APÊNDICE H – Demonstração da equação de solução MMQ para problemas de altimetria

O ajustamento só faz sentido se houver observações redundantes, ou seja, o sistema possui equações redundantes. Isso implica que cada ajustamento possui graus de liberdade dado por:

$$gl = n - u \qquad (1)$$

Sendo n é o número de equações e u é o número de parâmetros (incógnitas).
Um sistema de equações **lineares** tem a seguinte forma matricial:

$$_{n}A_{u} \, . \, _{1}X_{u} = _{1}L_{n} \qquad (2)$$

Sendo A a matriz de coeficientes das n equações e u parâmetros, X o vetor das u incógnitas e L o vetor das n observações (medições) acrescido dos termos independentes do sistema.

No caso mais simples em que a matriz dos coeficientes é quadrada, isto é, (n x n), a solução seria imediata e igual a:

$$X = A^{-1}.L \qquad (3)$$

O grande expediente do ajustamento MMQ é a introdução de um vetor de resíduos V(n x 1), no vetor L das n observações. Matricialmente reescreve-se o sistema de equações lineares da seguinte maneira:

$$A.X = Lb \qquad (4)$$

$$A.Xa = La = Lb + V \qquad (5)$$

Onde, Xa é o vetor de incógnitas ajustado, La é o vetor de observações ajustado e Lb é o vetor de observações acrescentado dos termos independentes do sistema.

O segundo grande expediente é realizar o somatório dos quadrados dos erros e tentar minimizá-lo. Matricialmente esta soma é dada por:

$$\Phi = V^{T}.V = mín \qquad (6)$$

Isolando V da expressão do problema em (1) e substituindo nesta obtém-se que:

$$\Phi = (A.Xa - Lb)^{T}.(A.Xa - Lb) = mín$$

Para minimizar uma função temos que derivá-la em relação a cada uma de suas incógnitas e igualá-las a zero:

$$\left.\frac{d\Phi}{dX}\right|_{X=Xa} = 2A^T.A.Xa - 2A^T.Lb = 0 \tag{7}$$

$$Xa = (A^T.A)^{-1}.A^T.Lb \tag{8}$$

Considerando os pesos nas observações:

Se durante as observações for caracterizada alguma diferença de método que implique em baixa (ou alta) confiança da referida medida, então para um ajustamento ainda mais rigoroso, deve-se considerar uma ponderação da importância de cada observação.

Quanto maior for a variância de determinada observação menos influência ela deve exercer sobre o ajustamento das demais observações, ou seja, seu peso deve ser menor.

Assim a matriz de pesos é inversamente proporcional a MVC das observações em m^2 dada por:

$$\sum Lb = \begin{bmatrix} (\sigma_1)^2 & \cdots & \sigma_k.\sigma_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1.\sigma_k & \cdots & (\sigma_k)^2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Informações de pesos são adimensionais, logo a matriz de pesos fica a uma fator de correção de ficar pronta. Este fator de correção é chamado de variância de referência a priori (${\sigma_0}^2$) com sua unidade em m^2. Assim:

$$P = {\sigma_0}^2.(\sum Lb)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{{\sigma_0}^2}{(\sigma_1)^2} & \cdots & \frac{{\sigma_0}^2}{\sigma_k.\sigma_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{{\sigma_0}^2}{\sigma_1.\sigma_k} & \cdots & \frac{{\sigma_0}^2}{(\sigma_k)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1k} & \cdots & w_{kk} \end{bmatrix} \tag{10}$$

GHILANI & WOLF 2007 demonstra a nova solução para o ajustamento considerando cada observação ter um peso.

$$Xa = (A^T.P.A)^{-1}A^T.P.Lb \tag{11}$$

A matriz dos pesos em medidas absolutas não influencia no resultado do ajustamento, ou seja, de modo que não se altere a relação de variância e covariância entre as observações ao multiplicar toda a MVC Lb por uma constante, o resultado do ajustamento considerando os pesos permanece o mesmo. Este é o motivo do fator de variância a priori também ser chamado de peso unitário e ser igualado à unidade (${\sigma_0}^2 = 1$). Na prática a modelagem dos pesos segue critérios do próprio usuário, um exemplo de modelagem para os pesos consta no APÊNDICE E.

A estimativa para a variância da população $\hat{\sigma}_0{}^2$ (fator de variância a posteriori) retirado de GHILANI & WOLF (2007) é:

$$\hat{\sigma}_0{}^2 = \frac{V^T.P.V}{gl} \tag{12}$$