iteración $k=1$, no se

había calculado el valor del VAN, se asume un VAN inicial de cero y con esta solución de arranque, el algoritmo debe iniciar su secuencia iterable en el programa Python, hasta que el valor del VAN en la iteración “n” converja, esta convergencia estará asociado a que la diferencia entre el VAN en la iteración “k” menos la iteración anterior “k-1” sea muy pequeña, y cuando esto se cumpla, el ciclo iterativo dejara de operar y se podrá obtener el verdadero valor del VAN, para esto se asume un llamado error limite, llamado “ ε ”, donde se debe cumplir la ecuación 5.37.

$$Si: \begin{cases} error \leq \varepsilon & (el\ VAN\ converge\ y\ el\ algoritmo\ se\ detiene) \\ error > \varepsilon & (el\ VAN\ NO\ converge\ y\ el\ proceso\ continua) \end{cases} \quad (Ec. 5.36)$$

Para lo anterior se define un valor de ε igual a 0,01, por lo tanto:

$$Si: \begin{cases} |VAN(k) - VAN(k-1)| \leq 0.01 & (el\ VAN\ converge\ y\ el\ algoritmo\ se\ detiene) \\ |VAN(k) - VAN(k-1)| > 0.01 & (el\ VAN\ NO\ converge\ y\ el\ proceso\ continua) \end{cases} \quad (Ec. 5.37)$$

Donde:

ε : Tolerancia límite del error.

error : Diferencia en valor absoluto del VAN calculado en la iteración “k+1” menos el VAN de la iteración “k”.

El error obtenido en la primera iteración es mayor que 0,01, por lo tanto, se debe seguir iterando, donde para la segunda iteración el VAN inicial será de 1.720,356 MUSD, y este valor es el vuelve a ingresar a la ecuación 5.28 de ley de corte económica para recalcular una nueva ley de corte óptima para la segunda iteración, hasta encontrar la convergencia del VAN.

El valor del VAN converge a la vigésima iteración con un valor final de 1.917,379 MUSD con una ley de corte de 0,425 %.

El resultado final que entrega el algoritmo de Lane, desarrollado en el entorno de Python sobre la base de datos “Esmeralda” en conjunto con los parámetros económicos de la tabla 5.9 son los presentados por la Tabla 5.12 y la Tabla 5.13.

Tabla 5.12: Resultados de valores económicos y leyes usando el algoritmo de Lane.

Años	VAN usd	beneficio anual usd	Ley de Corte en %Cu	ley media en %Cu
1	1.917.379.460	423.761.851	0,425	0,905
2	1.493.617.609	391.445.308	0,384	0,851
3	1.137.758.238	365.967.018	0,349	0,805
4	835.306.157	337.302.425	0,312	0,756
5	581.885.853	317.073.886	0,277	0,718
6	365.320.122	298.451.188	0,242	0,684
7	180.005.415	278.106.675	0,205	0,648
8	23.021.447	44.862.288	0,167	0,612

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Tabla 5.13: Resultados del tonelaje de material extraído, mineral procesado y cobre vendido empleando el algoritmo de Lane.

Años	Ton de Material	Ton de Mineral	Ton de Producto	Ton de concentrado
1	35.519.479	15.000.000	100.000	67.096
2	32.799.120	15.000.000	100.000	42.566
3	29.804.601	15.000.000	100.000	21.472
4	27.189.075	15.000.000	99.782	-
5	25.121.206	15.000.000	94.791	-
6	23.303.433	15.000.000	90.252	-
7	21.667.976	15.000.000	85.517	-
8	3.495.110	2.614.714	14.071	-

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Con la metodología de Kennett Lane, es posible obtener un valor presente neto de 1.917.379 MUSD al año 1, también se obtiene la política de leyes de corte, la cual obedece a un vector que es decreciente con el paso del tiempo, esto último, es la consecuencia de incluir el costo de oportunidad en la expresión de la ley de corte, ya que de esta forma, Lane se asegura de que el algoritmo tome en cuenta la depreciación del dinero en el tiempo por lo que la mayor ley está ubicada en el primer periodo esto es para que se obtengan las mayores ganancias lo más rápido posible y el efecto de la depreciación económica golpee lo más leve a este primer periodo.

Esto último (ver Figura 5.5).se traduce en un movimiento mina decreciente, debido a la naturaleza del vector de leyes de corte, ya que Lane extrae los recursos minerales de la forma más rápida posible y esto se logra aumentando el movimiento mina de extracción de los materiales en los primeros periodos de la vida de la mina.

Con este enfoque se obtiene una vida de la mina de 8 periodos, de los cuales, solo en los primeros 3 es posible vender concentrado de cobre (ver Tabla 5.13), ya que es en estos periodos en donde la fundición y refinería posee un excedente en sus volúmenes productivos.

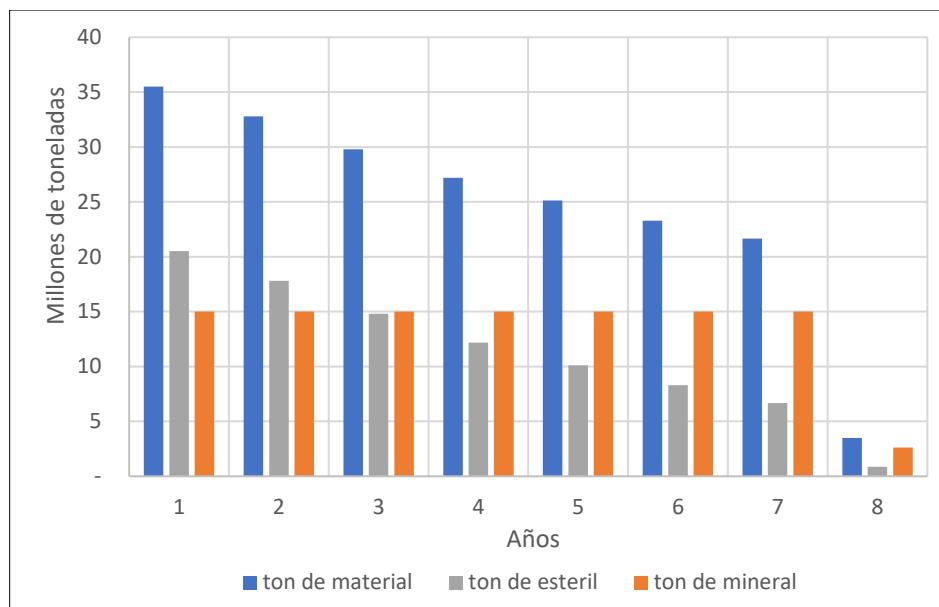


Figura 5.5: Movimiento de materiales extraídos en el rajo por año, empleando el algoritmo de Lane.
Fuente: Elaboración propia, 2021.

5.3 ALGORITMO GRG ITERATIVO

En el apartado anterior se expuso la metodología del algoritmo de Lane, puesto a prueba en la base de datos “Esmeralda”, la cual cuenta con un total de 198,9 Mton de recursos. En la presente sección se introducirá un nuevo algoritmo denominado como “GRG Iterativo” el cual posee una mecánica diferente, ya que hace uso de la ecuación de ley de corte de Lane, introduciendo un factor denominado como “factor optimizante” el cual se inserta en esta ecuación e ira tomando valores desde el cero hasta un valor entero dado, con saltos decimales, lo cual permitirá incrementar el valor de la ley de corte optima obtenida con el algoritmo de Lane y de esta forma obtener un mayor valor presente neto.

En la búsqueda de mejorar aún más el valor presente obtenido con el algoritmo de Lane, se propone incorporar una nueva variable, la cual llamaremos como “ σ ” y será el denominado “factor optimizante” y será insertado en la ecuación de ley de corte de Lane a través de la ecuación 5.39.

$$Ley\ de\ corte\ optima = \frac{c + \frac{f + VAN_{lane} * d}{C} + \sigma - h}{(s - r) * y} \quad (\text{Ec. 5.38})$$

Donde:

- c : Costo de extracción mina (usd/ton de material).
- s : Precio de venta del cobre (usd/ton de cobre fino).
- r : Costo de comercialización (usd/ton de cobre fino).
- d : Tasa de descuento (%).
- y : Recuperación de la planta concentradora (%)

h : Costo de rehabilitación del botadero (usd/ton de estéril).

σ : Factor de la optimización.

Como se puede apreciar, el factor optimizante está dentro de la ecuación de la ley de corte, por lo tanto, al ser σ una nueva variable, la ley de corte dependerá adicionalmente de esta nueva variable.

La incorporación de esta variable está justificada en el hecho de que se necesita buscar una forma de incrementar la ley de corte que entrega el algoritmo de Kennett Lane, por lo tanto, se adiciona esta variable para aumentar el valor de la ley de corte optima obtenida por el algoritmo de Lane y de esta forma determinar nuevos valores de leyes de cortes que incrementen el valor presente.

Para aumentar el valor de la ley de corte optima definida por Lane, es necesario que la variable σ , tome valores positivos y que sean menores que un valor entero dado, además de incorporar un salto fijo entre cada uno de estos valores. De esta forma se podrá determinar el nuevo valor presente, así como los múltiples planes de producción para cada valor que tome la variable σ , es decir a cada valor de sigma, estará asociado un plan de producción con su respectivo valor presente, así como su vector de leyes y la distribución de tonelajes y todos los parámetros que incorpora este plan minero.

De la forma más general, el factor optimizante lo podemos definir a través de la ecuación 5.40.

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k + \alpha \quad (\text{Ec. 5.39})$$

Donde:

σ_{k+1} : Valor del factor optimizante para la “k + 1” iteración.

σ_k : Valor del factor optimizante para la iteración “k”.

α : Valor del paso para el factor optimizante.

En donde alfa, es el valor del paso que existe entre cada valor del vector “ σ ”, y la sigla “k”, simboliza el número de iteraciones de cada uno de los planes mineros ejecutados. Además, es preciso definir el punto de inicial del vector “ σ ”, el cual lo dejaremos como el valor de la unidad.

Por ejemplo, si el valor de α es de 1 y el valor inicial de “ro” está definido por la unidad, tenemos el siguiente vector de valores para σ .

$$\text{factores optimizantes} = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$$

Esto quiere decir que:

$$\text{factores optimizantes} = [\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2, \sigma_3 = 3, \dots \dots \dots, \sigma_{10} = 10]$$

Donde el vector llamado factores optimizantes, tendrá toda la colección de los valores que tomara " σ " y cada uno de estos valores los asignará dentro de la ecuación de la ley de corte económica, de forma que para la primera iteración el valor de sigma es de 1, por lo tanto se trabajara con el algoritmo descrito en la sección anterior, considerando en todo momento el valor de 1 dentro de la ecuación de ley de corte, de esta forma el algoritmo trabajara cada iteración y en cada año con este valor fijo de $\sigma = 1$, hasta obtener el plan de producción final el cual nos entregara el valor presente de dicho plan minero, después la variable " σ " toma el siguiente valor dentro del vector "factores optimizantes" y se le asigna el valor de 2, ahora el programa calcula la ley de corte económica incorporando este valor fijo de 2 dentro de la ecuación, hasta que encontremos la convergencia del VAN para cada año y de esta forma obtengamos un nuevo plan minero resultante de incorporar el valor de 2 dentro de la ecuación de ley de corte económica, después se incorpora el siguiente valor de " σ " y así sucesivamente hasta llegar al último valor dentro del vector "factores optimizantes", por lo cual tendremos como resultado múltiples planes mineros. Por lo tanto, al final del algoritmo iterativo tendremos un numero de planes mineros igual al número de elementos que componen el vector de "factores optimizantes".

Resultado = [plan minero 1 ($\sigma_1 = 1$), plan minero 2 ($\sigma_2 = 2$),, plan minero ($\sigma_k = n$)]

Como se puede apreciar, el resultado del programa nos entregara una colección de planes mineros, los cuales variaran según el valor de " σ ", y a partir de esta colección de planes mineros se seleccionará aquel plan que produzca el máximo valor presente, de esta forma estaremos aumentando el valor presente del algoritmo de Lane y una vez identificado el plan minero que contiene el máximo VAN, también encontraremos el valor de " σ " que maximiza el valor presente de Lane.

La virtud que posee este proceso llamado "GRG Iterativo" es que es capaz de introducir una nueva variable al proceso iterativo y de esta forma es capaz de "sensibilizar" los resultados que entrega el algoritmo de Lane, a modo de descubrir aquel valor que hace maximizar aún más el valor presente del plan minero resultante por el método de Lane. Esta forma de análisis resulta bastante interesante, ya que es posible ajustar el paso que existe entre cada uno de los valores que tomara el vector "factores optimizantes", de esta forma a medida que el paso disminuya podemos encontrarnos con el verdadero valor de " σ ".

Utilizando la base de datos empleada con el algoritmo de Lane, se ocupa la misma para realizar el proceso de la Fase 2 incorporando la variable " σ " dentro de la ecuación de ley de corte económica.

Se asignan los siguientes valores para el vector "factores optimizantes":

El valor inicial del vector será de 1, el paso ("alfa") será de 0,1 y el vector llegará hasta el valor límite de 10.

$factores\ opt = [1 ; 1,1 ; 1,2 ; 1,3 ; ; 5,1 ; 5,2 ; 5,3 ; 5,4 ; ; 9,7 ; 9,8 ; 9,9 ; 10]$

Cabe destacar que este nuevo algoritmo desarrollado, posee un tiempo de ejecución más extenso que el algoritmo de Lane, ya que debe hacer muchas más iteraciones, por lo que, se decide incluir un nuevo entorno de programación llamado Colaboratory extraído de Google Inc.(Estados Unidos), software Colaboratory (2019), desarrollado por Google Research, el cual permite programar y ejecutar códigos de Python con una mayor velocidad debido al acceso de GPUs en la nube, lo cual le otorga una mayor potencia computacional, además este recurso posee todas las librerías de Python con un acceso gratuito, donde la gran ventaja de este software es de llevar a cabo programas que demandan mucho tiempo y potencia de procesamiento, como lo es el caso del presente algoritmo GRG Iterativo, por lo cual, este algoritmo se desarrolla en este entorno en aras de reducir el tiempo de procesamiento y de otorgar una mayor facilidad para detectar errores en la programación al momento de desarrollar este programa.

Aplicando este vector de factores optimizantes a la base de datos “Esmeralda” en el entorno de Colaboratory basado en Python, obtenemos la Figura 5.6.

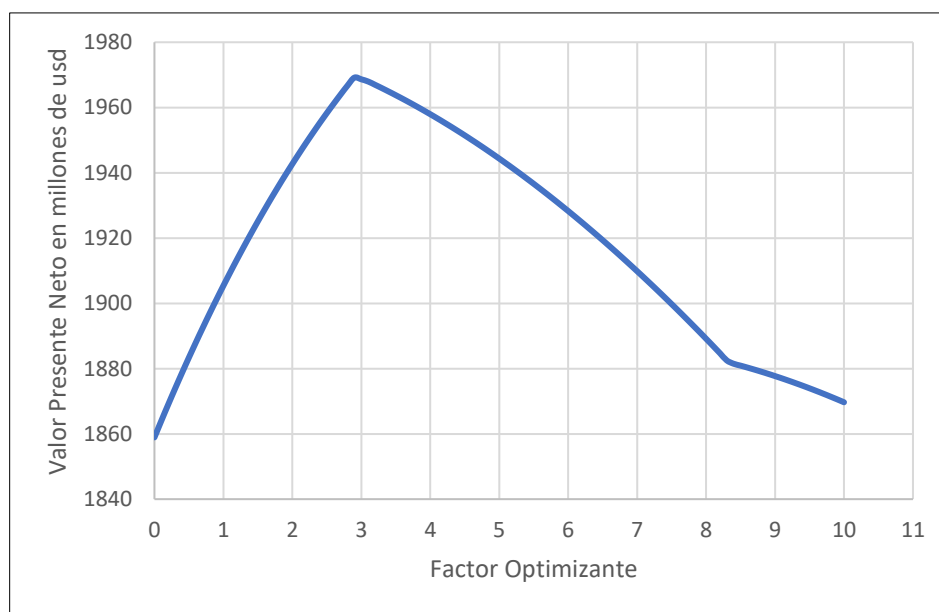


Figura 5.6: Valor presente neto vs Factor Optimizante " σ " con paso de 0.1.
Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Es posible apreciar que a medida que aumenta el factor optimizante, aumenta el valor presente neto del proyecto hasta llegar a una meseta que representa el máximo valor del VAN para el proyecto, este punto máximo está ubicado cuando " σ " es igual a 2,9, donde el valor presente del proyecto alcanza los 1.969,161 MUSD.

La Tabla 5.14 y la Tabla 5.15 muestran los resultados del plan minero ejecutando el algoritmo "GRG Iterativo" en la base de datos "Esmeralda" y con los parámetros económicos de la Tabla 5.9.

Tabla 5.14: Resultados del factor optimizante, valores económicos y leyes usando el algoritmo GRG Iterativo.

Años	σ óptimos	VAN usd	beneficio anual usd	Ley de Corte en %Cu	ley media en %Cu
1	2,9	1.969.161.097	486.192.784	0,500	1,003
2	2,9	1.482.968.313	442.226.781	0,447	0,933
3	2,9	1.080.943.967	399.452.344	0,396	0,866
4	2,9	750.818.063	371.672.609	0,357	0,815
5	2,9	471.574.931	339.232.877	0,315	0,759
6	2,9	239.874.311	315.073.788	0,274	0,714
7	2,9	44.238.278	78.370.808	0,231	0,674

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Tabla 5.15: Resultados del tonelaje de material extraído, mineral procesado y cobre vendido empleando el algoritmo GRG Iterativo.

Años	Ton de Material	Ton de Mineral	Ton de Producto	Ton de concentrado
1	39.577.855	15.000.000	100.000	112.013
2	36.610.228	15.000.000	100.000	80.154
3	33.935.985	15.000.000	100.000	49.599
4	30.408.067	15.000.000	100.000	26.057
5	27.352.978	15.000.000	100.000	764
6	24.907.471	15.000.000	94.292	-
7	6.107.416	4.014.672	23.799	-

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Los resultados obtenidos con el algoritmo denominado como “GRG Iterativo” son satisfactorios, ya que en primer lugar es posible apreciar que el valor presente neto en el año 1 es de 1.969,161 MUSD, el cual es mayor en comparación al valor presente neto obtenido con el algoritmo de Lane (1.917,379 MUSD), este último algoritmo es capaz de incrementar este último valor presente neto en aproximadamente en un 2,70 %. Esto es posible gracias a la introducción de un factor optimizante que es capaz de elevar la ley de corte, de esta forma, el mineral que es enviado a la planta concentradora posee una mayor ley media, producto de esto, se obtiene una mayor cantidad de fino y de concentrado, lo cual es notorio en gran parte del periodo de producción.

También es destacable que el aumento de la política de leyes de corte optimas, repercute en que se produzca una disminución de la vida de la mina, ya que, según el enfoque de Lane, la solución al consumo de reservas implica un total de 8 periodos, pero usando el algoritmo “GRG Iterativo”, el tiempo disminuye a 7 años (ver Figura 5.7).

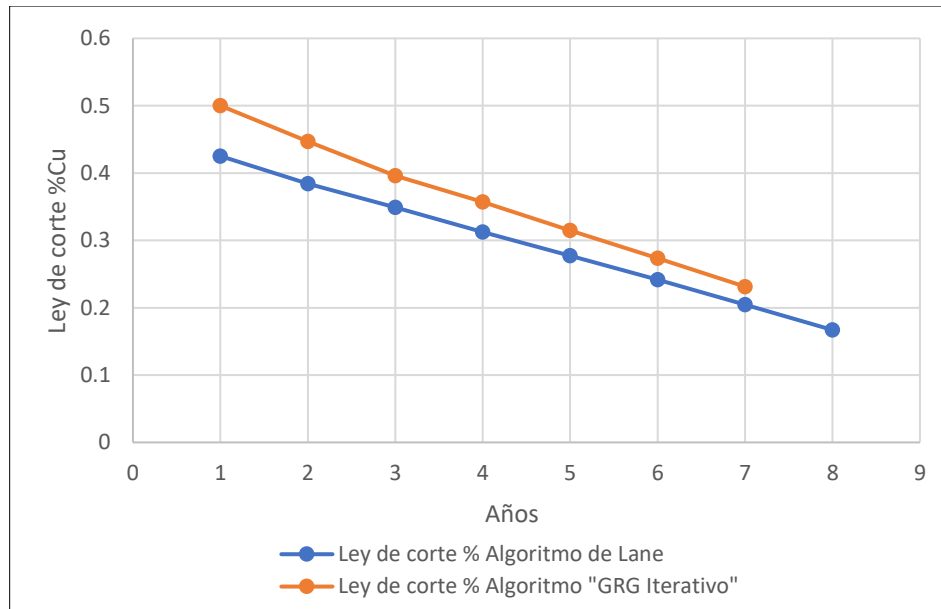


Figura 5.7: Ley de corte vs Años, Caso algoritmo de Lane vs "GRG Iterativo".
Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Esto sucede ya que al aumentar la política de leyes de corte, aumenta la cantidad de material que la mina mueve año a año, ya que al incrementar la ley de corte, aumenta la exigencia y disminuye la cantidad de mineral total existente en el rajo, por ende la concentradora tendrá una menor cantidad total de mineral a tratar en comparación al enfoque de Lane, y el tiempo que demorara la concentradora en tratar esta nueva cantidad de mineral será menor, como el tiempo global de la operación minera solo depende de la concentradora, cuando este tiempo disminuye, la mina deberá acelerar su movimiento extractivo de recursos para cumplir con el llenado de la planta ya que al aumentar la ley de corte, aumenta la relación estéril-mineral, por lo que existirá una mayor cantidad de estéril a remover, debido a esto el movimiento mina crece para el algoritmo "GRG Iterativo", en comparación al enfoque de Lane. Esto repercute en mayores cantidades anuales de lastre que se deben extraer año a año, pero a pesar de que estos volúmenes son mayores que los obtenidos con la metodología de Lane, este movimiento sigue siendo decreciente. (ver Figura 5.8). Además, debido al aumento en el movimiento mina, la mina comienza a agotar sus recursos de forma más rápida y por esto, la vida de la mina para el algoritmo "GRG Iterativo" es de 7 periodos en comparación a los 8 años obtenidos con el enfoque de Lane.

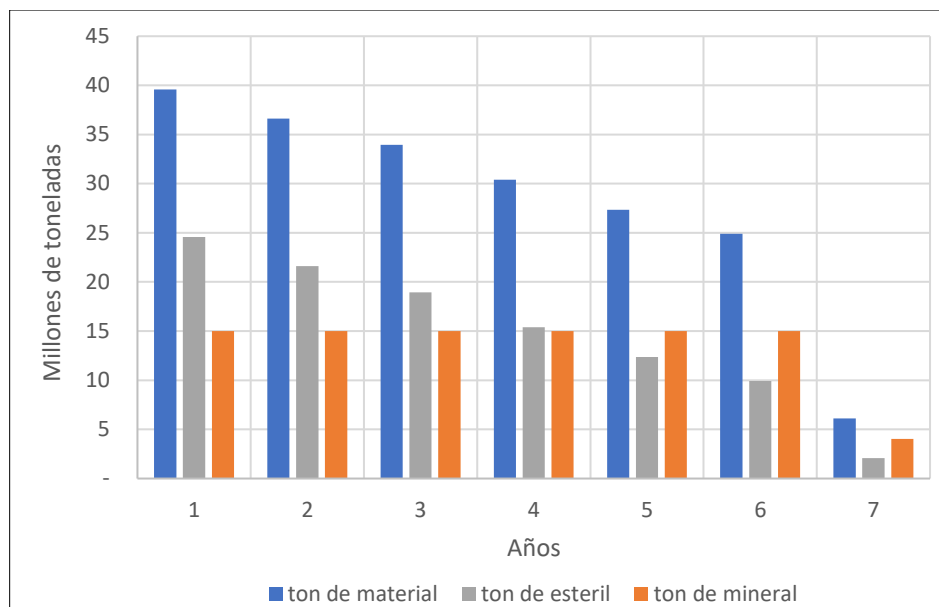


Figura 5.8: Movimiento de materiales desde el rajo por año, usando el algoritmo "GRG Iterativo".
Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Además, es posible observar que empleando el algoritmo "GRG Iterativo" la cantidad de concentrado aumenta (ver Tabla 5.15), ya que, usando el enfoque de Lane, solo en los primeros 3 periodos se vende concentrado, en contraposición, con el algoritmo "GRG Iterativo" en donde la producción de concentrado aumenta, y se puede vender concentrado durante los primeros 5 años de la vida de la mina. Lo anterior es debido a que, al aumentar la política de leyes de corte, aumenta a su vez la ley media (ver Tabla 5.14), y al aumentar este último parámetro, aumenta la cantidad de fino de cobre que debe producir la fundición y refinería, por lo cual, aumenta a su vez, la cantidad excedente de producción de metal rojo. Como la fundición y refinería posee una capacidad de producción de fino limitada (100.000 Ton de fino de cobre), al aumentar la cantidad que se debe producir de cobre fino, aumenta el excedente de cobre fino que no puede producir la fundición y refinería y este excedente formara parte del mercado intermedio, transado como concentrado, es por esta razón que la cantidad de concentrado producido por el algoritmo de Lane, aumenta con la introducción del algoritmo "GRG Iterativo", ya que la introducción del factor optimizante " σ " permite obtener mayores cantidades de concentrados en los primeros años, de esta forma se percibe un mayor VAN ya que aumentan los ingresos en los primeros periodos, lo cual es beneficioso ya que el dinero sufre la depreciación de su valor a medida de que pasa el tiempo, por esto, es que el VAN es mayor, ya que se incrementan los beneficios anuales en los primeros años de la vida de la mina (ver Figura 5.9), de esta forma, al momento de actualizar estos montos, el valor presente neto es mejor.

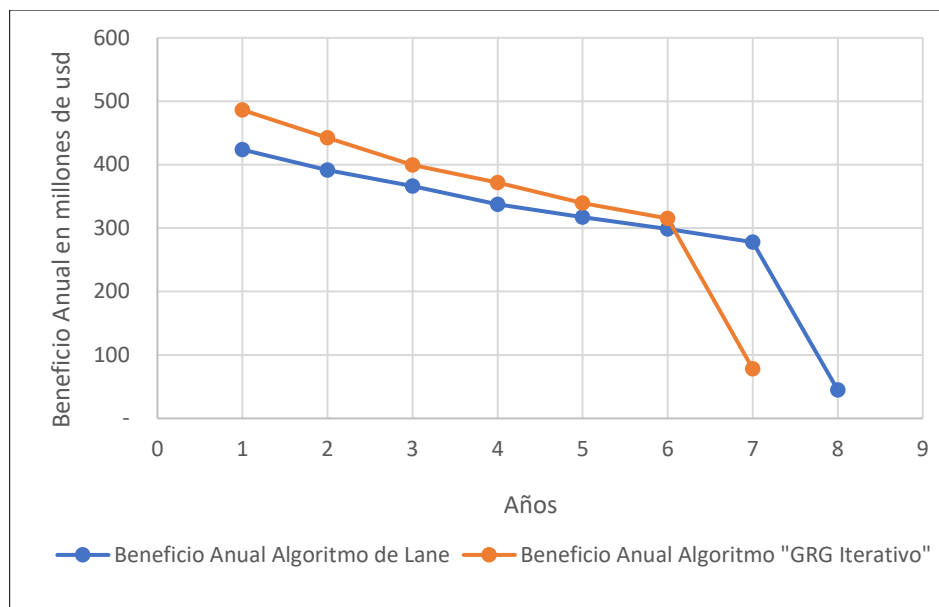


Figura 5.9: Beneficio Anual vs Años, Caso Algoritmo de Lane vs "GRG Iterativo".
Fuente: Elaboración Propia, 2021.

5.4 ALGORITMO GRG MULTI AÑO CON RESULTADOS

El algoritmo de Lane se caracteriza por ser bastante versátil, ya que es posible colocar cualquier valor razonable dentro de los parámetros de entrada y el algoritmo entregara un plan de producción característico, así como la política de leyes de corte resultante. En los últimos años se han presentado muchas modificaciones y algoritmos alternos que permiten obtener la ley de corte optima a partir de la distribución de tonelaje, parámetros económicos y técnicos, los cuales son diferentes al enfoque clásico de Lane, pero permiten llegar a una solución bastante semejante y en algunos casos mejor con respecto a la planteada por Kenneth Lane.

En el apartado anterior, se expuso la metodología que sustenta al algoritmo GRG Iterativo (Capítulo 5.3), en la cual, se incluía dentro de la ecuación de ley de corte optima una nueva variable llamada como " σ ", la cual era capaz de incrementar la ley de corte optima que entrega el algoritmo de Lane y de esta forma, se podía elevar la ley de corte y aumentar el valor presente neto de un proyecto minero.

El nuevo algoritmo, denominado como "GRG Multi Año" funciona de una forma diferente, ya que se basa en la hipótesis de que para establecer una solución al problema del consumo de reservas minerales, debemos conocer la ley de corte optima que asegura el mayor valor presente neto al negocio, pero el problema está en que no conocemos esa ley de corte óptima para cada periodo, entonces lo que hará este nuevo algoritmo es evaluar todas las leyes de corte existentes dentro de un intervalo definido y el programa calculara el VAN para cada una de las leyes de corte existentes, respetando el consumo y agotamiento de los recursos año a año, de esta forma el

programa será capaz de identificar la ley de corte específica que hace el VAN máximo en cada periodo y guardara la información para luego mostrarla como la solución.

Para llevar a cabo lo anterior, el algoritmo “GRG Multi Año” deberá evaluar un conjunto numérico grande de leyes de corte, en el cual, comenzará la evaluación de cada una de estas leyes desde un valor inicial hasta un valor final y para tomar la mayor cantidad de valores, el paso existente entre cada valor numérico de leyes de corte debe ser pequeño.

El valor inicial de ley de corte que evaluará el programa será la ley de corte marginal, dada por la ecuación 5.41 y para que el programa evalúe otra ley, se incorporara a la definición de ley de corte una nueva variable llamada “RO”, la cual hará variar la ley de corte hasta un valor limite que corresponderá al extremo superior del intervalo de leyes de corte. Cabe destacar que la ley de corte marginal será la definida por la planta concentradora, ya que se asumirá que en todo momento solo la planta concentradora es la etapa limitante del proceso minero y que además la ecuación 5.41 no considera dentro de su formulación matemática el costo mina, ya que para efectos de la presente investigación, solo se consideran yacimientos explotados a cielo abierto, donde el costo mina es un costo hundido, ya que independiente si el material extraído de la mina es mineral o estéril, este deberá extraerse si o si, por lo que siempre se incurrirá en el costo mina independientemente de la decisión de enviar un material a planta o a botadero.

$$\text{Ley de corte marginal de la planta} = \frac{c-h}{(s-r)*y} \quad (\text{Ec. 5.40})$$

La variable “RO” representara aquella cantidad que al ser sumada a la ley de corte marginal entregue exactamente el valor numérico de la ley de corte optima, que será aquella ley de corte que maximice el VAN (ecuación 5.42).

$$\text{Ley de corte optima planta} = \frac{c-h+RO}{(s-r)*y} \quad (\text{Ec. 5.42})$$

Donde:

- c : Costo de extracción mina (usd/ton de material)
- h : Costo de rehabilitación del botadero (usd/ton de estéril).
- s : Precio del cobre (usd/ton de cobre fino)
- r : Costo de comercialización (usd/ton de cobre fino).
- y : Recuperación de la planta concentradora.
- RO : Factor Optimizante del Algoritmo GRG Multi Año.

Esta nueva interpretación y modelación al problema del consumo de recursos minerales, hace que la variable “RO” reemplace al costo fijo y el costo de oportunidad incorporados por Lane en la definición de ley de corte (revisar ecuación 5.2), ya que el hecho de incorporar la variable “RO”, significa que el algoritmo “GRG Multi Año” tendrá la ventaja de evaluar cualquier valor numérico

de ley de corte y determinar aquella ley de corte que es capaz de incrementar al máximo el valor presente neto, pero a diferencia de la variable “ σ ” que era la implementada en el algoritmo “GRG Iterativo”, la variable “RO” comienza desde el valor numérico de ley de corte marginal, en cambio, la variable “ σ ” comienza con el valor numérico que entrega el algoritmo clásico de Lane.

Cabe destacar que la gran fortaleza del algoritmo de Lane es incluir dentro de la definición matemática de ley de corte el costo fijo y el costo de oportunidad (ver ecuación 5.2) ya que así la ley de corte dependerá del valor numérico del VAN, pero como este en una primera instancia se desconoce, se hace uso de la programación dinámica para asumir que en una primera iteración, el valor del VAN es cero y calcular la ley de corte y con ello un nuevo valor del VAN, el cual sirve para colocarlo nuevamente en la fórmula de ley de corte (ecuación 5.2) y con ello obtener un nuevo VAN, de esta forma se generaba un proceso iterativo, el cual concluía cuando se lograba la convergencia del VAN. Esta forma de solucionar numéricamente el problema entrega gran rapidez, pero solo es una aproximación numérica a la verdadera solución.

La riqueza del nuevo algoritmo “GRG Multi Año” es que permite obtener la ley de corte óptima usando otro método numérico, el cual se basará en ir probando un conjunto grande de valores de leyes de cortes, por lo cual, la variable “RO” reemplazará al costo de oportunidad y al costo fijo, calculando la ley de corte óptima a través de la ecuación 5.42, ya que de esta forma este nuevo algoritmo usa el factor “RO” para crear una gran colección de valores numéricos en donde el programa evaluará cada valor numérico de ley de corte y escogerá aquella ley que maximice el VAN.

La variable “RO” permitirá crear un vector de valores de leyes de cortes, el cual considerará un valor inicial que será de cero, hasta llegar a un valor límite de 30, y entre cada elemento del vector, se asignará un paso, que tendrá relación con la exactitud de la solución encontrada. Cuanto más pequeño sea el valor para el paso, más exacto será la solución encontrada, pero al mismo tiempo el tiempo en la ejecución del algoritmo se hará más lento, incluso cuando el paso adquiere valores cercanos a la milésima, el tiempo de cálculo es de horas. Por lo anterior, se define un paso de 0,01 que permita entregar una solución robusta al mismo tiempo que su tiempo de cálculo no sea excesivo.

Se definirá el siguiente vector RO con valor inicial de cero, valor final de treinta y paso de 0,01:

$RO = [0; 0,01; 0,02; 0,03; \dots; 15; 15,01; 15,02; 15,03; \dots; 29,98; 29,99; 30]$

A partir del vector de valores definidos para RO, el algoritmo que se implementará en Python, ejecutará un total de iteraciones igual al número de elementos que contenga el vector RO para cada año, por lo anterior, es posible establecer que si el paso del vector RO es de 0,01, comenzando con el valor de cero hasta llegar a treinta, tendremos un total de 3001 iteraciones para cada año, por lo cual, el tiempo que le tomara al programa Python en correr el programa

GRG Multi año será mucho mayor en comparación al tiempo que toma el algoritmo de Lane, ya que para este último algoritmo, solo corre aproximadamente un total de 10 iteraciones por año.

Una vez obtenido el valor de la ley de corte para cada uno de los elementos que componen el vector RO, es posible calcular el beneficio anual según la ecuación 5.22 y el VAN con la ecuación 5.27.

Por lo cual, es posible identificar que a cada valor del VAN obtenido en el año i , estará asociado una ley de corte “ k ”, donde aquella ley de corte “ k ”, estará determinada para un valor exacto de RO_k donde k simbolizara el número de elementos que contiene el vector “factores optimizante”. Es importante destacar que este procedimiento de encontrar aquella ley que maximice el VAN, según un determinado valor de RO, se realiza en cada uno de los años de la vida de la mina, por lo cual, es común obtener para cada año, un valor diferente de RO.

En la Figura 5.10, se visualiza el método que posee el algoritmo GRG Multi año, en el cual, se evalúa el vector factores optimizantes en la fórmula propuesta para la nueva ley de corte optima, el punto B representa aquel VAN en el cual el valor de la variable RO en la ecuación ley de corte optima es cero, por lo cual, el VAN reportado es positivo, pero no es el VAN máximo, ya que la ley de corte no es la óptima, cuando el valor de RO comienza a incrementarse, aumenta la ley de corte optima y como consecuencia de esto, se incrementa el VAN hasta llegar a un punto en donde el valor del VAN es máximo (punto A), que representa la solución óptima, a medida de que aumenta el valor de RO el valor del VAN comienza a decrecer hasta llegar a un punto donde puede ser incluso menor que cuando RO era cero (punto C).

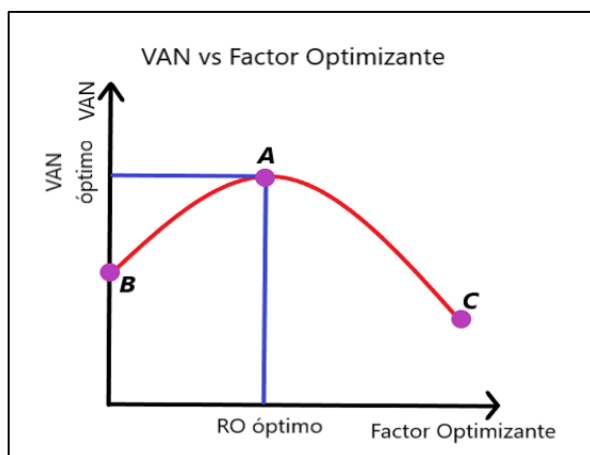


Figura 5.10: Representación gráfica del efecto de la inserción del factor optimizante en la mejora del VAN.

Fuente: Nieto y Bascetin, 2006

Este procedimiento de búsqueda del valor de RO que hace maximizar el VAN se hace para cada año de la vida de la mina.

Cabe destacar que debido al gran número de iteraciones que se deben efectuar para cada año, se decide optar por el uso de Google Colaboratory, el cual usa el lenguaje de Python, esto es debido a que el algoritmo GRG Multi Año, requiere de un tiempo de programación y potencia más elevados que el algoritmo de Lane, por lo que, es preciso el uso de Colaboratory para disminuir el tiempo de ejecución de este nuevo programa.

Utilizando este último algoritmo en aras de maximizar el valor presente neto, se obtiene la Tabla 5.16 y la Tabla 5.17 que muestran los resultados del algoritmo “GRG Multi Año”, sobre la base de datos “Esmeralda” en el entorno de Python y Google Colaboratory, considerando en todo momento los datos económicos de la Tabla 5.9.

Tabla 5.16: Resultados del factor optimizante, valores económicos y leyes por año utilizando el algoritmo GRG Multi año.

Años	Factor Optimizante	VAN usd	beneficio anual usd	Ley de Corte en %Cu	ley media en %Cu
1	17,8	2.037.035.490	486.188.186	0,500	1,003
2	17,8	1.550.847.304	486.188.186	0,500	1,003
3	17,79	1.108.858.043	486.064.915	0,500	1,003
4	17,79	707.151.502	486.064.915	0,500	1,003
5	4,6	341.963.737	291.071.494	0,228	0,671
6	2,34	143.157.990	230.557.375	0,182	0,626

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Tabla 5.17: Resultados del tonelaje de material extraído, mineral procesado y cobre vendido en cada año utilizando el algoritmo GRG Multi año.

Años	Ton de Material	Ton de Mineral	Ton de Producto	Ton de Concentrado
1	39.577.291	15.000.000	100.000	112.009
2	39.577.291	15.000.000	100.000	112.009
3	39.564.855	15.000.000	100.000	111.911
4	39.564.855	15.000.000	100.000	111.911
5	22.674.355	15.000.000	88.512	-
6	17.941.352	13.027.499	71.720	-

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

A partir de los resultados obtenidos con el algoritmo GRG Multi Año es posible establecer que este último modelo matemático entrega un VAN para la base de datos “Esmeralda” de 2.037,035 MUSD, esto es debido a que el factor optimizante incorporado en la ecuación de la ley de corte es variable en cada uno de los periodos”, debido a eso, se busca para cada año, aquella ley de corte que hace maximizar el valor presente para ese determinado año en específico.

En la Figura 5.11 se muestra la variación que experimenta el VAN cuando se hace variar el factor optimizante dentro de la ecuación de ley de corte, sobre el primer año, en el cual, se encuentra el valor del VAN máximo (punto A), donde el valor del factor optimizante de 17,8.

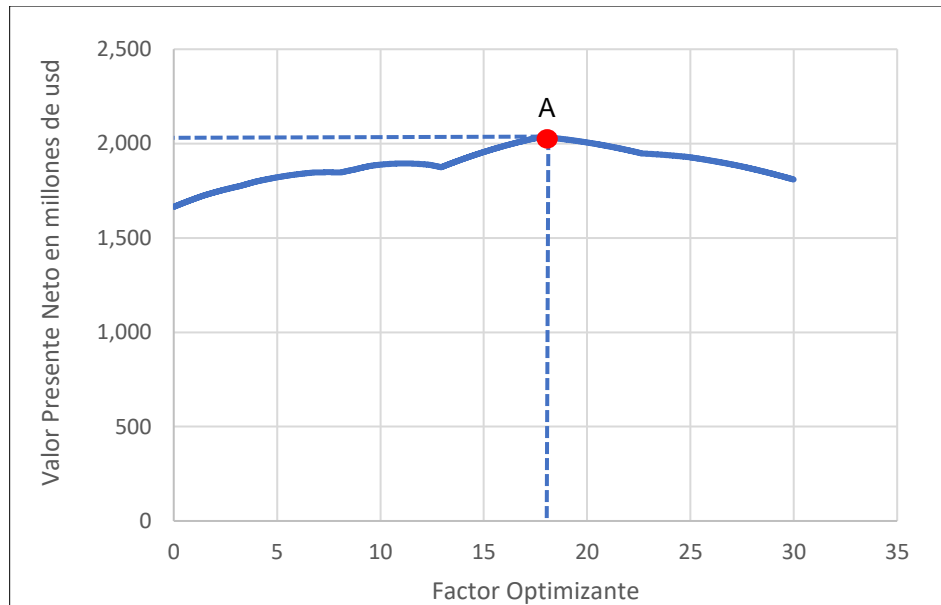


Figura 5.11: VAN vs Factor optimizante para el primer año usando el algoritmo "GRG Multi año".
Fuente: Elaboración Propia, 2021.

La solución que entrega el algoritmo GRG Multi Año reporta un VAN de 2.037,035 MUSD, el mayor valor presente neto de los 3 algoritmos desarrollados, esto es gracias a que este nuevo enfoque permite potenciar al máximo los valores de las leyes de corte, de esta forma, el consumo de los recursos minerales se produce de una forma más acelerada y esto permite obtener mayores beneficios, al mismo tiempo que es capaz de entregar un vector constante de leyes de corte, los que a su vez harán que el movimiento mina sea parejo y relativamente constante a lo largo de la vida de la mina (ver Figura 5.12), en contraposición con la solución que entrega el algoritmo GRG Iterativo, ya que este último entrega un movimiento mina decreciente a lo largo de los periodos (ver Figura 5.8), producto de que el vector de leyes de corte también lo es.

El hecho de que el vector de leyes de corte que entrega este último algoritmo sea un vector de leyes constante, en los primeros cuatro años de los seis años en que se agotan las reservas a lo largo de la vida de la mina, hace que el movimiento mina también sea constante y más elevado que las soluciones reportadas por los algoritmos anteriores. Esto se debe ya que al incrementarse la ley de corte, disminuye la cantidad de mineral total y crece la cantidad de estéril, al disminuir el tonelaje total de mineral, la planta concentradora necesitara de menos tiempo en procesar este nuevo volumen de mineral, y como el tiempo global del sistema minero (mina-planta-refinería) está condicionado solamente por la planta concentradora, al disminuir el tiempo que le tardara a la planta en procesar este mineral, también disminuirá la vida de la mina, por esta razón, la

solución que entrega el algoritmo GRG Multi Año presenta un total de 6 periodos, en comparación a los 7 del algoritmo GRG Iterativo y los 8 del algoritmo de Lane. Al mismo tiempo cuando crece la ley de corte, también aumenta la relación estéril-mineral, por lo que existirá una mayor proporción de estéril, y como el tiempo global ha disminuido cuando aumenta la ley de corte, la mina debe extraer los recursos minerales de una forma más acelerada ya que ha disminuido la cantidad de mineral, pero por otro lado ha crecido la cantidad de estéril, esto repercute en un mayor movimiento mina a lo largo de los periodos (ver Figura 5.12). El hecho de que el movimiento mina sea parejo durante sus primeros 4 periodos, le otorga una ventaja táctica enorme en comparación a los algoritmos anteriores, ya que como este movimiento es constante, la flota de equipos que se necesita para mover el material minado también sea constante, lo que ayudara a la planificación y a los gastos de inversión en equipos, ya que esto representa se le está sacando el máximo rendimiento a la flota de equipos y permite no dar de baja equipos durante el periodo de régimen, por concepto de una disminución en la producción, ya que la cantidad de material extraída es constante.

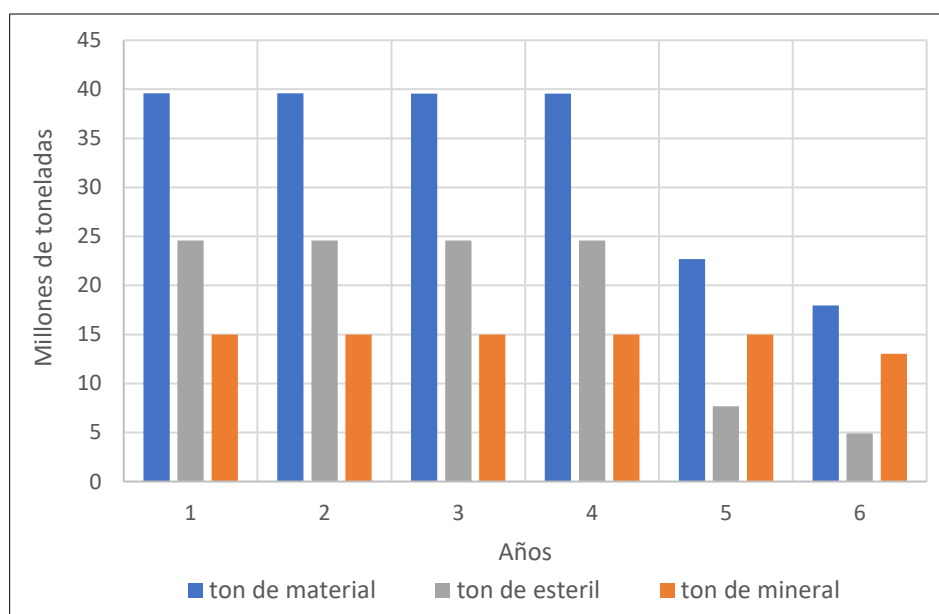


Figura 5.12: Movimiento de materiales desde el rajo por año, empleando el algoritmo "GRG Multi Año"

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Comparando el algoritmo de Lane con el "GRG Multi año" es posible apreciar que este último algoritmo es capaz de potenciar al máximo los valores de la política de leyes de corte (ver Figura 5.13), esto es bastante positivo ya que de esta forma, al elevar en los primeros periodos de la vida de la mina el vector de leyes de corte, provoca que el valor del VAN resultante para el algoritmo "GRG Multi año" (2.037,035 MUSD) aumente con respecto al valor del VAN reportado por el algoritmo de Lane (1.917,379 MUSD), lo que se traduce en un incremento del 6,241%.

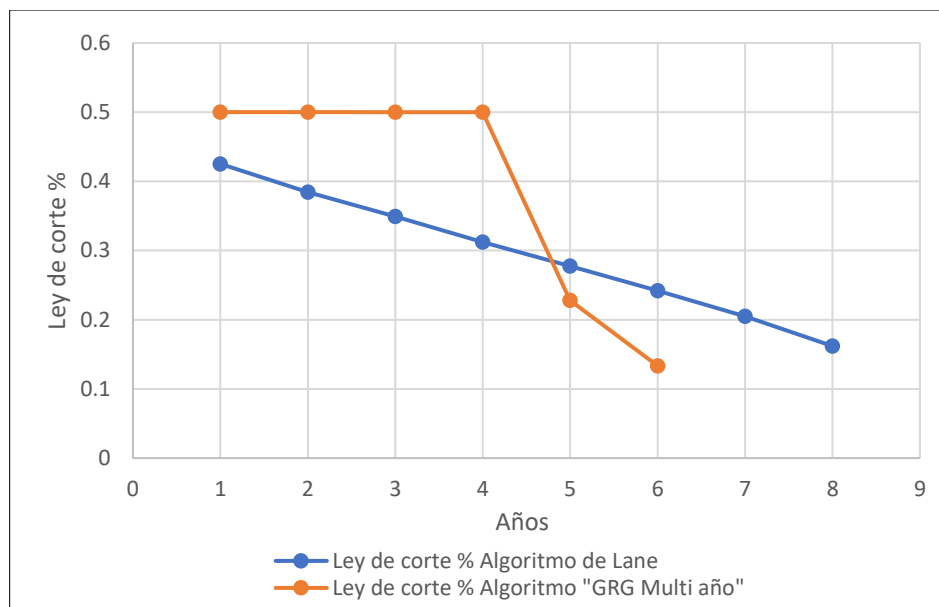


Figura 5.13: Ley de corte vs Años, Caso algoritmo de Lane vs "GRG Multi Año".
Fuente: Elaboración Propia, 2021.

El aumento sostenido de las leyes de corte que reporta el “GRG Multi año” va de la mano con un aumento de los beneficios anuales, esto es posible ya que al incrementar la política de leyes de corte, aumenta la ley media (ver Tabla 5.16), por lo tanto el mineral enviado a la planta concentradora posee una mejor calidad, debido a esto, es posible obtener una mayor cantidad de producto fino de cobre así como de concentrado de cobre, esto último entrega mayores valores de beneficio anuales en los primeros periodos, lo que al descontarlos y llevarlos al momentos presente reporten un mayor VAN (ver Figura 5.14).

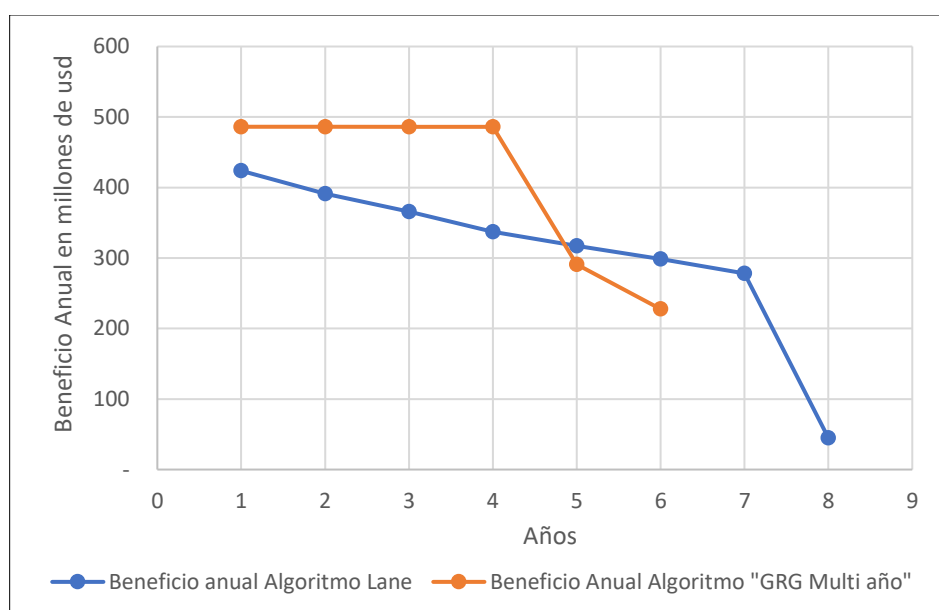


Figura 5.14: Beneficio Anual vs Años, Caso algoritmo de Lane vs "GRG Multi Año".
Fuente: Elaboración Propia, 2021.

El hecho de incrementar los valores de la política de leyes de corte genera que aumente la ley media y ello conlleva a que existan mayores volúmenes en producción de cobre fino que debe generarse, como la capacidad de la fundición y refinería es limitada, el excedente que no puede producirse en metal fino, se vende como concentrado de cobre, y esto genera que exista un “reordenamiento” del tonelaje de concentrado, ya que para el caso del algoritmo “GRG Multi año” se vende concentrado en los primeros 4 años y el volumen de concentrado vendido es aproximadamente constante a lo largo de estos cuatro periodos.

Si comparamos el algoritmo “GRG Iterativo” con el “GRG Multi año” es posible apreciar que este último algoritmo es capaz de elevar al máximo el vector de leyes de corte para cada uno de los periodos (ver Figura 5.15), esto provoca que el vector resultante sea constante durante gran parte de la vida la mina, ya que busca la ley de corte que hace máximo el valor presente neto en cada periodo, en comparación al algoritmo “GRG Iterativo” el cual posee leyes de corte decrecientes, sin embargo, este último algoritmo también es capaz de elevar las leyes de corte con respecto a las obtenidas con el algoritmo clásico de Lane.

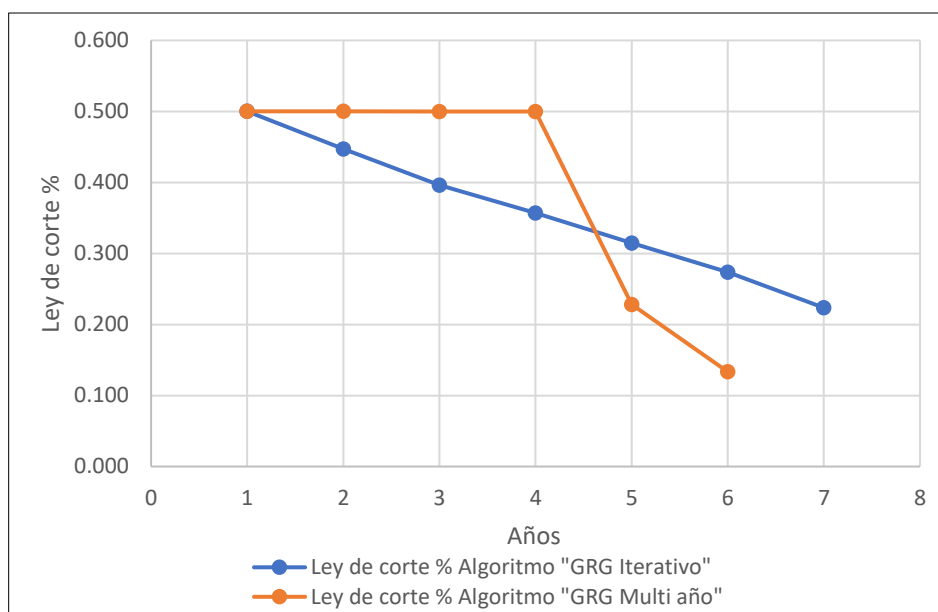


Figura 5.15: Ley de corte vs Años, Caso algoritmo "GRG Iterativo" vs "GRG Multi Año".
Fuente: Elaboración Propia, 2021.

La política de leyes de corte en ambos casos, se ve reflejado en los beneficios anuales para ambos algoritmos, ya que para el caso del algoritmo “GRG Iterativo” el beneficio anual es decreciente, ya que su política de leyes de corte va disminuyendo en el tiempo, pero para el caso del “GRG Multi año” los beneficios anuales son constantes durante los primeros 4 periodos (ver Figura 5.16) ya que el vector de leyes de corte es parejo durante estos periodos y esto provoca que el movimiento mina sea invariable durante este periodo de tiempo, lo que produce beneficios anuales constantes ya que al mantenerse pareja la ley de corte, la cantidad considerada como

mineral y estéril se mantiene invariable en el tiempo, lo que hace que la ley media también sea constante y de esta forma en cada periodo se produzcan los mismos volúmenes de producto fino y concentrado de cobre.

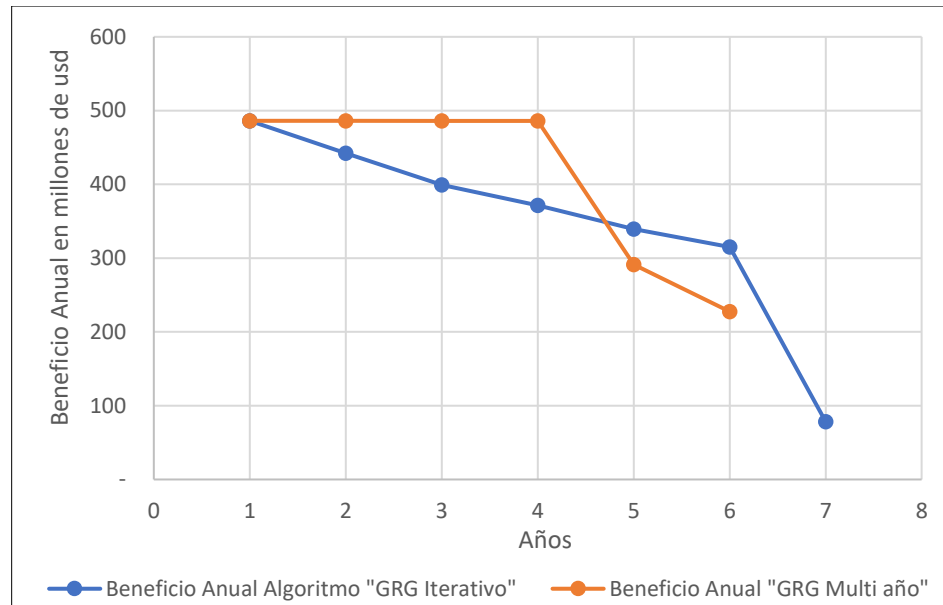


Figura 5.16: Beneficio Anual vs Años, Caso algoritmo "GRG Iterativo" vs "GRG Multi Año".
Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Según los resultados obtenidos con los 3 algoritmos, en donde, cada uno de estos es capaz de entregar una solución al problema del consumo de los recursos mineros, en donde, se busca maximizar el valor presente neto a través de un algoritmo matemático que modele el comportamiento de la ley de corte, es posible concluir que existe un conjunto de soluciones al problema del consumo de recursos mineros, y que las tres soluciones anteriores representan un “espacio factible de soluciones”, ya que el algoritmo de Lane ofrece una solución que maximiza el VAN y que entrega un vector de leyes de corte decreciente con un numero de iteraciones bastante reducido en comparación a los algoritmos que emplean la metodología “GRG”, ya que por ejemplo para el caso del algoritmo “GRG Multi año” para cada periodo se necesita un total aproximado de 3000 iteraciones si queremos obtener un valor de factor optimizante a la centésima, en comparación al de Lane, en el cual, por año, emplea aproximadamente solo 20 iteraciones.

Con respecto a las soluciones finales que ofrece cada uno de los algoritmos, cabe destacar que el algoritmo GRG Multi Año y el GRG Iterativo son capaces de potenciar el VAN que reporta el algoritmo clásico de Lane, pero el algoritmo GRG Multi Año destaca sobre el Iterativo, debido a que el primero es capaz de obtener el mayor valor presente neto y además es capaz de entregar un plan de producción con un movimiento mina constante, lo cual es muy positivo a la hora de la planificación y gestión de los equipos de movimiento de materiales.

La razón detrás de que ambos algoritmos entreguen una solución diferente, yace en que el algoritmo GRG Iterativo, busca una solución al problema a partir de una solución inicial, en este caso, la solución inicial es la ley de corte definida por el algoritmo de Lane, y sobre esta solución inicial, se le adiciona una variable optimizante, que hace incrementar el valor de la ley de corte proporcionada por el algoritmo de Lane hasta que se produce la convergencia del VAN. Debido a esto, es que a pesar de que el algoritmo GRG Iterativo sea capaz de incrementar el VAN que reporta el algoritmo clásico de Lane, entrega una política de leyes de corte decrecientes y con esto también es decreciente el movimiento de materiales que se produce en el rajo, ya que la solución que entrega el algoritmo GRG Iterativo, está fundamentada en una solución inicial proporcionada por el propio algoritmo de Lane. En cambio, para el caso del algoritmo GRG Multi Año, la solución que entrega este programa hace incrementar el VAN al mismo tiempo de que es capaz de entregar un movimiento de mina constante, debido a que los valores del vector ley de corte también es constante en los periodos hasta el agotamiento del recurso mineral.

CAPÍTULO 6. INCORPORACIÓN DE LAS ECONOMÍAS DE ESCALAS EN LOS ALGORITMOS DESARROLLADOS

En el apartado anterior se desarrollaron tres algoritmos matemáticos que son capaces de entregar una solución concreta al problema del consumo de los recursos minerales, estos dentro de sus ecuaciones y fundamentos matemáticos no consideran el hecho de la existencia de las economías de escalas en las operaciones a cielo abierto, ya que cada una de las ecuaciones, para los 3 algoritmos, que permiten obtener la ley de corte solo incluyen un único costo asociado al movimiento mina, y ese es el costo mina, el cual representa el costo en que incurre la operación minera para perforar, cargar, tronar y movilizar el material extraído en el rajo, pero este no hace distinción en si aquel material es mineral o es estéril. Establecer una diferencia entre el costo que incurre la mina en extraer el mineral y el estéril es muy relevante, ya que en la realidad de las operaciones mineras a cielo abierto es muy común que exista una mayor cantidad de estéril que se deba extraer en comparación al volumen de mineral que se necesita suministrar a la planta concentradora, por ello es que para la extracción del estéril se ocupan palas y camiones de mayor tamaño en comparación a los equipos usados para extraer y mover el mineral, producto de esta diferencia en los tamaños de los equipos según sea el tipo de material a extraer y mover, es que cuando los equipos son más grandes, a largo plazo, existe una disminución en los costos que se incurren en estos equipos más grandes, en comparación a los equipos que poseen un tamaño más reducido, esto último, se conoce como “economías de escalas a una situación en la cual una determinada empresa reduce sus gastos de producción al expandirse. Se trata de una circunstancia en la cual, a medida que más se produce, el costo que incurre la empresa en fabricar ese producto es menor”. (Kiziryan, 2015). Esto último podemos llevarlo a una empresa minera, en la cual, para el caso de la mina, a medida que la operación tenga grandes volúmenes de extracción de un determinado tipo de material (en este caso estéril), la empresa reducirá sus gastos asociados a la extracción de estéril. Esto último es debido a que los equipos usados para mover, perforar y arrancar el estéril son mayores envergadura que el usado para el mineral, producto de esto, el costo unitario por tonelada de estéril es menor, ya que estos equipos al ser más grandes poseen mayores rendimientos productivos y son capaces de extraer una mayor cantidad de estéril en un menor tiempo, en comparación a los equipos usados para extraer el mineral.

Debido a esta situación, en donde se contempla la real existencia de las economías de escalas en una operación a cielo abierto, se ha decidido incorporar un costo asociado a la extracción del mineral (“m”) y otro que represente al costo incurrido en la extracción del material estéril (“e”). Estas nuevas variables serán adicionadas en la fórmula matemática que permite obtener la ley de corte, así como en la función del beneficio para poder obtener resultados a partir de la misma base de datos “Esmeralda” considerando economías de escalas.

6.1 ALGORITMO DE LANE CON ECONOMÍAS DE ESCALAS

Las dos variables antes descritas se deben incluir dentro de la ecuación que regula la ley de corte de la concentradora propuesta por Kennett Lane, primero que todo, se deben incluir estas nuevas variables dentro de la función del beneficio, en donde se considerara que las condiciones del mercado a largo plazo son estables y producto de esto, el termino asociado al costo de oportunidad se reduce solo al interés asociado al activo de mineral, de esta forma el beneficio estará dado por la ecuación 6.1.

$$B = I - Co - (d \cdot VAN \cdot t) \quad (\text{Ec. 6.1})$$

Donde:

B : Beneficio anual (usd).

I : Ingresos totales (usd).

Co : Costos totales (usd).

Cabe destacar que todas las nomenclaturas de las variables para la totalidad de las ecuaciones descritas en este capítulo son las mismas que las expuestas en la Tabla 5.1 del Capítulo 5.

$$I = s \cdot q_r + p_{conc} \cdot q_{conc} \quad (\text{Ec. 6.2})$$

$$Co = r \cdot q_r + c \cdot q_c + m \cdot q_c + e \cdot (q_m - q_c) + h \cdot (q_m - q_c) + f \cdot t \quad (\text{Ec. 6.3})$$

Donde:

m : Costo de extracción del mineral.

e : Costo de extracción del estéril.

h : Costo asociado a la rehabilitación del botadero.

Insertando la ecuación 6.2 y 6.3 en la primera ecuación 6.1 tenemos la siguiente expresión que regula el beneficio, dado por la ecuación 6.4.

$$B = s \cdot q_r + p_{conc} \cdot q_{conc} - (c + m - e - h) \cdot q_c - (e + h) \cdot q_m - (f + d \cdot VAN) \cdot t \quad (\text{Ec. 6.4})$$

Esta última ecuación corresponde a la función que se ocupara para maximizar el valor presente, a través del algoritmo de Lane.

Para determinar la ecuación que regula la ley de corte optima, se asumirá que la concentradora es la etapa limitante del negocio minero. Esto último establece que el tiempo de consumo dependerá del tiempo que necesite la concentradora en procesar el mineral alimentado.

Asumiremos en todo momento que la expresión para el tiempo estará definida por la ecuación 6.5 ya que la planta es la única limitante de todo el sistema minero.

$$tiempo = \frac{Q_c}{c} \quad (\text{Ec. 6.5})$$

Donde:

Qc: : Cantidad de mineral.

C : Capacidad de la planta concentradora.

Reemplazando 6.5 en 6.4 obtenemos la expresión para el beneficio definida por la ecuación 6.6.

$$B = s \cdot Q_r + p_{conc} \cdot Q_{conc} - (c + m - e - h) \cdot Q_c - (e + h) \cdot Q_m - (f + d \cdot VAN) \cdot \frac{Q_c}{C} \quad (\text{Ec. 6.6})$$

Derivando la ecuación 6.6 con respecto a la variable ley de corte “x” y representaremos el beneficio como “v”, por lo que la derivada de v con respecto a x estará dada por la ecuación 6.7.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (s - r) \cdot \frac{\partial Q_r}{\partial x} - (c + m - e - h) \cdot \frac{\partial Q_c}{\partial x} - (e + h) \cdot \frac{\partial Q_m}{\partial x} - \left(\frac{f + d \cdot VAN}{C} \right) \cdot \frac{\partial Q_c}{\partial x} = 0 \quad (\text{Ec. 6.7})$$

El termino Qm, para efecto de la operación a cielo abierto, es siempre constante ya que independiente de la ley de corte “x”, siempre este valor será igual a la cantidad de recursos disponibles en un determinado periodo. Además, podemos expresar el termino Qr como:

$$Q_r = Q_c \cdot y \cdot \bar{x} \quad (\text{Ec. 6.8})$$

Donde:

\bar{x} : Ley media (%).

y : Recuperación de la planta concentradora.

Por lo tanto, podemos derivar la ecuación 6.8 con respecto a la variable ley de corte “x”.

$$\frac{\partial Q_r}{\partial x} = \frac{\partial (Q_c \cdot y \cdot \bar{x})}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial x} = \frac{\partial Q_c}{\partial x} \cdot y \cdot \bar{x}$$

Reemplazando esta última expresión matemática en la ecuación 6.7 y factorizando tenemos:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (s - r) \cdot \frac{\partial Q_c}{\partial x} \cdot y \cdot \bar{x} - (c + m - e - h) \cdot \frac{\partial Q_c}{\partial x} - (e + h) \cdot \frac{\partial Q_m}{\partial x} - \left(\frac{f + d \cdot VAN}{C} \right) \cdot \frac{\partial Q_c}{\partial x} = 0$$

$$\left\{ (s - r) \cdot y \cdot \bar{x} - (c + m - e - h) - \left(\frac{f + d \cdot VAN}{C} \right) \right\} \cdot \frac{\partial Q_c}{\partial x} = 0$$

El termino dentro de los corchetes se iguala a cero y se despeja la ley media, a partir de la cual, podemos obtener la ley de corte optima, definida por la ecuación 6.9.

$$\text{Ley de corte optima} = \frac{c + m - e - h + \left(\frac{f + d \cdot VAN}{C} \right)}{(s - r) \cdot y} \quad (\text{Ec. 6.9})$$

Para una mejor comprensión de la ecuación obtenida, se reescribirá como la ecuación 6.10.

$$\text{Ley de corte} = \frac{c}{(s - r) \cdot y} + \frac{(m - e)}{(s - r) \cdot y} - \frac{h}{(s - r) \cdot y} + \frac{\left(\frac{f + d \cdot VAN}{C} \right)}{(s - r) \cdot y} \quad (\text{Ec. 6.10})$$

El primer término de la ecuación 6.10 representa la ley de corte que es capaz de soportar el costo de concentración “c”. El segundo término reporta el aporte de ley de corte que se requiere para apoyar el efecto que tiene la economía de escala existente en la extracción de los materiales y, por ende, la suma de estos dos primeros términos, definen la ley de corte que impone la planta concentradora más la mina al negocio minero.

Considerando el costo de remediación ambiental o de rehabilitación de botadero, representado por el tercer término, este costo impone una disminución de la ley de corte, la cual, permite obtener el aporte de valor para pagar dicho costo. Al ser este costo negativo en esta última ecuación, disminuye la ley de corte, como consecuencia aumenta el tonelaje enviado a la planta concentradora y de esta forma se reduce el material de estéril enviado al botadero.

Y finalmente, el ultimo termino, corresponde al aporte de ley que se requiere para pagar el costo fijo “f” por unidad de material, más un tributo asociado al concepto propuesto por Lane, para pagar el costo de oportunidad por unidad de mineral enviado a la planta concentradora en dicho periodo.

Incorporando esta nueva dinámica al algoritmo de Lane, es posible incluir estos nuevos costos a los parámetros económicos propuestos para la base de datos “Esmeralda”, los cuales serán definidos asumiendo un valor para la extracción del estéril menor en comparación al costo de extracción del mineral (ver Tabla 6.1), esto es para respetar la situación de economías de escalas.

Tabla 6.1: Valores económicos del costo de extracción del mineral y estéril insertados en el algoritmo de Lane.

Parámetro	Valor	Unidad
Costo de extracción del mineral	3,5	Usd/ton de mineral
Costo de extracción del estéril	2,5	Usd/ton de estéril

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Los resultados tomando en consideración en todo momento las economías de escalas sobre la base de datos “esmeralda” y usando los datos económicos de la Tabla 6.1 en conjunto con la Tabla 5.9 a través del uso del algoritmo de Lane se muestran en la tabla 6.2 y la Tabla 6.3.

Tabla 6.2: Resultados de valores económicos y leyes empleando el algoritmo de Lane sobre la base de datos “Esmeralda” con economías de escalas.

Años	VAN usd	beneficio anual usd	Ley de Corte en %Cu	ley media en %Cu
1	2.026.915.929	483.698.907	0,469	0,963
2	1.543.217.023	434.146.111	0,414	0,890
3	1.148.538.740	399.365.093	0,372	0,835
4	818.484.944	365.323.316	0,331	0,780
5	544.012.129	334.303.365	0,290	0,730
6	315.678.433	312.234.581	0,251	0,693
7	121.805.324	215.785.561	0,211	0,654

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Tabla 6.3: Resultados del tonelaje de material extraído, mineral procesado y cobre vendido usando el algoritmo de Lane sobre la base de datos "Esmeralda" con economías de escalas.

Años	Ton de Material	Ton de Mineral	Ton de Producto	Ton de Concentrado
1	37.799.951	15.000.000	100.000	93.539
2	34.982.667	15.000.000	100.000	60.370
3	31.676.112	15.000.000	100.000	35.123
4	28.443.669	15.000.000	100.000	10.418
5	25.839.722	15.000.000	96.410	-
6	23.758.786	15.000.000	91.454	-
7	16.399.094	11.214.434	64.549	-

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

A partir de los resultados obtenidos con el algoritmo de Lane considerando las economías de escalas, se obtiene un valor presente neto para el primer año de 2.026,916 MUSD, bajo esta nueva mirada es posible establecer una comparación entre el algoritmo de Lane sin economías de escalas (Capítulo 5.2) versus la implementación de las economías de escalas, donde es posible apreciar que, cuando existen economías de escalas, las cuales permiten crear una diferencia entre el valor del costo en la extracción del mineral con respecto al estéril, se producen ganancias sustanciales, ya que para el presente caso se ha asumido un costo mina de 3,5 usd/ton de mineral y de 2,5 usd/ton de estéril, por lo que existe una diferencia entre el costo para las actividades mina según sea el tipo de material que esta mueva, debido a esto, como la mayoría de los recursos que contiene el rajo son considerados como material estéril, impacta fuertemente en los costos totales de la operación minera año a año, y esto se ve reflejado en el hecho de que el VAN para el caso en el cual no existen economías de escalas sea de 1.917,379 MUSD, por lo que una diferencia de 1 usd/ton entre los costos mina y estéril, hace incrementar el VAN en un 5,71% aproximadamente, lo que se traduce en un aumento de 109,536 MUSD adicionales, lo cual demuestra que es muy beneficioso que una empresa minera en el largo plazo sea capaz de implementar una estrategia de gestión y económica, en la cual a medida de que aumente la extracción de un determinado tipo de material, los costos incurridos en la extracción de este material sean más bajos, para efectos de este caso, ese material corresponde al estéril.

La adición de las económicas de escalas afecta también al vector leyes de corte, ya que si se compara el vector de leyes de corte resultante del algoritmo de Lane sin económicas de escalas (ver Tabla 5.12) con las leyes de corte resultantes cuando si se incorporan estas economías usando el mismo algoritmo (ver Tabla 6.2), es posible apreciar que las leyes de corte se incrementan cuando la empresa es capaz de incluir la nueva política de economías de escalas, y esto ocurre debido a que el costo de extracción del estéril ha disminuido, lo que hace que cada tonelaje de estéril extraído sea más barato, por lo cual, conviene aumentar la cantidad de estéril total que se define para la totalidad de los recursos, esto provocara que la cantidad de mineral

total disminuya, y esto se logra aumentando la exigencia o ley de corte, producto de este incremento en la ley de corte, aumentara la ley media y con ello la cantidad de fino y de concentrado de cobre, lo que claramente afectara de forma positiva el beneficio anual y con ello aumentara el valor del VAN. Cabe destacar que este aumento de la cantidad de estéril provocará que aumente el movimiento mina año a año y, por otro lado, al disminuir el mineral total, el tiempo que le toma a la concentradora en tratar este mineral también se reducirá, producto de esto, la vida de la mina se reduce en 1 año cuando se adicionan las economías de escalas, bajo el enfoque clásico de Lane.

6.2 ALGORITMO “GRG ITERATIVO” CON ECONOMÍAS DE ESCALAS

Es posible incluir esta nueva mirada del negocio minero a las ecuaciones que regulan el proceso iterativo para el algoritmo “GRG Iterativo” mediante la inclusión de un costo de extracción para el estéril “e” y otro para el mineral “m”. La adición de estas nuevas variables se refleja en dos ecuaciones, primero en la que regula la ley de corte optima del proceso optimizante, en la cual estará inserto el “factor optimizante” y, en segundo lugar, en la ecuación del beneficio económico propiamente tal, tal como lo muestran las siguientes ecuaciones 6.11 y 6.12.

$$\text{Beneficio} = (s - r) \cdot q_r + p_{conc} \cdot q_{conc} - (c + m - e - h) \cdot q_c - (e + h) \cdot q_m - (f) \cdot \frac{q_c}{C} \quad (\text{Ec. 6.11})$$

$$\text{ley de corte} = \frac{c+m-e-h+\sigma+\left(\frac{f+d \cdot VAN}{C}\right)}{(s-r) \cdot y} \quad (\text{Ec. 6.12})$$

A continuación, se presentan los resultados finales (ver Tabla 6.4 y Tabla 6.5) que entrega el nuevo algoritmo “GRG Iterativo” sobre la base de datos “Esmeralda” tomando en cuenta el efecto de las economías de escalas y los parámetros económicos de la tabla 5.9 en conjunto con una diferenciación de los costos de extracción del mineral y del estéril dados por la tabla 6.1, los que aseguran el efecto de las economías de escalas.

Tabla 6.4: Resultados del factor optimizante, valores económicos y leyes empleando el algoritmo “GRG Iterativo” sobre la base de datos “Esmeralda” con economías de escalas.

Años	σ Optimo	VAN usd	Beneficio anual usd	Ley de Corte en %Cu	Ley Media en %Cu
1	1,2	2.054.424.243	510.540.114	0,500	1,003
2	1,2	1.543.884.129	460.132.804	0,443	0,928
3	1,2	1.125.581.580	414.354.638	0,391	0,860
4	1,2	783.139.730	380.918.299	0,349	0,805
5	1,2	496.950.174	344.106.685	0,305	0,747
6	1,2	261.920.678	319.583.934	0,264	0,705
7	1,2	63.484.198	112.466.130	0,222	0,664

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Tabla 6.5: Resultados del tonelaje de material extraído, mineral procesado y cobre vendido usando el algoritmo “GRG Iterativo” sobre la base de datos "Esmeralda" con economías de escalas.

Años	Ton de Material	Ton de Mineral	Ton de Producto	Ton de concentrado
1	39.558.658	15.000.000	100.000	111.850
2	36.397.771	15.000.000	100.000	77.672
3	33.421.885	15.000.000	100.000	46.478
4	29.818.294	15.000.000	100.000	21.578
5	26.761.123	15.000.000	98.609	-
6	24.404.747	15.000.000	93.083	-
7	8.537.522	5.720.786	33.440	-

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Según la data resultante del proceso algorítmico “GRG Iterativo”, es posible establecer que el valor presente neto al año 1 es de 2.054,424 MUSD, lo cual entrega un resultado bastante satisfactorio, ya que si comparamos este valor del VAN que entrega el algoritmo “GRG Iterativo” versus el VAN que arroja el algoritmo de Lane con economías de escalas (2.026,916 MUSD), es posible apreciar que esta nueva solución incrementa el VAN de Lane es un 1,36%, lo que se traduce en 27,508 MUSD adicionales. Además, podemos notar que este algoritmo (GRG Iterativo) al igual que en el apartado anterior (Capítulo 5.3) es capaz de elevar los valores del vector leyes de corte, esto es gracias a la adición de la variable optimizadora dentro de la solución inicial con la que arranca este algoritmo, lo que potencia la ley de corte y con ello el VAN del proyecto.

Cabe destacar que, al aumentar la ley de corte, hace aumentar la cantidad de material que mueve la mina año a año, esto es posible debido a que los recursos minerales se extraen de una forma más rápida al incrementar la política de leyes de corte, al mismo tiempo, esto hace aumentar la ley media lo cual, implica tener mayores ingresos por concepto de un aumento en los volúmenes del producto de metal fino y concentrado.

Otro aspecto para señalar es que el valor del factor optimizante para este caso, en el cual, si se contempla una economía de escala, es de 1,2 valor que es más bajo si lo comparamos con el caso cuando no existen economías de escalas (2,9), esto ocurre porque cuando se adicionan los costos para extracción del mineral “m” y estéril “e” dentro de la ecuación de ley de corte, al parámetro “factor optimizante” le cuesta menos trabajo encontrar aquel valor que hace maximizar la solución del algoritmo de Lane, recordemos que la gracia de este algoritmo “GRG Iterativo”, consiste en adicionar una nueva variable “factor optimizante” dentro de la ecuación que regula la ley de corte y de esta forma, este valor optimizante va variando hasta encontrar aquel valor que hace maximizar el VAN, pero si a esta ecuación se le ha adicionado de forma previa el costo de extracción del mineral y el costo por extraer el estéril, estos costos ya estarán aumentando el valor de la ley de corte, por ende, la variable “factor optimizante” no necesita ser tan grande como en el caso cuando no se tienen economías de escalas.

6.3 ALGORITMO “GRG MULTI AÑO” CON ECONOMÍAS DE ESCALAS

El efecto de la inclusión de economías de escalas para el algoritmo “GRG Multi año” es bastante similar al anterior algoritmo, solo con el hecho de un cambio en la ecuación que regula la ley de corte y es que para efectos de este último algoritmo no existe el factor del tributo por concepto del pago del costo de oportunidad. Esto se resume en las ecuaciones 6.13 y 6.14.

$$beneficio = s \cdot q_r + p_{conc} \cdot q_{conc} - (c + m - e - h) \cdot q_c - (e + h) \cdot q_m - (f) \cdot \frac{q_c}{c} \quad (\text{Ec. 6.13})$$

$$ley\ de\ corte = \frac{c+m-e-h+RO}{(s-r) \cdot y} \quad (\text{Ec. 6.14})$$

A continuación, se presenta la Tabla 6.6 y la Tabla 6.7 que resumen los resultados obtenidos con el algoritmo “GRG Multi año” al incluir las economías de escalas.

Tabla 6.6: Resultados del factor optimizante, valores económicos y leyes empleando el algoritmo “GRG Multi año” sobre la base de datos “Esmeralda” con economías de escalas.

Años	Factor Optimizante	VAN usd	beneficio anual usd	Ley de Corte en %Cu	ley media en %Cu
1	16,8	2.138.123.896	510.765.477	0,500	1,003
2	16,8	1.627.358.419	510.765.477	0,500	1,003
3	16,8	1.163.026.167	510.765.477	0,500	1,003
4	16,79	740.905.937	510.629.770	0,500	1,003
5	16,79	357.262.233	510.629.770	0,500	1,003
6	3,58	8.495.230	13.681.653	0,228	0,670

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Tabla 6.7: Resultados del tonelaje de material extraído, mineral procesado y cobre vendido usando el algoritmo “GRG Multi año” sobre la base de datos “Esmeralda” con economías de escalas.

Años	Ton de Material	Ton de Mineral	Ton de Producto	Ton de Concentrado
1	39.577.291	15.000.000	100.000	112.009
2	39.577.291	15.000.000	100.000	112.009
3	39.577.291	15.000.000	100.000	112.009
4	39.564.855	15.000.000	100.000	111.911
5	39.564.855	15.000.000	100.000	111.911
6	1.038.416	687.513	4.054	-

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

A partir de la Tabla 6.6, se aprecia que el algoritmo GRG Multi Año, reporta un VAN de 2.138,124 MUSD, si comparamos este resultado con el VAN que entrega el algoritmo GRG Iterativo (2.054,424 MUSD), es posible apreciar que este último algoritmo es capaz de incrementar el valor del VAN que reporta el algoritmo GRG Iterativo al mismo tiempo la solución minera que entrega el GRG Multi Año es diferente del GRG Iterativo, debido a que el vector de leyes de corte es distinto y producto de esto, el consumo de los recursos también varía. Para el caso del GRG Multi

Año se aprecia que es capaz de elevar al máximo la ley de corte, entregando un vector con valores constantes durante el periodo de régimen productivo, hasta llegar al agotamiento de los recursos, mientras que el GRG Iterativo presenta un vector de leyes de corte decreciente, lo que hace que el movimiento mina también sea decreciente y que la velocidad con la que se extraen los recursos del rajo disminuya con el pasar del tiempo, esto último no sucede con el GRG Multi Año, ya que este último algoritmo, al tener el vector de leyes de corte constante, los recursos del rajo son extraídos a una velocidad constante, lo que hace consumir los recursos más rápidamente y de esta forma, disminuye la vida de la mina, dando un total de 6 periodos, versus los 7 periodos que entrega el algoritmo GRG Iterativo con economías de escalas.

La razón por la cual, este algoritmo es capaz de maximizar el valor presente neto y al mismo tiempo entrega un movimiento mina parejo, yace en cómo opera matemáticamente este algoritmo, ya que utiliza la ecuación básica de ley de corte definida por la planta, introduciendo una variable “factor optimizante” sin contemplar el factor del costo de oportunidad, ya que en su reemplazo existe esta nueva variable que va haciendo variar el valor de la ley de corte año a año, y el algoritmo obtiene la ley de corte optima, cuando encuentre aquella ley que maximiza el VAN

Producto de la potenciación de los valores del vector leyes de corte, al ser la ley más exigente, obliga a extraer una mayor cantidad de lastre y menor cantidad de mineral, y para poder cumplir con el llenado de la planta, esta se demorara menos ya que existe una menor cantidad de mineral, lo que como consecuencia directa tendrá un agotamiento más rápido de los recursos minerales y una disminución de la vida de la mina con esta nueva política de leyes de corte, además al aumentar la ley de corte, aumenta la ley media (ver Tabla 6.6) y con ello, aumenta la cantidad de metal fino que debe producir la fundición y refinería, pero como esta última etapa es limitada, aumentara la cantidad de excedente de metal fino, por lo que, ante esta situación, se incrementan los volúmenes de concentrado de cobre (ver Tabla 6.7), obteniéndose una cantidad constante de concentrado producto de que la ley media también es constante hasta el año 5.

Independientemente del algoritmo que se seleccione para encontrar la solución al consumo de reservas minerales, siempre la introducción de “economías de escalas” hace incrementar el valor del VAN, ya que para cada uno de los tres algoritmo desarrollados, si comparamos de forma independiente un algoritmo en particular y analizamos el valor del VAN con y sin economías de escalas, los beneficios anuales cuando existen economías de escalas se incrementan, ya que el costo de extracción del estéril será menor que el del mineral, producto del mayor rendimiento y tamaño de poseen los equipos usados para el movimiento del estéril, lo que desemboca en que los costos incurridos en mover el estéril disminuyen y esto se traduce en mayores beneficios anuales y con ello un incremento del VAN (ver Figura 6.1).

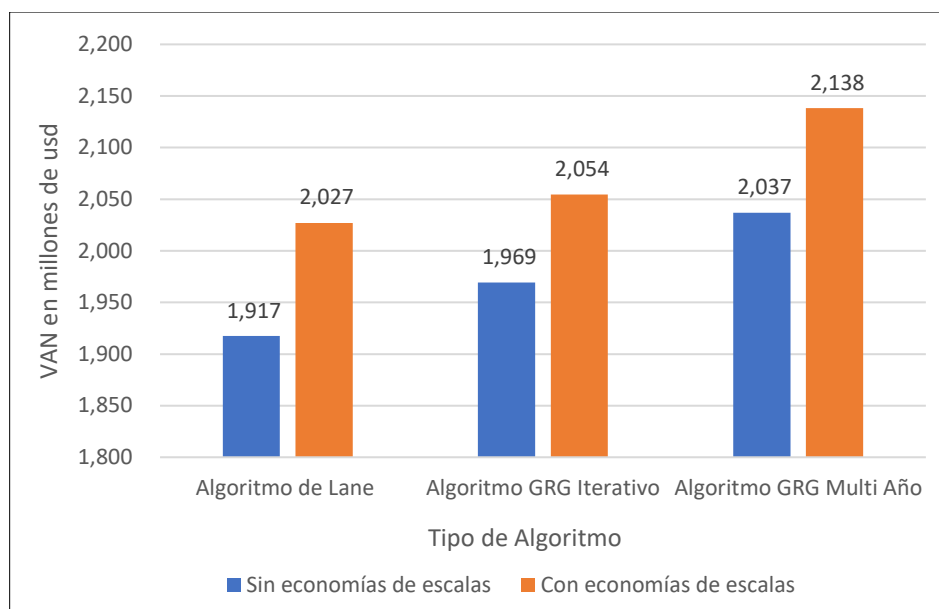


Figura 6.1: Efecto de la inclusión de las "economías de escalas" en cada algoritmo desarrollado.
Fuente: Elaboración Propia, 2021.

6.4 ANÁLISIS ESPECIAL INCORPORANDO ECONOMÍAS DE ESCALAS

En el apartado anterior se observó que la incorporación de las economías de escalas dentro del problema de consumo de recursos mineros otorga una ventaja incuestionable, ya que cuando existen economías de escalas en operaciones a cielo abierto, el costo de extracción del estéril es menor en comparación al costo incurrido en la extracción del mineral. Anteriormente se analizaron dos situaciones; la primera la cual no contemplaba las economías de escalas (Capítulo 5) y donde solo existía un único costo de extracción, el cual es de 3,5 usd/ton de material tanto para mineral como para estéril, y un segundo escenario en el cual se hace una diferenciación entre el costo de extracción del mineral, que sigue valiendo 3,5 usd/ton de mineral y un costo más bajo para el estéril, el cual es de 2,5 usd/ton de estéril (Capítulo 6.1, 6.2 y 6.3).

A modo de cuantificar el crecimiento que existe en el VAN cuando el costo de extracción del estéril disminuye y el costo del mineral se mantiene constante, considerando las economías de escalas, se llevan a cabo dos escenarios adicionales, el primero contemplara un costo de extracción del estéril de 2 usd/ton de estéril y el segundo de 1,5 usd/ton de estéril, considerando en todo momento un costo de extracción del mineral de 3,5 usd/ton de mineral y los demás parámetros económicos como constantes para cada una de las situaciones e iguales a los descritos en la Tabla 5.9. Los resultados obtenidos a partir de este análisis son los mostrados en la tabla 6.8.

Tabla 6.8: Efecto de la variación del costo de extracción del estéril sobre el VAN, considerando cada uno de los tres algoritmos desarrollados.

Tipo de Escenario	Delta	VAN MUSD: Algoritmo de Lane	VAN MUSD: Algoritmo "GRG Iterativo"	VAN MUSD: Algoritmo "GRG Multi Año"
Sin economías de escalas $m = 3,5$	0	1.917,379	1.969,161	2.037,035
Con economías de escalas $m = 3,5$ y $e = 2,5$	1	2.026,916	2.054,424	2.138,124
Con economías de escalas $m = 3,5$ y $e = 2$	1,5	2.087,466	2.096,544	2.190,876
Con economías de escalas $m = 3,5$ y $e = 1,5$	2	2.144,893	2.144,893	2.242,517

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

A partir de la Tabla 6.8 es posible apreciar que cuando existen economías de escalas el valor del VAN mejora ya que el costo asociado al estéril, el cual representa un costo ligado a la mayoría del tonelaje de los recursos minerales disminuye, por lo que esto afecta positivamente el VAN. También es posible afirmar que a medida que el valor del costo de extracción del estéril ("e") disminuye, el VAN se incrementa independientemente del algoritmo desarrollado. Si consideramos el caso cuando existen economías de escalas en donde m es igual a 3,5 usd/ton de mineral y e es de 2,5 usd/ton de estéril, cuando este costo "e" disminuye en un 20% y llega a valer 2 usd/ton de estéril, el valor del VAN se incrementa en aproximadamente en 2,99%, 2,05% y 2,47% para el algoritmo de Lane, "GRG Iterativo" y "GRG Multi Año" respectivamente. Este incremento en el valor del VAN es posible medirlo tomando como caso base la situación donde no existen economías de escalas, por lo cual es posible definir un parámetro llamado como delta, el cual será definido por la ecuación 6.20.

$$\delta (\text{delta}) = m - e \quad (\text{Ec. 6.4})$$

Donde:

- δ : Diferencia entre los costos de extracción de los dos tipos de materiales.
- m : Costo de extracción del mineral (usd/ton de mineral).
- e : Costo de extracción del estéril (usd/ton de estéril).

A medida que la diferencia que exista entre el costo de extracción del mineral y el del estéril sea menor, esto significara que el efecto de las economías de escalas también es reducido, y esto se traduce en un costo de extracción del estéril levemente menor que el costo de extracción del mineral, por lo que el efecto de las economías de escalas es mínimo. En la Tabla 6.9 se ilustra el incremento porcentual que experimenta el VAN cuando el valor del parámetro delta aumenta, es decir, cuando el costo "e" se hace menor, comparando el VAN en todo momento sobre la situación cuando no existen economías de escalas.

Tabla 6.9: Incremento porcentual del VAN tomando como caso base el escenario donde no existen economías de escalas.

Delta	Algoritmo de Lane	Algoritmo "GRG Iterativo"	Algoritmo "GRG Multi Año"	Incremento Porcentual Promedio
1	5,71%	4,33%	4,96%	5,00%
1,5	8,87%	6,47%	7,55%	7,63%
2	11,87%	8,92%	10,09%	10,29%

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Según estos resultados, es posible inferir que cuando delta es 1, es decir, la diferencia de los costos de extracción mina y estéril es de 1, se produce un aumento porcentual del VAN del 5,71%, 4,33% y del 4,96% usando el algoritmo de Lane, GRG Iterativo y GRG Multi Año respectivamente.

Cuando este costo “e” disminuye a 2 usd/ton de estéril y por lo tanto, el delta es de 1,5, el VAN sufre un incremento porcentual el cual es proporcional a este parámetro delta, ya que cuando el costo de extracción del estéril llega a 2 usd/ton de estéril, el incremento porcentual del VAN es aproximadamente el doble, ya que en esta situación el delta también ha aumentado al doble (delta es 2), lo que conlleva al razonamiento de que la disminución en el costo de extracción del estéril, provoca incrementos del VAN, los cuales son directamente proporcionales a la diferencia existente entre el costo de extracción mina y del estéril (delta) y esta relación obedece a un comportamiento lineal, ya que es posible según esta metodología y ajustando los resultados a una regresión lineal, sería posible predecir cuánto se incrementa el VAN cuando el valor de delta aumenta, es decir, cuando el costo de extracción del estéril decrece siempre que el costo de extracción del mineral se mantiene constante (ver Figura 6.2).

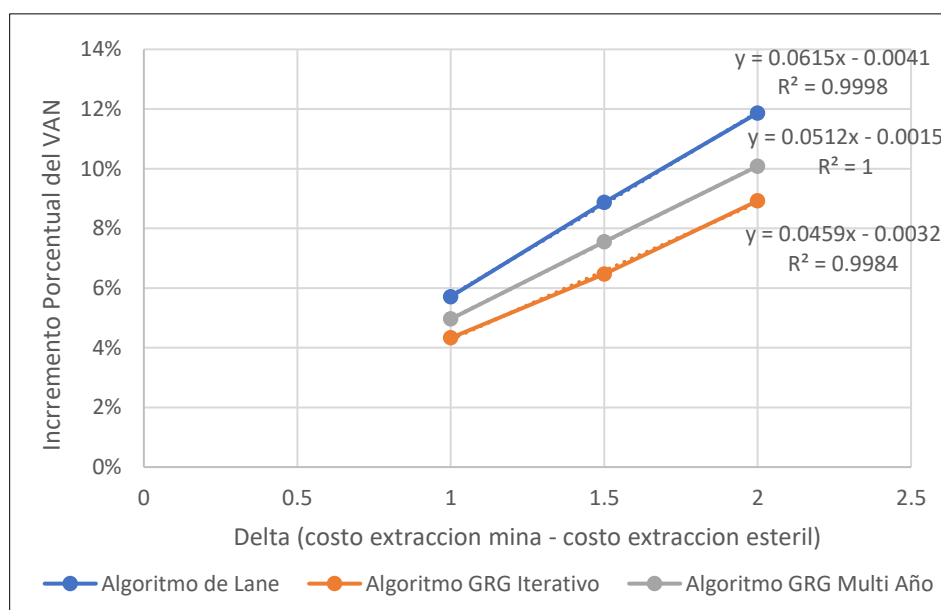


Figura 6.2: Incremento Porcentual del VAN vs Costo de extracción del estéril.

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

A partir de la Figura 6.2, se aprecia que el algoritmo de Lane es el más sensible ante la disminución que sufre el costo de extracción del estéril, seguido por el GRG Multi Año y en última instancia por el GRG Iterativo, donde se observa claramente la relación lineal e inversamente proporcional que existe entre el incremento porcentual del VAN y los costos de extracción para cada algoritmo desarrollado.

CAPÍTULO 7. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

En los apartados anteriores se han detallado los resultados obtenidos a través de 3 algoritmos matemáticos, los cuales permiten obtener la política de leyes de corte que permite maximizar el valor presente neto de una operación minera a cielo abierto, donde es posible determinar que la solución resultante de cualquiera de los 3 algoritmos desarrollados dependerá directamente de los parámetros técnicos y económicos que sean ingresados al programa en el lenguaje Python. Producto de la importancia que poseen estos parámetros económicos, se hace imperativo conocer el impacto que produce un cambio o variación en los parámetros económicos sobre el valor del VAN resultante en los algoritmos desarrollados.

Sobre esta premisa, se analizará el efecto que produce un cambio en un determinado parámetro económico dentro del código en Python para analizar cuanto es la variación sobre el valor presente neto, para esto se escogerá un total de 5 parámetros económicos, los cuales afectarán directamente el valor del beneficio anual y la política de leyes de corte, incidiendo directamente sobre el valor del VAN, estos serán los siguientes:

- Precio del cobre
- Tasa de descuento
- Costo Planta
- Costo Mina
- Costo de Rehabilitación del botadero

Sobre estos 5 parámetros se llevará a cabo un análisis de sensibilidad, el cual se efectuará en el algoritmo de Lane y en el “GRG Multi año” para determinar sobre la base de estos dos algoritmos, cual es la variable económica que más afecta el valor presente neto del proyecto, así como cuál es la que menor incide sobre el VAN, esto se empleará sobre el escenario cuando no existen economías de escalas y cada uno de los cinco parámetros escogidos, se hará incrementar y disminuir en múltiplos de 10%.

7.1 ALGORITMO DE LANE

El análisis de sensibilidad realizado sobre el algoritmo de Lane contemplará una situación base. La Tabla 7.1 muestra los parámetros económicos que se harán variar cuando se realice el análisis de sensibilidad, así como el valor de los parámetros económicos cuando no existe variación alguna (caso base). Los valores que son considerados como el caso base, representan una situación en donde la variación para cada uno de estos parámetros económicos es cero y estos valores se consideraran como Caso Base tanto para el algoritmo de Lane como para el algoritmo “GRG Multi año”.

Tabla 7.1: Parámetros económicos definidos como Caso Base para el análisis de sensibilidad.

Parámetros Económicos	Valor	Unidad
Precio del Cobre	300	cusd/lb
Tasa de descuento	10	%
Costo Planta	6,5	Usd/ton de mineral
Costo Mina	3,5	Usd/ton de material
Costo de rehabilitación del botadero	0,027306	Usd/ton de estéril

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Se usará en todo momento la base de datos “Esmeralda” la cual posee una distribución de tonelaje representada en la Tabla 5.8 (ver Capítulo 5) y los demás parámetros como capacidades serán las mismas en todo momento para el análisis de sensibilidad y se pueden revisar en la Tabla 5.9 (ver Capítulo 5). Para el caso de la sensibilidad mediante el algoritmo de Lane, el VAN del caso base es de 1.917,379 MUSD tomando una situación donde no se considera la inclusión de las económicas de escalas.

A simple vista es posible observar a partir de la Figura 7.1, que la variable que mayor impacto tiene sobre el VAN es el precio del cobre, ya que este parámetro económico incide directamente en la ecuación de ley de corte optima y además impacta de sobremanera en el beneficio neto anual reportado.

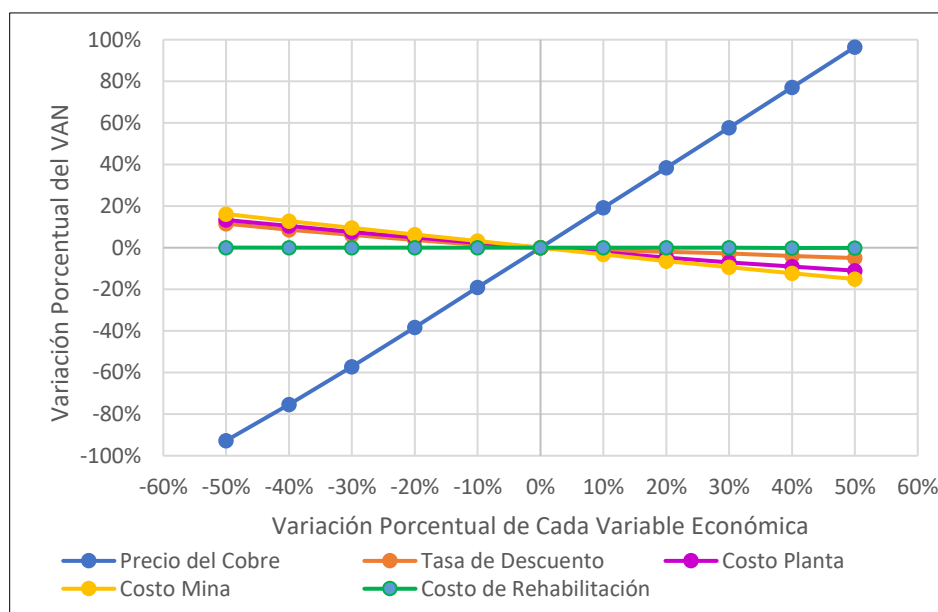


Figura 7.1: Gráfico de sensibilidad utilizando el algoritmo de Lane.

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Es posible cuantificar el efecto que tienen las cinco variables económicas involucradas en la sensibilidad a través del valor de la pendiente que resulta de la regresión lineal para cada una de las variaciones registradas para cada variable económica, ya que cuando un pequeño cambio en alguna variable “x” produce un cambio grande en el valor de una función cualquiera “f(x)”, decimos

que la función “f” es sensible a cambios en “x”. La derivada de la función “f'(x)” es una medida de esa sensibilidad (Thomas, 2010). Para efectos de las variables estudiadas, solo existen comportamientos lineales del efecto de la variación del VAN con respecto a cada variable económica estudiada, por lo que la pendiente de cada función representa una medida de la sensibilidad. Lo anterior se resume en la Tabla 7.2.

Tabla 7.2: Valores resultantes de la regresión lineal para cada variable económica según grafico de sensibilidad, empleando el algoritmo de Lane.

Variable económica	Valor Pendiente $\times 10^{-9}$	Valor Intercepto $\times 10^9$	r ²
Precio del cobre	3,646	1,928	1,000
Tasa de descuento	-0,303	1,946	0,945
Costo Planta	-0,466	1,925	0,997
Costo Mina	-0,601	1,921	1,000
Costo de rehabilitación	-0,003	1,917	1,000

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

El análisis de sensibilidad realizado sobre el algoritmo de Lane indica que el precio del cobre es la variable que más fuerte golpea el VAN del proyecto y posee una relación directamente proporcional al valor del VAN, ya que a medida que crece el precio del cobre, el valor presente neto aumenta y viceversa. El hecho de que esta variable económica sea la más sensible de todas, es porque es capaz de definir la cantidad de ingresos que se generan tanto por la venta de metal fino de cobre como por concentrados, ya que, al incrementar el precio del cobre, también se incrementa el precio de venta de los concentrados de cobre (ver Tabla 7.3), lo que repercute directamente en los ingresos anuales y en los beneficios netos. Es posible identificar que el precio crítico es de 141,345 cUSD/lb, lo que significa que cuando el precio del cobre es igual al crítico, el valor del VAN es cero.

Tabla 7.3: Efecto en el precio del concentrado y en el VAN cuando varía el precio del cobre.

Porcentaje de incremento del precio del cobre	Precio del Cobre [cUSD/lb]	Precio del Concentrado [USD/TMS]	Variación del Precio del Concentrado de Cobre Respecto al Caso Base	VAN MUSD
-50%	150,00	751,09	-56,04%	140,194
-40%	180,00	942,59	-44,83%	471,940
-30%	210,00	1134,10	-33,62%	821,408
-20%	240,00	1325,60	-22,42%	1183,858
-10%	270,00	1517,11	-11,21%	1550,842
0%	300,00	1708,61	0,00%	1917,379
10%	330,00	1900,11	11,21%	2285,504
20%	360,00	2091,62	22,42%	2654,480
30%	390,00	2283,12	33,62%	3024,578
40%	420,00	2474,63	44,83%	3395,294
50%	450,00	2666,13	56,04%	3766,274

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Un aspecto importante a considerar se genera cuando se disminuye el precio del cobre, al hacer esto, la política de leyes de corte aumenta, esto se debe a que matemáticamente la ecuación que regula la expresión de la ley de corte considera el precio en el denominador de la ecuación, por lo que al disminuir el denominador, el cociente (ley de corte) comienza a aumentar la ley de corte, pero también existe una explicación minera, ya que cuando el precio del cobre disminuye, los recursos comienzan a ser menos atractivos económicamente y por lo tanto material que antes era considerado como mineral pasa a ser estéril, ya que existe material que no es capaz de pagar sus costos y el beneficio reportado es negativo, por lo que el algoritmo hace incrementar las leyes de corte para que disminuya la cantidad de mineral, lo que provocara una disminución de la vida de la mina, pero al mismo tiempo aumentara la ley media, lo que permitirá equilibrar la balanza ya que esto último ayuda a tener una mayor cantidad de producto fino lo que se traduce en mayores ingresos a pesar de que por otro lado exista una disminución del tonelaje de mineral.

Sucede algo similar cuando el precio del cobre aumenta, ya que cuando esto ocurre el recurso de la base de datos "Esmeralda" se vuelve más atractivo y existe un aumento de la cantidad de mineral, ya que al elevarse el precio del metal rojo, material que antes era estéril, ahora es capaz de pagar sus costos y es catalogado como mineral por lo que es rentable su extracción y procesamiento por lo que aumenta la cantidad de mineral total y esto hace incrementar la vida de la mina así como obtener beneficios anuales más elevados producto del aumento del mineral debido al incremento en el precio del cobre, lo que hace elevar los ingresos por concepto de venta tanto del metal fino como del concentrado de cobre.

Con respecto a los resultados obtenidos con la variable económica "tasa de descuento", es posible decir que esta variable tiene un comportamiento inversamente proporcional al valor del VAN registrado, ya que al aumentar la tasa de descuento para la base de datos "Esmeralda" los flujos de dinero actualizados al momento presente tienen un menor valor económico, producto de que la tasa con la cual se deprecia el flujo de dinero en el tiempo es mayor. Cabe destacar que la tasa máxima a la cual puede resistir el proyecto es del 74,22% que corresponde al valor de la tasa TIR, lo cual es bastante positivo ya que este valor obtenido de TIR es bastante mayor a la tasa de descuento con la cual se evaluó todo el proyecto (10%) por lo que refleja que la tasa de rendimiento interno es superior a la tasa mínima de rentabilidad exigida a la inversión, por lo que el proyecto claramente es aceptable.

El hecho de observar una relación negativa entre la tasa de descuento y el VAN puede observarse en el valor de la pendiente, la cual es negativa y al mismo tiempo es menor que la registrada por la variable precio del cobre.

Existe una relación interesante para la variable tasa de descuento y las leyes de corte, ya que a medida de que la tasa de descuento aumenta, los flujos de dinero actualizados valen menos en el momento presente, lo cual hace disminuir la cantidad de los recursos totales para la distribución

"Esmeralda" que son considerados como minerales, ya que el hecho de aumentar esta variable económica afecta directamente en la valorización del rajo, ya que cuando sube la tasa, el dinero comienza a valer menos en el futuro, por lo que es preciso extraer la mayor cantidad de mineral con las mejores leyes, es decir, ser más selectivo, al comienzo de la vida de la mina para que así se obtengan los mejores beneficios anuales en los primeros años y se pueda minimizar el daño que reciben los beneficios anuales al momento de actualizarlos. Esto último es observable cuando al incrementar el valor de la tasa, la política de leyes de corte aumenta, producto de esto, se obtienen leyes medias más altas, al mismo tiempo, existe una disminución del tonelaje del rajo que es considerado como mineral, lo que hace disminuir la vida de la mina.

La variable económica costo planta tiene una relación inversa con respecto al VAN, claramente si aumenta el costo planta, el valor del VAN descenderá, y viceversa. También es observable que el costo planta máximo que es capaz de resistir el proyecto "Esmeralda" es de 33,35 usd/ton de mineral, valor que haría el VAN igual a cero.

Es destacable que a medida de que aumenta el costo planta, la totalidad de los recursos que son considerados como mineral disminuyen, ya que al elevarse el costo planta, cada tonelada tratada por la planta concentradora se hace más cara y por ende disminuye la cantidad considerada como mineral en el rajo, esto es observable con el vector de leyes de corte, ya que a medida de que el costo planta aumenta, el vector de leyes de corte aumenta, esto es porque al aumentar la ley de corte, existe una menor porción de los recursos totales que son considerados como minerales, y por ende disminuye la vida de la mina al mismo tiempo que el algoritmo logra equilibrar la balanza de este incremento de costos planta con un aumento de la ley media.

El costo mina es la variable económica más sensible después del precio del cobre, esta variable tiene una relación inversa con respecto al valor presente neto ya que al incrementar el costo mina, el valor del VAN disminuye y viceversa, donde también es posible extraer del gráfico de sensibilidad que el costo mina crítico es de 14,67 usd/ton de material.

Una de las razones que hace que esta variable económica sea más sensible que las demás y solo este por debajo del precio del cobre, es que este costo impacta a la totalidad de los recursos del rajo, ya que se asume que todo material debe ser extraído del depósito, por lo que este costo deben pagarlo tanto el mineral como el estéril a diferencia del costo planta el cual solo es asociado al tonelaje de mineral. Para el caso de esta variable económica, cuando el costo mina aumenta, se incrementa el costo asociado a la extracción del mineral y del estéril, es decir, aumenta todo el costo asociado al movimiento mina, producto de esta situación, cuando aumenta el costo mina, como consecuencia debe disminuir el tonelaje de material que la mina extrae en cada año ya que la operación de extracción se vuelve más cara, pero al mismo tiempo se debe respetar el hecho de que la concentradora este trabajando a plena capacidad, por lo que año a año se deben enviar los 15 Mton de mineral a la concentradora, entonces para disminuir el movimiento mina, como

única opción el algoritmo disminuye la cantidad de estéril para que así el movimiento mina baje y esto solo es posible disminuyendo la ley de corte, ya que al hacer esto se aumenta la cantidad de mineral y disminuye el estéril para la totalidad de los recursos, por lo que ahora existe una menor cantidad de estéril, lo que se traduce en un movimiento mina más bajo, al mismo tiempo en el que aumenta la vida de la mina, ya que el depósito se extrae de una forma más desacelerada, al disminuir el movimiento mina anual.

Con respecto a la última variable en estudiar sus efectos de sensibilidad, es posible afirmar que el costo de rehabilitación del botadero denominado como "h" es inversamente proporcional al valor del VAN, donde es destacable que cuando este costo aumenta, la cantidad de estéril disminuye producto de que el costo de rehabilitación depende directamente de la cantidad de tonelaje de estéril que tenga el futuro botadero, por lo que aumentos en el costo de rehabilitación generaran una ley de corte levemente más baja, lo que hará disminuir la cantidad anual de estéril, lo que a largo plazo desembocara en un botadero que contenga una menor cantidad de material de estéril.

A modo de resumen es posible determinar el crecimiento o decrecimiento que experimenta el VAN cuando una de las cinco variables económicas estudiadas sufre un incremento o disminución de su valor base, a partir de esta idea, es posible cuantificar de forma porcentual este cambio en el VAN cuando una variable económica crece o decrece en un rango porcentual desde el 10% hasta el 50%, con saltos del 10%, lo anterior se resume en la Tabla 7.4.

Tabla 7.4: Variaciones porcentuales del VAN cuando cambia el valor de las variables económicas estudiadas empleando el Algoritmo de Lane.

Variación Porcentual de cada Variable Económica	Porcentaje de Cambio del VAN, cuando Varía el Precio del Cobre	Porcentaje de Cambio del VAN, cuando Varía la Tasa de Descuento	Porcentaje de Cambio del VAN, cuando Varía el Costo Planta	Porcentaje de Cambio del VAN, cuando Varía el Costo Mina	Porcentaje de Cambio del VAN, cuando Varía el Costo de Rehabilitación
-50%	-92,69%	11,58%	13,34%	16,19%	0,07%
-40%	-75,39%	8,67%	10,43%	12,85%	0,06%
-30%	-57,16%	6,13%	7,55%	9,51%	0,04%
-20%	-38,26%	3,71%	4,87%	6,36%	0,03%
-10%	-19,12%	1,40%	2,40%	3,18%	0,01%
0%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
10%	19,20%	-1,24%	-2,35%	-3,18%	-0,01%
20%	38,44%	-1,98%	-4,77%	-6,37%	-0,03%
30%	57,75%	-2,81%	-6,99%	-9,36%	-0,04%
40%	77,08%	-3,93%	-9,04%	-12,22%	-0,06%
50%	96,43%	-4,94%	-11,03%	-15,08%	-0,07%

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

La Tabla 7.4 permite determinar el crecimiento o decrecimiento del VAN cuando una variable económica experimenta un determinado cambio porcentual. Por ejemplo, si el precio del cobre

aumenta en un 10% con respecto a su precio base de 300 cUSD/lb, el VAN resultante aumentara en un 19,2% y si el precio del cobre disminuye en un 10% el VAN disminuye en un 19,12%. Los valores reales del VAN según los cambios en cada variable económica se encuentran en el anexo D (Tabla D.1). La tabla anterior entrega de forma numérica y porcentual los incrementos del VAN donde es posible evidenciar que la variable económica que más influye en el crecimiento del VAN es el precio del cobre, registrando incrementos porcentuales del VAN mucho mayores en comparación a las otras variables económicas estudiadas. Lo anterior permite tener un marco de referencia para las operaciones mineras, ya que permite establecer que variable económica es posible mejorar y cuanto seria su nivel de aporte al VAN.

7.2 ALGORITMO “GRG MULTI AÑO”

En el Capítulo 5 y 6 se pudo observar que este algoritmo es el que entrega la mejor solución al problema del consumo de recursos mineros, ya que es capaz de elevar el valor presente neto obtenido con el algoritmo de Lane, y a continuación se detallará el efecto sobre el valor del VAN que tiene el hecho de variar los 5 parámetros económicos escogidos para llevar a cabo el análisis (ver Figura 7.2).

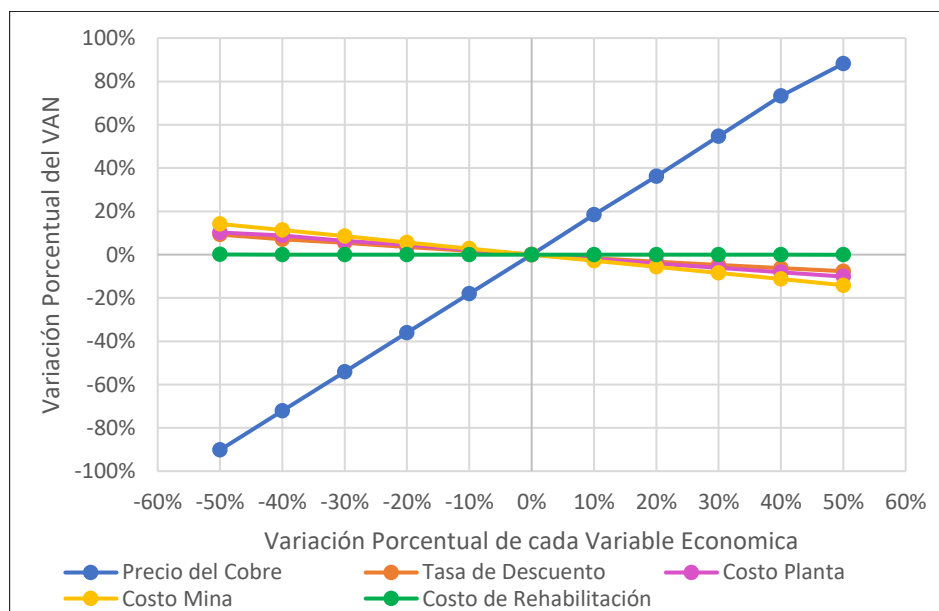


Figura 7.2: Gráfico de sensibilidad usando el algoritmo "GRG Multi año".
Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Para la sensibilización realizada sobre el algoritmo “GRG Multi año” es posible cuantificar el efecto que produce cada una de las cinco variables económicas estudiadas, por lo que tendremos 5 pendientes resultantes de la regresión lineal del gráfico de araña. Los valores para cada una de las pendientes son altos, por lo que cada uno de estos valores son divididos por una constante que corresponde al valor de 10^9 para que el valor de la pendiente de cada variable económica tenga una mejor interpretación y comprensión (ver Tabla 7.5). Cuando el valor de la pendiente

para una determinada variable económica es grande, implica que aquella variable afecta al VAN más fuertemente que una variable económica que posea una pendiente de bajo valor.

Tabla 7.5: Valores de la pendiente de cada parámetro económico según la regresión lineal.

Variable económica	Valor Pendiente $\times 10^{-9}$	Valor Intercepto $\times 10^{-9}$	R ²
Precio del cobre	3,668	2,037	1,000
Tasa de descuento	-0,344	2,043	0,997
Costo Planta	-0,423	2,040	0,999
Costo Mina	-0,576	2,037	1,000
Costo de rehabilitación	-0,003	2,037	1,000

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Los resultados obtenidos a través de este análisis de sensibilidad, muestra que la variable económica "Precio del Cobre" es la más sensible de todas, ya que la pendiente que se registra en el gráfico de sensibilidad es bastante pronunciada y corresponde a la de mayor valor en comparación a las demás pendientes correspondientes a las otras variables económicas estudiadas. Cabe destacar que al ser la pendiente positiva, indica que el precio del metal rojo posee una relación directamente proporcional al valor del VAN registrado, por ejemplo con un aumento en el precio del cobre del 10%, es decir llegando a un precio final de cobre de 330 usd/lb, el valor del VAN incrementa en aproximadamente un 18%, llegando hasta un monto de 2.411,913 MUSD, recordemos que el valor original del VAN cuando el precio del cobre es de 300 usd/lb es de 2037,035 MUSD por lo que es posible establecer que el precio del cobre juega un rol importantísimo dentro del valor presente neto de la operación minera y es sin lugar a dudas el parámetro económico que más fuerte golpea al valor final del VAN, ya que además hace variar el precio del concentrado de cobre, el cual es directamente proporcional al precio del cobre. Los resultados observados para el "precio del cobre", indican que el precio crítico es de 133,38 usd/lb esto significa que cuando el proyecto minero se evalúa con este precio, el valor del VAN es cero, por lo que este resultado es positivo, ya que actualmente los precios del cobre estimados para el largo plazo son bastante más elevados y alejados que el precio crítico resultante. (Roa, 2020).

Además es posible observar que cuando el precio del cobre comienza a aumentar, se modifica la política de leyes de corte del propio plan de producción, ya que a medida de que el precio asciende, la ley de corte óptima comienza a disminuir, esto se debe a dos razones, la primera se debe a la formulación matemática de ley de corte para el algoritmo "GRG Multi año", donde la variable económica "precio del cobre" se encuentra en el denominador de esta expresión, por lo que a medida de que se incremente el precio, la ley de corte matemáticamente comenzara a disminuir; la segunda razón es que a medida de que el precio aumenta, los recursos en el rajo comienzan a ser más valiosos, debido a esto, el algoritmo disminuye la ley de corte, de esta forma, se incrementa la cantidad de mineral total que es posible obtener a partir de la totalidad de los recursos minerales, ya que estos minerales han aumentado su valor y atractivo económico y con ello aumenta el tiempo que le tomara a la concentradora en tratar todo este mayor volumen

de mineral, por esta razón, aumenta el tiempo de la vida de la mina y además al aumentar el tiempo total, el ritmo de extracción mina descende, ya que la cantidad total de material (mineral más estéril) que se debe extraer del rajo es la misma (totalidad de los recursos) por lo que al aumentar el tiempo, la cantidad anual de material total extraído por la mina decrece, ya que se produce una desaceleración de la extracción del material desde el rajo.

Respecto a la variable "tasa de descuento", esta posee una pendiente bastante menor en comparación a la variable "precio del cobre" esto significa que cuando se registran cambios en la variable tasa de descuento, el valor del VAN cambia, pero este cambio es bastante menos pronunciado como lo es para el caso cuando existen variaciones que afecten al precio del metal rojo. Además, el signo de la pendiente es negativo, lo que indica una relación inversamente proporcional entre la tasa de descuento y el valor del VAN, ya que, si la tasa aumenta, el valor del VAN disminuye y viceversa, esto es porque a medida que el valor de la tasa de descuento se incrementa, el flujo de dinero percibido en el tiempo presente disminuye, ya que disminuye el valor del dinero actualizado en el tiempo presente.

La tasa crítica que resiste el proyecto, llamada tasa TIR es de 69,42%, esto significa que el valor del VAN es cero cuando la tasa de descuento alcanza un valor del 69,42%, lo cual es muy positivo ya que esto permite que el proyecto minero posea una gran resistencia con respecto a la variable de la tasa de descuento, ya que la tasa debe ser altísima para que el proyecto deje de ser rentable.

Con respecto a la variable económica "costo planta" es posible establecer que esta variable actúa de forma inversamente proporcional al valor del VAN, esto es posible evidenciarlo en el signo de la pendiente de la recta que representa al costo planta dentro del grafico de sensibilidad, además el valor de la pendiente es ligeramente superior al de la tasa de descuento, por lo que, cuando se producen las mismas variaciones en ambos parámetros económicos (costo planta y tasa de descuento) el VAN es más sensible a los cambios producidos en el costo planta que para la tasa de descuento.

Para el "GRG Multi año", las variaciones que sufre el valor del costo mina repercute en el valor presente neto, de forma inversamente proporcional, esto quiere decir que cuando aumenta el costo mina, el beneficio anual disminuye ya que cada tonelada de material extraído en el rajo (mineral más estéril) cuesta más, por lo tanto, disminuye el valor del VAN y viceversa. Es posible establecer que cuando el costo mina es de 15,87 usd/ton de material el valor del VAN es cero, por lo que el proyecto resiste un costo extremadamente elevado y es capaz de aguantar hasta este valor de costo mina. También es destacable que la pendiente del grafico de sensibilidad para el costo mina posee el mayor valor, en comparación a los demás costos, sin incluir el precio del cobre. Esto indica que el costo mina posee un impacto no menor en el valor del VAN, debido a que este costo posee un mayor impacto en el beneficio neto, ya que la totalidad de los recursos minerales para toda la vida del proyecto debe pagar este costo fijo denominado como costo mina,

por lo que impacta de sobremanera ya que en comparación al costo planta, la planta procesadora procesa mineral, cuyo tonelaje siempre es menor que la cantidad total que mueve el rajo, por lo tanto, es posible evidenciar que a pesar de que el costo planta sea prácticamente el doble del costo mina, la variable económica costo mina es más sensible que el costo planta, porque la cantidad de material que debe pagar este costo mina es mayor en comparación al tonelaje de mineral que debe pagar el proceso de la concentración.

El análisis de sensibilidad con respecto al costo de rehabilitación del botadero revela que esta variable es la menos sensible de todas, ya que posee el valor más bajo de la pendiente (ver Tabla 7.5), la cual es bastante cercana a cero, lo que significa que cuando esta variable económica sufre cambios significativos, el valor del VAN cambia levemente, por ejemplo cuando el costo de remediación del botadero aumenta en un 10% de su valor original, el valor del VAN disminuye en un 0,01% aproximadamente, valor bajísimo por lo que claramente el VAN es muy poco sensible a esta variable, esto último se debe a que el costo de rehabilitación del botadero original es muy bajo (ver Tabla 7.1), por lo que cambios en una variable económica la cual ya posee un bajo costo, claramente tendrá muy pocas repercusiones en los cambios observados en el VAN. Además, es posible identificar que el costo de rehabilitación crítico es de 21,62 usd/ton de estéril, valor que hace el VAN sea cero, lo que es muy positivo ya que es muy poco probable que exista en la realidad casos donde este costo de remediación ambiental llegue a ese costo crítico.

Se exponen los resultados de los cambios porcentuales que experimenta el VAN para las cinco variables económicas, considerando incremento y disminuciones porcentuales que abarcan desde el 10% al 50% de su valor base (ver Tabla 7.6).

Tabla 7.6: Variaciones porcentuales del VAN cuando cambia el valor de las variables económicas estudiadas empleando el Algoritmo “GRG Multi Año”.

Variación Porcentual de cada variable económica	Porcentaje de cambio del VAN, cuando varía el precio del cobre	Porcentaje de cambio del VAN, cuando varía la Tasa de descuento	Porcentaje de cambio del VAN, cuando varía el Costo Planta	Porcentaje de cambio del VAN, cuando varía el Costo Mina	Porcentaje de cambio del VAN, cuando varía el Costo de Rehabilitación
-50%	-90,20%	9,27%	10,21%	14,15%	0,06%
-40%	-72,08%	7,04%	8,81%	11,31%	0,05%
-30%	-54,10%	5,46%	6,37%	8,49%	0,04%
-20%	-36,10%	3,57%	4,50%	5,66%	0,03%
-10%	-18,09%	1,75%	2,25%	2,83%	0,01%
0%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
10%	18,40%	-1,69%	-2,09%	-2,83%	-0,01%
20%	36,13%	-3,28%	-4,10%	-5,66%	-0,02%
30%	54,71%	-4,79%	-6,11%	-8,49%	-0,04%
40%	73,23%	-6,26%	-8,12%	-11,31%	-0,05%
50%	88,20%	-7,66%	-10,12%	-14,14%	-0,06%

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Los datos anteriores muestran que las variaciones porcentuales que experimenta el VAN son bastante elevadas cuando se hace variar el precio del cobre, en donde se nota su predominancia con respecto a su sensibilidad. Con respecto a las demás variables, el costo mina presenta el mayor nivel de cambio, ya que por ejemplo si cada una de las 4 variables económicas disminuye su valor base en un 20% cada una, de forma independiente, el VAN crece en un 3,57%, 4,5%, 5,66% y en 0,03% para la tasa de descuento, costo planta, costo mina y costo de rehabilitación respectivamente, lo que indica que el costo mina es una variable más sensible que las otras 3 variables, por lo que resultaría conveniente que los esfuerzos de gestión de la empresa vayan por la senda de disminuir el costo mina, ya que esto provocaría un aumento mayor en el VAN. Los valores reales del VAN para cada caso en el cual se hizo variar cada una de las variables económicas puede consultarse en el anexo D (Tabla D.3).

7.3 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD ESPECIAL

El análisis de sensibilidad llevado a cabo anteriormente considero una variación constante del 10% sobre cada uno de los cinco parámetros económicos escogidos, haciendo crecer y decrecer estos parámetros para ver su repercusión en el valor presente neto, donde es posible notar que la variable que menos incide sobre el valor presente neto es el costo de rehabilitación del botadero, ya que este costo es bastante bajo en comparación al costo mina o al costo planta, debido a que este costo originalmente se extrajo de la investigación sobre rehabilitación de botaderos realizada en la mina invierno por Martínez (2020), en la cual, fue posible incorporar un costo de 18204 usd/Ha rehabilitada, e incorporando un factor “R” de 1,5 Ha/Mton de estéril, se llega al valor de 0,027306 usd/ton de estéril asumiendo que el estéril posee una densidad de 2,1 ton/m³. (Vásquez, Galdames y Le-Feaux, 2012). Debido a que el proceso de obtención del costo de rehabilitación de un botadero, necesita una investigación profunda ya que para ello se necesita conocer muchas variables adicionales, como los equipos y el número de estos empleados en cada una de las labores que conlleva la rehabilitación de estos espacios, así como el rendimiento de estos equipos, la distancia entre el acopio de suelo vegetal y el botadero minero y el precio de los insumos como lo es el combustible, la mano de obra entre otros, debido a la complejidad que presenta el hecho de calcular este valor, se considera que para efecto de la presente investigación, esto es tema para otro proyecto, pero a pesar de esto, es importante conocer que sucedería si este costo de rehabilitación aumentase a valores más allá de los alcanzados en la sensibilización del apartado anterior, ya que según una reciente investigación llevada a cabo por la Universidad de Queensland, en Australia, presenta una aproximación de los costos incurridos para la rehabilitación de espacios mineros, en los cuales, los botaderos tienen un costo aproximado de 105714 usd/Ha para una situación de costos altos, y de 84571 usd/Ha para costos bajos (Lechner, Kassulke y Unger, 2016), por lo cual, asumiendo que el factor “R” es de 1,5 Ha/Mton de estéril, se tiene una situación donde el costo de rehabilitación es de 0,13 usd/ton de

estéril para el caso de costos bajos y de 0,16 usd/ton de estéril cuando el escenario es de costos altos. Por lo cual es interesante y relevante conocer el efecto que producen diferentes valores para el costo de rehabilitación sobre el valor del VAN, ya que, en el apartado anterior, el valor máximo al que llega el costo de rehabilitación solo es de 0,040959 usd/ton de estéril, bastante inferior a los 0,16 usd/ton de estériles alcanzados por la investigación australiana, debido a estos nuevos hallazgos, se incorporara un nuevo análisis de sensibilidad, tomando en cuenta una sola variable, la cual corresponde al costo de rehabilitación, la cual la denominaremos como "h" y este costo ira variando desde un valor mínimo hasta un máximo, con un paso fijo. el vector de valores que tomará este costo "h" será:

vector h = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0]

Cada uno de estos valores se incorporarán sobre los dos algoritmos anteriores, para determinar cuál es el valor del VAN cuando se tiene un escenario extremo en el cual el costo h llega a 1 usd/ton de estéril y analizar el efecto que produce la variación del costo de rehabilitación del botadero en el tonelaje de estériles. Cabe destacar que los valores de las demás variables y parámetros económicos se consideraran constantes e igual a las del caso base.

7.3.1 Algoritmo de Lane

El análisis especial contempla tomar el costo de rehabilitación "h" y observar el efecto que produce sobre el plan de producción y sobre el VAN cuando esta variable económica cambia y alcanza valores grandes, a partir de los resultados llevados a cabo a través del algoritmo de Lane, es posible afirmar que esta variable económica es inversamente proporcional al valor del VAN (ver Figura 7.3 y Tabla 7.7), ya que cuando este costo aumenta, disminuyen los beneficios que se reportan año a año esto es debido a que el material estéril cada vez posee un mayor costo extra asociado a la futura rehabilitación del botadero, por lo que, al aumentar los costos totales asociados al material estéril, disminuye el beneficio y con ello el VAN. Una observación notable a realizar es que a medida de que se incrementa el costo de rehabilitación hasta llegar al valor límite de 1 usd/ton de estéril, la cantidad total de estéril, que corresponde al tonelaje total que albergara el futuro botadero de estériles a cielo abierto, se hace más pequeño, esto se produce porque cuando se incrementa el costo de rehabilitación, la política de leyes de corte comienza a disminuir, esto se produce porque el material estéril cada vez se vuelve más caro, y el algoritmo equilibra la balanza al disminuir la cantidad de estéril y aumentar la cantidad de mineral que se extrae año a año, y esto es posible disminuyendo los valores de la ley de corte, de esta forma, el algoritmo se asegura de disminuir la cantidad de estéril que debe extraerse año a año, cuando la rehabilitación futura de este material se vuelva más caro, esto repercute en leyes medias más bajas, lo que también hace disminuir de forma indirecta los beneficios anuales y con ello el valor presente neto.

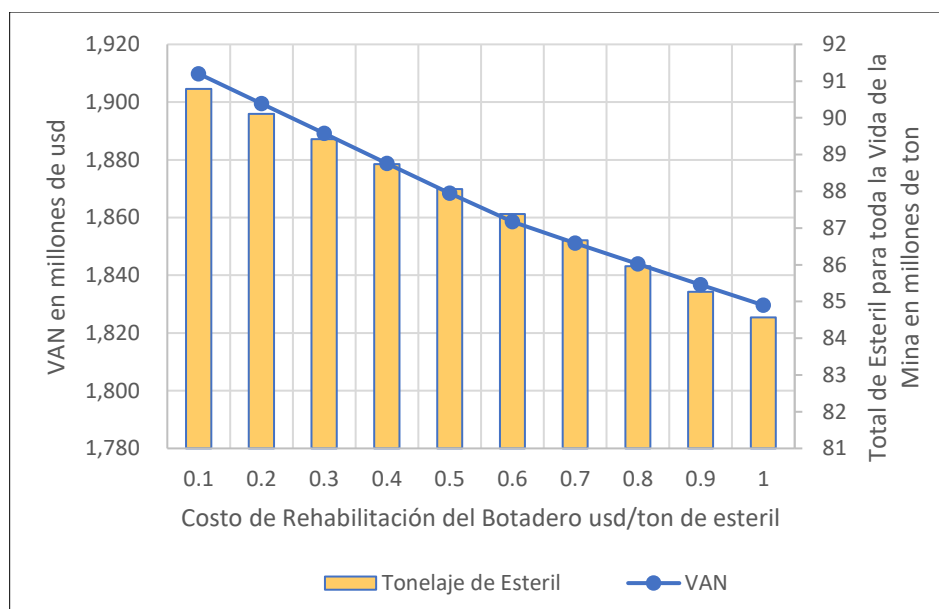


Figura 7.3: Relación entre el VAN y el estéril acumulado vs Costo de rehabilitación de un botadero empleando Algoritmo de Lane.
Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Tabla 7.7: Valores del VAN y de la cantidad total de estéril según varía el costo de rehabilitación del botadero usando el Algoritmo de Lane.

Costo de rehabilitación del botadero usd/ton de estéril	VAN MUSD	Cantidad total de estéril Mton
0,1	1909,830	90,790
0,2	1899,460	90,108
0,3	1889,110	89,424
0,4	1878,776	88,742
0,5	1868,457	88,062
0,6	1858,597	87,379
0,7	1851,103	86,669
0,8	1843,917	85,965
0,9	1836,754	85,262
1	1829,609	84,563

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

De forma adicional es posible obtener un costo crítico de rehabilitación del botadero de 21,363 usd/ton de estéril, es decir, que este es el costo de rehabilitación que haría el VAN igual a cero.

7.3.2 Algoritmo GRG Multi Año

Los resultados de la "sensibilidad especial" sobre el algoritmo "GRG Multi año" muestran que la variable económica costo de rehabilitación del botadero "h" tiene una relación inversa con el valor del VAN (ver Figura 7.4 y Tabla 7.8), esto es debido a que a medida de que aumenta el costo de

rehabilitación "h", se incrementan los futuros gastos que se deben hacer en las operaciones de remediación ambiental, llegando hasta un valor límite del VAN de 1945,315 MUSD cuando el costo de rehabilitación es exageradamente alto (1 usd/Ton de estéril), lo cual haría disminuir el VAN en un 4,5%. Además, el valor del costo crítico que es capaz de resistir el proyecto es de 21,63 usd/Ton de estéril.

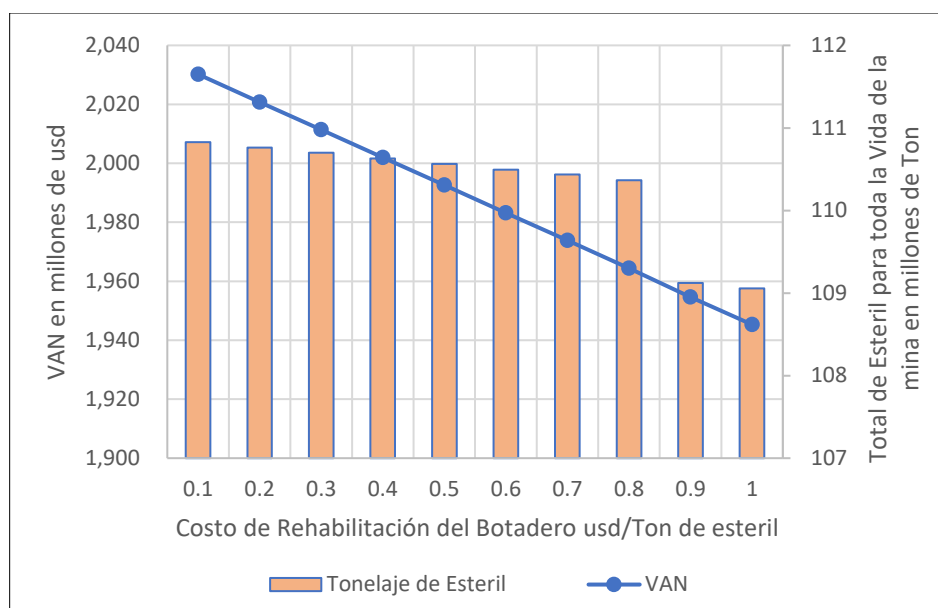


Figura 7.4: Relación entre el VAN y el estéril acumulado vs Costo de rehabilitación de un botadero empleando Algoritmo “GRG Multi Año”.
Fuente: Elaboración propia, 2021.

Tabla 7.8: Valores del VAN y de la cantidad total de estéril según varía el costo de rehabilitación del botadero usando el Algoritmo “GRG Multi Año”.

Costo de rehabilitación del botadero usd/ton de estéril	VAN MUSD	Cantidad total de estéril Mton
0,1	2030,200	110,828
0,2	2020,791	110,760
0,3	2011,388	110,699
0,4	2001,988	110,631
0,5	1992,595	110,564
0,6	1983,204	110,496
0,7	1973,820	110,434
0,8	1964,439	110,366
0,9	1954,604	109,121
1	1945,315	109,057

Fuente: Elaboración Propia, 2021.

Es importante destacar que de la misma forma que ocurre con el algoritmo anterior, cuando el costo de rehabilitación aumenta, el tonelaje de estéril total que debe ser albergado en el futuro

botadero disminuye, la razón de esto, yace en que a medida de que crece el costo "h" el estéril se vuelve más caro, razón por la cual, el algoritmo disminuye la cantidad total de estéril que se debe extraer durante toda la vida de la mina, esto es posible modificando la política de leyes de corte, ya que cuando aumenta este costo, las leyes de corte disminuyen levemente, lo cual permite aumentar la cantidad de mineral y disminuir el estéril, ya que este último material se vuelve más caro y con ello equilibra la balanza.

CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

8.1 CONCLUSIONES

A modo de epílogo para el presente proyecto, es posible establecer que existe más de una forma de obtener una solución al problema del consumo de recursos minerales, ya que la introducción del gradiente reducido generalizado ha sentado las bases para la creación de dos nuevos algoritmos en el entorno de Python; el GRG Iterativo y el GRG Multi Año.

La base de datos empleada para los tres algoritmos desarrollados, denominada como “Esmeralda” contiene un total de 198,9 Mton de recursos minerales y posee una distribución logarítmica decreciente a medida que se incrementa las leyes de cobre en el depósito, un caso clásico del comportamiento de los pórfidos cupríferos chilenos.

Se incluye en los 3 programas desarrollados un costo, que representa la remediación medioambiental que debe tener el botadero de estériles, debido a esto, el vector de leyes de corte, así como el plan minero resultante de cada uno de los programas, están condicionadas por el valor que posea este costo de rehabilitación. Se ha establecido que el valor de este costo sea de 18.204 usd/hectárea a rehabilitar dentro del botadero de estériles, extraído de Martines Valdez, 2020. Para la inserción de este costo a cada uno de los programas desarrollados, se hace necesario llevar este costo a usd/ton de estéril, ya que esto facilita en gran medida la inclusión de este costo en la formulación matemática de ley de corte y del beneficio anual. debido a lo anterior, se opta por establecer un factor “R”, el cual relaciona la superficie “efectiva” de un botadero que debe rehabilitarse con respecto al tonelaje de material estéril que este sea capaz de albergar.

En la búsqueda de determinar este factor “R”, se ha modelado una serie de botaderos en el software Vulcan Maptek, considerando que el diseño del botadero es del tipo torta, donde se observa que el factor “R” depende principalmente de 2 variables; la altura final que posee el botadero y el área basal, es decir, el polígono o sombra del botadero proyectada en el plano horizontal o en su topografía. Para esto en todo momento se considera que la densidad del tonelaje de estéril es de 2,1 ton/m³.

Con el fin de poder cuantificar el valor de R, se decide crear 4 casos, en cada uno de estos casos, se hace variar el área basal, donde cada caso tendrá una altura fija designada, para el caso 1, 2, 3 y 4, la altura será de 40, 50, 60 y 80 metros respectivamente, donde se diseñó un total de 6 botaderos para cada caso, donde en cada caso se hace variar el área basal, a través de este análisis, se llega a que el valor promedio de R es de 1,93, 1,58, 1,48 y 1,33 Ha/Mton para el caso 1, 2, 3 y 4 respectivamente. Ante lo cual el valor de R dependerá de la altura que posea el botadero de estériles, donde existe una relación inversamente proporcional entre la altura y el factor R. Para cada caso en particular se observa que existe una relación inversa entre el área basal y el factor R cuando la altura permanece invariable.

Se establece un valor de “R” de 1,5 Ha/Mton de estéril, el cual representa el valor de la media registrada a través de la modelación de los 6 botaderos para el caso 3, tomando una altura referencial de 60 metros para el botadero de estériles. Se escoge este caso de forma arbitraria ya el hecho de escoger una altura en específico dependerá de otros criterios, como de diseño, geomecánicos y económicos, por lo que se escoge este valor para poder insertarlo dentro del código fuente en Python. Asignando este valor para R, es posible obtener un costo de rehabilitación de 0,027306 usd/ton de estéril, el cual es incluido en los 3 algoritmos desarrollados.

Los resultados obtenidos de los 3 programas computacionales desarrollados en el entorno de Python revelan que el uso del Gradiente Reducido Generalizado incrementa el valor presente neto obtenido con el enfoque clásico de Lane, ya que en una primera instancia, se crea el llamado “GRG Iterativo”, programa que busca una ley de corte óptima considerando como solución inicial la reportada por el algoritmo de Lane, el cual hace incrementar el VAN de Lane en aproximadamente un 2.70%, esto es debido al aumento del vector leyes de corte, ya que este nuevo algoritmo es capaz de elevar la ley de corte en cada periodo, de esta forma se acelera el consumo de recursos minerales y la vida de la mina disminuye, al mismo tiempo de que los beneficios anuales son mayores en los primeros periodos de producción. El VAN reportado por el enfoque de Lane es de 1.917,379 MUSD mientras que este nuevo programa “GRG Iterativo”, logra llegar a un VAN de 1.969,161 MUSD.

En aras de lograr un nuevo enfoque se desarrolla el programa “GRG Multi Año”, el cual se define como el algoritmo definitivo ya que este logra un VAN de 2.037,035 MUSD, incrementando el VAN reportado por Lane en 6,24% aproximadamente, este aumento en el VAN es gracias a la metodología matemática que presenta el código del programa, ya que busca la ley de corte óptima, considerando una solución inicial igual a la ley de corte marginal y a esta ley le adiciona un factor optimizante que es variable, en otras palabras, el programa es capaz de evaluar cada ley que existe dentro de un intervalo definido y con un paso de 0.01, y para cada ley de corte se obtiene un VAN, donde el algoritmo selecciona para cada año, la ley de corte que hace máximo el VAN, debido a este nuevo enfoque, las leyes de corte obtenidas con este nuevo programa, son las máximas posibles, ya que reporta un vector de leyes de corte constante a lo largo del periodo de producción, esto hace que el movimiento mina sea constante y suave, lo que ayuda en gran medida a la planificación, gestión y control de la flota de equipos requerida en el movimiento de materiales de cualquier operación minera.

Al mismo tiempo este incremento en leyes de corte, que logra el algoritmo “GRG Multi Año”, hace que los recursos sean consumidos de una forma más acelerada, ya que al aumentar la ley de corte, la cantidad de mineral total considerada en los recursos disminuye, producto de esto, la planta procesadora demorará menos tiempo en procesar este mineral y por ende, el tiempo global también disminuirá, por otro lado, la cantidad de estéril total se incrementa y para cumplir con el

requerimiento de la planta, la mina debe mover más material, producto de esta situación, la vida de la mina usando este programa da un total de 6 periodos, en comparación a los 7 que reporta el “GRG Iterativo” y a los 8 que reporta el algoritmo clásico de Lane.

De forma adicional, se ha decidido analizar el efecto que producen las economías de escalas en los 3 algoritmos desarrollados, la inclusión de esta nueva economía hace que el costo de extracción para el material estéril sea menor que el costo de extracción asociado al mineral. Esto se basa en el hecho de que, una vez evaluados los recursos minerales, estos presentan una mayor cantidad de estéril que de mineral, y cuando la extracción de un determinado tipo de material aumenta en el largo plazo, los costos asociados a la extracción de este material serán menores, en este caso, ese material es el estéril.

En una primera evaluación, el costo de extracción del mineral es de 3,5 usd/ton y el de extracción del estéril baja a 2,5 usd/ton, adicionando estos nuevos costos a la programación de los 3 algoritmos desarrollados, se llega a que la inclusión de las economías de escalas hace incrementar el VAN, independientemente del algoritmo ejecutado. Para el caso del enfoque de Lane, el VAN se incrementa en un 5,71% con respecto al VAN que reporta el mismo algoritmo sin las economías de escalas, llegando a la cifra de 2.026,916 MUSD, para el algoritmo GRG Iterativo, este presenta un VAN de 2.054,424 MUSD, haciendo elevar el VAN en 4,33% con respecto al caso cuando no existen economías de escalas, usando el mismo algoritmo, y por último, el GRG Multi Año, reporta un VAN final de 2.138,123 MUSD, incrementando el VAN en un 4,96% con respecto al VAN cuando no existen economías de escalas, bajo el mismo algoritmo.

Estos resultados, indican que cuando el costo de extracción del estéril es 1 usd/ton más bajo que el del mineral, se produce un aumento en el VAN. Cabe destacar que cuando existen economías de escalas, el algoritmo que entrega el mejor VAN es el GRG Multi Año, ya que este es capaz de reportar un vector de leyes de corte constante a lo largo de la vida de la mina, lo que hace que el movimiento de materiales sea parejo y el máximo posible, ya que los valores de la ley de corte que reporta son mayores que los reportados por el algoritmo GRG Iterativo y por supuesto, mayores que los entregados por el enfoque de Lane. Esto último también hace que los recursos para el caso del GRG Multi Año, sean consumidos más rápidamente, por lo que este algoritmo reporte una vida total de 6 periodos, en contraste a los 7 que entrega el GRG Iterativo y el de Lane. Cabe destacar que a pesar de que el algoritmo GRG Iterativo, no logra obtener el mejor VAN de los 3 algoritmos, si logra aumentar el VAN reportado con el enfoque de Lane, y esto es debido a que logra elevar las leyes de corte del algoritmo de Lane, manteniendo en todo momento un vector de naturaleza decreciente.

En una segunda instancia, se decide analizar el efecto que tienen sobre los algoritmos el hecho de disminuir el costo de extracción del estéril por debajo de 2,5 usd/ton, por lo que se adicionan dos casos extra; el primero, cuando el costo del estéril es de 2 usd/ton y el segundo, cuando el

costo del estéril llega a 1,5 usd/ton, donde es posible evidenciar que a medida de que el costo de extracción del estéril disminuye, el valor del VAN se incrementa para el enfoque de Lane, GRG Iterativo y GRG Multi Año, pero este incremento en los niveles del VAN es directamente proporcional a la disminución del costo de extracción del estéril. Cuando el costo de extracción del estéril baja de 3,5 usd/ton a 2,5 usd/ton, es decir, disminuye en 1 usd/ton, provoca un incremento del VAN del 5,71%, 4,33% y del 4,96% usando el algoritmo de Lane, GRG Iterativo y GRG Multi Año respectivamente. Pero cuando el costo de extracción del estéril llega a valer 1,5 usd/ton, es decir 2 usd/ton menos que el costo de extracción del mineral, el VAN es capaz de incrementarse en un 11,87%, 8,92% y en 10,09% para el algoritmo de Lane, GRG Iterativo y GRG Multi Año respectivamente, es decir, existe una relación lineal entre la disminución de costos y el incremento del VAN.

Se implementa un análisis de sensibilidad llevado a cabo sobre la base de datos “Esmeralda”, donde se decide analizar el impacto que producen las variables económicas sobre el valor del VAN. Tomando como referencia un caso base definido donde se efectúa el análisis de sensibilidad tanto en el algoritmo clásico de Lane como en el GRG Multi Año.

Para los dos algoritmos anteriores, la variable económica más sensible es el precio del cobre, variable que posee una gran pendiente, la sigue en menor medida el costo Mina, el costo Planta, la tasa de descuento y el costo de rehabilitación, en orden decreciente de sensibilidad, por lo que la variable menos sensible del proceso es el costo de rehabilitación del botadero.

Usando el enfoque de Lane, cuando el precio del cobre aumenta en un 10%, el VAN se incrementa en un 19%, y cuando las demás variables se incrementan en un 10%, el VAN disminuye en un 1,24%, 2,35%, 3,18% y 0,01% para la tasa de descuento, costo planta, costo mina y costo de rehabilitación, esta naturaleza de crecimiento que experimenta el VAN con respecto al precio del cobre y de decrecimiento con respecto a las demás variables, posee un comportamiento lineal, donde el precio crítico llega a valer 141,345 usd/lb con una tasa TIR del 74,216%.

Lo anterior revela que la variable más sensible es el precio del cobre, esto se debe a que esta variable económica afecta la valorización de los recursos minerales, ya que cuando aumenta el precio, el recurso mineral, posee un mayor valor económico, por lo que, aumenta la cantidad de mineral total y disminuye el estéril, esto hace disminuir la ley de corte, y obtener mayores ingresos por concepto de que existe un mayor tonelaje de mineral, producto fino y concentrado de cobre. Todos los costos incluida la tasa de descuento, se comportan de forma inversamente proporcional con respecto al VAN, donde el costo mina es la variable más sensible de estas últimas 4 variables económicas, esto puede deberse a que una variación en este costo produce un incremento en los costos de extracción de todos los recursos minerales, lo que hace disminuir el beneficio anual en mayor medida que las demás variables.

Empleando el algoritmo GRG Multi Año es posible observar que cuando cada variable económica experimenta un incremento del 10% en su valor base, el VAN aumenta en un 18,40% para el precio del cobre y disminuye en un 1,69%, 2,09%, 2,83% y 0,01% para la tasa de descuento, costo planta, costo mina y costo de rehabilitación. Los resultados indican que al igual que como ocurre con el enfoque de Lane, la variable más sensible es el precio del cobre, y para los costos, la variable más sensible es el costo mina, se observa que el precio del cobre es por mucho, la variable más sensible de todo el proceso, donde es capaz de alterar a su vez el vector de leyes de corte. Del mismo modo que como ocurre con el algoritmo de Lane, el incremento o decrecimiento porcentual que experimenta el VAN cuando varían las cinco variables económicas, se ajustan a un comportamiento lineal. Producto de esto, se estima que el precio crítico usando el programa GRG Multi Año es de 133,377 usd/lb con una tasa TIR del 69,415%.

También se implementa una sensibilización adicional, en la cual, se crean escenarios ficticios en donde el costo de rehabilitación toma valores desde 0,1 usd/ton de estéril, hasta un costo de 1 usd/ton de estéril, con pasos de 0.1, donde se observa que el valor del VAN disminuye a medida de que el costo aumenta, pero también la cantidad de estéril total definido por los recursos de “Esmeralda” comienzan a disminuir a medida de que este costo de rehabilitación crece, ya que cuanto mayor es el costo de rehabilitación, más caro se hace la remediación medioambiental del estéril, producto de esto, la cantidad de estéril en el botadero, disminuye a medida de que este costo se incrementa, esto es observable tanto en el algoritmo de Lane como en el GRG Multi Año.

8.2 RECOMENDACIONES

Fruto de la presente investigación, es posible dar consejos y recomendaciones sobre futuras investigaciones relacionadas con este tema, dentro de las cuales se mencionan las siguientes:

- Establecer un factor “R” que relaciona la superficie del botadero con respecto a su volumen de material estéril, para otros diseños de botaderos, como lo son, el botadero tipo ladera y quebrada, ya que es muy común la construcción de estos últimos diseños en minas a cielo abierto.
- Incorporar en la valorización del concentrado de cobre, un mayor número de descuentos, como por ejemplos los asociados con el castigo por impurezas, así como el nivel de humedad presente.
- Incorporar futuras bases de datos que contengan otros metales adicionales al cobre, como lo es el oro y la plata y establecer cantidad asociadas a contaminantes como lo es el arsénico.
- Incorporar la dinámica del factor optimizante a la modelación de operaciones mineras que estén limitadas por su capacidad de planta concentradora y de mina.

- Incorporar el concepto de que las variables de entradas al problema no sean constantes en función de la dimensión temporal, por ejemplo, el precio del cobre sea dinámico en el tiempo, y no una constante.

BIBLIOGRAFÍA

Asociación Latinoamericana de Zinc. 2011. *Guía para la comercialización de minerales y metales*. Lima : LATIZA, 2011.

Centro de Estudios del Cobre y la Minería. 2020. *Cobre Refinado: Un buen negocio para Chile*. Santiago : CESCO, 2020. pág. 26.

Comisión Chilena del Cobre. 2019. *Anuario de estadísticas del cobre y otros minerales 2000 - 2019*. Santiago : COCHILCO, 2019. Informe técnico económico. 0716-8462.

—. **2021.** *Exportación de concentrados de cobre: caracterización de condiciones comerciales*. COCHILCO. Santiago : Dirección de Estudios y Políticas Públicas, 2021. Informe Técnico Económico. N° 2021-A-4664.

—. **2019.** *Proyección de la producción de cobre en Chile 2019-2030*. Santiago : Dirección de Estudios y Políticas Públicas, 2019. 310805.

Comisión Económica para América Latina. 2019. *Manipulación del precio del comercio internacional de productos del cobre: un análisis de los casos de Chile y el Perú*. Santiago : CEPAL, 2019. Informe Técnico Económico.

Ahmadi, Mohammad Reza. 2018. *Cutoff grade optimization based on maximizing net present value using a computer model*. 68-75, Amsterdam : Journal of Sustainable Mining, Abril de 2018, Journal of Sustainable Mining, Vol. 17.

Gómez, Joan. 2010. *Cuando las curvas se vuelven rectas, Las geometrías no euclideas*. . España : Colecciones, S.A., 2010. ISBN 9788447369676.

Google Inc. 2019. *Google Colaboratory*. [Software] Mountain View : Mountain View, 2019.

Gregorio Freites, José. 2017. *Cursos Geomin web site*. [En línea] Abril de 2017. <https://www.cursosgeomin.com.ve/ley-corte-cutoff-grade/>.

Hustrulid, William, Kuchta, Mark y R., Martin. 2013. *Open Pit Mine Planning & Desing Volume 1 - Fundamentals*. Florida, EE.UU. : Taylor & Francis Group, 2013. 13: 978-1-4822-2117-6.

Kiziryan, Mariam. 2015. *economipedia.com*. [En línea] 28 de abril de 2015. [Citado el: 12 de septiembre de 2021.] <https://economipedia.com/definiciones/economias-de-escala.html>.

Laca, Mariano. 2021. *Python.es.net*. [En línea] 2021. [Citado el: 25 de 08 de 2021.] <https://python.es.net/que-es-python-y-sus-caracteristicas/>.

Lagos, Gustavo. 2016. *Documento del grupo de mercados de concentrados de cobre de la Comisión Presidencial para el futuro de las fundiciones y refinerías de Codelco y Enami*.

Santiago : Pontificia Universidad Católica de Chile, 2016. Informe técnico presentado a la Comisión Presidencial.

Lane, Kenneth. 1988. *The economic definition of ore, cutoff grade in theory and practice.* Londres : Mining Journal Books Limited, 1988.

Maptek Pty. 2016. *Maptek Vulcan 10.0 Workbench.* [Software] Brisbane, Queensland : Brisbane, Queensland, 2016.

Martínez Valdés, María Fernanda. 2020. *Planificación de operaciones para rehabilitación de botaderos de estériles en explotación de carbón en Isla Riesco, Mina Invierno.* Concepción, Chile. : Universidad de Concepción, 2020. pág. 91, Tesis para optar al título de Ingeniera Civil en Minas.

Minería Chilena. 2015. Minería Chilena. [En línea] 11 de 08 de 2015. [Citado el: 09 de 08 de 2021.] <https://www.mch.cl/reportajes/fundiciones-en-chile-una-discusion-necesaria/#>.

Nieto, Antonio y Bascetin, Atac. 2006. *Mining cutoff grade strategy to optimise NPV based on multiyear GRG iterative factor.* 59-64, Amsterdam : Mining Technology, Junio de 2006, Mining Technology, Vol. 115.

Roa, Cintia. 2020. *Proyección de precio de largo plazo del cobre: un enfoque metodológico crítico.* 36-46, Santiago : Journal of Mining Engineering and Research, 2020, Vol. 2.

Python Software Foundation. 2021. *Python 3.9.7.* [Software] 2021.

Rao, Singiresu S. 2009. *Engineering optimization: theory and practice / Singiresu S Rao. 4th ed.* Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, Inc, 2009. ISBN 978-0-470-18352-6.

Rubio, Enrique. 2006. *Block cave mine infrastructure reability applied to produccion planning.* Vancouver, Canada : The University of British Columbia , 2006.

Lechner, Alex Mark, Kassulke, Owen y Unger, Corinne. 2016. *Spatial assessment of open cut coal mining progressive rehabilitation to suport the monitoring of rehabilitation liabilities.* 234-243, Amsterdam : Resources Policy, Diciembre de 2016, Resources Policy, Vol. 50.

Taylor, H. K. 1972. *General background theory of cutoff grades.* s.l. : Institution of Mining and Metallurgy, 1972. A160-179.

Thomas, George. 2010. *Thomas Cálculo Una Variable Décimosegunda edición.* Ciudad de México : Pearson Educación, 2010. 9786073201643.

Vásquez, Alejandro, Galdames, Benjamín y Le-Feaux, René. 2012. *Apunte diseño y operaciones de minas a cielo abieto.* Santiago : Departamento de Ingenieria Civil en Minas, Universidad de Chile, 2012. Apuntes Educativos.

ANEXOS

ANEXO A: MERCADO DEL COBRE

Tabla A.1: Producción Chilena de Cobre (Miles de TM de Cobre Fino) para periodo 2010-2019.

Producto	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Producción Mina Total	5.419	5.263	5.434	5.776	5.761	5.772	5.553	5.504	5.832	5.787
Producción de cátodos SX-EW	2.089	2.025	2.029	1.933	1.844	1.778	1.660	1.586	1.575	1.580
Producción de concentrado mina	3.330	3.238	3.405	3.843	3.917	3.994	3.892	3.917	4.256	4.207
➤ Otros productos Fundición	404	455	469	536	477	472	413	421	360	322
➤ Concentrado (Producto final)	1.771	1.716	2.063	2.485	2.555	2.612	2.527	2.653	3.010	3.196
➤ Producción de cátodos E.R.	1.055	999	873	822	885	910	952	843	886	689
Total, de cátodos E.R. + SX/EW	3.143	3.023	2.902	2.755	2.729	2.688	2.613	2.430	2.461	2.269

Fuente: Elaboración propia, basado de Comisión Chilena del Cobre, 2019.

Tabla A.2: Participación por tipo de producto sobre la producción total Chilena de Cobre, periodo 2010-2019.

Participación por producto vendido	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Cátodos SX-EW	38,5%	38,5%	37,3%	33,5%	32,0%	30,8%	29,9%	28,8%	27,0%	27,3%
Cátodos E.R.	19,5%	19,0%	16,1%	14,2%	15,4%	15,8%	17,1%	15,3%	15,2%	11,9%
Cobre RAF	1,9%	1,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Concentrado de Cobre (producto final)	32,7%	32,6%	38,0%	43,0%	44,3%	45,2%	45,5%	48,2%	51,6%	55,2%
Otros productos fundición	7,5%	8,6%	8,6%	9,3%	8,3%	8,2%	7,4%	7,7%	6,2%	5,6%

Fuente: Elaboración propia, 2021 sobre la base de (Comisión Chilena del Cobre, 2019)

Tabla A.3: Producción Mundial de Cobre de Mina (Miles de TM de Cobre Fino), periodo 2010-2019

Países	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Chile	5.419	5.263	5.434	5.776	5.761	5.772	5.553	5.504	5.832	5.787
Perú	1.247	1.235	1.299	1.376	1.378	1.701	2.354	2.446	2.437	2.455
China	1.180	1.295	1.552	1.681	1.741	1.667	1.851	1.656	1.507	1.601
República del Congo	378	480	608	817	996	1.039	1.024	1.095	1.225	1.433
Estados Unidos	1.110	1.110	1.170	1.240	1.383	1.410	1.431	1.258	1.216	1.285
Australia	870	960	961	1.001	979	996	948	849	913	938
Rusia	703	713	720	725	740	700	685	722	773	773
México	270	444	500	480	527	608	766	742	751	770
Zambia	732	740	700	752	756	725	738	803	857	759
Kazajstán	404	433	491	538	501	566	596	745	621	711
Resto del Mundo	3.805	3.541	3.492	3.829	3.864	4.193	4.427	4.297	4.190	4.158

Fuente: (Comisión Chilena del Cobre, 2019)

Tabla A.4: Importaciones Mundiales de Cobre (Incluye Concentrados de Cobre, Cobre Blíster y Cobre Refinado), por países periodo 2010-2019

Países importadores	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
China	4.938	4.850	5.883	6.356	7.140	7.538	8.600	8.376	9.589	9.814
Japón	1.368	1.282	1.323	1.356	1.374	1.255	1.322	1.236	1.366	1.248
Alemania	1.049	1.091	1.073	1.046	1.009	1.026	1.037	1.063	1.059	914
Corea del Sur	885	842	785	786	813	891	932	809	789	745
Estados Unidos	632	687	654	752	639	686	741	853	793	693
Italia	628	615	584	559	623	623	606	634	554	561
Taiwán	536	461	434	438	465	471	534	584	487	477
España	382	446	425	455	492	500	537	618	619	474
Tailandia	244	231	241	248	259	274	343	364	369	402
Turquía	338	342	352	363	364	387	404	388	364	339
Resto del mundo	3.160	3.046	3.029	3.848	3.033	3.369	3.447	3.964	3.488	3.107

Fuente: (Comisión Chilena del Cobre, 2019)

Tabla A.5: Importaciones de Concentrado de cobre (Miles de TM de Cobre Fino) por países periodo 2010-2019

Países	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
China	1.619	1.598	1.958	2.520	2.965	3.330	4.263	4.333	4.935	5.506
Japón	1.306	1.151	1.283	1.310	1.300	1.214	1.283	1.183	1.313	1.197
Corea del Sur	432	433	421	422	395	442	390	413	455	433
España	307	371	379	394	447	446	470	530	533	373
Alemania	282	284	311	253	296	290	265	313	297	255
India	429	485	481	757	495	424	254	367	263	193
Resto del Mundo	756	723	696	1.061	795	904	846	1.294	1.108	1.001
Total	5.132	5.045	5.528	6.717	6.695	7.050	7.770	8.433	8.903	8.958

Fuente: (Comisión Chilena del Cobre, 2019)

Tabla A.6: Importaciones de Cobre Refinado (Miles de TM de Cobre Fino) por países periodo 2010-2019

Países	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
China	2.920	2.836	3.402	3.206	3.590	3.678	3.629	3.243	3.753	3.550
Estados Unidos	583	649	628	730	614	664	701	820	747	665
Alemania	744	739	706	680	664	685	720	641	666	585
Italia	628	615	584	559	622	622	605	634	554	561
Taiwán	536	461	434	438	465	471	534	584	487	477
Tailandia	244	231	241	248	259	274	343	364	369	402
Turquía	332	337	349	363	364	386	403	388	364	338
Malasia	204	218	209	518	259	353	326	342	301	296
Corea del Sur	414	347	302	298	346	383	404	326	281	244
Francia	227	226	218	230	222	193	220	226	218	217
Resto del Mundo	1.290	1.244	1.258	1.121	1.072	1.251	1.650	1.405	1.361	1.205
Total	8.122	7.902	8.330	8.390	8.476	8.960	9.538	8.972	9.100	8.540

Fuente: (Comisión Chilena del Cobre, 2019)

ANEXO B: DETERMINACIÓN DEL FACTOR “R” PARA BOTADERO DE ESTÉRILES

Tabla B.1: Resultados del cálculo del factor R para botaderos con altura constante de 40 metros

Botadero	Altura total m	Área Base Ha	Área Real Ha	Volumen m3	Tonelaje Mton	Factor R Ha/Mton
botadero 1	40	14,779	15,995	3.441.016	7,226	2,213
botadero 2	40	19,133	20,657	4.813.160	10,108	2,044
botadero 3	40	24,166	25,891	6.287.180	13,203	1,961
botadero 4	40	29,774	31,756	8.093.203	16,996	1,868
botadero 5	40	38,128	40,462	10.785.130	22,649	1,786
botadero 6	40	55,332	58,256	16.412.807	34,467	1,690

Fuente: Elaboración propia, 2021.

Tabla B.2: Resultados del cálculo del factor R para botaderos con altura constante de 50 metros

Botadero	Altura total m	Área Base Ha	Área Real Ha	Volumen m3	Tonelaje Mton	Factor R Ha/Mton
botadero 1	50	19,133	20,967	5.392.040	11,323	1,852
botadero 2	50	26,041	28,239	7.918.196	16,628	1,698
botadero 3	50	33,856	36,487	10.962.084	23,020	1,585
botadero 4	50	42,695	45,740	14.459.397	30,365	1,506
botadero 5	50	52,811	56,304	18.560.772	38,978	1,445
botadero 6	50	67,193	71,249	24.491.776	51,433	1,385

Fuente: Elaboración propia, 2021.

Tabla B.3: Resultados del cálculo del factor R para botaderos con altura constante de 60 metros

Botadero	Altura total m	Área Base Ha	Área Real Ha	Volumen m3	Tonelaje Mton	Factor R Ha/Mton
botadero 1	60	19,256	21,283	5.859.565	12,305	1,730
botadero 2	60	24,145	26,562	7.901.480	16,593	1,601
botadero 3	60	29,762	32,551	10.397.588	21,835	1,491
botadero 4	60	35,936	39,106	13.178.040	27,674	1,413
botadero 5	60	42,682	46,217	16.304.743	34,240	1,350
botadero 6	60	52,574	56,597	20.932.432	43,958	1,288

Fuente: Elaboración propia, 2021.

Tabla B.4: Resultados del cálculo del factor R para botaderos con altura constante de 80 metros

Botadero	Altura total m	Área Base Ha	Área Real Ha	Volumen m3	Tonelaje Mton	Factor R Ha/Mton
botadero 1	80	19,133	21,544	6.233.937	13,091	1,646
botadero 2	80	24,166	27,042	8.661.607	18,189	1,487
botadero 3	80	29,772	33,170	11.665.143	24,497	1,354
botadero 4	80	38,128	42,224	16.318.294	34,268	1,232
botadero 5	80	42,695	47,133	18.927.222	39,747	1,186
botadero 6	80	55,332	60,627	26.409.381	55,460	1,093

Fuente: Elaboración propia, 2021.

ANEXO C: ANÁLISIS ESPECIAL ECONOMÍAS DE ESCALAS

Tabla C.1: Resultados del algoritmo de Lane con economías de escalas, cuando el costo de extracción del mineral es 3,5 y el del estéril es 2

Años	VAN MUSD	beneficio anual MUSD	Ley de Corte en %	ley media en %	Ton de Material Mton	Ton de Mineral Mton	Ton de Producto Kton	Ton de Conc. Kton
1	2.087,47	514,66	0,491	0,991	39,02	15,00	100,00	106,44
2	1.572,81	461,17	0,432	0,914	35,87	15,00	100,00	71,39
3	1.153,56	416,75	0,383	0,849	32,64	15,00	100,00	41,57
4	809,13	380,17	0,340	0,793	29,11	15,00	100,00	15,96
5	523,51	343,38	0,296	0,736	26,21	15,00	97,21	0,00
6	288,97	319,27	0,256	0,697	23,98	15,00	92,02	0,00
7	90,73	160,74	0,214	0,657	12,06	8,21	47,43	0,00

Fuente: Elaboración propia, 2021.

Tabla C.2: Resultados del algoritmo GRG Iterativo con economías de escalas, cuando el costo de extracción del mineral es 3,5 y el del estéril es 2

Años	VAN MUSD	beneficio anual MUSD	Ley de Corte en %	ley media en %	Ton de Material Mton	Ton de Mineral Mton	Ton de Producto Kton	Ton de Conc. Kton
1	2.096,54	523,40	0,501	1,004	39,61	15,00	100,00	112,26
2	1.573,14	469,97	0,442	0,927	36,35	15,00	100,00	77,11
3	1.145,90	421,99	0,389	0,857	33,24	15,00	100,00	45,34
4	797,14	385,54	0,346	0,801	29,57	15,00	100,00	19,65
5	507,49	346,66	0,301	0,742	26,51	15,00	97,91	0,00
6	270,71	321,78	0,260	0,701	24,19	15,00	92,55	0,00
7	70,91	125,63	0,217	0,660	9,42	6,37	36,99	0,00

Fuente: Elaboración propia, 2021.

Tabla C.3: Resultados del algoritmo GRG Multi Año con economías de escalas, cuando el costo de extracción del mineral es 3,5 y el del estéril es 2

Años	VAN MUSD	beneficio anual MUSD	Ley de Corte en %	ley media en %	Ton de Material Mton	Ton de Mineral Mton	Ton de Producto Kton	Ton de Conc. Kton
1	2.190,88	523,31	0,500	1,003	39,57	15,00	100,00	111,96
2	1.667,56	523,31	0,500	1,003	39,57	15,00	100,00	111,96
3	1.191,82	523,31	0,500	1,003	39,57	15,00	100,00	111,96
4	759,33	523,31	0,500	1,003	39,57	15,00	100,00	111,96
5	366,16	523,31	0,500	1,003	39,57	15,00	100,00	111,96
6	8,73	14,06	0,233	0,676	1,05	0,69	4,10	0,00

Fuente: Elaboración propia, 2021.

Tabla C.4: Resultados del algoritmo de Lane con economías de escalas, cuando el costo de extracción del mineral es 3,5 y el del estéril es 1,5

Años	VAN MUSD	beneficio anual MUSD	Ley de Corte en %	ley media en %	Ton de Material Mton	Ton de Mineral Mton	Ton de Producto Kton	Ton de Conc. Kton
1	2.144,89	541,15	0,510	1,012	40,16	15,00	100,00	115,93
2	1.603,74	488,84	0,451	0,938	36,80	15,00	100,00	82,31
3	1.159,34	434,99	0,393	0,863	33,67	15,00	100,00	48,00

Fuente: Elaboración propia, 2021.

Tabla C.4: Resultados del algoritmo de Lane con economías de escalas, cuando el costo de extracción del mineral es 3,5 y el del estéril es 1,5 (Continuación)

Años	VAN MUSD	beneficio anual MUSD	Ley de Corte en %	ley media en %	Ton de Material Mton	Ton de Mineral Mton	Ton de Producto Kton	Ton de Conc. Kton
4	799,85	395,36	0,349	0,804	29,79	15,00	100,00	21,33
5	502,81	353,56	0,303	0,744	26,60	15,00	98,15	0,00
6	261,32	326,39	0,260	0,701	24,19	15,00	92,55	0,00
7	58,66	103,91	0,216	0,659	7,70	5,21	30,25	0,00

Fuente: Elaboración propia, 2021.

Tabla C.5: Resultados del algoritmo GRG Iterativo con economías de escalas, cuando el costo de extracción del mineral es 3,5 y el del estéril es 1,5

Años	VAN MUSD	beneficio anual MUSD	Ley de Corte en %	ley media en %	Ton de Material Mton	Ton de Mineral Mton	Ton de Producto Kton	Ton de Conc. Kton
1	2.144,89	541,15	0,510	1,012	40,16	15,00	100,00	115,93
2	1.603,74	488,84	0,451	0,938	36,80	15,00	100,00	82,31
3	1.159,34	434,99	0,393	0,863	33,67	15,00	100,00	48,00
4	799,85	395,36	0,349	0,804	29,79	15,00	100,00	21,33
5	502,81	353,56	0,303	0,744	26,60	15,00	98,15	0,00
6	261,32	326,39	0,260	0,701	24,19	15,00	92,55	0,00
7	58,66	103,91	0,216	0,659	7,70	5,21	30,25	0,00

Fuente: Elaboración propia, 2021.

Tabla C.6: Resultados del algoritmo GRG Multi Año con economías de escalas, cuando el costo de extracción del mineral es 3,5 y el del estéril es 1,5

Años	VAN MUSD	beneficio anual MUSD	Ley de Corte en %	ley media en %	Ton de Material Mton	Ton de Mineral Mton	Ton de Producto Kton	Ton de Conc. Kton
1	2.242,52	537,37	0,503	1,006	39,74	15,00	100,00	113,15
2	1.705,15	535,60	0,500	1,003	39,57	15,00	100,00	111,96
3	1.218,24	535,60	0,500	1,003	39,57	15,00	100,00	111,96
4	775,60	535,60	0,500	1,003	39,57	15,00	100,00	111,96
5	373,20	535,60	0,500	1,003	39,57	15,00	100,00	111,96
6	7,37	11,88	0,239	0,681	0,88	0,57	3,41	0,00

Fuente: Elaboración propia, 2021.

ANEXO D: ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Tabla D.1: Valores del VAN (MUSD) para el proceso de sensibilidad sobre cada variable económica empleando el algoritmo de Lane.

Variación Porcentual de la variable económica	VAN MUSD Variable: Precio del cobre	VAN MUSD Variable: Tasa de descuento	VAN MUSD Variable: Costo Planta	VAN MUSD Variable: Costo Mina	VAN MUSD Variable: Costo de rehabilitación
-50%	140,194	2.139,337	2.173,068	2.227,805	1.918,799
-40%	471,940	2.083,705	2.117,272	2.163,784	1.918,515
-30%	821,408	2.034,951	2.062,077	2.099,647	1.918,231
-20%	1.183,858	1.988,558	2.010,751	2.039,383	1.917,947
-10%	1.550,842	1.944,287	1.963,483	1.978,381	1.917,663
0%	1.917,379	1.917,379	1.917,379	1.917,379	1.917,379
10%	2.285,504	1.893,595	1.872,338	1.856,380	1.917,096
20%	2.654,480	1.879,369	1.826,013	1.795,290	1.916,812
30%	3.024,578	1.863,438	1.783,310	1.737,988	1.916,528
40%	3.395,294	1.842,079	1.744,137	1.683,011	1.916,244
50%	3.766,274	1.822,570	1.705,917	1.628,309	1.915,961

Fuente: Elaboración propia, 2021.

Tabla D.2: Valores de leyes de corte %, para cada escenario donde se varía el precio del cobre sobre el caso base, usando el algoritmo de Lane

Periodo	Precio Cu: - 50%	Precio Cu: - 40%	Precio Cu: - 30%	Precio Cu: - 20%	Precio Cu: - 10%	Precio Cu: 0%	Precio Cu: 10%	Precio Cu: 20%	Precio Cu: 30%	Precio Cu: 40%	Precio Cu: 50%
Año 1	0,459	0,445	0,437	0,432	0,428	0,425	0,423	0,422	0,420	0,419	0,418
Año 2	0,447	0,417	0,400	0,393	0,388	0,384	0,382	0,379	0,377	0,376	0,375
Año 3	0,435	0,394	0,375	0,364	0,355	0,349	0,345	0,341	0,338	0,336	0,334
Año 4	0,425	0,374	0,348	0,332	0,320	0,312	0,306	0,301	0,298	0,295	0,292
Año 5	0,415	0,354	0,320	0,300	0,287	0,277	0,270	0,264	0,260	0,256	0,253
Año 6	0,405	0,332	0,293	0,269	0,254	0,242	0,233	0,226	0,220	0,215	0,211
Año 7		0,311	0,266	0,238	0,219	0,205	0,194	0,186	0,179	0,173	0,169
Año 8					0,183	0,167	0,155	0,145	0,138	0,131	0,126

Fuente: Elaboración propia, 2021.

Tabla D.3: Valores del VAN (MUSD) para el proceso de sensibilidad sobre cada variable económica empleando el algoritmo GRG Multi Año.

Variación Porcentual de la variable económica	VAN MUSD Variable: Precio del cobre	VAN MUSD Variable: Tasa de descuento	VAN MUSD Variable: Costo Planta	VAN MUSD Variable: Costo Mina	VAN MUSD Variable: Costo de rehabilitación
-50%	199,534	2.225,854	2.245,076	2.325,351	2.038,343
-40%	568,687	2.180,473	2.216,480	2.267,514	2.038,060
-30%	934,907	2.148,294	2.166,697	2.209,887	2.037,809
-20%	1.301,606	2.109,769	2.128,753	2.152,271	2.037,563
-10%	1.668,516	2.072,708	2.082,934	2.094,651	2.037,307
0%	2.037,035	2.037,035	2.037,035	2.037,035	2.037,035

Fuente: Elaboración propia, 2021

Tabla D.3: Valores del VAN (MUSD) para el proceso de sensibilidad sobre cada variable económica empleando el algoritmo GRG Multi Año (Continuación).

Variación Porcentual de la variable económica	VAN MUSD Variable: Precio del cobre	VAN MUSD Variable: Tasa de descuento	VAN MUSD Variable: Costo Planta	VAN MUSD Variable: Costo Mina	VAN MUSD Variable: Costo de rehabilitación
10%	2.411,913	2.002,682	1.994,501	1.979,417	2.036,786
20%	2.773,108	1.970,317	1.953,573	1.921,802	2.036,540
30%	3.151,512	1.939,423	1.912,643	1.864,185	2.036,260
40%	3.528,722	1.909,575	1.871,723	1.806,563	2.036,008
50%	3.833,690	1.881,070	1.830,814	1.748,947	2.035,760

Fuente: Elaboración propia, 2021.

Tabla D.4: Valores de leyes de corte %, para cada escenario donde se varía el precio del cobre sobre el caso base, usando el algoritmo GRG Multi Año.

Periodo	Precio Cu: - 50%	Precio Cu: - 40%	Precio Cu: - 30%	Precio Cu: - 20%	Precio Cu: - 10%	Precio Cu: 0%	Precio Cu: 10%	Precio Cu: 20%	Precio Cu: 30%	Precio Cu: 40%	Precio Cu: 50%
Año 1	0,541	0,506	0,501	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,470
Año 2	0,537	0,503	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,470
Año 3	0,533	0,503	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,253
Año 4	0,529	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,238	0,233	0,229	0,240
Año 5	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,228	0,220	0,227	0,221	0,177	0,227
Año 6		0,500	0,500	0,244	0,229	0,182	0,173	0,177	0,172	0,166	0,175
Año 7								0,165	0,159	0,154	0,163
Año 8											0,150

Fuente: Elaboración propia, 2021.