Feedback:

- nicht $x<2 \iff x \geq 2$

- $\forall x\,(0<\text{integer}(x) \rightarrow (\exists y \exists z\ x=\text{integer}(y)\cdot\text{integer}(z)))$ NEIN !

  $(0<x \wedge \text{integer}(x))$ $\qquad$ $x=y\cdot z \wedge \text{integer}(x) \wedge \text{integer}(z)$

- "Zeige, dass für $x\in\mathbb{R}$ so dass $3x^5 \leq 56+5x^3$ gilt $x\leq 2$."

  In anderen Worten:

  Zeige

  $$3x^5 \leq 56+5x^3 \Rightarrow x\leq 2$$

  NICHT das gleiche wie:

  $$x\leq 2 \Rightarrow 3x^5 \leq 56+5x^3$$ (auch wenn diese Implikation auch gilt)

  0 Punkte :-(

Zusammenfassung Beweismethoden

kann man nur gut anwenden, wenn sie einem auch intuitiv sind!

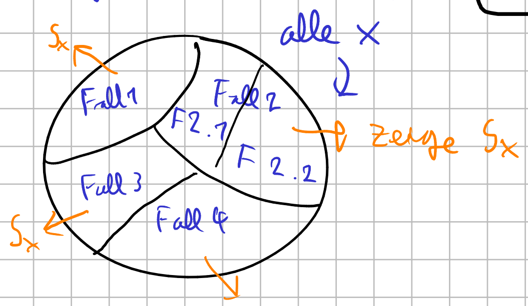
① Widerspruchsbeweise: S beweisen. Wir fragen uns: Was passiert wenn S falsch ist?
$\rightsquigarrow$ Widerspruch $\rightsquigarrow$ S muss wahr sein.

Idee: $A\rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$

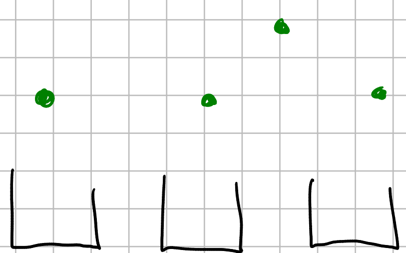
② Indirekt: $S \Rightarrow T$ $\qquad$ nicht $T \Rightarrow$ nicht S

Bsp.: es regnet $\Rightarrow \exists$ Wolken
ist das gleiche wie $\neg\exists$ Wolken $\Rightarrow$ es regnet nicht

③ Fallunterscheidung:
für jedes x gilt S_x:



④ Pigeonhole principle:

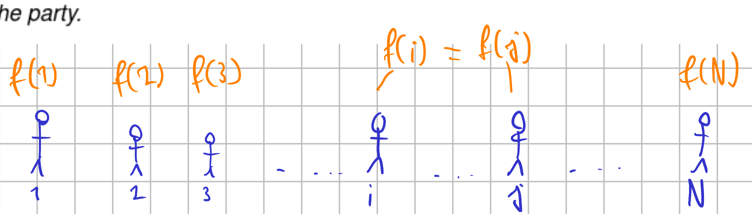


n Objekte

$\rightarrow$ Kasten mit $\lceil \frac{n}{k} \rceil = 2$ Bälle

k Kasten

At a party of N people, some pair of people are friends with the same number of people at the party.



Mögliche Werte für f:

0 Freunde

jemand hat 0 Freunde ⇒ niemand kennt den ⇒ jeder hat höchstens N-2 F.

$(\exists i \; f(i) = 0) \to (\forall j \; f(j) \le N-2 < N-1)$

1 F.

⋮

N-1 F.

Fall jemand hat 0 Freunde:

⇒ niemand hat N-1 Freunde

⇒ mögliche Werte für f (Im(f)): $\underbrace{0 \quad 1 \quad \dots \quad N-2}_{N-1 \text{ mögliche Werte}}$

Wir haben N Personen, jeder hat eines dieser Werte für f: $\underbrace{f(1) \quad f(2) \quad f(3) \quad \dots \quad f(N)}_{N \text{ Personen/Werte}}$

Nach SFP gibt es zwei Personen mit dem gleichen Wert!

Fall jeder hat > 0 F.:

⇒ niemand hat 0 F.

⇒ mögliche Werte für f: $\underbrace{1 \quad 2 \quad \dots \quad N-1}_{N-1 \text{ Werte}}$

Wieder N Personen. Also gibt es wieder nach SFP zwei P. mit der gleichen #F.

Set theory:

- Definitionen

Sind irgendwelche Def. unintuitiv/unklar?

Kart. Produkt: nützlich!

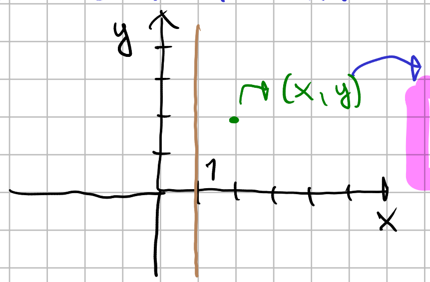
A × B: alle Paare von einem Element aus A und einem Element aus B.

Pseudo-code:

```
S = ∅
for a in A
    for b in B:
        S = S ∪ {(a,b)}
```

Beispiele:

- Punkte im Koordinatensystem:



$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\boxed{\{1\} \times \mathbb{R}}$

- Würfe von einem Würfel: $(\overset{\text{1. Wurf}}{a}, \overset{\text{2. Wurf}}{b})$

$W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Alle Würfe: $W \times W$

Alle Würfe wobei der erste Wurf eine 1: $\{1\} \times W$

Alle Würfe mit genau einer geraden Zahl oder zwei gleiche Zahlen:

$$\underbrace{(\{2,4,6\} \times \{1,3,5\})}_{A_1} \cup \underbrace{(\{1,3,5\} \times \{2,4,6\})}_{A_2} \cup \underbrace{id}_{A_3}$$

Oder $\bigcup_{i=1}^{3} A_i$

- Leere Menge:

$\emptyset$: keine Elemente

Wichtig: $\forall S \quad \emptyset \subseteq S$ → häufiges Gegenbsp.

$S \times \emptyset = \emptyset$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \setminus \emptyset = A$

Beweise mit Mengen:

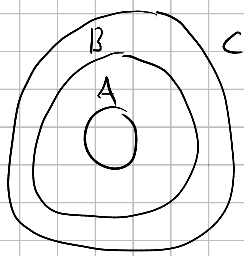
Schritt ①: intuitiv/logisch überlegen

Schritt ②: Beweisen mit den Definitionen — a) in Worten, b) mit Logik

$\subseteq$: "alles was in A ist, ist auch in B"

Zeige $\underbrace{A \subseteq B} \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Zuerst Trick: Bild



Variante a) Vorgehen bei "$A \subseteq C$": Def. $\forall x\,(x \in A \to x \in C)$.

Also nehme $x \in A$ und zeige $x \in C$

$$x \in A \Rightarrow x \in B \qquad (A \subseteq B)$$
$$\Rightarrow x \in C \qquad (B \subseteq C)$$

Also haben wir $A \subseteq C$ gezeigt.

Variante b) Beweis mit Logik: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in B) \wedge \forall x\,(x \in B \to x \in C)$

$(F \to G) \wedge (G \to H) \models F \to H$

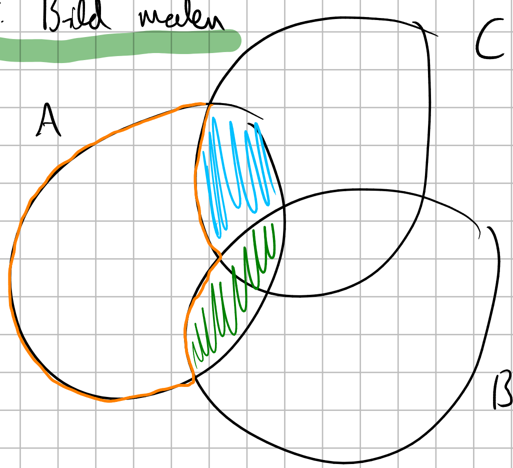
$$\Leftrightarrow \forall x\,((x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in C))$$

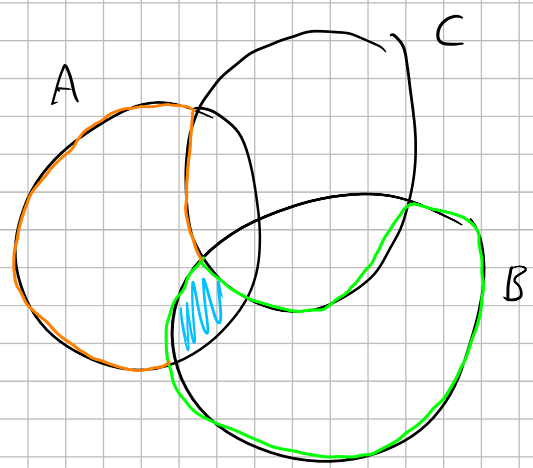
$$\Rightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in C)$$

Prove or disprove: For any sets A, B, and C we have

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C).$$

Trick: Bild malen





Gegenbeispiel? $A = \{1\}$, $B = \{1\}$, $C = \{1\}$

$(A \setminus B) \setminus C = \emptyset$, $A \setminus (B \setminus C) = \{1\} \setminus \emptyset = \{1\}$

Gleichheit zeigen: Immer: $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \iff A = B$

Seien A, B zwei Mengen.

Zeige $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2$

$\subseteq$

$(a, b) \in \underbrace{(A \times B) \cap (B \times A)}$

$\iff (a,b) \in A \times B \wedge (a,b) \in B \times A$

$\iff a \in A \wedge b \in B \wedge a \in B \wedge b \in A$

andere Richtung? $\iff a \in A \cap B \wedge b \in A \cap B$

$\iff (a,b) \in (A \cap B)^2$

Komplizierter:

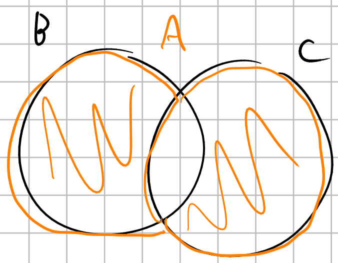
Serie 5, Aufgabe 1 von HS20: https://polybox.ethz.ch/index.php/s/WXf1p3ODpDdpnRH?path=%2F1.%20Semester%2F2%20DiskMath%2F3%20Exercises%2FHS20

5.1 A Property of Any Two Sets (⋆ ⋆)

Prove or disprove: for any two sets A and B there exists a set C such that

$$A = \underbrace{(B \setminus C) \cup (C \setminus B)}_{B \oplus C}.$$

(https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_difference)



alle El. nur in B oder nur in C

↳ komm., assoz., selbstinvers!

$B \oplus (B \oplus A)$

$= (B \oplus B) \oplus A$

$= \emptyset \oplus A = A$

$\Rightarrow$ wähle $C = B \oplus A$

$= (B \setminus A \cup A \setminus B)$

Zeige $A = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$

$= B \setminus ((B \setminus A) \cup (A \setminus B)) \cup (B \setminus A \cup A \setminus B) \setminus B$

Beweis $\subseteq$: (wie vorher links nach rechts)

Sei $x \in A$.

Fall $x \notin B$:

$x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus B \wedge x \notin B$ (Def. $\setminus$, Logik)

$\Rightarrow (x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A) \wedge x \notin B$ ($A \models A \vee B$)

$\Rightarrow x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \wedge x \notin B$ fehlt! (Def. $\cup$)

$\Rightarrow x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \setminus B$ (Def. $\setminus$)

Fall $x \in B$:
Dann wissen wir

$$x \notin B \setminus A$$

(da $x \in A$) und

$$x \notin A \setminus B,$$

(da $x \in B$) also

$$x \notin ((B \setminus A) \cup A(\setminus B)).$$

Da $x \in B$ folgt daraus dann wieder

$$x \in B \setminus ((B \setminus A) \cup (A \setminus B))$$

und auch

$$x \in ((B \setminus ((B \setminus A) \cup (A \setminus B)) \cup ((B \setminus A) \cup (A \setminus B)) \setminus B)$$

wie gewünscht.