Partielle Ordnungen

Eine Eigenschaft von Relationen fehlt uns noch:

Def. Antisymmetrie

ρ ist *antisymmetrisch*, wenn für alle $a, b \in A$ folgende Implikation gilt:

$$a \, \rho \, b \wedge b \, \rho \, a \implies a = b.$$

Partielle Ordnungen

Eine Eigenschaft von Relationen fehlt uns noch:

Def. Antisymmetrie

ρ ist *antisymmetrisch*, wenn für alle $a, b \in A$ folgende Implikation gilt:

$$a \, \rho \, b \wedge b \, \rho \, a \implies a = b.$$

Intuitiv: Wenn wir Elemente ordnen, wollen wir nicht haben, dass für zwei Elemente a, b, a vor b kommt und gleichzeitig auch b vor a. Das ist irgendwie widersprüchlich, es sei denn, sie sind das gleiche Elemente.

Dann haben wir alles für ein weiteres wichtiges Konzept.

Def. partielle Ordnung

Wir nennen $\preceq$ eine partielle Ordnung, wenn $\preceq$ reflexiv, **anti**symmetrisch und transitiv ist.

Musterbeispiel: "$\leq$".

(Endliche) partielle Ordnungen können wir bildlich darstellen.

Beispiel

Zeichne das Hasse Diagramm der partiellen Ordnung $(\{2, 4, 6, 12, 18\}; |)$.

(Endliche) partielle Ordnungen können wir bildlich darstellen.

Beispiel

Zeichne das Hasse Diagramm der partiellen Ordnung $(\{2, 4, 6, 12, 18\}; |)$.

Das werdet ihr aber praktisch nie benutzen.

Folgende Definition ist aber wichtig zu kennen:

Def. totale Ordnung

Wir nennen $(A; \preceq)$ eine totale Ordnung, falls jede zwei Elemente *vergleichbar* (*comparable*) sind. Also für jedes $a, b \in A$ gilt entweder $a \preceq b$ oder $b \preceq a$.

Partielle Ordnungen

Hasse Diagramme

(Endliche) partielle Ordnungen können wir bildlich darstellen.

Beispiel

Zeichne das Hasse Diagramm der partiellen Ordnung $(\{2, 4, 6, 12, 18\}; |)$.

Das werdet ihr aber praktisch nie benutzen.

Folgende Definition ist aber wichtig zu kennen:

Def. totale Ordnung

Wir nennen $(A; \preceq)$ eine totale Ordnung, falls jede zwei Elemente *vergleichbar* (*comparable*) sind. Also für jedes $a, b \in A$ gilt entweder $a \preceq b$ oder $b \preceq a$.

- Wie sieht das Hasse Diagramm einer totalen Ordnung aus?

Partielle Ordnungen

Totale Ordnungen in der Java Dokumentation

```
public interface Comparable<T>
```

This interface imposes a total ordering on the objects of each class that implements it.

Lists (and arrays) of objects that implement this interface can be sorted automatically by `Collections.sort` (and `Arrays.sort`).

Funktionen

Def. Funktion

Wir nennen eine Relation $f \subseteq A \times B$ eine Funktion, wenn

Funktionen

Def. Funktion

Wir nennen eine Relation $f \subseteq A \times B$ eine Funktion, wenn

1. f für jedes Element im Definitionsbereich *definiert* ist. Also für alle $a \in A$ gibt es ein $b \in B$, so dass $a\,f\,b$. (Bild)

Funktionen

Def. Funktion

Wir nennen eine Relation $f \subseteq A \times B$ eine Funktion, wenn

1. f für jedes Element im Definitionsbereich *definiert* ist. Also für alle $a \in A$ gibt es ein $b \in B$, so dass $a\,f\,b$. (Bild)
2. f jedes Element in A genau auf *ein* anderes Element b gemappt wird. Also für alle $a \in A$ und $b, b' \in B$: $a\,f\,b$ und $a\,f\,b'$ soll nur gelten, wenn auch $b = b'$. (Bild)

Funktionen

Def. Funktion

Wir nennen eine Relation $f \subseteq A \times B$ eine Funktion, wenn

1. f für jedes Element im Definitionsbereich *definiert* ist. Also für alle $a \in A$ gibt es ein $b \in B$, so dass $a\, f\, b$. (Bild)
2. f jedes Element in A genau auf *ein* anderes Element b gemappt wird. Also für alle $a \in A$ und $b, b' \in B$: $a\, f\, b$ und $a\, f\, b'$ soll nur gelten, wenn auch $b = b'$. (Bild)

- Eigenschaft 2 rechtfertigt die Notation $f(a) = b$!

Funktionen

Def. Funktion

Wir nennen eine Relation $f \subseteq A \times B$ eine Funktion, wenn

1. f für jedes Element im Definitionsbereich *definiert* ist. Also für alle $a \in A$ gibt es ein $b \in B$, so dass $a\,f\,b$. (Bild)
2. f jedes Element in A genau auf *ein* anderes Element b gemappt wird. Also für alle $a \in A$ und $b, b' \in B$: $a\,f\,b$ und $a\,f\,b'$ soll nur gelten, wenn auch $b = b'$. (Bild)

- Eigenschaft 2 rechtfertigt die Notation $f(a) = b$!
- Diese Eigenschaften müsst ihr generell nicht beweisen.

Injektiv, surjektiv, bijektiv

Im folgenden sei $f : A \to B$ eine Funktion.

Def. injektiv

Wir nennen f *injektiv*, wenn für alle $a, b \in A$

$$a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$$ (Bild)

Injektiv, surjektiv, bijektiv

Im folgenden sei $f : A \to B$ eine Funktion.

Def. injektiv

Wir nennen f *injektiv*, wenn für alle $a, b \in A$

$$a \neq b \implies f(a) \neq f(b) \quad \text{(Bild)}$$

oder indirekt

$$f(a) = f(b) \implies a = b.$$

Injektiv, surjektiv, bijektiv

Im folgenden sei $f : A \to B$ eine Funktion.

Def. injektiv

Wir nennen f *injektiv*, wenn für alle $a, b \in A$

$$a \neq b \implies f(a) \neq f(b) \quad \text{(Bild)}$$

oder indirekt

$$f(a) = f(b) \implies a = b.$$

Def. surjektiv

Wir nennen f *surjektiv*, wenn es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ gibt, so dass $f(a) = b$. (Bild)

Injektiv, surjektiv, bijektiv

Im folgenden sei $f : A \to B$ eine Funktion.

Def. injektiv

Wir nennen f *injektiv*, wenn für alle $a, b \in A$

$$a \neq b \implies f(a) \neq f(b) \quad \text{(Bild)}$$

oder indirekt

$$f(a) = f(b) \implies a = b.$$

Def. surjektiv

Wir nennen f *surjektiv*, wenn es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ gibt, so dass $f(a) = b$. (Bild)

- Wie schreibe ich die Menge aller $a \in A$, die auf ein $b \in B$ gemappt werden?

Def. bijektiv

Wir nennen f *bijektiv*, wenn f injektiv und f surjektiv.

Das heisst, wir können alle Elemente in den zwei Mengen perfekt miteinander aufpaaren. Irgendwie sind beide Mengen das gleiche, einfach in anderer Darstellung. (Bild)

Abzählbarkeit

Abzählbarkeit

Def. abzählbar

Wir nennen eine Menge A *abzählbar* (*countable*), wenn $A \preceq \mathbb{N}$, also wenn es eine **injektive** Funktion $f : A \to \mathbb{N}$ gibt.

Abzählbarkeit

Def. abzählbar

Wir nennen eine Menge A *abzählbar* (*countable*), wenn $A \preceq \mathbb{N}$, also wenn es eine **injektive** Funktion $f : A \to \mathbb{N}$ gibt.
Ist A irgendwie "zu gross" und es gibt keine solche Injektion f, dann nennen wir A *überabzählbar* (*uncountable*).

Abzählbarkeit

Def. abzählbar

Wir nennen eine Menge A *abzählbar* (*countable*), wenn $A \preceq \mathbb{N}$, also wenn es eine **injektive** Funktion $f : A \to \mathbb{N}$ gibt.
Ist A irgendwie "zu gross" und es gibt keine solche Injektion f, dann nennen wir A *überabzählbar* (*uncountable*).

Def. gleichmächtig

Wir nennen zwei Mengen A, B *gleichmächtig* (*equinumerous*), wenn $A \sim B$, also wenn es eine *bijektive* Funktion $f : A \to B$ gibt.

Abzählbarkeit

Def. abzählbar

Wir nennen eine Menge A *abzählbar* (*countable*), wenn $A \preceq \mathbb{N}$, also wenn es eine **injektive** Funktion $f : A \to \mathbb{N}$ gibt.
Ist A irgendwie "zu gross" und es gibt keine solche Injektion f, dann nennen wir A *überabzählbar* (*uncountable*).

Def. gleichmächtig

Wir nennen zwei Mengen A, B *gleichmächtig* (*equinumerous*), wenn $A \sim B$, also wenn es eine *bijektive* Funktion $f : A \to B$ gibt.

Beispiel

Die Menge aller Primzahlen P ist gleichmächtig zu $\mathbb{N}$. (Obwohl $P \subseteq \mathbb{N}$!)

Abzählbarkeit

Die wichtigsten Lemmas

Lemma

A *abzählbar* $\iff$ A *endlich oder* $A \sim \mathbb{N}$

Lemma

A abzählbar $\iff$ *A endlich oder* $A \sim \mathbb{N}$

Um $A \sim \mathbb{N}$ zu zeigen brauchen wir also meistens nur eine Injektion zu finden.

Lemma

A abzählbar $\iff$ A endlich oder $A \sim \mathbb{N}$

Um $A \sim \mathbb{N}$ zu zeigen brauchen wir also meistens nur eine Injektion zu finden.
Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ abzählbar.

Lemma (Kartesisches Produkt)

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ ist abzählbar.

Lemma

A abzählbar $\iff$ *A endlich oder* $A \sim \mathbb{N}$

Um $A \sim \mathbb{N}$ zu zeigen brauchen wir also meistens nur eine Injektion zu finden.
Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ abzählbar.

Lemma (Kartesisches Produkt)

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ *ist abzählbar.*

Lemma (Vereinigung)

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *ist abzählbar.*

- $\mathbb{N}$, Menge der (un)geraden Zahlen, Menge der Primzahlen, usw.

- $\mathbb{N}$, Menge der (un)geraden Zahlen, Menge der Primzahlen, usw.
- $\{0,1\}^*$ (alle endliche Binärstrings: $\{\epsilon, 0, 1, 00, 11, \ldots\}$)

- $\mathbb{N}$, Menge der (un)geraden Zahlen, Menge der Primzahlen, usw.
- $\{0,1\}^*$ (alle endliche Binärstrings: $\{\epsilon, 0, 1, 00, 11, \ldots\}$)
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$

- $\{0,1\}^\infty$

- $\{0, 1\}^\infty$
- $(0, 1), \mathbb{R}$

Wie überzeugen wir uns davon, dass eine Menge S abzählbar ist?

Wie überzeugen wir uns davon, dass eine Menge S abzählbar ist?

a. Wir wenden direkt eines der Lemmas und die uns bereits bekannten abzählbare Mengen an.

Wie überzeugen wir uns davon, dass eine Menge S abzählbar ist?

a. Wir wenden direkt eines der Lemmas und die uns bereits bekannten abzählbare Mengen an.
   Beispiele:

Wie überzeugen wir uns davon, dass eine Menge S abzählbar ist?

a. Wir wenden direkt eines der Lemmas und die uns bereits bekannten abzählbare Mengen an.
   Beispiele:
   - Ist $\mathbb{Z}$ abzählbar?

Wie überzeugen wir uns davon, dass eine Menge S abzählbar ist?

a) Wir wenden direkt eines der Lemmas und die uns bereits bekannten abzählbare Mengen an.
   Beispiele:
   - Ist $\mathbb{Z}$ abzählbar? Ja. $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \times \{0,1\}$

Wie überzeugen wir uns davon, dass eine Menge S abzählbar ist?

a. Wir wenden direkt eines der Lemmas und die uns bereits bekannten abzählbare Mengen an.
   Beispiele:
   - Ist $\mathbb{Z}$ abzählbar? Ja. $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \times \{0, 1\}$
   - Ist $\mathbb{Q}$ abzählbar?

Wie überzeugen wir uns davon, dass eine Menge S abzählbar ist?

a. Wir wenden direkt eines der Lemmas und die uns bereits bekannten abzählbare Mengen an.
   Beispiele:
   - Ist $\mathbb{Z}$ abzählbar? Ja. $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \times \{0,1\}$
   - Ist $\mathbb{Q}$ abzählbar? Ja. $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$

Wie überzeugen wir uns davon, dass eine Menge S abzählbar ist?

a. Wir wenden direkt eines der Lemmas und die uns bereits bekannten abzählbare Mengen an.
   Beispiele:
   - Ist $\mathbb{Z}$ abzählbar? Ja. $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \times \{0, 1\}$
   - Ist $\mathbb{Q}$ abzählbar? Ja. $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$

b. Nach Definition: Wir konstruieren eine Injektion $f : S \to \mathbb{N}$. (Und beweisen auch, dass f injektiv ist!)

Wie überzeugen wir uns davon, dass eine Menge S abzählbar ist?

a. Wir wenden direkt eines der Lemmas und die uns bereits bekannten abzählbare Mengen an.
   Beispiele:
   - Ist $\mathbb{Z}$ abzählbar? Ja. $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \times \{0, 1\}$
   - Ist $\mathbb{Q}$ abzählbar? Ja. $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$
b. Nach Definition: Wir konstruieren eine Injektion $f : S \to \mathbb{N}$. (Und beweisen auch, dass f injektiv ist!)

Bei Aufgaben müsst ihr **immer** eine konkrete Injektion angeben.

Aufgabe 1 (Kartesisches Produkt abzählbar, Fall $n = 2$)

Seien A_1, A_2 abzählbar. Beweise: $A_1 \times A_2$ ist abzählbar.

Tipp: Verwende, dass jede natürliche Zahl eine eindeutige Primfaktorzerlegung hat.

Übungsaufgabe (Lösung in den Notizen)

Sei A_i abzählbar für alle $i \in \mathbb{N}$. Beweise:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ ist abzählbar.}$$

Tipp: Benutze wieder die Strategie mit den Primzahlen.

Überabzählbarkeit zeigen

Wie zeigen wir, dass eine Menge S **über**abzählbar ist?

Lemma (nicht im Skript)

Sei S eine Menge und U überabzählbar. Wenn es eine Injektion $f : U \to S$ gibt, dann ist S auch überabzählbar.

(Beweis in Notizen.)

Überabzählbarkeit zeigen

Wie zeigen wir, dass eine Menge S **über**abzählbar ist?

Lemma (nicht im Skript)

Sei S eine Menge und U überabzählbar. Wenn es eine Injektion $f : U \to S$ gibt, dann ist S auch überabzählbar.

(Beweis in Notizen.)
Wir suchen uns also eine überabzählbare Menge U aus (meistens $\{0, 1\}^\infty$) und konstruieren eine Injektion $f : U \to S$. (Und beweisen auch, dass f injektiv ist!)

Überabzählbarkeit zeigen

Wie zeigen wir, dass eine Menge S **über**abzählbar ist?

Lemma (nicht im Skript)

Sei S eine Menge und U überabzählbar. Wenn es eine Injektion $f : U \to S$ gibt, dann ist S auch überabzählbar.

(Beweis in Notizen.)
Wir suchen uns also eine überabzählbare Menge U aus (meistens $\{0,1\}^\infty$) und konstruieren eine Injektion $f : U \to S$. (Und beweisen auch, dass f injektiv ist!)
Beispiel:

Überabzählbarkeit zeigen

Wie zeigen wir, dass eine Menge S **über**abzählbar ist?

Lemma (nicht im Skript)

Sei S eine Menge und U überabzählbar. Wenn es eine Injektion $f : U \to S$ gibt, dann ist S auch überabzählbar.

(Beweis in Notizen.)
Wir suchen uns also eine überabzählbare Menge U aus (meistens $\{0, 1\}^\infty$) und konstruieren eine Injektion $f : U \to S$. (Und beweisen auch, dass f injektiv ist!)
Beispiel:

- Ist $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ abzählbar?

Überabzählbarkeit zeigen

Wie zeigen wir, dass eine Menge S **über**abzählbar ist?

Lemma (nicht im Skript)

Sei S eine Menge und U überabzählbar. Wenn es eine Injektion $f : U \to S$ gibt, dann ist S auch überabzählbar.

(Beweis in Notizen.)
Beispiel:

- Ist $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ abzählbar? Nein! Aus jeder Binärsequenz $b \in \{0,1\}^\infty$ können wir eine eindeutige Teilmenge von $\mathbb{N}$ konstruieren: $\{i \in \mathbb{N} \mid b_i = 1\}$. Wir haben damit eine Injektion von einer überabzählbaren Menge ($\{0,1\}^\infty$) nach $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Überabzählbarkeit zeigen

Wie zeigen wir, dass eine Menge S **über**abzählbar ist?

Lemma (nicht im Skript)

Sei S eine Menge und U überabzählbar. Wenn es eine Injektion $f : U \to S$ gibt, dann ist S auch überabzählbar.

(Beweis in Notizen.)
Beispiel:

- Ist $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ abzählbar? Nein! Aus jeder Binärsequenz $b \in \{0,1\}^\infty$ können wir eine eindeutige Teilmenge von $\mathbb{N}$ konstruieren: $\{i \in \mathbb{N} \mid b_i = 1\}$. Wir haben damit eine Injektion von einer überabzählbaren Menge ($\{0,1\}^\infty$) nach $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- Ist $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$) abzählbar? Tipp: gleiche Strategie.

Überabzählbarkeit zeigen

Wie zeigen wir, dass eine Menge S **über**abzählbar ist?

Lemma (nicht im Skript)

Sei S eine Menge und U überabzählbar. Wenn es eine Injektion $f : U \to S$ gibt, dann ist S auch überabzählbar.

(Beweis in Notizen.)
Beispiel:

- Ist $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ abzählbar? Nein! Aus jeder Binärsequenz $b \in \{0,1\}^\infty$ können wir eine eindeutige Teilmenge von $\mathbb{N}$ konstruieren: $\{i \in \mathbb{N} \mid b_i = 1\}$. Wir haben damit eine Injektion von einer überabzählbaren Menge ($\{0,1\}^\infty$) nach $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- Ist $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$) abzählbar? Tipp: gleiche Strategie. Nein! Eine Binärsequenz können wir als eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ sehen.

Aufgabe 2 (Abzählbarkeit zeigen)

Beweise, dass $\{0,1\}^\infty$ überabzählbar ist.

Aufgabe 3

Beweise oder widerlege: Die Menge aller Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

Aufgabe 4 (Bonus von meinem Jahr)

Consider the set

$$S = \left\{ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall x \forall y \left(x \leq y \rightarrow (f(x) \leq f(y) \wedge f(y) - f(x) \leq y - x) \right) \right\}.$$

Prove or disprove that the set S is countable.

Hilbert's Hotel

David Hilbert is the manager of a hotel with an **infinite** number of rooms, numbered by $1, 2, 3, \ldots$, all of which are occupied. His job is to move around the guests in the hotel to accommodate new guests.

Hilbert’s Hotel

Subtask a)

Roger Federer comes to the hotel and asks whether there is a free room for him. Hilbert cannot turn away the distinguished guest and promises him a room. To make it possible, he tells some of the other guests to change their rooms. How can he do this, so that at the end every current guest still has a room?

Hilbert's Hotel

Subtask b)

One day, at the door of the hotel arrives a bus with an infinite number of passengers, numbered by $1, 2, 3, \ldots$, each of whom would like a single room. How can Hilbert accommodate all newly arrived guests, so that all current guests still have a place to stay?

Hilbert's Hotel

Subtask c)

An infinite number of buses, numbered by $1, 2, 3, \ldots$, each carrying an infinite number of passengers, arrives at the hotel. How can Hilbert deal with this situation?