Relationen - Basics

Im folgenden seien ρ und σ Relationen auf A. (Also $\rho \subseteq A \times A$)

Relationen - Basics

Im folgenden seien ρ und σ Relationen auf A. (Also $\rho \subseteq A \times A$)

Def. Inverse

$$\hat{\rho} \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \{(b,a) \mid (a,b) \in \rho\}$$

oder alternativ, für alle $a, b \in A$

$$b \, \hat{\rho} \, a \iff a \, \rho \, b$$

Wir drehen also einfach alle Paare in ρ um. (Bild)

Relationen - Basics

Im folgenden seien ρ und σ Relationen auf A. (Also $\rho \subseteq A \times A$)

Def. Inverse

$$\hat{\rho} \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\}$$

oder alternativ, für alle $a, b \in A$

$$b \, \hat{\rho} \, a \iff a \, \rho \, b$$

Wir drehen also einfach alle Paare in ρ um. (Bild)

Def. Verkettung

$$a \ \rho \circ \sigma \ c \stackrel{\text{def}}{\iff} a \, \rho \, b \wedge b \, \sigma \, c \text{ für ein } b \in A.$$

(Bild). Wir schreiben auch $\underbrace{\rho \circ \rho \circ \ldots \circ \rho}_{\text{n Mal}} = \rho^n$.

Relationen - Reflexivität

Def. reflexiv

$$\begin{aligned} \rho \text{ reflexiv} &\overset{\text{def}}{\iff} \forall a \in A \quad a \, \rho \, a \\ &\iff \forall a \in A \quad (a, a) \in \rho \end{aligned}$$

Das heisst nicht anderes als id $\subseteq A$.

Relationen - Reflexivität

Def. reflexiv

$$\rho \text{ reflexiv} \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall a \in A \quad a \,\rho\, a$$
$$\iff \forall a \in A \quad (a, a) \in \rho$$

Das heisst nicht anderes als id $\subseteq A$.

- Wie sieht die Identitätsrelation in $\mathbb{R}^2$ aus?

Relationen - Reflexivität

Def. reflexiv

$$\rho \text{ reflexiv} \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall a \in A \quad a \, \rho \, a$$
$$\iff \quad \forall a \in A \quad (a, a) \in \rho$$

Das heisst nicht anderes als id $\subseteq A$.

- Wie sieht die Identitätsrelation in $\mathbb{R}^2$ aus?
- Ist $\varnothing$ im Allgemeinen reflexiv?

Relationen - Reflexivität

Def. reflexiv

$$\rho \text{ reflexiv} \overset{\text{def}}{\iff} \forall a \in A \quad a \, \rho \, a$$
$$\iff \forall a \in A \quad (a, a) \in \rho$$

Das heisst nicht anderes als id $\subseteq A$.

- Wie sieht die Identitätsrelation in $\mathbb{R}^2$ aus?
- Ist $\varnothing$ im Allgemeinen reflexiv?
- Ist eine nicht irreflexive Relation relfexiv?
  (ρ irreflexiv $\overset{\text{def}}{\iff} \forall a \in A \quad (a, a) \notin \rho$)

Relationen - Reflexivität

Def. reflexiv

$$\rho \text{ reflexiv} \overset{\text{def}}{\iff} \forall a \in A \quad a\,\rho\,a$$
$$\iff \forall a \in A \quad (a, a) \in \rho$$

Das heisst nicht anderes als id $\subseteq A$.

- Wie sieht die Identitätsrelation in $\mathbb{R}^2$ aus?
- Ist $\varnothing$ im Allgemeinen reflexiv?
- Ist eine nicht irreflexive Relation relfexiv?
  (ρ irreflexiv $\overset{\text{def}}{\iff} \forall a \in A \quad (a, a) \notin \rho$)
- Ist $\varnothing$ im Allgemeinen irreflexiv?

Def. symmetrisch

ρ ist symmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$

$$a \,\rho\, b \iff b \,\rho\, a.$$

Man kann also ρ immer umdrehen. In anderen Worten $\rho = \hat{\rho}$.

Relationen - Symmetrie

Def. symmetrisch

ρ ist symmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$

$$a \,\rho\, b \iff b \,\rho\, a.$$

Man kann also ρ immer umdrehen. In anderen Worten $\rho = \hat{\rho}$.

- Wie sieht Symmetrie in einem Graphen aus?

Relationen - Symmetrie

Def. symmetrisch

ρ ist symmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$

$$a \,\rho\, b \iff b \,\rho\, a.$$

Man kann also ρ immer umdrehen. In anderen Worten $\rho = \hat{\rho}$.

- Wie sieht Symmetrie in einem Graphen aus?
- Ist $\varnothing$ im Allgemeinen symmetrisch?

Relationen - Transitivität

Def. transitiv

ρ ist transitiv, wenn für alle $a, b, c \in A$ so dass $a \,\rho\, b$ und $b \,\rho\, c$, gilt auch $a \,\rho\, c$.

Relationen - Transitivität

Def. transitiv

ρ ist transitiv, wenn für alle $a, b, c \in A$ so dass $a \, \rho \, b$ und $b \, \rho \, c$, gilt auch $a \, \rho \, c$.
Anders gesagt soll

$$a \, \rho \, b \wedge b \, \rho \, c \implies a \, \rho \, c.$$

für alle $a, b, c \in A$ gelten.

Relationen - Transitivität

Def. transitiv

ρ ist transitiv, wenn für alle $a, b, c \in A$ so dass $a \, \rho \, b$ und $b \, \rho \, c$, gilt auch $a \, \rho \, c$.
Anders gesagt soll

$$a \, \rho \, b \wedge b \, \rho \, c \implies a \, \rho \, c.$$

für alle $a, b, c \in A$ gelten.

Wenn man von a nach c kommen will, dann kann man die Brücke über b nehmen.

Relationen - Transitivität

Def. transitiv

ρ ist transitiv, wenn für alle $a, b, c \in A$ so dass $a \, \rho \, b$ und $b \, \rho \, c$, gilt auch $a \, \rho \, c$.
Anders gesagt soll

$$a \, \rho \, b \wedge b \, \rho \, c \implies a \, \rho \, c.$$

für alle $a, b, c \in A$ gelten.

Wenn man von a nach c kommen will, dann kann man die Brücke über b nehmen.

- Wie sieht Transitivität in einem Graphen aus?

Aufgabe 1

Beweise:

$$\rho \text{ ist transitiv } \iff \rho^2 \subseteq \rho$$

Relationen - Transitivität

Def. transitiv

ρ ist transitiv, wenn für alle $a, b, c \in A$ so dass $a \, \rho \, b$ und $b \, \rho \, c$, gilt auch $a \, \rho \, c$.

Wenn man von a nach c kommen will, dann kann man die Brücke über b nehmen.

- Wie sieht Transitivität in einem Graphen aus?

Relationen - Transitivität

Def. transitiv

ρ ist transitiv, wenn für alle $a, b, c \in A$ so dass $a \, \rho \, b$ und $b \, \rho \, c$, gilt auch $a \, \rho \, c$.

Wenn man von a nach c kommen will, dann kann man die Brücke über b nehmen.

- Wie sieht Transitivität in einem Graphen aus?
- Ist $\varnothing$ im Allgemeinen transitiv?

Relationen - Transitivität

Def. transitiv

ρ ist transitiv, wenn für alle $a, b, c \in A$ so dass $a \, \rho \, b$ und $b \, \rho \, c$, gilt auch $a \, \rho \, c$.

Wenn man von a nach c kommen will, dann kann man die Brücke über b nehmen.

- Wie sieht Transitivität in einem Graphen aus?
- Ist $\varnothing$ im Allgemeinen transitiv?

Def. transitive Hülle

$$\rho^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$$

In Worten: nehme ρ und mache ihn transitiv. Drückt in einem Graphen Erreichbarkeit aus. (Bild)

Challenge!

Beweise:

$$\rho \text{ transitiv} \implies \rho^* = \rho.$$

Aufgabe 2 (Alte Prüfungsaufgabe FS21)

Sei

$$\rho = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,2),(4,4)\}$$

eine Relation auf $\{1,2,3,4\}$.

Bestimme ρ^3. (Lösung in Notizen)

Äquivalenzrelationen

Nehmen wir all diese Eigenschaften zusammen, so kommen wir auf ein einfaches aber wichtiges Konzept:

Äquivalenzrelationen

Nehmen wir all diese Eigenschaften zusammen, so kommen wir auf ein einfaches aber wichtiges Konzept:

Def. Äquivalenzrelation

Wir nennen ρ eine Äquivalenzrelation, wenn ρ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Äquivalenzrelationen

Nehmen wir all diese Eigenschaften zusammen, so kommen wir auf ein einfaches aber wichtiges Konzept:

Def. Äquivalenzrelation

Wir nennen ρ eine Äquivalenzrelation, wenn ρ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Nicht überraschenderweise geht es da darum, die Äquivalenz zwischen Objekten aufzufassen; also dass wir Objekte in einem gewissen Sinne als "gleich" betrachten können. Jedes der drei Eigenschaften fasst Merkmale auf, die wir intuitiv von äquivalenten Objekten erwarten würden. Einfaches Beispiel ist Gleichheit ("$=$").

Äquivalenzrelationen

Nehmen wir all diese Eigenschaften zusammen, so kommen wir auf ein einfaches aber wichtiges Konzept:

Def. Äquivalenzrelation

Wir nennen ρ eine Äquivalenzrelation, wenn ρ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Nicht überraschenderweise geht es da darum, die Äquivalenz zwischen Objekten aufzufassen; also dass wir Objekte in einem gewissen Sinne als "gleich" betrachten können. Jedes der drei Eigenschaften fasst Merkmale auf, die wir intuitiv von äquivalenten Objekten erwarten würden. Einfaches Beispiel ist Gleichheit ("$=$").

- Ist id eine Äquivalenzrelation?

Äquivalenzklassen

Elemente, die untereinander durch die Relation verknüpft sind, bilden Gruppen (Bild).

Äquivalenzklassen

Elemente, die untereinander durch die Relation verknüpft sind, bilden Gruppen (Bild). Im folgenden sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Diese Gruppen (Äquivalenzklassen) wollen wir irgendwie beschreiben können.

Def. Äquivalenzklasse

Sei $a \in A$. Die Menge aller Elemente, die unter $\sim$ zu a äquivalent sind schreiben wir als

$$[a]_\sim \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \{b \in A \mid b \sim a\}$$

.

Äquivalenzklassen

Elemente, die untereinander durch die Relation verknüpft sind, bilden Gruppen (Bild). Im folgenden sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Diese Gruppen (Äquivalenzklassen) wollen wir irgendwie beschreiben können.

Def. Äquivalenzklasse

Sei $a \in A$. Die Menge aller Elemente, die unter $\sim$ zu a äquivalent sind schreiben wir als

$$[a]_\sim \overset{\text{def}}{=} \{b \in A \mid b \sim a\}$$

.

Reflexivität erfordert, dass jedes Element $a \in A$ irgendwie in der Relation ist. Daher ist intuitiv klar, dass $\sim$ die ganze Menge A in diese Gruppen aufteilt. Die Menge der Äquivalenzklassen $A/\sim$ ist also eine Partition von A. (Das muss man aber beweisen!)

Aufgabe 3 (Aufgabe vom Skript)

Prove that the intersection of two equivalence relations is an equivalence relation.

Aufgabe 4 (Alte Prüfungsaufgabe HS21)

Let ρ and σ be two equivalence relations on a set A. Prove that if

$$\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$$

then $\rho \circ \sigma$ is an equivalence relation.

Partielle Ordnungen

Eine Eigenschaft von Relationen fehlt uns noch:

Def. Antisymmetrie

ρ ist antisymmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$ folgende Implikation gilt

$$a \,\rho\, b \wedge b \,\rho\, a \implies a = b.$$

Partielle Ordnungen

Eine Eigenschaft von Relationen fehlt uns noch:

Def. Antisymmetrie

ρ ist antisymmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$ folgende Implikation gilt

$$a \,\rho\, b \wedge b \,\rho\, a \implies a = b.$$

Dann haben wir alles für eine weiteres wichtiges Konzept. (Bild)

Def. partielle Ordnung

Wir nennen $\preceq$ eine partielle Ordnung, wenn $\preceq$ reflexiv, **anti**symmetrisch und transitiv ist.

Musterbeispiel: "$\leq$".

Hasse Diagramme

(Endliche) partielle Ordnungen können wir bildlich darstellen.

Beispiel

Zeichne das Hasse Diagramm der partiellen Ordnung $(\{2, 4, 6, 12, 18\}; |)$.

Hasse Diagramme

(Endliche) partielle Ordnungen können wir bildlich darstellen.

Beispiel

Zeichne das Hasse Diagramm der partiellen Ordnung $(\{2, 4, 6, 12, 18\}; |)$.

(Werdet ihr nicht viel benutzen und es kam in den letzten Jahren selten dran. Definitionen wie "minimal element", "least element" würde ich auch einfach schnell auf den Spick schreiben.)

Hasse Diagramme

(Endliche) partielle Ordnungen können wir bildlich darstellen.

Beispiel

Zeichne das Hasse Diagramm der partiellen Ordnung $(\{2, 4, 6, 12, 18\}; |)$.

(Werdet ihr nicht viel benutzen und es kam in den letzten Jahren selten dran. Definitionen wie “minimal element”, “least element” würde ich auch einfach schnell auf den Spick schreiben.)
Folgende Definition ist aber wichtig zu kennen:

Def. totale Ordnung

Wir nennen $(A; \preceq)$ eine totale Ordnung, falls jede zwei Elemente *vergleichbar* (*comparable*) sind. Also für jedes $a, b \in A$ gilt entweder $a \preceq b$ oder $b \preceq a$.

Hasse Diagramme

(Endliche) partielle Ordnungen können wir bildlich darstellen.

Beispiel

Zeichne das Hasse Diagramm der partiellen Ordnung $(\{2, 4, 6, 12, 18\}; |)$.

(Werdet ihr nicht viel benutzen und es kam in den letzten Jahren selten dran. Definitionen wie "minimal element", "least element" würde ich auch einfach schnell auf den Spick schreiben.)
Folgende Definition ist aber wichtig zu kennen:

Def. totale Ordnung

Wir nennen $(A; \preceq)$ eine totale Ordnung, falls jede zwei Elemente *vergleichbar* (*comparable*) sind. Also für jedes $a, b \in A$ gilt entweder $a \preceq b$ oder $b \preceq a$.

- Wie sieht das Hasse Diagramm einer partiellen Ordnung aus?

Hasse Diagramme

```
public interface Comparable<T>
```

This interface imposes a total ordering on the objects of each class that implements it. '

Lists (and arrays) of objects that implement this interface can be sorted automatically by `Collections.sort` (and `Arrays.sort`).