МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. АБУ РАЙХАНА БЕРУНИ

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

**Учебно-методическое пособие**

## *Часть-2*

**Ташкент-2014**

**Высшая математика.Часть-2. АбзалимовР.Р. , ХолмухамедовА.С. , ХалдибаеваИ.Т. ,АкбераджиеваУ. , АбдикайимоваГ.А. Учебно-методическое пособие. Ташкент: ТашГТУ, 2014. 85с.**

*Учебно-методическое пособие предназначеностудентамдля выполнения самостоятельной работы. Оно также может быть использовано преподавателямивузов на практических и лекционных занятиях по высшей математике.*

.

**Под редакцией профессора Г.Шодмонова.**

Печатается по решению научно-методического совета Ташкентского государственного технического университета имени Абу Райхана Беруни.

**Рецензенты:д.ф.-м.н., проф. АбдушукуровА. (НУУз); к.ф.-м.н., доц. Эсонов Э. (ТашГТУ)**

## Введение

В свете подготовки современных кадров в системе высшего образования произведены коренные изменения. Этим изменениям способствуют принятие законов «Об образование» и «О подготовке национальных кадров», освещение в них тесной связи между применением научно-технических достижений в сфере народного хозяйства и социально-экономического развития страны.

Настоящее учебно-методическое пособие содержит самостоятельные и лабораторные работы по основным разделам высшей математики. Приведены теоретические сведения и формулы, решения показательных задач, а также варианты для самостоятельной работы студентов.

Пособие состоит из двух частей. Первая часть соответствует программе первого курса, вторая часть программе второго курса.

# 1. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

## 1.1 Геометрические характеристики скалярных и векторных полей.

Пусть *D*– область в пространстве двух, трех и более измерений. Если в *D* задана скалярная функция

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

называемая функцией поля, то говорят, что в области *D* задано скалярное поле.

Если в каждой точке $P \in D$ поставлен в соответствие вектор

$$\vec{a}(P) = \vec{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vec{a}(\vec{r}),$$

то говорят, что в области *D* задано векторное поле, определяемое векторной функцией

$$\vec{a}(P) = \vec{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vec{a}(\vec{r}).$$

Простейшими геометрическими характеристиками скалярных полей являются линии уровня $u(x,y)=C$в пространстве двух измерений, поверхности уровня $u(x,y,z)=C$в пространстве трех измерений и гиперповерхности уровня

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C,$$

в пространстве $n>3$измерений.

Простейшими геометрическими характеристиками векторных полей являются векторные линии, векторные трубки. Векторной линией называется линия, касательная к которой в каждой точке имеет направление соответствующего ей вектора поля. Векторные линии для вектора

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a_x(x,y,z)} = \frac{dy}{a_y(x,y,z)} = \frac{dz}{a_z(x,y,z)}.$$

Векторной трубкой называется поверхность, образованная векторными линиями, проходящими через точки некоторой лежащей в поле замкнутой кривой, не совпадающей с какой-либо векторной линией.

## 1.2 Производная по направлению и градиент

Производная скалярного поля *u(P)* в точке $P_0$по направлению *s*с единичным вектором

$$\vec{s} = cos\,\alpha \cdot \vec{i} + cos\,\beta \cdot \vec{j} + cos\,\gamma \cdot \vec{k},$$

обозначаемая через $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ , определяется соотношением

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\tau \to 0} \frac{u(\vec{r}_0 + \tau \cdot \vec{s}\,) - u(\vec{r}_0\,)}{\tau}$$

и характеризует скорость изменения функции *u(P)* в направлении $\vec{s}$ Здесь

$$\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$$

радиус-вектор точки $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

Производная $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ вычисляются по формуле

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{\vec{r} = \vec{r}_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\vec{r} = \vec{r}_0} cos\,\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\vec{r} = \vec{r}_0} cos\,\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\vec{r} = \vec{r}_0} cos\,\gamma.$$

Градиентом скалярного поля *u(P)*, обозначаемым символом *grad(u),* называется вектор, проекциями которого являются частные производные функции *u(P)*по соответствующим координатам, т.е.

$$grad(u) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

**1.3 Дивергенция векторного поля.** Одним из основных дифференциальных характеристик векторного поля $\vec{a}(M)$ является дивергенция $div\vec{a}(M)$.

$$div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

где *P,Q,R*- проекции поля на оси *Ox,Oy,Oz*.

Дивергенция обладает следующими дифференциальными свойствами:

1) $div\left(c_1\vec{a}_1 \pm c_2\vec{a}_2\right) = c_1 div\vec{a}_1 \pm c_2 div\vec{a}_2$ (линейность),

2) $div\left(\varphi\vec{a}\right) = \varphi div\vec{a} + \vec{a}grad\varphi,$

3) если $\vec{a} = const$, то $div\vec{a} = 0$ и $div\left(\varphi\vec{a}\right) = \vec{a}grad\varphi.$

Векторное поле $\vec{a}\left(M\right)$, для которого в области$D$ $div\vec{a}\left(M\right) = 0.$ называется соленоидальным в этой области.

**1.3 Ротор векторного поля.** В декартовых координатах

$$rot\vec{a}\left(M\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

.

Определитель раскрываем разложением по первой строке; при этом под умножением элементов второй строки на элементы третьей здесь понимается соответствующее частное дифференцирование. Например, $\dfrac{\partial}{\partial x} \cdot Q = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Дифференциальные свойства ротора:

1) $rot\left(c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2\right) = c_1 rot\vec{a}_1 + c_2 rot\vec{a}_2,$

2) $rot\left(\varphi\vec{a}\right) = \left[grad\varphi\vec{a}\right] + \varphi rot\vec{a},$

3) если $\vec{a} = const$, то $rot\vec{a} = 0$ и $rot\left(\varphi\vec{a}\right) = \left[grad\varphi\vec{a}\right].$

Если в области $V$ $rot\vec{a}\left(M\right) = 0,$ то поле $\vec{a}\left(M\right)$ называется безвихревым.

**1.4 Поток векторного поля.**

Поверхность $\sigma$ называется двухсторонней (или ориентируемой), если при непрерывном переносе вектора единичной нормали $\overline{n}$ по любому замкнутому пути на поверхности мы возвращаемся в исходную точку $M$ с тем же самым направлением $\overline{n}(M)$ . Двусторонней является, например, всякая замкнутая поверхность (она имеет внешнюю и внутреннюю стороны), всякая поверхность, задаваемая уравнением $z = f\left(x, y\right)$, имеющая верхнюю и нижнюю стороны. Примером односторонней поверхности служит лист Мёбиуса (прямоугольный лист *ABCD*, перекрученный один раз и склеенный по линии *AB, DC*).

Потоком *П* векторного поля называется поверхностный интеграл от векторного поля $\vec{a}(M)$ в точках поверхности $\sigma$, а $\vec{n}(M)$ - единичный вектор нормали вдоль $\sigma$, указывающий избранную сторону этой поверхности. Условимся в случае замкнутой поверхности $\sigma$ в качестве $\vec{n}(M)$ брать всегда вектор внешней нормали.

Поток обладает следующими основными свойствами:

1. $\iint\limits_{\sigma'} \vec{a}(M)\vec{n}(M)d\sigma = -\iint\limits_{\sigma''} \vec{a}(M)\vec{n}(M)d\sigma,$

где $\sigma'$ и $\sigma''$ - две стороны поверхности $\sigma$.

II. Свойство линейности.

$$\iint\limits_{\sigma}(c_1\vec{a}_1 + c_1\vec{a}_2)\vec{n}d\sigma = c_1\iint\limits_{\sigma}\vec{a}_1\vec{n}d\sigma + c_2\iint\limits_{\sigma}\vec{a}_2\vec{n}d\sigma.$$

III. Свойство аддитивности. Если $\sigma$ состоит из частей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, то

$$\iint\limits_{\sigma}\vec{a}\vec{n}d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1}\vec{a}\vec{n}d\sigma + \ldots + \iint\limits_{\sigma_n}\vec{a}\vec{n}d\sigma.$$

**1.5 Линейный интеграл и циркуляция векторного поля.**

Линейным интегралом *W* векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль линии *L* называется криволинейный интеграл от скалярного произведения $\vec{a}(M)$ на единичный касательный вектор $\vec{\tau}(M)$ к линии *L*: где *ds*- дифференциал дуги *L*, $d\vec{r} = \vec{\tau} \cdot d\vec{s}$ - дифференциал радиуса вектора $\vec{r}$ вдоль *L*. Если $\vec{f}(M)$ – силовое поле, то $W = \int\limits_L \vec{f}(M)\vec{\tau}(M)ds = \int\limits_L \vec{f}(M)d\vec{r}$ означает работу этого поля вдоль пути *L*.

**Основные свойства линейного интеграла.**

**I**. Свойство линейности:

$$\int\limits_L \left(C_1\vec{a}_1 + C_2\vec{a}_2\right)d\vec{r} = C_1\int\limits_L \vec{a}_1 d\vec{r} + C_2\int\limits_L \vec{a}_2 d\vec{r}.$$

**II**. Свойство аддитивности: $\displaystyle\int\limits_{L_1+L_2} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{L_1}\vec{a}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{L_2}\vec{a}\cdot d\vec{r}.$

**III**. При изменении направления линии $L$ линейный интеграл меняет свой знак:

$$\int\limits_{AB} \vec{a}\cdot d\vec{r} = -\int\limits_{BA}\vec{a}\cdot d\vec{r}.$$

В декартовой системе координат:

$$\vec{a}(M) = P(M)\cdot\vec{i} + Q(M)\cdot\vec{j} + R(M)\cdot\vec{k}$$

и

$$d\vec{r} = dx\cdot\vec{i} + dy\cdot\vec{j} + dz\cdot\vec{k};$$

поэтому

$$W = \int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Вычисляют этот интеграл простой подстановкой выражения $x$, $y$, $z$ из уравнения линии $L$. При этом получается определенный интеграл по параметру, нижний предел которого равен значению параметра в начальной, а верхний - в конечной точке пути $L$.

Циркуляцией векторного поля называется линейный интеграл по замкнутому пути $C$:

$$Ц = \oint\limits_C \vec{a}\cdot d\vec{r}.$$

**1.6 Потенциальные векторные поля.** Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется потенциальным в области $V$, если в этой области существует такое скалярное поле $\varphi(M)$, что

$$\vec{a}(M) = grad\varphi(M).$$

Функция $\varphi(M)$ называется при этом потенциалом поля $\vec{a}(M)$.

Потенциал $\varphi(M)$потенциального векторного поля определен с точностью до прибавления произвольной постоянной. Для его вычисления пользуются формулой

$$\varphi(M) = \int\limits_{M_0M} \vec{a}dr + const,$$

где $M_0$ - фиксированная точка области *V*. Путь интегрирования $M_0M$ может быть выбрана произвольно, лишь бы он не выходил за пределы *V*.

Если область *V* такова, что в каждую её точку *M* можно в *V* провести координатную ломаную из фиксированной точки $M_0$, то из формулы получаем

$$\varphi(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz + C,$$

где $C = const.$

Здесь во втором интеграле *x* считается постоянным при интегрировании по *y*, а в третьем с *x* и *y*, обходятся как с постоянными величинами.

**1.7 Гармонические поля.** Скалярное поле $\varphi(M)$ называется гармоническим, если оно удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi(M) = 0.$$

Векторное поле $\vec{a} = grad\varphi(M)$, где $\varphi$ - гармоническое поле, также называется гармоническим. Гармоническое векторное поле одновременно является потенциальным и соленоидальным.

## Расчетные задания

Задание 1. Дан потенциал $u = u(x, y, z)$ векторного поля

а) Найти поверхности уровня и построить поверхности, проходящие через заданные точки $M_0, M_1, M_2$;

б) По заданному потенциалу найти векторное поле;

в) Найти уравнение векторных линий векторного поля;

г) Найти скорость изменения скалярного поля в точке $M_0$ по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ и наибольшую скорость поля в точке $M_0$

д) Вычислить работу векторного поля от точки $M_1$ до точки $M_2$

Задание 2Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке $M_0$

Задание 3 Найти поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через часть поверхности S , вырезанного плоскостью P (нормаль - внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

Задание 4 Найти циркуляцию векторного поля $\vec{b}(M)$ вдоль контура Г в направлении, соответствующем возрастанию параметра t (изобразить контур Г на чертеже)

Задание 5 Проверить, является ли поле $\vec{F}(M)$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{F}$ найти его потенциал.

Задание 6 Проверить, является ли поле $U(M)$ гармоническим.

**Показательный вариант**

Задание 1

Дан потенциал $U = x^2 + y^2 - 2z$ векторного поля

а) найти уравнение поверхностей уровня и построить поверхности, проходящие через заданные точки:

$$M_0(1,\frac{1}{2},5),\ M_1(2,1,-1),\ M_2(2,4,3).$$

Решение.

Поверхностями уровня являются поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, в каждой точке которых

$$U(x,y,z) = c,$$

где С – произвольная постоянная,

$x^2+y^2-2z=C$ или $z=\dfrac{x^2+y^2-c}{2}$. Это уравнение семейства параболоидов вращения вокруг оси OZ.

Находим значение С для заданных точек:

для точки $M_0$, $c=-\dfrac{35}{4}$, $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}+\dfrac{35}{8}$;

для точки $M_1$, $c=7$, $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}-\dfrac{7}{2}$;

для точки $M_2$, $c=14$, $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}-7$

Вершины параболоидов находятся соответственно в точках

$A_1(0,0,\dfrac{35}{8}), A_2(0,0,-\dfrac{7}{2}), A_3(0,0,-7)$;

б) по заданному потенциалу найти векторное поле. Градиент скалярного поля образует потенциальное поле:

$grad\,U(x,y,z,)=\dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$

Для заданного потенциала

$$grad\,U=2x\vec{i}+2y\vec{j}-2\vec{k}$$

Значит, векторное поле $\vec{F}=2x\vec{i}+2y\vec{j}-2\vec{k}$;

в) найти уравнения векторных линий векторного поля.

Дифференциальные уравнения векторных линий имеют вид:

$\dfrac{dx}{F_x(x,y,z)}=\dfrac{dy}{F_y(x,y,z)}=\dfrac{dz}{F_z(x,y,z)}$

Для заданного векторного поля имеем

$$\frac{dx}{2x}=\frac{dy}{2y}=\frac{dz}{-2} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{x}=-dz \\ \dfrac{dy}{y}=-dz \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \ln c_1 x = -z \\ \ln c_2 y = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 x = e^{-z} \\ c_2 y = e^{-z} \end{cases}$$

т.е. векторные линии являются линиями пересечения поверхностей $c_1 x = e^{-z}$ и $c_2 y = e^{-z}$ в трехмерном евклидовом пространстве.При $c_1 = c_2 = 1$ векторные линии располагаются в плоскости x=y.

г) найти скорость изменения скалярного поля $U = x^2 + y^2 - 2z$ в точке $M_0(1, 1/2, 5)$ по направлению вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$, где $M_1(2,1,-1), M_2(2,4,3)$. Чему равна наибольшая скорость поля в точке $M_0$?

Находим производную по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$.

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = (2-2, 4-1, 3+1) = (0,3,4),$$

$$\left|\overrightarrow{M_1 M_2}\right| = \sqrt{0+9+16} = 5.$$

$$\cos\alpha = \frac{0}{5} = 0, \cos\beta = \frac{3}{5}, \cos\gamma = \frac{4}{5},$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 2x \cdot 0 + 2y \cdot \frac{3}{5} + (-2) \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{5}y - \frac{8}{5},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{6}{5}y - \frac{8}{5}\right|_{y=\frac{1}{2}} = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2} - \frac{8}{5} = -1$$

Наибольшая скорость в точке $M_0$ равна

$$\left|gradU(M_0)\right| = \sqrt{4x^2+4y^2+4}\Big|_{(1,\frac{1}{2},5)} = \sqrt{9} = 3;$$

д) вычислить работу векторного поля от точки $M_1$ до точки $M_2$.

Работа векторного поля $\vec{F}$ по дуге линии Lравна

$$A = \int_L \vec{F}d\vec{l} = \int_L gradU \cdot d\vec{l} = \int_L \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz =$$

$$= \int_L du = U(M_2) - U(M_1)$$

Так как $U(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z$, то работа векторного поля равна

$$A = (4+16-6)-(4+1+2) = 7$$

Задание 2

1) Найти дивергенцию и ротор векторного поля

$$\vec{a}(M) = (x+xy^2)\vec{i} + (y-yx^2)\vec{j} + (z-3)\vec{k}$$

в точке $M_0(-1,1,2)$.

Решение:

$$div\vec{a}(M) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 1 + y^2 + 1 - x^2 + 1 = 3 + y^2 - x^2$$

$$div\vec{a}(M_0) = 3+1-1 = 3$$

$$rot\vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+xy^2 & y-yx^2 & z-3 \end{vmatrix} = -4xy\vec{k},\ rot\vec{a}(M_0) = 4\vec{k}$$

2) Найти поток векторного поля

$$\vec{a}(M) = (x+xy^2)\vec{i} + (y-yx^2)\vec{j} + (z-3)\vec{k}$$

через часть поверхности $x^2+y^2=z^2, (z\ge 0),$ вырезанной плоскостью $z=1$, по внешней нормали.
Решение

$$\Pi=\iint\limits_{(s)} a_n(M)d\sigma=\oiint\limits_{(\Sigma)} a_n d\sigma-\iint\limits_{(S_1)} a_n(M)d\sigma$$

Обозначим $J_1=\oiint\limits_{(\Sigma)} a_n(M)d\sigma$, $J_2=\iint\limits_{(S_1)} a_n(M)d\sigma$,

причем $\sum$ - замкнутая поверхность, образованная поверхностью конуса и плоскостью $z=1$, $S_1$ -часть плоскости $z=1$, вырезанная данным конусом.

По формуле Гаусса – Остроградского имеем

$$J_1=\iiint\limits_{(\Omega)} div\,\vec{a}(M)d\Omega=\iiint\limits_{(\Omega)}(3+y^2-x^2)dxdydz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 rdr\int\limits_r^1(3-r^2\cos 2\varphi)dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(3r-r^3\cos 2\varphi)(1-r)dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}(\frac{1}{2}-\frac{1}{20}\cos 2\varphi)d\varphi=\pi;$$

$$J_2=\iint\limits_{Д}(1-3)dxdy=-2\iint\limits_{Д}dxdy=-2\pi$$

т. к. $\iint\limits_{Д}dxdy$ - есть площадь круга $Д$: $x^2+y^2=1$, являющегося проекцией поверхности $S_1$ на плоскость $XOY$.

Подставляя найденные значения $J_1$ и $J_2$ в выражение потока, получим:

$$\Pi=J_1-J_2=\pi-(-2\pi)=3\pi.$$

Ответ: $3\pi$

3) Найти циркуляцию векторного поля $\vec{b}(M)=y\vec{i}-x\vec{j}+z^2\vec{k}$ вдоль контура Г: $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, y=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, z=\sin t$ в направлении, соответствующем возрастанию параметров.

Для установления пределов изменения параметра $t$ выясним вид кривой Г. Для этого представим уравнение Г в виде:

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases},$$

откуда ясно, что Г – линия пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и плоскости $y - x = 0$, проходящей через начало координат. Следовательно, Г – окружность и $0 \le t \le 2\pi$

$$Ц = \oint_{Г} b_s ds = \oint_{Г} \vec{b} \cdot d\vec{s} = \oint_{Г} ydx - xdy + z^2 dz =$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} cos\,t \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} sin\,t \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} cos\,t \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} sin\,t \right) + \right.$$

$$\left. + sin^2\,t\,cos\,t \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-cos\,t\,sin\,t + cos\,t\,sin\,t)dt + \int_0^{2\pi} sin^2\,t\,d(sin\,t) = 0$$

Задание 3.

1) Дано векторное поле

$$\vec{F} = (6x - 2yz)\vec{i} + (6y - 2xz)\vec{j} + (6z - 2xy)\vec{k}$$

Проверить является ли оно соленоидальным и потенциальным.

В случае потенциальности поля $\overline{F}$ найти его потенциал.

Решение.

Найдем дивергенцию поля $\overline{F}$.

$$div\vec{F} = \frac{\partial(6x - 2yz)}{\partial x} + \frac{\partial(6y - 2xz)}{\partial y} + \frac{\partial(6z - 2xy)}{\partial z} =$$

$$= 6 + 6 + 6 = 18.$$

Векторное поле $\overline{F}$ не является соленоидальным, так как для него

$$div\vec{F} \neq 0.$$

Найдемротор  векторного поля $\overline{F}$

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 6x-2yz & 6y-2xz & 6z-2xy \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial(6z-2xy)}{\partial y}-\frac{\partial(6y-2xz)}{\partial z}\right)\vec{i}-$$

$$-\left(\frac{\partial(6z-2xy)}{\partial x}-\frac{\partial(6x-2yz)}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial(6y-2xz)}{\partial x}-\frac{\partial(6x-2yz)}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=(-2x+2x)\vec{i}-(-2y+2y)\vec{j}+(-2z+2z)\vec{k}=0$$

Отсюда следует, что данное поле – потенциальное.
Потенциал поля $\varphi(x,y,z)$ находим по формуле, считая

$x_0=0, \qquad y_0=0, \qquad z_0=0$,

$$\varphi(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}(6x-2y_0z_0)dx+\int_{y_0}^{y}(6y-2xz_0)dy+$$

$$+\int_{z_0}^{z}(6z-2xy)dz+C=(3x^2-2y_0z_0x)\big|_{x_0}^{x}+$$

$$+(3y^2-2xz_0y)\big|_{y_0}^{y}+(3z^2-2xyz)\big|_{z_0}^{z}+C=$$

$$=3(x^2+y^2+z^2)-2xyz+C$$

2) Дано скалярное поле $u=p^2\cos 2\varphi$ в цилиндрических координатах. Проверить, является ли оно гармоническим.
Решение.Запишем оператор Лапласа $\Delta U$ в цилиндрических координатах:

$$\Delta U=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=-4\rho^2\cos 2\varphi, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=\frac{\partial}{\partial\rho}(2\rho^2\cos 2\varphi)=4\rho\cos 2\varphi$$

Подставляя в $\Delta U$, получим:

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \cdot 4\rho \cos 2\varphi + \frac{1}{\rho^2}(-4\rho^2 \cos 2\varphi) = 0$$

Отсюда поле $U = \rho^2 \cos 2\varphi$ является гармоническим.

# Варианты

Вариант 1

1. $U = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4}$ $M_0(4,3,-2), M_1(2,0,2), M_2(1,-3,2)$

2. $\vec{a}(M) = 2x\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + (x^2 - 2z)\vec{k}$ $M_0 = (-1, \sqrt{5}, 4)$

3. Часть рисунка с идентификатором отношения rId419 не найдена в файле. $(x \geq 0)$, $P: x = 2$

4. $\vec{b}(M) = x\vec{i} + 2z\vec{j} + y\vec{k}$, $\Gamma: \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 6\cos t - 4\sin t - 1 \end{cases}$

5. $\vec{F} = (5x^2 - yz)\vec{i} + (5y^2 - xz)\vec{j} + (5z^2 - xy)\vec{k}$

6. $U = 2\rho^2 \cos\varphi$ $(U = U(\rho, \varphi))$

Вариант 2

1. $U = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2}$ $M_0(2,2,2), M_1(4,0,0), M_2(0,4,0)$

2. $\vec{a}(M) = xyz\vec{i} - x^2 z\vec{j} + 3\vec{k}$ $M_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

3. $S: x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geq 0)$, $P: z = 2$

4.

$\vec{b}(M) = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$, $\Gamma: \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \\ z = 2(1 - \cos t) \end{cases}$

5. $\vec{F} = (x^2 + 7yz)\vec{i} + (y^2 + 7xz)\vec{j} + (z^2 + 7xy)\vec{k}$

6. $U = \rho^2 \sin 2\varphi$ $(U = U(\rho, \varphi))$

Вариант 3

1. $U = x^2 - y^2 + 2z^2 \ M_0(1,1,2), M_1(1,0,1), M_2(2,1,1)$

2. $\vec{a}(M) = x\vec{i} + (y + yz^2)\vec{j} + (z - zy^2)\vec{k} \ M_0 = (-1,-\sqrt{3},\sqrt{2})$

3. $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4 \ (z \geq 0)$, $\quad P: z = 0$

4. $\vec{b}(M) = -z\vec{i} - x\vec{j} + xz\vec{k}$, $\quad \Gamma : \begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5\sin t \\ z = 4 \end{cases}$

5. $\vec{F} = (8x^2 - 5yz)\vec{i} + (8y^2 - 5xz)\vec{j} + (8z^2 - 5xy)\vec{k}$

6. $U = \rho^2 \cos\frac{\varphi}{2} \ (U = U(\rho,\varphi))$

Вариант 4

1. $U = x^2 - y^2 - z^2 \ M_0(2,0,1), M_1(1,1,0), M_2(4,1,1)$

2. $\vec{a}(M) = xz\vec{i} + yz\vec{j} + (z^2 - 1)\vec{k}$

3. $S: x^2 + y^2 = z \ (z \geq 0)$, $\quad P: z = 4$

4. $\vec{b}(M) = x^2\vec{i} + y\vec{j} - z)\vec{k}$, $\quad \Gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \end{cases}$

5. $\vec{F} = \left(\frac{x^3}{12} - 3yz\right)\vec{i} + \left(\frac{y^3}{12} - 3xz\right)\vec{j} + \left(\frac{z^3}{12} - 3xy\right)\vec{k}$

6. $U = 4\rho^2 \sin\frac{\varphi}{2} \ (U = U(\rho,\varphi))$

Вариант 5

1. $U = x - y^2 - 2z^2 \ M_0(4,2,0), M_1(1,1,0), M_2(1,0,0)$

2. $\vec{a}(M) = y^2\vec{i} + (x + y)\vec{j} + 2z^2\vec{k} \ M_0 = (2,-1,\frac{1}{8})$

3. $S: y^2+z^2=x^2\ (z\geq 0)$, $\quad P: x=5$

4. $\vec{b}(M)=x\vec{i}-\frac{1}{3}z^2\vec{j}-x\vec{k}$, $\quad \Gamma: \begin{cases} x=2\cos t \\ y=3 \\ z=3\sin t \end{cases}$

5. $\vec{F}=(3x^2y^2z+y^2z^3)\vec{i}+(2x^3yz+2xyz^3)\vec{j}+(x^3y^2+3xy^2z^2)\vec{k}$

6. $U=\frac{\rho^2}{z}\cos 2\varphi\ (U=U(\rho,\varphi,z))$

Вариант 6

1. $U=4x^2+y^2+z^2\ M_0(1,0,2), M_1(1,2,-2), M_2(0,-2,0)$

2. $\vec{a}(M)=x\vec{i}+(y+yz)\vec{j}+(z-y^2)\vec{k}$, $M_0=(\frac{1}{2},-\frac{1}{6},\frac{2}{3})$

3. $S: x^2+y^2+z^2=1\ (z\geq 0)$, $\quad P: z=0$

4. $\vec{b}(M)=-x^2y^3\vec{i}+\vec{j}+z\vec{k}$, $\quad \Gamma: \begin{cases} x=\sqrt[3]{4}\cos t \\ y=\sqrt[3]{4}\sin t \\ z=3 \end{cases}$

5. $\vec{F}=\left(\frac{3x^2y^2}{z}-2x^3\right)\vec{i}+\left(\frac{2x^3y}{z}+3y^3\right)\vec{j}+\left(z^3-\frac{x^3y^2}{z^2}\right)\vec{k}$

6. $U=r^2\sin 2\varphi\ (U=U(r,\varphi,\theta))$

Вариант 7

1. $U=x^2-2y^2+z^2\ M_0(2,0,2), M_1(1,\frac{1}{\sqrt{2}},-1), M_2(-2,1,\sqrt{2})$

2. $\vec{a}(M)=(x^2-y)\vec{i}-(x+y)\vec{j}+z^2\vec{k}\ M_0=(\frac{1}{3},1,-\frac{5}{6})$

3. $S: x^2+z^2=y$, $\quad P: y=4$

4. $\vec{b}(M) = xy\vec{i} + x\vec{j} + y^2\vec{k}$, $\quad \Gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = -\sin t \end{cases}$

5.

$\vec{F} = \dfrac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\vec{i} + \dfrac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\vec{j} + \dfrac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\vec{k}$

6. $U = r^2 \sin\theta \ (U = U(r,\varphi,\theta))$

Вариант 8

1. $U = x^2 - 3y^2 - z^2 \ M_0(2,0,1), M_1(0,0,0), M_2(4,0,1)$

2. $\vec{a}(M) = xy\vec{i} - x^2\vec{j} + 3\vec{k} \ M_0 = (\sqrt{3}, -\dfrac{1}{6}, 2)$

3. $S : x^2 + y^2 = z^2 \ (z \ge 0)$, $\quad P : z = 1$

4. $\vec{b}(M) = (y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$, $\quad \Gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2(1-\cos t) \end{cases}$

5. $\vec{F} = (3x - yz)\vec{i} + (3y - xz)\vec{j} + (3z - xy)\vec{k}$

6. $U = \dfrac{\rho^2}{z}\sin 2\varphi \ (U = U(\rho,\varphi,z))$

Вариант 9

1. $U = y - 4x^2 - 8z^2 \ M_0(4,1,0), M_1(0,0,1), M_2(0,1,0)$

2. $\vec{a}(M) = (x + xy)\vec{i} + (y - x^2)\vec{j} + z\vec{k} \ M_0 = (-3, \dfrac{1}{4}, 1)$

3. $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ (z \ge 0)$, $\quad P : z = 0$

4. $\vec{b}(M) = xz\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$, $\quad \Gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \sin t \end{cases}$

5. $\vec{F} = (x + 2yz)\vec{i} + (y + 2xz)\vec{j} + (z + 2xy)\vec{k}$

6. $U=\dfrac{\rho}{z}\sin\varphi \; (U=U(\rho,\varphi,z))$

Вариант 10

1. $U = y^2 - 3x^2 - 3z^2 \; M_0(1,3,-1), M_1(0,2,1), M_2(-1,4,2)$

2. $\vec{a}(M)=(x-y)\vec{i}+(x^2+y)\vec{j}+3z \; M_0=(3,-2,\dfrac{1}{5})$

3. $S: x^2+y^2+z^2=1 \; (y\ge 0)$, $\qquad P: y=0$

4. $\vec{b}(M)=y\vec{i}-x\vec{j}+z\vec{k}$, $\qquad \Gamma : \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=5 \end{cases}$

5. $\vec{F}=(x^2-3yz)\vec{i}+(y^2-3xz)\vec{j}+(z^2-3xy)\vec{k}$

6. $U=\rho^2\cos 3\varphi \; (U=U(\rho,\varphi))$

Вариант 11

1. $U=x-z^2-3y^2 \; M_0(1,0,-2), M_1(3,1,1), M_2(4,-1,3)$

2. $\vec{a}(M)=x^3\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x-z)\vec{k} \; M_0=(-\sqrt{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2})$

3. $S: y^2+4z^2=x$ , $\qquad P: x=2$

4. $\vec{b}(M)=x\vec{i}-z^2\vec{j}+y\vec{k}$, $\qquad \Gamma : \begin{cases} x=2\cos t \\ y=3\sin t \\ z=4\cos t-3\sin t \end{cases}$

5. $\vec{F}=(3x^2-2yz)\vec{i}+(3y^2-2xz)\vec{j}+(3z^2-2xy)\vec{k}$

6. $U=r\cos\theta\sin\varphi+r^2\sin\theta\cos\varphi$

Вариант 12

1. $U=2x^2-y^2-z^2 \; M_0(4,1,1), M_1(2,0,0), M_2(1,1,0)$

2. $\vec{a}(M)=(x+xz)\vec{i}+y\vec{j}+(z-x^2)\vec{k}$, $M_0=(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},2,\dfrac{1}{2})$

3. $S: x^2+y^2+z^2=4 \; (z\ge 0)$, $\qquad P: z=0$

4. $\vec{b}(M)=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$ , $\Gamma:\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\sin t\\ z=3(1-\cos t)\end{cases}$

5. $\vec{F}=(2xy+z)\vec{i}+(x^2-2y)\vec{j}+x\vec{k}$

6. $U=2r^2\sin 3\theta\ (U=U(r,\varphi,\theta))$

Вариант 13

1. $U=x^2+y^2+z\ M_0(1,1,0), M_1(0,1,0), M_2(\sqrt{3},0,0)$

2. $\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(z-x^2-y^2)\vec{k}\ M_0=(2,-2,1)$

3. $S: x^2+z^2=y$ , $P: y=16$

4. $\vec{b}(M)=-x^2y^3\vec{i}+3\vec{j}+y\vec{k}$ , $\Gamma:\begin{cases}x=\cos t\\ y=2\sin t\\ z=5\end{cases}$

5. $\vec{F}=\dfrac{1}{x+y+z}\vec{i}+\dfrac{1}{x+y+z}\vec{j}+\dfrac{1}{x+y+z}\vec{k}$

6. $U=\rho\cos 3\varphi\ (U=U(\rho,\varphi))$

Вариант 14

1. $U=x^2+y^2+4z^2\ M_0(1,0,1), M_1(0,1,-2), M_2(1,-1,2)$

2. $\vec{a}(M)=(x+y)\vec{i}+(y-2x^3)\vec{j}+(z^2-2)\vec{k}\ M_0=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$

3. $S: x^2+y^2=z^2\ (z\geq 0)$ , $P: z=2$

4. $\vec{b}(M)=-2z\vec{i}-x\vec{j}+x^2\vec{k}$ , $\Gamma:\begin{cases}x=\frac{1}{3}\cos t\\ y=\frac{1}{3}\sin t\\ z=8\end{cases}$

5. $\vec{F}=\dfrac{yz}{1+x^2y^2z^2}\vec{i}+\dfrac{xz}{1+x^2y^2z^2}\vec{j}+\dfrac{xy}{1+x^2y^2z^2}\vec{k}$

6. $U=\dfrac{\rho}{z}\sin 2\varphi\ (U=U(\rho,\varphi,z))$

Вариант 15

1. $U=x^2+y^2-z^2\ M_0(1,2,0), M_1(1,0,-1), M_2(0,2,1)$

2. $\vec{a}(M)=(x+xz^2)\vec{i}+y\vec{j}+(z-zx^2)\vec{k}\ M_0=(2,-\sqrt{3},1)$

3. $S: x^2+y^2+z^2=9\ (z\geq 0)$, $\quad P: z=0$

4. $\vec{b}(M)=z\vec{i}+x\vec{j}+y\vec{k}$, $\quad \Gamma: \begin{cases} x=2\cos t \\ y=3\sin t \\ z=0 \end{cases}$

5. $\vec{F}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i}+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j}+\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k}$

6. $U=r\sin 2\varphi\cos\theta\ (U=U(r,\varphi,\theta))$

Вариант 16

1. $U=y^2-x^2-z^2\ M_0(1,2,1), M_1(1,4,0), M_2(2,4,1)$

2. $\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+y\vec{j}+(z-x^2)\vec{k}$

3. $S: y^2+z^2=x$, $\quad P: x=1$

4. $\vec{b}(M)=-x^2y^3\vec{i}+4\vec{j}+x\vec{k}$, $\quad \Gamma: \begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \\ z=4 \end{cases}$

5. $\vec{F}=e^x\sin y\vec{i}+e^x\cos y\vec{j}+\vec{k}$

6. $U=\rho^2\sin\dfrac{\varphi}{2}$

Вариант 17

1. $U=z^2+x^2-y\ M_0(1,1,0), M_1(0,1,2), M_2(4,2,2)$

2. $\vec{a}(M)=(xz+y)\vec{i}+(yz-x)\vec{j}+(z^2-2)\vec{k}\ M_0=(-1,\sqrt{2},6)$

3. $S: y^2+z^2=x^2\ (x\geq 0)$, $\quad P: x=3$

4. $\vec{b}(M) = x\vec{i} + 2z^2\vec{j} + y\vec{k}$, $\quad \Gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = 3\sin t \\ z = 2\cos t - 3\sin t - 2 \end{cases}$

5. $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j} + e^z\vec{k}$

6. $U = 2\rho \sin\frac{\varphi}{2}$ $(U = U(\rho, \varphi))$

## Вариант 18

1. $U = 4x^2 + 2y^2 + z^2$ $M_0(1,0,2), M_1(0,1,2), M_2(2,1,0)$

2. $\vec{a}(M) = (x + xy^2)\vec{i} + (y - yx^2)\vec{j} + z\vec{k}$ $M_0 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}, 5)$

3. $S : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ $(z \geq 0)$, $\quad P : z = 0$

4. $\vec{b}(M) = x\vec{i} + z^2\vec{j} + y\vec{k}$, $\quad \Gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 2\cos t - 2\sin t - 1 \end{cases}$

5. $\vec{F} = \frac{1}{3}(x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + xz^3\vec{k})$;

6. $U = r\sin\theta + r^2\cos\varphi$ $(U = U(r, \varphi, \theta))$

## Вариант 19

1. $U = 2x^2 + y^2 - z^2$ $M_0(1,-1,0), M_1(2,1,-1), M_2(-2,0,1)$

2. $\vec{a}(M) = x\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (z - y)\vec{k}$ $M_0 = (-1,2,1)$

3. $S : x^2 + z^2 = y$, $\quad P : y = 9$

4. $\vec{b}(M) = z\vec{i} + y^2\vec{j} - x\vec{k}$, $\quad \Gamma : \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sin t \\ z = \sqrt{2}\cos t \end{cases}$

5. $\vec{F} = \left(\frac{z}{x^2} + \frac{1}{y}\right)\vec{i} + \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}\right)\vec{j} + \left(\frac{y}{z^2} + \frac{1}{x}\right)\vec{k}$

6. $U = r\sin 2\theta$ $(U = U(r, \varphi, \theta))$

Вариант 20

1. $U = 2y^2 - x^2 - z^2$ $M_0(-1,2,0), M_1(-1,2,1), M_2(0,1,-1)$

2. $\vec{a}(M) = y^2 x\vec{i} - yx^2\vec{j} + \vec{k}$ $M_0 = (\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 5)$

3. $S: x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geq 0)$, $P: z = 5$

4. $\vec{b}(M) = 3y\vec{i} - 3x\vec{j} + x\vec{k}$, $\Gamma: \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \\ z = 3 - 3\cos t - 3\sin t \end{cases}$

5. $\vec{F} = yz\cos xy\vec{i} + xz\cos xy\vec{j} + \sin xy\vec{k}$

6. $U = r^2 \sin\frac{\theta}{2}$ $(U = U(r,\varphi,\theta))$

Вариант 21

1. $U = z - 4y^2 - x^2$ $M_0(1,0,4), M_1(0,1,-5), M_2(-1,0,3)$

2. $\vec{a}(M) = (x + xy)\vec{i} + (y - x^2)\vec{j} + (z-1)\vec{k}$ $M_0 = (-\sqrt{5}, 4, \frac{1}{2})$

3. $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $(z \geq 0)$, $P: z = 0$

4. $\vec{b}(M) = -x^3y^3\vec{i} + 2\vec{j} + xz\vec{k}$, $\Gamma: \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t \\ z = 1 \end{cases}$

5. $\vec{F} = xz\vec{i} + 2y\vec{j} + xy\vec{k}$

6. $U = z\rho\cos\frac{\varphi}{2}$ $(U = U(\rho,\varphi,z))$

Вариант 22

1. $U = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2$ $M_0(3,0,1), M_1(-3,2,0), M_2(0,4,2)$

2. $\vec{a}(M) = (y^2 - x^2)\vec{i} + y\vec{j} + (y^2 + z^2)\vec{k}$ $M_0 = (\frac{1}{2}, -3, 1)$

3. $S: 4x^2+z^2=y$ , $P: y=1$

4. $\vec{b}(M)=x\vec{i}-2z^2\vec{j}+y\vec{k}$ , $\Gamma: \begin{cases} x=3\cos t \\ y=3\sin t \\ z=6\cos t-3\sin t+1 \end{cases}$

5. $\vec{F}=\dfrac{1}{2}(x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+xz^2\vec{k})$

6. $U=\rho^2\sin\varphi\ (U=U(\rho,\varphi))$

Вариант 23

1. $U=x^2+y^2-2z^2\ M_0(4,1,1), M_1(1,-1,0), M_2(2,1,-1)$

2. $\vec{a}(M)=(x+y^2)\vec{i}+y\vec{j}+(x^2+z-2)\vec{k}\ M_0=(-1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6})$

3. $S: x^2+z^2=y^2\ (y\geq 0)$, $P: y=1$

4. $\vec{b}(M)=x\vec{i}-3z^2\vec{j}+y\vec{k}$ , $\Gamma: \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=2\cos t-4\sin t+3 \end{cases}$

5. $\vec{F}=(x^3-yz)\vec{i}+(y^3-xz)\vec{j}+(z^3-xy)\vec{k}$

6. $U=r\cos\varphi\sin\theta\ (U=U(r,\varphi,\theta))$

Вариант 24

1. $u=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{25}\ M_0(1,1,1), M_1(1,-1,1), M_2(0,0,0)$

2. $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\ M_0(0,1,0)$

3. $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\ S: z=3(4-x^2-y^2), P: z=2$

4. $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\ \Gamma: \begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=\sin t \\ z=\sin t \end{cases}$

5. $\vec{F}=(yz-xy)\vec{i}+(xz-\dfrac{x^2}{2}+yz^2)\vec{j}+(xy+y^2z)\vec{k}$

6. $u = 2\rho\cos\varphi \quad u = u(\rho,\varphi)$

## Вариант 25

1. $u = x^2 - y^2 - z^2 \quad M_0(0,0,0), M_1(2,1,2), M_2(-2,1,-2)$

2. $\vec{a} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (z^2 + x^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k} \quad M_0(1,1,1)$

3. $\vec{a} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (z^2 + x^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$

$S : z^2 + 2x^2 = y^2, P : |y| = 1$

4.

$$\vec{a} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (z^2 + x^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k} \;.\; \Gamma : \begin{cases} x = 4 \\ y = \sqrt{3}\sin t \\ z = \sqrt{3}\cos t \end{cases}$$

5. $\vec{F} = \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{z^2}\right)\vec{k}$

6. $u = 3\rho\sin\varphi \quad u = u(\rho,\varphi)$

## Вариант 26

1. $u = x^2 + y^2 - z \quad M_0(2,2,1), M_1(1,-1,1), M_2(0,1,3)$

2. $\vec{a} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k} \quad M_0(2,1,2)$

3. $\vec{a} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k} \quad S : x^2 + 9y^2 = z^2), P : |z| = 2$

4. $\vec{a} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k} \quad \Gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = 5 \\ z = \sin t \end{cases}$

5.

$$\vec{F} = \left(\frac{z}{y^2} - \frac{y}{z^2} - \frac{2yz}{x^3}\right)\vec{i} + \left(\frac{z}{x^2} - \frac{x}{z^2} - \frac{2xz}{y^3}\right)\vec{j} + \left(\frac{y}{x^2} - \frac{x}{y^2} - \frac{2xy}{z^3}\right)\vec{k}$$

6. $u = \frac{1}{2}\rho\sin\varphi\cos\varphi \quad u = u(\rho,\varphi)$

Вариант 27

1. $u = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} + z \ M_0(2,1,1), M_1(0,2,0), M_2(3,2,1)$

2. $\vec{a} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} \ M_0(3,2,1)$

3. $\vec{a} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} \ S : x^2 + y^2 = z^2, P : |z| = 1$

4. $\vec{a} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} \ \Gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 5 \end{cases}$

5. $\vec{F} = 2xy\vec{i} + (x^2 - 2yz)\vec{j} - y^2\vec{k}$

6. $u = 2\rho^2 \sin 2\varphi \ u = u(\rho, \varphi)$

Вариант 28

1. $u = x^2 + 2y^2 - z^2 \ M_0(2,3,-1), M_1(1,-1,2), M_2(1,3,2)$

2. $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k} \ M_0(2,3,1)$

3. $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k} \ S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, P : x + y + z = 1$

4. $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k} \ \Gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos t \\ z = \sqrt{2} \sin t \end{cases}$

5 $\vec{F} = 6x^2\vec{i} + 3\cos(3x + 2z)\vec{j} + \cos(3y + 2z)\vec{k}$

6. $u = 2\rho \sin 2\varphi \ u = u(\rho, \varphi)$

Вариант 29

1. $u = x^2 + y^2 - 2z^2 \ M_0(-1,3,2), M_1(2,1,3), M_2(0,1,0)$

2. $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k} \ M_0(1,2,3)$

3. $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k} \ S : x^2 + y^2 = z, P : z = 3$

4. $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k} \ \Gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2(1 - \cos t) \end{cases}$

5. $\vec{F}=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$

6. $u=\rho\cos\varphi+\rho^2\sin\varphi\ u=u(\rho,\varphi)$

Вариант 30

1. $u=2x^2-4y^2-z\ M_0(2,1,4),M_1(4,1,2),M_2(3,4,1)$

2. $\vec{a}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}\ \ M_0(3,2,2)$

3. $\vec{a}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}\ \ S: z=2(1-x^2-y^2), P: z=0$

4. $\vec{a}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}\ \ \Gamma:\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos t \\ z=3(1-\cos t) \end{cases}$

5. $\vec{F}=xy(3x-4y)\vec{i}+x^2(x-4y)\vec{j}+3xz^2\vec{k}$

6 . $u=\rho\cos 3\varphi\ u=u(\rho,\varphi)$

# 2. ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

## 1.1 Понятия комплексной функции

Множество точек *E* комплексной плоскости называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат данному множеству. Множество точек *E* комплексной плоскости называется *открытым*, если каждая ее точка принадлежит ей вместе со своей некоторой окрестностью. Связное открытое множество точек комплексной плоскости называется *областью* и обозначается через D, Gи тому подобные. Область *D* называется односвязной, если ее граница является связным множеством; в противном случае многосвязной. Если каждому комплексному числу $x+yi$, принадлежащему области D по правилу $f$ сопоставлено одно (или несколько) комплексное число $w=u+iv$,то говорят, что определена функция

$$\omega=f(z)=u+iv=u(x,y)+iv(x,y),$$

где

$$u(x,y)=\operatorname{Re} f(z),\ v(x,y)=\operatorname{Im} f(z).$$

Комплексные функции бывают как однозначным, так и многозначным.

### 1.2 Аналитические функции. Условие Коши-Римана

Если в точке $z\in D$ существует предел

$$\lim_{\Delta z\to 0} -\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z},\ z+\Delta z\in D,$$

то он называется производной функции $f(z)$ в точке $z$ и обозначается через $f'(z)$ или $\frac{df(z)}{dz}$.

Если в точке $z\in D$ функция $f(z)$ имеет производную $f'(z)$, то говорим, что функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z$.

Функция $f(z)$ дифференцируемая в каждой точке области $D$ и имеющая в этой области непрерывную производную $f'(z)$, называется аналитической в области $D$.

Для того чтобы функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ была аналитической в области $D$необходимо и достаточно существование в этой области непрерывных частных производных функций $u(x,y)$и $v(x,y)$, удовлетворяющих условиям Коши-Римана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

При выполнении условии Коши-Римана производная может быть записана соответственно:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

### 1.3Интеграл от функции комплексной переменной

Предположим, что $l$ – направленная кусочно-гладкая кривая в плоскости $z$ и для всех $z \in l$ определена функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Тогда интеграл представляется в виде суммы двух криволинейных интегралов:

$$\int_l f(z)dz = \int_l u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_l v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

**1.4 ФормулыКоши**

Еслифункция $f(z)-$аналитична водносвязнойобласти$D$, ограниченной контуром $\Gamma$, и $\gamma$ - замкнутый контур в$D$ то

$$\oint_\gamma f(\eta)d\eta = 0$$

.

Еслидополнительнофункция $f(z)-$ непрерывнав замкнутой области $\overline{D}=D+\Gamma$, то

$$\oint_\Gamma f(\eta)d\eta = 0$$

Если функция $f(z)$ определена и непрерывна в односвязной области$D$ и такова, что для любого замкнутого контура $\gamma \in D$

$$\oint_\gamma f(\eta)d\eta = 0,$$

то при фиксированном $z_0 \in D$ функция

$$\Phi(z) = \int_{Z_0}^{Z} f(\eta)d\eta$$

является аналитической в области $D$ функцией, для которой

$$\Phi'(z) = f(z).$$

Функция $\Phi(z)$ называется первообразной или неопределенным интегралом от $f(z)$, причем, если $F(z)$ – одна из первообразных для $f(z)$, то

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\eta)d\eta = F(z_2) - F(z_1).$$

Если $f(z)$ аналитичнавобластиD, $z_0 \in D$ и $\gamma \subset D$ - контур, охватывающийточку $z_0$, товернаинтегральнаяформулаКоши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

При этом функция $f(z)$ имеет всюду в $D$производные любого порядка, для которых справедливы формулы

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \cdot i} \oint_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{k+1}} d\eta \quad k = 1,2,3,....$$

## 1.5 Ряд Лорана

Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

называетсярядомЛорана. Здесь ряд

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

называетсяправильнойчастьюЛорана, а ряд

$$f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$$

главнойчастьюрядаЛорана.

Еслисправедливо соотношение

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|} = r < R = \frac{1}{\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

тообластьюсходимостиряда являетсякольцо

$$K = \{z \,/\, 0 \le r < |z - z_0| < R\}.$$

Вэтомкольцесуммаряда $f(z) = f_1(z) + f_2(z) -$ являетсяфункцией аналитической, причем коэффициенты ряда $c_n$ связаны с функцией $f(z)$ посредством формул

$$c_n = \frac{1}{2\pi \cdot i} \int\limits_{|\eta - z_0| = r'} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta, \quad n = 0, \pm 1, \ldots$$

где $r < r' < R$.

## Расчётные задания

Задание 1. Вычислить комплексное выражение.

Задание 2. Определить геометрическое место точек.

Задание 3. Вычислить значения комплексной функции при заданном значении аргумента или решить уравнение

Задание 4. Найти аналитическую функцию

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

по заданной её действительной или мнимой части.

Задание 5. Вычислить интеграл.

Задание 6. Определить область сходимости ряда или разложить в ряд Лорана функцию в заданной области.

## Показательный вариант

Задача 1. а) Вычислить $\sqrt[3]{-2 + i2}$

Решение: Для числа $z = -2 + i2 = 2(-1 + i) = 2z$, где $z_1 = -1 + i$. Для числа $z_1 = -1 + i$ имеем $|z_1| = r = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$; так как точка $z_1$ принадлежит второму квадранту, то для неё

$$\varphi = arctg\,\frac{1}{-1} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi$$

Следовательно:

$$z_1 = -1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{3}{4}\pi + i\,sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

Тогда:

$$\sqrt[3]{-2+2i} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}(cos\frac{3}{4}\pi + i\,sin\frac{3}{4}\pi)} =$$

$$= (2^{3/2})^{1/3}\left(cos\frac{\frac{3}{4}\pi + 2\pi k}{3} + i\,sin\frac{\frac{3}{4}\pi + 2\pi k}{3}\right) =$$

$$= 2^{\frac{1}{2}}\left(cos\frac{\frac{3}{4}\pi + 2\pi k}{3} + i\,sin\frac{\frac{3}{4}\pi + 2\pi k}{3}\right).$$

Полагая последовательно $k = 0{,}1{,}2,$ получим

$$k = 0, \quad (\sqrt[3]{-2+i2})_0 = \sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{12} + i\,sin\frac{3\pi}{12}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + i.$$

$$k = 1, \quad (\sqrt[3]{-2+i2})_1 = \sqrt{2}\left(cos\frac{11\pi}{12} + i\,sin\frac{11\pi}{12}\right).$$

$$k = 2, \quad (\sqrt[3]{-2+i2})_2 = \sqrt{2}\left(cos\frac{19\pi}{12} + i\,sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

б) Вычислить: $\mathrm{w} = (-1+\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}}$

Решение:

$$w = (-1-i)^{1+i} = e^{(1+i)\,Ln(-1-i)} =$$

$$= e^{(1+i)\left(ln\sqrt{2}+i\left(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} =$$

$$= e^{(1+i)\left(\frac{1}{2}ln2+i\left(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}ln2+i\left(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)+i\frac{1}{2}ln2+i^2\left(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)} =$$

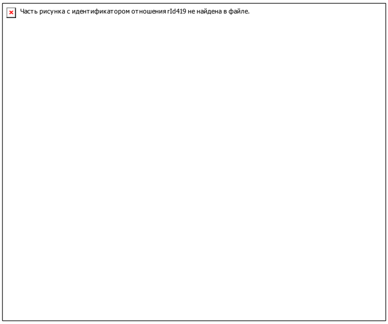
$$= e^{\frac{1}{2}ln2-\left(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)+i\left(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi+\frac{1}{2}ln2\right)} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}ln2+\frac{3}{4}\pi-2k\pi}\cdot\left(cos\left(\frac{ln2}{2}-\frac{3\pi}{4}\right) + i\,sin\left(\frac{ln2}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

Задача 2. Какое множество точек плоскости задаются условиями

$$\begin{cases} 3 \le \lfloor z+1-2i \rfloor \le 4 \\ \dfrac{\pi}{2} \le arg\, z \le \pi \end{cases}$$

Решение. Условие $3 \le \lfloor z+1-2i \rfloor \le 4$задаёт кольцо между концентрическими окружностями радиусов $r = 3$и $R = 4$ с центром в точке $\mathrm{z}_0 = -1 + 2\mathrm{i}$ . Условие $\frac{\pi}{2} \le \arg \mathrm{z} \le \pi$ задаёт множество точек второго квадранта, следовательно, пересечение множеств точек комплексной плоскости даёт чертёж.




Задача 3. Решить уравнение:

$$sin\, z + cos\, z = i$$

Решение:

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = i$$

$$e^{2iz} - 1 + ie^{2iz} + i = -2e^{iz}$$

$$(1+i)e^{2iz} + 2e^{iz} - 1 + i = 0$$

Обозначаем: $e^{iz} = t$

Тогда имеем: $(1+i)t^2 + 2t - 1 + i = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{1+i} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{1+i} = \frac{\left(-1 \pm \sqrt{3}\right)(1-i)}{2}$$

$$e^{iz} = \frac{\left(-1 \pm \sqrt{3}\right)(1-i)}{2} \Rightarrow$$

$$iz = Ln\frac{\left(-1 \pm \sqrt{3}\right)(1-i)}{2}.$$

Обозначим аргумент логарифма через $W_{1,2}$, т.е.

$$W_1 = \frac{-1+\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})}{2}, \quad W_2 = \frac{-1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}{2}.$$

Тогда

$$|W_1| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(-1+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right),$$

$$argW_1 = argtg\frac{1-\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}} = -argtg\frac{\sqrt{3-1}}{\sqrt{3-1}} = -\frac{\pi}{4}$$

и

$$|W_2| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(-1-\sqrt{3}\right)^2+\left(1+\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right),$$

$$argW_2 = argtg\frac{1+\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}} = argtg\left(-\frac{\sqrt{3+1}}{\sqrt{3+1}}\right) = argtg(-1) =$$

$$= \pi - argtg(1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Итак,

$$z_1 = -iLnW_1 = -i\left(ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} + 2k\pi - iln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \quad r \in Z;$$

$$z_2 = -iLnW_2 = -i\left(ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} + i\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\right) =$$

$$= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi - iln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}, \quad r \in Z;$$

Задача 4. Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где$v(x, y) = x + y$

Решение. Имеем

$$\frac{dv}{dy} = 1$$

Так как

$$\frac{dv}{dy} = \frac{du}{dx} \quad ,$$

то

$$u = \int dx = x + \varphi(y)$$

Отсюда $u = x + \varphi(y) \Rightarrow \frac{du}{dy} = \varphi'(y); \quad \frac{dv}{dx} = 1$

Так как

$$\frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx} \text{то} \varphi'(y) = -1 \Rightarrow \varphi(y) = -y + \text{c}$$

Значит, $u = x - y + c$

Следовательно,

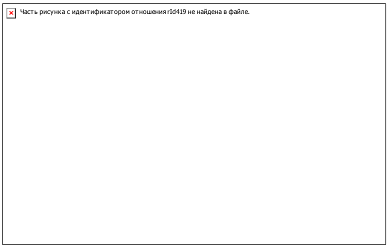
$$f(z) = u(x, y) + v(x, y) = (x - y + c) + i(x + y)$$
$$= (1 + i)(x + iy) + c =$$
$$= (1 + i)z + c,$$

где $c - \text{const}$

Задача 5. Вычислить

$$\int\limits_{|z|=7} \frac{e^z}{z^3 - 5z^2} dz$$

Решение. Строим график области интегрирования




Имеем

$$\int\limits_{|z|=7} \frac{e^z dz}{z^3-5z^2} = \int\limits_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^3-5z^2}dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z^3-5z^2}dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{e^z}{z-5}}{z^2}dz +$$

$$+\int_{\gamma_2} \frac{\frac{e^z}{z^2}}{z-5}dz = \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{e^z}{z-5}\right)'\Big|_{z\,=\,0} + 2\pi i\left(\frac{e^z}{z^2}\right)\Big|_{z\,=\,5} =$$

$$2\pi i\left(\frac{e^z(z-5)-e^z}{(z-5)^2}\right)\Bigg|_{z\,=\,0} + 2\pi i\frac{e^5}{25} =$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{6}{25}\right) + 2\pi i\frac{e^5}{25} = 2\pi i\frac{e^5-6}{25} = \frac{2\pi i}{25}(e^5-6)$$

Задача 6. Разложить в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{7z-19}{z^2-6z+5}$$

в окрестности точки $z_0=1$

Решение. Имеем

$$f(z) = \frac{7z-19}{z^2 6z+5} = \frac{A}{z-5} + \frac{B}{z-1} = \frac{A(z-1)+B(z-5)}{(z-5)(z-1)}$$

$$A(z-1)+B(z-5) = 7z-19\,,$$

$$\left.\begin{array}{l} z=1 \\ z=5 \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} -4B=-12 \\ 4A=16 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B=3 \\ A=4 \end{array}$$

Тогда

$$f(z) = \frac{4}{z-5} + \frac{3}{z-1}$$

Известно $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n;$ $\quad$ *при*$|z| < 1.$

Отсюда

$$\frac{4}{z-5}=\frac{4}{-4+z-1}=-\frac{4}{4-(z-1)}=-\frac{4}{4\left(1-\frac{z-1}{4}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{1-\frac{z-1}{4}}=-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-1}{4})^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{4^n}$$

Значит ,

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{4^n}+\frac{3}{z-1}$$

в *окрестности* $0<|z-1|<4$

# Варианты

Вариант 1

I. $(1-\mathrm{i})^{-1+\mathrm{i}}$ ; 2. $1<\mathrm{Im}(3\mathrm{i}-\mathrm{z})<3$; 3. $sh(\mathrm{iz})=\mathrm{i}$;

4. $\mathrm{v}(\mathrm{x},\mathrm{y})=2\mathrm{xy}+\mathrm{y}$ ; 5. $\mathcal{J}=\int\limits_{\Gamma}(\mathrm{x}^2+\mathrm{iy}^2)\mathrm{dz}$ ,

где $\Gamma$ – прямая от $\mathrm{z}_0=1+\mathrm{i}$ до $\mathrm{z}_1=2+3\mathrm{i}$ ;

6. $\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{z}^\mathrm{n}}+\sum\limits_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{z}}{2}\right)^\mathrm{n}$

Вариант 2

I. $(3+4\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$ ; 2. $\arg(\mathrm{z}+2\mathrm{i})=\frac{\pi}{3}$ ; 3. $\cos\mathrm{z}=2$ ;

4. $\mathrm{v}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\sin\mathrm{y}$ , $\mathrm{f}(0)=1$ ; 5. $\mathcal{J}=\oint\limits_{|\mathrm{z}|=2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{z}}\mathrm{dz}}{\mathrm{z}^2-1}$ ;

6. $\mathrm{f}(\mathrm{z})=\frac{2\mathrm{z}+3}{\mathrm{z}^2+3\mathrm{z}+2}$ , в кольце $\frac{1}{4}<|\mathrm{z}+2|<1$ ;

Вариант 3

I. $(2+2\mathrm{i})^{\mathrm{i}+1}$ ; 2. $\mathrm{Im}(\mathrm{z}^2-\bar{\mathrm{z}})=2-\mathrm{Im}\mathrm{z}$ ;

3. $\operatorname{sh}\left(\ln 4+\frac{\pi}{3}i\right)$ ;  4. $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ , $f(\pi)=\frac{1}{5}$ ;

$$5.\ \mathcal{J}=\int_{\Gamma}(1+i-z\bar{z})dz\ ,=0,\ \ z_1=1+i$$

где $\Gamma$ – дугапараболы: $y=x^2$соединяющаяточки $z_0=0$ и$z_1=1+i$.

6. $f(z)=\frac{1}{z^2+2z-8}$ ,  вкольце$\frac{1}{3}<|z+4|<\frac{1}{2}$ ;

Вариант 4

1. $(1-\sqrt{3}i)^{-1+i}$ ; 2. $|\bar{z}|-\operatorname{Im} z=6$ ; 3. $\operatorname{ch}3z=i$ ;

4. $v(x,y)=x^2-y^2+xy$ ;5.$\mathcal{J}=\int_{\Gamma}(z\bar{z}-\bar{z}^2)dz$ , где $\Gamma$: $|z|=1$, $(-\pi\le\arg z\le 0)$6. $f(z)=\frac{1}{z}\sin^2\frac{z}{2}$ , вокрестности$z_0=0$

Вариант 5

I. $(-1-i)^i$ ;  2. $|z-1|<|z-i|$ ;  3. $e^{z^2}=i$ ;

4. $V(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ , $(x>0)$  $f(1)=0$ ;

5. $\mathcal{J}=\oint_{\Gamma}\frac{zdz}{(z-2)^2(z+1)}$ , где$\Gamma$: $|z-3|=6$ ;

6. $f(z)=\frac{Z^2-Z+3}{Z^2-3Z+2}$ ;  в кольце $\frac{1}{4}<|z-2|>\frac{1}{2}$;

Вариант 6

I. $(-1+i)^{1+i}$ ;  2. $1<\operatorname{Im} iz<3$ ;  3. $\operatorname{ch}(\ln 4+\frac{\pi}{3}i)$ ;

4. $u=x^{2-}y^2+5x+y-\frac{y}{x^{2+}y^2}$ ; 5. $\mathcal{J}=\oint_{|z|=3}\frac{e^z\cos nzdz}{z^2+2z}$ ;

6. $f(z)=\frac{2z-3}{z^2-3z+2}$ ;  вкольце$0<|z-1|<1$

Вариант 7

I. $W=(\sqrt{3}-i)^{i+1}$ ; 2. $\frac{1}{4}<Im\left(\frac{1}{z}\right)<\frac{1}{2}$ ; 3. $\sin z=3$ ;

4. $v(x,y)=3x^2y-y^3$ ;. 5. $\mathcal{J}=\int_{\Gamma} e^{|z|^2}\mathrm{Im}z\,dz$ , гдеΓ – прямая, проходящаячерезточки$z_0=0$ , $z_1=1+i$ ;

6. $f(z)=\frac{1-e^{-z}}{z^3}$ , вокрестноститочки $z_0=0$ ;

Вариант 8

I. $W=(3+\sqrt{3}i)^{-i+1}$; 2. $\frac{1}{4}<Re\frac{1}{z}<1$ ; 3. $\sin z=\pi i$ ;

4. $v(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}+2x$ ; 5. $\mathcal{J}=\oint\limits_{|z-1|}\frac{\sin\pi z}{(z^2+1)^2}dz$ ;

6. $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}$ , вокрестности$z_0=0$

Вариант 9

I. $W=(5+4i)^{-2i+1}$ ; 2. $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)<-\frac{1}{2}$ ; 3. $\cos(2+i)$;

4. $u(x,y)=(x^2-y^2+2y)$ , $f(i)=2i-1.$

5. $\mathcal{J}=\oint\limits_{|z|=2}\frac{\sin z\cdot\sin(z-1)}{z^2+z}dz$ ;

6. $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$ , вкольце$0<|z|<1$ ;

Вариант 10

I. $W=\left(-\sqrt{3}+3i\right)^{i+2}$ ; 2. $\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\geq 1$ ; 3. $\mathrm{sh}(2+i)$;

4. $v(x,y)=-2\sin 2x\,\mathrm{sh}2y+y$ , $f(0)=2$ ;

5. $\mathcal{J}=\oint\limits_{|z|=3}\frac{z^2dz}{z-2i}$ ;

6. $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ , вкольце$1<|z-1|<2$ ;

Вариант 11

I. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{i+1}$ ; 2. $-\frac{3\pi}{4} < arg(z-1+i) < \frac{2\pi}{3}$;

3. $|z| + 2z = 3 - 4i$ ; 4. $v(x,y) = -\frac{1}{2}(x^2 - y^2) + 2xy$ ;

5. $\int_c \frac{e^z}{(z^2+9)\left(z-\frac{1}{2}\right)}dz$ , гдеc: $x^2 + y^2 = 2x + 2y + 4$ ;

6. $f(z) = \frac{2z-5}{z^2-5+6}$вокрестностиz$_0 = 3$ ;

Вариант 12

I. $(3-4i)^{1+i}$ ; 2. $\frac{1}{2} < Re(2iz) < 2$ ; 3. $|z| - 2z = 3i + 6$ ;

4. $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y) + 2\sin x\, \mathrm{sh} y + x^3 - 3xy^2 + y$ ;

5. $\int_c \frac{\sin(\cos 2z)}{(z-1)(z^2-1)}dz$ , c: $\left|z-\frac{1}{2}\right| = 1$ ;

6. $f(z) = \frac{3z-4}{3z^2-10z+3}$ , вокрестностиz$_0 = 3$ ;

Вариант 13

1. $\left(1+\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$ ; 2. $\mathrm{Re}\frac{1}{z} = 5$ , $\mathrm{Im}\frac{1}{z} = 5$ ;

3. $|z| + z = 1 + i$ ; 4. $v(x,y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2+y^2)}$ ;

5. $\int_{|z|=4} \frac{e^{2z}}{z^2+9}dz$ ;

6. $f(z) = \frac{5z+3}{z^2-5z+4}$ , вокрестностиz$_0 = 1$ ;

Вариант 14

I. $(1+\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^4$ ; 2. $\mathrm{Re} z^2 = 5$ ; 3. $\cos z = \sin z$ ;

4. $v(x,y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$ ; 5. $\displaystyle\oint_{|z+5i|=2} \frac{e^{z^2+5z+6}}{(z^2+16)(z+4i)}dz$ ;

6. $f(z) = \dfrac{4z+5}{z^2 - z - 2}$ , вокрестности $z_0 = 2$ ;

Вариант 15

I. $(-3+4i)^{1+i}$ ; 2. $\mathrm{Im}\dfrac{z-2}{z-3} = 0$ , $\mathrm{Re}\dfrac{z-2}{z-3} = 0$ ;

3. $\sin z = i\,\mathrm{sh} z$ ;

4. $u(x,y) = 2\mathrm{arc\,tg}\dfrac{y}{x} + 5$ ; 5. $\displaystyle\oint_{|z-2|=2} \frac{\cos z}{(z-3)(z^2-9)}dz$ ;

6. $f(z) = \dfrac{3z+5}{z^2+2z-3}$ , вокрестности $z_0 = 1$ ;

Вариант 16

I. $\sqrt[5]{-4+3i}$ ; 2. $|z-2| - |z+2| > 3$ ; 3. $\sin 2z - \cos 2z = i$ ;

4. $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - 2y$ ; 5. $\displaystyle\oint_{|z-i|=2} \frac{e^{\sin(2z^2+5)}}{(z^2+4)(z-2i)}dz$ ;

6. $f(z) = \dfrac{7z+6}{z^2+5z+4}$ , вокрестности $z_0 = -1$ ;

Вариант 17

I. $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$ ; 2. $\mathrm{Re}\dfrac{z-4}{z+i} = 0$ , $\mathrm{Im}\dfrac{z+4}{z+i} = 0$ ;

3. $|z| - z = 2 + i$ ;

4. $v(x,y) = \ln(x^2+y^2) - x^2 + y^2$ ; 5. $\displaystyle\oint_{|z-1|=2} \frac{\sin(e^{2z+3})}{(z-2)(z^2-4)}dz$ ;

6. $f(z)=\dfrac{6z+7}{2z^2-5z+2}$ , вокрестности$z_0=2$ ;

Вариант 18

1. $\left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$ ; 2. $|z-2i|=|z-3+2i|$ ;

3. $|z|-z=2+4i$ ; 4. $u(x,y)=(x^2-y^2)+e^x$ ;

5. $\displaystyle\int\limits_{|z-8|=3}\frac{e^{z^3+4z}}{(z-7)(z^2-49)}dz$ ;

6. $f(z)=\dfrac{4z+7}{2z^2-5z+2}$ , вокрестности$z_0=\dfrac{1}{2}$ ;

Вариант 19

1. $\left(\dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1+i}$ ; 2. $|z-4+3i|=|z+2-3i|$;

3. $z^3=-1+i\sqrt{3}$ ;

4. $v(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ ;

5. $\displaystyle\int\limits_{|z+2|=3}\frac{3^{z^2-4z+3}}{(z+3)(z^2-9)}dz$ ;

6. $f(z)=\dfrac{3z+5}{z^2+4z-5}$ , вокрестности$z_0=-5$ ;

Вариант 20

I. $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^6$ ; 2. $\dfrac{\pi}{3}<Argz<\dfrac{\pi}{2}$ ; 3. $\operatorname{sh}(-3+i)$ ;

4. $v(x,y)=2e^x\sin y$ ; 5. $\displaystyle\int\limits_{|z|=4}\frac{\sin iz}{z^2-4z+3}dz$ ;

6. $\displaystyle\sum^{\infty}\frac{n\sin in}{3^n}$ , исследоватьнасходимость.

Вариант 21

I. $\sqrt[4]{-16}-?$ ; 2. . $\frac{\pi}{2} < Argz < \frac{2\pi}{3}$ ; 3. shi ;

4. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ ; 5. $\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)}dz$ ;

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{cosin}}{2^n}$ , исследоватьнасходимость.

Вариант 22

I. $\sqrt[3]{-25}-?$ ; 2. $|z-2+3i| < 3$ ; 3. $c$hi

4. $V(x,y) = 3x^2y - y^3$ ; 5. $\int\limits_{|z|=e} \frac{\sin(z+\pi i)}{(z-1)(e^z+2)}dz$ ;

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2in}{3^n}$ , исследоватьнасходимость.

Вариант 23

I. $\frac{(-1+i)^4}{\left(-\sqrt{3}+i^{17}\right)^5}$ ; 2. $1 < |z-1-i| < 3$ ; 3. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+i\right)$ ;

4. $u(x,y) = \frac{1}{2}(x^2$

$- y^2)$ ; 5. $\int\limits_{\iota} \bar{z}dz$ , где $\iota$ – замкнутыйконтур $|z|$

$= 1$ ;

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{2^n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(z-2i)^n}$.

Вариант 24

I. $\left(\frac{i^{13}+2}{i^{23}+1}\right)^3$ ;  2. $1 < |z-2i| < 2$ ;  3. $\sin(1-5i)$ ;

4. $u(x,y) = 2xy + 3$ ;  5. $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-2z-3} dz$ ;

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$ ,  исследовать на сходимость.

## 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЖОРДАНА-ГАУССА К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

При решении системы линейных уравнений методом Гаусса был рассмотрен матричный метод с контрольным столбцом, в результате чего данная система уравнений сводилась к системев треугольной форме. Для последующего изложения важно познакомится с модифицированным методом Жордана - Гаусса, позволяющим находить непосредственно значения неизвестных.

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

В матрице $A$ этой системы выберем отличный от нуля элемент $a_{qp}$. Этот элемент называется разрешающим элементом, $p$-й столбец матрицы $A$ – разрешающим столбцом, а $q$-я строка – разрешающей строкой.

Рассмотрим новую систему уравнений

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \quad (2)$$

с матрицей $A'$ ; коэффициенты и свободные члены этой системы определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} &a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ip}a_{qj}}{a_{qp}} \text{если} i \neq q. \\ &\qquad\qquad b_i' = b_i - \frac{a_{ip}b_q}{a_{qp}} \end{aligned}\right\}$$

В частности, $a_{ip}=0$, если $i \neq q$. Если же $i = q$, то принимаем $a_{qj}' = a_{qj}, b_q' = b_q$. Таким образом $q$-е уравнения в системах (1) и (2) одинаковы, а коэффициенты при $x_p$ во всех уравнениях системы (2), кроме $q$-го , равны нулю.

Следует иметь в виду, что системы (1) и (2) одновременно совместны или несовместны. В случае совместности эти системы равносильны ( их решения совпадают ).

Для определения элемента $a_{ij}$ матрицы$A'$ полезно иметь в виду так называемое «правило прямоугольника»:

$$\begin{matrix} a_{ij} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & a_{ip} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \\ a_{qj} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & a_{qp} \end{matrix}$$

Рассмотрим 4 элемента матрицы $A$: $a_{ij}$ (элемент, подлежащий преобразованию), $a_{qp}$ (разрешающий элемент) и элементы $a_{ip}$ и $a_{qj}$. Для нахождения элемента $a_{qj}'$ следует из элемента $a_{ij}$ вычесть произведение элементов $a_{ip}$ и $a_{qj}$ , расположенных в противоположных вершинах прямоугольника, деленное на разрешающий элемент $a_{qp}$.Аналогичным образом можно преобразовать систему (2) , приняв за разрешающий элемент матрицы $A'$ элемент $a_{sr} \neq 0$ , причем $s \neq q, r \neq p$ . После этого преобразования все коэффициенты при $x_r$ , кроме $a_{sr}$ , обратятся в нуль. Полученная система может быть снова преобразований и т. д. Если $r = n$ (ранг системы равен числу неизвестных ), то после ряда преобразований придем к системе уравнений вида.

$$\begin{aligned} k_1x_1 &= l_1, \\ k_2x_2 &= l_2, \\ &\cdots\cdots \\ k_nx_n &= l_n, \end{aligned}$$

из которой находятся значения неизвестных. Описанный метод решения, основанный на последовательном исключении неизвестных, называется методом Жордана - Гаусса.

I Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+2x_4=6 \\ x_1-2x_2-x_4=-6 \\ x_2+x_3+3x_4=16 \\ 2x_1-3x_2+2x_3 \quad =6 \end{cases}$$

Запишем коэффициенты, свободные члены и суммы коэффициентов и свободных членов ( $\sum -$ контрольный столбец) в следующую таблицу:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *(1)* | *1* | *-3* | *2* | *6* | *7* |
| *1* | *-2* | *0* | *-1* | *-6* | *-8* |
| *0* | *1* | *1* | *3* | *16* | *21* |
| *2* | *-3* | *2* | *0* | *6* | *7* |

Мы взяли за разрешающий элемент коэффициент при $x_1$ в первом уравнении. Перепишем без изменения строку таблицы, содержащую этот элемент (разрешающую строку), а все элементы 1-го столбца, кроме разрешающего, заменим нулями. Применив правило прямоугольника, заполняем остальные клетки таблицы (это же правило применяем и к столбцу $\sum$):

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *1* | *-3* | *2* | *6* | *7* |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *0* | *-3* | *3* | *-3* | *-12* | *-15* |
| *0* | *1* | *1* | *3* | *16* | *21* |
| *0* | *-5* | *8* | *-4* | *-6* | *-7* |

Отметим, что в контрольном столбце получаются суммы элементов соответствующих строк. Разделив на -3 элементы 2-й строки, получаем таблицу:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *1* | *-3* | *2* | *6* | *7* |
| *0* | *(1)* | *-1* | *1* | *4* | *5* |
| *0* | *1* | *1* | *3* | *16* | *21* |
| *0* | *-5* | *8* | *-4* | *-6* | *-7* |

Примем за разрешающий 2-й элемент 2-й строки, 1-й столбец перепишем без изменения, элементы 2-го столбца, кроме разрешающего, заменим нулями, 2-ю (разрешающую) строку перепишем без изменения, элементы остальных клеток таблицы преобразуем по правилу прямоугольника:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *0* | *-2* | *1* | *2* | *2* |
| *0* | *1* | *-1* | *1* | *4* | *5* |
| *0* | *0* | *2* | *2* | *12* | *16* |
| *0* | *0* | *3* | *1* | *14* | *18* |

Разделим элементы 3-й строки на 2

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *0* | *-2* | *1* | *2* | *2* |
| *0* | *1* | *-1* | *1* | *4* | *5* |
| *0* | *0* | *(1)* | *1* | *6* | *8* |
| *0* | *0* | *3* | *1* | *14* | *18* |

Преобразуем таблицу, приняв за разрешающий 3-й элемент 3-го столбца:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *0* | *0* | *3* | *14* | *18* |
| *0* | *1* | *0* | *2* | *10* | *13* |
| *0* | *0* | *1* | *1* | *6* | *8* |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *0* | *0* | *0* | *-2* | *-4* | *-6* |

Разделим элементы 4-й строки на -2:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | *b* | *Σ* |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *0* | *0* | *0* | *8* | *9* |
| *0* | *1* | *0* | *0* | *6* | *7* |
| *0* | *0* | *1* | *0* | *4* | *5* |
| *0* | *0* | *0* | *1* | *2* | *3* |

В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 8, \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 6, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 4, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 2, \end{cases}$$

т.е. $x_1 = 8$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$, $x_4 = 2$.

IIРешить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 2, \end{cases}$$

Составим таблицу

| $\boldsymbol{x_1}$ | $\boldsymbol{x_2}$ | $\boldsymbol{x_3}$ | $\boldsymbol{x_4}$ | ***b*** | *Σ* |
|---|---|---|---|---|---|
| *(1)* | *1* | *-2* | *1* | *1* | *2* |
| *1* | *-3* | *1* | *1* | *0* | *0* |
| *4* | *-1* | *-1* | *-1* | *1* | *2* |
| *4* | *3* | *-4* | *-1* | *2* | *4* |

1-й элемент 1-го столбца - разрешающий:

| $\boldsymbol{x_1}$ | $\boldsymbol{x_2}$ | $\boldsymbol{x_3}$ | $\boldsymbol{x_4}$ | ***b*** | *Σ* |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *1* | *-2* | *1* | *1* | *2* |
| *0* | *-4* | *3* | *0* | *-1* | *-2* |
| *0* | *-5* | *7* | *-5* | *-3* | *-6* |
| *0* | *-1* | *4* | *5* | *-2* | *-4* |

Изменим знаки в 4-й строке:

| $\boldsymbol{x_1}$ | $\boldsymbol{x_2}$ | $\boldsymbol{x_3}$ | $\boldsymbol{x_4}$ | ***b*** | *Σ* |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *1* | *-2* | *1* | *1* | *2* |
| *0* | *-4* | *3* | *0* | *-1* | *-2* |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *0* | *-5* | *7* | *-5* | *-3* | *-6* |
| *0* | *(1)* | *-4* | *5* | *2* | *4* |

4-й элемент 2-го столбца – разрешающий:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *0* | *2* | *-4* | *-1* | *-2* |
| *0* | *0* | *-13* | *20* | *7* | *14* |
| *0* | *0* | *-13* | *20* | *7* | *14* |
| *0* | *1* | *-4* | *5* | *2* | *4* |

Вычтем из 3-й строки 2-ю и вычеркнем 3-ю строку:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *0* | *2* | *-4* | *-1* | *-2* |
| *0* | *0* | *-13* | *(20)* | *7* | *14* |
| *0* | *1* | *-4* | *5* | *2* | *4* |

4-й элемент 2-й строки – разрешающий:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *0* | *-0,6* | *0* | *0,4* | *0,8* |
| *0* | *0* | *-13* | *20* | *7* | *14* |
| *0* | *1* | *-0,75* | *0* | *0,25* | *0,5* |

Матрица имеет ранг, равный 3, следовательно, система содержит три базисных неизвестных $x_1, x_2, x_4$ и одно свободное неизвестное $x_3$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0{,}6\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 0{,}4, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 - 13\cdot x_3 + 20\cdot x_4 = 7, \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 - 0{,}75\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 0{,}25. \end{cases}$$

Отсюда

$$x_1 = 0{,}4 + 0{,}6x_3, x_2 = 0{,}25 + 0{,}75x_3, x_4 = 0{,}35 + 0{,}65x_3.$$

Итак, решение системы имеет вид

$$x_1 = 0{,}4 - 0{,}6u, x_2 = 0{,}25 + 0{,}75u, x_3 = u, x_4 = 0{,}35 + 0{,}65u.$$

где $u$ – произвольное число.

IIIРешить систему уравнений

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 3, \\ 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 \qquad = 0. \end{cases}$$

Составим таблицу:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | -5 | 7 | 8 | 3 | 19 |
| 3 | 11 | 2 | 4 | 6 | 26 |
| 3 | 2 | 3 | 4 | 1 | 13 |
| (1) | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 |

4-й элемент 1-го столбца – разрешающий:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -11 | (1) | 8 | 3 | 1 |
| 0 | 8 | -1 | 4 | 6 | 17 |
| 0 | -1 | 0 | 4 | 1 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 |

1-й элемент 3-го столбца – разрешающий:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -11 | (1) | 8 | 3 | 1 |
| 0 | -3 | 0 | 12 | 9 | 18 |
| 0 | -1 | 0 | 4 | 1 | 4 |
| 1 | 12 | 0 | -8 | -3 | 2 |

Изменим знаки элементов 3-й строки на противоположные:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -11 | 1 | 8 | 3 | 1 |
| 0 | -3 | 0 | 12 | 9 | 18 |
| 0 | (1) | 0 | -4 | -1 | -4 |
| 1 | 12 | 0 | -8 | -3 | 2 |

3-й элемент 2-го столбца – разрешающий:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | -36 | -8 | -43 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 |
| 0 | (1) | 0 | -4 | -1 | -4 |
| 1 | 0 | 0 | 40 | 9 | 50 |

В результате приходим к системе

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 - 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 - 36x_4 = -8, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = \quad 6, \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = -1, \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 40x_4 = \quad 9. \end{cases}$$

Легко видеть, что второму уравнению не удовлетворяют никакие значения $x_1\,, x_2 x_3 \; и \; x_4$. Таким образом, полученная система уравнений и заданная система несовместны.

# Варианты

$$1\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$2\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

$$3\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -9 \end{cases}$$

$$4\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -7 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -1 \end{cases}$$

$$5\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

$$6\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 \end{cases}$$

$$7.\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2 \ldots \\ 3x_1 + 2x_2 + \ldots \\ x_1 - 2x_2 + 3 \ldots \\ -2x_1 + 2x_2 + \ldots \end{cases}$$

$$9.\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$$10.\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

$$111111.\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -5 \end{cases}$$

$$12\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -8 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -9 \end{cases}$$

$$13.\begin{cases} x_1 - \ldots \\ 3x_1 - \ldots \\ 2x_1 + \ldots \\ x_1 - \ldots \end{cases}$$

$$15.\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -9 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -9 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = -7 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

$$16.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = -9 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

$$17.\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 11 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

$$18.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

19. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -6 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -4 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

# 4. МЕТОД КАСАТЕЛЬНЫХ И МЕТОД ХОРД ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ОДНОГО НЕИЗВЕСТНОГО.

Пусть нам требуется приближенно решить уравнения

$$F(x) = 0 \qquad (1)$$

1. Если $F(x)-$ многочлен 5-ого и выше порядка, то решить это уравнение не представляется возможным. Для приближенного решения этого уравнения мы используем метод хорд или касательных. Для отыскания начального приближения к корню (изолированного) уравнения (1) необходимо отделить корни, т.е. найти отрезок $[a,b]$, внутри которого имеется единственный корень.

Если:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^{n-i}, \qquad (2)$$

то для отделения корня необходимо, чтобы выполнялись условия:

$$F(a) \cdot F(b) < 0 \qquad (3)$$

(на концах отрезка функция меняет знак),

$$F'(x) > 0, \qquad x \in (a,b)$$

или (4)

$$F'(x) < 0, \qquad x \in (a,b)$$

(функция монотонна внутри отрезка)

Для определения начальных концов отрезка, $[a,b]$ в которых могут выполняться условия (3), (4) можно воспользоваться равенством:

$$a = b_0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{|a_0|} \cdot \max\limits_{0 \le k \le n-1} \{|a_i|\}};$$

$$b = b_1 = 1 + \frac{1}{|a_0|} \cdot \max\limits_{1 \le i \le n} \{|a_i|\};$$

Если $F(b_0) \cdot F(b_1) > 0$, то отрезок $[b_0, b_1]$ точкой

$b_2 = \frac{b_1 - b_0}{2}$ делится пополам и рассматривается либо:

$[b_0, b_2]$ либо $[b_2, b_1]$ в зависимости от того, на концах какого из них выполняется (3).После этого также половинным делением добиваемся выполнения (4).

2. Пусть в уравнение (1) $y = F(x)$ трансцендентная функция и требуется решить её приближённо. Для этого мы используем метод хорд или метод касательных.Для отыскания начального приближения к корню уравнения (1) необходимо, отделить корни, т.е. найти отрезок $[a,b]$, внутри которого имеется единственный корень. Это можно делать или графически или используя производную функцию: найти области возрастания и убывания функций, и делением пополам сужать эти области, и найти отрезки, на концах которых будет выполняться условие:

$F(a) \cdot F(b) < 0$ *(3)*

$F'(x) > 0, \qquad x \in (a,b)$

или (4)

$F'(x) < 0, \qquad x \in (a,b)$

(монотонность внутри отрезка).

Если мы нашли области возрастания и убывания, условие (3) в этих областях можем не проверять. Для того чтобы отделить корни графически, (1) перепишем в виде $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$ и построим график табличным или иным путём. Абсцисса точки пересечения есть решение. Приближенно определим, в каком отрезке оно находится.

**4.1 Метод касательных.**

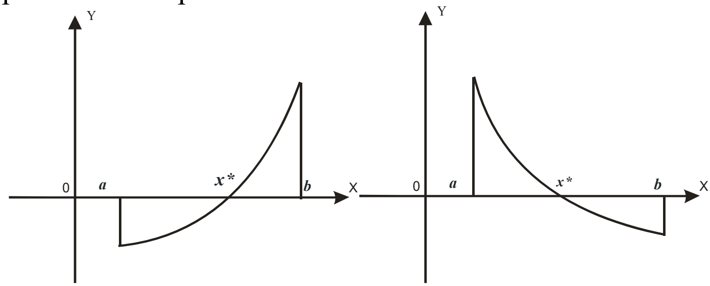
Рассмотрим уравнение

$$F(x)=0 \qquad (5)$$

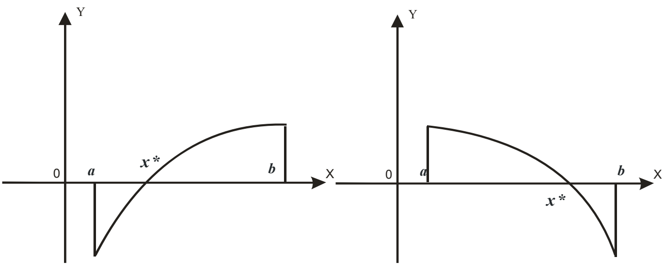
Предположим, что вышерассмотренными способами определен отрезок $[a,b]$, внутри которого имеется единственный корень, т.е. выполняется условие:

$$F(a)\cdot F(b)<0 ,$$

функция $y=F(x)$ дважды дифференцируема и $F''(x)$ не меняет знака на $[a,b]$. Тогда возможны четыре случая, изображенные на рис.4.




а) б)



в) г)

Рис.4

В методе касательных для выбора начального приближения необходимо проверить выполнение условия

$$F(c)\cdot F''(c)>0, (*)$$

где $c=a$ или $c=b$.

Касательная к точке проводится со стороны выпуклости функции, там, где выполняется $(*)$.

Предположим условие $(*)$ выполняется при $c=b$, т.е.

$F(b)\cdot F''(b)>0$ ,Положим $x_0=b$. Касательная, приходящая из точки $B(x_0,F(x_0))$, имеет уравнение:

$$y-F(x_0)=F'(x_0)\cdot(x-x_0) \qquad (6)$$

которая пересекает ось $OX$ в точке $x_1=b_1$, $y=0$.

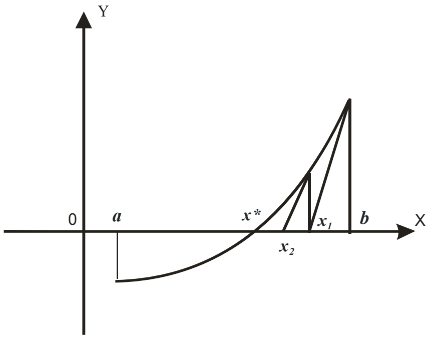



Рис.5

Подставляя в (6), получим:

$$x_1=x_0-\frac{F(x_0)}{F'(x_0)}; \qquad (6)$$

Это и есть первое приближение по методу касательных.

Получаем отрезок, $[a,x_1]$, в котором лежит решение.

Точно также находим $x_2$:

$$x_2=x_1-\frac{F(x_1)}{F'(x_1)}, \ \dots \ x_{k+1}=x_k-\frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$$

## 4.2 Метод хорд.

В этом методе для выбора начального приближения необходимо проверить выполнение условия :

$$F(c)\cdot F''(c)<0\ (**)$$

где $c=a$ или $c=b$.

За начальное приближение $x_0$ выбирается тот из концов отрезка $[a,b]$, для которого выполняется неравенство $(**)$.

Предположим условие $(**)$ выполняется при $c=a$, т.е.

$$F(a)\cdot F''(a)<0.$$

Положим $x_0=a$. Концы отрезка $[a,b]$ соединяются хордой и за следующие приближения принимаются значения абсцисс точки $C[x_1,0]$ пересечения хорды с осью $OX$.

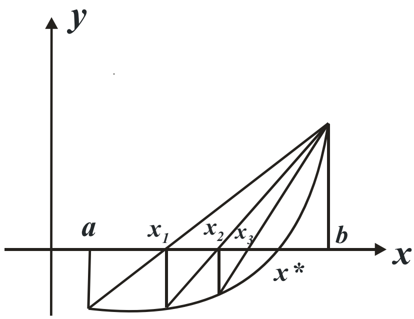



Рис.6

Напишем уравнение прямой, которая проходит через точки $A(a,F(a))$ и $B(b,F(b))$:

$$\frac{y-F(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{x-a}{b-a};$$

Абсцисса точки $C[x_1,0]$, являющая следующим приближением корня уравнения $F(x)=0$, может быть найдена из уравнения прямой, если положить в нём $y=0$.

Тогда получим: $x_1=x_0-\dfrac{(b-x_0)\cdot F(x_0)}{F(b)-F(x_0)}.$

Для дальнейшего уточнения корня по способу хорд рассмотрим интервал $[x_1;b]$ и находим $x_2$ :

$$x_2 = x_1 - \frac{(b - x_1) \cdot F(x_1)}{F(b) - F(x_1)}$$

И так далее:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(b - x_k) \cdot F(x_k)}{F(b) - F(x_k)};$$

**4.3 Комбинированный метод.**

Суть этого метода заключается в том, что приближение для искомого значения корня уравнения:

$$F(x) = 0$$

вычисляется с двух сторон внутри $[a,b]$.С одной стороны, вычисления производятся по методу касательных, выбирая в качестве начального приближения $x_0$ точку, в которой выполняется неравенство $(*)$ , с другой – по методу хорд, выбирая в качестве $\boldsymbol{x_0}$ точку, в которой выполняется неравенство $(**)$.

Этот метод применим, когда $f''(x)$ на $[a,b]$ сохраняет знак, т.е. при выполнении условия :

$$f''(x) > 0$$

или

$$f''(x) < 0, \qquad x \in (a,b).$$

Начинаем вычисление по (6) и находим $\boldsymbol{x_1}$.

Пусть $F(b) \cdot F''(b) > 0$, тогда $x_0 = b;$

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_1)} = b - \frac{F(b)}{F'(b)};$$

По методу хорд находим $x_2$ :

$$a_0 = a;\ b_1 = x_1$$

$$x_2 = a_1 = a_0 - \frac{(a_0 - b_1) \cdot F(a_0)}{F(a_0) - F(b_1)};$$

Для $k$ -ого приближения получаем формулы:

$$b_{k+1} = b_k - \frac{F(b_k)}{F'(b_k)}, \quad a_{k+1} = a_k - \frac{(a_k - b_{k+1}) \cdot F(a_k)}{F(a_k) - F(b_{k+1})} \quad (7)$$

<u>Слева - метод хорд, справа - метод касательных.</u>

Или: $a_{k+1} = a_k - \dfrac{F(a_k)}{F'(b_k)}$ и $b_{k+1} = b_k - \dfrac{(b_k - a_{k+1}) \cdot F(b_k)}{F(b_k) - F(a_{k+1})}$ (8)

<u>Слева - метод касательных, справа - метод хорд.</u>

Получим вложенные отрезки:

$$[a_k, b_k] < [a_{k-1}, b_{k-1}] < \ldots < [a, b].$$

Оценка погрешности может быть проведена по формуле:

$$|b_k - a_k| \le 2\Delta,$$

тогда:

$$x_k \approx \frac{a_k + b_k}{2};$$

где $\Delta -$ требуемая точность вычисления.

Вычислительная схема:

1) Отделение корня (определение $[a,b]$) методом половинного деления, т.е. проверка условия:

$F(a) \cdot F(b) < 0$ на концах различные знаки:

$F'(x) > 0,$

илимонотонность

$F'(x) < 0, \qquad x \in (a,b)$

2) Проверка условия:

$F''(x) > 0,$

или

$F''(x) < 0, \qquad x \in (a,b)$

Постоянство выпуклость или вогнутость.

3. Если условие n.2 выполняется, то проверяются условия $(*)$, $(**)$ для выбора формул метода (либо (7) ), (либо (8)).

4. Вычисление очередных приближений по формулам (7) или (8).

5. Оценка точности: $|a_k - b_k| \le 2\Delta /$

6) Если это условие не выполняется, повторяем вычисления по n.4.

Задание: Найти приближенное решение уравнения

$$f(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 4x - 3 = 0 \quad (1)$$

комбинированным методом, с точностью $\Delta = 0{,}01$.

Решение: $f'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 15x^2 + 12x - 4$

$$f''(x) = 20x^3 + 24x^2 - 30x + 12$$

Отделим корень. Для определения начальных концов отрезка $[a;b]$ , в котором могут выполнятся условия

$$f(a)f(b) < 0$$

и

$$f'(a)f'(b) > 0$$

т.е. на концах отрезка $[a;b]$ функция должна менять знак и быть монотонной внутри $[a;b]$, можно воспользоваться равенствами:

$$a = \frac{1}{1 + \frac{1}{|a_n|} \cdot \max\limits_{0 \le i \le n-1} \{|a_i|\}}$$

$$b = 1 + \frac{1}{|a_0|} \cdot \max\limits_{1 \le i \le n} \{|a_i|\}$$

Отсюда и из (1) находим

$$a = \frac{1}{1 + \frac{1}{|-3|} \cdot 6} = \frac{1}{3}, \qquad b = 1 + \frac{1}{1} \cdot 6 = 7$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) < 0 \text{ и } f(7) >> 0.$$

Значит, решение находится в интервале $\left[\frac{1}{3}, 7\right]$.

Так как $f(7)$ достаточно больше чем $0$, мы попробуем определить знак $f(2)$. Так как $f(2) > 0$ и $f(0) < 0$, на отрезке $[0;2]$ выполняется условие $f(0)f(2) < 0$.

Проверим знак $f'(x)$ на $[0;2]$. $f'(0) = -4 < 0$,

$f'(2) = 104 > 0$. Делим отрезок пополам:

$f(1) = -3 < 0, f'(1) = 6 > 0$.

Таким образом, внутри отрезка $[1;2]$ расположен один изолированный корень. Вычислим

$f''(1) = 26 > 0;\ f''(2) > 0$, Так как $f''(1)f''(2) > 0$,

$f''(x)$ сохраняет знак на $[1;2]$ и комбинированный метод применим. Начинаем вычисления по методу касательной.

$f(1)f''(1) < 0$, значит, с точки $x = 2$ применим метод касательных, $f(2)f''(2) > 0$, значит с точки $x = 1$ метод хорд.Положим $b_0 = 2, \quad a_0 = 1$. По методу касательных находим

$$b_1 = b_0 - \frac{f(b_0)}{f'(b_0)} = 2 - \frac{37}{104} \approx 1{,}64,$$

$f(b_1) = 15{,}2, \quad f(1) = -3$

По методу хорд находим

$$a_1 = a_0 - \frac{(a_0 - b_1)f(a_0)}{f(a_0) - f(b_1)} = 1 - \frac{-3(-0{,}64)}{-3 - 15{,}2} = 1 + \frac{3 \cdot 0{,}64}{18{,}2} \approx 1{,}11$$

$f(a_1) = f(1{,}11) = -2{,}25$, $|b_1 - a_1| = 0{,}53 > 2 \cdot \Delta$. $f'(b_1) = 46$.

Вычислим $b_2$ и $a_2$.

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} = 1{,}64 - \frac{15{,}2}{46} \approx 1{,}31$$ .

$f(b_2) = 0{,}86, \qquad f'(b_2) = 18$ .

$$a_2 = a_1 - \frac{(a_1 - b_1) f(a_1)}{f(a_1) - f(b_1)} = 1{,}11 + \frac{0{,}2 \cdot 2{,}25}{3{,}11} \approx 1{,}255$$

$$|b_2 - a_2| = |1{,}31 - 1{,}255| = 0{,}055 > 2\Delta$$

Вычислим $b_3$

$$b_3 = 1{,}31 - \frac{0{,}86}{18} = 1{,}26$$

$$|b_3 - a_2| = |1{,}26 - 1{,}255| = 0{,}005 < 0{,}02$$

Значит $x^* \approx \dfrac{1{,}255 + 1{,}260}{2} \approx 1{,}2575.$

# Варианты

1. $2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$
2. $x^3 - 3x^2 24x - 3 = 0$
3. $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$
4. $x^3 - 12x + 6 = 0$
5. $x^3 + 3x^2 - 24x - 10 = 0$
6. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = 0$
7. $2x^3 + 9x^2 - 21 = 0$
8. $x^3 - 3x^2 + 2{,}5 = 0$
9. $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$
10. $x^3 + 3x^2 - 3{,}5 = 0$
11. $x^3 + 3x^2 - 24x + 10 = 0$
12. $x^3 - 3x^2 - 24x - 8 = 0$
13. $2x^3 + 9x^2 - 10 = 0$
14. $x^3 - 12x + 10 = 0$
15. $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$
16. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0$
17. $x^3 - 3x^2 - 24x - 5 = 0$

18. $x^3 - 4x^2 + 2 = 0$
19. $x^3 - 12x - 5 = 0$
20. $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$
21. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 12 = 0$
22. $2x^3 + 9x^2 - 6 = 0$
23. $x^3 - 3x^2 + 1{,}5 = 0$
24. $x^3 - 3x^2 - 24x + 10 = 0$
25. $x^3 + 3x^2 - 24x - 3 = 0$
26. $x^3 - 12x - 10 = 0$
27. $2x^3 + 9x^2 - 4 = 0$
28. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 0$
29. $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$
30. $x^3 - 3x^2 + 3{,}5 = 0$

# 5. ПРИБЛИЖЁННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА МЕТОДАМИ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ, ТРАПЕЦИИ И СИМПСОНА.

Во многих теоретических и практических задачах приходится вычислять определенный интеграл от функции *f(x)*в промежутке *[a,b]*. Если известна первообразная функция*f(x),*то, используя формулу Ньютона-Лейбница, мы легко вычислим этот интеграл. Но в некоторых случаях ( даже когда *f(x)* непрерывная функция ) первообразную функцию нельзя изображать как конечной комбинацией элементарных функции.Кроме этого, в практике функция *f(x)*может быть задана в табличном виде, и в этом случае понятие первообразного не имеет смысла По этим причинам приближенные вычисления определенного интеграла имеют большое практическое значение.

**5.1 Приближённое вычисление определённого интеграла методам прямоугольников.**

Самая простая формула приближенного вычисления непосредственно вытекает из определения определенного интеграла. Интервал $[a,b]$ разбиваем на $n$ равных частей с помощью точками

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \qquad (k = 0,1,\dots,n),$$

длина каждого равным $h = \frac{b-a}{n}$ и берем в качестве приближенного значения определенного интеграла сумму $\sigma_n = h\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)$ (здесь $\xi_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ точка середины интервала $-[x_k, x_{k+1}]$), т.е.получаем формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \qquad (1)$$

Это формула называется формулой прямоугольников.

Если функция $f(x)$ в интервале $[a,b]$ имеет вторую производную $f''(x)$, удовлетворяющую условию

$$|f''(x)| \le M_2,$$

то для остаточного члена

$$R_n(t) = \int_a^b f(x)dx - \sigma_n$$

справедливо неравенство

$$|R_n(f)| \le \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}.$$

**Правила:** Для приближенного вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ с точностью $\varepsilon$ методом прямоугольников сначала находим натуральное число $n$ посредством равенства

$$n = \left[ \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{24\varepsilon}} \right] + 1$$

Спомощьюнатурального числа $n$ из формул

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad \xi_0 = a + \frac{h}{2}, \quad \xi_k = \xi_{k-1} + h, \quad (k = 1,2,\dots,n-1)$$

находим шаг$h$и узловые точки $\xi_k$. После этого с помощью

формулы $\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$ вычисляется приближенное

значение интеграла с точностью *ε.*

## 5.2 Формула трапеции

Разбиваемотрезок $[a,b]$ какпрежде. Толькодугукривой*y=f(x),*соответствующейотрезку $[x_k, x_{k+1}]$ заменимпрямым,соединяющимкрайниеточкиэтойдуги.Этим мызаменилиданнуюплощадькриволинейнойтрапеции,черезсуммуплощадей$n$-линейных трапеций.

Из геометрического соображения ясно, что площадь такой фигуры точнее определяет площадь криволинейной трапеции, чем площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников. Площадь кождой частной трапеции равна

$$\frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$$

И поэтому площадь рассматриваемой фигуры будет равна

$$\frac{b-a}{n}\left[ \frac{f(a)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2} \right] =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[ \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right]$$

Такимобразом,получилиформулутрапеции

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right] \qquad (2)$$

Еслифункция*f(x)*вотрезке*[a,b]*имеетнепрерывнуюпроизводную второгопорядкаудовлетворяющаяусловию $|f''(x)| \le M_2$ , дляостаточногочленаформулытрапеции (2) имеетместонеравенства$|R_n(f)| \le \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$.

**Правила:**Еслифункция*f(x)*в отрезке *[a,b]*имеетнепрерывнуюпроизводнуювторогопорядка,удовлетворяющуюусловию $|f''(x)| \le M_2$, для того чтобы вычислить значения определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ приближенно с точностью$\varepsilon$через формулы трапеции с помощью формулы

$$n = \left[\sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12\varepsilon}}\right] + 1$$

находимнатуральное число $n$. С помощью этого числа $n$и формулы

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_k = a + kh, \qquad (k = 1,2,...,n-1)$$

находимшаг$h$иузловыеточки $x_k$ . После этого с помощью формулы

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right]$$

вычислимприближенноезначение определенного интеграла с точностью $\varepsilon$.

### 5.3 Формула Симпсона

При получении формулы прямоугольников функцию *f(x)* в частных интервалах заменили постоянными (многочленом порядка-0) $f(\xi_k)$ , при получении формулы трапеции заменили линейной функцией (многочлен порядка -1) Если порядок многочлена, которым заменяется функция *f(x)*, повысит, то естественно получается формула точнее. Пусть

$$h = \frac{b-a}{2m}. \qquad (3)$$

Отрезок $[a,b]$ с помощью точек

$x_k = a + kh \quad k = 0,1,...,2m$ , разделим на $n=2m$четное число частей и значении функции *f(x)*в точках $x_k$обозначаем через

$$y_k = f(x_k), k = 0,1,...,2m.$$

График функции *f(x)* на отрезке $[x_0; x_2]$заменяем дугой параболы проходящей через точки

$$M_0(x_0; y_0); M_1(x_1; y_1); M_2(x_2; y_2).$$

Уравнение этой параболы ищем в виде

$$y = A(x-x_1)^2 + B(x-x_1) + C. \qquad (4)$$

Изусловия, что парабола (4) проходит через точки $M_0, M_1, M_2,$ получим уравнения

$y_0 = Ah^2 - Bh + C,\ y_1 = C,\ y_2 = Ah^2 + Bh + C.$

(здесь мы использовали равенства

$$x_0 - x_1 = -h, x_2 - x_1 = h).$$

Из этой системы находим неизвестные *A*и*C*.

$$A = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2), \qquad C = y_1 \qquad (5)$$

Теперь вычислим интеграл от функции (4) на интервале $[x_0, x_2]$:

$$S_1 = \int_{x_0}^{x_2} \left[A(x-x_1)^2 + B(x-x_1) + C\right]dx = \begin{vmatrix} t = x - x_1 & dt = dx \\ t_0 = -h & t_1 = h \end{vmatrix} =$$

$$= \int_{-h}^{h} \left(At^2 + Bt + C\right) dt = \frac{2A}{3} h^3 + 2Ch$$

Вместо$A$и$C$ поставим их выражения (5), получим равенство

$$S_1 = \frac{h}{3}( y_0 + 4 y_1 + y_2 ),$$

ипримем последнее выражение как приближенное значение интеграла $\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx$:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}( y_0 + 4y_1 + y_2 ).$$

Точно также график функции $f(x)$в отрезках $[x_2, x_4]$, $[x_4, x_6]$ ,…заменяем соответствующими дугами параболы и получаем формулы

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}( y_2 + 4y_3 + y_4 ),$$

$$\int_{x_4}^{x_6} f(x)dx \approx \frac{h}{3}( y_4 + 4y_5 + y_6 ),$$

……………………………

$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}( y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m} ).$$

Суммируя эти приближенные равенства, получаем следующую:

$$\int_a^b f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2m} + 4\left(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}\right)\right].$$

Из этого и из (3) получаем

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\left( y_0 + y_{2m} + 4\sum_{k=1}^{m} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{m-1} y_{2k} \right)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\left[ f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) \right].$$

Эта формула называется формулой Симпсона (или формулой параболы). Для остаточного члена суммы Симпсона

$$\sum(h) = \frac{h}{3}\left( y_0 + y_{2m} + 4\sum_{k=1}^{m} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{m-1} y_{2k} \right).$$

справедливо соотношение

$$R(h) = \frac{\sum(h) - \sum(2h)}{15}.$$

Вообщем-то это равенство справедливо, когда $f^{IV}(x)$ постоянно на отрезке $[a;b]$.Мы, предполагая, что изменение производного четвертого порядка $f^{IV}(x)$на отрезке$[a;b]$ мало, считаем, что это равенство выполняется в общем случае тоже.

**Правила:** Если функция $f(x)$на отрезке $[a,b]$имеет производную $f^{IV}(x)$, удовлетворяющую условию $\left|f^{IV}(x)\right| \le M_4$ то для вычисления приближенного значения интеграла с точностью $\varepsilon$,беря некоторые натуральное число $m$, вычисляем суммы Симпсона $\sum(h_0)$ и $\sum(h_1)$, соответствующие шагам $h_0 = \frac{b-a}{2m}$и $h_1 = \frac{h_0}{2}$ и проверяем выражение

$$R(h_1) = \frac{\sum(h_1) - \sum(h_0)}{15}.$$

Если это выражение по абсолютному значению меньше, чем $\varepsilon$в качестве приближенного значения интеграла с точностью $\varepsilon$,беремвыражение $\sum(h_1) + R(h_1)$. Иначе составим сумму

Симпсона $\sum(h_2)$, соответствующей шагу $h_2 = \frac{h_1}{2}$ и проверяем выражение

$$R(h_2) = \frac{\sum(h_2) - \sum(h_1)}{15}$$

Есливыполняется условие $|R(h_2)| < \varepsilon$, то

$I \approx \sum(h_2) + R(h_2)$, иначе посредством шага $h_3 = \frac{h_2}{2}$ составим сумму Симпсона $\sum(h_3)$ и так далее….

Так как $\lim_{k\to\infty} R(h_k) = 0$, этот процесс не продлится бесконечно, наконец для некоторого шага $k$ выполняется условие $|R(h_k)| < \varepsilon$ и выражение $\sum(h_k) + R(h_k)$будет приближенным значением интеграла с точностью $\varepsilon$.

**Примеры.**

**1)** Найти с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ приближенное значение интеграла $\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$ методом Симпсона.

**Решение:**

Вычисляем приближенное значение с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ методом Симпсона. Для $m = 1$ и $m = 2$ по формуле (3) находим шаги $h_0 = \frac{4-0}{2\cdot 1} = 2,\ h_1 = \frac{4-0}{2\cdot 2} = 1$ и

соответствующим этим шагам суммы Симпсона $\sum(h_0)$ва $\sum(h_1)$:

$$x_0 = 0; \quad x_1 = 0 + 2 = 2; \quad x_2 = 2 + 2 = 4.$$

$$y_0 = y(x_0) = \frac{0}{\sqrt{0^2+9}} = 0; \quad y_1 = y(x_1) = \frac{2}{\sqrt{2^2+9}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13} =$$

$$= 0{,}5547001962\ 2;$$

$$y_2 = y(x_2) = \frac{4}{\sqrt{4^2+9}} = 0{,}8. \qquad h = 2$$

$h_0 = 2$

| $k$ | $X_k$ | $Y_{0,2m}$ | $Y_{2k+1}$ | $Y_{2k}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | | | |
| 1 | 2 | | 0,5547 | | |
| 2 | 4 | 0,8 | | | |
| | | 0,8 | 2,2188 | | 3,0188 |
| | | | $\sum(2) = 2{,}0125$ | | |

$h_1 = 1$

| $k$ | $X_k$ | $Y_{0,2m}$ | $Y_{2k+1}$ | $Y_{2k}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | | | |
| 1 | 1 | | 0,3162 | | |
| 2 | 2 | | | 0,5547 | |
| 3 | 3 | | 0,7071 | | |
| 4 | 4 | 0,8 | | | |
| | | 0,8 | 1,0233 | 0,5547 | |
| | | 0,8 | 4,0932 | 1,1094 | 6,0026 |
| | | | $\sum(1) = 2{,}0008$ | | |

Теперь для $\sum(1)$ вычислим остаточный член:

$$R(1) = \frac{2{,}0008 - 2{,}0125}{15} = -0{,}00078.$$

Приближенноезначениеинтегралапоформуле Симпсонаравно :
$J_1 = 2{,}0008 - 0{,}00078 = 2{,}00002$.

Здесь для ошибки

$$R_1 = \int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}} - J_1 = -0{,}00002$$

справедливо неравенство

$$|R_1| < |R(1)|$$

и

$$|R(1)| < \varepsilon.$$

Таким образом, приближенное значение интеграла

$$\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$$

сточностьюε=0,001 по формуле Симпсона равно 2,00002.

**2)**Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$ с точностью $\varepsilon = 0,001$ методами прямоугольников, трапеции и Симпсона.

**Решение:**

а) Методом прямоугольников.

Сначала для того чтобы вычислить данный интеграл с точностью $\varepsilon = 0,001,$ определим на сколько частей нужно разделить интервал интегрирования $[0; 0,5]$.

Используем формулу

$$n = \left[\sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{24\varepsilon}}\right] + 1.$$

Из равенств

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4}; \quad f''(x) = -\frac{4x^2\left(3-5x^4\right)}{\left(1+x^4\right)^3},$$

так как $0 \le x \le 0,5,$ находим

$$|f''(x)| = 4\left|x^2\right| \cdot \left|3-5x^4\right| \cdot \frac{1}{\left|1+x^4\right|^3} < 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 1 = 3,$$

т.е. $M_2 = 3$ и $n = \left[\sqrt{\frac{3 \cdot (0,5-0)^3}{24 \cdot 0,001}}\right] + 1 = 4$

Вычисляем шаг h и $\xi_k$ - узловые точки.

Потом составляя таблицу, вычислим сумму

$$h\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k),$$

дающую приближенное значение данного интеграла.

$$h = \frac{0,5-0}{4} = 0,125.$$

| k | $\xi_k$ | $1+\xi_k^{\ 4}$ | $f(\xi_k)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,0625 | 1,0000152 | 0,9999848 |
| 1 | 0,1875 | 1,0012359 | 0,9987656 |
| 2 | 0,3125 | 1,0095367 | 0,9905533 |
| 3 | 0,4375 | 1,0366363 | 0,9646584 |
| $\sum f(\xi_k)=3,9539621$ | | | |
| $h\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) = 0,4942452$ | | | |

Таким образом, $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4} \approx 0,4942$ .

b) Методом трапеции.

С помощью формулы

$$n = \left[\sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12\varepsilon}}\right] + 1$$

находимнасколькочастейнужноразделитьпромежутокинтегрирования:

$$n = \left[\sqrt{\frac{3(0,5-0)^3}{12 \cdot 0,001}}\right] + 1 = 6.$$

Теперьнаходимшагhиузловыеточки$x_k$.Потомспомощьютаблицывычислимприближенноезначениеинтеграла:

$$h = \frac{0{,}5 - 0}{6} = \frac{1}{12} \approx 0{,}0833333$$

| k | $x_k$ | $1 + x_k$ | $f(x_k)$ | ${}^1/_2 f(x_k)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | | 0,5 |
| 1 | ${}^1/_{12} = 0{,}0833333$ | 1,0000482 | 0,9999518 | |
| 2 | ${}^2/_{12} = 0{,}1666666$ | 1,0007716 | 0,9992289 | |
| 3 | ${}^3/_{12} = 0{,}2500000$ | 1,0039062 | 0,9961089 | |
| 4 | ${}^4/_{12}$ =0,3333333 | 1,0123456 | 0,9878049 | |
| 5 | ${}^5/_{12} = 0{,}4166666$ | 1,0301407 | 0,9707411 | |
| 6 | ${}^6/_{12} = 0{,}5$ | 1,0625 | | 0,4705882 |
| | | | $\sum f(x_k) = 4{,}9538350$ | $\sum f(x_k) = 0{,}9705882$ |
| $h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right] = 0{,}4937017$ | | | | |

Таким образом, $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4} \approx 0{,}4937.$

c) Формулой Симпсона при *m*=*2*вычислим сумму Симпсона $\sum(h)$:

$$h = \frac{0{,}5-0}{4} = 0{,}125.$$

| k | $x_k$ | $1 + x_k$ | $4 \cdot y_{2k+1}$ | $2 \cdot y_{2k}$ | $y_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | | | 1 |
| 1 | 0,125 | 1,000244 | 3,999024 | | |
| 2 | 0,25 | 1,003962 | | 1,9921072 | |
| 3 | 0,375 | 1,019775 | 3,922432 | | 0,9411764 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 3 | 4 | | |
| 4 | 0,5 | 1,0625 | | | |
| | | $4\sum y_{2k+1} = 7{,}9214564$ | | $2\sum y_{2k} = \\ = 1{,}9921072$ | $\sum y_k = \\ = 1{,}9411764$ |
| | | | | | $\sum(h)$ =0,4939475 |

Для оценки ошибки вычислим $\sum(2h)$ :

$$2h = 2 \cdot 0{,}125 = 0{,}25.$$

| k | $x_k$ | $1 + x_k$ | $4 \cdot y_{2k+1}$ | $2 \cdot y_{2k}$ | $y_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | | | 1 |
| 1 | 0,25 | 1,003962 | 3,9842145 | | |
| 2 | 0,5 | 1,0625 | | | 0,9411764 |
| | | | $4\sum y_{2k+1} = 3{,}9842145$ | | $\sum y_k = 1{,}9411764$ |
| | | | | | $\sum(2h)$ =0,4937825 |

Используя найденные суммы , вычислим остаточный член$R(h)$:

$$R(h) = \frac{\sum(h) - \sum(2h)}{15} = \frac{0{,}4939475 - 0{,}4937825}{15} = 0{,}000011.$$

Отсюда видна:

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{1 + x^4} \approx 0{,}4939475 + 0{,}000011 = 0{,}4939585,$$

здесьошибка близка к 0,000011.

## ВАРИАНТЫ

1. $\int_0^4 \frac{\mathrm{dx}}{1 + \mathrm{x}^4}$ ; 2. $\int_0^{0,1} \sin(100\mathrm{x}^2)\,\mathrm{dx}$; 3. $\int_0^{0,2} \mathrm{e}^{-\frac{3\mathrm{x}^2}{2}}\mathrm{dx}$ ; 4. $\int_1^2 \frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{x}}\mathrm{dx}$ ;

5. $\int_1^{\pi} \frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{x}}\mathrm{dx}$ ; 6. $\int_1^2 \frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{x}}\mathrm{dx}$ ; 7. $\int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}\mathrm{dx}$ ; 8. $\int_0^1 \sqrt{1 - \mathrm{x}^3}\mathrm{dx}$ ;

$$9. \int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx\,;\ 10. \int_2^5 \frac{dx}{\ln x}\ ;\ \ 11. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}};\ 12. \int_1^{\pi/3} \frac{\sin x}{x}dx;$$

$$13. \int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}};\ 14. \int_0^{0,4} e^{\frac{-3x^2}{4}}dx;\ 15. \int_0^{0,5} \sin(4x^2)\,dx;\ .$$

$$16. \int_0^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2dx;\ \ \ 17. \int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}};$$

$$18. \int_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x}dx;\ \ 19. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}};\ \ 20. \int_1^{2} \frac{\sin 3x}{x}dx;$$

# 6. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## 6.1 Постановка задачи.

Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов и многие другие. Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

Конкретная прикладная задача может приводить к дифференциальному уравнению любого порядка или к системе уравнений любого порядка.

Различают три основных типа задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: задачи Коши, краевые задачи и задачи на собственные значения.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

Задача Коши (задача с начальными условиями) имеет дополнительные условия вида:

$$y(x_0) = y_0 \qquad (2)$$

Если правые части (1) непрерывны и ограничены в некоторой окрестности начальной точки $(x_0, y_0)$, то задача Коши (1)-(2) имеет решение, но, вообще говоря, не единственное. Если правые части не только непрерывны, но и удовлетворяют условию Липшица, то решение задачи Коши единственно и непрерывно зависит от координат начальной точки, задача корректно поставлена.

## 6.2 Методы решения.

Их можно условно разбить на точные, приближенные и численные. К точнымотносятся методы, позволяющие выразить решение дифференциального уравнения через элементарные функции, либо представить его при помощи квадратур от элементарные функций. Эти методы изучаются в курсах обыкновенных дифференциальных уравнений. Нахождение точного решения задачи Коши, а тем более общего решения уравнения (1), облегчает качественное исследование этого решения и дальнейшие действия с ним.

Однако классы уравнений, для которых разработаны методы получения точных решений, сравнительно узки и охватывают только малую часть возникающих на практике задач. Например, доказано, что решение несложного уравнения

$$\frac{du(x)}{dx} = x^2 + u^2(x) \qquad (3)$$

не выражается через элементарные функции. А уравнение

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{u - x}{u + x} \qquad (4)$$

можно точно проинтегрировать и найти общее решение

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 + u^2) + arctg\frac{u}{x} = const \qquad (5)$$

Однако для того, чтобы составить таблицу значений $u(x)$, надо численно решить трансцендентное уравнение (5), а это нисколько не проще, чем непосредственно численно проинтегрировать уравнение (4).

Приближенными будем называть методы, в которых решение получается как предел $u(x)$ некоторой последовательности $y_n(x)$, причем $y_n(x)$ выражается через элементарные функции или при помощи квадратур. Ограничиваясь конечным числом n, получаем приближенное выражение для $u(x)$ .Примером может служить метод разложения решения в обобщенный степенной ряд и другие. Однако эти методы удобны лишь в том случае, если удается найти явное выражение коэффициентов ряда. Это выполнимо лишь для сравнительно простых задач, что сильно сужает область применения приближенных методов.

Численные методы – это алгоритмы вычисления приближенных значений искомого решения $u(x)$ на некоторой выбранной сетке значений аргумента $x_n$ . Решение при этом получается в виде таблицы. Численные методы не позволяют найти общего решения уравнения (1); они могут дать только какое-то частное решение. Это основной недостаток численных методов. Зато эти методы применимы к очень широким классам уравнений и всем типам задач для них. Поэтому с появлением быстродействующих ЭВМ численные методы решения стали основными методами для решения конкретных практических задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

## 6.3 Метод Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Хотя этот метод является самым простым методом и в практике вычислений он употребляется очень редко из-за невысокой точности, но на его примере удобно пояснить способы построения и исследования численных методов.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad a = x_0 \le x \le b, \quad y(x_0) = y_0 \qquad (1)$$

и выберем на отрезке *[a,b]* некоторую сетку $\{x_n, 0 \le n \le N\}$ значений аргумента таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b\ .$$

Разлагая решение $y(x)$ по формуле Тейлора на интервале сетки $x_n \le x \le x_{n-1}$ и обозначая $y(x_n) = y_n$, получим

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{1}{2}h^2 y''_n + \ldots \qquad h = x_{n+1} - x_n, (2)$$

где производные можно найти, дифференцируя уравнение (1) требуемое число раз:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y'' = \frac{d}{dx} f(x, y) = f_x + f \cdot f_y \,(3)$$

Подставляя (3) в (2) и ограничиваясь только первым членом разложения, получим схему Эйлера:

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x, y), \qquad h_n = x_{n+1} - x_n \qquad (4)$$

Для численного расчета по схеме Эйлера достаточно задать начальное значение $y(x_0) = y_0$. Затем по формуле (4) последовательно вычисляем величины $y_1, y_2, \ldots, y_N$.

Задание: Составить решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка методом Эйлера.

$$y' = 0{,}185(x^2 + \cos 0{,}7x) + 1{,}843y$$

на отрезке $[0{,}2;1{,}2]$ с шагом $h = 0{,}1$ при начальном условии

$$y(0{,}2) = 0{,}25.$$

Все вычисления выполнить с четырьмя десятичными знаками.

Решение: Используем формулу

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Все вычисления представим в таблице;

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| i | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | Cos(0,7$x$) | (4)+(5) |
| 0 | 0,2 | 0,25 | 0,04 | 0,99 | 1,03 |
| 1 | 0,3 | 0,32 | 0,09 | 0,98 | 1,07 |
| 2 | 0,4 | 0,39 | 0,16 | 0,96 | 1,12 |
| 3 | 0,5 | 0,49 | 0,25 | 0,94 | 1,19 |
| 4 | 0,6 | 0,59 | 0,36 | 0,91 | 1,27 |
| 5 | 0,7 | 0,73 | 0,49 | 0,88 | 1,37 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 0,8 | 0,89 | 0,64 | 0,85 | 1,49 |
| 7 | 0,9 | 1,08 | 0,81 | 0,81 | 1,62 |
| 8 | 1,0 | 1,31 | 1,0 | 0,76 | 1,76 |
| 9 | 1,1 | 1,59 | 1,21 | 0,72 | 1,93 |
| 10 | 1,2 | 1,92 | 1,44 | 0,67 | 2,11 |

| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|
| 0,185(x) (6) | 1,843y | (7)+(8) | h(x)(9) | (10)+(3) |
| 0,19 | 0,46 | 0,65 | 0,06 | 0,32 |
| 0,19 | 0,58 | 0,78 | 0,07 | 0,39 |
| 0,21 | 0,72 | 0,93 | 0,09 | 0,49 |
| 0,22 | 0,89 | 1,12 | 0,11 | 0,59 |
| 0,24 | 1,10 | 1,34 | 0,13 | 0,73 |
| 0,25 | 1,35 | 1,60 | 0,16 | 0,89 |
| 0,28 | 1,64 | 1,92 | 0,19 | 1,08 |
| 0,29 | 1,99 | 2,29 | 0,23 | 1,31 |
| 0,33 | 2,42 | 2,75 | 0,27 | 1,59 |
| 0,36 | 2,93 | 3,28 | 0,33 | 1,92 |
| 0,39 | 3,53 | 3,92 | 0,39 | 2,31 |

# Варианты

Вариант 1

1. $y' = y^2 + x, y(0) = 0; [0; 0{,}3]$

Вариант 2

2. $y' = -x^2 + y^2, y(1) = 1; [1; 2]$

Вариант 3

3. $y' = -\frac{y}{1-x}, y(0) = 2; [0; 1]$

Вариант 4

4. $y' = y - \frac{2x}{y}, y(0) = 1; [0; 1]$

Вариант 5

5. $y' = \frac{1}{x^2+y^2}, y(0{,}5) = 0{,}5; [0{,}5; 3{,}5]$

Вариант 6

6. $y' = \frac{x^2+y^2}{10}, y(1) = 1; [1; 5]$

Вариант 7

7. $y' = xy^3 + x^2, y(0) = 0; [0; 1]$

Вариант 8

8. $y' = \sqrt{x}y^2 + 1, y(1) = 0; [1; 2]$

Вариант 9

9. $y' = \frac{3x^2}{x^3+y+1}, y(1) = 0; [1; 2]$

Вариант 10

10. $y' = \frac{xy}{2}, y(0) = 1; [0; 0{,}9]$

Вариант 11

11. $y' = y^2 + xy + x^2, y(0) = 1; [0; 1]$

Вариант 12

12. $y' = xy^3 - 1, y(0) = 0; [0; 1]$

Вариант 13

13. $y' = x\ln y - y\ln x, y(1) = 1; [1; 1{,}6]$

Вариант 14

14. $y' = 0{,}1y^2 + 2xy - x, y(0) = 1; [0; 0{,}8]$

Вариант 15

15. $y' = \frac{x}{y} - x^2, y(1) = 1; [1; 1{,}5]$

Вариант 16

16. $y' = x^2y^2 + 1, y(0) = 0; [0; 1]$

Вариант 17

17. $y' = 2xy + 1, y(0) = 0; [0; 0{,}5]$

Вариант 18

18. $y' = y^2 - x, y(0) = 1; [0; 0{,}5]$

Вариант 19

19. $y' = 2xy + x^2, y(0) = 0; [1; 0{,}5]$

Вариант 20

20. $y' = x^3 + y^2, y(0) = 0{,}5; [0; 0{,}5]$

## Литература

1.Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.-М.,1980,1984.

2.Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.-М.,1980,1984.

3.Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряд. Функции комплексного переменного. –М.,1981,1985.

4.Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.-М.,1987,1989.

5.Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.1,2-М.,1970,1985.

6.Данко П.Е.,Попов А.Г.,Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1-2. М.,1986.

7.Клетенник Д.В.Сборник задач по аналитической геометрии.М.,1986.

8. ЧерненкоВ.Д. Высшаяматематика в примерах и задачах.В трех томах. Учебное пособие для ВУЗов. Санкт-Петербург., «Политехника» 2003.

9. DankoP.E., PopovA.G., KojevnikovaT.Ya. Oliy matematika misol va masalalarda. Tashkent/.“Uzbekiston faylasuflari milliy jamiyati” 2007.

10. РиппельЕ.Ю. Курсвысшейматематики. Учебное пособие. часть 2. Омск. «СибАДИ»2001.

11. IsmoilovSh.N. Matematiktahlil/ II. O’quvqo’llanma. txt.uz. Angren. 2006.

12. МадрахимовР.М., ИмомкуловС.А., АбдуллаевБ.И., ЯрметовЖ.Р. Комплексўзгарувчилифункцияларназарияси. Маърузаларматни. txt.uz.Ургенч. – 2004.

## Содержание



**Редактор Ахметжанова Г.М.**
**Корректор Марданова Э.З.**