МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

НГТУ НЭТИ | Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра прикладной математики

Домашние задание № 1

по дисциплине «Методы оптимизации»

ФУНКЦИОНАЛ. ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

Бригада 3	ЧУЙКИНА КСЕНИЯ
Группа ПМ-13	КУЛУПАЕВ ДАНИЛА
Вариант	АФОНИН АНТОН
	БУДАНЦЕВ ДМИТРИЙ
	ШМОНИН ПАВЕЛ
	ПРИСЯЖНЮК АНДРЕЙ
Преподаватели	ТРАКИМУС ЮРИЙ ВИКТОРОВИЧ

Новосибирск, 2024

ФУНКЦИОНАЛ. БЛИЗОСТЬ КРИВЫХ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИОНАЛА

Установить порядок близости кривых.

1. $y(x) = \frac{\cos nx}{n^2+1}$, где n достаточно велико, и $y_1(x) \equiv 0$ на $[0,\ 2\pi]$.

$$|y(x) - y_1(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n^2+1}\right| \le \frac{1}{n^2+1}$$

На отрезке $[0,\ 2\pi]$ при достаточно большихnвыражение $\frac{1}{n^2+1} \to 0$.

Близость первого порядка:

$$|y'(x) - y_1'(x)| = \left|-\frac{n \sin nx}{n^2+1}\right| \le \frac{n}{n^2+1}$$

На отрезке $[0,\ 2\pi]$ при достаточно большихnвыражение $\frac{n}{n^2+1} \to 0$.

Значит, данные кривые обладают близостью первого порядка.

Близость второго порядка:

$$|y''(x) - y_1''(x)| = \left|-\frac{n^2 \cos nx}{n^2+1}\right| \le \frac{n^2}{n^2+1}$$

На отрезке $[0,\ 2\pi]$ при достаточно большихnвыражение $\frac{n^2}{n^2+1} \to 1$.

Значит, данные кривые не обладают близостью второго порядка.

Ответ: Первый.

2. $y(x) = \frac{\sin x}{n}$, где n достаточно велико, и $y_1(x) \equiv 0$ на $[0,\ \pi]$.

$$|y(x) - y_1(x)| = \left|\frac{\sin x}{n}\right| \le \frac{1}{n}$$

На отрезке $[0,\ \pi]$ при достаточно большихnвыражение $\frac{1}{n} \to 0$.

Близость первого порядка:

$$|y'(x) - y_1'(x)| = \left|\frac{\cos x}{n}\right| \le \frac{1}{n}$$

На отрезке $[0,\ \pi]$ при достаточно большихnвыражение $\frac{1}{n} \to 0$.

Значит, данные кривые обладают близостью первого порядка.

Близость второго порядка:

$$|y''(x) - y_1''(x)| = \left|-\frac{\sin x}{n}\right| \le \frac{1}{n}$$

На отрезке $[0,\ \pi]$ при достаточно большихnвыражение $\frac{1}{n} \to 0$.

Значит, данные кривые обладают близостью второго порядка.

Поскольку функция $\sin x$вместе со всеми своими производными ограниченна на отрезке от $[0,\ \pi]$, то $\left|\left(\frac{\sin x}{n}\right)^{(k)}\right| \leq \frac{1}{n}$ для $\forall k \geq 0$.

Таким образом, данные кривые обладают близостью любого порядка.

Ответ: Близость любого порядка.

3. $y(x) = \sin\frac{x}{n}$, где n достаточно велико, и $y_1(x) \equiv 0$ на $[0,\ 1]$.

$|y(x) - y_1(x)| = \left|\sin\frac{x}{n}\right|$

На отрезке $[0,\ 1]$ при достаточно большихn, $\frac{x}{n} \to 0 => \sin\frac{x}{n} \to 0$.

Близость первого порядка:

$$|y'(x) - y_1'(x)| = \left|\frac{\cos\frac{x}{n}}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$$

На отрезке $[0,\ 1]$ при достаточно большихnвыражение $\frac{1}{n} \to 0$.

Значит, данные кривые обладают близостью первого порядка.

Близость второго порядка:

$$|y''(x) - y_1''(x)| = \left|-\frac{\sin\frac{x}{n}}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

На отрезке $[0,\ 1]$ при достаточно большихnвыражение $\frac{1}{n^2} \to 0$.

Значит, данные кривые обладают близостью второго порядка.

Поскольку при увеличении порядка производной в числителе остается ограниченная гармоническая функция, а в знаменателе увеличивается степень n, то соответственно $\left|\left(\sin\frac{x}{n}\right)^{(k)}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для $\forall k \geq 0$.

Таким образом, кривые обладают близостью любого порядка.

Ответ: Близость любого порядка.

Найти расстояние ρ_0 между кривыми на указанных интервалах.

4. $y(x) = xe^{-x}$, $y_1(x) \equiv 0$ на $[0,2]$.

По определение $\rho_0 = \max|xe^{-x} - 0| = \max(xe^{-x})$при $0 \le x \le 2$.

Пусть $f(x) = xe^{-x}$, тогда:

Рассмотрим производную функции $f(x)$:

$f'(x) = e^{-x}(1 - x)$

Соответственно, $f'(x) = 0$ при $x = 1$.

Подставим найденную точку и граничные точки в функцию $f(x)$:

$$f(0) = 0, \qquad f(1) = \frac{1}{e}, \qquad f(2) = \frac{2}{e^2}$$

Таким образом, при $x = 1$ достигается максимум функции.

Ответ:$\rho_0 = e^{-1}$.

5. $y(x) = \sin 2x$, $y_1(x) = \sin x$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

По определение $\rho_0 = \max|\sin 2x - \sin x|$при $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Пусть $f(x) = \sin 2x - \sin x$, тогда:

Рассмотрим производную функции $f(x)$:

$f'(x) = 2\cos 2x - \cos x$

$2\cos 2x - \cos x = 0$

$2(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos x$

$4\cos^2 x - 2 = \cos x$

$4\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$

$D = 1 + 32 = 33$

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} => x \approx 0.57$$

$f'(x) = 0$ при $x \approx 0.57$.

Подставим найденную точку и граничные точки в функцию $f(x)$:

$$f(0) = 0, \qquad f(0.57) \approx 0.37, \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Получаем, при $x = \frac{\pi}{2}$ достигается максимум функциипо модулю.

Ответ:$\rho_0 = 1$.

6. $y(x) = x,\ y_1(x) = \ln x$ на $[e^{-1}, e]$.

По определению $\rho_0 = \max|x - \ln x|$при $e^{-1} \le x \le e$.

Пусть $f(x) = x - \ln x$, тогда:

Рассмотрим производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$f'(x) = 0$ при $x = 1$.

Подставим найденную точку и граничные точки в функцию $f(x)$:

$$f(e^{-1}) = \frac{1}{e} + 1, \qquad f(1) = 1, \qquad f(e) = e - 1$$

Получаем, при $x = e$ достигается максимум функциипо модулю.

Ответ:$\rho_0 = e - 1$.

7. Найти расстояние ρ_1 между кривыми $y(x) = ln\,x,\ y_1(x) = x$ на $[e^{-1}, e]$.

По определению $\rho_0 = \max|\ln x - x|$при $e^{-1} \le x \le e$.

Пусть $f(x) = \ln x - x$, тогда:

Рассмотрим производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$f'(x) = 0$ при $x = 1$.

Подставим найденную точку и граничные точки в функцию $f(x)$:

$$f(e^{-1}) = -1 - \frac{1}{e}, \qquad f(1) = -1, \qquad f(e) = 1 - e$$

Получаем, при$x = e$ достигается максимум функциипо модулю.

$\rho_0 = e - 1$

По определению $\rho_1 = \max\limits_{0 \le k \le 1} \max|y'(x) - y_1'(x)|$при $e^{-1} \le x \le e$.

$$\rho_1 = \max\left|\frac{1}{x} - 1\right|$$

Пусть $g(x) = \frac{1}{x} - 1$, тогда:

Рассмотрим производную функции $g(x)$:

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Подставим граничные точки в функцию $g(x)$:

$$g(e^{-1}) = e - 1, \qquad g(e) = \frac{1}{e} - 1$$

Получаем, при $x = e^{-1}$ достигается максимум функцииипо модулю.

$\rho_1 = e - 1$

Так как $\rho_0 = \rho_1$, то $\rho_1 = e - 1$.

Ответ:$\rho_1 = e - 1$.

8. Найти расстояние ρ_2 между $y(x) = x,\ y_1(x) = -\cos x$ на $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

По определению $\rho_0 = \max|x + \cos x| = \max(x + \cos x)$при 0$\leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

Пусть $f(x) = x + \cos x$, тогда:

Рассмотрим производную функции $f(x)$:

$f'(x) = \sin x$

$f'(x) = 0$ при $x = 0$.

Подставим найденную точку и граничные точки в функцию $f(x)$:

$$f(0) = 1, \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}$$

Получаем, при $x = \frac{\pi}{3}$ достигается максимум функции.

$$\rho_0 = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}$$

По определению $\rho_1 = \max\limits_{0\leq k\leq 1} \max|y'(x) - y_1'(x)|$при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

$\rho_1 = \max|-\sin x| = \max(\sin x)$

Пусть $g(x) = \sin x$, тогда:

Рассмотрим производную функции $g(x)$:

$g'(x) = \cos x$

Подставим граничные точки в функцию $g(x)$:

$$g(0) = 0, \qquad g\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 0.87$$

Получаем, при $x = \frac{\pi}{3}$ достигается максимум функции.

$\rho_1 \approx 0.87$

По определению $\rho_2 = \max|y''(x) - y_1''(x)|$при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

$\rho_2 = \max|-\cos x| = \max(\cos x)$

Пусть $f(x) = \cos x$, тогда:

Рассмотрим производную функции $f(x)$:

$f'(x) = -\sin x$

$f'(x) = 0$ при $x = 0$.

Подставим найденную точку и граничные точки в функцию $f(x)$:

$f(0) = 1, \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Получаем, при $x = 0$ достигается максимум функции.

$\rho_2 = 1$

Так как $\rho_0 > \rho_2 > \rho_1$, то $\rho_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}$

Ответ:$\rho_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}$.

9. Найти расстояние ρ_{1001} между кривыми $y(x) = e^x, y_1(x) = x$ на $[0,1]$.

По определению $\rho_0 = \max|e^x - x|$при 0$\leq x \leq 1$.

Пусть $f(x) = e^x - x$, тогда:

Рассмотрим производную функции $f(x)$:

$f'(x) = e^x - 1$

$f'(x) = 0$ при $x = 0$.

Подставим найденную точку и граничные точки в функцию $f(x)$:

$f(0) = 1, \qquad f(1) = e - 1$

Получаем, при $x = 1$ достигается максимум функцииипо модулю.

$\rho_0 = e - 1$

По определению $\max\limits_{0\leq k\leq 1} \max|y'(x) - y_1'(x)|$при $0 \leq x \leq 1$.

$\rho_1 = \max|e^x - 1|$

Пусть $g(x) = e^x - 1$, тогда:

Рассмотрим производную функции $g(x)$:

$g'(x) = e^x$

Подставим граничные точки в функцию $g(x)$:

$g(0) = 0, \qquad g(1) = e - 1$

Получаем, при $x = 1$ достигается максимум функцииипо модулю.

$\rho_1 = e - 1$

По определению $\rho_2 = \max|y''(x) - y_1''(x)|$при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

$\rho_2 = \max|e^x| = \max(e^x)$

Пусть $f(x) = e^x$, рассмотрим производную функции $f(x)$:

$f'(x) = e^x$

Подставим найденную точку и граничные точки в функцию $f(x)$:

$f(0) = 1, \qquad f(1) = e$

Получаем, при $x = 1$ достигается максимум функции.

$\rho_2 = e$

Поскольку $(e^x)^{(k)} = e^x$, то последующие$\rho_k = p_2, \;\; k \geq 2$

Так $\rho_k > p_1 > p_0$, при $k \geq 2$. Значит, $p_{1001} = e$.

Ответ:$\rho_{1001} = e$.

Исследовать на непрерывность следующие функционалы в окрестности прямой $y = 0$: а) в ее сильной окрестности; б) в ее слабой окрестности.

10. $V[y] = \int_0^{\pi} {y'}^2 dx$

а) Зададим $\varepsilon = \frac{1}{4}$ и выберем кривые сравнения $y_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, то

$$\rho_0\left(\frac{\sin nx}{n}, 0\right) = \max\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad x \in [0,\pi]$$

$$|V[y_n] - V[0]| = \int_0^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2nx)dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2nx}{4n}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} > \frac{1}{4}$$

Кривые$y_n(x)$в смысле близости нулевого порядка стремятся к $y = 0$:

$\rho_0\left(\frac{\sin nx}{n}, 0\right) = \max\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \to 0, n \to \infty$, но в то же время $|V[y_n] - V[0]| \nrightarrow 0, n \to \infty$.

Следовательно, функционал разрывный на прямой $y = 0$в ее сильной окрестности.

б) Рассмотрим любую последовательность функций $y_n(x) \in C^1[0,\pi]$, стремящуюся к $y = 0$ при $n \to \infty$ в ее слабой окрестности:

Значит $\rho_1(y_n(x), 0) \leq \max|y_n(x)| + \max|y_n'(x)| \to 0, n \to \infty,\;\; x \in [0,\pi]$.

Отсюда следует, что

$$\max|y_n'(x)| \to 0, n \to \infty => \max\left|{y_n'}^2(x)\right| \to 0, \qquad n \to \infty, \qquad x \in [0,\pi]$$

$$|V[y_n] - V[0]| = \int_0^{\pi}\left|{y'}^2\right|dx \to 0, \qquad n \to \infty, \qquad x \in [0,\pi]$$

Следовательно, функционал непрерывен на $y = 0$ в ее слабой окрестности.

Ответ: а) разрывный; б) непрерывный.

11. $V[y] = \int_1^2 |y'|dx$

а) Зададим $\varepsilon = \frac{1}{4}$ и выберем кривые сравнения $y_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, то

$$\rho_0\left(\frac{\sin nx}{n}, 0\right) = \max\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \le \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad x \in [1,2]$$

$$|V[y_n] - V[0]| = \int_1^2 |\cos nx| dx \ge \int_1^2 \cos^2 nx\, dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2nx}{4n}\right)\Big|_1^2$$

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2nx}{4n}\right)\Big|_1^2 = 1 + \frac{\sin 4n}{4n} - \frac{1}{2} - \frac{\sin 2n}{4n} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

Кривые $y_n(x)$ в смысле близости нулевого порядка стремятся к $y = 0$:

$\rho_0\left(\frac{\sin nx}{n}, 0\right) = \max\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \to 0, n \to \infty$, но в то же время $|V[y_n] - V[0]| \nrightarrow 0, n \to \infty$.

Следовательно, функционал разрывный на прямой $y = 0$ в ее сильной окрестности.

б) Рассмотрим любую последовательность функций $y_n(x) \in C^1[1,2]$, стремящуюся к $y = 0$ при $n \to \infty$ в ее слабой окрестности:

Значит $\rho_1(y_n(x), 0) \le \max|y_n(x)| + \max|y_n'(x)| \to 0, n \to \infty,\ x \in [1,2]$.

Отсюда следует, что

$$\max|y_n'(x)| \to 0, \qquad n \to \infty, \qquad x \in [1,2]$$

$$|V[y_n] - V[0]| = \int_1^2 |y'|dx \to 0, \qquad n \to \infty$$

Следовательно, функционал непрерывен на $y = 0$ в ее слабой окрестности.

Ответ: а) разрывный; б) непрерывный.

12. $V[y] = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + y'^2} dx$

а) Зададим $\varepsilon = \frac{1}{4}$ и выберем кривые сравнения $y_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, то

$$\rho_0\left(\frac{\sin nx}{n}, 0\right) = \max\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \le \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad x \in [0,\pi]$$

$$\left|V[y_n] - V[0]\right| = \left|\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \left(\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)'\right)^2} - 1 dx\right| = \left|\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2(nx)} - 1 dx\right| =$$

$$= \left[2\cos^4\left(\frac{nx}{2}\right) = 1 + \cos^2(nx)\right] = \left|\sqrt{2}\int_0^{\pi} \cos^2\left(\frac{nx}{2}\right) dx - \pi\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi} 1 + \cos(nx) dx - \pi\right| =$$

$$= \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\pi - \pi\right| = \pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) > \frac{1}{4}$$

б) Рассмотрим любую последовательность функций $y_n(x) \in C^1[0,\pi]$, стремящуюся к $y = 0$ при $n \to \infty$ в ее слабой окрестности. Это означает, что $\rho_1(y_n(x), 0) \le \max|y_n(x)| + \max|y_n'(x)| \to 0, n \to \infty,\ x \in [0,\pi]$.

Следовательно,

$\max|y_n'(x)| \to 0, \qquad n \to \infty, \qquad x \in [0,\pi]$

$\max\left|y_n'^2(x)\right| \to 0, \qquad n \to \infty, \qquad x \in [0,\pi]$

$\max\left|1 + y_n'^2(x)\right| \to 1, \qquad n \to \infty, \qquad x \in [0,\pi]$

$\max\left|\sqrt{1 + y_n'^2(x)}\right| \to 1, \qquad n \to \infty, \qquad x \in [0,\pi]$

$$|V[y_n] - V[0]| = \left|\int_0^{\pi} \sqrt{1 + y_n'^2(x)} dx - \int_0^{\pi} \sqrt{1} dx\right| \to \pi - \pi = 0, \qquad n \to \infty$$

Функционал непрерывен на $y = 0$ в ее слабой окрестности.

Ответ: а) разрывный; б) непрерывный.

13. $V[y] = \int_0^{\pi} (1 + 2y'^2) dx$

а) Зададим $\varepsilon = \frac{1}{4}$ и выберем кривые сравнения $y_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, то

$$\rho_0\left(\frac{\sin nx}{n}, 0\right) = \max\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \le \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad x \in [0,\pi]$$

$$|V[y_n] - V[0]| = \left|\int_0^{\pi} \left(1 + 2\left(\frac{\sin nx}{n}\right)'^2\right) dx - \int_0^{\pi} dx\right| =$$

$$= \left|\int_0^{\pi} (1 + 2\cos^2 nx) dx - \int_0^{\pi} dx\right| = \left|\int_0^{\pi} (1 + 2\cos^2 nx - 1) dx\right| =$$

$$= \left| \int_0^{\pi} 2\cos^2 nx\, dx \right| = 2\int_0^{\pi} \cos^2 nx\, dx = 2\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2nx}{4n}\right)\Big|_0^{\pi} = \pi$$

б) Рассмотрим любую последовательность функций $y_n(x) \in C^1[0,\pi]$, стремящуюся к $y = 0$ при $n \to \infty$ в ее слабой окрестности. Это означает, что $\rho_1(y_n(x), 0) \leq \max|y_n(x)| + \max|y_n'(x)| \to 0, n \to \infty,\ x \in [0,\pi]$.

Следовательно,

$\max|y_n'(x)| \to 0, \qquad n \to \infty, \qquad x \in [0,\pi]$

$\max\left|2{y_n'}^2(x)\right| \to 0, \qquad n \to \infty, \qquad x \in [0,\pi]$

$\max\left|1 + 2{y_n'}^2(x)\right| \to 1, \qquad n \to \infty, \qquad x \in [0,\pi]$

$$|V[y_n] - V[0]| = \left| \int_0^{\pi} \left(1 + 2{y_n'}^2(x)\right) dx - \int_0^{\pi} dx \right| = \left| \int_0^{\pi} 2{y_n'}^2(x) dx \right| \to 0, \qquad n \to \infty$$

Функционал непрерывен на $y = 0$ в ее слабой окрестности.

Ответ: а) разрывный; б) непрерывный.

ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИОНАЛА. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

1. Найти ΔV, если $V[y] = \int_0^1 yy'dx$, $y(x) = e^x, y_1(x) = 1$.

$$\Delta V = V[1] - V[e^x] = \int_0^1 1 * 0 * dx - \int_0^1 e^x * e^x * dx = -\int_0^1 e^{2x}dx = -\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - e^2)$$

Ответ:$\Delta V = \frac{1-e^2}{2}$.

Найти вариацию функционалов.

2. $V[y] = \int_a^b yy'dx$

$$V[y] = \int_a^b yy'dx => F(x, y, y') = yy'$$

Согласно второму определению вариации

$$\delta V = \left[\frac{d}{d\alpha}\int_a^b F(x, y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y')dx\right]\Big|_{\alpha = 0}$$

$$\delta V = \left[\int_a^b \left(\delta y\left(y' + \alpha\delta y'\right) + \left(y + \alpha\delta y\right)\delta y'\right)dx\right]\Big|_{\alpha=0} = \int_a^b \left(y'\delta y + y\delta y'\right)dx$$

$$\delta V = \int_a^b (y'\delta y + y\delta y')dx$$

Ответ:$\delta V = \int_a^b (y'\delta y + y\delta y')dx$.

3. $V[y] = \int_a^b (x + y)dx$

$$V[y] = \int_a^b (x + y)dx => F(x, y, y') = x + y$$

Согласно второму определению вариации

$$\delta V = \left[\frac{d}{d\alpha}\int_a^b F(x, y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y')dx\right]\Big|_{\alpha = 0}$$

$$\delta V = \left[\frac{d}{d\alpha}\int_a^b (x + y + \alpha\delta y)dx\right]\Big|_{\alpha = 0} = \left[\int_a^b \frac{d}{d\alpha}(x + y + \alpha\delta y)dx\right]\Big|_{\alpha = 0} =$$

$$= \left[\int_a^b \delta y dx\right]\Big|_{\alpha = 0} = \int_a^b \delta y dx$$

Ответ:$\delta V = \int_a^b \delta y dx.$

4. $V[y] = \int_a^b \left(y^2 - y'^2\right) dx$

$$V[y] = \int_a^b \left(y^2 - y'^2\right) dx => F(x, y, y') = y^2 - y'^2$$

Согласно второму определению вариации

$$\delta V = \left[\frac{d}{d\alpha}\int_a^b F(x, y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y')dx\right]\Big|_{\alpha = 0}$$

$$F(x, y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y') = (y + \alpha\delta y)^2 - (y' + \alpha\delta y')^2$$

$$\delta V = \left[\frac{d}{d\alpha}\int_a^b ((y + \alpha\delta y)^2 - (y' + \alpha\delta y')^2)dx\right]\Big|_{\alpha = 0} =$$

$$= \left[\int_a^b \frac{d}{d\alpha}((y + \alpha\delta y)^2 - (y' + \alpha\delta y')^2)dx\right]\Big|_{\alpha = 0} =$$

$$= \left[\int_a^b (2(y + \alpha\delta y)\delta y - 2(y' + \alpha\delta y')\delta y')dx\right]\Big|_{\alpha = 0} =$$

$$= 2\int_a^b (y\delta y - y'\delta y')dx$$

Ответ:$\delta V = 2\int_a^b (y\delta y - y'\delta y')dx.$

5. $V[y] = y^2(0) + \int_0^1 (xy + y'^2)dx$

$$V[y] = y^2(0) + \int_0^1 (xy + y'^2)dx => F(x, y, y') = xy + y'^2$$

Согласно второму определению вариации

$$\delta V = \left[\frac{d}{d\alpha}V[y(x) + \alpha\delta y(x)]\right]\Big|_{\alpha = 0}$$

$$V[y(x) + \alpha\delta y(x)] = \left(y(0) + \alpha\delta y(0)\right)^2 + \int_0^1 \left(x(y + \alpha\delta y) + (y + \alpha\delta y)'^2\right)dx$$

$$\left[\frac{d}{d\alpha}\left(\left(y(0) + \alpha\delta y(0)\right)^2 + \int_0^1 \left(x(y + \alpha\delta y) + (y + \alpha\delta y)'^2\right)dx\right)\right]\Big|_{\alpha = 0} =$$

$$= \left[\left(2\left(y(0) + \alpha\delta y(0)\right)\delta y(0) + \int_0^1 (x\delta y + 2\delta y')dx\right)\right]\Big|_{\alpha = 0} =$$

$$= 2y(0)\delta y(0) + \int_0^1 (x\delta y + 2y'\delta y')dx$$

Ответ:$\delta V = 2y(0)\delta y(0) + \int_0^1 (x\delta y + 2y'\delta y')dx.$

6. $V[y] = \int_0^{\pi} y' \sin y \, dx$

$$V[y] = \int_0^{\pi} y' \sin y \, dx => F(x, y, y') = y' \sin y$$

Согласно второму определению вариации

$$\delta V = \left[\frac{d}{d\alpha} V[y(x) + \alpha\delta y(x)]\right]\Big|_{\alpha = 0}$$

$$V[y(x) + \alpha\delta y(x)] = \int_0^{\pi} (y + \alpha\delta y)' \sin(y + \alpha\delta y) \, dx$$

$$\left[\frac{d}{d\alpha} \int_0^{\pi} (y + \alpha\delta y)' \sin(y + \alpha\delta y) \, dx\right]\Big|_{\alpha = 0} =$$

$$= \left[\int_0^{\pi} \frac{d}{d\alpha} (y' + \alpha\delta y') \sin(y + \alpha\delta y) \, dx\right]\Big|_{\alpha = 0} =$$

$$= \left[\int_0^{\pi} (\sin(y + \alpha\delta y) \, \delta y' + (y' + \alpha\delta y') \cos(y + \alpha\delta y) \, \delta y) dx\right]\Big|_{\alpha = 0} =$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin(y) \, \delta y' + y' \cos(y) \, \delta y) dx$$

Ответ:$\delta V = \int_0^{\pi} (y' \cos(y) \, \delta y + \sin(y) \, \delta y') dx$.

ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

Найти экстремали функционалов.

1. $V[y] = \int_{x_0}^{x_1}\left({y'}^2 + 2yy' - 16y^2\right)dx$

$$V[y] = \int_{x_0}^{x_1}\left({y'}^2 + 2yy' - 16y^2\right)dx => F = {y'}^2 + 2yy' - 16y^2$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

Подставим F:

$$2y' - 32y - \frac{d}{dx}(2y' + 2y) = 0$$

$$2y' - 32y - 2y'' - 2y' = 0$$

$$y'' + 16y = 0$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Ищем решение в виде $y = e^{px}$

$$p^2e^{px} + 16e^{px} = 0$$

$$e^{px}(p^2 + 16) = 0 => p^2 + 16 = 0 => p^2 = -16$$

$$p = \pm 4i$$

Общее решение имеет вид:

$$y = C_1e^{4ix} + C_2e^{-4ix} = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x$$

Ответ: $y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x$.

2. $V[y] = \int_{x_0}^{x_1} y'(1 + x^2y')dx$

$$V[y] = \int_{x_0}^{x_1} y'(1 + x^2y')dx => F = y'(1 + x^2y')$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

Подставим F:

$$-\frac{d}{dx}(1 + 2x^2y') = 0$$

$$1 + 2x^2y' = C$$

$$y' = \frac{C-1}{2}x^{-2} = C_1x^{-2}$$

$$y = -C_1x^{-1} + C_2 = \widetilde{C_1}x^{-1} + C_2$$

Общее решение имеет вид:

$$y = -C_1 x^{-1} + C_2 = \widetilde{C_1} x^{-1} + C_2$$

Ответ:$y = \widetilde{C_1} x^{-1} + C_2$.

3. $V[y] = \int_{x_0}^{x_1} y'(x + y')dx$

$$V[y] = \int_{x_0}^{x_1} y'(x + y')dx => F = y'(x + y')$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

Подставим F:

$$-\frac{d}{dx}(x + 2y') = 0$$

$$x + 2y' = C$$

$$y' = \frac{C - x}{2} = C_1 - \frac{x}{2}$$

$$y = C_1 x - \frac{x^2}{4} + C_2$$

Общее решение имеет вид:

$$y = C_1 x - \frac{x^2}{4} + C_2$$

Ответ:$y = C_1 x - \frac{x^2}{4} + C_2$.

4. $V[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{y'^2}{x^3} dx$

$$V[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{y'^2}{x^3} dx => F = \frac{y'^2}{x^3}$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

Подставим F:

$$F_{y'} = \frac{2y'}{x^3}$$

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{2y'}{x^3}\right) = 0$$

$$\frac{2y'}{x^3} = C$$

$$y' = \frac{Cx^3}{2} = C_1x^3$$

$$y = \frac{C_1x^4}{4} + C_2 = \widetilde{C_1}x^4 + C_2$$

Общее решение имеет вид:

$$y = \widetilde{C_1}x^4 + C_2$$

Ответ: $y = \widetilde{C_1}x^4 + C_2$.

Найти экстремали в вариационных задачах.

5. $V[y] = \int_{-1}^{0}(12xy - y'^2)dx$, $y(-1) = 1$, $y(0) = 0$

$$V[y] = \int_{-1}^{0}(12xy - y'^2)dx => F = 12xy - y'^2$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

Подставим F:

$$F_y = 12x, \qquad F_{y'} = -2y'$$

$$12x - \frac{d}{dx}(-2y') = 0$$

$$12x + 2y'' = 0$$

$$y'' = -6x$$

$$y' = -3x^2 + C_1$$

$$y = -x^3 + C_1x + C_2$$

Общее решение имеет вид:

$$y = -x^3 + C_1x + C_2$$

Подставим краевые условия:

$$y(-1) = 1 - C_1 + C_2 = 1 => C_2 - C_1 = 0$$

$$y(0) = C_2 = 0 => C_1 = 0$$

Ответ: $y = -x^3$.

6. $V[y] = \int_1^2 (y'^2 + 2yy' + y^2)dx$, $y(1) = 1$, $y(2) = 0$

$$V[y] = \int_1^2 (y'^2 + 2yy' + y^2)dx => F = y'^2 + 2yy' + y^2$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

Подставим F:

$$F_y = 2y' + 2y, \qquad F_{y'} = 2y' + 2y$$

$$2y' + 2y - \frac{d}{dx}(2y' + 2y) = 0$$

$$2y' + 2y - 2y'' - 2y' = 0$$

$$y - y'' = 0$$

$$y'' - y = 0$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка.

Ищем решение в виде $y = e^{px}$

$$p^2 e^{px} - e^{px} = 0$$

$$e^{px}(p^2 - 1) = 0 => p^2 - 1 = 0 => p^2 = 1$$

$$p = \pm 1$$

Общее решение имеет вид:

$$y = Ce^{\pm x} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Подставим краевые условия:

$$y(1) = C_1 e + C_2 e^{-1} = 1 => C_1 = e^{-1} - C_2 e^{-2}$$

$$y(2) = C_1 e^2 + C_2 e^{-2} = 0 => (e^{-1} - C_2 e^{-2})e^2 + C_2 e^{-2} = 0 =>$$

$$=> e - C_2 + C_2 e^{-2} = 0 => C_2(e^{-2} - 1) = -e => C_2 = \frac{e}{1 - e^{-2}} = -\frac{e^3}{e^2 - 1}$$

$$C_1 = e^{-1} - \frac{e}{e^2 - 1} = \frac{e^2 - 1 - e^2}{e(e^2 - 1)} = -\frac{1}{e^3 - e}$$

$$y = \frac{-e^{3-x} - e^{x-1}}{e^2 - 1} = -\frac{e^{-1}}{e^{-1}} \frac{e^{3-x} + e^{x-1}}{e^2 - 1} = \frac{2(e^{x-2} + e^{2-x})}{2(e^{-1} - e^1)} = \frac{2}{(e^{-1} - e^1)} \frac{(e^{x-2} + e^{2-x})}{2}$$

Ответ: $y = \frac{sh(2-x)}{sh(1)}$.

7. $V[y] = \int_0^1 (yy'^2) dx,\ y(0) = 1,\ y(1) = \sqrt[3]{4}$

$$V[y] = \int_0^1 (yy'^2) dx \Rightarrow F = yy'^2$$

В этом случае уравнение Эйлера:

$$F_y - F_{yy'} * y' - F_{y'y''} y'' = 0$$

$$F - y' * F_{y'} = C$$

$$F_{y'} = 2yy'$$

$$yy'^2 - 2y'^2 y = C$$

$$-y'^2 y = C$$

$$y' = \pm\sqrt{\frac{C_1}{y}} = \frac{\widetilde{C_1}}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{dy}{dx}\sqrt{y} = \widetilde{C_1}$$

Будем решать методом разделенных переменных.

$$\sqrt{y} dy = \widetilde{C_1} dx$$

$$\int \sqrt{y} dy = \int \widetilde{C_1} dx$$

$$\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = \widetilde{C_1} x + C_2$$

$$y^{\frac{3}{2}} = \widetilde{\widetilde{C_1}} x + \widetilde{C_2}$$

Общее решение имеет вид:

$$y = \sqrt[\frac{2}{3}]{\widetilde{\widetilde{C_1}} x + \widetilde{C_2}}$$

Подставим краевые условия:

$$y(0) = \sqrt[\frac{2}{3}]{\widetilde{C_2}} = 1 \Rightarrow \widetilde{C_2} = 1$$

$$y(1) = \sqrt[\frac{2}{3}]{\widetilde{\widetilde{C_1}} + 1} = \sqrt[3]{4} \Rightarrow \left(\widetilde{\widetilde{C_1}} + 1\right)^2 = 4 \Rightarrow \widetilde{\widetilde{C_1}} = 1 \text{ или } \widetilde{\widetilde{C_1}} = -3$$

Ответ: $y = \sqrt[3]{(x+1)^2},\ y = \sqrt[3]{(3x-1)^2}.$

8. $V[y] = \int_0^{\pi}\left(4y\cos x + y'^2 - y^2\right)dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$

$$V[y] = \int_0^{\pi}\left(4y\cos x + y'^2 - y^2\right)dx \Rightarrow F = 4y\cos x + y'^2 - y^2$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

Так:

$$F_y = 4\cos x - 2y, \qquad F_{y'} = 2y'$$

$$4\cos x - 2y - \frac{d}{dx}(2y') = 0$$

$$4\cos x - 2y - 2y'' = 0$$

$$y'' + y = 2\cos x$$

1) $y'' + y = 0$

$$y = e^{px}$$

$$p^2e^{px} + e^{px} = 0 \Rightarrow p^2 + 1 = 0 \Rightarrow p = \pm i$$

$$y = e^{\pm i} = C_1\cos x + C_2\sin x$$

2) $y_ч = x(A\cos x + B\sin x)$

$$y_ч'' = -Ax\cos x - 2A\sin x + 2B\cos x - Bx\sin x$$

$$-Ax\cos x - 2A\sin x + 2B\cos x - Bx\sin x + xA\cos x + xB\sin x = 2\cos x$$

$$-A\sin x + B\cos x = \cos x$$

$$B = 1$$

$$A = 0$$

$$y_ч = x\sin x$$

Общее решение имеет вид:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x$$

Подставим краевые условия:

$$y(0) = C_1 = 0$$

$$y(\pi) = C_2\sin\pi + \pi\sin\pi = 0$$

Ответ: $y = (C_2 + x)\sin x$.

9. $V[y] = \int_0^1 \left(y'^2 - y^2 - y\right)e^{2x}dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = e^{-1}$

$$V[y] = \int_0^1 \left(y'^2 - y^2 - y\right)e^{2x}dx => F = \left(y'^2 - y^2 - y\right)e^{2x}$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

$$F_y = e^{2x}(-2y - 1), \qquad F_{y'} = 2e^{2x}y'$$

$$e^{2x}(-2y - 1) - \frac{d}{dx}(2e^{2x}y') = 0$$

$$e^{2x}(-2y - 1) - e^{2x}(4y' + 2y'') = 0$$

$$-2y - 1 - 4y' - 2y'' = 0$$

1) $2y + 4y' + 2y'' = 0$

$$y = e^{px}$$

$$2e^{px} + 4pe^{px} + 2p^2e^{px} = 0 => p^2 + 2p + 1 = 0 => p = -1$$

$$y = Ce^{-x}$$

2) $y = C(x)e^{-x}$

$$y' = C'e^{-x} - Ce^{-x}$$

$$y'' = C''e^{-x} - C'e^{-x} - C'e^{-x} + Ce^{-x}$$

$$-1 - 2C''e^{-x} = 0$$

$$C''e^{-x} = -\frac{1}{2}$$

$$C'' = -\frac{e^x}{2} => C' = -\frac{1}{2}e^x + A => C = -\frac{1}{2}e^x + Ax + B$$

Общее решение имеет вид:

$$y = \left(-\frac{1}{2}e^x + Ax + B\right)e^{-x}$$

Подставим краевые условия:

$$y(0) = -\frac{1}{2} + B = 0 => B = \frac{1}{2}$$

$$y(1) = \frac{\left(-\frac{1}{2}e + A + \frac{1}{2}\right)}{e} = e^{-1} => -\frac{1}{2}e + A + \frac{1}{2} = 1 => A = 1 + \frac{e}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e+1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}(-e^x + (e+1)x + 1)e^{-x} = \frac{1}{2}(e^{-x}(ex + x + 1) - 1)$$

Ответ: $y = \frac{1}{2}(e^{-x}(ex + x + 1) - 1)$.

10. $V[y] = \int_{-1}^{1} \left(y'^2 - 2xy\right) dx\,,\ y(-1) = -1,\ y(1) = 1$

$$V[y] = \int_{-1}^{1} \left(y'^2 - 2xy\right) dx => F = y'^2 - 2xy$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

Так:

$$F_y = 2x, \qquad F_{y'} = 2y'$$

$$2x - \frac{d}{dx}(2y') = 0$$

$$2x - 2y'' = 0$$

$$y'' = -x$$

$$y' = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y = -\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

Общее решение имеет вид:

$$y = -\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

Подставим краевые условия:

$$y(-1) = \frac{1}{6} - C_1 + C_2 = -1 => C_2 - C_1 = -\frac{7}{6} => C_1 = C_2 + \frac{7}{6}$$

$$y(1) = -\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 1 => C_1 + C_2 = \frac{7}{6} => C_2 = 0 => C_1 = \frac{7}{6}$$

$$y = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{7}{6}x = \frac{7x - x^3}{6}$$

Ответ: $y = \frac{7x - x^3}{6}$.

11. $V[y] = \int_{-1}^{0} \left(y'^2 - 2xy\right) dx\,,\ y(-1) = 0,\ y(0) = 2$

$$V[y] = \int_{-1}^{0} \left(y'^2 - 2xy\right) dx \Rightarrow F = y'^2 - 2xy$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

$$F_y = 2x, \qquad F_{y'} = 2y'$$

$$2x - \frac{d}{dx}(2y') = 0$$

$$2x - 2y'' = 0$$

$$y'' = -x$$

$$y' = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y = -\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

Общее решение имеет вид:

$$y = -\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

Подставим краевые условия:

$$y(-1) = \frac{1}{6} - C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 - C_1 = -\frac{1}{6} \Rightarrow C_1 = C_2 + \frac{1}{6}$$

$$y(0) = C_2 = 2 \Rightarrow C_1 = \frac{13}{6}$$

$$y = -\frac{x^3}{6} + \frac{13}{6}x + 2 = \frac{16x - x^3}{6} + 2$$

Ответ: $y = \frac{16x - x^3}{6} + 2.$

12. $V[y] = \int_1^e \left(xy'^2 + yy'\right)dx$, $y(1) = 0$, $y(e) = 1$

$$V[y] = \int_1^e \left(xy'^2 + yy'\right)dx \Rightarrow F = xy'^2 + yy'$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

Так:

$$F_y = y', \qquad F_{y'} = 2xy' + y$$

$$y' - \frac{d}{dx}(2xy' + y) = 0$$

$$-y' - xy'' = 0$$

$$y'' + \frac{y'}{x} = 0$$

$$y' = z \Rightarrow y'' = z' \Rightarrow z' + \frac{z}{x} = 0$$

Будем решать методом разделенных переменных.

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x}$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln z = -\ln C_1 x$$

$$z = \frac{1}{C_1 x} \Rightarrow z = \frac{C_2}{x}$$

$$y' = \frac{C_2}{x} \Rightarrow y = C_2 \ln x + C_3$$

Общее решение имеет вид:

$$y = C_2 \ln x + C_3$$

Подставим краевые условия:

$$y(1) = C_3 = 0$$

$$y(e) = C_2 = 1$$

$$y = \ln x$$

Ответ: $y = \ln x$.

Найти экстремали в вариационных задачах, используя частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера.

13. $V[y] = \int_a^b [2xy + (x^2 + e^y)y']dx\,,\ y(a) = A,\ y(b) = B$

$$V[y] = \int_a^b [2xy + (x^2 + e^y)y']dx => F = 2xy + (x^2 + e^y)y'$$

F зависит от y' линейно, т. е. $F = F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'$

Уравнение Эйлерав этом случае имеет вид:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

Так$F(x, y, y')dx = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ является полным дифференциалом.

Функционал не зависит от пути интегрирования: значение функционала одно и то же на допустимых кривых. Вариационная задача теряет смысл.

Ответ: интеграл не зависит от пути интегрирования; вариационная задача не имеет смысла.

14. $V[y] = \int_0^1 (e^y + xy')dx\,,\ y(0) = 0,\ y(1) = \alpha$

$$V[y] = \int_0^1 (e^y + xy')dx => F = e^y + xy'$$

F зависит от y' линейно, т. е. $F = F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'$

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$e^y - 1 = 0$$

$$e^y = 1$$

$$y = 0$$

Подставим краевые условия:

$$y(0) = 0 = 0$$

$$y(1) = \alpha = 0$$

Ответ: $y = 0$, если $\alpha = 0$; при $\alpha \neq 0$ гладкой экстремали не существует.

15. $V[y] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y'^2 - y^2)dx$, $y(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$V[y] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y'^2 - y^2)dx => F = y'^2 - y^2$

F не зависит от x, т. е. $F = F(y, y')$

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид:

$F - y' * F_{y'} = C$

$F_{y'} = 2y'$

$y^2 + y'^2 = 0$

Решение будем искать в виде: $y = e^{px}$

$e^{2px} + p^2 e^{2px} = 0$

$p^2 + 1 = 0 => p = \pm i$

Общее решение имеет вид $y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} = \widetilde{C_1} \cos x + \widetilde{C_2} \sin x$

Подставим краевые условия: $y(0) = \widetilde{C_1} = 1$

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + \widetilde{C_2} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} => \frac{\sqrt{2}}{2} + \widetilde{C_2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} => \widetilde{C_2} = 0$

Ответ: $y = \cos x$.

16. $V[y] = \int_0^{\pi} (y'^2 - y^2)dx$, $y(0) = 1$, $y(\pi) = -1$

$V[y] = \int_0^{\pi} (y'^2 - y^2)dx => F = y'^2 - y^2$

F не зависит от x, т. е. $F = F(y, y')$

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид $F - y' * F_{y'} = C$

$F_{y'} = 2y'$

$y^2 + y'^2 = 0$

Решение будем искать в виде $y = e^{px}$

$e^{2px} + p^2 e^{2px} = 0$

$p^2 + 1 = 0 => p = \pm i$

Общее решение имеет вид $y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} = \widetilde{C_1} \cos x + \widetilde{C_2} \sin x$

Подставим краевые условия:

$y(0) = \widetilde{C_1} = 1$

$y(\pi) = \cos\pi + \widetilde{C_2} \sin\pi = -1 => -1 = -1$

Ответ: $y = \cos x + C_2 \sin x$.

17. $V[y] = \int_0^1 (x + y'^2)dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = 2$

$V[y] = \int_0^1 (x + y'^2)dx => F = x + y'^2$

F не зависит от y, т. е. $F = F(x, y')$

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид $F_{y'} = C$

$2y' = C$

$y = C_1x + C_2$

Общее решение имеет вид $y = C_1x + C_2$

Подставим краевые условия:

$y(0) = C_2 = 1$

$y(1) = C_1 + 1 = 2 => C_1 = 1$

Ответ: $y = x + 1$.

18. $V[y] = \int_0^1 (y^2 + y'^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$

$V[y] = \int_0^1 (y^2 + y'^2)dx => F = y^2 + y'^2$

F не зависит от x, т. е. $F = F(y, y')$

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид $F_y - F_{yy'} * y' - F_{y'y'} * y'' = 0$

$2y - 2y'' = 0$

$y - y'' = 0$

Будем искать решение в виде $y = e^{px}$

$e^{px} - p^2e^{px} = 0 => 1 - p^2 = 0$

$p = \pm 1$

Общее решение имеет вид $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$

Подставим краевые условия:

$y(0) = C_1 + C_2 = 0$

$y(1) = C_1e + C_2e^{-1} = 1 => -C_2e + C_2e^{-1} = 1$

$$C_2 = \frac{1}{e^{-1} - e} => C_1 = -\frac{1}{e^{-1} - e}$$

$$y = -\frac{1}{e^{-1} - e}e^x + \frac{1}{e^{-1} - e}e^{-x} = \frac{-e^x + e^{-x}}{e^{-1} - e} = \frac{sh\,(x)}{sh\,(1)}$$

Ответ: $y = \frac{sh\,(x)}{sh\,(1)}$.

19. $V[y] = \int_0^1 (y'^2 + 4y^2)dx$, $y(0) = e^2$, $y(1) = 1$

$V[y] = \int_0^1 (y'^2 + 4y^2)dx \Rightarrow F = y'^2 + 4y^2$

F не зависит от x, т. е. $F = F(y, y')$

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид $F_y - F_{yy'} * y' - F_{y'y'} * y'' = 0$

$8y - 2y'' = 0$

$4y - y'' = 0$

Будем искать решение в виде $y = e^{px}$

$4e^{px} - p^2 e^{px} = 0 \Rightarrow 4 - p^2 = 0$

$p = \pm 2$

Общее решение имеет вид $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

Подставим краевые условия:

$y(0) = C_1 + C_2 = e^2$

$y(1) = C_1 e^2 + C_2 e^{-2} = 1 \Rightarrow C_1 e^2 + (e^2 - C_1)e^{-2} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow C_1 e^2 + 1 - C_1 e^{-2} = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = e^2$

$y = e^{-2x+2}$

Ответ: $y = e^{2(1-x)}$.

20. $V[y] = \int_0^1 (2e^y - y^2)dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = e$

$V[y] = \int_0^1 (2e^y - y^2)dx \Rightarrow F = 2e^y - y^2$

F не зависит от y', т. е. $F = F(y)$

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид $F_y = 0$

$2e^y - 2y = 0$

Проверим существует ли данная кривая. Подставим граничные точки в уравнение.

$1: 2e - 2 \neq 0$

$e: 2e^e - 2e \neq 0$

В таком случае, на данной кривой нет экстремумов.

Ответ: нет экстремалей; уравнение Эйлера не имеет решений.

21. $V[y] = \int_a^b \left(y + \frac{y^3}{3}\right) dx$

$$V[y] = \int_0^1 \left(y + \frac{y^3}{3}\right) dx => F = y + \frac{y^3}{3}$$

F не зависит от y', т. е. $F = F(y)$

Уравнение Эйлера этом случае имеет вид $F_y = 0$

$1 + y^2 = 0 => y^2 = -1 => y = \pm i$

Кривая является линейной. В таком случае, на данной кривой нет экстремумов.

Ответ: экстремалей нет.