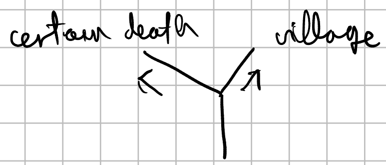
- Knights and knaves

Knights: always tell the truth

Knaves: always lie



Wir suchen eine unsere magische Ja/Nein Frage F.
Wir wollen F = Ja genau dann, wenn die linke Strasse zum Dorf führt.

A = "The left road leads to the village"
B = "person tells the truth"

die einzige Sachen, die wir wirklich Fragen können.
=> F ist eine Formel in A und B

A	B	F	$\neg F$
0	0	1	0
0	1	0	
1	0	0	1
1	1	1	

Wenn die Person vor uns ein "knave" ist, dann gibt er uns die Antwort auf ¬F. Von einem Knight bekommen wir die Antwort auf F.

$\Rightarrow F = (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$

Bonus:

Definition der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

$q \in \mathbb{Q} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} q = \frac{m}{n}$ für $m, n \in \mathbb{Z}$ und $n \neq 0$

Aufgaben vom letzten Mal

- Prüfungsfrage
- (Interpretation finden)
- Fehler finden
- Logische Konsequenzen: $F \equiv G \iff F \models G$ und $G \models F$

Gleiche Bedeutung wie bei Aussagenlogik. Da reichen aber Wahrheitstabellen nicht aus, da es so viele mögliche Interpretationen gibt (nicht nur 0,1).

(a) $F_A \models G_A$ zeigen: informelles Argument

(b) $F_A \not\models G_A$ zeigen: Gegenbeispiel! Also konkrete Interpretation, so dass F wahr aber G nicht.

Beweise: Aufgaben sehr wichtig ! Man lernt das nur richtig, wenn man die Aufgaben selber löst

Vorgehen:

1. Aussage verstehen (also alle Def. klar)
2. intuitiv überlegen, wieso es stimmen muss
3. Beweis aufschreiben

$F \models G \iff F \to G$ Tautologie (genau dann, wenn)

Bei so einem Beweis geht man immer gleich vor. Wie? $S \Rightarrow T$ und $T \Rightarrow S$

Bew.:

- $F \models G$: wenn immer F wahr, G wahr.
- $F \to G$ Tautologie: Für alle Inputs ist $F \to G$ wahr

$\Rightarrow$: Fall $F = 0$:

$\Rightarrow F \to G$ erfüllt

Fall $F = 1$:

$\Rightarrow G = 1$ (da $F \models G$)

$\Rightarrow F \to G$ erfüllt

$\Leftarrow$: Betrachte beliebige Zuweisung, die F erfüllt

Da $F \to G$ wahr, muss G auch erfüllt sein (def. $\to$)

$\Rightarrow F \models G$

Beweismethoden:

- indirekter Beweis

denkt an $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$

=> um "S => T" zu zeigen reicht es, "¬T => ¬S" zu zeigen

(1) Zeige: $\underbrace{3 \nmid n^2}_{S} \Rightarrow \underbrace{3 \nmid n}_{T}$

Beweis:

$\neg T \Rightarrow \neg S$: $3 \mid n \Rightarrow 3 \mid n^2$

$3 \mid n \Rightarrow \exists k \; n = 3 \cdot k$ Definition!

$\Rightarrow \exists k \; n^2 = (3 \cdot k) \cdot (3 \cdot k)$

$\Rightarrow \exists d \; n^2 = 3 \cdot d$

$\Rightarrow 3 \mid n^2$

$\square$

(2) Sei $n \geq 1$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Aussage eigentlich schon klar. Müssen intuitiv ein Gefühl dafür bekommen, wieso es stimmt.

Zeige:

$$\underbrace{\frac{x_1 + x_2 \ldots + x_n}{n} > 1}_{S} \Rightarrow \underbrace{\exists i \; x_i > 1}_{T}.$$

↳ nicht unbedingt klar, wie man das <u>direkt</u> folgern sollte.

Zuerst selber probieren!!!

Beweis:

$\neg T \Rightarrow \neg S$: $\forall i \; x_i \leq 1 \Rightarrow \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \leq 1$

$\forall i \; x_i \leq 1 \Rightarrow x_1 + x_2 \ldots + x_n \leq 1 + \ldots + 1 = n \cdot 1$

$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leq 1$

$\square$

o Fallunterscheidung:

① Zeige: $\forall x \ (x \neq 0 \to \frac{|x|}{x} = sgn(x))$

wobei $sgn(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

Beweis:

Fall $x > 0$:

$\Rightarrow |x| = x$ Definition!

$\Rightarrow \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$

Fall $x < 0$:

$\Rightarrow |x| = -x$ Definition!

$\Rightarrow \frac{|x|}{x} = -\frac{x}{x} = -1$

② Zeige: Die $\forall n \ 4 \nmid (n^2 + 5)$

klar?

n können wir eindeutig schreiben als $n = 4 \cdot k + r$, wobei $r \in \{0, 1, 2, 3\}$

Fall $r = 0$: Wir zeigen für alle r, dass die Division n^2 + 5 / 4 einen Rest != 0 hat

$\Rightarrow n = 4 \cdot k$

$\Rightarrow n^2 + 5 = 16k^2 + 5$

$= 4 \cdot (4 \cdot k^2) + 4 + 1$

$= 4 (4k^2 + 1) + 1$ Was ist der Rest?

$\Rightarrow R_4(n^2 + 5) = 1$ $R_4(d)$ = Rest von der Division $\frac{4}{k}$

$\Rightarrow 4 \nmid n^2 + 5$

Fall $r = 1$:

$\Rightarrow n^2 + 5 = (4k + 1)^2 + 5$

$= (4k)^2 + 8k + 1 + 5$ alles mit Faktor 4 fällt weg für den Rest

$\Rightarrow R_4(n^2 + 5) = 6 \Rightarrow 4 \nmid n^2 + 5$

Fall $r = 2$:

$\Rightarrow n^2 + 5 = (4k + 2)^2 + 5$ alles mit 4 fällt einfach weg!

$\Rightarrow R_4(n^2 + 5) = R_4(2^2 + 5) = R_4(4 + 4 + 1) = 1$

$\Rightarrow 4 \nmid n^2 + 5$

Fall $r = 3$: Übung!

$$\overset{\cdot}{\Rightarrow} n^2 + 5 = (4k+3)^2 + 5$$
$$\equiv_3 9 + 5$$
$$\equiv_3 2$$
$$\overset{\cdot}{\Rightarrow} 4 \nmid n^2 + 5$$

- Widerspruchsbeweis:

① Beweise: Es gibt unendlich viele Primzahlen

"Fact": Jede natürliche Zahl > 1 hat einen Primfaktor

Zuerst selber probieren!!!

Beweis: Nehme an es gibt nur endlich viele Primzahlen

$p_1, p_2, \dots, p_k$.

Jedes der Primzahlen teilt das Produkt $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$.

Sei $m = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$

Was wissen wir über m? $\rightarrow$ $p_k \cdot m_k + 1$

$\rightarrow \forall k \; p_k \nmid m$ $\qquad \overset{\cdot}{\Rightarrow}$ Rest 1

$\overset{\cdot}{\Rightarrow} m > 1$ und m hat kein Primfaktor $\lightning$

$\square$

② Sei $x, y \in \mathbb{R}$ $x, y > 0$.

Zeige: $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Zuerst selber probieren!!!

Beweis:

Nehme an $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

$$\overset{\cdot}{\Rightarrow} x + y = x + \sqrt{x \cdot y} + y$$
$$\overset{\cdot}{\Rightarrow} \sqrt{x \cdot y} = 0 \quad \lightning \quad \text{da } x, y > 0$$

(3) Zeige: Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ so dass $a^2 + b^2 = c^2$ gilt $a + b \geq c$

Zuerst selber probieren!!!

Beweis:

Sei $a, b, c \in \mathbb{N}$ s.d. $a^2 + b^2 = c^2$.

Nehme an $a + b < c$

$$\Rightarrow (a+b)^2 < c^2$$
$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 < c^2$$
$$\Rightarrow 2ab < c^2 - (a^2 + b^2) = 0 \quad ↯$$

Aufgabe: Macht den gleichen Beweis indirekt.