Einleitung:

- Andreas (bitte Vorname), 3. Semester, letztes Jahr auch DiskMath gemacht und überlebt

- DAS beste Fach. Ihr lernt eines der coolsten Sachen, die es gibt: Beweise. ↪ Analogie zu argumentieren
    - Die Konzepte in DiskMath braucht ihr in (fast) jedem anderen Fach. Bsp. 2. Semester.

- Ziele vom Kurs:
    - Theorie: Mengenlehre, Relationen, Abzählbarkeit, Zahlentheorie, Algebra, Logik again

    - Abstraktion

    - (informelle) Mathematische Beweise führe können

Pro tips:
- macht die Aufgaben und probiert ALLE! Keine Aufgaben, keine 4 :(

    Es darf länger dauern! Hoffentlich nicht so lange wie bei mir!

    Wie gut ihr die Aufgaben könnt bestimmt wie gut ihr die Prüfung könnt.

- lest den Skript!

- (Übung ;)) > Aufgaben > Skript > Vorlesung (immer noch wichtig!)

- Notizen IMO nicht nötig. Man lernt es, indem man den Skrip liest und Aufgaben löst.

Logistik: Abgaben am Donnerstag vor Mitternacht, neue Aufgabe am Freitag.
- ich wäre froh, wenn ihr alles abgibt (am Schluss zählt aber nur der Bonus) -> Fortschritt sehen

Meine Ziele in der ÜS:

- die meisten ÜS haben Probleme mit Teilnahme, niemand will vor den anderen etwas Falsches sagen
    => zögern, passiert mir auch.

    - Ihr will erreichen, dass ihre ohne zögern und einem semi-Herzinfarkt teilnehmen könnt.
    Ich bin auch nur Student.

    - Wenn ihr versucht teilzunehmen, wird es auch automatisch einfacher aufzupassen.

    - Ihr werdet vlt. auch belohnt ;)

- ihr werdet auf die Aufgaben vorbereitet und könnt sie lösen

- Es sollte euch die Zeit wert sein, 2 h da zu verbringen.

Was wir heute machen:

- Besprechung der Aufgaben (1.1 und) 1.2 von der Serie

- Logik: Beispiele, Repetition und Aufgaben

- Hilbert's Hotel (falls Zeit übrig)

"Lerziele":
- ihr könnt etwas mit den Aufgaben anfangen

- ihr gewinnt etwas Intuition über Logik

- ihr könnt Äquivalenz von einfachen Formeln zeigen

- ihr könnt einfache Äquivalenzumformungen ausführen

- ihr wisst, wie man systematisch Wahrheitstabelle aufschreibt

- ihr seid motiviert für spätere Themen nach dem Teaser

Wiederholung / Übung:

Aufgaben besprechen:

Bemerkung: 1-2 Sachen (vor allem Lösungen) habe ich aus meinen Notizen entfernt, um es euch nicth zu verraten.

2. Beweis Schema (direkter Beweis):

1. wahre Aussage S
2. $S \Rightarrow S_1 \Rightarrow S_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow S_n \Rightarrow T$

Dann hat man $S \Rightarrow T$ gezeigt

Da S gilt, gilt dann auch T.

- Was ist Logik?
  Eine Arithmetik, um mit der Logik von Ausdrücken zu arbeiten.
  In der Mathematik wollen wir zeigen, ob Aussagen wahr oder falsch sind.
  Logik hilft uns, Aussagen präzise zu verstehen, über sie zu argumentieren und umzuformen. "Welche Umformungen sind erlaubt?"
  Wir können damit Ausdrücke mit Logik abstrakter betrachten:
  ohne Worte und konkrete Interpretationen.

Bsp. 2.: Implikation

1. Wie würdet ihr "A -> B" in Worten ausdrücken?
   Welche Frage hat also Antwort den Wahrheitswert?
2. Wahrheitstabelle?

wichtiges Symbol

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\boxed{\text{Intuition: "wenn A, dann auch B"}}$

A = Pflanzen bestehen aus Plastik
B = Plastik ist gut für die Umwelt
→ A ist gar nicht erfüllt
→ man kann nicht sagen, dass die Folgerung falsch ist, weil das Argument keinen Sinn macht

Anwendung:

$A \to B \equiv \neg B \to \neg A$. Das können wir anwenden bei konkreten mathemat. Aussagen.

S: es regnet
T: es hat Wolken

→ $\underbrace{S}_{\text{wir behaupten es sei wahr}} \Rightarrow T$ ist das gleiche wie $\neg T \Rightarrow \neg S$

Herleitung von T aus S ist äquivalent zu einer Herleitung von $\neg S$ aus $\neg T$

Bsp 0.:

P = Ich löse die Bonusaufgabe
R = Ich verrate meinen Freunden die Lösung

Q = Ich und meine Freunde bekommen den Bonus

$(P \wedge R) \rightarrow \neg Q$ Was bedeutet diese Formel in Worten?

de Morgan.

Bsp. 1: A = Ich löse die Aufgaben
B = Ich lese das Skript

① ?
$\neg(A \vee B) \equiv$ "Es ist nicht der Fall, dass ich die Aufgaben löse oder das Skript lese."
||| ? ②   ? ③
$\neg A \wedge \neg B \equiv \;\equiv$ "Ich löse keine Aufgaben und das Skript lese ich auch nicht."

Diese Äquivalenz bleibt, unabhängig davon, was wir für A oder B einsetzen
=> Logik ist ein nützliches Werkzeug

- Gilt auch für mehrere Var.: $\neg(A \vee B \vee C) \equiv \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

Wie würde man das zeigen? Wahrheitstabelle oder Umformung

"Challenge" Aufgabe:

Zeige mit Induktion, dass für beliebige $n \geq 1$ gilt
$\neg(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \equiv \neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \ldots \wedge \neg A_n$

- Wie zeigt man Äquivalenz?

a) Wahrheitstabelle (einfacher aber exponentiell)

Wie zeigt man damit Äquivalenz? Gegeben F und G

z.B. $A \wedge \neg(A \wedge B) \equiv A \wedge \neg B$

easy

→ Zwischenschritt um Fehler zu vermeiden

alle Binärzahlen aufzählen

Tipp: zählt die Zeilen

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$A \wedge \neg(A \wedge B)$	$A \wedge \neg B$
0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

harder task for the students?

A	B	C	$\neg B \wedge C$	$\overbrace{A \to (\neg B \wedge C)}^{F_1}$	$F_1 \to (B \wedge A)$	$A \wedge (B \vee \neg C)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1

$\equiv$

$$F = (A \to (\neg B \wedge C)) \to (B \wedge A)$$

Aufgabe: Bestimme die Wahrheitstabellen von

$F = A \to C$

$G = (A \to B) \wedge (B \to C)$

$H = G \to F$

b) Äquivalenzumformungen

Distributiv-Gesetz: $A \land (B \lor C) \equiv$

einer der häufigsten Umformungen

Bsp.?

Begründung mit Beispielsätzen

a) $(A \lor B) \land (A \lor C)$

b) $(A \land B) \lor (A \land C)$

Mögliche Lösung:
A = ich bin ETH Student
B = ich habe keine Freizeit, C = ich habe keine Ferien

Merktipp: schreibe $A \cdot (B + C)$

Easy:

$$A \land (\neg A \lor \neg B) \equiv (A \land \neg A) \lor (A \land \neg B) \quad \text{(Distributivgesetz)}$$

$$\equiv \underbrace{\bot}_{\text{erplacen}} \lor (A \land \neg B) \quad \text{„unerfüllbar"}$$

$$\equiv A \land \neg B \quad \text{(vs. } \top \text{ „erfüllbar")}$$

Harder: → für sich selbst ≈ 5 min probieren

$$F = (A \to (\neg B \land C)) \to (B \land A) \equiv \neg(A \to (\neg B \land C)) \lor (B \land A) \quad \text{(def. } \to\text{)}$$

$$\stackrel{?}{\equiv}$$

$$G = A \land (B \lor \neg C)$$

$$\equiv \neg(\neg A \lor (\neg B \land C)) \lor (B \land A) \quad \text{"}$$

$$\equiv (A \land \neg(\neg B \land C)) \lor (B \land A) \quad \text{(de Morgan)}$$

$$\equiv (A \land (B \lor \neg C)) \lor (B \land A) \quad \text{(de Morgan)}$$

$$\equiv (A \land B) \lor (A \land \neg C) \lor (B \land A) \quad \text{(Distr.)}$$

klar?

$$\left(\equiv (A \land B) \lor (A \land \neg C) \lor (A \land B)\right)$$

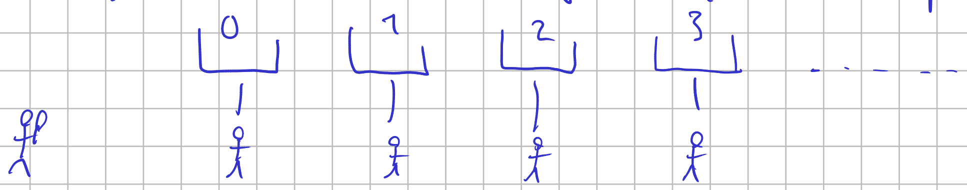
$$\equiv (A \land B) \lor (A \land \neg C) \quad (F \lor F \equiv F)$$

$$\equiv A \land (B \lor \neg C) \quad \text{(Distr.)}$$

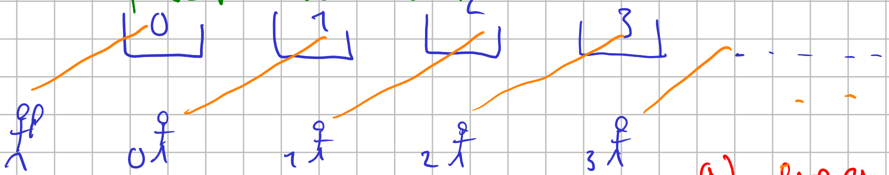
Extra (Hilbert's hotel): → veranschaulicht ein Konzept, der später im Kurs kommt, gibt also Intuition für später

solve in groups of 3/4

a) Hotel with ∞ many rooms, all occupied



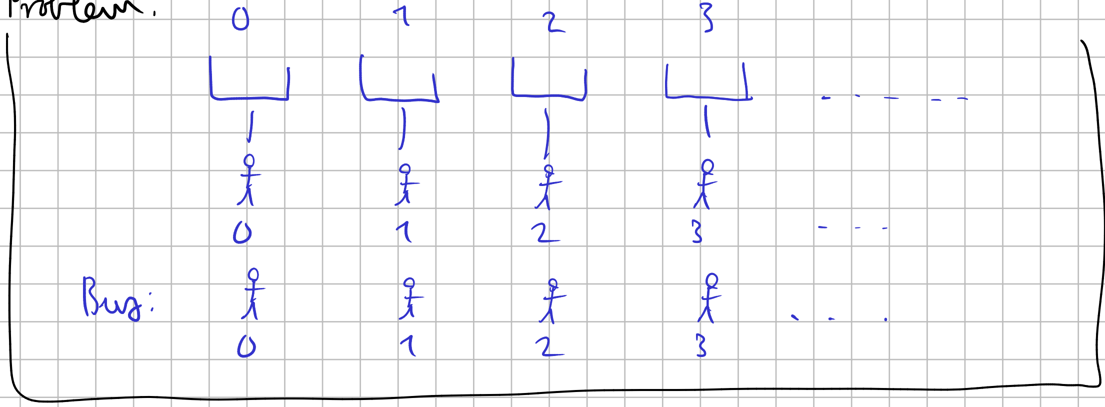
possible solution:



a) everyone gets a (empty) room

b) no two people have the same room

b) Problem:



Formeller

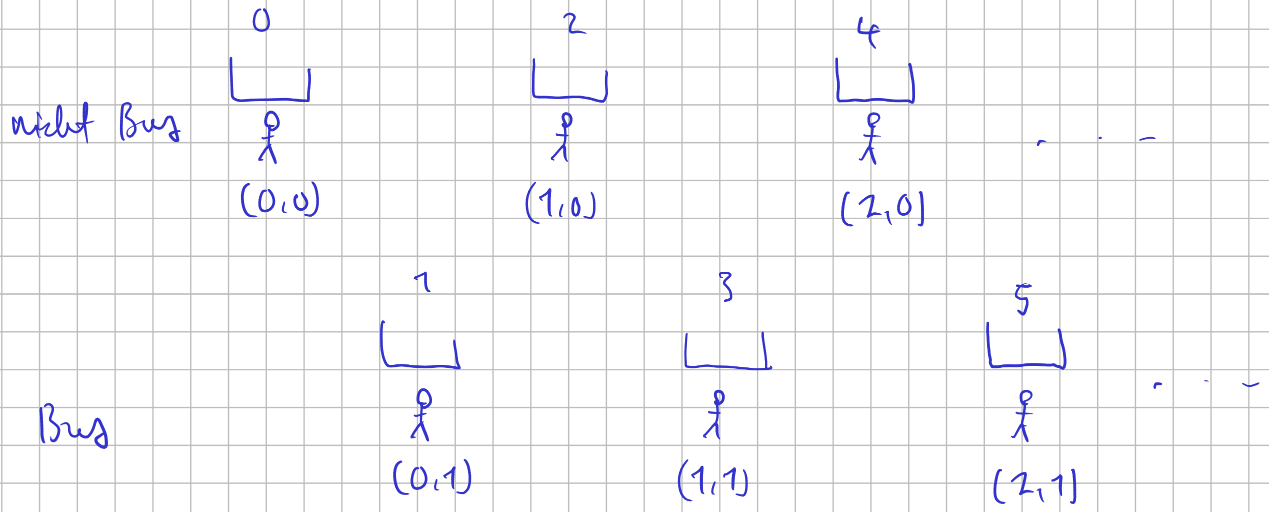
$\to (i, b)$ wobei $b = 0$ or $b = 1$ (von Bus oder nicht)

Gegeben (i, b), welchen Raum bekommt diese Person?

(mathematischer Ausdruck

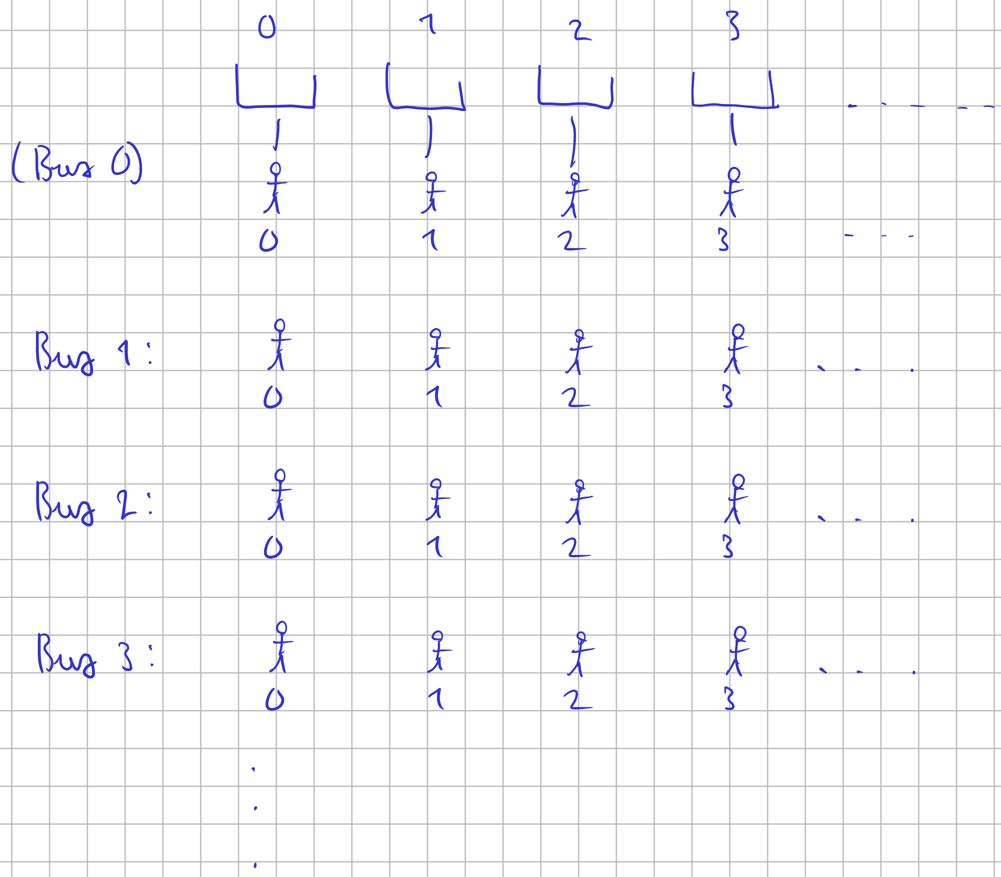
Bemerkung: SPOILER auf der nächsten Seite!!! Versucht es zuerst selber!

Lösung:



$$f(i,b) = 2i + b$$

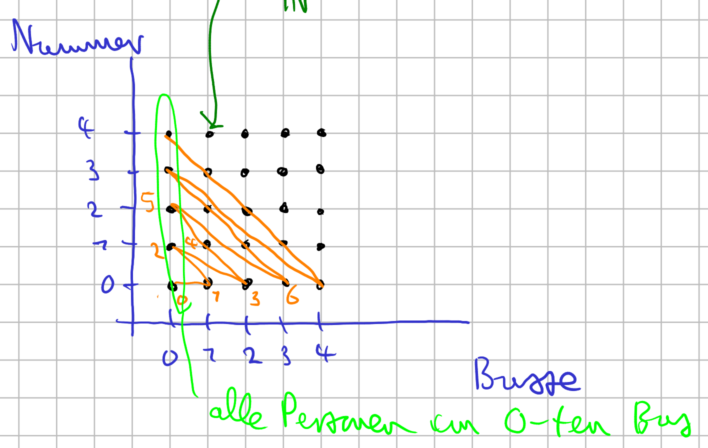
c) kann jemand raten? unendlich viele Busse :)



Idee: Wir bezeichnen die Menschen mit

$\rightarrow (i, j)$ wobei $i \triangleq$ wievielte Person und $j \triangleq$ wievielter Bus

$\in \mathbb{N}^2$



Die Funktion: $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(x, y) = \binom{x+y-1}{2} + y$$