APÊNDICE C- Exemplo de Ajustamento MMQ

Seja o sistema linear dado por:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1{,}5 \\ x - y = 0{,}2 \end{cases}$$

Neste caso, de 1 grau de liberdade, 3 equações e 2 parâmetros:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, Lo = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$Lb = \begin{bmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} + Lo = \begin{bmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ 0{,}2 \end{bmatrix},$$

Reescrevendo o problema na abordagem MMQ:

$$\begin{cases} x + y = 3 + v_1 \\ 2x - y = 1{,}5 + v_2 \\ x - y = 0{,}2 + v_3 \end{cases}$$

Assim, $V^T = [v_1 v_2 v_3]$

$$La = Lb + V = \begin{bmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = V^T . V = (v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2 = mín$$

Isolando V na expressão do problema e substituindo nesta obtemos:

$$\Phi = (x + y - 3)^2 + (2x - y - 1{,}5)^2 + (x - y - 0{,}2)^2$$

$$\left.\frac{d\Phi}{dX}\right|_{X=Xa} = \begin{bmatrix} d\Phi/dx \\ d\Phi/dy \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(x_a + y_a - 3) + 2(2x_a - y_a - 1{,}5)(2) + 2(x_a - y_a - 0{,}2) \\ 2(x_a + y_a - 3) + 2(2x_a - y_a - 1{,}5)(-1) + 2(x_a - y_a - 0{,}2)(-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12x_a - 4y_a - 12{,}4 \\ -4x_a + 6y_a - 2{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O problema se resumiu a um novo sistema, tal que:

$$\begin{cases} 12x_a - 4y_a - 12{,}4 = 0 \\ -4x_a + 6y_a - 2{,}6 = 0 \end{cases}$$

Que resulta em: $Xa = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.514285 \\ 1.442857 \end{bmatrix}$

Da mesma forma, os mesmos cálculos são feitos matricialmente pelas fórmulas de ajustamento, logo:

$$Xa = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^T . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^T . \begin{bmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.514285 \\ 1.442857 \end{bmatrix}$$

O vetor das observações corrigidas é obtido aplicando estes parâmetros ajustados no problema original:

$$\begin{cases} 1.514285 + 1.442857 = 2.957142 \\ 2(1.514285) - 1.442857 = 1.5857142 \\ 1.514285 - 1.442857 = 0.071428 \end{cases}$$

Novamente os mesmos cálculos são feitos matricialmente pelas fórmulas de ajustamento, logo:

$$La = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1.514285 \\ 1.442857 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.957142 \\ 1.585714 \\ 0.071428 \end{bmatrix}$$

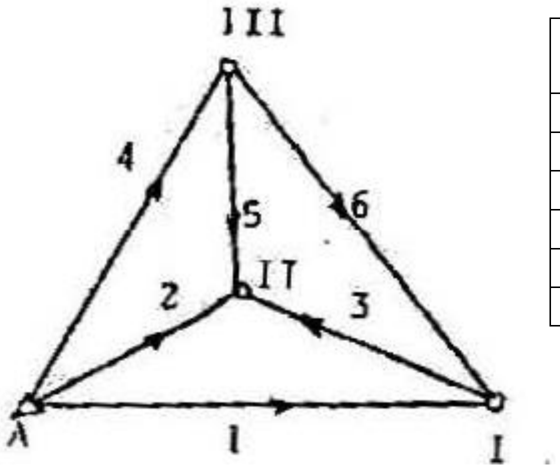
Os resíduos ou erros V, agora podem ser encontrados fazendo a simples subtração entre o vetor de observação Lb e seu valor ajustado La:

$$V = La - Lb = \begin{bmatrix} 2.957142 \\ 1.585714 \\ 0.071428 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.042857 \\ +0.085714 \\ -0.128571 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

O ordem de grandeza do vetor de resíduos relativo às observações é, em muitos casos, o melhor indicativo da qualidade do ajustamento.

APÊNDICE D - Exemplo de rede de nivelamento – Fonte: GEMAEL 2009

Deseja-se estimar h_I, h_{II}, h_{III} . Sabe-se que $h_A = 0m$.



Linha	Desnível (m)	Comprimento da linha (Km)
$l1$	6,16	4
$l2$	12,57	2
$l3$	6,41	2
$l4$	1,09	4
$l5$	11,58	2
$l6$	5,07	4

a) Modelagem funcional paramétrica: $f(Xa) = A.Xa = La = Lb + V$

$$\begin{cases} h_I - h_A = 6{,}16 + v_1 \\ h_{II} - h_A = 12{,}57 + v_2 \\ h_{II} - h_I = 6{,}41 + v_3 \\ h_{III} - h_A = 1{,}09 + v_4 \\ h_{III} - h_{II} = 11{,}58 + v_5 \\ h_I - h_{III} = 5{,}07 + v_6 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ -110 \\ 001 \\ 0-11 \\ 10-1 \end{bmatrix}, Xa = \begin{bmatrix} h_I \\ h_{II} \\ h_{III} \end{bmatrix}, Lo = \begin{bmatrix} -h_A \\ -h_A \\ 0 \\ -h_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [0], Lb = \begin{bmatrix} 6{,}16 \\ 12{,}57 \\ 6{,}41 \\ 1{,}09 \\ 11{,}58 \\ 5{,}07 \end{bmatrix} + Lo \; e \; V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}$$

A solução será então dada pela fórmula:

$$Xa = (A^T.A)^{-1}.A^T.Lb$$

Obtendo-se:

$$Xa = \begin{bmatrix} h_I \\ h_{II} \\ h_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}16 \\ 1{,}065 \\ 12{,}595 \end{bmatrix}$$

Se o peso de cada observação for considerado como o inverso do comprimento de sua respectiva linha, ou seja:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

O resultado considerando a ponderação das observações será dado por:

$$Xa = (A^T.P.A)^{-1}A^T.P.Lb$$

E a solução fica:

$$Xa = \begin{bmatrix} h_I \\ h_{II} \\ h_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}16 \\ 1{,}05 \\ 12{,}59 \end{bmatrix}$$