Método de diferencias finitas para la solución de ecuaciones diferenciales parciales

Meza Ruiz Humberto Eduardo

Universidad de Sonora

a218208583@unison.mx

3 de mayo de 2021

Contenido

Resumen

Cuando estudiamos el universo, ya sea que querramos estudiar el movimiento de un objeto, los cambios de temperatura, interacciones de átomos o la luz, etcétera nos topamos con una serie de representaciones matemáticas las cuales están destinadas a representar relaciones de cambio entre las mismas características de lo que estemos estudiando. Por ejemplo, al estudiar el cambio en la temperatura de un cuerpo, tendremos ciertas características en el sistema que estemos estudiando, ya sea la longitud del cuerpo, la misma temperatura, el tiempo que transcurre, entre otros. Pues mediante una ecuación diferencial podemos relacionar el cambio de una de estas características con respecto a las demás, es por ello que, las ecuaciones diferenciales son de vital importancia en casi cualquier área de la ciencia e incluso a veces, fuera de ella.

En esta ocasión, se presentará una breve explicación de lo que es el método de diferencias finitas para resolver ecuaciones diferenciales y se darán unos sencillos ejemplos para esclarecer el texto.

I. Familias de ecuaciones diferenciales parciales.

Las ecuaciones diferenciales parciales involucran dos o más variables, aquellas que en el resumen nombramos vagamente como çaracterísticas del sistema", éstas variables pueden ser por ejemplo coordenadas del espacio o instantes del tiempo.

De forma general, tenemos 3 familias de ecuaciones diferenciales parciales, es posible realizar combinaciones de ellas, pero en principio, las familias principales son tres: Parabólicas, Hiperbólicas y Elípticas.

Por definición, tenemos

La ecuación diferencial lineal parcial de segundo orden

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

donde A, B, C, D, E, F son constantes reales, se dice que es:
parabólica si $B^2 - 4AC = 0$
hiperbólica si $B^2 - 4AC > 0$
elípticas si $B^2 - 4AC < 0$.

II. Condiciones en la frontera.

Es importante notar que, para lograr llegar a las soluciones partículares de estas ecuaciones es necesario imponer condiciones inciales y las llamadas condiciones de frontera, ya que, con ayuda de éstas seremos capaces de obtener los valores de las constantes que se nos arrojan durante la integración de las derivadas. Durante ésta actividad nos centraremos en dos tipos de condiciones en la frontera: *tipo Dirichlet* y *tipo Neumann*.

i. Tipo Dirichlet.

Este tipo de condiciones a la frontera nos da los valores de la función (que sería la solución de la ecuación diferencial en cuestión) en los extremos (frontera) del dominio de la misma para todo tiempo t. Es decir, gracias a estas condiciones conocemos de antemano la forma de la función solución al menos en la frontera y, si se le suma que ya tenemos las condiciones iniciales (al tiempo $t = 0$, tanto de la función como de su derivada) tendríamos ya suficientes condiciones para resolver nuestra ecuación diferencial parcial.

ii. Tipo Neumann.

Las condiciones a la frontera de tipo Neumann son aquellas en las cuales se dan a conocer los valores o la forma de las derivadas de la función solución en los extremos de su dominio (en la frontera), que, junto con las condiciones iniciales ya nombradas anteriormente, forman el conjunto de ecuaciones que nos permitirán obtener la solución partícular de nuestra ecuación diferencial.

Existe además otro tipo de condiciones a la frontera (no abordaremos ejemplos de dicho tipo de condiciones) llamado *tipo Robin*. Este tipo de condiciones es, se podría decir, nada más que la combinación de los dos tipos anteriores, y es que consta de dos ecuaciones que forman una combinación lineal entre la función solución y su derivada, cabe aclarar que debemos tener almenos dos ecuaciones que sean independientes entre sí para formar nuestro grupo de 4 ecuaciones linealmente independientes para obtener la solución partícular.

III. Método de diferencias finitas.

Vamos a encontrar una solución aproximada de un *problema con valores en la frontera de segundo orden*

$$y'' = f(x, y, y'), \;\; y(a) = \alpha, \;\; y(b) = \beta$$

i. Aproximaciones por diferencias finitas.

El desarrollo en serie de Taylor en el punto a de una función $y(x)$ es

$$y(x) = y(a) + y'(a)\frac{x-a}{1!} + y''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots$$

Si se hace $x = h - a$, entonces el renglón anterior es igual a

$$y(x) = y(a) + y'(a)\frac{h}{1!} + y''(a)\frac{h^2}{2!} + \cdots$$

Para el análisis posterior es conveniente volver a escribir la última expresión en las dos formas alternativas:

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} + \cdots \tag{1}$$

$$y(x-h) = y(x) - y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} - \cdots \tag{2}$$

Si h es pequeña podemos despreciar los términos que implican a h^2, h^3,... puesto que estos valores son despreciables. Si se ignoran todos los términos con h^2 y superiores, y resolviendo (1) y (2), respectivamente, para $y'(x)$ se obtienen las aproximaciones siguientes para la primera derivada:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}\left[y(x+h) - y(x)\right] \tag{3}$$

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}\left[y(x) - y(x-h)\right] \tag{4}$$

Restando (1) y (2) también se obtiene

$$y'(x) \approx \frac{1}{2h}\left[y(x+h) - y(x-h)\right] \tag{5}$$

Por otro lado, si se ignoran los términos con h^3 y superiores, entonces al sumar (1) y (2) se obtiene una aproximación de la segunda derivada $y''(x)$:

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left[y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)\right] \tag{6}$$

Los lados derechos de (3), (4), (5) y (6) se llaman *coeficientes de diferencias*. Las expresiones

$$y(x+h) - y(x), \quad y(x) - y(x-h)$$
$$y(x+h) - y(x-h)$$

y

$$y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)$$

se llaman **diferencias finitas**. En partículas, $y(x+h) - y(x)$ recibe el nombre de **diferencia hacia delante**, $y(x) - y(x-h)$ es una **diferencia hacia atrás** y tanto $y(x+h) - y(x-h)$ como $y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)$ se llaman **diferencias centrales**. Los resultados que se presentan en (5) y (6) se llaman **aproximaciones por diferencias centrales** de las derivadas y' y y''.

ii. Método de diferencias finitas.

Ahora considere un problema lineal con valores en la frontera de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x) = f(x) \tag{7}$$
$$y(a) = \alpha, \;\; y(b) = \beta$$

Suponga que $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ representa una partición regular del intervalo $[a, b]$, es decir, $x_i = a + ih$, donde $i = 0, 1, 2, ..., n$ y $h = (b-a)/n$.
Los puntos

$$x_1 = a + h, \;\; x_2 = a + 2h, ..., \;\; x_{n-1} = a + (n-1)h$$

se llaman **puntos de malla interiores** del intervalo $[a, b]$. Si hacemos

$$y_i = y(x_i), \;\; P_i = P(x_i), \;\; Q_i = Q(x_i) \text{ y } f_i = f(x_i)$$

y si y'' y y' en (7) se reemplazan por las aproximaciones de diferencias centrales (5) y (6), se obtiene

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + P_i\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + Q_iy_i = f_i$$

o después de simplificar

$$\left(1 + \frac{h}{2}P_i\right)y_{i+1} + (-2 + h^2Q_i) + \left(1 - \frac{h}{2}P_i\right)y_{i-1} = h^2f_i \tag{8}$$

La ultima ecuación se conoce como **ecuación de diferencias finitas** y es una aproximación a la ecuación diferencial. Permite aproximar la solución $y(x)$ de (7) en los puntos de malla interiores x_1, x_2,...,x_{n-1} del intervalo $[a, b]$. Si i toma los valores 1, 2,...,$n-1$ en (8), se obtienen $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incógnitas y_1, y_2,...,y_{n-1}. Considere que se conocen y_0 y y_n porque son las condiciones prescritas en la frontera $y_0 = y(x_0) = y(a) = \alpha$ y $y_n = y(x_n) = y(b) = \beta$.

IV. Solución de ecuaciones diferenciales parciales.

i. Ecuación de calor.

Conocemos la ecuación de calor como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \nabla^2 u$$

que, para el caso en una dimensión se simplifica a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Ahora, del capítulo anterior, podemos tomar la aproximación finita (6) para reescribir la ecuación de calor como una EDO, obtenemos

$$\frac{du(x,t)}{dt} = \kappa \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

De este modo procedemos a integrar la función resolviendola como una EDO común, para ello, necesitamos una condición inicial

$$u(x,0) = f(x)$$

y condiciones en la frontera, ya sean de tipo Dirichlet como tipo Neumann.

Para el caso en que tengamos condiciones a la frontera de tipo Neumann, tendremos además que realizar una proximación finita para la primer derivada, ya que las condiciones estarán en esos términos. Utilizando la ecuación (5) del capítulo anterior, tenemos

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}$$

que, para el caso en que las condiciones sean igual a cero, tendremos que $u_{n+1} = u_{n-1}$, por lo que nuestra ecuación de diferencias finitas (únicamente para el valor en la frontera) se reduce a

$$\frac{du(x,t)}{dt} = \kappa \frac{2u_{N-1}(t) - 2u_N(t)}{h^2}$$

En el siguiente enlace se muestra una serie de ejemplos de ejercicios para resolver la ecuación de calor por diferencias finitas para diferentes casos: `https://github.com/HumbertoMezaRuiz/FisicaComputacional1/blob/main/Actividad10/Actividad10.ipynb`

ii. Ecuación de onda.

Conocemos la ecuación de onda como

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u(x,y,z,t)$$

que, para una dimensión se reduce a

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

con la aproximación finita (6) obtenemos

$$\frac{u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t-k)}{k^2} = ...$$
$$...c^2 \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

Donde observamos la principal diferencia en que tenemos una aproximación finita para cada grado de libertad de la función u, en principio, esto significa que ahora estamos atacando la ecuación diferencial desde 4 lados, un instante antes y uno después para cada grado de libertad, contando el punto central, que sería el valor en cuestión, podemos representar visualmente esta ecuación como un esténcil de 5 puntos que se mueve sobre la malla descrita en la explicación del método.

Si despejamos el primer término del denominador izquierdo de la ecuación tendremos cómo calcular la función en el avance del tiempo como

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + \frac{c^2k^2}{h^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)$$

(se hizo un cambio de notación para que quepan las ecuaciones, sólo suponemos $u(x,t) = u(jh, nk) = u_j^n$).

Nuestro problema ahora es cómo comenzar el algoritmo, para ello hacemos uso de las condiciones iniciales de donde obtendremos, con la ayuda de la aproximación finita (5) igualada a cero que $u_j^1 = u_j^{-1}$. Así pues, comenzaremos el algoritmo por la frontera como

$$u_j^1 = u_j^0 + \frac{c^2k^2}{2h^2}\left(u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0\right)$$

En el siguiente enlace se muestra una serie de ejemplos de ejercicios para resolver la ecuación de onda por diferencias finitas para diferentes casos: `https://github.com/HumbertoMezaRuiz/FisicaComputacional1/blob/main/Actividad11/Actividad11.ipynb`

iii. Ecuación de Poisson.

En este caso, para ampliar un poco lo que hemos venido viendo vamos a expandir a 2 dimensiones para el caso de la ecuación de Poisson.

$$-\nabla^2 u(x,y,z) = f(x,y,z)$$

Utilizando aproximaciones finitas (6) para cada una de las derivadas parciales de la ecuación obtenemos

$$-\left(\frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{h^2} + \frac{U_j^{n+1} + U_j^{n-1}}{k^2}\right) + 2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)U_j^n = f_j^n$$

Si hacemos $h = k$ queda

$$4U_j^n - U_{j-1}^n - U_j^{n-1} - U_{j+1}^n - U_j^{n+1} = h^2 f_j^n$$

Ahora, los valores j, n nos van a indicar el número de las dimensiones de un sistema matricial de un sistema de ecuaciones, ya que estarán representando la malla sobre la que estamos trabajando y que define nuestro dominio. En el siguiente enlace se muestra con más detalle el desarrollo y se proponen ejercicios: `https://github.com/carloslizarragac/FisicaComputacional1/blob/master/Actividad12.ipynbk`.

Además, en el siguiente enlace se muestran las respuestas a dichos ejercicios propuestos: `https://github.com/HumbertoMezaRuiz/FisicaComputacional1/blob/main/Actividad12/Actividad12.ipynb`.

V. Conclusiones y comentarios del tema con respecto a las clases.

Durante la clase hemos recordado muchos temas vistos en cursos que tomamos con anterioridad e incluso hemos aprendido o reforzado temas que quizá no se vieron como era debido, además de llevarnos la enseñanza de una resolución numérica y práctica en la programación. Hemos visitado diversos sitios web en los cuales ahora sabemos que podemos encontrar información valiosa para nuestro interés como científicos y que serán de gran utilidad como herramienta numérica.

Por parte del profesor, hemos visto un gran desempeño y presencia, por parte del alumnado quizá había mucho qué desear y aún así el profesor mostró un buen desempeño.

El tema de ecuaciones diferenciales parciales es de gran importancia pues practicamente durante todo lo que resta de la carrera y lo que le sigue serán nuestro pan de cada día, por ello, me alegró bastante haber visto este tema y me pareció sumamente interesante.

VI. Bibliografía.

-Denis Zill, 7ma edición. Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera.

-http://computacional1.pbworks.com/w/page/143866344/Actividad%2010%20(2021-1)

-http://computacional1.pbworks.com/w/page/143933082/Actividad%2011%20(2021-1)

-http://computacional1.pbworks.com/w/page/144026874/Actividad%2012%20(2021-1)