

T.Azlarov, H.Mansurov

Matematik analiz asoslari

1 – qism

Bakalavrlar uchun darslik

Ishchamlashtirilgan va takomillashtirilgan 3–nashri

Toshkent – 2005

Uchinchi nashriga so'zboshi

Mazkui darslikning ikkinchi nashri chiqqaniga ham 10 yil bo'ldi. Bu vaqt oraliqida Respublikamiz hayotida avniqsa o'qish o'qitish sohasida tub o'zgarishlar sodir bo'ldi. Shularidan eng muhimlan olyi ta'limuning ikki bosqichli tizimiga o'tishidir. Bu esa o'z haybatida o'qitiladigan predmetlarning dasturlarini gayta ko'rib chiqishni taqozo qiladi.

Boshqa predmetlar singari matematik analiz kursini ham gayta "taftish" qilish zaturati paydo bo'ldi. Ikkinchi tonondan, o'qitish metodikasida zamonaliv yangi texnologiyalar o'qitishning intensiv usullari ham bu masalani dolzarib qilib qo'ydi.

Shu sabablarga ko'ra mualliflar oldingi "Matematik analiz" darsligi zamindan "Matematik analiz asosları" bakalayrlari uchun bir muncha ixcham darslik yaratishni o'z oldilanga vazifa qilib qo'ydlari.

Darslikda to'plamlar nazariyasining elementlari, haqiqiy sonlar nazariyasining elementlari, funksiya tushunchasi, bit o'zgaruvchili funksiya (shu jumladan ketma ketlik) va uning limiti, uzuksizligi, bunday funksiyalarning xossalni batafsil bayon qilingan. Shuningdek, bir o'zgaruvchili funksiyalarning differensial va integral hisoblan hamda shu hisoblarning ba'zi tadbiqlari keltirilgan. An'anaga ko'ra mazkui darslikning birinchi toni sonli qatorlar mavzusi bilan yakunlanadi.

Shuni aytish kerakki, darslik mavjud dastur asosida yozilgan. Hal bir bob oxirida ham nazariy, ham amaliy ahamiyatga ega bolgan mashqlari keltirilgan. Darslikni o'zlashtirish davomida kitobxon shu mashqlarini ham yechaborishi lozim. Kitobda matematik belgilardan keng foydalanish bilan bir qatorda tasdiqlar isbotining boshlanganligi "◀" belgi, tugaganligi esa "►" belgi orqali ifodalangan.

Kitob qo'lyozmasini sinchiklab o'qib, uni ilmiy va metodik jihatdan yaxshilanishiga o'z hissalarini qo'shganlari uchun professorlar Sh.Alimov, R. Ganixojayev va dotsent B.Shoimqulovlarga mualliflar tashakkur izhor qildilar. Shuningdek, darslikni nashriga tavyorlaishda qatnashgan A.Eshqobilov, J.Xurramova, A.Xusanboyev va N.Usmanova larga innatdorchilik bildirildilar.

Mualliflar.

TO'PLAM HAQIDA TUSHUNCHА

Ushbu bobda matematika fanining barcha tarmoqlarida keng qollanmadigan to'plam tushunchasi haqida ba'zi ma'lumotlar beriladi.

I-§. To'plam. To'plamlar ustida amallar

1^ю. To'plam tushunchasi. To'plam tushunchasi matematikaning boshlang'ich tushunchalaridan bii bo'lib, umisollar yordamida tushuntiriladi. Masalan, shkafdagи kitoblar, barcha to'g'i kasrlar, quyosh sistemasidagi sayyoralari, berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'i chiziqlar to'plami haqida gapirish mumkin. To'plamni tashkil etgan narsalar (predmetlar) uning elementlari deb ataladi.

Odatda, to'plamlar bosh harflar bilan, uning elementlari esa kichik harflar bilan belgilanadi. Masalan, A, B, C, \dots , larini to'plam, a, b, c, \dots larini esa to'plam elementi deyish mumkin.

Agar A to'plamning elementi a bolsa, $a \in A$ yoki $a \in A$ kabi yoziladi va "a element A to'plamiga tegishli" deb o'qiladi. Aks holda $a \notin A$ yoki $a \notin A$ deb yoziladi va "a element A to'plamiga tegishli emas" deb o'qiladi. Masalan, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ bo'lsa, $6 \in A$, $7 \notin A$ boladi.

Chekli sondagi elementlardan tashkil topgan to'plam chekli to'plam deb ataladi. Masalan, yuqorida keltirilgan to'plamlardan shkafdagи kitoblar chekli to'plamni tashkil etadi.

Matematikada ko'pincha chekli bo'lmagan to'plamlarni – cheksiz to'plamlarni qarashga to'g'i keladi. Masalan, barcha to'g'i kasrlar, barcha natural sonlar, berilgan nuqtadan o'tuvchi barcha to'g'i chiziqlar to'plami cheksiz to'plamlarga misol bo'la oladi. Barcha natural sonlardan iborat to'plam N hatfi bilan belgilanadi va $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ yoki $N = \{n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ kabi yozladi. Yana bir misol sifatida $B = \{x : x^2 - 5x + 6 > 0\}$ to'plamni keltiraylik. Bu to'plam $x^2 - 5x + 6 > 0$ tenglama ildizlariidan tashkil topgan.

Yuqorida biz to'plam uning barcha elementlari uchun xarakterli bo'lgan xususiyatni, qoidani keltirish bilan berilishini, shuningdek, uning barcha elementlарini bevosita ko'rsatish bilan

berilishini ko'ridik. Avrum vaqtorda to'plam qonday xarakterli xususiyatga ega bolgan elementlardan tashkil topqanligi ma'lum bolsa ham, bunday xususiyatlari elementlar mavjud bo'lmasligi mumkin. Masalan, \cup to'plam $m = \{x \mid x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m\}$ natural sonlar to'plamidagi ildizlardan tashkil topgan devilsa, bu to'plamning bitta ham elementi yo'qligi ma'lum bo'ladi. Bunga sabab, berilgan tenglamaning natural sonlar to'plamida ildizga ega emasligidir. Bundan kormadiki, elementga ega bo'lмаган to'plamlarni ham ko'nishqa to'g'in keladi.

Bitta ham elementga ega bo'lмаган to'plam bo'sh to'plam deviladi va \emptyset kabi belgilanadi.

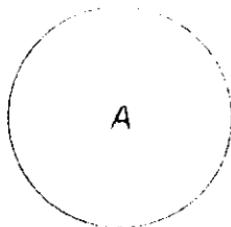
Shuni takidlash lozimki, to'plamni amqlashda umi tashkil etgan elementlar orasida aynan bir biriga teng bolgan elementlar to'plamning elementi sifatida faqat bir martaqina olinadi. Masalan, $B = \{x \mid 3x+2=0\}$ tenglamanning ildizleridan iborat bolsin. Bu tenglamanning ildizlari $x_1 = x_2 = -\frac{2}{3}$ bo'lib, ulardan tuzilgan B to'plam deganda biz 1 va -2 elementlardan tuzilgan $B = \{-\frac{2}{3}\}$ to'plamni tushunamiz.

Ko'pincha to'plamlar, ular chekli yoki cheksiz bo'lishidan qat'iy nazar, simvolik ravishda tekislikda biror shakl, masalan, doitachalar bilan tasvirlanadi. Bu esa to'plamlar ustida bajarilgan amallarni tasavvur qilishda, ular orasidagi munosabatlarni organishda anche qulaylik tuq'diradi (1-chizma).

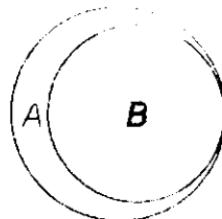
Agar B to'plamning har bir elementi A to'plamning ham elementi bolsa, B to'plam A to'plamning qismi yoki qismiy to'plami (to'plam osti) deb ataladi va $B \subseteq A$ kabi belgilanadi (2-chizma). Masalan, $B = \{2,4,6,8\}$, $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ bolsin. Burida $B \subseteq A$ ekanligini ko'nish qiyin emas.

Bo'sh to'plam \emptyset har qanday \cup to'plamning qismi (qismiy to'plami) deb hisoblanadi. Biror \cup to'plam berilgan bolsin. Bu to'plamning barcha qismiy to'plamlaridan iborat to'plamni $F(A)$ kabi belgilaymiz. Ravshanki,

$$O \in F(A), \quad A \in F.$$



1-chizma.



2-chizma.

$F(A)$ to'plam elementlarning o'zi to'plamdir.

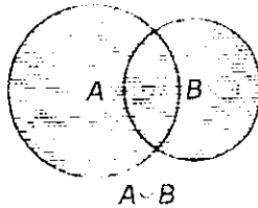
Masalan, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ to'plam uchun

$$F(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\},$$

$$F(B) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset\} \text{ bo'ladi.}$$

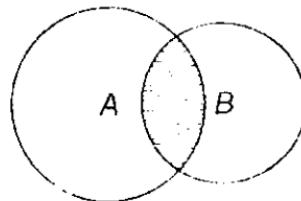
1-ta'rif. Agar $A \subset B$, $B \subset A$ bo'lsa, A va B teng to'plamlari deyiladi. Bu hol $A = B$ kabi yoziladi. Masalan, A to'plam $k\pi$ ko'rinishdagi sonlardan iborat bo'lsin, bunda $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ya'ni $A = \{a : a = k\pi, k = 0, \pm 1, \dots\}$. B to'plam esa $\sin x = 0$ tenglamaning yechimlaridan iborat bo'lsin, ya'ni $B = \{x : \sin x = 0\}$. Agar $\sin x = 0$ tenglamaning barcha yechimlari $x = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ formula bilan yozilishini hisobga olsak, $A = B$ bo'lishini ko'ramiz.

2º. To'plamlar ustida amallar. Biz quyida to'plamlar ustida bajariladigan amallarni keltiramiz.



$$A \cap B$$

3-chizma.



$$A \cup B$$

4-chizma.

2-ta'rif. A va B to'plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan C to'plam A va B to'plamlarning yig'indisi deb ataladi. A va B to'plamlarning yig'indisi $C = A \cup B$ kabi belgilanadi (3 chizma).

Masalan, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$.

$\{1,3,5,7\}$ bolsa, unda ularning yig'indilari quyidagi to'plamlardan iborat bo'ladi: $C \cap B = \{2,3,4,6,8\}$, $F \cap D = \{2,3,4\}$, $A \cap E = \{2,4,6,8\}$.

Yugorinda keltirilgan 2 ta'rifdan $A \cap B = A \cap B + B \cap A$ kelib chiqadi, shuningdek, agar $A \neq B$ bolsa, unda $A \cap B = B$ bo'ladi.

3-ta'rif. A va B to'plamlarning batcha umumiy elementlaridan tashkil topgan E to'plam A va B to'plamlarning ko'paytmasi deyiladi. A va B to'plamlarning ko'paytmasi $E = A \cup B$ kabi belgilanadi (4-chizma). Masalan, $A = \{2,4,6,8\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ bolsa, ularning ko'paytmasi $A \cup B = \{2,4\}$ to'plam bo'ladi. 3 ta'rifdan bevosita $E = A \cap B + B \cap A$ kelib chiqadi, shuningdek, agar $A \neq B$ bolsa, unda $A \cup B = A$ bo'ladi.

Agar $A \cap B = \emptyset$ bolsa A va B kesishmaydigan to'plamlar deyiladi. Masalan, $A = \{2,4,6\}$, $E = \{3,5,\dots\}$ to'plamlar kesishmaydigan to'plamlari bo'ladi, chunki $E \cap A = \emptyset$.

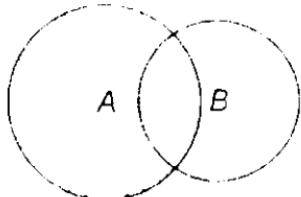
Biz to'plamlarning yig'indisi xanda ko'paytmasi ta'iflarini ikki to'plamga nisbatan kelturdik. Agar A_1, A_2, \dots, A_n to'plamlar berilgan bolsa, ularning yig'indisi $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ hamda ko'paytmasi $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ yuqoridaqiga oxshash ta'iflanadi.

4-ta'rif. A to'plamning B to'plamiga tegishli bo'lмаган barcha elementlaridan tuzilgan E to'plam A to'plamdan B to'plamning ayirmasi deb ataladi. A dan B ning ayirmasi $A \setminus B = E$ kabi belgilanadi (5-chizma). Masalan, $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{3,6,9,12\}$ bolsa, $A \setminus B = \{1,2,4,5\}$ va $B \setminus A = \{6,9,12\}$ bo'ladi.

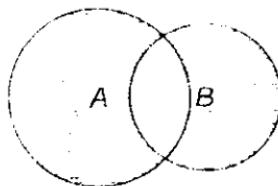
Agar A to'plam S to'plamning qismi (ya'ni $A \in S$) bolsa, ushbu $S \setminus A$ ayirma A to'plamni S ga to'ldiruvchi to'plam deb ataladi va C_A kabi yoziladi:

$$C_A = S \setminus A.$$

5-ta'rif. A to'plamning B to'plamiga tegishli bo'lмаган barcha elementlaridan va B to'plamning A to'plamiga tegishli bo'lмаган barcha elementlaridan tuzilgan to'plam A va B to'plamlarning simmetrik ayirmasi deb ataladi. Simmetrik ayirma $A \Delta B$ kabi belgilanadi (6-chizma).



$A \setminus B$
5-chizma



$A \cup B$
6-chizma

Tarifga ko'ra

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Masalan, agar $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ bo'lsa bu to'plamlarning simmetrik ayirmasi $A \Delta B = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$ bo'ladi.

Ikki A va B to'plam berilgan bo'lsin. Birinchi elementi A to'plamiga, ikkinchi elementi B to'plamiga tegishli bo'lgan tartiblangan (a, b) juftliklarni qaraylik: $a \in A, b \in B$.

6-tarif. Barcha (a, b) ko'rinishdagi juftliklardan tuzilgan to'plam A va B to'plamlarning Dekart ko'paytmasi deb ataladi. To'plamlarning Dekart ko'paytmasi $A \times B$ kabi belgilanadi. Odatda $A \times A$ to'plam A^2 deb belgilanadi: $A \times A = A^2$. Bunda (a, b) va (b, a) juftliklar $A \times B$ to'plaming turli elementlari hisoblanadi.

Masalan, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ to'plamlar uchun $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$, $B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$ bo'ladi.

Yuqorida to'plamlarni va ular ustida bajarilgan amallarni tasvirlash uchun ishlataligan shakllar Eyler-Viyen diagrammalari deb ataladi (1-6-chizmalar).

1.1.misol. A, B, C to'plamlar uchun $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ tenglikning o'rinni bo'lishi isbotlansin.

◀ Aytaylik, $a \in (A \cup B) \cap C$ bo'lsin. Unda $a \in (A \cup B), a \in C$ bo'ladi. $a \in A, a \in C$ bo'lganda $a \in A \cap C$ bo'lib, $a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. $a \in B, a \in C$ bo'lganda $a \in B \cap C$ bo'lib, yana $a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ bo'ladi.

Demak,

$$(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (1.1)$$

bo'ladi.

Aytaylik, $a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, bo'lsin. Unda $a \in A \cap C$ bo'lganda $a \in A, a \in C$ bo'lib, $a \in (A \cup B) \cap C$; $a \in B \cap C$ bo'lganda $a \in B, a \in C$ bo'lib, yana $a \in (A \cup B) \cap C$ bo'ladi.

Demak,

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C \quad (1.2)$$

bo'ldi. (1.1) va (1.2) munosabatlardan $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ bo'lishi kelib chiqadi ►

1.2.misol. A va B to'plamlarda ushbu

$$(\mathbb{C} \setminus B) \cup B = \mathbb{C}$$

tenglikning o'rinni bo'lishi uchun $B \subseteq \mathbb{C}$ bo'lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

◀ Aytaylik. $A \subseteq B \subseteq \mathbb{C}$ bo'lsin. Qo'shiluvchilarning har biri yig'indining qismi bo'lishidan, $B \subseteq A$ ekanligini topamiz.

Aytaylik. $A \subseteq B$ bo'lsin. Unda $(A \setminus B) \cup B \subseteq A$ bo'lib, $(A \setminus B) \cup B = A$ bo'ldi ►

3º. Universal to'plam. Yuqorida kiritilgan amallar ictiyoriy to'piamlar uchun, to'plamlarning tabiatiga hech qanday shart qo'ymasdan ta'riflandi. Ammo bunday "umumiylik" ba'zan konkret hollarda ma'noning yo'qolishiga olib kelishi ham mumkin. Masalan, A to'plam sifatida 2,4,6,8,10 sonlar to'plamini: $A = \{2,4,6,8,10\}$, B to'plam sifatida quyosh sistemasidagi sayyoralar to'plamini olsak, ularning yig'indisi va ko'paytmasi formal aytila olinsa ham, muayyan g'ayritabiylilikka olib kelishi ravshan. Bunday ma'nosizlik hollarini istisno qilish uchun, odatda barcha amallar biror universal to'plam deb ataluvchi to'planning qismiy to'plamlari ustida bajariladi deb hisoblanadi. Bu universal to'plam U yoki Ω bilan belgilanadi. Macalan, yuqorida keltirilgan sonli misollarda universal to'plam sifatida natural sonlar to'plami $U = \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ olimishi mumkin. Eyler-Viyen diagrammalari uchun esa U sifatida tekislikning nuqtalari to'plami olinishi mumkin.

Matematik analiz kursi davomida, universal to'plam sifatida asosan haqiqiy sonlar to'plami (qarang 2-bob, 4-\$) qaraladi.

4º. To'plamni bo'laklash. Biror A to'plam berilgan bo'lib, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ to'plamlar uning qismiy to'plamlari bo'lsin: $A_k \subseteq A$ ($k = 1,2,\dots,n$)

Agar $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ qismiy to'plamlar sistemasi uchun:

$$1) \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A,$$

$$2) \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (k \neq i, k, i = 1,2,\dots,n)$$

shartlar bajarilsa, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ sistema A da bo'laklash bajargan yoki A to'plam $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ to'plamlarga bo'laklangan deyiladi. Ba'zan $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ni A dagi bo'laklash, A larini esa bo'laklashning elementlari deyiladi. Ikkala shart birgalikda A dagi har bir element

bo'laklashning bitta va faqat bitta elementiga tegishli bo'lishini ta'minlaydi.

Tabiiyki, bitta β to'plamda turli bo'laklashlar bajarilgan bo'lishi mumkin.

1.3- misol. $A_1 = \{1,2\}, A_2 = \{3,4\}, A_3 = \{5,6\}$ to'plamlar $\beta = \{1,2,3,4,5,6\}$ to'plamda bo'laklash bajarishi ko'rsatilsin.

To'plamlar yig'indisi ta'rifidan foydalanib topamiz:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,2\} \cup \{3,4\} \cup \{5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\} = \beta.$$

To'plamlar ko'paytmasi ta'rifiga ko'ra

$$A_1 \cap A_2 = \{1,2\} \cup \{3,4\} = \emptyset, A_2 \cap A_3 = \{3,4\} \cup \{5,6\} = \emptyset,$$

$$A_1 \cap A_3 = \{1,2\} \cup \{5,6\} = \emptyset$$

bo'ladi.

Shunday qilib, $\{A_1, A_2, A_3\}$ sistema uchun 1), 2) shartlar bajariladi va demak, u A dagi bo'laklash bo'ladi.

2-§. To'plamlarni taqqoslash

Odatda, ko'pincha turli to'plamlarni taqqoslashga, ya'nini ularning elementlarining miqdori bo'yicha solishtirishga to'g'ri keladi.

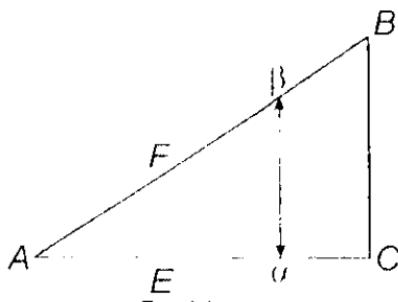
Agar A va B lar chekli to'plamlar bo'lsa, u holda ularning elementlarini bevosita sanash bilan elementlar soni yoki bir-biriga tengligini yoki A to'plamning elementlari soni B to'plamning elementlari sonidan ko'p yoki kam ekanini aniqlash mumkin.

Agar A va B to'plamlar cheksiz to'plamlar bo'lsa, unda bu to'plamlarning elementlarini, ravshanki, sanash yo'li bilan taqqoslab bo'lmaydi. Ammo, bu to'plamlarni ularning elementlarini bir-biriga mos qo'yish yo'li bilan taqqoslash mumkin.

Agar A to'plamning bitta har bir elementiga B to'plamning bitta elementi shunday mos qo'yilsaki, bunda B ning elementiga mos keltirilgan A ning elementi yagona bo'lsa, A va B to'plam elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan deyiladi.

7-ta'rif. Agar A va B to'plam elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, ular bir-biriga ekvivalent to'plamlar deb ataladi.

Ekvivalent A va B to'plamlar $A \sim B$ kabi belgilanadi. Masalan, to'g'ri burchakli $A B C$ uchburchak (ΔABC) berilgan bo'lsin. (7-chizma).



7- chizma.

Bu uchburchakning gipotenuzasi $\angle B$ ning nuqtalaridan iborat to'plamni \neq deb, $\angle C$ katetni tashkil etgan nuqtalar to'plamini esa \neq deb olaylik. Bu \neq va \neq to'plamlarning elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'matish mumkin. \neq to'plamda olingan har bir β nuqtaga shu nuqtadan $\angle C$ ga tushirilgan perpendikularning asosi σ ni mos qo'yamiz va aksincha. Bu esa \neq va \neq to'plam elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud ekanligini ko'rsatadi. Demak, ta'rifga binoan, $\neq \sim \neq$ bo'ladi.

Shuningdek, $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{2,4,6,8,10,12\}$, $C = \{1,2,3, \dots, n\}$.
 $N' = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\} \neq$ to'plamlar berilgan bo'lsa, unda $A \sim B$ va $A \sim C$ ekanini ko'ramiz. Ekvivalentlik tushunchasi to'plamlarni sinflarga ajratish imkonini beradi. Masalan, quyidagi to'plamlar berilgan bo'lsin:
 $A = \{2,4,6,8,10,12\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{10,11\}$, $D = \{1,3,5,7,9,11\}$, $E = \{1\}$.
Bu to'plamlar orasida A va D to'plamlari, B va C to'plamlari ekvivalent: $A \sim D$, $B \sim C$. Bunda B va C to'plamlar bitta 6 elementli to'plamlar sinfiga kirsa, B va C to'plamlar esa boshqa 2 elementli to'plamlar sinfiga kiradi. Ammo A to'plam A, B, C, D to'plamlarning birontasiga ham ekvivalent emas. U bir elementli to'plamni tashkil etadi.

Natural sonlar to'plami λ berilgan bo'lsin. Bu to'plamga ekvivalent bo'lган to'plamlarga misollar keltiraylik:

$$\begin{aligned} N' &= \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\} \neq, n \leftrightarrow \frac{1}{n} \\ N'' &= \{2, 4, 6, \dots, 2n\} \neq, n \leftrightarrow 2n \\ N''' &= \{1, 3, 5, \dots, 2n-1\} \neq, n \leftrightarrow 2n-1 \end{aligned}$$

8-ta'rif. Natural sonlar to'plami λ ga ekvivalent bo'lган har qanday to'plam sanoqli to'plam deb ataladi.

Natural sonlar to'plami λ ga ekvivalent bo'lган barcha to'plamlar sanoqli to'plamlar sinfini tashkil etadi.

Quyidagi ikki χ $\{1,2,3\}$, η $\{1, \chi''\}$, $\chi''' \{2,4,6,12n+1\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Bunda $\chi'' \wedge$ ekanligi ravshan Ammo yuqorida $\chi \wedge \chi''$ ekanligini ta'kidlagan edik Demak, $\chi'' \wedge \chi$, $\chi''' \wedge \chi'$

To'plamning qismi o'ziga ekvivalent bo'lishi faqat cheksiz to'plamlargagina xosdir.

Biz yuqorida misol tariqasida keltirgan to'plamlarimiz asosan chekli to'plamlar yoki sanoqli to'plamlar edi Tabiiyi, cheksiz, ammo sanoqli bo'lmagan to'plamlar bormi? degan savol tug'iladi. Bunday to'plamlar mavjud (qaralsin. [1]).

Ekvivalent to'plamlar sifining miqdoriy xarakteristikasi sifatida to'plamning quvvati tushunchasi kiritiladi. Chekli to'plamlar uchun quvvat to'plam elementlarning sonidan iboratdir.

3-§. Matemetik belgilari

To'plam tushunchasi bilan tanishishda biz ba'zi bir matematik belgilarni ishlatdik. Masalan, "a to'plamning elementi a" yoki,, "a element a to'plamga tegishli" deyilganda $a \in a$ deb tegishlilik belgisi " \in " ni ishlatdik. Shuningdek, " \subset " yoki,, " \subseteq " belgi bir to'plam ikkinchi to'plamning qismi bo'lganida qo'llanilgan edi.

Matematikada ba'zi hollarda yozuvni qisqartirish maqsadida tez-tez uchraydigan so'z va so'z birikmalari o'rniغا maxsus belgilarni ishlataladi.

"Agar ... bo'lsa, u holda ... bo'ladi" iborasi - implikatsiya belgisi orqali yoziladi.

Masalan, A, B va C to'plamlar berilgan bo'lsin. "Agar $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ bo'lsa, u holda $A \subseteq C$ bo'ladi" iborasini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C.$$

Ikki ekvivalent tasdiqlar ekvivalentlik belgisi \Leftrightarrow orqali yoziladi.

Masalan, $(A \wedge B) \vee (B \wedge A) \equiv 0 \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \wedge B) \equiv 0$

"Har qanday", "ixtiyoriy", "barchasi uchun" so'zlari o'rniغا \forall umumiylig kuantori belgisidan foydalilanildi

"Mavjudki", "topiladiki" so'zlari o'rniغا \exists mavjudlik kuantori belgisi ishlataladi. Masalan:

1) "Ixtiyoriy n hamda m natural sonlar yig'indisi yana natural sonlar bo'ladi" iborasini $\forall n \in N, \forall m \in N : \exists (n+m)$, \vee kabi yozish mumkin.

2) "Ikki a va b to'plamlar ko'paytmasi bo'sh emas" degan

iborani $a \neq 0$ yoki $\exists a: a \neq b$ kabi ifodalash mumkin.

Shunday qilib, $\in, \neq, \subset, \supset, \forall, \exists$ matematik belgilarmi ko'rib o'tik. Biz ulardan qulay kelganda, foydalanib boramiz. Matematik belgilarning ishlatalish mazmuni quyidagi jadvalda ifodalangan:

No	Matematik belgilarning ishlatalish mazmuni
1.	Tegishlihik belgisi, a element \in to'planning elementi bolsa, $a \in A$ kabi yoziladi.
2.	Tegishli emaslik belgisi, b element \notin to'planning elementi bo'lmasa, $b \notin B$ kabi ifodalanadi.
3.	Qism belgisi, A to'plam B to'planning qismi bolsa, $u \in A \subset B$ kabi yoziladi.
4.	Umumiylilik kvantori belgisi, "Har qanday", "ixtiyoniy", "barchasi uchun" so'zlari va so'z birikmalari o'mida ishlataladi.
5.	Mayjudlik kvantori belgisi, "Mayjudki", "topiladi", o'mida ishlataladi.
6.	Implikatsiya belgisi, "Agar ... bo'lsa, u holda ... bo'ladi" iborasi o'mida ishlataladi.
7.	Ekvivalentlik belgisi.

4-§. Matematik induksiya metodi

Har bir fanni egallash undagi turli-tuman faktlarni, asosiy qonuniyatlarni bilib olish bilan birga shu sandagi tadbiq qilish metodlarini o'zlashtirishni ham taqozo qiladi. Qadimiy va navqiron matematika fanida ham u o'r ganadigan obyektlarni qonuniyatlarni ochuvchi qator metodlar yaratilgan. Ularning ba'zilari muayyan masalalar uchun maxsus yaratilgan bo'lsa, ayrimlari umummatematik ahamiyatga egadir.

Ana shunday umumiylar xarakterdagি metodlarni mukammal egallash matematika fanı sohasida yaxshi mutaxassis bo'lishning, uning ichki sirlarini anglab yetishning zaruriy shartidir.

Matematik induksiya metodi matematikaning turli-tuman, hatto bir-biridan juda olis sohalarida muvaffaqiyat bilan keng qo'llaniladigan metoddır. Avvalo, bu metod o'zining juda sodda bo'lgan g'oyasi bilan

e'tiborga sazovor. Ikkinchidan, bu metod isbotlanayotgan gipotezaning yoki teoremaning aniq bayonini keltirishda ma'lum "topog'onlik"ni talab etishi bilan ham xarakterlidir.

Matematik induksiya elementar matematikaning barcha sohalaridagina emas, balki hozirgi zamonaviy matematikaning turli bo'limlarida ham yangi-yangi faktlarni isbot qilishning muhim omilidir.

1". Deduktiv va induktiv fikrlash. Odatda, biror jarayon yoki voqeal to'grisida fikr yuritishning ikki forması farq qilinadi: deduktiv fikrlash va induktiv fikrlash.

Deduksiya-fikrlashning umumiylasdiqlardan xususiy tasdiqlarga o'tish formasidir (dedukiya so'zi mantiqiy xulosani bildiradi). Misollar ko'raylik.

1.4-misol. Bir va o'zidan boshqa bo'luvchilarga ega bo'lgan sonlar murakkab sonlar to'plamini tashkil etadi. (A)

9 soni 1 va 9 dan boshqa 3 ga bo'linadi. (B)

Demak, 9 soni murakkab son. (C)

1.5-misol. Barcha to'rtburchaklar ko'pburchaklar oиласига tegishli. (A)

16 C'DE trapetsiya-to'rtburchak. (B)

(B)

Demak, (A) & (B) trapetsiya ko'pburchaklar oиласига tegishli. (C)

Har ikkala misolda ham (A) umumiylasdiqlardan (B) tasdiq yordamida (C) xususiy tasdiq hosil qilinadi.

Indukiya-fikrlashning xususiy tasdiqlardan umumiylasdiqlarga o'tish formasidir.

1.6-misol. 140 soni 5 ga bo'linadi. (A)

Demak, Nol bilan tugaydigan barcha sonlar 5 ga bo'linadi. (B)

1.7-misol. 140 soni 5 ga bo'linadi. (A)

175 soni 5 ga bo'linadi (B)

425 soni 5 ga bo'linadi (C)

Demak, barcha uch honali sonlar 5 ga bo'linadi. (D)

1.6-misolda (A) xususiy tasdiqlardan (B) umumiylasdiqlardan (C) tasdiq qilinadi. (B) tasdiq to'g'ridir.

1.7-misolda (A) (B) (C) xususiy tasdiqlardan (D) umumiylasdiqlardan (E) tasdiq qilindi. Lekin (D) tasdiq noto'g'ridir.

Tadqiqotchi biror faktini isbotlashdan avval, turli mulohazalar yordamida bu faktning borligini fahmlashi, uni isbotlashga kirishishdan avval esa isbotlash g'oyalarini anglab yetishi kerak bo'ladi.

Deduksiya va induksiya bir-birini to'ldiruvchi fikrlash formalari. Haqiqatan ham, isbotlanishi kerak bo'lgan tasdiqlar (gipotezalar) kuzatishlarga asoslangan holda induktiv yo'l bilan hosil qilinadi. Songra bu tasdiqning to'g'riligi isbotlashning biror deduktiv metodi yordamida ko'rsatiladi.

Induksiya metodi fizika, kimyo va boshqa tabiy fanlarda shuningdek, matematikada ham keng qo'llaniladi, ya'ni bu metod yordamida turli matematik tasdiqlar (gipotezalar) hosil qilinadi. Bunga misollar keltiravlik:

1.8-misol. 2 sonining ketma ket kelgan uchta darajasining yig'indisini qaraylik:

$$2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$$

Hosil bo'lgan son 7 ga bo'linadi. Endi

$$2^7 + 2^8 + 2^9 = 28$$

hosil bo'lgan son yana 7 ga karrali. Navbatdagi darajalarni qo'shaylik:

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 56$$

hosil bo'lgan son yana 7 ga karrali.

Bajarilganlarga asoslanib ushbu gipotezani aytish mumkin: 2 sonning ixtiyoriy uchta ketma ket kelgan darajasining yig'indi 7 ga karralidir, ya'ni $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ yig'indi 7 ga qoldiqsiz bo'linadi.

2º. Matematik induksiya metodi. Yuqoridagi misollarni tahsil natijasida ushbu savol tugiladi. Bir qancha xususiy hollarda to'g'ri bo'lgan biror tasdiq berilgan bo'lsin. Bu tasdiqning to'griligini ko'rsatuvchi barcha cheksiz ko'p xususiy hollarni ko'rib chiqish inson qo'llidan kelmaydi (barcha natural sonlar uchun chiqarilgan tasdiqlar shular jumlasidandir).

Xususiy hollar cheksiz ko'p bo'lgani uchun to'la induksiyani qo'llash imkoniyatiga ega emasmi, xususiy hollarga asoslanib chiqarilgan tasdiq esa xato bo'lishi mumkin.

Induksiya yordamida biror $A(n)$ gipoteza bayon etilgan bo'lib, bu mulohazaning ixtiyoriy natural son n uchun rostligini isbotlash kerak bo'lsin hamda $A(n)$ mulohazanining to'g'riligini barcha n lar uchun bevosita tekshirib ko'rishning iloji bo'lmasin. $A(n)$ mulohaza, matematik induksiya prinsipiiga asosan, quyidagicha isbotlanadi:

Bu tasdiqning to'g'riligi, avvalo $n=1$ uchun tekshiriladi.

So'ngta aytilgan tasdiqni $n = k$ uchun rost bo'lsin deb faraz qilib, uning rostligi $n = k+1$ uchun isbotlanadi. Shundan so'ng, $\lambda(n)$ tasdiq barcha $n \in \mathbb{N}$ lar uchun isbotlangan hisoblanadi.

Bularga asosan, agar $\lambda(n)$ tasdiq $n = 1$ da rost bolsa, u navbatdagi $n = 1 + 1 = 2$ son uchun ham rost bo'ladi. Tasdiqning $n = 1$ uchun rostligidan uning $n = 2 + 1 = 3$ uchun rostligi kelib chiqadi.

Bundan esa tasdiqning, o'z navbatida, $n = 1$ uchun rostligi kelib chiqadi va hokazo. Shu yo'sinda, ixtiyoriy n natural songacha yetib boramiz. Demak, $\lambda(n)$ tasdiq ixtiyoriy n uchun o'tinlidir.

Aytilqanlarni umumlashtirib, ushbu umumiyy prinsipni ifodalaylik:

1. $n = 1$ da $\lambda(n)$ mulohazaning rostligi tekshirildi;

2. $n = k$ da $\lambda(n)$ mulohaza rost bo'lsin deb faraz qilib, $n = k+1$ uchun $\lambda(n)$ mulohazaning rostligi, ya'ni $\lambda(k) + \lambda(k+1)$ isbotlanadi. Shundan so'ng, $\lambda(n)$ mulohaza barcha n lar uchun rost deb xulosa qilinadi.

1.9-misol. Yuqoridaq prinsipga asoslanib, ixtiyoriy n natural son uchun ushbu tenglikni isbotlang:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bu yerda va bundan keyingi misoldagi tasdiqni $\lambda(n)$ deb belgilaymiz.

1. $n = 1$ bo'lganda $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, demak $\lambda(1)$ to'g'ri.

2. Ixtiyoriy k natural son uchun $\lambda(k)$ ning to'g'rihigidan $\lambda(k+1)$ ning kelib chiqishini isbotlaymiz.

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

to'g'ni bo'lsin. Yuqoridaq imunosabatdan foydalansak:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$

hosil bo'ladi, bu esa $\lambda(k+1)$ ning o'zidir.

Bu esa, tasdiqning barcha n lar uchun o'tinli bo'lishini bildiradi.

Matematik induksiya prinsipiiga asoslangan isbotlar isbotlashning matematik induksiya metodi deyiladi.

Matematik induksiya metodiga asoslanib biror tasdiqni isbotlashda yuqorida ko'satilgan 1 va 2 punktlarning har

birini tekshirish (isbotlash) juda muhimdir. Agar ulardan birortasini hisobga olmasak, chiqarilgan xulosa to'qni bo'lmay qolishi mumkin.

Mashqlar.

1.4. Ushbu $\boxed{A} \vdash (\square \vee \square) \wedge (\square \wedge \square)$ tenglik isbotlansin.

1.5. \square va \square (barcha butun sonlardan iborat to'plam) lar uchun $\boxed{A}, \boxed{\square}, \boxed{\neg \square}, \boxed{\neg A}, \boxed{\neg \neg A}$ to'plamlar topilsin

1.6. $A, \square, \neg \square$ to'plamlar uchun

a) $\square \sim \square$, b) $\square \sim \neg \square \Rightarrow \neg \square \sim \square$ c) $\neg \square \sim \neg \neg \square \Rightarrow \neg \neg \square \sim \neg \square$ bo'lishi isbotlansin.

1.7. Agar $\square \neg \square \sim \neg \neg \neg \neg \square$ bolsa, $\neg \neg \neg \neg \square$ bo'lishi isbotlansin.

1.8. Qavariq \square ko'pburchak diagonallaridan tashkil topgan to'plamning elementlari soni $0.5 \square (\lfloor \frac{\square}{2} - 3 \rfloor)$ ga teng bo'lishi isbotlansin.

1.9. Elementlari soni n ta bo'lgan to'plamning barcha qismiy to'plamlaridan tuzilgan to'plamning elementlari soni 2^n ga teng bo'lishi isbotlansin.

1.10. Sonlar o'qida N va Z to'plamlarning geometrik tasvirlari topilsin.

1.11. Ixtiyoriy $n \in N$ uchun $n(n^2 + 5)$ ifoda 6 ga karrali ekanini isbotlang.

1.12. Agar p tub son bolsa, $n^n \cdot n$ son p ga bo'linishini isbotlang. (Fermaning kichik teoremasi).

1.13. Ixtiyoriy $n \in N$ uchun $3^{n+2} + 2^{n+1}$ yig'indining 11 ga bo'linishini isbotlang.

1.14. Quyidagi Koshi tengsizligini isbotlang: Ixtiyoriy n ta manfiy bo'limgagan a_1, a_2, \dots, a_n sonlarning o'rta arifmetigi shu sonlarning o'rta geometrigidan kichik emas, ya'ni

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Bu tengsizlik $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ bo'lganda va faqat shu holdagina tenglikka aylanadi.

II BOB

Haqiqiy sonlar. Haqiqiy sonlar to'plami va uning xossalari

Son tushunchasi uzoq o'tmishtdan ma'lum. Odamlar sanash taqazosi bilan dastlab 1, 2, 3, ... -natural sonlarni qo'llaganlar. So'ingra manfiy son, ratsional son va, nihoyat, haqiqiy son tushunchalari kiritilgan va o'r ganilgan. Albatta, bu tushunchalar kitobxonga o'rta maktab matematika kursidan, litsey va kollejlardan ma'lum. Shuning uchun ham quyida (shu bobning 1-§ ida) ratsional sonlar to'plamlarining muhim xossalari qisqagina bayon etilgan. Haqiqiy son tushunchasiga kelganda shuni aytish kerakki, uning kiritilishi matematik analiz uchun qanoatlanarli darajada emas. Shu sababga ko'ra quyida (shu bobning 2-5§ larida) haqiqiy son tushunchasini Dedekind bo'yicha kiritamiz va haqiqiy sonlar to'plamining xossalarni batafsil o'r ganamiz.

1-§. Ratsional sonlar to'plami va uning xossalari

1⁰. **Ratsional sonlar.** Ushbu qisqarmaydigan $r = \frac{p}{n}; p \in Z, n \in N$ kasr ko'rinishida tasvirlanadigan har bir son ratsional son deyiladi. Barcha ratsional sonlar to'plamini \mathcal{Q} deb belgilaymiz:

$$\mathcal{Q} = \{r : r = \frac{p}{n}, p \in Z, n \in N\}.$$

Ravshanki,

$$N \subset Z \subset \mathcal{Q}.$$

Ratsional sonlar to'plamida qo'shish ($r + s; r \in \mathcal{Q}, s \in \mathcal{Q}$), ayirish ($r - s; r \in \mathcal{Q}, s \in \mathcal{Q}$), ko'paytirish ($r \cdot s; r \in \mathcal{Q}, s \in \mathcal{Q}$) hamda bo'lish ($r : s; r \in \mathcal{Q}, s \in \mathcal{Q}, s \neq 0$) amallari, shuningdek ratsional sonning darajasi ($r^n; r \in \mathcal{Q}, n \in Z$), ratsional sondan olingan ildiz ($\sqrt[n]{r}; r \in \mathcal{Q}, n \in N$) amallar kiritilgan bo'lib, amallarning ma'lum xossalari o'rniли bo'ladi.

2⁰. **Ratsional sonlar to'plamining tartiblanganligi.** Ratsional sonlar to'plami \mathcal{Q} dan olingan ixtiyoriy ratsional r, s, t sonlar uchun quyidagi ikki tasdiq o'rniли bo'ladi:

- 1). $r - s, r \cdot s, r : s$ munosabatlardan bittasi va faqat bittasi

o'rnli,

$r < r + s < t$ tengsizliklardan $r < t$ tengsizligining o'rnli bo'lishi kehb chiqadi.

Bu hol ratsional sonlar to'plami Q ning tafqiblaniganligi xossalini ifodalaydi.

3⁰. Ratsional sonlar to'plamining zinchligi. Faraz qilaylik, $r \in Q, t \in Q$ va $r < t$ bo'lsin. U holda $\frac{r+t}{2} \in Q$ va $r < \frac{r+t}{2} < t$ bo'ladi.

Bu esa r va t ratsional sonlar orasida $\frac{r+t}{2}$ ratsional son bor ekanligini ko'rsatadi. $\frac{r+t}{2}$ sonni s bilan belgilab, r va s sonlar orasida joylashgan $\frac{r+s}{2}$ hamda s va t orasida joylashgan $\frac{s+t}{2}$ ratsional sonlar borligini ko'ramiz:

$$r < \frac{r+s}{2} < \frac{r+t}{2} < \frac{s+t}{2} < t$$

Bu jarayonni istalgancha davom ettirish yoli bilan ixtiyoriy r va t ratsional sonlar orasida cheksiz ko'p ratsional sonlar borligi aniqlanadi. Mana shu xossa ratsional sonlar to'plami Q ning zinchligi xossasi deyiladi.

Faraz qilaylik, A ratsional sonlardan tuzilgan biror to'plam bo'lsin: $A \subset Q$

1-ta'tif. Agar shunday $r^* \in A$ topilsaki, $\forall r \in A$ uchun $r \leq r^*$ tengsizlik bajarilsa, r^* ratsional son A to'plamning eng katta elementi deyiladi.

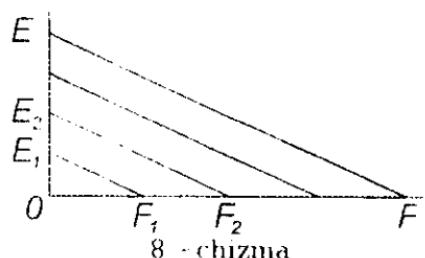
2-ta'tif. Agar shunday $r_* \in A$ topilsaki, $\forall r \in A$ uchun $r \geq r_*$ tengsizlik bajarilsa, r_* ratsional son A to'plamning eng kichik elementi deyiladi.

4⁰. Ratsional sonlarni geometrik tasvirlash. Sonlar o'qi va bu o'qda O nuqtani olaylik. Bu O nuqtani nol sonining geometrik tasviri deb qaraymiz.

Natural va butun sonlarni geometrik tasvirlash o'quvchiga ma'lum. Ixtiyoriy ratsional sonni geometrik tasvirlashdan avval birlik kesma (masshtab birligi) ning n ($n \in V$) qismini topishni ayтиб о'tamiz.

Bir kateti birlik kesma OF ikkinchi kateti birlik kesmani n marta qo'yishdan hosil bo'lgan OF kesmadan iborat, OF to'g'ri burchakli uchburchakni qaraylik (8 chizma). Bu OF ning OF

tomondagi $1, 2, 3, \dots, n-1$ sonlarini tasvirlovchi nuqtalar E_1, E_2, \dots, E_{n-1} bolsin. Natijada OE katetda bir biriga teng bolgan n -ta $OE_1, E_1E_2, \dots, E_{n-1}E_n$ kesmalar hosil boladi.



Endi OE katetdagi E_1, E_2, \dots, E_{n-1} nuqtalardan FE gipotenuzaga parallel to'g'ri chiziqlari o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlarning OE kateti bilan kesishgan nuqtalari E_1, E_2, \dots, E_{n-1} bolsin. Ravshanki, bu nuqtalar OE da $OE_1, E_1E_2, \dots, E_{n-1}E_n$ kesmalarini hosil qiladi. Demak, OE birlik kesma n -ta $OE_1, E_1E_2, \dots, E_{n-1}E_n$ kesmalariga ajraldi. Fales teoremasiga ko'ra bu kesmalar bir biriga teng boladi. Demak, OE_n kesma OE kesmaning $\frac{1}{n}$ qismiga teng.

Masshtab kesma OE ning $\frac{1}{n}$ qismi bolgan OE_1 kesmani O nuqtadan boshlab o'ng va chap tomonlarga qo'yamiz. Bu kesmaning bir uchi O nuqtada bo'lib, ikkinchi uchi esa o'ng tomondagи nurda M_1 , chap tomondagи nurda esa M_{-1} nuqtalarni belgilaylik. Endi $\frac{1}{n}$ va $-\frac{1}{n}$ sonlarga M_1 va M_{-1} nuqtalarni mos qo'yamiz. OE_1 kesmani O nuqtadan uning o'ng va chap tomonlaridaqи nurga ketma-ket m marta qo'yish natijasida $\frac{m}{n}$ hamda $-\frac{m}{n}$ ratsional sonlarni geometrik tasvirlovchi M_m va M_{-m} nuqtalarni topamiz. Shu yoll bilan sonlar o'qida $r \cdot \frac{m}{n} \in Q$ sonni geometrik tasvirlovchi nuqta topiladi. Masalan, ushbu $\frac{5}{4} \in Q$ sonni tasvirlovchi nuqtani topish uchun avval masshtab birligini O nuqtadan o'ng tomonga bir marta joylashtirib, M_1 nuqta topiladi. So'ngra bu M_1 nuqtadan boshlab

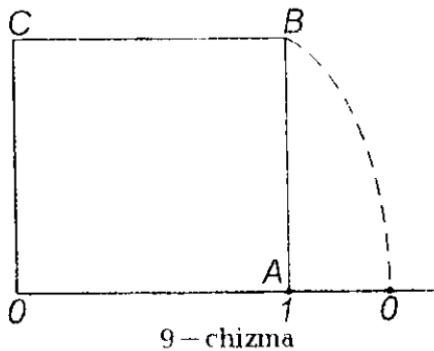
masshtab birligining $\frac{1}{4}$ qismini qo'yib, $\frac{5}{4}$ sonni geometrik ifodalovchi M , nuqtani topamiz.

Shunday qilib, ratsional sonlar to'plamidan olingan ixtiyotiy $r = \frac{m}{n}$ ($m \in Z, n \in N$) songa to'g'ri chiziqda bitta M , nuqta mos keladi.

Bundan keyin qulaylik uchun $r \notin Q$ songa to'g'ri chiziqda mos keladigan nuqtani M , kabi belgilamasdan r nuqta deb olaveramiz. Ratsional songa mos keladigan to'g'ri chiziqdagi nuqta ratsional nuqta ham deb ataladi.

5^h. Ratsional sonlar to'plamini kengaytirish zaruriyati. Biz avvalgi bandda har bir ratsional songa to'g'ri chiziqda bitta nuqta (ratsional nuqta) mos qo'yilishini ko'rib o'tdik. Ammo to'g'ri chiziqda shunday nuqtalar borki, ulat birorta ham ratsional songa mos qo'yilgan bo'lmaydi. Shuni ko'rsataylik.

Tomoni bir birlikka teng bo'lgan $OABC$ kvadratni qaraylik (9 – chizma).



Bu kvadratning diagonali OB , r ning uzunligi $\sqrt{2}$ ga teng. Sirkulning uchini O nuqtaga qo'yib, radiusi OB ga teng bo'lgan aylana chizaylik. Bu aylana OD tomon joylashgan to'g'ri chiziqni D nuqtada kesadi.

$OA < OB$ bo'lgani uchun D nuqta A nuqtadan o'ngda joylashgan boladi. Ravshanki, $OB = OD = \sqrt{2}$ demak, D nuqtaga $\sqrt{2}$ son mos keladi. $\sqrt{2}$ esa ratsional son emas. Bu quyidagi teoremada isbotlanadi.

1-teorema. *Ratsional sonlar to'plamini φ da kvadrati 2 ga teng bo'lgan ratsional son mavjud emas.*

◀ Teskarisini fataz qilaylik, ya'mi φ to'plamda shunday qisqarmaydigan $\frac{p}{n}$ ($p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$) kasr ko'rinishda voziladigan ratsional son borki, bu

$$\left\{ \frac{p}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 2$$

tenglik o'rinni bo'lzin. Yuqoridagi tenglikni quvdagicha

$$p^2 > 2n^2$$

yozib olamiz. Bundan p juft son ekanligi ko'rindi. Demak, $p = 2m$ ($m \in \mathbb{Z}$). Natijada

$$n < 2m$$

hosil bo'ladi. Bu esa n sonning ham juft ekanligini ko'rsatadi. Demak, yuqoridagi farazdan p va n sonlar juft sonligi kelib chiqadi. Binobarin, ular uchun 2 umumiy ko'paytuvchi. Bu esa $\frac{p}{n}$ sonning qisqarmaydigan kasr ekaniga zid ►

Shunday qilib, to'g'ri chiziqda olingan har bir nuqtaga φ to'plamda unga mos keladigan ratsional son mavjud bo'lavermas ekan.

Ayni paytda

$$v^2 - 2 = 0$$

tenglama ham ratsional sonlar to'plamini φ da yechimiga ega bo'lmaydi. Bundan ratsional sonlar to'plamini kengaytirish zarurati kelib chiqadi. Demak, ratsional sonlar to'plamiga yangi tipdag'i sonlarni qo'shib, uni shunday kengaytirish kerakki, bir tomonidan, sonlarning bu kengaytirilgan to'plamida $v^2 - 2 = 0$ tenglamani vechish va shu kabi ko'pgina masalalarini hal qilish mumkin bo'lzin, ikkinchi tomonidan esa, ratsional sonlar to'plamining barcha xossalari sonlarning kengaytirilgan to'plamida ham o'rinni bo'lzin.

Ratsional sonlar to'plamini kengaytirishda bir-biriga ekvivalent bo'lgan bir nechta usullar mavjud (Koshi usuli, Kantor usuli, Veyershtass usuli hamda Dedekind usuli). Biz quyida Dedekind usulini keltiramiz.

2-§. Ratsional sonlar to'plamida kesim

1^º. Kesim. Irratsional son ta'rifи. φ to'plamda bajarilgan kesim tushunchasi bilan tanishaylik.

5-ta'rif. Ratsional sonlar to'plami \mathcal{A} shunday \mathcal{A} va \mathcal{A}' to'plamlarga ajratilsaki, bunda

- 1). $\mathcal{A} \neq \emptyset, \mathcal{A}' \neq \emptyset$,
- 2). $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}' = Q$,
- 3). $\forall a \in \mathcal{A} \forall a' \in \mathcal{A}' \Rightarrow a + a'$

shartlar qanoatatlantirilsa, \mathcal{A} va \mathcal{A}' to'plamlar Q to'plamida kesim bajaradi deb aytildi. Bunda \mathcal{A} to'plam kesimning quy'i sinfi, \mathcal{A}' esa yuqori sinfi deyiladi.

Masalan: 1). 5 va undan kichik bo'lgan barcha ratsional sonlardan iborat to'plam \mathcal{A} , 5 dan katta bo'lgan barcha ratsional sonlar to'plami \mathcal{A}' bo'ssin: $\mathcal{A} = \{r : r \in Q, r \leq 5\}, \mathcal{A}' = \{r : r \in Q, r > 5\}$. Bu \mathcal{A} va \mathcal{A}' to'plamlari uchun 5 ta'rifidagi uchchala shartning bajarlishini ko'tish qiyin emas. Demak, bunday tuzilgan \mathcal{A} va \mathcal{A}' to'plamlar Q da kesim bajatadi.

2). B to'plamni deb 1 va 2 ratsional sonlar orasidagi barcha ratsional sonlardan iborat bo'lgan $B = \{r : r \in Q, 1 < r < 2\}$ to'plamni, B' to'plamni deb 1 va undan kichik bo'lgan barcha ratsional sonlar hamda 2 va undan katta bo'lgan barcha ratsional sonlardan iborat

$$B' = \{r : r \in Q, r \leq 1\} \cup \{r : r \in Q, r \geq 2\}$$

to'plamni olaylik. Ravshanki, $B \neq \emptyset, B' \neq \emptyset$ hamda $B \cup B' = Q$, amma B to'plamidan olingan har bir ratsional son B' to'plamidan olingan istalgan ratsional sondan har doim kichik bo'lmasaganligi sababli, bunday tuzilgan B va B' to'plamlar Q to'plamida kesim bajarmaydi (kesim ta'rifidagi uchinchi shart bajarilmaydi).

3). Ushbu $C = \{r : r \in Q, r \leq 1\}, C' = \{r : r \in Q, 1 < r \leq 5\}$ to'plamlarni olaylik. Bunda $C \neq \emptyset, C' \neq \emptyset$ bo'lib, C to'plamining har bir elementi C' to'plamining istalgan elementidan kichikdir. Ammo $C \cup C' \neq Q$ bo'lgani uchun bu C va C' to'plamlar Q da kesim bajarmaydi (kesim ta'rifidagi ikkinchi shart bajarilmaydi).

2.1-misol. Aytaylik $r_0 \in Q$ bo'lib, $\mathcal{A} = \{r : r \in Q, r \leq r_0\}$ va $\mathcal{A}' = \{r : r \in Q, r > r_0\}$ bo'lsin. Bu to'plamlar Q da kesim bajarlishini ko'rsatilsin.

◀ Olingan $r_0 \in Q$ son \mathcal{A} to'plamiga tegishli. Binobarin $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Endi

$$r_0 \in Q, r_0 + 1 \in Q \text{ va } r_0 + 1 > r_0$$

bo'lishidan $r_0 + 1 \in \mathcal{A}'$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\mathcal{A}' \neq \emptyset$.

Ravshanki, $t \in T$ $\Rightarrow r \in Q(r = r_0) \wedge (r \in Q(r > r)) \neq 0$. Bu kesim ta'rifining ikkinchi sharti bajarilishini ko'rsatadi. Agar $\forall a \in A \forall a' \in A'$ bolsa, undan $a < r_0, a' > r_0$ ya'ni $a < r_0 < a'$ ekanli kilib chiqadi. Demak, $a < a'$ va kesim ta'rifning 3 sharti ham bajariladi. Shunday qilib, A va A' to'plamlari \varnothing da kesim bajaradi.►

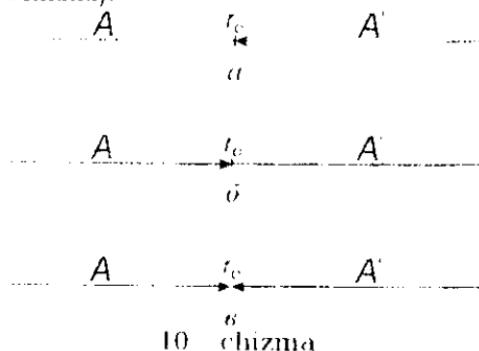
Odatda bu kesimni

$$r_0 \leftrightarrow (A, A')$$

kabi ham belgilanadi. Bu kesimning quiyi sinfi A to'plamda (uning elementlari orasida) eng katta element mavjud bolib, u r_0 ekanligi ravshandir. Ammo kesimning yuqori sinfi A' to'plamda esa (uning elementlari orasida) eng kichik element mavjud emas.

◀ $r_0 \leftrightarrow (A, A')$ kesimning yuqori sinfi A' elementlari orasida eng kichigi mavjud bolsin deb faroz qilamiz. Uni r^* deb belgilaylik: $r^* \in A'$, kesim ta'rifiga ko'ra $r_0 < r^*$ bo'ladi. Ratsional sonlar to'plami zinch to'plam bolgani uchun shunday t ratsional son mavjudki $r_0 < t < r^*$ bo'ladi. A' ning tuzilishiga binoan topilgan t uchun $t \in A'$ bo'lishi kerak. Demak, A' da r^* dan kichik bolgan t son mavjud. Vaholinki, biz r^* ni A' ning eng kichik elementi deb olgan edik.►

Bunday kesimlarni quiyi sinfi yopiq, yuqori sinfi ochiq kesimlar va r_0 sonni esa A to'plamni yopuvchi element deb ataladi (10(a) chizma).



2.2-misol. Ushbu $B = \{r \mid r \in Q, r < r_0\}$ va $B' = \{r \mid r \in Q, r > r_0\}$

to'plamlari \cap da kesim bajarishi ko'rsatilsin.

◀ Yuqorida keltirilgan 2.1 misoldagidek ko'rsatish mumkinki, \cap da bu B va B' to'plamlari (B, B') kesim bajariladi. ▶

Bu holda (B, B') kesimning quyi sinfi β to'plamda (uning elementlari orasida) eng katta element mavjud emas, kesimning yuqori sinfi B' to'plamning elementlari orasida eng kichik element mavjud. B quyi sinfi ochiq, yuqori sinfi B' esa yopiq bo'lib, r_0 ratsional son esa B' to'plamni yopuvchi element boladi. (10(6)-chizma).

2.3-misol. Kubi 2 dan kichik bolgan barcha ratsional sonlardan iborat to'plam C , kubi 2 dan katta bolgan barcha ratsional sonlardan iborat to'plam C' bo'lsin. Kubi 2 ga teng bolgan ratsional son mavjud emasligi 1-teoremadagidek isbot etiladi.

$$C = \{r : r \in Q, r^3 < 2\}, \quad C' = \{r : r \in Q, r^3 > 2\}$$

Bu C va C' to'plamlar \varnothing da kesim bajarish ko'rsatilsin.

◀ C va C' to'plamlar tuzilishidan kesim ta'rifidagi barcha shartlarining bajarilishini topamiz.

Bu misoldagi (C, C') kesimda, kesimning quyi sinfi C to'plam elementlari orasida eng katta element, shuningdek yuqori sinfi C' to'plam elementlari orasida eng kichik element mavjud emasligini ko'rsatamiz. C to'plamdan r_0 sonni ($r_0 \in \mathbb{Q}, r_0 > 1$) olib, uning yordamida ushbu

$$r_1 = r_0 + \frac{2 - r_0^3}{3r_0^2 + 3r_0 + 1} \quad \left(0 < \frac{2 - r_0^3}{3r_0^2 + 3r_0 + 1} < 1 \right)$$

ratsional sonni hosil qilamiz. Bu r_1 ratsional sonning kubi 2 dan kichik boladi: $r_1^3 < 2$. Haqiqatdan ham,

$$\begin{aligned} r_1^3 &= \left(r_0 + \frac{2 - r_0^3}{3r_0^2 + 3r_0 + 1} \right)^3 = r_0^3 + 3 \cdot \frac{2 - r_0^3}{3r_0^2 + 3r_0 + 1} \cdot r_0^2 + \\ &+ 3 \left(\frac{2 - r_0^3}{3r_0^2 + 3r_0 + 1} \right)^2 \cdot r_0 + \left(\frac{2 - r_0^3}{3r_0^2 + 3r_0 + 1} \right)^3 < r_0^3 + 3r_0^2 \cdot \frac{2 - r_0^3}{3r_0^2 + 3r_0 + 1} + \\ &+ 3r_0 \cdot \frac{2 - r_0^3}{3r_0^2 + 3r_0 + 1} + \frac{2 - r_0^3}{3r_0^2 + 3r_0 + 1} = r_0^3 + \frac{2 - r_0^3}{3r_0^2 + 3r_0 + 1} \cdot (3r_0^2 + 3r_0 + 1) = 2 \end{aligned}$$

Demak, $r_0 < r_1 \in C$ ya'ni $r_0 \in C$ sondan katta bolgan r_1 ratsional

son ham \cap toplamga tegishli bo'ladi.

Shunday qilib, ictiyoriy $r_0 \in C'$ ratsional son berilganda ham kamida bitta shunday r'_0 ratsional son topilar ekanki, u $r'_0 < r_0$ va $r'_0 \in C'$. Bu esa C' to'plamning elementlari orasida eng kattasi mavjud emasligini ko'satadi.

Endi $C'' = C' \setminus \{r_0\}$ kesimning yuqori sınıf \cap to'plamning elementlari orasida eng kichigi mavjud emasligini isbotlaymiz. $r'_0 \in C''$, $(r'_0 + 2) \in C''$ bolsin. Demak, $r'^3_0 > 2$.

Ushbu

$$r'^3_0 - (r'^3_0 - 2) = \left(\frac{r'^3_0 - 2}{3r'_0} \right) \cdot 3r'_0 > 1$$

ratsional sonni qarataylik. Bu r'_0 ratsional sonning kubi 2 dan katta boladi: $r'^3_0 > 2$. Haqiqotan ham,

$$\begin{aligned} r'^3_0 - \left(\frac{r'^3_0 - 2}{3r'_0} \right)^3 &= r'^3_0 + 3 \frac{r'^3_0 - 2}{3r'_0} \cdot r'^2_0 + 3 \left(\frac{r'^3_0 - 2}{3r'_0} \right)^2 \cdot r'_0 \\ &\left(\frac{r'^3_0 - 2}{3r'_0} \right)^3 > r'^3_0 - (r'^3_0 - 2) = 2 \end{aligned}$$

Demak, $r'_0 < r'_0 \in C''$ ya'ni $r'_0 \in C''$ sondan kichik bolgan r'_0 ratsional son ham C'' to'plamga tegishli bo'ladi.

Shunday qilib, ictiyoriy $r'_0 \in C''$ ratsional son berilganda ham kamida bitta, shunday r'_0 ratsional son topilar ekanki, u $r'_0 < r'_0$ va $r'_0 \in C'$. Bu esa C' to'plamning elementlari orasida eng kichigi mavjud emasligini anglatadi.►

Shunday qilib, ko'ssatilayotgan misolda (C, C') kesim uchun quyi sınıf C ham, yuqori sınıf C' ham ochiq bo'lib, C va C' to'plamlarning yopuvchi elementlari mavjud emas (10(b)-chiziga).

2.4-misol. Ratsional sonlar to'plami \mathcal{Q} da ham quyi sınıf $\cap D$ to'plamining elementlari orasida eng kattasi, ham yuqori sınıf $\cap D'$ to'plamining elementlari orasida eng kichigi bolgan (D, D') kesim mavjud emasligi isbotlansin.

◀ Faraz qilaylik. \mathcal{Q} to'plamda shunday (D, D') kesim mavjud bo'lsinki, a_n soni D to'plamning eng katta elementi, a'_0 esa D' to'plamning eng kichik elementi bolsin. U holda kesim

ta'rifiga ko'ra $a_0 < a'_0$ tengsizlik o'nnli bo'ladi.

Ravshanki,

$$a_0 < \frac{a_0 + a'_0}{2} < a'_0$$

Bunda $\frac{a_0 + a'_0}{2}$ ratsional son v to'plamiga tegishli emas.

chunki a_0 son v to'plamning eng katta elementi va

$a_0 < \frac{a_0 + a'_0}{2}$. Shuningdek, $\frac{a_0 + a'_0}{2}$ ratsional son v' to'plamiga

ham tegishli emas, chunki a'_0 son v' to'plamning eng kichik

elementi va $\frac{a_0 + a'_0}{2} < a'_0$. Demak, $\frac{a_0 + a'_0}{2}$ ratsional son v

to'plamiga ham, v' to'plamiga ham tegishli bo'lmaydi. Bu esa kesim ta'rifiga ziddir. Shunday qilib, bir vaqtida quyi sinfida eng katta element, yuqori sinfida esa eng kichik element bo'lgan kesim mavjud emas.►

Ratsional sonlari to'plami Q da bajarilgan kesim ta'rifi va kesimga keltirilgan misollardan quyidagi xulosani keltirib chiqarish mumkin. Q to'plamda bajarilgan (A, A') kesim faqat uch turli bo'lishi mumkin:

1). Kesimning quyi sinfi A da eng katta element (r_0 ratsional son) mavjud, kesimning yuqori sinfi A' da esa eng kichik element mavjud emas. Bunda r_0 ratsional son quyi sinf yopuvchi elementi bo'ladi.

2). Kesimning quyi sinfi A da eng katta element mavjud emas, kesimning yuqori sinfi A' da esa kichik element (r'_0 ratsional son) mavjud. Bunda r'_0 ratsional son yuqori sinf A' ning yopuvchi elementi bo'ladi.

3). Kesimning quyi sinfi A da eng katta element mavjud emas, kesimning yuqori sinfi A' da eng kichik element mavjud emas. Bunda quyi sinf A da, yuqori sinf A' da yopuvchi elementlar mavjud emas.

Birinchi va ikkinchi tur kesmlarda ularning quyi yoki yuqori sinflari yopiq bo'lib, yopuvchi elementlarni bir sinfdan ikkinchi sinfga o'tkazib, har doim bir turdag'i kesimga - quyi sinfi ochiq, yuqori sinfi esa yopiq bo'lgan kesimga keltirish mumkin. Biz bundan buyon birinchi va ikkinchi turi kesmlari

o'miga bir tur kesmini, quyi sinfdan eng katta element mavjud bo'lмаган (ochiq sınıf), yuqori sinfdan esa eng kichik element mavjud bolgan (yopiq sınıf) kesimni qaraymiz. Bunday kesimlarni ratsional kesim deb ataymiz.

Ixtiyoriy $\varphi \in Q$ ratsional son uchun φ to'plamda har doim (A, A') kesim bajarilishi mumkinki, bu kesim ratsional kesim boladi, bunda A to'plam ochiq sınıf, A' to'plam yopiq sınıf. yopuvchi element r sonning o'zi boladi. Demak, φ to'plamda olingan har bir ratsional songa φ da bajarilgan ratsional kesim mos keladi.

Aksinchal, φ to'plamda (A, A') kesim bajarilgan bo'lib, kesimning quyi sınıfı A ochiq, yuqori sınıfı A' yopiq hamda yopuvchi element r bolsa, bu kesim r ratsional sonni ifodalaydi.

Demak, φ da bajarilgan har bir ratsional kesim bitta ratsional sonni aniqlaydi.

Shunday qilib, φ to'plami elementlari bilan Q to'plamda bajarilgan ratsional kesimlar to'plamining elementlari o'zaro bir qiymatli moslikda boladi.

Ratsional sonlar to'plami Q da bajarilgan uchinchi tur kesim quyi sint ham, yuqori sint ham ochiq bolgan kesim irratsional kesim deyiladi.

6-ta'rif. Ratsional sonlar to'plami Q da bajarilgan irratsional kesim *irratsional sonni* aniqlaydi deyiladi.

Irratsional sonlar to'plamini U harf bilan belgilaylik.

3-§. Haqiqiy sonlar. Haqiqiy sonlar to'plamining tartiblanganlik va zichlik xossalari.

Ratsional sonlar to'plami Q da bajarilgan kesim faqat ikki tur ratsional yoki irratsional sonni aniqlashini biz yuqorida ko'ridik.

7-ta'rif. Ratsional hamda irratsional sonlar umumiy nom bilan *haqiqiy sonlar* deb ataladi.

Barcha haqiqiy sonlar to'plami R harfi bilan belgilanadi. Ta'rifga ko'ra, $R = Q \cup U$, R - lotincha Realis - "haqiqiy" degan ma'noni anglatuvchi so'zning bosh harfi.

Shunday qilib, ratsional sonlar to'plami Q ni haqiqiy sonlar to'plami R gacha kengaytirildi.

10. Haqiqiy sonlar to'plamining tartiblanganligi. Avval haqiqiy sonlar to'plamida tenglik, katta va kichik tushunchalarini kintamiz.

Aytaylik, x va y haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin: $x \in R$ va $y \in R$. Ma'lumki, har bu haqiqiy son ratsional sonlar to'plami da bajarilgan kesim bilan aniqlanadi. Binobarin, x va y ham aniqlovchi (A, A') va (B, B') kesimlar berilgan:

$$x = (A, A'), \quad y = (B, B')$$

Bu kesimlarning quyidagi sinflari A, B lar uchun yoki $A \cap B$ (bu holda, albatta, $A \cap B$ bo'ladi), yoki $A \neq B$ (bu holda $A \neq B'$) munosabatlardan bitti o'tinli bo'ladi.

Agar $A \neq B$ bolsa, (A, A') va (B, B') kesimlar bir-biriga teng deyiladi: $(A, A') = (B, B')$. Bu holda ular aniqlangan x va y haqiqiy sonlar ham bir-biriga teng deyiladi: $x = y$.

Endi $A \neq B$ bo'lsin. Unda shunday $r_1 \in A$ borki, $r_1 \notin B$ bo'ladi, yoki shunday $r_2 \in B$ borki, $r_2 \notin A$ bo'ladi. Birinchi holda $r_1 \in A \setminus B'$ ekanligi kelib chiqadi. Kesimning ta'rifiga ko'rta, bu holda $B \subset A$ bo'ladi. Ikkinci holda esa $r_2 \in B \setminus A'$ ekanligidan $A \subset B$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, $A \neq B$ bo'lganda yoki $A \subset B$ yoki $B \subset A$ bo'lar ekan.

Agar $A \subset B$ bolsa, (A, A') kesim (B, B') kesimdan kichik deyiladi. Bu holda x haqiqiy son y haqiqiy sondan kichik deb ataladi: $x < y$.

Agar $A \supset B$ bolsa, (A, A') kesim (B, B') kesimdan katta deyiladi. Bu holda x haqiqiy son y haqiqiy sondan katta deyiladi: $x > y$.

Shunday qilib, ixtiyotiy ikki x va y haqiqiy sonlar berilgan bolsa, unda

$$x \neq y, \quad x < y, \quad x > y$$

munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o'tinli bo'ladi.

Endi $x \in R, y \in R, z \in R$ sonlar uchun ushbu $x < y, y < z$ tensizliklardan $x < z$ tengsizlik kelib chiqishni isbotlaymiz. x, y, z sonlarni aniqlovchi kesimlar

$$x = (A, A'), \quad y = (B, B'), \quad z = (C, C')$$

bo'lsin.

Aytaylik, $x < y$ va $y < z$ bo'lsin. Ta'rifga asosan

$$x < y \Rightarrow A \subset B, \quad y < z \Rightarrow B \subset C$$

bo'ldi. Ravshanki.

$$A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C.$$

Bundan $x < y$ bo'lishi kelib chiqadi

x -to'plamning bunday xususiyatga ega bo'lishi uning tartiblanganligini ifodalaydi.

2º. Haqiqiy sonlar to'plamining zinchligi. Faraz qilaylik, $x \in R, y \in R$ va $x < y$ bolsin. U holda shunday r ratsional son mavjudki, shu son uchun ushbu $x < z < y$ tengsizliklari o'rini bo'ldi. Shuni isbotlaylik.

x -to'plamda bajarilgan (A, A') , (B, B') kesimlari x va y sonlarni aniqlansin: $x \in (A, A')$, $y \in (B, B')$. U holda $x < y$ dan $A \subset B$ kelib chiqadi Demak, B -to'plamda shunday ratsional son $r_0 \in B$ mavjudki, $r_0 \notin A$ bo'ldi. $r_0 \in B$. Unda $r_0 \in A$ bo'ldi va demak, $x < r_0$ tensizlik o'rini bo'ldi. Ikkinci tomonidan, $y \in (B, B')$, $r_1 \in B$. B -to'plamning elementlari orasida eng kattasi mavjud emasligi sababli, shunday ratsional son $r_1 \in B$ mavjudki, $r_1 < r_0$ va $r_1 < y$ bo'ldi. Natijada $x < r_0 < y$ tengsizliklarga ega bo'lamiz. Bundan esa $x < r_0 < y$ ekanligini ko'ramiz. Shu usul bilan $x \in R, y \in R$ va $x < y$ bo'lganda ham $x < r < y$ munosabatlarni qanoatlantiruvchi ratsional son r mavjud ekanligi ko'rsatiladi. Shunday qilib, ixtiyoriy ikkita bii biriga teng bo'lmagan haqiqiy sonlar orasida kamida bitta haqiqiy son mavjud. Bundan esa ular orasida cheksiz ko'p haqiqiy son mavjudligi kelib chiqadi. R -to'plamning bunday xususiyatiga ega bo'lishi uning zinch to'plam ekanini ifodalaydi.

4-§. Haqiqiy sonlar to'plamining to'liqligi. Dedekind teoremasi

Agar haqiqiy sonlar to'plami R da ham bajarilgan kesim tushunchasi kiritilsa, ratsional sonlar to'plami Q da sodir bo'lganidek, R ni ham kengaytirish zarurati sodir bo'ladimi yoki yo'qmi degan tabiiy savol tug'iladi. Quyida biz bunday holat bo'lmashagini, ya'ni R da bajarilgan har qanday kesim faqat birinchi tur kesim bo'lishini ko'rsatamiz. Odadta bu xossa haqiqiy sonlar to'plami R ning to'liqlik xossasi deviladi. Dastavval, R da bajarilgan kesim tushunchasi bilan tanishaylik.

8-ta'rif. Haqiqiy sonlar to'plami R shunday E va E' to'plamlarga ajratilsaki, unda

- 1) $E \neq \emptyset, E' \neq \emptyset,$
- 2) $E \cup E' = R$
- 3) $\forall x \in E \ \forall x' \in E' \ x < x'$

shartlar bajarilsa, E va E' to'plamlari R to'plamida kesim bajaradi deviladi va (E, E') kabi belgihanadi (\Leftarrow ta'rifga qarang)

Avvalgidek, E to'plam kesimning quyi sinfi, E' to'plam esa kesimning yuqori sinfi deyiladi.

Masalan, ushbu

$$E = \{x : x \in R, x \leq x_0\}, \quad E' = \{x : x \in R, x > x_0\} \quad (x_0 \in R)$$

to'plamlar R da (E, E') kesim bajaradi. Bu kesimning quyi sinfi E da eng katta element (y_{x_0} ga teng) bo'lib, yuqori sinfi E' da eng kichik element boilmaydi.

Ushbu

$$E = \{x : x \in R, x \leq x_0\}, \quad E' = \{x : x \in R, x > x_0\} \quad (x_0 \in R)$$

to'plamlar ham R da (E, E') kesimini bajaradi. Bu kesimning quyi sinfi E da eng katta element bo'lmasdan, yuqori sinfi E' da eng kichik element (y_{x_0} ga teng) bo'ladi.

2.5-misol. Haqiqiy sonlar to'plami R da quyi sint G to'plamining elementlari orasida eng katta, yuqori sinif G' to'plamining elementlari orasida eng kichik element bor bo'lgan (G, G') kesim mavjud emasligi isbotlansin.

◀ (G, G') kesim R da bajarilgan kesim bo'lib, unda G ning eng katta elementi x_0 va G' ning eng kichik elementi y_0 bo'lsin. Kesim ta'rifiga ko'ta, $x_0 < y_0$ bo'ladi. R to'plamining zinchlik xossasiga binoan shunday $u \in R$ son mavjudki, $x_0 < u < y_0$ bo'ladi. Keyingi tengsizliklardan ko'rindaniki, u son G ga tegishli emas, chunki x_0 son G da eng katta element va $x_0 < u$. Shuningdek, $u < y_0$ va y_0 son G' to'plamining eng kichik elementi ekanidan u sonning G' ga tegishli emasligi kelib chiqadi. Shunday qilib, $u \in R$ son G va G' to'plamlarning birottasiga ham tegishli boilmaydi. Bundan G va G' to'plamlar R da kesim bajarilmasligi kelib chiqadi. Bu esa yuqoridagi fatazga zid. ►

Demak, R to'plamda bir vaqtda quyi hamda yuqori sinflari yopiq bo'lgan kesim mavjud emas.

2-teorema (Dedekind teoremasi). Haqiqiy sonlar to'plami R da bajarilgan har qanday (E, E') kesim uchun taqat quyidagi ikki holdan biri bo'lishi munikin:

a). Kesimning quiyi sinfi α da eng katta element mavjud, yuqori sinfi β da esa eng kichik element mavjud emas:

b). Kesimning quiyi sinfi α da eng katta element mavjud emas, yuqori sinfi β da esa eng kichik element mavjud.

◀ Faraz qilaylik, R da biror (E, E') kesim bajarilgan bolsin. E to'plamning barcha ratsional sonlari to'plamini A , E' to'plamning barcha ratsional sonlari to'plamini A' deylik Ravshanki, $A \subset E, A' \subset E'$. Bu tuzilgan A va A' to'plamlari Q da (A, A') kesim bajarishtini ko'sataimiz. Avvalo A va A' to'plamlarning bo'sh emasligini isbotlaylik.

$E \neq \emptyset$ bolgani uchun $\exists x_0 \in R, x_0 \in E$. Agar x_0 ratsional son bolsa, $x_0 \in A$ boilib, $A \neq \emptyset$ bo'ladi. Agar x_0 irratsional son bolsa, ta'rifiga ko'ta u Q to'plamdagagi ikkinchi tur kesim bilan aniqlanadi. Demak, $x_0 = (A_0, B_0)$. Bunda $A_0 \neq \emptyset$ bolgani sababli, $\exists r_0 \in Q, r_0 \in A_0$ bo'ladi. Ammodo $r_0 < x_0$ va $x_0 \in E$ bolganida esa $r_0 \in A$ ekanini kelib chiqadi. Demak, $A \neq \emptyset$ xuddi shuningdek, $A' \neq \emptyset$ ekanini ham ko'satiladi. $R = E \cup E'$ dan va A, A' to'plamlarning tuzilishiga ko'rta $A \cup A' = Q$ bo'ladi.

(E, E') kesim α da bajarilgan kesimligidan va $A \subset E, A' \subset E'$ dan mos ravishda A va A' to'plamlarga tegishli α va α' elementlari uchun α, α' tengsizlik o'rini. Demak, (A, A') kesim. Bu kesim biror haqiqiy α sonni (ratsional yoki irratsional sonni) aniqlaydi: $\alpha \in (A, A'), \alpha \in R$. Kesimning 2) shartiga ko'ta α son yoki E to'plamga, yoki E' to'plamga tegishli bo'ladi. $\alpha \in E$ bolsin. Endi α son β to'plam elementlari orasida eng kattasi ekanini isbotlaymiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya'nii α son β to'plam E elementlari orasida eng kattasi bo'lmasin. Unda $\exists x \in E, \alpha < x$ bo'ladi. Haqiqiy sonlari to'plami zinchligiga ko'rta shunday r ratsional son mavjudki, $\alpha < r < x$ tengsizliklar o'rini bo'ladi. Ushbu $r \in E$ va $r < x$ munosabatlardan $r \in E'$ va demak, $r \in A$ kelib chiqadi. Ammodo $\alpha \in (A, A')$ kesimning quiyi sinfi α to'plamdagagi r son bu (A, A') kesim aniqlagan sondan katta bo'lishi mumkin emas. Bu ziddiyatlik. Demak, α son β to'plam elementlari orasida eng kaitasi bo'ladi.

Shunga oxshash mulohaza bilan $\alpha \in E'$ bolganda α son E' to'plam elementlari orasida eng kichigi ekanini ko'satiladi. ►

Dedekind teoremasiga ko'ta haqiqiy sonlar to'plami R da bajarilgan har qanday (E, E') kesim uchun ikki hol bo'ladi.

Bunda ε yoki r sinflar ning yopuvchi elementlarni biridan ikkinchisiga o'tkazish yoki bilan bitta holga, kesimni bir tur kesimga keltirish mumkin. Buzda bajarilgan har qanday kesim (E, E') da kesimning quvi sinfi E da eng katta element yo'q. Yuqori sinif E' da esa eng kichik element bor bo'lgan kesim deb qarataymiz. Bu esa Dedekind teoremasini quyidagicha ham ifodalash mumkinligini ko'rsatadi.

3-teorema. R da bajarilgan har qanday (E, E') kesim yagona haqiqiy sonni aniqlaydi.

$\forall \alpha \in R$ son yordamida har doim ε da α (E, E') kesim bajarish munkinki, bunda haqiqiy son α kesimning yuqori sinfi E' ga tegishli bo'lib, uning eng kichik elementi bo'ladi. Aksincha, R da (E, E') kesim bajarilgan bo'ssin. 2 teoremaga va yuqoridagi kelishuvimizga ko'ra bu kesimning yuqori sinfi E' da eng kichik element mavjud bo'lib, kesim shu sonni ifodalaydi.

Demak, haqiqiy sonlar to'plami R shu to'plamda bajarilgan kesimlar to'plami bilan o'zaro bir qiymatli mostikda bo'ladi.

5-§. Sonli to'plamlarning chegaralari

1⁰. Sonli to'plamlar. Elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan to'plam sonli to'plam deyiladi. Matematik analiz kursida asosan sonli to'plamlar qaraladi.

Masalan,

$$A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}, B = \{x : x \in R, x^2 - x < 0\}$$

shuningdek

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

lar sonli to'plamlar bo'ladi.

Kurs davomida har doim uchrab turadigan sonli to'plamlarni keltiramiz.

Ikki $a \in R, b \in R$ son berilgan bo'lib, $a < b$ bo'lsin. Ushbu

$$\{x : x \in R, a \leq x \leq b\}$$

to'plam segment deb ataladi va u [$a, b]$ kabi belgilanadi:

$$[a, b] = \{x : x \in R, a \leq x \leq b\}$$

Bunda a va b sonlar [$a, b]$ segmentning chegaraviy nuqtalari yoki chegaralari deyiladi.

Ushbu

$$\{x : x \in R, a < x < b\}$$

to'plam interval deyiladi va $U(a, b)$ kabi belgilanadi:

$$U(a, b) = \{x : x \in R, a < x < b\}$$

Quyidagi

$$\{x : x \in R, a \leq x < b\}, \{x : x \in R, a < x \leq b\}$$

to'plamlar yarim segment deyiladi va ulai mos ravishda $[a, b)$ va $(a, b]$ kabi belgilanadi:

$$[a, b) = \{x : x \in R, a \leq x < b\}, (a, b] = \{x : x \in R, a < x \leq b\}$$

Keyingi mulohazalarda asosan sonli to'plamlar bilan ish ko'rildi. Shuning uchun bundan keyin E "sonli to'plam" deyish o'miga qisqacha "to'plam" so'zini yoki $E \subset R$ belgilashni ishlatalimiz.

2º. To'plamning aniq yuqori va aniq quyisi chegaralari.
Biror $E \subset R$ to'plam berilgan bo'linsin.

9-ta'rif. Agar shunday M son mavjud bo'lsaki, $\forall x \in E$ uchun $x \leq M$ tengsizlik bajarilsa, E to'plam yuqoridan chegaralangan deyiladi, M son esa E ning yuqori chegarasi deyiladi.

Bu ta'nti qisqacha, quyidagicha aytса bo'ladi, agar

$$\exists M \in R \quad \forall x \in E : x \leq M$$

bo'lsa, E to'plam yuqoridan chegaralangan deyiladi, M son esa E ning yuqori chegarasi deyiladi

10-ta'rif. Agar

$$\forall M \in R, \exists x_0 \in E : x_0 \geq M$$

bo'lsa, E to'plam yuqoridan chegaralanmagan deyiladi.

11-ta'rif. Agar

$$\exists m \in R, \forall x \in E : x \geq m$$

bo'lsa, E to'plam quyidan chegaralangan deyiladi, m son esa E ning quyisi chegarasi deyiladi.

12-ta'rif. Agar

$$\forall m \in R, \exists x_0 \in E : x_0 < m$$

bo'lsa, E to'plam quyidan chegaralanmagan deyiladi.

13-ta'rif. Agar $E \subset R$ to'plam ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, E to'plam chegaralangan deyiladi.

Masalan,

$$E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$$

to'plam chegaralangan;

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

to'plam quyidan chegaralangan, yuqoridan chegaralanmagan;

$$F = \{x : x \in R, x > 0\}$$

to'plam esa quyidan chegaralanganiga, yuqoridan chegaralangan to'plam boladi.

2.6-misol. Ushbu

$$A = \left\{ n \mid n \in \mathbb{N}, \frac{n}{n^2 + 1} \right\}$$

to'plamning chegaralanganligi ko'rsatilsin.

◀ Ravshanki, $\forall n \in \mathbb{N}$ da

$$\frac{n}{n^2 + 1} < 1$$

boladi. Demak, \exists to'plam quyidan chegaralangan.

Agar

$$0 \leq (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \Rightarrow 2n \leq n^2 + 1 \Rightarrow \frac{n}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda \exists to'plamning yuqoridan chegaralanganligini topamiz. ►

Yuqorida kelitirilgan ta'rif va misollardan ko'rindik, agar E to'plam yuqoridan chegaralangan bolsa, uning yuqori chegarasi cheksiz ko'p boladi. Bu tasdiq u'sondan katta bolgan har qanday haqiqiy son E to'plamning yuqori chegarasi bo'la olishidan kelib chiqadi.

Shuningdek, agar E to'plam quyidan chegaralangan bolsa, uning quyi chegarasi ham cheksiz ko'p boladi. Bu esa M sondan kichik bolgan har qanday haqiqiy son E to'plamning quyi chegarasi bo'la olishidan kelib chiqadi.

4-teorema. *Har qanday yuqoridan chegaralangan to'plam uchun uning yuqori chegaralari orasida eng kichigi mavjud.*

◀ E to'plam yuqoridan chegaralangan bo'lsin, ya'ni shunday haqiqiy M son mavjudki, $\forall e \in E$ uchun $e \leq M$ tengsizlik o'rinni.

E ning elementlari orasida eng kattasi mavjud bo'lsin. Uni x_0 deb olaylik. Demak, $\forall x \in E$ uchun $x \leq x_0$ bo'lib, bu esa x_0 son E ning yuqori chegaralarini qatorida bo'lishini ko'rsatadi. Ammo E to'plamning yuqori chegarasi bo'lmissa har qanday M son x_0 sondan kichik bo'lmaydi, ya'ni $x_0 \leq M$ chunki $x_0 \in E$. Bu esa x_0 son E ning yuqori chegaralarini orasida eng kichigi ekanligini bildiradi. Bu holda teorema isbot bolди.

Endi E to'plam elementlari orasida eng kattasi mavjud bo'lmasagan holni qaraymiz. E ning yuqori chegaralaridan iborat to'plam E' bo'lsin. Bu E' to'plamiga tegishli bo'lmasagan barcha

haqiqiy sonlardan iborat to'plamni ε -deylik. Ravshanki, $E \subset R$, E va E' to'plamlar R da (E, E') kesim bajaradi. $E \subset E'$ va E yuqoridan chegaralanganligidan $E \neq \emptyset, E' \neq \emptyset$ ekani kelib chiqadi. shuningdek, E va E' tarning tuzilishidan esa $E \subset E' \subset R$ va $\forall x \in E, \forall x' \in E' \Rightarrow x < x'$ bo'ladi. Dedekind teoremasiga ko'ra bu (E, E') kesimi bitor α haqiqiy sonni aniqlaydi: $\alpha = (E, E')$. Bu α son tabiiyki, E toplamning va demak, $E \subset E'$ bolganidan ε toplamning ham yuqori chegarasidir, ya'nisi $\alpha \in E'$ shu bilan birga u E' toplamning elementlari orasida eng kichigi. ►

14-ta'rif. Yuqoridan chegaralangan E toplamning yuqori chegaralarining eng kichigi E ning *aniq yuqori chegarasi* deb ataladi. $U \sup E$ kabi belgilanadi.

Bu lotincha supremum "eng yuqori" degan ma'noni anglatuvchi so'zdan olingan.

5-teorema. *Har qanday quyidan chegaralangan to'plam uchun uning quyi chegaralari orasida eng kattasi mavjud.*

Bu teorema yuqoridagi 4-teorema kabi isbotlanadi. Uning isbotini o'quvchiga havola qilamiz.

15-ta'rif. Quyidan chegaralangan E toplamning quyi chegaralarining eng kattasi E ning *aniq quyi chegarasi* deb ataladi. $U \inf E$ kabi belgilanadi.

Bu lotincha infimum "eng quyi" degan ma'noni anglatuvchi so'zdan olingan.

Yuqorida keltirilgan teoremlardan, har qanday chegaralangan E toplamning aniq yuqori va aniq quyi chegaralari mavjud bo'lib,

$$\inf E \leq \sup E$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Endi toplamning aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralarining muhim xossasini keltiramiz.

Aytaylik, $E \subset R$ toplam uchun

$$a = \sup E \quad (a \in R)$$

bo'lsin. U holda:

1) $\forall x \in E$ da $x \leq a$,

2) $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham, shunday $x' \in E$ son topiladiki, $x' > a - \varepsilon$ bo'ladi.

◀ To'plamning aniq yuqori chegarasi ta'rifidan $\forall x \in E$ uchun $x \leq a$ bo'ladi.

$a = \sup E$ bo'lsa ham 2) -shart bajarilmasini deb faraz

qilaylik. Unda, shunday $x > 0$ topildi, $\forall \epsilon E$ uchun $\exists x > 0$ bo'lib, $x - \sup E$ boladi. Natijada $x < x - \epsilon$ ma'nosiz tengsizlikka, ya'ni ziddiyatga kelamiz. Demak, 2) - shart o'rini boladi. ►

Ishbotlash mumkinki, agar $E \subset R$ va $a \in R$ uchun 1) ..., 2) shartlar bajarilsa,

$$a = \sup E$$

boladi.

Aytaylik, $E \subset R$ to'plam uchun

$$b = \inf E \quad (b \in R)$$

bo'lsin. U holda:

$$1) \forall x \in E \text{ da } x \geq b$$

2) $\forall \epsilon > 0$ son olinganda ham shunday $x' \in E$ son topiladiki, $x' < b + \epsilon$ boladi.

Bu tasdiq yuqorida kabi isbotlanadi. Ishbotlash mumkinki, agar $E \subset R$ va $b \in R$ uchun 1) ..., 2) - shartlar bajarilsa

$$b = \inf E$$

boladi.

2.7-misol. Ushbu

$$B = \left\{ n : n \in N, \frac{n^2}{n^2 + 4} \right\}$$

to'plamning aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralari topilsin.

◀ $\forall n \in N$ da

$$0 < \frac{n^2}{n^2 + 4} < 1$$

boladi. Demak, B to'plam chegaralangan. Yuqorida keltirilgan teoremlalarga ko'ra bu to'plamning aniq chegaralari mayjud bo'ldi. Ayni paytda:

$$1) \forall n \in N \text{ uchun } \frac{n^2}{n^2 + 4} < 1$$

$$2) \forall \epsilon > 0 \text{ son olinganda } n_0 \in N \text{ ni}$$

$$n_0 = \left\lceil \sqrt{\frac{4(1-\epsilon)}{\epsilon}} \right\rceil$$

deb olinsa, unda $n > n_0$ da

$$\frac{n^2}{n^2 + 4} > 1 - \epsilon$$

boladi. Demak,

$$\sup B = 1$$

Xuddi shunga o'xshash

$$\inf B = 0$$

bölibshi ko'rsatiladi. ►

Haqiqiy sonlar to'plami \mathbb{Q} tarkibiqa α va β sunvollarini uchun $x > \alpha$ va $x < \beta$ xususiyat bilan qo'shib, R to'plamni hosil qilamiz:

$$R = R \cup \{\alpha\} \cup \{\beta\} \cup \{x\}$$

Bu sunvollarining kiritilishi chegaralanmagan to'plamlarning aniq yuqori va aniq quyisi chegaralarini kiritish imkonini beradi.

Agar E yuqoridan chegaralanmagan bolsa, $\sup E = +\infty$, quyidan chegaralanmagan bolsa, $\inf E = -\infty$ deb olinadi. Demak, shu kelishuvimizga ko'ra

$\sup N = \sup\{1, 2, 3, \dots\} = +\infty$, $\inf\{x : x \in R, x < 0\} = -\infty$ boladi.

6-§. Haqiqiy sonlar ustida amallar

1º. Haqiqiy sonlar yig'indisi. Ikki α va β haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin. Bu sonlar ratsional sonlar to'plami \mathbb{Q} da bajarilgan ushbu $\alpha = (A, A')$, $\beta = (B, B')$ kesimlari bilan aniqlansin. Kesimlarning quyisi sinflari A va B to'plamlardan mos ravishda α va β sonlarini olib, ularning yig'indisi $c = a+b$ ni tuzamiz. Bunday yig'indilardan iborat to'plamni C bilan:

$C = \{c : c \in \mathbb{Q}, c = a+b, a \in A, b \in B\}$, so'nq C to'plamni esa C' bilan ($C' \subset Q$) belgilayiniz. Tuzilishiga ko'ra $C = C' \cup C''$.

Endi C va C' to'plamlari \mathbb{Q} da (C, C') kesim bajarishini ko'rsatamiz. $\alpha = (A, A')$, $\beta = (B, B')$ lar \mathbb{Q} da bajarilgan kesimlar bo'lgani uchun

$$A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset; A \cup A' = Q; a \in A, a' \in A' \Rightarrow a < a',$$

shuningdek,

$$B \neq \emptyset, B' \neq \emptyset; B \cup B' = Q; b \in B, b' \in B' \Rightarrow b < b',$$

bo'lib, undan avvalo $C \neq \emptyset$ ekanli kelib chiqadi. So'ngra har doim $a+b < a'+b'$ bo'lgani uchun C to'plam yuqoridan chegaralangan bo'lib, $\sup C = +\infty$ mavjuddir. Amimo A va B to'plam elementlari orasida eng kattasi mavjud bo'lмагани uchun $a+b < y$, ($a \in A, b \in B$) bo'ladidi. Unda $a'+b' \geq y$, ($a' \in A', b' \in B'$), bo'lib, $a'+b' \in C'$. Bunday $a'+b' \in Q$, $C = C'$. Demak, $C \neq \emptyset$ shuningdek, $c = a+b \in C$ va $c < c' = a'+b' \in Q \cap C$ ekaniga ishonch hosil qilamiz.

Shunday qilib, C va C' to'plamlari \mathbb{Q} da (C, C') kesim bajaradi.

16-ta'rif. (C, C') kesim bilan aniqlanadigan γ haqiqiy son

α va β haqiqiy sonlarning yigindisi deb ataladi. Yigindi $\alpha + \beta$ kabi belgilanadi.

Endi haqiqiy sonlarni qoshish amalining ba'zi xossalarni keltiramiz. Faraz qilaylik, $\alpha \in R, \beta \in R, \delta \in R$ bo'ssin. U holda quyidagi tengliklar o'rinni:

$$1) \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha;$$

$$2) \quad (\alpha + \beta) + \delta = \alpha + (\beta + \delta);$$

3) Nol soni uchun

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$

Biz ulardan binining, masalan, 3) ning isbotini keltiramiz.

◀ Ma'lumki, 0 soni Q to'plamda (Q_-, Q_+) kesim bilan aniqlanadi:

$$Q_- = \{r : r \in Q, r < 0\}, Q_+ = \{r : r \in Q, r \geq 0\},$$

$$0 = (Q_-, Q_+)$$

$\alpha \in R$ son esa $\alpha = (A, A')$ kesim bilan aniqlansin. Ta'rifga ko'ra $\alpha + 0 = (C, C')$ bo'lib, bunda

$$C = \{a + r; a \in A, r \in Q\}$$

Ammo $\alpha \in R, r \in Q$ bolganda $a + r < a$ munosabat o'rinni. Shuning uchun $C \subset A$ bo'ladi. Bundan

$$\alpha + 0 \leq \alpha \quad (*)$$

ekani kelib chiqadi.

A to'plamidan ixtiyoriy a sonni olamiz. A da eng katta element mavjud bo'lмагани учун $a < a_i$ tengsizlikni qanoatlantiradigan $a_i \in A$ son mavjud. Unda $a = a_i + (a - a_i)$ tenglikdan $r = a - a_i < 0$ bo'lishini hisobga olib, A to'plamning har bir elementini $a + r$ ($a \in A, r \in Q$) ko'rinishda yozish mumkinligini aniqlaymiz. Bu esa

$$A \subset \{a + r; a \in A, r \in Q\} = C$$

ya'ni $A \subset C$ ekanini ko'rsatadi. Demak,

$$\alpha \leq \alpha + 0 \quad (**)$$

Endi (*) va (**) munosabatlardan $\alpha + 0 = \alpha$ tenglikka ega bo'lamiz. ►

2⁰. Haqiqiy sonlar ustida bajariladigan keyingi amallar: ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish amallari. shuningdek, haqiqiy sonlarni geometrik tasvirlashlarni mazkur bobning oxirida mashq tarzida etamiz.

7-§. Haqiqiy sonning absolut qiymati va uning xossalari

Ma'lumki, $x \in R$ sonning absolut (mutloq) qiymati quyidagicha aniqlanadi:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa} \\ -x, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Haqiqiy sonning absolut qiymati xossalari keltiraimiz.

1⁰. $x \in R$ son uchun

$$|y| \geq 0, |x| = |-x|, x \leq |x|, -x \leq |x|$$

munosabatlar o'rini. Bu munosabatlar sonning absolut qiymati ta'rifidan kelib chiqadi.

2⁰. Agar $x \in R$ son $|x| < a$ ($a > 0$) tengsizlikni qanoatlantirsa, bunday x son $-a < x < a$ tengsizliklarni ham qanoatlantiradi va aksincha. Boshqacha qilib aytganda yuqoridaq tengsizliklar ekvivalent tengsizliklardir:

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

◀ $|x| < a$ tengsizlik o'rini bo'lsin: $x \in R, |x| < a$. 1⁰-xossaiga ko'ra $|x| = x + |x|$ bo'llishidan hamda $a < |x|$ tengsizlikdan topamiz: $-a < -|x| < x < |x| < a$. Bundan esa $-a < x < a$ ekanini kelib chiqadi.

Endi $a < x < a$ tengsizliklar o'rini bo'lsin: $x \in R, a < x < a$.

Agar $x \geq 0$ bo'lsa, $|x| = x$ bo'lib, $|x| < a$ bo'ladi. Agar $x < 0$ bo'lsa, $|x| = -x$ bo'lib, $-x < a$ bo'lganidan esa $|x| < a$ ekanini topamiz. Demak, $a < x < a$ bolganda har doim $|x| < a$ bo'ladi. ►

Bu xossa quyidagi $\{x : x \in R, |x| < a\}$ va $\{x : x \in R, -a < x < a\}$ haqiqiy sonlar to'plamlarining bir-biriga tengligini ifodalaydi.

3⁰. Agar $y \in R$ sonlar $|x| < a$ tengsizlikni qanoatlantirsa, bunday x sonlar $-ax < a$ tengsizliklarni ham qanoatlantiradi va aksincha, ya'nii $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

Bu xossa 2⁰-xossa kabi isbotlanadi.

4⁰. Ikki $x \in R$ va $y \in R$ haqiqiy son yig'indisining absolut qiymati bu sonlar absolut qiymatlarining yig'indisidan katta emas, ya'nii $|x + y| \leq |x| + |y|$.

◀ Agar $x + y \geq 0$ bo'lsa $x + y = |x + y|$ bo'lib, $x + |y| \geq |x| + |y|$.

tengsizliklorni hisobga olgan holda

$$|x+y| = |x| + |y| \leq |x| + |y|$$

bo'lishini topamiz. Agar $|x+y| < 0$ bo'lsa, unda $|x+y| = -(x+y) = -|x-y| < |x| + |y|$ bo'ladi. ►

Bu munosabat qo'shiluvchilar soni ikkitadan katta bo'lgan holda ham o'rinni bo'ldai:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

5⁰. $x \in R$, $y \in R$ sonlar uchun

$$|x-y| \geq |x| - |y|$$

tengsizlik o'rinni.

◀ Ravshanki, $|x-y| = |(x-y)+y|$. Unda 4⁰-xossaga binoan $|x-y| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y|$ bo'lib, bu tengsizlikdan $|x-y| \geq |x| - |y|$ bo'lishi kelib chiqadi. ►

6⁰. $x \in R$, $y \in R$ sonlar uchun

$$|x-y| \geq |x| - |y|$$

tenglik o'rinni.

Bu tenglik sonning absolut qiymoti ta'rifidan kelib chiqadi.

7⁰. $x \in R$, $y \in R$, $y \neq 0$ sonlar uchun

$$\left| \frac{x}{y} \right| \geq \left| \frac{|x|}{|y|} \right|$$

tenglik o'rinni.

◀ $\frac{x}{y} \neq z$ deb olaylik. Bundan $x = zy$ bo'lishini topamiz.

Ammo 6⁰-xossaga ko'ra $|x-z| \geq |y|$ va bundan $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \geq \left| \frac{|x|}{|y|} \right|$ tenglik kelib chiqadi. ►

8-§. Irratsional sonni taqribiy hisoblash

Biror α irratsional son berilgan bo'lib, u qo'shiluvchilar soni bo'lgan kesim bilan aniqlangan bo'lsin: $\alpha = (a, b)$. Butun sonlar to'plami \mathbb{Q} ratsional sonlar to'plamining qismi

sonlar toplami α ratsional sonlar toplamining qismi bolganligidan ketma-ket kelgan a_0 va a_0+1 butun sonlar topiladiki, ushbu $a_0 < \alpha < a_0 + 1$ tengsizliklar o'rnili boladi. Bu holda $a_0 - a_0$ son α irratsional sonni "kami" bilan, $a_0' - a_0 + 1$ esa "ortigi" bilan taqribiy ifodalaydi.

- Endi

$$a_0, a_0 + \frac{1}{10}, a_0 + \frac{2}{10}, \dots, a_0 + \frac{9}{10}, a_0 + 1$$

sonlarni olamiz. $a_0 < \alpha < a_0 + 1$ bolgani uchun bu sonlar orasida ketma-ket kelgan shunday ikkita

$$a_0 + \frac{a_1}{10}, a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}$$

sonlar topiladiki, ushbu

$$a_0 + \frac{a_1}{10} < \alpha < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10} + \frac{1}{10}$$

tengsizliklar o'rnili boladi, bunda a_1 son 0, 1, 2, ..., 9 sonlardan biridir. Quyidagi

$$r_1 = a_0 + \frac{a_1}{10} \approx a_0, a_1,$$

$$r'_1 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10} = a_0, a_1 + \frac{1}{10}$$

sonlar α sonni mos ravishda "kami" hamda "ortigi" bilan $\frac{1}{10} = 0.1$ aniqlikda taqribiy ifodalaydi. So'ngra

$$a_0 + \frac{a_1}{10}, a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10^2}$$

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{2}{10^2}, \dots, a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{9}{10^2}, a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$$

sonlarni olamiz. Agar ushbu

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} < \alpha < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{10^2}$$

tengsizliklar o'rnili ekanini e'tiborga olsak, u holda yuqoridagi sonlar orasida shunday ketma-ket kelgan ikkita

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}, a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{10^2}$$

sonlar topiladiki, ular uchun ushbu

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} < \alpha < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{10^2}$$

tengsizliklar o'rnili boladi, bunda a_2 son 0, 1, 2, ..., 9 sonlardan biridir. Quyidagi

$$r_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + a_0, a_1 a_2$$

$$r'_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + a_0, a_1 a_2 + \frac{1}{10^n}$$

sonlar α sonni mos ravishda "kami" hamda "ortigi" bilan $\frac{1}{10^n} \approx 0.01$ aniqlikda taqribiy ifodalaydi.

Bu jarayonni davom ettira borib α ta qadamdan keyin shunday ikkita

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n},$$

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n}.$$

sonlar topiladiki, ular uchun ushu

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} < \alpha < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

tengsizliklar o'tinli bo'ladi, bunda a_1, a_2, \dots, a_n sonlarning har biri $0, 1, 2, \dots, 9$ sonlardan biriga tengdir.

Quyidagi

$$r_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n, \quad r'_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}$$

sonlarning har biri α irratsional sonni $\frac{1}{10^n}$ aniqlikda taqnibiy ifodalaydi.

Shunday qilib, yuqoridaqı munosabatdan ko'rindik, n ni yetarlicha katta qilib olish hisobiga α sonni istalgancha aniqlikda r_n va r'_n ratsional sonlar (o'qli kasrlar) yordamida taqribiy hisoblash mumkin: $\alpha \approx r_n, \alpha \approx r'_n$. Yuqoridaqı r_n va r'_n ratsional sonlarni mos ravishda "kami" hamda "ortigi" bilan α sonning o'qli yaqinlashuvchilari deb ataladi.

Mashqlar.

2.8. Ma'lumki, qisqarmaydigan $r = \frac{p}{n}$, ($p \in Z, n \in N$) kasr ko'rinishida tasvirlanadigan har bir son ratsional son deyilar edi. Shuningdek, cheksiz davriy o'qli kasr ko'rinishida tasvirlanadigan har bir son ham ratsional son deyiladi. Bu ta'riflarning ekvivalentligi isbotlansin.

2.9. Ushbu

$$A = \{r : r \in Q, r < 0\} \cup \{r : r \in Q, r > 0, |r| < 1\} \cup \left\{ \frac{1}{r} : r \in Q, r < 0 \right\}$$

to'plam chegaralanganlikka tekshirilsin.

2.10. Ushbu $\{r : r \in Q, r < 0\}$ sonlarning ratsional son emasligi isbotlansin.

2.11. Ushbu $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}$ ($n > 1$) sonning ratsional son emasligi isbotlansin.

2.12. Ushbu

$$\begin{aligned} A &= \{r : r \in Q, r < 0\} \cup \{r : r \in Q, r > 0, r^2 < 2\}, \\ A' &= \{r : r \in Q, r < 0, r^2 < 2\} \end{aligned}$$

to'plamlarning Q da kesim bajarishi va A to'plamda eng katta, A' to'plamda eng kichik element mavjud emasligi ko'rsatilsin.

2.13. Agar $E \subset E$ to'plam chegaralangan bo'lib, $E_i \subset E$ bo'lsa,

$$\inf E < \inf E_1 < \sup E_1 < \sup E$$

tengsizliklarning bajarilishi isbotlansin.

2.14. Aytaylik.

$$A = \{r : r \in Q\}, \quad A' = \{r' : r' \in Q\}$$

to'plamlar Q da (A, A') kesim bajarib, u α haqiqiy sonni aniqlasin:

$$\alpha = (A, A')$$

Ushbu

$$-A' = \{-r' : r' \in A'\}, \quad -A = \{-r : r \in A\}$$

to'plamlar Q da kesim bajarishi ko'rsatilsin. (Bu kesim aniqlangan son α soniga qarama - qarshi son deyiladi va u $= -\alpha$ kabi belgilanadi, qaralsin, [1], 2 bob).

2.15. α, β haqiqiy sonlar $(A, A'), (B, B')$ kesimlar bilan aniqlansin:

$$\alpha = (A, A'), \quad \beta = (B, B') \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0)$$

Ushbu

$C = \{r : r \in Q, r < 0\} \cup \{r : r \in Q, r > 0, t \in B, r > t\}, \quad C' = Q \setminus C$
to'plamlar Q da kesim bajarishi ko'rsatilsin. (Bu kesim aniqlangan son α va β haqiqiy sonlar ko'paytmasi deyiladi va u $= \alpha \beta$ kabi belgilanadi, qaralsin, [1], 2 bob).

2.16. Aytaylik, $\alpha > 0$ haqiqiy son Q da bajarilgan (A, A') kesim bilan aniqlangan bo'lsin. Ushbu

$$C = \{r : r \in Q, r < 0\} \cup \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{r} : r \in A' \right\}, \quad C' = Q \setminus C$$

to'plamlar φ da kesim bajarishi ko'rsatilsin. (Bu kesim aniqlangan son α haqiqiy songa misbatan teskati son deyiladi va α^{-1} kabi belgilanadi qaralsin, [1], 2. bob).

2.17. Haqiqiy sonning butun darajasi, haqiqiy sondan olingan ildiz hamda haqiqiy sonning ratsional darajasi ta'riflari keltirilsin.

2.18. Aytaylik, $\alpha \in R, \alpha > 1$ va β musbat haqiqiy son φ da bajarilgan (B, B') kesim bilan aniqlangan sonlar bo'lsin. Ushbu

$$E = \{x : x \in R, x \leq 0\} \cup \{\alpha^b : b \in B\}$$

$$E' = R \setminus E$$

to'plamlar R da kesim bajarishi ko'rsatilsin. (Bu kesim aniqlangan son α haqiqiy sonning $-\beta$ darajasi deyiladi va α^β kabi belgilanadi qaralsin, [1], 2. bob)

2.19. Aytaylik, $x \in R$, $y \in R$ bo'lsin. Ushbu

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

miqdor x va y nuqtalar orasidagi masofa deyiladi. Masofa quyidagi

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- 3) $\rho(x, y) \leq 0$, $\rho(x, z) + \rho(z, y) \quad (z \in R)$

xossalarga ega ekanligi isbotlansin.

2.20. $\sqrt{2}$ son taqrifiy hisoblansin.

2.21. π irratsional sonning geometrik tasviri topilsin.

2.22. Haqiqiy sonlarning geometrik tasvirlari topilsin.

III BOB

Funksiya

Funksiya matematik analizning asosiy tushunchasi.

Tabiatda, texnikada va fanning turli sohalarida uchraydigan ko'pgina jarayonlar funksiya tushunchasi bilan bog'liq (bu jarayonlarning matematik modellari funksiyalar bilan ifodalanadi). Binobarin, bu jarayonlar bilan bog'liq masalalarni o'rganish va yechish funksiyalarni o'rganishni taqozo etadi.

1-§. Funksiya tushunchasi

I⁰. O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar. Biz tabiatni kuzatish va o'rganish jarayonida uzunlik, yuz, hajm, vaqt, temperatura, massa kabi miqdorlarga duch kelamiz. Konkret sheroitda bu miqdorlar ba'zan turli qiymatlarni qabul qilsa, ba'zan bir xil qiymatga teng bo'ladi. Masalan, agar auditoriyadagi talabularga aylana chizish taklif etilsa, unda talaba turli kattalikdag'i radius bilan aylana chizganini ko'tamiz. Bunda aylana radiusi turli qiymatlarni qabul qilgani uchun o'zgaruvchi miqdor bo'ladi.

Ma'lumki, har qanday aylana uzunligi S ning uning diametri $2r$ ga nisbati $\frac{S}{2r}$ o'zgarmas son $\pi = 3,14\dots$ ga tengdir.

Shunday qilib, ikki xil o'zgaruvchi hamda o'zgarmas miqdorlar bo'ladi. Odadta o'zgaruvchi $x, y, r\dots$ harflar orqali belgilanadi.

Agar o'zgaruvchining qabul qiladigan qiymatlaridan tuzilgan to'plam ma'lum bo'ssa, o'zgaruvchi berilgan deb hisoblanadi. O'zgarmas miqdorni ham o'zgaruvchi deb qarash mumkin. Bunda o'zgaruvchining qabul qiladigan qiymatlaridan tashkil topgan to'plam bittagina elementdan iborat bo'ladi.

Matematikada bir necha o'zgaruvchi miqdorlar hamda bu o'zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog'lanishlar o'rganiladi. Aylana radiusi r ham, aylana uzunligi ham o'zgaruvchi miqdor bo'lib, $S = 2\pi r$ munosabat bu o'zgaruvchilar s orasidagi bog'lanishni ifodalaydi. Bu erda r - erkli ravishda o'zgaradigan o'zgaruvchi bo'lib, s esa unga bog'liq, erksiz o'zgaruvchidir. Aylana radiusi $A = \{r : r \in R, 0 \leq r < \infty\}$ to'plamdagi qiymatlarni qabul qilsa, aylana

uzunligi s ning qiymatlari x ga bog'liq bo'lgan holda $R_s = \{x : s \in R, 0 < |x| < s\}$ to'plamini tashkil etadi.

Shunday qilib, ikki xil erkli hamda erksiz o'zgaruvchilar bolar ekan.

2º. Funksiya ta'risi. X va Y lar haqiqiy sonlarning biror to'plamlari ($X \subset R, Y \subset R$) bo'lib, x va y o'zgaruvchilar mos ravishda shu to'plamlarda o'zgarsin: $x \in X, y \in Y$

1-ta'rif. Agar x to'plamdag'i har bir x songa biror f qoidaga ko'ra y to'plamdan bitta y son mos qo'yilgan bolsa, X to'plamda funkсиya berilgan deb aytildi.

Ba'zan funkсиya X to'plamda berilgan deyish o'miga funkсиya to'plamda aniqlangan deb ham yuritiladi. Funkсиya

$$f : x \rightarrow y \text{ yoki } y = f(x)$$

kabi belgilanadi.

Bunda x funkсиyaning aniqlanish to'plami (sohasi), y esa funkсиyaning o'zgarish to'plami (sohasi) deb ataladi, X erkli o'zgaruvchi yoki funkсиyaning argumenti, y erksiz o'zgaruvuvchi yoki x o'zgaruvchining funkсиyasi deyiladi.

Funkсиyaga misollar keltiramiz:

1). $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = (0, +\infty)$ bolsin, f qoida sifatida

$$f : x \rightarrow y = x^2 + 1$$

ni olaylik. Bu holda, ravshanki, har bir $x \in X$ uchun bitta $x^2 + 1$ topiladi va $x^2 + 1 \in Y$ bo'ladi. Demak, x da $y = x^2 + 1$ funkсиya aniqlangan.

2). $X = R$, $Y = Z$ va f -- har bir haqiqiy x songa uning butun qismi $[x]$ ni mos qo'yuvchi qoida bo'lsin. Demak,

$$f : x \rightarrow [x] \text{ yoki } y = [x]$$

funkсиyaga ega bolamiz.

3). Har bir ratsional songa 1 ni, har bir irratsional songa 0 ni mos qo'yish natijasida funkсиya hosil bo'ladi. Bu Dirixle funkсиyasi deyiladi va $D(x)$ kabi belgilanadi:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

Funkсиya ta'rifida X, Y to'plamlarning hamda f qoidanining berilishi muhimdir. Ko'pincha, amaliyotda funkсиyaning aniqlanish sohasi X ham shu qoidaga ko'ra, ya'ni funkсиonal bog'lanishning xarakteriga ko'ra topiladi.

Masalan, ushbu

$$v = \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6}$$

funksiyaning aniqlanish sohasi, tabiiyki $x=2$, $x=3$ nuqtalarni o'z ichiga olmasligi kerak.

Ushbu

$$\{f(x) : x \in X\}$$

to'plam funksiyaning qiymatlari to'plami deyiladi va F , kabi belgilanadi:

$$Y_f = \{f(x) : x \in X\}$$

Ravshanki,

$$Y_f \subset Y$$

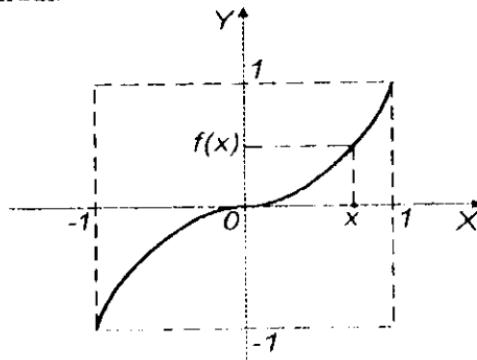
Keltirilgan 1 - misolda $Y_f = [1, +\infty]$, 2 - misolda $Y_f = Z$, 3 - misolda esa $Y_f = \{0, 1\}$ boladi.

Biror X to'plamda $y = f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lсин. $x_0 \in X$ ga mos keluvchi y_0 miqdor $y = f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi xususiy qiymati deb ataladi va u $f(x_0) = y_0$ kabi belgilanadi. Masalan, 2 - misolda $x_0 = \pi$ bolganda $y_0 = \{\pi\} = 3$ boladi.

Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Tekislikning $(x, f(x))$ nuqtalaridan iborat ushbu

$$\{(x, f(x))\} = \{(x, f(x)) : x \in X, f(x) \in Y\}$$

to'plam $y = f(x)$ funksiyaning grafigi deb ataladi. Ravshanki, $\{(x, f(x))\} \subset XxY$ boladi. Masalan, $y = x^3$ funksiyani $X = [-1, 1]$ to'plamda qaraylik. Bu funksiyaning grafigi 11 - chizmada ifodalangan. Bunda XxY to'plam shtrixlar bilan ko'rsatilgan kvadratni bildiradi.



11 - chizma.

3º. Funksiyaning berilish usullari. Funksiya ta'rifidagi har bir x ga bitta y ni mos qo'yadigan qoida yoki qonun turli usulda berilishi mumkin. Biz ularni qisqacha qarab o'tamiz.

Ko'pincha x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish formulalar yordamida ifodalanadi. Bunda argument x ning har bir qiymatiga mos keladigan y funksiyaning qiymatini x ustida turli amallar - qoshish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish, logarifmlash va h.k. amallarni bajarish natijasida topiladi. Odatda bunday usul funksiyaning *analitik usulda berilishi* deyiladi.

Misollar keltiraylik:

1). x va y o'zgaruvchilar ushbu

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

formula yordamida bog'langan bo'lсин. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $X = \{x : x \in R, -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$ to'plamdan iborat. Bunda har bir x ga mos keladigan y ning qiymati avvalo x ni kvadratga ko'tarish, so'ngra uni 1 dan ayirish va bu ayirmadan kvadrat ildiz chiqarish kabi amallarni bajarish natijasida topiladi.

2). x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish quyidaqи formulalar yordamida berilgan bo'lсин:

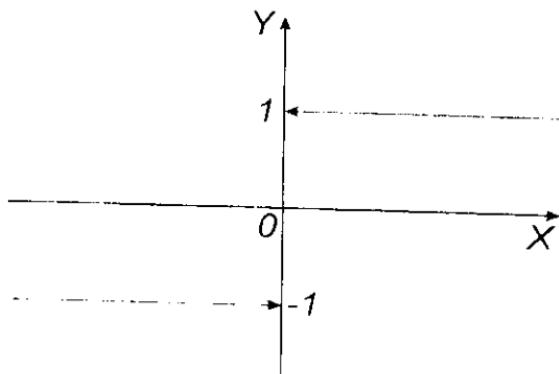
$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa} \\ -1, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $X = R \setminus \{0\}$ bo'lib, uning qiymatlari sohasi $Y = \{-1, 1\}$ to'plamdan iborat. Odatda bu funksiya

$$y = sign x$$

kabi belgilanadi. Bunda $sign$ lotincha signum so'zidan olingan bo'lib, "belgi", "ishora" degan ma'noni anglatadi.

Bu $y = sign x$ funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi qiymati nolga teng deb qabul qilsak, u R to'plamda aniqlangan bo'ladi. (12-chizma).



12 – chizma.

Ba'zi hollarda $x(x \in X)$ va $y(y \in Y)$ o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish formulalar yordamida berilmasdan jadval orqali berilgan bo'lishi mumkin. Masalan, kun davomida havo haroratini kuzatqanimizda, t vaqtida havo harorati T_t , t vaqtida havo harorati T va h.k. bo'tsin. Natijada quyidagi jadvalga kelamiz:

Vaqt, t	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
Harovat, T	T_{t_1}	T_{t_2}	T_{t_3}	T_{t_4}	T_{t_5}	T_{t_6}	T_{t_7}

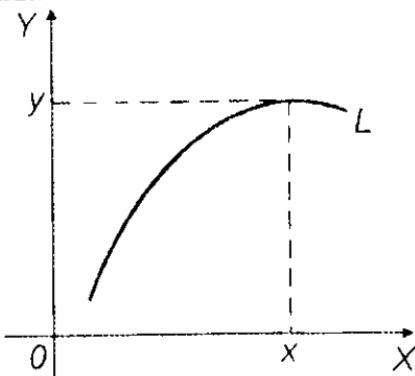
Bu jadvol t vaqt bilan harorati T orasidagi funksional bog'lanishni ifodalaydi, bunda t argument, T esa funksiya bo'ladi. Bog'lanishning bunday berilishi, jadval usulida berilishi deb ataladi.

Xoy tekisliqida shunday L chiziq berilgan bo'lsinki, oy o'qida joylashgan nuqtalardan shu o'qqa o'tkazilgan perpendikular bu L chiziqni faqat bitta nuqta da kesib o'tsin.

Oy o'qida bunday nuqtalardan iborat to'plamni va orqali belgilaylik. A to'plamden ixtiyoriy x ni olib, bu nuqtadan oy o'qiga perpendikular o'tkazamiz. Bu perpendikularning L chiziq bilan kesishgan nuqtasining ordinatasini y bilan belgilaymiz va olingan y ga bu x ni mos qo'yamiz. Natijada A to'plamdan olingan har bir x ga yuqorida ko'rsatilgan qoidaga ko'ra bitta y mos qo'yilib, funksiya hosil bo'ladi. Bunda x va y o'zgaruvchilar orasida bog'lanish L chiziq yordamida berilgan bo'ladi (13 –

bo'ldi (13 – chizma).

Odatda y ning bunday berilishi uning grafik usulda berilishi deb ataladi.



13 – chizma.

Shunday qilib, biz funksiyaning analitik, jadval, grafik usullarda berilishini ko'rib o'tdik. x va y o'zgaruvchilar orasidagi funksional bog'lanish yuqoridagi uchta usul bilangina berilib qolmasdan, boshqacha, faqatgina iboralar bilan ham berilishi mumkin. Masalan, har bir natural n songa uning bo'lувchilari sonini mos qo'yaylik. Bu moslikni φ orqali belgilaymiz. Xususan,

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 2, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 3, \varphi(5) = 2, \dots, \varphi(12) = 6$$

Odatda bu funksiya *Eyler funksiyasi* deyiladi.

Matematik analiz kursida asosan analitik usulda berilgan funksiyalar o'rganiladi.

x to'plamda $y = f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Agar bu funksiya qiymatlaridan tuzilgan

$$Y_f = \{f(x) : x \in X\}$$

to'plam yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, $f(x)$ funksiya x to'plamda yuqoridan (quyidan) chegaralangan deb ataladi, aks holda esa funksiya yuqoridan (quyidan) chegaralanmagan deyiladi. Agar $f(x)$ funksiya x to'plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, funksiya chegaralangan deyiladi.

3.1 – misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$$

funksiyaning chegaralanganligi ko'rsatilsin.

◀ Bu funksiya $R = (-\infty, \infty)$ da aniqlangan bo'lib, $\forall x \in R$ da $f(x) > 0$ bo'ldi. Demak, berilgan funksiya quyidan chegaralangan.

Ravshanki,

$$(1+x^2)^2 \geq 0 \Rightarrow 1+x^4 \geq 2x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$$

Unda, $\forall x \in R$ uchun

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{1+x^4} + \frac{x^2}{1+x^4} < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

bo'lishini topamiz. Demak, berilgan funksiya yuqoridan ham chegaralangan. ►

x to'plamda aniqlangan ikki $f(x)$ hamda $\varphi(x)$ funksiyalarini qaraylik.

Agar $\forall x \in X$ da $f(x) = \varphi(x)$ bo'lsa, bu funksiyalar X to'plamida bir biriga teng funksiyalar deyiladi.

X to'plamda aniqlangan $F(x) = f(x) + \varphi(x)$ funksiya $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalarning yig'indisidan iborat. Ikki funksiya ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati ham shunga oxshash ta'riflanadi.

40. Juft va toq funksiyalar. Agar $\forall x \in X$ uchun $-x \in X$ bo'lsa X to'plam o nuqtaga nisbatan simmetrik to'plam deyiladi.

O nuqtaga nisbatan simmetrik bolgan X to'plamda $y = f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Agar $\forall x \in X$ uchun

$$f(-x) = f(x)$$

bo'lsa, $f(x)$ juft funksiya deb ataladi. Agar $\forall x \in X$ uchun

$$f(-x) = -f(x)$$

bo'lsa, $f(x)$ toq funksiya deb ataladi. Masalan,

$$y = \cos x, y = |x|$$

funksiyalar uchun

$$\cos(-x) = \cos x, |-x| = |x|$$

bo'lgani sababli ular juft funksiyalardir.

Ushbu

$$y = \sin x, y = x^3$$

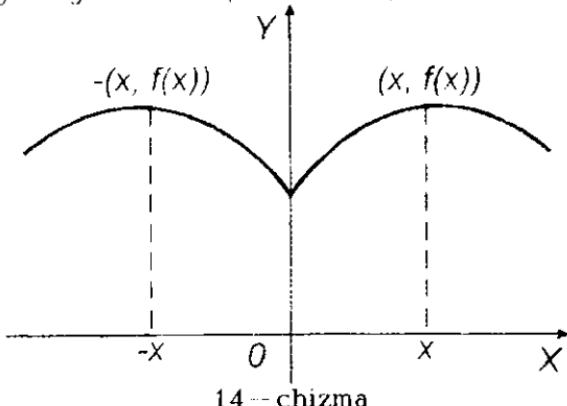
funksiya uchun

$$\sin(-x) = -\sin x, (-x)^3 = -x^3$$

bo'lgani sababli ular toq funksiyalardir.

Shuni ta'kidlash lozimki, funksiya har doim juft yoki toq funksiya bo'lavermaydi. Bunday funksiyalarga $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = \sin x \cdot \cos x$ lar misol bo'la oladi. Bu funksiyalar juft ham emas, toq ham emas.

Juft funksivaning grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrik joylashgandir. Haqiqatan, bunday funksiyalar uchun ($x, f(x)$) nuqta funksiya grafigida yotgan bolsa, ($-x, f(x)$) nuqta ham shu grafikda joylashgan boladi (14-chizma).



Toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashadi. Haqiqatdan, bu funksiya grafigida ($x, f(x)$) nuqta bilan birga har doim ($-x, -f(x)$) nuqta yotadi.

5⁰. Davriy funksiyalar. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plaminda berilgan va $T \in R$ bo'lib, $T \neq 0$ bo'ssin.

2-tarif. Agar

- 1) $\forall x \in X$ da $x-T \in X$, $x+T \in X$
 - 2) $f(x+T)=f(x)$
- (3.1)

bo'lsa, $f(x)$ davriy funksiya, T soni esa funksivaning davri deyiladi.

Agar $f(x)$ davriy funksiya bo'lib, uning davri T ga ($T \neq 0$) teng bo'lsa, kT ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) ko'rinishdagi sonlar ham shu funksivaning davri bo'ladi. $f(x)$ funksivaning musbat davrlari to'plamini M deb belgiaylik. Agar

$$T_0 = \inf M$$

ham $f(x)$ funksivaning davri, ya'ni $T_0 \in M$ bo'lsa, u eng kichik musbat davr (asosiy davr) deyiladi. Eng kichik musbat davr mavjud bo'lishi ham mumkin, mavjud bo'lmasligi ham mumkin.

Misollar qaraylik. 1). $f(x) = \sin x$ funksiya davriy funksiya. Uning davrlari to'plami $\{2\pi k : k = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ bo'lib, eng kichik musbat davri $T_0 = 2\pi$ bo'ladi.

2). $f(x) = \{x\}$ funksiyani qaraylik, bunda $\{x\}$ – qaralayotgan x

ning kasr qismi $\{x\} = x - [x]$ bu davriy funksiyadır. Uning davrlari to'plami $\{m \mid m = t, \pm 2, \dots\}$ bo'lib, eng kichik musbat davri $T = 1$ bo'ldi.

3). $f(x) = C$ bo'lsin, bunda $C = \text{const}$. Bu holda eng kichik musbat davri mavjud emas.

4). Dirixle funksiyasi

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

ni qaraylik. Aytaylik, $T = 1$ biror ratsional son ($T \neq 0$) bo'lsin.

U holda

$$x+T = \begin{cases} \text{ratsional son, agar } x \text{ ratsional son bo'lsa} \\ \text{irratsional son, agar } x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

bo'ldi. Demak,

$$D(x+T) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

Shunday qilib, $\forall x$ uchun T ratsional son bo'lganda

$$D(x+T) = D(x) \quad (*)$$

bo'ldi. Demak, Dirixle funksiyasi davriy funksiya, ixtiyoriy $T \neq 0$ ratsional son bu funksiyaning davri.

Endi biror T irratsional sonni olaylik. Unda $\forall x$ uchun (3.1) munosabat o'rinni bo'lmaydi, chunki x ratsional son bo'lganda $x+T$ irratsional son bo'lib, $D(x) = 1$, $D(x+T) = 0$. Demak irratsional sonlar Dirixle funksiyasi uchun davri emas. Binobarin, Dirixle funksiyasining davrlari to'plami $Q \setminus \{0\}$ dan iborat. Eng kichik musbat davri esa mavjud emas – barcha musbat ratsional sonlar to'plamining infimumi nol bo'lib, u $Q \setminus \{0\}$ ga tegishli emas.

6º. Monoton funksiya. Teskari funksiya. Murakkab funksiya. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin.

3-ta'rif. Agar $\forall x_1 \in X$, $\forall x_2 \in X$ uchun

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda qat'iy o'suvchi deyiladi.

4-ta'rif. Agar $\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X$ uchun

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda kamayuvchi.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda qat'iy kamayuvchi deyiladi.

O'suvchi hamda kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deb ataladi.

3.2-misol. $f(x) = x^3$ funksiya $X = R$ da qat'iy o'suvchi bo'lishi ko'rsatilsin.

◀ Darhaqiqat. $\forall x_1 \in R, \forall x_2 \in R$ nuqtalar olib, $x_1 < x_2$ bo'lsin deb qaraylik.

U holda

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) = (x_2 - x_1) \left[(x_2 + \frac{1}{2}x_1)^2 + \frac{3}{4}x_1^2 \right] > 0$$

bo'lib,

$$f(x_2) > f(x_1)$$

bo'ladi. Demak,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

bo'lishi topildi. ▶

$X \subset R$ to'plamda $y = f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lib, Y_f esa funksiya qiymatlardan iborat to'plam bo'lsin: $Y_f = \{f(x) : x \in X\}$. Endi Y_f to'plamdan olingan har bir y ga X to'plamdan faqat bitta ($f(x) = y$ bo'lgan) x ni mos qoshish mumkin bo'lsin. Bu holda Y_f to'plamdan olingan har bir y ga X to'plamda bitta x mos qo'yilishini ifodalaydigan funksiyaga kelamiz. Odatda, bu funksiya $y = f(x)$ ga nisbatan teskari funksiya deyiladi va u $x = f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi. Demak, $x = f^{-1}(y)$ shunday funksiyaki, $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$ bo'ladi.

Agar $x = f^{-1}(y)$ funksiya $y = f(x)$ ga nisbatan teskari funksiya bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya $x = f^{-1}(y)$ ga nisbatan teskari bo'ladi. Shuning uchun ham $y = f(x), x = f^{-1}(y)$ funksiyalar o'zaro teskari funksiyalar deyiladi.

Ravshanki, quyidagi

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

xossalari o'rinni.

Masalan, $f(x) = 2x + 1$ funksivaning $[0, 1]$ oraliqdagi

qiymatları [1,3] oraliqni tashkil etadi va [1,3] oraliqda aniqlangan $x = f(y) = \frac{y+1}{2}$ funksiya berilgan $y = 2x + 1$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'ldi.

Endi murakkab funksiya tushunchasi bilan tanishamiz.

$y = f(x)$ funksiya və sohada aniqlangan bo'lib, \mathcal{Y}_f , esa funksiya qiymatlaridan iborat to'plam bo'lsin: $\mathcal{Y}_f = \{f(x) : x \in X\}$. So'ngra \mathcal{Y}_f to'plamda o'z navbatida biror $z = \varphi(y)$ funksiya berilgan bo'lsin. Natijada X to'plamdan olingan har bir x ga \mathcal{Y}_f to'plamdan bitta $y(f(x) \rightarrow y)$ son va \mathcal{Y}_f to'plamdan olingan bunday və songa bitta $z(\varphi(y) \rightarrow z)$ son mos qo'yiladi:

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\varphi} z$$

Demak, X to'plamdan olingan har bir x ga bitta z son mos qo'yiladi.

Odatda, bunday holda f va φ funksiyalarining murakkab funksiyasi berilgan deviladi va u $z = \varphi(f(x))$ kabi belgilanadi.

Masalan, $z = \sqrt{x+1}$ funksiyani qaraylik. Bu funksiya $z = \sqrt{y}$, $y = x+1$ funksiyalar yordamida hosil bo'lgan. $y = x+1$ funksiya $R = (-\infty, +\infty)$ da aniqlangan bo'lib, $z = \sqrt{y}$ funksiya esa $y \geq 0$ ya'ni $x+1 \geq 0$ da mavjud bo'ldi. Demak, $z = \sqrt{x+1}$ murakkab funksiya ushbu $X = \{x : x \in R, x \geq -1\}$ to'plamda aniqlangan.

2-§. Elementar funksiyalar

Ma'lumki, o'rta maktab matematika kursida elementar funksiyalar va ularning ba'zi bir xossalari o'rganiladi.

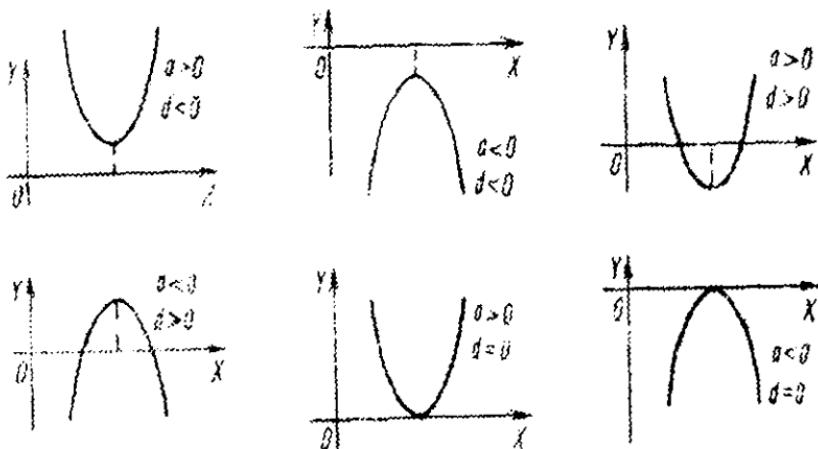
Funksiya - matematik analizda o'rganiladigan asosiy obyekt bo'lgani uchun biz ushbu paragrafda elementar funksiyalarga to'xtalamiz.

Elementar funksiyalar sinfi asosan erkli o'zgaruvchi x ($x \in R$) hamda o'zgarinas sonlar ustida qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish hamda logarifmlash amallarini bajarish natijasida hosil bo'ldi. Bu hosil bo'lgan ifodalarning mavjudligi 2-bobda qarab o'tilgan haqiqiy sonlarning yi'g'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi, nisbati, shuningdek, haqiqiy sonning haqiqiy darajasi, haqiqiy son logarifmining mavjudligidan kelib chiqadi.

10. Butun va kasr ratsional funksiyalar. Ushbu

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

ko'rinishdağı funksiya (bunda $n \in \mathbb{N}$ va $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ o'zgarmas sonlar) *butun ratsional funksiya* deb ataladi. Butun ratsional funksiya *ko'pxad* deb ham yututiladi. Butun ratsional funksiya $R = (-\infty, +\infty)$ da aniqlangan. Xususan, $y = ax + b$ chiziqli funksiya va $y = ax^2 + bx + c$ kvadrat uchhadlar butun ratsional funksiyalardir. Ma'lumki, chiziqli funksiyaning grafigi tekislikda to'g'ri chiziqni, kvadrat uchhadning grafigi esa parabolani ifodalaydi. Kvadrat uchhad grafigining holati a koeffitsient hamda diskriminant $d = b^2 - 4ac$ ning ishoralariga bog'liq bo'ladi. 15-chizma parabolaning tekislikda turlicha joylanish holatlari ko'satilgan.



15 – chizma.

Ikki butun ratsional funksiyaning nisbatidan tuzilgan

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}$$

funksiya kasr ratsional funksiya deb ataladi. Kasr ratsional funksiya

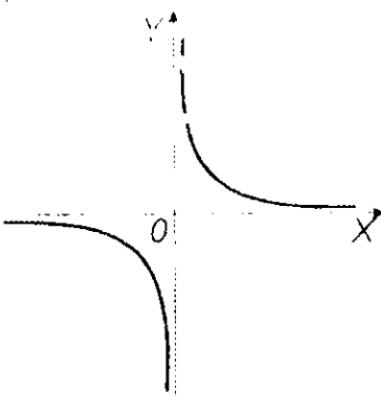
$$x = R \setminus \{x : x \in R, b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m = 0\}$$

to'plamda, ya'nı maxrajni nolga aylantiruvchi nuqtalardan farqli bolgan barcha haqiqiy sonlardan iborat to'plamda aniqlangan.

Xususan, $y = \frac{1}{x}$ va $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ lar kasr ratsional funksiyalar

bo'ldi.

Ma'lumki, $y = \frac{1}{x}$ funksiya grafigi teng yonli giperboladan iborat (17 - chizma).



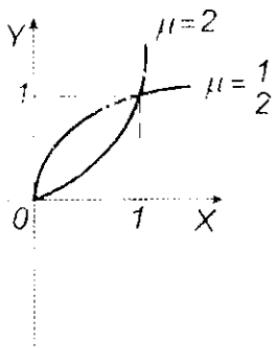
17 - chizma.

2⁰. Darajali funksiya. Ushbu

korinisadagi funksiya darajali funksiya deb ataldi, bunda μ ixtiyoriy o'zgarmas haqiqiy son. Darajali funksiyaning aniqlanish sohasi μ ga bog'liq. μ butun son bo'lganda ratsional funksiyaga ega bolamiz.

Aqar μ ratsional, maselan $\mu = \frac{1}{m} > 0$ bolsa, m juft bo'lganda

$y^{\mu} = x^{\mu}$ funksiyaning aniqlanish schasi $X = (0, +\infty)$, ioq bo'lganda esa funksiyaning aniqlanish sohasi $R = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ oraliqdan iborat boladi. μ irratsional bo'lganda $x > 0$ deb olinadi. Darajali funksiyaning grafigi $\mu > 0$ bo'lganda har doim tekishlikning $(0,0)$ hamda $(1,1)$ nuqtalaridan o'tadi (18 - chizma).



18 - chizma.

Darajali funksiya $y = x^\mu$ ushbu $(0, \infty)$ oraliqda $\mu > 0$ bolganda o'suvchi, $\mu < 0$ bolganda esa kamayuvchi boladi.

3⁰. Ko'rsatkichli funksiya. Ushbu

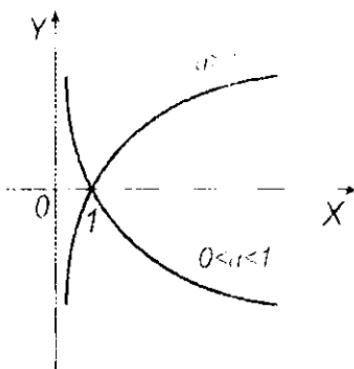
$$y = a^x$$

Ko'rinishdaqi funksiya ko'rsatkichli funksiya deb ataladi. Unde $a > 0$ va $a \neq 1$. Ko'rsatkichli funksiyaning aniqlanish sohasi R to'plamidan iborat bo'lib, funksiya qiymatlari esa har doim musbat boladi. Bu funksiyaning grafigi OY o'qidan yuqorida joylashgan va doim tekislikning $(0, 1)$ nuqtasidan o'tadi. (19-chizma)

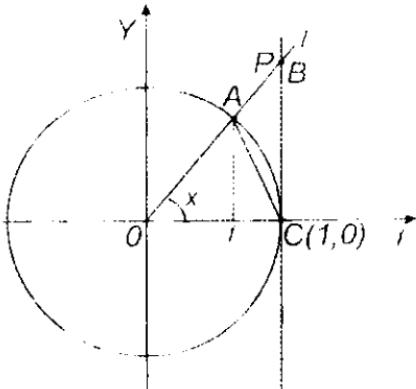
4⁰. Logarismik funksiya. Ushbu

$$y = \log_a x$$

Ko'rinishdagi funksiya logarismik funksiya deb ataladi, burda $a > 0$ va $a \neq 1$. Logarismik funksiya $x \in (0, +\infty)$ intervalda aniqlangan. Bu funksiyaning grafigi OY o'qini o'ng tomonida joylashgan va doim tekisiikning $(1, 0)$ nuqtasidan o'tadi (20-chizma).



20 - chizma.



21 - chizma.

5th. Trigonometrik funksiyalar. (20) tekislikda, markazi koordinatalar boshida, radiusi 1 ga teng bolgan $t^2 + v^2 = 1$ aylanani olaylik (21 chizma). Bu aylananining $C(1,0)$ nuqtasidan unga OP urinma o'tkazamiz. Koordinata boshidan chiqqan va Ox o'q bilan x burchak tashkil etgan ol nur aylanani α nuqtada, OP urinmani B nuqtada kesadi. Bu A va B nuqtalarning koordinatalari mos ravishida $(t, v_1), (1, v_2)$ bo'lsin. Ravshanki, A va B nuqtalarning o'ini x burchakka bog'liq. Demak, har bir $x \in R$ son uchun Ox o'q bilan x burchak tashkil etadigan ol nur o'tkazilsa, bu nurning aylana va urinmalari bilan kesishgan nuqtalarning koordinatalari t, v_1, y_1 lar x ga bog'liq. Har bir x ga shu koordinatalarini mos qo'yaylik.

$$f : x \rightarrow t,$$

$$\varphi : x \rightarrow y_1,$$

$$\phi : x \rightarrow y_2.$$

Odatda, $\varphi : x \rightarrow v_1$ ga $\sin x, f : x \rightarrow t$ ga $\cos x, \phi : x \rightarrow y_2$ ga $\operatorname{tg} x$ funksiya deb ataladi:

$$y_1 = \sin x, \quad y_2 = \operatorname{tg} x, \quad t = \cos x$$

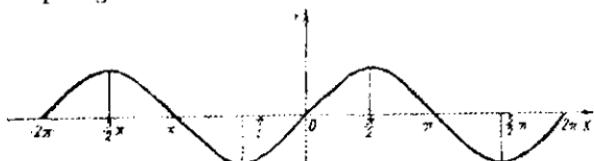
Bunda $y_1 = \sin x, t = \cos x$ funksiyalar R da aniqlangan π davrlisi funksiyalar bo'lib, ular uchun $\forall x \in R$ da

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

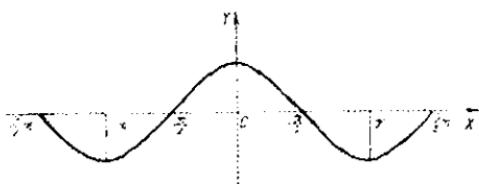
tengsizliklar o'rinnli bo'ltadi.

$$y_2 = \operatorname{tg} x \quad \text{funksiya} \quad X \subset R \setminus \left\{ x : x \in R, x = (2k+1) \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \dots \right\}$$

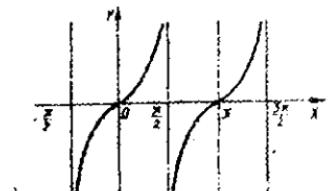
to'plamda aniqlangan.



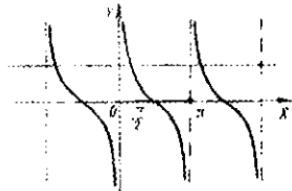
a).



b).



c).



d).

22 chizma.

ctgx , $\sec x$, $\cos ecx$ funksiyalar $\sin x$, $\cos x$ va tgx funksiyalar orqali quyidagiicha aniqlangan:

$$\operatorname{ctgx} = \frac{1}{\operatorname{tgx}}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \cos ecx = \frac{1}{\sin x}$$

Ushbu $\sin x$, $\cos x$, tgx va ctgx funksiyalarning grafiklari 22--chizmalarda tasvirlangan.

6⁰. Giperbolik funksiyalar. Ushbu $v = e^x$ ko'rsatkichli funksiya yordamida tuzilgan quyidagi

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

funksiyalar giperbolik (mos ravishda giperbolik sinus, giperbolik kosinus, giperbolik tangens, giperbolik kotangens) funksiyalar deb ataladi va ular shx , chx , thx , $cthx$ kabi belgilanadi:

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad cthx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

shx , chx , thx funksiyalar R da, $cthx$ funksiya esa $X = R \setminus \{0\}$ to'plamda aniqlangan.

Giperbolik funksiyalar orasida ham trigonometrik

funksiyalari orasidagi bog'lanishga o'xshash munosabatlari mavjud. Masalan,

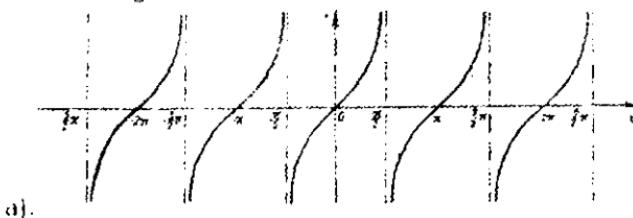
$$\operatorname{sh}x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \operatorname{ch}x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \quad \operatorname{sh}2x = 2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$$

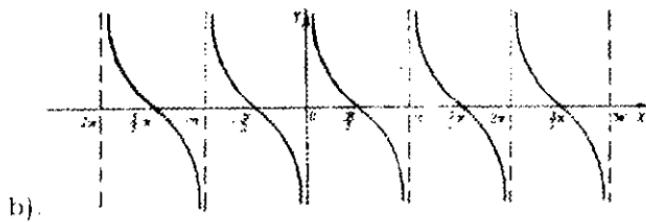
7⁰. Teskari trigonometrik funksiyalar. Ma'lumki, $y = \sin x$ funksiya \mathbb{R} da aniqlangan bo'lib, uning qiymatları $\{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y \leq 1\}$ to'plamini tashkil etadi. Agar biz argument x ning $x \in X = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ segmentdagи qiymatlarini qarask, $y = \sin x$ funksiyaning qiymatları ham $Y = [-1, 1]$ segmentda o'zgarib, bunda $X = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ to'planning elementlari $Y = [-1, 1]$ to'plamning elementlari bilan o'zaro bir qiymatli moslikda bo'ladi. Bu hol $y = \sin x$ funksiyaaga nisbatan teskari funksiyani qarash imkonini beradi. $y = \sin x$ funksiyaaga teskari funksiya $y = \arcsin x$ kabi belgilanadi. Demak, $y = \arcsin x$ funksiya $X = [-1, 1]$ to'plamda aniqlanagn bo'lib, o'zgarish sohasi $Y = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ to'plamni tashkil etadi.

Xuddi shunga o'xshash, $y = \cos x, y = \operatorname{tg}x, y = \operatorname{ctgx}$ funksiyalarga nisbatan teskari bo'lgan funksiyalar ham teskari trigonometrik funksiyalar deyilib, ular mos ravishda $y = \arccos x, y = \arctgx, y = \operatorname{arcctgx}$ kabi belgilanadi.

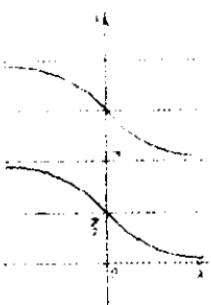
$y = \arccos x$ funksiya $X = [-1, 1]$ da aniqlangan bo'lib, uning qiymatları $Y = [0, \pi]$ to'plamdan iborat. $y = \arctgx, y = \operatorname{arcctgx}$ funksiyaları \mathbb{R} da aniqlangan. Bu funksiyalarning o'zgarish sohalari mos ravishda $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ va $(0, \pi)$ to'plamlardan iborat.

23--chizmalarda teskari trigonometrik funksiyalarning grafiklari tasvirlangan.

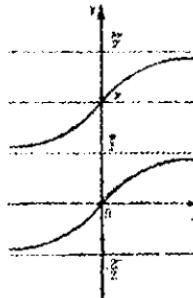




b).



c).



d).

23 – chizma.

Endi funksiya tushunchasiga doir ba'zi misollarni keltiramiz.

3.3-misol. Ushbu

$$f(x) = \sqrt{|x|} - x$$

funksiyaning aniqlanish sohasi topilsin.

◀ Ravshanki, $\forall x \in R$ uchun

$$|x| \leq x$$

bo'ladi. Demak, $\sqrt{|x|} - x$ ifoda ma'noga ega bo'lishi uchun

$$\{x\} : x \text{ ya'ni } x = k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

bo'lishi kerak. Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $X = \mathbb{Z}$ bo'ladi.►

3.4-misol. Ushbu

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

funksiyaning $(0, +\infty)$ oraliqdagi qiymatlari orasida eng kichigi topilsin.

◀ Berilgan funksiya uchun

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x} \quad (x - 1)^2 + 2x \geq \frac{(x - 1)^2}{x} + 2 \quad f(1) = 2$$

bo'lib $\forall x \in (0, +\infty)$ da $f(x) > 2$ bo'ladi. Demak, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ funksiyaning $(0, +\infty)$ dagi eng kichik qiymati 2 ga teng. ►

3.5-misol Ushbu

$$f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (a > 0, a \neq 1)$$

funksiyaning toq funksiya ekanini ko'rsatilsin.

◀ Bu funksiya $R \setminus (-x, +x)$ da aniqlangan. Berilgan funksiyaning x nuqtadagi qiymatini topamiz:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log_a(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \log_a -\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= -\log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x) \end{aligned}$$

Demak, $f(x)$ toq funksiya. ►

3.6-misol Ushbu

$f(x) = a \sin(bx + c)$, a, b, c o'zgarmas sonlar ($b \neq 0$) funksiyaning davri topilsin.

◀ Davriy funksiya ta'rifidan ilodalanib,

$$a \sin[b(x + T) + c] = a \sin(bx + c)$$

deymiz. Unda

$$2 \sin \frac{bT}{2} \cos(bx + c + \frac{bT}{2}) = 0$$

bo'lib,

$$\sin \frac{bT}{2} = 0$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$\frac{bT}{2} = k\pi \quad \text{ya'ni} \quad T = \frac{2k\pi}{b} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Topilgan T ning qiymatlari orasida eng kichik musbatি

$$T_0 = \frac{2\pi}{b}$$

bo'ladi. ►

3.7-misol Agar

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

bo'lsa, $f(f(f(x)))$ topilsin.

◀ Ravshanki, f funksiya $X = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ to'plamda aniqlangan.

Murakkab funksiya tushunchasidan foydalaniib topamiz:

$$f(f(x)) = \frac{1}{1-f(x)} = \frac{1}{1-\frac{1-x}{x}} = \frac{1}{\frac{x}{x-(1-x)}} = \frac{1}{\frac{x}{1-x}} = \frac{1-x}{x}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{1-f(f(x))} = \frac{1}{1-\frac{1-x}{x}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\frac{x}{1-x}}} = \frac{1}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-x}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-2x}{1-x}} = \frac{1-x}{1-2x}$$

Bu funksiya $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$ to'plamida aniqlangan. ▶

3-§. Natural argumentli funksiyalar (Sonlar ketma-ketligi)

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ to'plamda aniqlangan bo'linsin. Bu holda funksiyaning argumenti natural son bo'ladi. Shuning uchun funksiyani natural argumentli funksiya deyiladi va $f(n)$ kabi yoziladi.

Bu funksiyaning qiymatlari

$$x_n = f(n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

dan tashkil topgan ushbu

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (3.2)$$

to'plam sonlar ketma-ketligi deviladi, to'plamning elementlari esa ketma-ketlikining hadlari deviladi.

Odatda, (3.2) sonlar ketma-ketligi uning umumiy hadi x_n (n -hadi) orqali belgilanadi. Masalan,

$$x_n = \frac{1}{n}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots,$$

$$x_n = n!, 1!, 2!, 3!, \dots, n!, \dots,$$

$$x_n = q^n : q, q^2, q^3, \dots, q^n, \dots,$$

$$x_n = (-1)^n : -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots,$$

$$x_n = 1, 1, 1, \dots, 1, \dots$$

lar sonlar ketma-ketliklari bo'ladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, x_n sonlar ketma-ketlikning ($n = 1, 2, 3, \dots$) hadlari soni cheksiz bo'lgan holda bu ketma-ketlikning barcha hadlaridan tuzilgan to'plam cheksiz yoki chekli to'plam bo'lishi mumkin. Masalan, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$ to'plam cheksiz, $1, -1, 1, \dots$ ketma-ketlikning hadlaridan tuzilgan $\{-1, 1\}$ to'plam esa

cheqli to'plandu.

Chegaralanganlik, monotonlik ta'nnlari sonlar ketma-kethigi

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots$$

uchun quyidagicha ifodalanadi:

5-ta'rif. Agar

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : x_n < M$$

tengsizlik bajarilsa, (3.2) ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan,

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : x_n > m$$

tengsizlik bajarilsa, (3.2) ketma-ketlik *quyidan chegaralangan* deyiladi.

6-ta'rif. Agar (3.2) ketma-ketlik ham quyidan, ham yuqoridan chegaralanagan bo'lsa, u *chegaralangan* deyiladi.

3.8-misol Ushbu

$$x_n = \frac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma-ketlikning chegaralanaganligi isbotlansin.

◀ Ravshanki,

$$\left| (-1)^n n + 10 \right| \leq \left| (-1)^n n \right| + 10 = n + 10.$$
$$\sqrt{n^2 + 1} \geq n$$

Unda

$$|x_n| = \left| \frac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2 + 1}} \right| \leq \frac{n + 10}{n} = 1 + \frac{10}{n} \leq 11$$

ya'ni

$$11 \leq x_n \leq 11 \quad (n \in \mathbb{N})$$

bo'ladi. ▶

7-ta'rif. Agar $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun

$$x_{n+1} \leq x_n$$

tengsizlik bajarilsa, (3.2) ketma-ketlik o'suvchi,

$$x_n \leq x_{n+1}$$

tengsizlik bajarilsa, (3.2) ketma-ketlik qat'iy o'suvchi deyiladi.

8-ta'rif. Agar $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun

$$x_n \geq x_{n+1}$$

tengsizlik bajarilsa, (3.2) ketma-ketlik kamayuvchi.

$$x_n > x_{n+1}$$

tengsizlik bajarilsa, (3.2) ketma - ketlik qat'iy kamayuvchi deyiladi.

O'suvchi va kamayuvchi ketma - ketliklar umumiy nom bilan monoton ketma - ketliklar deyiladi.

3.9-misol. Ushbu

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma - ketlikning kamayuvchi ekani isbotlansin.

◀ Berilgan ketma - ketlikning

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

hadlarini olib,

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} =$$

nisbatni qaraymiz. Uni quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}$$

Bernulli tengsizligiga (ushbu $(1+\alpha)^n \geq 1 + \alpha n$ ($\alpha > -1$) tengsizlik Bernulli tengsizligi deyiladi. (qaralsin, [1], 2-bo'bob)) asosan

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \geq 1 + (n+2) \frac{1}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n}$$

bo'lishini hisobga olsak, natijada $\forall n \in N$ uchun

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n+1} = 1 \text{ ya'ni } x_n \geq x_{n+1}$$

bo'lismizi topamiz.▶

Aytaylik, ikki

$$x_n : x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots,$$

$$y_n : y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots,$$

ketma - ketliklar berilgan bo'lsin. Quyidagi

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n, \dots,$$

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, \dots, x_n - y_n, \dots,$$

$$x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, x_3 \cdot y_3, \dots, x_n \cdot y_n, \dots,$$

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots \quad (y_n \neq 0, n = 1, 2, \dots)$$

ketma - ketliklar mos ravishda x_n va y_n ketma - ketliklarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatan deyiladi va ular

$x_n + y_n, x_n - y_n, x_n \cdot y_n, \frac{x_n}{y_n}$ kabi belgilanadi.

Masalan,

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{n-1}{n}$$

ketma - ketliklar uchun

$$x_n + y_n = 1, x_n - y_n = \frac{2}{n} - 1, x_n \cdot y_n = \frac{n-1}{n^2}, \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n-1} \quad (n \neq 1)$$

bo'ladi.

Mashqlar.

3.10. Ushbu

$$a) f(x) = \lg x^2 \text{ bilan } \varphi(x) = 2 \lg |x|,$$

$$b) f(x) = \lg x^2 \text{ bilan } \varphi(x) = 2 \lg x,$$

$$c) f(x) = \arcsin x \text{ bilan } \varphi(x) = \arccos \sqrt{1-x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

funksiyalar bir - biriga aynan tengmi?

3.11. Agar $f(x)$ funksiya (0.1) intervalda aniqlagan bo'lsa,

$$f(t^2), f(\sin t), f(\ln t), f\left(\frac{|x|}{x}\right)$$

funksiyalarning aniqlanish sohalari topilsin.

3.12. Agar

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } |x| \leq 1 \text{ bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } |x| > 1 \text{ bo'lsa} \end{cases} \quad \varphi(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{agar } |x| \leq 2 \text{ bo'lsa} \\ -1, & \text{agar } |x| > 2 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

bo'lsa, $f(\varphi(x))$ topilsin.

3.13. 0 nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan $X \subset R$ to'plamda aniqlangan har qanday funksiya juft va toq funksiyalar yig'indisi ko'rinishida ifodalanishi isbotlansin.

3.14. Agar $y = f(x)$ juft funksiya, $x = \varphi(t)$ esa toq funksiya bo'lsa, u holda $y = f(\varphi(t))$ ning toq funksiya bo'lishi isbotlansin.

3.15. Ikki toq funksiya ko'paytmasining juft funksiya bo'lishi isbotlansin.

3.16. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $X \subset R$ to'plamda o'suvchi bo'lib, $C = const$ bo'lsa, u holda

- a) $f(x)+C$ o'suvchi funksiya,
 b) $Cf(x), C > 0$ o'suvchi, $C < 0$ da kamayuvchi.
 с) $f(x)+g(x)$ o'suvchi funksiya

bo'lishi isbotlansin.

3.17. Ushbu

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma – ketlikning o'suvchi bo'lishi isbotlansin.

3.18. Ushbu

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma – ketlikning yuqoridan chegaralanganligi isbotlansin.

3.19. Ushbu

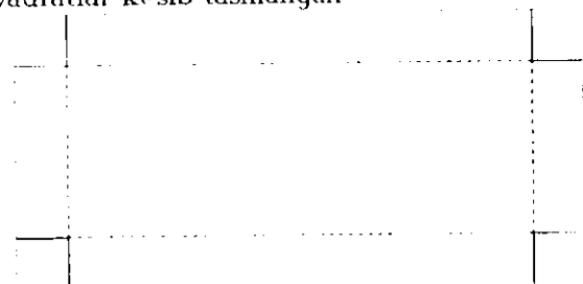
$$x_n = \sqrt[n]{n} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

ketma – ketlik uchun

$$1 < \sqrt[n]{n} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2$$

tengsizlikning bajarilishi isbotlansin.

3.20. Tomonlari a va b bo'lgan ($a > 0, b > 0$) to'g'ni to'rtburchak shaklidagi tunuka plastinkaning uchlaridan tomoni x ga teng kvadiatlar kesib tashlangan



24 – chizma

So'ng chizmada ko'rsatilgan punktir chiziqlar bo'ylab bukiib idish hosil qilingan. Ravshanki, bu idishning hajmi x ga bog'liq bo'ladi. Shu bog'lanishni ifodalovchi funksiyani topilsin.

3.21. Ushbu $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$ funksiyaning eng kichik qiymati topilsin.

IV BOB

Funksiya limiti

Funksiya limiti (limitga o'tish amali) matematik analizning dastlabki muhim tushunchalaridan. Ayni paytda u keyinroq kiritiladigan asosiy tushunchalar uchun zamin bo'lib hizmat qiladi.

Funksiya limiti nazariyasini dastlab sodda hol - sonlar ketma - kethgi (natural argumentli funksiya) uchun o'rGANAMIZ.

1-§. Sonlar ketma-ketligi limiti

1º. Sonlar ketma-ketligi limiti ta'rifi. Biror

$$x_n : x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \dots \quad (4.1)$$

-ketma - ketlik hamda biror $a \in R$ son berilgan bo'lgin.

1-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ olinganida ham natural son $n_0 \in N$ mavjud bo'lsaki, $n > n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar uchun

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (4.2)$$

tengsizlik bajarilsa, a son x_n ketma-ketlikning limiti deb ataladi.

Limit uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \text{yoki} \quad \lim x_n = a, \quad \text{yoki} \quad n \rightarrow \infty \ da x_n \rightarrow a$$

belgilashlardan foydalaniadi.

Bu ta'rifni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N, \forall n > n_0 : |x_n - a| < \varepsilon.$$

Ma'lumki, $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ tengsizlik larga ekvivalentdir.

Odatda, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ interval, ya'ni

$$U_\varepsilon(a) = \{x : x \in R, a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

to'plam a nuqtaning atrofi (ε - atrofi) deyiladi.

Keltirilgan ta'rifdan (4.1) ketma - ketlik hadlari uchun (4.2) tengsizlikning bajarilishi shu hadlarning a nuqtaning ε - atrofi $U_\varepsilon(a)$ to'plamga tegishliligi kelib chiqadi.

Demak, (4.1) ketma - kethik limitini quyidagicha ham

ta'riflash mumkin.

2-ta'rif. Agar a nuqtamining ixтиyори U (a) atrofi olinganida ham x_n ketma-ketlikning biror hadidan keyingi barcha hadlari shu atrofiga tegishli bo'lisa, a son x_n ketma-ketlikning limiti deb ataladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, ketma-ketlik limiti ta'rifidagi ε ixтиyори musbat son bo'lib, natural son n_0 esa shu ε ga va qaralayotgan ketma-ketlikka bog'liq ravishda topiladi.

4.1-misol. $x_n = \frac{1}{n} (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n})$ ketma-ketlikning limiti 0 ga teng bo'lishini ko'rsating.

◀ Ixtiyoriy musbat ε sonni olaylik. Shu ε ga ko'ra $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ ni topamiz. U holda barcha $n > n_0$ sonlar uchun

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1} < \varepsilon$$

munosabat o'rini. Demak, ta'rifga ko'ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. ▶

4.2-misol. Ushbu $x_n = (-1)^n (-1, -1, \dots, (-1)^n)$ ketma-ketlikning limiti mavjud emasligini ko'rsating.

◀ $\forall a \in R$ sonni olaylik. Agar $a=1$ bo'lib, uning $(1+\varepsilon, 1+\varepsilon)$ atrofi ($0 < \varepsilon < 1$) olinsa, ketma-ketlikning biror hadidan boshlab keyingi barcha hadlari shu atrofi tegishli bo'lmaydi ($-1 \notin (1+\varepsilon, 1+\varepsilon)$). Binobarin, $a=1$ ketma-ketlikning limiti emas. Xuddi shunday vaziyat $\forall a \in R$ uchun yuz beradi.

Demak, berilgan ketma-ketlik limitga ega emas. ▶

4.3-misol. Ushbu $0.3: 0.33: 0.333: \dots, 0.33\dots 3, \dots$ ketma-ketlikning limiti $\frac{1}{3}$ ga teng bo'lishini ko'rsating.

◀ $\forall \varepsilon > 0$ son olib, $0.33\dots 3 - \frac{1}{3}$ ni qaraymiz. Ravshanki,

$$0.33\dots 3 - \frac{1}{3} = \frac{33\dots 3}{100\dots 0} - \frac{1}{3} = \frac{99\dots 9 - 10^n}{3 \cdot 10^n} = \frac{-1}{3 \cdot 10^n}, \quad \left| 0.33\dots 3 - \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3 \cdot 10^n}$$

Endi $\varepsilon > 0$ ga ko'ra shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topish kerakki, natijada $n > n_0$ lar uchun $\frac{1}{3 \cdot 10^n} < \varepsilon$ tengsizlik o'rini bo'lsin.

Keyingi tengsizlik $n > \lg(3\varepsilon)$ bo'lganda o'rini bo'lishi ravshan. Demak, biz x_n sifatida $[\lg(3\varepsilon)]$ sonni olishimiz etarli. Bu esa qaratayotgan ketma-ketlik limitining $\frac{1}{3}$ ga teng bo'lishini ko'rsatadi. ►

2⁰. Cheksiz kichik miqdorlar.

3-ta'rif. Agar x_n ketma-ketlikning limiti nolga teng bo'lsa, x_n o'zgaruvchi cheksiz kichik miqdor deb ataladi, tegishli x_n esa *cheksiz kichik ketma-ketlik* deyiladi.

Ketma-ketlik limiti ta'rifida $a \neq 0$ deb olinadigan bo'lsa, unda barcha natural $n > n_0$ sonlar uchun (4.2) tengsizlik $|x_n - a| \leq |x_n| < \varepsilon$ tengsizlikka keladi. Demak, cheksiz kichik miqdor o'zgaruvchi miqdor bo'lib, u o'zgarish jarayonida absolut qiymati bo'yicha avvaldan berilgan har qanday kichik munusbat ε sondan kichik bo'ladi.

Masalan, $x_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlik cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

4.4-misol. Ushbu

$$x_n = \frac{1}{a^n} \quad (a \in R, |a| > 1)$$

ketma-ketlik cheksiz kichik miqdor ekanligi isbotlansin.

◀ $|a| > 1 + \delta$ deylik. Unda $\delta = |a| - 1 > 0$ bo'ladi. Bernulli tengsizligiga ko'ta

$$(1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta > n\delta$$

bo'lib, $\forall n \in N$ uchun

$$\left| \frac{1}{a^n} - 0 \right| = \frac{1}{|a|^n} < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,

$$\left| \frac{1}{a^n} - 0 \right| = \frac{1}{|a|^n} < \varepsilon$$

tengsizlik, barcha

$$n > \frac{1}{\varepsilon\delta}$$

bo'lganda o'rini. Agar

$$n_0 > \left[\frac{1}{\varepsilon\delta} \right] + 1$$

deyilsa. $\forall n > n_0$ uchun

$$\left| \frac{1}{a^n} \right| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} = 0.$$

$x_n = \frac{1}{a^n}$ ketma-ketlik cheksiz kichik miqdor. ►

4.5-misol. Ushbu

$$x_n = a^n \quad (a \in R, |a| < 1)$$

ketma-ketlik cheksiz kichik miqdor ekani isbotlansin.

◀ Agar $a \neq 0$ bo'lganda $\frac{1}{a} = b$ deyilsa, u holda $|b| > 1$ va

$$a^n = \frac{1}{b^n} \text{ bo'lib,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b^n} = 0$$

bo'ladi. ►

Aytaylik, x_n :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \dots$$

ketma-ketlik va a son ($a \in R$) berilgan bo'lsin.

1-teorema. a son x_n ketma-ketlikning limiti bo'lishi uchun

$$\alpha_n = x_n - a \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma-ketlikning cheksiz kichik miqdor bo'lishi zarur va yetarli.

◀ Zarurligi. Faraz qilaylik,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

bo'lsin. Limit ta'rifiga binoan

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 : |x_n - a| < \varepsilon$$

Agar $x_n - a = \alpha_n$ deyilsa, unda $|\alpha_n| < \varepsilon$ bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

bo'ladi.

Yetarliligi. Aytaylik, $\alpha_n = x_n - a$ bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

bo'lsin. Yana limit ta'rifiga ko'ra

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 : |\alpha_n| < \varepsilon$$

bo'ladi. Unda $|x_n - a| < \varepsilon$ bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

bo'ladi. ▶

Masalan,

$$x_n = \frac{n+1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma-ketlik uchun

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

bo'lganligi sababli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

bo'ladi.

Endi cheksiz kichik miqdorlar haqida ba'zi tasdiqlarni keltiramiz.

1-lemma. Chekli sondagi cheksiz kichik miqdorlar yig'indisi cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

◀ Avtaylik, α_i va β_i

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$$

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n, \dots$$

cheksiz kichik miqdorlar bo'lsin:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$$

Unda

$$\forall \varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2}, \exists n'_0 \in N, \forall n > n'_0 : |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2}, \exists n''_0 \in N, \forall n > n''_0 : |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo'ladi. Agar $n_0 = \max\{n'_0, n''_0\}$ deyilsa, $\forall n > n_0$ uchun

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo'lib,

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + \beta_n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + \beta_n) = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Agar γ_n ham cheksiz kichik miqdor bo'lsa,

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = (\alpha_n + \beta_n) + \gamma_n$$

ning cheksiz kichik miqdor bo'lishi yuqoridaqidek ko'rsatiladi.

2-lemma. Chegaralangan ketma-ketlik bilan cheksiz kichik miqdor ko'paytmasi cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

◀ Aytaylik, x_n chegaralangan ketma-ketlik, α_n esa cheksiz kichik miqdor bo'lsin:

$$\exists M \in \mathbb{R}, M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq M,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{M} < \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Bu munosabatlardan

$$|x_n \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \alpha_n) = 0. \blacktriangleright$$

3º. Cheksiz katta miqdorlar.

Biror $x_n : x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

4-ta'tif. Agar har qanday musbat M son berilganda ham shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topilsaki, barcha $n > n_0$ lar uchun

$$|x_n| > M$$

tengsizlik o'rini bo'lsa, x_n o'zgaruvchi cheksiz katta miqdor deb ataladi, tegishli va ketma-ketlik *cheksiz katta ketma-ketlik* deyiladi.

Demak, cheksiz katta miqdor o'zgaruvchi miqdor bo'lib, u o'zgarish jarayonida absolut qiymati bo'yicha avvaldan berilgan har qanday musbat sondan katta bo'ladi.

Ravshanki, cheksiz katta miqdorlar chekli limitga ega emas. Qulaylik nuqtai nazardan cheksiz katta miqdorlarning limiti cheksiz yoki cheksiz katta miqdorlar cheksizga intiladi deb olinadi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \text{ yoki } x_n \rightarrow \infty$$

kabi yoziladi.

Agar

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : x_n > M$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ kabi yoziladi.

Agar

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : x_n > M$$

bo'lsa, x_n ketma-ketlikning limiti $+ \infty$ deb olinadi va

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ kabi yoziladi.

Masalan, $x_n = (-1)^n n, y_n = -n, z_n = n$ ketma-ketliklarning limiti mos ravishda $+ \infty$ bo'ladi.

5-ta'rif. Chekli limitga ega bo'lgan ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

6-ta'rif. Agar ketma-ketlikning limiti cheksiz yoki limiti mavjud bo'lmasa, u uzoqlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Masalan, $x_n = \frac{n+1}{n}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi.

$y_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, z_n = n$ ketma-ketliklar esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

2-§. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar qator xossalarga ega.

1-xossa. Agar x_n ketma-ketlik yaqinlashuvchi va $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bo'lib, $a > p$ ($a < q$) bo'lsa, u holda ketma-ketlikning biron hadidan keyingi barcha hadlari ham r sondan katta (q sondan kichik) bo'ladi.

► $x_n \rightarrow a$ bo'lib, $a > p$ bo'lsin, $\varepsilon > 0$ sonni uning ixtiyoriyligidan foydalanib, $\varepsilon < a - p$ tengsizlikni qanoatlantiradigan qilib oaylik.

Ketma-ketlikning chekli a limitga ega ekanligidan $\forall \varepsilon > 0$ son uchun, jumladan $0 < r < a - p$ uchun, shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topish mumkinki, $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow r < x_n - a < \varepsilon$ bo'ladi. Natijada $n > n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar uchun $r < x_n - a$ va $x_n < a + p$ tengsizliklar o'rini bo'lib, undan x_n bo'lishi kelib chiqadi. ($a < q$ hol uchun xossa xuddi yuqoridagidek isbot etiladi.)►

Bu xossaladan quyidagi natija kelib chiqadi.

1-natija. Agar x_n ketma-ketlik yaqinlashuvchi va $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bo'lib, $a > 0$ ($a < 0$) bo'lsa, u holda ketma-ketlikning biron hadidan keyingi barcha hadlari musbat (manfiy) bo'ladi.

2-xossa. Agar x_n ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u chegaralangan bo'ladi.

◀ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bo'lsm. Ta'rifga ko'ta $x_n \rightarrow a$ benlganda ham shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topiladiki, $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlaniruvchi batcha natural sonlar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ bo'ladi, ya'ni x_n ketma-ketlikning $(n_0 + 1) \rightarrow \infty$ hadidan boshlab keyingi barcha hadlari uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizliklari bajariladi. Demak, x_n ketma-ketlik oshib borsa, x_1, x_2, \dots, x_{n_0} hadlari $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ tengsizliklarni qanoatlantirmasligi mumkin. Agar

$$|a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0}|$$

sonlarning eng kattasini M deb olsak, u holda berilgan ketma-ketlikning barcha hadlari

$$|x_n| \leq M \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

tengsizlikni qanoatlaniradi. Bu esa x_n ketma-ketlikning chegaralanganligini bildiradi. ▶

1-eslatma. Sonlar ketma-ketlikning chegaralanganligidan uning yaqinlashuvchi bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi. Masalan, $x_n = (-1)^n : -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$ ketma-ketlik chegaralangan. Ayni vaqtida uning limiti mavjud emasligi yuqorida ko'rsatilgan edi.

3-xossa. Agar x_n ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, uning limiti yagonadir.

◀ Teskarisini faraz qilaylik. x_n ketma-ketlik ikkita a va b ($a \neq b$) limitlarga ega bo'lsm:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \quad (a \neq b)$$

Limit ta'rifiga ko'ta

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n'_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n'_0 : |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n''_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n''_0 : |x_n - b| < \varepsilon$$

bo'ladi. Agar n'_0 va n''_0 natural sonlatming kattasini n_0 desak, $\forall n > n_0$ da

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |x_n - b| < \varepsilon$$

bo'lib,

$$|x_n - a| + |x_n - b| < 2\varepsilon$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$|a - b| + |a - x_n + x_n - b| \leq |x_n - a| + |x_n - b|$$

Demak: $|x_n - b| \leq 2|x_n - a|$ menq' ixtiyoriyligida $x_n - b$ bo'lishi kehb chiqadi ►

4-xossa. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida arifmetik amallar

2-teorema. Agar x_n va y_n ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, $x_n + y_n$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi va

$$\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$$

formula o'rini bo'ladi.

◀ $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ bo'lsin. 1-teoremaga muvofiq $x_n - a + \alpha_n$, $y_n - b + \beta_n$ bo'ladi, bunda α_n , β_n lar cheksiz kichik miqdorlar. U holda $x_n + y_n$ uchun quyidagi

$$x_n + y_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n) = a + b + \gamma_n$$

tenglikka kelamiz, bunda $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$ cheksiz kichik miqdor. Bundan esa, yana o'sha 1-teoremaga muvofiq

$$\lim(x_n + y_n) = a + b = \lim x_n + \lim y_n$$

bo'lishi kelib chiqadi ►

Bu teorema ikki yaqinlashuvchi ketma-ketlik yig'indisining limiti bu ketma-ketliklar limitlarining yig'indisiqa teng degan qoidani ifodalaydi.

Ilobt etilgan teorema qo'shiluvchilarning soni ikkitadan ortiq (chekli) bo'lgan holda ham o'rinci bo'lishini ko'rsatish mumkin.

3-teorema. Agar x_n va y_n ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa $x_n y_n$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi va

$$\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$$

formula o'rini bo'ladi.

◀ $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ bo'lsin. U holda $x_n - a + \alpha_n$, $y_n - b + \beta_n$, α_n va β_n lar cheksiz kichik miqdorlar. Unda

$$x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$$

bo'ladi. Cheksiz kichik miqdorlar haqidagi 1 va 2-lemmalarga asosan $\delta_n = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$ ketma-ketlik cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Demak,

$$x_n y_n = ab + \delta_n$$

bo'lib, bundan

$$\lim(x_n \cdot y_n) = ab + \lim x_n \cdot \lim y_n$$

ekani kelib chiqadi ►

Bu teorema ikkita yaqinlashuvchi ketma ketlik ko'paytmasining limiti bu ketma ketliklari limitlarining ko'paytmasiga teng bo'lishini ifodalaydi.

Xususan, agar x ketma ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, unda $\lim x_n = (\lim x_n)'$ bo'ladi.

Agar x ketma ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, unda Cx uchun Cx ketma ketlik ham yaqinlashuvchi va $\lim(Cx_n) = C \lim x_n$ formula o'rini bo'ladi.

4-teorema. Agar x va y ketma ketliklari yaqinlashuvchi bo'lib, $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $y_n \neq 0$ va $\lim y_n \neq 0$ bo'lsa, $\frac{x_n}{y_n}$ ketma ketlik ham yaqinlashuvchi hamda

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$$

formula o'rini bo'ladi.

◀ $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ bo'lsin. U holda $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$ bunda α_n, β_n cheksiz kichik miqdorlar. Shuni e'tiborga olib topamiz:

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b + \beta_n)}(b\alpha_n - a\beta_n)$$

Cheksiz kichik miqdorlar haqidagi 1- va 2- lemmalarga asosan $b\alpha_n - a\beta_n$ cheksiz kichik miqdor bo'lib, $\frac{1}{b(b + \beta_n)}$ esa chegaralangan (chunki $b \neq 0$ chekli, $\beta_n \rightarrow 0$) miqdor bo'lgani uchun $\gamma_n = \frac{1}{b(b + \beta_n)}(b\alpha_n - a\beta_n)$ cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

Demak,

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} + \gamma_n$$

Bundan

$$\lim \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \lim \frac{x_n}{y_n} + \lim \gamma_n$$

munosabatlari o'rini ekani kelib chiqadi. ▶

Shunday qilib, yaqinlashuvchi ketma ketliklari nisbatining limiti ularning limitlari nisbatiga teng (bunda mahraj noldan farqli bo'lishi lozim).

2-eslatma. Ikki x_n va y_n ketma-ketlikning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatidan iborat bo'lgan ketma-ketlikning yaqinlashuvchi bo'lishidan bu x_n va y_n ketma-ketliklarning har biri yaqinlashuvchi bo'lishi ha doim kelib chiqavermaydi. Masalan, $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi, chunki $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = \lim \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = 0$ ammo $\sqrt{n+1}$ va $\sqrt{n-1}$ ketma-ketliklarning yaqinlashuvchi emashiqi ravshan.

Ravshanki, $\frac{1}{n}x_n$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi (uning limiti 1 ga teng). Lekin $\frac{1}{n}y_n$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi, n ketma-ketlik esa yaqinlashuvchi emas.

5-xossa. **Tenglik hamda tengsizliklarda limitga o'tish.** Ketma-ketliklar limitining mavjudligini ko'rsatish va limiti mavjud bo'lgan ketma-ketliklarning limitlarni topish kabi masalalarni hal qilishda tenglik hamda tengsizliklarda limitga o'tish qoidalari tez-tez qo'llanilib turadi. Biz ularni keltiramiz.

1). x_n va y_n ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ bo'lsin. Agar $\forall n \in N$ uchun $x_n \leq y_n$ bo'lsa, u holda $a \leq b$ bo'ladi.

Bu qoida yaqinlashuvchi ketma-ketlik limitining yagonaligidan kelib chiqadi.

2). x_n va y_n ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ bo'lsin. Agar $\forall n \in N$ uchun $x_n \leq y_n$ ($x_n \geq y_n$) bo'lsa, u holda $a \leq b$ ($a \geq b$) bo'ladi.

◀ Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni keltiri!gan shartlar bajarilsa ham $a > b$ bo'lsin. $a > c > b$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi c sonni olaylik. Demak, $\lim x_n = a$ va $a > c$. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning 1-xossasiga (shu bobning 3-§ iga qarang) ko'ra shunday $n_0 \in N$ mavjudki, barcha $n > n_0$ lar uchun $x_n > c$ bo'ladi. Shuningdek, $\lim y_n = b$, $b < c$. Yana o'sha xossaga muvofiq shunday $n'_0 \in N$ mavjudki, barcha $n > n'_0$ lar uchun $y_n < c$ bo'ladi. Agar $\bar{n} = \max\{n_0, n'_0\}$ deyilsa, unda barcha $n > \bar{n}$ lar uchun bir vaqtida $x_n > c$ hamda $c > y_n$ tengsizliklari o'rinni bo'lib, undan $c > y_n$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $x_n \leq y_n$

$n = 1, 2, 3, \dots$ tengsizlikka ziddir. Demak, $a \leq b$ bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ hamda $\forall n \in N$ uchun $x_n \geq y_n$ bo'lishidan $a \geq b$ tengsizlik kelib chiqishi ko'rsatiladi.►

3-eslatma. x_n va y_n ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ bo'lsin.

Barcha $n = 1, 2, 3, \dots$ lar uchun $x_n < y_n$ qat'iy tengsizliklarning bajarilishidan $a < b$ tengsizlik hamma vaqt kelib chiqavermaydi.

Masalan, $\frac{1}{n}, \frac{1}{n}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi. Bu ketma-ketliklarda $\forall n \in N$ uchun $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ bo'lsa ham $\lim(-\frac{1}{n}) = \lim \frac{1}{n} = 0$ bo'ladi.

2-natija. Agar x_n ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, $\forall n \in N$ uchun $x_n \leq c$ ($x_n \geq c$) bo'lsa, u holda $\lim x_n \leq c$ ($\lim x_n \geq c$) bo'ladi (bunda c o'zgarmas son).

Bu natijaning isboti yuqoridagi 2) da $y_n = c$, $n = 1, 2, 3, \dots$ deb olinishidan kelib chiqadi.

3). x_n va z_n ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim x_n = \lim z_n = a$ bo'lsin. Agar $\forall n \in N$ uchun $x_n \leq y_n \leq z_n$ bo'lsa, u holda y_n ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi va $\lim y_n = a$ bo'ladi.

►Ketma-ketlikning limiti ta'rifiga asosan $\forall \varepsilon > 0$ berilganda ham shunday $n_0 \in N$ topiladiki, barcha $n > n_0$ lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ yoki $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ tengsizliklar o'rini bo'ladi. Shuningdek, o'sha $\varepsilon > 0$ olinganida ham shunday $n'_0 \in N$ topiladiki, barcha $n > n'_0$ lar uchun $|z_n - a| < \varepsilon$ yoki $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$ tengsizliklar o'rini bo'ladi. Endi $\bar{n}_0 = \max\{n_0, n'_0\}$ deylik. Unda $n > \bar{n}_0$ bo'lganda bir vaqtida $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$ tengsizliklar o'rini bo'ladi. Ammo shartga ko'ra $\forall n \in N$ uchun $x_n \leq y_n \leq z_n$ tengsizliklar o'rini. Shuning uchun $n > \bar{n}_0$ bo'lganda $a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$ ya'ni $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa y_n ketma-ketlikning yaqinlashuvchiligidini va $\lim y_n = a$ ekanligini ko'rsatadi.►

4.6-misol. Ushbu

$$x_n = \sqrt[n]{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma - ketlikning limiti topilsin.

◀ Bu ketma - ketlik uchun

$$1 < \sqrt[n]{n} < (1 + \frac{1}{\sqrt[n]{n}})^2 \quad (4.3)$$

bo'ladi (qaralsin. 3 - bob, 3.19 - mashq).

Ravshanki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 > 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right) \right)^2 = 1$$

(4.3) munosabatdan, $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tish bilan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

bo'lishni topamiz.▶

4.7-misol. Ushbu $x_n = n - \sqrt{n^3 - n^2}$ ketma - ketlikning limitini toping.

◀ Berilgan ketma - ketlikning umiiniy hadi x_n ni quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{aligned} x_n &= n - \sqrt[3]{n^3 - n^2} = \\ &= \frac{(n - \sqrt[3]{n^3 - n^2})(n^2 + n\sqrt[3]{n^3 - n^2} + \sqrt[3]{(n^3 - n^2)^2})}{n^2 + n\sqrt[3]{n^3 - n^2} + \sqrt[3]{(n^3 - n^2)^2}} = \\ &= \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} + \sqrt[3]{(1 - \frac{1}{n})^2}} \end{aligned}$$

Bundan esa

$$\begin{aligned} \lim x_n &= \lim(n - \sqrt[3]{n^3 - n^2}) = \lim \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} + \sqrt[3]{(1 - \frac{1}{n})^2}} = \\ &= \frac{1}{\lim \left[1 + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} + \sqrt[3]{(1 - \frac{1}{n})^2} \right]} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

bo'lishi kelib chiqadi.▶

3-§. Sonlar ketma - ketligi limitining mavjudligi haqida teoremlar

Ketma - ketlikning qachon chekli limitga ega bo'lishi haqidagi masala limitlar nazariyasining muhim masalalaridan biri. Ushbu paragrafda, avval monoton ketma - ketlikning limiti haqida, so'ng ixtiyoriy ketma - ketlikning limitga ega bo'lishini

ifodalaydigan teoremlarini keltitamiz.

1º. Monoton ketma-ketlikning limiti haqida teoremlar.

5-teorema. Agar x_n ketma-ketlik o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega; agar x_n ketma-ketlik yuqoridan chegaranmagan bo'lsa, u holda ketma-ketlikning limiti $+\infty$ bo'ladi.

◀ Avvalo, x_n ketma-ketlik o'suvchi va yuqoridan chegaralangan bo'lgan holni qaraymiz. Ketma-ketlik yuqoridan chegaralanganligi uchun shunday M son mavjudki, $\forall n \in N$ son uchun $x_n \leq M$ tengsizlik o'rini bo'ladi. Bu esa ketma-ketlikning barcha hadlaridan tuzilgan $\{x_n\}$ to'plamning yuqoridan chegaralanganligi ifodalaydi. Unda to'plamning aniq yuqori chegarasi haqidagi 3-teoremiaga asosan bu to'plam uchun $\sup\{x_n\}$ mavjud bo'ladi. Biz uni a bilan belgilaylik: $\sup\{x_n\} = a$. Endi a son x_n ketma-ketlikning limiti bo'lishini ko'rsatamiz.

Aniq yuqori chegaraning ta'rifiga ko'ra, birinchidan, $\{x_n\}$ to'plamning har bir elementi uchun $x_n \geq a$ tengsizligi o'rini bo'lsa, ikkinchidan, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham ketma-ketlikning shunday x_{n_0} hadi topiladiki, bu had uchun $x_{n_0} > a - \varepsilon$ tengsizlik o'rini bo'ladi.

Demak,

$$\sup\{x_n\} = a \Rightarrow \begin{cases} a - x_n \geq 0, \quad \forall n \in N \\ a - x_{n_0} < \varepsilon \end{cases}$$

Qaralayotgan x_n ketma-ketlik o'suvchi. Demak, $n > n_0 \Rightarrow x_n \geq x_{n_0}$. Shu sababli $n > n_0$ bo'lganda $0 \leq a - x_n \leq a - x_{n_0} < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Shunday qilib, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $n_0 \in N$ son topiladiki, $n > n_0$ bo'lganda $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa a son x_n ketma-ketlikning limiti ekanini ko'rsatadi.

Endi x_n ketma-ketlik o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaranmagan bo'lsin. Unda har qanday katta musbat A son olinganda ham x_n ketma-ketlikning shunday x_{n_0}' hadi topiladiki, $x_{n_0}' > A$ bo'ladi. Ammo barcha $n > n_0'$ lar uchun $x_n \geq x_{n_0}'$ tengsizlik o'rini bo'lgani sababli $x_n > A$ tengsizlik ham

bajariladi. Bu esa $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ bo'lishini bildiradi. ►

Quyidagi teorema ham xuddi vuqouidagi teoremaga o'xshash isbotlanadi.

6-teorema. Agar x -ketma-ketlik kamayuvchi bo'lib, quyidan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega; agar x -ketma-ketlik quyidan chegaralarungan bo'lsa, u holda ketma-ketlikning limiti ∞ bo'ladi.

4.8-misol. Ushbu $x_n = \frac{n!}{n^n}$ ketma-ketlikning limitini toping.

◀Avvalo, bu ketma-ketlik limitining mavjudligini ko'rsatamiz.

Ravshanki,

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} < \frac{n^n}{n^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} < x_n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

Bundan barcha $n \geq 1$ lar uchun $x_{n+1} < x_n$ tengsizlikning o'rini okani kelib chiqadi. Bu esa berilgan ketma-ketlik kamayuvchi okanini ko'rsatadi. Ketma-ketlikning har bir hadi musbat, $x_n > 0, n = 1, 2, \dots$. Demak, u quyidan chegaralangan. Shunday qilib, $x_n = \frac{n!}{n^n}$ ketma-ketlik kamayuvchi va quyidan chegaralangan. 5-teoremaga ko'ta bu ketma-ketlik chekli limitga ega. Biz uni a bilan belgilaylik:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = a$$

Ravshanki, $a \geq 0$. Bernulli tengsizligidan foydalaniib topamiz:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2.$$

Bundan esa $(n+1)^n \geq 2n^n$ kelib chiqadi. U holda

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= x_n - x_n \frac{n^n}{(n+1)^n} = x_n \left| \frac{(n+1)^n - n^n}{(n+1)^n} \right| \geq \\ &\geq x_n \frac{2n^n - n^n}{(n+1)^n} = \frac{x_n n^n}{(n+1)^n} < x_{n+1} \end{aligned}$$

bo'lib, natijada quyidagi $x_n \geq 2x_{n+1}$ tengsizlikka kelamiz. Bu tengsizlikda limitga o'tamiz: $\lim x_n \geq 2 \lim x_{n+1}$. Undan $a \geq 2a$ va $a \geq 0$ ni hisobga olsak, $a = 0$ okani kelib chiqadi. Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0. \quad \blacktriangleright$$

4.9- misol Quyidagi

$$\sqrt{a} + \sqrt{a+} + \sqrt{a+\sqrt{a}} + \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}} + \dots$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{a+} + \sqrt{a+\sqrt{a+} + \dots} + \sqrt{a+\dots}$$

$(a > 0)$ ketma-ketlikning limitini toping.

► Bu ketma-ketlikningni hadi

$$x_n = \sqrt{a} + \sqrt{a+} + \dots + \sqrt{a+\dots}$$

deyilsa,

$$x_{n+1} < \sqrt{a} + x_n, \quad n \geq 1 \quad (*)$$

bo'lib, undan x_n ketma-ketlikning o'suvchi va yuqoridan chegaralanganligi matematik induksiya usuli yordamida ko'rsatiladi Ravshanki,

$$x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{a} = x_2$$

Endi $k = n$ -nomer uchun $x_{k+1} < x_k$ tengsizlik bajarilsin deyilsa, (*) munosabatdan

$$x_k = \sqrt{a} + x_{k-1} < \sqrt{a} + x_k < x_{k+1}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, $\forall n \in N$ uchun $x_n < x_{n+1}$ bo'ladi.

Shuningdek, (*) dan foydalanib $\forall n \in N$ uchun

$$x_n < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

isbotlanadi. Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi 5-teoremiaga ko'ra berilgan ketma-ketlik chekli limitga ega. Biz uni y bilan belgilaylik: $\lim x_n = y$ so'ngra $x_n^2 = a + x_{n-1}$ tenglikda hadlab limitga o'tish amalini bajarib topamiz: $\lim x_n^2 = a + \lim x_{n-1}$ yoki $y^2 = a + y$. Natijada y ni topish uchun kvadriat tenglamaga kelamiz. Bu kvadrat tenglamaning ildizlarini yozamiz:

$$y_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, \quad y_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

Ketma-ketlikning hadlari musbat bo'lgani uchun $y_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$ son ketma-ketlikning limiti bo'ladi. Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{a} + \sqrt{a+} + \dots + \sqrt{a+\dots} \right) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} \blacktriangleright$$

Xususan, ushbu

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} + \dots$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{3} + \dots$$

ketma - ketlik yaqinlashuvchi va uning limiti $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 2.30$ ga teng.

Monoton ketma - ketlikning limiti haqidagi teoremlarning matematik analiz kursida qaraladigan ba'zi masalalarga tafbiq etilishini qarab o'tamiz.

2⁰. e soni. Quyidaqи $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (4.4)$$

ketma - ketlik berilgan bo'lсин. Bu ketma - ketlik limitining mavjudligini ko'rsatomiz. Berilgan (4.4) ketma - ketlik bilan bug'a ushbu

$$v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma - ketlikni ham qaraymiz. Bu ketma - ketlik kamayuvchi ekanligi 3 - bob, 3 - § da ko'rsatilgan.

Ikkinchi tomonidan, $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ketma - ketlikning har bir hadi musbat bo'lgani uchun u quyidan chegarolanganadir. Shunday qilib $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ketma - ketlik kamayuvchi va quyidan chegarolanganidir. 6 - teoremaga ko'ra bu y_n ketma - ketlik limitiga ega.

Agar

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq x_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

tenglikdan $x_n \geq y_n \geq \frac{n}{n+1}$ tenglikning kelib chiqishini va $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ ekanini o'tiborga olsak, unda $\lim x_n = \lim v_n$ ga ega bo'lamiz. Bu esa (4.4) ketma - ketlik limitining mavjudligini ko'rsatadi.

7-ta'ni. Berilgan $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ketma-ketlikning limiti e soni deb ataladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Bunda e lotincha exponentis "ko'satish, ko'satqich, namoyish qilish" so'zining dastlabki harfini ifodalaydi.

3^º. Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi.

7-teoren. 1. Ikkita x_n va y_n ketma-ketlik berilgan bo'lzin.

Agar

1). x_n o'suvchi, y_n kamayuvchi ketma-ketlik,

2). $\forall n \in \mathbb{N}$ lar uchun $x_n < y_n$

3). $\lim(y_n - x_n) = 0$ bo'lsa, x_n va y_n ketma-ketliklar yaqinlashuvchi va $\lim x_n = \lim y_n$ tenglik o'rini bo'ladi.

► x_n ketma-ketlik o'suvchi, y_n ketma-ketlik esa kamayuvchi hamda har bir $n \in \mathbb{N}$ uchun $x_n < y_n$ tengsizlik o'rini bo'lganidan, $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $y_n \geq y_1$, $x_n \leq x_1$ tengsizliklar bajariladi. Bu esa x_n ketma-ketlik yuqondan, y_n ketma-ketlik esa quyidan chegaralanganligini bildiradi. Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremlarga asosan x_n va y_n ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'ladi. Shuning uchun

$$\lim(y_n - x_n) = \lim y_n - \lim x_n$$

bo'lib, teoremaning uchinchi shartidan esa

$$\lim y_n - \lim x_n = 0, \quad \lim x_n = \lim y_n$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

Ma'lumki, $\{x : x \in R, a \leq x \leq b\}$ to'plam $[a, b]$ segment deb atalar edi. Agar $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ bo'lsa, $[a_1, b_1]$ segment $[a, b]$ segmentning ichiga joylashgan deyiladi.

Agar

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

segmentlar ketma-ketligi quyidagi

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \dots$$

munosabatda bo'lsa, bu segmentlar ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi deyiladi

3-natija. Agar ichma-ich joylashgan

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

segmentlar ketma-ketligi uchun $\lim(b_n - a_n) = 0$ bo'lsa, u holda

a_n va b_n ketma-ketliklari bitta limitga ega hamda bu limit barcha segmentlarga tegishli bo'lgan yagona nuqta bo'ladi.

► $\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \dots, \{a_n, b_n\}$, ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

bo'lsmi. Bunda a_n ketma-ketlik o'suvchi, b_n esa kamayuvchi ketma-ketliklardir va barcha $n \in \mathbb{N}$ lar uchun $a_n < b_n$ bo'ladi. Demak, a_n va b_n ketma-ketliklari 5 va 6-teoremalarning barcha shartlarini qanoatlantiradi, bu teoremalarga ko'tra a_n va b_n ketma-ketliklar yaqinlashuvchi va

$$\lim a_n + \lim b_n$$

bo'ladi.

Endi $\lim a_n = \lim b_n = c$ deb belgilab, c nuqta barcha $\{a_n, b_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ segmentlarga tegishli bo'lgan yagona nuqta ekanini ko'rsatamiz. a_n ketma-ketlik o'suvchi va $\lim a_n = c$ bo'lganidan $a_n < c$, $n = 1, 2, 3, \dots$ shuningdek, b_n ketma-ketlik kamayuvchi va $\lim b_n = c$ bo'lganidan esa $b_n > c$, $n = 1, 2, 3, \dots$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $a_n < c < b_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ bo'lib, c nuqta barcha segmentlarga tegishli: $c \in [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Agar shu c nuqtadan farqli va segmentlarning barchasiga tegishli $c', c' \in [a_n, b_n]$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) nuqta ham mavjud deb qaraladigan bo'lsa, unda

$$b_n - a_n \geq |c - c'| > 0$$

bo'lib, bu munosabat $\lim(b_n - a_n) = 0$ shartga zid bo'ladi. Demak, $c = c'$. ►

Keltirilgan natija ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi deb yuritiladi.

4th. Qismiy ketma-ketliklar. Bolzano-Veyershtrass lemmasi

Bitor $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots, x_m$ ketma-ketlik berilgan bo'lsmi. Bu ketma-ketlikning bitor n nomerli x_n hadini olamiz. So'ngra nomeri n dan katta bo'lgan n nomerli x hadini olamiz. Shu usul bilan x_1, x_2 va hokazo hadlarni olish mumkin. Natijada

nomerlari $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$ tengsizliklarni qanoatlantrira digan hadlar tanlangan bo'ladi. Bu hadlar ushbu

$$x_{n_1} < x_{n_2} < \dots < x_{n_k} < \dots \quad (n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots) \quad (4.5)$$

ketma - ketkni tashkil etadi.

Odatda (4.5) ketma - ketlik x_n ketma - ketlikning qismiy ketma - ketligi deb ataladi va x_n kabi belgilanadi. Ba'zida x_n ketma - ketlikdan x_n ketma - ketlik ajratilgan deyiladi.

Qismiy ketma - ketlikning tuzilishidan ravshanki, $k \rightarrow \infty$ da n , ham cheksizlikka intiladi:

Masalan. 1). quyidagi

$$1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1, \dots$$

$$2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$$

$$1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$$

ketma - ketliklar natural sonlar ketma - ketligi $1, 2, 3, \dots$ ning qismiy ketma - ketliklari bo'ladi.

2). Ushbu

$$1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \dots, \frac{1}{10^n}, \dots$$

ketma - ketlik

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

ketma - ketlikning qismiy ketma - ketligidir:

3). Quyidagi

$$1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$$

ketma - ketlikdan masalan, ushbu

$$1, 1, 1, \dots, 1, \dots$$

$$-1, -1, -1, \dots, -1, \dots$$

qismiy ketma - ketliklarni ajratish mumkin.

Ketma - ketlik limiti bilan uning qismiy ketma - ketliklari limiti orasidagi munosabatni quyidagi teorema ifodalaydi.

8-teorema. Agar x_n ketma - ketlik limitga (chekli, yoki $+\infty$, yoki $-\infty$) ega bo'lsa, uning har qanday qismiy ketma - ketligi ham shu limitga ega bo'ladi.

◀ $\lim x_n = a$ bo'lsin, x_n ketma - ketlikning biror

$$x_{n_1} : x_{n_2}, x_{n_3}, x_{n_4}, \dots, x_{n_k}, \dots$$

qismiy ketma - ketligini olaylik.

Limit ta'rifiga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ olinganida ham, shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son mavjudki, barcha $n > n_0$ lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ bo'ladi. $k \rightarrow \infty$ da $n_k \rightarrow \infty$ bo'lishidan shunday $m \in \mathbb{N}$ son topiladiki, $n_m > n_0$ tengsizlik o'rini bo'ladi. Demak, barcha $k > m$ lar uchun $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $\lim x_{n_k} = a$ limitning o'rini okanini ifodalaydi. Xuddi shuningdek, $\lim x_n = +\infty (-\infty)$ bo'lganida ham x_n ketma-ketlikning har qanday qismiy ketma-kethgi $+\infty (-\infty)$ ga intilishi ko'rsatiladi. ►

4-eslatma. Ketma-ketlik qismiy ketma-ketliklarining limiti mavjud bo'lishidan berilgan ketma-ketlikning limiti mavjud bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi. Masalan:

$$1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$$

ketma-ketlikning ushbu

$$1, 1, 1, \dots, 1, \dots$$

$$-1, -1, -1, \dots, -1, \dots$$

qismiy ketma-ketliklari limitga ega (ular mos ravishda 1 va -1 larga teng). Ammo berilgan $(-1)^{n+1}$ ketma-ketlik limitga ega emas.

Demak, berilgan ketma-ketlik limitga ega bo'lmasa ham uning qismiy ketma-ketliklari limitga ega bo'lishi mumkin ekan.

8-ta'rif. x_n ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligi limiti berilgan ketma-ketlikning *qismiy limiti* deb ataladi.

3-lemma. (Bolsano-Veyershtass lemmasi). Agar x_n chegaralangan bo'lsa, bu ketma-ketlikdan shunday qismiy ketma-ketlik ajratish mumkinki, u yaqinlashuvchi bo'ladi.

◀ x_n ketma-ketlik chegaralangan bo'lsin. Demak, ketma-ketlikning barcha hadlari biror $[a, b]$ segmentga tegishli bo'ladi.

$[a, b]$ segmentni teng ikki qismga ajratib, $\left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ va

$\left[\frac{a+b}{2}, b \right]$ segmentlarni hosil qilamiz. Berilgan ketma-

ketlikning barcha hadlari $[a, b]$ da bo'lgani sababli, uning cheksiz ko'p sondagi hadlari $\left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ va $\left[\frac{a+b}{2}, b \right]$

segmentlarning kamida bittasiga tegishli bo'ladi. Endi x_n ketma-ketlikning cheksiz ko'p sondagi hadlari bo'lgan

segmentni, ya'ni $\left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ yoki $\left[\frac{a+b}{2}, b \right]$ ni (agar ikkalasida ham ketma-ketlikning cheksiz ko'p sondagi hadlari bo'lsa, ulardan ixtiyoriy birini) $\{a_1, b_1\}$ deb belgilaymiz. Ravshanki, $\{a_1, b_1\}$ ning uzunligi $\frac{b-a}{2}$ bo'ladi. Yuqoridagiga o'xshash, $\{a_1, b_1\}$ segmentni teng ikki qismiga ajratib, $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2} \right]$ va $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1 \right]$ segmentlarni hosil qilamiz va bu segmentlardan x_n ketma-ketlikning cheksiz sondagi hadlan bo'lganini $\{a_2, b_2\}$ deb olamiz. Ravshanki, $\{a_2, b_2\}$ segmentning uzunligi $\frac{b-a}{2^2}$ bo'ladi.

Bu jarayonni davom ettirish natijasida ushbu

$$\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \dots, \{a_n, b_n\}, \dots$$

segmentlar ketma-ketligi hosil bo'ladi. Tuzilishiga ko'ra har bir $\{a_k, b_k\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ segmentda x_n ketma-ketlikning cheksiz ko'p sondagi hadlari bo'ladi.

Ravshanki,

$$\{a_1, b_1\} \supset \{a_2, b_2\} \supset \dots \supset \{a_n, b_n\} \supset \dots$$

$\{a_k, b_k\}$ segmentning uzunligi $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$ bo'lib, $k \rightarrow \infty$ da nolga intiladi. Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipiga ko'ra a_k va b_k ketma-ketliklar umumiy (bitta) chekli limitga ega:

$$\lim a_k = \lim b_k = c$$

Endi x_n ketma-ketlikning $\{a_1, b_1\}$ dagi birorta hadini olaylik. U x_{n_1} - had bo'lsin: $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$ so'ngra, x_{n_1} ning $\{a_2, b_2\}$ dagi birorta hadini olaylik. U x_{n_2} - had bo'lsin: $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ qaralayotgan segmentlarning har birida ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari bo'lganligi uchun, ravshanki, $n_2 > n_1$ qilib olishimiz mumkin.

Xuddi shuningdek, x_n ning $\{a_1, b_1\}$ dagi x_{n_1}, x_{n_2} hadlaridan keyin keladigan birorta x_n hadini ($n_1 < n_2 < n_3$) olamiz. Bu jarayonni davom ettirib, $k \rightarrow \infty$ qadamda, $\{a_k, b_k\}$ segmentdagidagi x_n

ketma-ketlikning $x_{n_1} + x_{n_2} + x_{n_3} + \dots + x_{n_k}$ lardan keyin keladigan hadlardan biri x_n ni olamiz va hik Natijada ketma-ketlik hadlanidan tashkil topgan ushbu

$$x_{n_1} + x_{n_2} + x_{n_3} + \dots + x_{n_k} + \dots = (n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k) \cdot c$$

qismiy ketma-ketlik hosil bo'ladi. qismiy x_n ketma-ketlikning hadlan uchun

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$$

tengsizliklar o'rini bo'lib, unda $k \rightarrow \infty$ da

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

5-eslatma. Keltirilgan lemmada ketma-ketlikning chegaralangan bo'lishi muhim shartdir. Shu shart bajarilmasa, lemmanning xulosasi o'rini bo'lnasdan qolishi mumkin. Masalan, chegaralannagan ushbu

$$1, 2, 3, \dots, n$$

natural sonlari ketma-ketlikning har qanday qismiy ketma-ketligi ham \neq ga intiladi.

5th. Koshi teoremasi (yaqintashish mezoni). Biror x_n ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

9-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son mavjud bo'lsaki, barcha $n > n_0$ va barcha $m > n_0$ lar uchun

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad (4.6)$$

tengsizlik bajarilsa, x_n fundamental ketma-ketlik deb ataladi.

4.10-misol. $x_n = \frac{n}{n+1}$ Bu ketma-ketlik uchun (4.6)

shartning bajarilishi ko'rsatilsin.

◀ Haqiqatan,

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1} \right| = \frac{n+m}{nm} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n}$$

Agar $\forall \varepsilon > 0$ songa ko'ta natural n_0 sonni

$$n_0 \geq \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1$$

deb olsak, u holda barcha $n > n_0$ va barcha $m > n_0$ lar uchun

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

bo'lishini topamiz. Demak, berilgan ketma-ketlik

fundamentaldid. ►

4.11-misol. Quyidagi

$$x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

ketma - ketlikning fundamental ketma ketlik emasligi ko'rsatilsin.

◀ Ravshanki,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2}, \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

ketma - ketlik uchun har qanday $m > 1$ olganimizda ham

$$|x_{m+1} - x_m| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} > \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu hol berilgan ketma - ketlikning fundamental emasligini ko'rsatadi. ►

9-teorema. (Koshi teoremasi). Ketma ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi uchun n fundamental bo'lishi zarur va yetarli

◀ Zarurligi. x_n ketma ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim x_n = a$ bo'lsin. Limit ta'rifiga muvofiq, $\forall \epsilon > 0$ berilganda ham $\frac{\epsilon}{2}$ ga ko'ta shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topiladiki, barcha $n > n_0$ sonlar uchun $|x_n - a| < \epsilon$ tengsizlik o'tinli bo'ladi. Demak, ixtiyoriy $n > n_0$ va $m > n_0$ sonlar uchun

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \epsilon$$

Bu esa x_n fundamental ketma ketlik ekanini ko'rsatadi.

Yetarliligi. x_n fundamental ketma ketlik bo'lsin. Demak, $\forall \epsilon > 0$ uchun shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topiladiki, $n > n_0$, $m > n_0$ lar uchun $|x_n - x_m| < \epsilon$ tengsizlik o'tinli. Bu tengsizlikda n son (n dan katta) ixtiyoriy bo'lishini qoldirib, m natural sonning n_0 dan katta biror tavin qiymatini olib, yuqoridaqgi tengsizhkni quyidagi

$$x_m - \epsilon < x_n < x_m + \epsilon$$

ko'rinishda yozib olamiz. Demak, $n > n_0$ da x_n ketma ketlikning x hadlari ($x_m - \epsilon, x_m + \epsilon$) intervalda tegishli bo'lib, undan ketma ketlikning chegaralanganligi kelib chiqadi. Bolzano - Veyershtrass lemmasiga ko'ta x ketma ketlikdan chekli songa intiluvchi x_n qismiy ketma ketlik ajratish mumkin. Bu qismiy ketma ketlik limitini a bilan belgilaylik:

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Endi a son x_n -ketma-ketlikning limiti ekanini ko'rsatamiz. Darhaqiqat, bir tomonidan $x_n \rightarrow a$ bo'lqoni uchun $\forall \varepsilon > 0$ ga ko'ra shunday $k_1 \in \mathbb{N}$ son topiladiki, $k > k_1$ lat uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

Ikkinchi tomonidan, $m > n$ bo'lqanda $|x_m - x_n| < \varepsilon$ tengsizlik ham bajariladi. Yuqoridaqи tengsizliklarga ko'ra

$$|x_n - a| + |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| + |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < 2\varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ekanini ko'rsatadi ►

Isbot etilgan teorema Koshi teoremasi yoki yaqinlashish mezonii (kriteriyasi) deb yuritiladi. Bu teorema muhim nazariy ahaniyatga ega.

6º. Ketma-ketlikning yuqori va quyi limitlari

Aytaylik, x_n :

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots$$

ketma-ketlik berilgan bo'lib, x_{n_k} :

$$x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < \dots < x_{n_k} < \dots$$

berilgan ketma-ketlikning qismiy ketma-ketliklari bo'lsin. Ma'lumki, x_n ketma-ketlikning limiti x ning qismiy limiti devilar edi.

10-tarif. x ketma-ketlik qismiy limitlarning eng kattasi x , ketma-ketlikning *yuqori limiti* deyiladi. U

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

kabi belgilanadi.

x ketma-ketlik qismiy limitlarning eng kichigi berilgan ketma-ketlikning *quyi limiti* deyiladi. U

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

kabi belgilanadi.

Masalan, ushbu x_n :

$$1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$$

ketma-ketlikning yuqori limiti

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$$

quyi limiti esa

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

bo'ladi.

4-§. Funksiyaning limiti

Biz yuqonda natural argumentli funksiya sonlar ketma ketligi va uning limitini o'rgandik. Endi argumenti haqiqiy son bo'lgan funksiya limitini qaraymiz. Avvalo sonli to'plamning limiti nuqtasi tushunchasi bilan tanishamiz.

10. To'plamning limiti nuqta si Ma'lumki,

$$U_r(a) = \{x : x \in R, a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

to'plam a nuqtanining atrofi (x -ni atrofi) deb atalar edi. Shunga o'xshash ushbu

$$U_c(a) = \{x : x \in R, a < x < a + \varepsilon\}$$

to'plam a nuqtanining o'ng atrofi.

$$U_c(a) = \{x : x \in R, a - \varepsilon < x < a\}$$

to'plam a nuqtanining chap atrofi.

$$U_c(\infty) = \{x : x \in R, |x| > c\},$$

$$U_c(+\infty) = \{x : x \in R, x > c\},$$

$$U_c(-\infty) = \{x : x \in R, x < -c\}$$

to'plamlar esa mos ravishda ∞ , $+\infty$ va $-\infty$ "nuqta" larning atrofi deb ataladi. Yuqorida keltirilgan c va ε lar ixtiyoriy musbat haqiqiy sonlar.

x biror sonli to'plam, a biror nuqta bo'lsin.

11-ta'rif. Agar a nuqtanining har bir atrofida x to'plamning a dan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa, ya'ni

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r \in X, r \neq a, : |x - a| < \varepsilon$$

bo'lsa, a nuqta x to'plamning *limit nuqta* deyiladi. Misollar qaraylik.

1). Ushbu $[0,1] = \{x : x \in R, 0 \leq x \leq 1\}$ to'plamning har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqta bo'ladi:

2). Ushbu $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ to'plam limit nuqtaga ega emas:

3). Ushbu $(0,1) = \{x : x \in R, 0 < x < 1\}$ to'plamning har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqta bo'ladi va yana $x = 0, x = 1$ nuqtalar ham $(0,1)$ uchun limit nuqtalardir.

4) $E = [0,1]$ segment hamda 2 sonidan iborat to'plam bo'lsin.

y_1 ni $I \subset [0,1] \setminus \{2\}$. Bu to'plam uchun $\forall \varepsilon > 0$ limit nuqta emas.

Agar a nuqta x to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, x to'plam nuqtalaridan a ga intiluvchi x_n ($x_n \in X$, $x_n \neq a$, $n = 1, 2, \dots$) ketma-ketlik tuzish mumkin.

► To'plamning limit nuqtasi ta'rifiga binoan:

$$\varepsilon = 1 \text{ uchun } \exists x_1 \in X, x_1 \neq a : |x_1 - a| < 1,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \text{ uchun } \exists x_2 \in X, x_2 \neq a : |x_2 - a| < \frac{1}{2},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \text{ uchun } \exists x_3 \in X, x_3 \neq a : |x_3 - a| < \frac{1}{3},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \text{ uchun } \exists x_n \in X, x_n \neq a : |x_n - a| < \frac{1}{n},$$

bo'ladi. Natijada, x_n ketma-ketlik hosil bo'lib, $\forall n \in N$ uchun

$$|x_n - a| < \frac{1}{n}$$

bo'ladi. Bundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

Bu keltirilgan mulohazalardan ko'rinishadiki, bunday ketma-ketliklarni ko'plab tuzish mumkin.

12-ta'rif. Agar a nuqtaning har bir o'ng (chap) atrofida X to'plamning a dan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa, a nuqta X ning o'ng (chap) limit nuqtasi deb ataladi.

13-ta'rif. Agar har bir $I \setminus \{\infty\}$ atrofida X to'plamning kamida bitta nuqtasi bo'lsa, ∞ "nuqta" X to'plamning limit nuqtasi deyiladi.

" $x_n \rightarrow \infty$ " "nuqta" larning limit nuqta bo'lishi ham yuqoridagi singari ta'riflanadi.

Masalan, $+\infty$ "nuqta" $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.

2º. Funksiya limitining ta'rifi. $X \subset R$ to'plam berilgan bo'lib, a nuqta uning limit nuqtasi bo'lsin. Bu to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan deylik. Modomiki, a nuqta X ning limit nuqtasi ekan, X to'plamning nuqtalaridan a ga intiluvchi turli, $(x_n \in X, x_n \neq a, n = 1, 2, 3, \dots)$ ketma-ketliklar tuzish

mumkin: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Ravshanki, $x_n \in X$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) shuning uchun bu nuqtalarda ham $f(x)$ funksiya aniqlangan. Natijada $\{x_n\}$ ketma-ketlik bilan birga $f(x_n)$:

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$$

sonlar ketma-ketligiga ham ega bo'laziz.

14-ta'rif. Agar X to'plamning nuqtalaridan tuzilgan, a ga intiluvchi har qanday x_n ($x_n \neq a, n = 1, 2, 3, \dots$) ketma-ketlik o'lanimizda ham mos $f(x_n)$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b (chekli yoki cheksiz) limitga intilsa, shu b ga $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti deb ataladi. Funksiya limiti $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ kabi belgilanadi.

Funksiya limitiga berilgan bu ta'rif Geyne ta'rif deb ataladi.

Ba'zan b ni $f(x)$ ning $x \rightarrow a$ dagi limiti deyiladi va

$$x \rightarrow a \text{ da } f(x) \rightarrow b$$

kabi belgilanadi.

Keltirilgan ta'rifning ushbu muhim tomoniga o'quvchining e'tiborini jalb qilaylik: a ga intiluvchi har qanday x_n ($x_n \neq a, n = 1, 2, 3, \dots$) ketma-ketlik uchun $x_n \rightarrow a$ da $f(x_n)$ ketma-ketlikning limiti olingan x , ketma-ketlikka bog'liq bo'lmasligi kerak.

4.12-misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

funksiyaning $x \rightarrow 0$ dagi limiti 1 ga teng ekanini ko'rsating.

◀ Nolga intiluvchi ixtiyoriy x_n ketma-ketlik olaylik: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

U holda funksiya qiymatlaridan iborat ketma-ketlik

$$f(x_n) = \frac{1}{1+x_n^2}$$

bo'ladi. Ravshanki, $x_n \rightarrow 0$ da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x_n^2} = 1.$$

Demak, ta'rifga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1. \blacktriangleright$$

4.13-misol Quyidagi

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

funksiyaning $x \rightarrow 0$ dagi limiti mavjud emasligi ko'rsatilsin.

◀ Haqiqatan, nolga intiluvchi ikkita turli $x_n^1 = \frac{2}{(4n+1)\pi}$,

$x_n^2 = \frac{2}{(4n+3)\pi}$ ketma-ketlikni olaylik. Bunda

$$f(x_n^1) = \sin \frac{4n+1}{2}\pi = -1, \quad f(x_n^2) = \sin \frac{4n+3}{2}\pi = 1,$$

bo'lib,

$$\lim f(x_n^1) = -1, \quad \lim f(x_n^2) = 1$$

bo'ladi.

✓ Bu esa $\sin \frac{1}{x}$ funksiyaning $x \rightarrow 0$ da limiti mavjud emasligini ko'rsatadi. ►

Funksiya limitini boshqacha ham ta'riflash mumkin.

15-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti deb ataladi.

16-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikning qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x)| > c$ ($f(x) > c, f(x) < -c$) bo'lsa, $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti $\infty (+\infty; -\infty)$ deyiladi.

Funksiya limitiga berilgan bu ta'rif Koshi ta'rifi deb ataladi.

4.14-misol. Ushbu $f(x) = \frac{x+5}{x^2-25}$ funksiyaning $x \rightarrow 5$ dagi limiti

$\frac{1}{10}$ bo'lishini isbot eting.

◀ $\forall \varepsilon > 0$ son olaylik. Bu ε ga ko'ra δ ni $\delta = \frac{10\varepsilon}{1+\varepsilon}$ deb olsak, u holda $0 < |x - 5| < \delta$ bo'lganda

$$\left| \frac{x+5}{x^2-25} - \frac{1}{10} \right| = \frac{1}{10} \left| \frac{x-5}{x+5} \right| \leq \frac{|x-5|}{10(10|x-5|)} \leq \frac{\delta}{10-\delta} < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bundan, ta'rifa ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{x^2 - 25} = \frac{5}{25 - 10} = \frac{1}{5}$$

kelib chiqadi. ▶

4.15-misol. Ushbu $f(x) = \frac{1}{x-1}$ funksiya uchun $x \rightarrow 1$ da $f(x) \rightarrow \infty$ bo'lishini ko'rsating.

◀ $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ deb olinsa, u holda $0 < |x - 1| < \delta$ tengsizlikning bajarilishidan

$$|f(x)| = \left| \frac{1}{x-1} \right| > \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$. ▶

3⁰. Funksiyaning bir tomonli limitlari. x biror haqiqiy sonlar to'plami bo'lib, a uning o'ng (chap) limit nuqtasi bo'lsin. Bu to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan deylik.

17-ta'rif. (Geyne). Agar x to'plamning nuqtalaridan tuzilgan va har bir hadi a dan katta (kichik) bo'lib, a ga intiluvchi har qanday x_n ketma-ketlik oлganimizda ham mos $f(x_n)$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b ga intilsa, shu b ni $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi o'ng (chap) limiti deb ataladi.

18-ta'rif. (Koshi). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a$) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi o'ng (chap) limiti deb ataladi.

Funksiyaning o'ng (chap) limiti quyidagicha belgilanadi:

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$ yoki $f(a+0) = b$ ($\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$ yoki $f(a+0) = b$)
Agar $a=0$ bo'lsa, $x \rightarrow 0+0$ ($x \rightarrow 0-$) o'rniiga $x \rightarrow +0$ ($x \rightarrow -0$) deb yoziladi.

Funksiyaning o'ng va chap limitlari, uning bir tomonli limitlari deyiladi.

4.16-misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \quad (x \neq 0)$$

funksiyaning o'ng va chap limitlari topilsin.

◀ Har biri nolga intiluvchi ikkita

$$x_n' - x_n' \rightarrow 0 (x_n' > 0, n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$x_n'' - x_n'' \rightarrow 0 (x_n'' < 0, n = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma-ketlikni olaylik. Bu ketma-ketliklar uchun

$$f(x_n') = \frac{x_n'}{|x_n'|} - 1 \rightarrow 1, \quad f(x_n'') = \frac{x_n''}{|x_n''|} - 1 \rightarrow -1$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|} - 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} - 1 \blacktriangleright$$

Endi $x \rightarrow \pm\infty$ da funksiya limiti tushunchasini keltiramiz.

x to'plam berilgan bo'lub, $\infty (+\infty, -\infty)$ uning limit "nuqta" si bo'lisin. Bu to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan deylik.

17-ta'rif. (Geyne). Agar x to'plamning nuqtalaridan tuzilgan har qanday cheksiz katta (musbat cheksiz katta; manfiy cheksiz katta) x_n ketma-ketlik olganimizde ham mos $f(x_n)$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b ga intilsa, shu b ni $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow \infty (x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty)$ *dagi limiti* deb ataladi.

18-ta'rif. (Koshi). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $|x| > \delta (x > \delta; x < -\delta)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow \infty (x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty)$ *dagi limiti* deb ataladi. Funksiya limiti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b)$$

kabi begilanadi.

4.17-misol. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (4.7)$$

tenglikni isbotlang.

◀ Ushbu

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

tengsizliklar o'rini. Bu muktab matematikasidan ma'lum $\sin x > 0$ bo'lgani uchun bu tengsizliklarni

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

ko'rinishda yozilishi mumkin. Undan

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} = 1 - \cos x \quad (4.8)$$

tengsizliklar kelib chiqadi.

Biz (4.8) tengsizliklarni ixtiyoriy $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ uchun isbot qildik.

$\frac{\sin x}{x} \leq 1$ ($x \neq 0$) va $\cos x$ funksiyalarning juftligidan bu tengsizliklarning barcha $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$ uchun to'g'riligini topamiz. Shu bilan birga $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ da

$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \leq 2 \frac{|x|}{2} = |x|$ tengsizlikning o'rini bo'lishini e'tiborga olsak, yuqoridaagi (4.8) tengsizliklar quyidagi

$$0 < \left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < |x|$$

ko'rinishga kelishini topamiz.

Agar $\forall \varepsilon > 0$ son berilganda ham $\delta > 0$ deb ε va $\frac{\pi}{2}$ sonlarning kichigi olinsa, argument x ning $0 < |x| < \delta$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| = \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rini bo'ladi. Bu esa funksiya limitining Koshi ta'rifiga ko'ra (4.7) limitning to'g'riligini anglatadi. ►

4.18-misol. Quyidagi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (4.9)$$

tenglikni isbotlang (bunda $e = 2,71\dots$)

◀ Buning uchun $+\infty$ ga intiluvchi ixtiyoriy x_n ketma-ketlikni olaylik. Bu holda barcha $k = 1, 2, 3, \dots$ lar uchun $x_k > 1$ deb qarash mumkin. Har bir x_k ning butun qismini n_k orqali belgilab, ushbu $[x_k] = n_k$ ($k = 1, 2, \dots$) $+\infty$ ga intiluvchi $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ natural sonlar ketma-ketligini hosil qilamiz.

Ma'lumki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Bu munosabatdan

$$\lim_{n_k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$$

ekani kelib chiqadi.

Endi ushbu

$$|x_k| = n_k \Rightarrow n_k \leq x_k < n_k + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n_k+1} < \frac{1}{x_k} < \frac{1}{n_k} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n_k+1} < 1 + \frac{1}{x_k} < 1 + \frac{1}{n_k}$$

munosabatlar o'rini bo'lishini e'tiborga olib, topamiz:

$$\left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{n_k} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} \quad (4.10)$$

Biroq

$$\lim_{n_k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \lim_{n_k \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1} \left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{-1} \right) = e,$$

$$\lim_{n_k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \lim_{n_k \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n_k}\right) \right) = e$$

limitlar o'rini bo'lgani uchun (4.10) tengsizliklarda (bunda $x_k \rightarrow +\infty$) limitga o'tsak, izlangan (4.9) limit kelib chiqadi.

Endi $+\infty$ ga intiluvchi ixtiyoriy x_n ketma-ketlikni olaylik. Bunda $x_k \geq -1$ ($k=1,2,\dots$) deb qarash mumkin. Agar $y_k = -x_k$, deb belgilasak, unda $y_k \rightarrow +\infty$ va $y_k > 1$ ($k=1,2,\dots$) bo'ladi.

Ravshanki,

$$\left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{n_k} = \left(1 + \frac{1}{y_k}\right)^{-n_k} = \left(\frac{y_k}{y_k-1}\right)^{n_k} = \left(1 + \frac{1}{y_k-1}\right)^{n_k}.$$

Undan

$$\lim_{n_k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{n_k} = \lim_{n_k \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{y_k-1}\right)^{n_k-1} \left(1 + \frac{1}{y_k-1}\right) \right) = e$$

Shunday qilib, $+\infty$ ga intiluvchi har qanday x_k ketma-ketlik olinganda ham $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ funksiya qiymatlaridan tuzilgan

$$f(x_k) = \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{n_k}$$

ketma-ketlik hamma vaqt e limitiga ega ekani isbotlanadi.

Funksiya limitining Geyne ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

limit ham o'tinli bo'ladi. ►

4⁰. Cheksiz kichik hamda cheksiz katta funksiyalar. Faraz qilaylik, $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar $X \subset R$ to'plamida berilgan bo'lib, a shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

19-ta'rif. Agar

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$$

bo'lsa, $\alpha(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik funksiya deyiladi. Masalan, $x \rightarrow 0$ da $\alpha(x) = \sin x$ funksiya cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya X to'plamida berilgan bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

bo'lsin. U holda

$$\alpha(x) = f(x) - b$$

funksiya $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham, funksiya limiti ta'riflariga ko'ra

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ bo'ladi.

Demak, bu holda

$$f(x) = b + \alpha(x)$$

bo'ladi. ►

20-ta'rif. Agar

$$\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = \infty$$

bo'lsa, $\beta(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ da cheksiz katta funksiya deyiladi.

Masalan, $x \rightarrow 0$ da $\beta(x) = \frac{1}{x}$ funksiya cheksiz katta funksiya bo'ladi.

5-§. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari

Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ham yaqinlashuvchi ketma-ketliklar singari qator xossalarga ega. Ularning isbotlari ham yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning mos xossalari isbotlari kabidir.

1⁰. Tengsizlik belgisi bilan ifodalanadigan xossalari. $X \subset R$

to'plam berilgan bo'lib, a esa uning limit nuqtasi bo'lsin. Bu to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan.

1). Agar ushbu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ limit mavjud bo'lib, $b > p$ ($b < q$) bo'lsa, a ning yetarli kichik atrofidan olingan x ($x \neq a$) ning qiymatlarida $f(x) > p$ ($f(x) < q$) bo'ladi.

Agar ushbu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ limit mavjud bo'lib, $b > 0$ ($b < 0$) bo'lsa, a ning yetarli kichik atrofidan olingan x ($x \neq a$) ning qiymatlarida $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) bo'ladi.

2). Agar ushbu $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ limit mavjud bo'lsa, a ning etarli kichik atrofidan olingan x ($x \neq a$) ning qiymatlarida $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'ladi.

6-eslatma. Funksiya chegaralanganligidan uning chekli limitga ega bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi. Masalan, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ funksiya chegaralangan, ammo $x \rightarrow 0$ da bu funksiya limitga ega emas.

A to'plamda $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar aniqlangan bo'lib, a esa x ning limit nuqtasi bo'lsin.

3). Agar argument x ning a nuqtaning biror $U_\delta(a)$ atrofidan olingan barcha qiymatlarida

$$f_1(x) \leq f_2(x)$$

tengsizlik o'rinali bo'lib, $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ limitlar mavjud bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$$

tengsizlik o'rinali bo'ladi.

4). Agar argument x ning a nuqtaning biror $U_\delta(a)$ atrofidan olingan barcha qiymatlarida

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$$

tengsizlik o'rinali bo'lsa va $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ limitlar mavjud bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b$$

bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

bo'ladi.

4.18-misol Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

limit topilsin.

◀ Ravshanki, bir tomonidan $x \cos \frac{1}{x}$ funksiya uchun

$-|x| \leq x \cos \frac{1}{x} \leq |x|$ tengsizliklar bajariladi, ikkinchi tomondan,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

Demak, yuqondagi 4) xossaga ko'ra $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$. ►

2^q. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amalalar. $x \rightarrow a$ to'plam berilgan bo'lib, a uning limit nuqtasi bo'lsin. Bu to'plamda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar aniqlangan.

1). Agar $x \rightarrow a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar limitga ega bo'lsa, $f(x) \pm g(x)$ funksiya ham funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

tenglik o'rinni.

2). Agar $x \rightarrow a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar limitga ega bo'lsa, $f(x) \cdot g(x)$ funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

tenglik o'rinni.

4-natija. Agar $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiya limitga ega bo'lsa, unda $kf(x)$ funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} (kf(x)) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad (k = const)$$

tenglik o'rinni.

3). Agar $x \rightarrow a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar limitga ega bo'lib, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ bo'lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

tenglik o'rinni.

7-eslatma. 1). Yuqorida keltirilgan 1- va 2- xossalari qoshiluvchilar, ko'paytuvchilar soni ixtiyorli chekli bo'lgan holda ham o'rinni.

2). $x \rightarrow a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarining yig'indisi,

ko'paytmasi va nisbatidan iborat bo'lgan funksiyalarning limitiga ega bo'lishidan bu funksiyalarning har birining limitga ega bo'lishi doim kelib chiqavermaydi. Masalan, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = \sin \frac{1}{x^2}$ funksiyalari yiq'indisi $f(x) + g(x) = 1$ bo'lib, $x \rightarrow 0$ da $f(x) + g(x) \rightarrow 1$ bo'ladi. Ammo $x \rightarrow 0$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning har biri limitga ega emas.

4.19-misol Quyidagi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{x - 1}$$

limitni hisoblang.

◀ Sodda almashtirishlar yordamida topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) + (x^2 - 1) + \dots + (x^n - 1)}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)\{1 + (x + 1) + (x^2 + x + 1) + \dots + (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)\}}{x - 1} =$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demak,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - 1}{x - 1} = \frac{n(n+1)}{2} \blacktriangleright$$

6-§. Funksiya limitining mavjudligi haqida teoremlar

10. Monoton funksiya limitining mavjudligi. x to'plam berilgan bo'lib, a (chekli yoki ∞) esa shu to'plamning limit nuqtasi va barcha $x \in X$ lai uchun $x \leq a$ bo'lsin. Bu x to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan.

10-teorema. $f(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi bo'lib, u yuqoridaan chegaralangan bo'lsa, funksiya a nuqtada chekli limitga ega, yuqoridaan chegaralananmagan bo'lsa, uning limiti $\pm\infty$ bo'ladi.

X to'plam berilgan bo'lib, a (chekli yoki $\pm\infty$) esa shu to'plamning limit nuqtasi va barcha $x \in X$ lai uchun $x \geq a$ bo'lsin. Bu x to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan.

11-teorema. Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda kamayuvchi bo'lib, u quyidan chegaralangan bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada chekli limitga ega, quyidan chegaralananmagan bo'lsa, uning limiti

∞ bo'ladi.

Bu teoremlar monoton ketma-ketlikning limiti mavjudligi haqidagi teoremlar kabi isbotlanadi.

2⁰. Koshi teoremasi. Endi funksiya limitining mavjudligi haqidagi umumiy teoremani keltiramiz.

$x \in E$ to'plami berilgan bo'lib, a uning limit nuqtasi bo'lsin. Bu to'plamda $f(x)$ funksiya berilgan.

21-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x' va x'' qiymatlatida

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rini bo'lsa, $f(x)$ funksiya uchun a nuqtada Koshi sharti bajariladi deyiladi.

4.20-misol. Ushbu $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ funksiya uchun $x=0$ nuqtada Koshi shartining bajarilishini ko'rsating.

◀ Haqiqatan, $\forall \varepsilon > 0$ son olib, δ ni $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ deb qaralsa, u holda x ning

$$0 < |x' - 0| = |x'| < \frac{\varepsilon}{2}, 0 < |x'' - 0| = |x''| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklarini qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x', x'' qiymatlari uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|f(x'') - f(x')| = \left| x'' \sin \frac{1}{x''} - x' \sin \frac{1}{x'} \right| \leq \left| x'' \sin \frac{1}{x''} \right| + \left| x' \sin \frac{1}{x'} \right| \leq |x''| + |x'| < \varepsilon.$$

Bu berilgan funksiya uchun $x=0$ nuqtada Koshi sharti bajarilishini ko'rsatadi. ►

$f(x)$ funksiya uchun a nuqtada Koshi shartining bajarilmasligi quyidagini anglatadi:

$\forall \delta > 0$ son olganimizda ham shunday $\varepsilon > 0$ va $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi x', x'' ($x' \in X$, $x'' \in X$) qiymatlar topiladi,

$$|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon$$

bo'ladi.

Masalan,

$$f(x) = \cos \frac{1}{x}$$

funksiya uchun $x=0$ nuqtada Koshi sharti bajarilmaydi.

Haqiqatan $\forall \delta > 0$ olganimizda ham $x \rightarrow a$ va

$$x' \in \left(-\frac{1}{2k\pi}, x'' \in \left(2k + \frac{1}{\pi} \right) \right)$$

nuqtalar uchun $\left(k + \frac{1}{2\pi\delta} \right)$ bo'lganda $|x'| < \delta$, $|x''| < \delta$ bo'lishi ravshan.

$|f(x') - f(x'')| = |\cos(-2k + 1)\pi - \cos 2\pi| = 2 > \varepsilon$ bo'ladi.

12-teorema.(Koshi). $f(x)$ funksiya a nuqtada chekli limitga ega bo'lishi uchun bu funksiya uchun a nuqtada Koshi shartining bajarilishi zarur va yetarli.

◀ Zarurligi. $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiya chekli limitga ega bo'lib, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bo'lsin. Funksiya limiti ta'rifiga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham $\frac{\varepsilon}{2}$ ga asosan shunday $\delta > 0$ son topiladiki, argument x ning $0 < |x - a| < \delta$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi qiymatlarida

$$|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik o'rini bo'ladi. Xususan, ushbu

$$0 < |x' - a| < \delta \Rightarrow |f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 < |x'' - a| < \delta \Rightarrow |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

munosabatlar o'rini bo'ladi. Bundan

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \varepsilon$$

tengsizlikning o'rini bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $f(x)$ funksiya uchun a nuqtada Koshi sharti bajarilishini ko'rsatadi.

Yetariligi. $f(x)$ funksiya uchun a nuqtada Koshi sharti bajarilsin, ya'ni $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topiladiki, x ning $0 < |x - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$, tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x', x'' qiymatlarida $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ tengsizlik o'rini bo'ladi. Bu holda $f(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ da chekli limitga ega bo'lishini ko'rsatamiz.

a nuqta x to'planning limit nuqtasi. Shuning uchun to'planning nuqtalaridan x_n ($x_n \neq a, n = 1, 2, 3, \dots$) ketma-ketlik

tuzish mumkinligi, buningda a bo'ladi ketma-ketlik limiti ta'rifiga ko'ra, yuqonda olingan $\delta > 0$ son uchun shunday $x_n \in X$ son topiladiki, barcha $|x - x_n| < \delta$ uchun $0 < |f(x_n) - a| < \delta$ va $0 < |f(x_{n+m}) - f(x_n)| < \varepsilon$ tengsizliklari o'tinli bo'ladi. Bu tengsizliklarning bajarilishidan esa, shartga ko'ra

$$|f(x_{n+m}) - f(x_n)| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $f(x_n)$ fundamental ketma-ketlik. U yaqinlashuvchi. Biz $f(x_n)$ ketma-ketlik limitini b bilan belgilaylik, $\lim f(x_n) = b$. Endi x to'planning nuqtalaridan tuzilgan va a ga intiluvchi ichtiyoriy x'_n ketma-ketlik $x'_n \rightarrow a$, $x'_n \neq a$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) olinganda ham $f(\cdot)$ funksiya qiyamatlaridan tuzilgan $f(x'_n)$ mos ketma-ketlik ham o'sha b ga intilishini ko'rsatamiz.

Faraq qilaylik, $x'_n \rightarrow a$, ($x'_n \neq a$, $n = 1, 2, \dots$) da $f(x'_n) \rightarrow b'$ bo'lisin. x_n va x'_n ketma-ketliklar hadlaridan ushbu

$$x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, x'_3, \dots, x_n, x'_n, \dots$$

ketma-ketlikni tuzaylik. Ravshanki, bu ketma-ketlik a ga intiladi. U holda

$f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), f(x_3), f(x'_3), \dots, f(x_n), f(x'_n), \dots$ (4.11) ketma-ketlik fundamental bo'lib, chekli limitga ega. Bu limitni $b*$ bilan belgilaylik. Agar $f(x_n)$ va $f(x'_n)$ ketma-ketliklarning har biri (4.11) ketma-ketlikning qismiy ketma-ketliklari ekanini e'tiborga olsak, u holda $f(x_n) \rightarrow b^*$, $f(x'_n) \rightarrow b^*$ bo'lishini topamiz.

Demak,

$$b^* = b = b'.$$

Shunday qilib, $f(\cdot)$ funksiya uchun a nuqtada Koshi sharti bajarilishidan x to'plain nuqtalaridan tuzilgan va a ga intiluvchi har qanday x_n ($x'_n \neq a$, $n = 1, 2, 3, \dots$) ketma-ketlik olinganda ham mos $f(x_n)$ ketma-ketlik bitta songa intilishini topdik. Bu esa funksiya limitining Geyne ta'rifiga ko'ra $f(\cdot)$ funksiya a nuqtadan chekli limitga ega bo'lishini bildiradi. ►

8-eslatma. Koshi sharti va Koshi teoremasi $x \rightarrow a+0 \rightarrow x \rightarrow a-0$ bo'lgan hollarda ham yuqoridagiga o'xshash itodalananadi va isbot etiladi.

7-§. Funksiyalarni taqqoslash

X to'plamida $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar aniqlangan bo'lсин. Biror a nuqtaning $U_\delta(a) \subset X$ atrofida $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarni taqqoslash masalasini qaravmiz.

22-tarif. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun shunday $\delta > 0$ va $x \neq 0$ sonlar topilsaki, barcha $x \in U_\delta(a)$ lar uchun

$$|f(x)| \leq C |g(x)| \quad (4.12)$$

tengsizlik bajarilsa, $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiya $g(x)$ funksiyaga nisbatan chegaralangan deyiladi va $f(x) = O(g(x))$ kabi belgilanadi.

Shuni ta'kidlash lozimki, bu tarifidagi $x \rightarrow a$ belgi qaratayotgan (4.12) munosabatning a nuqtaning biror atrofida o'rinni bo'lishini ifodalaydi.

Masalan, $x \rightarrow 0$ da $x^2 = O(x)$ bo'ladi. Haqiqatan, ixtiyoriy $x \in U_0(0)$ lar uchun, ya'ni $x \in (1, 1)$ lar uchun $|x| \leq 1$ tengsizlik bajariladi.

Agar $f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida chegaralangan bo'lsa, $y = x \rightarrow a$ da $f(x) = O(1)$ kabi yoziladi. Masalan,

$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ funksiya $x=0$ nuqta atrofida chegaralangan (chunki $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$)

Shuning uchun $(1+x)^{\frac{1}{x}} = O(1)$ deb yozish mumkin.

23-tarif. Agar $x \rightarrow a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun $f(x) = O(g(x))$ va $g(x) = O(f(x))$ munosabatlari o'rinni bo'lsa, $x \rightarrow a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar bir xil tartibli funksiyalar deb ataladi.

Masalan, $f(x)=x$, $g(x)=2x+x\sin x$ bo'lсин. Ravshanki, $x \rightarrow 0$ da

$$|x| \leq |2x + x\sin x| \sim 3|x|$$

tengsizliklar o'rinni. Bu esa

$$x = O(2x + x\sin x), \quad 2x + x\sin x = O(x)$$

bo'lishini bildiradi. Demak, $x \rightarrow 0$ da $f(x)=x$, $g(x)=2x+x\sin x$ funksiyalar bir xil tartibli funksiyalar bo'ladi.

Yuqorida kelitirilgan tariflardan, $x \rightarrow a$ da

$$f_1(x) = O(f_1(x)), f_2(x) = O(f_2(x)), \dots, f_n(x) = O(f_n(x))$$

$$f_1(x) = O(f_1(x)), f_2(x) = O(f_2(x)), \dots, f_n(x) = O(f_n(x)), f(x) = O(f(x))$$

$$f_1(x) = O(f_1(x)), f_2(x) = O(f_2(x)), \dots, f_n(x) = O(f_n(x)), f(x) = O(f(x))$$

kabi munosabatlarning o'rnini bo'lshimi ko'tsatish qiyin emas.

13-teorema Agar $x \rightarrow a$ va $y(x) \neq x$ da $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ funksiyalar uchun ushbu

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = C$$

limit mavjud va $0 < |C| < \infty$ bo'lsa, $x \rightarrow a$ da $f(x)$ va $g(x)$ bit xil tarilib funksiyalar bo'ladi.

◀ Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = C$$

limit mavjud va $0 < |C| < \infty$ bo'lsin. U holda

$$\frac{f(x)}{g(x)} = C + \gamma_1(x), \quad \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{C} + \gamma_2(x)$$

bo'ladi, bunda $\gamma_1(x)$ va $\gamma_2(x)$ funksiyalar cheksiz kichik funksiyalar $\lim_{x \rightarrow a} \gamma_1(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \gamma_2(x) = 0$. Demak, a nuqtaning yetarli kichik atrofi $L(a)$ da $\gamma_1(x)$ va $\gamma_2(x)$ funksiyalar chegaralangan bo'ladi. U holda barcha $x \in L(a)$ lat uchun

$$|\gamma_1(x)| < k, \quad |\gamma_2(x)| < k \quad (k = \text{const})$$

tengsizliklar o'rnli bo'lib, $\frac{f(x)}{g(x)}$ va $\frac{g(x)}{f(x)}$ funksiyalar uchun

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq |C| + k, \quad \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| \leq \frac{1}{|C|} + k$$

tengsizliklarga kelamiz. Demak,

$$|f(x)| \leq (|C| + k)|g(x)|,$$

$$|g(x)| \leq \left(\frac{1}{|C|} + k \right) |f(x)|.$$

Bu esa

$$f(x) = O(g(x)), \quad g(x) = O(f(x))$$

ekanini bildiradi. ►

24-tarif. Agar $x \rightarrow a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ($x \neq a$ da $g(x) \neq 0$) uchun

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

bo'lsa, $x \rightarrow a$ da $f(x) \sim g(x)$ va $f(x) \sim g(x)$ lar ekvivalent funksiyalar deb ataladi. Ekvivalent funksiyalar

$$f(x) \sim g(x)$$

kabi belgilanadi.

Masalan $x \rightarrow 0$ da $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$ funksiyalar ekvivalent funksiyalar, $x \sim \sin x$.

Agar $x \rightarrow a$ da $f(x) \sim g(x)$, $g(x) \sim s(x)$ bo'lsa, u holda $x \rightarrow a$ da $f(x) \sim s(x)$ bo'ladi. Darheqiqat, $x \rightarrow a$ da $f(x) \sim g(x)$, bundan

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, x \rightarrow a \text{ da } g(x) \sim s(x), \text{ bundan } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{s(x)} = 1$$

kelib chiqadi, ulardan

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{s(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{s(x)} = 1$$

limitga ega bo'lamiz. Demak, $f(x) \sim s(x)$

25-tarif. Agar $f(x)$ va $g(x)$ cheksiz kichik funksiyalar uchun

$$f(x) = o(g(x))$$

tenglik o'rini bo'lib, bunda $\lim_{x \rightarrow a} o(g(x)) = 0$ bo'lsa, $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiya $o(g(x))$ ga nisbatan yuqori tartibili cheksiz kichik funksiya deb ataladi. U

$$f(x) = o(g(x))$$

kabi beigilanardi.

Agar $f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida cheksiz kichik funksiya (ya'ni $x \rightarrow a$ da $f(x) \neq 0$) bo'lsa, u $f(x) = o(1)$ kabi yoziladi.

Ravshanki, agar $x \rightarrow a$ da $f(x) \sim g(x)$ funksiyalar uchun $f(x) = o(g(x))$ tenglik o'rini bo'lsa, u holda bu funksiyalar uchun $f(x) + O(g(x))$ tenglik ham o'rini bo'ladi.

Yuqorida kelitirilgan ta'tiflardan foydalanib "katta o " va "kichik o " orasidagi bog'lanishlarni ifodalaydigan quyidagi munosabatlarni keltirib chiqarish mumkin:

$$f_1(x) = O(f_2(x)), f_2(x) = o(f_3(x)) \Rightarrow f_1(x) = o(f_3(x)).$$

$$f_1(x) = o(f_2(x)), f_2(x) = O(f_3(x)) \Rightarrow f_1(x) = o(f_3(x)).$$

$$f_1(x) = O(f(x)), f_2(x) = o(g(x)) \Rightarrow f_1(x)f_2(x) = o(f(x)g(x))$$

"Katta o " va "kichik o " ishtirok etgan tengliklarning oddiy ma'nodagi tengliklar emasligini ta'kidlaymiz.

Mas'adi, $x \rightarrow a$ da $f(x) = o(g(x))$ va $f_1(x) = o(g'(x))$ munosabatidan $f_1(x) \sim f(x)$ deb mifosa chiqqanish xato boladi.

Endi 'kicerik o' va ekvivalentlik belgilari bilan boglangan funksiyalar orasidagi munosabatlarni ifodalaydigan teoremani keltiramiz.

14-teorema. $x \rightarrow a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(x \neq a)$ da $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$) ekvivalent bo'lishi uchun

$$g(x) - f(x) = o(g(x)),$$

yoki

$$f(x) - g(x) = o(f(x))$$

tenglikning o'rini bo'lishi zarur va etarli.

◀ Zarurligi. $x \rightarrow a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ekvivalent bo'lsin, $f(x) \sim g(x)$. U holda ta'niga ko'ra $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ bo'lib, qanday

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(1 - \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - f(x)}{g(x)} = 0$$

kelib chiqadi. Demak, $g(x) - f(x) = o(g(x))$.

Yetarliligi. $x \rightarrow a$ da $g(x) - f(x) = o(g(x))$ bo'lsin. U holda $x \rightarrow a$ da

$$1 - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) - f(x)}{g(x)} = \frac{o(g(x))}{g(x)}$$

bo'lib, undan

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(1 - \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0$$

kelib chiqadi. Bu esa $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ya'ni $f(x) \sim g(x)$ ekanini ko'rsatadi.▶

5-natija. Agar, $x \rightarrow a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = C \neq 0$$

bo'lsa, u holda ushbu

$$g(x) \sim Cf(x)$$

va

$$g(x) = Cf(x) + o(f(x))$$

munosabatlar o'rini bo'ladi.

◀ Shartga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = C \neq 0$$

bundan

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$$

kelib chiqadi. Demak, $g(x) = f(x)$.

Yuqorida isbot etilgan 14-teoremaiga asosan $c f(x) + g(x) = o(c f(x)) + o(f(x))$ ko'rinisinda yozish mumkin undan

$$g(x) = c f(x) + o(f(x))$$

ekani kelib chiqadi. ►

Endi funksiyalarning ekvivalentligiga esoslangan hamda funksiyalarning limitini hisoblashda tez-tez foydalanie turiladigan teoremani keltiremiz.

15-teorema. Agar $x \rightarrow a$ da $f(x) \sim f_1(x)$ va $g(x) \sim g_1(x)$ bo'lib, ushbu

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

limit mavjud bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limit ham mavjud va

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

tenglik o'rini bo'ladi.

► Shartga ko'ra $x \rightarrow a$ da $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$. U holda ushbu

$$f(x) = f_1(x) + o(f_1(x)),$$

$$g(x) = g_1(x) + o(g_1(x))$$

tengliklar o'tinli bo'ladi. Natijada

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{g_1(x) + o(g_1(x))} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f_1(x)}{1 + \frac{o(f_1(x))}{f_1(x)}}}{\frac{g_1(x)}{1 + \frac{o(g_1(x))}{g_1(x)}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{1 + \frac{o(f_1(x))}{f_1(x)}}{1 + \frac{o(g_1(x))}{g_1(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

Funksiyatarni ularga ekvivalent ravshaniga ya'qinligi uchun da rashtirish natijasida ko'pgina funksiyalarning limitlari sodda hisoblanadi.

4.24 -misol. Jishbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$$

limitni hisoblang.

◀ Ravshanki,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2}}{x^2}$$

Endi $x \rightarrow 0$ da

$$\sin \frac{3x}{2} = \frac{3x}{2} + o(x), \quad \sin \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + o(x)$$

munosabatlarni e'tiborga olib topamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2}}{x^2} &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3x}{2} + o(x)\right)\left(\frac{x}{2} + o(x)\right)}{x^2} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{4}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Demak,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \frac{3}{2} \quad \blacktriangleright$$

9-eslatma. Biz 1-balans "o", "o" va "o" so'glar bilan bog'langan funksiyatarni o'resgardik. Banda a chekli deb qaralди. $a = \infty$ bo'lgan holda ham yuqoridaqidek 'ushuncha va teoremlar ta'riflanadi va o'rGANILADI.

Mashqlar.

4.22. Sonlar ketma - ketligi limitlari ta'riflarining ekvivalentligi isbotlansin

4.23. Sonlar ketma - ketligining chegaralanmaganligi ta'ifi keltirilsin. Chegaralanmagan ketma - ketlik cheksiz katta miqdor bo'ladi mi?

4.24. Ushbu

$$x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sin\left(\sqrt{n} \frac{\pi}{2}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma - ketlikning cheksiz kichik miqdor ekanini isbotlansin.

4.25. Ushbu

$$x_n = \lg \frac{2}{1} + \lg \frac{3}{2} + \dots + \lg \frac{n+1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma - ketlikning cheksiz katta miqdor ekanini isbotlansin.

4.26. Agar x_n va y_n ketma - ketliklar limitga ega bo'lmasa,

$x_n + y_n$, $x_n y_n$ ketma - ketliklar limitga ega bo'lishi mumkinmi?

4.27. Agar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

bo'lsa, $\frac{x_n}{y_n}$ ketma - ketlikning limiti to'g'risida nima deyish mumkin? (Odatda, uni $\frac{0}{0}$ ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi.)

4.28. Agar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$$

bo'lsa, $\frac{x_n}{y_n}$ ketma - ketlikning limiti to'g'risida nima deyish mumkin? (Odatda, uni $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi).

4.29. Agar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$$

bo'lsa, $x_n y_n$ ketma - ketlikning limiti to'g'risida nima deyish mumkin? (Odatda, uni $0 \cdot \infty$ ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi).

4.30. Agar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad (-\infty)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty \quad (+\infty)$$

bo'lsa, $x_n + y_n$ ketma-ketlikning limiti to'g'risida nima deyish mumkinki? (Odatda, umi $x + y$ ko'rinishdagi aniqlashlik deyiladi).

4.31. e sonining irratsional son ekani isbotlansin.

4.32. e soni taqribiy hisoblansin.

4.33. Ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

limit isbotlansin.

4.34. Agar ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipida barcha segmentlar mos intervallarga aylantirilsa, prinsip o'rinni bo'ladimi?

4.35. Har qanday sonlar ketma-ketligining yuqori va quyi limiti mavjud bo'lishi isbotlansin.

4.36. To'plamning limit nuqtasi ham to'plamga tegishli bo'ladimi?

4.37. $f(x)$ funksiya a nuqtada b limitga ega bo'lishi uchun uning shu nuqtada o'ng va chap limitlari mavjud bo'lib,

$$f(a+0) = f(a-0) = b$$

tengliklar o'rinni bo'lishi zarur va yetarli bo'lishi isbotlansin.

4.38. Ushbu

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow 0} f(x) = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

limitlarning ta'riflari kelitirilsin.

4.39. Funksiya limiti Koshi va Geyne ta'riflarining ekvivalentligi isbotlansin.

4.40. Ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[n]{x}}{1 - \sqrt[n]{x}}$$

limit hisoblansin.

4.41. Agar

$$f_n(x) = \frac{1 + x^{2n}}{2 + x^{-n}}$$

bo'lsa

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

topilsin.

4.42. $x \rightarrow 0$ da

a) $f(x) = e^x$, $g(x) = 100 + x$;

b) $f(x) = \frac{13}{x}$, $g(x) = \frac{1}{\ln x}$;

v) $f(x) = \frac{x}{2 + \sin \frac{1}{x}}$, $g(x) = x$.

funksiyalarning bir xil tartibli bo'lishi isbotlansin.

V BOB

Funksiyaning uzluksizligi

Funksiyaning uzluksizligi matematik analizning muhim tushunchalaridan bo'lib, u funksiya limiti tushunchasi bilan bevosita bog'langan.

1-§. Funksiya uzluksizligi ta'risi

1º. Funksiyaning nuqtada uzluksizligi $X \subset R$ to'plamda $f(x)$ aniqlangan bo'lib, $a \in X$ esa X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1-ta'rif. Agar

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (5.1)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deb ataladi. Masalan:

1). $f(x) = x^2 + x + 1$ funksiya $\forall a \in R$ nuqtada uzluksiz, chunki

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + x + 1) = a^2 + a + 1 = f(a)$$

2). Ushbu funksiya

$$f(x) = (\operatorname{sign} x)^2 = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

uchun $\forall a \in R$ da

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$$

bo'ladi. Ammo $f(0) = 0$ bo'lgani uchun

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

Demak, $f(x) = (\operatorname{sign} x)^2$ funksiya $a = 0$ nuqtada uzluksiz emas, boshqa hamma $a \neq 0$ nuqtalarda esa uzluksizdir.

Funksiya limitning Geyne va Koshi ta'riflardan foydalanib, funksiyaning a nuqtada uzluksizligini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

2-ta'rif (Geyne). Agar $X \subset R$ to'plamning elementlaridan tuzilgan va a ga intiluvchi har qanday x_n ketma-ketlik olinganda ham funksiya qiymatlaridan tuzilgan mos $f(x_n)$ ketma-ketlik hamma vaqt $f(a)$ ga intilsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deb ataladi.

3-ta'rif (Koshi). Agar $\forall \epsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son

topilsaki, funksiya argumenti x ning $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : x \in U_\delta(a), |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzlucksiz deb ataladi.

5.1-misol. Ushbu $f(x) = \sqrt{x+4}$ funksiyaning $x=5$ nuqtada uzlucksiz bo'lishini ko'rsating.

◀ $\forall \varepsilon > 0$ son olib, bu ε songa ko'ra $\delta > 0$ sonni $\delta = 3\varepsilon$ deb qaralsa, u holda $|x - 5| < \delta$ bo'lganda

$$|f(x) - f(5)| = |\sqrt{x+4} - 3| = \frac{|x-5|}{\sqrt{x+4} + 3} < \frac{|x-5|}{3} < \frac{\delta}{3} = \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa yuqoridagi ta'rifga ko'ra, $f(x) = \sqrt{x+4}$ funksiyaning $x=5$ nuqtada uzlucksiz bo'lishini bildiradi. ►

Koshi ta'rifidagi $|x - a| < \delta$ va $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ tengsizliklar mos ravishda

$$x \in U_\delta(a) \text{ va } f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$$

ko'rinishda ham yozilishi mumkin ekanligini hisobga olsak, atrof tushunchasi yordamida funksiyaning uzliksizligini quyidagicha ham ta'niflash mumkin.

4-ta'rif. Agar

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U_\delta(a) : f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzlucksiz deyiladi.

5.2-misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ -x, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya $x=0$ nuqtada uzlucksiz bo'lishi ko'rsatilsin.

◀ Haqiqatan, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $\delta > 0$ sonni $\delta = \varepsilon$ deb olinsa, u holda $\forall x \in U_\delta(0)$ lar uchun $f(x) \in U_\varepsilon(0)$ kelib chiqadi. ►

Ravshanki, (5.1) o'rinali bo'lsa, ushbu $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$ limit ham o'rinali bo'ladi. Odatda $x-a$ ayirma argument orttirmasi, $f(x) - f(a)$ ayirma esa funksiyaning a nuqtadagi orttirmasi deyiladi. Ular mos ravishda Δx va Δy (yoki y) kabi belgilanadi:

$$\Delta x = x - a, \Delta y = \Delta f = f(x) - f(a)$$

Bu tengliklordan foydalanib yozamiz:

$$x = a + \Delta x, \Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Natijada (5.1) munosabat

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiyaning a nuqtada uzlusizligi bu nuqtada argumentning cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelishi sifatida ham ta'riflanishi mumkin.

5.3-misol. $y = \sin x$ va $y = \cos x$ funksiyalarning $\forall a \in R$ nuqtada uzlusiz bo'lishini ko'rsatilsin.

◀ $\forall a \in R$ nuqta olib, unga Δx orttirma beraylik. Natijada $y = \sin x$ funksiya ham ushbu

$$\Delta y = \sin(a + \Delta x) - \sin a$$

orttirmaga ega bo'lib, $-\pi < \Delta x < \pi$ bo'lganda

$$|\Delta y| = |\sin(a + \Delta x) - \sin a| = |2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(a + \frac{\Delta x}{2})|$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $y = \sin x$ funksiya $a \in R$ nuqtada uzlusiz. Xuddi shunga o'xshash $y = \cos x$ funksiyaning ham $\forall a \in R$ da uzlusiz bo'lishi ko'rsatiladi. ►

2⁰. Funksiyaning bir tomonli uzlusizligi. $X \subset R$ to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lib, $a \in X$ esa X to'plamning o'ng (chap) limit nuqtasi bo'lsin.

5-ta'rif. Agar $x \rightarrow a+0$ ($x \rightarrow a-0$) da $f(x)$ funksiyaning o'ng (chap) limiti mavjud va

$$f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a), (f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a))$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada o'ngdan (chapdan) uzlusiz deyiladi.

Masalan. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & \text{agar } x \neq 0 \\ 0, & \text{agar } x=0 \end{cases}$$

funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+2^x} = 0 \neq f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+2^x} = 1 \neq f(1)$$

bo'lganligi sababli, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada o'ngdan uzlusiz bo'lib, chapdan esa uzlusiz emas.

Yuqorida keltirilgan ta'nislardan ko'rindik, agar $f(x)$ funksiya a nuqtada ham o'ngdan, ham chapdan bir vaqtida uzlusiz bo'lsa, funksiya shu nuqtada uzlusiz bo'ladi.

6-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $x \in R$ to'plamning har bir nuqtasida uzlusiz bo'lsa, funksiya x to'plamda uzlusiz deb ataladi.

Masalan, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalning har bir nuqtasida uzlusiz bo'lsa, funksiya shu intervalda uzlusiz deb ataladi.

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan bo'lsin. Agar bu funksiya (a, b) da uzlusiz bo'lsa, hamda a nuqtada o'ngdan, b nuqtada chapdan uzlusiz bo'lsa, funksiya $[a, b]$ segmentda uzlusiz deb ataladi.

5.4-misol. Ushbu $f(x)=\sqrt[3]{x}$ funksiyaning R to'plamda uzlusiz bo'lishini ko'rsating.

◀ Avval $\forall a \in R \setminus \{0\}$ nuqtada mazkur funksiyaning uzlusizligini ko'rsatamiz. $\forall \varepsilon > 0$ son olib, bu songa ko'ra $\delta > 0$ sonni $\delta = \frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}\varepsilon$ deb qaraylik. Natijada $|x - a| < \delta$ bo'lganda

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &= |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}} = \\&= \frac{|x - a|}{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a})^2 + \frac{2}{3}\sqrt[3]{a^2}} \leq \frac{|x - a|}{\frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2}} < \varepsilon\end{aligned}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, funksiya $\forall a \in R \setminus \{0\}$ nuqtada uzlusiz.

Endi $a=0$ bo'lgan holda, $\forall \varepsilon > 0$ songa ko'ra δ sonni $\delta = \varepsilon^3$ deb olib, $|x - a| = |x| < \delta$ bo'lganda

$$|f(x) - f(0)| = |\sqrt[3]{x}| < \sqrt[3]{\delta} = \varepsilon$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu esa berilgan funksiyaning $a=0$ nuqtada uzlusiz bo'lishini ifodalaydi. Demak, berilgan funksiya

R to'plamda uzluksiz. ►

2-§. Funksiyaning uzilishi. Uzilishning turlari

$f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda aniqlanagan bo'lib, $a \in X$ nuqta x to'plam limiti nuqtasi bo'lsa.

7-ta'rif Agar $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud, chekli bo'lib, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq f(a)$ yoki $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ($+\infty; -\infty$) bo'lsa yoki funksiyaning limiti mavjud bo'lmasa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzilishga ega deyiladi.

Funksiyaning a nuqtada uzilishga ega bo'ladigan hollarini alohida qarab o'tamiz.

1⁰. $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud, chekli bo'lib, u $f(x)$ ga teng bo'lmasin:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq f(a) \quad (b - \text{chekli son})$$

Bu holda, ushbu

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{agar } x \neq a \text{ bo'lsa,} \\ b, & \text{agar } x = a \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya a nuqtada uzluksiz bo'ladi:

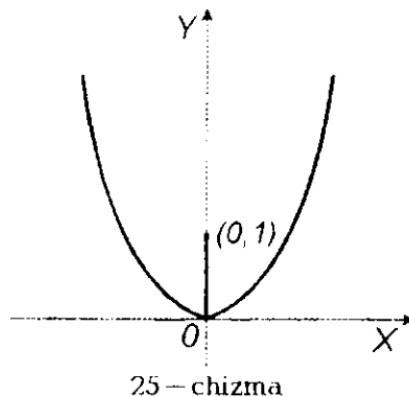
$$\lim_{x \rightarrow a} f^*(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = f^*(a)$$

Shunday qilib, berilgan funksiyamizning bitta a nuqtadagi qiymatini o'zgartirib ($f(a)$ o'miga b olib) a nuqtada uzluksiz funksiyaga ega bo'lamiz. Shuning uchun, bu holda $f(x)$ funksiya bartarat qilish mumkin bo'lgan uzilishga ega deyiladi.

Masalan, ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{agar } x \neq 0 \\ 1, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

funksiya uchun $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(0)$ munosabat o'rini. Demak, bu funksiya $x=0$ nuqtada bartarat qilish mumkin bo'lgan uzilishga ega (25-chizma).



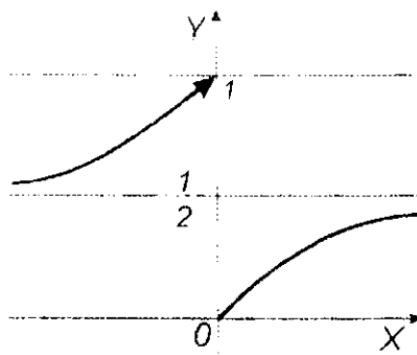
2º. Endi $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud emas deylik. Bu holat, avvelo, $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiyaning o'ng va chap limitlari mavjud va chekli bo'lib, $f(a - 0) \neq f(a + 0)$ bo'lganda ro'y beradi. Shu holda funksiya a nuqtada birinchi tur uzilishga ega deyiladi va $f(a + 0) - f(a - 0)$ ayirma funksiyaning a nuqtadagi sakrashi deyiladi. $x \rightarrow a$ da $f(x)$ ning limiti mavjud bo'lmaydigan boshqa hamma hollarda funksiya a nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega deyiladi.

Masalan, 1) ushbu

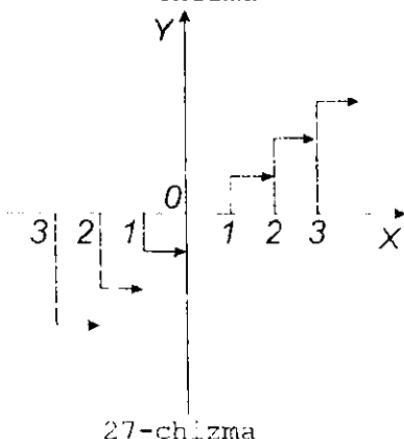
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{1+x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa} \\ 1 + 2^x, & \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$



26-chizma



27-chizma

Demak, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada birinchi tur uzelishiga ega.

Uning 0 nuqtadagi sakrashi – 1 ga teng (26-chizma).

2). Quyidagi

$$f(x) = [x]$$

funksiya $x=p$ (p – butun son) nuqtada birinchi tur uzelishiga ega, chunki (27-chizma):

$$\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^+} [x] = p - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^+} [x] = p$$

3). Ushbu

$$\begin{cases} \sin \frac{1}{x}, \text{ agar } x \neq 0 \\ 0, \text{ agar } x = 0 \end{cases}$$

funksiya $x=0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega, chunki $x \rightarrow 0$ da $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ funksiyaning limiti mavjud emas.

4). Dirixle funksiyasi

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ agar } x \text{ irratsional son bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } x \text{ ratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

β to'plamning har bir a nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega, chunki $x \rightarrow a$ da $D(x)$ funksiyaning o'ng limiti ham, chap limiti ham mavjud emas.

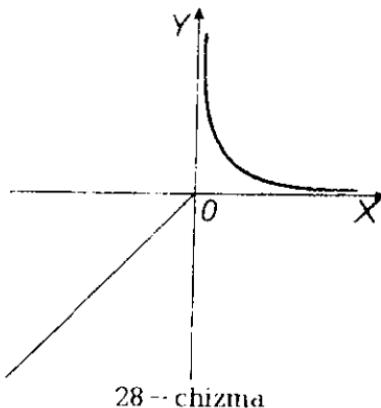
5). Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa} \\ x & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

bo'lib, bu funksiya $x=0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega bo'ladi (28 - chizma).



28 - chizma

6). Ushbu $f(x) = \operatorname{tg} x$ funksiyaning $x = \frac{\pi}{2}$ nuqtadagi o'ng va chap limitlari

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4$$

bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiya $x=2$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega.

3⁰. Endi $x \rightarrow \infty$ da

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x)$$

bo'lsin. Unda funksiyaning o'ng va chap limitlari ham $x(+\infty, \infty)$ bo'ladi. Bu holda ham $f(x)$ funksiya x nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega deyiladi.

Masalan, ushbu

$$f(x) = \frac{1}{x^2} (x \neq 0), \quad f(0) = 0$$

funksiyaning $x \rightarrow 0$ dagi limiti $+\infty$ dir (bu holda

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

Demak, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya $a \in X$ nuqtada

1. uzlusiz bo'ladi yoki,
2. bartaraf qilish mumkin bo'lgan yoki birinchi tur uzilishga ega bo'ladi, yoki
3. ikkinchi tur uzilishga ega bo'ladi.

1-eslatma. Agar $a \in X$ nuqta x to'plamning bir tomonli (ya'ni o'ng yoki chap) limit nuqtasi bo'lsa, yuqoridaqidek funksiyaning bu nuqtada uzilishi (o'ngdan yoki chapdan uzilishi) ta'rifи keltiriladi.

2-eslatma. $f(x)$ funksiya X to'plamda uzlusiz bo'lib, $a \in X$ nuqta x to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Bu holda funksiyaning a nuqtadagi qiymati aniqlanmagan bo'lsa ham $x \rightarrow a$ da $f(x)$ ning limiti mavjud va chekli, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ (b - chekli son) bo'lishi mumkin. Bu limit munosabatdan toydalaniib $X \cup \{a\}$ to'plamda uzlusiz bo'lgan funksiya tuzish mumkin. Haqiqatan, agar

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{agar } x \in X \text{ bo'lsa}, \\ b, & \text{agar } x = a \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

deb olinsa, natijada $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ to'plamda uzluksiz $f^*(x)$ funksiya hosil bo'ladi.

Masalan, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ funksiya $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ da aniqlangan va uzluksiz. Ma'lumki,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Bu munosabatdan foydalanib tuzilgan ushbu

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya R da uzluksiz bo'ladi.

3-§. Monoton funksiyaning uzluksizligi va uzilishi.

$f(x)$ funksiya X oraliqda aniqlangan bo'lsin.

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda monoton bo'lsa, u shu oraliqning istalgan nuqtasida yo uzluksiz bo'ladi, yoki faqat birinchi tur uzilishga ega bo'ladi.

◀ $f(x)$ funksiya X oraliqda o'suvchi bo'lsin. X ning shunday a nuqtasini olaylikki, bitor $\delta > 0$ uchun $(a - \delta, a + \delta) \subset X$ bo'lsin. Shartga ko'ra $\forall x \in (a - \delta, a)$ uchun $f(x) \leq f(a)$ va $\forall x \in (a, a + \delta)$ uchun $f(x) \geq f(a)$ bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiya $(a - \delta, a)$ da yuqoridan, $(a, a + \delta)$ da quyidan chegaralangandir. Monoton funksiya limiti haqidagi teoremaga asosan

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a^-) \leq f(a), \quad (*)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a^+) \geq f(a). \quad (**)$$

bo'ladi. Agar $f(a^-) = f(a^+) = f(a)$ bo'lsa, funksiya a nuqtada uzluksiz bo'ladi. Agar $f(a^-) < f(a^+)$ bo'lsa, shu nuqtada funksiya birinchi tur uzilishqa ega bo'ladi.

Agar a nuqta X oraliqning chetki nuqtasi bo'lsa, yuqoridagi kelishuvimizga ko'ra, bu nuqtadagi bir tomonli limitning mayjudligini ko'rsatish kifoya.

Ravshanki, $f(x)$ funksiya X oraliqda kamayuvchi bo'lgan holda ham mulohazalarimiz xuddi yuqoridagidek bo'ladi. ►

Endi monoton funksiyaning uzluksiz bo'lishi haqidagi teoremani keltiramiz.

2-teorema. Agar $f(x)$ funksiya x oraliqda monoton bo'lib, uning qiymatlari to'plami $Y_f = \{f(x) : x \in X\}$ biror oraliqdan iborat bo'lsa, u holda bu funksiya x da uzluksiz bo'ladi.

◀ Aniqlik uchun $f(x)$ funksiya x da o'suvchi bo'lsin. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya teoremaning shartlarini qanoatlantirsa ham, u biror $a \in X$ nuqtada uzluksiz bo'lmasin. U holda 1 teoremaga ko'ra u birinchi tur uzilishga ega bo'ladi. Ya'ni

$$f(a-0) < f(a+0)$$

bo'ladi (agar a nuqta X oraliqning chetki nuqtasi bo'lsa, (*) yoki (**) tengsizlik o'rini bo'ladi). Natijada

$$x < a, \text{ bo'lsa, } f(x) \leq f(a-0)$$

$$x > a, \text{ bo'lsa, } f(x) \geq f(a+0)$$

bo'lib, $f(x)$ funksiya $(f(a-0), f(a+0))$ intervaldagji $f(x)$ dan boshqa qiymatlarni hech bir $x \in X$ da qabul qila olmaydi. Bu esa $f(x)$ ning qiymatlari to'plami Y_f biror oraliqdan iborat ekanligiga ziddir. Demak, funksiya a nuqtada birinchi tur uzilishga ega bo'la olmaydi. ►

4-§. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar. Murakkab funksiyaning uzluksizligi

1º. Uzluksiz funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatining uzluksizligi.

3-teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x \in R$ to'plamda aniqlangan bo'lib, ularning har biri $a \in X$ nuqtada uzluksiz bo'lsa,

$$f(x) + g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0, \quad \forall x \in X)$$

funksiyalar ham shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

◀ Bu teoremaning isboti limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar haqidagi teoremlaridan bevosita kelib chiqadi. Masalan, ikkita uzluksiz funksiya ko'paytmasi yana uzluksiz funksiya bo'lishini ko'rsataylik. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada uzluksiz bo'lsin:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

U holda

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a)g(a)$$

bo'lib, undan $f(x)g(x)$ funksiyaning a nuqtada uzlusiz bo'lishi kelib chiqadi. ►

3-tezlatma. Ikkita funksiya yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati uzlusiz bo'lishidan bu funksiyalarning har birining uzlusiz bo'lishi kelib chiqavermaydi.

Masalan. Quyidagi $\varphi(x)$ va

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{x}, & \text{ agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ g(x) = & \\ 0, & \text{ agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{aligned}$$

funksiyalar ko'paytmasidan tuzilgan $\varphi(x) = x \cos \frac{1}{x}$ funksiya R da uzlusiz bo'lган holda $g(x)$ funksiya $x \neq 0$ nuqtada uzlusiz emas.

Yuqonda kelitinligan teorema qo'shiluvchilar hamda ko'paytuvchilar soni ixtiyoriy chekli bo'lgan holda ham o'rini bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

Endi teoremaning qo'llanilishiga misollar keltiraylik.

1) $y = ax$, $a = const$, $n \in N$ funksiya R da uzlusiz.

► Ravshanki, $f(x)$ \vee funksiya R da uzlusiz. Agar berilgan funksiyani

$$y = ax^n = a \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n$$

ko'rinishda ifodalash mumkinligini e'tiborga olsak, 3-teoremaga ko'ra $y = ax^n$ funksiyaning R da uzlusizligi kelib chiqadi! ►

Keltirilgan misol va 3-teoremadan butun va kasr ratsional funksiyalar

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$Q(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

$(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, b_m, \dots, b_0 \in \mathbb{O}'zgarmas sonlar, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N})$ o'z aniqlanish to'plamlarida uzlusiz bo'lishi kelib chiqadi.

2). $y = tg x$, $y = ctg x$, $y = \sec x$, $y = \cos ec x$ funksiyalar o'z aniqlanish sohalarida uzlusiz. Haqiqatan, bu funksiyalar uzlusiz

funksiyalarning nisbati orqali ifodalananadi.

2⁰. Murakkab funksiyaning uzlusizligi $y = f(x)$ funksiya $z = \varphi(y)$ to'plamda, $z = \varphi(y)$ funksiya esa \rightarrow to'plamda aniqlangan bo'lib, ular yordamida $z = \varphi(f(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lсин (4-⁰ bobning 1 - § iga qarang).

4-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya $a \in X$ nuqtada, $z = \varphi(y)$ funksiya esa a nuqtaga mos kelgan $y_a = f(a)$ nuqtada uzlusiz bo'lsa, $z = \varphi(f(x))$ murakkab funksiya a nuqtada uzlusiz bo'ladi.

◀ $y = f(x)$ funksiya $a \in X$ nuqtada, $z = \varphi(y)$ funksiya esa mos $y_a = f(a)$ nuqtada uzlusiz bo'lсин.

Ta'rifga ko'ra

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0, |y - y_a| < \sigma : |\varphi(y) - \varphi(y_a)| < \varepsilon.$$

$$\sigma > 0, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \sigma$$

bo'lib,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta : |\varphi(f(x)) - \varphi(f(a))| < \varepsilon.$$

bo'ladi. Demak, $z = \varphi(f(x))$ funksiya a nuqtada uzlusiz. ►

Misollar qaraylik. 1) $y = a^x$ ($a > 1$) R to'plamda o'suvchi funksiya. Har bir $y > 0$ da $x = \log_a y$ ning mavjud bo'lishidan berilgan funksiyaning qiymatlari $Y = \{a^x : x \in R\} = (0, +\infty)$ oraliqni tashkil etishi kelib chiqadi. Demak, $y = a^x$ funksiya R da uzlusiz.

2). $y = \log_a x$ ($a > 1$) Bu funksiya $X = (0, +\infty)$ oraliqda o'suvchi. Uning qiymatlari $Y = \{\log_a x : x \in (0, +\infty)\} = R$ ni to'ldiradi, chunki har bir $y \in R$ uchun $x = a^y$ mavjud. Demak, $y = \log_a x$ ($a > 1$) funksiya, $(0, +\infty)$ da uzlusiz.

Yuqorida keltirilgan ko'rsatgichli va logarifimik funksiyalarning $0 < a < 1$ bo'lganda uzlusiz ekanligi ham 2-⁰ teoremadan kelib chiqadi.

3). $y = x^\mu$ ($x > 0$) darajali funksiyani qaraylik. Bu funksiyani

$$y = x^\mu = a^{\mu \log_a x} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Agar $\mu \log_a x$ funksiya $(0, +\infty)$ da, a^μ funksiya esa R da uzlusiz ekanini e'tiborga olsak, u holda murakkab funksiyaning uzlusizligi haqidagi teoremnaga asoslanib $y = x^\mu$ funksiyaning $(0, +\infty)$ da uzlusiz bo'lishini topamiz.

5-§. Limitlarni hisoblashda funksiyaning uzlusizligidan foydalanish

... funksiya $X \in R$ to'plamda aniqlangan bo'lub, a nuqta X ning limit nuqtasi bo'lsin. $\varphi(y)$ funksiya esa $Y \in R$ to'plamda aniqlangan. Bu funksiyalar vordamida $\varphi(f(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin.

Aga $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y_a$ mavjud bo'lib, $z = \varphi(y)$ funksiya y_a nuqtada uzlusiz bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x))$ mavjud va

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x)) = \varphi(y_a)$$

tenglik o'tinli bo'ladi.

Aytaylik $x \rightarrow a$ da $f(x) \rightarrow y$, va $\varphi(y)$ funksiya y nuqtada uzlusiz, ya'ni $y \rightarrow y_a$ da $\varphi(y) \rightarrow \varphi(y_a)$ bo'lsin. U holda murakkab funksiyaning limiti haqidagi teoremaiga asosan (qaralsin, [1], 4 - bob) $y \rightarrow a$ da $\varphi(f(x))$ funksiya limitiga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_a} \varphi(y) = \varphi(y_a)$$

tengliklari o'tinli. Bu tengliklardan uzlusiz funksiyalar uchun funksiya ishorasi ostida limitga o'tish qoidasi kelib chiqadi:

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x)) = \varphi(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$$

Xususan, $f(x) = x$ bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \varphi(\lim_{x \rightarrow a} x) = \varphi(a)$$

5.5-misol. Quyidagi

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \mu x)^{\frac{1}{x}} \quad (\mu \in R, \mu \neq 0)$$

limitni hisoblang.

◀ Biz buni $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \mu x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0} ((1 + \mu x)^{\frac{1}{\mu x}})^{\mu}$ ko'rinishda yozib olamiz. Ravshanki, $x \rightarrow 0$ da $y = \mu x \rightarrow 0$ bo'ladi. Bundan quvidagini topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} ((1 + \mu x)^{\frac{1}{\mu x}})^{\mu} = \left[\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} \right]^{\mu} = e^{\mu}. \blacktriangleright$$

Shu misoldan foydalanib, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ limitni ham hisoblash mumkin. Bundan $x \in R$, $x \neq 0$. Ravshanki, $\frac{x}{n} \in R$ da va $n \rightarrow \infty$ da

$\frac{x}{n} \rightarrow 0$. Shuning uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = \lim_{y \rightarrow 0} ((1 + y)^{\frac{1}{y}})^x = (\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}})^x = e^x.$$

5.6-misol. Quyidagi limitlarni hisoblang.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad (\text{birinchi muhim limit}, a > 0, a \neq 1)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (\text{ikkinchi muhim limit}, a > 0, a \neq 1)$$

$$\text{v) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a \quad (\text{uchunchi muhim limit}).$$

◀ Bu munosabatlarni isbotlashda logarifmik, ko'rsatkichli va darajali funksiyalarning uzlusizligidan foydalananamiz. Darhaqiqat,

a) holda

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a(\lim_{x \rightarrow 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}) = \log_a e$$

b) holda esa $a^x - 1 = t$ deb $x \rightarrow 0$ da $t \rightarrow 0$ bo'lishini e'tiborga olib topamiz:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \log_a(1+t)} = \frac{1}{\log_a e}$$

Nihoyat v) holda $(1+x)^a - 1 = t$ deb, so'ngra $a^x = \frac{\ln(1+t)}{\ln(1+x)}$ va $x \rightarrow 0$ da $t \rightarrow 0$ bo'lishini hisobga olsak,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{t}{\ln(1+t)} \cdot \frac{\ln(1+t)}{\ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \right) = a$$

kelib chiqadi.

5.7-misol. Ikkita $f(x)$ va $g(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamida aniqlangan va $f(x) > 0$, a nuqta x to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Agar

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (b > 0), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$$

limitlar o'tinli bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = b^c$$

bo'lishi isbotlansin.

◀ Haqiqatan, $(f(x))^{g(x)}$ funksiyani

$$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

ko'tinishda ifodalab, so'ngra ko'rsatkichli hamda logarifmik funksiyalarning uzlusizligidan foydalaniib, quyidagini topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{f(x)} - e^{f(a)}}{x - a}} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{f(x)} - e^{f(a)}}{e^{f(a)}(e^{f(x)} - e^{f(a)})}} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{e^{f(a)}}} = e^{\frac{1}{e^{f(a)}}} = e^{-\ln e^{f(a)}} = e^{-f(a)} = b$$

Odatda $(f(x))^{k(x)}$ funksiya darajali ko'rsatkichli funksiya deb ataladi.

Darajali ko'rsatkichli $(f(x))^{k(x)}$ funksiya quyidagi

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) < 0$
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

hollarda avval (4- bob, mashqlar) o'tganimizga o'xshash, aniqmasliklarni ifodalaydi. $x \rightarrow a$ da $(f(x))^{k(x)}$ funksiya 1) holda 1' 2) holda 0' 3) holda e^c ko'rinishdagi aniqmasliklar deyiladi.

5.8-misol. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0)$$

limitni hisoblang.

► $\left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ ifoda $x \rightarrow 0$ da 1' ko'rinishdagi aniqmaslikdan iborat. Uni ochish uchun limit ishotasi ostidagi funksiyani qulay ko'rinishda yozib olib, keyin limitga o'tamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - 1 + b^x - 1}{2} + 1 \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(1 + \frac{a^x - 1 + b^x - 1}{2} \right)^{\frac{2}{a^x - 1 + b^x - 1}} \right\}^{\frac{a^x - 1 + b^x - 1}{2x}}$$

$$= \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a^x - 1 + b^x - 1}{2} \right)^{\frac{2}{a^x - 1 + b^x - 1}} \right\}^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1 + b^x - 1}{2x}} = e^{\frac{1}{2}(a+b-2)} = \sqrt{ab}$$

Demak, $x \rightarrow 0$ da berilgan funksiyaning limiti \sqrt{ab} ga teng. ►

6-§. Uzluksiz funksiyalarining xossalari

Biz ushbu paragrafda nuqtada hamda oraliqda uzluksiz bo'lgan funksiyalarining xossalariini o'rganamiz.

1º. Nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiyaning xossalari (lokal xossalari). $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamida aniqlangan,

$x_0 \in X$, $f(x_0) \in X$, ($\delta > 0$) bo'lib, $f(\cdot)$ funksiya x_0 nuqtada uzlusiz bo'lsmi:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) \neq f(x_0)$$

Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalardan (3-bo'ning 4- $\$$ iga qaralsin) loydalanib, x_0 nuqtada uzlusiz bo'lgan funksiyalarning ham quyidagi xossalarni ayta olamiz:

1). Agar $f(\cdot)$ funksiya x_0 nuqtada uzlusiz bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofida funksiya chegaralangan bo'ladi.

2). Agar $f(\cdot)$ funksiya x_0 nuqtada uzlusiz va $f(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda, x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofidan olingan barcha x nuqtalarda funksiya qiymatlarining ishorasi $f(x_0)$ ning ishorasi kabi bo'ladi.

1-natiya. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzlusiz bo'lib, bu nuqtaning yetarli kichik atrofidan olingan x nuqtalarda uning qiymatlari musbat ham manfiy ishorali bo'laversa, funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati nolga teng bo'ladi.

3). Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzlusiz bo'lsa, u holda $\forall \varepsilon > 0$ uchun x_0 nuqtaning shunday yetarli kichik atrof topiladiki, bu atrofdan olingan ixtiyoriy x', x'' uchun $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ bo'ladi.

► Haqiqatan, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzlusiz bo'lganligidan $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham, $\frac{\varepsilon}{2}$ ga ko'ra shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|x - x_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi. x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofidan olingan x', x'' nuqtalar uchun ham

$$|f(x') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x'') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklar o'rini bo'lib, undan $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ tengsizlik kelib chiqadi.

Funksiyaning nuqta atrofidagi xossalari uning lokal xossalari deyiladi.

2º. Segmentda uzlusiz bo'lgan funksiyalarning xossalari (global xossalalar). Aytaylik, $f(\cdot)$ funksiya

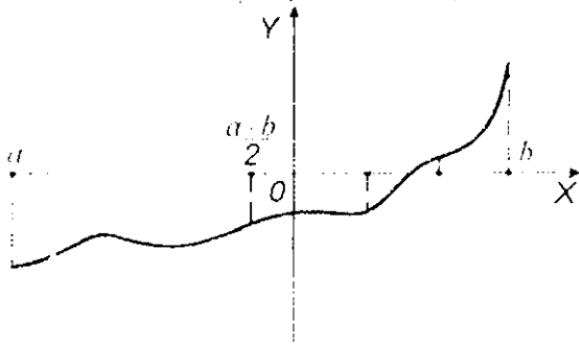
$$[a, b] = \{x : x \in R, a \leq x \leq b\}$$

segmentda aniqlangan bo'lsim.

5-teorema. (Bolsano - Koshning bitinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzliksiz bo'lib segmentning chetki nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarga ega bo'lsa, u holda shunday $(a < c < b)$ nuqta topildiki, u nuqtada funksiya nolga aylanadi:

$$f(c) = 0$$

Bu teorema geometrik nuqtayi nazardan, uzliksiz egri chiziq o'qining bir tomonidan ikkinchi tomoniga o'tishda uni albatta kesib o'tishni ifodalaydi (29-chizma).



29 -chizma.

► $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzliksiz bo'lib, $f(a) < 0, f(b) > 0$ bo'lsin, ($f(a) > 0, f(b) < 0$ bo'lgan hol ham shunga o'xshash qaratishi mumkin). $[a, b]$ segmentning $\frac{a+b}{2}$ nuqtasini olib, bu nuqtada $f(x)$ funksiyaning

qiymatini qarataymiz. Agar $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ bo'lsa, $c = \frac{a+b}{2}$ deb olinib, unda $f(c) = 0$ va demak, teorema isbot etilgan bo'ladi. Agar $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$ bo'lsa, $\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ segmentlardan chetki nuqtalarida $f(x)$ funksiya turli ishorali qiymatga ega bo'ladiganimi olib, uni $[a_1, b_1]$ orqali belgilaymiz. Demak, $f(a_1) < 0, f(b_1) > 0$ bo'lib, $[a_1, b_1]$ segmentning uzunligi esa $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ bo'ladi. So'ng $[a_1, b_1]$ segmentning $\frac{a_1+b_1}{2}$ nuqtasini olib, bu nuqtada $f(x)$ ning qiymatini qarataymiz. Agar $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$

bo'lsa, $\frac{a_1 + b_1}{2}$ deb olinib, unda $f(c) = 0$ va bu holda teorema isbot bo'ladi. Agar $\frac{a_1 + b_1}{2} \neq 0$ bo'lsa, $\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2} \right] \cup \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1 \right]$ segmentlardan chetki nuqtalarida $f(x)$ funksiya turli ishorali qiymatga ega bo'ladijanini olib, uni $\{a_1, b_1\}$ deymiz. Bu holda $f(a_1) < 0, f(b_1) > 0$ va $\{a_1, b_1\}$ segmentning uzunligi $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ bo'ladi. Bu jarayonni davom ettiraveramiz. Natijada yo chekli sondagi qadamdan keyin segmentlarning o'talarini ifodalovchi nuqta sifatida shunday nuqtaga kelamizki, u nuqtada funksiya nolga aylanadi, demak teorema isbot bo'ladi, yoki jarayon cheksiz davom etib, ichma--ich joylashgan

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

segmentlar ketma-ketligi hosil bo'ladi. Bu ketma-ketlikning umumiy hadi $\{a_n, b_n\}$ da $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$ bo'lib, $\{a_n, b_n\}$ ning uzluksizligi $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$ da) bo'ladi.

Ichma--ich joylashgan segmentlar prinsipiqa asosan shunday nuqta mavjudki

$$\lim a_n = \lim b_n = c \quad (c \in (a, b)).$$

$f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ da uzluksiz bo'lishidan foydalanib, topamiz:

$$a_n \rightarrow c \Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(c) \text{ va } f(a_n) < 0 \Rightarrow f(c) \leq 0,$$

$$b_n \rightarrow c \Rightarrow f(b_n) \rightarrow f(c) \text{ va } f(b_n) > 0 \Rightarrow f(c) \geq 0,$$

Keyingi tengsizliklardan esa $f(c) = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. ►

Isbot etilgan teorema ko'pgina tatbiqlarga ega, jumladan u ayrim tenglamalar yechimining mavjudligini ko'rsatish va ularni taqribiy yechish imkonini beradi. Masalan,

$$\sin x - x + 1 = 0 \quad (5.2)$$

tenglamani qaraylik. Ravshanki, $f(x) = \sin x - x + 1$ R da uzluksiz. Jumladan, bu funksiya $[0, \pi]$ segmentda ham uzluksiz bo'lib, segmentning chetki nuqtalarida: $f(0) = 1 > 0, f(\pi) = -\pi + 1 < 0$

5-teoremaga asosan $f(x)$ funksiya $[0, \pi]$ oraliqning hech bo'limganda bitta nuqtasida nolga aylanadi, ya'ni berilgan (5.2) tenglamaning $[0, \pi]$ oraliqda yechimi mavjud. $[0, \pi]$ segmentni $[0, \frac{\pi}{2}]$ va $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ segmentlarga ajratib, $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ning chetki

nuqtalarida $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2} < 0$, $f(\pi) > 0$ bo'lishini topamiz.

Demak, (3) tenglamaning yechimi $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ oraliqda yotadi. Bu jarayonni davom ettiraventsiz natijasida $\sin x - x + 1 < 0$ tenglamaning taqribiy yechimi kerakli aniqlikda topilishi mumkin.

6-teorema. (Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzliksiz bo'lib, uning chetki nuqtalarida $f(a) < f(b)$ va qiymatlariغا ega va $A < B$ bo'lsa, A va B orasida har qanday C son olinganda ham a bilan b orasida (kanuda bitta) shunday e nuqta topiladiki,

$$f(c) = C$$

bo'ladi.

◀ Aniqlik uchun $A < B$ bo'lsin. Ixtiyoriy $C \in (A, B)$ olaylik. Yordamchi $\varphi(x) = f(x) - C$ funksiya tuzamiz. Ravshanki, bu funksiya segmentda uzliksiz va bu segmentning chetki nuqtalarida $\varphi(a) < 0$, $\varphi(b) > 0$ qiymatlarni qabul qiladi. U holda Bolsano - Koshining birinchi teoremasiga ko'ta a bilan b orasida shunday e nuqta topiladiki, $\varphi(c) = 0$ ya'ni $f(c) = C$ bo'ladi. ►

2-natija. Agar $f(x)$ funksiya biror X oraliqda (yopiq yoki ochiq, chekli yoki cheksiz) uzliksiz bo'lsa, u holda funksiyaning barcha qiyatlari to'plami biror γ oraliqdandan iborat bo'ladi.

◀ $\Gamma = \{f(x), x \in X\}$ to'plamning aniq quyi chegarasi m aniq yuqori chegarasi M bo'lsin:

$$m = \inf_{x \in X} f(x), M = \sup_{x \in X} f(x)$$

Bunda m va M lar chekli son yoki \neq bo'lishi mumkin. Aniq chegaralarning ta'rifiga binoan, $\forall x \in X$ uchun $m \leq f(x) \leq M$ bo'ladi. Endi $f(x)$ funksiya qiyatlari to'plami (m, M) intervalda tashkil etishini ko'rsatamiz. Bu intervalda ixtiyoriy C sonni olaylik: $m < C < M$. U holda shunday a va b sonlar topiladiki,

$$m < A < C < B < M$$

bo'ladi. Bu A va B sonlarni $A = f(a), B = f(b)$ deb qarash mumkin ($a \in X, b \in X$). Isbotlangan teoremaga asosan a bilan b orasida shunday c son mavjudki, $f(c) = C$ bo'ladi. Olingan C son (m, M) intervaldag'i ixtiyoriy son bo'lganidan, bu intervaldag'i barcha qiyatlarni $f(x)$ funksiya qaburi silishi kelib chiqadi. ►

7-teorema. (Veyershtrassning birinchi teoremasi). Agar

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzliksiz bo'lsa, funksiya shu segmentda chegaralangan bo'ladi.

◀ Teskarisini faraz qilaylik, ya'm $[a,b]$ da uzliksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya unda chegaralanmagan bo'lsin. U holda $[a,b]$ da shunday x_n nuqta topiladiki, shu nuqta uchun $|f(x_n)| > n$ ($n = 1, 2, \dots$) tengsizlik o'rinni bo'ladi. x_n ketma-ketlikdan Bolzano Veyershtress lemmasiga asosan yaqinlashuvchi qismiy x_n ketma-ketlik ajratish mumkin: $x_n \rightarrow x_0, x_0 \in [a,b]$. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzliksiz. Unda $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ bo'ladi. Bu esa $|f(x_0)| \geq n$ ya'ni $|f(x_0)| \rightarrow \infty$ deb qilgan farazimizga ziddii. Demak, funksiya $[a,b]$ da chegaralangan. ►

4-eslatma. Keltirilgan teorema shartidagi oraliqning segment bo'lishi muhimdir. Bu shart bajarilmasa, teorema o'rinni bo'lmasdan qolishi mumkin. Masalan, $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya (0.1) oraliqda uzliksiz bo'lsa ham, shu oraliqda chegaralanmagan.

5-eslatma. Funksiyaning biror oraliqda chegaralangan bo'lishidan uning shu oraliqda uzliksiz bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi. Masalan, Dirixle funksiyasi $D(x)$ chegaralangan bo'lsa ham u uzliksiz emas.

8-teorema. (Veyershtressning ikkinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzliksiz bo'lsa, funksiya shu segmentda o'zining aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralariga erishadi, ya'ni $[a,b]$ da shunday x_1 va x_2 nuqtalar topiladiki,

$$f(x_1) = \sup_{x \in [a,b]} \{f(x)\}, \quad f(x_2) = \inf_{x \in [a,b]} \{f(x)\}.$$

tengliklar o'rinni bo'ladi.

◀ Veyershtressning birinchi teoremasiga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da chegaralangan. Modomiki, $\{f(x) : x \in [a,b]\}$ to'plam chegaralangan ekan, unda bu to'plamning aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralari mavjud.

Biz ularni

$$\sup_{x \in [a,b]} \{f(x)\} = M, \quad \inf_{x \in [a,b]} \{f(x)\} = m,$$

orqali belgilaylik.

Endi $[a,b]$ segmentda $f(x)$ funksiya M va m qiyinatlarni qabul qiladigan nuqtalar mavjudligini ko'rsatamiz. Teskarisini

taraz qilaylik, ya'ni $\varphi(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda o'zining aniq yuqori chegarasi qo'li enishmasin. U holda $\forall x \in [a, b]$ lar uchun $\varphi(x) > \alpha$ tengsizlik o'rinni bo'ladi. Quyidagi

$$\varphi(x) - \frac{1}{M} \geq \frac{1}{f(x)}$$

funksiyani qataylik Ravshanki, bu funksiya $[a, b]$ segmentda uzlusiz. Veyershtrassning birinchi teoremasiga ko'ra $\varphi(x)$ funksiya $[a, b]$ da chegaralangan. Demak, $\forall x \in [a, b]$ lar uchun ushbu

$$\varphi(x) - \frac{1}{M} \geq \frac{1}{f(x)} \geq \alpha \quad (\alpha = \text{const}, \alpha > 0)$$

tengsizlik o'rinni. Bundan

$$f(x) \leq M \geq \frac{1}{\alpha}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $M = \sup\{f(x)\}$ ekanini zid. Demak, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda o'zining aniq yuqori chegarasiga enishadi, ya'ni $f(x)$ da shunday e'sha nuqta mavjudki.

$$\exists f(x_0) = \sup_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$$

bo'ladi. Huddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda o'zining aniq quy'i chegarasiga erishish ko'rsatiladi. ►

6-eslatma. Agar $f(x)$ funksiya ochiq oraliqda (intervalda) uzlusiz bo'lsa, funksiya shu oraliqda o'zining aniq chegaralariga enishmashigi mumkin. Masalan, $f(x) = x^2$ funksiya (0,1) intervalda uzlusiz. Bu funksiya uchun $\sup_{x \in [0, 1]} x^2 = \inf_{x \in [0, 1]} x^2 = 0$ bo'ladi. Ammo funksiya o'zining \sup va \inf qiymatlariiga (0,1) intervalda erishmaydi.

Odatda funksiyaning biror oraliqdagi xossalari uning global xossalari deb ataladi.

9-teorema. (teskari funksiyaning mavjudligi). Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda aniqlangan, uzlusiz va qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lsa, bu funksiya qiymatlaridan iborat $\{f(x); x \in X\}$ oraliqda teskari $f'(x)$ funksiya mavjud bo'lib, u uzlusiz va qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'ladi.

◀ $f(x)$ funksiya X oraliqda uzlusiz bo'lgani uchun uning qiymatlari f oraliqni tutash to'ldiradi. Demak, har bir $x_n \in X$ uchun X da shunday x topiladiki. $f(x_n) = v_n$ bo'ladi. Bunday

$y_0 \in \mathbb{R}$ ga mos keladigan x nuqta x da yagona bo'ladi. Haqiqatan ham, agar x oraliqda dan katta yoki kichik bo'lqan x nuqta olinadigan bo'lsa, $f(x)$ funksiya o'suvchi bo'lqani uchun $f(x) = y$ ham x dan katta yoki kichik bo'ladi. Shunday qilib, x oraliqdan olingan har bir x ga x da unga mos keladigan yagona shunday x topiladiki, $f(x) = y$ bo'ladi. Demak, x oraliqda teskari $x = f^{-1}(y)$ funksiya mayjud. Endi $x = f^{-1}(y)$ funksiyaning y da qat'iy o'suvchi bo'lishini, ya'ni $y_1 \in \mathbb{R}, y_2 \in \mathbb{R}, y_1 < y_2$ bo'lqanda $x_1 < x_2$ tengsizlik o'rinni $(x_1 < f^{-1}(y_1), x_2 < f^{-1}(y_2))$ bo'lishini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik: $y_1 < y_2$ bo'lqanda $x_1 > x_2$ bo'lsin. U holda $x = f(x)$ funksiya x da qat'iy o'suvchiligidan $f(x_1) > f(x_2)$ ya'ni $y_1 > y_2$ bo'ladi. Bu esa $x_1 < x_2$ deb olinishiga ziddi. Demak, $x = f^{-1}(y)$ funksiya y da qat'iy o'suvchi.

Nihoyat, monoton funksiyaning uzluksizligi haqidagi teoremaga ko'ra, $x = f^{-1}(y)$ funksiya y oraliqda uzluksiz bo'ladi.

$y = f(x)$ funksiya x da kamayuvchi bo'lqanda ham teorema yuqoridagidek isbotlanadi. ▶

7-§. Funksiyaning tekis uzluksizligi. Kantor teoremasi

$y = f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lib, $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz bo'lsin. Funksiya uzluksizligi ta'rifiga ko'ra, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta_0 > 0$ son topiladiki, $|x - x_0| < \delta_0$ tengsizlik o'rinni bo'lishidan $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlikni o'rinni bo'lishi kelib chiqadi. Bu ta'rifdagi δ_0 son avval ta'kidlab o'tganimizdek x ga bog'liq: $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$. Aytaylik $f(x)$ funksiya X ning x_1 ($x_1 \neq x_0$) nuqtasida ham uzluksiz bo'lsin. Yana ta'rifga ko'ra, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta_1 > 0$ son topiladiki, $|x - x_1| < \delta_1$ dan $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ kelib chiqadi.

$f(x)$ funksiyaning $x = x_0, x = x_1$ nuqtalarida uzluksizligi ta'rifidagi $\varepsilon > 0$ son bir hil bo'lgan holda ham unga mos keladigan δ_0 va δ_1 sonlar, umuman, turilcha bo'ladi, ya'ni funksiya bir necha nuqtalarda uzluksiz bo'lqanda, uzluksizlik ta'rifidagi $\delta > 0$ son faqat $\varepsilon > 0$ gagina bog'liq bo'lmasdan,

qatalayotgan nuqtaga ham bog'liq bo'ladi. Shuni ham aytish kerakki, agar $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ deb olansa, bu $\delta > 0$ son $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$ nuqtalarga batavar yaratayveradi, chunki $|x - x_1| < \delta$ dan $|x - x_2| < \delta$, va $|x - x_1| < \delta$ dan $|x - x_2| < \delta$, kelib chiqadi. Misollar qaratayltik:

1) $f(x) = f(a)$ funksiya $[0, 1]$ segmentda uzlusiz, jumladan $a \in [0, 1]$ nuqtada uzlusizdir. Ta'rifga ko'ta, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $\delta = \sqrt{a^2 + \varepsilon} - a$ deb olansa, $|x - a| < \delta$ bo'lganda

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &= |x - a| = |x - a|(x - a + 2a) \cdot \delta(\delta + 2a) \\&= (\sqrt{a^2 + \varepsilon} + a - a)^2 + (\sqrt{a^2 + \varepsilon} + a - a) \cdot 2a < \varepsilon\end{aligned}$$

bo'ladi. Demak, $\delta = \sqrt{a^2 + \varepsilon} - a$ bo'lib, $\varepsilon > 0$ bilan birga qatalayotgan $a \in [0, 1]$ nuqtaga ham bog'liq ekan. Biroq,

$$\delta = \min_{x \in [0, 1]} \delta = \min_{x \in [0, 1]} (\sqrt{a^2 + \varepsilon} + a - a) = \min_{x \in [0, 1]} \frac{\varepsilon}{\sqrt{a^2 + \varepsilon} + a - 1 + \sqrt{1 + \varepsilon}}$$

deb olinsa, $|x - a| < \delta$ dan $|x - a| < \delta$ kelib chiqadi. Shu sababli bu $\delta > 0$ son $[0, 1]$ segmentning barcha nuqtalariga to'g'ri keladi.

Shunday qilib, $f(x) = \sqrt{x}$ funksiya $[0, 1]$ segmentning nuqtalarida uzlusiz bo'lishi ta'rifidagi $\delta > 0$ son $\varepsilon > 0$ son bilan birga qatalayotgan nuqtalarga bog'liq bo'lsa ham, shunday $\delta > 0$ topiladiki, u $[0, 1]$ segmentning barcha nuqtalarga yaratydi, boshqacha qilib aytganda, shu $\delta > 0$ son faqat ε gaqina bog'liq bo'lib, qatalayotgan nuqtalarga bog'liq emas.

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya $(0, 1]$ oraliqda uzlusiz, jumladan $x \in (0, 1]$ nuqtada uzlusizdir. Ta'rifga ko'ta $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $\delta = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x}$ deb olinsa, $|x - a| < \delta$ bo'lganda

$$|f(x) - f(a)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|x - a|}{ax} = \frac{1}{a} \cdot \frac{|x - a|}{1 + ax} < \frac{1}{a} \cdot \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x}$$

bo'ladi. Demak, δ ning tanlanishi $\varepsilon > 0$ bilan birga $x \in (0, 1]$ nuqtaga bog'liq. Biroq, bu holda δ ning $x \in (0, 1]$ bo'yicha minimumi

$$\delta = \min_{x \in (0, 1]} \delta = \min_{x \in (0, 1)} \frac{\varepsilon a}{1 + \varepsilon ax} > 0$$

Bu esa $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya $(0, 1]$ oraliqning nuqtalarida uzlusiz

bo'lishi ta'rifidagi $\delta > 0$ son x -sen bilan birga qatalayotgan nuqtalarga bog'liq va $(0, \varepsilon)$ oraliqning barcha nuqtalariغا ya'ravdigani $\delta > 0$ son mavjud emashgini ko'rsatadi.

8-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, λ to'plamning $|x' - x''| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x' va x'' ($x' \in X, x'' \in X$) nuqtalanda

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to'plamida tekis uzliksiz deb ataladi.

$f(x)$ funksiyaning tekis uzliksizlik ta'rifidagi $\delta > 0$ son $\varepsilon > 0$ songagina bog'liq bo'ladi.

5.9-misol. Ushbu

$$f(x) = \sqrt{x}$$

funksiyaning $X = [1, 2]$ segmentda tekis uzliksizligi ko'rsatilsin.

◀ $\forall \varepsilon > 0$ uchun $\delta > 0$ sonni $\delta > 0$ deb olsak, u holda $\forall x' \in [1, 2], \forall x'' \in [1, 2]$ lar uchun $|x'' - x'| < \delta$ tengsizlik bajarilganda

$$|\sqrt{x''} - \sqrt{x'}| = \frac{|x'' - x'|}{\sqrt{x''^2} + \sqrt{x''x'} + \sqrt{x'^2}} < \frac{|x'' - x'|}{3} < \frac{\delta}{3} = \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $y = \sqrt{x}$ funksiya $[1, 2]$ oraliqda tekis uzliksiz. ►

5.10-misol. Quyidagi

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

funksiya $X = (0, 1)$ intervalda tekis uzliksiz emasligi ko'rsatilsin.

◀ Haqiqatan ham, $x > 0$ sonni masalan, $x = \frac{1}{2}$ deb olib, $x', x'' \in (0, 1)$ nuqtalar sifatida

$$x' = \frac{1}{n\pi}, x'' = \frac{2}{(2n+1)\pi} \quad (n \in \mathbb{N})$$

qaralsa, u holda $|x'' - x'|$ ayirma uchun

$$|x'' - x'| = \frac{1}{n\pi(2n+1)}$$

ni topamiz. Endi δ ni (n ni katta qilib olish hisobiga) haq qancha kichik qilib olish mumkin bo'lsa ham

$$|f(x'') - f(x')| = |\sin \frac{2\pi n+2\pi}{2} - \sin n\pi| = 1 > \varepsilon > \frac{1}{2}$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya $(0, 1)$ da tekis uzliksiz emas. ►

10-teorema. (Kantor teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$

segmentda uzliksiz bo'lsa, funksiya shu segmentda tekis uzliksiz bo'ladi.

► (x) funksiya $[a, b]$ segmentda uzliksiz bo'lsin. Faraz qolaylik, funksiya shu segmentda tekis uzliksiz bo'lmasin. Demak, bu holda biror $\varepsilon > 0$ son va ixtiyoriy kichik $\delta > 0$ son uchun $[a, b]$ segmentda shunday x' va x'' nuqtalar topiladiki, $|x'' - x'| < \delta$ tengsizlik bojanlsa ham

$$|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon$$

tengsizlik o'rini bo'ladi.

Nolga intiluvchi musbat sonlar ketma-ketligini $\{\delta_n\} \cup \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n\}$ olaylik ($\delta_n \rightarrow 0, \delta_n > 0, n = 1, 2, 3, \dots$). Farazimizga ko'ra, yuqoridagi $\varepsilon > 0$ son va ixtiyoriy $\delta_n > 0, (n = 1, 2, 3, \dots)$ son uchun $[a, b]$ segmentda shunday x' va x'' ($n = 1, 2, 3, \dots$) nuqtalar topiladiki, ular uchun quyidagi munosabatlar o'rini bo'ladi:

$$\begin{aligned} |x'' - x'_n| < \delta_1 \Rightarrow |f(x'') - f(x'_n)| \geq \varepsilon, \\ |x'_n - x'_1| < \delta_2 \Rightarrow |f(x'') - f(x'_1)| \geq \varepsilon, \end{aligned}$$

$$|x'' - x'_1| < \delta_n \Rightarrow |f(x'') - f(x'_n)| \geq \varepsilon,$$

x' ketma-ketlik chegaralangan. Bu ketma-ketlikdan Bolsano-Veyershtress lemmasiiga ko'ra chekli songa intiluvchi qismiy x'_{n_k} ketma-ketlik ajratish mumkin:

$$x'_{n_k} \rightarrow x_0 \quad (x_0 \in [a, b])$$

U holda

$$|x''_{n_k} - x'_{n_k}| < \delta_{n_k}, \quad \delta_{n_k} > 0$$

bo'lganidan x''_{n_k} ketma-ketlik ham x_{n_k} ga intiladi: $x''_{n_k} \rightarrow x_0$.
/(x) funksiyaning $[a, b]$ da uzliksiz bo'lishidan:

$$f(x''_{n_k}) \rightarrow f(x_0), \quad f(x'_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$$

bo'lib, ulardan esa

$$|f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \rightarrow 0$$

kelib chiqadi. Bu esa $\forall \varepsilon > 0$ uchun $|f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon$ deyilgan yuqoridagi tasdiqqa zid. ►

/(x) funksiya \mathcal{X} to'plamda aniqlangan bo'lсин.

9-ta'rif. Quyidagi

$$\sup_{x \in A} f(x) = \inf_{x \in A} \{f(x)\}$$

avtina $f(x)$ funksiyaning X to'plamdag'i tebranishi deb aytiladi va ω orqali belgilanadi:

$$\omega = \omega(f, X) = \sup_{x \in X} \{f(x)\} - \inf_{x \in X} \{f(x)\}$$

$f(x)$ funksiyaning X to'plamdag'i tebranishi quyidaqи

$$\omega = \sup_{\substack{x'' \in X \\ x' \in X}} \{|f(x'') - f(x')|\}$$

ko'rinishda ham ta'riflanish mumkin.

Kantor teoremasidan muhim natija kelib chiqadi.

3-natija. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzlusiz bo'lса, у holda $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $[a, b]$ segmentni uzunliklari δ dan kichik bo'laklatga ajratilganda funksiyaning har bir bo'lakdag'i tebranishi ε dan kichik bo'ladi.

► $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzlusiz bo'lsin. Kantor teoremasiga ko'ra bu funksiya $[a, b]$ da tekis uzlusiz bo'ladi.

Tekis uzlusizlik ta'riliga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topiladiki, $|x' - x''| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x' \in [a, b], x'' \in [a, b]$ lat uchun $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ bo'ladi. Endi shu δ ni olib, $[a, b]$ segmentni diametri δ bo'lgan ixtiyoriy $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bo'laklashni olamiz. У holda, ravshanki, $\forall x' \in [x_k, x_{k+1}], \forall x'' \in [x_k, x_{k+1}]$ nuqtalar uchun $|x'' - x'| < \delta$ va demak, $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ bo'ladi. Bundan, ixtiyoriy bo'lakcha $[x_k, x_{k+1}]$ uchun

$$\omega = \sup_{\substack{x'' \in X \\ x' \in X}} |f(x'') - f(x')| \leq \varepsilon$$

bo'ladi.

Mashqlar.

5.11. Ushbu

$$f(x) = |x|, g(x) = \sqrt{x}, \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$$

funksiyalarning aniqlanish sohalarida uzlusizligi isbotlansin.

5.12. Agar $f(x)$ funksiya R da uzlusiz bo'lса, $f(x)$ funksiyaning ham R da uzlusiz bo'lishi isbotlansin.

5.13. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lса,} \\ x^2 - 4, & \text{agar } x \text{ irratsional son}\end{cases}$$

bo'lса

funksiyaning x to'plamining faqat $x = -1, x = 1$ nuqtalarda uzlusiz bo'lishi isbotlansin.

5.14. Ushbu

$$f(x) = \operatorname{sign}[x(1-x^2)]$$

funksiyaning uzilish nuqtalarini topilib, turli aniqlansin.

5.15. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzlusiz, $g(x)$ funksiya shu nuqtada uzilishiga ega bo'lsa, $f(x) \cdot g(x)$ funksiyaning a nuqtada uzilishiga ega bo'lishi ko'rsatilsin.

5.16. Agar x to'plamda uzlusiz bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun $\forall x \in R \setminus \{0\}$ da

$$|f(x)| < |x|$$

tengsizlik bajarilsa, $f(0) = 0$ bo'lishi ko'rsatilsin.

5.17. Ushbu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}) + \ln x$$

tenglik isbotlansin.

5.18. Ushbu

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x+1) \operatorname{arctg} y^n$$

funksiya uzlusizlikka tekshirilsin.

5.19. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{agar } -1 \leq x < 0 \\ 0, & \text{agar } x = 0 \\ x^2 - 1, & \text{agar } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

funksiya $[-1, 1]$ da o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga etishadimi?

5.20. Ushbu

$$f(x) = \sin x$$

funksiyaning $(-\pi, \pi)$ da tekis uzlusiz bo'lishi ko'rsatilsin.

5.21. Agar $f(x)$ funksiya $[0, +\infty)$ da uzlusiz bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

cheqli bo'lsa, $f(x)$ ning $[0, +\infty)$ da tekis uzlusiz bo'lishi ko'rsatilsin.

VI BOB

Funksiyaning hosilasi va differensiali

Funksiyaning hosilasi va differensiali tushunchaları matematik analizning fundamental tushunchalardandır.

Biz ushbu bobda funksiya hosilasi va differensiali tushunchaları bilan tanishamiz, funksiyalarning hosilasi va differensialini hisoblashni, shuningdek, differensial hisobning asosiy teoremlarını o'rganamiz.

1-§. Funksiyaning hosilasi

1^o. Funksiya hosilasining ta'rifi. Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda berilgan, $x_0 \in (a, b)$, $(x_0 + \Delta x) \in (a, b)$ bo'lsin.

Ma'lumki,

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

funksiya orttirmasi muayyan funksiya va x_0 nuqtalarda Δy ga bog'liq bo'ladi.

1-ta'rif. Agar

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit $f'(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deb ataladi. Funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi odatda,

$$f'(x_0) \text{ yoki } y'_x|_{x=x_0} \text{ yoki } \frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$$

belgilari yordamida yoziladi.

Demak,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Bunda $x_0 + \Delta x = x$ deb olaylik, unda $\Delta x = x - x_0$ va $\Delta x \rightarrow 0$ da $x \rightarrow x_0$ bo'lib, natijada

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $x \rightarrow x_0$ da

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

nisbatning limiti sitatida ham ta'riflanish mumkin:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (6.1)$$

Ravshanki, $f(x)$ funksiya (x_0) intervalning har bir x nuqtasida hosilaga ega bo'lsa, bu hosila x o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi.

Misollari qaraylik.

a) $f(x) = C$ — const funksiya uchun, $\Delta y = 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

bo'lib, v' ni bo'ladi,

b) $f(x) = x$ funksiya uchun $\Delta y = \Delta x$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

bo'lib, v' ni bo'ladi,

v) $f(x) = \ln x$ funksiya uchun, $x_0 = 0$ nuqtada $\Delta y = |\Delta x|$ bo'lib,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

limit mayjud bo'lmaydi. Demak, bu funksiya $x_0 = 0$ nuqtada hosilaga ega emas.

6.1-misol. $f(x) = e^x$ funksiyaning $x=1$ nuqtadagi hosilasini toping.

◀ Funksiya hosilasining (6.1) ta'rifidan foydalanim, topamiz:

$$y'|_{x=1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{e^t - e^{t-1}}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - e^{-t}}{t} = e \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = e \ln e = e.$$

Demak, $(e^x)'|_{x=1} = e$. ▶

6.2-misol. $f(x) = \ln x$ ($x > 0$) funksiyaning ixtiyoriy $x > 0$ nuqtadagi hosilasini hisoblang.

◀ Berilgan funksiyaning x nuqtadagi orttirmasi

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln(1 + \frac{\Delta x}{x}), \quad (x > 0)$$

bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln(1 + \frac{\Delta x}{x}) = \frac{1}{x} \ln(1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}$$

bo'ladi. Ma'lumki

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln(1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}} = 1$$

(qatalsin $\delta = \text{bob}$). Unda $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}$ limit o'rindi bo'ladi. Demak, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$ ►

6.3-misol. $f(x) = \cos x$ funksiyaning ixtiyorly $x_0 \in \mathbb{R}$ nuqtadagi hosilasini hisoblang.

◀Bu funksiya uchun

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin(\frac{x + \Delta x}{2}) \sin(\frac{\Delta x}{2})$$

bo'lib,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(\frac{x + \Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} = -2 \sin x$$

bo'ladi. Demak, $(\cos x)' = -\sin x \quad (\forall x \in \mathbb{R})$ ►

6.4-misol. $f(x) = \sqrt{x} \quad (x > 0)$ funksiyaning $x_0 \in (0, +\infty)$ nuqtadagi hosilasini toping.

◀ Bu funksiyaning hosilasi, x o'zgaruvchining ushu

$$v' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} + \Delta x - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x} + \Delta x + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

funksiyasi bo'ladi.►

2-ta'rif. Agar

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

mayjud va chekli bo'lsa, bu limit $f'(x_0)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng (chap) hosilasi deb ataladi. Funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng (chap) hosilasi $f'(x_0+0)$ ($f'(x_0-0)$) kabi belgilanadi.

Odatda funksiyaning o'ng va chap hosilalari bir tomonli hosilalar deb ataladi.

Masalan, $f(x) = \sqrt{x}$ funksiya uchun $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$ bo'ladi. Demak, $f(x) = \sqrt{|x|}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi o'ng hosilasi 1 ga, chap hosilasi -1 ga teng.

1-eslatma. Agar $\Delta x \rightarrow 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limiti aniq ishorali cheksiz bo'lса, uni ham $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deb yuritiladi. Bunday holda $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $+\infty$ (yoki $-\infty$) ga teng deyiladi.

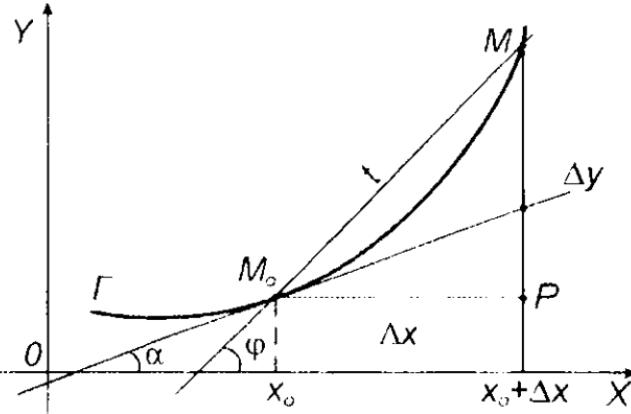
2⁰. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolari.

a) **Hosilaning geometrik ma'nosи.** $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda uzlusiz bo'lib, $x_0 \in (a, b)$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsin:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$f(x)$ funksiyaning grafigi biror Γ chiziqni ifodalasin doylik (30-chizma).

Endi Γ chiziqqa uning $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtasida unnma o'tkazish masalasini qaraymiz.



30 – chizma.

1 chiziqda M_0 nuqtadan farqli $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ nuqtani olib, bu nuqtalar orqali ℓ kesuvchi o'tkazamiz. ℓ kesuvchining OX o'qi bilan tashkil etgan burchakni ϕ bilan belgilaylik. Ravshanki, ϕ burchak α ga bog'liq bo'ladi: $\phi = \phi(\Delta x)$.

Agar x kesuvchining M nuqta tiziq bo'ylab M_0 qadilgandaqiga (ya'ni $x \rightarrow 0$ dagi) limit holati mavjud bolsa, kesuvchining bu limit holati tiziqqa M_0 nuqtada o'tkazilgan urinma deb ataladi. Urinma to'g'ri chiziqdandan iborat.

Ma'lumki, M_0 nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq M nuqtaning koordinatalari hamda bu chiziqning burchak koefitsienti orqali to'liq aniqlanadi.

$f(x)$ funksiya grafigiga M_0 nuqtada o'tkazilgan urinmaning mavjud bo'lishi uchun

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \alpha$$

limitning mavjudligini ko'rsatish yetarli, bunda α urinmaning Ox o'q bilan tashkil etgan burchagi, AMM_0P dan

$$tg \varphi(\Delta x) = \frac{MP}{M_0P} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

undan esa

$$\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'lishini topamiz. $u = \operatorname{arctg} f$ funksiyaning uzluksizligidan toydalansak,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \operatorname{arctg} \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right] = \operatorname{arctg} f'(x_0) \end{aligned}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x)$ mavjud va

$$\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} f'(x_0)$$

Keyingi tenglikdan

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

bo'lishini topamiz. Shunday qilib, $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a, b)$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bolsa, bu funksiya grafigiga $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinma mavjud. Funksiyaning x_0 nuqtasidagi hosilasi $f'(x_0)$ esa bu urinmaning burchak koefitsientini ifodalaydi. Urinmaning tenglamasi esa ushbu

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ko'rinishda bo'ladi.

b) Hosilaning mexanik ma'nosi. Moddiy nuqtaning hatakatini

$\forall t_0$ qoida bilan itodalangan bo'lsin, bunda t vaqt \rightarrow shu vaqt ichida o'tilgan yo'l (masofa). Bu qonun bo'yicha harakat qilayotgan nuqtaning t momentdag'i oniy tezligini topish masalasini qaraylik.

t vaqtning t_0 qiymati bilan birga $t_0 + \Delta t$ ($\Delta t > 0$) qiymatini ham olib, bu nuqtalarda $\forall t_0$ ning qiymatlarini topamiz. Moddiy nuqta t vaqt ichida

$$\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$$

masofani o'tadi va uning $[t_0, t_0 + \Delta t]$ segmentdaq'i o'rtacha tezligi

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

bo'ladi. $\Delta t \rightarrow 0$ da $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbatning limiti moddiy nuqtaning t_0 momentdag'i oniy tezligi s ni itodalaydi:

$$s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

Hosila ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = f'(t_0)$$

Demak, $\forall t_0$ funksianing t_0 nuqtadagi hosilasi mexanik nuqtayi nazardan $\forall t_0$ qonun bilan harakat qilayotgan moddiy nuqtaning t_0 momentdag'i oniy tezligini bildiradi.

3⁰. Funksianing uzlusiz bo'lishi bilan uning hosilaga ega bo'lishi orasidagi bog'lanish. $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo'lib, $x_0 \in (a, b)$ nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsin:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Ushbu

$$\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta x} f'(x_0) \quad (6.2)$$

miqdori Δx ga bog'liq va $\Delta x \rightarrow 0$ da nolga intiladi.

(6.2) tenglikdan topamiz:

$$\Delta y = f'(x_0) \Delta x + \alpha \Delta x \quad (6.3)$$

Odatda (6.3) formula funksiya orttirmasining formulasi deb ataladi. Bu formuladan

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f'(x_0) \Delta x + \alpha \Delta x) = 0$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a, b)$ nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, funksiya shu nuqtada uzlusiz bo'ladi.

2-eslatma. Funksiyaning biror nuqtada uzlusizligidan uning shu nuqtada chekli hosilaga ega bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi.

Masalan, $y = |x|$ funksiya $x > 0$ nuqtada uzlusiz, ammo u shu nuqtuda hosilaga ega emas.

2-§. Teskari funksiyaning hosilasi. Murakkab funksiyaning hosilasi

1º. Teskari funksiyaning hosilasi. $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo'lib, bu funksiya teskari funksiyaning mavjudligi haqidagi teoremaning (qaralsin 5-bob) barcha shartlarini qanoatlantirsin.

1-teorema. $f(x)$ funksiya (a, b) da uzlusiz va qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lsin. Agar $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a, b)$ nuqtada $f'(x_0) \neq 0$ hosilaga ega bo'lsa, bu funksiyaga teskari $x = f^{-1}(y)$ funksiya x_0 nuqtada mos bo'lgan y_0 ($y_0 = f(x_0)$) nuqtada hosilaga ega va

$$(f^{-1}(y))'_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

tenglik o'rinni.

◀ $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a, b)$ nuqtada $f'(x_0) \neq 0$ hosilaga ega bo'lsin. (6.3) formuladan foydalanib topamiz:

$$f(t) - f(x_0) = f'(x_0)(t - x_0) + \alpha(t - x_0) \quad (t \in (a, b)) \quad (6.4)$$

bunda $t \rightarrow x_0$ da $\alpha = \alpha(t) \rightarrow 0$. Endi $f(x)$ funksiyaning t nuqtadagi qiymatini $f(t) = z$ deb belgilaymiz. Unda $t = f^{-1}(z)$ shuningdek, $x_0 = f^{-1}(y_0)$ bo'ladi. Natijada (6.4) tenglik ushbu

$$\begin{aligned} z - y_0 &= f'(x_0)(f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)) + \alpha(f^{-1}(z))(f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)) = \\ &= (f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0))(f'(x_0) + \alpha(f^{-1}(z))) \end{aligned}$$

ko'rinishda keladi. Keyingi tenglikdan esa

$$\frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)}{z - y_0} = \frac{1}{f'(x_0) + \alpha(f^{-1}(z))}$$

kelib chiqadi $\lim_{z \rightarrow x_0}$ da limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{z \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(x_0)}{z - x_0} = \lim_{z \rightarrow x_0} \frac{1}{f'(x_0) + \phi(f^{-1}(z))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Demak,

$$\lim_{z \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(x_0)}{z - x_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Hosila ta'ritiga ko'ta

$$\lim_{z \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(x_0)}{z - x_0} = (f^{-1})'(x_0),$$

bo'lib, bundan

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

tenqlikning o'rini ekani kelib chiqadi. ►

2º. Murakkab funksiyaning hosilasi. $u = f(x)$ funksiya (a, b) intervalida, $v = F(u)$ funksiya esa (c, d) intervalda aniqlangan bo'lib, bu funksiyalar yordamida $y = F(f(x)) = \varphi(x)$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lisin (bunda, albatta, $x \in (a, b)$ da $u = f(x) \in (c, d)$ bo'lishi talab qilinadi).

2-teorema. Agar $u = f(x)$ funksiya $x_0 \in (a, b)$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lib, $v = F(u)$ funksiya esa x_0 nuqtaga mos $u_0 = f(x_0)$ nuqtada $F'(u_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda murakkab funksiya $\varphi(x) = F(f(x))$ ham x_0 nuqtida hosilaga ega va

$$\varphi'(x_0) = (F(f(x)))'_{x=x_0} = F'(u_0) \cdot f'(x_0) \quad (6.5)$$

formula o'rini.

► $u = f(x)$ funksiya $x_0 \in (a, b)$ nuqtada, $v = F(u)$ funksiya esa mos $u_0 = f(x_0)$ nuqtada hosilaga ega bo'lisin. (6.3) formuladan toydalanim topamiz:

$$f(t) - f(x_0) = f'(x_0)(t - x_0) + \alpha(t)(t - x_0), \quad (6.6)$$

$$F(s) - F(u_0) = F'(u_0)(s - u_0) + \beta(s)(s - u_0), \quad (6.7)$$

bunda

$$\lim_{t \rightarrow x_0} \alpha(t) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow u_0} \beta(s) = 0$$

Murakkab funksiya $\varphi(x) = F(f(x))$ ning x_0 nuqtadagi orttirmasi $\varphi'(x_0) = \varphi(x_0)$ m'ni yuqoridagi (6.6) va (6.7) munosabatlardan toydalanim, quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned}\varphi(t) - \varphi(x_0) &= F(f(t)) - F(f(x_0)) + F'(u_0)(f'(x_0)(t - x_0) + \\&+ \alpha(t)(t - x_0)) + \beta(f(t))(f(t) - f(x_0) + F'(u_0)f'(x_0)(t - x_0) + \\&+ F'(u_0)\alpha(t)(t - x_0) + \beta(f(t))(f(t) - f(x_0))).\end{aligned}$$

Endi bu tenglikning har ikki tomonini $t \rightarrow x_0$ ga bo'lib, so'ngra $t \rightarrow x_0$ da limitga o'tamiz:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow x_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(x_0)}{t - x_0} &= F'(u_0)f'(x_0) + F'(u_0) \lim_{t \rightarrow x_0} \alpha(t) + \\&+ \lim_{t \rightarrow x_0} \beta(f(t)) \cdot \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}\end{aligned}$$

Bundan $t \rightarrow x_0$ da $\alpha(t) \rightarrow 0, \beta(f(t)) \rightarrow 0$ ekanini e'tiborga olsak. (6.5) formula kelib chiqadi. ►

3-§. Hosila hisoblashning sodda qoidalari. Elementar funksiyalarining hosilalari

Biz ushbu paragrafda ikki funksiya yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatining hosilalarini topish qoidalarini keltiramiz. So'ngra elementar funksiyalarining hosilalarini hisoblaymiz.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a, b) intervalda aniqlangan bo'lzin.

1º. Ikki funksiya yig'indisi hamda ayirmasining hosilasi. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarining har biri $x \in (a, b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda $f(x) \pm g(x)$ funksiya ham x nuqtada hosilaga ega va

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \quad (6.8)$$

formula o'rini.

◀ Haqiqatan ham, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x \in (a, b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lzin:

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \quad g'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x}.$$

Endi $F(x) = f(x) \pm g(x)$ deb belgilab, topamiz:

$$\frac{F(t) - F(x)}{t - x} = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \pm \frac{g(t) - g(x)}{t - x}.$$

Bu tenglikda $t \rightarrow x$ da limit o'tsak, quyidagiiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}F'(x) &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{F(t) - F(x)}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \pm \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} = \\&= f'(x) \pm g'(x).\end{aligned}$$

Bu esa (6.8) formulani isbotlaydi. ▶

2º. Ikki funksiya ko'paytmasining hosilasi. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarining har biri $x \in (a, b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda $f(x) \cdot g(x)$ funksiya ham x nuqtada hosilaga ega va

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (6.9)$$

formula o'mnli.

◀ $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ deb belgilab, $\frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x}$ nisbatini quyidaqи

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \cdot g(x) + \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \cdot f(t)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu tenglikda $t \rightarrow x$ da limitga o'tib, topamiz:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} = \left[\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \cdot g(x) + \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \cdot f(t) \right] = \\ &= g(x) \cdot \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} + \lim_{t \rightarrow x} f(t) \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} = \\ &= g(x)f'(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

Bu esa (6.9) formulani isbotlaydi. ▶

3º. Ikki funksiya nisbatining hosilasi. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarining har biri $x \in (a, b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lib, $g(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya ham x nuqtada hosilaga ega va

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (6.10)$$

formula o'rinnli.

◀ (6.10) formulani isbolashdan avval funksiya hosilasi ta'rifidan foydalanim $\frac{1}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) funksiyaning $x \in (a, b)$ nuqtadagi hosilasini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g(x)} \right)' &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{1}{g(t)} - \frac{1}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(x) - g(t)}{g(t)g(x)} = \\ &= \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(x) - g(t)}{t - x} + \lim_{t \rightarrow x} \frac{1}{g(t)} = \frac{g'(x)}{g^2(x)}. \end{aligned}$$

Demak,

$$\left(\frac{1}{g(x)} \right)' = \frac{g'(x)}{g(x)^2} = \frac{(g(x)x^0)'}{g(x)} \quad (6.11)$$

Eindi (6.9) va (6.11) formulalardan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' &= \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)} \right)' \\ &= \frac{f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

Bu (6.10) formulaning o'rini ekanini isbotlaydi. ►

1-natija. 1) Yuqorida kelitirilgan (6.8) va (6.9) formulalar yordamida qo'shiluvchilar ha'mda ko'payuvchilar soni ixtiyoriy chekli bo'lgan holda ham tegishli formulalarni isbotlash mumkin.

2) (6.9) formuladan $g(x) \neq c, c = \text{const}$ bo'lqanda

$$(cf'(x))' = cf''(x)$$

formula kelib chiqadi. Bundan o'zgarmas sonni hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkinligi kelib chiqadi.

4⁰. Elementar funksiyalarning hosilalari. Funksiya hosilasi ta'rifidan foydalaniib, elementar funksiyalarning hosilalarini topamiz.

1) $y=x^n$ ($x \neq 0$) darajali funksiyaning hosilasi. Bu funksiya uchun quyidagiya egamiz:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^n - 1 \right]$$

Va

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^n \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^n - 1 \right]}{\Delta x} = x^{n-1} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^n - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

Ma'lumki, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{x}{x})^x - 1}{x} = 1$ (qaralsin 5-bo'b) unda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x^{n-1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^n - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{n-1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^n - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{n-1} \cdot 1 = \mu x^{n-1}$$

bo'ladi.

Demak, $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ummuman, bu formula $y=x^n$ funksiyaning

aniqlanishi sohasidagi ixtiyoriy x uchun o'tinlidir. Xususan $a = 1$ bo'lganda

$$\left(\frac{1+x}{x} \right)' = \frac{1}{x^2} > 0, x \neq 0.$$

2) $y = a^{x^{\alpha}}$ ($\alpha > 0, a \neq 1$) ko'tsatkichli funksiyaning hosilasi. Bu funksiya uchun quyidagiiga egamiz:

$$\Delta y = a^{(x+\Delta x)^{\alpha}} - a^{x^{\alpha}} = a^x(a^{\Delta x}-1)$$

Va

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$$

Ma'lumki, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \ln e$ (qaralsin 5 -- bob). Unda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

bo'ladi.

Demak,

$$y' = (a^x)' = a^x \ln a$$

Xususan, $(e^x)' = e^x$.

3) $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1, x > 0$) logarifmik funksiyaning hosilasi. Bu funksiya uchun quyidagiiga egamiz:

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

Va

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{1}{x} \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right]$$

Ma'lumki, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+\Delta x)}{\Delta x} = \log_a e$ (qaralsin 5 -- bob). Unda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right] = \frac{1}{x} \log_a e$$

bo'ladi.

Demak,

$$y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Xususan,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

4) Trigonometrik funksiyalarning hosilalari. Ushbu yoki siyavus funksiya uchun quyidagi egaemiz:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})$$

va

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) + \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

Keyingi tenglikda $\Delta x \rightarrow 0$ da limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x.$$

2

Demak,

$$v' = (\sin x)' = \cos x$$

Shunga o'hshash (6 bobning 1 § ga qarang) $(\cos x)' = -\sin x$ formula ham isbotlanadi.

Endi $y = \operatorname{tg} x$ funksiyalarning hosilasini $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ nisbatning hosilasi formulasidan foydalaniib topamiz:

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Demak,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Huddi shunga o'hshash quyidagi formulalar ham isbotlanadi:

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, (\sec x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, (\csc x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

5) Teskari trigonometrik funksiyalarning hosilalari. Teskari funksiyalarning hosilasini topish qoidasidan foydalaniib, teskari trigonometrik funksiyalarning hosilalarini hisoblaymiz. Ushbu $y = \operatorname{arc sin} x$ funksiyani olaylik. Bu funksiya $x = \sin y$ funksiyaga teskari bo'lub, uni $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervalda qarasak,

$$y' = (\operatorname{arc sin} x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

kelib chiqadi. Demak,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

Xuddi shunga o'xshash quyidagi formulalar ham isbotlanadi:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

6). Giperbolik funksiyalarning hosilalari. Endi giperbolik funksiyalarning hosilalarni hisoblaymiz. Bunda hosila hisoblashdaqи sodda qoidalardan va ko'rsatkichli funksiya hosilasi formulasidan foydalanamiz. Sodda hisoblashlar yordamida e shv uchun topamiz:

$$v' = (shv)' = \frac{1}{2}(e^v - e^{-v})' = \frac{1}{2}(e^v + \frac{1}{e^v})' = \frac{1}{2}(e^v + e^{-v}) = chv$$

Shunga o'xshash quyidagi formulalar ham isbotlanadi:

$$(chv)' = shv \quad (thv)' = \frac{1}{ch^2 v} \quad (cethv)' = \frac{1}{sh^2 v} \quad (v \neq 0)$$

4th. Hosilalar jadvali. Biz ushbu bandda elementar funksiyalar hosilolari uchun topilgan formulalarni jamtab, ularni jadval sifatida keltiramiz:

$$1). (x^n)' = nx^{n-1} \quad (n > 0);$$

$$2). (a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$3). (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1)$$

Xususan,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0);$$

$$4). (\sin x)' = \cos x$$

$$5). (\cos x)' = -\sin x$$

$$6). (\operatorname{tgx})' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm 1, \dots)$$

$$7). (\operatorname{ctgx})' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \dots)$$

$$8). (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$9). (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$10). (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$11). (\arccos x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$12). (\sin x)' = \cos x$$

$$13). (\cos x)' = -\sin x$$

$$14). (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$15). (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

6.5-misol. Agar $a > 0, a \neq 1, x \neq 0$ bo'lsa,

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$$

bo'lishi isbotlansin.

◀ Aytaylik, $x > 0$ bo'lsin. Unda $|x| = x$ bo'lib,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

bo'ladi.

Aytaylik, $x < 0$ bo'lsin. Unda $|x| = -x$ bo'lib,

$$\log_a |x| = \log_a (-x)$$

bo'ladi. Murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasiga ko'ra

$$(\log_a (-x))' = \frac{1}{(-x) \ln a} \cdot (-1) = \frac{1}{x \ln a}$$

bo'ladi. ▶

6.6-misol. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar hosilaga ega bo'lib, $u(x) > 0$ bo'lsa,

$$y = (u(x))^{\nu(x)}$$

funksiyaning hosilasi topilsin.

◀ Ravshanki,

$$\ln y = v(x) \ln u(x)$$

Murakkab funksiyaning hosilasi va ko'paytmaning hosilasi uchun tegishli formulalardan foydalanib topamiz:

$$\frac{1}{y} y' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{1}{u(x)} u'(x).$$

$$y' = y(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}) = \quad \blacktriangleright \quad (6.12)$$

$$= (u(x))^{\nu(x)} (v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} u'(x))$$

6.7-misol. Ushbu

$f(x) = x^x, \varphi(x) = x^{x^x} \quad (x > 0)$
funksiyalarning hosilalarini topilsin.

◀ (6.12) formulaga ko'ra

$$f'(x) = (x^x)' = x^x (\ln x + 1)$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\varphi(x) = x^{x^x} = x^{f(x)}$$

yana (6.12) formulaga ko'ra

$$\varphi'(x) = (x^{f(x)})' = \varphi(x) \ln x \cdot f'(x) + f(x)x^{f(x)-1}$$

bo'lib,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= x^{x^x} \ln x \cdot x^x (\ln x + 1) + x^x \cdot x^{x^x-1} = \\ &= x^{x^x+x-1}(x \ln x (\ln x + 1) + 1) \end{aligned}$$

bo'ladi. ►

6.8-misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyaning hosilasi topilsin.

◀ Aytaylik, $x \neq 0$ bo'lсин. Unda

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

bo'ladi.

Aytaylik, $x = 0$ bo'lсин. Bu holda hosila tarifidan foydalanib topamiz:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} = 0.$$

Demak,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

bo'ladi. ►

4-§. Funksiyaning differensiyali

1⁰. Funksiyaning differensiallanuvchi bo'lishi tushunchasi. $f(x)$ funksiya $x \in (a, b)$ intervalda aniqlangan, $x_0 \in (a, b)$, $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ bo'lsin. U holda $f(x)$ funksiya ham x_0 nuqtada $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ortirmaga ega bo'ladi.

3-ta'tif. Agar $f(x)$ funksiyaning $x \in (a, b)$ nuqtadagi ortirmasi Δy ni

$$\Delta y = A \Delta x + \alpha \Delta x \quad (6.13)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi deb ataladi, bunda $A = \Delta x$ bog'liq bo'lмаган o'zgarmas, α esa Δx ga bog'liq va $\Delta x \rightarrow 0$ da $\alpha = \alpha(\Delta x) \rightarrow 0$

Agar $\Delta x \rightarrow 0$ da

$$A \cdot \Delta x = \alpha(\Delta x) \Delta x \rightarrow 0(\Delta x)$$

ekanini e'tiborga olsak, u holda yuqoridaagi (6.13) ifoda ushbu $\Delta y = A \Delta x + 0(\Delta x)$

ko'rinishni oladi. Funksiya ottirmasi uchun (6.13) formulada $A = \Delta x$ ifoda orttirmaning bosh qismi deb yuritiladi.

3-teorema. $f(x)$ funksiyaning $x \in (a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning shu nuqtada chekli hosilaga ega bo'lishi zarur va etarli.

►Zarurligi. $f(x)$ funksiya $x \in (a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin: Unda

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + 0(\Delta x), \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{0(\Delta x)}{\Delta x}$$

bo'lib,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(A + \frac{0(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A$$

bo'ladi. Demak,

$$f'(x) = A$$

Yetarliligi. $f(x)$ funksiya $x \in (a, b)$ nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Agar

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = \alpha$$

deb olsak, undan

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + o(\Delta x)$$

ekanini topamiz. Bu tenglikdaqи α miqdori Δx ga bog'liq va $\Delta x \rightarrow 0$ da $\alpha \rightarrow 0$. Demak, $f(x)$ funksiya $x \in (a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, $i.e.$ $f'(x)$ bo'ladi ►

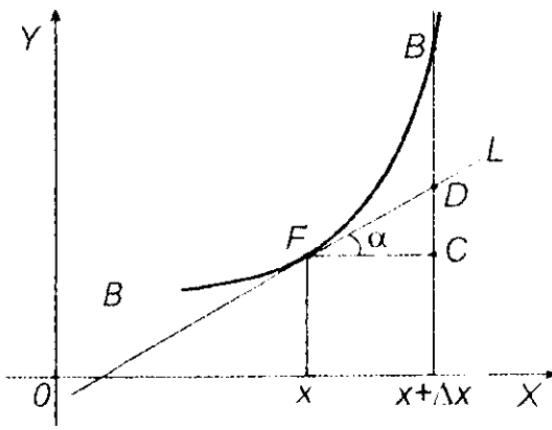
Istot etilgan teorema $f(x)$ funksianing $x \in (a,b)$ nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lishi bilan uning shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi ekvivalent ekanini ko'rsatadi.

2⁰. Funksiya differensiali va uning geometrik ma'nosi. $f(x)$ funksiya $x \in (a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin:

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + o(\Delta x)$$

bunda $A = f'(x)$ bo'ladi. Bu tenglikda funksiya orttirmasi Δy ikki qo'shiluvchi argument orttirmasi Δx ga nisbatan chiziqli $A \cdot \Delta x$ hamda Δy ga nisbatan yuqori tartibli ($\Delta x > 0$) cheksiz kichik miqdorlar yig'indisidan iborat ekanini ko'rindi.

4-ta'rit. $f(x)$ funksiya orttirmasi Δy ning Δx ga nisbatan chiziqli bosh qismi $A \cdot \Delta x = f'(x) \Delta x$ berilgan $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensiali deb ataladi. Funksiyaning differensiali dy yoki $d f(x)$ kabi belgilanadi: $dy = f'(x) \Delta x + f'(x) \Delta x$. Endi $x \in (a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lgan $f(x)$ turksiyaning grafigi 31 chizmada ko'rsatilgan chiziqni ifodalasın deylik.



31 chizma.

Bu chiziqning $(x, f(x))$ ($x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{R}$) nuqtalarini mos ravishda x va $f(x)$ bilan belgilaylik. Unda $F(x, f(x))$ $\Delta x, \Delta f(x)$ bo'ladi. $f(x)$ funksiya $x = x_0, h$ nuqtada differentiallanuvchi bo'lqani uchun u - nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega. Demak, $f(x)$ funksiya grafigiga umug $F(x, f(x))$ nuqtasida o'tkazilgan $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ urinma mavjud va bu urinmaning burchak koefitsienti $tgx = f'(x)$. Shu $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ urinmaning $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ bilan kesishgan nuqtasini x bilan belgilaylik. Ravshanki, ΔF dan $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ max va undan $\Delta F = tgx \cdot \Delta x = f'(x) \Delta x$ ekanini kelib chiqadi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differentiali $\frac{dy}{dx} = f'(x) \Delta x$ funksiya grafigiga $F(x, f(x))$ nuqtada o'tkazilgan urinma ottimasi $\frac{dy}{dx}$ ni $(\frac{dy}{dx})_{(x)}$ ifodalaydi. Xususan, $f(x)$ x bo'lqanda bu funksiyaning differentiali

$$dy = f'(x) \Delta x$$

bo'lib,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

bo'ladi. Bu hol $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differentialini quyidagi

$$dy = f'(x) dx = y' dx \quad (6.14)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin ekanini anglatadi.

Endi funksiya differentialining (6.14) ifodasidan toydalaniib, elementar funksiyalarning differentialari jadvalini keltiramiz:

$$1) \quad d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} dx \quad (\alpha > 0);$$

$$2) \quad d(a^x) = a^x \ln a dx \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$3) \quad d(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e dx$$

$$4) \quad d(\sin x) = \cos x dx$$

$$5) \quad d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$6) \quad d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm 1, \dots \right)$$

$$7) \quad d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx \quad (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \dots)$$

$$8) \quad d(\operatorname{aresin} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (-1 < x < 1)$$

$$9) \quad d(\arccos x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (-1 < x < 1)$$

$$10) \quad d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$11) \quad d(\operatorname{arctgh} x) = \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$12) \quad d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch} x dx$$

$$13) \quad d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{sh} x dx$$

$$14) \quad d(\operatorname{th} x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx$$

$$15) \quad d(\operatorname{tgh} x) = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx$$

3^q. Differensiallashning sodda qoidalari. Murakkab funksiyaning differensiali. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a, b) intervalda aniqlangan bo'lib, $x \in (a, b)$ nuqtada ularning differensialari $d(f(x) + g(x))$ mavjud bo'lsin. U holda $f(x) + g(x), f(x) \cdot g(x)$ va $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) funksiyalarning ham shu ve (a, b) nuqtada differensialari mavjud va ular uchun quyidagi $d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x)$, $d(f(x) \cdot g(x)) = f(x)dg(x) + g(x)df(x)$

$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g(x)^2}, \quad (g'(x) \neq 0)$$

formula o'tinli.

Bu tasdiqlarning isboti funksiya differensialining (6.14) ko'rinishida ifodalanishidan va funksiyaning hosilalarini topish qoidalardan kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, $u = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda, $y = F(u)$ funksiya esa (c, d) intervalda aniqlangan bo'lib, bu funksiyalar yordamida $y = F(f(x)) = \varphi(x)$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin.

Murakkab funksiyaning hosilasi uchun topilgan (6.5) formuladan toydananib, shu murakkab funksiyaning differensialini topamiz:

$$d\varphi(x) = d(F(f(x))) = (F'(f(x)))'dx = F'(u)f'(x)dx = F'(u)du$$

Shuni ta'kidlash lozimki, bu holda du miqdor argument u ning erkli orttirmasi emas, u e o'zgaruvchining funksiyasidir.

4^q. Funksiya differensiali va taqribiyl formulalar. Nazariy va amaliy masalalarini yechishda tegishli funksiyalarning nuqtadagi qiymatlarini hisoblash zarurati tug'iladi. Ko'pincha, bunday

funksiyalar murakkab bo'lib, ularning nuqtadagi qiymatlarini topish ancha qivin bo'ladi. Bu hol funksiyoning nuqtadagi qiymatini taqribiv hisoblash (ularni hisoblash uchun taqribiy formulalar topish) masalasini yuzaga keltiradi. Funksiyaning differensiali esa taqribiy formulalarni topish imkonini beradi.

(6.14) funksiya $x_0 \in (a, b)$ intervalda aniqlangan bo'lib, $x_0 \in (a, b)$ nuqtada chekh $f'(x_0) \neq 0$ hosilaga ega bo'lsin. Bu holda funksiya orttirmasini ushbu

$$\Delta y = f'(x_0) \Delta x + o(\Delta x)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu formulani hamda funksiya differensiali uchun $\frac{dy}{dx} = f'(x_0)$ Δy formulani e'tiborga olib topamiz:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0) \Delta x + o(\Delta x)}{f'(x_0) \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{o(\Delta x)}{f'(x_0) \Delta x} \right] = 1$$

Shunday qilib, $\Delta y = dy$. Natijada quyidagi

$$\Delta y = dy$$

ya'ni

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (6.15)$$

taqribiy tenglikka kelamiz. Ravshanki, $\Delta y - dy = o(\Delta x)$. Shuning uchun $\Delta x \rightarrow 0$ da (6.15) taqribiy tenglikning nisbiy xatosi nolga intiladi, ya'ni $\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} \rightarrow 0$.

(6.15) formula $x_0 \in (a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi Δy ni uning shu nuqtadagi differensiali dy bilan almashirish mumkinligi ko'rsatadi. Bu almashirishning qulayligi, funksiya orttirmasi Δy argument orttirmasi Δx ning, umuman aytganda, murakkab funksiyasi bo'lgan holda, funksiya differensiali dy esa Δx ning chiziqli funksiyasi bo'lishiadir. Agar $\Delta x = x - x_0$ ekanini e'tiborga olsak, unda $x_0 + \Delta x = x$ bo'lib, (6.15) formula quyidagi

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (6.16)$$

ko'rinishga keladi. Bunda $x_0 \in (a, b)$ muqta $x \in (a, b)$ nuqtadan katta farq qilmaydigan, amuno $f(x_0)$ qulayroq hisoblanadigan nuqtadir.

Masalan, $f(x) = \sin x$ bo'lib, $\sin 29^\circ$ ni hisoblash talab etilgan bo'lsin. Bu holda $x_0 = 30^\circ$ deyish qulay. (6.16) formulaga ko'ra

$$\sin 29^\circ \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ (29^\circ - 30^\circ) = \frac{2\pi}{360^\circ} = 0.5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} \approx 0.4848$$

Bunda radian o'lchovida yozish zarur, chunki boshqa hadlar

radianlarda berilgan Demak, sin 29° = 0.4848 (10^{-4} -anqlikda)

Yuqoridaagi (6.16) formula $x = 0$ bo'lganda ushbu

$$f(0) \approx f'(0) + f''(0)x$$

ko'rinishni oladi. Bu formula $(1+x)^n \approx 1 + nx, e^x \approx 1 + x, \ln(1+x) \approx x, \sin x \approx x, \operatorname{tg} x \approx x$

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

$$e^x \approx 1 + x$$

$$\ln(1+x) \approx x$$

$$\sin x \approx x$$

$$\operatorname{tg} x \approx x$$

5-§. Yuqori tartibli hosila va differensialar

1º. Funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalida antiqlangan bo'lib, uning har bir x nuqtasida $f'(x)$ hosilaga ega bo'lzin. Ravshanki, $f'(x)$ hosila x o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi. Bu $f'(x)$ hosila ham o'z navbatida bitor $x_0 \in (a,b)$ da hosilaga ega bo'lishi mumkin.

5-ta'rif Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalning har bir $x \in (a,b)$ nuqtasida $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, bu $f'(x)$ funksiya $x_0 \in (a,b)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ikkinchi hosilasi deb ataladi. Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(x), f''(x_0), \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x_0}$ belgilarning biri orqali yoziladi.

$f(x)$ funksiyaning uchinchi, to'rtinchchi va h.k. tartibdag'i hosilalari xuddi shunga o'xshash ta'mflanadi. Umuman, $f^{(n)}(x)$ funksiya (a,b) intervalning har bir $x \in (a,b)$ nuqtasida $(n-1)$ -tartibli $f^{(n-1)}(x)$ hosilaga ega bo'lzin. Bu $f^{(n-1)}(x)$ funksiyaning $x_0 \in (a,b)$ nuqtadagi hosilasi (agar u mavjud bo'lsa) $f^{(n)}(x)$ funksiyaning x_0 muqtadagi n -tartibli hosilasi deb ataladi va

$f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x_0), \left. \frac{d^n y}{dx^n} \right|_{x_0}$ larning biri orqali belgilanadi. Odatda $f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x_0)$ hosilalari uning yuqori tartibli hosilalari deyiladi.

Shunday qilib, $y = x^\mu$ funksiyaning $x > 0$ da n -tartibli hosilasining mavjudligi bu funksiyaning shu niqta atrofida $1, 2, \dots, (n-1)$ -tartibli hosilalari mavjudligini taqozo etadi. Ammo bu hosilalarning mavjudligidan n -tartibli hosila mavjudligi umuman avtganda, kelib chiqavermaydi. Masalan, $y = x^{\frac{1}{2}}$ funksiyaning hosilasi $x > 0$ bo'lib, bu funksiya $x=0$ da hosilaga ega emas, ya'mi berilgan funksiyaning $x=0$ da birinchi tartibli hosilasi mavjud, ikkinchi tartibli hosilasi esa mavjud emas.

Misollar qaraymiz.

1) $y = x^\mu$ bo'lsin ($x > 0$ va $\mu \in R$). Bu funksiyaning hosilalarini ketma-ket hisoblaymiz:

$$y' = \mu x^{\mu-1},$$

$$y'' = (y')' = (\mu x^{\mu-1})' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}$$

$$y''' = (y'')' = (\mu(\mu-1)x^{\mu-2})' = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}$$

Berilgan funksiyaning n -tartibli hosilasi uchun ushu

$$(x^\mu)^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)x^{\mu-n} \quad (6.17)$$

formulaning o'rini bo'lishini matematik induksiya usuli yordamida ko'rsatish qiyin emas. Ma'lumki, $n=1$ da

$$y' = \mu x^{\mu-1},$$

bo'ladi. Endi (6.17) formula $n=k$ da o'rini, ya'ni

$$y^{(k)} = \mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)x^{\mu-k}$$

bo'lsin deb, uning $n=k+1$ da o'rini bo'lishini ko'rsatamiz. Ta'rifga ko'ra $y^{(k+1)} = (y^k)'$. Demak

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= (y^k)' = (\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)x^{\mu-k})' = \\ &= \mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)(\mu-n)x^{\mu-k-1} \end{aligned}$$

Bu esa (6.17) formulaning $n=k+1$ da ham o'rini bo'lishini bildiradi. Demak, (6.17) formula ixtiyoriy $n \in N$ uchun o'rini.

(6.17) da μ ixtiyoriy haqiqiy son. Xususan, $\mu = 1$ bo'lsin.

Unda $y = \frac{1}{x}$ funksiyaning n -tartibli hosilasi

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)(-2)\dots(-n)x^{-n-1} = \frac{(-1)^{n+1} n!}{x^{n+1}} \quad (6.18)$$

bo'ladi.

2) $y = \ln x$ ($x > 0$) funksiyaning n -tartibli hosilasini topamiz. Bu funksiyaning hosilasi $y' = \frac{1}{x}$ bo'lishidan hamda (6.18) formuladan

$$v^{(n)} = v^{(n-1)} - \frac{(-1)^{n-1}}{x} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

formula kelib chiqadi. Demak,

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n-1}}$$

3) $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) bo'lsin. Bu funksiyaning hosilalarini ketma ket hisoblaymiz:

$$y' = a^x \ln a$$

$$y'' = (a^x \ln a)' = a^x \ln^2 a,$$

$$y''' = (a^x \ln^2 a)' = a^x \ln^3 a$$

$$\dots$$

Bu munosabatlarga qarab $y = a^x$ funksiyaning n tartibli hosilasi uchun ushbu

$$y^{(n)} = a^x \ln^n a$$

formulani vozamiz. Uning to'g'riligi yana matematik induksiya usuli yordamida osongina isbotlanadi. Demak,

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$$

Xususan, $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $(e^x)^{(n)} = e^x$.

4). $y = \sin x$ bo'lsin. Ma'lumki, bu funksiya uchun $y' = \cos x$. Biz uni quyidagi

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

ko'rinishda yozib olamiz. So'ngira $y = \sin x$ funksiyaning keyingi tartibli hosilalarini hisoblaymiz:

$$y'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}),$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}),$$

$$y^{(n)} = (-\cos x)' = \sin x = \sin(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}),$$

Bu ifodalardan esa $y = \sin x$ funksiyaning n tartibli hosilasi uchun

$$y^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

formula kelib chiqadi. Uning to'g'riligi yana matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi. Demak,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

Xuddi shunga o'xshash

$$(c\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2}).$$

2º. Sodda qoidalar. x_0 va x_1 funksiyalar (\cup) intervalda aniqlangan bo'lib, ular $\in (a, b)$ nuqtada n -tartibli $f(x) = f(x_0)$ hosilalarga ega bo'lzin. Buni quyidagiicha tushimish lozim: $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x nuqtani o'z ichiga olgan $(\alpha, \beta) \subset (\cup)$ intervalda $f^{(k)}, f^{(k+1)}, f^{(k+2)}$ hamda $g^{(k)}, g^{(k+1)}, g^{(k+2)}$ hosilalarga ega bo'lib, x nuqtada esa $f^{(k)}, g^{(k)}$ hosilaga ega. U holda

- 1) $(f(x))^k = f^{(k)}(x), c = \text{const}.$
- 2) $(f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x).$
- 3) $(f(x)g(x))^{(n)} = f^{(0)}(x)g(x) + f^{(1)}(x)g'(x) + \dots + f^{(n-1)}(x)g^{(n-1)}(x) + \dots + f^{(n)}(x)g^{(n)}(x).$

bo'ladi, bunda

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

6.9-misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2 - 5x + 6}, \quad x \neq 2, x \neq 3$$

funksiyaning n -tartibli hosilasi topilsin.

◀ berilgan funksiyani quyidagiicha

$$f(x) = \frac{7}{x-2} - \frac{9}{x-3}$$

vozib olamiz. So'ng

$$\left(\frac{1}{x+a} \right)^{(m)} = \frac{(-1)^m}{(x+a)^{m+1}}$$

formuladan foydalanimiz:

$$\left(\frac{2x+3}{x^2 - 5x + 6} \right)^{(n)} = \frac{7(-1)^{n+1}n!}{(x-2)^{n+1}} + \frac{9(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}} \blacktriangleright$$

3º. Murakkab funksiyaning yuqori tartibli hosilalari. $u = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda, $y = F(u)$ funksiya esa (c, d) intervalda aniqlangan bo'lib, ular yordamida $y = F(f(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lzin. $u = f(x)$ funksiya $x \in (a, b)$ nuqtada ikkinchi tartibli $f''(x)$, $y = F(u)$ funksiya esa mos $u = f(x)$ nuqtada ikkinchi tartibli $F''(u)$ hosilaga ega bo'lzin. Ikkinchi tartibli hosila ta'rifiga ko'ra

$$y'' = (F(f(x)))'' = [(F(f(x)))']'$$

bo'ladi. Murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash formulasi (6.5) dan hamda ko'paytmaning hosilasini hisoblash formulasi (6.9) dan foydalanimiz:

$$\begin{aligned} & [F(f(x))]' = [F'(f(x)) \cdot f'(x)]' = [F'(f(x))] \cdot f'(x) + \\ & + F''(f(x)) \cdot (f'(x))' = F''(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f'(x) + F'(f(x)) \cdot f''(x) = \\ & = F''(f(x))f'^2(x) + F'(f(x)) \cdot f''(x) \end{aligned}$$

Demak,

$$3^{\prime \prime} [F(f(x))]' = F'(f(x))f'^2(x) + F''(f(x)) \cdot f''(x)$$

Xuddi shunga o'xshash $x \in (a, b)$ funksiya $f(x)$ nuqtada $f'''(x)$ va $f^{(n)}(x)$ funksiya esa mos $x \in (a, b)$ nuqtada $F^{(n)}(x)$ hosilaga ega bo'lsha, murakkab $f^{(n)}(x)$ funksiya ham $x \in (a, b)$ nuqtada 3 tartibli hosilaga ega bo'ladi. Bu hosila quyidagicha hisoblanadi:

$$\begin{aligned} F' = [F(f(x))]' &= [(F(f(x)))'] = [F'(f(x))f'(x) + F''(f(x)) \cdot f'(x)]' = \\ &= F''(f(x)) \cdot f'^2(x) + F'(f(x)) \cdot 2f'(x) \cdot f''(x) + F''(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f''(x) + \\ &+ F''(f(x)) \cdot f'''(x) = F''(f(x)) \cdot f'^2(x) + 2F''(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f''(x) + F'(f(x)) \cdot f'''(x). \end{aligned}$$

Shu yo'l bilan murakkab funksiya $y = f(f(x))$ ning istalgan tartibli hosilalari ham hisoblanishi mumkin.

4º. Funksiyaning yuqori tartibli differensiallari

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $x \in (a, b)$ nuqtada ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin.

6-ta'rif. $f(x)$ funksiya differensiali $d^n y$ ning $x \in (a, b)$ nuqtadagi differensial funksivaning ikkinchi tartibli differensiali deb ataladi. Funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali $d^2 f(x)$ yoki f'' kabi belgilanadi;

$$d^2 y = d(dy) \quad \text{yoki} \quad d^2 f(x) = d(df(x)).$$

Endi differensiallash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$d^2 y = d(dy) = d(v'dx) = dv \cdot d(y') = dx \cdot y''dx = y''(dx)^2$$

Demak,

$$d^2 y = y'' dx^2 \tag{6.19}$$

bunda

$$dx^2 = dxdx = (dx)^2$$

Xuddi yuqoridagiga o'xshash, $x \in (a, b)$ nuqtada funksiyaning 3-tartibli differensiali ta'rillanadi:

$$d^3 y = d(d^2 y) = d(v''dv^2) = dv^2 d(y'') = y'''dx^3$$

bunda $dv^2 = (dx)^2$. Umuman funksiyaning $(n-1)$ -tartibli differensiali $d^{n-1}y$ dan olingan differensial $f(x)$ funksiyaning $x \in (a, b)$ nuqtadagi n -tartibli differensiali deb ataladi va u $d^n y$ yoki $d^n f(x)$ kabi belgilanadi:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) \quad \text{yoki} \quad d^n f(x) = d(d^{n-1}f(x))$$

Bu holda funksiyaning n -tartibli differensiali uning n -tartibli

hosilasi orqali quvidaqи

$$d^n y = y^{(n)} dx^n$$

ko'rinishda ifodalanadi. Uning to'g'iqliqini matematik induksiya usuli yordamida isbotlash mumkin.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ intervalda aniqlangan bo'lib, ular $y = f(x) + g(x)$ nuqtada n tartibli differensialga ega bo'lsm. U holda ushbu

- 1) $d^0(f(x) + g(x)) = d^0 f(x) + d^0 g(x)$
- 2) $d^1(f(x) + g(x)) = d^1 f(x) + d^1 g(x)$
- 3) $d^{k+1}(f(x)g(x)) = d^{k+1}(x)g(x) + C_k^0 d^{k+1} f(x) \cdot dg(x) + \dots + f(x)d^{k+1}g(x)$

formulalari o'rinni bo'ladi.

Endi murakkab funksiya $y = F(f(x))$ ning differensialini hisoblaymiz. Ma'lumki, $y = F(f(x)) = \phi(x)$ funksiyaning differensiali

$$\begin{aligned} dy &= \phi'(x)dx = F'(x) \cdot df(x) \\ &= (F'(f(x)))' = F''(f(x)) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

bo'lib, u

$$dy = d(F(x)) = F'(f(x)) \cdot f'(x)dx = F'(f(x))df(x) \quad (6.20)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Demak, funksiya murakkab bo'lgan holda ham funksiya differensiali funksiya hosilasi $F'(f(x))$ bilan (bu holda argument $f(x)$ bo'ladi) argument $f(x)$ ning differensiali $df(x)$ ko'paytmasidan iborat okanligini ko'tamiz. Odatda bu xossalni differensial formasining invariantligi deyiladi. Bunda (6.14) formuladagi dx argument x ning ichtiyoriy orttirmasi Δx ni ($\Delta x = dx$) bildiradi, (6.20) formuladagi $df(x)$ esa x o'zgaruvchiga bog'liq bo'ladi.

Endi $y = F(f(x))$ murakkab funksiyaning ikkinchi tartibli differensialini hisoblaymiz. Ta'tifga ko'ta

$$d^2 y = d^2(F(f(x))) = d(dF(f(x)))$$

bo'ladi. Differensiallash qoidasidan toydalaniib topamiz:

$$\begin{aligned} d^2 y &= d(F'(f(x)) \cdot df(x)) = d(F'(f(x)))df(x) + F''(f(x)) \cdot d^2 f(x) \\ &= F''(f(x))df^2(x) + F''(f(x)) \cdot d^2 f(x). \end{aligned}$$

Bunda $df^2(x) = df(x) \cdot df(x) = (df(x))^2$.

Demak,

$$d^2 y = d^2(F(f(x))) = F''(f(x))df^2(x) + F''(f(x)) \cdot d^2 f(x) \quad (6.21)$$

Bu (6.21) formula bilan (6.19) formulani taqqoslab, ikkinchi tartibli differensiallar differensial formasining invariantligi xossasiga ega emasligini ko'tamiz.

$y = F(f(x))$ funksiyaning uchinchi va hokazo tartibli

differensiallan yuqoridaqidek birin' ketin hisoblanadi

6-§. Differensial hisobning asosiy teoremlari

Ushbu paragrafda differensial hisobning asosiy teoremlarini keltiramiz. Bu teoremlar kelgusida, aymiqsa funksiyalarni tekshishda muhim rol o'yndaydi.

4-teorema (Fermat teoremasi). $f(x)$ funksiya biror $x=c$ nuqtadagi aniqlangan va bu oraliqning ichki nuqtasida o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishsin. Agar bu nuqtada funksiya chekli $f'(c)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda

$$f'(c) = 0$$

bo'ladi.

► $f(x)$ funksiya c nuqtada eng katta qiymatga ega, ya'ni $\forall x \in X$ da $f(x) \leq f(c)$ tengsizlik o'rini, shu bilan birga bu c nuqtada chekli $f'(c)$ hosil mavjud bo'lsin. Rayshanki

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Ayni paytda

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0, \quad \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0,$$

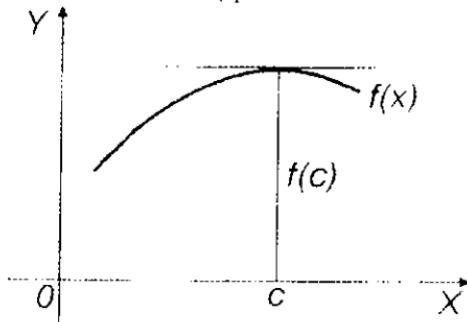
bo'ladi.

Yuqoridaqı munosabatlardan

$$f'(c) = 0$$

ekani kelib chiqadi. ►

Shunga o'xshash, funksiya c nuqtada eng kichik qiymatga ega va bu nuqtada chekli $f'(c)$ hosilaga ega bo'lganda ham $f'(c)=0$ bo'lishi ko'rsatiladi. ► (qaralsin 32 chizma)



32 - chizma.

5-teorema (Roll teoremasi). $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzlusiz, $f(a) = f(b)$ bo'lsin. Agar bu funksiya (a, b) intervalda chekli hosilaga ega bo'lsa, u holda shunday $c \in (a < c < b)$ nuqta topiladiki.

$$f'(c) = 0$$

bo'ladi.

◀ $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzlusiz. Demak, Vovershtrassning birinchi teoremasiga ($5\text{-}10\text{b}$, 7 §) ko'ra bu oraliqda funksiya o'zining eng katta qiymati M va eng kichik qiymati m ga erishadi.

- 1) $m = M$ bo'lsin. Bunda $f(x) = \text{const.}$, $x \in (a, b)$ bo'ladi. Ravshanki, bu holda $\forall c \in (a, b)$ uchun $f'(c) = 0$ bo'ladi.
- 2) $m < M$ bo'lsin. Bu holda $f(a) = f(b)$ bo'lgani uchun $f(x)$ funksiya o'zining eng katta qiymati M , eng kichik qiymati m larning kamida bittasiga $[a, b]$ segmentning ichki $c \in (a < c < b)$ nuqtasida erishadi. Ferma teoremasiga asosan bu nuqtada

$$f'(c) = 0$$

bo'ladi. ►

6-teorema (Lagranj teoremasi). $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzlusiz bo'lsin. Agar bu funksiya (a, b) intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda shunday $c \in (a < c < b)$ nuqta topiladiki, bu nuqtada

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (6.22)$$

bo'ladi.

◀ $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzlusiz bo'lib, uning ichki nuqtalarida chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiya yordamida quyidagi

$$F(x) = f(x) - f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

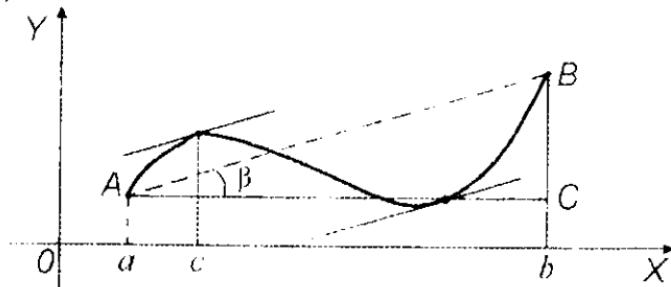
funksiyani tuzaylik. Ravshanki, bu funksiya $[a, b]$ segmentda uzlusiz bo'lib, (a, b) intervalda esa

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

hosilaga ega. $F(x)$ funksiyaning $x = a$ va $x = b$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz: $F(a) = F(b) = 0$. Demak, $F(x)$ funksiya Roll teoremasining barcha shartlariini qanoatlantiradi. U holda a va b orasida shunday $c \in (a < c < b)$ nuqta topiladiki, $F'(c) = 0$ bo'ladi. Shunday qilib.

$$0 \cdot F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

va bundan (6.22) formula kelib chiqadi. ► (qaralsin 33-chizma)



33-chizma.

7-teorema. (Koshi teoremasi). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ segmentda uzlusiz bo'lsin. Agar bu funksiyalar (a, b) intervalda chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hisilalarga ega bo'lib, $\forall x \in (a, b)$ uchun $g'(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda shunday $c \in (a < c < b)$ nuqtada topiladiki,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (6.23)$$

tenglik o'tinli bo'ladi.

◀ (6.23) tenglik ma'noga ega bo'lishi uchun $g(b) \neq g(a)$ bo'lishi kerak. Bu esa teoremadagi $g'(x) \neq 0$, ($x \in (a, b)$) shartdan kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar $g(b) = g(a)$ bo'lib qoladigan bo'lsa, u holda $g(x)$ funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantirib, biroi $c \in (a, b)$ nuqtada (bunday nuqta Roll teoremasiga ko'ra topiladi) $g'(c) = 0$ bo'lib qoladi. Bu esa $\forall x \in (a, b)$ da $g'(x) \neq 0$ shartga ziddi. Demak, $g(b) \neq g(a)$

Endi $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar yordamida quyidagi

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot [g(x) - g(a)]$$

funksiyani tuzaylik. Bu funksiya $[a, b]$ segmentda uzlusiz bo'lib, (a, b) intervalda

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$$

hosilaga ega. So'ngira $F(x)$ funksiyaning $x=a, x=b$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz: $F(a) = f(a) = 0$. Demak, $F(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda Roll teoremasining barcha shartlarini

qanoatlantiradi. Shuning uchun a va b lat orasida shunday e
 $\omega = \pm 1/2$ topiladiki. $E_{\text{tot}}=0$ bo'ladi. Shunday qilib,

$$0 = f'(x) - f'(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$$

va unday (6.23) tenglikning o'tinli ekani kelib chiqadi. ►

Xususan, $g(x) = x$ bolğanda Koshi teoremasından Lagrange teoreması kelib çıqadı.

7-8. Taylor formulas

1⁰. Funksiyani yaqinlashtirish haqida. Ma'lumki, funksiya matematik analiz o'r ganiladigan asosiy tushuncha. Ko'pgina masalalar esa funksiyani hisoblash (berilgan nuqtada qiymatini topish) bilan bog'liq. Funksiyaning murakkab bo'lishi bunday hisoblashlarda katta qiyinchiliklar tug'diradi. Natijada noqulay va murakkab funksiyani o'ziga qaraganda sodda va hisoblashga qulay bo'lgan funksiya bilan yaqinlashtirish - taqribiy ifodalash masalasi yuzaga keladi. Bu masalani hal qilishda ko'p hollarda Teylor formulasidan foydalaniлади.

Shuni aytish kerakki, xususiy holda bunday masala bilan funksiya ortirmasi Δy ni uning differensiali dy bilan taqribiy ifodalash ($\Delta y \approx dy$) jarayonida tanishgan edik. Ma'lumki, $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a, b)$ da differensiallanuvchi bo'lsa, uni quyidaqи

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu esa x_0 nuqtanining etarli kichik atrofidaqи x nuqtalarda $f(x)$ funksiya ushbu

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

chiziqli funksiya (birinchi darajali ko'phad) bilan taqribiy ifodəlanishini ko'rsatadi.

2⁰. Ko'phad uchun Teylor formulasi. Ushbu

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n \quad (6.24)$$

(бунда $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ва x_0 о'згармас ҳақиқиј сонлар, $n \in N$) ко' phadni qaraylik. Bu ko'phadni ketma-ket n мarta differensiallab topamiz:

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}.$$

$$P_n''(x) = 2a_1 + 3 \cdot 2a_2(x - x_0) + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}.$$

$$P_7(x) = 3 \cdot 2 a_0 + \dots + n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}, \quad (6.25)$$

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots 2a_n$$

Bu (6.24) va (6.25) tengliklarda $x = x_0$ deb olmasa, unda berilgan $f(x)$ ko'phad va uning hosilalarini $P_n^{(k)}(x) \quad (k=1,2,\dots,n)$ ning x_0 nuqtadagi qiymatlari topiladi:

$$\begin{aligned} P_n(x_0) &= a_0, \\ P'_n(x_0) &= 1! a_1, \\ P''_n(x_0) &= 2! a_2, \\ &\dots \\ P_n^{(n)}(x_0) &= n! a_n \end{aligned}$$

Ularдан

$$\begin{aligned} a_0 &= P_n(x_0), \\ a_1 &= \frac{P'_n(x_0)}{1!}, \\ a_2 &= \frac{P''_n(x_0)}{2!}, \\ &\dots \\ a_n &= \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}. \end{aligned}$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib, $P_n(x)$ ko'phadning koeffitsientlari ko'phad va uning hosilalarining x_0 nuqtadagi qiymatlari orqali ifodalanadi. Koeffitsientlarning bu qiymatlarini (6.24) ga qo'yasak, unda

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P'_n(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (6.26)$$

bo'ladi.

(6.26) formula ko'phad uchun Teylor formulasi deb ataladi.

3⁰. Ixtiyoriy funksiya uchun Teylor formulasi. $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo'lib, u $x_0 \in (a, b)$ nuqtada $f', f'', \dots, f^{(n)}(x_0)$ hosilalarga ega bo'lsin. Funksyaning nuqtadagi hosilalaridan foydalanih, quyidagi

$$P_n(f, x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ko'phadni tuzaylik.

Agar qaralayotgan $f(x)$ funksiya n -darajali ko'phad bo'lsa, unda yuqorida (2 bandda) aytliganga ko'ra

$$f(x) = P_n(f, x)$$

ya'mi

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

bo'libdi.

Agar $f(x)$ funksiya ko'phad bo'lmasa, ravshanki,

$$f(x) \neq P_n(t, x)$$

bo'lib, ular orasida farq yuzaga keladi. Biz uni $R_n(x)$ ortqali belgilaylik:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(t, x)$$

Natijada ushbu

$$f(x) = P_n(t, x) + R_n(x)$$

yadni

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \quad (6.27)$$

formulaga kelamiz. Bu (6.27) formula $f(x)$ funksiya uchun Taylor formulasi deb ataladi. $R_n(x)$ esa Taylor formulasining qoldiq hadi deviladi.

$f(x)$ funksiyaning $P_n(f, x)$ ko'phad bilan taqrifiy $f(x) = P_n(f, x)$ ifodalashda Taylor formulasidan keng foydalaniлади. Bunda qoldiq had $R_n(x)$ m baholash muhim. Bu masalani hal qilish uchun $f(x)$ funksiyyaga "og'irroq" shart qo'yishga to'g'ri keladi.

$f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo'lib, u shu intervalda uzlucksiz $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsin degan edik. Endi (a, b) intervalda bu funksiyaning $(n+1)$ tartibli $f^{(n+1)}(x)$ hosilasi ham mavjud bo'lsin deymiz. (a, b) intervalda argument x ning ixtiyoriy qiymatini tayinlab quyidagi

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x - t) - \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n \quad (6.28)$$

yordamchi funksiyani tuzamiz va um $[x_0, x] \subset (a, b)$ (yoki $\{x, x\} \subset (a, b)\}$) segmentda qaraymiz. $F(t)$ funksiyaning (6.28) ifodasidan uning $[x_0, x]$ segmentda uzlucksiz bo'lismeni ko'rish qiyin emas. Bu funksiya (x_0, x) intervalda hosilaga ham ega. Haqiqatan ham.

$$\begin{aligned} F'(t) &= f'(t) - \left[\frac{f'(t)}{1!}(x - t) - f'(t) \right] - \left[\frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 - \frac{f''(t)}{1!}(x - t) \right] \\ &\quad - \left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n - \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n-1)!}(x - t)^{n-1} \right] \dots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n \end{aligned}$$

Demak,

$$F'(t) = - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n \quad (6.29)$$

Endi $[x_0, x]$ segmentda uzlucksiz va (x_0, x) intervalda chekli (nolga

teng bo'lmagan) hosilaga ega bo'lgan buor $\varphi(t)$ funksiyani olaylik.

$f(t)$ va $\varphi(t)$ funksiyalarga $[x_0, x]$ segmentda Koshi teoremasini qo'llanib topamiz.

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= F'(c) \\ \varphi(x) - \varphi(x_0) &= \varphi'(c) \end{aligned} \quad (6.30)$$

bunda,

$$x_0 + \theta(x - x_0) = c \quad (c = x_0 + \theta(x - x_0), 0 < \theta < 1)$$

Yuqoridaqgi (6.28) funksiya uchun

$$f(x) \sim 0, f(x_0) = R_n(x)$$

tengliklarga egamiz. Endi (6.29) tenglikdan $x = c$ da

$$F'(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda (6.30) tenglikdan

$$R_n(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(c)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n \quad (6.31)$$

$(c = x_0 + \theta(x - x_0))$ formula kelib chiqadi.

Shunday qilib, Taylor formulasining qoldiq hadi uchun (6.31) formula topildi. Bu holda $f(x)$ funksiyaning Taylor formulasi quyidagi

$$\begin{aligned} f(x) &\sim f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ &+ \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(c)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n \end{aligned}$$

$$(c = x_0 + \theta(x - x_0), 0 < \theta < 1) \quad (6.32)$$

ko'rinishda yoziladi.

Taylor formulasidan kengroq foydalanish maqsadida, uning qoldiq hadining turli ko'rinishlarini keltiramiz.

1). Koshi ko'rinishdagi qoldiq hadli Taylor formulasi. Yuqorida qaralgan $\varphi(t)$ funksiya sifatida $\varphi(t) \neq 0$ funksiyani olaylik. Ravshanki, bu funksiya $[x_0, x] \subset (a, b)$ segmentda uzlusiz, (x_0, x) intervalda esa chekli $\varphi'(t) = 1$ hosilaga ega. Bu funksiya uchun $\varphi(t) \neq 0, \varphi(x_0) = x - x_0$ bo'ladi. Natijada (6.31) formula quyidagi

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}[x - x_0 - \theta(x - x_0)]^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - x_0)^n(1 - \theta)^n$$

$$(0 < \theta < 1)$$

ko'rinishni oladi. Qoldiq hadning bu ifodasini (6.32) ga qo'yib topamiz:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{n!}(x - x_0)^{n+1}(1 - \theta)^n \quad (6.33)$$

Bu (6.33) formula $f(x)$ funksiyaning Koshi ko'rinishidagi qoldiq hadli Taylor formulasi deb ataladi.

2). Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Taylor formulasi
 Endi $\varphi(t) = (x-t)^n$ funksiyani olovlik. Bu funksiya ham $\exists c, x \in (x_0, x)$ segmentda uzlucksiz, (x_0, x) intervalda esa chekli $\varphi'(t) = -(n+1)(x-t)$ hosilaga ega. Bu funksiya uchun

$$\varphi(x) = 0, \varphi(x_0) = (x - x_0)^{n+1}$$

$$\varphi'(c) = -(n+1)(x - c)^n, (c = x_0 + \theta(x - x_0), 0 < \theta < 1)$$

bo'ladi. U holda vuqoridaagi (6.31) formula ushbu

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

ko'rinishni oladi. Qoldiq hadning bu ifodasini (6.32) ga qo'yib, topamiz:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (6.34)$$

Bu formula $f(x)$ funksiyaning Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Taylor formulasi deb ataladi.

Taylor formulasi qoldiq hadining bu ko'rinishi sodda bo'lib, u (6.34) formuladagi navbatda keladigan hadni eslatadi. Faqat bunda funksiyaning $(n+1)$ -tartibli hosilasining x_0 nuqtadagi qiymati o'miga bu hosilaning c ($c = x_0 + \theta(x - x_0)$) nuqtada qimati olinadi.

3). Peano ko'rinishidagi qoldiq hadli Taylor formulasi. $f(x)$ funksiya $T_n(x_0) \subset (a, b)$ atrofida $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lib, $f^{(n+1)}(x)$ hosila esa x_0 nuqtada uzlucksiz bo'lsin. Bu funksiya uchun $x \in T_n(x_0)$ da ushbu

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - x_0)^n \quad (6.35)$$

(bunda x son x_0 bilan e'tasida) formula o'nnli.

Elaqiqatan ham, yuqoridaq (6.34) formulada n ni $n+1$ ga almashtirishak, u holda (6.34) formuladan (6.35) kelib chiqadi.

Ravshanki, $x \rightarrow x_0$ da $\alpha(x)$ bo'ladi. Bu esa x_0 nuqtada uzuksiz. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f^{(n)}(c) + f^{(n)}(x_0)$$

U holda

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x),$$

tenglik o'nnli bo'lib, $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ bo'ladi.

Agar $x \rightarrow x_0$ da $\alpha(x)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$ bo'lilishini e'tiborga olsak, natijada (6.35) formulaning qoldiq hadi uchun ushbu

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \quad (6.36)$$

formulani topamiz. Endi (6.35) va (6.36) formulalardan

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \quad (6.37)$$

formulaga kelib chiqadi. Bu formula $f(x)$ funksiyaning Peano ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasini deb ataladi.

Demak, $x \rightarrow x_0$ da (6.37) formulaning qoldiq hadi nolga intilib, u (6.37) formulada o'zidan oldin keladigan har bir hadga qaratganda yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

Shunday qilib, biz yuqorida $f(x)$ funksiya Teylor formulasini qoldiq hadining turli ko'rinishlarini keltirdik. Yechilayotgan masalaning talabiga qarab u yoki bu ko'rinishdagi qoldiq hadli Teylor formulasidan foydalilanadi. Masalan, biror x_0 nuqta atrofidagi $v = v(x \neq x_0)$ nuqtalarda $f(x)$ funksiyaning qiymatlarini taqribiy hisoblash kerak bo'lsa, Koshi yoki Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formularidan foydalangan ma'qul, $x \rightarrow x_0$ da qoldiq hadi nolga intish tartibinigina bilish lozim bo'lsa yoki x_0 nuqta atrofida funksiyaning bosh qismini ajratish kerak bo'lsa, u holda Peano ko'rinishdagi qoldiq hadli Teylor formulasidan foydalananish maqsadga muvofiq bo'ladi.

4⁰. Makloren formulasasi. $f(x)$ funksiyaning (6.27) Teylor formulasida $x_0 = 0$ deb ohinsa, ushbu

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x) \quad (6.38)$$

formula hosil bo'ladi. Bu holda qoldiq had $r_n(x)$ quyidagicha:

a) Koshi ko'tinishida: $\frac{1}{n!}x^{n+1}(1-\theta)^n t^{n+1}(\theta x) = r_n(x)$.

b) Lagranj ko'tinishida: $r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$.

v) Peano ko'tinishida: $|r_n(x)| \leq C$

$(0 < \theta < 1)$ yozilishi mumkin.

Yuqoridagi (6.38) formula $f(x)$ funksiyaning Makloren formulasini deb ataladi.

Ushbu

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$(0 < \theta < 1)$ Lagranj ko'tinishidagi qoldiq hadli Makloren formulasini qaraylik. Bu formulaning qoldiq hadini baholaymiz. Faraz qaraylik, shunday M son mavjud bo'lsinki, argument x ning $x_0 = 0$ nuqta atrofidagi qiymatlarida hamda $n \in N$ ning barcha qiymatlarida

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M$$

tengsizlik bajarilsin. U holda ushbu

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x) \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. x ning har bir tayin qiymatida

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

limit o'tinli bo'lishini e'tiborga olsak, u holda n ning etarli katta qiymatlarida $r_n(x)$ yetarli kichik bo'lishini ko'ramiz. Demak, $x_0 = 0$ nuqta atrofidagi $f(x)$ funksiyani

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ko'phad bilan almashtirish mumkin. Natijada ushbu

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

taqrifiy formula kelib chiqadi.

5th. Elementar funksiyalar uchun Makloren formulası. 1) $f(x) = e^x$ bo'lsin. Bu funksiya uchun $f^{(n+1)}(x) = e^x$ va $f(0) = 1$.

$x = 0$ -da $(n+1)$ -ga U holda

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x)$$

bo'lib, uning qoldiq hadi esa Lagranj ko'rinishida quyidagicha yoziladi:

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1)$$

Har bir $x \in [a, a] \quad (a > 0)$ da $|e^{\theta x}| \leq e^a$ bo'lishini e'tiborqa olsak, unda

$$|r_n(x)| \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a$$

tengsizlik kelib chiqadi va $n \rightarrow \infty$ da $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a$ ifoda va demak, $r_n(x)$ ham nolga intiladi. Natijada $f(x) = e^x$ funksiya uchun quyidagi

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

taqribiyl formulaga ega bo'lamiz. Bu formuladan, xususan, $x=1$ bo'lganda, n sonini taqribiyl hisoblash imkonini beradigan ushbu

$$e^x \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

formula hosil bo'ladi. Bu holda $|r_n(1)| \leq \frac{3}{(n+1)!}$

2). $f(x) = \sin x$ bo'lisin. Ma'lumki, bu funksiyaning n tartibili hosilasi uchun $f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$ formula o'rini. Ravshanki, $f(0) = 0$ va

$$f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, \text{ agar } n = juft bo'lsa, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \text{ agar } n = toq bo'lsa. \end{cases}$$

Uchun $\sin x$ funksiyaning Makloren formulasi n toq son bo'lganda

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} + r_n(x)$$

ko'rinishda yoziladi. Bu formulaning qoldiq hadi Lagranj ko'rinishda quyidagicha yoziladi:

$$r_n(x) = \frac{x^n}{(n+2)!} \sin(\theta x + n\frac{\pi}{2}) \quad (0 < \theta < 1)$$

Ravshanki, $\forall x \in [-a, a]$ ($a > 0$) da

$$|r_n(x)| \leq \frac{a^n}{(n+2)!}$$

bo'lib, $n \rightarrow \infty$ da $\frac{a^n}{(n+2)!} \rightarrow 0$ ifoda va demak, $r_n(x)$ ham nolga intiladi.

Shunday qilib, $n =$ toq son bo'lganda ushbu

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

taqribiy hisoblash formulasiga egamiz.

3). $f(x) = \cos x$ bo'lsin. Bu funksiyaning n -tartibli hosilasi uchun $f^{(n)}(x) = (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ formulaga egamiz. Ravshanki, $f(0) = 1$ va

$$f^{(n)}(0) = \cos \frac{n\pi}{2} \begin{cases} 0, \text{ agar } n = \text{toq son bo'lsa}, \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, \text{ agar } n = \text{juft son bo'lsa} \end{cases}$$

$f(x) = \cos x$ funksiyaning Makloren formulası quyidajicha yoziladi.

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{x^n}{n!} + r_n(x)$$

(bunda $n =$ juft son), uning qoldiq hadi Lagranj ko'rinishida quyidajicha yoziladi:

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+2)!} \cos(\theta x + n\frac{\pi}{2} + \pi) \quad (0 < \theta < 1)$$

Demak,

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

4). $f(x) = \ln(1+x)$ bo'lsin. Ma'lumki, bu funksiyaning n -tartibli hosilasi uchun ushbu

$$f^{(n)}(x) = \ln(1+x)^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

formula o'rinali. Ravshanki, $f(0) = 0$, $f_{(0)}^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)!$. Shuni e'tiborqa olib, berilgan funksiyaning Makloren formulasini yozamiz:

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + r_n(x) \quad (6.38)$$

Bu formulaning qoldiq hadi $r_n(x)$ ni baholashda uning Lagranj hamida Koshi ko'rnishlaridan foydalanamiz.

a) $0 \leq x \leq 1$ bo'lism. Bu holda (6.38) formulaning Lagranj ko'rnishidagi

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1)$$

qoldiq hadini olib, uning uchun quyidagi

$$|r_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

bahoga ega bo'lamiz.

b) $-a \leq x \leq 0$, $0 < a < 1$ bo'lism. Bu holda (6.38) formulaning Koshi ko'rnishidagi

$$r_n(x) = (-1)^n x^{n+1} \cdot \frac{(1-\theta_1)^n}{(1+\theta_1 x)^n}; \quad (0 < \theta_1 < 1) \quad (6.39)$$

qoldiq hadini olamiz. (6.39) tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$r_n(x) = (-1)^n \cdot \left(\frac{1-\theta_1}{1+\theta_1 x} \right)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{1+\theta_1 x}$$

o'zgaruvchi x ning $-a \leq x \leq 0$ ($0 < a < 1$) qiymatlarida

$$\frac{1-\theta_1}{1+\theta_1 x} < 1$$

tengsizlik o'rinni bo'lishini hisobga olib, topamiz:

$$|r_n(x)| = \left| (-1)^n \cdot \left(\frac{1-\theta_1}{1+\theta_1 x} \right)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{1+\theta_1 x} \right| < \left| \frac{x^{n+1}}{1+\theta_1 x} \right| < \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

Demak, $\ln(1+x)$ funksiya uchun quyidagi

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

taqrifiy hisoblash formulasi hosil bo'ladi.

5). $f(x) = (1+x)^\alpha$ bo'lisin, bunda $\alpha \in R$. Bu funksiyaning $n+1$ -tartibli hosilasi uchun $f^{(n)}(x) = ((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ formulaga egamiz. Ravshanki, $f(0)=1$, $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$, $f(x) = (1+x)^\alpha$ funksiyaning Makloren formularsi quyidagicha yoziladi:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + r_n(x).$$

qoldiq had $r_n(x)$ esa ushbu

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} (1+\theta x)^{-n-1} (1-\theta^nx^n)$$

Koshi ko'tinishida yozildi. Endi $\alpha > 1$ bolganda

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \left| \alpha(1 - \frac{\alpha}{1}) (1 - \frac{\alpha}{2}) \dots (1 - \frac{\alpha}{n}) \right| (1 + \theta x)^{-n} \left| \frac{1 - \theta^n}{1 + \theta x} \right|^n (1 - \theta^nx^n)^{-1} \\ &= \left| \alpha(1 - \frac{\alpha}{1}) (1 - \frac{\alpha}{2}) \dots (1 - \frac{\alpha}{n}) \right| (1 + \theta x)^{-n} |x|^{n-1} \end{aligned}$$

bo'lib, $n \rightarrow \infty$ da nolqa intiladi.

Xususan, $\alpha = n$ bo'lsa, u holda $r_n(x) \rightarrow 0$ bo'lib, ushbu

$$(1+x)^{-n} = 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-n+1)}{n!} x^n$$

Nyuton binomi formulasiga kelamiz.

Shunday qilib, bu holda ushbu

$$(1+x)^{-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

taqnibiy formulaga egamiz.

Biz yuqonda elementar funksiyalarning Makloren formulalarini keltirdik. Bu formulalarning qoldiq hadlarini asosan Lagranj ko'tinishida yozib, so'ngra ularni baholedik. Elementar funksiyalarning Makloren formulalarida ularning qoldiq hadlarini boshqa ko'rinishlarda ham yozish mumkin. Masalan, elementar funksiyalarning Peano ko'tinishdag'i qoldiq hadi Makloren formulalari quyidagicha yozildi, ($x > 0$)

$$1) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

(bunda $n =$ toq son),

$$3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

(bunda $n =$ juft son),

$$4) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$5) (1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

Odatda bu formulalar asimptotik formulalar deviladi.

Mashqlar.

6.10. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsin} \\ \sqrt{x}, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyaning $x=0$ nuqtadagi hosilasi topilsin.

6.11. 1) Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda shu nuqtada funksiyaning o'ng hosilasi $f'(x_0+0)$ chap hosilasi $f'(x_0-0)$ lar mavjud va $f'(x_0+0) = f'(x_0-0) = f'(x_0)$ bo'lishi isbotlansin. 2) Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ng hosila $f'(x_0+0)$ chap hosila $f'(x_0-0)$ larga ega bo'lib, $f'(x_0+0) \neq f'(x_0-0)$ bo'lsa, u holda shu nuqtada funksiyaning $f'(x_0)$ hosilasi mavjud va $f'(x_0+0) \neq f'(x_0-0) \neq 0$ bo'lishi isbotlansin.

6.12. Bir tomonli hamda cheksiz hosilalarning geometrik ma'nolari keltirilsin.

6.13. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ \frac{1}{n}, & \text{agar } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n} \text{ bo'lsa,} \\ \frac{1}{n}, & \text{agar } \frac{1}{n} \leq x < -\frac{1}{n+1} \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyaning $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi isbotlansin.

6.14. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalari $x=a$ nuqtada hosilaga ega bo'lmasa,

$$f(x) + \varphi(x), f(x) \cdot \varphi(x), \frac{f(x)}{\varphi(x)} \quad (\varphi(x) \neq 0)$$

funksiyalar shu nuqtada hosilaga ega bo'ladimi? Misollar keltirilsin.

6.15. Ushbu

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

belgilashda chap tomondag'i ifodani kasri deb qaratash mumkinmi?

6.16. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x \in (a, b)$ nuqtada n -tartibli $f^{(n)}(x), g^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsa,

$$f(x) \cdot g(x)$$

funksiyaning n -tartibli hosilasini topish formulasini keltirib chiqarilsin. (Odatda bu formula Leybnis formulasini deyiladi).

6.17. Ferma, Roll, Lagranj teoremlari qanday geometrik

ma'noga ega?

6.18. Ushbu

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ b) $f(x) = \ln \frac{x-4}{x+4}$

funksiyalarning Makloren formulalari yozilsin.

6.19. Asimptotik formulalardan foydalaniib, ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \frac{x^2}{2})^{(\frac{1}{\sin x - 1})}$$

limit topilsin.

6.20. Ushbu

$$f(x) = |x|^{\alpha}, \quad x=0 \text{ da}$$

funksiya $x=0$ da uchinchi tartibli hosilaga egami? $|x|^\alpha$ chi?

VII BOB

Differensial hisobning ba'zi bir tafbiqlari

Ushbu bobda funksiyaning hosilalari yordamida uning o'zgarish xarakteri foraliqda o'zgarmas qiymatni saqlashi, o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lshi, maksimum va minimum qiymatlari), shuningdek funksiya grafiqini tekshirish (funksiya grafiqining qavang yoki bo'iqligi, buriish nuqtalarini aniqlash) kabi masalalar o'rjaniladi.

1-§. Funksiyaning o'zgarib borishi

1⁰. Funksiyaning o'zgarmas qiymatni saqlashi. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsin.

1-teorema. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ hosilaqa ega bo'lsin. Bu funksiya (a,b) intervalda o'zgarmas bo'lishi uchun shu intervalda

$$f'(x) = 0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

► Zarurligi. Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda o'zgarmas, ya'ni $f(x) = c \text{ const.}$ Ravshanki, bu holda (a,b) intervalda $f'(x)=0$ bo'ladi.

Yetarliliqi. Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ hosilaqa ega va $f'(x) \neq 0$. Endi (a,b) intervalda istalgan x va tayinlangan x_0 nuqtalarni olib, $[x_0, x]$ yoki $[x, x_0]$ segmentni qaraylik: $\{x_0, x\} \subset (a,b)$, $\{x, x_0\} \subset (a,b)$ Lagranj teoremasiga (6. bobdag'i 7-teoremaga qarang) ko'ra x_0 bilan x nuqtalar orasida shunday etibar ($x_0 < x < x_0$) nuqta mavjudki, $f'(x) \neq 0$ bo'lishini hisobga olgan holda)

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \neq 0 \quad (7.1)$$

tenglik o'rnini bo'ladi. (7.1) tenglikdan esa $f(x) - f(x_0)$ kelib chiqadi. Bu $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervalda o'zgarmas ekanini anglatadi. ►

1-natiya. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lib, shu intervalda

$$f'(x) \equiv g'(x)$$

tenglik o'rnini bo'lsa, u holda $f(x)$ bilan $g(x)$ funksiyalar (a,b) intervalda biridan o'zgarmas songa farq qiladi:

$$f(x) = g(x) + c \quad (c \in \text{const})$$

◀ Haqiqatan ham,

$$F(x) = f(x) + g(x) \quad (7.2)$$

deb, (a, b) da

$$F'(x) = f'(x) + g'(x) = 0$$

bo'lishini topamiz. Isbot etilgan teoremaga ko'ta $F(x) = c$ bo'ladi. (7.2) munosabatdan $f(x) = g(x) + c$ ekanı kelib chiqadi. ►

2⁰. Funksiyaning monoton bo'lishi. $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo'lsin.

2-teorema. $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda chekli $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiya shu intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishi uchun (a, b) intervalda

$$f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) < 0)$$

tengsizlik o'rinali bo'lishi zarur va yetarli.

◀ Zarurligi. Shartga ko'ta $f(x)$ funksiya (a, b) da chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, u (a, b) intervalda o'suvchi (kamayuvchi). $\forall x \in (a, b)$ nuqtani olib, u bilan birga $(x + \Delta x) \in (a, b)$ nuqtani ham qaraymiz. U holda

$$\Delta x > 0 \text{ da } f(x) \leq f(x + \Delta x) \quad (f(x) \geq f(x + \Delta x))$$

$$\Delta x < 0 \text{ da } f(x) \geq f(x + \Delta x) \quad (f(x) \leq f(x + \Delta x))$$

munosabatlardan o'rinali bo'ladi va bu munosabatlardan har doim

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0 \\ \Delta x \end{array} \right\} \quad (7.3)$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Ma'lumki,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \quad (7.4)$$

(7.3) va (7.4) munosabatlardan (4- bobning 4-§ iga qarang) intervalning barcha nuqtalarda

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0)$$

tengsizlik o'rinali bo'lishini topamiz.

Yetarliligi. Shartga ko'ta $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, shu intervalda $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) tengsizlik o'rinali.

$\forall x \in (a, b)$ va $(x + \Delta x) \in (a, b)$, $\Delta x > 0$ nuqtalarni olaylik. Bu holda $[x, x + \Delta x] \subset (a, b)$ bo'lib, $[x, x + \Delta x]$ segmentda $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Lagranj teoremasiga muvofiq x va $x + \Delta x$ nuqtalar orasida shunday $c(x < c < x + \Delta x)$ nuqta mavjudki, ushbu

$$f(x + \lambda) = f(x) + f'(x)\lambda$$

tenglik o'rinni bo'ladi

Demak,

$$f(x + \lambda) - f(x) \geq 0 \quad (f(x + \lambda) - f(x) > 0)$$

Bundan $f(x)$ funksiyaning (a, b) intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishi kelib chiqadi ►

2-§. Funksiyaning ekstremum qiyamatlari

$f(x)$ funksiya (a, b) intervalda berilgan bo'lib, $x_0 \in (a, b)$ va

$$U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$$

bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $\forall x \in U_\delta(x_0)$ uchun

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0))$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal maksimumiga (lokal minimumga) ega deviladi. $f(x_0)$ qiymat $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi lokal maksimum (lokal minimumi) deyiladi.

2-ta'rif. Agar $\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = \tilde{U}_\delta(x_0)$ uchun

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0))$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada qat'iy lokal maksimumiga (qat'iy lokal minimumga) ega deviladi, $f(x_0)$ qiymat $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi qat'iy maksimumi (minimumi) deyiladi.

Yuqoridagi ta'riflardagi x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaga mos ravishda maksimum (maximum), qat'iy maksimum (qat'iy minimum) qiymat beradigan nuqta deb ataladi.

Funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi maksimum (minimum) qiyamatlari

$$f(x_0) = \max_{x \in U_\delta(x_0)} \{f(x)\} \quad (f(x_0) = \min_{x \in U_\delta(x_0)} \{f(x)\})$$

kabi belgilanadi. Bunda \max (\min) lotinchcha maximum (minimum) so'zidan olingan bo'lib, eng katta (eng kichik) degan ma'noni anglatadi.

Funksiyaning maksimum va minimum unumiy nom bilan uning ekstremumi deb ataladi.

Masalan, $f(x) = x^3 - x^2$ funksiya $x=0$ nuqtada maksimumga erishadi. Chunki $\forall x \in U_\delta(x_0) \subset (-1, 1)$ ($\delta > 0$) uchun $f(x) < f(0)$ ya'ni

$$f(x) < \sqrt[3]{1 - x^2} < f(0) = 0$$

bo'ladi.

Funksiya hosilalarini yordamida uning ekstremumlari hamda funksiyaga ekstremum qiymat beriladigan nuqtalar topiladi.

1). Ekstremumning zaturiy sharti $f(x)$ funksiya $x \in (a, b)$ nuqtada maksimum (minimum) ga erishsim. Ta'rifga ko'ta, $f(x_0) \geq f(x)$ da $f(x_0) \leq f(x)$ ($f(x_0) > f(x)$) bo'ladi.

3-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a, b)$ nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda

$$f'(x_0) = 0$$

bo'ladi.

◀ Bu teoremaning isboti Ferra teoremasini qo'llash bilan kelib chiqadi. ▶

Biroq, $f(x)$ funksiya uchun biror $x^* \in (a, b)$ nuqtada chekli hosilasi mavjud va $f'(x^*) = 0$ bo'lishidan uning x^* nuqtada ekstremumga ega bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi. Masalan $f(x) = x^3$ funksiya uchun $f'(x) = 3x^2$ va $x = 0$ nuqtada $f'(0) = 0$ bo'lsa ham u $x = 0$ nuqtada ekstremumga ega emas (bu funksiya qat'iy o'suvchi ekanligi bizga ma'lum).

Demak, yuqoridaagi teorema funksiya ekstremumga erishishning zaturiy shartini ifodalaydi.

Odatda funksiya hosilasini nolga aylantiradigan nuqtalar funksiyaning statsionar (turg'un, kritik) nuqtalar deb ham ataladi.

Biz $f(x)$ \mathbb{R} funksianing $x = 0$ nuqtada (6 - bob, 1 §) hosilasi mavjud emasligini ko'rgan edik. Bu funksiya $x = 0$ nuqtada minimumga ega bo'lishi ravshandir. Demak, funksiya hosilaga ega bo'lмаган nuqtalarda ham ekstremumga erishish mumkin.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaga ekstremum qiymat beriladigan nuqtalarni:

Funksiyaning statsionar nuqtalari, funksiyaning hosilasi mavjud bo'lмаган nuqtalari orasidan izlash kerak ekan. Odatda bunday nuqta funksiya ekstremumga sinaladigan muqta deb ataladi.

2). Ekstremumning yetarli shartlari. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzlusiz bo'lib,

$$f'_+(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \quad (\delta > 0)$$

da chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin.

a) Agar

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ uchun } f'(x) > 0$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ uchun } f'(x) < 0$$

bo'lsa, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda o'z ishorasini "+"

dan “+” ga o'zgartirsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham, $(x_0 - \delta, x_0)$ da $f(x)$ funksiyaning qat'iy o'suvchi va

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

bo'lishidan, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ da

$$f(x) < f(x_0)$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Shuningdek $(x_0, x_0 + \delta)$ da $f(x)$ funksiyaning qat'iy kamayuvchi va

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

bo'lishidan, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ da

$$f(x) > f(x_0)$$

bo'lishini topamiz.

Demak, $\forall x \in U_{\delta}(x_0)$ uchun

$$f(x) < f(x_0)$$

bo'lib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'ladi. ►

b) Agar

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ uchun } f'(x) < 0$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ uchun } f'(x) > 0$$

bo'lsa, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda o'z ishorasini “-” dan “+” ga o'zgartirsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham, $(x_0 - \delta, x_0)$ da $f(x)$ funksiyaning qat'iy kamayuvchi va

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

bo'lishidan, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ da

$$f(x) > f(x_0)$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Shuningdek, $(x_0, x_0 + \delta)$ da $f(x)$ funksiyaning qat'iy o'suvchi va

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

bo'lishidan, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ da

$$f(x) > f(x_0)$$

bo'lishini topamiz.

Demak, $\forall x \in U_{\delta}(x_0)$ uchun

$$f(x) > f(x_0)$$

bo'lib, $f(x)$ funksiya x nuqtada minimumga ega bo'ldi. ►

v) Agar

$$\forall x_0 \in D_f, \exists \delta > 0 \text{ uchun } f'(x_0) < 0$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ uchun } f'(x) < 0$$

yoki

$$\forall x_0 \in D_f, \exists \delta > 0 \text{ uchun } f'(x) < 0$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 - \delta) \text{ uchun } f'(x) < 0$$

tengsizliklar o'rinni bo'lsa, ya'nini $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani o'tishda o'z ishorasini o'zgartirmasa, u holda $f(x)$ funksiya x nuqtada ekstremumiga ega bo'lmaydi.

Shunday qilib, ekstremumiga sanalayotgan nuqtani o'tishda funksiya hosilasi ishorasining o'zgarishi uning ekstremumiga erishishning yetarli shartidir.

7.1-misol. $f(x) = (x+3)^2/(x-1)$ funksiyaning ekstremumini toping.

◀ Berilgan funksiyaning hosilasini topamiz:

$$f'(x) = \frac{8x(x+3)}{(x-1)^3} \quad (7.5)$$

Ravshanki, hosila $x=0$, $x=-3$ nuqtalarda nolga aylanadi, $x=1$ nuqtada esa chekli hosila mavjud emas. Demak, funksiyaga ekstremum beradigan nuqtalarni $x=0$, $x=-3$, $x=1$ nuqtalar orasidan izlash kerak.

Avvil $x=0$ nuqtani olaylik. Bu nuqtaning $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ atrofini olib, hosila uchun (7.5) ifodani e'tiborga olsak,

$$\forall x \in (-\frac{1}{2}, 0) \text{ uchun } f'(x) < 0$$

$$\forall x \in (0, \frac{1}{2}) \text{ uchun } f'(x) < 0$$

bo'lishini topamiz. Demak, $f'(x)$ hosila $x=0$ nuqtani o'tishda o'z ishorasini "+" dan "-" ga o'zgartirdi. Ravshanki, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada uzlucksiz. Demak, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada maksimumga ega va uning maksimum qiymati $f(0)=9$.

Endi $x=-3$ nuqtani qaraylik. Bu nuqtaning $(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2})$ atrofini olib, (7.5) dan foydalansak,

$$\forall x \in (-\frac{7}{2}, -3) \text{ uchun } f'(x) < 0$$

$$\forall x \in (-3, -\frac{5}{2}) \text{ uchun } f'(x) > 0$$

bo'lishini topamiz. Demak, $f'(x)$ hosila $x = x_0$ nuqtani o'tishda o'z ishorasini " $-$ " dan " $+$ " ga o'zgartiradi. Berilgan funksiya $x = x_0$ nuqtada uzlusiz demak, u $x = x_0$ nuqtada minimumga ega va uning minimum qiymati $f(x_0) < 0$. Nihoyat $x = x_0$ nuqtada berilgan funksiya minimumga ega bo'lishi yuqoridaqidek ko'rsatiladi. ►

3^н. Funksiya ekstremumini topishda uning yuqori tartibli hosilalardan foydalanish.

(1) funksiya $x \in (a, b)$ nuqtada $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}$ hosilalarga ega bo'lib bitor $n \geq 2$ son uchun

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0 \quad (7.6)$$

bo'lsin.

a) Agar n -juft son, ya'mi $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) bo'lib,

$$f^{(n)}(x_0) = f^{(2m)}(x_0) < 0$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga.

$$f^{(1)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) > 0$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'ladi.

► Haqiqatan ham, $f(x)$ funksiya uchun ustbu

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-1} + \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

Taylor formulasidan yuqoridaqgi (7.6) shartlarni e'tiborga olib topamiz:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n$$

bunda $x \rightarrow x_0$ da $\alpha(x) \rightarrow 0$. Keyingi tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$f(x) - f(x_0) < \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n \quad (7.7)$$

$f^{(n)}(x_0) \neq 0$ va $x \rightarrow x_0$ da $\alpha(x) \rightarrow 0$ bo'lgani sababli, x ning x_0 ga yetarli yaqin qiyatlarda ($x \in U_{\delta}(x_0)$ lar uchun) $f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)$ ning ishorasi $f^{(n)}(x_0)$ ning ishorasi kabi bo'ladi.

Ravshanki, $n = 2m$ bo'lganda $(x - x_0)^n = (x - x_0)^{2m} > 0$ bo'lib, $x \in U_{\delta}(x_0)$ da $f(x) - f(x_0)$ ayirmanning ishorasi $f^{(n)}(x_0)$ ning ishorasi bilan bir xil bo'ladi. Demak, $f^{(n)}(x_0) < 0$ bo'lganda $\forall x \in U_{\delta}(x_0)$ uchun $f(x) - f(x_0) < 0$ ya'mi $f(x) < f(x_0)$ bo'lib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'ladi. $f^{(n)}(x_0) > 0$ bo'lganda esa, $\forall x \in U_{\delta}(x_0)$ uchun $f(x) - f(x_0) > 0$ ya'mi $f(x) > f(x_0)$ bo'lib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega.

bo'ladi. ►

b) Agar n toq son, ya'mi $n = 2m + 1$ ($m \in \mathbb{N}$) bo'lsa, $f(x)$ funksiya ν nuqtada ekstremumiga ega bo'lmaydi.

◀ Haqiqatan,

$$f'(x_0) = -e^{x_0} \sin x_0 \text{ uchun } x_0 < 0 \text{ bo'ladi.}$$

$$f'(x_0) = e^{x_0} \sin x_0 \text{ uchun } x_0 > 0 \text{ bo'ladi.}$$

Tengstzliklari o'tinli bo'lib, ν nuqtaning $f''(x_0)$ atrofida $(x=x_0)$ ning ishorasi saqlanmaydi. Bu holda (7.7) dan ko'rindadiki, $f''(x_0)$ ning ishorasi har qanday bo'lqanda ham $f(x_0)$ avirmaning ishorasi o'zgaradi. Bu esa ν nuqtada ekstremum yo'qligini anglatadi. ►

7.2-misol. $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ funksiyani ekstremumga tekshiring.

◀ Bu funksiya uchun $f'(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x$ bo'lib, u $x=0$ nuqtada nolga aylanadi. Demak, $x=0$ statsionar nuqta. Berilgan funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini topib, ularning $x=0$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f''(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x, \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x, \quad f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x, \quad f^{(4)}(0) = 4$$

Juft tartibli hosila $x=0$ nuqtada noldan farqli bo'lib, u musbat bo'lGANI uchun berilgan funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega bo'ladi. Shu nuqtada funksiya qiymatini hisoblaymiz: $f(0) = 4$ ►

Yuqorida keltirilgan qoidadan, xususan, $n=2$ bo'lqanda quyidagi natija kelib chiqadi.

2-natija. Agar x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo'lib, $f''(x_0) < 0$ bo'lqanda, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga, $f''(x_0) > 0$ bo'lqanda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'ladi.

4⁰. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari. Biz avvalgi bandlarda funksiyaning ekstremumlarini o'rgandik va funksiya biror oraliqda bir necha maksimum va minimumlarga ega bo'lishi muimkinligini aytib o'tdik.

Endi funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish masalasini qaraymiz.

(1) funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzliksiz bo'lsin. Vovershtrassning ikkinchi teoremasiga ko'ta (5 - bobdag'i 8 teoremaga qarang) funksiyaning $[a, b]$ da eng katta hamda eng

kichik qiymatları mavjud bo'ladi va bu qiymatlarga $f(x)$ segmentning nuqtalarida erishiladi. Funksiyaning eng katta qiymati quyidagi topiladi:

1) $f(x)$ funksiyaning (a, b) intervaldagi maksimum qiymatları topiladi. Funksiyaning hamma maksimum qiymatlarından iborat to'plam $\{\max f(x)\}$ bo'lsin.

2) Funksiyaning $[a, b]$ segmentning chegaralaridagi, ya'm $x=a$ va $x=b$ nuqtalardagi $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlari hisoblanadi. So'niga $\{\max f(x)\}$ to'planning barcha elementlari bilan $f(a)$ va $f(b)$ lar taqqoslanadi. Bu qiymatlar ichida eng kattasi $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ segmentdagi eng katta qiymati bo'ladi.

Shunga o'xshash funksiyaning eng kichik qiymati topiladi:

1) $f(x)$ funksiyaning (a, b) intervaldagi barcha minimum qiymatları topilib, ulardan $\{\min f(x)\}$ to'plam tuziladi.

2) $[a, b]$ segmentning chegaralarini $x=a, x=b$ nuqtalarda $f(x)$ funksiyaning $f(a), f(b)$ qiymatları hisoblanadi.

$\{\min f(x)\}$ to'planning barcha elementlari hamda $f(a), f(b)$ qiymatları ichida eng kichigi $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ segmentdagi eng kichik qiymati bo'ladi.

7.3-misol. Ushbu $f(x)=\sin(x^2)$ funksiyaning $[\sqrt{\pi}, \frac{1}{2}\sqrt{5\pi}]$ segmentda eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

◀ Funksiya hosilasini nolga tenglab,

$$f'(x)=2x\cos(x^2)=0$$

tenglamani qaraymiz. Uni yechib $x=0$, $x=\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ lar statsionar nuqta ekanini topamiz. Berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini hisoblaymiz:

$$f''(x)=2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2)$$

Bu hosilaning statsionar nuqtalardagi qiymatlarini topamiz:

$$f''(0)=2>0, f''(\sqrt{\frac{\pi}{2}})=2\pi<0, f''(-\sqrt{\frac{\pi}{2}})=2\pi<0$$

Bundan $f(x)=\sin(x^2)$ funksiya $x=0$ nuqtada minimumga, $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ va $x=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ nuqtalarda esa maksimumga erishishi kelib chiqadi.

Funksiyaning statsionar nuqtalardagi qiymatlari

$$f(0)=0, f(-\sqrt{\frac{\pi}{2}})=1, f(\sqrt{\frac{\pi}{2}})=1$$

bo'lib, uning $[-\sqrt{\pi}, \frac{1}{2}\sqrt{8\pi}]$ segmentning chegaralidagi qiymatlar

$$(-\sqrt{\pi}) = 0, f(\frac{1}{2}\sqrt{8\pi}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

bo'ladi. Bu qiymatlarni taqqoslab $f(x) = \sin(x)$ funksiyoning $[-\sqrt{\pi}, \frac{1}{2}\sqrt{8\pi}]$ segmentdaqи eng katta qiymati 1 ga, eng kichik qiymati esa $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ teng bo'lishini topamiz. ►

3-§. Funksiyaning qavariqligi va botiqligi

$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, bu intervaldan olingan $x_1 \in (a,b), x_2 \in (a,b)$ nuqtalar uchun $x_1 < x_2$ bo'lсин. Ravshanlik, $f(x_1) < f(x_2)$.

Endi $f(x)$ funksiya grafigida $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ nuqtalarini olaylik. Ma'lumki, bu $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagi

$$\begin{aligned} y - f(x_1) &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ f(x_2) - f(x_1) &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Uni

$$x - \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

kabi yozib olib, qulaylik uchun bu tenglamaning o'ng tomonini $f(x)$ orqali belgilaylik:

$$f(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

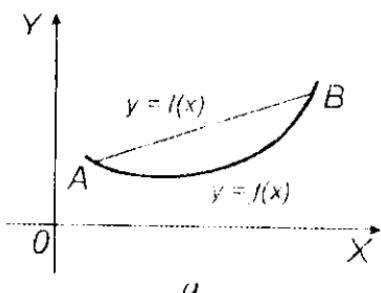
Demak, $x = f(x)$ tenglama $A(x_1, f(x_1))$ va $B(x_2, f(x_2))$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

3-ta'rif. Agar har qanday $(x_1, x_2) \subset (a,b)$ olinganda ham $\forall x \in (x_1, x_2)$ uchun

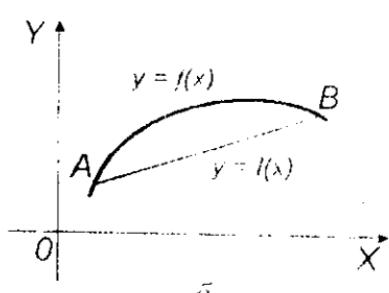
$$f(x) \leq l(x) \quad (f(x) < l(x))$$

tengsizlik o'rini bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda botiq (qat'iy botiq) funksiya deb ataladi.

Botiq funksiya grafigi (34 chizma) a va b nuqtalardan o'tuvchi $f(x)$ vatardan pastda joylashgan bo'ladi.



34-chizma.



4-ta'rif Agar har qanday $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ olinganda ham $\forall x \in (x_1, x_2)$ uchun

$$f(x) \geq l(x) \quad (f(x) \geq l(x))$$

tengsizlik o'rini bo'ssa, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda qavariq (qat'iy qavariq) funksiya deb ataladi.

Qavariq funksiya grafigi (34-chizma) A va B nuqtalardan o'tuvchi $l(x)$ vatardan yuqorida joylashgan bo'ladi.

Funksiyaning hosilasi yordamida uning botiqligi hamda qavariqligini tekshirish mumkin.

$f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo'lib, bu intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin.

4-teorema. $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda botiq (qat'iy botiq) bo'lishi uchun uning $f'(x)$ hosilasi (a, b) da o'suvchi (qat'iy o'suvchi) bo'lishi zarur va yetarli.

◀ **Zarurligi.** $f(x)$ funksiya (a, b) da botiq bo'lsin. Demak, $x_1 \in (a, b), x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$, bo'lganda $\forall x \in (x_1, x_2)$ uchun

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

bo'ladi. Bundan

$$(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geq 0.$$

bo'lishi kelib chiqadi. Keyingi tengsizlikda $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$ deb quyidagini topamiz:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (7.8)$$

Shu (7.8) tengsizlikda avval $x \rightarrow x_1$ da, so'ng $x \rightarrow x_2$ da limitga o'tsak, u holda

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) - f'(x_1)(x - x_1)}{x - x_1} =$$

bo'lib, natijada quyidaqি

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'_+(x_1)$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Demak, $f'(x_1) > f'(x_2)$. Shunday qilib, $x_1 < x_2$ bo'lganda $f'(x_1) > f'(x_2)$ bo'ladi. Bu esa (a,b) intervalda $f'(x)$ ning o'suvchi ekanini bildiradi.

Erdi $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda qat'iy botiq bo'lsin. Bu holda (7.8) tengsizlik ushbu

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > f'(x) > \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \quad (7.9)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Lagranj teoremasiga (6. bobdagи 7-teoremaga qaratang) ko'ra

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), (x_1 < \xi_1 < x),$$

$$\frac{f(x) - f(x_2)}{x_2 - x} = f'(\xi_2), (x < \xi_2 < x_2)$$

bo'ladi. So'ngra

$$x_1 < \xi_1 \text{ bo'lganda } f'(x_1) \leq f'(\xi_1)$$

$$\xi_2 < x, \text{ bo'lganda } f'(\xi_2) \leq f'(x_2)$$

tengsizlik o'rinni bo'lishini hamda (7.9) tengsizlikni e'tiborga olib, topamiz:

$$f'(x_1) > f'(\xi_1) > f'(\xi_2) > f'(x_2)$$

Demak, $f'(x_1) < f'(x_2)$. Shunday qilib, $x_1 < x_2$ bo'lganda $f'(x_1) < f'(x_2)$ bo'ladi. Bu $f'(x)$ funksiyaning qat'iy o'suvchiligini anglatadi.

Yetarliliqi. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, u o'suvchi (qat'iy o'suvchi) bo'lsin. Demak, $\forall x_1 \in (a,b), \forall x_2 \in (a,b)$ uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ ($f'(x_1) < f'(x_2)$) tengsizlik o'rinni. Yaxda Lagranj teoremasidan foydalanib topamiz:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), (x_1 < \xi_1 < x), \quad (7.10)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2), (x < \xi_2 < x_2), \quad (7.11)$$

bunda

$$x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2. \quad (7.12)$$

Demak, $\xi_1 < \xi_2$ bo'lganda $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) \leq f'(\xi_2) > f'(x_1)$ tengsizlik

o'rini bo'ladi. U holda (7.10) va (7.11) munosabatlardan

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Shunday qilib, $\forall x_i \in (a, b), \forall x_j \in (a, b)$ va $x_i < x_j$ bo'lganda (bu holda (7.12) ga ko'ra $\xi_i < \xi_j$) bo'ladi

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \quad (x_0 < x < x_1)$$

tengsizliklar o'rini bo'ladi Natijada (7.8) munosabatlarni e'tiborga olib, $f'(x)$ funksiyaning (a, b) intervalda botiq (qat'iy botiq) ekaniga ishonch hosil qilamiz. ►

Xuddi shunga o'xshash quyidagi teorema ham isbotlanadi.

5-teorema. $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda qavariq (qat'iy qavariq) bo'lishi uchun uning $f'(x)$ hosilasi (a, b) da kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lishi zarur va yetarli.

$f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo'lib, shu intervalda u ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bundan tashqari (a, b) intervalning har qanday (α, β) ($(\alpha, \beta) \subset (a, b), \alpha \neq \beta$) qismida $f'(x)$ aynan nolga teng bo'lmasin.

6-teorema. $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda botiq (qavariq) bo'lishi uchun shu intervalda

$$f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0)$$

tengsizlik o'rini bo'lishi zarur va yetarli.

◀ **Zarurligi.** $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda botiq (qavariq) bo'lsin. U holda yuqorida keltirilgan teoremlarga ko'ra, funksiyaning $f'(x)$ hosilasi (a, b) intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi. Funksiyaning monoton bo'lishi haqidagi 2-teoremaga ko'ra $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) bo'lishini topamiz.

Yetarliliigi. Endi (a, b) intervalda funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi uchun ushbu $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) tengsizlik o'rini bo'lsin. U holda yana funksiyaning monotonligi haqidagi 2-teoremaga ko'ra $f'(x)$ hosila (a, b) intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi. Bundan 4-teoremaga (5-teoremaga) asosan $f(x)$ funksiyaning (a, b) intervalda botiq (qavariq) bo'lishi kelib chiqadi. ►

7.4-misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

funksiyaning qavariqligi, botiqligi aniqlansin.

◀ Berilgan funksiya $(0, +\infty)$ da aniqlangan bo'lib, $x=1$ nuqtada hosilaga ega bo'lmasdan, qolgan barcha miqtalarda hosilaga ega.

Agar $x \in (0,1)$ bo'lsa,

$$f''(x) = \frac{3}{4} - \frac{5}{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} < 0.$$

Agar $x \in (1, \infty)$ bo'lsa,

$$f''(x) = \frac{3}{4} - \frac{5}{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} > 0.$$

bo'ladi. Demak, $f''(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $x=5$ nuqtada nolga teng, $x=1$ nuqtada esa mavjud emas.

Ravshanki,

- $\bullet \quad x \in (0,1)$ da $f''(x) > 0$.
- $\bullet \quad x \in (1,\infty)$ da $f''(x) < 0$.
- $\bullet \quad x \in (5,+\infty)$ da $f''(x) > 0$.

bo'ladi.

Demak, berilgan funksiya (0,1) oraliqda botiq, (1,5) oraliqda qavariq, (5, +∞) oraliqda botiq bo'ladi.

2º. Funksiyaning egilish nuqtalari. Funksiya hosilasi yordamida uning egilish nuqtalarini topish mumkin. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtanining $f'(x_0)$ atrofida aniqlangan bo'lsin.

5-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $(x_0 - \delta, x_0)$ oraliqda botiq (qavariq) bo'lib, $(x_0, x_0 + \delta)$ oraliqda esa qavariq (botiq) bo'lsa, u holda x_0 nuqta funksiyaning (funksiya grafigining) egilish nuqtasi deb ataladi.

$f(x)$ funksiya $f'_s(x_0)$ da ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Agar

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ uchun } f''(x) > 0 \quad (f''(x) \sim 0)$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ uchun } f''(x) \leq 0 \quad (f''(x) \sim 0)$$

tengsizlik o'rini bo'lsa, u holda $(x_0 - \delta, x_0)$ da $f'(x)$ o'suvchi (kamayuvchi), $(x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x)$ kamayuvchi (o'suvchi) bo'lib, $f'(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishadi. U holda x_0 nuqtada $f''(x_0) > 0$ bo'ladi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning egilish nuqtasida ikkinchi tartibli hosila $f''(x)$ nolga teng bo'ladi.

7.5-misol. $f(x) = e^x$ funksiyaning egilish nuqtalari topilsin.

◀ Ravshanki,

$$f''(x) = 2e^{x^2}(2x^2 - 1)$$

bo'lib, u faqat $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ nuqtalarda nolga aylanadi.

$$f''(-\sqrt{2}) = 0, \quad f''(\sqrt{2}) < 0$$

Bu funksivaning ikkinchi tartibli hosilasi $(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ va $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$

intervalda $f''(x) < 0$, $(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ segmentda esa $f''(x) > 0$ bo'ladi.

Demak, $f(x) = e^x$ funksiya $(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ intervalda qavariq, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$

segmentda botiq va $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ intervalda yana qavariq bo'ladi.

Funksiya grafigining $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{\frac{1}{2}})$ nuqtalari uning egilish nuqtalaridir. ►

3⁰. Funksiya grafigining asimptotlari. $f(x)$ funksiya $x \in R$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

6-ta'rif. Agar ushbu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

limitlardan biri yoki ikkalasi cheksiz bo'lsa, $x \rightarrow a$ to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining vertikal asimptotasi deb ataladi.

Masalan, $y = \frac{1}{x}$ funksiya grafigi uchun $x=0$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo'ladi.

Aytaylik $y = f(x)$ funksiya $(a, +\infty)$, $((-\infty, a))$ oraliqda aniqlangan bo'lsin.

7-ta'rif. Agar shunday k va b sonlar mavjud bo'lsaki, $x \rightarrow +\infty$ da $f(x)$ funksiya ushbu

$$f(x) = kx + b + o(x)$$

ko'ninishda ifodalansa, (bunda $\lim_{x \rightarrow +\infty} o(x) = 0$) $y = kx + b$ to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining og'ma asimptotasi deb ataladi.

Masalan,

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{x + 1}$$

funksiyani

$$f(x) = x + 4 + \frac{2}{x + 1}$$

ko'rinishda vozish mumkinligi va $x \rightarrow +\infty$ da $o(x) = \frac{2}{x+1} \rightarrow 0$ bo'lishidan $y = x + 4$ to'g'ri chiziq funksiya grafigining og'ma asimptotasi ekani kelib chiqadi.

7-teorema. $f(x)$ funksiya grafigi $y = kx + b$ og'ma asimptotaga

ega bo'lishi uchun

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$$

limitlarning o'rinni bo'lishi zarur va yetarli

◀ Zarurligi $f(x)$ funksiya grafigi $y = kx + b$ og'ma asimptotaga ega bo'lsin. Og'ma asimptota ta'sifiga ko'ra

$$f(x) \sim kx + b + \alpha(x)$$

bo'lib, bunda $x \rightarrow +\infty$ da $\alpha(x) \rightarrow 0$ bo'ladi. U holda quyidagiiga egamiz:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right) = k,$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (b + \alpha(x)) = b$$

Yetarlılığı. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = 0$$

limitlar o'rinni bo'lsin. U holda,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$, dan $f(x) - kx - b + \alpha(x) \rightarrow 0$ kelib chiqadi. Demak, $x \rightarrow +\infty$ da

$$f(x) \sim kx + b + \alpha(x)$$

bo'lib, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$ bo'ladi. Bu esa $y = kx + b$ to'g'ri chiziq funksiya grafigining og'ma asimptotasi ekanini bildiradi. ►

7.6-misol. Ushbu $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ funksiya grafigining asimptotalari topilsin.

◀ Bu funksiya uchun

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} \sim 1 \text{ demak, } k=1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) \sim 2 \text{ demak, } b=2$$

Shunday qilib, berilgan funksiya grafigining og'ma asimptotasi $y = x+2$ to'g'ri chiziqdan iborat. ►

4-§. Funksiyalarni tekshirish. Grafiklarni yasash

Biz ushbu bobning o'tgan paragraflarida funksiyalarning o'zgarish xarakterini hissilar yordamida o'rgandik. Bu hol funksiyalarni yaqqol tasavvur etishda, shuningdek, funksiya

grafiqini aniqroq yasashda qo'l keladi.

Funksiyalarni tekshirish va ularning grafiklarini yasashni quyidagi sxema bo'yicha olib borish maqsadga muvofiqdir:

1. Funksiyaning aniqlanish sohasini topish;
2. Funksivani uzlusizlikka tekshirish va uzilish nuqtalarini topish;
3. Funksivaning juft toq hamda davriyligini aniqlash;
4. Funksivani monotonlikka tekshirish;
5. Funksivani ekstremumga tekshirish;
6. Funksiva grafiqining qavaniq hamda botiqligini aniqlash, egilish nuqtalarini topish;
7. Funksiva grafiqining asimptotalarini topish;
8. Funksivaning haqiqiy ildizlarini (agar ular mavjud bo'lsa), shuningdek argumentning bir nechta xarakterli qiymatlarida funksiyaning qiymatlarini yasash.

7.7-misol Ushbu

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

funksiyani tekshiring va grafigini yasang.

◀ Berilgan funksiya $R: (-\infty, +\infty)$ da aniqlangan va uzlusiz. Bu funksiya uchun $f(-x) = f(x)$ tenglik o'rinni. Demak, $f(x)$ juft funksiya (uning grafigi OY o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi), uni $[0, +\infty)$ oraliqda tekshirish yetarli.

Funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz:

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}, \quad f''(x) = \frac{4(1 + 3x^2)}{(x^2 + 1)^3}$$

Funksiyaning birinchi tartibli hosilasi $[0, +\infty)$ oraliqda mavjud va $x=0$ nuqtada nolga aylanadi. Shu $x=0$ nuqtada ikkinchi tartibli hosilani hisoblaymiz: $f''(0) = 4 > 0$. Bundan berilgan $f(x)$ funksiya $x=0$ da minimumiga ega va $[0, +\infty)$ da $\min f(x) = -1$ bo'ladi. Endi $x \rightarrow 0$ da $f'(x) > 0$, bo'lganidan berilgan funksiyaning $[0, +\infty)$ oraliqda o'suvchiligidini topamiz. So'ngra ushbu

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{1}{x} = 0,$$

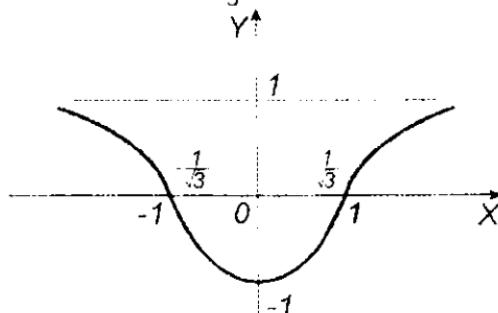
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \cdot 1 = 1$$

limitlarga ko'ra $y=1$ gorizontal to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining asimptotasi ekaniga va

$$f(x) - 1 = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - 1 = \frac{2}{x^2 + 1} \rightarrow 0$$

tengsizlikka ko'ra funksiya grafigi asimptotadan pastda joylashgan bo'l shiga ishonch hosid qilamiz.

Funksiyaning ikkinchi tartibili hosilasi $[0, +\infty)$ oraliqning $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nuqtasida nolga aylanadi. Ravshanki, $0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ da $f''(x) > 0$, $\frac{1}{\sqrt{3}} < x < +\infty$ da $f''(x) < 0$. Demak, $f''(x)$ funksiya $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ intervalda botiq, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$ intervalda qavariq bo'ladi. $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasidan iborat. Berilgan funksiyaning grafigi 35 chizmada tasvirlangan. ►



35 – chizma.

5–§. Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidalari

Biz funksiyalarning limitini o'rghanish jarayonida $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish bilan shug'ullangan edik. Tegishli funksiyalarning hosilalari mavjud bo'lganda, berilgan aniqmasliklarni ochish masalasi birmuncha yengillashadi. Odatda hosilalardan foydalanib aniqmasliklarni ochish Lopital qoidalari deb ataladi.

10. $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik. Ma'lumki, $x \rightarrow a$ da $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow 0$ bo'lса, $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikni itodalaydi. Ko'pincha $x \rightarrow a$ da $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbatning limitini topishga

qarağanda $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ nisbatning limitini topish oson bo'ladi. Bu nisbatlar limitlarning tenghgini quyidagi teorema ko'rsatadi.

8-teorema. (*a,b*) intervalda uzhiksiz $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun ushu shartlar bajarilgan bo'lsin:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0;$$

2) (*a,b*) da chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud va $g'(x) \neq 0$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k \quad (k \text{ chekli yoki cheksiz}).$$

U holda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$$

tenglik o'rinni bo'ladi.

◀ Agar

$$f(a) = 0, \quad g(a) = 0 \quad (7.13)$$

deb olinsa,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Leftrightarrow f(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \Leftrightarrow g(a)$$

bo'lib, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar [*a,b*] oraliqda uzliksiz bo'ladi.

$\forall x \in (a,b)$ nuqta olib, [*a,x*] segmentda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarni qaraymiz. Koshi teoremasiga ko'ra a bilan x orasida shunday c ($a < c < x$) nuqta topiladi, ushu

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

tenglik o'rinni bo'ladi. Bu tenglikdan esa (7.13) ga ko'ra

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ravshanki, $x \rightarrow a$ da $c \rightarrow a$. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = k. \quad \blacktriangleright$$

7.8-misol. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \ln(x+e)}{\arcsin x}$$

limitni hisoblang.

◀ *U holda*

$$f(x) = e^{2x} - \ln(x+e), \quad g(x) = \arcsin x$$

bo'lib, ular uchun 8-teoremaning barcha shartlari bajariladi. Haqiqatan ham,

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - \ln(x+e)) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x = 0.$$

$$2) f'(x) = 2e^{x^2} - \frac{1}{x+e}, \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x > 1.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2e^{x^2} - \frac{1}{x+e} \right) : \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 2 - \frac{1}{e}$$

bo'ladi. U holda 8-teoremaga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \ln(x+e)}{\arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 2 - \frac{1}{e}$$

bo'ladi. ▶

Lapital qoidalarini ifodalovchi keyingi teoremlarini isbotsiz keltiramiz.

9-teorema. ($x \rightarrow \infty$) intervalda aniqlangan $f(x)$ va $g(x)$ funksiya uchun ushbu shartlar bajarilgan bo'lsin:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0;$$

2) ($x \rightarrow \infty$) da chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud va $g'(x) \neq 0$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k \quad (k \text{ chekli yoki cheksiz}). \quad U \text{ holda}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$$

tenglik o'rindli bo'ladi.

7.9-misol. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2} - 1}{2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi}$$

limitni hisoblang.

◀ Bu yerda $f(x) = e^{x^2} - 1$, $g(x) = 2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi$ bo'lib, ular uchun 9-teoremaning barcha shartlari bajariladi, jumladan

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} e^{x^2}, \quad g'(x) = \frac{4x}{1+x^4}$$

bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{x^3} \right) e^{x^2} : \frac{1+x^4}{4x} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^4}{2x^3} = -\frac{1}{2}$$

bo'ladi. 9-teoremaga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2} - 1}{2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi} = -\frac{1}{2} \blacktriangleright$$

2⁰. $\frac{\infty}{\infty}$ ko'tinishdagi aniqmaslik. Ma'lumki, $x \rightarrow a$ da $f(x) \rightarrow \infty$,

$g(x) \rightarrow \infty$ bo'lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\frac{\infty}{\infty}$ ko'tinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi. Bunday aniqmaslikni ochishda ham $f'(x)$ va $g'(x)$

funksiyalarning hosilalardan foydalananish mumkin

10-teorema. (a, b) intervalda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun ushbu shartlar bajarilgan bo'lsin:

$$1) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \infty;$$

2) (a, b) intervalda chekli $f'(x), g'(x)$ hosilalari mavjud va $g'(x) \neq 0$.

$$3) \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k \quad (k \text{ chekli yoki cheksiz}).$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$$

tenqlik o'rindi bo'ladi.

11-teorema. $(c, +\infty)$ intervalda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun ushbu shartlar bajarilgan bo'lsin:

$$1) \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow c^+} g(x) = \infty;$$

2) $(c, +\infty)$ intervalda chekli $f'(x), g'(x)$ hosilalari mavjud va $g'(x) \neq 0$.

$$3) \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k \quad (k \text{ chekli yoki cheksiz}).$$

U holda

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$$

bo'ladi.

3º. Boshqa ko'rinishdagi aniqmasliklar. Ma'lumki, $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow c^+} g(x) = \infty$ bo'lganda $f(x)/g(x)$ ifoda $0/\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'lib, uni quyidagi

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{f(x)}{\frac{1}{f'(x)}}$$

kabi yozish orqali $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka keltirish mumkin.

Shuningdek, $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow c^+} g(x) = +\infty$ bo'lganda $f(x)/g(x)$ ifoda $+\infty/+\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'lib, uni ham quyidagi

$$f(x)/g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f'(x)}}$$

kabi o'zgartirish natijasida $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka keltirish

mumkin.

Shunday qilib, funksiya hosilalari yordamida $0 \cdot \infty$ hamda $\infty \cdot \infty$ ko'rinishdag'i aniqmasliklarni ochishda, ularni $\frac{0}{0}$ voki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdag'i aniqmaslikka keltirib, so'ng yuqoridagi teoremlar qo'llaniladi.

Ma'lumki, $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiya $1, 0$ va ∞ ga, $g(x)$ funksiya esa mos ravishda ∞ , 0 va 0 ga intilganda

$$(f(x))^{\infty}$$

darajali - ko'rsatkichli ifoda $1^{\infty}, 0^\infty, \infty^0$ ko'rinishdag'i aniqmasliklari edi. Bu ko'rinishdag'i aniqmasliklarni ochish uchun avval $y = (f(x))^{g(x)}$ logarifmlanadi: $\ln y = g(x) \ln f(x)$. $x \rightarrow a$ da $g(x) \ln f(x)$ ifoda $0 \cdot \infty$ ko'rinishdag'i aniqmaslikni ilodalaydi. Aytaylik,

$$\lim_{x \rightarrow a} (g(x) \ln f(x)) = b$$

(b chekli yoki cheksiz) bo'lsin. Unda

$$\lim_{x \rightarrow a} y = \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^b$$

bo'ladi.

1-eslatma. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalari ham $f'(x)$ va $g'(x)$ lar singari yuqorida keltirilgan teoremlarning barcha shartlarini qanoatlantirsa, u holda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

tengliklar o'rini bo'ladi, ya'ni bu holda Lopital qoidasini takror qo'llash mumkin bo'ladi.

7.10-misol. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

limitni hisoblang.

◀ Ravshanki, $x \rightarrow 0$ da $y = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ ifoda 1^∞ ko'rinishdag'i aniqmaslik. Sodda hisoblashlar yordamida topamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sin x} (\sin x - x)}{(x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{2x^2} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - x \sin x)'}{(x^2)'} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Demak,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}} \blacktriangleright$$

Mashqlar.

7.11. $x \in \mathbb{R}$ da chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya
 $\exists x_0$ da qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lsa,

$$f'(x_0) = 0 \quad (f''(x_0) < 0)$$

bo'ladimi? Misol keltinng.

7.12. Hosilasi nolga teng bo'lgan nuqtada funksiya ekstremumiga erishish shartmi?

7.13. Ushbu

$$f(x) = \cos \pi x \quad (x \neq 0)$$

funksiyaning o'suvchi hamda kamayuvchi bo'ladigan oraliqlari topilsin.

7.14. Ushbu

$$f(x) = dx + \cos x$$

funksiya ekstremumiga tekshirilsin.

7.15. Ushbu

$$f(x) = x \sin \pi x$$

funksiya $[0, 1]$ daqi cheksiz sondagi nuqtalarda maksimumiga, cheksiz sondagi nuqtalarda minimumiga erishish ko'rsatilsin.

7.16. Berilgan shar ichiga yon sirtti eng katta bo'ladigan silindr joylashtirilsin.

7.17. Ushbu

$$f(x) = (x - 3)^2 e^x$$

funksiyaning $(-1, 4]$ daqi eng katta va eng kichik qiymati topilsin.

7.18. Ushbu

$$f(x) = \frac{x-1}{xx}$$

funksiyaning qavariq, botiq bo'ladigan oraliqlari hamda egilish nuqtalari topilsin.

7.19. Ushbu

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x - \sin x}$$

funksiya to'liq tekshirilsin, grafigi chizilsin.

7.20. Lopital qoidalardan foydalaniib, ushbu limitlar hisoblansin:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \sin(\tan x)$

v) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\alpha x}$

VIII BOB

Aniqmas integral

Ma'lumki, harakatdagi nuqtaning tezligini topish, shuningdek, egri chiziqqa urinma o'tkazish kabi masalalar (6 – bobning 1 – § iga qarang) funksiyani differensiallash tushunchasiga olib kelgan edi.

Nuqtaning har bir vaqt momentidagi tezligi ma'lum bo'lganda uning harakat qonunini topish, egri chiziqni uning har bir nuqtalaridagi urinmalariga ko'ra aniqlash kabi masalalar ham ko'p uchraydi. Bunday masalalar yuqorida eslatib o'tilgan masalalarga tekari bo'lib, ular funksiyani integrallash tushunchasiga olib keladi.

1-§. Aniqmas integral tushunchasi

1⁰. Aniqmas integral ta'ifikasi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda (bu interval chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin) aniqlangan bo'lib, $F(x)$ funksiya esa shu intervalda differensiallanuvchi bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $\forall x \in (a, b)$ da

$f'(x) = f(x)$ yoki $dF(x) = f(x)dx$ bo'lsa, $F(x)$ funksiya (a, b) da $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

Masalan,

1) $f(x) = x^2$ funksiyaning $R = (-\infty, +\infty)$ dagi boshlang'ich funksiyasi $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ bo'ladi, chunki

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 \right)' = x^2 = f(x),$$

2) $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ funksiyaning $(-1, 1)$ intervaldagi boshlang'ich funksiyasi $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ bo'ladi, chunki

$$F'(x) = (\sqrt{1-x^2})' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = f(x)$$

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da aniqlangan bo'lib, $F(x)$ funksiya shu segmentda differensiallanuvchi bo'lsin.

2-ta'rif. Agar

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f(x+t)$$

bo'lib,

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da yoki natijangich funksiyasi deviladi.

8.1-misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x > 0, \\ 0, & \text{agar } x = 0, \\ -1, & \text{agar } x < 0 \end{cases}$$

funksiya $(0, 1)$ intervalda bo'shang'ich funksiyaga ega emasligi ko'rsatiladi.

◀ Teskarisi. Taraz qplaylik. Bitor $F(x)$ funksiya $(0, 1)$ da $f(x)$ ning boshang'ich iksiyasi bo'lsin: $f(0)$ da

$$f'(0) = F(0)$$

Lagranj teoremasiga ko'ta $[0, x]$ da $(0, x)$

$$F(x) - F(0) = f(t)(x - 0), \quad (0 < t < x)$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 1$$

Bu esa $F'(0) = F'(0) = f(0) = 0$ bo'lishiga zid. ▶

1-eslatma. Keyinchalik, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshang'ich funksiyasi bo'ladigan oraliqni ko'rsatib o'tirmaymiz. Oraliq sifatida $f(x)$ ning aniqlanish oralig'i x ko'zda tutiladi va x sifatida

$$[a, b], (a, b], [a, b), (-\infty, a], (-\infty, a),$$

$$[b, +\infty), (b, +\infty), (-\infty, +\infty)$$

lar olinishi mumkin.

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda uzliksiz bo'lsa, $f'(x)$ shu oraliqda har doim boshang'ich funksiyaga ega bo'ladi.

Bu teoremaning isboti 9 - bobda keltiriladi.

$F(x)$ va $\Phi(x)$ funksiyalarining har biri $f(x)$ funksiya uchun boshang'ich funksiya bo'lsin:

$$f'(x) = F'(x), \quad \Phi'(x) = \varphi(x)$$

Demak, $F'(x) = \Phi'(x)$. Bundan 7 - bobdag'i 1 - natijaga ko'ra

$$f'(x) = \Phi(x) + C, \quad \{C, const\}$$

teoriyak kelib chigadi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning barcha boshang'ich funksiyalarini

bir - biridan o'zgarmas songa farq qiladi va istalgan boshlang'ich funksiyasi ushbu ko'rnishda ifodalanadi: $F(x) + C$ ($C = \text{const}$)

3-ta'rif. $f(x)$ funksiya boshlang'ich funksiyalarning umumiy ifodasi $F(x) + C$ ($C = \text{const}$) shu $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deb ataladi va

$$\int f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Bunda \int -intervalda belgisi, $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ esa integral ostidagi ifoda deyiladi.

Demak,

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Masalan,

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

bo'ladi, chunki hosila olish sodda qoidalariga ko'ra

$$\left(\frac{2^x}{\ln 2} + C \right)' = 2^x$$

2º. Aniqmas integralning sodda xossalari

1) $f(x)$ funksiya aniqmas integrali $\int f(x)dx$ ning differensiali $f(x)dx$ ga teng:

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx$$

◀ Haqiqatan ham, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin: $F'(x) = f(x)$. U holda

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx ▶$$

Bu xossa avval differnsial belgisi d , so'ngra integral belgisi \int kelib, ular yonma - yon turganda o'zaro bir - birini yo'qotishni ko'rsatadi.

2). Funksiya differnsialining aniqmas integrali shu funksiya bilan o'zgarmas son yig'indisiga teng:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

◀ $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lsin: $F'(x) = f(x)$. U holda

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

tenglik o'rini bo'ladi. Ikkinci tomondan,

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x)$$

Oxirgi ikki tenglik 2) xossasi isbot etadi. ►

Yuqonda keltirilganlardan, differentiallash (funksiyaning hosilasini hisoblash) hamda integrallash (funksiyaning aniqmas integralini hisoblash) amallari o'zaro teskari amallar ekanligi kelib chiqadi.

Ayni paytda funksiya hosilasi hisoblanganda natija bitta funksiya bo'lsa, uning aniqmas integrali hisoblanganda esa natija cheksiz ko'p funksiya (ular bir -biridan o'zgarmas songa farq qiladi) bo'ladi. Aniqmas integral deb yuritilishining boisi ham shu.

3⁰. Integralashning sodda qoidalari. 1) Agar $f(x)$ funksiya boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsa, u holda $kf(x)$ ($k \neq 0$) o'zgarmas son) ham boshlang'ich funksiyaga ega va $k \neq 0$ da

$$\int kf'(x)dx = k \int f(x)dx \quad (8.2)$$

formula o'rinni bo'ladi.

◀ (8.2) funksiyaning boshlang'ich funksiyasi $F(x)$ bo'lsin. U holda $F'(x) = f(x)$ va $\int f(x)dx = F(x) + C$ bo'lib,

$$k \int f(x)dx = k(F(x) + C) = kF'(x) + kC \quad (8.3)$$

bo'ladi, bunda C - ixtiyoriy o'zgarmas son. Ushbu

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$$

tenglik o'rinni bo'lishidan $kf(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi $kF'(x)$ ekanini topamiz. Demak,

$$\int kf'(x)dx = kF'(x) + C, \quad (8.4)$$

bunda C - ixtiyoriy o'zgarmas son. Endi (8.3) va (8.4) munosabatlardan C va C , o'zgarmas sonlarning ixtiyoriyligi hamda $k \neq 0$ bo'lishidan (8.2) formulaning o'rinni ekan kelib chiqadi. ►

Shunga o'xshash integralning quyidagi xossasi isbotlanadi:

3) Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar boshlang'ich funksiyalarga ega bo'lsa, $f(x)+g(x)$ ham boshlang'ich funksiyaga ega va

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \quad (8.5)$$

formula o'rinni.

Odatda bu xossa integralning additivik xossasi deyiladi.

2-eslatma. Yuqorida keltirilgan (8.2) va (8.5) tengliklarni hamda kelgusida uchraydigan shunga o'xshash tengliklarni o'ng va chap tomonlaridagi ifodalar orasidagi ayirma o'zgarmas songa barobarligi ma'nosidagi (o'zgarmas son aniqligidan) tengliklar deb qaraladi.

4⁰. Elementar funksiyalarning aniqmas integrallari.
 Boshlang'ich funksiya ta'nifidan hamda elementar funksiyalar hosilari jadvalidan (6 – bobning 3 - § iga qarang) foydalanib elementar funksiyalar aniqmas integrallari jadvalini keltiruviz (har bir formula integral ostidagi funksiyaning aniqlanish sohasida qaraladi):

$$1) \int 0 dx = C = const;$$

$$2) \int 1 dx = \int dx = x + C;$$

$$3) \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq 1);$$

$$4) \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0);$$

$$5) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$6) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$7) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad (a > 0)$$

$$8) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$9) \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$10) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctgx} x + C;$$

$$11) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$12) \int sh x dx = ch x + C;$$

$$13) \int ch x dx = sh x + C;$$

$$14) \int \frac{1}{sh^2 x} dx = -\operatorname{cthx} + C;$$

$$15) \int \frac{1}{ch^2 x} dx = \operatorname{th} x + C;$$

8.2-misol. Ushbu $\int (1 + \sqrt[3]{x})^2 dx$ integralni hisoblang.

◀ Bu integralni hisoblash uchun avval (8.2), (8.5) formulalarni, so'ngra jadvalni qo'llaymiz:

$$\int (1 + \sqrt[3]{x})^2 dx = \int (1 + 2\sqrt[3]{x} + x) dx = \int 1 dx + 2 \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int x dx = x + \frac{4}{3} x^{\frac{4}{3}} + \frac{x^2}{2} + C. ▶$$

2-§. Integrallash usullari

1⁰. O'zgaruvchilarni almashtirib integrallash usuli. Ushbu $\int f(x)dx$ aniqnas integralni hisoblash talab etilgan bo'sin. Bunda $f(x)$ funksiya biror $X = (a, b)$ intervalda aniqlangan va

$$f(x) = \varphi(g(x)) \cdot g'(x) \quad (8.6)$$

ko'rinishda yozilishi mumkin deylik.

Agar $\varphi(t)$ funksiya $t \in (t_1, t_2)$ intervalda boshlang'ich funksiya $\Phi(t)$ ga ega bo'lib, $g(x)$ funksiya $X = (a, b)$ intervalda (bunda $g(x) \in T$) differensiallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\int f(x)dx = \int \varphi(g(x))g'(x)dx = \Phi(g(x)) + C \quad (8.7)$$

formula o'rinni.

◀ Haqiqatan, $[\Phi(g(x))]' = \Phi'(g(x)) \cdot g'(x) = \varphi(g(x))g'(x)$. ►

Odatda integralni bunday usul bilan hisoblash o'zgaruvchini almashtirish usuli bilan integrallash deb ataladi.

O'zgaruvchilarni almashtirish usulining muhim tomoni o'zgaruvchilarni juda ko'p usul bilan almashtirish imkoniyati bo'lgan holda ular ichidan integralni sodda va hisoblash uchun qulay holga keltiradiganini tanlab olishdan iborat.

8.3-misol. $\int \frac{x dx}{x^2 + a^2}$ ($a \neq \text{const}$) ni hisoblang.

◀ Berilgan integralda o'zgaruvchi x ni $x^2 + a^2 = t$ kabi almashtiramiz. Bunda $2xdx = dt$ bo'lib, ((8.6) va (8.7) larga qarang)

$$\int \frac{x dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C \quad \blacktriangleright$$

8.4-misol. $\int e^{cos x} \sin x dx$ ni hisoblang.

◀ Bu integralda $\cos x = t$ almashtirishni bajaramiz. Natijada $-\sin x dx = dt$ bo'lib,

$$\int e^{\cos x} \sin x dx = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C$$

bo'ladi. ►

2⁰. Bo'laklab integrallash usuli. Ikki $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiya (a, b) intervalda uzlucksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. Ma'lumki, (6-hobning 4-th ga qarang)

$$d(u(x) \cdot v(x)) = u(x)dv(x) + v(x)du(x)$$

Bu tenglikdan

$$u(x) \cdot dv(x) = (u(x)v'(x)) - v(x)du(x). \quad (8.8)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Endi (8.8) tenglikni integrallab topamiz:

$$\int u(x)dv(x) = \int (d(u(x)v(x))) - \int v(x)du + u(x)v(x) - \int v(x)du$$

Shunday qilib, quyidagi

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du \quad (8.9)$$

formulaga kelamiz. Bu (8.9) formula bo'laklab integrallash formulasi deyiladi.

Bo'laklab integrallash formulasidan foydalanish uchun integral ostidagi ifodani $u(x)$ hamda $dv(x)$ laj ko'paytmasi ko'rinishda yozib olinadi, bunda albatta $dv(x)$ hamda $v(x)du$ ifodalarning integrallarini oson hisoblana olinishi lozimligini e'tiborda tutish kerak.

8.5-misol. $\int \ln x dx$ ni hisoblang.

◀ Integral ostidagi $\ln x dx$ ifodani $u = \ln x, dv = dx$ laj ko'paytmasi deb olamiz. U holda $du = \frac{1}{x} dx, v = x$ bo'ladi. Bo'laklab integrallash formulasidan foydalanim, topamiz:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C = x \ln x - x + C \quad \blacktriangleright$$

8.6-misol. $J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) ni hisoblang.

◀ Bu intervalda

$$u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, dv = dx \quad du = -\frac{2nx dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}, v = x$$

bo'ladi. (8.9) formuladan foydalanim, topamiz:

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \quad (8.10)$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi $\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx$ ni

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx - a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}$$

ko'rinishda yozsak, unda (8.10) munosabat ushbu

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \cdot J_n - 2na^2 \cdot J_{n+1}$$

ko'rinishni oladi. Keyingi tenglikdan esa quyidagi

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot J_n \quad (8.11)$$

rekurrent formula kelib chiqadi.

Ravshanki, $n=1$ bo'lganda

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{\frac{dx}{a}}{1 + (\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

bo'ladi.

$n \geq 2$ bo'lganda, mos J_n integrallar (8.11) rekurrent formula yordamida topiladi. Masalan:

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2a^{2n-2}} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^{2n-2}} J_{n-1} = \frac{1}{2a^{2n-2}} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^{2n-2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. \blacksquare$$

3-§. Ratsional funksiyalarni integrallash

Ushbu paragrafda ratsional funksiyalarni integrallash bilan shug'ullanamiz. Buning uchun avval algebra kursidan biz uchun zarur bo'lgan ma'lumotlarni keltiramiz.

1º. Ko'phad va uning ildizlari haqida. Biror

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (8.12)$$

ko'phad berilgan bo'lsin, bunda $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ o'zgarmas haqiqiy sonlari, $a_n \neq 0, n \in N$ esa ko'phadning darajasi.

Ma'lumki, biror $\alpha \in R$ son uchun $P(\alpha) \neq 0$ bo'lsa, α son $P(x)$ ko'phadning ildizi deb ataladi. U holda Bezu teoremasiga ko'ra $P(x) - (x - \alpha)$ ga qoldiqsiz bo'linib, u quyidagi

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x)$$

ko'rinishda ifodalanadi, bunda $Q(x) - (n-1)-$ darajali ko'phad.

Agar (8.12) ko'phad $(x - \alpha)^k$ ($k \in N$) ga qoldiqsiz bo'linsa, α son (8.12) ko'phadning k karrali ildizi bo'ladi. Bu holda $P(x)$ ko'phadni ushbu

$$P(x) = (x - \alpha)^k \cdot R(x)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, bunda $R(x) - (n-k)-$ darajali ko'phad.

Agar $z = \alpha + i\beta$ kompleks son $P(x)$ ko'phadning ildizi bo'lsa, u holda $z = \alpha - i\beta$ kompleks son ham bu ko'phadning ildizi bo'ladi. Shuningdek, $z = \alpha + i\beta$ son $P(x)$ ning k karrali ildizi bo'lsa, $z = \alpha - i\beta$ son ham bu ko'phadning k karrali ildizi bo'ladi.

Demak, $P(x)$ ko'phad $z = \alpha + i\beta$ kompleks ildizga ega bo'lganda uning ifodasi $(x - z)$ ko'paytuvchi bilan birga $x - z$ ko'paytuvchi ham qatnashadi. Bunday holda $P(x)$ ko'phadning ifodasi quyidagi

$$(x - z)(x - \bar{z}) = [x - (\alpha + i\beta)][x - (\alpha - i\beta)] = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = x^2 + px + q$$

$$(x^2 - 2\alpha_j x + \alpha_j^2 + \beta_j^2)$$

kvadrat uchhad ko'paytuvchi bo'lib qoladi.

Faraq qilaylik,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

ko'phad berilgan bo'lib, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ lar uning mos ravishda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ karrali haqiqiy ildizlari, z_1, z_2, \dots, z_s , $z_j = \alpha_j + i\beta_j$ ($j=1,2,\dots,s$) lai esa ko'phadning mos ravishda $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ karrali kopleks ildizlari bo'lсин. Bu ko'phadni uning ildizlariga ko'ra ko'paytuvchilarga ajratish haqidagi ushbu teoremani isbotsiz keltiramiz.

2-teorema. *Har qanday n-darajali*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

ko'phad $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ o'zgarmas haqiqiy sonlar, $a_0 \neq 0$ ushbu

$$P(x) = (x - \alpha_1)^{\lambda_1} (x - \alpha_2)^{\lambda_2} \dots (x - \alpha_s)^{\lambda_s} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{\gamma_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{\gamma_2} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{\gamma_s}$$

ko'rinishda ifodalanadi, bunda

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s + 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_s) = n$$

bo'lib, $x^2 + p_j x + q_j = 0$ ($j=1,2,\dots,s$) tenglamalar haqiqiy ildizga ega enias.

2º. Sodda kasrlar. To'g'ri kasrlarni sodda kasrlar orqali ifodalash. Ushbu

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m} \quad (m=1,2,3\dots) \quad (8.13)$$

ko'rinishdagi kasrlar sodda kasrlar deb ataladi, bunda A,B,C hamda a, p, q lar o'zgarmas sonlar, $x^2 + px + q$ kvadrat uchhad esa haqiqiy ildizga ega emas.

Ma'lumki, quyidagi

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

va

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_v x^v$$

ko'phadlarning $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, b_2, \dots, b_v\}$ o'zgarmas sonlar, $n \in N, v \in N$ nisbati

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_v x^v} \\ Q(x) &= \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_v x^v} \end{aligned}$$

kasr ratsional funksiya deyiladi, $n < v$ bo'lganda esa u to'g'ri kasr deb ataladi.

Har qanday to'g'ri kasr (8.13) sodda kasrlar orqali ifodalanadi. Buni isbotlashdan avval ikkita lemmani keltiramiz.

1-lemma. Agar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ to'g'ri kasr mahrajidagi $Q(x)$ ko'phad ushbu

$$Q(x) = (x - \alpha)^m Q_1(x) \quad (m \in N)$$

ko'rinishda bo'lib, $Q_1(x)$ ko'phad esa $x - \alpha$ ga bo'linmasa, u holda berilgan to'g'ri kasri quyidaqи

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_m}{(x - \alpha)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x - \alpha)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

ko'rinishda ifodalanishi mumkin, bunda A_1, A_2, \dots, A_m o'zgarmas haqiqiy sonlar, $P_1(x)$ ko'phad.

◀ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ to'g'ri kasri quyidaqи ko'rinishda yozib olamiz.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - \alpha)^m Q_1(x)} = \frac{A_m}{(x - \alpha)^m} + \frac{P(x) - A_m Q_1(x)}{(x - \alpha)^m Q_1(x)} \quad (8.14)$$

Ravshanki, (8.14) munosabatlardagi $P(x) - A_m Q_1(x)$ ayirma A_m songa bog'liq. Bu sonni shunday tanlab olamizki, natijada $P(x) - A_m Q_1(x)$ ko'phad $x - \alpha$ ga bo'linsin. Buning uchun

$$P(\alpha) - A_m Q_1(\alpha) = 0$$

tenglik o'rini bo'lishi kerak. Demak,

$$A_m = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$$

deb olinsa, u holda $P(x) - A_m Q_1(x)$ ko'phad $x - \alpha$ ga bo'linadi.

Shunday qilib,

$$P(x) - A_m Q_1(x) = (x - \alpha) \cdot P_m(x)$$

bo'ladi, bunda $P_m(x)$ -- ko'phad.

Natijada (8.14) munosabat quyidaqи

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_m}{(x - \alpha)^m} + \frac{P_m(x)}{(x - \alpha)^{m-1} Q_1(x)} \quad (8.15)$$

ko'rinishga keladi, bunda A_m son yuqoridagidek aniqlanadi.

Endi

$$\frac{P_m(x)}{(x - \alpha)^{m-1} Q_1(x)} = \frac{A_{m-1}}{(x - \alpha)^{m-1}} + \frac{P_{m-1}(x) - A_{m-1} Q_1(x)}{(x - \alpha)^{m-1} Q_1(x)}$$

tenglikning o'nq tomonidagi A_{m-1} sonni shunday tanlab olamizki, $P_{m-1}(x) - A_{m-1} Q_1(x)$ ko'phad $x - \alpha$ ga bo'linsin. Buning uchun

$$P_{m-1}(\alpha) - A_{m-1} Q_1(\alpha) = 0$$

tenglik o'rini bo'lishi kerak. Demak,

$$A_{m-1} = \frac{P_{m-1}(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$$

deb olinsa, u holda $P_{m-1}(x) - A_{m-1} Q_1(x)$ ko'phad $x - \alpha$ ga bo'linadi.

Shunday qilib,

$$P_n(x) - A_{n-1}Q_1(x) = (x - \alpha) \cdot P_{n-1}(x) \quad (8.16)$$

bo'ladi, bunda $P_{n-1}(x)$ ko'phad.

(8.15) va (8.16) munosabatlardan topamiz:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_n}{(x - \alpha)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x - \alpha)^{m-1}} + \frac{P_{m-1}(x)}{(x - \alpha)^{m-2} Q_1(x)} \quad (8.17)$$

Xuddi shunga o'xshash har gal $\frac{P(x)}{Q(x)}$ kasrni ifodalovchi tenglikning o'ng tomonidagi oxiri hadidan, yuqoridaqidek $\frac{A_1}{(x - \alpha)^{m-1}}$ qismini ajratib topamiz:

$$\frac{P_{m-1}(x)}{(x - \alpha)^{m-1} Q_1(x)} = \frac{A_{m-2}}{(x - \alpha)^{m-2}} + \frac{P_{m-2}}{(x - \alpha)^{m-3} Q_1(x)} \quad (8.18)$$

va h.k.

$$\frac{P_1(x)}{(x - \alpha) \cdot Q_1(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \quad (8.19)$$

(8.17), (8.18), (8.19) tengliklardan

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_m}{(x - \alpha)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x - \alpha)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

2-lemma. Agar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ to'g'ri kasr maxrajidagi $Q(x)$ ko'phad

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^n Q_1(x)$$

ko'rinishga ega bo'lib $(x^2 + px + q)$ kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas), $Q_1(x)$ ko'phad $x^2 + px + q$ ga bo'linmasa, u holda berilgan to'g'ri kasr quyidagi ko'rinishda ifodalanishi mumkin:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{B_{n-1} x + C_{n-1}}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

bunda $B_1, B_2, \dots, B_n, C_1, C_2, \dots, C_n$ o'zgarmas sonlar, $P_1(x)$ ko'phad.

◀ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ to'g'ri kasrni quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^n Q_1(x)} = \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{P(x) - (B_n x + C_n) Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^n Q_1(x)}$$

Bu tenglikdangi

$$P(x) - (B_n x + C_n) Q_1(x) \quad (8.20)$$

ko'phad B_n va C_n sonlarga bog'liq. Endi B_n va C_n sonlarni shunday tanlab olish mumkinligini ko'rsatamizki. natijada (8.20) ko'phad $x^2 + px + q$ ga bo'linsin. Avvalo $P(x)$ va $Q_1(x)$ ko'phadlarning har birini $x^2 + px + q$ kvadrat uchhadga bo'lib

topamiz:

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) + \frac{a_1 x + b_1}{x^2 + px + q} \\ &+ t(x) + q \\ Q(x) &= S(x) + \frac{a_2 x + b_2}{x^2 + px + q} \end{aligned} \quad (8.21)$$

bunda $R(x)$ va $S(x)$ ko'phadlar. U holda

$$\begin{aligned} P(x) - (B_a x + C_a)Q(x) &= \frac{P(x)}{x^2 + px + q} - (B_a x + C_a) - \frac{Q(x)}{x^2 + px + q} \\ &= R(x) - (B_a x + C_a)S(x) + \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 - (B_a x + C_a)(a_2 x + b_2)}{x^2 + px + q} \\ &= R(x) - (B_a x + C_a)k(x) + B_a a_2 + \frac{(C_a + B_a p a_2 + a_2^2 q) - (B_a b_2 + C_a b_2)}{x^2 + px + q} \end{aligned}$$

bo'ladi. Bu tenglikdan ko'rinishi keli, $t(x) = (B_a x + C_a)Q(x)$ had $x^2 + px + q$ ga bo'linishi uchun x ning barcha qiyomatlarida $(C_a + B_a p a_2 + C_a a_2 - B_a b_2)x + B_a q a_2 + b_2 - C_a b_2 = 0$, ya'ni

$$\begin{aligned} B_a(a_2 p + b_2) - C_a a_2 + a_2 &= 0 \\ b_2 - q a_2 - C_a a_2 + b_2 &= 0. \end{aligned} \quad (8.22)$$

bo'lishi kerak. B_a va C_a larga nisbatan (8.22) sistemaning determinantini

$$D = \begin{vmatrix} a_2 p + b_2 & a_2 \\ a_2 q & -b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'ladi. Buni isbotlaymiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni

$$D = -b_2(a_2 p + b_2) + a_2^2 q = 0 \quad (8.23)$$

bo'lsin.

Agar $a_2 \neq 0$ bo'lsa, unda $b_2 = 0$ bo'lib, natijada (8.21) dan $Q(x)$ ko'phad $x^2 + px + q$ ga bo'linishi kelib chiqadi. Bu esa $Q(x)$ ko'phad $x^2 + px + q$ ga bo'linmaydi, deb olinishiga ziddir. Demak, $a_2 \neq 0$. Bu holda (8.23) tenglikdan ushbu

$$\left(-\frac{b_2}{a_2} \right)^2 + p \left(-\frac{b_2}{a_2} \right) + q = 0$$

ko'rinishga ega bo'lib, $-\frac{b_2}{a_2}$ haqiqiy son $x^2 + px + q = 0$

tenglilikning ko'rsintisi bo'lib, bu $x^2 + px + q$ kvadrat uchhad haqiqiy olqizga ega bo'ladi, uchha olinishiga ziddir. Demak, (8.23) sistemaning determinanti holdan farqli ekan. U holda, bu sistemadan yagona B_a va C_a sonlar topiladi. Bu sonlarni (8.20) ga qo'ysak, natijada $P(x) - (B_a x + C_a)Q(x)$ ko'phad

$x^2 + px + q$ ga bo'linib, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ kasr esa ushbu

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^n Q_1(x)} = \frac{B_{n-1}x + C_{n-1}}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \frac{P_{n-1}(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1} Q_1(x)} \quad (8.24)$$

ko'rinishga keladi, bunda $P_n(x) =$ ko'phad.

Xuddi shu yo'l bilar

$$\frac{P_n(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1} Q_1(x)} = \frac{B_{n-1}x + C_{n-1}}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \frac{P_{n-1}(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1} Q_1(x)} \quad (8.25)$$

$$\frac{P_{n-1}(x)}{(x^2 + px + q)^{n-2} Q_1(x)} = \frac{B_{n-2}x + C_{n-2}}{(x^2 + px + q)^{n-2}} + \frac{P_{n-2}(x)}{(x^2 + px + q)^{n-2} Q_1(x)} \quad (8.26)$$

va h.k.

$$\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q) Q_1(x)} = \frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \quad (8.27)$$

bo'lishi topiladi.

(8.24), (8.25), (8.26), (8.27) tengriklardan

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_{n-1}x + C_{n-1}}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \frac{B_{n-2}x + C_{n-2}}{(x^2 + px + q)^{n-2}} + \dots + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

bo'lishi kechsa chiqadi. ▶

3-teorema. *Har qanday to'g'ri kasr sodda kasrlar yig'indisi orqali ifodalananadi.*

◀ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ to'g'ri kasr bo'lsin. $Q(x)$ esa n -darajali ko'p had bo'lib,

$$Q(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} (x - \alpha_2)^{m_2} \cdots (x - \alpha_r)^{m_r} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{m_2} \cdots (x^2 + p_i x + q_i)^{m_i}$$

bo'lsin, bunda

$$n_1 + n_2 + \dots + n_r + 2(m_1 + m_2 + \dots + m_i) = n$$

bo'lib, $x^2 + p_j x + q_j$ ($j=1, 2, \dots, i$) kvadrat uchhadlar haqiqiy ildizga ega emas.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ to'g'ri kasrni quyidagi

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - \alpha_1)^{n_1} (x - \alpha_2)^{n_2} \cdots (x - \alpha_r)^{n_r} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \cdots (x^2 + p_i x + q_i)^{m_i}}$$

ko'rinishda yozib, bu tenglikning o'ng tomoniga 1-lemmaning bir necha marta ($n_1 + n_2 + \dots + n_r$ marta) qo'llanib topamiz:

$$\begin{aligned}
& P(x) = \frac{P_1^{(k)}}{(x - \alpha_1)^k} + \frac{P_2^{(k)}}{(x - \alpha_2)^{k+1}} + \dots + \frac{P_n^{(k)}}{(x - \alpha_n)^{k+n-1}} \\
& Q(x) = (x - \alpha_1)^k + (x - \alpha_2)^{k+1} + \dots + (x - \alpha_n)^{k+n-1} \\
& \frac{P_1^{(k)}}{(x - \alpha_1)^k} + \frac{P_2^{(k)}}{(x - \alpha_2)^{k+1}} + \dots + \frac{P_n^{(k)}}{(x - \alpha_n)^{k+n-1}} + \frac{P_1^{(k)}}{(x - \alpha_1)^{k+1}} + \dots + \\
& + \frac{P_1^{(k)}}{x - \alpha_1} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}
\end{aligned} \tag{8.28}$$

bunda

$$Q_1(x) = (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{m_2} \cdots (x^2 + p_nx + q_n)^{m_n}$$

Endi $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ kasiiga 2-lemmamini bir necha marta qo'llab,

topamiz:

$$\begin{aligned}
& \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_1(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{m_2} \cdots (x^2 + p_nx + q_n)^{m_n}} \\
& = \frac{P_1^{(0)}x + C_1^{(0)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1}} + \frac{P_1^{(1)}x^2 + C_1^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1-1}} + \dots + \frac{P_1^{(k)}x + C_1^{(k)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1-k}} \\
& + \frac{P_1^{(k+1)}x^2 + C_1^{(k+1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1-1}} + \frac{P_1^{(k+2)}x^3 + C_1^{(k+2)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1-2}} + \dots + \frac{P_1^{(n)}x + C_1^{(n)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1-n}} \\
& + \frac{P_1^{(n+1)}x^2 + C_1^{(n+1)}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{m_2}} + \frac{P_1^{(n+2)}x^3 + C_1^{(n+2)}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{m_2-1}} + \dots + \frac{P_1^{(n+k)}x + C_1^{(n+k)}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{m_2-k}} \\
& + \frac{P_1^{(n+k+1)}x^2 + C_1^{(n+k+1)}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{m_2-1}} + \frac{P_1^{(n+k+2)}x^3 + C_1^{(n+k+2)}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{m_2-2}} + \dots + \frac{P_1^{(n+k+m)}x + C_1^{(n+k+m)}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{m_2-m}}
\end{aligned} \tag{8.29}$$

(8.28) va (8.29) munosabatlardan teoremaning isboti kelib chiqadi. ▶

Yugorinda isbotlangan teoremadagi o'zgarmas sonlarni hisobqacha noma'lum koeffitsientlar usul qilib atalgan usul bolen nara t'opish mumkin. Bunday $\frac{P(x)}{Q(x)}$ to'g'ni kasr noma'lum koeffitsientlari bo'lgan sodda kasrlarga yoyilib, so'ng tenglikning o'ng tomonidagi sodda kasrlari yig'indisi umumiy maxrajga keltiriladi.

Natijade

$$\frac{P(x) - R(x)}{Q(x) - Q(x)}$$

tenglik hosil bo'ladi va undan barcha x lar uchun o'rinni bo'lgan

$$P(x) = R(x)$$

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikning har ikki tomonidagi x ning bir xil darajalari oldida turgan koeffitsientlarni tenglashtirib, sistema hosil qilinadi.

8.7-misol. $\frac{2x+1}{x^2-5x+6}$ to'g'ni kasri sodda kasrlarga ajaring.

► Bu kasrning maxrajida $x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$ bo'lganiga uchun teorema ga ko'ra

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

bo'ladi. Uni

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = A(x-2) + B(x-3)$$

ko'rinishda yozib, ushbu

$$2x+1 = A(x-2) + B(x-3) \text{ yoki } 2x+1 = (A+B)x - (2A+3B)$$

tenglikka kelamiz. Ikki ko'phadning tengligidan foydalanib, A va B larga nisbatan ushbu

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 2A+3B=1 \end{cases} \quad (8.30)$$

sistemaga kelamiz. (8.30) dan $A=5$, $B=-3$ bo'ladi. Shunday qilib, berilgan to'g'ni kasri sodda kasrlar orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{5}{x-3} + \frac{-3}{x-2} \quad \blacktriangleright$$

3º. Sodda kasrlarni integrallash. Sodda kasrlarning aniqmas integrallarini hisoblaymiz.

1). $\int \frac{A}{x-a}$ sodda kasrning aniqmas integrali:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C$$

2). $\int \frac{A}{(x-a)^m}$ ($m > 1$) sodda kasrning aniqmas integrali ham tez hisoblanadi:

$$\int \frac{A dx}{(x-a)^m} = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = A \int (x-a)^{-m} d(x-a) = \frac{A}{1-m} \cdot \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C$$

3). $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ sodda kasrning (bunda x^2+px+q kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas) integrali $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx$ ni hisoblash uchun avveli kasrning maxrajida turgan x^2+px+q kvadrat uchhedni ushbu

$$x^2+px+q = (x+\frac{P}{2})^2 + q - \frac{P^2}{4}$$

ko'rinishda yozib olamiz. U holda

$$\int_{x^2 + px + q} \frac{Bx + C}{(x + t)^m} dx = \int_{t^2 + pt + q} \frac{Bx + C}{(t + \frac{x}{2})^m} dt$$

bo'tadi, bunda $x = -\frac{t^2}{2}$. Bu integralda $x + \frac{t^2}{2} \neq 0$ olmashtirishni bajaramiz:

$$\begin{aligned} & \int_{x^2 + px + q} \frac{Bx + C}{(x + t)^m} dx = B \int_{t^2 + pt + q} \frac{dt}{t^2 + a^2} + (C - \frac{Bp}{2}) \int_{t^2 + pt + q} \frac{dt}{t^2 + a^2} - \frac{B}{2} \int_{t^2 + pt + q} \frac{dt(t^2 + a^2)}{t^2 + a^2}, \\ & (C - \frac{Bp}{2}) \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1 + (\frac{t}{a})^2} = \frac{B}{2} \ln(t^2 + a^2) + (C - \frac{Bp}{2}) \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C_1 \\ & = \frac{B}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2C - Bp}{2} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}} + C_1 \end{aligned}$$

Lemak,

$$\int_{x^2 + px + q} \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} dx = \frac{B}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2C - Bp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}} + C_1$$

bunda C_1 ixтийони о'згармас.

4). $\int_{(x^2 + px + q)^m} \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n} dx$ ($m > n$) — sodda kasning integrali
 $\int_{(x^2 + px + q)^m} \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n} dx$ ni hisoblash uchun 3) holdagidek o'zgaruvchini almashtramiz: $x + \frac{p}{2} = t$. Natijada quyidagi ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{(x^2 + px + q)^m} \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n} dx = \int_{((x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^m} \frac{Bx + C}{((x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^n} dx = \int_{(t^2 + a^2)^m} \frac{Bt + (C - \frac{Bp}{2})}{(t^2 + a^2)^n} dt \\ &= \frac{B}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^{n+1}} + (C - \frac{Bp}{2}) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{B}{2} \frac{1}{n+1} \frac{1}{(t^2 + a^2)^{n+1}} + (C - \frac{Bp}{2}) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} \end{aligned}$$

Bu munosabatdag'i $\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}$ integral ushbu bobning 2. § ida keltirilgan integral bo'lib, u rekurent formula orqali hisoblanadi.

4º. Ratsional funksiyalarni integrallash. Ma'lumki, ratsional funksiya ikkita $P(x)$ va $Q(x)$ butun ratsional funksiyalari

nisbatidan iborat:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Agar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ noto'g'it kasr bo'lsa, uning butun qismini ajratib, butun ratsional funksiya hamda to'g'ri kasri yig'indisi ko'rinishida quyidagicha ifodalab olinadi:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

U holda

$$\int f(x) dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int R(x) dx + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx \quad (8.31)$$

bo'ladi.

(8.31) munosabatdagi $\int R(x) dx$ integral butun ratsional funksiya (ko'phad) ning integrali bo'lib, u oson hisoblanadi.

To'g'ri kasrni integrallash uchun avval bu kasrni 3 teoremdan foydalanib, sodda kasrlar orqali ifodalab olinadi, so'ngira ularni 3^0 - bandda ko'rsatilgandek integrallanadi.

8.8-misol. $\int_{x^2+1}^{dx}$ ni hisoblang.

◀ Integral ostidagi $\frac{1}{x^2+1}$ kasrni sodda kasrlarga ajratamiz:

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Bu tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

U holda

$$1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)$$

ya'ni

$$1 = (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D)$$

bo'ladi. Natijada A, B, C, D larni topish uchun

$$A + B + C = 0,$$

$$A - B + D = 0,$$

$$A + B - C = 0,$$

$$A - B - D = 1.$$

sistemaga kelamiz. Bu sistemani echib,

$$A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}, C = 0, D = -\frac{1}{2}$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}$$

bo'lib,

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

bo'ladi. ▶

4-§. Ba'zi irrasional funksiyalarni integrallash

Ikki u va v o'zgaruvchilar berilgan bo'lib, bu o'zgaruvchilar yordamida

$$u^i v^j \quad (i=0,1,2,\dots, j=0,1,2,\dots)$$

ko'paytmalarni tuzomiz. Bu ko'paytmalardan tuzilgan ushbu

$$\begin{aligned} f(u,v) = & a_{00} + a_{01}u + a_{02}v + a_{10}u^2 + a_{11}uv + a_{12}v^2 \\ & + a_{20}u^3 + a_{21}u^2v + a_{22}uv^2 + a_{30}v^3 \end{aligned}$$

funksiya u va v o'zgaruvchilarning ko'phadi deb ataladi, bunda $a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{30}$ o'zgarmas haqiqiy sonlar (koefitsientlar).

$P(u,v)$ hamda $Q(u,v)$ lar u va v o'zgaruvchilarning ko'phadlari bo'lсин. Ushbu $\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ ($Q(u,v) \neq 0$) nisbat u va v o'zgaruvchilarning ratsional funksiyasi deb ataladi va u R(u,v) orqali belgilanadi:

$$R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)} \quad (Q(u,v) \neq 0)$$

Endi u va v o'zgaruvchilarning har biri o'z navbatida bitta o'zgaruvchining

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x) \\ v &= \psi(x) \end{aligned}$$

funksiyalar bo'lсин. U holda $R(u,v)$ funksiya $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarning ratsional funksiyasi bo'ladi. Masalan, ushbu

$$f(x) = \frac{x - 2\sqrt{x^2 - 1} + 1}{\sqrt{x^2 - 1}\sqrt{x^2 - 1}}$$

funksiya $u = \sqrt{x}, v = \sqrt{x^2 - 1}$ larning ratsional funksiyasidir, chunki,

$$R(u,v) = \frac{u - 2v + 1}{u + v}$$

Xususan, $\varphi(v)$ va $\psi(v)$ larning har biri v o'zgaruvchining ratsional funksiyalari bo'lса, u holda ushbu

$$R(u,v) = R(\varphi(v), \psi(v)) = R(x)$$

funksiya shu v o'zgaruvchining ratsional funksiyasi bo'ladi.

Haqiqatan, x o'zgaruvchining ratsional funksiyalaridan iborat $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ lar ustida qo'shish, ayirish, ko'paytirish, hamda bo'lish amallari bajarilsa, natijada x ning yana ratsional funksiyasi hosil bo'ladi.

10. $R(x, y(x))$ ko'rinishdagi funksiyalarni integrallash. Ushbu

$$\int R(x, y(x))dx \quad (8.32)$$

integralni qaraylik, bunda $R(x, y(x))$ funksiya x va $y(x)$ larning ratsional funksiyasidir.

Agar $y(x)$ funksiya x ning ratsional funksiyasi bo'lsa, ushbu

$$\int R(x, y(x))dx$$

integral ratsional funksianing integrali bo'ladi. Bunday integrallar 3- § da batafsil o'rGANildi

Agar $y(x)$ funksiya x o'zgaruvchining ratsional funksiyasi bo'lnasa, u holda ravshanki, $R(x, y(x))$ ham x o'zgaruvchining ratsional funksiyasi bo'lmaydi. Bu holda x o'zgaruvchini almashtirish yordamida $R(x, y(x))$ ni

ratsional funksiyaga keltirish masalasi kelib chiqadi. Agar biz shunday $x = \varphi(t)$ almashtirish topsakki, natijada $x = \varphi(t), y(x) = y(\varphi(t))$ lar x ning ratsional funksiyalari bo'lsa, (bunda $x' = \varphi'(t)$ ham ratsional funksiya bo'ladi), u holda

$$\int R(x, y(x))dx = \int R(\varphi(t), y(\varphi(t))) \cdot \varphi'(t)dt$$

bo'lib, $\int R(x, y(x))dx$ integralni hisoblash ushbu

$$\int R(\varphi(t), y(\varphi(t))) \cdot \varphi'(t)dt$$

ratsional funksianing integralini hisoblashga keltiriladi.

Endi $y(x)$ funksianing ba'zi bir konkret ko'rinishga ega bo'lgan hollarini qaraymiz:

1). (8.32) integralda

$$y(x) = \sqrt{\frac{ax + b}{cx + d}}$$

bo'lsin, bunda a, b, c, d o'zgarmas sonlar, $n \in N$. Bu holda (8.32) integral quyidagi

$$\int R(x, \sqrt{\frac{ax + b}{cx + d}})dx \quad (8.33)$$

ko'rinishni oladi. Bunda a, b, c, d sonlardan tuzilgan determinant noldan farqli, ya'ni

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

deb qaraymiz. Agar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

bo'lsa, a va b sonlar x, t sonlariga proporsional bo'lib, $\frac{ax+b}{cx+d}$ nisbatiga ga bog'liq bo'lmaydi va $R(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}})$ funksiya x o'zgaruvchining ratsional funksiyasi bo'lib, qoladi. Bu holda (8.33) integral 3 § da o'tganimagan integralga keladi. Shunday qilib, keyingi mulohazalarda $\Delta \neq 0$ deymiz.

(8.33) integralda

$$t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

almashtrish bajaramiz. Natijada

$$t^n = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \cdot x \quad \frac{dt^n}{dx} = \frac{b}{a+ct^n} = \varphi(t)$$

$$dx = \varphi'(t)dt = \frac{(ad+bc)nt^{n-1}}{(a+ct^n)^2} dt$$

bo'lib, (8.33) integral ushbu

$$\int R(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx = \int R(\varphi(t), t) \varphi'(t) dt = \int R\left(\frac{dt^n - b}{a+ct^n}, t\right) \frac{(ad+bc)nt^{n-1}}{(a+ct^n)^2} dt$$

ko'rinishni oladi.

Demak, qaralayotgan

$$\int R(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$$

integralni hisoblash ushbu $R\left(\frac{dt^n - b}{a+ct^n}, t\right) \frac{(ad+bc)nt^{n-1}}{(a+ct^n)^2}$ ratsional funksivaning integralini hisoblashga keladi.

8.9-misol. Ushbu

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} dx$$

integral hisoblansin.

◀ Bu integralni hisoblash uchun

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

deb olamiz. U holda

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} dx = \frac{4tdt}{(t^2 + 1)^2}$$

bo'lib,

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} dx = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2 + 1}$$

bo'ldi. Natijada berilgan integral uchun topamiz.

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} dx = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2 + 1} = 2t - 2 \arctan t + C = 2\sqrt{1-x} - 2 \arctan \sqrt{1-x} + C \quad \blacktriangleright$$

Quyidagi

$$\int R(x) \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^r \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' \dots \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^n dx \quad (8.34)$$

integralni qaraylik. Agar r, r_1, r_2, \dots, r_n ratsional sonlarni umumiy m maxtaiga keltirib, (8.34) integralda

$$t = \frac{ax+b}{cx+d}$$

almashtirish bajarilsa, natijada (8.34) integralni hisoblash ratsional funksiyani integrallashga keladi.

8.10-misol. Ushbu

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+3x}}$$

integralni hisoblang.

◀ Bu integralda $t = \sqrt{x}$ almashtirish bajaramiz. Natijada $x = t^2, dx = 2t^1 dt$

bo'lib, berilgan integral uchun topamiz:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+3x}} = 6 \int \frac{t^2 dt}{t+1} = 6 \int ((t^2 - t + 1) + \frac{1}{t+1}) dt = 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t + \ln(t+1) \right) + C = \\ = 6 \left(\frac{\sqrt{x}^3}{3} - \frac{\sqrt{x}^2}{2} + \sqrt{x} + \ln(\sqrt{x}+1) \right) + C = 2\sqrt{x} - \frac{3\sqrt{x}}{2} + 6\sqrt{x} + 6 \ln(\sqrt{x}+1) + C \quad \blacktriangleright$$

2). (8.32) integralda $y = v(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ bo'lsin, bunda a, b, c o'zgatmas sonlar bo'lib, $ax^2 + bx + c$ kvadrat uchhad teng ildizlarga eimas. (8.32) integral quyidagi

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \quad (a \neq 0) \quad (8.35)$$

ko'rinishda oladi.

Quyida keltiriladigan uchta almashtirish yordamida (8.35) integral ratsional funksiya integraliga keltiriladi.

a) $a > 0$ bo'lsin. Bu holda (8.35) integral

$$t = \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad (8.36)$$

(yoki $t = \sqrt{ax^2 + bx + c}$)

almashtirish natijasida ratsional funksiyani integrallashga keladi.

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx =$$

$$= \int R\left(\frac{t^2 - c}{2\sqrt{at+b}}, \frac{\sqrt{at^2 + bt + c}\sqrt{a}}{2\sqrt{at+b}}, \frac{2(\sqrt{at^2 + bt + c}\sqrt{a})}{(2\sqrt{at+b})^2}\right) dt$$

b) $a \neq 0$ bo'lsin. Bu holda (8.35) integral

$$t = \frac{1}{x} (\sqrt{ax^2 + bx + c} - x) \quad (8.37)$$

$$(yoki \quad t = \frac{1}{x} (\sqrt{ax^2 + bx + c} + x))$$

almashtirish yordanunda rasional funksiyani integrallashiga keladi.

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R\left(\frac{2\sqrt{at^2 + bt + c}\sqrt{a}}{a - t^2}, \frac{2(\sqrt{at^2 + bt + c}\sqrt{a})}{(a - t^2)^2}\right) dt$$

V) $ax^2 + bx + c$ kvadrat uchhad har xil x_1 va x_2 haqiqiy ildizlarga ega bo'lsin. Ma'lumki, x_1 va x_2 ildizlar orqali $ax^2 + bx + c$ kvadrat uchhadni

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu holda (8.35) integral ushbu

$$t = \frac{1}{x - x_1} \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad (8.38)$$

almashtirish bilan ushbu

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R\left(-\frac{x_2 + x_1 t}{t^2 - a}, \frac{a(x_1 - x_2)}{(t^2 - a)}, \frac{2a(x_1 - x_2)}{(t^2 - a)^2}\right) dt$$

ko'rinchga keladi. Bu tenghning o'ng tomonidagi integral ostidagi funksiya t o'zgaruvchining ratsional funksiyasıdir.

Odatda (8.36), (8.37) va (8.38) almashtirishlar Eyler almashtirishlari deb ataladi.

8.11-misol. $\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} dx$ integralni hisoblang.

◀ Bu integral uchun ($a=1$) Eylerning birinchi almashtirishini ((8.36) ga qarang) bajaramiz:

$$t = x + \sqrt{x^2 + x + 1}$$

U holda

$$x + \frac{t^2 - 1}{1 + 2t} \sqrt{t^2 + t + 1} = \frac{t^2 + t + 1}{1 + 2t}, dx = 2 \frac{t^2 + t + 1}{(1 + 2t)^2} dt$$

bo'lib, berilgan integral uchun

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} dx = 2 \int \frac{t^2 + t + 1}{t(1 + 2t)^2} dt$$

bo'ladi. Endi

$$2 \frac{t^{\frac{1}{2}} + t + 1}{(1+2t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{t^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{1+2t} - \frac{3}{(1+2t)^{\frac{3}{2}}}$$

bo'lishini e'tiborga olib, topamiz:

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} dx = 2 \ln t - \frac{3}{2} \ln |1+2t| + \frac{3}{2} \frac{1}{1+2t} + C \\ & = 2 \ln [x + \sqrt{x^2 + x + 1}] - \frac{3}{2} \ln |1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}| + \frac{3}{2} \frac{1}{1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}} + C \end{aligned}$$

2⁰. Binomial differensiallarni integrallash. Ushbu

$$x^m(a+bx^n)^p dx$$

differensial ifoda binomial differensial deb ataladi, bunda a, b o'zgarmas sonlar m, n, p ratsional sonlar.

Ushbu

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx \quad (8.37)$$

integralni hisoblash m, n, p ratsional sonlarga bog'liq. Mashhur rus matematigi P.L. Chebishev ko'rsatganki, (8.37) integral quyidagi uchta

1) p butun son,

2) $\frac{m+1}{n}$ butun son,

3) $\frac{m+1}{n} + p$ butun son,

holdagina ratsional funksiyalarning integrali orqali ifodalanadi.

1) p -butun son bo'lsin. Bu holda m va n ratsional sonlari (ya'ni kasrlar) maxrajining eng kichik umumiy bo'luvchisini δ orqali belgilab, (8.37) integralda $x=t^\delta$ almashtirish bajarilsa, integral ostidagi funksiya ratsional funksiyaga aylanib, (8.37) integral ratsional funksiyaning integraliga keltiriladi.

2) $\frac{m+1}{n}$ -butun son bo'lsin. Avval (8.37) integralda

$$x=t^{\frac{1}{n}}$$

almashtirish bajaramiz. Natijada (8.37) integral quyidagi

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n} \int (a+bt)^p t^{\frac{m+1}{n}-1} dt \quad (8.38)$$

ko'rinishni oladi. Qisqalik uchun

$$q = \frac{m+1}{n} - 1$$

deb belgilaymiz. Bu holda p kasi sonning maxrajini s bilan belgilab, (8.38) integralda

$$z = (a+bt)^p = (a+bx^n)^p$$

almashtirish bajarilsa, natijada integral ostidagi iloda ratsional funksiyaga aylanib, vana (8.37) integral ratsional funksiya integralini hisoblashga keltiriladi

3) $p \neq -1$, butun son bo'lsin. Yuqoridaqı (8.38) integralni quyidagicha yozib olamiz:

$$\int (a+bt)^p t^r dt = \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{r-p} dt.$$

Agar keyingi integralda

$$z = \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p$$

almashtirish bajarilsa, (8.37) integral ratsional funksiyaning integraliga keladi.

8.12-misol. Ushbu

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx$$

integral hisoblansin.

◀ Bu integralni (8.37) integral bilan taqqoslab, $p=-2$ (butun son) ekanligini aniqlaymiz. Yuqorida qaralgan 1) holga ko'ra $v=t^6$ ($t=\sqrt[3]{v}$) almashtirish bajarib topamiz:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx = 6 \int \frac{t^5}{(1+t^2)^2} dt$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi integral ostidagi funksiyani

$$\frac{t^8}{(1+t^2)^2} = t^4 - 2t^2 + 3 - 4 \cdot \frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{(t^2+1)^2}$$

ko'rinishda yozish mumkin ekanini e'tiborga olsak, u holda

$$\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2} dt = \frac{t^9}{5} - 2 \frac{t^7}{3} + 3t - 4 \operatorname{arctg} t + \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$$

bo'ladi. Oxirgi integral shu bobning 2-§ ida keltirilgan (8.17) rekurrent munosabat yordamida osongina hisobalnadi.

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C$$

Natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{5} t^9 - \frac{2}{3} t^7 + 3t - \frac{7}{2} \operatorname{arctg} t + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2+1} + C$$

Demak, $t=\sqrt[3]{x}$ ekanini e'tiborga olib, uzul - kesil yozamiz:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx = \frac{6}{5} \sqrt[3]{x}^9 - 4\sqrt[3]{x}^7 + 18\sqrt[3]{x}^5 - 21\operatorname{arctg} \sqrt[3]{x} + 3 \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} + C \blacktriangleright$$

8.13-misol. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$ integralni hisoblang.

► Bu integralni $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = \int x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}dx$ ko'rinishda yozib,

$m=1, n=\frac{2}{3}, p=\frac{1}{2}$ bo'lishini topamiz. Bu holda $\frac{m+1}{n}=\frac{3}{2}$ bo'lib,
 $t=(1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$

almashtirishni bajaramiz. Unda

$$1+x^{\frac{2}{3}}=t^2, x=t^2-1 \quad \text{va} \quad dx=\frac{3}{2}(t^2-1)^{\frac{1}{2}}2tdt$$

bo'lib, berilgan integral uchun ushbu

$$\int x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}dx=3\int(t^2-1)^{\frac{1}{2}}t^2dt=3\frac{t^7}{7}-6\frac{t^5}{5}+C, t=\sqrt[3]{1+x^{\frac{2}{3}}},$$

ifoda topiladi. ►

5-§. Trigonometrik funksiyalarni integrallash

Yuqorida gidek, $R(\sin x, \cos x)$ orqali $\sin x$ va $\cos x$ larning ratsional funksiyasini belgilaylik. Bunday ifodaning

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \quad (8.39)$$

integralning qaraylik.

Agar (8.39) integralda

$$t=\tg \frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi)$$

almashtirish bajarilsa, u holda (8.39) integral ostidagi $R(\sin x, \cos x)$ ifoda t o'zgaruvchining ratsional funksiyasiga aylanib, (8.39) integralni hisoblash ratsional funksiya integralini hisoblashga keladi.

Darhaqiqat, quyidagi

$$\sin x = \frac{2\tg \frac{x}{2}}{1 + \tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1 - \tg^2 \frac{x}{2}}{1 + \tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

munosabatlarni e'tiborga olsak, u holda (8.39) integral quyidagi

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}$$

ko'rinishga keladi. Ravshanki,

$$R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}$$

funksiya t o'zgaruvchining ratsional funksiyasi. Demak, (8.39) integralni hisoblash ratsional funksiya integralini hisoblashga keladi.

8.14-misol. $\int_{3+\sin x}^{\frac{dx}{\cos x}}$ integralni hisoblangu.

◀ Bu integralda $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ almashtirish bajarib topamiz:

$$\int_{3+\sin x}^{\frac{dx}{\cos x}} = \int_{3+\frac{2t}{1+t^2}}^{\frac{1}{2t}} \frac{2dt}{1+t^2} = 2 \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 3}$$

$$2 \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 1} = 2 \int \frac{d(t + \frac{1}{3})}{(t + \frac{1}{3})^2 + \frac{8}{9}} = 2 \int \frac{d(t + \frac{1}{3})}{(t + \frac{1}{3})^2 + (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} + C$$

Demak,

$$\int_{3+\sin x}^{\frac{dx}{\cos x}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{3\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2\sqrt{2}} + C \blacktriangleright$$

Shuni ta'kidlash lozimki, $\int R(\sin x, \cos x) dx$ integralda $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ almashtirish universal almashtirish bo'lib, u (8.39) integralni har doim ratsional funksiya integraliga keltirsada ko'pincha bu almashtirish murakkab hisoblashlarga olib keladi.

Ayrim hollarda trigonometrik funksiyalarni integrallashda $t = \operatorname{tg} x, t = \sin x, t = \cos x$ almashtirishlar qulay bo'ladi.

8.15-misol. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ integral hisoblansin.

◀ Agar bu integralda $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ universal almashtirish bajarilsa,

u holda

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = 2 \int \frac{(1+t^2)^3}{(1-t^2)^4} dt$$

bo'ladi. Biroq qaratayotgan integralda $t = \operatorname{tg} x$ almashtirish bajarilsa, u holda

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \int (1 + t^2) dt$$

bo'lib, undan

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = t + \frac{t^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$$

bo'lishini topamiz. ►

Mashqlar

8.16. Ushbu

$$f(x) = x|x|, \varphi(x) = e^{-|x|} \quad (x \in R)$$

funksiyalarning $(-\infty, +\infty)$ daagi boshlang'ich funksiyalari topilsin

8.17. Ushbu

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

integral hisoblansin.

8.18. Ushbu

$$\int e^x \cos bx dx$$

integral hisoblansin.

8.19. Quyidagi

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a > 0)$$

$$2) \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C \quad (a > 0)$$

$$3) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$4) \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$$

tengliklar isbotlansin.

8.20. Ushbu

$$\int \frac{\sin 4x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

integral hisoblansin.

IX BOB

Aniq integral

Funksiyaning aniq integrali matematik analizning muhim tushunchalaridan biri.

Tabiatda, texnikada va fanning turli sohalarida uchraydigan ko'pgina masalalar (shaklning yuzi, egn chiziqning uzunligi, bajarilgan ishl miqdori, inersiya momenti, jisning hajmi va h.k. larni topish masalalari) aniq integral yordamida hal etiladi.

Ushbu bobda funksiyaning aniq integrali nazariyasini batafsil bayon etamiz.

1-§. Aniq integral tushunchasi

1⁰. $[a,b]$ ni bo'laklash Biror $[a,b] \subset R$ segment berilgan bo'lisin. Uning ushbu

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

munosabatda bo'lgan chekli sondagi ixtiyoriy $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ nuqtalari sistemasini olaylik. Agar $A_i = [x_{i-1}, x_i], \quad i=1,2,\dots,n$ deb belgilasak, u holda ravshanki,

- 1) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = [a,b]$.
- 2) $A_k \cap A_j = \emptyset, (k,j=1,2,\dots,n)$.

Mazkur kursning 1- bobidagi to'plamni bo'laklash tushunchasi ta'rifiga binoan $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ sistema $[a,b]$ da bo'laklash bajargan bo'ladi, va aksincha, agar bizga $[a,b]$ segmentning biror chekli $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ bo'laklashi berilgan bo'lsa, u ushbu

$$y_0 = a < y_1 < y_2 < \dots < y_m = b$$

munosabatda bo'lgan chekli sondagi $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m$ nuqtalar sistemasini aniqlaydi. Binobarin, biz to'plamni bo'laklash ta'rifiga ekvivalent bo'lgan quyidagi ta'rifni kirita olamiz.

1-ta'rif. $[a,b]$ segmentning ushbu

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

munosabat bo'lgan ixtiyoriy chekli sondagi $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ nuqtalari sistemasi $\{x_i\}$ segmentda bo'laklash bajaradi deyladi. U

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

kabi belgilanadi.

Har bir x_k ($k = 0, 1, \dots, n$) nuqta bo'laklashning bo'luvchi nuqtasi, $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) segment esa P bo'laklashning oralig'i deviladi.

P bo'laklash oraliglari uzunligi $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) eng kattasi, ya'ni ushbu

$$\lambda_k = \max\{\Delta x_k\} = \max\{\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}\}$$

iniqdon P bo'laklashning diametri deb ataladi. $[a, b]$ segment berilgan holda bu segmentni turli usullar bilan istalgan sondagi bo'laklashlarni tuzish mumkin ekan. Bu bo'laklashlardan iborat to'plamni F bilan belgilaymiz: $F = \{P\}$

2º. Integral yig'indi. $[a, b]$ segmentda $f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Shu segmentni

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n\} \in F$$

bo'laklashi va bu bo'laklashning har bir $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) oralig'ida ixtiyoriy ξ_k ($\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$) nuqta olamiz. Berilgan funksiyaning ξ_k nuqtadagi qiymati $f(\xi_k)$ ni $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ga ko'paytirib, quyidagi yig'indini tuzamiz:

$$\sigma = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_k)\Delta x_k + \dots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

2-ta'rif. Ushbu

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \quad (9.1)$$

yig'indi $f(x)$ funksiyaning integral yig'indisi deb ataladi.

Masalan, 1) $f(x) = x$ funksiyaning $[a, b]$ segmentdagи integral yig'indisi

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \Delta x_k$$

bo'ladi, bunda

$$x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

3) Dirixli funksiyasi

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \in [a, b] \text{ ratsional son bo'lsa}, \\ 0, & \text{agar } x \in [a, b] \text{ irratsional son bo'lsa}. \end{cases}$$

ning integral yig'indisi quyidagi

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \begin{cases} b - a, & \text{agar barcha } \xi_k \text{ ratsional son bo'lsa}, \\ 0, & \text{agar barcha } \xi_k \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Ravshanki, $f(x)$ funksiyaning integral yig'indisi σ a) $f(x)$ funksiyaga, b) $[a,b]$ segmentni bo'laklash usuliga vj har bir $[x_i, x_{i+1}]$ segmentdan olingan ξ_i nuqtalarga bog'liq bo'ladi.

3⁰. Aniq integral ta'rif. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan bo'lisin. $[a,b]$ segmentning shunday

$$P_1, P_2, \dots, P_m, \dots \quad (9.2)$$

($P_m \in F$, $m = 1, 2, \dots$) bo'laklashlarning qaraymizki, ularning mos diametrlaridan tashkil topgan

$$\lambda_{P_1}, \hat{\lambda}_{P_1}, \lambda_{P_2}, \dots, \hat{\lambda}_{P_m}, \dots$$

ketma – ketlik nolga intilsin: $\lambda_{P_m} \rightarrow 0$.

Bunday P_m ($m = 1, 2, \dots$) bo'laklashlarga nisbatan $f(x)$ funksiyaning integral yig'indilarini tuzamiz. Natijada $[a,b]$ segmentni (9.2) bo'laklashlarga mos $f(x)$ funksiyaning integral yig'indilari qiymatlaridan iborat quyidagi

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$$

ketma – ketlik hosil bo'ladi. Ravshanki, bu ketma – ketlikning har bir hadi ξ_i nuqtalarga bog'liqdır.

3-ta'rif. Agar $[a,b]$ segmentni har qanday (9.2) bo'laklashlar ketma – ketligi $\{P_m\}$ olinganda ham unga mos integral yig'indi qiymatlaridan iborat $\{\sigma_m\}$ ketma – ketlik ξ_i nuqtalarining tanlab olinishiga bog'liq bo'limgan ravishda hamma vaqt bitta / songa intilsa, bu / son σ yig'indining $\lambda_P \rightarrow 0$ dagi limiti deb ataladi. U

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$$

kabi belgilanadi.

Yig'indi limitini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

4-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $[a,b]$ segmentni diametri $\lambda_P < \delta$ bo'lgan har qanday P bo'laklash uchun tuzilgan σ yig'indi ixtiyorligi ξ_i nuqtalarda

$$|\sigma - J| < \varepsilon$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, / son σ yig'indining $\lambda_P \rightarrow 0$ dagi

limiti deb ataladi.

5-ta'rif. Agar $\varepsilon > 0$ da $f(x)$ funksivaning integral yig'indisi (9.1) chekli limitga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda integrallanuvchi deyiladi, σ yig'indining chekli limiti J esa $\lim_{\lambda_i \rightarrow 0} f(\xi_i)$ funksivaning $[a, b]$ segmentdag'i *aniq integrali* deb ataladi. Funksivaning aniq integrali

$$\int_a^b f(x) dx$$

kabi belgilanadi.

Demak,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda_i \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Bunda a son integralning quyi chegarasi, b son esa integralning yuqori chegarasi, $\{a, b\}$ segment integrallash oraliq'i deb ataladi.

Agar $\lambda_i \rightarrow 0$ da yig'indining limiti mavjud bo'lmasa yoki uning limiti cheksiz bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda integrallanmaydi deyiladi.

9.1-misol. $f(x) = C = const$ funksivaning $[a, b]$ segmetndagi integrali hisoblansin.

► $[a, b]$ segmentni ixtiyoriy

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

bo'laklashni olib, $f(x) = C$ funksivaning integral yig'indisini topamiz:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=0}^{n-1} C \cdot \Delta x_k = C \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = C[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})] = \\ &= C(x_n - x_0) = C(b - a). \end{aligned}$$

Ravshanki,

$$\lim_{\lambda_i \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_i \rightarrow 0} C(b - a) = C(b - a).$$

Demak,

$$\int_a^b C dx = C(b - a). \blacktriangleright$$

Xususan, $f(x) = 1$ bo'lganda quyidaqiga egamiz:

$$\int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a$$

9.2-misol. Ushbu $f(x) = x$ funksivaning $[a, b]$ segmentdag'i integrali hisoblansin.

► Ma'lumki, $[a, b]$ segmentda $f(x) = x$ funksivaning integral

Yig'indisi

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \lambda_k$$

bo'lib, bunda $\lambda_k = x_{k+1} - x_k$ va

$$\lambda_k + \xi_k < \lambda_k$$

Bu tengsizlikni $\lambda_k > 0$ ga ko'paytirib topamiz:

$$x_k - \lambda_k \leq \xi_k + \lambda_k \leq x_{k+1} + \lambda_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

Keyingi tengsizliklardan esa

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \lambda_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \lambda_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \lambda_k$$

tengsizliklar kelib chiqadi.

Demak,

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \lambda_k \leq \sigma \leq \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \lambda_k$$

Endi $\sum_{k=0}^{n-1} x_k \lambda_k$ va $\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \lambda_k$ yig'indilarni quyidaqicha o'zgartirib yozab olamiz:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} x_k \lambda_k &= \sum_{k=0}^{n-1} x_k (x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)^2 = \frac{1}{2} (x_n^2 - x_0^2) - \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda x_k^2 = \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda x_k^2. \end{aligned}$$

Agar $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$ ekanini e'tiborga olsak, u holda

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \lambda_k = \sum_{k=0}^{n-1} (x_k + \Delta x_k) \lambda_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \lambda_k + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k \lambda_k = \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2.$$

Demak,

$$\frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \leq \sigma \leq \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda x_k^2.$$

Bu munosabatdan

$$\left| \sigma - \frac{b^2 - a^2}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda x_k^2.$$

Tengsizlik kelib chiqadi. So'ngra $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda x_k^2$ uchun

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda x_k^2 \leq \lambda, \quad \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda x_k^2 \leq \frac{b^2 - a^2}{2} \lambda.$$

(bunda $\lambda = \max_k \{\lambda x_k\}$) bo'lishidan $\lambda \rightarrow 0$ da

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda x_k^2 \rightarrow 0$$

bo'lishini topamiz.

Demak,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sigma = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Bu esa ta'tifga ko'ra

$$\int_a^b u(x) dx = \frac{u(b) - u(a)}{2}$$

ekanligini bildiradi. ►

9.3-misol. $[a, b]$ segmentda Dirixle funksiyasi uchun aniq integral mavjud emasligini ko'rsatilsin.

◀ Dirixle funksiyasi $D(x)$ uchun integral yig'indi quyidagicha bo'lishini ko'rjan edik:

$$\sigma = \begin{cases} b - a, & \text{agar barcha } \xi_i \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar barcha } \xi_i \text{ irratsional son bo'lsa.} \end{cases}$$

Ravshanki $\lambda, \lambda > 0$ da σ yig'indi limitga ega emas. Demak, Dirixle funksiyasi $[a, b]$ segmentda integrallanmaydi. ►

Odatda, yuqorida keltirilgan aniq integral Riman integrali, integral yig'indi Riman yig'indisi deyiladi.

1-estatma. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda chegaralanimagan bo'lsa, u shu segmentda integrallanmaydi.

4º. Darbu yig'indiları. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda aniqlangan bo'lib, shu oraliqda chegaralangan bo'lsin:

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [a, b]$$

$[a, b]$ oraliqni biron

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset E$$

($a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$) bo'laklashni olaylik. Bu funksiyaning aniq chegaralari

$$m_k = \inf\{f(x)\}, x \in [x_k, x_{k+1}],$$

$$M_k = \sup\{f(x)\}, x \in [x_k, x_{k+1}]$$

mavjud (2-bo'b, 6 - §).

Ravshanki, ixtiyoriy $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ uchun

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k \tag{9.3}$$

bo'ladi. Endi m_k va M_k sonlarni $\{x_k, x_{k+1}\}$ oraliqning uzunligi $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ($k = 0, 1, \dots, n - 1$)ga ko'paytirib quyidagi

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k + m_n \Delta x_n + m_0 \Delta x_1 + \dots + m_{n-1} \Delta x_n + \dots + m_{n-1} \Delta x_{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k + M_n \Delta x_n + M_0 \Delta x_1 + \dots + M_{n-1} \Delta x_n + \dots + M_{n-1} \Delta x_{n-1}$$

yig'indilarini tuzamiz.

6-tarif Ushbu

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = a \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i.$$

yig'indilar mos ravishda Darbutning quyi hamda yuqori yig'indilari deb ataladi.

Darbu yig'indilari funkisiyaqa hamda / bo'laklashqa bog'liq:

$$s = s(p), S = S(P)$$

va har doim

$$s(p) \in S(P)$$

bo'ladi.

(9.3) tengsizliklarni Δx_i ga ko'paytirib topamiz:

$$m_i \Delta x_i \leq f(\xi_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

Keyingi tengsizliklardan esa

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Demak,

$$s(p) \in \sigma \in S(P)$$

Shunday qilib, $f(x)$ funkisiyaning integral yig'indisi har doim uning Darbu yig'indilari otasida bo'lar ekan.

(9.3) munosabatdan yana bitta xulosa chiqarish mumkin: e nuqtani tanlab olish hisobiga $f(\xi_i)$ ni m_i , shuningdek, M_i qiymatlarga har qancha yaqin keltirish mumkin. Bundan esa Darbutning quyi va yuqori yig'indilari berilgan bo'laklash uchun integral yig'indining mos ravishda aniq quyi hamda aniq yuqori chegaralarini bo'lishi kelib chiqadi:

$$s = \inf_a \{s\}, S = \sup_b \{s\}$$

Aniq chegaralar xossalardan foydalanib topamiz:

$$m \leq m_i \Delta x_i \leq M \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

Natijada

$$s(P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \geq m \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = m(b-a)$$

$$S(P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i \leq M \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = M(b-a)$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = b - a$$

Demak, $\forall P \in U$ uchun quyidagi

$m(b-a) \cdot s(P) : S(P) \in M(b-a)$ (9.4)
 tengsizliklar o'tinli bo'ladi. Bu esa Darbu yig'indilarning chegaralanganligini bildiradi.

5⁰. Aniq integralning boshqacha ta'rifi $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda aniqlangan bo'lib, u shu oraliqda chegaralangan bo'lsin. $[a, b]$ oraliqni bo'laklashlar to'plamni $F : \{P\}$ ning har bir $P \in F$ bo'laklashi uchun $f(x)$ funksiyaning Darbu yig'indilari $s(P), S(P)$ ni tuzib,

$\{s(P)\}, \{S(P)\}$
 to'plamlarni qaraymiz. Bu to'plamlar (9.4) ga ko'ra chegaralangan bo'ladi.

7-ta'rif. $\{s(P)\}$ to'plamning aniq yuqori chegarasi $f(x)$ funksiyaring $[a, b]$ oraliqdagi quyi integrali deb ataladi. U

$$J = \int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi.

$\{S(P)\}$ to'plamning aniq quyi chegarasi $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ oraliqdagi yuqori integrali deb ataladi. U

$$J = \int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$J = \int_a^b f(x)dx = \sup \{s(P)\},$$

$$J = \int_a^b f(x)dx = \inf \{S(P)\}$$

8-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ oraliqdagi quyi hamda yuqori integrallari bir biriga teng bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi deyiladi, ularning umumiy qiymati

$$J = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqdagi aniq integrali deyiladi. Agar

$$\int_a^b f(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanmaydi deyiladi.

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

2-§. Aniq integralning mavjudligi

1º. Darbu yig'indilarining xossalari. Faraz qilaylik, \mathcal{P} to'plam $[a, b]$ oraliqning barcha bo'laklashlaridan iborat to'plam bo'lisin. Agar $P_i \in \mathcal{P}$ bo'laklashning hat bir bo'luvchi nuqtasi $P_i \in P$ bo'laklashning ham bo'luvchi nuqtasi bo'lsa, P_i bo'laklash P_i ni ergashtiradi deyiladi va $P_i \in P$, kabi belgilanadi.

Aytaylik, $s(P)$ funksiya $\{\mathcal{P}\}$ oraliqdagi chegaralangan bo'lib, $P_i \in \mathcal{P}$ va $P_j \in \mathcal{P}$ bo'laklashlari uchun Darbu yig'indilari

$$s(P_1), S(P_1), s(P_2), S(P_2)$$

bo'lisin.

1). Agar $P_1 \subset P_2$ bo'lsa, u holda

$$s(P_1) \leq s(P_2), S(P_1) \geq S(P_2)$$

bo'ladi.

2). $\forall P_i \in \mathcal{P}, \forall P_j \in \mathcal{P}$ uchun

$$s(P_2) \leq S(P_1)$$

bo'ladi.

3). Darbu yig'indilarida tuzilgan

$$\{s(P)\}, \{S(P)\} \quad (P \in \mathcal{P})$$

to'plam uchun

$$\sup_{\mathcal{P}} \{s(P)\} \sim \inf_{\mathcal{P}} \{S(P)\}$$

ya'mi

$$\underline{J} \leq \bar{J}$$

bo'ladi.

4). Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ topiladiki, diametri $\lambda_i < \delta$ bo'lgan $[a, b]$ oraliqning P bo'laklashlari uchun

$$S(P) < \inf \{S(P)\} + \varepsilon,$$

$$s(P) > \sup \{s(P)\} - \varepsilon$$

ya'mi

$$S(P) < \bar{J} + \varepsilon, s(P) > \underline{J} - \varepsilon$$

bo'ladi.

Bu xossalardan birining masalan 2)- ning isbotini keltiramiz.

◀ Aytaylik, P_1 va P_2 lar $[a, b]$ oraliqning ixtiyoriy bo'laklashlari bo'lisin. Bu bo'laklashlarning barcha bo'luvchi nuqtalari yordamida $[a, b]$ ning yangi P bo'laklashini hosil qilamiz. Ravshanki,

$$P_1 \subset P, P_2 \subset P$$

bo'ladi. P bo'laklash uchun tuzilgan Darbu yig'indilari $s(P)$ va

$S(P)$ lar uchun 1) - xossaga ko'ra

$$s(P_i) \leq s(P), S(P) \leq S(P_i)$$

$$s(P_i) \leq s(P), S(P) \geq S(P_i)$$

bo'lib, ulardan

$$s(P_i) \leq s(P) \leq S(P) \leq S(P_i)$$

ya'ni

$$s(P_i) \leq S(P_i)$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

Bu xossa $[a, b]$ oraliqni bo'laklashlar uchun tuzilgan quyi yig'indilar to'plami $\{s(P)\}$ ning har bir elementi yuqorida yig'indilar to'plami $\{S(P)\}$ ning istalgan elementidan katta emasligini bildiradi. (Qolgan xossalarning isboti [1] ning 9 - bobidan qaralsin).

2⁰. Aniq integralning mavjudligi. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda chegaralangan bo'lsin.

1-teorema. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lishi uchun $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilib, $[a, b]$ oraliqni diametri $\lambda_p < \delta$ bo'lgan har qanday P bo'laklashi uchun Darbu yig'indilari

$$S(P) - s(P) < \varepsilon$$

tengsizlikni qanoatlantirishi zarur va yetarli.

◀ Zarurligi. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra $J = \underline{J} = \overline{J}$ bo'ladi, bunda

$$\underline{J} = \sup\{s(P)\}, \overline{J} = \inf\{S(P)\}$$

$\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $[a, b]$ oraliqning diametri $\lambda_p < \delta$ bo'lgan har qanday P bo'laklashida Darbu yig'indilari uchun 1⁰ – dagi 4) xossaga ko'ra $S(P) - J < \frac{\varepsilon}{2}, \underline{J} - s(P) < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar o'rini bo'lib, undan $S(P) - s(P) < \varepsilon$ tengsizlik kelib chiqadi.

◀ Yetarliliqi. $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilib, $[a, b]$ oraliqni diametri $\lambda_p < \delta$ bo'lgan har qanday P bo'laklashida Darbu yig'indilari uchun

$$S(P) - s(P) < \varepsilon$$

tengsizlik o'rini bo'lsin. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda chegaralanganligi uchun uning quyi hamda yuqori integrallari

$$\underline{J} = \sup\{s(P)\}, \overline{J} = \inf\{S(P)\}$$

mavjud va 1⁰. dagi 3) – xossaga ko'ra $\underline{J} \leq \overline{J}$ tengsizlik o'rini bo'ladi. Ravshanki,

$$s(P) \leq I \leq S(P)$$

Bu munosabatdan

$$0 \leq I - I \leq S(P) - s(P)$$

bo'lishini topamiz. Demak, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $0 \leq I - I < \varepsilon$ bo'lib, undan $I = I$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi ekanligini bildiradi. ▶

Agar avvalgidek $f(x)$ funksiyaning $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) oraliqdagi tebranishini ω_k orqali belgilasak, u holda

$$S(P) - s(P) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$$

bo'lib, yugorida keltirilgan teorema quyidaqicha ifodalanadi.

2-teorema. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lishi uchun $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilib, $[a, b]$ oraliqni diametri $\lambda < \delta$ bo'lган har qanday P bo'laklashda

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \quad (9.5)$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Ravshanki, (9.5) munosabatni quyidagi

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

3-§. Integrallanuvchi funksiyalar sinfi

Ushbu paragrafda aniq integralning mavjudligi haqidagi teoremadan foydalanib, ba'zi funksiyalarning sinfi integrallanuvchi bo'lishini ko'rsatamiz.

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda aniqlangan bo'lsin.

3-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.

◀ $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsin. Veyershtrassning birinchi teoremasiga (5-bobdag'i 7-teoremaga qarang) ko'ra funksiya $[a, b]$ da chegaralangan. Ikkinci tomondan, Kantor teoremasining (5-bobdag'i 10-teoremaga qarang) 3-natijaga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $[a, b]$ oraliqni uzluklari δ dan kichik bo'lган bo'laklarga ajratilganda funksiyaning har bir bo'lakdag'i tebranishi uchun $\omega_i < \varepsilon$ tengsizlik o'rini bo'ladi. Demak, $[a, b]$ oraliqni diametri $\lambda < \delta$ bo'lган har qanday P bo'laklashda

$$S(P) = (f(b) - f(a)) \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i + r \sum_{i=0}^{n-1} (m_i + r)(\bar{x}_i - x_i)$$

bo'lib, undan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = 0$$

kelib chiqadi. Demak, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da integrallanuvchi. ►

4-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda chegaralangan va monoton bo'lsa, funksiya shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.

◀ $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da chegaralangan va shu oraliqda, aytaylik, o'suvchi bo'lsin. $\forall \varepsilon > 0$ sonni olib, unga ko'ra $\delta > 0$ sonni quyidagicha tanlaylik:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{|f(b) - f(a)|} > 0$$

So'ngra $[a, b]$ oraliqni diametri $\lambda < \delta$ bo'lqan P bo'laklashi uchun Darbu yig'indilari $S(P)$ va $s(P)$ ni tuzamiz. U holda

$$\begin{aligned} S(P) - s(P) &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{|f(b) - f(a)|} \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|f(b) - f(a)|} [f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})] = \\ &= \frac{\varepsilon}{|f(b) - f(a)|} (f(x_n) - f(x_0)) = \frac{\varepsilon}{|f(b) - f(a)|} (f(b) - f(a)) = \varepsilon \end{aligned}$$

Demak, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi. ►

Chegaralangan hamda kamayuvchi funksiyaning integrallanuvchi bo'lishi ham xuddi shunga o'xshash isbotlanadi.

5-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda chegaralangan va bu oraliqning chekli sondagi nuqtalarida uzulishga ega bo'lib, qolgan barcha nuqtalarida uzliksiz bo'lsa, funksiya shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.

◀ $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da chegaralangan bo'lib, shu oraliqning faqat bitta $x^* \in (x^* \in [a, b])$ nuqtasida uzulishga ega, qolgan barcha nuqtalarida uzliksiz bo'lsin.

$\forall \varepsilon > 0$ son olib, x^* nuqtaning

$$U_\varepsilon(x^*) = \{x : x \in R, x^* - \varepsilon < x < x^* + \varepsilon\}$$

atrofini tuzamiz. Bu atrof $[a, b]$ oraliqni

$$U_\varepsilon(x^*) \setminus [a, b] \cup U_\varepsilon(x^*) = [a, x^* - \varepsilon] \cup [x^* + \varepsilon, b]$$

qismlarga ajratadi.

Shartga ko'ra, $f(x)$ funksiya $[a, x^* - \varepsilon]$ va $[x^* + \varepsilon, b]$ oraliqlarning har birida uzliksiz. Bu oraliqlarning har biriga alohida Kantor teoremasining natijasini (5-bobdag'i 3-natijani qarang)

qo'llanamiz. U holda olingan $x > 0$ son uchun shunday $\delta_1 > 0$ va $\delta_2 > 0$ sonlar topiladiki,

$$[x^* + \delta_1] \text{ da } \omega_1 < \delta_1 \text{ dan } \omega_1 < \varepsilon, \\$$

$$[x^* - \delta_2] \text{ da } \omega_2 < \delta_2 \text{ dan } \omega_2 < \varepsilon.$$

tengsizliklar o'tinli ekani kelib chiqadi. Agar $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ deb olsok, u holda ikkala oraliq uchun bir vaqtida

$$\omega_i < \delta \text{ dan } \omega_i < \varepsilon.$$

tengsizlikning o'tinli ekani kelib chiqadi.

Endi yuqoridaqgi $\forall \varepsilon > 0$ songa ko'ra $\delta > 0$ sonni $\delta < \varepsilon$ deb olaylik.

$[a, b]$ oraliqni diametri $\lambda < \delta$ bo'lgan bo'laklashlari uchun $f(x)$ funksiyaning Darbu yig'indilarini tuzib, quyidagi

$$S(P) - s(P) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \quad (9.6)$$

ayirmanı qaraymiz. (9.6) yig'indining har bir hadida $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) oraliqning uzunligi Δx_i qatnashadi. Bu $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqlarning x^* nuqtaning $U_\varepsilon(x^*)$ atrofidan tashqarida joylashganiga, ya'ni $[x_i, x_{i+1}] \cap U_\varepsilon(x^*) \neq \emptyset$ munosabat o'tinli bo'ladiganiga mos keladigan (9.6) yig'indining hadlaridan tuzilgan yig'indi

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i$$

bo'lsin. (9.6) yig'indining qolgan barcha hadlaridan tashkil topgan yig'indi

$$\sum_i^* \omega_i \Delta x_i$$

bo'lsin, bunda $[x_i, x_{i+1}] \subset U_\varepsilon(x^*)$ yoki $[x_i, x_{i+1}] \cap (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon) \neq \emptyset$ yoki $[x_i, x_{i+1}] \cap (x^* + \varepsilon) \neq \emptyset$ bo'ladi.

Natijada (9.6) yig'indi ikki qismga ajraladi:

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i = \sum_i^* \omega_i \Delta x_i + \sum_i^* \omega_i \Delta x_i \quad (9.7)$$

Endi bu yig'indilarni baholaymiz. Yuqoridaqgi (9.6) munosabatdan foydalanib, topamiz:

$$\sum_i^* \omega_i \Delta x_i < \sum_i^* \varepsilon \cdot \Delta x_i > \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon(h - a) \quad (9.8)$$

Ikkinci yig'indi uchun

$$\sum_i^* \omega_i \Delta x_i + \sum_i^* \Omega \cdot \Delta x_i = \Omega \cdot \sum_i^* \Delta x_i$$

bo'lishini topamiz, bunda $\Omega = f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ oraliqdagi tebranishi.

Agar $\forall \epsilon > 0$ atrofda butunloy joylashgan $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ oraliqlari uzunliklarining vig'indisi ω dan kichikligini hamda $\forall \epsilon > 0$ va $\forall \epsilon < \nu$ nuqtalarni o'z ichiga olgan $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ oraliqlari ikkita bo'lib, ularning uzunliklari vig'indisi ham ν (chunki $\delta > \nu$) dan kichik bo'lishini e'tiborga olsak, u holda

$$\sum_{i=0}^n w_i < \nu \quad (9.9)$$

bo'ladi. Natijada (9.7), (9.8) va (9.9) munosabatlardan

$$\sum_{i=0}^n w_i \Delta x_i < \nu(b-a) + \nu \Omega - \nu [(b-a) + \Omega]$$

ekani kelib chiqadi. Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} w_i \Delta x_i = 0$$

Bu $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ da integrallanuvchi bo'lishini bilditadi.

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqning chekli sondagi nuqtalarida uzilishqa ega bo'lib, qolgan batcha nuqtalarida uzlusiz bo'lsa, uning $[a, b]$ da interallanuvchi bo'lishi yuqoridaqidek isbot etiladi. ►

2-eslatma. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. Biz

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(v) dv$$

hamda

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

tengliklar o'rini deb kelishib olamiz.

4-§. Aniq integralning xossalari

Endi $f(x)$ funksiya aniq integralining xossalari o'rGANAMIZ.

1-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u istalgan $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ oraliqda ham integrallanuvchi bo'ladi.

◀ $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da integrallanuvchi bo'lsin. U holda 1 teoremaga ko'ra $\forall \epsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $[a, b]$ oraliqni diametri $x - x' < \delta$ bo'lgan har qanday $P: \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bo'laklash uchun

$$S(P) - s(P) < \nu \quad (9.10)$$

tengsizlik bajariladi.

bo'laklashning bo'luvchi nuqtalarini $\{x_i\}$ va qatonga α hamida β nuqtalarini qo'shib, $[a, b]$ oraliqni yangi P_1 bo'laklashni hosil qilamiz. Ravshanki, $P \in P_1$ bo'ladi. U holda Darbu yig'indilarning xossasiga ko'ra ushbu bobning 4 §, 2 - bandiga qarateng:

$$s(P) \leq s(P_1), S(P_1) \leq S(P) \quad (9.11)$$

tengsizliklari o'rinni bo'ladi. (9.10) va (9.11) munosabatlardan

$$S(P_1) - s(P_1) < \varepsilon \quad (9.12)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

$[\alpha, \beta]$ oraliqdagi P_1 bo'laklashning bo'luvchi nuqtalarini $\{\alpha, \beta\}$ oraliqning biror P_1 bo'laklashning bo'luvchi nuqtalari sifatida qaraymiz. Bu P_1 bo'laklash uchun $f(x)$ funksiyaning Darbu yig'indilari $s(P_1), S(P_1)$ bo'lisin. U holda

$$S(P_1) - s(P_1) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i,$$

$$S(P_1) - s(P_1) = \sum_{i \neq j} (M_i - m_i) \Delta x_i$$

yig'indilarni taqqoslab,

$$S(P_1) - s(P_1) > S(P_1) - s(P_1)$$

bo'lishini topamiz. Natijada (9.12) munosabatni e'tiborga olsak

$$S(P_2) - s(P_2) < \varepsilon$$

kelib chiqadi. Bundan 1 teoremagaga ko'ra $f(x)$ funksiyaning $[\alpha, \beta]$ oraliqda integrallanuvchi ekani kelib chiqadi. ►

2-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ hamda $[c, d]$ oraliqlarida integrallanuvchi bo'lsa, u holda funksiya $[\alpha, \beta]$ oraliqda ham integrallanuvchi bo'ladi va ushbu

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

formula o'rini.

◀ $f(x)$ funksiya $[a, c]$ hamda $[c, b]$ oraliqlarda integrallanuvchi bo'lisin ($a < c < b$). U holda $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham $\frac{\varepsilon}{2}$ songa ko'ra shunday $\delta_1 > 0$ son topiladiki, $[a, c]$ oraliqni diametri $x_1 - x_0 < \delta_1$ bo'lgan har qanday P_1 bo'laklashida Darbu yig'indilari uchun

$$S(P_1) - s(P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik o'rini bo'ladi. Shuningdek, o'sha $\frac{\varepsilon}{2}$ songa ko'ra shunday $\delta_2 > 0$ son topiladiki, $[c, b]$ oraliqni diametri $x_n - x_{n-1} < \delta_2$ bo'lgan har qanday P_2 bo'laklashida Darbu yig'indilari uchun

$$S(P) - s(P) < \frac{\epsilon}{2}$$

tengsizlik o'tinli bo'ladi. Endi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ debi $[a, b]$ oraliqni diametri $\lambda < \delta$ bo'lgan ixтиорија P bo'laklashni олавлик. Bu bo'laklashning bo'luchchi nuqtalari qatoriga $c \in (a, c < b)$ nuqtani ham qo'shib. $[a, b]$ oraliqni yangi P' bo'laklashni hosil qilamiz. Bu bo'laklash uchun Darbu yig'indilar $S(P), s(P)$ bo'lsin. $[a, c]$ oraliqdagi P' bo'laklashning bo'luchchi nuqtalarini shu $[a, c]$ oraliqni biror P'_1 bo'laklashning bo'luchchi nuqtalari $[c, b]$ oraliqni biror P'_2 bo'laklashning bo'luchchi nuqtalari sitatida qaraymiz. Bu bo'laklashlar uchun Darbu yig'indilarini tuzamiz:

$$S(P'_1), s(P'_1), S(P'_2), s(P'_2)$$

Ravshanki, bu yig'indilar uchun mos ravishda yuqoridaq (9.13), (9.14) tengsizliklar o'rinni bo'ladi:

$$S(P'_1) - s(P'_1) < \frac{\epsilon}{2},$$

$$S(P'_2) - s(P'_2) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ikkinchi tomonidan,

$$S(P) = S(P'_1) + S(P'_2),$$

$$s(P) = s(P'_1) + s(P'_2)$$

bo'lib, natijada

$$S(P) - s(P) = [S(P'_1) - s(P'_1)] + [S(P'_2) - s(P'_2)] < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $\forall \epsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $[a, b]$ oraliqni diametri $\lambda < \delta$ bo'lgan har qanday P bo'laklashida Darbu yig'indilar uchun

$$S(P) - s(P) < \epsilon$$

bo'ladi. Bu esa 1-teoremagaga ko'ra $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi ekanini ko'rsatadi.

Yuqoridaqgi P bo'laklash uchun $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ oraliqdagi integral yig'indilarini tuzib, ularni mos ravishda quyidagi

$$\sum_{[a, b]} f(\xi_k) \Delta x_k, \quad \sum_{[c, d]} f(\xi_k) \Delta x_k, \quad \sum_{[e, f]} f(\zeta_k) \Delta x_k.$$

ko'rinishda belgilasak, u holda

$$\sum_{[a, b]} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{[a, c]} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{[c, d]} f(\xi_k) \Delta x_k \quad (9.15)$$

bo'ladi. $f(x)$ funksiya $[a, c] \subset [a, b]$ hamda $[a, b] \subset$ oraliqlarda integrallanuvchi bo'lgani uchun

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} f(\zeta_i) \Delta x_i = \int f(x) dx.$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i = \int f(x) dx.$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int f(x) dx.$$

tengliklarga egamiz. (9.15) tenglikdan $\lambda \rightarrow 0$ da izlangan formula kelib chiqadi.

Endi c nuqta $[a,b]$ oraliqdan tashqaridan yotsin, ya'ni c nuqta $a < c < b$ yoki $a < b < c$ tengsizlikni qanoatlantirsin. Agar $c < a < b$ bo'lsa, u holda $[a,b] \subset [c,b]$ bo'lgani uchun 1- x ossaga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lib, yuqorida isbot etilganiga asosan

$$\int f(x) dx = \int f(x) dx + \int f(x) dx$$

formula o'rini bo'ladi. Bundan esa, 2- eslatmada foydalanib

$$\int f(x) dx = - \int f(x) dx + \int f(x) dx = \int f(x) dx + \int f(x) dx$$

bo'lshini topamiz.

Xuddi shunga o'xshash, $a < b < c$ bo'lganda ham $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lishi va tegishli formulaning o'rini ekani ko'tsatiladi. ►

3-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u holda $cf(x)$ ($c = const$) ham shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi va ushbu

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx.$$

formula o'rini.

◀ $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. Demak,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} f(\zeta_i) \Delta x_i = \int f(x) dx$$

Endi $cf(x)$ funksiyaning mos integral yig'indisini yozamiz:

$$\sigma_1 = \sum_{i=0}^{n-1} cf(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

U holda

$$\sigma_1 = \sum_{i=0}^{n-1} cf(\xi_i) \Delta x_i = c \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = c \cdot \sigma$$

Bundan $\lambda \rightarrow 0$ da quyidagi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c\sigma - c \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma = c \int_a^b f(x) dx$$

tenglik kelib chiqadi. Bu izlangan formulaning o'rini ekanini anglatadi. ►

4-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi va $f(x) \geq d > 0$ bo'lsa, u holda $\frac{1}{f(x)}$ funksiya ham shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.

◀ $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lsin. Demak, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham $d^2\varepsilon$ ga ko'ra shunday $\delta > 0$ topiladiki, $[a,b]$ oraliqni diametri $\lambda_\varepsilon < \delta$ bo'lgan har qanday P bo'laklash uchun

$$S(P) - s(P) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k < d^2 \varepsilon$$

bo'ladi. Bunda

$$M_k = \sup\{f(x)\}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}]$$

$$m_k = \inf\{f(x)\}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}].$$

$f(x) \geq d > 0$ bo'lganligini e'tiborga olib, $\frac{1}{f(x)}$ funksiya uchun

$$M_k^* = \sup\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}]$$

$$m_k^* = \inf\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}]$$

mavjud bo'lishini aniqlaymiz. Ravshanki,

$$M_k^* = \frac{1}{m_k}, \quad m_k^* = \frac{1}{M_k}$$

bo'ladi. Natijada

$$\begin{aligned} S(P) - s(P) &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k^* - m_k^*) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{m_k} - \frac{1}{M_k} \right) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_k - m_k}{m_k M_k} \Delta x_k \leq \\ &\leq \frac{1}{d^2} \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k < \varepsilon \end{aligned}$$

bo'ladi. Bu esa $\frac{1}{f(x)}$ funksiyaning $[a,b]$ da integrallanuvchi ekanini bildiradi. ►

5-xossa. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f(x) \pm g(x)$ funksiya ham shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi va ushbu

$$\int_a^b |f(x) \pm g(x)| dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

formula o'rini bo'ladi.

◀ $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. Demak,

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma_1 = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx.$$

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma_2 = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b g(x) dx$$

Endi $f(x) \pm g(x)$ funksiyaning $[a, b]$ oraliqdagi mos integral yig'indisini yozamiz:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} [f(\xi_k) \pm g(\xi_k)] \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \pm \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k) \Delta x_k = \sigma_1 \pm \sigma_2$$

Bundan $\lambda_p \rightarrow 0$ da quyidagiga egamiz:

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma_1 \pm \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma_2 = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Bu izlangan formulaning o'rini ekanini anglatadi. ►

6-xossa. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f(x) g(x)$ funksiya ham shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.

◀ $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. U holda integralning mavjudligi haqidagi teoremaga ko'ra

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} (S_f(P) - s_f(P)) = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k = 0, \quad (9.16)$$

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} (S_g(P) - s_g(P)) = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (M'_k - m'_k) \Delta x_k = 0. \quad (9.17)$$

Avval barcha $x \in [a, b]$ lar uchun $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ deb qaraylik. U holda $\forall x \in [x_k, x_{k+1}]$ uchun

$$0 \leq m_k \leq f(x) \leq M_k$$

$$0 \leq m'_k \leq g(x) \leq M'_k$$

tengsizliklar o'rini bo'lib, undan quyidagi

$$0 \leq m_k m'_k \leq f(x)g(x) \leq M_k M'_k$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Ravshanki, $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) oraliqda $f(x) g(x)$ funksiyaning quyidagi aniq chegaralari

$$m_k^0 = \inf\{f(x)g(x)\},$$

$$M_k^0 = \sup\{f(x)g(x)\}$$

mavjud bo'lib, ular uchun

$$m_k m'_k \leq m_k^0 < M_k^0 \leq M_k M'_k$$

tengsizliklar o'rini bo'ladi. U holda quyidagi

$$\begin{aligned} M_{\sigma}^{\eta} &= m_{\sigma}^{\eta} + M_{\sigma}M_{\sigma}' + m_{\sigma}m_{\sigma}' = M_{\sigma}'(M_{\sigma} + m_{\sigma}) + m_{\sigma}(M_{\sigma}' + m_{\sigma}'), \\ M_{\sigma} &= \sup_{x \in [a, b]} \{f(x)\} \leq M_{\sigma}, \quad M_{\sigma}' = \sup_{x \in [a, b]} \{g(x)\} \leq M_{\sigma}' \end{aligned}$$

tengsizliklarni e'tiborga olib $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ da chegaralanganligi uchun $M_{\sigma} < \infty, M_{\sigma}' < \infty$ bo'ladi), topamiz:

$$S_{\sigma}(P) - s_{\sigma}(P) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_{\sigma}^{\eta} - m_{\sigma}^{\eta}) \Delta x_k \leq M_{\sigma}' \sum_{k=0}^{n-1} (M_{\sigma} + m_{\sigma}) \Delta x_k + M_{\sigma} \sum_{k=0}^{n-1} (M_{\sigma}' + m_{\sigma}') \Delta x_k$$

Endi (9.16) va (9.17) munosabatlardan foydalansak, u holda quyidagi

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} (S_{\sigma}(P) - s_{\sigma}(P)) = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (M_{\sigma}^{\eta} - m_{\sigma}^{\eta}) \Delta x_k = 0$$

tenglik kelib chiqadi. Demak, $f(x) g(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi.

Endi $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ixtiyoriy integrallanuvchi funksiyalar bo'lsin. Bir tomondan $\forall x \in [a, b]$ lar uchun

$$f(x) - \inf\{f(x)\} = f(x) - m \geq 0,$$

$$g(x) - \inf\{g(x)\} = g(x) - m' \geq 0,$$

tengsizliklar o'rini. Ikkinci tomondan,

$f(x)g(x) = [f(x) - m][g(x) - m'] + mg(x) + m'f(x) - mm'$ deb yoza olamiz. Yuqorida isbot etilganiga hamda 4 - xossaning natijasiga (1 - natijasiga qarang) ko'ra, $f(x) g(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'ladi. ►

4) -- va 5) -- xossalardan quyidagi natija kelib chiqadi.

1-natija. Agar $f(x) g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ da integrallanuvchi va $g(x) \geq d > 0$ bo'lsa, u holda $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya ham $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.

7-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lib, $\forall x \in [a, b]$ lar uchun $f(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (a < b)$$

bo'ladi.

◀ Ta'rifga ko'ra ushbu

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$$

limit mavjud. Modomiki, $\forall x \in [a, b]$ lar uchun $f(x) \geq 0$ ekan, unda

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \geq 0$$

va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x \geq 0$$

bo'ladi. Demak,

$$\int f(x)dx \geq 0 \blacktriangleright$$

2-natija Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lib, $\forall x \in [a,b]$ lar uchun $f(x) \geq g(x)$ tengsizlik o'rinni bo'lsa, u holda ushbu

$$\int f(x)dx \geq \int g(x)dx$$

tengsizlik ham o'rinni bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lganidan $\forall x \in [a,b] f(x) \geq 0$ funksiyaning integrallanuvchiligi 4 xossaladan kelib chiqadi. 6- xossaga ko'ta bu holda

$$\int [g(x) - f(x)]dx \leq 0$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bundan izlangan tengsizlikka ega bo'lamiz. ▶

3-natija (Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi). Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u holda (yuqoridaqgi xossalarga ko'ta) ushbu $f(x) + \alpha g(x)$ (α - ixtiyoriv o'zgartmas) funksiya ham $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'ladi va

$$\int [f(x) + \alpha g(x)]^2 dx \geq 0$$

tengsizlik o'rini.

Demak, ixtiyoriv o'zgartmas α son uchun

$$\alpha^2 \int g^2(x)dx + 2\alpha \int f(x)g(x)dx + \int f^2(x)dx \geq 0$$

tengsizlik o'rini. Bu tengsizlikning chap tomonidagi ifoda α ga nisbatan kvadrat uchhad bo'lib, u α ning barcha haqiqiy qiymatlarida manfiy emas. Demak, bu kvadrat uchhadning diskriminantini mushbat emas, ya'ni

$$\left[\int f(x)g(x)dx \right]^2 - \int f^2(x)dx \int g^2(x)dx \leq 0$$

Natijada quyidagi

$$\int f(x)dx \leq b - a \sqrt{\int f'(x)^2 dx} \sqrt{\int f''(x)^2 dx}$$

tengsizlikka kelamiz. Bu tengsizlik koshi Bunyakovskiy tengsizligi deb ataladi

8-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bolsa, u holda $f(x)$ funksiya ham shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi va

$$\int f(x)dx \leq \int |f(x)|dx$$

tengsizlik o'rini bo'ladi.

► $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. U holda $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $[a, b]$ oraliqni diametri $x_1 - x_0 < \delta$ bo'lgan har qanday $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bo'laklash uchun

$$S(P) - s(P) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$$

bo'ladi, bunda $\omega_i \cdot |f(x)|$ funksiyaning $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqdagi tebranishi.

Ravshanki, $\forall x' \in [a, b], \forall x'' \in [a, b]$ lat uchun quyidaqи

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x')| + |f(x'')|$$

tengsizlik o'rini bo'lib, undan

$$\sup |f(x')| + \sup |f(x'')| \leq \sup |f(x)| + \sup |f(x')|$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, $\omega_i \cdot |f(x)|$ bunda $\omega_i \cdot |f(x)|$ funksiyaning $\{x_i, x_{i+1}\}$ dagi tebranishi Natijada

$$S_{f^+}(P) - s_{f^+}(P) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$$

bo'ladi. Bundan $|f(x)|$ funksiyaning $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

$f(x)$ hamda $|f(x)|$ funksiyalarining $[a, b]$ oraliqdagi integral yig'indilarini yozamiz:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \\ \sigma_i &= \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| \cdot \Delta x_i \end{aligned}$$

U holda

$$|\sigma| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| \cdot \Delta x_i = \sigma_i$$

bo'ladi va $a < b$ da limitga o'tib izlangan tengsizlikning o'riniq ekaniga ishonch hosil qilamiz. ►

5-§. O'rta qiymat haqidagi teoremlar

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda aniqlangan va chegatalangan bo'lsin. U holda $[a,b]$ oraliqda

$$m = \inf\{f(x)\}, M = \sup\{f(x)\}$$

mavjud va $\forall x \in [a,b]$ uchun

$$m \leq f(x) \leq M \quad (9.18)$$

tengsizliklar o'rini bo'ladi.

6-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u holda shunday o'zgarmas μ ($m \leq \mu \leq M$) son mavjudki, ushbu

$$\int f(x)dx = \mu(b-a)$$

tenglik o'rini bo'ladi.

► (9.18) tengsizliklardan foydalaniib topamiz:

$$\int m dx \leq \int f(x)dx \leq \int M dx$$

Bundan

$$m(b-a) \leq \int f(x)dx \leq M(b-a)$$

Bu tengsizliklarni $b-a>0$ songa bo'lamiz:

$$m \leq \frac{\int f(x)dx}{b-a} \leq M$$

Agar

$$\int_a^b f(x)dx$$

deb olsak, u holda izlangan tenglik kelib chiqadi. ►

4-natija. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzlusiz bo'lsa, u holda bu oraliqda shunday x ($c \in [a,b]$) nuqta topiladiki,

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

tenglik o'rini bo'ladi.

7-teorema. Agar $f(x) = va = g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ oraliqda

integrallanuvchi bo'lib, $f(x)$ funksiya shu oraliqda o'z ishotasini o'zgartirmasa, u holda shunday o'zgartmas μ ($m < \mu < M$) son mavjudki,

$$\int f(x)g(x)dx \leq \mu \int g(x)dx \quad (9.19)$$

tenglik o'tidi bo'ladi.

► Aniq integralning 5 – xossasiga asosan $f(x)g(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'ladi. Endi $g(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda manfiy bo'lmasin, ya'ni $\forall x \in [a, b]$ lar uchun $g(x) \geq 0$ bo'lsin deylik. U holda $m \leq f(x) \leq M$ tengsizliklarni $g(x) \geq 0$ ga ko'paytirib, so'ngra hosil bo'lgan ushbu

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

tengsizliklarni $[a, b]$ oraliqda integrallab topamiz:

$$m \int g(x)dx \leq \int f(x)g(x)dx \leq M \int g(x)dx. \quad (9.20)$$

Ikki holni qaraylik:

a) $\int g(x)dx = 0$ bo'lsin. U holda

$$\int f(x)g(x)dx > 0$$

bo'lib, bunda μ deb ($m \leq \mu \leq M$) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy sonni olish mumkin.

b) $\int g(x)dx > 0$ bo'lsin. Bu holda (9.20) tengsizliklardan

$$m \leq \frac{\int f(x)g(x)dx}{\int g(x)dx} \leq M$$

bo'lishi kelib chiqadi. Agar

$$\mu = \frac{\int f(x)g(x)dx}{\int g(x)dx}$$

deb olsak, unda

$$\int f(x)g(x)dx = \mu \int g(x)dx$$

bo'ladi.

$[a, b]$ oraliqda $g(x) \leq 0$ bo'lganda (9.19) formula xuddi shunga

tenglik o'rini bo'ladi.

Bu natijaning isboti (9.19) tenglikka asoslanadi.

6-§. Chegaralari o'zgaruvchi bo'lgan aniq integrallar

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. U holda aniq integralning 1)-xossasiqa ko'ra $f(x)$ funksiya istalgan $[a,x] \subset [a,b]$ ($a < x \leq b$) oraliqda ham integrallanuvchi bo'ldi. Ravshanki,

$$\int f(t)dt$$

integral x ga bog'liq. Uni $F(x)$ deb belgilaymiz:

$$F(x) = \int f(t)dt$$

Endi $f(x)$ funksiyaga ko'ra $F(x)$ funksiyaning xossalarni (uzluksizligi, differensiallanuvchi bo'lishini) o'rganamiz.

8-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, $F(x)$ funksiya shu oraliqda uzlusiz bo'ladi.

► $f(x)$ funksiya integrallanuvchi bo'lgani uchun $\sup\{f(t)\} < \infty$ bo'ladi. $\forall x \in [a,b]$ nuqta olib, unga shunday $\Delta x > 0$ orttirma beraylikki, $(x + \Delta x) \in [a,b]$ bo'lsin. U holda $F(x)$ funksiyaning orttirmasi uchun quyidagiqa ega bo'lamiz:

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_x^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Aniq integralning 7)-xossasidan foydalanib, topamiz:

$$|\Delta F(x)| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \leq \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|dt \leq M \cdot \Delta x$$

Demak,

$$|\Delta F(x)| \leq M \cdot \Delta x$$

Bundan esa

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta F(x) = 0$$

limit kelib chiqadi. $\Delta x \rightarrow 0$ bo'lganda ham xuddi yuqoridagiga o'xshash $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta F(x) = 0$ bo'lishi ko'rsatiladi. Bu esa $F(x)$ funksiyaning $x \in [a,b]$ nuqtada uzlusizligini bildiradi. ►

9-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lib, $x_0 \in [a,b]$ nuqtada uzlusiz bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va

limit kelib chiqadi. $x \rightarrow 0$ bo'lganda ham xuddi yuqoridaqiga oxshash $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta F(x) = 0$ bo'lishi ko'rsatiladi. Bu esa $F'(x)$ funksiyaning $x \in [a, b]$ nuqtada uzlusizligini bildiradi. ►

9-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lib, $x_0 \in [a, b]$ nuqtada uzlusiz bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensialanuvchi bo'ladi va

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

◀ $F(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi:

$$\Delta F(x_0) = \int_a^{x_0 + \Delta x} f(t) dt \quad (\Delta x > 0)$$

m olib, quyidagi

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$$

avirmani qarayiniz. Aniq integralning xossalardan foydalanib topamiz:

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt - f(x_0) \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} dt \right] = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (f(t) - f(x_0)) dt.$$

Bu munosabatdan

$$\left| \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |f(t) - f(x_0)| dt. \quad (9.21)$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzlusiz. Ta'rifga asosan, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|x - x_0| < \delta$ bo'lganda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ bo'ladi. Agar $\Delta x < \delta$ deb olsak, u holda $\forall t \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ uchun

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

bo'ladi. Natijada (9.21) tengsizlik quyidagi

$$\left| \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} dt = \varepsilon$$

ko'rinishga keladi. Demak,

$$\left| \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

Bundan

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$$

ya'ni

$$F'(x_0 + 0) = f(x_0)$$

tengilk kelib chiqadi. Yuqoridaqidek, $\Delta x < 0$ bo'lganda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{M^*(x_0) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ya'mi

$$F'(x_0 + 0) = f(x_0)$$

tenglik ham o'tinli bo'lishi ko'rsatiladi. ►

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lib, $x=a$ va $x=b$ nuqtalarda uzluksiz (bunda funksiyaning $x=a$ da o'ngdan, $x=b$ da esa chapdan uzluksizligi tushuniladi) bo'lsa, u holda

$$F'(a+0) = f(a+0), \quad F'(b-0) = f(b-0)$$

bo'lishi yuqoridagiga o'xshash ko'rsatiladi.

6-natija. $F(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda $\forall x \in [a, b]$ uchun

$$F'(x) = f(x)$$

bo'ladi.

Demak, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning $[a, b]$ dagi boshlang'ich funksiyasi.

Endi quyi chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan aniq integralni qaraymiz. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. U holda bu funksiya $[x, b] \subset [a, b]$ ($a \leq x \leq b$) oraliqda ham integrallanuvchi va bu integral ϕ ga bog'liq bo'ladi. Uni

$$\phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

deb belgilaymiz. Aniq integral xossasidan foydalanib topamiz:

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt = F(x) + \phi(x), \quad (a \leq x \leq b)$$

Bundan esa

$$\phi(x) = \int_a^x f(t) dt - F(x)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu tenglik, $\phi(x)$ funksiyaning xossalari $f(x)$ hamda $F(x)$ funksiyalarning xossalari orqali o'rGANISH mumkinligini ko'rsatadi. Jumladan, agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\phi'(x) = -f(x)$$

bo'ladi. Haqiqatan ham, bu holda $\int f(t) dt$ mavjud va u chekli son,

$F(x)$ funksiya esa yuqorida keltirilgan teoremaga ko'ra $[a, b]$ va $F'(x)$ hosilaga ega bo'lib.

7-§. Aniq integrallarni hisoblash

Integral mavzusining asosiy masalalaridan biri funksiya integralining mavjudligi bo'lsa, ikkinchisi funksiya integralini hisoblashdir.

1⁰. Nyuton–Leybnis formulasi. Ushbu bandda, funksiyalarning aniq integrallarini hisoblashda keng qo'llanadigan formulani keltiramiz.

Ma'lumki, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzliksiz bo'lsa, u holda

$$F(x) = \int f(t)dt$$

funksiya shu oraliqda $f(x)$ funksianing boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Bu bir tomonidan.

Ikkinchi tomonidan, $f(x)$ funksianing ixtiyoriy boshlang'ich funksiyasi $\phi(x)$ berilgan boshlang'ich funksiya $F(x)$ dan ixtiyoriy o'zgarmas qo'shiluvchiga farq qiladi, ya'ni

$$\phi(x) = \int f(t)dt + C$$

bo'ladi. Bu tenglikdan, avval $x = a$ deb,

$$\phi(a) = C \quad (9.22)$$

so'ngra $x = b$ deb,

$$\phi(b) = \int_a^b f(t)dt + C \quad (9.23)$$

tengliklarini topamiz. (9.22) va (9.23) tengliklardan ixtiyoriy boshlang'ich funksiya $\phi(x)$ uchun ushbu

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a) \quad (9.24)$$

formula kelib chiqadi. Bu (9.24) formula Nyuton–Leybnis formulasi deb ataladi.

Odatda, (9.24) tenglikning o'ng tomonidagi $\phi(b) - \phi(a)$ ayirma $\phi(x)$ kabi yoziladi:

$$\phi(b) - \phi(a) = \phi(x) \Big|_a^b$$

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(x) \Big|_a^b$$

Masalan,

Demak,

$$\int f(x)dx = \phi(x)$$

Masalan,

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

2⁰. O'zgaruvchilarni almashtirish usuli. $f(x)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ oraliqda aniqlangan va uzlusiz bo'lsin. Ravshanki, $\int f(x)dx$ mavjud bo'ladi.

Fatiz qilaylik, aniq integralda o'zgaruvchi x ushbu $x = \varphi(t)$ formula bilan almashtirilgan bo'lib, bunda quyndagi shartlar bajarilgan bo'lsin:

a) $\varphi(t)$ funksiya biror $[\alpha, \beta]$ oraliqda aniqlangan va uzlusiz, t o'zgaruvchi $[\alpha, \beta]$ oraliqda o'zgarganda $\varphi(t)$ funksiyaning qiymatlari $[\alpha, \beta]$ oraliqda chiqmaydi.

b) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$.

v) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ oraliqda uzlusiz $\varphi'(t)$ hosiaga ega. U holda

$$\int f(x)dx = \int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (9.25)$$

tenglik o'rinnli bo'ladi.

► $f(x)$ funksiyaning $[\alpha, \beta]$ oraliqda boshlang'ich funksiyasi $\phi(x)$ uchun (9.24) formula o'rinnli.

$[\alpha, \beta]$ oraliqda $\phi(\varphi(t))$ funksiyani qaraylik. Bu funksiya $[\alpha, \beta]$ oraliqda uzlusiz va

$$(\phi(\varphi(t)))' = \phi'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

Keyingi tenglikdan $\phi'(x) = f(x)$ ekanini e'tiborga olib topamiz:

$$(\phi(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Bu esa $\phi(\varphi(t))$ funksiya $[\alpha, \beta]$ da $f(\varphi(t))$ funksiyaning boshlang'ichi funksiyasi bo'lishini bildiradi. Nyuton – Leybnis formulasiga ko'ra,

$$\int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \phi(\varphi(\beta)) - \phi(\varphi(\alpha))$$

Demak,

$$\int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \phi(b) - \phi(a) \quad (9.26)$$

Shunday qilib, (9.24) va (9.26) munosabatlardan (9.25) tenglik

kelib chiqadi. ►

9.4 -misol. Quyidagi

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1-x^2} dx$$

integralni o'zgaruvchini almashtirish usuli bilan hisoblang.

◀ Bu integralda $x = \sin t$ almashtirishni bajaramiz. U holda (9.25) formulaga ko'ra topamiz:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right] dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}$$

3⁰. Bo'laklab integrallash usuli. $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning har biri $[a, b]$ oraliqda uzlucksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hisilalarga ega bo'lsin. U holda

$$\int_a^b u(x)dv(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)du(x) \quad (9.27)$$

formula o'rinni.

◀ Ravshanki,

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Demak, $u(x) v(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lib, Nyuton – Leybnis formulasiga ko'ra

$$\int_a^b [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)] dx = [u(x)v(x)]_a^b$$

bo'ladi. Aniq integral xossasidan foydalanib topamiz:

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b$$

Bu tenglikdan esa (9.45) formula kelib chiqadi. ►

(9.27) formula $\int_a^b u(x)dv(x)$ integralni hisoblashni $\int_a^b v(x)du(x)$ integralni hisoblashga olib keladi. Bunda $u(x)$ hamda $dv(x)$ larni shunday tanlash lozimki, $\int_a^b v(x)du(x)$ integral imkoniyat boricha sodda hisoblansin.

9.5-misol. $\int_1^2 \ln x dx$ integralni hisoblang.

◀ Agar $u(x) = \ln x$, $dv = dx$ deb olinsa, u holda

$$du = \frac{1}{x} dx, v(x) = x$$

bo'lib, (9.27) formulaga ko'ra topamiz.

$$\int \ln x dx - (x \ln x)' = \int x \frac{1}{x} dx - (x \ln x)' = x^2 - x^2 + 2 \ln 2 \rightarrow \blacksquare$$

9.6-misol $\int \sin^n x dx$ integralni hisoblang, bunda $n=0, n=1$

Bu integral, xususan $n=0, n=1$ bo'lganda osongina hisoblanadi:

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1$$

$n \geq 2$ bo'lganda berilgan integralni

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x d(-\cos x)$$

ko'rinishda yozib, unga bo'laklab integrallash formulasini qo'llaymiz. Natijada

$$\begin{aligned} J_n &= (-\sin^{n-1} x \cos x) \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n \end{aligned}$$

bo'lib, undan ushbu

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

rekurrent formula kelib chiqadi. Bu formula yordamida berilgan integralni $n=2, 3, \dots$ bo'lganda ketma-ket hisoblash mumkin. Biz quyida n juft va toq bo'lganda berilgan integralning qiymatini keltiramiz:

$n=2m$ juft son bo'lganda

$$J_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} J_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (9.28)$$

$n=2m+1$ — toq son bo'lganda

$$J_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} J_1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \quad (9.29)$$

Bunda $m!!$ simvol m dan katta bo'limgan va u bilan bir xil juftlikka ega bo'lgan natural sonlarning ko'paytmasini bildiradi.

Shunday qilib,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \begin{cases} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, & \text{agar } n=2m \text{ juft bo'lsa,} \\ & \\ \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, & \text{agar } n=2m+1 \text{ toq bo'lsa.} \end{cases}$$

4⁰. Vallis formulasi. Yuqorida keltirilgan 9.6 – misoldan foydalaniib, π sonini ifodalovchi formulani keltiramiz. Ravshanki, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ bo'lganda

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \quad (n=1,2,\dots)$$

tengsizliklar o'rinni. Bu tengsizliklarni $[0, \frac{\pi}{2}]$ oraliqda integrallab

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx$$

so'ngra (9.28), (9.29) formulalardan foydalaniib topamiz:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

Bundan

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n}$$

tengsizliliklar kelib chiqadi. Ammo bu tengsizliklarning chekkalarida turgan ifodalar ayirmasi

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2n} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2n}$$

bo'lib, $n \rightarrow \infty$ da nolga intilgani uchun ushbu

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{2n}{2n+1}$$

formula o'rinni bo'ladi. Demak,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \quad (9.30)$$

Bu (9.30) formula Vallis formulasi deyiladi.

8-§. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash

Biz yuqorida integral ostidagi funksiyaning boshlang'ich

funksiyasi ma'lum bo'lsa, aniq integralni Nyuton - Leybnis formulasi yordamida hisoblash mumkinligini ko'rdik. Ammo boshlang'ich funksiyani topish masalasi doim osongina hal bo'laverinaydi. Agar integral ostidagi funksiya murakkab bo'lsa, tegishli aniq integralni hisoblashning taqrifiy usullarini qo'llash lozim. Bu usullar integral ostidagi $f(x)$ funksivani uni taqrifiy ifodalovchi ko'phad bilan almashtirishga ($f(x) = P_n(x)$) asoslanadi.

10. To'g'ri to'rtburchaklar formulasi. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzlusiz bo'lib, uning

$$\int f(x)dx$$

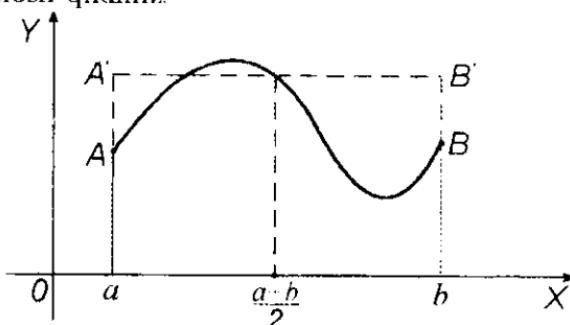
integralini hisoblash talab etilsin. Avvalo $\forall x \in [a, b]$ uchun

$$f(x) \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \text{const}$$

deb olib, quyidagi

$$\int f(x)dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \quad (9.31)$$

formulani hosil qilamiz.



36 - chizma.

Bu taqrifiy formula (36 - chizma) $f(x) \geq 0$ bo'lganda $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzini $aA'B'b$ to'g'ri to'rtburchak yuzi bilan almashtirishini ko'rsatadi. (9.31) formulaning aniqligini oshirish maqsadida $[a, b]$ oraliqni $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ nuqtalar yordamida n ta teng bo'lakka bo'lib, har bir $[x_i, x_{i+1}]$ bo'lakda (9.31) formula qo'llaniladi. U holda

$$\int_a^b f(x)dx \approx f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i) = \frac{b-a}{n} f(x_i)$$

bo'ladi, bunda

$$x_i = a + k \frac{b-a}{n}, \quad x_{i+1} = a + \frac{(k+1)}{2} \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

Natijada quyidagiiga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b f(x) dx + \dots + \int_a^b f(x) dx + \int_a^b f(x) dx + \frac{b-a}{n} f(\bar{x}_0) +$$

$$+ \frac{b-a}{n} f(\bar{x}_1) + \dots + \frac{b-a}{n} f(\bar{x}_{k-1}) + \frac{b-a}{n} f(\bar{x}_k) + \frac{b-a}{n} (f(\bar{x}_0) + f(\bar{x}_1) + \dots + f(\bar{x}_{k-1}))$$

Shunday qilib, $\int_a^b f(x) dx$ integralni hisoblash uchun quyidagi taqnibiy

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_k) + \dots + f(x_{k-1})) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i) \quad (9.32)$$

formulaga kelamiz.

(9.32) formula to'g'ni to'rtburchaklar formulasi deb ataladi.

Odatda, taqribiy formula chiqarilganda, albatta uni qo'llanilganda yo'l qo'yiladigan xatolikni aniqlash (voki baxolash) taqazo etiladi. Buning natijasida taqribiy formulalar o'zaro taqqoslanadi.

(9.32) formulaning xatoligi ushbu

$$R_n = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i)$$

ayirma bilan ifodalanadi. Uni baholaymiz. Buning uchun $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin deb qaraymiz.

Aniq integralning xossalardan foydalaniib, R_n ni quyidaqи

$$R_n = \sum_{i=0}^{k-1} \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{k-1} f(\bar{x}_i) = \sum_{i=0}^{k-1} \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{k-1} \int_a^b f(\bar{x}_i) dx = \sum_{i=0}^{k-1} \int_a^b [f(x) - f(\bar{x}_i)] dx$$

ko'rinishda yozish mumkin. Teylor formulasi

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x-x_i) + \frac{1}{2} f''(\xi_i)(x-x_i)^2$$

dan foydalanylik, bunda ξ_i son x va x_i sonlari orasida bo'ladi. Natijada

$$R_n = \sum_{i=0}^{k-1} \left[\int_a^b [f'(x_i)(x-x_i) + \frac{1}{2} f''(\xi_i)(x-x_i)^2] dx \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \left[f'(x_i) \int_a^b (x-x_i) dx + \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi_i)(x-x_i)^2 dx \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \int_a^b f''(\xi_i)(x-x_i)^2 dx$$

bo'ladi.

O'tta qiyinot haqidagi 6-teoremaning 5-natijsasiqa ko'ra

$$\int_{\xi}^{\eta} f''(x)(\psi - \psi_*) dx = f''(\xi_*) \int_{\xi}^{\eta} (\psi - \psi_*) dx + \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi_*)$$

$$+ \frac{(b-a)^3}{12} f''(\zeta_*)$$

$$\zeta_* \in [\xi_*, \eta_*]$$

bo'ladi. Shunday qilib, R_n uchun quvidagi

$$R_n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi_*) + \frac{(b-a)^3}{24n^2} + \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{k-1} f''(\xi_*)$$

ifodaga kelamiz. Ravshanki, ushbu

$$\frac{1}{n} \sum_{n=0}^{k-1} f''(\xi_*) = \frac{f''(\xi_*) + f''(\zeta_*) + \dots + f''(\xi_{n-1})}{n}$$

$\xi_* \in [a, b], k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ miqdori $f''(x)$ ning $[a, b]$ oraliqdagisi eng kichik m'' bo'mda eng katta M'' qiyematlan orasida bo'ladi:

$$m'' < \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{k-1} f''(\xi_*) < M''$$

$f''(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzlusiz. Bolsano-Koshimiq ikkinchi teoremasiga ko'ra (5-bo'bdagi 9-teoremaga qarang), (a, b) intervalda shunday z nuqta topiladi,

$$f''(\zeta) = \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{k-1} f''(\xi_*) \quad (\xi_* \in (a, b))$$

bo'ladi. Natijada R_n ushbu

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\zeta)$$

ko'rinishni oladi. Demak,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{n=0}^{k-1} f(\xi_*) + \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\zeta) \quad (9.32)$$

Shunday qilib, $[a, b]$ oraliqda ikkinchi taitibli uzlusiz hisilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiyaning $\int_a^b f(x) dx$ integralni (9.32) to'g'ri to'rtburchaklar formulasi yordamida taqribiy hisoblansa, bu taqribiy hisoblash xatoligi quyidagi

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\zeta) \quad (\zeta \in (a, b))$$

formula bilan ifodalanadi.

2⁰. Trapetsiyalar formulasi. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzlusiz bo'lsin. $\forall \varepsilon \in [0, 1]$ uchun

$$f(x) \approx \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \quad (9.33)$$

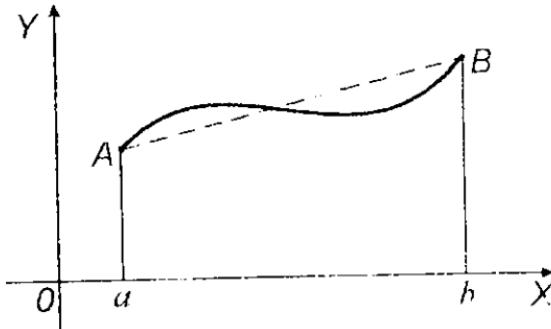
deb olib, $\int f(x)dx$ integralni taqibiy ifodalovchi ushbu

$$\int f(x)dx \approx \int \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \right] dx = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a) \quad (9.34)$$

formulani hosil qilamiz. (9.33) munosabatdag'i

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

ifoda $(a, f(a)), (b, f(b))$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq nuqtasining ordinatasini ifodalaydi. (9.34) taqibiy formula $f(x) \geq 0 \quad (\forall x \in [a, b])$ bo'lganda (37 - chizma) aBb egri chiziqli trapetsiyaning yuzini aBb trapetsiya yuzi bilan almashtirilishini ifodalaydi.



37 chizma.

Endi (9.34) formulaning aniqligini oshirish maqsadida $[a, b]$ oraliqni $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ nuqtalar yordamida n ta teng bo'lakka bo'lib, har bir $[x_i, x_{i+1}]$ bo'lakda $f(x)$ funksiyaning $\int_a^b f(x)dx$ integraliga nisbatan (9.34) formulani qo'llaymiz. U holda

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i)$$

bo'lib, natijada ushbu

$$\int f(x)dx = \int f(x)dx + \int f(x)dx + \dots + \int f(x)dx + \dots + \int f(x)dx + \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2}(x_1 - x_0) + \\ + \frac{f(x_1) + f(x_n)}{2}(x_2 - x_1) + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}(x_n - x_{n-1}) \\ + \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right]$$

Formulaga kelamiz. Demak,

$$\int f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right] \quad (9.35)$$

Bu (9.35) formula trapeziyalar formulası deb ataladi.

$f''(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda $f''(x)$ hisobiga ega bo'lib, u shu oraliqda uzlusiz bo'lisin. U holda

$$\int f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right] + \frac{(b-a)^3}{12n} f''(\xi) \quad (\xi \in (a,b)) \quad (9.35)$$

bo'ladi.

3⁰. Parabolalar (Simpson) formulasi. Bu holda $[a,b]$ oraliqda uzlusiz $f(x)$ funksivaning $\int f(x)dx$ integralini taqniyib hisoblash uchun $f(x)$ funksiyani $(a, f(a)), (\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ hamda $(b, f(b))$ nuqtalardan o'tuvchi $y = Ax^2 + Bx + C$ parabola nuqtasining ordinatasi bilan almashtiramiz. Berilgan $(a, f(a)), (\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ va $(b, f(b))$ nuqtalar orqali parabola o'tkazish mumkin. Bunday parabola yagona bo'ladi. Haqiqatan ham, $y = Ax^2 + Bx + C$ parabola yuqorida aytig'an nuqtalar orqali o'tgani uchun ushbu

$$\begin{aligned} & Aa^2 + Ba + C = f(a), \\ & A\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + B\left(\frac{a+b}{2}\right) + C = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \\ & Ab^2 + Bb + C = f(b). \end{aligned} \quad (9.36)$$

tengliklar o'tinli bo'ladi. Bu sistemaning koeffitsientlaridan tuzilgan

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 & \frac{a+b}{2} & 1 \\ b^2 & b & 1 \end{vmatrix} = \frac{(a-b)^3}{4}$$

determinant har doim noldan farqli (chunki $a \neq b$). Demak, (9.36)

sistema yagona echimga ega. Bu hol $(a, f(a))$ ($\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2})$) hamda $(b, f(b))$ nuqtalardan yagona $y = Ax^2 + Bx + C$ parabola o'tishini bildiradi.

Endi $\int_a^b (Ax^2 + Bx + C) dx$ integralni berilgan $\int f(x) dx$ integralning taqribiy qiymati deb quyidagi

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b (Ax^2 + Bx + C) dx$$

formulani hosil qilamiz. Bu taqribiy formuladagi $\int (Ax^2 + Bx + C) dx$ integralni hisoblaymiz:

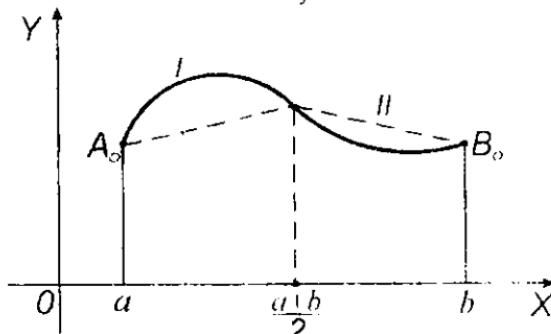
$$\begin{aligned} \int_a^b (Ax^2 + Bx + C) dx &= A \left[\frac{x^3}{3} + B \frac{x^2}{2} + Cx \right]_a^b = A \frac{b^3 - a^3}{3} + B \frac{b^2 - a^2}{2} + C(b - a) = \\ &= \frac{b-a}{6} [2A(b^2 + ba + a^2) + 3B(b - a) + 6C] = \frac{b-a}{6} [(Ab^2 + Ba + Ca) + 4(A(\frac{a+b}{2})^2 + \\ &+ B(\frac{a+b}{2}) + C) + (Ab^2 + Ba + Ca)] = \frac{b-a}{2} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] \end{aligned}$$

Shunday qilib, $\int_a^b f(x) dx$ integralni taqribiy hisoblash uchun ushbu

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] \quad (9.37)$$

formulaga kelamiz.

Bu (9.37) formula $f(x) > 0$ bo'lganda 38-chizmada ko'rsatilgan $aAOb$ egri chiziqli trapetsiya yuzini $aAOb$ egri chiziqli trapetsiya yuzi bilan almashtirilishini ifodalaydi.



38 - chizma .

(9.37) formulaning aniqligini oshirish uchun $[a, b]$ oraliqni

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$(x_k < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n) \Rightarrow (x_{k+1} - x_k) < (x_{n-1} - x_{n-2}) < (x_{n-2} - x_{n-3}) < \dots < (x_1 - x_0)$$

nuqtalar yordamida $2n$ ta teng bo'lakka bo'lib, har bir $\{x_k, x_{k+1}\}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) oraliq bo'yicha olingan integralga (9.37) formulani qo'llanamiz. U holda $\{x_k, x_{k+1}\}$ oraliq uchun

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{x_{k+1} - x_k}{6} [f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})] + \dots + \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{6} [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\ \approx \frac{h-a}{6n} [f(x_0) + 4f(x_{0+1}) + f(x_{0+2})] + \dots + \frac{h-a}{6n} [f(x_{n-1}) + 4f(x_n) + f(x_{n+1})]$$

formulaga egamiz.

Natijada aniq integralning xossasidan foydalanib, quyidagi ifodaga ega bo'lamiiz:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx + \dots + \int_a^b f(x)dx + \\ \approx \frac{h-a}{6n} [(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_3) + 4f(x_4) + f(x_5)) + \dots + (f(x_{n-3}) + \\ + 4f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})) + \frac{h-a}{6n} [(f(x_0) + f(x_{n-1})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})) + \\ + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2}))]$$

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning aniq integralini taqribiylardanaydigan quyidagi

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h-a}{6n} [(f(x_0) + f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})) + \\ + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2}))] \quad (9.38)$$

formulaga kelamiz. Bu formula parabolalar (yoki Simpson) formulasi deb ataladi.

Faraz qaraylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzhiksiz $f^{(IV)}$ (x) hisoblagda ega bo'lsin.

U holda

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h-a}{6n} [(f(x_0) + f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})) + \\ + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2}))] - \frac{(b-a)^5 f^{(IV)}(\xi)}{2880n^4}$$

bo'ladi, bunda $\xi \in (a, b)$.

Biz vuqorida $\int_a^b f(x)dx$ integralni taqribiylardanaydigan hisoblash uchun to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiyalar hamda Simpson formulalarini keltirdik. Bu taqribiylardanaydigan formulalarning hatoliklarini taqqoslab,

Simpson formulasining aniqligi darajasi to'g'iň to'rtburchaklar hamda trapetsiyalar formulalarının aniqligiga qaraganda yuqon ekanligini ko'tamiz.

9.7-misol Ushbu

$$\int_a^b e^{-x^2} dx$$

integral to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiyalar va Simpson formulalari yordamida taqribiy hisoblaymiz.

◀ [0.1] oraligini 5 ta teng bo'lakka bo'laimiz. Bo'llinish nuqtaları

$$x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8, x_5 = 1.0$$

bo'lib, bu nuqtalarda $f(x) = e^{-x^2}$ funksiyanining qiymatları quyidagicha bo'ladi:

$$f(x_0) \approx 1.00000,$$

$$f(x_1) \approx 0.96079,$$

$$f(x_2) \approx 0.85214,$$

$$f(x_3) \approx 0.69768,$$

$$f(x_4) \approx 0.52229,$$

$$f(x_5) \approx 0.36788.$$

Har bir bo'lakning o'rjasini ifodalovchi nuqtaning koordinatalari $x_1 = 0.1, x_2 = 0.3, x_3 = 0.5, x_4 = 0.7, x_5 = 0.9$ bo'lib, bu

nuqtalardagi funksiyanining qiymatlan quyidagicha bo'ladi:

$$f(x_1) \approx 0.99005,$$

$$f(x_2) \approx 0.91393,$$

$$f(x_3) \approx 0.77680,$$

$$f(x_4) \approx 0.61263,$$

$$f(x_5) \approx 0.44486.$$

a) To'g'ri to'rtburchaklar formulası ((9.32) qarang) bo'yicha

$$\int_a^b e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{5} (0.99005 + 0.91393 + 0.77680 + 0.61263 + 0.44486) \approx$$

$$\frac{1}{5} 3.74027 \approx 0.74805.$$

$$|R_n| \leq \frac{1}{12 \cdot 25} \approx \frac{1}{300} \approx 0.003$$

b) Trapetsiyalar formulası ((9.35) qarang) bo'yicha

$$\int_0^1 e^{-x} dx = \frac{1}{8} \left(\frac{1.00000 + 0.36788}{2} + 0.96079 + 0.85214 + 0.69768 + 0.52729 \right) -$$

$$- \frac{1}{5} (0.68394 + 3.03790) - \frac{1}{5} (3.72184 - 0.74437)$$

$$R_s \leq \frac{1}{6 \cdot 25} = \frac{1}{150} = 0.006$$

v) Simpson formulasi ((9.38) qaratng) bo'yicha

$$\int_0^1 e^{-x} dx \approx \frac{1}{30} [(1.00000 + 0.36788) + 4(0.99008 + 0.91393 + 0.77680) +$$

$$+ 0.61263 + 0.44486) + 2(0.96079 + 0.85214 + 0.69768 + 0.52729)] -$$

$$- \frac{1}{30} (1.36788 + 4 \cdot 3.74027 + 2 \cdot 3.03790) - \frac{1}{30} (1.36788 + 6.07580 + 13.96108) +$$

$$+ 0.74682$$

$$R_s \leq \frac{12}{2880 \cdot 5^4} = 0.7 \cdot 10^{-5}$$

Taqribiy formulalar yordamida hisoblab, topilgan $\int_0^1 e^{-x} dx$ integralning qiymatini, uning

$$\int_0^1 e^{-x} dx \approx 0.744685.$$

qiymati bilan taqqoslab, Simpson formulasi yordamida topilgan integralning taqribiy qiymati aniqroq ekanligini ko'ramiz. ►

Mashqlar

9.8. Ushbu

$$f(x) = x \quad (x \in [a, b])$$

funksivaning yuqori harada quyi integrallari topilsin.

9.9. Aytaylik. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da chegaralangan bo'lib, P_1 va P_2 lar $[a, b]$ oraliqning bo'laklashlari bo'lsin. Agar $P_1 \subset P_2$ bo'lsa, ushbu

$$s(P_1) \leq s(P_2), S(P_1) \geq S(P_2)$$

tengsizliklar isbotlansin.

9.10. Aniq integral ta'riflarining ekvivalentligi isbotlansin.

9.11. Agar $\forall v \in [a, b]$ uchun $f(x) \leq g(v)$ bo'lsa,

$$S_1(P) \leq S_2(P), s_1(P) \leq s_2(P)$$

bo'lishi isbotlansin.

9.12. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{agar } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{agar } x=0 \end{cases}$$

funksiyining $[0, 1]$ da integrallanuvchi bo'lishu ko'rsatilsin.

9.13. Ushbu

$$\int_1^2 \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$$

integral baholansin.

9.14. Ushbu

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} dx \leq \frac{1}{10}$$

tengsizliklar isbotlansin.

9.15. Ushbu

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-4)^4}$$

integralga Nyuton-Leybriya formulasini qo'llash mumkinmi?

9.16. Ushbu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

tenglik isbotlansin, bunda $f(x)$ funksiya $[0, 1]$ da uzlusiz.

9.17. Aniq integral tushunchasidan foydalanib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

limit topilsin.

9.18. Trapetsiyalar formulasining xatoligi topilsin.

9.19. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda ikkinchi tartibili uzlusiz $f'(x)$ hosilaga ega bolsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right] = \frac{f(1) - f(0)}{2}$$

bo'lishi isbotlansin.

9.20. Ushbu

$$f(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi x} \cos \pi t dt$$

funksiyining 'osilasi topilsin.

X BOB

Aniq integralning ba'zi tafbiqlari

Matematika, fizika, mexanika hamda fan va texnikaning boshqa sohalarida uchraydigan ko'pgina masalalarni yechish ma'lum funksiyalarning integrallarini hisoblashga keltiriladi.

Ushbu bobda egri chiziq yoyining uzunligi, egri chiziqli trapesiyaning yuzi, o'zgaruvchi kuchning bajargan ishi hamda massaga ega bolgan egri chiziqning energiya momenti aniq integrallar orqali hisoblanishi ko'satiladi.

1-§. Yoy uzunligi va uning aniq integral orqali ifodalanishi

(1) funksiya $[a, b]$ oraliqda aniqlangan ixtiyoriv uzluksiz funksiya bo'lsin. Bu funksiya grafigi $[a, b]$ oraliqda egri chiziq yoyini tasvirlasini. Uni AB deb belgilayiniz. $[a, b]$ oraliqning ixtiyony

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

bo'laklashini olib, bo'luvchi x_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) nuqtalar orqali oy o'ziga parallel to'g'ni chiziqlar o'tkazamiz. Bu to'g'ni chiziqlarning AB yoy bilan kesishgan nuqtalarini $A_k(x_k, f(x_k))$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$, $A_0 = A, A_n = B$) bo'ladi. AB yoydag'i bu nuqtalarni bir-biri bilan to'g'ni chiziq kesmalari yordamida birlashtirib, \tilde{L} siniq chiziqni hosil qilamiz. \tilde{L} yoyga chizilgan siniq chiziq deb ataladi. Bu siniq chiziq perimetri

$$L = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + [f(x_{i+1}) - f(x_i)]^2}$$

bo'ladi.

Ravshanki, siniq chiziq perimetri L qatalayotgan $f(x)$ funksiyaga bog'liq bo'lishi bilan birga $[a, b]$ oraliqni bo'laklashga ham bog'liq bo'ladi: $L = L(P)$.

Agar P_1 va P_2 lar $[a, b]$ oraliqni ikkita bo'laklash bo'lib, $P_1 \subset P_2$ bo'lsa, u holda bu bo'laklashlarga mos AB yoyga chizilgan siniq chiziqlar perimetrlari uchun

$$L_{P_1}(P_1) \leq L_{P_2}(P_2)$$

tengsizlik o'rinni bo'ladi.

Demak, P bo'laklashning bo'luvchi nuqtalari sonini orttirib

borilsa, λ yoyga chizilgan mos siniq chiziqlar perimetrlari ham ortib boradi.

P bo'laklashning diametri λ , nolga intila borganda, λ yoyiga chizilgan bu bo'laklashga mos siniq chiziq shu λ yoyga borgan sari yaqinlasha boradi, siniq chiziq perimetri esa AB yoyning uzunligini borgan sari aniqroq ifodalay boradi, deb qarash tabiiydir.

1-ta'rif. Agar AB yoyiga chizilgan $[a,b]$ oraliqni har qanday P bo'laklashga mos) siniq chiziq perimetri

$$L_f(P) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + [f(x_{i+1}) - f(x_i)]^2}$$

$\lambda_p \rightarrow 0$ da chekli limitga ega bo'lsa, AB yoy uzunlikka ega deb ataladi va shu

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} L_f(P) = L$$

limit AB yoyning uzunligi deyiladi.

Endi yoy uzunligining aniq integral orqali qanday ifodalanishini ko'rsatamiz.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzlusiz hamda uzlusiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiyaning $[a,b]$ oraliqdagi grafigi AB yoyni tasvirlasim, deylik. $[a,b]$ oraliqda ixtiyorini

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

bo'laklashni olib, AB yoyiga chizilgan unga mos siniq chiziqni hosil qilamiz. Bu siniq chiziqning perimetrini yozamiz:

$$L_f(P) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + [f(x_{i+1}) - f(x_i)]^2}$$

Har bir $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqda $f(x)$ funksiyaga Lagranj teoremasini qo'llanamiz:

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(r_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (x_i \leq r_i \leq x_{i+1})$$

Demak,

$$L_f(P) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(r_i)} \cdot (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(r_i)} \Delta x_i$$

bunda $x_i \leq r_i \leq x_{i+1}$. Keyingi tenglikning o'ng tomonidagi yig'indi $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ funksiyaning integral yig'indisini eslatadi. Uning integral yig'indidan farqi shuki, integral yig'indida $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ nuqta $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqdagi tayin nuqtadir. Ammo $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ funksiya

integrallanuvchi bo'lganligi (chunki, shartga ko'ra, $f'(x)$ uzliksiz) sababli $\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dx$ deb olish mumkin.

Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1+f'^2(x_i)} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dx$$

tenglik kelib chiqadi, Demak, ab yoy uzunlikka ega va bu yoy uzunligi quyidagi

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dx \quad (10.1)$$

formula yordamida hisoblanadi.

10.1-misol $[-a,a]$ ($a > 0$) oraliqda ushbu

$$f(x) = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

zanjir chiziq yoyning uzunligini toping.

◀ Avval $f(x)$ funksiyaning hosilasini hisoblab, $\sqrt{1+f'^2(x)}$ ni tipamiz:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) \\ 1+f'^2(x) &= 1 + \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} \right)^2, \\ \sqrt{1+f'^2(x)} &\sim \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \quad ▶ \end{aligned}$$

Endi (10.1) formulaga ko'ra zanjir chiziq yoyning $[-a,a]$ oraliqdagi yoyi uzunligini hisoblaymiz:

$$L = \int_{-a}^a \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) dx = \frac{a}{2} \left[e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right]_{-a}^a = a \left(e - \frac{1}{e} \right)$$

Quyidagi

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (10.2)$$

tenglamalar sistemasi orqali ifodalangan egri chiziqni qaraymiz (bu holda egri chiziq paremetrik holda berilgan deyilib, (10.2) sistema egri chiziqning paremetrik tenglamalari deyiladi). Bunda $\varphi(t)$, $\psi(t)$ lar $[\alpha, \beta]$ oraliqda uzliksiz funksiyalar bo'lib, t o'zgaruvchi paremetrning $[\alpha, \beta]$ oraliqdagi ixtiyoriy ikkita turli t_1 va t_2 ($t_1 \neq t_2$) qiymatga mos keladigan (10.2) chiziqdagi $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ nuqtalar ($x_1 = \varphi(t_1)$, $y_1 = \psi(t_1)$; $x_2 = \varphi(t_2)$, $y_2 = \psi(t_2)$) ham

turlicha bo'lsin. Bundan tashqari, parametri τ ning t_0 va t_n qiymatlariga mos keladigan (10.2) chiziqdagi $A_\tau(x_0, y_0)$, $A_\tau(x_1, y_1)$ nuqtalarni $t_0 \dots t_n$ bo'lganda, A_τ nuqta A_τ nuqtadan keyin keladi deb qaraladi. Shu bilan egrini chiziqdagi yo'nalish o'matiladi.

Faraz qilaylik, $t = \alpha$, $t = \beta$ qiymatlarga (10.2) chiziqdagi τ va R nuqtalar mos kelsin. Bu chiziqning AB yoyi uzunligi aniq integral orqali qanday ifodalanishini ko'rsatamiz.

Avval yuqoridaqidek AB yoyning uzunligini aniqlaymiz. $[\alpha, \beta]$ oraliqni ixtiyorimiz

$$P\{t_0, t_1, \dots, t_n\} \quad (\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta)$$

bo'laklashni olib, bu bo'laklashning bo'luvchi t_k ($k = 0, 1, \dots, n$) nuqtalariga mos kelgan $A_{\bar{\tau}}$ yoydagi $A_\tau = A_\tau(x_k, y_k)$ ($x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$) nuqtalarni bir-biri bilan to'g'ri chiziq kesmalari yordamida birlashtirib, $A_{\bar{\tau}}$ yoyga chizilgan siniq chiziqni topamiz. Bu siniq chiziqning perimetri quyidagi

$$l = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]^2 + [\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)]^2} \quad (10.3)$$

formula bilan ifodalanadi. Ravshanki, $L = \varphi(t)$, $\psi(t)$ funksiyalarga hamda $[\alpha, \beta]$ oraliqni bo'laklashga bog'liq: $L = L_{\varphi\psi}(P)$

Yuqoridaqidek, $\lambda_p \rightarrow 0$ da siniq chiziq perimetri $L = L_{\varphi\psi}(P)$ chekli limitga ega, ya'ni

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} L_{\varphi\psi}(P) = l$$

bo'lsa, $A_{\bar{\tau}}$ yoy uzunlikka ega deyiladi, bu limit l esa AB yoyning uzunligi deyiladi.

Aytaylik, $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ oraliqda uzlusiz $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ hosilalarga ega bo'lsin. Har bir $[t_k, t_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) oraliqda $\varphi(t)$ hamda $\psi(t)$ funksiyalariga Langranj teoremasini qo'llab topamiz:

$$\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(r_k)(t_{k+1} - t_k) \quad (10.4)$$

$$\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k) = \psi'(0_k)(t_{k+1} - t_k) \quad (10.5)$$

bunda $r_k \in [t_k, t_{k+1}]$, $0_k \in [t_k, t_{k+1}]$

Bu (10.4), (10.5) munosabatlardan foydalaniib, (10.3) siniq chiziq perimetrini quyidagicha yozamiz:

$$L_{\varphi\psi}(P) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(r_i)(t_{i+1} - t_i)^2 + \psi'^2(0_i)(t_{i+1} - t_i)^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(r_i) + \psi'^2(0_i)} \cdot \Delta t_i$$

$$(\Delta t_i = t_{i+1} - t_i)$$

bunda $t_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $\theta_k \in [t_k, t_{k+1}]$

Bu holda ham, yuqondagi

$$\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$$

funksiyaning integral yig'indisini eslatadi. Farqi $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$ ixtiyoriy nuqta bo'lgan holda, t_k va t_{k+1} lar shu $[t_k, t_{k+1}]$ oraliqdagi tayin nuqtaligidir.

Modomiki,

$$\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$$

funksiya $[\alpha, \beta]$ da uzlusiz binobarin integrallanuvchi ekan, unda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\theta_i)} \Delta t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\xi_i)} \Delta t = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

bo'ladi.

Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{\varphi, \psi}(P) = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

Bu esa A \ddot{B} yoyning uzunlikka ega bo'lishini va uning uzunligi uchun

$$l = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (10.6)$$

formula o'rinni ekanini bildiradi.

Xususan, agar (10.2) sistema ushbu

$$\begin{cases} x = \varphi(t) + t \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad (a \leq t \leq b)$$

ko'rinishda bo'lsa, bu sistema $y = \psi(x)$ ($a \leq x \leq b$) ko'rinishni oladi. A \ddot{B} yoyning uzunligi uchun

$$l = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt = \int_a^b \sqrt{1 + \psi'^2(x)} dx$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu (10.1) formulaning o'zidir.

10.2-misol. Ushbu

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}, \quad (0 \leq \alpha \leq t \leq \beta \leq 2\pi) \quad (10.7)$$

chiziqning uzunligini toping.

◀ $[\alpha, \beta]$ oraliqda $x = \varphi(t) = r \cos t$, $y = \psi(t) = r \sin t$ ($r > 0$)

funksiyalar uzlusiz hosilalarga ega. (10.7) sistema markazi koordinata boshida, radiusi r ga teng bo'lgan aylana yoyini ifodalaydi. Uning uzunligini (10.6) formula yordamida topamiz.

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r \cos t)^2 + (r \sin t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = r \int_{\alpha}^{\beta} dt = r(\beta - \alpha). \quad \blacktriangleright$$

Yuqondagi (10.2) sistema bilan ifodalangan AČ yoyni qaraylik. Bu yoyda parametrning t ($\alpha \leq t \leq \beta$) qiymatiga mos keladigan nuqtani Č deylik. Ravshanki, AČ yoyning uzunligi l ga bog'liq bo'lib, u (10.6) formulaga ko'ra $[a, b]$ oraliqda

$$S = S(t) = A\tilde{C} \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

ko'rinishda ifodalanadi. Bu yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan aniq integraldir. Uning hosilasi (9 – bobnning 9 – § iga qarang):

$$S'(t) = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$$

Keyingi tenglikni kvadratga ko'tarib, so'ngra har ikki tomonini dt^2 ga ko'paytirsak, natijada

$$S'^2(t) dt^2 = \varphi'^2(t) dt^2 + \psi'^2(t) dt^2$$

ya'ni

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

munosabat hosil bo'ladi. Bu munosabat yoy differentialining kvadratini ifodalaydi.

Endi tekislikda qutb koordinatalarda berilgan egri chiziq yoyi uzunligining ham aniq integral orqali ifodasini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik, egri chiziq qutb koordinata sistemasida quyidagi

$$r = g(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta) \quad (10.8)$$

funksiya bilan berilgan bo'lsin, bunda $g(\theta)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ oraliqda uzuksiz $g'(\theta)$ hosilaga ega bo'lsin deylik. Biz (10.8) ko'rinishda berilgan egri chiziq tenglamasini quyidagi

$$\begin{cases} x = g(\theta) \cos \theta \\ y = g(\theta) \sin \theta \end{cases} \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

parametrik ko'rinishda ifodalab, (10.6) formuladan foydalananamiz:

$$\begin{aligned} l &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[g(\theta) \cos \theta]^2 + [g(\theta) \sin \theta]^2} d\theta = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[g'(\theta) \cos \theta - g(\theta) \sin \theta]^2 + [g'(\theta) \sin \theta + g(\theta) \cos \theta]^2} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g'^2(\theta) + g^2(\theta)} d\theta \end{aligned}$$

Demak,

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g'^2(\theta) + g^2(\theta)} d\theta \quad (10.9)$$

10.3-misol Ushbu

$$r = a \cdot \theta \quad (a = \text{const} \quad 0 < \theta < \alpha)$$

egni chiziq (Arximed spirali) yoyining uzunligi topilsin.

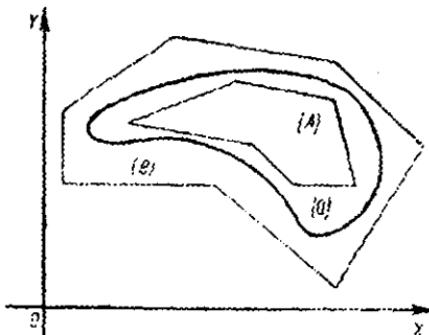
► Yuqoridaagi (10.9) formulaga ko'ra hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\alpha} \sqrt{(a \cdot \theta)^2 + (a \cdot \theta')^2} d\theta = \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = a \left[\frac{\theta}{2} \sqrt{1 + \theta^2} + \frac{1}{2} \ln |\theta + \sqrt{1 + \theta^2}| \right]_0^{\alpha} = \\ &= \frac{a}{2} [\alpha \sqrt{1 + \alpha^2} + \ln(\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2})] \blacksquare \end{aligned}$$

2-§. Tekis shaklning yuzi va uning aniq integral orqali ifodalanishi

Ma'lumki, tekislikda yopiq siniq chiziq bilan chegaralangan ko'pburchak yuzaga ega. Uning yuzi uchburchak yuzalari yig'indisi sifatida topiladi.

Endi tekislikda biror chegaralangan (Q) shaklni qaraylik. (39-chizma)



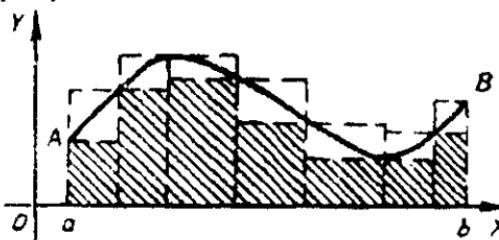
39-chizma.

Bu (Q) shaklning ichiga (A) ko'pburchaklar, so'ngra (Q) shaklni o'z ichiga olgan (B) ko'pburchaklarni chizamiz. (A) ko'rburchaklarning yuzini S_A bilan, (B) ko'pburchaklarning yuzini S_B bilan belgilaylik. Natijada (Q) shakliga ichki chizilgan ko'pburchak yuzlaridan iborat $\{S_A\}$ to'plam, (Q) shaklini o'z ichiga olgan ko'pburchak yuzlandan iborat $\{S_B\}$ to'plamlar hosil bo'ladi. $\{S_A\}$ to'plam yuqorida, $\{S_B\}$ to'plam quyidagi chegaralangan. Demak, $\sup\{S_A\}=Q$, $\inf\{S_B\}=Q$ mavjud va $Q \leq Q$

2-ta'rif. Agar $Q=\emptyset$ bo'lса, (Q) shakl yuzga eга deyiladi va

$Q \cdot Q \bar{Q}$ miqdor (Q) shakning yuzi deyladi. Demak, $Q = \sup\{S_{n_k}\} - \inf\{S_{n_k}\}$ hamda boshidagi $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzlucksiz bo'lib, $\forall x \in [a, b]$ $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzlucksiz bo'lib, $\forall x \in [a, b]$ uchun $f(x) > 0$ bo'lсин.

Yuqorida $f(x)$ funksiya grafigi, yon tomonlardan $x = a$, $x = b$ vertikal chiziqlar hamda pastdan OX abssisse o'qi bilan chegaralangan shaklni, ya'ni $aABb$ egri chiziqli trapetsiyani qaraylik. (40-chizma)



40-chizma.

$[a, b]$ oraliqning ixtiyoriy

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

bo'laklashi uchun har bir $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) oraliqida

$$\inf\{f(x)\} = m_k, \quad \sup\{f(x)\} = M_k$$

$$(v. \{x_k, x_{k+1}\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

mavjud bo'ladi.

Quyidagi

$$S_1 = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k, \quad S_n = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$$

yig'indilarni tuzamiz. Bu yig'indilarning birinchisi $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning ichiga chizilgan ko'pburchakning yuzini (40-chizmada bu yuz shtrixlangan), ikkinchisi esa $aABb$ egri chiziqli trapesiyani o'z ichiga olgan ko'pburchakning yuzini ifodalaydi.

Ravshanki, bu ko'pburchaklar, demak, ularning yuzlari ham $f(x)$ funksiyaga hamda $[a, b]$ oraliqni bo'laklashga bog'liq bo'ladi:

$$S_1 + S_n(P) = S_n - S_1(P)$$

$[a, b]$ oraliqda turli bo'laklashlar olinsa, ularga nisbatan $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning ichiga chizilgan hamda bu egri chiziqli trapesiyani o'z ichiga olgan turli ko'pburchaklar yasaladi. Natijada bu ko'pburchak yuzlaridan iborat quyidagi

$$\{S_1(P)\}, \quad \{S_n(P)\}$$

to'plamlar hosil bo'ladi. Bunda $\{S_n(P)\}$ to'plam yuqoridan, $\{S_k(P)\}$ to'plam esa quyidan chegaralangan bo'ladi. Demak, bu to'plamlarning

$$\text{Sup}\{S_n(P)\}, \quad \inf\{S_n(P)\}$$

aniq chegaralar mavjud.

Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz. U holda Kantor teoremasining natijasiga asosan $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda $\frac{\varepsilon}{b-a}$ songa ko'ra shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $[a, b]$ oraliqni diametri $\lambda_p < \delta$ bo'lgan har qanday P bo'laklash uchun har bir $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ oraliqda funksiyaning tebranishi

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

bo'ladi. Unda

$$\inf\{S_n(P)\} - \text{Sup}\{S_n(P)\} \leq S_R(P) - S_A(P) + \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon$$

Demak, $[a, b]$ oraliqni diametri $\lambda_p < \delta$ bo'lgan har qanday bo'laklash olinganda ham bu bo'laklashga mos $aABb$ egri chiziqli trapesiyaning ichiga chizilgan hamda bu trapesiyani o'z ichiga olgan ko'pburchak yuzlari uchun har doim

$$0 \leq \inf\{S_n(P)\} - \text{Sup}\{S_n(P)\} < \varepsilon$$

tengsizlik o'rini bo'ladi. Bundan esa

$$\inf\{S_n(P)\} = \text{Sup}\{S_n(P)\} \quad (10.10)$$

tenglik kelib chiqadi.

(10.10) tenglik $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzaga ega bo'lishini bildiradi.

Endi yuqorida o'rganilgan $S_A(P)$, $S_R(P)$ yig'indilarni Darbu yig'indilari (9 – bobdag'i 5 – ta'rifga qarang) bilan taqqoslab, $S_A(P)$ hamda $S_R(P)$ yig'indilar $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ oraliqda mos ravishda Darbuning quyi hamda yuqori yig'indilari ekanini topamiz. Shuning uchun (9 – bobdag'i 6 – ta'rifga asosan) ushbu

$$\text{Sup}\{S_A(P)\}, \quad \inf\{S_R(P)\}$$

miqdorlar $f(x)$ funksiyaning quyi hamda yuqori integrallari bo'ladi:

$$\text{Sup}\{S_A(P)\} = \int_a^b f(x) dx, \quad \inf\{S_R(P)\} = \int_a^b f(x) dx$$

Yuqorida isbotlangan (10.10) munosabatga ko'ra

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

tenglik o'rini ko'rinadi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Demak, aABB egri chiziqli trapetsiyarning yuzi

$$Q = \int_a^b f(x)dx \quad (10.11)$$

bo'ladi.

10.4-misol. Quyidagi

$$y = 0, \quad y = \frac{1}{2}x^2, \quad x = 1, \quad x = 3$$

chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzini toping. (41-chizma)

◀ (10.11) formuladan foydalananib, topamiz:

$$Q = \int_1^3 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{6}x^3 \Big|_1^3 = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} = \frac{13}{3} \quad ▶$$

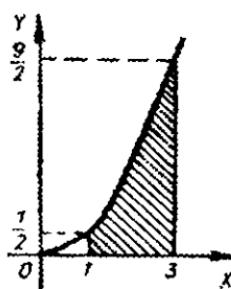
Agar tekislikda (Q) shakl quyidagi

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x), \quad x = a, \quad x = b$$

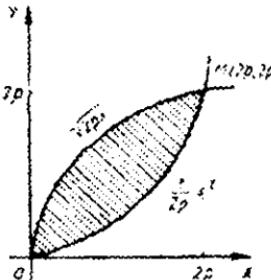
chiziqlar bilan chegaralangan shaklni ifodalasa (42-chizma)(bunda $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar [a, b] oraliqda uzluksiz bo'lib, bu oraliqda $f_1(x) \geq 0, \quad f_2(x) \geq 0, \quad f_1(x) \geq f_2(x)$) u holda bu shaklning yuzi uchun ushbu

$$Q = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx \quad (10.12)$$

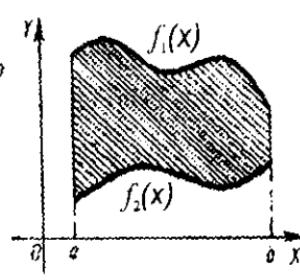
formula o'rini bo'ladi.



41-chizma.



42-chizma.



43-chizma.

10.5-misol. Ushbu $f_1(x) = \sqrt{2px}, \quad f_2(x) = \frac{1}{2p}x^2$ ($p > 0$) chiziqlar bilan

chegaralangan shaklning yuzin toping. (43 – chizma)

► Izlangan yuz $y = \sqrt{2px}$ va $y = \frac{1}{2p}x^2 (p > 0)$ parabolalar bilan chegaralangan. Shu parabolalar $(0, 0)$ va $(2p, 2p)$ nuqtalarda kesishadi. Demak, izlangan yuza $x = 0, x = 2p$ va $y = \sqrt{2px}, y = \frac{1}{2p}x^2$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi. Shuning uchun (10.12) formuladan foydalanib topamiz:

$$Q = \int_0^{2p} \left[\sqrt{2px} - \frac{1}{2p}x^2 \right] dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{2px^3} - \frac{x^3}{6p} \right]_0^{2p} = \frac{4}{3}p^2. \blacksquare$$

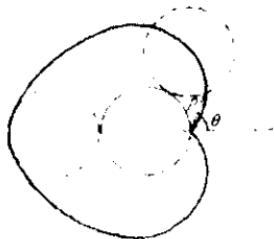
1-eslatma. Yuqoridagi (10.12) formula $[a,b]$ oraliqda $f(x) \geq 0$ bo'lganda *altib* egri chiziqli trapetsiyaning yuzini ifodalashini ko'ridik. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzlucksiz bo'lib, unda ishora saqlamasada, (10.11) formuladagi integral egri chiziqli trapetsiyalar yuzlarining yig'indisi iborat bo'ladi. Bunda αx o'qining vuqoridagi yuz musbat ishora bo'lsa, αx o'qining pastidagi yuz esa manfiy ishora bilan olinadi.

2-eslatma. Tekis shaklning yuzini quyidagicha ham ta'riflash mumkin. Tekislikda (Q) shakl berilgan (39 – chizmaga qarang). $\{A_n\}$ shu shakl ichiga chizilgan ko'pburchaklar ketma – ketligi. $\{B_n\}$ esa Q shakli o'z ichiga olgan ko'pburchaklar ketma – ketli bo'lsin. A_n hamda B_n ko'pburchaklar yuzlari mos ravishda s_{A_n} va s_{B_n} bo'lib, ulardan tuzilgan ketma – ketliklar esa $\{s_{A_n}\}$ hamda $\{s_{B_n}\}$ bo'lsin. Agar $n \rightarrow \infty$ da $\{s_{A_n}\}$ hamda $\{s_{B_n}\}$ ketma – ketliklar chekli limitga ega bo'lib, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{B_n}$ tenglik o'rinni bo'lsa, (Q) shakl yuzga ega deyiladi, ushbu

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{B_n}$$

miqdor (Q) shakl yuzi deb ataladi.

Quth koordinata sistemasida ushbu $\rho = \rho(\theta) (\alpha \leq \theta \leq \beta)$ funksiya tasvirlagan AB yoy hamda OA va OB radius vektorlar bilan chegaralangan shakl – egri chiziqli sektorni qaraylik. Bunda $\rho(\theta)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ oraliqda uzlucksiz hamda $\forall \theta \in [\alpha, \beta]$ uchun $\rho(\theta) > 0$.



44 - chizma.

Bu OAB sekotor yuziga ega bo'lib, uning yuzi

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \rho^2(\theta) d\theta$$

bo'ladi.

10.6-misol. Ushbu

$$\rho = a(1 - \cos\theta) = a(1 - \cos\theta) \quad (a = \text{const}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

funksiya grafigi bilan chegerelangan shaklning yuzini toping.

◀ Bu funksiya kardiodani ifodalaydi. Ma'lumki, kardioda – radiusi a ga teng bo'lgan aylananining shu radiusli ikkinchi qo'zg'almas aylana bo'ylab harakatja (sirg'anmasdan yumaishi) natijasida birinchi aylana ixtiyoriy nuqtasining chizgan chizig'idir. (44 - chizma).

Kardioida qutb o'qiga nisbatan simmetrik bo'lqani sababli yuqori yarim tekislikdagi shaklning yuzini topib, so'ngra uni ikkiga ko'paytirsak, izlanayotgan yuz kelib chiqadi.

θ o'zgaruvchi $[0, \pi]$ oraliqda o'zgarganda ρ radius – vektor kardioidaning yuqori yarim tekislikdagi qismini chizadi. Shuning uchun

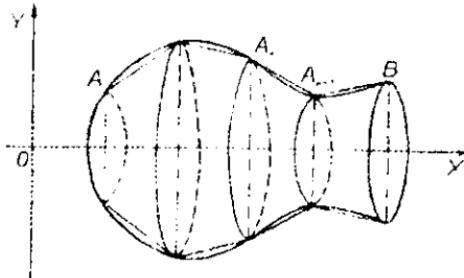
$$Q = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \rho^2(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} a^2(1 - \cos\theta)^2 d\theta = a^2 \int_0^{\pi} \left[\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta \right] d\theta = \\ = a^2 \left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sin 2\theta \right]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2$$

$$\text{Demak, } Q = \frac{3}{2}\pi a^2 \quad ▶$$

3-§ Aylanma sirtning yuzi va uning aniq integral orqali ifodalanishi

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzlusiz bo'lib, $\forall x \in [a, b]$ uchun $f(x) \geq 0$ bo'lsin. Shu funksiya grafigininining $A(a, f(a))$ va $B(b, f(b))$ nuqtalar orqasidagi bo'lagini AB yoy deb yuritamiz. Shu AB

voyni - o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirt aylanma sirt deb ataladi. (45- chizma).



45 chizma.

Bu sirtning yuzini aniqlab, uning aniq integral orqali ifodalishini ko'rsatamiz. $[a, b]$ oraliqni ictiyoriyor

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

bo'laklashni olaylik. P bo'laklashning har bir x_k ($k = 0, 1, \dots, n$) bo'luvchi nuqtalari orqali OY o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib, ularning AB yoyi bilan kesishgan nuktalarning $A_k(x_k, f(x_k))$ bilan belgilaylik. Bu $A_k(x_k, f(x_k))$ ($k = 0, 1, \dots, n^*$, $A_0 = A$, $A_n = B$) nuqtalarni o'zaro to'g'ri chiziq kesmalari bilan birlashtirib, AB yoyiga \tilde{L} siniq chiziq chizamiz.

\tilde{AB} yoyining OX o'qi atrofida aylantirish bilan birga siniq chiziqni ham shu o'qi atrofida aylantiraimiz. Natijada kesik konus sirtlardan tashkil topgan sirt hosil bo'ladi. Bu sirtning yuzi ushbu

$$\begin{aligned} q = & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\pi f(x_k) + 2\pi f(x_{k+1})}{2} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2} \\ & + \frac{2\pi}{2} \sum_{k=n}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2} \end{aligned} \quad (10.13)$$

formula bilan ifodalanadi.

\tilde{L} bo'laklashning diametri $\lambda_p \rightarrow 0$ da \tilde{AB} yoyiga chizilgan \tilde{L} siniq chiziq peremetri L (shu bobning 1 - § da ko'rsatilganiga ko'ra) \tilde{AB} yoyi uzunligiga intiladi.

Buni e'tiborga olib, $\lambda_p \rightarrow 0$ da L siniq chiziqni OX o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan (kesik konus sirtlaridan tashkil topgan) sirtning yuzi q ning limitini biz izlayotgan aylanma sirtning yuzi deb qarash tabiiy.

Endi aylanma sirt yuzining aniq integral orqali ifodalash maqsadida qaralayotgan $f(x)$ funksiyani $[a, b]$ oraliqda uzlusiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin deb qaraymiz. Avval $f(x)$ funksiya $[a, b]$

oraliqda uzliksiz bo'lgani uchun $\{x_k, x_{k+1}\}$ oraliqda ham uzliksiz bo'lib, unda shunday nuqta topiladi.

$$\frac{\left(\tau_{k+1} - \xi_k\right)^2 + \left(\tau_k - \xi_k\right)^2}{2} < f(\xi_k) = \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

tenglik o'rini bo'ladi. Bu bir tomonidan, ikkinchi tomonidan, Lagranj teoremasiga ko'ta $\{x_k, x_{k+1}\}$ oraliqda shunday τ_k nuqta topiladi.

$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\tau_k)(x_{k+1} - x_k), \quad \tau_k \in [x_k, x_{k+1}]$
tenglik ham o'rini bo'ladi. Natijada (10.13) munosabat ushbu

$$\begin{aligned} q &= 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + f'^2(\tau_k)(x_{k+1} - x_k)^2} = \\ &= 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\tau_k)} \Delta x_k \quad (\Delta x_k = x_{k+1} - x_k) \end{aligned}$$

ko'rinishni oladi.

Bu holda ham yuqoridaagi yig'indi

$$f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$$

funksiyaning integral yig'indisini eslatadi. Farqi, $\eta_k \in [x_k, x_{k+1}]$ ixtiyoriy nuqta bo'lgan holda, ξ_k va τ_k lar shu $\{x_k, x_{k+1}\}$ oraliqdagi tayin nuqtalarligidir.

Modomiki,

$$f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$$

funksiya $[a, b]$ da uzliksiz binobarin integralanuvchi ekan.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\tau_i)} \cdot \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\eta_i) \sqrt{1 + f'^2(\eta_i)} \cdot \Delta x_i = \int f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

bo'ladi.

Demak, aylanma sirtning yuzi

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (10.14)$$

bo'ladi.

10.7-misol. $[0, a] = (a \neq 0)$ oraliqda

$$y = \frac{a}{2} \left(e^x + e^{-x} \right) \quad (10.15)$$

zanfir chiziqni ∂X o'qi atrofida aylantishdan hosil bo'lgan aylanma sirtning yuzini toping.

◀Avvalo (10.15) funksivaning hosilasini hisoblaymiz:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(e^x - e^{-x} \right)$$

So'ngra (10.14) formuladan foydalanib, izlanayotgan aylanma surʼting yuzini topamiz:

$$J = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{x^2} + e^{-x^2} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(e^{x^2} - e^{-x^2} \right)^2} dx = \pi \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{x^2} + e^{-x^2} \right)^2 dx .$$

$$\frac{\pi^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[e^{2x^2} + 2 + e^{-2x^2} \right] dx = \frac{\pi^2}{2} \left[\frac{a}{2} e^{2x^2} + 2x - \frac{b}{2} e^{-2x^2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2} \left(e^2 + e^{-2} + 4 \right)$$

4-§. O'zgaruvchi kuchning bajargan ishi va uning aniq integral orqali ifodalanishi

Faraq qilaylik, biror jism OY o'qi bo'ylab \wedge kuch ta'siri ostida harakat qilayotgan bo'lсин. Bunda F kuch jismning OY o'qidagi holatiga bog'liq, ya'ni $F = F(x)$ va uning yo'nalishi harakat yo'nalishi bilan ustma-ust tushsin, deylik. Bu kuch ta'sirida jismni a nuqtadan \wedge nuqtaga o'tkazish uchun bajarilgan ishni topish masalasi yuzaga keladi. Ma'lumki $F = F(x)$ kuch $[a,b]$ oraliqda $F(x) = c = \text{const}$ bo'lса, jismni a nuqtadan \wedge nuqtaga o'tkazish uchun bajarilgan ish $A = C(b-a)$ formula bilan ifodalanadi.

$F(x)$ kuch $[a,b]$ oraliqda \wedge o'zgaruvchining ixtiyoriy uzlusiz funksiyasi bo'lсин. U holda $[a,b]$ oraliqni ixtiyoriy

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1, \dots, x_n = b)$$

bo'laklashni olib, bu bo'laklashning har bir $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) orlig'ida ixtiyoriy ξ_k ($\xi_k \in [x_k, x_{k+1}], k = 0, 1, \dots, n-1$) nuqta olamiz.

Agar har bir $[x_k, x_{k+1}], k = 0, 1, \dots, n-1$ oraliqda jismga ta'sir etayotgan $F(x)$ kuchni o'zgarmas va $F(\xi_k)$ ga teng deb olsak, u holda $[x_k, x_{k+1}]$ orlig'ida bajarilgan ish taxminan $F(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$ formula bilan, $[a,b]$ oraliqda bajarilgan ish esa, taxminan

$$A \approx \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \Delta x_i \quad (10.16)$$

formula bilan ifodalanadi.

$F = F(x)$ kuch ta'sirida jismni a nuqtadan \wedge nuqtaga o'tkazish uchun bajarilgan ishni ifodalovchi (10.16) formula taqribidir.

Ravshanki, $\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \Delta x_k$ yig'indini $F = F(x)$ funksiyaga bog'liq bo'lishi bilan birga u $[a,b]$ oraliqni bo'laklashga hamda har bir $[x_k, x_{k+1}]$ oraliqda olingan ξ_k nuqtalarga bog'liq.

Endi $\lambda_p \rightarrow 0$ da (10.16) yig'indi $[a,b]$ oraliqni bo'laklash usuliga holda yuqoridagi yig'indining qiymati biz izlayotgan ish miqdorini tobora aniqroq ifodalavdi. Demak, $\lambda_p \rightarrow 0$ da yuqoridagi yig'indining chekli limitini bajarilgan ish deb aytish tabiiydir.

Agar $\lambda_p \rightarrow 0$ da (10.16) yig'indi $[a,b]$ oraliqni bo'laklash usuliga hamda ξ_k nuqtani tanlab olishga boq'liq bo'limgan holda chekli A songa intilsa, bu A son o'zgaruvchi $F(x)$ kuchning $[a,b]$ oraliqdagi bajargan ishi deb ataladi. Demak,

$$A = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \Delta x_k$$

Yuqoridagi (10.16) yig'indi $F(x)$ funksiyaning $[a,b]$ oraliqdagi integral yig'indisi ekanini payqash qiyin emas. Qaralayotgan $F(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzlusiz bo'lgani uchun u shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi. Demak,

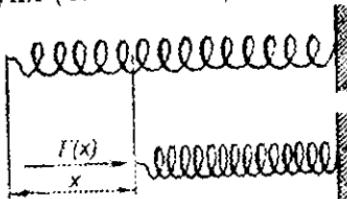
$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b F(x) dx$$

Shunday qilib, o'zgaruvchi $F(x)$ kuchning $[a,b]$ oraliqdagi bajargan ishi

$$A = \int_a^b F(x) dx$$

formula bilan ifodalanadi.

10.8-misol. Vintsimon prujinaning bir uchi mustahkamlangan, ikkinchi uchiga esa $F = F(x)$ kuch ta'sir etib, prujina qisilgan deylik (46 – chizma).



46 – chizma.

Agar prujinaning qisilishi unga ta'sir etayotgan $F(x)$ kuchga proporsional bo'lsa, prujinani a birlikka qisish uchun $F(x)$ kuchning bajarilgan ishini toping.

Agar $F(x)$ kuch ta'sirida prujinaning qisilish miqdorini x orqali belgilasak, u holda

$$F(x) = kx$$

bo'ldi, bunda k - proporsionallik koefitsienti (qisilish koefitsienti). Yuqoridaqı formuladan toydalaniň bajarilgan ishni hisoblayimiz:

$$A = \frac{\int k v dx}{2} = \frac{kv^2}{2} \rightarrow$$

5-§. Inersiya momentti

Mexanikada inersiya momentti tusbunchasi muhim bo'lib, u masalalar yechishda ko'p qo'llaniladi. Tekislikda m massaga ega bo'lgan x moddiy nuqta berilgan bo'lib, bu nuqtadan biror r o'qqacha (yoki 0 nuqtagacha) bo'lgan masofa r ga teng bo'lsin.

Ma'lumki, ushbu $J = mr^2$ miqdor x moddiy nuqtaning r o'qni (0 nuqtaga) nisbatan inersiya momentti deb ataladi.

Masalan, tekislikdagı m massaga ega bo'lgan x $J(x,y)$ moddiy nuqlaning koordinatala o'qlariga hamda koordinata boshiqa nisbatan inersiya momentlari mos ravishda

$$J_x = mv^2, \quad J_y = mv^2, \quad J_0 = m(v_x^2 + v_y^2)$$

formulalar bilan ifodalananadi.

Endi tekislikda har biri mos ravishda m_0, m_1, \dots, m_{n-1} massaga ega bo'lgan $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ moddiy nuqtalar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu sistemaning biror x o'qqa (0 nuqtaga) nisbatan inersiya moment har bir nuqtaning shu x o'qqa (0 nuqtaga) nisbatan inersiya momentlari yiq'indisi $J_x = \sum_{k=0}^{n-1} m_k r_k^2$ sifatida ta'riflanadi, bunda r_k miqdor β_k nuqtadan x o'qqacha (0 nuqtagacha) bo'lgan masofa.

Masalan, tekislikda har biri mos ravishda m_0, m_1, \dots, m_{n-1} massaga ega bo'lgan $\beta_0(x_0, y_0), \beta_1(x_1, y_1), \dots, \beta_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ moddiy nuqtalar sistemasining koordinatala o'qlariga hamda koordinata boshiqa nisbatan inersiya momentlari mos ravishda

$$J_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k x_k^2, \quad J_y^{(m)} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k y_k^2, \quad J_0^{(m)} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

formula bilan ifodalananadi.

Biror $x = x(t)$ egri chiziq yoyi bo'yicha massa tarqatilgan bo'lsin. Bu massala egri chiziq yoyining koordinatala o'qlari hamda koordinata boshiqa nisbatan inersiya momentini

aniqlaymiz.

$f'(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzlusiz hamda uzlusiz $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiya grafigi AB yoyini tasvirlasin, deylik. AB yoyi bo'yicha zichligi o'zgarmas va 1 ga teng bo'lgan massa tarqatilgan. Ravshanki, bu holda massa yoy uzunligiga teng va (10.1) formulaga ko'ra

$$m = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

bo'ladi.

$[a, b]$ oraliqni ixtiyoriy

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

bo'laklashni olaylik. Bu bo'laklash AB yoyini $A_k(x_k, f(x_k))$ ($k = 0, 1, \dots, n - 1$, $A_0 = A$, $A_{n-1} = B$) nuqtalar bilan n ta Δx_k bo'lakka ajratadi. Bunda $A_k A_{k+1}$ bo'lakning massasi (10.1) formulaga ko'ra topiladi:

$$m_k = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n - 1)$$

O'rta qiymat haqidagi teoremaiga asosan shunday $\xi_k (\xi_k \in [x_k, x_{k+1}])$ nuqta topiladi,

$$m_k = \int_a^{x_{k+1}} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k$$

bo'ladi, bunda $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

Yuqoridagi munosabatlarga muvofiq $(\xi_k, f(\xi_k))$ ($k = 0, 1, \dots, n - 1$) moddiy nuqtaning koordinata o'qlariga hamda koordinata boshiga nisbatan inersiya momentlari mos ravishda

$$J_{\xi_k} = \xi_k m_k = \xi_k \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k,$$

$$J'_{\xi_k} = f'(\xi_k) m_k = f'(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k,$$

$$J''_{\xi_k} = (\xi_k^2 + f'(\xi_k))^2 m_k = (\xi_k^2 + f'(\xi_k))^2 \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k,$$

formula bilan, $(\xi_0, f(\xi_0))$, $(\xi_1, f(\xi_1))$, ..., $(\xi_{n-1}, f(\xi_{n-1}))$ moddiy nuqtalar sistemasining inersiya momentlari esa mos ravishda

$$J_{\xi_k}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_k^i \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k,$$

$$J'_{\xi_k}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k, \quad (10.17)$$

$$J''_{\xi_k}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} (\xi_k^2 + f'(\xi_k))^2 \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k.$$

Formulalar bilan ifodalanadi.

Endi e bo'laklashning diametri λ nolga intila borsin. Unda har bir $A_k A_{k+1}$ yoynung uzunligi ham nolga intila borib, $A_k A_{k+1}$ voyi esa niqtaqa aylana boradi. Bu hol tabны ravishda $\lambda \rightarrow 0$ da (10.17) formulalar bilan ifodalangan $J_x^{(n)}, J_y^{(n)}, J_0^{(n)}$ yig'indilarning limitini massaga ega bo'lgan moddiy egri chiziq yoyining koordinata o'qlari hamda koordinata boshiga nisbatan inersiya momenti deb qarashqa olib keladi.

$\lambda \rightarrow 0$ da $J_x^{(n)}, J_y^{(n)}, J_0^{(n)}$ vig'indilarning limiti moddiy egri chiziq yoyining koordinata o'qlariga hamda koordinata boshiga nisbatan inersiya momenti deb ataladi va ular mos ravishda J_x, J_y, J_0 kabi belgilanadi.

Demak,

$$J_x = \lim_{\lambda \rightarrow 0} J_x^{(n)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2 \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k,$$

$$J_y = \lim_{\lambda \rightarrow 0} J_y^{(n)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k,$$

$$J_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} J_0^{(n)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (\xi_k^2 + f^2(\xi_k)) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k$$

(10.17) munosabatdagи yig'ndilarni $[a, b]$ oraliqda mos ravishda quyidagi

$$x^2 \sqrt{1 + f'^2(x)}, f^2(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}, (x^2 + f^2(x)) \sqrt{1 + f'^2(x)}$$

funksiyalarning integral yig'indilari ekanligini payqash qiyin emas. Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzlusiz hamda uzlusiz $f'(x)$ hosisaga ega. Shuning uchun yuqoridagi funksiyalar $[a, b]$ da integrallanuvchi. Demak,

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2 \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k = \int_a^b f^2(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (\xi_k^2 + f^2(\xi_k)) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k = \int_a^b (x^2 + f^2(x)) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Natijsada ushbu

$$\begin{aligned}J_1 &= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \\J_2 &= \int_a^b x^2 \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \\J_3 &= \int_a^b (x^2 + f^2(x)) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx\end{aligned}$$

Formulalarga ega bo'lamiz.

Mashqlar

10.9. Ushbu

$$y' = 2px$$

parabolaning $(0,0)$ va (x,y) nuqtalari orasidaqи yoyining uzunligi

$$L = \frac{x}{2p} \int \sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2} \ln \frac{\sqrt{y^2 + p^2} + p}{\sqrt{y^2 + p^2} - p}$$

ga teng bo'lishi isbotlansin.

10.10. Parametrik ko'rinishda ($x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$) benilgan egri chiziq yoyining uzunligi

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

bo'lishi isbotlansin.

10.11. Ushbu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = c \quad (c > a)$$

chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi topilsin.

10.12. Radiusi r bo'lgan ($r > 0$) shar sirtining yuzi topilsin.

X1 BOB

Sonli qatorlar

Biz mazkur bobda, sonli qatorlarni, ularning yaqinlashishi, uzoqlashishi, yaqinlashish alomatlari hamda yaqinlashuvchi qatorlarning xossalalarini o'rganamiz.

1-§. Asosiy tushunchalar

Ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (11.1)$$

haqiqiy sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsm.

1-ta'rif. Quyidagi

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (11.2)$$

ifoda qator (*sonli qator*) deb ataladi. Uni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kabi belgilanadi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

(11.1) ketma-ketlikning $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ elementlari qatorning hadlari deyiladi, a_n esa qatorning umumiy (n -chi) hadi deyiladi. (11.2) qatorning hadlaridan quyidagi

$$A_1 = a_1,$$

$$A_2 = a_1 + a_2,$$

$$A_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

.....

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

.....

yig'indilarni tuzamiz. Ular qatorning qismiy yig'indilarini deyiladi.

Demak, (11.2) qator berilgan holda har doim bu qatorning qismiy yig'indilaridan iborat ushbu A_n :

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$$

sonlar ketma-ketligini hosil qilish mumkin.

2-ta'rif. Agar $n \rightarrow \infty$ da (11.2) qatorning qismiy yig'indilaridan iborat A_n ketma-ketlik chekli limitga ega, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \quad (A \in R)$$

bo'lsa, *qator yaqinlashuvchi* deyiladi.

Bu limitning qiymati - son (11.2) qatorning yig'indisi

deyiladi va quyidagicha yoziladi

$$1 + a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_1 q^k$$

3-tarif. Agar $n \rightarrow \infty$ da (11.2) qatorning qismuy vig'indilanda iborat A_n ketma-ketlikning limiti cheksiz bo'lsa yoki bu limit mavjud bo'lmasa, u holda (11.2) qator uzoqlashuvchi deyiladi. Masalan:

1) Ushbu

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \dots$$

qator yaqinlashuvchi, chunki

$$A_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \dots + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 2$$

2) Quyidagi

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

qator uzoqlashuvchi, chunki

$$A_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty$$

3) Quyidagi

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

qator ham uzoqlashuvchi, chunki

$$A_n = 1 - 1 + \dots + (-1)^n \cdot \begin{cases} 0, & \text{agar } n \text{ juft son bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } n \text{ toq son bo'lsa} \end{cases}$$

bo'lib, A_n ketma-ketlik limitga ega emas.

11.1 misol. Geometrik progressiya $a, aq, \dots, aq^{n-1}, \dots$ hadlaridan tuzilgan

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

qatorni yaqinlashuvchilikka tekshirilsin. Odatda bu qator geometrik qator deyiladi.

◀ Ravshanki,

$$A_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q}, \quad (q \neq 1)$$

Agar $|q| < 1$ bo'lса

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{q}{1-q}$

bo'ldi. Demak, bu holda geometrik qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $\frac{q}{1-q}$ songa teng.

Agar $q < 1$ bo'lsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{q}{1-q}$ bo'lib, qator uzoqlashuvchi bo'ldi.

Agar $q > 1$ bo'lsa, $a_n > r$ da $a_n - r > 0$ bo'lib, qator uzoqlashuvchi, $q > 1$ bo'lganda esa a_n ketma-ketlik limitga ega emas. Demak, bu holda ham qator uzoqlashuvchi bo'ldi.

Shunday qilib, geometrik qator $|q| < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $|q| > 1$ va $|q| = 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ldi.

11.2-misol. Quyidagi

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \dots \quad (11.3)$$

qatorni uzoqlashuvchi bo'lishi ko'rsatilsin. Bu qator garmonik qator deb ataladi.

◀ (11.2) qatorning birinchi 2^k ta ($k \in N$) hadidan tuzilgan

$$a_{2k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k-1+1} + \dots + \frac{1}{2^k}$$

qismiy yig'indisini olib, uni quyidaqicha yozib olamiz.

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{2k-1}+1} + \frac{1}{2^{2k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k}\right). \end{aligned}$$

Endi ushbu

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} = 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\dots + \frac{1}{2^{2k-1}+1} + \frac{1}{2^{2k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k} > \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{3}{2^k} = \frac{3}{2}$$

tengsizliklarni e'tiborga olsak, unda

$$a_{2k} > 1 + k \cdot \frac{1}{2}$$

tengsizlikning o'rinni bo'lishi kelib chiqadi. Ravshanki ketma ketlik o'suvchi va $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \ln 2$ Shunday qilib, гармоник qator uzoqlashuvchi. ►

11.3 misol. Ushbu

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots \quad (11.4)$$

qatorni yaqinlashuvchiligi, yig'indisi $\ln 2$ ga tengligi ko'rsatilsin.

◀ Bu qatorning qisiniy yig'indisini yozamiz.

$$A_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Ma'lumki,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + r_n(x)$$

bunda $0 \leq x \leq 1$ uchun

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

tengsizlik o'rinni (6 bob, 7 § ning 6- bandidiga qarang). Yuqoridagi formulada $x=1$ deb topamiz.

$$\ln 2 = A_n + r_n(1)$$

natijada ushbu

$$|A_n - \ln 2| = |r_n(1)| \leq \frac{1}{n+1}$$

tengsizlikka kelamiz. Unda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \ln 2.$$

kelib chiqadi. Demak, (11.4) qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $\ln 2$ ga teng. ►

Aytaylik

$$\sum_{k=1}^m a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_m + \dots$$

qator berilgan bo'lsin. Bu qatorning dastlabki m -ta hadini tashlash natijasida hosil bo'lgan ushbu

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \quad (11.5)$$

qator $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning (m -chi hadidan keyingi) qoldig'i deyiladi.

2-§. Yaqinlashuvchi qatorning xossalari Koshi teoremasi

1⁰. Yaqinlashuvchi qatorning xossalari. Biror

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_m + \dots \quad (11.2)$$

Qator berilgan bo'lsin. Agar qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u ma'lum xossalarga ega bo'ladi.

1-xossa. Agar (11.2) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning istalgan (11.5) qoldig'i ham yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha.

◀ (11.2) qator berilgan bo'lsin. Biror m natural soni tayinlab. (11.5) qatorning qismini yig'indisini A_k bilan belgilaylik.

$$A_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k}$$

Ravshanki,

$$A_0 = A_{m+1} - A_m \quad A_k = A_0 + A_{k-m} \quad (n+m) \quad (11.6)$$

bunda $A_0 = a_1 + a_2 + \dots + a_m$ bo'ladi.

(11.2) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_m = A \quad (\text{A - chekli son})$$

bo'ladi. $k \rightarrow +\infty$ da (11.6) tenglikda limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A + A_m$$

Bu esa (11.5) qatorning yaqinlashuvchi ekanini bildiradi.

Endi (11.5) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A \quad (\text{A - chekli son})$$

bo'ladi. (11.6) tenglikda $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A + A_m$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa (11.2) qatorning yaqinlashuvchi ekanini bildiradi. ▶

Shunday qilib, qatorning dastlabki chekli sondagi hadlarini tashlab yuborish yoki qatorning boshiga chekli sondagi yangi hadlarini qo'shish uning yaqinlashuvchidagi xarakterga ta'sii qilmaydi.

1-natiya. Agar (11.2) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning qoldig'i

$$r_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k} + \dots$$

$m \rightarrow \infty$ da nolqa intiladi.

◀ Haqiqatan ham (11.2) qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi A bo'lsin, u holda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = A, \quad A = a_1 + a_2 + \dots$$

bo'lib,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = A - A = 0$$

bo'ladi. ►

2-xossa. Agar (11.2) qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi A ga teng bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n + \dots \quad (11.7)$$

qator ham yaqinlashuvchi va uning yig'indisi cA ga teng bo'ladi ($c \neq 0$, $n = n$ ga bog'liq bo'limgagan o'zgarmas son).

◀ (11.2) qatorning qismiy yig'indisi A'_n bilan belgilasak, u holda

$$A'_n = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = cA,$$

bo'lib, undan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A'_n = cA$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa (11.7) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini va uning yig'indisi cA ga teng ekanini bildiradi. ►

Bu xossa yaqinlashuvchi qatorlarda ushbu

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots) = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n + \dots$$

munosabatning o'rinni bo'lishini ifodalaydi.

3-xossa. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

qatorlar yaqinlashuvchi bo'lib, ularning yig'indisi mos ravishda A va B ga teng bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots \quad (11.8)$$

qator ham yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $A+B$ ga teng bo'ladi.

◀ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorlar yaqinlashuvchi. Demak, bu

qatorlarning qismiy yig'indilari (A_n va B_n lar) uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$

$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = A + B$ tengliklari o'rnili (11.8) qatorning qismiy vitiq'indilarini bilan belgilab topamiz:

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = A + B$$

Bundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = A + B$$

Keyinji tenglikdan xossalning isboti kehl chiqadi. ►

2-natija. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qotorlar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

qator ham yaqinlashuvchi va

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

tenglik o'rinni bo'ladi (bunda $i \in \mathbb{N}$ ga bog'lik bo'lмаган o'zgarmas sonlar)

4-xossa. Agar (11.2) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, bu qatorning umumiy hadi a_n , $n \rightarrow \infty$ da nolga intiladi.

◀ (11.2) qator yaqinlashuvchi bo'lsin, ya'mi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (A chekli son). Agar

$$a_n = b_n - d_{n+1}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, u holda limitlari xossalalariga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - d_{n+1}) = A - A = 0$$

bo'lishini topamiz. ►

Eslatma. Qatorning umumiy hadi $n \rightarrow \infty$ da nolga intilishdan uning yaqinlashuvchi bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi.

Masalan. Garmonik qator $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ning umumiy hadi $a_n = \frac{1}{n}$ bo'lib, u $n \rightarrow \infty$ da nolga intiladi, amimo bu qator uzoqlashuvchi.

Yuqorida keltirilgan 4-xossa qator yaqinlashishning zaruriy shartini ifodalaydi.

2⁰. Koshi teoremasi. Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

qator berilgan bo'lib,

$$a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

uning qismiy yig'indisi bo'lsin.

1-teorema. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $a_n > 0$ olinganda ham shunday $a_n < \lambda$ topilib, $n_0 < n$, va $n = 1, 2, 3, \dots$ lor uchun

$$A_{n+m} - A_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m} > 0$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

◀ Bu teoremaning isboti 3-bo'bi, da keltirilgan Koshi teoremasidan kelib chiqadi. ▶

Bu teorema muhim nazariy ahamiyatga ega bo'lib, undan amaliy masalalarni hal etishda foydalanish qiyin bo'ladi.

3-§. Musbat qatorlar

1^º. Musbat qatorlarning yaqinlashuvchi bo'lishi sharti. Biror (11.2) qator berilgan bo'lsin.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_r + \dots \quad (11.2)$$

Agar $a_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) bo'lsa, u holda (11.2) qator musbat holda qator yoki, qisqacha, musbat qator deb ataladi.

2-teorema. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning qismiy yig'indilari ketma-ketligi yuqorida chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

◀ **Zarurligi.** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsin: $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ (A - chekli son). U holda A_n ketma-ketlik yaqinlashuvchi binobarin chegaralangan, jumladan u yuqorida chegaralangan bo'ladi.

Yetarliligi. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning qismiy yig'indilari ketma-ketligi A_n yuqorida chegaralangan bo'lsin.

Shu qatorning har bir hadi manfiy bo'limgani uchun

$$A_{n+1} - A_n + a_{n+1} \geq A_n$$

tengsizlik o'tinli. A_n ketma-ketlik o'suvchi. Shuning uchun 3 bobdag'i 7-teoremaga ko'ra A_n ketma-ketlik chekli limitga ega:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$. Bu esa $\sum a_n$ qatorning yaqinlashuvchi ekanini bildiradi ►

11.4 misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$$

qatorni (uni umumlashgan гармоник qator deviladi) $\alpha > 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi ekanligi ko'rsatilsin

◀ Ravshanki qismiy yig'indilaridan tuzilgan

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$$

ketma - ketlik o'suvchi. Demak $a_n < a_{2n+1}$ ($n \geq 1, 2, \dots$). Ayni paytda

$$(a_{2n+1} + 1) + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^\alpha} \geq 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(2n)^\alpha} + \frac{1}{(2n+1)^\alpha} \right) \geq 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2}{4^\alpha} + \dots + \frac{2}{(2n)^\alpha} + 1 \cdot \frac{1}{2^\alpha} + a_n$$

bo'ladi.

Oxitgi ikki munosabatdan ushbu

$$a_n + 1 + \frac{1}{2^\alpha} \geq a_n$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bundan $\alpha > 1$ bo'lganda

$$(a_n + 1) \cdot \frac{2^\alpha - 1}{2^\alpha} \geq 0 \quad (n \geq 1, 2, \dots)$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Bu esa a_n ketma - ketlikning yuqoridan chegaralanganligini bildiradi. 2- teoreemaga ko'ra berilgan qator yaqin - lashuvchidir. ►

3-natija. Musbat qatorning qismiy yig'indilaridan iborat ketma - ketlik yuqoridan chegaralnmagan bo'lsa, qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

2º. Musbat qatorlarni taqqoslash haqida teoremlar.

Ma'lum musbat qatorning yaqinlashuvchanligi yoki uzoqlashuvchiligini bilgan holda, hadlari bu qator hadlari bilan biror munosabatda bo'lgan (taqqoslangan) ikkinchi musbat qatorning yaqinlashuvchiligi yoki uzoqlashuvchiligini aniqlash mumkin. Ular quvidagi teoremlar bilan ifodalanadi.

Ikkiti musbat $\sum a_n$ va $\sum b_n$ qator berilgan bo'lsin.

3-teorema. n ning biror $n_0(n_0 > 1)$ qiymatidan bosqich

barcha $n \geq n_0$ lar uchun

$$a_n \leq b_n \quad (11.9)$$

tengsizlik o'tinli bo'lsin. Agar a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

◀ Ushbu bobning 2-§ ida aytib o'tdikki, qatorning yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'lighiga uning chekli sondagi dastlabki hadlarining ta'siri bo'lmaydi. Shu sababli (11.9) tengsizlik $n_0 + 1$ dan boshlab o'rini bo'lsin deb qarash mumkin. Demak, $a_n \leq b_n$ ($n = 1, 2, \dots$) tengsizlik o'rini. U holda berilgan qatorlarning qismiy yig'indilari

$$\begin{aligned} A_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ B_n &= b_1 + b_2 + \dots + b_n \end{aligned}$$

uchun ushbu

$$A_n \leq B_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (11.10)$$

tengsizlik ham o'rini bo'ladi.

Avval $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda 2-teoremaga ko'ra B_n ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo'ladi: $B_n \leq M$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

Bundan (11.10) tengsizlikka asosan $A_n \leq M$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) tengsizlik ham o'rini ekani kelib chiqadi. Demak, A_n ketma-ketlik ham yuqoridan chegaralangan. Yana o'sha 2-teoremaga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

Endi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi bo'lsin. U holda A_n ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan. (11.10) tengsizlikka asosan B_n ketma-ketlik ham yuqoridan chegaralanmagan bo'ladi. Bundan esa $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi. ►

11.5-misol. Quyidagi

$$\sin \frac{\pi}{1^2} + \sin \frac{\pi}{2^2} + \sin \frac{\pi}{3^2} + \dots + \sin \frac{\pi}{n^2} + \dots$$

qator yaqinlashuvchiligidini tekshirish.

◀ Bu qator hadlari uchun

$$0 < \sin \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

tengsizlik o'rinni bo'lishini ko'rsatish qiyim emas. Demak, berilgan qatorning har bir hadi yaqinlashuvchi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ qatorning mos hadidan kichik. 3-teoremaga asosan berilgan qator yaqinlashuvchi ►

4-teorema. Ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \quad (0 < k < \infty)$$

limit mavjud bo'lsin. Agar: a) $k < \infty$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi; b) $k > 0$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

◀ a) $k < \infty$ bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Limit ta'rifiga ko'ra, $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topiladiki, barcha $n > n_0$ lar uchun

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - k \right| < \varepsilon$$

ya'm

$$(k - \varepsilon) b_n < a_n < (k + \varepsilon) b_n \quad (11.11)$$

tengsizliklar o'rinni bo'ladi.

Shartga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator yaqinlashuvchi. Shuning uchun

$\sum_{n=1}^{\infty} (k + \varepsilon) b_n$ qator ham yaqinlashuvchi. U holda (11.11)

tengsizlikdan va 3-teoremadan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

b) $k > 0$ bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator uzoqlashuvchi bo'lsin. Agar

$a_n > 0$ olsak, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ limit o'rinni ekamidan va $k < \infty$ bo'lishidan shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topildiki, $n > n_0$ bo'lganda $\frac{a_n}{b_n} < k_1$ tengsizlik o'rinni bo'ladi. Demak $n > n_0$ bo'lganda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} t_n$ tengsizlik bajanladi. Bundan 3-teoremaga asosan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.►

4-natija. Aqar ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$$

limit o'rinni bo'lib, $0 < k < \infty$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorlar bir vaqtida yaqinlashuvchi, yoki bir vaqtida uzoqlashuvchi bo'ladi.

11.6 misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}$$

qatorni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

◀ Bu qatorni qarmonik qator $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ bilan taqqoslaymiz. Bu ikki qator umumiy hadlarni nisbatining limitini topamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1+\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Demak, 4-natijaga ko'ra berilgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi.►

5-teorema. $n \in \mathbb{N}$ ning biror n_0 qiymatidan boshlab barcha $n > n_0$ lar uchun

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (11.12)$$

tengsizlik o'rinni bo'lsin. U holda a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi; b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

◀ Avval avtganimizdek (11.12) tengsizlik $n \geq n_0$ qiyatlarda bajariladi deb hisoblash mumkin. Shunday qilib,

$$\frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{a_n + b_n} < 1 \quad (n \geq 1, 2, \dots)$$

tengsizlik o'rnli deb qaraymiz. Unda quydagi

$\frac{a_1 + b_1}{a_0 + b_0} > \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} > \dots > \frac{a_n + b_n}{a_{n-1} + b_{n-1}}$ tengsizlik kelib chiqadi. Bundan ushbu

$$a_n + b_n < \frac{a_1 + b_1}{b_1} \quad (11.13)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, unda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Unda (11.13) tengsizlik va 3-teoremga asosan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

(11.12) tengsizlik o'rnli bo'lganda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishidan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning ham uzoqlashuvchiligi kelib chiqishi shunga o'xshash isbotlanadi.▶

3^º. Musbat qatorlar uchun yaqinlashuvchilik alomatlari. Biz yuqorida musbat qatorlarni taqqoslash teoremlarini keltirdik. Garchi bu teoremlar yordamida tekshiriladigan qator hadlarni ikkinchi qator hadlari bilan taqqoslab, qaralayotgan qatorning yaqinlashuvchiligi yoki uzoqlashuvchiligi masalasi hal bo'lsa ham taqqoslash teoremlari ma'lum noqulayliklarga ega. Bunday noqulayliklaridan biri berilgan qator bilan taqqoslanadigan qatorni tanlab olishning umumiy qoidasi yo'qligidir.

Berilgan qatorni geometrik hamda umumlashgan garmonik qatorlar bilan taqqoslab, qatorning yaqinlashuvchiligi yoki uzoqlashuvchiligini ifodalaydigan alomatlarni keltiramiz:

a) **Koshi alomati.** Musbat qator $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ berilgan bo'lsin. Agar $n \in \mathbb{N}$ ning biror $n_0 (n_0 > 1)$ qiyatlardan boshlab barcha $n \geq n_0$ qiyatlari uchun

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad (\sqrt[n]{a_n} \geq 1)$$

tengsizlik o'rnli bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi

(uzoqlashuvchi) bo'ladi.

◀Avval $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uchun $n \cdot a_n$ bo'lganda $\sqrt{n} \cdot a_n$ tengsizlik o'rini bo'lsin. Bu tengsizlik ushbu $a_n < q^n$ tengsizlikka ekvivalentdir. 3 teoremaiga ko'ta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar barcha $n \cdot a_n$ lar uchun $\sqrt{n} \cdot a_n$ ga yana ni $a_n < 1$ tengsizlik o'rini bo'lsa, u holda berilgan qatorning har bir hadi uzoqlashuvchi $\sum_{n=1}^{\infty}$ qatorming mos hadidan kichik bo'lmaydi.

Yana o'sha 3 teoremaiga ko'ta, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi bo'ladi. ►

Amaliy masalalarini hal qilishda ko'pincha, Koshi alomatining quyidagi limit ko'rinishidan foydalaniлади

Agar ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

limit mavjud bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator $k+1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $k+1$ bo'lganda esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

11.7-misol. Quyidagi $1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{7}\right)^n + \dots + \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n + \dots$ qatorning yaqinlashuvchiligi ko'rsatilsin.

Berilgan qator uchun

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n} = \frac{n+1}{2n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$$

bo'ladi.

Demak, Koshi alomatiga ko'ta berilgan qator yaqinlashuvchi.

b) Dalamber alomati. Agar $n \in \mathbb{N}$ ning biror n_0 ($n_0 \geq 1$) qiymatidan boshlab barcha $n > n_0$ qiymatlari uchun

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \quad \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \right)$$

tengsizlik o'rini bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'ladi.

◀ Berilgan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator bilan birga yaqinlashuvchi

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} \quad (0 < q < 1)$$

geometrik qatorni qataylik. Ushbu $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$ tengsizlikni

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < \frac{q^n}{q^n}$$

ko'rinishda vozib, so'ngra taqqoslash o'steoremani qo'llaymiz. Shu teoremaqa ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ qatorning yaqinlashuvchiligidan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ bo'lganda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishi ravshan.▶

Dalamber alomatini ham limit ko'rinishida ifodalash mumkin. Agar ushu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

limit mavjud bo'lsa, u holda $d < 1$ bo'lganda qator yaqinlashuvchi, $d > 1$ bo'lganda esa qator uzoqlashuvchi bo'ladи.

11.8-misol. Ushbu

$$1 + \frac{2^1}{2^1} + \frac{3^1}{3^1} + \dots + \frac{n^1}{n^1} \dots$$

qator yaqinlashuvchiligini tekshiring.

◀Bu qator uchun quyidagilarga egamiz:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^1}{(n+1)^1} = \frac{(n+1)^1 - n^1}{(n+1)^{n+1} - n^{n+1}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}$$

Dalamber alomatiga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi.▶

v) Raabe alomati. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat qator berilgan bo'lsin. Agar $n \in \mathbb{N}$ ning biror n_0 ($n_0 > 1$) qiymatidan boshtab barcha $n > n_0$ qiymatlar uchun

$$\left| n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \right| \geq 1 + 1 = 2 \quad \left(n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \leq 1 \right)$$

tengsizlik o'rini bo'lso, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'ladi.

◀ Avval $n > n_0$ lar uchun $a_{n+1} \geq \frac{a_n}{a_n}$ tengsizlik bajarilsin,

deylik. Bu tengsizlikni quyidagi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} \quad (11.14)$$

ko'rinishda yozib, so'ng $n > n_0 > 1$ tengsizlikni qanoatlantiradigan α son olamiz. Ma'lumki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = 1 - \alpha$$

(5 - bobning 6 - § iga qarang). Tanlanishiga ko'ra $\alpha < 1$ bo'lgani uchun shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topiladiki, barcha $n > n_0$ lar uchun

$$\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n < 1 - \alpha$$

tengsizlik o'rini bo'ladi. Undan ushbu

$$\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \leq 1 - \frac{\alpha}{n} \quad (11.15)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Endi $\max\{a_0, a_1, \dots, a_{n_0}\}$ deb olsak, barcha $n > n_0$ lar uchun (11.14) va (11.15) tengsizliklardan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \quad (11.16)$$

tengsizlikka ega bo'laimiz. Agar (11.16) tengsizlikni ushbu

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{n^\alpha}{(n-1)^\alpha}$$

ko'rinishda yozsak, unda berilgan qator hadlari bilan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ umumlashgan garmonik qator hadlari orasida (11.12) ko'rinishdagi munosabat borligini payqaymiz. Ma'lumki, $\alpha > 1$ da umumlashgan garmonik qator yaqinlashuvchi. Demak, 5 - teoremaga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Endi barcha $n \geq n_0$ lar uchun

$$n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) < 1$$

tengsizlik o'rinnli bo'lisin. Undan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n}{n+1}$$

tengsizlik ketib chiqadi. Shuning uchun 5-teoremaga asosan $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ гармоник qatorning uzoqlashuvchi bo'l shidan berilgan qatorning uzoqlashuvchi ekani ketib chiqadi.

Bu alomatni ham quyidagicha limit ko'rinishda ifodalash mumkin. Agar ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = g \quad (g \text{ const})$$

limit o'rini bo'lsa, $g > 1$ bo'lganda qator yaqinlashuvchi, $g < 1$ bo'lganda esa qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

11.9-misol. Quyidagi

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{n} + \dots$$

qatorni yaqinlashuvchilikga tekshiring.

◀ Bu qator uchun

$$n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = n \left(1 - \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{1}{1+n} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{n}{1} \right) = \frac{3n^2 + 3n}{2n^2 + 4n + 2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \frac{3}{2} > 1$$

bo'ladi. Demak, Raabe alomatiga ko'tra berilgan qator yaqinlashuvchi. ▶

g) **Integral alomat (Koshining integral alomati).** Ushbu

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat qator berilgan bo'lisin.

Faraz qilaylik, $[l, +\infty]$ orliqda aniqlangan, uzlusiz, o'smaydigan hamda manfiy bo'limgagan $f(x)$ funksiya uchun $f(n) = a_n$ ($n = 1, 2, \dots$) bo'lisin. U holda berilgan qator quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

ko'rinishni oladi. Ravshanki, $l < x < n+1$ bo'lganda

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$$

ya'ni $a_n \geq f(x) \geq a_{n+1}$ tengsizliklar o'rinnli. Keyingi tengsizliklarni $[l, n+1]$ oraliq bo'yicha integrallab topamiz:

$$a_{n+1} \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq a_n \quad (11.17)$$

Eindi berilgan qator bilan birga ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx \quad (11.18)$$

qatorni ham qaraylik. Bu qatorning qismiy yig'indisini yozamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx = \int_1^{\infty} f(x)dx \quad (11.19)$$

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[1, +\infty]$ oraliqda $f(x)$ boshlang'ich funksiyaga ega bo'lisin ($f'(x) < f(x)$) $[1, +\infty]$ oraliqda $f(x) > 0$ bo'lgani uchun $F(x)$ funksiya shu oraliqda o'suvchi bo'ladi. $F(x)$ funksiyani vuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan aniq integral ko'rinishda yozish mumkin:

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt, \quad F(1) = 0$$

Natijada (11.19) tenglik ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx = F(n+1)$$

ko'rinishiga keladi. Demak, (11.18) qatorning qismiy yig'indisi $F(n+1)$ ga teng.

Agar $n \rightarrow \infty$ da $F(n+1)$ chekli songa intilsa, shu qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Unda (11.17) tengsizlik hamda 5-teoremaga ko'ra qaratayotgan qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi $n \rightarrow \infty$ da $F(x) \rightarrow \infty$ bo'lsa, berilgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Shunday qilib, quyidagi integral alomatiga (Koshi alomatiga) kelamiz:

Agar $f(x)$ funksiya $[1, +\infty]$ oraliqda aniqlangan, uzuksiz va o'smaydigan bo'lib, $f(x)$ shu funksiya uchun boshlang'ich funksiya va $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uchun $f(n) = a_n$ ($n = 1, 2, \dots$) bo'lsa, u holda berilgan qator $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = A$ limit chekli bo'lganda yaqinlashuvchi, cheksiz bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.

11.10-misol. Quyidagi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ umumlashgan garmonik qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ ($\alpha > 0$) deb olaylik. Ravshanki, bu funksiya $[1, +\infty]$ da uzuksiz, kamayuvchi hamda shu oraliqda manfiy emas. Shu

bilan birga $x \rightarrow 0$ bo'lqanda $I(x) \rightarrow \frac{1}{\alpha}$. Ravshanki,

$$I(x) = \int_{x^{\alpha}}^{\infty} e^{-t} dt = \int_{x^{\alpha}}^{\infty} dt \cdot \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \frac{1}{e^{x^{\alpha}}} \left(\frac{1}{e^{x^{\alpha}} - 1} - 1 \right).$$

Bundan quyidagi natija kelib chiqadi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} I(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{x^{\alpha}}} \left(\frac{1}{e^{x^{\alpha}} - 1} - 1 \right) = \frac{1}{e^{x^{\alpha}}} \left(\frac{x^{\alpha} - 1}{e^{x^{\alpha}} - 1} - 1 \right) = \frac{x^{\alpha} - 1}{e^{x^{\alpha}} - 1} - 1 \rightarrow 0.$$

Agar $\alpha > 1$ bo'lsa, $x \rightarrow 0$ da

$$I(x) = \int_x^{\infty} dt / \ln t \rightarrow \infty$$

bo'ladi.

Demak, integral alomatiga ko'ta berilgan qator $a_n > 0$ bo'lqanda yaqinlashuvchi, $\alpha \leq 1$ bo'lqanda uzoqlashuvchi bo'ladi.

►

4-§. Ixtiyoriy hadli qatorlar

1º. Qatorning absolyut va shartli yaqinlashuvchiligi.
Ixtiyoriv

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

qator berilgan bo'lsin. Bu qator hadlarining absolyut qiymatlaridan quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$$

qatorni tuzamiz.

6-teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Ushbu teoremaning isboti yuqoridagi 1-teoremadan osongina kelib chiqadi.

4-ta'rif. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator absolyut yaqinlashuvchi deyiladi.

5-ta'rif. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator shartli yaqinlashuvchi deyiladi.

4-eslatma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishidan $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishi har doim chiqavermaydi.
Masalan, 1) Ushbu

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} + \dots$$

(1 - § dagi (11.4) qatorni qarang) Qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

qator uzoqlashuvchi. Demak, berilgan qator shartli yaqinlashuvchi.

2) Ushbu

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + (-1)^{n-1} + \dots$$

qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

qator yaqinlashuvchi. Demak, berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi.

Biror ixtiyoriy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator berilgan bo'lsin. Qaralayotgan qator hadlarining absolyut qiymatlarini olib, ulardan $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qatorni tuzamiz. Shu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qatorning musbat qatorligini e'tiborga olib, qaralayotgan qatorning absolyut yaqinlashuvchiligidini ifodalash alomatlardan birini – Dalamber alomatini keltiramiz.

Dalamber alomati. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$$

limit o'rinali bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator $l < 1$ bo'lganda absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

11.11-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \quad (x \neq \pm 1)$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ Bu qator uchun quyidagini topamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{\lambda}{1 - \lambda^n} \right| \left| \frac{\lambda}{1 - \lambda^n} \right|^2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda}{1 - \lambda^{n+1}} \right|^2 = \begin{cases} |\lambda|, & \text{if } |\lambda| < 1 \\ 1, & \text{if } |\lambda| \geq 1 \end{cases}$$

Demak, $\lambda < 1$ da berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi. $\lambda > 1$ bo'lqanda esa qatorning xarakteri to'q'risida Dalambor alomati biror xulosa bermaydi. Ammo $\lambda > 1$ bo'lgan holda $n \rightarrow \infty$ da qatorning umumiy holda nolja intilmaganligi sababli (uning limiti 1 ga teng) qator uzoqlashuvchidir.►

2º. Hadlarning ishoralarini navbat bilan o'zgarib keladigan qatorlar. Leybnis teoremasi. Biz quyida ixtiyorli qatorlarning bitta muhim holini qaravimiz.

Ushbu

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + (-1)^{n-1} c_n + \dots \quad (11.20)$$

qatorni qaraylik, bunda $c_n > 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$

Odatda bunday qator hadlarning ishoralarini navbat bilan o'zgarib keladigan qator deb ataladi.

Quyidagi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots \\ & \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}, \end{aligned}$$

qatorlar hadlarning ishoralarini navbat bilan o'zgarib keladigan qatorlardir.

7-teorema. (Leybnis teoremasi). Agar (11.20) qatorda

$$c_{n+1} < c_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (11.21)$$

tengsizliklar o'rinni bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \quad (11.22)$$

bo'lsa, (11.20) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

◀ Berilgan (11.20) qatorning $2m$ ($m \in N$) ta hadidan iborat ushbu

$$A_{2m} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + c_{2m-1} - c_{2m}$$

qismiy yig'indisini olaylik. Ravshaniki,

$$A_{2(m+1)} = A_{2m} + (c_{2m+1} - c_{2m+2})$$

Teoremaning shartiga ko'ra $c_{2m+1} < c_{2m+2}$ bo'lib, natijada

$$A_{2(m+1)} > A_{2m}$$

tengsizlikka kelamiz. Bu esa A_{2m} ketma-ketlikning o'suvchi ekanligini bildiradi.

Endi A_{2m} ni quyidagicha yozamiz:

$$A_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - \dots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m}$$

Ravshanki, (11.21) ga ko'ta

$$c_1 + c_2 + \dots + c_m + c_{m+1} + \dots + c_{2m-1} = 0$$

Shuning uchun λ_{2m-1} tengsizlik o'mni. Demak, λ_n ketma-ketlik yuqorida chegaralangan. Shunday qilib, λ_m ketma-ketlik o'suvchi va yuqorida chegaralangan. Demak, bu ketma-ketlik chekli limitga ega.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{2m-1} = A \quad (A \text{ - chekli son}) \quad (11.23)$$

Endi (11.20) qatorning $2m+1$ ($m \in \mathbb{N}$) ta toq sondagi hadidan iborat ushbu

$$\lambda_{2m+1} = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{2m+1}$$

qismiy yig'indisini olaylik.

Ravshanki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{2m+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{2m} + c_{2m+1}$$

Bundan (11.22) va (11.23) larga asosan topamiz:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} (\lambda_{2m} + c_{2m}) = A$$

Shunday qilib, (11.20) qatorning qismiy yig'indilardan iborat ketma-ketlik chekli limitga ega ekanini ko'rsatdik. Demak, (11.20) qator yaqinlashuvchi. ▶

Masalan, yuqorida ko'tsatilgan ushbu

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

qator uchun teorema barcha shartlarining bajarilishini ko'rsatish qiyin emas. Leybnis teoremasiga ko'ta berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

5-§. Yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari

Biz ushbu paragrafda yaqinlashuvchi qatorlarda hadlarni guruhlash, absolyut yaqinlashuvchi qatorlarda esa hadlarning o'mini almashtitish kabi xossalarga to'xtalamiz.

1º. Guruhlash xossasi. Biror $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator berilgan bo'lsin. Bu

qator hadlarini guruhlab, quyidagi qatorni tuzamiz:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}) + \dots \quad (11.24)$$

bunda n_1, n_2, \dots ($n_1 < n_2 < \dots$) lar natural sonlar ketma-ketligining biror n_k qismiy ketma-ketligi bo'lib, $k \rightarrow \infty$ da $n_k \rightarrow \infty$.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi A songa teng bo'lsa, u holda bu qatorning hadlarini

quruhlashdan hosil bo'lgan (11.24) qator ham yaqinlashuvchi va uning yig'indisi ham A songa teng bo'ladi.

◀ Ta'rifga ko'ta berilgan qatorning λ_n qismiy yig'indisi uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = A$ (A -cheqli son) limit o'tinli. Endi (11.24) qatorning qismiy yig'indisini yozamiz:

$$\lambda_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m) + \dots + (a_{m+n} + a_{m+n+1} + \dots + a_{m+n})$$

Bu qismiy yig'indilardan tuzilgan

$$A_1, A_2, \dots, A_m$$

ketma-ketlikni qaraylik. Ravshanki, bu A_n ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligidir. U holda 3-bobdagi 12-teoremaga ko'ta A_n ketma-ketlik yaqinlashuvchi va uning limiti ham A ga teng bo'ladi.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

Bu esa (11.24) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini va uning yig'indisi A ga teng ekanini bildiradi. ►

20. O'r'in almashtirish xossasi Ixtiyoriy $\sum a_n$ qator berilgan bo'lsin. Bu qator hadlarining o'tinlarini almashtirib, quyidagi

$$\sum_{i=1}^n a'_i - a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n + \dots \quad (11.25)$$

qatorni hosil qilamiz. Bu (11.25) qatorning har bir a_n hadi $\sum a_n$ qatorning tayin bir a'_n hadining aynan o'zidir.

Agar $\sum a_n$ qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi A songa teng bo'lsa, u holda bu qator hadlarining o'rinlarini ixtiyotiy ravishda almashtirishdan hosil bo'lgan (11.25) qator yaqinlashuvchi bo'ladi va uning yig'indisi ham A songa teng bo'ladi.

◀ Bu xossani $\sum a_n$ qator inusbat hamda ixtiyoriy hadli bo'lgan hollari uchun alohida isbotlaymiz.

1) Berilgan qator musbat qator bo'lib, u yaqinlashuvchi va yig'indisi A songa teng bo'lsin. Ta'rifga ko'ta $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, A_n o'suvchi ketma-ketlik bo'lganidan $A_n > A$ tengsizlik o'tinli bo'ladi. Endi (11.25) qatorning

$$A'_n = a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n$$

qismiy yig'indisini qaraylik. Bunda $a'_1 = a_1, a'_2 = a_2, \dots, a'_n = a_n$.

Ravshanki, A_n o'suvchi. Agar n = max{m, n} deb olsak, u holda A_n + A_m tengsizlik ham o'rini bo'ladi. Shuning uchun A_n + A_m tengsizlik o'rindi. Shunday qilib, A_n kelma - ketlik o'suvchi va yuqorida cheqaralangan. Demak, u chekli limitqa ega:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \text{ va } A_n = A$$

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorni (11.25) qater hadlarining o'rinalarini almash tirishdan hesil bo'lgan qator deb qaraydig'an bo'lsak, unda yuqorida keltilgan munohizaga asoslanib, (11.25) qatorning yaqinl shuvchi va yiq'indisi A senga teng bo'lishidin berilgan qatorning ham yaqinl shuvchiligini va uning yiq'indisi A uchun A' A tengsizlik o'rini bo'lishini top amz. Yuqorida A' A ekani ko'rsatilgan edi. Shu ikki tengsizlikdan A' A bo'lishi kelib chiqadi.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ixtiyoriy hadli qator bo'lib, u absolut yaqinl shuvchi va yiq'indisi A senga teng bo'lsin. Shu qater hadlarining o'rinalarini almash tirishdan hesil bo'lgan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ qatorni qaraylik. Medomiki, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ qater absolut yaqinl shuvchi ekani unda $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n'|$ qader yaqinl shuvchi bo'ledi. Bu musbat qator bo'lganligi s. babbli 1) holda isbelting uniq ko'ra. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n'|$ qater ham yaqinl shuvchi bo'ladi. Shuning uchun $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ qator yaqinl shuvchidir.

Endi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ qator yiq'indisining ham A senga teng ekanini ko'rsatamiz. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ qatorning musbat ishetali va nolga teng bo'lgan a_n, a_n' hadlaridan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ ham i manliy ishetili a_n, a_n' hadlarining absolut qiymatlaridan $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qaterlari tuzamiz. Qolaylik uchun a = b_n, a_n' = b_n' deb belgilasak, ushu

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n - b_n' + b_n' - b_n'' = b_n''$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n +$$

qatorlar hosil bo'ladi. Shartga ko'tra $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi.

Demak, bu qatorning

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad n = 1, 2, 3,$$

qismiy yig'indilaridan tuzilgan A_n ketma kethik yuqordan chegaralangan, va ni $n \in \mathbb{N}$ da

$$A'_n : A''_n : A'''_n \vdash o'zgarmas son \quad (11.26)$$

tengsizlik o'tinli. Endi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning qismiy yig'indisini A_n bilan belgilab topamiz:

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k - \sum_{m=1}^n c_m + B_n - C_n \quad (11.27)$$

bunda $n = k + m$ bo'lib, $k = A_n$ qismiy yig'indida $\sum_{k=1}^n a_k$ qatorning musbat ishorasi, m esa uning manfiy ishorasi hadlarining soni. Biz eng muhim, $n \rightarrow \infty$ va $m \rightarrow \infty$ holni qarash bilan chegaralanamiz.

Ravshanki,

$$B_k \leq A'_n \leq C_m \quad (11.28)$$

(11.26) va (11.28) munosabatlardan $\sum_{k=1}^n b_k$, $\sum_{m=1}^n c_m$ qatorlarning qismiy yig'indilari B_n va C_n yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi. 2-teoremaga ko'tra $\sum_{k=1}^n b_k$, $\sum_{m=1}^n c_m$ qatorlar yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu qatorlarning yig'indilarini mos ravishda B va C bilan belgilaylik:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_k = B \quad (B \text{ - chekli son}), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} C_m = C \quad (C \text{ - chekli son}).$$

Endi (11.27) tenglikda limitga o'tsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (B_k - C_m) = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k - \lim_{m \rightarrow \infty} C_m = B - C$$

Bu esa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashuvchi va uning yig'indisi A uchun $A = B - C$ formula o'tinli ekanini anglatadi.

Berilgan qator hadlarining o'rinnari almashirilganda $\sum_{k=1}^n b_k$ va $\sum_{m=1}^n c_m$ qatorlar hadlarining ham o'rinnari almashadi va 1 - holga asosan bu qatorlar yig'indilari mos ravishda B va C ga

teng bo'lib qolaveradi. Demak, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tenglikka ko'ta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yig'indisi ham A songa teng bo'ladi. ►

Absolyut yaqinlashuvchi bo'limgan qatorlar hadlarining o'rinnarini olmashtirishdan hosil bo'lgan qatorlar haqida quyidagi teorema o'mni. Biz bu teoremani isbotsiz keltiramiz.

8-teorema. (Riman teoremasi). Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator shartli yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda har qanday A (chekli yoki cheksiz) olinganda ham berilgan qator hadlarining o'rinnatin shunday almashtirish mumkinki, hosil bo'lgan qatorning yig'indisi xuddi shu A ga teng bo'ladi.

Mashqlar

11.12. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

qatorning ham yaqinlashuvchi bo'lishi isbotlansin.

11.13. Koshi teoremasidan toydalanib, ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$$

qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi isbotlansin.

11.14. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

11.15. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots)$$

qator uchun

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

bo'lsa, berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladimi? Misollar keltiring.

11.16. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

qader yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

Adabiyotlar

1. Azlarov T, Mansurov H. Matematik analiz, 1 qism, Toshkent, «O'qituvchi», 1994.
2. Azlarov T, Mansurov H. Matematik analiz, 2 qism, Toshkent, «O'zbekiston», 1995.
3. Архинов Г, Садовничий В, Чубариков В. Лекции по математическому анализу, Москва, Высшая школа, 1999.
4. Дороговцев А. Математический анализ (справочное пособие) Киев, Высшая школа, 1985.
5. Matematikadan qo'llanma, 1 va 2 - qismlar. Prof. Azlarov T. tahriri ostida, Toshkent, O'qituvchi, 1979, 1990.
6. Хинчин А. Восемь лекций по математическому анализу, Москва, Наука, 1977.
7. Кудравцев Л. Курс математического анализа, т.1,2, Москва, высшая школа, 1981.
8. Рудин У. Основы математического анализа, Москва, Мир, 1976.
9. Зорич В. Математический анализ, ч.1, Москва, Наука, 1981.

Mundarija

- 1 bob. To'plam haqida tushuncha.
 - 1 §. To'plam. To'plam ustida amallar
 - 2 §. To'plamlarni taqqoslash.
 - 3 §. Matematik belgilar.
 - 4 §. Matematik induksiya usuli.

Mashqlar.
- 2 bob. Haqiqiy sonlar to'plami va uning xossalari
 - 1 - §. Ratsional sonlar to'plami va uning xossalari.
 - 2 - §. Ratsional sonlar to'plamida kesim.
 - 3 §. Haqiqiy sonlar. Haqiqiy sonlar to'plamining tartiblanganlik va zichlik xossalari.
 - 4 - §. Haqiqiy sonlar to'plamining to'lqligi. Dedekind teoremasi.
 - 5 - §. Sonli to'plamlarning chegaralari.
 - 6 - §. Haqiqiy sonlar ustida amallar.
 - 7 §. Haqiqiy sonning absolyut qiymati va uning xossalari.
 - 8 §. Irratsional sonni tarkibiy hisoblash.

Mashqlar
- 3 bob. Funksiya.
 - 1 - §. Funksiya tushunchasi.
 - 2 - §. Elementar funksiyalar.
 - 3 - §. Natural argumentli funksiyalar. (Sonlar ketma-ketligi).

Mashqlar
- 4 - bob. Funksiya limiti.
 - 1 §. Sonlar ketma-ketligi limiti.
 - 2 §. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari.
 - 3 - §. Sonlar ketma-ketligi limitining mavjudligi haqida teoremlar.
 - 4 - §. Funksiya limiti.
 - 5 §. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalarning

xossalari.

6 – §. Funksiya limitining mavjudligi haqida teoremlar.

7 – §. Funksiyalarni taqqoslash.
Mashqlar

5 – bob. Funksiyaning uzluksizligi.

1 – §. Funksiya uzluksizligi ta'ifi.

2 – §. Funksiyaning uzelishi. Uzelishning turлari.

3 – §. Monoton funksiyaning uzluksizligи va uzelishi.

4 – §. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar.

Murakkab funksiyaning uzluksizligi.

5 – §. Limitlarni hisoblashda funksiyaning uzluksizligidan foydalanish.

6 – §. Uzluksiz funksiyalarning xossalari.

7 – §. Funksiyaning tekis uzluksizligi. Kantor teoremasi.

Mashqlar.

6 – bob. Funksiyaning hosila va differensiali.

1 – §. Funksiyaning hosilasi.

2 – §. Teskari funksiyaning hosilasi. Murakkab funksiyaning hosilasi.

3 – §. Hosila hisoblashning sodda qoidalari. Elementar funksiyaning hosilalari.

4 – §. Funksiyaning differensiali.

5 – §. Yuqori tartibli hosila va differensiallari.

6 – §. Differensial hisobning asosiy teoremlari.

7 – §. Teylor formulasи.

Mashqlar.

7 – bob. Differensial hisobning ba'zi bir tatbiqlari.

1 – §. Funksiyaning o'zgarib borishi.

2 – §. Funksiyaning ekstremum qiymatlari.

3 – §. Funksiyaning qavariqligi va botiqligi.

4 – §. Funksiyalarni tekshirish. Grafiklarni yasash.

5 – §. Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidalari.

Mashqlar

8 - bob. Aniqmas integral

- 1 - §. Aniqmas integral tushunchasi.
- 2 - §. Integrallash usullari.
- 3 - §. Ratsional funksiyalarni integrallash.
- 4 - §. Ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash.
- 5 - §. Trigonometrik funksiyalarni integrallash.

Mashqlar

9 - bob. Aniq integral

- 1 - §. Aniq integral ta'tiflari.
- 2 - §. Aniq integralning mavjudligi.
- 3 - §. Integrallanuvchi funksiyalar sinfi.
- 4 - §. Aniq integral xossalari.
- 5 - §. O'rta qiymat haqidagi teoremlar.
- 6 - §. Chegaralari o'zgaruvchi bo'lgan aniq integrallar.
- 7 - §. Aniq integralarni hisoblash.
- 8 - §. Aniq integralarni taqnbiy hisoblash.

Mashqlar

10 - bob. Aniq integralning ba'zi bir tadbiqlari

- 1 - §. Yoy uzunligi va uning aniq integral orqali ifodalanishi.
- 2 - §. Tekis shaklning yuzi va uning aniq integral orqali ifodalanishi.
- 3 - §. Aylanma sirtning yuzi va uning aniq integral orqali ifodalanishi.
- 4 - §. O'zgaruvchi kuchning bajargan ishi va uning aniq integral orqali ifodalanishi.
- 5 - §. Inersiya momenti.

Mashqlar

11 - bob. Sonli qatorlar.

- 1 - §. Asosiy tushunchalar.
- 2 - §. Yaqinlashuvchi qatorning xossalari. Koshi teoremasi.
- 3 - §. Musbat qatorlar.
- 4 - §. Ixtiyoriy hadli qatorlar.
- 5 - §. Yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari. Mashqlar.

«Matematik analiz asoslari» 2-qismining mundarijasi.

12 - bob. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar, ularning limiti, uzluksizligi.

- 1 - §. R^n fazo va uning to'plamlari.
- 2 - §. R^n fazoda ketma-ketlik va uning limiti.
- 3 - §. Ko'p o'zgaruvchili funksiya va uning limiti.
- 4 - §. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi.
- 5 - §. Uzluksiz funksiyalarning xossalari.
- 6 - §. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning tekis uzluksizligi. Kantor teoremasi.
- Mashqlar.

13 - bob. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning hosila va differensiyallari.

- 1 - §. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy xosilalari.
- 2 - §. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning differensiyal lanuvchiligi
- 3 - §. Yo'nalish bo'yicha hosila.
- 4 - §. Ko'p o'zgaruvchili murakkab funksiyalarning differensiyallanuvchiligi. Murakkab funksiyaning hosilasi.
- 5 - §. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiyali.
- 6 - §. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli hosilasi va differensiallari.

7. §. O'rta qiymat haqida teorema
 8. §. Ko'p o'zgaruvchili funksiyoning Taylor formulasi
 9. §. Ko'p o'zgaruvchili funksiyoning ekstremum qiymatlari. Ekstremumining zaruriy sharti.
 10. §. Funksiya ekstremumining yetarli sharti.
 11. §. Oshkormas funksiyalar.
- Mashqlar.

14. bob. Funksional ketma-ketliklar va qatorlar.

1. §. Funksional ketma-ketliklar.
 2. §. Funksional qatorlar.
 3. §. Tekis yaqinlashuvchi funksional ketma-ketlik va qatorning xossalari.
 4. §. Datajali qatorlar.
 5. §. Datajali qatorlarning xossalari.
 6. §. Taylor qatori.
- Mashqlar.

15. bob. Xosmas integrallar.

1. §. Cheksiz otalig bo'yicha xosmas integrallar.
 2. §. Chegaralanmagan funksiyoning xosmas integrallari.
 3. §. Muhim misollari.
- Mashqlar.

16. bob. Parametriga bog'liq integrallar.

1. §. Limit funksiya. Tekis yaqinlashish. Limit funksiyoning uzlucksizligi.
 2. §. Parametriga bog'liq integrallar.
 3. §. Parametriga bog'liq xosmas integrallar. Integralning tekis yaqinlashishi.
 4. §. Tekis yaqinlashuvchi parametriga bog'liq xosmas integrallarning xossalari.
 5. §. Eyler integrallari.
- Mashqlar.

17 - bob. Karralı integrallar

- 1 - §. Tekis shaklning vuzi hamda fazodagi jismning hajmi haqidagi ba'zi ma'lumotlar.
- 2 - §. Ikki karralı integral ta'iflari
- 3 - §. Ikki karralı integrallarning mavjudligi.
- 4 - §. Integrallanuvchi funksiyalar sinfi.
- 5 - §. Ikki karralı integralning xossalari.
- 6 - §. Ikki karralı integrallarni hisoblash.
- 7 - §. Ikki karralı integrallarda o'zgaruvchilarni almashtirish.
- 8 - §. Ikki karralı integralni taqibiy hisoblash.
- 9 - §. Ikki karralı integralni ba'zi bir tatbiqlari.
- 10 - §. Uch karralı integral.

Mashqlar.

18 - bob. Egri chiziqli integrallar.

- 1 - §. Birinchi tur egri chiziqli integrallar.
- 2 - §. Ikkinchchi tur egri chiziqli integrallar.
- 3 - §. Grin formulasi va uning tafbiqlari.
- 4 - §. Birinchi va ikinchi tur egri chiziqli integrallar orasidagi bog'lanish.

Mashqlar.

19 - bob. Sirt integrallari.

- 1 - §. Birinchi tur sirt integrallari.
- 2 - §. Ikkinchchi tur sirt integrallari.
- 3 - §. Stoks formulasi.
- 4 - §. Ostrogradskiy formulasi.

Mashqlar.

20 - bob. Furye qatorlari.

- 1 - §. Ba'zi muhim tushunchalar.
- 2 - §. Furye qatorning ta'ifi.
- 3 - §. Lemmalar. Dirixle integrali.
- 4 - §. Furye qatorning vaqinlashuvchiligi.
- 5 - §. Qismiy yig'indining bu ekstremal xossalari.

Bosel tengsizligi

6. §. Yaqinlashuvchi Fure - qator - viq'indisning funksional xossalari.
7. §. Funksiyalarni trigonometrik ko'phad bilan yaqinlashtirish
8. §. O'rtacha yaqinlashish. Fure qatorning o'rtacha yaqinlashishi
9. §. Funksiyalarning ortogonal sistemasi.
Umumlashgan Fure qator.

Mashqlar

Босимга рускат тилин 31.05.2005 Ҳақми 1 босма табоб
ъиними 60-844-16 Адаби 1000 тисса. Оғасет көнгөз. Бахорта 266
М.Х. түтбек номидаги Узбекистон Милли Университети
оюзмаконисидаги тарзиг