И.М.Виноградов

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

- Аналитическая геометрия
- Дифференциальное исчисление
- Основы теории чисел

Рекомендовано Министерством общего
и профессионального образования Российской Федерации
в качестве учебника
для студентов высших учебных заведений

Москва
«Высшая школа» 1999

УДК 51
ББК 22.1
В 49

Федеральная целевая программа книгоиздания России

Рецензент — доктор физико-математических наук, профессор *Г. И. Архипов* (МИАН им. В. А. Стеклова)

Виноградов И.М.

В 49 Элементы высшей математики. (Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление. Основы теории чисел). Учеб. для вузов. М.: Высш. шк., 1999. — 511 с.

ISBN 5-06-003611-1

Книга отличается наглядностью и простотой изложения основ аналитической геометрии, дифференциального исчисления функций одной и нескольких переменных и теории чисел.

Содержатся примеры и упражнения, позволяющие глубоко усвоить основные понятия и методы рассматриваемых областей математики.

Для студентов вузов, а также преподавателей втузов и техникумов. Может быть полезно учителям средней школы и школьникам старших классов.

ISBN 5-06-003611-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

В России исторически сложилось так, что представление об образовании включает в себя органичное единство школы как системы приобретения знаний, фундаментальной науки как показателя уровня подготовки специалистов и гуманитарной культуры как основы духовного единства народов, населяющих нашу страну.

Формулируя задачи образования, академик А. Н. Крылов говорил: «Школа не может дать вполне законченного знания; главная задача школы — дать общее развитие, дать необходимые навыки, одним словом... главная задача школы — научить учиться, и для того, кто в школе научится учиться, практическая деятельность всю его жизнь будет наилучшей школой».

Отметим, что особенность отечественной школы состоит в сочетании четкости рассуждений с глубиной содержания и простотой, доступностью, конкретностью изложения материала, которые всегда предпочитаются формальным конструкциям. Практическое воплощение данных идей подразумевает наличие высококвалифицированных и творчески мыслящих преподавателей.

Математическое образование и математическая культура составляют стержень научного знания, и значение математики как основы фундаментальных исследований постоянно возрастает.

Для решения этих задач требуются учебники, отражающие в определенной полноте современное состояние исследований и мировоззренческие принципы данной области науки.

Предлагаемые к публикации избранные учебники по математике реализуют указанный выше подход. Они написаны, в основном, профессорами Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Книга И. М. Виноградова «Элементы высшей математики (Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление. Основы теории чисел)» написана на основе лекций по высшей математике, которые автор читал в Ленинградском политехническом институте, а также его широко известного учебника по теории чисел. Математика воспринимается автором этой книги как мощное орудие для решения проблем естествознания. Поэтому он стремится возможно быстрее дать в руки студентов это орудие, на большом количестве простых, но принципиально важных примеров научить пользоваться ими. При этом он не делает различия, будет ли впоследствии оно применяться в инженерной работе или в абстрактных математических исследованиях. Часть, посвященная теории чисел, является классическим учебником, который стал настольной книгой специалистов в этой области.

Предполагается также издать учебники Г. И. Архипова, В. А. Садовничего, В. Н. Чубарикова «Лекции по математическому анализу», И. И. Привалова «Введение в теорию функций комплексного переменного», В. А. Садовничего «Теория операторов», С. Б. Гашкова, В. Н. Чубарикова «Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений» и др.

Надеюсь, что данные книги положат начало новой серии базовых учебников по высшей математике для вузов с повышенным уровнем математической подготовки.

Кроме практической ценности эта серия призвана подвести некоторые итоги работы российских ученых и педагогов — математиков по созданию базовых учебников по математике на рубеже второго и третьего тысячелетий. Серия не ограничивается конечным числом изданий. В дальнейшем предполагается продолжить отбор и издание учебников как ныне здравствующих, так и ушедших из жизни авторов, которые отвечают изложенной выше концепции, не потеряли своей новизны и актуальности и пользуются заслуженной популярностью и авторитетом у студентов и педагогов.

Академик Российской Академии наук *В. А. Садовничий*

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Глава 1

ВЕКТОРЫ И УГЛЫ

§ 1. Ось

Пусть дана прямая PQ (рис. 1). По этой прямой точка может двигаться по двум противоположным направлениям. Одно из этих направлений принимается за положительное, а другое за отрицательное. Безразлично, какое направление принять за положительное, но выбор мы должны сделать так, чтобы он был наиболее удобен. Прямая, на которой выбрано положительное направление, называется *осью*. Положительное направление на оси отмечается стрелкой.

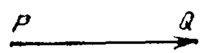


Рис. 1

§ 2. Вектор

а. Очень часто приходится иметь дело с направленными отрезками, у каждого из которых направление указывается стрелкой, поставленной у его конца. Отрезок, на котором дано направление, называется *вектором*.

Вектор обозначается обычно двумя буквами, сначала пишется буква, указывающая начало, а потом буква, указывающая конец вектора; например, на рис. 2 изображены вектор AB и вектор CD. Вместо того чтобы писать перед буквами слово «вектор», для краткости условились ставить над этими буквами черту сверху так, что, например, вместо «вектор AB» пишем $\overline{AB}$.

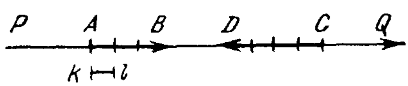


Рис. 2

b. Мы будем предполагать, что каждый вектор находится на оси, например, $\overline{AB}$ находится на оси PQ. Может случиться, что на одной оси находятся несколько векторов; они могут отличаться и *направлением*, и *величиной*. Для того чтобы их лучше различать, условились, что те векторы, у которых направление совпадает с направлением оси, имеют положительную величину, а те векторы, у которых направление противоположно направлению оси, имеют отрицательную величину.

Величину вектора мы будем обозначать так же, как и сам вектор, но без черты сверху; например, вместо: «величина $\overline{AB}$» пишем просто AB.

c. Если дана единица измерения, то величину мы можем выразить числом, например,

$$AB = +3, \quad CD = -4.$$

Если у вектора начало сделать концом, а конец началом, то он изменит свое направление на противоположное. Нетрудно понять, что его величина изменит знак, так что

$$BA = -AB.$$

Если у величины вектора отбросить знак, то мы получим просто *длину*.

Длину условились записывать так же, как величину, но слева и справа писать вертикальную черточку, например,

$$|AB| = 3, \quad |CD| = 4.$$

d. Понятие о векторе имеет большое значение как для математических, так и для технических наук.

В технических науках все время приходится говорить о силах. Известно, что силу нельзя выразить одним только числом, так как сила имеет еще и направление. Поэтому силу приходится изображать направленным отрезком, т. е. вектором. Точно так же скорость, ускорение, перемещение точки приходится изображать векторами.

§ 3. Направленные углы

a. Выше было сказано, что перемещение точки приходится изображать направленным отрезком, т. е. вектором. Подобно этому вращение оси приходится изображать направленным углом.

Пусть даны две пересекающиеся оси L и M. Для простоты обозначим каждую ось одной буквой (рис. 3). Одна из осей является началом вращения, она называется *началом угла*; другая является концом вращения, она называется *концом угла*.

Конец и начало угла называются его *сторонами*. На рис. 3 сторона L — начало, а M — конец. Углы будем измерять в радианах. Если угол получен вращением против часовой стрелки, то его величина считается положительной, в противном случае его величина считается отрицательной. Направление угла отмечается (как на рис. 3) стрелкой.

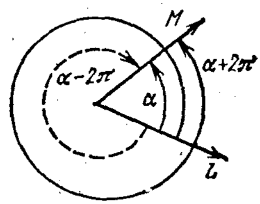


Рис. 3

Указанное расположение сторон может быть получено бесконечным числом вращений, а потому начало и конец дают не один угол, а бесконечное число положительных и отрицательных углов.

b. *Величина* любого *угла*, образуемого сторонами L и M, обозначается условно так:

$$(LM),$$

причем слева пишется начало, справа — конец.

Если обозначить через α величину наименьшего положительного угла между данными сторонами, то величина любого угла, образуемого теми же сторонами, может быть получена из формулы

$$(LM) = \alpha + 2\pi k,$$

где k — любое целое положительное или отрицательное число, в том числе и нуль, потому что оно обозначает число полных оборотов.

Действительно, при $k = 0$ получается сам угол

$$(LM) = \alpha.$$

Подставляя вместо k числа $1, 2, 3, \ldots$, получим все другие положительные углы. Если $k = -1$, мы получим наименьший по абсолютной величине отрицательный угол

$$(LM) = \alpha - 2\pi.$$

На рис. 3 этот угол отмечен пунктирной стрелкой. Подставляя вместо k числа $-1, -2, -3, \ldots$, получим все другие отрицательные углы.

c. Если начало угла сделать концом, а конец началом, то все углы изменят знаки на обратные:

$$(ML) = -\alpha - 2\pi k.$$

Положим $k = -k_1$, тогда

$$(ML) = -\alpha + 2\pi k_1.$$

Очевидно, k_1 может принимать также все целые значения — положительные, отрицательные и нуль.

d. Мы видели, что задание начала и конца угла не определяет угол однозначно (т. е. определяет не один, а много углов). Однако любая тригонометрическая функция определяется вполне однозначно, например,

$$\sin(LM) = \sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha.$$

Более того, чтобы вполне определить косинус, достаточно задать только стороны, не указывая даже, какая из них является началом и какая концом. Действительно,

$$\cos(LM) = \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha,$$
$$\cos(ML) = \cos(-\alpha + 2\pi k_1) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

так что

$$\cos(LM) = \cos(ML)\ ^{*}).$$

§ 4. Проекция вектора с оси на ось

a. *Проекцией точки A* на ось PQ (рис. 4) называется основание a перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную ось. Та ось, на которую мы проектируем, называется *осью проекций*.

b. Пусть даны две оси и вектор $\overline{AB}$, указанные на рис. 5. Вектор $\overline{ab}$, началом которого служит проекция

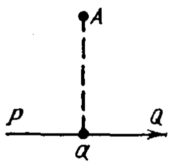


Рис. 4

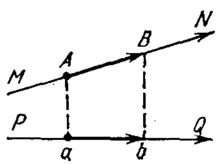


Рис. 5

начала и концом — проекция конца данного вектора, называется *проекцией вектора* $\overline{AB}$ на ось PQ. Записывается это так:

$$\overline{ab} = \text{пр}_{PQ}\,\overline{AB}.$$

Иногда указатель PQ внизу не пишется, это делается в тех случаях, когда кроме PQ нет другой оси, на которую можно было бы проектировать.

*) Разумеется, то же самое справедливо для секанса.

c. Теорема I. *Величины векторов, лежащих на одной оси, относятся как величины их проекций на любую ось.*

Пусть даны оси и векторы, указанные на рис. 6. Из подобия треугольников видно, что длины векторов относятся, как длины их проекций, т. е.

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|ab|}{|cd|}. \qquad (1)$$

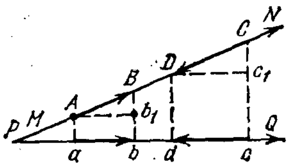


Рис. 6

Так как векторы на чертеже направлены в разные стороны, то величины их имеют различный знак, следовательно,

$$\frac{AB}{CD} = -\frac{|AB|}{|CD|}. \qquad (2)$$

Очевидно, величины проекций также имеют различный знак:

$$\frac{ab}{cd} = -\frac{|ab|}{|cd|}; \qquad (3)$$

подставляя (2) и (3) в (1), получим

$$-\frac{AB}{CD} = -\frac{ab}{cd}.$$

Меняя знаки на обратные, получим

$$\frac{AB}{CD} = \frac{ab}{cd}. \qquad (4)$$

Если векторы будут одинаково направлены, то будут одного направления и их проекции; в формулах (2) и (3) знаков минус не будет. Подставляя (2) и (3) в равенство (1), мы сразу получим равенство (4). Итак, теорема доказана для всех случаев.

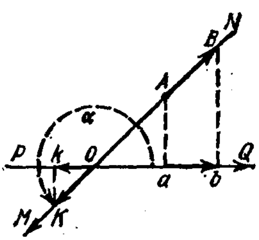


Рис. 7

d. Теорема II. *Величина проекции вектора на любую ось равна величине вектора, умноженной на косинус угла между осью проекций и осью вектора.*

Пусть даны оси и вектор $\overline{AB}$, как указано на рис. 7. Построим вектор $\overline{OK}$, одинаково направленный со своей осью и отложенный, например, от точки пересечения осей. Пусть длина его равна единице. Тогда и величина его

$$OK = +1. \qquad (1)$$

Очевидно, вектор $\overline{Ok}$ есть линия косинуса для угла α между осями, следовательно, его величина

$$Ok = \cos\alpha. \tag{2}$$

Применяя теорему 1, получим

$$\frac{ab}{Ok} = \frac{AB}{OK}. \tag{3}$$

Подставляя (1) и (2) в (3), получим

$$\frac{ab}{\cos\alpha} = \frac{AB}{+1}.$$

Отсюда

$$ab = AB\cos\alpha. \tag{4}$$

§ 5. Векторные цепи

a. Если несколько векторов расположены так, что конец каждого вектора служит началом следующего, то такую их совокупность будем называть *векторной цепью* (см., например, рис. 14).

Вектор, соединяющий начало первого звена цепи с концом последнего, называется *замыкающим вектором* для данной цепи. По характеру расположения векторов мы можем подразделить цепи на пространственные, плоские и прямолинейные. *Пространственной* мы будем называть такую цепь, у которой все звенья не могут уместиться в одной плоскости; если же все звенья цепи лежат в одной плоскости, то цепь будет *плоская*; наконец, если все звенья цепи лежат на одной прямой, то цепь будет *прямолинейной*. Сначала мы будем говорить о прямолинейных цепях, потом о плоских; пространственными цепями мы будем заниматься много позднее.

b. Теорема Шаля. *Алгебраическая сумма величин векторов прямолинейной цепи равна величине ее замыкающего вектора.*

Пусть имеется сначала цепь из двух векторов.

Могут представиться несколько случаев. Разберем сначала случаи, где точка b правее a.

Случай I. Даны векторы, указанные на рис. 8 (c правее b). Здесь очевидно, что

$$ab + bc = ac. \tag{1}$$

Случай II. Векторы расположены так, как на рис. 9 (c между a и b). Мы видим, что

$$ab = ac + cb.$$

Так как нам надо доказать (1), то переносим cb в левую часть с обратным знаком: $ab - cb = ac$, откуда ввиду $cb = -bc$ имеем опять $ab + bc = ac$.

Рис. 8

Рис. 9

Случай III. Векторы расположены, как на рис. 10 (c левее a). Мы видим, что $ca + ab = cb$, откуда $ab - cb = -ca$ или, ввиду $cb = -bc$ и $ca = -ac$, имеем

$$ab + bc = ac.$$

Остаются случаи, где b левее a, как на рис. 11—13.

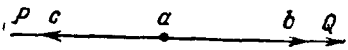


Рис. 10

Рис. 11

Рис. 12

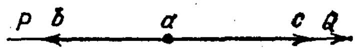


Рис. 13

Эти случаи рассматриваются аналогично первым трем, а потому разбор их в виде упражнения предоставляем самим учащимся.

Итак, всегда

$$ab + bc = ac.$$

Таким образом, для двух векторов теорема Шаля доказана.

Пусть теперь дана цепь, состоящая из любого числа векторов, например, ab, bc, cd, de, ef, . . ., kl *).

Сложим алгебраически их величины и будем постепенно применять теорему Шаля каждый раз для двух векторов:

$$\begin{aligned} ab + bc + cd + de + ef + \ldots + kl &= \\ = ac + cd + de + ef + \ldots + kl &= \\ = ad + de + ef + \ldots + kl &= \\ = ae + ef + \ldots + kl &= \\ = af + \ldots + kl &= \\ = ak + kl &= \\ &= al. \end{aligned}$$

*) Мы умышленно не приводим чертежа, так как вопрос ясен и без него.

Теперь теорема Шаля доказана для любого числа векторов.

c. Теорема о проекции векторной цепи на любую ось. Пусть имеется какая-нибудь цепь (рис. 14), все звенья которой лежат в одной плоскости. Здесь вектор $\overline{AL}$ является замыкающим. Спроектируем

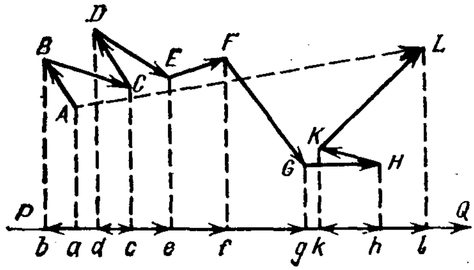


Рис. 14

цепь и ее замыкающий вектор на ось PQ. Нетрудно видеть, что на оси PQ получится прямолинейная векторная цепь.

На основании теоремы Шаля имеем

$$ab + bc + cd + de + ef + fg + gh + hk + kl = al.$$

Так как

$$ab = \text{пр}\,\overline{AB},\quad bc = \text{пр}\,\overline{BC}, \ldots,\quad kl = \text{пр}\,\overline{KL},\ al = \text{пр}\,\overline{AL},$$

то имеем

$$\text{пр}\,\overline{AB} + \text{пр}\,\overline{BC} + \text{пр}\,\overline{CD} + \text{пр}\,\overline{DE} + \text{пр}\,\overline{EF} +$$
$$+ \text{пр}\,\overline{FG} + \text{пр}\,\overline{GH} + \text{пр}\,\overline{HK} + \text{пр}\,\overline{KL} = \text{пр}\,\overline{AL},$$

т. е. алгебраическая сумма величин проекций звеньев векторной цепи на любую ось равна величине проекции замыкающего вектора на ту же ось.

d. Понятие о цепи векторов имеет большое значение для механики. Приведем примеры.

Представим себе, что точка делает несколько последовательных перемещений. Например, как указано на рис. 14, точка перемещается из положения A в положение B, затем из B в C и т. д., наконец, из положения K в положение L. Очевидно, окончательное перемещение точки будет изображаться вектором $\overline{AL}$; таким образом, замыкающий вектор заменяет собой всю цепь перемещений.

То же самое можно сказать, если звенья цепи изображают векторы, равные и параллельные силам, приложенным к одной точке A. Замыкающий вектор $\overline{AL}$ изображает тогда равнодействующую всех этих сил, действие которой заменяет действие всех этих сил.

е. Поэтому замыкающий вектор называется также *геометрической суммой векторной цепи.*

Записывается это так:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \ldots + \overline{KL} = \overline{AL}.$$

Нужно только помнить, что плюсы, стоящие в левой части, имеют другой смысл, чем в алгебре: они обозначают не алгебраическое, а геометрическое сложение. Только в том случае, когда все векторы лежат на одной прямой, геометрическая сумма переходит в алгебраическую.

§ 6. Цепи углов

Подобно тому как точка может совершать несколько последовательных перемещений, ось может совершать несколько последовательных вращений. Здесь мы приходим к понятию цепи углов. *Цепью углов* мы будем называть совокупность углов, расположенных так, что конец каждого угла совпадает с началом следующего.

Пусть, например, вокруг точки O ось совершает несколько вращений, которые изображены на рис. 15 углами

$$(AB),\ (BC),\ \ldots,\ (KL).$$

Очевидно, все эти вращения можно заменить одним вращением, изображаемым углом (AL).

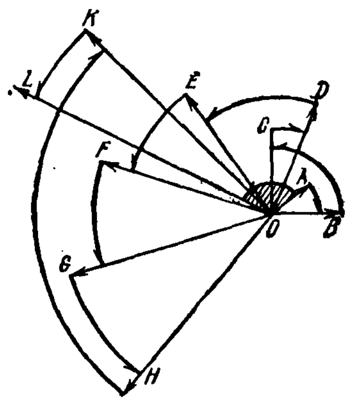


Рис. 15

Для цепи углов также можно доказать теорему Шаля. Метод доказательства тот же, что и для векторов:

$$(AB) + (BC) + (CD) + (DE) + (EF) + (FG) + \\ + (GH) + (HK) + (KL) = (AL),$$

т. е. *алгебраическая сумма величин углов, образующих цепь, равна величине угла, образуемого началом первого и концом последнего угла цепи.*

b. Как мы видим, направленные углы аналогичны векторам.

§ 7. Проекции вектора на две взаимно перпендикулярные оси

a. Пусть имеются две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy (рис. 16).

Пусть еще имеется вектор $\bar{P}$, лежащий на оси Ol. Обозначим через α наименьший положительный угол (xl) и через β тот угол (ly), который получается, если ось Ol сначала повернуть до оси Ox по часовой стрелке, а потом до оси ординат против часовой стрелки. Таким образом, всегда

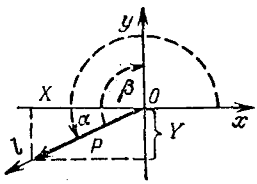


Рис. 16

$$\beta = -\alpha + 90°. \qquad (1)$$

Обозначим через X и Y проекции вектора $\bar{P}$ на оси. Тогда

$$X = P\cos\alpha, \qquad Y = P\cos\beta \qquad (2)$$

или, так как

$$\cos\beta = \cos(-\alpha + 90°) = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha,$$

то

$$X = P\cos\alpha, \qquad Y = P\sin\alpha. \qquad (3)$$

Формулы (3) можно представить также в виде

$$\sin\alpha = \frac{Y}{P}, \quad \cos\alpha = \frac{X}{P}, \qquad (4)$$

откуда, разделив первую формулу на вторую, можно еще найти

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Y}{X}. \qquad (5)$$

b. Если направление вектора $\bar{P}$ совпадает с направлением оси Ol (что мы и имеем на чертеже), то величина вектора равна его длине. Обозначая длину через r, получим

$$X = r\cos\alpha, \quad Y = r\sin\alpha$$

или в другом виде

$$\sin\alpha = \frac{Y}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{X}{r}.$$

c. Нетрудно также получить формулу для вычисления длины вектора. Если мы длины проекций вектора обозначим, как обычно, $|X|$ и $|Y|$, то по теореме Пифагора (рис. 16)

$$r = \sqrt{|X|^2 + |Y|^2}.$$

Так как при возведении в квадрат знак минус, если он имеется, исчезает, то

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

§ 8. Угол между двумя векторами. Условия параллельности и перпендикулярности

a. Пусть даны два вектора, указанные на рис. 17: $\bar{P}_1$ с проекциями X_1 и Y_1, лежащий на оси Ol_1, и $\bar{P}_2$ с проекциями X_2 и Y_2, лежащий на оси Ol_2. Для простоты предположим, что направления этих векторов совпадают с направлениями их осей.

Обозначим углы

$$(xl_1) = \alpha_1, \quad (xl_2) = \alpha_2, \quad (l_1l_2) = \varphi.$$

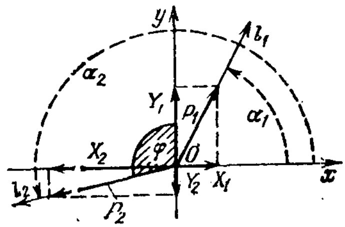


Рис. 17

Очевидно,

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1,$$

а потому

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin\alpha_2\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\sin\alpha_1, \\ \cos\varphi &= \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \cos\alpha_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_2\sin\alpha_1. \end{aligned} \tag{1}$$

В предыдущем параграфе было доказано, что

$$\sin\alpha_1 = \frac{Y_1}{r_1}, \quad \cos\alpha_1 = \frac{X_1}{r_1}, \quad \sin\alpha_2 = \frac{Y_2}{r_2}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{X_2}{r_2}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\sin\varphi = \frac{X_1Y_2 - X_2Y_1}{r_1r_2}, \quad \cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2}{r_1r_2}. \tag{3}$$

b. Умножая обе части каждого равенства (3) на $r_1 r_2$, получим еще

$$r_1 r_1 \sin \varphi = X_1 Y_2 - X_2 Y_1, \tag{4}$$

$$r_1 r_2 \cos \varphi = X_1 X_2 + Y_1 Y_2. \tag{5}$$

Обе эти формулы имеют большое применение в механике.

Выражение $r_1 r_2 \cos \varphi$ называется *скалярным произведением двух векторов.*

Если разделить первую из формул (3) на вторую, то получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_1 Y_2 - X_2 Y_1}{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}. \tag{6}$$

c. Формулы этого и предыдущего параграфа выведены в предположении, что векторы выходят из начала координат. Однако они будут верны при любом расположении векторов. Действительно, если какой-либо вектор перенести параллельно самому себе, то ни длина его, ни величины проекций не изменятся, не изменятся также и углы с осями, и следовательно, никакого изменения в формулах не произойдет.

Может случиться, что векторы параллельны. Тогда $\varphi = 0°$ или $\varphi = 180°$, откуда $\sin \varphi = 0$.

Формула (4) тогда превратится в

$$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 = 0. \tag{7}$$

Формула (7) называется *условием параллельности двух векторов*; она нам позволяет узнать, когда векторы параллельны. Очевидно, (7) можно представить так:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2}. \tag{8}$$

Однако так писать возможно лишь в том случае, если ни X_2, ни Y_2 не равны нулю, в противном случае формула (8) теряет всякий смысл, ибо на нуль делить нельзя.

Если же $X_2 = 0$, то тогда (7) превратится в

$$X_1 Y_2 = 0.$$

Мы знаем, что произведение может равняться нулю только в том случае, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю. Следовательно, либо $X_1 = 0$, либо $Y_2 = 0$. Если $Y_2 = 0$, то второй вектор превращается в точку, этот случай не представляет никакого интереса. Если же $X_1 = 0$, то формула (7) превращается в

$$0 = 0.$$

Но в этом случае нам не нужна никакая формула, чтобы узнать, параллельны ли векторы.

Действительно, если одновременно $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, то оба вектора перпендикулярны оси Ox и, следовательно, параллельны между собой.

Теперь рассмотрим перпендикулярность векторов. Тогда $\varphi = 90^\circ$ или $\varphi = 270^\circ$, откуда $\cos\varphi = 0$.

Равенство (5) принимает вид

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 = 0.$$

Формула (9) является *условием перпендикулярности двух векторов.*

§ 9. Упражнения и контрольные вопросы

1a. Что такое ось?

1b. Дана прямая MN

Как отметить, что за положительное выбрано направление справа налево?

2a. Что такое вектор?

2b. Какая разница между длиной вектора и его величиной?

2c. Как обозначается длина и как обозначается величина вектора?

3a. Имеется ось MN и на ней несколько векторов (рис. 18). Какие из этих векторов имеют положительные величины и какие отрицательные?

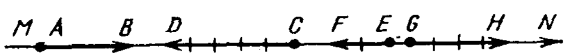


Рис. 18

3b. Какая длина и какая величина у тех векторов, которые изображены на рис. 18, если за единицу принят сантиметр?

4a. Какие величины в природе изображаются векторами?

4b. Можно ли сказать, что объем — векторная величина?

4c. Является ли работа векторной величиной?

4d. Является ли вес величиной векторной; если да, то куда эта величина направлена?

5a. При получении какого рода движения возникло понятие о направленном угле?

5b. Что называется началом угла и что концом?

5c. Какие углы считаются положительными и какие отрицательными?

6a. Определяется ли угол вполне своим началом и концом? Если нет, то почему? *Ответ*: нет.

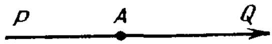
6b. Если наименьший положительный острый угол, определяемый двумя сторонами угла, равен $\pi/4$, то как записать общий вид всех других углов, определяющихся теми же сторонами?

7a. Определяются ли тригонометрические функции, если заданы стороны угла с указанием, какая сторона является началом и какая концом, но не указано направление угла? Если да, то почему?

7b. Какая тригонометрическая функция вполне определена, если заданы только стороны угла без указания, какая сторона является началом и какая концом?

8a. Что называется проекцией точки на ось?

8b. Даны ось PQ и на ней точка A



Найдите проекцию точки A на ось PQ.

9a. Что называется проекцией вектора на ось?

9b. Даны ось PQ и вектор $\overline{AB}$ (рис. 19). Какой вектор является проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось PQ?

9c. Даны ось PQ и вектор $\overline{CD}$ на ней (см. рис. 19). Какой вектор является проекцией вектора $\overline{CD}$ на ось PQ?

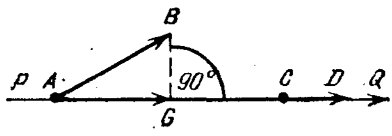


Рис. 19

10a. Даны ось PQ и несколько векторов (рис. 20). У каких векторов величины проекций положительны и у каких отрицательны?

10b. Какую величину имеет проекция вектора на ось, если сам вектор перпендикулярен этой оси?

11a. Может ли случиться, что длина проекции вектора на некоторую ось больше длины самого вектора?

11b. Может ли случиться, что длина проекции вектора на некоторую ось равна длине самого вектора?

12. Вычислите величину проекции вектора на ось x_1x, если его величина $AB = -6$ и угол между осью L_1L

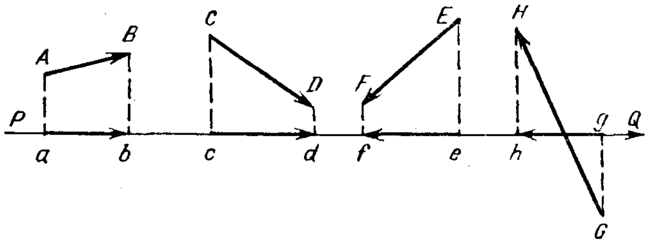


Рис. 20

вектора и осью x_1x проекций равен $4\pi/3$ (рис. 21). *Ответ*: $ab = 3$.

13a. Что называется векторной цепью?

13b. Какие бывают векторные цепи?

14a. В чем состоит теорема Шаля?

14b. Ртуть в термометре поднялась от 0° до 15°, затем поднялась на 20°, далее она спустилась на 39°, наконец поднялась еще на 17°. Можно ли сказать, что совокупность всех перемещений ртути образует векторную цепь? На какой высоте будет находиться уровень ртути после всех этих перемещений? *Ответ*: да; 13°.

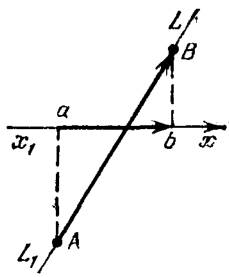


Рис. 21

14c. Паровоз маневрирует. Выходя от станции, он прошел вправо 5/2 км, затем сделал влево 4 км, потом влево 1/2 км, далее вправо 2 км, наконец вправо 1 км. Если перемещение вправо считать положительным, а влево отрицательным, то каково окончательное перемещение относительно станции? *Ответ*: 1 км.

15a. Стрелка гальванометра отклонилась от нуля на 41° против часовой стрелки, потом на 22° по часовой стрелке, затем на 13° по часовой стрелке, наконец отклонилась на 14° против часовой стрелки. Является ли совокупность всех этих поворотов цепью углов? Какой угол составляет окончательное положение стрелки с начальным? *Ответ*: да; 20°.

15b. На левую чашку весов брошен груз (рис. 22). Стрелка весов от удара отклонилась против часовой стрелки от нулевого положения на 16°, затем весы начали колебаться. После первого отклонения последовало отклонение по часовой стрелке на 1/3 от 16°, далее на 1/9 от 16° против часовой стрелки, потом на 1/27 от 16° по часовой стрелке и т. д. Теоретически говоря, эти затухающие колебания будут продолжаться вечно, но стрелка будет стремиться к некоторому предельному положению. Какой угол с начальным положением составляет это предельное положение? *Ответ*: 12°.

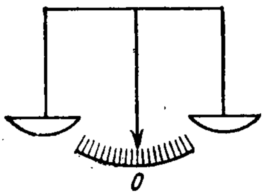


Рис. 22

16a. Что такое замыкающий вектор?

16b. Какое значение имеет для механики понятие о замыкающем векторе?

17a. Векторная цепь состоит из двух векторов, длина каждого из которых равна a. Эти векторы наклонены друг к другу под углом 60° (рис. 23). Постройте замыкающий вектор. Какова его длина? *Ответ*: a.

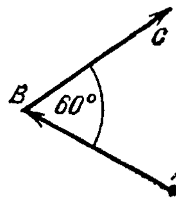


Рис. 23

17b. Векторная цепь состоит из пяти векторов, равных a, причем каждый из них наклонен к следующему под углом 120°. Цепь расположена так, как указано на рис. 24. Какова длина замыкающего вектора? *Ответ*: a.

18a. Вычислить длину проекции замыкающего вектора на ось x_1x цепи:

1. Вектор равен a и наклонен к оси под углом 45°.
2. Вектор равен $2a$ и наклонен к оси под углом 315°.
3. Вектор равен $3a$ и наклонен к оси под углом 0°.
4. Вектор равен $\sqrt{3}a$ и наклонен к оси под углом 90°.
5. Вектор равен a и наклонен к оси под углом 135°.
6. Вектор равен $2a$ и наклонен к оси под углом 225°.

Ответ: $3a$.

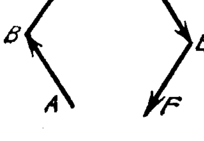


Рис. 24

Указание. Когда не упоминается ось вектора, нужно считать, что его ось имеет то же направление, что и сам вектор.

18b. Вычислить длину проекции замыкающего вектора на ось цепи:

1. Вектор равен a, его наклон к оси x_1x равен 60°.
2. Вектор равен a, его наклон к оси x_1x равен 300°.
3. Вектор равен $6a$, его наклон к оси x_1x равен 30°.
4. Вектор равен $6a$, его наклон к оси x_1x равен 150°.
5. Вектор равен a, его наклон к оси x_1x равен 180°.

Ответ: 0.

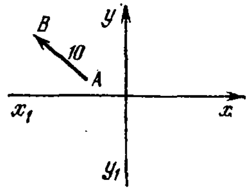


Рис. 25

18c. Объяснить, почему в предыдущей задаче получилось, что сумма проекций всех векторов цепи на ось x_1x оказалась равной нулю.

19a. Замкнутой векторной цепью называется такая цепь, где конец последнего вектора совпадает с началом первого. Чему равен замыкающий вектор такой цепи?

19b. Чему равна сумма проекций векторов замкнутой цепи на любую ось?

20a. Даны две взаимно перпендикулярные оси x_1x и y_1y, расположенные, как указано на рис. 25. Вектор имеет длину $r = 10$ и наклонен к оси x_1x под углом 135°. Вычислить его проекции на оси. *Ответ*: $X = -5\sqrt{2}$, $Y = 5\sqrt{2}$.

20b. Длина вектора $r = 18$, а наклон его к оси x_1x равен 240°. Вычислить его проекции на оси x_1x и y_1y. *Ответ*: $X = -9$, $Y = -9\sqrt{3}$.

21a. Вычислить длину вектора и его наклон к осям, если его проекции $X = 3$, $Y = -4$. *Ответ*: $r = 5$, $\cos\alpha = 3/5$, $\sin\alpha = -4/5$.

21b. Вычислить длину вектора и наклон к осям, если его проекции $X = -2$, $Y = -2$. *Ответ*: $r = 2\sqrt{2}$, $\cos\alpha = -\sqrt{2}/2$, $\sin\alpha = -\sqrt{2}/2$, $\alpha = 225°$.

22a. Даны два вектора своими проекциями на две взаимно перпендикулярные оси:

проекции первого вектора $X_1 = \sqrt{3}$, $Y_1 = 1$;

проекции второго вектора $X_2 = 0$, $Y_2 = 11$.

Вычислить косинус угла между этими векторами. *Ответ*: $\cos\varphi = 1/2$, $\varphi = 60°$.

22b. То же, что и в задаче 22a, но векторы имеют проекции $X_1 = -6$, $Y_1 = -8$; $X_2 = 3$, $Y_2 = 4$. *Ответ*: $\cos\varphi = -1$, $\varphi = 180°$.

23a. Если вектор r_1 выражает силу, а вектор r_2 — ее перемещение, то доказать, что произведение этих векторов выражает работу.

23b. Вычислить работу силы, проекции которой на оси $X_1 = 5$, $Y_1 = 7$, если эта сила сделала перемещение, проекции которого $X_2 = 1$, $Y_2 = 5$. *Ответ*: работа равна 40.

24. Даны два вектора, проекции на оси у первого равны A_1, B_1 и проекции на оси у второго равны A_2, B_2. Вычислить тангенс угла между этими векторами. *Ответ*:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

25a. Будут ли векторы параллельны, если их проекции на оси

$$X_1 = -1, \quad Y_1 = 5; \qquad X_2 = 0{,}125, \quad Y_2 = -0{,}625?$$

Ответ: да.

25b. Будут ли векторы перпендикулярны, если их проекции

$$X_1 = A, \quad Y_1 = B; \qquad X_2 = -B, \quad Y_2 = A?$$

Ответ: да.

26a. Дан вектор с проекциями $X_1 = 4$, $Y_1 = -2$ и дана только одна проекция второго вектора $X_2 = 8$. Найти вторую проекцию, если известно, что векторы параллельны. *Ответ*: $Y_2 = -4$.

26b. То же, если векторы перпендикулярны. *Ответ*: $Y_2 = 16$.

Глава 2

КООРДИНАТЫ

§ 1. Метод координат

Одни́м из самых важных вопросов математики является определение положения точки. Это можно сделать многими способами.

На плоскости положение точки удобнее всего определять относительно двух взаимно перпендикулярных осей.

Оси должны быть заранее заданы и носят название *координатных осей*; одна из них называется *осью абсцисс* или осью иксов, другая *осью ординат* или осью игреков, точка их пересечения называется *началом координат*. Начало координат обозначается обычно буквой O, ось абсцисс обозначается Ox, ось ординат Oy. Координатные оси делят всю плоскость на четыре угла, которые называются *координатными углами* и которые мы будем нумеровать в порядке, указанном на рис. 26.

Рис. 26

Положение любой точки вполне определяется, если мы соединим начало координат с этой точкой и найдем величины проекций полученного вектора на оси. Построенный таким способом вектор имеет направление от начала координат к точке и носит название *радиус-вектора* данной точки, величина его проекции на ось абсцисс называется *абсциссой точки*, величина его проекции на ось ординат называется *ординатой точки*.

Заметим, что вообще числа, определяющие положение точки, называются *координатами* этой *точки*.

Абсцисса и ордината являются именно такими числами; поэтому их называют *координатами точки* на пло-

скости, причем добавляют слово *прямоугольные* *), так как координатные оси перпендикулярны.

Абсциссу мы будем обозначать буквой x, ординату — буквой y.

Мы знаем, что знак величины проекции вектора на какую-либо ось будет положителен, когда ее направление совпадает с направлением этой оси; в противном случае знак будет отрицателен.

Рассматривая чертеж, можно убедиться, что в различных координатных углах знаки координат точек будут такие:

Координаты / Углы	x	y
I	+	+
II	—	+
III	—	—
IV	+	—

Условились, обозначая точку, писать рядом в скобках ее координаты, причем на первом месте пишется абсцисса, а на втором — ордината. Например, для точек M_1, M_2, M_3, M_4, лежащих в различных углах (см. рис. 26), мы будем иметь обозначения

$$M_1\ (3;\ 2),\quad M_2\ (-3;\ 2),\quad M_3\ (-3;\ -2),\quad M_4\ (3;\ -2).$$

Очевидно, если точка лежит на оси абсцисс, то ее ордината равна нулю; если же она лежит на оси ординат, ее абсцисса равна нулю. Например, координаты точек A, B, C, D (см. рис. 26) таковы:

$$A\ (3;\ 0),\quad B\ (-3,\ 0),\quad C\ (0;\ 2),\quad D\ (0;\ -2).$$

Для начала координат имеем обозначение

$$O\ (0;\ 0).$$

Произвольную точку плоскости обозначают так:

$$M\ (x;\ y).$$

---

*) Часто вместо названия «прямоугольные координаты» употребляют название «декартовы координаты» в честь знаменитого французского математика и философа Декарта, который ввел их в математику.

Очевидно, каждой точке плоскости соответствует пара чисел — ее координат — и, обратно, каждой произвольной паре чисел соответствует точка плоскости. С помощью координат мы производим учет всех точек плоскости. Такой учет имеет огромное значение: он позволяет соединить в одно единое целое геометрию и анализ. Анализ изучает свойства чисел и взаимоотношения между ними, к нему относятся, между прочим, арифметика и алгебра; геометрия изучает свойства фигур, которые все зависят от положения частей фигуры. Поэтому учет положения точек с помощью чисел даст возможность использовать в геометрии методы алгебраического анализа. При этом мы, с одной стороны, получаем возможность алгебраически решать чрезвычайно трудные геометрические задачи, с другой стороны, геометрически пояснять теоремы анализа, которые приобретают от этого необычайную наглядность.

Каждое понятие, каждая теорема могут быть высказаны как бы на двух языках — на геометрическом и аналитическом. Например, на языке анализа задать точку означает задать ее координаты, найти точку — значит найти ее координаты.

Решение геометрических задач с помощью анализа и составляет сущность метода координат, к изучению которого мы теперь и приступаем.

§ 2. Основные задачи, решаемые методом координат

а. Задача первая. *Вычисление проекций вектора по координатам его начала и конца.*

Пусть имеется вектор $\overline{M_1M_2}$, изображенный на рис. 27, причем его проекции на оси будут

$$X = m_1m_2, \qquad Y = n_1n_2.$$

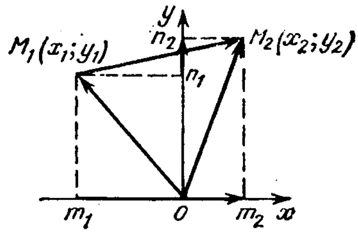


Рис. 27

Согласно определению $\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2}$ — радиус-векторы начала и конца данного вектора, и их проекциями на оси будут координаты точек M_1 и M_2.

Ломаная линия OM_1M_2 есть цепь двух векторов $\overline{OM_1}$ и $\overline{M_1M_2}$, причем вектор $\overline{OM_2}$ замыкает цепь. Проектируя эту цепь на ось абсцисс и на ось ординат, найдем

$$\text{пр}_x\overline{OM}_1 + \text{пр}_x\overline{M_1M}_2 = \text{пр}_x\overline{OM}_2,$$
$$\text{пр}_y\overline{OM}_1 + \text{пр}_y\overline{M_1M}_2 = \text{пр}_y\overline{OM}_2.$$

Отсюда имеем $x_1 + X = x_2$ и $y_1 + Y = y_2$. Перенося x и y_1 в правые части, найдем

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1.$$

Таким образом, проекция вектора на ось абсцисс равна абсциссе конца минус абсцисса начала, а проекция на ось ординат равна ординате конца минус ордината начала.

Например, если имеется вектор с началом в точке M_1 $(-5; 6)$ и концом в точке M_2 $(2; 8)$, то получим

$$X = 2 - (-5) = 2 + 5 = 7, \quad Y = 8 - 6 = 2.$$

b. Задача вторая. *Вычисление длины вектора по координатам его начала и конца.*

Пусть требуется вычислить длину вектора $\overline{M_1M_2}$ (рис. 27), если даны точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Для вычисления длины вектора по его проекциям X и Y мы уже раньше имели формулу

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Для вычисления проекций мы также получили формулы, поэтому, заменяя X через $x_2 - x_1$ и Y через $y_2 - y_1$, найдем

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Это равенство служит для вычисления длины вектора непосредственно по координатам начала и конца; его называют также *формулой расстояния между двумя точками.*

Пусть, например, нужно найти расстояние между точками M_1 $(2; 6)$ и M_2 $(-1; 2)$, тогда получим

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{[2-(-1)]^2 + (6-2)^2} =$$
$$= \sqrt{(2+1)^2 + 4^2} = 5.$$

c. Задача третья. *Деление отрезка в данном отношении.*

Пусть дан вектор $\overline{M_1M_2}$ с началом в точке M_1 $(x_1; y_1)$ и концом в точке M_2 $(x_2; y_2)$ (рис. 28).

Разделить отрезок в данном отношении — это значит найти на нем такую точку M, которая делила бы его на две части M_1M и MM_2, пропорциональные заранее заданным числам. Например, если нужно разделить отрезок в отношении $2:3$, то M_1N должно быть меньше MM_2 во столько раз, во сколько 2 меньше 3.

Будем решать задачу в общем виде. Пусть требуется деление произвести в отношении $l_1 : l_2$.

Обозначим искомую точку M $(x;\ y)$. По условию должно быть

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{l_1}{l_2}. \qquad (1)$$

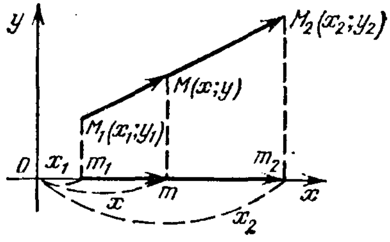


Рис. 28

Раньше было доказано, что величины проекций векторов, лежащих на одной оси, относятся, как величины самих векторов, т. е. $\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{m_1m}{mm_2}$, поэтому

$$\frac{m_1m}{mm_2} = \frac{l_1}{l_2}. \qquad (2)$$

Далее, нам известно из задачи первой, что $m_1m = x - x_1$ и $mm_2 = x_2 - x$, откуда имеем

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{l_1}{l_2}. \qquad (3)$$

Выше было сказано, что задать точку значит задать ее координаты; найти точку значит найти ее координаты. Так как точки M_1 и M_2 даны, а точку M мы ищем, то в уравнении (3) известно все, кроме x. Решая это уравнение относительно x, найдем

$$xl_2 - x_1l_2 = x_2l_1 - xl_1,$$
$$xl_2 + xl_1 = x_1l_2 + x_2l_1,$$
$$x(l_2 + l_1) = x_1l_2 + x_2l_1,$$
$$x = \frac{x_1l_2 + x_2l_1}{l_2 + l_1}. \qquad (4)$$

Так же найдем, что

$$y = \frac{y_1l_2 + y_2l_1}{l_2 + l_1}. \qquad (5)$$

В частности, если точка M делит вектор на две равные части, то $l_1 = l_2$, и тогда, заменяя l_2 в формулах (4) и (5) через l_1, вынесем l_1 за скобку и сократим на него.

Получим

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \tag{6}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{7}$$

Итак, абсцисса середины вектора равна полусумме абсцисс его начала и конца, а ордината середины вектора равна полусумме ординат его начала и конца.

Пример 1. Имеется вектор, у которого начало в точке M (—1; —3) и конец в точке M_2 (7; 13). Требуется разделить его в отношении 3 : 5.

Решение:

$$x = \frac{(-1)\cdot 5 + 7\cdot 3}{5+3} = 2; \qquad y = \frac{(-3)\cdot 5 + 13\cdot 3}{5+3} = 3.$$

Пример 2. Найти середину того же вектора.

Решение:

$$x = \frac{(-1)+7}{2} = 3; \qquad y = \frac{(-3)+13}{2} = 5.$$

d. Задача четвертая. *Вычисление площади треугольника по координатам его вершин.*

Пусть дан треугольник $M_0M_1M_2$, изображенный на рис. 29. Любопытно, что решение этой задачи зависит от того порядка, в котором расположены возрастающие номера вершин. Для определенности разместим возрастающие номера, обходя периметр треугольника против часовой стрелки, как это и показано на рис. 29.

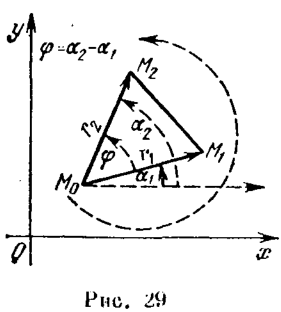


Рис. 29

Пусть координаты вершин будут

M_0 (x_0; y_0), M_1 (x_1; y_1), M_2 (x_2; y_2).

Стороны треугольника M_0M_1 и M_0M_2 можно рассматривать как векторы, имеющие начало в точке M_0.

Обозначим длины этих векторов и проекции их на координатные оси соответственно через r_1, X_1, Y_1; r_2, X_2, Y_2, а их углы с осью абсцисс через α_1 и α_2. Если обозначить через φ угол между этими векторами, то

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1. \tag{1}$$

Раньше мы доказали такую формулу:

$$r_1 r_2 \sin\varphi = X_1Y_2 - X_2Y_1. \tag{2}$$

Умножим обе части этого равенства на 1/2, тогда получим

$$\frac{1}{2} r_1 r_2 \sin\varphi = \frac{1}{2}(X_1Y_2 - X_2Y_1). \tag{3}$$

Из тригонометрии известно, что площадь S треугольника равна половине произведения длин двух его сторон, умноженного на синус угла между этими сторонами.

Рассматривая левую часть равенства (3), видим, что она равна площади треугольника, если только φ — число положительное. Очевидно, угол φ положителен, если α_2 больше α_1. Поэтому вместо левой части равенства (3) можно написать S. Если мы выберем другой порядок нумерации, размещая возрастающие номера вершин при обходе периметра по часовой стрелке, как на рис. 30, то угол α_2 будет меньше, чем угол α_1. Поэтому угол φ будет отрицателен и левая часть уравнения (3) будет равна площади треугольника S, взятой со знаком минус. Вместо левой части этого равенства мы должны будем написать $-S$.

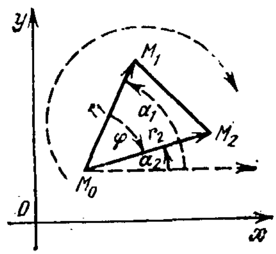


Рис. 30

Оба случая мы можем объединить в одной формуле:

$$\pm S = \frac{1}{2}(X_1Y_2 - X_2Y_1). \tag{4}$$

Необходимо помнить, что в левой части, а следовательно, и в правой части этого равенства знак плюс появляется, если, обходя вершины в порядке возрастающих номеров, мы движемся против часовой стрелки, в противном случае появляется знак минус.

Мы знаем, что

$$X_1 = x_1 - x_0,\ Y_1 = y_1 - y_0;\ X_2 = x_2 - x_0,\ Y_2 = y_2 - y_0. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), окончательно получим

$$\pm S = \frac{1}{2}[(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)]. \tag{6}$$

В частности, если вершина M находится в начале координат, то $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$ и мы имеем

$$\pm S = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1). \tag{7}$$

Пример. Вычислить площадь треугольника с вершинами M_0 (—3; 2), M_1 (5; 6), M_2 (7; —10).

Решение: $\pm S = \frac{1}{2}[(5-(-3))\cdot(-10-2)-$

$$-(7-(-3))\cdot(6-2)] = \frac{1}{2}[8\cdot(-12)-10\cdot 4] = -68.$$

В правой части мы получили знак минус, а потому и в левой части необходимо взять минус. Следовательно, если мы будем переходить от M_0 к M_1 и от M_1 к M_2, то мы будем двигаться по часовой стрелке, в чем можно убедиться непосредственно, построив эти точки. *Ответ*: $S = 68$.

§ 3. Упражнения

1. Построить на миллиметровой бумаге точки с координатами:

M_1 (1; 2), M_2 (0; 6), M_3 (—6; 0), M_4 (—1; —1,5), M_5 (4; 0), M_6 (—7; 0), M_7 (—3; 9), M_8 (2; —8).

2a. Вычислить проекции вектора, если координаты его начала M_1 (—1; —2), а координаты конца M_2 (6; 7). *Ответ*: $X = 7$, $Y = 9$.

2b. Вычислить проекции вектора, если координаты его начала M_1 (—6; —7), а конца M_2 (0; 1). *Ответ*: $X = 6$, $Y = 8$.

3a. Заданы проекции вектора $X = 3$, $Y = 2$ и координаты его начала M (1; —1). Вычислить координаты конца. *Ответ*: M_2 (4; 1).

3b. Заданы проекции вектора: $X = -7$, $Y = -2$ и координаты конца M_2 (2; —3). Вычислить координаты начала. *Ответ*: M_1 (9; —1).

4a. Даны вершины треугольника (—22; 12), (34; 45), (—2; —3). Вычислить периметр. *Ответ*: 150.

4b. Вычислить периметр треугольника с вершинами M_1 (0; 0), M_2 (42; 56), M_3 (—21; 72). *Ответ*: 210.

4c. То же, если вершины имеют координаты M_1 (2; 3), M_2 (65; 87), M_3 (—12; 51). *Ответ*: 240.

4d. То же, если вершины имеют координаты M_1 (—3; —5), M_2 (69; 25), M_3 (13; 58). *Ответ*: 208.

5a. На оси абсцисс найти точку, равноудаленную от точек M_1 (2; 8), M_2 (7; 7). *Ответ*: (3; 0).

5b. На оси ординат найти такую точку, чтобы ее расстояние до точки M_1 (2; 12) было в пять раз больше, чем расстояние до точки M_2 (1; 3). *Ответ*: две точки (0; 1), (0; 17/4).

6a. Найти в первом координатном угле точку такую, чтобы ее расстояния от осей координат и от точки (8; 9) были равны между собой. *Ответ*: две точки (5; 5), (29; 29).

6b. Найти точку, равноотстоящую от трех точек (—7; 4), (1; —8), (11; 16). *Ответ*: (6; 4).

7a. На оси абсцисс найти точку M так, чтобы угол M_1MM_2, где M_1 (1; 2), M_2 (6; 3), был прямой. *Ответ*: (4; 0), (3; 0).

7b. Найти центр C и радиус r круга, описанного вокруг треугольника с вершинами M_1 (3; 9), M_2 (4; 2), M_3 (10; 10). *Ответ*: C (7; 6), $r = 5$.

8a. По координатам вершин треугольника (0; 2), (—4; 6), (8; 0) найти координаты середин его сторон. *Ответ*: (—2; 4), (4; 1), (2; 3).

8b. По координатам середин сторон треугольника (4; 3), (5; 4), (7; 3) найти координаты его вершин. *Ответ*: (2; 4), (6; 2), (8; 4).

8c. По координатам середин сторон треугольника (4; 2), (3; 3), (2; 1) вычислить координаты его вершин. *Ответ*: (1; 2), (3; 0), (5; 4).

9a. Найти точку, делящую отрезок M_1M_2, где M_1 (—1; —2), M_2 (9; 3), в отношении 3 : 2. *Ответ*: (5; 1).

9b. Найти точку, делящую отрезок M_1M_2, где M_1 (1; 1) и M_2 (10; 7), в отношении 1 : 2. *Ответ*: (4; 3).

10a. Из механики известно, что центр масс однородного треугольника находится в точке пересечения медиан и делит каждую медиану в отношении 2 : 1 в направлении от вершины к основанию. Зная это, показать, что координаты центра масс треугольника с вершинами M_1 $(x_1; y_1)$, M_2 $(x_2; y_2)$, M_3 $(x_3; y_3)$ суть

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

10b. Найти координаты центра масс треугольника с вершинами M_1 (2; 3), M_2 (1; 4), M_3 (3; —4). *Ответ*: (2; 1).

10c. Найти координаты середин сторон треугольника и его центр масс, если вершины треугольника суть M_1 (3; 2), M_2 (7; 3), M_3 (8; 4). *Ответ*: (15/2; 7/2), (11/2; 3), (5; 5/2); центр масс в точке (6; 3).

11. Считая известным, что центр масс двух материальных точек с массами m_1 и m_2 находится на отрезке, их соединяющем, и делит этот отрезок на части, обратно

пропорциональные массам, доказать, что центр масс n материальных точек $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_n; y_n)$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ имеет координаты

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

$$y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

12. Даны координаты (3; 1) и (9; 9) концов диаметра некоторого круга. Найти центр C и радиус r. *Ответ:* C (6; 5), $r = 5$.

13a. Точка M_1 (1; 3) есть начало отрезка, точка M (12; —14) — его середина. Найти конец M_2 этого отрезка. *Ответ:* M_2 (23; —31).

13b. Задана точка M_1 (0; 1). Найти координаты точки M_2, если известно, что точка M (4; 7) делит отрезок M_1M_2 в отношении 2 : 1. *Ответ:* M_2 (6; 10).

13c. По трем вершинам параллелограмма M_1 (0; 1), M_2 (2; 2), M_3 (3; 4) найти четвертую, если известно, что она противоположна M_2. *Ответ:* M_4 (1; 3).

14a. Дан центр масс (2; 2) треугольника и две его вершины (2; 3) и (3; 1). Найти третью вершину. *Ответ:* (1; 2).

14b. Точка (4; 5) есть середина отрезка, а точка (3; 3) делит его в отношении 1 : 3. Найти координаты концов. *Ответ:* (2; 1) и (6; 9).

15a. Вычислить площадь S треугольника с вершинами (—19; 17), (37; 50), (1; 2). *Ответ:* $S = 750$.

15b. Найти площадь треугольника с вершинами M_1 (0; 0), M_2 (1; 4), M_3 (3; 2). *Ответ:* 5.

16. Узнать, лежат ли точки (1; —1), (3; 2), (7; 8) на одной прямой, или нет. *Ответ:* лежат.

17. Дан треугольник с вершинами M_1 (2; 1), M_2 (6; 4), M_3 (3; 3). Вычислить высоту, опущенную из вершины M_3 на сторону M_1M_2. *Ответ:* высота равна 1.

18a. Внутри треугольника с вершинами (2; 1), (4; 2), (3; 3) найти точку такую, чтобы прямые, соединяющие ее с вершинами, делили площадь на три равные части. Решите задачу, пользуясь полученной формулой для площади. Проверить решение, замечая, что искомая точка есть центр масс.

18b. Внутри треугольника с вершинами M_1 (0; 0), M_2 (4; 1), M_3 (1; 3) найти такую точку M, чтобы имело место соотношение

$$(\text{пл. } \triangle M_1M_2M) : (\text{пл. } \triangle M_2M_3M) : (\text{пл. } \triangle M_3M_1M) = 2 : 4 : 5.$$

Ответ: M (2; 1).

19a. В треугольнике с вершинами (0; 0), (63; 84), (—14; 48) найти радиус вписанного круга. *Ответ*: $r = 17{,}5$.

19b. В треугольнике с вершинами (0; 0), (21; 0), (6; 8) найти координаты центра вписанного круга. *Ответ*: (7; 3,5).

19c. Дан треугольник с вершинами (0; 0), (3; 0), (3; 4). Найти центр C и радиус r вписанного круга. *Ответ*: C (2; 1), $r = 1$.

Глава 3

ФУНКЦИИ

§ 1. *Переменные и постоянные*

а. Все величины можно подразделить на переменные и постоянные.

Примером постоянной величины может служить, например, сумма углов любого треугольника; она всегда, как известно, равна 180°. Еще пример: в любой окружности отношение ее длины к длине диаметра есть величина постоянная.

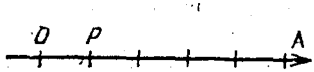
Примером переменной величины может служить время, скорость свободно падающего тела, высота растущего дерева и т. д.

b. Постоянная величина будет задана, если дано число, ее измеряющее. Для того чтобы задать переменную величину, нужно указать, как она изменяется.

c. Обычно величины, как известно, обозначаются буквами. Всегда необходимо указывать, какую величину — переменную или постоянную — обозначает та или иная буква. Чаще всего, хотя и не всегда, постоянные величины обозначаются первыми буквами латинского алфавита, а переменные величины последними.

d. Всякую величину можно изобразить графически на оси вектором, отсчитываемым от какой-либо неподвижной данной точки.

Например, если OP — единица длины, то число 11/2 изобразится вектором $\overline{OA}$:



Если величина постоянна, то вектор, ее изображающий, не будет изменяться; если же величина переменна, то и вектор, ее изображающий, будет также изменять свою длину.

§ 2. Понятие о функциональной зависимости

a. При рассмотрении количественной стороны различных процессов мы почти всегда наблюдаем, что переменные величины зависят друг от друга; например, путь, проходимый свободно падающим в пустоте телом, зависит только от времени, давление в паровом котле зависит только от температуры пара.

Глубина океана в одном пункте постоянна, но в различных пунктах различна, она зависит только от двух переменных — от географической долготы и географической широты места.

Высота растущего дерева зависит от многих переменных — от солнечного освещения, от влажности, от количества питательных веществ в почве и т. д.

Мы видим, что некоторые переменные изменяются независимо, они и называются *независимыми переменными* или *аргументами*, другие же от них зависят, их называют *функциями*.

Сама зависимость называется *функциональной*. Между прочим, функциональная зависимость представляет собой одно из самых важных понятий математики.

b. Следует всегда различать, от какого числа независимых переменных зависит функция. Проще всего поддаются изучению функции одной переменной, ими мы будем заниматься в первую очередь. Изучение функций многих переменных сложнее, но так или иначе сводится к изучению функций одной переменной.

c. Если мы желаем записать математически, что переменная y зависит от x, то будем употреблять такое обозначение:

$$y = f(x). \qquad (1)$$

Эта запись читается так:

«игрек есть функция от икс». (2)

Не следует думать, что буква f умножается на x, она является лишь сокращением слова «функция», а вся запись является сокращенной фразой (2).

Точно так же, если функция U зависит от двух аргументов x и y, то эта зависимость обозначается следующим образом:

$$U = f(x, y). \qquad (3)$$

Здесь буквы f, x и y также не являются сомножителями.

Совершенно ясно, как обозначается функция трех, четырех и большего числа аргументов.

Вместо буквы f употребляют и другие буквы, чаще всего F, φ, ψ, Φ.

d. Записи типа (1) и (3) являются самыми общими обозначениями функций, так как под ними можно понимать какие угодно функции, а потому, имея в руках только эти обозначения, мы ничего не сможем узнать о свойствах этих функций.

Для того чтобы иметь возможность изучать функцию, нужно ее задать.

e. Имеется много способов задать функцию, но все они сводятся к трем основным типам:

1) функцию можно задать таблицей ее числовых значений, соответствующих числовым значениям ее аргумента;

2) функцию можно задать графически;

3) функцию можно задать математической формулой.

f. Приведем примеры. Известно, что при вращении махового колеса возникают напряжения, которые стремятся разорвать его обод. Если обод колеса сделан из однородного материала, то напряжения зависят только от скорости вращения. Обозначая скорость через v, а напряжение в ободе через p, мы можем записать, что

$$p = f(v). \tag{4}$$

Теория сопротивления материалов дает такую таблицу для значений функции (4), если обод сделан из литой стали:

v	25	50	100	150	200	400
p	500	2000	8000	18000	32000	128000

Здесь v измеряется в метрах в секунду, p — в ньютонах на квадратный сантиметр.

Большим достоинством табличного способа задания функции является то, что числа таблицы непосредственно могут быть использованы для различных вычислений.

Недостатком является то, что всякая таблица дается не для всех значений аргумента, а через некоторые интервалы, так что, если каких-либо значений функции в таблице нет, то нужно брать более подробную таблицу; если же последней нет, то приходится подбирать нужное число более или менее приблизительно, сообразуясь с характером изменения чисел таблицы.

g. Большим недостатком является также и то, что если таблица содержит много чисел, то характер изменения функции уловить трудно. Наконец, третьим недостатком является то, что изучать свойства функции, заданной таблицей, трудно; кроме того, полученные свойства будут неточными.

h. От первых двух недостатков свободен графический способ задания функции.

Чтобы пояснить графический способ, рассмотрим такой пример.

Если какой-либо материал подвергнуть растяжению, то сила, необходимая для растягивания, будет зависеть от того, какое растяжение необходимо сделать, т. е. сила есть функция от удлинения. Если удлинение в процентах обозначить через λ, а растягивающую силу, которая обычно измеряется в ньютонах на квадратный сантиметр, обозначить через p, то $p = f(\lambda)$.

Для различных материалов эта зависимость будет различной. Возьмем координатные оси и будем считать λ за абсциссу, а p за ординату, тогда для каждой пары их значений получим точку на плоскости.

Все эти точки расположатся на некоторой кривой, которая имеет различный вид для различных материалов. Существуют приборы, которые такие кривые чертят автоматически.

Для мягкой стали мы получим следующую кривую (рис. 31):

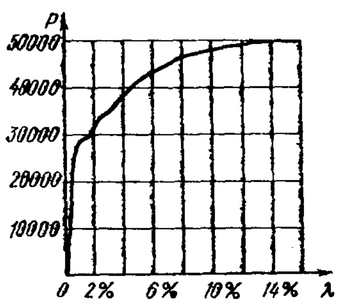


Рис. 31

k. Как мы видим, действительно графический способ нагляден и дает значения функции для всех значений аргумента. Но третий недостаток и здесь имеет место. Изучать свойства функции, заданной графически, все-таки затруднительно.

l. Теперь покажем способ задания функции формулой. Возьмем такой пример. Площадь круга очевидно зависит от радиуса. Если радиус обозначить через x, а площадь через y, то, как известно из геометрии, $y = \pi x^2$, где π — отношение длины окружности к длине диаметра. Мы видим, что зависимость здесь задается математической формулой, поэтому третий способ называется математическим способом. Еще пример: длина гипотенузы прямоугольного треугольника зависит от длин обоих катетов. Если длину гипотенузы обозначить через L, а длины катетов через x и y, то по теореме Пифагора будем иметь $L = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Так как оба катета мы можем изменять независимо друг от друга, то мы имеем здесь пример функции двух аргументов, заданной математически.

Можно привести еще много примеров функций, заданных математически, из области различных наук.

m. Математический способ обладает огромным преимуществом перед другими способами задания функций, а именно: к изучению функций, заданных математически, можно привлечь математический анализ.

Помимо того, если необходимо, всегда можно математический способ превратить в табличный. Действительно, мы вправе задать аргументам желательные нам числовые значения и по формуле вычислить сколько угодно значений функции. Таким образом, одна формула заменяет всю таблицу.

n. Математический способ имеет только один недостаток, а именно, формула не дает наглядного представления об изменении функции. Однако этот недостаток мы всегда можем восполнить, так как всегда математический способ задания можно превратить в графический. Это делается так.

o. Если мы имеем функцию одной переменной, то составляем таблицу и каждую пару значений аргумента (x) и функции (y) принимаем за координаты, после этого строим возможно большее число точек. Все полученные точки расположатся на некоторой кривой линии, которая и будет графиком функции. Если мы имеем функцию двух или более аргументов, то и ее можно изобразить графически. Но это уже значительно сложнее, а потому этим вопросом мы займемся несколько позднее.

p. Все сказанное свидетельствует о том, что математический способ задания функций является наиболее выгодным.

Поэтому всегда стремятся, если функция задана таблицей или графиком, выразить ее формулой. Эта задача обычно очень трудная, но чрезвычайно важная для естествознания и технических наук. Без преувеличения можно сказать, что все проблемы механики, естествознания и прикладных наук сводятся к установлению и изучению функциональных зависимостей между теми переменными величинами, с которыми эти дисциплины имеют дело. Если удается эти функциональные зависимости выразить формулами, то наука приобретает надежный рычаг для приложения всей огромной мощи математического анализа и далеко продвигается в своем развитии.

С другой стороны, математический анализ, получая эту прекрасную пищу, сам растет и совершенствуется.

q. Ввиду того, что перевод на язык формул функциональных зависимостей не является непосредственной задачей математики, мы будем предполагать, что функции уже выражены формулами. Таким образом, в дальнейшем мы будем заниматься только функциями, заданными математически.

§ 3. Классификация математических функций

a. Если сказано, что

$$y = f(x) \tag{1}$$

есть функция математическая, то правая часть равенства (1) представляет собой формулу. Здесь буква f обозначает те действия, которые нужно совершить над аргументом для того, чтобы вычислить функцию. По характеру этих действий мы и будем классифицировать функции.

b. Если в состав формулы входят только алгебраические действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня, совершаемые над аргументом в ограниченном количестве, то функция называется *алгебраической*.

Все остальные функции называются *трансцендентными*.

c. Например, функция

$$y = \frac{x^2 - \sqrt{x} + 3}{(x-2)^2}$$

будет алгебраической.

Напротив, функция

$$y = \sin x$$

трансцендентная.

d. Алгебраические функции разделяются на рациональные и иррациональные. *Рациональной* называется такая функция, в которой ни разу над аргументом не совершается извлечение корня или возведение в дробную степень. В противном случае функция называется *иррациональной*.

Например, функции

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4, \quad y = \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 + 8}$$

суть функции рациональные. Наоборот, функция, приведенная в пункте c, иррациональная.

e. Иррациональные функции не подразделяются, а рациональные подразделяются на целые и дробные.

Целыми функциями называются такие, где аргумент ни разу не встречается в знаменателе, в противном случае мы имеем *дробную функцию*.

Например, функции

$$y = x^3 - x^2 + x - 1, \quad y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{7}x + 9$$

целые. Напротив, функции, приведенные в пункте d, дробные.

f. В свою очередь целые функции еще подразделяютс на порядки, причем *порядком* называется наибольшая степень, в которую возводится аргумент. Общий вид функции первого порядка:

$$y = ax + b,$$

где a и b — постоянные числа, $a \neq 0$. Общий вид функции второго порядка:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

и т. д.

Наконец, общий вид функции n-го порядка:

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \; a_0 \neq 0.$$

g. Дробные функции далее никак не подразделяются. Общим видом любой дробной функции будет частное от деления двух целых функций:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}.$$

h. Имеется очень большое число типов трансцендентных функций. Мы будем здесь говорить только о тех, с которыми мы встречаемся в элементарной математике. К числу их относятся *тригонометрические функции*; затем *логарифмические функции*

$$y = \log_a x;$$

далее, функции типа

$$y = a^x,$$

называемые *показательными*; наконец, так называемые *обратные тригонометрические функции*, с которыми мы познакомимся дальше.

Эти перечисленные функции называются *элементарными трансцендентными функциями*.

k. Теперь проведем классификацию несколько по другой линии. Мы еще будем подразделять функции на явные и неявные. Все функции, о которых мы говорили выше, называются *явными*. Они характеризуются тем, что зависимая переменная прямо дается формулой, содержащей аргумент.

Но может оказаться, что функция задается уравнением, где в одной части равенства находятся и зависимая переменная, и независимая. Например, пусть дано уравнение

$$Ax + By + C = 0. \tag{1}$$

Здесь, очевидно, y зависит от x, но непосредственно выражением, содержащим x, не задается.

Такая функция называется *неявной*. Ее можно сделать явной, если разрешить уравнение относительно y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B};$$

если обозначить $-A/B = a$ и $-C/B = b$, то мы получим

$$y = ax + b.$$

Заметим попутно, что уравнение вида (1) всегда неявно выражает функцию первого порядка.

l. Общий вид неявной функции одной переменной будем записывать так:

$$f(x, y) = 0.$$

m. Возьмем еще пример. Пусть дана неявная функция y от x, определяемая уравнением

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (r \text{ постоянное}). \tag{1}$$

Сделаем ее явной; для этого решим уравнение относительно y:

$$y^2 = r^2 - x^2,$$

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}. \qquad (2)$$

Мы здесь видим, что одному значению x отвечает не одно значение y, а два, так как мы можем брать перед корнем как знак плюс, так и знак минус. Такая функция называется двузначной. Могут быть функции трехзначные, четырехзначные и т. д., вообще *многозначные*.

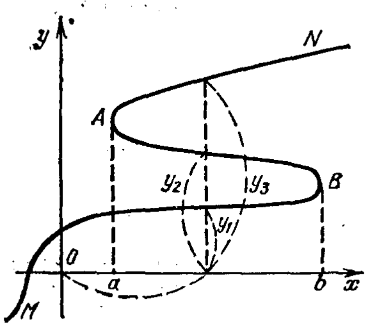


Рис. 32

Чтобы лучше понять последние случаи, покажем на чертеже, как может случиться, что функция будет, например, трехзначной.

Пусть функция задана графически кривой линией $MBAN$.

На рис. 32 мы видим, что каждому значению x в интервале от a до b соответствуют три значения y.

n. Заметим, что изучение многозначных функций сводится к изучению однозначных. Действительно, можно, например, отдельно рассмотреть выражение (2) пункта m, взяв в нем перед корнем знак плюс, а потом отдельно взять знак минус. Следовательно, вместо одной двузначной функции мы будем изучать две однозначные. Поэтому в дальнейшем мы исключительно будем заниматься только изучением однозначных функций.

о. Сделаем еще одно замечание по отношению к неявным функциям.

Было бы ошибкой думать, что мы всегда можем неявную функцию превратить в явную, практически это сделать иногда нельзя.

Например, если мы пожелаем решить уравнение

$$y + xa^{x+y} = 0$$

относительно y, то этого сделать совершенно невозможно. Следовательно, y здесь не может быть сделан явной функцией x.

р. Все, что было сказано в этом параграфе относительно классификации функций одной переменной, можно без всяких оговорок повторить и для функций многих переменных.

§ 4. Обзор и графическое изображение простейших функций одного аргумента

а. Мы начнем с рассмотрения наиболее простых функций.

Пусть мы имеем функцию первого порядка

$$y = kx + b. \tag{1}$$

Сначала разберем еще более простой случай

$$y = kx, \tag{2}$$

т. е. тот частный случай, когда $b = 0$.

Составим таблицу, давая x произвольные, например, целые значения, и вычисляя соответствующие значения y.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	$-3k$	$-2k$	$-k$	0	k	$2k$	$3k$	...

Примем теперь пары значений x и y за координаты точек и будем наносить на бумагу эти точки. Предположим сначала, что число k положительно и что оно изображается отрезком RT, а единица длины — отрезком OR; тогда, соединяя все точки, получим прямую AB, изображенную на рис. 33.

В таблице даны семь пар значений x и y, эти пары нам дали семь точек.

Но, очевидно, и любая пара значений x и y, полученная из уравнения (2), дает точку, лежащую на той же прямой. Обратно, любая точка M $(x;\ y)$ этой прямой имеет координаты, удовлетворяющие уравнению (2). Это следует непосредственно из подобия треугольников ORT и ON_1M_1.

Действительно,

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{PT}{OP} = \frac{k}{1} = k, \tag{3}$$

т. е.

$$\frac{y_1}{x_1} = k, \tag{4}$$

откуда

$$y_1 = kx_1. \tag{5}$$

Из равенства (4) мы усматриваем, что

$$k = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α есть угол наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс.

Если k — число отрицательное, то для положительных значений x мы получим отрицательные значения y и обратно. Теперь мы получим прямую GD, которая проходит

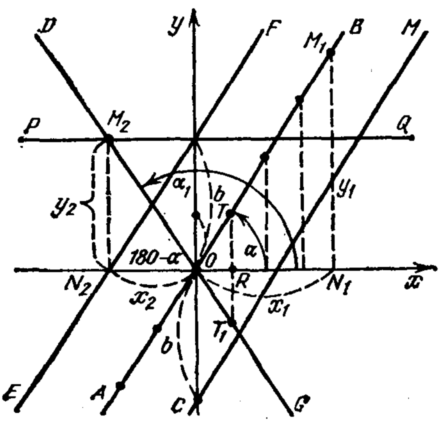


Рис. 33

также через начало координат, но из второго угла в четвертый, а следовательно, наклонена к оси абсцисс под тупым углом α_1.

Нетрудно видеть, что

$$\frac{y_2}{-x_2} = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha_1) = -\operatorname{tg}\alpha_1,$$

откуда

$$y_2 = x_2 \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Таким образом, и здесь

$$k = \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Итак, графиком функции (2) всегда будет прямая линия, проходящая через начало координат и составляющая с положительным направлением оси абсцисс угол, тангенс которого равен коэффициенту при x. Этот коэффициент определяет собой наклон прямой к оси абсцисс. Если он положителен, то прямая проходит из первого координатного угла в третий, если же он отрицателен, то прямая проходит из второго угла в четвертый. Поэтому число k называется *угловым коэффициентом прямой.*

b. Возьмем теперь прямую AB

$$y = kx \tag{2}$$

и поднимем ее вверх на расстояние b так, чтобы она заняла положение EF (см. рис. 33). Тогда все ординаты прямой AB увеличатся на одно и то же положительное число b, и мы получим уравнение

$$y = kx + b. \tag{1}$$

Если число b будет отрицательно, то мы получим прямую CM, сдвинутую вниз. Следовательно, уравнение (1) выражает прямую, не проходящую через начало координат, но отсекающую на оси ординат отрезок, равный b, и имеющую угловой коэффициент k. При различных b и k мы можем получить все прямые плоскости (кроме прямых, параллельных оси Oy).

Итак, графиком функции первого порядка всегда является прямая, поэтому уравнение (1) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

c. В частности, если $k = 0$, то получим прямую PQ (см. рис. 33), параллельную оси абсцисс, отстоящую от нее на расстояние, равное $|b|$. Уравнение ее примет вид

$$y = b,$$

т. е. функция первого порядка выродилась в постоянное число.

В дальнейшем постоянное число мы будем рассматривать как такую переменную величину, у которой все числовые значения равны. Поэтому можно сказать, что график постоянного числа есть прямая, параллельная оси абсцисс, отстоящая от нее на расстояние, равное этому постоянному числу, взятому по абсолютной величине.

d. Функции первого порядка очень часто встречаются в науке. Нередко зависимость, выраженную функцией первого порядка, называют *линейным законом.* Приведем конкретный пример: мы знаем, что если тело движется равномерно ускоренно, то, обозначая через v_0 начальную скорость, через g ускорение, через t время и через v скорость, мы будем иметь формулу:

$$v = v_0 + gt.$$

Таким образом, изменение скорости в равномерно ускоренном движении подчиняется линейному закону.

e. Частным случаем линейного закона будет зависимость

$$y = kx \quad (\text{при } b = 0). \tag{2}$$

Мы замечаем, что если x увеличить в несколько раз, то численная величина y также увеличится во столько же раз; если x уменьшится в некоторое число раз, то численная величина y уменьшится во столько же раз.

Такая функциональная зависимость называется *прямой пропорциональностью*. Общим математическим выражением прямой пропорциональности является уравнение (2), причем число k носит название *коэффициента пропорциональности*.

Если начальная скорость $v_0 = 0$, то зависимость скорости или времени в равномерно ускоренном движении выразится так:

$$v = gt.$$

Коэффициентом пропорциональности здесь является постоянное ускорение g.

f. Теперь займемся графическим изображением функций второго порядка.

Мы рассмотрим лишь частный случай

$$y = ax^2. \tag{6}$$

Пусть для определенности сначала $a = 1/4$, т. е.

$$y = \frac{1}{4}x^2.$$

Составляем таблицу

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	...

Построим по этой таблице точки. По нанесенным точкам схематически обрисовывается контур кривой A, изображенной на рис. 34.

Полученная кривая называется *параболой* второго порядка, точка O называется ее *вершиной*. Мы здесь пользовались так называемым способом построения кривой по точкам. Это наиболее употребительный и простой способ вычерчивания графиков функций. Заметим, что чем подробнее мы составим таблицу, т. е. чем меньше промежутки будем брать для последовательных значений аргумента, тем точнее мы построим кривую.

Пусть теперь $a = 1/2$, т. е.

$$y = \frac{1}{2} x^2.$$

Мы получим кривую B с более крутым подъемом. Для функции

$$y = \frac{1}{8} x^2,$$

т. е. для $a = 1/8$, получим более пологую кривую C. Далее, для отрицательных значений коэффициента, на-

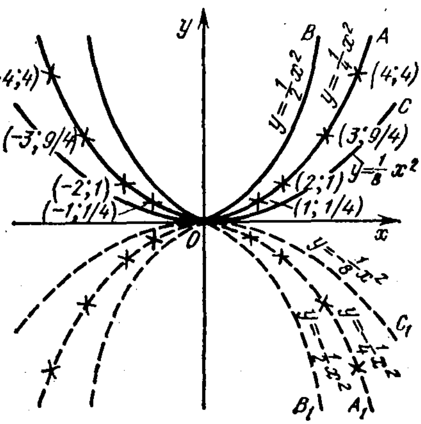


Рис. 34

пример, для $a = -1/4$, $a = -1/2$, $a = -1/8$, т. е. для функций

$$y = -\frac{1}{4} x^2, \quad y = -\frac{1}{2} x^2, \quad y = -\frac{1}{8} x^2,$$

мы получим кривые, изображенные пунктиром. Если бы ось абсцисс обладала свойством зеркала, то кривые A_1, B_1, C_1 были бы зеркальными отражениями кривых A, B, C. Заметим, что для всех значений коэффициента a мы получим аналогичные графики. Все кривые типа (6) называются также параболами второго порядка, все они имеют вершину в начале координат, все они будут симметричны относительно оси ординат. Очевидно, форма параболы зависит только от числового значения коэффициента a.

Если мы пожелаем вычерчивать графики функции второго порядка общего типа

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{7}$$

то получим также параболы, но вершины их не будут находиться в начале координат; это будет строго доказано позднее.

g. Функции второго порядка в науке встречаются часто. Когда мы говорим о табличном задании функций, то приводим пример зависимости напряжений в ободе махового колеса от скорости его вращения. Эта зависимость может быть очень точно выражена формулой

$$p = \rho v^2,$$

где ρ — плотность материала колеса.

Еще пример: при равномерно ускоренном движении путь зависит от времени, и эта зависимость выражается формулой

$$S = \frac{g}{2} t^2 + v_0 t + S_0,$$

где g — ускорение силы тяжести, v_0 — начальная скорость, S_0 — начальный путь, S — путь, пройденный за время t.

h. Теперь займемся дробными функциями. Для простоты мы рассмотрим только один частный, но очень важный случай

$$y = \frac{k}{x}. \tag{8}$$

При построении графиков дробных функций мы нередко встречаемся с одной характерной особенностью, которая отлично видна даже на этом простом примере, а именно, при составлении таблицы для данной функции мы аргументу можем задавать любые значения, за исключением $x = 0$, так как на нуль делить нельзя. Таким образом, при $x = 0$ наша функция не существует. Последнее обстоятельство вынуждает нас осмотреть окрестности нуля. Для этого мы будем задавать аргументу численно уменьшающиеся положительные и отрицательные значения, осторожно подходя к нулю справа и слева, например, так, как это показано в нижеследующей таблице, где для определенности мы взяли $k = 3$.

x	-5	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5
y	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-3	-6	-9	-12	...	12	9	6	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$

Построим теперь график нашей функции (рис. 35). Мы изобразили график функции сплошной линией. При рассмотрении его нетрудно заметить, что кривая состоит из двух ветвей, совершенно отделенных друг от друга координатными осями, так что одна ветвь расположена в первом координатном углу, а другая — в третьем. Если мы проследим ход кривой, безгранично удаляясь от начала координат в обе стороны по горизонтальному и по вертикальному направлениям, то убедимся, что каждая ветвь неограниченно приближается к координатным осям, но никогда их не достигает. Заметим, что, вообще, если мы встречаемся с какой-либо кривой, которая неограниченно стремится к некоторой прямой, то такая прямая называется *асимптотой* кривой. Таким образом, изображенная на чертеже кривая имеет две асимптоты, одной является ось абсцисс, другой ось ординат.

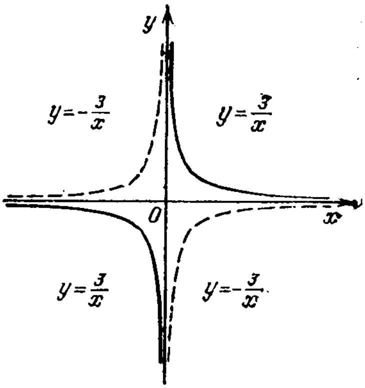


Рис. 35

Если мы возьмем $k = -3$, то получим кривую, изображенную на чертеже пунктиром; она является зеркальным отражением первой кривой относительно оси абсцисс, а также и относительно оси ординат.

Для других значений k мы получим аналогичные кривые. Все кривые типа (1) называются *равнобочными гиперболами*, все они имеют своими асимптотами координатные оси, все они состоят из двух отдельных ветвей, причем при положительных k ветви будут расположены в первом и третьем координатных углах, а при отрицательных k ветви будут расположены во втором и четвертом координатных углах.

k. Уравнение (1) показывает, что если величину аргумента x увеличить в несколько раз, то численная величина функции y уменьшается во столько же раз, и обратно: при уменьшении аргумента в несколько раз численное значение функции во столько же раз увеличивается.

Такая зависимость называется *обратной пропорциональностью*, и уравнение (8) выражает математически в общем виде закон обратной пропорциональности.

Приведем конкретный пример на закон обратной пропорциональности.

Из физики известно, что при постоянных массе газа и температуре произведение величины объема газа на величину его давления есть величина постоянная.

Если обозначить объем через v, а давление через p, то можем написать $vp = c$, или же $v = c/p$, где c — постоянная величина.

§ 5. Обратные функции

а. Возьмем какую-либо функцию

$$y = f(x) \tag{1}$$

и вычертим ее график (на рис. 36 он изображен кривой AB).

Далее построим биссектрису CD первого и третьего координатных углов и повернем весь чертеж на 180° так, чтобы прямая CD была осью вращения. Тогда наша кривая AB перейдет в новое положение, и мы получим вторую кривую A_1B_1. Обе кривые, первая и вторая, будут очевидно взаимно симметричны или, выражаясь иначе, зеркальны относительно биссектрисы CD.

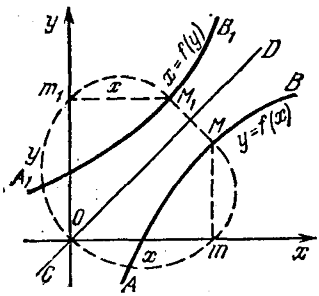


Рис. 36

Если мы проследим за тем, что произошло с координатами точек первой кривой, то увидим, что при переходе на новое место абсциссы, не меняя своей величины, превратились в ординаты точек второй кривой, а ординаты превратились в абсциссы.

Например, абсцисса m точки M переходит в ординату m_1 точки M_1, а ордината переходит в абсциссу.

Таким образом, уравнение второй кривой будет

$$x = f(y). \tag{2}$$

Если решить уравнение (2) относительно y, то получим новую функцию, которую обозначим, например, так:

$$y = \varphi(x). \tag{3}$$

Очевидно, зависимость, задаваемая уравнениями (1) и (3), одна и та же; разница только в том, что зависимая переменная функции (1) является независимой для функции (3) и обозначается уже не через y, а через x. Обратно, независимая переменная функции (1) является зависимой для функции (3) и обозначается уже не через x, а через y.

b. Пусть имеется функция

$$y = \frac{1}{4} x^2. \tag{4}$$

Обратную функцию получаем, заменяя y на x, а x на y и решая полученное уравнение относительно y:

$$x = \frac{1}{4} y^2, \quad y = \pm 2\sqrt{x}, \tag{5}$$

так что для степенной функции обратная функция является иррациональной.

На рис. 37 функция (4) изображена сплошной линией, тогда как функция (5) пунктиром. Полученные кривые, как мы видим, являются параболами, расположенными симметрично относительно биссектрисы CD.

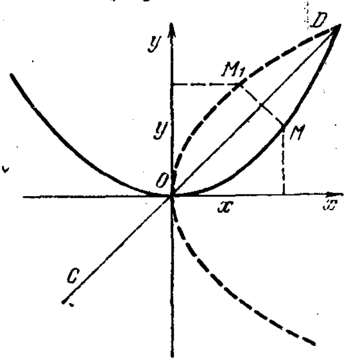


Рис. 37

c. В качестве второго примера мы рассмотрим показательную функцию

$$y = a^x. \tag{6}$$

Заменяя y на x и x на y, имеем

$$x = a^y.$$

Решить это уравнение относительно y можно только с помощью логарифмической функции

$$y = \log_a x. \tag{7}$$

Таким образом, логарифмическая функция обратна показательной.

Согласно тому, что было сказано выше, нам достаточно построить график только для показательной функции, так как график для логарифмической функции будет лишь его зеркальным отражением относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Для простоты пусть $a = 2$; составляя таблицу и вычерчивая графики, получим кривые, изображенные на рис. 38. Нетрудно видеть, что кривая, изображающая функцию

$y = 2^x$, имеет своей асимптотой ось абсцисс; напротив, кривая, изображающая функцию $y = \log_2 x$, имеет асимптотой ось ординат.

Учащемуся самому рекомендуется вычертить графики функций (6) и (7) при других значениях основания a.

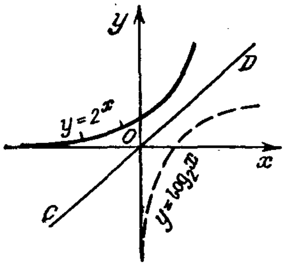


Рис. 38

d. Теперь рассмотрим функцию

$$y = \sin x. \tag{8}$$

Сделаем теперь зависимую переменную независимой, тогда независимая переменная станет зависимой.

В соответствии с этим переменим названия: y заменим на x, а x на y. Тогда получим уравнение

$$x = \sin y. \tag{9}$$

Это уравнение нам дает функцию, обратную для синуса, но дает неявно.

Чтобы выразить y через x явно, нужно решить уравнение (9) относительно y. Однако этого сделать нельзя, имея в руках только те обозначения, которые нам дает алгебра и тригонометрия. Нужно вводить новый символ. Прежде всего заметим, что уравнение (2) можно прочитать так:

«y есть такая дуга, синус которой равен x». (10)

Условимся эту фразу записывать сокращенно так:

$$y = \arcsin x. \tag{11}$$

Это и есть необходимое нам обозначение для функции, обратной синусу; последняя функция называется *арксинусом*.

Нужно всегда помнить, что теперь x — это синус и, следовательно, не может быть численно больше единицы, а y — это дуга; кроме того, нельзя забывать, что знак

arcsin

есть просто сокращенная фраза (10) и, следовательно, отрывать arc от sin никогда нельзя.

Вычертим теперь график синуса, попутно мы получим и график арксинуса. Таблицу мы здесь составлять не станем, а воспользуемся геометрическим приемом, который хорошо виден на рис. 39.

Мы строим с центром где-либо на оси абсцисс окружность радиуса, равного единице. Далее, разделяя окружность на равные части, на оси абсцисс откладываем длины

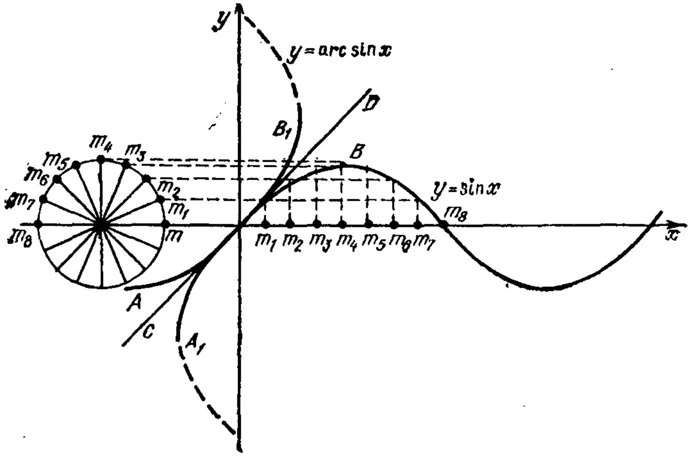


Рис. 39

этих дуг. (Практически мы, конечно, просто отложим отрезок, равный $2\pi = 6{,}28\ldots$, и разделим его на такое же число равных частей, как и окружность.)

Полученные отрезки нам дадут абсциссы; соответствующие же ординаты получим, проводя из точек деления окружности прямые параллельно оси абсцисс.

Нетрудно видеть, что графиком синуса является волнообразная кривая, неограниченно уходящая вправо и влево. Периодичность синуса отражается в правильном повторении волн.

Кривая называется *синусоидой*. Вместе с тем путем отражения от биссектрисы CD мы получим такую же синусоиду около оси ординат, которая будет графиком арксинуса.

Нетрудно заметить, что каждой абсциссе последней кривой (которая, конечно, численно никогда не больше единицы) соответствует бесконечное множество ординат. Это, разумеется, происходит потому, что каждому синусу отвечает не одна, а бесчисленное множество дуг. Такая многозначность, как мы уже говорили в § 3 главы 3, весьма неудобна, а потому мы ограничим область изменения арксинуса так:

$$-\pi/2 \leqslant \arcsin x \leqslant \pi/2.$$

От такого ограничения мы ничего не теряем, так как при изменении дуги в этих пределах синус успевает пробежать все возможные для него значения от -1 до 1.

На рис. 39 это соответствует тому, что мы рассматриваем не всю кривую арксинуса, а только ее дугу A_1B_1, изображенную сплошной линией (остальная часть отмечена пунктиром). Подобным же образом мы введем функцию, обратную косинусу.

Если имеем

$$y = \cos x,$$

то обратную функцию будем обозначать

$$y = \arccos x$$

и вызывать *арккосинусом*.

Последний ввиду его многозначности мы тоже ограничим, но не границами от $-\pi/2$ до $+\pi/2$, а границами

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi.$$

Это вызывается тем, что именно при изменении дуги от 0 до π косинус успевает пробежать все свои значения от -1 до $+1$. Чтобы построить график косинуса, а следовательно, и арккосинуса, заметим, что

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, косинус есть просто синус, запоздавший на четверть окружности. Поэтому график косинуса получится, если график синуса сдвинуть влево на $\pi/2$.

Рис. 40

После этого, отразив график относительно биссектрисы CD, получим график арккосинуса. Учащимся самим рекомендуется построить эти графики и найти, какую именно дугу арккосинуса мы оставляем.

Аналогично мы вводим функции, обратные другим тригонометрическим функциям.

Для нас важны в дальнейшем лишь арктангенс и арккотангенс. Ввиду многозначности первый мы ограничиваем подобно синусу пределами:

$$-\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2,$$

а второй ограничиваем подобно косинусу:

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi.$$

Мы здесь приводим только графики тангенса и арктангенса (рис. 40), рекомендуя учащимся самим в нем разобраться, а также рекомендуем учащимся самим построить график котангенса и арккотангенса.

§ 6. Понятие об уравнении линии

a. В настоящей главе мы занимались построением графиков различных функций, пользуясь уравнением, связывающим функцию y с аргументом x. Всякому уравнению между y и x отвечает своя линия — *график уравнения*. Если уравнение было явное

$$y = f(x),$$

то график мы строим непосредственно по нему. График неявного уравнения

$$F(x, y) = 0$$

тоже можно построить, обратив его сначала в явное (т. е. решив относительно y).

График уравнения является не чем иным, как собранием (или, как говорят, геометрическим местом) всех точек, удовлетворяющих этому уравнению. Если бы мы построили не все точки, удовлетворяющие уравнению, то получили бы не весь график, а только его часть. Полным графиком уравнения может считаться только такая линия, которой исчерпываются все точки, удовлетворяющие уравнению, и, следовательно, вне которой таких точек уже нет.

b. В дальнейшем мы будем решать задачу, обратную построению графика. А именно, по данной линии мы будем отыскивать то уравнение, графиком которого эта линия является. При этом особенно следует следить за тем, чтобы наша линия была полным графиком найденного уравнения. Иными словами, уравнение должно

1° удовлетворяться всеми точками линии,

2° не удовлетворяться точками, посторонними линии.

Уравнение, подобранное согласно требованиям 1° и 2°, и называется *уравнением данной линии*.

c. Конечно, чем сложнее линия, тем, вообще говоря, сложнее будет и ее уравнение. Особенно просто выводится уравнение линии, обладающей каким-либо простым геометрическим свойством, общим для всех точек этой линии и вполне ее определяющим. Вывод уравнения такой линии будет простым переводом этого геометрического свойства на язык анализа.

d. Напротив, если таким свойством линия не обладает, примером чего может служить линия, начерченная совершенно произвольно от руки, то подобрать для нее уравнение можно только приближенно. Но такими линиями ввиду сложности этого вопроса мы заниматься не будем.

e. Дальнейшие две главы будут посвящены разысканию уравнений и исследованию на основании этих уравнений простейших линий, характерных своими замечательно простыми геометрическими свойствами. Именно, в главе 4 мы разберем прямую, а в главе 5 окружность и некоторые другие важные кривые.

f. Составление уравнений линий и исследование свойств линий по их уравнениям методами алгебры является одной из важнейших задач отдела высшей математики, называемого *аналитической геометрией*.

§ 7. Упражнения

1. Построить графики функций:

$$y = x;\quad y = -x;\quad y = 2x;\quad y = 2x + 3;$$
$$y = 3x - 4;\quad y = -4x - 1;\quad y = 0{,}5x - 0{,}75.$$

2. Построить графики функций:

$$y = x^2 + 2;\quad y = x^2 - 2;\quad y = x^2 - 4x;$$
$$y = x^2 + 4x;\quad y = -x^2 - 4x;\quad y = -x^2 + 4x,$$
$$y = x^2 + x + 1;\quad y = -x^2 - x - 1.$$

3. Построить графики функций:

$$y = x^3;\quad y = \pm\sqrt{x};\quad y = x^{3/2};$$
$$y = \frac{12}{x};\quad y = \frac{1}{x+2};\quad y = \frac{x-2}{x+2};$$
$$y = \frac{1}{x^2};\quad y = -\frac{1}{x^2};\quad y = \frac{1}{1+x^2}.$$

4. Построить графики функций:

$$y = \frac{1}{\sin x};\quad y = \frac{1}{\cos x};$$

$y = A\cos(kx + b)$ (где $A = 2$; $k = 0{,}5$; $b = \pi/3$),

5. Из жестяного прямоугольного листа с основанием a и высотой b вырезаны по углам квадраты со стороной x; из оставшейся части согнута коробка (рис. 41). Найти объем коробки как функцию от x. *Ответ*: $y = (a - 2x)(b - 2x)x$.

6. В прямоугольном треугольнике с постоянной гипотенузой 1 и переменным катетом x выразить другой катет y как функцию от x. *Ответ*: $y = \sqrt{1 - x^2}$.

7. В шар радиуса R вписан цилиндр (рис. 42). Найти объем V этого цилиндра как функцию радиуса x его основания. *Ответ*: $V = 2\pi x^2\sqrt{R^2 - x^2}$.

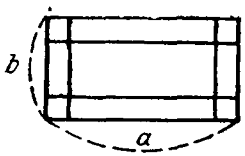


Рис. 41

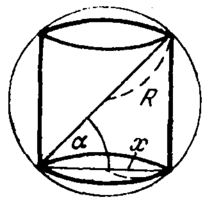


Рис. 42

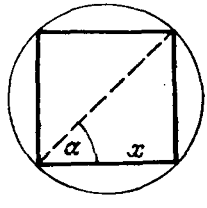


Рис. 43

8. Выразить тот же объем как функцию угла α (см. предыдущую задачу). *Ответ*: $V = 2\pi R^3 \cos^2\alpha \sin\alpha$.

9. В круг радиуса R вписан прямоугольник (рис. 43). Выразить площадь S этого круга как функцию его основания x. *Ответ*: $S = x\sqrt{4R^2 - x^2}$.

10. Выразить ту же (смотри предыдущую задачу) площадь как функцию угла α. *Ответ*: $S = 2R^2 \sin 2\alpha$.

11. В прямоугольном треугольнике с постоянным катетом a и переменной гипотенузой выразить последнюю как функцию другого катета x. *Ответ*: $y = \sqrt{a^2 + x^2}$.

12. На стене висит плакат AB, на расстоянии x от стены находится глаз наблюдателя; верхний конец B плаката выше глаза на b, а нижний конец A выше глаза на a (рис. 44). Выразить угол зрения как функцию от x. *Ответ*: $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{x} - \operatorname{arctg}\frac{a}{x}$.

13. Миноносец находится в точке A на расстоянии a от берега. На расстоянии b от ближайшей к миноносцу точки берега в точке C находится военный лагерь. Гонец плывет в шлюпке до точки B, а потом идет пешком расстоя-

ние $BC = x$ (рис. 45). Выразить время T, необходимое, чтобы проплыть и пройти расстояние, как функцию от x,

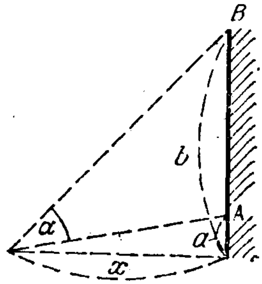


Рис. 44

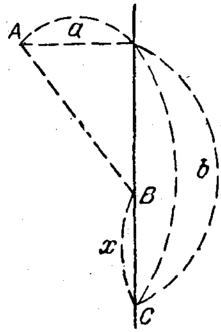


Рис. 45

если скорость шлюпки v_1, а скорость пешехода v_2. *Ответ*:

$$T = \frac{\sqrt{a^2 - (b - x)^2}}{v_1} + \frac{x}{v_2}.$$

14. Доказать, что для любого x (разумеется, численно меньшего единицы) имеет место тождество

$$\arccos x + \arcsin x = \pi/2.$$

15. Доказать, что для любого x имеет место тождество

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2.$$

16. Доказать тождества:

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2};$$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x};$$

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}};$$

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

17. Доказать тождества:

$$\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin (x \sqrt{1 - y^2} \pm y \sqrt{1 - x^2});$$

$$\arccos x \pm \arccos y = \arccos (xy \mp \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)});$$

$$\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x \pm y}{1 \pm xy}.$$

18. Доказать тождества:

$$2 \arcsin x = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2};$$
$$2 \arccos x = \arccos (2x^2 - 1);$$
$$2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}.$$

19. Доказать тождества:

$$\arcsin (-x) = -\arcsin x;$$
$$\arccos (-x) = \pi - \arccos x;$$
$$\operatorname{arctg} (-x) = -\operatorname{arctg} x;$$
$$\operatorname{arcctg} (-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

Глава 4

ПРЯМАЯ

§ 1. Уравнение прямой, проходящей через данную точку

Положение прямой вполне определено, если на ней дана какая-либо точка $M_1(x_1;\ y_1)$ и дано направление прямой. Последнее известно, если известно направление вектора $\overline{PQ}$, перпендикулярного прямой. Такой вектор назовем *направляющим вектором*. Он может быть произвольной длины и с началом в любой точке плоскости; от него требуется только, чтобы он был перпендикулярен прямой. Направляющий вектор будем задавать величинами его проекций A и B на оси координат (рис. 46). Итак, будем считать известными

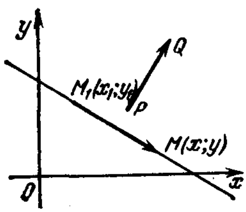


Рис. 46

1) точку $M_1(x_1;\ y_1)$ прямой;
2) величины проекций A и B направляющего вектора $\overline{PQ}$ на оси координат.

Имея эти данные, постараемся вывести уравнение прямой. Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка прямой. Где бы она на прямой ни находилась, вектор $\overline{M_1M}$ перпендикулярен $\overline{PQ}$. Так как величины проекций вектора $\overline{PQ}$ суть A и B, а величины проекций вектора $\overline{M_1M}$ равны разностям $x - x_1$, $y - y_1$ абсцисс и ординат его конца и начала, то условие перпендикулярности обоих векторов дает

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \qquad (1)$$

Это условие не выполняется, если точка M не лежит на прямой, потому что тогда указанные векторы не перпендикулярны.

Итак, уравнение (1) выполняется для всех точек прямой и не выполняется для точек, на прямой не лежащих.

Оно, следовательно, и является уравнением нашей прямой.

Например, уравнение прямой, проходящей через точку (1; 2), с направляющим вектором, имеющим проекции 2 и —4, будет

$$3(x-1)-4(y-2)=0.$$

§ 2. Общее уравнение прямой

a. Раскрывая скобки в уравнении (1) § 1, получим

$$Ax+By+(-Ax_1-By_1)=0.$$

Обозначая

$$-Ax_1-By_1=C,$$

мы можем это уравнение переписать в виде

$$Ax+By+C=0. \tag{1}$$

Таким образом, уравнение всякой прямой можно написать в виде (1), где A и B одновременно не равны нулю (в противном случае длина направляющего вектора была бы равна нулю).

b. Обратно, можно показать, что всякое уравнение вида (1), где A и B одновременно не равны нулю, всегда изображает прямую. Действительно, всегда найдутся числа x_1, y_1, удовлетворяющие условию

$$Ax_1+By_1+C=0 \tag{2}$$

(например, при B, не равном нулю, мы x_1 выбираем произвольно; соответствующее же ему y_1 выбираем из условия (2)). Вычитая тогда равенство (2) из уравнения (1), мы приведем последнее к виду

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0.$$

А это как раз и есть уравнение прямой, проходящей через точку (x_1; y_1), с направляющим вектором, имеющим проекции A и B.

c. Ввиду доказанного в пунктах a и b уравнению (1), где A и B одновременно не равны нулю, присвоено название *общего уравнения прямой*.

Например, общее уравнение прямой, рассмотренной в конце § 1, будет

$$3x-3-4y+8=0, \quad \text{или} \quad 3x-4y+5=0.$$

§ 3. Частные случаи

В некоторых частных случаях общее уравнение прямой значительно упрощается. А именно:

a. Для прямой, параллельной оси абсцисс, направляющий вектор перпендикулярен этой оси. Следовательно, его проекция A на эту ось равна нулю. Уравнение прямой принимает вид

$$By + C = 0$$

или, если решить его относительно y,

$$y = -\frac{C}{B}.$$

Полагая же $-\frac{C}{B} = b$, приведем наше уравнение к виду

$$y = b.$$

Последнее уравнение отмечает собою не что иное, как тот факт, что все ординаты прямой, параллельной оси абсцисс, равны между собою, так как равны одному и тому же постоянному числу b. Это число b, очевидно, представляет собою величину отрезка OB, который прямая отсекает на оси ординат (рис. 47).

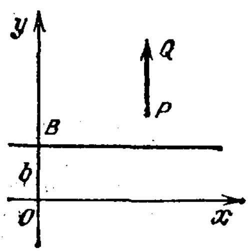


Рис. 47

В частности, при $b = 0$ получаем уравнение самой оси абсцисс:

$$y = 0.$$

Оно выражает тот факт, что ординаты всех точек оси абсцисс равны нулю.

b. Рассуждая подобным же образом, убедимся, что для прямой, параллельной оси ординат, $B = 0$. Уравнение прямой имеет вид

$$Ax + C = 0,$$

или, обозначая $-\frac{C}{A} = a$, получим

$$x = a,$$

где a есть величина отрезка OA, который прямая отсекает на оси абсцисс (рис. 48).

В частности, уравнение самой оси ординат будет

$$x = 0.$$

с. Если прямая проходит через начало координат, то общему уравнению

$$Ax + By + C = 0$$

такой прямой должны удовлетворять координаты (0; 0) начала координат, т. е. должно быть $A \cdot 0 + B \cdot 0 + C = 0$, или $C = 0$. Итак, общее уравнение прямой, проходящей через начало координат, должно иметь вид

$$Ax + By = 0.$$

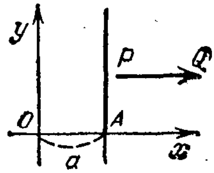


Рис. 48

Примеры. Прямая $2y - 7 = 0$, или $y = 7/2$, параллельна оси абсцисс и отсекает на оси ординат отрезок величиной $b = 7/2$.

Прямая $x + 2 = 0$, или $x = -2$, параллельна оси ординат и отсекает на оси абсцисс отрезок величиной $a = -2$.

Наконец, прямая $x + y = 0$ проходит через начало координат.

§ 4. Переход к уравнению с угловым коэффициентом

В частности, если B не равно нулю, то общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0$$

можно привести к виду, разобранному в § 4 предыдущей главы. Действительно, решая относительно y, получим

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Обозначая

$$-A/B = k, \quad -C/B = b,$$

будем иметь

$$y = kx + b.$$

А это как раз уравнение прямой с угловым коэффициентом k и начальной ординатой b.

Пример. Пусть дана прямая

$$2x - 4y - 7 = 0.$$

Имеем

$$4y = 2x - 7, \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}.$$

Значит, для нашей прямой $k = 1/2$, $b = -7/4$.

§ 5. Построение прямой

Прямая линия вполне определяется двумя точками. Поэтому для построения прямой достаточно знать две ее точки. В исключительных же случаях прямую можно построить и проще.

a. Пусть требуется построить прямую

$$2x - 3y + 4 = 0. \qquad (1)$$

Чтобы найти две точки этой прямой, мы абсциссы этих точек выберем произвольно, например, 0 для первой точки и 1 для второй. Соответствующие ординаты найдутся из уравнения (1). Именно, подставляя $x = 0$, получим

$$-3y + 4 = 0, \quad y = 4/3.$$

Подставляя же $x = 1$, получим

$$2 - 3y + 4 = 0, \; y = 2.$$

Итак, имеем две точки $B\,(0;\ 4/3)$, $C\,(1;\ 2)$, которыми и воспользуемся для построения прямой (рис. 49).

b. Построим еще прямую

$$2x - 3y = 0.$$

Здесь свободный член равен нулю и потому прямая проходит через начало координат. Таким образом, одна

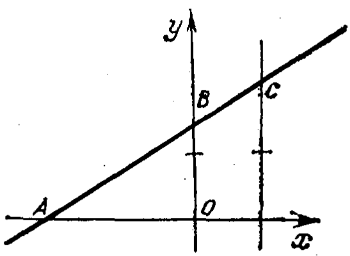


Рис. 49

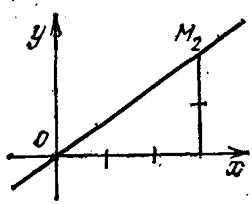


Рис. 50

точка прямой (начало координат) известна. Для построения прямой достаточно знать еще только одну точку. За абсциссу этой последней точки возьмем, например, $x = 3$. Тогда ордината найдется из уравнения $2 \cdot 3 - 3y = 0$, $y = 2$, и, следовательно, для построения прямой, кроме начала координат, имеем еще одну точку $M_2\,(3;\ 2)$ (рис. 50).

c. Построим прямую

$$2y - 3 = 0.$$

Здесь, решая относительно y, имеем

$$y = 3/2.$$

Следовательно, прямая параллельна оси абсцисс и отсекает на оси ординат отрезок $b = 3/2$ (рис. 51).

d. Наконец, построим прямую

$$4x + 7 = 0.$$

Решая относительно x, имеем (рис. 52)

$$x = -7/4.$$

Следовательно, прямая параллельна оси ординат и отсекает на оси абсцисс отрезок $a = -7/4$.

e. Прямую пункта a

$$2x - 3y + 4 = 0$$

можно было бы построить и проще. Действительно, эта

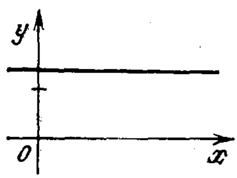


Рис. 51

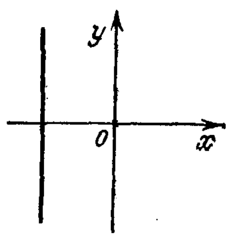


Рис. 52

прямая не параллельна ни одной из осей (ни A ни B не равны нулю) и не проходит через начало координат (C не равно нулю). Она очевидно пересекает оси Ox и Oy в двух различных точках A и B. И для построения прямой самое простое найти именно эти ее точки. Если обозначим $OA = a$ и $OB = b$ отрезки, отсекаемые прямой на осях, то координаты точек A и B будут (рис. 49)

$$A\ (a;\ 0),\quad B\ (0;\ b).$$

Точки A и B лежат на прямой, следовательно, их координаты удовлетворяют уравнению прямой, т. е.

$$2a + 4 = 0,\ a = -2;\qquad -3b + 4 = 0,\quad b = 4/3.$$

Итак, прямая отсекает на осях координат отрезки $a = -2$, $b = 4/3$. Это дает возможность построить точки A и B, а по ним и прямую.

§ 6. Определение угла между двумя прямыми

a. Пусть даны две прямые I и II. Эти прямые, как было указано в главе 1, образуют различные положительные и отрицательные углы, которые при этом могут быть как острыми, так и тупыми. Зная один из этих углов, мы легко найдем какой-либо другой.

Между прочим, у всех этих углов численная величина тангенса одна и та же, различие может быть только в знаке.

b. Пусть

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad I$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad II$$

— уравнения прямых. Числа A_1, B_1 и A_2, B_2 суть проекции направляющих векторов первой и второй прямой. Угол между этими векторами равен одному из углов, образуемых прямыми линиями. Поэтому задача сводится к определению угла между векторами. Мы получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \qquad (1)$$

Для простоты можно условиться под углом φ между двумя прямыми понимать острый положительный угол (как, например, на рис. 53). Тогда тангенс этого угла будет всегда положительным. Таким образом, если в правой части формулы (1) получится знак минус, то мы его должны отбросить, т. е. сохранить только абсолютную величину.

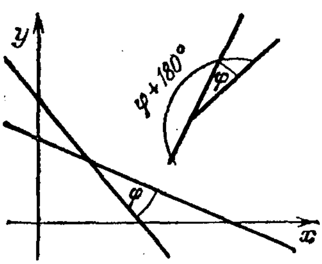


Рис. 53

Пример. Определить угол между прямыми

$$2x - 3y + 7 = 0,$$
$$4x - 8y + 9 = 0.$$

По формуле (1) имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{2\cdot(-8) - (-3)\cdot 4}{2\cdot 4 + (-3)\cdot(-8)}\right| = \left|\frac{-4}{32}\right| = \frac{1}{8}.$$

c. Если будет указано, какая из сторон угла является его началом и какая концом, то, отсчитывая всегда направление угла против часовой стрелки, мы можем из формулы (1) извлечь нечто большее. Как нетрудно убедиться из рис. 53, знак, получающийся в правой части формулы (1), будет указывать, какой именно — острый или тупой — угол образует вторая прямая с первой. (Действительно, из рис. 53 мы усматриваем, что угол между первым и вторым направляющими векторами или равен искомому углу между прямыми, или отличается от него на $\pm 180^\circ$.)

d. Если прямые параллельны, то параллельны и их направляющие векторы. Применяя условие параллельности двух векторов, получим:

$$A_1/A_2 = B_1/B_2. \tag{2}$$

Это есть условие, необходимое и достаточное для параллельности двух прямых.

Пример. Прямые

$$2x - 4y + 1 = 0, \quad -x + 2y + 3 = 0$$

параллельны, так как

$$2/-1 = -4/2.$$

e. Если прямые перпендикулярны, то их направляющие векторы тоже перпендикулярны. Применяя условие перпендикулярности двух векторов, мы получим условие перпендикулярности двух прямых, а именно

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{3}$$

Пример. Прямые

$$2x - 4y + 7 = 0, \quad 2x + y - 3 = 0$$

перпендикулярны ввиду того, что

$$2 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 = 0.$$

В связи с условиями параллельности и перпендикулярности решим следующие две задачи.

f. Через точку $(x_1; y_1)$ провести прямую параллельно данной прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Решение проводится так. Так как искомая прямая параллельна данной, то за ее направляющий вектор можно взять тот же самый, что и у данной прямой, т. е. вектор с проекциями A и B. А тогда уравнение искомой прямой напишется в форме (§ 1)

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0.$$

Пример. Уравнение прямой, проходящей через точку (1; 3) параллельно прямой

$$2x - 7y + 2 = 0,$$

будет следующее:

$$2(x - 1) - 7(y - 3) = 0.$$

g. Через точку $(x_1; y_1)$ провести прямую перпендикулярно данной прямой

$$Ax + By + C = 0,$$

Здесь за направляющий вектор уже не годится брать вектор с проекциями A и B, а надо взять вектор, ему перпендикулярный. Проекции A_1 и B_1 этого вектора должны быть выбраны, следовательно, согласно условию перпендикулярности обоих векторов, т. е. согласно условию

$$AA_1 + BB_1 = 0.$$

Выполнить же это условие можно бесчисленным множеством способов, так как здесь одно уравнение с двумя неизвестными A_1 и B_1. Но проще всего взять $A_1 = B$; $B_1 = -A$ или же $A_1 = -B$; $B_1 = A$. Тогда уравнение искомой прямой напишется в форме

$$B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$$

или

$$-B(x - x_1) + A(y - y_1) = 0.$$

Пример. Уравнение прямой, проходящей через точку (—7; 2) и перпендикулярной прямой

$$4x - 3y + 9 = 0,$$

будет следующее (по второй формуле):

$$3(x + 7) + 4(y - 2) = 0.$$

h. В том случае, когда прямые заданы уравнениями вида

$$y = k_1x + b_1, \quad y = k_2x + b_2,$$

переписывая эти уравнения иначе, имеем

$$k_1x - y + b_1 = 0, \quad k_2x - y + b_2 = 0,$$

так что

$$A_1 = k_1, \ B_1 = -1; \quad A_2 = k_2, \ B_2 = -1.$$

Применяя формулы (1) — (3), для тангенса угла между прямыми получим выражение

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{k_1 k_2 + 1}.$$

Для условия параллельности имеем $k_1/k_2 = -1/-1$, т. е.

$$k_1 = k_2. \qquad (2^*)$$

Наконец, для условия перпендикулярности имеем $k_1 k_2 + 1 = 0$ или же

$$k_2 = -1/k_1. \qquad (3^*)$$

k. Как нам о том говорит формула (2*), условие параллельности двух прямых в этом случае заключается в том, что угловые коэффициенты прямых равны.

Формула (3*) говорит о том, что условие перпендикулярности заключается в том, что угловые коэффициенты прямых обратны друг другу и противоположны по знаку.

Примеры. Угол между прямыми

$$y = 4x - 7, \quad y = 3x + 2$$

дается формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4-3}{4 \cdot 3 + 1} = \frac{1}{13}.$$

Прямые

$$y = 2x + 3, \quad y = 2x + 1$$

параллельны.

Прямые

$$y = 4x - 2, \quad y = -0{,}25x + 1$$

перпендикулярны ввиду того, что $-0{,}25 = -1/4$.

§ 7. Условие совпадения прямых

Выясним теперь, при каком условии уравнения

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \qquad (1)$$

определяют одну и ту же прямую.

Очевидно, совпадение двух прямых есть частный случай параллельности. Поэтому должно быть

$$A_1/A_2 = B_1/B_2. \qquad (2)$$

Обозначая общую величину обоих отношений через t, имеем

$$A_1/A_2 = t, \quad B_1/B_2 = t, \qquad (3)$$

откуда

$$A_1 = A_2t, \ B_1 = B_2t.$$

Тогда верхнее уравнение системы (1) примет вид

$$A_2tx + B_2ty + C_1 = 0,$$

или же

$$A_2x + B_2y + \frac{C_1}{t} = 0. \tag{4}$$

Если уравнения (1) изображают одну и ту же прямую, то одни и те же координаты x, y удовлетворяют как уравнению (4), так и второму уравнению системы (1). Поэтому, если вычтем из уравнения (4) второе уравнение (1), то получим $C_1/t - C_2 = 0$, или $C_1 = C_2t$, или же $C_1/C_2 = t$. Сопоставляя это с (3), находим

$$A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2.$$

Это и есть условие совпадения двух прямых, которое говорит нам о том, что коэффициенты совпадающих прямых пропорциональны, т. е. одно уравнение получается из второго путем умножения на некоторое постоянное число (число $t \neq 0$).

П р и м е р. Прямые

$$2x - 7y + 1 = 0, \quad 10x - 35y + 5 = 0$$

совпадают, так как имеет место равенство

$$2/10 = -7/-35 = 1/5.$$

Здесь первое уравнение получается из второго умножением на постоянное число $t = 1/5$.

§ 8. Пересечение прямых

Точка пересечения прямых

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \tag{1}$$

есть общая точка обоих прямых. Она, следовательно, должна одновременно удовлетворять уравнениям обеих прямых, т. е. системе (1).

Обратно, если точка удовлетворяет системе (1), то тем самым она удовлетворяет каждому уравнению системы в отдельности. Следовательно, она лежит на каждой из данных прямых, т. е. является точкой их пересечения.

Итак, координаты точки пересечения обеих прямых получаются совместным решением уравнений (1) этих прямых.

Однако следует помнить, что пересекаются в одной точке только непараллельные прямые, т. е. прямые, для которых

$$A_1/A_2 \text{ не равно } B_1/B_2.$$

Пример 1. Найдем точку пересечения прямых

$$x - 2y - 1 = 0, \quad 2x + y - 2 = 0. \qquad (2)$$

Здесь 1/2 не равно —2/1, следовательно, прямые пересекаются в одной точке. Для разыскания координат $(x;\ y)$ этой точки решаем уравнения (2) совместно. Умножая второе на 2 и складывая с первым, получим

$$\begin{array}{r} x - 2y - 1 = 0 \\ + \; 4x + 2y - 4 = 0 \\ \hline 5x \qquad - 5 = 0, \end{array} \quad x = 5.$$

Далее, из второго уравнения получим

$$y = 2 - 2x = 2 - 10 = -8.$$

Итак, прямые пересекаются в точке (5; —8).

Пример 2. Прямые

$$2x + y - 2 = 0, \quad 4x + 2y + 1 = 0$$

параллельны, но не совпадают ввиду того, что 2/4 = 1/2, но не равно —2/1. Точек пересечения, следовательно, нет.

Пример 3. Прямые

$$2x - y + 2 = 0, \; 4x - 2y + 4 = 0$$

сливаются в одну ввиду того, что

$$2/4 = -1/-2 = 2/4.$$

Можно сказать, что эти прямые имеют бесчисленное множество точек пересечения, так как все точки обеих прямых являются общими.

§ 9. Расстояние от точки до прямой

а. Найдем расстояние d от точки M_1 $(x_1;\ y_1)$ до прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Известно, что *расстоянием от точки до прямой* называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. Пусть M $(x;\ y)$ — основание этого перпендикуляра. Тогда длина вектора $\overline{MM_1}$ и будет искомым расстоянием.

Рассмотрим скалярное произведение направляющего вектора $\overline{PQ}$ и вектора $\overline{MM_1}$ (рис. 54).

Так как эти векторы параллельны, то, смотря по тому, будут ли они направлены в одну или же в противоположные стороны (что тоже может случиться), их скалярное произведение будет $rd \cos 0^\circ = rd$ или же $rd \cos 180^\circ = -rd$.

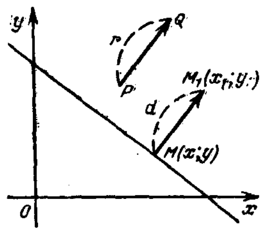


Рис. 54

С другой стороны, то же самое скалярное произведение равно сумме произведений проекций A и B вектора $\overline{PQ}$ на соответствующие проекции $x_1 - x$ и $y_1 - y$ вектора $\overline{MM_1}$, т. е.

$$\pm rd = A(x_1 - x) + B(y_1 - y) = \\ = Ax_1 + By_1 + C - (Ax + By + C).$$

Но так как точка $M(x;\ y)$ лежит на нашей прямой, то

$$Ax + By + C = 0,$$

и потому

$$\pm rd = Ax_1 + By_1 + C.$$

Отсюда, замечая, что $r = \sqrt{A^2 + B^2}$, и помня, что d, как расстояние, должно быть положительным, имеем

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

b. В частности, расстояние d от начала координат до прямой

$$Ax + By + C = 0$$

получим, если возьмем $M_1(0;\ 0)$.

Будем иметь

$$d = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

c. Примеры. Расстояние от точки (1; 2) до прямой

$$3x - 4y - 10 = 0$$

будет

$$d = \frac{|3\cdot 1 - 4\cdot 2 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3.$$

Расстояние от начала координат до прямой

$$5x + 12y + 26 = 0$$

будет

$$d=\frac{|26|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{26}{13}=2.$$

§ 10. Другой подход к выводу уравнения прямой

а. К выводу уравнения прямой можно подойти несколько иначе, а именно, задавая направляющий вектор не перпендикулярно прямой, а параллельно ей.

Пусть дана точка $M_1(x_1;\ y_1)$ и вектор с проекциями l и m, параллельный данной прямой.

Этот вектор будем также называть *направляющим*. В частности, он может находиться на самой прямой. На рис. 55 этот вектор лежит именно на той прямой, которую он должен направлять. Возьмем на прямой произвольную точку $M(x;\ y)$. Где бы эта точка на прямой ни находилась, вектор $\overline{M_1M}$ будет параллелен направляющему вектору (или будет с ним совпадать). Поэтому проекции $x-x_1$ и $y-y_1$ этого вектора будут всегда пропорциональны проекциям l и m направляющего вектора.

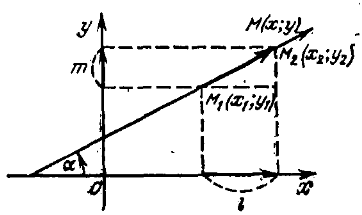


Рис. 55

Следовательно, будем иметь уравнение

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}, \qquad (1)$$

которое будет выполняться для любой точки, лежащей на прямой, и не будет выполняться для точек, на ней не лежащих. Таким образом, полученное равенство (1) есть искомое уравнение прямой.

b. Уравнение (1) можно представить также в таком виде:

$$y-y_1=\frac{m}{l}(x-x_1).$$

Нетрудно видеть, что

$$m/l=\operatorname{tg}\alpha,$$

где α есть угол наклона прямой линии к оси абсцисс, так что m/l равно угловому коэффициенту прямой, который мы ранее условились обозначать через k.

Следовательно, уравнение (1) можно написать в виде

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (2)$$

Эта форма уравнения называется *уравнением прямой, проходящей через заданную точку, с заданным угловым коэффициентом.*

c. Если мы точку $M_1(x_1;\ y_1)$ будем считать неподвижной, а угловой коэффициент k переменным, то наша прямая будет вращаться вокруг точки M.

Если k пробежит все числовые значения от $-\infty$ до $+\infty$, то наша прямая сделает полный оборот вокруг точки M_1.

Таким образом, при произвольном k уравнение (2) выражает любую прямую, проходящую через точку M_1 (кроме прямой, параллельной оси ординат; ее уравнение $x = x_1$). Поэтому при произвольном k уравнение (2) носит название

«уравнение пучка прямых с центром в точке $M_1(x_1;\ y_1)$».

Если числу k задать числовое значение, то мы из пучка выхватываем ту прямую, угловой коэффициент которой равен данному числу.

§ 11. Прямая, проходящая через две точки

Как известно, прямая вполне определяется двумя своими точками. Поэтому если задать две ее точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$, то прямая вполне определена (см. рис. 55).

Нетрудно понять, что вектор $\overline{M_1M_2}$ можно принять за направляющий для данной прямой. Тогда будем иметь

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), получим уравнение

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

которое называется *уравнением прямой, проходящей через две точки.*

Пример 1. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1;\ 3)$ и $M_2(-2;\ 5)$.

Применяя уравнение (1), получим

$$\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-3}{5-3}, \quad \frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{2}, \quad 2x - 2 = -3y + 9,$$

$$2x + 3y - 11 = 0.$$

Пример 2. Написать уравнение прямой, проходящей через точки M_1 (2; 1) и M_2 (4; 1).

Поступая, как в предыдущем примере, получим

$$\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-1}{1-1}, \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{0}.$$

Последний результат кажется нелепым, так как на нуль делить нельзя, тем не менее здесь мы имеем верный результат.

Действительно, если мы обратим внимание на ординаты данных точек, то сразу сообразим, что наша прямая параллельна оси абсцисс, так как ординаты обоих точек равны. А если так, то и у всех других точек этой прямой независимо от их абсцисс ординаты равны. Следовательно, уравнение прямой будет иметь вид $y = 1$, или $y - 1 = 0$. Однако то же самое мы получим, упростив последнее полученное уравнение:

$$(x-2)\cdot 0 = 2(y-1), \quad y - 1 = 0.$$

§ 12. Уравнение прямой в отрезках на осях

a. В предыдущем параграфе мы получили уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Особенно интересный вид получится для уравнения прямой, если эти точки даны на координатных осях. Пусть имеем такие две точки: M_1 (a; 0), M_2 (0; b). Тогда мы получим $\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}$, или $\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}$, откуда

$$xb - ab = -ay, \quad xb + ay = ab.$$

Или, разделив обе части уравнения на ab, окончательно получим

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Числа a и b суть не что иное, как величины отрезков, которые прямая отсекает на координатных осях. Поэтому уравнение (1) называется *уравнением прямой в отрезках на осях*.

b. Если уравнение прямой задано в общей форме

$$Ax + By + C = 0$$

и нам было бы желательно его иметь в форме с отрезками на осях, то мы можем просто найти величины этих отрезков так, как это указано в пункте е § 5, а затем подставить в уравнение (1) § 10.

Пример. Привести уравнение

$$2x - 3y - 5 = 0$$

к виду с отрезками на осях.

Находим a и b. Очевидно,

$$a = 5/2, \quad b = -5/3.$$

Следовательно, искомое уравнение будет

$$\frac{x}{^5/_2} + \frac{y}{-^5/_3} = 1.$$

§ 13. Задачи на прямую линию

1a. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M (1; —3), если известно, что перпендикулярный к прямой направляющий вектор имеет проекции $A = 2$, $B = 7$. *Ответ*: $2x + 7y + 19 = 0$.

1b. Написать уравнение прямой, если известно, что она проходит через начало координат, а ее направляющий вектор имеет проекции $A = 0,1$, $B = -0,3$. *Ответ*: $x - 3y = 0$.

2a. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M (0; 5), если известно, что проекция направляющего вектора на ось абсцисс в три раза больше его проекции на ось ординат. *Ответ*: $3x + y - 5 = 0$.

2b. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M (1; 1), если ее направляющий вектор является биссектрисой второго координатного угла. *Ответ*: $-x + y = 0$.

3a. Каковы проекции направляющего вектора для прямой

$$8x - 15y - 1 = 0$$

и какова длина этого вектора? *Ответ*: длина вектора равна 17.

3b. Что произойдет с направляющим вектором прямой

$$Ax + By + C = 0,$$

если обе части уравнения умножить на какое-либо положительное число N? *Ответ*: направляющий вектор изменит свою длину в N раз, но направление его не изменится.

4a. Проверить, лежит ли точка (5; 7) на прямой $2x + 3y - 31 = 0$. *Ответ*: лежит.

4b. На прямой $16x - y + 1 = 0$ найти точку, у которой абсцисса $x = 1$. *Ответ*: $(1; 17)$.

5a. Найти на прямой $x - 5y + 4 = 0$ такую точку, у которой абсцисса равна ординате. *Ответ*: $(1; 1)$.

5b. На прямой $x - y - 81 = 0$ найти такую точку, у которой абсцисса в десять раз больше ординаты. *Ответ*: $(90; 9)$.

6a. На прямой $x - 2y = 0$ найти точку, у которой абсцисса на 4 больше ординаты. *Ответ*: $(8; 4)$.

6b. На прямой $x - 4y - 6 = 0$ найти точку, у которой ордината $y = 5$. *Ответ*: $(26; 5)$.

7a. На прямой $2x - 3y + 3 = 0$ найти точку, равноудаленную от точек $(1; 4)$ и $(2; 1)$. *Ответ*: $(3; 3)$.

7b. На прямой $2x - y - 1 = 0$ найти точку, равноотстоящую от точек $(1; 1)$ и $(4; 2)$. *Ответ*: $(2; 3)$.

8a. Построить прямые:

$$x - 3 = 0; \quad y = 2; \quad 2x + 1 = 0;$$
$$4y - 8 = 0; \quad 3y + 10 = 0; \quad 13 - y = 0.$$

8b. Построить прямые:

$$5x - 6y = 0; \quad 2x + 7y = 0; \quad 2x + 3y = 0.$$

9a. Какая прямая имеет уравнение $x = 0$?

9b. Какая прямая имеет уравнение $6y = 0$?

10a. Построить прямые:

$$x + 2y - 4 = 0; \quad 2x + 3y + 5 = 0; \quad x - 2y - 7 = 0;$$
$$x - 2y - 8 = 0.$$

10b. Построить прямые:

$$y = 2x + 3; \quad y = 3x - 2; \quad y = -x - 1;$$
$$y + x = 0; \quad y - x = 0.$$

11a. Вычислить тангенс острого угла между прямыми $3x - 2y + 1 = 0$, $2x + 5y - 2 = 0$. *Ответ*: $\operatorname{tg} \varphi = 19/4$.

11b. Вычислить тангенс острого угла между прямыми $x + y + 2 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$. *Ответ*: $\operatorname{tg} \varphi = 5$.

12a. Найти острый угол между прямыми $2x + y + 7 = 0$, $x + 3y - 4 = 0$. *Ответ*: $\varphi = 45°$.

12b. Найти острый угол между прямыми $y - x\sqrt{3} + 9 = 0$, $y + x\sqrt{3} + 5 = 0$. *Ответ*: $\varphi = 60°$.

13a. Привести к виду с угловым коэффициентом уравнения прямых:

$$2x + 2y - 1 = 0; \quad 2x + 3y + 9 = 0; \quad 4x - 2y + 5 = 0.$$

13b. Найти острый угол между прямыми $x = 0$, $x + y + 2 = 0$. *Ответ*: $\varphi = 45°$.

14a. Вычислить тангенс острого угла между прямыми $y = 2x + 1$, $y = 3x + 5$. *Ответ*: $\operatorname{tg} \varphi = 1/7$.

14b. Вычислить тангенс острого угла между прямыми

$$y = \frac{a+b}{a-b} x + c, \quad y = \frac{2b-a}{2a+b} x + d.$$

Ответ: $\operatorname{tg} \varphi = 3$.

14c. Вычислить тангенс угла между прямыми $3x - 2y + 1 = 0$, $2x + 5y - 2 = 0$. *Ответ*: $\operatorname{tg} \varphi = -19/4$.

15a. Будут ли параллельны прямые $5x - 9{,}5y + 5 = 0$, $-7{,}5x + 14{,}25y + 1 = 0$?

15b. Будут ли параллельны прямые $y = 3x + b_1$, $y = 3x + b_2$?

16a. Будут ли перпендикулярны прямые

$$2x - 7y + 6 = 0, \quad 14x + 4y + 3 = 0?$$

16b. Будут ли перпендикулярны прямые

$$y = 4x + 3, \; y = -0{,}25x + 17?$$

17a. Даны прямые:

$$1)\ 2x - y + 7 = 0; \quad 2)\ x - \frac{1}{2} y + 1 = 0;$$

$$3)\ 3x - 4y + 1 = 0; \quad 4)\ 4x + 3y - 1 = 0.$$

Какие из них параллельны и какие перпендикулярны?

17b. Почему следует считать, что прямые

$$Ax + By + C = 0, \quad A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

параллельны?

17c. Почему следует считать, что прямые

$$Ax + By + C = 0, \quad B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$$

перпендикулярны?

18a. Через точку (5; 2) провести прямую параллельно прямой $3x - 2y + 5 = 0$. *Ответ*: $3x - 2y - 11 = 0$.

18b. Написать уравнение прямой, проходящей через точку (4; −1) параллельно прямой $2x - 3y + 1 = 0$. *Ответ*: $2x - 3y - 11 = 0$.

19a. Через точку (1; 2) провести прямую перпендикулярно прямой $4x - y + 2 = 0$. *Ответ*: $x + 4y - 9 = 0$.

19b. Через точку (1; 2) провести прямую перпендикулярно прямой $2x + 4y - 1 = 0$. *Ответ*: $2x - y = 0$.

20a. Через точку (1; 3) провести прямую параллельно прямой $y = 2x + 7$. *Ответ*: $y = 2x + 1$.

20b. Через точку $(3; -1)$ провести прямую перпендикулярно прямой $y = 3x - 1$. *Ответ*: $y = -x/3$.

21a. Через точку $(2; -1)$ провести прямую под углом $45°$ к прямой $x - 2y - 1 = 0$. *Ответ*: $3x - y - 7 = 0$.

21b. Через точку $(1; 2)$ провести прямую под углом $45°$ к прямой $y = x + 3$. *Ответ*: $x - 1 = 0$.

22a. Через точку $(1; 2)$ провести прямую, наклоненную к прямой $3x - 2y + 6 = 0$ под углом, тангенс которого равен 5. *Ответ*: $x + y - 3 = 0$.

22b. Через точку $(3; -4)$ провести прямую, наклоненную к прямой $y = -2x + 1$ под углом, тангенс которого равен 2. *Ответ*: $7y - x + 31 = 0$.

23a. Совпадают ли прямые $0{,}25x + 0{,}875y - 0{,}125 = 0$, $x + 3{,}5y - 0{,}5 = 0$? *Ответ*: совпадают.

23b. Совпадают ли прямые $7x - 35y + 42 = 0$, $3x - 15y + 17 = 0$? *Ответ*: не совпадают.

24a. Найти точку пересечения прямых $2x - 3y + 1 = 0$, $7x + 5y - 12 = 0$. *Ответ*: $(1; 1)$.

24b. Найти точку пересечения прямых $ax + by = 1$, $a^2x - b^2y = a$. *Ответ*: $(1/a; 0)$.

25a. Пересекаются ли прямые $Ax + By + C_1 = 0$, $Ax + By + C_2 = 0$, $C_2 \neq C_1$? Если нет, то почему?

25b. Можно ли сказать, что совпадающие прямые пересекаются? Если да, то сколько точек пересечения имеют совпадающие прямые?

26a. Найти координаты вершин треугольника, если стороны заданы уравнениями $x - 2y + 3 = 0$, $2x - y - 3 = 0$, $x + y - 3 = 0$. *Ответ*: $(1; 2)$, $(2; 1)$, $(3; 3)$.

26b. Найти вершины треугольника, если его стороны заданы уравнениями $2x - 1 = 0$, $2y - 1 = 0$, $x + y = 0$. *Ответ*: $(1/2; 1/2)$, $(1/2; -1/2)$, $(-1/2; 1/2)$.

27a. Через точку пересечения прямых $x = y + 1 = 0$, $x + y = 0$ провести прямую параллельно прямой $x + 2y + 3 = 0$. *Ответ*: $2x + 4y - 1 = 0$.

27b. Через точку пересечения прямых $x - y + 1 = 0$, $x + y = 0$ провести прямую перпендикулярно прямой $x + 2y + 3 = 0$. *Ответ*: $4x - 2y + 3 = 0$.

28a. Написать уравнение высоты треугольника, образованного прямыми $x + y - 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$, $x + 2y + 5 = 0$, если известно, что высота опущена из точки пересечения первых двух прямых на третью. *Ответ*: $2x - y + 1 = 0$.

28b. Через точку пересечения прямых $x - y = 0$, $x + y + 1 = 0$ провести прямую параллельно прямой $2x + 3y - C = 0$. *Ответ*: $4x + 6y + 5 = 0$.

29. Через точку пересечения прямых $y = 2x - 1$, $3x - 2y = 0$ провести прямую перпендикулярно прямой $6x - 7 = 0$. *Ответ*: $y - 3 = 0$.

30a. Найти расстояние от точки $(1; 1)$ до прямой $3x - 4y + 6 = 0$. *Ответ*: $d = 1$.

30b. Доказать, что расстояния от точки $(2; 1)$ до прямых $3x - 4y + 8 = 0$ и $5x - 12y + 28 = 0$ одинаковы (равны 2).

31a. Доказать, что расстояние между двумя параллельными прямыми $Ax + By + C_1 = 0$, $Ax + By + C_2 = 0$ выражается формулой $L = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

31b. Найти расстояние между параллельными прямыми $5x + 12y - 12 = 0$, $5x + 12y + 1 = 0$. *Ответ*: $L = 1$.

31c. Найти расстояние между параллельными прямыми $8x - 15y + 14 = 0$, $8x - 15y - 20 = 0$. *Ответ*: $L = 2$.

32a. Написать уравнение прямой, параллельной прямым $2x - 3y + 7 = 0$ и $2x - 3y + 5 = 0$ и проходящей посередине между ними. *Ответ*: $2x - 3y + 6 = 0$.

32b. Написать уравнение прямой, параллельной прямым $4x - 3y + 16 = 0$, $4x - 3y + 7 = 0$ и делящей расстояние между ними в отношении $2:1$ в направлении от первой прямой ко второй. *Ответ*: $4x - 3y + 10 = 0$.

32c. Провести прямую параллельно прямым

$$x - 2y + 6 = 0, \quad 2x - 4y + 9 = 0,$$

расположенную между ними так, чтобы расстояние ее до первой прямой было в два раза больше расстояния до второй прямой. *Ответ*: $x - 2y + 5 = 0$.

33. Проследить за тем, какой знак имеет выражение

$$f(x, y) = Ax + By + C$$

для различных точек плоскости:

a) Для точек, лежащих выше прямой $Ax + By + C = 0$. *Ответ*: $+$ при $B > 0$, $-$ при $B < 0$.

b) Для точек, лежащих ниже этой прямой. *Ответ*: $-$ при $B > 0$, $+$ при $B < 0$.

c) Для точек, лежащих справа от этой прямой. *Ответ*: $+$ при $A > 0$, $-$ при $A < 0$.

d) Для точек, лежащих слева от этой прямой. *Ответ*: $-$ при $A > 0$, $+$ при $A < 0$.

e) Для точек, лежащих по ту же сторону от прямой, что и начало координат. *Ответ*: $+$ при $C > 0$, $-$ при $C < 0$.

f) Для точек, лежащих по другую сторону от начала координат относительно этой прямой. *Ответ*: — при $C > 0$, + при $C < 0$.

34a. Узнать, лежит ли точка (1; 2) выше или ниже прямой $x + y - 2 = 0$. *Ответ*: выше.

34b. То же для точки (1; 3) относительно прямой $4x - 2y + 1 = 0$. *Ответ*: выше.

34c. Лежит ли точка (3; 7) справа или слева от прямой $4x - 5y + 9 = 0$? *Ответ*: слева.

35a. Лежат ли точка (1; 1) и начало координат по одну сторону или по разные стороны относительно прямой $x - 3y + 4 = 0$? *Ответ*: по одну сторону.

35b. Лежат ли точки (1; 2) и (3; 4) по одну или по разные стороны от прямой $x + 2y - 6 = 0$? *Ответ*: по разные стороны.

36. Доказать, что точка (2; 2) находится внутри треугольника, заданного уравнениями сторон $x + 2y - 5 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$, $3x - 2y - 7 = 0$.

37a. Доказать, что если даны прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то уравнения обеих биссектрис двух смежных углов, образованных этими прямыми, будут

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

37b. Написать уравнение биссектрисы того угла между прямыми $4x - 3y + 3 = 0$, $3x - 4y + 2 = 0$, в котором лежит точка (1; 2). *Ответ*: $7x - 7y + 5 = 0$.

38. Через точку (1; 1) провести прямую, равноудаленную от точек (6; 1) и (2; 5) и проходящую между ними. *Ответ*: $2x - 3y + 1 = 0$.

39a. Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до прямой, исходя из тех соображений, что удвоенная площадь треугольника $M_1M_2M_3$, вершинами которого служат точки M_2 и M_3 пересечения прямой с осями и данная точка M_1, выражается произведением искомого расстояния на длину M_2M_3.

39b. Доказать, что расстояние p от начала координат до прямой $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ выражается формулой

$$p = \frac{mn}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

40. Написать уравнение прямой, проходящей через точку (1; —1) и отстоящей от точки (4; 0) на расстояние 1. *Ответ*: две прямые $y + 1 = 0$, $3x - 4y - 7 = 0$.

41. Через точку (1; 0) провести прямую, проходящую над точкой (10; 3) на расстоянии 3 единиц от последней. *Ответ*: $3x - 4y - 3 = 0$.

42. Написать уравнение прямой, параллельной прямой

$$3x - 4y + 5 = 0$$

и отстоящей от нее на расстояние 2 единиц. *Ответ*: две прямые $3x - 4y + 15 = 0$, $3x - 4y - 5 = 0$.

43a. Найти отражение точки (1; 8) относительно прямой $3x - 4y + 4 = 0$, как в зеркале. *Ответ*: (7, 0). Указание. *Отражением точки* M относительно прямой P_1P называется точка M_1, лежащая на продолжении перпендикуляра, опущенного на прямую из точки M, причем прямая делит расстояние между M и M_1 пополам.

43b. Найти отражение точки (3; 3) относительно прямой $3y - 2x = 16$. *Ответ*: (—1; 9).

44a. Написать уравнения сторон треугольника с вершинами (1; —1), (2; 0), (5; 1). *Ответ*: $x - y - 2 = 0$, $x - 2y - 3 = 0$, $x - 3y - 2 = 0$.

44b. Написать уравнения сторон треугольника, заданного вершинами (1; 3), (2; 4), (—1; 2). *Ответ*: $x - y + 2 = 0$, $2x - 3y + 8 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$.

45a. Провести прямую через точку (1; 2) и через точку пересечения прямых $3x - y + 1 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$. *Ответ*: $7x + y - 9 = 0$.

45b. Провести прямую через точку (1; 1) и точку пересечения прямых $x - y + 1 = 0$, $x + y = 0$. *Ответ*: $x - 3y + 2 = 0$.

45c. Через точку пересечения прямых $x - y = 0$, $x - 4y + 1 = 0$ провести прямую так, чтобы ее начальная ордината (отрезок на оси ординат) равнялась 1. *Ответ*: $2x + y - 1 = 0$.

46. Даны вершины треугольника M_1 (1; 2), M_2 (2; 3), M_3 (3; 1). Написать уравнение высоты, опущенной из точки M_1. *Ответ*: $x - 2y - 3 = 0$.

47. Найти площадь треугольника по координатам его вершин M_1 $(x_1; y_1)$, M_2 $(x_2; y_2)$, M_3 $(x_3; y_3)$, вычисляя длину стороны и опущенного на нее перпендикуляра. *Ответ*:

$$S = + \left[\frac{1}{2} (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \right].$$

48a. Привести к виду в отрезках на осях уравнение $2x - 5y - 15 = 0$ и построить эту прямую. *Ответ*: $\frac{x}{7,5} + \frac{y}{-3} = 1$.

48b. Привести к виду в отрезках на осях, а затем построить прямые:

$$6x + 5y - 30 = 0, \quad 2x + 3y + 6 = 0,$$
$$y = 4x + 8, \quad 3x - 4y - 60 = 0.$$

49. Отрезки, отсекаемые прямой на осях, суть $a = -2$, $b = 1$. Написать уравнение прямой в форме с угловым коэффициентом. *Ответ*: $y = \frac{1}{2}x + 1$.

50. Написать уравнение прямой в форме в отрезках на осях, если дано, что она наклонена к оси абсцисс под углом 45° и отсекает на оси ординат отрезок длиной 1. *Ответ*: $\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1$.

51a. Через точку (2; 1) провести прямую так, чтобы она отсекала от первого координатного угла площадь, равную 4. *Ответ*: $x + 2y - 4 = 0$.

51b. Написать уравнение прямой, параллельной прямой $2x + 5y - 1 = 0$ и отсекающей от первого координатного угла площадь, равную 5. *Ответ*: $2x + 5y - 10 = 0$.

52. Даны уравнения сторон треугольника $M_1M_2M_3$: $(M_1M_2)\ x + 6y - 5 = 0$, $(M_2M_3)\ x + y - 5 = 0$, $(M_3M_1)\ 2x - 3y + 5 = 0$.

a) Найти вершины. *Ответ*: $M_1(-1; 1)$, $M_2(5; 0)$, $M_3(2; 3)$.

b) Найти центр масс. *Ответ*: (2; 4/3).

c) Найти уравнения медиан. *Ответ*: $x - 9y + 10 = 0$, $4x + 9y - 20 = 0$, $x - 2 = 0$.

d) Найти уравнения высот. *Ответ*: $x - y + 2 = 0$, $3x + 2y - 15 = 0$, $6x - y - 9 = 0$.

e) Найти прямые, проходящие через вершины параллельно сторонам. *Ответ*: $x + y = 0$, $2x - 3y - 10 = 0$, $x + 6y - 20 = 0$.

f) Вычислить периметр. *Ответ*: периметр равен $\sqrt{37} + \sqrt{18} + \sqrt{13}$.

g) Вычислить длины высот. *Ответ*: $h_1 = 5/\sqrt{2}$, $h_2 = 15/\sqrt{13}$, $h_3 = 15/\sqrt{37}$.

h) Вычислить площадь этого треугольника. *Ответ*: 15/2.

k) Найти центр и радиус описанного круга. *Ответ*: центр $(19/10; -1/10)$, $R = \sqrt{9,62}$.

l) Вычислить тангенсы углов этого треугольника. *Ответ*: $\operatorname{tg} \angle M_1 = 15/16$, $\operatorname{tg} \angle M_2 = 5/7$, $\operatorname{tg} \angle M_3 = -5$.

53. Световой луч, падая из точки $(-3; 4)$ и отражаясь от прямой $y - x = 0$, проходит затем через точку $(-2; 5)$. Написать уравнение луча падающего и луча отраженного. *Ответ*: $3x + 4y - 7 = 0$, $4x + 3y - 7 = 0$.

54. Доказать, что в равностороннем треугольнике сумма расстояний от любой внутренней точки до сторон постоянна, а именно равна стороне, умноженной на $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

55. Даны две точки M_1 $(1; 2)$, M_2 $(6; 3)$. На оси абсцисс найти точку M так, чтобы угол M_1MM_2 был прямой. (Решить: a) не пользуясь уравнением прямой, b) пользуясь им.) *Ответ*: $(4; 0)$.

56a. Основание равнобедренного треугольника имеет уравнение $x + 7y - 21 = 0$. Одна из боковых сторон имеет уравнение $4x + 3y - 34 = 0$. Найти уравнение другой боковой стороны, если известно, что она проходит через точку $(8; 9)$. *Ответ*: $3x - 4y + 12 = 0$.

56b. Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $x - y - 3 = 0$, $x - 7y + 3 = 0$ и точка $(1; 2)$ на его основании. Написать уравнение основания. *Ответ*: $x - 2y + 3 = 0$.

57. Написать уравнение прямой, равноудаленной от точек $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$. *Ответ*: $(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y + \frac{x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2}{2} = 0$.

Глава 5

ПРОСТЕЙШИЕ КРИВЫЕ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

§ 1. Окружность

a. В качестве следующего примера отыскания уравнения геометрического места точек мы рассмотрим окружность. Очевидно, окружность будет вполне определена, если дан ее центр $C(m; n)$ и радиус a.

Пусть $M(x; y)$ — какая-либо точка плоскости (рис. 56); квадрат расстояния от нее до центра $C(m; n)$ окружности выражается величиной

$$(x-m)^2+(y-n)^2.$$

Эта величина будет равна a^2 (квадрату радиуса), если точка M лежит на окружности, она будет меньше a^2, если точка M расположена внутри окружности, и будет больше a^2, если точка M расположена вне окружности. Таким образом, для всех точек окружности имеем уравнение

$$(x-m)^2+(y-n)^2=a^2.$$

Для точек же, не лежащих на окружности, оно не будет верно.

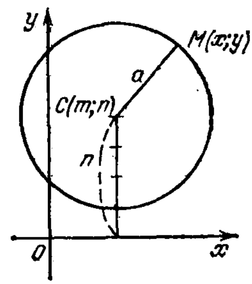


Рис. 56

Таким образом, это уравнение и есть *уравнение окружности*.

Например, уравнение окружности радиуса 3 с центром в точке (2; 4), изображенной на рис. 56, будет

$$(x-2)^2+(y-4)^2=9.$$

b. В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то $m=0$ и $n=0$. Уравнение окружности принимает вид

$$x^2+y^2=a^2.$$

Это уравнение иногда полезно представить и в явной форме:

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Наличие двух знаков в правой части уравнения говорит о том, что каждой абсциссе отвечают две точки окружности M_1 и M_2, у которых ординаты равны по длине, но имеют различные знаки. Поэтому данная окружность симметрична относительно оси абсцисс.

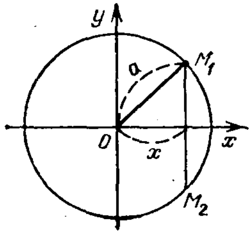


Рис. 57.

Например, уравнение окружности, изображенной на рис. 57 ($a = 2$), будет

$$x^2 + y^2 = 4,$$

или в явной форме $y = \pm \sqrt{4 - x^2}$.

§ 2. Эллипс. Построение посредством нити. Зависимость между полуосями и полуфокусным расстоянием

a. *Эллипсом* называется геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2, называемых его *фокусами*, есть величина постоянная.

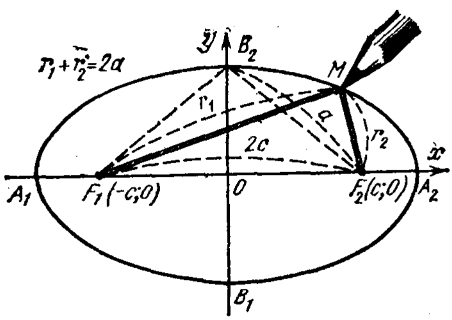


Рис. 58

Постоянную сумму расстояний обозначим через $2a$, так что для любой точки M эллипса имеем (рис. 58).

$$r_1 + r_2 = 2a. \qquad (1)$$

b. Построение эллипса можно осуществить посредством нити длиной $2a$, закрепленной концами в фокусах.

Зацепив нить острием карандаша и двигая его так, чтобы нить все время была в натянутом состоянии, мы заставим острие вычертить эллипс.

Действительно, при любом положении острия карандаша сумма расстояний его до фокусов равна длине нити, т. е. $2a$.

Середина расстояния между фокусами называется *центром эллипса*, так как относительно этой точки эллипс симметричен.

Длина F_1F_2 называется *фокусным расстоянием*, обозначим его через $2c$; а половина этого расстояния называется *полуфокусным расстоянием*, оно равно c.

Весьма удобно центр эллипса принять за начало координат, а за ось абсцисс принять прямую, проходящую через фокусы (как на рис. 58). Тогда координаты фокусов будут $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.

Всякий отрезок, соединяющий две точки эллипса, если он проходит через центр, называется *диаметром эллипса*. Рассматривая форму эллипса, мы видим, что наибольший диаметр проходит через фокусы. Этот диаметр A_1A_2 называется *большой осью эллипса*.

Нетрудно показать, что длина большой оси эллипса равна $2a$.

В самом деле, основное свойство эллипса (1), справедливое для всех его точек, применимо, между прочим, и для точек A_1 и A_2. Поэтому

$$F_1A_2 + F_2A_2 = 2a. \tag{2}$$

Но из рис. 58 видно, что

$$F_1A_2 = OA_2 + c, \quad F_2A_2 = OA_2 - c.$$

Ввиду этого из равенства (2) получаем $2OA_2 = 2a$ или $OA_2 = a$. Ясно, что и $A_1O = a$, так что

$$A_1A_2 = 2a.$$

Число a называется *большой полуосью*. Мы видим также, что наименьший диаметр эллипса перпендикулярен наибольшему, его называют *малой осью эллипса* и обозначают через $2b$, так что $B_1B_2 = 2b$.

Число b называется *малой полуосью*. Концы осей, т. е. точки A_1, A_2, B_1, B_2, называются *вершинами эллипса*.

Очевидно, основное свойство эллипса применимо и для вершин B_1 и B_2. Применяя его, например, к вершине B_2, получим $F_1B_2 + F_2B_2 = 2a$, а так как $F_1B_2 = F_2B_2$, то $2F_2B_2 = 2a$, или $F_2B_2 = a$.

После этого из прямоугольного треугольника OF_2B_2 найдем очень важное соотношение между полуосями и полуфокусным расстоянием эллипса:

$$b^2 + c^2 = a^2,$$

или же

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Нетрудно понять, что эллипсы могут быть различной формы, причем при заданной длине нити форма эллипса зависит только от расстояния между фокусами, т. е. при заданном a форма зависит только от c. Проследим эту зависимость.

Допустим, что фокусы сближаются и, наконец, сливаются с началом координат, тогда эллипс постепенно обратится в окружность, так как отрезки F_1M и F_2M будут стремиться совпасть, и когда они совпадут, нить, при помощи которой чертится эллипс, будет действовать наподобие циркуля.

Наоборот, если фокусы отодвигаются от начала координат, то эллипс постепенно сплющивается, и когда фокусы совпадут с концами большой оси, нить совпадет с осью абсцисс и острие будет двигаться только по отрезку A_1A_2, так что эллипс вырождается в прямолинейный отрезок A_1A_2.

Степень сжатия эллипса принято характеризовать дробью

$$e = c/a.$$

Эта дробь называется *эксцентриситетом эллипса*. Из вышесказанного следует, что он может изменяться от нуля до единицы, причем для окружности эксцентриситет

$$e = 0/a = 0,$$

а для эллипса, выродившегося в прямолинейный отрезок, $e = a/a = 1$.

§ 3. Построение эллипса по точкам

Данное выше построение эллипса посредством нити имеет свои неудобства. Поэтому мы дадим еще способ построения эллипса по точкам.

Согласно определению эллипса сумма расстояний r_1 и r_2 для всех его точек должна быть одна и та же. Значит, если мы, желая перейти от одной точки эллипса к другой, увеличиваем или уменьшаем r_1, то r_2, наоборот, должно уменьшиться или увеличиться и притом на такую же величину.

Основываясь на этом, построение эллипса можно осуществить так (рис. 59).

Сначала строим точки A_1 и A_2. Мы видим, что A_2 есть точка касания двух окружностей, из которых одна имеет

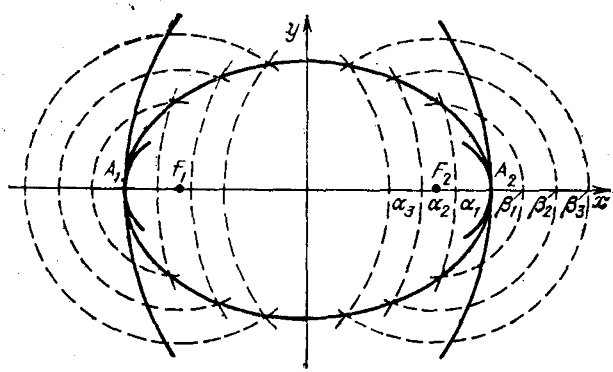


Рис. 59

центр в фокусе F_1 и радиус, равный F_1A_2, а другая — центр в фокусе F_2 и радиус F_2A_2.

Дальнейшие точки эллипса получим уже пересечением пар окружностей с центрами в фокусах F_1 и F_2 и радиусами r_1 и r_2, соответственно равными

$$r_1 = F_1\alpha_1, \quad r_2 = F_2\beta_1;$$

$$r_1 = F_1\alpha_2, \quad r_2 = F_2\beta_2;$$

$$r_1 = F_1\alpha_3, \quad r_2 = F_2\beta_3,$$

т. е. каждое новое значение r_2 больше, а новое значение r_1 меньше предыдущего на одну и ту же величину.

Разумеется, чем ближе друг к другу точки

$$\alpha_2, \alpha_1, A_2, \beta_1, \beta_2,$$

тем точнее наше построение.

Левая половина эллипса строится таким же путем, причем здесь мы будем начинать от точки A_1. Учащимся рекомендуется самим построить этим способом эллипс по данным: $a = 5$, $c = 4$.

§ 4. Уравнение эллипса

а. Для любой точки $M(x; y)$ эллипса (рис. 60) мы должны иметь

$$r_1 + r_2 = 2a. \qquad (1)$$

Очевидно, r_1 есть расстояние между точками $F_1(-c; 0)$ и $M(x; y)$, точно так же r_2 есть расстояние между точками $F_2(c; 0)$ и $M(x; y)$.

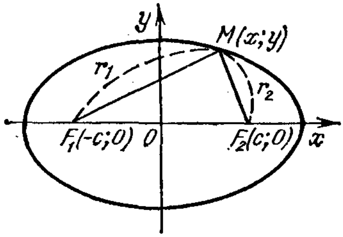


Рис. 60

Поэтому по формуле расстояния между двумя точками получим

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Подставляя эти выражения в равенство (1), получим

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (2)$$

Это и есть уравнение эллипса, но оно имеет довольно сложный вид, а потому мы постараемся его упростить. А именно, перенося первый радикал в правую часть, мы возведем в квадрат обе части уравнения, благодаря чему освободимся от одного радикала:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2.$$

Раскрывая скобки в левой и правой части и вычеркивая из обеих частей равенства одинаковые члены, получим

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2,$$

$$-2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2xc.$$

Теперь уединим оставшийся радикал и, сократив обе части уравнения на $4a$, получим

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4xc,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x. \qquad (3)$$

Последнее равенство понадобится нам в дальнейшем, но сейчас мы еще раз возведем в квадрат обе его части, чем избавимся от последнего радикала:

$$(x+c)^2+y^2=a^2+2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2,$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=a^2+2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2,$$

или, приводя подобные члены, имеем

$$x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2,\quad \frac{x^2(a^2-c^2)}{a^2}y^2=a^2-c^2.$$

Разделив обе части равенства на a^2-c^2, получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \tag{4}$$

Вспоминая теперь, что $a^2-c^2=b^2$, получим уравнение эллипса в простейшем виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{5}$$

Последнее уравнение получено путем упрощения основного уравнения (2), поэтому координаты каждой точки эллипса ему удовлетворяют. Следует, впрочем, заметить, что, производя упрощения, мы два раза позволили себе возводить обе части уравнения в квадрат. Это обстоятельство имеет немаловажное значение, так как из алгебры мы знаем, что при возведении уравнений в квадрат могут появиться посторонние решения, а потому не исключена возможность, что уравнению (3) удовлетворяют координаты каких-либо точек, не принадлежащих эллипсу. Однако в данном случае эти опасения не оправдываются. Мы сейчас покажем, что никакие точки, же принадлежащие эллипсу, не удовлетворяют уравнению (4). Для этого решим уравнение (4) относительно y. Тогда будем иметь

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \tag{6}$$

b. Рассматривая полученное уравнение, мы видим, что, во-первых, абсциссы не могут по численной величине превосходить число a, так как иначе правая часть равенства (6) будет мнимой.

Во-вторых, каждой абсциссе соответствуют численно равные и противоположные по знаку ординаты. Но то же самое мы наблюдаем и на чертеже эллипса, сделанном посредством нити. Поэтому уравнение (5) вполне соответствует чертежу и, следовательно, не может удовлетворяться никакими точками, кроме точек эллипса.

§ 5. Связь эллипса с окружностью

a. К эллипсу можно подойти еще с другой точки зрения, чем мы это делали до сих пор. Мы покажем сейчас, что эллипс с полуосями a и b можно получить из окружности радиуса a, центр которой, как и у эллипса, находится в начале координат, путем умножения длин всех ординат на одну и ту же дробь b/a. Действительно, если через y_1 и y обозначим соответственно ординаты окружности и эллипса, отвечающие одной и той же абсциссе x (рис. 61), то

$$y_1 = \pm\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{и} \quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Сравнивая эти уравнения, получим равенство

$$y = \frac{b}{a} y_1,$$

которое и доказывает наше утверждение.

b. Указанное изменение ординат окружности с целью получить из них ординаты эллипса можно сделать чисто

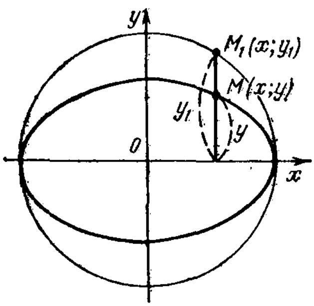


Рис. 61

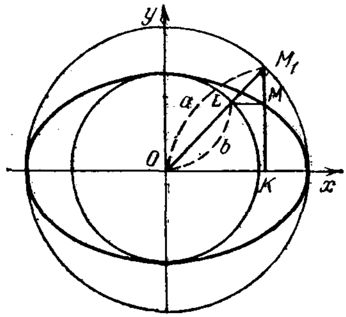


Рис. 62

геометрически, и тогда мы получим другой способ построения эллипса.

Для этого строим две концентрические окружности с радиусами a и b и центром в начале координат.

Если теперь мы возьмем какую-либо точку M_1 на внешней окружности, то путем построения, указанного на рис. 62, мы немедленно получим соответствующую точку M эллипса. (Строим радиус OM_1 и ординату KM_1, тогда прямая, проведенная через точку L параллельно оси абсцисс, пересекаясь с ординатой KM_1, и дает искомую точку M эллипса.)

Действительно, имея в виду теорему о пропорциональности отрезков, отсекаемых параллельными прямыми на сторонах угла, имеем

$$\frac{KM}{K_1M}=\frac{b}{a}, \quad KM=\frac{b}{a}KM_1,$$

т. е. KM получается из ординаты окружности путем умножения ее на b/a, а следовательно, KM и есть ордината эллипса.

§ 6. Директрисы эллипса

a. В § 4 нами получена формула (3). Как мы видим, ее левая часть выражает расстояние от точки $M(x; y)$ эллипса до левого фокуса. Следовательно, формула (3) может быть переписана так:

$$r_1 = a - ex \qquad (e = c/a). \tag{1}$$

Если вынесем в правой части эксцентриситет e за скобку, то получим

$$r_1 = e\left(\frac{a}{e} - x\right).$$

b. Выражению в скобках можно дать простое геометрическое толкование. Для этой цели строим прямую PQ, параллельную оси Oy и задаваемую уравнением $x = -a/e$ (рис. 63) (так как $e < 1$, то она не принадлежит

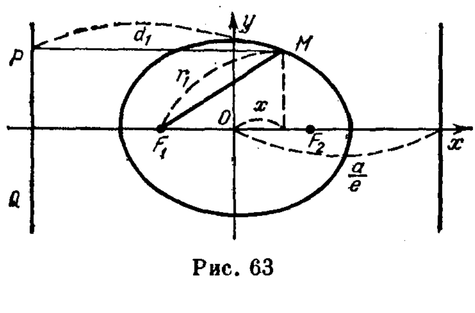


Рис. 63

эллипсу). Эту прямую назовем *директрисой* левого фокуса; если мы рассмотрим расстояние d_1 от точки $M(x; y)$ до директрисы, то увидим, что оно как раз равняется выражению в скобках.

Поэтому формулу (1) можно переписать так: $r_1 = ed_1$, или $r_1/d_1 = e$.

§ 7. Гипербола. Построение посредством нити

а. *Гиперболой* называется геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек F_1 и F_2, называемых ее *фокусами*, есть величина постоянная.

Постоянную разность расстояний обозначим через $2a$, так что для любой точки M гиперболы имеем (рис. 64)

$$r_1 - r_2 = \pm 2a \tag{1}$$

(знак $+$ берем, если $r_1 > r_2$, и знак $-$ берем, если $r_1 < r_2$).

b. Построение гиперболы можно осуществить посредством нити и чертящего острия с малым кольцом около него. Согнув нить вдвое (в точке N) с тем расчетом, чтобы

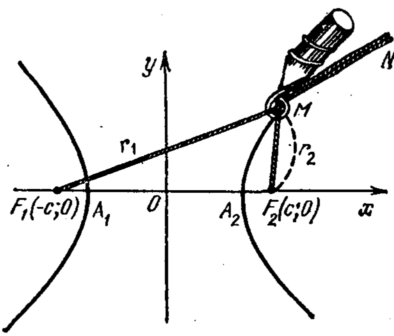


Рис. 64

разность длин полученных частей нити равнялась $2a$, закрепим затем концы нити в фокусах F_1 и F_2, согнутый же вдвое конец нити проденем через кольцо.

Если теперь, взяв нить за согнутый конец N, мы будем поддерживать ее в натянутом состоянии и одновременно другой рукой будем двигать чертящее острие, то и получим гиперболу. Действительно, при любом положении чертящего острия разность расстояний его до фокусов будет оставаться неизменной (насколько увеличится или уменьшится r_1, настолько же увеличится или уменьшится и r_2).

с. Середина расстояния между фокусами называется *центром гиперболы*, так как относительно этой точки гипербола симметрична.

Длина F_1F_2 называется *фокусным расстоянием.* Мы ее обозначим через $2c$, а половина этого расстояния называется *полуфокусным расстоянием*, она равна c.

Весьма удобно центр гиперболы принять за начало координат, а за ось абсцисс принять прямую, проходящую через фокусы (как на рис. 64). Тогда координаты фокусов будут

$$F_1(-c;\ 0),\quad F_2(c;\ 0).$$

d. Всякий отрезок, соединяющий две точки гиперболы, если он проходит через центр, называется *диаметром гиперболы.* Рассматривая форму гиперболы, мы видим, что наименьший диаметр лежит на оси абсцисс; этот диаметр A_1A_2 называется *действительной осью* гиперболы. Нетрудно показать, что длина действительной оси гиперболы равна $2a$.

В самом деле, основное свойство гиперболы (1), справедливое для всех ее точек, справедливо и для точек A_1 и A_2. Поэтому

$$F_1A_2 - F_2A_2 = 2a. \tag{2}$$

Но из чертежа видно, что

$$F_1A_2 = c + OA_2,\qquad F_2A_2 = c - OA_2.$$

Ввиду этого равенство (2) дает $2OA_2 = 2a$, или $OA_2 = a$. Ясно, что и $A_1O = a$, так что $A_1A_2 = 2a$.

Число a называется *действительной полуосью.* Концы действительной оси, т. е. точки A_1 и A_2, называются *вершинами гиперболы.*

e. Совершенно ясно далее, что для гиперболы $2a \leqslant 2c$.

Действительно (рис. 64), разность двух сторон треугольника меньше или равна третьей и потому из треугольника F_1MF_2 имеем

$$F_1M - F_2M \leqslant F_1F_2,\quad r_1 - r \leqslant 2c,\quad 2a \leqslant 2c,\quad a \leqslant c.$$

Поэтому также будем иметь $a^2 \leqslant c^2$, и выражение $a^2 - c^2$ для гиперболы будет уже отрицательным (а не положительным, как у эллипса). Это выражение мы обозначаем теперь уже через $-b^2$:

$$a^2 - c^2 = -b^2.$$

Геометрический смысл величины b выяснится дальше.

Отношение $c/a = e$ для гиперболы тоже носит название *эксцентриситета*. Но здесь ввиду $a \leqslant c$ имеем

$$e \geqslant 1,$$

тогда как для эллипса

$$e \leqslant 1.$$

§ 8. Построение гиперболы по точкам

Данное выше построение гиперболы посредством нити имеет свои неудобства. Поэтому мы дадим еще один способ построения гиперболы по точкам.

Согласно определению гиперболы разность расстояний r_1 и r_2 для всех ее точек должна быть одна и та же. Значит, если мы, желая перейти от одной точки гиперболы к другой, увеличиваем или уменьшаем r_1, то r_2 тоже должно увеличиться или уменьшиться, и притом на такую же величину.

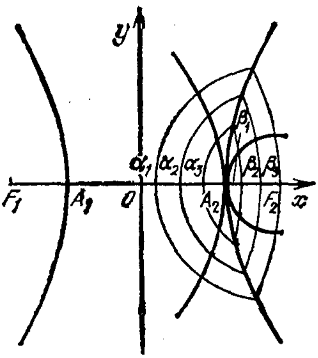


Рис. 65

Основываясь на этом, построение гиперболы можно осуществить так (рис. 65).

Строим сначала точки A_1 и A_2. Мы видим, что A_2 есть точка касания двух окружностей, из которых одна имеет центр в фокусе F_1 и радиус, равный F_1A_2, а другая имеет центр в фокусе F_2 и радиус, равный F_2A_2.

Дальнейшие точки гиперболы получим уже пересечением пар окружностей с центрами в фокусах F_1 и F_2 и радиусами r_1 и r_2, соответственно равными

$$r_1 = F_1\alpha_1, \quad r_2 = F_2\beta_1,$$

$$r_1 = F_1\alpha_2, \quad r_2 = F_2\beta_2,$$

$$r_1 = F_1\alpha_3, \quad r_2 = F_2\beta_3,$$

т. е. каждые новые значения r_1 и r_2 больше предыдущих на одну и ту же длину.

Чем ближе точки..., α_3, α_2, α_1, A, β_1, β_2, β_3, ..., тем точнее, конечно, наше построение.

§ 9. Уравнение гиперболы

а. Для любой точки M $(x;\ y)$ гиперболы (рис. 66)

$$r_1 - r_2 = \pm 2a.$$

Рассматривая же r_1 как расстояние между точками F_1 $(-c;\ 0)$ и M $(x;\ y)$, а r_2 как расстояние между точками F_2 $(c;\ 0)$ и M $(x;\ y)$, имеем отсюда

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a. \qquad (1)$$

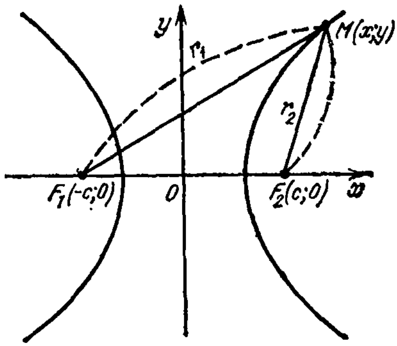


Рис. 66

Это и есть уравнение гиперболы, но оно имеет довольно сложный вид, а потому мы постараемся его упростить.

А именно, перенеся первый радикал в правую часть, мы возведем обе части уравнения в квадрат с целью освободиться от одного из радикалов:

$$-\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Однако, сравнивая это уравнение с соответствующим уравнением для эллипса, мы видим, что эти уравнения отличаются друг от друга только знаком, стоящим перед радикалом в левой части.

По возведении же в квадрат это различие пропадет, а потому дальнейшие преобразования будут такие же точно, как и у эллипса, вплоть до уравнения (4) § 4, т. е. мы придем к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1. \qquad (2)$$

Но тогда как у эллипса было

$$a^2 - c^2 = b^2,$$

здесь мы должны положить

$$a^2 - c^2 = -b^2,$$

а потому уравнение (2) примет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3)$$

b. Далее, как и у эллипса, здесь не лишним будет проверить, не будут ли уравнению (3) удовлетворять какие-либо точки, не принадлежащие гиперболе.

Но, решая уравнение относительно y, имеем

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \qquad (4)$$

Мы видим, что, во-первых, абсциссы по абсолютной величине могут быть только больше или равны a ($x^2 \geqslant a^2$) (иначе правая часть уравнения (4) будет мнимой).

Во-вторых, каждой абсциссе отвечают численно равные и противоположные по знаку ординаты. Но то же самое мы наблюдаем и на чертеже гиперболы, сделанном посредством нити.

§ 10. Асимптоты. Геометрическое значение b

a. Явному уравнению (4) § 9 гиперболы можно придать следующий вид (беря пока только знак +):

$$y = \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}. \qquad (1)$$

Эта форма уравнения гиперболы позволит нам исследовать, что будет, когда точка M гиперболы удаляется в бесконечность, т. е. когда абсцисса x точки M бесконечно возрастает.

Если x бесконечно возрастает, то выражение под знаком радикала, а следовательно, и сам радикал приближается к 1 (потому что дробь a/x, имея бесконечно возрастающий знаменатель, приближается к нулю).

b. Попробуем поэтому заменить этот радикал единицей и посмотрим, что тогда сделается с y. Будем иметь

$$y_1 = \frac{b}{a}x, \qquad (2)$$

т. е. y обратится в ординату прямой с угловым коэффициентом b/a, проходящей через начало координат.

c. Так как отброшенный радикал меньше 1, то $y_1 > y$, т. е. любая ордината прямой больше соответствующей ординаты гиперболы (2). Следовательно, прямая лежит выше гиперболы.

d. Изучим разность $d = y_1 - y$ между обеими ординатами (на рис. 67 $d = M_1M$). Имеем

$$y_1 - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \frac{b}{a}x\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}\right) =$$

$$=\frac{b}{a}x\frac{\left(1-\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\right)}{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}=$$

$$=\frac{b}{a}x\frac{1-\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)}{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}=\frac{\frac{ab}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}<\frac{ab}{x}$$

(потому что отброшенный знаменатель больше 1). Итак, $d<\frac{ab}{x}$. Но при бесконечном возрастании x эта дробь стремится к нулю и, следовательно, к нулю стремится и d.

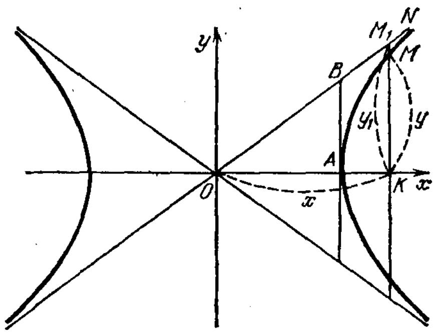


Рис. 67

Итак, при бесконечном возрастании x разность $d = y_1 - y$ между ординатами прямой и гиперболы приближается к нулю.

Иными словами, при бесконечном возрастании x гипербола приближается к прямой ON. Эта прямая, таким образом, является *асимптотой* гиперболы.

e. Ввиду симметрии нижний конец правой ветви гиперболы будет иметь асимптотой прямую $y=-\frac{b}{a}x$; эти же асимптоты

$$y=\frac{b}{a}x, \quad y=-\frac{b}{a}x$$

будут служить и асимптотами концов левой ветви гиперболы.

f. Теперь нетрудно установить и геометрическое значение b.

Действительно, рассмотрим ординату $y = AB$ асимптоты, восставленную из вершины A. Ее абсцисса $x = OA = a$, и потому, имея в виду, что координаты точки B должны удовлетворять уравнению (2) асимптоты, получим

$$AB = \frac{b}{a} \cdot a = b.$$

Итак, $b = AB$, т. е. равно ординате асимптоты, восставленной из вершины гиперболы.

g. Заметим еще, что из треугольника OAB ввиду $OA = a$, $AB = b$ имеем

$$|OB| = \sqrt{a^2 + b^2} = c.$$

Этим обстоятельством удобно пользоваться для построения фокуса. Построив точку B по данным a и b, откладываем далее $OF = OB$ на оси Ox.

§ 11. Директрисы гиперболы

a. В § 9 нами было сказано, что, начиная с известного места, вывод уравнения гиперболы будет совпадать с

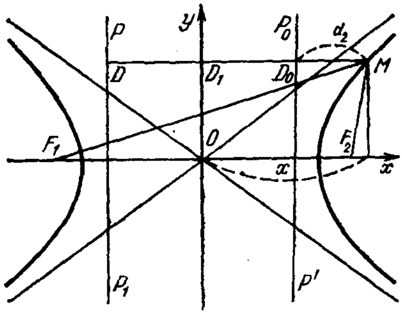


Рис. 68

таковым для эллипса. Следовательно, и для гиперболы будем иметь равенство

$$r_1 = a + ex \qquad (e = c/a).$$

Если теперь вынесем в правой части эксцентриситет e за скобку, то получим

$$r_1 = e\left(\frac{a}{e} + x\right). \tag{1}$$

b. Выражению в скобках можно дать простое геометрическое истолкование (рис. 68). Для этой цели строим прямую P_1P с уравнением

$$x = -a/e.$$

Тогда расстояние $d_1 = DM$ от точки M до этой прямой будет

$$d_1 = DD_1 + D_1M = \frac{a}{e} + x,$$

т. е. как раз равно выражению в скобках. Формула (1) принимает вид

$$r_1 = ed_1, \quad \text{или} \quad \frac{r_1}{d_1} = e.$$

с. Нетрудно показать далее, что правому фокусу F_2 будет отвечать и правая директриса P_0P' с уравнением $x = a/e$. Подставляя $r_1 = a + ex$ в равенство $r_1 - r = 2a$, получим

$$r = a + ex - 2a = ex - 2 = e\left(x - \frac{a}{e}\right).$$

Мы видим, что выражение в скобках равно как раз расстоянию

$$d_2 = D_0M = D_1M - D_1D_0 = x - \frac{a}{e},$$

или

$$\frac{r}{d} = e. \qquad (2)$$

Прямая P_1P называется директрисой, отвечающей фокусу F_1. Формула (2) показывает, что отношение расстояний любой точки гиперболы до фокуса и до директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету e гиперболы.

§ 12. Парабола. Построение по точкам

а. Выше мы показали, что как эллипс, так и гиперболу можно рассматривать как геометрическое место точек, отношение расстояний которых до фокуса и до директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету e:

$$\frac{r}{d} = e.$$

На рис. 69 мы умышленно взяли для эллипса левые фокус и директрису, а для гиперболы — правые.

Разница между эллипсом и гиперболой, однако, состоит в том, что для эллипса $c/a = e < 1$, тогда как для гиперболы $c/a = e > 1$. Естественно возникает вопрос:

посмотреть, нет ли кривой, у которой всегда $e = 1$. Кривая, отвечающая этому случаю, не будет ни эллипсом,

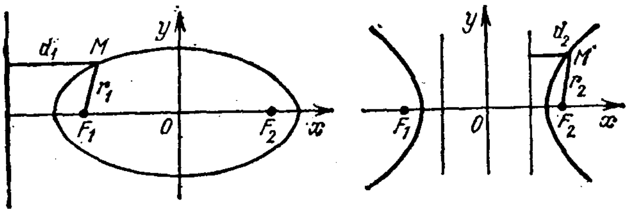


Рис. 69

ни гиперболой. Это будет новая кривая — ее называют *параболой*.

Таким образом, для любой точки параболы

$$r/d = 1, \quad r = d,$$

т. е. расстояния от нее до фокуса и до директрисы равны.

b. Парабола есть геометрическое место точек, равноудаленных от фокуса и от директрисы.

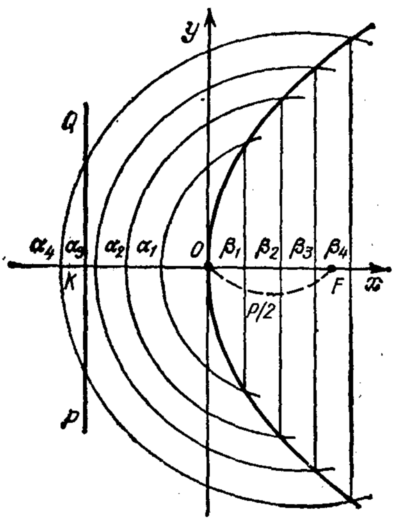


Рис. 70

Директрису PQ и *фокус F* располагают, как указано на рис. 70. Середина O отрезка KF (перпендикулярного к директрисе) принадлежит параболе, так как равноудалена от фокуса и директрисы. Ее мы принимаем за начало координат, направляя ось абсцисс по KF.

Точка O называется *вершиной параболы*, форма параболы, очевидно, зависит только от расстояния KF. Это расстояние обозначается буквою p и называется *параметром параболы*.

Имеем, очевидно, равенство

$$KO = OF = p/2.$$

Координаты фокуса F будут $(p/2; 0)$.

c. Чтобы выяснить, какую форму имеет парабола, покажем, как ее можно построить по точкам. Согласно определению расстояния r и d от любой точки параболы до фокуса и до директрисы должны быть равны. Поэтому, если мы, желая перейти от одной точки параболы к другой, увеличиваем или уменьшаем r, то d должно тоже увеличиться или уменьшиться и притом на такую же величину.

Основываясь на этом, построение параболы можно осуществить так.

Сначала строим вершину O. Мы видим, что O есть точка касания окружности с центром в F и радиусом FO с осью Oy.

Дальнейшие точки параболы получим уже пересечением прямых, параллельных Oy, и окружностей с центром в F, причем расстояния d прямых от директрисы и радиусы окружностей берутся соответственно равными:

$$r = F\alpha_1, \quad d = K\beta_1,$$
$$r = F\alpha_2, \quad d = K\beta_2,$$
$$r = F\alpha_3, \quad d = K\beta_3,$$

так что каждые новые r и d больше предыдущих и притом на одну и ту же величину.

§ 13. Уравнение параболы

a. Для каждой точки параболы имеем

$$r = d. \tag{1}$$

Но r можно рассматривать как расстояние между точками F $(p/2;\ 0)$ и M $(x;\ y)$ (рис. 71), и потому

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Далее имеем

$$d = D_1M = D_1D + DM = \frac{p}{2} + x.$$

Поэтому равенство (1) принимает вид

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x.$$

b. Однако найденное уравнение следует еще упростить. Возводя в квадрат и раскрывая скобки, имеем

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = \frac{p^2}{4} + px + x^2.$$

Приводя подобные члены, мы и получим простейшее уравнение параболы

$$y^2 = 2px. \qquad (2)$$

c. Решая это уравнение относительно y, имеем

$$y = \pm \sqrt{2px}.$$

Отсюда видим, что x может принимать только положительные значения (и нуль), иначе y будет мнимым. При этом каждому положительному x отвечают два значения y. Итак, форма параболы, получаемая согласно уравнению (2), в точности соответствует чертежу, сделанному выше.

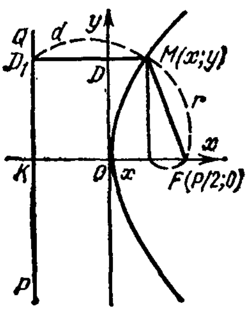


Рис. 71

d. *Связь с параболой* $y = ax^2$. Наша цель — показать, что рассмотренные нами раньше параболы

$$y = ax^2$$

те же самые, что и рассматриваемые сейчас.

Действительно, поступим с графиком параболы $y^2 = 2px$ так, как мы это делали в начале книги при рассмотрении обратных функций. Повернем плоскость чертежа вокруг оси (биссектрисы первого координатного угла) на 180° (рис. 72). Тогда ось Ox совпадет с Oy и ось Oy совпадет с Ox. Парабола займет новое положение. Ее новое уравнение получим из старого, переставив в нем y на место x и x на место y. Оно теперь будет

$$x^2 = 2py,$$

или

$$y = \frac{1}{2p} x^2.$$

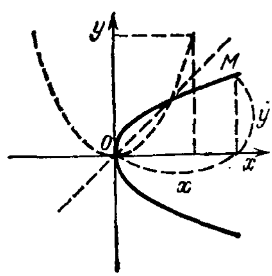


Рис. 72

Из этого уравнения, употребляя обозначение

$$\frac{1}{2p} = a,$$

имеем

$$y = ax^2.$$

§ 14. Преобразование координат

a. При решении какого-либо вопроса методами аналитической геометрии (например, при изучении свойств кривых линий) весьма важно бывает целесообразным образом выбрать координатные оси.

Может оказаться, что при одном выборе осей координаты некоторых интересующих нас точек или уравнения интересующих нас линий выглядят сложно.

Тогда возникает вопрос о замене выбранных осей новыми, относительно которых можно предполагать, что интересующие нас координаты или уравнения получаются в более простом виде.

Но когда новые координатные оси намечены, возникает вопрос, как, зная старые координаты точек или уравнения линии, найти новые координаты или уравнения.

Для решения поставленных задач служат так называемые *формулы перехода*, связывающие старые координаты точки с новыми ее координатами. Именно, эти формулы дают выражения старых координат (x; y) точки через новые координаты (x_1; y_1).

b. Начнем с простейшего случая, когда новые оси имеют новое начало координат, но старое направление, т. е. когда они параллельны старым.

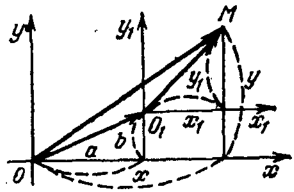


Рис. 73

Пусть (a; b) — старые координаты нового начала O_1 и O_1x_1, O_1y_1 — новые оси.

Рассмотрим векторную цепь OO_1M и ее замыкающий вектор $\overline{OM}$ (рис. 73).

Проектируя на старую ось абсцисс, имеем

$$\text{пр}_{Ox}\overline{OM} = \text{пр}_{Ox}\overline{OO_1} + \text{пр}_{Ox}\overline{O_1M},$$

откуда, ввиду того что

$$\text{пр}_{Ox}\overline{OM} = x, \quad \text{пр}_{Ox}\overline{OO_1} = a, \quad \text{пр}_{Ox}\overline{O_1M} = \text{пр}_{O_1x_1}\overline{O_1M} = x_1,$$

получим

$$x = a + x_1.$$

Аналогично, проектируя на старую ось ординат, получим

$$y = b + y_1.$$

Итак, имеем формулы

$$x = a + x_1, \quad y = b + y_1$$

перехода при параллельном переносе осей.

с. Пример. Пусть дан треугольник с вершинами $L(1+\sqrt{3};\ 2-\sqrt{2})$; $M(2+\sqrt{3};\ 3-\sqrt{2})$; $N(3+\sqrt{3};\ -\sqrt{2})$. Попробуем перенести оси, поместив новое начало в вершину L. Тогда $a = 1+\sqrt{3}$ и $b = 2-\sqrt{2}$, и наши формулы для данного случая примут вид

$$x = 1+\sqrt{3}+x_1, \quad y = 2-\sqrt{2}+y_1,$$

или же, выражая новые координаты $(x_1;\ y_1)$ через старые, имеем

$$x_1 = x-1-\sqrt{3}, \quad y_1 = y-2+\sqrt{2}.$$

Подставляя теперь сюда вместо x и y последовательно старые координаты вершин нашего треугольника, получим следующие новые координаты этих вершин: $L(0,\ 0)$, $M(1;\ 1)$, $N(2;\ -2)$.

Таким образом, треугольник имел весьма сложные старые координаты вершин, новые же координаты очень простые. Разумеется, это сильно упростит решение всех задач, связанных с этим треугольником.

§ 15. Пример на упрощение уравнения кривой путем параллельного переноса осей

Пусть имеем уравнение кривой относительно старых осей Ox и Oy. Тогда, подставляя в это уравнение вместо x и y равные им их выражения на основании формул перехода, получим уравнение, связывающее новые координаты $(x;\ y)$ любой точки нашей линии, т. е. новое уравнение линии.

Удачным выбором новых осей можно достигнуть того, что новое уравнение линии будет проще старого.

В качестве примера рассмотрим кривую, заданную относительно старых осей уравнением

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3.$$

Что это за кривая, сразу по внешнему виду уравнения определить трудно. Во всяком случае, такой кривой мы еще не рассматривали.

С целью упростить уравнение нашей кривой перенесем начало координат в точку $(a;\ b)$, координаты которой временно оставляем неопределенными — из дальнейшего будет видно, как их выбрать наиболее целесообразно.

Вводя в данное нам уравнение вместо x и y их выражения по формулам перехода

$$x = a + x_1, \quad y = b + y_1,$$

мы получим новое уравнение нашей линии

$$b + y_1 = \frac{1}{4}(a + x_1)^2 - 2(a + x_1) + 3,$$

или

$$b + y_1 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ax_1 + \frac{1}{4}x_1^2 - 2a - 2x_1 + 3,$$

или, наконец, собирая члены с одинаковыми степенями y_1 и x_1, имеем

$$y_1 = \frac{1}{4}x_1^2 + \left(\frac{1}{2}a - 2\right)x_1 + \left(\frac{1}{4}a^2 - 2a + 3 - b\right).$$

Получив теперь новое уравнение нашей кривой, мы можем задать себе вопрос, как же надо выбрать a и b, чтобы это новое уравнение выглядело наиболее просто. К ответу на этот вопрос можно подойти так: у нас имеются две буквы a и b, которым мы можем по желанию придать какие угодно числовые значения. Эти буквы мы можем выбрать из тех соображений, чтобы выполнялись какие-либо два условия. В качестве этих условий мы потребуем, чтобы оба последние коэффициенты нового уравнения были нулями, т. е. чтобы

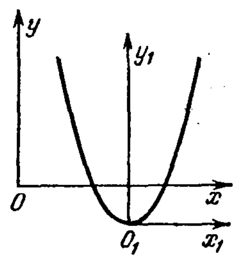


Рис. 74

$$\frac{1}{2}a - 2 = 0, \quad \frac{1}{4}a^2 - 2a + 3 - b = 0,$$

откуда находим

$$a = 4, \quad \frac{1}{4}\cdot 16 - 2\cdot 4 + 3 - b = 0, \quad b = -1.$$

Итак, если перенести начало координат в точку (4; —1), то последние два члена уравнения пропадут, и мы будем иметь новое уравнение нашей кривой в форме

$$y_1 = \frac{1}{4}x_1^2.$$

А это, как мы видим, уравнение параболы. Расположение старых осей, новых осей и параболы указано на рис. 74.

§ 16. Поворот осей

Теперь рассмотрим второй важный случай преобразования координат, при котором новые оси имеют старое начало координат, но новые направления.

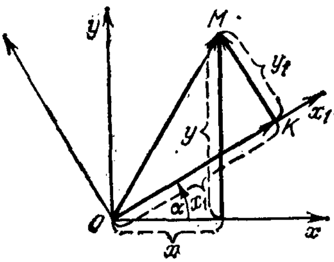


Рис. 75

Пусть новые оси будут Ox_1, Oy_1, причем дается угол $xOx_1 = \alpha$, которым определяется положение новых осей относительно старых и который называется *углом поворота* (рис. 75). Рассмотрим векторную цепь OKM и ее замыкающий вектор $\overline{OM}$.

Проектируя их на старую ось абсцисс, имеем

$$\text{пр}_{Ox}\overline{OM} = \text{пр}_{Ox}\overline{OK} + \text{пр}_{Ox}\overline{KM},$$

откуда ввиду того, что

$$\text{пр}_{Ox}\overline{OM} = x, \quad \text{пр}_{Ox}\overline{OK} = x_1 \cos\alpha,$$

$$\text{пр}_{Ox}\overline{KM} = y_1 \cos(\alpha + 90^\circ) = -y_1 \sin\alpha,$$

получим

$$x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha.$$

Теперь спроектируем на старую ось ординат:

$$\text{пр}_{Oy}\overline{OM} = \text{пр}_{Oy}\overline{OK} + \text{пр}_{Oy}\overline{KM},$$

откуда ввиду того, что

$$\text{пр}_{Oy}\overline{OM} = y, \quad \text{пр}_{Oy}\overline{OK} = x_1 \sin\alpha,$$

$$\text{пр}_{Oy}\overline{KM} = y_1 \sin(\alpha + 90^\circ) = y_1 \cos\alpha,$$

получим

$$y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha.$$

П р и м е р. Упростим уравнение так называемой равнобочной гиперболы (т. е. гиперболы, у которой $a = b$)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1. \qquad (1)$$

Ввиду $a = b$ асимптоты такой гиперболы взаимно перпендикулярны, и их можно принять за новые оси. Эти новые оси обозначим, как указано на рис. 76. Мы видим, что здесь новая ось абсцисс получается из старой поворотом на угол $\alpha = -45°$, а потому формулы перехода будут

$$x = x_1 \cos(-45°) - y_1 \sin(-45°) =$$
$$= x_1 \cos 45° + y \sin 45° = \frac{x+y}{\sqrt{2}},$$
$$y = x_1 \sin(-45°) + y_1 \cos(-45°) =$$
$$= -x_1 \sin 45° + y_1 \cos 45° = \frac{y_1 - x_1}{\sqrt{2}}.$$

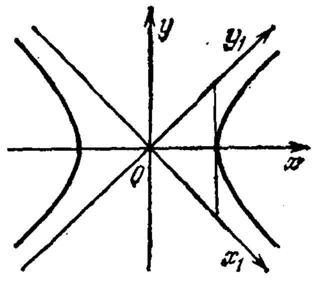


Рис. 76

Вводя это в уравнение (1), имеем

$$\frac{(x_1 + y_1)^2 - (y_1 - x_1)^2}{2a} = 1,$$

откуда

$$\frac{4x_1y_1}{2a^2} = 1, \quad x_1y_1 = \frac{a^2}{2}$$

или, полагая для краткости

$$a^2/2 = k,$$

имеем новое уравнение нашей гиперболы в виде

$$x_1y_1 = k, \quad y_1 = k/x_1,$$

т. е. в том виде, как в начале нашей книги.

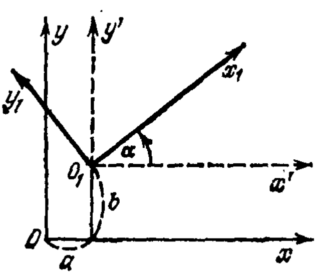


Рис. 77

§ 17. Общий случай

а. В общем случае новые оси будут иметь и новое начало и новые направления. Пусть $(a; b)$ — координаты нового начала относительно старых осей и α — угол наклона новой оси абсцисс к старой (рис. 77). Чтобы вывести формулы перехода, введем еще вспомогательную систему осей O_1x', O_1y', у которых новое начало и старые направления. Координаты точки K относительно вспомогательных осей назовем $(x'; y')$.

b. Так как оси O_1x', O_1y' получаются из осей Ox, Oy переносом начала в точку O_1 $(a; b)$, то

$$x = a + x', \quad y = b + y'. \tag{1}$$

Так как, далее, новые оси O_1x, O_1y получаются из вспомогательных поворотом на угол α, то

$$x' = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \quad y' = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), найдем выражения старых координат через новые:

$$x = a + x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \quad y = b + x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha.$$

§ 18. Полярные координаты

a. Кроме прямоугольной (или декартовой) системы координат, для определения положения точек на плоскости очень часто пользуются *полярными координатами*.

Именно, положение какой-либо точки M плоскости определяется расстоянием r от точки M до неподвижной точки O — *полярным радиусом* и углом φ, который вектор $\overline{OM}$ образует с неподвижной осью Ox,— *полярным углом*.

Эти r и φ называются *полярными координатами точки* M. То обстоятельство, что M имеет координаты r и φ, записывают так: M $(r; \varphi)$.

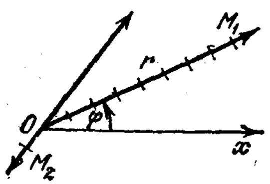


Рис. 78

Точка O называется *полюсом*, прямая Ox — *полярной осью*.

b. Задание r и φ вполне определяет положение точки M, при этом угол φ может быть любым числом интервала $(-\infty, \infty)$, величина r неотрицательна.

Например, на рис. 78 точка с координатами $(9; \pi/6)$ есть точка M_1, а точка с координатами $(2; -\pi/3)$ есть точка M_2.

c. Однако обратная задача — нахождение координат r и φ по заданной точке — задача неопределенная. Действительно, если за полярные координаты точки M можно взять $(r; \varphi)$, то с таким же успехом можно взять и $(r; \varphi - 2\pi)$ и вообще угол φ можно изменять на любое кратное 2π;

d. Но эту обратную задачу можно сделать определенной, ограничив возможность выбора r и φ некоторыми добавочными условиями, например, потребовав, чтобы φ находилось в интервале $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

§ 19. Спираль Архимеда

a. Всякое уравнение, содержащее r и φ (или только одну из этих величин), если r и φ рассматривать как полярные координаты на плоскости, изобразит, вообще говоря, некоторую линию. Эту линию можно приближенно построить по точкам. Для этой цели принимаем φ за аргумент, а r — за функцию. Давая φ ряд значений и вычисляя согласно данному уравнению соответствующие значения r, получим ряд точек $(r; \varphi)$. Геометрическим местом этих точек будет, вообще говоря, некоторая линия.

b. В качестве первого примера построим график функции $r = a\varphi$.

Для построения углу φ придаем только положительные значения, отстоящие друг от друга на $\pi/8$. (Для более точного построения вместо $\pi/8$ можно было бы взять $\pi/16$, $\pi/32$ и т. д.)

Соответствующие значения r вычисляем по следующей таблице:

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$2\cdot\frac{\pi}{8}$	$3\cdot\frac{\pi}{8}$	...
r	0	$a\cdot\frac{\pi}{8}=h$	$a\cdot 2\cdot\frac{\pi}{8}=2h$	$a\cdot 3\cdot\frac{\pi}{8}=3h$	...

Таким образом, все построение сводится к последовательному отложению на сторонах углов 0, $\pi/8$, $2\cdot\pi/8$, $3\cdot\pi/8$, ... возрастающих длин 0, h, $2h$, $3h$, ... (рис. 79).

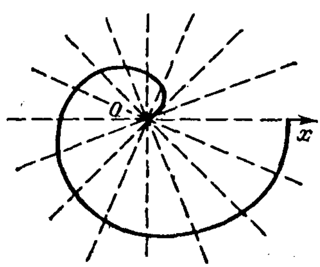


Рис. 79

c. Заметим, что $a(\varphi_0 + 2\pi) = a\varphi_0 + 2\pi a$. Но $a(\varphi_0 + 2\pi)$ — это полярный радиус, отвечающий полярному углу $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$; значит, когда полярный угол φ увеличивается на 2π, полярный радиус увеличивается на постоянную величину $2\pi a$.

§ 20. Логарифмическая спираль

В качестве второго примера построим график функции

$$r = a^{\varphi},$$

где полярному углу φ придаем все значения от $-\infty$ до ∞ (рис. 80).

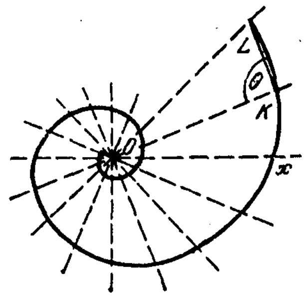


Рис. 80

Беря опять значения φ отстоящими друг от друга на $\pi/8$, составим таблицу соответствующих значений r:

φ	…	$-2\cdot\frac{\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$2\cdot\frac{\pi}{8}$	$3\cdot\frac{\pi}{8}$	…
r	…	$a^{-2\cdot\frac{\pi}{8}}=h^{-2}$	$a^{-\frac{\pi}{8}}=h^{-1}$	1	$a^{\frac{\pi}{8}}=h$	$a^{2\cdot\frac{\pi}{8}}=h^{2}$	$a^{3\cdot\frac{\pi}{8}}=h^{3}$	…

А так как

$$\ldots\frac{h^{-1}}{h^{-2}}=\frac{1}{h^{-1}}=\frac{h}{1}=\frac{h^2}{h}=\frac{h^3}{h^2}=h,$$

то все треугольники OKL, образованные двумя последовательными полярными радиусами и хордой KL, стягивающей их концы, подобны. Угол θ для всех таких углов, следовательно, будет один и тот же.

§ 21. Примеры на составление полярных уравнений кривых

а. В качестве примера выведем полярные уравнения эллипса, гиперболы или параболы. Эти кривые имеют общее полярное уравнение, которое получим, если будем исходить из общего свойства этих кривых по отношению к фокусу и директрисе. Саму кривую располагаем, как показано на рис. 81, помещая директрису справа от кривой. (Для эллипса A будет правой вершиной, для гиперболы — вершиной левой ветви, так что для гиперболы рассматриваем только левую ветвь; наконец, параболу для вывода полярного уравнения приходится повернуть на 180°.) Полюс O берем в фокусе F, полярную ось направляем из полюса F к вершине кривой.

b. Обозначим эксцентриситет кривой буквой e и буквой p — ординату, восставленную из фокуса. Для любой точки M имеем

$$r/d = e. \tag{1}$$

В частности, это верно и для точки S, т. е. $p/OD = e$, $OD = p/e$.

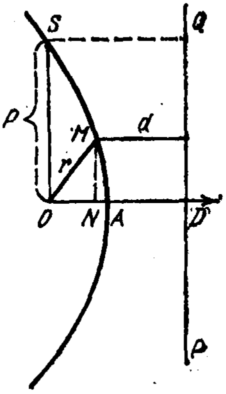


Рис. 81

Далее, имеем $d = ND = OD - OM = \frac{p}{e} - r\cos\varphi$, после чего уравнение (1) дает

$$\frac{r}{\frac{p}{e} - r\cos\varphi} = e, \quad r = p - er\cos\varphi, \quad r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}.$$

Это и есть искомое полярное уравнение.

c. Предлагается самим доказать для эллипса и гиперболы равенство

$$p = b^2/a$$

(рассматривая p как ординату, восставленную из фокуса).

§ 22. Выражение прямоугольных координат через полярные

Одновременно с полярной системой координат рассмотрим прямоугольную, у которой начало координат совпадает с полюсом и ось абсцисс — с полярной осью (рис. 82).

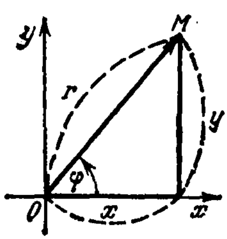


Рис. 82

Если $(x; y)$—прямоугольные и $(r; \varphi)$ — полярные координаты точки M, то, замечая, что x и y суть проекции вектора $\overline{OM}$ на оси Ox и Oy, находим

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Это *формулы перехода* от прямоугольных координат к полярным.

§ 23. Уравнение лемнискаты

a. В качестве примера, где найденные формулы приносят пользу, выведем полярное уравнение лемнискаты.

Эта кривая есть геометрическое место точек, произведение расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 есть постоянная величина a^2, где $2a$ — расстояние F_1F_2.

Таким образом, для любой точки M $(x;\ y)$ лемнискаты будем иметь

$$r_1r_2 = a^2. \tag{1}$$

b. Приступая к выводу уравнения, мы оси координат располагаем, как показано на рис. 83. Координаты точек F_1 и F_2 тогда будут $F_1\ (-a;\ 0)$, $F_2\ (a;\ 0)$.

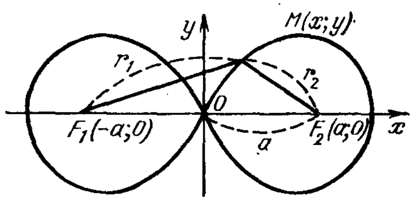


Рис. 83

Рассматривая r_1 как расстояние между точками F_1 $(-a;\ 0)$ и M $(x;\ y)$ и r_2 как расстояние между точками F_2 $(a;\ 0)$ и M $(x;\ y)$, из (1) получим

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2}\,\sqrt{(x-a)^2+y^2} = a^2,$$

$$(x^2+a^2+y^2+2ax)(x^2+a^2+y^2-2ax) = a^4,$$

$$(x^2+y^2+a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4,$$

$$(x^2+y^2)^2 + 2a^2(x^2+y^2) - 4a^2x^2 = 0,$$

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2). \tag{2}$$

Это и есть уравнение лемнискаты в прямоугольных координатах.

c. Однако гораздо проще будет выглядеть уравнение лемнискаты, отнесенное к полярным координатам (полюс в O, полярная ось Ox). Его получим, если в уравнение (2) заменим x и y их выражениями, получаемыми из формул перехода

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi.$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$[r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)] = 2a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),$$

или

$$r^2 = 2a^2\cos 2\varphi,$$

или, извлекая корень и оставляя только знак $+$,

$$r = a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

d. В заключение дадим краткое исследование формы лемнискаты согласно найденному уравнению. Ход изменения r с изменением φ ясен из нижеследующей таблицы:

φ	2φ	r
Возрастает от 0° до 45°	Возрастает от 0° до 90°	Убывает от $h = a\sqrt{2}$ до 0
Возрастает от 45° до 135°	Возрастает от 90° до 270°	Мнимое
Возрастает от 135° до 180°	Возрастает от 270° до 360°	Возрастает от 0 до h
При дальнейшем изменении от 180° до 360° все указанные изменения r повторятся в той же последовательности.		

Эта таблица подтверждает форму лемнискаты, изображенную на рис. 83.

§ 24. Параметрическое задание линий

a. Очень часто при изучении функциональной зависимости между x и y обе эти переменные рассматриваются не как функция одна другой, а как функции некоторой третьей переменной t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \tag{1}$$

Эта третья переменная теперь является аргументом, а x и y — функциями от нее.

Этот новый аргумент t обыкновенно называют *параметром*, а само представление функциональной зависимости в форме (1) — *параметрическим*.

b. Два параметрические уравнения (1) связывают три переменные t, x, y. Если бы мы из этих уравнений исключили t, то получили бы одно уравнение, уже непосредственно связывающее x и y, т. е. обычное уравнение между x и y.

Однако такое исключение t может или оказаться невозможным, или же если и возможно, то привести к сложному уравнению.

Но мы увидим далее, что в таком исключении нет большой надобности — можно изучить зависимость между x и y и, в частности, построить график этой зависимости, основываясь непосредственно на уравнениях (1).

§ 25. Построение графика

a. Для построения графика придаем аргументу t ряд значений и по уравнениям (1) § 24 находим ряд соответствующих пар значений x и y, которые принимаем за координаты точки на плоскости. Соединяя эти точки плавной линией, мы и получим график зависимости между x и y.

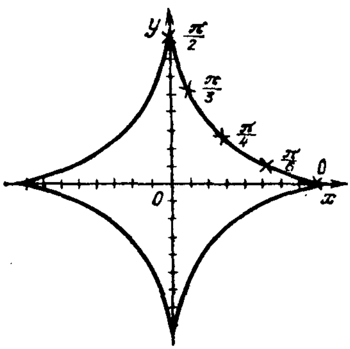


Рис. 84

b. В качестве примера построим график функции, заданной следующими параметрическими уравнениями:

$$x = a\cos^3 t, \quad y=a\sin^3 t, \quad (1)$$

полагая для простоты $a=8$.

Имеем таблицу (нами взяты только те значения t, для которых $\cos t$ и $\sin t$ вычисляются просто, вычисления проведены с точностью до 0,1):

t	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x	8	$\sqrt{27}\approx5{,}2$	$\sqrt{8}\approx2{,}8$	1	0
y	0	1	2,8	5,2	8

Мы остановились на $t = \pi/2$, так как при дальнейшем изменении t в интервалах $(\pi/2, \pi)$, $(\pi, 3\pi/2)$, $(3\pi/2, 2\pi)$ получатся участки кривой, подобные построенному.

Чтобы знать, какая точка какому значению параметра отвечает, около точки мы ставим соответствующее значение параметра (рис. 84).

Построенная кривая называется *астроидой.* Чтобы получить обыкновенное уравнение астроиды, исключаем t из уравнений (1). Имеем

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{1/3}=\cos t,\quad \left(\frac{y}{a}\right)^{1/3}=\sin t,$$

откуда, возводя в квадрат и складывая, найдем

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{a}\right)^{2/3}=1$$

или, наконец,

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}.$$

§ 26. Циклоида

Циклоидой называется кривая, описываемая какой-либо точкой M окружности, катящейся по прямой.

За начало координат O возьмем то положение точки M, когда она является точкой касания окружности и прямой.

Построение циклоиды можно осуществить посредством линейки и катящегося по ней круга с прикрепленным на его ободе чертящим острием M (конечно, круг катится по линейке в плоскости чертежа).

Чтобы вывести параметрические уравнения циклоиды, возьмем за параметр t угол NCM (рис. 85; положительным

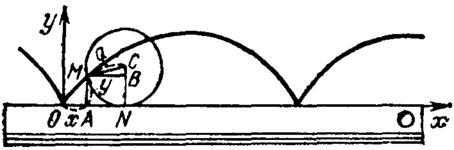


Рис. 85

здесь приходится считать вращение по часовой стрелке). Так как круг катится без скольжения, то

$$ON = NM = at.$$

Далее, находим

$$x = OA = ON - AN = at - a\sin t = a(t-\sin t),$$
$$y = AM = NB = NC - BC = a - a\cos t = a(1-\cos t).$$

Итак, параметрические уравнения циклоиды будут:

$$x = a(t-\sin t),\quad y = a(1-\cos t).$$

§ 27. Упражнения

1. Написать уравнение окружности радиуса 2 с центром в точке (3/2; — 5/2). *Ответ*: $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=4$.

2. Найти общее уравнение той же окружности. Указание. Общим уравнением окружности называется уравнение, получаемое раскрытием скобок и приведением подобных членов. *Ответ*: $2x^2+2y^2-6x+10y+9=0$.

3. Какое геометрическое значение имеют уравнения:

a) $x^2+y^2-4x-6y-3=0$,

b) $x^2+y^2-4x-6y+13=0$,

c) $x^2+y^2-4x-6y+17=0$?

Ответ: a) окружность $(x-2)^2+(y-3)^2=4^2$; b) точка (2; 3); c) уравнение не изображает никакой кривой.

4. Написать уравнение окружности радиуса a с центром $(a; 0)$ и построить ее, полагая $a=2$. *Ответ*: $x^2+y^2-2ax=0$.

5. Какой вид имеет общее уравнение окружности, проходящей через начало координат? *Ответ*: $x^2+y^2+Ax+By=0$.

6. В каком виде может быть написано общее уравнение окружности, концентрической по отношению к окружности $x^2+y^2+Ax+By+C=0$? *Ответ*: $x^2+y^2+Ax+By+C_1=0$.

7. Привести к виду $(x-m)^2+(y-n)^2=a^2$ и построить следующие окружности:

a) $x^2+y^2-4x-6y-12=0$,

b) $x^2+y^2-2x-2y=0$,

c) $3x^2+3y^2+6x-2y-2=0$,

d) $x^2+y^2+x=0$,

e) $x^2+y^2+2y-8=0$,

f) $x^2+y^2+2x+2y+1=0$.

Ответ: a) $(x-2)^2+(y-3)^2=5^2$, b) $(x-1)^2+(y-1)^2=(\sqrt{2})^2$, c) $(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2$, d) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, e) $x^2+(y+1)^2=3^2$, f) $(x+1)^2+(y+1)^2=1^2$.

8. Найти уравнение окружности, для которой точки (2; 2) (8; 10) являются концами одного из диаметров. *Ответ*: $x^2+y^2-10x-12y+36=0$.

9. Найти уравнение окружности, проходящей через точки $(1; -1)$, $(2; 6)$, $(9; 5)$. *Ответ*: $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0$.

10. Найти уравнение окружности, проходящей через точки $(1; 1)$, $(0; 2)$, $(2; 3)$. *Ответ*: $3x^2 + 3y^2 - 7x - 13y + 14 = 0$.

Указание. Написать уравнение окружности в общем виде $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, а затем определять коэффициенты из тех соображений, что координаты точек должны удовлетворять уравнению.

11. Найти точки пересечения окружности $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ с прямой $x + y - 1 = 0$. *Ответ*: $M_1\,(2; -1)$, $M_2\,(-1; 2)$.

12. Найти точки пересечения окружности $x^2 + y^2 - 5 = 0$ с прямой $x - y - 1 = 0$. *Ответ*: $(2; 1)$, $(-1; -2)$.

13. Найти точки пересечения окружности $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$ с прямой $x + y - 4 = 0$. *Ответ*: $(2; 2)$.

14. Найти точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 1$ с прямой $x + y - 4 = 0$. *Ответ*: не пересекаются.

15. Доказать, что уравнение любой окружности, проходящей через точки пересечения окружности $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ с прямой $Lx + My + N = 0$, может быть написано в виде

$$m\,(x^2 + y^2 + Ax + By + C) + n\,(Lx + My + N) = 0.$$

16. Найти точки пересечения окружностей

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0,\; x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0.$$

Ответ: $(1; 0)$, $(9/13; 6/13)$.

17. Найти уравнение окружности, проходящей через точки пересечения окружности $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ с прямой $x - y + 3 = 0$ и через точку $(1; 1)$. *Ответ*: $x^2 + y^2 + x - y - 2 = 0$.

18. Показать, что общее уравнение окружности, проходящей через точки пересечения окружностей

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,\quad x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

можно представить в виде

$$m\,(x^2 + y^2 + Ax + By + C) + n\,(x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1) = 0.$$

19. В частности, показать, что уравнение предыдущей задачи при $n = -m$ изображает прямую, проходящую через точку пересечения обеих окружностей.

20. Дан эллипс

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Найти a, b, c, e, уравнения директрис. Построить этот эллипс по точкам обоими изложенными в курсе способами. *Ответ*: уравнение директрис $x = \pm 169/12$.

21. Выразить длину диаметра M_1M_2 эллипса как функцию абсциссы его конца M $(x; y)$ и, исследуя найденное выражение, еще раз убедиться, что наименьшим диаметром будет $B_1B_2 = 2b$, а наибольшим $A_1A_2 = 2a$.

22. Написать уравнение эллипса, если известно, что он расположен относительно осей обычным способом и проходит через точки $(2\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(2; \sqrt{3})$. *Ответ*: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

23. Найти точки пересечения эллипса

$$\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$$

и окружности

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Ответ: четыре точки $(\pm 4; \pm 3)$.

24. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $(6; 5)$ и $(-1; 4)$, если известно, что ее центр лежит на эллипсе

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Ответ: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

25. Если каждая ордината эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

получается умножением ординаты окружности

$$x^2 + y^2 = a^2$$

на постоянное число b/a, то каким способом получается из площади круга площадь S эллипса и чему она равна? *Ответ*: $S = \pi ab$.

26. Дана гипербола

$$\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

Найти a, b, c, e, уравнения директрис. Построить эту гиперболу по точкам. *Ответ*: уравнение директрис $x = \pm 225/17$.

27. Найти точки пересечения эллипса и гиперболы, если известно, что они имеют общие фокусы, причем $c = 1$; для эллипса эксцентриситет $e = 5/13$, а для гиперболы $e = 5/4$. *Ответ*: четыре точки $(\pm 52; \pm 36)$.

28. Найти длину общей хорды парабол

$$y^2 = 5\frac{1}{3}x, \qquad y = \frac{4}{9}x^2.$$

Ответ: 5.

29. Привести к простейшему виду уравнение $y = 0{,}25x^2 - x + 2$. *Ответ*: $y = 0{,}25x^2$; начало координат надо перенести в точку $(2; 1)$.

30. Доказать параллельным переносом осей, что уравнение

$$y = Ax^2 + Bx + C, \quad A \neq 0,$$

выражает параболу, и найти общее выражение для координат вершины. *Ответ*: вершина в точке $\left(-\frac{B}{2A}; -\frac{B^2 - 4AC}{4A}\right)$.

31. Решить задачу 3 этого параграфа путем параллельного переноса осей.

32. Доказать переносом осей, что уравнение

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

всегда или изображает окружность или точку или ничего не изображает.

33. Переносом осей доказать, что уравнение $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, $ad \neq bc$, выражает равнобочную гиперболу.

34. Упростить уравнение $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 7$. *Ответ*: $y = x^3$, перенос в точку $(-1; 6)$.

35. Доказать, что при повороте осей на любой угол уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$ не меняется.

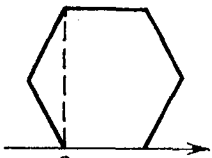
36. Упростить путем поворота осей на 45° уравнение $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$. *Ответ*: парабола $y^2 = a\sqrt{2}x - \frac{a^2}{2}$ с вершиной в точке $(a\sqrt{2}/4; 0)$ (точнее, часть этой параболы).

37. Путем поворота осей на 30° упростить уравнение $5x^2 + 7y^2 - 2\sqrt{3}\,xy - 4 = 0$. *Ответ*: эллипс $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = \frac{1}{2}$.

38. Найти полярные координаты вершин правильного шестиугольника со стороной a, расположенного, как на

рис. 86. *Ответ*: (0; 0), (a; 0), ($a\sqrt{3}$; $\pi/6$), ($2a$; $\pi/3$), ($a\sqrt{3}$; $\pi/2$), (a; $2\pi/3$).

39. Объяснить, почему уравнение $\varphi = \varphi_0$, где φ_0 — постоянная, изображает луч, проходящий через полюс и наклоненный к полярной оси под углом φ_0.



0

Рис. 86

40. Объяснить, почему уравнение $r = a$, где $a > 0$ — постоянная, изображает окружность радиуса a с центром в полюсе.

41. Даны полярные координаты точек M_1 ($a\sqrt{2}/2$; $\pi/4$), M_2 ($a\sqrt{2}/2$; $3\pi/4$), M_3 ($a\sqrt{2}/2$; $5\pi/4$), M ($a\sqrt{2}/2$; $7\pi/4$). Вычислить их декартовы координаты (оси расположены обычно). *Ответ*: M_1 (a; a), M_2 ($-a$; a), M_3 ($-a$; $-a$), M_4 (a; $-a$).

42. Даны декартовы координаты точек M_1 ($b/2$; $b\sqrt{3}/2$), M_2 ($-b/2$; $b\sqrt{3}/2$), M_3 (0; $-b$). Вычислить полярные координаты, взяв наименьшие положительные полярные углы (полярная ось расположена обычно). *Ответ*: M_1 (b; $\pi/3$), M_2 (b; $2\pi/3$), M_3 (b; $3\pi/2$).

43. Дано уравнение гиперболической спирали в декартовых координатах

$$y = x \operatorname{tg} \frac{a}{\sqrt{x^2 + b^2}}.$$

Выразить его в полярных координатах и начертить эту спираль. *Ответ*: $r = a/\varphi$.

44. Дано уравнение $r = 2a \cos \varphi$. Доказать путем перехода от полярных координат к декартовым, что это уравнение окружности. *Ответ*: $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.

45. Вывести полярное уравнение прямой, считая данными:

1) длину p перпендикуляра, опущенного на нее из полюса;

2) угол α наклона его к полярной оси.

Ответ: $r = \dfrac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}$.

46. Вывести отсюда уравнение прямой в прямоугольных координатах. *Ответ*: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$.

47. Начертить следующие кривые:

1) $r = a(1 + \cos \varphi)$ (*кардиоида*),

2) $r = a(1 + \cos 4\varphi)$.

48. Дана кривая параметрическими уравнениями

$$x = \frac{3at}{1+t}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t}.$$

Найти ее уравнение. *Ответ*: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

49. Дана кривая параметрическими уравнениями

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t.$$

Найти ее уравнение. *Ответ*: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

50. Материальная точка движется в плоскости так, что ее координаты выражаются такими функциями времени: $x = v_0 t$, $y = gt^2/2$. Написать уравнение траектории. *Ответ*: парабола $y = \frac{g}{2v_0^2}x^2$.

51. Дана окружность $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. Найти геометрическое место середин ее хорд, проведенных из начала координат. *Ответ*: окружность $x^2 + y^2 - ax = 0$.

52. Дана парабола $y^2 = 2px$; найти геометрическое место середин хорд, проведенных из начала координат. *Ответ*: парабола $y^2 = px$.

53. Дан эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Найти геометрическое место точек, делящих расстояние от центра до любой точки эллипса в отношении $2:1$. *Ответ*: эллипс с полуосями, равными $2a/3$ и $2b/3$.

54. Найти геометрическое место точек, каждая из которых отстоит от точки $(-4; 0)$ на расстояние, вдвое большее, чем от точки $(-1; 0)$. *Ответ*: $x^2 + y^2 = 4$.

55. Прямолинейный стержень AB скользит по координатным осям так, что длина его $AB = a + b$ постоянна. Найти, какую кривую описывает точка C, отстоящая от конца B на расстояние a, а от конца A — на расстояние b (рис. 87). *Ответ*: эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

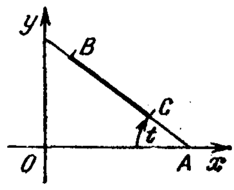


Рис. 87

Указание. Проще всего найти сначала параметрическое уравнение, взяв, например, за параметр угол t, а затем параметр исключить. Подобный метод полезен во многих случаях.

56а. Даны точки $M_1(-2; 0)$, $M_2(4; 0)$. Найти геометрическое место таких точек M, для которых угол M_1MM_2

вдвое больше угла MM_2M_1. *Ответ:* гипербола $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

56b. Дана точка $M_1(-a; 0)$. Найти геометрическое место таких точек M, для которых угол xOM вдвое больше угла xM_1M. *Ответ:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

57. Даны точки $M_1(-1; 0)$ и $M_2(1; 0)$ и прямая $y = -1$. По этой прямой скользит точка M. Найти геометрическое место точек пересечения высот треугольника M_1MM_2. *Ответ:* парабола $y = x^2 - 1$.

58. Доказать, что построение параболы $y = ax^2$, если дана хотя бы одна ее точка M,

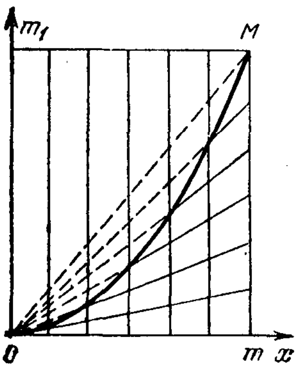


Рис. 88

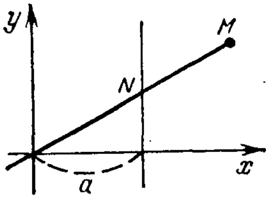


Рис. 89

можно осуществить способом, указанным на рис. 88. (Для большей точности делений можно взять больше.) Применить этот результат к построению параболы $y = \frac{1}{4}x^2$.

59. Найти геометрическое место точек, для каждой из которых произведение расстояний до двух данных точек $F_1(-c; 0)$ и $F(c; 0)$ есть величина постоянная, равная a^2. *Ответ:* $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$ (*овалы Кассини;* в частности, при $a = c$ получается лемниската).

60. Дана прямая $x = a$. Через начало координат проводятся различно наклоненные прямые. От точек N пересечения их с прямой $x = a$ на них откладываются одинаковые отрезки b (рис. 89). Найти геометрическое место концов M этих отрезков. *Ответ:* $(x^2 + y^2)(x - a)^2 = x^2b^2$ (конхоида Никомеда).

Глава 6

ВЕКТОРЫ, ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Оси, векторы, углы

Так же, как и на плоскости, будем рассматривать оси и векторы в пространстве. Здесь только следует заметить, что две оси в пространстве могут и не пересекаться. Однако, если одну из них передвинем параллельно самой себе с тем расчетом, чтобы в новом своем положении она пересекла вторую ось, то, каким бы путем это перемещение ни совершили, угол между новыми положениями осей получится один и тот же. Этот угол мы и принимаем за *угол между осями* (рис. 90).

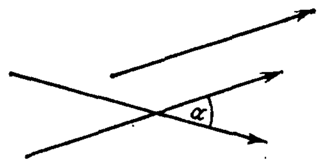


Рис. 90

Этот угол α будем теперь рассматривать только как положительный. Он, следовательно, может быть или острым, или тупым в зависимости от расположения стрелок на осях.

§ 2. Проекции

a. *Проекцией точки* M на ось PQ будем называть точку M_1 пересечения с этой осью плоскости, перпендикулярной PQ и проходящей через точку M.

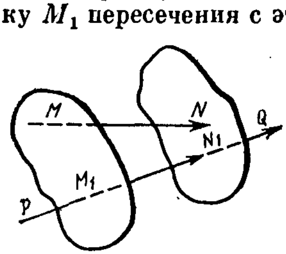


Рис. 91

b. *Проекцией вектора* MN на ось PQ называется такой вектор $\overline{M_1N_1}$, лежащий на оси, начало которого есть проекция начала, а конец — проекция конца вектора $\overline{MN}$ (рис. 91).

c. Так же, как и на плоскости, величина проекции не изменится, если мы передвинем вектор в новое положение параллельно самому себе или же если переместим параллельно самой себе ось проекций.

Кроме того, очевидно, что пр $\overline{AB} = -$пр $\overline{BA}$.

d. Далее, рассмотрим проектирование векторов с одной оси на другую. Если переместим первую ось вместе с вектором, в ней лежащим, в новое положение, в котором бы эта ось пересекла ось проекций, то величина проекции от этого не изменится (рис. 92). Но тогда мы можем

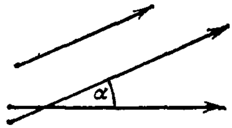


Рис. 92

применить теоремы, доказанные нами для плоскости (потому что теперь обе оси лежат в одной плоскости), т. е. и для пространства справедливы следующие теоремы:

e. *Величины векторов относятся как величины проекций этих векторов на какую-либо ось.*

f. *При проектировании вектора с одной оси на другую величина проекции равна величине проектируемого вектора, умноженной на косинус угла между осями, и, в частности, если направление оси одинаково с направлением вектора, то величина проекции вектора равна его длине, умноженной на косинус угла между вектором и осью.*

Далее, легко доказывается для пространства теорема, относящаяся к проекции векторной цепи.

g. *Алгебраическая сумма величин проекций отдельных звеньев цепи равна величине проекции замыкающего вектора* (рис. 93). Доказательство одинаково с тем, которое было

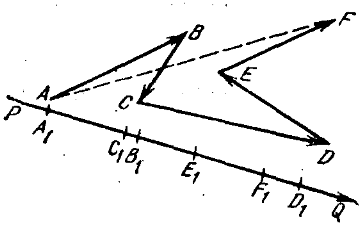


Рис. 93

для плоскости, с той лишь разницей, что здесь проектирование точек на ось осуществляется посредством плоскостей, перпендикулярных оси, а не прямых. Это доказательство в виде упражнения рекомендуем проделать самим учащимся.

§ 3. Проекции на три взаимно перпендикулярные оси. Длина вектора через проекции

a. Рассмотрим три взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy, Oz, исходящие из общей точки O, расположенные, как указано на рис. 94. Наша цель — выяснить вопросы, связанные с проектированием векторов на указанные оси.

b. Пусть вектор $\overline{AB}$ длины r, лежащий на оси MN, образует с осями углы α, β, γ и имеет проекции x, y, z. Для большей отчетливости перенесем вектор вместе с его осью параллельно самому себе в новое положение $\overline{OP}$ с тем расчетом, чтобы его начало попало в точку O. Указанные выше величины от такого перенесения не изменятся. Опуская из нового конца P вектора перпендикуляры на плоскости xOy, yOz, zOx, строим параллелепипед, как показано на рис. 94. Вектор $\overline{OP}$ является диагональю этого параллелепипеда, и, следовательно, квадрат его длины равен сумме квадратов трех его измерений:

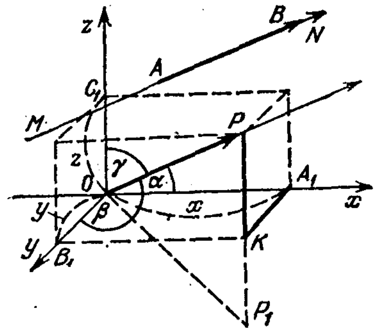


Рис. 94

$$|OP|^2 = |OA_1|^2 + |OB_1|^2 + |OC_1|^2,$$

но

$$|OP| = r, \quad OA_1 = x,$$
$$OB_1 = y, \quad OC_1 = z,$$

и, следовательно,

$$r^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (1)$$

Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его проекций.

Например, длина вектора, имеющего проекции

$$x = 2, \quad y = -3, \quad z = 6,$$

будет

$$r = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7.$$

§ 4. Простейшие зависимости, содержащие величину вектора, проекции и направляющие косинусы

a. Косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ углов, образуемых осью вектора с осями Ox, Oy, Oz, называются *направляющими косинусами*, так как характеризуют направление вектора.

b. Согласно теореме о величине проекции вектора проекции x, y, z вектора получатся умножением его величины p на указанные направляющие косинусы:

$$x = p\cos\alpha,\quad y = p\cos\beta,\quad z = p\cos\gamma. \tag{1}$$

c. В частности, возьмем направление оси совпадающим с направлением самого вектора; тогда p обратится в длину r вектора и $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — в направляющие косинусы самого вектора, и найденные формулы примут вид:

$$x = r\cos\alpha,\quad y = r\cos\beta,\quad z = r\cos\gamma. \tag{2}$$

d. Из этих формул можно выразить направляющие косинусы вектора через его проекции:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \cos\beta &= \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \cos\gamma &= \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.\end{aligned} \tag{3}$$

e. Геометрически ясно, далее, что сами направляющие косинусы не могут быть независимыми, потому что когда известны два угла α и β, для $\overline{OP}$ возможно только самое большее два направления (например, на рис. 94, кроме изображенного на нем, еще симметричное направление $\overline{OP_1}$ ниже плоскости xOy).

Мы выведем сейчас уравнение, связывающее эти направляющие косинусы. Действительно, возводя (2) в квадрат и складывая, имеем

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma),$$

откуда, деля обе части на $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, получим

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{4}$$

f. Например, найдем проекции x, y, z вектора длины 6, образующего с осями равные острые углы.

Здесь $\alpha = \beta = \gamma$, и потому равенство

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

обращается в

$$3\cos^2\alpha = 1, \quad \cos^2\alpha = 1/3, \quad \cos\alpha = 1/\sqrt{3}.$$

Берем знак плюс, потому что угол α по предположению острый. Итак,

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 1/\sqrt{3},$$

и следовательно, согласно формуле (2) ввиду $r = 6$ получим

$$x = y = z = 6\cdot 1/\sqrt{3} = 6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Найдем еще направляющие косинусы вектора, заданного проекциями $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$.

Указанные косинусы можно было бы вычислять непосредственно по формулам (3) в окончательном виде. Однако удобнее раньше вычислить r. Имеем

$$r = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3,$$

и, следовательно, согласно формулам (3)

$$\cos\alpha = 1/3, \quad \cos\beta = -2/3, \quad \cos\gamma = 2/3.$$

§ 5. Проекция вектора на оси. Косинус угла между двумя векторами. Скалярное произведение векторов

а. Пусть вектор $\overline{OP}$ задан своими проекциями x, y, z на оси (рис. 95). Тогда решим такой вопрос. Какова проекция этого вектора на ось ON, заданную своими направляющими косинусами $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ (мы опять берем вектор с началом в O и проектируем его на ось, проходящую через O, но как вектор, так и ось можно, конечно, брать где угодно).

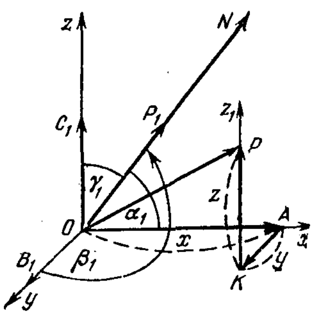


Рис. 95

Как мы видели выше, проекции x, y, z нашего вектора $\overline{OP}$ можно рассматривать как звенья векторной цепи $OAKP$, замыкающим которой является сам вектор $\overline{OP}$.

Согласно теореме о проекции векторной цепи имеем

$$\text{пр}\,\overline{OP} = \text{пр}\,\overline{OA} + \text{пр}\,\overline{AK} + \text{пр}\,\overline{KP}.$$

Но если φ — угол между вектором и осью и r — длина вектора, то

$$\text{пр}\,\overline{OP} = r\cos\varphi.$$

Далее, вектор $\overline{OA}$ лежит в оси Ox, наклоненной к оси ON под углом α_1; следовательно,

$$\text{пр}\,\overline{OA} = x\cos\alpha_1.$$

Вектор $\overline{AK}$ мы заменим вектором $\overline{OB}_1$, который получается параллельным переносом $\overline{AK}$ на ось Oy. Так как ось Oy образует с осью ON угол β_1, то

$$\text{пр}\,\overline{AK} = \text{пр}\,\overline{OB}_1 = y\cos\beta_1.$$

Наконец, вектор $\overline{KP}$ заменим вектором $\overline{OC}_1$, который получается параллельным переносом $\overline{KP}$ на ось Oz. А так как ось Oz образует с осью ON угол γ_1, то

$$\text{пр}\,\overline{KP} = z\cos\gamma_1.$$

Итак, имеем двоякое выражение проекции вектора $\overline{OP}$:

$$\text{пр}\,\overline{OP} = r\cos\varphi = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1. \quad (1)$$

Отсюда, деля на r и замечая, что ввиду (3) § 4

$$\cos\alpha = x/r,\quad \cos\beta = y/r,\quad \cos\gamma = z/r,$$

имеем следующую формулу косинуса угла между двумя осями (или векторами):

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1. \quad (2)$$

b. Возьмем далее на оси ON вектор $\overline{OP}_1$ длиной r с направлением, совпадающим с направлением оси. Его направляющие косинусы будут одинаковы с таковыми для оси ON, т. е. будут $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$; проекции же его обозначим через x_1, y_1, z_1.

Применяя формулу (3) § 4, имеем

$$\cos\alpha_1 = x_1/r_1,\quad \cos\beta_1 = y_1/r_1,\quad \cos\gamma_1 = z_1/r_1,$$

ввиду чего формула (1) дает

$$r\cos\varphi = x\frac{x_1}{r_1} + y\frac{y_1}{r_1} + z\frac{z_1}{r_1},$$

откуда

$$rr_1\cos\varphi = xx_1 + yy_1 + zz_1. \quad (3)$$

В левой части равенства стоит произведение длин векторов на косинус угла между ними. Оно называется *скалярным произведением векторов* и имеет большое значение в механике. Формула (3) показывает, что скалярное произведение равно сумме произведений одноимённых проекций обоих векторов.

c. Формула (3), в частности, дает выражение для $\cos\varphi$ — косинуса угла между двумя векторами — через их проекции:

$$\cos\varphi = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{rr_1},$$

что ввиду (1) § 3 можно переписать еще так:

$$\cos\varphi = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}. \tag{4}$$

d. Выведем условие параллельности и условие перпендикулярности векторов.

Если два вектора, один с проекциями x, y, z, другой — с проекциями x_1, y_1, z_1, параллельны, то при параллельном переносе их с тем расчетом, чтобы начала их совпали с точкой O, эти векторы или совпадут, или составят продолжение один другого.

Изображая тогда проекции этих векторов ребрами параллелепипедов по способу § 3, мы видим, что ввиду подобия параллелепипедов ребра x, y, z параллелепипеда, диагональю которого является вектор $\overline{OP}$, должны быть пропорциональны ребрам x_1, y_1, z_1 параллелепипеда, диагональю которого является вектор $\overline{OP}_1$ (рис. 96):

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}. \tag{5}$$

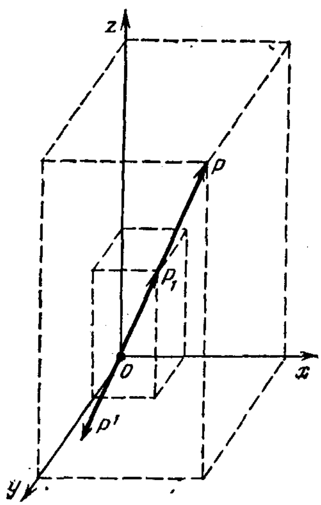


Рис. 96

Обратно, если имеет место эта пропорция, то параллелепипеды подобны, а потому их диагонали, т. е. векторы $\overline{OP}$ и $\overline{OP}_1$, совпадают. Значит, пропорция (5) и выражает собою *условие параллельности*.

Нетрудно видеть, что условие (5) параллельности сохранит силу и в том случае, если вектор $\overline{OP}$ заменить ему противоположным $\overline{OP}'$, так как от такой замены проекции x_1, y_1, z_1, превратятся в $-x_1$, $-y_1$, $-z_1$, отчего пропорция (5) не нарушится.

Замечание. Пропорция (5) есть прямое следствие пункта e § 2. Действительно, согласно ему все отношения (5) должны равняться одному и тому же числу $|OP|/|OP_1|$.

e. Особенно следует отметить случай, когда какая-либо проекция одного из векторов равна нулю, например, пусть $x = 0$. Это значит, что вектор $\overline{OP}$ перпендикулярен оси Ox. Но тогда для параллельности векторов необходимо, чтобы и второй вектор был перпендикулярен оси Ox, т. е. $x_1 = 0$.

Итак, пропорцию (5) можно условно писать и в том случае, когда какие-либо ее члены — нули. Но тогда следует помнить, что при параллельности векторов члены, составляющие одно отношение в пропорции (5), могут обращаться в нуль только одновременно.

f. Условие перпендикулярности векторов получим непосредственно из формулы (3). Именно, должно быть $\varphi = 90°$, $\cos\varphi = 0$, и потому

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0,$$

это и есть *условие перпендикулярности.*

g. Примеры. В пункте f § 4 нами был рассмотрен вектор с направляющими косинусами 1/3; —2/3; 2/3. Найдем проекции на направление этого вектора другого вектора с проекциями 6, 3, 2.

Согласно формуле (1) эта проекция будет

$$6\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\cdot\frac{2}{3} = 2 - 2 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}.$$

Найдем, далее, угол между направлением, которое мы только что рассмотрели, т. е. с направляющими косинусами 1/3, —2/3, 2/3, и направлением, образующим с осями равные острые углы. Последнее, как следует из примера в пункте f § 4, имеет направляющие косинусы $1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$.

Поэтому согласно формуле (2)

$$\cos\varphi = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Найдем далее скалярное произведение векторов, из которых один имеет проекции 2, 6, 3, а другой — проекции 6, 7, 6.

Имеем

$$rr_1 \cos\varphi = 2\cdot 6 + 6\cdot 7 + 3\cdot 6 = 72.$$

Наконец, найдем косинус угла между векторами с проекциями 2, 1, 2 и 3, 2, 6.

Имеем

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 3 + 1\cdot 2 + 2\cdot 6}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\,\sqrt{3^2+2^2+6^2}} = \frac{20}{21}.$$

h. Векторы с проекциями 2, —6, 5 и —1, 3, —2,5 параллельны ввиду того, что

$$\frac{2}{-1} = \frac{-6}{3} = \frac{5}{-2{,}5}.$$

Векторы с проекциями 1, 4, 0 и 2, 8, 0 параллельны ввиду того, что

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{0}{0}.$$

Векторы с проекциями 1, 0, 0 и 12, 0, 0 параллельны ввиду того, что

$$\frac{1}{12} = \frac{0}{0} = \frac{0}{0}.$$

Векторы с проекциями 2, —1, 4 и 1, 4, 0,5 перпендикулярны ввиду того, что

$$2\cdot 1 + (-1)\cdot 4 + 4\cdot 0{,}5 = 0.$$

§ 6. Координаты

a. Переходим к определению положения точки в пространстве. Для этой цели берем три взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy, Oz, расположенные, как и раньше. Положение какой-либо точки M пространства тогда определится проекциями x, y, z вектора $\overline{OM}$ на оси Ox, Oy, Oz.

Эти величины x, y, z называются *координатами точки* M; x называется *абсциссой*; y — *ординатой*, наконец, z — *аппликатой*. Геометрически они изобразятся векторами $x = \overline{OA}$, $y = \overline{OB}$, $z = \overline{OC}$, или также звеньями векторной цепи $OAKM$ (рис. 97). При этом замыкающим вектором является сам вектор $\overline{OM}$.

То обстоятельство, что точка M имеет координаты x, y, z, записываем так:

$$M\ (x;\ y;\ z).$$

Оси Ox, Oy, Oz называются *осями координат*. В частности, Ox называется *осью абсцисс*, Oy — *осью ординат*, Oz — *осью аппликат*. Точка O называется *началом координат*.

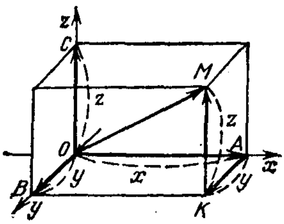


Рис. 97

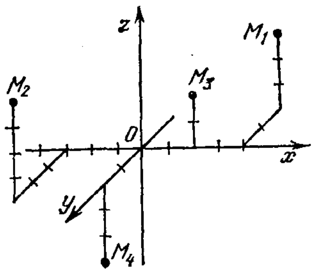


Рис. 98

b. Для построения точки M по заданным ее координатам $(x;\ y;\ z)$ самое лучшее — строить векторную цепь $OAKM$.

На рис. 98 построены четыре точки:

$M_1\ (4;\ -2;\ 3)$, $M_2\ (-3;\ 3;\ 4)$, $M_3\ (2;\ 0;\ 2)$, $M_4\ (0;\ 2;\ -3)$.

§ 7. Выражение проекций вектора через координаты конца и начала

Пусть вектор $\overline{M_1M_2}$ задан координатами $M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ начала и конца. Найдем его проекции X, Y, Z на оси координат.

Согласно известной теореме, проектируя векторную цепь OM_1M_2 и замыкающий ее вектор $\overline{OM_2}$ на ось абсцисс, имеем (рис. 99)

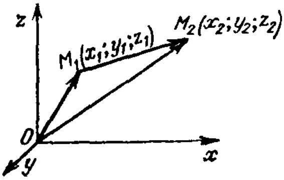


Рис. 99

$$\text{пр}\ \overline{OM_1} + \text{пр}\ \overline{M_1M_2} = \text{пр}\ \overline{OM_2}.$$

Но

$$\text{пр}\ \overline{OM_1} = x_1,$$

$$\text{пр}\ \overline{M_1M_2} = X, \quad \text{пр}\ \overline{OM_2} = x_2,$$

и потому

$$x_1 + X = x_2, \quad X = x_2 - x_1.$$

Аналогичным образом найдем

$$Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1.$$

Итак,

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1,$$

т. е. проекция вектора на ось абсцисс равна разности абсцисс его конца и начала, проекция на ось ординат — разности их ординат, проекция на ось аппликат — разности их аппликат.

Например, вектор $\overline{M_1M_2}$, где M_1 (1; 3; 5), M_2 (2; 1; 2), имеет проекции $X = 2-1$, $Y = 1-3$, $Z = 2-5$, т. е.

$$X = 1, \ Y = -2, \ Z = -3.$$

§ 8. Выражение длины вектора через координаты концов. Расстояние между двумя точками

a. Длина r вектора, рассмотренного в предыдущем параграфе, согласно (1) § 3 равна

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Заменяя же X, Y, Z их выражениями $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$, получим

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

В частности, расстояние от точки M (x, y, z) до начала координат найдем отсюда как длину вектора, соединяющего точки M_1 (0; 0; 0) и M_2 $(x; y; z)$, и, следовательно, это расстояние будет равно r.

b. Например, вектор $\overline{M_1M_2}$, где M_1 (4; 0; 3), M_2 (2; 1; 5), имеет длину

$$r = \sqrt{(2-4)^2 + (1-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3.$$

Можно сказать также, что расстояние между точками M_1 (4; 0; 3), M_2 (2; 1; 5) равно 3.

Далее, расстояние от точки (4; 4; 7) до начала координат будет

$$r = \sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2} = 9.$$

§ 9. Деление отрезка в данном отношении

a. На отрезке, соединяющем точки M_1 $(x_1; y_1; z_1)$, M_2 $(x_2; y_2; z_2)$ (рис. 100), требуется найти точку M $(x; y; z)$, делящую этот отрезок в данном отношении $\frac{k_1}{k_2}$.

т. е. надо найти такую точку M, чтобы

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{k_1}{k_2}.$$

Помня теорему о том, что величины векторов пропорциональны их проекциям на любую ось и, в частности, на ось Ox, имеем

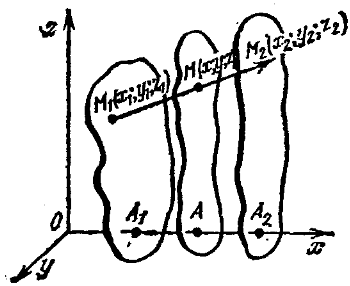


Рис. 100

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{A_1A}{AA_2}.$$

Значит,

$$\frac{A_1A}{AA_2}=\frac{k_1}{k_2}.$$

А так как

$$A_1A=x-x_1, \quad AA_2=x_2-x,$$

то

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{k_1}{k_2},$$

$$k_2x-k_2x_1=k_1x_2-k_1x, \quad (k_1+k_2)x=k_1x_2+k_2x_1,$$

$$x=\frac{k_1x_2+k_2x_1}{k_1+k_2}.$$

Аналогичные выражения найдем для y и z.

Таким образом, окончательно будем иметь

$$x=\frac{k_1x_2+k_2x_1}{k_1+k_2}, \quad y=\frac{k_1y_2+k_2y_1}{k_1+k_2}, \quad z=\frac{k_1z_2+k_2z_1}{k_1+k_2}.$$

b. В частности, координаты середины отрезка ($k_1=k_2$) будут

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

c. Примеры. 1. На отрезке M_1M_2, где M_1 (1; 2; 6), M_2 (6; 12; 21), найти точку M, делящую отрезок в отношении $M_1M/MM_2=2/3$.

Решение. Согласно формулам координаты точки M будут

$$x=\frac{2\cdot 6+3\cdot 1}{2+3}=\frac{15}{5}=3, \quad y=\frac{2\cdot 12+3\cdot 2}{2+3}=\frac{30}{5}=6,$$

$$z=\frac{2\cdot 21+3\cdot 6}{2+3}=\frac{60}{5}=12.$$

Итак, искомая точка M (3; 6; 12).

2. Найти середину M отрезка M_1M_2, где M_1 (1; 3; 8), M_2 (−3; 5; 16).

Решение. Согласно формуле имеем

$$x=\frac{1-3}{2}=-1,\quad y=\frac{3+5}{2}=4,\quad z=\frac{8+16}{2}=12.$$

Итак, искомая точка $M(-1;\ 4;\ 12)$.

§ 10. График уравнения с двумя переменными

a. Мы выясним здесь, какое геометрическое значение имеет уравнение, связывающее переменные

$$x,\ y,\ z$$

(иногда все три, иногда и не все), если эти переменные рассматривать как координаты точки в пространстве.

Уравнение, связывающее x, y, z, мы предположим разрешенным относительно z. Пусть

$$z=f(x,\ y). \qquad (1)$$

Чтобы построить какую-либо точку искомого геометрического места, выберем значения двух переменных x и y (независимых переменных) произвольно. Соответствующее значение z тогда определим из формулы (1). Получим точку $M(x;\ y;\ z)$. Выбрав для x и y другую пару значений, из (1) получим новое значение z, т. е. новую точку нашего геометрического места; выбирая для x и y новые значения, получим еще одну точку и т. д.

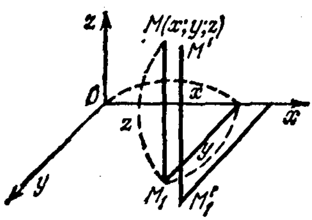


Рис. 101

Таким образом, мы можем построить сколько угодно точек искомого геометрического места.

b. Для выяснения характера геометрического места точек M рассмотрим одновременно с M еще проекцию ее M_1 на плоскость xOy (рис. 101). Эта точка M_1, рассматриваемая как точка плоскости xOy, имеет координаты x и y. Таким образом, задавая произвольно x и y, мы произвольно задаем некоторую точку M_1 плоскости xOy. Но тогда аппликата $z=MM_1$ уже не может быть произвольной — она определяется уравнением (1).

Каждой точке M_1 плоскости xOy будет отвечать своя аппликата M_1M, определяемая уравнением (1). Концы M

этих аппликат и образуют наше геометрическое место. Оно, очевидно, является некоторой поверхностью.

Вид поверхности, конечно, зависит от вида уравнения (1).

§ 11. Поверхность как след, образуемый перемещением некоторой деформируемой плоской кривой

a. Построение поверхности по данному уравнению (1) § 10 можно осуществить следующим образом. Спачала строим точки, отвечающие какому-либо определенному значению $y = y_1$. Эти точки будут лежать в плоскости,

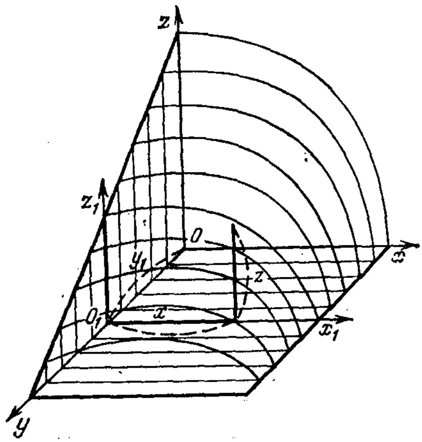


Рис. 102

параллельной плоскости xOz и отстоящей от нее на расстояние y_1. Они, следовательно, образуют линию пересечения указанной плоскости с поверхностью (1) § 10.

Для всех точек кривой y одно и то же: $y = y_1$. Аппликата z для точек этой кривой зависит теперь от одного только x. Выражение ее через x получим, заменив в уравнении (1) § 10 y на постоянное y_1:

$$z = f(x;\ y_1). \tag{1}$$

По уравнению (1) мы можем эту кривую построить (рис. 102).

b. Изменяя немного y_1, мы изменим немного и само уравнение кривой (y_1 является как бы параметром, определяющим форму кривой). Получим новую кривую, немного измененную, расположенную в плоскости, близкой к прежней и параллельной прежней. Меняя y еще раз, получим еще новую кривую и т. д.

Таким образом, придавая переменной y ряд поставленных значений, например, увеличивая ее все время на одну и ту же малую величину h, мы получим ряд кривых, расположенных на плоскостях, параллельных плоскости xOz, которые и охарактеризуют рассматриваемую нами поверхность. Конечно, чем меньше возьмем расстояние h между плоскостями, тем точнее эта поверхность будет охарактеризована.

На рис. 102 изображена часть поверхности, представляющей собою график функции

$$z = \frac{a-y}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

При постоянном $y = y_1$ это уравнение изображает эллипс с полуосями a и $b = a - y_1$. На рис. 102 изображены только эллипсы, отвечающие значениям

$$y_i = \frac{ka}{10}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \qquad \left(h = \frac{3}{10}\right).$$

Это будут эллипсы, у которых большая полуось — постоянная, равная a. Малая же полуось b меняется вместе с y_1:

$$b = a - y_i = a - \frac{k}{10} a = \frac{10-k}{10} a.$$

Итак, последовательные значения b на рис. 102 будут такими:

$$b = \frac{10-k}{10} a, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 10,$$

или

$$b = \frac{am}{10}, \quad m = 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.$$

§ 12. Цилиндрические поверхности

а. В частности, рассмотрим тот особый случай, когда в уравнении из трех переменных отсутствует одна или две. Например, пусть отсутствует y. Уравнение будет иметь вид

$$F(x, z) = 0; \tag{1}$$

здесь, каково бы ни было y, уравнение сохраняет один и тот же вид, так как y в уравнение не входит. Значит, линии пересечения нашей поверхности с плоскостями, параллельными плоскости xOz, будут одинаковы.

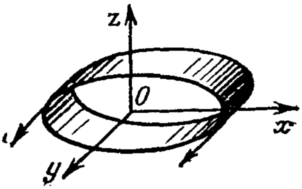


Рис. 103

Поверхность будет цилиндром с образующими, параллельными оси Oy. Линия плоскости xOz с уравнением (1) называется *направляющей* (рис. 103).

b. Например, уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

изобразит *эллиптический цилиндр*, называемый так потому, что его направляющая — эллипс.

§ 13. Обратная задача. Уравнение шаровой поверхности

a. Так же, как и на плоскости, здесь можно поставить и обратную задачу: по данной поверхности подобрать ее уравнение, т. е. найти такое уравнение между x, y, z, которому удовлетворяли бы все точки этой поверхности и не удовлетворяли бы точки, на поверхности не лежащие.

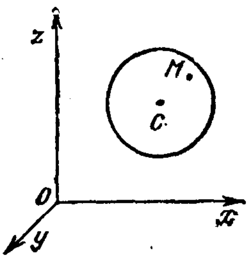


Рис. 104

Эта задача, конечно, очень сложна, и чтобы ее разрешить, надо исходить из какого-либо свойства, общего всем точкам поверхности.

b. Для примера выведем уравнение шаровой поверхности радиуса a с центром в точке C $(m;\ n;\ p)$ (рис. 104). Квадрат расстояния от какой-либо точки $M(x;\ y;\ z)$ пространства до центра C $(m;\ n;\ p)$ выражается формулой

$$|CM|^2 = (x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-p)^2.$$

Этот квадрат равен a^2, если точка M лежит на шаровой поверхности,

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-p)^2 = a^2, \qquad (1)$$

и не равен a^2, если точка лежит вне шаровой поверхности. Поэтому уравнение (1) и является *уравнением шаровой поверхности*.

§ 14. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку

a. Приступим к выводу уравнения плоскости. Положение плоскости определяется заданием точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ на ней и направляющим вектором.

Под последним мы будем понимать вектор любой длины с точкой приложения в любой точке пространства и единственным условием, чтобы он был перпендикулярен плоскости.

Направляющий вектор $\overline{PQ}$ задается своими проекциями A, B, C на оси координат (начало этого вектора может помещаться в любой точке пространства).

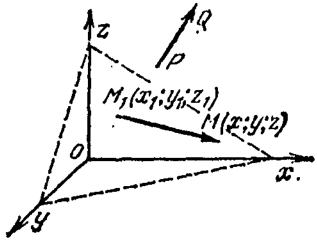


Рис. 105

Если теперь $M(x; y; z)$ — любая точка пространства, то вектор $\overline{M_1M}$ будет перпендикулярен направляющему вектору или нет в зависимости от того, будет ли точка M лежать на плоскости или нет (рис. 105).

А так как вектор $\overline{M_1M}$ имеет проекции $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$, то условие перпендикулярности его направляющему вектору как вектору, имеющему проекции A, B, C, выразится формулой

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \qquad (1)$$

Таким образом, уравнение (1) выполняется, если $M(x; y; z)$ лежит на плоскости, и не выполняется, если M на плоскости не лежит. Оно, следовательно, и является *уравнением плоскости*.

b. Например, уравнение плоскости, проходящей через точку $(1; -2; 3)$ с направляющим вектором, имеющим проекции 3, 2, 6, будет

$$3(x - 1) + 2(y + 2) + 6(z - 3) = 0.$$

§ 15. Общее уравнение плоскости

a. Раскрывая скобки в уравнении (1) § 14, получим

$$Ax + By + Cz + (-Ax_1 - By_1 - Cz_1) = 0.$$

Обозначая

$$-Ax_1 - By_1 - Cz_1 = D,$$

приведем это уравнение к виду

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

где A, B, C не равны 0 одновременно. Итак, уравнение всякой плоскости может быть написано в форме (1).

Обратно, легко показать, что уравнение (1), где A, B, C одновременно не равны 0, всегда изображает плоскость.

Действительно, всегда можно подобрать числа x_1, y_1, z_1, удовлетворяющие условию

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \qquad (2)$$

(например, при C, не равном 0, x_1 и y_1 выбираем произвольно, а z_1 находим из условия (2)). Вычитая тогда (2) из уравнения (1), приведем последнее к виду

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

А это, как мы видим, есть уравнение плоскости, проходящей через точку

$$(x_1;\ y_1;\ z_1).$$

Ввиду доказанного уравнению (1) присвоено название *общего уравнения плоскости.*

b. Например, общее уравнение плоскости, рассмотренной в § 14, будет

$$3x - 3 + 2y + 4 + 6z - 18 = 0;$$
$$3x + y + 6z - 17 = 0.$$

§ 16. Частные случаи

a. В частности, плоскость может быть параллельна одной из осей, и тогда направляющий вектор будет перпендикулярен этой оси. Проекции его на эту ось равна нулю, и, значит, в уравнении плоскости пропадет соответствующая переменная.

b. Например, если плоскость параллельна оси Ox, то направляющий вектор перпендикулярен Ox, проекция A его на Ox равна нулю, уравнение (1) § 15 примет вид

$$By + Cz + D = 0. \qquad (1)$$

Исследуем это уравнение подробнее. Ему, в частности, удовлетворяют точки линии пересечения плоскости с плоскостью yOz. Значит, это уравнение, рассматриваемое только в отношении точек плоскости yOz, изобразит в ней прямую BC пересечения нашей плоскости с плоскостью yOz — *след* нашей плоскости на плоскости yOz (рис. 106).

c. Читателю предоставляется самому установить связь рассматриваемого случая с тем, что было сказано в § 12 о цилиндрических поверхностях вообще.

d. В частности, построение нашей плоскости сводится к построению следа ее на плоскости yOz.

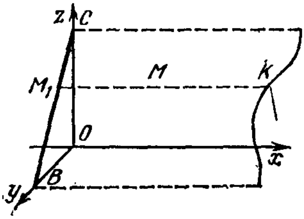


Рис. 106

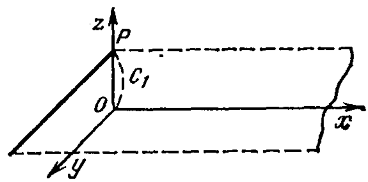


Рис. 107

e. Отметим случай, когда плоскость, кроме оси Ox, параллельна и другой оси, например, оси Oy. Тогда уравнение плоскости (оно же уравнение следа плоскости на плоскости yOz) примет вид

$$Cz + D = 0$$

(след — прямая, параллельная Oy). Решая относительно z, приведем это уравнение к виду

$$z = C_1 \quad (C_1 = -D/C).$$

Последнее уравнение отмечает собою не что иное, как тот факт, что все аппликаты плоскости, параллельной плоскости xOy, равны между собою — равны постоянной C_1. В частности, величине C_1 равна, следовательно, и аппликата точки пересечения плоскости с осью Oz (рис. 107).

f. В частности, при $C = 0$ получаем уравнение самой плоскости xOy в форме

$$z = 0$$

(оно отмечает собою тот факт, что все аппликаты плоскости xOy равны нулю).

Читатель сам сообразит далее, как будут выглядеть уравнения плоскостей, параллельных другим координатным осям или плоскостям.

g. В рассмотрении частных случаях обращались в нуль коэффициенты A, B, C. Теперь посмотрим, что будет, если $D = 0$.

Тогда уравнение плоскости можно написать в виде

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Но, переписав его в форме

$$A(x - 0) + B(y - 0) + C(z - 0) = 0,$$

мы видим, что оно изображает плоскость, проходящую через начало координат.

h. Например, уравнение

$$y + 2z - 1 = 0$$

изображает плоскость, параллельную оси Ox; уравнение

$$2x + 3z - 6 = 0$$

— плоскость, параллельную оси Oy; уравнение

$$4x - y + 2 = 0$$

— плоскость, параллельную оси Oz; наконец, уравнение

$$x - y + z = 0$$

— плоскость, проходящую через начало координат.

§ 17. Выяснение расположения плоскости относительно осей

a. Положение плоскости выяснится, если будем знать следы ее на координатных плоскостях, т. е. прямые, по которым она пересекает эти плоскости. Достаточно при этом знать только два следа, так как плоскость вполне определится двумя различными прямыми, на ней лежащими.

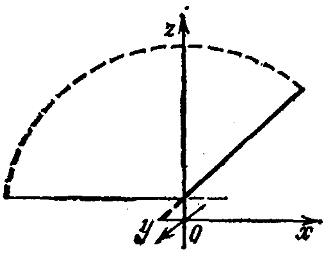


Рис. 108

b. Пусть, например,

$$3x + y - 2z + 1 = 0$$

— уравнение плоскости.

След ее на плоскости xOz получим, полагая в этом уравнении $x = 0$ (рис. 108). Получим уравнение следа в форме

$$3x - 2z + 1 = 0.$$

Построив оба следа по правилам построения прямых, мы сообразим по расположению следов, как расположена плоскость.

c. В частности, построение плоскости, параллельной хоть одной координатной оси, указано в предыдущем параграфе.

d. Для плоскости общего вида, не параллельной ни одной из осей и не проходящей через начало координат, мы укажем еще способ построения по отрезкам, отсекаемым на осях.

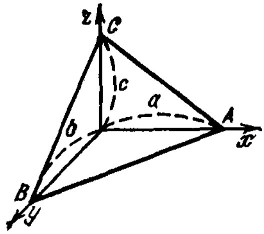


Рис. 109

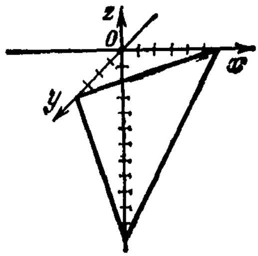


Рис. 110

Пусть a, b, c — величины этих отрезков (рис. 109). Тогда точки A, B, C — пересечения нашей плоскости с осями — имеют координаты

$$A\ (a;\ 0;\ 0),\quad B\ (0;\ b;\ 0),\quad C\ (0;\ 0;\ c).$$

А так как эти точки принадлежат плоскости, то они удовлетворяют уравнению плоскости

$$Aa + D = 0,\quad Bb + D = 0,\quad Cc + D = 0,$$

откуда найдем a, b, c и тогда, зная их, построим плоскость.

e. Построим, например, плоскость

$$2x + 3y - z - 12 = 0.$$

Имеем

$$2a - 12 = 0,\quad a = 6;\quad 3b - 12 = 0,\quad b = 4;$$
$$-c - 12 = 0,\quad c = -12.$$

Плоскость расположена, как показано на рис. 110.

§ 18. Угол между плоскостями. Условие параллельности. Условие перпендикулярности

a. Угол между двумя плоскостями определяется по косинусу. Вообще углов будет два — один острый, другой — тупой (в частности, оба могут быть прямые). При этом тупой угол дополняет острый до 180°, так что косинусы обоих углов отличаются только знаком.

Легко видеть, что один из этих углов совпадает с углом между направляющими векторами плоскостей. Значит, чтобы найти косинусы обоих углов, которые образуются пересечением плоскостей, надо найти косинус угла между направляющими векторами и затем этому косинусу приписать оба знака.

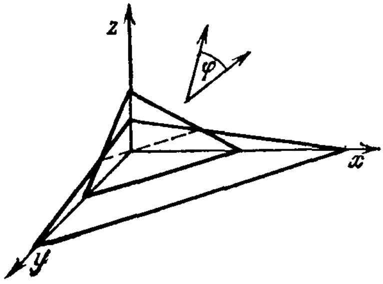


Рис. 111

Но если

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

— уравнения плоскостей, то проекции их направляющих векторов будут A, B, C; A_1, B_1, C_1 и поэтому (рис. 111)

$$\cos\varphi = \pm\frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

Условие параллельности:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}.$$

Условие перпендикулярности:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0.$$

b. Например, угол между плоскостями

$$4x - 4y + 7z - 1 = 0, \quad x + 2y + 2z - 2 = 0$$

определится по формуле:

$$\cos\varphi = \pm\frac{4\cdot 1 + (-4)\cdot 2 + 7\cdot 2}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 7^2}\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \pm\frac{10}{27}.$$

Плоскости

$$x - y + 2z - 1 = 0, \ -2x + 2y - 4z - 9 = 0$$

параллельны ввиду того, что

$$\frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4}.$$

Плоскости

$$2x - 3y + 4z - 2 = 0, \ 4x + 4y + z - 4 = 0$$

взаимно перпендикулярны ввиду того, что

$$2\cdot 4 + (-3)\cdot 4 + 4\cdot 1 = 0.$$

с. Решим следующую задачу.

Через точку (x; y; z) провести плоскость, параллельную плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Решение проводим так. Искомая плоскость должна пройти через точку (x; y; z); кроме того, так как она параллельна данной, за ее направляющий вектор можно взять тот же самый вектор, что и у данной плоскости, т. е. вектор с проекциями A, B, C.

Тогда уравнение искомой плоскости напишется так:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

Например, уравнение плоскости, проходящей через точку (1; 3; 2) и параллельной плоскости

$$4x - y + 2z - 3 = 0,$$

будет следующее:

$$4(x - 1) - (y - 3) + 2(z - 2) = 0.$$

§ 19. Условие совпадения плоскостей

а. Выясним теперь, при каком условии плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \tag{1}$$

совпадают, иными словами, когда оба уравнения изображают одну и ту же плоскость.

Для решения этой задачи заметим, во-первых, что совпадение есть частный случай параллельности. Поэтому должно быть

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}. \tag{2}$$

С другой стороны, ввиду совпадения плоскостей координаты (x; y; z) в обоих уравнениях принимают одни и те же значения.

Умножая уравнение

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

на общую величину отношений

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1},$$

имеем

$$Ax + By + Cz + D_1\frac{A}{A_1} = 0.$$

Вычитая отсюда

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

получим

$$D_1 \frac{A}{A_1} - D = 0, \quad \frac{D}{D_1} = \frac{A}{A_1}.$$

Итак, пропорция (2) дополняется еще одним звеном и принимает вид

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{D}{D_1}. \tag{3}$$

Обратно, при соблюдении условий (3) уравнения (1) действительно изображают одну и ту же плоскость, так как первое получается из второго умножением на общую величину отношений (3).

b. Например, уравнения

$$2x - 3y + z - 4 = 0, \quad -4x + 6y - 2z + 8 = 0$$

изображают одну и ту же плоскость, так как

$$\frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} = \frac{1}{-2} = \frac{-4}{8}.$$

§ 20. Расстояние от точки до плоскости

а. Найдем расстояние d от точки M_1 $(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Для вывода формулы рассмотрим два вектора (рис. 112).

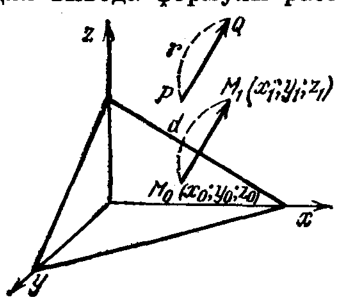


Рис. 112

1. Направляющий вектор $\overline{PQ}$. Его проекции A, B, C и длина

$$r = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}. \tag{1}$$

2. Вектор $\overline{M_0M_1}$, перпендикулярный плоскости, с началом в точке M_0 плоскости и концом в данной точке M_1. Его проекции $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $z_1 - z_0$. Длина же его и есть искомое расстояние d от точки M_1 до плоскости.

Рассмотрим скалярное произведение обоих векторов. Оно равно произведению этих векторов на косинус угла между ними, т. е. $rd \cos \varphi$. Но направления этих векторов или совпадают, или противоположны, значит, $\varphi = 0°$ или $\varphi = 180°$, т. е. $\cos\varphi = 1$ или $\cos\varphi = -1$. Следовательно, искомое скалярное произведение $\pm rd$ должно равняться сумме произведений одноименных проекций:

$$\pm rd = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) =$$
$$= Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D - (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_0).$$

А так как

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_0 = 0,$$

то ввиду (1)

$$\pm rd = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$$

и

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

b. Пример 1. Найдем расстояние от точки M (2; 1; 1) до плоскости

$$2x - 6y + 3z - 8 = 0.$$

Имеем

$$d = \frac{|2\cdot 2 - 6\cdot 1 + 3\cdot 1 - 8|}{\sqrt{4 + 36 + 9}} = \frac{28}{7} = 4.$$

c. Пример 2. Найдем еще расстояние от плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

до начала координат, т. е. до точки (0; 0; 0). Здесь имеем

$$d = \frac{|A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$
$$= \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

§ 21. Прямая как пересечение двух плоскостей

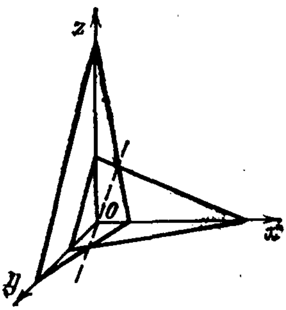


Рис. 113

Две плоскости в пространстве (если они не параллельны), пересекаясь, образуют прямую линию. Пусть

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (1)$$

— уравнения этих плоскостей (рис. 113).

Каждая точка прямой, как одновременно лежащая на обеих плоскостях, удовлетворяет обоим уравнениям (1).

Точки же, не принадлежащие прямой, не находятся на обеих плоскостях одновременно и, следовательно, не могут одновременно удовлетворять обоим уравнениям (1).

Итак, системе (1) удовлетворяют все точки нашей прямой и не удовлетворяют точки, не принадлежащие прямой. Эту систему мы назовем *системой уравнений прямой*.

§ 22. Прямая, проходящая через данную точку

a. Положение прямой вполне определено, если на ней дана какая-либо точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и дано направление прямой. Последнее определим, задав проекции l, m, n некоторого вектора, параллельного прямой,— направляющего вектора. Этот направляющий вектор можно, например, взять на самой прямой. Возьмем за такой вектор $\overline{M_1M_2}$.

Если точка M лежит на прямой, то проекции $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ вектора $\overline{M_1M}$ будут пропорциональны проекциям l, m, n направляющего вектора:

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}. \tag{1}$$

Напротив, эта пропорциональность не имеет места, если точка M не лежит на прямой, так как тогда указанные векторы не параллельны. Поэтому пропорция (1) и дает нам систему уравнений прямой.

b. Следует отметить, что пропорция равносильна системе двух уравнений, взятых из следующих трех:

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m}, \quad \frac{x-x_1}{l} = \frac{z-z_1}{n}, \quad \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n},$$

потому что среди этих уравнений только два (например, два первые) могут быть приняты за независимые. Третье же является следствием их (две величины, равные порознь третьей, равны между собою).

c. Например, система уравнений прямой, проходящей через точку $(1; 3; 1)$, направляющий вектор которой имеет проекции 2, 6, 3, будет следующая:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-1}{3}.$$

Эта пропорция может быть заменена равносильной системой двух уравнений:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{6}, \quad \frac{x-1}{2} = \frac{z-1}{3},$$

или

$$6x - 6 = 2y - 6, \quad 3x - 3 = 2z - 2,$$

или, наконец,

$$6x - 2y = 0, \quad 3x - 2z - 1 = 0.$$

d. Система уравнений прямой, проходящей через точку (2; 1; 1), направляющий вектор которой имеет проекции 0, 0, 2, будет следующая:

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{2},$$

что может быть заменено равносильной системой

$$\frac{x-2}{0} = \frac{z-1}{2}, \quad \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{2},$$

или

$$2x - 4 = 0, \ 2y - 2 = 0.$$

§ 23. Прямая, проходящая через две точки

a. В частности, положение прямой может быть определено двумя точками $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ (рис. 114).

Тогда прямую рассматриваем как проходящую через точку M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и имеющую направляющий вектор $\overline{M_1M_2}$. Но проекции $\overline{M_1M_2}$ суть

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1, \quad n = z_2 - z_1,$$

и потому уравнение прямой примет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

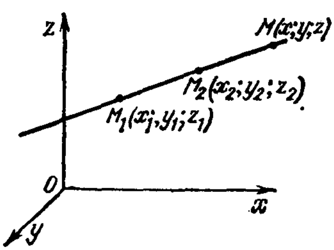


Рис. 114

b. Например, уравнение прямой, проходящей через точки M_1 (1; 4; 2), M_2 (2; 5; 4), будет следующим:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-4}{5-4} = \frac{z-2}{4-2},$$

или

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

c. Уравнение прямой, проходящей через точки

$$M_1\,(1;\ 2;\ 3),\ M_2\,(1;\ 5;\ 8),$$

будет следующим:

$$\frac{x-1}{1-1}=\frac{y-2}{5-2}=\frac{z-3}{8-3},$$

или

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{5}.$$

§ 24. Переход от системы уравнений прямой в общем виде к системе в виде пропорций

Система уравнений прямой в виде пропорций имеет особенно важное значение ввиду того, что туда входят проекции направляющего вектора. Поэтому, когда задана система уравнений прямой в общем виде, весьма важно уметь привести эту систему к системе в виде пропорций. Способ, которым это достигается, мы покажем здесь на частном примере.

Пусть требуется привести к такому виду систему

$$x-2y+3z-4=0, \quad 2x+y-z+1=0. \tag{1}$$

Пользуясь этими уравнениями, мы сначала постараемся найти две какие-либо точки M_1 и M_2 нашей прямой. Чтобы найти M_1, мы придаем абсциссе x какое-либо определенное значение, например, полагаем $x=0$ (это можно сделать, так как точка прямой должна удовлетворять системе (1) двух уравнений с тремя неизвестными, и, значит, одному из неизвестных мы можем давать любое значение).

Тогда для определения y и z можно пользоваться системой (1), где положено $x=0$. Получим

$$-2y+3z-4=0, \; y-z+1=0,$$

откуда

$$y=1, \; z=2.$$

Итак, наша прямая проходит через точку

$$M_1\,(0;\ 1;\ 2).$$

Чтобы найти другую точку M_2, можно было бы придать x какое-либо другое значение, например, взять $x=1$, и затем найти соответствующие значения y и z согласно системе (1), но лучше делать не так, а иначе. Именно, для разыскания M_2 можно положить $y=0$ и затем подобрать соответствующие x и z согласно системе (1).

Итак, положив в уравнениях (1) $y=0$, получим

$$x+3z-4=0, \; 2x-z+1=0,$$

откуда

$$x = 1/7, \quad z = 9/7.$$

Значит, наша прямая проходит также через точку M_2 (1/7; 0; 9/7).

Поэтому систему уравнений нашей прямой, как проходящей через две точки

$$M_1\,(0;\ 1;\ 2),\quad M_2\,(1/7;\ 0;\ 9/7),$$

можно написать в форме

$$\frac{x-0}{\frac{1}{7}-0} = \frac{y-1}{0-1} = \frac{z-2}{\frac{9}{7}-2},$$

или, умножая знаменатели на 7,

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{-7} = \frac{z-2}{-5}.$$

Последняя же система пропорций, как известно, изображает прямую, проходящую через точку (0; 1; 2), с направляющим вектором, имеющим проекции

$$l = 1,\ m = -7,\ n = -5.$$

§ 25. Угол между прямыми. Условие параллельности. Условие перпендикулярности

а. Прямые в пространстве образуют между собою два угла, один из которых будет острым, другой — тупым (в частном случае оба угла могут оказаться прямыми, или же один будет нулем, другой 180°). Косинусы обоих углов отличаются только знаком (в сумме углы образуют 180°).

Легко видеть, что один из углов совпадает с углом между направляющими векторами прямых.

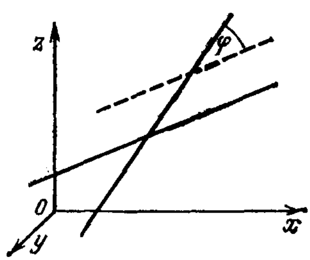


Рис. 115

Но если

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n},$$

$$\frac{x-x'}{l_1} = \frac{y-y'}{m_1} = \frac{z-z'}{n_1}$$

— системы уравнений прямых (как было показано в предыдущем параграфе, их к такому виду всегда можно привести), то направляющие векторы прямых имеют проекции l, m, n; l_1, m_1, n_1. Следовательно, косинус угла φ между прямыми (рис. 115) будет

$$\cos\varphi = \frac{ll_1 + mm_1 + nn_1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}.$$

b. *Условие параллельности прямых:*

$$\frac{l}{l_1} = \frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1}.$$

c. *Условие же перпендикулярности:*

$$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0.$$

d. Чтобы покончить с разбираемым вопросом, решим следующую задачу.

Через точку $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ провести прямую параллельно прямой

$$\frac{x-x'}{l} = \frac{y-y'}{m} = \frac{z-z'}{n}.$$

Искомая прямая должна пройти через точку $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, а так как она параллельна данной, то за направляющий вектор ее можно взять вектор с теми же проекциями l, m, n, что и у данной прямой. Значит, уравнение искомой прямой может быть написано в форме

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}.$$

e. Примеры.

1. Угол между прямыми

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1},\quad \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{-3}$$

определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot(-2) + 2\cdot 6 + (-1)\cdot(-3)}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\,\sqrt{(-2)^2+6^2+(-3)^2}} = \frac{11}{21}.$$

2. Прямые

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{-4},\quad \frac{x-2}{0{,}5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-2}$$

параллельны ввиду того, что

$$\frac{1}{0{,}5} = \frac{2}{1} = \frac{-4}{-2},$$

3. Прямые

$$\frac{x-2}{-4}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{1}, \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{7}$$

взаимно перпендикулярны ввиду того, что $-4\cdot 1+(-3)\times$ $\times 1+1\cdot 7=0$.

4. Через точку (1; 2; 3) провести прямую параллельно прямой

$$x-y+z+1=0, \; x+2y-z+2=0. \qquad (1)$$

Чтобы решить эту задачу, сначала приведем систему (1) к системе в виде пропорций. Полагая $x=0$, получим

$$-y+z+1=0, \; 2y-z+2=0,$$

откуда

$$y=-3, \; z=-4,$$

и, следовательно, прямая проходит через точку M_1 (0; -3; -4). Положив далее $y=0$, получим

$$x+z+1=0, \; x-z+2=0,$$

откуда

$$x=-3/2, \; z=1/2.$$

Следовательно, прямая проходит также через точку M_2 ($-3/2$; 0; 1/2). Система уравнений этой прямой в форме пропорций будет

$$\frac{x-0}{-\frac{3}{2}-0}=\frac{y+3}{0+3}=\frac{z+4}{\frac{1}{2}+4},$$

или (умножая знаменатели на 2)

$$\frac{x-0}{-3}=\frac{y+3}{6}=\frac{z+4}{9}, \quad \frac{x-0}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+4}{3}.$$

Итак, задача свелась к следующей: через точку (1; 2; 3) провести прямую параллельно прямой

$$\frac{x-0}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{3}.$$

Решением этой задачи будет

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}.$$

Однако эту задачу можно решить и проще, хотя тогда решение и не получится в виде пропорций. Именно, рассмотрим плоскости, параллельные плоскостям

$$x-y+z+1=0, \; x+2y-z+2=0$$

и проходящие через точку (1; 2; 3). Уравнения этих плоскостей будут

$$(x-1)-(y-2)+(z-3)=0, \quad (x-1)+$$
$$+2(y-2)-(z-3)=0. \qquad (2)$$

Прямая пересечения новых плоскостей будет параллельна прежней и пройдет через точку (1; 2; 3). Следовательно, прямая, заданная системой (2), и будет той, которая нам требуется.

§ 26. Угол между прямой и плоскостью. Условие параллельности и перпендикулярности

а. Углов между прямой и плоскостью будет два: один острый, который обозначим буквой φ, другой — тупой, равный $180^\circ-\varphi$.

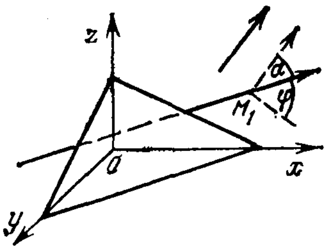


Рис. 116

Точно так же два угла будут и между прямой и направляющим вектором плоскости. Острый угол обозначим буквой α, тупой будет равен $180^\circ-\alpha$ (рис. 116).

Очевидно,

$$\varphi=90^\circ-\alpha, \quad \sin\varphi=\cos\alpha,$$

но $\cos\alpha$ мы сейчас найдем. Действительно, угол α как раз совпадает с углом между направляющими векторами прямой и плоскости или же дополняет этот угол до 180°. Следовательно, $\cos\alpha$ от косинуса последнего угла может отличаться только знаком.

Поэтому, если

$$Ax+By+Cz+D=0$$

— уравнение плоскости,

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

— система уравнений прямой, то

$$\cos\alpha=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Следовательно, так как $\sin\varphi=\cos\alpha$, то

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

b. В частности, прямая параллельна плоскости, если направляющие векторы прямой и плоскости взаимно перпендикулярны, и, наоборот, прямая перпендикулярна плоскости, если она параллельна направляющему вектору плоскости. Поэтому условием параллельности прямой и плоскости будет

$$lA + mB + nC = 0$$

и условием перпендикулярности — пропорция

$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}.$$

c. В заключение решим задачу: через точку $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ провести прямую, перпендикулярную плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Направляющий вектор плоскости имеет проекции A, B, C. С такими проекциями можно взять и направляющий вектор прямой, тогда прямая будет параллельна направляющему вектору плоскости и, следовательно, перпендикулярна плоскости. Значит, уравнение искомой прямой напишется так:

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}.$$

d. Читатель далее сам убедится, что уравнение плоскости, проходящей через точку $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и перпендикулярной прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

будет следующим:

$$l(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0.$$

§ 27. Простейшие поверхности. Эллипсоид

a. Из поверхностей мы рассмотрим только эллипсоид. Уравнение эллипсоида подобно уравнению эллипса. Оно имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где a, b, c — положительные постоянные. Мы выясним форму эллипсоида, рассекая его плоскостями, параллельными осям координат (рис. 117).

b. Во-первых, находим сечение плоскостью xOz. Уравнение его получим, полагая $y = 0$ (уравнение здесь понимается условно — в смысле зависимости между x и z, когда y — постоянная). Это уравнение будет

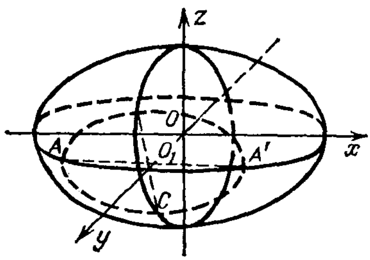


Рис. 117

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (1)$$

т. е. искомое сечение — эллипс с полуосями a и c.

c. Далее, мы должны рассмотреть еще уравнения других сечений, параллельных плоскости xOz. Для этого положим теперь

$$y = y_1 > 0$$

(т. е. рассматриваем сечение плоскостью, параллельной xOz и отстоящей от xOz на расстояние $y = y_1$). Уравнение сечения будет

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y_1^2}{b^2}, \qquad (2)$$

левая часть уравнения есть сумма квадратов и, значит, $\geqslant 0$. Следовательно, выражение в правой части тоже должно быть $\geqslant 0$.

Представляя это выражение в форме

$$1 - \frac{y_1^2}{b^2} = \left(\sqrt{1 - \frac{y_1^2}{b^2}}\right)^2$$

и деля на него обе части найденного уравнения, получим

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1 - \frac{y_1^2}{b^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\sqrt{1 - \frac{y_1^2}{b^2}}\right)^2} = 1.$$

А это показывает, что найденное нами сечение есть эллипс. Полуоси этого эллипса будут

$$a_1 = a\sqrt{1 - \frac{y_1^2}{b^2}}, \quad c_1 = c\sqrt{1 - \frac{y_1^2}{b^2}}, \qquad (3)$$

они получаются из полуосей a и c эллипса (1) умножением на одно и то же число

$$\sqrt{1-\frac{y_1^2}{b^2}}<1.$$

С увеличением y_1 этот эллипс будет удаляться от плоскости xOz, причем его полуоси (3) будут уменьшаться (потому что уменьшается подкоренное выражение), пока, наконец, обе полуоси обратятся в нули и эллипс превратится в точку. Таким образом, часть эллипсоида, отвечающая положительным $y = y_1$, получается перемещением некоторого деформируемого эллипса параллельно плоскости xOz. Центр O этого эллипса скользит по оси Oy, полуоси же $O'A' = a_1$ и $O'C' = c_1$ его все время уменьшаются, пока не обратятся в нуль при $y_1 = b$.

d. Совершенно ясно далее, что от изменения знака у y_1 уравнение (2) не изменится, т. е. отрицательным y_1 будут отвечать такие же эллипсы, как и положительным. Значит, часть эллипсоида, отвечающая отрицательным y_1, будет симметрична той, которая отвечает положительным y_1.

e. Интересно далее выяснить, по каким кривым скользят вершины A' и C' переменного эллипса, описывающего эллипсоид?

Вершина A' скользит по кривой пересечения эллипсоида с плоскостью xOz. Ее получим, полагая $z = 0$. Следовательно, ее уравнением будет

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

f. Точно таким же образом убедимся, что вершина C' скользит по эллипсу

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

лежащему в плоскости yOz $(x = 0)$.

g. Длины a, b, c отрезков, отсекаемых эллипсоидом на осях, называются *полуосями*.

h. В частности, при $a = c$ уравнение эллипсоида будет

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1,$$

эллипсы будут кругами ($a_1 = c_1$). Такой эллипсоид может быть получен вращением вокруг оси Oy эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

лежащего в плоскости xOy, и поэтому называется *эллипсоидом вращения*.

k. Если же $a = b = c$, то уравнение эллипсоида принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Эллипсоид обращается в шаровую поверхность.

§ 28. Другие простейшие поверхности

Читателю предлагается самому исследовать поверхности (исследуя их сечения плоскостями $z = \text{const}$):

1. Эллиптический параболоид

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}.$$

2. Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

3. Конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

4. Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

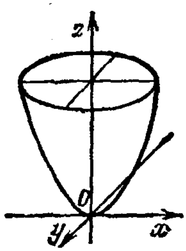


Рис. 118

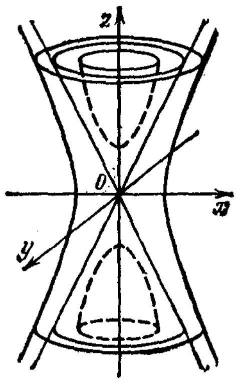


Рис. 119

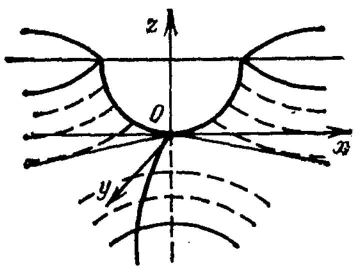


Рис. 120

5. Гиперболический параболоид

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}.$$

Показать, что они имеют форму, указанную на рис. 118—120.

В частности, для поверхностей 2, 3, 4 показать, что при одних и тех же a, b и c двуполостный гиперболоид лежит внутри конуса, а конус в свою очередь лежит внутри однополостного гиперболоида.

§ 29. Кривая в пространстве как пересечение двух поверхностей

Линия в пространстве рассматривается как линия пересечения двух поверхностей, и если

$$F(x;\ y;\ z) = 0,\ \Phi(x;\ y;\ z) = 0 \tag{1}$$

— уравнения этих поверхностей, то система (1) является *системой уравнений линии*.

Действительно, всякая точка линии одновременно лежит на обеих поверхностях и, следовательно, удовлетворяет системе (1). Точки же, не принадлежащие линии, не могут одновременно лежать на обеих поверхностях и, тем самым, не могут удовлетворять системе (1).

§ 30. Параметрические уравнения

a. Однако описанный способ задания линий имеет свои неудобства. Гораздо чаще пользуются другим — параметрическим способом задания линии. Именно, подобно тому, как мы делали в плоской аналитической геометрии, рассматриваем текущие координаты $(x;\ y;\ z)$ точки линии как функции некоторой новой независимой переменной t:

$$x = f_1(t),\quad y = f_2(t),\quad z = f_3(t); \tag{1}$$

эту новую переменную t называем *параметром* (переменным), сами же уравнения (1) — *параметрическими уравнениями кривой*.

b. Так же как и в плоской геометрии, за параметр t можно принимать любую переменную, характеризующую положение точки на линии,— какой-либо отрезок, дугу, угол.

§ 31. Винтовая линия

a. В качестве примера мы выведем параметрические уравнения винтовой линии. Эту кривую можно получить следующим образом.

Прямой круговой цилиндр с радиусом основания a обертываем листом бумаги, как показано на рис. 121.

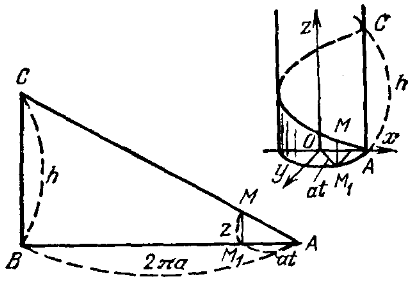


Рис. 121

Этот лист имеет форму треугольника с основанием AB, равным длине $2\pi a$ окружности основания цилиндра, и высотой h (h — шаг винта). Сторона AC треугольника и нарисует на цилиндре винтовую линию.

b. Выведем параметрические уравнения винтовой линии, принимая за параметр t угол AOM_1 (считая здесь положительным то вращение, которое идет от оси Ox к оси Oy). Точка M_1 является проекцией точки M на плоскость xOy. Абсцисса x и ордината y точки M_1 совпадают с абсциссой и ординатой точки M — они суть проекции вектора $\overline{OM_1}$ на оси Ox и Oy и равны

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t.$$

Что касается аппликаты z точки M, то ее лучше всего найдем из рассмотрения $\triangle ABC$ в виде, еще не навернутом на цилиндр. Здесь $|AM_1|$ — выпрямленная дуга в верхней части рис. 121 и, следовательно,

$$|AM_1| = at$$

(дуга измеряется произведением радиуса на угол). Имеем пропорцию

$$\frac{|M_1M|}{|BC|} = \frac{|AM_1|}{|AB|}, \quad \frac{z}{h} = \frac{at}{2\pi a} = \frac{t}{2\pi},$$

откуда

$$z = \frac{h}{2\pi}t.$$

Итак, параметрическими уравнениями винтовой линии будут

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = \frac{h}{2\pi}t.$$

§ 32. Параметрические уравнения в механике

Материальная точка, перемещаясь в пространстве с течением времени t, описывает некоторую кривую — *траекторию*. Координаты x, y, z этой точки M, меняющиеся с изменением времени t, суть некоторые функции времени. Движение можно считать известным, если эти функции заданы:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \tag{1}$$

так как тогда по этим формулам можно найти координаты x, y, z точки M, а, следовательно, и ее положение в любой наперед заданный момент t.

Уравнения (1) будут представлять собою не что иное, как *параметрические уравнения траектории*, причем параметром здесь является само время t.

§ 33. Переход от параметрического представления к общему и обратно

a. Параметрические уравнения содержат три уравнения с четырьмя неизвестными x, y, z, t. Исключая из них t, получим два уравнения с тремя неизвестными x, y, z, т. е. систему уравнений обычного типа.

Например, из параметрических уравнений винтовой линии

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = \frac{h}{2\pi}t$$

мы можем исключить параметр t следующим образом.

Из третьего уравнения находим

$$t = 2\pi z/h.$$

Подставляя это в первые два уравнения, найдем обыкновенную систему уравнений винтовой линии:

$$x = a\cos\frac{2\pi z}{h}, \quad y = a\sin\frac{2\pi z}{h}.$$

b. Обратно, обыкновенное представление кривой

$$F(x; y; z) = 0, \quad \Phi(x; y; z) = 0 \tag{1}$$

можно свести к параметрическому, взяв за параметр одну из координат, например x.

Выражая из (2) y и z через x, имеем

$$y = f_2(x), \quad z = f_3(x).$$

Присоединяя сюда тождество $x = x$, имеем

$$x = x, \quad y = f_2(x), \quad z = f_3(x),$$

т. е. все x, y, z выражены через x ($f_1(x) = x$).

§ 34. Преобразование координат

a. Если даны координаты x, y, z какой-либо точки M пространства относительно данной системы осей Ox, Oy, Oz, то весьма важно бывает знать связь этих координат с координатами той же точки относительно какой-либо новой системы осей.

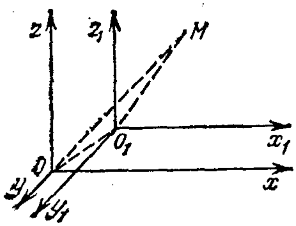


Рис. 122

b. Сначала рассмотрим случай параллельного переноса осей, т. е. случай, когда новые оси параллельны старым.

Пусть a, b, c — старые координаты нового начала O (рис. 122).

Проектируя векторную цепь OO_1M и замыкающий ее вектор $\overline{OM}$ на старую ось Ox, имеем

$$\text{пр}\,\overline{OM} = \text{пр}\,\overline{OO_1} + \text{пр}\,\overline{O_1M},$$

но

$$\text{пр}\,\overline{OM} = x, \quad \text{пр}\,\overline{OO_1} = a, \quad \text{пр}\,\overline{O_1M} = x_1$$

и потому

$$x = a + x_1.$$

Аналогично этому, проектируя на ось Oy, получим

$$y = b + y_1.$$

Наконец, проектируя на ось Oz, найдем

$$z = c + z_1.$$

Таким образом, будем иметь следующие формулы перехода:

$$x = a + x_1, \quad y = b + y_1, \quad z = c + z_1,$$

которые выражают старые координаты точки через ее новые координаты и так же, как в плоской геометрии, носят название *формул перехода*.

c. Теперь рассмотрим случай, когда новые оси имеют старое начало, но новые направления (рис. 123). Положение новых осей тогда определится углами, которые новые оси координат образуют со старыми осями.

Пусть эти углы даются следующей таблицей:

	Ox	Oy	Oz
Ox_1	α	β	γ
Oy_1	α_1	β_1	γ_1
Oz_1	α_2	β_2	γ_2

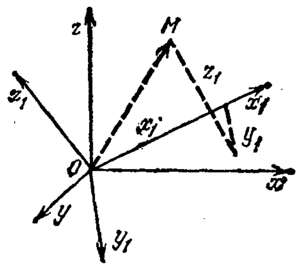


Рис. 123

Обратно, легко видеть, что если принять за основную не старую, а новую систему осей, то старые оси суть оси, образующие с новыми следующие углы:

с осью Ox — углы α, α_1, α_2,

с осью Oy — углы β, β_1, β_2,

с осью Oz — углы γ, γ_1, γ_2.

Вектор $\overline{OM}$ имеет проекциями на новые оси числа x_1, y_1, z_1; следовательно, его проекции x, y, z на старые оси как на оси, образующие с новыми осями указанные выше углы, согласно (1) § 4 выразятся так:

$$x = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\alpha_1 + z_1 \cos\alpha_2,$$

$$y = x_1 \cos\beta + y_1 \cos\beta_1 + z_1 \cos\beta_2,$$

$$z = x_1 \cos\gamma + y_1 \cos\gamma_1 + z_1 \cos\gamma_2.$$

Это *формулы перехода* для рассматриваемого случая.

d. Читателю предлагается самому показать по аналогии с плоской геометрией, что в общем случае, когда новые оси имеют и новое начало, и новые направления, *формулы перехода* будут иметь вид

$$x = a + x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\alpha_1 + z_1 \cos\alpha_2,$$

$$y = b + x_1 \cos\beta + y_1 \cos\beta_1 + z_1 \cos\beta_2,$$

$$z = c + x_1 \cos\gamma + y_1 \cos\gamma_1 + z_1 \cos\gamma_2.$$

§ 35. Упражнения

1. Найти длину вектора, заданного проекциями $x = 2$, $y = 3$, $z = 6$. *Ответ*: $r = 7$.

2. Проверить, что векторная цепь, состоящая из трех векторов с проекциями 2, —4, 4; —3, 2, —5; 1, 2, 2, образует замкнутый треугольник, и затем вычислить периметр этого треугольника. *Ответ*: периметр 16.

3. Найти направление вектора, заданного проекциями 7; 4; —4. *Ответ*: $\cos\alpha = 7/9$, $\cos\beta = 4/9$, $\cos\gamma = -4/9$.

4. Три силы $x = 6$, $y = -6$, $z = 7$, приложенные к началу координат, направлены по осям координат. Найти длину и направление равнодействующей. *Ответ*: длина 11; $\cos\alpha = 6/11$, $\cos\beta = -6/11$, $\cos\gamma = 7/11$.

5. Ребра параллелепипеда имеют длины 2, 6, 9. Найти проекции этих ребер на направление диагонали. *Ответ*: 4/11, 36/11, 81/11.

6. Три силы с проекциями —1, 2, 3; 1, 1, 1; 1, 1, 2 приложены к одной точке. Найти длину и направление равнодействующей. *Ответ*: длина 9; $\cos\alpha = 1/9$, $\cos\beta = 4/9$, $\cos\gamma = 8/9$.

7. Вектор образует с осью Ox угол 60°, а с осью Oy — угол 45°. Найти угол, образуемый этим вектором с осью Oz. *Ответ*: $\gamma_1 = 60°$, $\gamma_2 = 120°$.

8. Точке, находящейся в начале координат, сообщены три скорости 9, 8 и 5, каждая образует с осями равные острые углы, но первая лежит в первом координатном угле, вторая — в третьем, наконец, третья — в шестом. Найти, по какому направлению и с какой скоростью начнет двигаться точка. *Ответ*: скорость $14/\sqrt{3}$, $\cos\alpha = -2/7$, $\cos\beta = 3/7$, $\cos\gamma = 6/7$.

9. Проекции вектора суть 6, 6, 7. Найти его проекции на направление вектора из упражнения 3. *Ответ*: 38/9.

10. Проекции вектора суть 2, 3, 7. Найти его проекцию на ось с направляющими косинусами 12/13; —3/13; —4/13, проверив сначала, что такая ось существует. *Ответ*: —1.

11. Найти проекцию силы величиной 4, расположенной в плоскости xOy под углом 30° к оси Ox, на направление, образующее с осями равные острые углы (с точностью до 0,01). *Ответ*: 3,15.

12. Найти скалярное произведение векторов с проекциями 2, 6, 3 и 1, 2, 2. *Ответ*: 20.

13. То же самое для векторов с проекциями 4, —5, 20 и —7, 4, 4. *Ответ*: 32.

14. Найти косинус угла между векторами из упражнения 12. *Ответ*: 20/21.

15. Найти косинус угла между векторами с проекциями 4, 4, 2 и 14, 5, 2. *Ответ*: 8/9.

16. Найти проекцию первого вектора из упражнения 12 на направление вектора (1, 2, 2). *Ответ*: 20/3.

17. Будут ли параллельны векторы с проекциями $0{,}5;\ -0{,}7;\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ и $-1{,}5;\ 2{,}1;\ \frac{3}{1-\sqrt{3}}$? *Ответ*: да.

18. Будут ли взаимно перпендикулярны векторы с проекциями 1, 3, −4 и −2, 2, 1? *Ответ*: да.

19. Какой вид имеют формулы (1) § 3, (1)—(4) § 4, когда вектор $\overline{OP}$ лежит в плоскости xOy? *Ответ*: $x^2+y^2=r^2$, $x=p\cos\alpha$, $y=p\sin\alpha$, $x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha$, $\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

20. Во что обратятся формулы (1), (2), (3), (5) § 5, когда оба направления лежат в плоскости xOy? *Ответ*

$$\text{пр}\,\overline{OP}=r\cos\varphi=x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1,$$

$$\cos\varphi=\cos\alpha\cos\alpha_1+\sin\alpha\sin\alpha_1,$$

$$rr_1\cos\varphi=xx_1+yy_1,$$

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}.$$

21. Во что обратится формула (2) § 5, когда $\varphi=0$? *Ответ*: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

22. Найти периметр треугольника с вершинами $M_1(2;\ 4;\ 5)$, $M_2(3;\ 8;\ 13)$, $M_3(-1;\ 0;\ 5)$. *Ответ*: 26.

23. Найти периметр теругольника с вершинами $M_1(0;\ 0;\ 0)$, $M_2(-4{,}2;\ -5{,}6;\ 24)$. *Ответ*: 120.

24. На оси абсцисс найти точку, равноудаленную от точек $M_1(6;\ 6;\ 6)$, $M_2(7;\ 4;\ 7)$, $M_3(4;\ 4;\ 8)$. *Ответ*: (3; 0; 0).

25. Найти центр и радиус шаровой поверхности, проходящей через точки $M_1(0;\ 0;\ 0)$, $M_2(7;\ 1;\ -2)$, $M_3(8;\ 6;\ -4)$. *Ответ*: центр (4; 7; 4), радиус 9.

26. На оси ординат найти такую точку M, чтобы угол M_1MM_2 был прямым. При этом $M_1(-6;\ 7;\ 7)$, $M_2(2;\ 10;\ -6)$. *Ответ*: (0; 1; 0).

27. Разделить отрезок M_1M_2, где $M_1(1;\ 4;\ 8)$, $M_2(8;\ 18;\ -20)$, в отношении 2 : 5. *Ответ*: $M(3;\ 8;\ 0)$.

28. Дано M_1 (2; 2; 1). Найти M_2, если известно, что точка M (6; 4; 5) делит отрезок M_1M_2 в отношении 2 : 3. *Ответ*: M_2 (12; 7; 11).

29. В треугольнике с вершинами M_1 (4; 8; 8), M_2 (16; 12; 4), M_3 (0; 4; 8) середины сторон принимаем за вершины нового треугольника. Найти середины сторон этого нового треугольника. *Ответ*: (9; 9; 6), (5; 7; 7), (6; 8; 7).

30. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку (3; 1; 0), если известно, что ее направляющий вектор имеет проекции 2, 6, 3. *Ответ*: $2x + 6y + 3z - 12 = 0$.

31. Найти уравнение плоскости, если известно, что она проходит через точку M_1 (3; 4; 1) и перпендикулярна вектору $\overline{M_1M_2}$, где M_2 (—4; 8; 2). *Ответ*: $-2x + 4y + z - 11 = 0$.

32. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 (1; 4; 2), M_2 (2; 3; 1), M_3 (1; 1; 2). *Ответ*: $x + z - 3 = 0$.

33. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 (1; 1; 1), M_2 (2; 3; 0) и отсекающей на оси Oz отрезок длиной 5. *Ответ*: $7x - 3y + z - 5 = 0$, $-13x + 7y - z + 5 = 0$.

34. Доказать, что уравнение плоскости, отсекающей на осях координат отрезки a, b, c, будет

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

35. Найти точку пересечения плоскостей $2x - 4y + 3z + 3 = 0$, $x - y + z = 0$, $x + 2y + z - 6 = 0$. *Ответ*: (1; 2; 1).

36. Найти косинус острого угла между плоскостями $12x - 3y + 4z - 8 = 0$, $4x + 8y + z - 1 = 0$. *Ответ*: 28/117.

37. Найти косинус угла между плоскостями $x + y + z = 0$, $2x - z = 0$. *Ответ*: $\pm 1/\sqrt{15}$.

38. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку (1; 3; 1) и параллельной плоскости $2x - 4y + 3z - 1 = 0$. *Ответ*: $2x - 4y + 3z + 7 = 0$.

39. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку (4; 2; 1) и перпендикулярной плоскостям $x + y + z + 1 = 0$, $x - y + 2z - 2 = 0$. *Ответ*: $3x - y - 2z - 16 = 0$.

40. Найти расстояние от точки (2; 2; 3) до плоскости $8x - 4y + z - 38 = 0$. *Ответ*: 3.

41. Найти расстояние от плоскости $2x - 2y + z - 6 = 0$ до начала координат. *Ответ*: 2.

42. Написать уравнение прямой, проходящей через точку (3; 1; 4), если направляющий вектор прямой имеет проекции 2, 3, 6. *Ответ*: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{6}$.

43. Найти уравнения сторон треугольника из упражнения 22. *Ответ*: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{8}$, $\frac{x-3}{-4} = \frac{y-8}{-8} = \frac{z-13}{-8}$, $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{0}$.

44. Написать в виде пропорций уравнения прямой $x + y - z + 1 = 0$, $2x - y + 2z - 3 = 0$. *Ответ*: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-2}{-3}$.

45. Найти косинус острого угла между прямой $4x - y - z - 3 = 0$, $y - z + 6 = 0$ и прямой $2x - 6y + z = 0$, $4x - 3y - z + 1 = 0$. *Ответ*: 19/21.

46. Найти синус угла между первой прямой из упражнения 45 и плоскостью $2x - 6y + 9z - 1 = 0$. *Ответ*: 8/33.

47. Через точку (2; 3; 6) провести плоскость перпендикулярно второй прямой из упражнения 45. *Ответ*: $3x + 2y + 6z - 48 = 0$.

48. Через точку (3; 3; —1) провести прямую перпендикулярно плоскости $3x - 3y + 4z - 9 = 0$. *Ответ*: $\frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+1}{4}$.

49. Через точку (1; 2; 1) провести плоскость параллельно прямым $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2}$, $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$.
Ответ: $3x - 7y + 2z + 9 = 0$.

50. Доказать, что уравнение

$$m(Ax + By + Cz + D) + n(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$$

при m и n, одновременно не равных нулю, изображает плоскость, проходящую через линию пересечения плоскостей

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

(если, конечно, эти плоскости не параллельны).

51. Доказать, что уравнение плоскости, являющейся биссектрисой двугранного угла между плоскостями

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

будет следующим:

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=-\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}.$$

Указание. Если преобразовать уравнения данных плоскостей с тем, чтобы длины направляющих векторов оказались равными (что проще всего сделать, приняв эти длины равными 1), то направляющий вектор биссектрисы явится геометрической суммой этих направляющих векторов. Уравнение второй биссектрисы получим, заменив один из направляющих векторов вектором, ему противоположным.

52. Доказать, что уравнение биссектрисы угла, образуемого пересекающимися прямыми

$$\frac{x-x_1}{k}=\frac{y-y_1}{l}=\frac{z-z_1}{m},$$

$$\frac{x-x_1}{k_1}=\frac{y-y_1}{l_1}=\frac{z-z_1}{m_1},$$

будет следующим:

$$\frac{x-x_1}{\frac{k}{r}\pm\frac{k_1}{r_1}}=\frac{y-y_1}{\frac{l}{r}\pm\frac{l_1}{r_1}}=\frac{z-z_1}{\frac{m}{r}\pm\frac{m_1}{r_1}},$$

$$r=\sqrt{k^2+l^2+m^2},\qquad r=\sqrt{k_1^2+l_1^2+m_1^2}.$$

53. Посмотреть, что дает метод упражнений 51 и 52 в применении к плоской геометрии.

54. Найти расстояние от точки (1; 3; 5) до прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2}$. *Ответ:* 1.

55. Вычислить объем тетраэдра с вершинами M_1 (0; 0; 0), M_2 (1; 1; 1), M_3 (0; 1; 2) M_4 (2; 0; 1). *Ответ:* 0,5.

56. Доказать, что поверхность эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

получается из шаровой поверхности

$$x^2+y^2+z^2=a,$$

если аппликату z каждой точки последней заменить на z_1, где

$$z_1/z=c/a.$$

57. Доказать, что поверхность эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

получается на поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

если ординату каждой точки последней заменить на y_1, где

$$y_1/y=b/a.$$

58. Пользуясь доказанным в упражнениях 56 и 57, показать, что объем эллипсоида из упражнения 56 будет $4\pi a^2c/3$, а объем эллипсоида из упражнения 57 будет $4\pi abc/3$.

59. Найти точки пересечения поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1,$$

шаровой поверхности

$$x^2+y^2+z^2=2$$

в плоскости

$$x+y-\frac{1}{\sqrt{2}}z-1=0.$$

Ответ: $\left(-1;\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}};\ \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ и $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}};\ -1;\ \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

60. Найти точки пересечения шаровой поверхности

$$x^2+y^2+z^2=121$$

и прямой

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-7}{3}=\frac{z-4}{2}.$$

Ответ: M_1 (2; 9; 6), $M_2\left(-\frac{64}{9};\ \frac{173}{9};\ \frac{146}{9}\right)$.

61. На параболоиде $z=x^2+y^2$ отыскать точку, равноудаленную от точки M (6/5; 8/5; 1), от плоскости xOy и от оси Oz. *Ответ*: (3/5; 4/5; 1).

62. Найти уравнение проекций на плоскости xOy, yOz, zOx линии пересечения шаровой поверхности x^2+ $+y^2+z^2=4$ и плоскости $x=y$. *Ответ*: $x=y$, $\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1$, $\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1$.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава 1

ПРЕДЕЛЫ

§ 1. Бесконечно малые

a. Понятие бесконечно малой мы выясним на частных примерах.

Рассмотрим переменную дробь

$$\alpha = \frac{1}{n},$$

у которой знаменатель неограниченно увеличивается (например, пусть n принимает последовательно значения 1, 2, 3, ...). Тогда переменная дробь α будет неограниченно уменьшаться, все более и более приближаясь к нулю. Такую переменную α назовем бесконечно малой *).

b. Вместо дроби α мы могли бы рассматривать отрицательную дробь

$$\alpha_1 = -\frac{1}{n},$$

отличающуюся от α только знаком. При неограниченном увеличении n эта дробь тоже неограниченно уменьшается, но теперь уже не в алгебраическом смысле, а по своей абсолютной величине. Переменную α_1 мы тоже назовем бесконечно малой.

c. Можно также рассматривать и дробь

$$\alpha_2 = \pm\frac{1}{n}$$

с условием, что берется знак $+$, если n четное, и $-$, если n нечетное. Переменная α_2 также неограниченно уменьшается по своей абсолютной величине; ее мы тоже назовем бесконечно малой.

*) Истинному представлению о бесконечно малой более соответствовало бы название не бесконечно малой, а бесконечно уменьшающейся величины.

d. В качестве примеров бесконечно малых приведем еще переменные α_3, α_4, α_5, α_6, принимающие такие последовательные значения:

$$\alpha_3 = 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \ldots;$$

$$\alpha_4 = -1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \ldots;$$

$$\alpha_5 = 1,\ \frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3},\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ \ldots;$$

$$\alpha_6 = 0{,}1;\ -0{,}01;\ 0{,}001;\ -0{,}0001;\ \ldots,$$

тоже неограниченно уменьшающиеся по своей абсолютной величине.

e. Хорошим примером бесконечно малой может служить также сторона правильного вписанного в круг многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон.

Рис. 1

f. Наконец, возьмем такой пример. Упругая стальная пружина MN закреплена одним концом M, другой же конец N остается свободным (рис. 1). Если мы отклоним конец N от его начального положения, то пружина начнет колебаться, отклоняясь то вправо, то влево от своего начального положения MN, делая при этом, ввиду сопротивления воздуха, все меньшие и меньшие размахи (затухающее колебание). Теоретически такое колебание будет продолжаться бесконечно долго.

Расстояние $\alpha = K_1N_1$ колеблющегося конца от начального положения MN пружины, которое считается положительным, если пружина отклонена вправо от MN, и отрицательным, если пружина отклонена влево от MN, очевидно, и будет величиною бесконечно малой.

g. Основным свойством, характеризующим бесконечно малую, является ее неудержимое стремление к нулю. Никаких границ для такого стремления к нулю быть не должно, и какое бы мы ни задали малое положительное число ε, мы должны быть уверены в том, что в изменении бесконечно малой α непременно наступит момент, начиная с которого абсолютная величина $|\alpha|$ бесконечно малой будет оставаться меньше ε.

Отмечая это характерное свойство бесконечно малой, мы дадим ей такое определение.

Бесконечно малой мы называем такую переменную α, относительно которой мы уверены в следующем:

Какое бы малое положительное число ε мы ни задали, в изменении α наступит момент, начиная с которого абсолютная величина $|\alpha|$ переменной α будет оставаться меньше ε.

h. Считаем необходимым особенно подчеркнуть тот факт, что свойство бесконечно малой начиная с некоторого момента численно оставаться меньше ε должно обнаруживаться при любом ε (какое бы малое ε ни было задано). Именно, если в изменении бесконечно малой α уже наступил момент, начиная с которого $|\alpha|$ остается меньше ε, то при дальнейшем изменении α наступят также моменты, начиная с которых $|\alpha|$ будет оставаться меньше и других еще более мелких ε_1, ε_2, ...

Например, после того как $|\alpha|$ уже остается меньше ε, при дальнейшем изменении α наступит момент, начиная с которого $|\alpha| < \varepsilon/2$, а при дальнейшем изменении α — моменты, начиная с которых $|\alpha| < \varepsilon/3$, $|\alpha| < \varepsilon/4$, $|\alpha| < \varepsilon/5, \ldots$ и вообще $|\alpha| < \varepsilon/n$ независимо от того, как велико выбрано целое число n. Или, например, если α — бесконечно малая, то при ее приближении к нулю последовательно наступят моменты, начиная с которых $|\alpha| < 0{,}01$, $|\alpha| < 0{,}001$, $|\alpha| < 0{,}0001$ и т. д.

В приведенном выше примере пункта a (с. 7), т. е. при

$$\alpha = 1/n,$$

имеем

$$\begin{aligned}
&\alpha < 0{,}1 && \text{начиная с} \quad n = 11,\\
&\alpha < 0{,}01 && \text{начиная с} \quad n = 101,\\
&\alpha < 0{,}001 && \text{начиная с} \quad n = 1001.
\end{aligned}$$

§ 2. Понятие предела переменной величины

a. С понятием бесконечно малой величины тесно связано понятие предела.

Если переменная x приближается к постоянной a так, что разность

$$x - a$$

между обеими величинами есть бесконечно малая, то говорят, что переменная x стремится к пределу a.

b. Запись того, что переменная x стремится к пределу a, производится или в виде

I. $\lim x = a$ (читается: предел x равен a) (lim есть сокращенное французское слово limite, что значит предел), или же в виде

II. $x \to a$ (читается: x стремится к пределу a), или же, наконец, обозначая бесконечно малую разность $x - a$ буквою α, мы можем эту запись произвести в форме

$$x - a = \alpha,$$

или еще лучше в форме

III. $$x = a + \alpha.$$

Последняя запись показывает, что *переменная величина x равна своему пределу a, сложенному с бесконечно малой α.* Записи I, II, III равносильны между собой.

с. Пример 1. Пусть переменная x проходит последовательно такие значения:

$$x = 1{,}1;\ 1{,}01;\ 1{,}001;\ 1{,}0001;\ \ldots$$

Нетрудно видеть, что пределом этой переменной является 1, то есть

$$\lim x = 1.$$

Действительно, разность $x - 1$ проходит последовательно такие значения:

$$0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots,$$

т. е. является величиною бесконечно малой.

Пример 2. Пусть переменная x проходит последовательно такие значения:

$$x = 0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\ 0{,}9999;\ \ldots$$

Нетрудно видеть, что и в этом случае

$$\lim x = 1.$$

Действительно, и здесь разность $x - 1$ является величиною бесконечно малой, так как проходит последовательно значения

$$-0{,}1;\ -0{,}01;\ -0{,}001;\ -0{,}0001;\ \ldots$$

Пример 3. Пусть имеется окружность. Впишем в нее квадрат, затем удвоим число сторон, затем еще раз удвоим и т. д. Получим переменный правильный многоугольник с неограниченно возрастающим числом сторон (рис. 2).

Если обозначим площадь этого многоугольника буквою S, а площадь круга буквою K, то при указанном неограниченном увеличении числа сторон площадь S будет неограниченно приближаться к площади K, и мы можем написать

$$\lim S = K.$$

d. Можно сказать, что *бесконечно малая величина стремится к пределу нуль.* Действительно, разность

$$\alpha - 0$$

между бесконечно малой и нулем равна самой бесконечно малой:

$$\alpha - 0 = \alpha.$$

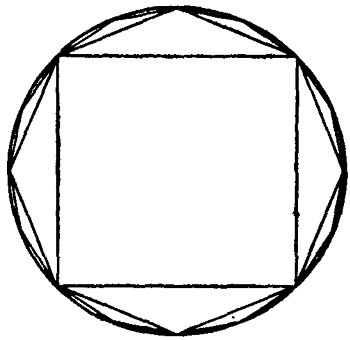


Рис. 2

В связи с этим запись того, что α — бесконечно малая, можно производить одним из двух следующих способов:

$$\lim \alpha = 0$$

или же

$$\alpha \to 0.$$

e. Можно сказать, что *постоянная величина a стремится к пределу, равному ей самой:*

$$\lim a = a.$$

Действительно, разность $a - a = 0$, а нуль можно рассматривать также как бесконечно малую, так как он всегда остается меньше любого положительного числа ε, каким бы малым последнее ни было задано.

§ 3. Понятие бесконечно большой

a. Вместе с понятием бесконечно малой нам потребуется и понятие бесконечно большой величины. В то время как для бесконечно малой нельзя поставить никаких границ ее приближению к нулю, для бесконечно большой величины, наоборот, нельзя поставить никаких границ ее увеличению (по абсолютной величине). Называя какую-либо величину n бесконечно большой, мы должны быть уверены в том, что какое бы большое положительное число N мы ни задали, в изменении переменной n обязательно наступит момент, начиная с которого абсолютная величина $|n|$ этой переменной будет оставаться больше N.

Отмечая это характерное свойство бесконечно большой, мы дадим ей такое определение.

Бесконечно большой мы называем такую переменную n, относительно которой мы уверены в следующем:

Какое бы большое положительное число N мы ни задали, в изменении n наступит момент, начиная с которого абсолютная величина $|n|$ переменной n будет оставаться больше N.

b. И здесь мы считаем необходимым особенно подчеркнуть то, что свойство бесконечно большой начиная с некоторого момента численно оставаться больше N должно обнаруживаться при любом N, как бы велико N ни было задано.

Например, после того как n по абсолютной величине уже остается больше N, при дальнейшем изменении n наступит момент, начиная с которого $|n| > 2N$, и при дальнейшем изменении n — моменты, начиная с которых

$$|n| > 3N, \quad |n| > 4N, \ldots$$

Иначе, если n — бесконечно большая, то при ее изменении последовательно наступят моменты, начиная с которых

$$|n| > 10, |n| > 100, |n| > 1000, |n| > 10\,000, \ldots$$

c. Относительно бесконечно большой величины часто говорят также, что она стремится к бесконечности. В связи с этим запись того, что n — бесконечно большая, можно производить одним из двух следующих способов:

$$\lim n = + \infty$$

или же

$$n \to \infty.$$

(Знак ∞ есть символ бесконечности.)

d. В частности, если начиная с некоторого момента все значения бесконечно большой n положительны, пишут

$$\lim n = +\infty.$$

e. Если же начиная с некоторого момента все значения бесконечно большой n отрицательны, то пишут

$$\lim n = -\infty.$$

f. Примерами бесконечно больших могут служить переменные n_1, n_2, n_3, принимающие такие последовательные значения:

$$n_1 = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots;$$
$$n_2 = -1,\ -4,\ -9,\ -16,\ \ldots;$$
$$n_3 = 1,\ -10,\ 100,\ -1000,\ \ldots$$

Относительно двух первых можно написать, в частности,

$$\lim n_1 = +\infty; \qquad \lim n_2 = -\infty,$$

тогда как относительно n_3 можно лишь написать

$$\lim |n_3| = +\infty.$$

g. Легко показать, что *дробь*

$$n = \frac{1}{\alpha}$$

с бесконечно малым знаменателем α (не обращающимся в нуль) будет бесконечно большой.

Действительно, задав произвольно большое положительное N и положив $\varepsilon = \frac{1}{N}$, видим, что начиная с момента, когда $|\alpha|$ будет оставаться меньше ε, будем иметь

$$|n| = \frac{1}{|\alpha|} > \frac{1}{\varepsilon} = N.$$

Таким образом, какое бы большое положительное число N мы ни задали, в изменении величины n наступит момент, начиная с которого

$$|n| > N.$$

Значит, n — бесконечно большая.

h. Наоборот, *дробь*

$$\alpha = \frac{1}{n}$$

с бесконечно большим знаменателем n будет бесконечно малой.

Задав произвольно малое положительное число ε и положив $N = \frac{1}{\varepsilon}$, видим, что начиная с момента, когда $|n|$ будет оставаться больше N, будем иметь

$$|\alpha| = \frac{1}{|n|} < \frac{1}{N} = \varepsilon.$$

Таким образом, какое бы малое положительное число ε мы ни задали, наступит момент, начиная с которого

$$|\alpha| < \varepsilon.$$

Значит, α—бесконечно малая.

i. *Переменная x, абсолютная величина $|x|$ которой остается не больше некоторой постоянной A, т. е. переменная x, которая всегда удовлетворяет условию*

$$|x| \leqslant A,$$

называется ограниченной.

Например, ограниченной будет величина

$$y = \sin x,$$

потому что всегда

$$|\sin x| \leqslant 1.$$

§ 4. Свойства бесконечно малых

a. *Сумма конечного числа бесконечно малых есть также бесконечно малая.*

Действительно, пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$—бесконечно малые и

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$$

— их сумма. Назначим произвольно малое положительное число ε. Чтобы показать, что начиная с некоторого момента $|u|$ будет оставаться меньше ε, мы в изменении слагаемых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ суммы u отметим не тот момент, начиная с которого все $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_k|$ будут оставаться меньше ε, а более поздний, начиная с которого все $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_k|$ будут оставаться меньше ε/k.

Начиная с такого момента будем иметь

$$|u| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{k} \cdot k = \varepsilon.$$

Итак, начиная с некоторого момента имеем

$$|u| < \varepsilon.$$

Значит, u—бесконечно малая.

b. *Произведение αx бесконечно малой величины α на ограниченную величину x есть также бесконечно малая.*

Так как x ограниченная, то всегда имеем

$$|x| \leqslant A.$$

Назначив теперь произвольно малое положительное число ε и отметив в изменении бесконечно малой α тот момент, начиная с которого $|\alpha| \leqslant \varepsilon$, если $A \leqslant 1$, и $|\alpha| \leqslant \frac{\varepsilon}{A}$, если $A > 1$, получим, что начиная с некоторого момента

$$|\alpha x| < \varepsilon.$$

Значит, αx—бесконечно малая.

c. *Частное от деления бесконечно малой на величину, стремящуюся к пределу, не равному нулю, есть тоже бесконечно малая.*

Пусть

$$u = \frac{\alpha}{x}$$

— частное от деления бесконечно малой α на величину x, стремящуюся к пределу a, не равному нулю. Перепишем u в виде произведения:

$$u = \alpha \cdot \frac{1}{x}.$$

Так как $x \to a$, то $x = a + \beta$, где β—бесконечно малая, и, следовательно, начиная с некоторого момента будем иметь

$$|\beta| \leqslant \left|\frac{a}{2}\right|.$$

Но тогда начиная с этого момента

$$|x| = |a + \beta| \geqslant |a| - \left|\frac{a}{2}\right| = \left|\frac{a}{2}\right|,$$

потому что самую малую абсолютную величину сумма $a + \beta$ будет иметь в том случае, когда β имеет знак, противоположный a, и наибольшую возможную для β абсолютную величину $|a/2|$. Значит, для разыскания наименьшей абсолютной величины $|a + \beta|$ надо от $|a|$ отнять $|a/2|$. Тем самым

$$\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{1}{|a/2|} = \frac{2}{|a|},$$

т. е. начиная с некоторого момента $1/x$ будет величиною ограниченной.

Но тогда произведение

$$n = \alpha \cdot \frac{1}{x}$$

будет бесконечно малым, как произведение бесконечно малой на ограниченную величину.

§ 5. Основные свойства пределов

а. Сейчас мы докажем две теоремы, позволяющие предугадать некоторые свойства пределов по поведению переменных, которые к этим пределам стремятся.

b. *Равные переменные не могут стремиться к двум разным пределам. Иначе говоря, одна и та же переменная не может стремиться к двум разным пределам.*

Действительно, допустив одновременно

$$\lim x = a, \qquad \lim x = b,$$

мы имели бы

$$x = a + \alpha, \qquad x = b + \beta,$$

где α и β — бесконечно малые. Но отсюда

$$a + \alpha = b + \beta,$$
$$a - b = \alpha - \beta,$$
$$|a - b| = |\alpha - \beta|.$$

Последнее равенство при $a-b$, не равной нулю, заключает в себе противоречие, так как в правой его части стоит бесконечно малая $|\beta-\alpha|$, которая начиная с некоторого момента будет оставаться меньше любого положительного ε и, в частности, меньше $\varepsilon = |a-b|$.

с. *Если x и y стремятся к некоторым пределам, причем постоянно*

$$x \geqslant y,$$

то и

$$\lim x \geqslant \lim y.$$

Пусть

$$\lim x = a, \qquad \lim y = b.$$

Тогда

$$x = a + \alpha, \qquad y = b + \beta,$$

где α и β — бесконечно малые. Отсюда ввиду неравенства $x \geqslant y$ имеем

$$a + \alpha \geqslant b + \beta,$$
$$\alpha - \beta \geqslant b - a.$$

Последнее неравенство при $b > a$ будет заключать в себе противоречие, так как разность $\alpha-\beta$ бесконечно мала и, следовательно, начиная с некоторого момента должна оставаться по абсолютной величине меньше любого положительного ε и, в частности, меньше $\varepsilon = b-a$.

Значит, остается предположить, что $b \leqslant a$, т. е.

$$\lim y \leqslant \lim x.$$

§ 6. Предел непрерывной функции

a. Наиболее часто в теории пределов приходится решать вопрос о пределе функции: если дана какая-либо функция $f(x)$ и аргумент x стремится к пределу a, то необходимо знать, стремится ли функция к какому-либо пределу, а если стремится, то к какому именно.

Если с приближением x к пределу a функция $f(x)$ стремится к пределу b, то это записывается так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Например, можно писать

$$\lim_{x \to 0} (1 - x + x^2) = 1, \qquad \lim_{x \to \pi/2} \operatorname{tg} x = \infty,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

b. Для большего уточнения понятия предела функции заметим, что *при конечном a приближение x к пределу a можно вести двумя способами*:

1) со стороны значений $x < a$ (т. е. приближать x к a, увеличивая x);

2) со стороны значений $x > a$ (т. е. приближать x к a, уменьшая x).

Равенство (1) без оговорок можно писать только тогда, когда $f(x)$ приближается к пределу b при обоих указанных способах приближения x к a одновременно.

c. В самом деле, бывают случаи, когда в зависимости от способа приближения x к a $f(x)$ приближается к разным пределам.

Например, если будем приближать x к $\pi/2$ со стороны значений $x < \pi/2$, то получим

$$\lim \operatorname{tg} x = +\infty.$$

Приближая же x к $\pi/2$ со стороны значений $x > \pi/2$, получим

$$\lim \operatorname{tg} x = -\infty.$$

В этих случаях, чтобы отметить способ приближения x к пределу, запись производится так:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \operatorname{tg} x = +\infty,$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

d. В отношении тех функций, которые мы имеем в виду рассматривать в дальнейшем, указанный вопрос о пределе функции оказывается вообще весьма простым. Причиною этого является особое свойство этих функций — их непрерывность.

Непрерывной мы назовем всякую функцию $f(x)$, обладающую следующими двумя свойствами:

1. *Каждому значению x отвечает одно определенное конечное значение функции $f(x)$.*

2. *Каково бы ни было выбрано x, имеем*

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x) \qquad (\xi \text{ читается «кси»}),$$

причем это равенство справедливо независимо от того, стремится ли ξ к x со стороны значений, меньших x $(\xi < x)$, или же со стороны значений, бо́льших x $(\xi > x)$.

e. Часто речь может идти не обо всех значениях аргумента x, а лишь о тех, которые расположены на определенном отрезке $[a, b]$ *). Если для всех значений x, лежащих на отрезке $[a, b]$, $f(x)$ удовлетворяет обоим условиям непрерывности, то говорят, что *функция $f(x)$ непрерывна на отрезке* $[a, b]$.

f. Бывает, что нас интересует какое-либо одно значение x. Если по отношению к этому значению выполнены оба условия непрерывности, то говорят, что *при данном значении x функция $f(x)$ непрерывна.*

Если же при каком-либо x не выполняется хоть одно из условий непрерывности, то говорим, что *при данном значении x функция $f(x)$ терпит разрыв (непрерывности).*

*) *Отрезком* $[a, b]$ называется совокупность всех чисел, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, т. е. совокупность всех чисел, которые не меньше a и не больше b. При $a < x < b$ говорят, что x лежит в *интервале* (a, b). В связи с общим понятием интервала совокупность чисел, бо́льших a, называют интервалом $(a, +\infty)$, а совокупность чисел, меньших b, — интервалом $(-\infty, b)$.

g. Сейчас мы исследуем с точки зрения непрерывности простейшие функции

$$x^n \text{ при } n > 0,\ a^x,\ \log_a x,\ \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x.$$

Для простоты исследуем сначала непрерывность функции $f(x)=x^2$.

1. Каждому конечному значению x отвечает определенный его квадрат x^2, т. е. одно определенное конечное значение функции $f(x)=x^2$. Таким образом, для этой функции первое условие непрерывности выполнено для всех конечных x.

2. Чтобы проверить второе условие непрерывности, т. е. выяснить, будет ли стремиться $f(\xi)=\xi^2$ к $f(x)=x^2$, когда ξ неограниченно приближается к x, мы представим ξ в форме

$$\xi=x+h,$$

где h—бесконечно малая. Тогда имеем

$$\lim_{\xi\to x}\xi^2=\lim_{h\to 0}(x+h)^2=\lim_{h\to 0}(x^2+2xh+h^2)=x^2$$

(потому что два последние слагаемые в скобках бесконечно малы при бесконечно малом h). Таким образом, действительно

$$\lim_{\xi\to x}\xi^2=x^2, \tag{1}$$

причем этот результат не зависит от того, считали ли мы h при его приближении к нулю отрицательным или же положительным, т. е. считали ли мы $\xi=x+h$ при его приближении к x числом, бо́льшим x, или же числом, меньшим x. Равенство (1) показывает, что для $f(x)=x^2$ выполнено и второе условие непрерывности. Таким образом, можно сказать, что функция $f(x)=x^2$ непрерывна для всех конечных x.

Подобным же путем можно убедиться, что и всякая степенна́я функция x^n, где n—целое положительное, будет непрерывной для всех конечных x (предлагаем это сделать самим учащимся, пользуясь биномом Ньютона).

При n нецелом и $n>0$ мы рассмотрим функцию x^n лишь для положительных значений x. Не производя подробного исследования, мы и здесь можем считать очевидным, что x^n непрерывна для всех положительных конечных значений x.

Функция a^x непрерывна для всех конечных значений x.

О функции $\log_a x$ мы можем говорить, лишь когда x положительно, так как отрицательные числа не имеют логарифмов. При всяком $x > 0$ для $\log_a x$ выполнены оба условия непрерывности. Поэтому мы можем сказать, что $\log_a x$ непрерывен для всех положительных конечных значений x.

Из геометрических соображений ясно, что функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны для всех конечных значений x. В отношении функции $\operatorname{tg} x$ оба условия непрерывности, очевидно, выполняются для всех конечных значений x, кроме значений вида

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

где k целое. Для этих последних $\operatorname{tg} x$ обращается в ∞ и, таким образом, не удовлетворяет уже первому условию непрерывности, требующему, в частности, чтобы все значения функции были конечными.

Мы можем сказать поэтому, что $\operatorname{tg} x$ вообще непрерывен для конечных значений x, кроме значений x вида $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, где он терпит разрывы непрерывности.

Точно так же можно убедиться, что $\operatorname{ctg} x$ вообще непрерывен для конечных значений x, кроме значений x вида $x = k\pi$, где он терпит разрывы непрерывности.

Что касается функций $\arcsin x$ и $\arccos x$ (главные значения), то о них можно говорить, только когда x изменяется на отрезке $[-1, 1]$, так как аргумент x, изображая для первой функции синус, а для второй — косинус, не может по абсолютной величине превосходить 1. В отношении же отрезка $[-1, 1]$ и для этих функций, очевидно, выполнены оба условия непрерывности. Следовательно, мы можем сказать, что функции $\arcsin x$ и $\arccos x$ непрерывны на отрезке $[-1, 1]$.

Функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ непрерывны для всех конечных значений x.

h. Непрерывными будут и *сложные функции*, т. е. функции вида

$$f(\varphi(x)).$$

Здесь функция зависит от аргумента x через посредство некоторой функции $\varphi(x)$. Именно,

$\varphi(x)$ выражается непосредственно через x,

а уже $f(\varphi(x))$ выражается через $\varphi(x)$.

Функция $\varphi(x)$ носит название *посредствующей функции* или же *сложного аргумента*.

Например, сложной функцией будет

$$\log_a \sin x,$$

причем посредствующей функцией здесь является $\sin x$.

Докажем в качестве примера непрерывность $\log_a \sin x$ в интервале $(0, \pi)$.

1. Каждому значению x в интервале $(0, \pi)$ отвечает одно определенное положительное (конечное) значение $\sin x$. Каждому же положительному значению $\sin x$ отвечает одно определенное конечное значение $\log_a \sin x$.

Таким образом, первое условие непрерывности для функции $\log_a \sin x$ выполнено.

2. Если ε стремится к пределу x, то (ввиду непрерывности $\sin x$) $\sin \xi$ стремится к $\sin x$. Но тогда (ввиду непрерывности логарифма) и $\log_a \sin \xi$ будет стремиться к $\log_a \sin x$, то есть

$$\lim_{\xi \to x} \log_a \sin \xi = \log_a \sin x.$$

Значит, выполнено и второе условие непрерывности.

i. Относительно непрерывности функций, представляющих собой сумму, произведение или частное других непрерывных функций, будет сказано дальше.

j. Изучение непрерывных функций в математике важно потому, что к непрерывным функциям мы обычно приходим и при изучении явлений природы. Например, высота и толщина дерева суть непрерывные функции его возраста; температура охлаждающегося тела — непрерывная функция времени; длина стержня — непрерывная функция температуры и т. д.

k. Переписав второе условие непрерывности в обозначениях пункта «а» (т. е. заменив x на a и ξ на x), имеем

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

т. е. *предел непрерывной функции находится простой заменой аргумента x этой функции тем пределом a, к которому он стремится.*

Например,

$$\lim_{x \to 2} x^3 = 2^3 = 8,$$

$$\lim_{x \to 1/4} \arcsin \sqrt{x} = \arcsin \sqrt{1/4} = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

§ 7. Геометрическое истолкование непрерывности

а. Нетрудно выяснить, что *графиком непрерывной функции $f(x)$ будет и непрерывная (сплошная)* *) *линия*.

1. Действительно, согласно первому условию непрерывности все ординаты графика будут конечными.

2. Согласно второму условию должно быть

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x). \tag{1}$$

Положим $y = f(x)$, $\eta = f(\xi)$ (η читается «эта») (на рис. 3 $x = OA$, $y = AM$, $\xi = Oa$, $\eta = am$). Условие (1) перепишется так:

$$\lim_{\xi \to x} \eta = y. \tag{2}$$

Известно, что разность между переменной и ее пределом есть бесконечно малая. Поэтому равенство (2) можно прочесть так: если $\xi - x$ — бесконечно малая, то и $\eta - y$ — бесконечно малая.

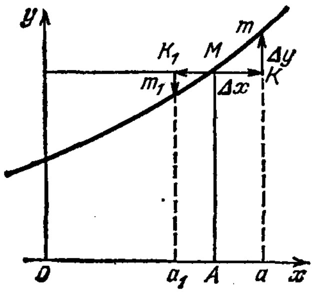


Рис. 3

На рис. 3 разности $\xi - x$ и $\eta - y$ изображаются отрезками

$$\xi - x = Aa = MK, \qquad \eta - y = Km;$$

они суть не что иное, как те количества, которые надо придать абсциссе $x = OA$ и ординате $y = AM$ точки M, чтобы из них получить абсциссу $\xi = Oa$ и ординату $\eta = am$ точки m. Эти разности обозначаются особыми символами

$$\xi - x = \Delta x \quad \text{(дельта от } x\text{, или дельта } x\text{)},$$
$$\eta - y = \Delta y \quad \text{(дельта } y\text{)}$$

и называются: первая — приращением x, вторая — приращением y.

В этих новых обозначениях равенство (2) можно прочесть так:

если Δx — бесконечно малая,
то и Δy — бесконечно малая.

(Это можно записать и в виде $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.)

*) Сплошною можно назвать ту линию, которую на бумаге можно вычертить непрерывным движением острия карандаша, не отрывая его от бумаги.

Таким образом, второе условие непрерывности можно читать так:

Бесконечно малому приращению Δx аргумента отвечает и бесконечно малое приращение функции.

b. Но если Δx и Δy одновременно бесконечно малы, то бесконечно мала и хорда

$$|Mm| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

т. е. точка m бесконечно близка к точке M.

Мы приближали ξ к x со стороны значений $\xi > x$. Тот же результат мы получим и в том случае, если будем приближать ξ к x со стороны значений $\xi < x$ ($\xi = Oa_1$, $\eta = a_1 m_1$, $\Delta x = MK_1$ отрицательное; $\Delta y = K_1 m_1$ тоже отрицательное). В этом последнем случае мы найдем, что и слева от точки M имеется точка m_1, бесконечно близкая к точке M. Итак, каждая точка M графика непрерывной функции имеет справа и слева от себя сколько угодно близкие точки m и m_1 того же графика. Отсюда и видно, что график непрерывной функции может быть только сплошной линией.

§ 8. Свойство непрерывной функции

a. *Если значения $f(a)$ и $f(b)$, которые непрерывная функция $f(x)$ принимает на концах отрезка $[a, b]$, имеют разные знаки, то в интервале (a, b) имеется хоть один корень этой функции (т. е. хоть один корень уравнения $f(x) = 0$).*

Действительно, пусть, например (рис. 4),

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0.$$

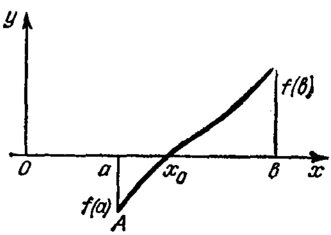


Рис. 4

Тогда точка A с абсциссой $x = Oa$ будет ниже, а точка B с абсциссой $x = Ob$ — выше оси абсцисс. А так как функция непрерывна, то график ее есть сплошная линия. Эта линия, идя из точки A в точку B, неминуемо пересечет ось абсцисс в некоторой точке, абсцисса которой на нашем чертеже обозначена буквою x_0. Ордината этой точки равна нулю, то есть

$$f(x_0) = 0.$$

Например, пусть

$$f(x)=x^3-x-2.$$

Рассматривая интервал (1, 2), имеем

$$f(1)=1-1-2=-2<0, \qquad f(2)=8-2-2=4>0.$$

Значения $f(1)$ и $f(2)$, которые получает наша функция на концах отрезка $[1, 2]$, имеют разные знаки. Поэтому в интервале $(1, 2)$ должен заключаться хоть один корень уравнения

$$x^3-x-2=0.$$

Иными словами, между 1 и 2 должно существовать такое $x=x_0$, что

$$x_0^3-x_0-2=0.$$

§ 9. Предел функции, зависящей от нескольких переменных

а. Вопрос о пределе функции можно поставить и для функции $f(u, v)$ нескольких переменных *).

Если при одновременном приближении u, v к некоторым пределам a, b соответственно функция $f(u, v)$ стремится к пределу k, то это записываем так:

$$\lim_{\substack{u\to a\\ v\to b}} f(u, v)=k.$$

Мы рассмотрим лишь случаи, когда $f(u, v)$ есть сумма, произведение или отношение переменных u, v.

Во всех этих случаях окажется, что

$$\lim_{\substack{u\to a\\ v\to b}} f(u, v)=f(a, b),$$

т. е. предел функции находится простой заменой в выражении функции переменных u, v пределами a, b, к которым они стремятся.

Этими случаями мы сейчас и займемся.

b. *Предел суммы конечного числа слагаемых равен сумме пределов этих слагаемых*:

$$\lim_{\substack{u\to a\\ v\to b}} (u+v)=a+b\,(=\lim u+\lim v).$$

---

*) Для простоты мы ограничимся двумя переменными.

Действительно, если u, v стремятся к пределам a, b, то

$$u = a + \alpha, \qquad v = b + \beta,$$

где α, β — бесконечно малые.

Но тогда

$$u + v = (a + \alpha) + (b + \beta) = (a + b) + (\alpha + \beta).$$

Второе слагаемое последней суммы, как сумма конечного числа бесконечно малых, будет само бесконечно малым. Следовательно, $u + v$ стремится к сумме

$$a + b,$$

т. е. к сумме пределов переменных.

Например,

$$\lim_{\substack{u \to 1 \\ v \to 2 \\ w \to 3}} (u + v + w) = 1 + 2 + 3 = 6.$$

c. *Предел произведения конечного числа сомножителей равен произведению пределов этих сомножителей*:

$$\lim_{\substack{u \to a \\ v \to b}} uv = ab = \lim u \cdot \lim v.$$

Как и раньше, имеем

$$u = a + \alpha, \qquad v = b + \beta,$$

где α и β — бесконечно малые. Следовательно,

$$uv = (a + \alpha)(b + \beta) = ab + (\alpha b + a\beta + \alpha\beta).$$

Но второе слагаемое последней суммы, как сумма трех бесконечно малых, будет само бесконечно малым. Следовательно, uv стремится к произведению

$$ab,$$

т. е. к произведению пределов переменных.

Например,

$$\lim_{\substack{u \to 2 \\ v \to 5}} uv = 2 \cdot 5 = 10.$$

d. *Предел отношения двух переменных равен отношению пределов этих переменных, если только предел знаменателя не равен нулю.*

Это значит, что при $b \neq 0$

$$\lim_{\substack{u \to a \\ v \to b}} \frac{u}{v} = \frac{a}{b} \left(= \frac{\lim u}{\lim v} \right). \qquad (1)$$

Опять имеем

$$u = a + \alpha, \qquad v = b + \beta,$$

где α и β — бесконечно малые.

Рассмотрим разность

$$\frac{u}{v} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b} = \frac{(a+\alpha)\,b - a\,(b+\beta)}{(b+\beta)\,b} = \frac{\alpha b - \beta a}{(b+\beta)\,b}.$$

Мы видим, что числитель $\alpha b - \beta a$ последней дроби, как сумма двух бесконечно малых αb и βa, тоже бесконечно мал, знаменатель же стремится к пределу $b \cdot b = b^2$, по предположению не равному нулю. Значит, вся дробь (см. пункт «с» § 4) бесконечно мала. Вместе с тем бесконечно мала и разность

$$\frac{u}{v} - \frac{a}{b},$$

т. е. действительно имеет место равенство (1).

Например,

$$\lim_{\substack{u \to 4 \\ v \to 2}} \frac{u}{v} = \frac{4}{2} = 2.$$

е. Доказанные теоремы, будучи применены к случаю, когда переменные $u, v, \ldots$ суть функции одного аргумента x, покажут, что сумма, произведение и отношение (со знаменателем, не обращающимся в нуль) непрерывных функций будут тоже функциями непрерывными. Ограничиваясь для простоты случаем двух непрерывных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, мы видим, что:

1. Каждому значению x отвечают определенные конечные значения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и, следовательно, определенные конечные значения функций

$$\varphi(x) + \psi(x), \quad \varphi(x)\,\psi(x), \quad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \text{ (если } \psi(x) \neq 0\text{);} \qquad (2)$$

тем самым функции (2) удовлетворяют первому условию непрерывности.

2. Имеем

$$\lim_{\xi \to x} (\varphi(\xi) + \psi(\xi)) = \lim_{\xi \to x} \varphi(\xi) + \lim_{\xi \to x} \psi(\xi) = \varphi(x) + \psi(x),$$

$$\lim_{\xi \to x} \varphi(\xi)\psi(\xi) = \lim_{\xi \to x} \varphi(\xi) \lim_{\xi \to x} \psi(\xi) = \varphi(x)\psi(x),$$

$$\lim_{\xi \to x} \frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)} = \frac{\lim\limits_{\xi \to x} \varphi(\xi)}{\lim\limits_{\xi \to x} \psi(\xi)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

откуда видим, что функции (2) удовлетворяют и второму условию непрерывности.

Это позволяет нам расширить правило вычисления пределов непрерывных функций на случай, когда функция есть сумма, произведение или отношение (со знаменателем, не стремящимся к нулю) непрерывных функций.

Например,

$$\lim_{x \to \pi/4} (\sin x + \cos x) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\lim_{x \to 9} x \log_3 x = 9 \log_3 9 = 9 \cdot 2 = 18,$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{2^x}{\sqrt{x}} = \frac{2^4}{\sqrt{4}} = 8.$$

§ 10. Особые случаи разыскания предела

a. Чтобы пользоваться правилом

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \tag{1}$$

надо быть уверенным в том, что функция $f(x)$ непрерывна при $x = a$.

b. Однако непрерывность функций мы выяснили только для конечных значений x, поэтому в стороне от правила (1) остаются пределы вида

$$\lim_{x \to \infty} f(x), \quad \lim_{x \to +\infty} f(x), \quad \lim_{x \to -\infty} f(x),$$

где $a = \infty$, $+\infty$, или $-\infty$. Пределы такого типа имеют весьма важные приложения, а потому мы покажем здесь на частных примерах некоторые общие приемы их вычисления.

Пример 1. Найти предел

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2 + 2x + 1}{2x^2 + x + 3}.$$

Если в написанном выражении мы будем беспредельно увеличивать аргумент x, то как числитель, так и знаменатель будут беспредельно расти (условно говорят, что при $x=\infty$ выражение обращается в неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$).

Поэтому раньше чем разыскивать предел, мы постараемся преобразовать функцию, предел которой разыскиваем, к другому виду, по которому этот предел разыскивать было бы проще. В данном случае делим числитель и знаменатель на x^2. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+2x+1}{2x^2+x+3}=\lim_{x=\infty}\frac{6+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}.$$

Здесь можно применить теорему о пределе отношения (предел знаменателя не нуль), и наш предел окажется равным

$$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(6+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{6}{2}=3.$$

Пример 2. В разобранном выше примере, независимо от того, стремится ли x к $-\infty$ или к $+\infty$, предел получается один и тот же. Однако бывают случаи, когда величина предела зависит от знака бесконечности. Например, если x стремится к $-\infty$, то (полагая $x=-x_1$) имеем

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+2^x}=\lim_{x_1\to+\infty}\frac{1}{1+2^{-x_1}}=\lim_{x_1\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2^{x_1}}}=\frac{1}{1}=1.$$

Если же x стремится к $+\infty$, то имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+2^x}=0$$

(знаменатель стремится к $+\infty$).

Пример 3. Найти предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$$

(неопределенность вида $+\infty-\infty$). Умножим и разделим разность, стоящую в скобках, на сумму тех же величин и получим

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}+\frac{x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{2}{2}=1.$$

Очевидно,

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)=+\infty.$$

с. Бывает, что аргумент x стремится к конечному пределу a, но при этом оказывается, что функция $f(x)$ как раз при $x=a$ терпит разрыв непрерывности. Тогда правилом (1) пользоваться нельзя.

Чаще всего $f(x)$ не удовлетворяет при $x=a$ первому условию непрерывности. Это бывает, когда формула, определяющая $f(x)$, теряет смысл при $x=a$. Пределы последнего типа имеют, однако, первостепенное значение для всего анализа бесконечно малых. Поэтому мы покажем здесь на частных примерах некоторые общие приемы вычисления и таких пределов.

Пример 1. Найдем предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}.$$

Здесь при $x=2$ функция теряет смысл, так как обращается в

$$\frac{2^2-2-2}{2^2-3\cdot 2+2}=\frac{0}{0}$$

$\left(\text{неопределенность вида } \frac{0}{0}\right)$. Однако при ближайшем рассмотрении оказывается, что с приближением x к 2 наша функция все же будет приближаться к вполне определенному пределу.

Для этой цели, когда x приближается к 2 (и, следовательно, не равно 2), преобразуем нашу дробь в другую, равную ей при всех x, отличных от 2, но предел которой будет легко разыскать.

Именно, замечая, что корни уравнения

$$x^2-x-2=0$$

суть -1 и 2, имеем

$$x^2-x-2=(x+1)(x-2).$$

Замечая же, что корни уравнения

$$x^2-3x+2=0$$

суть 1 и 2, имеем

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2).$$

Поэтому

$$\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}.$$

Сокращая на $x-2$ (что мы вправе делать, когда x не равно 2), мы приведем нашу дробь к виду

$$\frac{x+1}{x-1}.$$

Так как с приближением x к 2 последняя дробь стремится к пределу (предел знаменателя теперь не нуль)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2+1}{2-1}=3,$$

то к тому же пределу стремится и заданная дробь (так как она равна преобразованной все время, когда x не равно 2), то есть

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}=3.$$

Пример 2. Найти предел

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \qquad (a>0)$$

$\left(\text{неопределенность } \frac{0}{0}\right)$. Преобразуем нашу дробь, умножая числитель и знаменатель на сумму $\sqrt{x}+\sqrt{a}$. Получим

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Пример 3. Найдем еще предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$\left(\text{неопределенность } \frac{0}{0}\right)$. Здесь x считаем постоянным, а h переменным и бесконечно малым, так что вся дробь — функция аргумента h.

Имеем

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x.$$

Пример 4. В трех разобранных примерах предел получается один и тот же независимо от способа приближения аргумента к его пределу. Бывают, однако, случаи, когда величина предела зависит от различия в способе такого приближения.

Например, если будем приближать x к нулю со стороны отрицательных x ($x<0$), то получим (полагая $x=-x_1$)

$$\lim_{x\to -0}\frac{1}{1+2^{1/x}}=\lim_{x_1\to +0}\frac{1}{1+2^{-1/x_1}}=\frac{1}{1+0}=1.$$

Если же будем приближать x к нулю со стороны положительных x ($x>0$), то получим

$$\lim_{x\to +0}\frac{1}{1+2^{1/x}}=\frac{1}{1+\infty}=0$$

(см. также пример 2 пункта «а»).

§ 11. Замечательный тригонометрический предел*)

а. Пусть имеется выпуклая кривая AB (на рис. 5 кривая обращена выпуклостью вверх).

Допустим, что в каждой точке этой кривой можно провести касательную и что *при беспредельном сближении двух точек α и β кривой угол φ между касательными, проведенными в этих точках, будет стремиться к нулю.*

Тогда будем иметь

$$\lim\frac{\text{дл. хорды } \alpha\beta}{\text{дл. } \smile\alpha\beta}=1,$$

т. е. *отношение длины хорды к длине стягиваемой ею дуги стремится к пределу* 1.

Чтобы доказать это, построим равнобедренный $\triangle\,\alpha M\beta$ с углом φ при основании; $\triangle\,\alpha N\beta$ будет, очевидно, лежать внутри него (потому что угол φ, как внешний для $\triangle\,\alpha N\beta$, больше каждого из углов при его основании $\alpha\beta$).

*) В настоящем и следующем параграфах мы приводим несколько более упрощенные рассуждения, чем в предыдущих.

Основываясь на известном свойстве выпуклых линий, соединяющих две данные точки, согласно которому *объемлющая линия длиннее объемлемой*, можем написать (полагая $\alpha M = l$, $\smile\alpha\beta = s$, хорда $\alpha\beta = k$)

$$2l > s > k.$$

Но k равно удвоенной проекции αM на $\alpha\beta$. Поэтому

$$k = 2l\cos\varphi, \qquad 2l = \frac{k}{\cos\varphi}.$$

Итак, имеем

$$\frac{k}{\cos\varphi} > s > k,$$

$$\frac{1}{\cos\varphi} > \frac{s}{k} > 1,$$

$$\cos\varphi < \frac{k}{s} < 1.$$

При неограниченном сближении точек α и β угол φ согласно предположению стремится к нулю. Значит, $\cos\varphi$

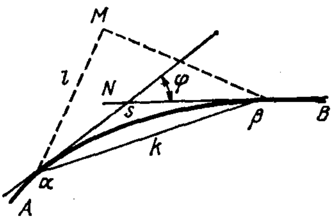


Рис. 5

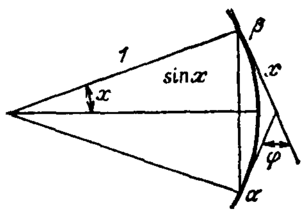


Рис. 6

приближается к 1. Но тогда к 1 должно приближаться и отношение $\frac{k}{s}$, как промежуточное между 1 и $\cos\varphi$, стремящимся к 1, то есть

$$\lim\frac{k}{s} = 1.$$

b. Пусть, в частности, дуга $\alpha\beta = 2x$ принадлежит окружности радиуса 1. В этом случае, очевидно (рис. 6),

$$\varphi = 2x; \quad \text{длина хорды} \quad \alpha\beta = 2\sin x,$$

и мы имеем согласно пункту «a»

$$\lim_{x\to+0}\frac{2\sin x}{2x} = 1; \quad \lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Для полноты результата покажем, что тот же предел 1 мы получаем и при $x \to -0$.

Действительно, если x отрицательное, то, полагая $x = -x_1$, имеем

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x_1 \to +0} \frac{\sin(-x_1)}{-x_1} = \lim_{x_1 \to +0} \frac{\sin x_1}{x_1} = 1.$$

Теперь мы можем написать

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

§ 12. Признак существования предела

a. Часто характер изменения функции с приближением аргумента к какому-либо пределу настолько сложен, что может возникнуть сомнение в самом *существовании предела.*

b. То обстоятельство, что с приближением аргумента к какому-либо пределу функция может и не иметь предела, покажет хотя бы следующий простой пример:

$$\lim_{x \to +\infty} \sin x. \qquad (1)$$

По мере увеличения x функция $\sin x$ принимает периодически все возможные для нее значения от -1 до $+1$ и, таким образом, ни к какому определенному пределу не приближается.

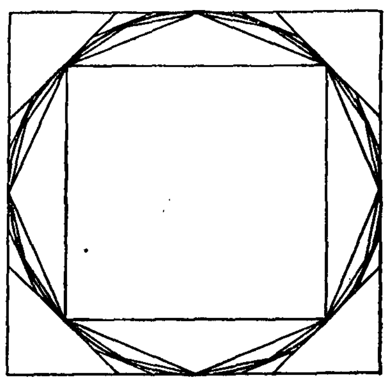


Рис. 7

c. Укажем здесь один простой признак, который в интересующих нас случаях позволит узнать, стремится ли функция к какому-либо пределу или нет.

Чтобы лучше понять, в чем этот признак состоит, вспомним, как мы в элементарной геометрии подходили к вычислению площади круга. Последнюю мы рассматривали там как общий предел площадей вписанных и описанных правильных многоугольников (получаемых, например, последовательным удвоением числа сторон).

Именно, при беспредельном увеличении числа n сторон происходит следующее (рис. 7):

1. Площадь P_n вписанного многоугольника возрастает.

2. Площадь Q_n описанного многоугольника убывает.

3. Разность $Q_n - P_n$ между обеими площадями стремится к нулю.

Ввиду 1, 2 и 3 мы считаем очевидным, что обе площади P_n и Q_n стремятся к некоторому общему пределу (который и принимаем за площадь круга).

d. Другой пример возьмем из алгебры. Извлекая по известным правилам $\sqrt{2}$, получим

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$$

Если рассмотреть два набора чисел $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ и $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$, принимающих такие последовательные значения:

P_n	1	1,4	1,41	1,414	1,4142	...
Q_n	2	1,5	1,42	1,415	1,4143	...

(числа P_n суть так называемые приближенные значения $\sqrt{2}$ с недостатком, а числа Q_n — приближенные значения $\sqrt{2}$ с избытком), то увидим, что:

1) P_n возрастает;

2) Q_n убывает;

3) разность $Q_n - P_n$ стремится к нулю.

Мы опять считаем очевидным, что P_n и Q_n стремятся к некоторому общему пределу (который и принимаем за $\sqrt{2}$).

e. И вообще, *если*:

1) *переменная* P_n *возрастает* ($P_1 < P_2 < P_3 < \ldots$);

2) *переменная* Q_n *убывает* ($Q_1 > Q_2 > Q_3 > \ldots$);

3) *разность* $Q_n - P_n$ *стремится к нулю* ($P_n < Q_n$),

то считаем очевидным, что переменные P_n *и* Q_n *стремятся к некоторому вполне определенному общему пределу.*

Это утверждение принимаем как *аксиому*, т. е. как очевидную истину, не требующую доказательства.

§ 13. Сходимость бесконечных рядов

a. Только что сформулированный нами признак существования предела мы применим к исследованию весьма важного вопроса о сходимости бесконечных рядов — особого рода сумм вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$

содержащих неограниченно большое число слагаемых — *членов ряда* (образованных по какому-либо общему для всех членов ряда закону).

Примерами бесконечных рядов могут служить выражения вида

$$a+aq+aq^2+aq^3+\ldots,$$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots,$$
$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$$

b. Члены ряда следует складывать слева направо в том порядке, как они написаны. Если окажется, что сумма все большего и большего числа n членов ряда

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$$

приближается к определенному конечному пределу S, то есть

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S,$$

то S называется *суммою* ряда. Ряд, имеющий конечную сумму, называется *сходящимся.*

Запись того, что S является суммою ряда, производится так:

$$S=a_1+a_2+a_3+\ldots$$

Примером сходящегося ряда может служить бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

$$a+aq+aq^2+\ldots,$$

знаменатель которой q по абсолютной величине меньше 1.

Сумма n первых членов этой прогрессии равна

$$S_n=a+aq+\ldots+aq^{n-1}=\frac{aq^n-a}{q-1}=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

Но при неограниченном увеличении n q^n стремится к нулю, потому что $|q|<1$. Поэтому в последней разности предел вычитаемого есть нуль, т. е.

$$S=\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{a}{1-q},$$

и мы можем, следовательно, написать

$$a+aq+aq^2+\ldots=\frac{a}{1-q}.$$

c. Может оказаться, что, суммируя все большее и большее число членов ряда, мы будем убеждаться, что их сумма будет неограниченно возрастать. В этом случае ряд называется *расходящимся*.

Например, расходящимся будет ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots \tag{1}$$

Действительно, члены этого ряда будут не меньше соответствующих членов такого ряда:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\ldots \tag{2}$$

Поэтому, если, суммируя члены второго ряда, мы получим неограниченно растущую сумму, то тем более это будет относиться к первому ряду.

Суммирование членов второго ряда можно производить в следующем порядке:

$$\begin{gathered}1+\\ +\frac{1}{2}+\\ +\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\\ +\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\end{gathered}$$

где сумма членов каждой строки, кроме первой, равна 1/2. А так как строк будет бесконечно много, то ясно, что, складывая члены ряда (2), мы получим неограниченно растущую сумму. Значит, ряд (1) будет расходящимся.

d. Наконец, может оказаться, что, суммируя все большее и большее число членов ряда, мы ни к какому пределу приближаться не будем. В этом случае ряд также назовем *расходящимся*.

Примером такого ряда может служить ряд

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\\ -\frac{1}{8}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\ldots$$

Действительно, обозначая, как всегда, через S сумму n первых членов ряда, имеем

$$S_1=1,\quad S_3=0,\quad S_7=1,\quad S_{15}=0;\ \ldots,$$

откуда видим, что S_n ни к какому пределу стремиться не может.

§ 14. Простейшие признаки сходимости

a. *Для сходящегося ряда*

$$a_1+a_2+a_3+\ldots$$

должно выполняться

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0.$$

Если ряд сходится, то, складывая все большее и большее количество его членов, мы будем приближаться к его сумме S. Но если n — большое число, то $n-1$ — тоже большое число, и, значит, начиная с некоторого момента (какое бы малое ε мы ни выбрали), не только

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n,$$

но и

$$S_{n-1}=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$$

будут отличаться от S на величину, меньшую $\varepsilon/2$, где ε — произвольное положительное число. Но тогда начиная с этого момента S_n и S_{n-1} между собою будут разниться на величину, меньшую $\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, то есть

$$|a_n|=|S_n-S_{n-1}|<\varepsilon.$$

Это и доказывает, что a_n стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

b. Однако пример ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots,$$

рассмотренный в пункте «c» § 13, показывает, что выполнения условия

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

еще не достаточно для того, чтобы ряд был сходящимся.

У этого ряда

$$a_n=\frac{1}{n}; \qquad \lim_{n\to\infty} a_n=0.$$

Тем не менее в пункте «c» § 13 мы убедились, что этот ряд расходящийся.

Мы укажем далее такие признаки, которые давали бы полную уверенность в сходимости ряда.

c. *Ряд*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots, \tag{1}$$

среди членов которого нет отрицательных, сходится, если его члены не больше соответствующих членов какого-либо сходящегося ряда

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots \tag{2}$$

Действительно, если при любом n $a_n \leqslant b_n$, то, полагая

$$\begin{gathered} A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \\ B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n, \\ \lim_{n\to\infty} B_n = B \end{gathered} \tag{3}$$

(предел существует ввиду сходимости ряда (2)), составим два набора чисел

$$\begin{gathered} P_n = A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n; \\ Q_n = B - (B_1 - A_1),\ \ldots,\ B - (B_n - A_n). \end{gathered}$$

Мы видим, что:

1. Переменная P_n возрастает.
2. Переменная Q_n убывает (потому что

$$B_n - A_n = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \ldots + (b_n - a_n)$$

возрастает с возрастанием n).

3. Разность

$$Q_n - P_n = B - (B_n - A_n) - A_n = B - B_n$$

стремится к нулю (ввиду (3)).

Поэтому согласно признаку существования предела, указанному в § 12, переменная $P_n = A_n$ должна стремиться к некоторому пределу A:

$$\lim A_n = A.$$

Следовательно, ряд (1) сходящийся.

Например, члены ряда

$$1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \tag{4}$$

не превосходят членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} + \ldots,$$

относительно которой известно, что она сходится (пункт «b» § 13). Значит, сходящимся будет и ряд (4).

d. Чем больше членов сходящегося ряда мы сложим, тем ближе подойдем к его сумме S. Обозначая бесконечно малую разность между S и S_n символом R_n, мы можем написать

$$S = S_n + R_n.$$

R_n называется *остатком* ряда. Очевидно, он обозначает сумму всех членов ряда, остающихся после того, как мы отбросим первые n членов.

e. Сумму S можно вычислить приближенно с любой степенью точности, если сложить достаточно большое число n членов ряда.

Пример. Вычислим сумму ряда

$$S = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

Обозначая члены этого ряда символами $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots,$ имеем

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1\\
a_2 &= \frac{1}{2}a_1 = 0{,}5\\
a_3 &= \frac{1}{3}a_2 = 0{,}166666667\\
a_4 &= \frac{1}{4}a_3 = 0{,}041666667\\
a_5 &= \frac{1}{5}a_4 = 0{,}008333333\\
a_6 &= \frac{1}{6}a_5 = 0{,}001388889\\
a_7 &= \frac{1}{7}a_6 = 0{,}000198413\\
+\quad a_8 &= \frac{1}{8}a_7 = 0{,}000024802\\
a_9 &= \frac{1}{9}a_8 = 0{,}000002756\\
a_{10} &= \frac{1}{10}a_9 = 0{,}000000276\\
a_{11} &= \frac{1}{11}a_{10} = 0{,}000000025\\
a_{12} &= \frac{1}{12}a_{11} = 0{,}000000002\\
a_{13} &= \frac{1}{13}a_{12} = \underline{0{,}000000000}\\
&\phantom{= \frac{1}{13}a_{12} =\,} 1{,}718281830;
\end{aligned}$$

отбрасывая две последние цифры, как не очень надежные, мы получаем следующее приближенное выражение суммы нашего ряда:

$$S = 1{,}7182818\ldots$$

f. *Ряд*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots, \tag{5}$$

среди членов которого есть отрицательные, будет сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов,

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots \tag{6}$$

Положим

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha_n - \beta_n, \\ \alpha_n &\geqslant 0, \\ \beta_n &\geqslant 0, \end{aligned} \tag{7}$$

причем $\beta_n = 0$ при a_n положительном, а $\alpha_n = 0$ при a_n отрицательном (так что $a_n = \alpha_n$ или $a_n = -\beta_n$ в зависимости от знака a_n).

Ряды

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots,$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots$$

не имеют отрицательных членов и очевидно сходятся, так как их члены не превосходят соответствующих элементов ряда (6). Значит, существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = A,$$
$$\lim_{n\to\infty} (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) = B.$$

Но тогда ввиду (7)

$$\lim_{n\to+\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \lim [(\alpha_1 - \beta_1) + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)] =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) - \lim (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) = A - B,$$

т. е. и ряд (5) является сходящимся.

Например, ввиду выясненной выше сходимости ряда

$$1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

сходящимся будет ряд

$$1-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$$

g. Нетрудно показать, что *при условии*

$$a_n>0,\quad \lim_{n\to\infty} a_n=0,\quad a_1>a_2>a_3>\ldots>a_n>\ldots,$$

сходящимся будет так называемый *знакопеременный ряд*

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots$$

Рассмотрим сумму S_{2n} четного числа $2n$ первых членов и сумму S_{2n+1} нечетного числа $2n+1$ первых членов этого ряда. Имеем

$$S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2n-1}-a_{2n}),$$
$$S_{2n+1}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\ldots-(a_{2n}-a_{2n+1}),$$
$$S_{2n+1}-S_{2n}=u_{2n+1}.$$

Мы видим, что S_{2n} возрастает, S_{2n+1} убывает, а разность между ними стремится к нулю. Значит, S_{2n} и S_{2n+1} стремятся к некоторому общему пределу S.

Таким образом, сумма как четного, так и нечетного числа первых членов ряда (8) стремится к S. Следовательно, ряд (8) сходится.

Пример. Рассмотрим ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\ldots;$$

здесь

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots;\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;$$

следовательно, данный ряд сходится.

§ 15. Основание натуральных логарифмов

a. Применим предыдущее к исследованию весьма важного предела

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{1}$$

Положим сначала, что n — *целое положительное*. Применяя бином Ньютона, имеем

$$s_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\ \ldots\ +\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)(n-1)n}\cdot\frac{1}{n^n}=$$
$$=1+\frac{n}{n}+\frac{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}}{1\cdot 2}+\frac{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)(n-1)n}=$$
$$=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{1\cdot 2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-2)(n-1)n}.$$

Так как числители всех слагаемых полученной суммы меньше 1, то эти слагаемые не превосходят членов ряда (см. пункт «с» § 14)

$$S=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots=2{,}7182818\ldots \qquad (2)$$

Нетрудно сообразить, что

$$\lim_{n\to+\infty} s_n=S.$$

Действительно, представляя S в форме

$$S=S_k+R_k, \qquad (3)$$

а s_n в форме

$$s_n=s_k+r_k, \qquad (4)$$

ввиду сходимости ряда (2) можно указать настолько большое k, что

$$R_k<\varepsilon/2. \qquad (5)$$

Тогда ввиду $r_k<R_k$ имеем

$$0<R_k-r_k<\varepsilon/2. \qquad (6)$$

Далее, сохраняя выбранное k неизменным, мы в изменении n отметим момент, начиная с которого s_k будет отличаться от S_k на величину, меньшую $\varepsilon/2$, что несомненно наступит, так как указанная сумма приближается к S_k при неограниченном увеличении n (число k постоянное).

Таким образом, начиная с некоторого момента имеем

$$|S_k - s_k| < \varepsilon/2.$$

Вычитая же из равенства (3) равенство (4), получим (беря абсолютные величины)

$$|S - s_n| = |S_k - s_k + R_k - r_k| \leqslant |S_k - s_k| + |R_k - r_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда и заключаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = S = 2{,}7182818\ldots$$

Этот предел обозначается обыкновенно буквою e, так что

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}7182818\ldots$$

Ввиду особых удобств число e принимается за основание так называемых *натуральных* логарифмов.

b. При этом логарифм при основании e мы будем просто обозначать символом $\ln$ (часто его обозначают также символом $\log$).

Например, для обозначения натуральных логарифмов чисел 2, 3, 4, ... будем писать

$$\ln 2,\ \ln 3,\ \ln 4 \quad \text{или} \quad \log 2,\ \log 3,\ \log 4.$$

Логарифмы при каком-либо другом основании a будем обозначать символом $\log_a$, указывая внизу основание. Например, для обозначения логарифмов по основанию 5 чисел 2, 3, 4, ... пишем

$$\log_5 2,\ \log_5 3,\ \log_5 4,\ \ldots$$

c. Нетрудно показать далее, что тот же предел e мы получим и в том случае, если не будем ограничивать значения n только целыми числами. Действительно, если n дробное, то всегда найдутся целые N и $N+1$ такие, что

$$N < n < N+1,$$

и тогда, очевидно,

$$\frac{\left(1+\frac{1}{N+1}\right)^{N+1}}{1+\frac{1}{N+1}}=\left(1+\frac{1}{N+1}\right)^{N}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<$$

$$<\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N+1}=\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N}\cdot\left(1+\frac{1}{N}\right).$$

А так как с возрастанием n растут и числа N и $N+1$, то имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N}=e;\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{N+1}\right)^{N+1}=e;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)=1;\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{N+1}\right)=1,$$

и потому крайние числа последних неравенств будут стремиться к e.

Вместе с тем к пределу e будет стремиться и выражение

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},$$

постоянно заключенное между ними.

d. Наконец, покажем, что число e будет пределом и в том случае, когда n отрицательное и $n\to-\infty$. Пусть $n=-n_1$, где $n_1>0$. Имеем

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{n_1\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n_1}\right)^{-n_1}=$$

$$=\lim_{n_1\to+\infty}\left(\frac{n_1-1}{n_1}\right)^{-n_1}=\lim_{n_1\to+\infty}\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)^{n_1}.$$

Полагая далее $n_1-1=n_2$, приведем этот предел к виду

$$\lim_{n_2\to+\infty}\left(\frac{n_2+1}{n_2}\right)^{n_2+1}=\lim_{n_2\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_2}\right)^{n_2}\left(1+\frac{1}{n_2}\right)=e\cdot 1=e.$$

Таким образом, независимо от того, стремится ли n к $+\infty$ или к $-\infty$, предел получается один и тот же, и мы можем, следовательно, написать вообще

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots=2{,}7182818\ldots$$

§ 16. Порядок бесконечно малых

a. Если α — бесконечно малая и β — другая бесконечно малая, причем

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = C,$$

где C — постоянная, не равная нулю, то говорим, что β — *бесконечно малая порядка, одинакового с* α.

b. Если

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0,$$

то говорим, что β — *бесконечно малая порядка, высшего чем* α.

c. Если, наконец,

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty,$$

то говорим, что β — *бесконечно малая порядка, низшего чем* α.

d. Очень часто при одновременном рассмотрении нескольких бесконечно малых одну из них, α, принимают за *основную*, тогда α^m называют *бесконечно малой величиной порядка* m, как и всякую бесконечно малую величину β порядка, одинакового с α^m, для которой $\lim \frac{\beta}{\alpha^m} = C$, $C \neq 0$.

Нетрудно сообразить, что большему m отвечает и высший порядок малости (в смысле пункта «b»). В самом деле, при $m > m_1$ имеем

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha^m}{\alpha^{m_1}} = \lim_{\alpha \to 0} \alpha^{m-m_1} = 0$$

ввиду того, что $m - m_1 > 0$.

e. Для лучшего уяснения понятия порядка бесконечно малой заметим вообще, что если β — бесконечно малая порядка выше α, то из

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$$

следует

$$\frac{\beta}{\alpha} = \gamma,$$

где γ — бесконечно малая. Отсюда

$$\beta = \alpha\gamma.$$

Значит, β *является бесконечно малой частью от бесконечно малой* α, так как умножить α на γ—значит взять от нее такую же часть, какую γ составляет от 1, т. е. бесконечно малую часть.

И наоборот, если

$$\beta=\alpha\gamma,$$

т. е. β есть бесконечно малая часть бесконечно малой α, то

$$\frac{\beta}{\alpha}=\gamma, \qquad \lim\frac{\beta}{\alpha}=0,$$

т. е. β—бесконечно малая порядка, высшего чем α.

f. Если

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=1,$$

то бесконечно малые величины α и β называются *эквивалентными*.

Пример 1. Ввиду

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

мы можем сказать, что синус бесконечно малого угла эквивалентен этому углу.

Пример 2. При условиях пункта «а» § 11 ввиду

$$\lim\frac{\text{дл. хорды } \alpha\beta}{\text{дл. } \smile\alpha\beta}=1$$

мы можем сказать, что хорда эквивалентна стягивающей ее бесконечно малой дуге.

g. Нетрудно видеть, что сумма

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta$$

нескольких бесконечно малых, расположенных по возрастанию их порядка, эквивалентна α.

Действительно,

$$\lim\frac{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta}{\alpha}=\lim\left(1+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}+\ldots+\frac{\delta}{\alpha}\right)=1,$$

потому что β, γ, ..., δ—бесконечно малые порядка, высшего чем α.

Например, если α—бесконечно малая, то

$$2\alpha^3+\alpha^4-6\alpha^5 \quad \text{эквивалентно } 2\alpha^3,$$

$$\sqrt{\alpha}-\alpha \quad \text{эквивалентно } \sqrt{\alpha}.$$

h. Если α эквивалентно β, то

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1,$$

откуда следует, что

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1 + \gamma,$$

где γ — бесконечно малая, отсюда

$$\alpha = \beta(1 + \gamma) = \beta + \beta\gamma,$$

т. е. бесконечно малая α равна эквивалентной ей β, сложенной с бесконечно малой $\beta\gamma$ высшего порядка.

Обратно, из

$$\alpha = \beta + \beta\gamma$$

ввиду пункта «g» следует, что α эквивалентна β.

i. *При вычислении предела отношения бесконечно малых каждую из них можно заменить величиной, ей эквивалентной.*

Если

$$\alpha \text{ эквивалентна } \alpha_1,$$
$$\beta \text{ эквивалентна } \beta_1,$$

то имеем (пункт «h»)

$$\alpha = \alpha_1(1 - \gamma), \quad \beta = \beta_1(1 + \delta),$$

где γ и δ — бесконечно малые. Следовательно,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{1+\gamma}{1+\delta},$$

и если $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ стремится к какому-либо пределу, то ввиду

$$\lim \frac{1+\gamma}{1+\delta} = 1$$

к тому же самому пределу будет стремиться и $\frac{\alpha}{\beta}$, то есть

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Например, ввиду того, что $\sin x$ эквивалентен x и $x + x^2$ эквивалентно x, имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x + x^2} = \lim \frac{x}{x} = 1.$$

Учащимся самим рекомендуется обобщить теорему на случай, когда и в числителе, и в знаменателе дроби имеется несколько бесконечно малых сомножителей.

§ 17. Упражнения

1. Доказать, что

$$\lim_{x \to \pi/6} \ln \sin x = -\ln 2,$$

$$\lim_{x \to \pi/4} 2^{\operatorname{tg} x} = 2,$$

$$\lim_{x \to 1} \operatorname{arctg} x^2 = \pi/4.$$

2. Доказать, что на отрезке $[-1, 0]$ уравнение

$$2x^6 + x + 2 = 0$$

имеет вещественный корень.

3. Доказать, что на отрезке $[2, 3]$ уравнение

$$x^3 + 4x^2 - 12x - 9 = 0$$

имеет вещественный корень.

4. Доказать, что при $a > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = -\infty.$$

Указание. Вынести ax^3 за скобки и посмотреть, какой знак будет иметь при больших x выражение ax^3 и выражение, оставшееся в скобках.

5. Доказать, что при $a > 0$

$$\lim_{x \to \infty} (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = +\infty.$$

6. Как заключить из решения упражнения 4, что уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

всегда имеет хоть один вещественный корень?

7. Доказать, что

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - ax + a^2}{(2x - a)(2a - x)} = 1.$$

8. При каких значениях x функция

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2}$$

терпит разрывы непрерывности? *Ответ*: при $x=1$ и $x=2$.

9. Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+2x}=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2}{x^2-1}=+\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2}{x^2-1}=-\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}=\frac{1}{2}.$$

10. Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+1}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+1}\right)=-1.$$

11. Доказать, что

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=n,\qquad \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}$$

(здесь x рассматривается как постоянная, а h — как переменная),

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=6.$$

12. Доказать, что функция $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ имеет разрывы непрерывности только при $x=-1$ и $x=1$, причем

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty,\qquad \lim_{x\to-1+0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty,\qquad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty.$$

13. Доказать, что функция $\frac{1}{x(x-1)}$ терпит разрывы непрерывности только при $x=0$ и $x=1$, причем

$$\lim_{x\to-0}\frac{1}{x(x-1)}=+\infty,\qquad \lim_{x\to+0}\frac{1}{x(x-1)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x(x-1)}=-\infty,\qquad \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x(x-1)}=+\infty.$$

14. Почему

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=1,\quad \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=1?$$

15. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=m,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\frac{m}{n}.$$

16. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} mx}{\operatorname{tg} nx}=\frac{m}{n}.$$

17. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

18. Доказать, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x,$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\sin x.$$

19. Доказать, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x+h)-\operatorname{tg} x}{h}=\frac{1}{\cos^2 x},\quad \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{ctg}(x+h)-\operatorname{ctg} x}{h}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

20. Доказать сходимость ряда

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\dots$$

для всех $|x|<1$.

21. Доказать сходимость ряда

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots$$

при любом заданном x.

22. Доказать сходимость рядов

$$x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\dots,\quad 1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\dots$$

при $|x|\leqslant 1$.

23. Доказать сходимость ряда

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

24. Доказать, что, полагая

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\ldots=S_k+R_k,$$

будем иметь

$$0<R_k<\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k\cdot k}.$$

25. Почему

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=e^2,\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/2}=\sqrt{e}?$$

26. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

27. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

28. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k,\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-1}\right)^{\frac{n^2+n}{n^2+2}}=e.$$

29. Доказать, что при бесконечно малом x

$\operatorname{tg} x$ эквивалентен x,

$\ln(1+x)$ эквивалентен x.

30. Доказать, что если α_1 эквивалентно β_1; α_2 эквивалентно β_2, ..., α_k эквивалентно β_k, то и $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$ эквивалентно $\beta_1\beta_2\ldots\beta_k$.

31. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2-4x^3+x^4)}{\operatorname{tg}(x^2+2x^3+3x^4)}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sin(x+x^2)}=2.$$

32. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sqrt{x\operatorname{tg} x}}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^3)\operatorname{tg} x^2}{(1-\cos x)\,x^2}=2.$$

Глава 2

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

§ 1. Производная как угловой коэффициент касательной

a. Основная задача, которую мы теперь ставим,— это *исследование хода изменения функции*

$$y = f(x)$$

с изменением (увеличением) аргумента.

Поставим себе такой вопрос: как узнать, возрастает ли функция, убывает ли она, и с какой быстротой.

b. Обращаясь к графику функции (рис. 8), легко усмотреть связь этого вопроса с углом α наклона касательной к оси абсцисс. На участках возрастания функции (например, в точке M_1) угол α положителен, на участках убывания функции (например, в точке M_2) он отрицателен. При этом чем быстрее изменяется функция (возрастает или убывает), тем больше угол α. В точках M_1, M_3, M_4 функция не возрастает и не убывает; в этих точках $\alpha = 0$.

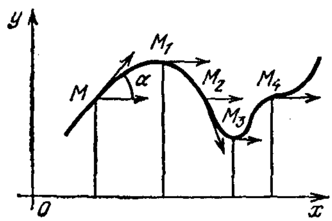


Рис. 8

Ввиду указанной связи угол α и можно было бы принять за меру скорости изменения функции, причем знак угла α указывал бы тогда сам характер изменения (возрастание или убывание).

c. Однако за такую меру скорости удобнее принимать не сам угол α, а его тангенс, т. е. угловой коэффициент касательной.

Этот угловой коэффициент касательной

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

для каждой точки M будет свой — он будет зависеть от положения точки M на кривой и будет меняться с перемещением точки M. А так как положение точки M определяется ее абсциссой x, то выходит, что $a = \operatorname{tg} \alpha$ есть некоторая функция абсциссы x.

Эту функцию мы называем *производной функцией* функции $y = f(x)$. Обозначим ее одним из символов

$$y' \text{ или } f'(x),$$

т. е. так же, как и саму функцию, но со значком вверху (читается: y штрих или f штрих от x).

Итак, наряду с каждой функцией $y = f(x)$ мы вводим в рассмотрение производную функцию

$$a = \operatorname{tg} \alpha = y' = f'(x),$$

выражающую собою угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$.

Нашей ближайшей задачей является разыскание математического выражения этой функции.

§ 2. Производная как предел

а. Касательную в точке M можно рассматривать как *предельное положение секущей* Mm, проходящей через точку M и через бесконечно близкую к ней точку m (точка M остается неподвижной, а точка m к ней неограниченно приближается; рис. 9). Соответственно этому угол α наклона касательной к оси абсцисс можно рассматривать как предел переменного угла α наклона секущей Mm к оси абсцисс. Из $\triangle MKm$ имеем ($MK = \Delta x$, $Km = \Delta y$, $\angle KMm = \alpha_1$)

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

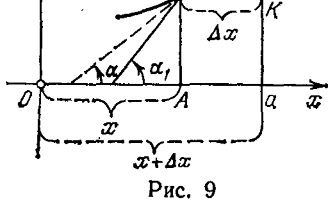


Рис. 9

Поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \alpha_1 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (1)$$

или ввиду того, что $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ и $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ (действительно, $\Delta y = am - AM$, где $am = f(x + \Delta x)$, $AM = f(x)$), имеем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2)$$

b. Эта формула и будет в дальнейшем служить для разыскания математического выражения производной, когда известно математическое выражение первоначальной функции $f(x)$. Словами ее можно сформулировать так:

Производная есть предел отношения приращения Δy функции к вызвавшему его бесконечно малому приращению Δx аргумента (при стремлении последнего к нулю).

При разыскании этого предела следует твердо помнить, что x остается постоянным (как абсцисса неподвижной точки M). Переменным является Δx (стремящееся к нулю ввиду неограниченного приближения точки m к M). Следует также помнить, что предел должен быть один и тот же, независимо от знака Δx, т. е. независимо от того, приближается ли точка m к M с правой стороны или же с левой.

§ 3. Пояснение общей теории на примере. Уравнения касательной и нормали

a. Для пояснения того, как при помощи формулы (2) пункта «а» § 2 можно найти математическое выражение производной, рассмотрим функцию

$$y = f(x) = \frac{1}{4}x^2.$$

Производная $y' = f'(x)$ этой функции равна пределу

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

но здесь

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2, \qquad f(x+\Delta x) = \frac{1}{4}(x+\Delta x)^2,$$

и, следовательно,

$$y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{4}(x+\Delta x)^2 - \frac{1}{4}x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\Delta x + (\Delta x)^2 - \frac{1}{4}x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{2}x + \Delta x\right) = \frac{1}{2}x.$$

Итак,

$$y' = \frac{1}{2}x.$$

b. В то время как значение самой функции

$$y=\frac{1}{4}x^2,$$

отвечающее какому-либо значению x, изображается ординатой соответствующей точки графика (параболы), соответствующее тому же значению x значение производной

$$y'=\frac{1}{2}x$$

изображается угловым коэффициентом касательной.

На прилагаемой таблице

		M_{-4}	M_{-3}	M_{-2}	M_{-1}	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	...
x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y=\frac{1}{4}x$	...	-4	$-9/4$	-1	$-1/4$	0	$1/4$	1	$9/4$	4	...
$\operatorname{tg}\alpha=y'=\frac{1}{2}x$	...	-2	$-3/2$	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	$3/2$	2	...

даны ординаты и угловые коэффициенты касательной нашей параболы для точек ..., M_{-4}, M_{-3}, M_{-2}, M_{-1}, M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, ... с абсциссами ..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... (первая строка таблицы указывает наименование точек, вторая — абсциссы этих точек, третья — ординаты, наконец, четвертая — угловые коэффициенты касательных).

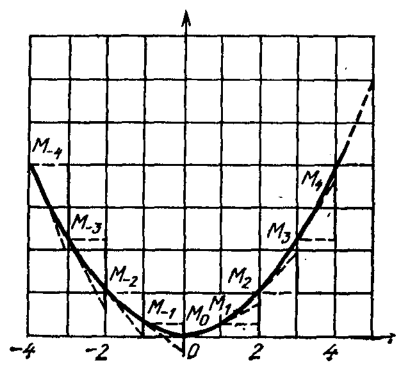


Рис. 10

Учащиеся легко проверят, что вычисленные нами значения $y'=\operatorname{tg}\alpha$ совпадают с теми, которые имеются на рис. 10. (Например, в точке M имеем $y'=\operatorname{tg}\alpha=0$, и, действительно, здесь касательная совпадает с осью абсцисс. В точке M_2 имеем $y'=\operatorname{tg}\alpha=1$, и, действительно, рис. 10 показывает, что касательная в точке M_2 наклонена к оси абсцисс под углом $\alpha=45^\circ$ и т. д.)

c. Зная угловой коэффициент касательной, нетрудно написать *уравнение касательной*. Например, найдем уравнение касательной в точке M_3. Здесь (см. таблицу) $x=3$, $y=9/4$, $\operatorname{tg}\alpha=3/2$. Значит, уравнение касательной в точке M_3, как уравнение прямой, проходящей через точку $M_3(3;\ 9/4)$ и имеющей угловой коэффициент 3/2, будет

$$y-\frac{9}{4}=\frac{3}{2}(x-3),\qquad y-\frac{9}{4}=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2},$$
$$4y-9=6x-18,\qquad 6x-4y-9=0.$$

d. Найдем еще *уравнение нормали* в точке M_3. *Нормалью* называется прямая, проходящая через точку касания и перпендикулярная касательной. Угловой коэффициент a_1 нормали найдем из условия перпендикулярности ее к касательной:

$$a_1=-\frac{1}{a},$$

где a — угловой коэффициент касательной в точке M_3, равный, как мы видели выше, 3/2. Следовательно,

$$a_1=-\frac{1}{3/2}=-\frac{2}{3}.$$

Итак, уравнение нормали, как уравнение прямой, проходящей через точку $M_3(3;\ 9/4)$ и имеющей угловой коэффициент $a_1=-2/3$, будет

$$y-\frac{9}{4}=-\frac{2}{3}(x-3),\qquad y-\frac{9}{4}=-\frac{2}{3}x+2,$$
$$12y-27=-8x+24,\qquad 8x+12y-51=0.$$

§ 4. Механическое значение производной

a. Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки. Путь s, пройденный этой точкой за время t, протекшее от начала движения, будет зависеть от t. Он будет некоторой функцией t:

$$s=f(t).$$

Что касается *скорости* v движения, то она будет тоже меняться с изменением t и тоже, как и s, будет некоторой функцией t. Мы постараемся сейчас найти математическое выражение этой функции, предполагая, что математическое выражение функции $s=f(t)$ известно.

b. Для этой цели выберем какой-либо определенный момент t и рассмотрим движение точки за бесконечно малый промежуток времени t, протекший от момента t до бесконечно близкого к нему момента $t+\Delta t$. Так как скорость можно рассматривать как непрерывную функцию (времени), то ввиду бесконечной малости промежутка времени Δt ее можно принять в течение этого промежутка за постоянную и, следовательно, само движение — за равномерное.

Обозначая через Δs путь, пройденный точкой за указанный бесконечно малый промежуток времени, для скорости в течение этого промежутка будем иметь приближенное выражение

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

(потому что скорость равномерного движения выражается отношением пути к времени, за которое этот путь пройден).

Замечая же, что к моменту t путь был

$$s=f(t),$$

а к моменту $t+\Delta t$ он стал

$$s+\Delta s=f(t+\Delta t),$$

имеем для Δs следующее выражение:

$$\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t).$$

Следовательно, приближенное выражение скорости будет

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Наши рассуждения будут тем ближе к действительности, чем меньше Δt. Поэтому за истинную скорость в момент t принимаем предел отношения (1) при $\Delta t \to 0$, то есть

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

Для лучшего уяснения вопроса можно рассуждать так. Считая очевидным, что скорость v есть непрерывно меняющаяся величина, имеющая в каждый момент времени свое определенное численное значение, допустим, что v_1 — наименьшая и v_2 — наибольшая скорость в течение всего рассматриваемого промежутка (например, для движения с возрастающей скоростью v_1 — скорость к моменту t и v_2 — скорость к моменту $t+\Delta t$). Если бы точка двигалась равномерно с наименьшей скоростью v_1, то она, конечно, прошла бы и меньший, чем Δs, путь

$v_1\Delta t$. Наоборот, двигаясь равномерно с наибольшей скоростью v_2, точка прошла бы больший, чем Δs, путь $v_2\Delta t$. Итак,

$$v_1 \Delta t < \Delta s < v_2 \Delta t,$$

откуда

$$v_1 < \frac{\Delta s}{\Delta t} < v_2.$$

В пределе, когда $t+\Delta t$ сольется с t, то и v_2 сольется с v_1, причем получившаяся в результате их совпадения скорость v будет относиться уже к моменту t (с которым слилось $t+\Delta t$). И эта предельная скорость v будет, очевидно, равна пределу отношения

$$\frac{\Delta s}{\Delta t},$$

так как, находясь постоянно между v_1 и v_2, это отношение, очевидно, должно приближаться к тому же пределу v, к которому стремятся v_1 и v_2.

А это (§ 2) как раз совпадает с производной функции $f(t)$. Итак, можно написать

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s' = f'(t).$$

Следовательно, *скорость есть производная пути по времени*, т. е. производная функции $f(t)$, которая выражает путь s через время t.

c. Для примера рассмотрим равноускоренное движение матèриальной точки, считая, что известен путь s как функция времени:

$$s = \frac{1}{2} at^2 = f(t)$$

(a — ускорение). Согласно изложенному скорость v к моменту t будет

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} a (t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2} at^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{at\,\Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(at + \frac{1}{2} a \Delta t \right) = at.$$

Таким образом, мы получили известное выражение скорости v равноускоренного движения как функции времени t:

$$v = at.$$

Здесь, следовательно,

$$s=f(t)=\frac{1}{2}at^2,$$
$$v=s'=f'(t)=at.$$

§ 5. Производные трех простейших функций

а. Как увидим далее, разыскание производных многих функций сводится к разысканию производных так называемых простейших функций

$$x^n,\ a^x,\ \ln x,\ \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x.$$

Математические выражения этих производных выводятся раз навсегда, и их учащиеся должны помнить наизусть.

b. Первой выведем производную функции

$$y=f(x)=x^n,$$

где n — целое положительное. Здесь (аналогично будем поступать и дальше для обозначения производных других функций) наряду с обозначениями y' и $f'(x)$ можно пользоваться и таким обозначением производной:

$$y'=[x^n]'.$$

Имеем

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+\ldots+(\Delta x)^{n-1}\right)=nx^{n-1}.$$

Итак, имеем при целом положительном n

$$[x^n]'=nx^{n-1}.$$

Например, $[x^2]'=2x$; $[x^3]'=3x^2$; $[x^{100}]'=100x^{99}$ и т. д. В частности, $[x]'=[x^1]'=1\cdot x^{1-1}=x^0=1$.

Итак,

$$[x]'=1.$$

Этот результат можно было предвидеть и из геометрических соображений. Действительно, график функции $y=x$ есть прямая линия. А так как касательная в любой точке прямой линии, очевидно, совпадает с самой прямой линией, то угловой коэффициент касательной тот же, что и у прямой $y=x$, т. е. 1.

с. Найдем производную функции

$$y=f(x)=\ln x$$

(предполагая x положительным). Здесь имеем

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Отношение

$$\frac{\Delta x}{x}$$

бесконечно мало (ввиду бесконечно малого числителя) и потому может быть представлено в виде дроби

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{1}{n} \tag{1}$$

с бесконечно большим знаменателем n. Из (1) находим

$$\Delta x=\frac{x}{n},$$

и выражение для y' перепишется так:

$$y'=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{x}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{x},$$

откуда ввиду $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, $\ln e=1$ (натуральный логарифм) получим, наконец,

$$y'=\frac{\ln e}{x}=\frac{1}{x}.$$

Итак,

$$[\ln x]'=\frac{1}{x}.$$

d. Найдем производную функции

$$y = f(x) = \sin x.$$

Здесь, применяя формулу разности синусов, имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} =$$

$$= \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

Итак,

$$[\sin x]' = \cos x.$$

§ 6. Производная постоянного и суммы. Вынесение постоянного множителя за знак производной

a. Постоянное число C также можно рассматривать как функцию x. Только эта функция, в отличие от прочих, все время сохраняет одно и то же значение. Поэтому для функции

$$y = f(x) = C$$

имеем

$$f(x) = C, \qquad f(x+\Delta x) = C$$

и потому

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Итак,

$$[C]' = 0,$$

т. е. *производная постоянного равна нулю.*

b. Геометрически этот результат сделается ясным, если вспомним, что график функции

$$y = C$$

есть прямая, параллельная оси Ox. А так как касательная в любой точке прямой линии совпадает с этой прямой линией и в рассматриваемом случае параллельна оси абсцисс (рис. 11), то угловой коэффициент $\operatorname{tg}\alpha$ касательной равен нулю.

c. Пусть y является суммой двух или нескольких функций x:

$$y = u + v + w \tag{1}$$

(например, $y = x^2 + \ln x + \sin x$). Если мы аргументу x дадим бесконечно малое приращение Δx, то u, v, w получат свои приращения Δu, Δv, Δw и перейдут в $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $w + \Delta w$. Изменение u, v, w вызовет изменение и y, которое получит свое приращение Δy и перейдет в $y + \Delta y$. Таким образом, после замены x на $x + \Delta x$ равенство (1) перейдет в такое:

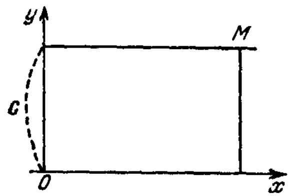


Рис. 11

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v + w + \Delta w.$$

Вычитая из него равенство (1), получим

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w,$$

откуда, деля на Δx, имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

и, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем

$$y' = u' + v' + w'.$$

Заменяя y его выражением (1), окончательно можно написать

$$[u + v + w]' = u' + v' + w',$$

т. е. *производная суммы равна сумме производных слагаемых.*

Например,

$$[x^2 + \ln x + \sin x]' = [x^2]' + [\ln x]' + [\sin x]' = 2x + \frac{1}{x} + \cos x.$$

d. Пусть

$$y = au, \tag{2}$$

где a — постоянное и u — функция x. Рассуждая подобно предыдущему, имеем

$$y + \Delta y = a(u + \Delta u) = au + a\,\Delta u.$$

Вычитая отсюда (2), находим

$$\Delta y = a\,\Delta u,$$

откуда, деля на Δx, получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

и, переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, имеем

$$y'=au'.$$

Заменяя y его выражением (2), окончательно можно написать

$$[au]'=au',$$

т. е. *постоянный сомножитель можно выносить за знак производной*.

Например, $[2\sin x]'=2[\sin x]'=2\cos x$.

e. Доказанное в пунктах «a», «b», «c», «d» позволяет находить производные более обширного класса функций.

Например,

$$[4x^2-8x-7]'=[4x^2]'+[-8x]'+[-7]'=$$
$$=4[x^2]'-8[x]'+[-7]'=4\cdot 2x-8\cdot 1+0=8x-8,$$
$$[16x^3-10x^2+2x-1]'=48x^2-20x+2;$$
$$[4\ln x+2\sin x]'=\frac{4}{x}+2\cos x,$$
$$[(x-1)(x+2)]'=[x^2+x-2]'=2x+1,$$
$$\left[\frac{5x^6}{3}-2x^5+\frac{5x^4}{2}\right]'=\frac{5}{3}\cdot 6x^5-2\cdot 5x^4+\frac{5}{2}\cdot 4x^3=$$
$$=10(x^5-x^4+x^3).$$

§ 7. Производная сложной функции

a. Чтобы еще более расширить круг функций, производные которых мы можем отыскивать, рассмотрим производную сложной функции

$$y=f(\varphi(x)) \tag{1}$$

(пункт «h» § 6 гл. 1). Обозначая сложный аргумент $\varphi(x)$ через u, имеем

$$y=f(u),\qquad u=\varphi(x). \tag{2}$$

Производную сложной функции легко найти, если известны выражения производных обеих функций (2).

Действительно,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Ввиду $y=f(u)$ получаем

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u),$$

а ввиду $u=\varphi(x)$ получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\varphi'(x).$$

Итак, можем написать

$$y'=f'(u)\,\varphi'(x),$$

что ввиду (1) и (2) можно переписать в двух следующих формах ($u'=\varphi'(x)$):

$$\begin{aligned}[f(\varphi(x))]'&=f'(\varphi(x))\,\varphi'(x)\ {}^{*)},\\ [f(u)]'&=f'(u)\,u'.\end{aligned}\tag{3}$$

Значит, *производная сложной функции равна произведению двух сомножителей. Первый есть*

$$f'(\varphi(x))=f'(u)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u},$$

т. е. производная y по u; для его составления берем производную y, рассматривая всю функцию $\varphi(x)=u$ как один аргумент.

Второй сомножитель

$$\varphi'(x)=u'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

является производной этого посредствующего аргумента по x.

---

*) Здесь весьма важно не запутаться в обозначениях. Именно, через $y'=[f(u)]'$ обозначают производные в предположении, что аргументом является x, так что

$$y'=[f(u)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(u)}{\Delta x},\qquad u'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Желая это особенно подчеркнуть, часто вместо y' и u' пишут y'_x и u'_x.

В отличие от этого производную функции

$$y=f(u),$$

вычисленную в предположении, что аргументом является u, обозначают через $y'_u=f'(u)$, так что

$$y'_u=f'(u)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}.$$

Например,

$$[\ln(\sin x)]' = \frac{1}{\sin x}[\sin x]' = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = \operatorname{ctg} x,$$

$$[(4x^2 - 7x + 9)^{100}]' = 100\,(4x^2 - 7x + 9)^{99}\,[4x^2 - 7x + 9]' =$$
$$= 100\,(4x^2 - 7x + 9)^{99}\,(8x - 7),$$

$$[\ln\sin(8x^3 - 4x + 5)]' = \frac{1}{\sin(8x^3 - 4x^2 + 5)}[\sin(8x^3 - 4x^2 + 5)]' =$$
$$= \frac{1}{\sin(8x^3 - 4x^2 + 5)}\cdot\cos(8x^3 - 4x^2 + 5)\,(24x^2 - 8x) =$$
$$= (24x^2 - 8x)\operatorname{ctg}(8x^3 - 4x^2 + 5).$$

b. Прежде чем вычислять производные по формуле (3), иногда переписывают ее в соответствии с видом функции $f(u)$.

Например,

$$[u^n]' = nu^{n-1}\cdot u',$$
$$[\ln u]' = \frac{1}{u}\cdot u' = \frac{u'}{u},$$
$$[\sin u]' = \cos u\cdot u'.$$

Следуя второй из написанных формул, можно сразу писать

$$[\ln\sin x]' = \frac{[\sin x]'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

c. В виде приложения выведем производную функции

$$y = \cos x.$$

Имеем

$$[\cos x]' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left[\frac{\pi}{2} - x\right]' =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot(-1) = -\sin x.$$

Итак,

$$[\cos x]' = -\sin x.$$

§ 8. Разыскание производных путем логарифмирования. Производные функции x^n при любом n и функции a^x

a. Пусть требуется найти производную функции

$$y = \frac{(x-2)^2\,(x-3)}{(x+2)\,10^x},\quad x > 3. \tag{1}$$

Логарифмируя, имеем

$$\ln y = 2\ln(x-2) + \ln(x-3) - \ln(x+2) - x\ln 10.$$

Берем производные обеих частей равенства и, имея в виду, что y есть функция x и, следовательно, $\ln y$ — сложная функция x, так что

$$[\ln y]' = \frac{y'}{y},$$

получим

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2} - \ln 10,$$

откуда ввиду (1) имеем

$$y' = \frac{(x-2)^2 (x-3)}{(x+2)\, 10^x} \left(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2} - \ln 10 \right).$$

Найдем еще производную функции

$$y = (\sin x)^{x^2}.$$

Здесь имеем (см. пункт «а» § 9):

$$\ln y = x^2 \ln \sin x, \quad \frac{y'}{y} = 2x \ln \sin x + x^2 \frac{\cos x}{\sin x},$$
$$y' = (\sin x)^{x^2} (2x \ln \sin x + x^2 \operatorname{ctg} x).$$

Подобный путь разыскания производных называется способом логарифмирования.

Кроме пользы, которую он может принести при непосредственном вычислении производных, он поможет нам вывести несколько новых формул.

b. Прежде всего применим способ логарифмирования к выводу производной функции

$$y = x^n, \tag{2}$$

причем n может быть теперь любым постоянным (дробным и даже отрицательным). Имеем

$$\ln y = n \ln x, \quad \frac{y'}{y} = \frac{n}{x}, \quad y' = y \cdot \frac{n}{x} = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx.$$

Итак,

$$[x^n]' = nx^{n-1},$$

т. е. имеет место та же самая формула, как и при целом положительном n.

Например,

$$[x\sqrt{x}]'=\left[x^{\frac{3}{2}}\right]'=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x},$$

$$\left[\frac{1}{x^2}\right]'=[x^{-2}]'=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3},$$

$$\left[\frac{1}{x^n}\right]'=[x^{-n}]'=-nx^{-n-1}=-\frac{n}{x^{n+1}},$$

$$[\sqrt{x}]'=\left[x^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Эту последнюю формулу

$$[\sqrt{x}]'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

не лишне тоже запомнить, так как ею приходится пользоваться довольно часто.

c. Найдем, наконец, производную функции

$$y=a^x.$$

Имеем

$$\ln y=x\ln a,\quad \frac{y'}{y}=\ln a,\quad y'=y\ln a=a^x\ln a..$$

Итак,

$$[a^x]'=a^x\ln a.$$

В частности, если $a=e=2{,}7182818\ldots$, то $\ln a=\ln e=1$, и мы получим

$$[e^x]'=e^x.$$

Например,

$$[10^x+2^x+e^x]'=10^x\ln 10+2^x\ln 2+e^x.$$

d. Выведем еще формулу для производной

$$[\log_a x]'.$$

Если

$$y=\log_a x,$$

то

$$x=a^y,\quad \ln x=y\ln a,\quad y=\frac{\ln x}{\ln a},\quad y'=\frac{1}{x\ln a}.$$

Итак,

$$[\log_a x]'=\frac{1}{x\ln a}.$$

§ 9. Производные произведения и частного. Производные $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$

a. Пусть y — произведение нескольких функций x:

$$y = uvw.$$

Имеем

$$\ln y = \ln u + \ln v + \ln w,$$
$$[\ln y]' = [\ln u]' + [\ln v]' + [\ln w]',$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w},$$
$$y' = y\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}\right) = uvw\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}\right) = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Итак,

$$[uvw]' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

В частности,

$$[uv]' = u'v + uv'.$$

Например,

$$[x^2 \sin x \cos x]' = [x^2]' \sin x \cos x + x^2 [\sin x]' \cos x + x^2 \sin x [\cos x]' = 2x \sin x \cos x + x^2 \cos x \cos x + x^2 \sin x (-\sin x) = 2x \sin x \cos x + x^2 (\cos^2 x - \sin^2 x) = x \sin 2x + x^2 \cos 2x,$$

$$[x \ln x]' = [x]' \ln x + x [\ln x]' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

b. Пусть

$$y = \frac{u}{v}$$

— отношение двух функций x. Имеем

$$\ln y = \ln u - \ln v, \quad \frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v},$$
$$y' = \frac{u}{v}\left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}\right) = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Итак,

$$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Например,

$$\left[\frac{\sin x}{x^2}\right]' = \frac{[\sin x]' x^2 - \sin x [x^2]'}{x^4} = \frac{\cos x \cdot x^2 - \sin x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3}.$$

c. Найденную формулу производной отношения мы применим к разысканию производных $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$. Имеем

$$[\operatorname{tg} x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$[\operatorname{ctg} x]' = \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Итак,

$$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad [\operatorname{ctg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ *)}$$

§ 10. Производные обратных тригонометрических функций

a. Пусть

$$y = \arcsin x.$$

Это означает, что

$$\sin y = x, \tag{1}$$

откуда, беря производные обеих частей и замечая, что $\sin y$ — сложная функция x, получим

$$\cos y \cdot y' = 1, \quad y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Однако найденный результат выражен через y, тогда как все производные у нас принято выражать через x. Последнее сделать нетрудно: $\cos y$ можно выразить через $\sin y$, а этот последний ввиду равенства (1) можно заменить на x. Получим

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Перед корнем берем знак $+$ ввиду того, что за $y = \arcsin x$ мы принимаем главное значение арксинуса, т. е. y есть угол, лежащий в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, и потому $\cos y > 0$.

*) Вывод формул путем логарифмирования, которым мы с таким успехом пользовались, нехорош, когда приходится брать логарифм выражения, способного принимать и отрицательные значения. Однако и тогда формулы также оказываются верными. Мы не приводим подробного разбора и обоснования таких случаев.

Итак,

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

b. Пусть

$$y = \arccos x.$$

Имеем

$$\cos y = x, \qquad 0 < y < \pi,$$

$$-\sin y \cdot y' = 1, \qquad y' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Итак,

$$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

c. Пусть

$$y = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Имеем

$$\operatorname{tg} y = x,$$

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1, \quad y = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Итак,

$$[\operatorname{arc\,tg} x]' = \frac{1}{1+x^2}.$$

d. Пусть

$$y = \operatorname{arcctg} x.$$

Имеем

$$\operatorname{ctg} y = x,$$

$$-\frac{1}{\sin^2 y} \cdot y' = 1, \quad y' = -\frac{1}{1/\sin^2 y} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Итак,

$$[\operatorname{arcctg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

§ 11. Сводка основных формул

Соберем теперь вместе все выведенные нами формулы:

1. $[x^n]' = nx^{n-1}$; $[x]' = 1$; $[\sqrt{x}]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
2. $[\ln x]' = \frac{1}{x}$, $[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$.
3. $[a^x]' = a^x \ln a$, $[e^x]' = e^x$.
4. $[\sin x]' = \cos x$.

5. $[\cos x]' = -\sin x$.
6. $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
7. $[\operatorname{ctg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
8. $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
9. $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
10. $[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$.
11. $[\operatorname{arcctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$.
12. $[C]' = 0$.
13. $[u+v+\ldots+w]' = u'+v'+\ldots+w'$.
14. $[au]' = a[u]'$, $a = \mathrm{const}$.
15. $[uvw]' = u'vw + uv'w + uvw'$, $[uv]' = u'v + uv'$.
16. $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
17. $[f(u)]' = f'(u)\cdot u'$, или $[f(\varphi(x))]' = f'(\varphi(x))\,\varphi'(x)$.

§ 12. Дифференциал

а. Понятие производной дает возможность составить особого рода приближенное выражение для приращения Δy функции, отвечающего бесконечно малому приращению Δx аргумента. Чтобы составить такое приближенное выражение, опять обратимся к графику функции $y = f(x)$.

Если M и m — две бесконечно близкие точки графика, первая с абсциссой x, вторая с абсциссой $x + \Delta x$ (рис. 12), то $MK = \Delta x$ и $Km = \Delta y$ суть бесконечно малые приращения, которые получают абсцисса и ордината, когда точка M кривой переместится в точку m.

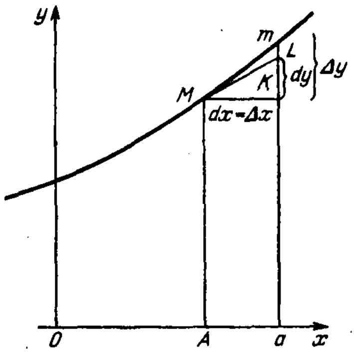


Рис. 12

Приближенное выражение Δy мы получим, если, ввиду малости дуги Mm, заменим эту дугу отрезком ML касательной.

Тогда *приращения MK и KL, которые теперь получат x и y, следуя уже не по кривой, а по касательной,* *обозначаются через* dx *и* dy:

$$dx = MK, \quad dy = KL$$

и называются dx *— дифференциалом аргумента,* dy *— дифференциалом функции.*

Мы видим, что $dx = \Delta x$, т. е. дифференциал аргумента в точности совпадает с бесконечно малым приращением аргумента.

Что же касается дифференциала dy функции, то он, вообще говоря, не совпадает с истинным приращением функции (равным Km), а является лишь приближенным выражением Δy, тем лучшим, чем меньше Δx.

b. Из $\triangle MKm$ имеем

$$dy = \operatorname{tg} \alpha \cdot dx,$$

а так как

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = f'(x),$$

то

$$dy = y'\, dx = f'(x)\, dx,$$

т. е. дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал аргумента.

c. Выясним теперь разницу между истинным приращением Δy функции и ее дифференциалом dy. Из определения производной имеем

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha,$$

где α — бесконечно малая,

$$y = (y' + \alpha)\, \Delta x, \tag{1}$$

$$\Delta y = y'\, dx + \alpha\, dx \qquad (\text{ввиду } \Delta x = dx).$$

Мы видим отсюда, что истинное приращение Δy функции состоит из двух слагаемых. Первое из них

$$y'\, dx$$

есть бесконечно малая того же порядка, что и dx (за исключением случаев, когда $y' = 0$). Оно как раз и совпадает с dy.

Второе же слагаемое

$$\alpha\, dx$$

есть бесконечно малая порядка, высшего чем dx, так как равно произведению dx на бесконечно малую α. Оно является разностью между Δy и $dy = y'\,dx$. Геометрически оно изображается отрезком Lm.

Итак, истинное приращение функции равно дифференциалу функции, сложенному с бесконечно малой $\alpha\,dx$ порядка, высшего чем dx.

d. В приложениях Δy часто можно заменять на dy.

e. Можно высказать утверждение, до известной степени обратное равенству (1):

Если мы каким-либо образом выразим Δy через $\Delta x = dx$ в форме

$$\Delta y = \varphi(x)\,dx + \alpha\,dx, \tag{2}$$

где α — бесконечно малая, то непременно

$$\varphi(x) = y', \quad \varphi(x)\,dx = dy.$$

Действительно, из (2) имеем ($dx = \Delta x$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(x) + \alpha, \quad \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(x),$$

$$y' = \varphi(x), \quad dy = y'\,dx = \varphi(x)\,dx.$$

Например, если $y = x^2$, то из

$$\Delta y = (x + dx)^2 - x^2 = x^2 + 2x\,dx + (dx)^2 - x^2 = 2x\,dx + (dx)^2$$

мы можем теперь сразу заключить, что

$$y' = 2x, \quad dy = 2x\,dx,$$

потому что $(dx)^2$ есть бесконечно малая порядка, высшего чем dx.

§ 13. Основные формулы для дифференциалов

a. Дифференциал функции получается умножением производной на дифференциал аргумента:

$$dy = y'\,dx.$$

Отсюда имеем следующие формулы:

1. $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx, \quad d\sqrt{x} = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}.$
2. $d\ln x = \dfrac{dx}{x}, \quad d\log_a x = \dfrac{dx}{x\ln a}.$
3. $da^x = a^x \ln a\,dx, \quad de^x = e^x\,dx.$
4. $d\sin x = \cos x\,dx.$

5. $d \cos x = -\sin x\, dx$.

6. $d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

7. $d \operatorname{ctg} x = \frac{dx}{\sin^2 x}$.

8. $d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. $d \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. $d \operatorname{arctg} x = \frac{dx}{1+x^2}$.

11. $d \operatorname{arcctg} x = -\frac{dx}{1+x^2}$.

12. $dC = 0$.

13. $d(u+v+w) = du + dv + dw$.

14. $d(au) = a\, du$.

15. $d(uv) = v\, du + u\, dv$.

16. $d\frac{u}{v} = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}$.

17. $df(u) = f'(u)\, du$, или $df(\varphi(x)) = f'(\varphi(x))\, d\varphi(x)$.

Вывод последних пяти формул (13)—(17) достигается тем, что после умножения соответствующих производных на dx используются равенства

$$u'\,dx = du, \quad v'\,dx = dv, \quad w'\,dx = dw, \quad \varphi'(x)\,dx = d\varphi(x).$$

b. В частности, последняя формула (17) имеет особенно важное значение. Она показывает, что *дифференциал сложной функции выглядит так же, как если бы* $u = \varphi(x)$ *было аргументом.*

c. Заметим, что в сложных случаях (где в выражении функции участвуют сложение, умножение и деление) дифференциал удобнее находить не по выведенным здесь формулам, а находя сначала производную и умножая ее затем на dx.

Формула (17) представляет значительные практические удобства.

Например, применяя формулу (17), получим

$$d \operatorname{arctg} \sqrt{1-x^2} = \frac{d\sqrt{1-x^2}}{1+(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{\frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}}{2-x^2} =$$

$$= \frac{-2x\,dx}{2(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x\,dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

d. Из формулы

$$dy = y'\,dx$$

находим новое выражение производной:

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

которым очень часто пользуются для обозначения производной.

Например, производную функции

$$y = f(x) = \sin x$$

можно обозначать одним из следующих способов:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d \sin x}{dx} = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x.$$

Этот способ обозначения применяется, когда функция, производную которой мы вычисляем, имеет очень сложное математическое выражение.

e. Ввиду того, что чаще всего приходится пользоваться обозначениями не производных, а дифференциалов, раздел математики, содержащий учение о производных и дифференциалах, а равным образом различные приложения производных и дифференциалов, носит название *дифференциального исчисления*.

f. По той же причине разыскание производной или дифференциала *) данной функции называется *дифференцированием*.

§ 14. Высшие производные

a. Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ в свою очередь есть тоже функция x. Можно также находить ее производную, которая носит название *второй производной* функции $y = f(x)$ и обозначается символом

$$y'' = f''(x).$$

(Геометрически она представится угловым коэффициентом касательной к графику первой производной $y' = f'(x)$, т. е. к графику, где ординатой является уже не $y = f(x)$, а $y' = f'(x)$.)

Производная второй производной называется третьей производной функции $y = f(x)$ и обозначается символом

$$y''' = f'''(x)$$

*) Разыскание производной и дифференциала — задачи, равносильные по трудности, так как, зная одну величину, тотчас находим и другую.

и т. д. Только в отношении производных выше третьего порядка обозначения y'''', y''''', ... делаются уже неудобными и потому четвертую, и пятую... и вообще n-ю производные обыкновенно обозначают так:

$$y^{(4)} = f^{(4)}(x),$$
$$y^{(5)} = f^{(5)}(x),$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$y^{(n)} = f^{(n)}(x).$$

Пример. Для $y = x^4$ имеем

$$y' = [x^4]' = 4x^3, \qquad y'' = [4x^3]' = 12x^2,$$
$$y''' = [12x^2]' = 24x, \quad y^{(4)} = [24x]' = 24.$$

ѣ. Производные порядка n больше 1 обыкновенно приходится находить последовательно. Сначала находим y', затем $y'' = [y']'$, затем $y''' = [y'']'$ и т. д. (см. предыдущий пример). И только в некоторых, самых простых, случаях n-ю производную можно написать сразу. Вот эти случаи:

1.
$$y = x^n,$$
$$y' = nx^{n-1},$$
$$y'' = n(n-1)x^{n-2},$$
$$y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

и если n — целое положительное, то

$$y^{(n)} = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1,$$
$$y^{(n+1)} = 0,$$
$$y^{(n+2)} = 0,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

2.
$$y = \ln x,$$
$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1},$$
$$y'' = -x^{-2},$$
$$y''' = 1\cdot 2x^{-3},$$
$$y^{(4)} = -1\cdot 2\cdot 3x^{-4},$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

3.
$$y = e^{kx}, \qquad y = e^x,$$
$$y' = ke^{kx}, \qquad y' = e^x,$$
$$y'' = k^2e^{kx}, \qquad y'' = e^x,$$
$$y''' = k^3e^{kx}, \qquad y''' = e^x,$$
$$y^{(4)} = k^4e^{kx}, \qquad y^{(4)} = e^x,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

4.
$$y = \sin x,$$
$$y' = \cos x,$$
$$y'' = -\sin x,$$
$$y''' = -\cos x,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

5.
$$y = \cos x,$$
$$y' = -\sin x,$$
$$y'' = -\cos x,$$
$$y''' = \sin x,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

В случаях 4 и 5 выражения производных периодически повторяются через 4. Например, в случае 5 имеем

$$y' = y^{(5)} = y^{(9)} = \ldots = -\sin x.$$

c. В некоторых случаях вычисление высших производных облегчается применением трех общих формул, которые мы сейчас отметим.

1. Пусть

$$y = u + v + \ldots + w.$$

Последовательно находим

$$y' = u' + v' + \ldots + w',$$
$$u'' = u'' + v'' + \ldots + w''$$

и вообще

$$y^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)} + \ldots + w^{(n)},$$

т. е. *n-я производная суммы равна сумме n-х производных слагаемых.*

Например,

$$[x^3 + e^{2x}]^{(5)} = [x^3]^{(5)} + [e^{2x}]^{(5)} = 0 + 2^5 e^{2x} = 32e^{2x}.$$

2. Пусть

$$y = au,$$

где a — постоянное. Последовательно находим

$$y' = au',$$
$$y'' = au',$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

и вообще

$$y^{(n)} = au^{(n)},$$

т. е. *постоянный множитель можно выносить за знак n-й производной.*

Например,

$$[4e^x]^{(n)} = 4\,[e^x]^{(n)} = 4e^x.$$

3. Пусть

$$y = uv,$$

где u и v — функции x. Имеем

$$y' = u'v + uv'.$$

Далее находим y'':

$$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'',$$
$$y'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

что похоже на

$$(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2.$$

Далее находим

$$\begin{aligned} y''' &= u'''v + 2u''v' + u'v'' + u''v' + 2u'v'' + uv''', \\ y''' &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''', \end{aligned} \tag{1}$$

что опять-таки похоже на

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3.$$

Аналогичная формула

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} =$$
$$= u^{(n)}v + \frac{n}{1} u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)},$$

похожая на формулу

$$(u+v)^n = u^n + \frac{n}{1} u^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} u^{n-2}v^2 + \ldots + v^n,$$

может быть установлена и в случае любого целого положительного n; она называется *формулой Лейбница*. Выводить ее мы не будем.

Пример. Пусть требуется найти

$$[x^2e^{2x}]'''.$$

Применяя здесь формулу (1), имеем

$$[x^2e^{2x}]''' = [x^2]''' e^{2x} + 3[x^2]''[e^{2x}]' +$$
$$+ 3[x^2]' — [e^{2x}]'' + x^2[e^{2x}]''' =$$
$$= 0\cdot e^{2x} + 3\cdot 2\cdot 2e^{2x} + 3\cdot 2x\cdot 4e^{2x} + x^2\cdot 8e^{2x} =$$
$$= e^{2x}(12 + 24x + 8x^2).$$

§ 15. Высшие дифференциалы

а. Вводим обозначения (условно)

$$\begin{aligned} d^2y &= y''\,dx^2, \\ d^3y &= y'''\,dx^3, \\ &\cdots\cdots \\ d^ny &= y^{(n)}\,dx^n, \end{aligned} \tag{1}$$

где под dx^n понимаем $(dx)^n$, т. е. dx, возведенное в n-ю степень. Эти выражения

$$d^2y,\ d^3y,\ \ldots,\ d^ny$$

называем вторым, третьим, ..., n-м дифференциалами y. Их не надо смешивать с

$$(dy)^2,\ (dy)^3,\ \ldots,\ (dy)^n.$$

Например, если $y=e^{2x}$, то

$$d^2y=4e^{2x}\,dx^2.$$

b. Введенные нами высшие дифференциалы можно рассматривать как последовательные дифференциалы функции

$$dy=y'\,dx,$$

только при дифференцировании условимся считать dx постоянным. Действительно, тогда имеем

$$d^2y=d\,(dy)=d\,(y'\,dx)=dx\cdot dy'=dx\cdot y''\,dx=y''\,dx^2,$$
$$d^3y=d\,(d^2y)=d\,(y''\,dx^2)=dx^2\,dy''=dx^2\cdot y'''\,dx=y'''dx^3,$$

. . . .

c. Из формул (1) получаем следующие общеупотребительные обозначения высших производных:

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2},$$
$$y'''=\frac{d^3y}{dx^3},$$

. . . . . .

§ 16. Дифференцирование неявных функций

a. Очень часто приходится разыскивать производные функций, заданных неявно.

Пусть, например, функция задана неявно уравнением

$$y^2=2x. \tag{1}$$

Здесь y есть функция x. Если решим уравнение относительно y, то получим

$$y=\sqrt{2x}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x} \tag{2}$$

(для простоты берем только знак +) и тогда

$$y'=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

Это один из возможных путей разыскания производной. Однако эту производную можно найти и иначе (ср. §§ 3 и 10).

Именно, так как левая часть равенства (1) равна правой, то производная левой части равна производной правой части. Но левая часть есть сложная функция (y — сложный аргумент), а правая часть — простая.

Поэтому

$$2yy' = 2, \qquad yy' = 1,$$
$$y' = \frac{1}{y}.$$

Здесь производная выражена через y, но ее можно выразить и через x. Ввиду равенства (2) находим

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

Этот результат вполне совпадает с найденным раньше первым путем.

b. Возьмем другой пример:

$$x^2 + xy + y^2 = 0. \tag{3}$$

Приравнивая опять производные обеих частей равенства (нуль — постояннсе и, следовательно, производная нуля — тоже нуль), получим

$$[x^2]' + [xy]' + [y^2]' = 0,$$
$$2x + y + xy' + 2yy' = 0,$$
$$y'(2y + x) + 2x + y = 0, \tag{4}$$
$$y' = -\frac{2x + y}{2y + x}.$$

c. Подобным же путем можно находить и высшие производные функций, заданных неявно. Найдем, например, вторую производную функции, заданной уравнением (3). Первую производную y' мы уже нашли, она определяется равенством (4), и чтобы найти y'', мы приравняем производные обеих частей равенства (4). Получим

$$y'' = -\left[\frac{2x + y}{2y + x}\right]' = -\frac{(2 + y')(2y + x) - (2x + y)(2y' + 1)}{(2y + x)^2}.$$

Отсюда, заменяя y' на основании равенств (4), имеем

$$y'' = -\frac{\left(2 - \frac{2x + y}{2y + x}\right)(2y + x) - (2x + y)\left(-2\frac{2x + y}{2y + x} + 1\right)}{(2y + x)^2}.$$

Аналогичным путем можно найти и y''', $y^{(4)}$, ...

d. Очень часто дифференцирование неявных функций выполняют, беря не производные, а дифференциалы обеих частей равенства. Это дает то преимущество, что формулы получаются верными независимо от того, какая переменная у нас служит аргументом. Для пояснения рассмотрим опять пример пункта «b»

$$x^2 + xy + y^2 = 0.$$

Приравнивая дифференциал левой части дифференциалу правой и пользуясь формулами § 13 относительно вычисления дифференциалов, имеем

$$2x\,dx + y\,dx + x\,dy + 2y\,dy = 0. \tag{5}$$

Здесь не следует заботиться, какая переменная у нас считается аргументом: ввиду пункта «b» § 13, например, имеем

$$d(y^2) = 2y\,dy$$

независимо от того, будет ли в выражении y^2 переменная y аргументом или же функцией другой переменной x или еще какой-либо совершенно новой переменной t. Надо только помнить, что этот аргумент должен быть общим для всех членов равенства.

Из равенства (5) имеем далее

$$dy = -\frac{2x+y}{x+2y}\,dx, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}.$$

§ 17. Дифференцирование функций, заданных параметрическим способом

a. Пусть

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \tag{1}$$

— параметрическое задание функции. Конечно, исключая из этих уравнений t, можно было бы получить и обыкновенное уравнение, связывающее x и y, и, пользуясь им, найти

$$y' \left(y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right).$$

Однако такой способ иногда очень затруднителен (например, если уравнения (1) изображают циклоиду), и потому мы постараемся найти

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2}$$

непосредственно на основании уравнений (1).

b. Пусть Δt, Δx, Δy—бесконечно малые приращения переменных t, x, y (например, для циклоиды Δt, Δx, Δy можно рассматривать как бесконечно малые приращения, которые получат угол t и координаты $(x; y)$ точки M, когда эта точка переместится в бесконечно близкое положение m). Если t—время и $(x; y)$—координаты некоторой точки M, движущейся в плоскости xOy, то Δt, Δx, Δy обозначают бесконечно малые приращения времени t и этих координат, когда точка M перемещается в бесконечно близкое положение m. Деля числитель и знаменатель на Δt, имеем из (2)

$$y' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}}. \tag{3}$$

Но пределы

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

мы легко найдем, так как нам известны выражения (1) y и x через t.

Ввиду того, что

$$y = \psi(t),$$

имеем

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \psi'(t).$$

А ввиду равенства

$$x = \varphi(t)$$

имеем

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t).$$

Тогда формула (3) принимает вид

$$y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{4}$$

с. Еще раз напомним, что в этой формуле y' обозначает производную y по x, т. е.

$$y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

и желая это особенно подчеркнуть, мы можем обозначать эту производную символом y'_x, так что $y' = y'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Эту производную ни в коем случае не следует смешивать с производной y по t, которую можно обозначать символом y'_t, так что $y'_t = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \psi'(t)$.

d. Формулу (4) можно переписать и в другой форме, более удобной для запоминания. Умножая числитель и знаменатель на dt, имеем

$$y' = \frac{\psi'(t)\,dt}{\varphi'(t)\,dt}.$$

Но $\psi'(t)\,dt$ и $\varphi'(t)\,dt$ суть не что иное, как дифференциалы функций $y = \psi(t)$ и $x = \varphi(t)$, вычисленные в предположении, что аргументом является t:

$$\psi'(t)\,dt = d\psi(t) = dy, \qquad \varphi'(t)\,dt = d\varphi(t) = dx,$$

и, следовательно, формулу (4) можно записать еще и так:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\psi(t)}{d\varphi(t)}. \tag{5}$$

Производная функции, заданной параметрическим способом (1), *выражается отношением дифференциалов, как и при обычном задании функции, но с тою разницей, что теперь, при вычислении дифференциалов dy и dx, обе переменные y и x рассматриваются как функции аргумента t.*

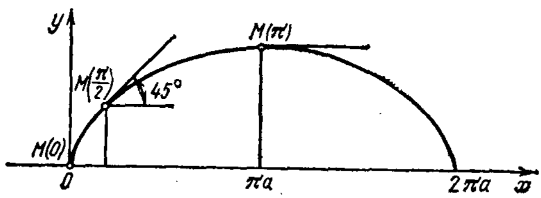


Рис. 13

е. Для примера найдем угловой коэффициент касательной к циклоиде

$$x = a(t - \sin t) = \varphi(t), \qquad y = a(1 - \cos t) = \psi(t)$$

в точке $M(t)$ (рис. 13). Здесь y' можно находить или по формуле (4), или же по формуле (5). Пользуясь, например, формулой (5), имеем

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d\,[a\,(1-\cos t)]}{d\,[a\,(t-\sin t)]}=\frac{a\sin t\,dt}{a\,(1-\cos t)\,dt}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

В точке $M(0)$ имеем

$$\operatorname{tg}\alpha=y'=\operatorname{ctg}0=\infty,\qquad \alpha=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, касательная к циклоиде в начале координат перпендикулярна оси абсцисс.

В точке $M(\pi)$ имеем

$$y'=\operatorname{ctg}(\pi/2)=0,$$

и, действительно, в этой точке касательная параллельна оси абсцисс.

f. В качестве упражнения решим следующую задачу: на циклоиде найти точку, в которой касательная наклонена к оси абсцисс под углом $\pi/4$.

Пусть t — неизвестное значение параметра. Так как по условию должно быть

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\pi/4)=1,$$

то, следовательно, t найдется из уравнения

$$\operatorname{ctg}\frac{t}{2}=1,\quad \frac{t}{2}=\pi/4,\quad t=\pi/2.$$

Значит, искомая точка есть $M(\pi/2)$. Ее координатами будут

$$x=a\left(\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)=a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\approx a\cdot 0{,}5709,$$

$$y=a\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)=a.$$

g. Чтобы вычислить вторую производную y'' функции y по x, заметим, что y'' есть производная y' по x, т. е.

$$y''=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y'}{\Delta x},$$

и, следовательно, ввиду равенств

$$x=\varphi(t),\quad y'=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

выражающих x и y' через t, ее можно представить в форме

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}{d\varphi(t)}=\frac{\frac{\psi''(t)\,\varphi'(t)-\psi'(t)\,\varphi''(t)\,dt}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)\,dt}=$$

$$=\frac{\psi''(t)\,\varphi'(t)-\psi'(t)\,\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

h. Далее, имея выражения y'' и x через t, мы можем найти

$$y'''=\frac{dy''}{dx}$$

и т. д.

i. Пример. На основании равенств

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

выше мы нашли

$$y'=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Теперь на основании равенств

$$x=a(t-\sin t),\quad y'=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$$

легко найдем

$$y''=\frac{d\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{d(a(t-\sin t))}=\frac{-\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}}{a(1-\cos t)}=$$

$$=-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}\cdot a\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

А на основании равенств

$$x=a(t-\sin t),\quad y''=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$$

легко найдем

$$y'''=\frac{d\left(-\frac{1}{-4a\sin^4\frac{t}{2}}\right)}{d(a(t-\sin t))}=\frac{-\frac{1}{4a}\cdot\frac{-4\cos\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\sin^5\frac{t}{2}}}{a(1-\cos t)}=$$

$$=\frac{\cos\frac{t}{2}}{2a\sin^5\frac{t}{2}\cdot a\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^7\frac{t}{2}}.$$

§ 18. Преобразование дифференциалов к новой переменной

a. Весьма часто бывает, что известен дифференциал некоторой функции $y=f(x)$,

$$dy=f'(x)\,dx,$$

и требуется найти дифференциал той же функции, когда аргументом является уже не x, а некоторая новая переменная t. При этом дается уравнение, связывающее x с этой новой переменной.

b. Если зависимость представлена в явной форме

$$x=\varphi(t),$$

то задача решается просто (пункт b § 13). А именно, если заменим x на $\varphi(t)$, то функция $f(x)$ обратится в сложную функцию $f[\varphi(t)]$ переменной t. Внешний вид дифференциала не изменится, он будет

$$dy=f'(x)\,dx,$$

но теперь вместо x надо ставить $\varphi(t)$, т. е. надо в выражении $f'(x)$ заменить x на $\varphi(t)$, а вместо dx написать $d\varphi(t)=\varphi'(t)\,dt$, так что теперь будет

$$dy=f'[\varphi(t)]\,d\varphi(t).$$

Пример. Пусть

$$y=\ln x.$$

Имеем

$$dy=\frac{dx}{x}. \tag{1}$$

Пусть теперь требуется найти дифференциал нашей функции, считая аргументом не x, а новую переменную t, с которой x связано соотношением

$$x=\operatorname{tg}\frac{t}{2} \qquad \left(\text{так что } y=\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right). \tag{2}$$

Теперь в формуле (1) x необходимо заменить его выражением (2). Получим новое выражение дифференциала в следующей форме:

$$dy=\frac{d\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}=\frac{\dfrac{dt}{2\cos^2\frac{t}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}=\frac{dt}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}=\frac{dt}{\sin t}.$$

c. Очень важно отметить, что для решения поставленной задачи совершенно не требуется знания самой функции, важно знать только выражение ее дифференциала (считая аргументом x). Это обстоятельство будет весьма важно в дальнейшем.

Пример. Пусть дифференциал некоторой функции y аргумента x равен

$$dy=\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \qquad \left(\text{так что } y'=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\right).$$

Найти дифференциал той же самой функции, считая аргументом t, через которое x выражается так:

$$x=t^6.$$

Имеем

$$dy=\frac{d(t^6)}{\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6}}=\frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2}=\frac{6t^3\,dt}{t+1}.$$

d. Часто зависимость x от t дается в неявной форме.

Пример 1. Пусть

$$dy=(ax+b)^n\,dx.$$

Найти dy, считая аргументом t, с которым x связано уравнением

$$ax+b=t. \tag{3}$$

Здесь даже не нужно выражать x через t, так как ввиду (3) имеем прямо (считая аргументом t)

$$(ax+b)^n=t^n, \quad a\,dx=dt, \quad dx=\frac{dt}{a},$$

и, следовательно, новое выражение для dy будет таким:

$$dy=t^n\frac{dt}{a}=\frac{1}{a}t^n\,dt.$$

Пример 2. Пусть

$$dy=x^3(1+2x^2)^{3/2}\,dx, \tag{4}$$

причем

$$1+2x^2=t. \tag{5}$$

Имеем (считая аргументом t)

$$4x\,dx=dt, \quad dx=\frac{dt}{4x}.$$

Следовало бы, конечно, подставить сюда выражение x через t, предварительно найдя его из (5), и подставить то же выражение в

$$x^3(1+2x^2)^{3/2}.$$

Но мы сделаем это пока только частично, написав в выражении dy только t вместо $1+2x^2$. Получим

$$dy = x^3 t^{3/2}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{4}x^2 t^{3/2}\,dt.$$

Заменим теперь x на t. Из (5) имеем

$$x^2 = \frac{t-1}{2},$$

и потому новое выражение для дифференциала будет таким:

$$dy = \frac{1}{4}\,\frac{t-1}{2}\,t^{3/2}\,dt = \frac{1}{8}(t-1)\,t^{3/2}\,dt.$$

е. Весьма важно отметить, что новое выражение дифференциала может получиться более простым, чем старое (см. разобранные примеры).

§ 19. Упражнения

Доказать, что:

1. $\left[x^8-\frac{8}{7}x^7+\frac{4}{3}x^6-\frac{8}{5}x^5\right]'=8(x^7-x^6+x^5-x^4)$.
2. $[x^2+2x+2]'=2(x+1)$.
3. $\left[\frac{x^3-1{,}5x^2+3x-7}{3}\right]'=x^2-x+1$.
4. $[(x-1)(x^2+x+1)]'=3x^2$.
5. $\left[\frac{x^5-1}{x-1}\right]'=4x^3+3x^2+2x+1$.
6. $[(x-1)^3]'=3(x-1)^2$.
7. $[(x^2+x+3)(x^2+1)]'=4x^3+3x^2+8x+1$.
8. $[\ln\cos x]'=-\operatorname{tg} x$.
9. $[\ln(x^3-4x^2+x-1)]'=\frac{3x^2-8x+1}{x^3-4x^2+x-1}$.
10. $[\ln(0{,}25x^4-0{,}87x^3+0{,}11x+1{,}37)]'=$ $=\frac{x^3-2{,}61x^2+0{,}11}{0{,}25x^4-0{,}87x^3+0{,}11x+1{,}37}$.
11. $[(\ln x)^3]'=\frac{3(\ln x)^2}{x}$.
12. $[(\sin x)^2]'=\sin 2x,\quad [(\cos x)^2]'=-\sin 2x$.

13. $[(x^5-2x^4+3x^3-4x^2+5x-6)^4]'=$
$=4(x^5-2x^4+3x^3-4x^2+5x-6)^3\cdot(5x^4-8x^3+9x^2-8x+5).$

14. $[\ln\cos(1{,}5x^2-12x+9)]'=$
$$=-\operatorname{tg}(1{,}5x^2-12x+9)(3x-12)$$

15. $[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)]'=-\dfrac{4x}{x^4-1}.$

16. $[\ln(a+bx+cx^2)]'=\dfrac{b+2cx}{a+bx+cx^2}.$

17. $[x^4\sqrt{x}]'=\dfrac{9}{2}x^3\sqrt{x}.$

18. $[x\sqrt[3]{x^2}]'=\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}.$

19. $\left[\dfrac{1}{x^5}\right]'=-\dfrac{5}{x^6}.$

20. $[\sqrt[3]{x}]'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$

21. $\left[\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right]'=-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}.$

22. $\left[\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2}\right]'=1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}.$

23. $\left[\dfrac{x^4-3x^3+2x^2+x}{\sqrt{x}}\right]'=\sqrt{x}\left(\dfrac{7}{2}x^2-\dfrac{15}{2}x+3+\dfrac{1}{2x}\right).$

24. $\left[\dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\right]'=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}.$

25. $\left[\dfrac{0{,}6\sqrt[3]{x}+1{,}5\sqrt[3]{x^4}-4x^2+x^3}{x^2}\right]'=1-x^{-8/3}-x^{-5/3}.$

26. $[e^x(x^3-3x^2+6x-6)]'=x^3e^x.$

27. $\left[\dfrac{e^{2x}(2x-1)}{4}\right]'=xe^{2x}.$

28. $\left[\dfrac{x^4}{4}\left((\ln x)^2-\dfrac{1}{2}\ln x+\dfrac{1}{8}\right)\right]'=x^3(\ln x)^2.$

29. $[x\ln x-x]'=\ln x.$

30. $[x^2\cdot 2^x\sin 2x]'=$
$$=2^x(2x\sin 2x+x^2\ln 2\sin 2x+2x^2\cos 2x).$$

31. $\left[\dfrac{\ln x}{x}\right]'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}.$

32. $\left[\dfrac{1+\ln\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x}\right]'=-\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\sin^2 x}.$

33. $\left[\dfrac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x}\right]'=\dfrac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}.$

34. $[\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x]'=\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}.$

35. $[\arcsin\sqrt{x}]' = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

36. $\left[2\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]' = \frac{\sqrt{3}}{x^2-x+1}$.

37. $\left[x^3\ln x - \frac{x^3}{3}\right]' = 3x^2\ln x$.

38. $[4(\sin x - 2\sin^3 x)\cos x]' = 4\cos 4x$.

39. $\left[e^x\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x}\right)\right]' = e^x\left(\frac{1}{2x}-\frac{3}{x^4}\right)$.

40. $\left[\ln\sin x - \frac{x^2}{2} - x\operatorname{ctg} x\right]' = x\operatorname{ctg}^2 x$.

41. $\left[\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]' = \frac{1}{\sin x}$.

42. $\left[\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln\cos x\right]' = \operatorname{tg}^3 x$.

43. $\left[-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x - \ln\sin x\right]' = \operatorname{ctg}^3 x$.

44. $\left[\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right]' = \frac{2}{1+x^2}$.

45. $\left[\arcsin\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}\right]' = \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}$.

46. $[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

47. $\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]' = \sqrt{a^2-x^2}$.

48. $\left[\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right]' = \frac{1}{1-x^4}$.

49. $\left[\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{x+2}\right]' = \frac{\sqrt{3}}{2(x^2+x+1)}$.

50. $\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\right]' = \frac{2ax^2}{x^4-a^4}$.

51. $\left[\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}\right]' = \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$.

52. $d\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{a} = (e^{ax}-e^{-ax})\,dx$, $\quad d\sin(Ax+B) = A\cos(Ax+B)\,dx$, $\quad d\cos(Ax+B) = -A\sin(Ax+B)\,dx$, $\quad d\operatorname{tg}\left(\frac{x}{T}+\alpha\right) = \frac{dx}{T\cos^2\left(\frac{x}{T}+\alpha\right)}$, $\quad d(B-Ax)^n = -An(B-Ax)^{n-1}\,dx$, $\quad \frac{d\arcsin(\alpha+\beta t)}{dt} = \frac{\beta}{\sqrt{1-(\alpha+\beta t)^2}}$, $\quad \frac{d}{dt}\operatorname{arctg}(\alpha+\beta t) = \frac{\beta}{1+(\alpha+\beta t)^2}$.

53. Под каким углом наклонена к оси абсцисс касательная к синусоиде в начале координат? *Ответ*: $\alpha=45°$.

54. Тот же вопрос в отношении тангенсоиды. *Ответ*: $\alpha=45°$.

55. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y=x^3-3x^2+9$ в точке с абсциссой -1. *Ответ*: $9x-y+14=0$, $x+9y-44=0$.

56. На кривой $y=\frac{1}{x}$ найти точку, где касательная наклонена к оси абсцисс под углом a) $-30°$; b) $-45°$; c) $-60°$. *Ответ*: a) $\left(\sqrt[4]{3};\ \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$ и $\left(-\sqrt[4]{3};\ -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$; b) $(1;\ 1)$ и $(-1;\ -1)$; c) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}};\ \sqrt[4]{3}\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}};\ -\sqrt[4]{3}\right)$.

57. На кривой $y=x^3-2x^2+2x-1$ найти точку: a) в которой угловой коэффициент касательной равен 2; b) в которой касательная наклонена к оси абсцисс под углом 45°. *Ответ*: a) $(0;\ -1)$ и $(4/3;\ 13/27)$; b) $(1/3;\ -14/27)$ и $(1;\ 0)$.

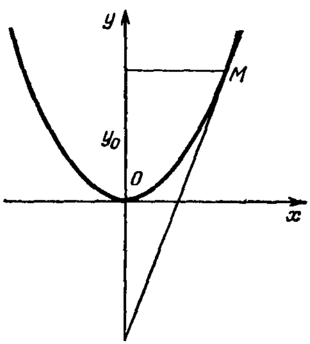


Рис. 14

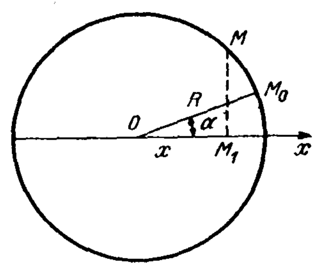


Рис. 15

58. К той же кривой провести касательную параллельно прямой $y=6x+3$. *Ответ*: $y=6x+\frac{13}{27}$ и $y=6x-9$.

59. К кривой $y=3x^3$ провести касательную под углом 45° к оси абсцисс. *Ответ*: $9x-9y-2=0$.

60. К той же кривой провести касательную так, чтобы она прошла через точку $(2;\ 12)$. *Ответ*: $9x-y-6=0$.

61. К параболе $y=\frac{1}{16}x^2$ провести нормаль параллельно прямой $y^2=2x+3$. *Ответ*: $y=2x+9$.

62. Доказать, что касательная к параболе $y=ax^2$ (рис. 14), проведенная в точке M с ординатою y_0, отсекает на от-

рицательной оси Oy отрезок длиною, равной ординате точки касания.

63. Для равнобочной гиперболы $y=k/x$ показать, что отрезок касательной, заключенный между осями, делится точкой касания на две равные части.

64. Точка M равномерно движется по окружности радиуса R (рис. 15). Полный оборот она делает за T секунд. Найти закон движения точки M_1—проекции M на ось Ox (найти x как функцию t) и определить скорость v движения точки M_1, если известно, что в начале движения (т. е. при $t=0$) точка M находилась в M_0, причем $\angle xOM_0=\alpha$. *Ответ*: $x=R\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\alpha\right)$, $v=x'=-\frac{2\pi R}{T}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\alpha\right)$.

65. Найти y'', если $y=\sqrt{1-x^2}$. *Ответ*: $y''=-\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$.

66. Найти y''', если $y=\operatorname{tg} x$. *Ответ*: $y'''=-\frac{2\cos^2 x+3\sin^2 x}{\cos^4 x}$.

67. Найти y''', если $y=x^5\ln x$ (по формуле Лейбница). *Ответ*: $y'''=x^2(47+60\ln x)$.

68. Найти $y^{(4)}$, если $y=e^{-2x}\sin x$. *Ответ*: $y^{(4)}=e^{-2x}(7\sin x-40\cos x)$.

69. Найти $y^{(8)}$, если $y=x\cos x$. *Ответ*: $y^{(8)}=x\cos x+8\sin x$.

70. Найти y' и y'', если $y^2=2px$. *Ответ*: $y'=p/y$; $y''=-p^2/y^3$.

71. Найти угловой коэффициент касательной в точке с координатами $(x;\ y)$: a) для эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; b) для гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. *Ответ*: a) $y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$; b) $y'=\frac{b^2x}{a^2y}$.

72. Найти y' и y'', если $xy+x+y+2=0$. *Ответ*: $y'=-\frac{y+1}{x+1}$; $y''=\frac{2(y+1)}{(x+1)^2}$.

73. Доказать, что уравнение касательной к параболе $y^2=2px$ в точке $(x;\ y)$ можно представить в форме

$$y+Y=p(x+X),$$

где x и y—постоянные координаты точки касания, а X и Y—текущие координаты касательной (т. е. координаты любой точки касательной—то, что мы в отношении линии обычно обозначаем буквами x и y).

74. Доказать, что уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке $(x;\ y)$ можно представить в форме

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}=1.$$

75. Доказать, что уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке $(x;\ y)$ можно представить в форме

$$\frac{xX}{a^2}-\frac{yY}{b^2}=1.$$

76. Доказать, что касательная к параболе $y^2=2px$, проведенная в точке M, образует равные острые углы с прямой MF (F—фокус параболы) и прямой MT, параллельной оси абсцисс.

77. Доказать, что для эллипса расстояния от фокусов до касательной пропорциональны расстояниям от фокусов до точки касания. Отсюда вывести, что касательная в точке M образует равные острые углы с прямыми MF_1 и MF (F_1 и F—фокусы эллипса).

78. Для гиперболы доказать, что касательная в точке M делит пополам угол F_1MF (F_1 и F—фокусы гиперболы).

79. Доказать, что уравнение касательной к равнобочной гиперболе $xy=k$ в точке $(x;\ y)$ можно представить так:

$$yX+xY=2k.$$

80. Доказать, что уравнение касательной к окружности $(x-m)^2+(y-n)^2=a^2$ в точке $(x;\ y)$ можно представить в форме

$$(x-m)(X-m)+(y-n)(Y-n)=a^2.$$

81. Найти уравнение касательной к окружности $(x-2)^2+(y-3)^2=5$ в точке с абсциссой $x=4$. *Ответ*: $2x+y-12=0$, $2x-y+6=0$.

82. Провести касательную к окружности $x^2+y^2=2$ параллельно прямой $x-y=4$. *Ответ*: $x-y-2=0$, $x-y+2=0$.

83. Из точки $(-1;\ 3)$ провести касательную к окружности $x^2+y^2=2$. *Ответ*: $x+y-2=0$, $7x-y+10=0$.

84. Найти y' и y'', если $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. *Ответ*: $y'=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$; $y''=-\frac{b}{a^2\sin^3 t}$.

85. Найти угловой коэффициент касательной к кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$x=\frac{3at}{1+t^3}, \qquad y=\frac{3at^4}{1+t^3},$$

в точке, отвечающей значению t. *Ответ*: $y=\frac{2t-t^4}{1-2t^3}$.

86. Найти y', если $x=\cos t+t\sin t$, $y=\sin t-t\cos t$. *Ответ*: $y'=\operatorname{tg} t$.

87. Найти y', если $x=\frac{3-t}{t}$, $y=\frac{(2-t)^3}{t^2}$. *Ответ*: $y'=\frac{(2-t)^2(4+t)}{3t}$.

88. Найти y', если $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$. *Ответ*: $y'=-\frac{b}{a}\operatorname{tg} t$.

89. На циклоиде найти точку, в которой касательная наклонена к оси абсцисс под углом 30°. *Ответ*: $\left(a\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\right);\ a\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right)$.

90. Составить общее уравнение касательной к циклоиде $x=a(t-\sin t)$, $y=a(l-\cos t)$ в точке, отвечающей значению t параметра. *Ответ*: $Y-a(t-\cos t)=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\times(X-a(t-\sin t))$.

91. Дифференциал некоторой функции равен

$$dy=\frac{dx}{x\ln x};$$

найти дифференциал той же функции, считая аргументом t, с которым x связано уравнением $x=e^t$. *Ответ*: $dy=\frac{dt}{t}$.

92. Дано $dy=\frac{dx}{1+x^2}$. Найти новое выражение dy, если $1+x^2=t+x$. *Указание*: сначала выразить x через t. *Ответ*: $dy=\frac{dt}{t}$.

93. То же самое, если

$$dy=\frac{dx}{\sqrt{4-x-x^2}}, \quad \sqrt{4-x-x^2}=2-tx.$$

Ответ: $dy=\frac{2dt}{t^2+1}$.

94. То же самое, если

$$dy = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\,dx, \quad \frac{x-1}{x-2} = t^2.$$

Ответ: $dy = \dfrac{-2t^2\,dt}{(t^2-1)^2}$.

95. То же самое, если

$$dy = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx, \quad e^x = t.$$

Ответ: $dy = \dfrac{t-1}{t^2+t}\,dt$.

96. То же самое, если

$$dy = \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x}, \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t.$$

Ответ: $dy = \dfrac{2dt}{3+4t-3t^2}$.

Глава 3

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Непрерывность первой производной

a. Как уже было сказано в главе 2 (§ 1), исследование хода изменения функции $y=f(x)$ тесно связано с изучением знака и величины производной этой функции $y'=$ $=f'(x)$.

b. Эту производную мы будем считать непрерывной функцией x. Но если $y'=f'(x)$ с изменением x меняется

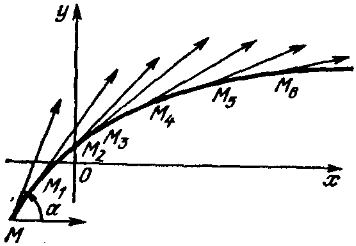


Рис. 16

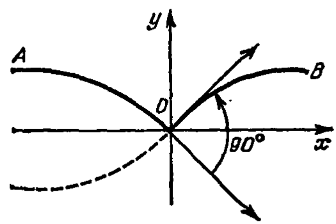


Рис. 17

непрерывно, то это значит, что непрерывно изменяется угловой коэффициент $\operatorname{tg}\alpha$ касательной, а следовательно, непрерывно изменяется и сам угол α наклона касательной к оси абсцисс, т. е. при движении точки M по кривой направление касательной изменяется непрерывно. На рис. 16 угол α плавно уменьшается при движении точки M вправо.

Таким образом, *непрерывному изменению первой производной отвечает непрерывное изменение направления касательной.*

c. Пример разрыва первой производной дает функция, график которой изображен на рис. 17. Здесь, когда точка движется по кривой AO, угол α непрерывно уменьшается от 0 до $-45°$. Следовательно, и $y'=\operatorname{tg}\alpha$ непрерывно уменьшается от 0 до -1. Когда же точка M проходит через начало координат, угол α делает скачок на $+90°$, изменяясь сразу от $-45°$ до $45°$. Значит, $y' = \operatorname{tg} \alpha$ делает скачок от -1 до $+1$. При дальнейшем движении точки M по кривой OB угол α непрерывно уменьшается от $45°$ до 0. Следовательно, $y' = \operatorname{tg} \alpha$ непрерывно уменьшается от 1 до 0.

Таким образом, мы видим, что производная $y' = \operatorname{tg} \alpha$ функции, изображенной на рис. 17, при $x = 0$ терпит разрыв непрерывности, не имея для этого x никакого определенного значения, и, кроме того, предел, к которому стремится y' с приближением x к нулю, будет разный (-1 или $+1$) в зависимости от того, приближается ли x к нулю со стороны отрицательных значений или же со стороны положительных значений.

d. График функции

$$y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

похож на график функции, изображенной на рис. 17 (перед корнем знак плюс). Действительно, ввиду $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ имеем $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$. Эта функция по абсолютной величине совпадает с $\sin x$. При x положительном $(0 < x \leqslant \pi/2)$ $\sin x$ положителен и, следовательно,

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} = \sin x.$$

Наоборот, при x отрицательном $(-\pi/2 \leqslant x < 0)$ $\sin x$ отрицателен и

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sin x.$$

§ 2. Возрастание и убывание функций. Максимум и минимум

а. В § 1 гл. 2 нами была выяснена связь, которая существует между возрастанием и убыванием функции

$$y = f(x)$$

и знаком ее первой производной

$$y' = f'(x).$$

Именно:

в интервалах возрастания функции

$$y' = f'(x) > 0;$$

в интервалах убывания функции

$$y' = f'(x) < 0.$$

Например, функция, график которой изображен на рис. 18, возрастает в интервалах (a, x_1), (x_3, x_4), (x_5, x_6), (x_6, x_7), (x_8, b) и убывает в интервалах (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_4, x_5), (x_7, x_8).

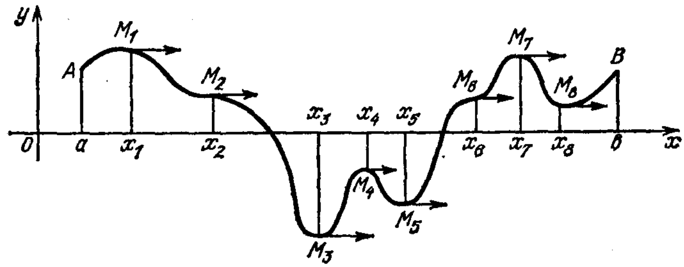


Рис. 18

В первых пяти интервалах $y' = \operatorname{tg} \alpha$ положителен, в четырех последних $y' = \operatorname{tg} \alpha$ отрицателен.

b. Особенно следует отметить точки

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4,\ M_5,\ M_6,\ M_7,\ M_8$$

нашего графика, отвечающие абсциссам

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8.$$

Во всех этих точках касательная параллельна оси абсцисс и, следовательно, ее угловой коэффициент равен нулю, то есть

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = f'(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8.$$

c. В частности, когда x, возрастая, проходит значение $x = x_1$, функция $f(x)$ переходит от возрастания к убыванию. *При $x = x_1$ $f(x)$ имеет максимум.* Нетрудно видеть, что, кроме $x = x_1$, наша функция имеет максимумы и при $x = x_4$, x_7.

d. Когда x, возрастая, проходит значение $x = x_3$, $f(x)$ переходит от убывания к возрастанию. *При $x = x_3$ $f(x)$ имеет минимум.* Нетрудно видеть, что, кроме $x = x_3$, наша функция имеет минимумы и при $x = x_5$, x_8.

e. Когда x, возрастая, проходит значение $x = x_2$, функция $f(x)$ переходит от убывания к убыванию. Мы видим, что при $x = x_2$ происходит лишь некоторое замедление в убывании функции.

$f(x)$ имеет *точку замедления при* $x = x_1$ (точки замедления — частный вид точек перегиба, о которых будет сказано позднее).

Точно так же $f(x)$ имеет точку замедления и при $x = x_6$, только при $x = x_6$ $f(x)$ переходит от возрастания к возрастанию.

f. Пример. Для функции

$$y = x^2$$

(рис. 19) имеем

$$y' = 2x.$$

Производная y' отрицательна при отрицательных x и положительна при положительных x. Значит, рассматриваемая функция (график ее—парабола) убывает, когда x

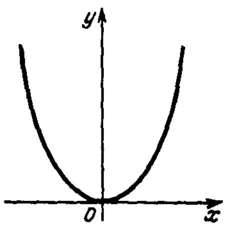


Рис. 19

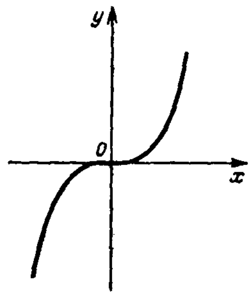


Рис. 20

пробегает отрицательные значения, и возрастает, когда x пробегает положительные значения.

При $x = 0$ имеем $y' = 0$, причем функция переходит от убывания к возрастанию, т. е. при $x = 0$ наша функция имеет минимум.

g. Пример. Для функции

$$y = x^3$$

имеем

$$y' = 3x^2.$$

Мы видим, что y' все время положительна (как при отрицательных, так и при положительных значениях x), кроме значения $x = 0$, когда она равна нулю. Значит, рассматриваемая функция все время возрастает и только при $x = 0$ имеет точку замедления (рис. 20).

§ 3. Приложение к построению графиков

a. Если требуется построить график функции $y = f(x)$ на данном отрезке $[a, b]$, то для уяснения формы графика, очевидно, достаточно построить лишь точки, отвечающие значениям $x=a$, $x=b$ и, кроме того, тем значениям x из интервала (a, b), для которых

$$y'=f'(x)=0.$$

Следовательно, кроме начальной и конечной точки графика надо построить еще ее точки максимума, минимума и замедления, т. е. все точки графика, в которых касательная параллельна оси абсцисс (см. рис. 18).

b. Для пояснения построим график функции

$$y=0,15x^5-x^3$$

на отрезке $[-3, 3]$. Здесь первая производная равна

$$y'=0,75x^4-3x^2=0,75x^2(x^2-4).$$

Чтобы найти точки максимума, минимума и замедления нашего графика, надо найти все те значения x, при которых

$$y'=0,75x^2(x^2-4)=0.$$

Это будет при $x=0$, а также при

$$x^2-4=0, \quad x^2=4, \quad x=\pm 2.$$

Итак, все значения x из интервала $(-3, 3)$, при которых $y'=0$, суть

$$x=-2;\ 0;\ 2.$$

Согласно высказанному в пункте «а» общему правилу строим точки графика, отвечающие значениям

$$x=-3;\ -2;\ 0;\ 2;\ 3.$$

Соответствующие ординаты таковы:

$$f(-3)=0,15\cdot(-3)^5-(-3)^3=-9,45, \qquad f(2)=-3,2,$$
$$f(-2)=0,15\cdot(-2)^5-(-2)^3=3,2, \qquad f(3)=9,45,$$
$$f(0)\quad=0.$$

Мы можем построить все интересующие нас точки графика соответственно следующей таблице:

M	M_1	M_2	0	M_3	M_4
x	-3	-2	0	2	3
y	$-9,45$	3,2	0	$-3,2$	9,45

В промежутках между каждыми двумя соседними из этих точек наша функция может или только возрастать или только убывать (функция не может изменить возрастание на убывание или обратно, не достигнув максимума или минимума, т. е. без того, чтобы y' не обратилась в нуль, а у нас собраны все точки (M_2, 0, M_3), где $y'=0$).

Поэтому часть графика, соединяющая две соседние из точек

$$M_1, M_2, 0, M_3, M_4,$$

должна идти все время в одном направлении: или все время подымаясь вверх, или же все время опускаясь вниз.

Имея это в виду и заботясь о том, чтобы касательные в точках M_2, 0, M_3 были параллельны оси абсцисс, мы получим график, изображенный на рис. 21.

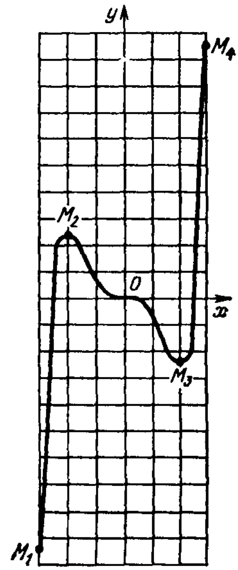


Рис. 21

Ко всему сказанному нужно еще добавить, что линию надо стараться вести возможно более плавно. При этом для более точного построения, кроме точек M_1, M_2, 0, M_3, M_4, можно строить и другие точки графика (например, можно было бы построить еще точки с абсциссами $x=-2{,}5$; -1; 1; 2,5).

c. Бывают случаи, когда один или оба конца интервала (a, b) бесконечно велики ($a=-\infty$, или $b=+\infty$, или одновременно $a=-\infty$, $b=+\infty$). В таких случаях важно знать, что делается с функцией при приближении x к $-\infty$ или к $+\infty$.

Мы отметим только два главных случая:

1) когда при неограниченном возрастании x ($x\to-\infty$ или $x\to+\infty$) функция $f(x)$ тоже неограниченно возрастает;

2) когда при неограниченном возрастании x функция $f(x)$ стремится к конечному пределу.

Эти случаи мы разберем лишь на примерах, причем первый случай только в отношении целой функции $f(x)$.

Пример 1. Построить график функции

$$y=x^3-1{,}5x^2+1$$

на всем интервале $(-\infty, +\infty)$. Имеем

$$y' = 3x^2 - 3x.$$

Приравнивая x нулю, находим

$$3x^2 - 3x = 0, \quad x^2 - x = 0, \quad x(x-1) = 0,$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

Для построения графика надо построить точки, отвечающие абсциссам

$$-\infty, \ 0, \ 1, \ +\infty.$$

(Конечно, точек с абсциссами $x = -\infty$ и $x = +\infty$ мы построить не можем, но мы проследим, куда идет кривая при приближении x к $-\infty$ или же к $+\infty$.)

Чтобы найти $f(-\infty)$, преобразуем нашу функцию так:

$$y = x^3\left(1 - \frac{1,5}{x} + \frac{1}{x^3}\right). \tag{1}$$

Мы видим, что при неограниченном возрастании x множитель в скобках приближается к 1. Первый же множитель неограниченно возрастает, приближаясь к $+\infty$, когда x стремится к $+\infty$, и приближаясь к $-\infty$, когда x стремится к $-\infty$. Отсюда, очевидно,

$$f(+\infty) = +\infty, \quad \text{т. е.} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty;$$
$$f(-\infty) = -\infty, \quad \text{т. е.} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Далее, находим

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 1 - 1,5 + 1 = 0,5$$

и получаем следующую таблицу:

M	M_1	M_2	M_3	M_4
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y	$-\infty$	1	1/2	$+\infty$

На рис. 22 построены точки M_2 и M_3: обозначение M_1 указывает только приблизительное направление, в котором перемещается точка M при $x \to -\infty$ (влево и вниз), а обозначение M_4—направление, в котором перемещается точка M при $x \to +\infty$ (вправо и вверх).

Участки M_1M_2 и M_3M_4 построены весьма крутыми. Действительно, равенство (1) показывает, что при больших x функция возрастает приблизительно как x^3 (ввиду близости второго множителя к 1), т. е. как бесконечность третьего порядка по сравнению с x (например, когда $x = 100$, то $x^3 = 100^3 = 1\,000\,000$).

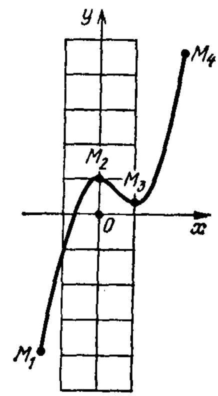


Рис. 22

Пример 2. Построить график функции

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

на всем интервале $(-\infty, +\infty)$. Эта функция, очевидно, непрерывна, так как знаменатель ее x^2+1 никогда не обращается в нуль. Находим

$$y' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Это выражение равно нулю, лишь когда числитель равен нулю, т. е. когда $2x = 0$, откуда $x = 0$.

Здесь

$$f(-\infty) = \frac{1}{(-\infty)^2+1} = \frac{1}{\infty} = 0 \qquad \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0\right),$$

$$f(+\infty) = \frac{1}{\infty^2+1} = \frac{1}{\infty} = 0 \qquad \left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0\right).$$

Далее, находим

$$f(0) = \frac{1}{0^2+1} = 1.$$

График нашей функции (рис. 23) строим согласно следующей таблице:

M	M_1	M_2	M_3
x	$-\infty$	0	∞
y	0	1	0

d. Заметим еще раз, что все сказанное нами относилось исключительно к случаю, когда в рассматриваемом интервале как сама функция, так и ее производная являются непрерывными функциями x.

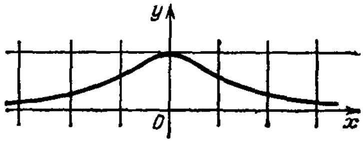


Рис. 23

Более детальное исследование как в отношении уточнения построения графика, так и в отношении возможности построения функций, разрывных или с разрывными производными, будет дано дальше.

§ 4. Наибольшее и наименьшее значения функции

a. Обращаясь снова к рис. 18 (или к рис. 20, а для случая бесконечного интервала к рис. 21, 22, 23), мы видим, что для отрезков

$$[a, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_4], [x_4, x_5], \\ [x_5, x_6], [x_6, x_7], [x_7, x_8], [x_8, b]$$

наибольшее и наименьшее значения функции достигаются на их границах. Например, для первого из указанных отрезков наибольшим значением функции будет $f(x_1)$, а наименьшим $f(a)$. Так как из этих отрезков состоит и весь отрезок $[a, b]$, то наибольшее и наименьшее значения функции на всем отрезке $[a, b]$ должны совпадать с наибольшим и наименьшим из чисел

$$f(a), f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), f(x_5), f(x_6), \\ f(x_7), f(x_8), f(b).$$

Отсюда получаем правило:

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения какой-либо функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, надо, во-первых, найти все точки

$$x = x_1, x_2, \ldots, x_n$$

этого отрезка, обращающие в нуль первую производную, а затем вычислить ординаты

$$f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(b). \qquad (1)$$

Тогда наибольшее из чисел (1) *будет наибольшим, а наименьшее — наименьшим значением нашей функции на отрезке* $[a, b]$.

Пример. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^4 - 0{,}5x^2 - 0{,}25$$

на отрезке $[0, 1]$.

Приравнивая y' нулю, имеем

$$y' = 4x^3 - x = 0, \quad 4x(x^2 - 0{,}25) = 0, \quad x_1 = 0, \; x_{2,3} = \pm 0{,}5.$$

Из этих значений x только $+0{,}5$ лежит на отрезке $[0, 1]$ (конечно, на этом отрезке лежит и нуль, но он все равно будет принят во внимание как левый конец отрезка). Значит, согласно общему правилу мы должны вычислить

$$f(0), \; f(0{,}5), \; f(1).$$

Имеем

$$\begin{aligned} f(0) &= -0{,}25, \\ f(0{,}5) &= 0{,}0625 - 0{,}125 - 0{,}25 = -0{,}3125, \\ f(1) &= 1 - 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25. \end{aligned}$$

Мы видим, что наибольшее из этих чисел

$$f(1) = 0{,}25,$$

а наименьшее

$$f(0{,}5) = -0{,}3125.$$

Это, следовательно, и будут наибольшее и наименьшее значения нашей функции на отрезке $[0, 1]$.

b. В приложениях очень часто встречается *случай, когда производная y' обращается в нуль внутри интервала (a, b) только при некотором одном $x = x_1$.* Тогда наибольшее значение функции есть наибольшее из чисел $f(a)$, $f(x_1)$, $f(b)$, а наименьшее — наименьшее из этих чисел.

В двух наиболее распространенных случаях можно сразу сказать, что *ответом на вопрос является* $f(x_1)$. Это следующие случаи:

1. *Когда разыскивается наибольшее значение функции $f(x)$, относительно которой известно, что на концах отрезка она обращается в нуль:*

$$f(a) = f(b) = 0,$$

а внутри отрезка положительна. (Тогда самым большим из чисел $f(a)$, $f(x_1)$, $f(b)$ будет $f(x_1)$, потому что оно положительно, а $f(a)$ и $f(b)$ — нули.)

2. *Когда разыскивается наименьшее значение функции $f(x)$, относительно которой известно, что на концах отрезка она обращается в $+\infty$:*

$$f(a) = f(b) = +\infty,$$

а внутри отрезка конечна. (Тогда самым малым из чисел $f(a)$, $f(x_1)$, $f(b)$ будет $f(x_1)$, потому что оно конечно, а $f(a)$ и $f(b)$ равны $+\infty$.)

Пример 1. Найдем наибольшее значение функции

$$y = x(x-1)^2 = x - 2x^2 + x^3$$

на отрезке [0, 1].

Приравнивая y' нулю, имеем

$$y' = 3x^2 - 4x + 1 = 0, \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \frac{2 \pm 1}{3}; \; x = 1; \; x = \frac{1}{3}.$$

Внутри отрезка [0, 1] лежит только $x = 1/3$. На концах отрезка [0, 1] наша функция обращается в нуль:

$$f(0) = f(1) = 0;$$

внутри этого отрезка она положительна.

Значит, мы имеем дело со случаем 1. Следовательно, наибольшим значением нашей функции на отрезке [0, 1] будет $f(1/3) = 4/9$.

Пример 2. Найдем наименьшее значение функции

$$y = x^2 + x + 1$$

на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Здесь, приравнивая y' нулю, имеем

$$y' = 2x + 1 = 0, \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Внутри интервала $(-\infty, +\infty)$ $y' = 0$ только при $x = -1/2$.

Мы видим, что на границах интервала $(-\infty, +\infty)$ наша функция

$$y = x^2 + x + 1 = x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

обращается в

$$f(-\infty) = f(+\infty) = +\infty,$$

внутри же интервала $(-\infty, +\infty)$ она конечна.

Значит, мы имеем дело со случаем 2. Следовательно, наименьшим значением нашей функции в интервале $(-\infty, +\infty)$ будет $f(-1/2)=3/4$.

с. Иногда весьма полезным оказывается тот очевидный факт, что функция $y=f(x)$, принимающая на отрезке $[a, b]$ только положительные значения, достигает наибольшего значения тогда, когда его достигает y^2 или другая положительная возрастающая функция y (например, $\operatorname{tg} y$).

Пример. Найти наибольшее значение функции

$$y=x\sqrt{1-x^2}$$

на отрезке $[0, 1]$.

Имея в виду, что на указанном отрезке $y\geqslant 0$, мы будем разыскивать наибольшее значение не самого y, а его квадрата. Имеем

$$y^2=x^2-x^4,$$

$$[y^2]'=2x-4x^3=4x\left(\frac{1}{2}-x^2\right),$$

что обращается в нуль при $x=0$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Так как из этих значений x внутри отрезка $[0, 1]$ лежит только

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

на концах отрезка $y^2=0$, а внутри отрезка $y^2>0$, то при $x=1/\sqrt{2}$ мы и будем иметь наибольшее значение y^2, а следовательно, и самого y. Итак, наибольшее значение y на отрезке $[0, 1]$ будет

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

§ 5. Прикладные задачи на наибольшее и наименьшее значения

а. Теория наибольших и наименьших значений широко применяется при решении различных задач, выдвигаемых практикой.

Пример. Из деревянного шара требуется вырезать цилиндр наибольшего объема (рис. 24).

Решение проводим так.

1. Сначала *условимся, что мы будем считать аргументом.* В данном случае аргументом естественно считать радиус x основания цилиндра.

2. Посмотрим, *в каком интервале может изменяться этот аргумент x соответственно смыслу нашей задачи.*

Ответ на вопрос весьма прост, так как, во-первых, x не может быть отрицательным, а во-вторых, x не может быть больше радиуса R шара. Итак, выбранный аргумент x изменяется на отрезке $[0, R]$.

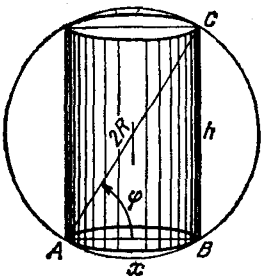


Рис. 24

3. Постараемся *интересующую нас переменную — объем V цилиндра — выразить как функцию выбранного аргумента x.* Имеем (объем цилиндра)

$$V = \pi x^2 h.$$

По теореме Пифагора (из прямоугольного треугольника ABC)

$$h = \sqrt{4R^2 - 4x^2};$$

значит, объем цилиндра

$$V = \pi x^2 \sqrt{4R^2 - 4x^2}.$$

4. Итак, задача свелась к разысканию наибольшего значения функции

$$V = \pi x^2 \sqrt{4R^2 - 4x^2}$$

на отрезке $[0, R]$, т. е. к задаче, решать которую мы уже умеем.

Согласно пункту «c» § 4 мы можем здесь разыскивать наибольшее значение не самого V, а

$$V^2 = 4\pi^2 (R^2 x^4 - x^6).$$

Приравнивая $[V^2]'$ нулю, имеем

$$4\pi^2 (4R^2 x^3 - 6x^5) = 0, \quad (2R^2 - 3x^2) x^3 = 0, \quad x = 0,$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} R.$$

Из найденных значений x внутри отрезка $[0, R]$ лежит только одно, именно $x = \sqrt{\frac{2}{3}} R$. А так как на концах отрезка функция $V^2 = 0$, а внутри отрезка она положительна, то при $x = \sqrt{\frac{2}{3}} R$ мы и будем иметь наибольшее значение V^2, а следовательно, и самого V. Само наибольшее значение будет

$$V=\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)^2\sqrt{4R^2-4\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)^2}=$$

$$=\frac{2\pi}{3}R^2\sqrt{\left(4-\frac{8}{3}\right)R^2}=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

b. Разобранную задачу можно было бы решать и иначе, беря за аргумент не x, а что-нибудь другое.

1. Например, возьмем за аргумент угол φ (рис. 24).

2. Совершенно ясно, что угол φ может изменяться от 0 до $\pi/2$, т. е. на отрезке $[0, \pi/2]$.

3. Выразим V как функцию φ. Имеем

$$S=\pi x^2 h, \quad 2x=2R\cos\varphi, \quad x=R\cos\varphi, \quad h=2R\sin\varphi,$$
$$V=2\pi R^3\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

4. Итак, задача свелась к разысканию наибольшего значения функции

$$V=2\pi R^3\cos^2\varphi\sin\varphi=f(\varphi)$$

на отрезке $[0, \pi/2]$.

Приравнивая V' нулю ($V'=V'_\varphi$, так как теперь аргументом является φ), имеем

$$V'=2\pi R^3(-2\cos\varphi\sin^2\varphi+\cos^3\varphi)=0,$$
$$\cos\varphi=0, \quad -2\sin^2\varphi+\cos\varphi=0.$$

Решение $\cos\varphi=0$ дает $x=\pi/2$, что лежит на границе отрезка $[0, \pi/2]$ и, следовательно, должно быть отброшено. Далее, из

$$-2\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=0$$

следует

$$-2\sin^2\varphi+1-\sin^2\varphi=0, \quad 1-3\sin^2\varphi=0, \quad \sin\varphi=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Годится только положительный угол, т. е.

$$\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Замечая, что на концах отрезка имеем $V=0$, а внутри этого отрезка $V>0$, мы опять убеждаемся, что наибольшее значение нашей функции будет, если угол φ таков, что

$$\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \left(\cos\varphi=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Это наибольшее значение равно

$$2\pi R^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

Пример. Требуется огородить забором прямоугольную площадку площадью 36 м² (рис. 25).

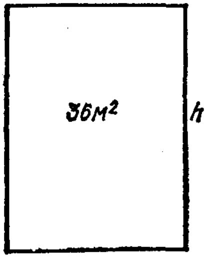


Рис. 25

Какую форму должна иметь площадка, чтобы расход материала был наименьшим?

1. За аргумент берем здесь основание x площадки.

2. x изменяется, очевидно, от 0 до $+\infty$, т. е. в интервале $(0, \infty)$.

3. Выразим длину L забора (периметр прямоугольника) как функцию x. Имеем

$$L = 2(x + h).$$

Но $xh = 36$, значит, $h = \frac{36}{x}$, и мы имеем

$$L = 2\left(x + \frac{36}{x}\right).$$

4. Таким образом, мы должны найти наименьшее значение функции

$$L = 2x + \frac{72}{x} = f(x)$$

в интервале $(0, -\infty)$.

Приравнивая L' нулю, находим

$$L' = 2 - \frac{72}{x^2} = 0; \quad x^2 - 36 = 0; \quad x = \pm 6.$$

Из найденных значений x в интервале $(0, \infty)$ лежит только $x = 6$. Замечая же, что на концах интервала $(0, \infty)$ наша функция равна $+\infty$:

$$f(0) = \infty; \quad f(+\infty) = +\infty,$$

а внутри конечна, мы убеждаемся, что при $x = 6$ она будет достигать своего наименьшего значения. Следовательно, наиболее выгодной в смысле затраты материала (меньше всего материала) оказывается квадратная площадка со стороною 6 ($6^2 = 36$).

§ 6. Направление выпуклости, точки перегиба

a. Обращаясь к прилагаемому рис. 26, мы видим, что изображенная на нем кривая может быть разбита на участки двух типов, а именно участки AB и CD, *выпуклые вверх* (в сторону положительных ординат), и участки BC и DE, *выпуклые вниз* (в сторону отрицательных ординат).

b. Если мы (непрерывно увеличивая абсциссу) будем перемещать точку M по участку AB кривой, выпуклому

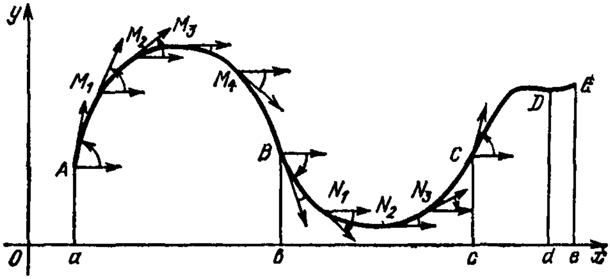


Рис. 26

вверх, то угол α будет уменьшаться (например, в точках A, M_1, M_2, M_3, M_4, B значения угла на нашем чертеже будут приблизительно такие: 75°, 60°, 30°, 0°, —45°, —75°). Одновременно с убыванием α будет убывать и $\operatorname{tg}\alpha$, т. е. y'.

Итак, *участки графика, выпуклые вверх, отвечают интервалам убывания* $y' = f'(x)$.

c. Если мы (непрерывно увеличивая абсциссу) будем перемещать точку M по участку BC кривой, выпуклому вниз, то угол α будет увеличиваться (например, в точках B, N_1, N_2, V_3, C значения угла α на рис. 26 будут приблизительно такие: —75°, —45°, 0°, 30°, 75°). Одновременно с возрастанием α будет возрастать и $\operatorname{tg}\alpha$, т. е. y'.

Итак, *участки графика, выпуклые вниз, отвечают интервалам возрастания* $y' = f'(x)$.

d. *Точки, отделяющие участки, выпуклые вверх, от участков, выпуклых вниз, носят название точек перегиба* (на рис. 26 это будут точки B, C и D).

Нетрудно видеть, что если до точки перегиба был участок, выпуклый вниз, а потом стал участок, выпуклый вверх (как, например, для точки C), то такая точка соответствует максимуму y', потому что здесь y' переходит от возрастания к убыванию. Наоборот, две другие точки перегиба B и D соответствуют минимумам y', потому что здесь y' переходит от убывания к возрастанию.

Таким образом, точки перегиба происходят от того, что y' имеет максимумы и минимумы. Посмотрим, как будут влиять на вид графика точки замедления y'. Очевидно, особенного влияния не будет, так как если, например, до точки замедления y' эта функция возрастала, то она будет возрастать и после. Угол α будет в общем все время возрастать, лишь на одно мгновение останавливаясь в своем росте при значении x, отвечающем точке замедления y'.

e. Замечая, что производной y' является y'':

$$[y']' = y'' = f''(x)$$

(на графике, ординатой которого является y', угловым коэффициентом касательной будет служить $\operatorname{tg}\beta = y''$), из пункта «b» заключаем, что:

на участках графика, выпуклых вверх, имеем

$$y'' < 0;$$

на участках графика, выпуклых вниз, имеем

$$y'' > 0.$$

В точках перегиба (точках замедления y')

$$y'' = 0.$$

Пример. Для параболы $y = ax^2$ имеем $y'' = 2a > 0$ (если $a > 0$). Поэтому парабола обращена выпуклостью вниз.

§ 7. Приложение к построению графиков

a. Выше нами был указан способ выяснения общей формы графика путем построения точек, где $y' = 0$. Этими точками мы делили наш график на участки, в каждом из которых y или только увеличивается, или только уменьшается (как говорят, y изменяется *монотонно*).

b. Теперь мы можем выяснить форму графика более детально, строя те его точки, для которых равна нулю вторая производная

$$y'' = f''(x).$$

Этими точками наш график разделится на участки, которые уже не могут содержать точек перегиба, и потому они будут обращены выпуклостью или только вниз, или же только вверх. Для этих участков, следовательно, y' или только возрастает, или только убывает, и чтобы знать, что́ именно происходит — возрастание y' или убывание, — мы, естественно, должны вычислить (и построить тоже) значения y' на границах участков (т. е. в тех точках, где $y''=0$). Действительно, если участок идет от большего значения y' к меньшему, то его, очевидно, нужно чертить выпуклым вверх; если же он идет от меньшего значения y' к большему, то его следует чертить выпуклым вниз.

Итак, для более детального построения графика мы *строим еще те его точки, в которых*

$$y''=0;$$

кроме того, строим касательные в этих точках и в точках, отвечающих началу и концу отрезка $[a, b]$.

с. Для примера построим график функции

$$y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1=f(x)$$

на отрезке $[-2, 4]$.

Имеем

$$y'=x^2-2x-3, \quad y''=2x-2.$$

Приравнивая нулю y', получим

$$x^2-2x-3=0, \quad x=-1, \quad x=3.$$

Приравнивая же нулю y'', имеем

$$2x-2=0, \quad x=1.$$

Следовательно, мы должны построить ординаты точек с абсциссами

$$-2, -1, 1, 3, 4;$$

кроме того, во всех этих точках мы должны провести касательные ($y'=0$ в точках с абсциссами -1 и 3, и потому касательные параллельны оси абсцисс). Имеем

$$f(-2)=\frac{8}{3}-4+6+1=\frac{1}{3},$$

$$f(-1)=-\frac{1}{3}-1+3+1=\frac{8}{3},$$

$$f(1)=\frac{1}{3}-1-3+1=-\frac{8}{3},$$

$$f(3)=\frac{27}{3}-9-9+1=-8,$$

$$f(4)=\frac{64}{3}-16-12+1=-\frac{17}{3},$$

$$f'(-2)=4+4-3=5,$$

$$f'(1)=1-2-3=-4,$$

$$f'(4)=16-8-3=5.$$

Таким образом, имеем следующую таблицу:

M	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
x	-2	-1	1	3	4
y	$1/3$	$2/3$	$8/3$	-8	$-17/3$
y'	5	0	-4	0	5

в соответствии с которой и строим график нашей функции (рис. 27). Касательные изображены пунктирными линиями.

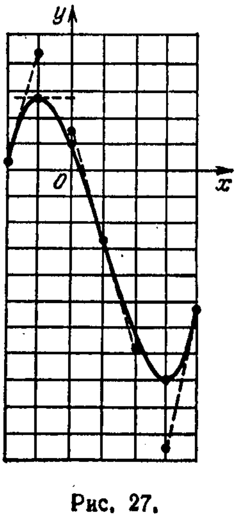


Рис. 27.

d. Заметим, что если бы мы желали построить весь график функции пункта «с», то вычисления мало бы изменились. Вместо точек с абсциссами —2 и 4 пришлось бы исследовать значения $f(x)$ и $f'(x)$ при $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$, и мы получили бы

$$f(-\infty)=-\infty,\qquad f(+\infty)=+\infty;$$

$$f'(-\infty)=+\infty,\qquad f'(+\infty)=+\infty.$$

Последние два равенства показывают, что при неограниченном увеличении x угол α наклона касательной к оси абсцисс неограниченно приближается к 90°.

§ 8. Построение графиков разрывных функций

а. Для построения графика разрывной функции или же функции с разрывной первой производной следует весь промежуток, на котором мы строим график, сначала разбить на отдельные отрезки, беря границами делений как раз те значения x, для которых $f(x)$ или $f'(x)$ терпит разрыв непрерывности.

Когда мы приближаем x к концам таких отрезков, надо тщательно следить за тем, что делается с функцией и ее производной.

b. Пример. Построим график функции

$$y=\frac{1}{x^2-1}=f(x).$$

Здесь функция терпит разрыв, когда $x^2-1=0$, т. е. при $x=-1$ и при $x=1$. При этом, если x приближается к -1 со стороны значений, меньших -1, то $x^2>1$ и потому $x^2-1>0$.

Поэтому, очевидно,

$$f(-1-0)=+\infty.$$

Точно так же найдем

$$f(-1+0)=-\infty,$$
$$f(1-0)=-\infty,$$
$$f(1+0)=+\infty.$$

Далее, исследуем наш график с точки зрения максимумов и минимумов. Имеем

$$y'=\frac{-2x}{(x^2-1)^2},$$

и мы видим, что $y'=0$ только при $x=0$, причем тогда $y=-1$.

Далее,

$$y''=-2\,\frac{(x^2-1)^2-x\cdot 2\,(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=\frac{-2\,(x^2-1)+8x^2}{(x^2-1)^3}=\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}.$$

Приравнивая y'' нулю, получаем

$$6x^2+2=0.$$

Это уравнение не имеет вещественных решений. Значит, никаких точек перегиба нет.

Наконец, исследуем, что будет при $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$. Имеем

$$f(-\infty)=0,\qquad f(+\infty)=0.$$

Итак, для построения кривой имеем таблицу

x	$-\infty$	$-1-0$	$-1+0$	0	$1-0$	$1+0$	$-\infty$
y	0	$+\infty$	$-\infty$	-1	$-\infty$	$+\infty$	0
y'				0			

которую для большей отчетливости дополним такой:

x	-2	2
y	$1/3$	$1/3$
y'	$4/9$	$-4/9$

График функции изображен на рис. 28.

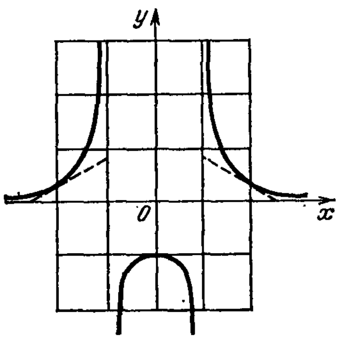


Рис. 28

§ 9. Признак максимума и минимума, основанный на исследовании знака первой производной

а. Мы знаем, что если при некотором $x=x_1$ производная $y'=f'(x)$ функции $y=f(x)$ обращается в нуль, то при $x=x_1$ эта функция достигает максимума, минимума или же имеет точку замедления. Часто бывает полезно узнать, какой именно из этих трех случаев имеет место. Вот самый простой признак.

Если при $x=x_1$ функция $f(x)$ достигает максимума, то $f'(x)$, обращаясь в нуль, меняет знак с $+$ на $-$.

Действительно, тогда $x = x_1$ отделяет интервал возрастания функции $f(x)$ от интервала убывания.

Точно так же можно убедиться в верности двух других правил.

Если при $x = x_1$ функция $f(x)$ достигает минимума, то $f'(x)$, обращаясь в нуль, меняет знак с — на +.

Если при $x = x_1$ функция $f(x)$ имеет точку замедления, то $f'(x)$, обращаясь в нуль, знака своего не изменяет.

b. В применении этих правил очень часто исследование знака производной $f'(x)$ бывает очевидным.

В частности, если $f'(x)$ — многочлен, то перед тем, как исследовать знак при $x < x_1$ и при $x > x_1$, надо $f'(x)$ разложить на множители.

Пример. Пусть

$$y = x^3 - 3x.$$

Приравнивая y' нулю, имеем

$$y' = 3x^2 - 3 = 0, \quad x^2 - 1 = 0, \quad x^2 = 1, \quad x = \pm 1.$$

Пусть, например, требуется узнать, что именно будет при $x = +1$. Разлагая y' на множители, имеем

$$y' = 3(x-1)(x+1).$$

Мы видим, что при x, немного меньших 1, будет

$$x - 1 < 0, \quad x + 1 > 0 \quad \text{и, следовательно,} \quad y' < 0.$$

Если же x немного больше 1, то

$$x - 1 > 0, \quad x + 1 > 0 \quad \text{и, следовательно,} \quad y' > 0.$$

Таким образом, при $x = 1$ производная $f'(x)$ нашей функции меняет знак с — на +, т. е. (согласно пункту «а») при $x = 1$ мы имеем минимум нашей функции.

§ 10. Признак максимума и минимума, основанный на исследовании знака второй и высших производных

a. Для решения той же самой задачи, которую мы только что разобрали, можно указать еще другой, довольно удобный признак. Этот признак основан на исследовании знака тех численных значений, которые принимают высшие производные при $x = x_1$.

Пусть $f'(x_1) = 0$. Рассмотрим $f''(x_1)$. Если и $f''(x_1) = 0$, то рассматриваем $f'''(x_1)$ и т. д. до тех пор, пока не дойдем до неравного нулю числа. Именно: пусть первым неравным нулю числом в последовательности

$$f'(x_1),\ f''(x_1),\ \ldots$$

будет $f^{(n)}(x_1)$.

Примем во внимание графики всех функций $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots$, $f^{(n-2)}(x)$. Так как каждая из них, например $f^{(k)}(x)$, имеет своей производной производную порядка $f^{(k+1)}(x)$, на единицу большего, и, следовательно, обращающуюся в нуль при $x=x_1$, то при $x=x_1$ каждая из этих функций имеет максимум, минимум или точку замедления.

b. Пусть сначала n четное и $f^{(n)}(x_1)>0$. Тогда график функции $f^{(n-2)}(x)$ в рассматриваемой точке обращен выпуклостью вниз (так как $f^{(n)}(x)$ положительна при $x=x_1$, то в силу своей непрерывности $f^{(n)}(x)$ положительна и при значениях x, близких к x_1), и, значит, при $x=x_1$ функция $f^{(n-2)}(x_1)$ имеет минимум, равный нулю: $f^{(n-2)}(x_1)=0$.

При значениях x, близких к x_1, имеем

$$f^{(n-2)}(x)>0.$$

Но тогда таким же путем убедимся, что минимум при $x=x_1$ будет иметь и функция $f^{(n-4)}(x)$, и функция $f^{(n-6)}(x)$ и т. д., пока наконец не дойдем до $f(x)$ (только здесь уже минимум, вообще говоря, нулю не равен). Итак, при $x=x_1$ функция $f(x)$ имеет минимум.

c. Пусть опять n четное, но $f^{(n)}(x_1)<0$. Тогда, применяя те же самые рассуждения, что и в пункте «b», можно убедиться, что при $x=x_1$ функция $f(x)$ имеет максимум.

d. Наконец, рассматривая случай нечетного n и предполагая $f^{(n)}(x)>0$, убедимся, что минимум при $x=x_1$ будут иметь производные нечетного порядка: $f^{(n-2)}(x)$, $f^{(n-4)}(x)$, $\ldots$, $f'''(x)$ и, наконец, $f'(x)$, причем ввиду $f'(x_1)=0$ вблизи $x=x_1$ имеем $f'(x)>0$ (как для значений $x<x_1$, так и для значений $x>x_1$), значит, $f'(x)$ при $x=x_1$ знака не меняет и потому $f(x)$ имеет при $x=x_1$ точку замедления.

Тот же результат учащиеся найдут, предположив n нечетным и $f^{(n)}(x_1)<0$.

Итак, имеем правило:

Если $f'(x)=0$, причем первая не обращающаяся в нуль при $x=x_1$ производная в последовательности

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots,$$

есть $f^{(n)}(x)$, то

если n четное и $f^{(n)}(x_1) > 0$, то функция $f(x)$ имеет минимум при $x = x_1$;

если n четное и $f^{(n)}(x_1) < 0$, то функция $f(x)$ имеет максимум при $x = x_1$;

если n нечетное, то при $x = x_1$ функция $f(x)$ имеет точку замедления.

Пример 1. Пусть $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$. Имеем

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3, \quad f''(x) = 6x - 6; \quad f'''(x) = 6.$$

Здесь $f'(x)$ равна нулю при $x = 1$, но

$$f''(1) = 0; \quad f'''(1) > 0.$$

Значит, $n = 3$ нечетно и при $x = 1$ имеем точку замедления.

Пример 2. Пусть $f(x) = 4x^3 - 6x^2$. Имеем

$$f'(x) = 12x^2 - 12x; \quad f''(x) = 24x - 12.$$

Здесь $f'(x)$ равна нулю при $x = 0$ и $x = 1$. Тогда

$$f''(0) = -12;$$

$n = 2$ четно, причем $f''(0) < 0$. Значит, при $x = 0$ имеем максимум.

Далее,

$$f''(1) = 12.$$

Здесь $n = 2$ четно, причем $f''(1) > 0$. Значит, при $x = 1$ имеем минимум.

§ 11. Асимптоты

a. Очень часто ветвь кривой, удаляясь в бесконечность, неограниченно приближается к некоторой прямой линии. Эту прямую называют *асимптотой* по отношению к данной ветви.

b. Пусть

$$y = f(x)$$

— уравнение данной кривой и

$$y = ax + b$$

— уравнение асимптоты (рис. 29). Тогда разность

$$M_1M = f(x) - (ax + b)$$

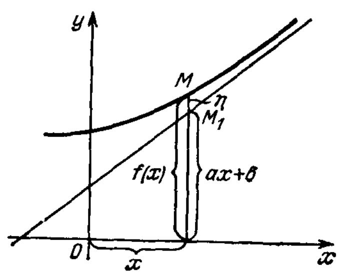


Рис. 29

между соответствующими ординатами кривой и асимптоты должна быть бесконечно мала при бесконечно большом x: $f(x)-ax-b=\eta$, где η—бесконечно малая.

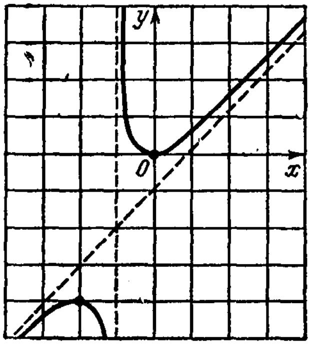


Рис. 30

c. Отсюда нетрудно найти, чему равно a:

$$a=\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}-\frac{\eta}{x},$$

и, переходя к пределу, получим, что

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{\eta}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Итак,

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

d. Зная a, легко найти b:

$$b=f(x)-ax-\eta,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]-\lim_{x\to\infty}\eta=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax].$$

Итак,

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax].$$

Пример. Найти асимптоты кривой

$$y=\frac{x^2}{x+1}=f(x).$$

Имеем

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x+1}-x\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}=-1.$$

Следовательно, $a=1$, $b=-1$, и уравнение асимптоты имеет вид

$$y=x-1.$$

e. Зная асимптоту, можно получить более отчетливое представление о самой кривой.

Построив асимптоту, остальное построение делаем по общим правилам. На рис. 30 приведен график функции

$$y=\frac{x^2}{x+1}.$$

Асимптоты обозначены пунктирными линиями.

Детали построения предлагается выполнить самостоятельно.

§ 12. Дифференциал дуги

a. Если кривая задана уравнением

$$y=f(x),$$

то длина s дуги M_0M этой кривой, отсчитываемая от неподвижной точки M_0 до подвижной точки M (рис. 31), зависит от положения этой последней точки: она является некоторой функцией абсциссы x точки M, или же функцией параметра t, определяющего положение точки M, если кривая задана параметрическим способом.

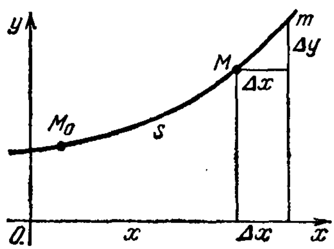


Рис. 31

Во многих вопросах весьма важно знать производную и дифференциал этой функции.

Для этой цели дадим абсциссе x точки M бесконечно малое приращение Δx. Тогда точка M передвинется в бесконечно близкое положение m, а дуга s получит бесконечно малое приращение $\Delta s=\smile Mm$. Получим

$$s'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}.$$

Так как дуга Mm эквивалентна хорде Mm, то

$$s'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{дл. хорды } Mm}{\Delta x}=$$

$$=\lim\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta x}=\lim\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

b. Что бы мы ни брали за аргумент (x или какой-либо параметр t, если кривая задана параметрически), всегда

$$s' = \frac{ds}{dx}, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Поэтому имеем (все дифференциалы должны быть выражены через одну переменную)

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Пример 1. Для параболы $y = ax^2$ имеем

$$ds = \sqrt{1 + (2ax)^2}\, dx = \sqrt{1 + 4a^2x^2}\, dx.$$

Пример 2. Для циклоиды

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

имеем

$$ds = \sqrt{[a(1 - \cos t)\, dt]^2 - (a \sin t\, dt)^2} =$$
$$= a\sqrt{2 - 2\cos t\, dt} = 2a \sin\frac{t}{2}\, dt.$$

§ 13. Направляющие косинусы касательной

а. Весьма часто полезно знать не угловой коэффициент $\operatorname{tg} \alpha$ касательной, а направляющие косинус и синус ($\cos\alpha$ и $\sin\alpha$) касательной.

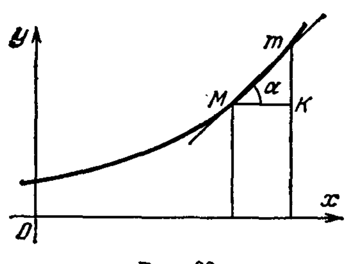


Рис. 32

Рассматривая угол α как предел угла α_1 наклона секущей Mm к оси абсцисс, имеем (рис. 32)

$$\cos\alpha = \lim\cos\alpha_1 = \lim\frac{MK}{\text{дл. хорды } Mm} =$$

$$= \lim\frac{MK}{\text{дл. } \smile Mm} = \lim\frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{dx}{ds},$$

$$\sin\alpha = \lim\sin\alpha_1 = \lim\frac{Km}{\text{дл. хорды } Mm} =$$

$$= \lim\frac{Km}{\text{дл. } \smile Mm} = \lim\frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{dy}{ds}.$$

b. Итак,

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}.$$

Пример 1. Для параболы $y = ax^2$ имеем

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx} = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2x^2}},$$

$$\sin\alpha = \frac{2ax\,dx}{\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx} = \frac{2ax}{\sqrt{1+4a^2x^2}}.$$

Пример 2. Для циклоиды

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

имеем

$$\cos\alpha = \frac{a(1-\cos t)\,dt}{2a\sin\frac{t}{2}\,dt} = \sin\frac{t}{2},$$

$$\sin\alpha = \frac{a\sin t\,dt}{2a\sin\frac{t}{2}\,dt} = \cos\frac{t}{2}.$$

§ 14. Радиус кривизны, центр кривизны

a. Две нормали, проведенные в точках M и m окружности, всегда пересекутся в центре K окружности, причем длина Mk нормали от точки касания до центра K будет равна радиусу окружности.

Если мы рассматриваем не окружность, а какую-либо другую кривую, то малый участок Mm этой кривой до известной степени тоже можно уподобить дуге окружности и с тем бо́льшим правом, чем этот участок меньше. (Подобная приближенная замена малых участков дугами окружностей часто делается при вычерчивании различных кривых.)

Нормали, проведенные в точках M и m (рис. 33), и здесь пересекутся в некоторой точке k, причем по мере приближения к M точка k не будет оставаться неподвижной (как у окружности), а будет перемещаться по линии MK. Предельное положение K, к которому приближается при этом точка k, называется *центром кривизны*, отвечающим точке M.

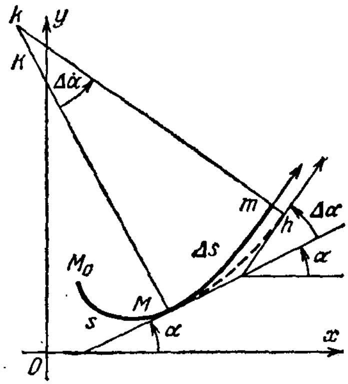


Рис. 33

Отрезок MK $(MK = \lim Mk)$ называется *радиусом кривизны*, отвечающим точке M.

b. Величину $R = MK$ радиуса кривизны найти нетрудно. Для этой цели одновременно с дугою $\Delta s = Mm$ будем рассматривать дугу Mh окружности радиуса Mk с центром k. Эта дуга, очевидно, эквивалентна Mm.

Далее, нам потребуется угол Mkm. Этот угол, очевидно, равен углу $\Delta\alpha$ между касательными в точках m и M ($\Delta\alpha$ — приращение, которое получает угол α при переходе точки M в положение m; именно: углы наклона касательных к оси абсцисс в точках M и m суть α и $\alpha + \Delta\alpha$).

Радиус Mk численно равен отношению длины дуги к величине угла:

$$Mk = \frac{\text{дл.} \smile Mh}{\Delta\alpha}.$$

Отсюда, переходя к пределу, получим

$$R = MK = \lim_{\Delta\alpha \to 0} Mk = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\text{дл.} \smile Mh}{\Delta\alpha} =$$

$$= \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\text{дл.} \smile Mm}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\alpha} = \frac{ds}{d\alpha}.$$

Но нами было показано, что

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

(считаем аргументом x). Далее,

$$\operatorname{tg} \alpha = y', \quad \alpha = \operatorname{arctg} y, \quad d\alpha = \frac{dy'}{1 + (y')^2} = \frac{y''\, dx}{1 + (y')^2}.$$

Поэтому

$$R=\frac{ds}{d\alpha}=\frac{\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\dfrac{y''\,dx}{1+(y')^2}}=\frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{y''}.$$

c. На рис. 33 кривая выпукла вниз и потому $\Delta\alpha$ положительно (угол α возрастает). Однако может оказаться, что $\Delta\alpha$ отрицательно (когда α убывает), и тогда мы должны взять

$$R=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\left(-\frac{\Delta s}{\Delta\alpha}\right)=-\frac{ds}{d\alpha},$$

потому что R всегда считается величиною положительной. Мы видим, что как в том, так и в другом случае (как для кривой, выпуклой вниз, так и для кривой, выпуклой вверх) за R мы можем принимать абсолютное значение $\frac{ds}{d\alpha}$, т. е. $\left|\frac{ds}{d\alpha}\right|$: $R=\left|\frac{ds}{d\alpha}\right|=\left|\frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{y''}\right|$.

Пример 1. Найдем радиус кривизны параболы $y=ax^2$. Имеем

$$y'=2ax,\quad y''=2a,$$

$$R=\left|\frac{(1+4a^2x^2)^{3/2}}{2a}\right|=\frac{(1+4a^2x^2)^{3/2}}{2a}.$$

Пример 2. Найдем радиус кривизны циклоиды

$$x=a(t-\sin t),$$
$$y=a(1-\cos t).$$

Здесь

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2},$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{a\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{d\,[a(t-\sin t)]}=\frac{\dfrac{dt}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{a(1-\cos t)\,dt}=\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}},$$

$$R=\left|\frac{\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}\right)^{3/2}}{\dfrac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}}\right|=\left|\frac{\left(\dfrac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\right)^{3/2}}{\dfrac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}}\right|=4a\sin\frac{t}{2}.$$

d. Проводя нормали в близких точках $M_0, M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_n$ кривой, получим некоторую ломаную $k_0k_1k_2\ldots k_n$.

Точки k_0, k_1, k_2, ... являются приближениями к центрам кривизны точек M_0, M_1, M_2, ..., M_n. Поэтому в пределе ломаная $k_0k_1...k_n$ обратится в некоторую кривую, представляющую собою не что иное, как геометрическое место центров кривизны. Такую кривую называют *эволютой* данной кривой.

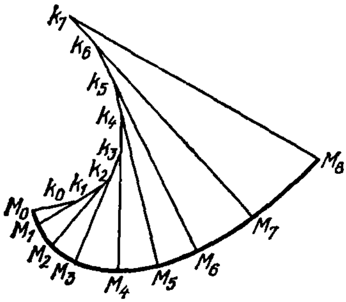


Рис. 34

Сама же кривая по отношению к своей эволюте называется *эвольвентой*. Из всего сказанного выше ясно, что нормаль в какой-либо точке M к эвольвенте является касательной к эволюте, причем длина участка нормали от точки M до точки касания с эволютой является радиусом кривизны в точке M (точка касания с эволютой — центр кривизны точки M).

Приближенное представление об эволюте можно составить по ломаной $k_0k_1k_2...k_7$ (рис. 34).

§ 15. Дифференциал дуги и направляющие косинусы касательной для кривой в пространстве

а. Рассматривая две бесконечно близкие точки M $(x;\ y;\ z)$ и $m(x+\Delta x;\ y+\Delta y;\ z+\Delta z)$ (рис. 35), можно

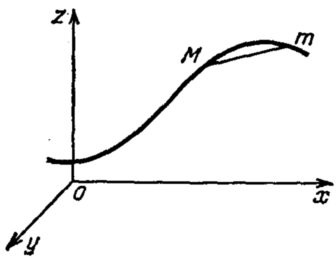


Рис. 35

убедиться, что для пространства справедливы формулы

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},\quad \cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \cos\beta=\frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}$$

(Δx, Δy, Δz — проекции хорды Mm, Δs эквивалентно хорде Mm).

§ 16. Упражнения

1. Доказать, что $\operatorname{tg} x$ постоянно возрастает, причем угол наклона касательной к оси абсцисс приближается к прямому по мере приближения x к $\frac{(2x+1)\pi}{2}$, $k=0$, $\pm 1, \ldots$

2. Доказать, что $y=1/x$ постоянно убывает, причем с приближением x к нулю угол α приближается к прямому, а при неограниченном возрастании x угол α стремится к нулю.

3. Показать, что $y=x^2-3x+2$ убывает в интервале $(-\infty, 3/2)$ и возрастает в интервале $(3/2, +\infty)$ (тем самым имеет минимум при $x=3/2$).

4. Показать, что вершина параболы $y=x^2-6x+5$ находится в точке $(3; -4)$.

5. Доказать, что y, заданная как функция x параметрическими уравнениями

$$x=a(t-\sin t),$$
$$y=a(1-\cos t)$$

(циклоида), возрастает в интервале $(0, \pi)$ и убывает в интервале $(\pi, 2\pi)$.

6. Доказать, что $y=x^3-3x$ возрастает в интервале $(-\infty, -1)$, убывает в интервале $(-1, 1)$, наконец, снова возрастает в интервале $(1, +\infty)$.

7. Доказать, что функция $y=x^3+x^2+x$ при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ все время возрастает.

Доказать, что при $x>2$ всегда

$$\frac{x}{2^x}<\frac{1}{2}.$$

9. Построить график функции $y=\frac{1}{2}x^4-x^2$ в интервале $(-\infty, +\infty)$.

10. Построить график функции

$$y=x^3-6x^2+9x+1$$

на отрезке $[0, 4]$.

11. Построить график функции

$$y=0{,}25x^4-x^3+0{,}25$$

на отрезке $[-1, 4]$.

12. Построить график функции

$$y=e^{-x^2/2}$$

в интервале $(-\infty, +\infty)$.

13. Построить график функции

$$y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a}) \qquad (a=2)$$

в интервале $(-\infty, +\infty)$ (ответы к задачам 9, 10, 11, 12 и 13 даны на рис. 48).

14. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=3x^4-4x^3=f(x)$$

на отрезке $[-2, 1]$. *Ответ*: наибольшее значение $f(-2)=80$, наименьшее значение $f(1)=-1$

15. То же самое для функции

$$y=1{,}2x^5-4{,}5x^4+4x^3-0{,}9$$

на отрезке $[-1, 2]$. *Ответ*: наибольшее значение $f(0)=$ $=-0{,}9$, наименьшее значение $f(-1)=-10{,}6$.

16. То же самое для функции

$$y=2x^3-3x^2$$

на отрезке $[-1; 1{,}5]$. *Ответ*: наибольшее значение $f(0)=$ $=f(1{,}5)=0$, наименьшее значение $f(-1)=-5$.

17. То же самое для функции

$$y=x^3-18x^2+96x$$

на отрезке $[3, 9]$. *Ответ*: наибольшее значение $f(4)=160$, наименьшее значение $f(8)=128$.

18. То же самое для функции

$$y=x^5+5x$$

на отрезке $[1, 2]$. *Ответ*: наибольшее значение $f(2)=42$, наименьшее значение $f(1)=6$.

19. Требуется огородить каменной стеной прямоугольную площадку, причем известно, что материала хватит только в том случае, если общая длина стен будет не больше a м. Как сделать, чтобы огороженная площадь была возможно больше? *Ответ*: площадка должна иметь форму квадрата.

20. Имеется жестяной лист, имеющий форму квадрата со стороною a см. Из него по углам вырезаны и удалены малые квадраты со стороною x. Каково должно быть x, чтобы вместимость коробки, которую получим, перегнув оставшуюся часть листа по линиям, отмеченным пунктиром, была наибольшей (рис. 36)? *Ответ*: $x=a/6$ см.

21. Та же самая задача, но для листа, имеющего форму прямоугольника с основанием 48 см и высотою 18 см (рис. 37). *Ответ*: $x = 4$ см.

22. То же самое, если основание 8 см и высота 5 см. *Ответ*: $x = 1$ см.

23. Требуется построить пятистенку с наибольшей полезной площадью. При этом известно, что сумма длин

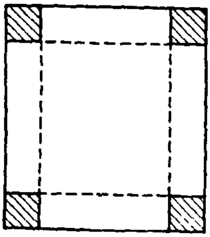


Рис. 36

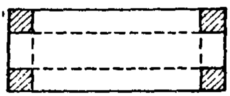


Рис. 37

стен этой пятистенки должна равняться A м. Найти, каковы должны быть длины стен (рис. 38). *Ответ*: длина малой стены $A/6$, длина большой стены $A/4$.

24. Ту же, по существу, задачу можно поставить иначе. Требуется построить пятистенку с данной полезной

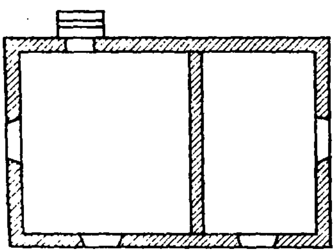


Рис. 38

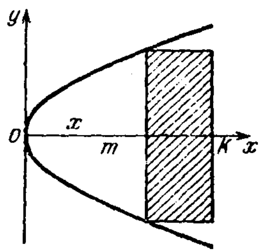


Рис. 39

площадью K м². Какой формы должна быть пятистенка, чтобы количество затраченного на нее материала (стены) было наименьшим? *Ответ*: длина малой стены $\sqrt{2/3K}$, длина большой стены $\sqrt{3/2}\,K$ (по существу, это прежний ответ, так как отношение длин большой и малой стен и здесь равно 3/2, как и в задаче 23).

25. В сегмент параболы $y^2 = 2px$, где $OK = m$, вписать прямоугольник наибольшей площади (рис. 39). *Ответ*: $x = m/3$.

26. В эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

вписать прямоугольник наибольшей площади (стороны параллельны координатным осям). *Ответ*: основание $a\sqrt{2}$, высота $b\sqrt{2}$.

27. Из листа жести, имеющего форму круга радиуса R, вырезать такой сектор, чтобы, свернув, получить

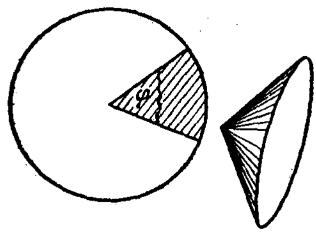


Рис. 40

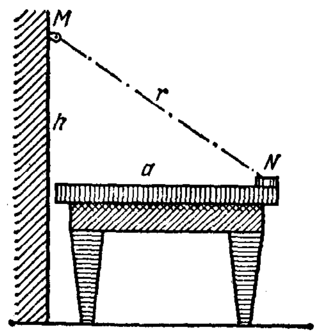


Рис. 41

воронку наибольшей вместимости (рис. 40). *Ответ*: $\varphi=2\pi\sqrt{2/3}$.

28. В точке M на вертикальной стене висит электрическая лампочка, которая может передвигаться по стене вверх и вниз (рис. 41). Спрашивается, как надо подвесить эту лампочку, чтобы получить наилучшее освещение в точке N (например, N — место на краю стола, где лежит чертеж или книга). *Ответ*: $h=a/\sqrt{2}$.

Указание. Освещенность I выражается формулой

$$I=c\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

где c — постоянная.

29. Из пунктов A и B, расположенных на берегу озера, одновременно выходят два судна (рис. 42), которые плывут по взаимно перпендикулярным направлениям AM и BN. Указать момент наибольшей близости обоих судов, если известно, что $AO=110$ км, $MN=134$ км и что первое судно плывет со скоростью 8 км/ч, а второе со скоростью 15 км/ч. *Ответ*: через 10 ч после отплытия.

30. Около данного цилиндра описать конус наименьшего объема. *Ответ*: радиус основания конуса в 3/2 раза больше радиуса основания цилиндра.

31. Из круглой балки надо выпилить балку формы, указанной на рис. 43 пунктиром. При каких условиях

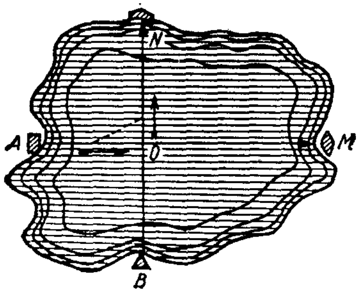


Рис. 42

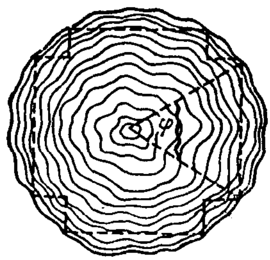


Рис. 43

эта балка будет иметь наибольшее поперечное сечение? *Ответ*: $\operatorname{tg}\varphi = 2$.

32. Точка перемещается в среде I со скоростью v_1 и в среде II со скоростью v_2 (рис. 44). Как она должна

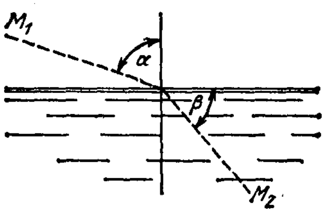


Рис. 44

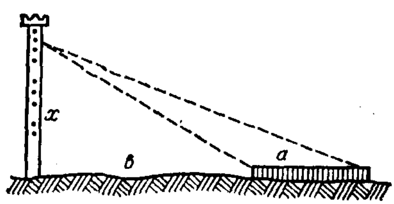


Рис. 45

двигаться, чтобы, идя из точки M_1, достигнуть точки M_2 в наикратчайший срок? *Ответ*: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}$.

33. Имеется высокая башня и некоторый предмет длиною a, лежащий на земле в одной плоскости с башней (рис. 45). На какую высоту надо подняться, чтобы видеть предмет под наибольшим углом зрения? *Ответ*: $x = \sqrt{b(a+b)}$.

34. Требуется сделать жестяное корыто формы, указанной на рис. 46 (основание — полукруг). Какими должны быть размеры этого корыта, чтобы при одном и том же количестве материала вместимость его была наибольшей?

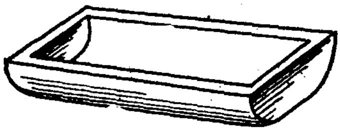


Рис. 46

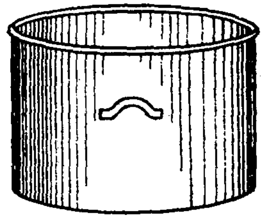


Рис. 47

35. Какими должны быть размеры кастрюли (рис. 47), чтобы при одном и том же количестве материала, затраченного на ее изготовление, она имела наибольшую вместимость? *Ответ*: радиус r дна должен равняться высоте h.

36. Доказать, что кривая

$$y = a^x, \quad a > 0,$$

выпукла вниз.

37. Доказать, что кривая

$$y = \ln x$$

выпукла вверх.

38. Доказать, что кривая

$$y = \frac{1}{x}$$

при положительных x выпукла вниз, а при отрицательных x выпукла вверх.

39. Доказать, что тангенсоида

$$y = \operatorname{tg} x$$

при отрицательных x выпукла вверх, а при положительных выпукла вниз (так что при $x = 0$ имеется точка перегиба).

40. Доказать, что синусоида в интервале $(0, \pi)$ выпукла вверх, а в интервале $(\pi, 2\pi)$ выпукла вниз.

41. Построить кривую $y = x^3/8$ для всего интервала $(-\infty, +\infty)$.

42. Построить кривую $y = x^4/16$ для всего интервала $(-\infty, +\infty)$.

43. Дать более детальное построение кривой задачи 9.
44. То же для задачи 10.
45. То же для задачи 11.
46. То же для задачи 12.
47. То же для задачи 13.

Ответы к задачам 41—47 см. на рис. 48.

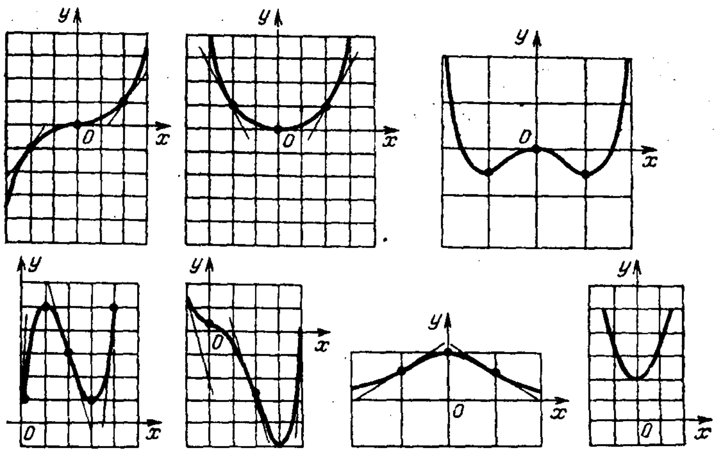


Рис. 48

48. Исследуя знак первой производной, найти максимумы и точки замедления функции $y=\frac{1}{2}x^4-x^2$ (задача 9).

49. То же для функции $y=x^3-6x^2+9x+1$ (задача 10).

50. То же для функции $y=0{,}25x^4-x^3+0{,}25$ (задача 11).

51. То же для функции $y=e^{x^2/2}$ (задача 12).

52. То же для функции $y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{x/a})$ (задача 13).

53. Задачу 48 решить исследованием знака высших производных.

54. То же для задачи 49.
55. То же для задачи 50.
56. То же для задачи 51.
57. То же для задачи 52.

58. Подобным же путем произвести исследование в задаче 41.

59. То же сделать для задачи 42.

60. Построить график функции $y=\frac{x}{x^2-1}$. *Ответ* см. на рис. 49.

61. Построить график функции $y=\sqrt[3]{x^2}$. *Ответ* см. на рис. 50.

62. Найти дифференциал дуги и направляющие косинус и синус касательной для эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

в точке с абсциссою x. *Ответ*: $ds=\sqrt{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}dx$; $\cos\alpha=$ $=\frac{a^2y}{\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}}$, $\sin\alpha=\frac{-b^2x}{\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}}$.

63. То же самое для астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$. *Ответ*: $ds=3a\sin t\cos t\,dt$; $\cos\alpha=-\cos t$, $\sin\alpha=\sin t$.

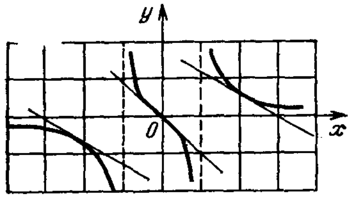


Рис. 49

64. Найти выражение радиуса кривизны эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. *Ответ*: $R=$ $=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{3/2}}{(a^2y^2+b^2x^2)\,a^2b^2}$.

65. То же самое для астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$. *Ответ*: $R=\frac{1}{2}\sin 2t$.

66. Проекции радиуса кривизны MK в точке M на оси координат можно выразить двумя способами: через координаты конца и начала, а также как произведения длины R радиуса кривизны на его направляющие косинус

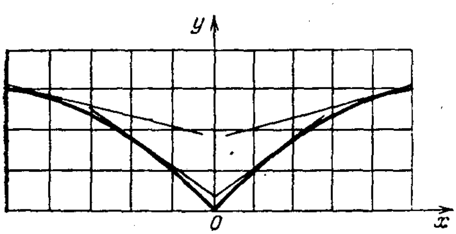


Рис. 50

и синус. Вывести отсюда выражения для координат $K(\xi;\ \eta)$ центра кривизны:

$$\xi=x-\frac{1+(y')^2}{y''}y',$$

$$\eta=y+\frac{1+(y')^2}{y''}.$$

67. Выражая в этих уравнениях правые части через x (или через параметр t, когда кривая задана параметрически) и затем исключая x (или t), получим уравнение, связывающее ξ и η, т. е. уравнение эволюты. Найти уравнение эволюты параболы $y=ax^2$. *Ответ*: $\left(\eta-\frac{1}{2a}\right)^3=\frac{27}{4}a\xi^2$.

68. Найти параметрические уравнения эволюты циклоиды и показать, что, вводя вместо t новый параметр t_1 уравнением

$$t_1=\pi+t$$

и затем перенося начало координат в новую точку

$$(a\pi;\ -2a),$$

мы приведем уравнение эволюты к виду

$$x=a(t_1-\sin t_1),$$
$$y=a(1-\cos t_1)$$

(т. е. эволюта циклоиды — тоже циклоида).

Глава 4

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Функции многих переменных. Область определения. Непрерывность

а. В предыдущих главах мы занимались изучением функций только одной переменной. Мы уже успели убедиться в том, что теория этих функций дает мощное орудие технике и естествознанию для достижения тех целей, которые перед собой эти науки ставят. Но теперь мы должны напомнить, что большинство величин, с которыми приходится иметь дело естествоиспытателю и инженеру, зависят не от одной переменной, а чаще всего от двух или даже большего числа переменных. Приведем примеры.

1. Объем V газа зависит от температуры t и давления p, так что

$$V=f(p,\ t).$$

2. Представим себе систему, состоящую из n веществ различного химического состава. Каждое вещество, входящее в систему, химики называют компонентой системы. Очевидно, состояние системы зависит от масс всех n компонент. Но оказывается, что здесь имеют значения не абсолютные величины масс, а отношения всех масс к одной, последних будет на единицу меньше, чем компонент, т. е. их будет $n-1$. Так как состояние системы зависит еще от давления и температуры системы, то состояние системы следует рассматривать как функцию от $n+1$ независимой переменной. Можно привести еще много примеров, но мы ограничимся только этими. Как видно, изучение функций многих переменных есть вопрос, чрезвычайно важный для естествознания и техники. В дальнейшем мы будем вести рассуждения только для функций двух переменных; все сказанное о них будет справедливо и для функций многих переменных.

b. Как известно, функция z двух независимых переменных x и y записывается так:

$$z = f(x, y). \tag{1}$$

Иногда функция z дается уравнением

$$F(x, y, z) = 0. \tag{2}$$

Тогда мы называем ее неявной. Но если решить это уравнение относительно z, то мы приведем ее к явному виду (1).

Например, если имеем уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \tag{3}$$

то, определяя из него z, найдем такую явную функцию:

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \tag{4}$$

c. Напомним, что если x, y, z принять за координаты точки в пространстве, то функция (1) или (2) двух переменных изобразится некоторой поверхностью.

Например, функция (4) или же (3) изображается сферой радиуса R с центром в начале координат.

d. Очень часто довольствуются тем, что изображают графически только независимые переменные x и y, а саму функцию z не изображают. Получится такая картина: если мы будем как-нибудь менять x и y, то получим точку, движущуюся в плоскости; сама функция z наглядно изображена не будет, но для каждого положения точки она будет иметь определенное числовое значение. Для краткости мы будем говорить в таких случаях, что z есть функция точки $(x; y)$ плоскости.

e. Рассмотрим более внимательно функцию (4). Мы видим, что хотя x и y являются независимыми переменными, мы не можем им задавать совершенно произвольные значения, так как необходимо, чтобы было

$$R^2 - x^2 - y^2 \geqslant 0.$$

В противном случае мы получим для z мнимое значение, т. е. функция не будет определена. Нетрудно понять, что наша функция (4) определена для каждой точки внутри и на контуре окружности радиуса R (рис. 51) и не определена вне этой окружности.

Совокупность точек, для которых функция определена, называется *областью определения* (или существования).

Таким образом, для функции (4) областью определения является круг радиуса R.

Для различных функций область определения имеет разный вид. Иногда этой областью является вся плоскость. Например, функция

$$z = ax + by + c$$

определена для каждой точки плоскости.

f. Переходим теперь к вопросу о непрерывности и разрыве. Выясним эти понятия на примере.

Рассмотрим такую функцию:

$$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}. \tag{5}$$

Для каждой точки $(x;\ y)$ плоскости, кроме точки $(0;\ 0)$, мы можем вычислить одно определенное конечное значение

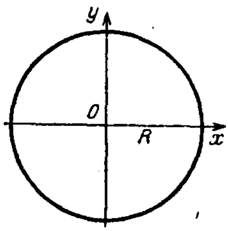


Рис. 51

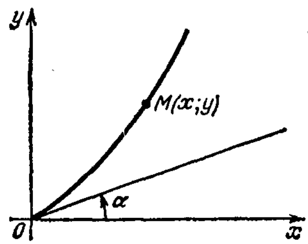


Рис. 52

функции. Для точки $(0;\ 0)$ мы получим не имеющее определенного смысла значение

$$z = \frac{0}{0}.$$

Таким образом, функция задана уравнением (5) для всех точек плоскости, кроме точки $(0;\ 0)$. Это пустое место можно было бы заполнить, задавая в точке $(0;\ 0)$ для функции какое-нибудь желательное для нас значение.

Однако последнее совершенно бесполезно ввиду того, что данная функция в точке $(0;\ 0)$ имеет еще одну особенность. Действительно, пусть из начала координат выходит кривая под углом α к оси абсцисс (рис. 52).

Представим теперь себе, что точка $M\,(x;\ y)$ неограниченно приближается к началу координат по этой кривой. Тогда, если обозначить $\operatorname{tg} \alpha = a$, то при неограниченном уменьшении x и y отношение $\frac{y}{x}$ будет приближаться к a, так что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y}{x} = a.$$

Основываясь на этом, мы можем найти предел, к которому стремится наша функция, когда x и y приближается к нулю по тому закону, который дает выбранная кривая:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{2a}{1+a^2}.$$

Очевидно, точка $M(x;\ y)$ может подходить к началу координат по самым разнообразным кривым, поэтому a может принимать любое значение. Таким образом, наша функция не имеет какого-нибудь определенного предела при неограниченном уменьшении x и y до нуля, так как этот предел зависит от того закона, по которому стремятся к нулю x и y. Теперь мы видим, что какое бы значение для функции в точке (0; 0) мы ни задали, оно не может равняться пределу, к которому стремится функция при неограниченном уменьшении x и y до нуля, просто потому, что в этой точке функция не имеет определенного предела. Нетрудно видеть, что только в начале координат наша функция обладает таким странным свойством. Во всякой другой точке наша функция имеет вполне определенное значение, причем оно совпадает с пределом, к которому стремится функция, независимо от того, как мы будем подходить к этой точке. Мы будем говорить, что начало координат для нашей функции является точкой разрыва. Точно так же будем говорить, что в других точках наша функция непрерывна.

Теперь дадим общее определение непрерывности и разрыва функций двух независимых переменных.

Функция $f(x,\ y)$ называется *непрерывной* в области ее определения, если выполняются следующие два условия:

1. *Для каждой точки $M(x;\ y)$ в этой области функция имеет одно определенное конечное значение.*

2. *Для каждой точки $M(x;\ y)$ в этой области имеем*

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) = f(x,\ y),$$

по какому бы закону ни приближались к нулю Δx и Δy.

Если мы теперь припомним, что переменная величина, имеющая предел, отличается от своего предела на бесконечно малую величину, то второе условие можно представить в таком виде:

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)=f(x,\ y)+\alpha, \tag{6}$$

где α — бесконечно малая величина, независимо от того, по какому закону приближаются к нулю Δx и Δy.

Те точки, для которых не выполняются наши условия, мы будем называть *точками разрыва*. Очевидно, в точках разрыва равенство (6) неприменимо.

§ 2. Частные производные и полный дифференциал

а. Наиболее важным вопросом в теории функций является изучение характера изменения функции.

Займемся функцией двух переменных

$$z=f(x,\ y). \tag{1}$$

Пусть поверхность на рис. 53 изображает эту функцию.

Если необходимо исследовать поведение функции (1) около какой-либо точки $M(x;\ y)$, то наилучшим и простейшим способом является пересечение поверхности несколькими плоскостями, проходящими через эту точку.

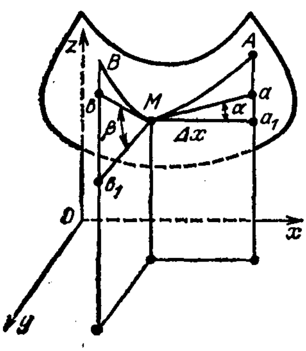


Рис. 53

Рассматривая все кривые, получившиеся на поверхности от этих сечений, мы можем изучить окрестность данной точки и притом тем точнее, чем больше сечений мы сделаем. Впрочем, для наших целей достаточно сделать только два сечения: плоскостями, проходящими через данную точку и параллельными вертикальным координатным плоскостям xOz и yOz. При этом получаются кривая MA (назовем ее первой) и кривая MB (назовем ее второй).

Если точка будет двигаться по первой кривой, то у нее будут изменяться только x и z, а y будет постоянным числом ввиду того, что вся первая кривая лежит в плоскости, параллельной плоскости xOz. Поэтому можно получить уравнение первой кривой из уравнения поверхности, если, выходя из точки M, остановить y, а менять только x, так что z будет функцией только x.

Таким образом, уравнение первой кривой будет

$$z = f(x, y) \text{ при постоянном } y. \tag{2}$$

Дадим теперь x приращение Δx. Тогда функция z получит приращение, которое на рис. 53 изображено отрезком $a_1 A$.

Это приращение называется *частным приращением* функции z по x и обозначается так:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \tag{3}$$

b. Найдем теперь предел отношения этого приращения к Δx при $\Delta x \to 0$. Если этот предел существует, то он называется *частной производной* функции z по x и обозначается так:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что частная производная z по x равна тангенсу угла наклона касательной первой кривой, который эта касательная составляет с осью Ox.

Совершенно так же уравнение второй кривой будет

$$z = f(x, y) \text{ при постоянном } x. \tag{5}$$

Аналогично придем к понятию частного приращения функции z по y:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{6}$$

и к понятию частной производной z по y:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}. \tag{7}$$

Ясно, что последняя равна тангенсу угла β наклона касательной второй кривой к оси Oy. Для частных производных имеются еще такие обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f'_x(x, y), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f'_y(x, y). \end{aligned} \tag{8}$$

c. Если мы умножим частные производные на приращения соответствующих переменных, то получим произведения, называемые частными дифференциалами функции z

и обозначаемые так:

$$\partial_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x = \frac{\partial z}{\partial x}dx \text{ — частный дифференциал } z \text{ по } x,$$
$$\partial_y z = \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = \frac{\partial z}{\partial y}dy \text{ — частный дифференциал } z \text{ по } y. \quad (9)$$

Если x и y являются независимыми переменными, различия между Δx, Δy и dx, dy мы не делаем.

На рис. 53

$\partial_x z$ изображается приращением $a_1 a$ по касательной к первой кривой,

$\partial_y z$ изображается приращением $b_1 b$ по касательной ко второй кривой.

Ясно, что частные дифференциалы отличаются от соответствующих частных приращений функции z на бесконечно малые высшего порядка по сравнению с Δx и Δy.

d. Важную роль в математике и прикладных науках играет сумма всех частных дифференциалов функции. Эта сумма называется полным дифференциалом функции и обозначается так же, как дифференциал функции одной переменной:

$$dz = \partial_x z + \partial_y z = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \quad (10)$$

e. Полный дифференциал имеет простое геометрическое истолкование, которое мы сейчас покажем.

Допустим, что мы даем переменным x и y одновременно приращения Δx и Δy. Тогда функция z получит приращение, которое называется ее *полным приращением* и обозначается просто Δz без знаков снизу. Это приращение равно

$$\Delta z = f(x + \Delta x, \ y + \Delta y) - f(x, \ y). \quad (11)$$

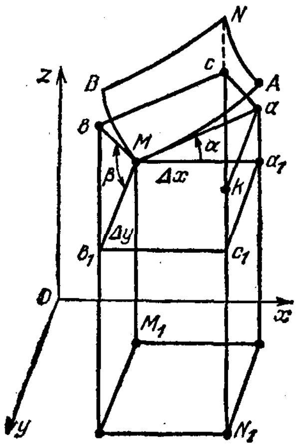


Рис. 54

Ниже на рис. 54 поверхность обозначена буквами $MANB$, так что $M_1M = z$, $N_1N = z + \Delta z$ и, следовательно, $c_1N = \Delta z$. Построим плоскость, проходящую через касательные Ma и Mb к первой и второй кривым.

Эта плоскость называется *касательной плоскостью* к поверхности в точке M.

Последняя пересекается с продолжением боковой поверхности параллелепипеда с ребрами Δx, Δy и M_1M так, что образуется параллелограмм $Macb$. Проведем еще прямую ak параллельно a_1c_1.

Треугольник kac равен треугольнику b_1Mb ввиду того, что bM и ac равны и параллельны как противоположные стороны параллелограмма, b_1b параллельна kc и b_1M параллельна ka.

Из равенства треугольников следует, что $ck=b_1b$ и $c_1k=a_1a$.

Следовательно,

$$c_1c=c_1k+kc=a_1a+b_1b=\partial_x z+\partial_y z=dz.$$

Таким образом, полный дифференциал представляет собой приращение функции z, но взятое не по поверхности, а по ее касательной плоскости.

f. Обозначим буквами X, Y, Z координаты точки c. Тогда

$$dx=X-x, \quad dy=Y-y, \quad dz=Z-z. \tag{12}$$

Подставляя эти разности в полный дифференциал, получим

$$Z-z=\frac{\partial z}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(Y-y). \tag{13}$$

Это уравнение пригодно для любых численных значений dx, dy, dz, иными словами, оно остается верным, где бы на касательной плоскости ни находилась точка c.

Поэтому X, Y, Z можно рассматривать как текущие координаты касательной плоскости. Следовательно, уравнение (13) есть уравнение касательной плоскости, причем x, y, z суть координаты точки касания.

Итак, полный дифференциал представляет собой в замаскированном виде уравнение касательной плоскости.

g. Обратимся опять к чертежу. Мы видим, что приращение функции $\Delta z=c_1N$ отличается от полного дифференциала $dz=c_1c$ на величину cN. Чрезвычайно важным является то, что эта разность между ними представляет собой бесконечно малую высшего порядка. Доказать геометрически это нельзя. Поэтому сейчас мы будем вести чисто аналитические рассуждения.

h. Допустим, что функция

$$z=f(x, y)$$

непрерывна и имеет непрерывные частные производные

$$f'_x(x,\ y),\quad f'_y(x,\ y). \tag{14}$$

Если мы дадим какой-либо переменной, например, y бесконечно малое приращение, то ввиду непрерывности каждая из частных производных получит также бесконечно малое приращение. Вместо $f'_x(x,\ y)$ будем иметь $f'_x(x,\ y+\Delta y)$, но разность между ними будет бесконечно мала.

Обозначим эту разность через α. Тогда получим

$$f'_x(x,\ y+\Delta y)=f'_x(x,\ y)+\alpha. \tag{15}$$

1. Займемся теперь исследованием полного приращения функции z, которое имеет вид

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y). \tag{16}$$

Проделаем нижеследующие очевидные преобразования:

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)+f(x, y+\Delta y)-f(x, y),$$

$$\Delta z=\left[\frac{f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y+\Delta y)}{\Delta x}\right]\Delta x+\\+\left[\frac{f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)}{\Delta y}\right]\Delta y \tag{17}$$

и рассмотрим те выражения, которые находятся в скобках, отдельно.

Возьмем сначала вторую дробь. Если бы мы устремили Δy к нулю, то эта дробь имела бы своим пределом $f'_y(x,\ y)$. Но мы знаем, что если какая-либо величина имеет предел, то она отличается от своего предела на бесконечно малую величину. Обозначим эту бесконечно малую разность между нашей дробью и ее пределом через α_1, тогда

$$\frac{f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)}{\Delta y}=f'_y(x,\ y)+\alpha_1. \tag{18}$$

Точно так же найдем, что

$$\frac{f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y+\Delta y)}{\Delta x}=f'_x(x,\ y+\Delta y)+\alpha_2. \tag{19}$$

Подставляя (18) и (19) в (17), получим

$$\Delta z=[f'_x(x,\ y+\Delta y)+\alpha_2]\,\Delta x+[f'_y(x,\ y)+\alpha_1]\,\Delta y. \tag{20}$$

Пользуясь еще равенством (15), найдем, что

$$\Delta z=[f'_x(x,\ y)+\alpha+\alpha_2]\,\Delta x+[f'_y(x,\ y)+\alpha_1]\,\Delta y.$$

Обозначая $\alpha+\alpha_2=\varepsilon_1$, $\alpha_1=\varepsilon_2$ и раскрывая скобки, получим

$$\Delta z=f'_x(x, y)\Delta x+f'_y(x, y)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

или, иначе,

$$\Delta z=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right)+(\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y). \qquad (21)$$

j. Выражение, находящееся в первых скобках, есть не что иное, как полный дифференциал dz, а сумма, стоящая во вторых скобках, по сравнению с Δx и Δy есть бесконечно малая высшего порядка ввиду того, что ε_1 и ε_2 — бесконечно малые. Обозначая

$$\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y=\gamma,$$

получим

$$\Delta z=dz+\gamma. \qquad (22)$$

Итак, доказано, что полное приращение функции отличается от ее полного дифференциала на бесконечно малую высшего порядка.

k. Основываясь на этом, можно приближенно заменять приращение функции ее полным дифференциалом и обратно, если, разумеется, Δx и Δy будут малыми величинами: при этом ошибка будет мала даже по сравнению с Δx и Δy.

l. Аналогичные рассуждения приведут нас к понятию частных производных и полного дифференциала функции трех и большего числа переменных. Но нужно помнить, что для функции, зависящей от более чем двух переменных, уместны только аналитические рассуждения, потому что такие функции не могут быть так хорошо и просто, как функции двух переменных, истолкованы геометрически.

m. Дадим определение частных производных и полного дифференциала для функций любого числа переменных.

Пусть имеется функция U n переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$:

$$U=f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Частным приращением функции многих переменных по какой-либо переменной называется то приращение, которое получит функция, если мы дадим приращение этой переменной, принимая все остальные переменные за постоянные.

Например, частное приращение функции U по x_1 будет

$$\Delta_{x_1}U=f(x_1+\Delta x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)-f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Частной производной функции многих переменных по какой-либо переменной называется предел (если он существует) отношения частного приращения функции по этой переменной к приращению этой переменной при условии, что последнее стремится к нулю.

Например, частная производная U по x_1 определяется так:

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} u}{\Delta x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Частным дифференциалом функции многих переменных по какой-либо переменной называется произведение частной производной по этой переменной на бесконечно малое приращение этой переменной. Последнее называется дифференциалом этой независимой переменной.

Например, частный дифференциал U по x_1 определяется так:

$$\partial_{x_1} u = \partial_{x_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1.$$

Заметим, что для независимых переменных мы считаем равносильными обозначения

$$\Delta x_1 = dx_1, \quad \Delta x_2 = dx_2 \quad \textit{и т. д.}$$

Очевидно, частный дифференциал отличается от частного приращения на бесконечно малую высшего порядка.

Полным приращением функции многих переменных называется то ее приращение, которое она получит, когда мы всем независимым переменным дадим приращения, то есть

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Полным дифференциалом функции многих переменных называется сумма всех ее частных дифференциалов, то есть

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n.$$

Так же как для функции двух переменных, можно доказать, что полный дифференциал отличается от полного ее приращения на бесконечно малую высшего порядка.

п. Частные производные и полный дифференциал часто встречаются в термодинамике, а так как современная физическая химия основана главным образом на термодинамике, то является совершенно необходимым, чтобы лица, имеющие дело с химией, в частности металлурги, могли свободно обращаться с частными производными.

о. Техника нахождения частных производных ничем не отличается от обычного дифференцирования, нужно только помнить, что при дифференцировании функции по какой-либо переменной все остальные переменные принимаются за постоянные.

Покажем это на примерах.

Пример 1. Найти частную производную по x функции

$$z = x^3 + 3ax^2y + 3bxy^2 + y^3.$$

Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x^3] + \frac{\partial}{\partial x}[3ax^2y] + \frac{\partial}{\partial x}[3bxy^2] + \frac{\partial}{\partial x}[y^3].$$

Ввиду того, что y мы здесь считаем постоянной, ее так же, как любую другую постоянную, можно выносить за знак частной производной; по той же причине частная производная y^3 по x будет равна нулю.

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x^3] + 3ay\frac{\partial}{\partial x}[x^2] + 3by^2\frac{\partial}{\partial x}[x] + 0.$$

Окончательно

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6ayx + 3by^2.$$

Пример 2. Найти полный дифференциал той же функции. Нам не хватает еще частной производной по y. Поэтому находим ее:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^3] + \frac{\partial}{\partial y}[3ayx^2] + \frac{\partial}{\partial y}[3bxy^2] + \frac{\partial}{\partial y}[y^3] =$$

$$= 0 + 3ax^2\frac{\partial}{\partial y}[y] + 3bx\frac{\partial}{\partial y}[y^2] + \frac{\partial}{\partial y}[y^3] =$$

$$= 3ax^2 + 6bxy + 3y^2.$$

Таким образом, полный дифференциал будет

$$dz = [3x^2 + 6axy + 3by^2]\,dx + [3ax + 6bxy + 3y^2]\,dy.$$

Пример 3. Известно, что уравнение состояния идеального газа имеет вид

$$p = \frac{R\tau}{V},$$

где R — постоянная, τ — абсолютная температура, V — объем, p — давление.

Найти увеличение давления, если температура изменилась на небольшую величину $d\tau$, а объем увеличился на dV.

Здесь p является функцией двух независимых переменных τ и V. Следовательно, нам нужно найти полное приращение функции p.

Так как приращения $d\tau$ и dV по условию малы, то вместо полного приращения мы можем искать полный дифференциал dp: ошибка будет малой высшего порядка, т. е. по сравнению с $d\tau$ и dV ею можно пренебречь. Итак, имеем полный дифференциал, для чего сначала находим частные производные

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{R\tau}{V}\right]=\frac{R}{V}\frac{\partial}{\partial \tau}[\tau]=\frac{R}{V},$$

$$\frac{\partial p}{\partial V}=\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{R\tau}{V}\right]=R\tau\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{1}{V}\right]=R\tau\frac{\partial}{\partial V}[V]=-\frac{R\tau}{V^2}.$$

Так как полный дифференциал имеет в данном случае выражение

$$dp=\frac{\partial p}{\partial \tau}d\tau+\frac{\partial p}{\partial V}dV,$$

то, подставляя сюда найденные частные производные, получим

$$dp=\frac{R}{V}d\tau-\frac{R\tau}{V^2}dV=\frac{R\tau}{V}\left[\frac{d\tau}{\tau}-\frac{dV}{V}\right].$$

Если необходимо, то, пользуясь начальным уравнением, мы можем, заменяя $\frac{R\tau}{V}$ на p, упростить выражение для полного дифференциала, так что будем иметь

$$dp=p\left[\frac{d\tau}{\tau}-\frac{dV}{V}\right].$$

Пример 4. Идеальный газ имеет температуру $\tau = 400$ К и объем $V=30$ м^3 при давлении $p=10^6$ Па. Вычислить, насколько увеличится давление, если температура увеличится на 0,5 К, а объем уменьшится на 0,15 м^3. Очевидно, здесь $d\tau=0{,}5$ и $dV=-0{,}15$. (Мы берем знак минус ввиду того, что объем не увеличился, а уменьшился.)

Подставляя все эти числа в выражение для полного дифференциала, которое мы уже получили в предыдущей задаче, будем иметь

$$dp = p\left[\frac{d\tau}{\tau} - \frac{dV}{V}\right] = 10^6 \cdot \left[\frac{0,5}{400} - \frac{-0,15}{30}\right] = 6,25 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

Итак, увеличение давления равно $6,25 \cdot 10^3$ Па.

р. Очень удобно использовать полный дифференциал в приближенных вычислениях для оценки погрешностей, что имеет большое значение для опытных наук. Допустим, что величины x и y мы измеряем непосредственно в результате эксперимента.

Пусть на основании этих величин мы должны вычислить величину z по формуле

$$z = f(x,\ y).$$

Мы знаем, что всякое измерение сопряжено с теми или иными погрешностями. Поэтому и вычисленная величина z также будет неточной. Требуется оценить погрешность, которая получается при вычислении z. Как мы уже выше сказали, значения x и y не являются точными. Обозначим точные значения этих величин через

$$x + \Delta x, \quad y + \Delta y;$$

тогда $z + \Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ будет точным значением вычисленной величины. Погрешность при вычислении z будет выражаться полным приращением функции

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y).$$

Так как Δx и Δy представляют собой погрешности измерения, а при хорошем эксперименте они должны быть малы, то можно полное приращение приближенно заменить полным дифференциалом:

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

(Здесь мы, как часто делают экспериментаторы, приближенное равенство обозначим изогнутым знаком $\approx$.) Как видно, для того чтобы найти z, нужно знать Δx и Δy. Однако точные величины погрешностей известными нам быть не могут. Кроме того, мы почти никогда не знаем, в какую сторону мы ошиблись при измерении, в сторону увеличения или в сторону уменьшения, иными словами, нам неизвестны ни величины Δx и Δy, ни их знак. Нам может быть известно только, что при том или ином измерении мы делаем погрешность, не бóльшую известной величины, т. е. мы можем гарантировать только верхнюю границу погрешности. Но этого вполне достаточно, так как мы не ставим перед собой цель найти точную величину погрешности величины z, а намерены заняться ее оценкой, т. е. нахождением ее верхней границы. Допустим теперь, что Δx и Δy — как раз максимальные возможные погрешности. Так как нам неизвестен знак погрешностей, то мы должны рассчитывать на самое худшее, а именно будем предполагать такой знак, чтобы величины $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x$ и $\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ были положительны. Чтобы не задумываться над знаком погрешностей, мы возьмем просто абсолютные величины

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x\right|, \quad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right|.$$

Таким образом, для вычисления верхней границы погрешности величины z будем иметь формулу

$$|\Delta z| \leqslant \left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right|.$$

В экспериментальных науках бывает важно знать также относительную погрешность.

Относительной погрешностью называется отношение погрешности какой-либо величины к самой величине.

Иногда относительную погрешность выражают в процентах. Тогда, очевидно, относительную погрешность нужно умножить на 100. В этом случае будем иметь формулу

$$100 \cdot \left|\frac{\Delta z}{z}\right| \leqslant 100 \cdot \frac{\left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right|}{|z|}.$$

Таким же способом находится верхняя граница погрешности, если иметь дело с функциями трех или большего числа переменных.

Пример 1. Найти верхнюю границу погрешности алгебраической суммы

$$u = x + y + \ldots + z.$$

Так как полный дифференциал будет

$$du = \Delta x + \Delta y + \ldots + \Delta z,$$

то имеем

$$|\Delta u| \leqslant |\Delta x| + |\Delta y| + \ldots + |\Delta z|,$$

т. е. погрешность суммы не больше суммы погрешностей всех слагаемых.

Пример 2. Найти верхнюю границу относительной погрешности произведения

$$u = xy\ldots z.$$

Так как полный дифференциал будет

$$du = u\left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \ldots + \frac{\Delta z}{z}\right),$$

то

$$\left|\frac{\Delta u}{u}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right| + \ldots + \left|\frac{\Delta z}{z}\right|,$$

т. е. относительная погрешность произведения не больше суммы относительных погрешностей всех множителей.

Пример 3. Вычислить верхнюю границу погрешности, которая получается при вычислении площади треугольника по формуле

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\alpha,$$

если при измерении сторон $a = 10$ см, $b = 15$ см погрешность не превышает 0,5 мм, а при измерении угла $\alpha = 45^\circ$ погрешность не превышает $0{,}5^\circ$.

Так как

$$dS = \frac{b}{2}\sin\alpha\,\Delta a + \frac{a}{2}\sin\alpha\,\Delta b + \frac{ab}{2}\cos\alpha\,\Delta\alpha,$$

то

$$|\Delta S| \leqslant \left|\frac{b}{2}\sin\alpha\Delta a\right| + \left|\frac{a}{2}\sin\alpha\Delta b\right| + \left|\frac{ab}{2}\cos\alpha\Delta\alpha\right|.$$

Далее, $\Delta a = 0{,}05$ см, $\Delta b = 0{,}05$ см, $\Delta\alpha = \frac{\pi}{180}\cdot 0{,}5$ (угол нужно выразить в радианной мере). Следовательно,

$$|\Delta S| \leqslant \frac{15}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0{,}05 + \frac{10}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0{,}05 + \frac{10\cdot 15}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\cdot 0{,}5,$$

$$|\Delta S| \leqslant 0{,}64\sqrt{2}.$$

Пример 4. Вычислить в процентах относительную погрешность, сохраняя все данные предыдущей задачи.

Так как

$$S = \frac{ab}{2}\sin\alpha = \frac{10\cdot 15}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{75}{2}\sqrt{2},$$

то относительная погрешность будет

$$100 \cdot \left|\frac{\Delta S}{S}\right| \leqslant 100 \cdot \frac{0{,}64\sqrt{2} \cdot 2}{75 \cdot \sqrt{2}},$$

$$100 \cdot \left|\frac{\Delta S}{S}\right| \leqslant 1{,}7\%.$$

§ 3. Частные производные и полный дифференциал сложной функции многих переменных

а. Пусть имеется функция

$$z = f(x, y). \tag{1}$$

Представим себе, что переменные x и y не являются независимыми, а представляют собой функции какой-либо третьей переменной u, которая и является независимой:

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u). \tag{2}$$

Таким образом, фактически z является функцией только одной переменной u, но зависит от u через посредство x и y. Мы будем говорить, что z есть *сложная функция* u.

Дадим u приращение Δu. Тогда x и y получат приращения Δx и Δy.

Предположим, что функция z имеет непрерывные частные производные по x и по y. Тогда, повторяя рассуждения пункта «h» предыдущего параграфа, мы вновь получим формулу

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \mathrm{E}_1 \Delta x + \mathrm{E}_2 \Delta y. \tag{3}$$

Разделим обе части равенства на Δu:

$$\frac{\Delta z}{\Delta u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta u} + \mathrm{E}_1 \frac{\Delta x}{\Delta u} + \mathrm{E}_2 \frac{\Delta y}{\Delta u} \tag{4}$$

и предположим, что x и y имеют производные по u. Тогда мы можем перейти к пределу, заставляя Δu стремиться к нулю. Так как в пределе E_1 и E_2 обратятся в нуль, то мы получим

$$\frac{dz}{du} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{du} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{du}. \tag{5}$$

Равенство (5) *называется формулой для полной производной сложной функции.*

b. Умножим обе части равенства (5) на du, тогда получим полный дифференциал сложной функции

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \qquad (6)$$

Итак, *внешний вид полного дифференциала не зависит от того, являются ли x и y независимыми переменными или же являются функциями какой-либо третьей переменной. Это важное свойство называется законом инвариантности полного дифференциала.*

c. Закон инвариантности имеет место даже и в том случае, если x и y являются функциями не одной, а двух или большего числа переменных. Докажем это.

Пусть x и y являются функциями двух независимых переменных:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v).$$

Дадим переменной u приращение Δu, а v оставим постоянной. Тогда Δx и Δy получат приращения Δx и Δy. Повторяя все рассуждения пункта «h» предыдущего параграфа, мы опять получим формулу (4). Однако теперь, когда мы устремили Δu к нулю, в пределе мы должны будем всюду написать не прямые d, а круглые ∂ ввиду того, что x, y и z зависят не только от u, но также еще и от v, и, следовательно, мы получим частные производные.

Таким образом, формула для полной частной производной по u имеет вид

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}. \qquad (7)$$

Если мы дадим переменной приращение Δv, а u оставим постоянной, то получим формулу для полной частной производной по v:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (8)$$

Далее, умножим равенство (7) на du, а равенство (8) на dv и сложим их почленно:

$$\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right). \qquad (9)$$

Так как

$$\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = dz; \quad \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = dx;$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = dy, \qquad (10)$$

то, подставляя (10) в (9), получим

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Если x и y зависят от трех или большего числа независимых переменных, закон инвариантности доказывается так же.

d. Закон инвариантности полного дифференциала имеет огромное значение как для математики, так и для прикладных наук.

Опираясь на него, мы можем вычислять полный дифференциал, не задумываясь над тем, являются ли x и y независимыми переменными или же функциями. Часто это весьма важно, так как в прикладных науках нередко мы не знаем, являются ли переменные, от которых зависит функция, независимыми.

e. Докажем некоторые свойства полного дифференциала, опираясь на закон инвариантности.

Пусть u является функцией n переменных x_1, x_2, x_3, ..., x_n:

$$u = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Вообразим временно, что x_1, x_2, ..., x_n суть функции какой-либо новой переменной t. Тогда и u будет функцией переменной t.

Из этого следует, что полный дифференциал совпадает с простым дифференциалом, а потому к полному дифференциалу можно применить все свойства простого дифференциала. Применив какое-либо свойство, мы можем опять забыть про t и считать переменные x_1, x_2, ..., x_n независимыми. Таким путем, например, найдем, что правила дифференцирования суммы, произведения, дроби и т. д. применимы и для полного дифференциала:

$$d[f(x, y) + F(x, y)] = df(x, y) + dF(x, y),$$

$$d[f(x, y) \cdot F(x, y)] = F(x, y)\, df(x, y) + f(x, y)\, dF(x, y),$$

$$d\frac{f(x, y)}{F(x, y)} = \frac{F(x, y)\, df(x, y) - f(x, y)\, dF(x, y)}{[F(x, y)]^2},$$

$$d \ln F(x, y) = \frac{dF(x, y)}{F(x, y)}$$

и т. д.

f. Последняя формула свидетельствует о том, что логарифмическое дифференцирование применимо и к нахождению полного дифференциала. Все это может значительно облегчить нахождение полного дифференциала.

Приведем примеры.

Пример 1. Найти полный дифференциал функции

$$u=\frac{A}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Воспользуемся логарифмическим дифференцированием:

$$\ln u=\ln A-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{du}{u}=d\ln A-\frac{1}{2}d\ln(x^2+y^2-z^2)=-\frac{1}{2}\,\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{d(x^2)+d(y^2)+d(z^2)}{x^2+y^2+z^2}=-\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{x^2+y^2+z^2},$$

откуда

$$du=-\frac{u}{x^2+y^2+z^2}(x\,dx+y\,dy+z\,dz)=-\frac{A\,(x\,dx+y\,dy+z\,dz)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Пример 2. Найти полный дифференциал функции

$$u=\Phi\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right).$$

Имеем

$$du=\Phi'\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)d\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=$$

$$=\Phi'\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\frac{(x^2+y^2)\,d(xy)-xy\,d(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\Phi'\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\frac{(x^2+y^2)(x\,dy+y\,dx)-xy\,(2x\,dx+2y\,dy)}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\Phi'\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\frac{(x^2y+y^3-2x^2y)\,dx+(x^3+xy^2-2xy^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\Phi'\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}(x\,dy-y\,dx).$$

§ 4. Дифференцирование неявных функций

а. Мы знаем, что часто функция одной или многих переменных бывает задана неявно. Тогда для того, чтобы найти производную или частные производные функции, ее нужно привести к явному виду. Мы знаем также, что для этого нужно решить относительно данной функции то уравнение, которое ее определяет. Но не всякое уравнение легко поддается решению. Многие уравнения, несмотря на огромный прогресс математики за последнее время, мы до сих пор решать не умеем.

Если не удается решить уравление, определяющее функцию, то, казалось бы, вопрос нахождения производной неявной функции также становится неразрешимым.

К счастью, имеется простой и легкий путь для нахождения производных неявных функций без решения уравнений. Мы приведем сейчас этот способ.

b. Пусть имеется уравнение

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Решив это уравнение относительно y, получим явную функцию x. Обозначим ее

$$y = \varphi(x). \tag{2}$$

Подставим теперь (2) в (1). Получим тождество

$$f(x, \varphi(x)) = 0. \tag{3}$$

Например, если

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

то

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Если мы произведем подстановку, то действительно получаем тождество

$$x^2 + (\pm\sqrt{R^2 - x^2})^2 - R^2 = 0,$$
$$x^2 + R^2 - x^2 - R^2 = 0,$$
$$0 = 0.$$

Но мы не будем решать уравнение (1), а только вообразим, что оно решено и что результат подставлен обратно в уравнение (1). Тогда уравнение

$$f(x, y) = 0 \tag{4}$$

можно рассматривать как сложную функцию x, тождественно равную нулю. Если взять производную этой функции по x, то получим также тождественно равную нулю производную. Применяя формулу для полной производной и принимая x за t, получим

$$\frac{d0}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}, \tag{5}$$

т. е.

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}, \tag{6}$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \tag{7}$$

Пример. Найти производную y по x, если

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

Решать это уравнение относительно y было бы затруднительно, так как оно третьей степени относительно y. Но этого и не нужно делать ввиду того, что у нас имеется формула (7):

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3ay, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3ax,$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}.$$

с. Пусть теперь у нас имеется уравнение

$$f(x, y, z)=0. \tag{8}$$

Можно также вообразить, что уравнение (8) решено относительно z, получена функция двух независимых переменных x и y и результат подставлен обратно. Тогда уравнение (7) можно рассматривать как тождественно равную нулю сложную функцию двух независимых переменных x и y.

Применяем формулу для полной частной производной, принимая x за u и y за v:

$$\frac{\partial 0}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial 0}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Очевидно, $\frac{\partial x}{\partial x}=1$, $\frac{\partial y}{\partial y}=1$; кроме того, $\frac{\partial y}{\partial x}=0$, $\frac{\partial x}{\partial y}=0$ ввиду того, что x и y являются независимыми переменными. Поэтому мы получим

$$0=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$0=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Из этих уравнений находим искомые частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \tag{8а}$$

Таким же путем мы можем найти частные производные неявной функции любого числа независимых переменных.

d. В пункте «f» второго параграфа этой главы мы нашли уравнение касательной плоскости.

Это уравнение имеет вид

$$Z-z=\frac{\partial z}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(Y-y). \tag{9}$$

Оно пригодно только для тех случаев, когда уравнение поверхности задано в явном виде. Допустим теперь, что поверхность задана неявным уравнением

$$f(x,\ y,\ z)=0.$$

Пользуясь формулами (8а), мы можем, подставляя их в (9), представить уравнение касательной плоскости в таком виде:

$$Z-z=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}(X-x)-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}(Y-y).$$

Сделав очевидное упрощение, будем иметь

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}=0. \tag{10}$$

e. В различных вопросах математики, механики и физики большое значение имеет прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно к касательной плоскости. Эта прямая называется *нормалью* к поверхности в точке $M(x;\ y;\ z)$. Напишем ее уравнение.

Из аналитической геометрии известно, что уравнение прямой, проходящей через данную точку, имеет вид

$$\frac{X-x}{l}=\frac{Y-y}{m}=\frac{Z-z}{n}. \tag{11}$$

Здесь l, m, n — проекции направляющего вектора прямой (11). Ввиду того, что за направляющий вектор нормали можно принять направляющий вектор касательной плоскости, мы можем положить

$$l=\frac{\partial f}{\partial x},\quad m=\frac{\partial f}{\partial y},\quad n=\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Следовательно, уравнения нормали будут такими:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \tag{12}$$

f. Пример 1. Написать уравнение касательной плоскости в точке $M(1;\ 2;\ 3)$ к сфере

$$x^2+y^2+z^2-14=0.$$

Вычисляем частные производные для этой точки:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x=2,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y=2\cdot 2=4,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=2z=2\cdot 3=6.$$

Подставляя полученные числа в уравнение (10), получим

$$(X-1)\cdot 1+(Y-2)\cdot 4+(Z-3)\cdot 6=0$$

или

$$X+4Y+6Z-27=0.$$

Пример 2. Написать уравнение нормали в той же точке к той же поверхности. Подставляя в уравнение (12) найденные уже числовые значения частных производных, получим

$$\frac{X-1}{2}=\frac{Y-2}{4}=\frac{Z-3}{6}.$$

§ 5. Частные производные и полные дифференциалы высшего порядка

а. Мы опять будем говорить лишь о функциях двух переменных (но рассуждения пригодны и для функций любого числа переменных).

Пусть имеем функцию

$$z=f(x,\ y)$$

и $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ — ее частные производные. Последние, очевидно, также являются функциями x и y, а поэтому также можно находить их частные производные по x и по y.

Частная производная по x частной производной по x называется частной производной второго порядка по x и обозначается так:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,\ y)=f''_{xx}(x,\ y). \tag{1}$$

Аналогично определяем и частную производную второго порядка по y:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,\ y)=f''_{yy}(x,\ y). \tag{2}$$

Частная производная по y частной производной по x называется смешанной второй частной производной по x и по y:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}f(x,\ y)=f''_{xy}(x,\ y). \qquad (3)$$

Аналогично определяем вторую частную производную, взятую сначала по y, а потом по x:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}f(x,\ y)=f''_{yx}(x,\ y). \qquad (4)$$

Можно доказать, что *для многих функций смешанная производная не зависит от порядка дифференцирования*, то есть что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}. \qquad (5)$$

Мы не будем приводить (ввиду сложности) доказательства этого важного свойства, а продемонстрируем его на каком-либо примере.

Пусть, например, дана функция

$$z=x^3+3ax^2y+3bxy^2+y^3.$$

Дифференцируем ее сначала по x, а потом по y:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+6axy+3by^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[3x^2+6axy+3by^2\right]=6ax+6by.$$

Теперь продифференцируем эту функцию сначала по y, а потом по x:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3ax^2+6bxy+3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[3ax^2+6by+3y^2\right]=6ax+6by.$$

Как мы видим, результат в обоих случаях получился одинаковым.

Если мы будем брать частные производные по x и по y частных производных второго порядка, то получим частные производные третьего порядка

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}. \qquad (6)$$

Аналогично определяем частные производные четвертого, пятого порядков и т. д.

b. Подобно тому как мы брали частные производные частных производных, мы можем брать полный дифференциал полного дифференциала. Результат называется *вторым полным дифференциалом* и обозначается так же, как второй дифференциал функции одной переменной, т. е. так:

$$d(dz) = d^2z. \tag{7}$$

Третьим полным дифференциалом называется полный дифференциал второго полного дифференциала и т. д.:

$$d(d^2z) = d^3z, \quad d(d^3z) = d^4z$$

и т. д.

c. Покажем теперь, как выражается второй полный дифференциал через частные производные второго порядка. Для общности мы допустим, что x и y могут зависеть от каких-либо других переменных. Обозначим для краткости

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q;$$

тогда

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Чтобы найти второй полный дифференциал, мы должны взять первый полный дифференциал первого полного дифференциала. Замечая при этом, что, как показано в пункте «е» § 3 этой главы, правило для дифференцирования суммы и произведения применимо и к полному дифференциалу, мы можем написать

$$\begin{aligned} d^2z = d\,[dz] = d\,[p\,dx + q\,dy] = d\,[p\,dx] + d\,[q\,dy] = \\ = dp\,dx + pd\,[dx] + dq\,dy + qd\,[dy] = \\ = dp\,dx + dq\,dy + pd^2x + qd^2y. \end{aligned}$$

Так как p и q сами являются функциями двух переменных x и y, то

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy, \quad dq = \frac{\partial q}{\partial x}dx + \frac{\partial q}{\partial y}dy.$$

Поэтому

$$d^2z = \left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial q}{\partial x}dx + \frac{\partial q}{\partial y}\right)dy + p\,d^2x + qd^2y.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},$$

$$\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},\quad \frac{\partial q}{\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Подставляя их в последнюю формулу, после раскрытия скобок окончательно получим

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial z}{\partial x}d^2x+\frac{\partial z}{\partial y}d^2y. \quad (8)$$

Если x и y являются независимыми переменными или линейными функциями других каких-либо переменных, то их вторые дифференциалы равны нулю:

$$d^2x=0,\quad d^2y=0$$

и формула (8) упрощается:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \quad (9)$$

Мы видим, что закон инвариантности применим ко второму дифференциалу лишь с очень большими ограничениями: он будет верен только в том случае, если x и y являются линейными функциями других переменных, во всех остальных случаях он неприменим. Рассматривая формулу (9), мы видим, что она очень напоминает формулу квадрата суммы двух чисел. Эта аналогия навела на мысль записывать второй дифференциал в нижеследующей символической форме:

$$d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z. \quad (10)$$

Если мы «возведем в квадрат» сумму, стоящую в скобках, «умножим» результат на z, приписывая его всегда к ∂^2, а затем будем считать показатели степени у круглых ∂ не за настоящие степени, а за указатели, то и получим формулу (9) для второго полного дифференциала.

d. Аналогично мы найдем выражение для третьего полного дифференциала через третьи частные производные, затем найдем выражение для четвертого, пятого дифференциалов и т. д. При этом если x и y — независимые переменные или линейные функции, то полученные выражения будут аналогичны кубу суммы, четвертой степени суммы двух слагаемых и вообще аналогичны биному

Ньютона. Применяя символическую запись, мы можем выражение для n-го полного дифференциала представить в таком виде:

$$\partial^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z. \qquad (11)$$

Если u является функцией переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$, то n-й полный дифференциал символически запишется как полином Ньютона:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} dx_3 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^n z.$$

Заметим, что последнее выражение также предполагает, что $x_1, x_2, \ldots, x_m$ являются независимыми переменными или же линейными функциями каких-либо других переменных, ввиду того, что закон инвариантности имеет здесь те же ограничения, какие указаны для второго полного дифференциала функции двух переменных.

§ 6. Упражнения

1. Указать, где находится точка разрыва функции

$$z = \frac{x^3 - 2x - y + 4}{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}.$$

Ответ: в точке (1; 2).

2. Указать, где находится разрыв функции

$$z = \frac{1}{x} + x + y.$$

Ответ: функция имеет ось ординат линией разрыва.

3. Имеет ли функция $u = \frac{A}{x^2 - y^2}$ разрыв? *Ответ:* функция имеет две линии разрыва: прямые $y = x$, $y = -x$.

4. Имеет ли функция

$$z = \frac{Ax + By + C}{x^4 - y^4 - 2x^2 + 1}$$

разрыв? *Ответ:* функция имеет две линии разрыва: круг $x^2 + y^2 = 1$ и равнобочную гиперболу $x^2 - y^2 = 1$.

5. Где находится разрыв функции

$$u = \frac{3xyz}{x^2 + y^2 + z^2}?$$

Ответ: в начале координат.

6. Где находится разрыв функции

$$u=\frac{1+x+y+z}{x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z+3}?$$

Ответ: в точке $(-1;\ -1;\ -1)$.

7. Имеет ли функция

$$u=\frac{A}{x^2+y^2+z^2-a^2}$$

разрывы? *Ответ:* функция имеет разрывы на шаре $x^2+y^2+z^2=a^2$.

8. Найти частные производные функции

$$z=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F.$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=2(Ax+By+D)$, $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2(Bx+Cy+E)$.

9. Найти $\frac{\partial u}{\partial p}$ и $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ для функции $u=p\sin^3\varphi$. *Ответ:* $\frac{\partial u}{\partial p}=\sin^3\varphi$, $\frac{\partial u}{\partial \varphi}=3p\sin^2\varphi\cos\varphi$.

10. Найти $\frac{\partial A}{\partial a}$ и $\frac{\partial A}{\partial b}$ для функции $A=a^b$. *Ответ:* $\frac{\partial A}{\partial a}=ba^{b-1}$, $\frac{\partial A}{\partial b}=a^b\ln a$.

11. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z=\frac{y}{x}$. *Ответ:* $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}$.

12. Вычислить частные производные функции $z=\frac{x+2y}{2x+y}$ в точке $(0;\ -3)$. *Ответ:* $\frac{\partial z}{\partial x}=1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

13. Вычислить частные производные функции $z=\frac{125}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в точке $(-4;\ -3)$. *Ответ:* $\frac{\partial z}{\partial x}=4$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3$.

14. Путем частного дифференцирования по x или по y доказать, что формулы

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,\quad \cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

переходят друг в друга.

15. Доказать, что для функции

$$U=\frac{Ax+By+Cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

имеет место соотношение

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

16. Найти частные производные функции $u = \Phi(x^2+y^2+z^2)$. *Ответ:* $\frac{\partial u}{\partial x} = \Phi'(x^2+y^2+z^2)\,2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \Phi'(x^2+y^2+z^2)\,2y$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \Phi'(x^2+y^2+z^2)\,2z$.

17. Доказать, что функция $z = y\varphi(x^2-y^2)$ удовлетворяет уравнению с частными производными

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

18. Доказать, что функция $z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z.$$

19. Доказать, что функция $z = e^y\cdot\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz.$$

20. Проверить равенство

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z},$$

где $u = \ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$.

21. Написать полный дифференциал функции

$$u = xy + yz + zx.$$

Ответ: $du = (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$.

22. Написать полный дифференциал функции $\omega = u^v$. *Ответ:* $d\omega = vu^{v-1}\,du + u^v\ln u\,dv$.

23. Вычислить полный дифференциал функции $u = xy^2e^z$ в точке $(1;\ 2;\ 0)$, если $dx = \frac{1}{3}$, $dy = \frac{1}{6}$, $dz = \frac{1}{12}$. *Ответ:* $du = \frac{7}{3}$.

24. Доказать, что при равномерном нагревании однородного прямоугольного параллелепипеда его объем увеличивается на величину, равную произведению объема до нагревания на сумму относительных удлинений его ребер, если пренебречь малыми высшего порядка.

25. Вычислить, как увеличится объем конуса, у которого радиус основания $R = 3$ м, а высота $H = 1$ м, если

при нагревании радиус увеличивается на 3 мм, а высота на 1 мм. *Ответ:* объем увеличится на $0{,}009\pi$ м³.

26. При вычислении высоты дерева по формуле $a=b\operatorname{tg}\varphi$ (рис. 55) измерили b и φ: $b=10$ м и $\operatorname{tg}\varphi=0{,}8$. Какую погрешность следует ожидать при вычислении по нашей формуле, если погрешность при измерении b не превышает 5 см, а погрешность при измерении угла не превышает $0{,}5°$. *Ответ:* погрешность не превышает 18,3 см.

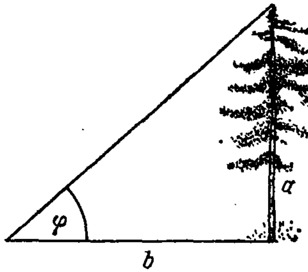


Рис. 55

27. Найти полную производную сложной функции $z=\varphi(x, y)$, если $x=a\cos t$, $y=a\sin t$. *Ответ:* $\frac{dz}{dt}=a\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos t-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\sin t\right]$.

28. Найти полную производную сложной функции

$$z=\varphi(x, y, z),$$

если $x=a(1+\alpha t)$, $y=b(1+\alpha t)$, $z=c(1+\alpha t)$ при постоянных a, b, c, α. *Ответ:* $\frac{dz}{dt}=\alpha\left[a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b\frac{\partial\varphi}{\partial y}+c\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]$.

29. Найти $\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial u}$, если $x=u^2+v^2$, $y=\frac{v}{u}$, $z=uv$.

Ответ: $\frac{\partial\varphi}{\partial u}=2u\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{v}{u^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+v\frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

30. Основываясь на законе инвариантности, найти сокращенным способом полный дифференциал функции $Z=\Phi[xy+\varphi(xy)]$. *Ответ:* $dz=\Phi'[xy+\varphi(xy)]\cdot[1+\varphi'(xy)]\cdot[(x\,dy+y\,dx)]$.

31. Так же найти полный дифференциал функции $u=f(xy)\cdot\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\psi(x^2+y^2)$. *Ответ:*

$$du=u\left[(x\,dy+y\,dx)\frac{f'}{f}+\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}\frac{\varphi'}{\varphi}+2(x\,dx+y\,dy)\frac{\psi'}{\psi}\right].$$

32. Найти вторые частные производные функции $u=\ln(x^2+y^2)$. *Ответ:*

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=2\cdot\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2u}{\partial y^2}=2\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)},\quad \frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

33. Найти $\frac{\partial^3u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$, где $u=e^{xyz}$. *Ответ:*

$$\frac{\partial^3u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=e^{xyz}(x^2y^2z^2+3xyz+1).$$

34. Найти d^2u, если $u=x^2y^2$. *Ответ:* $d^2u=2(y^2\,dx^2+$ $+4xy\,dx\,dy+x^2\,dy^2)$.

35. Найти d^2u, если $u=e^{xy}$. *Ответ:* $d^2u=e^{xy}[y^2\,dx^2+$ $+2(1+xy)\,dx\,dy+x^2\,dy^2]$.

36. Найти d^3u, если $u=xyz$. *Ответ:* $d^3u=6\,dx\,dy\,dz$.

37. Найти d^4u, если $u=\sin(x+y+z)$. *Ответ:* $d^4u=$ $=u\,(dx+dy+dz)^4$.

38. Доказать, что функция

$$z=\varphi(y+ax)+\psi(y-ax)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными второго порядка вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

39. Доказать, что функция

$$z=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$$

удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

40. Доказать, что функция

$$z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

41. Если $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, то доказать, что имеет место равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

42. Найти производную неявной функции $ey=xe^y$. *Ответ:* $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y}{e-xe^y}$.

43. Вычислить производную $\frac{dy}{dx}$ неявной функции x^2+ $+2xy+y^2-4x+2y-2=0$ при $x=1$, $y=1$. *Ответ:* $\frac{dy}{dx}=0$.

44. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для неявной функции $x^3+y^3+z^3-$ $-3xyz=0$. *Ответ:*

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x^2-yz}{z^2-xy};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y^2-xz}{z^2-xy}.$$

45. Доказать, что функция z переменных x и y, заданная неявно уравнением $x+az=\varphi(y-bz)$, удовлетворяет уравнению $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

46. Доказать, что функция z переменных x и y, заданная неявно уравнением $z=x\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$, удовлетворяет уравнению $y\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}=z$.

47. Написать уравнение касательной плоскости K поверхности $z=x^2-y^2$ в точке (5; 4; 9). *Ответ:* $10x-8y-z-9=0$.

48. Написать уравнение нормали к той же поверхности в той же точке. *Ответ:* $\frac{x-5}{10}=\frac{y-4}{-8}=\frac{z-9}{-1}$.

49. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz-7=0$ в точке (1; 2; —1). *Ответ:* касательная плоскость $x+4y-5z-10=0$, нормаль $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+1}{-5}$.

50. Доказать, что уравнение касательной плоскости к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ в точке $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ эллипсоида имеет вид $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}=1$.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Глава 1

ТЕОРИЯ ДЕЛИМОСТИ

§ 1. Основные понятия и теоремы

a. Теория чисел занимается изучением свойств целых чисел. Целыми мы будем называть не только числа натурального ряда 1, 2, 3, ... (положительные целые), но также нуль и отрицательные целые —1, —2, —3, ... Так что, расположив целые числа в возрастающем порядке, получим ряд, в котором разность между большим и меньшим соседними членами везде будет равна единице.

Как правило, при изложении теоретического материала мы будем обозначать буквами только целые числа. Случаи, когда буквы могут обозначать и не целые числа, если последнее не будет ясно само по себе, мы будем особо оговаривать.

Сумма $a+b$, разность $a-b$ и произведение ab двух целых a и b являются также целыми. Но частное $\frac{a}{b}$ от деления a на b (если b не равно нулю) может быть как целым, так и не целым.

b. В случае, когда частное $\frac{a}{b}$ от деления a на b — целое, обозначая его буквою q, имеем $a=bq$, т. е. *a представляется произведением b на целое.* Мы говорим тогда, что *a делится на b* или, что *b делит a.* При этом a называем *кратным* числа b, а b — *делителем* числа a. То обстоятельство, что b является делителем числа a, записывается так: $b\diagdown a$.

Примеры. Имеем

$$21=7\cdot3,\quad 0=9\cdot0,\quad -85=17(-5).$$

Поэтому можем сказать: 21 делится на 7, 0 делится на 9, —85 делится на 17, или: 7 делит 21, 9 делит 0, 17 делит —85.

Имеют место две следующие теоремы:

1. *Если a кратно m, m кратно b, то a кратно b*

Действительно, из $a=ma_1$, $m=bm_1$, следует $a=ba_1m_1$. Таким образом, a представляется произведением b на целое число a_1m_1 и тем самым делится на b.

2. *Если в равенстве вида $k+l+\ldots+n=p+q+\ldots+s$ относительно всех членов, кроме какого-либо одного, известно, что они кратны b, то и этот один член кратен b.*

Действительно, пусть таким одним членом будет k. Имеем

$$l=bl_1,\ \ldots,\ n=bn_1,\ p=bp_1,\ q=bq_1,\ \ldots,\ s=bs_1,$$

$$k=p+q+\ldots+s-l-\ldots-n=$$
$$=b(p_1+q_1+\ldots+s_1-l_1-\ldots-n_1).$$

Таким образом, k представляется произведением b на целое число $p_1+q_1+\ldots+s_1-l_1-\ldots-n_1$ и тем самым делится на b.

c. В заключение мы докажем еще одну теорему, которая нам будет весьма нужна в дальнейшем (теорема о делении с остатком).

Всякое целое a представляется единственным способом с помощью положительного целого b равенством вида

$$a=bq+r;\qquad 0\leqslant r<b.$$

Действительно, одно представление числа a равенством такого вида получим, взяв bq равным наибольшему кратному числа b, не превосходящему a. Допустив же существование представления числа a еще одним равенством того же вида: $a=bq_1+r_1$; $0\leqslant r_1<b$, и вычитая почленно это последнее равенство из предыдущего, получим

$$0=b(q-q_1)+r-r_1. \qquad (1)$$

Отсюда убедимся (2, b), что разность $r-r_1$ кратна b. С другой стороны, легко видеть, что та же разность, как разность двух неотрицательных чисел, меньших b, сама будет численно меньше b, числом же, кратным b и численно меньшим b, является лишь число 0. Поэтому $r-r_1=0$, а отсюда и из равенства (1) будет следовать, что и $q-q_1=0$. Таким образом, второе представление числа a тождественно первому.

Число q называется *неполным частным*, а число r — *остатком* от деления a на b. Очевидно, что при $r=0$ понятия «неполное частное» и «частное» совпадают.

Примеры. Пусть $b=14$. Имеем

$$\begin{aligned} 177 &= 14\cdot 12+9, && 0<9<14,\\ -64 &= 14\cdot(-5)+6, && 0<6<14,\\ 154 &= 14\cdot 11+0, && 0=0<14. \end{aligned}$$

§ 2. Общий наибольший делитель

a. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь положительные делители чисел. Всякое целое, делящее одновременно целые $a, b, \ldots, l$, называется их *общим делителем*. Наибольший из общих делителей называется общим наибольшим делителем и обозначается символом $(a, b, \ldots, l)$. Если $(a, b, \ldots, l)=1$, то $a, b, \ldots, l$ называются *взаимно простыми*. Если каждое из чисел $a, b, \ldots, l$ взаимно просто с каждым другим из них, то $a, b, \ldots, l$ называются *попарно простыми*. Очевидно, числа попарно простые всегда и взаимно простые. В случае же двух чисел понятия «попарно простые» и «взаимно простые» совпадают.

Примеры. Числа 6, 10, 15, ввиду $(6, 10, 15)=1$,— взаимно простые. Числа 8, 13, 21, ввиду $(8, 13)=(8, 21)=$ $=(13, 21)=1$,— попарно простые.

b. Далее займемся общими делителями двух чисел.

1. *Если a кратно b, то совокупность общих делителей чисел a и b совпадает с совокупностью делителей одного b; в частности $(a, b)=b$.*

Действительно, всякий общий делитель чисел a и b является делителем и одного b. Обратно, раз a кратно b, то (1, b, § 1) всякий делитель числа b является также делителем числа a, т. е. является общим делителем чисел b и a. Таким образом, совокупность общих делителей чисел a и b совпадает с совокупностью делителей одного b. А так как наибольший делитель числа b есть само b, то $(a, b)=b$.

2. *Если*

$$a=bq+c,$$

то совокупность общих делителей чисел a и b совпадает с совокупностью общих делителей чисел b и c; в частности $(a, b)=(b, c)$.

Действительно, написанное равенство показывает, что всякий общий делитель чисел a и b делит также и c (**2**, **b**, § 1) и, следовательно, является общим делителем чисел b и c. Обратно, то же равенство показывает, что всякий общий делитель чисел b и c делит a и, следовательно, является общим делителем чисел a и b. Таким образом, общие делители чисел a и b суть те же, что и общие делители чисел b и c; в частности, должны совпадать и наибольшие из этих делителей, т. е. $(a, b) = (b, c)$.

c. Для разыскания общего наибольшего делителя, а также для вывода его важнейших свойств применяется *алгоритм Евклида*. Он состоит в нижеследующем. Пусть a и b — положительные целые и $a > b$. Согласно **c**, § 1 находим ряд равенств

$$\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_2, & 0 < r_2 < b, \\ b = r_2q_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2, \\ r_2 = r_3q_3 + r_4, & 0 < r_4 < r_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} = r_nq_n, & \end{array} \qquad (1)$$

заканчивающийся, когда получается некоторое $r_{n+1} = 0$. Последнее неизбежно, так как ряд $b, r_2, r_3, \ldots$ как ряд убывающих целых не может содержать более чем b положительных.

d. Рассматривая равенства (1), идя сверху вниз, убеждаемся (**b**), что общие делители чисел a и b одинаковы с общими делителями чисел b и r_2, далее одинаковы с общими делителями чисел r_2 и r_3, чисел r_3 и $r_4, \ldots$, чисел r_{n-1} и r_n, наконец (**a**), с делителями одного числа r_n, являющегося последним не равным нулю остатком алгоритма Евклида. Одновременно с этим имеем

$$(a, b) = (b, r_2) = (r_2, r_3) = \ldots = (r_{n-1}, r_n) = r_n.$$

Мы приходим к следующим результатам.

1. *Совокупность общих делителей чисел a и b совпадает с совокупностью делителей их общего наибольшего делителя.*

2. *Этот общий наибольший делитель равен последнему не равному нулю остатку алгоритма Евклида.*

Пример. Применим алгоритм Евклида к отысканию (525, 231). Находим (вспомогательные вычисления приведены слева)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & & & 525 & \underline{231} & \\
 & & & \underline{462} & 2 & \\
 & & 231 & \underline{63} & & \\
 & & \underline{189} & 3 & & \\
 & 63 & \underline{42} & & & \\
 & \underline{42} & 1 & & & \\
42 & \underline{21} & & & & \\
\underline{42} & 2 & & & & \\
» & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{aligned}
525 &= 231\cdot 2+63,\\
231 &= 63\cdot 3+42,\\
63 &= 42\cdot 1+21,\\
42 &= 21\cdot 2.
\end{aligned}$$

Здесь последний положительный остаток есть $r_4=21$. Значит, $(525,\ 231)=21$.

e. 1. *Обозначая буквою m любое положительное целое, имеем $(am,\ bm)=(a,\ b)\,m$.*

2. *Обозначая буквою δ любой общий делитель чисел a и b, имеем $\left(\frac{a}{\delta},\ \frac{b}{\delta}\right)=\frac{(a,\ b)}{\delta}$; в частности, имеем $\left(\frac{a}{(a,\ b)},\ \frac{b}{(a,\ b)}\right)=1$, т. е. частные от деления двух чисел на их общий наибольший делитель суть числа взаимно простые.*

Действительно, умножив соотношения (1) почленно на m, получим новые соотношения, где вместо a, b, r_2, $\ldots$, r_n будут стоять am, bm, r_2m, $\ldots$, r_nm. Поэтому $(am,\ bm)=r_nm$ и, таким образом, верно утверждение 1.

Применяя утверждение 1, находим

$$(a,\ b)=\left(\frac{a}{\delta}\delta,\ \frac{b}{\delta}\delta\right)=\left(\frac{a}{\delta},\ \frac{b}{\delta}\right)\delta.$$

Отсюда следует утверждение 2.

f. 1. *Если $(a,\ b)=1$, то $(ac,\ b)=(c,\ b)$.*

Действительно, $(ac,\ b)$ делит ac и bc, значит, (1, d) оно делит и $(ac,\ bc)$ ввиду 1, е равное c. Но $(ac;\ b)$ делит и b, поэтому оно делит и $(c,\ b)$. Обратно, $(c,\ b)$ делит ac и b, поэтому оно делит и $(ac,\ b)$. Таким образом, $(ac,\ b)$ и $(c,\ b)$ взаимно делят друг друга и, следовательно, равны между собою.

2. *Если* $(a, b)=1$ *и* ac *делится на* b, *то* c *делится на* b.

Действительно (1, b), при ac, делящемся на b, имеем $(ac, b)=b$ и из 1 получаем $b=(c, b)$. А этим (1, b) и доказывается делимость c на b.

3. *Если каждое* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *взаимно просто с каждым* $b_1, b_2, \ldots, b_n$, *то и произведение* $a_1a_2\ldots a_m$ *взаимно просто с произведением* $b_1b_2\ldots b_n$.

Действительно, согласно 1 находим

$$(a_1a_2a_3\ldots a_m, b_k)=(a_2a_3\ldots a_m, b_k)=$$
$$=(a_3\ldots a_m, b_k)=\ldots=(a_m, b_k)=1,$$

и далее, полагая ради краткости $a_1a_2a_3\ldots a_m=A$, точно таким же путем выводим

$$(b_1b_2b_3\ldots b_n, A)=(b_2b_3\ldots b_n, A)=$$
$$=(b_3\ldots b_n, A)=\ldots=(b_n, A)=1.$$

§ 3. Общее наименьшее кратное

a. Всякое целое, кратное всех данных чисел, называется их *общим кратным*. Наименьшее положительное общее кратное называется *общим наименьшим кратным*. Здесь мы будем рассматривать только общие кратные двух положительных чисел.

b. Пусть $(a, b)=d$, $a=da_1$, $b=db_1$ и, следовательно (2, e, § 2), $(a_1, b_1)=1$. Пусть M—какое-либо общее кратное чисел a и b. Так как M кратно a, то $M=ak$, где k—целое. Но M кратно и b. Поэтому

$$\frac{M}{b}=\frac{ak}{b}=\frac{a_1k}{b_1}$$

должно быть целым и, следовательно (2, f, § 2), k должно делиться на b_1. Поэтому $k=b_1t$, где t —целое, причем для M получается формула

$$M=\frac{ab}{d}t. \qquad (1)$$

Обратно, очевидно, что M, представляемое формулой (1) при любом целом t, будет общим кратным a и b, и, таким образом, формула (1) дает общий вид всех общих кратных чисел a и b.

Наименьшее положительное из этих общих кратных, т. е. общее наименьшее кратное, получаем при $t=1$. Оно будет

$$m=\frac{ab}{d}. \tag{2}$$

Теперь формулу (1) можно переписать так:

$$M=mt. \tag{3}$$

Формулы (3) и (2) приводят к теоремам.

1. *Совокупность общих кратных двух чисел совпадает с совокупностью кратных их общего наименьшего кратного.*

2. *Это общее наименьшее кратное двух чисел равно их произведению, деленному на их общий наибольший делитель.*

§ 4. Простые числа

a. Число 1 имеет только один положительный делитель, именно 1. В этом отношении число 1 в ряде натуральных чисел стоит совершенно особо.

Всякое целое, большее 1, имеет не менее двух делителей, именно 1 и самого себя; если этими делителями исчерпываются все положительные делители целого числа, то оно называется *простым*. Целое, большее 1, имеющее кроме 1 и самого себя другие положительные делители, называется составным.

b. *Наименьший отличный от единицы делитель целого, большего единицы, есть число простое.*

Действительно, пусть q — наименьший отличный от 1 делитель целого a, большего 1. Если бы q было бы составным, то оно имело бы некоторый делитель q_1 с условием $1<q_1<q$, причем число a, делясь на q, должно (1, b, § 1) делиться на q_1. А это противоречило бы нашему предположению относительно числа q.

c. *Наименьший отличный от единицы делитель составного числа a (согласно* b *он будет простым) не превосходит $\sqrt{a}$.*

Действительно, пусть q — этот делитель, тогда $a=qa_1$, $a_1\geqslant q$, откуда, перемножая и сокращая на a_1, получим $a\geqslant q^2$, $q\leqslant\sqrt{a}$.

d. *Простых чисел бесконечно много.*

Справедливость этой теоремы следует из того, что каковы бы ни были различные простые $p_1, p_2, \ldots, p_k$, можно получить новое простое, среди них не находящееся. Таковым будет простой делитель суммы $p_1p_2\ldots$ $\ldots p_k+1$, который деля всю сумму, не может совпадать ни с одним из простых $p_1, p_2, \ldots, p_k$ (2, b, § 1).

e. Для составления таблицы простых чисел, не превосходящих данного целого N, существует простой способ, называемый *решетом Эратосфена*. Он состоит в следующем.

Выписываем числа

$$1,\ 2,\ \ldots,\ N. \tag{1}$$

Первое большее 1 число этого ряда есть 2. Оно делится только на 1 и на самого себя и, следовательно, оно простое.

Вычеркиваем из ряда (1) (как составные) все числа, кратные 2, кроме самого 2. Первое следующее за 2 невычеркнутое число есть 3. Оно не делится на 2 (иначе оно оказалось бы вычеркнутым). Следовательно, 3 делится только на 1 и на самого себя, а потому оно также будет простым.

Вычеркиваем из ряда (1) все числа, кратные 3, кроме самого 3. Первое следующее за 3 невычеркнутое число есть 5. Оно не делится ни на 2, ни на 3 (иначе оно оказалось бы вычеркнутым). Следовательно, 5 делится только на 1 и на самого себя, а потому оно также будет простым.

И т. д.

Когда указанным способом уже вычеркнуты все числа, кратные простых, меньших простого p, то все невычеркнутые, меньшие p^2, будут простые. Действительно, всякое составное a, меньшее p^2, нами уже вычеркнуто, как кратное его наименьшего простого делителя, который $\leqslant \sqrt{a} < p$. Отсюда следует:

1. *Приступая к вычеркиванию кратных простого p, это вычеркивание следует начинать с p^2.*

2. *Составление таблицы простых чисел, не превосходящих N, закончено, как только вычеркнуты все составные кратные простых, не превосходящих $\sqrt{N}$.*

§ 5. Единственность разложения на простые сомножители

a. *Всякое целое a или взаимно просто с данным простым p, или же делится на p.*

Действительно, (a, p), будучи делителем p, может быть равно или 1, или p. В первом случае a взаимно просто с p, во втором a делится на p.

b. *Если произведение нескольких сомножителей делится на данное простое p, то, по крайней мере, один из сомножителей делится на p.*

Действительно (**a**), каждый сомножитель или взаимно прост с p, или же делится на p. Если бы все сомножители были взаимно просты с p, то и их произведение (3, **f**, § 2) было бы взаимно просто с p. Поэтому хоть один сомножитель делится на p.

c. *Всякое целое, большее единицы, разлагается на произведение простых сомножителей и притом единственным способом (если отвлечься от порядка следования сомножителей).*

Действительно, пусть a — целое, большее 1; обозначая буквою p_1 его наименьший простой делитель, имеем $a = p_1 a_1$. Если $a_1 > 1$, то, обозначая буквою p_2 его наименьший простой делитель, имеем $a_1 = p_2 a_2$. Если $a_2 > 1$, то подобно этому находим $a_2 = p_3 a_3$ и т. д., пока не придем к какому-либо a_n, равному 1. Тогда получим $a_{n-1} = p_n$. Перемножив все найденные равенства и произведя сокращение, получим следующее разложение a на простые сомножители:

$$a = p_1 p_2 p_3 \ldots p_n.$$

Допустим, что для того же самого a существует и второе разложение на простые сомножители $a = q_1 q_2 q_3 \ldots q_s$. Тогда найдем

$$p_1 p_2 p_3 \ldots p_n = q_1 q_2 q_3 \ldots q_s.$$

Правая часть этого равенства делится на q_1. Следовательно (**b**), по крайней мере один из сомножителей левой части должен делиться на q_1. Пусть, например, p_1 делится на q_1 (порядок следования сомножителей в нашем распоряжении); тогда найдем $p_1 = q_1$ (p_1 кроме 1 делится только на p_1). Сократив обе части равенства на $p_1 = q_1$, получим $p_2 p_3 \ldots p_n = q_2 q_3 \ldots q_s$. Повторив прежние рассуждения применительно к этому равенству, получим $p_3\ldots p_n=q_3\ldots q_s$ и т. д., пока, наконец, в одной части равенства, например, в левой не сократятся все сомножители. Но одновременно должны сократиться и все сомножители правой части, так как равенство $1=q_{n+1}\ldots q_s$ при $q_{n+1}, \ldots, q_s$, превосходящих 1, невозможно. Таким образом, второе разложение на простые сомножители тождественно первому.

d. В разложении числа a на простые сомножители некоторые из них могут повторяться. Обозначая буквами $p_1, p_2, \ldots, p_k$ различные из них и буквами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ кратности их вхождения в a, получим так называемое *каноническое разложение* числа a на сомножители

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}.$$

Пример. Каноническое разложение числа 588 000 будет: $588\,000=2^5\cdot 3\cdot 5^3\cdot 7^2$.

e. В заключение мы докажем несколько теорем, касающихся делителей числа, а также общего наибольшего делителя и общего наименьшего кратного нескольких чисел.

1. *Пусть $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа a. Тогда все делители числа суть все числа вида*

$$d=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_k^{\beta_k}; \tag{1}$$
$$0\leqslant\beta_1\leqslant\alpha_1,\ 0\leqslant\beta_2\leqslant\alpha_2,\ \ldots,\ 0\leqslant\beta_k\leqslant\alpha_k.$$

Действительно, пусть d делит a. Тогда (**b**, § 1) $a=dq$ и, следовательно, все простые делители числа d входят в каноническое разложение числа a с показателями, не меньшими тех, с которыми они входят в каноническое разложение числа d. Поэтому d имеет вид (1).

Обратно, всякое d вида (1) делит a.

Пример. Все делители числа $720=2^4\cdot 3^2\cdot 5$ получим, если в выражении $2^{\beta_1}3^{\beta_2}5^{\beta_3}$ заставим $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ независимо друг от друга пробегать значения $\beta_1=0, 1, 3, 4$; $\beta_2=0, 1, 2$; $\beta_3=0, 1$. Поэтому указанные делители будут 1, 2, 4, 8, 16, 3, 6, 12, 24, 48, 9, 18, 36, 72, 144, 5, 10, 20, 40, 80, 15, 30, 60, 120, 240, 45, 90, 180, 360, 720.

2. *Общий наибольший делитель нескольких чисел является произведением степеней вида p^α, где p — общий простой делитель всех этих чисел, а α — наименьший из* *показателей, с которыми p входит в их канонические разложения.*

3. *Совокупность общих делителей нескольких чисел совпадает с совокупностью делителей их общего наибольшего делителя.*

Действительно, пусть d — общий делитель чисел $a, \ldots, l$. Тогда имеют место равенства вида $a = da_1, \ldots, l = dl_1$, которые показывают, что: a) всякий простой делитель p числа d должен быть делителем и каждого из чисел $a, \ldots, l$, а также что: b) этот делитель p должен входить в каноническое разложение числа d с показателем, не превосходящим наименьшего из тех, с которыми он входит в канонические разложения чисел $a, \ldots, l$; обратно, каждое d, подчиненное условиям a) и b), очевидно, является общим делителем чисел $a, \ldots, l$.

Общим наибольшим делителем, т. е. наибольшим из общих делителей (а, § 2) является тот из последних, в каноническом разложении которого показатели степеней простых чисел точно равны наименьшим из тех, с какими эти простые числа входят в канонические разложения чисел $a, \ldots, l$.

А всякий общий делитель, как имеющий в своем каноническом разложении все показатели не превосходящими соответствующих показателей в каноническом разложении общего наибольшего делителя, будет делителем последнего.

Пример. Общий наибольший делитель чисел $6\,791\,400 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11$, $178\,500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 17$, $27\,720 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ равен $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.

4. *Общее наименьшее кратное нескольких чисел является произведением степеней вида p^α, где p — простой делитель по меньшей мере одного из этих чисел, а α — наибольший из показателей, с которыми p входит в их канонические разложения.*

5. *Общее наименьшее кратное нескольких попарно простых чисел равно их произведению.*

6. *Совокупность общих кратных нескольких чисел совпадает с совокупностью кратных их общего наименьшего кратного.*

Действительно, пусть M — общее кратное чисел $a, \ldots, l$. Тогда имеют место равенства вида $M = ad', \ldots, M = ll'$, которые показывают, что: a) всякий простой делитель p

каждого из чисел $a, \ldots, l$ должен быть делителем и числа M, а также что: b) этот делитель p должен входить в каноническое разложение числа M с показателем, не меньшим наибольшего из тех, с которыми он входит в канонические разложения чисел $a, \ldots, l$; обратно, каждое M, подчиненное условиям a) и b), очевидно, является общим кратным чисел $a, \ldots, l$.

Общим наименьшим кратным, т. е. наименьшим из общих кратных (a, § 3), является то из последних, в каноническом разложении которого показатели степеней простых чисел точно равны наибольшим из тех, с какими эти простые числа входят в канонические разложения чисел $a, \ldots, l$.

В случае, когда $a, \ldots, l$ — попарно простые и, следовательно, каждый множитель вида p^{α} канонического разложения общего наименьшего кратного входит в каноническое разложение одного и только одного из чисел $a, \ldots, l$, общее наименьшее кратное последних, очевидно, равно их произведению.

Всякое общее кратное, как имеющее в своем каноническом разложении все показатели не меньшими соответствующих показателей в каноническом разложении общего наименьшего кратного, будет кратным последнего.

Пример. Общее наименьшее кратное чисел $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$, $8910 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 11$ равно $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 1\,247\,400$.

§ 6. Непрерывные дроби и их связь с алгоритмом Евклида

a. Пусть α — любое вещественное число. Обозначим буквою q_1 наибольшее целое число, не превосходящее α. При нецелом α имеем $\alpha = q_1 + \frac{1}{\alpha_2}$; $\alpha_2 > 1$. Точно так же при нецелых $\alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}$ имеем

$$\alpha_2 = q_2 + \frac{1}{\alpha_3}; \qquad \alpha_3 > 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{s-1} = q_{s-1} + \frac{1}{\alpha_s}; \qquad \alpha_s > 1,$$

ввиду чего получаем следующее *разложение α в непре-*

рывную дробь:

$$\alpha = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \dots \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; + \cfrac{1}{q_{s-1} + \cfrac{1}{\alpha_s}}}} \qquad (1)$$

b. Если α — иррациональное, то и всякое α_s — иррациональное (при рациональном α_s ввиду (1) рациональным оказалось бы и α) и указанный процесс может быть неограниченно продолжен.

Если же α — рациональное и, следовательно, может быть представлено рациональной несократимой дробью $\alpha = \frac{a}{b}$ с положительным знаменателем, то указанный процесс будет конечен и может быть выполнен с помощью алгоритма Евклида. Действительно, имеем:

$$a = bq_1 + r_2; \qquad \frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{\cfrac{b}{r_2}},$$

$$b = r_2 q_2 + r_3; \qquad \frac{b}{r_2} = q_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_2}{r_3}}$$

. . . .

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n; \qquad \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \cfrac{1}{\cfrac{r_{n-1}}{r_n}},$$

$$r_{n-1} = r_n q_n; \qquad \frac{r_{n-1}}{r_n} = q_n,$$

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \dots \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}.$$

Числа $q_1, q_2, \ldots$, участвующие в разложении числа α в непрерывную дробь, называются *неполными частными* (в случае рационального α это будут, согласно b, неполные частные последовательных делений алгоритма Евклида), дроби же

$$\delta_1 = q_1, \quad \delta_2 = q_1 + \frac{1}{q_2}, \quad \delta_3 = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}}, \ \ldots$$

называются *подходящими дробями*.

c. Весьма простой *закон вычисления подходящих дробей* получим, заметив, что $\delta_s (s > 1)$ получается из δ_{s-1} заменой в буквенном выражении для δ_{s-1} числа q_{s-1} числом $q_{s-1} + \frac{1}{q_s}$. Действительно, полагая ради единообразия $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$, мы можем последовательно представить подходящие дроби в следующем виде (здесь равенство $\frac{A}{B} = \frac{P_s}{Q_s}$ пишем, желая обозначить A символом P_s, а B — символом Q_s):

$$\delta_1 = \frac{q_1}{1} = \frac{P_1}{Q_1},$$

$$\delta_2 = \frac{q_1 + \frac{1}{q_2}}{1} = \frac{q_2 q_1 + 1}{q_2 \cdot 1 + 0} = \frac{q_2 P_1 + P_0}{q_2 Q_1 + Q_0} = \frac{P_2}{Q_2},$$

$$\delta_3 = \frac{\left(q_2 + \frac{1}{q_3}\right) P_1 + P_0}{\left(q_2 + \frac{1}{q_3}\right) Q_1 + Q_0} = \frac{q_3 P_2 + P_1}{q_3 Q_2 + Q_1} = \frac{P_3}{Q_3}$$

и т. д. и вообще при $s > 1$

$$\delta_s = \frac{q_s P_{s-1} + P_{s-2}}{q_s Q_{s-1} + Q_{s-2}} = \frac{P_s}{Q_s}. \tag{2}$$

Таким образом, числители и знаменатели подходящих дробей мы можем последовательно вычислять по формулам

$$\begin{aligned} P_s &= q_s P_{s-1} + P_{s-2}, \\ Q_s &= q_s Q_{s-1} + Q_{s-2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Эти вычисления удобно делать по следующей схеме (два последних столбца пишем лишь в случае, когда α — несократимая дробь с положительным знаменателем: $\alpha=\frac{a}{b}$) :

q_s		q_1	q_2	$\ldots$				$\ldots$	q_{n-1}	q_n
P_s	1	q_1	P_2	$\ldots$	P_{s-2}	P_{s-1}	P_s	$\ldots$	P_{n-1}	a
Q_s	0	1	Q_2	$\ldots$	Q_{s-2}	Q_{s-1}	Q_s	$\ldots$	Q_{n-1}	b

Пример. Разложим в непрерывную дробь несократимую дробь $\frac{105}{38}$. Здесь имеем

$$
\begin{array}{r|l}
105 & 38 \\
76 & 2 \\
\hline
38 & 29 \\
29 & 1 \\
\hline
29 & 9 \\
27 & 3 \\
\hline
9 & 2 \\
8 & 4 \\
\hline
2 & 1 \\
2 & 2 \\
\hline
\text{»»} &
\end{array}
\qquad
\frac{105}{38}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}
$$

Поэтому указанная выше схема дает:

q_s		2	1	3	4	2
P_s	1	2	3	11	47	105
Q_s	0	1	1	4	17	38

d.1. *При* $s>0$ *имеем* $P_sQ_{s-1}-Q_sP_{s-1}=(-1)^s$.

2. *При* $s>1$ *имеем* $\delta_s-\delta_{s-1}=\frac{(-1)^s}{Q_sQ_{s-1}}$.

Действительно, приняв обозначение $h_s = P_s Q_{s-1} - Q_s P_{s-1}$, мы при $s=1$ получим $h_1 = q_1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$, а при $s > 1$ с помощью равенств (3) найдем $h_s = -h_{s-1}$. Отсюда получим $h_s = (-1)^s$. Пользуясь же этим равенством при $s > 1$, легко найдем

$$\delta_s - \delta_{s-1} = \frac{P_s}{Q_s} - \frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}} = \frac{h_s}{Q_s Q_{s-1}} = \frac{(-1)^s}{Q_s Q_{s-1}}.$$

e. *Пусть $1 < s$, а если α — рациональная несократимая дробь $\alpha = \frac{a}{b}$ с положительным знаменателем, то пусть также $s < n$. Тогда α лежит между δ_{s-1} и δ_s, причем ближе к δ_s, нежели к δ_{s-1}.*

Действительно, заменив в равенстве (2) число q_s числом $q_s + \frac{1}{\alpha_{s+1}}$, получим

$$\alpha = \frac{\alpha_{s+1} P_s + P_{s-1}}{\alpha_{s+1} Q_s + Q_{s-1}},$$

$$\alpha \alpha_{s+1} Q_s + \alpha Q_{s-1} - \alpha_{s+1} P_s - P_{s-1} = 0,$$

$$\alpha_{s+1} Q_s \left(\alpha - \frac{P_s}{Q_s}\right) + Q_{s-1}\left(\alpha - \frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}}\right) = 0,$$

откуда убеждаемся, что первая из разностей, стоящих в скобках, и по знаку противоположна второй и численно (ввиду $Q_s > Q_{s-1}$) меньше последней. А этим и доказываются наши утверждения.

Вопросы к главе 1

1. Пусть a и b — целые, не равные одновременно нулю, и $d = ax_0 + by_0$ — наименьшее положительное число вида $ax + by$ (x и y — целые). Доказать, что $d = (a, b)$. Отсюда вывести теорему **1, d**, § 2 и теоремы е, § 2. Обобщить эти выводы, рассматривая числа вида $ax + by + \ldots + fu$.

2. Пусть p — простое число, a и b — натуральные числа, p делит ab. Методом математической индукции (индукцию вести по p) доказать, что p делит либо a, либо b. Отсюда вывести **b**), **c**) § 5.

3, a. Пусть (с, § 6) $1 < s$, а если $\alpha = \frac{a}{b}$ — несократимая дробь, то пусть также $s < n$ ($q_n = b$). Доказать, что α может приближаться несократимой дробью $\frac{c}{d}$ более точно, чем дробью δ_s, лишь в случае $d > Q_s$.

b. Пусть вещественное число α разложено в непрерывную дробь, N — целое положительное, k — число его десятичных знаков, n — наибольшее целое с условием $Q_n \leqslant N$. Доказать, что $n \leqslant 5k+1$. Для доказательства выражения для Q_2, Q_3, Q_4, $\ldots$, Q_n следует сравнить с теми, которые они имели бы, если бы все q_s были равны 1, и сравнить далее с числами $1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}$, где ξ — положительный корень уравнения $\xi^2=\xi+1$.

4. Пусть $\tau \geqslant 1$. Ряд расположенных в порядке возрастания рациональных несократимых дробей с положительными знаменателями, не превосходящими τ, называется *рядом Фарея, отвечающим* τ.

a. Доказать, что часть ряда Фарея, отвечающего τ, содержащая дроби α с условием $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, может быть получена следующим способом: пишем дроби $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$. Если $2 \leqslant \tau$, то между этими дробями вставим еще дробь $\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$, затем в полученном ряде $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1}$ между каждыми двумя соседними дробями $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{c_1}{d_1}$ с $b_1+d_1 \leqslant \tau$ вставим дробь $\frac{a_1+c_1}{b_1+d_1}$ и т. д. до тех пор, пока это возможно. Предварительно доказать, что для любой пары соседних дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ ряда, получаемого указанным способом, имеем $ad-bc=-1$.

b. Рассматривая ряд Фарея, доказать теорему: пусть $\tau \geqslant 1$, тогда всякое вещественное α можно представить в виде

$$\alpha=\frac{P}{Q}+\frac{\theta}{Q\tau}; \quad 0 < Q \leqslant \tau, \quad (P, Q)=1, \quad |\theta| < 1.$$

c. Теорему вопроса b доказать, пользуясь 2, d, § 6.

5, a. Доказать бесконечность числа простых чисел вида $4m+3$.

b. Доказать бесконечность числа простых чисел вида $6m+5$.

6. Доказать бесконечность числа простых чисел, подсчитывая число чисел, не превосходящих N, в каноническое разложение которых не входят простые числа, отличные от $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

7. Пусть K — целое положительное. Доказать, что в ряде натуральных чисел имеется бесчисленное множество последовательностей $M, M+1, \ldots, M+K-1$, не содержащих простых чисел.

8. Доказать, что среди чисел, представляемых многочленом $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, где $n > 0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые и $a_0 > 0$, имеется бесчисленное множество составных.

9, a. Доказать, что неопределенному уравнению

$$x^2+y^2=z^2, \quad x > 0, \ y > 0, \quad z > 0, \quad (x, y, z)=1 \tag{1}$$

удовлетворяют те и только те системы x, y, z, где одно из чисел x и y имеет вид $2uv$, другое — вид u^2-v^2, наконец, z имеет вид u^2+v^2, при этом $u > v > 0$, $(u, v)=1$, uv — четное.

b. Пользуясь теоремой вопроса a, доказать неразрешимость в целых положительных x, y, z уравнения $x^4+y^4=z^2$.

10. Доказать теорему: если уравнение $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$, где $n>0$ и $a_1, \ldots, a_n$ — целые, имеет рациональный корень, то этот корень — целое число.

11, a. Пусть $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$; $n>1$. Доказать, что S — не целое.

b. Пусть $S=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n+1}$; $n>0$. Доказать, что S — не целое.

12. Пусть n — целое, $n>0$. Доказать, что все коэффициенты разложения бинома Ньютона $(a+b)^n$ будут нечетными тогда и только тогда, когда n имеет вид 2^k-1.

Численные примеры к главе 1

1, a. Применяя алгоритм Евклида, найти (6188, 4709).

b. Найти (81 719, 52 003, 33 649, 30 107).

2, a. Разложив в непрерывную дробь $\alpha=\frac{125}{92}$ и составив таблицу подходящих дробей (с, § 6), найти: α) δ_4, β) представление α в виде, указанном в вопросе **4, b**, считая $\tau=20$.

b. Разложив в непрерывную дробь $\alpha=\frac{5391}{3976}$ и составив таблицу подходящих дробей, найти: α) δ_6, β) представление α в виде, указанном в вопросе **4, b**, считая $\tau=1000$.

3. Составить ряд дробей Фарея (вопрос 4) от 0 до 1, исключая 1, со знаменателями, не превосходящими 8.

4. Составить таблицу простых чисел, меньших 100.

5, a. Найти каноническое разложение числа 82 798 848.

b. Найти каноническое разложение числа 81 057 226 635 000.

Глава 2

ВАЖНЕЙШИЕ ФУНКЦИИ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

§ 1. Функции $[x]$ и $\{x\}$

a. В первую очередь мы рассмотрим две следующие функции, определенные для всех вещественных значений x:

1. *Целую часть от* x, обозначаемую символом $[x]$, представляющую собою наибольшее целое число, не превосходящее x.

2. *Дробную часть от* x, обозначаемую символом $\{x\}$, представляющую собою разность $x-[x]$ между x и целой частью от x.

Примеры.

$$[7]=7,\quad [2{,}3]=2,\qquad [-4{,}75]=-5,$$
$$\{7\}=0,\quad \{2{,}3\}=0{,}3,\qquad \{-4{,}75\}=0{,}25.$$

b. *Показатель, с которым данное простое p входит в произведение $n!$, равен*

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots \tag{1}$$

Действительно, число сомножителей произведения $n!$, кратных p, равно $\left[\frac{n}{p}\right]$, среди них число кратных p^2 равно $\left[\frac{n}{p^2}\right]$, среди последних число кратных p^3 равно $\left[\frac{n}{p^3}\right]$, и т. д. Сумма (1) и даст искомый показатель, так как каждый сомножитель произведения $n!$, кратный p^m, но не p^{m+1}, нами сосчитан точно m раз, как кратный p, p^2, p^3, ..., наконец, p^m.

Пример. Показатель, с которым число 3 входит в произведение $367!$, равен

$$\left[\frac{367}{3}\right]+\left[\frac{367}{9}\right]+\left[\frac{367}{27}\right]+\left[\frac{367}{81}\right]+\left[\frac{367}{243}\right]=$$
$$=122+40+13+4+1=180.$$

§ 2. Мультипликативные функции

a. *Функция $\theta(a)$ называется мультипликативной, если она удовлетворяет двум следующим условиям:*

1. *Эта функция определена для всех целых положительных a и не равна нулю по меньшей мере при одном таком a.*

2. *Для любых положительных взаимно простых a_1 и a_2 имеем:*

$$\theta(a_1a_2)=\theta(a_1)\theta(a_2).$$

Пример. Нетрудно видеть, что мультипликативной является функция a^s, где s — любое вещественное или комплексное число.

b. *Для всякой мультипликативной функции $\theta(a)$ имеем $\theta(1)=1$.* Действительно, пусть $\theta(a_0)$ не равно нулю. Находим

$$\theta(a_0)=\theta(a_0\cdot 1)=\theta(a_0)\theta(1),\qquad 1=\theta(1).$$

c. Свойство 2, а мультипликативной функции $\theta(a)$ распространяется и на случай $k>2$ попарно простых чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$. Действительно, имеем:

$$\theta(a_1a_2a_3\ldots a_k)=\theta(a_1)\theta(a_2a_3\ldots a_k)=$$
$$=\theta(a_1)\theta(a_2)\theta(a_3\ldots a_k)=\ldots=\theta(a_1)\theta(a_2)\theta(a_3)\ldots\theta(a_k).$$

В частности, находим

$$\theta\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\ldots p_k^{\alpha_k}\right)=\theta\left(p_1^{\alpha_1}\right)\theta\left(p_2^{\alpha_2}\right)\theta\left(p_3^{\alpha_3}\right)\ldots\theta\left(p_k^{\alpha_k}\right).\qquad(1)$$

d. Обратно, *мы всегда построим некоторую мультипликативную функцию $\theta(a)$, если положив $\theta(1)=1$ и назначив произвольно значения для $\theta(p^\alpha)$, отвечающих положительным степеням простых чисел, в общем случае определим эту функцию равенством* (1).

Действительно, если $a=p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$ представлено в виде произведения a_1a_2 двух взаимно простых чисел a_1 и a_2, то справедливо тождество

$$\theta(a)=\theta(a_1)\theta(a_2),$$

левая часть которого является произведением чисел $\theta\left(p_s^{\alpha_s}\right)$, отвечающих всем сомножителям вида $p_s^{\alpha_s}$ числа a, а правая часть является тем же произведением, но разбитым на два взаимно простых произведения, одно из которых $\theta(a_1)$ является произведением чисел $\theta(p_s^{\alpha_s})$, отвечающих всем сомножителям вида $p_s^{\alpha_s}$ числа a_1, другое же $\theta(a_2)$ является произведением чисел $\theta(p_s^{\alpha_s})$, отвечающих всем сомножителям вида $p_s^{\alpha_s}$ числа a_2.

Пример. Мультипликативную функцию можно построить, взяв $\theta(1)=1$ и $\theta(p^\alpha)=2$, если $\alpha>0$. Тогда при $k>0$ будем иметь $\theta(p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k})=2^k$. В частности, найдем:

$$\theta(1)=1,\quad \theta(2)=2,\quad \theta(3)=2,$$
$$\theta(4)=2,\quad \theta(5)=2,\quad \theta(6)=4.$$

e. *Произведение $\theta(a)=\theta_1(a)\theta_2(a)$ двух мультипликативных функций $\theta_1(a)$ и $\theta_2(a)$ также является мультипликативной функцией.*

Действительно, имеем $\theta(1)=\theta_1(1)\theta_2(1)=1$.

Кроме того, при $(a_1, a_2)=1$ находим

$$\theta(a_1a_2)=\theta_1(a_1a_2)\theta_2(a_1a_2)=\theta_1(a_1)\theta_1(a_2)\theta_2(a_1)\theta_2(a_2)=$$
$$=\theta_1(a_1)\theta_2(a_1)\theta_1(a_2)\theta_2(a_2)=\theta(a_1)\theta(a_2).$$

Доказанная теорема обобщается и на случай любого числа $k>2$ мультипликативных функций

$$\theta_1(a),\quad \theta_2(a),\quad \theta_3(a),\quad \dots,\quad \theta_k(a).$$

Действительно, пользуясь ею последовательно, убедимся в мультипликативности произведений:

$$\theta_1(a)\theta_2(a)\theta_3(a)=(\theta_1(a)\theta_2(a))\theta_3(a),$$
$$\theta_1(a)\theta_2(a)\theta_3(a)\theta_4(a)=(\theta_1(a)\theta_2(a)\theta_3(a))\theta_4(a),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\theta_1(a)\theta_2(a)\dots\theta_{k-1}(a)\theta_k(a)=(\theta_1(a)\theta_2(a)\dots\theta_{k-1}(a))\theta_k(a).$$

f. *Пусть $\theta(a)$ — мультипликативная функция и $a=p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа a. Тогда, обозначая символом $\sum\limits_{d\setminus a}$ сумму, распространенную на все* *делители* d *числа* a, *будем иметь*

$$\sum_{d\diagdown a}\theta(d)=(1+\theta(p_1)+\theta(p_1^2)+\ldots+\theta(p_1^{\alpha_1}))\ldots$$
$$\ldots\left(1+\theta(p_k)+\theta(p_k^2)+\ldots+\theta\left(p_k^{\alpha_k}\right)\right).$$

(*В случае* $a=1$ *правая часть считается равной* 1.)

Чтобы доказать это тождество, раскроем скобки в его правой части. Тогда получим сумму всех (без пропусков и повторений) слагаемых вида

$$\theta(p_1^{\beta_1})\,\theta(p_2^{\beta_2})\ldots\theta\left(p_k^{\beta_k}\right)=\theta\left(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_k^{\beta_k}\right);$$
$$0\leqslant\beta_1\leqslant\alpha_1,\ 0\leqslant\beta_2\leqslant\alpha_2,\ \ldots,\ 0\leqslant\beta_k\leqslant\alpha_k.$$

А это (**1**, **e**, § 5, гл. I) как раз и будет то, что стоит в левой части тождества.

§ 3. Число делителей и сумма делителей

a. 1. При $\theta(a)=1$ (пример **a**, § 2) тождество **f**, § 2 примет вид $\tau(a)=(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_k+1)$, где $\tau(a)$ — число делителей числа a.

Пример. $\tau(720)=\tau(2^4\cdot3^2\cdot5)=(4+1)(2+1)(1+1)=$ $=30$.

2. $\tau(a)$ — *мультипликативная функция, для которой при* $\alpha>0$ *имеем* $\tau(p^\alpha)=\alpha+1$.

Это следует из найденной для $\tau(a)$ формулы и теоремы **d**, § 2.

b. 1. При $\theta(a)=a$ (пример **a**, § 2) тождество **d**, § 2 примет вид

$$S(a)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\ldots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1},$$

где $S(a)$ — *сумма делителей числа* a.

Пример. $S(720)=S(2^4\cdot3^2\cdot5)=\frac{2^5-1}{2-1}\cdot\frac{3^3-1}{3-1}\cdot\frac{5^2-1}{5-1}=$ $=2418$.

2. $S(a)$ — *мультипликативная функция, для которой при* $\alpha>0$ *имеем* $S(p^\alpha)=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$.

Это следует из найденной для $S(a)$ формулы и теоремы **d**, § 2.

§ 4. Функция Мёбиуса

a. *Функция Мёбиуса — мультипликативная функция, определённая равенствами:* $\mu(p) = -1$, $\mu(p^\alpha) = 0$, *если* $\alpha > 1$.

Из этого определения, в частности, следует, что:

α) Если в каноническом разложении $a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ числа a по меньшей мере один из показателей $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ превосходит 1 (если a делится на квадрат, отличный от 1), то имеем $\mu(a) = 0$.

β) В противном случае, т. е. в случае, если каноническое разложение числа a имеет вид $a = p_1 \ldots p_k$, имеем $\mu(a) = (-1)^k$.

Примеры.

$$\begin{array}{lll} \mu(1) = 1, & \mu(5) = -1, & \mu(9) = 0, \\ \mu(2) = -1, & \mu(6) = 1, & \mu(10) = 1, \\ \mu(3) = -1, & \mu(7) = -1, & \mu(11) = -1, \\ \mu(4) = 0, & \mu(8) = 0, & \mu(12) = 0. \end{array}$$

b. 1. *Пусть* $\theta(a)$ *— мультипликативная функция и* $a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ *— каноническое разложение числа* a. *Тогда имеем:*

$$\sum_{d \backslash a} \mu(d)\,\theta(d) = (1 - \theta(p_1)) \ldots (1 - \theta(p_k))$$

(*в случае* $a = 1$ *правую часть считаем равной* 1).

Действительно, функция $\theta_1(a) = \mu(a)\,\theta(a)$, как произведение мультипликативных функций $\mu(a)$ и $\theta(a)$, сама является мультипликативной функцией. Применяя к ней тождество f, § 2 и имея в виду, что $\theta_1(p) = -\theta(p)$ и что $\theta_1(p^\alpha) = 0$, если $\alpha > 1$, мы и убедимся в справедливости нашего утверждения.

2. В частности, полагая $\theta(a) = 1$, из α) получим

$$\sum_{d \backslash a} \mu(d) = \begin{cases} 0, & \text{если } a > 1, \\ 1, & \text{если } a = 1. \end{cases}$$

3. Полагая же $\theta(a) = \frac{1}{a}$, получим

$$\sum_{d \backslash a} \frac{\mu(d)}{d} = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right), & \text{если } a > 1, \\ 1, & \text{если } a = 1. \end{cases}$$

c. *Пусть целым положительным* $\delta = \delta_1, \ldots, \delta_n$ *отвечают любые вещественные, или комплексные* $f = f_1, \ldots, f_n$. *Тогда, обозначая символом* S' *сумму значений* f, *отвечающих значениям* δ, *равным* 1, *и символом* S_d *сумму значений* f, *отвечающих значениям* δ, *кратным* d, *будем иметь*

$$S' = \sum_d \mu(d) S_d,$$

где d *пробегает целые положительные числа, делящие хотя бы одно значение* δ.

Действительно (2, b), имеем

$$S' = f_1 \sum_{d \diagdown \delta_1} \mu(d) + \ldots + f_n \sum_{d \diagdown \delta_n} \mu(d).$$

Собирая же вместе члены с одними и теми же значениями d и вынося при этом $\mu(d)$ за скобки, в скобках получим сумму тех и только тех значений f, которые отвечают значениям δ, кратным d, т. е. как раз и получим сумму S_d.

§ 5. Функция Эйлера

a. *Функция Эйлера* $\varphi(a)$ *определяется для всех целых положительных* a *и представляет собою число чисел ряда*

$$0, 1, \ldots, a-1, \tag{1}$$

взаимно простых с a.

Примеры.

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(4) = 2,$$
$$\varphi(2) = 1, \quad \varphi(5) = 4,$$
$$\varphi(3) = 2, \quad \varphi(6) = 2.$$

b. 1. *Пусть*

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} \tag{2}$$

— каноническое разложение числа a. *Тогда имеем*

$$\varphi(a) = a\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right), \tag{3}$$

или также

$$\varphi(a) = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right)\left(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}\right) \ldots \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right). \tag{4}$$

В частности, будем иметь

$$\varphi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1}, \quad \varphi(p)=p-1. \tag{5}$$

Действительно, применим теорему с, § 4. При этом числа δ и числа f определим так: пусть x пробегает числа ряда (1); каждому значению x приведем в соответствие число $\delta=(x, a)$ и число $f=1$.

Тогда S' обратится в число значений $\delta=(x, a)$, равных 1, т. е. в $\varphi(a)$. А S_d обратится в число значений $\delta=(x, a)$, кратных d. Но (x, a) может быть кратным d лишь при условии, что d — делитель числа a. При наличии же этого условия S_d обратится в число значений x, кратных d, т. е. в $\frac{a}{d}$. Поэтому

$$\varphi(a)=\sum_{d\diagdown a}\mu(d)\frac{a}{d},$$

откуда (ввиду 3, b, § 4) следует формула (3), а из последней (ввиду 2)) следует формула (4).

Примеры.

$$\varphi(60)=60\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=16,$$

$$\varphi(81)=81-27=54,$$

$$\varphi(5)\ =5-1=4.$$

2. $\varphi(a)$ — *мультипликативная функция, для которой при* $\alpha>0$ *имеем* $\varphi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1}$.

Это следует из формулы (4) и теоремы d, § 2.

c. *Имеем*

$$\sum_{d\diagdown a}\varphi(d)=a.$$

В справедливости этой формулы убедимся, применяя тождество f, § 2, которое при $\theta(a)=\varphi(a)$ дает

$$\sum_{d\diagdown a}\varphi(a)=(1+\varphi(p_1)+\ldots+\varphi(p_1^{\alpha_1}))\ldots$$
$$\ldots\left(1+\varphi(p_k)+\ldots+\varphi\left(p_k^{\alpha_k}\right)\right).$$

Ввиду (5) правая часть окажется равной

$$(1+(p_1-1)+\ldots+(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1}))\ldots$$
$$\ldots\left(1+(p_k-1)+\ldots+\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\right)\right),$$

что после приведения в каждой большой скобке подобных членов обратится в

$$p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}=a.$$

Пример. Полагая $a=12$, находим

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)+\varphi(6)+\varphi(12)=$$
$$=1+1+2+2+2+4=12.$$

Вопросы к главе II

1, a. Пусть в интервале $Q\leqslant x\leqslant R$ функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна. Доказать, что сумма

$$\sum_{Q<x\leqslant R}[f(x)]$$

выражает число целых точек (точек с целыми координатами) плоской области: $Q<x\leqslant R$, $0<y\leqslant f(x)$.

b. Пусть P и Q — положительные нечетные взаимно простые. Доказать, что

$$\sum_{0<x<\frac{Q}{2}}\left[\frac{P}{Q}x\right]+\sum_{0<y<\frac{P}{2}}\left[\frac{Q}{P}y\right]=\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}.$$

c. Пусть $r>0$ и T — число целых точек области $x^2+y^2\leqslant r^2$. Доказать, что

$$T=1+4[r]+8\sum_{0<x\leqslant\frac{r}{\sqrt{2}}}\left[\sqrt{r^2-x^2}\right]-4\left[\frac{r}{\sqrt{2}}\right]^2.$$

d. Пусть $n>0$ и T — число целых точек области $x>0$, $y>0$, $xy\leqslant n$. Доказать, что

$$T=2\sum_{0<x\leqslant\sqrt{n}}\left[\frac{n}{x}\right]-[\sqrt{n}]^2.$$

e. Рассмотрим многоугольник, вершины которого — целые точки и контур которого сам себя не пересекает и не касается. Пусть S — площадь многоугольника и $T=\sum\delta-1$, где суммирование распространяется на все целые точки, лежащие внутри многоугольника и на его контуре, причем $\delta=1$ для внутренних точек и $\delta=0{,}5$ для точек контура. Доказать, что $T=S$.

2. Пусть $n>0$, m — целое, $m>1$ и x пробегает целые положительные числа, не делящиеся на m-ю степень целого, превосходящего 1. Доказать, что

$$\sum_x\left[\sqrt[m]{\frac{n}{x}}\right]=[n].$$

3. Пусть положительные α и β таковы, что

$$[\alpha x]; \quad x=1, 2, \ldots; \quad [\beta y], \quad y=1, 2, \ldots,$$

образуют, вместе взятые, все числа натурального ряда без повторений. Доказать, что это имеет место тогда и только тогда, когда α иррациональное, причем

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1.$$

4, a. Пусть $[\tau]\geqslant 1$, $t=[\tau]$ и $x_1, x_2, \ldots, x_t$ — числа $1, 2, \ldots, t$, расположенные в таком порядке, чтобы числа

$$0, \{\alpha x_1\}, \{\alpha x_2\}, \ldots, \{\alpha x_t\}, 1$$

шли не убывая. Доказать теорему вопроса 4, b, гл. I, рассматривая разности соседних чисел последнего ряда.

b. Пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ — вещественные числа, каждое из которых не меньше 1; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — вещественные. Доказать, что существуют целые $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$, не равные одновременно нулю, и целое η, удовлетворяющие условиям:

$$|\xi_1|\leqslant\tau_1, \quad |\xi_2|\leqslant\tau_2, \ldots, |\xi_k|\leqslant\tau_k \quad (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \eta)=1,$$

$$|\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\ldots+\alpha_k\xi_k-\eta| < \frac{1}{\tau_1\tau_2\ldots\tau_k}.$$

5. Пусть α — вещественное, c — целое, $c>0$. Доказать, что

$$\left[\frac{[\alpha]}{c}\right]=\left[\frac{\alpha}{c}\right].$$

6, a. Пусть $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ — вещественные. Доказать, что

$$[\alpha+\beta+\ldots+\lambda]\geqslant[\alpha]+[\beta]+\ldots+[\lambda].$$

b. Пусть $a, b, \ldots, l$ — целые положительные, $a+b+\ldots+l=n$. Применяя b, § 1, доказать, что

$$\frac{n!}{a!\,b!\ldots l!}$$

есть целое число.

7. Пусть h — целое, $h>0$, p — простое и

$$u_s=\frac{p^{s+1}-1}{p-1}.$$

Представляя h в виде $h=p_m u_m+p_{m-1}u_{m-1}+\ldots+p_1u_1+p_0$, где u_m — наибольшее u_s, не превосходящее h, $p_m u_m$ — наибольшее кратное u_m, не превосходящее h, $p_{m-1}u_{m-1}$ — наибольшее кратное u_{m-1}, не превосходящее $h-p_m u_m$, $p_{m-2}u_{m-2}$ — наибольшее кратное u_{m-2}, не превосходящее $h-p_m u_m-p_{m-1}u_{m-1}$, и т. д., доказать, что числа a с условием, что в каноническое разложение $a!$ число p входит с показателем h, существуют тогда и только тогда, когда все $p_m, p_{m-1}, \ldots, p_1, p_0$ меньше p, причем в этом случае указанные a суть все числа вида

$$a=p_m p^{m+1}+p_{m-1}p^m+\ldots+p_1p^2+p_0p+p',$$

где p' имеет значения: $0, 1, \ldots, p-1$.

8, a. Пусть в интервале $Q \leqslant x \leqslant R$ функция $f(x)$ имеет вторую непрерывную производную. Полагая

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \quad \sigma(x) = \int_0^x \rho(z)\,dz,$$

доказать, что

$$\sum_{Q < x \leqslant R} f(x) = \int_Q^R f(x)\,dx + \rho(R) f(R) - \rho(Q) f(Q) -$$
$$- \sigma(R) f'(R) + \sigma(Q) f'(Q) + \int_Q^R \sigma(x) f''(x)\,dx.$$

b. Пусть условие вопроса a выполняется при сколь угодно больших R, причем $\int_Q^\infty |f''(x)|\,dx$ сходится. Доказать, что

$$\sum_{Q < x \leqslant R} f(x) = C + \int_Q^R f(x)\,dx + \rho(R) f(R) - \sigma(R) f'(R) - \int_R^\infty \sigma(x) f''(x)dx,$$

где C не зависит от R.

c. Если B принимает лишь положительные значения и отношение $\frac{|A|}{B}$ остается ограниченным сверху, то пишем $A = O(B)$, или $A \ll B$.

Пусть n — целое, $n > 1$. Доказать, что

$$\ln(n!) = n \ln n - n + O(\ln n).$$

9, a. Пусть $n \geqslant 2$, $\Theta(z, z_0) = \sum_{z_0 < p \leqslant z} \ln p$, где p пробегает простые числа. Пусть, далее, $\Theta(z) = \Theta(z, 0)$ и при $x > 0$.

$$\psi(x) = \Theta(x) + \Theta(\sqrt{x}) + \Theta(\sqrt[3]{x}) + \ldots$$

Доказать, что

α) $\ln([n]!) = \psi(n) + \psi\left(\frac{n}{2}\right) + \psi\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots;$

β) $\psi(n) < 2n;$

γ) $\Theta\left(n, \frac{n}{2}\right) + \Theta\left(\frac{n}{3}, \frac{n}{4}\right) + \Theta\left(\frac{n}{5}, \frac{n}{6}\right) + \ldots = n \ln 2 + O(\sqrt{n}).$

b. При $n > 2$ доказать, что

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} = \ln n + O(1),$$

где p пробегает простые числа.

c. Пусть ε — произвольное положительное постоянное. Доказать, что в ряде натуральных чисел существует бесчисленное множество пар p_n, p_{n+1} простых чисел с условием $p_{n+1} < p_n(1 + \varepsilon)$.

d. Пусть $n > 2$. Доказать, что

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} = C + \ln \ln n + O\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

где p пробегает простые числа и C не зависит от n.

e. Пусть $n > 2$. Доказать, что

$$\prod_{p \leqslant n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{C_0}{\ln n}\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right),$$

где p пробегает простые числа и C_0 не зависит от n.

f. Доказать существование постоянного $s_0 > 2$ с условием, что при любом целом $s > s_0$ для s-го простого числа p_s ряда 2, 3, 5, ... имеет место неравенство

$$p_s < 1{,}5 s \ln s.$$

g. Доказать, что

$$\frac{a}{\varphi(a)} = O(\ln \ln a).$$

10, a. Пусть $\theta(a)$ — функция мультипликативная. Доказать, что $\theta_1(a) = \sum_{d \backslash a} \theta(d)$ — также функция мультипликативная.

b. Пусть функция $\theta(a)$ определена для всех целых положительных a и функция $\psi(a) = \sum_{d \backslash a} \theta(a)$ — мультипликативная. Доказать, что функция $\theta(a)$ также мультипликативная.

11. Пусть при $m > 0$ $\tau_m(a)$ обозначает число решений неопределенного уравнения $x_1 x_2 \ldots x_m = a$ ($x_1, x_2, \ldots, x_m$ независимо друг от друга пробегают целые положительные числа); в частности, очевидно, $\tau_1(a) = 1$, $\tau_2(a) = \tau(a)$. Доказать, что

a. $\tau_m(a)$ — функция мультипликативная.

b. Пусть p — простое, $\alpha \geqslant 0$ и $m > 1$. Тогда

$$\tau_m(p^\alpha) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m-1)}{1 \cdot 2 \ldots (m-1)}.$$

c. Если ε — произвольное положительное постоянное, то

$$\lim_{a \to \infty} \frac{\tau_m(a)}{a^\varepsilon} = 0.$$

d. $\sum_{0 < a \leqslant n} \tau_m(a)$ выражает число решений неравенства $x_1 x_2 \ldots x_m \leqslant n$ в целых положительных $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

12. Пусть $R(s)$ обозначает вещественную часть числа s.

При $R(s) > 1$ полагаем $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Пусть $m > 0$, m — целое.

Доказать, что

$$(\zeta(s))^m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_m(n)}{n^s}.$$

13, a. При $R(s) > 1$ доказать, что

$$\zeta(s) = \prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}},$$

где p пробегает все простые числа.

b. Доказать бесконечность числа простых чисел, исходя из того, что гармонический ряд — расходящийся.

c. Доказать бесконечность числа простых чисел, исходя из того, что $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ — число иррациональное.

14. Пусть $\Lambda(a) = \ln p$ для $a = p^l$, где p — простое и l — целое положительное; $\Lambda(a) = 0$ для других целых положительных a. При $R(s) > 1$ доказать, что

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

15. Пусть $R(s) > 1$. Доказать, что

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

где p пробегает простые числа.

16, a. Пусть $n \geqslant 1$. Применяя c, § 4, доказать, что

$$1 = \sum_{0<d\leqslant n} \mu(d)\left[\frac{n}{d}\right].$$

b. Пусть $M(z, z_0) = \sum_{z_0 < a \leqslant z} \mu(a)$; $M(x) = M(x, 0)$. Доказать, что

α) $M(n) + M\left(\frac{n}{2}\right) + M\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots = 1, \quad n \geqslant 1,$

β) $M\left(n, \frac{n}{2}\right) + M\left(\frac{n}{3}, \frac{n}{4}\right) + M\left(\frac{n}{5}, \frac{n}{6}\right) + \ldots = -1, \quad n \geqslant 2.$

c. Пусть $n \geqslant 1$, l — целое, $l > 1$, $T_{l,n}$ — число целых x с условием $0 < x \leqslant n$, не делящихся на l-ю степень целого, превосходящего 1. Применяя c, § 4, доказать, что

$$T_{l,n} = \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d)\left[\frac{n}{d^l}\right].$$

17, a. Пусть a—целое, $a>0$, и для целых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ однозначно определена функция $f(x)$. Доказать, что

$$S' = \sum_{d \setminus a} \mu(d) S_d,$$

где S' обозначает сумму значений $f(x)$, распространенную на значения x, взаимно простые с a, и S_d—сумму значений $f(x)$, распространенную на значения x, кратные d.

b. Пусть $k>1$ и заданы системы

$$x_1', x_2', \ldots, x_k'; \quad x_1'', x_2'', \ldots, x_k''; \quad \ldots; \quad x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)},$$

каждая из которых состоит из целых чисел, не равных одновременно нулю. Пусть далее для этих систем однозначно определена функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Доказать, что

$$S' = \sum \mu(d) S_d,$$

где S' обозначает сумму значений $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, распространенную на системы взаимно простых чисел, и S_d обозначает сумму значений $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, распространенную на системы чисел, одновременно кратных d. При этом d пробегает целые положительные числа.

c. Пусть a—целое, $a>0$, и для делителей δ числа a однозначно определена функция $F(\delta)$. Полагая

$$G(\delta) = \sum_{d \setminus \delta} F(d),$$

доказать, что (закон обращения числовых функций)

$$F(a) = \sum_{d \setminus a} \mu(d) G\left(\frac{a}{d}\right).$$

d. Пусть целым положительным

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$$

отвечают любые вещественные или комплексные, не равные нулю:

$$f_1, f_2, \ldots, f_n.$$

Доказать, что

$$P' = \Pi P_d^{\mu(d)},$$

где P' обозначает произведение значений f, отвечающих значениям δ, равным 1, P_d обозначает произведение значений f, отвечающих значениям δ, кратным d, причем d пробегает все целые положительные числа, делящие хотя бы одно δ.

18. Пусть a—целое, $a>1$, $\sigma_m(n) = 1^m + 2^m + \ldots + n^m$, $\psi_m(a)$—сумма m-х степеней чисел ряда $1, 2, \ldots, a$, взаимно простых с a; $p_1, p_2, \ldots, p_k$—все простые делители числа a.

a. Применяя теорему вопроса 17, a, доказать, что

$$\psi_m(a) = \sum_{d \setminus a} \mu(d) d^m \sigma_m\left(\frac{a}{d}\right).$$

b. Доказать, что

$$\psi_1(a)=\frac{a}{2}\varphi(a).$$

c. Доказать, что

$$\psi_2(a)=\left(\frac{a^2}{3}+\frac{(-1)^k}{6}p_1p_2\ldots p_k\right)\varphi(a).$$

19. Пусть $z>1$, a — целое, $a>0$, T_z — число чисел x с условиями $0<x\leqslant z$, $(x, a)=1$, ε — произвольное положительное постоянное.

a. Доказать, что

$$T_z=\sum_{d\diagdown a}\mu(d)\left[\frac{z}{d}\right].$$

b. Доказать, что

$$T_z=\frac{z}{a}\varphi(a)+O(a^{\varepsilon}).$$

c. Пусть $z>1$, $\pi(z)$ — число простых чисел, не превосходящих z, a — произведение простых чисел, не превосходящих $\sqrt{z}$.

Доказать, что

$$\pi(z)=\pi(\sqrt{z})-1+\sum_{d\diagdown a}\mu(d)\left[\frac{z}{d}\right].$$

20. Пусть $R(s)>1$, a — целое, $a>0$. Доказать, что

$$\sum{}'\frac{1}{n^s}=\zeta(s)\,\Pi\left(1-\frac{1}{p^s}\right),$$

где в левой части n пробегает целые положительные числа, взаимно простые с a, а в правой части p пробегает все простые делители числа a.

21, a. Вероятность P того, что k целых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$ будут взаимно простыми, определим как предел при $N\to\infty$ вероятности P_N того, что будут взаимно простыми k чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$, каждому из которых независимо от остальных присвоено одно из значений $1, 2, \ldots, N$, принимаемых за равновозможные. Применяя теорему вопроса 17, b, доказать, что $P=(\zeta(k))^{-1}$.

b. Определяя вероятность P несократимости дроби $\frac{x}{y}$ аналогично тому, как в вопросе a при $k=2$, доказать, что

$$P=\frac{6}{\pi^2}.$$

22, a. Пусть $r\geqslant 2$ и T — число целых точек (x, y) с взаимно простыми координатами, лежащих в области $x^2+y^2\leqslant r^2$. Доказать, что

$$T=\frac{6}{\pi}r^2+O(r\ln r).$$

b. Пусть $r \geqslant 2$ и T — число целых точек (x, y, z) с взаимно простыми координатами, лежащих в области $x^2+y^2+z^2 \leqslant r^2$. Доказать, что

$$T=\frac{4\pi r^3}{3\zeta(3)}+O(r^2).$$

23, a. Теорему 2, b, § 4 доказать, считая делители числа a, не делящиеся на квадрат целого, превосходящего 1, и имеющие 1, 2, ... простых делителей.

b. Пусть a — целое, $a > 1$, d пробегает делители числа a, имеющие не более чем m простых делителей. Доказать, что при m четном $\sum \mu(d) \geqslant 0$, а при m нечетном $\sum \mu(d) \leqslant 0$.

c. При условиях теоремы c, § 4, считая все f неотрицательными и заставляя d пробегать лишь числа, имеющие не более чем m простых делителей, доказать, что

$$S' \leqslant \sum \mu(d) S_d, \quad S' \geqslant \sum \mu(d) S_d$$

в зависимости от того, будет ли m четным или нечетным.

d. Такие же, как в вопросе c, неравенства доказать при условиях вопроса 17, a, считая все значения $f(x)$ неотрицательными, а также при условиях 17, b, считая все значения $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ неотрицательными.

24. Пусть ε — любое постоянное с условиями $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$, $N \geqslant 8$, $r=\ln N$, $0 < q \leqslant N^{1-\varepsilon}$, $0 \leqslant l < q$, $(q, l)=1$, $\pi(N, q, l)$ — число простых чисел с условиями: $p \leqslant N$, $p=qt+l$, где t — целое. Доказать, что

$$\pi(N, q, l)=O(\Delta); \quad \Delta=\frac{Nr^{\varepsilon}}{r\varphi(q)}.$$

Для доказательства, полагая $h=r^{1-0,5\varepsilon}$, простые числа с указанными условиями следует рассматривать как частный случай всех чисел с этими условиями взаимно простых с a, где a — произведение всех простых, не превосходящих e^h и не делящих q. Следует применить теорему вопроса 23, d (условия вопроса 17, a) с указанным a и $m=2[2\ln r+1]$.

25. Пусть k — четное; $k > 0$, каноническое разложение числа a имеет вид $a=p_1p_2\ldots p_k$ и d пробегает делители числа a с условием $0 < d < \sqrt{a}$. Доказать, что

$$\sum_d \mu(d)=0.$$

26. Пусть k — целое, $k > 0$, d пробегает делители числа с условием $\varphi(d)=k$. Доказать, что

$$\sum_d \mu(d)=0.$$

27. Пользуясь выражением для $\varphi(a)$, доказать бесконечность числа простых чисел.

28, a. Теорему c, § 5 доказать, установив, что число чисел ряда 1, 2, ..., a, имеющих с a один и тот же общий наибольший делитель δ, равно $\varphi\left(\frac{a}{\delta}\right)$.

b. Вывести выражение для $\varphi(a)$:

α) пользуясь теоремой вопроса **10**, **b**;

β) пользуясь теоремой вопроса **17**, **c**.

29. Пусть $R(s) > 2$. Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

30. Пусть n — целое, $n \geqslant 2$. Доказать, что

$$\sum_{m=1}^{n} \varphi(m) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + O(n \ln n).$$

Численные примеры к главе 2

1, a. Найти показатель, с которым 5 входит в каноническое разложение 5258! (см. вопрос 5).

b. Найти каноническое разложение числа 125!

2, a. Найти $\tau(5600)$ и $S(5600)$.

b. Найти $\tau(116\,424)$ и $S(116\,424)$.

3. Составить таблицу значений функции $\mu(a)$ для всех $a = 1, 2, \ldots, 100$.

4. Найти: α) $\varphi(5040)$, β) $\varphi(1\,294\,700)$.

5. Составить таблицу значений функции $\varphi(a)$ для всех $a = 1, 2, \ldots, 50$, пользуясь только формулой (5), § 5 и мультипликативностью функции $\varphi(a)$.

Глава 3

СРАВНЕНИЯ

§ 1. Основные понятия

a. Мы будем рассматривать целые числа в связи с остатками от деления их на данное целое положительное m, которое назовем *модулем.*

Каждому целому числу отвечает определенный остаток от деления его на m (с, § 1, гл. I); если двум целым a и b отвечает один и тот же остаток r, то они называются *равноостаточными* по модулю m или *сравнимыми* по модулю m.

b. Сравнимость чисел a и b по модулю m записывается так:

$$a \equiv b \pmod{m},$$

что читается: a сравнимо с b по модулю m.

c. *Сравнимость чисел a и b по модулю m равносильна:*

1. *Возможности представить a в виде $a = b + mt$, где t — целое.*

2. *Делимости $a - b$ на m.*

Действительно, из $a \equiv b \pmod{m}$ следует

$$a = mq + r, \quad b = mq_1 + r; \qquad 0 \leqslant r < m,$$

откуда

$$a - b = m(q - q_1), \quad a = b + mt, \qquad t = q - q_1.$$

Обратно, из $a = b + mt$, представляя b в виде

$$b = mq_1 + r, \qquad 0 \leqslant r < m,$$

выводим

$$a = mq + r; \qquad q = q_1 + t,$$

т. е.

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Поэтому верно утверждение **1.**

Из **1** непосредственно следует утверждение **2.**

§ 2. Свойства сравнений, подобные свойствам равенств

a. *Два числа, сравнимые с третьим, сравнимы между собою.*

Следует из a, § 1.

b. *Сравнения можно почленно складывать.*

Действительно, пусть

$$a_1 \equiv b_1 \pmod m, \quad a_2 \equiv b_2 \pmod m, \ \ldots, \ a_k \equiv b_k \pmod m. \qquad (1)$$

Тогда (1, c, § 1)

$$a_1 = b_1 + mt_1, \quad a_2 = b_2 + mt_2, \ \ldots, \ a_k = b_k + mt_k, \qquad (2)$$

откуда

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k + m\,(t_1 + t_2 + \ldots + t_k)$$

или (1, c, § 1)

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k \equiv b_1 + b_2 + \ldots + b_k \pmod m.$$

Слагаемое, стоящее в какой-либо части сравнения, можно переносить в другую часть, переменив знак на обратный.

Действительно, складывая сравнение $a + b \equiv c \pmod m$ с очевидным сравнением $-b \equiv -b \pmod m$, получим $a \equiv c - b \pmod m$.

К каждой части сравнения можно прибавить любое число, кратное модуля.

Действительно, складывая сравнение $a \equiv b \pmod m$ с очевидным сравнением $mk \equiv 0 \pmod m$, получим $a + mk \equiv b \pmod m$.

c. *Сравнения можно почленно перемножать.*

Действительно, рассмотрим снова сравнения (1) и вытекающие из них равенства (2). Перемножая почленно равенства (2), получим

$$a_1 a_2 \ldots a_k = b_1 b_2 \ldots b_k + mN,$$

где N — целое. Следовательно (1, c, § 1),

$$a_1 a_2 \ldots a_k \equiv b_1 b_2 \ldots b_k \pmod m.$$

Обе части сравнения можно возвести в одну и ту же степень.

Это следует из предыдущего утверждения.

Обе части сравнения можно умножить на одно и то же целое.

Действительно, перемножив сравнение $a \equiv b \pmod{m}$ с очевидным сравнением $k \equiv k \pmod{m}$, получим $ak \equiv bk \pmod{m}$.

d. Свойства **b** и **c** (сложение и умножение сравнений) обобщаются следующей теоремой.

Если в выражении многочлена с целыми коэффициентами $S = \sum A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}$ заменим $A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$, $x_1, \ldots, x_k$ числами $B_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$, $y_1, \ldots, y_k$, сравнимыми с прежними по модулю m, то новое выражение S будет сравнимо с прежним по модулю m.

Действительно, из

$$A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} \equiv B_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} \pmod{m},$$

$$x_1 \equiv y_1 \pmod{m}, \quad \ldots, \quad x_k \equiv y_k \pmod{m}$$

находим (c)

$$x_1^{\alpha_1} \equiv y_1^{\alpha_1} \pmod{m}, \quad \ldots, \quad x_k^{\alpha_k} \equiv y_k^{\alpha_k} \pmod{m},$$

$$A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k} \equiv B_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} y_1^{\alpha_1} \ldots y_k^{\alpha_k} \pmod{m},$$

откуда, суммируя, получим

$$\sum A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k} \equiv \sum B_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} y_1^{\alpha_1} \ldots y_k^{\alpha_k} \pmod{m}.$$

Если

$$a \equiv b \pmod{m}, \quad a_1 \equiv b_1 \pmod{m}, \quad \ldots, \quad a_n \equiv b_n \pmod{m},$$
$$x \equiv x_1 \pmod{m},$$

то

$$ax^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \equiv b x_1^n + b_1 x_1^{n-1} + \ldots + b_n \pmod{m}.$$

Это утверждение есть частный случай предыдущего.

e. *Обе части сравнения можно разделить на их общий делитель, если последний взаимно прост с модулем.*

Действительно, из $a \equiv b \pmod{m}$, $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, $(d, m) = 1$ следует, что разность $a - b$, равная $(a_1 - b_1) d$, делится на m. Поэтому (2, f, § 2, гл. I) $a_1 - b_1$ делится на m, т. е. $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$.

§ 3. Дальнейшие свойства сравнений

a. *Обе части сравнения и модуль можно умножить на одно и то же целое.*

Действительно, из $a \equiv b \pmod{m}$ следует

$$a = b + mt, \quad ak = bk + mkt$$

и, следовательно, $ak \equiv bk \pmod{mk}$.

b. *Обе части сравнения и модуль можно разделить на любой их общий делитель.*

Действительно, пусть

$$a \equiv b \pmod{m}, \quad a = a_1 d, \quad b = b_1 d, \quad m = m_1 d.$$

Имеем

$$a = b + mt, \quad a_1 d = b_1 d + m_1 dt, \quad a_1 = b_1 + m_1 t$$

и, следовательно, $a_1 \equiv b_1 \pmod{m_1}$.

c. *Если сравнение $a \equiv b$ имеет место по нескольким модулям, то оно имеет место и по модулю, равному общему наименьшему кратному этих модулей.*

В самом деле, из $a \equiv b \pmod{m_1}$, $a \equiv b \pmod{m_2}$, ..., $a \equiv b \pmod{m_k}$ следует, что разность $a - b$ делится на все модули $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Поэтому (**6**, **e**, § 5, гл. I) она должна делиться и на общее наименьшее кратное m этих модулей, т. е. $a \equiv b \pmod{m}$.

d. *Если сравнение имеет место по модулю m, то оно имеет место и по модулю d, равному любому делителю числа m.*

В самом деле, из $a \equiv b \pmod{m}$ следует, что разность $a - b$ должна делиться на m; поэтому (**1**, **b**, § 1, гл. I) она должна делиться и на любой делитель d числа m, т. е. $a \equiv b \pmod{d}$.

e. *Если одна часть сравнения и модуль делятся на какое-либо число, то и другая часть сравнения должна делиться на то же число.*

Действительно, из $a \equiv b \pmod{m}$ следует $a = b + mt$; если a и m кратны d, то (**2**, **b**, § 1, гл. I) и b должно быть кратным d, что и утверждалось.

f. *Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $(a, m) = (b, m)$.*

Действительно, ввиду **2**, **b**, § 2, гл. I это равенство непосредственно следует из $a = b + mt$.

§ 4. Полная система вычетов

a. Числа равноостаточные, или, что то же самое, сравнимые по модулю m, образуют *класс* чисел по модулю m.

Из такого определения следует, что всем числам класса отвечает один и тот же остаток r, и мы получим все числа класса, если в форме $mq+r$ заставим q пробегать все целые числа.

Соответственно m различным значениям r имеем m классов чисел по модулю m.

b. Любое число класса называется *вычетом по модулю m* по отношению ко всем числам того же класса. Вычет, получаемый при $q=0$, равный самому остатку r, называется *наименьшим неотрицательным вычетом.*

Вычет ρ, самый малый по абсолютной величине, называется *абсолютно наименьшим вычетом.*

Очевидно, при $r<\frac{m}{2}$ имеем $\rho=r$; при $r>\frac{m}{2}$ имеем $\rho=r-m$; наконец, если m четное и $r=\frac{m}{2}$, то за ρ можно принять любое из двух чисел $\frac{m}{2}$ и $\frac{m}{2}-m=-\frac{m}{2}$.

Взяв от каждого класса по одному вычету, получим *полную систему вычетов по модулю m.* Чаще всего в качестве полной системы вычетов употребляют наименьшие неотрицательные вычеты $0, 1, \ldots, m-1$ или также абсолютно наименьшие вычеты; последние, как это следует из вышеизложенного, в случае нечетного m представляются рядом

$$-\frac{m-1}{2}, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{m-1}{2},$$

а в случае четного m каким-либо из двух рядов

$$-\frac{m}{2}+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{m}{2},$$

$$-\frac{m}{2}, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{m}{2}-1.$$

c. *Любые m чисел, попарно несравнимые по модулю m, образуют полную систему вычетов по этому модулю.*

Действительно, будучи несравнимы, эти числа тем самым принадлежат к различным классам, а так как их m, т. е. столько же, сколько и классов, то в каждый класс наверно попадет по одному числу.

d. *Если* $(a, m) = 1$ *и* x *пробегает полную систему вычетов по модулю* m, *то* $ax + b$, *где* b — *любое целое, тоже пробегает полную систему вычетов по модулю* m.

Действительно, чисел $ax + b$ будет столько же, сколько и чисел x, т. е. m. Согласно с остается, следовательно, только показать, что любые два числа $ax_1 + b$ и $ax_2 + b$, отвечающие несравнимым x_1 и x_2, будут сами несравнимы по модулю m.

Но допустив, что $ax_1 + b \equiv ax_2 + b \pmod m$, мы придем к сравнению $ax_1 \equiv ax_2 \pmod m$, откуда, вследствие $(a, m) = 1$, получим $x_1 \equiv x_2 \pmod m$, что противоречит предположению о несравнимости чисел x_1 и x_2.

§ 5. Приведенная система вычетов

a. Согласно f, § 3 числа одного и того же класса по модулю m имеют с модулем один и тот же общий наибольший делитель. Особенно важны классы, для которых этот делитель равен единице, т. е. классы, содержащие числа, взаимно простые с модулем.

Взяв от каждого такого класса по одному вычету, получим *приведенную систему вычетов по модулю* m. Приведенную систему вычетов, следовательно, можно составить из чисел полной системы, взаимно простых с модулем. Обыкновенно приведенную систему вычетов выделяют из системы наименьших неотрицательных вычетов: $0, 1, \ldots, m-1$. Так как среди этих чисел число взаимно простых с m есть $\varphi(m)$, то число чисел приведенной системы, равно как и число классов, содержащих числа, взаимно простые с модулем, есть $\varphi(m)$.

Пример. Приведенная система вычетов по модулю 42 будет

$$1,\ 5,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 25,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41.$$

b. *Любые* $\varphi(m)$ *чисел, попарно несравнимые по модулю* m *и взаимно простые с модулем, образуют приведенную систему вычетов по модулю* m.

Действительно, будучи несравнимыми и взаимно простыми с модулем, эти числа тем самым принадлежат к различным классам, содержащим числа, взаимно простые с модулем, а так как их $\varphi(m)$, т. е. столько же, сколько и классов указанного вида, то в каждый класс наверно попадет по одному числу.

c. *Если* $(a, m)=1$ *и* x *пробегает приведенную систему вычетов по модулю* m, *то* ax *тоже пробегает приведенную систему вычетов по модулю* m.

Действительно, чисел ax будет столько же, сколько и чисел x, т. е. $\varphi(m)$. Согласно **b** остается, следовательно, только показать, что числа ax по модулю m несравнимы и взаимно просты с модулем. Но первое доказано в **d**, § 4 для чисел более общего вида $ax+b$, второе же следует из $(a, m)=1$, $(x, m)=1$.

§ 6. Теоремы Эйлера и Ферма

a. *При* $m>1$ *и* $(a, m)=1$ *имеем (теорема Эйлера):*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m.$$

Действительно, если x пробегает приведенную систему вычетов

$$x=r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_c; \qquad c=\varphi(m),$$

составленную из наименьших неотрицательных вычетов, то наименьшие неотрицательные вычеты $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_c$ чисел ax будут пробегать ту же систему, но расположенную, вообще говоря, в ином порядке (c, § 5).

Перемножая почленно сравнения

$$ar_1 \equiv \rho_1 \pmod m,\quad ar_2 \equiv \rho_2 \pmod m,\quad \ldots,\quad ar_c \equiv \rho_c \pmod m,$$

получим

$$a^c r_1 r_2 \ldots r_c \equiv \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_c \pmod m,$$

откуда, деля обе части на произведение $r_1 r_2 \ldots r_c = \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_c$, получим

$$a^c \equiv 1 \pmod m.$$

b. *При* p *простом и* a, *не делящемся на* p, *имеем (теорема Ферма):*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p. \qquad (1)$$

Эта теорема является следствием теоремы a при $m=p$. Последней теореме можно придать более удобную форму. Именно, умножая обе части сравнения (1) на a, получим сравнение

$$a^p \equiv a \pmod p,$$

справедливое уже при всех целых a, так как оно верно и при a, кратном p.

Вопросы к главе 3

1, a. Представляя целое число в обычной десятичной системе исчисления, вывести признаки делимости на 3, 9, 11.

b. Представляя целое число в системе исчисления с основанием 100, вывести признак делимости на 101.

c. Представляя целое число в системе исчисления с основанием 1000, вывести признаки делимости на 37, 7, 11, 13.

2. Пусть $m > 1$, $(a, m)=1$, b—целое, x пробегает полную, а ξ—приведенную систему вычетов по модулю m. Доказать, что

$$\alpha)\ \sum_x \left\{\frac{ax+b}{m}\right\}=\frac{1}{2}(m-1).$$

$$\beta)\ \sum_\xi \left\{\frac{a\xi}{m}\right\}=\frac{1}{2}\varphi(m).$$

3, a. Пусть $m > 0$, $(a, m)=1$, $h \geqslant 0$, c—вещественное,

$$S=\sum_{x=0}^{m-1}\left\{\frac{ax+\psi(x)}{m}\right\},$$

где $\psi(x)$ для рассматриваемых значений x принимает значения с условием $c \leqslant \psi(x) \leqslant c+h$. Доказать, что

$$\left|S-\frac{1}{2}m\right| \leqslant h+\frac{1}{2}.$$

b. Пусть M—целое, $m > 0$, $(a, m)=1$, A и B—вещественные,

$$A=\frac{a}{m}+\frac{\lambda}{m^2};\quad S=\sum_{x=M}^{M+m-1}\{Ax+B\}.$$

Доказать, что

$$\left|S-\frac{1}{2}m\right| \leqslant |\lambda|+\frac{1}{2}.$$

c. Пусть M — целое, $m > 0$, $(a, m) = 1$,

$$S = \sum_{x=M}^{M+m-1} \{f(x)\},$$

где в интервале $M \leqslant x \leqslant M+m-1$ функция $f(x)$ имеет непрерывные производные $f'(x)$ и $f''(x)$, причем выполняются условия

$$f'(M) = \frac{a}{m} + \frac{\theta}{m^2}; \quad (a, m) = 1; \quad |\theta| < 1; \quad \frac{1}{A} \leqslant |f''(x)| \leqslant \frac{k}{A},$$

где

$$1 \leqslant m \leqslant \tau, \quad \tau = A^{\frac{1}{3}}, \quad A \geqslant 2, \quad k \geqslant 1.$$

Доказать, что

$$\left| S - \frac{1}{2} m \right| < \frac{k+3}{2}.$$

4. Пусть в разложении иррационального числа A в непрерывную дробь все неполные частные ограничены, M — целое, m — целое, $m > 0$, B — вещественное. Доказать, что

$$\sum_{x=M}^{M+m-1} \{Ax + B\} = \frac{1}{2} m + O(\ln m).$$

5, a. Пусть $A > 2$, $k \geqslant 1$ и в интервале $Q \leqslant x \leqslant R$ функция $f(x)$ имеет вторую непрерывную производную, удовлетворяющую условиям

$$\frac{1}{A} \leqslant |f''(x)| \leqslant \frac{k}{A}.$$

Доказать, что

$$\sum_{Q < x \leqslant R} \{f(x)\} = \frac{1}{2}(R - Q) + \theta\Delta; \quad |\theta| < 1,$$

$$\Delta = (2k^2 (R - Q) \ln A + 8kA) A^{-\frac{1}{3}}.$$

b. Пусть $0 < \sigma \leqslant 1$, Q и R — целые. При условиях вопроса a доказать, что число $\psi(\sigma)$ дробей $\{f(x)\}$; $x = Q+1, \ldots, R$ с условием $0 \leqslant \{f(x)\} < \sigma$ выражается формулой

$$\psi(\sigma) = \sigma(R - Q) + \theta' \cdot 2\Delta; \quad |\theta'| < 1.$$

6, a. Пусть T — число целых точек (x, y) области $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ $(r \geqslant 2)$. Доказать, что

$$T = \pi r^2 + O\left(r^{\frac{2}{3}} \ln r\right).$$

b. Пусть n — целое, $n > 2$, E — постоянная Эйлера. Доказать, что

$$\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(n)=n(\ln n+2E-1)+O\left(n^{\frac{1}{3}}(\ln n)^2\right).$$

c. При $N \geqslant 2$ и целом положительном l доказать, что

$$\sum_{0<a\leqslant N} \frac{(\tau(a))^l}{a} \leqslant (\ln N)^{2^l}. \qquad (1)$$

Для доказательства воспользоваться очевидным неравенством: $\tau(uv) \leqslant \tau(u)\tau(v)$.

d. При $N \geqslant 2$ и целом положительном l доказать, что

$$\sum_{0<a\leqslant N} (\tau(a))^l \leqslant N(\ln N)^{2^l-1}. \qquad (2)$$

7. Систему n целых положительных чисел, каждое из которых представлено в системе исчисления с основанием 2, назовем правильной, если при всяком целом неотрицательном s число чисел, в представление которых входит 2^s, будет четным, и неправильной, если хотя бы при одном s это число будет нечетным.

Доказать, что неправильную систему путем уменьшения или полного изъятия некоторого одного ее члена можно сделать правильной, а правильная система от уменьшения или полного изъятия любого ее члена делается неправильной.

8, a. Доказать, что сумма

$$3^n x_n + 3^{n-1}x_{n-1}+\ldots+3x_1+x_0,$$

где $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0$ независимо друг от друга пробегают значения —1, 0, 1, представляет все числа

$$-H, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, H; \quad H=\frac{3^{n+1}-1}{3-1},$$

причем каждое число — единственным способом.

b. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_k$ — положительные попарно простые. Пользуясь c, § 4, доказать, что полную систему вычетов по модулю $m_1m_2\ldots m_k$ получим, заставляя в сумме

$$x_1+m_1x_2+m_1m_2x_3+\ldots+m_1m_2\ldots m_{k-1}x_k$$

числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ пробегать полные системы вычетов по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

9. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_k$ — попарно простые и

$$m_1m_2\ldots m_k=M_1m_1=M_2m_2=\ldots=M_km_k.$$

a. Применяя c, § 4, доказать, что полную систему вычетов по модулю $m_1m_2\ldots m_k$ получим, заставляя в сумме

$$M_1x_1+M_2x_2+\ldots+M_kx_k$$

числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ пробегать полные системы вычетов по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

b. Применяя b § 5, гл. II и b, § 5, доказать, что приведенную систему вычетов по модулю $m_1m_2\ldots m_k$ получим, заставляя в сумме

$$M_1x_1+M_2x_2+\ldots+M_kx_k$$

числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ пробегать приведенные системы вычетов по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

c. Доказательство теоремы вопроса b провести независимо от теоремы b, § 5, гл. II и тогда уже вывести последнюю теорему, как следствие первой.

d. Найти элементарным путем выражение для $\varphi(p^\alpha)$ и, пользуясь мультипликативностью $\varphi(a)$, вывести известное выражение для $\varphi(a)$.

10. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_k$ — попарно простые, превосходящие 1, $m=m_1m_2\ldots m_k$,

a. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k, x$ пробегают полные, а $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \xi$ — приведенные системы вычетов по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_k, m$. Доказать, что дроби

$$\left\{\frac{x_1}{m_1}+\frac{x_2}{m_2}+\ldots+\frac{x_k}{m_k}\right\}$$

совпадают с дробями $\left\{\frac{x}{m}\right\}$, а дроби $\left\{\frac{\xi_1}{m_1}+\frac{\xi_2}{m_2}+\ldots+\frac{\xi_k}{m_k}\right\}$ совпадают с дробями $\left\{\frac{\xi}{m}\right\}$.

b. Пусть задан многочлен $f(x, \ldots, w)$ с целыми коэффициентами от r переменных $x, \ldots, w\ (r \geqslant 1)$:

$$f(x, \ldots, w)=\sum_{\alpha, \ldots, \delta} c_{\alpha, \ldots, \delta}x^\alpha\ldots w^\delta$$

и пусть

$$a=M_1a_1+\ldots+M_ka_k,$$

$x_s, \ldots, w_s$ пробегают полные, а $\xi_s, \ldots, \omega_s$ — приведенные системы вычетов по модулю m_s; $x, \ldots, w$ пробегают полные, а $\xi, \ldots, \omega$ — приведенные системы вычетов по модулю m. Доказать, что дроби $\left\{\frac{a_1f(x_1, \ldots, w_1)}{m_1}+\ldots+\frac{a_kf(x_k, \ldots, w_k)}{m_k}\right\}$ совпадают с дробями $\left\{\frac{af(x, \ldots, w)}{m}\right\}$, а дроби $\left\{\frac{a_1f(\xi_1, \ldots, \omega_1)}{m_1}+\ldots+\frac{a_kf(\xi_k, \ldots, \omega_k)}{m_k}\right\}$ совпадают с дробями $\left\{\frac{af(\xi, \ldots, \omega)}{m}\right\}$ (обобщение теорем вопроса a).

11, a. Пусть m — целое, $m>0$, a — целое, x пробегает полную систему вычетов по модулю m. Доказать, что

$$\sum e^{2\pi i\frac{ax}{m}}=\begin{cases} m, & \text{если } a \text{ кратно } m, \\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

b. Пусть α — вещественное, M — целое, P — целое $P>0$. Обозначая символом (α) численное значение разности между α и ближайшим к α целым числом (расстояние α до ближайшего целого), доказать, что

$$\left|\sum_{x=M}^{M+P-1} e^{2\pi i\alpha x}\right| \leqslant \min\left(P, \frac{1}{(\alpha) h}\right); \quad h \geqslant \begin{cases} 2 & \text{всегда,} \\ 3 & \text{при } (\alpha) \leqslant \frac{1}{6}. \end{cases}$$

c. Пусть m — целое, $m>1$ и функции $M(a)$ и $P(a)$ для значений $a=1, 2, \ldots, m-1$ принимают целые значения с условием $P(a)>0$. Доказать, что

$$\sum_{a=1}^{m-1}\left|\sum_{x=M(a)}^{M(a)+P(a)-1} e^{2\pi i \frac{a}{m} x}\right| < \delta;$$

$$\delta = \begin{cases} m\ln m, & \\ m\ln m - \frac{m}{2} & \text{при } m \geqslant 12, \\ m\ln m - m & \text{при } m \geqslant 60. \end{cases}$$

12, a. Пусть m — целое, $m>0$, ξ пробегает приведенную систему вычетов по модулю m. Доказать, что

$$\mu(m) = \sum_{\xi} e^{2\pi i \frac{\xi}{m}}.$$

b. Пользуясь теоремой вопроса a, доказать первую из теорем c, § 4, гл. II (см. решение вопроса 28, a, гл. II).

c. Теорему вопроса a вывести, пользуясь теоремой вопроса 17, a, гл. II.

d. Пусть

$$f(x, \ldots, w) = \sum_{\alpha, \ldots, \delta} c_{\alpha, \ldots, \delta} x^{\alpha} \ldots w^{\delta}$$

— многочлен с целыми коэффициентами от r переменных $x, \ldots, w$ $(r \geqslant 1)$, a — целое, m — целое, $m>0$, $x, \ldots, w$ пробегают полные, а $\xi, \ldots, \omega$ — приведенные системы вычетов по модулю m. Вводим обозначения

$$S_{a,m} = \sum_{x} \ldots \sum_{w} e^{2\pi i \frac{af(x, \ldots, w)}{m}} \qquad S'_{a,m} = \sum_{\xi} \ldots \sum_{\omega} e^{2\pi i \frac{af(\xi, \ldots, \omega)}{m}}$$

Пусть далее $m = m_1 \ldots m_k$, где $m_1, \ldots, m_k$ — попарно простые, превосходящие 1, и пусть $m = M_s m_s$. Доказать, что

$$S_{a_1, m_1} \ldots S_{a_k, m_k} = S_{M_1 a_1 + \ldots + M_k a_k, m},$$

$$S'_{a_1, m_1} \ldots S'_{a_k, m_k} = S'_{M_1 a_1 + \ldots + M_k a_k, m}.$$

e. При обозначениях вопроса d полагаем

$$A(m)=m^{-r}\sum_a S_{a,m},\quad A'(m)=m^{-r}\sum_a S'_{a,m},$$

где a пробегает приведенную систему вычетов по модулю m.

Доказать, что

$$A(m_1)\ldots A(m_k)=A(m),\quad A'(m_1)\ldots A'(m_k)=A'(m).$$

13, a. Доказать, что

$$\varphi(a)=\sum_{n=0}^{a-1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\sum_{x=0}^{p-1}e^{2\pi i\frac{nx}{p}}\right),$$

где p пробегает простые делители числа a.

b. Из тождества вопроса a вывести известное выражение для $\varphi(a)$.

14. Доказать, что

$$\tau(a)=2\sum_{0<x<\sqrt{a}}\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{x-1}e^{2\pi i\frac{ak}{x}}+\delta,$$

где $\delta=1$ или $\delta=0$, в зависимости от того, является ли a квадратом целого числа или нет.

15, a. Пусть p — простое и $h_1, h_2, \ldots, h_a$ — целые. Доказать, что

$$(h_1+h_2+\ldots+h_a)^p\equiv h_1^p+h_2^p+\ldots+h_a^p \pmod p.$$

b. Из теоремы вопроса a вывести теорему Ферма.

c. Из теоремы Ферма вывести теорему Эйлера.

Численные примеры к главе 3

1, a. Найти остаток от деления

$$(12371^{56}+34)^{28} \text{ на } 111.$$

b. Делится ли на 1093^2 число $2^{1093}-2$?

2, a. Применяя признаки делимости вопроса 1, найти каноническое разложение числа 244943325.

b. Найти каноническое разложение числа 282321246671737.

Глава 4

СРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

§ 1. Основные понятия

Нашей ближайшей задачей будет изучение сравнений такого общего вида:

$$f(x) \equiv 0 \pmod m; \quad f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n. \qquad (1)$$

Если a не делится на m, то n называется *степенью сравнения*.

Решить сравнение—значит найти все значения x, ему удовлетворяющие. Два сравнения, которым удовлетворяют одни и те же значения x, называются равносильными.

Если сравнению (1) удовлетворяет какое-либо $x = x_1$, то (d, § 2, гл. III) тому же сравнению будут удовлетворять и все числа, сравнимые с x_1 по модулю m: $x \equiv x_1 \pmod m$. Весь этот класс чисел считается за *одно решение*. При таком соглашении *сравнение* (1) *будет иметь столько решений, сколько вычетов полной системы ему удовлетворяет*.

Пример. Сравнению

$$x^5 + x + 1 \equiv 0 \pmod 7$$

среди чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 полной системы вычетов по модулю 7 удовлетворяют два числа: $x = 2$ и $x = 4$. Поэтому указанное сравнение имеет два решения:

$$x \equiv 2 \pmod 7, \quad x \equiv 4 \pmod 7.$$

§ 2. Сравнения первой степени

а. Сравнение первой степени перенесением свободного члена (с обратным знаком) в правую часть можно привести к виду

$$ax \equiv b \pmod m. \qquad (1)$$

b. Приступая к исследованию вопроса о числе решений, мы сначала ограничим сравнение условием $(a, m)=1$. Согласно § 1 наше сравнение имеет столько решений, сколько вычетов полной системы ему удовлетворяет. Но когда x пробегает полную систему вычетов по модулю m, то ax пробегает полную систему вычетов (**d**, § 4, гл. III). Следовательно, при одном и только одном значении x, взятом из полной системы, ax будет сравнимо с b. Итак, при $(a, m)=1$ сравнение (1) имеет одно решение.

c. Пусть теперь $(a, m)=d>1$. Тогда, чтобы сравнение (1) имело решения, необходимо (**e**, § 3, гл. III), чтобы b делилось на d, иначе сравнение (1) невозможно ни при каком целом x. Предполагая поэтому b кратным d, положим $a=a_1d$, $b=b_1d$, $m=m_1d$. Тогда сравнение (1) будет равносильно такому (по сокращении на d): $a_1x\equiv b_1 \pmod{m_1}$, в котором уже $(a_1, m_1)=1$, и потому оно будет иметь одно решение по модулю m_1. Пусть x_1 — наименьший неотрицательный вычет этого решения по модулю m_1, тогда все числа x, образующие это решение, найдутся в виде

$$x\equiv x_1 \pmod{m_1}. \tag{2}$$

По модулю же m числа (2) образуют не одно решение, а больше, именно столько решений, сколько чисел (2) найдется в ряде $0, 1, 2, \ldots, m-1$ наименьших неотрицательных вычетов по модулю m. Но сюда попадут следующие числа (2):

$$x_1,\ x_1+m_1,\ x_1+2m_1,\ \ldots,\ x_1+(d-1)\,m_1,$$

т. е. всего d чисел (2); следовательно, сравнение (1) имеет d решений.

d. Собирая все доказанное, получаем теорему:

Пусть $(a, m)=d$. Сравнение $ax\equiv b \pmod m$ невозможно, если b не делится на d. При b, кратном d, сравнение имеет d решений.

e. Обращаясь к разысканию решений сравнения (1), мы укажем только способ, основанный на теории непрерывных дробей, причем достаточно ограничиться лишь случаем $(a, m)=1$.

Разлагая в непрерывную дробь отношение $m:a$,

$$\frac{m}{a} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots + \cfrac{1}{q_n}}}$$

и рассматривая две последние подходящие дроби:

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \quad \frac{P_n}{Q_n} = \frac{m}{a},$$

согласно свойствам непрерывных дробей (d, § 6, гл. I) имеем

$$mQ_{n-1} - aP_{n-1} = (-1)^n,$$

$$aP_{n-1} \equiv (-1)^{n-1} \pmod{m},$$

$$a \cdot (-1)^{n-1} P_{n-1} b \equiv b \pmod{m}.$$

Итак, наше сравнение имеет решение

$$x \equiv (-1)^{n-1} P_{n-1} b \pmod{m},$$

для разыскания которого достаточно вычислить P_{n-1} согласно способу, указанному в с, § 6, гл. I.

Пример. Решим сравнение

$$111x \equiv 75 \pmod{321}. \qquad (3)$$

Здесь $(111, 321) = 3$, причем 75 кратно 3. Поэтому сравнение имеет три решения.

Деля обе части сравнения и модуль на 3, получим сравнение

$$37x \equiv 25 \pmod{107}, \qquad (4)$$

которое нам следует сначала решить. Имеем

$$\begin{array}{r|l} 107 & 37 \\ 74 & 2 \\ \hline 37 & 33 \\ 33 & 1 \\ \hline 33 & 4 \\ 32 & 8 \\ \hline 4 & 1 \\ 4 & 4 \\ \hline 0 & \end{array}$$

q		2	1	8	4
P_s	1	2	3	26	107

Значит, в данном случае $n=4$, $P_{n-1}=26$, $b=25$, и мы имеем решение сравнения (4) в виде

$$x \equiv -26\cdot 25 \equiv 99 \pmod{107}.$$

Отсюда решения сравнения (3) представляются так:

$$x \equiv 99;\ 99+107;\ 99+2\cdot 107 \pmod{321},$$

т. е.

$$x \equiv 99;\ 206;\ 313 \pmod{321}.$$

§ 3. Система сравнений первой степени

а. Мы рассмотрим лишь простейшую систему сравнений

$$\begin{aligned} x &\equiv b_1 \pmod{m_1}, \\ x &\equiv b_2 \pmod{m_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x &\equiv b_k \pmod{m_k} \end{aligned} \qquad (1)$$

с одним неизвестным, но с разными и притом попарно простыми модулями.

b. Решить систему (1), т. е. найти все значения x, ей удовлетворяющие, можно, применяя следующую теорему:

Пусть числа M_s и M_s' *определены из условий*

$$m_1 m_2 \ldots m_k = M_s m_s, \quad M_s M_s' \equiv 1 \pmod{m_s}$$

и пусть

$$x_0 = M_1 M_1' b_1 + M_2 M_2' b_2 + \ldots + M_k M_k' b_k.$$

Тогда совокупность значений x, *удовлетворяющих системе* (1), *определяется сравнением*

$$x \equiv x_0 \pmod{m_1 m_2 \ldots m_k}. \qquad (2)$$

Действительно, ввиду делимости на m_s всех M_j, отличных от M_s, при любом $s=1, 2, \ldots, k$ имеем

$$x_0 \equiv M_s M_s' b_s \equiv b_s \pmod{m_s},$$

и, следовательно, система (1) равносильна системе

$$x \equiv x_0 \pmod{m_1}, \quad x \equiv x_0 \pmod{m_2}, \quad \ldots, \quad x \equiv x_0 \pmod{m_k} \qquad (3)$$

(т. е. системам (1) и (3) удовлетворяют одни и те же значения x). Системе же (3), ввиду теорем **c** и **d** § 3, гл. III, удовлетворяют те и только те значения x, которые удовлетворяют сравнению (2).

c. *Если $b_1, b_2, \ldots, b_k$ независимо друг от друга пробегают полные системы вычетов по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_k$, то x_0 пробегает полную систему вычетов по модулю $m_1 m_2 \ldots m_k$.*

Действительно, x_0 пробегает $m_1 m_2 \ldots m_k$ значений, ввиду **d**, § 3, гл. III, несравнимых по модулю $m_1 m_2 \ldots m_k$.

d. Пример. Решим систему

$$x \equiv b_1 \pmod 4, \quad x \equiv b_2 \pmod 5, \quad x \equiv b_3 \pmod 7.$$

Здесь $4 \cdot 5 \cdot 7 = 35 \cdot 4 = 28 \cdot 5 = 20 \cdot 7$, причем

$$35 \cdot 3 \equiv 1 \pmod 4, \quad 28 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 5, \quad 20 \cdot 6 \equiv 1 \pmod 7.$$

Поэтому

$$x_0 = 35 \cdot 3b_1 + 28 \cdot 2b_2 + 20 \cdot 6b_3 = 105b_1 + 56b_2 + 120b_3$$

и, следовательно, совокупность значений x, удовлетворяющих системе, может быть представлена в виде

$$x = 105b_1 + 56b_2 + 120b_3 \pmod{140}.$$

Так, например, совокупность значений x, удовлетворяющих системе

$$x \equiv 1 \pmod 4, \quad x \equiv 3 \pmod 5, \quad x \equiv 2 \pmod 7,$$

будет

$$x \equiv 105 \cdot 1 + 56 \cdot 3 + 120 \cdot 2 \equiv 93 \pmod{140},$$

а совокупность значений x, удовлетворяющих системе

$$x \equiv 3 \pmod 4, \quad x \equiv 2 \pmod 5, \quad x \equiv 6 \pmod 7,$$

будет

$$x \equiv 105 \cdot 3 + 56 \cdot 2 + 120 \cdot 6 \equiv 27 \ (140).$$

§ 4. Сравнения любой степени по простому модулю

a. Пусть p — простое. Докажем общие теоремы, относящиеся к сравнению вида

$$f(x) \equiv 0 \pmod p; \quad f(x) = ax^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n. \qquad (1)$$

b. *Сравнение вида* (1) *равносильно сравнению степени не выше $p-1$.*

Действительно, деля $f(x)$ на $x^p - x$, имеем

$$f(x) = (x^p - x) Q(x) + R(x),$$

где степень $R(x)$ не выше $p-1$. А так как $x^p - x \equiv 0 \pmod p$, то $f(x) \equiv R(x) \pmod p$, откуда и следует указанная теорема.

c. *Если сравнение* (1) *имеет более чем n решений, то все коэффициенты $f(x)$ кратны p.*

Действительно, пусть сравнение (1) имеет, по крайней мере, $n+1$ решение. Обозначая буквами $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ вычеты этих решений, мы можем $f(x)$ представить в виде

$$\begin{aligned} f(x) = {} & a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})(x-x_n) + \\ & + b(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1}) + \\ & + c(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-2}) + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + k(x-x_1)(x-x_2) + \\ & + l(x-x_1) + \\ & + m. \end{aligned} \tag{2}$$

Действительно, преобразовав раскрытием скобок произведения правой части в многочлены, мы b возьмем равным коэффициенту при x^{n-1} разности между $f(x)$ и первым многочленом, затем c возьмем равным коэффициенту при x^{n-2} разности между $f(x)$ и двумя первыми многочленами и т. д.

Полагая в (2) последовательно $x = x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, убеждаемся в том, что все $m, l, k, \ldots, c, b, a$ кратны p. Значит, и все $a, a_1, \ldots, a_n$ кратны p (как суммы чисел, кратных p).

d. *При простом p справедливо сравнение (теорема Вильсона)*

$$1 \cdot 2 \ldots (p-1) + 1 \equiv 0 \pmod p. \tag{3}$$

Действительно, если $p = 2$, то теорема очевидна. Если же $p > 2$, то рассмотрим сравнение

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-(p-1)) - (x^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod p;$$

оно степени не выше $p-2$ и имеет $p-1$ решение, именно решения с вычетами 1, 2, ..., $p-1$. Следовательно, по теореме с все его коэффициенты кратны p; в частности, на p делится и свободный член, равный как раз левой части сравнения (3).

Пример. Имеем $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6+1=721\equiv0 \pmod 7$.

§ 5. Сравнения любой степени по составному модулю

a. *Если $m_1, m_2, \ldots, m_k$ попарно простые, то сравнение*

$$f(x)\equiv0 \pmod{m_1m_2\ldots m_k} \tag{1}$$

равносильно системе

$$f(x)\equiv0 \pmod{m_1},$$
$$f(x)\equiv0 \pmod{m_2}, \ \ldots, \ f(x)\equiv0 \pmod{m_k}.$$

При этом, обозначая через $T_1, T_2, \ldots, T_k$ числа решений отдельных сравнений этой системы по соответственным модулям и через T — число решений сравнения (1), *будем иметь*

$$T=T_1T_2\ldots T_k.$$

Действительно, первая часть теоремы следует из c и d, § 3, гл. III. Вторая часть следует из того, что каждое сравнение

$$f(x)\equiv0 \pmod{m_s} \tag{2}$$

выполняется тогда и только тогда, когда выполняется одно из T_s сравнений вида

$$x\equiv b_s \pmod{m_s},$$

где b_s пробегает вычеты решений сравнения (2), причем возможно всего $T_1T_2\ldots T_k$ различных комбинаций вида

$$x\equiv b_1 \pmod{m_1}, \ x\equiv b_2 \pmod{m_2}, \ \ldots, \ x\equiv b_k \pmod{m_k},$$

приводящих (c, § 3) к различным классам по модулю

$$m_1m_2\ldots m_k.$$

Пример. Сравнение

$$f(x)\equiv0 \pmod{35}, \quad f(x)=x^4+2x^3+8x+9 \tag{3}$$

равносильно системе

$$f(x) \equiv 0 \pmod{5}, \quad f(x) \equiv 0 \pmod{7}.$$

Легко убедимся (§ 1), что первое сравнение этой системы имеет 2 решения: $x \equiv 1,\ 4 \pmod{5}$, второе же сравнение имеет 3 решения: $x \equiv 3;\ 5;\ 6 \pmod{7}$. Поэтому сравнение (3) имеет $2 \cdot 3 = 6$ решений. Чтобы найти эти 6 решений, надо решить 6 систем вида

$$x \equiv b_1 \pmod{5}, \quad x \equiv b_2 \pmod{7}, \tag{4}$$

которые получим, заставляя b_1 пробегать значения $b_1 = 1;\ 4$, а b_2 пробегать значения $b_2 = 3;\ 5;\ 6$. Но, ввиду

$$35 = 7 \cdot 5 = 5 \cdot 7, \quad 7 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{5}, \quad 5 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{7},$$

совокупность значений x, удовлетворяющих системе (4), представится в виде (b, § 3)

$$x \equiv 21b_1 + 15b_2 \pmod{35}.$$

Поэтому решения сравнения (3) будут

$$x \equiv 31;\ 26;\ 6;\ 24;\ 19;\ 34 \pmod{35}.$$

b. Ввиду теоремы a исследование и решение сравнения

$$f(x) \equiv 0 \left(\operatorname{mod} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}\right)$$

сводятся к исследованию и решению сравнений вида

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}; \tag{5}$$

это же последнее сравнение сводится вообще, как мы сейчас выясним, к сравнению

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}. \tag{6}$$

Действительно, всякое x, удовлетворяющее сравнению (5), необходимо должно удовлетворять и сравнению (6). Пусть

$$x \equiv x_1 \pmod{p}$$

— какое-либо решение сравнения (6). Тогда $x = x_1 + pt_1$, где t_1 — целое. Вставляя это значение x в сравнение

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^2}$$

и разлагая левую часть по формуле Тейлора, найдем (принимая во внимание, что $\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_1)$ — целое, и отбрасывая члены, кратные p^2)

$$f(x_1)+pt_1f'(x_1)\equiv 0 \pmod{p^2},\quad \frac{f(x_1)}{p}+t_1f'(x_1)\equiv 0 \pmod{p}.$$

Ограничиваясь здесь случаем, когда $f'(x_1)$ не делится на p, имеем одно решение:

$$t_1\equiv t_1' \pmod{p};\quad t_1=t_1'+pt_2.$$

Выражение для x принимает вид

$$x=x_1+pt_1'+p^2t_2=x_2+p^2t_2;$$

вставляя его в сравнение

$$f(x)\equiv 0 \pmod{p^3},$$

получим

$$f(x_2)+p^2t_2f'(x_2)\equiv 0 \pmod{p^3},$$

$$\frac{f(x_2)}{p^2}+t_2f'(x_2)\equiv 0 \pmod{p}.$$

Здесь $f'(x_2)$ не делится на p, так как

$$x_2\equiv x_1 \pmod{p},$$

$$f'(x_2)\equiv f'(x_1) \pmod{p},$$

и потому последнее сравнение имеет одно решение:

$$t_2\equiv t_2' \pmod{p};$$

$$t_2\equiv t_2'+pt_3.$$

Выражение для x принимает вид

$$x=x_2+p^2t_2'+p^3t_3=x_3+p^3t_3;$$

и т. д. Таким путем по данному решению сравнения (6) постепенно найдем сравнимое с ним решение сравнения (5). Итак, *всякое решение* $x\equiv x_1 \pmod{p}$ *сравнения* (6) *при условии, что* $f'(x_1)$ *не делится на* p, *даст одно решение сравнения* (5):

$$x\equiv x_\alpha+p^\alpha t_\alpha;$$

$$x\equiv x_\alpha \pmod{p^\alpha}.$$

Пример. Решим сравнение

$$f(x)\equiv 0 \pmod{27};\qquad f(x)=x^4+7x+4. \tag{7}$$

Сравнение $f(x) \equiv 0 \pmod 3$ имеет одно решение $x \equiv 1 \pmod 3$; при этом $f'(1) \equiv 2 \pmod 3$ и, следовательно, не делится на 3.

Находим:

$$x = 1 + 3t_1,$$

$$f(1) + 3t_1 f'(1) \equiv 0 \pmod 9; \quad 3 + 3t_1 \cdot 2 \equiv 0 \pmod 9,$$

$$2t_1 + 1 \equiv 0 \pmod 3, \quad t_1 \equiv 1 \pmod 3, \quad t_1 = 1 + 3t_2,$$

$$x = 4 + 9t_2,$$

$$f(4) + 9t_2 f'(4) \equiv 0 \pmod{27}, \quad 18 + 9t_2 \cdot 2 \equiv 0 \pmod{27},$$

$$2t_2 + 2 \equiv 0 \pmod 3, \quad t_2 \equiv 2 \pmod 3, \quad t_2 = 2 + 3t_3,$$

$$x = 22 + 27t_3.$$

Таким образом сравнение (7) имеет одно решение

$$x \equiv 22 \pmod{27}.$$

Вопросы к главе 4

1, a. Пусть m — целое, $m > 0$, $f(x, \ldots, w)$ — целая рациональная функция с целыми коэффициентами от r переменных $x, \ldots, w$ $(r \geqslant 1)$. Если сравнению

$$f(x, \ldots, w) \equiv 0 \pmod m \qquad (1)$$

удовлетворяет система $x = x_0, \ldots, w = w_0$, то (обобщение определения § 1) систему классов чисел по модулю m:

$$x \equiv x_0 \pmod m, \ \ldots, \ w \equiv w_0 \pmod m$$

будем считать за одно решение сравнения (1).

Пусть T — число решений сравнения (1). Доказать, что

$$Tm = \sum_{a=0}^{m-1} \sum_{x=0}^{m-1} \cdots \sum_{w=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{af(x, \ldots, w)}{m}}$$

b. При обозначениях вопроса a и вопроса 12, e, гл. III доказать, что

$$Tm = m^r \sum_{m_0 \backslash m} A(m_0).$$

c. Равенство вопроса a применить к доказательству теоремы о числе решений сравнения первой степени.

d. Пусть m — целое, $m > 0$; $a, \ldots, f, g$ — целые, их число равно $r + 1$ $(r > 0)$: $d = (a, \ldots, f, m)$; T — число решений сравнения

$$ax + \ldots + fw + g \equiv 0 \pmod m.$$

Пользуясь равенством вопроса a, доказать, что

$$T=\begin{cases} m^{r-1}d, & \text{если } g \text{ кратно } d, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

e. Теорему вопроса d доказать, исходя из теоремы о числе решений сравнения $ax \equiv b \pmod m$.

2, a. Пусть $m > 1$, $(a, m)=1$. Доказать, что сравнение $ax \equiv b \pmod m$ имеет решение $x \equiv ba^{\varphi(m)-1} \pmod m$.

b. Пусть p — простое, $0 < a < p$. Доказать, что сравнение $ax \equiv b \pmod p$ имеет решение

$$x \equiv b(-1)^{a-1}\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-a+1)}{1\cdot 2\ldots a} \pmod p.$$

c, α) Указать возможно более простой способ решения сравнения вида

$$2^k x \equiv b \pmod m; \quad (2, m)=(2, b)=1.$$

β) Указать возможно более простой способ решения сравнения

$$3^k x \equiv b \pmod m; \quad (3, m)=(3, b)=1.$$

γ) Пусть $(a, m)=1$, $1 < a < m$. Развивая способы, указанные в вопросах α) и β), доказать, что разыскание решения сравнения $ax \equiv b \pmod m$ может быть приведено к разысканию решений сравнений вида $b+mt \equiv 0 \pmod p$, где p — простой делитель числа a.

3. Пусть m — целое, $m > 1$, $1 \leqslant \tau < m$, $(a, m)=1$. Пользуясь теорией сравнений, доказать существование целых x и y с условиями

$$ax \equiv y \pmod m, \quad 0 < x \leqslant \tau, \quad 0 < |y| < \frac{m}{\tau}.$$

4, a. При $(a, m)=1$ будем рассматривать символическую дробь $\frac{b}{a}$ по модулю m, обозначающую любой вычет решения сравнения $ax \equiv b \pmod m$. Доказать, что (сравнения берутся по модулю m):

α) При $a \equiv a_1$, $b \equiv b_1$ имеем $\frac{b}{a} \equiv \frac{b_1}{a_1}$.

β) Числитель b символической дроби $\frac{b}{a}$ можно заменить сравнимым b_0, кратным a. Тогда символическая дробь $\frac{b}{a}$ сравнима с целым числом, представляемым обычной дробью $\frac{b_0}{a}$.

γ) $\frac{b}{a}+\frac{d}{c} \equiv \frac{bc+ad}{ac}$.

δ) $\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c} \equiv \frac{bd}{ac}$.

b, α) Пусть p—простое, $p > 2$, a—целое, $0 < a < p-1$. Доказать, что

$$\binom{p-1}{a} \equiv (-1)^a \pmod p.$$

β) Пусть p—простое, $p > 2$. Доказать, что

$$\frac{2^p-2}{p} \equiv 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{p-1} \pmod p.$$

5, a. Пусть d—делитель числа a, не делящийся на квадрат целого, превосходящего 1, и на простые, меньшие n, и $\varkappa$—число различных простых делителей числа d. Доказать, что в ряде

$$1\cdot 2\ldots n,\quad 2\cdot 3\ldots(n+1),\quad \ldots,\quad a(a+1)\ldots(a+n-1) \qquad (1)$$

чисел, кратных d, будет $\frac{n^{\varkappa}a}{d}$.

b. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$—различные простые делители числа a, причем ни один из них не меньше чем n. Доказать, что число чисел ряда (1), взаимно простых с a, будет

$$a\left(1-\frac{n}{p_1}\right)\left(1-\frac{n}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{p_k}\right).$$

6. Пусть $m_{1,2,\ldots,k}$—общее наименьшее кратное чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

a. Пусть $d=(m_1, m_2)$. Доказать, что система

$$x \equiv b_1 \pmod{m_1}, \quad x \equiv b_2 \pmod{m_2}$$

разрешима тогда и только тогда, когда b_2-b_1 кратно d, причем в случае разрешимости совокупность значений x, удовлетворяющих этой системе, определяется сравнением вида

$$x \equiv x_{1,2} \pmod{m_{1,2}};\quad m_{1,2}=\frac{m_1 m_2}{d}.$$

b. Доказать, что в случае разрешимости системы

$$x \equiv b_1 \pmod{m_1}, \quad x \equiv b_2 \pmod{m_2}, \quad \ldots, \quad x \equiv b_k \pmod{m_k}$$

совокупность значений x, ей удовлетворяющих, определяется сравнением вида

$$x \equiv x_{1,2,\ldots,k} \pmod{m_{1,2,\ldots,k}}.$$

7. Пусть m—целое, $m > 1$, a и b—целые,

$$\left(\frac{a,b}{m}\right)=\sum_x e^{2\pi i\frac{ax+bx'}{m}},$$

где x пробегает приведенную систему вычетов по модулю m, причем

$x' \equiv \frac{1}{x} \pmod m$ (в смысле вопроса 4, а). Доказать следующие свойства символа $\left(\frac{a,\,b}{m}\right)$:

α) $\left(\frac{a,\,b}{m}\right)$ — вещественное.

β) $\left(\frac{a,\,b}{m}\right) = \left(\frac{b,\,a}{m}\right)$.

γ) При $(h,\,m) = 1$ имеем $\left(\frac{a,\,bh}{m}\right) = \left(\frac{ah,\,b}{m}\right)$.

δ) При $m_1, m_2, \ldots, m_k$ попарно простых, полагая $m_1 m_2 \ldots m_k = m$, $m = M_s m_s$, имеем

$$\left(\frac{a_1,\,1}{m_1}\right)\left(\frac{a_2,\,1}{m_2}\right)\ldots\left(\frac{a_k,\,1}{m_k}\right) = \left(\frac{M_1^2 a_1 + M_2^2 a_2 + \ldots + M_k^2 a_k,\,1}{m}\right).$$

8. Пусть сравнение

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \equiv 0 \pmod p$$

имеет n решений $x \equiv x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \pmod p$.

Доказать, что

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv -a_0 S_1 \pmod p, \\ a_2 &\equiv a_0 S_2 \pmod p, \\ a_3 &\equiv -a_0 S_3 \pmod p, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_n &\equiv (-1)^n a_0 S_n \pmod p, \end{aligned}$$

где S_1 есть сумма всех x_s, S_2 — сумма произведений по два, S_3 — сумма произведений по три и т. д.

9, a. Доказать теорему Вильсона, рассматривая пары x, x' чисел ряда $2, 3, \ldots, p-2$, удовлетворяющие условию $xx' \equiv 1 \pmod p$.

b. Пусть P — целое, $P > 1$, $1 \cdot 2 \ldots (P-1) + 1 \equiv 0 \pmod P$. Доказать, что P — простое.

10, a. Пусть $(a_0, m) = 1$. Указать сравнение n-й степени со старшим коэффициентом 1, равносильное сравнению

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \equiv 0 \pmod m.$$

b. Доказать, что необходимое и достаточное условие того, что сравнение $f(x) \equiv 0 \pmod p$; $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$; $n \leqslant p$, имеет n решений, есть делимость на p всех коэффициентов остатка от деления $x^p - x$ на $f(x)$.

c. Пусть n — делитель $p-1$, $n > 1$, $(A, p) = 1$. Доказать, что необходимое и достаточное условие разрешимости сравнения $x^n \equiv A \pmod p$ есть $A^{\frac{p-1}{n}} \equiv 1 \pmod p$, причем в случае разрешимости указанное сравнение имеет n решений.

11. Пусть n — целое, $n > 0$ $(A, m) = 1$, и известно одно решение $x \equiv x_0 \pmod m$ сравнения $x^n \equiv A \pmod m$. Доказать, что все решения этого сравнения представятся произведением x_0 на вычеты решений сравнения $y^n \equiv 1 \pmod m$.

Численные примеры к главе 4

1, а. Решить сравнение $256x \equiv 179 \pmod{337}$.

b. Решить сравнение $1215x \equiv 560 \pmod{2755}$.

2, а. Сравнения примеров **1, а** и **1, b** решить по способу вопроса **2, с.**

b. Сравнение $1296x \equiv 1105 \pmod{2413}$ решить по способу вопроса **2, с.**

3. Найти все пары x, y, удовлетворяющие неопределенному уравнению $47x - 111y = 89$.

4, а. Указать общее решение для системы

$$x \equiv b_1 \pmod{13}, \quad x \equiv b_2 \pmod{17}.$$

Пользуясь этим общим решением, далее найти три числа, которые при делении на 13 и 17 давали бы соответственно остатки 1 и 12, 6 и 8, 11 и 4.

b. Указать общее решение для системы

$$x \equiv b_1 \pmod{25}, \quad x \equiv b_2 \pmod{27}, \quad x \equiv b_3 \pmod{59}.$$

5, а. Решить систему сравнений (вопрос **6, а**)

$$x \equiv 3 \pmod 8, \quad x \equiv 11 \pmod{20}, \quad x \equiv 1 \pmod{15}.$$

b. Решить систему сравнений

$$x \equiv 1 \pmod 3, \quad x \equiv 4 \pmod 5, \quad x \equiv 2 \pmod 7,$$
$$x \equiv 9 \pmod{11}, \quad x \equiv 3 \pmod{13}.$$

6. Решить систему сравнений

$$3x + 4y - 29 \equiv 0 \pmod{143}, \quad 2x - 9y + 84 \equiv 0 \pmod{143}.$$

7, а. Какому сравнению степени ниже 5 равносильно сравнение $3x^{14} + 4x^{13} + 3x^{12} + 2x^{11} + x^9 + 2x^8 + 4x^7 + x^6 + 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x \equiv 0 \pmod 5$?

b. Какому сравнению степени ниже 7 равносильно сравнение $2x^{17} + 6x^{16} + x^{14} + 5x^{12} + 3x^{11} + 2x^{10} + x^9 + 5x^8 + 2x^7 + 3x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x + 4 \equiv 0 \pmod 7$?

8. Какому сравнению со старшим коэффициентом 1 равносильно сравнение (вопрос **10, а**)

$$70x^6 + 78x^5 + 25x^4 + 68x^3 + 52x^2 + 4x + 3 \equiv 0 \pmod{101}?$$

9, а. Решить сравнение

$$f(x) \equiv 0 \pmod{27}, \quad f(x) = 7x^4 + 19x + 25,$$

найдя сначала с помощью проб все решения сравнения

$$f(x) \equiv 0 \pmod 3.$$

b. Решить сравнение $9x^2 + 29x + 62 \equiv 0 \pmod{64}$.

10, а. Решить сравнение $x^3 + 2x + 2 \equiv 0 \pmod{125}$.

b. Решить сравнение $x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x + 12 \equiv 0 \pmod{625}$.

11, а. Решить сравнение $6x^3 + 27x^2 + 17x + 20 \equiv \pmod{30}$.

b. Решить сравнение $31x^4 + 57x^3 + 96x + 191 \equiv 0 \pmod{225}$.

Глава 5

СРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

§ 1. Общие теоремы

a. Из сравнений степени $n>1$ в дальнейшем будут рассматриваться лишь простейшие, а именно — *двучленные сравнения*:

$$x^n \equiv a \pmod{m}; \qquad (a, m) = 1. \tag{1}$$

Если сравнение (1) имеет решения, то a называется *вычетом степени n по модулю m*. В противном случае a называется *невычетом степени n по модулю m*. В частности, при $n=2$ вычеты или невычеты называются *квадратичными*, при $n=3$ — *кубическими*, при $n=4$ — *биквадратичными*.

b. В этой главе мы подробно рассмотрим случай $n=2$ и в первую очередь рассмотрим двучленные сравнения второй степени по простому нечетному модулю p:

$$x^2 \equiv a \pmod{p}, \qquad (a, p) = 1. \tag{2}$$

c. *Если a — квадратичный вычет по модулю p, то сравнение (2) имеет два решения.*

Действительно, если a — квадратичный вычет, то сравнение (2) имеет, по крайней мере, одно решение $x \equiv x_1 \pmod{p}$. Но тогда, ввиду $(-x_1)^2 = x_1^2$, то же сравнение имеет и второе решение $x \equiv -x_1 \pmod{p}$ Это второе решение отлично от первого, так как из $x_1 \equiv -x_1 \pmod{p}$ мы имели бы $2x_1 \equiv 0 \pmod{p}$, что невозможно, ввиду $(2, p) = (x_1, p) = 1$.

Указанными двумя решениями и исчерпываются все решения сравнения (2), так как последнее, будучи сравнением второй степени, более двух решений иметь не может (c, § 4, гл. IV).

d. *Приведенная система вычетов по модулю p состоит из $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов, сравнимых с числами*

$$1^2,\ 2^2,\ \ldots,\ \left(\frac{p-1}{2}\right)^2, \tag{3}$$

и $\frac{p-1}{2}$ квадратичных невычетов.

Действительно, среди вычетов приведенной системы по модулю p квадратичными вычетами являются те и и только те, которые сравнимы с квадратами чисел (приведенная система вычетов)

$$-\frac{p-1}{2},\ \ldots,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{p-1}{2}, \tag{4}$$

т. е. с числами (3). При этом числа (3) по модулю p не сравнимы, так как из $k^2 \equiv l^2 \pmod p$, $0 < k < l \leqslant \frac{p-1}{2}$, следовало бы, что сравнению $x^2 \equiv l^2 \pmod p$, вопреки c, среди чисел (4) удовлетворяют четыре: $x = -l,\ -k,\ k,\ l$.

§ 2. Символ Лежандра

a. Введем в рассмотрение *символ Лежандра* $\left(\frac{a}{p}\right)$ (читается: символ a по p; a называется числителем, p — знаменателем символа). Этот символ определяется для всех a, не делящихся на p. Он задается равенством $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, если a — квадратичный вычет по модулю p, и равенством $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, если a — квадратичный невычет по модулю p.

b. Вычислить символ $\left(\frac{a}{p}\right)$ (и таким путем определить, является a квадратичным вычетом или же квадратичным невычетом по модулю p) позволяет следующая теорема (*критерий Эйлера*).

При a, не делящемся на p, имеем

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod p.$$

Действительно, по теореме Ферма

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p, \quad \left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 \pmod p.$$

Один и только один из сомножителей левой части последнего сравнения делится на p (оба сомножителя не могут одновременно делиться на p, в противном случае их разность 2 должна была бы делиться на p). Поэтому имеет место одно и только одно из сравнений

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}, \tag{1}$$

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}. \tag{2}$$

Но всякий квадратичный вычет a удовлетворяет при некотором x сравнению $a \equiv x^2 \pmod{p}$ и, следовательно, также получаемому из него почленным возведением в степень $\frac{p-1}{2}$ сравнению (1). При этом квадратичными вычетами и исчерпываются все решения сравнения (1), так как, будучи сравнением степени $\frac{p-1}{2}$, оно не может иметь более чем $\frac{p-1}{2}$ решений.

Поэтому квадратичные невычеты удовлетворяют сравнению (2).

Пример 1. Имеем

$$5^{14} \equiv 1 \pmod{29}.$$

Поэтому $\left(\frac{5}{29}\right) = 1$ и 5 — квадратичный вычет по модулю 29 (сравнение $x^2 \equiv 5 \pmod{29}$ имеет два решения).

Пример 2. Имеем

$$3^{14} \equiv -1 \pmod{29}.$$

Поэтому $\left(\frac{3}{29}\right) = -1$ и 3 — квадратичный невычет по модулю 29 (сравнение $x^2 \equiv 3 \pmod{29}$ не имеет решений).

Далее мы выведем важнейшие свойства символа $\left(\frac{a}{p}\right)$.

с. *Если* $a \equiv a_1 \pmod{p}$, *то* $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a_1}{p}\right)$.

Это свойство следует из того, что числа одного и того же класса будут одновременно квадратичными вычетами или невычетами.

d. $\left(\frac{1}{p}\right)=1$.

Действительно, $1=1^2$ и, следовательно, 1 — квадратичный вычет.

e. $\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

Это свойство следует из b при $a=-1$.

Так как $\frac{p-1}{2}$ — четное, если p вида $4m+1$, и нечетное, если p вида $4m+3$, то отсюда следует, что -1 является квадратичным вычетом по модулю p, если p вида $4m+1$, и является квадратичным невычетом по модулю p, если p вида $4m+3$.

f. $\left(\frac{ab\ldots l}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)\ldots\left(\frac{l}{p}\right)$.

Действительно, имеем

$$\left(\frac{ab\ldots l}{p}\right)\equiv(ab\ldots l)^{\frac{p-1}{2}}\equiv a^{\frac{p-1}{2}}b^{\frac{p-1}{2}}\ldots l^{\frac{p-1}{2}}\equiv$$
$$\equiv\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)\ldots\left(\frac{l}{p}\right)\pmod p,$$

откуда и вытекает наше утверждение. Отсюда следствие:

$$\left(\frac{ab^2}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right),$$

т. е. в числителе символа можно отбросить любой квадратичный множитель.

g. Чтобы вывести дальнейшие свойства символа Лежандра, мы сначала докажем некоторую вспомогательную формулу. Полагая $p_1=\frac{p-1}{2}$, рассмотрим сравнения

$$\begin{aligned} a\cdot 1&\equiv\varepsilon_1 r_1\pmod p,\\ a\cdot 2&\equiv\varepsilon_2 r_2\pmod p,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a\cdot p_1&\equiv\varepsilon_{p_1} r_{p_1}\pmod p, \end{aligned}\qquad(3)$$

где $\varepsilon_x r_x$ — абсолютно наименьший вычет ax, r_x — его модуль, так что $\varepsilon_x=\pm1$.

Числа $a\cdot 1$, $-a\cdot 1$, $a\cdot 2$, $-a\cdot 2$, ... $a\cdot p_1$, $-a\cdot p_1$ образуют приведенную систему вычетов по модулю p (c, § 5, гл. III); их абсолютно наименьшие вычеты суть $\varepsilon_1 r_1$, $-\varepsilon_1 r_1$, $\varepsilon_2 r_2$, $-\varepsilon_2 r_2$, ..., $\varepsilon_{p_1} r_{p_1}$, $-\varepsilon_{p_1} r_{p_1}$. Положительные из последних, т. е. $r_1, r_2, \ldots, r_{p_1}$, должны совпадать с числами $1, 2, \ldots, p_1$ (b, § 4, гл. III).

Перемножая теперь сравнения (3) и сокращая на

$$1\cdot 2 \ldots p_1 = r_1 r_2 \ldots r_{p_1},$$

получим $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{p_1} \pmod{p}$, откуда (b) имеем

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{p_1}. \tag{4}$$

Далее находим

$$\left[\frac{2ax}{p}\right] = \left[2\left[\frac{ax}{p}\right] + 2\left\{\frac{ax}{p}\right\}\right] = 2\left[\frac{ax}{p}\right] + \left[2\left\{\frac{ax}{p}\right\}\right],$$

что будет четным или нечетным, в зависимости от того, будет ли наименьший неотрицательный вычет числа ax меньше или больше $\frac{1}{2}p$, т. е. будет ли $\varepsilon_x = 1$ или $\varepsilon_x = -1$. Отсюда, очевидно,

$$\varepsilon_x = (-1)^{\left[\frac{2ax}{p}\right]},$$

и потому из (4) находим

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1}\left[\frac{2ax}{p}\right]}$$

Предполагая a нечетным, преобразуем последнее равенство. Имеем ($a+p$ — четное)

$$\left(\frac{2a}{p}\right) = \left(\frac{2a+2p}{p}\right) = \left(\frac{4\frac{a+p}{2}}{p}\right) = \left(\frac{\frac{a+p}{2}}{p}\right) =$$

$$= (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1}\left[\frac{(a+p)\,x}{p}\right]} = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1}\left[\frac{ax}{p}\right] + \sum\limits_{x=1}^{p_1} x}$$

откуда

$$\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1}\left[\frac{ax}{p}\right]+\frac{p^2-1}{8}} \qquad (5)$$

Формула (5) и есть та, которую мы имели в виду доказать. Она позволит нам вывести еще два важнейших свойства символа Лежандра.

h. $\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

Следует из формулы (5) при $a=1$.

Но p можно представить в виде $p=8m+s$, где s — одно из чисел 1, 3, 5, 7. При этом $\frac{(8m+s)^2-1}{8}=8m^2+2ms+$ $+\frac{s^2-1}{8}$, что будет четным при $s=1$ и при $s=7$ и будет нечетным при $s=3$ и $s=5$. Поэтому 2 будет квадратичным вычетом по модулю p, если p вида $8m+1$ или вида $8m+7$, и будет квадратичным невычетом по модулю p, если p вида $8m+3$ или вида $8m+5$.

i. *Если p и q — простые нечетные, то (закон взаимности квадратичных вычетов)*

$$\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right).$$

Так как $\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$ будет нечетным лишь в случае, когда оба числа p и q будут вида $4m+3$, и четным, если хоть одно из этих чисел будет вида $4m+1$, то указанное свойство можно формулировать так:

Если оба числа p и q вида $4m+3$, то

$$\left(\frac{q}{p}\right)=-\left(\frac{p}{q}\right);$$

если же хоть одно из них вида $4m+1$, то

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{p}{q}\right).$$

Для доказательства заметим, что ввиду h формула (5) принимает вид

$$\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1}\left[\frac{ax}{p}\right]}. \tag{6}$$

Полагая теперь $\frac{q-1}{2}=q_1$, рассмотрим p_1q_1 пар чисел, получаемых, когда в выражениях qx, py числа x и y независимо друг от друга пробегают системы значений

$$x=1,\ 2,\ \ldots,\ p_1,\quad y=1,\ 2,\ \ldots,\ q_1.$$

Никогда не может быть $qx=py$, потому что из этого равенства следовало бы, что py кратно q, что ввиду $(p,\ q)=(y,\ q)=1$ (так как $0<y<q$) невозможно. Поэтому мы можем положить $p_1q_1=S_1+S_2$, где S_1 — число пар с $qx<py$ и S_2 — число пар с $py<qx$.

Очевидно, S_1 есть также число пар с $x<\frac{p}{q}y$ (этому не противоречит неравенство $x\leqslant p_1$, так как из $\frac{p}{q}y<\frac{p}{2}$ следует $\left[\frac{p}{q}y\right]\leqslant\left[\frac{p}{2}\right]=p_1$). Поэтому

$$S_1=\sum_{y=1}^{q_1}\left[\frac{p}{q}y\right].$$

Аналогичным путем убедимся, что

$$S_2=\sum_{x=1}^{p_1}\left[\frac{q}{p}x\right].$$

Но тогда равенство (6) дает нам

$$\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{S_1},\quad \left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{S_2},$$

поэтому

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{S_1+S_2}=(-1)^{p_1q_1},$$

откуда и следует отмеченное свойство.

§ 3. Символ Якоби

a. Полезным обобщением символа Лежандра является *символ Якоби*. Пусть P — нечетное, большее единицы, и $P = p_1p_2 \ldots p_r$ — разложение его на простые сомножители (среди них могут быть и равные). Пусть, далее, $(a, P) = 1$. Тогда символ Якоби $\left(\frac{a}{P}\right)$ определяется равенством

$$\left(\frac{a}{P}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)\left(\frac{a}{p_2}\right) \ldots \left(\frac{a}{p_r}\right).$$

Известные свойства символа Лежандра дают возможность установить аналогичные свойства и для символа Якоби.

b. *Если* $a \equiv a_1 \pmod P$, *то* $\left(\frac{a}{P}\right) = \left(\frac{a_1}{P}\right)$.

Действительно,

$$\left(\frac{a}{P}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)\left(\frac{a}{p_2}\right) \ldots \left(\frac{a}{p_r}\right) = \left(\frac{a_1}{p_1}\right)\left(\frac{a_1}{p_2}\right) \ldots \left(\frac{a_1}{p_r}\right) = \left(\frac{a_1}{P}\right),$$

потому что a, будучи сравнимо с a_1 по модулю P, будет сравнимо с a_1 и по модулям $p_1, p_2, \ldots, p_r$, которые являются делителями P.

c. $\left(\frac{1}{P}\right) = 1$.

В самом деле,

$$\left(\frac{1}{P}\right) = \left(\frac{1}{p_1}\right)\left(\frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(\frac{1}{p_r}\right) = 1.$$

d. $\left(\frac{-1}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}}$.

Чтобы убедиться в этом, заметим, что

$$\left(\frac{-1}{P}\right) = \left(\frac{-1}{p_1}\right)\left(\frac{-1}{p_2}\right) \ldots \left(\frac{-1}{p_r}\right) = (-1)^{\frac{p_1-1}{2} + \frac{p_2-1}{2} + \ldots + \frac{p_r-1}{2}}; \tag{1}$$

но

$$\frac{P-1}{2} = \frac{p_1p_2 \ldots p_r - 1}{2} =$$

$$= \frac{\left(1 + 2\frac{p_1-1}{2}\right)\left(1 + 2\frac{p_2-1}{2}\right) \ldots \left(1 + 2\frac{p_r-1}{2}\right) - 1}{2} =$$

$$= \frac{p_1-1}{2} + \frac{p_2-1}{2} + \ldots + \frac{p_r-1}{2} + 2N,$$

ввиду чего из формулы (1) выводим

$$\left(\frac{-1}{P}\right)=(-1)^{\frac{P-1}{2}}.$$

e. $\left(\frac{ab\ldots l}{P}\right)=\left(\frac{a}{P}\right)\left(\frac{b}{P}\right)\ldots\left(\frac{l}{P}\right).$

Действительно,

$$\left(\frac{ab\ldots l}{P}\right)=\left(\frac{ab\ldots l}{p_1}\right)\ldots\left(\frac{ab\ldots l}{p_r}\right)=$$

$$=\left(\frac{a}{p_1}\right)\left(\frac{b}{p_1}\right)\ldots\left(\frac{l}{p_1}\right)\ldots\left(\frac{a}{p_r}\right)\left(\frac{b}{p_r}\right)\ldots\left(\frac{l}{p_r}\right);$$

собирая символы с одинаковыми числителями, мы и получим утверждаемое свойство. Отсюда следствие:

$$\left(\frac{ab^2}{P}\right)=\left(\frac{a}{P}\right).$$

f. $\left(\frac{2}{P}\right)=(-1)^{\frac{P^2-1}{8}}.$

Действительно,

$$\left(\frac{2}{P}\right)=\left(\frac{2}{p_1}\right)\left(\frac{2}{p_2}\right)\ldots\left(\frac{2}{p_r}\right)=(-1)^{\frac{p_1^2-1}{8}+\frac{p_2^2-1}{8}+\ldots+\frac{p_r^2-1}{8}}; \tag{2}$$

но

$$\frac{P^2-1}{8}=\frac{p_1^2p_2^2\ldots p_r^2-1}{8}=$$

$$=\frac{\left(1+8\frac{p_1^2-1}{8}\right)\left(1+8\frac{p_2^2-1}{8}\right)\ldots\left(1+8\frac{p_r^2-1}{8}\right)-1}{8}=$$

$$=\frac{p_1^2-1}{8}+\frac{p_2^2-1}{8}+\ldots+\frac{p_r^2-1}{8}+2N,$$

ввиду чего из формулы (2) выводим

$$\left(\frac{2}{P}\right)=(-1)^{\frac{P^2-1}{8}}.$$

g. *Если P и Q — положительные нечетные взаимно простые, то*

$$\left(\frac{Q}{P}\right)=(-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}}\left(\frac{P}{Q}\right).$$

Действительно, пусть $Q = q_1 q_2 \ldots q_s$ есть разложение Q на простые сомножители (среди них опять-таки могут быть равные). Имеем

$$\left(\frac{Q}{P}\right) = \left(\frac{Q}{p_1}\right)\left(\frac{Q}{p_2}\right)\ldots\left(\frac{Q}{p_r}\right) = \prod_{\alpha=1}^{r}\prod_{\beta=1}^{s}\left(\frac{q_\beta}{p_\alpha}\right) =$$

$$= (-1)^{\sum\limits_{\alpha=1}^{r}\sum\limits_{\beta=1}^{s}\frac{p_\alpha-1}{2}\cdot\frac{q_\beta-1}{2}} \prod_{\alpha=1}^{r}\prod_{\beta=1}^{s}\left(\frac{p_\alpha}{q_\beta}\right) =$$

$$= (-1)^{\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{r}\frac{p_\alpha-1}{2}\right)\left(\sum\limits_{\beta=1}^{s}\frac{q_\beta-1}{2}\right)}\left(\frac{P}{Q}\right).$$

Но, подобно тому, как в **d**, находим

$$\frac{P-1}{2} = \sum_{\alpha=1}^{r}\frac{p_\alpha-1}{2} + 2N, \quad \frac{Q-1}{2} = \sum_{\beta=1}^{s}\frac{q_\beta-1}{2} + 2N_1,$$

ввиду чего последняя формула дает

$$\left(\frac{Q}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}}\left(\frac{P}{Q}\right).$$

h. Рассматривая символ Лежандра как частный случай символа Якоби и пользуясь свойствами последнего, можно вычислить символ Лежандра быстрее, чем с помощью теоремы **b**, § 2.

П р и м е р. Узнаем, сколько решений имеет сравнение

$$x^2 \equiv 219 \pmod{383}.$$

Имеем (применяя последовательно свойства **g**, **b**, следствие **e**, **g**, **b**, **e**, **f**, **g**, **b**, **d**):

$$\left(\frac{219}{383}\right) = -\left(\frac{383}{219}\right) = -\left(\frac{164}{219}\right) = -\left(\frac{41}{219}\right) =$$

$$= -\left(\frac{219}{41}\right) = -\left(\frac{14}{41}\right) = -\left(\frac{2}{41}\right)\left(\frac{7}{41}\right) =$$

$$= -\left(\frac{7}{41}\right) = -\left(\frac{41}{7}\right) = -\left(\frac{-1}{7}\right) = 1;$$

следовательно, рассмотренное сравнение имеет два решения.

§ 4. Случай составного модуля

a. Двучленные сравнения второй степени по составному модулю исследуются и решаются согласно общим указаниям § 5, гл. IV.

b. Сначала рассмотрим сравнение

$$x^2 \equiv a \pmod{p^\alpha}; \quad a > 0, \quad (a, p) = 1, \tag{1}$$

где p — простое нечетное.

Полагая $f(x) = x^2 - a$, будем иметь $f'(x) = 2x$, и если $x \equiv x_1 \pmod{p}$ есть решение сравнения

$$x^2 \equiv a \pmod{p}, \tag{2}$$

то ввиду $(a, p) = 1$ также $(x_1, p) = 1$, а так как p — нечетное, то $(2x_1, p) = 1$, т. е. $f'(x_1)$ не делится на p. Поэтому к разысканию решений сравнения (1) можно применить рассуждения b, § 5, гл. IV, причем каждое решение сравнения (2) даст одно решение сравнения (1). Из сказанного выводим, что

Сравнение (1) *имеет два решения или же ни одного, в зависимости от того, будет ли число a квадратичным вычетом или же невычетом по модулю p.*

c. Далее рассмотрим сравнение

$$x^2 \equiv a \pmod{2^\alpha}; \quad \alpha > 0, \quad (a, 2) = 1. \tag{3}$$

Здесь $f'(x_1) = 2x_1$ делится на 2, и потому рассуждения b, § 5, гл. IV неприменимы; они должны быть видоизменены следующим образом:

d. Если сравнение (3) разрешимо, то ввиду $(a, 2) = 1$ имеем $(x, 2) = 1$; следовательно (h, § 2), $x^2 - 1$ делится на 8. Поэтому, приводя сравнение (3) к виду

$$(x^2 - 1) + 1 \equiv a \pmod{2^\alpha},$$

убеждаемся, что для разрешимости этого сравнения необходимо

$$a \equiv 1 \pmod{4} \text{ при } \alpha = 2; \quad a \equiv 1 \pmod{8} \text{ при } \alpha \geqslant 3. \tag{4}$$

e. В случаях, когда условия (4) не нарушены, рассмотрим вопрос о разыскании решений и их числе.

Для случаев $\alpha \leqslant 3$ ввиду d сравнению удовлетворяют все нечетные числа. Поэтому сравнение $x^2 \equiv a \pmod{2}$

имеет одно решение: $x\equiv 1 \pmod 2$, сравнение $x^2\equiv a \pmod 4$ имеет два решения: $x\equiv 1; 3 \pmod 4$, сравнение $x^2\equiv a \pmod 8$ имеет четыре решения: $x\equiv 1;\ 3;\ 5;\ 7 \pmod 8$.

Для рассмотрения случаев $\alpha=4,\ 5,\ \ldots$ все нечетные числа полезно объединить в две арифметические прогрессии:

$$x=\pm(1+4t_3) \tag{5}$$

$$(1+4t_3\equiv 1 \pmod 4;\quad -1-4t_3\equiv -1\equiv 3 \pmod 4).$$

Посмотрим, какие из чисел (5) удовлетворяют сравнению $x^2\equiv a \pmod{16}$. Находим

$$(1+4t_3)^2\equiv a \pmod{16},\qquad t_3\equiv\frac{a-1}{8} \pmod 2,$$

$$t_3=t_3'+2t_4,$$

$$x=\pm(1+4t_3'+8t_4)=\pm(x_4+8t_4).$$

Посмотрим, какие из последних чисел удовлетворяют сравнению $x^2\equiv a \pmod{32}$. Находим

$$(x_4+8t_4)^2\equiv a \pmod{32},\qquad t_4=t_4'+2t_5,\qquad x=\pm(x_5+16t_5),$$

и т. д. Таким путем убедимся, что при любом $\alpha>3$ значения x, удовлетворяющие сравнению (3), представятся в виде

$$x=\pm(x_\alpha+2^{\alpha-1}t_\alpha).$$

Эти значения x образуют четыре различных решения сравнения (3)

$$x\equiv x_\alpha;\ x_\alpha+2^{\alpha-1};\ -x_\alpha;\ -x_\alpha-2^{\alpha-1} \pmod{2^\alpha}$$

(по модулю 4 два первых сравнимы с 1, а два последних сравнимы с -1).

Пример. Сравнение

$$x^2\equiv 57 \pmod{64} \tag{6}$$

ввиду $57\equiv 1 \pmod 8$ имеет четыре решения. Представляя x в виде $x=\pm(1+4t_3)$, находим

$$(1+4t_3)^2\equiv 57 \pmod{16},\quad 8t_3\equiv 56 \pmod{16},$$

$$t_3\equiv 1 \pmod 2,\quad t_3=1+2t_4,\quad x=\pm(5+8t_4),$$

$$(5+8t_4)^2\equiv 57 \pmod{32},\ 5\cdot 16t_4\equiv 32 \pmod{32},$$

$$t_4\equiv 0 \pmod 2,\quad t_4=2t_5,\quad x=\pm(5+16t_5),$$

$$(5+16t_5)^2\equiv 57 \pmod{64},\quad 5\cdot 32t_5\equiv 32 \pmod{64},$$

$$t_5\equiv 1 \pmod 2,\quad t_5=1+2t_6,\quad x=\pm(21+32t_6).$$

Поэтому решения сравнения (6) будут:

$$x \equiv \pm 21; \quad \pm 53 \pmod{64}.$$

f. Из **c**, **d** и **e** следует:

Для сравнения

$$x^2 \equiv a \pmod{2^\alpha}; \quad (a, 2) = 1$$

необходимыми условиями разрешимости будут: $a \equiv 1 \pmod 4$ *при* $\alpha = 2$, $a \equiv 1 \pmod 8$ *при* $\alpha \geqslant 3$. *Если эти условия не нарушены, число решений будет*: 1 *при* $\alpha = 1$; 2 *при* $\alpha = 2$; 4 *при* $\alpha \geqslant 3$.

g. Из **b**, **f** и из **a**, § 5, гл. IV следует:

Для сравнения общего вида

$$x^2 \equiv a \pmod m; \quad m = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}; \quad (a, m) = 1$$

необходимыми условиями разрешимости будут:

$$a \equiv 1 \pmod 4 \quad \text{при} \quad \alpha = 2, \quad a \equiv 1 \pmod 8 \ \text{при} \ \alpha \geqslant 3,$$

$$\left(\frac{a}{p_1}\right) = 1, \quad \left(\frac{a}{p_2}\right) = 1, \ \ldots, \ \left(\frac{a}{p_k}\right) = 1.$$

Если ни одно из этих условий не нарушено, число решений будет: 2^k *при* $\alpha = 0$ *и при* $\alpha = 1$; 2^{k+1} *при* $\alpha = 2$; 2^{k+2} *при* $\alpha \geqslant 3$.

Вопросы к главе 5

Буквою p здесь всегда обозначаем простое нечетное число.

1. Доказать, что разыскание решений сравнения вида

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod m, \quad (2a, m) = 1$$

сводится к разысканию решений сравнения вида $x^2 \equiv q \pmod m$.

2, a. Пользуясь **b**, § 2, найти решения сравнения (в случае его возможности)

$$x^2 \equiv a \pmod p; \quad p = 4m + 3.$$

b. Пользуясь **b** и **h**, § 2, указать способ разыскания решений сравнений вида

$$x^2 \equiv a \pmod p; \quad p = 8m + 5.$$

c. Указать возможно более простой способ разыскания решений сравнений вида

$$x^2 \equiv a \pmod p; \quad p = 8m + 1$$

в случае, когда известен некоторый квадратичный невычет N по модулю p.

d. Пользуясь теоремой Вильсона, доказать, что решения сравнения

$$x^2+1\equiv 0 \pmod p; \quad p=4m+1$$

будут

$$x\equiv \pm 1\cdot 2 \ldots 2m \pmod p.$$

3, a. Доказать, что сравнение

$$x^2+1\equiv 0 \pmod p \tag{1}$$

разрешимо тогда и только тогда, когда p имеет вид $4m+1$; сравнение

$$x^2+2\equiv 0 \pmod p \tag{2}$$

разрешимо тогда и только тогда, когда p имеет вид $8m+1$ или $8m+3$; сравнение

$$x^2+3\equiv 0 \pmod p \tag{3}$$

разрешимо тогда и только тогда, когда p имеет вид $6m+1$.

b. Доказать бесконечность числа простых чисел вида $4m+1$.

c. Доказать бесконечность числа простых чисел вида $6m+1$.

4. Пусть, разбивая числа $1, 2, \ldots, p-1$ на две совокупности, вторая из которых содержит не менее одного числа, имеем: произведение двух чисел одной совокупности сравнимо по модулю p с числом первой совокупности, а произведение двух чисел различных совокупностей сравнимо по модулю p с числом второй совокупности. Доказать, что это будет тогда и только тогда, когда первая совокупность состоит из квадратичных вычетов, а вторая — из квадратичных невычетов по модулю p.

5, a. Вывести теорию сравнений вида

$$x^2\equiv a \pmod{p^\alpha}; \quad (a, p)=1,$$

представляя a и x в системе исчисления с основанием p.

b. Вывести теорию сравнений вида

$$x^2\equiv a \pmod{2^\alpha}; \quad (a, 2)=1,$$

представляя a и x в системе исчисления с основанием 2.

6. Доказать, что решения сравнения

$$x^2\equiv a \pmod{p^\alpha}; \quad (a, p)=1$$

будут $x\equiv \pm PQ' \pmod{p^\alpha}$, где

$$P=\frac{(z+\sqrt{a})^\alpha+(z-\sqrt{a})^\alpha}{2},$$

$$Q=\frac{(z+\sqrt{a})^\alpha-(z-\sqrt{a})^\alpha}{2\sqrt{a}},$$

$$z^2\equiv a \pmod p, \quad QQ'\equiv 1 \pmod{p^\alpha}.$$

7. Указать способ решения сравнения $x^2\equiv 1 \pmod m$, основанный на том обстоятельстве, что указанное сравнение равносильно такому: $(x-1)(x+1)\equiv 0 \pmod m$.

8. Пусть $\left(\frac{a}{p}\right)=0$ при $(a, p)=p$.

a. При $(k, p)=1$ доказать, что

$$\sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{x(x+k)}{p}\right)=-1.$$

b. Пусть каждое из чисел ε и η имеет одно из значений ± 1, T — число пар x, $x+1$, где $x=1, 2, \ldots, p-2$, с условием $\left(\frac{x}{p}\right)=\varepsilon$, $\left(\frac{x+1}{p}\right)=\eta$. Доказать, что

$$T=\frac{1}{4}\left(p-2-\varepsilon\left(\frac{-1}{p}\right)-\eta-\varepsilon\eta\right).$$

c. Пусть $(k, p)=1$,

$$S=\sum_{x}\sum_{y}\left(\frac{xy+k}{p}\right),$$

где x и y пробегают возрастающие последовательности, составленные соответственно из X и Y вычетов полной системы по модулю p. Доказать, что

$$|S|<\sqrt{XYp}.$$

Для доказательства следует воспользоваться неравенством

$$S^2\leqslant X\sum_{x}\left|\sum_{y}\left(\frac{xy+k}{p}\right)\right|^2.$$

d. Пусть Q — целое, $1<Q<p$,

$$S=\sum_{x=0}^{p-1}S_x^2;\quad S_x=\sum_{z=0}^{Q-1}\left(\frac{x+z}{p}\right).$$

α) Доказать, что $S=(p-Q)\,Q$.

β) Пусть λ — постоянное; $0<\lambda<1$. Доказать, что число T чисел ряда $x=0, 1, \ldots, p-1$, для которых не выполняется условие $S_x\leqslant Q^{0{,}5+0{,}5\lambda}$, удовлетворяет условию $T\leqslant pQ^{-\lambda}$.

γ) Пусть M — целое, $Q=[\sqrt{p}]$, $0<M$, $M+2Q\leqslant p$. Доказать, что в ряде

$$M, M+1, \ldots, M+2Q-1$$

имеется квадратичный невычет по модулю p.

9, a. Доказать, что число представлений целого $m>1$ в виде

$$m=x^2+y^2,\quad (x, y)=1,\quad x>0,\quad y>0 \tag{1}$$

равно числу решений сравнения

$$z^2+1\equiv 0 \pmod{m}. \tag{2}$$

Для доказательства, положив $\tau = \sqrt{m}$, воспользоваться представлением $\alpha = \frac{z}{m}$ согласно теореме вопроса 4, b, гл. I, и рассмотреть сравнение, получаемое почленным умножением (2) на Q^2.

b. Пусть a — одно из чисел 2 и 3. Доказать, что число представлений простого p с условием $p > a$ в виде

$$p = x^2 + ay^2, \quad x > 0, \quad y > 0 \tag{3}$$

равно половине числа решений сравнения

$$z^2 + a \equiv 0 \pmod{p}. \tag{4}$$

c. Пусть p имеет вид $4m+1$, $(k, p) = 1$,

$$S(k) = \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{x(x^2+k)}{p} \right).$$

Доказать, что

α) $S(k)$ — четное число.

β) $S(kt^2) = \left(\frac{t}{p}\right) S(k)$.

γ) При $\left(\frac{r}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{n}{p}\right) = -1$ имеем

$$p = \left(\frac{1}{2} S(r)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} S(n)\right)^2.$$

10. Пусть D — целое положительное, не являющееся квадратом целого числа. Доказать, что:

a. Если при данном целом k уравнению

$$x^2 - Dy^2 = k$$

удовлетворяют две пары целых $x = x_1$, $y = y_1$ и $x = x_2$, $y = y_2$, то уравнению

$$X^2 - DY^2 = k^2$$

удовлетворяют целые X, Y, определяемые равенством (знак $\pm$ выбирается произвольно)

$$X + Y\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})(x_2 \pm y_2\sqrt{D}).$$

b. Уравнение (уравнение Пелля)

$$x^2 - Dy^2 = 1 \tag{1}$$

разрешимо в целых положительных x, y.

c. Если x_0, y_0 — пара положительных x, y с наименьшим x (или, что равносильно, с наименьшим $x + y\sqrt{D}$), удовлетворяющая уравнению (1), то все пары положительных x, y, удовлетворяющие этому уравнению, определяются равенством

$$x + y\sqrt{D} = (x_0 + y_0\sqrt{D})^r; \quad r = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

11. Пусть $m > 2$, $(a, m) = 1$,

$$S_{a,m} = \sum_{x=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{ax^2}{m}}.$$

a. Доказать, что

$$|S_{a,m}| = \sqrt{m}, \quad \text{если} \quad m \equiv 1 \pmod 2,$$
$$|S_{a,m}| = 0, \quad \text{если} \quad m \equiv 2 \pmod 4,$$
$$|S_{a,m}| = \sqrt{2m}, \quad \text{если} \quad m \equiv 0 \pmod 4.$$

b. Пусть $(A, p) = 1$, M и Q — целые, $0 < M < M + Q \leqslant p$.

α) При любом целом a доказать, что

$$\left| \sum_{x=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{Ax^2+ax}{p}} \right| = \sqrt{p}.$$

β) При $p > 60$, пользуясь теоремой вопроса α), доказать, что

$$\left| \sum_{x=M}^{M+Q-1} e^{2\pi i \frac{Ax^2}{p}} \right| < \sqrt{p} \ln p.$$

γ) Пусть M_0 и Q_0 — целые, $0 < M_0 < M_0 + Q_0 \leqslant p$ и T обозначает число чисел Ax^2; $x = M, M+1, \ldots, M+Q-1$, сравнимых по модулю p с числами ряда $M_0, M_0+1, \ldots, M_0+Q-1$. Доказать, что при $p > 60$ имеем

$$T = \frac{Q_0 Q}{p} + \theta \sqrt{p} (\ln p)^2, \ |\theta| < 1.$$

δ) Пусть $(a, p) = 1$. Доказать, что

$$S_{a,p} = \sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{x}{p} \right) e^{2\pi i \frac{ax}{p}}.$$

ε) Из теоремы вопроса **11**, **a** следует, что $|S_{a,p}| = \sqrt{p}$. То же самое доказать, используя представление $S_{a,p}$ равенством вопроса δ).

η) Пусть $(a, p) = 1$. Доказать, что при некотором θ с условием $|\theta| = 1$, не зависящем от a, имеем

$$\left(\frac{a}{p} \right) = \frac{S_{a,p}}{\theta \sqrt{p}}.$$

κ) Пользуясь теоремой вопроса δ), доказать, что

$$\left| \sum_{x=M}^{M+Q-1} \left(\frac{x}{p} \right) \right| < \sqrt{p} \ln p.$$

λ) Пусть R — число квадратичных вычетов, а N — число квадратичных невычетов в ряде $M, M+1, \ldots, M+Q-1$. Доказать, что

$$R = \frac{1}{2} Q + \frac{\theta}{2} \sqrt{p} \ln p, \quad N = \frac{1}{2} Q - \frac{\theta}{2} \sqrt{p} \ln p, \quad |\theta| < 1.$$

μ) Вывести формулы вопроса λ), рассматривая сумму

$$\sum_{a=0}^{p-1}\sum_{\alpha=1}^{p-1}\sum_{x=M}^{M+Q-1}\sum_{y=M}^{M+Q-1}\left(\frac{\alpha}{p}\right)e^{2\pi i\frac{a(x-\alpha y)}{p}}.$$

ν) Пользуясь теоремой вопроса δ), при $p>60$, $Q=[6\sqrt{p}]$ доказать, что в ряде $M, M+1, \ldots, M+Q-1$ имеется квадратичный невычет по модулю p.

Численные примеры к главе 5

1, a. Среди вычетов приведенной системы по модулю 23 указать квадратичные вычеты.

b. Среди вычетов приведенной системы по модулю 37 указать квадратичные невычеты.

2, a. Применяя **b**, § 2 указать число решений сравнений

α) $x^2\equiv 3 \pmod{31}$; β) $x^2\equiv 2 \pmod{31}$.

b. Указать число решений сравнений:

α) $x^2\equiv 5 \pmod{73}$; β) $x^2\equiv 3 \pmod{73}$.

3, a. Вычисляя символ Якоби, указать число решений сравнений

α) $x^2\equiv 226 \pmod{563}$; β) $x^2\equiv 429 \pmod{563}$.

b. Указать число решений сравнений:

α) $x^2\equiv 3766 \pmod{5987}$; β) $x^2\equiv 3149 \pmod{5987}$.

4, a. Применяя способы вопросов **2, a**; **2, b**; **2, c**, решить сравнения

α) $x^2\equiv 5 \pmod{19}$; β) $x^2\equiv 5 \pmod{29}$; γ) $x^2\equiv 2 \pmod{97}$.

b. Решить сравнения:

α) $x^2\equiv 2 \pmod{311}$; β) $x^2\equiv 3 \pmod{277}$; γ) $x^2\equiv 11 \pmod{353}$.

5, a. Решить сравнение $x^2\equiv 59 \pmod{125}$ способами α) **b**, § 4; β) вопроса **5, a**; γ) вопроса **6**.

b. Решить сравнение $x^2\equiv 91 \pmod{243}$.

6, a. Решить сравнение $x^2\equiv 41 \pmod{64}$ способами:

α) **d**, § 4; β) вопроса **5, b**.

b. Решить сравнение $x^2\equiv 145 \pmod{256}$.

Глава 6

ПЕРВООБРАЗНЫЕ КОРНИ И ИНДЕКСЫ

§ 1. Общие теоремы

a. При $(a, m) = 1$ существуют положительные γ с условием $a^{\gamma} \equiv 1 \pmod{m}$, например (теорема Эйлера) $\gamma = \varphi(m)$. Наименьшее из них называется: *показатель, которому a принадлежит по модулю m.*

b. *Если a по модулю m принадлежит показателю δ, то числа $1 = a^0, a^1, \ldots, a^{\delta-1}$ по модулю m несравнимы.*

Действительно, из $a^l \equiv a^k \pmod{m}$, $0 \leqslant k < l < \delta$ следовало бы $a^{l-k} \equiv 1 \pmod{m}$; $0 < l-k < \delta$, что противоречит определению δ.

c. *Если a по модулю m принадлежит показателю δ, то $a^{\gamma} \equiv a^{\gamma'} \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда $\gamma \equiv \gamma' \pmod{\delta}$; в частности (при $\gamma' = 0$), $a^{\gamma} \equiv 1 \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда γ делится на δ.*

Действительно, пусть r и r_1 — наименьшие неотрицательные вычеты чисел γ и γ' по модулю δ; тогда при некоторых q и q_1 имеем $\gamma = \delta q + r$, $\gamma' = \delta q_1 + r_1$. Отсюда и из $a^{\delta} \equiv 1 \pmod{m}$ следует

$$a^{\gamma} = (a^{\delta})^q a^r \equiv a^r \pmod{m},$$
$$a^{\gamma'} = (a^{\delta})^{q_1} a^{r_1} \equiv a^{r_1} \pmod{m}.$$

Поэтому $a^{\gamma} \equiv a^{\gamma'} \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда $a^r \equiv a^{r_1} \pmod{m}$, т. е. (b), когда $r = r_1$.

d. Пусть a по модулю m принадлежит показателю δ. Тогда из c ($\gamma' = 0$) и из $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ следует, что $\varphi(m)$ делится на δ. Таким образом, *показатели, которым числа принадлежат по модулю m, суть делители $\varphi(m)$.* Наибольший из этих делителей есть само $\varphi(m)$. Числа, принадлежащие показателю $\varphi(m)$ (если такие существуют), называются *первообразными корнями по модулю m.*

§ 2. Первообразные корни по модулям p^α и $2p^\alpha$

a. Пусть p — простое нечетное и $\alpha \geqslant 1$. Докажем существование первообразных корней по модулям p^α и $2p^\alpha$.

b. *Если x по модулю m принадлежит показателю ab, то x^a принадлежит показателю b.*

Действительно, пусть x^a принадлежит показателю δ. Тогда $(x^a)^\delta \equiv 1 \pmod m$, откуда $x^{a\delta} \equiv 1 \pmod m$; следовательно (c, § 1), $a\delta$ делится на ab, т. е. δ делится на b. С другой стороны, $x^{ab} \equiv 1 \pmod m$, откуда $(x^a)^b \equiv 1 \pmod m$; следовательно (c, § 1), b делится на δ. Поэтому $\delta = b$.

c. *Если x по модулю m принадлежит показателю a, а y — показателю b, причем $(a, b) = 1$, то xy принадлежит показателю ab.*

Действительно, пусть xy принадлежит показателю δ. Тогда $(xy)^\delta \equiv 1 \pmod m$. Отсюда $x^{b\delta}y^{b\delta} \equiv 1 \pmod m$ и (c, § 1) $x^{b\delta} \equiv 1 \pmod m$. Поэтому (c, § 1) $b\delta$ делится на a, и ввиду $(b, a) = 1$ δ делится на a. Так же находим, что δ делится на b. Делясь же на a и на b, ввиду $(a, b) = 1$ δ делится и на ab. С другой стороны, из $(xy)^{ab} \equiv 1 \pmod m$ следует (c, § 1), что ab делится на δ. Поэтому $\delta = ab$.

d. *Существуют первообразные корни по модулю p.*

Действительно, пусть

$$\delta_1, \ \delta_2, \ \ldots, \delta_r \tag{1}$$

— все различные показатели, которым по модулю p принадлежат числа $1, 2, \ldots, (p-1)$. Пусть τ — общее наименьшее кратное этих показателей и

$$\tau = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha_k}$$

— его каноническое разложение. Каждый множитель $q_s^{\alpha_s}$ этого разложения делит по меньшей мере одно число δ_j ряда (1), которое, следовательно, может быть представлено в виде: $\delta_j = a q_s^{\alpha_s}$. Пусть ξ_j — одно из чисел ряда $1, 2, \ldots, p-1$, принадлежащих показателю δ_j. Согласно **b** число $\eta_j = \xi_j^a$ принадлежит показателю $q_s^{\alpha_s}$, согласно c произведение $g = \eta_1\eta_2 \ldots \eta_k$ принадлежит показателю $q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha_k} = \tau$. Поэтому (d, § 1) τ — делитель $p-1$.

Но поскольку числа (1) делят τ, все $1, 2, \ldots, p-1$ являются решениями (c, § 1) сравнения $x^\tau \equiv 1 \pmod p$; поэтому, согласно c, § 4, гл. IV, будем иметь $p-1 \leqslant \tau$. Следовательно, $\tau = p-1$ и g—первообразный корень.

e. *Пусть g — первообразный корень по модулю p. Можно указать t с условием, что u, определяемое равенством $(g+pt)^{p-1} = 1+pu$, не делится на p. Соответствующее $g+pt$ будет первообразным корнем по модулю p^α при любом $\alpha > 1$.*

Действительно, имеем

$$\begin{gathered} g^{p-1} = 1+pT_0, \\ (g+pt)^{p-1} = 1+p\,(T_0 - g^{p-2}t + pT) = 1+pu, \end{gathered} \tag{2}$$

где, одновременно с t, u пробегает полную систему вычетов по модулю p. Поэтому можно указать t с условием, что u не делится на p. При таком t из (2) выводим

$$\begin{gathered} (g+pt)^{p(p-1)} = (1+pu)^p = 1+p^2u_2, \\ (g+pt)^{p^2(p-1)} = 1+p^3u_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (g+pt)^{p^{\alpha-1}(p-1)} = 1+p^\alpha u_\alpha, \end{gathered} \tag{3}$$

где все $u_2, u_3, \ldots, u_\alpha$ также не делятся на p. Пусть $g+pt$ принадлежит показателю δ по модулю p^α. Тогда имеем $(g+pt)^\delta \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$, откуда, в частности, находим $g^\delta \equiv 1 \pmod p$. Поэтому (c, § 1) δ делится на $p-1$ и, будучи (d, § 1) делителем числа $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$, должно иметь вид $\delta = p^{r-1}(p-1)$, где r—одно из чисел $1, \ldots, \alpha$. А так как равенства (2) и (3) показывают, что сравнение

$$(g+pt)^{p^{r-1}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$$

верно при $r=\alpha$ и неверно при $r<\alpha$, то (d, § 1) $\delta = p^{\alpha-1}(p-1) = \varphi(p^\alpha)$ и $g+pt$—первообразный корень по модулю p^α.

f. *Пусть $\alpha \geqslant 1$ и g — первообразный корень по модулю p^α. Нечетное g_0 из чисел g и $g+p^\alpha$ будет первообразным корнем по модулю $2p^\alpha$.*

Действительно, $\varphi(p^\alpha)$ и $\varphi(2p^\alpha)$ равны между собою (имеем $\varphi(2p^\alpha) = \varphi(2)\,\varphi(p^\alpha) = \varphi(p^\alpha)$); их общее значение обозначим буквою c. Далее легко убедимся, что сравнения $g_0^r \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ и $g_0^r \equiv 1 \pmod{2p^\alpha}$ могут выполняться лишь одновременно ($g_0^r - 1$ делится на 2). А так как g_0 — первообразный корень по модулю p^α и первое сравнение верно при $r = c$ и неверно при $r < c$, то тем самым и второе сравнение верно при $r = c$ и неверно при $r < c$ и g_0 — первообразный корень по модулю $2p^\alpha$.

§ 3. Разыскание первообразных корней по модулям p^α и $2p^\alpha$

Первообразные корни по модулям p^α и $2p^\alpha$, где p — простое нечетное и $\alpha \geqslant 1$, можно разыскивать, пользуясь следующей общей теоремой:

Пусть $c = \varphi(m)$ и $q_1, q_2, \ldots, q_k$ — различные простые делители числа c. Для того чтобы число g, взаимно простое с m, было первообразным корнем по модулю m, необходимо и достаточно, чтобы это g не удовлетворяло ни одному из сравнений

$$g^{\frac{c}{q_1}} \equiv 1 \pmod{m}, \quad g^{\frac{c}{q_2}} \equiv 1 \pmod{m}, \quad \ldots, \quad g^{\frac{c}{q_k}} \equiv 1 \pmod{m}. \tag{1}$$

Действительно, если g — первообразный корень, то тем самым оно принадлежит показателю c и, следовательно, ни одному из сравнений (1) удовлетворять не может.

Обратно, допустим, что g не удовлетворяет ни одному из сравнений (1). Если бы показатель δ, которому принадлежит g, оказался меньше c, то, обозначая буквою q один из простых делителей $\frac{c}{\delta}$, мы имели бы $\frac{c}{\delta} = qu$, $\frac{c}{q} = \delta u$, $g^{\frac{c}{q}} \equiv 1 \pmod{p}$, что противоречит нашему допущению. Значит, $\delta = c$ и g — первообразный корень.

Пример 1. Пусть $m = 41$. Имеем $\varphi(41) = 40 = 2^3 \cdot 5$, $\frac{40}{5} = 8$, $\frac{40}{2} = 20$. Следовательно, для того чтобы число g, не делящееся на 41, было первообразным корнем по модулю 41, необходимо и достаточно, чтобы это g не удовлетворяло ни одному из сравнений

$$g^8 \equiv 1 \pmod{41}, \quad g^{20} \equiv 1 \pmod{41}. \tag{2}$$

Но, испытывая числа 2, 3, 4, ..., находим (по модулю 41)

$$2^8\equiv 10,\quad 3^8\equiv 1,\quad 4^8\equiv 18,\quad 5^8\equiv 18,\quad 6^8\equiv 10,$$
$$2^{20}\equiv 1,\qquad\qquad 4^{20}\equiv 1,\quad 5^{20}\equiv 1,\quad 6^{20}\equiv 40.$$

Отсюда видим, что числа 2, 3, 4, 5 — не первообразные корни, так как каждое из них удовлетворяет, по крайней мере, одному из сравнений (2). Число 6 — первообразный корень, так как оно не удовлетворяет ни одному из сравнений (2).

Пример 2. Пусть $m=1681=41^2$. Первообразный корень и здесь можно было бы найти, пользуясь общей теоремой. Но мы найдем его проще, применяя теорему e, § 2. Зная уже (пример 1), что первообразный корень по модулю 41 есть 6, находим

$$6^{40}=1+41(3+41l),$$
$$(6+41t)^{40}=1+41(3+41l-6^{39}t+41T)=1+41u.$$

Чтобы u не делилось на 41, достаточно взять $t=0$. Поэтому в качестве первообразного корня по модулю 1681 можно взять число $6+41\cdot 0=6$.

Пример 3. Пусть $m=3362=2\cdot 1681$. Первообразный корень и здесь можно было бы найти, пользуясь общей теоремой. Но мы найдем его проще, применяя теорему f, § 2. Зная уже (пример 2), что первообразный корень по модулю 1681 есть 6, в качестве первообразного корня по модулю 3362 можно взять нечетное из чисел 6, $6+1681$, т. е. число 1687.

§ 4. Индексы по модулям p^α и $2p^\alpha$

a. Пусть p — простое нечетное, $\alpha\geqslant 1$; m — одно из чисел p^α и $2p^\alpha$; $c=\varphi(m)$, g — первообразный корень по модулю m.

b. *Если γ пробегает наименьшие неотрицательные вычеты $\gamma=0, 1, \ldots, c-1$ по модулю c, то g^γ пробегает приведенную систему вычетов по модулю m.*

Действительно, g^γ пробегает c чисел, взаимно простых с m, и ввиду b, § 1, не сравнимых по модулю m.

c. Для чисел a, взаимно простых с m, введем понятие об индексе, представляющее аналогию понятию о логарифме; при этом первообразный корень играет роль, аналогичную роли основания логарифмов.

Если

$$a \equiv g^{\gamma} \pmod{m}$$

(считаем $\gamma \geqslant 0$), то γ называется *индексом числа a по модулю m при основании g* и обозначается символом $\gamma = \operatorname{ind} a$ (точнее, $\gamma = \operatorname{ind}_g a$).

Ввиду **b** всякое a, взаимно простое с m, имеет некоторый единственный индекс γ' среди чисел ряда

$$\gamma = 0,\ 1,\ \ldots,\ c-1.$$

Зная γ', мы можем указать и все индексы числа a; согласно **c**, § 1 это будут все неотрицательные числа класса

$$\gamma \equiv \gamma' \pmod{c}.$$

Непосредственно из данного здесь определения индекса следует, что числа с данным индексом γ образуют класс чисел по модулю m.

d. *Имеем*

$$\operatorname{ind} ab \ldots l \equiv \operatorname{ind} a + \operatorname{ind} b + \ldots + \operatorname{ind} l \pmod{c}$$

и, в частности,

$$\operatorname{ind} a^n \equiv n \operatorname{ind} a \pmod{c}.$$

Действительно,

$$a \equiv g^{\operatorname{ind} a} \pmod{m},\ b \equiv g^{\operatorname{ind} b} \pmod{m},\ \ldots,\ l \equiv g^{\operatorname{ind} l} \pmod{m},$$

откуда, перемножая, находим

$$ab \ldots l \equiv g^{\operatorname{ind} a + \operatorname{ind} b + \ldots + \operatorname{ind} l} \pmod{m}.$$

Следовательно, $\operatorname{ind} a + \operatorname{ind} b + \ldots + \operatorname{ind} l$ — один из индексов произведения $ab \ldots l$.

e. Ввиду практической пользы индексов для каждого простого модуля p (разумеется, не слишком большого) составлены *таблицы индексов*. Это две таблицы; одна — для нахождения индекса по числу, другая — для нахождения числа по индексу. Таблицы содержат наименьшие неотрицательные вычеты чисел (приведенная система) и их наименьших индексов (полная система) соответственно по модулям p и $c=\varphi(p)=p-1$.

Пример. Построим указанные таблицы для модуля $p=41$. Выше было показано (пример 1, § 3), что первообразным корнем по модулю 41 будет $g=6$; его мы примем за основание индексов. Находим (сравнения берутся по модулю 41):

$6^0\equiv 1$	$6^8\equiv 10$	$6^{16}\equiv 18$	$6^{24}\equiv 16$	$6^{32}\equiv 37$
$6^1\equiv 6$	$6^9\equiv 19$	$6^{17}\equiv 26$	$6^{25}\equiv 14$	$6^{33}\equiv 17$
$6^2\equiv 36$	$6^{10}\equiv 32$	$6^{18}\equiv 33$	$6^{26}\equiv 2$	$6^{34}\equiv 20$
$6^3\equiv 11$	$6^{11}\equiv 28$	$6^{19}\equiv 34$	$6^{27}\equiv 12$	$6^{35}\equiv 38$
$6^4\equiv 25$	$6^{12}\equiv 4$	$6^{20}\equiv 40$	$6^{28}\equiv 31$	$6^{36}\equiv 23$
$6^5\equiv 27$	$6^{13}\equiv 24$	$6^{21}\equiv 35$	$6^{29}\equiv 22$	$6^{37}\equiv 15$
$6^6\equiv 39$	$6^{14}\equiv 21$	$6^{22}\equiv 5$	$6^{30}\equiv 9$	$6^{38}\equiv 8$
$\equiv 29$	$6^{15}\equiv 3$	$6^{23}\equiv 30$	$6^{31}\equiv 13$	$6^{39}\equiv 7$

поэтому указанные таблицы будут

$$p=41,\quad p-1=2^3\cdot 5,\quad g=6$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	26	15	12	22	1	39	38	30
1	8	3	27	31	25	37	24	33	16	9
2	34	14	29	36	13	4	17	5	11	7
3	23	28	10	18	19	21	2	32	35	6
4	20									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	6	36	11	25	27	39	29	10	19
1	32	28	4	24	21	3	18	26	33	34
2	40	35	5	30	16	14	2	12	31	22
3	9	13	37	17	20	38	23	15	8	7

Здесь номер строки указывает число десятков, номер столбца—число единиц числа (индекса). В графе, общей указанным строке и столбцу, помещается соответствующий индекс (число).

Например, ind 25 найдем в графе первой таблицы, общей строке с номером 2 и столбцу с номером 5, т. е. ind 25 = 4. Число, индекс которого 33, найдем в графе второй таблицы, общей строке с номером 3 и столбцу с номером 3, т. е. 33 = ind 17.

§ 5. Следствия предыдущей теории

а. Пусть p — простое нечетное; $\alpha \geqslant 1$, m — одно из чисел p^α, $2p^\alpha$, наконец, $c = \varphi(m)$.

b. *Пусть* $(n, c) = d$; *тогда:*

1. *Сравнение*

$$x^n \equiv a \pmod{m}; \quad (a, m) = 1 \tag{1}$$

разрешимо (и тем самым a есть вычет степени n по модулю m) тогда и только тогда, когда $\operatorname{ind} a$ *кратен* d.

В случае разрешимости сравнение имеет d решений.

2. *В приведенной системе вычетов по модулю m число вычетов степени n есть* $\frac{c}{d}$.

Действительно, сравнение (1) равносильно такому:

$$n \operatorname{ind} x \equiv \operatorname{ind} a \pmod{c}, \tag{2}$$

которое разрешимо тогда и только тогда, когда $\operatorname{ind} a$ кратен d (d, § 2, гл. IV).

В случае разрешимости сравнения (2) найдем d несравнимых по модулю c значений для $\operatorname{ind} x$; им отвечает d несравнимых по модулю m значений для x.

Таким образом, верно утверждение 1.

Среди чисел $0, 1, \ldots, c-1$, являющихся наименьшими индексами вычетов приведенной системы по модулю m, имеется $\frac{c}{d}$ кратных d. Поэтому верно утверждение 2.

Пример 1. Для сравнения

$$x^8 \equiv 23 \pmod{41} \tag{3}$$

имеем $(8, 40) = 8$, причем $\operatorname{ind} 23 = 36$ не делится на 8. Поэтому сравнение (3) неразрешимо.

Пример 2. Для сравнения

$$x^{12} \equiv 37 \pmod{41} \tag{4}$$

имеем $(12, 40) = 4$, причем $\operatorname{ind} 37 = 32$ делится на 4. Поэтому сравнение (4) разрешимо, причем это сравнение имеет 4 решения. Указанные решения найдем следующим образом.

Сравнение (4) равносильно таким:

$$12 \operatorname{ind} x \equiv 32 \pmod{40}, \quad \operatorname{ind} x \equiv 6 \pmod{10}.$$

Отсюда для $\operatorname{ind} x$ найдем 4 несравнимых по модулю 40 значения:

$$\operatorname{ind} x = 6,\ 16,\ 26,\ 36,$$

соответственно чему найдем 4 решения сравнения (4)

$$x \equiv 39;\ 18;\ 2;\ 23 \pmod{41}.$$

Пример 3. Числа

$$1,\ 4,\ 10,\ 16,\ 18,\ 23,\ 25,\ 31,\ 37,\ 40, \tag{5}$$

индексы которых кратны 4, суть все биквадратичные вычеты (или также все вычеты любой степени $n = 4$, 12, 28, ..., где $(n, 40) = 4$), имеющиеся среди наименьших положительных вычетов по модулю 41. Число чисел ряда (5) есть $10 = \frac{40}{4}$.

c. С утверждением **b**, **1** тесно связано следующее.

Число a есть вычет степени n по модулю m тогда и только тогда, когда

$$a^{\frac{c}{d}} \equiv 1 \pmod{m}. \tag{6}$$

Действительно, условие $\operatorname{ind} a \equiv 0 \pmod{d}$ равносильно такому: $\frac{c}{d} \operatorname{ind} a \equiv 0 \pmod{c}$. Последнее же равносильно условию (6).

Пример. В теореме § 3 невозможность сравнения $g^{\frac{c}{q}} \equiv 1 \pmod{m}$ равносильна условию, что g — невычет степени q по модулю m. В частности, невозможность сравнения $g^{\frac{c}{2}} \equiv 1 \pmod{m}$ равносильна условию, что g — квадратичный невычет по модулю m (ср. **b**, § 2, гл. V).

d.1. *Показатель δ, которому a принадлежит по модулю m, определяется равенством* $(\operatorname{ind} a, c) = \frac{c}{\delta}$; *в частности, принадлежность a к числу первообразных корней по модулю m определяется равенством* $(\operatorname{ind} a, c) = 1$.

2. *В приведенной системе вычетов по модулю m число чисел, принадлежащих показателю δ, есть $\varphi(\delta)$; в частности, число первообразных корней есть $\varphi(c)$.*

Действительно, δ есть наименьший делитель c с условием $a^\delta \equiv 1 \pmod{m}$. Это условие равносильно

$$\delta \operatorname{ind} a \equiv 0 \pmod{c},$$

или

$$\operatorname{ind} a \equiv 0 \left(\operatorname{mod} \frac{c}{\delta}\right).$$

Значит, δ — наименьший делитель c, при котором $\frac{c}{\delta}$ делит $\operatorname{ind} a$, отсюда $\frac{c}{\delta}$ — наибольший делитель c, делящий $\operatorname{ind} a$, т. е. $\frac{c}{\delta} = (\operatorname{ind} a, c)$. Поэтому верно утверждение 1.

Среди чисел $0, 1, \ldots, c-1$, являющихся наименьшими индексами вычетов приведенной системы по модулю m, кратными $\frac{c}{\delta}$ являются числа вида $\frac{c}{\delta} y$, где $y = 0, 1, \ldots, \delta - 1$. Условие $\left(\frac{c}{\delta} y, c\right) = \frac{c}{\delta}$ равносильно условию $(y, \delta) = 1$; последнему удовлетворяет $\varphi(\delta)$ значений y. Поэтому верно утверждение 2.

Пример 1. В приведенной системе вычетов по модулю 41 числами, принадлежащими показателю 10, являются числа a с условием $(\operatorname{ind} a, 40) = \frac{40}{10} = 4$, т. е. числа

$$4,\ 23,\ 25,\ 31.$$

Число этих чисел есть $4 = \varphi(10)$.

Пример 2. В приведенной системе вычетов по модулю 41 первообразными корнями являются числа a с условием $(\operatorname{ind} a, 40) = 1$, т. е. числа

$$6,\ 7,\ 11,\ 12,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 22,\ 24,\ 26,\ 28,\ 29,\ 30,\ 34,\ 35.$$

Число этих первообразных корней есть $16 = \varphi(40)$.

§ 6. Индексы по модулю 2^α

a. Для модуля 2 предыдущая теория заменяется несколько более сложной.

b. Пусть $\alpha = 1$. Тогда $2^\alpha = 2$. Имеем $\varphi(2) = 1$. Первообразным корнем по модулю 2 будет, например, $1 \equiv -1 \pmod{2}$. Число $1^0 = (-1)^0 = 1$ образует приведенную систему вычетов по модулю 2.

c. Пусть $\alpha=2$. Тогда $2^\alpha=4$. Имеем $\varphi(4)=2$. Первообразным корнем по модулю 4 будет, например, $3\equiv\equiv-1 \pmod 4$. Числа $(-1)^0=1$, $(-1)^1\equiv 3 \pmod 4$ образуют приведенную систему вычетов по модулю 4.

d. Пусть $\alpha\geqslant 3$. Тогда $2^\alpha\geqslant 8$. Имеем $\varphi(2^\alpha)=2^{\alpha-1}$. Нетрудно видеть, что первообразных корней в этом случае нет; более точно: показатель, которому принадлежит по модулю 2^α нечетное число x, не превосходит $2^{\alpha-2}=$ $=\frac{1}{2}\varphi(2^\alpha)$. Действительно, имеем

$$x^2=1+8t_1,$$
$$x^4=1+16t_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$x^{2^{\alpha-2}}=1+2^\alpha t_{\alpha-2}\equiv 1 \pmod{2^\alpha}.$$

При этом числа, принадлежащие показателю $2^{\alpha-2}$, существуют. Таким числом будет, например, 5. Действительно,

$$5=1+4,$$
$$5^2=1+8+16,$$
$$5^4=1+16+32u_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$5^{2^{\alpha-3}}=1+2^{\alpha-1}+2^\alpha u_{\alpha-3},$$

откуда видим, что ни одна из степеней $5^1, 5^2, 5^4, \ldots, 5^{2^{\alpha-3}}$ не сравнима с 1 по модулю 2^α.

Нетрудно видеть, что числа двух следующих строк:

$$\begin{array}{cccc} 5^0, & 5^1, & \ldots, & 5^{2^{\alpha-2}-1} \\ -5^0, & -5^1, & \ldots, & -5^{2^{\alpha-2}-1}, \end{array}$$

образуют приведенную систему вычетов по модулю 2^α. Действительно, число этих чисел будет $2\cdot 2^{\alpha-2}=\varphi(2^\alpha)$; числа каждой отдельно взятой строки между собой по модулю 2^α несравнимы (**b**, § 1); наконец, числа верхней строки несравнимы с числами нижней, так как первые по модулю 4 сравнимы с 1, а вторые с -1.

e. Для удобства дальнейших исследований мы выразим результаты **b**, **c**, **d** в более единообразной форме, которая будет пригодна и в случае $\alpha=0$.

Пусть

$$c=1,\quad c_0=1,\qquad \text{если}\quad \alpha=0,\quad \text{или}\quad \alpha=1;$$
$$c=2,\quad c_0=2^{\alpha-2},\quad \text{если}\quad \alpha\geqslant 2$$

(*таким образом всегда* $cc_0=\varphi(2^\alpha)$), *и пусть* γ *и* γ_0 *независимо друг от друга пробегают наименьшие неотрицательные вычеты*

$$\gamma=0,\ \ldots,\ c-1;\quad \gamma_0=0,\ \ldots,\ c_0-1$$

по модулям c *и* c_0. *Тогда* $(-1)^\gamma 5^{\gamma_0}$ *пробегает приведенную систему вычетов по модулю* 2^α.

f. *Сравнение*

$$(-1)^\gamma 5^{\gamma_0}\equiv(-1)^{\gamma'}5^{\gamma_0'}\pmod{2^\alpha}\tag{1}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\gamma\equiv\gamma'\pmod c,\quad \gamma_0\equiv\gamma_0'\pmod{c_0}.$$

Действительно, при $\alpha=0$ теорема очевидна. Поэтому предположим, что $\alpha>0$. Пусть наименьшие неотрицательные вычеты по модулям c и c_0 для чисел γ и γ_0 будут r и r_0, а для чисел γ' и γ_0' будут r' и r_0'. Ввиду c, § 1 (-1 принадлежит показателю c, а 5 принадлежит показателю c_0), сравнение (1) имеет место тогда и только тогда, когда $(-1)^r 5^{r_0}\equiv(-1)^{r'}5^{r_0'}\pmod{2^\alpha}$, т. е. (ввиду e) когда $r=r'$, $r_0=r_0'$.

g. Если

$$a\equiv(-1)^\gamma 5^{\gamma_0}\pmod{2^\alpha},$$

то система γ, γ_0 называется *системой индексов числа* a *по модулю* 2^α.

Ввиду e всякое a, взаимно простое с 2^α (т. е. нечетное), имеет единственную систему индексов γ', γ_0' среди $cc_0=\varphi(2^\alpha)$ пар значений γ, γ_0, указанных в e.

Зная систему γ', γ_0', мы можем указать и все системы индексов числа a; согласно f это будут все пары γ, γ_0, составленные из неотрицательных чисел классов

$$\gamma\equiv\gamma'\pmod c,\quad \gamma_0\equiv\gamma_0'\pmod{c_0}.$$

Непосредственно из данного здесь определения системы индексов следует, что числа с данной системой индексов γ, γ_0 образуют класс чисел по модулю 2^α.

h. *Индексы произведения сравнимы по модулям c и c_0 с суммами индексов сомножителей.*

Действительно, пусть $\gamma(a)$, $\gamma_0(a)$; ...; $\gamma(l)$, $\gamma_0(l)$ — системы индексов чисел a, ..., l. Имеем

$$a\ldots l \equiv (-1)^{\gamma(a)+\ldots+\gamma(l)}5^{\gamma_0(a)+\ldots+\gamma_0(l)}.$$

Следовательно, $\gamma(a)+\ldots+\gamma(l)$, $\gamma_0(a)+\ldots+\gamma_0(l)$ — индексы произведения $a\ldots l$.

§ 7. Индексы по любому составному модулю

a. Пусть $m=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа m. Пусть далее c и c_0 имеют значения, указанные в е, § 6; $c_s=\varphi(p_s^{\alpha_s})$; g_s — наименьший первообразный корень по модулю $p_s^{\alpha_s}$.

b. Если

$$\begin{aligned} &a\equiv(-1)^{\gamma}5^{\gamma_0}\pmod{2^{\alpha}},\\ &a\equiv g_1^{\gamma_1}\pmod{p_1^{\alpha_1}},\ \ldots,\ a\equiv g_k^{\gamma_k}\pmod{p_k^{\alpha_k}}, \end{aligned}\tag{1}$$

то система γ, γ_0, γ_1, ..., γ_k называется *системой индексов числа a по модулю m.*

Из такого определения следует, что γ, γ_0 — система индексов числа a по модулю 2^{α}, а γ_1, ..., γ_k — индексы числа a по модулям $p_1^{\alpha_1}$, ..., $p_k^{\alpha_k}$. Поэтому (g, § 6; с, § 4) всякое a, взаимно простое с m (тем самым оно взаимно простое и со всеми 2^{α}, $p_1^{\alpha_1}$, ..., $p_k^{\alpha_k}$), имеет единственную систему индексов γ', γ_0', γ_1', ..., γ_k' среди $cc_0c_1\ldots c_k = \varphi(m)$ систем γ, γ_0, γ_1, ..., γ_k, которые получим, заставляя γ, γ_0, γ_1, ..., γ_k независимо друг от друга пробегать наименьшие неотрицательные вычеты по модулям c, c_0, c_1, ..., c_k, а все системы индексов числа a суть все системы γ, γ_0, γ_1, ..., γ_k, составленные из неотрицательных чисел классов

$$\gamma\equiv\gamma_1'\pmod{c},\quad \gamma_0\equiv\gamma_0'\pmod{c_0},$$
$$\gamma_1\equiv\gamma_1'\pmod{c_1},\ \ldots,\ \gamma_k\equiv\gamma_k'\pmod{c_k}.$$

Числа a с данной системой индексов γ, γ_0, γ_1, ..., γ_k могут быть найдены путем решения системы (1), а следовательно (**b**, § 3, гл. IV), образуют класс чисел по модулю m.

c. Так как индексы γ, γ_0, γ_1, $\ldots$, γ_k числа a по модулю m являются индексами его соответственно по модулям 2^α, $p_1^{\alpha_1}$, $\ldots$, $p_k^{\alpha_k}$, то верна теорема:

Индексы произведения сравнимы по модулям c, c_0, c_1, $\ldots$, c_k *с суммами индексов сомножителей.*

d. Пусть $\tau=\varphi(2^\alpha)$ при $\alpha\leqslant 2$ и $\tau=\frac{1}{2}\varphi(2^\alpha)$ при $\alpha>2$ и пусть h — общее наименьшее кратное чисел τ, c_1, $\ldots$, c_k. При всяком a, взаимно простом с m, сравнение $a^h\equiv 1$ верно по всем модулям 2^α, $p_1^{\alpha_1}$, $\ldots$, $p_k^{\alpha_k}$, значит, это сравнение верно и по модулю m. Поэтому a не может быть первообразным корнем по модулю m в тех случаях, когда $h<\varphi(m)$. Но последнее имеет место при $\alpha>2$, при $k>1$, а также при $\alpha=2$, $k=1$. Поэтому для $m>1$ первообразные корни могут существовать лишь в случаях $m=2,4$, $p_1^{\alpha_1}$, $2p_1^{\alpha_1}$. Но как раз для этих случаев существование первообразных корней было доказано выше (§§ 6, 2). Поэтому

Все случаи, когда существуют первообразные корни по модулю m, *превосходящему* 1, *суть*

$$m=2,\ 4,\ p^\alpha,\ 2p^\alpha.$$

e. Таблицу индексов можно составить и для любого целого положительного m, выписывая соответственно каждому числу приведенной системы вычетов по модулю m отвечающие этому числу значения индексов γ, γ_0, γ_1, $\ldots$, γ_k (полные системы вычетов по модулям c, c_0, c_1, $\ldots$, c_k).

Пример 1. Построим таблицу индексов по модулю 8. Здесь имеем $c=2$, $c_0=2^{3-2}=2$ и для каждого числа N приведенной системы вычетов по модулю 8 будем иметь $N\equiv(-1)^\gamma 5^{\gamma_0}\pmod 8$, где γ равно одному из чисел 0, 1 (полная система вычетов по модулю c) и γ_0 равно одному из чисел 0, 1 (полная система вычетов по модулю c_0). Находим

$$\begin{array}{ll} (-1)^0=1, & (-1)^1=-1, \\ 5^0=1 & 5^1=5, \\ -5^0\equiv 7 \pmod 8), & -5^1\equiv 3 \pmod 8). \end{array}$$

Поэтому таблица индексов по модулю 8 будет

N	1	3	5	7
γ	0	1	0	1
γ_0	0	1	1	0

Пример 2. Построим таблицу индексов по модулю 40. Здесь имеем $40=8\cdot 5$, причем для каждого числа N приведенной системы вычетов по модулю 40 мы значения индексов γ и γ_0 найдем в таблице индексов по модулю 8 примера 1, а значения индекса γ_1 найдем в таблице индексов по модулю 5, т. е. в таблице

N	1	2	3	4
γ_1	0	1	3	2

В результате получим следующую таблицу индексов по модулю 40:

N	1	3	7	9	11	13	17	19
γ	0	1	1	0	1	0	0	1
γ_0	0	1	0	0	1	1	0	1
γ_1	0	3	1	2	0	3	1	2
N	21	23	27	29	31	33	37	39
γ	0	1	1	0	1	0	0	1
γ_0	1	0	1	1	0	0	1	0
γ_1	0	3	1	2	0	3	1	2

Пример 3. Построим таблицу индексов по модулю 9 и таблицу индексов по модулю 18. Здесь имеем $\varphi(9) = 6 = 2\cdot 3$. Число 5 будет первообразным корнем по мо-

дулю 9, так как оно не удовлетворяет ни одному из сравнений $5^{\frac{6}{2}} \equiv 1 \pmod 9$, $5^{\frac{6}{3}} \equiv 1 \pmod 9$. При этом имеем (сравнения берутся по модулю 9):

$$5^0 \equiv 1, \quad 5^1 \equiv 5, \quad 5^2 \equiv 7, \quad 5^3 \equiv 8, \quad 5^4 \equiv 4, \quad 5^5 \equiv 2.$$

Следовательно, таблица индексов по модулю 9 будет

N	1	2	4	5	7	8
γ_1	0	5	4	1	2	3

А таблица индексов по модулю 18 будет

N	1	5	7	11	13	17
γ	0	0	0	0	0	0
γ_1	0	1	2	5	4	3

Пример 4. Построим таблицу индексов по модулю 21. Здесь имеем $21 = 3 \cdot 7$, и для каждого числа N приведенной системы вычетов по модулю 21 мы значение индекса γ_1 найдем в таблице индексов по модулю 3, т. е. в таблице

N	1	2
γ_1	0	1

а значение индекса γ_2 найдем в таблице индексов по модулю 7, т. е. в таблице

N	1	2	3	4	5	6
γ_2	0	2	1	4	5	3

В результате получим следующую таблицу индексов по модулю 21:

N	1	2	4	5	8	10	11	13	16	17	19	20
γ_1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
γ_2	0	2	4	5	0	1	4	3	2	1	5	3

Вопросы к главе 6

Буквою p здесь всегда обозначаем простое нечетное число.

1, **a**. Пусть a—целое, $a > 1$. Доказать, что простые нечетные делители числа $a^p - 1$ делят $a-1$ или имеют вид $2px+1$.

b. Пусть a—целое, $a > 1$. Доказать, что простые нечетные делители числа a^p+1 делят $a+1$ или имеют вид $2px+1$.

c. Доказать бесконечность числа простых чисел вида $2px+1$.

d. Пусть n—целое, $n > 0$. Доказать, что простые делители числа $2^{2^n}+1$ имеют вид $2^{n+1}x+1$.

2. Пусть a—целое, $a > 1$, n—целое, $n > 0$. Доказать, что $\varphi(a^n - 1)$ кратно n.

3, **a**. Пусть n—целое, $n > 1$. Из чисел $1, 2, \ldots, n$ при нечетном n образуем перестановки

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ n-2,\ n,\ n-1,\ n-3,\ \ldots,\ 4,\ 2;$$

$$1,\ 5,\ 9,\ \ldots,\ 7,\ 3$$

и т. д., а при четном n образуем перестановки

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n-2,\ \ldots,\ 4,\ 2;$$

$$1,\ 5,\ 9,\ \ldots,\ 7,\ 3$$

и т. д. Доказать, что k-я операция дает исходный ряд тогда и только тогда, когда $2^k \equiv \pm 1 \pmod{2n-1}$.

b. Пусть n—целое, $n > 1$, m—целое, $m > 1$. Будем считать числа $1, 2, \ldots, n$ в прямом порядке от 1 до n, далее в обратном порядке от n до 2, затем опять в прямом порядке от 1 до n, далее опять в обратном порядке от n до 2 и т. д. При таком счете выписываем числа 1-е, $(m+1)$-е, $(2m+1)$-е и т. д., пока не получим n чисел. С этим новым рядом n чисел повторим ту же операцию и т. д. Доказать, что k-я операция дает исходный ряд тогда и только тогда, когда

$$m^k \equiv \pm 1 \pmod{2n-1}.$$

4. При $m=p$ теорему 2, **d**, § 5 доказать, рассматривая сравнение $x^\delta \equiv 1 \pmod p$ (вопрос **10**, **c**, гл. IV) и применяя **c**, § 4, гл. II.

5, **a**. Доказать, что первообразный корень простого числа вида 2^n+1, $n > 1$, есть 3.

b. Доказать, что первообразный корень простого числа вида $2p+1$ при p вида $4n+1$ есть 2, а при p вида $4n+3$ есть -2.

c. Доказать, что первообразный корень простого числа вида $4p+1$ есть 2.

d. Доказать, что первообразный корень простого числа вида

$$2^n p+1 \quad \text{при} \quad n > 1 \quad \text{и} \quad p > \frac{3^{2^{n-1}}}{2^n} \quad \text{есть } 3.$$

6, **a**. α) Пусть n—целое, $n \geqslant 0$, $S = 1^n + 2^n + \ldots + (p-1)^n$.

Доказать, что

$$S \equiv -1 \pmod p, \quad \text{если } n \text{ кратно } p-1,$$
$$S \equiv 0 \pmod p \quad \text{в противном случае.}$$

β) При обозначениях вопросов **9**, c, гл. V доказать, что

$$S(1) \equiv -\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}} \pmod p.$$

b. Теорему Вильсона доказать, применяя b, § 4.

7. Пусть g и g_1 — первообразные корни по модулю p, $\alpha \operatorname{ind}_g g_1 \equiv 1 \pmod{p-1}$. При $(a, p) = 1$ доказать, что:

$$\operatorname{ind}_{g_1} a \equiv \alpha \operatorname{ind}_g a \pmod{p-1}.$$

8. Пусть $m > 1$, $(a, m) = 1$.

α) Пусть

$$S = \sum_{x=0}^{m-1} \sum_{y=0}^{m-1} \xi(x)\, \eta(y)\, e^{2\pi i \frac{axy}{m}};$$
$$\sum_{x=0}^{m-1} |\xi(x)|^2 = X, \quad \sum_{y=0}^{m-1} |\eta(y)|^2 = Y.$$

Доказать, что $|S| \leqslant \sqrt{XYm}$.

β) Пусть $\sum_s{}'$ обозначает суммирование, распространенное на числа s ряда $0, 1, \ldots, m-1$, взаимно простые с m. Пусть n — целое, превосходящее 1, и

$$S = \sum_x{}' e^{2\pi i \frac{ax^n}{m}}.$$

Доказать, что $|S| \leqslant K\sqrt{m}$, где K — число решений сравнения $x^n \equiv 1 \pmod m$.

γ) Пусть $m = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа m. Доказать, что указанное в вопросе β) число K решений сравнения $x^n \equiv 1 \pmod m$ не превосходит $2n^{k+1}$ и что в случае постоянного n имеем $K = O(m^{\varepsilon})$, где ε — произвольное положительное постоянное.

9, **a**. Пусть $(a, p) = (b, p) = 1$, n — целое, отличное от 1, $|n| = n_1$, $0 < n_1 < p$,

$$S = \sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{ax^n + bx}{p}}$$

Доказать, что

$$|S| < \frac{3}{2} n_1^{\frac{1}{4}} p^{\frac{3}{4}}.$$

b. Пусть $(a, p)=1$, n — целое, $|n|=n_1$, $0 < n_1 < p$, M и Q — целые, $0 < M < M+Q < p$. При $p > 60$ доказать, что

$$\left| \sum_{x=M}^{M+Q-1} e^{2\pi i \frac{ax^n}{p}} \right| < \frac{3}{2} n_1^{\frac{1}{4}} p^{\frac{3}{4}} \ln p.$$

c. Пусть $(a, p)=1$, M_0 и Q_0 — целые, $0 < M_0 < M_0+Q_0 \leqslant p$, M и Q — целые, $0 < M < M+Q \leqslant p$, n — целое, $|n|=n_1$, $0 < n_1 < p$, T обозначает число чисел ряда ax^n, $x=M_0, M_0+1, \ldots, M_0+Q_0-1$, сравнимых по модулю p с числами ряда $M, M+1, \ldots, M+Q-1$. Доказать, что при $p > 60$ будем иметь

$$T=\frac{Q_0Q}{p}+\theta \frac{3}{2} n_1^{\frac{1}{4}} p^{\frac{3}{4}} (\ln p)^2; \ |\theta|<1.$$

Численные примеры к главе 6

1, **a**. Найти (путем возможно более простых вычислений) показатель, которому принадлежит 7 по модулю 43.

b. Найти показатель, которому принадлежит 5 по модулю 108.

2, **a**. Найти первообразные корни по модулям 17, 289, 578.

b. Найти первообразные корни по модулям 23, 529, 1058.

c. Найти наименьший первообразный корень по модулю 242.

3, **a**. Составить таблицы индексов по модулю 17.

b. Составить таблицы индексов по модулю 23.

4, **a**. Найти первообразный корень по модулю 71, применяя указание примера c, § 5.

b. Найти первообразный корень по модулю 191.

5, **a**. Пользуясь таблицей индексов, указать число решений сравнений:

α) $x^{60} \equiv 79 \pmod{97}$, β) $x^{55} \equiv 17 \pmod{97}$, γ) $x^{15} \equiv 46 \pmod{97}$.

b. Указать число решений сравнений

α) $3x^{12} \equiv 31 \pmod{41}$, β) $7x^7 \equiv 11 \pmod{41}$, γ) $5x^{30} \equiv 37 \pmod{41}$.

6, **a**. Пользуясь таблицей индексов, решить сравнения

α) $x^2 \equiv 59 \pmod{67}$, β) $x^{35} \equiv 17 \pmod{67}$, γ) $x^{30} \equiv 14 \pmod{67}$.

b. Решить сравнения

α) $23x^5 \equiv 15 \pmod{73}$, β) $37x^6 \equiv 69 \pmod{73}$,

γ) $44x^{21} \equiv 53 \pmod{73}$.

7, **a**. Пользуясь теоремой c, § 5, определить число решений сравнений

α) $x^3 \equiv 2 \pmod{37}$, β) $x^{16} \equiv 10 \pmod{37}$.

b. Определить число решений сравнений

α) $x^5 \equiv 3 \pmod{71}$, β) $x^{21} \equiv 5 \pmod{71}$.

8, a. Пользуясь таблицей индексов, среди вычетов приведенной системы по модулю 19 указать: α) квадратичные вычеты, β) кубические вычеты.

b. Среди вычетов приведенной системы по модулю 37 указать: α) вычеты степени 15, β) вычеты степени 8.

9, a. Среди вычетов приведенной системы по модулю 43 указать: α) числа, принадлежащие показателю 6, β) первообразные корни.

b. Среди вычетов приведенной системы по модулю 61 указать: α) числа, принадлежащие показателю 10, β) первообразные корни.

10. Составить таблицы индексов по модулям:

α) 2. β) 4. γ) 10. δ) 12. ε) 15. ζ) 16. η) 25.

Глава 7

ХАРАКТЕРЫ

§ 1. Определения

a. *Пусть m — целое положительное и c, c_0, c_1, ..., c_k имеют значения, указанные в* a, § 7, гл. VI, *а R, R_0, R_1, ..., R_k обозначают какие-либо корни уравнений*

$$R^c=1,\ R^{c_0}=1,\ R^{c_1}=1,\ \ldots,\ R^{c_k}=1\ ^{*)}.$$

При $(a, m)=1$ полагаем

$$\chi(a)=R^{\gamma}R_0^{\gamma_0}R_1^{\gamma_1}\ldots R_k^{\gamma_k}, \tag{1}$$

где γ, γ_0, γ_1, ..., γ_k — система индексов числа a.

А при $(a, m)>1$ полагаем $\chi(a)=0$.

Определенная таким образом для всякого целого a функция $\chi(a)$ называется характером по модулю m.

b. *Если $R=R_0=R_1=\ldots=R_k=1$, то $\chi(a)$ называется главным характером по модулю m; он имеет значение 1 при $(a, m)=1$ и значение 0 при $(a, m)>1$.*

c. *Два характера по модулю m считаются различными, если по меньшей мере при одном значении a их значения не совпадают.*

§ 2. Важнейшие свойства характеров

a. В первую очередь отметим три следующих свойства характеров:

α) $\chi(1)=1$.

β) $\chi(a_1a_2)=\chi(a_1)\chi(a_2)$.

γ) *Из* $a_1\equiv a_2 \pmod m$ *следует* $\chi(a_1)=\chi(a_2)$.

---

*) Корни уравнения $R^{\sigma}=1$ суть числа $e^{2\pi i\frac{s}{\sigma}}$; $s=0, 1, \ldots, \sigma-1$.

Действительно, свойство α) найдем из (1), § 1, положив $a=1$. При $(a_1a_2, m)=1$ равенство β) следует из (1), § 1 и теоремы c, § 7, гл. VI, а при $(a_1a_2, m)>1$ оно обращается в тождество $0=0$. Наконец, свойство γ) является следствием определения системы индексов, данного в § 7, гл. VI.

b. *Число различных характеров по модулю m равно $\varphi(m)$.*

Действительно, указанным в **a**, § 1 способом получим $cc_0c_1\ldots c_k$ характеров. При этом при $\varphi(m)>1$ у каких-либо двух из них, пусть у $\chi'(a)$ и $\chi''(a)$, будут различны значения R' и R'' по меньшей мере одного из корней $R, R_0, R_1, \ldots, R_k$. Для числа a, у которого все индексы равны нулю, кроме лишь одного, отвечающего этим R' и R'', равного 1, будем иметь $\chi'(a)=R'$, $\chi''(a)=R''$. Поэтому характеры $\chi'(a)$ и $\chi''(a)$ различны и наше утверждение верно.

c. *Имеем*

$$\sum_{a=0}^{m-1}\chi(a)=\begin{cases}\varphi(m) & \textit{для главного характера,}\\ 0 & \textit{для других характеров.}\end{cases}$$

Действительно, применяя формулу (1), § 1, находим

$$\sum_{a=0}^{m-1}\chi(a)=\sum_{\gamma}R^{\gamma}\sum_{\gamma_0}R_0^{\gamma_0}\sum_{\gamma_1}R_1^{\gamma_1}\ldots\sum_{\gamma_k}R_k^{\gamma_k},$$

где $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ пробегают наименьшие неотрицательные вычеты по модулям $c, c_0, c_1, \ldots, c_k$.

Если $\chi(a)$ — главный характер, то правая часть равна $cc_0c_1\ldots c_k=\varphi(m)$. Если же $\chi(a)$ — не главный характер, то по меньшей мере один из корней $R, R_0, R_1, \ldots, R_k$ не равен 1 и соответствующая ему сумма правой части равна нулю. А вместе с нею равна нулю и вся правая часть.

d. *Распространяя суммирование на все $\varphi(m)$ различных характеров, имеем*

$$\sum_{\chi}\chi(a)=\begin{cases}\varphi(m) & \textit{при } a\equiv 1 \pmod m,\\ 0 & \textit{в противном случае.}\end{cases}$$

Действительно, теорема верна при $(a, m)>1$, так как в этом случае имеем $\chi(a)=0$. Теорема верна и при $a\equiv 1 \pmod m$, т. е. в случае $\gamma=\gamma_0=\gamma_1=\ldots=\gamma_k=0$;

это следует из α), **a**, § 2 и **b**, § 2. Остается рассмотреть лишь случай $(a, m)=1$, но при условии, что a не сравнимо с 1 по модулю m, т. е. при условии, что среди чисел $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ имеется по меньшей мере одно γ', не равное нулю. Но из (1), § 1 следует равенство

$$\sum_{\chi} \chi(a) = \sum_{R} R^{\gamma} \sum_{R_0} R_0^{\gamma_0} \sum_{R_1} R_1^{\gamma} \ldots \sum_{R_k} R_k^{\gamma_k},$$

которое и доказывает теорему, так как среди сомножителей его правой части имеется сумма, отвечающая указанному γ', равная нулю.

e. Характеры по модулю m обладают следующими свойствами:

α) *Если* $\chi_0(a)$ *и* $\chi(a)$ — *характеры*, $\chi_0(a)\chi(a)$ — *также характер.*

β) *Если* $\chi_0(a)$ — *характер и* $\chi(a)$ *пробегает все характеры, то* $\chi_0(a)\chi(a)$ *также пробегает все характеры.*

γ) *При* $(l, m)=1$ *имеем*

$$\sum_{\chi} \frac{\chi(a)}{\chi(l)} = \begin{cases} \varphi(m) & \textit{в случае } a \equiv l \pmod{m}, \\ 0 & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Действительно, пусть $R', R_0', R_1', \ldots, R_k'$ и $R, R_0, R_1, \ldots, R_k$ — значения корней, входящих в определение характеров $\chi_0(a)$ и $\chi(a)$. Тогда $\chi_0(a)\chi(a)$ — характер, у которого соответствующими значениями корней являются $R'R, R_0'R_0, R_1'R_1, \ldots, R_k'R_k$. При этом, если каждое $R, R_0, R_1, \ldots, R_k$ пробегает все свои значения, то и каждое $R'R, R_0'R_0, R_1'R_1, \ldots, R_k'R_k$ в некотором порядке пробегает те же самые значения. Свойства α) и β) установлены.

Далее, найдя l' из условия $ll' \equiv 1 \pmod{m}$, выводим

$$\sum_{\chi} \frac{\chi(a)}{\chi(l)} = \sum_{\chi} \frac{\chi(a)\chi(l')}{\chi(l)\chi(l')} =$$

$$= \sum_{\chi} \chi(al') = \begin{cases} \varphi(m) & \text{в случае } a \equiv l \pmod{m}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Свойство γ) также установлено.

f. *Характером по модулю m является всякая функция $\psi(a)$, определенная для всех целых a и удовлетворяющая условиям:*

α) $\psi(a)=0$, *если* $(a, m)>1$,

β) $\psi(a)$ *не равна тождественно нулю,*

γ) $\psi(a_1a_2)=\psi(a_1)\psi(a_2)$,

δ) $\psi(a_1)=\psi(a_2)$, *если* $a_1\equiv a_2 \pmod m$.

Действительно, согласно β) существует такое a_0, для которого $\psi(a_0)$ не равно нулю. Из $a_0=a_0\cdot 1$ согласно γ) находим $\psi(a_0)=\psi(a_0)\cdot\psi(1)$. Отсюда, разделив почленно на $\psi(a_0)$, получим $\psi(1)=1$.

Пусть a — любое число с условием $(a, m)=1$. Определив a' сравнением $aa'\equiv 1 \pmod m$, согласно γ) имеем $\psi(a)\psi(a')=1$. Отсюда следует, что $\psi(a)$ не равно нулю.

Заставляя a пробегать приведенную систему вычетов по модулю m, а χ пробегать все $\varphi(m)$ различных характеров, рассмотрим сумму

$$H=\sum_a\sum_\chi \frac{\chi(a)}{\psi(a)}=\sum_a U_a; \qquad U_a=\sum_\chi \frac{\chi(a)}{\psi(a)}.$$

Замечая (d), что $U_a=\varphi(m)$ при $a\equiv 1 \pmod m$ и $U_a=0$ в противном случае, получим $H=\varphi(m)$, откуда, представляя H в виде

$$H=\sum_\chi V_\chi; \qquad V_\chi=\sum_a \frac{\chi(a)}{\psi(a)},$$

убедимся в существовании по меньшей мере одного $\chi=\chi_0$ с V_χ, не равным нулю. При этом при каждом a_1 с условием $(a_1, m)=1$ будем иметь

$$V_{\chi_0}=\sum\frac{\chi_0(a)}{\psi(a)}=\sum\frac{\chi_0(a_1a)}{\psi(a_1a)}=\frac{\chi_0(a_1)}{\psi(a_1)}V_{\chi_0};$$

$$1=\frac{\chi_0(a_1)}{\psi_0(a_1)}, \qquad \chi_0(a_1)=\psi(a_1);$$

отсюда и из α) следует, что функция $\psi(a_1)$ для каждого a_1 совпадает с характером $\chi_0(a_1)$.

Пример 1. Построим все $\varphi(5)=4$ характеров по модулю 5 (для каждого характера выписываем значения, отвечающие числам полной системы вычетов по модулю 5). Здесь корнями уравнения $\rho^4=1$ будут

$$\rho_0=e^{2\pi i\frac{0}{4}}=1,\quad \rho_1=e^{2\pi i\frac{1}{4}}=i,$$

$$\rho_2=e^{2\pi i\frac{2}{4}}=-1,\quad \rho_3=e^{2\pi i\frac{3}{4}}=-i.$$

А таблица индексов по модулю 5 (с основанием 2) будет

N	1	2	3	4
γ_1	0	1	3	2

Поэтому таблица значений характеров, отвечающих корням ρ_0, ρ_1, ρ_2, ρ_3, будет

N	0	1	2	3	4
χ_0	0	1	1	1	1
χ_1	0	1	i	$-i$	-1
χ_2	0	1	-1	-1	1
χ_3	0	1	$-i$	$-i$	-1

Пример 2. Укажем все $\varphi(21)=2\cdot 6=12$ характеров по модулю 21. Здесь корень R_{c_1} уравнения $R_{c_1}^2=1$ имеет 2 значения: $R_{c_1}=e^{2\pi i\frac{s}{2}}$; $s=0, 1$, а корень R_{c_2} уравнения $R_{c_2}^6=1$ имеет 6 значений: $R_{c_2}=e^{2\pi i\frac{s}{6}}$; $s=0, \ldots, 5$. При

этом характер, отвечающий какой-либо из 12 пар значений R_{c_1} и R_{c_2}, будет (пример 4, е, § 7, гл. VI):

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
χ	0	1 R_{c_2}	R_{c_1} $R_{c_2}^2$	0	1 $R_{c_2}^4$	R_{c_1} $R_{c_2}^5$	0	0	R_{c_1} 1	0

N	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
χ	1 R_{c_2}	R_{c_1} $R_{c_2}^4$	0	1 $R_{c_2}^3$	0	0	1 $R_{c_2}^2$	R_{c_1} R_{c_2}	0	1 $R_{c_2}^5$	R_{c_1} $R_{c_2}^3$

Здесь значение характера, отвечающее какому-либо числу N, взаимно простому с 21, получаются перемножением степеней чисел R_{c_1} и R_{c_2}, помещенных ниже этого числа N.

Вопросы к главе 7

1. Пусть $\chi(a)$ — неглавный характер по модулю p, отвечающий корню $R = e^{2\pi i \frac{s}{p-1}}$ уравнения $R^{p-1} = 1$ (следовательно, при a, кратном p, как $\chi(a)$, так и $\overline{\chi(a)} = (\chi(a))^{-1}$ считаются равными нулю).

α) При $(k, p) = 1$ доказать, что

$$\sum_{x=1}^{p-1} \overline{\chi(x)}\, \chi(x+k) = -1.$$

β) Пусть Q — целое, $1 < Q < p$,

$$S = \sum_{x=0}^{p-1} \left| \sum_{z=0}^{Q-1} \chi(x+z) \right|^2.$$

Доказать, что $S = (p-Q)\, Q$.

2. Пусть $\chi(a)$ — характер по модулю p,

$$U_{a,p} = \sum_{x=1}^{p-1} \chi(x)\, e^{2\pi i \frac{ax}{p}}.$$

α) При $(a, p) = 1$ доказать, что $|U_{a,p}| = \sqrt{p}$ для неглавного характера и $U_{a,p} = -1$ для главного характера.

β) Пусть $\chi(a)$ — неглавный характер по модулю p и $(a, p) = 1$.

Доказать, что

$$(\chi(a))^{-1}=\frac{U_{a,p}}{U_{1,p}}.$$

γ) Пусть p имеет вид $p=4m+1$ (следовательно, $p-1=4m$), $R=e^{2\pi i\frac{m}{p-1}}=e^{2\pi i\frac{1}{4}}$,

$$S=\sum_{x=1}^{p-1}\chi(x^2+x).$$

Доказать (ср. вопросы 9, a и 9, c. гл. V), что $p=A^2+B^2$, где A и B — целые, определяемые равенством $S=A+Bi$.

δ) Пусть n — делитель числа $p-1$, $1<n<p-1$, $\nu=\frac{1}{n}$, $(a, p)=1$, наконец, x_s пробегает числа приведенной системы вычетов по модулю p с условием $\operatorname{ind} x_s \equiv s \pmod n$. Доказать, что

$$\sum_{x_s} e^{2\pi i\frac{ax_s}{p}}=-\nu+\theta_s(1-\nu)\sqrt{p};\quad |\theta_s|=1.$$

3. Пусть n — целое, $n>2$, $(a, m)=1$,

$$S_{a,m}=\sum_{x} e^{2\pi i\frac{ax^n}{m}},\quad S'_{a,m}=\sum_{\xi} e^{2\pi i\frac{a\xi^n}{m}},$$

где x пробегает полную, а ξ пробегает приведенную системы вычетов по модулю m (ср. вопрос 12, d, гл. III).

α) Пусть $\delta=(n, p-1)$. Доказать, что

$$|S_{a,p}|\leqslant(\delta-1)\sqrt{p}.$$

β) Пусть s — целое, $1<s\leqslant n$, $(n, p)=1$. Доказать, что

$$S_{a,p^s}=p^{s-1},\quad S'_{a,p^s}=0.$$

γ) Пусть n — целое, $s>n$. Доказать, что

$$S_{a,p^s}=p^{n-1}S_{a,p^{s-n}},\quad S'_{a,p^s}=0.$$

δ) Доказать, что

$$|S_{a,m}|<Cm^{1-\frac{1}{n}},$$

где C зависит только от n.

4. Пусть M и Q — целые, $0<M<M+Q\leqslant p$, $p>60$, $\chi(a)$ — неглавный характер по модулю p.

α) Доказать, что

$$\left|\sum_{x=M}^{M+Q-1}\chi(x)\right|<\sqrt{p}(\ln p-1).$$

β) Пусть n — делитель числа $p-1$, $1 < n < p-1$, $\nu=\frac{1}{n}$, $p>36n^2$, наконец, x_s пробегает числа приведенной системы вычетов по модулю p с условием $\operatorname{ind} x_s \equiv s \pmod n$. Доказать, что число чисел x_s, заключенных среди чисел $M, \ldots, M+Q-1$, выражается формулой

$$T=\frac{Q}{n}+\theta\sqrt{p}(\ln p-1).$$

γ) При условиях вопроса β) показать, что при $Q=[8n\sqrt{p}]$ среди чисел $M, \ldots, M+Q-1$ находится по меньшей мере одно число x_s.

δ) Пусть k — число простых делителей числа $p-1$ и H — число первообразных корней по модулю p, заключенных среди чисел $M, \ldots, M+Q-1$. Доказать, что

$$H=\frac{\varphi(p-1)}{p-1}Q+\theta 2^k\sqrt{p}\ln p; \quad |\theta|<1.$$

ε) Пусть M_1 и Q_1 — целые, $0 < M_1 < M_1+Q_1 \leqslant p-1$, J — число чисел ряда $\operatorname{ind} M, \ldots, \operatorname{ind}(M+Q-1)$, заключенных среди чисел ряда $M_1, \ldots, M_1+Q_1-1$. Доказать, что

$$J=\frac{QQ_1}{p-1}+\theta\sqrt{p}(\ln p)^2; \quad |\theta|<1.$$

η) Доказать существование постоянного p_0 с условием: если $p > p_0$, n — делитель $p-1$, $1<n<p-1$, то наименьший из положительных невычетов степени n по модулю p будет

$$<h; \quad h=p^{\frac{1}{c}}(\ln p)^2, \quad c=2e^{1-\frac{1}{n}}.$$

5. Пусть $m > 1$, $(a, m)=1$, n — целое, $n > 0$, K — число решений сравнения $x^n \equiv 1 \pmod m$

$$S=\sum_{x=1}^{m-1}\chi(x)e^{2\pi i\frac{ax^n}{m}}.$$

В случае, когда $\chi(x)$ — неглавный характер по модулю m, доказать, что

$$S < K\sqrt{m}.$$

6. Пусть g пробегает первообразные корни по модулю p, заключенные в приведенной системе вычетов, $(a, p)=1$, k — число различных простых делителей числа $p-1$ и $S=\sum_g e^{2\pi i\frac{ag}{p}}$.

α) Доказать, что

$$|S| \leqslant \frac{9}{8}\frac{\varphi(p-1)}{p-1}2^k\sqrt{p}.$$

β) Пусть M и Q — целые, $0 < M < M+Q \leqslant p$. Доказать, что число T первообразных корней, находящихся в ряде $M, \ldots, M+Q-1$, выражается формулой

$$T = \frac{\varphi(p-1)}{p-1}\left(Q + \theta\frac{9}{8}2^k\sqrt{p}\right), \qquad |\theta| < 1.$$

Численные примеры к главе VII

1. Указать все характеры по модулям:
α) 2. β) 4. γ) 8. δ) 9. ε) 10. η) 40.

РЕШЕНИЯ ВОПРОСОВ

Решения к главе 1

1. Остаток от деления $ax+by$ на d, имея вид $ax'+by'$ и будучи меньше d, непременно равен нулю. Поэтому d—делитель всех чисел вида $ax+by$ и, в частности, общий делитель чисел $a\cdot 1+b\cdot 0=a$ и $a\cdot 0+b\cdot 1=b$. С другой стороны, выражение для d показывает, что всякий общий делитель чисел a и b делит d. Поэтому $d=(a, b)$ и верна теорема 1, d, § 2. Теоремы e, § 2 выводятся так: наименьшее положительное число вида $amx+bmy$ есть amx_0+bmy_0; наименьшее положительное число вида $\frac{a}{\delta}x+\frac{b}{\delta}y$ есть $\frac{a}{\delta}x_0+\frac{b}{\delta}y_0$. Обобщение этих результатов тривиально.

2. При $p=2$ утверждение очевидно. Пусть $p>2$ и утверждение справедливо для всех простых чисел, меньших p. Докажем его для p. Если a не делится на p, b не делится на p, то по c, § 1 $a=a_2p+a_1$, $0<a_1<p$, $b=b_2p+b_1$, $0<b_1<p$. Следовательно, по 2, § 1 a_1b_1 делится на p, т. е.

$$a_1b_1=pm, \quad m\text{—натуральное число.}$$

Каждый простой делитель чисел a_1, b_1 меньше p, поэтому по индукционному предположению он делит m. Производя сокращения, приходим к равенству

$$1=pm_1,$$

которое противоречиво, а это и доказывает наше утверждение.

3, a. Действительно, всегда будем иметь

$$\left|\frac{c}{d}-\delta_{s+1}\right|<|\delta_s-\delta_{s+1}|,$$

откуда найдем

$$\frac{1}{dQ_{s+1}}<\frac{1}{Q_sQ_{s+1}}, \qquad d>Q_s.$$

b. При $n\leqslant 6$ теорема очевидна; поэтому предполагаем $n>6$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\xi=\frac{1+\sqrt{5}}{2} && =1{,}618\ldots; \quad \log_{10}\xi=0,\ 2,\ \ldots;\\
&Q_2\geqslant 1 && =g_1=1,\\
&Q_3\geqslant Q_2+1 && \geqslant g_2=2>\xi,\\
&Q_4\geqslant Q_3+Q_2 && \geqslant g_3=g_2+g_1>\xi+1=\xi^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Q_n\geqslant Q_{n-1}+Q_{n-2}\geqslant g_{n-1}=g_{n-2}+g_{n-3}>\xi^{n-3}+\xi^{n-4}=\xi^{n-2}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$N > \xi^{n-2}, \quad n < \frac{\log_{10} N}{\log_{10} \xi} + 2 < 5k + 2; \quad n \leqslant 5k + 1.$$

4, a. Для дробей $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{1}$ имеем $0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -1$. Вставляя между дробями $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ с условием $AD - BC = -1$ дробь $\frac{A+C}{B+D}$, имеем $A(B+D) - B(A+C) = (A+C)D - (B+D)C = -1$. Поэтому верно утверждение, отмеченное в конце вопроса. Существование дроби $\frac{k}{l}$ с условиями $\frac{a}{b} < \frac{k}{l} < \frac{c}{d}$, $l \leqslant \tau$ невозможно. В противном случае мы имели бы

$$\frac{k}{l} - \frac{a}{b} \geqslant \frac{1}{lb}; \quad \frac{c}{d} - \frac{k}{l} \geqslant \frac{1}{ld}; \quad \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \geqslant \frac{b+d}{lbd} > \frac{1}{bd}.$$

b. Очевидно, достаточно рассматривать случай $0 \leqslant \alpha < 1$. Пусть $\frac{a}{b} \leqslant \alpha < \frac{c}{d}$, где $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — соседние дроби ряда Фарея, отвечающего τ. Возможны два случая:

$$\frac{a}{b} \leqslant \alpha < \frac{a+c}{b+d}; \quad \frac{a+c}{b+d} \leqslant \alpha < \frac{c}{d}.$$

Поэтому верно одно из двух неравенств

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b(b+d)}; \quad \left|\alpha - \frac{c}{d}\right| \leqslant \frac{1}{d(b+d)},$$

откуда ввиду $b + d > \tau$ указанная теорема следует непосредственно.

c. В случае, когда α — несократимая дробь $\alpha = \frac{a}{b}$ с условием $b \leqslant \tau$, за $\frac{P}{Q}$ можно принять саму дробь $\frac{a}{b}$. В противном случае за $\frac{P}{Q}$ можно принять подходящую дробь $\frac{P_s}{Q_s}$ с условием $Q_s \leqslant \tau < Q_{s+1}$.

5, a. Нечетные простые числа при делении на 4 дают остаток 1 или же 3. Произведение чисел вида $4m+1$ имеет вид $4m+1$. Поэтому число $4p_1 \ldots p_k - 1$, где $p_1, \ldots, p_k$ — простые вида $4m+3$, наверно имеет простой делитель q вида $4m+3$. При этом q не совпадает ни с одним из чисел $p_1, \ldots, p_k$.

b. Простые числа, превосходящие 3, имеют вид $6m+1$ или же $6m+5$. Число $6p_1 \ldots p_k - 1$, где $p_1, \ldots, p_k$ — простые вида $6m+5$, наверно имеет простой делитель q вида $6m+5$. При этом q не совпадает ни с одним из чисел $p_1, \ldots, p_k$.

6. Пусть $p_1, \ldots, p_k$ — какие-либо k простых чисел и N — целое с условиями $2 < N$, $(3 \ln N)^k < N$. Число чисел a ряда $1, 2, \ldots, N$, каноническое разложение которых имеет вид $a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, ввиду

$\alpha_s < \frac{\ln N}{\ln 2}$, не больше чем

$$\left(\frac{\ln N}{\ln 2}+1\right)^k < (3\ln N)^k < N.$$

Поэтому в ряде 1, 2, ..., N найдутся числа, в каноническое разложение которых входят простые, отличные от $p_1, \ldots, p_k$.

7. Например, такие последовательности получим при

$$M = 2\cdot 3 \ldots (K+1)\,t+2; \quad t = 1, 2, \ldots$$

8. Взяв целое x_0 с условием, что при $x \geqslant x_0$, $f(x) > 1$ и $f'(x) > 0$, положим $f(x_0) = X$. Составными (кратными X) будут все числа $f(x_0 + Xt)$; $t = 1, 2, \ldots$

9, a. При наличии (1) одно из чисел x, y, пусть именно x, будет четным; из

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{z+y}{2}\,\frac{z-y}{2},$$

где, очевидно, $\left(\frac{z+y}{2}, \frac{z-y}{2}\right) = 1$, убеждаемся в существовании положительных целых u и v с условиями

$$\frac{x}{2} = uv, \quad \frac{z+y}{2} = u^2, \quad \frac{z-y}{2} = v^2.$$

Отсюда следует необходимость условий, указанных в вопросе. Достаточность этих условий очевидна.

b. Условимся здесь обозначать буквами лишь целые положительные числа. Допустив существование систем x, y, z с условиями $x^4 + y^4 = z^2$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $(x, y, z) = 1$, выберем из них систему с наименьшим z. Предполагая x четным, найдем $x^2 = 2uv$, $y^2 = u^2 - v^2$, $u > v \geqslant 1$, $(u, v) = 1$, где v — четное (при четном u было бы $y^2 = 4N + 1$, $u^2 = 4N_1$, $v^2 = 4N_2 + 1$, $4N + 1 = 4N_1 - 4N_2 - 1$, что невозможно). Отсюда $u = z_1^2$, $v = 2w^2$, $y^2 + 4w^4 = z_1^4$, $2w^2 = 2u_1v_1$, $u_1 = x_1^2$, $v_1 = y_1^2$, $x_1^4 + y_1^4 = z_1^2$, что ввиду $z_1 < z$ невозможно.

Из неразрешимости уравнения $x^4 + y^4 = z^2$ как частный случай, очевидно, следует и неразрешимость уравнения $x^4 + y^4 = t^4$ в целых положительных x, y, t.

10. Полагая $x = \frac{k}{l}$; $(k, l) = 1$, находим

$$k^n + a_1k^{n-1}l + \ldots + a_nl^n = 0.$$

Поэтому k^n кратно l и, следовательно, $l = 1$.

11, a. Пусть k — наибольшее целое с условием $2^k \leqslant n$ и P — произведение всех нечетных чисел, не превосходящих n. Число $2^{k-1}PS$ представится суммою, все слагаемые которой, кроме $2^{k-1}P\frac{1}{2^k}$, суть целые числа.

b. Пусть k — наибольшее целое с условием $3^k \leqslant 2n+1$ и P — произведение всех взаимно простых с 6 чисел, не превосходящих

$2n+1$. Число $3^{k-1}PS$ представится суммою, все слагаемые которой, кроме $3^{k-1}P\frac{1}{3^k}$, суть целые числа.

12. При $n \leqslant 8$ теорема проверяется непосредственно. Поэтому достаточно, считая при $n > 8$ теорему верной для биномов $a+b$, $(a+b)^2$, ..., $(a+b)^{n-1}$, доказать справедливость теоремы и для бинома $(a+b)^n$. Но коэффициенты разложения этого бинома за исключением крайних, равных 1, суть числа

$$\frac{n}{1}, \quad \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \quad \ldots, \quad \frac{n(n-1)\ldots 2}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}.$$

Для нечетности же всех этих чисел необходимо и достаточно, чтобы нечетными были крайние из них, как раз равные n, и чтобы также нечетными были числа, получаемые вычеркиванием нечетных сомножителей из числителей и знаменателей оставшихся чисел. Но, полагая $n=2n_1+1$, эти числа можно представить членами ряда

$$\frac{n_1}{1}, \quad \frac{n_1(n_1-1)}{1 \cdot 2}, \quad \ldots, \quad \frac{n_1(n_1-1)\ldots 2}{1 \cdot 2 \ldots (n_1-1)}.$$

Последние же ввиду $n_1 < n$ будут все нечетными тогда и только тогда, когда n_1 имеет вид 2^k-1, т. е. когда n имеет вид $2(2^k-1)+1 = 2^{k+1}-1$.

Решения к главе 2

1, a. На ординате точки кривой $y=f(x)$ с абсциссою x лежит $[f(x)]$ целых точек указанной области.

b. Указанное равенство следует из $T_1+T_2=T$, где T_1, T_2, T обозначают числа целых точек областей

$$0 < x < \frac{Q}{2}, \quad 0 < y < \frac{P}{Q}x;$$

$$0 < y < \frac{P}{2}, \quad 0 < x \leqslant \frac{Q}{P}y;$$

$$0 < x < \frac{Q}{2}, \quad 0 < y < \frac{P}{2}.$$

c. Указанное равенство следует из

$$T = 1 + 4(T_1+T_2+T_3-T_4),$$

где T_1, T_2, T_3, T_4 обозначают числа целых точек областей

$$x=0, \quad 0 < y \leqslant r;$$

$$0 < x \leqslant \frac{r}{\sqrt{2}}, \quad 0 < y \leqslant \sqrt{r^2-x^2};$$

$$0 < y \leqslant \frac{r}{\sqrt{2}}, \quad 0 < x \leqslant \sqrt{r^2-y^2};$$

$$0 < x \leqslant \frac{r}{\sqrt{2}}, \quad 0 < y \leqslant \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

d. Указанное равенство следует из $T=T_1+T_2-T_3$, где T_1, T_2, T_3 обозначают числа целых точек областей

$$0<x\leqslant\sqrt{n},\quad 0<y\leqslant\frac{n}{x};$$
$$0<y\leqslant\sqrt{n},\quad 0<x\leqslant\frac{n}{y};$$
$$0<x\leqslant\sqrt{n},\quad 0<y\leqslant\sqrt{n}.$$

e. В случае треугольника, не имеющего других целых точек, кроме вершин, теорема тривиальна. К этому же случаю сводится и случай каждого выпуклого многоугольника. А случай невыпуклого многоугольника путем соединения прямолинейным отрезком некоторой пары его вершин можно свести к случаю многоугольника более простого вида.

2. Число целых положительных чисел, не превосходящих n, равно $[n]$. Каждое из них единственным способом представляется в виде xk^m, где k—целое положительное; при этом данному x отвечает $\left[\sqrt[m]{\frac{n}{x}}\right]$ чисел такого вида.

3. Докажем необходимость указанных условий. Число значений x с условием $[\alpha x]\leqslant N$ можно представить в виде $\frac{N}{\alpha}+\lambda$; $0\leqslant\lambda<\frac{1}{\alpha}$, а число значений y с условием $[\beta y]\leqslant N$ можно представить в виде $\frac{N}{\beta}+\lambda_1$; $0\leqslant\lambda_1<\frac{1}{\beta}$. Из $\frac{N}{\alpha}+\lambda+\frac{N}{\beta}+\lambda_1=N$, деля на N и переходя к пределу, при $N\to\infty$ получим $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$. Последнее равенство при рациональном $\alpha=\frac{a}{b}$ $(a>b>0)$ дало бы $[\alpha b]=[\beta(a-b)]$. Поэтому α и β не могут быть рациональными.

Пусть указанные условия выполнены. Пусть c—натуральное число. Пусть $x_0=\frac{c}{\alpha}+\xi$ и $y_0=\frac{c}{\beta}+\eta$—наименьшие целые числа с условием $x_0>\frac{c}{\alpha}$, $y_0>\frac{c}{\beta}$. Очевидно, $[\alpha x]$ не равно c при x, не равном x_0, и $[\beta y]$ не равно c при y, не равном y_0; при этом $0<\xi<1$, $0<\eta<1$, $\alpha\xi$ и $\beta\eta$—иррациональные. Ввиду $x_0+y_0=c+\xi+\eta$ имеем $\xi+\eta=1$, $\frac{\alpha\xi}{\alpha}+\frac{\beta\eta}{\beta}=1$. Поэтому одно и только одно из чисел $[\alpha x_0]$ и $[\beta y_0]$ равно c.

4,a. Упомянутые разности при $\{\alpha x_t\}>0$ равны

$$\{\alpha x_1\},\ \{\alpha(x_2-x_1)\},\ \ldots,\ \{\alpha(x_t-x_{t-1})\},\ \{-\alpha x_t\}.$$

Они неотрицательные, их сумма равна 1, их число равно $t+1$. Поэтому по меньшей мере одна из этих разностей не превосходит $\frac{1}{t+1}<\frac{1}{\tau}$. Но она имеет вид $\{\alpha x'\}=\alpha x'-y'$, где x'—целое число с условием $0 < |x'| \leqslant \tau$ и $y' = [\alpha x']$. Поэтому, обозначая буквой h то из чисел 1 и -1, при котором $hx' > 0$, будем иметь $|\alpha hx' - hy'| < \frac{1}{\tau}$. Отсюда, обозначая буквами Q и P частные от деления hx' и hy' на (hx', hy'), получим

$$|\alpha Q - P| < \frac{1}{\tau}; \quad 0 < Q \leqslant \tau,$$

откуда и следует упомянутая в вопросе теорема.

b. Полагая $t_1 = [\tau_1]$, $t_2 = [\tau_2]$, ..., $t_k = [\tau_k]$ и заставляя $x_1, x_2, \ldots$ ..., x_k пробегать значения

$$x_1 = 0, 1, \ldots; t_1; \quad x_2 = 0, 1, \ldots, t_2; \ldots; x_k = 0, 1, \ldots, t_k,$$

рассмотрим ряд, образованный расположенными в неубывающем порядке числами $\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k\}$ и числом 1. Составляя разности, образованные соседними такими числами, получим $(t_1+1) \times (t_2+1) \ldots (t_k+1)$ разностей. По меньшей мере одна из них не превосходит

$$\frac{1}{(t_1+1)(t_2+1)\ldots(t_k+1)} < \frac{1}{\tau_1\tau_2\ldots\tau_k}.$$

Но она имеет вид $\{\alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \ldots + \alpha_k x_k'\}$, где $x_1', x_2', \ldots, x_k'$ — целые числа с условиями $|x_1'| \leqslant \tau_1$, $|x_2'| \leqslant \tau_2$, ..., $|x_k'| \leqslant \tau_k$, не равные нулю одновременно. Полагая $[\alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \ldots + \alpha_k x_k'] = y'$ и обозначая символами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \eta$ частные от деления $x_1', x_2', \ldots$ ..., x_k', y' на $(x_1', x_2' \ldots, x_k', y')$, получим

$$|\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \ldots + \alpha_k\xi_k - \eta| < \frac{1}{\tau_1\tau_2\ldots\tau_k},$$

что и доказывает указанную в вопросе теорему.

5. Имеем $\alpha = cq + r + \{\alpha\}$; $0 \leqslant r < c$,

$$\left[\frac{[\alpha]}{c}\right] = \left[q + \frac{r}{c}\right] = q, \quad \left[\frac{\alpha}{c}\right] = \left[q + \frac{r + \{\alpha\}}{c}\right] = q.$$

6, a. Имеем $[\alpha + \beta + \ldots + \lambda] = [\alpha] + [\beta] + \ldots + [\lambda] + [\{\alpha\} + \{\beta\} + \ldots + \{\lambda\}]$.

b. Простое p входит в $n!$, $a!$, ..., $l!$ с показателями

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots, \left[\frac{a}{p}\right] + \left[\frac{a}{p^2}\right] + \ldots, \ldots, \left[\frac{l}{p}\right] + \left[\frac{l}{p^2}\right] + \ldots$$

При этом

$$\left[\frac{n}{p^s}\right] \geqslant \left[\frac{a}{p^s}\right] + \ldots + \left[\frac{l}{p^s}\right].$$

7. Допуская, что число a с указанными свойствами существует, представим его в виде

$$a=q_k p^{k+1}+q_{k-1}p^k+\ldots+q_1p^2+q_0p+q';$$

$0 < q_k < p$, $0\leqslant q_{k-1} < p$, $\ldots$, $0\leqslant q_1 < p$, $0\leqslant q_0 < p$, $0\leqslant q' < p$.

Согласно b, § 1 должно быть

$$h=q_ku_k+q_{k-1}u_{k-1}+\ldots+q_1u_1+q_0u_0.$$

Далее при любом $s=1, 2, \ldots, m$ имеем

$$q_{s-1}u_{s-1}+q_{s-2}u_{s-2}+\ldots+q_1u_1+q_0u_0 < u_s.$$

Поэтому последнее выражение для h должно полностью совпасть с указанным в вопросе.

8,a. Пусть x_1 — целое, $Q\leqslant\alpha < \beta\leqslant R$, $x_1 < \alpha < \beta < x_1+1$; интегрированием по частям находим

$$-\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta \rho'(x)f(x)\,dx=$$

$$=\rho(\beta)f(\beta)-\rho(\alpha)f(\alpha)-\sigma(\beta)f'(\beta)+\sigma(\alpha)f'(\alpha)+\int_\alpha^\beta \sigma(x)f''(x)\,dx.$$

В частности, при $Q\leqslant x_1$, $x_1+1\leqslant R$, переходя к пределу, имеем

$$-\int_{x_1}^{x_1+1} f(x)\,dx=-\frac{1}{2}f(x_1+1)-\frac{1}{2}f(x_1)+\int_{x_1}^{x_1+1}\sigma(x)f''(x)\,dx.$$

Указанная формула теперь получается без всякого труда.

b. Переписав формулу вопроса a в виде

$$\sum_{Q<x\leqslant R} f(x)=\int_Q^R f(x)\,dx+\rho(R)f(R)-\rho(Q)f(Q)-$$

$$-\sigma(R)f'(R)+\sigma(Q)f'(Q)+\int_Q^\infty \sigma(x)f''(x)\,dx-\int_R^\infty \sigma(x)f''(x)\,dx,$$

убеждаемся в справедливости указанной формулы.

c. Применяя результат вопроса b, находим

$$\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n=C+n\ln n-n+$$

$$+\frac{1}{2}\ln n+\int_n^\infty \frac{\sigma(x)}{x^2}\,dx=n\ln n-n+O(\ln n).$$

9,a, α) Имеем (b, § 1)

$$\ln([n]!)=\sum_{p\leqslant n}\left(\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots\right)\ln p. \qquad (1)$$

Здесь правая часть представляет сумму значений функции $\ln p$, распространенную на целые точки (p, s, u) с простыми p области

$p>0,\ s>0,\ 0<u\leqslant\frac{n}{p^s}$. Часть этой суммы, отвечающая данным s и u, равна $\theta\left(\sqrt[s]{\frac{n}{u}}\right)$; часть, отвечающая данному u, равна $\psi\left(\frac{n}{u}\right)$.

β) Применяя при $n\geqslant 2$ результат вопроса α), имеем

$$\ln([n]!)-2\ln\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)=$$
$$=\psi(n)-\psi\left(\frac{n}{2}\right)+\psi\left(\frac{n}{3}\right)-\psi\left(\frac{n}{4}\right)+\ldots\geqslant\psi(n)-\psi\left(\frac{n}{2}\right).$$

Полагая $\left[\frac{n}{2}\right]=m$, отсюда находим ($[n]=2m$, или $[n]=2m+1$)

$$\psi(n)-\psi\left(\frac{n}{2}\right)\leqslant\ln\frac{(2m+1)!}{(m!)^2}\leqslant\ln\left(2^m\frac{3\cdot 5\ldots(2m+1)}{1\cdot 2\ldots m}\right)\leqslant\ln(2^m3^m)<n,$$

$$\psi(n)=\psi(n)-\psi\left(\frac{n}{2}\right)+\psi\left(\frac{n}{2}\right)-\psi\left(\frac{n}{4}\right)+$$
$$+\psi\left(\frac{n}{4}\right)-\psi\left(\frac{n}{8}\right)+\ldots<n+\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\ldots=2n.$$

γ) Имеем (решение вопроса β) и результат вопроса 8,c)

$$\psi(n)-\psi\left(\frac{n}{2}\right)+\psi\left(\frac{n}{3}\right)-\psi\left(\frac{n}{4}\right)+\ldots=\ln\frac{[n]!}{\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2}=$$
$$=[n]\ln[n]-[n]-2\left[\frac{n}{2}\right]\ln\left[\frac{n}{2}\right]+2\left[\frac{n}{2}\right]+O(\ln n)=$$
$$=n\ln 2+O(\ln n).$$

Далее, при $s\geqslant 2$ находим (вопрос β))

$$\theta(\sqrt[s]{n})-\theta\left(\sqrt[s]{\frac{n}{2}}\right)+\theta\left(\sqrt[s]{\frac{n}{3}}\right)-$$
$$-\theta\left(\sqrt[s]{\frac{n}{4}}\right)+\ldots\begin{cases}<2\sqrt[s]{n} & \text{всегда,}\\ =0 & \text{при } s>\tau,\ \tau=\left[\dfrac{\ln n}{\ln 2}\right].\end{cases}$$

Поэтому

$$0\leqslant\psi(n)-\psi\left(\frac{n}{2}\right)+\psi\left(\frac{n}{3}\right)-\psi\left(\frac{n}{4}\right)+\ldots$$
$$\ldots-\left(\theta(n)-\theta\left(\frac{n}{2}\right)+\theta\left(\frac{n}{3}\right)-\theta\left(\frac{n}{4}\right)+\ldots\right)<$$
$$<2\sqrt{n}+2\sqrt[3]{n}+2\sqrt[4]{n}+\ldots+2\sqrt[\tau]{n}<2(\sqrt{n}+\tau\sqrt[3]{n})=O(\sqrt{n}).$$

b. Следует из равенства (1), неравенства вопроса a, β) и равенства вопроса 8,c.

c. Равенство вопроса **b** при достаточно больших m дает

$$\sum_{m < p \leqslant m^2} \frac{\ln p}{p} = \ln m + O(1) \geqslant \frac{\ln m}{2}, \qquad \sum_{m < p \leqslant m^2} \frac{4}{p} > 1.$$

Если для всех пар p_n, p_{n+1} с условием $m < p_n < p_{n+1} \leqslant m^2$ имело бы место неравенство $p_{n+1} > p_n(1+\varepsilon)$, то было бы

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{4}{m(1+\varepsilon)^r} > 1,$$

что при достаточно больших m невозможно.

d. Очевидно, достаточно рассматривать лишь случай, когда n — целое.

Полагая $\gamma(r) = \frac{\ln r}{r}$ при r простом и $\gamma(r) = 0$ при $r = 1$, или при r составном, имеем (вопрос **b**)

$$\gamma(1) + \gamma(2) + \ldots + \gamma(r) = \ln r + \alpha(r); \qquad |\alpha(r)| < C_1,$$

где C_1 — постоянное. Отсюда при $r > 1$

$$\gamma(r) = \ln r - \ln(r-1) + \alpha(r) - \alpha(r-1),$$

$$\sum_{0 < p \leqslant n} \frac{1}{p} = T_1 + T_2; \quad T_1 = \sum_{1 < r \leqslant n} \frac{\ln r - \ln(r-1)}{\ln r},$$

$$T_2 = \sum_{1 < r \leqslant n} \frac{\alpha(r) - \alpha(r-1)}{\ln r}.$$

Имеем (8, **b**)

$$T_1 = \sum_{1 < r \leqslant n} \frac{1}{r \ln r} + \sum_{1 < r \leqslant n} \left(\frac{1}{2r^2 \ln r} + \frac{1}{3r^3 \ln r} + \ldots \right) =$$

$$= C_2 + \ln \ln n + O\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

где C_2 — постоянное. Далее находим

$$T_2 = \alpha(2)\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}\right) + \ldots + \alpha(n-1)\left(\frac{1}{\ln(n-1)} - \frac{1}{\ln n}\right) + \frac{\alpha(n)}{\ln n},$$

откуда следует, что

$$T_2 = C_3 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

где C_3 — сумма абсолютно сходящегося ряда

$$\alpha(2)\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}\right) + \alpha(3)\left(\frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4}\right) + \ldots$$

e. Имеем

$$\ln \prod_{p<n}\left(1-\frac{1}{p}\right)=-\sum_{p<n}\frac{1}{p}-\sum_{p<n}\left(\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{3p^3}+\ldots\right)=$$

$$=C'-\ln\ln n+O\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

где C' — постоянное. Отсюда, полагая $C'=\ln C_0$, мы и получим указанное равенство.

f. Полагая $n=[1{,}5s\ln s]$ и обозначая символом $\pi(n)$ число простых чисел, не превосходящих n, из равенства вопроса 9, a, γ) выводим (C — положительное постоянное число)

$$\pi(n)>\frac{n\ln 2-C\sqrt{n}}{\ln n},$$

что больше s, если s_0 выбрано достаточно большим. Отсюда следует, что p_s при $s\geqslant s_0$ находится среди простых чисел, не превосходящих n.

g. Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_s$ — различные простые делители числа a. Находим: $2\cdot 3\cdot 4\ldots(s+1)\leqslant a$, откуда (вопрос 8, c)

$$(s+1)\ln(s+1)+O(s+1)\leqslant \ln a, \quad s=O(\ln a).$$

Поэтому (вопросы e и f)

$$\frac{a}{\varphi(a)}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{q_s}\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)}=O(\ln p_s)=O(\ln\ln a).$$

10, a. Следует из d, § 2.

b. Ввиду $\theta(1)=\psi(1)=1$ условие 1, a, § 2 для функции $\theta(a)$ выполнено. Пусть $a=a_1a_2$ — одно из разложений a на два взаимно простых сомножителя. Имеем

$$\sum_{d_1\backslash a_1}\sum_{d_2\backslash a_2}\theta(d_1d_2)=\psi(a)=\psi(a_1)\,\psi(a_2)=\sum_{d_1\backslash a_1}\sum_{d_2\backslash a_2}\theta(d_1)\,\theta(d_2). \qquad (1)$$

Если условие 2, a, § 2 выполнено для всех произведений, меньших a, то при $d_1d_2<a$ имеем $\theta(d_1d_2)=\theta(d_1)\,\theta(d_2)$, и равенство (1) дает $\theta(a_1a_2)=\theta(a_1)\,\theta(a_2)$, т. е. условие 2, a, § 2 выполняется и для всех произведений a_1a_2, равных a. Но условие 2, a, § 2 выполняется для единственного произведения $1\cdot 1$, равного 1. Следовательно, оно выполняется и для всех произведений.

11, a. Пусть $m>1$; для каждого данного x_m делящего a, неопределенное уравнение $x_1\ldots x_{m-1}x_m=a$ имеет $\tau_{m-1}\left(\frac{a}{x_m}\right)$ решений. Поэтому

$$\tau_m(a)=\sum_{x_m\backslash a}\tau_{m-1}\left(\frac{a}{x_m}\right),$$

но когда x_m пробегает все делители числа a, то $d=\frac{a}{x_m}$ в обратном порядке пробегает те же делители. Следовательно,

$$\tau_m(a)=\sum_{d\setminus a}\tau_{m-1}(d).$$

Поэтому (вопрос 10, a) если теорема верна для функции $\tau_{m-1}(a)$, то она верна и для функции $\tau_m(a)$. Но теорема верна для функции $\tau_1(a)=1$. Значит, она верна всегда.

b. Если теорема верна для функции $\tau_m(p^\alpha)$, то имеем

$$\tau_{m+1}(p^\alpha)=\sum_{s=0}^{\alpha}\tau_m(p^s)=\sum_{s=0}^{\alpha}\frac{(s+1)(s+2)\dots(s+m-1)}{1\cdot 2\dots(m-1)}=$$

$$=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+m)}{1\cdot 2\dots m}.$$

Следовательно, теорема верна и для функции $\tau_{m+1}(p^\alpha)$. Но теорема верна для функции $\tau_2(p^\alpha)$ $\left(\text{очевидно равной } \frac{\alpha+1}{1}\right)$. Поэтому она верна всегда.

c. Пусть $\varepsilon=m\varepsilon_2$, $\varepsilon_2=2\eta$, $a=p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа a, причем $p_1, \dots, p_k$ расположены в возрастающем порядке. Для функции $\tau_2(a)=\tau(a)$ имеем

$$\frac{\tau(a)}{a^\eta}<\frac{\alpha_1+1}{2^{\alpha_1\eta}}\frac{\alpha_2+1}{3^{\alpha_2\eta}}\dots\frac{\alpha_k+1}{(k+1)^{\alpha_k\eta}}.$$

Предполагая для простоты рассуждений, что $\varepsilon<1$, убеждаемся, что каждый из сомножителей произведения, стоящего справа, меньше $\frac{1}{\eta}$; сомножители $\frac{\alpha_{r-1}+1}{r^{\alpha_{r-1}\eta}}$ с условием $r>2^{\frac{1}{\eta}}$ меньше 1. Поэтому, полагая $C=\left(\frac{1}{\eta}\right)^{2^{\frac{1}{\eta}}}$, находим

$$\frac{\tau(a)}{a^\eta}<C,\quad \lim_{a\to\infty}\frac{\tau(a)}{a^{\varepsilon_2}}\leqslant\lim_{a\to\infty}\frac{C}{a^\eta}=0.$$

При $m>2$, очевидно, имеем $\tau_m(a)\leqslant(\tau(a))^m$. Поэтому

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\tau_m(a)}{a^{\varepsilon}}\quad\lim\left(\frac{\tau(a)}{a^{\varepsilon_2}}\right)^m=0.$$

d. Системы значений $x_1, \dots, x_m$, удовлетворяющие указанному неравенству, разобьем на $[n]$ совокупностей с номерами $1, 2, \dots, [n]$. К совокупности с номером a отнесем системы с условием $x_1\dots x_m=a$; число этих систем есть $\tau_m(a)$.

12. При $R(s) > 1$ ряд, выражающий $\zeta(s)$, абсолютно сходится. Поэтому

$$(\zeta(s))^m = \sum_{n_1=1}^{\infty} \dots \sum_{n_m=1}^{\infty} \frac{1}{(n_1 \dots n_m)^s},$$

причем при данном положительном n число систем $n_1, \dots, n_m$ с условием $n_1 \dots n_m = n$ равно $\tau_m(n)$.

13, а. При $R(s) > 1$ произведение $P = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$ абсолютно сходится. Ввиду $\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots$ при $N > 2$ имеем

$$\prod_{p \leqslant N} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{0 < n \leqslant N} \frac{1}{n^s} + \sum{}' \frac{1}{n^s},$$

где во второй сумме правой части n пробегает лишь числа, превосходящие N. В пределе при $N \to \infty$ левая часть обратится в P, первая сумма правой части — в $\zeta(s)$, вторая — в нуль.

b. Пусть $N > 2$. Допустив, что простых чисел, отличных от $p_1, \dots, p_k$, нет, находим (ср. решение вопроса а)

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-\frac{1}{p_j}} \geqslant \sum_{0 < n \leqslant N} \frac{1}{n}.$$

Это неравенство ввиду расходимости гармонического ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ при достаточно больших N невозможно.

с. Допустив, что простых чисел, отличных от $p_1, \dots, p_k$, нет, находим (вопрос а)

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-\frac{1}{p_j^2}} = \zeta(2).$$

Это равенство ввиду иррациональности $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ невозможно.

14. При $R(s) > 1$ бесконечное произведение для $\zeta(s)$ вопроса **13, а** абсолютно сходится. Поэтому

$$\ln \zeta(s) = \sum_p \left(\frac{1}{p^s} + \frac{1}{2p^{2s}} + \frac{1}{3p^{3s}} + \dots \right),$$

где p пробегает все простые числа. Дифференцируя, имеем

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_p\left(-\frac{\ln p}{p^s}-\frac{\ln p}{p^{2s}}-\frac{\ln p}{p^{3s}}-\ldots\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

15. Пусть $N>2$. Применяя теорему b, § 4, имеем

$$\prod_{p\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\sum_{0<n\leqslant N}\frac{\mu(n)}{n^s}+\sum{}'\frac{\mu(n)}{n^s},$$

где во второй сумме правой части n пробегает лишь числа, большие N. В пределе при $N\longrightarrow\infty$ мы и получим указанное тождество.

16, a. Применим c, § 4 к случаю

$$\delta=1,\ 2,\ \ldots,\ [n],\quad f=1,\ 1,\ \ldots,\ 1.$$

Тогда, очевидно, $S'=1$. Далее S_d обращается в число значений δ, кратных d, т. е. в $\left[\frac{n}{d}\right]$.

b, α) Правая часть равенства вопроса a выражает сумму значений функции $\mu(d)$, распространенную на целые точки $(d,\ u)$ области $d>0,\ 0<u\leqslant\frac{n}{d}$. Часть этой суммы, отвечающая данному u, равна $M\left(\frac{n}{u}\right)$.

β) Указанное равенство получается почленным вычитанием равенств

$$M(n)+M\left(\frac{n}{2}\right)+M\left(\frac{n}{3}\right)+M\left(\frac{n}{4}\right)+\ldots=1,$$

$$2M\left(\frac{n}{2}\right)+\qquad\qquad 2M\left(\frac{n}{4}\right)+\ldots=2.$$

c. Пусть $n_1=[n]$; $\delta_1,\ \delta_2,\ \ldots,\ \delta_{n_1}$ определяются условием: δ_s есть наибольшее целое, l-я степень которого делит s, $f_s=1$. Тогда $S'=T_{l,\,n}$, S_d равно числу чисел, не превосходящих n, кратных d^l, т. е. $S_d=\left[\frac{n}{d^l}\right]$. Отсюда получается указанное выражение для $T_{l,\,n}$. В частности, ввиду $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ для числа $T_{2,\,n}$ чисел, не превосходящих n и не делящихся на квадрат целого, превосходящего 1, имеем

$$T_{2,\,n}=\frac{6}{\pi^2}n+O(\sqrt{n}).$$

17, a. Указанное равенство получим из c, § 4, если положим

$$\delta_s=(x_s,\ a),\quad f_s=f(x_s).$$

b. Указанное равенство получим из c, § 4, если положим

$$\delta_s=\left(x_1^{(s)},\ \ldots,\ x_k^{(s)}\right),\quad f_s=f\left(x_1^{(s)},\ \ldots,\ x_k^{(s)}\right).$$

c. Применяя c, § 4 к случаю

$$\delta = \delta_1, \quad \delta_2, \ \ldots, \ \delta_\tau,$$

$$f = F\left(\frac{a}{\delta_1}\right), \quad F\left(\frac{a}{\delta_2}\right), \ \ldots, F\left(\frac{a}{\delta_\tau}\right),$$

где в первой строке выписаны все делители числа a, имеем

$$S' = F(a), \quad S_d = \sum_{D \diagdown \frac{a}{d}} F\left(\frac{a}{dD}\right) = G\left(\frac{a}{d}\right).$$

d. Указанное равенство следует из

$$\sum_{P' = f_1^{d/\delta_1}} \mu(d) \sum_{f_2^{d/\delta_2}} \mu(d) \ldots \sum_{f_n^{d/\delta_n}} \mu(d).$$

18, a. Применим теорему вопроса 17, a, заставляя x пробегать числа $1, 2, \ldots, a$ и беря $f(x) = x^m$. Тогда

$$S' = \psi_m(a), \quad S_d = d^m + 2^m d^m + \ldots + \left(\frac{a}{d}\right)^m d^m = d^m \sigma_m\left(\frac{a}{d}\right).$$

b. Имеем

$$\psi_1(a) = \sum_{d \diagdown a} \mu(d)\left(\frac{a^2}{2d} + \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2}\varphi(a).$$

Тот же результат можно получить проще. Напишем числа ряда $1, \ldots, a$, взаимно простые с a, сначала в возрастающем, затем в убывающем порядке. Сумма членов обоих рядов, равноотстоящих от начала, равна a, число членов каждого ряда равно $\varphi(a)$.

c. Имеем

$$\psi_2(a) = \sum_{d \diagdown a} \mu(d)\left(\frac{a^3}{3d} + \frac{a^2}{2} + \frac{a}{6}d\right) = \frac{a^2}{3}\varphi(a) + \frac{a}{6}(1 - p_1) \ldots (1 - p_k).$$

19, a. Применим теорему вопроса 17, a, заставляя x пробегать числа $1, 2, \ldots, [z]$ и беря $f(x) = 1$. Тогда $S' = T_z$, S_d равно числу чисел, не превосходящих z, кратных d, т. е. $S_d = \left[\frac{z}{d}\right]$.

b. Имеем

$$T_z = \sum_{d \diagdown a} \mu(d)\frac{z}{d} + O(\tau(a)) = \frac{z}{a}\varphi(a) + O(a^\varepsilon).$$

c. Следует из равенства вопроса a.

20. Применим теорему вопроса 17, a, заставляя x пробегать числа $1, 2, \ldots, N$, где $N > a$, и беря $f(x) = \frac{1}{x^s}$. Тогда найдем

$$\sum_{x \leqslant N}{}' \frac{1}{x^s} = \sum_{d \diagdown a} \mu(d) \sum_{0 < x \leqslant \frac{N}{d}} \frac{1}{d^s x^s} = \sum_{d \diagdown a} \frac{\mu(d)}{d^s} \sum_{0 < x \leqslant \frac{N}{d}} \frac{1}{x^s}.$$

В пределе при $N \longrightarrow \infty$ получим указанное тождество.

21, a. Применим теорему вопроса 17, b, рассматривая указанные в определении вероятности P_N системы значений $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и беря $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 1$. Тогда $P_N = \frac{S'}{N^k}$, $S_d = \left[\frac{N}{d}\right]^k$, и мы получим

$$P_N = \frac{\sum\limits_{d=1}^{N} \mu(d) \left[\frac{N}{d}\right]^k}{N^k} = \sum_{d=1}^{N} \frac{\mu(d)}{d^k} + O\left(\sum_{d=1}^{N} \frac{1}{Nd^{k-1}}\right).$$

Поэтому

$$P_N = (\zeta(k))^{-1} + O(\Delta); \quad \Delta = \frac{1}{N} \text{ при } k > 2, \quad \Delta = \frac{\ln N}{N} \text{ при } k = 2.$$

b. Имеем $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

22, a. Элементарные рассуждения показывают, что число целых точек (u, v) области $u^2 + v^2 \leqslant \rho^2$; $\rho > 0$, не считая точки $(0, 0)$, равно $\pi\rho^2 + O(\rho)$. Применим теорему вопроса 17, b, рассматривая координаты x, y целых точек области $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, отличных от точки $(0, 0)$, и полагая $f(x, y) = 1$. Тогда $T = S' + 1$, S_d равно числу целых точек области $u^2 + v^2 \leqslant \left(\frac{r}{d}\right)^2$, не считая точки $(0, 0)$. Поэтому

$$S_d = \pi \frac{r^2}{d^2} + O\left(\frac{r}{d}\right),$$

$$T = \sum_{d=1}^{[r]} \mu(d)\, \pi \frac{r^2}{d^2} + O\left(\sum_{d=1}^{[r]} \frac{r}{d}\right) = \frac{6}{\pi} r^2 + O(r \ln r).$$

b. Рассуждая аналогично предыдущему, получим

$$T = \sum_{d=1}^{[r]} \mu(d) \frac{4}{3} \pi \frac{r^3}{d^3} + O\left(\sum_{d=1}^{[r]} \frac{r^2}{d^2}\right) = \frac{4\pi r^3}{3\zeta(3)} + O(r^2).$$

23, a. Число делителей d числа $a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, не делящихся на квадрат целого, превосходящего 1, и имеющих $\varkappa$ простых делителей, равно $\binom{k}{\varkappa}$; при этом $\mu(d) = (-1)^\varkappa$. Поэтому

$$\sum_{d \backslash a} \mu(d) = \sum_{\varkappa=0}^{k} \binom{k}{\varkappa} (-1)^\varkappa = (1-1)^\varkappa = 0.$$

b. Пусть a имеет тот же вид, что и в вопросе a. Достаточно рассматривать случай $m < k$. Для указанной суммы имеем два выражения

$$\sum \mu(d) = \binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \ldots + (-1)^m \binom{k}{m} =$$
$$= (-1)^m \left(\binom{k}{m+1} - \binom{k}{m+2} + \ldots\right).$$

Если m четное, то при $m \leqslant \frac{k}{2}$ первое выражение > 0, а при $m > \frac{k}{2}$ второе выражение $\geqslant 0$. Если m нечетное, то при $m \leqslant \frac{k}{2}$ первое выражение < 0, а при $m > \frac{k}{2}$ второе выражение $\leqslant 0$.

c. Доказательство почти такое же, как в c, § 4, но с учетом результата вопроса **b**.

d. Доказательство почти такое же, как в вопросах **17,a** и **b**.

24. Пусть d пробегает делители числа a, $\Omega(d)$ — число простых делителей числа d, $\Omega(a) = s$. Согласно сделанному в вопросе указанию, имеем (считаем N достаточно большим)

$$\pi(N, q, l) \leqslant \sum_{\Omega(d) \leqslant m} \mu(d)\left(\frac{N}{qd} + \theta_d\right) = T + T_0 - T_1; \quad |\theta_d| \leqslant 1,$$

$$|T| \leqslant \sum_{\Omega(d) \leqslant m} 1, \quad T_0 = \frac{N}{q} \sum_{d} \frac{\mu(d)}{d}, \quad |T_1| = \sum_{\Omega(d) > m} \frac{N}{qd}.$$

Далее находим

$$|T| \leqslant \sum_{n=0}^{m} \binom{s}{n} \leqslant s^m \leqslant e^{hm} < e^{5r^{1-\varepsilon}} \frac{qr}{N} \frac{N}{qr} = O(\Delta),$$

$$T_0 = \frac{N}{q} \frac{\prod\limits_{p \leqslant e^h} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\prod\limits_{p \setminus q} \left(1 - \frac{1}{q}\right)} = O(\Delta)$$

Наконец, обозначая буквами C_1 и C_2 некоторые постоянные, имеем

$$|T_1| \leqslant \frac{N}{q} \sum_{n=m+1}^{s} \sum_{\Omega(d)=n} \frac{1}{d} \leqslant \frac{N}{q} \sum_{n=m+1}^{s} \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p_s}\right)^n}{n!} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N}{q} \sum_{n=m+1}^{s} \left(\frac{C_1 + \ln r}{4 \ln r} e\right)^n \leqslant \frac{N}{q} \sum_{n=m+1}^{s} \left(\frac{3}{4}\right)^n <$$

$$< C_2 \frac{N}{q} r^{-4 \ln \frac{4}{3}} = O(\Delta).$$

25. Всякому делителю d_1 числа a с условием $d_1 < \sqrt{a}$ отвечает делитель d_2 с условиями $d_2 > \sqrt{a}$, $d_1 d_2 = a$. При этом $\mu(d_1) = \mu(d_2)$. Поэтому

$$2 \sum_{d_1} \mu(d_1) = \sum_{d_1} \mu(d_1) + \sum_{d_2} \mu(d_2) = \sum_{d \setminus a} \mu(d) = 0.$$

26. Числа d, не делящиеся на квадрат целого, превосходящего 1, и удовлетворяющие условию $\varphi(d)=k$, рассмотрим попарно так, чтобы в каждую пару входило некоторое нечетное d_1 и четное $2d_1$. Будем иметь $\mu(d_1)+\mu(2d_1)=0$.

27. Пусть $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа. Полагая $a=p_1 \ldots p_k$, имеем

$$\varphi(a)=(p_1-1)\ldots(p_k-1).$$

Между тем, при отсутствии простых чисел, отличных от $p_1, \ldots, p_k$, мы имели бы $\varphi(a)=1$.

28, a. Указанные числа найдутся среди чисел $s\delta$; $s=1, 2, \ldots, \frac{a}{\delta}$. Но $(s\delta, a)=\delta$ тогда и только тогда, когда $\left(s, \frac{a}{\delta}\right)=1$ (е, § 2, гл. I). Поэтому верно утверждение, отмеченное в вопросе, и мы имеем

$$a=\sum_{\delta\diagdown a}\varphi\left(\frac{a}{\delta}\right)=\sum_{d\diagdown a}\varphi(d).$$

b, α) Пусть $a=p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа a. Ввиду a функция $\varphi(a)$ мультипликативная, причем

$$p_s^{\alpha_s}=\sum_{d\diagdown p_s^{\alpha_s}}\varphi(d), \qquad p_s^{\alpha_s-1}=\sum_{d\diagdown p_s^{\alpha_s-1}}\varphi(d),$$

$$p_s^{\alpha_s}-p_s^{\alpha_s-1}=\varphi\left(p_s^{\alpha_s}\right).$$

β) Для целого $m>0$ имеем

$$m=\sum_{d\diagdown m}\varphi(d).$$

Поэтому

$$\varphi(a)=\sum_{d\diagdown a}\mu(d)\frac{a}{d}.$$

29. Имеем (p пробегает все простые числа)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s}=\prod_p\left(1+\frac{\varphi(p)}{p^s}+\frac{\varphi(p^2)}{p^{2s}}+\ldots\right)=\prod_p\frac{1-\frac{1}{p^s}}{1-\frac{1}{p^{s-1}}}=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

30. Имеем

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)=$$

$$=\sum_{d\diagdown 1}\frac{\mu(d)}{d}+2\sum_{d\diagdown 2}\frac{\mu(d)}{d}+\ldots+n\sum_{d\diagdown n}\frac{\mu(d)}{d}=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left(1+2+\ldots+\left[\frac{n}{d}\right]\right)=$$

$$=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\frac{n^2}{2d^2}+O(n\ln n)=\frac{n^2}{2}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}+O(n\ln n)=\frac{3}{\pi^2}n^2+O(n\ln n).$$

Решения к главе 3

1, a. Из

$$P=a_n10^{n-1}+a_{n-1}10^{n-2}+\ldots+a_1,$$

замечая, что $10\equiv 1 \pmod 9$, имеем

$$P\equiv a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1 \pmod 9.$$

Следовательно, P кратно 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр, его изображающих, кратна 3; оно кратно 9 тогда и только тогда, когда указанная сумма кратна 9.

Замечая, что $10\equiv -1 \pmod{11}$, имеем

$$P\equiv(a_1+a_3+\ldots)-(a_2+a_4+\ldots) \pmod{11}.$$

Следовательно, P кратно 11 тогда и только тогда, когда разность между суммою цифр, стоящих на нечетных (считая справа) местах, и суммою цифр, стоящих на четных местах, кратна 11.

b. Из

$$P=b_n100^{n-1}+b_{n-1}100^{n-2}+\ldots+b_1$$

ввиду $100\equiv -1 \pmod{101}$ имеем

$$P\equiv(b_1+b_3+\ldots)-(b_2+b_4+\ldots) \pmod{101}.$$

Поэтому P кратно 101 тогда и только тогда, когда $(b_1+b_3+\ldots)-$ $-(b_2+b_4+\ldots)$ кратно 101.

c. Из

$$P=c_n\,1000^{n-1}+c_{n-1}\,1000^{n-2}+\ldots+c_1$$

ввиду $1000\equiv 1 \pmod{37}$ имеем

$$P\equiv c_n+c_{n-1}+\ldots+c_1 \pmod{37}.$$

Поэтому P кратно 37 тогда и только тогда, когда $c_n+c_{n-1}+\ldots+c_1$ кратно 37.

Ввиду $1000\equiv -1 \pmod{7\cdot 11\cdot 13}$ имеем

$$P\equiv(c_1+c_3+\ldots)-(c_2+c_4+\ldots) \pmod{7\cdot 11\cdot 13}.$$

Поэтому P кратно одному из чисел 7, 11, 13 тогда и только тогда, когда $(c_1+c_3+\ldots)-(c_2+c_4+\ldots)$ кратно этому же числу.

2, α) Когда x пробегает полную систему вычетов по модулю m, то $ax+b$ также пробегает полную систему; наименьший неотрицательный вычет r числа $ax+b$ пробегает значения $0, 1, \ldots, m-1$. Поэтому

$$\sum_x\left\{\frac{ax+b}{m}\right\}=\sum_{r=0}^{m-1}\frac{r}{m}=\frac{1}{2}(m-1).$$

β) Применяя результат вопроса 18, b, гл. II, находим

$$\sum_\xi\left\{\frac{a\xi}{m}\right\}=\frac{\psi_1(m)}{m}=\frac{1}{2}\varphi(m).$$

3, a. Пусть r — наименьший неотрицательный вычет числа $ax+[c]$ по модулю m. Имеем

$$S=\sum_{r=0}^{m-1}\left\{\frac{r+\Phi(r)}{m}\right\},$$

где $\varepsilon\leqslant\Phi(r)\leqslant\varepsilon+h$; $\varepsilon=\{c\}$. При $m\leqslant 2h+1$ теорема очевидна. Поэтому рассмотрим лишь случай $m>2h+1$. Полагая

$$\left\{\frac{r+\Phi(r)}{m}\right\}-\frac{r}{m}=\delta(r),$$

имеем $-1+\frac{\varepsilon}{m}\leqslant\delta(r)\leqslant\frac{h+\varepsilon}{m}$ при $r=m-[h+\varepsilon], \ldots, m-1$; $\frac{\varepsilon}{m}\leqslant$ $\leqslant\delta(r)\leqslant\frac{h+\varepsilon}{m}$ в остальных случаях. Поэтому

$$-[h+\varepsilon]+\varepsilon\leqslant S-\frac{m-1}{2}\leqslant h+\varepsilon, \quad \left|S-\frac{1}{2}m\right|\leqslant h+\frac{1}{2}.$$

b. Имеем

$$S=\sum_{z=0}^{m-1}\left\{\frac{az+\psi(z)}{m}\right\}; \quad \psi(z)=m(AM+B)+\frac{\lambda}{m}z.$$

Применим теорему вопроса a, полагая $h=|\lambda|$. Тогда и получим указанный результат.

c. Находим

$$\sum_{z=0}^{m-1}\left\{f(M)+\frac{az}{m}+\frac{\theta z}{m^2}+\frac{f''(M+z_0)}{2}z^2\right\}; \quad 0<z_0<m-1.$$

Применим теорему вопроса a, полагая $h=1+\frac{k}{2}$. Тогда получим указанный результат.

4. Разложим A в непрерывную дробь. Пусть $Q_n=Q'$ — наибольший из знаменателей подходящих дробей, не превосходящий m, имеем (вопрос 4, b, гл. I)

$$A=\frac{P'}{Q'}+\frac{\theta'}{Q'm}, \quad (P', Q')=1, \quad |\theta'|<1.$$

При этом из $m<Q_{n+1}\leqslant(q_{n+1}+1)Q_n\leqslant CQ_n$, где C — постоянное, которого не превосходят все q_s+1, для наибольшего целого H' с условием $H'Q'\leqslant m$ следует $H'<C$. Применяя теорему вопроса 3, b, находим

$$\left|\sum_{x=M}^{M+H'Q'-1}\{Ax+B\}-\frac{1}{2}H'Q'\right|\leqslant\frac{3}{2}C.$$

Пусть $m_1 = m - H'Q'$. Если $m_1 > 0$, то выбирая в зависимости от m_1 числа Q'' и H'' таким же способом, как раньше в зависимости от m были выбраны числа Q' и H', найдем

$$\left| \sum_{x=M_1}^{M_1+H''Q''-1} \{Ax+B\} - \frac{1}{2} H''Q'' \right| \leqslant \frac{3}{2} C,$$

где применяем обозначение $M_s = M_{s-1} + H^{(s)}Q^{(s)}$. Пусть $m_2 = m_1 - H''Q''$ Если $m_2 > 0$, то подобно предыдущему найдем

$$\left| \sum_{x=M_2}^{M_2+H'''Q'''-1} \{Ax+B\} - \frac{1}{2} H'''Q''' \right| < \frac{3}{2} C$$

и т. д., пока не придем к некоторому $m_k = 0$. Тогда получим $(H'Q' + H''Q'' + \ldots + H^{(k)}Q^{(k)} = m)$

$$\left| \sum_{x=M}^{M+m-1} \{Ax+B\} - \frac{1}{2} m \right| < \frac{3}{2} Ck.$$

Числа Q', Q'', ..., $Q^{(k)}$ удовлетворяют условиям

$$m \geqslant Q' > m_1 \geqslant Q'' > m_2 \geqslant \ldots > m_{k-1} \geqslant Q^{(k)} \geqslant 1.$$

Поэтому (вопрос 3, b гл. I) $k = O(\ln m)$ и, следовательно, формула, указанная в вопросе, верна.

5, a. Сумму, стоящую слева, обозначим буквою S. Пусть $\tau = A^{\frac{1}{3}}$. При $\tau \leqslant 40$ теорема очевидна. Поэтому предполагаем $\tau > 40$. Взяв $M_1 = [Q+1]$, найдем числа a_1, m_1, θ_1 с условиями

$$f'(M_1) = \frac{a_1}{m_1} + \frac{\theta_1}{m_1\tau}; \quad 0 < m_1 \leqslant \tau; \quad (a_1, m_1) = 1, \quad |\theta_1| < 1.$$

Взяв $M_2 = M_1 + m_1$, аналогичным путем найдем числа a_2, m_2, θ_2; взяв $M_3 = M_2 + m_2$, найдем числа a_3, m_3, θ_3, и т. д., пока не придем к $M_{s+1} = M_s + m_s$ с условием $0 \leqslant [R] - M_{s+1} < [\tau]$. Применяя теорему вопроса 3, c, найдем

$$\left| S - \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \ldots + m_s + [R] + 1 - M_{s+1}\right) \right| <$$
$$< s\,\frac{k+3}{2} + \frac{1}{2}\left([R] + 1 - M_{s+1}\right),$$

$$\left| S - \frac{1}{2}(R-Q) \right| < s\,\frac{k+3}{2} + \frac{\tau+1}{2}.$$

Длина интервала, для которого $\frac{a}{m} - \frac{1}{m\tau} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{a}{m} + \frac{1}{m\tau}$, не превосходит $\frac{2A}{m\tau}$. Следовательно, с одной и той же дробью $\frac{a}{m}$ связано $\leqslant \frac{2A}{m^2\tau} + 1$ чисел m_1, m_2, ..., m_s. Пусть a_1 и a_2 — наименьшее и наибольшее значения a, отвечающие данному m.

Имеем

$$\frac{a_2-a_1}{m}-\frac{2}{m\tau}\leqslant\frac{k(R-Q)}{A};\quad a_2-a_1+1\leqslant\frac{k(R-Q)m}{A}+1{,}05.$$

Следовательно, с данным m связано

$$<\left(\frac{2A}{m^2\tau}+1\right)\left(\frac{k(R-Q)m}{A}+1{,}05\right)=$$

$$=\frac{k(R-Q)}{\tau}\left(\frac{2}{m}+\frac{m}{\tau^2}\right)+\left(\frac{2A}{m^2\tau}+1\right)1{,}05$$

чисел $m_1, m_2, \ldots, m_s$. Суммируя последнее выражение по всем $m=1, 2, \ldots, [\tau]$, получим

$$s<\frac{k(R-Q)}{\tau}\left(2\ln\tau+2+\frac{\tau^2+\tau}{2\tau^2}\right)+\frac{10A}{3\tau}1{,}05<\frac{k(R-Q)}{\tau}\ln A+\frac{7}{2}\frac{A}{\tau},$$

$$\left|S-\frac{1}{2}(R-Q)\right|<2\frac{k^2(R-Q)}{\tau}\ln A+8k\frac{A}{\tau}.$$

b. Имеем

$$\left|\sum_{Q<x\leqslant R}\{f(x)+1-\sigma\}-\frac{1}{2}(R-Q)\right|<\Delta,$$

$$\left|\sum_{Q<x\leqslant R}\{f(x)\}-\frac{1}{2}(R-Q)\right|<\Delta,$$

откуда, полагая $\delta(x)=\{f(x)+1-\sigma\}-\{f(x)\}$, находим

$$\left|\sum_{Q<x\leqslant R}\delta(x)\right|<2\Delta.$$

Но при $\{f(x)\}<\sigma$ имеем $\delta(x)=1-\sigma$, а при $\{f(x)\}\geqslant\sigma$ имеем $\delta(x)=-\sigma$. Поэтому $|(1-\sigma)\psi(\sigma)-\sigma(R-Q-\psi(\sigma))|<2\Delta$, откуда и получим указанную формулу.

6, a. Применим формулу вопроса 1, c, гл. II. Полагая $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, в интервале $0\leqslant x\leqslant\frac{r}{\sqrt{2}}$ имеем

$$f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}},\quad f''(x)=\frac{-r^2}{(r^2-x^2)^{3/2}},\quad \frac{1}{r}\leqslant|f''(x)|\leqslant\frac{\sqrt{8}}{r}.$$

Поэтому (вопрос 8, a, гл. II, вопрос 5, a)

$$T=4r+8\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}\sqrt{r^2-x^2}\,dx+8\rho\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\frac{r}{\sqrt{2}}-8\rho(0)\cdot r-4\frac{r}{\sqrt{2}}-4\frac{r^2}{2}+$$

$$+8\frac{r}{\sqrt{2}}\left\{\frac{r}{\sqrt{2}}\right\}+O\left(r^{\frac{2}{3}}\ln r\right)=\pi r^2+O\left(r^{\frac{2}{3}}\ln r\right).$$

b. Имеем (вопросы 11, d и 1, d, гл. II)

$$\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(n)=2\sum_{0<x\leqslant\sqrt{n}}\left[\frac{n}{x}\right]-\left[\sqrt{n}\right]^2.$$

Достаточно рассмотреть лишь случай $n>64$. Интервал $X<x\leqslant\sqrt{n}$, где $X=2n^{\frac{1}{3}}$, разобьем на $O(\ln n)$ интервалов вида $M<x\leqslant M'$, где $M'\leqslant 2M$. Полагая $f(x)=\frac{n}{x}$, в интервале $M<x\leqslant M'$ имеем

$$f'(x)=-\frac{n}{x^2},\quad f''(x)=\frac{2n}{x^3};\quad \frac{n}{4M^3}\leqslant f''(x)\leqslant\frac{8n}{4M^3}.$$

Поэтому (вопрос 5, a)

$$\sum_{M<x\leqslant M'}\left\{\frac{n}{x}\right\}=\frac{1}{2}(M'-M)+O\left(n^{\frac{1}{3}}\ln n\right),$$

$$\sum_{0<x\leqslant\sqrt{n}}\left\{\frac{n}{x}\right\}=\frac{1}{2}\sqrt{n}+O\left(n^{\frac{1}{3}}(\ln n)^2\right).$$

Далее (вопрос 8, b, гл. II)

$$\sum_{0<x\leqslant\sqrt{n}}\frac{n}{x}=En+\frac{1}{2}n\ln n+\rho\left(\sqrt{n}\right)\sqrt{n}+O(1).$$

Поэтому

$$\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(n)=2En+n\ln n+2\rho\left(\sqrt{n}\right)\sqrt{n}-\sqrt{n}-n+$$
$$+2\sqrt{n}\left\{\sqrt{n}\right\}+O\left(n^{\frac{1}{3}}(\ln n)^2\right)=n(\ln n+2E-1)+O\left(n^{\frac{1}{3}}(\ln n)^2\right).$$

c. Напишем ряды дробей

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \ldots,$$
$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{4}\quad \frac{1}{6},\ \ldots,$$
$$\frac{1}{3},\quad \frac{1}{6},\ \ldots$$

с знаменателями, не превосходящими N. Дробь $\frac{1}{a}$ с условием $0<a\leqslant N$ встретится в $\tau(a)$ рядах. Поэтому сумма всех членов, содержащихся во всех рядах, равна

$$\sum_{0<a\leqslant N}\frac{\tau(a)}{a}.$$

С другой стороны, сумма членов s-го ряда $\leqslant\frac{1}{s}\ln N$. Поэтому та же сумма всех членов, содержащихся во всех рядах, будет

$$\leqslant \ln N \sum_{0<s\leqslant N} \frac{1}{s} \ln N \leqslant (\ln N)^2.$$

Следовательно, неравенство (1) верно при $l=1$.

Далее, допустив справедливость неравенства (1) при каком-либо l, докажем, что оно останется верным и после замены l на $l+1$. Напишем новые ряды дробей

$$\frac{(\tau(1))^l}{1}, \frac{(\tau(2))^l}{2}, \frac{(\tau(3))^l}{3}, \frac{(\tau(4))^l}{4}, \frac{(\tau(5))^l}{5}, \frac{(\tau(6))^l}{6}, \ldots,$$
$$\frac{(\tau(2))^l}{2}, \qquad \frac{(\tau(4))^l}{4}, \qquad \frac{(\tau(6))^l}{6}, \ldots$$
$$\frac{(\tau(3))^l}{3}, \qquad \frac{(\tau(6))^l}{6}, \ldots$$

со знаменателями, не превосходящими N. Здесь сумма всех членов, содержащихся во всех рядах, равна

$$\sum_{0<a\leqslant N} \frac{(\tau(a))^{l+1}}{a}.$$

С другой стороны, сумма членов s-го ряда

$$\leqslant \frac{(\tau(s))^l}{s}\left(\frac{(\tau(1))^l}{1}+\ldots+\frac{(\tau[Ns^{-1}])^l}{[Ns^{-1}]}\right) \leqslant \frac{(\tau(s))^l}{s}(\ln N)^{2^l}.$$

Поэтому та же самая сумма, содержащаяся во всех рядах, будет

$$\leqslant (\ln N)^{2^l} \sum_{0<s\leqslant N} \frac{(\tau(s))^l}{s} \leqslant (\ln N)^{2^{l+1}}.$$

И мы убедимся, что неравенство (1) останется верным и после замены l на $l+1$.

d. В случае $l=1$ неравенство (2) является следствием неравенства вопроса b. Далее, допустив справедливость неравенства (2) для какого-либо l, докажем, что оно останется верным и после замены l на $l+1$. Напишем ряды

$$(\tau(1))^l, (\tau(2))^l, (\tau(3))^l, (\tau(4))^l, (\tau(5))^l, (\tau(6))^l, \ldots$$
$$(\tau(2))^l, \qquad (\tau(4))^l, \qquad (\tau(6))^l, \ldots$$
$$(\tau(3))^l, \qquad (\tau(6))^l, \ldots$$

включающие только значения $\tau(a)$ с условием $a \leqslant N$. Здесь сумма всех членов, содержащихся во всех рядах, равна

$$\sum_{0<a\leqslant N} (\tau(a))^{l+1}.$$

С другой стороны, сумма членов s-го ряда будет

$$\leqslant (\tau(s))^l ((\tau(1))^l+\ldots+(\tau([Ns^{-1}]))^l) \leqslant (\tau(s))^l \frac{N}{s} (\ln N)^{2^l-1}.$$

Поэтому (теорема вопроса с) сумма всех членов, содержащихся во всех рядах, будет

$$\ll N(\ln N)^{2^l-1}\sum_{0<s<N}\frac{(\tau(s))^l}{s}\ll N(\ln N)^{2^{l+1}-1}.$$

И мы убедимся, что неравенство (2) останется верным и после замены l на $l+1$.

7. Пусть система неправильная и s — наибольшее число с условием, что 2^s входит в нечетное число чисел системы. Одно из последних чисел мы заменим меньшим, содержащим лишь степени 2^s, входящие в нечетное число чисел оставшейся системы.

Пусть система — правильная. Число, меньшее одного из чисел T этой системы, отличается от T, по крайней мере, одним знаком в системе исчисления с основанием 2.

8, a. Добавив к каждому из чисел, представляемых указанным способом, число $H=3^n+3^{n-1}+\ldots+3+1$, получим числа, которые можно получить, заставляя в той же сумме $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0$ пробегать значения 0, 1, 2, т. е. получим все числа $0, 1, \ldots, 2H$.

b. Указанным способом получим $m_1m_2\ldots m_k$ чисел, не сравнимых между собою по модулю $m_1m_2\ldots m_k$, так как из

$$x_1+m_1x_2+m_1m_2x_3+\ldots+m_1m_2\ldots m_{k-1}x_k\equiv$$
$$\equiv x_1'+m_1x_2'+m_1m_2x_3'+\ldots+m_1m_2\ldots m_{k-1}x_k' \pmod{m_1m_2\ldots m_k}$$

последовательно находим

$$x_1\equiv x_1' \pmod{m_1},\quad x_1=x_1';\quad m_1x_2\equiv m_1x_2' \pmod{m_1m_2},\quad x_2=x_2';$$

$$m_1m_2x_3\equiv m_1m_2x_3' \pmod{m_1m_2m_3},\quad x_3=x_3';$$

и т. д.

9, a. Указанным способом получим $m_1m_2\ldots m_k$ чисел, не сравнимых по модулю $m_1m_2\ldots m_k$, так как из

$$M_1x_1+M_2x_2+\ldots+M_kx_k\equiv$$
$$\equiv M_1x_1'+M_2x_2'+\ldots+M_kx_k' \pmod{m_1m_2\ldots m_k}$$

следовало бы (всякое M_j, отличное от M_s, кратно m_s)

$$M_sx_s\equiv M_sx_s' \pmod{m_s},\quad x_s\equiv x_s' \pmod{m_s},\quad x_s=x_s'.$$

b. Указанным способом получим $\varphi(m_1)\,\varphi(m_2)\ldots\varphi(m_k)=$
$=\varphi(m_1m_2\ldots m_k)$

чисел ввиду теоремы вопроса a, не сравнимых по модулю $m_1m_2\ldots m_k$, и ввиду $(M_1x_1+M_2x_2+\ldots+M_kx_k,\ m_s)=(M_sx_s,\ m_s)=1$, взаимно простых с $m_1m_2\ldots m_k$.

c. Согласно теореме вопроса a число $M_1x_1+M_2x_2+\ldots+M_kx_k$, где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ пробегают полные системы вычетов по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_k$, пробегает полную систему вычетов по модулю $m_1m_2\ldots m_k$. Это число взаимно просто с $m_1m_2\ldots m_k$ тогда и только тогда, когда $(x_1,\ m_1)=(x_2,\ m_2)=\ldots=(x_k,\ m_k)=1$. Поэтому $\varphi(m_1m_2\ldots m_k)=$ $=\varphi(m_1)\,\varphi(m_2)\ldots\varphi(m_k)$.

d. Чтобы получить все числа ряда $1, 2, \ldots, p^\alpha$, взаимно простые с p^α, следует вычеркнуть числа этого ряда, кратные p, т. е. числа

$p, 2p, \ldots, p^{\alpha-1}p$. Поэтому $\varphi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1}$. Отсюда и из мультипликативности $\varphi(a)$ известное выражение для $\varphi(a)$ следует непосредственно.

10, a. Первое утверждение следует из

$$\left\{\frac{x_1}{m_1}+\ldots+\frac{x_k}{m_k}\right\}=\left\{\frac{M_1x_1+\ldots+M_kx_k}{m}\right\};$$

второе утверждение следует из

$$\left\{\frac{\xi_1}{m_1}+\ldots+\frac{\xi_k}{m_k}\right\}=\left\{\frac{M_1\xi_1+\ldots+M_k\xi_k}{m}\right\}.$$

b. Дроби $\left\{\frac{a_1f(x_1,\ldots,w_1)}{m_1}+\ldots+\frac{a_kf(x_k,\ldots,w_k)}{m_k}\right\}$ совпадают с дробями

$$\left\{\frac{a_1\ (M_1x_1+\ldots+M_kx_k,\ldots,\ M_1w_1+\ldots+M_kw_k)}{m_1}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{a_kf(M_1x_1+\ldots+M_kx_k,\ldots,\ M_1w_1+\ldots+M_kw_k)}{m_k}\right\},$$

т. е. с дробями $\left\{\frac{af(x,\ldots,w)}{m}\right\}$. Второе утверждение доказывается аналогичным способом.

11, a. При a, кратном m, имеем

$$\sum_x e^{2\pi i\frac{ax}{m}}=\sum_x 1=m.$$

При a, не делящемся на m, имеем

$$\sum_x e^{2\pi i\frac{ax}{m}}=\frac{e^{2\pi i\frac{ax}{m}}-1}{e^{2\pi i\frac{ax}{m}}-1}=0.$$

b. При нецелом α левая часть равна

$$\left|\frac{e^{2\pi i\alpha(M+P)}-e^{2\pi i\alpha M}}{e^{2\pi i\alpha}-1}\right|<\frac{1}{\sin\pi(\alpha)}<\frac{1}{(\alpha)h}.$$

c. Согласно теореме вопроса b левая часть не превосходит T_m, где

$$T_m=\sum_{a=1}^{m-1}\frac{1}{h\left(\frac{a}{m}\right)}.$$

Но при нечетном m

$$T_m<m\sum_{0<a<\frac{m}{2}}\ln\frac{2a+1}{2a-1}=m\ln m,$$

а при четном m

$$T_m < \frac{m}{2} \sum_{0<a<\frac{m}{2}} \ln\frac{2a+1}{2a-1} + \frac{m}{2} \sum_{0<a<\frac{m}{2}} \ln\frac{2a+1}{2a-1} < m\ln m.$$

При $m \geqslant 6$ ввиду $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ границу $m\ln m$ можно уменьшить на

$$2\frac{m}{6} \sum_{0<a<\frac{m}{6}} \ln\frac{2a+1}{2a-1} = \frac{m}{3}\ln\left(2\left[\frac{m}{6}\right]+1\right).$$

Последнее выражение $>\frac{m}{2}$ при $m \geqslant 12$ и $>m$ при $m \geqslant 60$.

12, a. Пусть $m=p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа m. Полагая $p_1^{\alpha_1}=m_1, \ldots, p_k^{\alpha_k}=m_k$, при обозначениях вопроса **10, a** имеем

$$\sum_{\xi_1} e^{2\pi i\frac{\xi_1}{m_1}} \ldots \sum_{\xi_k} e^{2\pi i\frac{\xi_k}{m_k}} = \sum_{\xi} e^{2\pi i\frac{\xi}{m}}.$$

Но при $\alpha_s=1$ находим

$$\sum_{\xi_s} e^{2\pi i\frac{\xi_s}{m_s}} = \sum_{x_s} e^{2\pi i\frac{x_s}{m_s}} - 1 = -1.$$

При $\alpha_s>1$, полагая $m_s=p_s m_s'$, находим

$$\sum_{\xi_s} e^{2\pi i\frac{\xi_s}{m_s}} = \sum_{x_s} e^{2\pi i\frac{x_s}{m_s}} - \sum_{u=0}^{m_s'-1} e^{2\pi i\frac{u}{m_s'}} = 0.$$

b. Пусть m — целое, $m>1$. Имеем $\sum_{x=0}^{m-1} e^{2\pi i\frac{x}{m}}=0$. Сумма слагаемых левой части этого равенства с условием $(x, m)=d$ согласно теореме вопроса a равна $\mu\left(\frac{m}{d}\right)$.

c. Находим

$$\sum_{\xi} e^{2\pi i\frac{\xi}{m}} = \sum_{d\backslash m} \mu(d) S_d,$$

где, полагая $m=m_0 d$, имеем

$$S_d = \sum_{u=0}^{m_0-1} e^{2\pi i\frac{u}{m_0}}.$$

Последнее равно 0 при $d < m$ и равно 1 при $d=m$. Отсюда и получаем теорему вопроса а.

d. Равенства следуют из вопроса **10**, **b**.

e. Имеем

$$A(m_1)\ldots A(m_k)=m^{-r}\sum_{a_1}\ldots\sum_{a_k} S_{a_1, m_1}\ldots S_{a_k, m_k},$$

где $a_1, \ldots, a_k$ пробегают приведенные системы вычетов по модулям $m_1, \ldots, m_k$. Отсюда (вопрос **d**) первое равенство вопроса следует непосредственно.

Аналогичным путем докажем и второе равенство.

13, **a**. Имеем

$$\sum_{x=0}^{p-1} e^{2\pi i\frac{nx}{p}}=\begin{cases} p, & \text{если } n \text{ кратно } p,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

b. Раскрывая произведение, отвечающее данному n, имеем

$$\sum_{d \backslash a}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{x=0}^{d-1} e^{2\pi i\frac{nx}{d}}.$$

Отсюда, суммируя по всем $n=0, 1, \ldots, a-1$, и получим известное выражение для $\varphi(a)$.

14. Часть выражения, стоящего справа, отвечающая x, делящему a, равна 1, часть, отвечающая x, не делящему a, равна 0. Поэтому указанное выражение равно удвоенному числу делителей числа a, меньших $\sqrt{a}$, сложенному с δ, т. е. равно $\tau(a)$.

15, **a**. Имеем

$$(h_1+h_2)^p=$$
$$=h_1^p+\binom{p}{1}h_1^{p-1}h_2+\ldots+\binom{p}{p-1}h_1h_2^{p-1}+h_2^p\equiv h_1^p+h_2^p \pmod p;$$
$$(h_1+h_2+h_3)^p\equiv(h_1+h_2)^p+h_3^p\equiv h_1^p+h_2^p+h_3^p \pmod p,$$

и т. д.

b. Полагая $h_1=h_2=\ldots=h_a=1$, из теоремы вопроса а получим теорему Ферма.

c. Пусть $(a, p)=1$. При некоторых целых $N_1, N_2, \ldots, N_\alpha$ имеем

$$a^{(p-1)}=1+N_1p, \quad a^{p(p-1)}=(1+N_1p)^p=1+N_2p^2,$$
$$a^{p^2(p-1)}=1+N_3p^3, \;\ldots,\; a^{p^{\alpha-1}(p-1)}=1+N_\alpha p^\alpha,$$
$$a^{\varphi(p^\alpha)}\equiv 1 \pmod{p^\alpha}.$$

Пусть $m=p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа m. Имеем

$$a^{\varphi(p^\alpha)}\equiv 1\left(\operatorname{mod} p_1^{\alpha_1}\right), \;\ldots,\; a^{\varphi(p^\alpha)}\equiv 1\left(\operatorname{mod} p_k^{\alpha_k}\right),$$
$$a^{\varphi(m)}\equiv 1\left(\operatorname{mod} p_1^{\alpha_1}\right), \;\ldots,\; a^{\varphi(m)}\equiv 1\left(\operatorname{mod} p_k^{\alpha_k}\right),$$
$$a^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod m.$$

Решения к главе 4

1, а. Теорема непосредственно следует из теоремы вопроса 11, а, гл. III.

b. Пусть d — делитель числа m, $m=m_0d$, H_d обозначает сумму слагаемых с условием $(a, m)=d$ в выражении для Tm вопроса а. Находим

$$H_d=\sum_{a_0}\sum_{x=0}^{m-1}\ldots\sum_{w=0}^{m-1}e^{2\pi i\frac{a_0f(x,\ \ldots,\ w)}{m_0}},$$

где a_0 пробегает приведенную систему вычетов по модулю m_0. Отсюда выводим

$$H_d=d^r\sum_{a_0}\sum_{x_0=0}^{m_0-1}\ldots\sum_{w_0=0}^{m_0-1}e^{2\pi i\frac{a_0f(x_0,\ \ldots,\ w_0)}{m_0}}=m^rA(m_0).$$

c. Пусть $m>0$, $(a, m)=d$, $a=a_0d$, $m=m_0d$, T — число решений сравнения $ax\equiv b\pmod m$. Имеем

$$T_m=\sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{x=0}^{m-1}e^{2\pi i\frac{\alpha(ax-b)}{m}}=\sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{x=0}^{m-1}e^{2\pi i\frac{\alpha a_0}{m_0}x-2\pi i\frac{b\alpha}{m}}=$$

$$=m\sum_{\alpha_1=0}^{d-1}e^{-2\pi i\frac{b\alpha_1}{d}}=\begin{cases}md, & \text{если } b \text{ кратно } d,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

d. Полагая $(a, m)=d_1$, $(b, d_1)=d_2$, $\ldots$, $(f, d_{r-1})=d_r$, $m=d_1m_1$, $d_1=d_2m_2$, $\ldots$, $d_{r-1}=d_rm_r$, находим $d=d_r$,

$$T_m=\sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{x=0}^{m-1}\sum_{y=0}^{m-1}\ldots\sum_{w=0}^{m-1}e^{2\pi i\frac{\alpha(ax+by+\ldots+fw+g)}{m}}=$$

$$=m\sum_{\alpha_1=0}^{d_1-1}\sum_{y=0}^{m-1}\ldots\sum_{w=0}^{m-1}e^{2\pi i\frac{\alpha_1(by+\ldots+fw+g)}{d_1}}=$$

. . . .

$$=m^{r-1}\sum_{\alpha_{r-1}=0}^{d_{r-1}-1}\sum_{w=0}^{m-1}e^{2\pi i\frac{\alpha_{r-1}(fw+g)}{d_{r-1}}}=m^r\sum_{\alpha_r=0}^{d_r-1}e^{2\pi i\frac{\alpha_rg}{d_r}}.$$

e. Применим метод индукции. Пусть при обозначениях вопроса d теорема верна для r переменных. Рассмотрим сравнение

$$lv+ax+\ldots+fw+g\equiv 0\pmod m. \tag{2}$$

Пусть $(l, m)=d_0$. Условием возможности сравнения (2) будет $ax+\ldots+fw+g\equiv 0\pmod{d_0}$. Последнее сравнение возможно лишь в случае, когда g кратно d', где $d'=(a, \ldots, f, d_0)=(l, a, \ldots, f, m)$, причем тогда оно имеет $d_0^{r-1}d'$ решений. Следовательно, сравнение (2) возможно лишь в случае, когда g кратно d', и тогда оно имеет $d_0^{r-1}d'\left(\frac{m}{d_0}\right)^r d_0=m^r d'$ решений. Таким образом, теорема верна и для $r+1$ переменных. Но теорема верна для одного переменного. Значит, она верна всегда.

2, a. Имеем $a^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod m$, $a\cdot ba^{\varphi(m)-1}\equiv b \pmod m$.

b. Имеем

$$1\cdot 2\ldots(a-1)\,ab\,(-1)^{a-1}\frac{(p-1)\ldots(p-a+1)}{1\cdot 2\ldots a}\equiv$$
$$\equiv b\cdot 1\cdot 2\ldots(a-1) \pmod p,$$

откуда, деля почленно на $1\cdot 2\ldots(a-1)$, и получим указанную теорему.

c, α) Выбирая надлежащим образом знак, имеем $b\pm m\equiv \equiv 0 \pmod 4$. Пусть 2^δ—наибольшая степень 2, делящая $b\pm m$. При $\delta\geqslant k$ имеем

$$x\equiv\frac{b\pm m}{2^k} \pmod m.$$

Если же $\delta<k$, то имеем

$$2^{k-\delta}x\equiv\frac{b\pm m}{2^\delta} \pmod m.$$

С этим сравнением повторяем аналогичную операцию, и т. д.

β) Выбрав надлежащим образом знак, имеем $b\pm m\equiv 0 \pmod 3$. Пусть 3^δ—наибольшая степень 3, делящая $b\pm m$. При $\delta\geqslant k$ имеем

$$x\equiv\frac{b\pm m}{3^k} \pmod m.$$

Если же $\delta<k$, то имеем

$$3^{k-\delta}x\equiv\frac{b\pm m}{3^\delta} \pmod m.$$

С этим сравнением повторяем аналогичную операцию, и т. д.

γ) Пусть p—простой делитель числа a. Найдем t из условия $b+mt\equiv 0 \pmod p$. Пусть p^δ—наибольшая степень p, делящая $(a,\ b+mt)$, и пусть $a=a_1p^\delta$. Имеем

$$a_1x\equiv\frac{b\pm m}{p^\delta} \pmod m.$$

Если $a_1>1$, то с этим новым сравнением повторяем аналогичную операцию, и т. д.

Указанный способ удобен в случае небольших простых сомножителей числа a.

3. Полагая $t=[\tau]$, пишем сравнения

$$\begin{aligned} a\cdot 0&\equiv 0 \pmod m,\\ a\cdot 1&\equiv y_1 \pmod m,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ a\cdot t&\equiv y_t \pmod m,\\ a\cdot 0&\equiv m \pmod m. \end{aligned}$$

Расположив эти сравнения в порядке возрастания правых частей (ср. вопрос 4, a, гл. II) и вычитая почленно каждое сравнение (кроме последнего) из следующего за ним, получим $t+1$ сравнений вида $az \equiv u \pmod{m}$; $0 < |z| \leq \tau$. При этом, по крайней мере, в одном сравнении будет $0 < u < \frac{m}{\tau}$. Действительно, u имеет $t+1 > \tau$ значений, эти значения положительные, и их сумма равна m.

4, a, α) Следует из определения символической дроби.

β) Здесь можно положить $b_0 = b + mt$, где t определяется из условия $b + mt \equiv 0 \pmod{a}$; тогда сравнению $ax \equiv b$ удовлетворяет целое число, представляемое обычной дробью $\frac{b_0}{a}$.

γ) Имеем (b_0 кратно a, d_0 кратно c)

$$\frac{b}{a} + \frac{d}{c} \equiv \frac{b_0}{a} + \frac{d_0}{c} = \frac{b_0 c + a d_0}{ac} \equiv \frac{bc + ad}{ac}.$$

δ) Имеем

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} \equiv \frac{b_0}{a} \cdot \frac{d_0}{c} = \frac{b_0 d_0}{ac} \equiv \frac{bd}{ac}.$$

b, α) Имеем (сравнения берутся по модулю p)

$$\binom{p-1}{a} \equiv \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-a)}{1\cdot 2\ldots a} \equiv \frac{(-1)^a\, 1\cdot 2\ldots a}{1\cdot 2\ldots a} \equiv (-1)^a.$$

Вопрос 2, b теперь проще решать так:

$$\frac{b}{a} \equiv \frac{b(-1)^{a-1}(p-1)\ldots(p-(a-1))}{1\cdot 2\ldots(a-1)\,a} \pmod{p}.$$

β) Имеем

$$\frac{2^p-2}{p} \equiv 1 + \frac{p-1}{1\cdot 2} + \frac{(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-(p-2))}{1\cdot 2\ldots(p-1)} \pmod{p}.$$

5, a. Числа $s, s+1, \ldots, s+n-1$ попарно не могут иметь общего делителя с d. Произведения $s(s+1)\ldots(s+n-1)$ могут быть объединены в $n^{\varkappa}$ совокупностей по числу способов, скольким число d может быть разбито на n попарно простых сомножителей с учетом порядка последних (вопрос 11, b, гл. II). Пусть $d = u_1 u_2 \ldots u_n$ — одно из таких разбиений. Число произведений с условием $s \equiv 0 \pmod{u_1}$,

$$s+1 \equiv 0 \pmod{u_2}, \ \ldots, \ s+n-1 \equiv 0 \pmod{u_n}$$

равно $\frac{a}{d}$. Поэтому искомое число равно $n^{\varkappa}\frac{a}{d}$.

b. Указанное число равно

$$\sum_{d \backslash a} \mu(d) S_d; \quad S_d = \frac{n^{\varkappa} a}{d},$$

где $\varkappa$ — число различных простых делителей числа d. При этом

$$\sum_{d \backslash a} \mu(a) \frac{n^{\varkappa} a}{d} = a\left(1 - \frac{n}{p_1}\right)\left(1 - \frac{n}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{n}{p_k}\right).$$

6, a. Все значения x, удовлетворяющие первому сравнению, даются равенством $x = b_1 + m_1 t$, где t — целое. Чтобы выбрать из них те, которые удовлетворяют также и второму сравнению, надо ограничиться лишь теми значениями t, которые удовлетворяют сравнению

$$m_1 t \equiv b_2 - b_1 \pmod{m_2}.$$

Но это сравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $b_2 - b_1$ кратно d. При этом в случае разрешимости совокупность значений t, ему удовлетворяющих, определяется равенством вида $t = t_0 + \frac{m_2}{d} t'$, где t' — целое; вместе с тем совокупность значений x, удовлетворяющих рассматриваемой в вопросе системе, определится равенством

$$x = b_1 + m_1\left(t_0 + \frac{m_2}{d} t'\right) = x_{1,2} + m_{1,2} t'; \quad x_{1,2} = b_1 + m_1 t_0.$$

b. В случае разрешимости системы

$$x \equiv b_1 \pmod{m_1}, \quad x \equiv b_2 \pmod{m_2}$$

совокупность значений x, ей удовлетворяющих, представится сравнением вида $x \equiv x_{1,2} \pmod{m_{1,2}}$. В случае разрешимости системы

$$x \equiv x_{1,2} \pmod{m_{1,2}}, \quad x \equiv b_3 \pmod{m_3}$$

совокупность значений x, ей удовлетворяющих, представится сравнением вида $x \equiv x_{1,2,3} \pmod{m_{1,2,3}}$. В случае разрешимости системы

$$x \equiv x_{1,2,3} \pmod{m_{1,2,3}}, \quad x \equiv b_4 \pmod{m_4}$$

совокупность значений x, ей удовлетворяющих, представится сравнением вида $x \equiv x_{1,2,3,4} \pmod{m_{1,2,3,4}}$ и т. д.

7, α) От замены x на $-x$ (вследствие чего x' заменится на $-x'$) величина суммы $\left(\frac{a, b}{m}\right)$ не изменится.

β) Когда x пробегает приведенную систему вычетов по модулю m, то и x' пробегает приведенную систему вычетов по модулю m.

γ) Полагая $x \equiv hz \pmod{m}$, получим

$$\left(\frac{a, bh}{m}\right) = \sum_z e^{2\pi i \frac{ahz + bz'}{m}} = \left(\frac{ah, b}{m}\right).$$

δ) Имеем

$$\left(\frac{a_1, 1}{m_1}\right)\left(\frac{a_2, 1}{m_2}\right) = \sum_x \sum_y e^{2\pi i \frac{a_1 m_2 x + a_2 m_1 y + m_2 x' + m_1 y'}{m_1 m_2}}$$

Полагая $m_2 x' + m_1 y' = z'$, имеем

$$(a_1 m_2 x + a_2 m_1 y)(m_2 x' + m_1 y') \equiv a_1 m_2^2 + a_2 m_1^2 \pmod{m_1 m_2},$$

$$\left(\frac{a_1, 1}{m_1}\right)\left(\frac{a_2, 1}{m_2}\right) = \left(\frac{m_2^2 a_1 + m_1^2 a_2, 1}{m_1 m_2}\right),$$

что и доказывает указанное свойство в случае двух сомножителей. Обобщение на случай более чем двух сомножителей тривиально.

8. Сравнение

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n-a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)\equiv 0 \pmod p$$

имеет n решений. Оно степени ниже n. Следовательно, все его коэффициенты кратны p, а это и выражается сравнениями, указанными в вопросе.

9, а. При $p>3$ соответственно x, взятому из ряда $2, 3, \ldots, p-2$, найдем отличное от него число x' того же ряда с условием $xx'\equiv 1 \pmod p$; действительно, из $x=x'$ следовало бы $(x-1)(x+1)\equiv \equiv 0 \pmod p$; $x\equiv 1$ или $x\equiv p-1$. Поэтому

$$2\cdot 3\ldots(p-2)\equiv 1 \pmod p;\quad 1\cdot 2\ldots(p-1)\equiv -1 \pmod p.$$

b. Пусть $P>2$. Допустив, что P имеет делитель u с условием $1<u<P$, мы имели бы $1\cdot 2\ldots(P-1)+1\equiv 1 \pmod u$.

10, а. Находим h с условием $a_0h\equiv 1 \pmod m$. Данное сравнение равносильно такому:

$$x^n+a_1hx^{n-1}+\ldots+a_nh\equiv 0 \pmod m.$$

b. Пусть $Q(x)$ — частное и $R(x)$ — остаток от деления x^p-x на $f(x)$. Все коэффициенты $Q(x)$ и $R(x)$ — целые, $Q(x)$ — степени $p-n$, $R(x)$ — степени ниже n,

$$x^p-x=f(x)Q(x)+R(x).$$

Пусть сравнение $f(x)\equiv 0 \pmod p$ имеет n решений. Те же решения будут решениями и сравнения $R(x)\equiv 0 \pmod p$; поэтому все коэффициенты $R(x)$ кратны p.

Обратно, пусть все коэффициенты $R(x)$ кратны p. Тогда $f(x)Q(x)$ кратно p при тех же значениях x, что и x^p-x; поэтому сумма чисел решений сравнений

$$f(x)\equiv 0 \pmod p,\quad Q(x)\equiv 0 \pmod p$$

не меньше чем p. Пусть первое имеет α, а второе β решений. Из

$$\alpha\leqslant n,\quad \beta\leqslant p-n,\quad p\leqslant\alpha+\beta$$

выводим $\alpha=n$, $\beta=p-n$.

c. Возвышая данное сравнение почленно в степень $\frac{p-1}{n}$, убеждаемся в необходимости указанного условия. Пусть это условие выполнено; из $x^p-x=x\left(x^{p-1}-A^{\frac{p-1}{n}}+A^{\frac{p-1}{n}}-1\right)$ следует, что остаток от деления x^p-x на x^n-A есть $\left(A^{\frac{p-1}{n}}-1\right)x$, где $A^{\frac{p-1}{n}}-1$ кратно p.

11. Из $x_0^n\equiv A \pmod m$, $y^n\equiv 1 \pmod m$ следует $(x_0y)^n\equiv A \pmod m$; при этом произведения x_0y, отвечающие несравнимым (по модулю m) y, несравнимы. Из $x_0^n\equiv A \pmod m$, $x^n\equiv A \pmod m$ следует $x^n\equiv \equiv x_0^n \pmod m$, причем, определяя y условием $x\equiv yx_0 \pmod m$, имеем

$$y^n\equiv 1 \pmod m.$$

1. Указанное сравнение равносильно такому: $(2ax+b)^2 \equiv b^2 - 4ac \pmod m$. Соответственно каждому решению $z \equiv z_0 \pmod m$ сравнения $z^2 \equiv b^2-4ac \pmod m$ из $2ax+b \equiv z_0 \pmod m$ найдем одно решение указанного сравнения.

2, a. При $\left(\frac{a}{p}\right)=1$ имеем $a^{2m+1} \equiv 1 \pmod p$, $(a^{m+1})^2 \equiv a \pmod p$, $x \equiv \pm a^{m+1} \pmod p$.

b. При $\left(\frac{a}{p}\right)=1$ имеем $a^{4m+2} \equiv 1 \pmod p$, $a^{2m+1} \equiv \pm 1 \pmod p$, $a^{2m+2} \equiv \pm a \pmod p$. Ввиду $\left(\frac{2}{p}\right)=-1$ имеем также $2^{4m+2} \equiv -1 \pmod p$. Поэтому при некотором s, имеющем одно из значений 0; 1, получим

$$a^{2m+2}2^{(4m+2)s} \equiv a \pmod p, \quad x \equiv \pm a^{m+1}2^{(2m+1)s} \pmod p.$$

c. Пусть $p=2^kh+1$, где $k \geqslant 3$ и h — нечетное, $\left(\frac{a}{p}\right)=1$. Имеем

$$a^{2^{k-1}h} \equiv 1 \pmod p, \quad a^{2^{k-2}h} \equiv \pm 1 \pmod p, \quad N^{2^{k-1}h} \equiv -1 \pmod p.$$

Поэтому при некотором целом неотрицательном s_2 получим

$$a^{2^{k-2}h} N^{s_2 2^{k-1}} \equiv 1 \pmod p, \quad a^{2^{k-3}h}N^{s_2 2^{k-2}} \equiv \pm 1 \pmod p;$$

отсюда при некотором целом неотрицательном s_3 получим

$$a^{2^{k-3}h}N^{s_3 2^{k-2}} \equiv 1 \pmod p, \quad a^{2^{k-4}h}N^{s_3 2^{k-3}} \equiv \pm 1 \pmod p,$$

и т. д.; наконец, получим

$$a^h N^{2s_k} \equiv 1 \pmod p, \quad x \equiv \pm a^{\frac{h+1}{2}} N^{s_k} \pmod p.$$

d. Имеем

$$1\cdot 2 \ldots 2m\,(p-2m) \ldots (p-2)(p-1)+1 \equiv 0 \pmod p,$$
$$(1\cdot 2 \ldots 2m)^2+1 \equiv 0 \pmod p.$$

3, a. Условия разрешимости сравнений (1) и (2) выводятся тривиально (e и h § 2). Сравнение (3) разрешимо тогда и только тогда, когда $\left(\frac{-3}{p}\right)=1$. Но $\left(\frac{-3}{p}\right)=\left(\frac{p}{3}\right)$, причем

$$\left(\frac{p}{3}\right)=\begin{cases} 1, & \text{если } p \text{ имеет вид } 6m+1, \\ -1, & \text{если } p \text{ имеет вид } 6m+5. \end{cases}$$

b. Каковы бы ни были различные простые $p_1, p_2, \ldots, p_k$ вида $4m+1$, наименьший простой делитель p числа $(2p_1p_2 \ldots p_k)^2+1$ будет отличен от $p_1, p_2, \ldots, p_k$ и ввиду $(2p_1p_2 \ldots p_k)^2+1 \equiv 0 \pmod p$ имеет вид $4m+1$.

c. Каковы бы ни были различные простые $p_1, p_2, \ldots, p_k$ вида $6m+1$, наименьший простой делитель p числа $(2p_1p_2 \ldots p_k)^2+3$ будет отличен от $p_1, p_2, \ldots, p_k$ и ввиду $(2p_1p_2 \ldots p_k)^2+3 \equiv 0 \pmod p$ имеет вид $6m+1$.

4. Среди чисел первой совокупности будут числа, сравнимые с $1\cdot 1, 2\cdot 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\frac{p-1}{2}$, т. е. все квадратичные вычеты; число, входящее по условию во вторую совокупность, будет квадратичный невычет. Но во вторую совокупность войдут все произведения этого невычета на все вычеты, т. е. войдут все квадратичные невычеты.

5, a. Пусть в системе исчисления с основанием p

$$a=a_{\alpha-1}p^{\alpha-1}+\ldots+a_1p+a_0$$

и искомое решение (наименьший неотрицательный вычет)

$$x=x_{\alpha-1}p^{\alpha-1}+\ldots+x_1p+x_0. \tag{1}$$

Составим таблицу:

$a_{\alpha-1}$	...	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
$2x_0x_{\alpha-1}$	...	$2x_0x_4$	$2x_0x_3$	$2x_0x_2$	$2x_0x_1$	x_0^2
$2x_1x_{\alpha-2}$	...	$2x_1x_3$	$2x_1x_2$	x_1^2		
$2x_2x_{\alpha-3}$	...	x_2^2				
...						

где в столбце под a_s стоят числа, сумма которых образует коэффициент при p^s в разложении квадрата правой части (1) по степеням p. Находим x_0 из условия

$$x_0^2\equiv a_0 \pmod p.$$

Полагая $\frac{x_0^2-a_0}{p}=p_1$, находим x_1 из условия

$$p_1+2x_0x_1\equiv a_1 \pmod p.$$

Полагая $\frac{p_1+2x_0x_1-a_1}{p}=p_2$, находим x_2 из условия

$$p_2+2x_0x_2+x_1^2\equiv a_2 \pmod p,$$

и т. д. При данном x_0 ввиду $(x_0, p)=1$ числа $x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha-1}$ определятся однозначно.

b. Здесь

$$a=a_{\alpha-1}2^{\alpha-1}+\ldots+a_32^3+a_22^2+a_12+a_0,$$
$$x=x_{\alpha-1}2^{\alpha-1}+\ldots+x_32^3+x_22^2+x_12+x_0,$$

и мы будем иметь следующую таблицу:

$a_{\alpha-1}$	...	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
$x_0x_{\alpha-2}$	...	x_0x_3	x_0x_2	x_0x_1		x_0^2
$x_1x_{\alpha-3}$	...	x_1x_2		x_1^2		
$x_2x_{\alpha-4}$	...	x_2^2				

Рассмотрим лишь случай $\alpha \geqslant 3$. Ввиду $(a, 2)=1$ необходимо $a_0=1$. Поэтому $x_0=1$. Далее необходимо $a_1=0$, и ввиду $x_0x_1+x_1^2=x_1+x_1^2 \equiv 0 \pmod 2$ необходимо $a_2=0$. Для x_1 возможны два значения: 0 и 1. Числа $x_2, x_3, \ldots, x_{\alpha-2}$ определятся однозначно, а для $x_{\alpha-1}$ возможны два значения: 0 и 1. Поэтому при $\alpha \geqslant 3$ необходимо $a \equiv 1 \pmod 8$, и тогда указанное сравнение имеет 4 решения.

6. Очевидно, P и Q — целые, причем Q по модулю p сравнимо с числом, которое получим, заменяя a на z^2, для чего достаточно $\sqrt{a}$ заменить на z. Поэтому $Q \equiv 2^{\alpha-1}z^{\alpha-1} \pmod p$; следовательно, $(Q, p)=1$ и Q' действительно можно определить из сравнения $QQ' \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$. Имеем

$$P^2-aQ^2=\left(z+\sqrt{a}\right)^\alpha\left(z-\sqrt{a}\right)^\alpha=(z^2-a)^\alpha \equiv 0 \pmod{p^\alpha},$$

откуда

$$(PQ')^2 \equiv a(QQ')^2 \equiv a \pmod{p^\alpha}.$$

7. Пусть $m=2^\alpha p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа m. Тогда m представляется в виде $m=2^\alpha ab$, где $(a, b)=1$, 2^k способами.

Пусть $\alpha=0$. Из $(x-1)(x+1) \equiv 0 \pmod m$ следует, что при некоторых a и b

$$x \equiv 1 \pmod a; \quad x \equiv -1 \pmod b.$$

Решая эту систему, получим $x \equiv x_0 \pmod m$. Поэтому указанное сравнение имеет 2^k решений.

Пусть $\alpha=1$. При некоторых a и b

$$x \equiv 1 \pmod{2a}; \quad x \equiv -1 \pmod{2b}.$$

Решая эту систему, получим $x \equiv x_0 \pmod m$. Поэтому указанное сравнение имеет 2^k решений.

Пусть $\alpha=2$. При некоторых a и b

$$x \equiv 1 \pmod{2a}; \quad x \equiv -1 \pmod{2b}.$$

Решая эту систему, получим $x \equiv x_0 \left(\bmod \frac{m}{2}\right)$. Поэтому указанное сравнение имеет 2^{k+1} решений.

Пусть $\alpha \geqslant 3$. При некоторых a и b должна выполняться одна из систем

$$x \equiv 1 \pmod{2a}; \qquad x \equiv -1 \pmod{2^{\alpha-1} b};$$
$$x \equiv 1 \pmod{2^{\alpha-1} a}; \quad x \equiv -1 \pmod{2b}.$$

Решая одну из этих систем, получим $x \equiv x_0 \left(\operatorname{mod} \frac{m}{2}\right)$. Поэтому указанное сравнение имеет 2^{k+2} решений.

8, a. Определяя x' сравнением $xx' \equiv 1 \pmod p$, имеем

$$\sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{x(x+k)}{p}\right) = \sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{xx'(xx'+kx')}{p}\right) = \sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{1+kx'}{p}\right).$$

Очевидно, $1+kx'$ пробегает все вычеты полной системы, кроме 1. Отсюда и следует указанная теорема.

b. Указанное равенство следует из

$$\tau = \frac{1}{4} \sum_{x=1}^{p-2} \left(1+\varepsilon\left(\frac{x}{p}\right)\right)\left(1+\eta\left(\frac{x+1}{p}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{4} \sum_{x=1}^{p-2} \left(1+\varepsilon\left(\frac{x}{p}\right)+\eta\left(\frac{x+1}{p}\right)+\varepsilon\eta\left(\frac{x(x+1)}{p}\right)\right).$$

c. Пусть δ обозначает число значений y, равных нулю (следовательно, $\delta=0$ или $\delta=1$). Имеем

$$S^2 \leqslant X \sum_{y_1} \sum_{y} S_{y_1, y}; \qquad S_{y_1, y} = \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{(xy+k)(xy_1+k)}{p}\right).$$

При этом находим:

$$S_{y_1, y} = \begin{cases} p, & \text{если } y_1 = y = 0; \\ 0, & \text{если только одно из чисел } y_1 \text{ и } y \text{ равно нулю;} \end{cases}$$

$$S_{y_1, y} = \begin{cases} p-1 = p - \left(\frac{y_1 y}{p}\right), & \text{если } y_1 = y > 0; \\ -\left(\frac{y_1 y}{p}\right) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поэтому

$$S^2 \leqslant X\left(p\delta + p(Y-\delta) - \left(\sum_{y>0}\left(\frac{y}{p}\right)\right)^2\right) \leqslant XYp.$$

d, α) Имеем

$$S = \sum_{x=0}^{p-1} \sum_{z_1=0}^{Q-1} \sum_{z=0}^{Q-1} \left(\frac{(x+z_1)(x+z)}{p}\right).$$

При $z_1 = z$ суммирование по x дает $p-1$. При z_1, не равном z, суммирование по x (вопрос а) дает -1. Поэтому $S = pQ - Q^2$.

β) Согласно теореме вопроса α) имеем

$$T\left(Q^{0,5+0,5\lambda}\right)^2 < pQ;\quad T < pQ^{-\lambda}.$$

γ) При $p \leqslant 5$ теорема тривиальна. При $p > 5$ применим теорему вопроса α). Допустив, что в указанном в вопросе ряде квадратичных невычетов нет, убедимся, что $S_x = Q$ при $x = M, M+1, \ldots, M+Q$. Поэтому (Q^2+2Q и Q^2+2Q+1 не равны p как составные) найдем

$$(Q+1)\,Q^2 \leqslant (p-Q)\,Q,\quad Q^2+2Q < p,\ (Q+1)^2 < p,$$

что невозможно.

9, a. Если m представляется в виде (1), то решение

$$z \equiv z_0 \pmod m \tag{5}$$

сравнения $x \equiv zy \pmod m$ является также и решением сравнения (2). Мы будем говорить, что указанное представление связано с решением (5) сравнения (2).

С каждым решением (5) сравнения (2) связано не менее одного представления (1). Действительно, взяв $\tau = \sqrt{m}$, имеем

$$\frac{z_0}{m} = \frac{P}{Q} + \frac{\theta}{Q\sqrt{m}};\quad (P,\ Q) = 1;\ 0 < Q \leqslant \sqrt{m},\quad |\theta| < 1.$$

Поэтому $z_0Q = mP + r$, где $|r| < \sqrt{m}$. Далее, из (2) следует, что $|r|^2 + Q^2 \equiv 0 \pmod m$. Отсюда и из $0 < |r|^2 + Q^2 < 2m$ находим

$$m = |r|^2 + Q^2. \tag{6}$$

При этом $(|r|,\ Q) = 1$ ввиду

$$1 = \frac{r^2+Q^2}{m} = \frac{(z_0Q - mP)\,z_0Q - rmP + Q^2}{m} \equiv -rP \pmod Q.$$

Если $|r| = r$, то ввиду $r \equiv z_0Q \pmod m$ представление (6) связано с решением (5). Если $|r| = -r$, то ввиду $z_0^2Q \equiv z_0r \pmod m$, $Q \equiv z_0|r| \pmod m$, представление $m = Q^2 + |r|^2$ связано с решением (5). С каждым решением (5) связано не более одного представления (1). Действительно, если два представления $m = x^2 + y^2$ и $m = x_1^2 + y_1^2$ числа m в виде (1) связаны с одним и тем же решением (5), то из $x \equiv z_0y \pmod m$, $x_1 \equiv z_0y_1 \pmod m$ следует $xy_1 \equiv x_1y \pmod m$. Поэтому $xy_1 = x_1y$, откуда ввиду $(x,\ y) = (x_1,\ y_1) = 1$ следует $x = x_1$, $y = y_1$.

b. Если p представляется в виде (3), то решение

$$z \equiv z_0 \pmod p \tag{7}$$

сравнения $x \equiv zy \pmod p$ является также и решением сравнения (4). Мы будем говорить, что указанное представление связано с решением (7) сравнения (4).

Зная решение (7) сравнения (4), найдем не менее одного представления (3). Действительно, взяв $\tau = \sqrt{p}$, имеем

$$\frac{z_0}{p} = \frac{P}{Q} + \frac{\theta}{Q\sqrt{p}};\quad (P,\ Q) = 1,\quad 0 < Q \leqslant \sqrt{p},\quad |\theta| < 1.$$

Поэтому $z_0 Q \equiv r \pmod p$, где $|r| < \sqrt{p}$. Далее из (4) следует, что $|r|^2 + aQ^2 \equiv 0 \pmod p$. Отсюда и из $0 < |r|^2 + aQ^2 < (1+a)p$ следует, что при $a=2$ должно быть или $|r|^2 + 2Q^2 = p$, или $|r|^2 + 2Q^2 = 2p$. В последнем случае $|r|$ — четное, $|r| = 2r_1$, $p = Q^2 + 2r_1^2$. При $a=3$ должно быть или $|r|^2 + 3Q^2 = p$, или $|r|^2 + 3Q^2 = 2p$, или $|r|^2 + 3Q^2 = 3p$. Второй случай невозможен: по модулю 4 левая часть сравнима с 0, а правая — с 2. В третьем случае $|r|$ кратно 3, $|r| = 3r_1$, $p = Q^2 + 3r_1^2$.

Допустив, что два представления $p = x^2 + ay^2$ и $p = x_1^2 + ay_1^2$ числа p в виде (3) связаны с одним и тем же решением сравнения (4), найдем $x = x_1$, $y = y_1$. Допустив, что эти представления связаны с различными решениями сравнения (4), найдем $x \equiv zy \pmod p$, $x_1 \equiv -zy_1 \pmod p$, откуда $xy_1 + x_1 y \equiv 0 \pmod p$, что ввиду $0 < (xy_1 + x_1 y)^2 \leqslant (x^2 + y^2)(x_1^2 + y_1^2) < p^2$ невозможно.

c, α) Слагаемые суммы $S(k)$ с $x = x_1$ и $x = -x_1$ равны.

β) Имеем

$$S(kt^2) = \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{xt\,(x^2t^2 + kt^2)}{p} \right) = \left(\frac{t}{p} \right) S(k).$$

γ) Полагая $p - 1 = 2p_1$, имеем

$$p_1 (S(r))^2 + p_1 (S(n))^2 = \sum_{t=1}^{p_1} (S(rt^2))^2 + \sum_{t=1}^{p_1} (S(nt^2))^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} (S(k))^2 = \sum_{x=1}^{p-1} \sum_{y=1}^{p-1} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{xy\,(x^2+k)(y^2+k)}{p} \right).$$

При y, не равном x или $p-x$, результат суммирования по k будет $-\left(\frac{xy}{p}\right)$; при $y = x$ или $y = p - x$ он будет $(p-1)\left(\frac{xy}{p}\right)$. Поэтому

$$p_1 (S(r))^2 + p_1 (S(n))^2 = 4pp_1, \quad p = \left(\frac{1}{2} S(r)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} S(n)\right)^2.$$

10, a. Имеем

$$X^2 - DY^2 =$$
$$= (x_1 + y_1\sqrt{D})(x_2 \pm y_2\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D})(x_2 \mp y_2\sqrt{D}) = k^2.$$

в. Взяв любое τ_1 с условием $\tau_1 > 1$, найдем целые x_1, y_1 с условиями $|y_1\sqrt{D} - x_1| < \frac{1}{\tau_1}$, $0 < y \leqslant \tau_1$, откуда, умножая почленно на $y_1\sqrt{D} + x_1 < 2y_1\sqrt{D} + 1$, получим $|x_1^2 - Dy_1^2| < 2\sqrt{D} + 1$. Взяв $\tau_2 > \tau_1$ с условием $|y_1\sqrt{D} - x_1| > \frac{1}{\tau_2}$, найдем новые целые x_2, y_2 с условием $|x_2^2 - Dy_2^2| < 2\sqrt{D} + 1$ и т. д.

Очевидно, в интервале $-2\sqrt{D}-1 < k < 2\sqrt{D}+1$ существует такое целое, не равное нулю k, что среди пар $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots$ найдется бесчисленное множество пар x, y с условием $x^2-Dy^2=k$; среди же последних наверно найдутся две пары ξ_1, η_1 и ξ_2, η_2 с условием $\xi_1 \equiv \xi_2 \pmod{|k|}$, $\eta_1 \equiv \eta_2 \pmod{|k|}$. Определяя целые ξ_0, η_0 равенством $\xi_0+\eta_0\sqrt{D}=(\xi_1+\eta_1\sqrt{D})(\xi_2-\eta_2\sqrt{D})$, имеем (вопрос а)

$$\xi_0^2-D\eta_0^2=|k|^2; \quad \xi_0 \equiv \xi_1^2-D\eta_1^2 \equiv 0 \pmod{|k|};$$

$$\eta_0 \equiv -\xi_1\eta_1+\xi_1\eta_1 \equiv 0 \pmod{|k|}.$$

Поэтому $\xi_0=\xi|k|$, $\eta_0=\eta|k|$, где ξ и η — целые и $\xi^2-D\eta^2=1$.

c. Числа x, y, определяемые равенством (2), удовлетворяют (вопрос а) уравнению (1).

Допустив существование пары целых положительных x, y, удовлетворяющих уравнению (1), но отличной от пар, определяемых равенством (2), мы при некотором $r=1, 2, \ldots$ будем иметь

$$(x_0+y_0\sqrt{D})^r < x+y\sqrt{D} < (x_0+y_0\sqrt{D})^{r+1}.$$

Отсюда, деля почленно на $(x_0+y_0\sqrt{D})^r$, получим

$$1 < X+Y\sqrt{D} < x_0+y_0\sqrt{D}, \tag{3}$$

где (вопрос а) X и Y — целые, определяемые равенством

$$X+Y\sqrt{D}=\frac{x+y\sqrt{D}}{(x_0+y_0\sqrt{D})^r}=(x+y\sqrt{D})(x_0-y_0\sqrt{D})^r$$

и удовлетворяющие уравнению

$$X^2-DY^2=1. \tag{4}$$

Но из (4) следуют неравенства $0 < X-Y\sqrt{D} < 1$, которые в соединении с первым неравенством (3) показывают, что X и Y — положительные. Поэтому второе неравенство (3) противоречит определению чисел x_0 и y_0.

11, a. Имеем

$$|S_{a,m}|^2=\sum_{t=0}^{m-1}\sum_{x=0}^{m-1} e^{2\pi i\frac{a(t^2+2tx)}{m}}.$$

При данном t суммирование по x даст $me^{2\pi i\frac{at^2}{m}}$ или 0, в зависимости от того, делится $2t$ на m или нет. При нечетном m имеем

$$|S_{a,m}|^2=me^{2\pi i\frac{a\cdot 0^2}{m}}=m.$$

При четном $m=2m_1$ имеем

$$|S_{a,m}|^2=m\left|e^{2\pi i\frac{a\cdot 0^2}{m}}+e^{2\pi i\frac{a\cdot m_1^2}{m}}\right|.$$

Здесь правая часть равна 0 при нечетном m_1 и равна $2m$ при четном m_1.

b, α) При любом целом b имеем

$$|S_{a,b}| = \left| \sum_{x=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{Ax^2+2Abx}{p}} \right|,$$

откуда, выбрав b из условия $2Ab \equiv a \pmod p$, мы и получим указанный результат.

β) Имеем

$$\sum_{x=M}^{M+Q-1} e^{2\pi i \frac{Ax^2}{p}} = \sum_{x=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{Ax^2}{p}} \sum_{z=M}^{M+Q-1} \frac{1}{p} \sum_{a=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{a(x-z)}{p}}.$$

Часть правой части, отвечающая $a=0$, численно равна $\frac{Q}{\sqrt{p}} < \sqrt{p}$. А оставшаяся часть численно не превосходит

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{a=1}^{p-1} \left| \sum_{z=M}^{M+Q-1} e^{2\pi i \frac{-az}{p}} \right| < \sqrt{p}(\ln p - 1).$$

γ) Имеем

$$T = \sum_{x=M_0}^{M_0+Q_0-1} \sum_{z=M}^{M+Q-1} \frac{1}{p} \sum_{a=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{a(Ax^2-z)}{p}}.$$

Часть правой части, отвечающая $a=0$, равна $\frac{Q_0Q}{p}$. А оставшаяся часть численно меньше чем

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \ln p \sum_{a=1}^{p-1} \left| \sum_{z=M}^{M+Q-1} e^{2\pi i \frac{-az}{p}} \right| < \sqrt{p}(\ln p)^2.$$

δ) Пусть r пробегает квадратичные вычеты, а n пробегает квадратичные невычеты по модулю p, заключенные в ряде $1, \ldots, p-1$. Справедливость теоремы следует из равенств

$$S_{a,p} = 1 + 2\sum_r e^{2\pi i \frac{ar}{p}}, \quad 1 + \sum_r e^{2\pi i \frac{ar}{p}} + \sum_n e^{2\pi i \frac{an}{p}}.$$

ε) Имеем

$$|S_{a,p}|^2 = S_{a,p}\overline{S}_{a,p} = \sum_{t=1}^{p-1} \sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{t}{p}\right) e^{2\pi i \frac{ax(t-1)}{p}}.$$

При $t=1$ суммирование по x дает $p-1$, при $t>1$ оно дает $-\left(\frac{t}{p}\right)$. Поэтому

$$|S_{a,p}|^2 = p - 1 - \sum_{t=2}^{p-1} \left(\frac{t}{p}\right) = p, \quad |S_{a,p}| = \sqrt{p}.$$

Или (второе решение): имеем

$$|S_{a,p}|^2=S_{a,p}\overline{S}_{a,p}=\sum_{t=0}^{p-1}\sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{x+t}{p}\right)\left(\frac{x}{p}\right)e^{2\pi i\frac{at}{p}}.$$

При $t=0$ суммирование по x дает $p-1$. При $t>0$ оно дает $-e^{2\pi i\frac{at}{p}}$ (вопрос 8). Поэтому

$$|S_{a,p}|^2=p-1-\sum_{t=1}^{p-1}e^{2\pi i\frac{at}{p}}=p,\quad |S_{a,p}|=\sqrt{p}.$$

η) Следует из легко выводимого равенства

$$S_{a,p}=\left(\frac{a}{p}\right)S_{1,p}.$$

ϰ) Имеем

$$\sum_{x=M}^{M+Q-1}\left(\frac{x}{p}\right)=\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{x}{p}\right)\sum_{z=M}^{M+Q-1}\frac{1}{p}\sum_{a=0}^{p-1}e^{2\pi i\frac{a(x-z)}{p}}.$$

Часть правой части, отвечающая $a=0$, равна 0. Оставшаяся часть численно меньше, чем (вопрос η) и вопрос 11, c, гл. III)

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{a=1}^{p-1}\left|\sum_{z=M}^{M+Q-1}e^{2\pi i\frac{-az}{p}}\right|<\sqrt{p}\ln p.$$

λ) Следует из неравенства вопроса ϰ) и равенства $R+N=Q$.

μ) Часть суммы с $\left(\frac{a}{p}\right)=1$ равна $p(R^2+N^2)$, а часть суммы с $\left(\frac{a}{p}\right)=-1$ равна $-2pRN$. Поэтому вся сумма равна $p(R-N)^2$.

Часть суммы с $a=0$ равна 0, а оставшаяся часть численно меньше, чем

$$\sum_{a=1}^{p-1}\left|\sum_{x=M}^{M+Q-1}e^{2\pi i\frac{ax}{p}}\right|\sum_{\alpha=1}^{p-1}\left|\sum_{y=M}^{M+Q-1}e^{2\pi i\frac{-\alpha y}{p}}\right|<p^2(\ln p)^2.$$

Следовательно,

$$p(R-N)^2<p^2(\ln p)^2,\quad |R-N|<\sqrt{p}\ln p.$$

ν) Теорема будет доказана, если покажем, что при $Y=[3\sqrt{p}]$ сумма

$$T=\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{x}{p}\right)\sum_{y=0}^{Y-1}\sum_{y_1=0}^{Y-1}\frac{1}{p}\sum_{a=0}^{p-1}e^{2\pi i\frac{a(x-M-y-y_1)}{p}}$$

будет меньше, чем Y^2. Но часть суммы T, отвечающая $a=0$, равна нулю, а оставшаяся часть численно меньше, чем

$$\frac{2}{\sqrt{p}}\sum_{a=1}^{\frac{p-1}{2}} \min\left(Y^2, \frac{1}{4\left(\frac{a}{p}\right)^2}\right) <$$

$$< \frac{2}{\sqrt{p}}\left(\int\limits_0^{\frac{p}{2Y}} Y^2\,da + Y^2 + \int\limits_{\frac{p}{2Y}}^{\infty} \frac{p^2}{4a^2}\,da\right) = Y^2\left(\frac{2\sqrt{p}}{Y}+\frac{2}{\sqrt{p}}\right) < Y^2.$$

Решения к главе 6

1, a. Если q — простое нечетное и $a^p \equiv 1 \pmod q$, то a по модулю q принадлежит одному из показателей $\delta=1$; p. При $\delta=1$ имеем $a\equiv 1 \pmod q$, при $\delta=p$ имеем $q-1=2px$; x — целое.

b. Если q — простое нечетное и $a^p+1\equiv 0 \pmod q$, то $a^{2p}\equiv 1 \pmod q$. Поэтому a по модулю q принадлежит одному из показателей $\delta=1$, 2, p, $2p$. Случаи $\delta=1$; p невозможны. При $\delta=2$ имеем $a^2\equiv 1 \pmod q$, $a+1\equiv 0 \pmod q$. При $\delta=2p$ имеем $q-1=2px$; x — целое.

c. Простыми вида $2px+1$ будут, например, простые делители числа 2^p-1. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — какие-либо k простых чисел вида $2px+1$; число $(p_1p_2\ldots p_k)^p-1$ имеет простой делитель вида $2px+1$, отличный от $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

d. Если q — простое и $2^{2^n}+1\equiv 0 \pmod q$, то $2^{2^{n+1}}\equiv 1 \pmod q$. Поэтому 2 по модулю q принадлежит показателю 2^{n+1} и, следовательно, $q-1=2^{n+1}x$; x — целое.

2. Очевидно, a по модулю a^n-1 принадлежит показателю n. Поэтому n — делитель $\varphi(a^n-1)$.

3, a. Пусть после k-й операции снова получается исходный ряд. Очевидно, k-я операция равносильна следующей: в ряде

$$1, 2, \ldots, n-1, n, n-1, \ldots, 2, 1, 2, \ldots$$
$$\ldots, n-1, n, n, n-1, \ldots, 2, 1, 2, \ldots$$

берутся числа, стоящие на 1, $1+2^k$, $1+2\cdot 2^k$, ... местах. Поэтому на $1+2^k$ месте в исходном ряде должно стоять число 2. Следовательно, указанное в вопросе условие необходимо. Достаточность этого условия очевидна.

b. Решение аналогично решению вопроса a.

4. Решение сравнения $x^\delta\equiv 1 \pmod p$ принадлежит показателю вида $\frac{\delta}{\delta'}$, где δ' — делитель δ. При этом δ' кратно d тогда и только тогда, когда $x^{\frac{\delta}{d}}\equiv 1 \pmod p$. Выписав все $\tau(\delta)$ значений δ' и взяв $f=1$, получим $S'=\sum_{d\setminus\delta}\mu(d)S_d$, где S' — искомое число и $S_d=\frac{\delta}{d}$.

5, a. Здесь (§ 3; пример c, § 5) должно быть $\left(\frac{g}{2^n+1}\right)=-1$. Это требование выполняется при $g=3$.

b. Здесь не должно быть $\left(\frac{g}{2p+1}\right)=1$, $g^2\equiv 1 \pmod{2p+1}$. Это требование выполняется при указанных значениях g.

c. Здесь не должно быть $\left(\frac{g}{4p+1}\right)=1$, $g^4\equiv 1 \pmod{4p+1}$. Это требование выполняется при $g=2$.

d. Здесь не должно быть $\left(\frac{g}{2^np+1}\right)=1$, $g^{2^n}\equiv 1 \pmod{2^np+1}$. Это требование выполняется при $g=3$.

6, a, α) При n, кратном $p-1$, теорема очевидна. Пусть n не делится на $p-1$. Числа $1, 2, \ldots, p-1$, если отвлечься от порядка их следования, по модулю p сравнимы с числами $g, 2g, \ldots, (p-1)g$, где g — первообразный корень по модулю p. Поэтому

$$S_n\equiv g^nS_n \pmod p,\quad S_n\equiv 0 \pmod p.$$

β) Имеем

$$\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{x(x^2+1)}{p}\right)\equiv\sum_{x=1}^{p-1}x^{\frac{p-1}{2}}(x^2+1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p,$$

откуда (вопрос α)) и получается указанный результат.

b. При $p>2$ имеем

$$1\cdot 2\ldots(p-1)\equiv g^{1+2+\ldots+p-1}\equiv g^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1 \pmod p.$$

7. Имеем $g_1^{\operatorname{ind}_{g_1}a}\equiv a \pmod p$, $\operatorname{ind}_{g_1}a\operatorname{ind}_g g_1\equiv\operatorname{ind}_g a \pmod{p-1}$, $\operatorname{ind}_{g_1}a\equiv\alpha\operatorname{ind}_g a \pmod{p-1}$.

8, α) Имеем

$$|S|^2\leqslant X\sum_{x=0}^{m-1}\sum_{y_1=0}^{m-1}\sum_{y=0}^{m-1}\eta(y_1)\overline{\eta(y)}e^{2\pi i\frac{ax(y_1-y)}{m}}.$$

При данных y_1 и y суммирование по x дает $Xm|\eta(y)|^2$ или нуль, в зависимости от того, будет ли $y_1=y$ или нет. Поэтому

$$|S|^2\leqslant XYm,\quad |S|\leqslant\sqrt{XYm}.$$

β) Имеем

$$S=\frac{1}{\varphi(m)}\sum_x{}'\sum_y{}' e^{2\pi i\frac{ax^ny^n}{m}}=\frac{1}{\varphi(m)}\sum_u\sum_v\xi(u)\eta(v)e^{2\pi i\frac{auv}{m}},$$

где $\xi(u)$ — число решений сравнения $x^n\equiv u \pmod m$, $\eta(v)$ — число решений сравнения $y^n\equiv v \pmod m$. Здесь $\xi(u)$ не превосходит K (вопрос 11, гл. IV), а сумма всех значений $\xi(u)$ равна $\varphi(m)$. Поэтому

$$\sum_u|\xi(u)|^2\leqslant K\varphi(m).$$

Аналогично находим

$$\sum_v |\eta(v)|^2 \leqslant K\varphi(m).$$

Следовательно (вопрос α)),

$$|S| \leqslant \frac{1}{\varphi(m)} \sqrt{K\varphi(m) K\varphi(m) m} = K\sqrt{m}.$$

γ) Сравнение $x^n \equiv 1 \pmod m$ равносильно системе

$$x^n \equiv 1 \left(\operatorname{mod} 2^{\alpha}\right), \quad x^n \equiv 1 \left(\operatorname{mod} p_1^{\alpha_1}\right), \quad \ldots, \quad x^n \equiv 1 \left(\operatorname{mod} p_k^{\alpha_k}\right).$$

Пусть $\gamma(x)$ и $\gamma_0(x)$ — индексы числа x по модулю 2^{α} (g, § 6), сравнение $x^n \equiv 1 \left(\operatorname{mod} 2^{\alpha}\right)$ равносильно системе $n\gamma(x) = 0 \pmod c$, $n\gamma_0(x) \equiv 0 \pmod {c_0}$. Первое сравнение этой системы имеет не более 2 решений, второе — не более n решений. Поэтому сравнение $x^n \equiv 1 \left(\operatorname{mod} 2^{\alpha}\right)$ имеет не более $2n$ решений. Согласно b, § 5 каждое из сравнений $x^n \equiv 1 \left(\operatorname{mod} p_1^{\alpha_1}\right)$, ..., $x^n \equiv 1 \left(\operatorname{mod} p_k^{\alpha_k}\right)$ имеет не более n решений. Следовательно, $K < 2n^{k+1}$. Отсюда при постоянном n будем иметь (вопрос 11, с, гл. II)

$$K \leqslant 2\left(\tau(m)\right)^{\frac{\ln n}{\ln 2}} = O\left(m^{\varepsilon}\right).$$

9, а. Имеем

$$S = \frac{1}{p-1} \sum_{x=1}^{p-1} \sum_{y=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{ax^n y^n + bxy}{p}},$$

$$|S|^2 \leqslant \frac{1}{p-1} \sum_{u=0}^{p-1} \sum_{v=0}^{p-1} \psi(u, v) S_{u,v}; \quad S_{u,v} = \sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{ax^n u + bxv}{p}},$$

где $\psi(u, v)$ — число решений системы

$$y_1^n - y^n \equiv u \pmod p, \quad y_1 - y \equiv v \pmod p,$$

когда y_1 и y независимо друг от друга пробегают значения $1, \ldots$ $\ldots, p-1$. Поэтому

$$|S|^2 \leqslant \frac{UV}{(p-1)^2}; \quad U = \sum_{u=0}^{p-1} \sum_{v=0}^{p-1} (\psi(u, v))^2, \quad V = \sum_{u=0}^{p-1} \sum_{v=0}^{p-1} |S_{u,v}|^2.$$

Нетрудно видеть, что $\psi(0, 0) = p-1$, $\psi(u, 0) = 0$ при $u > 0$ и $\psi(u, v) \leqslant 2n_1$ при $v > 0$. Поэтому

$$U < (p-1)^2 + 2p(p-1)n_1 < 3p(p-1)n_1.$$

Кроме того, находим $V < p^2(p-1)$. Следовательно,

$$|S|^4 < 3p^3 n_1, \quad |S| < \frac{3}{2} n_1^{\frac{1}{4}} p^{\frac{3}{4}}.$$

b. Имеем

$$\sum_{x=M}^{M+Q-1} e^{2\pi i \frac{ax^n}{p}} = \sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{ax^n}{p}} \sum_{z=M}^{M+Q-1} \frac{1}{p} \sum_{b=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{b(x-z)}{p}}.$$

Часть правой части, отвечающая $b=0$, численно $< n\sqrt{p}$ (вопр. 8). А оставшаяся часть численно не превосходит

$$\frac{3}{2} n_1^{\frac{1}{4}} p^{\frac{3}{4}-1} \sum_{b=1}^{p-1} \left| \sum_{z=M}^{M+Q-1} e^{2\pi i \frac{-bz}{p}} \right| < \frac{3}{2} n_1 p^{\frac{3}{4}} \ln p.$$

c. Имеем

$$T = \sum_{x=M_0}^{M_0+Q_0-1} e^{2\pi i \frac{ax^n}{p}} \sum_{z=M}^{M+Q-1} \frac{1}{p} \sum_{b=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{b(x^n-z)}{p}}.$$

Часть правой части, отвечающая $b=0$, равна $\frac{Q_0 Q}{p}$. А оставшаяся часть численно меньше

$$\frac{3}{2} n_1 p^{\frac{3}{4}-1} \ln p \sum_{b=1}^{p-1} \left| \sum_{z=M}^{M+Q-1} e^{2\pi i \frac{-bz}{p}} \right| < \frac{3}{2} n_1 p^{\frac{3}{4}} (\ln p)^2.$$

Решения к главе 7

1, α) Определив при $(x, p)=1$ число x' сравнением $xx' \equiv 1 \pmod{p}$, находим

$$\sum_{x=1}^{p-1} \overline{\chi(x)}\, \chi(x+k) = \sum_{x=1}^{p-1} \chi(1+kx') = -1.$$

β) Имеем

$$S = \sum_{x=0}^{p-1} \sum_{z_1=0}^{Q-1} \sum_{z=0}^{Q-1} \overline{\chi(x+z_1)}\, \chi(x+z).$$

При $z_1=z$ суммирование по x даст $p-1$. При z_1, не равном z, суммирование по x (вопрос а) дает -1. Поэтому

$$S = Q(p-1) - Q(Q-1) = (p-Q)Q.$$

2, α) Имеем

$$|U_{a,p}|^2 = \sum_{t=1}^{p-1} \sum_{x=1}^{p-1} \chi(xt)\, \overline{\chi(x)}\, e^{2\pi i \frac{a(tx-x)}{p}} =$$

$$= \sum_{t=1}^{p-1} \sum_{x=1}^{p-1} \chi(t) e^{2\pi i \frac{a(t-1)x}{p}} = p-1-\sum_{t=2}^{p-1} \chi(t) = p.$$

β) При $(a, p)=p$ теорема тривиальна. При $(a, p)=1$ имеем

$$U_{a,p}=(\chi(a))^{-1}\sum_{x=1}^{p-1}\chi(ax)e^{2\pi i\frac{ax}{p}}=(\chi(a))^{-1}U_{1,p}.$$

γ) Очевидно, A и B—целые, причем $|S|^2=A^2+B^2$. Находим вопрос β))

$$S=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{p}\,\varepsilon\sqrt{p}}\sum_{z_1=1}^{p-1}\sum_{z=1}^{p-1}\sum_{x=0}^{p-1}e^{-2\pi i\frac{\operatorname{ind}z_1+\operatorname{ind}z}{4}}e^{2\pi i\frac{z_1x+z(x+1)}{p}};\ |\varepsilon|=1.$$

При z_1+z, не равном нулю, суммирование по x дает нуль. Поэтому

$$S=\varepsilon'\sum_{z=1}^{p-1}\left(\frac{z}{p}\right)e^{2\pi i\frac{z}{p}}=\varepsilon''\sqrt{p};\quad |\varepsilon'|=|\varepsilon''|=1,\quad S^2=p.$$

δ) Имеем

$$\sum_{x_s}e^{2\pi i\frac{ax_s}{n}}=\nu\sum_{x=1}^{p-1}\sum_{z=0}^{p-1}e^{2\pi i\frac{z(\operatorname{ind}x-s)}{n}}e^{2\pi i\frac{ax}{p}}.$$

Часть правой части, отвечающая $z=0$, равна $-\nu$. А оставшаяся часть численно меньше $(1-\nu)\sqrt{p}$ (вопрос α)).

3, α) При $(z, p)=1$ сравнение $x^n\equiv z \pmod p$ возможно лишь в случае, когда $\operatorname{ind}z$ делится на δ, причем тогда это сравнение имеет δ решений. Следовательно,

$$S_{a,p}=1+\delta\sum_{z_0}e^{2\pi i\frac{az_0}{p}},$$

где z_0 пробегает числа приведенной системы вычетов по модулю p с условием $\operatorname{ind}z_0\equiv 0 \pmod\delta$. Поэтому

$$S_{a,p}=1+\delta\left(-\frac{1}{\delta}+\theta_s\left(1-\frac{1}{\delta}\right)\sqrt{p}\right)=\theta'(\delta-1)\sqrt{p}.$$

β) Полагая

$$x=u+p^{s-1}v;\quad u=0, \ldots, p^{s-1}-1;\quad v=0, \ldots, p-1,$$

имеем

$$e^{2\pi i\frac{ax^n}{p^s}}=e^{2\pi ia(u^np^{-s}+nu^{n-1}p^{-1}v)}.$$

При $(u, p)=1$ суммирование по v дает нуль. Поэтому $(x=pz)$

$$S_{a,p^s}=\sum_{z=0}^{p^{s-1}-1}e^{2\pi iap^{-s+n}z^n}=p^{s-1}S_{a,p}.$$

γ) Полагая

$$(n, p^s)=p^\sigma,\quad x=u+p^{s-\sigma-1}v,\quad u=0, \ldots, p^{s-\sigma-1}-1,$$
$$v=0, \ldots, p^{\sigma+1}-1,$$

находим

$$e^{2\pi i \frac{ax^n}{p^s}} = e^{2\pi i a\left(u^n p^{-s} + n u^{n-1} p^{-\sigma-1} v\right)}.$$

При $(u, p) = 1$ суммирование по v дает нуль. Поэтому $(x = pz)$

$$S_{a,\, p^s} = \sum_{z=0}^{p^{s-1}-1} e^{2\pi i \frac{az^n}{p^{s-n}}} = p^{s-1} S_{a,\, p^{s-n}}.$$

б) Пусть $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа m. Полагая

$$T_{a,\, m} = m^{-1+\nu} S_{a,\, m}, \quad \nu = \frac{1}{n}, \quad m = M_1 p_1^{\alpha_1} = \dots = M_k p_k^{\alpha_k}$$

и определяя $a_1, \dots, a_k$ из условия $a \equiv M_1 a_1 + \dots + M_k a_k \pmod m$, имеем (вопросы 12, d и 9, a, гл. III)

$$T_{a,\, m} = T_{a_1,\, p_1^{\alpha_1}} \dots T_{a_k,\, p_k^{\alpha_k}}.$$

Но при $s = 1$ имеем

$$|T_{a,\, p}| < p^{-1+\nu} n \sqrt{p} < n p^{-\frac{1}{6}}.$$

При $1 < s \leqslant n$, $(n, p) = p$ имеем

$$|T_{a,\, p^s}| \leqslant p^{-s+s\nu} p^s \leqslant n.$$

При $1 < s \leqslant n$, $(n, p) = 1$ имеем

$$|T_{a,\, p^s}| = p^{-s+s\nu} p^{s-1} \leqslant 1;$$

наконец, случай $s > n$, ввиду $|T_{a,\, p^s}| = p^{-s+s\nu} p^{n-1} |S_{a,\, p^{s-n}}| = |T_{a,\, p^{s-n}}|$ сводится к случаю $0 < s \leqslant n$. Следовательно, при некотором C, зависящем только от n, будем иметь

$$|T_{a,\, m}| < C, \quad |S_{a,\, m}| < C m^{1-\nu}.$$

4, α) Имеем

$$\sum_{x=M}^{M+Q-1} \chi(x) = \sum_{x=1}^{p-1} \chi(x) \sum_{z=M}^{M+Q-1} \frac{1}{p} \sum_{a=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{a(x-z)}{p}}$$

Часть правой части, отвечающая $a = 0$, равна нулю. А оставшаяся часть численно не превосходит $\sqrt{p}(\ln p - 1)$.

β) Имеем

$$T = \sum_{x=M}^{M+Q-1} \frac{1}{n} \sum_{a=0}^{n-1} e^{2\pi i \frac{a(\operatorname{ind} x - s)}{n}}.$$

Часть правой части, отвечающая $a = 0$, равна $\frac{Q}{n}$. А оставшаяся часть численно меньше $\sqrt{p} \ln p$.

γ) Теорема будет доказана, если при $Y=[4n\sqrt{p}]$ будет показано, что сумма

$$T=\sum_{x=1}^{p-1}\chi(x)\sum_{y=0}^{Y-1}\sum_{y_1=0}^{Y-1}\frac{1}{p}\sum_{a=0}^{p-1}e^{2\pi i\frac{a(x-M-y-y_1)}{p}}$$

будет меньше, чем νY^2. Но часть суммы T, отвечающая $a=0$, равна нулю. А оставшаяся часть численно меньше, чем

$$\frac{2}{\sqrt{p}}\sum_{a=1}^{\frac{p-1}{2}}\min\left(Y^2, \frac{1}{4\left(\frac{a}{p}\right)^2}\right)\leqslant\frac{2}{\sqrt{p}}\left(\int\limits_0^{\frac{p}{2Y}}Y^2\,da+Y^2+\int\limits_{\frac{p}{2Y}}^{\infty}\frac{p^2}{4a^2}\,da\right)=$$

$$=Y^2\left(\frac{2\sqrt{p}}{Y}+\frac{2}{\sqrt{p}}\right), \quad |T|<Y^2\left(\frac{2\sqrt{p}}{Y}+\frac{3}{\sqrt{p}}\right)<\nu Y^2.$$

δ) Взяв $f(x)=1$ и заставляя x пробегать значения $x=\operatorname{ind} M, \ldots$ $\ldots, \operatorname{ind}(M+Q-1)$, получим (вопрос 17, а, гл. II)

$$S'=\sum_{d\backslash p-1}\mu(d)\,S_d,$$

здесь S' — число значений x с условием $(x, p-1)=1$, поэтому $S'=H$. Далее, S_d — число значений x, кратных d. Поэтому

$$H=\sum_{d\backslash p-1}\mu(d)\left(\frac{Q}{d}+\theta_d\sqrt{p}\right); \quad |\theta_d|<1, \ |\theta_1|=0.$$

ε) Имеем

$$J=\sum_{x=M}^{M+Q-1}\sum_{z=M_1}^{M_1+Q_1-1}\frac{1}{p-1}\sum_{a=0}^{p-2}e^{2\pi i\frac{a(x-z)}{p-1}}.$$

Часть правой части, отвечающая $a=0$, равна $\frac{QQ_1}{p-1}$. А оставшаяся часть численно меньше

$$\sqrt{p}\ln p\frac{1}{p-1}\sum_{a=1}^{p-2}\left|\sum_{z=M_1}^{M_1+Q_1-1}e^{2\pi i\frac{-az}{p-1}}\right|<\sqrt{p}(\ln p)^2.$$

η) Допустим, что невычетов, не превосходящих h, нет. Число невычетов степени n среди чисел

$$1, \ldots, Q; \quad Q=[\sqrt{p}(\ln p)^2]$$

можно оценить двумя способами: исходя из формулы вопроса β) и исходя из того, что невычетами могут быть лишь числа, делящиеся на простые, большие h. Получим

$$1-\frac{1}{n}<\ln\frac{\frac{1}{2}\ln p+2\ln\ln p}{\frac{1}{c}\ln p+2\ln\ln p}+O\left(\frac{1}{\ln p}\right),$$

$$0<\ln\frac{1+4\frac{\ln\ln p}{\ln p}}{1+2c\frac{\ln\ln p}{\ln p}}+O\left(\frac{1}{\ln p}\right).$$

Невозможность последнего неравенства при всех достаточно больших p и доказывает теорему.

5. Имеем

$$S=\frac{1}{\varphi(m)}\sum_{u}\sum_{v}\chi(u)\chi(v)e^{2\pi i\frac{au^nv^n}{m}},$$

где u и v пробегают приведенные системы вычетов по модулю m. Отсюда

$$S=\frac{1}{\varphi(m)}\sum_{x=0}^{m-1}\sum_{y=0}^{m-1}\nu(x)\rho(y)e^{2\pi i\frac{axy}{m}};$$

$$\nu(x)=\sum_{u^m\equiv x\,(\mathrm{mod}\,m)}\chi(u),\quad \rho(y)=\sum_{u^n\equiv y\,(\mathrm{mod}\,m)}\chi(v),$$

где имеем (вопрос 8, α), гл. VI и вопрос 11, гл. IV)

$$\sum_{x=0}^{m-1}|\nu(x)|^2\leqslant K\varphi(m),\quad \sum_{y=0}^{m-1}|\rho(y)|^2\leqslant K\varphi(m).$$

Поэтому

$$|S|\leqslant\frac{1}{\varphi(m)}\sqrt{K\varphi(m)K\varphi(m)m}=K\sqrt{m}.$$

6, α) Пусть $p-1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа $p-1$; $p_1=2$. Пусть s_1, s_1', s_2, s_2', ..., s_k, s_k' пробегают значения, подчиненные условиям:

$$s_1=0,\ s_1'=1,\qquad \text{если } \alpha_1=1,$$

$$\left.\begin{aligned}&s_1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2), && 0\leqslant s_1\leqslant 2^{\alpha_1}\\ &s_1'\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2), && 0<s_1'<2^{\alpha_1}\end{aligned}\right\},\quad \text{если } \alpha_1>1,$$

. . . .

$$\left.\begin{aligned}&s_r\equiv 0,\ \dots,\ \frac{p_r-1}{2}, && 0\leqslant s_r\leqslant p_r^{\alpha_r}\\ &s_r'\equiv 1,\ \dots,\ \frac{p_r-1}{2}, && 0<s_r'\leqslant p_r^{\alpha_r}\end{aligned}\right\},\quad \text{если } r>1.$$

Пусть $M_r=(p-1)p_r^{-\alpha_r}$ и z и z' пробегают значения

$$z=M_1s_1+M_2s_2+\ldots+M_ks_k,$$
$$z'=M_1s'_1+M_2s'_2+\ldots+M_ks'_k.$$

Легко видеть, что z пробегает

$$u=(p-1)\,2^{-k}\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{p_k}\right)$$

значений, а z' пробегает

$$v=(p-1)\,2^{-k}\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

значений, причем

$$uv=(p-1)^2\,2^{-2k}\left(1-\frac{1}{p_2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)>\frac{4}{5}(p-1)^2\,2^{-2k}.$$

Теперь рассмотрим сумму

$$W=\sum_t S_t;\quad S_t=\sum_z\sum_{z'}e^{2\pi i\frac{ag^{tz}g^{tz'}}{p}},$$

где g — какой-либо первообразный корень по модулю p и t пробегает приведенную систему вычетов по модулю p. Очевидно, имеем

$$W=uvS.$$

С другой стороны, находим

$$S_t=\sum_{x=0}^{p-1}\sum_{y=0}^{p-1}\xi(x)\,\eta(y)\,e^{2\pi i\frac{axy}{p}},$$

где $\xi(x)$ — число решений сравнения $g^{tz}\equiv x\pmod p$, а $\eta(y)$ — число решений сравнения $g^{tz'}\equiv y\pmod p$. Очевидно, $X=u$, $Y=v$ (вопрос 8, α), гл. VI). Поэтому

$$|S_t|<\sqrt{uvp},\quad |S|<\frac{\varphi(p-1)}{\sqrt{uv}}\sqrt{p}<\frac{9}{8}\,\frac{\varphi(p-1)}{p-1}\,2^k\sqrt{p}.$$

β) Имеем

$$T=\sum_g\sum_{z=M}^{M+Q-1}\frac{1}{p}\sum_{a=0}^{p-1}e^{2\pi i\frac{a(g-z)}{p}}.$$

Часть правой части этого равенства, отвечающая $a=0$, равна $\frac{\varphi(p-1)\,Q}{p}$. Оставшая часть численно не превосходит

$$\frac{9}{8}\,\frac{\varphi(p-1)}{p-1}\,2^k\sqrt{p}\,\frac{1}{p}\sum_{a=1}^{p-1}\left|\sum_{z=M}^{M+Q-1}e^{2\pi i\frac{-az}{p}}\right|<\frac{9}{8}\,\frac{\varphi(p-1)}{p-1}\,2^k\sqrt{p}\ln p.$$

Поэтому

$$T=\frac{\varphi(p-1)}{p-1}\left(Q+\theta\,\frac{9}{8}\,2^k\sqrt{p}\ln p\right).$$

ОТВЕТЫ К ЧИСЛЕННЫМ ПРИМЕРАМ

Ответы к главе 1

1, a. 17. b. 23.

2, a. α) $\delta_4=\frac{15}{11}$; β) $\alpha=\frac{19}{14}+\frac{\theta}{14\cdot 20}$.

b. α) $\delta_6=\frac{80}{59}$; β) $\alpha=\frac{1002}{739}+\frac{\theta}{739\cdot 1000}$.

3. Всего получим 22 дроби.

5, a. $2^8\cdot 3^5\cdot 11^3$. b. $2^3\cdot 3^3\cdot 5^4\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot 17\cdot 23\cdot 37$.

Ответы к главе 2

1, a. 1312.

b. $2^{119}\cdot 3^{59}\cdot 5^{31}\cdot 7^{19}\cdot 11^{12}\cdot 13^9\cdot 17^7\cdot 19^6\cdot 23^5\cdot 29^4\cdot 31^4\cdot 37^3\cdot 41^3\cdot 43^2\cdot 47^2\times$ $\times 53^2\cdot 59^2\cdot 61^2\cdot 67\cdot 71\cdot 73\cdot 79\cdot 83\cdot 89\cdot 97\cdot 101\cdot 103\cdot 107\cdot 109\cdot 113$.

2, a. $\tau(5600)=36$; $S(5600)=15\,624$.

b. $\tau(116\,424)=96$; $S(116\,424)=410\,400$.

3. Сумма всех значений равна 1.

4. α) 1152; β) 466 400.

5. Сумма всех значений равна 774.

Ответы к главе 3

1, a. 70. b. Делится.

2, a. $3^3\cdot 5^2\cdot 11^2\cdot 2999$. b. $7\cdot 13\cdot 37\cdot 73\cdot 101\ 137\cdot 17\cdot 19\cdot 257$.

Ответы к главе 4

1, a. $x\equiv 81 \pmod{337}$. b. $x\equiv 200;\ 751;\ 1302;\ 1853;\ 2404 \pmod{2755}$.

2, b. $x\equiv 1630 \pmod{2413}$.

3. $x=94+111t$; $y=39+47t$, где t — любое число.

4, a. $x\equiv 170b_1+52b_2 \pmod{221}$;

$x\equiv 131 \pmod{221}$; $x\equiv 110 \pmod{221}$; $x\equiv 89 \pmod{221}$.

b. $x\equiv 11\,151b_1+11\,800b_2+16\,875b_3 \pmod{39\,825}$.

5, a. $x\equiv 91 \pmod{120}$. b. $x\equiv 8479 \pmod{15\,015}$.

6. $x\equiv 100 \pmod{143}$; $y\equiv 111 \pmod{143}$.

7, a. $3x^4+2x^3+3x^2+2x\equiv 0 \pmod 5$.

b. $5x^6+x^5+5x^4+3x^2+3x+4\equiv 0 \pmod 7$.

8. $x^6+4x^5+22x^4+76x^3+70x^2+52x+39=0 \pmod{101}$.

9, a. $x\equiv 16 \pmod{27}$. b. $x\equiv 22;\ 53 \pmod{64}$.

10, a. $x\equiv 113 \pmod{125}$.

b. $x\equiv 43,\ 123,\ 168,\ 248,\ 293,\ 373,\ 418,\ 498,\ 543,\ 623 \pmod{625}$.

11, a. $x\equiv 2,\ 5,\ 11,\ 17,\ 20,\ 26 \pmod{30}$.

b. $x\equiv 76,\ 22,\ 176,\ 122 \pmod{225}$.

Ответы к главе 5

1, a. 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18.
b. 2, 5, 6, 8, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 29, 31, 32, 35.
2, a. α) 0; β) 2. b. α) 0; β) 2.
3, a. α) 0; β) 2. b. α) 0; β) 2.
4, a. α) $x \equiv \pm 9 \pmod{19}$; β) $x \equiv \pm 11 \pmod{29}$;
γ) $x \equiv \pm 14 \pmod{97}$.
b. α) $x \equiv \pm 66 \pmod{311}$; β) $x \equiv \pm 130 \pmod{277}$;
γ) $x \equiv \pm 94 \pmod{353}$.
5, a. $x \equiv \pm 72 \pmod{125}$. b. $x \equiv \pm 127 \pmod{243}$.
6, a. $x \equiv 13,\ 19,\ 45,\ 51 \pmod{64}$. b. $x \equiv 41, 87, 169, 215 \pmod{256}$.

Ответы к главе 6

1, a. 6. b. 18.
2, a. 3, 3, 3. b. 5, 5, 5. c. 7.
5, a. α) 0; β) 1; γ) 3. b. α) 0; β) 1; γ) 10.
6, a. α) $x \equiv 40;\ 27 \pmod{67}$; β) $x \equiv 33 \pmod{67}$;
γ) $x \equiv 8,\ 36,\ 28,\ 59,\ 31,\ 39 \pmod{67}$.
b. α) $x \equiv 17 \pmod{73}$, β) $x \equiv 50,\ 12,\ 35,\ 23,\ 61,\ 38 \pmod{73}$,
γ) $x \equiv 3,\ 24,\ 46 \pmod{73}$.
7, a. α) 0; β) 4. b. α) 0; β) 7.
8, a. α) 1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17; β) 1, 7, 8, 11, 12, 18.
b. α) 1, 6, 8, 10, 11, 14, 23, 26, 27, 29, 31, 36;
β) 1, 7, 9, 10, 12, 16, 26, 33, 34.
9, a. α) 7, 37; β) 3, 5, 12, 18, 19, 20, 26, 28, 29, 30, 33, 34.
b. α) 3, 27; 41, 52;
β) 2, 6, 7, 10, 17, 18, 26, 30, 31, 35, 43, 44, 51, 54, 55, 59.

10, α)

N	1
γ	0

β)

N	1	3
γ	0	1

γ)

N	1	3	7	9
γ	0	0	0	0
γ_0	0	1	3	2

δ)

N	1	5	7	11
γ	0	0	1	1
γ_1	0	1	0	1

ε)

N	1	2	4	7	8	11	13	14
γ_1	0	1	0	0	1	1	0	1
γ_2	0	1	2	1	3	0	3	2

η)

N	1	3	5	7	9	11	13	15
γ	0	1	0	1	0	1	0	1
γ_0	0	3	1	2	2	1	3	0

ж)

N	1	2	3	4	6	7	8	9	11	12	13	14	16	17	18	19	21	22	23	24
γ_1	0	1	7	2	8	5	3	14	16	9	19	6	4	13	15	18	12	17	11	10

Ответы к главе 7

1, α)

N	0	1
χ	0	1

β)

N	0	1	2	3
χ	0	1	0	R_c

; $c=2$.

γ)

N	0	1	2	3	4	5	6	7
χ	0	1 1	0	R_c R_{c_0}	0	R_c R_{c_0}	0	R_c 1

; $c=2$, $c_0=2$.

δ)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
χ	0	1 1 1	0	R_c R_{c_0} $R_{c_1}^3$	0	0	0	R_c 1 R_{c_1}	0	1 1 $R_{c_1}^2$

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0	R_c R_{c_0} 1	0	R_c R_{c_0} $R_{c_1}^3$	0	0	0	1 1 R_{c_1}	0	R_c R_{c_0} $R_{c_1}^2$

ε)

N	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
χ	0	R_c R_{c_0} 1	0	R_c 1 $R_{c_1}^3$	0	0	0	R_c R_{c_0} R_{c_1}	0	R_c R_{c_0} $R_{c_1}^2$

30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0	R_c 1 1	0	1 1 $R_{c_1}^3$	0	0	0	R_c R_{c_0} R_{c_1}	0	R_c 1 $R_{c_1}^2$

$c=2, \quad c_0=2, \quad c_1=4.$

ТАБЛИЦЫ ИНДЕКСОВ

$$p=3,\quad p-1=2,\quad g=2$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2								

$$p=5,\quad p-1=2^2,\quad g=2$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	3	2					

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	3						

$$p=7,\quad p-1=2\cdot 3,\quad g=3$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	2	1	4	5	3			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	2	6	4	5				

$$p=11,\quad p-1=2\cdot 5,\quad g=2$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	8	2	4	9	7	3	6
1	5									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6
1										

$$p=13,\quad p-1=2^2\cdot 3,\quad g=2$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	4	2	9	5	11	3	8
1	10	7	6							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	3	6	12	11	9	5
1	10	7								

$$p=17,\quad p-1=2^4,\quad g=3$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	14	1	12	5	15	11	10	2
1	3	7	13	4	9	6	8			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	9	10	13	5	15	11	16	14
1	8	7	4	12	2	6				

$$p=19,\quad p-1=2\cdot 3^2,\quad g=2$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	13	2	16	14	6	3	8
1	17	12	15	5	7	11	4	10	9	

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	13	7	14	9	18
1	17	15	11	3	6	12	5	10		

$$p=23,\quad p-1=2\cdot 11,\quad g=5$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	2	16	4	1	18	19	6	10
1	3	9	20	14	21	17	8	7	12	15
2	5	13	11							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	5	2	10	4	20	8	17	16	11
1	9	22	18	21	13	19	3	15	6	7
2	12	14								

$$p=29,\quad p-1=2^2\cdot 7,\quad g=2$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	5	2	22	6	12	3	10
1	23	25	7	18	13	27	4	21	11	9
2	24	17	26	20	8	16	19	15	14	

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	3	6	12	24	19
1	9	18	7	14	28	27	25	21	13	26
2	23	17	5	10	20	11	22	15		

$$p=31,\quad p-1=2\cdot 3\cdot 5,\quad g=3$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	24	1	18	20	25	28	12	2
1	14	23	19	11	22	21	6	7	26	4
2	8	29	17	27	13	10	5	3	16	9
3	15									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	9	27	19	26	16	17	20	29
1	25	13	8	24	10	30	28	22	4	12
2	5	15	14	11	2	6	18	23	7	21

$$p=37,\quad p-1=2^2 3^2,\quad g=2$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	26	2	23	27	32	3	16
1	24	30	28	11	33	13	4	7	17	35
2	25	22	31	15	29	10	12	6	34	21
3	14	9	5	20	8	19	18			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	27	17	34	31
1	25	13	26	15	30	23	9	18	36	35
2	33	29	21	5	10	20	3	6	12	24
3	11	22	7	14	28	19				

$$p=41,\quad p-1=2^3\cdot 5,\quad g=6$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	26	15	12	22	1	39	38	30
1	8	3	27	31	25	37	24	33	16	9
2	34	14	29	36	13	4	17	5	11	7
3	23	28	10	18	19	21	2	32	35	6
4	20									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	6	36	11	25	27	39	29	10	19
1	32	28	4	24	21	3	18	26	33	34
2	40	35	5	30	16	14	2	12	31	22
3	9	13	37	17	20	38	23	15	8	7

$$p=43,\quad p-1=2\cdot 3\cdot 7,\quad g=3$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	27	1	12	25	28	35	39	2
1	10	30	13	32	20	26	24	38	29	19
2	37	36	15	16	40	8	17	3	5	41
3	11	34	9	31	23	18	14	7	4	33
4	22	6	21							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	9	27	38	28	41	37	25	32
1	10	30	4	12	36	22	23	26	35	19
2	14	42	40	34	16	5	15	2	6	18
3	11	33	13	39	31	7	21	20	17	8
4	24	29								

$p=47, \quad p-1=2\cdot 23, \quad g=5$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	18	20	36	1	38	32	8	40
1	19	7	10	11	4	21	26	16	12	45
2	37	6	25	5	28	2	29	14	22	35
3	39	3	44	27	34	33	30	42	17	31
4	6	15	24	13	43	41	23			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	5	25	31	14	23	21	11	8	40
1	12	13	18	43	27	41	17	38	2	10
2	3	15	28	46	42	22	16	33	24	26
3	36	39	7	35	34	29	4	20	6	30
4	9	45	37	44	32	19				

$p=53, \quad p-1=2^2\cdot 13, \quad g=2$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	17	2	47	18	14	3	34
1	48	6	19	24	15	12	4	10	35	37
2	49	31	7	39	20	42	25	51	16	46
3	13	33	5	23	11	9	36	30	38	41
4	50	45	32	22	8	29	40	44	21	28
5	43	27	26							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	11	22	44	35
1	17	34	15	30	7	14	28	3	6	12
2	24	48	43	33	13	26	52	51	49	45
3	37	21	42	31	9	18	36	19	38	23
4	46	39	25	50	47	41	29	5	10	20
5	40	27								

$p=59, \quad p-1=2\cdot 29, \quad g=2$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	50	2	6	51	18	3	42
1	7	25	52	45	19	56	4	40	43	38
2	8	10	26	15	53	12	46	34	20	28
3	57	49	5	17	41	24	44	55	39	37
4	9	14	11	33	27	48	16	23	54	36
5	13	32	47	22	35	31	21	30	29	

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	5	10	20	40
1	21	42	25	50	41	23	46	33	7	14
2	28	56	53	47	35	11	22	44	29	58
3	57	55	51	43	27	54	49	39	19	38
4	17	34	9	18	36	13	26	52	45	31
5	3	6	12	24	48	37	15	30		

$p=61,\quad p-1=2^2\cdot3\cdot5,\quad g=2$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	6	2	22	7	49	3	12
1	23	15	8	40	50	28	4	47	13	26
2	24	55	16	57	9	44	41	18	51	35
3	29	59	5	21	48	11	14	39	27	46
4	25	54	56	43	17	34	58	20	10	38
5	45	53	42	33	19	37	52	32	36	31
6	30									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	3	6	12	24
1	48	35	9	18	36	11	22	44	27	54
2	47	33	5	10	20	40	19	38	15	30
3	60	59	57	53	45	29	58	55	49	37
4	13	26	52	43	25	50	39	17	34	7
5	14	28	56	51	41	21	42	23	46	31

$p=67,\quad p-1=2\cdot3\cdot11,\quad g=2$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	39	2	15	40	23	3	12
1	16	59	41	19	24	54	4	64	13	10
2	17	62	60	28	42	30	20	51	25	44
3	55	47	5	32	65	38	14	22	11	58
4	18	53	63	9	61	27	29	50	43	46
5	31	37	21	57	52	8	26	49	45	36
6	56	7	48	35	6	34	33			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	64	61	55	43
1	19	38	9	18	36	5	10	20	40	13
2	26	52	37	7	14	28	56	45	23	46
3	25	50	33	66	65	63	59	51	35	3
4	6	12	24	48	29	58	49	31	62	57
5	47	27	54	41	15	30	60	53	39	11
6	22	44	21	42	17	34				

$p=71,\quad p-1=2\cdot5\cdot7,\quad g=7$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	6	26	12	28	32	1	18	52
1	34	31	38	39	7	54	24	49	58	16
2	40	27	37	15	44	56	45	8	13	68
3	60	11	30	57	55	29	64	20	22	65
4	46	25	33	48	43	10	21	9	50	2
5	62	5	51	23	14	59	19	42	4	3
6	66	69	17	53	36	67	63	47	61	41
7	35									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	7	49	59	58	51	2	14	27	47
1	45	31	4	28	54	23	19	62	8	56
2	37	46	38	53	16	41	3	21	5	35
3	32	11	6	42	10	70	64	22	12	13
4	20	69	57	44	24	26	40	67	43	17
5	48	52	9	63	15	34	25	33	18	55
6	30	68	50	66	36	39	60	65	29	61

$p = 73, \quad p - 1 = 2^3 \cdot 3^2, \quad g = 5$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	8	6	16	1	14	33	24	12
1	9	55	22	59	41	7	32	21	20	62
2	17	39	63	46	30	2	67	18	49	35
3	15	11	40	61	29	34	28	64	70	65
4	25	4	47	51	71	13	54	31	38	66
5	10	27	3	53	26	56	57	68	43	5
6	23	58	19	45	48	60	69	50	37	52
7	42	44	36							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	5	25	52	41	59	3	15	2	10
1	50	31	9	45	6	30	4	20	27	62
2	18	17	12	60	8	40	54	51	36	34
3	24	47	16	7	35	29	72	68	48	21
4	32	14	70	58	71	63	23	42	64	28
5	67	43	69	53	46	11	55	56	61	13
6	65	33	19	22	37	39	49	26	57	66
7	38	44								

$p = 79, \quad p - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 13, \quad g = 3$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	4	1	8	62	5	53	12	2
1	66	68	9	34	57	63	16	21	6	32
2	70	54	72	26	13	46	38	3	61	11
3	67	56	20	69	25	37	10	19	36	35
4	74	75	58	49	76	64	30	59	17	28
5	50	22	42	77	7	52	65	33	15	31
6	71	45	60	55	24	18	73	48	29	27
7	41	51	14	44	23	47	40	43	39	

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	9	27	2	6	18	54	4	12
1	36	29	8	24	72	58	16	48	65	37
2	32	17	51	74	64	34	23	69	49	68
3	46	59	19	57	13	39	38	35	26	78
4	76	70	52	77	73	61	25	75	67	43
5	50	71	55	7	21	63	31	14	42	47
6	62	28	5	15	45	56	10	30	11	33
7	20	60	22	66	40	41	44	53		

$p = 83, \quad p - 1 = 2 \cdot 41, \quad g = 2$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	72	2	27	73	8	3	62
1	28	24	74	77	9	17	4	56	63	47
2	29	80	25	60	75	54	78	52	10	12
3	18	38	5	14	57	35	64	20	48	67
4	30	40	81	71	26	7	61	23	76	16
5	55	46	79	59	53	51	11	37	13	34
6	19	66	39	70	6	22	15	45	58	50
7	36	33	65	69	21	44	49	32	68	43
8	31	42	41							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	64	45	7	14
1	28	56	29	58	33	66	49	15	30	60
2	37	74	65	47	11	22	44	5	10	20
3	40	80	77	71	59	35	70	57	31	62
4	41	82	81	79	75	67	51	19	38	76
5	69	55	27	54	25	50	17	34	68	53
6	23	46	9	18	36	72	61	39	78	73
7	63	43	3	6	12	24	48	13	26	52
8	21	42								

$p=89, \quad p-1=2^3\cdot 11, \quad g=3$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	16	1	32	70	17	81	48	2
1	86	84	33	23	9	71	64	6	18	35
2	14	82	12	57	49	52	39	3	25	59
3	87	31	80	85	22	63	34	11	51	24
4	30	21	10	29	28	72	73	54	65	74
5	68	7	55	78	19	66	41	36	75	43
6	15	69	47	83	8	5	13	56	38	58
7	79	62	50	20	27	53	67	77	40	42
8	46	4	37	61	26	76	45	60	44	

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	9	27	81	65	17	51	64	14
1	42	37	22	66	20	60	2	6	18	54
2	73	41	34	13	39	28	84	74	44	43
3	40	31	4	12	36	19	57	82	68	26
4	78	56	79	59	88	86	80	62	8	24
5	72	38	25	75	47	52	67	23	69	29
6	87	83	71	35	16	48	55	76	50	61
7	5	15	45	46	49	58	85	77	53	70
8	32	7	21	63	11	33	10	30		

$p=97, \quad p-1=2^5\cdot 3, \quad g=5$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	34	70	68	1	8	31	6	44
1	35	86	42	25	65	71	40	89	78	81
2	69	5	24	77	76	2	59	18	3	13
3	9	46	74	60	27	32	16	91	19	95
4	7	85	39	4	58	45	15	84	14	62
5	36	63	93	10	52	87	37	55	47	67
6	43	64	80	75	12	26	94	57	61	51
7	66	11	50	28	29	72	53	21	33	30
8	41	88	23	17	73	90	38	83	92	54
9	79	56	49	20	22	82	48			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	5	25	28	43	21	8	40	6	30
1	53	71	64	29	48	46	36	83	27	38
2	93	77	94	82	22	13	65	34	73	74
3	79	7	35	78	2	10	50	56	86	42
4	16	80	12	60	9	45	31	58	96	92
5	72	69	54	76	89	57	91	67	44	26
6	33	68	49	51	61	14	70	59	4	20
7	3	15	75	84	32	63	24	23	18	90
8	62	19	95	87	47	41	11	55	81	17
9	85	37	88	52	66	39				

ТАБЛИЦА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ < 4070 И ИХ НАИМЕНЬШИХ ПЕРВООБРАЗНЫХ КОРНЕЙ

p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g
2	1	179	2	419	2	661	2	947	2	1229	2	1523	2
3	2	181	2	421	2	673	5	953	3	1231	3	1531	2
5	2	191	19	431	7	677	2	967	5	1237	2	1543	5
7	3	193	5	433	5	683	5	971	6	1249	7	1549	2
11	2	197	2	439	15	691	3	977	3	1259	2	1553	3
13	2	199	3	443	2	701	2	983	5	1277	2	1559	19
17	3	211	2	449	3	709	2	991	6	1279	3	1567	3
19	2	223	3	457	13	719	11	997	7	1283	2	1571	2
23	5	227	2	461	2	727	5	1009	11	1289	6	1579	3
29	2	229	6	463	3	733	6	1013	3	1291	2	1583	5
31	3	233	3	467	2	739	3	1019	2	1297	10	1597	11
37	2	239	7	479	13	743	5	1021	10	1301	2	1601	3
41	6	241	7	487	3	751	3	1031	14	1303	6	1607	5
43	3	251	6	491	2	757	2	1033	5	1307	2	1609	7
47	5	257	3	499	7	761	6	1039	3	1319	13	1613	3
53	2	263	5	503	5	769	11	1049	3	1321	13	1619	2
59	2	269	2	509	2	773	2	1051	7	1327	3	1621	2
61	2	271	6	521	3	787	2	1061	2	1361	3	1627	3
67	2	277	5	523	2	797	2	1063	3	1367	5	1637	2
71	7	281	3	541	2	809	3	1069	6	1373	2	1657	11
73	5	283	3	547	2	811	3	1087	3	1381	2	1663	3
79	3	293	2	557	2	821	2	1091	2	1399	13	1667	2
83	2	307	5	563	2	823	3	1093	5	1409	3	1669	2
89	3	311	17	569	3	827	2	1097	3	1423	3	1693	2
97	5	313	10	571	3	829	2	1103	5	1427	2	1697	3
101	2	317	2	577	5	839	11	1109	2	1429	6	1699	3
103	5	331	3	587	2	853	2	1117	2	1433	3	1709	3
107	2	337	10	593	3	857	3	1123	2	1439	7	1721	3
109	6	347	2	599	7	859	2	1129	11	1447	3	1723	3
113	3	349	2	601	7	863	5	1151	17	1451	2	1733	2
127	3	353	3	607	3	877	2	1153	5	1453	2	1741	2
131	2	359	7	613	2	881	3	1163	5	1459	5	1747	2
137	3	367	6	617	3	883	2	1171	2	1471	6	1753	7
139	2	373	2	619	2	887	5	1181	7	1481	3	1759	6
149	2	379	2	631	3	907	2	1187	2	1483	2	1777	5
151	6	383	5	641	3	911	17	1193	3	1487	5	1783	10
157	5	389	2	643	11	919	7	1201	11	1489	14	1787	2
163	2	397	5	647	5	929	3	1213	2	1493	2	1789	6
167	5	401	3	653	2	937	5	1217	3	1499	2	1801	11
173	2	409	21	659	2	941	2	1223	5	1511	11	1811	6

p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g
1823	5	2131	2	2437	2	2749	6	3083	2	3433	5	3733	2
1831	3	2137	10	2441	6	2753	3	3089	3	3449	3	3739	7
1847	5	2141	2	2447	5	2767	3	3109	6	3457	7	3761	3
1861	2	2143	3	2459	2	2777	3	3119	7	3461	2	3767	5
1867	2	2153	3	2467	2	2789	2	3121	7	3463	3	3769	7
1871	14	2161	23	2473	5	2791	6	3137	3	3467	2	3779	2
1873	10	2179	7	2477	2	2797	2	3163	3	3469	2	3793	5
1877	2	2203	5	2503	3	2801	3	3167	5	3491	2	3797	2
1879	6	2207	5	2521	17	2803	2	3169	7	3499	2	3803	2
1889	3	2213	2	2531	2	2819	2	3181	7	3511	7	3821	3
1901	2	2221	2	2539	2	2833	5	3187	2	3517	2	3823	3
1907	2	2237	2	2543	5	2837	2	3191	11	3527	5	3833	3
1913	3	2239	3	2549	2	2843	2	3203	2	3529	17	3847	5
1931	2	2243	2	2551	6	2851	2	3209	3	3533	2	3851	2
1933	5	2251	7	2557	2	2857	11	3217	5	3539	2	3853	2
1949	2	2267	2	2579	2	2861	2	3221	10	3541	7	3863	5
1951	3	2269	2	2591	7	2879	7	3229	6	3547	2	3877	2
1973	2	2273	3	2593	7	2887	5	3251	6	3557	2	3881	13
1979	2	2281	7	2609	3	2897	3	3253	2	3559	3	3889	11
1987	2	2287	19	2617	5	2903	5	3257	3	3571	2	3907	2
1993	5	2293	2	2621	2	2909	2	3259	3	3581	2	3911	13
1997	2	2297	5	2633	3	2917	5	3271	3	3583	3	3917	2
1999	3	2309	2	2647	3	2927	5	3299	2	3593	3	3919	3
2003	5	2311	3	2657	3	2939	2	3301	6	3607	5	3923	2
2011	3	2333	2	2659	2	2953	13	3307	2	3613	2	3929	3
2017	5	2339	2	2663	5	2957	2	3313	10	3617	3	3931	2
2027	2	2341	7	2671	7	2963	2	3319	6	3623	5	3943	3
2029	2	2347	3	2677	2	2969	3	3323	2	3631	15	3947	2
2039	7	2351	13	2683	2	2971	10	3329	3	3637	2	3967	6
2053	2	2357	2	2687	5	2999	17	3331	3	3643	2	3989	2
2063	5	2371	2	2689	19	3001	14	3343	5	3659	2	4001	3
2069	2	2377	5	2693	2	3011	2	3347	2	3671	13	4003	2
2081	3	2381	3	2699	2	3019	2	3359	11	3673	5	4007	5
2083	2	2383	5	2707	2	3023	5	3361	22	3677	2	4013	2
2087	5	2389	2	2711	7	3037	2	3371	2	3691	2	4019	2
2089	7	2393	3	2713	5	3041	3	3373	5	3697	5	4021	2
2099	2	2399	11	2719	3	3049	11	3389	3	3701	2	4027	3
2111	7	2411	6	2729	3	3061	6	3391	3	3709	2	4049	3
2113	5	2417	3	2731	3	3067	2	3407	5	3719	7	4051	6
2129	3	2423	5	2741	2	3079	6	3413	2	3727	3	4057	5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть вторая
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава 1. Пределы

Глава 2. Производные и дифференциалы

Учебное издание

Виноградов Иван Матвеевич

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Редактор ***Ж. И. Яковлева***
Художественный редактор ***Ю. Э. Иванова***
Художник ***К. Э. Семенков***
Технический редактор ***Л. А. Овчинникова***

ЛР № 010146 от 25.12.96. Изд. № ФМ-195
Сдано в набор и подп. в печать 22.12.98. Формат 60х90$^1/_{16}$
Бумага офс. № 1. Гарнитура Литературная. Печать офсетная
Объем: 32,00 усл. печ. л. + 0,31 усл. печ. л. форз.,
32,38 усл. кр.-отт., 27,00 уч.-изд. л. + 0,52 уч.-изд. л. форз.
Тираж 10 000 экз. Заказ № 81

Издательство "Высшая школа"
101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14

Отпечатано в ГУП ИПК "Ульяновский Дом печати"
432601, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14