Prenex normal form:

For the formula

$$F = P(x,x) \land \forall x\,((\exists y\, P(x,y)) \to Q(z)),$$

give an equivalent formula in the prenex normal form.

Vorgehen:

1. Bounded Variablen umbenennen.
2. Quantoren rausziehen (mithilfe von Lemma 6.8.).

① $P(x,x) \land \forall \overset{a}{\cancel{x}} ((\exists y\ P(\overset{a}{\cancel{x}},y)) \to Q(z))$

Konflikt!

② Um Lemma 6.8. anzuwenden muss der "$\to$" weg

$$\begin{aligned}
F &\equiv P(x,x) \land \forall a\,(\neg(\exists y\ P(a,y)) \lor Q(z)) \\
&\equiv P(x,x) \land \forall a\,((\forall y\ \neg P(a,y)) \lor Q(z)) \\
&\equiv \forall a\,(P(x,x) \land ((\forall y\ \neg P(a,y)) \lor Q(z))) \\
&\equiv \forall a \forall y\,(P(x,x) \land (\neg P(a,y) \lor Q(z)))
\end{aligned}$$

Resolution calculus:

Gegeben Formel F in KNF (CNF auf Englisch)

$$F = K_1 \land \ldots \land K_j \land \ldots \land K_n$$

Konjunktion

$$K_j = (L_{i1} \lor L_{i2} \lor \ldots \lor L_{ik_j})$$

$L_{ij} = A$ oder $L_{ij} = \neg A$ für eine beliebige Var. A.

Wir wollen von F aus neue Formeln herleiten. Das heisst wir suchen F' s.d. $F \models F'$ (wenn F wahr, dann sicher auch F' wahr). Zu diesem Zweck suchen wir eine korrekte Regel R s.d. $F \supseteq G \vdash_R F'$.

Idee:

$$K_i \land \ldots \land K_j$$

$$(\ldots \lor L \lor \ldots) \land (\ldots \lor \neg L \lor \ldots)$$

F erfüllt $\Leftrightarrow$ alle K_ℓ erfüllt $\Rightarrow$ K_i und K_j erfüllt

Fall $L = 1$:

$\Rightarrow \neg L = 0$

$\Rightarrow K_j \setminus \{\neg L\}$ muss erfüllt sein, damit K_j erfüllt

Fall $L=0$:

$\Rightarrow$ $K_i \setminus \{L\}$ muss erfüllt sein, damit K_i erfüllt

Also ist in jedem Fall " $\sim\sim$ $\vee$ $\sim\sim$ " erfüllt.

$\Rightarrow \{K_i, K_j\} \models (K_i \setminus \{L\}) \cup (K_j \setminus \{\neg L\}) =: K$

Dann ist $\{K_i, K_j\} \vdash_{Res} K$ eine korrekte Regel.

Wir bezeichnen mit einer leeren Klausel $K = \emptyset$ eine unerfüllbare Formel.

Use the resolution calculus to prove that $A \wedge C$ is a logical consequence of

$$M = \{\neg B \vee A, \neg A \to B, A \to C\}.$$

Vorgehen:

1. Formel F' in KNF finden, so dass F' unerfüllbar $\iff$ Aussage erfüllt.
2. Resolutionskalkül auf F' anwenden.

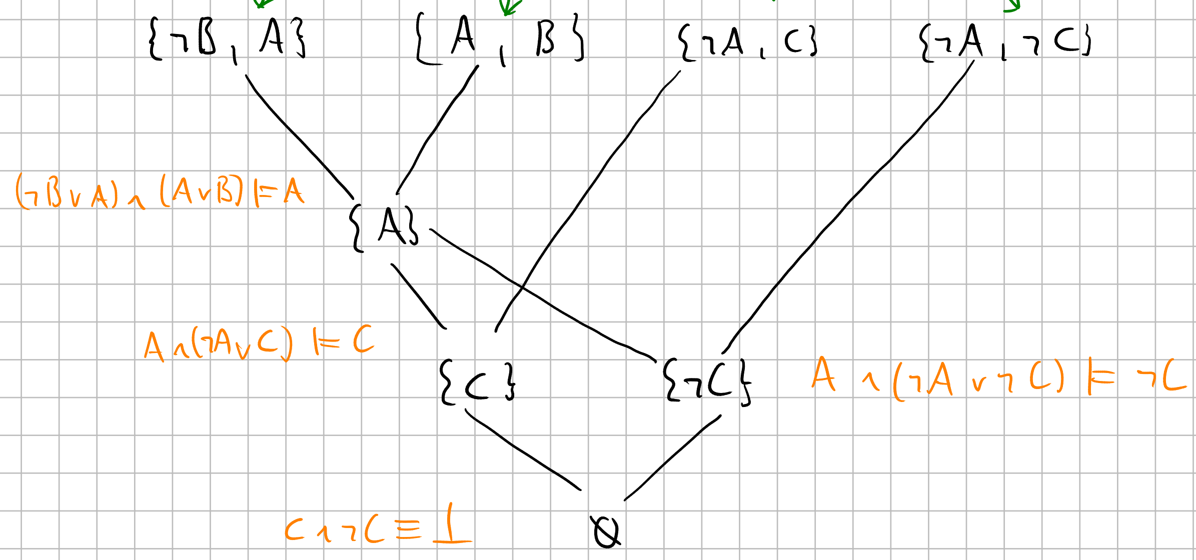
(1) $M \models A \wedge C \iff \underbrace{(\neg B \vee A) \wedge (\neg A \to B) \wedge (A \to C)}_{=:G} \models A \wedge C$

$\iff \underbrace{G \wedge \neg (A \wedge C)}_{\text{nicht in KNF :(}}$ unerfüllbar

$\neg A \to B \equiv A \vee B$, $A \to C \equiv \neg A \vee C$, $\neg(A \wedge C) \equiv \neg A \vee \neg C$

$\Rightarrow F' = (\neg B \vee A) \wedge (A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C)$

(2) Klausel:



Sei $F = ((A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C)) \to C$. Wir wollen mit dem Resolutionskalkül beweisen, dass F eine Tautologie ist. Welche Formel F' in KNF können wir dafür wählen?

F Tautologie $\Leftrightarrow$ $\neg F$ unerfüllbar.

$$\neg F \equiv \neg\left(((A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C)) \to C\right)$$

$$\equiv \neg\left(\neg((A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C)) \vee C\right)$$

$$\equiv (A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C)) \wedge \neg C$$

$$\equiv (A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \wedge \neg C$$

The formulas $\exists x P(x) \vee \exists y Q(y)$ and $\exists x \exists y (Q(x) \vee P(y))$ are equivalent.

- True ✓
- False

Lemma 6.10 + Lemma 6.8.10

$$(\exists y\, Q(y)) \to P(y)$$

- $\forall y\, (\neg Q(y) \vee P(y))$
- Das ist offensichtlich schon in prenex normal form.
- $\exists x\, (Q(x) \to P(y))$
- $\forall y'\, (\neg Q(y') \vee P(y))$ ✓

siehe https://exams.vis.ethz.ch/exams/yi90frlo.pdf#mwsq1tzbxn41me6f

$$\forall x \exists y \neg \forall z\, (P(x,y) \to Q(z))$$

- True
- False ✓

siehe Definition 6.38.

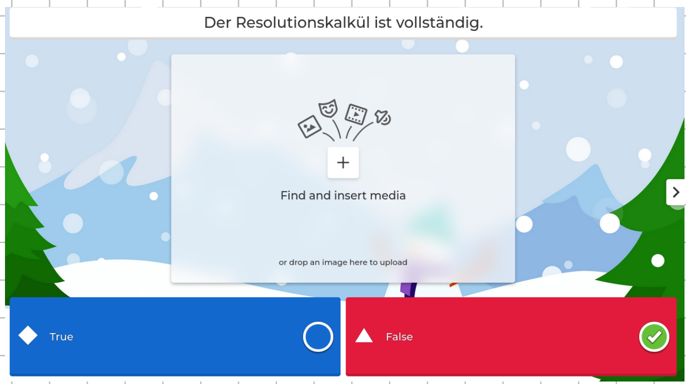
Wie viele Modelle hat folgende Formel? Tipp: Wahrheitstabelle.

$$(A \vee B) \to (\neg A \wedge B)$$

- 0
- 1
- 2 ✓
- 3

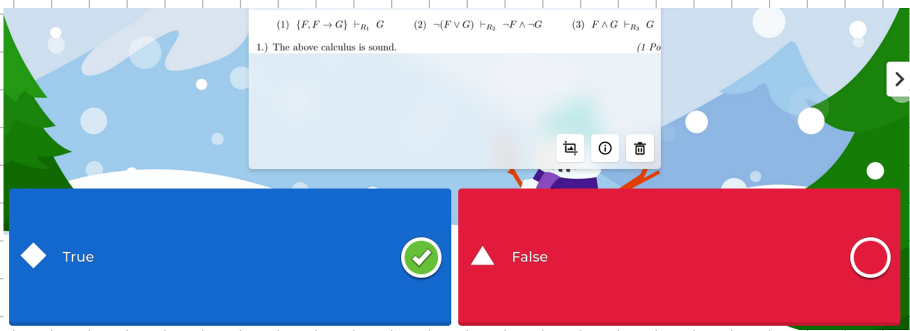
A	B	$\neg(A \vee B) \vee (\neg A \wedge B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

siehe https://exams.vis.ethz.ch/exams/f3lyrg9g.pdf#adxodceock0hsqkq



$A \wedge B \models A$, aber

$A \wedge B \not\vdash_{Res} A$ (links passt nicht zur Regel)



Man kann mit den Wahrheitstabellen zeigen

$F \wedge (F \to G) \models G$

$\neg(F \vee G) \models \neg F \wedge \neg G$

$F \wedge G \models G$

Idee: aus einer Tautologie kann man keine Information gewinnen.

Gegenbsp.:

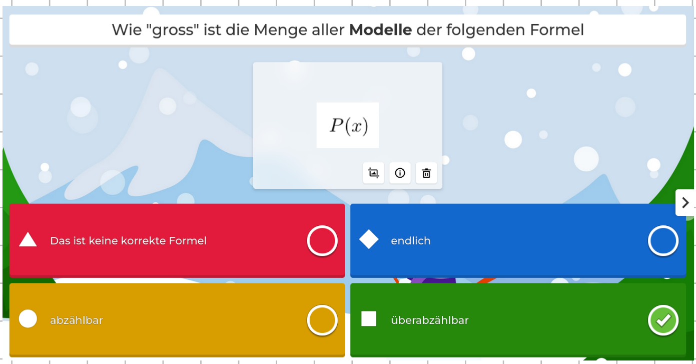
$A \vee \neg A \models A$

aber mit $\mathcal{A}(A) = 0$ gilt

$\mathcal{A}(A \vee \neg A) = 1 \neq 0 = \mathcal{A}(A)$

$F \wedge \neg F \equiv \perp$

$\Rightarrow F \wedge \neg F \models G$ für jede Formel G da LHS nie wahr



wähle $U^{\mathcal{A}} = \mathbb{R}$, $P^{\mathcal{A}}(x) = 1 \Leftrightarrow x = x^{\mathcal{A}}$

$\Rightarrow$ für jedes $x^{\mathcal{A}}$ erhalten wir ein Modell

Da $\mathbb{R}$ überabzählbar haben wir überabzählbar viele Modelle.

Idee: Formeln in einer Logik sind über einem abzählbaren Alphabet definiert. (Um das einzusehen muss man Definition 6.31. bisschen studieren.) Eine Formel ist eine endliche Folge von Symbolen vom Alphabet. Dann folgt es aus Theorem 3.22 (iii).