МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АБУ РАЙХАНА БЕРУНИ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие

Часть-1

Ташкент-2014

Высшая математика. Часть-1. Абзалимов Р.Р. , Холмухамедов А.С. , Халдибаева И.Т. , Акбераджиева У. , Абдикайимова Г.А. Учебно-методическое пособие. Ташкент: ТашГТУ, 2014. 124с.

Учебно-методическое пособие предназначено студентам для выполнения самостоятельной работы. Оно также может быть использовано преподавателями вузов на практических и лекционных занятиях по высшей математике.

.

Под редакцией профессора Г.Шодмонова.

Печатается по решению научно-методического совета Ташкентского государственного технического университета имени Абу Райхана Беруни.

Рецензенты: д.ф.-м.н., проф. Абдушукуров А. (НУУз);
к.ф.-м.н., доц. Эсонов Э. (ТашГТУ)

Введение

В свете подготовки современных кадров в системе высшего образования произведены коренные изменения. Этим изменениям способствуют принятие законов «Об образование» и «О подготовке национальных кадров», освещение в них тесной связи между применением научно-технических достижений в сфере народного хозяйства и социально-экономического развития страны.

Настоящее учебно-методическое пособие содержит самостоятельные и лабораторные работы по основным разделам высшей математики. Приведены теоретические сведения и формулы, решения показательных задач, а также варианты для самостоятельной работы студентов.

Пособие состоит из двух частей. Первая часть соответствует программе первого курса, вторая часть программе второго курса.

1.ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1 Определители второго порядка и системы линейных уравнений

Определитель второго порядка, соответствующий таблице элементов

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

определяется равенством:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases},$$

если ее определитель $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Если D=0, то система является либо несовместной (когда $D_x \neq 0,\ D_y \neq 0$), либо неопределенной (когда $D_x = D_y = 0$). В последнем случае система сводится к одному уравнению (например, первому), второе же уравнение является следствием первого. Условие несовместности системы можно записать в виде

$$a_1 / a_2 = b_1 / b_2 \neq c_1 / c_2,$$

а условие неопределенности – в виде

$$a_1 / a_2 = b_1 / b_2 = c_1 / c_2 .$$

Линейное уравнение называется однородным, если свободный член этого уравнения равен нулю.

1.2 Определители третьего порядка и системы линейных уравнений

Определитель третьего порядка, соответствующий таблице

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

определяется равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Минором данного элемента определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, который получится, если в исходном определителе вычеркнуть строку и столбец, содержащие данный элемент.Алгебраическим дополнением данного элемента называется его минор, умноженный на $(-1)^k$, где $к$ – сумма номеров строки и столбца, содержащих данный элемент. Таким образом, знак, который при этом приписывается минору соответствующего элемента определителя,определяется следующей таблицей:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

В приведенном выше равенстве, выражающем определитель третьего порядка, в правой части стоит сумма произведений элементов 1-й строки определителя на их алгебраические дополнения.

Теорема 1.

Определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов любой его строки или столбца на их алгебраические дополнения.

Эта теорема позволяет вычислять значение определителя, раскрывая его по элементам любой его строки или столбца.

Теорема 2.

Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Свойства определителей

1. Определитель не изменится, если строки определителя заменить столбцами, а столбцы - соответствующими строками.
2. Общий множитель элементов какой-нибудь строки (или столбца) может быть вынесен за знак определителя.
3. Если элементы одной строки (столбца) определителя соответственно равны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.
4. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.
5. Определитель не изменится, если элементам одной строки (столбца) прибавить соответственные элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Решение системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

находится по формулам Крамера

$$x=D_x/D,\ y=D_y/D,\ z=D_z/D,$$

где

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

При этом предполагается, что $D \neq 0$ (если $D=0$, то исходная система либо неопределенная, либо несовместная).

1.3 Квадратные матрицы второго и третьего порядка

Таблица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется матрицей.

Число

$$D_A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

называется определителем, соответствующим матрице A. Матрица A называется невырожденной (неособой), если $D_A \neq 0$. Если же $(D_A = 0)$, то матрица называется вырожденной (особой). В дальнейшем будем предполагать, что $D_A \neq 0$. Матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называются квадратными матрицами соответственно второго и третьего порядков.Для большей общности ряд определений будет дан для матриц третьего порядка; применение их к матрицам второго порядка не вызывает затруднений.

Если элементы квадратной матрицы удовлетворяют условию $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется симметрической.

Две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

считаются равными (A=B) тогда и только тогда, когда равны их соответсвенные элементы, т.е. когда $a_{mn} = b_{mn}$.

Суммой двух матриц A и B называется матрица, определяемая равенством

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Произведением числа m на матрицу A называется матрица, определямая равенством

$$m \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \end{pmatrix}.$$

Произведение двух матриц A и B обозначается символом AB и определяется равенством:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix},$$

т.е. элемент матрицы-произведения, стоящий в i-й строке и k-м столбце, равен сумме произведений соответсвенных элементов i-й строки матрицы A и k-го столбца матрицы B. По отношению к произведению двух матриц переместительный закон, вообще говоря, не выполняется: $AB \neq BA$. Определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц. Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Сумма этой матрицы и любой матрицы A дает матрицу A: $A+0=A$. Единичной матрицей называется матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

При умножении этой матрицы слева или справа на матрицу A получается матрица A: $EA=AE=A$. Матрица B называется обратной по отношению к матрице A, если произведения AB и BA равны единичной матрице: $AB=BA=E$.

Для матрицы, обратной по отношению к матрице A, принято обозначение A^{-1}, т.е. $B=A^{-1}$. Всякая невырожденная квадратная матрица A имеет обратную матрицу. Обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D_A} & \frac{A_{21}}{D_A} & \frac{A_{31}}{D_A} \\ \frac{A_{12}}{D_A} & \frac{A_{22}}{D_A} & \frac{A_{32}}{D_A} \\ \frac{A_{13}}{D_A} & \frac{A_{23}}{D_A} & \frac{A_{33}}{D_A} \end{pmatrix}$$

где A_{mn} - алгебраическое дополнение элемента матрицы a_{mn} в ее определителе, т.е. произведение минора второго порядка, полученного вычеркиванием m-й строки и n-го столбца в определителе матрицы A на $(-1)^{m+n}$. Матрицей-столбцом называется матрица.

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Произведение AX определяется равенством

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

Система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

может быть записана в виде $AX=B$, где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Решение этой системы имеет вид $X=A^{-1}\cdot B$ (если $D_A\neq 0$).

1.4 Векторы и действия над ними

Свободный вектор $\overline{a}$ (т.е. такой вектор, который без изменения длины и направления может быть перенесен в любую точку пространства), заданный в координатном пространстве $OXYZ$, может быть представлен в виде

$$\overline{a}=a_x\cdot\overline{i}+a_y\cdot\overline{j}+a_z\cdot\overline{k}\ .$$

Такое представление вектора $\vec{a}$ называется его разложением по осям координат, или разложением по ортам.

Здесь a_x, a_y, a_z - проекции вектора $\vec{a}$ на соответствующие оси координат (их называют координатами вектора $\vec{a}$), *i, j, k*-

орты этих осей (единичные векторы, направление каждого из которых совпадает с положительным направлением соответствующей оси). Векторы $a_x\bar{i},\ a_y\bar{j},\ a_z\bar{k}$ в виде суммы которых представлен вектор $\vec{a}$, называются составляющими (компонентами) вектора $\vec{a}$ по осям координат. Длина (модуль) вектора $\vec{a}$ обозначается $|\vec{a}\,|$ и определяется по формуле $|\bar{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$. Направление вектора $\vec{a}$ определяется углами α, β и γ, образованными им с осями координат *OX, OY* и *OZ*. Косинусы этих углов (так называемые направляющие косинусы вектора) определяются по формулам:

$$cos\,\alpha=\frac{a_x}{|a|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};\ cos\,\beta=\frac{a_y}{|a|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$$

$$cos\,\gamma=\frac{a_z}{|a|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением

$$cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma=1.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы их разложениями по ортам, то их сумма и разность определяются по формулам

$$\bar{a}+\bar{b}=(a_x+b_x)\cdot\bar{i}+(a_y+b_y)\cdot\bar{j}+(a_z+b_z)\cdot\bar{k}$$

$$\bar{a}-\bar{b}=(a_x-b_x)\cdot\bar{i}+(a_y-b_y)\cdot\bar{j}+(a_z-b_z)\cdot\bar{k}.$$

Напомним, что сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, начала которых совмещены, изображается вектором с тем же началом, совпадающим с диагональю параллелограмма,

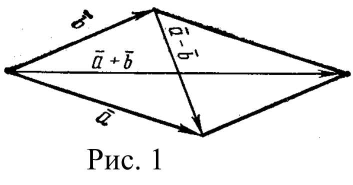


Рис. 1

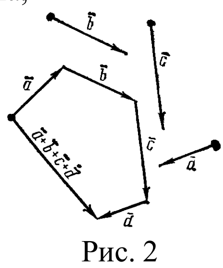


Рис. 2

сторонами которого являются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Разность $\vec{a}-\vec{b}$ этих векторов изображается вектором, совпадающим со второй диагональю того же параллелограмма, причем начало этого вектора находится в конце вектора $\vec{b}$, а конец - в конце вектора $\vec{a}$ (рис. 1). Сумма любого числа векторов может быть найдена по правилу многоугольника (рис.2).

Произведение вектора $\vec{a}$ на скалярный множитель m определяется формулой

$$m\cdot\bar{a}=m\cdot a_x\cdot\bar{i}+m\cdot a_y\cdot\bar{j}+m\cdot a_z\cdot\bar{k}.$$

Напомним, что векторы $\vec{a}$ и $m\vec{a}$ параллельны (коллинеарны) и направлены в одну и ту же сторону, если $m>0$, и в противоположные стороны, если $m<0$. В частности, если $m=\dfrac{1}{|a|}$,

то вектор $\dfrac{\bar{a}}{|a|}$ имеет длину, равную единице, и направление,

совпадающее с направлением вектора $\vec{a}$. Этот вектор называют единичным вектором (ортом) вектора $\vec{a}$ и обозначают $\vec{a}_0$. Нахождение единичного вектора того же направления, что и данный вектор $\vec{a}$, называется нормированием вектора $\vec{a}$.

Таким образом, $\vec{a}_0=\dfrac{\bar{a}}{|a|}$, или $\vec{a}=\lfloor\vec{a}\rfloor\cdot\vec{a}_0.$

Вектор $\overline{OM}$, начало которого находится в начале координат, а конец – в точке $M(x;y;z)$, называют радиусом-вектором точки M и обозначают $\bar{r}(M)$ или просто $\bar{r}$.

Так как его координаты совпадают с координатами точки M, то его разложение по ортам имеет вид $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$.

Вектор $\overline{AB}$, имеющий начало в точке $A(x_1;y_1;z_1)$ и конец в точке $B(x_2;y_2;z_2)$, может быть записан в виде $\overline{AB}=\vec{r_2}-\vec{r_1}$, где r_2 - радиус-вектор точки B, а $\vec{r_1}$ – радиус-вектор точки A. Поэтому разложение вектора $\overline{AB}$ по ортам имеет вид

$$\overline{AB}=(x_2-x_1)\bar{i}+(y_2-y_1)\bar{j}+(z_2-z_1)\bar{k}.$$

Его длина совпадает с расстоянием между точками A и B:

$$\left|\overline{AB}\right| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

В силу приведенных выше формул направление вектора $\overline{AB}$ определяется направляющими косинусами:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d};\ \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d};\quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}.$$

1.5 Скалярное произведение

Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними: $\overline{a}\cdot\overline{b} = |a|\cdot|b|\cdot\cos\varphi.$

Свойства скалярного произведения:

1. $\overline{a}\cdot\overline{a} = |a|^2$, или $\overline{a}^2 = |a|^2$.
2. $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0.$ если $\overline{a} = 0,$ либо $\overline{b} = \overline{0},$ либо $\overline{a}\perp\overline{b}$ (ортогональность ненулевых векторов).
3. $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a}$ (переместительный закон).
4. $\overline{a}(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\overline{b} + \overline{a}\overline{c}$ (распределительный закон).
5. $(m\overline{a})\overline{b} = \overline{a}(m\overline{b}) = m(\overline{a}\overline{b})$ (сочетательный закон по отношению к скалярному множителю).

Скалярные произведения ортов осей координат:

$$\overline{i}^2 = \overline{j}^2 = \overline{k}^2 = 1,\quad \overline{i}\cdot\overline{j} = \overline{j}\cdot\overline{k} = \overline{i}\cdot\overline{k} = 0.$$

Пусть векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими координатами: $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k},\ \overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$. Тогда скалярное произведение этих векторов находится по формуле

$$\overline{a}\overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\,.$$

1.6 Векторное произведение

Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется третий вектор $\overline{c}$,определяемый следующим образом (рис.3):

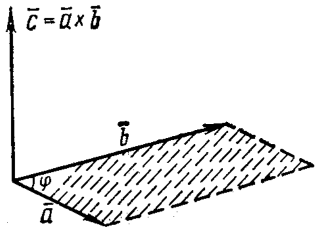


Рис. 3

1) Модуль вектора $\bar{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ($\bar{c} = |a| \cdot |b| \cdot sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$);
2) Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$;
3) Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ после приведения к общему началу ориентированы по отношению друг к другу соответствено как орты $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (в правой системе координат образуют так называемую правую тройку векторов).

Векторные произведение $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается через $\bar{a} \text{x} \bar{b}$.

Свойства векторного произведения:

1. $\overrightarrow{b\text{x}a} = -\overrightarrow{a\text{x}b}$, т.е. векторное произведение не обладает переместительным свойством.
2. $\overrightarrow{a\text{x}b} = 0$, если $\bar{a} = 0$, либо $\bar{b} = 0$, либо $\bar{a} \parallel \bar{b}$ (коллинеарность ненулевых векторов).
3. $(m\vec{a})\text{x}\vec{b} = \vec{a}\text{x}(m\vec{b}) = m(\overrightarrow{a\text{x}b})$ (сочетательное свойство по отношению к скалярному множителю).
4. $\vec{a}\text{x}(\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{a\text{x}b} + \overrightarrow{a\text{x}c}$ (распределительное свойство).

Векторное произведения координатных ортов $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ и $\vec{k}$:

$$\vec{\imath}\text{x}\vec{\imath} = \vec{\jmath}\text{x}\vec{\jmath} = \vec{k}\text{x}\vec{k} = 0,$$

$$\vec{\imath}\text{x}\vec{\jmath} = -\vec{\jmath}\text{x}\vec{\imath} = \vec{k}; \quad \vec{\jmath}\text{x}\vec{k} = -\vec{k}\text{x}\vec{\jmath} = \vec{\imath}; \quad \vec{k}\text{x}\vec{\imath} = -\vec{\imath}\text{x}\vec{k} = \vec{\jmath}.$$

Векторное произведение векторов $\vec{a} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$ и $\vec{b} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$ удобнее всего находить по формуле

$$\overrightarrow{a\text{x}b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

1.7 Смешанное произведение

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\overrightarrow{a\text{x}b}$ на вектор $\vec{c}$, т.е. $(\vec{a}\text{x}\vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Смешанное произведение трех векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Свойства смешанного произведения:

1. Смешанное произведение трех векторов равно нулю, если:
   а) хоть один из перемножаемых векторов равен нулю;
   б) два из перемножаемых векторов коллинеарны;
   в) три ненулевых вектора параллельны одной и той же плоскости (компланарность).
2. Смешанное произведение не изменяется, если в нем поменять местами знаки векторного (x) и скалярного (.) умножения, т.е. $(\overrightarrow{a\text{x}b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b}\text{x}\vec{c})$.

   В силу этого свойства смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ условимся записывать в виде $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.
3. Смешанное произведение не изменяется, если переставлять перемножаемые векторы в круговом порядке: $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{a} = \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}$.
4. При перестановке любых двух векторов смешанное произведение изменяет только знак:
   $\bar{b} \cdot \bar{a} \cdot \bar{c} = -\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$; $\bar{c} \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} = -\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$; $\bar{a} \cdot \bar{c} \cdot \bar{b} = -\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$.

Пусть векторы заданы их разложениями по ортам:

$\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$; $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$; $\bar{c} = x_3\bar{i} + y_3\bar{j} + z_3\bar{k}$.

Тогда

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Из свойств смешанного произведения трех векторов вытекает следующее:

необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов служит условие $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$;

объем V_1 параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, и объем V_2 образованной ими треугольной пирамиды находятся по формулам $V_1=|\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}|$,

$$V_2=\frac{1}{6}V_1=\frac{1}{6}|\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}|.$$

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ.

2.1 Деление отрезка в данном отношении

Точку M координатной оси OX, имеющую абсциссу x, принято обозначать через $M(x)$.

Расстояние d между точками $\mathrm{M}_1(\mathrm{x}_1)$ и $M_2(x_2)$ оси при любом расположении точек на оси определяется формулой

$$d=|x_2-x_1|. \qquad (1)$$

Пусть на произвольной прямой задан отрезок AB (A-начало отрезка, B - его конец); тогда всякая третья точка C этой прямой делит отрезок AB в некотором отношении λ, где $\lambda=\pm|AC|:|CB|$. Если отрезки AC и CB направлены в одну сторону, то λ приписывают знак «+»; если же отрезки AC и CB направлены в противоположные стороны, то λ приписывают знак «-». Иными славами, λ положительно, если точка C лежит между точками A и B и отрицательно, если точка C лежит на прямой вне отрезка AB.

Если точки A и B лежат на оси OX, то координата точки $C(\overline{x})$, делящей отрезок между точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ в отношении λ, определяется по формуле

$$\overline{x} = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}. \qquad (2)$$

В частности, при $\lambda=1$ получается формула для координаты середины отрезка:

$$\overline{x} = \frac{x_1+x_2}{2}. \qquad (3)$$

2.2 Прямоугольные координаты на плоскости

Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат $XOУ$, то точку M этой плоскости, имеющую координаты x и y, обозначают $M(x,y)$.

Расстояние d между точками $M_1(x_1,y_1)$,и $M_2(x_2,y_2)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

В частности, расстояние d точки $M(x,y)$ от начала координат определяется по формуле

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (2)$$

Координаты точки $C(\overline{x};\overline{y})$, делящей отрезок между точками $A_1(x_1,y_1$ и $A_2(x_2,y_2)$ в заданном отношении λ Определяются по формулам

$$\overline{x} = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad \overline{y} = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad (3)$$

В частности, при $\lambda=1$ получается формула для координаты середины отрезка:

$$\overline{x} = \frac{x_1+x_2}{2}; \qquad \overline{y} = \frac{y_1+y_2}{2}. \qquad (4)$$

Площадь треугольника с вершинами $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|.$$

Формулу для площади треугольника можно записать в виде $S=\frac{1}{2}\Delta$, где $\Delta=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{Vmatrix}$.

2.3 Полярные координаты

В полярной системе координат положение точки M на плоскости определяется ее расстоянием $|OM|=\rho$ от полюса O (ρ-полярный радиус-вектор точки) и углом θ, образованным отрезком OM с полярной осью OX (θ-полярный угол точки). Угол θ считается положительным при отсчете от полярной оси против часовой стрелки. Если точка M имеет полярные координаты $\rho > 0,$ и $0 \le \theta < 2\pi,$ то ей же отвечает и бесчисленное множество пар полярных координат $(\rho;\theta+2k\pi),$ где $k \in Z$. Если начало декартовой прямоугольной системы координат совместить с полюсом, а ось OX направить по полярной оси, то прямоугольные координаты x и y точки M и ее полярные координаты ρ и θ связаны следующими формулами:

$$x=\rho\cos\theta, \qquad y=\rho\sin\theta;$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad tg\theta=\frac{y}{x}.$$

2.4 Прямая

2.4.1 Общее уравнение прямой.

Всякое уравнение первой степени относительно x и y, т.е. уравнение вида

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

(где A, B и C - постоянные коэффициенты, причем $A^2+B^2\neq 0$ определяет на плоскости некоторую прямую. Это уравнение называется общим уравнением прямой.

Частные случае.

1. $C=0;\ A\neq 0;\ B\neq 0.$ Прямая, определяемая уравнением $Ax+By=0$ проходит через начало координат.

2. $A=0;\ B\neq 0;\ C\neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $By+C=0$ (или $y=-C/B$), параллельна оси OX.
3. $B=0;\ A\neq 0;\ C\neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $Ax+C=0$ (или $x=-C/A$), параллельна оси $OУ$.
4. $B=C=0;\ A\neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $Ax=0$ (или $x=0$), совпадает с осью $OУ$.
5. $A=C=0;\ B\neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $By=0$ (или $y=0$), совпадает с осью OX.

2.4.2 Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Если в общем уравнении прямой $B\neq 0$. То, разрешив его относительно y, получим уравнение вида

$$y=kx+b \qquad (2)$$

(здесь $k=-A/B,\ b=-C/B$). Его называют уравнением прямой с угловым коэффициентом, поскольку $k=tg\alpha,$ где α – угол, образованный прямой с положительным направлением оси OX. Свободный член уравнения b равен ординате точки пересечения прямой с осью $OУ$.

2.4.3 Уравнение прямой в отрезках.

Если в общем уравнении прямой $C\neq 0$, то, разделив все его члены на –С, получим уравнение вида

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (3)$$

(здесь $a=-C/A,\ b=-C/B$). Его называют уравнением прямой в отрезках; в нем a является абсциссой точки пересечения прямой с осью OX, а b – ординатой точки пересечения прямой с осью ОУ. Поэтому a и b называют отрезками прямой на осях координат.

2.4.4 Нормальное уравнение прямой.

Если обе части общего уравнения прямой умножить на число $\mu = 1/\pm\sqrt{A^2+B^2}$ (которое называется нормирующим множителем), причем знак перед радикалом выбрать так, чтобы выполнялось условие $\mu C<0$, то получится уравнение

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0. \qquad (4)$$

Это уравнение называется нормальным уравнением прямой. Здесь p - длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ – угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси OX.

2.4.5 Угол между прямыми. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Острый угол между прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ определяется по формуле

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|. \qquad (1)$$

Условие параллельности прямых имеет вид $k_1 = k_2$.
Условие перпендикулярности прямых имеет вид $k_1 = -1/k_2$.
Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент $к$ и проходящей через точку $M(x_1, y_1)$, записывается в виде

$$y - y_1 = k\,(x - x_1). \qquad (2)$$

Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, записывается в виде

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \qquad (3)$$

И угловой коэффициент этой прямой находится по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (4)$$

Если $x_1 = x_2$, то уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, имеет вид $x = x_1$.
Если $y_1 = y_2$. то уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, имеет вид $y = y_1$.

2.4.6 Пересечение прямых. Расстояние от точки до прямой.

Если $A_1/A_2 \neq B_1/B_2$, то координаты точки пересечения прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ находятся путем совместного решения уравнений этих прямых. Расстояние от точки $M(x_0,y_0)$ до прямой $Ax+Bx+C=0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Биссектрисы углов между прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ имеют уравнения

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0.$$

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

3.1 Плоскость

Уравнение плоскости в векторной форме имеет вид

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = p$$

Здесь $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ - радиус вектор текущей точки $M(x,y,z)$ плоскости; $\overline{n} = \overline{i}\cos\alpha + \overline{j}\cos\beta + \overline{k}\cos\gamma$ - единичный вектор, имеющий направление перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат; α, β, γ - углы, образованные этим перпендикуляром с осями координат OX, OY, OZ; p– длина этого перпендикуляра. При переходе к координатам это уравнение принимает вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

(нормальное уравнение плоскости).

2) Уравнение всякой плоскости может быть записано также в виде $Ax+By+Cz+D=0,$ если $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ (общее уравнение). Здесь A, B, C можно рассматривать как координаты некоторого вектора $\overline{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k},$ перпендикулярного плоскости (нормального вектора плоскости). Для приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду надо все члены уравнения умножить на нормирующий множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{|\overline{n}|} = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где знак перед радикалом противоположен знаку свободного члена D в общем уравнении плоскости.

3)Частные случаи расположения плоскости, определяемой общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0;$

$A=0$; параллельна оси $OX;$

$B=0$; параллельна оси OY;

$C=0$; параллельна оси OZ;

$D=0$; проходит через начало координат;

$A=B=0$; перпендикулярна оси OZ (параллельна плоскости XOY);

$A=C=0$; перпендикулярна оси OY (параллельна плоскости XOZ);

$B=C=0$; перпендикулярна оси OX (параллельна плоскости YOZ);

$A=D=0$; проходит через ось OX;

$B=D=0$; проходит через ось OY;

$C=D=0$; проходит через ось OZ;

$A=B=D=0$; совпадает с плоскостью XOY $(z=0)$;

$A=C=D=0$; совпадает с плоскостью XOZ $(y=0)$;

$B=C=D=0$; совпадает с плоскостью YOZ $(x=0)$.

Если в общем уравнении плоскости коэффициент $D\neq 0$, то, разделив все члены уравнения на $-D$, уравнение плоскости можно привести к виду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

(здесь $a=-D/A$, $b=-D/B$, $C=-D/C$). Это уравнение называется уравнением плоскости в отрезках: в нем a, b, c - соответственно абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями OX, OY, OZ

4) Угол φ между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Условие параллельности плоскостей: $A_1/A_2=B_1/B_2=C_1/C_2,$

Условие перпендикулярности плоскостей $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$
5) Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, определяемой уравнением $Ax+By+Cz+D=0,$ находится по формуле

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Оно равно взятому по абсолютной величине результату подстановки координат точки в нормальное уравнение плоскости; знак результата этой подстановки характеризует взаимное расположение точки и начала координат относительно данной плоскости; «плюс», если точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и начало координат расположены по разные стороны от плоскости, и «минус», если они расположены по одну сторону от плоскости.
6) Уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}=A\bar{i}+B\bar{j}+C\bar{k}$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

7) Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(\bar{r}_1), M_2(\bar{r}_2), M_3(\bar{r}_3)$ (здесь $\bar{r}_1=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k},\ \bar{r}_2=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k},\ \bar{r}_3=x_3\bar{i}+y_3\bar{j}+z_3\bar{k}$), проще найти из условия компланарности векторов $\bar{r}-\bar{r}_1,\ \bar{r}_2-\bar{r}_1, \bar{r}_3-\bar{r}_1$, где $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ - радиус-вектор текущей точки искомой плоскости M :

$$(\bar{r}-\bar{r}_1)(\overline{r_2}-\bar{r}_1)(\overline{r_3}-\bar{r}_1)=0,$$

Или в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

3.2 Прямая в пространстве

1) Прямая может быть задана уравнениями двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases},$$

пересекающихся по этой прямой.
2) Исключив поочередно x и y из предыдущих уравнений, получим уравнения , $x=az+c$, $y=bz+d$. Здесь прямая определена двумя плоскостями, проецирующими ее на плоскости XOZ и YOZ .
3) Уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

4) Так называемые канонические уравнения

$$\frac{x-x_1}{\ell}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

определяют прямую, проходящую через точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и параллельную вектору $\bar{s}=\ell\bar{i}+m\bar{j}+n\bar{k}$.
В частности, эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma},$$

где α, β, γ -углы, образованные прямой с осями координат. Направляющие косинусы прямой находятся по формулам

$$\cos\alpha=\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}},\quad \cos\beta=\frac{m}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{n}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}}.$$

5) От канонических уравнений прямой, вводя параметр t, нетрудно перейти к параметрическим уравнениям:

$$\begin{cases} x=\ell t+x_1 \\ y=mt+y_1 \\ z=nt+z_1 \end{cases}$$

6) Угол между двумя пямыми, заданными их каноническими уравнениями

$$\frac{(x-x_1)}{t_1}=\frac{(y-y_1)}{m_1}=\frac{(z-z_1)}{n_1}$$

и

$$\frac{(x-x_2)}{t_2}=\frac{(y-y_2)}{m_2}=\frac{(z-z_2)}{n_2},$$

определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\ell_1\ell_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{\ell_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{\ell_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Условие параллельности двух прямых

$$\ell_1/\ell_2=m_1/m_2=n_1/n_2;$$

условие перпендикулярности двух прямых:

$$\ell_1\ell_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

7) Необходимое и достаточное условие нахождения двух прямых, заданных их каноническими уравнениями, в одной плоскости (условие компланарности двух прямых):

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

Если величины ℓ_1, m_1, n_1 не пропорциональны величинам ℓ_2, m_2, n_2, то указанное соотношение является необходимым и достаточным условием пересечения двух прямых в пространстве.

8) Угол между прямой $(x-x_1)/\ell=(y-y_1)/m=(z-z_1)/n$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{A\ell+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости:

$$A\ell+Bm+Cn=0;$$

условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$A/\ell=B/m=C/n$$

9) Для определения точки пересечения прямой

$$(x-x_0)/\ell=(y-y_0)/m=(z-z_0)/n$$

с плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0$$

нужно решить совместно их уравнения, для чего следует воспользоваться параметрическими уравнениями прямой

$$x=\ell t+x_0, \qquad y=mt+y_0, \qquad z=nt+z_0$$

а) если $A\ell+Bm+Cn\neq 0$, то прямая пересекает плоскость;

б) если $A\ell+Bm+Cn=0$, и $Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq 0,$ то прямая параллельна плоскости;

в) если $A\ell+Bm+Cn=0$, и $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0,$ то прямая лежит в плоскости.

Расчетные задания

Задание 1. В задаче 1 доказать совместность систем уравнений и решить систему методом Крамера и матричным методом.

Задание 2. В задаче 2 написать разложение вектора $\vec{x}$ по базисным векторам $\vec{p}, \ \vec{q}, \ \vec{r}$.

Задание 3. В задаче 3 проверить коллинеарность векторов $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$

Задание 4. В задаче 4 вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Задание 5. Найти величину момента силы $\vec{F}=\overrightarrow{AB}$, приложенной в точке A, относительно точки C и его направляющие косинусы.

Задание 6. В задаче 6 вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершин A_4 на грань A_1, A_2, A_3.

Задание 7. В задаче 7 по заданным координатам вершин треугольника ABC составить: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты, проведенной из вершины C; 3) найти расстояние от вершины B до стороны AC; 4) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла A. Задачу выполнить с чертежом.

Задание 8. В задаче 8 написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярной вектору $\overrightarrow{BC}$.

Задание 9. В задаче 9 найти расстояние от точки M_0 до плоскости α, проходящей через три точки.

Задание 10. В задаче 10 найти угол между плоскостями или угол между плоскостью и прямой, или же угол между двумя прямыми (см. условие задачи).

Задание 11. В задаче 11 написать канонические и параметрические уравнения прямой, заданной общими уравнениями.

Задание 12. В задаче 12 найти точку пересечения прямой и плоскости.

Показательный вариант

Задача 1. Доказать совместность системы и найти её решение по методу Крамера и матричным методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

Решение. Вычисляем определитель Δ , составленный из коэффициентов перед неизвестными

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 8 - 2\cdot 4 + 1\cdot(-4) = 12 \neq 0$$

Так как $\Delta \neq 0$ система совместна и имеет единственное решение. Находим решение системы:

а) по методу Крамера:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8 - 2 \cdot (-8) + 1 \cdot (-32) = 24,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-8) - 5 \cdot 4 + 1 \cdot 20 = -24,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & \mathrm{I} \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 3 \cdot 32 - 2 \cdot 20 + 5 \cdot (-4) = 36.$$

Таким образом,

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{24}{12} = 2;$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-24}{12} = -2;$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{36}{12} = 3.$$

б) матричным методом:

перепишем систему в виде

$$AX=B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения имеет вид $X = A^{-1} \cdot B$. Найдем A^{-1} по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – есть

алгебраическое дополнение элемента a_{ij} , где $i = \overline{1,3}$ $j = \overline{1,3}$.

матрицы A $A_{II} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$ и.т.д. $|A| = \Delta = 12.$

Таким образом, $A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} \cdot B = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} (8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$

Задача 2. Написать разложение вектора $\vec{x}$ по базисным векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, где $\bar{x} = \{15, \quad -20, \quad -1\}$, $\vec{p} = \{0, \quad 2, \quad 1\}$,

$$\vec{q} = \{0, \quad 1, \quad -1\}, \qquad \vec{r} = \{5, \quad -3, \quad 2\}.$$

Решение. Разложение ищем в виде $\vec{x} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}$ где α, β, γ неизвестные. Запишем это векторное уравнение в координатной форме

$$15\bar{i} - 20\bar{j} - \bar{k} = \alpha(2\bar{j} + \bar{k}) + \beta(\bar{j} - \bar{k}) + \gamma(5\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k})$$

$$15\bar{\imath} - 20\bar{\jmath} - \bar{k} = 5\gamma \cdot \bar{i} + (2\alpha + \beta - 3\gamma) \cdot \bar{j} + (\alpha - \beta + 2\gamma) \cdot \bar{k}$$

$$\begin{cases} 15 = 5\gamma \\ -20 = 2\alpha + \beta - 3\gamma \\ -1 = \alpha - \beta + 2\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 3 \\ 2\alpha + \beta = -11 \\ \alpha - \beta = -7 \end{cases}$$

$$\gamma = 3, \quad 3\alpha = -18 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -6, \quad \beta = \alpha + 7 = 1.$$

Таким образом, имеем $\alpha = -6$, $\beta = 1$, $\gamma = 3$.

Ответ: $\bar{x} = -6\bar{p} + \bar{q} + 3\bar{r}$.

Задача 3. Коллинеарны ли векторы $\bar{c_1}$ и $\bar{c_2}$?

$$\bar{c_1} = 4\bar{a} - 3\bar{b}, \qquad \bar{c_2} = 9\bar{b} - 12\bar{a}$$

где

$$\bar{a} = \{-1, 2, 8\}$$
$$\bar{b} = \{3, 7, -1\}$$

Решение.

$4\bar{a} = \{-4, 8, 32\}$ $\qquad$ $9\bar{b} = \{27, 63, -9\}$

$-3\bar{b} = \{-9, -21, 3\}$ $\qquad$ $-12\bar{a} = \{12, -24, -96\}$

$$\overline{c_1} = 4\bar{a} - 3\bar{b} = \{-13, -13, 35\}$$
$$\overline{c_2} = 9\bar{b} - 12\bar{a} = \{39, 39, -105\}$$
Условие коллинеарности векторов

$\dfrac{x_{c_1}}{x_{c_2}} = \dfrac{y_{c_1}}{y_{c_2}} = \dfrac{z_{c_1}}{z_{c_2}} = \lambda$; $\qquad \dfrac{-13}{39} = \dfrac{-13}{39} = \dfrac{35}{-105} = -\dfrac{1}{3}$

Ответ: вектора $\overline{c_1}$, и $\overline{c_2}$ коллинеарны и противоположно направлены.

Задача 4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

$\bar{a} = 3\bar{p} + 2\bar{q}$, $\quad \bar{b} = 2\bar{p} - \bar{q}$

$|\bar{p}| = 4$, $\quad |\bar{q}| = 3$, $\quad (\bar{p},^\wedge \bar{q}) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Решение. $S_{пар} = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$

$\bar{a} \times \bar{b} = (3\bar{p} + 2\bar{q}\,) \times (2\bar{p} - \bar{q}) = 6\bar{p} \times \bar{p} - 3\bar{p} \times \bar{q} +$
$+2\bar{q} \times 2\bar{p} - 2\bar{q} \times \bar{q} = 7\bar{q} \times \bar{p},$

так как $\bar{p} \times \bar{p} = 0$, $\quad \bar{q} \times \bar{q} = 0$, $\quad \bar{p} \times \bar{q} = -\bar{q} \times \bar{p}$.

$$\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = 7|\bar{q}||\bar{p}|.sin\frac{3\pi}{4} = 7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 42\sqrt{2}$$

Ответ: $S_{пар} = 42\sqrt{2} \cdot$ кв $\cdot$ ед.

Задача 5. Найти величину момента силы $\bar{F} = \overline{AB}$, приложенной в точке A, относительно точки C и его направляющие косинусы, где $A\ (3,\ 4,\ 5)$; $B\ (-I,\ 7,\ 0)$; $C\ (I, -I.\ I)$.

Решение:

$\bar{F} = \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \{-4\ ,\ 3, -5\ \}$.

$\bar{M} = mom_c\,\bar{F} = \overline{C\,A} \times \overline{A\,B} = \overline{C\,A} \times \bar{F}, \overline{C\,A} = \{2, 5, 4\}$.

$$\bar{M} = mom_c\,\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & 5 & 4 \\ -4 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -37\bar{\imath} - 6\bar{\jmath} + 26\bar{k}.$$

$|\bar{M}| = \sqrt{(-37)^2 + (-6)^2 + (26)^2} = \sqrt{2081}.$

$Cos\,\alpha = \dfrac{M_x}{|\bar{M}|} = \dfrac{-37}{\sqrt{2081}}$; $\quad cos\beta = \dfrac{M_x}{|\bar{M}|} = \dfrac{-6}{\sqrt{2081}}$

$$Cos\,\gamma = \frac{M_z}{|\overline{M}|} = \frac{26}{\sqrt{2081}};$$

Ответ: $|\overline{M}| = \sqrt{2081}$, $Cos\alpha = \frac{-37}{\sqrt{2081}}$,

$Cos\,\beta = \frac{-6}{\sqrt{2081}}$, $Cos\,\gamma = \frac{26}{\sqrt{2081}}$.

Задача 6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках *A1, A2, A3 A4* и его высоту, опущенную из вершины *A4* на грань *A1, A2, A3*

Дано: $A_1(I,\ -I,\ 2)$, $A_2(2,\ I,\ 2)$,
$A_3(I,\ I,\ 4)$, $A_4(6,\ -3,\ 8)$.

Решение.

$$V_{memp} = \frac{1}{3}\cdot h\cdot S_{\Delta\, A_1,A_2,A_3.} = \frac{1}{6}|\overline{A_1A_2}\ \cdot\overline{A_1A_3}\ \cdot\overline{A_1A_4}|.$$

$$\overline{A_1A_2} = \overline{OA}_2 - \overline{OA}_1 = \{1,2,0\}$$

$$\overline{A_1A_3} = \overline{OA}_3 - \overline{OA}_1 = \{0,2,2\},\quad \overline{A_1A_4} = \{5,-2,6\}$$

$$S_{\Delta_{A_1A_{A_3}}} = \frac{1}{2}|\overline{A_1A_2}\ \times\ \overline{A_1A_3}| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{\bar{k}}\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{matrix}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2}|4\bar{\imath}\ \ -2\bar{\jmath}\ \ +2\bar{\kappa}| = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{6}.$$

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix}I & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 5 & -2 & 6\end{vmatrix} = \frac{1}{6}(I6+\ \ 20) = 6.$$

$$h = \frac{3\cdot V}{S} = \frac{3\cdot 6}{\sqrt{6}} = 3\sqrt{6}.$$

Ответ: $V_{\text{тетр}} = 6$ куб единица, $h = 3\sqrt{6}$ единица.

Задача 7. Даны координаты вершин треугольника *ABC:*

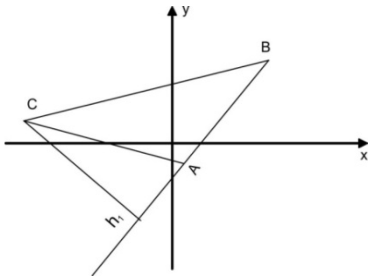
$A\,(1\,,\ \ -2);\quad B\,(7,\ \ 6);\quad C\,(-11\,,\ 3).$

1) составить уравнение прямой *AB*;

2) составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;

3) найти расстояние от вершины *B* до стороны *AC*;

4) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла A .



Решение.

1) для составления прямой AB, проходящей через точки А$(1,-2)$, $B(7,6)$, воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки, т.е.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

отсюда имеем

$$\frac{x-1}{7-1}=\frac{y+2}{6+2}$$

$$8x-8=6y+12,\ 4x-3y-10=0.\ (AB)$$

Ответ: $4x-3y-10=0$.

2) $h_c \perp AB$, поэтому угловые коэффициенты связаны соотношением

$K_{h_c}=\frac{-1}{K_{AB}}$ или $K_{h_c}=-\frac{3}{4}$.

$$y-y_1=к(x+x_1),\quad y-3=-\frac{3}{4}(x+11)$$

или

$$3x+4y+21=0$$ - уравнение h_c

Ответ: $3x+4y+21=0$.

3) Для того чтобы найти расстояния от вершины B до прямой AC сначала составим уравнение прямой, проходящей через точки $A(1,-2)$ и $C(-11,3)$

$$\frac{x-1}{-11-1}=\frac{y+2}{3+2}$$

$$5x+12y+19=0 \qquad (AC)$$

Воспользуемся формулой для вычисление расстояния от точки *B* до прямой *AC,* т.е. формулой

$$d(B,AC)=\frac{|A\cdot x_B + \quad B\cdot y_B + \quad C|}{\sqrt{A^2+\ B^2}}$$

имеем

$$d(B,AC)=\frac{|5\cdot 7+ \quad 12\cdot 6+ \quad 19|}{\sqrt{25+ \quad 144}}=\frac{126}{13},$$

Ответ:

$$d(B,AC)\ =\frac{126}{13}.$$

4) уравнение биссектрисы составим как геометрическое место точек равноудаленных сторон *AC* и *AB*. Нормируем уравнения *AC* и *AB*.

AB :

$$\frac{4}{5}x-\ \frac{3}{5}y-\frac{10}{5}=\ 0,$$

AC :

$$-\frac{5}{13}x-\ \frac{12}{13}y-\ \frac{19}{13}=0$$

Уравнение биссектрисы

$$\left|\frac{4}{5}x- \quad \frac{3}{5}y- \quad \frac{10}{5}\right|=\ \left|-\frac{5}{13}x- \quad \frac{12}{13}y- \quad \frac{19}{13}\right|$$

Из условии, что точки *B* и *C* лежат в разных сторон биссектрисы, получим

$$11x+ \quad 3y- \quad 5=0.$$

Ответ:

$$11x+ \quad 3y- \quad 5=0.$$

Задача 8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку *A(5,3,-1),* перпендикулярной вектору $\overrightarrow{BC},$ где

B(0,0,-3), C(5,-1,0),

Решение: Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через одну точку, т.е.

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0,$$

где вектор $\bar{n}=\{a,b,c,\}$ есть нормальный вектор к плоскости. Таким образом, $\bar{n}=\overline{BC}=\{5,-1,3\}$. и уравнение искомой плоскости имеет вид

$$5(x-5)-(y-3)+3(z+1)=0,$$

или

$$5x-y+3z-19=0,$$

Ответ: $5x-y+3z-19=0,$

Задача 9. Найти расстояние от точки $M_0\ (I,-I,2)$ до плоскости $\alpha,$ проходящей через три точки $M_1(I,5,-7), M_2(-3,6,3),\ M_3(-2,7,3).$

Решение. Уравнение плоскости α ищем в векторной форме $\overline{M_1M}\ \ \overline{M_1M_2}\,\overline{M_1M_3}=0$ запишем смешанное произведение трех векторов в координатной форме:

$$\alpha:\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+\ \ 7\\ -3-1 & 6-5 & 3+\ \ 7\\ -2-1 & 7-5 & 3+\ \ 7\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+7\\ -4 & 1 & 10\\ -3 & 2 & 10\end{vmatrix}=0,$$

или

$$\alpha:\quad (2x-2y+z+15)=0.$$

$\alpha:\quad (2x-2y+z+15)=0$ нормируем уравнение плоскости, имеем

$$\alpha:\quad -\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-5=0:$$

Вычисляем расстояние от точки $M_\circ(I,-I,\ 2)$ до плоскости $\alpha.$

$$d=\left|-\frac{2}{3}x_0+\frac{2}{3}y_0-\frac{1}{3}z_0-5\right|=\left|-\frac{2}{3}\cdot 1-\frac{2}{3}\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot 2-5\right|=7$$

Ответ: $d = 7$.

Задача 10. Найти угол между плоскостями

α $\quad x + 2y - 2z - 7 = 0,$

β: $\quad x + y - 35 = 0.$

Решение.

$$\overline{n_1} = \{I, 2, -2\},$$
$$\overline{n_2} = \{I, I, 0\}$$
$$Cos\varphi = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 0}{\sqrt{1+4+4} \cdot \sqrt{1+1+0}} = \frac{3}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

или

$$cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Ответ:

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Задача 11. Написать канонические и параметрические уравнения прямой

$$\ell: \begin{cases} 2x - 3y - 2z + 6 = 0, \\ x - 3y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Канонические уравнения прямой

$$\frac{x - x_\circ}{m} = \frac{y - y_\circ}{n} = \frac{z - z_\circ}{p} \qquad (1)$$

Направляющий вектор $\vec{S} = \{m, n, p\}$ прямой (1) имеет в вид $\vec{S} = \overline{n_1} \mathrm{x} \overline{n_2}$, где $\overline{n_1} = \{2, -3, -2\}$, $\quad \overline{n_2} = \{1, -3, 1\}$

$$\vec{S} = \overline{n_1} \mathrm{x} \overline{n_2} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -9\bar{\imath} - 4\bar{\jmath} - 3\bar{k},$$

$$\vec{S} = -9\bar{\imath} - 4\bar{\jmath} - 3\bar{k} = \{-9, -4, -3\}$$

Находим точку $M_\circ(x_\circ \;\; y_\circ \;\; z_\circ)$

Ищем эту точку на плоскости XOY, т.е в уравнениях прямой ℓ положим $z_\circ = 0$

Имеем

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ x - 3y + 3 = 0 \end{cases}$$

решая систему относительно x и y, находим

$x_\circ = -3$, $y_\circ = 0$, $z_\circ = 0$, $M_\circ(-3, 0, 0)$,

Подставляя найденные $x_\circ, y_\circ, z_\circ$ в уравнение (I), имеем

$$\frac{x+3}{-9} = \frac{y-0}{-4} = \frac{z-0}{-3}$$

или

$$\frac{x+3}{9} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}.$$

Приравняв эти отношения к t, получим параметрические уравнения прямой ℓ.

$x = 9t - 3$, $y = 4t$, $z = 3t$,

Ответ:

$$\frac{x+3}{9} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3};$$

$$x = 9t - 3, \quad y = 4t, \quad z = 3t.$$

Задача 12. Найти точку $M_\circ(x_\circ y_\circ z_\circ)$ пересечения прямой

$$\frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2},$$

и плоскости

$$2x + y + 7z - 3 = 0.$$

Решение. Запишем параметрические уравнения заданной прямой:

$$x = 3t + 7, \quad y = t + 3, \quad z = -2t - 1. \qquad (*)$$

Подставляя полученные x,y,z в уравнение заданной плоскости, имеем

$$2(3t + 7) + (t + 3) + 7(-2t - 1) - 3 = 0, \; 7t = 7, \; t = 1$$

Таким образом,

$$x_\circ = 3 \cdot 1 + 7 = 10, \quad y_\circ = 4, \quad z_\circ = -3,$$

Ответ: M_0 (10,4,-3).

Варианты

Вариант-1

1. $\begin{cases}2x+y+3z=7\\3x-5y+z=0\\4x-7y+z=-1\end{cases}$

2. $\vec{x}=\{-2,4,7\}, \vec{p}=\{0,1,2\},\ \vec{q}=\{1,0,1\},\quad \vec{r}=\{-1,2,4\}$.

3. $\vec{a}=\{1,-2,3\},\quad \vec{b}=\{3,0,-1\},\ \vec{c}_1=2\vec{a}+4\vec{b},\qquad \vec{c}_2=3\vec{b}-\vec{a}$.

4. $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q},\quad \vec{b}=3\vec{p}-\vec{q}\quad |\vec{p}|=1,\ |\vec{q}|=2,\quad \left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\frac{\pi}{6}$.

5. $A(-1,2,1),\ B(3,-1,2),\quad C(2,-1,3)$.

6. $A_1(1,3,6),\quad A_2(2,2,1),\quad A_3(-1,0,1),\qquad A_4(-4,6,-3)$.

7. $A(1,2);\ \ B(3,4);\ \ C(5,3)$.

8. $A(1,0,-2);\ \ B(2,-1,3);\quad C(0,-3,2)$.

9. $M_1(-3,4,-7);\quad M_2(1,5,-4);\quad M_3(-5,-2,0);$
$M_0(-12,7,-1)$.

10. $x-3y+5=0;\quad 2x-y+5z-11=0$.

11. $\begin{cases}2x+y+z-2=0\\2x-y-3z+6=0\end{cases}$ 12. $\begin{cases}\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2}\\x-2y+7z-24=0\end{cases}$

Вариант-2

1. $\begin{cases}3x+4y+z=10\\x+3y-2z=9\\3x-2y+2z=-3\end{cases}$

2. $\vec{x}=\{6,12,-1\}, \vec{p}=\{1,3,0\}\quad \vec{q}=\{2,-1,1\}, \vec{r}=\{0,-1,2\}$.

3. $\vec{a}=\{1,0,1\}, \vec{b}=\{-2,3,5\}\quad \vec{c}_1=\vec{a}+2\vec{b},\quad \vec{c}_2=3\vec{a}-\vec{b}$.

4. $\vec{a}=3\vec{p}+\vec{q},\ \ \vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}\quad |\vec{p}|=4,\ |\vec{q}|=1, \left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\frac{\pi}{4}$.

5. $A(3,-1,4),\ B(1,2,-3),\quad C(1,-1,2)$.

6. $A_1(-4,2,6), A_2(2,-3,0),\quad A_3(-10,5,8),\quad A_4(-5,2,-4)$.

7. $A(1,2);\ \ B(3,4);\ \ C(3,1)$.

8. $A(-1,3,4);\ \ B(-1,5,0);\quad C(2,6,1)$.

9. $M_1(-1,2,-3);\quad M_2(4,-1,0);\ \ M_3(2,1,-2);\quad M_0(1,-6,-5)$.

10. $x-3y+z-1=0;\quad x+z-1=0$.

11. $\begin{cases}x-3y+2z+2=0\\x+3y+z+14=0\end{cases}$ 12. $\begin{cases}\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5}\\x+2y-5z+20=0\end{cases}$

Вариант-3

1. $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 10 \\ 3x + 7y + 4z = 3 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$

2. $\vec{x} = \{1, -4, 4\}, \vec{p} = \{2, 1, -1\},\ \vec{q} = \{0, 3, 2\}, \vec{r} = \{1, -1, 1\}.$

3. $\vec{a} = \{-2, 4, 1\}, \vec{b} = \{1, -2, 7\},\quad \vec{c}_1 = 5\vec{a} + 3\vec{b},\quad \vec{c}_2 = 2\vec{a} - \vec{b}.$

4. $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q},\ |\vec{p}| = \frac{1}{5},\ |\vec{q}| = 1,\qquad (\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{2}$

5. $A(1, -3, 4),\ B(3, -4, 2),\ \ C(-1, 1, 4).$

6. $A_1(7, 2, 4),\ \ A_2(7, -1, -2),\ \ A_3(3, 3, 1),\ \ \ A_4(-4, 2, 1).$

7. $A(5, 3);\ \ B(3, 4);\ \ C(3, 1).$

8. $A(4, -2, 1);\ \ B(1, -1, 5);\ \ C(-2, 1, -3).$

9. $M_1(-3, -1, 1);\ \ \ M_2(-9, 1, -2);\ \ \ M_3(3, -5, 4);$
$M_0(-7, 0, -1).$

10. $4x - 5y + 3z - 1 = 0;\quad x - 4y - z + 9 = 0.$

11. $\begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ 2x + 2y - z - 8 = 0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4} \\ x + 2y + 3z - 14 = 0 \end{cases}$

Вариант-4

1. $\begin{cases} 5x - 6y + 4z = 3 \\ 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \end{cases}$

2. $\vec{x} = \{-9, 5, 5\},\qquad \vec{p} = \{4, 1, 1\},\quad \vec{q} = \{2, 0, -3\},\ \vec{r} = \{-1, 2, 1\}.$

3. $\vec{a} = \{1, 2, -3\}, \vec{b} = \{2, -1, -1\},\ \vec{c}_1 = 4\vec{a} + 3\vec{b},\ \ \vec{c}_2 = 8\vec{a} - \vec{b}.$

4. $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q},\quad \vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q},\quad |\vec{p}| = 4,\ |\vec{q}| = \frac{1}{2},\quad (\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{5\pi}{6}.$

5. $A(3, -6, 1),\ B(1, 4, -5),\ C(3, -4, 2).$

6. $A_1(2, 1, 4),\ \ A_2(-1, 5, -2),\ \ A_3(-7, -3, 2),\ \ A_4(-6, -3, 6).$

7. $A(-2, 2);\ \ B(1, 5);\ \ C(1, 1).$

8. $A(-8, 0, 7);\ \ B(-3, 2, 4);\ \ \ C(-1, 4, 5).$

9. $M_1(1, -1, 1);\ \ \ M_2(-2, 0, 3);\ \ M_3(2, 1, -1);\ \ \ M_0(-2, 4, 2).$

10. $3x - y + 2z + 15 = 0;\ \ 5x + 9y - 3z - 1 = 0.$

11. $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2} \\ x + 3y - 5z + 9 = 0 \end{cases}$

Вариант-5

1. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = -4 \\ 6x - 2y + 3z = -1 \\ 5x - 3y + 2z = -3 \end{cases}$

2. $\vec{x} = \{-5,-5,5\}$, $\vec{p} = \{-2,0,1\}$, $\vec{q} = \{1,3,-1\}$, $\vec{r} = \{0,4,1\}$.

3. $\vec{a} = \{3,5,4\}$, $\vec{b} = \{5,9,7\}$, $\vec{c}_1 = -2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

4. $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{3\pi}{4}$.

5. $A(-2,1,1)$, $B(1,5,0)$, $C(4,4,-2)$.

6. $A_1(-1,-5,2)$, $A_2(-6,0,-3)$, $A_3(3,6,-3)$, $A_4(10,6,7)$.

7. $A(-2,2)$; $B(1,5)$; $C(4,2)$.

8. $A(7,-5,1)$; $B(5,-1,-3)$; $C(3,0,-4)$.

9. $M_1(1,2,0)$; $M_2(1,-1,2)$; $M_3(0,1,-1)$; $M_0(2,-1,4)$.

10. $6x + 2y - 4z + 17 = 0$; $9x + 3y - 6z - 4 = 0$.

11. $\begin{cases} 2x + 3y + z + 6 = 0 \\ x - 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0} \\ 3x + y - 5z - 12 = 0 \end{cases}$

Вариант-6

1. $\begin{cases} 5x + 2y + 3z = -2 \\ 2x - 2y + 5z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = -10 \end{cases}$

2. $\vec{x} = \{13,2,7\}$, $\vec{p} = \{-2,0,1\}$, $\vec{q} = \{1,3,-1\}$, $\vec{r} = \{0,4,1\}$.

3. $\vec{a} = \{1,4,-2\}$, $\vec{b} = \{1,1,-1\}$, $\vec{c}_1 = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c}_2 = 4\vec{a} + 2\vec{b}$.

4. $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{\pi}{3}$.

5. $A(-2,3,-4)$, $B(3,2,5)$, $C(4,2,-1)$.

6. $A_1(0,-1,-1)$, $A_2(-2,3,5)$, $A_3(1,-5,-9)$, $A_4(-1,-6,3)$.

7. $A(-1,1)$; $B(0,3)$; $C(1,1)$.

8. $A(-3,5,-2)$; $B(-4,0,3)$; $C(-3,2,5)$.

9. $M_1(1,0,2)$; $M_2(1,2,-1)$; $M_3(2,-2,1)$; $M_0(-5,-9,1)$.

10. $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$; $x + 2y + 6z - 12 = 0$.

11. $\begin{cases} 3x + y - z - 6 = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2} \\ 2x - y + 4z = 0 \end{cases}$

Вариант-7

1. $\begin{cases} 2x + 5y - 7z = 11 \\ x + 3y - z = -4 \\ 3x + 8y - 6z = 11 \end{cases}$

2. $\vec{x} = \{-19, -1, 7\}, \quad \vec{p} = \{0,1,1\}, \quad \vec{q} = \{-2,0,1\}, \quad \vec{r} = \{3,1,0\}.$

3. $\vec{a} = \{1, -2, 5\}, \quad \vec{b} = \{3, -1, 0\}, \quad \vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}, \quad \vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}.$

4. $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}, \ \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}, \quad |\vec{p}| = 3, \ |\vec{q}| = 2, \quad (\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{2}.$

5. $A(3,2,-4), \ B(5,6,-1), \quad C(4,2,-1).$

6. $A_1(5,2,0), \quad A_2(2,5,0), \quad A_3(1,2,4), A_4(-1,1,1).$

7. $A(-2,1); \quad B(1,3); \quad C(3,0).$

8. $A(1,-1,8); \quad B(-4,-3,10); \quad C(-1,-1,7).$

9. $M_1(1,2,-3); \quad M_2(1,0,1); \quad M_3(-2,-1,6); \quad M_0(3,-2,-9).$

10. $3y - z = 0; \ 2y + z = 0.$

11. $\begin{cases} x + 5y + 2z + 11 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1} \\ x - 2y + 5z + 17 = 0 \end{cases}$

Вариант-8

1. $\begin{cases} x - 3y + 2z = 3 \\ 2x - y + 3z = -5 \\ x + 6y - z = 4 \end{cases}$

2. $\vec{x} = \{3, -3, 4\}, \quad \vec{p} = \{1,0,2\}, \quad \vec{q} = \{0,1,1\}, \quad \vec{r} = \{2, -1, 4\}.$

3. $\vec{a} = \{3, 4, -1\}, \quad \vec{b} = \{2, -1, 2\}, \quad \vec{c}_1 = 6\vec{a} - 3\vec{b}, \quad \vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}.$

4. $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q}, \ \vec{b} = \vec{p} - \vec{q}, \quad |\vec{p}| = 7, \ |\vec{q}| = 2, \quad (\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{4}.$

5. $A(3,2,-3), \ B(5,1,-1), \ C(1,-2,1).$

6. $A_1(2,-1,-2), \quad A_2(1,2,1) \quad A_3(5,0,-6), \quad A_4(-10,9,-7).$

7. $A(-5,2); \quad B(-2,5); \quad C(-1,2).$

8. $A(-2,0,5); \quad B(2,7,-3); \quad C(1,10,-1).$

9. $M_1(3,10,-1); M_2(-2,3,-5); \ M_3(-6,0,-3); \ M_0(-6,7,-10).$

10. $6x + 3y - 2z = 0; \quad x + 2y + 6z - 12 = 0.$

11. $\begin{cases} 3x + 4y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - 4y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1} \\ x - 2y + 4z - 19 = 0 \end{cases}$

Вариант-9

1. $\begin{cases} x+3y-z=3 \\ 2x-5y+3z=11 \\ 6x-y-7z=17 \end{cases}$

2. $\vec{x}=\{3,3,-1\}$, $\vec{p}=\{3,1,0\}$, $\vec{q}=\{-1,2,1\}$, $\vec{r}=\{-1,0,2\}$.

3. $\vec{a}=\{-2,-3,-2\}$, $\vec{b}=\{1,0,5\}$, $\vec{c}_1=3\vec{a}+9\vec{b}$, $\vec{c}_2=-\vec{a}-3\vec{b}$.

4. $\vec{a}=\vec{p}-4\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}+\vec{q}$, $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\frac{\pi}{6}$.

5. $A(-1,-2,4)$, $B(-4,2,0)$, $C(3,-2,-1)$.

6. $A_1(-2,0,-4)$, $A_2(-1,7,1)$, $A_3(4,-8,-4)$, $A_4(1,-4,6)$.

7. $A(-5,2)$; $B(-2,4)$; $C(-2,0)$.

8. $A(1,9,-4)$; $B(5,7,1)$; $C(3,5,0)$.

9. $M_1(-1,2,4)$; $M_2(-1,-2,-4)$; $M_3(3,0,-1)$; $M_0(-2,3,5)$.

10. $x+2y+2z-3=0$; $16x+12y-15z-1=0$.

11. $\begin{cases} 5x+y-3z+4=0 \\ x-y+2z+2=0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{-1} \\ 2x-y+3z+23=0 \end{cases}$

Вариант-10

1. $\begin{cases} 2x-5y+6z=-5 \\ x+3y+4z=4 \\ 3x-2y+13z=2 \end{cases}$

2. $\vec{x}=\{-1,7,-4\}$, $\vec{p}=\{-1,2,1\}$, $\vec{q}=\{2,0,3\}$, $\vec{r}=\{1,1,-1\}$.

3. $\vec{a}=\{-1,4,2\}$, $\vec{b}=\{3,-2,6\}$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{b}-6\vec{a}$.

4. $\vec{a}=\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=7$, $|\vec{q}|=2$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\frac{\pi}{3}$.

5. $A(1,-2,2)$, $B(-4,1,1)$, $C(-5,-5,3)$.

6. $A_1(14,4,5)$, $A_2(-5,-3,2)$, $A_3(-2,-6,-3)$, $A_4(-2,2,-1)$.

7. $A(-1,1)$; $B(1,3)$; $C(1,10)$.

8. $A(-7,0,3)$; $B(1,-5,4)$; $C(2,-3,0)$.

9. $M_1(0,-3,1)$; $M_2(-4,1,2)$; $M_3(2,-1,5)$; $M_0(-3,4,-5)$.

10. $2x-y+5z+16=0$; $x+2y+3z+8=0$.

11. $\begin{cases} x-y-z-2=0 \\ x-2y+z+4=0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{0} \\ 2x-3y-5z-7=0 \end{cases}$

Вариант-11

1. $\begin{cases} x+3y-z=5 \\ 2x-4y+3z=0 \\ x+5y+2z=15 \end{cases}$

2. $\vec{x}=\{6,5,-14\}, \vec{p}=\{1,1,4\}, \quad \vec{q}=\{0,-3,2\}, \quad \vec{r}=\{2,1,-1\}$.

3. $\vec{a}=\{5,0,-1\}, \ \vec{b}=\{7,2,3\}, \ \vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}, \ \vec{c}_2=3\vec{b}-6\vec{a}$.

4. $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}, \quad \vec{b}=\vec{p}-\vec{q}, \quad |\vec{p}|=10, \ |\vec{q}|=1, \quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\frac{\pi}{2}$.

5. $A(1,-8,-7), \quad B(2,2,1), \quad C(1,-1,2)$.

6. $A_1(1,2,0), \quad A_2(3,0,-3) \quad A_3(5,2,6), \quad A_4(8,4,-9)$.

7. $A(-3,-3); \quad B(-2,0); \quad C(0,-2)$.

8. $A(0,-3,5); \quad B(-7,2,6); \quad C(-3,2,4)$.

9. $M_1(1,3,0); \quad M_2(4,-1,2); \quad M_3(3,0,1); \quad M_0(4,3,0)$.

10. $\begin{cases} 3x-2y=24 \\ 3x-z=-4 \end{cases}, \quad 6x+15y-10z+31=0$.

11. $\begin{cases} 4x+y-3z+2=0 \\ 2x-y+z-8=0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3} \\ 4x+2y-z=11 \end{cases}$

Вариант-12

1. $\begin{cases} 5x-2y+z=4 \\ 4x-3y+2z=4 \\ x+2y+3z=14 \end{cases}$

2. $\vec{x}=\{6,-1,7\}, \quad \vec{p}=\{1,-2,0\}, \quad \vec{q}=\{-1,1,3\}, \quad \vec{r}=\{1,0,4\}$.

3. $\vec{a}=\{0,3,2\}, \quad \vec{b}=\{1,-2,1\}, \ \vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b}, \ \vec{c}_2=3\vec{a}+5\vec{b}$.

4. $\vec{a}=4\vec{p}-\vec{q}, \quad \vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}, \quad |\vec{p}|=5, \ |\vec{q}|=4, \quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\frac{\pi}{4}$.

5. $A(2,7,-6), \ B(7,-9,9), \quad C(1,-3,1)$.

6. $A_1(2,-1,2), \ A_2(1,2,-1), \quad A_3(3,2,1), \quad A_4(-4,2,5)$.

7. $A(-4,-4); \quad B(-2,0); \quad C(0,-3)$.

8. $A(5,-1,2); \quad B(2,-4,3); \quad C(4,-1,3)$.

9. $M_1(-2,-1,-1); M_2(0,3,2); \ M_3(3,1,-4); M_0(-21,20,-16)$.

10. $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}, \quad x+2y+3z-29=0$.

11. $\begin{cases} 3x+2y-2z-1=0 \\ 2x-3y+z+6=0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{1} \\ 3x-2y-4z-8=0 \end{cases}$

Вариант-13

1. $\begin{cases} 6x-2y+z=4 \\ x-3y+4z=15 \\ 2x-y+3z=6 \end{cases}$

2. $\vec{x}=\{5,15,0\}$, $\vec{p}=\{1,0,5\}$, $\vec{q}=\{-1,3,2\}$, $\vec{r}=\{0,-1,1\}$.

3. $\vec{a}=\{-2,7,-1\}$, $\vec{b}=\{-3,5,2\}$, $\vec{c}_1=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}+2\vec{b}$.

4. $\vec{a}=5\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+5\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=1$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\frac{3\pi}{4}$.

5. $A(2,-1,-3)$, $B(3,2,-1)$, $C(-4,1,3)$.

6. $A_1(1,1,2)$, $A_2(-1,1,3)$, $A_3(2,-2,4)$, $A_4(-1,8,-2)$.

7. $A(-1,3)$; $B(2,0)$; $C(-2,1)$.

8. $A(-3,7,2)$; $B(3,5,-1)$; $C(4,5,3)$.

9. $M_1(-3,-5,6)$; $M_2(2,1,-4)$; $M_3(0,-3,-1)$; $M_0(3,6,8)$.

10. $\begin{cases} y=3x-1 \\ 2z=-3x+2 \end{cases}$, $2x+y+z-4=0$

11. $\begin{cases} 6x-7y-4z-2=0 \\ x+7y-z-5=0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2} \\ x+2y-z-2=0 \end{cases}$

Вариант-14

1. $\begin{cases} 3x+5y-7z=6 \\ 2x-y+3z=3 \\ 4x-7y+8z=-2 \end{cases}$

2. $\vec{x}=\{2,-1,11\}$, $\vec{p}=\{1,1,0\}$, $\vec{q}=\{0,1,2\}$, $\vec{r}=\{1,0,3\}$.

3. $\vec{a}=\{3,7,0\}$, $\vec{b}=\{1,-3,4\}$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$.

4. $\vec{a}=\vec{q}-5\vec{p}$, $\vec{b}=\vec{p}+\vec{q}$, $|\vec{p}|=7$, $|\vec{q}|=\frac{1}{2}$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\frac{\pi}{3}$.

5. $A(1,2,0)$, $B(3,0,-3)$, $C(5,2,6)$.

6. $A_1(2,3,1)$, $A_2(4,1,-2)$, $A_3(6,3,7)$, $A_4(7,5,-3)$.

7. $A(-1,1)$; $B(2,-2)$; $C(-4,-3)$.

8. $A(0,-2,8)$; $B(4,3,2)$; $C(1,4,3)$.

9. $M_1(2,-4,-3)$; $M_2(5,-6,0)$; $M_3(-1,3,-3)$; $M_0(2,-10,8)$.

10. $\frac{x-2}{0}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+5}{1}$, $2x+y+7z-3=0$

11. $\begin{cases} 8x-y-3z-1=0 \\ x+y+z+10=0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{3} \\ 5x-y+4z+8=0 \end{cases}$

Вариант-15

1. $\begin{cases} 7x - y + z = 6 \\ 4x - 2y + 5z = 14 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$

2. $\vec{x} = \{11,5,-3\}, \quad \vec{p} = \{1,0,2\}, \ \vec{q} = \{-1,0,1\}, \ \vec{r} = \{2,5,-3\}.$

3. $\vec{a} = \{-1,2,-1\}, \ \vec{b} = \{-2,-7,1,\} \ \vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}, \quad \vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}.$

4. $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{q} - 5\vec{p}, \ |\vec{p}| = 2, \ |\vec{q}| = 3, \quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{\pi}{4}.$

5. $A(2,-4,5), \ B(4,-2,3), \quad C(3,2,-1).$

6. $A_1(1,1,-1), \quad A_2(2,3,1), \quad A_3(3,2,1), \quad A_4(5,9,-8).$

7. $A(-3,1); \quad B(-2,3); \quad C(-1,1).$

8. $A(1,-1,5); \quad B(0,7,8); \quad C(-1,3,8).$

9. $M_1(1,-1,2); \quad M_2(2,1,2); \quad M_3(1,1,4); \quad M_0(-3,2,7).$

10. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2} \quad , \quad x - 2y + 7z - 24 = 0.$

11. $\begin{cases} 6x - 5y - 4z + 8 = 0 \\ 6x + 3y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3} \\ x + 3y + 5z - 42 = 0 \end{cases}$

Вариант-16

1. $\begin{cases} 4x + y - 2z = 17 \\ x + 3y + z = 14 \\ 3x - y - z = 8 \end{cases}$

2. $\vec{x} = \{8,0,5\}, \vec{p} = \{2,0,1\}, \quad \vec{q} = \{1,1,0\}, \quad \vec{r} = \{4,1,2\}.$

3. $\vec{a} = \{7,9,-2\}, \quad \vec{b} = \{5,4,3\}. \quad \vec{c}_1 = 4\vec{a} - \vec{b}, \qquad \vec{c}_2 = 4\vec{b} - \vec{a}.$

4. $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}, \quad \vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}, \ |\vec{p}| = 4, \ |\vec{q}| = 1, \quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{\pi}{6}.$

5. $A(3,2,-4), \ B(2,-1,1), \quad C(4,-2,3).$

6. $A_1(1,5,-7) \quad A_2(-3,6,3), \quad A_3(-2,7,3), \quad A_4(-4,8,-12).$

7. $A(2,3); \quad B(0,1); \quad C(3,0).$

8. $A(-10,0,9); \quad B(12,4,11); \quad C(8,5,15).$

9. $M_1(1,3,6); \quad M_2(2,2,1); \quad M_3(-1,0,1); \quad M_0(5,-4,5).$

10. $\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0} \quad , \quad 3x + y - 5z - 12 = 0.$

11. $\begin{cases} x + 5y - z - 5 = 0 \\ 2x - 5y + 2z + 5 = 0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{2} \\ 7x + y + 4z - 47 = 0 \end{cases}$

Вариант-17

1. $\begin{cases} x+2y+z=7 \\ 3x-y+2z=1 \\ 4x+y-z=12 \end{cases}$

2. $\vec{x}=\{3,1,8\}$, $\vec{p}=\{0,1,3\}$, $\vec{q}=\{1,2,-1\}, \vec{r}=\{2,0,-1\}$.

3. $\vec{a}=\{5,0,-2\}$, $\vec{b}=\{6,4,3\}$, $\vec{c}_1=5\vec{a}-3\vec{b}, \vec{c}_2=6\vec{b}-10\vec{a}$.

4. $\vec{a}=5\vec{p}+\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2, \left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\frac{\pi}{3}$.

5. $A(1,2,-1)$, $B(1,-1,3)$, $C(1,9,-11)$.

6. $A_1(-3,4,7)$, $A_2(1,5,-4)$, $A_3(-5,-2,0)$, $A_4(2,5,4)$.

7. $A(2,2)$; $B(-1,1)$; $C(1,-2)$.

8. $A(3,-3,-6)$; $B(1,9,-5)$; $C(6,6,-4)$.

9. $M_1(-4,2,6)$; $M_2(2,-3,0)$; $M_3(-10,5,8)$; $M_0(-12,1,8)$.

10. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-4}{1}$, $x-2y+4z-19=0$.

11. $\begin{cases} 2x-3y+z+6=0 \\ x-3y-2z+3=0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{5} \\ 2x+3y+7z-52=0 \end{cases}$

Вариант-18

1. $\begin{cases} 3x-y-2z=4 \\ 2x+3y+z=9 \\ 4x+y-4z=15 \end{cases}$

2. $\vec{x}=\{8,1,12\}$, $\vec{p}=\{1,2,-1\}$, $\vec{q}=\{3,0,2\}, \vec{r}=\{-1,1,1\}$.

3. $\vec{a}=\{8,3,-1\}$, $\vec{b}=\{4,1,3\}$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}, \vec{c}_2=2\vec{b}-4\vec{a}$.

4. $\vec{a}=7\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}$, $|\vec{p}|=\frac{1}{2}$, $|\vec{q}|=2$, $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\frac{\pi}{2}$.

5. $A(3,-2,1)$, $B(2,1,2)$, $C(3,-1,-2)$.

6. $A_1(-1,2,-3)$, $A_2(4,-1,0)$, $A_3(2,1,-2)$, $A_4(3,4,5)$.

7. $A(-3,-1)$; $B(3,3)$; $C(2,-3)$.

8. $A(2,1,7)$; $B(9,0,2)$; $C(9,2,3)$.

9. $M_1(7,2,4)$; $M_2(7,-1,-2)$; $M_3(-5,-2,-1)$; $M_0(10,1,8)$.

10. $\frac{\mathrm{x}+2}{-1}=\frac{\mathrm{y}-1}{1}=\frac{\mathrm{z}+4}{-1}$, $2\mathrm{x}-\mathrm{y}+3\mathrm{z}+23=0$.

11. $\begin{cases} 5x+y+2z+4=0 \\ x-y-3z+2=0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2} \\ 3x+4y+7z-16=0 \end{cases}$

Вариант-19

1. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8 \\ 2x - 4y - 3z = 1 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$

2. $\vec{x} = \{-9, -8, -3\}$, $\vec{p} = \{1,4,1\}$, $\vec{q} = \{-3,2,0\}$, $\vec{r} = \{1, -1,2\}$.

3. $\vec{a} = \{3, -1,6\}$, $\vec{b} = \{5,7,10\}$, $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$.

4. $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 4$, $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{4}$.

5. $A(2, -1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2, -1)$.

6. $A_1(4, -1,3)$, $A_2(-2,1,0)$, $A_3(0, -5,1)$, $A_4(3,2, -6)$.

7. $A(4,2)$; $B(-2, -2)$; $C(2, -3)$.

8. $A(-7,1, -4)$; $B(8,11, -3)$; $C(9,9, -1)$.

9. $M_1(2,1,4)$; $M_2(3,5, -2)$; $M_3(-7, -3,2)$; $M_0(-3,1,8)$.

10. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}$, $4x + 2y - z - 11 = 0$

11. $\begin{cases} 4x + y + z + 2 = 0 \\ 2x - y - 3z - 8 = 0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1} \\ 2x - 5y + 4z + 24 = 0 \end{cases}$

Вариант-20

1. $\begin{cases} 7x - 5y = 31 \\ 4x + 11y = -43 \\ 2x - 3y + 4z = -20 \end{cases}$

2. $\vec{x} = \{-5,9, -13\}$, $\vec{p} = \{0,1, -2\}$, $\vec{q} = \{3, -1,1\}$, $\vec{r} = \{4,1,0\}$.

3. $\vec{a} = \{1, -2,4\}$, $\vec{b} = \{7,3,5\}$, $\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$.

4. $\vec{a} = 10\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{6}$.

5. $A(2,3,1)$, $B(4,1, -2)$, $C(6,3,7)$.

6. $A_1(1, -1,1)$, $A_2(-2,0,3)$, $A_3(2,1, -1)$, $A_4(2, -2, -4)$.

7. $A(-1,2)$; $B(3,1)$; $C(1, -1)$.

8. $A(1,0, -6)$; $B(-7,2,1)$; $C(-9,6,1)$.

9. $M_1(-1, -5,2)$; $M_2(-6,0, -3)$; $M_3(3,6, -3)$; $M_0(10, -8, -7)$.

10. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$, $x + 3y + 5z - 42 = 0$.

11. $\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0 \\ 2x - y + z + 6 = 0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12} \\ x - 2y - 3z + 18 = 0 \end{cases}$

Вариант-21

1. $\begin{cases} 5x+8y-z=7 \\ 2x-3y+2z=9 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}$

2. $\vec{x}=\{-15{,}5{,}6\}, \quad \vec{p}=\{0{,}5{,}1\}, \quad \vec{q}=\{3{,}2,-1\}, \vec{r}=\{-1{,}1{,}0\}.$

3. $\vec{a}=\{3{,}7{,}0\}, \vec{b}=\{4{,}6,-1\}, \quad \vec{c}_1=3\vec{a}+2\vec{b}, \vec{c}_2=5\vec{a}-7\vec{b}.$

4. $\vec{a}=6\vec{p}-\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}, \quad |\vec{p}|=8, \ |\vec{q}|=\frac{1}{2}, (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\frac{\pi}{3}.$

5. $A(1{,}4,-1), \ B(-2{,}4,-5), \quad C(8{,}4{,}0).$

6. $A_1(1{,}2{,}0), \quad A_2(1,-1{,}2), \quad A_3(0{,}1,-1), \quad A_4(-3{,}0{,}1).$

7. $A(-1{,}2); \quad B(4{,}4); \quad C(1,-1).$

8. $A(-3{,}1{,}0); \quad B(6{,}3{,}3); \quad C(9{,}4,-2).$

9. $M_1(0,-1,-1); M_2(-2{,}3{,}5); \ M_3(1,-5,-9); \ M_0(-4,-13{,}6).$

10. $\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ 2x-z+5=0 \end{cases}, \qquad \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-0}{-1}.$

11. $\begin{cases} x+y-2z-2=0 \\ x-y+z+2=0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{0} \\ x+7y+3z+11=0 \end{cases}$

Вариант-22

1. $\begin{cases} 3x+y+z=5 \\ x-4y-2z=-1 \\ 5y-3x+6z=10 \end{cases}$

2. $\vec{x}=\{8{,}9{,}4\}, \qquad \vec{p}=\{1{,}3{,}1\}, \quad \vec{q}=\{0,-2{,}1\}, \quad \vec{r}=\{1{,}3{,}0\}.$

3. $\vec{a}=\{2,-1{,}4\}, \quad \vec{b}=\{3,-7{,}1\}, \ \vec{c}_1=2\vec{a}-3\vec{b}, \vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}.$

4. $\vec{a}=3\vec{p}+4\vec{q}, \vec{b}=\vec{q}-\vec{p}, \ |\vec{p}|=2{,}5, \ |\vec{q}|=2, (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\frac{\pi}{2}.$

5. $A(0{,}1{,}0), \quad B(0{,}2{,}1), \quad C(1{,}2{,}0).$

6. $A_1(1{,}0{,}2), \quad A_2(1{,}2,-1), \quad A_3(2,-2{,}1), \quad A_4(2{,}1{,}0).$

7. $A(-1{,}2); \quad B(-3,-2); \quad C(-1,-1).$

8. $A(-4,-2{,}5); \quad B(3,-3,-7); \quad C(9{,}3,-7).$

9. $M_1(5{,}2{,}0); \quad M_2(2{,}5{,}0); \quad M_3(1{,}2{,}4); \quad M_0(-3,-6,-8).$

10. $\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ z=2x+5 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y=\frac{3}{2}x+8 \\ z=3x \end{cases}$

11. $\begin{cases} x-3y-z+11=0 \\ x-2y+2z-1=0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x-5}{-1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{2} \\ 3x+7y-5z-11=0 \end{cases}$

Вариант-23

1. $\begin{cases} 2x - y + 5z = 4 \\ 5x + 2y + 13z = -21 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases}$

2. $\vec{x} = \{23, -14, -30\}, \vec{p} = \{2,1,0\}$, $\vec{q} = \{1, -1, 0\}$, $\vec{r} = \{-3,2,5\}$.

3. $\vec{a} = \{5, -1, -2\}$, $\vec{b} = \{6,0,7\}$ $\vec{c}_1 = 3\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{c}_2 = 4\vec{b} - 6\vec{a}$.

4. $\vec{a} = 7\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 1$, $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{3\pi}{4}$.

5. $A(-7,0,4)$, $B(-1,6,7)$, $C(1,10,9)$.

6. $A_1(1,2,-3)$ $A_2(1,0,1)$, $A_3(-2,-1,6)$, $A_4(0,-5,-4)$.

7. $A(-1,2)$; $B(3,1)$; $C(-3,-2)$.

8. $A(0,-8,10)$; $B(-5,5,7)$; $C(-8,0,4)$.

9. $M_1(2,-1,-2)$; $M_2(1,2,1)$; $M_3(5,0,-6)$; $M_0(4,-3,7)$.

10. $\begin{cases} 3x - 2y + 16 = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$, $\frac{x+0,5}{1} = \frac{y+1,5}{0} = \frac{z-0,5}{1}$.

11. $\begin{cases} x - y + 2z - 2 = 0 \\ x - 2y - z + 4 = 0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1} \\ 4x + y - 6z - 5 = 0 \end{cases}$

Вариант-24

1. $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 4x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - 5z = 1 \end{cases}$

2. $\vec{x} = \{3,1,3\}$, $\vec{p} = \{2,1,0\}$, $\vec{q} = \{1,0,1\}$, $\vec{r} = \{-3,2,5\}$.

3. $\vec{a} = \{-9,5,3\}$, $\vec{b} = \{7,1,-2\}$, $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}_2 = 3\vec{a} + 5\vec{b}$.

4. $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 1$, $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{3\pi}{4}$.

5. $A(-2,4,-6)$, $B(0,2,-4)$. $C(-6,8,-10)$.

6. $A_1(3,10,-1)$, $A_2(-2,3,-5)$, $A_3(-6,0,-3)$, $A_4(1,-1,2)$.

7. $A(-1,2)$; $B(-3,-2)$; $C(4,4)$.

8. $A(-1,-5,-2)$; $B(6,-2,1)$; $C(2,-2,-2)$.

9. $M_1(-2,0,-4)$; $M_2(-1,7,1)$; $M_3(4,-8,-4)$; $M_0(-6,5,5)$.

10. $\begin{cases} x = 3z - 4 \\ y = z + 2 \end{cases}$, $\frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{1}$

11. $\begin{cases} 6x - 7y - z - 2 = 0 \\ x + 7y - 4z - 5 = 0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0} \\ 5x + 9y + 4z - 25 = 0 \end{cases}$

4. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

4.1 Дифференцирование явных функций. Пусть x_1 и x_2 – значения аргумента, а $y_1=f(x_1)$ и $y_2=f(x_2)$ –соответствующие значения функции $y=f(x)$. *Разность* $\Delta x = x_2 - x_1$ называется приращением аргумента, а разность $\Delta y= y_2 - y_1= f(x_2) -f(x_1)$ – приращением функции на отрезке $[x_1,x_2]$. Производной от функции $y=f(x)$ по аргументу x называется конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

(производная обозначается также $\frac{dy}{dx}$).

Геометрически производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$в точке x , т.е. $y' = tg\alpha$. Производная есть скорость изменения функции в точке x. Отыскание производной называется дифференцированием функции.

4.2 Формулы дифференцирования основных функций.

1. $\left(x^m\right)' = m \cdot x^{m-1}$
2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
3. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$.
4. $(e^x)' = e^x$.
11. $\left(ctgx\right)' = -cosec^2 x$.
12. $(arcsin\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
13. $(arccos\ x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
14. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.

5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$.

8. $(\sin x)' = \cos x$.

9. $(\cos x)' = -\sin x$.

10. $(tgx)' = \sec^2 x$.

15. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

16. $(shx)' = (\dfrac{e^x - e^{-x}}{2})' = chx$.

17. $(chx)' = (\dfrac{e^x + e^{-x}}{2})' = shx$.

18. $(thx)' = (\dfrac{shx}{chx})' = \dfrac{1}{ch^2 x}$.

19. $(cthx)' = (\dfrac{chx}{shx})' = -\dfrac{1}{sh^2 x}$.

4.3 **Основные правила дифференцирования.**

Пусть С – постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ -функции, имеющие производные.

Тогда

1. $C' = 0$.
2. $x' = 1$
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
4. $(cu)' = cu'$
5. $(uv)' = u'v + uv'$
6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
7. если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т.е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u(x)$ имеют производные, то $y_x' = y_u' \cdot u_x'$ (правило дифференцирования сложной функции).

4.4 Дифференцирование неявных функций. Пусть уравнение $F(x,y) = 0$ определяет y как неявную функцию от x. В дальнейшем будем считать эту функцию дифференцируемой. Продифференцировав по x обе части уравнения $F(x,y) = 0$, получим уравнение первой степени относительно y'. Из этого уравнения легко находится y', т.е. производная неявной функции для всех значений x и y, при которых множитель при y' в уравнении не обращается в нуль.

4.5 Дифференцирование функций,заданных параметрически

Если функция аргумента x задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(x)$, то $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$ или $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

4.6 Приложения производной к задачам геометрии и механики. Если кривая задана уравнением $y=f(x)$, то $f'(x_0)=tg\alpha$, где α -угол, образованный с положительным направлением оси OX касательной к кривой в точки с абсциссой x_0.

Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет вид

$$y-y_0=y'_0(x-x_0),$$

где y'_0 - есть значение производной y' при $x=x_0$

Нормалью к кривой называется прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания.

Уравнение нормали имеет вид

$$y-y_0=-\frac{1}{y'_0}(x-x_0)$$

Углом между двумя кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0;y_0)$ называется угол между касательными к этим кривым в точке $M_0(x_0;y_0)$. Этот угол находится по формуле

$$y'=\begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}.$$

Если при прямолинейном движении точки задан закон движения $S = S(t)$, то скорость движения в момент t_0 есть производная пути по времени : $V = S'(t_0)$

4.7 Нахождение угла между радиусом- вектором и линией. Пусть плоская прямая задана в декартовой системе координат формулой $y = f(x)$. В заданной точке *M(x;y),* направление линии задается касательной, проведенной к линии в этой точке, то есть с положительным углом между касательной и с положительном направлением оси *OX*, здесь $tg\alpha = y'$.

Угловой коэффициент радиус вектора в точке *M* составляет $tg\varphi = y / x$, а угол между радиусом вектором и касательной к линии в этой точке равен $\omega = \alpha - \varphi$. Таким образом,

$$tg\omega = \frac{tg\alpha - tg\varphi}{1 + tg\alpha \cdot tg\varphi} = \frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + y' \cdot \frac{y}{x}} = \frac{xy' - y}{x + yy'} = \frac{xdy - ydx}{xdx + ydy}$$

Если линия задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, то $x = r cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $xdy - ydx = r^2 d\varphi$, $xdx + ydy = rdr$,откуда

$$tg\omega = \frac{r^2 d\varphi}{rdr} = \frac{r}{r'}.$$

4.8 Производные высших порядков. Производной второго порядка (второй производной) функции ***y***=*f(x)* называется производная от ее производной. Вторая производная обозначается так: y'', или $\frac{d^2 y}{dx^2}$, или $f''(x)$. Если $s = f(t)$ - закон прямолинейного движения точки, то вторая производная пути по времени $\frac{d^2 s}{dt^2}$ есть ускорение этого движения.

Аналогично производная третьего порядка функции $y=f(x)$ есть производная от производной второго порядка $y'''=(y'')'$. Вообще, производной *n*- порядка от функции $y=f(x)$ называется производная от производной *(n-1)* – го порядка: $y^{(n)}(x)=\left(y^{(n-1)}(x)\right)'$. Обозначается *n*-я производная так: $y^{(n)}$ или $\dfrac{d^n y}{dx^n}$, или $f^{(n)}(x)$. Производные высших порядков (вторая, третья и т.д.) вычисляется последовательным дифференцированием данной функции.

Если функция задана параметрически: $x=\varphi(t), y=\phi(t)$, то производные $y'_x, y''_{xx}, y'''_{xxx},\ldots$ вычисляются по формулам

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\qquad y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t},\qquad y''_{xx}=\frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t}\quad \text{и т.д.}$$

Производную второго порядка можно вычислить также по формулам:

$$y''_{xx}=\frac{(y''_{tt}x'_t-x''_{tt}y'_t)}{(x'_t)^3}.$$

4.9 Дифференциалы первого и высших порядков. Дифференциалом (первого порядка) функции $y=f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения аргумента. Дифференциалом аргумента называется приращение аргумента $dx=\Delta x$.

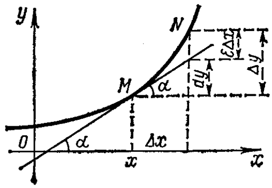


Рис.4

Дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал аргумента: $dy = y'dx$. Геометрически дифференциал представляет собой приращение ординаты касательной к графику функции в точке *M(x;y)* (Рис 4).

4.10 Основные свойства дифференциала

1. $dC = 0, \qquad C = const,$
2. $d(Cu) = Cdu,$
3. $d(u \pm v) = du \pm dv,$
4. $d(uv) = udv + vdu,$
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2} \qquad (v \neq 0),$
6. $df(u) = f'(u)du.$

Если приращение Δx аргумента мало по абсолютной величине, то $\Delta y \approx dy$ и

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x .$$

Таким образом, дифференциал функции может применяться для приближенных вычислений.

Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2 y = d(dy)$. Аналогично определяется дифференциал третьего порядка: $d^3 y = d(d^2 y)$. Вообще, $d^n y = d(d^{n-1} y)$. Если $y = f(x)$, и *x*- независимая переменная, то дифференциалы высших порядков вычисляются по формулам $d^2 y = y''(dx)^2, d^3 y = y'''(dx)^3, \ldots, d^n y = y^{(n)}(dx)^n$.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

5.1 Теоремы Ролля. Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема в интервале $]a,b[$ и $f(a)=f(b)$, то в интервале $]a,b[$ найдется хотя бы одно значение $x=\xi$, при котором $f'(\xi)=0$.

Если, в частности, $f(a)=0, f(b)=0$, то теорема Ролля означает, что между двумя корнями функции содержится хотя бы один корень ее производной.

5.2 Теорема Лагранжа (о конечном приращении). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема в интервале $]a,b[$, то в этом интервале найдется хотя бы одно значение $x=\xi$, при котором выполняется равенство

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi).$$

Эти теоремы имеют такой геометрический смысл: на дуге *AB* непрерывной кривой $y=f(x)$, имеющей в каждой внутренней точке определенную касательную (не параллельную оси *OY*), найдется хотя бы одна внутренняя точка, в которой касательная параллельна хорде *AB*. (Для теоремы Ролля хорда *AB* и касательная параллельны оси OX.)

5.3 Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы в интервале $]a,b[$, причем $\varphi'(x)\neq 0$, то в этом интервале найдется хотя бы одно значение $x=\xi$, при котором

$$\frac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)},$$

где $a<\xi<b$.

5.4 Формула Тейлора. Функция $f(x)$, дифференцируемая $n+1$ раз в некотором интервале, содержащем точку a, может быть представлена в виде суммы многочлена n-й степени и остаточного члена R_n:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n,$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где точка ξ лежит между точками a и x, т.е.

$$\xi=a+\vartheta(x-a),$$

причем $0<\vartheta<1$.

При $a=0$ получается формула Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n,$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad 0<\theta<1$$

.

Приведем разложения некоторых функций по формуле Маклорена:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n; \qquad R_n=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1};$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{m+1}x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m-1};$$

$$R_{2m-1}=(-1)^m\sin\theta x\frac{x^{2m}}{(2m)!};$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}+R_{2m};$$

$$R_{2m}=(-1)^{m+1}\sin\theta x\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!};$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n + R_n;$$

$$R_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(n+1)!}(1+\theta\cdot\lambda)^{n-m-1}x^{n+1};$$

(всюду $0 < \theta < 1$).

5.5 Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.

Пусть в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой точки x_0) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы и $\varphi'(x) \neq 0$. Если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$$

или

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty,$$

т.е. частное $f(x)/\phi(x)$ в точке $x = x_0$ представляет собой неопределенность вида $0/0$ или ∞/∞, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

если предел в правой части этого равенства существует.

Если частное $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ в точке $x = x_0$ также есть неопределенность вида $0/0$ или ∞/∞ и производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют соответствующим условиям, то следует перейти к отношению вторых производных и т.д. В случае неопределенности вида $0\cdot\infty$ или $\infty - \infty$ следует алгебраически преобразовать данную функцию так, чтобы привести ее к неопределенности вида $0/0$ или ∞/∞ и далее воспользоваться правилом Лопиталя. В случае неопределенности вида 0^0 , ∞^0

или 1^{∞} следует прологарифмировать данную функцию и найти предел ее логарифма.

5.6 Возрастание и убывание функции. Экстремум функции.

Функция $f(x)$ называется возрастающей в точке x_0 если при любом достаточно малом $h > 0$ выполняется условие $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$ (рис.5).

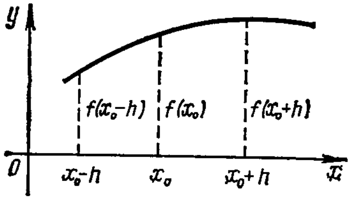


Рис.5

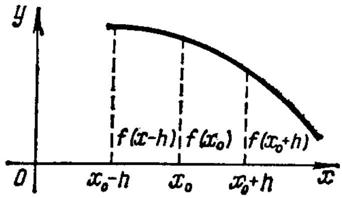


Рис. 6

Функция $f(x)$ называется убывающей в точке x_0, если при любом достаточно малом $h > 0$ выполняется условие $f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$ (рис.6).

Функция $f(x)$ называется возрастающей в интервале $]a, b[$, если для любых точек x_1 и x_2 из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $f(x)$ называется убывающей в интервале $]a, b[$, если для любых точек x_1 и x_2 из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

5.7 Признаки возростания и убывания функции.

1) Если $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает в точке x_0.

2) Если $f'(x_0) < 0$, то функция $f(x)$ убывает в точке x_0.

5.8 Экстремумы функции

Значение $f(x_0)$ называется локальным максимумом функции $f(x)$, если при любом достаточно малом $h > 0$ выполняются условия $f(x_0-h)<f(x_0)$ и $f(x_0+h)<f(x_0)$. Если $f(x_0)$ является локальным максимумом функции $f(x)$,то точка x_0 называется в этом случае точкой максимума функции $f(x)$ (рис.7).

Значение $f(x_0)$ называется локальным минимумом функции $f(x)$, если при любом достаточно малом $h>0$ выполняются условия $f(x_0-h)>f(x_0)$ и $f(x_0+h)>f(x_0)$, то точка x_0 называется в этом случае точкой минимума функции $f(x)$ (Рис.8). Локальные максимум и минимум функции называется экстремумом функции. Точка максимума и минимума функции называется точкой ее экстремума.

5.9 Необходимое условие экстремума.

Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то производная $f'(x_0)$ обращается в нуль или не существует.

Точка x_0, в которой $f'(x_0)=0$, называется стационарной точкой. Точки, в которых $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует, называеются критическими точками. Не всякая критическая точка является точкой экстремума.

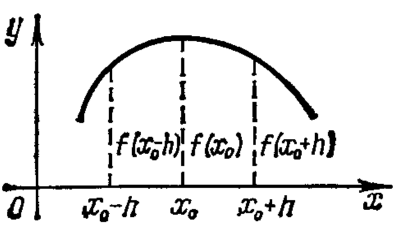


Рис.7

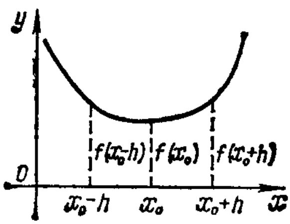


Рис.8

5.10 Достаточные условия экстремума.

Правило 1. Если x_0 -критическая точка функции $f(x)$ и при произвольном достаточно малом $h>0$ выполняются неравенства $f'(x_0-h)>0$, $f'(x_0+h)<0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум (рис.7), если же $f'(x_0-h)<0$, $f'(x_0+h)>0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет минимум (рис.8). Если знаки $f'(x_0-h)$ и $f'(x_0+h)$ одинаковы, то функция $f(x)$ в точке x_0 экстремума не имеет.

Правило 2. Если $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, а именно, максимум, если $f''(x_0)<0$, и минимум, если $f''(x_0)>0$.

Правило 3. Пусть

$$f'(x_0)=0, f''(x_0)=0, f'''(x_0)=0,..., f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

В этом случае функция *f(x)* имеет в точке x_0 экстремум, если *n*- четное число, а именно, максимум при $f^{(n)}(x_0)<0$ и минимум при $f^{(n)}(x_0)>0$. Если же *n*-нечетное число, то функция $f(x)$ в точке x_0 экстремума не имеет.

Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции *f(x)* на отрезке $[a,b]$ нужно из значений функции на границах отрезка и в критических точках, принадлежащих этому отрезку, выбрать наибольшее (наименьшее).

5.11 Выпуклость, вогнутость. Точка перегиба.

График функции $y=f(x)$ называется выпуклым в интервале $]a,b[$, если он расположен ниже касательной, проведенной в любой точке этого интервала (рис.9). График функции $y=f(x)$ называется вогнутым в интервале $]a,b[$, если он расположен выше касательной, проведенной в любой точке этого интервала (рис.10).

5.12 Достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции.

Если $f''(x)<0$ в интервале $]a,b[$, то график функции является выпуклым в этом интервале (рис.9); если же $f''(x)>0$, то в интервале

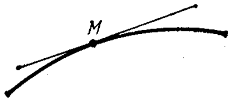


Рис.9

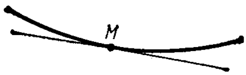


Рис.10

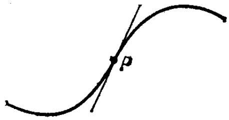


Рис.11

]a,b[график функции – вогнутый (рис.10). Точка $(x_0, f(x_0))$ графика функции, отделяющая его выпуклую часть от вогнутой, называется точкой перегиба (рис.11).

Если x_0 – абсцисса точки перегиба графика функции $y = f(x)$, то вторая производная равна нулю или не существует. Точки, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, называются критическими точками 2-рода. Если x_0 - критическая точка 2-рода и при произвольном достаточно малом $h > 0$ выполняются неравенства

$$f''(x_0 - h) < 0,\ \ f''(x_0 + h) > 0$$

или

$$f''(x_0 - h) > 0,\ \ f''(x_0 + h) < 0,$$

то точка кривой $y = f(x)$ с абсциссой x_0 является точкой перегиба. Если же $f''(x_0 - h)$ и $f''(x_0 + h)$ имеют одинаковые знаки, то точка кривой $y = f(x)$ с абсциссой x_0 точкой перегиба не является.

5.13 Асимптоты.

Прямая L называется асимптотой кривой $y=f(x)$, если расстояние точки $M(x,y)$ кривой от прямой L стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат (т.е. при стремлении хотя бы одной из координат точки к бесконечности). Прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой кривой

$y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = -\infty$.

Прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой кривой $y=f(x)$, если существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b.$

Прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой кривой $y=f(x),$ если существуют пределы

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=b, \qquad b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]$$

или

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=b, \qquad b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]$$

.

5.14 **Построение графиков функций по характерным точкам.** При построении графика функции $y=f(x)$ полезно выяснить его характерные особенности. Для этого надо:

1) Найти область определения функции;
2) Исследовать функцию на четность и нечетность;
3) Найти точки пересечения графика функции с осями координат;
4) Исследовать функцию на непрерывность; найти точки разрыва (если они существуют) и установить характер разрыва; найти асимптоты кривой $y=f(x)$;
5) Найти интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы;
6) Найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точки ее перегиба.

Расчётные задания

Задание I. В задаче I найти уравнения касательной и нормали к заданной кривой в точке с абсциссой x_0

Задание 2. В задаче 2 найти дифференциал функции.

Задание 3 . В задаче 3 найти вторую производную функции.

Задание 4. В. задаче 4 логарифмическим дифференцированием найти производную функции.

Задание 5. В задаче 5 найти производную функции, заданной неявно.

Задание 6. В задаче 6 найти производную y''_{xx} функции, заданной в параметрическом виде.

Показательный вариант

Задача 1. Найти уравнения касательной и нормали к кривой

$$y = ln\,(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$$

в точке с абсциссой $x_0 = 0$

Решение: Найдём производную от заданной функции:

$$y'(x) = \frac{1}{e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}} \cdot \left(e^x + \frac{1}{2\sqrt{1 + e^{2x}}} e^{2x} \cdot 2\right) = \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$$

Вычислим значение функций y и её производной y' в точке $x_0 = 0$

$$y_0 = y(0) = ln\,(1 + \sqrt{2}), \quad y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Уравнение касательной к кривой $y = y(x)$ в точке (x_0, y_0)

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)\,,$$

а уравнение нормали

$$y = y_0 - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)\ ,$$

откуда уравнение касательной к заданной кривой имеет вид:

$$y = ln\big(1 + \sqrt{2}\big) + \frac{1}{\sqrt{2}}x,$$

уравнение нормали

$$y = ln\big(1 + \sqrt{2}\big) - \sqrt{2}x.$$

Ответ: $x - \sqrt{2}\,y + \sqrt{2}\,ln\big(1 + \sqrt{2}\big) = 0,$

$\sqrt{2}x + y - ln\big(1 + \sqrt{2}\big) = 0.$

Задача 2. Найти дифференциал функции

$$y = ctgcos2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{sin^2 6x}{cos12x}$$

Решение: Найдём производную y'(x):

$$y' = \frac{1}{6} \cdot \frac{2sin6x \cdot cos6x \cdot 6cos12x - sin^2 6x(-sin12x) \cdot 12}{cos^2 12x} =$$

$$= \frac{sin12x}{cos^2 12x}.$$

По формуле *dy=y'dx* имеем

$$dy = \frac{sin12x}{cos^2 12x} dx$$

Задача 3. Найти вторую производную функции

$$y = arc\ tg(x + \sqrt{1 + x^2})$$

Решение:

$$y' = \frac{1}{1 + (x + \sqrt{1 + x^2})^2} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = \frac{1}{2(1 + x^2)}$$

$$y'' = (y')' = \left(\frac{1}{2(1 + x^2)}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{(1 + x^2)^2} = -\frac{x}{(1 + x^2)^2}$$

Ответ:

$$-\frac{x}{(1 + x^2)^2}$$

Задача 4. Найти производную функции

$$y = (x^3 + 1)^{tgx}$$

Решение: Прологарифмировав обе части равенства, получим

$$lny = tgx\ ln\,(x^3 + 1)$$

Продифференцируем обе части полученного соотношения, учитывая, что x–независимая переменная, а y - функция от x:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{cos^2 x} ln(x^3 + 1) + tgx \cdot \frac{1}{x^3 + 1} \cdot 3x^2\ ,$$

$$y' = y\left(\frac{ln(x^3 + 1)}{cos^2 x} + \frac{3x^2 tgx}{x^3 + 1}\right) =$$

$$= (x^3 + 1)^{tgx}\left(\frac{ln(x^3 + 1)}{cos^2 x} + \frac{3x^2 tgx}{x^3 + 1}\right).$$

Задача 5. Найти производную функции

$$arctg\frac{y}{x}=\frac{1}{2}ln(x^2+y^2)$$

Решение : Продифференцируем обе части равенства учитывая, что x – независимая переменная, а y - функция от x:

$$\frac{xy'}{x^2+y^2}-\frac{yy'}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}.$$

тогда $y'(x\text{-}y)=x+y$, следовательно $y'=\frac{x+y}{x-y}$.

Ответ:

$$y'=\frac{x+y}{x-y}.$$

Задача 6. Найти вторую производную y''_{xx} функции

$$\begin{cases} x=ln\,(1+t^2) \\ y=t-arc\,tgt \end{cases}$$

Решение:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{1-\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{1}{1+t^2}\cdot 2t}=\frac{1+t^2-1}{2t}=\frac{t}{2}.$$

$$y''_{xx}=(y'_x)'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}=\frac{1+t^2}{4t}$$

Ответ:

$$\frac{1+t^2}{4t}$$

Варианты

Вариант 1

1. $y=ctg\sqrt[3]{5}-\frac{1}{8}\frac{cos^2 4x}{sin8x},\ x_0=\frac{\pi}{16}$. 2. $y=\left(ln\sqrt[3]{e^{2x}+1}\right)^4$.

3. $y=\sqrt[3]{x^3}+\sqrt{x}$. 4. $y=(x^4+5)^{ctgx}$. 5. $e^{x+y}=arctgxy$.

6. $\begin{cases} x(t)=\frac{3t^2+1}{3t^3}, \\ y(t)=sin(t^3). \end{cases}$

Вариант 2

1. $y = \frac{2}{3}\sqrt{(arctge^x)^3},\ x_0 = 0.$

2. $y = ln\left(cos^2\text{x} + \sqrt{1 + cos^4x}\right).$

3. $y = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt[3]{2+4x}}.$ 4. $y = x^{cosx^2}.$ 5. $\sqrt{x^2 + y^2} - tgxy = 0.$

6. $\begin{cases} x(t) = \sqrt[3]{1 - t^2}, \\ y(t) = tg\sqrt{1 + t}. \end{cases}$

Вариант 3

1. $y = e^{2x}(2 - sin2x - cos2x),\ x_0 = 0.$

2. $y = ln\,arcsin\sqrt{1 - e^{2x}}.$

3. $y = \frac{2\left(3x^3+4x^2-x-2\right)}{15\sqrt{1+x}}.$ 4. $y = (x^3 + 4)^{tgx}.$ 5. $xy = sin(x + y).$

6. $\begin{cases} x(t) = \sqrt{2t - t^2}, \\ y(t) = \sqrt[3]{(t - 1)^2}. \end{cases}$

Вариант 4

1. $y = \frac{1}{2}ln(e^{2x} + 1) - 2arctg(e^x),\ x_0 = 0.$ 2. $y = \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}.$

3. $y = cos(ctg2x) - \frac{1}{16}\cdot\frac{cos^2 8x}{sin16x}.$ 4. $y = (sinx)^{5e^x}.$

5. $xy = 3^x + xe^y.$ 6. $\begin{cases} x(t) = arccos(sint), \\ y(t) = arcsin(cost). \end{cases}$

Вариант 5

1. $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}},\ x_0 = \frac{1}{2.}$ 2. $y = arccos\frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}.$

3. $y = tg\left(ln\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}\cdot\frac{sin^2 4x}{cos8x}.$ 4. $y = (lnx)^{3^x}.$ 5. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}.$

6. $\begin{cases} x(t) = l\,n\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right), \\ y(t) = \sqrt{t^2 + 1}. \end{cases}$

Вариант 6

1. $y = \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}},\ x_0 = 0.$ 2. $y = ln^3\left(arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$

3. $y = 5^{-x^2}.$ 4. $y = (tgx)^{4e^x}.$ 5. $y \cdot sinx = co\,s(x - y).$

6. $\begin{cases} x(t) = ctg(2e^t), \\ y(t) = lntg(e^t). \end{cases}$

Вариант 7

1. $y = \frac{cosln7 \cdot sin^2 7x}{7cos14x}$, $x_0 = \frac{\pi}{14}$. 2.$y = ln\ arccos\sqrt{1-e^{4x}}$.
3.$y = x\sqrt{x^2-8}$. 4. $y = (x^2-1)^{sinx}$. 5. $3^y + 2^x = 2^{x+y}$.
6. $\begin{cases} x(t) = \sqrt{2t-t^2}, \\ y(t) = arcsin(t-1). \end{cases}$

Вариант 8

1. $y = ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}+1} + arcsine^{-x}\right), x_0 = 0$.
2. $2.y = \frac{2}{3}\sqrt{(arctge^x)^3}$. 3.$y = x^2 lnx$. 4. $y = \left(sin\sqrt{x}\right)^{ctgx}$.
5. $x + y = 2^{x+y}$. 6. $\begin{cases} x(t) = lnctgt, \\ y(t) = \frac{4}{cos^2 t}. \end{cases}$

Вариант 9

1. $y = \sqrt[3]{x^3+2x+1}$, $x_0 = 0$ 2. $y = \frac{1}{2}arctg\frac{e^x-3}{2}$.
3.$y = ln\frac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$. 4. $y = (cos5x)^{2x}$. 5. $y^3 + 2xy + b^2 = 0$.
6. $\begin{cases} x(t) = arct\,g\,e^{\frac{t}{2}}, \\ y(t) = \sqrt{e^t+1}. \end{cases}$

Вариант 10

1. $y = \frac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$, $x_0 = 0$. 2.$y = arctg^3(e^x - e^{-x})$.
3.$y = x^4 ln3x$. 4. $y = (x^3+1)^{cosx}$.
5. $x - y = arcsinx - arcsiny$. 6. $\begin{cases} x(t) = tcost - 2sint, \\ y(t) = tsint + 2cost. \end{cases}$

Вариант 11

1. $y = xe^{-x} + arcsin(5^{2x})$, $x_0 = 0$. 2.$y = log_a\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$.
3.$y = (1-x^2)\sqrt[5]{x^3}$. 4. $y = (sinx)^{arctgx}$.
5. $xcosy - sin(y^2) = 0$. 6. $\begin{cases} x(t) = ln\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, \\ y(t) = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

Вариант 12

1. $y = (x^2-2)\sqrt{4+x^2}$, $x_0 = 0$. 2.$y = arccos\sqrt{1+2x^3}$.
3.$y = ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$. 4. $y = (x^7+1)^{tgx}$.

5. $x + y = sinxy.$ 6. $\begin{cases} x(t) = \sqrt{1-t^2}, \\ y(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

Вариант 13

1. $y = \frac{1}{ln4} \cdot ln\frac{1+2^x}{1-2^x},\ x_0 = 0.$ 2.$y = \frac{4+3x^2}{\sqrt[3]{2+x^4}}.$

3.$y = x\sqrt{4-x^2} + 4arcsin\frac{x}{2}.$ 4. $y = (1-cosx)^{tgx}.$

5. $x + 1 = e^{xy}.$ 6. $\begin{cases} x(t) = \sqrt{1-t^2}, \\ y(t) = ln\left(1+\sqrt{1-t^2}\right). \end{cases}$

Вариант 14

1. $y = \frac{2}{3}(arctge^x)^3,\ x_0 = 0.$ 2. $y = tg^3 2x.$

3.$y = x^2 ln_3 x.$ 4. $y = x^{e^{cosx}}.$ 5. $xy = sin(x+4).$

6. $\begin{cases} x(t) = arcsin\sqrt{1-t^2}, \\ y(t) = (arccost)^2. \end{cases}$

Вариант 15

1. $y = \sqrt[5]{(x^3+7x-7)^3},\ x_0 = 1.$ 2.$y = arccosx + lntge^x.$

3.$y = arctg\frac{x-1}{2}.$ 4. $y = (cos2x)^{e^x}.$ 5. $x^3 + y^3 = 3^{xy}.$

6. $\begin{cases} x(t) = ln^3 cost, \\ y(t) = e^{sint}. \end{cases}$

Вариант 16

1. $y = \sqrt[8]{(x^2+x+1)^3},\quad x_0 = 0.$ 2.$y = e^{sin2x} -$
$log_3\left(\sqrt{x+1}\right).$

3.$y = arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}.$ 4. $y = (tgx-1)^{cosx}.$

5. $x - y = arctg\sqrt{y}.$ 6. $\begin{cases} x(t) = (1+cos^2 t), \\ y(t) = \frac{cost}{sin^2 t}. \end{cases}$

Вариант 17

1. $y = \frac{3}{\sqrt{2}}arctg\frac{4x+3}{\sqrt{17}},\ x_0 = 0.$ 2.$y = ln^2(x^3 + cos2x).$

3.$y = 3^x cos2x.$ 4. $y = (x^3-4)^{sin2x}.$ 5. $sinxy = y^2.$

6. $\begin{cases} x(t) = arccos\frac{1}{t}, \\ y(t) = \sqrt{t^2 - 1}. \end{cases}$

Вариант 18

1. $y = ln\frac{x+1}{x+2}$, $x_0 = 0$. 2.$y = x^2 sin2x$. 3.$y = \frac{2}{3}arcsin\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}$.

4. $y = (sinx)^{\sqrt{x}}$. 5. $cosxy = x + y$. 6. $\begin{cases} x(t) = ln(1 + t^2), \\ y(t) = t - arctgt. \end{cases}$

Вариант 19

1. $y = ln\left(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}\right)$, $x_0 = 0$. 2.$y = arccos\sqrt{1 - x^2}$.

3.$y = 3^{\sqrt{x+1}}$. 4. $y = (cosx)^{lnx}$. 5. $x^3 + y^3 = 3^{xy}$.

6. $\begin{cases} x(t) = ln(1 - t^2), \\ y(t) = arcsin\sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

Вариант 20

1. $y = \sqrt[3]{x^3 + 4}$, $x_0 = 0$. 2.$y = arctg\sqrt{sin\frac{5}{x}}$. 3.$y = ln(1 + x^2)$.

4. $y = (lnx)^{x^2-1}$. 5. $arctg\frac{y}{x} = x$. 6. $\begin{cases} x(t) = arcsin\sqrt{t}, \\ y(t) = \sqrt{1 + \sqrt{t}}. \end{cases}$

Вариант 21

1. $y = 1 - \sqrt[3]{x^2} + \frac{16}{x}$, $x_0 = -8$. 2. $y = ln\,sin(x^3 + 1)$.

3. $y = \sqrt{1 + x^2}$. 4. $y = (tgx)^{x+1}$. 5. $y = arctgy - y + x$.

6. $\begin{cases} x(t) = 2sint, \\ y(t) = 3cost. \end{cases}$

Вариант 22

1. $y = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}$, $x_0 = 0{,}01$. 2. $y = arc\,sin\sqrt{1 - x^2}$.

3. $y = xe^{-\frac{1}{x}}$. 4. $y = (cos\sqrt{x})^{sin^2 3x}$. 5. $e^x - e^y = y - x$.

6. $\begin{cases} x(t) = e^{2t}(t^2 + 1), \\ y(t) = e^{3t}. \end{cases}$

Вариант 23

1. $y = \frac{cosx}{1-x}$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$. 2. $y = sin^2\sqrt{\frac{1}{1-x}}$.

3. $y = x^2 lnx$. 4. $y = (ctg3x^4)^{\sqrt{x-3}}$. 5. $lnx + e^{\frac{-y}{x}} = 0$.

6. $\begin{cases} x(t) = arcsint, \\ y(t) = arccos\sqrt{t}. \end{cases}$

Вариант 24

1. $y = \frac{sinx+cosx}{sinx-cosx}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$. 2. $y = ln^5(tg3x)$.

3. $y = x\sqrt{1+x^2}$. 4. $y = (ctg2x)^{sin\sqrt{x}}$. 5. $y = x + arctgy$.

6. $\begin{cases} x(t) = ln\sqrt{1-t}, \\ y(t) = tlnt. \end{cases}$

Вариант 25

1. $y = arcsin\frac{2x}{1+x^2}$, $x_0 = 2$. 2. $y = 5^{cosx}$.

3 $y = \frac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}$. 4.$y = (ln\,(7x-5))^{arctg2x}$.

5. $y = x^2 + arcctgy$. 6. $\begin{cases} x(t) = 2cost - tsint, \\ y(t) = 3sint + tcost. \end{cases}$

Вариант 26

1. $y = (1 + 3x + 5x^2)^4$, $x_0 = 0$.

2. $y = sin(x^2 - 5x + 1) + tg\left(\frac{a}{x}\right)$. 3. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

4. $y = (arcsin\,(2+x))^{ln\,(x+3)}$. 5. $x^3 + x^2 y = lny$.

6. $\begin{cases} x(t) = tge^t, \\ y(t) = lne^{2t}. \end{cases}$

Вариант 27

1. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, $x_0 = 4$. 2. $y = \frac{1}{(1+cos4x)^5}$.

3. $y = arccos\sqrt{x}$. 4. $y = (arcsin2x)^{ctg(x+1)}$.

5. $\sqrt{x^2 - y^2} - ln\sqrt{xy}$. 6. $\begin{cases} x(t) = \sqrt{1-t^2}, \\ y(t) = arcsin\sqrt{t}. \end{cases}$

Вариант 28

1. $y = \frac{cos^2x}{1+sin^2x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$. 2. $y = ln(e^{-x} + xe^{-x})$.

3. $y = lnsin(x^3+1)$. 4. $y = (ln(5x-4))^{arcctgx}$.

5. $e^{xy} - x^2 + y = 0$. 6. $\begin{cases} x(t) = \sqrt{1-2t}, \\ y(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

Вариант 29

1. $y = arcsin\frac{x-1}{x}$, $x_0 = 5$. 2. $y = \frac{cosx}{sin^2x} + ln(tg\frac{x}{2})$.

3. $y = \frac{2x^2+x+1}{x^2-x+1}$, 4. $y = (tg3x^3)^{\sqrt{x+5}}$. 5. $arctgy = \sqrt{x+y}$.

6. $\begin{cases} x(t) = t^2 + sin\sqrt{t}, \\ y(t) = arctgt. \end{cases}$

Вариант 30

1. $y = arctg\frac{x}{a} - ln\sqrt[4]{x^4 - a^4}$, $x_0 = 2a$. 2. $y = ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$.

3. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$. 4. $y = (cos2x^2)^{arcsin\sqrt{x}}$.

5. $x^2siny - cosy + ysinxy = 0$. 6. $\begin{cases} x(t) = ln\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \\ y(t) = cos\sqrt{t}. \end{cases}$

6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

6.1 Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$. Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных, причем все первообразные содержатся в выражении $F(x)+C$, где C – постоянная.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ (или выражения $f(x)dx$) называется совокупность всех ее первообразных. Обозначение: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Здесь $\int$ - знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, x- переменная интегрирования.

Отыскание неопределенного интеграла называется интегрированием функции.

6.2 Правила интегрирования.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$,
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$,

3. $\int dF(x) = F(x) + C$,

4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ где a – постоянная,

5. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$,

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ то

$\int f(u)du = F(u) + C$.

6.3 Таблица основных интегралов.

I. $\int dx = x + C,$

II. $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C$, $m \neq -1$,

III. $\int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + C$,

IV. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$,

V. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\, x + C$,

VI. $\int e^x dx = e^x + C$,

VII. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{ln\, a} + C$,

VIII. $\int sinxdx = -cosx + C$,

IX. $\int cosxdx = sinx + C$,

X. $\int sec^2 xdx = tgx + C$,

XI. $\int cosec^2 xdx = -ctgx + C$,

XII. $\int shxdx = chx + C$,

XIII. $\int chxdx = shx + C$,

XIV. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C$,

XV. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$,

6.4 Замена переменной в неопределенном интеграле.

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1. $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$- монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t. Формула замены переменной в этом случае имеет вид

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

2. $u = \psi(x)$, где u новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке:

$$\int f[\psi(x)]\psi'(x)dx = \int f(u)du.$$

Дополним теперь таблицу основных интегралов следующими формулами:

XVI. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln|f(x)| + C,$ XVII. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C,$

XVIII. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C,$ XIX. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$

XX. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C,$ XXI. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \lambda}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 + \lambda}\right| + C$

XXII. $\int \frac{dx}{sin\,x} = ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C = ln|cos\,ec\,x - ctgx| + C,$

XXIII. $\int \frac{dx}{cos\,x} = ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = ln|sec\,x + tgx|,$

XXIV. $\int tgxdx = -ln|cos\,x| + C,$ XXV. $\int ctgxdx = ln|sin\,x| + C,$

6.5 Интегрирование по частям.

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

где $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции от x. С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int udv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int vdu$; ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен.

При этом за u берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Так, например, для интегралов вида,

$$\int P(x)e^{ax}dx, \qquad \int P(x)\sin axdx, \qquad \int P(x)\cos axdx,$$

где $P(x)$ –многочлен, за $u(x)$ следует принять $P(x)$, а за $d(v(x))$ - соответственно выражения

$$e^{ax}dx, \sin axdx, \cos axdx;$$

для интегралов вида

$$\int P(x)\ln xdx, \quad \int P(x)\arcsin xdx, \quad \int P(x)\arccos xdx$$

за $u(x)$ принимаются соответственно функции

$$\ln x, \arcsin x, \arccos x,$$

а за $d(v(x))$- выражение $P(x)dx$.

6.6 Интегрирование простейших дробей.

Рациональной дробью называется дробь вида $P(x)/Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены. Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена $P(x)$ ниже степени многочлена $Q(x)$; в противном случае дробь называется неправильной. Простейшими (элементарными) дробями называются правильные дроби следующих видов:

I. $\dfrac{A}{x-a}$. II. $\dfrac{A}{(x-a)^m}$ где m-целое число, больше единицы;

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ где $\dfrac{p^2}{4}-q<0$, т.е. квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней;

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ где n – целое число, больше единицы, и квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней. Во всех четырех случаях предполагается, что A,B,p,q,a – действительные числа. Перечисленные дроби будем соответственно называть простейшими дробями I,II,III и IV типов. Рассмотрим интегралы от простейших дробей первых трех типов. Имеем

I. $\int \dfrac{A}{x-a}dx = A\,ln|x-a| + C$.

II. $\int \dfrac{Adx}{(x-a)^m} = -\dfrac{A}{m-1}\cdot\dfrac{1}{(x-a)^{m-1}} + C$.

III. $$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2}ln\left|x^2+px+q\right| +$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2}ln\left|x^2+px+q\right| +$$

$$+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Покажем теперь как интегрируются простейшие дроби IV типа:

Требуется найти $\int\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx,\quad \dfrac{p^2}{4}-q<0$, Выделим в числителе дроби производную знаменателя

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx = .$$

$$= \frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

Первый интеграл, стояший в правой части равенства, легко находится с подстановкой $x^2+px+q=t$, а второй изменим следующим образом:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + px + q\right)^n} = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^n}$$

Теперь полагая $x + \frac{p}{2} = t,\ dx = dt$ и $q - \frac{p^2}{4} = a^2$, получим равенство $\int \frac{dx}{\left(x^2 + px + q\right)^n} = \int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^n}$. Таким образом интеграл IV типа может быть интегрирован с помошью следующей рекуррентной формулы:

$$\int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^n} = \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} \int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^{n-1}}$$

6.7 Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения на простейшие дроби.

Перед интегрированием рациональной дроби $P(x)/Q(x)$ надо сделать следующие алгебраические преобразования и вычисления:

1).если дана неправильная рациональная дробь, то выделить из нее целую часть, т.е. представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ - многочлен, а $P_1(x)/Q(x)$- правильная рациональная дробь;

2). разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители;

$Q(x) = a_0(x-a)^m \ldots \left(x^2 + px + q\right)^n \ldots,$ где $\frac{p^2}{4} - q < 0$, т.е. трехчлен $x^2 + px + q$ имеет комплексные сопряженные корни;

3).правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_m}{x-a}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{B_1x+C_1}{\left(x^2+px+q\right)^n}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^{n-1}}+\ldots+\frac{B_nx+C_n}{x^2+px+q}+\ldots,$$

4). вычислить неопределенные коэффициенты $A_1, A_2,\ldots,A_m,\ldots,\ B_1,\ C_1,B_2,C_2,\ldots,B_n,\ C_n\ldots,$ для чего привести последнее равенство к общему знаменателю, приравнять коффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов. Можно определить коэффициенты и другим способом, придавая в полученном тождестве переменной x произвольные числовые значения. Часто бывает полезно комбинировать оба способа вычисления коэффициентов. В результате интегрирование рациональной дроби сводится к нахождению интегралов от многочлена и от простейших рациональных дробей.

6.8 Интегралы вида $\int R(e^x)dx$ - где R – рациональная функция. С помощью подстановки $e^x=t$, откуда

$$e^x dx = dt, \qquad dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t},$$

интеграл $\int R(e^x)dx$ преобразуется в интеграл от рациональной функции.

6.9 Интегрирование простейших иррациональных функций.

Интегралы вида $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right)dx$, где R-рациональная функция; $m_1,n_1,\ m_2,n_2,\ldots,$- целые числа.

С помощью подстановки $(ad \neq bc)$, $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)=t^s$ где s - наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2 \ldots$, указанный интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции.

6.10 Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, где R – рациональная функция. Интегралы указанного вида приводится к интегралам от рациональных функций с помощью так называемой универсальной тригонометрической подстановки $tg(x/2)=t$.

В результате этой подстановки имеем:

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad x=2arctgt,$$

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

В некоторых частных случаях нахождение интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ может быть упрощено.

1.Если $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная функция относительно $\sin x$, т.е. если $R(-\sin x, \cos x)=-R(\sin x, \cos x)$. то интеграл рационализируется подстановкой $\cos x=t$.

2. Если $R(\sin x, \cos x)$ - нечетная функция относительно $\cos x$. т.е. если $R(\sin x, -\cos x)=-R(\sin x, \cos x)$. то интеграл рационализируется подстановкой $\sin x=t$.

3.Если $R(\sin x, \cos x)$- четная функция относительно $\sin x$, и $\cos x$, т.е. если $R(-\sin x, -\cos x)=R(\sin x, \cos x)$. то к цели приводит подстановка $tgx=t$.

6.11 Тригонометрические подстановки.

Интегралы $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ приводятся к интегралам от рациональной относительно $\sin t$ и $\cos t$ функции с помощью надлежащей тригонометрической подстановки: для первого интеграла $x=a\sin t$ или

$x = a\cos t$, для второго $x = atgt$ или $x = actgt$ и для третьего $x = a\sec t$ или $x = a\cos ect$.

6.12 Определенный интеграл.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$.

Разделим отрезок $[a,b]$ на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ произвольную точку ξ_k и найдем длину каждого такого отрезка : $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется сумма вида $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, причем эта сумма имеет конечный предел I , если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при $\max \Delta x_k < \delta$ неравенсто $|\sigma - I| < \varepsilon$ выполняется при любом выборе чисел ξ_k.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ (или в пределах от a до b) называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков ($\max \Delta x_k$) стремится к нулю:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sigma = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то предел интегральной суммы существует и не зависить от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на элементарные отрезки и от выбора точек ξ_k. (теорема существования определенного интеграла).

Числа a и b соответственно называются нижним и верхним пределами интегрирования.Если $f(x) > 0$ на $[a,b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (12-rasm).

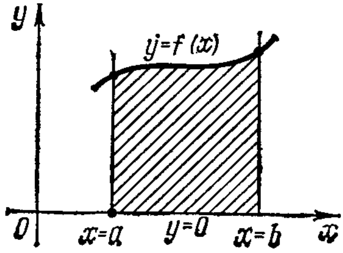


Рис.12

6.13 Основные свойства определенного интеграла.

1. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$;   2. $\int_a^a f(x)dx = 0$;

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

4. $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$;

5. $\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$;   где С-постоянная;.

6. Оценка определенного интеграла: если $m \le f(x) \le M$ на *[a,b],* то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$
.

6.14 Правила вычисления определенных интегралов

1.Формула Ньютона-Лейбница:

$$e^{xy}\left[(ydx + xdy)^2 + 1dxdy\right],$$

где *F(x)* –первообразная для *f(x),* т.е. $F'(x) = f(x)$.

2.Интегрирование по частям:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu,$$

где $u=u(x)$, $v=v(x)$ –непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[a,b]$.

3.Замена переменной:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt,$$

где $x = \varphi(t)$ -функция, непрерывная вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \le t \le \beta$, $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$, $f[\varphi(t)]$ - функция, непрерывная на $[\alpha, \beta]$.

4. Если $f(x)$–нечетная функция, т.е. $f(-x)=-f(x)$, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

Если $f(x)$–четная функция, т.е. $f(-x) = f(x)$, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

6.15 Несобственные интегралы

Несобственными интегралами называются:

1. интегралы с бесконечными пределами;
2. интегралы от неограниченных функций.

Несобственный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ определяется равенством

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx\cdot$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся; если же предел не существует или равен бесконечности,-расходящимся.

Аналогично,

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to+\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)dx$$

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке c отрезка $[a,b]$ и непрерывна при $a \le x < c$ и $c < x \le b$, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to O+0} \int_{\alpha}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\beta\to O+0} \int_{c+\beta}^{b} f(x)dx.$$

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ (где $f(c) = \infty, \ a < c < b$) называется сходящимся, если существуют оба предела в правой части равенства, и расходящимся, если не существует хотя бы один из них.

6.16 Признак сравнения.

При исследовании сходимости несобственных интегралов пользуются одним из признаков сравнения.

1. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены для всех $x \ge a$ и интегрируемы на отрезке $[a,A],$ где $A \ge a$, и если $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ для всех $x \ge a$, то

а) из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ вытекает сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, причем

$$ln\left|x + \sqrt{2+x^2}\right| + arcsin\left(x/\sqrt{2}\right) + C;$$

b) из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ вытекает расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$.

2. (a) Если при $x \to +\infty$ функция $f(x) \geq 0$ является бесконечно малой порядка $p>0$ по сравнению $1/x$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится при $p>1$ и расходится при $p \leq 1$.

(b) Если функция $f(x) \geq 0$ определена и непрерывна в промежутке $a \leq x < b$ и является бесконечно большой порядка p по сравнению с $\dfrac{1}{b-x}$ при $x \to b-0$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится при $p<1$ и расходится при p>1.

6.17 Вычисление площади плоской фигуры.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой *f(x)* *[f(x)≥0]* прямыми *x=a* и *x=b* и отрезком *[a,b]* оси *OX*, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx \cdot$$

Площадь фигуры, ограниченной кривымы

$$y = f_1(x) \qquad y = f_2(x)[f_1(x) \leq f_2(x)]$$

и прямыми $x=a$ и $x=b$, находится по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a,b]$ оси OX выражается формулой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнений

$$a = x(t_1), b = x(t_2),\ [\,t_1 \le t \le t_2 \text{ при } \ y(t) \ge 0\,].$$

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\theta)$ и двумя полярными радиусами $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, $(\alpha < \beta)$, находится по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta$$

6.18 Вычисление длины дуги плоской кривой.

Если $y = f(x)$ на $[a,b]$ гладкая кривая (то есть производная $y' = f'(x)$ непрерывна), то соответствующая дуга этой кривой вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx\cdot$$

Если кривая L задана параметрически равенствами $x = x(t)$ и $y = y(t)$ ($x = x(t)$ и $y = y(t)$ непрерывно – дифференцируемые функции), то длина дуги, соответствующей между значениями t_1 и t_2 параметра t, вычисляется по формуле

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt\cdot$$

Если кривая L задана в полярных координатах

$$\rho = \rho(\theta), \alpha \le \theta \le \beta,$$

то длина дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta.$$

6.19 Вычисление площади поверхности вращения.

Если дуга гладкой кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$ вращается вокруг оси OX (рис.13), то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad \alpha \le t \le \beta$$

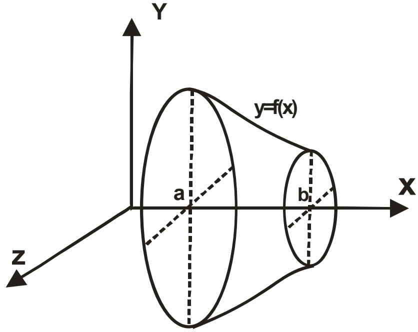


Рис.13

то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(x)\right)^2}\,dt.$$

6.20 Вычисление объема тела вращения.

Если тело ограничена поверхностью вращения, полученной вращением гладкой кривой

$$y = f(x), \qquad a \le x \le b$$

вокруг оси OX и плоскостями $x=a,\ x=b$, (Рис13), то его объем вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx.$$

Если при этом кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad \alpha \le t \le \beta,$$

то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} [y(t)]^2 x'(t)dx.$$

Расчётные задания

<u>Задание 1.</u> В задачах 1-4 найти неопределённые интегралы.
<u>Задание 2.</u> В задачах 5,6 вычислить определённые интегралы.
<u>Задание 3.</u> В задаче 7 исследовать на сходимость несобственный интеграл.
<u>Задание 4.</u> Решите задачу 8 на геометрическое приложение определённого интеграла.

Показательный вариант

<u>Задача 1.</u> Найти неопределённый интеграл

$$\int arcsinx\, dx$$

<u>Решение:</u>

По формуле $\int udv = uv - \int vdu$ и

$$\begin{bmatrix} u = arcsinx \quad , \qquad du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \quad , \quad v = x \end{bmatrix}$$

получим

$$\mathcal{J} = x\, arcsinx - \int x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x \cdot arcsinx + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}\, d(1-x^2) =$$

$$= x \cdot arcsinx + \sqrt{1-x^2} + C \quad .$$

Ответ: $x \cdot arcsinx + \sqrt{1-x^2} + C$.

<u>Задача 2.</u> Найти неопределённый интеграл

$$\mathcal{J} = \int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2} dx$$

Решение: Выделим из под интегральной неправильной дроби целую часть, деля числитель на знаменатель:

$$\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{x^4+3x^2}$$

Разложим полученную правильную дробь на простейшие дроби методом неопределённых коэффициентов:

$$\frac{1}{x^2(x^2+3)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+3}$$

$$1=A(x^2+3)+Bx(x^2+3)+(Cx+D)x^2=$$
$$=(B+C)x^3+(A+D)x^2+3Bx+3A$$

$$B+C=0,$$
$$A+D=0,$$
$$3B=0,$$
$$3A=1$$

Из этой системы находим неизвестные коэффициенты

$$\begin{cases} B+C=0, \\ A+D=0, \\ 3B=0, \\ 3A=1 \end{cases} \qquad A=\frac{1}{3}\ , \quad B=0\ , \quad C=0\ , \quad D=-\frac{1}{3}\ .$$

Итак,

$$\frac{1}{x^2(x^2+3)}=\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3(x^2+3)}\ .$$

Интегрируя, получим

$$\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx==\int\left(2x+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3(x^2+3)}\right)dx=$$
$$=x^2-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

Ответ:

$$x^2-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+C\ .$$

Задача 3. Найти интеграл

$$\int\frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$$

Решение: Обозначим $x = t^4$, получим $dx = 4t^3dt$

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1+t}{t^4+t^2}\cdot 4t^3dt = 4\int \frac{t^3(1+t)}{t^2(t^2+1)}dt =$$

$$= 4\int \frac{t(t+1)}{t^2+1}dt = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}dt = 4\int \left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= 4t + 2ln(t^2+1) - 4arctgt =$$

$$= 4\sqrt[4]{x} + 2\,ln\left(\sqrt{x}+1\right) - 4arctg\sqrt[4]{x} + C\ .$$

Ответ:

$$4\sqrt[4]{x} - 2\,ln\left(\sqrt{x}+1\right) - 4arctg\sqrt[4]{x} + C\ .$$

Задача 4. Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{2sinx - cosx}$$

Решение: Полагая $x = \ tg\frac{t}{2}$, откуда

$$cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}\quad , \quad sinx = \frac{2t}{1+t^2}\quad , \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

получим

$$\mathcal{J} = \int \frac{dx}{2sinx - cosx} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{2dt}{t^2+4t-1} = 2\int \frac{dt}{(t+2)^2-5} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}ln\left|\frac{t+2-\sqrt{5}}{t+2+\sqrt{5}}\right| + \mathrm{C} = \frac{\sqrt{5}}{5}ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right| + C\ .$$

Ответ:

$$\frac{\sqrt{5}}{5}ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right| + C\ .$$

Задача 5. Вычислить определённый интеграл

$$\mathcal{J} = \int_0^{\pi/4} x^2cos2x\,dx.$$

Решение: Применим формулу интегрирования по частям:

$$\left[\begin{matrix} u = x^2 \quad , \quad du = 2xdx \ , \\ dv = cos2xdx \ , \quad v = \dfrac{1}{2} sin2x \end{matrix}\right],$$

$$\mathcal{J} = \int_0^{\pi/4} x^2 cos2x\, dx = \frac{x^2}{2} sin2x \Bigg|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} xsin2xdx = \frac{\pi^2}{32} -$$

$$- \int_0^{\pi/4} xsin2x\, dx.$$

Полученный интеграл вновь проинтегрируем по частям

$$\left[\begin{matrix} u = x \ , \quad du = dx \ , \\ dv = sin2xdx \ , \quad v = \dfrac{-1}{2} cos2x \end{matrix}\right], \quad \mathcal{J} = \frac{\pi^2}{32} = \int_0^{\pi/4} x^2 cos2x\, dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{32} + \frac{x}{2} cos2x \Bigg|_0^{\pi/4} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} cos2x\, dx = \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{4} sin2x \Bigg|_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\pi^2 - 8}{32} \ .$$

Ответ:

$$\frac{\pi^2 - 8}{32}$$

<u>Задача 6.</u> Вычислить определённый интеграл

$$\mathcal{J} = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{e^{arcsinx} + x + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

<u>Решение:</u> Заданный интеграл представим в виде суммы трёх интегралов

$$\mathcal{J} = \int_0^{\sqrt{2}/2} e^{arcsinx} d(arcsinx) - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}/2} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1 - x^2) +$$

$$+\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Интегрируя каждый из интегралов, получим

$$\mathcal{J}=\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} e^{arcsinx}d(arcsinx)-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{2}/2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)+$$

$$+\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=e^{arcsinx}\Bigg|_0^{\sqrt{2}/2}-\sqrt{1-x^2}\Bigg|_0^{\sqrt{2}/2}+$$

$$+arcsinx\Bigg|_0^{\sqrt{2}/2}=e^{\pi/4}-1-\frac{1}{\sqrt{2}}+1+\frac{\pi}{4}=e^{\pi/4}+\frac{\pi-2\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $e^{\pi/4}+\frac{\pi-2\sqrt{2}}{4}$.

<u>Задача 7.</u> Вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

<u>Решение:</u> Подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x=1$, лежащей внутри отрезка интегрирования $[-1;2]$. По формуле

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\(\varepsilon_1>0)}}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim_{\substack{\varepsilon_2\to 0\\(\varepsilon_2>0)}}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx;$$

(в точке $x=c$ функция терпит разрыв), имеем

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-1}^{1-\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{1+\varepsilon_2}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0}3\sqrt[3]{x-1}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}3\sqrt[3]{x-1}=$$

$$=3\lim_{\varepsilon_1\to 0}(\sqrt[3]{-\varepsilon_1}-\sqrt[3]{-2})+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(1-\sqrt[3]{\varepsilon_2}\right)=3\left(\sqrt[3]{2}+1\right).$$

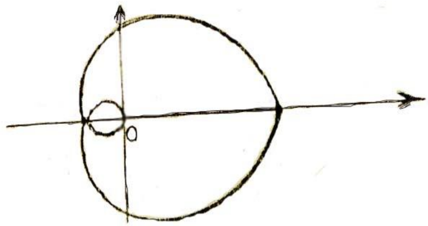
Данный несобственный интеграл сходится.

Ответ: $3\left(\sqrt[3]{2}+1\right)$.

<u>Задача 8.</u> Вычислить длину дуги кривой

$$r = a\cos^3 \frac{\varphi}{3}$$

<u>Решение:</u> Построим график заданной функции



Из графика кривой следует, что половина этой кривой описывается концами полярного радиуса при изменении

$$0 \le \varphi \le \frac{3}{2}\pi$$

Поэтому согласно формуле

$$L_{AB} = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi$$

имеем

$L = 2\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi \qquad r(\varphi) = a\cos^3\frac{\varphi}{3},\ r'(\varphi) = -a\cos^2\frac{\varphi}{3} \cdot \sin\frac{\varphi}{3}$.

$$L = 2\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{a^2\cos^6\frac{\varphi}{3} + a^2\cos^4\frac{\varphi}{3}\sin^2\frac{\varphi}{3}}\ d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2\frac{\varphi}{3}\ d\varphi = a\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left(1 + \cos\frac{2\varphi}{3}\right) d\varphi =$$

$$= a\left(\varphi \Big|_0^{\frac{3}{2}\pi} + \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi}\right) = \frac{3}{2}a\pi.$$

Ответ: $\frac{3}{2}a\pi$.

Варианты

Вариант 1

1. $\int(4-3x)e^{-3x}dx$. 2. $\int\frac{x^3+1}{x^2-x}dx$. 3.$\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

4. $\int sin2xcosxdx$. 5. $\int_{e+1}^{e^2+1}\frac{1+ln(x-1)}{x-1}dx$.

6. $\int_{-2}^{0}(x^2+5x+6)\,cos2xdx$. 7. $\int_{1}^{\infty}\frac{arctgx}{x^2}dx$.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=(x-2)^2,\quad y=4x-8$.

Вариант 2

1. $\int arctg\left(\sqrt{4x-1}\right)dx$. 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+6}}$. 3. $\int\frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}{(2x-3)^{\frac{1}{3}}}dx$.

4.$\int sin5xcos7xdx$. 5.$\int_{0}^{1}\frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^2}dx$. 6.$\int_{-2}^{0}(x^2-4)\,cos3xdx$.

7.$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. 8. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=4-x^2,\quad y=x^2-2x$.

Вариант 3

1. $\int(3x+4)e^{3x}dx$. 2. $\int\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx$. 3. $\int\frac{2}{(2-x)}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}dx}$.

4.$\int sinxcos^3xdx$. 5.$\int_{0}^{1}\frac{4arctgx-x}{1+x^2}dx$. 6.$\int_{-1}^{0}\frac{x^3+4x^2+3x}{x}cosxdx$.

7.$\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$. 8. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=arccosx,\ y=0,\ x=0$.

Вариант 4

1. $\int(4x-2)cos2xdx$. 2. $\int\frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx$. 3.$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x+2)^5}}$

4.$\int sin2xcos^4xdx$. 5.$\int_{0}^{2}\frac{x^3}{x^2+4}dx$. 6.$\int_{-2}^{0}(x+2)^2cos3x\,dx$.

7. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 8. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=(x+1)^2,\quad y^2=x+1$.

Вариант 5

1. $\int(4-16\mathrm{x})\mathrm{sin4xdx}$. 2. $\int\frac{2\mathrm{x}^3-1}{\mathrm{x}^2+\mathrm{x}-6}\mathrm{dx}$. 3.$\int\frac{\sqrt{\mathrm{x}+1}+2}{(\mathrm{x}+1)^2-\sqrt{\mathrm{x}+1}}\mathrm{dx}$.

4.$\int sin2xcos^3xdx$. 5.$\int_{\pi}^{2\pi}\frac{x+cosx}{x^2+2sinx}dx$.

6.$\int_{-4}^{0}(x^2+7x+12)\,cosxdx$. 7. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2xdx}{1+x^2}$.
8. Фигура, ограниченная кривой $y=e^{1-x}$ и прямыми

$$y=0,\ x=0,\ x=1$$

вращается вокруг оси OX. Найти объём тела вращения.

Вариант 6

1. $\int ln(x^2+4)dx$. 2. $\int\frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}dx$. 3. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.
4.$\int\frac{dx}{5+4sinx}$. 5.$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2cosx+3sinx}{(2sinx-3cos)^3}dx$. 6.$\int_0^{\pi}(2x^2+4x+7)\,cos2xdx$.
7.$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$. 8. Найти площадь поверхности тела, полученного вращением одной арки циклоиды

$x=a(t-sint),\ y=a(1-cost)$ около оси OX.

Вариант 7

1. $\int(5x-2)e^{3x}dx$. 2.$\int\frac{(x^3+2x^2+3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$.3. $\int\sqrt{(x-1)(x-2)}dx$.
4.$\int sin^3xcos2xdx$. 5.$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{8x-arctg2x}{x}dx$.
6.$\int_0^{\pi}(9x^2+9x+11)\,cos3xdx$. 7.$\int_1^{\infty}\frac{ln(x^2+1)dx}{x}$.
8. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $y=e^x,\ y=e^{-x},\ x=1$.

Вариант 8

1. $\int(1-6x)e^{2x}dx$. 2. $\int\frac{3x^3+2x^2+1}{(x^2-4)(x+1)}dx$. 3.$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.
4.$\int sin4xcos5xdx$. 5. $\int_1^4\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+x)^2}dx$.
6.$\int_0^{\pi}(8x^2+16x+17)cos4x\,dx$. 7. $\int_0^{\infty}xe^{-x^2}dx$
8. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $y=lnx\quad y=ln^2x$.

Вариант 9

1. $\int ln(1+4x^2)dx$. 2. $\int\frac{x^3-1}{(x^2-1)(x+2)}dx$. 3.$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}dx$.
4.$\int\frac{2-sinx}{2+cosx}dx$. 5. $\int_0^1\frac{xdx}{1+x^4}$. 6. $\int_0^{2\pi}(3x^2+5)\,cos2xdx$.
7. $\int_0^{\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$

8. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями /верхняя часть/ :
$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 8 = 0,\ y = x^2 + 6x + 10.$

Вариант 10

1. $\int (2-4x) sin2x dx.$ 2. $\int \frac{(2x-3)dx}{(x^2-4x+8)^3}.$ 3. $\int \frac{\sqrt{x+5}}{x} dx.$

4. $\int sin^5 x dx.$ 5. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}} dx.$ 6. $\int_0^{2\pi} (2x^2-15)\, cos3x dx.$

7.$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.8. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $r = a\sqrt{cos2\varphi}$

Вариант 11

1. $\int x sin^2 x dx.$ 2. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}.$ 3. $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}.$

4. $\int x^8 sin^2 x cos^6 x dx.$ 5. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}.$ 6. $\int_0^{\pi} x^2\, e^{3x} dx.$

7.$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$ 8. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = lnx,$ касательной к ней в точке *x=e* и осью *OX.*

Вариант 12

1. $\int e^{-2x}(4x-3)dx.$ 2. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx.$ 3.$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}} dx.$

4. $\int \frac{dx}{1-sinx}.$ 5. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{arctgx+x}{1+x^2} dx.$ 6. $\int_0^{2\pi} (1-8x^2) cos4x\, dx.$

7. $\int_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$ 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r = asin3\varphi$

Вариант 13

1. $\int e^{-3x}(2-9x)dx.$ 2. $\int \frac{(5x^3+2)}{x^3+5x^2+4x} dx.$ 3.$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt[5]{(1+x)^2}}.$

4. $\int cos^4 x dx.$ 5. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x-arcctg^4 x}{1+x^2} dx$. 6. $\int_{-4}^{0} (x^2+2x+1)\, sin3x dx.$

7. $\int_0^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{9-x^2}}.$ 8. Вычислить длину дуги линии
$y = lnx,\ \ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$

Вариант 14

1. $\int arctg\sqrt{2x-1} dx.$ 2. $\int \frac{32xdx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}.$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2(x-1)^4}}.$

4. $\int sin^3 x dx.$ 5. $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx.$ 6. $\int_0^3 (x^2-3x)\, sin2x dx.$

7. $\int_{\frac{2}{t}}^{\infty} \frac{1}{x^2} sin\frac{1}{x} dx$ 8. Вычислить длину дуги кривой
$y = arcsin(e^{-x}), \quad 0 \le x \le 1.$

Вариант 15

1. $\int arctg\sqrt{3x-1}dx.$ 2. $\int \frac{(x^3-6x^2+9x+7)}{(x-2)^3(x-5)}dx.$ 3. $\int \frac{dx}{x\left(2+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\right)}.$

4. $\int sin^5 xdx.$ 5. $\int_0^{sin1} \frac{1+(arcsinx)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ 6. $\int_0^{\pi}(x^2-3x+2)\,sinxdx.$

7. $\int_0^{\infty} e^{-ax} sinbxdx.$ 8. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 2(cost + tsint) \\ y = 2(sint - tcost) \end{cases}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Вариант 16

1. $\int arctg\sqrt{5x-1}dx.$ 2. $\int \frac{(x^3-2x^2+4)}{x^3(x-2)^3}dx.$ 3. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx.$

4. $\int cos^3 xdx.$ 5. $\int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx.$ 6. $\int_0^{\frac{t}{2}}(x^2-5x+6)sin3x\,dx.$

7. $\int_0^{\infty} e^{-x} sinxdx.$ 8. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривой $y = xe^x$ и прямыми $y = 0,\ x = 1$ вокруг оси *OX*.

Вариант 17

1. $\int(5x+6)cos2xdx.$ 2. $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}.$ 3. $\int \frac{xdx}{2+\sqrt{2x+1}}.$

4. $\int \frac{sinxdx}{sinx+3cosx}.$ 5. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$ 6. $\int_{-3}^{0}(x^2+6x+9)\,sin2xdx.$

7. $\int_1^{\infty} \frac{arctgx}{1+x^2}dx$ 8. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 10cos^3 t \\ y = 10sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Вариант 18

1. $\int(7x-10)sin4xdx.$ 2. $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx.$ 3. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{3x+8}}.$

4. $\int \frac{dx}{1+tgx}.$ 5. $\int \frac{1-cosx}{(x-sinx)^2}dx.$ 6. $\int_{-1}^{0}(x+2)^3 ln^2(x+2)\,dx.$

7. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$ 8. Эллипс $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ вращается вокруг оси *OX*. Найти объём тела вращения.

Вариант 19

1. $\int\left(x\sqrt{2}-3\right)cos2xdx$. 2. $\int\frac{(x+1)dx}{(x^2+4x+5)^2}$. 3. $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{2x+3}}$..

4. $\int 2^4 sin^6\left(\frac{x}{2}\right)dx$. 5. $\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. 6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-5x^2)\,sinxdx$.

7.$\int_0^{\infty}x^3e^{-x^2}dx$. 8. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой *y=-x* от параболы

$y = 2x-x^2$

Вариант 20

1. $\int(4x+7)cos3xdx$. 2. $\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$. 3.$\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{3x+4}}$.

4. $\int\frac{dx}{1+cos^2x}$. 5. $\int_1^e\frac{x^2+lnx^2}{x}dx$. 6. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{3}(3x-x^2)sin2x\,dx$.

7. $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{x^3+1}$. 8. Найти площадь поверхности тора, полученного вращением круга $x^2+(y-3)^2=16$ вокруг оси *OX*.

Вариант 21

1. $\int(4-3x)e^{-3x}dx$. 2. $\int\frac{x^3+1}{x^2-x}dx$. 3.$\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$.

4. $\int sin2xcosxdx$. 5. $\int_{e+1}^{e^2+1}\frac{1+ln(x-1)}{x-1}dx$.

6. $\int_{-2}^{0}(x^2+5x+6)\,cos2xdx$. 7. $\int_1^{\infty}\frac{arctgx}{x^2}dx$.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=(x-2)^2$, $y=4x-8$.

Вариант 22

1. $\int arctg\left(\sqrt{4x-1}\right)dx$. 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+6}}$. *3.* $\int\frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}{(2x-3)^{\frac{1}{3}}}dx$.

4.$\int sin5xcos7xdx$. 5.$\int_0^1\frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^2}dx$. 6.$\int_{-2}^{0}(x^2-4)\,cos3xdx$.

7.$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$.

Вариант 23

1. $\int(3x+4)e^{3x}dx$. 2. $\int\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx$. 3. $\int\frac{2}{(2-x)}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}dx.$

4.$\int sinxcos^3xdx$. 5.$\int_0^1\frac{4arctgx-x}{1+x^2}dx$. 6.$\int_{-1}^{0}\frac{x^3+4x^2+3x}{x}cosxdx$.

7.$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.   8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = arccosx,\ y = 0,\ x = 0.$

Вариант 24

1. $\int (4x-2)cos2xdx.$ 2. $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx.$ 3.$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x+2)^5}}$

4.$\int sin2xcos^4xdx.$ 5.$\int_0^2 \frac{x^3}{x^2+4}dx.$ 6.$\int_{-2}^0 (x+2)^2cos3x\,dx.$

7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x+1)^2, \quad y^2 = x+1.$

Вариант 25

1. $\int (4-16\mathrm{x})\sin 4\mathrm{x}d\mathrm{x}.$ 2. $\int \frac{2\mathrm{x}^3-1}{\mathrm{x}^2+\mathrm{x}-6}d\mathrm{x}.$ 3.$\int \frac{\sqrt{\mathrm{x}+1}+2}{(\mathrm{x}+1)^2-\sqrt{\mathrm{x}+1}}d\mathrm{x}.$

4.$\int sin2xcos^3xdx.$ 5.$\int_\pi^{2\pi} \frac{x+cosx}{x^2+2sinx}dx.$

6.$\int_{-4}^0 (x^2+7x+12)\,cosxdx.$ 7. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{1+x^2}$. 8 Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривой $y = e^{1-x}$ и прямыми $y = 0,\ x = 0,\ x = 1$
вокруг оси *OX*.

Вариант 26

1. $\int ln(x^2+4)dx.$ 2. $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}dx.$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$

4.$\int \frac{dx}{5+4sinx}$. 5.$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2cosx+3sinx}{(2sinx-3cos)^3}dx.$ 6.$\int_0^\pi (2x^2+4x+7)\,cos2xdx.$

7.$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. 8. Вычислить площадь поверхности тела, образованного вращением половины циклоиды
$x = a(t - sint),\ y = a(1 - cost)$ вокруг оси *OX*.

Вариант 27

1. $\int (5x-2)e^{3x}dx.$ 2.$\int \frac{(\mathrm{x}^3+2\mathrm{x}^2+3)}{(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}-3)}d\mathrm{x}.$3. $\int \sqrt{(x-1)(x-2)}dx.$

4.$\int sin^3xcos2xdx.$ 5.$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8x-arctg2x}{x}dx.$

6.$\int_0^\pi (9x^2+9x+11)\,cos3xdx.$ 7.$\int_1^\infty \frac{ln(x^2+1)dx}{x}.$

8.Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной следующими линиями: $y = e^x,\ y = e^{-x},\ x = 1.$

Вариант 28

1. $\int(1-6x)e^{2x}dx$. 2. $\int\frac{3x^3+2x^2+1}{(x^2-4)(x+1)}dx$. 3. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

4. $\int sin4xcos5xdx$. 5. $\int_1^4\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+x)^2}dx$.

6. $\int_0^{\pi}(8x^2+16x+17)cos4x\,dx$. 7. $\int_0^{\infty}xe^{-x^2}dx$

8. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной следующими линиями: $y=lnx$ $y=ln^2x$.

Вариант 29

1. $\int ln(1+4x^2)dx$. 2. $\int\frac{x^3-1}{(x^2-1)(x+2)}dx$.

3. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}dx$.

4. $\int\frac{2-sinx}{2+cosx}dx$. 5. $\int_0^1\frac{xdx}{1+x^4}$. 6. $\int_0^{2\pi}(3x^2+5)\,cos2xdx$.

7. $\int_0^{\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$. 8. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной следующими линиями:

$x^2+y^2+6x-2y+8=0,\ y=x^2+6x+10$.

Вариант 30

1. $\int(2-4x)sin2xdx$. 2. $\int\frac{(2x-3)dx}{(x^2-4x+8)^3}$. 3. $\int\frac{\sqrt{x+5}}{x}dx$.

4. $\int sin^5xdx$. 5. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}dx$. 6. $\int_0^{2\pi}(2x^2-15)\,cos3xdx$.

7. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$. 8. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линией $r=a\sqrt{cos2\varphi}$, касательной к ней в точке *x=0* и оси *OX.*

7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

7.1 Уравнения первого порядка.

Уравнения вида

$$F(x,y,y')=0 \qquad (1)$$

или (в разрешенном относительно y' виде)

$$y'=f(x,y) \qquad (2)$$

называются обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Решением этих дифференциальных уравнений на интервале (a,b) называется такая дифференцируемая функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке в уравнении (1) и (2) вместо неизвестной функции обращает его в тождество. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y'=f(x,y)$ в области D называется функция $y=\varphi(x,C)$, обладающая следующими свойствами:

1) она является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной *C*, принадлежащих некоторому множеству;

2) для любого начального условия $y(x_0)=y_0$ такого, что $(x_0,y_0)\in D$, существует единственное значение $C=C_0$, при котором решение $y=\varphi(x,C_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию. Всякое решение $y=\varphi(x,C_0)$, получающееся из общего решения $y=\varphi(x,C)$ при конкретном значении $C=C_0$, называется частным решением.Задача, в которой требуется найти частное решение уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$, называется задачей Коши. Построенный на плоскости *XOY* график всякого решения $y=\varphi(x)$ дифференциального уравнения называется интегральной кривой этого уравнения.

Если функция *f(x,y)* непрерывна и имеет непрерывную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$ в области *D*, то решение дифференциального уравнения

$$y' = f(x,y)$$

при начальном условии $y(x_0)=y_0$ (где $(x_0, y_0) \in D$) существует и единственно, т.е. через точку $(x_0,y_0) \in D$ проходит единственная интегральная кривая данного уравнения (теорема Коши).

7.2 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ в котором функция $f(x,y)$ имеет вид $f_1(x) \cdot f_2(y)$, называется дифференциальное уравнение с разделяюшимися переменными и ее можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

или

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Интегрируя последнее уравнение получим общую решение данного уравнения. Точно также, если в дифференциальном уравнении

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

имеют место следующие равенства:

$$M(x,y) = M_1(x) \cdot M_2(y),$$

$$N(x,y) = N_1(x) \cdot N_2(y),$$

то данное уравнение можно привести в следующий вид:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx = -\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy \cdot$$

Интегрируя последнее уравнение, получим общее решения данного уравнения.

7.3 Однородные уравнения.

Если уравнения первого порядка можно привести к виду

$$y' = f(\frac{y}{x}),$$

то она называется однородным. Это уравнение можно привести к уравнению с разделяющимися переменными, сделав следующую подстановку: $\frac{y}{x} = u(x)$ Принимая $y = x \cdot u$,

получим $y' = u + u' \cdot x$ и, подставляя их в данное уравнение, получим уравнения с разделяющимися переменными

$$u + u' \cdot x = f(u) \quad u = u(x,C)$$

Решая ее, получим общее решение этого уравнения и, переходя от переменного u к $\frac{y}{x}$, получим общее решение данного уравнения $y = \varphi(x,C)$

7.4 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Если дифференциальное уравнение первого порядка имеет в своем составе y и y' и вид

$$y' = P(x)y + Q(x),$$

то она называется линейной.

Если $Q(x) \equiv 0$, то данное уравнение имеет вид

$$y' = P(x)y$$

и она называется линейным однородным уравнением. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и ее решение имеет вид:

$$y = C \cdot e^{\int P(x)dx},$$

здесь C – произвольная постоянная. Данное линейное уравнение решаем с помощью подстановки

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

Подставляя в данное уравнение, получим

$$v \cdot \left(\frac{du}{dx} - P(x)u \right) + \left(\frac{dv}{dx}u - Q(x) \right) = 0$$

.

Приравнивая к нулю первую скобку, находим частное решение $u = u_1(x)$. Во второй скобке, подставляя вместо $u(x)$ найденное $u_1(x)$ и приравнивая ее к нулю, находим общее решение $v = v_1(x, C)$. Отсюда находим общее решение данного уравнения:

$$y = u_1(x) \cdot v_1(x, C).$$

7.5 Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Дифференциальное уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, т.е. левая часть такого уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$. Если это уравнение переписать в виде $du(x, y) = 0$, то его общее решение определяется равенством $u(x, y) = C$. Функция $u(x, y)$ может быть найдена по формуле

$$u=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy.$$

7.6 Дифференциальные уравнения высших порядков

7.6.1 Уравнения вида $y^{(n)}=f(x)$.

n-кратным интегрированием уравнения, находим общее решение, а именно:

$y^{(n)}=f(x),$

$^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1=f_1(x)+C_1.$

$y^{(n-2)}=\int\left(f_1(x)dx+C_1\right)dx=f_2(x)+C_1x+C_2,$

$y=f_n(x)+\dfrac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1}+\dfrac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.,$

где

$$f_n(x)=\underbrace{\iiint\ldots\int}_{n-раз}f(x)dx^n.$$

Так как $\dfrac{C_1}{(n-1)!},\ \dfrac{C_2}{(n-2)!},$ являются постоянными величинами, то общее решение может быть записано и так:

$y=f_n(x)+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.$

7.6.2 Уравнения вида $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ldots,y^{(n)})=0,$ не содержащой искомой функции.

Порядок такого уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию, низшую из производных данного уравнения,т.е. полагая $y^k=z.$ Тогда получим уравнение

$$F(x,z,z',\ldots,z^{(n-k)})=0.$$

Таким образом, порядок уравнения понижется на $к$ единиц.

7.6.3 Уравнения вида $F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$**,** не содержащие независимой переменной. Уравнение этого вида допускает понижение порядка на единицу, если положить $y' = z$, а за новый аргумент принять сам *y*. В этом случае $y'', y''', ...$ выразятся по формулам (они выводятся по правилу дифференцирования сложной функции)

$y'' = z\dfrac{dz}{dy}, \qquad y''' = z \cdot \left[z \cdot \dfrac{d^2z}{d^2y} + \left(\dfrac{dz}{dy}\right)^2 \right], ...$ через z и производные от z по y, причем порядок уравнения понизится на единицу.

7.6.4 Уравнения вида $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, однородные относительно $y, y', y'', ..., y^{(n)}$. Уравнение указанного вида допускает понижение порядка на единицу при замене $\dfrac{y'}{y} = z$, где z – новая неизвестная функция.

7.7 Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Линейным однородным уравнением *n*-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{1}$$

где коэффициенты $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ - некоторые действительные числа. Для нахождения частных решений уравнения (1) составляют характеристическое уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + ... + a_{n-1} k + a_n = 0, \tag{2}$$

которое получается из уравнения (1) заменой в нем производных искомой функции с соответствующими степенями *к*, причем сама функция заменяется единицей. Уравнение (2) является урав-

нением n - й степени и имеет n корней (действительных или комплексных, среди которых могут быть и равные).
Тогда общее решение дифференциального уравнения (1) строится в зависимости от характера корней уравнения (2):
1)каждому действительному простому корню κ в общем решении соответствует слагаемое вида

$$Ce^{kx}.$$

2) каждому действительному корню кратности m в общем решении соответствует слагаемое вида

$$\left(C_1 + C_2x + ... + C_mx^{m-1}\right)\cdot e^{kx};$$

3)каждой паре комплексных сопряженных простых корней $k^{(1)} = \alpha + \beta \cdot i$ и $k^{(2)} = \alpha - \beta \cdot i$ в общем решении соответствует слагаемое вида $e^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\beta \cdot x) + C_2 \sin(\beta \cdot x)\right);$
4) каждой паре комплексных сопряженных корней $k^{(1)} = \alpha + \beta \cdot i$ и $k^{(2)} = \alpha - \beta \cdot i$ кратности m в общем решении соответствует слагаемое вида

$$e^{\alpha x} \cdot [\left(C_1 + C_2x + ... + C_mx^{m-1}\right)\cdot \cos(\beta \cdot x) +$$
$$+\left(C'_1 + C'_2x + ... + C'_mx^{m-1}\right)\cdot \sin(\beta \cdot x)]$$

7.8 Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами.

Структура общего решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами, т.е. уравнения с правой частью

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = f(x)$$

определяется следующей теоремой.

Если $u = u(x)$ - частное решение неоднородного уравнения, а $y_1, y_2, ..., y_{n-1}, y_n$ - фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения, то общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = u + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots C_n y_n;$$

иными словами,общее решение неоднородного уравнения равно сумме любого его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.Следовательно, для построения общего решения неоднородного уравнения надо найти одно его частное решение (предполагая уже известным общее решение соответствуюшего однородного уравнения).

Пусть

$$f(x) = e^{\alpha \cdot x}\left[P(x)\cos\beta \cdot x + Q(x)\sin\beta \cdot x\right],$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены, которые могут быть одной и той же степени, и разных степеней. Если они разной степени, то пусть n – их наивысшая степень (при $n=0$ эти многочлены попросту постоянные величины). Величины α и β – вещественные числа. Для нахождения частного решения неоднородного уравнения $u = u(x)$ используем метод, который называется методом неопределенных коэффициентов. Если

$$f(x) = e^{\alpha \cdot x}\left[P(x)\cos\beta \cdot x + Q(x)\sin\beta \cdot x\right],$$

то следует рассмотреть два возможных случая:

1.Число $\alpha+\beta i$ не является корнем характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения.

В этом случае частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$Y = e^{\alpha \cdot x}\left[p(x)\cos\beta \cdot x + q(x)\sin\beta \cdot x\right],$$

где $p(x)$ и $q(x)$ - многочлены одной и той же степени, равной наивысшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$ - числа подлежать определению,числа же α и β - те же.

2. Если число $\alpha+\beta i$ является корнем кратности $к$ ($к>1$) характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$Y = x^k\left[p(x)\cos\beta\cdot x + q(x)\sin\beta\cdot x\right]$$

здесь $p(x)$ и $q(x)$ - многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, а коэффициенты многочленов $p(x)$ и $p(x)$ подлежат определению; показатель степени $к$ равен кратности корня $\alpha+\beta i$ характеристического уравнения. Таким образом, и в этом случае определению подлежать только коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$, все же остальные числа α, β и $к$ – известны. Неопределенные коэффициенты многочленов как в том, так и в другом случае находятся так:

В заданное уравнение подставляется Y и сравниваются коэффициенты при одинаковых степенях независимой переменной в левой и правой частях равенства.

7.9 Системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_1x + b_1y, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_2x + b_2y \end{cases}$$

Один из методов решения этой системы дифференциальных уравнений - это метод исключения неизвестных. При этом система приводится к дифференциальному уравнению второго порядка с одним неизвестным и, решая ее, находят первую неизвестную. Затем находят вторую неизвестную.

7.9 Задача Коши.

Дано уравнение $F(x,y,y')=0$. Задача состоит в том, что нужно найти частное решение заданного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$. Сначала некоторым способом находим общее решение данного уравнения $y = f(x,C)$. Затем в этом решении вместо переменных x и y, подставляя x_0, y_0, находим соответствующее значение C. Подставляя это значение C в общее решение, находим частное решение $y = f(x,C_0)$.

Расчётные задания

Задание 1. В задачах 1,2,3 найти общие интегралы дифференциальных уравнений первого порядка

Задание 2. В задаче 4 решить задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Задание 3. В задаче 5 найти частный или общий интеграл дифференциального уравнения (см. условие задачи)

Задание 4. В задаче 6 найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Задание 5. В задаче 7 проинтегрировать систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

а) методом приведения к одному уравнению высшего порядка;

б) матричным методом;

в) исследовать на устойчивость решение системы.

Показательный пример.

Задание 1. Найти общее решение уравнения $xy' - y = y^3$ Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Перепишем уравнение в виде:

$$x\frac{dy}{dx} = y^3 + y$$

Разделим переменные

$$\frac{dy}{y(y^2+1)} = \frac{dx}{x} \qquad \text{или} \qquad \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2+1}\right)dy = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения

$$ln|y| - \frac{1}{2} ln(y^2 + 1) = ln|x \cdot c| \ , \quad c \neq 0 \ .$$

Окончательно имеем $\qquad y = Cx\sqrt{y^2 + 1}$.

Ответ: $\quad y = Cx\sqrt{y^2 + 1}$.

Задача 2. Найти общее решение уравнения

$$ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$$

Данное уравнение является однородным, так как из него следует

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - 2\sqrt{xy}} \qquad \text{или} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1 - 2\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

Сделаем замену

$$y = u \cdot x \ ,$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{du}{dx} + u.$$

Тогда уравнение распишется как:

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{u}{1 - 2\sqrt{u}}$$

или

$$\frac{1 - 2\sqrt{u}}{2u^{3/2}} du = \frac{dx}{x}$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$ln|x| = -\frac{1}{\sqrt{u}} - ln|u| + C$$

Отсюда

$$ln|ux| = -\frac{1}{\sqrt{u}} + C,$$

Так как

$$y = x \cdot u$$

$$ln|y| = -\sqrt{\frac{x}{y}} + C$$

Ответ:

$$ln|y| = -\sqrt{\frac{x}{y}} + C$$

Задача 3. Найти общее решение уравнения

$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0.$$

Данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, так как, обозначая

$$M(x;y) = \frac{2x}{y^3}$$

$$N(x;y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

имеем

$$\frac{dM}{dy} = -\frac{6x}{y^4}, \quad \frac{dN}{dx} = -\frac{6x}{y^4},$$

т.е.

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

Общий интеграл находим по формуле

$$\int_{x_0}^{x} M(x;y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0;y)dy = C$$

Положив $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, получим:

$$\int_0^x \frac{2x}{y^3}\,dx + \int_1^y \frac{y^2}{y^4}dy = C \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C\,.$$

Ответ: : $x^2 - y^2 = Cy^3$.

Задача 4. Решить задачу Коши:

$$y' - y\,tgx = \frac{1}{cosx} \;; \quad y(0) = 0.$$

Данное уравнение является линейным уравнением. Решим его методом Бернулли. Полагая $y = u \cdot v$, имеем

$u'v + v'u - uv\,tgx = \frac{1}{cosx}$ или $u'v + u(v' - v\,tgx) =$

$=\frac{1}{cosx}$. Откуда получим

$$\begin{cases} v' - v\, tgx = 0 \\ u'v = \frac{1}{cosx} \end{cases}.$$

Интегрируя первое уравнение системы, имеем

$$v = \frac{1}{cosx},$$

Подставляя $v = \frac{1}{cosx}$ во второе уравнение системы, получим:

$$u'\frac{1}{cosx} = \frac{1}{cosx},$$

откуда $u=x+c$. Тогда общее решение уравнения имеет вид

$$y = (x + c)\frac{1}{cosx},$$

Используя начальное условие $y(0) = 0$, получим $c=0$.
Следовательно, решение задачи Коши имеет вид $y = x \cdot \frac{1}{cosx}$.

Ответ: $y = x \cdot \frac{1}{cosx}$.

Задача 5. Решить задачу Коши:

$$y''y^3 + 25 = 0 \quad , \; y(2)=-5 \, , \quad y'(2)=-1$$

Данное уравнение допускает понижение порядка

$$y' = p(y), \quad y'' = p \cdot p'.$$

Уравнение примет вид

$$pp' \cdot y^3 + 25 = 0$$

Решая это уравнение первого порядка относительно $p(y)$, получим:

$$y^3 p\frac{dp}{dy} + 25 = 0.$$

или

$$pdp = -\frac{25}{y^3}dy,$$

откуда

$$\frac{p^2}{2} = \frac{25}{2y^2} + \frac{c_1}{2}$$

или

$$p(y) = \pm\frac{\sqrt{25 + c_1 y^2}}{y}.$$

Учитывая, что

$$y' = p(y)$$

имеем

$$y' = \pm\frac{\sqrt{25 + c_1 y^2}}{y}$$

Произвольную постоянную c_1 найдём из начальных условий $-1 = \pm\frac{\sqrt{25+C_1 \cdot 25}}{-5}$ или $5 = 5\sqrt{1 + c_1}.$, откуда $c_1 = 0$.

Итак, для определения *y(x)* получено уравнение

$$y' = \pm\frac{5}{y};$$

Интегрируя, имеем $\frac{y^2}{2} = \pm 5x + C_2$.

Учитывая, что $y(2) \cdot y'^{(2)} = 5$., получим $\frac{y^2}{2} = 5x + C_2$.

Произвольную постоянную C_2 находим из условия $y(2) = 5$

$$\frac{25}{2} = 5 \cdot 2 + C_2\,,\ \ C_2 = \frac{5}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{y^2}{2} = 5x + \frac{5}{2}\ .$$

Ответ: $y^2 = 10x + 5$.

Задача 6. Найти общее решение уравнения *y″+9y=cos2x* .

Характеристическое уравнение $k^2 + 9 = 0$ имеет комплексно-сопряженные корни $k_{1,2} = \pm 3i$

Потому общее решение однородного уравнения

$$y = C_1 cos3x + C_2 sin3x$$

Частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$y = Acos2x + Bsin2x$$

Постоянные *A* и *B* найдём методом неопределённых коэффициентов. Имеем

$$y' = -2Asin2x + 2Bcos2x\ ,$$
$$y'' = -4Acos2x - 4Bsin2x\,.$$
Подставляя уравнение, получим
$$5Acos2x + 5Bsin2x = cos2x$$
Откуда
$$\begin{cases} 5A = 1\ , \\ B = 0\ \ . \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} A = \dfrac{1}{5} \\ B = 0 \end{cases}$$
Следовательно , частного решение данного уравнения
$$y = \frac{1}{5}cos2x$$
Общее решение данного уравнения:
$$y = C_1cos3x + C_2sin3x + \frac{1}{5}cos2x$$
Ответ:
$$y = C_1cos3x + C_2sin3x + \frac{1}{5}cos2x$$
Задача 7. Найти общее решение системы
$$\begin{cases} \dot{x} = -y\,, \\ \dot{y} = x \end{cases}$$
и исследовать на устойчивость.

а) Решение задачи сведением к одному уравнению.

Продифференцируем первое уравнение системы: $\ddot{x} = -\dot{y}$, Подставим в полученное уравнение $\dot{y}$ из второго уравнения системы: $-\ddot{x} = x$ или $\ddot{x} + x = 0$. Общим решением этого уравнения является функция
$$x(t) = C_1cost + C_2sint$$
Отсюда, используя равенство
$$y = -\dot{x},$$
найдём $\quad y(t) = -(-C_1sint + C_2cost)$,
или
$$y(t) = C_1sint - C_2cost$$
Таким образом, при любых постоянных C_1, и C_2 функции *x(t)* и *y(t)* являются решением исходной системы.

Ответ:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 cost + C_2 sint \\ y(t) = C_1 sint - C_2 cost \end{cases}$$

б) Решение задачи матричным методом.

Заданная система в матричной форме имеет вид:

$\frac{d\overline{x}}{dt} = A\overline{x}$, где $\overline{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Общее решение системы $\overline{x}(t) = \Phi(t) \cdot C$,
где $\Phi(t)$ -фундаментальная матрица действительных частных решений, а $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ произвольная постоянная матрица.

Составим характеристическое уравнение

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Его корни комплексно-сопряженные $\lambda_{1,2} = \pm i$. Составим матрицу *B* (в случаи различных корней характеристического уравнения матрица *B* есть каноническая форма матрицы *A*).

$$B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Составим фундаментальную каноническую матрицу

$$H(t) = e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}.$$

Найдём матрицу

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

из условия *A·S=S·B*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Из четырёх уравнений для нахождения чисел a_{11} , a_{12}, a_{21}, a_{22} возьмём два различных:

$$\begin{cases} -a_{21} = ia_{11} \\ -a_{22} = -ia_{12} \end{cases}$$

Пологая $a_{11} = 1$, $a_{12} = 1$ получим $a_{21} = -i$, $a_{22} = i$;
Итак,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

Фундаментальная матрица решений данной системы

$$\Phi(t) = S \cdot H(t$$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$$

Отделяя действительную и мнимую части, получим

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} cost & sint \\ sint & -cost \end{pmatrix}$$

Общее решение системы

$$\overline{x}(t) = \begin{pmatrix} cost & sint \\ sint & -cost \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 cost + C_2 sint \\ C_1 sint \ -C_2 cost \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 cost + C_2 sint \\ y(t) = C_1 sint \ - C_2 cost \end{cases}.$$

в) Исследуем на устойчивость тривиальное решение данной системы – точку покоя *x(t)=0, y(t)=0* :

Так как корни характеристического уравнения комплексно-сопряжённые $\boldsymbol{\lambda}=\pm i$ и $Re\boldsymbol{\lambda}=0$, $\mathcal{Im}\,\boldsymbol{\lambda} = \pm 1 \neq 0$, то точка покоя системы устойчива, характер точки покоя – центр. Следовательно, любое решение системы является устойчивым.

ВАРИАНТЫ

Вариант 1

1. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2x^2ydx$. 2. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$.

3. $3x^2e^ydx + (x^3e^y - 1)dy = 0$. 4. $y' - \frac{y}{x} = x^2,\ y(1) = 0$.

5. $4y^3y'' = y^4 - 16,\quad y(0) = 2\sqrt{2},\ \ y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

6. $y'' - 2y' = e^{2x} + x$. 7. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

Вариант 2

1. $\sqrt{4 + y^2}dx - ydy = x^2ydy$. 2. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

3 $\left(3x^2 + \frac{2}{y}cos\frac{2x}{y}\right)dx = \frac{2x}{y^2}cos\frac{2x}{y}dy$.

4.$y' + ycosx = \frac{sin2x}{2}, y(0) = 0$.

5. $y'' = 128y\ \ y(0) = 1, y'(0) = 8$. 6. $y''' - y' = 2e^x + cosx$.

7. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = y - 4x. \end{cases}$

Вариант 3

1.$6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2d$.2. $xy' = \frac{3y^3+2yx^2}{2y^2+x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$.

3. $(3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0$. 4. $y' - yctgx =$
$= 2xsinx, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. 5. $y''y^3 + 64 = 0 \quad y(0) = 4, y'(0) = 2$.

6. $y'' + y = 2sinx$. 7. $\begin{cases} x' = 8y - x, \\ y' = x + y. \end{cases}$

Вариант 4

1. $x\sqrt{1+y^2} + yy^1\sqrt{1+x^2} = 0$. 2. $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$.
3. $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$4. $y' + ytgx = cos^2x$,
$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$. 5. $y'' = 32sin^3y \cdot cos5y, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 4$.
6.$y'' + y = 2e^x$. 7. $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 3y - 2x. \end{cases}$

Вариант 5

1. $\sqrt{3+y^2}dx - ydy = x^2ydy$. 2. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$.
3. $(y^2 + ysec^2x)dx + (2xy + tgx)dy = 0$.

4. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \; y(0) = 0$.

5. $y'' = 2y^3, \quad y(-1) = 1, \quad y'(-1) = 1$.

6. $y''' - 4y' = 8sin2x$. 7. $\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 3x + y. \end{cases}$

Вариант 6

1. $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0$. 2. $xy' = \frac{3y^3+4yx^2}{2y^2+2x^2}$.
3. $(3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0$.
4. $y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1), \; y(0) = 1$. 5. $x^2y'' + xy' = 1$.
6. $y''' - 4y' = 24e^{2x}$. 7. $\begin{cases} y' = -5y - x, \\ y' = x + y. \end{cases}$

Вариант 7

1. $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0$. 2. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$.

3. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0.$

4. $y'-\frac{y}{x}=xsinx,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$5. $tgx\cdot y'''=2y''.$

6. $y''+16y=16cos4x.$ 7. $\begin{cases}x'=2x+y,\\ y'=2y-x.\end{cases}$

Вариант 8

1. $y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}=-1.$ 2. $xy'=2\sqrt{x^2+y^2}+y.$

3. $[sin2x-2cos(x+y)]dx-2cos(x+y)dy=0.$

4. $y'+\frac{y}{x}=sinx,\ y(\pi)=\frac{1}{\pi}.$ 5. $(1+x^2)y''+2xy'=x^3.$

6. $y''+3y'=-e^{-3x}.$ 7. $\begin{cases}x'=3x-y,\\ y'=4x-y.\end{cases}$

Вариант 9

1. $x\sqrt{5+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0.$ 2. $xy'=\frac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2}.$

3.$(x^2+y^2+2x)dx+2xydy=0.$4. $y'+\frac{2x}{1+x^2}y=\frac{2x^2}{1+x^2},y(0)=\frac{2}{3}.$

5. $y''+\frac{2x}{1+x^2}y'=2x.$ 6. $y'''-36y'=36e^{6x}.$ 7. $\begin{cases}x'=7x+3y,\\ y'=6x+4y.\end{cases}$

Вариант 10

1. $6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx.$ 2. $3y'=\frac{y^2}{x^2}+8\frac{y}{x}+4.$

3. $(x+y)dx+(e^y+x+2y)dy=0.$ 4. $y'+\frac{y}{2x}=x^2,\ \ y(1)=1$

5. $x^4y''+x^3y'=4.$ 6. $y''+3y'=e^{3x}.$ 7. $\begin{cases}x'=4x-3y,\\ y'=3x+4y.\end{cases}$

Вариант 11

1. $y(4+e^x)dy-e^xdx=0.$ 2. $y'=\frac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}.$ 3. xy^2dx+
$+y(x^2+y^2)dy=0.$4. $y'-\frac{2x-5}{x^2}y=5,\quad y(2)=4.$ 5. $y'''-$
$36y'=299(cos7x+sin7x).$ 6. $y'''tgx=y''.$ 7. $\begin{cases}x'=x+4y,\\ y'=2x+3y.\end{cases}$

Вариант 12

1. $\sqrt{4-x^2}y'+xy^2+x=0.$ 2. $xy'=\sqrt{2x^2-y^2}+y.$

3. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0.$

4. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x, y(1) = e.$ 5. $2xy''' = y''.$

6. $y'' + 25y = 20cos5x.$ 7. $\begin{cases} x' = x + 5y, \\ y' = x - 3y. \end{cases}$

Вариант 13

1. $2xdx - 2ydy = x^2ydy - xy^2dx$. 2. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6.$

3. $\frac{1+xy}{x^2y}dx + \frac{1-xy}{xy^2}dy = 0.$ 4. $y' + \frac{y}{x} = \frac{lnx}{x}, \ y(1) = 1.$

5. $xy''' + xy'' = 1.$ 6. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2.$ 7. $\begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = -2x + y. \end{cases}$

Вариант 14

1. $x\sqrt{4 + y^2}dx + y\sqrt{1 + x^2}dy = 0.$ 2. $xy' = \frac{3y^3 - 6yx^2}{2y^2 + 4x^2}.$

3. $\frac{dx}{y} - \frac{x+y^2}{y^2}dy = 0.$ 4. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \ y(1) = 4.$ 5. $xy''' + 2y'' = 0.$

6. $3y^{IV} + y''' = 6x - 1.$ 7. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

Вариант 15

1. $(e^x + 8)dy - ye^xdx = 0.$ 2. $y' = \frac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}.$

3. $\frac{x}{y^2}dx - \frac{xy+1}{x}dy = 0.$ 4. $y' - \frac{2}{x}y = x^3, \ y(1) = -\frac{5}{6}.$

5. $y'' = 32y^3$, $y(4) = 1, \ y'(4) = 4.$

6. $y''' - 4y'' + 4y' = (x-1)e^x.$ 7. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$

Вариант 16

1. $\sqrt{5 + y^2} + y'y\sqrt{1 - x^2} = 0.$ 2. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y.$

3. $\left(xe^x + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{dy}{x} = 0$. 4. $y' + \frac{y}{x} = 3x, \ y(1) = 1.$

5. $y''y^3 + 16 = 0, \quad y(1) = 2, \ y'(1) = 2.$

6. $y^{IV} + y''' = 12x + 6$. 7. $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = x - y. \end{cases}$

Вариант 17

1. $6xdx - ydy = yx^2dy - 3xy^2dx.$ 2. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4.$

3. $\left(10xy - \frac{1}{siny}\right)dx + \left(5x^2 + \frac{xcosy}{sin^2y} - y^2siny^3\right)dy = 0.$

4. $y' = \frac{2xy}{1+x^2} + 1 + x^2, \quad y(1) = 3.$

5. $y'' = 2y^3, \qquad y(-1) = 1, \quad y'(-1) = 1.$

6. $y'' + 2y' = 4e^x(sinx + cosx).$ 7. $\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 3x + y. \end{cases}$

Вариант 18-

.

3. $\left(\frac{y}{x^2+y^2} + e^x\right)dx - \frac{xdy}{x^2+y^2} = 0.$ 4. $y' = \frac{2x-1}{x^2}y + 1, \ y(1) = 1.$

5. $y''y^3 + y = 0, \qquad y(0) = -1, \quad y'(0) = -2.$

6. $y'' + y' + 5y = -sin2x.$ 7. $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 3x + 6y. \end{cases}$

Вариант 19

1. $(1 + e^x)y' = ye^x.$ 2. $y' = \frac{x^2+3xy-y^2}{3x^2-2xy}.$

3. $e^ydx + (cosy + xe^y)dy = 0.$ 4. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \ y(1) = 1.$

5. $y^3y'' = 4(y^4 - 1), \ y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$

6. $y'' + y = 2cos4x + 3sin4x.$ 7. $\begin{cases} x' = 5x + y, \\ y' = -3x + 3y. \end{cases}$

Вариант 20

1. $\sqrt{1 - x^2}y' + xy^2 + x = 0.$ 2. $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$

3. $(y^3 + cosx)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0.$

4. $y' + 2xy = -2x^3, \ y(1) = e^{-1}.$

5. $xy''' = 2.$ 6. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}sin5x.$

7. $\begin{cases} x' = x + 6y, \\ y' = -2x + 9y. \end{cases}$

Вариант 21

1. $\sqrt{3 + y^2}dx - ydy = x^2ydy.$ 2. $\dot{y} = \frac{x + 4y - 5}{6x - y - 6}$

3. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$ 4. $y' + \frac{y}{x} = 3x, \qquad y(1) = 1.$

5. $y'' - 2y' + 10y = 74sin3x,\ \ y(0 = 6\ ,\ \ y'0) = 3$.

6. $y'' - 2xy + 2y = e^x + xcosx.$ 7. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 4y - x \end{cases}$

Вариант 22

1. $x(4 + y^2)dx + y(1 + 3x^2)dy = 0.$ 2. $y' = \frac{x+2y-3}{x-1}.$

3. $y^2(ydx - 2xdy) = x^3(xdy - 2ydx).$

4. $y' + \dfrac{y}{2x} = x, y(1) = 1.$

5. $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1), y(2) = 1,\ y'(2) = -1.$

6. $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{3x}cosx.$ 7. $\begin{cases} x' = 2y - 3x \\ y' = y - 2x \end{cases}$

Вариант 23

1. $(6x+3xy^2)dx = ydy + 2x^2ydy.$ 2. $y' = \frac{x+y-4}{x-2}.$

3. $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0.$

4. $y' - \frac{y}{x} = x\ sinx,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$ 5. $yy'' - {y'}^2 = 0\ , y(0) = 1,$

$y'(0) = 2.$ 6. $y'' = 8y' + 20y = 5xe^{4x}sin2x.$

7. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

Вариант 24

1 .$3(x^2y + y)dy + \sqrt{2 + y^2}dx = 0.$ 2. $y' = \frac{4y-8}{3x+2y-7}$.

3. $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0.$

4. $y' = \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2,\ \ y(1) = 3.$

5. $y'' + 3y' = 0\ , y(0) = 1, y'(0) = 3.$

6. $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x}cos5x.$ 7. $\begin{cases} x' = -7x + y \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$

Вариант 25

1. $2xdx - 2ydy = yx^2dy - 3xy^2dx$. 2. $y' = \frac{x+3x+4}{3x+6}$.
3. $\frac{y}{x} = dx + (y^3 + lnx)dy = 0$. 4. $y' + yx = -x, y(0) = 3$.
5. $y'' = 4x^3 - 2x + 1, y(1) = \frac{11}{30}$, $y'(1) = 2$.
6. $y''' + y' = sinx + xcosx$. 7. $\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = -2x + 11y \end{cases}$

Вариант 26

1. $2xdx + \sqrt{2 - x^2}dy = -2xy^2dx$. 2. $y' = \frac{3x+3}{2x+y-1}$.
3. $3x^2(1 + lny)dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy$.
4. $y' + ytgx = cosx, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.
5. $y'' = e^{2x}$, $y(0) = \frac{1}{4}, y'(0) = \frac{1}{2}$.
6. $y'' + 2y' + y = x(e^{-x} - cosx)$. 7. $\begin{cases} x' = -5x - 8y \\ y' = -3x - 3y \end{cases}$

Вариант 27

1. $(3 + e^x)dy = e^xdx$. 2. $y' = \frac{x+7y-8}{9x-y-8}$.
3. $x(lny + +2lnx - 1)dy = 2ydx$. 4. $y' - y\,cosx = -sin2x$, $y(0) = 3$. 5. $y'' = sinx - 1, y(0) = -1, y(0) = 1$.
6. $y'' - 6y' + 8y = 5xe^{2x} + 2e^{4x}sinx$. 7. $\begin{cases} x' = -4x - 6y \\ y' = -4x - 2y \end{cases}$

Вариант 28

1. $ylnxdx + xdy = 0$. 2. $y' = \frac{x+y-3}{2x-2}$.
3. $(x^2 + y^2 + x)dx + y\,dy = 0$. 4. $y' + \frac{2y}{x+1} = $
$= e^x(x + 1), y(0) = 1$. 5. $y'' = x - cos2x$, $y(0)\frac{9}{4}$,
$y'(0) = -1$. 6. $y'' - 9y = c^{-3x}(x^2 + sin3x)$.
7. $\begin{cases} x' = -x = 5y \\ y' = -4x - 2y \end{cases}$

Вариант 29

1. $\sqrt{5+y^2}dx + 4y(x^2+1)dy = 0$. 2. $y' = \frac{y}{2x+2y-2}$.

3. $ydy = (xdx + ydx)\sqrt{1+y^2}$. 4. $y' + \frac{y}{x} = \frac{(x+1)e^x}{x}, y(e) = e$.

5. $y'' = \frac{1}{x}, y(e) = 2e\,, y'(e) = 3$.

6. $y'' - 8y' + 17y = e^{4x}(x^2 - 3xsinx)$. 7. $\begin{cases} x' = -7x + 5y \\ y' = 4x + 8y \end{cases}$

Вариант 30

1. $y\sqrt{1-x^2}dy + \sqrt{5+y^2}dx = 0$. 2. $y' = \frac{2x+y-3}{2x-2}$.

3. $(x^2 + 3lny)ydx = xdy$. 4. $y' + y\ ctgy = 2xsinx, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

5. $y'' = 2x - 3x^2, y(1) = 0\,, y'(1) = 1$.

6. $y'' - 2y' + 5y = 2xe^x + e^x sinx$. 7. $\begin{cases} x' = -x - 5y \\ y' = -7x - 3y \end{cases}$

Литература

1.Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.-М.,1980,1984.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.-М.,1980,1984.

3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряд. Функции комплексного переменного. –М.,1981,1985.

4.Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.-М.,1987,1989.

5.Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.1,2-М.,1970,1985.

6.Данко П.Е.,Попов А.Г.,Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1-2. М.,1986.

7.Клетенник Д.В.Сборник задач по аналитической геометрии.М.,1986.

8. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах.В трех томах. Учебное пособие для ВУЗов. Санкт-Петербург., «Политехника» 2003.

9. Danko P.E., Popov A.G., Kojevnikova T.Ya. Oliy matematika misol va masalalarda. Tashkent/.“Uzbekiston faylasuflari milliy jamiyati” 2007.

10. Риппель Е.Ю. Курс высшей математики. Учебное пособие. часть 2. Омск. «СибАДИ»2001.

11. Ismoilov Sh.N. Matematik tahlil/ II. O’quv qo’llanma. txt.uz. Angren. 2006.

12. Мадрахимов Р.М., Имомкулов С.А., Абдуллаев Б.И., Ярметов Ж.Р. Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси. Маърузалар матни. txt.uz. Ургенч. – 2004.

11. Sh.N. Ismoilov. Matematik tahlil/ II. O’quv qo’llanma. txt.uz. Angren. 2006.

Содержание

Редактор Ахметжанова Г.М.
Корректор Марданова Э.З.