Äquivalenzumformungen - Wahr/Falsch Fragen

Welche der folgenden Umformungen entsprechen der Anforderungen der Bonusaufgabe?

1. $(A \lor B) \land C \equiv (A \land C) \lor (B \land C)$

Äquivalenzumformungen - Wahr/Falsch Fragen

Welche der folgenden Umformungen entsprechen der Anforderungen der Bonusaufgabe?

1. $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
   Falsch (Distributivgesetz ist von links im Lemma)

Äquivalenzumformungen - Wahr/Falsch Fragen

Welche der folgenden Umformungen entsprechen der Anforderungen der Bonusaufgabe?

1. $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
   Falsch (Distributivgesetz ist von links im Lemma)
2. $A \wedge B \to C$

Äquivalenzumformungen - Wahr/Falsch Fragen

Welche der folgenden Umformungen entsprechen der Anforderungen der Bonusaufgabe?

1. $(A \lor B) \land C \equiv (A \land C) \lor (B \land C)$
   Falsch (Distributivgesetz ist von links im Lemma)
2. $A \land B \to C$
   Falsch (Klammerung)

Äquivalenzumformungen - Wahr/Falsch Fragen

Welche der folgenden Umformungen entsprechen der Anforderungen der Bonusaufgabe?

1. $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
   Falsch (Distributivgesetz ist von links im Lemma)
2. $A \wedge B \to C$
   Falsch (Klammerung)
3. $B \wedge (\neg A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv B \wedge \neg A$

Äquivalenzumformungen - Wahr/Falsch Fragen

Welche der folgenden Umformungen entsprechen der Anforderungen der Bonusaufgabe?

1. $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
   Falsch (Distributivgesetz ist von links im Lemma)
2. $A \wedge B \to C$
   Falsch (Klammerung)
3. $B \wedge (\neg A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv B \wedge \neg A$
   Wahr (Absorption)

Äquivalenzumformungen - Wahr/Falsch Fragen

Welche der folgenden Umformungen entsprechen der Anforderungen der Bonusaufgabe?

1. $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
   Falsch (Distributivgesetz ist von links im Lemma)
2. $A \wedge B \rightarrow C$
   Falsch (Klammerung)
3. $B \wedge (\neg A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv B \wedge \neg A$
   Wahr (Absorption)
4. $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \equiv A \wedge (B \vee C)$

Äquivalenzumformungen - Wahr/Falsch Fragen

Welche der folgenden Umformungen entsprechen der Anforderungen der Bonusaufgabe?

1. $(A \lor B) \land C \equiv (A \land C) \lor (B \land C)$
   Falsch (Distributivgesetz ist von links im Lemma)
2. $A \land B \to C$
   Falsch (Klammerung)
3. $B \land (\neg A \lor (\neg A \land B)) \equiv B \land \neg A$
   Wahr (Absorption)
4. $(A \lor B) \land (A \lor C) \equiv A \land (B \lor C)$
   Falsch. Richtig wäre $A \lor (B \land C)$

Äquivalenzumformungen - Wahr/Falsch Fragen

Welche der folgenden Umformungen entsprechen der Anforderungen der Bonusaufgabe?

1. $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
   Falsch (Distributivgesetz ist von links im Lemma)
2. $A \wedge B \rightarrow C$
   Falsch (Klammerung)
3. $B \wedge (\neg A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv B \wedge \neg A$
   Wahr (Absorption)
4. $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \equiv A \wedge (B \vee C)$
   Falsch. Richtig wäre $A \vee (B \wedge C)$
5. $(A \wedge B) \vee (C \wedge A) \equiv A \wedge (B \vee C)$

Äquivalenzumformungen - Wahr/Falsch Fragen

Welche der folgenden Umformungen entsprechen der Anforderungen der Bonusaufgabe?

1. $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
   Falsch (Distributivgesetz ist von links im Lemma)
2. $A \wedge B \rightarrow C$
   Falsch (Klammerung)
3. $B \wedge (\neg A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv B \wedge \neg A$
   Wahr (Absorption)
4. $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \equiv A \wedge (B \vee C)$
   Falsch. Richtig wäre $A \vee (B \wedge C)$
5. $(A \wedge B) \vee (C \wedge A) \equiv A \wedge (B \vee C)$
   Falsch. (Komm. + Distr. in einem Schritt)

Logische Konsequenz - Wahr/Falsch Fragen (in Gruppen)

Welche der folgenden logischen Konsequenzen gelten? Gebe eine (intuitive) Begründung oder ein Gegenbeispiel.

1. $A \wedge B \overset{?}{\models} A$

Logische Konsequenz - Wahr/Falsch Fragen (in Gruppen)

Welche der folgenden logischen Konsequenzen gelten? Gebe eine (intuitive) Begründung oder ein Gegenbeispiel.

1. $A \wedge B \stackrel{?}{\models} A$
   Wahr.

Logische Konsequenz - Wahr/Falsch Fragen (in Gruppen)

Welche der folgenden logischen Konsequenzen gelten? Gebe eine (intuitive) Begründung oder ein Gegenbeispiel.

1. $A \land B \overset{?}{\models} A$
   Wahr.
2. $A \to (B \land C) \overset{?}{\models} A \to C$

Logische Konsequenz - Wahr/Falsch Fragen (in Gruppen)

Welche der folgenden logischen Konsequenzen gelten? Gebe eine (intuitive) Begründung oder ein Gegenbeispiel.

1. $A \wedge B \overset{?}{\models} A$
   Wahr.
2. $A \rightarrow (B \wedge C) \overset{?}{\models} A \rightarrow C$
   Wahr.

Logische Konsequenz - Wahr/Falsch Fragen (in Gruppen)

Welche der folgenden logischen Konsequenzen gelten? Gebe eine (intuitive) Begründung oder ein Gegenbeispiel.

1. $A \land B \overset{?}{\models} A$
   Wahr.
2. $A \to (B \land C) \overset{?}{\models} A \to C$
   Wahr.
3. $(A \land B) \to C \overset{?}{\models} B \to C$

Logische Konsequenz - Wahr/Falsch Fragen (in Gruppen)

Welche der folgenden logischen Konsequenzen gelten? Gebe eine (intuitive) Begründung oder ein Gegenbeispiel.

1. $A \land B \overset{?}{\models} A$
   Wahr.
2. $A \to (B \land C) \overset{?}{\models} A \to C$
   Wahr.
3. $(A \land B) \to C \overset{?}{\models} B \to C$
   Falsch. Gegenbeispiel: $A = 0,\ B = 1,\ C = 0$

Logische Konsequenz - Wahr/Falsch Fragen (in Gruppen)

Welche der folgenden logischen Konsequenzen gelten? Gebe eine (intuitive) Begründung oder ein Gegenbeispiel.

1. $A \wedge B \overset{?}{\models} A$
   Wahr.
2. $A \to (B \wedge C) \overset{?}{\models} A \to C$
   Wahr.
3. $(A \wedge B) \to C \overset{?}{\models} B \to C$
   Falsch. Gegenbeispiel: $A = 0,\ B = 1,\ C = 0$
4. $A \wedge (\neg A \vee \neg(A \vee B)) \overset{?}{\models} A \wedge B \wedge C$

Logische Konsequenz - Wahr/Falsch Fragen (in Gruppen)

Welche der folgenden logischen Konsequenzen gelten? Gebe eine (intuitive) Begründung oder ein Gegenbeispiel.

1. $A \land B \overset{?}{\models} A$
   Wahr.
2. $A \to (B \land C) \overset{?}{\models} A \to C$
   Wahr.
3. $(A \land B) \to C \overset{?}{\models} B \to C$
   Falsch. Gegenbeispiel: $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$
4. $A \land (\neg A \lor \neg(A \lor B)) \overset{?}{\models} A \land B \land C$
   Wahr. Die Formel links ist unerfüllbar.

Logische Konsequenz - Wahr/Falsch Fragen (in Gruppen)

Welche der folgenden logischen Konsequenzen gelten? Gebe eine (intuitive) Begründung oder ein Gegenbeispiel.

1. $A \wedge B \overset{?}{\models} A$
   Wahr.
2. $A \rightarrow (B \wedge C) \overset{?}{\models} A \rightarrow C$
   Wahr.
3. $(A \wedge B) \rightarrow C \overset{?}{\models} B \rightarrow C$
   Falsch. Gegenbeispiel: $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$
4. $A \wedge (\neg A \vee \neg(A \vee B)) \overset{?}{\models} A \wedge B \wedge C$
   Wahr. Die Formel links ist unerfüllbar.
5. $A \rightarrow (B \vee C) \overset{?}{\models} (A \wedge \neg B) \rightarrow C$

Logische Konsequenz - Wahr/Falsch Fragen (in Gruppen)

Welche der folgenden logischen Konsequenzen gelten? Gebe eine (intuitive) Begründung oder ein Gegenbeispiel.

1. $A \land B \overset{?}{\models} A$
   Wahr.
2. $A \to (B \land C) \overset{?}{\models} A \to C$
   Wahr.
3. $(A \land B) \to C \overset{?}{\models} B \to C$
   Falsch. Gegenbeispiel: $A = 0,\ B = 1,\ C = 0$
4. $A \land (\neg A \lor \neg(A \lor B)) \overset{?}{\models} A \land B \land C$
   Wahr. Die Formel links ist unerfüllbar.
5. $A \to (B \lor C) \overset{?}{\models} (A \land \neg B) \to C$
   Wahr.

Prädikatenlogik

Wir können nicht alles mit Aussagenlogik ausdrücken. z.B.: Die Aussage

"Für jede natürliche Zahl gilt $n \cdot n > n$ oder $n = 1$"

können wir nicht mit Aussagenlogik aufschreiben.

Prädikatenlogik

Wir können nicht alles mit Aussagenlogik ausdrücken. z.B.: Die Aussage

“Für jede natürliche Zahl gilt $n \cdot n > n$ oder $n = 1$”

können wir nicht mit Aussagenlogik aufschreiben.

Wie würde man obige Aussage mit Prädikatenlogik aufschreiben?

Prädikatenlogik

Wir können nicht alles mit Aussagenlogik ausdrücken. z.B.: Die Aussage

"Für jede natürliche Zahl gilt $n \cdot n > n$ oder $n = 1$"

können wir nicht mit Aussagenlogik aufschreiben.

Wie würde man obige Aussage mit Prädikatenlogik aufschreiben?

Lösung (intuitiv):
$U = \mathbb{N}$

$$\forall n \left(n^2 > n \vee n = 1\right)$$

"Für jede natürliche Zahl gilt $n \cdot n > n$ oder $n = 1$"

Wie würde man obige Aussage mit Prädikatenlogik aufschreiben?

Lösung (formeller):

$U = \mathbb{N}$

$\text{less}(x, y) = 1 \iff x < y$

$\text{equal}(x, y) = 1 \iff x = y$

$f(n) = n^2$

$$\forall n \left(\text{less}(n, f(n)) \vee \text{equal}(n, 1) \right)$$

Prädikatenlogik - Satz $\rightarrow$ Formel und Formel $\rightarrow$ Satz

1. "Für jede Primzahl p gilt, dass p ungerade ist oder $p = 2$"

Prädikatenlogik - Satz $\to$ Formel und Formel $\to$ Satz

1. "Für jede Primzahl p gilt, dass p ungerade ist oder $p = 2$"
   Lösung: Wir setzen $U = \mathbb{N}$, $\text{prime}(n) = 1 \iff n$ ist prim, $\text{odd}(n) = 1 \iff n$ ist ungerade. Dann:

$$\forall n \Big(\text{prime}(n) \to \big(\text{odd}(n) \lor n = 2 \big) \Big)$$

Prädikatenlogik - Satz $\rightarrow$ Formel und Formel $\rightarrow$ Satz

1. "Für jede Primzahl p gilt, dass p ungerade ist oder $p = 2$"
   Lösung: Wir setzen $U = \mathbb{N}$, $\text{prime}(n) = 1 \iff n$ ist prim, $\text{odd}(n) = 1 \iff n$ ist ungerade. Dann:

$$\forall n \left(\text{prime}(n) \rightarrow \left(\text{odd}(n) \vee n = 2 \right) \right)$$

2. Sei $U = \mathbb{N}$, das Prädikat "prime" wie oben. Was bedeutet folgende Formel in Worten?

$$\forall x \, \exists y \left(x < y \wedge \text{prime}(y) \right)$$

Prädikatenlogik - Satz $\rightarrow$ Formel und Formel $\rightarrow$ Satz

1. "Für jede Primzahl p gilt, dass p ungerade ist oder $p = 2$"
   Lösung: Wir setzen $U = \mathbb{N}$, $\text{prime}(n) = 1 \iff n$ ist prim, $\text{odd}(n) = 1 \iff n$ ist ungerade. Dann:

$$\forall n \Big(\text{prime}(n) \rightarrow \big(\text{odd}(n) \vee n = 2 \big) \Big)$$

2. Sei $U = \mathbb{N}$, das Prädikat "prime" wie oben. Was bedeutet folgende Formel in Worten?

$$\forall x \, \exists y \big(x < y \wedge \text{prime}(y) \big)$$

   Lösung: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Prädikatenlogik - Satz $\rightarrow$ Formel und Formel $\rightarrow$ Satz

1. "Für jede Primzahl p gilt, dass p ungerade ist oder $p = 2$"
   Lösung: Wir setzen $U = \mathbb{N}$, $\text{prime}(n) = 1 \iff n$ ist prim, $\text{odd}(n) = 1 \iff n$ ist ungerade. Dann:

$$\forall n \Big(\text{prime}(n) \rightarrow \big(\text{odd}(n) \vee n = 2 \big) \Big)$$

2. Sei $U = \mathbb{N}$, das Prädikat "prime" wie oben. Was bedeutet folgende Formel in Worten?

$$\forall x \, \exists y \big(x < y \wedge \text{prime}(y) \big)$$

   Lösung: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

3. "Jeder ETH Student kennt mindestens zwei andere ETH Studenten."

Prädikatenlogik - Satz $\rightarrow$ Formel und Formel $\rightarrow$ Satz

1. "Für jede Primzahl p gilt, dass p ungerade ist oder $p = 2$"
   Lösung: Wir setzen $U = \mathbb{N}$, $\text{prime}(n) = 1 \iff n$ ist prim, $\text{odd}(n) = 1 \iff n$ ist ungerade. Dann:
$$\forall n \Big(\text{prime}(n) \rightarrow \big(\text{odd}(n) \vee n = 2 \big) \Big)$$
2. Sei $U = \mathbb{N}$, das Prädikat "prime" wie oben. Was bedeutet folgende Formel in Worten?
$$\forall x \, \exists y \big(x < y \wedge \text{prime}(y) \big)$$
   Lösung: Es gibt unendlich viele Primzahlen.
3. "Jeder ETH Student kennt mindestens zwei andere ETH Studenten."
   Lösung: Wir setzen $U =$ Menge aller ETH Studenten, $\text{knows}(s, t) = 1 \iff s$ kennt t. Dann:
$$\forall s \, \exists t \exists t' \Big(s \neq t \wedge s \neq t' \wedge \text{knows}(s, t) \wedge t \neq t' \wedge \text{knows}(s, t') \Big)$$

Prädikatenlogik - Alte Prüfungsfrage

1. Finde eine Formel F, so dass in jeder Interpretation, die F erfüllt, das Universum mindestens 2 Elemente hat. (Prüfung HS18)
   Tipp: "$=$", "$\neq$" sind erlaubt.

Prädikatenlogik - Alte Prüfungsfrage

1. Finde eine Formel F, so dass in jeder Interpretation, die F erfüllt, das Universum mindestens 2 Elemente hat. (Prüfung HS18)
   Tipp: "$=$", "$\neq$" sind erlaubt.
   Lösung:
   $$\forall x \exists y \, (x \neq y)$$

Prädikatenlogik - Interpretation finden

Finde für die folgenden Formeln Interpretation, die sie erfüllen:

1. $$\forall x \forall y \left(E\big(f(x,y), f(y,x)\big) \right)$$

Prädikatenlogik - Interpretation finden

Finde für die folgenden Formeln Interpretation, die sie erfüllen:

1. $$\forall x \forall y \left(E\big(f(x,y), f(y,x)\big) \right)$$

   Lösung: $U = \mathbb{Z}$, $E =$ equal, $f(x,y) = x \cdot y$

Prädikatenlogik - Interpretation finden

Finde für die folgenden Formeln Interpretation, die sie erfüllen:

1. $$\forall x \forall y \left(E\left(f(x,y), f(y,x)\right)\right)$$

   Lösung: $U = \mathbb{Z}$, $E =$ equal, $f(x,y) = x \cdot y$

2. $$\forall x \forall y \forall z \left(P\left(f(x, f(y,z)), f((x,y),z)\right)\right)$$

Prädikatenlogik - Interpretation finden

Finde für die folgenden Formeln Interpretation, die sie erfüllen:

1. $$\forall x \forall y \left(E\left(f(x,y), f(y,x)\right)\right)$$

   Lösung: $U = \mathbb{Z}$, $E =$ equal, $f(x,y) = x \cdot y$

2. $$\forall x \forall y \forall z \left(P\left(f(x, f(y,z)), f((x,y),z)\right)\right)$$

   Lösung: $U = \mathbb{R}$, $P =$ equal, $f(x,y) = x + y$

Prädikatenlogik - Interpretation finden

Finde für die folgenden Formeln Interpretation, die sie erfüllen:

1. $$\forall x \forall y \left(E(f(x,y), f(y,x)) \right)$$

   Lösung: $U = \mathbb{Z}$, $E =$ equal, $f(x,y) = x \cdot y$

2. $$\forall x \forall y \forall z \left(P(f(x, f(y,z)), f((x,y),z)) \right)$$

   Lösung: $U = \mathbb{R}$, $P =$ equal, $f(x,y) = x + y$

3. $$\exists G \forall F \left(C(F,G) \right)$$

Prädikatenlogik - Interpretation finden

Finde für die folgenden Formeln Interpretation, die sie erfüllen:

1. $$\forall x \forall y \left(E\left(f(x,y), f(y,x)\right) \right)$$

   Lösung: $U = \mathbb{Z}$, $E =$ equal, $f(x,y) = x \cdot y$

2. $$\forall x \forall y \forall z \left(P\left(f(x, f(y,z)), f((x,y),z)\right) \right)$$

   Lösung: $U = \mathbb{R}$, $P =$ equal, $f(x,y) = x + y$

3. $$\exists G \forall F \left(C(F,G) \right)$$

   Lösung: $U =$ Menge aller Formeln, $C(F,G) = 1 \iff F \models G$

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivelenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (intuitive) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\forall x \forall y\, P(x, y) \stackrel{?}{\equiv} \forall y \forall x\, P(x, y)$$

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivelenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (intuitive) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\forall x \forall y\, P(x, y) \stackrel{?}{\equiv} \forall y \forall x\, P(x, y)$$

   Wahr.

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivelenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (intuitive) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\forall x \forall y\, P(x, y) \stackrel{?}{\equiv} \forall y \forall x\, P(x, y)$$

   Wahr.

2. $$\neg \exists x\, P(x) \stackrel{?}{\equiv} \forall x\, \neg P(x)$$

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivelenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (intuitive) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\forall x \forall y\, P(x,y) \stackrel{?}{\equiv} \forall y \forall x\, P(x,y)$$

   Wahr.

2. $$\neg \exists x\, P(x) \stackrel{?}{\equiv} \forall x\, \neg P(x)$$

   Wahr.

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivelenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (intuitive) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\forall x \forall y \, P(x, y) \overset{?}{\equiv} \forall y \forall x \, P(x, y)$$

   Wahr.

2. $$\neg \exists x \, P(x) \overset{?}{\equiv} \forall x \, \neg P(x)$$

   Wahr.

3. $$\exists x \, P(x) \wedge \exists x \, Q(x) \overset{?}{\models} \exists x \, \big(P(x) \wedge Q(x)\big)$$

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivelenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (intuitive) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\forall x \forall y\, P(x,y) \stackrel{?}{\equiv} \forall y \forall x\, P(x,y)$$

   Wahr.

2. $$\neg \exists x\, P(x) \stackrel{?}{\equiv} \forall x\, \neg P(x)$$

   Wahr.

3. $$\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x) \stackrel{?}{\models} \exists x\, \big(P(x) \wedge Q(x)\big)$$

   Falsch. Gegenbeispiel: $U = \mathbb{Z}$, $P(x) = 1 \iff x > 0$, $Q(x) = 1 \iff y < 0$.

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivelenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (intuitive) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\exists y \forall x\, P(x, y) \stackrel{?}{\models} \forall x \exists y\, P(x, y)$$

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivelenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (intuitive) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\exists y \forall x\, P(x, y) \overset{?}{\models} \forall x \exists y\, P(x, y)$$

   Wahr.

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivelenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (intuitive) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\exists y \forall x\, P(x,y) \overset{?}{\models} \forall x \exists y\, P(x,y)$$

   Wahr.

2. $$\forall x \exists y\, P(x,y) \overset{?}{\models} \exists y \forall x\, P(x,y)$$

Prädikatenlogik - Logische Konsequenzen und Äquivelenzen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Wenn wahr, dann gebe eine (intuitive) Begründung. Wenn falsch, dann gebe ein Gegenbeispiel.

1. $$\exists y \forall x\, P(x, y) \overset{?}{\models} \forall x \exists y\, P(x, y)$$

   Wahr.

2. $$\forall x \exists y\, P(x, y) \overset{?}{\models} \exists y \forall x\, P(x, y)$$

   Falsch. Gegenbeispiel: $U =$ reelle Zahlen ohne 0, $P(x, y) = 1 \iff x \cdot y = 1$