Prädikatenlogik - Alte Prüfungsfrage

1. Finde eine Formel F, so dass in jeder Interpretation, die F erfüllt, das Universum mindestens 2 Elemente hat. (Prüfung HS18)
   Tipp: "$=$", "$\neq$" sind erlaubt.
   Beachte, dass das Universum *nicht* leer sein darf. (Siehe ersten Satz von Kapitel 2.4.1 oder präziser Definition 6.34. im Skript).

Prädikatenlogik - Alte Prüfungsfrage

1. Finde eine Formel F, so dass in jeder Interpretation, die F erfüllt, das Universum mindestens 2 Elemente hat. (Prüfung HS18)
   Tipp: "$=$", "$\neq$" sind erlaubt.
   Lösung:
   $$\forall x \exists y \, (x \neq y)$$
   Beachte, dass das Universum *nicht* leer sein darf. (Siehe ersten Satz von Kapitel 2.4.1 oder präziser Definition 6.34. im Skript).

Prädikatenlogik - Interpretation finden

Finde für die folgenden Formeln Interpretationen, die sie erfüllen:

1. $$\forall x \forall y \left(E\left(f(x,y), f(y,x)\right) \right)$$

Prädikatenlogik - Interpretation finden

Finde für die folgenden Formeln Interpretationen, die sie erfüllen:

1. $$\forall x \forall y \left(E\left(f(x,y), f(y,x)\right)\right)$$

   mögliche Lösung (Kommutativität): $U = \mathbb{Z}$, $E =$ equal, $f(x,y) = x \cdot y$

Prädikatenlogik - Interpretation finden

Finde für die folgenden Formeln Interpretationen, die sie erfüllen:

1. $$\forall x \forall y \left(E\left(f(x,y), f(y,x) \right) \right)$$

   mögliche Lösung (Kommutativität): $U = \mathbb{Z}$, $E =$ equal, $f(x,y) = x \cdot y$

2. $$\forall x \forall y \forall z \left(E\left(f(x, f(y,z)), f(f(x,y),z) \right) \right)$$

Prädikatenlogik - Interpretation finden

Finde für die folgenden Formeln Interpretationen, die sie erfüllen:

1. $$\forall x \forall y \left(E\big(f(x,y), f(y,x)\big) \right)$$

   mögliche Lösung (Kommutativität): $U = \mathbb{Z}$, $E =$ equal, $f(x,y) = x \cdot y$

2. $$\forall x \forall y \forall z \left(E\big(f(x, f(y,z)), f(f(x,y), z)\big) \right)$$

   mögliche Lösung (Assoziativität): $U = \mathbb{R}$, $E =$ equal, $f(x,y) = x + y$

Prädikatenlogik - Interpretation finden

Finde für die folgenden Formeln Interpretationen, die sie erfüllen:

1. $$\forall x \forall y \left(E\left(f(x,y), f(y,x)\right)\right)$$

   mögliche Lösung (Kommutativität): $U = \mathbb{Z}$, $E =$ equal, $f(x,y) = x \cdot y$

2. $$\forall x \forall y \forall z \left(E\left(f(x, f(y,z)), f(f(x,y),z)\right)\right)$$

   mögliche Lösung (Assoziativität): $U = \mathbb{R}$, $E =$ equal, $f(x,y) = x + y$

3. $$\exists G \forall F \left(C(F,G) \right)$$

Prädikatenlogik - Interpretation finden

Finde für die folgenden Formeln Interpretationen, die sie erfüllen:

1. $$\forall x \forall y \left(E(f(x,y), f(y,x)) \right)$$

   mögliche Lösung (Kommutativität): $U = \mathbb{Z}$, $E =$ equal, $f(x,y) = x \cdot y$

2. $$\forall x \forall y \forall z \left(E(f(x, f(y,z)), f(f(x,y),z)) \right)$$

   mögliche Lösung (Assoziativität): $U = \mathbb{R}$, $E =$ equal, $f(x,y) = x + y$

3. $$\exists G \forall F \left(C(F,G) \right)$$

   mögliche Lösung: $U =$ Menge aller Formeln, $C(F,G) = 1 \iff F \models G$

Prädikatenlogik - Fehler finden

Welche der folgenden Formeln sind richtig für die Aussage "Every integer greater than 2 is a sum of two primes." und wenn nicht, wieso? Wir fixieren $U = \mathbb{Z}$.

1. $$\forall x \exists y \exists z \left(2 < x \rightarrow x = \text{prime}(y) + \text{prime}(z)\right)$$

Prädikatenlogik - Fehler finden

Welche der folgenden Formeln sind richtig für die Aussage "Every integer greater than 2 is a sum of two primes." und wenn nicht, wieso? Wir fixieren $U = \mathbb{Z}$.

1. $$\forall x \exists y \exists z \left(2 < x \rightarrow x = \text{prime}(y) + \text{prime}(z)\right)$$

   Sehr falsch! "prime" ist ein Prädikat und gibt einen Wahrheitswert zurück. Wir können Wahrheitswerte nicht addieren.

Prädikatenlogik - Fehler finden

Welche der folgenden Formeln sind richtig für die Aussage "Every integer greater than 2 is a sum of two primes." und wenn nicht, wieso? Wir fixieren $U = \mathbb{Z}$.

3.
$$\forall x \exists y \exists z \left(2 < x \land \left(\text{prime}(y) \land \text{prime}(z) \land x = y + z\right)\right)$$

Prädikatenlogik - Fehler finden

Welche der folgenden Formeln sind richtig für die Aussage "Every integer greater than 2 is a sum of two primes." und wenn nicht, wieso? Wir fixieren $U = \mathbb{Z}$.

3.

$$\cancel{\forall x \exists y \exists z \left(2 < x \wedge \left(\text{prime}(y) \wedge \text{prime}(z) \wedge x = y + z\right)\right)}$$

FAAALSCH!!!!! Richtig wäre

$$\forall x \exists y \exists z \left(2 < x \rightarrow \left(\text{prime}(y) \wedge \text{prime}(z) \wedge x = y + z\right)\right)$$

Prädikatenlogik - Fehler finden

Welche der folgenden Formeln sind richtig für die Aussage "Every integer greater than 2 is a sum of two primes." und wenn nicht, wieso? Wir fixieren $U = \mathbb{Z}$.

3. $$\cancel{\forall x \exists y \exists z \left(2 < x \land \left(\text{prime}(y) \land \text{prime}(z) \land x = y + z\right)\right)}$$

FAAALSCH!!!!! Richtig wäre

$$\forall x \exists y \exists z \left(2 < x \rightarrow \left(\text{prime}(y) \land \text{prime}(z) \land x = y + z\right)\right)$$

Aussagen der Form "Für jede x mit Eigenschaft Y gilt ..." haben immer eine Formel der Form

$$\forall x \left(\text{hatEigenschaftY}(x) \rightarrow \ldots\right)$$

Prädikatenlogik - Fehler finden

Welche der folgenden Formeln sind richtig für die Aussage "Every integer greater than 2 is a sum of two primes." und wenn nicht, wieso? Wir fixieren $U = \mathbb{Z}$.

3.

$$\cancel{\forall x \exists y \exists z \left(2 < x \wedge (\,\text{prime}(y) \wedge \text{prime}(z) \wedge x = y + z)\right)}$$

FAAALSCH!!!!! Richtig wäre

$$\forall x \exists y \exists z \left(2 < x \rightarrow (\,\text{prime}(y) \wedge \text{prime}(z) \wedge x = y + z)\right)$$

Aussagen der Form "Für jede x mit Eigenschaft Y gilt ..." haben immer eine Formel der Form

$$\forall x \left(\,\text{hatEigenschaftY}(x) \rightarrow \dots\right)$$

Noch besser wäre

$$\forall x \left(2 < x \rightarrow \left(\exists y \exists z \left(\,\text{prime}(y) \wedge \text{prime}(z) \wedge x = y + z\right)\right)\right).$$

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivalenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (informelle) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1.
$$\forall x \forall y\, P(x, y) \stackrel{?}{\equiv} \forall y \forall x\, P(x, y)$$

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivalenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (informelle) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\forall x \forall y\, P(x, y) \stackrel{?}{\equiv} \forall y \forall x\, P(x, y)$$

   Wahr. Analogie: verschachtelte for loops.

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivalenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (informelle) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\forall x \forall y\, P(x,y) \stackrel{?}{\equiv} \forall y \forall x\, P(x,y)$$

   Wahr. Analogie: verschachtelte for loops.

2. $$\neg \exists x\, P(x) \stackrel{?}{\equiv} \forall x\, \neg P(x)$$

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivalenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (informelle) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\forall x \forall y\, P(x, y) \stackrel{?}{\equiv} \forall y \forall x\, P(x, y)$$

   Wahr. Analogie: verschachtelte for loops.

2. $$\neg \exists x\, P(x) \stackrel{?}{\equiv} \forall x\, \neg P(x)$$

   Wahr. "Es gibt kein x, so dass $P(x)$ wahr ist" ist das gleiche wie "Für alle x ist $P(x)$ falsch".

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivalenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (informelle) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\forall x \forall y\, P(x,y) \stackrel{?}{\equiv} \forall y \forall x\, P(x,y)$$

   Wahr. Analogie: verschachtelte for loops.

2. $$\neg \exists x\, P(x) \stackrel{?}{\equiv} \forall x\, \neg P(x)$$

   Wahr. "Es gibt kein x, so dass $P(x)$ wahr ist" ist das gleiche wie "Für alle x ist $P(x)$ falsch".

3. $$\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x) \stackrel{?}{\models} \exists x\, \big(P(x) \wedge Q(x)\big)$$

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivalenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (informelle) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\forall x \forall y \, P(x,y) \stackrel{?}{\equiv} \forall y \forall x \, P(x,y)$$

   Wahr. Analogie: verschachtelte for loops.

2. $$\neg \exists x \, P(x) \stackrel{?}{\equiv} \forall x \, \neg P(x)$$

   Wahr. "Es gibt kein x, so dass $P(x)$ wahr ist" ist das gleiche wie "Für alle x ist $P(x)$ falsch".

3. $$\exists x \, P(x) \land \exists x \, Q(x) \stackrel{?}{\models} \exists x \, \big(P(x) \land Q(x)\big)$$

   Falsch. Gegenbeispiel: $U = \mathbb{Z}$, $P(x) = 1 \iff x > 0$, $Q(x) = 1 \iff y < 0$.

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivalenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (informelle) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\exists y \forall x\, P(x, y) \overset{?}{\models} \forall x \exists y\, P(x, y)$$

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivalenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (informelle) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\exists y \forall x\, P(x, y) \overset{?}{\models} \forall x \exists y\, P(x, y)$$

   Wahr. Nehme so ein y' von links, welches mit allen x zusammenpasst. Rechts können wir dann für jedes x dieses y' nehmen.

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivalenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (informelle) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\exists y \forall x \, P(x,y) \overset{?}{\models} \forall x \exists y \, P(x,y)$$

   Wahr. Nehme so ein y' von links, welches mit allen x zusammenpasst. Rechts können wir dann für jedes x dieses y' nehmen.

2. $$\forall x \exists y \, P(x,y) \overset{?}{\models} \exists y \forall x \, P(x,y)$$

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivalenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (informelle) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\exists y \forall x\, P(x, y) \overset{?}{\models} \forall x \exists y\, P(x, y)$$

   Wahr. Nehme so ein y' von links, welches mit allen x zusammenpasst. Rechts können wir dann für jedes x dieses y' nehmen.

2. $$\forall x \exists y\, P(x, y) \overset{?}{\models} \exists y \forall x\, P(x, y)$$

   Falsch. Gegenbeispiel: $U =$ reelle Zahlen ohne 0, $P(x, y) = 1 \iff x \cdot y = 1$

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivalenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (informelle) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\exists y \forall x\, P(x,y) \stackrel{?}{\models} \forall x \exists y\, P(x,y)$$

   Wahr. Nehme so ein y' von links, welches mit allen x zusammenpasst. Rechts können wir dann für jedes x dieses y' nehmen.

2. $$\forall x \exists y\, P(x,y) \stackrel{?}{\models} \exists y \forall x\, P(x,y)$$

   Falsch. Gegenbeispiel: $U =$ reelle Zahlen ohne 0, $P(x,y) = 1 \iff x \cdot y = 1$

3. Seien Q, Q' irgendwelche Quantoren (also $\forall$ oder $\exists$).

   $$Qx\, P(x) \equiv Q'x\, R(x) \stackrel{?}{\Longrightarrow} Qx\, P(x) \models Q'x\, R(x)$$

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivalenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (informelle) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\exists y \forall x \, P(x,y) \overset{?}{\models} \forall x \exists y \, P(x,y)$$

   Wahr. Nehme so ein y' von links, welches mit allen x zusammenpasst. Rechts können wir dann für jedes x dieses y' nehmen.

2. $$\forall x \exists y \, P(x,y) \overset{?}{\models} \exists y \forall x \, P(x,y)$$

   Falsch. Gegenbeispiel: $U =$ reelle Zahlen ohne 0, $P(x,y) = 1 \iff x \cdot y = 1$

3. Seien Q, Q' irgendwelche Quantoren (also $\forall$ oder $\exists$).

   $$Qx \, P(x) \equiv Q'x \, R(x) \overset{?}{\Longrightarrow} Qx \, P(x) \models Q'x \, R(x)$$

   Wahr. $F \equiv G \iff F \models G$ und $G \models F$.

Prädikatenlogik - Die wichtigsten Regeln (für jetzt)

Für eine vollständigere Liste siehe Lemma 6.8. im Skript.

Prädikatenlogik - Die wichtigsten Regeln (für jetzt)

Für eine vollständigere Liste siehe Lemma 6.8. im Skript.

1. $QxQy\ldots \equiv QyQx\ldots (Q = \forall \text{ oder } Q = \exists)$

Prädikatenlogik - Die wichtigsten Regeln (für jetzt)

Für eine vollständigere Liste siehe Lemma 6.8. im Skript.

1. $QxQy\ldots \equiv QyQx\ldots (Q = \forall$ oder $Q = \exists)$
2. Im Allgemeinen: $\forall x \exists y \ldots \not\equiv \exists y \forall x \ldots$

Prädikatenlogik - Die wichtigsten Regeln (für jetzt)

Für eine vollständigere Liste siehe Lemma 6.8. im Skript.

1. $QxQy \ldots \equiv QyQx \ldots (Q = \forall$ oder $Q = \exists)$
2. Im Allgemeinen: $\forall x \exists y \ldots \not\equiv \exists y \forall x \ldots$
3. $$\forall x\ (P(x) \land Q(x)) \equiv \forall x\, P(x) \land \forall x\, Q(x)$$
   aber
   $$\exists x\, (P(x) \land Q(x)) \not\equiv \exists x\, P(x) \land \exists x\, Q(x)$$

Prädikatenlogik - Die wichtigsten Regeln (für jetzt)

Für eine vollständigere Liste siehe Lemma 6.8. im Skript.

1. $QxQy \ldots \equiv QyQx \ldots (Q = \forall$ oder $Q = \exists)$
2. Im Allgemeinen: $\forall x \exists y \ldots \not\equiv \exists y \forall x \ldots$
3. $$\forall x \ (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x \, P(x) \wedge \forall x \, Q(x)$$
   aber
   $$\exists x \, (P(x) \wedge Q(x)) \not\equiv \exists x \, P(x) \wedge \exists x \, Q(x)$$
4. $$\forall x \exists y \, (x > 0 \wedge (x = 2 \cdot y)) \equiv \forall x \, (x > 0 \wedge (\exists y \, x = 2 \cdot y))$$