



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ  
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»



**НГТУ  
НЭТИ** | **Факультет прикладной  
математики и информатики**

Кафедра прикладной математики

Практическое задание № 5

по дисциплине «Методы принятия оптимальных решений»

**ОПТИМАЛЬНЫЕ L-ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СДВИГА И МАСШТАБА  
ПО ВЫБОРОЧНЫМ КВАНТИЛЯМ**

Бригада

ПМ-13 БУДАНЦЕВ ДМИТРИЙ

ПМ-13 ФОРКИН КИРИЛЛ

Преподаватели

ЛЕМЕШКО БОРИС ЮРЬЕВИЧ

Новосибирск, 2024

**Цель занятия** – освоить вычисление оптимальных  $L$ -оценок по выборочным квантилям, проследить, как влияет на точность оценок выбор числа интервалов.

## Этапы исследования

1. Смоделировать выборку в соответствии с нормальным законом объемом  $n = 1000$ . Внести её в таблицу **Excel**, отсортировать по возрастанию. Далее опираться на [рекомендации](#)
2. Предполагая, что выборка принадлежит нормальному закону, найти оптимальные  $L$ -оценки (обоих) параметров закона. Для этого выбрать из соответствующей таблицы **АОГ** оптимальные вероятности при необходимом числе интервалов  $k$ . В соответствии с этими вероятностями найти оценки выборочных квантилей, разбивающие выборку на части, пропорциональные данным вероятностям. Выбрать из соответствующей таблицы коэффициенты, необходимые для вычисления оптимальных  $L$ -оценок. Вычислить оптимальные  $L$ -оценки как соответствующие линейные комбинации.
  1. Найти оценки при  $k = 4, 5, 8, 10$ .
  2. Сравнить полученные оценки с ОМП (при вычислении в ISW).
  3. Предполагая, что Вы нашли оценки по некоторой другой выборке, проверьте простую гипотезу о согласии с нормальным законом со значениями параметров, полученными при  $k = 10$ .
3. Предполагая, что выборка принадлежит логистическому закону<sup>[1]</sup>, выполнить ту же последовательность действий при вычислении оптимальных  $L$ -оценок параметров этого закона, ограничившись  $k = 10$ .
4. Смоделировать выборку в соответствии с распределением Коши объемом  $n = 1000$ . Вычислить оптимальные  $L$ -оценки параметров этого закона при  $k = 10$ . Сравнить с ОМП. Проверить “простую” гипотезу о согласии с данным распределением Коши.
5. Предполагая, что выборка принадлежит нормальному закону, выполнить ту же последовательность действий при вычислении оптимальных  $L$ -оценок параметров нормального закона, так же ограничившись  $k = 10$ .
6. Кратко сформулируйте для себя выводы, вытекающие из ваших результатов.

## Выполненные исследования

### Моделирование выборки нормального распределения

Эмпирическая функция распределения (см. график 1) выборки *model\_1*, смоделированная в соответствии  $N(\sigma = 4, \mu = 0)$  со с объемом  $n = 1000$

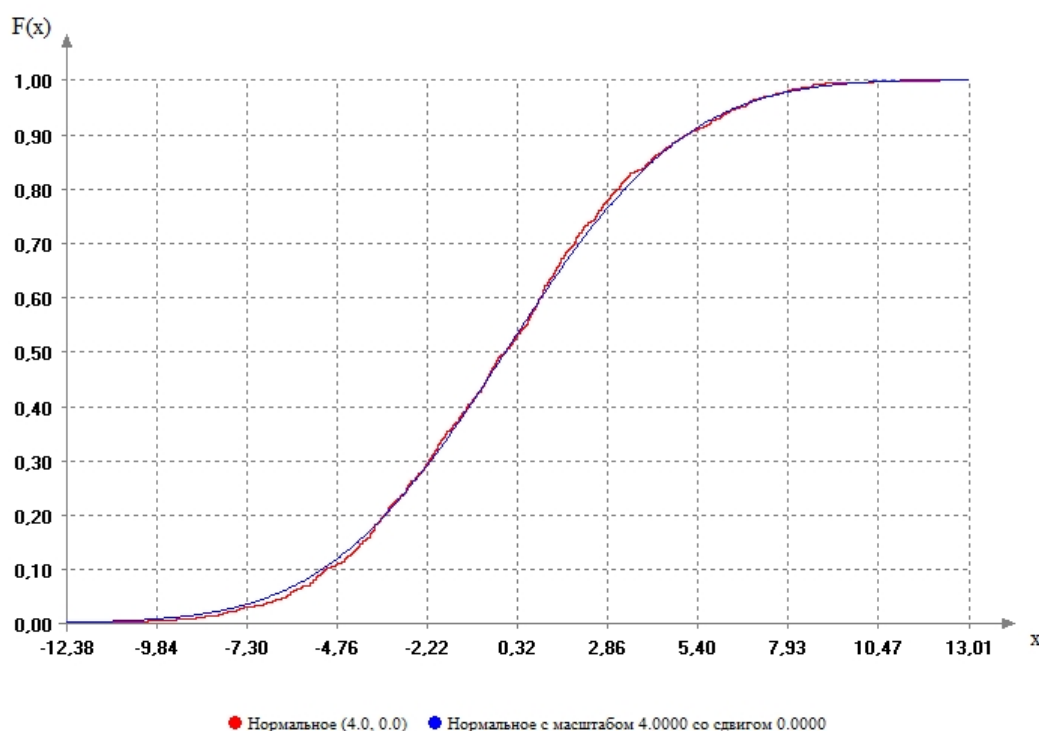


График 1 Эмпирическая функция распределения выборки model\_1

Функция плотности распределения (см. график 2) выборки model\_1, смоделированная в соответствии  $N(\sigma = 4, \mu = 0)$  со с объемом  $n = 1000$

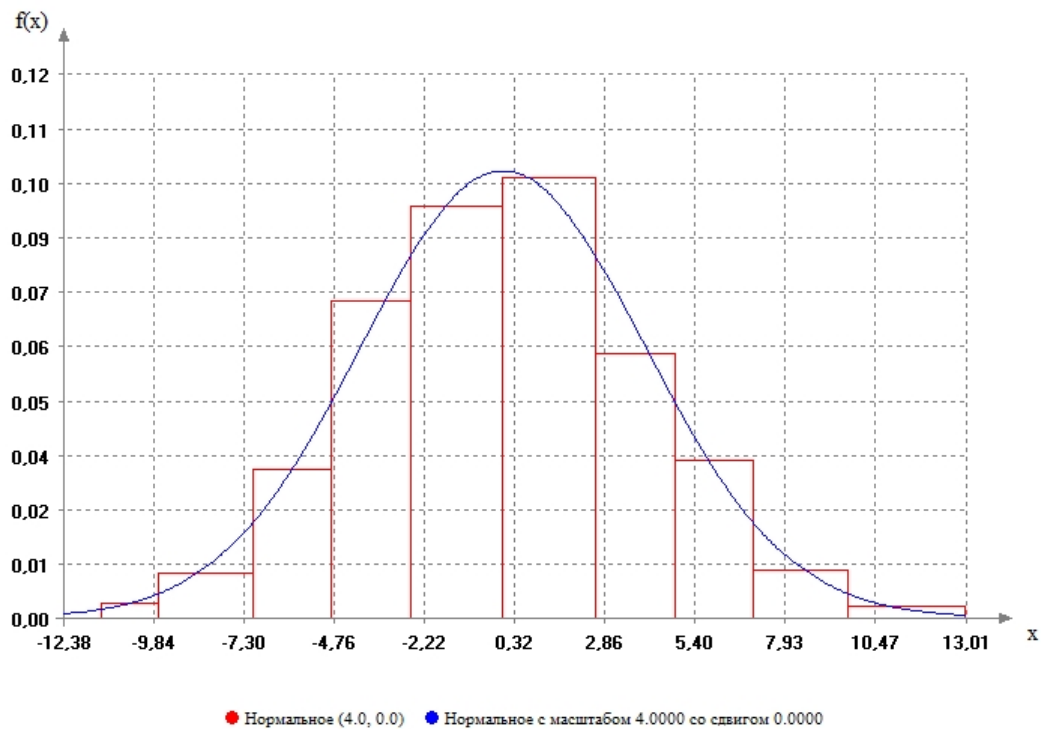


График 2 Функция плотности распределения выборки model\_1

## Получение оптимальных оценок параметров нормального распределения по выборке нормального закона

### Получение оптимальных вероятностей для $k = 4, 5, 8, 10$

Для получения оптимальных интервалов, получим оптимальные вероятности при необходимом числе интервалов  $k$  при оценивании двух параметров. Необходимые вероятности можно получить из [таблицы А.29](#).

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$
4	0.0833	0.4167	0.4167	0.0833	-	-	-	-	-	-
5	0.0449	0.2004	0.5094	0.2004	0.0449	-	-	-	-	-
8	0.0141	0.0587	0.1431	0.2841	0.2841	0.1431	0.0587	0.0141	-	-
10	0.0077	0.0317	0.0748	0.1438	0.2420	0.2420	0.1438	0.0748	0.0317	0.0077

Необходимые параметры сдвига можно получить из [таблицы П.3](#).

$k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$	$\gamma_9$
4	0.224	0.551	0.224	-	-	-	-	-	-
5	0.109	0.391	0.391	0.109	-	-	-	-	-
8	0.030	0.097	0.217	0.313	0.217	0.097	0.030	-	-
10	0.016	0.050	0.108	0.197	0.258	0.197	0.108	0.050	0.016

Необходимые параметры масштаба можно получить из [таблицы П.4](#).

$k$	$\nu_1$	$\nu_2$	$\nu_3$	$\nu_4$	$\nu_5$	$\nu_6$	$\nu_7$	$\nu_8$	$\nu_9$
4	-0.3614	0.0000	0.3614						
5	-0.2014	-0.2299	0.2299	0.2014					

$k$	$\nu_1$	$\nu_2$	$\nu_3$	$\nu_4$	$\nu_5$	$\nu_6$	$\nu_7$	$\nu_8$	$\nu_9$
8	-0.0704	-0.1471	-0.1670	0.0000	0.1670	0.1471	0.0704		
10	-0.0410	-0.0915	-0.1324	-0.1238	0.0000	0.1238	0.1324	0.0915	0.0410

Получим выборочные квантили выборки **model\_1**, сформированного в прошлом пункте по оптимальным вероятностям. Сформируем таблицу значений границ интервалов.

$k$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$I_6$	$I_7$	$I_8$	$I_9$	$I_{10}$	$I_{11}$
4	-11.3023	-5.3176	0.0005	5.6716	12.9968	-	-	-	-	-	-
5	-11.3023	-6.2126	-2.7955	2.5971	6.7996	12.9968	-	-	-	-	-
8	-11.3023	-8.0621	-5.4886	-3.2206	0.0005	2.9323	5.9502	8.4333	12.9968	-	-
10	-11.3023	-8.7633	-6.5387	-4.5537	-2.6720	0.0005	2.4607	4.8169	6.9421	9.2255	12.9968

Получаем оценённые параметры на основании коэффициентов и квантилей, которые были представлены ранее, используя формулы:

$$\mu = \sum_{i=1}^k \gamma_i I_{i+1} \quad \sigma = \sum_{i=1}^k \nu_i I_{i+1}$$

Таким образом оценённые параметры равны:

Параметр сдвига $\mu$	Параметр масштаба $\sigma$
0.0146827	3.8464956

## Сравнение полученных результатов с ОМП

Оценим параметры используя метод **ОМП** по выборке *model\_1* используя **ISW**. Полученные параметры:

Параметр сдвига $\mu$	Параметр масштаба $\sigma$	$\mu_{\text{ОМП}} - \mu_L$	$\sigma_{\text{ОМП}} - \sigma_L$
0.0036542	3.93105	-0.01103	0.08455

Как видно из таблицы разница между двумя оценками заметна после 2 знаков после запятой, что достаточно близко.

## Проверка простой гипотезы

Результаты проверки **простой гипотезы** о согласии, используя критерий  $\chi^2$  Пирсона используя параметрические параметры полученные ранее, на группированной выборке АОГ при  $k = 10$ .

Метод оценивания	Значение $S$	Значение $P$
ОМП	4.5347	0.8728
L-оценки	4.6161	0.8664

Таким образом, оба метода оценивания показали близкие результаты. И при данных параметрах критерий согласия  $\chi^2$  Пирсона принимает **истинную** гипотезу  $H_0$

## Получение оптимальных оценок параметров логистического распределения по выборке нормального закона

Получим оценки для Логистического распределения. Для этого воспользуемся соответствующей [таблицей А.45](#) для получения оптимальных вероятностей при  $k = 10$ .

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$
10	0.0153	0.0510	0.0946	0.1441	0.1950	0.1950	0.1441	0.0946	0.0510	0.0153

Необходимые параметры сдвига можно получить из [таблицы П.7](#).

$k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$	$\gamma_9$
10	0.0029	0.0280	0.0990	0.2206	0.2992	0.2206	0.0990	0.0280	0.0029

Необходимые параметры масштаба можно получить из [таблицы П.8](#).

$k$	$\nu_1$	$\nu_2$	$\nu_3$	$\nu_4$	$\nu_5$	$\nu_6$	$\nu_7$	$\nu_8$	$\nu_9$
10	-0.0432	-0.1144	-0.1766	-0.1613	0.0000	0.1613	0.1766	0.1144	0.0432

Получим выборочные квантили выборки **model\_1**, сформированного в пункте №1 по оптимальным вероятностям. Сформируем таблицу значений границ интервалов.

$k$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$I_6$	$I_7$	$I_8$	$I_9$	$I_{10}$	$I_{11}$
10	-11.3023	-8.0327	-5.7182	-3.8195	-2.0748	0.0005	1.8819	3.9081	6.1066	8.3184	12.9967

Получаем оценённые параметры на основании коэффициентов и квантилей, которые были представлены ранее, используя формулы:

$$\mu = \sum_{i=1}^k \gamma_i I_{i+1} \quad \sigma = \sum_{i=1}^k \nu_i I_{i+1}$$

Таким образом, оценённые параметры равны:

Параметр сдвига $\mu$	Параметр масштаба $\sigma$
-0.02191688	2.3451815

## Сравнение полученных результатов с ОМП

Оценим параметры используя метод **ОМП** по выборке *model\_1* используя **ISW**. Полученные параметры:

Параметр сдвига $\mu$	Параметр масштаба $\sigma$	$\mu_{\text{ОМП}} - \mu_L$	$\sigma_{\text{ОМП}} - \sigma_L$
-0.02803	2.29687	-0.00611	-0.04831

Как видно из таблицы разница между оценками сдвига заметна после 3 знака после запятой и разница между оценками масштаба после 2 знака. Аналогично, наблюдаем довольно близкие значения.

## Проверка простой гипотезы

Результаты проверки **простой гипотезы** о согласии, используя критерий  $\chi^2$  *Пирсона* используя параметрические параметры полученные ранее, на группированной выборке АОГ при  $k = 10$ .

Метод оценивания	Значение $S$	Значение $P$
ОМП	20.4701	0.01522
L-оценки	21.5139	0.01055

Таким образом, оба метода оценивания показали близки результаты. И при данных параметрах критерий согласия  $\chi^2$  *Пирсона* отвергает **ложную** гипотезу  $H_1$ .

## Моделирование выборки распределения Коши

Эмпирическая функция распределения (см. *график 2*) выборки *\_model\_2*, смоделированная в соответствии  $C(x_0 = 0, \gamma = 3)$  со с объёмом  $n = 1000$

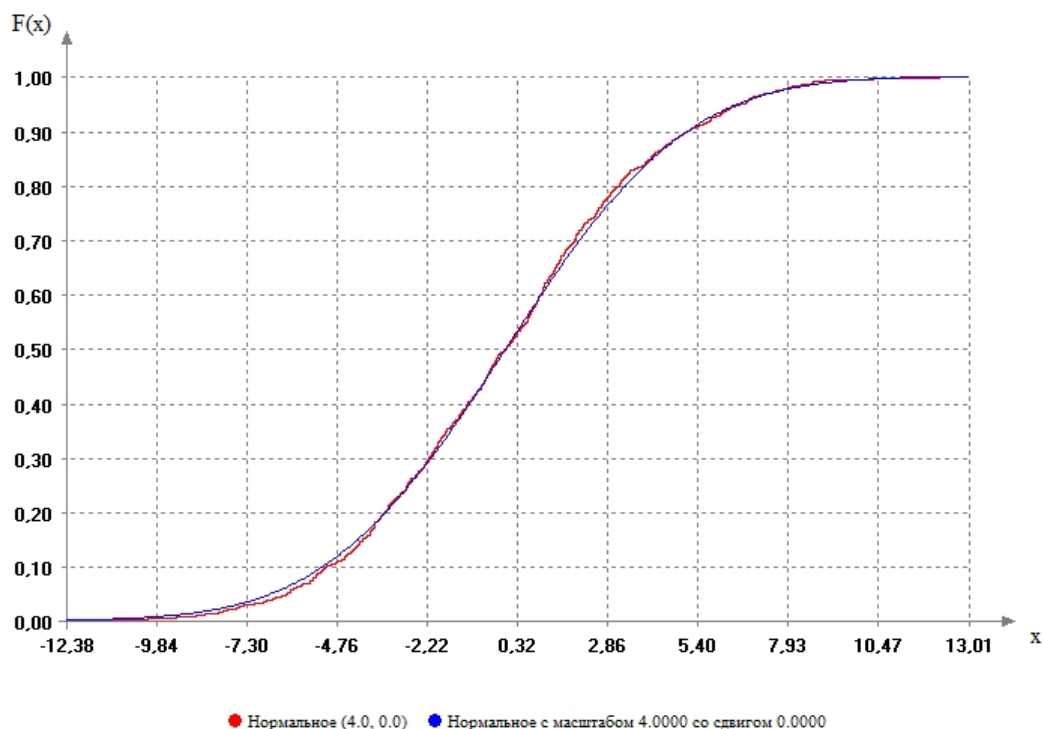


График 3 Эмпирическая функция распределения выборки model\_2

Функция плотности распределения (см. график 4) выборки \_model\_2, смоделированная в соответствии  $C(x_0 = 0, \gamma = 3)$  со с объёмом  $n = 1000$

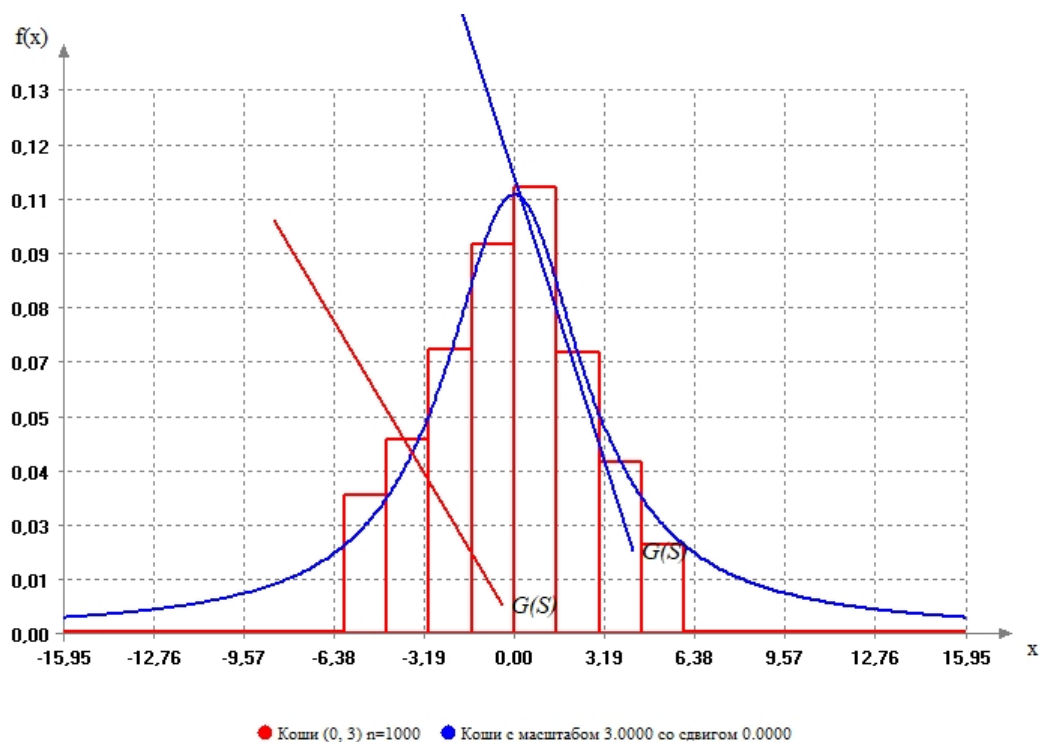


График 4 Функция плотности распределения выборки model\_2

## Получение оптимальных оценок параметров распределения Коши по выборке Коши

Получим оценки для распределения Коши с параметрами  $x_0 = 0,0, \gamma = 3$ . Исходя из [источника](#) для получения  $L$ -оценки требуется использовать равновероятный способ группирования. Для этого воспользуемся ISW. Необходимые параметры сдвига можно получить из [таблицы П.11](#).

$k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$	$\gamma_9$
10	-0.0309	-0.0427	0.0808	0.2928	0.4000	0.2928	0.0808	-0.0427	-0.0309

Необходимые параметры масштаба можно получить из [таблицы П.12](#).

$k$	$\nu_1$	$\nu_2$	$\nu_3$	$\nu_4$	$\nu_5$	$\nu_6$	$\nu_7$	$\nu_8$	$\nu_9$
10	-0.0224	-0.1314	-0.2490	-0.2126	0.0000	0.2126	0.2490	0.1314	0.0224

Получим выборочные квантили выборки **model\_2**, сформированного в прошлом пункте по оптимальным вероятностям. Сформируем таблицу значений границ интервалов.

$k$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$I_6$	$I_7$	$I_8$	$I_9$	$I_{10}$	$I_{11}$
10	-404.6613	-9.2331	-4.1291	-2.1796	-0.9747	0.0000	0.9747	2.1796	4.1291	9.2331	1650.2344

Получаем оценённые параметры на основании коэффициентов и квантилей, которые были представлены ранее, используя формулы:

$$\mu = \sum_{i=1}^k \gamma_i I_{i+1} \quad \sigma = \sum_{i=1}^k \nu_i I_{i+1}$$

Таким образом, оценённые параметры равны:

Параметр сдвига $x_0$	Параметр масштаба $\gamma$
-0.0534837	2.9166901

## Сравнение полученных результатов с ОМП

Оценим параметры используя метод **ОМП** по выборке *model\_1* используя **ISW**. Полученные параметры:

Параметр сдвига $x_0$	Параметр масштаба $\gamma$	$x_{0,ОМП} - x_{0,L}$	$\gamma_{ОМП} - \gamma_L$
-0.03727	3.0506	0.01622	0.13391

Как видно из таблицы разница между оценками сдвига заметна после 2 знака после запятой и разница между оценками масштаба после 1 знака. В сравнении с прошлыми пунктами, получаем большую разницу между оценками масштаба.

## Проверка простой гипотезы

Результаты проверки **простой гипотезы** о согласии, используя критерий  $\chi^2$  *Пирсона* используя параметрические параметры полученные ранее, на группированной выборке АОГ при  $k = 10$ .

Метод оценивания	Значение $S$	Значение $P$
ОМП	6.59684	0.67901
<i>L-оценки</i>	5.24549	0.81240

Таким образом, оба метода оценивания показали разные результаты. При данных параметрах критерий согласия  $\chi^2$  *Пирсона* принимает **истинную** гипотезу  $H_0$ , но заметна разница между **p-value**. Заметно, что в данном случае оценённые параметры полученные путём оценивания с помощью *L-оценки*, более удачны.

## Получение оптимальных оценок параметров нормального распределения по выборке Коши

Получим оценки для нормального закона распределения с параметрами  $\mu = 0.0, \sigma = 5.53445$ . Используем уже ранее показанную таблицу для получения оптимальных вероятностей при  $k = 10$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$
10	0.0077	0.0317	0.0748	0.1438	0.2420	0.2420	0.1438	0.0748	0.0317	0.0077

Получим выборочные квантили выборки **model\_2**, сформированного в прошлом пункте по оптимальным вероятностям. Сформируем таблицу значений границ интервалов.

$k$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$I_6$	$I_7$	$I_8$	$I_9$	$I_{10}$	$I_{11}$
10	-404.6613	-67.1396	-18.5429	-7.0866	-2.9612	0.0005	2.6579	7.9962	22.9789	94.0040	1650.2345

Получаем оценённые параметры на основании коэффициентов и квантилей, которые были представлены ранее, используя формулы:

$$\mu = \sum_{i=1}^k \gamma_i I_{i+1} \quad \sigma = \sum_{i=1}^k \nu_i I_{i+1}$$

Таким образом, оценённые параметры равны:

Параметр сдвига $\mu$	Параметр масштаба $\sigma$
0.6960835	13.096296

## Сравнение полученных результатов с ОМП

Оценим параметры используя метод **ОМП** по выборке *model\_2* используя **ISW**. Полученные параметры:

Параметр сдвига $\mu$	Параметр масштаба $\sigma$	$\mu_{\text{ОМП}} - \mu_L$	$\sigma_{\text{ОМП}} - \sigma_L$
-0.051628	6.38835	-0.74771	-6.70795

Как видно из таблицы разница между двумя оценками существенно большая. Полученные оценки существенно отличаются.

## Проверка простой гипотезы

Результаты проверки **простой гипотезы** о согласии, используя критерий  $\chi^2$  Пирсона используя параметрические параметры полученные ранее, на группированной выборке АОГ при  $k = 10$ .

Метод оценивания	Значение $S$	Значение $P$
<i>ОМП</i>	189.7890	0
<i>L-оценки</i>	565.4089	0

Таким образом, оба метода оценивания показали разные результаты. При данных параметрах критерий согласия  $\chi^2$  Пирсона отвергают **ложную** гипотезу  $H_1$ , но заметна разница между **s-value**. Заметно, что в данном случае оценённые параметры полученные путём оценивания с помощью **ОМП-оценки**, более удачны.

## Вывод

По итогу работы удалось освоить вычисление оптимальных *L-оценок* по выборочным квантилям. По итогу работы удалось показать, что при данном способе, критерий  $\chi^2$  Пирсона способен отличать близкие конкурирующие гипотезы. Удалось показать, отличие *L-оценок* и **ОМП**.

---

1. Указание: Логистический закон в **ISW** представлен несколько в другом виде, чем рассматриваемый при построении *L-оценок* этого закона. Поэтому полученную *L-оценку* параметра масштаба необходимо разделить на  $\sqrt{3}$  ↔