

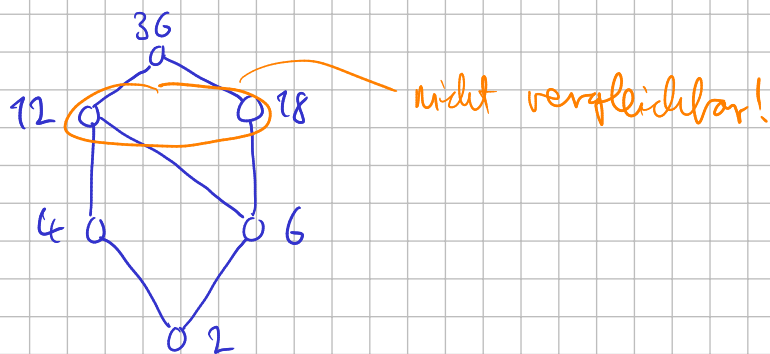
Feedback:

- Die, die richtig angefangen haben: super gelöst!
Sonst häufiger Fehler: mit $a \circ b$ $a \circ c$ angefangen
statt $a \circ b$ $a \circ c$. Wieso?
- Challenge gelöst. Mehr? 1, 2, 3 Platz ...

Aufgabe 5.3 ?

Aufgabe 5.6 ?

Hasse Diagramm $(\{2, 4, 6, 12, 18, 36\}; |)$

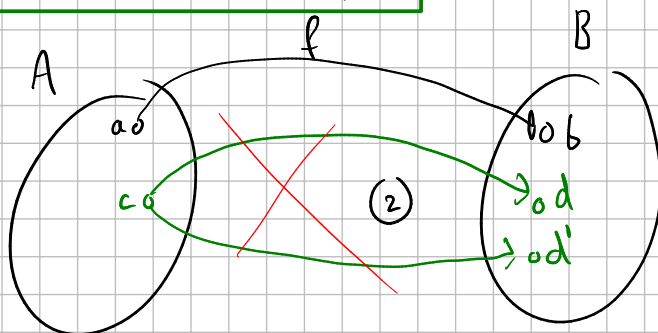


totale Ordnung



→ gibt eine klare Reihenfolge vor
(z.B. sortieren)

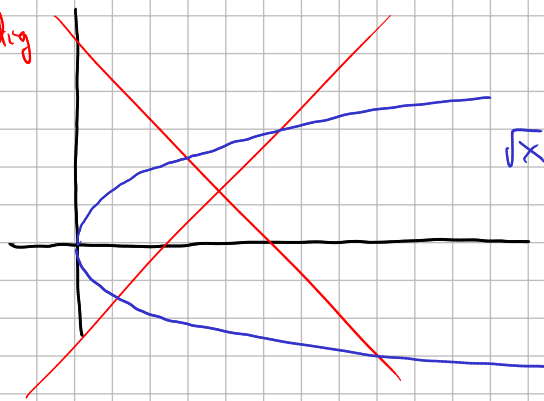
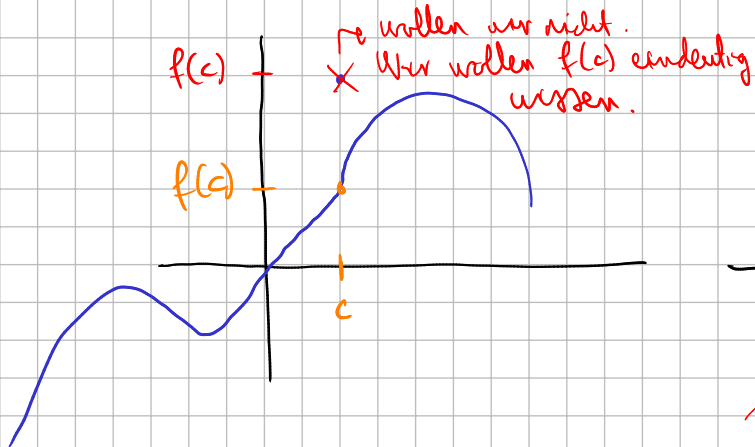
Funktionen Eigenschaften



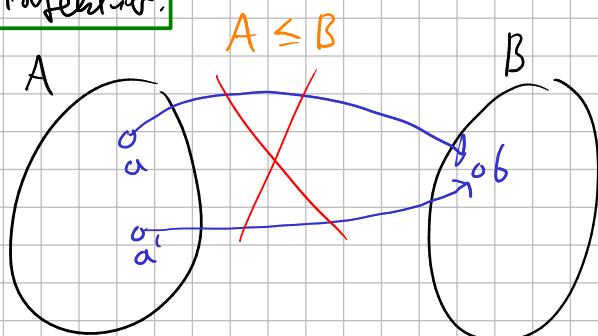
①: jedes A hat ein Pfeil nach B

$f(x) = \frac{1}{x}$ scheint dann bei 0 nicht übereinzustimmen, aber
dann definiert man einfach $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

② ↑ Bsp. oben macht für Funktionen keinen Sinn, so wie
wir sie kennen:

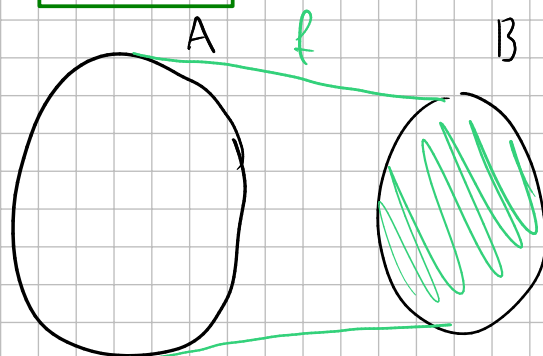


Injektiv:



Jedes Element ein eindeutiges Paar in b . $\Rightarrow A$ mindestens so groß wie B .

Surjektiv



Jedes Element in A deckt höchstens ein Element in B ab.

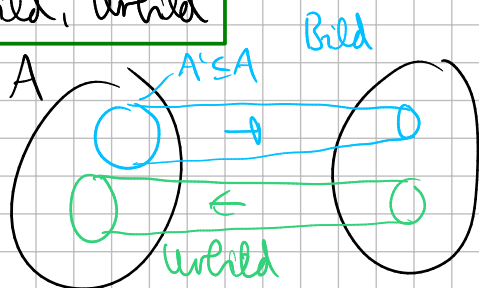
$\Rightarrow A \geq B$ (intuitiv)

Wie schreibe ich die Menge aller $a \in A$, welche auf $b \in B$ gewappt werden?

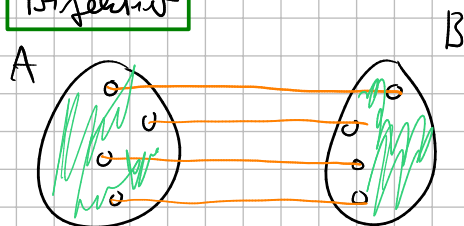
$$\rightarrow f^{-1}(\{b\})$$

Übung: Gegeben die Surjektion $f: A \rightarrow B$, finde eine Injektion $g: B \rightarrow A$.
 Tipp: Bild oben

Bild, Urbild



Bijektiv



Hat immer ein Inverses! (Man kann es immer umdrehen)

$P \sim \mathbb{N}$

Bijektion $f: \mathbb{N} \rightarrow P$

$\mathbb{N} \quad i: p \mapsto p_i$

1 \leftrightarrow 2

2 \leftrightarrow 3

3 \leftrightarrow 5

\vdots

Beweis (Fall $n = 2$)

Seien A_1, A_2 abzählbar. Beweise $A_1 \times A_2$ ist abzählbar.

Wir verwenden: Jede natürliche Zahl hat eine Eindeutige Primfaktorzerlegung (dürft ihr an der Prüfung auch)

A_1, A_2 abzählbar \Rightarrow es gibt Injektionen $f_1: A_1 \rightarrow \mathbb{N}$, $f_2: A_2 \rightarrow \mathbb{N}$

Wir definieren $g: A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{N}$
 $(a,b) \mapsto f(a,b) = 2^{f_1(a)} \cdot 3^{f_2(b)}$

und zeigen g ist injektiv:

Sei $(a,b), (c,d) \in A_1 \times A_2$ und $(a,b) \neq (c,d)$

Fall: $a \neq c$

$\Rightarrow f_1(a) \neq f_1(c)$ (f_1 injektiv)

$\Rightarrow 2^{f_1(a)} \cdot 3^{f_2(b)} \neq 2^{f_1(c)} \cdot 3^{f_2(d)}$ (Primfaktorzerl.)

$\Rightarrow f(a,b) \neq f(c,d)$

Der Fall $a=c$ und $b \neq d$ ist analog.

Sei A_i abzählbar für alle $i \in \mathbb{N}$. Beweise:

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist abzählbar.

Nicht spicken! ;) ↓

Da A_i abzählbar für alle $i \in \mathbb{N}$, gibt es für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine Injektion
 $f_i: A_i \rightarrow \mathbb{N}$.

Sei p_i die i -te Primzahl und $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Wir definieren

$g: S \rightarrow \mathbb{N}$

$a \mapsto p_\ell^{f_\ell(a)+1}$

wobei ℓ die kleinste Zahl s.d. $a \in A_\ell$.
 $(\ell = \min\{i \in \mathbb{N} \mid a \in A_i\})$

Wir zeigen, dass g injektiv ist:

analog

Seien $a, b \in S$. Seien i, j minimal s.d. $a \in A_i$ und $b \in A_j$.

Fall $i \neq j$:

$\Rightarrow p_i^{f_i(a)+1} \neq p_j^{f_j(a)+1}$

da $p_i \neq p_j$ und $f_i(a)+1, f_j(a)+1 \geq 1$

$\Rightarrow f_i(a) \neq f_j(b)$

sonst hätten wir mit $f_i(a) = f_j(a) = 0$:

$p_i^0 = 1 = p_j^0$

Fall $i = j$:

$\Rightarrow f(a) = p_i^{f_i(a)+1}, f(b) = p_i^{f_i(b)+1}$

Da f_i injektiv gilt $f_i(a) \neq f_i(b)$ und daher auch $f(a) \neq f(b)$

(Primfaktorzerlegung eindeutig)

□

Überabzählbarkeit beweisen:

| S eine Menge, U überabzählbar. Falls es eine Injektion $f: U \rightarrow S$ gibt, dann ist auch S überabzählbar.

Beweis: Nehme an S wäre abzählbar.

$$\Rightarrow S \leq \mathbb{N}$$

Nach Annahme gilt auch $U \leq S$.

Dann folgt aus Transitivität von " \leq ":

$$U \leq S \wedge S \leq \mathbb{N} \Rightarrow U \leq \mathbb{N} \quad \nrightarrow \text{(Widerspruch)}$$

□

Beweise, dass $\{0,1\}^\infty$ überabzählbar ist.

wenn wir lange genug zählen, erreichen wir jedes Element

1. Schritt?

Nehme an $\{0,1\}^\infty$ wäre abzählbar. \rightarrow wir können alle Elemente auflisten: b_0, b_1, \dots

Nach Lemma: Da $\{0,1\}^\infty$ unendlich ist, muss $\{0,1\}^\infty \sim \mathbb{N}$ gelten.

Es gibt also eine Bijektion (Aufzählung) $b: \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}^\infty$.

Sei $b_i = b(i)$ und $b_{i,j}$ der j -te Bit der Binärsequenz $b(i)$.

b_0 :	$b_{0,0}$	$b_{0,1}$	$b_{0,2}$	\dots
b_1 :	$b_{1,0}$	$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	\dots
b_2 :	$b_{2,0}$	$b_{2,1}$	$b_{2,2}$	\dots
\vdots				

Wir definieren $\alpha \in \{0,1\}^\infty$, $\alpha_i = \overline{b_{i,i}}$. Dann gilt für alle

i : $\alpha \neq b_i$ da $\alpha_i \neq b_{i,i}$, also ist α nicht in der Auflistung ($\alpha \notin \text{Im}(b)$), ein Widerspruch (zur Surjektivität von b).

$\Rightarrow \mathbb{R}$ ist überabzählbar

Beweise oder widerlege: Die Menge aller Äquivalenzrelationen auf \mathbb{N} ist abzählbar.

Eine Äquivalenzrelation p ist eine Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Also $p \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.
Aber mit gewissen Eigenschaften. $S = \{ p \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid p \text{ eine Äqu.-rel.} \}$

Möglichkeiten:

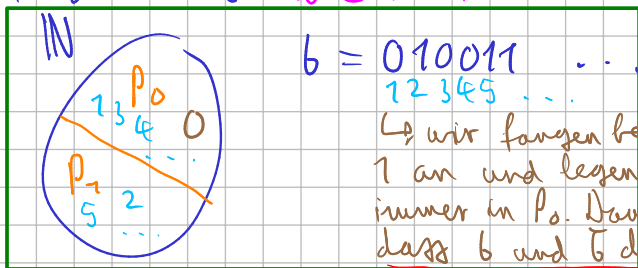
abzählbar: $f: S \rightarrow \mathbb{N}$

überabzählbar: $f: \{0,1\}^\infty \rightarrow S$

Kernidee: (ohne diese Idee nicht einfach!)

Jede Äquivalenzrelation entspricht einer Partition von \mathbb{N} .

Sei $b \in \{0,1\}^\infty$. Wie konstruieren wir zwei Partitionen davon?



$b = 010011 \dots$

\hookrightarrow wir fangen bei 1 an und legen die 0 immer in P_0 . Dann können wir vermeiden, dass b und \bar{b} die gleiche Äquivalenzrel. geben.

Das war ein Fehler im Beweis in der ÜS

Sonst gäben $b = 0000\dots$ und $b = 1000\dots$ die gleiche Partitionierung von \mathbb{N} .

Nehme die Partitionen $P_1 = \{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid b_i = 1\}$, $P_0 = \mathbb{N} \setminus P_1 \rightarrow$ enthält immer 0

Dann definieren P_0, P_1 eine Äquivalenzrelation Θ_b (siehe Bemerkung nach Def. 3.21 im Skript)

Begründung $\Theta_b \in S$ wichtig!

Also: $f: \{0,1\}^\infty \rightarrow S$

$b \mapsto \Theta_b$

Injektivität: Sei $\alpha, \beta \in \{0,1\}^\infty$, $\alpha \neq \beta$.

\Rightarrow Sei i der erste Bit, wo $\alpha_i \neq \beta_i \Rightarrow$ WLOG assume $\alpha_i = 1, \beta_i = 0$

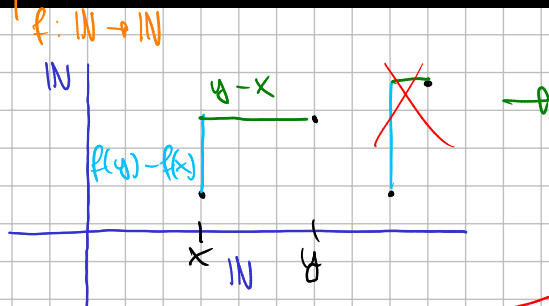
erfundene Notation $p_i^{(b)} := i$ -te Partition wenn man die Partition mit $b \in \{0,1\}^\infty$ bildet.

$\Rightarrow i \in P_0^{(\alpha)}, i \in P_0^{(\beta)}$
 $\Rightarrow i \Theta_\alpha 0 \wedge i \Theta_\beta 0$
 $\Rightarrow \Theta_\alpha \neq \Theta_\beta$

Consider the set

$S = \{ f \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \mid \forall x \forall y (x \leq y \rightarrow (f(x) \leq f(y) \wedge f(y) - f(x) \leq y - x)) \}$.

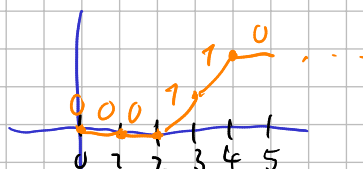
Prove or disprove that the set S is countable.



- ① monoton wachsend
- ② Steigung höchstens 1

Von x zu $x+1$ kann sich f entweder um 0 oder um 1 ändern. Kleiner kann es nicht werden.

0001100...
0 1 2 3 4 5 6



$$g: \{0,1\}^{\omega} \rightarrow S$$

$$b \mapsto f_b, \text{ wobei } f_b(n) = \sum_{i=0}^n b_i$$

① $f_b \in S$:

Sei $x, y \in \mathbb{N}$, $x < y$

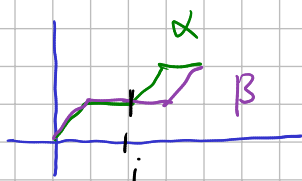
$$1. f_b(y) = \sum_{i=0}^y b_i = \sum_{i=x+1}^y b_i + f_b(x) > f_b(x)$$

$$2. f_b(y) - f_b(x) = \sum_{i=x+1}^y b_i < \sum_{i=x+1}^y 1 = y - x$$

② g injektiv:

Sei $\alpha, \beta \in \{0,1\}^{\omega}$, $\alpha \neq \beta$.

Intuition:



nützlicher Trick!

Sei i der erste Bit, wo sie sich unterscheiden

Zwei Funktionen sind ungleich, wenn sie sich in irgendeinem Wert unterscheiden!

Fall $i=0$:

$$\Rightarrow f_{\alpha}(0) \neq f_{\beta}(0)$$

Fall $i > 0$:

$$\Rightarrow \sum_{h=0}^{i-1} \alpha_h = \sum_{h=0}^{i-1} \beta_h \quad \text{und} \quad \alpha_i \neq \beta_i$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{h=0}^{i-1} \alpha_h + \alpha_i}_{f_{\alpha}(i)} \neq \underbrace{\sum_{h=0}^{i-1} \beta_h + \beta_i}_{f_{\beta}(i)}$$

$$\Rightarrow f_{\alpha}(i) \neq f_{\beta}(i)$$

□