Universidad Simón Bolívar — Departamento de Física

FS-2211 Física III
Trimestre Septiembre - Diciembre 2022
Tercer parcial - 33 %
Sartenejas, 16 de diciembre de 2022
Tiempo: 120 minutos

Nombre: ____________________

Carnet: ____________________

Profesor:

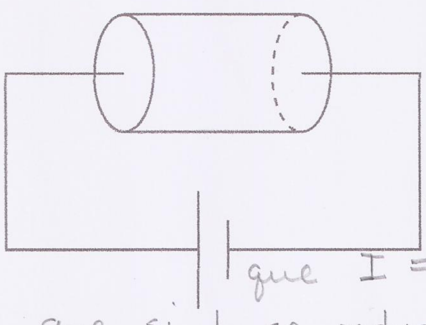
Este examen contiene 6 planteamientos y corresponde a 33 puntos de la valoración final del curso.

Tabla de calificación (uso exclusivo del profesor)

Pregunta:	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos:	4	3	4	6	9	7	33
Resultado:							

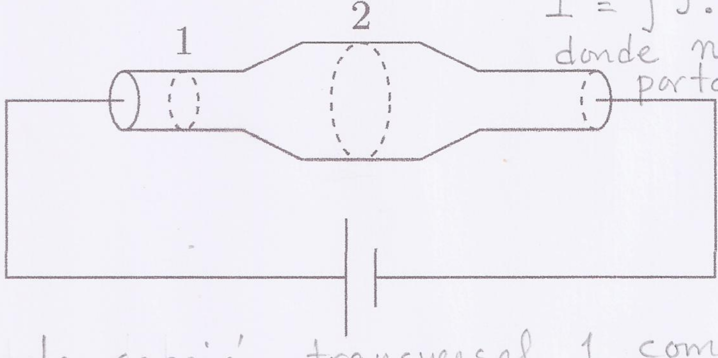
1. En los siguientes problemas, diga si las afirmaciones que se hacen son verdaderas (V) o falsas (F). Justifique sus respuestas usando ecuaciones.

   (a) (2 puntos) La figura muestra un resistor cilíndrico conectado a una batería. La corriente eléctrica en el resistor se duplica si la longitud del resistor se reduce a la mitad. V(✓) F( )



La corriente en el resistor es $I = \mathcal{E}/R$ donde $\mathcal{E}$ es la f.e.m de la batería y R la resistencia del resistor igual a $R = \rho L/A$, donde ρ es la resistividad, L es la longitud y A es el área transversal del resistor. De las ecuaciones anteriores se desprende que $I = \frac{\mathcal{E} A}{\rho L}$. De esta ecuación se concluye que si L se reduce a la mitad, I se duplica.

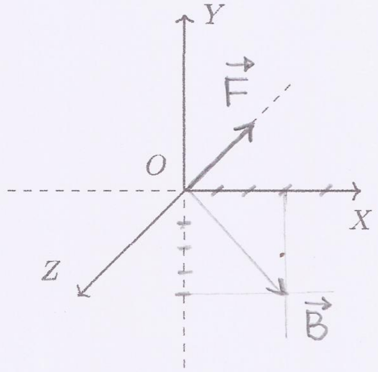
   (b) (2 puntos) La figura muestra una pila conectada a un resistor de resistividad constante. El flujo del vector densidad de corriente eléctrica es constante. Sean I_1 y J_1 la corriente eléctrica y la magnitud del vector densidad de corriente eléctrica respectivamente, en la sección transversal 1 e I_2 y J_2 en la sección transversal 2 (ver figura). Suponga que la carga eléctrica que fluye a través de cada sección transversal está distribuida uniformemente en el área de cada sección. Se cumple que $I_1 = I_2$ y $J_1 < J_2$. V( ) F(✓)



El flujo de $\vec{J}$ es I. Esto es: $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$. $\vec{J}$ es igual a $nq\vec{v}_d$, donde n es el número de partículas portadoras de carga por unidad de volumen, q es la carga de cada portadora y $\vec{v}_d$ es la velocidad de arrastre. En este caso $\vec{J}$ es constante tanto en la sección transversal 1 como en la 2. Esto implica que $I_1 = \int \vec{J}_1 \cdot d\vec{A}_1 = \vec{J}_1 \cdot \vec{A}_1 = J_1 A_1$; $I_2 = \int \vec{J}_2 \cdot d\vec{A}_2 = \vec{J}_2 \cdot \vec{A}_2 = J_2 A_2$

Como el flujo de $\vec{J}$ es constante $\Rightarrow I_1 = I_2 \Rightarrow J_1 A_1 = J_2 A_2 \Rightarrow J_1 > J_2$

2. (3 puntos) Por un alambre recto de 2m de longitud circula una corriente eléctrica de 15 A en la dirección positiva del eje cartesiano X. El alambre está inmerso en una región donde existe un campo magnético uniforme de componentes cartesianas $B_x = 0{,}030$ T ; $B_y = -0{,}040$ T ; $B_z = 0$ T. Determine la magnitud de la fuerza magnética que actúa sobre el alambre. Dibuje, usando el sistema de coordenadas que se muestra en la figura, el vector campo magnético y el vector fuerza indicando sus componentes cartesianas.



$\vec{F} = I\,\vec{L}\times\vec{B}$; $I = 15\,A$; $\vec{L} = 2\,\hat{i}\,(m)$

$\vec{B} = (0.030\,\hat{i} - 0.040\,\hat{j})\,(T)$

$\vec{L}\times\vec{B} = -0.080\,\hat{k}\,(m.T)$

$\vec{F} = 15(-0.080)\,\hat{k}\,(N) = -1.2\,\hat{k}\,(N)$

$|\vec{F}| = 1.2\,N$

3. Un circuito contiene los siguientes elementos en serie: una batería ideal cuya fuerza eléctromotriz es ε, un resistor con resistencia R y un condensador con capacidad igual a C. Inicialmente el condensador está descargado. El circuito se usa para cargar el condensador. En clase se demostró que la carga del condensador (en función del tiempo t, R, C y ε) viene dada por

$$Q(t) = \varepsilon C(1 - e^{-t/RC})$$

.

(a) (2 puntos) Obtenga (en función del tiempo t, R, C y ε) la potencia consumida en el resistor.

(b) (2 puntos) Determine (en función de los datos adecuados) la energía disipada en el resistor hasta el momento en que ha transcurrido un tiempo de carga del condensador igual a $2RC$.

a) $P_R = I^2 R$; $I = \dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}$

$\Rightarrow P_R = \dfrac{\varepsilon^2}{R} e^{-2t/RC}$

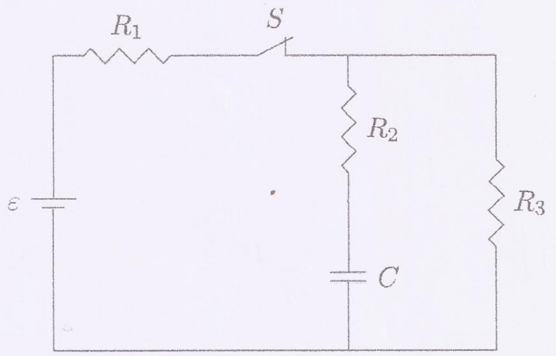
b) $E_R = \displaystyle\int_0^{2RC} P_R\,dt = \frac{\varepsilon^2}{R}\int_0^{2RC} e^{-2t/RC}\,dt = \frac{\varepsilon^2}{R}\left(\frac{e^{-2t/RC}}{\left(-\frac{2}{RC}\right)}\right)\Bigg|_0^{2RC}$

$\Rightarrow E_R = \dfrac{\varepsilon^2}{R}\left(-\dfrac{RC}{2}\right)\left(e^{-4} - 1\right) = \dfrac{\varepsilon^2 C}{2}\left(1 - e^{-4}\right)$

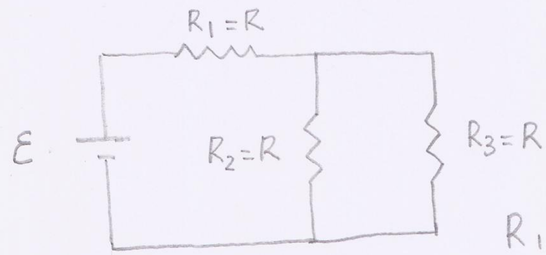
4. En el circuito de la figura, el interruptor S inicialmente está abierto y el condensador está descargado. La batería es ideal y tiene una f.e.m. igual a ε. La capacidad del condensador es C. La resistencia de cada uno de los tres resistores vale R. En $t = 0$ se cierra el interruptor S.

   (a) (3 puntos) Determine (en función de ε y R) la corriente que circula por cada resistor en el instante $t = 0$ cuando se cierra el interruptor.

   (b) (3 puntos) Determine la corriente a través de la batería, el voltaje del condensador y la carga acumulada en el mismo, cuando ha transcurrido un tiempo muy largo desde que se cerró el interruptor. Señale claramente cuál placa del condensador es la que tiene la carga positiva.



a) En $t=0$, el condensador no está cargado y por lo tanto no tiene diferencia de potencial eléctrico o voltaje entre sus placas. El circuito es:

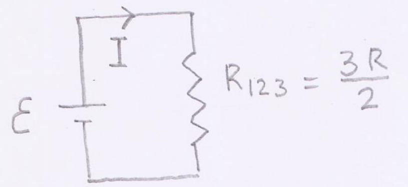


R_2 y R_3 en paralelo $\Rightarrow \dfrac{1}{R_{23}} = \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} \Rightarrow$

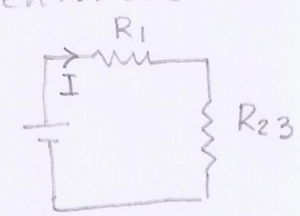
$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R\,R}{2R} = \frac{R}{2}$$

R_1 y R_{23} en serie $\Rightarrow R_{123} = R_1 + R_{23} = R + \dfrac{R}{2}$

$\Rightarrow R_{123} = 3\dfrac{R}{2}$. El circuito equivalente entonces es



. Tambien puede verse como

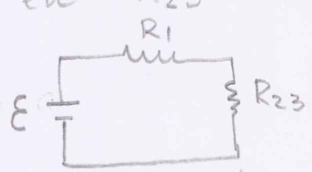


.

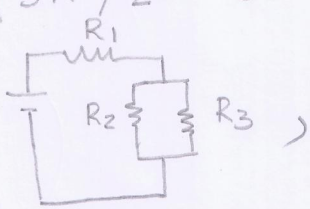
La corriente que pasa por R_1 (I) es $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R_{123}} = \dfrac{2\mathcal{E}}{3R}$

El voltaje o d.d.p en R_{23} es $V_{23} = I\,R_{23} = \left(\dfrac{2\mathcal{E}}{3R}\right)\dfrac{R}{2} = \dfrac{\mathcal{E}}{3}$

Como el circuito



es igual a

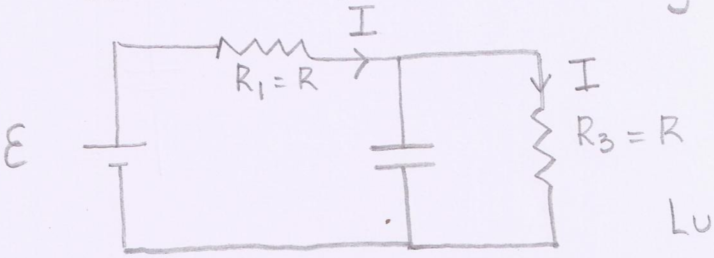


,

la corriente que pasa por R_2 es $I_2 = \dfrac{V_{23}}{R_2} = \dfrac{\mathcal{E}}{3R}$ y

la que pasa por R_3 es $I_3 = \dfrac{V_{23}}{R_3} = \dfrac{\mathcal{E}}{3R}$.

b) Cuando $t \to \infty$, el condensador está totalmente cargado y no pasa corriente por la rama del circuito donde se encuentra. Como no hay corriente pasando por la resistencia R_2, no hay d.d.p o voltaje a través de R_2 y el circuito es:



La corriente I pasa tanto por R_1 como por R_3. Esto es, R_1 y R_3 están en serie.

Luego $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R_1 + R_3} = \dfrac{\mathcal{E}}{R+R} = \dfrac{\mathcal{E}}{2R}$

I es también la corriente que pasa por la batería.

El voltaje del condensador es igual al voltaje o d.d.p a través de R_3 porque el condensador y R_3 están en paralelo $\Rightarrow$ $V_c = I R_3 = \dfrac{\mathcal{E}}{2R} R = \dfrac{\mathcal{E}}{2}$

La carga en el condensador es $Q = C V_c = \dfrac{\mathcal{E}}{2} C$

La placa del condensador que tiene carga positiva es la superior.

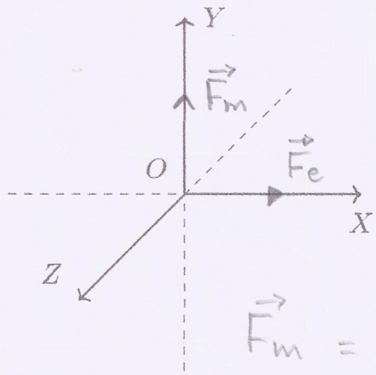
5. Una partícula con carga eléctrica $q = 2{,}00 \times 10^{-19}$ C y masa $m = 4{,}00 \times 10^{-27}$ kg entra a una región del espacio donde existe un campo magnético uniforme dado por $\vec{B} = 0{,}50\ \hat{x}$ (T). En el instante inicial $t = 0$, la partícula se encuentra en el origen de coordenadas con una velocidad igual a $\vec{v}_0 = (1{,}5 \times 10^5\ \hat{x} + 2{,}0 \times 10^5\ \hat{z})$ (m/s). Además del campo magnético, hay un campo eléctrico uniforme dado por $\vec{E} = 2{,}0 \times 10^4\ \hat{x}$ (V/m). Tome en cuenta que $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ son vectores unitarios que apuntan en las direcciones positivas de los ejes cartesianos X, Y y Z respectivamente (ver figura).

   (a) (3 puntos) Obtenga el vector fuerza total que actúa sobre la partícula en $t = 0$. Dibuje las componentes de esta fuerza (en la figura del problema) indicando cuál componente se debe al campo magnético y cuál componente se debe al campo eléctrico.

   (b) (1 punto) Ayudándose con lo que obtuvo en el inciso (a), dibuje (en la misma figura) la trayectoria que sigue la partícula en su movimiento.

   (c) (3 puntos) Determine el radio R y el período T asociados al movimiento de rotación de la partícula.

   (d) (2 puntos) Determine la distancia recorrida por la partícula al transcurrir un tiempo igual a $2T$. Dibuje donde se encuentra la partícula al cabo de este tiempo.



a) $\vec{F}_m = q\ \vec{v}_0 \times \vec{B}$

$\vec{v}_0 \times \vec{B} = (1.5 \times 10^5\ \hat{i} + 2.0 \times 10^5\ \hat{k}) \times (0.50\ \hat{i}) (T\frac{m}{s}$

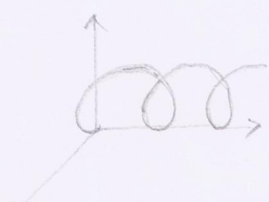
$\vec{v}_0 \times \vec{B} = 1.0 \times 10^5\ \hat{j}\ (T \cdot \frac{m}{s})$

$\vec{F}_m = 2{,}00 \times 10^{-19} \times 1.0 \times 10^5\ \hat{j}\ (N) = 2{,}00 \times 10^{-14}\ \hat{j}\ (N)$

$\vec{F}_e = q\vec{E} = 2.00 \times 10^{-19} \times 2.0 \times 10^4\ \hat{i} = 4 \times 10^{-15}\ \hat{i}\ (N)$

$\vec{F}_{TOTAL} = \vec{F}_m + \vec{F}_e$

b)



c) $m\frac{v_\perp^2}{R} = q v_\perp B \Rightarrow R = \frac{m v_\perp}{qB}$

donde $v_\perp$ es la magnitud de la componente de la velocidad perpendicular al campo $\vec{B}$,

esto es $v_\perp = 2.0 \times 10^5$ m/s.

$R = \frac{4 \times 10^{-27} \times 2 \times 10^5}{2 \times 10^{-19} \times 0.5} = 8 \times 10^{-3}\ m = 8\ mm$

Para el período $T = \frac{2\pi}{\omega}$; $\omega = \frac{v_\perp}{R} = \frac{qB}{m}$

$\Rightarrow T = 2\pi \frac{m}{qB} = 2\pi \frac{4 \times 10^{-27}}{2 \times 10^{-19} \times 0.5} \Rightarrow T = 8\pi \times 10^{-8}\ s = 2.5 \times 10^{-7}\ s$

5(d) La partícula tiene un movimiento helicoidal. Se traslada a lo largo del eje X. La componente de la velocidad de la partícula en la dirección del eje X cambia en el tiempo debido a la acción del campo eléctrico. Existe un movimiento uniformemente acelerado a lo largo del eje X. La distancia recorrida por la partícula a lo largo del eje X es

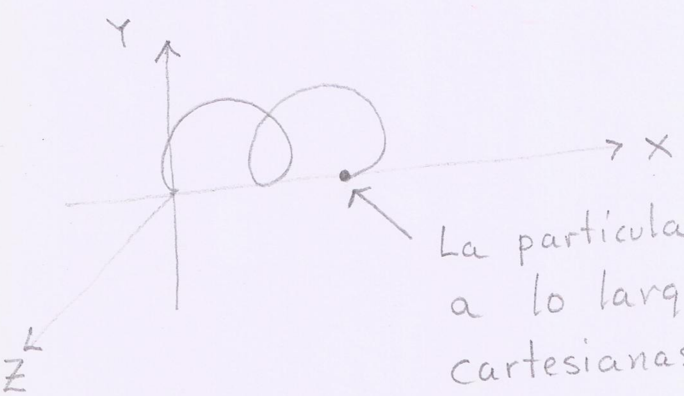
$$d = X - X_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a t^2$$ (Movimiento de traslación con aceleración constante)

En este caso $v_{0x} = 1.5 \times 10^5$ m/s , $a = \frac{qE}{m} = \frac{2 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^4}{4 \times 10^{-27}} \frac{m}{s^2}$

$\Rightarrow a = 10^{12}$ m/s^2 y $t = 2T = 2 \times 2.5 \times 10^{-7}$ s $= 5 \times 10^{-7}$ s

$$\Rightarrow d = 1.5 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-7} + \frac{1}{2} \times 10^{12} \times (5 \times 10^{-7})^2 \ (m)$$

$$d = (7.5 \times 10^{-2} + 12.5 \times 10^{-2})\ m = 20 \times 10^{-2}\ m = 0.2\ m$$



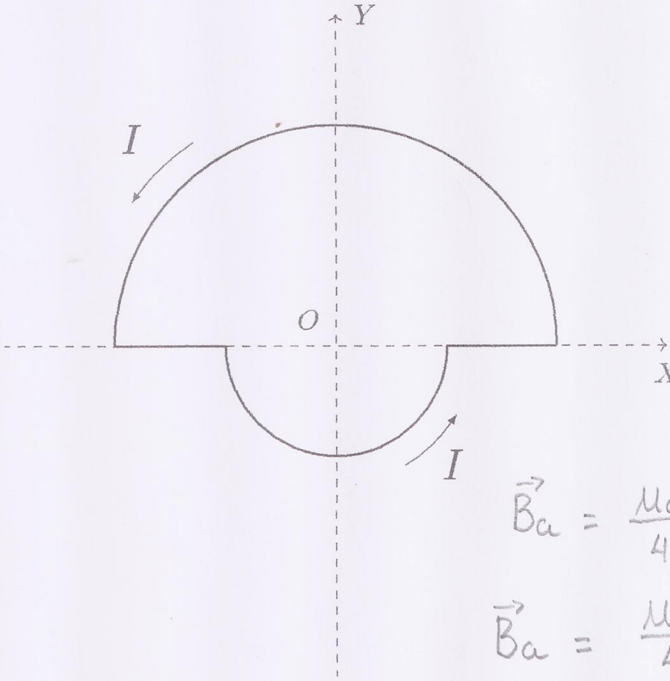
La partícula se encuentra en un punto a lo largo del eje X cuyas coordenadas cartesianas son $(x, y, z) = (0.2, 0, 0)$ (m)

Nota: La partícula "dá 2 vueltas" antes de llegar a ese punto.

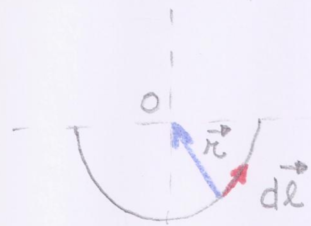
6. La espira metálica de la figura está construida con dos secciones semicirculares de radios a y $2a$, y dos segmentos rectilíneos que unen a los semicírculos. Por la espira circula una corriente eléctrica I en sentido antihorario como se indica en la figura.

   (a) (5 puntos) Determine la magnitud y la dirección del campo magnético producido por la espira en el origen O del sistema de coordenadas.

   (b) (2 puntos) Si vamos a estudiar como reacciona la espira ante un campo magnético externo $\vec{B}_0 = B_0\,\hat{x}$ (constante y uniforme), halle el torque que experimenta la espira al momento de "encender" dicho campo. Indique (en la figura) alrededor de que eje empieza a rotar la espira y en cuál dirección.



a) Campo $\vec{B}_a$ de la sección semicircular de radio a:



$$|\vec{dl} \times \hat{r}| = dl$$

$$\vec{dl} \times \hat{r} = dl\,\hat{k}$$

$$\vec{B}_a = B_a\,\hat{k}$$

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\vec{dl}\times\hat{r}}{r^2} \quad ; \; r = a$$

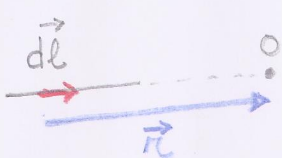
$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{dl}{a^2}\,\hat{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}\int dl\,\hat{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}\pi a\,\hat{k}$$

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 I}{4a}\,\hat{k} \text{ (sale de la hoja)}$$

Campo $\vec{B}_{2a}$ de la sección semicircular de radio $2a$:

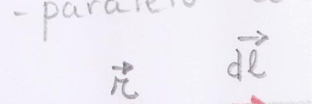
En analogía con el cálculo anterior $\vec{B}_{2a} = \frac{\mu_0 I}{4(2a)}\hat{k} = \frac{\mu_0 I}{8a}\hat{k}$

Campo de los dos segmentos rectilíneos es cero porque $\vec{dl} \times \hat{r} = 0$ ya que $\vec{dl}$ es paralelo a $\hat{r}$



(segmento rectilíneo izquierdo)

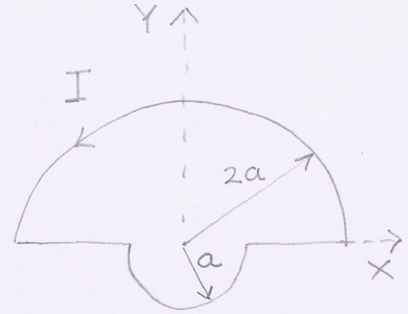
y $\vec{dl}$ es anti-paralelo a $\hat{r}$



(segmento rectilíneo derecho)

El campo en el pto: O es: $\vec{B} = \vec{B}_a + \vec{B}_{2a} = \frac{3}{8}\frac{\mu_0 I}{a}\,\hat{k}$

6(b)



El área limitada por la espira es

$$A = \frac{\pi(a^2)}{2} + \frac{\pi(2a)^2}{2} = \frac{\pi a^2}{2} + 2\pi a^2 = \frac{5}{2}\pi a^2$$

El momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ es igual a $\vec{\mu} = I\vec{A} = I\left(\frac{5}{2}\pi a^2\right)\hat{k}$

El torque sobre la espira es $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = I\left(\frac{5}{2}\pi a^2\right)\hat{k} \times B_0\hat{i}$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \frac{5}{2}\pi a^2 I B_0 \hat{j}$$

La espira empieza a rotar alrededor del eje Y como se muestra en la figura $\longrightarrow$