

Im folgenden seien  $\rho$  und  $\sigma$  Relationen auf  $A$ . (Also  $\rho \subseteq A \times A$ )

Im folgenden seien  $\rho$  und  $\sigma$  Relationen auf  $A$ . (Also  $\rho \subseteq A \times A$ )

## Def. Inverse

$$\hat{\rho} \stackrel{\text{def}}{=} \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\}$$

oder alternativ, für alle  $a, b \in A$

$$b \hat{\rho} a \iff a \rho b$$

Wir drehen also einfach alle Paare in  $\rho$  um. (Bild)

# Relationen - Basics

Im folgenden seien  $\rho$  und  $\sigma$  Relationen auf  $A$ . (Also  $\rho \subseteq A \times A$ )

## Def. Inverse

$$\hat{\rho} \stackrel{\text{def}}{=} \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\}$$

oder alternativ, für alle  $a, b \in A$

$$b \hat{\rho} a \iff a \rho b$$

Wir drehen also einfach alle Paare in  $\rho$  um. (Bild)

## Def. Verkettung

$$a \rho \circ \sigma c \stackrel{\text{def}}{\iff} a \rho b \wedge b \sigma c \text{ für ein } b \in A.$$

(Bild). Wir schreiben auch  $\underbrace{\rho \circ \rho \circ \dots \circ \rho}_{n \text{ Mal}} = \rho^n$ .

## Def. reflexiv

$$\begin{aligned}\rho \text{ reflexiv} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall a \in A \quad a \rho a \\ &\iff \forall a \in A \quad (a, a) \in \rho\end{aligned}$$

Das heisst nicht anderes als  $\text{id} \subseteq \rho$ .

## Def. reflexiv

$$\begin{aligned}\rho \text{ reflexiv} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall a \in A \quad a \rho a \\ &\iff \forall a \in A \quad (a, a) \in \rho\end{aligned}$$

Das heisst nicht anderes als  $\text{id} \subseteq \rho$ .

- Wie sieht die Identitätsrelation in  $\mathbb{R}^2$  aus?

## Def. reflexiv

$$\begin{aligned}\rho \text{ reflexiv} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall a \in A \quad a \rho a \\ &\iff \forall a \in A \quad (a, a) \in \rho\end{aligned}$$

Das heisst nicht anderes als  $\text{id} \subseteq \rho$ .

- Wie sieht die Identitätsrelation in  $\mathbb{R}^2$  aus?
- Ist  $\emptyset$  im Allgemeinen reflexiv?

## Def. reflexiv

$$\begin{aligned}\rho \text{ reflexiv} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall a \in A \quad a \rho a \\ &\iff \forall a \in A \quad (a, a) \in \rho\end{aligned}$$

Das heisst nicht anderes als  $\text{id} \subseteq \rho$ .

- Wie sieht die Identitätsrelation in  $\mathbb{R}^2$  aus?
- Ist  $\emptyset$  im Allgemeinen reflexiv?
- Ist eine nicht irreflexive Relation reflexiv?

$$(\rho \text{ irreflexiv} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall a \in A \quad (a, a) \notin \rho)$$

## Def. reflexiv

$$\begin{aligned}\rho \text{ reflexiv} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall a \in A \quad a \rho a \\ &\iff \forall a \in A \quad (a, a) \in \rho\end{aligned}$$

Das heisst nicht anderes als  $\text{id} \subseteq \rho$ .

- Wie sieht die Identitätsrelation in  $\mathbb{R}^2$  aus?
- Ist  $\emptyset$  im Allgemeinen reflexiv?
- Ist eine nicht irreflexive Relation reflexiv?  
( $\rho$  irreflexiv  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall a \in A \quad (a, a) \notin \rho$ )
- Ist  $\emptyset$  im Allgemeinen irreflexiv?



## Def. symmetrisch

$\rho$  ist symmetrisch, wenn für alle  $a, b \in A$

$$a \rho b \iff b \rho a.$$

Man kann also  $\rho$  immer umdrehen. In anderen Worten  $\rho = \hat{\rho}$ .

## Def. symmetrisch

$\rho$  ist symmetrisch, wenn für alle  $a, b \in A$

$$a \rho b \iff b \rho a.$$

Man kann also  $\rho$  immer umdrehen. In anderen Worten  $\rho = \hat{\rho}$ .

- Wie sieht Symmetrie in einem Graphen aus?

## Def. symmetrisch

$\rho$  ist symmetrisch, wenn für alle  $a, b \in A$

$$a \rho b \iff b \rho a.$$

Man kann also  $\rho$  immer umdrehen. In anderen Worten  $\rho = \hat{\rho}$ .

- Wie sieht Symmetrie in einem Graphen aus?
- Ist  $\emptyset$  im Allgemeinen symmetrisch?

## Def. transitiv

$\rho$  ist transitiv, wenn für alle  $a, b, c \in A$  so dass  $a \rho b$  und  $b \rho c$ , gilt auch  $a \rho c$ .

## Def. transitiv

$\rho$  ist transitiv, wenn für alle  $a, b, c \in A$  so dass  $a \rho b$  und  $b \rho c$ , gilt auch  $a \rho c$ .

Anders gesagt soll

$$a \rho b \wedge b \rho c \implies a \rho c.$$

für alle  $a, b, c \in A$  gelten.

## Def. transitiv

$\rho$  ist transitiv, wenn für alle  $a, b, c \in A$  so dass  $a \rho b$  und  $b \rho c$ , gilt auch  $a \rho c$ .

Anders gesagt soll

$$a \rho b \wedge b \rho c \implies a \rho c.$$

für alle  $a, b, c \in A$  gelten.

Wenn man von  $a$  nach  $c$  kommen will, dann kann man die Brücke über  $b$  nehmen.

## Def. transitiv

$\rho$  ist transitiv, wenn für alle  $a, b, c \in A$  so dass  $a \rho b$  und  $b \rho c$ , gilt auch  $a \rho c$ .

Anders gesagt soll

$$a \rho b \wedge b \rho c \implies a \rho c.$$

für alle  $a, b, c \in A$  gelten.

Wenn man von  $a$  nach  $c$  kommen will, dann kann man die Brücke über  $b$  nehmen.

- Wie sieht Transitivität in einem Graphen aus?

# Aufgabe 1

Beweise:

$$\rho \text{ ist transitiv} \iff \rho^2 \subseteq \rho$$



## Def. transitiv

$\rho$  ist transitiv, wenn für alle  $a, b, c \in A$  so dass  $a \rho b$  und  $b \rho c$ , gilt auch  $a \rho c$ .

Wenn man von  $a$  nach  $c$  kommen will, dann kann man die Brücke über  $b$  nehmen.

- Wie sieht Transitivität in einem Graphen aus?

## Def. transitiv

$\rho$  ist transitiv, wenn für alle  $a, b, c \in A$  so dass  $a \rho b$  und  $b \rho c$ , gilt auch  $a \rho c$ .

Wenn man von  $a$  nach  $c$  kommen will, dann kann man die Brücke über  $b$  nehmen.

- Wie sieht Transitivität in einem Graphen aus?
- Ist  $\emptyset$  im Allgemeinen transitiv?

## Def. transitiv

$\rho$  ist transitiv, wenn für alle  $a, b, c \in A$  so dass  $a \rho b$  und  $b \rho c$ , gilt auch  $a \rho c$ .

Wenn man von  $a$  nach  $c$  kommen will, dann kann man die Brücke über  $b$  nehmen.

- Wie sieht Transitivität in einem Graphen aus?
- Ist  $\emptyset$  im Allgemeinen transitiv?

## Def. transitive Hülle

$$\rho^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$$

In Worten: nehme  $\rho$  und mache ihn transitiv. Drückt in einem Graphen Erreichbarkeit aus. (Bild)

# Challenge!

Beweise:

$$\rho \text{ transitiv} \implies \rho^* = \rho.$$

## Aufgabe 2 (Alte Prüfungsaufgabe FS21)

Sei

$$\rho = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}$$

eine Relation auf  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

Bestimme  $\rho^3$ . (Lösung in Notizen)

# Äquivalenzrelationen

Nehmen wir all diese Eigenschaften zusammen, so kommen wir auf ein einfaches aber wichtiges Konzept:

# Äquivalenzrelationen

Nehmen wir all diese Eigenschaften zusammen, so kommen wir auf ein einfaches aber wichtiges Konzept:

## Def. Äquivalenzrelation

Wir nennen  $\rho$  eine Äquivalenzrelation, wenn  $\rho$  reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

# Äquivalenzrelationen

Nehmen wir all diese Eigenschaften zusammen, so kommen wir auf ein einfaches aber wichtiges Konzept:

## Def. Äquivalenzrelation

Wir nennen  $\rho$  eine Äquivalenzrelation, wenn  $\rho$  reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Nicht überraschenderweise geht es da darum, die Äquivalenz zwischen Objekten aufzufassen; also dass wir Objekte in einem gewissen Sinne als “gleich” betrachten können. Jedes der drei Eigenschaften fasst Merkmale auf, die wir intuitiv von äquivalenten Objekten erwarten würden. Einfaches Beispiel ist Gleichheit (“=”).



# Äquivalenzrelationen

Nehmen wir all diese Eigenschaften zusammen, so kommen wir auf ein einfaches aber wichtiges Konzept:

## Def. Äquivalenzrelation

Wir nennen  $\rho$  eine Äquivalenzrelation, wenn  $\rho$  reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Nicht überraschenderweise geht es da darum, die Äquivalenz zwischen Objekten aufzufassen; also dass wir Objekte in einem gewissen Sinne als “gleich” betrachten können. Jedes der drei Eigenschaften fasst Merkmale auf, die wir intuitiv von äquivalenten Objekten erwarten würden. Einfaches Beispiel ist Gleichheit (“=”).

- Ist  $\text{id}$  eine Äquivalenzrelation?

# Äquivalenzklassen

Elemente, die untereinander durch die Relation verknüpft sind, bilden Gruppen (Bild).

# Äquivalenzklassen

Elemente, die untereinander durch die Relation verknüpft sind, bilden Gruppen (Bild). Im folgenden sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation. Diese Gruppen (Äquivalenzklassen) wollen wir irgendwie beschreiben können.

## Def. Äquivalenzklasse

Sei  $a \in A$ . Die Menge aller Elemente, die unter  $\sim$  zu  $a$  äquivalent sind schreiben wir als

$$[a]_{\sim} \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in A \mid b \sim a\}$$

.

# Äquivalenzklassen

Elemente, die untereinander durch die Relation verknüpft sind, bilden Gruppen (Bild). Im folgenden sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation. Diese Gruppen (Äquivalenzklassen) wollen wir irgendwie beschreiben können.

## Def. Äquivalenzklasse

Sei  $a \in A$ . Die Menge aller Elemente, die unter  $\sim$  zu  $a$  äquivalent sind schreiben wir als

$$[a]_{\sim} \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in A \mid b \sim a\}$$

.

Reflexivität erfordert, dass jedes Element  $a \in A$  irgendwie in der Relation ist. Daher ist intuitiv klar, dass  $\sim$  die ganze Menge  $A$  in diese Gruppen aufteilt. Die Menge der Äquivalenzklassen  $A / \sim$  ist also eine Partition von  $A$ . (Das muss man aber beweisen!)

## Aufgabe 3 (Aufgabe vom Skript)

Prove that the intersection of two equivalence relations is an equivalence relation.

## Aufgabe 4 (Alte Prüfungsaufgabe HS21)

Let  $\rho$  and  $\sigma$  be two equivalence relations on a set  $A$ . Prove that if

$$\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$$

then  $\rho \circ \sigma$  is an equivalence relation.