Feedback

- Bonus, Aufgabe 6):

  zu Zeigen: $z \in S \Rightarrow 1 + b - za \in S$

  Lösung in vielen Abgaben:

  $a(1 + b - za) = 1$
  $\Leftrightarrow a + ab - aza = 1$
  $\Leftrightarrow \dots$
  $\Leftrightarrow 1 = 1$

  Ein Beweis sollte wie ein Pfad von Aussagen sein, der bei einer wahren Aussage/einer Annahme beginnt und durch Implikationen verbunden zu ____ führt!

- Wir sind in $\langle R; +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$, $a \in R$.

  Darf man $a + a = 2a$ schreiben?

  Neein! "2" ist nicht etwas, was wir in R kennen. 0, 1 haben wir nur, weil wir die NE bezüglich "+", "·" so benannt haben. Das sind keine Zahlen da, nur Symbole! (wir nehmen 0, 1 weil wir das von $\mathbb{Z}$ so kennen). Man könnte aber definieren $\forall a \in R \quad 2a := a + a$

- R wie oben, $a, x, y \in R$.

  Gilt

  $$ax = 1 \text{ und } ay = 1 \Rightarrow x = y?$$

  Nein! Lemma 5.2. spricht nur von Inversen, also Elemente, die Links- und Rechtsinversen sind.

  Was, wenn R kommutativ? L 5.2.

  Ja. Dann gilt $1 = ax = xa \Rightarrow x = y$

Körper

Wieso ist $\frac{x}{0}$ nicht definiert? Wieso verlangen wir bei einem Körper nicht Invertierbarkeit von 0?

Inverse von Mult. $\hat{=}$ Division

$0 \cdot x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{0}$

aber wir wissen auch $0 \cdot x = 0$ nach den Rangregeneschaften.

$\Rightarrow$ Invertierbarkeit von 0 führt zu einem Widerspruch.

Polynome über einem Ring ($R[X]$), mögliche Vorstellungen

Sei R ein kommutativer Ring

ⓐ Wir konstruieren Tupel mit Elementen aus R

$(a_0, a_1, \dots, a_n)$ mit $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ (und $n \in \mathbb{N}$)

Alle solche Elemente packen wir in eine Menge

$R[X] \hat{=} S = \{(a_0, a_1, \dots, a_n) \mid n \in \mathbb{N} \wedge a_0, a_1, \dots, a_n \in R\}$

und definieren Operationen "$\boxplus$" und "$\boxdot$" auf die Elemente in S → wie gewohnt in Algebra!

Bsp.: $+$:

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \boxplus (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots, b_m)$$
$$:= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, 0 + b_{n+1}, \dots, 0 + b_m)$$

(Addition in R)

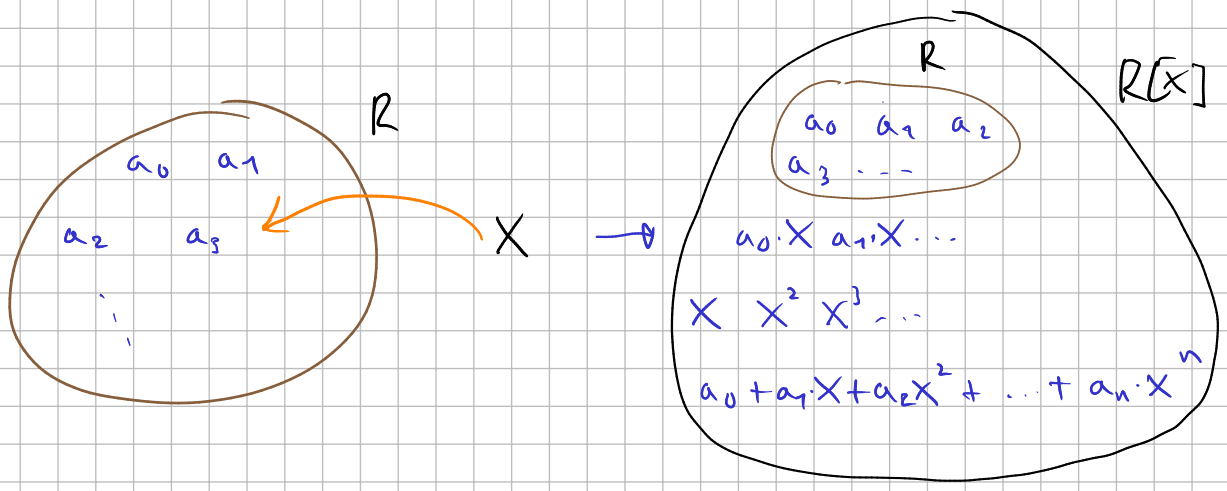
Wir definieren das so, dass $\langle S; \boxplus, \boxdot, (0,), \boxdot, (1,)\rangle$ ein Ring definiert.

ⓑ Wir erfinden ein Objekt "X" und "erweitern" R mit X, wir nehmen es also zu R hinzu und bekommen $R[X]$. Daher die Notation "$R[X]$"

Analog wie bei Untergruppen, müssen wir dann schauen, dass für alle $a, b \in R[X]$: $a \cdot b \in R[X]$, $a + b \in R[X]$

Konkret: $R \subseteq R[X]$, $X \in R[X]$. $a_0, a_1, \dots \in R[X]$ und $X \in R[X]$

$$\Rightarrow a_0 \cdot X, a_1 \cdot X, \dots \in R[X],\ X \cdot X = X^2, X \cdot X \cdot X = X^3, X^4, \dots \in R[X]$$
$$\Rightarrow a_0 + a_1 \cdot X + a_2 \cdot X^2 + \dots + a_n \cdot X^n \in R[X]$$



Polynome über einem Körper

$a(x)$ $m(x)$

Teile $x^4 + 3x^2 + 4$ durch $4x^2 + 2x + 1$ in $\mathbb{Z}_5$ mit Rest.

Nach Satz 5.25 können wir das, weil

$a(x) = m(x) \cdot q(x) + r(x)$

was wir suchen, Rest

$4x \equiv_5 1 \Rightarrow x = 4$

$1x^4 + 3x^2 + 4 : 4x^2 + 2x + 1 = 4x^2 + 4(2x) + 4 \cdot 3$ ($4 \cdot 3 = 2$, $4(2x) = 3$)

$q(x)$

$-(4 \cdot 4 \cdot x^4 + 8x^3 + 4x^2)$ ($4 \cdot 4 = 1$)

$= -8x^3 - x^2 + 4$

$\equiv_5$

$= 2x^3 + 4x^2 + 4$

$-(2x^3 + 6x^2 + 3x)$

$= -2x^2 - 3x + 4$

$= 3x^2 + 2x + 4$

$-(3x^2 + 4x + 2)$

$= -2x + 2$

$= 3x + 2$ → der Rest $r(x)$

(wir berechnen da $a(x) - m(x) \cdot \_\_ = \text{Rest}$)

Berechne

$$(x+3)(x+2)$$

in $\mathbb{Z}_5[x]_{x^2+4}$

$m(x)$

$(x+3)(x+2) \equiv_{m(x)} x^2 + 2x + 3x + 6 \equiv_{m(x)} x^2 + 6 - (x^2 + 4)$

$2x + 3x = 0$

$\equiv_{m(x)} 2$

$x^2 + 4$ in $\mathbb{Z}_5$

$a(1) = 0$, $a(4) = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4 = (x-1)(x-4)$

$= (x+4)(x+1)$

$x^3 + 2x^2 + 1$ in $\mathbb{Z}_3$

$a(0) = 1$, $a(1) = 1 + 2 + 1 = 1$, $a(2) = 8 + 2 \cdot 4 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2$ in $\mathbb{Z}_2$

$x^4 + x^2 + 1$ in $\mathbb{Z}_2$
Hinweis: $x^2 + x + 1$ ist das einzige irreduzible Polynom in $\mathbb{Z}_2$ von Grad 2.

$a(0) = 1$, $a(1) = 1$

Wenn nicht irreduzibel, dann teilt x^2+x+1 $a(x)$. Aber $a(x) = (x^2+x+1)q(x)$ dann muss $\deg(q(x)) = 2$ gelten, also $q(x) = x^2+x+1$

Wir überprüfen: $(x^2+x+1)(x^2+x+1) = x^4 + x^3 + x^2 + x^3 + x^2 + x + x^2 + x + 1$

$1+1=0$

$= x^4 + x^2 + 1 = a(x)$

Faktorisierung

Bestimme alle Nullteiler von $\mathbb{Z}_3[x]_{x^2+2}$.

$p(x) \in F[x]_{m(x)}$ Nullteiler $\Leftrightarrow R_{m(x)}(p(x) \cdot q(x)) = 0$, $q(x) \in F[x]_{m(x)} \setminus \{0\}$

$\Leftrightarrow m(x) \mid p(x) \cdot q(x)$ → $\deg(q(x)) < \deg(m(x))$ → q kann nicht alle Teiler von $m(x)$ enthalten ⇒ $p(x)$ und $m(x)$ haben Teiler gemeinsam

$\Leftrightarrow \gcd(m(x), p(x)) > 1$

da müsste man noch genauer begründen für ein Beweis

→ Strategie: wir schauen uns die nicht-konst. Teiler von $m(x)$ an. Alle vielfachen davon sind Nullteiler (da $\gcd(\text{Teiler}, m(x)) > 1$)

$m(x) = x^2 + 2 \Rightarrow m(1) = 0 \Rightarrow x^2 + 2 = (x-1)(x+1) = (x+2)(x+1)$ (raten)

$\in \mathbb{Z}_3$

alle Elemente haben die Form: $ax + b$ ⇒ $3^2 = 9$ Elemente

$\mathbb{Z}_3[x]_{x^2+2} = \{0, 1, 2, x, x+1, x+2, 2x, 2x+1, 2x+2\}$

→ $1(x+2)$, $2(x+2)$ und $1(x+1)$, $2(x+1)$ sind Nullteiler

Liste alle Elemente der Gruppe $\mathbb{Z}_3[x]^*_{x^2+2}$ auf.

→ alles ohne Nullteiler und 0

$\mathbb{Z}_3[x]^*_{x^2+2} = \{1, 2, x, 2x\}$

Bestimme das Inverse von $2x$ in der Gruppe $\mathbb{Z}_3[x]^*_{x^2+2}$.

da wäre es schneller zu testen: $x(2x) = \ldots$, $(2x)(2x) = \ldots$

$2x(ax+b) \equiv_{m(x)} 1$ denke an $a = m \cdot q + r$

$\Leftrightarrow 2x(ax+b) = k(x) \cdot m(x) + 1$

Grad 2 ⇒ k hat Grad 0

$\Leftrightarrow 2x(ax+b) = k(x^2+2) + 1$

$\Leftrightarrow 2ax^2 + 2bx = kx^2 + 2k + 1$

$\Rightarrow 2a = k$

$2bx = 0$

$2k + 1 = 0$

$\Rightarrow k = 1, b = 0, a = 2$

$\Rightarrow (2x)^{-1} = 2x$

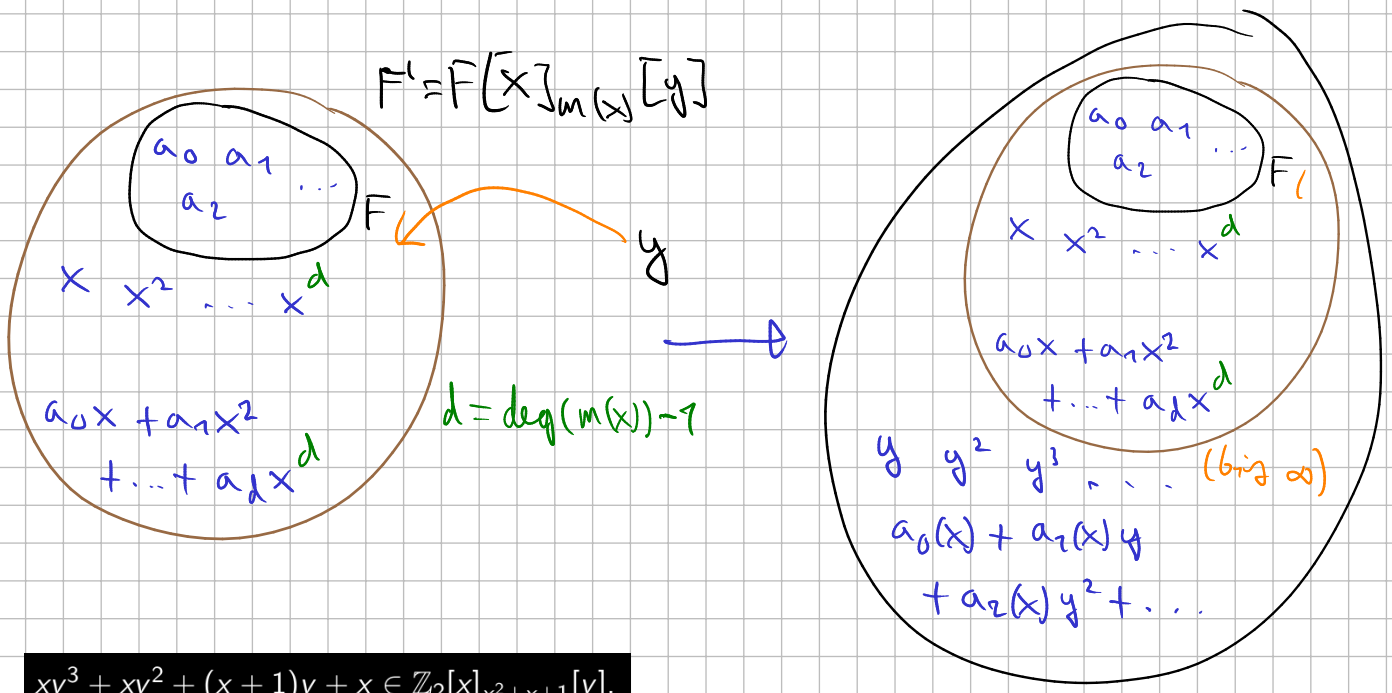
Polynome mit verschachtelten Variablen

Wir haben gesehen:

$F' = F[X]_{m(x)}$ mit $m(x)$ irreduzibel ist ein Körper.

$\Rightarrow$ Wir können wieder Polynome über F' betrachten und bekommen wieder alle Eigenschaften wie Modulorechnen, Nullstellen als Teiler, Faktorisierung in irreduzible Polynome, usw. ▽

$F'[y] = F[X]_{m(x)}[y]$



$xy^3 + xy^2 + (x+1)y + x \in \mathbb{Z}_2[x]_{x^2+x+1}[y]$.

Grad = 3 $\Rightarrow$ Wenn es Teiler hat, dann gibt es einen mit Grad 1.

$\Rightarrow$ Nullstellen testen

$\mathbb{Z}_2[X]_{x^2+x+1} = \{0, 1, x, x+1\}$

$a(0) = x \neq 0$, $a(1) = \underbrace{x + x}_{0} + \underbrace{(x+1) + x}_{0}$

$= 1 \neq 0$

$a(x) = x^4 + x^3 + \underbrace{(x+1)x}_{0} + x$

$= x^4 + x^3 + x^2$ ← subtrahiere vielfaches von $m(x)$ um in $\mathbb{Z}_2[x]_{m(x)}$ zu bleiben

$= x^4 + x^3 + x^2 - x^2(x^2+x+1)$

$= 0$

$\Rightarrow$ $y + x \mid a(x)$ ▽

$\Rightarrow$ nicht irreduzibel