Feedback:

- nicht nötig, den Proof pattern zu sagen
- Wie viel Begründung reicht?

  Alles, was nicht sofort aus den Def. folgt muss begründet werden!

  Bsp.:

ok	nicht ok	
$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$	$A = (A \cap C) \cup (A \setminus C)$	let $x \in A$: case $x \in C \Rightarrow x \in A \cap C$, case $x \notin C \Rightarrow x \in A \setminus C$; $A \subseteq \ldots$ — andere Richtung vll. genug offensichtlich

  Eure Beweise sollten nur aus solchen Elementaren Schritten bestehen!
  So ist am Ende klar, dass eure Herleitung aufgeht!

  Wenn unsicher, fragt euch: folgt das aus der Definition?

- viele ganz vernünftige Beweise

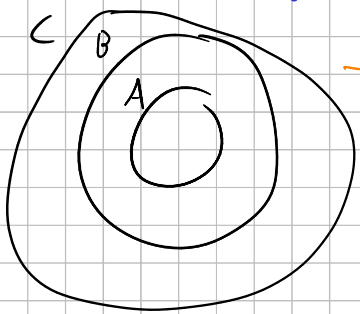
beste Strategie (für die Prüfung), um $A = B$ zu zeigen

ist $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ (nicht nur in diesem Fach).

Grosse Umformungen mit Prädikatenlogik nehmen zu viel Zeit.

Das kann man schlechter mit einem Bild/Intuition verbinden.

z. B. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$



$\rightarrow$ $x \in A \Rightarrow x \in B$ $(A \subseteq B)$

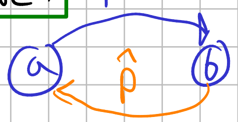
$\Rightarrow x \in C$ $(B \subseteq C)$

und fertig!

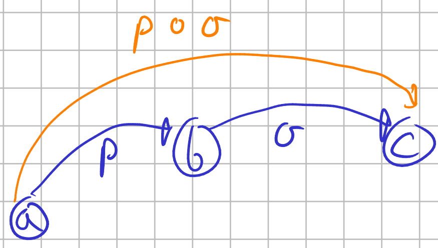
Umformung mit Formeln viel länger.

Recap Relationen:

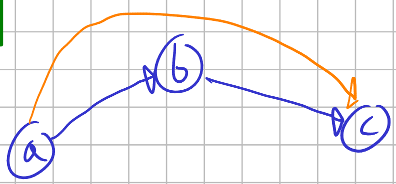
Inverse:



Verkettung:



Transitivität:



Beweise:

ρ ist transitiv $\iff \rho^2 \subseteq \rho$

Wie geht man bei so einem Beweis vor?

$\boxed{\Rightarrow:}$ sei $(a, c) \in \rho^2 \iff a \,\rho^2\, c$

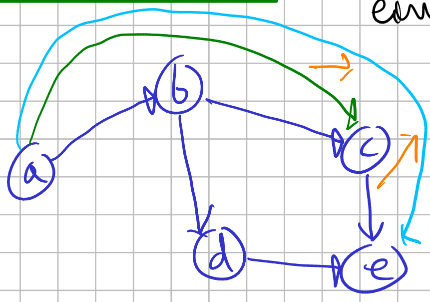
$\iff a \,\rho\, b \wedge b \,\rho\, c$ für ein $b \in A$ (def. ∘)

$\Rightarrow a \,\rho\, c$ (ρ transitiv)

$\Leftarrow:$ $\boxed{\text{sei } a, b, c \in A \text{ s.d. } a \,\rho\, b \text{ und } b \,\rho\, c}$ Man fängt immer so an (folgt aus Def.)

$\overset{\text{(def. ∘)}}{\Rightarrow} a \,\rho^2\, c \overset{\text{(Annahme)}}{\Rightarrow} a \,\rho\, c$

Transitive Hülle:



ein Weg mit n Kanten entspricht $a \rho^n b$

$a \rho^3 d \iff$

$\exists b, c \quad a \rho b \wedge b \rho c \wedge c \rho d$

" $a \rho b \rho c \rho d$ " keine Standard-Notation!

↳ $(a,c) \in \rho^*$, $(a,e) \in \rho^*$, ...

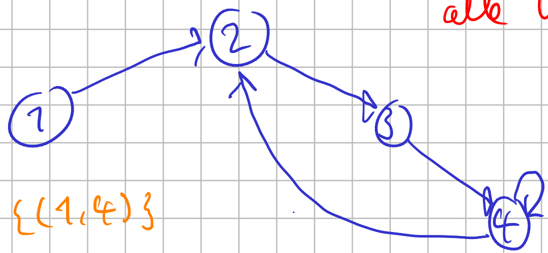
Sei

$$\rho = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,4)\}$$

eine Relation auf $\{1,2,3,4\}$.

Bestimme ρ^3. (Lösung in Notizen)

alle Wege der Länge 3! (3 Kanten)



$$\rho^3 = \Big(\overbrace{\{1\}\times\{4\}}^{\{(1,4)\}}\Big) \cup \big(\{2\}\times\{2,4\}\big) \cup \big(\{3\}\times\{4,2,3\}\big) \cup \big(\{4\}\times\{4,2,3\}\big)$$

Äquivalenzklassen

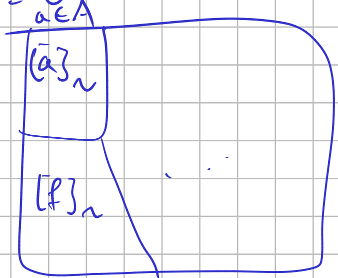
$a \sim b \qquad b \sim c$

$\Rightarrow \quad a \sim c$

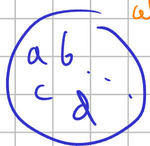
$a \sim d \Rightarrow b \sim d, \; c \sim d$

$\vdots$

$$A = \bigcup_{a\in A} [a]_\sim$$



$[a]_\sim$



alle untereinander äquiv.

Beweise mit Relationen

Let ρ be a reflexive relation on a non-empty set A such that

$$a \rho b \wedge b \rho c \implies c \rho a$$

for any $a, b, c \in A$. Prove that ρ is an equivalence relation.

Bew.: reflexiv: gegeben

transitiv: folgt sofort

symmetrisch:

sei $a, b \in A$ s.d. $a \rho b$

$\Rightarrow a \rho a \wedge a \rho b$ (ρ refl.)

$\Rightarrow b \rho a$ (assumption)

Let ρ and σ be two equivalence relations on a set A. Prove that if

$$\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$$

then $\rho \circ \sigma$ is an equivalence relation.

Bew.:

reflexiv: $\qquad a \; \rho\sigma \; a$

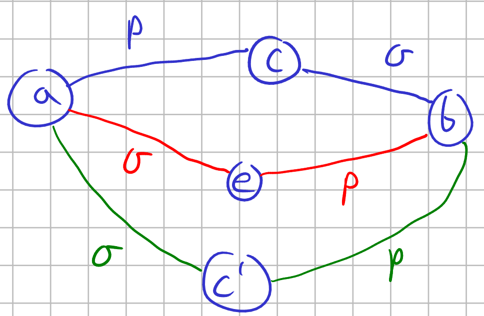
sei $a \in A$.

$\Rightarrow a \, \rho \, a \wedge a \, \sigma \, a \quad (\rho, \sigma \text{ equ. rel.})$

$\Rightarrow a \, \rho\sigma \, a$

symmetrisch:

sei $a, b \in A$ s.d. $a \, \rho\sigma \, b$



Wir wollen $b \, \rho\sigma \, a$

$a \, \sigma\rho \, b$

$\Rightarrow a \, \sigma\rho \, b \quad$ (assumption)

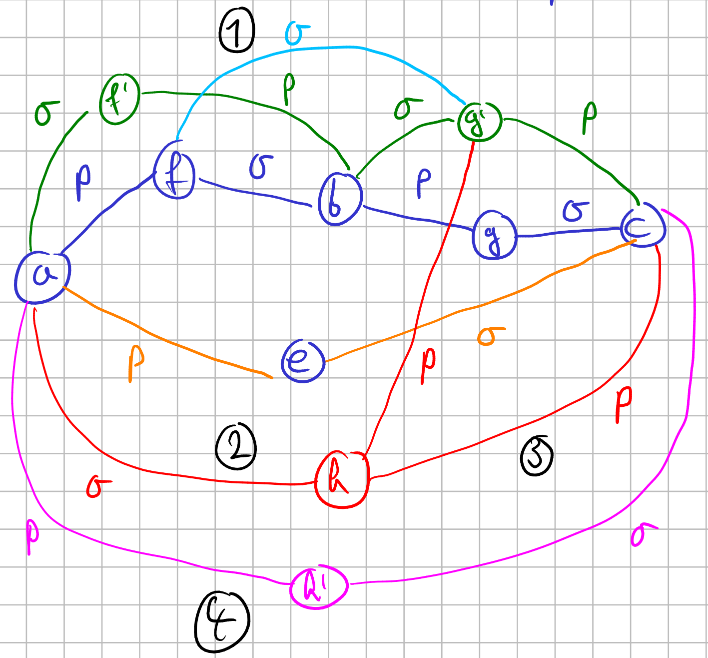
$\Rightarrow a \, \sigma \, e \wedge e \, \rho \, b$ for some $e \in A \quad$ (def. $\circ$)

$\Rightarrow e \, \sigma \, a \wedge b \, \rho \, e \quad (\rho, \sigma \text{ eq. rel.})$

$\Rightarrow b \, \rho \, e \wedge e \, \sigma \, a \Rightarrow b \, \rho\sigma \, a$

transitive:

sei $a, b, c \in A$ z.d. $a \; \rho\sigma \; b$ und $b \; \rho\sigma \; c$



$a \; \rho\sigma \; b \Rightarrow a \; \rho \; f \wedge f \; \sigma \; b$ für ein $f \in A$.

$b \; \rho\sigma \; c \Rightarrow b \; \sigma\rho \; c$

$\Rightarrow b \; \sigma \; g' \wedge g' \; \rho \; c$ für ein $g' \in A$. (4)

$f \sigma b \wedge b \sigma g' \Rightarrow f \; \sigma \; g'$ (σ trans.) 1

$a \; \rho \; f \wedge f \; \sigma \; g' \Rightarrow a \; \rho\sigma \; g'$

$\Rightarrow a \; \sigma\rho \; g'$

$\Rightarrow a \; \sigma \; h \wedge h \; \rho \; g'$ für ein $h \in A$ 2

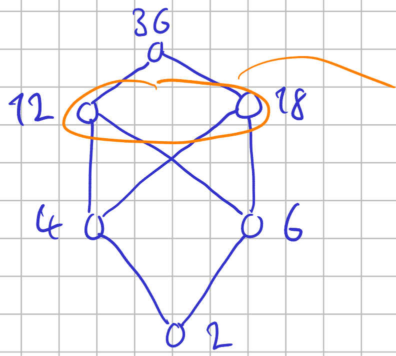
$h \; \rho \; g' \wedge g' \; \rho \; c \Rightarrow h \; \rho \; c$ (ρ trans.) 3

$a \sigma h \wedge h \; \rho \; c \Rightarrow a \; \sigma\rho \; c$

$\Rightarrow a \; \rho\sigma \; c$ 4 $\square$

Hasse Diagramm

$(\{2, 4, 6, 12, 18, 36\}; \mid)$



totale Ordnung

→ gibt eine klare Reihenfolge vor (z.B. sortieren)