Feedback:

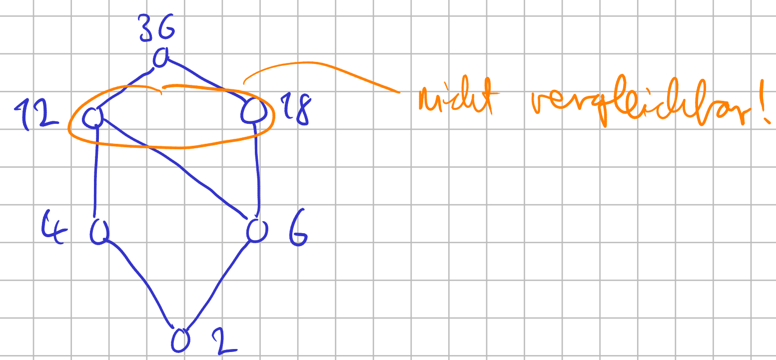
- Die, die richtig angefangen haben: super gelöst!

  Sonst häufiger Fehler: mit a op $b \wedge b$ op c angefangen statt a po $b \wedge b$ po c. Wieso?
- Challenge gelöst. Mehr? 1, 2, 3 Platz ...

Aufgabe 5.3 ?

Aufgabe 5.6 ?

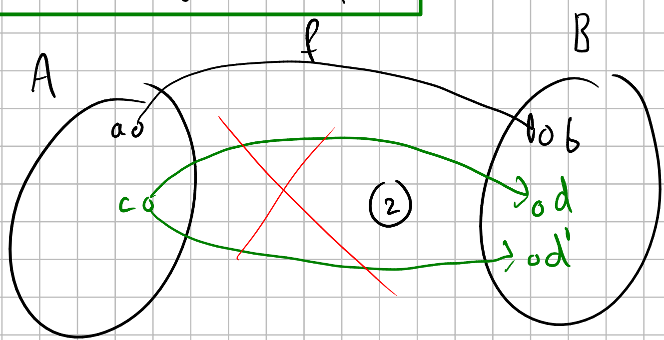
$\boxed{\text{Hasse Diagramm}}$ $(\{2, 4, 6, 12, 18, 36\}; \mid)$



totale Ordnung

→ gibt eine klare Reihenfolge vor (z.B. sortieren)

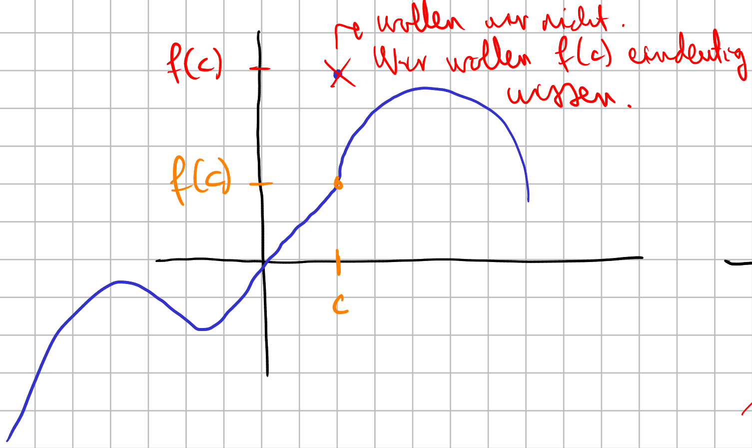
$\boxed{\text{Funktionen Eigenschaften}}$

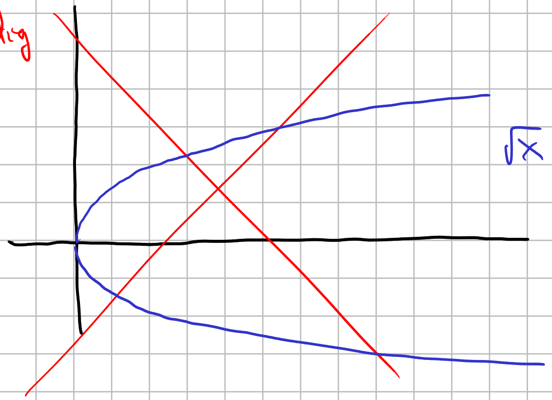


(1): jedes A hat ein Pfeil nach B

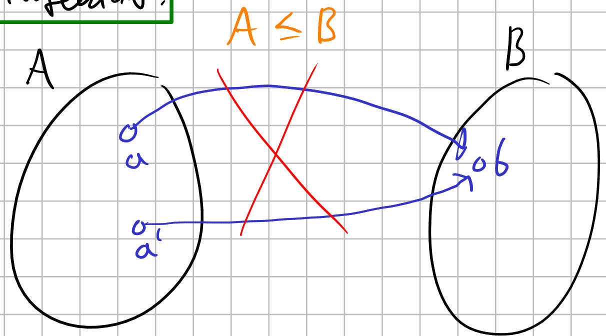
$f(x) = \frac{1}{x}$ scheint dann bei 0 nicht übereinzustimmen, aber dann definiert man einfach $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

(2) ↑ Bsp. oben macht für Funktionen keinen Sinn, so wie wir sie kennen:



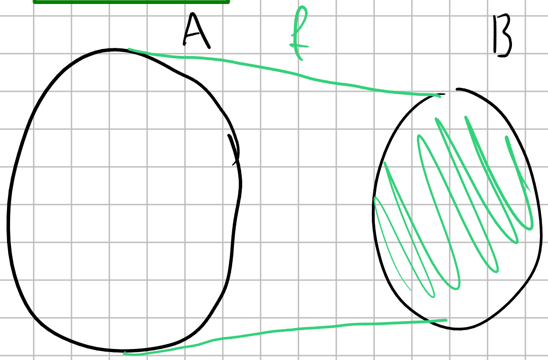


Injektiv:



Jedes Element ein eindeutiges Paar in b. ⇒ A mindestens so gross wie B.

Surjektiv



Jedes Element in A deckt höchstens ein Element in B ab.

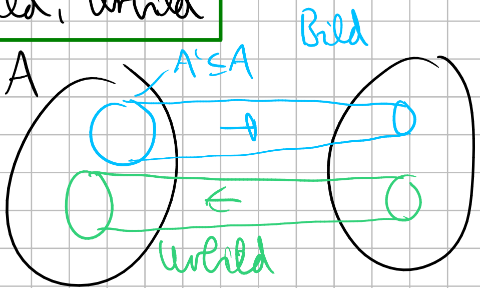
⇒ $A \geq B$ (intuitiv)

Wie schreibe ich die Menge aller $a \in A$, welche auf $b \in B$ gemappt werden?

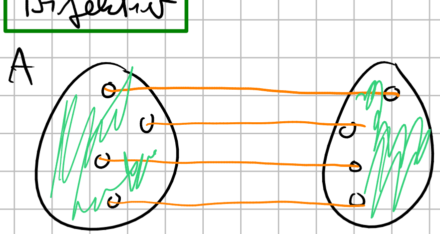
→ $f^{-1}(\{b\})$

Übung: Gegeben die Surjektion f: A -> B, finde eine Injektion g: B -> A.
Tipp: Bild oben

Bild, Urbild



Bijektiv



Hat immer ein Inverses! (Man kann es immer umdrehen)

$P \sim \mathbb{N}$

Bijektion $f: \mathbb{N} \to P$

$\mathbb{N}$ $\quad i \mapsto p_i$

$1 \leftrightarrow 2$

$2 \leftrightarrow 3$

$3 \leftrightarrow 5$

$\vdots$

Beweis (Fall $n = 2$)

Seien A_1, A_2 abzählbar. Beweise $A_1 \times A_2$ ist abzählbar.

Wir verwenden: Jede natürliche Zahl hat eine eindeutige Primfaktorzerlegung (dürft ihr an der Prüfung auch)

A_1, A_2 abzählbar ⇒ es gibt Injektionen $f_1: A_1 \to \mathbb{N}$, $f_2: A_2 \to \mathbb{N}$

Wir definieren $g: A_1 \times A_2 \to \mathbb{N}$

$$(a,b) \mapsto f(a,b) = 2^{f_1(a)} \cdot 3^{f_2(b)}$$

und zeigen g ist injektiv:

Sei $(a,b),(c,d) \in A_1 \times A_2$ und $(a,b) \neq (c,d)$

Fall: $a \neq c$

$\Rightarrow f_1(a) \neq f_1(c)$ (f_1 injektiv)

$\Rightarrow 2^{f_1(a)} \cdot 3^{f_2(b)} \neq 2^{f_1(c)} \cdot 3^{f_2(b)}$ (Primfaktorzerl. eindeutig)

$\Rightarrow f(a,b) \neq f(c,d)$

Der Fall $a = c$ und $b \neq d$ ist analog.

Sei A_i abzählbar für alle $i \in \mathbb{N}$. Beweise:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ ist abzählbar.}$$

Nicht spicken! ;)

Da A_i abzählbar für alle $i \in \mathbb{N}$, gibt es für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine Injektion $f_i: A_i \to \mathbb{N}$.

Sei p_i die i-te Primzahl und $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Wir definieren

$$g: S \to \mathbb{N}$$

$$a \mapsto p_\ell^{f_\ell(a)+1}$$ wobei ℓ die kleinste Zahl s.d. $a \in A_i$.
($\ell = \min\{i \in \mathbb{N} \mid a \in A_i\}$)

analog

Wir zeigen, dass g injektiv ist:

Seien $a, b \in S$. Seien i, j minimal s.d. $a \in A_i$ und $b \in A_j$.

Fall $i \neq j$:

$\Rightarrow p_i^{f_i(a)+1} \neq p_j^{f_j(a)+1}$ da $p_i \neq p_j$ und $f_i(a)+1, f_j(a)+1 \geq 1$

sonst hätten wir mit $f_i(a) = f_j(a) = 0$: $p_i^0 = 1 = p_j^0$

$\Rightarrow f_i(a) \neq f_j(b)$

Fall $i = j$:

$\Rightarrow f(a) = p_i^{f_i(a)+1}$, $f(b) = p_i^{f_i(b)+1}$

Da f_i injektiv gilt $f_i(a) \neq f_i(b)$ und daher auch $f(a) \neq f(b)$

(Primfaktorzerlegung eindeutig)

$\square$

Überabzählbarkeit beweisen:

S eine Menge, U überabzählbar. Falls es eine Injektion $f: U \to S$ gibt, dann ist auch S überabzählbar.

Beweis: Nehme an S wäre abzählbar.

$\Rightarrow S \preceq \mathbb{N}$

Nach Annahme gilt auch $U \preceq S$.

Dann folgt aus Transitivität von "$\preceq$":

$U \preceq S \land S \preceq \mathbb{N} \Rightarrow U \preceq \mathbb{N}$ ↯ (Widerspruch)

□

Beweise, dass $\{0,1\}^\infty$ überabzählbar ist.

wenn wir lange genug zählen, erreichen wir jedes Element

1. Schritt?

Nehme an $\{0,1\}^\infty$ wäre abzählbar. → wir können alle Elemente auflisten: $b_0, b_1, \dots$

Nach Lemma: Da $\{0,1\}^\infty$ unendlich ist, muss $\{0,1\}^\infty \sim \mathbb{N}$ gelten.

Es gibt also eine Bijektion (Aufzählung) $b: \mathbb{N} \to \{0,1\}^\infty$.

Sei $b_i := b(i)$ und $b_{i,j}$ der j-te Bit der Binärsequenz $b(i)$.

$$\begin{array}{llll} b_0: & b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} \; \dots \\ b_1: & b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} \; \dots \\ b_2: & b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} \; \dots \\ & \vdots & & \end{array}$$

Wir definieren $\alpha \in \{0,1\}^\infty$, $\alpha_i = \overline{b_{i,i}}$. Dann gilt für alle i: $\alpha \neq b_i$ da $\alpha_i \neq b_{i,i}$, also ist α nicht in der Auflistung ($\alpha \notin \mathrm{Im}(b)$), ein Widerspruch (zur Surjektivität von b).

$\Rightarrow \mathbb{R}$ ist überabzählbar

Beweise oder widerlege: Die Menge aller Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

Eine Äquivalenzrelation ρ ist eine Teilmenge von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Also $\rho \in \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$

Aber mit gewissen Eigenschaften. $S = \{\rho \in \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \mid \rho \text{ eine Äqu. rel.}\}$

Möglichkeiten:

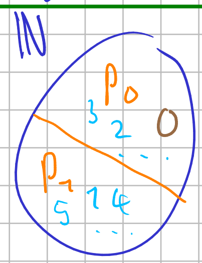
abzählbar: $f: S \to \mathbb{N}$

überabzählbar: $f: \{0,1\}^\infty \to S$

Kernidee: (ohne diese Idee nicht einfach!)

Jede Äquivalenzrelation entspricht einer Partition von $\mathbb{N}$.

Sei $b \in \{0,1\}^\infty$. Wie könnten wir zwei Partitionen bauen?



$b = 010011 \ \dots$
$\ \ \ \ \ \ 12345 \ \dots$

↳ wir fangen bei 1 an und legen die 0 immer in P_0. Dann können wir vermeiden, dass b und $\bar{b}$ die gleiche Äquivalenzrel. geben.

Das war ein Fehler im Beweis in der ÜS

Nehme die Partitionen $P_1 = \{i \in \mathbb{N} \mid b_i = 1\}$, $P_0 = (\mathbb{N} \setminus P_1) \cup \{0\}$

Dann definieren P_0, P_1 eine Äquivalenzrelation Θ_b (Lemma)

Begründung $\Theta_b \in S$ wichtig!

Also: $f: \{0,1\}^\infty \to S$

$\quad\quad b \mapsto \Theta_b$

erfundene Notation
$P_i^{(b)} :=$ i-te Partition wenn man die Partition mit $b \in \{0,1\}^\infty$ bildet.

Injektivität: Sei $\alpha, \beta \in \{0,1\}^\infty$, $\alpha \neq \beta$.

$\Rightarrow$ Sei i der erste Bit, wo $\alpha_i \neq \beta_i$ $\Rightarrow$ WLOG assume $\alpha_i = 1$, $\beta_i = 0$

$\Rightarrow i \notin P_0^{(\alpha)}$, $i \in P_0^{(\beta)}$

$\Rightarrow \neg\, i\, \Theta_\alpha\, 0 \ \wedge\ i\, \Theta_\beta\, 0$

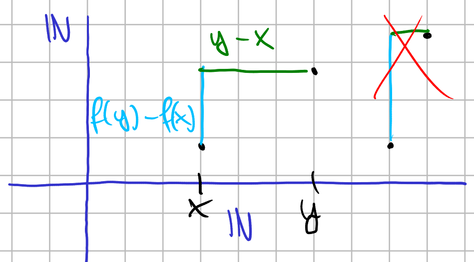
$\Rightarrow \Theta_\alpha \neq \Theta_\beta$

Consider the set

$$S = \left\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall x \forall y \left(x \le y \to (f(x) \le f(y) \wedge f(y) - f(x) \le y - x)\right)\right\}.$$

Prove or disprove that the set S is countable.

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$



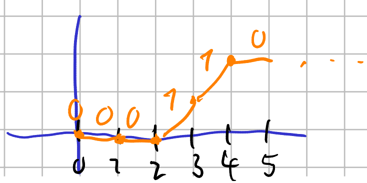
$\to$ ① monoton wachsend

② Steigung höchstens 1

Von x zu x + 1 kann sich f entweder um 0 oder um 1 ändern. Kleiner kann es nicht werden.

$0\,0\,0\,1\,1\,0\,0 \ \dots$
$0\,1\,2\,3\,4\,5\,6$

$\mapsto$



$g: \{0,1\}^\infty \to S$

$b \mapsto f_b$, wobei $f_b(n) = \sum_{i=0}^{n} b_i$

① $f_b \in S$:

Sei $x, y \in \mathbb{N}$, $x < y$

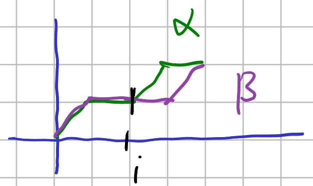
1. $f_b(y) = \sum_{i=0}^{y} b_i = \sum_{i=x+1}^{y} b_i + f_b(x) > f_b(x)$

2. $f_b(y) - f_b(x) = \sum_{i=x+1}^{y} b_i < \sum_{i=x+1}^{y} 1 = y - x$

② g injektiv:

Sei $\alpha, \beta \in \{0,1\}^\infty$, $\alpha \neq \beta$.

Intuition:



nützlicher Trick!

$\boxed{\text{Sei } i \text{ der erste Bit, wo sie sich unterscheiden}}$

Zwei Funktionen sind ungleich, wenn sie sich in irgendeinem Wert unterscheiden!

Fall $i = 0$:

$\Rightarrow f_\alpha(0) \neq f_\beta(0)$

Fall $i > 0$:

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k = \sum_{k=0}^{i-1} \beta_k$ und $\alpha_i \neq \beta_i$

$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k + \alpha_i}_{} \neq \underbrace{\sum_{k=0}^{i-1} \beta_k + \beta_i}_{}$

$\Rightarrow f_\alpha(i) \neq f_\beta(i)$

$\square$