3SAT → VC

Jaime Armas Rivero
Helena García Díaz
Daniel García Hernández
Andrés Pérez Castellano
Diego Pérez García

Grupo 5
Complejidad Computacional
Ingeniería Informática ULL

ÍNDICE

1

INTRODUCCIÓN

NP-Completitud

Tanto el Vertex Cover como el 3SAT son ejemplos de problemas NP-completos.

Sabemos que lo son porque hay otros problemas que son NP-Completos y son polinomialmente reducibles a él.

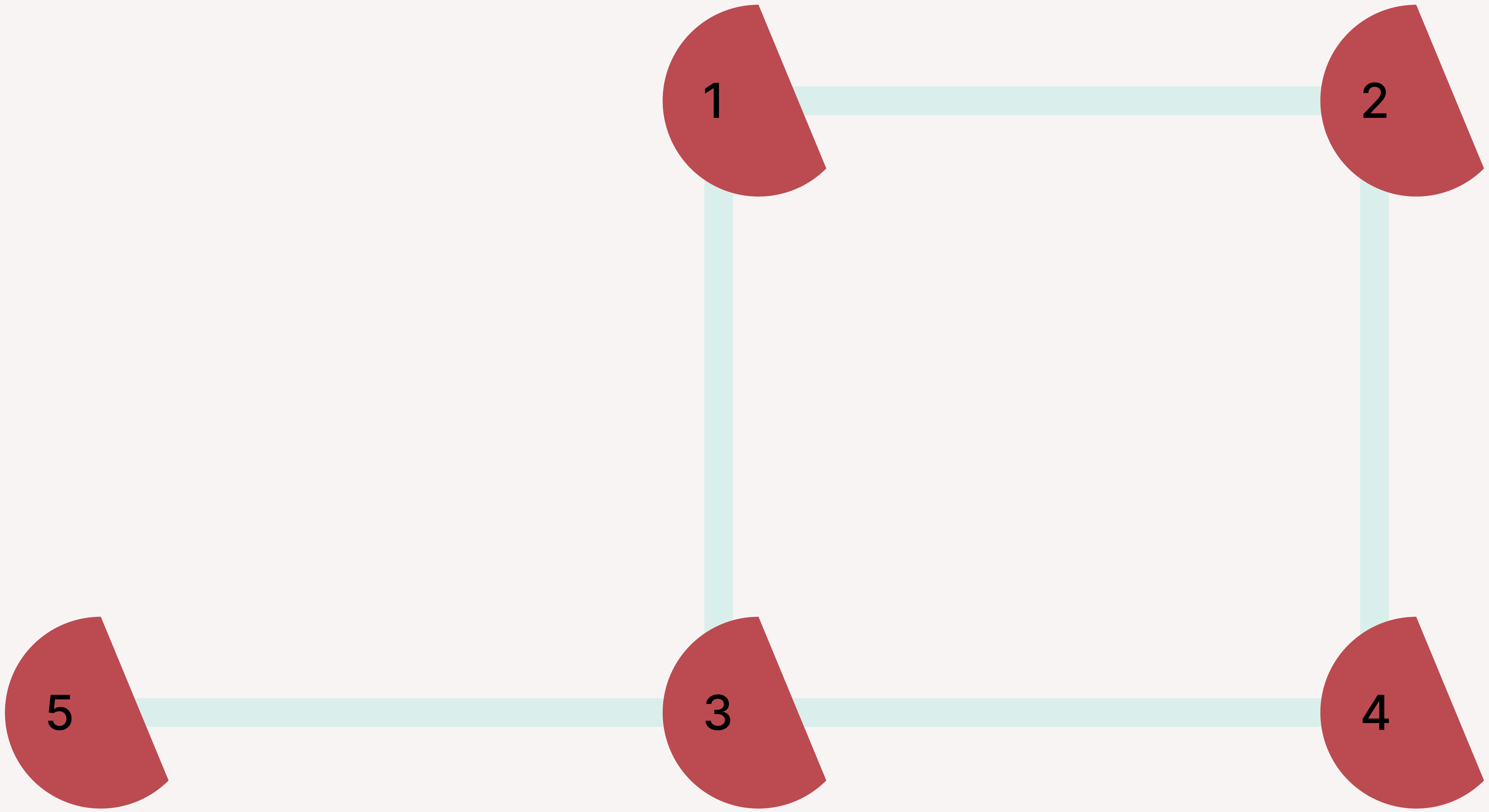
Vertex Cover

Conjunto de vértices tales que cada arista del grafo incide en al menos un vértice del conjunto.

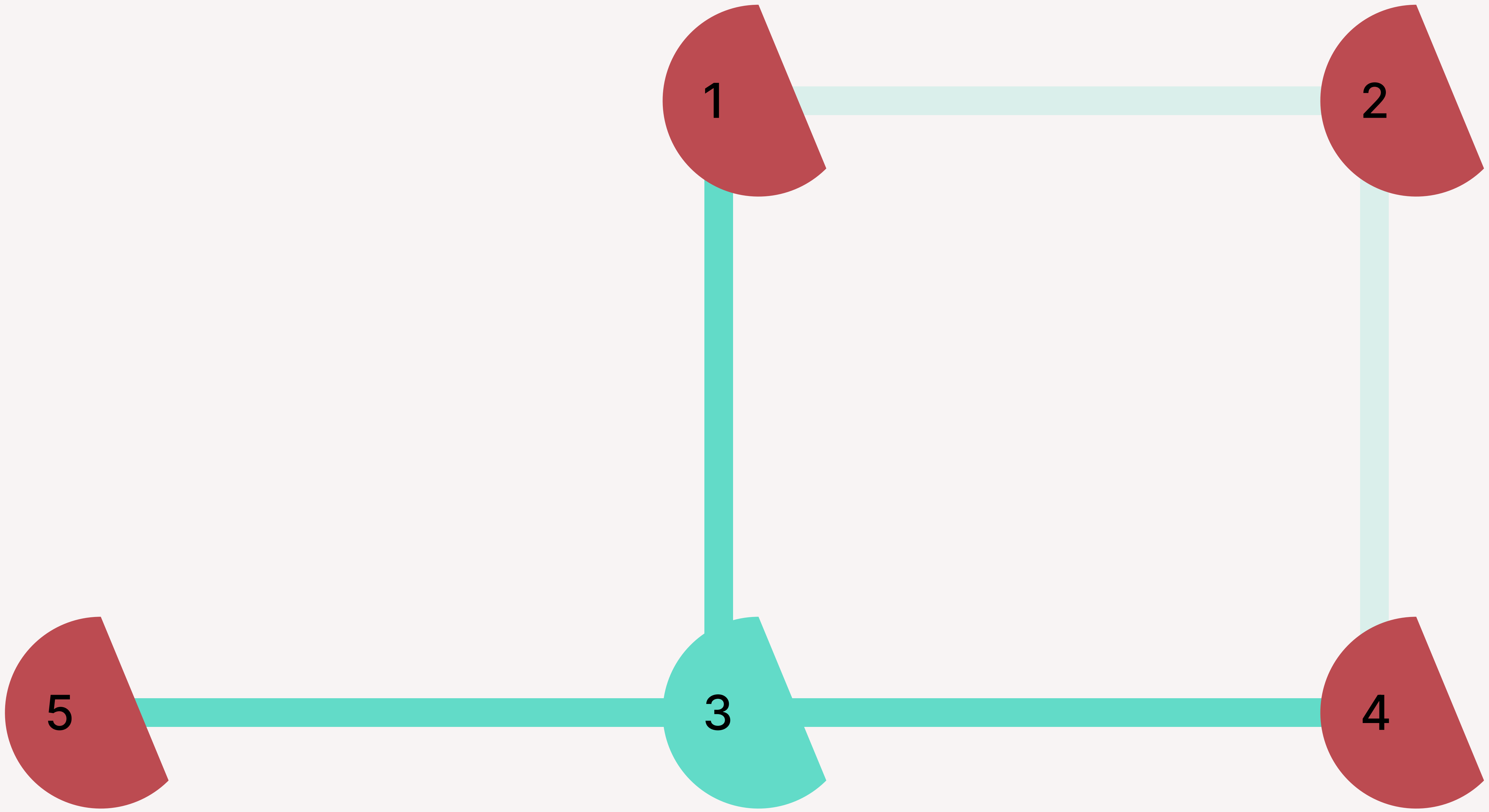
3-SAT

Dada una expresión booleana, hay alguna asignación de valores para sus variables que la hace verdadera, donde cada cláusula contiene 3 literales.

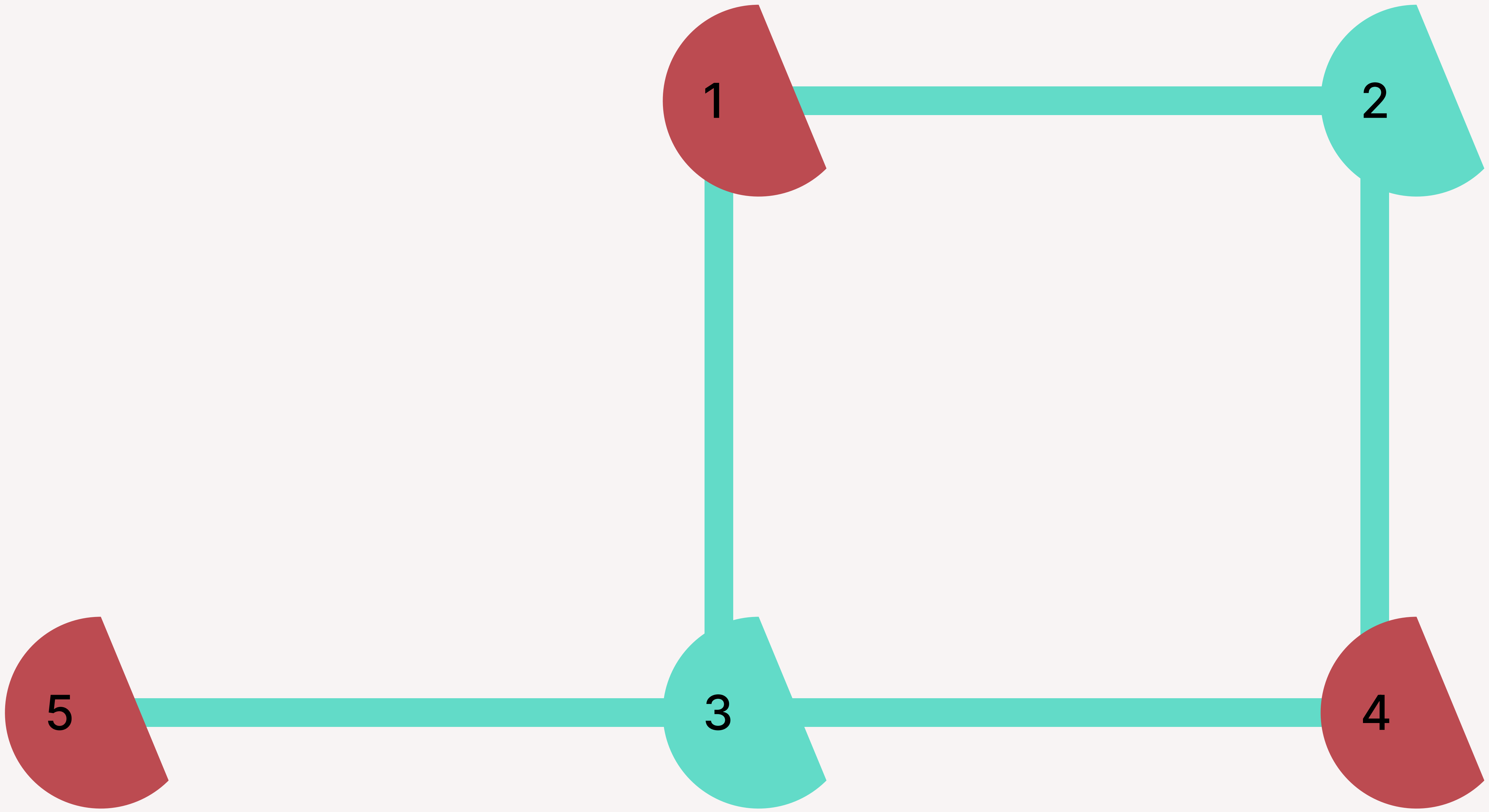
Ejemplo de Resolución del VC



Ejemplo de Resolución del VC



Ejemplo de Resolución del VC



Vertex Cover

Instancia: Un grafo $G = (V, E)$ no dirigido y un entero K.

Pregunta: ¿Existe una cobertura de vértices de tamaño K o menos para el grafo G, es decir, un subconjunto V' de V con tamaño menor que V tal que cada arista tiene al menos un extremo en V'?

$$K = n + 2m$$

3-SAT

Instancia: Se establece un conjunto $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $|U| = n$ de variables y una colección $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$, $|C| = m$ de cláusulas sobre U, de manera que cada cláusula $|c_i| = 3$, para $1 \leq i \leq m$

Pregunta: Hay una asignación de verdad para U tal que C es satisfacible

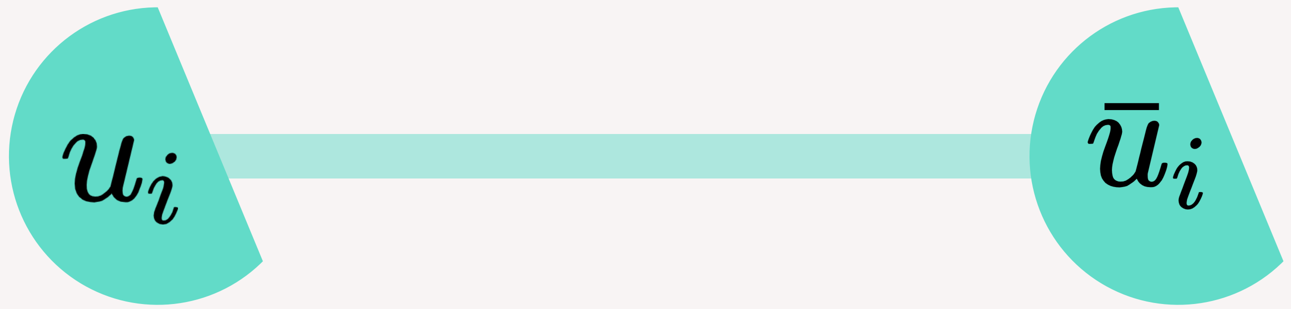
2

TRANSFORMACIÓN 3SAT A VC

Paso 1: Truth-setting components

$\forall u_i \in U$ se define una componente $T_i = \{V_i, E_i\}$

donde: $V_i = \{u_i, \bar{u}_i\}$ $E_i = \{\{u_i, \bar{u}_i\}\}$

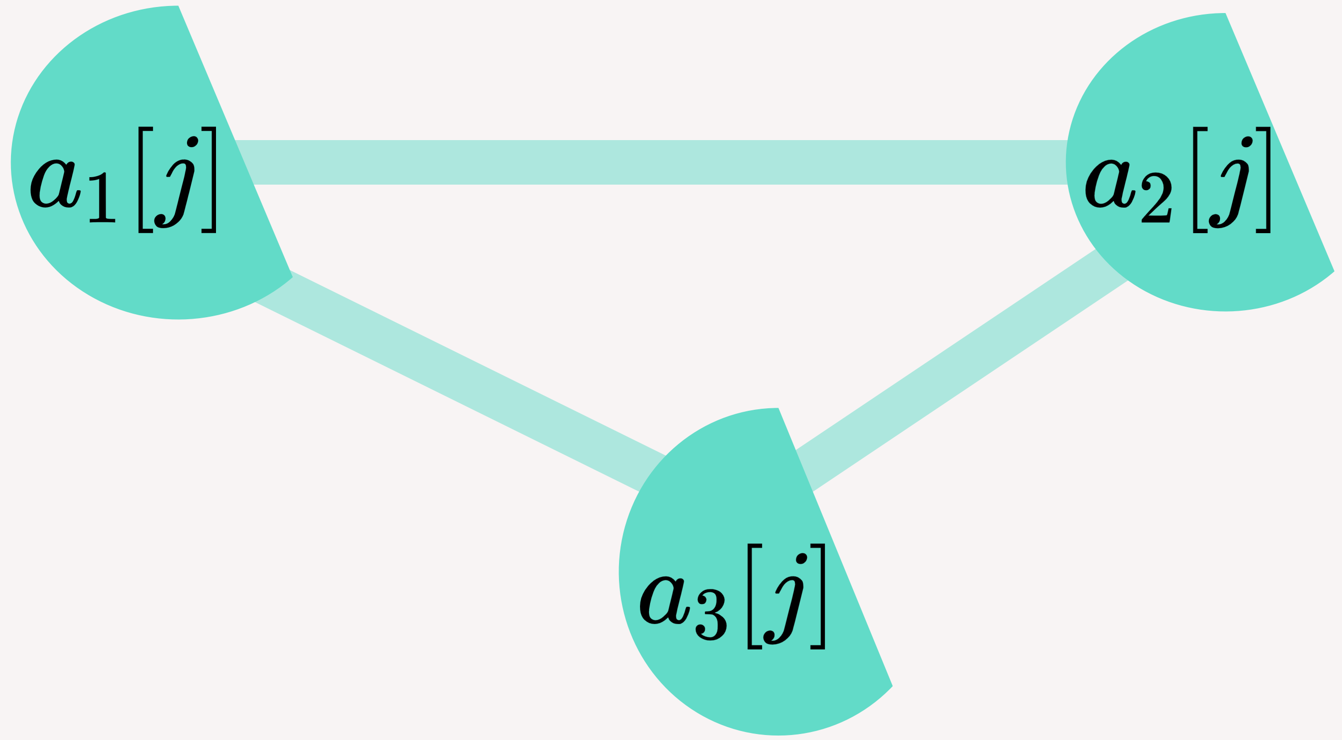


Paso 2: Satisfaction setting components

$\forall c_j \in C$ **se define una componente** $S_j = \{V'_j, E'_j\}$

donde: $V'_j = \{a_1[j], a_2[j], a_3[j]\}$

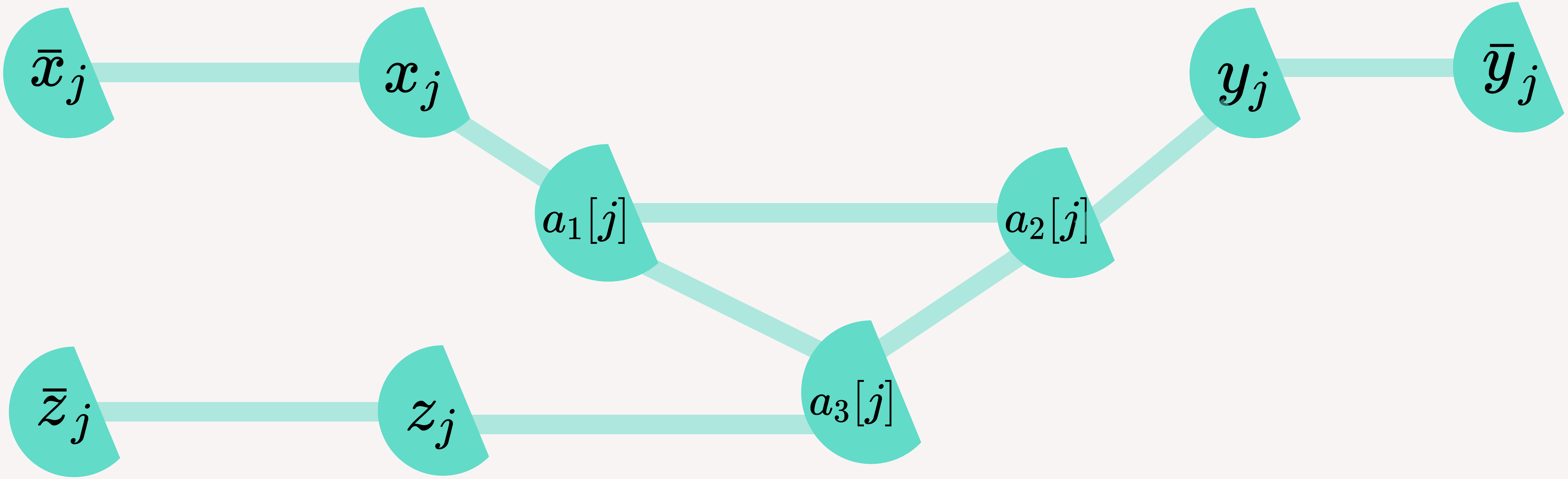
$$E'_j = \{\{a_1[j], a_2[j]\}, \{a_1[j], a_3[j]\}, \{a_2[j], a_3[j]\}\}$$



Paso 3: Aristas de comunicación

$\forall c_j \in C$ **de la forma** $c_j = \{x_j, y_j, z_j\} \quad x_j, y_j, z_j \in U$

$$E''_j = \{\{a_1[j], x_j\}, \{a_2[j], y_j\}, \{a_3[j], z_j\}\}$$



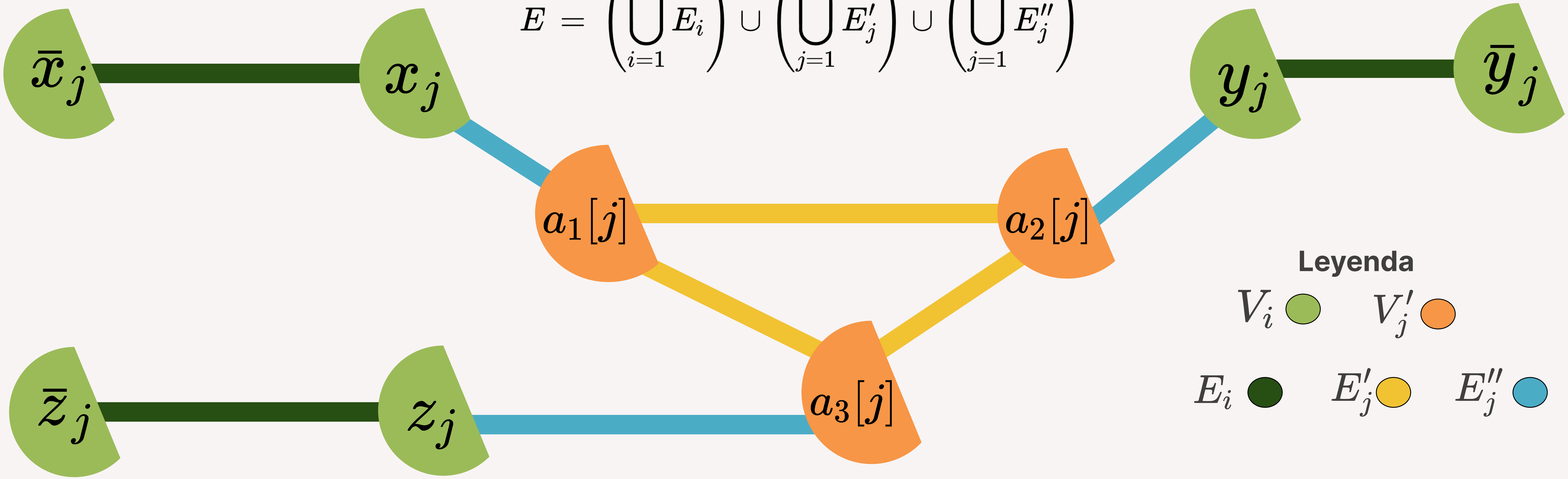
Resultado de la transformación

Tenemos el grafo no dirigido $G = (V, E)$ y la cota $K = n + 2m$

donde:

$$V = \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} V'_j\right)$$

$$E = \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} E'_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} E''_j\right)$$



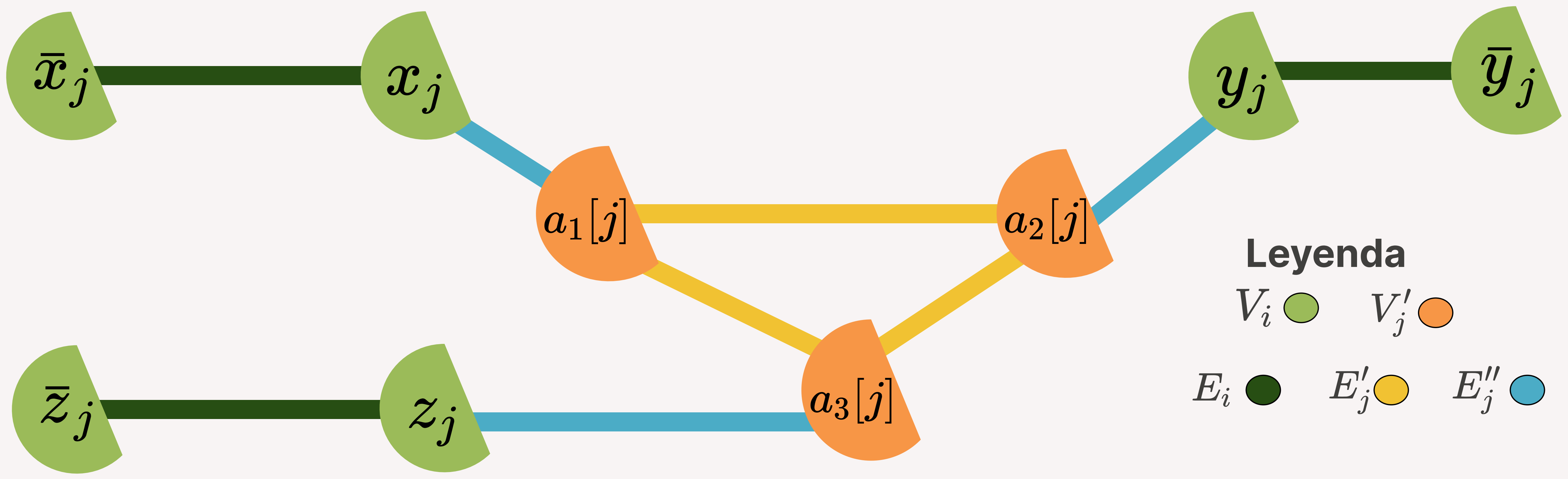
3

CÓDIGO

4

DEMOSTRACIÓN DE NP-COMPLETITUD

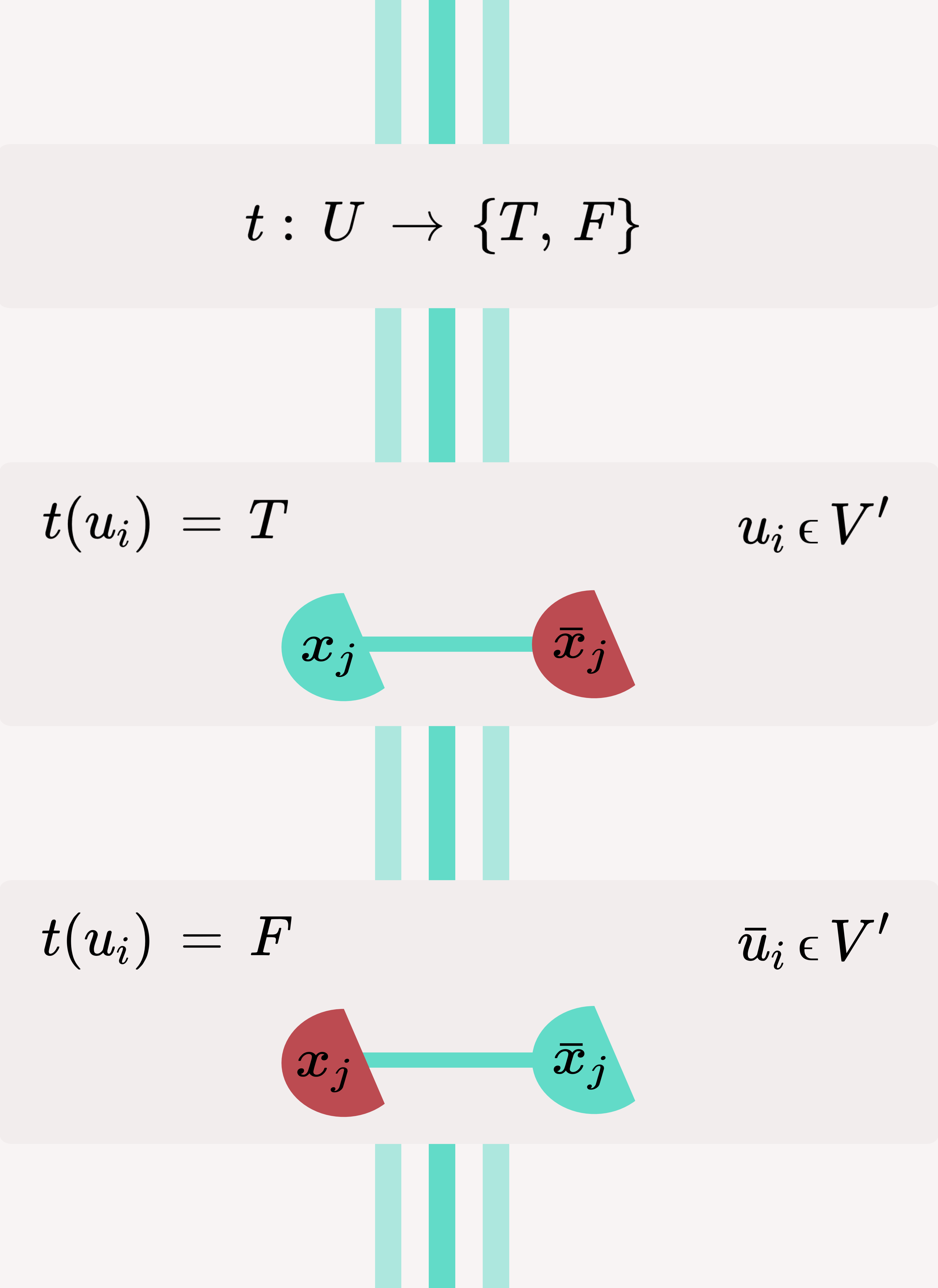
Tenemos que demostrar que C es satisfacible, sí y sólo sí G={V, E} tiene un cubrimiento de vértices de tamaño menor o igual a K.



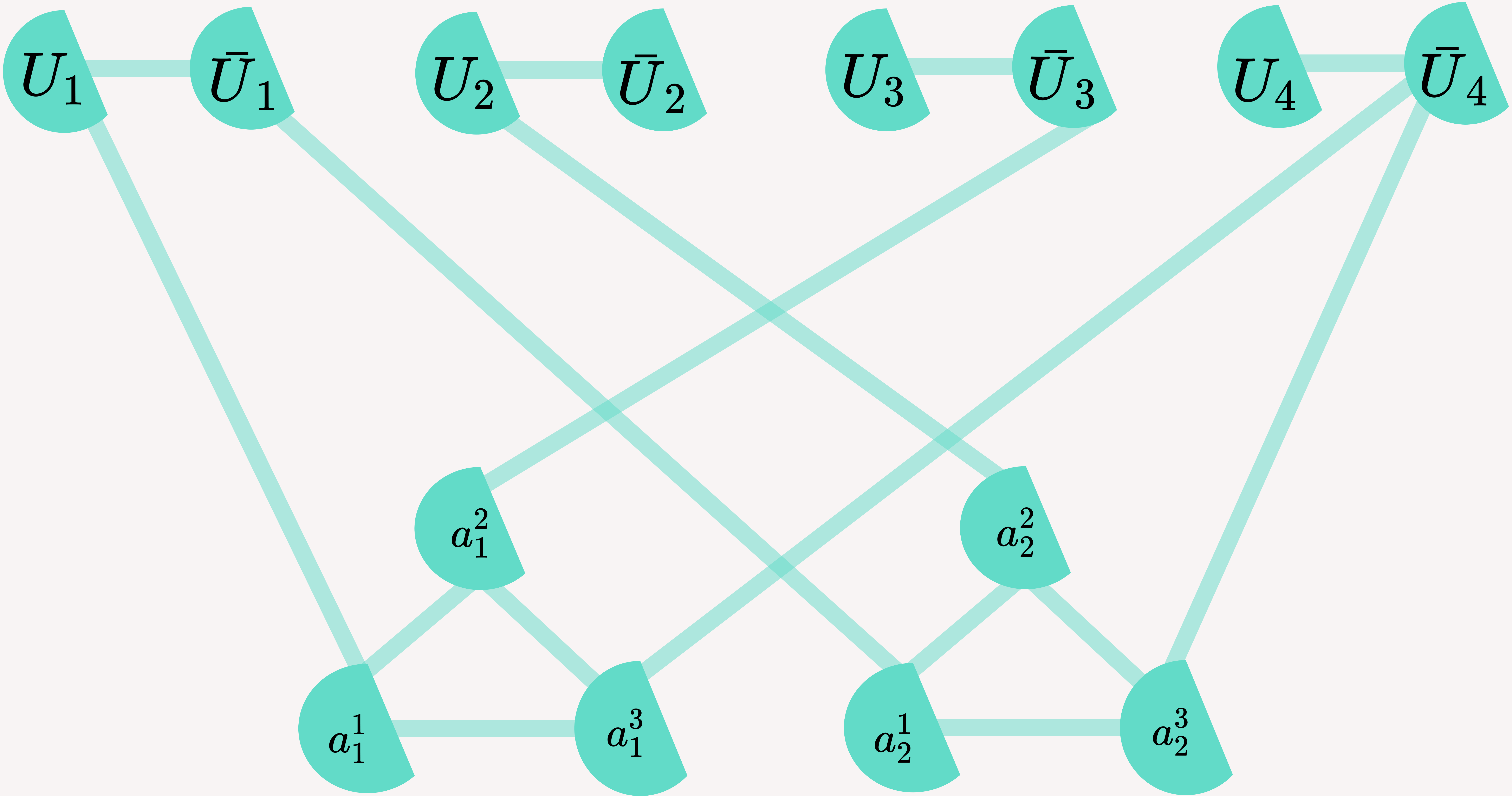
Suponemos que V' $\subseteq$ V es un cubrimiento de vértices para G con |V'|≤K.

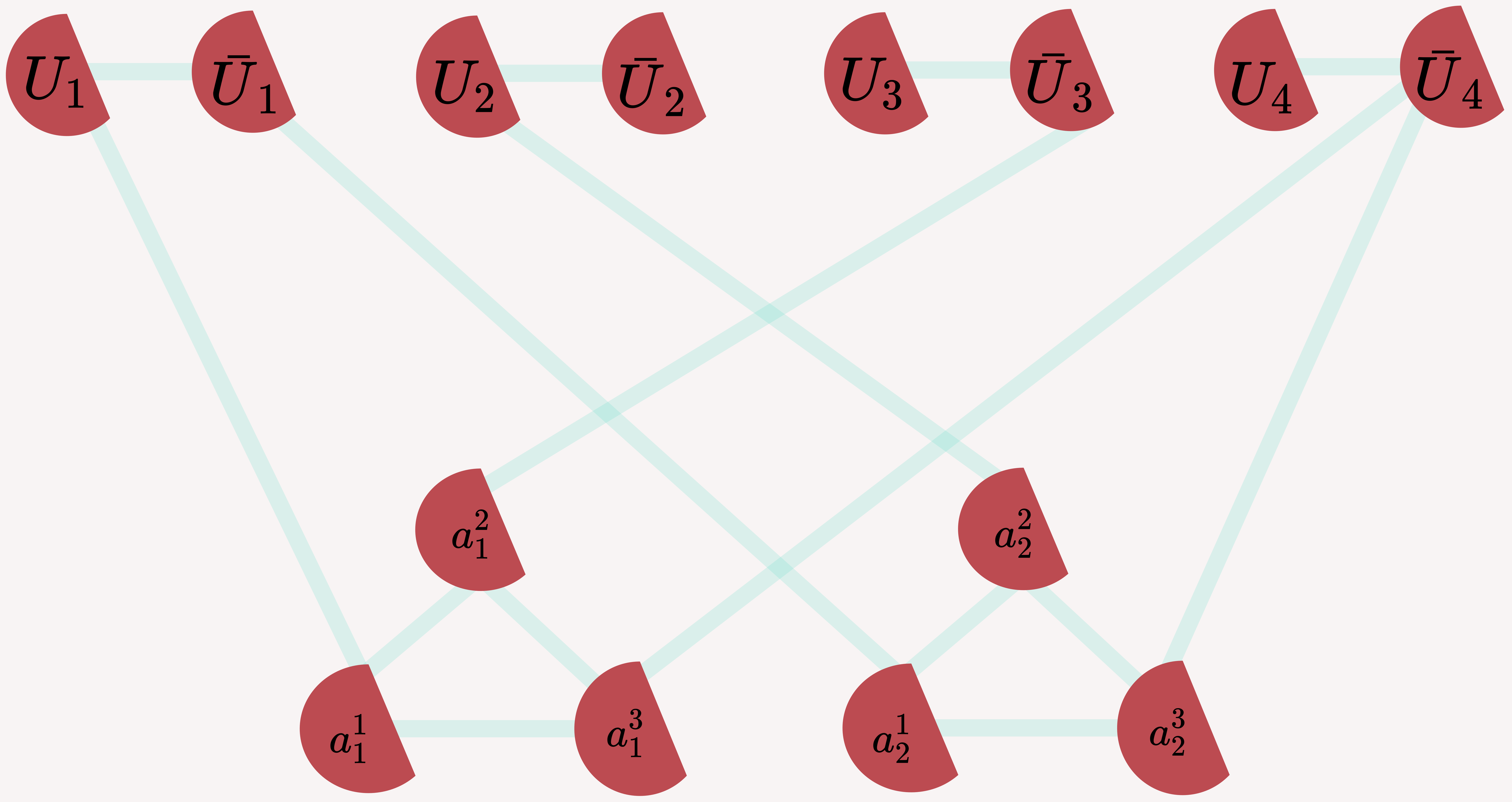
Recordemos que V' contiene al menos un vértice de cada T_i y al menos dos vértices de cada S_i.

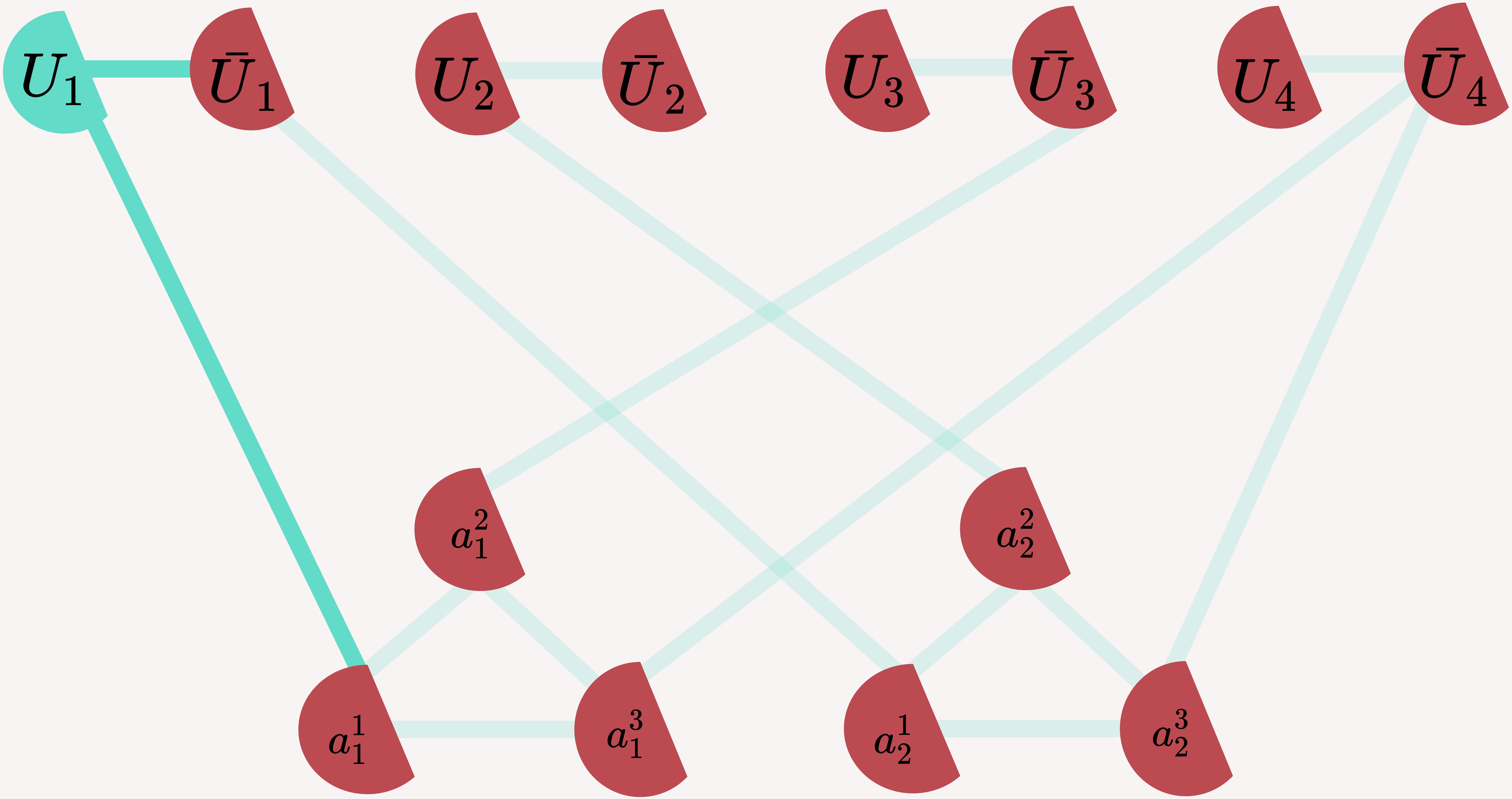
Truth Settings Components

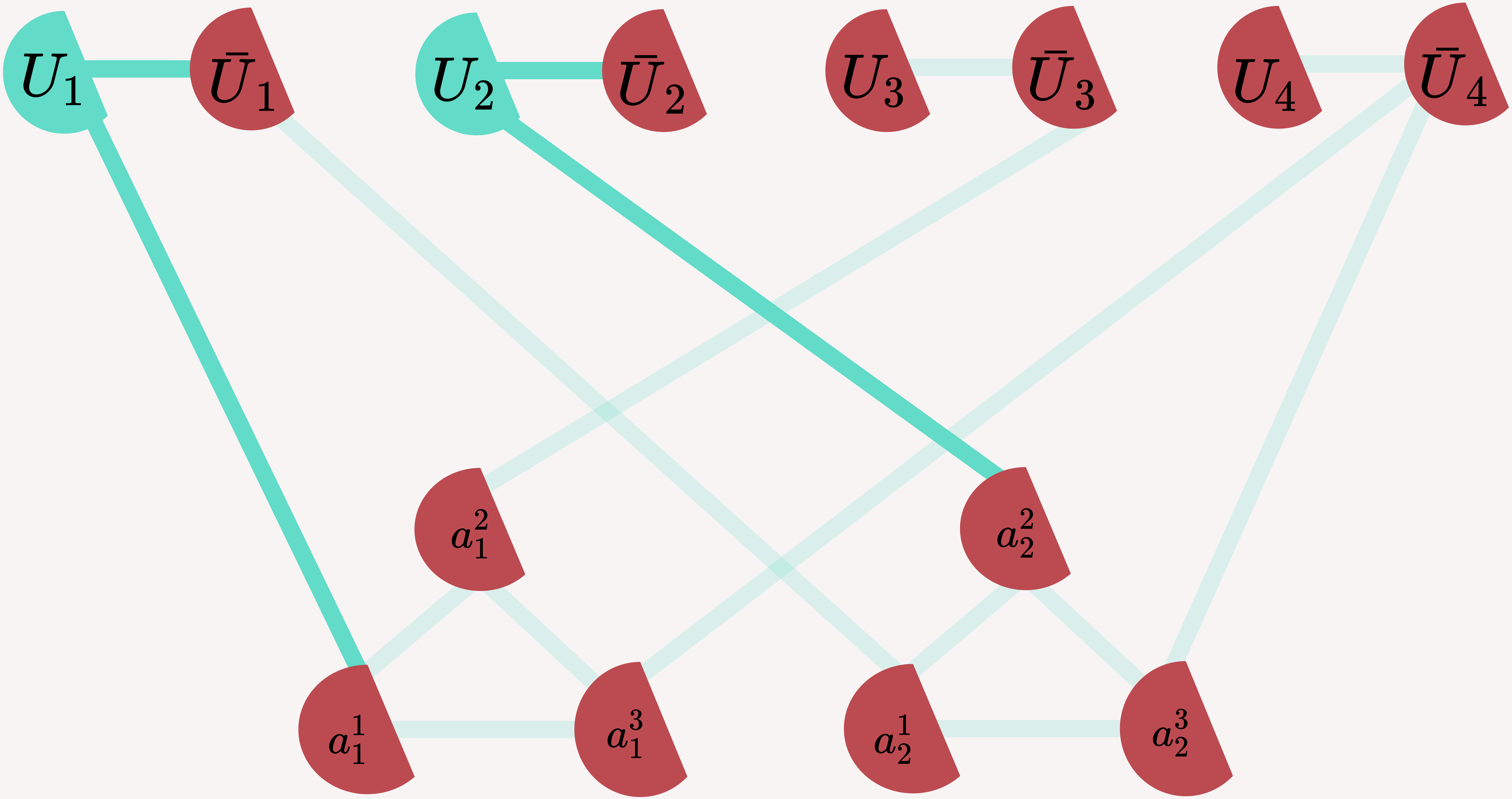


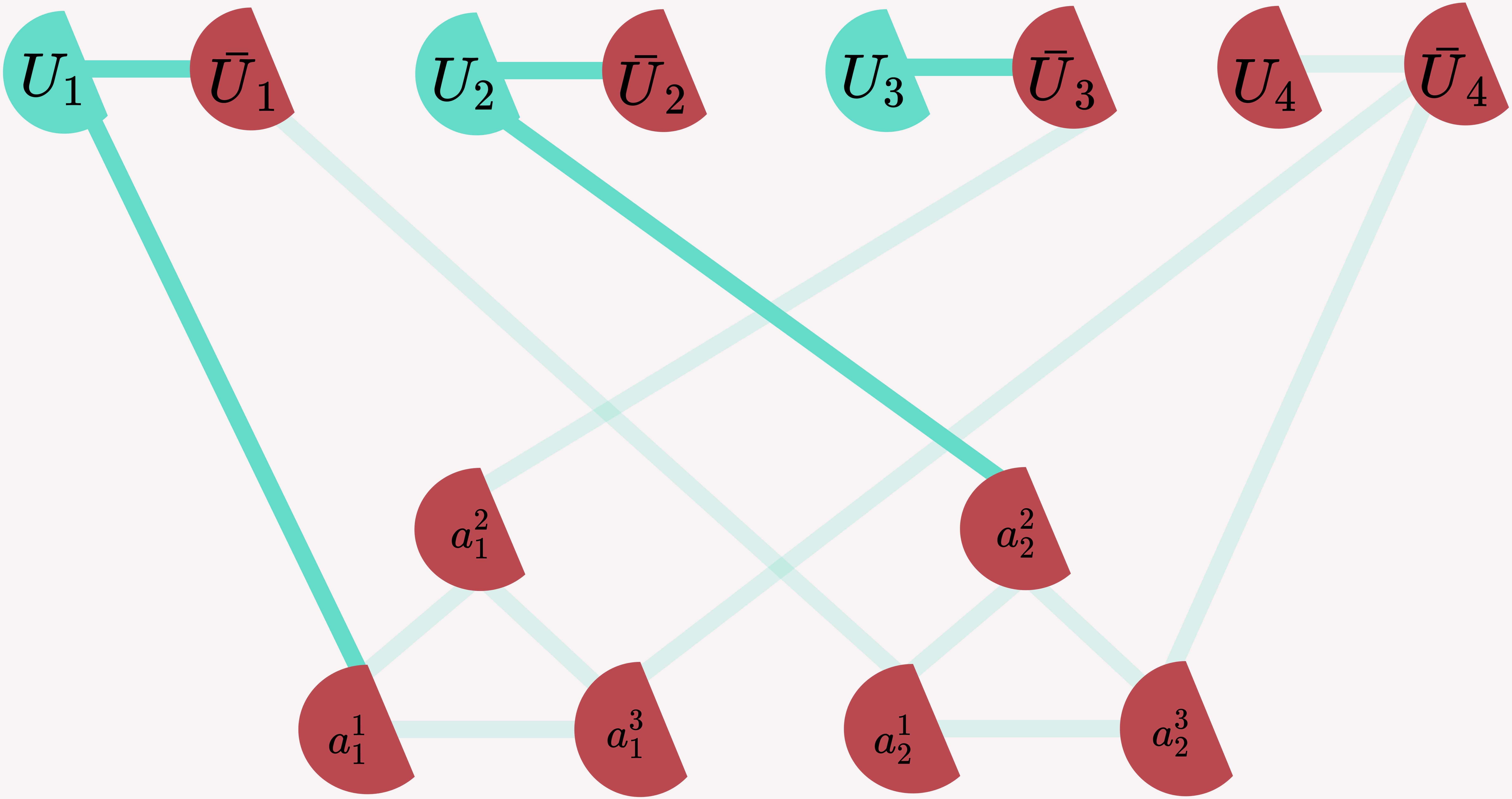
$$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \quad C = \{\{u_1, \bar{u_3}, \bar{u}_4\}, \{\bar{u}_1, u_2, \bar{u}_4\}\}$$

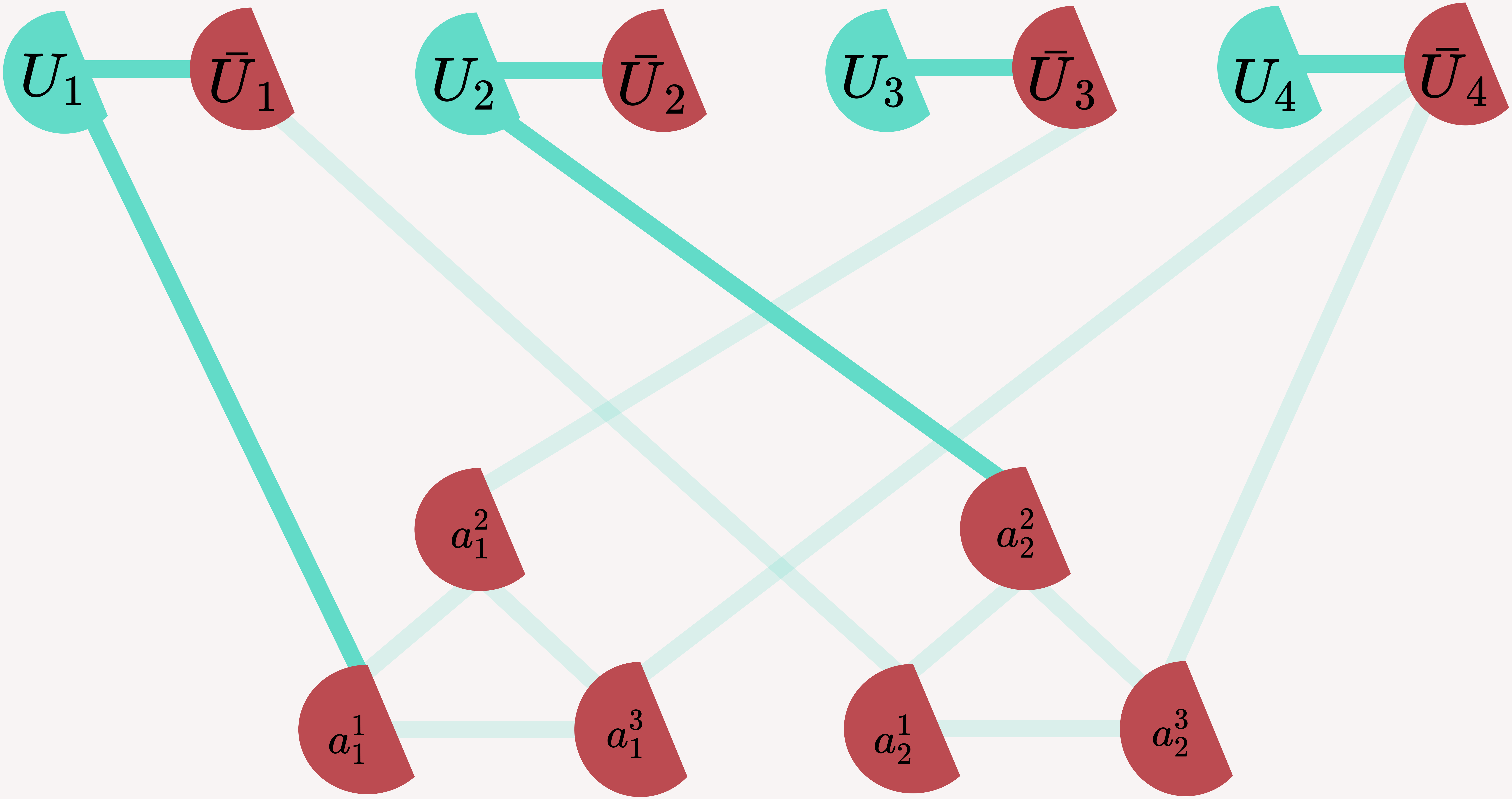


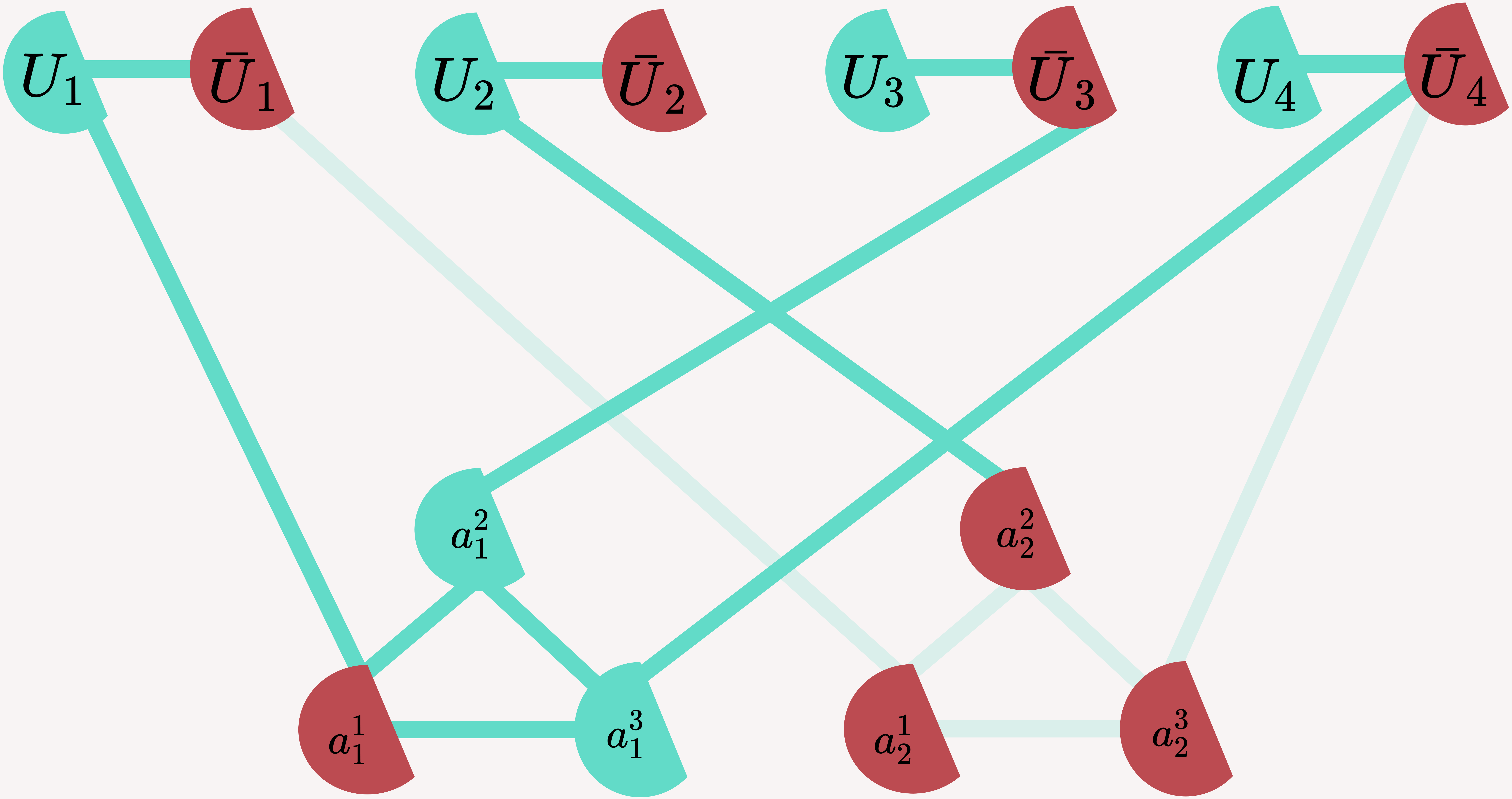

U_1
$\bar{U}_1$
U_2
$\bar{U}_2$
U_3
$\bar{U}_3$
U_4
$\bar{U}_4$
a_1^2
a_2^2
a_1^1
a_1^3
a_2^1
a_2^3


U_1
$\bar{U}_1$
U_2
$\bar{U}_2$
U_3
$\bar{U}_3$
U_4
$\bar{U}_4$
a_1^2
a_2^2
a_1^1
a_1^3
a_2^1
a_2^3

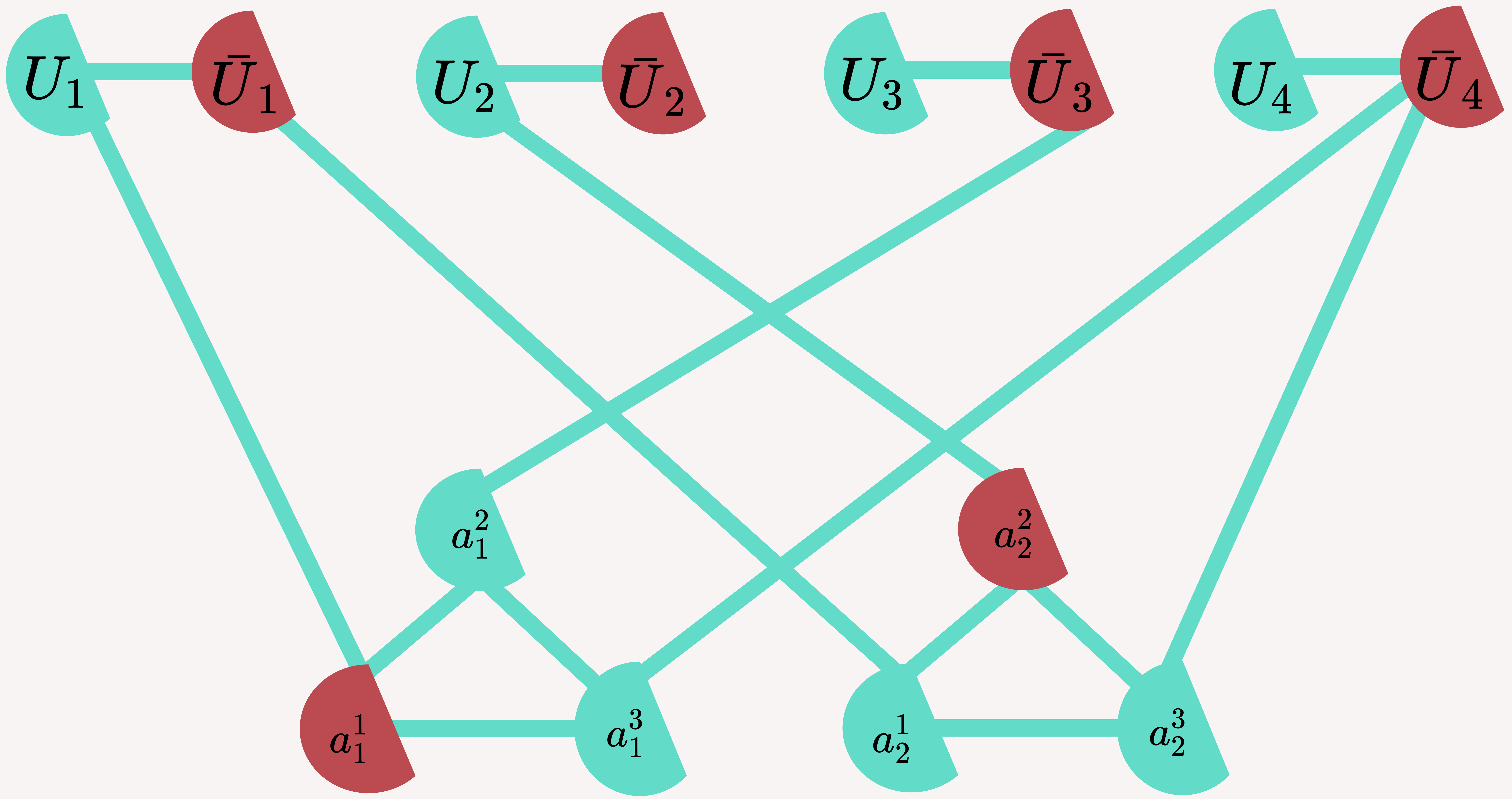

U_1
$\bar{U}_1$
U_2
$\bar{U}_2$
U_3
$\bar{U}_3$
U_4
$\bar{U}_4$
a_1^2
a_2^2
a_1^1
a_1^3
a_2^1
a_2^3


U_1
$\bar{U}_1$
U_2
$\bar{U}_2$
U_3
$\bar{U}_3$
U_4
$\bar{U}_4$
a_1^2
a_2^2
a_1^1
a_1^3
a_2^1
a_2^3

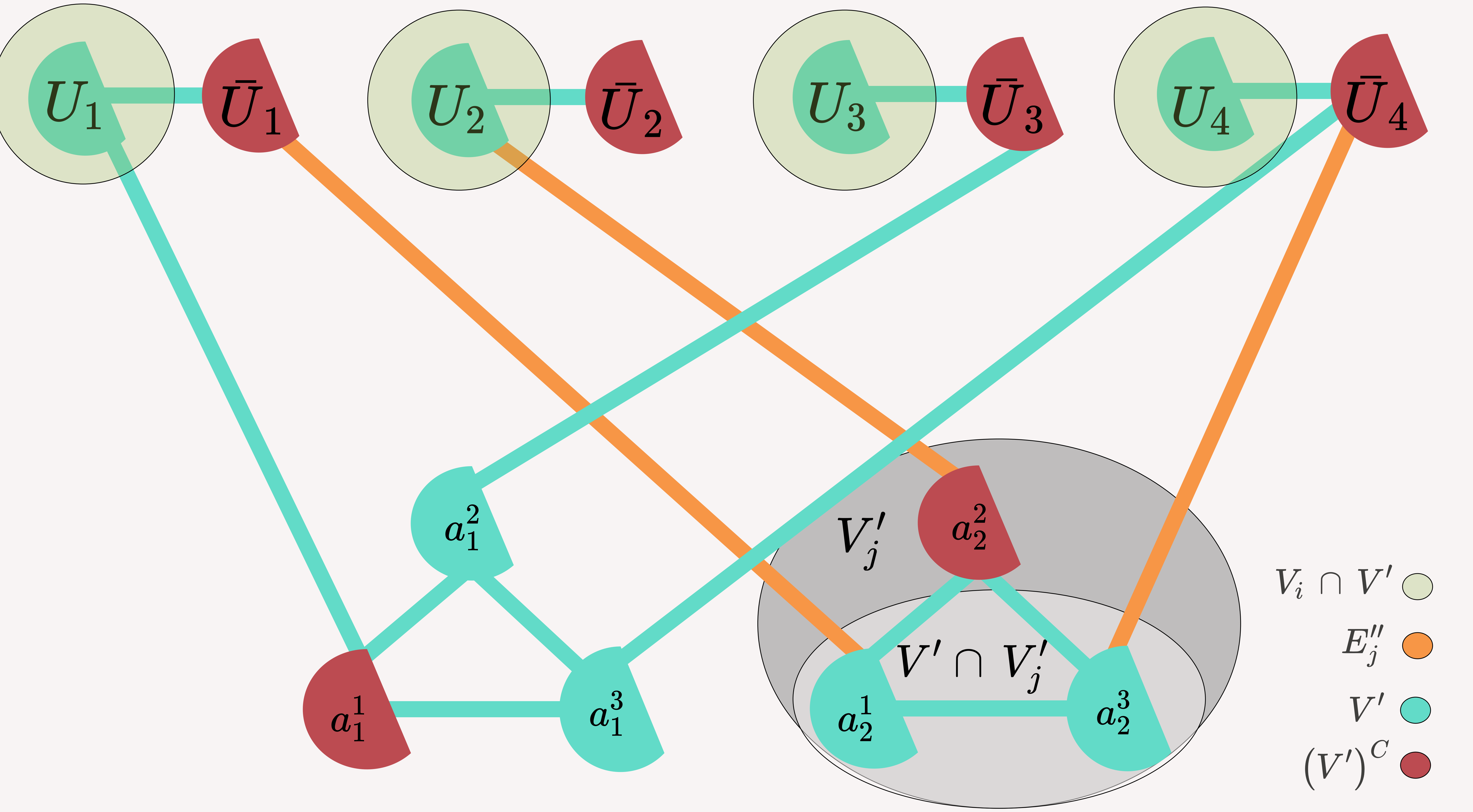

U_1
$\bar{U}_1$
U_2
$\bar{U}_2$
U_3
$\bar{U}_3$
U_4
$\bar{U}_4$
a_1^2
a_2^2
a_1^1
a_1^3
a_2^1
a_2^3



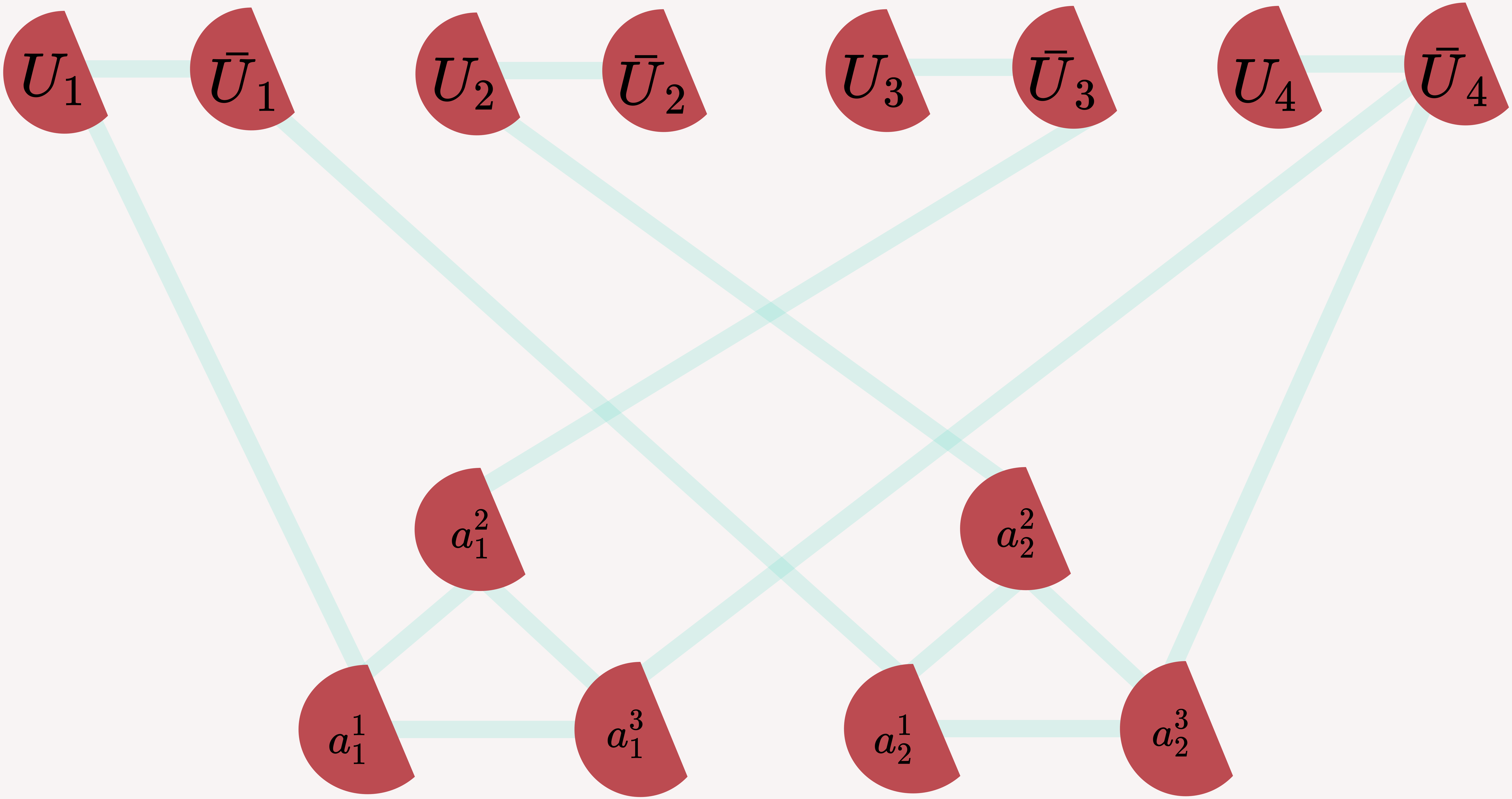
U_1
$\bar{U}_1$
U_2
$\bar{U}_2$
U_3
$\bar{U}_3$
U_4
$\bar{U}_4$
a_1^2
a_2^2
a_1^1
a_1^3
a_2^1
a_2^3

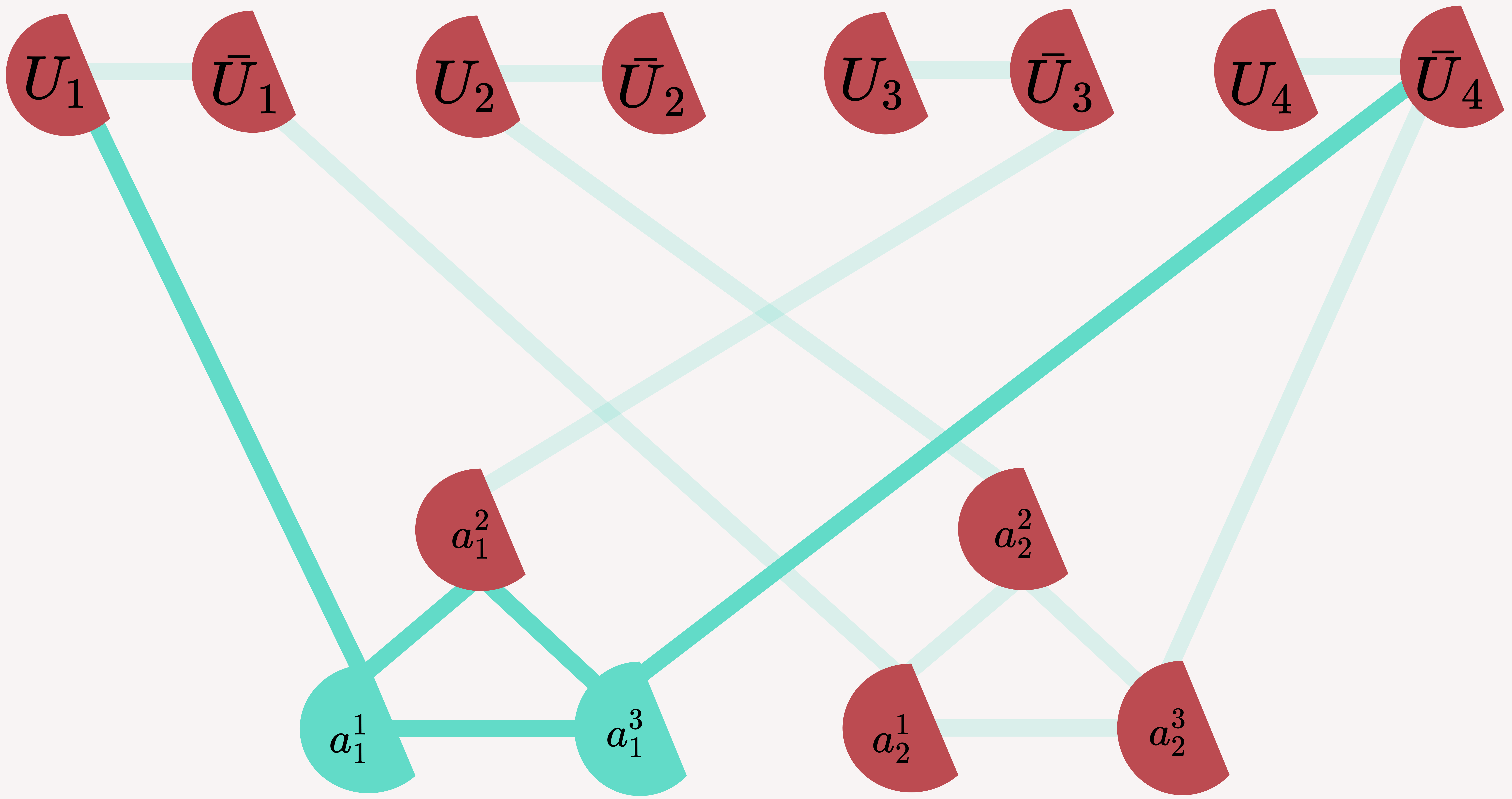


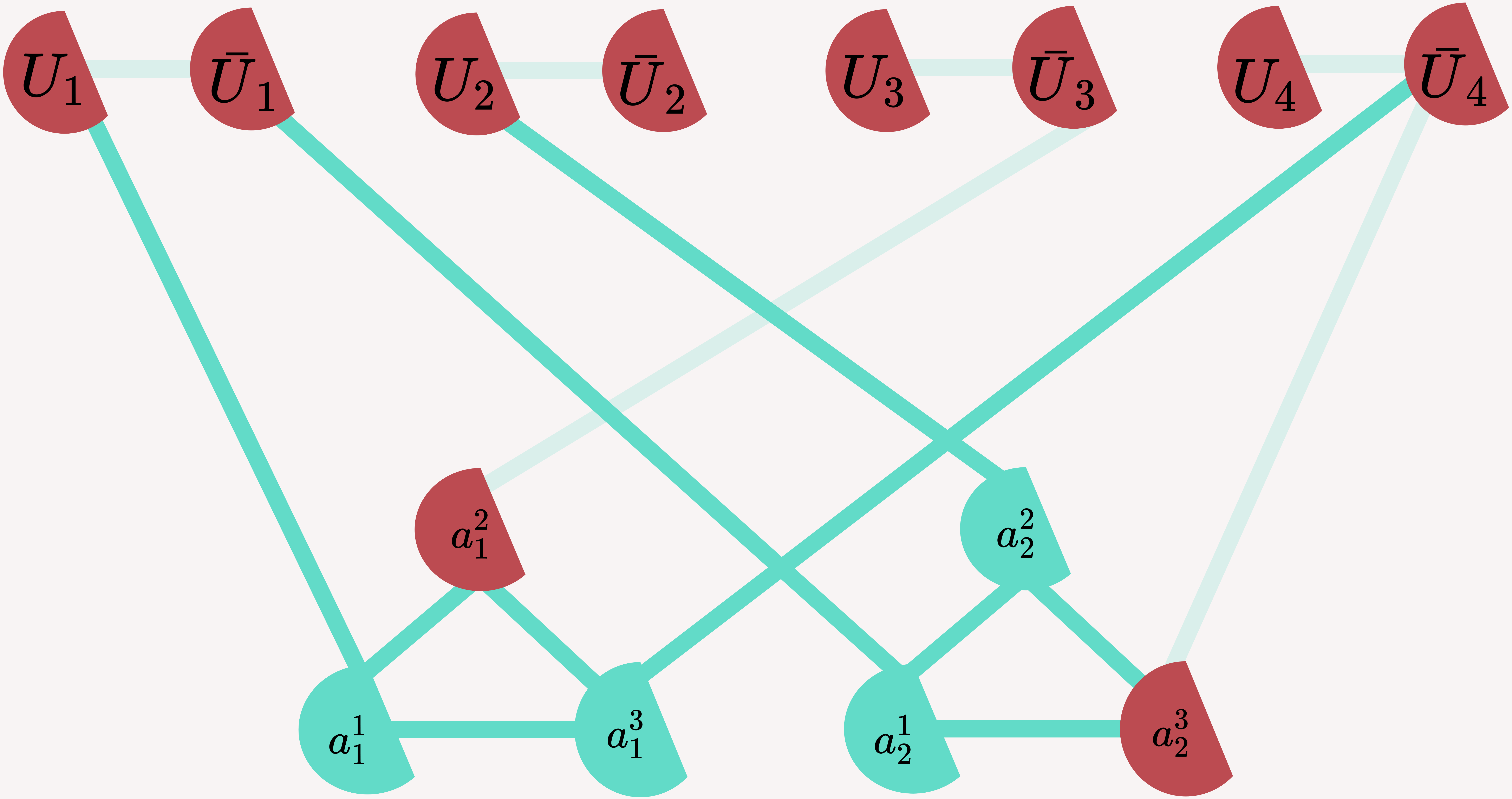
U_1
$\bar{U}_1$
U_2
$\bar{U}_2$
U_3
$\bar{U}_3$
U_4
$\bar{U}_4$
a_1^2
a_2^2
a_1^1
a_1^3
a_2^1
a_2^3



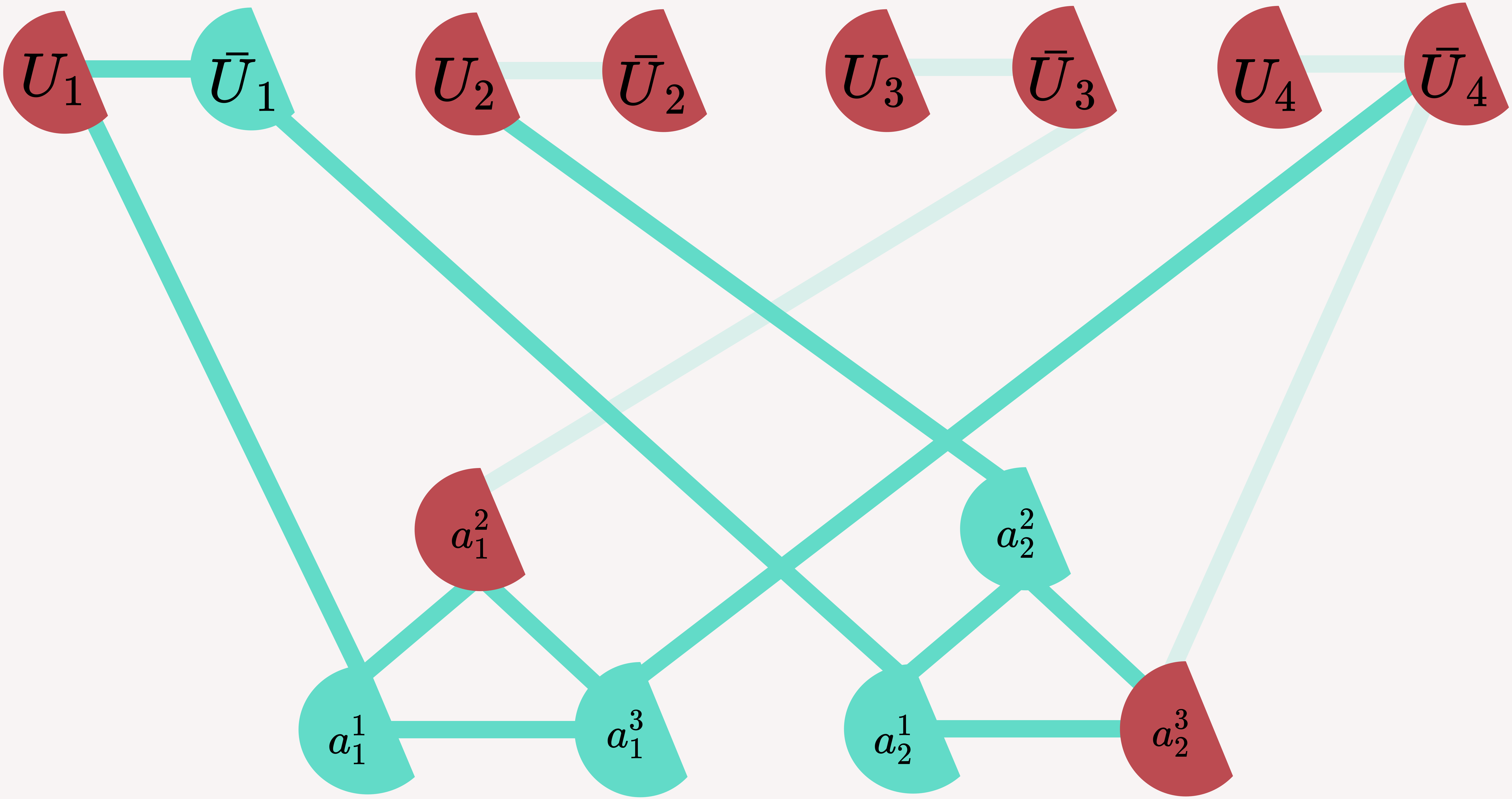
U_1
$\bar{U}_1$
U_2
$\bar{U}_2$
U_3
$\bar{U}_3$
U_4
$\bar{U}_4$
a_1^2
a_2^2
V_j'
a_1^1
a_1^3
$V' \cap V_j'$
a_2^1
a_2^3
$V_i \cap V'$
E_j''
V'
$(V')^C$


U_1
$\bar{U}_1$
U_2
$\bar{U}_2$
U_3
$\bar{U}_3$
U_4
$\bar{U}_4$
a_1^2
a_2^2
a_1^1
a_1^3
a_2^1
a_2^3

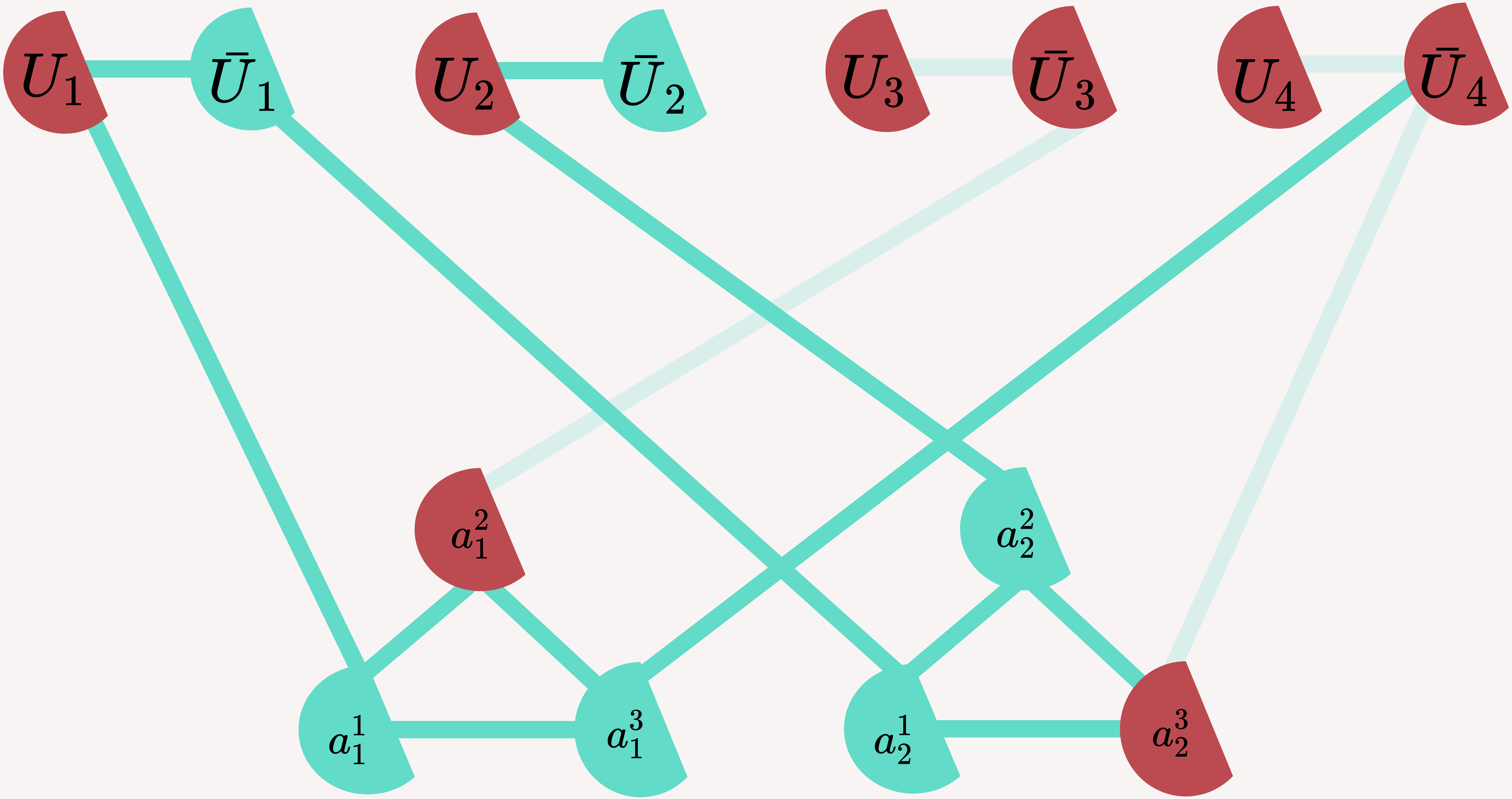

U_1
$\bar{U}_1$
U_2
$\bar{U}_2$
U_3
$\bar{U}_3$
U_4
$\bar{U}_4$
a_1^2
a_2^2
a_1^1
a_1^3
a_2^1
a_2^3



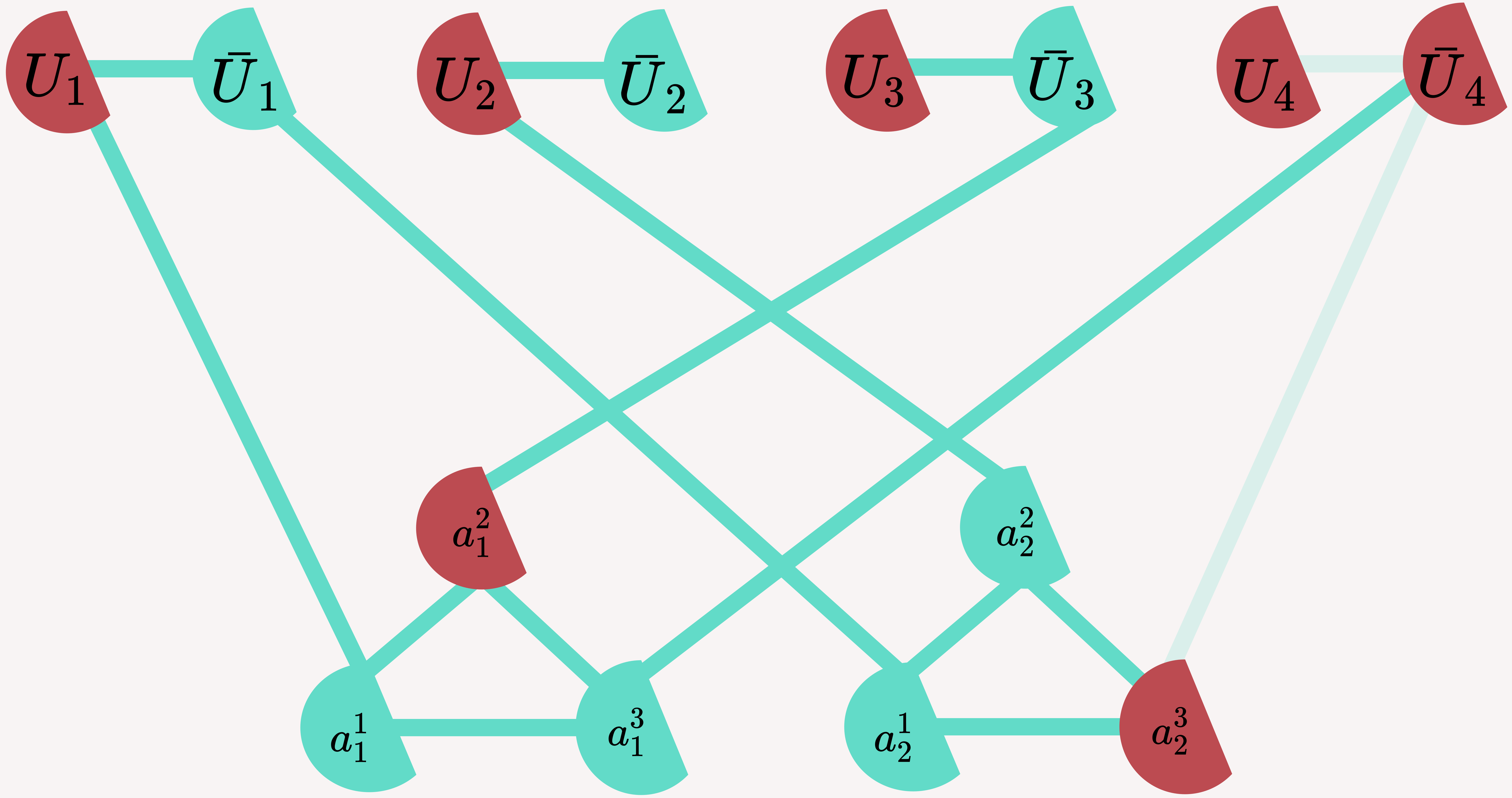
U_1
$\bar{U}_1$
U_2
$\bar{U}_2$
U_3
$\bar{U}_3$
U_4
$\bar{U}_4$
a_1^2
a_2^2
a_1^1
a_1^3
a_2^1
a_2^3

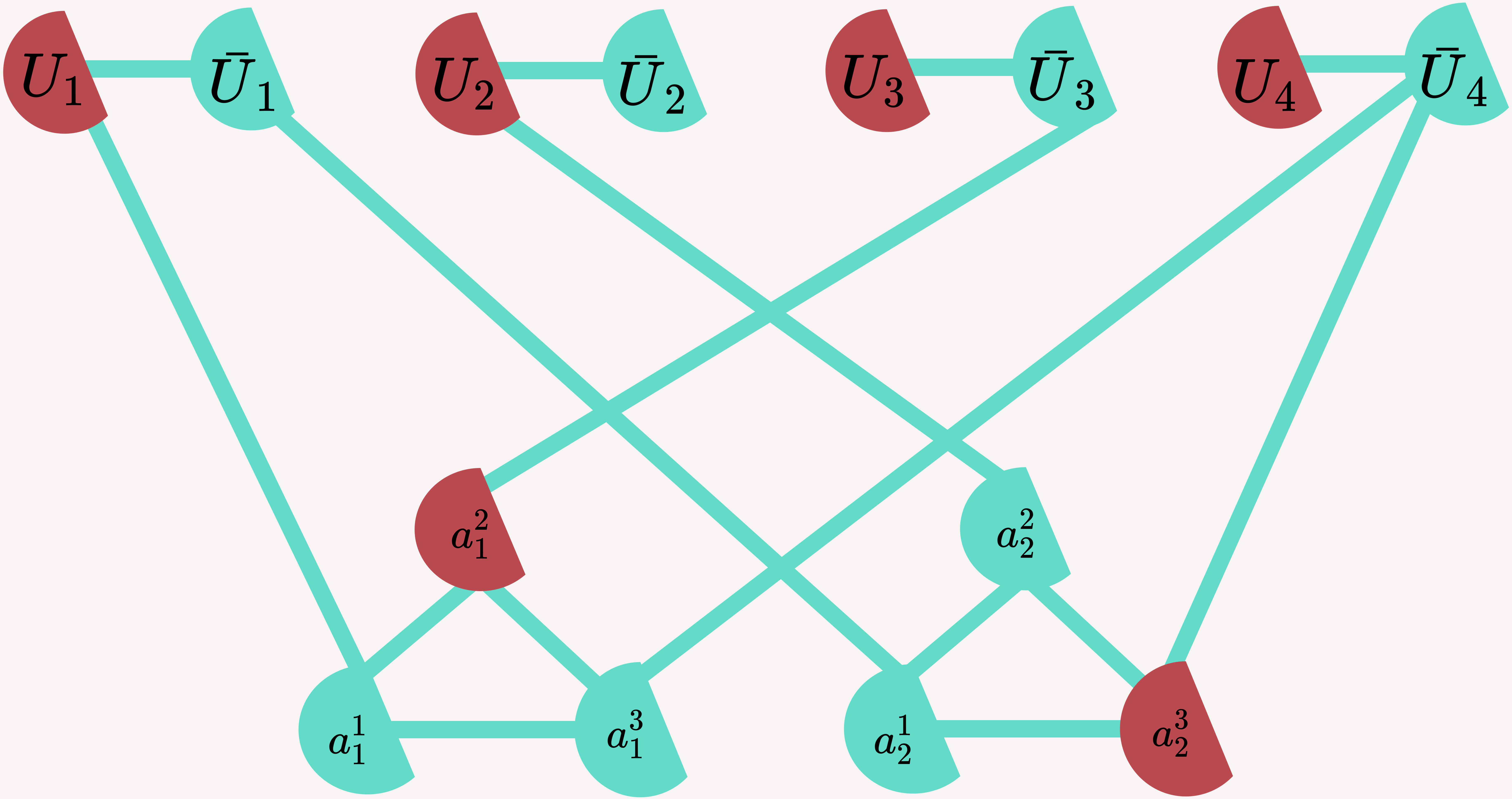


U_1
$\bar{U}_1$
U_2
$\bar{U}_2$
U_3
$\bar{U}_3$
U_4
$\bar{U}_4$
a_1^2
a_2^2
a_1^1
a_1^3
a_2^1
a_2^3

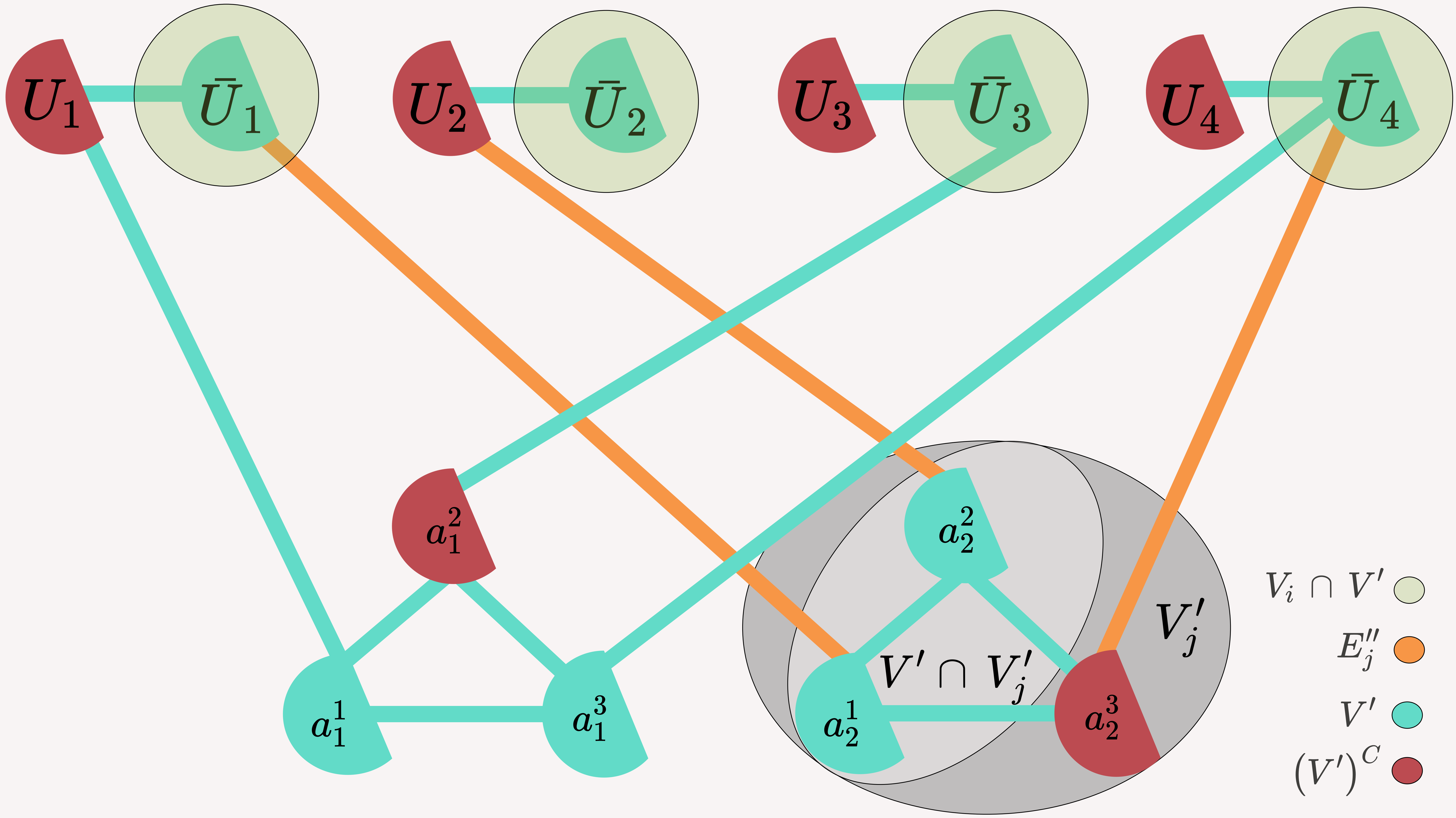


U_1
$\bar{U}_1$
U_2
$\bar{U}_2$
U_3
$\bar{U}_3$
U_4
$\bar{U}_4$
a_1^2
a_2^2
a_1^1
a_1^3
a_2^1
a_2^3


U_1
$\bar{U}_1$
U_2
$\bar{U}_2$
U_3
$\bar{U}_3$
U_4
$\bar{U}_4$
a_1^2
a_2^2
a_1^1
a_1^3
a_2^1
a_2^3



U_1
$\bar{U}_1$
U_2
$\bar{U}_2$
U_3
$\bar{U}_3$
U_4
$\bar{U}_4$
a_1^2
a_2^2
a_1^1
a_1^3
a_2^1
a_2^3



U_1
$\bar{U}_1$
U_2
$\bar{U}_2$
U_3
$\bar{U}_3$
U_4
$\bar{U}_4$
a_1^2
a_2^2
a_1^1
a_1^3
a_2^1
a_2^3
$V' \cap V_j'$
V_j'
$V_i \cap V'$
E_j''
V'
$(V')^C$

5

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía

Computers and Intractability
A guide to the Theory of NP-Completeness

by Michael R. Garey / David S. Johnson