Feedback:

1.2.: Was die meisten gemacht haben:

$n^2 \leq n$ stimmt nicht für alle n (z.B. 2)
$\Rightarrow$ Beweis falsch

Mit der Logik hätte das auch gereicht.

Das reicht nicht! ① Die letzte Folgerung ist auch falsch. Die Frage war: wo hakt es gedanklich?

② Manchmal will man falsche Aussagen z.B. Widerspruchsbeweis

Annahme: $S =$ "n ist die größte nat. Z."

$\hat{=}$ "Es gibt eine größte nat. Z., wir nennen ihn n":

$n^2 \in \mathbb{N} \overset{S}{\Rightarrow} n^2 \leq n$ → die Folgerung ist korrekt.

alle anderen Schritte auch korrekt ⇝ $S \Rightarrow T$ gezeigt

Was fehlt dann, um T zu zeigen? ⇝ S muss wahr sein

Nochmals, das Schema:

1. wahre Aussage S
2. $S \Rightarrow S_1 \Rightarrow S_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow S_n \Rightarrow T$ $\quad \hat{=} \quad A \wedge (A \rightarrow B) \models B$

1. + 2. → T wahr

Bonus letzte Woche

- Idee: Optionen: a) $F \;\square\; G \xrightarrow{\text{(einfacher)}}$ fast immer 1
  $\Rightarrow$ fast immer $F \equiv G$

  b) $F \heartsuit G$

  $\Rightarrow$ $\heartsuit$ nur 1-mal $\neq 0$, ähnlich wie gesuchte Formel.
  $\Rightarrow$ probiere immer 0 $(G = A \heartsuit A)$ und im Fall $A = 1$, $B = 0$ $F = 1$
  $\Rightarrow (B \heartsuit A) \;\square\; (A \heartsuit A)$

- Wahrheitstabellen reichen als Begründung.
  Unnötige und falsche Begründung kann Abzug geben
- Tabelle binär auflisten

Bonus:

Format:

$$
\begin{aligned}
F &= \text{- - - - -} \\
&\equiv \text{- - -} && (R1) \\
&\equiv \text{- -} && (R2) \\
&\vdots && \vdots \\
&\equiv G && (R_{42})
\end{aligned}
$$

nicht $F \equiv G$

$\Rightarrow F' \equiv G'$

$\Rightarrow \dots$

Regel müssen genau wie im Lemma angewendet werden.

- Assoziativität, Kommutativität sind Regeln:

  $A \wedge B \wedge C$ → Abzug
- Ordnung muss mit Klammer klargemacht werden.

  $A \wedge B \vee C$ → Abzug
- Sehr wenige Fehler werden toleriert!

Siehe Aufgabe 1.6 oder Bonus HS2021 (auf Webseite verlinkt)

Beispiele:

- $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ W/F? (2.1.5 ist von links)
- $A \wedge B \to C$ W/F? (Klammerung)
- $B \wedge (\neg A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv B \wedge \neg A$ W/F? (Absorption)
- $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \equiv A \wedge (B \vee C)$ W/F? $(\equiv A \vee (B \wedge C))$
- $(A \wedge B) \vee (C \wedge A) \equiv A \wedge (B \vee C)$ W/F? 2 Schritte (Komm. + distr.)

Fragen zur Vorlesung?

Tautologie, Erfüllbarkeit

Einfache Definitionen:

- $F \equiv \top$: für alle Inputs ist F wahr

  Bsp.: $A \vee \neg A$

- $F \equiv \bot$: F ist für kein Input erfüllt

  Bsp.: $A \wedge \neg A$

Zeigt man am einfachsten, indem man die Wahrheitstabelle angibt

Intuitiv kann man das aber auch oft mit Äquivalenzen sehen
z.B.: $A \wedge (\neg A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv A \wedge \neg A \equiv \bot$

- F erfüllbar: es gibt Inputs, die F wahr machen

  Wie zeigen?

  Falls erfüllbar:
  → man gibt $A = \ldots, B = \ldots, C = \ldots, \ldots$ die F erfüllen.

  Falls unerfüllbar:

Fragen?

Logische Konsequenz ($\models$)

$F \models G$: immer wenn F erfüllt ist, ist G erfüllt. Intuitiv: G folgt aus F

Gleiche Idee wie bei "$\to$", aber da spricht man über $\boxed{\text{Formeln}}$. Man muss nicht Werte für $A, B, C, \ldots$ festlegen.
Es ist eine $\boxed{\text{mathematische Aussage}}$, die wahr oder falsch ist.

Logische Konsequenz kann uns helfen, Folgerungen formal zu begründen.

Fragen?

Wie zeigen: 2 Wege

① Wahrheitstabelle:

wenn Eintrag für F gleich 1, dann ist auch Eintrag für G gleich 1.

Bsp.: $A \wedge B \models A \vee B$:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$(A \wedge B) \to (A \vee B)$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

② $H = F \to G$ ist eine Tautologie

Beweis: $F \models G \overset{\text{genau dann wenn}}{\iff} F \to G$ Tautologie

Bei so einem Beweis geht man immer gleich vor. Wie?
$S \Rightarrow T$ und $T \Rightarrow S$

$F \models G$: wenn immer F wahr, G wahr.

$F \to G$ Tautologie: Für alle Inputs ist $F \to G$ wahr

$\Rightarrow$: Fall $F = 0$:

$\Rightarrow F \to G$ erfüllt

Fall $F = 1$:

$\Rightarrow G = 1$ (da $F \models G$)

$\Rightarrow F \to G$ erfüllt

$\Leftarrow$: Betrachte beliebige Zuweisung, die F erfüllt
Da $F \to G$ wahr, muss G auch erfüllt sein (def. $\to$)
$\Rightarrow F \models G$

Allgemein wenn ihr feststeckt, fragt euch: Was wird gefragt?
Wie ist alles definiert?

Beispiele: In Gruppen: Intuitive Begründung oder Gegenbsp.

- $A \wedge B \models A$ — W/F?
- $A \to (B \wedge C) \models A \to C$ — W/F?
- $(A \wedge B) \to C \models B \to C$ — W/F? $(A=0, B=1, C=0)$

  wir brauchen beide A und B um C zu wissen
- $\underbrace{A \wedge (\neg A \vee \neg(A \vee B))}_{F} \models A \wedge B \wedge C$ — W/F?

  F ist unerfüllbar ⇒ leere Aussage.
- $A \to (B \vee C) \models (A \wedge \neg B) \to C$ — W/F?

realistisches Beispiel:

Fact:
Sei $p \in \mathbb{N}$.

$\underbrace{\text{Falls } p \text{ prim}}_{A}$, $\underbrace{\text{dann}}_{\to}$ $\underbrace{p \text{ ungerade}}_{(B}$ $\underbrace{\text{oder}}_{\vee}$ $\underbrace{p = 2}_{C)}$

$A \wedge \neg B \to C$

In einem Beweis: p prim und p gerade, dann p = 2

Es ist natürlich intuitiv, dass die Folgerung stimmt. Wenn wir das aber mit der Sprache begründen wollen, dann können wir nur mit Intuition argumentieren, und leider ist unsere Intuition nicht immer richtig.
Mit der Logik haben können wir uns ohne Zweifel davon überzeugen.

Prädikatenlogik:

- Mit Aussagenlogik können wir nicht genug ausdrücken.

  z.B. Für jede nat. Zahl gilt $n \cdot n > n$ oder $n = 1$.

  → Wir führen Prädikate, Funktionen, Konstanten und Quantoren ein.

  1. Universum!
  2. $\forall n \, (n^2 > n \vee n = 1)$

  Welche sind Quantoren, Funktionen, Konstanten, Prädikate

  Formeller:

  $$\forall n \, (\mathrm{less}(n, f(n)) \vee \mathrm{equals}(n, 1))$$

- Satz ↔ Formel
- Logische Konsequenzen

(siehe Slides)

- alte Prüfungsaufgabe
- Interpretation finden