

Feedback:

- 0 nicht $x < 2 \Leftrightarrow x \geq 2$
- 0 $\forall x (0 < \text{integer}(x) \rightarrow (\exists y \exists z x = \text{integer}(y) \cdot \text{integer}(z)))$ NEIN ∇
 $(0 < x \wedge \text{integer}(x)) \quad x = y \cdot z \wedge \text{integer}(x) \wedge \text{integer}(z)$

- 0 "Zeige, dass für $x \in \mathbb{R}$ so dass $3x^5 \leq 56 + 5x^3$ gilt $x \leq 2$."

In anderen Worten:

Zeige

$$3x^5 \leq 56 + 5x^3 \Rightarrow x \leq 2$$

NICHT das gleiche wie:

$$x \leq 2 \Rightarrow 3x^5 \leq 56 + 5x^3 \quad (\text{auch wenn diese Implikation auch gilt})$$

0 Punkte :-

Zusammenfassung Beweismethoden

kann man nur gut anwenden, wenn sie einem auch intuitiv sind!

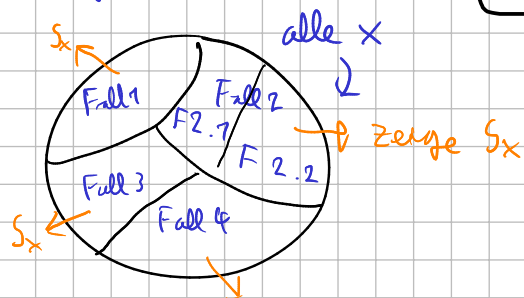
- ① Widerspruchsbeweise: S beweisen. Wir fragen uns: Was passiert wenn S falsch ist?
 \leadsto Widerspruch $\leadsto S$ muss wahr sein.

$$\text{Idee: } A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$$

- ② Indirekt: $S \Rightarrow T \quad \text{nicht } T \Rightarrow \text{nicht } S$

- ③ Fallunterscheidung:

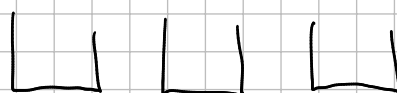
für jedes x gilt S_x :



Bsp.: es regnet $\Rightarrow \exists$ Wolken

ist das gleiche wie $\neg \exists$ Wolken \Rightarrow es regnet nicht

- ④ Pigeonhole principle:

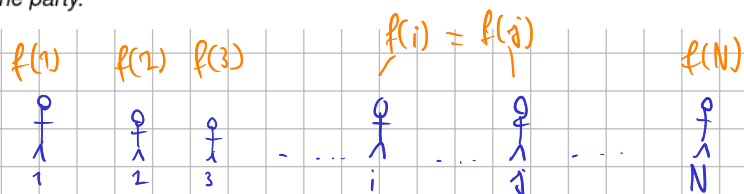


n Objekte

\rightarrow Kasten mit $\lceil \frac{n}{k} \rceil = 2$ Bälle

k Kasten

At a party of N people, some pair of people are friends with the same number of people at the party.



Mögliche Werte für f :

0 Freunde (☹️)

1 F.

⋮

$N-1$ F. (☺️)

jemand hat 0 Freunde \Rightarrow niemand kennt ihn \Rightarrow jeder hat höchstens $N-2$ F.

$$(\exists i: f(i) = 0) \rightarrow (\forall j: f(j) \leq N-2 < N-1)$$

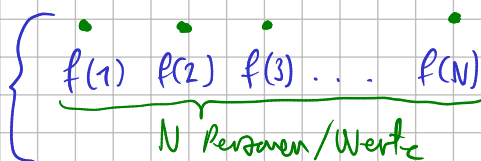
Fall jemand hat 0 Freunde:

\Rightarrow niemand hat $N-1$ Freunde

\Rightarrow mögliche Werte für f ($\text{Im}(f)$):



Wir haben N Personen, jeder hat eines dieser Werte für f :

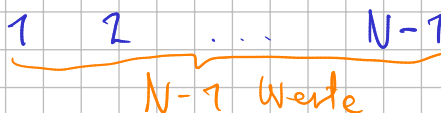


Nach SFP gibt es zwei Personen mit dem gleichen Wert!

Fall jeder hat > 0 F.:

\Rightarrow niemand hat 0 F.

\Rightarrow mögliche Werte für f :



Wieder N Personen. Also

gibt es wieder nach SFP zwei P. mit der gleichen #F.

Set theory:

o Definitionen

Sind irgendwelche Def. unintuitiv/unklar?

hart. Produkt: nützlich!

$A \times B$: alle Paare von einem Element aus A und einem Element aus B .

Pseudo-code:

$$S = \emptyset$$

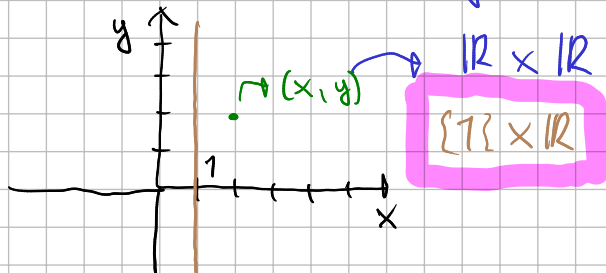
for $a \in A$

for $b \in B$:

$$S = S \cup \{(a, b)\}$$

Beispiele:

o Punkte im Koordinatensystem:



1. Wurf 2. Wurf

o Würfe von einem Würfel: (a, b)

$$W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Alle Würfe: $W \times W$

Alle Würfe wobei der erste Wurf eine 1: $\{1\} \times W$

Alle Würfe mit genau einer geraden Zahl oder zwei gleiche Zahlen:

$$\underbrace{(\{2, 4, 6\} \times \{1, 3, 5\})}_{A_1} \cup \underbrace{(\{1, 3, 5\} \times \{2, 4, 6\})}_{A_2} \cup \underbrace{\text{id}}_{A_3}$$

Oder $\bigcup_{i=1}^3 A_i$

o Leere Menge:

\emptyset : keine Elemente

Wichtig: $\forall S \quad \emptyset \subseteq S \rightarrow$ häufiges Gegenbep.

$$S \times \emptyset = \emptyset$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \setminus \emptyset = A$$

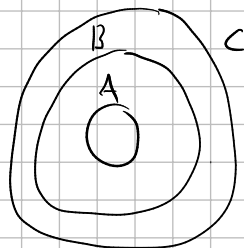
Beweise mit Mengen:

Schritt ①: intuitiv/logisch überlegen, a) an Worten

Schritt ②: Beweisen mit den Definitionen, b) mit Logik
 \in : "alles was in A ist, ist auch in B"

Zeige $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Zuerst Trick: Bild



Variante

a) Vorgehen bei " $A \subseteq C$ ": Def. $\forall x (x \in A \rightarrow x \in C)$.

Also nehme $x \in A$ und zeige $x \in C$

$$x \in A \Rightarrow x \in B \quad (A \subseteq B)$$

$$\Rightarrow x \in C \quad (B \subseteq C)$$

Variante

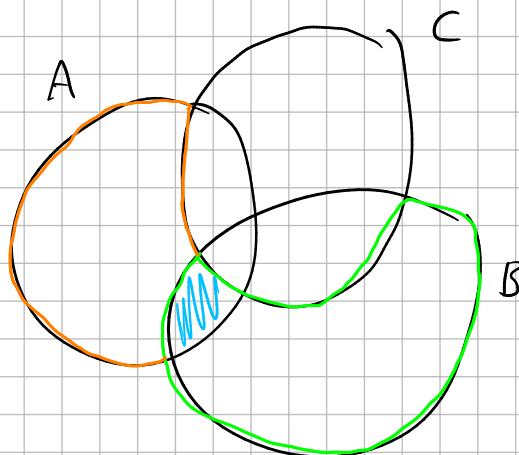
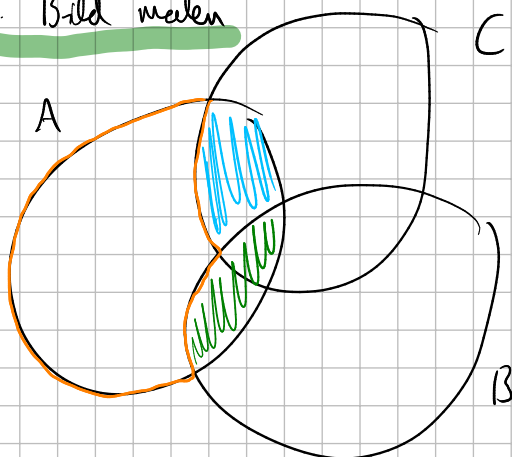
Also haben wir $A \subseteq C$ gezeigt.

b) Beweis mit Logik: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x (x \in B \rightarrow x \in C)$
 $\quad \quad \quad (F \rightarrow G) \quad \wedge \quad (G \rightarrow H) \quad \vdash \quad F \rightarrow H$
 $\Leftrightarrow \forall x ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in C))$
 $\Rightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in C)$

Prove or disprove: For any sets A , B , and C we have

$$\underline{(A \setminus B) \setminus C} = A \setminus \underline{(B \setminus C)}.$$

Trick: Bild malen



Gegenbeispiel?

$$A = \{1\}, B = \{1\}, C = \{1\}$$

$$(A \setminus B) \setminus C = \emptyset, A \setminus (B \setminus C) = \{1\} \setminus \emptyset = \{1\}$$

Gleichheit zeigen: Immer: $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

Seien A, B zwei Mengen.

Zeige $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2$

$$\begin{aligned} (a, b) \in (A \times B) \cap (B \times A) &\Leftrightarrow (a, b) \in A \times B \wedge (a, b) \in B \times A \\ &\Leftrightarrow a \in A \wedge b \in B \wedge a \in B \wedge b \in A \\ &\Leftrightarrow a \in A \cap B \wedge b \in A \cap B \\ &\Leftrightarrow (a, b) \in (A \cap B)^2 \end{aligned}$$

andere Richtung?

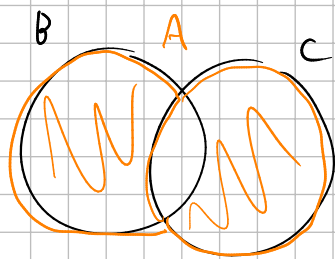
Komplizierter:

5.1 A Property of Any Two Sets (**)

Prove or disprove: for any two sets A and B there exists a set C such that

$$A = (B \setminus C) \cup (C \setminus B).$$

$$B \oplus C \quad (\text{https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_difference})$$



↳ Kommut., assoz.!, selbst-invers!

$$\begin{aligned} B \oplus (B \oplus A) &= (B \oplus B) \oplus A \\ &= \emptyset \oplus A = A \end{aligned}$$

alle El. nur in B oder nur in C

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{wähle } C &= B \oplus A \\ &= (B \setminus A) \cup (A \setminus B) \end{aligned}$$

Zeige $A = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$

$$= B \setminus ((B \setminus A) \cup (A \setminus B)) \cup ((B \setminus A) \cup (A \setminus B)) \setminus B$$

Beweis \subseteq (wie vorher links nach rechts)

Sei $x \in A$.

Fall $x \notin B$:

$$\begin{aligned} x \in A \wedge x \notin B &\Rightarrow x \in A \setminus B \wedge x \notin B \quad (\text{Def. } \setminus, \text{ Logik}) \\ &\Rightarrow (x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A) \wedge x \notin B \quad (A \neq A \vee B) \\ &\Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \wedge x \notin B \quad (\text{Def. } \cup) \\ &\Rightarrow x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \setminus B \quad (\text{Def. } \setminus) \end{aligned}$$

Serie 5, Aufgabe 1 von HS20:
<https://polybox.ethz.ch/index.php/s/WXf1p3ODpDdpnRH?path=%2F1.%20Semester%2F2%20DiskMath%2F3%20Exercises%2FHS20>

Fall $x \in B$:
Dann wissen wir

$$x \notin B \setminus A$$

(da $x \in A$) und

$$x \notin A \setminus B,$$

(da $x \in B$) also

$$x \notin ((B \setminus A) \cup A \setminus B).$$

Da $x \in B$ folgt daraus dann wieder

$$x \in B \setminus ((B \setminus A) \cup (A \setminus B))$$

und auch

$$x \in ((B \setminus ((B \setminus A) \cup (A \setminus B))) \cup ((B \setminus A) \cup (A \setminus B)) \setminus B)$$

wie gewünscht.