Prenex normal form:

For the formula

$$F = P(x,x) \wedge \forall x\,((\exists y\, P(x,y)) \to Q(z)),$$

give an equivalent formula in the prenex normal form.

Vorgehen:

1. Bounded Variablen umbenennen.
2. Quantoren rausziehen (mithilfe von Lemma 6.8.).

① $P(x,x) \wedge \forall \overset{a}{\cancel{x}}\, ((\exists y\, P(\overset{a}{\cancel{x}},y)) \to Q(z))$

Konflikt!

② Um Lemma 6.8. anzuwenden muss der "$\to$" weg

$$\begin{aligned} F &\equiv P(x,x) \wedge \forall a\,(\neg(\exists y\, P(a,y)) \vee Q(z)) \\ &\equiv P(x,x) \wedge \forall a\,((\forall y\, \neg P(a,y)) \vee Q(z)) \\ &\equiv \forall a\,(P(x,x) \wedge ((\forall y\, \neg P(a,y)) \vee Q(z))) \\ &\equiv \forall a \forall y\, (P(x,x) \wedge (\neg P(a,y) \vee Q(z))) \end{aligned}$$

Resolution calculus:

Gegeben Formel F in KNF (CNF auf Englisch)

$F = K_1 \wedge \ldots \wedge K_j \wedge \ldots \wedge K_n$ Konjunktion

$K_j = (L_{i1} \vee L_{i2} \vee \ldots \vee L_{ik_j})$

$L_{ij} = A$ oder $L_{ij} = \neg A$ für eine beliebige Var. A.

Wir wollen von F aus neue Formeln herleiten. Das heisst wir suchen F' s.d. $F \models F'$ (wenn F wahr, dann sicher auch F' wahr). Zu diesem Zweck suchen wir eine korrekte Regel R s.d. $F \supseteq G \vdash_R F'$.

Idee:

$K_i \wedge \ldots \wedge K_j$

$(\ldots \vee L \vee \ldots) \wedge (\ldots \vee \neg L \vee \ldots)$

F erfüllt $\Leftrightarrow$ alle K_ℓ erfüllt $\Rightarrow$ K_i und K_j erfüllt

Fall $L = 1$:

$\Rightarrow \neg L = 0$

$\Rightarrow K_j \setminus \{\neg L\}$ muss erfüllt sein, damit K_j erfüllt

Fall $L=0$:

$\Rightarrow$ $K_i \setminus \{L\}$ muss erfüllt sein, damit K_i erfüllt

Also ist in jedem Fall " $\vee$ " erfüllt.

$\Rightarrow \{K_i, K_j\} \models (K_i \setminus \{L\}) \cup (K_j \setminus \{\neg L\}) =: K$

Dann ist $\{K_i, K_j\} \vdash_{Res} K$ eine korrekte Regel.

Wir bezeichnen mit einer leeren Klausel $K = \emptyset$ eine unerfüllbare Formel.

Use the resolution calculus to prove that $A \wedge C$ is a logical consequence of

$$M = \{\neg B \vee A, \neg A \rightarrow B, A \rightarrow C\}.$$

Vorgehen:

1. Formel F' in KNF finden, so dass F' unerfüllbar $\iff$ Aussage erfüllt.
2. Resolutionskalkül auf F' anwenden.

(1) $M \models A \wedge C \iff \underbrace{(\neg B \vee A) \wedge (\neg A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)}_{=: G} \models A \wedge C$

$\iff \underbrace{G \wedge \neg(A \wedge C)}_{\text{nicht in KNF}}$ unerfüllbar

nicht in KNF :(

$\neg A \rightarrow B \equiv A \vee B$, $A \rightarrow C \equiv \neg A \vee C$, $\neg(A \wedge C) \equiv \neg A \vee \neg C$

$\Rightarrow F' = (\neg B \vee A) \wedge (A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C)$

(2) Klausel:

$\{\neg B, A\}$ $\{A, B\}$ $\{\neg A, C\}$ $\{\neg A, \neg C\}$

$(\neg B \vee A) \wedge (A \vee B) \models A$ $\{A\}$

$A \wedge (\neg A \vee C) \models C$ $\{C\}$ $\{\neg C\}$ $A \wedge (\neg A \vee \neg C) \models \neg C$

$C \wedge \neg C \equiv \perp$ $\emptyset$

Sei $F = ((A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C)) \to C$. Wir wollen mit dem Resolutionskalkül beweisen, dass F eine Tautologie ist. Welche Formel F' in KNF können wir dafür wählen?

F Tautologie $\Leftrightarrow$ $\neg F$ unerfüllbar.

$$\neg F \equiv \neg\big(((A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C)) \to C\big)$$

$$\equiv \neg\big(\neg((A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C)) \vee C\big)$$

$$\equiv (A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C)) \wedge \neg C$$

$$\equiv (A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \wedge \neg C$$