В. Е. ШНЕЙДЕР, А. И. СЛУЦКИЙ
А. С. ШУМОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА ҚИСҚА КУРСИ

(икки томлик)

I том

РУСЧА ТЎЛДИРИЛГАН ВА ҚАЙТА ИШЛАНГАН ИККИНЧИ НАШРИДАН ТАРЖИМА

ТОШКЕНТ „ЎҚИТУВЧИ" 1985

СССР Олий ва ўрта махсус
таълим министрлиги ўқув-методика
бошқармаси ўқитиш жараёнида
фойдаланиш учун тавсия этган

Китоб олий техника ўқув юртлари учун математика курси программасига мувофиқ ёзилган Материал қисқа баён қилинишига қарамасдан, иложи борича қатъий ва тушунарли қилиб ёзилган. Курснинг ҳар бир бўлимида кўплаб мисоллар келтирилган бўлиб, улар асосий назарий материалнинг мазмунини очиб беришга ёрдам беради.

Китобнинг биринчи томи ушбу бўлимларни ўз ичига олади: векторлар алгебраси ва чизиқли алгебра элементлари, текислик ва фазодаги аналитик геометрия, лимитлар назарияси, бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби, аниқмас ва аниқ интеграллар.

Қўлланма олий техника ўқув юртларининг студентлари учун мўлжалланган.

Ш $\dfrac{1702010000 - 203}{353\ (04) - 85}$ 166 - 85

РУСЧА БИРИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИДАН

Китобхон эътиборига ҳавола қилинаётган мазкур „Олий математика қисқа курси“ олий техника ўқув юртларининг кечки факультетлари студентлари учун мўлжалланган. У мажбурий программада кўзда тутилган барча материални асосан қамраб олади. Бу курс авторларнинг кечки бўлим студентлари билан кўп йиллик ишлари натижасида яратилди.

Китобнинг ҳажми унча катта бўлмаса-да, лекин материалнинг иложи борича қатъий ва тушунарли бўлишга ҳаракат қилинди. Курснинг ҳар бир бўлимида назарий материални тушунтирадиган ва мустаҳкамланишига ёрдам берадиган масала ва мисоллар етарлича сонда ечилишлари билан келтирилди. Бундан ташқари, асосий тушунчаларнинг формал киритилишининг олдини олиш мақсадида мазкур тушунчаларга табиий равишда олиб келадиган геометрик ва физик масалалар берилди.

РУСЧА ИККИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Китобнинг бу нашрига комплекс сонлар, векторлар анализи асослари, операцион ҳисобнинг асосий тушунчалари, эҳтимоллар назарияси (математик статистика элементлари билан) бўлимлари қўшимча қилинди. Бундан ташқари, чизиқли алгебра бўлими анча кенгайтирилди. Математикани ўқитишда ҳозирги замон тенденциясини ҳисобга олиб, тўплам, умумийлик ва мавжудлик кванторлари, импликация тушунчаларини киритиш йўли билан курснинг айрим бўлимларининг баён этилиш методикасига ўзгартишлар киритилди. Функция тушунчаси бу нашрда биринчи нашрдагидан бошқачароқ, яъни бир тўпламнинг бошқа тўпламга акслантирилишини белгилайдиган қоида сифатида қаралди. Бундан ташқари, бошқа методик ва таҳририй тузатишлар қилинди, шунингдек пайқалган хатолар ҳам тузатилди.

Авторлар

КИРИШ

Мазкур курснинг айрим бўлимларида тўпламлар назарияси ва логиканинг баъзи тушунчаларидан фойдаланилади; қуйида биз шу тушунчаларнинг қисқа баёнини келтирамиз.

1. Тўпламлар ҳақида асосий маълумотлар. *Тўплам* тушунчаси математиканинг асосий тушунчаларидан биридир. Тўплам қандайдир объектларнинг тайин бир мажмуидир. Сиз ўқиётган институт студентлари, қўлингиздаги китоб саҳифаларининг тўплами, барча жуфт сонлар тўплами ва шу кабилар тўпламларга мисол бўла олади. Бу мисоллардан кўриниб турибдики, тўплам чекли ёки чексиз сондаги нарсаларни ёки, одатда айтилишича, *элементларни* ўз ичига олиши мумкин. Биринчи ҳолда тўпламни *чекли*, иккинчи ҳолда эса *чексиз* дейилади.

Одатда тўпламларни бош ҳарфлар: $A, B, M, N, \ldots$ билан, уларнинг элементларини эса кичик ҳарфлар: $a, b, x, y, \ldots$ билан белгиланади. Агар бирор x элемент M тўпламига тегишли бўлса, буни шундай ёзилади: $x \in M$. Агар x элемент M тўпламга тегишли бўлмаса, буни $x \notin M$ кўринишда ёзилади.

Айтайлик, M ва N иккита тўплам бўлсин. Агар M тўпламнинг барча элементлари N тўпламга тегишли бўлса, у ҳолда M тўплам N тўпламда бор дейилади; буни шундай ёзилади: $M \subset N$ ёки $N \supset M$. Бу ҳолда M тўплам N нинг *қисм тўплами* деб аталади. Масалан, жуфт сонлар тўплами бутун сонлар тўпламининг қисм тўпламидир. Равшанки, агар $M \subset N$, $N \subset L$ бўлса, у ҳолда $M \subset L$ бўлади.

Битта ҳам элементни ўз ичига олмаган тўпламни ҳам тўпламлар қаторига киритилади. Бундай тўплам *бўш тўплам* деб аталади ва $\varnothing$ билан белгиланади. Масалан, $x^2 + 4 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизлари тўплами бўшдир, чунки бу тенглама ҳақиқий илдизларга эга эмас.

Чекли сондаги тўпламлар: $M_1, M_2, \ldots, M_n$ берилган бўлсин. Бу тўпламларнинг *бирлашмаси* (ёки *йиғиндиси*) деб, $M_1, M_2, \ldots, M_n$ тўпламларнинг ҳеч бўлмаганда биттасига тегишли бўлган барча элементлар тўплами M га айтилади. Буни қуйидагича белгиланади:

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n \quad \text{ёки} \quad M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i.$$

Масалан, барча бутун сонлар тўплами жуфт сонлар тўплами ва тоқ сонлар тўпламининг бирлашмасидир; ҳақиқий сонлар тўплами рационал сонлар тўплами билан иррационал сонлар тўпламининг бирлашмасидир. M_1 тўплам $1 < x < 5$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган x сонлардан, M_2 тўплам эса $2 < y < 7$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган y сонлардан иборат бўлсин. У ҳолда бу тўпламларнинг $M_1 \cup M_2$ бирлашмаси $1 < z < 7$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган z сонлардан иборат бўлади.

M_1 $M_2, \ldots, M_n$ тўпламларнинг *кесишмаси* деб, бу M_1, $M_2, \ldots, M_n$ тўпламларнинг ҳар бирига тегишли элементлардан ва фақат шу элементлардан иборат M тўпламга айтилади. Буни қуйидагича белгиланади:

$$M = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n \quad \text{ёки } M = \bigcap_{i=1}^{n} M_i.$$

Агар бу тўпламларнинг ҳар бирига тегишли бўлган элементлар бўлмаса, у ҳолда уларнинг кесишмаси, равшанки, бўш тўплам бўлади. M_1 тўплам 3 дан кичик ҳақиқий сонлар тўплами, M_2 тўплам эса 2 дан катта ҳақиқий сонлар тўплами бўлсин. Бу тўпламларнинг $M_1 \cap M_2$ кесишмаси $2 < x < 3$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган x ҳақиқий сонлар тўплами бўлади. Агар M_1 тўплам 3 дан катта сонлар тўплами, M_2 эса 2 дан кичик сонлар тўплами бўлса, у ҳолда $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ бўлиши равшан. Бу ҳолда M_1 ва M_2 тўпламлар кесишмайди деб айтилади.

2. Умумийлик ва мавжудлик кванторлари. Логик келиб чиқиш (оқибат) ва логик тенг кучлилик. Мазкур курснинг баъзи бўлимларини баён этишда биз мос равишда *умумийлик* ва *мавжудлик кванторлари* деб аталадиган $\forall$ ва $\exists$ белгилардан фойдаланамиз.

$\underset{x}{\forall}$ ёки $\forall x$ символи қуйидагини англатади: „барча x лар учун“, „исталган x учун“, „ҳар бир x учун“, „x қандай бўлмасин“. Масалан, $\underset{x}{\forall}$ $(x>0)$ ёзуви бундай ўқилади: „исталган x мусбат сон учун“, „барча x мусбат сонлар учун“. $\underset{x}{\forall}$ $(x \in M)$ ёзуви бундай ўқилади: „M тўпламга тегишли бўлган исталган x элемент учун“ ёки „M тўпламдаги исталган x элемент учун“. $\underset{x_1, x_2}{\forall}$ $(x_1, x_2 \in M)$ ёзуви бундай ўқилади: „M тўпламнинг x_1 ва x_2 элементлари қандай бўлмасин“, „M тўпламнинг исталган x_1 ва x_2 элементлари учун“.

$\underset{x}{\exists}$ ёки $\exists x$ символи қуйидагини англатади: „шундай x мавжудки, ...“ ёки „баъзи x лар учун“, ёки „ҳеч бўлмаганда битта x учун“, ёки „шундай x ни топиш мумкинки, ... Масалан, $\underset{x}{\exists}$ $(x > 0)$ ёзуви бундай ўқилади: „шундай x мусбат сон мавжудки,...“; $\underset{x}{\exists}$ $(x \in M)$ — „M тўпламнинг шундай x элементи мавжудки, ... “; $\underset{x_1, x_2}{\exists}$ $(x_1, x_2 \in M)$ ёзуви қуйидагини англатади: „M тўпламнинг шундай x_1 ва x_2 элементлари мавжудки, ...“.

Биз $\Rightarrow$ ва $\Leftrightarrow$ символлари билан кўп марта иш кўришимизга тўғри келади.

$\Rightarrow$ символи *логик келиб чиқишни* билдиради. Масалан, агар A ва B қандайдир хоссалар бўлса, у ҳолда $A \Rightarrow B$ ёзуви A дан B келиб чиқишини ёки A ўринли бўлса, B ўринли бўлишини билдиради.

$\Leftrightarrow$ белгиси *логик тенг кучлиликни* билдиради. $A \Leftrightarrow B$ ёзуви A дан B келиб чиқишини ва, аксинча, B дан A келиб чиқишини билдиради.

Масалан, бу тушунчани Пифагор теоремаси мисолида кўриб чиқайлик: агар учбурчак тўғри бурчакли бўлса (A хосса), у ҳолда унинг томонларидан бирининг квадрати қолган икки томони квадратларининг йиғиндисига тенг (B хосса), яъни $A \Rightarrow B$.

Равшанки, бунга тескари даъво ҳам ўринли: агар учбурчакда томонлардан бирининг квадрати қолган икки томон квадратлари йиғиндисига тенг бўлса (B хосса), у ҳолда бу учбурчак тўғри бурчаклидир (A хосса), яъни $B \Rightarrow A$.

Шундай қилиб, A ва B хоссалар тенг кучлидир, яъни $A \Leftrightarrow B$.

Айтайлик, M ва N—иккита тўплам бўлсин. $\forall (x \in M) \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in M$ ёзуви қуйидагини англатади: x элемент қандай бўлмасин, „x элемент M тўпламга тегишли“ деган даъво „x элемент N тўпламга тегишли“, деган даъвони келтириб чиқаради. Бошқача айтганда, M тўплам N тўпламга киради, яъни $M \subset N$. Ушбу

$$\underset{\varepsilon}{\forall} (\varepsilon > 0) \exists \mathrm{N} \underset{x}{\forall} (x > N) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

ёзуви бундай ўқилади: „ε қандай бўлмасин, шундай N сон мавжудки, исталган $x > N$ учун $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади“.

I БОБ

КООРДИНАТАЛАР МЕТОДИ. ФУНКЦИЯ ТУШУНЧАСИ

1-§. ҲАҚИҚИЙ СОНЛАР. ТЎҒРИ ЧИЗИҚДАГИ НУҚТАНИНГ КООРДИНАТАЛАРИ

Ҳақиқий сон тушунчаси. Мазкур курсда биз доимо ҳақиқий сонлар билан иш кўришимизга тўғри келади. Ҳақиқий сонлар ҳақидаги ўқувчига ўрта мактаб курсидан маълум бўлган асосий маълумотларни эслатиб ўтамиз. Ҳақиқий сонлар тўплами барча рационал сонлар ва барча иррационал сонлардан иборат. *Рационал сон* деб, m/n кўринишдаги сонга айтилади, бу ерда m ва n — бутун сонлар, шу билан бирга $n \neq 0$. Хусусан, ҳар қандай m бутун сонни $m/1$ кўринишда тасвирлаш мумкин ва демак, бутун сон ҳам рационал сондир. *Иррационал сон* деб, иккита бутун соннинг нисбати кўринишида ифодалаб бўлмайдиган ҳақиқий сонга айтилади.

Иррационал сон тушунчасининг киритилишига кўпчилик масалаларни текшириш, хусусан, баъзи кесмаларнинг узунликларини ўлчаш (масалан, томони бирга тенг квадратнинг диагоналини ўлчаш) сабаб бўлади. Маълумки, ҳар қандай m/n рационал сон ё бутун сон бўлади, ё чекли ёки даврий чексиз ўнли каср билан ифодаланади. Иррационал сон эса нодаврий чексиз ўнли каср билан ифодаланади. Масалан, 3/4 ва 1/3 рационал сонлар ушбу ўнли касрлар билан ифодаланади:

$$3/4 = 0{,}75; \quad 1/3 = 0{,}333\ldots = 0{,}(3).$$

$\sqrt{2}$ ва π иррационал сонлар қуйидагича нодаврий чексиз ўнли касрлар билан ифодаланади:

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ldots; \quad \pi = 3{,}14159\ldots .$$

Ҳақиқий сонларнинг ўнли касрлар ёрдамида ёзилиши ҳар бир иррационал сонни унга яқин рационал сон билан алмаштиришга имкон беради. Бу яқин рационал сон берилган иррационал соннинг *рационал яқинлашиши* деб аталади. Иррационал соннинг рационал яқинлашиши сифатида вергулдан кейинги биринчи n та рақами иррационал соннинг вергулдан кейинги биринчи n та рақами билан бир хил бўлган, қолган рақамлари эса ноллар билан алмаштирилган чекли ўнли каср олинади. Бундай алмаштиришдаги хатолик, равшанки, $1/10^n$ дан ортиқ бўлмайди. Масалан, $\pi = 3{,}14159\ldots$ соннинг ундан $1/100$ дан кўп фарқ қилмайдиган рационал яқинлашиши 3,14 рационал сон бўлади, яъни $\pi \approx 3{,}14$. Инженерлик ҳисоблашларида иррационал сонлар устидаги арифметик амаллар уларнинг рационал яқинлашишлари устидаги тегишли амаллар билан алмаштирилади.

Шуни айтиб ўтамизки, тақрибий натижани олиш учун амалда барча ҳисоблашларда керагидан битта ортиқ рақам олиш ва кейин натижани керакли сондаги рақамларгача яхлитлаш кифоя. Масалан, $\pi+\sqrt{3}$ йиғиндини 0,01 гача аниқликда ҳисоблашда қуйидагини оламиз:

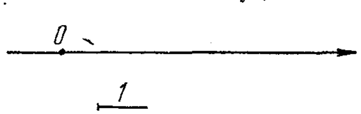
$$\pi+\sqrt{3}\approx 3,142+1,732=4,874\approx 4,87.$$

Ҳақиқий сонлар назариясининг янада тўлиқроқ баёнини китобхон математик анализ курси батафсилроқ баён этилган китоблардан топиши мумкин.

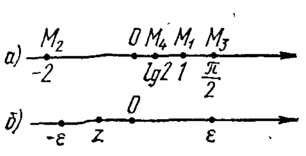
2. Ҳақиқий сонларнинг геометрик тасвирланиши. Тўғри чизиқдаги нуқтанинг координаталари. Ҳақиқий сонларни сон ўқининг нуқталари билан тасвирлаш мумкин. *Сон ўқи* деб, бошланғич нуқта (саноқ боши), мусбат йўналиш (чизмада стрелка билан белгиланади) ва узунлиги бирга тенг кесма (масштаб бирлиги) танланган тўғри чизиққа айтилади (1-расм). Сон ўқининг мусбат йўналишига қарама-қарши йўналиш манфий йўналиш деб аталади. Агар x ҳақиқий сон нолдан катта бўлса ($x>0$), у ҳолда у сон ўқида саноқ бошидан мусбат йўналишда x масофада ётган нуқта билан тасвирланади; агар $x<0$ бўлса, у ҳолда ўқнинг x ни ифодалайдиган нуқтаси саноқ бошидан манфий йўналишда $-x$ масофада ётган нуқта билан тасвирланади (x манфий бўлганда $-x>0$), ноль сони ўқнинг бошланғич нуқтаси билан тасвирланади.

x ҳақиқий сон сон ўқининг бу сонни тасвирлайдиган M нуқтасининг *координатаси* деб аталади, x сон M нуқтанинг координатаси бўлган ҳолда $M(x)$ деб ёзишга келишиб олайлик.

2-*а* расмда сон ўқининг мос равишда $1, -2, \pi/2, \lg 2$ ҳақиқий сонларни ифодалайдиган $M_1(1), M_2(-2), M_3(\pi/2), M_4(\lg 2)$ нуқталари белгиланган. Равшанки, ҳар бир ҳақиқий сонга сон ўқининг ягона M нуқтаси мос келади ва аксинча, бу сон ўқининг ҳар бир M нуқтасига ягона x ҳақиқий сон — шу нуқтанинг координатаси мос келади. Бошқача айтганда, барча ҳақиқий сонлар тўплами билан сон ўқининг нуқталари тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд. Шу сабабли келгусида „x сон“ деган сўз ўрнига кўпинча „x нуқта“ сўзини ишлатамиз. Бундан ташқари, сон тўғри чизиғидаги нуқта кўпинча унинг координатаси билан белгиланади.



1-расм.



2-расм.

Ҳақиқий сонлар тўплами *тартибланган* тўпламдир. Бу деган сўз, ўзаро тенг бўлмаган исталган иккита x_1 ва x_2 ҳақиқий сон ушбу иккита тенгсизлик: $x_1>x_2$ ва $x_1<x_2$ дан бирини ва фақат бирини қаноатлантиради.

Мусбат йўналиши чапдан ўнгга йўналган горизонтал жойлашган сон ўқида катта ҳақиқий сонларга мос нуқталар кичик ҳақиқий сонларга мос нуқталардан ўнгроқда ётади.

Яна шуни қайд этиб ўтамизки, ҳақиқий сонлар тўплами **зичдир**, яъни у қуйидаги хоссага эга: бир-бирга тенг бўлмаган исталган иккита ҳақиқий сон орасида чексиз кўп бошқа ҳақиқий сонлар жойлашган. Бу деган сўз, агар (аниқлик учун) $x_1<x_2$ бўлса, у ҳолда x_1 дан катта, лекин x_2 дан кичик $(x_1<x<x_2)$ x сонларнинг чексиз тўплами мавжуд демакдир.

3. Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати. x ҳақиқий соннинг *абсолют қиймати (модули)* деб, агар $x\geqslant 0$ бўлса, шу соннинг ўзини, агар $x<0$ бўлса, $-x$ сонни айтилади. x ҳақиқий соннинг абсолют қиймати $|x|$ символи билан белгиланади. Шундай қилиб,

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{агар } x\geqslant 0 \text{ бўлса,} \\ -x, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Масалан, $|2|=2$, $|\pi|=\pi$, $|0|=0$, $|-3|=-(-3)=3$.

Исталган ҳақиқий соннинг модули ё мусбат (агар сон нолга тенг бўлмаса) ё нолга тенг (агар соннинг ўзи нолга тенг бўлса). Бундан исталган ҳақиқий соннинг ўзининг модулидан катта бўлмаслиги келиб чиқади, яъни $x\leqslant|x|$. Тенглик $x\geqslant 0$ да, тенгсизлик эса $x<0$ да ўринли бўлади (чунки кейинги ҳолда x сон манфий, унинг модули эса мусбатдир).

Ҳақиқий соннинг абсолют қийматининг таърифига асосланиб, унинг геометрик маъносини ойдинлаштириш осон: x ҳақиқий соннинг абсолют қиймати саноқ бошидан $M(x)$ нуқтагача бўлган масофага тенг. Масалан, $M_1(1)$ нуқта саноқ бошидан $|1|=1$ га тенг масофада, $M_2(-2)$ нуқта эса $|-2|=2$ масофада жойлашган ва ҳоказо (2- *а* расм).

Абсолют қийматнинг геометрик маъносидан фойдаланиб, исталган $\varepsilon>0$ да $|z|<\varepsilon$ тенгсизлик $-\varepsilon<z<\varepsilon$ тенгсизликларга* тенг кучлилигини исботлаш осон.

Ҳақиқатан ҳам, $|z|<\varepsilon$ тенгсизлик нуқтанинг саноқ бошидан ε дан кичик масофада ётишини англатади, яъни $-\varepsilon<z<\varepsilon$ (2-*б* расм). Аксинча, агар $-\varepsilon<z<\varepsilon$ бўлса, у ҳолда z нуқта саноқ бошидан ε дан кичик масофада ётади, бу $|z|<\varepsilon$ демакдир.

Ҳақиқий сонларнинг абсолют қийматлари бир қатор хоссаларга эга бўлиб, улар қуйидаги теоремаларда баён қилинган.

1-теорема. *Икки ҳақиқий сон йиғиндисининг абсолют қиймати бу сонлар абсолют қийматларининг йиғиндисидан катта эмас:*

$$|x_1+x_2|\leqslant|x_1|+|x_2|.$$

Исботи. Аввал $x_1+x_2\geqslant 0$ деб фараз қиламиз. У ҳолда

---

* Кириш қисмида кўрсатилган символлардан фойдаланиб, бу даъвони бундай ёзиш мумкин: $\forall_{\varepsilon} (\varepsilon>0)\ (|z|<\varepsilon) \Longleftrightarrow \{-\varepsilon<z<\varepsilon\}$

$|x_1+x_2|=x_1+x_2$. Лекин $x_1 \leqslant |x_1|$ ва $|x_2| \leqslant |x_2|$. Демак, $|x_1+x_2| \leqslant |x_1|+|x_2|$.

Энди $x_1+x_2<0$ деб фараз қиламиз.
Бу ҳолда $|x_1+x_2|=-(x_1+x_2)=-x_1-x_2$. Бироқ $-x_1 \leqslant |-x_1|=|x_1|$ ва $-x_2 \leqslant |-x_2|=|x_2|$.
Бу ердан

$$|x_1+x_2| \leqslant |x_1|+|x_2|.$$

Бу теоремани исталган чекли сондаги қўшилувчилар бўлган ҳолга ҳам умумлаштириш мумкин.

2- теорема. *Иккита ҳақиқий сон айирмасининг абсолют қиймати бу сонлар абсолют қийматларининг айирмасидан кичик эмас:*

$$|x_1-x_2| \geqslant |x_1|-|x_2|.$$

Исботи. $x_1=(x_1-x_2)+x_2$ бўлганлиги учун 1- теоремага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз: $|x_1|=|(x_1-x_2)+x_2| \leqslant |x_1-x_2|+|x_2|$, бу ердан $|x_1-x_2| \geqslant |x_1|-|x_2|$.

3 - теорема. *Бир нечта ҳақиқий сонлар кўпайтмасининг абсолют қиймати бу сонлар абсолют қийматларининг кўпайтмасига тенг:*

$$|x_1 \cdot x_2 \ldots x_n|=|x_1| \cdot |x_2| \ldots |x_n|.$$

4 - теорема. *Иккита ҳақиқий сон бўлинмасининг абсолют қиймати бу сонлар абсолют қийматларининг бўлинмасига тенг:*

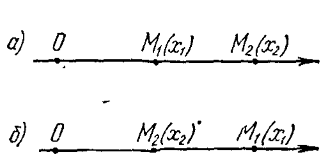
$$\left|\frac{x_1}{x_2}\right|=\frac{|x_1|}{|x_2|}.$$

3- ва 4- теоремалар абсолют қиймат ҳамда кўпайтириш ва бўлиш амалларининг таърифларидан бевосита келиб чиқади

Изоҳ. Келгусида ҳақиқий сонларни қисқача сонлар деб атайберамиз.

4. Тўғри чизиқдаги икки нуқта орасидаги масофа. Координаталар ёрдамида ҳозирнинг ўзидаёқ баъзи геометрик масалаларни ечиш мумкин. Масалан, тўғри чизиқдаги (сон ўқидаги) $M_1(x_1)$ ва $M_2(x_2)$ нуқталар орасидаги масофани топайлик.

Дастлаб, иккала координата ҳам манфиймас, шу билан бирга $x_2>x_1$, деб фараз қиламиз (3- *а* расм). У ҳолда $OM_1=x_1$, $OM_2=x_2$ ва демак, изланаётган масофа: $d=OM_2-OM_1=x_2-x_1$. Агар аввалгидек, x_1 ва x_2 манфиймас, лекин $x_2<x_1$ бўлса (3- *б* расм), у ҳолда $d=x_1-x_2$.



3- расм.

Равшанки, иккала ҳолда ҳам бундай ёзиш мумкин:

$$d=|x_2-x_1|. \qquad (1)$$

Иккала x_1 ва x_2 координата ҳам мусбатмас ёки x_1 ва x_2 турли ишораларга эга бўлган ҳолларда ҳам (1) формула ўринли бўлиб қолишига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

Мисол $M_1(-0{,}8)$ ва $M_2(3{,}2)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.
Ечилиши. (1) формулага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$d = |3{,}2 - (-0{,}8)| = 3{,}2 + 0{,}8 = 4.$$

2-§. ТЕКИСЛИКДАГИ ВА ФАЗОДАГИ КООРДИНАТАЛАР

1. Текисликдаги декарт тўғри бурчакли координаталари. Координаталар методи. Юқорида кўрсатилдики, тўғри чизиқдаги нуқтанинг вазияти битта сон шу нуқтанинг координатаси билан аниқланади. Текисликдаги нуқтанинг вазияти энди иккита сон билан аниқланади.

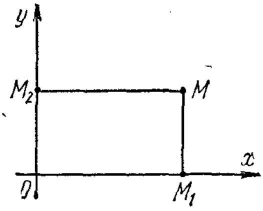
Ҳақиқатан, текисликда иккита ўзаро перпендикуляр Ox ва Oy ўқ берилган бўлиб, улар умумий саноқ бошига (ўқларнинг кесишиш нуқтаси билан устма-уст тушувчи) ва умумий масштаб бирлигига эга бўлсин (4-расм).

Ox ва Oy ўқлар жойлашган текисликни *координата текислиги* деб айтамиз ва Oxy билан белгилаймиз. Oxy координата текислигининг ихтиёрий танланган M нуқтасини қараймиз: M_1 ва M_2 нуқталар M нуқтанинг мос равишда Ox ва Oy ўқларга туширилган проекциялари бўлсин. Ox ўқдаги M_1 нуқтанинг x координатаси M нуқтанинг *абсциссаси*, Ox ўқдаги M_2 нуқтанинг y ординатаси M нуқтанинг *ординатаси* деб аталади. x ва y сонлар биргаликда қаралганда M нуқтанинг тўғри бурчакли (ёки декарт тўғри бурчакли)* *координаталари* деб аталади.

Равшанки, координата текислигидаги ҳар бир M нуқтага тартибланган ягона x ва y сонлар жуфти унинг тўғри бурчакли координаталари мос келади. Аксинча, ҳар бир x ва y сонлар жуфти Oxy текисликда ягона M нуқтани аниқлайди. Ҳақиқатан, x ва y сонларга Ox ва Oy ўқларда тўла аниқланган M_1 ва M_2 нуқталар мос келади. Шу ўқларга бу нуқталарда тик туширилган перпендикулярлар x ва y координатали ягона M нуқтада кесишади.

Бундан кейин, агар „нуқта берилган“ ёки „нуқтани топинг“ дейилган бўлса, бу нарса бу нуқтанинг координаталари берилганлигини ёки унинг координаталарини топиш талаб қилинаётганлигини билдиради.

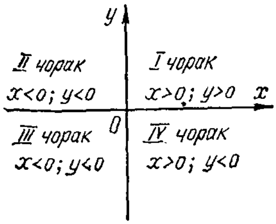
Ox ўқ *абсциссалар ўқи*, Oy ўқ *координаталар ўқи*, уларнинг иккаласи биргаликда эса *координата ўқлари* деб аталади. Абсцисса ва ордината ўқларининг умумий боши *координаталар боши* деб аталади.



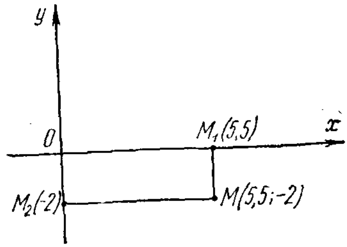
4- расм.

Ox ва Oy ўқлар координата текислигини чораклар деб аталадиган тўрт бўлакка бўлади (5-расм). I чоракда $x > 0$, $y > 0$;

* Француз математиги ва философи Р. Декарт (1596—1650) шарафига шундай аталган.



5- расм.



6- расм.

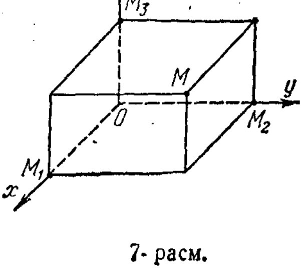
II чоракда $x<0$, $y>0$; III чоракда $x<0$ $y<0$; IV чоракда $x>0$, $y<0$.

x сон M нуқтанинг абсциссаси, y сон эса унинг ординатаси бўлган ҳолда нуқтани M $(x;y)$ орқали ёзишга келишиб оламиз. Масалан, $M(1;-2)$ ёзуви M нуқта 1 абсциссага ва (-2) ординатага эгалигини билдиради.

Мисол. Текисликда $M(5,5;-2)$ нуқтани ясанг.

Ечилиши. Абсциссалар ўқида M_1 нуқтани унинг 5,5 координатаси бўйича ясаймиз ординаталар ўқида (-2) координатали M_2 нуқтани ясаймиз. M_1 нуқта орқали Ox ўққа перпендикуляр тўғри чизиқ, M_2 нуқта орқали Oy ўққа перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқларнинг кесишадиган M нуқтаси изланаётган нуқтадир (6- расм).

Шундай қилиб, текисликдаги нуқтанинг вазияти сонларнинг тартибланган жуфти—бу нуқтанинг координаталари билан аниқланади. Қуйида биз фазодаги нуқтанинг вазияти учта сон билан аниқланишини кўрамиз. Нуқталарнинг вазиятини сонлар ёрдамида аниқлаш усули *координаталар методи* деб аталади. Координаталар методини француз математиги Декарт яратган бўлиб, у бу методни кўпгина геометрик масалаларга татбиқ этди ва математиканинг янги соҳаси—*аналитик геометрияни* яратди. Бу фан геометрик фигураларнинг хоссаларини ва уларнинг ўзаро жойлашишини алгебра методлари ёрдамида ўрганиш билан шуғулланади.



7- расм.

2. Фазодаги нуқтанинг координаталари. Фазодаги нуқтанинг вазиятини учта сон билан аниқлаш мумкинлигини кўрсатамиз.

Фазода умумий O бошга (ўқларнинг кесишиш нуқтасига) ва умумий масштаб бирлигига эга бўлган ўзаро перпендикуляр учта Ox, Oy ва Oz ўқларни қараймиз (7- расм). Бу ўқларни *координата ўқлари*, уларнинг умумий бошини эса *координаталар боши* деб атаймиз. Ox, Oy ва Oz ўқлар берилган фазони $Oxyz$ символи билан белгилаймиз. Айтайлик, M нуқта $Oxyz$ фазонинг ихтиёрий танланган нуқтаси бўлсин. У орқали мос равишда координата ўқларига перпендикуляр бўлган учта текислик ўтказамиз. Бу текисликларнинг Ox, Oy ва Oz ўқлар билан кесишган M_1, M_2 ва M_3 нуқталари M нутқанинг тегишли ўқлардаги проекциялари деб аталади. Айтайлик, M_1 нуқта Ox ўқда x координатага, M_2 нуқта Oy ўқда y координатага ва M_3 нуқта Oz ўқда z координатага эга бўлсин. x, y ва z сонлар фазодаги M нуқтанинг *тўғри бурчакли* (шунингдек, декарт тўғри бурчакли) *координаталари* деб аталади. Бунда x сон M нуқтанинг *абсциссаси*, y сон—*ординатаси*, z сон эса *аппликатаси* деб аталади. Координата ўқлари ҳам шу номлар билан аталади: Ox ўқ *абсциссалар ўқи*, Oy ўқ *ординаталар ўқи*, Oz ўқ эса *аппликаталар ўқи* деб аталади.

Равшанки, $Oxyz$ фазонинг ҳар бир M нуқтаси ягона тартибланган x, y ва z сонлар учлигини—ўзининг координаталарини аниқлайди. Аксинча, фазодаги M нуқтанинг вазияти унинг учта декарт координаталари билан тўлиқ аниқланади. Шу сабабли бундан кейин „нуқта берилган" ёки „нуқтани топиш талаб қилинади" дейиладиган бўлса, бу нарса мос равишда шу нуқтанинг координаталари берилганлигини ёки уларни топиш талаб қилинаётганлигини билдиради.

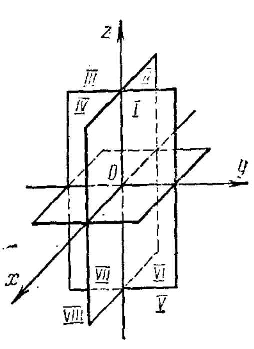
Агар координата ўқларининг ҳар бир жуфти орқали текислик ўтказиладиган бўлса, у ҳолда учта ўзаро перпендикуляр текислик: Oxy, Oyz ва Ozx ҳосил бўлиб, улар *координата текисликлари* деб аталади. Улар фазони саккиз бўлакка—октантларга ажратади (8- расм):

I октантда $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$; II октантда $x < 0,\ y > 0,\ z > 0$; III октантда $x < 0, y < 0,\ z > 0$, IV октантда $x > 0,\ y < 0, z > 0$; V октантда $x > 0, y > 0,\ z < 0$; VI октантда $x < 0,\ y > 0,\ z < 0$; VII октантда $x < 0,\ y < 0, z < 0$; VIII октантда $x > 0,\ y < 0, z < 0$;
Бундан кейин $M\ (x;\ y;\ z)$ ёзуви M нуқта x абсцисса, y ордината ва z аппликатага эгалигини англатади.

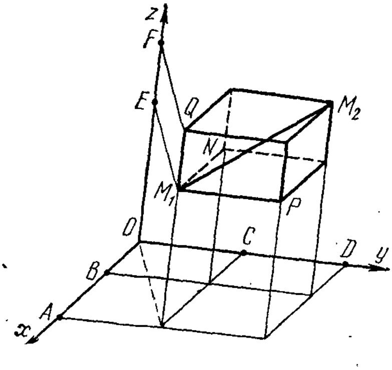
3. Икки нуқта орасидаги масофа. Координаталар методи ёрдамида кўпгина геометрик масалаларни ечиш мумкин. Улардан бирини кўриб чиқамиз.

Фазодаги $M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $M_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталар орасидаги масофани топиш талаб қилинаётган бўлсин.

M_1M_2 кесма координата текисликларининг ҳеч бирига параллел эмас, деб фараз қиламиз. M_1 ва M_2 нуқталарнинг хар бири орқали координата текисликларига мос равишда параллел бўлган учтадан текислик ўтказамиз. Бу олти текислик кесишиб, шундай тўғри бурчакли параллелепипед ҳосил қиладики, унинг диагонали M_1M_2 кесма



8- расм.



9- расм.

бўлади. Стереометрия курсидан маълумки, тўғри бурчакли параллелепипед диагоналининг квадрати унинг бир учидан чиқадиган учта қиррасининг квадратлари йиғиндисига тенг. Шу сабабли,

$$M_1M_2^2 = M_1N^2 + M_1P^2 + M_1Q^2.$$

Параллелепипеднинг M_1N, M_1P ва M_1Q қирраларининг охирларини мос равишда Ox, Oy ва Oz ўқларга проекциялаб, бу ўқларда AB, CD ва EF кесмаларни ҳосил қиламиз ва бунда:

$$M_1N = AB = |x_2 - x_1|, M_1P = CD = \\ = |y_2 - y_1|, M_1Q = EF = |z_2 - z_1|.$$

Демак, изланаётган d масофанинг квадрати қуйидагига тенг:

$$d^2 = M_1M_2^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2$$

ёки

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Бундан узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (2)$$

(2) формула $M_1 M_2$ кесма битта ёки иккита координата текислигига параллел бўлган ҳолда ҳам ўринли бўлади.

Хусусан, координаталар бошидан $M(x; y; z)$ нуқтагача бўлган масофа ушбу формула бўйича топилади:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (3)$$

Агар $M_1(x_1; y_1)$ ва $M_2(x_2; y_2)$ нуқталар Oxy текисликда ётган бўлса, у ҳолда улар орасидаги масофани топиш формуласи қуйидаги кўринишни олади:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (4)$$

Хусусан, ушбу

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (5)$$

формула $M(x; y)$ нуқтадан координаталар бошигача бўлган масофани ифодалайди.

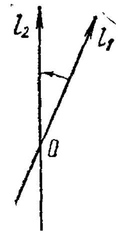
Мисол. $M_1(-1; 2; -3)$ ва $M_2(1; 1; -5)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.
Ечилиши. (2) формулага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$d = \sqrt{[1-(-1)]^2 + (1-2)^2 + [-5-(-3)]^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3.$$

3- §. ҚУТБ КООРДИНАТАЛАРИ КООРДИНАТАЛАРНИ АЛМАШТИРИШ

1. Икки ўқ орасидаги бурчак. P текисликда O нуқтада кесишадиган иккита l_1 ва l_2 ўқни қараймиз. l_1 ва l_2 *ўқлар орасидаги бурчак* деб. P текисликда l_1 ўқни O нуқта атрофида у то

l_2 ўқ билан устма-уст тушгунча буриш лозим бўлган бурчакка айтилади (10-расм). Бунда P текисликда айланишнинг мусбат йўналиши (соат стрелкаси айланишига тескари йўналиш) танланган деб фараз қилинади. Бурчак l_1 ўқнинг мусбат йўналишда бурилишида мусбат, манфий йўналишда бурилишида эса манфий ҳисобланади. Шундай қилиб, ўқлар қараладиган тартиб муҳимдир. l_1 ва l_2 ўқлар орасидаги бурчакни $(\widehat{l_1, l_2})$ символ билан белгилаймиз. У ҳолда бу бурчак билан $(\widehat{l_2, l_1})$ бурчак бир-бирига тенг бўлмайди. Икки кесишувчи ўқ орасидаги бурчакнинг қиймати бир қийматли аниқланмайди. Ҳақиқатдан ҳам, φ бурчакка буришдан сўнг l_1 ўқ l_2 ўқ билан устма-уст тушган бўлса, у ҳолда яна исталган йўналишда тўлиқ бир нечта айлантиришни бажариш мумкинки, натижада l_1 ўқ яна l_2 ўқ билан устма-уст тушади. Шундай қилиб, $(\widehat{l_1, l_2})$ бурчак учун φ дан ташқари $\varphi + 2k\pi$ кўринишдаги яна чексиз кўп қийматлар ҳосил бўлади, бу ерда k—исталган бутун сон бўлиши мумкин. Бундан кейин, агар махсус айтилмаган бўлса, икки ўқ орасидаги бурчак дейилганда унинг $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган қийматини тушунамиз.



10-расм.

2. Қутб координаталари. 2-§, 1-пунктда текисликдаги нуқтанинг тўғри бурчакли декарт координаталари қаралган эди. Бироқ текисликнинг ҳар бир нуқтасининг вазиятини иккита ҳақиқий сон ёрдамида аниқлашга имкон берадиган кўпгина бошқа координата системаларини тузиш мумкин. Декарт координаталар системасидан сўнг энг кўп ишлатиладиган система қутб координаталар системасидир.

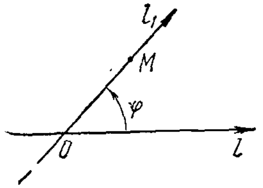
Текисликда l ўқни (яъни саноқ бошига, мусбат йўналиш ва масштаб бирлигига эга бўлган тўғри чизиқни) қараймиз (11-расм). Бу ўқни *қутб ўқи*, унинг O саноқ бошини эса *қутб* деб атаймиз.

Айтайлик M —текисликнинг қутб билан устма-уст тушмайдиган исталган нуқтаси бўлсин. Бу нуқта ва қутб орқали саноқ боши қутб билан устма-уст тушадиган l_1 ўқ ўтказамиз.

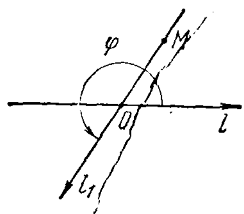
l қутб ўқи билан l_1 ўқ орасидаги $(\widehat{l, l_1})$ бурчакни φ билан белгилаймиз ва уни M нуқтанинг *қутб бурчаги* деб атаймиз. M нуқтанинг l_1 ўқдаги координатасини r билан белгилаймиз ва уни M нуқтанинг *қутб радиуси* деб атаймиз. Агар M нуқта l_1 ўқнинг мусбат қисмида ётган бўлса, у ҳолда $r>0$ (11-расм), агар M нуқта l_1 ўқнинг манфий қисмида ётган бўлса, у ҳолда $r<0$ (12-расм).

M нуқтанинг φ қутб бурчаги ва r қутб радиуси унинг *қутб координаталари* деб аталади. φ сон M нуқтанинг қутб бурчаги, r эса унинг қутб радиуси бўлган ҳолда $M(\varphi; r)$ ёзувдан фойдаланамиз.

Келгусида агар махсус айтилмаган бўлса, l ўқдаги мусбат йўналишни O қутбдан M нуқтага томон (бу ҳолда $r \geq 0$), φ қутб бур-



11- расм.



12- расм.

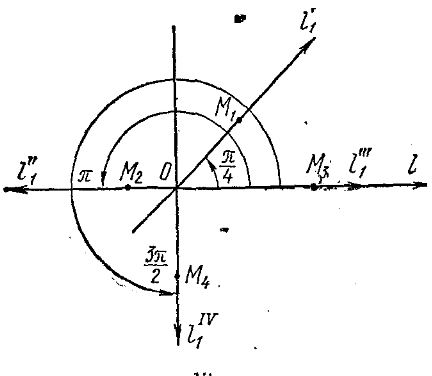
чакнинг қиймати сифатида эса унинг барча мумкин бўлган қийматларидан $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ шартни қаноатлантирадиган қийматини танлашни шартлашиб оламиз. У ҳолда текисликнинг қутб билан устма-уст тушмайдиган ҳар бир M нуқтасига ягона φ ва r сонлар жуфти — унинг қутб координаталари мос келади. Аксинча, агар φ ва r сонлар жуфти берилган бўлса, у ҳолда равшанки, уларга текисликнинг бу сонлар қутб координаталари бўладиган ягона M нуқтаси мос келади.

Шу вақтга қадар биз M нуқта қутб билан устма-уст тушмайди, деб фараз қилиб келдик. Қутбда l_1 ўқ билан тайин йўналишга эга эмас ва демак, қутб учун қутб бурчаги мавжуд эмас. Қутбнинг қутб радиуси нолга тенг ва шу биргина координата қутбнинг вазиятини тўлиқ аниқлайди.

Мисол. Қутб координаталар системасида $M_1(\pi/4;\ 2)$, $M_2(\pi;\ 1)$, $M_3(0;\ 3)$ ва $M_4(3\pi/2;\ 2)$ нуқталарни ясанг.

Ечилиши. Биринчи нуқтани ясаш учун l қутб ўқига $\pi/4$ бурчак остида l_1' ўқни ўтказамиз (13- расм) ва бу ўқда 2 координатали M_1 нуқтани белгилаймиз. Қолган нуқталарни ҳам шунга ўхшаш ясаймиз: қутб ўқи билан мос равишда π, 0 ва $3\pi/2$ бурчаклар ҳосил қиладиган l_1'', l_1''' ва l_1^{IV} ўқларни ўтказамиз, кейин эса l_1'' ўқда 1 координатали M_2 нуқтани, l_1''' ўқда 3 координатали M_3 нуқтани ва ниҳоят, l_1^{IV} ўқда 2 координатали M_4 нуқтани ясаймиз.

3. Декарт ва қутб координаталари орасидаги боғланиш. Баъзан текисликдаги декарт қутб координаталаридан бир вақтда фойдаланишга тўғри келади. Бунда тубандаги ўзаро тескари икки масаланинг қўйилиши табиийдир.

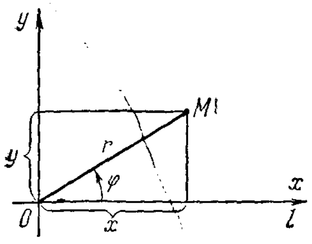


13- расм.

1. M нуқтанинг φ ва r қутб координаталарини билган ҳолда унинг x ва y декарт координаталари топилсин.

2. M нуқтанинг x ва y декарт координаталарини билган ҳолда унинг φ ва r қутиб координаталари топилсин.

Бу масалаларнинг ҳал этилиши қутб ўқи билан декарт системаси ўқларининг ўзаро



14- расм.

жойлашишига боғлиқ. Биз қутб ўқи декарт системасининг абсциссалар ўқи билан устма-уст тушадиган (ва демак, қутб декарт системасининг координаталар боши билан устма-уст тушадиган) хусусий ҳолнигина қараймиз. Бунда учала ўқ — қутб ўқи, Ox ўқ ва Oy ўқ умумий масштаб бирлигига эга деб фараз қилинади.

$\cos\varphi$ ва $\sin\varphi$ тригонометрик функцияларнинг таърифларига асосланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз (14- расм):

$$\cos\varphi = x/r,\ \sin\varphi = y/r,$$

бундан

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi. \tag{6}$$

(6) формулалар нуқтанинг декарт координаталарини унинг қутб координаталари орқали ифодалайди. Қутб координаталарини декарт координаталари орқали ифодалаш учун (6) тенгликларнинг ҳар бирининг иккала томонини квадратга кўтарамиз, кейин эса ҳосил бўлган тенгликларни ҳадма - ҳад қўшамиз:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \text{ ёки } r^2 = x^2 + y^2.$$

Бу ердан

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{7}$$

(6) тенгликлардаги иккинчи тенгликни биринчи тенгликка бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg}\varphi = y/x. \tag{8}$$

(7) тенглик r қутб радиусининг декарт координаталари орқали ифодасини беради. (8) тенглик декарт координаталарини билган ҳолда қутб бурчагининг тангенсини топишга имкон беради. Бироқ топилган $\operatorname{tg}\varphi$ қийматга φ нинг иккита қиймати ($0 \leqslant \varphi < 2\pi$ шартида) мос келади. φ қутб бурчагининг бу икки қийматидан (6) тенгликларни қаноатлантирадигани танланади.

Мисол. M нуқтанинг $x = \sqrt{3}$ ва $y = 1$ декарт координаталарини билган ҳолда унинг қутб координаталарини топинг.

Ечилиши. (7) ва (8) формулалар бўйича қуйидагини топамиз:

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2,\ \operatorname{tg}\varphi = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3.$$

Тангенснинг бу қийматига φ нинг иккита қиймати мос келади: $\varphi_1 = \pi/6$ ва $\varphi_2 = 7\pi/6$. (6) тенгликлар бу ҳолда бундай ёзилади:

$$\sqrt{3} = 2\cos\varphi,\ 1 = 2\sin\varphi.$$

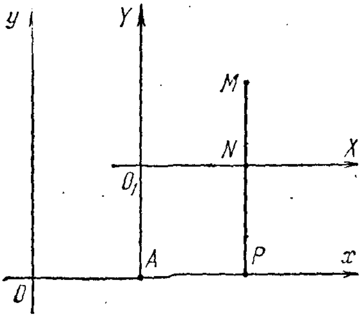
Бу тенгликлар φ нинг фақат биринчи қийматида бажарилади. Демак, $\varphi = \pi/6$. Шундай қилиб, M нуқта $\varphi = \pi/6$ ва $r = 2$ қутб координаталарига эга экан.

4. Координата ўқларини параллел кўчириш. Юқорида баъзан текисликда бир вақтда икки координата системасининг қаралиши ва ушбу масалани ҳал этишга тўғри келиши ҳақида сўз юритилди: нуқтанинг бир координаталар системасидаги координаталарини билган ҳолда унинг иккинчи системадаги координаталари топилсин. Нуқтанинг бир координаталар системасидаги координаталарини унинг иккинчи системадаги координаталари орқали ифодаловчи формулалар *координаталарни алмаштириш формулалари* деб аталади.

3-пунктда декарт координаталарини ва қутб координаталарини алмаштириш формулалари ҳосил қилинди. Бу пунктда биз иккала система ҳам декарт (тўғри бурчакли) системаси, шу билан бирга бу системаларнинг бир исмли ўқлари параллел ва бир хил йўналган ҳамда ўқларнинг ҳар бирида бир хил масштаб бирлиги танланган деб фараз қиламиз. 15-расмда шундай Oxy ва O_1XY системалар тасвирланган. O_1XY система Ox ва Oy ўқларни параллел кўчириш билан ҳосил қилиниши мумкин. Нуқталарнинг Oxy системадаги координаталарини *эски координаталар*, O_1XY системадаги координаталарини *янги координаталар* деб аташга келишиб олайлик. x_0 ва y_0 янги O_1 координата бошининг эски системадаги координаталари бўлсин. Айтайлик, текисликда ихтиёрий танланган M нуқта x ва y эски координаталарга ва X, Y янги координаталарга эга бўлсин. M нуқтанинг эски координаталарини янги координаталар орқали ифодаловчи формулаларни келтириб чиқарамиз. Янги координаталар боши O_1 ни ва M нуқтани Ox ўққа ва M нуқтани шунингдек O_1X ўққа проекциялаб, мос равишда A, P ва N нуқталарни ҳосил қиламиз. Равшанки, $O_1N = AP$. Бироқ $O_1N = |X|$ ва $AP = |x - x_0|$, демак,

$$|X| = |x - x_0|,$$

яъни янги X абсцисса ва $x - x_0$ айирма модуль бўйича тенг. Бу катталикларнинг ишоралари ҳам бир хиллигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, N нуқта O_1 дан ўнгроқда жойлашган бўлса, у ҳолда P нуқта A нуқтадан ўнгроқда жойлашган бўлади ва иккала X ва $x - x_0$ катталик мусбат бўлади. Агар N нуқта O_1 дан чапроқда жойлашган бўлса, у ҳолда P нуқта A нуқтадан чапроқда жойлашган бўлади ва демак, X ва $x - x_0$ манфий. Иккала ҳолда ҳам $X = x - x_0$, бундан $x = X + x_0$. Эски y ордината учун формула ҳам шунга ўхшаш ҳосил қилинади. Шундай қилиб, биз координаталарни алмаштиришнинг (ўқларни параллел кўчириш)нинг қуйидаги формулаларини ҳосил қилдик:

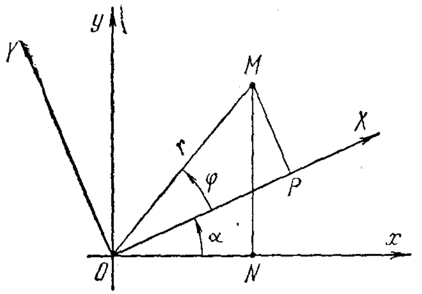


15-расм.

$$x = X + x_0, \quad y = X + y_0. \qquad (9)$$

Мисол. Oxy системада $M(2;-1)$ нуқта берилган. Агар ўқларни параллел кўчиришда янги координаталар боши эски системада -1 ва 3 координаталарга эга бўлса, шу M нуқтанинг янги X ва Y координаталарини топинг.

Ечилиши. (9) формулаларга кўра қуйидагини ҳосил қиламиз: $2 = X - 1$, $-1 = Y + 3$, бу ердан $X = 3$, $Y = -4$.



16-расм.

5. Координата ўқларини буриш Текисликда умумий координаталар боши O га эга бўлган иккита координата системаси берилган бўлсин: Oxy система (эски система) ва бу эски системани α бурчакка буриш билан ҳосил қилинган OXY система (янги система). Бу деган сўз $(\widehat{Ox, OX}) = L$ (16-расм) ва демак $(\widehat{Oy, OY}) = \alpha$. Текисликдаги ихтиёрий M нуқтанинг эски x ва y координаталарини унинг янги X ва Y координаталари орқали ифодаловчи формулаларни топамиз.

Қуйидагича қутб координаталари киритамиз: қутб ўқи Ox ўқ билан устма-уст тушадиган эски қутб координаталар системаси ва қутб ўқи OX ўқ билан устма-уст тушадиган янги қутб координаталар системаси. M нуқта янги қутб системасида φ қутб бурчагига ва r қутб радиусига эга бўлсин. Эски қутб системасида M нуқтанинг қутб бурчаги $\alpha + \varphi$ га тенг, қутб радиуси эса янги системадаги қутб радиусининг ўзидир.

Шу сабабли (6) формулаларга кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$x = r\cos(\alpha + \varphi), \quad y = r\sin(x + \varphi).$$

Икки бурчак йиғиндисининг косинуси ва синуси учун тригонометрик айниятлардан фойдаланиб, қуйидагини оламиз:

$$x = r(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi) = (r\cos\varphi)\cos\alpha - (r\sin\varphi)\sin\alpha;$$

$$y = r(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi) = (r\cos\varphi)\sin\alpha + (r\sin\varphi)\cos\alpha.$$

Бироқ $r\cos\varphi = X$ ва $r\sin\varphi = Y$, шу сабабли

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \quad y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \tag{10}$$

(10) формулалар *ўқларни буриш формулалари* дейилади.

Мисол. Ўқларни $\alpha = \pi/4$ бурчакка бурганда нуқтанинг x ва y эски координаталарини унинг янги X ва Y координаталари орқали ифодаланг.

Ечилиши. $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ бўлганлиги учун (10) формулаларга кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x = X\frac{\sqrt{2}}{2} - Y\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = X\frac{\sqrt{2}}{2} + Y\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ёки } x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y),$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y).$$

4-§. ФУНКЦИЯ ТУШУНЧАСИ

1. Ўзгарувчи катталик (миқдор) лар. Кундалик фаолиятимизда биз доимо ҳажм, зичлик, узунлик, вақт, босим, температура каби турли физик катталикларга дуч келамиз. Бу катталикларнинг ҳаммаси бир-биридан сифат жиҳатидан фарқ қилса-да, бироқ ушбу умумий хоссага эга: уларнинг ҳар бирини ўлчаш мумкин. Ўлчаш натижасида ҳақиқий сонлар ҳосил бўлиб, биз уларни тегишли катталикларнинг сон қийматлари деб атаймиз. Битта катталикнинг ўзини ўлчашда, агар уни айтайлик, вақтнинг турли моментларида ёки турли шароитларда ўлчанаётган бўлса, турли сон қийматлар ҳосил бўлиши мумкин. Масалан, автомобилнинг ҳаракат тезлиги йўлнинг турли участкаларида ёки вақтнинг турли моментларида турли сон қийматларга эга бўлади. Худди шунга ўхшаш, ёпиқ идишдаги бирор газ массасининг босими турли температураларда турли сон қийматларга эга бўлади. Бир сўз билан айтганда, катталикнинг сон қийматлари ўзгариши мумкин ва шу сабабли катталикнинг ўзи *ўзгарувчи* дейилади. Математикада катталикларнинг конкрет физик маъносини қарамасдан, ўзгарувчи катталикнинг (қисқача ўзгарувчининг) *қабул қилиши мумкин бўлган барча сон қийматлари тўплами берилган бўлса, ўзгарувчи катталик берилган* деб ҳисобланади. *Ўзгармас катталикни* (яъни қаралаётган шароитларда ўзининг сон қийматини ўзгартирмайдиган катталикни) ўзгарувчининг хусусий ҳоли деб қараш қабул қилинган, бунда унинг қийматлар тўплами битта сондан иборат бўлади. Ўзгарувчи катталикнинг сон қийматлари бирор ҳақиқий сонлар тўпламини ҳосил қилади. Унга сон ўқида бирор нуқталар тўплами мос келади. Бу иккала тўплам (қаралаётган ўзгарувчига боғлиқ равишда) жуда ҳам турлича бўлиши мумкин. Бироқ келгусида биз сегмент ва интервал деб аталадиган сонлар тўпламлари билан кўпроқ иш кўришимизга тўғри келади.

Интервал (ёки *очиқ оралиқ*) деб, $a < x < b$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган x сонлар тўпламига айтилади, бу ерда a ва b — ҳақиқий сонлар.

Сегмент (ёки *ёпиқ оралиқ*, ёки *кесма*) деб, $a \leqslant x \leqslant b$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган x сонлар тўпламига айтилади, бу ерда a ва b — ҳақиқий сонлар.

Интервал $]a, b[$ символ билан, сегмент эса $[a, b]$ символ билан белгиланади. Бунда a ва b сонлар тегишли интервал ёки сегментнинг охирлари деб аталади. Масалан, $]2,5[$ интервал $2 < x < 5$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган барча x сонлардан иборат. Хусусан, $x=3$, $x=4$ нуқталар $]2,5[$ интервалга тегишли, айни вақтда $x=2, x=5$, $x=8$ нуқталар бу интервалга тегишли эмас.

Кўпинча $a \leqslant x < b$ ёки $a < x \leqslant b$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган сонлар тўпламларини қарашга тўғри келади. Бу тўпламларнинг ҳар бири *ярим интервал* ёки *ярим сегмент* деб аталади ва мос равишда $[a, b[$ ёки $]a, b]$ билан белгиланади.

Бу киритилган терминларнинг ҳар бири фақат берилган сонлар тўпламигагина тааллуқли бўлиб қолмасдан, балки сон тўғри чизиғида шу тўпламга мос нуқталар тўпламига ҳам тегишлидир. Жумладан, $[a, b]$ сегментга геометрик нуқтаи назардан сон ўқида охирлари a ва b нуқталар бўлган кесма, $]a, b[$ интервалга эса a ва b охирлари чиқариб ташланган шу кесманинг ўзи мос келади. Агар $]a, b[$ интервалга унинг a ва b охирларини қўшиб қўйилса, $[a\, b]$ сегмент ҳосил бўлади.

Баъзи ҳолларда чексиз интерваллар ва ярим интерваллар қаралади. Уларни аниқлайдиган тенгсизликларни ва тегишли белгилашларни келтирамиз: $x > a$, белгиланиши: $]a, \infty[$; $x \geqslant a$, белгиланиши: $[a, +\infty[$; $x < b$, белгиланиши: $]-\infty, b[$; $x \leqslant b$, белгиланиши: $]-\infty, b]$.

Бутун сон ўқини ҳам $]-\infty, +\infty[$ символ билан белгиланадиган чексиз интервал деб қараш мумкин.

2. **Функция тушунчаси.** Иккита ўзгарувчи катталик қаралаётганда кўпинча улардан бирининг сон қийматлари иккинчисининг сон қийматларига боғлиқлигини кўриш мумкин. Масалан, квадратнинг юзи унинг томонининг узунлигига боғлиқ бўлади. Агар, квадрат томонининг узунлигини x билан, унинг юзини y билан белгиланса, бу боғланиш $y=x^2$ формула билан ифодаланади.

Бу ерда икки ҳолни қайд этиб ўтамиз.

1. x қабул қилиши мумкин бўлган сон қийматлар тўплами M бизга маълум — бу барча бутун сонлар тўпламидир. Ҳақиқатан ҳам, x квадрат томонининг узунлигини ифодалайди, шу туфайли у манфий ёки ноль бўлиши мумкин эмас. Иккинчи томондан, биз исталган квадратни қарашга ҳақлимиз ва демак, x исталган мусбат сон бўлиши мумкин.

2. Ҳар бир $x \in M$ сонга ягона $y=x^2$ сон мос келади. Y нинг бу барча сон қийматлари L тўпламни ҳосил қилади (бизнинг бу мисолимизда бу тўплам M тўплам билан устма-уст тушади). Шундай қилиб, бу ерда ҳар бир $x \in M$ га ягона $y \in L$ ни мос келтирадиган қоида берилган.

Яна бир мисол келтирайлик. Айтайлик, моддий нуқта A пунктдан v см/с ўзгармас тезлик билан тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган бўлсин ва T с дан сўнг B пунктга етиб борсин. Ҳаракатнинг t моментида нуқтанинг S ўтган йўлини $S=vt$ формула бўйича топиш мумкин.

Бу ерда яна шуни қайд этиб ўтамизки, биринчидан, t ўзгарувчи қабул қилиши мумкин бўлган қийматлардан иборат $M=$

$= [0, T]$ тўплам берилган, иккинчидан, ҳар бир $t \in M$ қийматга ягона $S = vt$ қиймат мос келади. S нинг бу барча қийматлари бирор L тўпламни ҳосил қилади.

Биз бу мисолда ҳам кўриб турибмизки, ҳар бир $t \in M$ қийматга ягона $S \in L$ ни мос келтирадиган қоида берилган.

Бу мисолларни умумлаштириб, қуйидаги таърифга келамиз.

Функция деб, бирор M тўпламнинг ҳар бир x элементига бошқа L тўпламнинг ягона y элементини мос келтирадиган қоидага айтилади. Бунда ҳар бир $y \in L$ элемент ҳеч бўлмаганда битта $x \in M$ элементга мос келади деб фараз қилинади.

M ва L тўпламларнинг элементлари на фақат сонлар, балки бошқача, умуман айтганда, ихтиёрий объектлар бўлиши мумкин. Масалан, M — берилган текисликдаги барча квадратлар тўплами, L эса бу квадратларга ички чизилган барча айланалар тўплами бўлсин. M тўпламга тегишли квадратларнинг ҳар бирига унга ички чизилган айланани мос қўямиз. Бу билан биз M тўпламнинг ҳар бир элементига L тўпламнинг ягона элементини мос қўядиган функцияни аниқлаймиз.

Бироқ келгусида, одатда, функциянинг берилишида M ва L тўпламларнинг тегишли x ва y элементлари сонлар деб фараз қилинади. Бунда x *эркли ўзгарувчи* (ёки аргумент), y *эрксиз ўзгарувчи*, M тўплам функциянинг аниқланиш соҳаси, L тўплам эса функциянинг *қийматлар тўплами* деб аталади. Кўпинча эрксиз ўзгарувчини *функция* (мослик қоидасининг ўзи каби) деб аталади.

Функцияни белгилаш учун $y = f(x)$ ёзувдан фойдаланамиз („y эф x га тенг" деб ўқилади). Бу ёзувда f ҳарфи $x \in M$ элементга ягона $y \in L$ элементни мос келтирадиган қоидани белгилайди.

Агар f функция $x_0 \in M$ сонга $y_0 \in L$ сонни мос келтирадиган бўлса, у ҳолда буни $y_0 = f(x_0)$ ёки $y_0 = y|_{x=x_0}$ кўринишда ёзилади. y_0 сон мазкур функциянинг $x = x_0$ даги *хусусий қиймати* деб аталади. Масалан, агар $y = x^2$ бўлса, у ҳолда $y|_{x=1/2} = (1/2)^2 = 1/4$, шунга ўхшаш, агар $f(x) = \sin x$ бўлса, у ҳолда $f(\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1$.

1-изоҳ. Агар аниқланиш соҳаси M ва қийматлар тўплами L бўлган $f(x)$ функция берилган бўлса, у ҳолда M тўпламнинг L тўпламга *акслантириши* берилган, деб айтилади.

2-изоҳ. Функцияларни белгилаш учун $x \to f(x)$ кўринишдаги ёзувдан ҳам фойдаланилади. Масалан, $y = x^2$ ёзув ўрнига $x \to x^2$ ёзув ишлатилади.

Функцияларни белгилаш учун f ҳарфидан ташқари бошқа ҳарфлар ҳам қўлланилади, масалан: $y = \varphi(x)$, $y = F(x)$, $y = y(x)$. Худди шунга ўхшаш, функция ва унинг аргументини фақат y ва x ҳарфлари билан белгилаш шарт эмас, уларни бошқа ҳарфлар билан белгилаш ҳам мумкин.

3. Функциянинг графиги. Кўпчилик ҳолларда функцияни график тасвирланса, яъни унинг графигини ясалса, функциянинг хоссалари тушунарли ва кўргазмали бўлади.

$y = f(x)$ *функциянинг графиги* деб, Oxy текисликнинг шундай барча нуқталари тўпламига айтиладики, бу нуқталарнинг ҳар бири учун x абсцисса аргументнинг қиймати, y ордината эса берилган функциянинг тегишли қиймати бўлади.

Функциянинг графигини, умуман айтганда, унинг айрим нуқталари бўйича ясаш мумкин. Масалан, $y = f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда берилган бўлсин. a ва b орасида аргументнинг бир қатор яқин қийматларини оламиз ва ушбу жадвалга x аргументнинг танланган қийматларини ва y функциянинг уларга мос қийматларини жойлаштирамиз:

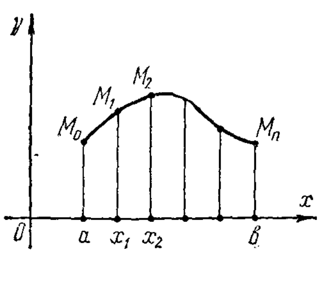
x	$x_0 = a$	x_1	x_2	. . .	$x_n = b$
y	y_0	y_1	y_2	. . .	y_n

Бу жадвал ёрдамида $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, ..., $M_n(x_n; y_n)$ нуқталарни ясаймиз ва уларни силлиқ чизиқ билан туташтирамиз. Бу эгри чизиқ* берилган функциянинг тақрибий графиги бўлади (17-расм).

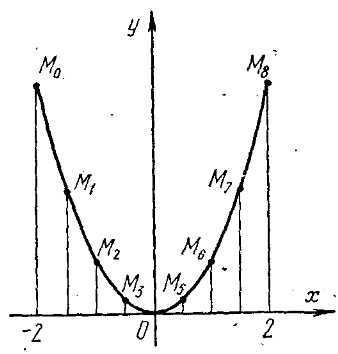
Мисол. $y = x^2$ формула билан берилган функциянинг графигини $-2 \leqslant x \leqslant 2$ шартда ясанг.

Ечилиши. Ушбу жадвални тузамиз:

x	-2	$-3/2$	-1	$1/2$	0	$1/2$	1	$3/2$	2
y	4	$9/4$	1	$1/4$	0	$1/4$	1	$9/4$	4



17-расм.



18-расм.

---

* Эгри чизиқнинг силлиқлиги дейилганда биз эгри чизиқ ҳеч қаерда узилмайди, деб тушунамиз, яъни абсциссаларнинг кичик ўзгаришларига эгри чизиқ ординаталарининг кичик ўзгаришлари мос келади. Функция графигининг силлиқлиги функциянинг узлуксизлиги тушунчаси билан узвий боғлиқ бўлиб, у V боб, 2-§ да батафсил қаралади.

ва $M_0(-2; 4)$, $M_1(-3/2; 9/4)$, $M_2(-1; 1)$. $M_3(-1/2; 1/4)$. $M_4(0; 0)$. $M_5(1/2; 1/4)$, $M_6(1; 1)$; $M_7(3/2; 9/4)$; $M_8(2; 4)$ нуқталарни ясаймиз. Бу нуқталарни силлиқ чизиқ билан туташтириб, изланаётган графикни ҳосил қиламиз (18-расм).

4. Функцияларнинг берилиш усуллари. Функциялар жуда турли-туман усуллар билан берилиши мумкин. Бироқ функциялар берилишининг қуйидаги учта усули энг кўп учраб туради: аналитик усул, жадвал усули ва график усул.

Функция аналитик усулда берилганда аналитик ифода ёрдамида, яъни функциянинг тегишли қийматини ҳосил қилиш учун аргументнинг қиймати устида қандай амаллар бажарилиши лозимлигини кўрсатадиган формула ёрдамида аниқланади.

2- ва 3-пунктларда биз формулалар ёрдамида берилган, яъни аналитик берилган функцияларга дуч келдик. Бунда 2-пунктда $y = x^2$ функция учун $]0; +\infty[$ аниқланиш соҳаси геометрик мулоҳазаларга асосланиб аниқланган, $s = vt$ функция учун эса $[0, T]$ аниқланиш соҳаси шартда кўрсатилган эди. 3-пунктда $y = x^2$ функциянинг $[-2, 2]$ аниқланиш соҳаси ҳам шартда берилган эди. Бироқ кўпинча функция фақат аналитик ифода (формула) ёрдамида, бирор бир қўшимча шартларсиз берилади. Бундай ҳолларда *функциянинг аниқланиш соҳаси сифатида аргументнинг барча шундай қийматлари тўпламини тушунамизки, бу қийматларда шу ифода маънога эга бўлади ва функциянинг ҳақиқий қийматларини беради.*

1-мисол. $y = \frac{1}{x-2}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечилиши. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси, равшанки, иккита чексиз интервалнинг бирлашмаси $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$ дан иборат, чунки $1/(x-2)$ ифода $x = 2$ да маънога эга эмас, x нинг қолган барча қийматларида эса аниқланган.

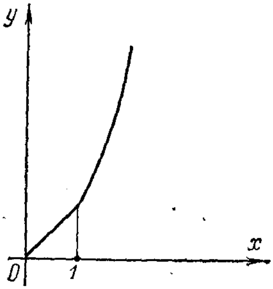
2-мисол $y = \sqrt{1-x^2} + \log_3 x$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечилиши. Мазкур функция иккита функциянинг йиғиндисидан иборат. Улардан биринчисининг аниқланиш соҳаси $1 - x^2 \geqslant 0$ бўладиган барча x ҳақиқий сонлар тўплами M_1 дан иборат, яъни бу тўплам $-1 \leqslant x \leqslant 1$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган барча x нуқталар тўпламидир. Шундай қилиб, $M_1 = [-1, 1]$. Иккинчи қўшилувчининг, яъни $\log_3 x$ функциянинг аниқланиш соҳаси $M_2 =]0, + +\infty[$ чексиз интервалдан иборат. Демак, $y = \sqrt{1-x^2} + \log_3 x$ функциянинг аниқланиш соҳаси барча $x \in M_1$, $x \in M_2$ нуқталардан иборат M тўпламдир. Бошқача айтганда, $M = M_1 \cap M_2 =]0, 1]$.

Энди ўқувчининг ўзи $y = x^2$ функция учун аниқланиш соҳаси бутун сон ўқи, $y = \sqrt{x}$ функция учун эса $[0, +\infty[$ чексиз интервал бўлишини кўриши осон

Ўқувчининг эътиборини функцияни ва бу функцияни берадиган формулани бир-бири билан айнанлаштириш мумкин эмаслигига қаратамиз. Битта формуланинг ўзи билан турли функцияларни бериш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, 2-пунктда биз аниқланиш соҳаси $]0, +\infty[$ бўлган $y = x^2$ функцияни қарадик. 3-пунктда эса аниқланиш соҳаси $[-2, 2]$ бўлган $y = x^2$ функция учун график ясадик. Ва ниҳоят биз ҳозиргина ҳеч бир қўшимча шартларсиз $y = x^2$ формула билан берилган функцияни қарадик. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси бутун сон ўқидан иборат. Бу учала функция ўзаро бир-биридан фарқ қилади, чунки улар турли аниқланиш соҳаларига эга. Лекин улар айни бир формула билан берилади.

Бунга тескари ҳол ҳам бўлиши мумкин бўлиб, **битта функциянинг ўзи** аниқланиш соҳасининг турли қисмларида турли формулалар билан берилади. Масалан, x нинг барча манфиймас қийматлари учун қуйидагича аниқланган $y=f(x)$ функцияни қарайлик $0\leqslant x\leqslant 1$ да $y=x$ ва $x>1$ да $y=x^2$, яъни



19- расм.

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ агар } 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ бўлса,}\\ x^2, \text{ агар } x>1 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

Бу функция иккита аналитик ифода билан аниқланган бўлиб, улар функция аниқланиш соҳасининг турли участкаларида амал қилади. Бу функциянинг графиги 19- расмда тасвирланган.

Функция жадвал усулида берилганда жадвал тузилиб, унда аргументнинг бир қатор қийматлари ва функциянинг тегишли қийматлари кўрсатилади. Логарифмик жадваллар, тригонометрик функцияларнинг қийматлари жадваллари ва бошқа кўп жадваллар яхши маълум. Кўпинча функциянинг бевосита тажрибада олинган қийматлари жадвали билан иш кўришга тўғри келади.

Қуйидаги жадвалда миснинг турли t температуралардаги (градус ҳисобида) ρ солиштирма қаршилигининг (ом · см ҳисобида) тажрибада олинган қийматлари келтирилган:

t	10	20	30	40	50
ρ	$1,8\cdot 10^{-6}$	$1,8\cdot 10^{-6}$	$1,9\cdot 10^{-6}$	$2,0\cdot 10^{-6}$	$2,0\cdot 10^{-6}$

t	60	70	80	90	100
ρ	$2,1\cdot 10^{-6}$	$2,2\cdot 10^{-6}$	$2,2\cdot 10^{-6}$	$2,3\cdot 10^{-6}$	$2,4\cdot 10^{-6}$

Функциянинг **график усулда** берилишида унинг графиги берилади ва бунда функциянинг аргументнинг у ёки бу қийматларига мос қийматлари бевосита шу графикдан топилади. Бундай графиклар кўпчилик ҳолларда ўзи ёзар асбоблар ёрдамида чизилади.

5. Асосий элементар функциялар ва уларнинг графиклари. Аналитик берилган функциялар орасида бизнинг курсимизда элементар функциялар асосий роль ўйнайди. Энг аввало *асосий элементар функцияларни* кўриб чиқамиз. Қуйида келтириладиган функциялар ана шундай аталади:

1. *Ўзгармас* (константа) $y=C$, бу ерда C—ҳақиқий сон.

2. $y=x^n$ *даражали функция*, бу ерда n—нолдан фарқли ҳақиқий сон.

3. $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$ *кўрсаткичли функция.*

4. $y=\log_a x$ $(a>0; a\neq 1)$ *логарифмик функция.*

5. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ *тригонометрик функциялар.*

6. $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$ *тескари тригонометрик функциялар.*

Асосий элементар функцияларнинг аниқланиш соҳаларини ва уларнинг графикларини кўриб чиқамиз.

1. Ўзгармас—бу аргументнинг барча қийматларида бир хил қиймат қабул қиладиган функциядир. $y=C$ функциянинг графиги абсциссалар ўқига параллел тўғри чизиқдан иборат.

2. Даражали функция аниқланиш соҳасининг кўриниши n кўрсаткичга боғлиқ. Агар n турли натурал қийматларни қабул қиладиган бўлса, у ҳолда $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^4$ ва ҳоказо функциялар қатори ҳосил бўлиб, уларнинг ҳар бирининг аниқланиш соҳаси—бутун сон ўқидир. Баъзи тоқ n лар учун даражали функцияларнинг графиклари 20-расмда, жуфт n лар учун эса 21-расмда келтирилган.

Қолган даражали функциялардан ҳозир фақат қуйидаги иккитасини қараймиз:

$$y=1/x \ (n=-1) \text{ ва } y=\sqrt{x}\ (n=1/2).$$

Улардан биринчиси $y=1/x$ функция $x=0$ нуқтадан бошқа бутун сон ўқида аниқланган. Бу функциянинг графиги 22-расмда келтирилган.

Иккинчи $y=\sqrt{x}$ функция (илдизнинг арифметик қиймати тушунилади) $x\geqslant 0$ лар учун аниқланган ва 23-расмда тасвирланган графикка эга.

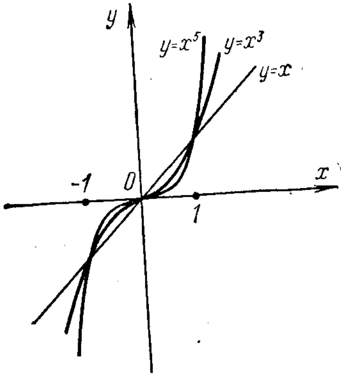
3. $y=a^x$ кўрсаткичли функция x нинг барча қийматларида аниқланган. 24-расмда $a>1$ учун ва $0<a<1$ учун кўрсат ичли функцияларнинг графиклари келтирилган.

4. $y=\log_a x$ функциянинг аниқланиш соҳаси $]0, +\infty[$ чексиз интервалдир. Графиклар ($a>1$ учун ва $0<a<1$ учун) 25-расмда тасвирланган.

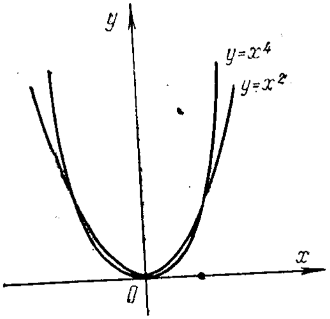
5. $y=\sin x$ ва $y=\cos x$ тригонометрик функцияларнинг графиклари 26-расмда тасвирланган. Уларнинг ҳар бири бутун сон ўқида аниқланган. $y=\operatorname{tg} x$ функция $(2k+1)\pi/2$ кўринишдаги нуқталардан ташқари бутун сон ўқида, $y=\operatorname{ctg} x$ функция эса $x=k\pi$ (k—исталган бутун сон) нуқталардан ташқари бутун сон ўқида аниқланган. Бу функцияларниг графиклари 27-расмда тасвирланган.

6. Тескари тригонометрик функциялар ва уларнинг графиклари V боб, 2-§, 5-пунктда қаралади.

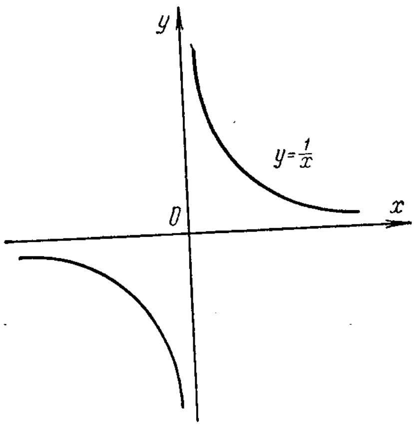
6. Мураккаб функциялар. Элементар функциялар. Ушбу иккита функция берилган бўлсин: аниқланиш соҳаси M ва қийматлари соҳаси L бўлган $u=\varphi(x)$ функция ва аниқланиш соҳаси



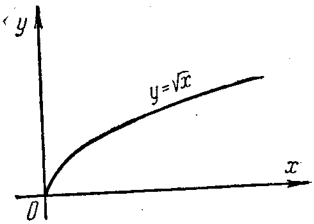
20- расм.



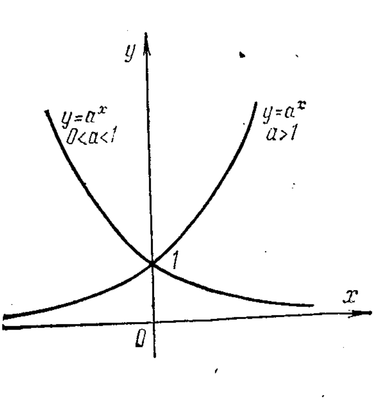
21- расм.



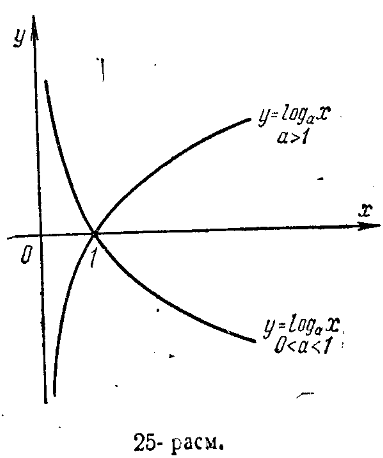
22- расм.



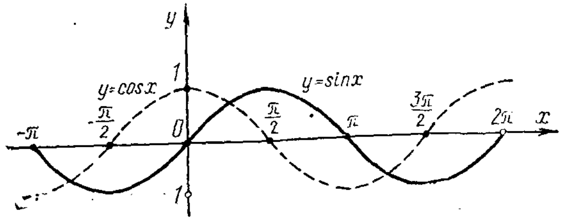
23- расм.



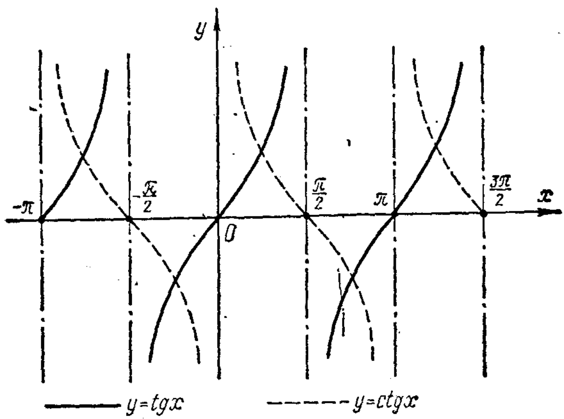
24- расм.



25- расм.



26- расм.



27- расм.

L бўлган $y=f(u)$ функция. У ҳолда ҳар бир $x \in M$ га $u=\varphi(x)$ қоида бўйича ягона y қиймат мос келади, бунга эса $y=f(u)$ қоида бўйича ягона y қиймат мос келади. Шу билан бирга ҳар бир $x \in M$ га ягона y қиймат мос келади, яъни M тўпламда x нинг $y=f[\varphi(x)]$ функцияси аниқланади, у *мураккаб функция* (ёки *функциянинг функцияси*) деб аталади. u ўзгарувчи мураккаб функциянинг *оралиқ аргументи* деб аталади.

Масалан, агар $y=\lg u$ ва $u=\sin x$ бўлса, у ҳолда y мураккаб функциядир: $y=\lg \sin x$.

$y=\lg \sin x$ мураккаб функция x нинг фақат $u=\sin > 0$ бўладиган қийматларида аниқлангандир, чунки логарифмик функция ўз аргументининг мусбат қийматларидагина аниқлангандир.

Мураккаб функция тушунчасидан фойдаланиб, элементар функциянинг таърифини бериш мумкин.

Элементар функция деб, асосий элементар функциялардан тўрт арифметик амал (қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш) ни ва функциядан функция олиш амалини кетма-кет чекли сонда қўлланиш ёрдамида тузиладиган битта аналитик ифода билан бериш мумкин бўлган функцияга айтилади.

Асосий элементар функциялар ҳам элементар функциялар синфига киритилади. Биз мазкур курсимизда асосан айни шу элементар функцияларни қараймиз.

Элементар функцияларга қуйидаги функциялар мисол бўлади:

$$y = \lg(1 + \cos^2 x),\ y = 2^{\cos \lg x}, \quad y = \frac{x^3 + 3x^2 - x + 5}{x^2 - 3x + 20},$$

$$y = \frac{(x+1)^{1/2} - \left(2 - \frac{1}{x^2}\right)^{1/3}}{(x^3+1)^{2/5} - x^3}.$$

Баъзи ноэлементар функцияларни китобхон, масалан VII боб, 6-§, 2- пунктда учратади.

7. Бутун ва каср-рационал функциялар. Бу пунктда биз элементар функцияларнинг баъзи муҳим хусусий ҳолларини кўриб чиқамиз.

Бутун рационал функция (ёки *кўпҳад*) деб,

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

кўринишдаги функцияга айтилади, бу ердан n — натурал сон бўлиб, кўпҳаднинг *даражаси* дейилади; $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ ҳақиқий сонлар бўлиб, кўпҳаднинг *коэффициентлари* деб аталади.

Кўпҳад бутун сон ўқида аниқланган функциядир.

Бутун рационал функцияларга мисоллар:

$$y = 2x^2 - 1,\ y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1,\ y = 2x^3.$$

Биринчи даражали $y = a_0 x + a_1$ кўпҳад *чизиқли функция* деб аталади.

Эслатма. $y = C$ ўзгармас функцияни нолинчи даражали кўпҳад деб қараш мумкин: $y = Cx^0$.

Каср-рационал функция (ёки *рационал каср*) деб, иккита кўпҳаднинг нисбатига айтилади: $P(x)/Q(x)$.

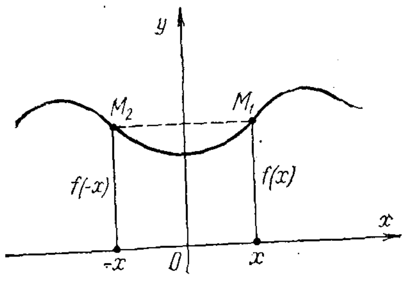
Бутун рационал функция каср рационал функциянинг $Q(x)$ ўзгармас бўлгандаги хусусий ҳолидир $P(x)/Q(x)$ каср-рационал функция x нинг $Q(x)$ махраж нолга айланадиган қийматларидан бошқа барча қийматларида аниқланган.

Каср-рационал функцияларга мисоллар:

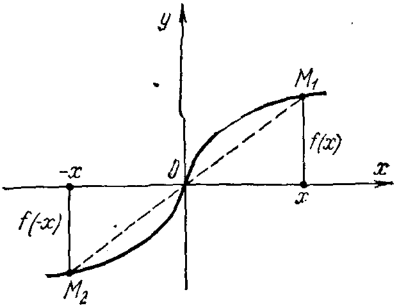
$$y = \frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 + 2x^2 - 5};\quad y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1};\quad y = \frac{x^3 + 5x^2 + 3}{x + 7};\quad y = \frac{1}{x}.$$

8. Жуфт ва тоқ функциялар. Даврий функциялар. Функцияларни текширишда уларнинг баъзи хоссалари муҳим роль ўйнайди. Мазкур пунктда биз баъзи элементар функцияларга хос бўлган жуфтлик, тоқлик ва даврийлик хоссаларини кўриб чиқамиз.

$y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли исталган x учун $f(-x) = f(x)$ бўлса, бу функция *жуфт функция* дейилади.



28- расм.



29- расм.

Масалан, $y=x^2$ ва $y=\cos x$ функциялар жуфтдир, чунки $(-x)^2=x^2$ ва $\cos(-x)=\cos x$. Исталган жуфт даражали функция, яъни $y=x^{2k}$ (k—исталган натурал сон) кўринишдаги функция ҳам жуфтдир.

Жуфт функциянинг таърифидан бу функция графигининг иккита $M_1[x; f(x)]$ ва $M_2[-x; f(-x)]$ нуқтаси ординаталар ўқига нисбатан симметриклиги келиб чиқади (28- расм). x нинг қиймати функциянинг аниқланиш соҳасида ихтиёрий танланиши мумкин бўлганлиги учун *жуфт функциянинг графиги Оу ўққа нисбатан симметрик жойлашган* (21-ва 26-расмлардаги $y=x^2$ ва $y=\cos x$ функцияларнинг графикларига қаранг).

$y=f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли исталган x учун $f(-x)=-f(x)$ бўлса, бу функция *тоқ функция* деб аталади.

Масалан, $y=x^3$ ва $y=\sin x$ функциялар тоқдир, чунки $(x)^3=-x^3$, $\sin(-x)=-\sin x$. Исталган тоқ кўрсаткичли $y=x^{2k-1}$ даражали функция ҳам тоқдир.

Тоқ функциянинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик жойлашган (29-расм).

Жуфт функциянинг ҳам, тоқ функциянинг ҳам аниқланиш соҳаси, равшанки, координаталар бошига нисбатан симметрикдир.

Бироқ шуни ҳам кўзда тутиш керакки, ҳар қандай функция ҳам жуфт ёки тоқ бўлавермайди. Масалан, $y=x^2-x+1$, $y=x+\cos x$, $y=2^x$, $y=\lg x$ функцияларнинг ҳар бири жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас.

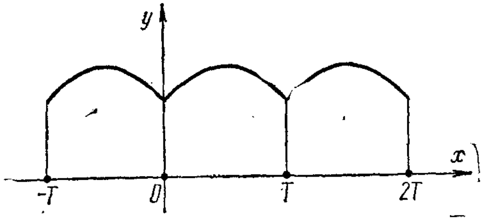
Математиканинг татбиқларида даврий функциялар муҳим роль ўйнайди.

Агар $y=f(x)$ функция учун шундай $T\neq 0$ сон мавжуд бўлсаки, унинг аниқланиш соҳасида $f(x\pm T)=f(x)$ бўлса, бу функция *даврий функция* деб аталади.

Бунда $f(x\pm T)=f(x)$ шартни қаноатлантирадиган T мусбат сонларнинг энг кичиги $y=f(x)$ функциянинг даври* деб аталади.

* Баъзан $f(x)$ функциянинг даври деб, $f(x)\pm C)=f(x)$ шартни қаноатлантирадиган исталган C мусбат сонга айтилади.

Тригонометрия курсидан маълумки, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$ ва $y=\operatorname{ctg} x$ функциялар даврийдир. Уларнинг биринчи иккитаси учун давр 2π га тенг, сўнгги иккитаси эса π даврга эга.



30- расм.

T даврли даврий функцияни текшириш ва унинг графигини ясашда бу функциянинг T узунликдаги бирор сегментдаги, масалан, $[0; T]$ сегментдаги қийматларини билиш кифоядир (30- расм). Бу функциянинг қолган қийматларидан исталганини унинг даврийлик хоссасидан фойдаланиб ҳосил қилиш мумкин. Масалан, $y=\sin x$ функциянинг $[0, 2\pi]$ сегментдаги қийматларини билган ҳолда бу функциянинг исталган x даги қийматини ҳосил қилиш осон (26-расмдаги $y=\sin x$ функция графигига қаранг).

5-§. ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАСИ

1. Чизиқни тенглама ёрдамида аниқлаш. Қуйидаги формула (тенглама) билан берилган функцияни қараймиз:

$$y=x^2. \tag{11}$$

Бу функцияга ва демак, (11) тенгламага ҳам текисликда тўла аниқланган чизиқ мос келади ва у мазкур функциянинг графиги бўлади (18-расмга қаранг). Бу функция графигининг таърифидан бу чизиқ Oxy текисликнинг координаталари (11) тенгламани қаноатлантирадиган нуқталаридан ва фақат шу нуқталаридан ташкил топганлиги келиб чиқади.

Энди

$$y=f(x) \tag{12}$$

бўлсин. Бу функциянинг графиги бўлган чизиқ Oxy текисликнинг координаталари (12) тенгламани қаноатлантирадиган нуқталаридан ва фақат шу нуқталаридан ташкил топган. Бу деган сўз, агар $M(x;y)$ нуқта шу айтилган чизиқда ётса, унинг координаталари (12) тенгламани қаноатлантиради, демакдир. Агар нуқта бу чизиқда ётмаса, унинг координаталари (12) тенгламани қаноатлантирмайди.

(12) тенглама y га нисбатан ечилган. x ва y ни ўз ичига олган, лекин y га нисбатан ечилмаган тенгламани, масалан,

$$x^2+y^2-4=0 \tag{13}$$

тенгламани олайлик. Бу тенгламага ҳам Oxy текисликда чизиқ, чунончи, маркази координаталар бошида ва радиуси 2 га тенг айлана мос келишини кўрсатамиз. Тенгламани

$$x^2+y^2=4 \tag{14}$$

кўринишда ёзамиз. Унинг чап томонидаги x^2+y^2 ифода координаталар бошидан $M(x; y)$ нуқтагача бўлган масофанинг квадратига тенг [(5) формулага қаранг)]. (14) тенгликдан бу масофанинг квадрати 4 га тенглиги келиб чиқади.

Бу деган сўз, координаталари (14) тенгламани ва демак, (13) тенгламани қаноатлантирадиган исталган $M(x; y)$ нуқта координаталар бошидан 2 га тенг масофада ётади.

Бундай барча нуқталар тўплами маркази координаталар бошида ва радиуси 2 бўлган айланани беради. Бу айлана (13) тенгламага мос чизиқнинг худди ўзидир. Унинг исталган нуқтасининг координаталари (13) тенгламани қаноатлантириши равшан. Агар $M(x; y)$ нуқта биз топган айланада ётмаса, у ҳолда унинг координаталар бошидан бўлган масофаси 4 дан ё катта, ё кичик бўлади, бу эса бундай нуқтанинг координаталари (13) тенгламани қаноатлантирмаслигини билдиради.

Энди умумий ҳолда

$$F(x, y)=0 \tag{15}$$

тенглама берилган бўлсин, унинг чап томонида x ва y ни ўз ичига олган ифода турибди.

(15) тенглама билан берилган *чизиқ* деб, Oxy текисликнинг координаталари бу тенгламани қаноатлантирадиган барча нуқталари тўпламига айтилади.

Бу деган сўз, агар L чизиқ $F(x; y)$ тенглама билан аниқланган бўлса, у ҳолда L нинг исталган нуқтасининг координаталари бу тенгламани қаноатлантиради. Oxy текисликнинг L дан ташқарида ётадиган ҳар қандай нуқтасининг координаталари бу тенгламани қаноатлантирмайди.

(15) тенглама L чизиқнинг тенгламаси деб аталади.

Изоҳ. Исталган $F(x; y)=0$ тенглама қандайдир чизиқни аниқлайди деб ўйламаслик керак. Масалан, $x^2+y^2+1=0$ тенглама хеч қандай чизиқни аниқламайди. Ҳақиқатан, бу тенгламанинг чап томони x ва y нинг исталган ҳақиқий қийматларида мусбат, ўнг томони эса нолга тенг, демак, бу тенгламани Oxy текисликнинг хеч қандай нуқтасининг координаталари қаноатлантира олмайди.

Чизиқ текисликда фақат декарт координаталарини ўз ичига олган тенглама билан аниқланиб қолмасдан, балки қутб координаталаридаги тенглама билан ҳам аниқланиши мумкин. Қутб координаталаридаги $F(\varphi, r)=0$ тенглама билан аниқланадиган чизиқ деб, текисликнинг қутб координаталари бу тенгламани қаноатлантирадиган барча нуқталари тўпламига айтилади.

1-мисол. $r = a\varphi$ Архимед* спиралини $a=2$ да ясанг, бунда φ ва r исталган ҳақиқий қийматлар қабул қилиши мумкин, деб фараз қилинг.

Ечилиши. φ қутб бурчагининг баъзи қийматлари ва r қутб радиусининг уларга мос қийматлари жадвалини тузамиз:

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π	$9\pi/4$	$5\pi/2$
r	0	1,57	3,14	4,71	6,28	7,85	9,42	10,99	12,56	14,13	15,70

φ	$11\pi/4$	3π	$13\pi/4$	$7\pi/2$	$15\pi/4$	4π	...	$-\pi/4$	$-\pi/2$	$-3\pi/4$	$-\pi$	...
r	17,27	18,84	20,41	21,98	23,55	25,12	...	$-1,57$	$-3,14$	$-4,71$	$-6,28$	...

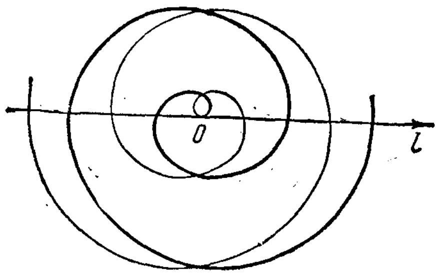
Қутб координаталари системасида $M_0(0;\ 0)$ нуқтани ясаймиз, у равшанки, қутб билан устма-уст тушади; кейин қутб ўқига $\varphi_1 = \pi/4$ бурчак остида l_1 ўқни ўтказиб, бу ўқда $r_1 = \pi/2 \approx 1,6$ мусбат координатали M_1 нуқтани ясаймиз, сўнг шунга ўхшаш қутб бурчагининг ва қутб радиусининг қийматлари мусбат бўлган M_2, M_3, ... нуқталарни ясаймиз (бу нуқталарнинг ўқлари 31-расмда кўрсатилмаган). M_0, M_1, M_2, ... нуқталарни ўзаро туташтириб, эгри чизиқнинг битта тармоғини ҳосил қиламиз, у 31-расмда қалин чизиқ билан белгиланган. φ бурчак 0 дан $+\infty$ гача ўзгарганда эгри чизиқнинг бу тармоғи чексиз кўп сондаги ўрамлардан иборат бўлади.

Сўнгра қутб ўқига $\overline{\varphi_1} = -\pi/4$ бурчак остида $\overline{l_1}$ ўқ ўтказамиз ва бу ўқда $\overline{r_1} = -\pi/2 \approx -1,6$ манфий координатали $\overline{M_1}$ нуқтани ясаймиз; $\overline{M_2}$, $\overline{M_3}$, ... нуқталар ҳам шунга ўхшаш ясалади (бу нуқталар учун ўқлар 31-расмда кўрсатилмаган). M_0, $\overline{M_1}$, $\overline{M_2}$, ... нуқталарни туташтириб эгри чизиқнинг иккинчи тармоғини ҳосил қиламиз, бу тармоқ ҳам φ бурчак 0 дан $-\infty$ гача ўзгаришида чексиз кўп сондаги ўрамлардан иборат бўлади; 31-расмда у ингичка чизиқ билан белгиланган. Шундай қилиб, изланаётган эгри чизиқ иккита тармоқдан иборат.

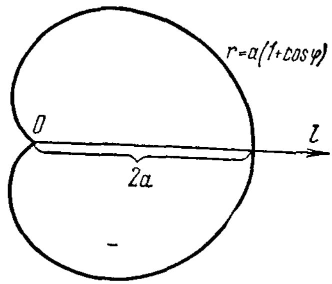
2-мисол. 32-расмда кардиоида тасвирланган бўлиб, унинг тенгламаси $r = a(1 + \cos\varphi)$ кўринишга эга.

2. Чизиқнинг тенгламасини унинг геометрик хоссаларига кўра топиш. Юқорида қаралган мисолларда биз тенгламага асосланиб бу тенглама билан аниқланадиган чизиқни топдик. Бунга тескари масала ҳам қўйилиши мумкин. Текисликдаги L чизиқ шундай характерли хоссага эга бўлсинки, бу хоссага шу чизиқнинг ҳар бир нуқтаси эга бўлсин ва текисликнинг L чизиқдан ташқарида ётадиган нуқталари бу хоссага эга бўлмасин. Берилган координаталар системасида бу чизиқни аниқлайдиган тенгламани топиш талаб қилинади, яъни шундай тенгламани топиш керакки, уни L чизиқнинг исталган нуқтасининг координаталари қаноатлантирсин ва текисликнинг L дан ташқарида ётадиган нуқ-

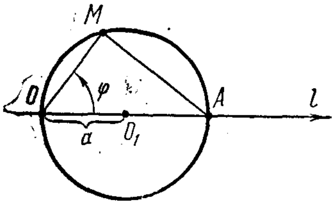
* Архимед (эрамиздан аввал III аср) — улуғ грек математиги ва механиги.



31- расм.



32- расм.



33- расм.

тасининг координаталари қаноатлантирмасин. Бу тенглама мазкур L чизиқнинг тенгламаси деб аталишини биз биламиз. L чизиқнинг исталган нуқтасининг координаталари бу чизиқнинг *ўзгарувчи координаталари* деб аталади. Улар танланган координаталар системасига боғлиқ бўлиб, фақат декарт координаталари бўлибгина қолмасдан, балки, масалан, қутб координаталари бўлиши ҳам мумкин. Чизиқ тенгламасининг кўриниши координаталар системасининг танланишига ҳам боғлиқ.

Баъзи чизиқларнинг тенгламаларини декарт ёки қутб координаталарида келтириб чиқаришга доир мисоллар кўрамиз.

1- мисол. Маркази $O_1(a;\ b)$ нуқтада ва радиуси R бўлган айлананинг тенгламасини декарт координаталар системасида топинг.

Е ч и л и ш и. Айлана текисликнинг берилган нуқтаси — айлана марказидан тенг узоқлашган барча нуқталари тўплами сифатида аниқланади. Айлананинг таърифидан келиб чиқадики, айлананинг ўзгарувчи координаталари x ва y бўлган исталган $M(x,\ y)$ нуқтаси айлана маркази $O_1(a;\ b)$ дан R масофада жойлашган. (4) формуладан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R,$$

бу ердан

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \tag{*}$$

(*) тенглама айлананинг изланаётган тенгламасидир. Уни, равшанки, берилган айлананинг исталган нуқтасининг координаталари қаноатлантиради ва Oxy текисликнинг бу айланада ётмайдиган ҳеч бир нуқтасининг координаталари қаноатлантирмайди.

Хусусий ҳолда, айлана маркази координаталар бошида ётганда $a=b=0$ бўлиб, (*) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$x^2+y^2=R^2. \tag{**}$$

Бундан буён, айлананинг радиуси дейилганда биз айлананинг бирор нуқтасини унинг маркази билан туташтирадиган кесмани ҳам, унинг узунлигини ҳам тушунаверамиз.

2- мисол. Қутб координаталари системасида маркази $O_1(0; a)$ нуқтада ва радиуси a га тенг бўлган айлананинг тенгламасини тузинг (33- расм).

Ечилиши. Шартга кўра айлананинг O_1 маркази $\varphi = 0$ қутб бурчаги ва изланаётган айлананинг радиуси a га тенг бўлган r қутб радиусига эга. Демак, бу айлана O қутбдан ўтади ва унинг диаметрларидан бири қутб ўқида ётади. A орқали бу диаметрнинг қутб ўқи билан кесишадиган иккинчи нуқтасини белгилаймиз. A нуқта учун $\varphi = 0$ ва $r = 2a$ га эгамиз. $M(\varphi; r)$ изланаётган айлананинг исталган нуқтаси бўлсин. Тўғри бурчакли OAM учбурчакдан қуйидагини топамиз: $r = OA \cdot \cos\varphi$ ёки $r = 2a\cos\varphi$.

Бу тенгламани мазкур айлананинг исталган нуқтасининг қутб координаталари қаноатлантиради. Кўриш осонки, агар нуқта айланада ётмаса, унинг координаталари ҳосил қилинган тенгламани қаноатлантирмайди, демак, бу тенглама изланаётган тенгламадир.

II БОБ

ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИ ВА ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§. ДЕТЕРМИНАНТЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1. Иккинчи тартибли детерминантлар ва уларнинг хоссалари. Тўртта сондан иборат қуйидаги жадвал (*матрица* деб аталади) берилган бўлсин:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Матрица иккита сатр ва иккита устунга эга. Бу матрицани тузадиган сонлар иккита индексли ҳарф билан белгиланган. Биринчи индекс мазкур сон турган сатр номерини, иккинчи индекс эса устун номерини билдиради. Масалан, a_{12}—биринчи сатр ва иккинчи устунда турган сонни билдиради, a_{21}—иккинчи сатр ва биринчи устунда турган сонни билдиради. a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} сонларни матрицанинг *элементлари* деб атаймиз.

Берилган матрицага мос *иккинчи тартибли детерминант* деб, $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ сонга айтилади.

Детерминант

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

символ билан белгиланади. Шундай қилиб,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (2)$$

a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} сонлар *детерминантнинг элементлари* деб аталади.

Мисол. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4)-5\cdot 3 = -23.$

Иккинчи тартибли детерминантнинг хоссаларини келтирамиз.

1°. *Агар детерминант сатрларининг ўринларини мос устунлар билан алмаштирилса, унинг қиймати ўзгармайди, яъни*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

2°. *Икки сатрнинг (ёки устуннинг) ўрнини ўзгартирилган-*

да детерминантнинг ишораси қарама-қарши ишорага ўзгаради, абсолют қиймати эса ўзгармайди, яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

3⁰. *Иккита бир хил сатрли (ёки устунли) детерминант нолга тенг.*

4⁰. *Сатрдаги (ёки устундаги) барча элементларнинг умумий кўпайтувчисини детерминант белгисидан чиқариш мумкин:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

5⁰. *Агар бирор сатрнинг (устуннинг) барча элементлари нолга тенг бўлса, у ҳолда детерминант нолга тенг.*

6⁰. *Агар детерминантнинг бирор сатри (ёки устуни) элементларига бошқа сатрнинг (ёки устуннинг) бир хил сонга кўпайтирилган мос элементларини қўшилса, детерминант ўз қийматини ўзгартирмайди, яъни*

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Иккинчи тартибли детерминантнинг бу барча хоссалари детерминантларни (2) формула бўйича ҳисоблаш қоидасига асосланиб оддий ҳисоблаш билан исботланади.

Масалан, 6⁰-хоссани исботлайлик. Бунинг учун (6) тенгликнинг чап томонида турган детерминантни ҳисоблаймиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} a_{11} \\ a_{21}+\lambda a_{22} a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+\lambda a_{12})a_{22} - (a_{21}+\lambda a_{22})a_{12} =$$

$$= a_{11}a_{22} + \lambda a_{12}a_{22} - a_{21}a_{12} - \lambda a_{22}a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

2. Учинчи тартибли детерминант. Тўққизта сондан иборат ушбу жадвални (матрицани) қараймиз:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Бу матрицага мос *учинчи тартибли детерминант* деб, қуйидагича ҳосил қилинадиган сонга айтилади:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Учинчи тартибли детерминант:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

символи билан белгиланади. $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ сонлар унинг элементлари деб аталади. Учинчи тартибли детерминант учта сатр ва учта устунга эга. Шундай қилиб,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

(8) формула *учинчи тартибли детерминантнинг биринчи сатр элементлари бўйича ёйилмасини* беради ва учинчи тартибли детерминантни ҳисоблашни иккинчи тартибли детерминантларни ҳисоблашга келтиради.

Учинчи тартибли детерминантнинг берилган элементига мос *минор* деб, бу детерминантда шу берилган элемент жойлашган сатр ва устунни ўчиришдан ҳосил бўлган иккинчи тартибли детерминантга айтамиз. Минорларни иккита индексли M бош ҳарфи билан белгилаймиз. Масалан. a_{12} элементга мос M_{12} минор $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ детерминантдир. У учинчи тартибли детерминантдан биринчи сатр ва иккинчи устунни чизиб ташлаш билан ҳосил бўлади.

(8) формуладан кўриниб турибдики, учинчи тартибли детерминант биринчи сатр элементларининг уларга мос минорларга кўпайтмаларининг алгебраик йиғиндисига тенг, бунда a_{12} элементга мос минор минус ишора билан олинади.

Иккинчи тартибли детерминантларни ҳисоблаш қоидасини қўлланиб, (8) тенгликни қайтадан бундай ёзамиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + \\ &+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - \\ &- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}. \end{aligned} \quad (9)$$

Мисол.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 18 - 3 \cdot (-41) - 4 \cdot (-48) = 351.$$

Иккинчи тартибли детерминантларнинг барча хоссалари (1-пунктга қаранг) учинчи тартибли детерминантлар учун ҳам ўринли бўлиб қолади. Учинчи тартибли детерминантлар учун бу хоссаларнинг исботи шу хоссаларнинг иккинчи тартибли детерминантлар учун исботидан ҳеч бир фарқ қилмайди ва учинчи детерминантларни (8) формула бўйича ҳисоблашга асосланади. Китобхонга бу хоссаларни мустақил исботлашни тавсия қиламиз.

Учинчи тартибли детерминантнинг биринчи сатр элементлари бўйича ёйилмасини берадиган (8) формулага ўхшаш, детерминантнинг исталган сатри ёки устуни элементлари бўйича ёйилмасини ҳосил қилиш мумкин.

Масалан, детерминантнинг иккинчи сатр элементлари бўйича ёйилмасини қуйидагича ҳосил қилиш мумкин. 2^0-хоссага (1-пунктга қаранг) асосланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Ўнг томонда турган детерминантни биринчи сатр элементлари бўйича ёямиз. Детерминантни ҳисоблаш қоидасига асосан:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

(10) тенгликни эътиборга олсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Бироқ $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ детерминантлар берилган детерминантда a_{11}, a_{22}, a_{23} элементларнинг минорларидир. (11) формула берилган детерминантнинг иккинчи сатри бўйича ёйилмасини беради.

Биринчи сатрнинг ўрнини учинчи сатр билан алмаштириб,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{12}$$

эканлигини юқоридагига ўхшаш исботлаймиз. (12) формула детерминантнинг учинчи сатр элементлари бўйича ёйилмасини беради.

Мазкур учинчи тартибли детерминантни Δ билан белгилаб, (8), (11) ва (12) формулаларни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\begin{aligned}\Delta &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13},\\ \Delta &= -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23},\\ \Delta &= a_{31}M_{31} - a_{32}M_{32} + a_{33}M_{33}.\end{aligned} \tag{13}$$

Бунга ўхшаш муносабатлар детерминантни устунлар элементлари бўйича ёйилганда ҳам ҳосил бўлишини исботлаш мумкин:

$$\begin{aligned}\Delta &= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31},\\ \Delta &= -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32},\\ \Delta &= a_{13}M_{13} - a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33}.\end{aligned} \tag{14}$$

Яна бир тушунча киритамиз.

Детерминант элементининг *алгебраик тўлдирувчиси* деб, бу элемент турган сатр ва устун номерлари йиғиндиси жуфт бўлса, плюс ишора билан, бу йиғинди тоқ бўлса, минус ишора билан олинадиган минорга айтилади.

a_{ik} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси A_{ik} билан белгиланади, бу ерда i ва k — берилган элемент турадиган сатр ва устун номерларидир.

Элементнинг алгебраик тўлдирувчиси билан унинг минори орасидаги боғланиш қуйидаги тенглик билан ифодаланади:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}M_{ik}. \tag{15}$$

Масалан, $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$, $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12}$, $A_{13} = M_{13}$ ва ҳоказо.

Энди детерминантларни ҳисоблаш учун қўлланадиган (13) ва (14) формулаларни қуйидагича ёзиш мумкинлигини кўриш осон. Масалан, детерминантларни сатрлар элементлари бўйича ёйиш учун

$$\begin{aligned}\Delta &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},\\ \Delta &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23},\\ \Delta &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}\end{aligned} \tag{16}$$

ва детерминантларни устунлар элементлари бўйича ёйиш учун

$$\begin{aligned}\Delta &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31},\\ \Delta &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32},\\ \Delta &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.\end{aligned} \tag{17}$$

Бу натижани қуйидагича таърифлаш мумкин. *Учинчи тартибли детерминант унинг бирор сатрининг (ёки устунининг) элементларини уларнинг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.*

Учинчи тартибли детерминантнинг яна бир муҳим хоссасини кўрсатамиз.

Детерминантнинг бирор сатри (ёки устуни) элементларининг бошқа сатр (ёки устун) элементларининг мос алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтмалари йиғиндиси нолга тенг.

Масалан,

сатрлар учун $\quad a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0;$ (18)

устунлар учун $\quad a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}=0.$ (19)

Масалан, (18) тенгликни текшириб кўрамиз. (15) тенгликдан ва детерминант элементининг минори таърифидан фойдаланиб, бундай ёзишимиз мумкин:

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=a_{11}(-M_{21})+a_{12}M_{22}+a_{13}(-M_{23})=$$

$$=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}\cdot\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{13}\cdot\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=$$

$$=-a_{11}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})+a_{12}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-a_{13}(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})=$$

$$=-a_{11}a_{12}a_{33}+a_{11}a_{13}a_{32}+a_{12}a_{11}a_{33}-a_{12}a_{13}a_{31}-a_{13}a_{11}a_{32}+$$

$$+a_{13}a_{12}a_{31}=0.$$

Қолган тенгликлар ҳам шунга ўхшаш текширилади.

3. Юқори тартибли детерминантлар ҳақида тушунча. Кўпчилик масалаларда иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлардан ташқари, янада юқори тартибли детерминантлар ҳам учрайди. Масалан,

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

тўртинчи тартибли детерминант ва умуман,

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots a_{1k}\ldots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots a_{2k}\ldots a_{2n}\\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3}\ldots a_{ik}\ldots a_{in}\\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\ldots a_{nk}\ldots a_{nn}\end{vmatrix}$$

n- тартибли детерминант.

Тўртинчи тартибли детерминант қуйидагича ҳосил қилинадиган сондир:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{33}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}-$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{44}\end{vmatrix}-a_{14}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43}\end{vmatrix}. \quad (20)$$

(20) тенгликнинг ўнг томонидаги учинчи тартибли детерминантлар a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} элементларнинг *минорлари* деб аталади.

a_{ik} элементнинг минори учун M_{ik} белгилашни сақлаб қолиб ва бу элемент учун A_{ik} алгебраик тўлдирувчини $A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}$ формула бўйича аниқлаб, (20) тенгликни қайтадан бундай ёзамиз:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}.$$

Бу формула тўртинчи тартибли детерминантнинг биринчи сатр элементлари бўйича ёйилмасини беради.

Юқори тартибли детерминантлар ҳам шунга ўхшаш ҳисобланади.

Иккинчи ва учинчи тартибли детерминантларнинг барча хоссалари исталган тартибли детерминантлар учун ҳам тўғридир.

1-мисол. *Ушбу детерминантни ҳисобланг:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ечилиши: (20) формулага кўра қуйидагини топамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3\left\{3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +\right.$$

$$\left.+ 4\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right\} + 2\left\{2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}\right\} =$$

$$= 3[3(-2) - 2 + 4 \cdot 4] + 2[2(-2) - 3(-15) + 4(-20)] = 24 - 78 = -54.$$

Агар детерминантда бирор сатрнинг (ёки устуннинг) битта элементидан бошқа қолган барча элементлари нолга тенг бўлса, у ҳолда бу детерминантни ҳисоблашда уни бу сатр (ёки устун) элементлари бўйича ёйиш қулайдир. Агар бундай сатр (ёки устун) бўлмаса, у ҳолда детерминантнинг (6) хоссасидан фойдаланиб, уни бундай сатрга (ёки устунга) эга бўладиган қилиб ўзгартириш мумкин.

2-мисол. *Ушбу детерминантни ҳисобланг:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Ечилиши. Биринчи сатрга -1 га кўпайтирилган учинчи сатрни қўшиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантни биринчи сатр элементлари бўйича ёзиб, қуйидагини топамиз:

$$\Delta = -3\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} -$$

$$- 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Ҳосил бўлган учинчи тартибли детерминантда учинчи устунга -2 га кўпайтирилган биринчи устунни қўшиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta = -3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -3\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -117.$$

2-§. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИ

Юқорида баён қилинган детерминантлар назариясини биринчи даражали тенгламалар системасини ечишга татбиқ қиламиз.

1. Икки номаълумли иккита тенглама системаси. Иккита x ва y номаълумли биринчи даражали иккита тенглама системасини қараймиз:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y = c_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

a_{ik} коэффициентнинг белгиланишида биринчи индекс тенглама номерини, иккинчи индекс эса номаълум номерини билдиради.

Бу системани ечамиз. Бунинг учун биринчи тенгламани a_{22} га, иккинчи тенгламани $-a_{12}$ га ҳадма-ҳад кўпайтирамиз ва ҳосил бўлган тенгламаларни қўшамиз:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = c_1a_{22} - c_2a_{12}. \tag{22}$$

Шунга ўхшаш, биринчи тенгламани $-a_{21}$ га, иккинчи тенгламани эса a_{11} га ҳадма-ҳад кўпайтириб ва қўшиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = c_2a_{11} - c_1a_{21}. \tag{23}$$

Лекин (2) формулага асосан бундай ёзиш мумкин:

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad c_1a_{22} - c_2a_{12} = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$c_2a_{11} - c_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантларни қисқача бундай ёзамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}. \tag{24}$$

(21) системанинг номаълумлари олдидаги коэффициентлардан тузилган Δ детерминант *системанинг детерминанти* деб аталади. Δ_x (ёки Δ_y) детерминант системанинг Δ детерминантидан ундаги x (ёки y) номаълум олдидаги a_{11} ва a_{21} коэффициентларни (ёки a_{12} ва a_{22} коэффициентларни) c_1 ва c_2 озод ҳадлар билан алмаштириш натижасида ҳосил қилинади. (22) ва (23) тенгликларни (24) ни эътиборга олиб, бундай ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} \Delta \cdot x &= \Delta_x, \\ \Delta \cdot y &= \Delta_y. \end{aligned} \tag{25}$$

Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин.

I. Системанинг детерминанти $\Delta \neq 0$. У ҳолда (25) даги тенгламаларнинг ҳар бирининг иккала томонини Δ га бўлиб, қуйидагини топамиз:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \tag{26}$$

ёки буни очиб ёзсак:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{27}$$

(26) [ёки (27)] формулалар *Крамер* формулалари* деб аталиб, улар (21) системанинг ечимини беради (Буни текшириб кўришни тавсия қиламиз).

Шундай қилиб, (21) системанинг Δ детерминанти нолдан фарқли бўлса, у ҳолда система ягона ечимга эга бўлиб, бу ечим (26) ёки (27) формулалар билан аниқланади.

II. Системанинг детерминанти $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$, яъни $a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$. Бу ҳолда бир тенгламанинг номаълумлари олдидаги коэффициентлари иккинчи тенгламанинг номаълумлари олдидаги коэффициентларга пропорционалдир. Ҳақиқатан, коэффициентлардан бири, масалан, a_{11} нолдан фарқли бўлсин деб фараз қиламиз ва $a_{21}/a_{11} = \lambda$ деб белгилаймиз, бундан $a_{21} = \lambda a_{11}$. У ҳолда $a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$ тенгликдан $a_{22} = \lambda a_{12}$ эканлигини топамиз. Буни эътиборга олиб, (21) системани бундай кўринишда ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= c_1, \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) &= c_2. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Бу ерда яна иккита хусусий ҳол бўлиши мумкин.

* Г. Крамер (1704—1752)— швейцариялик математик.

1) Иккала Δ_x ва Δ_y детерминант нолга тенг: $\Delta_x = c_1a_{22} - c_2a_{12} = 0$, $\Delta_y = c_2a_{11} - c_1a_{21} = 0$. Бу ердан $c_2 = \lambda c_1$ эканлигини топамиз (чунки $a_{22} = \lambda a_{12}$). Бу ҳолда a_{21}, a_{22}, c_2 сонлар a_{11}, a_{12}, c_1 сонларга пропорционал ва (21) система бундай кўринишда ёзилиши мумкин:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= c_1, \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) &= \lambda c_1. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Шундай қилиб, системанинг иккинчи тенгламаси биринчи тенгламасидан унинг иккала қисмини λ га кўпайтириш билан ҳосил қилинади, яъни у биринчи тенгламанинг натижасидир. Бу ҳолда, равшанки, (21) система чексиз кўп ечимлар тўпламига эга. Масалан, y га ихтиёрий қиймат бериб, x нинг тегишли $x = \frac{c_1 - a_{12}y}{a_{11}}$ қийматини топамиз.

2) Δ_x ва Δ_y детерминантлардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлсин. Айтайлик, $\Delta_y = a_{11}c_2 - a_{21}c_1 \neq 0$ бўлсин. У ҳолда $a_{11}c_2 \neq a_{21}c_1$ ва демак, $c_2 \neq \lambda c_1$. Бу ҳолда (28) дан кўриниб турибдики, иккинчи $\lambda(a_{11}x + a_{12}y) = c_2$ тенглама биринчи $a_{11}x + a_{12}y = c_1$ тенгламага зиддир. Демак, (21) система ечимга эга эмас (ёки одатда айтилишича, *биргаликда эмас*).

1-мисол. Ушбу системани ечинг:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 7, \\ 4x - 5y &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Ечилиши. Бу ерда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -22, \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -41, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -24.$$

Системанинг детерминанти $\Delta \neq 0$ бўлганлиги учун у (26) формулалар билан аниқланадиган ягона ечимга эга:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{41}{22}; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{24}{22} = \frac{12}{11}.$$

2-мисол. Қуйидаги системани ечинг:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 5y &= 3, \\ 4x + 10y &= 6. \end{aligned}\right\}$$

Ечилиши. Бу ерда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Иккинчи тенглама биринчи тенгламадан унинг иккала томонини $\lambda = 2$ га кўпайтириш билан ҳосил қилинади. Шу сабабли система битта $2x + 5y = 3$ тенгламага тенг кучли ва чексиз кўп ечимлар тўпламига эга y номаълумга ихтиёрий қийматлар бериб, $x = \frac{3 - 5y}{2}$ ни топамиз, масалан. агар $y = 0$ бўлса, у ҳолда $x = 3/2$; агар $y = 1$ бўлса, у ҳолда $x = -1$ ва ҳоказо.

3-мисол. Ушбу системани ечинг:

$$\left.\begin{aligned} 5x + 3y &= 7, \\ 10x + 6y &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Ечилиши Бу ерда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 36 \neq 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = -60 \neq 0.$$

Демак, берилган система биргаликда эмас, яъни ечимларга эга эмас. Бунга бевосита ишонч ҳосил қиламиз. Биринчи тенгламанинг иккала қисмини -2 га ҳадма-ҳад кўпайтириб ва иккинчи тенглама билан қўшиб зиддиятли $0 = -12$ тенгликка келамиз

2. Уч номаълумли биринчи даражали учта тенглама системаси. Уч номаълумли биринчи даражали учта тенглама системасини қараймиз:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Системанинг номаълумлари олдидаги коэффициентлардан тузилган

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{31}$$

учинчи тартибли детерминант *системанинг детерминанти* деб аталади.

(30) системани ечамиз. Бунинг учун системанинг биринчи тенгламасини a_{11} элементнинг A_{11} алгебраик тўлдирувчисига, иккинчи тенгламасини a_{21} элементнинг A_{21} алгебраик тўлдирувчисига ва учинчи тенгламасини a_{31} элементнинг A_{31} алгебраик тўлдирувчисига ҳадма-ҳад кўпайтирамиз:

$$\begin{aligned} A_{11}a_{11}x + A_{11}a_{12}y + A_{11}a_{13}z = A_{11}c_1, \\ A_{21}a_{21}x + A_{21}a_{22}y + A_{21}a_{23}z = A_{21}c_2, \\ A_{31}a_{31}x + A_{31}a_{32}y + A_{31}a_{33}z = A_{31}c_3. \end{aligned}$$

Бу учала тенгламани қўшамиз:

$$\begin{gathered} (A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31})x + (A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32})y + \\ + (A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33})z = A_{11}c_1 + A_{21}c_2 + A_{31}c_3. \end{gathered} \tag{32}$$

(17) формулаларнинг биринчисига кўра

$$A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31} = \Delta$$

га эгамиз. y ва z олдидаги коэффициентлар (19) формулага асосан нолга тенг. Шундай қилиб, (32) тенглик қуйидаги кўринишни олади:

$$\Delta \cdot x = A_{11}c_1 + A_{21}c_2 + A_{31}c_3. \tag{33}$$

Ушбу

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{34}$$

детерминантни қараймиз. У системанинг Δ детерминантидан ундаги x олдидаги коэффициентларни (яъни a_{11}, a_{21}, a_{31} ни) c_1, c_2, c_3 озод ҳадлар билан алмаштириш натижасида ҳосил бўлади. Бу детерминантни биринчи устун элементлари бўйича ёямиз. (34) детерминантда c_1, c_2, c_3 элементларнинг алгебраик тўлдирувчилари Δ детерминант a_{11}, a_{21}, a_{31} элементларининг мос алгебраик тўлдирувчилари билан бир хиллигини эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$A_{11}c_1 + A_{21}c_2 + A_{31}c_3 = \Delta_x. \tag{35}$$

(35) ва (33) ни таққослаб,

$$\Delta \cdot x = \Delta_x \tag{36}$$

ни топамиз.

Ушбу тенгликлар ҳам шунга ўхшаш келтириб чиқарилади:

$$\Delta \cdot y = \Delta_y, \quad \Delta \cdot z = \Delta_z, \tag{37}$$

бу ерда

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}.$$

Δ_y ва Δ_z детерминантлар системанинг Δ детерминантидан унда мос равишда y ва z олдидаги коэффициентларни озод ҳадлар билан алмаштиришдан ҳосил бўлади.

Системанинг детерминанти $\Delta \neq 0$ деб фараз қилиб, (36) ва (37) тенгликлардан

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \tag{38}$$

ни топамиз. x, y, z нинг (38) формулалар бўйича топилган қийматлари (30) системанинг ечимлари бўлишига бевосита текшириб кўриш билан ишонч ҳосил қилиш мумкин. (38) формулалар (27) формулалар каби *Крамер формулалари* деб аталади.

1-мисол. Ушбу системани ечинг:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 2, \\ 2x - 3y + 2z &= 2, \\ 3x + y + z &= 8. \end{aligned}\right\}$$

Ечилиши. Бу ерда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -16, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -24.$$

(38) формулалардан қуйидагини топамиз:

$$x = \frac{-8}{-8} = 1, \quad y = \frac{-16}{-8} = 2, \quad z = \frac{-24}{-8} = 3.$$

Агар системанинг детерминанти $\Delta = 0$ бўлса ва Δ_x, Δ_y, Δ_z детерминантлардан камида бири нолга тенг бўлмаса, у ҳолда (30) система ечимларга эга эмас (биргаликда эмас). Ҳақиқатан ҳам, аниқлик учун $\Delta_x \neq 0$ бўлсин. У ҳолда (36) тенгликнинг бўлиши мумкин эмас, чунки унинг чап томони исталган x да $\Delta \cdot x = 0$, ўнг томони эса $\Delta_x \neq 0$.

2-мисол. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 2, \\ x - 5y + 2z &= 3, \\ 4x + 6y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

тенгламалар системаси ечимга эга эмас, чунки $\Delta = 0$ ва $\Delta_x = -44 \neq 0$.

Ниҳоят, исботсиз шуни қайд этамизки, агар $\Delta = 0$ ва $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ бўлса, у ҳолда (30) система ё ечимга эга эмас, ё чексиз кўп ечимга эга.

3-мисол. Ушбу системани қараймиз:

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z &= 2, \\ 2x - 2y + 4z &= 4, \\ 3x - 3y + 6z &= 3. \end{aligned}\right\}$$

Бу ерда $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$. Бу система ечимга эга эмас, чунки биринчи ва учинчи тенгламалар бир-бирига зиддир. Ҳақиқатан ҳам, биринчи тенгламани 3 га кўпайтириб ва ундан учинчи тенгламани айириб, мумкин бўлмаган $0 = 3$ тенгликка келамиз.

4-мисол. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 3, \\ 4x + 6y - 2z &= 6, \\ 3x - y + 2z &= -1 \end{aligned}\right\}$$

система учун $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$. Иккинчи тенглама биринчи тенгламадан уни 2 га кўпайтириш билан ҳосил бўлганлиги учун бу система ушбу

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 3, \\ 3x - y + 2z &= -1 \end{aligned}\right\}$$

иккита тенглама системасига тенг кучли ва чексиз кўп ечимлар тўпламига эга. x га ихтиёрий қийматлар бериб, y ва z нинг мос қийматларини топамиз. Масалан $x = 1$ да

$$\left.\begin{aligned} 3y - z &= 1, \\ -y + 2z &= -4 \end{aligned}\right\}$$

системани ҳосил қиламиз, уни ечиб $y = -2/5$, $z = -11/5$ ни топамиз; $x = 0$ да $y = 1$, $z = 0$ га эгамиз ва ҳоказо.

n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумли биринчи даражали n та тенглама системасини қараймиз:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= c_n. \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Бу система учун (36) ва (37) тенгликларга ўхшаш формулалар ўринлидир:

$$\Delta \cdot x_1 = \Delta_{x_1}, \quad \Delta \cdot x_2 = \Delta_{x_2}, \ \ldots, \quad \Delta \cdot x_n = \Delta_{x_n}, \tag{40}$$

бу ерда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{41}$$

— системанинг детерминанти, Δ_{x_k} ($k = 1, 2, \ldots, n$) эса n-тартибли детерминант бўлиб, у Δ детерминантдан x_k номаълум олдидаги коэффициентлар устунини озод ҳадлар устуни билан алмаштиришдан ҳосил бўлади. Агар системанинг детерминанти $\Delta \neq 0$ бўлса, у ҳолда (40) тенгликлардан системанинг қуйидаги ягона ечимини топамиз:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}. \tag{42}$$

Бу формулалар ҳам *Крамер формулалари* деб аталади.

3-§. ВЕКТОРЛАР ВА УЛАР УСТИДАГИ ЧИЗИҚЛИ АМАЛЛАР

1. Скаляр ва вектор катталиклар. Физика, механика ва техника фанларининг турли бўлимларини ўрганишда ўзларининг сон қийматлари билан тўлиқ аниқланадиган катталиклар учрайди. Бундай катталиклар *скаляр катталиклар* деб аталади. Узунлик, юз, ҳажм, масса, жисмнинг температураси ва ҳоказолар скаляр катталиклардир. Скаляр катталиклардан ташқари, турли масалаларда шундай катталиклар учрайдики, уларни аниқлаш учун сон қийматидан ташқари, бу катталикларнинг фазодаги йўналишини ҳам билиш зарур. Бундай катталиклар *вектор катталиклар* деб аталади. Жисмга таъсир этаётган куч, фазода ҳаракатланаётган жисмнинг тезлиги ва тезланиши, магнит майдоннинг фазонинг берилган нуқтасидаги кучланиши вектор катталиклардир.

Вектор катталиклар векторлар ёрдамида тасвирланади. *Вектор* деб, фазодаги тайин узунликка эга бўлган ва йўналган кесмага, яъни чеклаб турадиган нуқталаридан бири боши, иккинчиси эса охири сифатида қабул қилинадиган тайин узунликдаги кесмага айтилади. Агар A векторнинг боши ва B унинг охири бўлса, вектор $\overline{AB}$ билан белгиланади. Векторни шунингдек, қуюқ шрифтнинг битта ҳарфи билан белгилаймиз: **a**, ёзувда эса устида чизиқчали битта ҳарф билан белгиланади: $\overline{a}$.

Расмда вектор охири стрелка билан белгиланган кесма орқали тасвирланади (34-расм).

$\overline{AB}$ векторнинг узунлиги унинг *модули* деб аталади ва $|\overline{AB}|$ ёки AB символи билан белгиланади. Агар вектор **a** билан белгиланган бўлса, унинг модули $|\mathbf{a}|$ ёки a билан белгиланади.

Охири боши билан устма-уст тушадиган вектор ҳам қаралади. Бундай вектор-нуқтани *ноль вектор* деб аталади ва **0** символи билан белгиланади. Ноль вектор тайин йўналишга эга эмас, унинг модули нолга тенг, яъни $|\mathbf{0}|=0$.

Битта тўғри чизиқда ёки параллел тўғри чизиқларда ётадиган **a** ва **b** векторлар *коллинеар векторлар* деб аталади.

Иккита **a** ва **b** вектор: 1) тенг модулларга эга; 2) коллинеар; 3) бир томонга йўналган бўлса, улар *тенг векторлар* деб аталади.

Бу ҳолда бундай ёзилади: $\mathbf{a}=\mathbf{b}$.

Векторларнинг тенглиги таърифидан келиб чиқадики, векторни унинг бошини фазонинг исталган нуқтасига жойлаштириш билан ўз-ўзига параллел кўчириш мумкин.

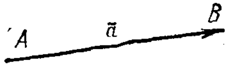
1-мисол. $ABCD$ квадратни қараймиз (35-расм). Векторларнинг тенглиги таърифига асосланиб бундай ёзишимиз мумкин: $\overline{AD}=\overline{BC}$ ва $\overline{AB}=\overline{DC}$, лекин гарчи $|\overline{AB}|=|\overline{AD}|=|\overline{BC}|=|\overline{DC}|$ бўлса-да, $\overline{AB}\neq\overline{AD}$, $\overline{BC}\neq\overline{DC}$.

2-мисол. R радиусли айлана бўйлаб ω бурчак тезлик билан ҳаракатланаётган моддий нуқтани қараймиз (36-расм). Моддий нуқтанинг вақтнинг исталган моментидаги тезлиги вектор бўлиб, у нуқтанинг ҳаракат траекториясига уринма ва узунлиги ωR га тенг. Тезлик векторининг йўналиши траекториянинг турли йўналишларида турлича бўлганлиги сабабли $|\mathbf{v}_1|=|\mathbf{v}_2|=|\mathbf{v}_3|=\ldots$ бўлса-да, бироқ $\mathbf{v}_1\neq\mathbf{v}_2\neq\mathbf{v}_3\neq\ldots$.

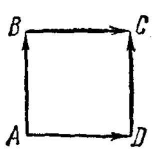
Ҳар бир **a** вектор (ноль-вектордан ташқари) учун қарама-қарши вектор мавжуд бўлиб, у $-\mathbf{a}$ билан белгиланади. $-\mathbf{a}$ вектор **a** векторнинг модулига тенг модулга эга, у билан коллинеар, лекин қарама-қарши томонга йўналган.

2. Векторлар устида чизиқли амаллар. Векторларни қўшиш ва айириш ҳамда векторни сонга кўпайтириш амаллари чизиқли амаллар деб аталади.

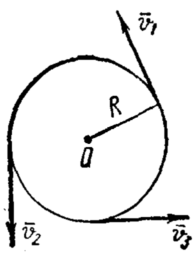
В е к т о р л а р н и қ ў ш и ш. **a** ва **b** — иккита ихтиёрий вектор бўлсин. Ихтиёрий O нуқтани оламиз ва $\overline{OA}=\mathbf{a}$ векторни ясаймиз; сўнгра A нуқтадан $\overline{AB}=\mathbf{b}$ векторни қўямиз. Биринчи қўшилувчи векторнинг бошини иккинчи қўшилувчи векторнинг охири билан туташтирувчи $\overline{OB}$ вектор бу векторларнинг *йиғин-*



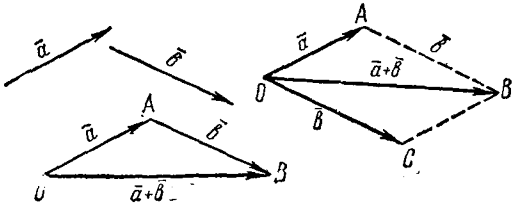
34-расм.



35-расм.



36-расм.



37- расм.

диси деб аталади ва $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ билан белгиланади (37-расм).

Векторларнинг шу йиғиндисини бошқача йўл билан олиш мумкин. O нуқтадан $\overline{OA}=\mathbf{a}$ ва $\overline{OC}=\mathbf{b}$ векторларни қўямиз. Бу векторларни томонлар сифатида олиб, $OABC$ параллелограмм ясаймиз. Параллелограммнинг O учидан ўтказилган диагонали бўлмиш $\overline{OB}$ вектор, равшанки, векторлар йиғиндиси $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ дир (37-расмга қаранг).

37-расмдан икки векторнинг йиғиндиси ўрин алмаштириш хоссасига эга эканлиги бевосита келиб чиқади:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}.$$

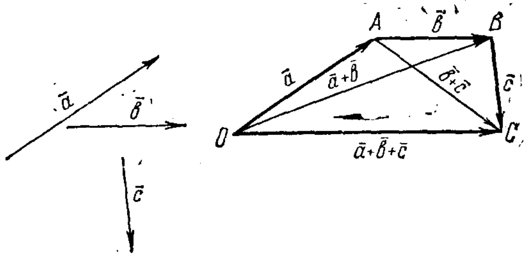
Ҳақиқатан ҳам, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ва $\mathbf{b}+\mathbf{a}$ векторларнинг ҳар бири айни бир $\overline{OB}$ векторга тенг.

Иккита қўшилувчи векторлар учун киритилган векторларни қўшиш тушунчасини исталган чекли сондаги қўшилувчилар бўлган ҳолга ҳам умумлаштириш мумкин.

Айтайлик, учта $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ва $\mathbf{c}$ вектор берилган бўлсин. Дастлаб векторлар йиғиндиси $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ни ясаб, кейин эса бу йиғиндига $\mathbf{c}$ векторни қўшиб, $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$ векторни ҳосил қиламиз. 38-расмда $\overline{OA}=\mathbf{a}$, $\overline{AB}=\mathbf{b}$, $\overline{OB}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\overline{BC}=\mathbf{c}$ ва $\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{BC}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$. 38-расмдан кўриниб турибдики, битта $\overline{OC}$ векторнинг ўзини $\overline{OA}=\mathbf{a}$ векторга $\overline{AC}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$ векторни қўшсак ҳам ҳосил қиламиз. Шундай қилиб,

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}),$$

яъни векторларнинг йиғиндиси группалаш хоссасига эга. Шу сабабли учта векторнинг йиғиндисини оддийгина $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ қилиб



38- расм.

ёзилади. Уни 38-расмда кўриниб турганидек, қуйидагича ҳосил қилиш мумкин. Ихтиёрий O нуқтадан биринчи қўшилувчи векторга тенг вектор қўйилади. Биринчи векторнинг охирига иккинчи векторнинг боши, иккинчи векторнинг охирига учинчи векторнинг боши қўйилади. Биринчи векторнинг бошини учинчи векторнинг охири билан туташтирувчи вектор берилган векторларнинг йиғиндиси бўлади. Исталган чекли сондаги векторларнинг йиғиндиси ҳам шунга ўхшаш ясалади.

Агар бир нечта векторларни қўшишда сўнгги қўшилувчи векторнинг охири биринчи қўшилувчи векторнинг боши билан устма-уст тушса, у ҳолда бу векторларнинг йиғиндиси ноль векторга тенг. Исталган вектор учун ушбу тенгликнинг ўринли бўлиши равшан: $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$.

Векторлар айирмаси. Иккита $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторнинг *айирмаси* деб, шундай учинчи $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$ векторга айтиладики, унинг айрилувчи $\mathbf{b}$ вектор билан йиғиндиси $\mathbf{a}$ векторни беради.

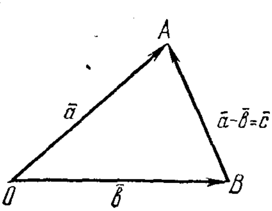
Шундай қилиб, агар $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$ бўлса, у ҳолда $\mathbf{c}+\mathbf{b}=\mathbf{a}$. Икки вектор йиғиндисининг таърифидан айирма векторни ясаш қоидаси келиб чиқади (39-расм). Умумий O нуқтадан $\overline{OA}=\mathbf{a}$ ва $\overline{OB}=\mathbf{b}$ векторларни қўямиз. Камаювчи $\mathbf{a}$ ва айрилувчи $\mathbf{b}$ векторларнинг охирларини туташтирувчи ва айрилувчи вектордан камаювчи векторга томон йўналган $\overline{BA}$ вектор $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$ айирма бўлади. Ҳақиқатан ҳам, векторларни қўшиш қоидасига асосан $\overline{OB}+\overline{BA}=\overline{OA}$ ёки $\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{a}$.

Агар умумий O нуқтадан қўйилган $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторларда $OACB$ параллелограмм ясалса, у ҳолда параллелограммнинг бир диагонали билан устма-уст тушадиган $\overline{OC}$ вектор $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ йиғиндига тенг, иккинчи диагонал билан устма-уст тушадиган $\overline{BA}$ вектор эса $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ айирмага тенг (40-чизма).

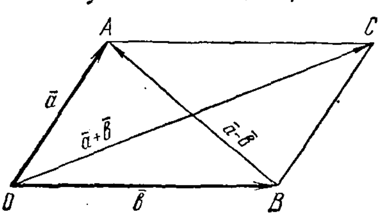
Мисол. $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторлар йиғиндисининг модули $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ улар айирмасининг модули $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ га тенг бўлиши учун бу векторлар қандай жойлашган бўлиши лозим?

Ечилиши. Равшанки, бундай бўлиши учун параллелограмм $\overline{OC}$ диагоналининг узунлиги унинг $\overline{BA}$ диагоналининг узунлигига тенг бўлиши лозим (40-расм). Бу $OACB$ параллелограмм фақат тўғри тўртбурчак бўлган ҳолдагина бўлиши мумкин. Демак, агар $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ бўлса, у ҳолда $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.

Векторни сонга кўпайтириш. $\boldsymbol{a}$ вектор ва λ сон берилган бўлсин. *$\boldsymbol{a}$ векторнинг λ сонга кўпайтмаси* деб, $\boldsymbol{a}$ век-



39- расм.



40- расм.

торга коллинеар, узунлиги $|\mathbf{c}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$ га тенг ва йўналиши $\lambda > 0$ бўлганда **a** векторнинг йўналиши билан бир хил, $\lambda < 0$ бўлганда қарама-қарши йўналишга эга бўлган *c* векторга айтилади.

Масалан, $2a$ вектор а вектор билан бир хил йўналган ва *a* векторнинг узунлигидан икки марта катта узунликка эга бўлган вектордир.

Қарама-қарши $-a$ векторни $\lambda = -1$ га кўпайтириш натижаси сифатида қараш мумкин:

$$-\mathbf{a} = (-1) \cdot \mathbf{a}.$$

Равшанки,

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = 0.$$

Векторнинг сонга кўпайтмаси таърифидан келиб чиқадики, агар $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ бўлса, у ҳолда **a** ва **b** векторлар коллинеардир. Аксинча, **b** ва **a** векторларнинг коллинеарлигидан $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ бўлиши келиб чиқиши равшан. Шундай қилиб, *икки* **a** *ва* **b** *вектор*

$$\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a} \qquad (43)$$

тенглик ўринли бўлганда ва фақат шу ҳолдагина коллинеардир.

a векторнинг λ сонга кўпайтмасини λa кўринишда ҳам, $\mathbf{a}\lambda$ кўринишда ҳам ёзиш мумкин.

Векторнинг сонга кўпайтмаси ушбу

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \quad (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{a} \qquad (44)$$

т а қ с и м о т х о с с а с и г а ва ушбу

$$(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{a} = \lambda_1(\lambda_2\mathbf{a}) \qquad (45)$$

г р у п п а л а ш х о с с а с и г а эгалигига ишонч ҳосил қилиш осон.

Масалан, (44) формула орқали ифодаланган биринчи хоссанинг $\lambda > 0$ учун ўринлилиги параллелограммнинг томони λ марта ўзгарганда унинг диагоналлари ҳам λ марта ўзгаришидан келиб чиқади (41-чизма).

Узунлиги бирга тенг вектор б и р л и к в е к т о р деб аталади.

a вектор берилган бўлсин. **a** векторга коллинеар, у билан бир хил йўналган, лекин узунлиги бирга тенг бўлган векторни қараймиз. Бу векторни a° орқали белгилаймиз, у ҳолда $|a^\circ| = 1$

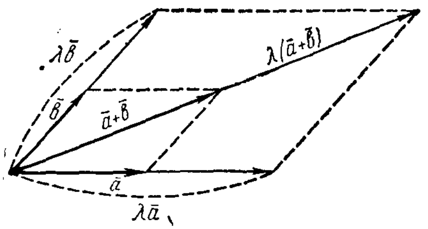
Векторни сонга кўпайтириш таърифидан

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\vec{\mathbf{a}}^\circ \qquad (46)$$

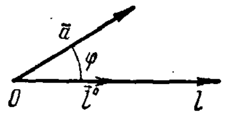
бўлиши келиб чиқади, яъни *ҳар бир вектор ўзининг модулининг ўша йўналишдаги бирлик векторга кўпайтмасига тенг.*

(46) тенгликдан келгусида кўп марта фойдаланилади.

3. **Икки вектор орасидаги бурчак.** Фазода иккита **a** ва **b** вектор берилган бўлсин. Ихтиёрий *O* нуқтадан $\overline{OA} = \mathbf{a}$ ва $\overline{OB} = \mathbf{b}$ векторларни қўямиз. **a** ва **b** *векторлар орасидаги бурчак* деб, бу векторлардан бирини иккинчиси билан устма-уст тушгунга қадар буриш керак бўлган энг кичик $\varphi(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ бурчакка



41- расм.



42- расм

айтилади. Мусбат йўналиши ундаги $\bar{l}^0$ бирлик вектор йўналиши билан устма-уст тушадиган l' ўқни қараймиз. $\bar{a}$ *вектор ва* l *ўқ орасидаги бурчак* деб, $\bar{a}$ ва $\bar{l}^0$ векторлар орасидаги φ бурчакка айтилади (42-расм).

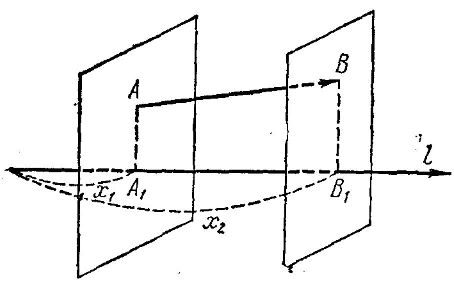
4. **Векторнинг ўққа проекцияси ва векторнинг ўқдаги ташкил этувчиси.** Фазода ихтиёрий жойлашган бирор l ўқ ва $\overline{AB}$ вектор берилган бўлсин. Бу векторнинг боши A ва охири B нинг l ўққа проекцияларини мос равишда A_1 ва B_1 билан белгилаймиз (43-расм). l ўқда A_1 нуқта x_1 координатага, B_1 нуқта эса x_2 координатага эга бўлсин. $\overline{AB}$ вектор охири ва бошининг l ўқдаги проекцияларининг координаталари айирмаси $x_2 - x_1$ ни $\overline{AB}$ *векторнинг шу ўққа проекцияси* деб аталади.

Агар $\overline{AB}$ вектор l ўқ билан ўткир бурчак ташкил этса, у ҳолда $x_2 > x_1$ бўлиб, $x_2 - x_1$ проекция мусбат; агар l ўқ ва $\overline{AB}$ вектор орасидаги бурчак ўтмас бўлса, у ҳолда $x_2 < x_1$ бўлиб, $x_2 - x_1$ проекция манфий бўлади (44-расм). Ниҳоят, $\overline{AB}$ вектор l ўққа перпендикуляр бўлса, у ҳолда $x_2 = x_1$ бўлиб, $x_2 - x_1$ проекция нолга тенг.

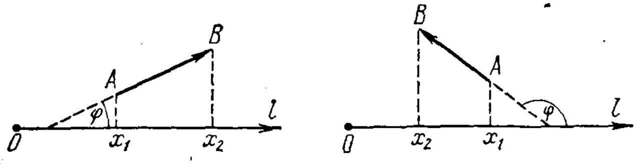
$\overline{AB}$ векторнинг l ўққа проекциясини қуйидагича белгилаймиз $\text{пр}_l\,\overline{AB}$.

Проекциялар ҳақидаги баъзи асосий теоремаларни кўриб чиқамиз.

1-теорема. $\bar{a}$ *векторнинг* l *ўққа проекцияси* $\bar{a}$ *вектор модулининг шу век-*



43- расм.



44- расм.

тор билан ўқ орасидаги φ бурчак косинусига кўпайтмасига тенг:

$$\text{пр}_l\ \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos\varphi. \qquad (47)$$

Исботи. Векторнинг $x_2 - x_1$ проекцияси бу векторни ўз-ўзига параллел кўчиришда ўзгармайди, чунки бунда x_2 ва x_1 бир хил миқдорга ўзгаради. Шу сабабли векторнинг боши l ўқнинг саноқ боши O билан устма-уст тушадиган ҳолни қараш кифоядир (45-расм). Саноқ бошининг координатаси нолга тенг бўлганлиги учун

$$\text{пр}_l\ \mathbf{a} = x - 0 = x,$$

бу ерда x—вектор охири проекциясининг координатаси. Конуснинг таърифига кўра $\cos\varphi = x/|\mathbf{a}|$, бундан $x = |\mathbf{a}| \cos\varphi$ ёки $\text{пр}_l\ \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos\varphi$, ана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

2-теорема. *Икки вектор йиғиндисининг ўққа проекцияси қўшилувчи векторларнинг шу ўққа проекциялари йиғиндисига тенг.*

Исботи. $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ бўлсин (46-расм). A, B ва C нуқталарнинг l ўққа проекциялари A_1, B_1 ва C_1 нинг координаталарини x_1, x_2 ва x_3 билан белгилаймиз. У ҳолда $\text{пр}_l\ \overline{AB} = x_2 - x_1$; $\text{пр}_l\ \overline{BC} = x_3 - x_2$; $\text{пр}_l\ \overline{AC} = x_3 - x_1$. Бироқ $x_3 - x_1 = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)$, яъни

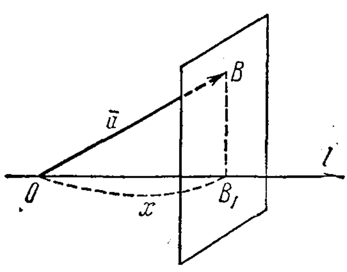
$$\text{пр}_l\ \overline{AC} = \text{пр}_l\ \overline{AB} + \text{пр}_l\ \overline{BC}. \qquad (49)$$

Бу теоремани чекли сондаги қўшилувчилар бўлган ҳолга ҳам умумлаштириш мумкин.

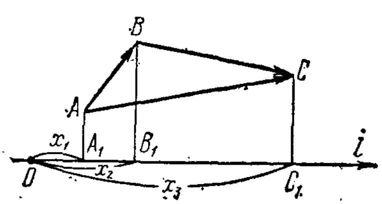
3-теорема. **a** *векторни λ сонга кўпайтирилса, унинг ўққа проекцияси ҳам шу λ сонга кўпаяди:*

$$\text{пр}_l\ (\lambda\cdot\mathbf{a}) = \lambda\cdot\text{пр}_l\ \mathbf{a}. \qquad (50)$$

Исботи. Энг аввало шуни қайд этиб ўтамизки, агар ***a*** вектор l ўқ билан φ бурчак ташкил этса ва $\lambda > 0$ бўлса, у ҳолда λ**a** вектор **a** вектор билан бир хил йўналишга эга бўлади ва ўқ билан φ бурчак ташкил қилади. Агар $\lambda < 0$ бўлса, у ҳолда λ**a** векторнинг йўналиши ***a*** векторнинг йўналишига қарама-



45- расм.



46- расм.

қарши бўлади ва λa вектор ўқ билан $\pi-\varphi$ бурчак ташкил қилади. 1-теоремага асосан қуйидагига эгамиз:

1) $\lambda > 0$; $\text{пр}_l\ (\lambda a) = |\lambda a| \cos\varphi = |\lambda|\,|a| \cos\varphi = \lambda\, |a| \cos\varphi = \lambda\, \text{пр}_l a$;

2) $\lambda < 0$; $\text{пр}_l(\lambda a) = |\lambda a|\ \cos(\pi-\varphi) = |\lambda|\,|a| \cos(\pi-\varphi) =$
$= -\gamma\, |a|\ (-\cos\varphi) = \lambda\, |a| \cos\varphi = \lambda\ \text{пр}_l a$.

Натижа. Иккита вектор айирмасининг ўққа проекцияси бу векторларнинг шу ўққа проекцияларининг айирмасига тенг.

Бунинг исботини китобхонга қолдирамиз.

a векторнинг l ўққа проекцияси билан бу ўқ бирлик вектори 1° нинг кўпайтмаси **a** векторнинг l ўқ бўйича *ташкил этувчиси* деб аталади.

Бу ташкил этувчини $\text{ташк}_l a$ билан белгилаб, таърифга кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\text{ташк}_l\, a = \text{пр}_l a \cdot 1^\circ \qquad (51)$$

ёки

$$\text{ташк}_l\, a = (x_2 - x_1)\, 1^\circ \qquad (52)$$

бу ерда x_1 ва x_2 — берилган $a = \overline{AB}$ векторнинг боши A ва охири B нинг l ўққа проекциялари A_1 ва B_1 нинг тегишли координаталари. Қуйидагини пайқаш қийин эмас:

$$\text{ташк}_l a = \overline{A_1 B_1}. \qquad (53)$$

Ҳақиқатан ҳам, иккала векторнинг модуллари A_1 ва B_1 нуқталар орасидаги масофага тенг: $|x_2 - x_1| = |\overline{A_1 B_1}|$. Бу векторлар шунингдек, бир хил йўналган, чунки улардан ҳар бирининг йўналиши ё l ўқнинг мусбат йўналиши билан устма-уст тушади (агар $x_2 - x_1 > 0$ бўлса), ё унга қарама-қаршидир (агар $x_2 - x_1 < 0$ бўлса).

Шундай қилиб, *векторнинг ўқ бўйича ташкил этувчиси бу вектор бошининг проекциясини унинг охири проекцияси билан туташтирувчи вектордир.*

4-§. ВЕКТОРЛАРНИНГ ЧИЗИҚЛИ БОҒЛИҚЛИГИ. БАЗИС

1. Текисликдаги ва фазодаги векторларнинг чизиқли боғлиқлиги. Орасида нолдан фарқлилари ҳам бўлган шундай λ_1, λ_2 . . ., λ_k сонлар мавжуд бўлсаки, улар учун

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ \ldots + \lambda_k a_k = 0 \qquad (54)$$

тенглик ўринли бўлса, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ векторлар *чизиқли боғлиқ* деб аталади.

Агар (54) тенглик фақат $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$ бўлганда ўринли бўлса, у ҳолда $a_1, a_2, \ldots, a_k$ векторлар *чизиқли эркли* деб аталади.

(54) тенгликдан, масалан $\lambda_1 \neq 0$ деб фараз қилиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$a_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} a_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} a_3 - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} a_k.$$

Энди $-\lambda_2/\lambda_1 = \mu_2, -\lambda_3/\lambda_1 = \mu_3, \ldots, \lambda_k/\lambda_1 = \mu_k$ деб олиб,

$$a_1 = \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \ldots + \mu_k a_k \tag{55}$$

ни ҳосил қиламиз. $\mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \ldots + \mu_k a_k$ ифода $a_2, a_3, \ldots, a_k$ векторларнинг чизиқли *комбинацияси* деб аталади.

Шундай қилиб, *бир нечта векторлар чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда улардан ҳеч бўлмаганда бирини қолганларининг чизиқли комбинацияси кўринишида ифодалаш мумкин.*

Бунга тескари даъво ҳам тўғри: *агар бир нечта вектордан бири қолганларининг чизиқли комбинацияси кўринишида ифодаланган бўлса, у ҳолда бу векторлар чизиқли боғлиқдир.*

Ҳақиқатан ҳам, масалан, a_1 вектор $a_2, a_3, \ldots, a_k$ векторларнинг чизиқли комбинацияси бўлсин. У ҳолда (55) тенглик ўринли бўлади. Уни $-a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \ldots + \mu_k a_k = 0$ кўринишда қайта ёзиб, коэффициентлардан бири, чунончи a_1 олдидаги коэффициент -1 га тенглигига ва демак, нолдан фарқли эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Бундан таърифга кўра $a_1, a_2, \ldots, a_k$ векторларнинг чизиқли боғлиқлиги келиб чиқади.

Энди текисликдаги векторларнинг чизиқли боғлиқлиги ва чизиқлиги эрклилиги ҳақидаги масалани қараймиз.

1-теорема. *Текисликдаги ҳар қандай учта* a, b *ва* c *вектор чизиқли боғлиқдир.*

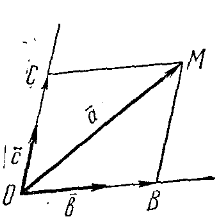
Исботи. Бу векторлардан бири қолган иккитасининг чизиқли комбинациясидан иборатлигига ишонч ҳосил қилиш кифоя. Бунда икки ҳол бўлиши мумкин.

1. Берилган векторлар орасида бир жуфт коллинеар вектор мавжуд булар, масалан, **a** ва **b** бўлсин. У ҳолда (43) тенгликка асосан қуйидагига эгамиз: $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ ёки $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} + 0 \cdot \mathbf{c}$, яъни **a** вектор **b** ва **c** векторларнинг чизиқли комбинациясидир.

2. Берилган векторлар орасида ҳеч бир жуфти коллинеар эмас. Учала вектор умумий O бошга эга деб фараз қиламиз(47-расм). **a** векторни бири **b** векторга, иккинчиси эса c векторга коллинеар бўлган икки векторнинг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкинлигини кўрсатамиз.

Бунинг учун a векторнинг охири M дан **b** ва **c**, векторларга параллел ва бу векторлар ётадиган тўғри чизиқлар билан B ва C нуқталарда кесишадиган тўғри чизиқлар ўтказамиз (47- расм). Ушбу кўриниб турган тенгликка эгамиз: $\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{OC}$. $\overline{OB}$ ва $\overline{OC}$ векторлар **b** ва **c** векторларга мос равишда коллинеар бўлганлиги учун $\overline{OB} = \lambda_1\mathbf{b}$ ва $\overline{OC} = \lambda_2\mathbf{c}$. Шу сабабли,

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{b} + \lambda_2 \mathbf{c}, \tag{56}$$



47 расм.

яъни $\mathbf{a}$ вектор $\mathbf{b}$ ва $\mathbf{c}$ векторларнинг чизиқли комбинациясидир.

Натижа. Агар текисликда берилган векторлар сони учтадан ортиқ бўлса, улар ҳам чизиқли боғлиқдир, яъни бу векторлардан бирини қолганларининг чизиқли комбинацияси кўринишида тасвирлаш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, k та $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_k$ вектор берилган бўлсин. Текисликдаги учта вектор доимо чизиқли боғлиқ бўлганлиги учун $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ва $\mathbf{a}_3$ векторлар учун $\mathbf{a}_1 = \mu_2 \mathbf{a}_2 + \mu_3 \mathbf{a}_3$ га эгамиз. У ҳолда берилган k та вектор учун

$$\mathbf{a}_1 = \mu_2 \mathbf{a}_2 + \mu_3 \mathbf{a}_3 + 0 \cdot \mathbf{a}_4 + \ldots + 0 \cdot \mathbf{a}_k$$

ни ёзиш мумкин, яъни $\mathbf{a}_1$ вектор қолган векторларнинг чизиқли комбинациясидир.

Иккита $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ вектор бўлган ҳолга келсак, маълумки, улар $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$ [(43) формулага қаранг] тенглик ўринли бўлганда, яъни $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторлар чизиқли боғлиқ бўлганда ва фақат шундагина коллинеардир. Бундан бевосита қуйидаги теорема келиб чиқади.

2-теорема. *Иккита* $\mathbf{a}$ *ва* $\mathbf{b}$ *вектор чизиқли эркли бўлиши учун улар коллинеар* бўлмаслиги зарур ва кифоядир.

1- ва 2-теоремалардан *текисликдаги чизиқли эркли векторларнинг максимал сони иккига тенлиги келиб чиқади.*

Энди фазодаги векторларга ўтамиз.

Агар векторлар битта текисликда ётса ёки битта текисликка параллел бўлса, улар *компланар векторлар* деб аталади.

Шуни қайд этиб ўтамизки, агар компланар векторлар умумий бошга эга бўлса, улар битта текисликда ётиши равшан.

3-теорема. *Фазодаги ҳар қандай тўртта* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *ва* $\mathbf{d}$ *вектор чизиқли боғлиқдир.*

Исботи. Берилган векторлар умумий бошга эга деб фараз қиламиз. Уларнинг чизиқли боғлиқлигини кўрсатиш учун бу векторлардан бири қолганларининг чизиқли комбинациясидан иборат эканлигини кўрсатиш кифоя. Бунда икки ҳол бўлиши мумкин.

1. Берилган векторлар орасида компланар векторлар учлиги мавжуд. Улар, масалан, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ва $\mathbf{c}$ бўлсин.

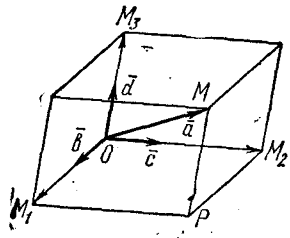
Бу векторлар бир текисликда ётганлиги учун улардан бирини, масалан, $\mathbf{a}$ векторни 1-теоремага кўра қолган векторларнинг чизиқли комбинацияси кўринишида ифодалаш мумкин $\mathbf{a} = \mu_2 \mathbf{b} + \mu_3 \mathbf{c}$. Бу ҳолда тўртала вектор учун $\mathbf{a} = \mu_2 \mathbf{b} + \mu_3 \mathbf{c} + 0 \cdot \mathbf{d}$ тенгликни ёзиш мумкин, бу эса $\mathbf{a}$ вектор $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ва $\mathbf{d}$ векторларнинг чизиқли комбинацияси эканлигини билдиради.

2. Берилган векторлар орасида битта ҳам компланар векторлар учлиги йўқ. Бу ҳолда $\mathbf{a}$ векторни мос равишда $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ва $\mathbf{d}$ векторларга коллинеар бўлган учта векторнинг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин. Бунинг учун $\mathbf{a}$ векторнинг охири бўлмиш M нуқтадан мос равишда $\mathbf{b}$ ва $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}$ ва $\mathbf{d}$, $\mathbf{d}$ ва $\mathbf{b}$ векторлар жуфтликлари билан аниқланадиган учта текисликка параллел текисликлар ўтказиб, диагонали $\mathbf{a} = \overline{OM}$ вектордан иборат

параллелепипед ҳосил қиламиз (48-расм). Равшанки, $\mathbf{a}=\overline{OM}=\overline{OM_1}+\overline{M_1P}+\overline{PM}$. Бироқ $\overline{OM_1}=\lambda_1\mathbf{b}$, $\overline{M_1P}=\overline{OM_2}=\lambda_2\mathbf{c}$, $\overline{PM}=\overline{OM_3}=\lambda_3\mathbf{d}$. Демак,

$$\mathbf{a}=\lambda_1\mathbf{b}+\lambda_2\mathbf{c}+\lambda_3\mathbf{d}, \qquad (57)$$

яъни **a**, **b**, **c** ва **d** векторлар чизиқли боғлиқдир.



48- расм.

Текислик бўлган ҳолда кўрсатилганига ўхшаш қуйидагини кўрсатиш мумкин:

1) *агар фазода берилган векторлар сони тўрттадан кўп бўлса, улар чизиқли боғлиқдир:* 2) *фазодаги учта вектор компланар бўлиши учун улар чизиқли боғлиқ бўлиши зарур ва кифоядир;* 3) *учта* **a**, **b** *ва* **c** *вектор чизиқли эркли бўлиши учун улар нокомпланар бўлиши зарур ва кифоядир* (бу бевосита 2-хоссадан келиб чиқади).

Бу айтилганлардан, *фазодаги чизиқли эркли векторларнинг максимал сони учга тенглиги келиб чиқади.*

2 Текислик ва фазода базис. Аффин координаталар. Чизиқли алгебра ва векторлар алгебрасининг муҳим тушунчаларидан бири базис тушунчасидир.

Текисликдаги базис деб, исталган иккита чизиқли эркли векторга айтилади.

1-пунктдаги 2-теоремадан исталган иккита ноколлинеар векторнинг базис ҳосил қилиши келиб чиқади. Айтайлик, **a**—текисликдаги исталган вектор, **b** ва **c** векторлар эса базис ҳосил қилсин. Текисликдаги ҳар қандай учта вектор чизиқли боғлиқ бўлганлиги учун **a** вектор базис векторлари орқали чизиқли ифодаланади, яъни (56) муносабат бажарилади:

$$\mathbf{a}=\lambda_1\mathbf{b}+\lambda_2\mathbf{c}.$$

Агар **a** вектор (56) кўринишда ифодаланган бўлса, у ҳолда у **b** ва *c* векторлар ҳосил қилган базис бўйича ёйилган дейилади. λ_1 ва λ_2 сонлар *текисликдаги* **a** *векторнинг аффин координаталари* деб аталади ва $\mathbf{a}=\{\lambda_1; \lambda_2\}$ орқали ёзилади.

Теорема. **a** *векторнинг* **b** *ва* **c** *базис бўйича ёйилмаси ягонадир.*

Исботи. Фараз қилайлик, (56) ёйилма билан бир қаторда

$$a=\nu_1\mathbf{b}+\nu_2 c \qquad (58)$$

ёйилма ҳам ўринли бўлсин. Бу ҳолда $\nu_1=\lambda_1$, $\nu_2=\lambda_2$ бўлишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, (58) дан (56) ни айириб,

$$\mathbf{O}=(\lambda_1-\nu_1)b+(\lambda_2-\nu_2)c$$

ни ҳосил қиламиз. Базиснинг **b** ва *c* векторлари чизиқли эркли бўлганлиги учун $\lambda_1-\nu_1=0$ ва $\lambda_2-\nu_2=0$. Бундан $\nu_1=\lambda_1$ ва $\nu_2=\lambda_2$, яъни **b**, **c** базис бўйича ёйилма ягонадир.

Фазодаги базис деб, исталган учта чизиқли эркли векторга айтилади.

3-хоссадан (1-пунктга қаранг) ҳар қандай учта нокомпланар векторнинг базис ташкил қилиши келиб чиқади. Текисликда бўлган ҳолдаги каби исталган **a** вектор базиснинг **b**, **c** ва **d** векторлари орқали бир қийматли ёйилади, яъни (57) муносабат бажарилади:

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{b} + \lambda_2\mathbf{c} + \lambda_3\mathbf{d}.$$

λ_1, λ_2, λ_3 сонлар *фазодаги **a** векторнинг аффин координаталари* деб аталади ва $\mathbf{a} = \{\lambda_1;\ \lambda_2;\ \lambda_3\}$ каби ёзилади.

Эслатма. Фазода базис ҳосил қилувчи **b**, **c** ва *d* векторлар умумий *O* бошга (координаталар бошига) эга бўлсин. Фазонинг ихтиёрий *M* нуқтасини ва унинг $\overline{OM}$ радиус-векторини, яъни координаталар бошини шу нуқта билан туташтирувчи векторни қараймиз.

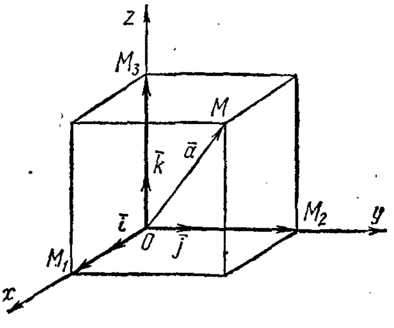
(57) формулага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\overline{OM} = \lambda_1\mathbf{b} + \lambda_2\mathbf{c} + \lambda_3\mathbf{d}.$$

$\overline{OM}$ векторнинг аффин координаталари, яъни λ_1, λ_2, λ_3 сонлар, шунингдек, *M нуқтанинг* ҳам *аффин координаталари* деб аталади ва $M(\lambda_1;\ \lambda_2;\ \lambda_3)$ орқали ёзилади.

3. Тўғри бурчакли декарт базиси. Векторни координата ўқлари бўйича ташкил этувчиларга ёйиш. Фазода $Oxyz$ тўғри бурчакли координаталар системасини қараймиз (49-расм). Ўқларнинг ҳар бирида йўналиши ўқнинг мусбат йўналиши билан устма-уст тушадиган бирлик вектор танлаймиз. Жумладан, Ox ўқда $\boldsymbol{i}$ бирлик векторни, Oy ўқда $\mathbf{j}$ бирлик векторни ва Oz ўқда $\mathbf{k}$ бирлик векторни оламиз: $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\mathbf{k}| = 1$. Бу учала ўзаро перпендикуляр бирлик вектор *ортлар* деб аталади. $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ ортлар нокомпланар бўлганлиги учун улар базис ҳосил қилади, бу базис *декарт ортогонал базиси* деб аталади.

Фазодаги бирор а векторни қараймиз. Бу векторни унинг боши координаталар боши *O* билан устма-уст тушадиган қилиб ўз-ўзига параллел кўчирамиз. Бошқача айтганда, *O* бошдан **a** га тенг $\overline{OM}$ векторни қўямиз: $\overline{OM} = \mathbf{a}$. $\overline{OM}$ векторнинг охиридан координата текисликларига параллел текисликлар ўтказиб, диагоналларидан бири $\overline{OM}$ вектордан иборат параллелепипед ҳосил қиламиз.



49- расм.

49-расмдан ва бир нечта векторнинг йиғиндиси таърифидан қуйидагини топамиз:

$$\mathbf{a} = \overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{M_1P} + \overline{PM}.$$

$\overline{M_1P}=\overline{OM_2}$ ва $\overline{PM}=\overline{OM_3}$ бўлганлиги учун

$$a=\overline{OM_1}+\overline{OM_2}+\overline{OM_3}. \tag{59}$$

$\overline{OM_1}$, $\overline{OM_2}$, $\overline{OM_3}$ векторлар $a=\overline{OM}$ векторнинг Ox, Oy, Oz ўқлар бўйича ташкил этувчиларидир.

.(51) тенгликка асосан қуйидагига эгамиз:

$$\overline{OM_1}=\text{пр}_{Ox}\overline{OM}\cdot\mathbf{i},\ \overline{OM_2}=\text{пр}_{Oy}\overline{OM}\cdot\mathbf{j},\overline{OM_3}=\text{пр}_{Oz}\overline{OM}\cdot\mathbf{k}. \tag{60}$$

$a=\overline{OM}$ векторнинг Ox, Oy, Oz ўқлардаги проекцияларини мос равишда a_x, a_y, a_z орқали белгилаб, (59) ва (60) дан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$a=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}. \tag{61}$$

(61) формула а векторнинг ортогонал декарт базиси бўйича ёйилмасини, ёки одатда айтилишича, *векторнинг координата ўқлари бўйича ташкил этувчиларга ёйилмасини* беради. Бу формула агар (57) формулада

$$\lambda_1=a_x,\ \lambda_2=a_y,\ \lambda_3=a_z,\ b=\mathbf{i},\ c=\mathbf{j},\ d=\mathbf{k}$$

дейилса, у билан устма-уст тушади.

M нуқта x, y, z координаталарга эга бўлсин. У ҳолда $a=\overline{OM}$ векторнинг координата ўқларига проекциялари (48) формулага асосан $a_x=x$, $a_y=y$, $a_z=z$ га тенг, координата ўқлари бўйича ташкил этувчилари эса $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$, $z\mathbf{k}$ га тенг. Векторнинг ташкил этувчиларга ёйилмасини берадиган (61) формула энди қуйидаги кўринишни олади:

$$a=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}. \tag{62}$$

Агар a векторнинг координата ўқларига проекциялари мос равишда a_x, a_y, a_z га тенг бўлса, у ҳолда биз буни қуйидагича ёзамиз:

$$a=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}.$$

a_x, a_y, a_z проекциялар а векторнинг *тўғри бурчакли декарт координаталари* деб аталади.

Агар векторларнинг координата ўқлари бўйича ёйилмалари маълум бўлса, у ҳолда векторлар устидаги чизиқли амалларни уларнинг проекциялари устидаги арифметик амаллар билан алмаштириш мумкин. Бу 2- ва 3-теоремалардан келиб чиқади. Масалан, агар $a=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$, $b=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$ бўлса, у ҳолда

$$\lambda a=\lambda a_x\mathbf{i}+\lambda a_y\mathbf{j}+\lambda a_z\mathbf{k}, \tag{63}$$

$$a\pm b=(a_x\pm b_x)\mathbf{i}+(a_y\pm b_y)\mathbf{j}+(a_z+b_z)\mathbf{k}.$$

Мисол: $a=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, $b=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ векторларнинг йиғиндиси ва айирмасини топинг.

Ечилиши. (63) даги формулаларнинг иккинчисига кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$a+b=(2+3)\mathbf{i}+(3-2)\mathbf{j}+(5+5)\mathbf{k}=5\mathbf{i}+\mathbf{j}+10\mathbf{k},$$
$$a-b=(2-3)\mathbf{i}+[3-(-2)]\mathbf{j}+(5-5)\mathbf{k}=-\mathbf{i}+5\mathbf{j}.$$

a векторнинг проекцияларини билган ҳолда бу векторнинг модули учун ифодани топиш осон. $a = \overline{OM}$ вектор параллелепипеднинг диагонали бўлганлиги учун тўғри бурчакли параллелепипед диагоналининг узунлиги ҳақидаги маълум теоремага асосан бундай ёзиш мумкин:

$$|\overline{OM}|^2 = |\overline{OM_1}|^2 + |\overline{OM_2}|^2 + |\overline{OM_3}|^2.$$

Бироқ $|\overline{OM_1}| = |a_x|$, $|\overline{OM_2}| = |a_y|$, $|\overline{OM_3}| = |a_z|$; шу сабабли

$$|\bar{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2,$$

бундан

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (64)$$

Векторнинг модули унинг координата ўқларидаги проекциялари квадратларининг йиғиндисидан олинган квадрат илдизга тенг.

Энди боши $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, охири эса $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ координаталарга эга бўлган $\overline{AB}$ векторни қараймиз. Векторнинг ўқдаги проекцияси таърифидан $\overline{AB}$ вектор қуйидаги координаталарга эга бўлиши келиб чиқади:

$$\text{пр}_{Ox}\overline{AB} = x_2 - x_1, \quad \text{пр}_{Oy}\overline{AB} = y_2 - y_1, \quad \text{пр}_{Oz}\overline{AB} = z_2 - z_1.$$

Шу сабабли (61) формулага асосан $\overline{AB}$ векторнинг координата ўқлари бўйича қуйидаги ёйилмасини оламиз:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}.$$

(64) формулага асосан бу векторнинг модулини топамиз:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (65)$$

Бу формула иккита A ва B нуқта орасидаги масофа учун топилган формула билан (I боб, 2-§, 3-пункт) бир хилдир.

4. Кесмани берилган нисбатда бўлиш. M_1M_2 кесмани берилган $\lambda > 0$ нисбатда бўлиш деган сўз, бу кесмада ушбу тенглик ўринли бўладиган M нуқтани топиш демакдир:

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda \text{ ёки } M_1M = \lambda MM_2.$$

Берилган M_1 ва M_2 нуқталар мос равишда x_1, y_1, z_1 ва x_2, y_2, z_2 координаталарга эга бўлсин. Изланаётган M нуқтанинг x, y, z координаталарини топамиз. Равшанки, $\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}$ ёки

$$(x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j} + (z - z_1)\mathbf{k} = \lambda[(x_2 - x)\mathbf{i} + (y_2 - y)\mathbf{j} + (z_2 - z)\mathbf{k}].$$

Векторларнинг тенглигидан уларнинг проекцияларининг тенглиги келиб чиқади:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Бу ердан

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{66}$$

Агар M нуқта M_1M_2 кесманинг ўртаси бўлса, у ҳолда $M_1M=$ $=MM_2$ ва демак, $\lambda=1$. Бу ҳолда (66) тенгликлар ушбу кўринишни олади:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}. \tag{66'}$$

Шундай қилиб, *кесма ўртаси координаталарининг ҳар бири унинг боши ва охирининг мос координаталарининг ўрта арифметигига тенг.*

Агар $M_1(x_1;\ y_1)$ ва $M_2(x_2;\ y_2)$ нуқталар Oxy текисликда ётса, у ҳолда (66) ва (66′) формулалар қуйидаги кўринишни олади:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}; \tag{67}$$

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{67'}$$

Мисол. $M_1(1;\ 2)$ ва $M_2(3;\ 4)$ нуқталар берилган. M_1M_2 кесмани $\lambda=1/2$ нисбатда бўлинг.

Ечилиши. $x_1=1$, $y_1=2$, $x_2=3$, $y_2=4$ бўлганлиги учун (67) формулага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x=\frac{1+(1/2)3}{1+1/2}=\frac{5}{3},\quad y=\frac{2+(1/2)4}{1+1/2}=\frac{8}{3}.$$

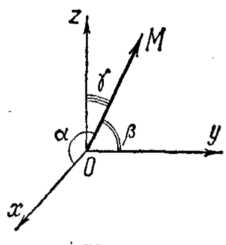
Шундай қилиб, изланаётган нуқта $M(5/3;\ 8/3)$ дир.

5. Векторнинг йўналтирувчи косинуслари. Фазода векторнинг йўналиши бу векторнинг координата ўқлари билан ташкил қиладиган α, β, γ бурчаклар билан аниқланади (50-расм). Бу бурчакларнинг $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ косинуслари *векторнинг йўналтирувчи косинуслари* деб аталади.

Векторнинг проекцияси учун илгари чиқарилган (47) формула ёрдамида йўналтирувчи косинуслар учун ифодаларни келтириб чиқариш осон.

$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$ вектор берилган бўлсин. У ҳолда

$$a_x=\text{пр}_{Ox}\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\cos\alpha,$$
$$a_y=\text{пр}_{Oy}\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\cos\beta,$$
$$a_z=\text{пр}_{Oz}\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\cos\gamma.$$



50-расм.

Бу ердан йўналтирувчи косинуслар учун ифодаларни топамиз:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|a|},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|a|},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|a|}.$$

$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ бўлганлиги учун

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

(68) тенгликларнинг ҳар бирини квадратга кўтариб ва уларни қўшиб, векторнинг йўналтирувчи косинуслари орасидаги ушбу боғланишни топамиз:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

яъни *исталган векторнинг йўналтирувчи косинуслари квадратларининг йиғиндиси бирга тенг.*

Эслатма. Кўриш осонки, исталган a° бирлик векторнинг координата ўқларидаги проекциялари мос равишда унинг йўналтирувчи косинуслари билан устма-уст тушади ва демак, унинг координата ўқлари бўйича ёйилмаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\mathbf{a}^\circ = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma. \tag{69}$$

Мисол. Агар $A(1;\ 2;\ 3)$ ва $B(2;\ 4;\ 5)$ бўлса, $\overline{AB}$ векторнинг координата ўқлари билан ташкил этадиган бурчакларининг косинусларини топинг.

Ечилиши. $\overline{AB}$ векторнинг Ox, Oy, Oz ўқларга проекцияларини топамиз:

$$\text{пр}_{Ox}\overline{AB} = 2 - 1 = 1, \quad \text{пр}_{Oy}\overline{AB} = 4 - 2 = 2, \quad \text{пр}_{Oz}\overline{AB} = 5 - 3 = 2.$$

(65) формула бўйича векторнинг модулини топамиз:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = 3;$$

(68) муносабатлардан векторнинг йўналтирувчи косинусларини топамиз:

$$\cos\alpha = 1/3; \quad \cos\beta = 2/3; \quad \cos\gamma = 2/3.$$

6. Икки векторнинг коллинеарлик шарти. $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ векторлар коллинеар бўлсин. Бу ҳолда $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$, бунда λ—бирор сон. Векторни сонга кўпайтирилганда унинг ўққа проекциялари ҳам шу сонга кўпайтирилганлиги учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$a_x = \lambda b_x, \quad a_y = \lambda b_y, \quad a_z = \lambda b_z. \tag{70}$$

Аксинча, агар (70) тенгликлар ўринли бўлса, у ҳолда $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторлар коллинеардир.

Ҳақиқатан ҳам, агар $\mathbf{a}$ векторнинг барча проекциялари $\boldsymbol{b}$ векторнинг барча проекцияларидан λ марта фарқ қилса, у ҳолда $\mathbf{a}$ векторнинг ўзи $\mathbf{b}$ векторни λ кўпайтувчига кўпайтириш билан ҳосил қилинади, яъни $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторлар коллинеардир. (70) тенгликлар $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторларнинг проекциялари пропорционаллигини кўрсатади. Шундай қилиб, *иккита a ва b векторлар коллинеар бўлиши учун уларнинг проекциялари пропорционал бўлиши зарур ва кифоядир.*

(70) тенгликларни кўпинча қуйидагича ёзилади:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \tag{71}$$

5-§. СКАЛЯР, ВЕКТОР ВА АРАЛАШ КЎПАЙТМАЛАР

1. Скаляр кўпайтма. 3-§, 2-пунктда векторни сонга кўпайтириш қаралган эди. Физика ва механиканинг турли масалаларини қараётганимизда биз шунингдек, векторни векторга кўпайтириш амалига дуч келамиз. Бироқ сонларни кўпайтиришда доимо яна сон ҳосил бўлишидан фарқли ўлароқ, векторларни кўпайтиришда натижа вектор ҳам, сон ҳам бўлиши мумкин. Шунга мувофиқ, векторларни кўпайтиришнинг икки тури—скаляр ва вектор кўпайтма қаралади.

Аввал скаляр кўпайтиришни кўриб чиқамиз.

$\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб, кўпайтирилувчи векторлар модулларининг бу векторлар орасидаги φ бурчак косинусига кўпайтмасига тенг сонга айтилади (51-расм).

Скаляр кўпайтма $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ билан белгиланади. Шундай қилиб, таърифга кўра

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi. \tag{72}$$

Ечилиши векторларни скаляр кўпайтиришга келтириладиган физик масалани қараймиз. M моддий нуқта A нуқтадан B нуқтага томон тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатлансин ва бунда l га тенг йўлни ўтган бўлсин. Айтайлик, M нуқтага F куч таъсир этаётган бўлиб, унинг катталиги ва йўналиши ўзгармас ҳамда нуқтанинг кўчиш йўналиши билан α бурчак ташкил қилсин (52-расм).

Физикадан маълумки, бунда F кучнинг l участкада бажарадиган E иши $E=Fl\cos\alpha$ га тенг. Агар кўчиш вектори $\mathbf{l}$ ни киритадиган бўлсак, у ҳолда скаляр кўпайтманинг таърифига асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

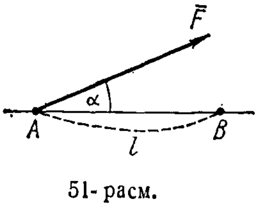
$$\mathbf{E}=\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{l}.$$

Тўғри чизиқли йўл участкасида ўзгармас кучнинг бажарган иши куч векторининг кўчиш векторига скаляр кўпайтмасига тенг.

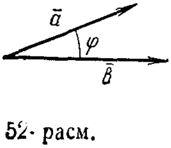
Скаляр кўпайтмани аниқлайдиган (72) формулага бошқача кўриниш бериш мумкин.

$|\mathbf{b}|\cos\varphi$ кўпайтма $\mathbf{b}$ векторнинг а вектор билан аниқланадиган ўққа проекцияси ($\text{пр}_a\mathbf{b}$ билан белгиланади), $|a|\cos\varphi$ эса а векторнинг $\mathbf{b}$ вектор ўқига проекцияси бўлганлиги учун (53-расм):

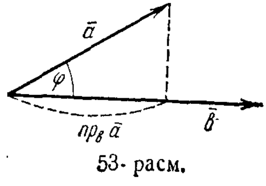
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$$



51-расм.



52-расм.



53-расм.

тенгликдан

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\,\text{пр}_a\mathbf{b}=|\mathbf{b}|\,\text{пр}_b a \tag{73}$$

келиб чиқади.

Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси бу векторлардан бирининг модулини иккинчи векторнинг бу векторга проекциясига кўпайтмасига тенг.

(73) муносабатдан бир векторнинг иккинчи вектор йўналишига проекцияси учун ифодани топамиз:

$$\text{пр}_a\,\mathbf{b}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|},\quad \text{пр}_b\,\mathbf{a}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}. \tag{74}$$

Хусусий ҳолда a бирлик вектор, яъни $|\mathbf{a}|=1$ бўлса, у ҳолда

$$\text{пр}_a\mathbf{b}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{1}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}. \tag{74'}$$

Векторнинг бирлик векторга проекцияси бу векторларнинг скаляр кўпайтмасига тенг.

Скаляр кўпайтманинг баъзи хоссаларини кўриб чиқамиз.

1°. *Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси ўрин алмаштириш хоссасига эга:*

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}.$$

Бу хосса скаляр кўпайтманинг таърифидан бевосита келиб чиқади:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi,\quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{a}|\cos\varphi,$$

демак, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$.

2°. *Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси скаляр кўпайтувчига нисбатан группалаш хоссасига эга, яъни*

$$\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(\lambda\,\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(\lambda\,\mathbf{b}).$$

Бу тенгликни исботлашда $\lambda>0$ ҳол билан чекланамиз. $\lambda>0$ бўлганда **a** ва **b** векторлар орасидаги бурчак $\lambda\mathbf{a}$ ва **b** векторлар орасидаги бурчакка тенг бўлганлиги учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\lambda|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi,\ (\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=|\lambda\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi=\lambda|\mathbf{a}||b|\cos\varphi.$$

Демак, $\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$. Ушбу $\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b})$ тенглик ҳам шунга ўхшаш исботланади.

3°. *Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси тақсимот хоссасига эга:*

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}.$$

Ҳақиқатан ҳам, (73) формулага ва проекцияларнинг хоссаларига асосан қуйидагига эгамиз: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{c}|\cdot\text{пр}_c(\mathbf{a}+\mathbf{b})=$ $=|\mathbf{c}|(\text{пр}_c\mathbf{a}+\text{пр}_c\mathbf{b})=|\mathbf{c}|\cdot\text{пр}_c\mathbf{a}+|\mathbf{c}|\text{пр}_c\mathbf{b}=\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$.

4°. *Агар икки векторнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлса, у ҳолда ё кўпайтирилувчи векторлардан бири нолга* *тенг, ё улар орасидаги бурчак косинуси нолга тенг, яъни бу ҳолда векторлар перпендикуляр.*

Аксинча, агар $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ бўлса, у ҳолда $\cos\varphi = 0$ ва демак, векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг.

Шундай қилиб, *нолга тенг бўлмаган икки вектор перпендикуляр бўлиши учун уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлиши зарур ва кифоядир.*

Энди векторнинг ўзининг ўзига скаляр кўпайтмасини қараймиз. Бундай кўпайтма *векторнинг скаляр квадрати* деб аталади:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|\cos 0 = |\mathbf{a}||\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|^2.$$

Векторнинг скаляр квадрати $\mathbf{a}^2$ билан белгиланади. Шундай қилиб,

$$\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2, \tag{75}$$

яъни *векторнинг скаляр квадрати унинг модулининг квадратига тенг.*

Вектор скаляр квадратининг (75) формуладан келиб чиқадиган қизиқарли хоссасини қайд этиб ўтамиз. Агар a векторни скаляр квадратга кўтариб, сўнгра a^2 дан квадрат илдиз олинса, у ҳолда дастлабки вектор эмас, балки унинг модули $|\mathbf{a}|$ келиб чиқади, бу (75) формуладан кўриниб турибди. Шундай қилиб, квадратга кўтариш ва кейин илдиз чиқариш амаллари бир-бирини йўқотмайди: $\sqrt{\mathbf{a}^2} \neq \mathbf{a}$, $\sqrt{\mathbf{a}^2} = |\mathbf{a}|$.

Мисол. $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ вектор берилган, бунда $|\mathbf{a}| = 4$, $|\boldsymbol{b}| = 5$. **a** ва **b** векторлар орасидаги бурчак 60° га тенг. **c** векторнинг модулини ҳисобланг.

Ечилиши. (75) формуладан фойдаланиб, $\mathbf{c}^2 = |\boldsymbol{c}|^2$ ни оламиз, бундан

$$|\boldsymbol{c}| = \sqrt{\boldsymbol{c}^2} = \sqrt{(2\mathbf{a} + 3\mathbf{b})^2} = \sqrt{4\mathbf{a}^2 + 12\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 9\boldsymbol{b}^2}.$$

Сўнгра

$$\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2 = 4^2 = 16,\ \boldsymbol{b}^2 = |\boldsymbol{b}|^2 = 5^2 = 25,\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi = 4\cdot 5\cdot\cos 60^\circ = 10$$

бўлганлиги учун

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{4 \cdot 16 + 12 \cdot 10 + 9 \cdot 25} = \sqrt{409} \approx 20{,}22.$$

2. Скаляр кўпайтманинг кўпайтувчи векторларнинг проекциялари орқали ифодаланиши. Ушбу икки вектор берилган бўлсин:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \text{ ва } \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}.$$

Бундай ҳолда

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \cdot (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = \\ &= a_xb_x\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + a_yb_x\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + a_zb_x\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} + a_xb_y\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + a_yb_y\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + \\ &+ a_zb_y\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} + a_xb_z\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} + a_yb_z\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} + a_zb_z\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Қавсларни очишда биз скаляр кўпайтманинг тақсимот қонунидан фойдаландик.

Бирлик векторларнинг скаляр квадратлари бўлганликлари учун

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$$

бўлишини ва ўзаро перпендикуляр векторларнинг скаляр кўпайтмалари бўлганликлари учун

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=0$$

бўлишини эътиборга олиб, икки векторнинг скаляр кўпайтмаси учун узил-кесил ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (76)$$

Икки векторнинг скаляр квадрати уларнинг бир исмли проекциялари жуфт-жуфт кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.

Юқорида биз $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторлар перпендикуляр бўлиши учун зарурий ва етарли шарт бўладиган $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ ни таърифлаган эдик. Икки векторнинг перпендикулярлик шарти (76) формулага асосан қуйидаги кўринишни олади:

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0. \qquad (77)$$

Икки вектор ўзаро перпендикуляр бўлиши учун уларнинг бир исмли проекцияларининг жуфт-жуфт кўпайтмалари йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва кифоядир.

Мисол. m нинг қандай қийматида $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ вектор $\mathbf{b}=\mathbf{i}-5\mathbf{j}+m\mathbf{k}$ векторга перпендикуляр бўлади?

Ечилиши. Векторларнинг перпендикулярлик шарти (77) дан қуйидагига эгамиз:

$$2\cdot 1+3\cdot(-5)+(-1)\cdot m=0,$$

бундан $m=-13$.

3. Икки вектор орасидаги бурчак косинуси. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси ифодаси $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$ дан

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \qquad (78)$$

ни топамиз. Скаляр кўпайтмани ва векторларнинг модулларини уларнинг проекциялари орқали (64) ва (76) формулалар бўйича ифодалаб, векторлар орасидаги бурчак косинуси учун ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (79)$$

Мисол. $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ва $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ векторлар орасидаги бурчак косинусини ҳисобланг.

Ечилиши. (79) формуладан қуйидагини топамиз:

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot 2+1\cdot 2+(-1)\cdot 1}{\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{7}{3\sqrt{11}}\approx 0{,}703.$$

4. **Вектор кўпайтма**. Энди векторларни кўпайтиришнинг иккинчи турини ўрганишга киришамиз.

a векторнинг b вектoрга вектор кўпайтмаси деб қуйидагича аниқланадиган с *векторга айтилади*:

1) с *векторнинг модули сон жиҳатдан кўпайтирилувчи* a *ва* b *векторларни томонлар қилиб ясалган параллелограммнинг юзига тенг, яъни*

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}); \qquad (80)$$

2) с *вектор иккала кўпайтирилувчи векторга перпендикуляр;*

3) с *векторнинг йўналиши шундайки, агар унинг охиридан қаралса, у ҳолда* a *вектордан* b *векторга томон энг қисқа йўл билан бурилиш соат стрелкаси айланишига қарама-қарши йўналишда кўринади* (54-расм).

a нинг *b* га вектор кўпайтмаси $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ билан белгиланади.

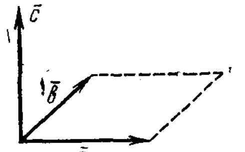
Энди ечилиши икки векторнинг вектор кўпайтмасига олиб келадиган физик масалани қараймиз.

Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм нуқтасининг тезлиги қандай ҳисобланишини кўрсатамиз (55-расм). Айтайлик, қаттиқ жисм қўзғалмас ўқ атрофида ω бурчак тезлик билан айланаётган бўлсин. Бурчак тезлик вектори ω ни киритамиз. Бу вектор жисмнинг айланиш ўқи бўйлаб шундай томонга йўналганки, у томондан қаралганда жисмнинг айланиш йўналиши соат стрелкасининг ҳаракатланиш йўналишига қарама-қаршидир.

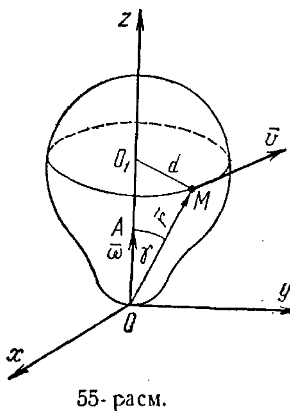
M — жисмнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Бу нуқтанинг тезлиги жисм айланаётганда шу нуқта чизадиган айланага уринма бўйлаб йўналган. Бунда айлана текислиги айланиш ўқига перпендикулярдир. M нуқта тезлигининг катталиги бурчак тезлик модули $|\omega|$ нинг M нуқтадан айланиш ўқигача бўлган d масофага кўпайтмасига тенг, яъни

$$|\mathbf{v}| = |\omega| d. \qquad (81)$$

Айланиш ўқида ихтиёрий O нуқтани оламиз ва ундан $\overline{OA} = \omega$ ва $\overline{OM} = \mathbf{r}$ векторларни қўямиз. ω ва $\mathbf{r}$ векторлар орасидаги бурчакни γ билан белгилаймиз. У ҳолда OO_1M учбурчакдан $d = |\mathbf{r}|\sin\gamma$ ни ҳосил қиламиз (55-расмга қаранг).



54- расм.



55- расм.

d нинг бу қийматини (81) формулага қўйиб, қўйидагини топамиз:

$$|\mathbf{v}| = |\boldsymbol{\omega}|\,|\mathbf{r}|\,\sin\gamma.$$

M нуқтанинг $\mathbf{v}$ тезлиги $\boldsymbol{\omega}$ ва $\mathbf{r}$ векторларга перпендикуляр ва $\mathbf{v}$ векторнинг охиридан қаралганда $\boldsymbol{\omega}$ дан $\mathbf{r}$ га томон энг қисқа бурилиш соат стрелкасининг ҳаракатига қарама-қарши йўналишда кўринади.

Шу сабабли вектор кўпайтманинг таърифига асосан қуйидагига эгамиз*:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \tag{82}$$

Энди вектор кўпайтманинг асосий хоссаларини кўриб чиқамиз.

1° *Кўпайтувчиларнинг ўринлари алмаштирилганда вектор кўпайтманинг ишораси ўзгаради, модули эса сақланади.* Шундай қилиб, вектор кўпайтма ўрин алмаштириш хоссасига эга эмас.

Ҳақиқатан ҳам, вектор кўпайтманинг таърифидан $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ва $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ векторлар бир хил модулга эгалиги, коллинеарлиги, лекин қарама-қарши томонларга йўналганлиги келиб чиқади. Шу сабабли $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ва $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ векторлар қарама-қарши векторлардир ва демак,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

2°. *Вектор кўпайтма скаляр кўпайтувчига нисбатан группалаш хосасига эга, яъни*

$$\lambda\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b}).$$

Бу хоссанинг исботи вектор кўпайтманинг таърифидан бевосита келиб чиқади. Биз буни масалан, $\lambda > 0$ бўлган ҳол учун кўрсатамиз. Қуйидагига эгамиз:

$$|\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \lambda|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \lambda(\mathbf{a})\,|\mathbf{b}|\,\sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}});$$

$$|(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b}| = |\lambda\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin(\widehat{\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \lambda|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}).$$

$\lambda\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ вектор $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторларга перпендикуляр. $(\lambda\,\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ вектор ҳам $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторларга перпендикуляр, чунки $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$, $\lambda\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторлар битта текисликда ётади. Демак, $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ ва $(\lambda\,\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ векторлар коллинеардир. Равшанки, уларнинг йўналишлари ҳам устма-уст тушади. Шу сабабли $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\,\mathbf{a}) \times \mathbf{b})$. $\lambda < 0$ бўлган ҳол ҳам шунга ўхшаш исботланади**.

3°. *Вектор кўпайтма тақсимот қонунига эга*, яъни

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

Бу формуланинг келтириб чиқарилишини биз бу ерда қарамаймиз.

---

* $\boldsymbol{\omega}$ ва $\mathbf{r}$ векторларнинг қўйилиш нуқтаси O ни айланиш ўқида ихтиёрий танлаш мумкин, бунда $\mathbf{r}$ ва γ ўзгаради, лекин $|\mathbf{r}|\,\sin\gamma = d$ кўпайтма ўзгармас бўлиб қолади.

** $\lambda = 0$ бўлганда группалаш хоссасининг ўринлилиги равшан.

4°. *Агар икки векторнинг вектор кўпайтмаси ноль-векторга тенг бўлса, у ҳолда ё кўпайтирилувчи векторлароан бири ноль-векторга тенг, ё улар орасидаги бурчакнинг синуси нолга тенг, яъни бу векторлар коллинеардир.*

Аксинча, агар иккита нолмас вектор коллинеар бўлса, у ҳолда уларнинг вектор кўпайтмаси ноль-векторга тенг.

Шундай қилиб, *иккита нолмас* **a** *ва* **b** *векторлар коллинеар бўлиши учун уларнинг вектор кўпайтмаси ноль-векторга тенг бўлиши зарур ва кифоядир.*

Бундан, хусусан, векторнинг ўз-ўзига вектор кўпайтмаси ноль-векторга тенглиги келиб чиқади: $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=0$.

1-мисол. $(2\mathbf{a}+3\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-2\mathbf{b})$ ни топинг.

Ечилиши. Қуйидагига эгамиз:
$(2\mathbf{a}+3\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-2\mathbf{b})=2\mathbf{a}\times\mathbf{a}+3\mathbf{b}\times\mathbf{a}-4\mathbf{a}\times\mathbf{b}-6\mathbf{b}\times\mathbf{b}=7\mathbf{b}\times\mathbf{a}$, чунки $\mathbf{a}\times\times\mathbf{a}=0$, $\mathbf{b}\times\mathbf{b}=0$ ва $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$.

2-мисол. $\overline{OA}$ ва $\overline{OB}$ векторларда $OACB$ параллелограмм ясалган. $\overline{OE}$ ва $\overline{OC}$ томонлари мос равишда $OACB$ параллелограммнинг диагоналларига тенг бўлган $OCDE$ параллелограммнинг юзини ҳисобланг, бунда $|\overline{OA}|=3$, $|\overline{OB}|=4$ ва $(\widehat{\overline{OA},\overline{OB}})=\pi/3$ (56-расм).

Ечилиши. Вектор кўпайтманинг таърифига асосан

$$S_{OCDE}=|\overline{OE}|\times|\overline{OC}|.$$

$\overline{OE}=\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$ ва $\overline{OC}=\overline{OA}+\overline{OB}$ бўлганидан,

$$S=|(\overline{OB}-\overline{OA})\times(\overline{OB}+\overline{OA})|=|\overline{OB}\times\overline{OB}-\overline{OA}\times\overline{OB}+\overline{OB}\times\overline{OA}-\overline{OA}\times\times\overline{OA}=|-\overline{OA}\times\overline{OB}+\overline{OB}\times\overline{OA}|=2|\overline{OB}\times\overline{OA}|=2|\overline{OB}|\cdot|\overline{OA}|\cdot\sin\frac{\pi}{3}=$$

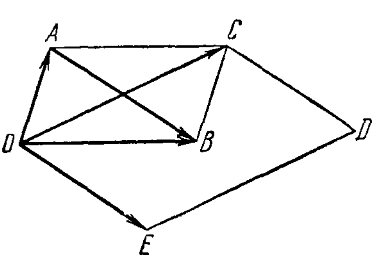
$$=2\cdot3\cdot4\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}\approx20{,}78 \text{ кв бирл.}$$

5. Вектор кўпайтманинг кўпайтирилувчи векторларнинг проекциялари орқали ифодаланиши. Ушбу иккита вектор берилган бўлсин:

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k},\ \mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}.$$

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ вектор кўпайтманинг a_x, a_y, a_z ва b_x, b_y, b_z проекциялар орқали ифодасини топамиз. Дастлаб **i**, **j**, **k** бирлик векторларнинг барча жуфт-жуфт вектор кўпайтмаларини топамиз. Коллинеар векторларнинг вектор кўпайтмаси ноль-векторга тенг бўлганлиги учун:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0.$$

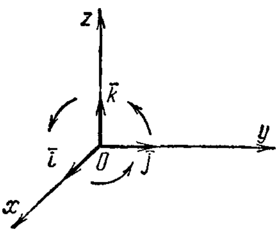


56-расм.

Энди масалан, $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ кўпайтмани қараймиз. Унинг модулини топамиз:

$$|\mathbf{i}\times\mathbf{j}|=|\mathbf{i}||\mathbf{j}|\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

$\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ вектор $\mathbf{i}$ ва $\mathbf{j}$ векторлар текислигига перпендикуляр тўғри чизиқда, яъни Oz ўқда жойлашган. Бу вектор Oz ўқнинг



57- расм.

мусбат йўналишига томон йўналган, чунки шунда **i** дан **j** га томон энг қисқа йўл билан бурилиш $\boldsymbol{i}\times\mathbf{j}$ векторнинг охиридан қаралганда соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда бўлади (57- расм). Бундан бу вектор **k** вектор билан устма-уст тушиши келиб чиқади:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}. \tag{84}$$

Равшанки,

$$\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}. \tag{84'}$$

Шу каби мулоҳазалар юритиб, қуйидагиларга ишонч ҳосил қилишимиз мумкин:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i},$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j},\quad \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}. \tag{84''}$$

Энди $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ кўпайтмани қараймиз.

Вектор кўпайтманинг 3° ва 4° хоссаларидан ҳамда (84), (84′) ва (84″) тенгликлардан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b}&=(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\times(b_x\mathbf{i}\times b_y\mathbf{j}+b_k\mathbf{k})=a_xb_x\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_yb_x\mathbf{j}\times\mathbf{i}+\\&+a_zb_x\mathbf{k}\times\mathbf{i}+a_xb_y\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_yb_y\mathbf{j}\times\mathbf{j}+a_zb_y\mathbf{k}\times\mathbf{j}+a_xb_z\mathbf{i}\times\mathbf{k}+\\&+a_yb_z\mathbf{j}\times\mathbf{k}+a_zb_z\mathbf{k}\times\mathbf{k}=a_yb_x(-\mathbf{k})+a_zb_x\mathbf{j}+a_xb_y\mathbf{k}+a_zb_y(-\mathbf{i})+\\&+a_xb_z(-\mathbf{j})+a_yb_z\mathbf{i}=(a_yb_z-a_zb_y)\mathbf{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Қавслар ичида турган ифодалар иккинчи тартибли детерминантлардир /1- §, 1- пунктга қаранг/. Шу сабабли

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\mathbf{k}.$$

Ҳосил қилинган бу ифодани учинчи тартибли детерминантнинг биринчи сатр элементлари бўйича ёйилмаси ҳақидаги хоссага асосан узил-кесил қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \tag{85}$$

1- мисол. $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ва $\mathbf{b}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ векторларнинг вектор кўпайтмасини топинг.

Е ч и л и ш и. (85) формулага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & -4\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -4\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}\mathbf{k}=-13\mathbf{i}+5\mathbf{j}-11\mathbf{k}.$$

2- мисол. Учлари $A(2;\ 3;\ 1)$, $B(5;\ 6;\ 3)$, $C(7;\ 1;\ 10)$ нуқталарда жойлашган учбурчакнинг юзини ҳисобланг.

Е ч и л и ш и. Учбурчакнинг томонлари билан устма-уст тушадиган $\overline{AB}$ ва $\overline{AC}$ векторларни қараймиз: $\overline{AB}=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\overline{AC}=5\mathbf{i}-2\mathbf{j}+9\mathbf{k}$.

Иккита векторнинг вектор кўпайтмасининг модули бу векторларни томонлар сифатида олиб ясалган параллелограммнинг юзига тенг бўлгани учун учбурчакнинг юзи $\overline{AB} \times \overline{AC}$ вектор кўпайтма модулининг ярмига тенг, яъни $S_\Delta = \frac{1}{2}\left| \overline{AB} \times \overline{AC} \right|$.

Дастлаб $\overline{AB} \times \overline{AC}$ вектор кўпайтмани топамиз:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 9 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 31\mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 21\mathbf{k}.$$

Демак,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|31\mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 21\mathbf{k}| = \frac{1}{2}\sqrt{31^2 + 17^2 + 21^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1691} \approx 20,56$$

кв. бирл.

3- **мисол.** Қаттиқ жисм қўзғалмас ўқ атрофида ўзгармас ω бурчак тезлик билан айланади. Унинг $M(x;\ y;\ z)$ нуқтадаги тезлиги $\mathbf{v}$ га тенг. $\mathbf{v}$ векторнинг координата ўқлари бўйича ёйилмасини топинг.

Ечилиши. 4 пунктда $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ эканлиги кўрсатилган эди ((82)формулага қаранг). Oz ўқ сифатида айланиш ўқини оламиз ва бунда унинг йўналиши ω векторнинг йўналиши билан устма-уст тушади деб ҳисоблаймиз (55-расмга қаранг). У ҳолда $\omega = \omega\mathbf{k}$, $\mathbf{r} = \overline{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ва демак, (85) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ y & z \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ x & z \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{vmatrix}\mathbf{k} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}.$$

6. Уч векторнинг аралаш кўпайтмаси. Энди $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ва $\mathbf{c}$ векторларнинг қуйидагича тузилган кўпайтмасини қараймиз: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$. Бу ерда биринчи иккита векторни вектор кўпайтирилади ва ҳосил бўлган $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ вектор учинчи $\mathbf{c}$ векторга скаляр кўпайтирилади. Бундай кўпайтириш *учта векторнинг вектор-скаляр* кўпайтмаси ёки *аралаш кўпайтмаси* деб аталади. Аралаш кўпайтма, равшанки, бирор сон бўлади.

Аралаш кўпайтманинг кўпайтирилувчи векторларнинг проекциялари орқали ифодасини топамиз. Аввал $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ни аниқлаймиз:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\mathbf{k}.$$

$\mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}$ бўлганлиги сабабли скаляр кўпайтма учун (76) формуладан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(\mathbf{a}\times b)\cdot\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}c_z.$$

Ҳосил қилинган бу ифода $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ детерминантнинг учинчи сатр элементлари бўйича ёйилмаси эканлигини кўриш осон. Шундай қилиб,

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{86}$$

Аралаш кўпайтма сатрларида кўпайтирилувчи векторларнинг мос координаталари турадиган учинчи тартибли детерминантга тенг.

(86) формуладан фойдаланиб, $(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c}=-(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ эканлигини исботлаймиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c}=\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=-(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}.$$

Қуйидаги формулаларни шунга ўхшаш ҳосил қилиш мумкин:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c}=-(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}=$$
$$=-(\mathbf{c}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}.$$

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ аралаш кўпайтмани қисқалик учун $(\mathbf{abc})$ билан белгилаймиз. Бу белгилаш орқали юқоридаги формулаларни энди қуйидагича ёзиш мумкин:

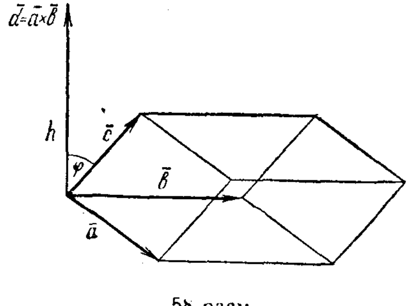
$$(\mathbf{abc})=(\mathbf{bca})=(\mathbf{cab})=-(\mathbf{bac})=-(\mathbf{acb})=-(\mathbf{cba}).$$

7. Аралаш кўпайтманинг геометрик маъноси. Берилган $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ва $\mathbf{c}$ векторларни умумий бошдан бошлаб қўямиз ва бу векторларни қирралар сифатида олиб, параллелепипед ясаймиз (бунда векторлар битта текисликда ётмайди деб фараз қиламиз). Модули $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторларни томонлар сифатида олиб ясалган параллелограммнинг юзи Q га тенг бўлган $\mathbf{d}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ векторни ҳам ясаймиз (58- расм). Скаляр кўпайтманинг таърифига асосан

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|\cdot\cos\varphi=Q\cdot|\mathbf{c}|\cos\varphi,$$

бу ерда φ - қаралаётган $\mathbf{d}$ ва $\mathbf{c}$ векторлар орасидаги бурчак. $\varphi<\pi/2$ деб фараз қилиб ва параллелепипеднинг баландлигини h билан белгилаб, $h=|\mathbf{c}|\cos\varphi$ ни топамиз. Шундай қилиб,

$$(\mathbf{abc})=Qh.$$



58-расм

Бироқ Qh кўпайтма қаралаётган параллелепипеднинг ҳажми V га тенг. Демак, $(\mathbf{abc})=V$.

Агар $\varphi>\pi/2$ бўлса, у ҳолда $\cos\varphi<0$ ва $|\mathbf{c}|\cos\varphi=-h$. Демак, бу ҳолда $(\mathbf{abc})=-V$.

Шундай қилиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз: $(\mathbf{abc})=\pm V$ ёки

$$V=|(\mathbf{abc})|. \tag{87}$$

Уч векторнинг аралаш кўпайтмаси бу векторларни қирралар сифатида олиб ясалган параллелепипеднинг ҳажмига ишора аниқлигида тенг.

8. **Уч векторнинг компланарлик шарти.** Битта текисликда ётувчи ёки битта текисликка параллел векторлар компланар векторлар деб аталишини биз биламиз. Учта a, b, c вектор компланар бўлсин. Умумийликни чекламасдан ,бу векторлар битта текисликда ётади, деб ҳисоблаш мумкин. Бу ҳолда $\mathbf{d} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ вектор бу текисликка перпендикуляр ва демак, c векторга ҳам перпендикуляр; шу сабабли скаляр кўпайтма:

$$\mathbf{d}\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=0.$$

Демак, компланар векторларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг.

Аксинча, агар аралаш кўпайтма $(\mathbf{abc})=0$ бўлса, у ҳолда бу a, b, c векторлар компланардир.

Ҳақиқатан ҳам, агар бу векторлар компланар бўлмаганида эди, у ҳолда уларда $V\neq 0$ ҳажмли параллелепипед ясаш мумкин бўлар эди. Бироқ $V=|(\mathbf{abc})|$ бўлганлиги учун фаразимизга зид улароқ, $(\mathbf{abc})\neq 0$ бўлиб чиқар эди.

Шундай қилиб, *учта* a, b, c *вектор компланар бўлиши учун уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг, яъни* $(\mathbf{abc})=0$ *ёки*

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0 \qquad (88)$$

бўлиши зарур ва кифоядир.

1- мисол. $\mathbf{a} = -\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ ва $\mathbf{c} = -3\mathbf{i}+12\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ векторлар компланар эканлигини кўрсатинг.

Ечилиши. Бу векторларнинг аралаш кўпайтмасини тузамиз:

$$(\mathbf{abc}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-18+48)-3(12-12)+2(24-9)=0.$$

Аралаш кўпайтма нолга тенг бўлиб чиқди, демак, берилган векторлар компланардир.

2-мисол. Учлари $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(5;\ 2;0)$, $B(2;\ 5;\ 0)$, $C(1;\ 2;\ 4)$ нуқталарда бўлган параллелепипеднинг ҳажмини топинг.

Ечилиши. $\overline{OA} = 5\mathbf{i}+2\mathbf{j}$, $\overline{OB}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}$, $\overline{OC}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ векторларни қараймиз. Элементар геометриядан маълумки, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ва $\overline{OC}$ қирраларга ясалган пирамиданинг ҳажми шу қирраларга ясалган параллелепипед ҳажмининг 1/6 ига тенг. Шу сабабли

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|(\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OC})\right|,$$

яъни

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 14 \text{ куб бирл.}$$

(детерминантни ҳисоблашда унинг учинчи устуни элементлари бўйича ёйилмасидан фойдаландик).

6-§. МАТРИЦАЛАР ВА УЛАР УСТИДАГИ АМАЛЛАР

1. Матрица ҳақида тушунча. Детерминантлар ва тенгламалар системаларини ўрганишда биз (1-§ га қаранг) сонлардан тузилган қуйидаги жадвалларни қараган эдик:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Бу жадваллар матрицалар, $a_{11}, a_{12}, \ldots$ сонлар эса матрицанинг элементлари деб аталади.

Агар матрицада сатрлар сони устунлар сонига тенг бўлса, у ҳолда бундай матрицани *квадрат матрица* деб аталади, шу билан бирга унинг сатрлари сони ёки устунлари сони *матрицанинг тартиби* деб аталади. Жумладан, юқорида келтирилган матрицалардан биринчиси иккинчи тартибли матрица, учинчиси эса учинчи тартибли матрицадир. Сатрлари сони устунлари сонига тенг бўлмаган матрица *тўғри бурчакли матрица* деб аталади (юқорида ўртадаги матрица).

Фақат битта устунга ёки битта сатрга эга бўлган матрицаларни ҳам қараймиз. $(a_{11}\ a_{12}\ a_{13})$ матрица *сатр-матрица*, $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ матрица эса *устун-матрица* деб аталади.

Квадрат матрицанинг элементларидан тузилган детерминант бу *матрицанинг детерминанти* деб аталади.

Матрицани қисқалик учун битта ҳарф билан белгилаймиз, масалан,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

бу матрицанинг детерминантини эса чизиқчалар ичига олинган шу ҳарфнинг ўзи билан белгилаймиз. Масалан, A ва B матрицаларнинг детерминантлари қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad |B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Агар квадрат матрицанинг детерминанти нолдан фарқли бўлса, у ҳолда матрицани *айнимаган матрица* деб аталади. Агар матрицанинг детерминанти нолга тенг бўлса, у ҳолда матрицани *айниган матрица* деб аталади.

Масалан, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ матрица айниган матрицадир, чунки

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 0,$$

$B=\begin{pmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{pmatrix}$ матрица эса айнимаган матрицадир, чунки

$$|B|=\begin{vmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{vmatrix}=2\cdot 5-3\cdot 4=-2\neq 0.$$

2. Матрицаларнинг тенглиги. Матрицалар устида амаллар. Агар иккита матрицанинг сатрлари сони бир хил ва устунлари сони бир хил ҳамда уларнинг мос элементлари тенг бўлса, бу матрицалар тенг ($A=B$) матрицалар деб аталади.

Масалан, агар $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$ бўлиб, $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$ бўлса, у ҳолда $A=B$ дир.

Матрицаларни қўшиш. Агар бир хил тартибли квадрат матрицалар, масалан,

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \text{ ва } B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$$

берилган бўлса, у ҳолда уларнинг *йиғиндиси* деб,

$$C=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix} \tag{89}$$

матрицага айтилади.

Сатрлари сони бир хил ва устунлари сони бир хил иккита тўғри бурчакли матрицанинг йиғиндиси ҳам шунга ўхшаш аниқланади.

1- мисол. $\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1 & 3+2\\1+3 & 0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5\\4 & 1\end{pmatrix}.$

2- мисол. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\3 & 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 4\\5 & 4 & 10\end{pmatrix}.$

Матрицаларни қўшиш амали қуйидаги ўрин алмаштириш ва группалаш қонунларига бўйсунишини текшириб кўриш осон:

$$A+B=B+A,\ (A+B)+C=A+(B+C).$$

Барча элементлари нолга тенг бўлган матрица *ноль-матрица* деб аталади ва (0) билан ёки оддий қилиб 0 билан белгиланади.

Матрицаларни қўшишда ноль-матрица сонларни қўшишдаги одатдаги ноль сони ролини ўйнайди:

$$A+0=A.$$

Масалан,

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

Матрицани сонга кўпайтириш. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *матрицанинг* μ *сонга кўпайтмаси* деб,

$$A\mu=\mu A=\begin{pmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} \end{pmatrix}$$

матрицага айтилади.

Биз матрицани сонга кўпайтириш қоидасини иккинчи тартибли квадрат матрица бўлган ҳол учун кўрдик. Учинчи тартибли квадрат матрицалар ва тўғри бурчакли матрицалар сонга худди шундай кўпайтирилади.

Матрицани нолга кўпайтирилганда ноль-матрица ҳосил бўлади:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot 0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицаларни кўпайтириш. Иккинчи ва учинчи тартибли иккита квадрат матрицани кўпайтириш қоидасини кўриб чиқамиз. Ушбу матрицалар берилган бўлсин:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Таърифга кўра *A матрицанинг B матрицага кўпайтмаси* деб, элементлари қуйидагича тузиладиган $C=AB$ матрицага айтилади:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \qquad (90)$$

Агар учинчи тартибли

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

матрицалар берилган бўлса, у ҳолда $C=AB$ матрица қуйидагича тузилади:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} a_{11}b_{13}+ \\ +a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} a_{21}b_{13}+ \\ +a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} a_{31}b_{13}+ \\ +a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}. \qquad (91)$$

Кўриб турибмизки, *кўпайтма матрицанинг* i*-сатри ва* k*-устуни кесишган жойда турадиган элементи биринчи матрицанинг* i*-сатри элементлари билан иккинчи матрицанинг* k*-устуни мос элементлари жуфт кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.*

Масалан, AB кўпайтма матрицанинг иккинчи сатри ва биринчи устунида турган элементи A матрица иккинчи сатри элементларининг B матрица биринчи устуни элементларига кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.

Бу қоида тўғри бурчакли матрицалар учун кўпаювчи матрицанинг устунлари сони кўпайтувчи матрицанинг сатрлари сонига тенг бўлган ҳолда ҳам ўз кучини сақлайди.

3- мисол. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot2+0\cdot2 & 2\cdot2+1\cdot1+0\cdot2 \\ 3\cdot1+1\cdot2+1\cdot2 & 3\cdot2+1\cdot1+1\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$

4- мисол. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}.$

Иккита матрицани кўпайтириш натижасида кўпаювчи матрица нечта сатрга эга бўлса, шунча сатрга ва кўпайтувчи матрица нечта устунга эга бўлса, шунча устунга эга бўлган матрица ҳосил бўлади.

Матрицаларни кўпайтиришга доир яна мисоллар кўрамиз.

5- мисол.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot1-1\cdot3 & 3\cdot1-1\cdot1 \\ -1\cdot1+2\cdot3 & -1\cdot1+2\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

6- мисол.

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot3+1\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+1\cdot2 \\ 3\cdot3+1\cdot(-1) & 3\cdot(-1)+1\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Бу мисоллардан кўриниб турибдики, икки матрицанинг кўпайтмаси, умуман айтганда, ўрин алмаштириш қонунига бўйсунмайди, яъни

$$AB \neq BA.$$

Матрицаларни кўпайтириш ушбу

$$A\,(BC) = (AB)\,C$$

группалаш қонунига ва ушбу

$$(A+B)\,C = AC + BC$$

тақсимот қонунига бўйсунишини текшириб кўриш мумкин.

Иккинчи тартибли матрицаларни кўпайтиришда

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

квадрат матрица алоҳида аҳамиятга эга. Исталган иккинчи тартибли A квадрат матрицани E матрицага кўпайтирилганда яна A матрица ҳосил бўлишини текшириб кўриш осон:

$$AE = EA = A. \qquad (92)$$

E матрица *бирлик матрица* деб аталади.

Учинчи тартибли бирлик квадрат матрица қуйидаги кўринишга эга:

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Равшанки, бирлик матрицанинг детерминанти бирга тенг:

$$|E|=1. \qquad (93)$$

Агар A ва B бир хил тартибли квадрат матрицалар бўлиб, уларнинг детерминантлари $|A|$ ва $|B|$ бўлса, у ҳолда $C=AB$ матрицанинг детерминанти кўпайтирилувчи матрицаларнинг детерминантлари кўпайтмасига тенглигини кўрсатиш мумкин, яъни

$$|C|=|A||B|. \qquad (94)$$

7-мисол. $A=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\3&1\end{pmatrix}$ бўлсин, 5-мисолда

$$C=AB=\begin{pmatrix}0&2\\5&1\end{pmatrix}$$

эканлиги кўрсатилган эди. Бу матрицаларнинг детерминантлари қуйидагичадир:

$$|A|=\begin{vmatrix}3&-1\\-1&2\end{vmatrix}=5,\ |B|=\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix}=-2,\ |C|=\begin{vmatrix}0&2\\5&1\end{vmatrix}=-10.$$

Шундай қилиб, ҳақиқатан ҳам, $|A||B|=|C|$ дир.

Қуйидаги қизиқ фактни қайд қилиб ўтамиз. Маълумки, нолдан фарқли иккита соннинг кўпайтмаси нолга тенг эмас. Матрицалар учун бундай ҳолат ўринли бўлмаслиги мумкин, яъни иккита нолмас матрицанинг кўпайтмаси ноль-матрицага тенг бўлиб қолиши мумкин*.

8-мисол. Агар

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \text{ ва } B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$$

бўлса, у ҳолда

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

3. Тескари матрица. Энди тескари матрица деб аталадиган матрицани қараймиз, бу тушунча фақат квадрат матрица учун киритилади.

Агар A—квадрат матрица бўлса, у ҳолда унга *тескари матрица* деб A^{-1} билан белгиланадиган ва

$$AA^{-1}=E \qquad (95)$$

шартни қаноатлантирадиган матрицага айтилади.

---

* Шунга ўхшаш хоссага, маълумки, векторларнинг скаляр ва вектор кўпайтмалари ҳам эга.

Агар (95) тенглик бажариладиган бўлса, у ҳолда у билан бир вақтда

$$A^{-1}A = E \tag{96}$$

тенглик ҳам бажарилишини исботлаш мумкин.

Энди қуйидаги асосий теоремани келтирамиз.

Теорема. *A квадрат матрица тескари матрицага эга бўлиши учун A матрица айнимаган матрица бўлиши, яъни унинг детерминанти нолдан фарқли бўлиши зарур ва кифоядир.*

Исботи. Зарурийлиги. Фараз қилайлик, A матрица учун A^{-1} тескари матрица мавжуд бўлсин. Бу ҳолда A матрица айнимаган матрица бўлиши лозимлигини, яъни унинг детерминанти $|A|\neq 0$ бўлиши кераклигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, агар $|A|=0$ бўлганида эди, у ҳолда кўпайтманинг детерминанти учун:

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = 0.$$

Бироқ (96) тенгликка асосан бунинг бўлиши мумкин эмас, чунки (96) дан $|AA^{-1}|=|E|=1$ эканлиги келиб чиқади.

Кифоялиги. Соддалик мақсадида исботни учинчи тартибли матрица учун ўтказамиз. Айтайлик,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

айнимаган матрица, яъни унинг детерминанти нолдан фарқли бўлсин:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Бу ҳолда тескари матрица мавжудлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан ҳам, A_{ik} тегишли a_{ik} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси бўлсин. A матрицага тескари A^{-1} матрица қуйидагича ҳосил қилинади.

1) A матрицада унинг ҳар бир a_{ik} элементини бу элементнинг A матрицанинг $|A|$ детерминантига бўлинган A_{ik} алгебраик тўлдирувчиси билан алмаштириб, B матрицани тузамиз:

$$B = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{12}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{21}/|A| & A_{22}/|A| & A_{23}/|A| \\ A_{31}/|A| & A_{32}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix}.$$

2) B матрицада унинг сатрлари ва устунларининг ўринларини алмаштириб, B^* матрицани тузамиз. (B^* матрица B матрица-

га нисбатан *транспонирланган матрица* деб аталади.). Қуйидагига эгамиз:

$$B^*=\begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix}.$$

B^* матрица A матрицага тескари матрица бўлишини исбот қиламиз. Бунинг учун ушбу кўпайтмани тузамиз:

$$AB^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}}{|A|} & \frac{a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}}{|A|} & \frac{a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}}{|A|} \\ \frac{a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}}{|A|} & \frac{a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}}{|A|} & \frac{a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}}{|A|} \\ \frac{a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13}}{|A|} & \frac{a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23}}{|A|} & \frac{a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}}{|A|} \end{pmatrix}. \quad (97)$$

(97) тенгликнинг ўнг томонидаги матрица II бобдаги (18) ва (19) формулаларга асосан бирлик матрицадир. Шундай қилиб, $AB^*=E$, бундан $B^*=A^{-1}$. Шундай қилиб,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix} \quad (98)$$

ва демак, тескари матрица мавжуд.

Иккинчи тартибли

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

матрицага тескари матрицани тузамиз. Бу ерда $A_{11}=a_{22}$, $A_{12}=-a_{21}$, $A_{21}=-a_{12}$, $A_{22}=a_{11}$. У ҳолда

$$B=\begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{12}/|A| \\ A_{21}/|A| & A_{22}/|A| \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{22}/|A| & -a_{21}/|A| \\ -a_{12}/|A| & a_{11}/|A| \end{pmatrix}$$

ва демак,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} a_{22}/|A| & -a_{12}/|A| \\ -a_{21}/|A| & a_{11}/|A| \end{pmatrix}. \quad (98')$$

Мисол. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ матрицага тескари матрицани тузинг.

Ечилиши. Бу матрицанинг детерминанти: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9$. $|A| \neq 0$ бўлганлиги учун A матрица айнимаган матрицадир ва демак, унга тескари матрица мавжуддир.

Алгебраик тўлдирувчиларни ҳисоблаймиз:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

B матрицани тузамиз:

$$B = \begin{pmatrix} -3/9 & 6/9 & -3/9 \\ 4/9 & -2/9 & 1/9 \\ -2/9 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

Бу матрицада сатрлар ва устунларнинг ўринларини алмаштириб,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}$$

матрицани ҳосил қиламиз. Ҳақиқатан ҳам, $AA^{-1} = E$ эканлигини текшириб кўришни китобхонга тавсия қиламиз.

A матрица билан унга тескари A^{-1} матрицанинг детерминантлари қийматлари бўйича ўзаро тескари эканлигини исботлаймиз:

$$|A^{-1}| = 1/|A|, \tag{99}$$

Ҳақиқатан ҳам, (95) формулага асосан $AA^{-1} = E$ га эгамиз. Сўнгра (93) ва (94) формулалардан фойдаланиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |E| = 1,$$

бундан

$$|A^{-1}| = 1/|A|.$$

4. Биринчи даражали тенгламалар системасининг матрицавий ёзуви ва матрицавий ечилиши. 2-пунктда қаралган матрицаларни кўпайтириш қоидасини тенгламаларнинг матрицавий ёзилиши деб аталадиган усулга татбиқ этамиз. Ушбу тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3. \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

Системанинг матрицасини ҳамда номаълумлар ва озод ҳадлар матрица-устунларини қараймиз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Равшанки,

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

Берилган (100) системани матрицаларнинг тенглиги таърифидан (2-пункт) фойдаланиб, қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

ёки қисқароқ ёзилса,

$$AX = C. \tag{101}$$

(101) тенглик *матрицавий тенглама* деб аталади.

Агар (100) система матрицавий формада ёзилган бўлиб, системанинг A матрицаси айнимаган бўлса, у ҳолда бу тенглама қуйидагича ечилади. Унинг иккала томонини A матрицага тескари A^{-1} матрицага кўпайтирамиз:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}C.$$

Матрицаларни кўпайтиришнинг группалаш қонунидан фойдаланиб, бундай ёзиш мумкин:

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}C.$$

Бироқ $A^{-1}A = E$ ва $EX = X$ бўлганлиги учун матрицавий тенгламанинг ечимини қуйидаги кўринишда ҳосил қиламиз:

$$X = A^{-1}C. \tag{102}$$

Мисол. Ушбу тенгламалар системасини матрицавий усулда ечинг:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad &= 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 23, \\ x_2 + 2x_3 &= 13. \end{aligned}\right\}$$

Ечилиши. Бу система матрицавий формада $AX = C$ кўринишда ёзилади. Бу ерда

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

A^{-1} матрица 3-пунктдаги мисолда топилган эди:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

Системанинг ечимини (102) кўринишда ёзамиз:

$$X = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Бу ердан матрицаларнинг тенглиги таърифига асосан $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$ эканлиги келиб чиқади. Номаълумларнинг бу қийматлари берилган системани қаноатлантиришини бевосита текшириб кўриш билан ишонч ҳосил қилишимиз мумкин.

5. Матрица ранги. Энди m та сатр ва n та устунга эга бўлган қуйидаги тўғри бурчакли матрицани қараймиз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lk} & \dots & a_{ln} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Бундай матрицани $m \times n$ ўлчамли матрица деб атаймиз. Бу матрицада ихтиёрий k та устун ва k та сатрни ажратамиз. Ажратилган сатрлар ва устунлар кесишган жойда турган элементлар k-тартибли квадрат матрица ҳосил қилади.

A матрицанинг k-тартибли *минори* деб, бу матрицадан ихтиёрий k та сатр ва k та устунни ажратишдан ҳосил бўлган квадрат матрицанинг детерминантига айтилади.

Масалан, учта сатр ва тўртта устунга эга бўлган

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

матрица учун учинчи тартибли минорлардан бири $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ детерминант бўлиб, у A матрицанинг биринчи, иккинчи, учинчи сатрларини ва биринчи, иккинчи, учинчи устунларини ажратишдан ҳосил бўлади. Иккинчи тартибли минорлардан бири, масалан, $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ детерминант бўлади.

Матрицанинг элементларининг ўзларини биринчи тартибли минорлар деб қараш мумкин. Матрицанинг минорларидан баъзилари нолга тенг, баъзилари нолдан фарқли бўлиши мумкин.

Матрицанинг *ранги* деб, унинг нолдан фарқли минорлари тартибларининг энг каттасига айтилади.

Агар A матрицанинг ранги r га тенг бўлса, бу нарса A матрицада ҳеч бўлмаганда битта нолдан фарқли r-тартибли минор борлигини, бироқ r дан катта тартибли ҳар қандай минор нолга тенглигини англатади. A матрицанинг рангини $r(A)$ билан белгилаймиз.

Ушбу матрицани қарайлик:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Унинг ягона тўртинчи тартибли минори нолга тенг:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(битта сатрининг барча элементлари нолга тенг бўлган детерминант сифатида); учинчи тартибли минорларидан бири эса нолдан фарқли масалан, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$. Демак, берилган матрицанинг ранги 3 га тенг, яъни $r(A) = 3$.

Матрицанинг рангини аниқлашда одатда, кўп сондаги детерминантларни ҳисоблашга тўғри келади. Бу ишни осонлаштириш учун махсус усуллардан фойдаланилади. Бу усулларни баён қилишдан олдин *матрицани элементар алмаштиришлар* ҳақидаги тушунчани киритамиз.

Элементар алмаштиришлар деб қуйидаги алмаштиришларга айтилади:

1) матрицанинг бирор сатри (устуни) элементларини нолдан фарқли бир хил сонга кўпайтириш;

2) матрицанинг бирор сатри (устуни) элементларига бошқа сатри (устуни) нинг мос элементларини бирор сонга кўпайтириб қўшиш;

3) матрицанинг сатрлари (устунлари) ўрнини алмаштириш;

4) матрицанинг барча элементлари нолга тенг бўлган сатрини (устунини) ташлаб юбориш.

Бир-бириданэлементар алмаштиришлар орқали ҳосил қилинадиган матрицалар *эквивалент матрицалар* деб аталади. Эквивалент матрицалар, умуман айтганда, бир-бирига тенг эмас, лекин *эквивалент матрицаларнинг ранглари тенг бўлишини* исботлаш мумкин. Бундан матрицаларнинг рангини ҳисоблашда фойдаланилади.

Мисол. Матрицанинг рангини ҳисобланг:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ечилиши. Берилган матрицанинг биринчи сатри элементларини 2 га бўлиб, ушбу эквивалент матрицани ҳосил қиламиз:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & -3/2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Матрицанинг иккинчи ва учинчи сатрларидан унинг мос равишда 3 ва 5 га кўпайтирилган биринчи сатрини айириб, ушбу матрицани ҳосил қиламиз*:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & -3/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & -9/2 & 7/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & -27/2 & 21/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A_2 матрицанинг учинчи сатридан 3 га кўпайтирилган иккинчи сатрини айириб,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & -3/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & -9/2 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицани ҳосил қиламиз. A_3 матрицада ноллардан иборат сатрни ташлаб юбориб,

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & -3/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & -9/2 & 7/2 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицани ҳосил қиламиз; унинг ранги иккига тенглиги равшан. Демак, берилган матрицанинг ранги ҳам иккига тенг, яъни $r(A) = 2$.

7-§. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИНИНГ УМУМИЙ НАЗАРИЯСИ

2- ва 6-§ ларда чизиқли тенгламалар системаларини ечиш методлари қаралган эди. Бу методлар асосан тенгламалари сони номаълумлари сонига тенг бўлган системалар учун қўлланилади. Бу параграфда биз номаълумлари сони тенгламалари сонига тенг

---

* Сатрларни (устунларни) айириш дейилганда бу сатрларнинг (устунларнинг) тегишли элементларини айириш кўзда тутилади.

бўлиши ҳам, ундан фарқли бўлиши ҳам мумкин бўлган чизиқли тенгламалар системаларини ечишнинг умумий методини кўриб чиқамиз.

1. Чизиқли тенгламалар системалари ҳақида умумий маълумотлар. n та номаълумли m та тенглама системасини қараймиз:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1k}x_k+\ldots+a_{1n}x_n=c_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2k}x_k+\ldots+a_{2n}x_n=c_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{l1}x_1+a_{l2}x_2+\ldots+a_{lk}x_k+\ldots+a_{ln}x_n=c_l, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mk}x_k+\ldots+a_{mn}x_n=c_m. \end{array}\right\} \qquad (103)$$

a_{lk} коэффициентнинг белгиланишидаги биринчи индекс тенглама номерини, иккинчи индекс эса номаълум номерини билдиради. Ҳар бир номаълум индексли битта x ҳарфи билан белгиланган бўлиб, бу индекс номаълумнинг номерини билдиради.

Агар чизиқли тенгламалар системаси ечимга эга бўлса, у *биргаликда*, агар ечимга эга бўлмаса, у *биргаликда эмас* дейилади.

Биргаликда чизиқли тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлса, у *аниқланган*, агар чексиз кўп ечимларга эга бўлса, у *аниқмас* система деб аталади.

Агар иккита биргаликдаги тенгламалар системасидан бирининг ҳар бир ечими иккинчисининг ечими ва аксинча, иккинчисининг ҳар бир ечими биринчисининг ечими бўлса, бу системалар *тенг кучли системалар* деб аталади.

Қуйидаги алмаштиришлар тенгламалар системасини унга тенг кучли системага ўтказишини исботлаш мумкин:

1) исталган иккита тенгламанинг ўринларини алмаштириш;

2) тенгламалардан исталган бирининг иккала томонини нолдан фарқли исталган сонга кўпайтириш;

3) система тенгламаларидан бирининг иккала томонига бошқа бир тенгламанинг исталган ҳақиқий сонга кўпайтирилган мос қисмини қўшиш.

Бу алмаштиришларни ҳам матрицаларни элементар алмаштиришларга қиёс қилиб, *элементар алмаштиришлар* деб атаймиз.

Бир нечта шундай алмаштиришлардан сўнг системада барча коэффициентлари ва озод ҳади нолга тенг бўлган тенглама ҳосил бўлиши мумкин. Бундай тенгламани номаълумларнинг **исталган** қийматлари қаноатлантиргани учун уни ташлаб юбориш мумкин. Бу ҳолда биз берилган системага тенг кучли, лекин ундан битта кам тенгламага эга бўлган системани ҳосил қиламиз.

Агар элементар алмаштиришларни татбиқ қилинганидан сўнг системада чап томонининг барча коэффициентлари нолга тенг, озод ҳади эса нолдан фарқли тенглама ҳосил бўлса, бу нарса номаълумларнинг ҳеч қандай қийматлари бу тенгламани қаноатлантирмаслигини кўрсатади ва, демак, ҳосил бўлган система **биргаликда эмас.** Бинобарин, дастлабки система ҳам биргаликда эмас.

2. Чизиқли тенгламалар системаларини ечишнинг Гаусс методи (номаълумларни кетма-кет йўқотиш методи). Гаусс* методининг моҳияти қуйидагидан иборат. Айтайлик, (103) системада биринчи номаълум олдидаги a_{11} коэффициент нолдан фарқли бўлсин: $a_{11} \neq 0$**.

Дастлаб (103) системанинг биринчи тенгламасидан бошқа барча тенгламаларидан x_1 номаълумни йўқотамиз. Бунинг учун энг аввало биринчи тенгламанинг иккала томонини $a_{11} \neq 0$ коэффициентга бўламиз; у ҳолда берилган системага тенг кучли ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \ldots + \frac{a_{1k}}{a_{11}} x_k + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \frac{c_1}{a_{11}}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{lk}x_k + \ldots + a_{ln}x_n = c_l, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mk}x_k + \ldots + a_{mn}x_n = c_m. \end{array}\right\} \quad (104)$$

Энди (104) системанинг биринчи тенгламасини a_{21} га кўпайтирамиз ва иккинчи тенгламасидан айирамиз. Сўнгра биринчи тенгламани a_{31} га кўпайтирамиз ва учинчи тенгламадан айирамиз ва ҳоказо. Натижада яна берилган системага тенг кучли ушбу янги системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1k}x_k + \ldots + a'_{1n}x_n = c'_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2k}x_k + \ldots + a'_{2n}x_n = c'_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a'_{l2}x_2 + \ldots + a'_{lk}x_k + \ldots + a'_{ln}x_n = c'_l, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mk}x_k + \ldots + a'_{mn}x_n = c'_m. \end{array}\right\} \quad (105)$$

Бу ерда қуйидагича белгилашлар киритилган:

$$a'_{1k} = \frac{a_{1k}}{a_{11}},\ a'_{lk} = a_{lk} - \frac{a_{1k}}{a_{11}} a_{l1};\ l = 2, 3, \ldots, m;\ k = 2, 3, \ldots, n; \quad (106)$$

$$c'_1 = \frac{c_1}{a_{11}},\ c'_l = c_l - \frac{c_1}{a_{11}} a_{l1};\ l = 2, 3, \ldots, m. \quad (107)$$

Энди (105) системанинг иккинчи тенгламасини a'_{22} коэффициентга бўламиз (уни нолдан фарқли деб фараз қиламиз); сўнгра ҳосил бўлган системанинг иккинчи тенгламасини кетма-кет $a'_{32}\ldots$ $\ldots,\ a'_{l2}\ \ldots,\ a'_{m2}$ га кўпайтирамиз ва системанинг биринчи ва иккинчи тенгламаларидан бошқа тенгламаларидан навбати билан айирамиз.

---

* К. Гаусс (1777 — 1855) — йирик немис математиги.

** Агар $a_{11} = 0$ бўлса, у ҳолда ҳар доим номаълумларни шундай қайта номерлаш мумкинки, бунда биринчи номаълум олдидаги коэффициент нолдан фарқли бўлсин.

Биз бу жараённи давом эттира бориб, чап томонидаги барча коэффициентлари нолга тенг, озод ҳади эса нолдан фарқли тенгламани ўз ичига олган системага келсак, у ҳолда бу система, 1-пунктда айтилганидек, биргаликдамас. Система биргаликда бўлган ҳолда биз ё

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1k}x_k + \ldots + b_{1n}x_n = B_1, \\ x_2 + \ldots + b_{2k}x_k + \ldots + b_{2n}x_n = B_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_p + \ldots + b_{pn}x_n = B_p \end{array}\right\} \quad (108)$$

системага (бунда $p < n$), ё

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1k}x_k + \ldots + b_{1n}x_n = B_1, \\ x_2 + \ldots + b_{2k}x_k + \ldots + b_{2n}x_n = B_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k + \ldots + b_{kn}x_n = B_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = B_n \end{array}\right\} \quad (109)$$

системага келамиз. (108) кўринишдаги система *поғонали система*, (109) кўринишдаги система эса *учбурчак система* деб аталади.

Учбурчак система бўлган ҳолда сўнгги тенгламадан $x_n = B_n$ ни топамиз; сўнгра x_n нинг қийматини олдинги тенгламага қўйиб, x_{n-1} ни топамиз ва ҳоказо.

Шундай қилиб, *берилган* (103) *тенгламалар системаси бир қатор элементар алмаштиришларни бажаргандан сўнг* (109) *учбурчак системага келтирилса, бу нарса* (103) *системанинг биргаликда ва аниқланган эканлигини билдиради.*

Агар берилган (103) *система элементар алмаштиришлардан сўнг* (108) *поғонали системага келтирилса, у ҳолда* (103) *система биргаликда ва аниқмасдир.*

Ҳақиқатан ҳам, (103) система тенгламаларининг ҳар бирида $x_{p+1}, \ldots, x_n$ номаълумли ҳадларни ўнг томонга ўтказиб,

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1p}x_p = B_1 - b_{1,p+1}x_{p+1} - \ldots - b_{1n}x_n, \\ x_2 + \ldots + b_{2p}x_p = B_2 - b_{2,p+1}x_{p+1} - \ldots - b_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_p = B_p - b_{p,p+1}x_{p+1} - \ldots - b_{pn}x_n \end{array}\right\}$$

кўринишдаги системани ҳосил қиламиз. *Озод номаълумлар* деб аталадиган $x_{p+1}, \ldots, x_n$ номаълумларга ихтиёрий $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \ldots, \alpha_n$ қийматлар бериб, учбурчак системани ҳосил қиламиз, ундан эса қолган барча $x_p, x_{p-1}, \ldots, x_1$ номаълумларни кетма-кет топамиз. $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \ldots, \alpha_n$ сонлар турли қийматларни қабул қилиши мумкинлигидан, дастлабки (103) система чексиз кўп ечимлар тўпламига эгадир.

1-мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5. \end{aligned}\right\}$$

Е ч и л и ш и. Биринчи тенгламанинг барча ҳадларини $a_{11} = 2$ коэффициентга бўлиб.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 0{,}5x_2 - 0{,}5x_3 &= 0{,}5, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}\right\}$$

системани ҳосил қиламиз. Аввал ҳосил бўлган бу системанинг биринчи тенгламасининг барча ҳадларини 3 га кўпайтирамиз ва иккинчи тенгламасидан айирамиз; сўнгра учинчи тенгламадан биринчи тенгламани айирамиз:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 0{,}5x_2 - 0{,}5x_3 &= 0{,}5, \\ 0{,}5x_2 - 0{,}5x_3 &= -0{,}5, \\ -1{,}5x_2 + 2{,}5x_3 &= 4{,}5. \end{aligned}\right.$$

Иккинчи тенгламанинг барча ҳадларини $a'_{22} = 0{,}5$ га бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 0{,}5x_2 - 0{,}5x_3 &= 0{,}5, \\ x_2 - x_3 &= -1, \\ -1{,}5x_2 + 2{,}5x_3 &= 4{,}5. \end{aligned}\right\}$$

Иккинчи тенгламани — 1,5 га кўпайтирамиз ва учинчи тенгламадан айирамиз. Натижада ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 0{,}5x_2 - 0{,}5x_3 &= 0{,}5, \\ x_2 - x_3 &= -1, \\ x_3 &= 3, \end{aligned}\right\}$$

бундан эса кетма-кет қуйидагиларни топамиз:

$$x_3 = 3,\ x_2 = -1 + 3 = 2,\ x_1 = 0{,}5 - 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3 = 0{,}5 - 1 + 1{,}5 = 1.$$

Шундай қилиб, учбурчак системанинг, бинобарин, унга тенг кучли дастлабки системанинг ечими қуйидагичадир: $x_1 = 1$ $x_2 = 2$; $x_3 = 3$. Берилган система биргаликда ва аниқлангандир.

Бошқа мисолларни Гаусс методи бўйича ечишга киришишдан олдин (103), (104), (105), (108) ва (109) системаларни ёзиб ўтиришнинг ҳеч бир зарурати йўқлигини айтиб ўтамиз. Барча алмаштиришларни бу системаларнинг коэффициентларидан тузилган матрицалар устида бажариш мумкин.

(103) системага ушбу иккита A ва B матрица мос келади:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{23} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ik} & \ldots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ik} & \ldots & a_{in} & c_i \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk} & \ldots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}.$$

A матрица *системанинг матрицаси* деб аталиб, у системанин коэффициентларидан иборат, B матрица *кенгайтирилган матрица* деб аталади ва у системанинг матрицасидан система тенгламаларининг озод ҳадларидан иборат устун билан фарқ қилади (103) системани Гаусс методи билан ечишда системани элементлар алмаштиришлар системанинг кенгайтирилган матрицаси B устида бажариладиган мос элементар алмаштиришлар билан алмаштирилади.

2-мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 - 3x_5 &= 7,\\ 2x_1 \qquad + x_3 \qquad + x_5 &= 4,\\ x_2 \qquad + 2x_4 - x_5 &= 6. \end{aligned}\right\}$$

Ечилиши. Системанинг кенгайтирилган матрицасини тузамиз ва унинг устида Гаусс методида кўрсатилган элементар алмаштиришларни бажарамиз:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 & -3 & 7\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 & -3 & 7\\ 0 & -4 & -7 & 2 & 7 & -10\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 & -3 & 7\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 6\\ 0 & -4 & -7 & 2 & 7 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 & -3 & 7\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 6\\ 0 & 0 & -7 & 10 & 3 & 14 \end{pmatrix}$$

Биз бу ерда қуйидаги алмаштиришларни кетма-кет бажардик: 1) биринчи сатрни 2 га кўпайтирдик ва иккинчи сатрдан айирдик; 2) иккинчи ва учинчи сатрларнинг ўринларини алмаштирдик; 3) учинчи сатрга иккинчи сатрни 4 га кўпайтириб қўшдик.

Сўнгги матрицага ушбу поғонали тенгламалар системаси мос келади:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 - 3x_5 &= 7,\\ x_2 \qquad + 2x_4 - x_5 &= 6,\\ -7x_3 + 10x_4 + 3x_5 &= 14, \end{aligned}\right\}$$

у берилган системага тенг кучлидир. Ҳосил бўлган бу системани қуйидагича қайта ёзиб оламиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 7 + x_4 + 3x_5,\\ x_2 &= 6 - 2x_4 + x_5,\\ 7x_3 &= 14 - 10x_4 - 3x_5. \end{aligned}\right\}$$

Кўриб турибмизки, x_1, x_2, x_3 номаълумларни x_4 ва x_5 орқали ифодалаш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= -2 + \frac{10}{7}x_4 + \frac{3}{7}x_5,\\ x_2 &= 6 - 2x_4 + x_5,\\ x_1 &= 3 - \frac{5}{7}x_4 - \frac{5}{7}x_5. \end{aligned}\right\}$$

x_4 ва x_5 га ихтиёрий қийматлар бериб, x_1, x_2 ва x_3 нинг тегишли қийматларини ҳосил қиламиз. Бу ҳолда x_4 ва x_5 номаълумлар озод номаълумлар бўлади.

Шундай қилиб, берилган система биргаликда ва аниқмасдир. Унинг ечимлари, масалан, $x_5 = 0$, $x_4 = 0$, $x_3 = -2$, $x_2 = 6$, $x_1 = 3$ ёки $x_5 = 7$, $x_4 = 7$, $x_3 = 11$, $x_2 = -1$, $x_1 = -7$ ва ҳоказо.

3-мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3-x_4&=8,\\ 3x_1+2x_3+5x_4&=12,\\ x_1-x_2+x_3\qquad&=4,\\ 8x_1+x_2+5x_3+3x_4&=10. \end{aligned}\right\}$$

Ечилиши. Кенгайтирилган матрицани тузамиз ва унинг сатрлари устида элементар алмаштиришлар бажарамиз:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 8\\ 3 & 0 & 2 & 5 & 12\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 4\\ 8 & 1 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 4\\ 3 & 0 & 2 & 5 & 12\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 4\\ 8 & 1 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 4\\ 0 & -3/2 & 1/2 & 13/2 & 0\\ 0 & -3/2 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & -3 & 1 & 7 & -22 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 4\\ 0 & 1 & -1/3 & -13/3 & 0\\ 0 & -3/2 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & -3 & 1 & 7 & -22 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 4\\ 0 & 1 & -1/3 & -13/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -6 & -22 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 4\\ 0 & 1 & -1/3 & -13/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -22 \end{pmatrix}.$$

Ҳосил қилинган матрицага ушбу тенгламалар системаси мос келади:

$$\left.\begin{aligned} x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4&=4,\\ x_2-\frac{1}{3}x_3-\frac{13}{3}x_4&=0,\\ -6x_4&=0,\\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4&=-22. \end{aligned}\right\}$$

Бу системанинг сўнгги тенгламаси зиддиятлидир, демак, у биргаликда эмас. Бинобарин, бу системага тенг кучли бўлган берилган система ҳам биргаликда эмас.

Бу пунктнинг якунида кейинчалик ҳам керак бўладиган бир изоҳни келтирамиз.

Озод ҳадлари нолга тенг бўлган ушбу чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=0,\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot&\\ a_{m1}a_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (110)$$

Бундай тенгламалар системаси *бир жинсли система* дейилади. Бу система $x_1=0$, $x_2=0, \ldots, x_n=0$ ечимга эга бўлганлиги учун у доимо биргаликдадир. (110) системада тенгламалар сони номаълумлар сонидан кичик бўлсин: $m<n$. Равшанки, бу систе-

мани Гаусс методи билан ечишда биз поғонали системага келамиз, демак, $m < n$ бўлганда (110) система чексиз кўп ечимлар тўпламига эга бўлиб, улар орасида нолмас ечимлар ҳам мавжуд бўлади.

Шундай қилиб, *чизиқли бир жинсли системанинг тенгламалари сони номаълумлари сонидан кичик бўлса, у ҳолда бундай система ҳар доим нолмас ечимларга эга.*

3. n ўлчовли вектор фазо тушунчаси. Биз биламизки, фазодаги вектор сонлар учлиги билан—ўзининг координаталари билан аниқланади: $\mathbf{a} = \{\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n\}$. Агар вектор текисликда ётган бўлса, у сонлар жуфтлиги билан аниқланади: $\mathbf{a} = \{\lambda_1; \lambda_2\}$. Бундан буён векторнинг координаталарини фазода x_1, x_2 ва x_3 билан, текисликда эса мос равишда x_1 ва x_2 билан белгилаш қулай бўлади. $\mathbf{a} = \{x_1; x_2\}$ вектор *икки ўлчовли*, $\mathbf{a}_1 = \{x_1; x_2; x_3\}$ вектор эса *уч ўлчовли вектор* деб аталади.

n ўлчовли вектор тушунчаси шунга ўхшаш тарзда киритилади.

Маълум тартибда берилган n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ҳақиқий сон системаси *n ўлчовли вектор* деб аталади. n ўлчовли векторни қуйидагича ёзамиз: $\mathbf{a} = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сонлар векторнинг *координаталари* деб аталади.

Барча координаталари нолга тенг бўлган вектор *ноль вектор* ёки оддийгина *ноль* деб аталади: $\mathbf{0} = \{0; 0; \ldots; 0\}$.

$\{-x_1; -x_2; \ldots; -x_n\}$ вектор $\mathbf{a} = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ векторга *қарама-қарши вектор* деб аталади ва $-\mathbf{a}$ билан белгиланади.

1-мисол. Ушбу тенгламалар системасини қараймиз:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}a_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}\right\}$$

Айтайлик, $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, $\ldots$, $x_n = \alpha_n$ қийматлар набори бу системанинг ечими бўлсин. Бу ечимни n ўлчовли $\mathbf{X} = \{\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n\}$ вектор сифатида қараш мумкин. Озод ҳадлар қийматлари $b_1, b_2, \ldots, b_m$ наборини m ўлчовли $\mathbf{B} = \{b_1; b_2; \ldots; b_m\}$ вектор сифатида қараш мумкин.

Иккита $\mathbf{a} = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ ва $\mathbf{b} = \{y_1; y_2; \ldots; y_n\}$ векторнинг мос координаталари тенг, яъни $x_i = y_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ бўлса, бу векторларни *тенг* деб аталади: $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Маълумки, текисликда ва фазода векторлар устидаги чизиқли амалларни уларнинг координаталари устидаги тегишли арифметик амаллар билан алмаштириш мумкин. Шунга ўхшаш тарзда n ўлчовли векторлар устидаги чизиқли амалларни киритамиз.

Иккита $\mathbf{a} = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ ва $\mathbf{b} = \{y_1; y_2; \ldots; y_n\}$ векторнинг *йиғиндиси* деб, янги

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \{x_1 + y_1; x_2 + y_2; \ldots; x_n + y_n\}$$

векторга, уларнинг *айирмаси* деб,

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \{x_1 - y_1; x_2 - y_2; \ldots; x_n - y_n\}$$

векторга айтилади.

$a = \{x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n\}$ векторнинг λ сонга кўпайтмаси деб,

$$\lambda a = \{\lambda x_1;\ \lambda x_2;\ \ldots;\ \lambda x_n\}$$

векторга айтилади.

n ўлчовли векторлар устидаги чизиқли амаллар текисликдаги ва фазодаги векторлар устидаги чизиқли амаллар учун аниқланган хоссаларга эга (3-§, 2-пунктга қаранг).

Қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари аниқланган барча n ўлчовли векторлар тўплами *арифметик вектор фазо* деб аталади ва R_n билан белгиланади.

4-§, 1-пунктда текислик ва фазодаги векторларнинг чизиқли боғлиқлиги ва чизиқли эрклилиги, векторларнинг чизиқли комбинацияси тушунчалари киритилган эди. Бу таърифлар ҳеч бир ўзгаришсиз R_n арифметик вектор фазога ҳам ўтказилади.

Масалан, $a_1 = \{x_1^{(1)};\ x_2^{(1)};\ \ldots;\ x_n^{(1)}\}$, $a_2 = \{x_1^{(2)};\ x_2^{(2)};\ \ldots;\ x_n^{(2)}\}$ $\ldots$, $a_k = \{x_1^{(k)};\ x_2^{(k)};\ \ldots;\ x_n^{(k)}\}$ векторлар учун орасида нолга тенг бўлмаганлари ҳам бўлган шундай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ сонлар мавжуд бўлсаки, улар учун

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = 0 \qquad (111)$$

тенглик ўринли бўлса, бу векторлар *чизиқли боғлиқ векторлар* деб аталади.

(111) тенглик векторнинг координаталари учун шунга ўхшаш ушбу тенгликларга тенг кучли:

$$\lambda_1 x_i^{(1)} + \lambda_2 x_i^{(2)} + \ldots + \lambda_n x_i^{(k)} = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (112)$$

Бу ерда пастки индекс координата номерини, юқориги индекс эса вектор номерини билдиради.

2-мисол. Тўрт ўлчовли $a_1 = \{2;\ 3;\ 4;\ 5;\}$, $a_2 = \{1; -2;\ 2; -1\}$ ва $a_3 = \{6;\ 2;\ 12;\ 8\}$ векторлар чизиқли боғлиқдир, чунки $2a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$ тенглик ўринлидир. Ҳақиқатан ҳам, тегишли координаталар учун шунга ўхшаш тенгликлар ўринлидир. Масалан, биринчи координаталар учун $2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 6 = 0$, иккинчи координаталар учун $2 \cdot 3 + 2(-2) + (-1) \cdot 2 = 0$ ва ҳоказо.

Қуйидаги теоремалар ўринлидир.

1-теорема. *R_n фазода n та чизиқли эркли n ўлчовли векторлар мавжуд.*

Исботи. Ушбу n ўлчовли

$$e_1 = \{1;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 0\},\ e_2 = \{0;\ 1;\ 0;\ \ldots;\ 0\},\ \ldots,\ e_n = \{0;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 0;\ 1\}$$

векторларни қараймиз ва уларнинг чизиқли эрклилигини, яъни

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$$

тенглик ёки

$$\lambda_1 \cdot \{1;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 0;\ 0\} + \lambda_2 \cdot \{0;\ 1;\ 0;\ \ldots;\ 0;\ 0\} + \ldots + \lambda_n \{0;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 0;\ 1\} = 0$$

тенглик фақат $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ бўлгандагина ўринли бўлишини кўрсатамиз. Бу ердаги сўнгги тенглик берилган векторларнинг координаталари учун ушбу n та тенглик системасига тенг кучлидир:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \ldots + \lambda_n \cdot 0 = 0, \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 + \ldots + \lambda_n \cdot 0 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \ldots + \lambda_n \cdot 1 = 0. \end{array}\right\}$$

Бу ердан $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ эканлиги келиб чиқади, яъни $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ векторлар чизиқли эрклидир.

2-теорема. *R_n вектор фазода исталган $n+1$ та вектор чизиқли боғлиқдир.*

Исботи. Ушбу $n+1$ та векторни қараймиз:

$$\mathbf{a}_1 = \{x_1^{(1)}; x_2^{(1)}; \ldots; x_n^{(1)}\},\ \mathbf{a}_2 = \{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}; \ldots; x_n^{(2)}\}, \ldots$$
$$\ldots, \mathbf{a}_n = \{x_1^{(n)}; x_2^{(n)}; \ldots; x_n^{(n)}\},\ \mathbf{a}_{n+1} =$$
$$= \{x_1^{(n+1)}; x_2^{(n+1)}; \ldots; x_n^{(n+1)}\}$$

ва

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{a}_n + \lambda_{n+1} \mathbf{a}_{n+1} = 0 \qquad (113)$$

тенглик λ_i ларнинг орасида нолга тенг бўлмаганлари ҳам мавжуд бўлган шартда ўринли бўлиши мумкинлигини кўрсатамиз. (113) муносабат берилган векторларнинг координаталари учун ушбу n та тенглик системасига тенг кучлидир:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 x_1^{(1)} + \lambda_2 x_1^{(2)} + \ldots + \lambda_n x_1^{(n)} + \lambda_{n+1} x_1^{(n+1)} = 0, \\ \lambda_1 x_2^{(1)} + \lambda_2 x_2^{(2)} + \ldots + \lambda_n x_2^{(n)} + \lambda_{n+1} x_2^{(n+1)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1 x_n^{(1)} + \lambda_2 x_n^{(2)} + \ldots + \lambda_n x_n^{(n)} + \lambda_{n+1} x_n^{(n+1)} = 0. \end{array}\right\} \qquad (114)$$

(114) тенгликлар системасини $n+1$ та $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ номаълумли n та тенглама системаси сифатида қараш мумкин.

(114) системада тенгламалар сони номаълумлар сонидан кичик бўлганлиги учун бу система нолмас ечимларга эга (2-пунктдаги изоҳга қаранг).

Шундай қилиб, биз (113) тенглик λ_i ларнинг орасида нолга тенг бўлмаганлари ҳам бўлганда бўлиши мумкинлигини кўрсатдик, бу эса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}$ векторлар чизиқли боғлиқлигини билдиради.

1- ва 2-теоремалардан *R_n фазодаги чизиқли эркли векторларнинг максимал сони n га тенг* бўлиши келиб чиқади.

Вектор фазодаги чизиқли эркли векторларнинг максимал сони бу фазонинг *ўлчами* деб аталади.

Шундай қилиб, R_n фазо n ўлчамга эга; шу сабабли у *n ўлчовли арифметик вектор фазо* деб аталади. Хусусан, текислик векторлари тўплами икки ўлчовли арифметик вектор фазо R_2 ни ҳосил қилади; фазо векторлари тўплами эса уч ўлчовли арифметик вектор фазо R_3 ни ҳосил қилади.

n ўлчовли вектор фазонинг *базиси* деб, бу фазонинг n та чизиқли эркли векторидан иборат исталган тўпламга айтилади.

Шундай қилиб, базиснинг векторлари сони фазонинг ўлчами билан бир хил бўлади. R_n фазонинг базисларидан бири ушбу векторлар бўлади:

$$e_1 = \{1; 0; 0; \ldots ; 0; 0\},\ e_2 = \{0; 1; 0; \ldots ; 0; 0\}, \ldots$$
$$\ldots ; e_n = \{0; 0; 0; \ldots ; 0; 1\}.$$

n ўлчовли вектор фазонинг бу базисидан ташқари яна чексиз кўп базислари мавжудлигини айтиб ўтамиз. Улардан бири, масалан, $a_1 = \{1; 0; 0; \ldots ; 0\}$, $a_2 = \{1; 1; 0; \ldots 0;\}, \ldots$, $a_n = \{1; 1; \ldots ; 1\}$ векторлардан иборат базисдир. Ҳақиқатан ҳам,

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$$

тенглик фақат $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$ бўлгандагина ўринлидир, чунки берилган векторларнинг координаталари учун тузилган ушбу

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda_1 + \lambda_2 + \quad + \lambda_3 \quad + \ldots + \quad \lambda_n = 0, \\
0 \cdot \lambda_1 + \quad \lambda_2 + \lambda_3 \quad + \ldots + \quad \lambda_n = 0, \\
0 \cdot \lambda_1 + \quad 0 \cdot \lambda_2 + \lambda_3 \quad + \ldots + \quad \lambda_n = 0, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
0 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 + \ldots + \lambda_{n-1} + \lambda_n = 0, \\
0 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 + \ldots + 0 \cdot \lambda_{n-1} + \lambda_n = 0.
\end{array}\right\}$$

n та тенглама системаси юқоридаги тенгликка тенг кучли бўлиб, бу системадан $\lambda_n = 0$, $\lambda_{n-1} = 0; \ldots, \lambda_1 = 0$ эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ векторлар чизиқли эрклидир ва, демак, улар R_n да базис ҳосил қилади.

n ўлчовли вектор фазо учун R_2 ва R_3 вектор фазолар учун бўлгани каби ушбу даъво ўринлидир.

n ўлчовли вектор фазонинг ҳар қандай вектори унинг базиси векторларининг чизиқли комбинацияси кўринишида ягона равишда ифодаланиши мумкин:

$$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \ldots + \lambda_n a_n. \tag{115}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ сонлар бу векторнинг берилган базисдаги координаталари деб аталади, (115) тенглик эса a *векторнинг* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *базис бўйича ёйилмаси* деб аталади.

R_n вектор фазода $a = \{x_1; x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ вектор берилган бўлсин.

Унинг

$$a_1 = \{1; 0; 0; \ldots ; 0\},\ a_2 = \{1; 1; 0; \ldots ; 0\}, \ldots,$$
$$a_n = \{1; 1; 1; \ldots ; 1\}$$

базисдаги $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ координаталарини топамиз. (115) формулага кўра қуйидагига эгамиз: $a_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ ёки

$$\{x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n\} = \lambda_1\{1;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 0\} + \lambda_2\{1;\ 1;\ 0;\ \ldots;\ 0\} + \\ + \ldots + \lambda_n\{1;\ 1;\ 1;\ \ldots;\ 1\}.$$

Бу ердан векторни сонга кўпайтириш ва векторлар йиғиндиси таърифларидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\{x_1;\ x_2;\ \ldots\ x_n\} = \{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n;\ \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n;\ \ldots;\ \lambda_n\}.$$

Шундай қилиб, a векторнинг $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$ базисдаги $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ координаталарини аниқлаш учун

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n, \\ x_2 = \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \qquad\quad \lambda_{n-1} + \lambda_n, \\ x_n = \qquad\qquad\qquad \lambda_n \end{array}\right\}$$

тенгламалар системасига эгамиз, уни ечиб эса $\lambda_n = x_n,\ \lambda_{n-1} = x_{n-1} - x_n, \ldots \lambda_1 = x_1 - x_2$ ни топамиз.

Энди шу $a = \{x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n\}$ векторнинг $e_1 = \{1;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 0\}$, $e_2 = \{0;\ 1;\ 0;\ \ldots;\ 0\};\ \ldots;\ e_n = \{0;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 1\}$ базисдаги $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ координаталарини топамиз. Бу ҳолда (115) формулага асосан қуйидагига эгамиз: $a = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \ldots + \mu_n e_n$ ёки

$$\{x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n\} = \mu_1\{1;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 0\} + \mu_2\{0;\ 1;\ 0;\ \ldots;\ 0\} + \\ \ldots\ \mu_n\{0;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 1\}.$$

Демак, $\mu_1 = x_1,\ \mu_2 = x_2, \ldots, \mu_n = x_n$.

Шундай қилиб, R_n фазода n ўлчовли $a = \{x_1;\ x_2;\ \ldots;x_n\}$ вектор учун $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сонлар унинг $e_1,\ e_2, \ldots e_n$ базисдаги координаталари бўлади.

Изоҳ. Арифметик n ўлчовли вектор фазо *чизиқли вектор фазо* деб аталадиган фазонинг хусусий ҳолидир.

Чизиқли вектор фазо деб, қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари аниқланган исталган табиатли $x, y, z, \ldots$ элементлар тўпламига айтилади. Бу қуйидагини англатади: мазкур тўпламнинг исталган иккита элементининг йиғиндиси ва бу тўпламнинг исталган элементининг исталган ҳақиқий сонга кўпайтмаси яна шу тўпламнинг элементидир. Бунда қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари векторлар устида чизиқли амаллар қаноатлантирадиган барча хоссаларни (3- §, 2- пунктга қаранг) қаноатлантириши лозим. Чизиқли фазонинг элементлари арифметик вектор фазонинг элементлари каби векторлар деб аталади. Чизиқли вектор фазо учун унинг элементларининг чизиқли боғлиқлиги ва чизиқли эрклилиги, базис, ўлчам тушунчалари бу тушунчалар арифметик вектор фазо учун қандай киритилган бўлса, шунга ўхшаш киритилади.

Чизиқли фазога мисол сифатида даражаси n дан катта бўлмаган барча кўпҳадлар тўпламини олиш мумкин, бунда қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари сифатида кўпҳадларни одатдагича қўшиш ва уларни сонга кўпайтиришни тушунилади. Бу фазо $n+1$ ўлчамга эга, чунки унинг базиси сифатида $n+1$ ва $x^0=1$, x, x^2, $\ldots, x^n$ элементни олиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, биринчидан, даражаси n дан катта бўлмаган исталган кўпҳадни, равшанки, юқорида кўрсатилган элементларнинг чизиқли комбинацияси кўринишида ифодалаш мумкин, иккинчидан, бу элементлар чизиқли эрклидир Бу эса исталган x учун $\lambda_0 x^n+\lambda_1 x^{n-1}+\ldots+\lambda_{n-1}x+$ $+\lambda_n\cdot 1=0$ тенглик фақат $\lambda_0=\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$ бўлгандагина ўринли бўлиши мумкинлигидан келиб чиқади (акс ҳолда у n тадан кўп бўлмаган илдизга* эга бўлгани ҳолда даражаси n дан катта бўлмаган x нинг исталган қийматида нолга айланмайдиган алгебраик тенглама бўлар эди).

4. Матрицанинг ранги ҳақидаги теорема. m сатр ва n та устунга эга бўлган

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрица берилган бўлсин. Бу матрицанинг устунларини ушбу m ўлчовли векторлар сифатида қараш мумкин:

$$\mathbf{a}_1=\{a_{11};\ a_{21};\ \ldots;\ a_{m1}\},\ \mathbf{a}_2=\{a_{12};\ a_{22};\ \ldots;\ a_{m2}\},\ \ldots$$
$$\ldots,\ \mathbf{a}_n=\{a_{1n};\ a_{2n};\ \ldots;\ a_{m\cdot}\}.$$

Шунга ўхшаш, бу матрицанинг сатрларини ушбу n ўлчовли векторлар сифатида қараш мумкин:

$$\mathbf{a}'_{11}=\{a_{11};\ a_{12};\ \ldots;\ a_{1n}\},\ \mathbf{a}_2=\{a_{21};\ a_{22};\ \ldots;\ a_{2n}\},\ \ldots,\ \mathbf{a}'_m=$$
$$=\{a_{n1};\ a_{m2};\ \ldots;\ a_{mn}\}.$$

Қуйидаги теорема ўринли бўлиб, биз уни исботсиз келтирамиз.

Теорема. *A матрицанинг чизиқли эркли вектор-устунларининг максимал сони унинг чизиқли эркли вектор-сатрларининг максимал сони билан бир хил бўлиб, A матрицанинг ранги $r(A)$ га тенг.*

Бу теоремадан n та вектор R_n фазода базис ҳосил қилиш шартини келтириб чиқариш осон.

Теорема. *R_n фазонинг n та векторидан иборат система базис ҳосил қилиши учун бу векторларнинг координаталаридан тузилган детерминант нолдан фарқли бўлиши зарур ва кифоядир.*

---

* 3:3 бетга қаранг.

Исботи. Зарурийлиги. n та

$$a_1 = \{x_1^{(1)}: x_2^{(1)}; \dots ; x_n^{(1)}\}, \dots , a_n = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots , x_n^{(n)}\}$$

вектор R_n да базис ҳосил қилсин, бинобарин, улар чизиқли эркли бўлсин. Ушбу матрицани қараймиз:

$$A = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

унинг ҳар бир сатрида тегишли векторнинг координаталари турибди. Бу матрица n та эркли вектор-сатрга эга бўлганлиги учун унинг ранги n га тенг. Шу сабабли A матрицанинг ягона n-тартибли минори, яъни бу матрицанинг

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

детерминанти нолдан фарқли.

Кифоялиги. $|A|$ детерминант нолдан фарқли бўлсин: $|A| \neq \neq 0$. Демак, A матрицанинг n-тартибли минори нолдан фарқли ва демак, A матрицанинг ранги n га тенг. Шу сабабли матрицанинг ранги ҳақидаги теоремага асосан $a_k = \{x_1^{(k)}; x_2^{(k)}; \dots ; x_n^{(k)}\}$ ($k = 1, 2, \dots , n$) вектор-сатрлар чизиқли эрклидир, бинобарин, қаралаётган векторлар R фазонинг базисини ҳосил қилади.

Мисол. $a_1 = \{2; 3; 1\}$; $a_2 = \{1; 0; 2\}$ ва $a_3 = \{3; 3; 1\}$ векторлар R_3 фазода базис ҳосил қилиш-қилмаслигини текшириб кўринг.

Ечилиши. Берилган векторларнинг координаталаридан тузилган

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

детерминант нолдан фарқли бўлганлиги учун a_1, a_2 ва a_3 векторлар базис ҳосил қилади

5. n ўлчовли евклид вектор фазоси тушунчаси. 5-§, 1-пунктда текисликдаги ва фазодаги иккита векторнинг скаляр кўпайтмаси тушунчаси киритилиб, унинг хоссалари кўриб чиқилган эди. Бу тушунчани

$$e_1 = \{1; 0; \dots ; 0\}, \; e_2 = \{0; 1; 0; \dots ; 0\}, \dots , e_n = \{0; 0; \dots ; 1\}$$

базисли n ўлчовли вектор фазо бўлган ҳолга умумлаштирамиз. Бу фазонинг ҳар бир $a = \{x_1; x_2: \dots ; x_n\}$ ва $b = \{y_1, y_2; \dots ; y_n\}$ векторлари жуфтига

$$a \cdot b = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \qquad (116)$$

сонни мос қўямиз ва уни *бу векторлгрнинг скаляр кўпайтмаси* деб атаймиз [(76) формула билан таққослаб кўринг].

Шу тариқа аниқланган скаляр кўпайтма текисликдаги ва фазодаги векторлар учун скаляр кўпайтманинг хоссаларига ўхшаш хоссаларга эга.

1°. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ (ўрин алмаштириш хоссаси);

2°. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ (тақсимот хоссаси);

3°. $\lambda\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}(\lambda\mathbf{b})$ (λ сонга нисбатан группалаш хоссаси)

4°. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\geqslant 0$, бунда тенглик белгиси фақат $a=0$ бўлгандагина ўринлидир.

n ўлчовли чизиқли вектор фазода скаляр кўпайтма аниқланган ҳолда бу фазони *n ўлчовли евклид фазоси** деб аталади ва E_n билан белгиланади.

E_n да векторнинг модули тушунчаси текислик ва фазодаги шу тушунчага ўхшаш тарзда киритилади:

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}^2}=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}. \tag{117}$$

(116) муносабатга асосан

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=x_1x_1+x_2x_2+\ldots+x_nx_n=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$$

бўлганлиги учун

$$|a|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}. \tag{118}$$

Скаляр кўпайтма учун қуйидаги тенглик ўринлидир:

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\leqslant|\mathbf{a}||\mathbf{b}|, \tag{119}$$

у *Коши—Буняковский тенгсизлиги*** деб аталади.

Бу тенгсизликни исботлаш учун $a+\lambda\mathbf{b}$ векторни қараймиз, бунда λ—бирор сон. Скаляр кўпайтманинг 4°-хоссасига асосан қуйидагига эгамиз:

$$(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b})(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b})\geqslant 0 \text{ ёки } \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+2\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+\lambda^2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})\geqslant 0.$$

Бу тенгсизликнинг чап томони λ га нисбатан квадрат учҳаддан иборатдир. Исталган λ да бу учҳад манфиймас бўлганидан, унинг дискриминанти мусбат бўлмаслиги лозим, яъни

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})\leqslant 0 \text{ ёки } (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2\leqslant(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}).$$

Шундай қилиб, $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\leqslant\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{bb}}$, бундан (117) формулага асосан $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\leqslant|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ ни ҳосил қиламиз, ана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Изоҳ. (119) муносабатда тенглик белгиси $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторлар чизиқли боғлиқ, яъни $\mathbf{a}=k\mathbf{b}$ бўлганда ва фақат шундагина ўринли бўлиши мумкинлигини кўрсатиш мумкин.

* Евклид (эрамиздан олдинги IV аср)—қадимги грек математиги.

** О. Коши (1789—1857)—француз математиги; В. Я. Буняковский (1804—1889)—рус математиги

n ўлчовли фазода *икки вектор орасидаги бурчак косинусини* (78) формулага қиёс қилиб (5-§, 3-пунктга қаранг), қуйидагича киритамиз:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}.$$

Бу тенглик маънога эга, чунки унинг ўнг томони (119) муносабатга асосан абсолют қиймати бўйича бирдан катта эмас.

n ўлчовли евклид фазосининг иккита $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторининг скаляр кўпайтмаси нолга тенг, яъни $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ бўлса, бу векторлар *ортогонал* (ёки перпендикуляр) деб аталади.

Бу ҳолда, равшанки, $\cos\varphi=0$ ва демак, векторлар орасидаги бурчак $\pi/2$ га тенг. Евклид фазосининг турли базислари орасида векторлари жуфт-жуфт перпендикуляр бўлгачлари алоҳида аҳамиятга эга. Бундай базислар *ортогонал базислар* деб аталади. Агар бунинг устига базис векторларининг модуллари бирга тенг бўлса, бундай базис *ортонормаланган базис* деб аталади.

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ векторлар ортонормаланган базис ташкил қилишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан,

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \begin{cases} 0, \text{ агар } \mathbf{i}\neq\mathbf{j} \text{ бўлса,} \\ 1, \text{ агар } \mathbf{i}=\mathbf{j} \text{ бўлса} \end{cases}$$

эканлигини (116) формуладан фойдаланиб кўрсатиш осон. Масалан,

$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = 1\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0+\ldots+0\cdot 0=0,$$
$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = 1\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0+\ldots+0\cdot 0=1.$$

Уч ўлчовли фазода ортонормаланган базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ векторлардан иборатлигини биз энди биламиз.

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ ортонормаланган базисли n ўлчовли евклид фазоси E_n ни қараймиз. $\mathbf{a}=\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ вектор берилган бўлсин, бу ерда x_i — шу векторнинг берилган базисдаги координаталари. Уч ўлчовли фазо бўлган ҳолдаги каби n ўлчовли фазонинг ҳар бири $\mathbf{a}$ векторига M нуқтани мос қўямиз ва бунда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сонлар наборини тушунамиз. Бу сонлар M нуқтанинг *тўғри бурчакли декарт координаталари* деб аталади ва бундай ёзилади: $M(x_1, x_2; \ldots; x_n)$ Координаталари ноллардан иборат бўлган $O(0; 0; \ldots; 0)$ нуқтани *координаталар боши* деб атаймиз. O координаталар боши билан $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ базис векторлари тўпламини n ўлчовли фазода *тўғри бурчакли декарт координаталар системаси* деб атаймиз.

$A(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ ва $B(y_1; y_2; \ldots; y_n)$ нуқталарни туташтирувчи $\overline{AB}$ вектор сифатида уч ўлчовли фазодаги каби $\overline{AB} = \{x_1-y_1; x_2-y_2; \ldots; x_n-y_n\}$ векторни тушунамиз. Бунда A нуқтани $\overline{AB}$ векторнинг *боши*, B нуқтани эса унинг *охири* деб атаймиз. Агар векторнинг боши $O(0; 0; \ldots; 0)$ координаталар боши билан, охири эса $M(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ нуқта билан уст-ма-уст тушадиган бўлса, у ҳолда $\overline{OM} = \{x_1;\ x_2;\ \ldots\ ;\ x_n\}$ векторни M нуқтанинг *радиус-вектори* деб аталади. Унинг координаталари M нуқтанинг мос координаталари билан бир хил бўлади.

Иккига A ва B нуқта орасидаги масофа d деб, бу нуқталарни туташтирувчи $\overline{AB}$ векторнинг модулини айтамиз. (118) формулага асосан қуйидагига эгамиз:

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

6. Чизиқли тенгламалар системаси ечимининг мавжудлиги ҳақидаги теорема. Чизиқли тенгламалар системасини Гаусс методи билан ечишда мазкур системанинг биргаликда ёки биргаликда эмаслигини аниқлаш ҳақидаги саволга фақат ҳисоблашларнинг охиридагина жавоб бериш мумкин бўлади (2-пунктга қаранг). Бироқ кўпинча (103) кўринишдаги

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{array}\right\}$$

системанинг биргаликдами ёки биргаликдамаслигини аниқлаш ҳақидаги масалани ечимларнинг ўзини топмасдан ҳал этиш муҳим бўлади. Бу саволга ушбу теорема орқали жавоб берилади.

Кронекер — Капелли* теоремаси. (103) *чизиқли тенгламалар системаси биргаликда бўлиши учун система матрицаси*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

нинг ранги унинг

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & c_2 \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

кенгайтирилган матрицасининг рангига тенг бўлиши зарур ва кифоядир.

Исботи. Зарурийлиги. (103) система биргаликда ва λ_1, λ_2, ..., λ_n унинг ечимларидан бири бўлсин. $r(A) = r(B)$ эканлигини исботлаймиз. λ_1, λ_2, ..., λ_n сонларни берилган система-

* Л. Кронекер (1823 — 1891) — немис математиги; А. Капелли (1855 — 1910) — италиялик математик.

даги номаълумларнинг ўрнига қўйиб, ушбу m та тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1n}\lambda_n = c_1, \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2n}\lambda_n = c_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots + a_{mn}\lambda_n = c_m. \end{aligned}\right\} \qquad (120)$$

B матрица устида қуйидаги элементар алмаштиришларни бажарамиз: унинг охирги устунига $-\lambda_1$ га кўпайтирилган биринчи устунини, сўнгра $-\lambda_2$ га кўпайтирилган иккинчи устунини, ..., $-\lambda_n$ га кўпайтирилган n-устунини қўшамиз. У ҳолда B матрица (120) тенгликларга асосан ушбу B' матрицага ўтади:

$$B \to B' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}.$$

Бироқ элементар алмаштиришлар натижасида матрицанинг ранги ўзгармайди (2-пунктга қаранг), шу сабабли $r(B) = r(B')$ матрицанинг сўнгги устуни ноллардан иборат бўлганлиги учун равшанки, $r(B') = r(A)$ ва демак, $r(A) = r(B)$.

Етарлилиги. A ва B матрицалар бир хил рангга эга бўлсин: $r(A) = r(B) = r$. (103) система биргаликда эканлигини исботлаймиз. r-тартибли нолдан фарқли Δ детерминант A матрицанинг ҳам, B матрицанинг ҳам юқори чап бурчагида жойлашган деб фараз қилиш мумкин, яъни

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Бунга номаълумлар ва тенгламаларнинг номерланишини ўзгартириш йўли билан эришиш мумкин. Матрицанинг ранги унинг чизиқли эркли вектор-сатрларининг максимал сонига тенг бўлганлиги учун (4-пунктга қаранг) A ва B матрицаларнинг биринчи r та сатри чизиқли эркли, қолган сатрларининг ҳар бири эса биринчи r та сатрнинг чизиқли комбинацияси сифатида ифодаланиши мумкин. Бу (103) системанинг сўнгги $n-r$ та тенгламаси биринчи r та тенгламанинг натижалари, деган сўздир. Шунинг учун уларни тушириб қолдириш мумкин, берилган система биринчи r та тенгламадан иборат ушбу системага тенг кучлидир:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = c_r. \end{aligned}\right\} \ (120').$$

Ушбу икки ҳол бўлиши мумкин: $r=n$ ёки $r<n$.

Агар $r=n$ бўлса, (120) системанинг тенгламалари сони унинг номаълумлари сонига тенг, шу билан бирга бу системанинг детерминанти нолга тенг эмас. Демак, бу система ягона ечимга, чунончи Крамер формулалари (II боб, 2-§, 2-пунктга қаранг) бўйича топиш мумкин бўлган ечимга эга.

Агар $r<n$ бўлса, у ҳолда тенгламалар сони номаълумлар сонидан кичик. $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ номаълумларни ўз ичига олган ҳадларни тенгламаларнинг ўнг томонларига ўтказиб,

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r=c_1-a_{1,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2r}x_r=c_2-a_{2,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{2n}x_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rr}x_r=c_r-a_{r,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{rn}x_n \end{array}\right\}(120'')$$

системани ҳосил қиламиз. $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ озод номаълумларга $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$ қийматларни бериб, r та $x_1, x_2, \ldots, x_r$ номаълумларга нисбатан r та тенглама системасига келамиз:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r=c_1-a_{1,r+1}\alpha_{r+1}-\ldots-a_{1n}\alpha_n,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2r}x_r=c_2-a_{2,r+1}\alpha_{r+1}-\ldots-a_{2n}\alpha_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rr}x_r=c_r-a_{r,r+1}\alpha_{r+1}-\ldots-a_{rn}\alpha_n. \end{array}\right\}$$

Бу системанинг Δ детерминанти нолдан фарқли бўлганлиги учун у ягона ечимга эга.

$\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$ қийматлар ихтиёрий бўлганлиги учун (120″) система, бинобарин, унга тенг кучли бўлган (103) система ҳам чексиз кўп ечимлар тўпламига эга.

Шундай қилиб, A ва B матрицаларнинг ранглари номаълумлар сонига тенг, яъни $r(A)=r(B)=n$ бўлса, у ҳолда (103) система ягона ечимга эга.

Агар бу матрицаларнинг ранглари ўзаро тенг бўлиб, лекин номаълумлар сонидан кичик, яъни $r(A)=r(B)<n$ бўлса, у ҳолда (103) система чексиз кўп ечимлар тўпламига эга.

7. n та номаълумли чизиқли бир жинсли n та тенглама системаси. n та номаълумли биринчи даражали n та тенгламанинг чизиқли бир жинсли системасини қараймиз:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{2r}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0. \end{array}\right\}\qquad(121)$$

Бу система биргаликда, чунки у $x_1=0,\ x_2=0,\ \ldots,\ x_n=0$ ноль ечимга эга.

Қуйидаги теоремада (121) система ноль ечимдан фарқли ечимларга эга бўладиган шартлар келтирилган.

Теорема. (121) *система нолмас ечимларга эга бўлиши учун унинг детерминанти нолга тенг бўлиши зарур ва кифоядир:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Исботи. Зарурийлиги. Бир жинсли тенгламалар системаси бўлган ҳолда (40) формуладаги (2-§, 2-пунктга қаранг) барча $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ детерминантлар нолга тенг, чунки уларнинг ҳар бири нолга тенг бўлган озод ҳадлардан иборат устунни ўз ичига олади. Шу сабабли (40) тенгликлар мазкур ҳолда қуйидаги кўринишни олади:

$$\Delta \cdot x_1 = 0, \quad \Delta \cdot x_2 = 0, \ \dots, \ \Delta \cdot x_n = 0. \tag{122}$$

Агар (121) система нолмас ечимга эга бўлса, у ҳолда номаълумлардан камида бири нолдан фарқли, масалан, $x_1 \neq 0$. У ҳолда (122) даги биринчи тенгламадан $\Delta = 0$ эканлиги келиб чиқади.

Кифоявийлиги. Энди $\Delta = 0$ бўлсин. У ҳолда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица $r(A) < n$ рангга эга. Бу ҳолда (105-бетга қаранг) система чексиз кўп ечимлар тўпламига эга, яъни нолмас ечими мавжуд.

8-§. ЧИЗИҚЛИ АКСЛАНТИРИШЛАР

1. Асосий тушунчалар. Q текисликда тўғри бурчакли координаталар системаси берилган бўлсин. Ёзувни соддалаштириш ва алмаштиришларни қулайлаштириш мақсадида нуқтанинг координаталарини x ва y орқали эмас, балки x_1 ва x_2 ёки y_1 ва y_2 орқали ва ҳ. к. , асосий ортларни эса $\mathbf{i}$ ва $\mathbf{j}$ ўрнига $\mathbf{e}_1$ ва $\mathbf{e}_2$ орқали белгилаймиз.

x_1 ва x_2 ўзгарувчиларни y_1 ва y_2 ўзгарувчилар билан боғлайдиган ушбу тенгламаларни қараймиз:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2, \\ y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2, \end{aligned} \right\} \tag{123}$$

бу ерда $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ — ўзгармаслар.

Q текисликнинг x_1 ва x_2 координатали ҳар бир M нуқтасига шу текисликнинг y_1 ва y_2 координаталари (123) муносабатлар билан аниқланадиган ягона N нуқтаси мос келади.

N нуқта M нуқтанинг *образи* деб аталади. Агар M нуқта Q текисликда бирор L чизиқни чизадиган бўлса, у ҳолда унинг образи ҳам, умуман айтганда, бирор λ чизиқни чизади. Одатда айтилишича, (123) тенгламалар ёрдамида Q текисликни ўзини-ўзига *акслантириш* ёки *алмаштириш* аниқланади (123) тенгламаларнинг ўнг томонлари x_1 ва x_2 га нисбатан биринчи даражага эга бўлиши муносабати билан бу акслантириш *чизиқли акслантириш* деб аталади. Берилган Ox_1x_2 координаталар системасида чизиқли акслантириш (123) чизиқли акслантиришнинг коэффициентларидан тузилган

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

матрица билан тўлиқ аниқланади.

Агар $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ матрица-устунларини киритиладиган бўлса, у ҳолда (123) тенгламалар системасини қуйидаги матрицали шаклда ёзиш мумкин (6-§, 4-пунктга қаранг).

$$Y = AX. \tag{124}$$

A матрица *чизиқли акслантиришнинг матрицаси*, унинг $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ детерминанти эса *чизиқли акслантиришнинг детерминанти* деб аталади. Агар чизиқли акслантиришнинг матрицаси айнимаган, яъни $|A| \neq 0$ бўлса, у ҳолда у *айнимаган* (ёки *аффин*) *акслантириш* деб аталади. Агар $|A| = 0$ бўлса, у ҳолда акслантириш *айниган акслантириш* деб аталади.

Аффин акслантириш бўлган ҳолда (123) система x_1 ва x_2 га нисбатан бир қийматли ечилади. Крамер формулаларига кўра қуйидагига эгамиз:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} \\ y_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{22}}{|A|} y_1 - \frac{a_{12}}{|A|} y_2,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{21} & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{a_{21}}{|A|} y_1 + \frac{a_{11}}{|A|} y_2.$$

Шундай қилиб,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_{22}}{|A|} y_1 - \frac{a_{12}}{|A|} y_2, \\ x_2 &= -\frac{a_{21}}{|A|} y_1 + \frac{a_{11}}{|A|} y_2. \end{aligned}\right\} \tag{125}$$

(125) тенгламалардан кўринадики, аксинча, ҳар бир $N(y_1; y_2)$ нуқтага ягона $M(x_1; x_2)$ нуқта, чунончи образи N нуқта бўлган M нуқта мос келади. Шундай қилиб, аффин акслантириш Q текисликнинг ўз-ўзига бир қийматли акслантирилишини аниқлайди. (125) тенгликлардан тескари акслантириш ҳам аффин акслантириш, унинг матрицаси эса A матрицага тескари матрица эканлиги келиб чиқади. (6-§, 3-пунктга қаранг):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{22}/|A| & -a_{12}/|A| \\ -a_{21}/|A| & a_{11}/|A| \end{pmatrix}.$$

(125) формулаларга (124) матрицали тенгламанинг иккала томонини A^{-1} матрицага кўпайтириш йўли билан ҳам келиш мумкин:

$$A^{-1}Y = A^{-1}AX.$$

$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ ва $EX = X$ бўлганлиги учун $A^{-1}Y = X$. Шундай қилиб,

$$X = A^{-1}Y. \tag{126}$$

Равшанки, ушбу

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}\right\} \tag{127}$$

айнан акслантиришга $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ бирлик матрица мос келади.

1-мисол. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 3x_2, \\ y_2 &= 3x_1 + 5x_2 \end{aligned}\right\} \tag{*}$$

чизиқли акслантириш аффин акслантиришдир, чунки унинг $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ матрицаси нолдан фарқли детерминантга эга: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$. Тескари акслантиришни (*) системани x_1 ва x_2 га нисбатан ечиб топамиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 5y_1 - 3y_2, \\ x_2 &= -3y_1 + 2y_2. \end{aligned}\right\} \tag{**}$$

Бу акслантириш $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ матрицага эга. (*)

M (1; 2) нуқтанинг образи $y_1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$, $y_2 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 13$ координатали N нуқтадир. $L: x_1 + 2x_2 - 2 = 0$ тўғри чизиқнинг* образи λ тўғри чизиқ бўлиб, унинг тенгламасини $x_1 + 2x_2 - 2 = 0$ тенгламага x_1 ва x_2 нинг

---

* x_1 ва x_2 координаталарга нисбатан биринчи даражали тенглама x_1x_2 текисликда ётувчи тўғри чизиқ тенгламасидир (III боб, 1-§ га қаранг).

y_1 ва y_2 орқали ифодаларини (**) формулалар бўйича қўйиш билан ҳосил қиламиз:

$$(5y_1 - 3y_2) + 2(-3y_1 + 2y_2) - 2 = 0 \text{ ёки } -y_1 + y_2 - 2 = 0.$$

Умумий ҳолда аффин акслантиришда тўғри чизиқнинг образи тўғри чизиқ бўлишини исботлаш мумкин.

2- мисол. *Ушбу*

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 3x_2, \\ y_2 &= 4x_1 + 6x_2 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

чизиқли акслантириш айниган акслантиришдир, чунки унинг $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ матрицаси нолга тенг бўлган $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ детерминантга эга. Бу акслантириш тескари акслантиришга эга эмас ва у текисликнинг ўзини-ўзига бир қийматли акслантиришни аниқламайди. Ҳақиқатан ҳам, (*) муносабатлардан кўриш осонки, $2x_1 + 3x_2 = 0$ тўғри чизиқнинг исталган M нуқтасининг образи координаталар боши дир, чунки $y_1 = 2x_1 + 3x_2 = 0$ ва $y_2 = 4x_1 + 6x_2 = 2(2x_1 + 3x_2) = 2 \cdot 0 = 0$.

3- мисол. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ матрицали

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= -x_2 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

чизиқли акслантириш айнимаган акслантиришдир; бунда ҳар бир $M(x_1; x_2)$ нуқтанинг образи Ox_1 ўққа нисбатан симметрик бўлган N нуқтадир (кўзгули акслантириш) Масалан, $M(1; 2)$ нуқтанинг образи $N(1; -2)$ нуқтадир.

$\overline{OM}$ вектор — $M(x_1; x_2)$ нуқтанинг радиус-вектори бўлсин: $\overline{OM} = x_1e_1 + x_2e_2$. (123) акслантириш бу векторга M нуқтанинг образи бўлган N нуқтанинг радиус-вектори $\overline{ON}$ ни мос қўяди: $\overline{ON} = y_1e_1 + y_2e_2$; бу векторларнинг x_1, x_2 ва y_1, y_2 координаталари бир-бири билан (123) формулалар орқали боғланган.

Пировардида шуни айтиб ўтамизки, $Ox_1x_2x_3$ фазо бўлган ҳолда чизиқли акслантириш

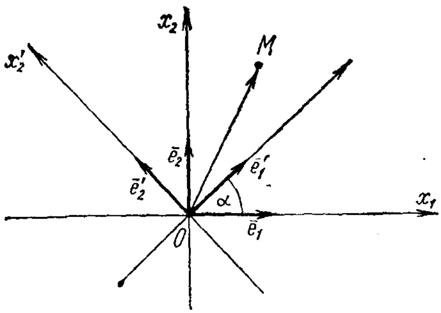
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

матрицали

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}\right\} \qquad (128)$$

тенгламалар системаси билан аниқланади. Агар бу A матрицанинг детерминанти нолга тенг бўлмаса, у ҳолда акслантириш айнимаган ёки аффин акслантириш деб аталади.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ва $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ матрица-устунларни киритиб, айнима-



59- расм.

ган акслантириш учун (124) ва (126) тенгламаларга ўхшаш қуйидаги иккита матрицавий тенгламани ҳосил қиламиз:

$$Y = AX, \qquad X = A^{-1}Y.$$

Фазони аффин акслантиришда текисликнинг образи текислик, тўғри чизиқнинг образи эса тўғри чизиқ бўлишини кўрсатиш мумкин.

2. Координаталарни алмаштириш. Q текисликда ортлари $\mathbf{e}_1$ ва $\mathbf{e}_2$ бўлган Ox_1x_2 тўғри бурчакли координаталар системасини қараймиз. Ox_1x_2 координаталар системаси билан бир қаторда (биз уни эски система деб атаймиз) ортлари $\mathbf{e}_1'$ ва $\mathbf{e}_2'$ бўлган янги $Ox_1'x_2'$ координаталар системасини қараймиз. Эски ва янги системаларнинг координаталар боши устма-уст тушади (59- расм).

Q текисликда ихтиёрий M нуқтани оламиз. Айтайлик, x_1, x_2— унинг эски системадаги координаталари, x_1', x_2' эса янги системадаги координаталари бўлсин. Эски ва янги координаталар орасидаги боғланишни топамиз. Бунинг учун M нуқтанинг $\overline{OM}$ радиус-векторини $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ва $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ ортогонал базислар бўйича ташкил этувчиларга ажратамиз:

$$\overline{OM} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2, \qquad \overline{OM} = x_1'\mathbf{e}_1' + x_2'\mathbf{e}_2'.$$

Шундай қилиб,

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = x_1'\mathbf{e}_1' + x_2'\mathbf{e}_2'. \qquad (129)$$

(129) тенгликнинг иккала томонини $\mathbf{e}_1$ га скаляр кўпайтирамиз. $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$ ва $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ эканлигини ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x_1 = x_1'(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1') + x_2'(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2'). \qquad (130)$$

(129) тенгликнинг иккала томонини $\mathbf{e}_2$ га скаляр кўпайтириб юқоридагига ўхшаш қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x_2 = x_1'(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1') + x_2'(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2'). \qquad (131)$$

Қуйидагича белгилашлар киритамаз:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1' = |\mathbf{e}_1| \cdot |\mathbf{e}_1'| \cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1'}) = \cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1'}),\\ &\alpha_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2' = \cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2'}),\\ &\alpha_{21} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1' = \cos(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1'}),\ \alpha_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2' = \cos(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2'}). \end{aligned}\right\} \qquad (132)$$

Бу ҳолда (130) ва (131) тенгламалар қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2', \\ x_2 &= \alpha_{22} x_1' + \alpha_{22} x_2'. \end{aligned}\right\} \tag{133}$$

(133) формулалар *текисликда координаталарни алмаштириш формулалари*,

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \tag{134}$$

матрица эса *алмаштириш матрицаси* деб аталади.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ва $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ матрица-устунларни қараймиз. У ҳолда (133) координаталарни алмаштириш формулалари матрицавий шаклда қуйидагича ёзилади:

$$X = LX'.$$

L матрицанинг баъзи хоссаларини аниқлаймиз. Энг аввало $\mathbf{e}_1$ ва $\mathbf{e}_2$ векторларнинг $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ янги базис бўйича ёйилмасини топамиз: $\text{пр}_{e_1'} \mathbf{e}_1 = \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1') = \alpha_{11}$, $\text{пр}_{e_2'} \mathbf{e}_1 = \alpha_{12}$, $\text{пр}_{e_1'} \mathbf{e}_2 = \alpha_{21}$, $\text{пр}_{e_2'} \mathbf{e}_2 = \alpha_{22}$ бўлганлиги учун

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \alpha_{11} \mathbf{e}_1' + \alpha_{12} \mathbf{e}_2', \\ \mathbf{e}_2 &= \alpha_{21} \mathbf{e}_1' + \alpha_{22} \mathbf{e}_2'. \end{aligned}\right\} \tag{135}$$

(135) формулалар $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ векторларнинг $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ базис бўйича ёйилмасини беради. $\mathbf{e}_1'$ ва $\mathbf{e}_2'$ ортларнинг $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ базис бўйича ёйилмасини шунга ўхшаш ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_1' &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{21}\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_2' &= \alpha_{12}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2'. \end{aligned}\right\} \tag{136}$$

$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$, $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1$ бўлганлиги учун (132) ва (135) формулаларни ҳисобга олиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = 1, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} = 0,$$
$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 = 1. \tag{137}$$

$\mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_1' = 1$, $\mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_2' = 0$, $\mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{e}_2' = 1$ бўлганлиги учун (136) формулалардан юқоридагига ўхшаш қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 = 1, \quad \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 = 1. \tag{138}$$

Бошқача айтганда, L матрица қуйидаги хоссаларга эга: сатри (устуни) элементлари квадратларининг йиғиндиси бирга тенг; сатри (устуни) элементларининг бошқа сатр (устуннинг) мос элементларига кўпайтмалари йиғиндиси нолга тенг. Бу хоссаларга эга бўлган матрица *ортогонал матрица* деб аталади.

L матрицадан сатрларни устунларга алмаштириш йўли билан ҳосил қилинадиган транспонирланган $L^* = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ матрицани қараймиз. Матрицалар кўпайтмаси $L * L$ ни тузамиз. (137) ва (138) тенгликларни ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$L * L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 & \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} \\ \alpha_{12}\alpha_{11} + \alpha_{22}\alpha_{21} & \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \quad (139)$$

Шундай қилиб, L^* матрица L матрицага нисбатан тескари матрицадир, яъни $L^* = L^{-1}$.

Изоҳ. Агар янги координаталар системаси эски системадан ўқларни α бурчакка буриш билан ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда (133) формулалар I боб, 3-§, 5-пунктда кўрилган координата ўқларини буриш формулаларига ўхшашлигини кўриш осон.

Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда (59-расмга қаранг):

$$\alpha_{11} = \cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1'}) = \cos\alpha, \quad \alpha_{12} = \cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2'}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$\alpha_{21} = \cos(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1'}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \alpha_{22} = \cos(\widehat{\mathbf{e}_2', \mathbf{e}_2'}) = \cos\alpha$$

ва демак, (133) формулалар қуйидаги кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1' \cos\alpha - x_2' \sin\alpha, \\ x_2 &= x_1' \sin\alpha + x_2' \cos\alpha. \end{aligned}\right\}$$

$Ox_1 x_2$ эски координаталар системасида Q текисликнинг ўзини-ўзига акслантириш матрицаси $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ бўлган

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}\right\}$$

(123) чизиқли акслантириш берилган бўлсин. Биз биламизки, бу акслантиришни $Y = AX$ матрицавий шаклда ёзиш мумкин, бунда $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Бу ерда x_1, x_2 лар M нуқтанинг координаталари, y_1, y_2 лар эса унинг образи N нуқтанинг эски координаталар системасидаги координаталари. Айтайлик, янги координаталар системасида M нуқтанинг координаталари x_1' ва x_2', унинг образи N нуқтанинг координаталари y_1', y_2' бўлсин. У ҳолда (133) формулаларга кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}x_1' + \alpha_{12}x_2', \\ x_2 &= \alpha_{21}x_1' + \alpha_{22}x_2', \end{aligned}\right\}$$

шунга ўхшаш

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11}y_1' + \alpha_{12}y_2', \\ y_2 &= \alpha_{21}y_1' + \alpha_{22}y_2'. \end{aligned}\right\}$$

Агар $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ ва $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$ матрица-устунларни ва алмаштириш матрицаси $L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ ни киритиладиган бўлса, у ҳолда бизга маълумки, алмаштириш формулаларини ушбу матрицавий шаклда ёзиш мумкин:

$$X = LX', \quad Y = LY'. \tag{140}$$

Энди M нуқта ва унинг N образининг янги $Ox_1'x_2'$ координаталар системасидаги координаталари орасидаги боғланишни топамиз. Бунинг учун (124) тенгламага X ва Y нинг (140) формулалар бўйича ифодаларини қўямиз:

$$LY' = ALX'. \tag{141}$$

Бу матрицавий тенгликнинг иккала томонини L матрицага тескари L^{-1} матрицага кўпайтирамиз. $L^{-1}L = E$, $EY' = Y'$ эканлигини ҳисобга олиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$Y' = L^{-1}ALX'. \tag{142}$$

Шундай қилиб, янги $Ox_1'x_2'$ координаталар системасида M нуқтанинг x_1 ва x_2' координаталари ва унинг образи N нуқтанинг y_1' ва y_2' координаталари (142) формула орқали боғланган, у эса янги координаталар системасида Q текисликни ўзини-ўзига акслантириш $A' = L^{-1}AL$ матрицага эга эканлигини кўрсатади.

Шундай қилиб, янги координаталар системасида чизиқли акслантириш ушбу кўринишга эга:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}'x_1' + a_{12}'x_2', \\ y_2' &= a_{21}'x_1' + a_{22}'x_2'. \end{aligned}\right\}$$

Бу алмаштиришнинг $A' = \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{pmatrix}$ матрицаси эски A матрица билан $A' = L^{-1}AL$ муносабат орқали боғланган.

Юқорида текислик бўлган ҳол учун айтилган барча мулоҳазалар фазо бўлган ҳолга ҳам осон ўтказилади.

$Ox_1x_2x_3$ ва $Ox_1'x_2'x_3'$ —фазода O умумий бошга ва мос равишда $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ ва $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ ортларга эга бўлган иккита тўғри бурчакли координаталар системаси бўлсин.

Қуйидагича белгилаймиз:

$$\alpha_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j' = \cos(\widehat{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j'}) \quad (i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$$

Масалан: $\alpha_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1' = \cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1'})$, $\alpha_{23} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3' = \cos(\widehat{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3'})$.

У ҳолда, юқоридагига ўхшаш, алмаштириш матрицаси

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

бўлган ушбу

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2' + \alpha_{13} x_3', \\ x_2 &= \alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2' + \alpha_{23} x_3', \\ x_3 &= \alpha_{31} x_1' + \alpha_{32} x_2' + \alpha_{33} x_3'. \end{aligned}\right\} \tag{143}$$

координаталарни алмаштириш формулаларини ҳосил қиламиз. L матрица ортогонал ва

$$L^* = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = L^{-1}$$

эканлигини кўрсатиш мумкин.

Агар $Ox_1x_2x_3$ эски координаталар системасида алмаштириш матрицаси

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ бўлган}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3, \\ y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3, \\ y_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{aligned}\right\}$$

чизиқли акслантириш берилган бўлса, у ҳолда янги координаталар системасида чизиқли акслантириш матрицаси $A' = L^{-1}AL$ формула билан аниқланади.

3. **Квадратик формани каноник кўринишга келтириш.** *Икки x_1 ва x_2 ўзгарувчининг квадратик формаси* деб, x_1 ва x_2 ўзгарувчиларга нисбатан иккинчи даражали бир жинсли кўпҳадга айтилади:

$$F(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2. \tag{144}$$

Квадратик формани матрицавий шаклда қандай қилиб ёзиш мумкинлигини кўрсатамиз. Энг аввало, $a_{21} = a_{12}$ деб олиб, квадратик формани

$$F(x_1, x_2) = (a_{11} x_1 + a_{12} x_2) x_1 + (a_{21} x_1 + a_{22} x_2) x_2$$

кўринишда ёзиб оламиз.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ матрица *квадратик форманинг матрицаси* деб аталади.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ марица-устун ва $X^* = (x_1 x_2)$ матрица-сатрни киритиб, (144) квадратик формани қуйидагича ёзиш мумкинлигига ишонч ҳосил қилиш осон:

$$F(x_1, x_2) = X^* A X. \tag{145}$$

Ҳақиқатан ҳам, матрицаларни кўпайтириш қоидасига кўра кетма-кет қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix},$$

$$X^*AX = (x_1 x_2) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + x_2 (a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = F(x_1 x_2).$$

x_1 ва x_2 ўзгарувчиларни Ox_1x_2 тўғри бурчакли координаталар системасидаги нуқталарнинг координаталари сифатида талқин қиламиз. Янги $Ox_1'x_2'$ тўғри бурчакли координаталар системасини қараймиз. Айтайлик, нуқталарнинг эски ва янги системалардаги координаталари ўзаро (133) алмаштириш формулалари

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}x_1' + \alpha_{12}x_2', \\ x_2 &= \alpha_{21}x_1' + \alpha_{22}x_2' \end{aligned}\right\}$$

орқали боғланган бўлиб, унинг ортогонал алмаштириш матрицаси $L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ бўлсин. (133) алмаштириш формулаларини қуйидаги матрицавий шаклда ёзиш мумкин (2-пунктга қаранг):

$$X = LX'. \tag{146}$$

Бу ерда $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$.

Агар (144) квадратик формада x_1 ва x_2 нинг ўрнига уларнинг (133) даги x_1' ва x_2' орқали ифодаларини қўйсак, x_1' ва x_2' ўзгарувчиларга нисбатан $F(x_1', x_2')$ квадратик формани ҳосил қиламиз.

Ўз олдимизга бундай вазифа қўямиз: янги $Ox_1'x_2'$ координаталар системаси шундай танлансинки, $F(x_1', x_2')$ квадратик формада координаталар кўпайтмасини ўз ичига олган ҳад бўлмасин, бошқача айтганда, у *каноник кўриниш* деб аталадиган

$$F(x_1', x_2') = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 \tag{147}$$

кўринишни олсин.

Ёзувни қисқартириш мақсадида алмаштиришларни матрицавий шаклда бажарамиз. Энг аввало $X^{1*} = (x_1' \, x_2')$ матрица-сатрни қараймиз. Ушбу тенгликнинг бажарилишига ишонч ҳосил қилиш осон:

$$X^* = X'^* L^{-1}. \tag{148}$$

Ҳақиқатан ҳам, $L^{-1} = L^* = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ бўлганлиги учун (2-пунктга қаранг)

$$X'^* L^{-1} = (x_1' \, x_2') \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = (\alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2' \alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2').$$

Бироқ (133) тенгликларга асосан $\alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2' = x_1$ ва $\alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} \times \times x_2' = x_2$ бўлгани учун $X'^* L^{-1} = (x_1, x_2) = X^*$.

(145) тенгликнинг ўнг томонига (148) ва (146) тенгликлардан X^* ва X нинг ифодаларини қўямиз:

$$F(x_1, x_2) = X^* A X = (X'^* L^{-1}) \, A \, (L X') = X'^* (L^{-1} A L) \, X' = F(x_1', x_2')$$

Демак, янги координаталар системасида $F(x_1', x_2') = X'^* (L^{-1} \times \times A L) \, X^1$ квадратик форманинг матрицаси

$$A' = L^{-1} A L$$

кўринишга эга. Энди янги $Ox_1' x_2'$ координаталар системасини шундай танлаймизки, A матрица қуйидаги кўринишни олсин:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Бу ҳолда матрица *диагонал кўринишга* келтирилган деб аталади. Бунда $F(x_1', x_2')$ квадратик форма (147) кўринишда ёзилади.

Шундай қилиб, янги координаталар системасини шундай танлаш керакки, L алмаштириш матрицаси

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = L^{-1} A L$$

муносабатни қаноатлантирсин. Бу тенгликнинг иккала томонини чапдан L матрицага кўпайтирамиз:

$$L \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = L L^{-1} A L = E A L = A L.$$

Бинобарин, L алмаштириш матрицаси

$$L \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = A L$$

шартни қаноатлантиради. Сўнгра

$$L\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\lambda_1 & \alpha_{12}\lambda_2\\ \alpha_{21}\lambda_1 & \alpha_{22}\lambda_2\end{pmatrix}$$

ва

$$AL=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\alpha_{11}+a_{12}\alpha_{21} & a_{11}\alpha_{12}+a_{12}\alpha_{22}\\ a_{21}\alpha_{11}+a_{22}\alpha_{21} & a_{21}\alpha_{12}+a_{22}\alpha_{22}\end{pmatrix}$$

бўлганлиги учун

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}\lambda_1 & \alpha_{12}\lambda_2\\ \alpha_{21}\lambda_1 & \alpha_{22}\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\alpha_{11}+a_{12}\alpha_{21} & a_{11}\alpha_{12}+a_{12}\alpha_{22}\\ a_{21}\alpha_{11}+a_{22}\alpha_{21} & a_{21}\alpha_{12}+a_{22}\alpha_{22}\end{pmatrix}.$$

Бу ердан матрицаларнинг тенглиги таърифига кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{11}\lambda_1 &= a_{11}\alpha_{11}+a_{12}\alpha_{21},\\ \alpha_{21}\lambda_1 &+ a_{21}\alpha_{11}+a_{22}\alpha_{21}\end{aligned}\right\}\quad\text{ва}\quad\left.\begin{aligned}\alpha_{12}\lambda_2 &= a_{11}\alpha_{12}+a_{12}\alpha_{22},\\ \alpha_{22}\lambda_2 &= a_{21}\alpha_{12}+a_{22}\alpha_{22}\end{aligned}\right\}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{11}(a_{11}-\lambda_1)+\alpha_{21}a_{12}&=0,\\ \alpha_{11}a_{21}+\alpha_{21}(a_{22}-\lambda_1)&=0\end{aligned}\right\}\tag{149}$$

ва

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{12}(a_{11}-\lambda_2)+\alpha_{22}a_{12}&=0,\\ \alpha_{12}a_{21}+\alpha_{22}(a_{22}-\lambda_2)&=0.\end{aligned}\right\}\tag{150}$$

Шундай қилиб, алмаштиришнинг номаълум $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ коэффициентлари (149) ва (150) тенгламалар системаларидан топилади. Бу системаларнинг ҳар бири бир жинсли системадир. Улар нолдан фарқли ечимларга эга бўлиши учун бу системаларнинг ҳар бирининг детерминанти нолга тенг бўлиши зарур ва кифоядир (7-§, 7-пунктга қаранг):

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda_1 & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda_1\end{vmatrix}=0,\qquad\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda_2 & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda_2\end{vmatrix}=0.$$

Шундай қилиб, λ_1 ва λ_2 сонлар ушбу квадрат тенгламанинг илдизларидир:

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0\tag{151}$$

ёки

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0.\tag{151'}$$

Бу квадрат тенгламанинг D дискриминанти доимо манфий эмас. Ҳақиқатан,

$$D=(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=$$
$$=a_{11}^2+a_{22}^2-2a_{11}a_{22}+4a_{12}a_{21}=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2,$$

чунки $a_{12}=a_{21}$. Демак, (151) тенглама доимо ҳақиқий илдизларга эга. $У$ A матрицанинг *характеристик тенгламаси* деб аталади. Бу тенгламанинг λ_1 ва λ_2 илдизлари A матрицанинг *хос сонлари* деб аталади. λ_1 ва λ_2 нинг (151) тенгламадан топилган қийматларини (149), (150) системаларга қўйиб ва уларни ечиб, координаталарни алмаштириш коэффициентлари α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22} ни топамиз.

Мисол. $F(x_1, x_2)=5x_1^2+4x_1x_2+2x_2^2$ квадратик форма каноник кўринишга келтирилсин.

Ечилиши Бу ерда $a_{11}=5, a_{12}=a_{21}=2, a_{22}=2$. Квадратик форманинг матрицаси: $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

(151) характеристик тенгламани тузамиз:

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0 \qquad \text{ёки} \quad \lambda^2-7\lambda+6=0,$$

бундан $\lambda_1=1$, $\lambda_2=6$. Шундай қилиб, берилган квадратик форма $F(x_1', x_2')=x_1'^2+$ $+6x_2'^2$ каноник кўринишга келтирилади.

1-изоҳ. Учта x_1, x_2, x_3 ўзгарувчининг квадратик формаси ушбу кўринишга эга:

$$F(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3.$$

Бу квадратик форманинг матрицаси деб учинчи тартибли

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

матрицага айтилади, бу ерда $a_{12}=a_{21}, a_{13}=a_{31}, a_{23}=a_{32}$. A матрица бу ҳолда *симметрик матрица* деб аталади.

Уч ўзгарувчининг квадратик формасини

$$F(x_1',x_2',x_3')=\lambda_1x_1'^2+\lambda_2x_2'^2+\lambda_3x_3'^2 \tag{153}$$

кўринишга келтириш мумкин, бу ерда λ_1, λ_2 ва λ_3 сонлар доимо мусбат ва

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda a_{12} & & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

характеристик тенгламани қаноатлантиради.

2-изоҳ. Квадратик форманинг $A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$ матрицасига Ox_1x_2 координаталар системасида

$$\left.\begin{aligned}y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2,\\ y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{aligned}\right\}$$

чизиқли акслантириш мос келади. Алмаштириш матрицаси $L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ бўлган янги $Ox_1'x_2'$ координаталар системасига ўтишда чизиқли акслантириш

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}'x_1' + a_{12}'x_2', \\ y_2' &= a_{21}'x_1' + a_{22}'x_2 \end{aligned}\right\}$$

кўринишни олади. Янги акслантиришнинг $A' = \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{pmatrix}$ матрицаси A матрица билан $A' = L^{-1}AL$ муносабат орқали боғланган (2- пунктга қаранг).

Агар янги координаталар системаси сифатида квадратик форма $F(x_1', x_2') = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_{22}'$ кўринишда бўладиган системани танланса, у ҳолда бу координаталар системасида, юқорида кўрсатилганидек, A' матрица $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ кўринишда бўлади ва $Ox_1'x_2'$ координаталар системасида (123) чизиқли алмаштириш формулалари қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= \lambda_1 \cdot x_1' + 0 \cdot x_2', \\ y_2' &= 0 \cdot x_1' + \lambda_2 \cdot x_2' \end{aligned}\right\}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= \lambda_1 x_1', \\ y_2' &= \lambda_2 x_2'. \end{aligned}\right\} \qquad (154)$$

Янги $Ox_1'x_2'$ координаталар системасида $M_1(1;\ 0)$ ва $M_2(0;1)$ нуқталарни қараймиз. Равшанки, $\overline{OM}_1 = e_1'$ ва $\overline{OM}_2 = e_2'$. (154) формулаларга асосан M_1 ва M_2 нуқталарнинг образлари мос равишда $Q_1(\lambda_1;0)$ ва $Q_2(0;\lambda_2)$ нуқталар бўлади. $\overline{OQ}_1 = \lambda_1 e_1'$ вектор $\overline{OM}_1 = e_1'$ векторнинг образи, $\overline{OQ}_2 = \lambda_2 e_2'$ вектор эса $\overline{OM}_2 = e_2'$ векторнинг образидир.

Шундай қилиб, (154) чизиқли акслантиришда e_1' ва e_2' векторлар мос равишда коллинеар $\lambda_1 e_1'$ ва $\lambda_2 e_2'$ векторларга аксланади.

Агар бирор чизиқли акслантиришда нолга тенг бўлмаган шундай r вектор мавжуд бўлсаки, унинг образи унга коллинеар λr вектор бўлса, у ҳолда бу вектор шу чизиқли акслантиришнинг *хос вектори*, λ сон эса акслантиришнинг *хос қиймати* деб аталади. Шундай қилиб, e_1' ва e_2' векторлар (154) чизиқли акслантиришнинг хос векторларидир.

III БОБ

ТЕКИСЛИКДАГИ АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

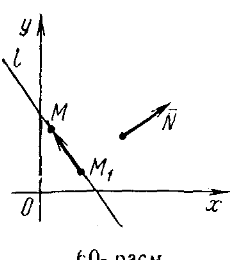
1-§ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

1. Тўғри чизиқнинг нормал вектори. Берилган нуқтадан ўтувчи, берилган векторга препендикуляр тўғри чизиқ тенгламаси. Декарт координаталар системасида тўғри чизиқ тенгламасини келтириб чиқарамиз. Бу (I боб, 5-§, 2-пунктга қ.) берилган тўғри чизиқ ихтиёрий нуқтасининг x ва y декарт координатларини боғловчи тенгламани топамиз деган сўздир. Бу тўғри чизиқда ётмаган нуқталарнинг координаталари тенгламани қаноатлантирмайди.

Oxy текисликда ихтиёрий l тўғри чизиқни қараймиз (60-расм). Қаралаётган тўғри чизиқнинг бирорта M (x_1, y_1;) нуқтаси ва унга перпендикуляр бўлган $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ вектор берилган бўлсин. Бу вектор *тўғри чизиқнинг нормал вектори* дейилади. M_1 нуқта ва N нормал вектор l тўғри чизиқнинг Oxy текисликдаги ҳолатни тўла аниқлайди. Айтайлик, M (x; y) нуқта l тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Шартга кўра N вектор шу тўғри чизиқда ётган $\overline{M_1 M} = (x - x_1)\,\mathbf{i} - (y - y_1)\mathbf{j}$ векторга перпендикуляр. Шунинг учун бу векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг: $\mathbf{N}\cdot\overline{M_1 M} = 0$, $\mathbf{N}$ ва $\overline{M_1 M}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини уларнинг проекциялари орқали ифодалаб (II боб, 5-§, 2-пунктга қ.), қуйидагига эга бўламиз:

$$A\,(x - x_1) + B\,(y - y_1) = 0. \qquad (1)$$

l тўғри чизиқнинг ихтиёрий $M\,(x; y)$ нуқтасининг координаталари ҳосил қилинган тенгламани қаноатлантиради. Агар Oxy текисликнинг $M_2(x_2; y_2)$ нуқтаси l тўғри чизиқда ётмаса, унинг координаталари (1) тенгламани қаноатлантирмайди, чунки бу ҳолда $\mathbf{N}\cdot\overline{M_1 M_2} \neq 0$. Шундай қилиб, (1) тенглама тўғри чизиқнинг тенгламаси экан. *У берилган нуқтадан ўтувчи, берилган векторга перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламаси* дейилади.



60- расм.

Мисол. M_1 $(-1; 3)$ нуқтадан ўтувчи ва $\mathbf{N} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ векторга перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламасини топинг.

Ечилиши. Бу ҳолда $A = 2$, $B = -5$, $x = -1$ ва $y_1 = 3$. (1) формулага кўра

$$2\,(x + 1) - 5\,(y - 3) = 0 \text{ ёки } 2x - 5y + 17 = 0$$

ни ҳосил қиламиз.

2. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси Аввалги пунктда Oxy текисликда ётувчи ихтиёрий l тўғри чизиқнинг *тенгламаси* (декарт координаталар системасида) (1) *кўринишда бўлиши*, яъни *x ва y координаталарга нисбатан биринчи даражали тенглама бўлиши* кўрсатилган эди.

Аксинча, x ва y координаталарга нисбатан *исталган биринчи даражали*

$$Ax + By + C = 0 \tag{2}$$

тенглама Oxy текисликда ётувчи бирорта тўғри чизиқнинг тенгламаси эканлигини кўрсатайлик.

Ҳақиқатан, (2) тенгламада A ёки B коэффициентлардан жуда бўлмаса биттаси нолга тенг эмас (акс ҳолда биз тенглама эмас, $C = 0$ айниятга эга бўлардик). Масалан, $B \neq 0$ бўлсин. У ҳолда бу тенглама

$$A\,(x - 0) + B\,\left(y + \frac{C}{B}\right) = 0 \tag{3}$$

тенгламага тенг кучли. Бироқ бу тенглама $(0;\ -C/B)$ нуқтадан ўтувчи $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ векторга перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламасидир. Демак, (2) тенглама бу тўғри чизиқнинг тенгламасидир. (2) кўринишдаги тенглама *тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси* дейилади. Унинг A ва B коэффициентлари мос равишда берилган тўғри чизиқ нормал векторининг координаталар ўқидаги проекцияларига тенг.

Агар озод ҳад C нолга тенг бўлса, (2) тенглама $Ax + By = 0$ кўринишга эга ва уни $x = 0$, $y = 0$ координаталар боши қаноатлантиради. Бундай ҳолда тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади.

$y = 0$ тенглама Ox ўқнинг тенгламаси эканлигини кўриш осон, чунки буни координаталар бошининг координаталари қаноатлантиради, нормал вектор $\mathbf{N} = \mathbf{j}$. Шунга ўхшаш, Oy ўқнинг тенгламаси $x = 0$ кўринишда бўлади.

3. Тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси. Тўғри чизиқни унинг тенгламаси бўйича ясаш. Иккита $Ax + By + C = 0$ ва $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ тўғри чизиқлар берилган бўлсин. Уларнинг кесишиш нуқталарини топиш талаб қилинсин. Бу нуқта тўғри чизиқларнинг иккаласига ҳам тегишли бўлгани учун унинг координаталари биринчи тўғри чизиқ тенгламасини ҳам, иккинчи тўғри чизиқ тенгламасини ҳам қаноатлантириши керак.

Шундай қилиб, иккита тўғри чизиқ кесишиш нуқталарининг координаталарини топиш учун қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

тенгламалар системасини ечиш керак бўлади.

1-мисол. $2x + y - 1 = 0$ ва $x + 2y + 1 = 0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини топинг.

Ечилиши. Изланаётган нуқта координаталарини

$$\left.\begin{aligned}2x+y-1&=0,\\ x+2y+1&=0\end{aligned}\right\}$$

тенгламалар системасини ечиб топамиз. Кесишиш нуқтаси M нинг координаталари $x=2$ ва $y=-1$ бўлади.

Тўғри чизиқни унинг тенгламаси бўйича қандай ясашни кўрсатамиз. Тўғри чизиқни ясаш учун унинг иккита нуқтасини билиш етарли. Бу нуқталардан ҳар бирини ясаш учун улардан бирининг координаталарига ихтиёрий қиймат берамиз, сўнгра тенгламадан иккинчи координатанинг мос қийматини топамиз.

Агар тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси $Ax+By+C=0$ да берилаётган коориналарда иккала коэффициент ҳам ($A\neq 0$ ва $B\neq 0$) нолга тенг бўлмаса, у ҳолда бу тўғри чизиқни ясаш учун унинг координата ўқлари билан кесишган нуқталарни топган яхши.

2-мисол. $2x+3y-6=0$ тўғри чизиқни ясанг.

Ечилиши. Берилган тўғри чизиқнинг абсциссалар ўқи билан кесишган нуқтаси $M(x_1; y_1)$ ни топамиз. Бунинг учун уларнинг тенгламасини биргаликда ечамиз:

$$\left.\begin{aligned}2x+3y-6&=0,\\ y&=0\end{aligned}\right\}$$

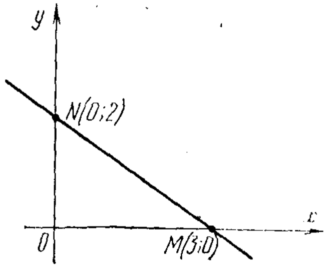
ва $x_1=3$, $y_1=0$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, берилган тўғри чизиқнинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқтаси $M(3; 0)$ топилди. Энди берилган тўғри чизиқ тенгламасини ординаталар ўқи тенгламаси билан биргаликда ечамиз:

$$\left.\begin{aligned}2x+3y-6&=0,\\ x&=0\end{aligned}\right\}$$

ва тўғри чизиқнинг ординаталар ўқи билан кесишиш нуқтаси $N(0; 2)$ ни топамиз. Ниҳоят, тўғри чизиқни унинг иккита M ва N нуқтаси бўйича ясаймиз (61-расм).

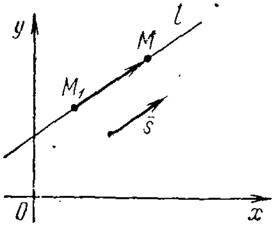
3-мисол. $2y+5=0$ тўғри чизиқни ясанг.

Ечилиши Тўғри чизиқнинг нормали $\mathbf{N}=2\mathbf{j}$ бўлгани учун тўғри чизиқ абсциссалар ўқига параллел. Унинг тенгламасини $y=-5/2$ кўринишда ёзиш мумкин. Шундай қилиб, тўғри чизиқнинг ҳар бир ординатаси $-5/2$ га тенг экан. Тўғри чизиқни ясаш учун керакли бўлган икки нуқта координатасини ихтиёрий танлаш мумкин. Масалан, $x_1=0$ ва $x_2=1$ дейлик. У ҳолда биз тўғри чизиқнинг уни ясаш мумкин бўлган иккита $M(0; -5/2)$ ва $N(1; -5/2)$ нуқтасини ҳосил қиламиз

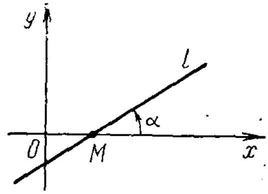


61-расм.

4. Тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори. Тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси. Oxy текисликда ихтиёрий l тўғри чизиқни қараймиз. Унинг ҳолати бирорта $M_1(x_1; y_1)$ нуқтасининг ва берилган тўғри чизиққа параллел бўлган ёки шу тўғри чизиқда ётадиган $s=m\mathbf{i}+n\mathbf{j}$ векторнинг берилиши билан тўла аниқланади. Бу



62- расм.



63- расм.

вектор l тўғри чизиқнинг *йўналтирувчи вектори* дейилади (62-расм). Айтайлик, $M(x; y)$ — l тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. $\overline{M_1M} = (x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j}$ ва $s = m\mathbf{i} + n\mathbf{j}$ векторлар коллинеар бўлгани учун уларнинг проекциялари пропорционал (II боб, 4-§, 6-пунктга қ.):

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}. \tag{5}$$

Ҳосил қилинган тенгламани l тўғри чизиқ исталган $M(x;y)$ нуқтасининг координатаси қаноатлантиради. У тўғри чизиқнинг *каноник тенгламаси* дейилади.

Эслатма. Агар $M_1(x_1; y_1)$ нуқтадан ўтувчи l тўғри чизиқ Oy ўққа параллел бўлса, унинг тенгламаси $x = x_1$ кўринишда бўлади. Унинг йўналтирувчи вектори $\mathbf{s}$ ҳам бу ўққа параллел, демак, Ox ўқдаги проекцияси m нолга тенг. Бироқ бу ҳолда ҳам тўғри чизиқнинг каноник тенгламасини формал равишда

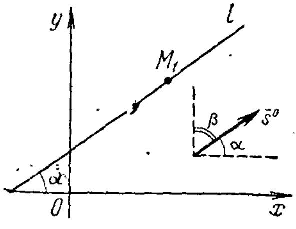
$$\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{n}$$

кўринишда ёзишга келишамиз. Шунга ўхшаш, Ox ўққа параллел тўғри чизиқ тенгламаси $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y - y_1}{0}$ кўринишда ёзилади.

5. Берилган нуқтадан берилган йўналиш бўйича ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси. Тўғри чизиқлар дастаси. Oxy текисликда Ox ўқни M нуқтада кесиб ўтувчи l тўғри чизиқ берилган бўлсин (63-расм). Ox ўқ билан l тўғри чизиқ орасидаги α бурчак деб, Ox ўқни M нуқта атрофида соат стрелкасига қарама-қарши йўналишда ҳаракатлантириб, унинг тўғри чизиқ билан устма-уст тушгунгача бурилган энг кичик бурчакка айтилади. Агар тўғри чизиқ Ox ўқ билан устма-уст тушса ёки унга параллел бўлса, α бурчак нолга тенг ҳисобланади.

Oxy текисликда Oy ўққа параллел бўлмаган l тўғри чизиқни қарайлик. Унинг ҳолати Ox ўқ билан l тўғри чизиқ орасидаги α бурчак ва шу тўғри чизиқда ётган M_1 $(x_1; y_1)$ нуқта берилиши билан тўла аниқланади. Йўналтирувчи вектор сифатида l тўғри чизиқ каби Ox ўқ билан α бурчак ташкил қиладиган $\mathbf{s}^\circ = \cos\alpha\mathbf{i} +$

$+\cos\beta\mathbf{j}$ бирлик векторни оламиз. Равшанки, $\cos\beta = \sin\alpha$ (64-расм) бўлгани учун $s^\circ \equiv \cos\alpha\cdot\mathbf{i} + \sin\alpha\cdot\mathbf{j}$. Шунинг учун (5) тенгламада $m = \cos\alpha$, $n = \sin\alpha$ деб олиш керак; у ҳолда тенглама қуйидаги шаклда ёзилади:



64- расм.

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\sin\alpha}. \qquad (6)$$

Бу тенгламани $y - y_1$ га нисбатан ечиб,

$$y - y_1 = \operatorname{tg}\alpha\ (x - x_1)$$

ни ҳосил қиламиз. $\operatorname{tg}\alpha = k$ деб белгилаймиз. У ҳолда охирги тенглама қуйидаги

$$y - y_1 = k\,(x - x_1) \qquad (7)$$

кўринишга эга бўлади. $k = \operatorname{tg}\alpha$ тўғри чизиқнинг *бурчак коэффициенти* дейилади, (7) *тенглама берилган нуқтадан берилган йўналиш бўйича ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси* дейилади.

Мисол. M_1 $(2; -1)$ нуқтадан ўтиб, Ox ўқ билан $\alpha = \pi/3$ бурчак ҳосил қиладиган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини топамиз; $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi/3) = \sqrt{3}$. (7) формула бўйича изланаётган

$$y + 1 = \sqrt{3}(x - 2) \text{ ёки } \sqrt{3}x - y - 1 - 2\sqrt{3} = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Эслатма. Агар M_1 $(x_1; y_1)$ нуқта орқали ўтувчи чизиқ Oy ўққа параллел бўлса ($\alpha = \pi/2$), унинг учун бурчак коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$ аниқланмаган бўлади ва тўғри чизиқ тенгламасини (7) кўринишда ёзиб бўлмайди. Бу ҳолда у $x = x_1$ кўринишда бўлади.

Текисликдаги бирорта M нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқлар тўплами *тўғри чизиқлар дастаси* дейилади, M нуқта эса дастанинг *маркази* дейилади.

Фараз қилайлик, (7) тенгламада M_1 $(x_1; y_1)$ нуқтанинг координаталари ўзгармасдан қолсин, бурчак коэффициент k турли (ихтиёрий танланадиган) қийматларни қабул қилсин. У ҳолда k нинг ҳар бир сон қийматига M_1 нуқтадан ўтадиган тўғри чизиқ тўғри келади. Аксинча, M_1 нуқта орқали ўтувчи ихтиёрий тўғри чизиқ (абсциссалар ўқига перпендикуляр бўлган $x = x_1$ тўғри чизиқдан ташқари) тўла аниқланган k бурчак коэффициентга эга бўлади, демак, (7) кўринишдаги тенглама билан аниқланади.

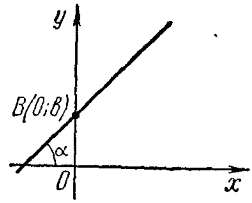
Шундай қилиб, (7) тенглама k ихтиёрий қийматларни қабул қилганда маркази M_1 $(x_1; y_1)$ нуқтада бўлган тўғри чизиқлар дастасини ($x = x_1$ тўғри чизиқни ҳисобга олмаганда) аниқлайди.

6. **Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси.** Айтайлик, Ox ўқ билан α бурчак ташкил қиладиган тўғри чизиқ (65-расм) Oy ўқни B $(0; b)$ нуқтада кессин. (7) формулада $x_1 = 0$, $y_1 =$

$= b$ деб олиб, бу тўғри чизиқнинг тенгламасини тузамиз: $y - b = k(x - 0)$ ёки

$$y = kx + b \qquad (8)$$

ни ҳосил қиламиз. (8) тенглама *тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси*, b эса *тўғри чизиқнинг Оу ўқда кесадиган кесмаси* дейилади.



65- расм.

Хусусий ҳолларни қарайлик. Агар $b=0$ бўлса, (8) тенглама

$$y = kx \qquad (9)$$

кўринишни олади. Бу ҳолда тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади.

1-мисол. I ва III координата бурчаклари биссектрисаларининг тенгламасини топинг.

Ечилиши. I ва III координата бурчакларининг биссектрисалари координаталар бошидан ўтадиган тўғри чизиқдир. Унинг тенгламаси (9) кўринишда, яъни $y = kx$ бўлади. Бундан бурчак коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi/4) = 1$. Шунинг учун изланган тенглама $y = x$ кўринишда ёзилади.

(8) тенгламанинг иккинчи хусусий ҳолини $k = \operatorname{tg}\alpha = 0$ бўлганда, (демак, $\alpha = 0$ да) ҳосил қиламиз:

$$y = b. \qquad (10)$$

Бу Ox ўқига параллел тўғри чизиқ тенгламасидир. Агар $k = 0$ ва $b = 0$ бўлса, Ox ўқининг тенгламасини ҳосил қиламиз: $y = 0$ (2-пунктга қ.).

Агар Ox ўқига перпендикуляр бўлмаган тўғри чизиқ $Ax + By + C = 0$ тенглама билан берилган бўлса, бу тенгламани y га нисбатан ечиб, тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \qquad (11)$$

Бу ерда $k = -A/B$, $b = -C/B$.

2-мисол. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси $2y - 2x + 3 = 0$ берилган. Бу тўғри чизиқ Oy ўқида кесадиган кесмани ва Ox ўқи билан бу тўғри чизиқ орасидаги бурчакни топинг.

Ечилиши. Берилган тенгламани y га нисбатан ечиб, тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламасини ҳосил қиламиз: $y = x - 1{,}5$; бу ерда $k = \operatorname{tg}\alpha = 1$, $b = -1{,}5$. Шундай қилиб, тўғри чизиқнинг ординаталар ўқида кесган кесмаси $-1{,}5$ га тенг. Ox ўқ билан берилган тўғри чизиқ орасидаги α бурчак $\pi/4$ га тенг.

7. Берилган икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси. Текисликда иккита $M_1(x_1;\ y_1)$ ва $M_2(x_2;\ y_2)$ нуқта берилган бўлсин. Бу нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг каноник тенгламасини тузамиз. Унинг йўналтирувчи $\mathbf{s}$ вектори сифатида $\overline{M_1M_2}$ векторни оламиз. У ҳолда

$$\mathbf{s} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}.$$

$m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$ да (5) формуладан фойдаланиб

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{12}$$

га эга бўламиз. (12) тенглама *берилган икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси* дейилади.

Мисол. $M_1(1; 2)$ ва $M_2(-2; 3)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. (12) формулада $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $x_2 = -2$ ва $y_2 = 3$ деб олиб,

$$\frac{y-2}{3-2} = \frac{x-1}{-2-1} \text{ ёки } x + 3y - 7 = 0$$

ни ҳосил қиламиз.

8. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакни ҳисоблаш. Иккита тўғри чизиқнинг параллеллик ва перпендикулярлик шарти. M нуқтада кесишадиган l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар мос равишда $y = k_1x + b_1$ ва $y = k_2x + b_2$ тенгламалар билан аниқлансин. Бу тўғри чизиқлар орасидаги φ бурчакнинг тангенсини топамиз (66-расм). Биз бу тўғри чизиқлар бир-бирига перпендикуляр эмас деб фараз қилишимиз керак, акс ҳолда $\operatorname{tg}\varphi$ мавжуд бўлмас эди. l тўғри чизиқ абсциссалар ўқи билан α_1 бурчакни, l_2 тўғри чизиқ эса α_2 бурчакни ташкил қилсин. l_1 ва l_2 тўғри чизиқ кесишадиган M нуқта орқали Ox ўққа параллел тўғри чизиқ ўтказиб, кўрамизки, $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$ ёки $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Демак,

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}.$$

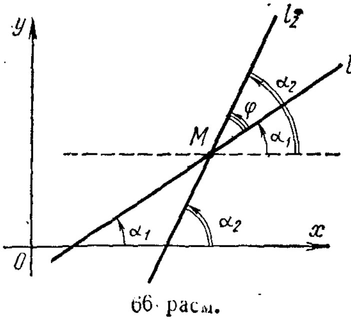
Бироқ, $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, шунинг учун

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{13}$$

Шундай қилиб, агар иккита кесишувчи l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлмаса, улар орасидаги бурчакнинг тангенси (13) формула бўйича топилади. Бунда φ бурчак l_1 тўғри чизиқдан l_2 тўғри чизиққа қараб йўналиш бўйича ҳисобланади.

Агар тўғри чизиқлар параллел бўлса ёки устма-уст тушса, $\alpha_1 = \alpha_2$ ва демак, $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2$, яъни

$$k_2 = k_1. \tag{14}$$



66-расм.

Аксинча, агар $k_2 = k_1$ бўлса, $\alpha_1 = \alpha_2$ бўлади ва демак, l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар ё параллел, ё устма-уст тушади. Устма-уст тушадиган тўғри чизиқларнинг параллел бўлишини келишиб олгандан кейин биз параллел тўғри чизиқларнинг қуйидаги аломатига келамиз,

Тўғри чизиқлар бурчак коэффициентларининг тенглиги бу икки *тўғри чизиқ параллел бўлишининг етарли ва зарурий шартидир**.

Агар l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлса, (13) формула ўз маъносини йўқотади. Бироқ бу ҳолда тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг котангенсини қараш мумкин:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1}.$$

Тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлганда $\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$. Демак, $\frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0$, бундан $1 + k_1 k_2 = 0$ ёки

$$k_1 k_2 = -1. \qquad (15)$$

Тескари ҳолни, яъни агар (15) тенглик бажарилса, l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлишини исбот қилиш мумкин. Шундай қилиб, (15) *формула икки тўғри чизиқ перпендикуляр бўлишининг етарли ва зарурий шартини ифодалайди.*

1-мисол. $3x + y - 6 = 0$ тўғри чизиқ билан $x + 2y + 1 = 0$; $6x + 2y - 1 = 0$ ва $x - 3y + 2 = 0$ тўғри чизиқлар ҳосил қилган бурчакни топинг.

Ечилиши. Берилган тўғри чизиқлар тенгламасини бурчак коэффициентли тенглама шаклига келтирамиз. Бунинг учун уларнинг ҳар бирини y га нисбатан ечамиз:

$$y = -3x + 6; \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}; \quad y = -3x + \frac{1}{2}; \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Кўриб турибмизки, бу тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентлари мос равишда қуйидагиларга тенг: $k_1 = -3$, $k_2 = -1/2$, $k_3 = -3$ ва $k_4 = 1/3$. (13) формулага кўра биринчи тўғри чизиқ билан иккинчи тўғри чизиқ орасидаги φ бурчак тангенсини топамиз:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-1/2 + 3}{1 + (-3)(-1/2)} = 1.$$

Демак, $\varphi = \pi/4$.

Учинчи тўғри чизиқ биринчи тўғри чизиққа параллел, чунки уларнинг бурчак коэффициентлари тенг: $k_1 = k_3 = -3$. Иккита параллел тўғри чизиқ орасидаги бурчак нолга тенг.

Тўртинчи тўғри чизиқ биринчи тўғри чизиққа перпендикуляр (улар орасидаги бурчак $\frac{\pi}{2}$ га тенг), чунки уларнинг бурчак коэффициентлари тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик шарти (15) ни қаноатлантиради:

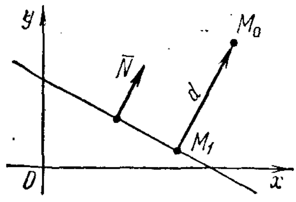
$$k_1 k_4 = (-3) \cdot 1/3 = 1.$$

2-мисол. $M_1(-3; -1)$ нуқта орқали ўтувчи ва $2x + y - 3 = 0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Берилган тўғри чизиқ тенгламасини $y = -2x + 3$ кўринишда ёзиш мумкин, бундан унинг бурчак коэффициенти $k_1 = -2$ эканлиги келиб чиқади. Берилган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган изланаётган тўғри чизиқнинг коэффициенти k_1 билан $k_1 k_2 = -1$ шарт орқали боғланган. Демак,

---

* l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар параллел бўлган ҳолда (13) формула ўринли бўлиб қолаверишини кўриш қийин эмас (параллел тўғри чизиқлар орасидаги бурчак шартга кўра нолга тенг бўлишини эслатиб ўтамиз).



67- расм.

$k_2 = -1/k_1 = 1/2$. Энди $x_1 = -3$, $y_1 = -1$ ва $k = 1/2$ деб, (7) тенгламадан фойдаланиш қолди:

$$y + 1 = \frac{1}{2}(x + 3) \quad \text{ёки} \quad x - 2y + 1 = 0.$$

9. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа. Oxy текисликда $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиқ ва $M(x_0; y_0)$ нуқта берилган бўлсин. M_0 нуқтадан берилган тўғри чизиққача бўлган d масофани топамиз. M_0 нуқтадан тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг асосини $M_1(x_1; y_1)$ орқали белгилаймиз (67- расм). Изланаётган d масофа бу перпендикулярнинг узунлигига, яъни $\mathbf{d}$ векторнинг модулига тенг; $\mathbf{d} = \overline{M_1M_0} = (x_0 - x_1)\mathbf{i} + (y_0 - y_1)\mathbf{j}$. Бу вектор билан берилган тўғри чизиқ $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ нормал векторининг скаляр кўпайтмасини қарайлик. Бир томондан скаляр кўпайтманинг таърифидан $\mathbf{N} \cdot \mathbf{d} = |\mathbf{N}||\mathbf{d}| \cos\varphi$ га эгамиз, бунда φ — кўпайтирилаётган векторлар орасидаги бурчак. Бу векторлар коллинеар бўлганлиги учун улар орасидаги бурчак нолга ёки π га тенг; шунинг учун $\cos\varphi = \pm 1$. Шундай қилиб,

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{d} = \pm |\mathbf{N}||\mathbf{d}| = \pm |\mathbf{N}| d. \tag{16}$$

Иккинчи томондан, иккита векторнинг скаляр кўпайтмаси уларнинг бир исмли проекциялари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{d} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1).$$

Бироқ $M_1(x_1; y_1)$ нуқта берилган тўғри чизиқда ётади, шунинг учун унинг координаталари бу тўғри чизиқнинг тенгламасини қаноатлантиради: $Ax_1 + By_1 + C = 0$. Бундан $Ax_1 + By_1 = -C$. Буни ҳисобга олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{d} = Ax_0 + By_0 + C. \tag{17}$$

(16) ва (17) формулаларни таққослаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\pm |\mathbf{N}| d = Ax_0 + By_0 + C,$$

бундан $d = \pm \dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{|\mathbf{N}|}$. $|\mathbf{N}| = |A\mathbf{i} + B\mathbf{j}| = \sqrt{A^2 + B^2}$ бўлгани учун

$$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{ёки}$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{18}$$

Шуни эслатиб ўтамизки, (18) *формула ўнг томонининг суратида ифоданинг абсолют қиймати турибди, у берилган $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиқ тенгламасининг чап томонида бе-*

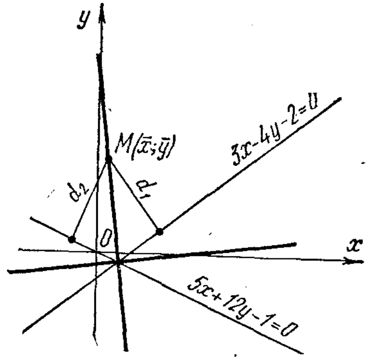
рилган координаталар ўрнига берилган $M_0(x_0; y_0)$ нуқтанинг координаталарини қўйиш натижасида ҳосил қилинади.

1-мисол. Учбурчак ўзининг $A(1; 2)$, $B(-2; 1)$ ва $C(2; 3)$ учлари билан берилган. Унинг A учидан туширилган баландлигининг узунлигини топинг.

Ечилиши. Иккита $B(-2; 1)$ ва $C(2; 3)$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини топамиз:

$$\frac{x-2}{-2-2} = \frac{y-3}{1-3} \quad \text{ёки} \quad x - 2y + 4 = 0.$$

Баландликнинг изланаётган узунлигини (18) формуладан $A(1; 2)$ нуқтадан BC тўғри чизиққача бўлган масофа сифатида топамиз:



68-расм.

$$d = \frac{|1-2\cdot 2+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}45.$$

2-мисол. $3x-4y-2=0$ ва $5x+12y-1=0$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчак биссектрисаларининг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Бурчак биссектрисаси бу бурчакнинг томонларидан баравар узоқлашган текисликнинг барча нуқталари тўпламидир. $M(\bar{x}, \bar{y})$ нуқта берилган тўғри чизиқлар орасидаги бурчак биссектрисасининг исталган нуқтаси (68-расм) бўлсин. (18) формулага кўра унинг биринчи тўғри чизиққача бўлган масофаси

$$d_1 = \frac{|3\bar{x}-4\bar{y}-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|3\bar{x}-4\bar{y}-2|}{5}$$

га, иккинчи тўғри чизиққача бўлган масофаси

$$d_2 = \frac{|5\bar{x}+12\bar{y}-1|}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{|5\bar{x}+12\bar{y}-1|}{13}$$

га тенг.

Биссектрисанинг таърифига кўра $d_1 = d_2$, яъни

$$\frac{|3\bar{x}-4\bar{y}-2|}{5} = \frac{|5\bar{x}+12\bar{y}-1|}{13}.$$

Икки миқдор абсолют қийматининг модули тенг бўлса, у ҳолда бу миқдорлар ёки тенг бўлиши керак, ёки фақат ишораси билангина фарқ қилиши керак. Демак,

$$\frac{3\bar{x}-4\bar{y}-2}{5} = \frac{5\bar{x}+12\bar{y}-1}{13} \quad \text{ёки} \quad \frac{3\bar{x}-4\bar{y}-2}{5} = -\frac{5\bar{x}+12\bar{y}-1}{13}.$$

Охирги иккита тенгламани соддалаштириб,

$$2\bar{x}-16\bar{y}-3=0 \quad \text{ёки} \quad 64\bar{x}+8\bar{y}-31=0$$

ни ҳосил қиламиз. $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ координаталар ўрнига берилган x ва y координаталарни қўйиб, биссектрисаларнинг қуйидаги тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$2x-16y-3=0 \quad \text{ёки} \quad 64x+8y-31=0.$$

2-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЭГРИ ЧИЗИҚЛАР

1. Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг таърифи. Берилган декарт координаталарига нисбатан иккинчи даражали тенгламалар билан аниқланган эгри чизиқ *иккинчи тартибли эгри чизиқ* дейилади.

Умумий ҳолда бу тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{19}$$

бу ерда A, $2B$, C, $2D$, $2E$ ва F коэффициентлар* ҳақиқий сонлардир, бундан ташқари A, B ёки C лардан камида биттаси нолдан фарқли.

Аввал айлананинг тенгламаси келтириб чиқарилган эди (I боб, 5-§, 2-пунктга қ.):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \tag{20}$$

Бу тенглама x ва y га нисбатан иккинчи даражали. Демак, айлана иккинчи тартибли эгри чизиқ экан. Кейинги пунктларда тўртта иккинчи тартибли эгри чизиқ: айлана, эллипс, гипербола ва парабола қаралади.

2. Айлана. (20) тенгламада қавсларни очиб ва баъзи бир айний алмаштиришларни бажариб, айлананинг қуйидаги тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0. \tag{21}$$

Бу тенгламани иккинчи тартибли эгри чизиқнинг умумий тенгламаси (19) билан солиштирганда айлана тенгламаси учун қуйидаги иккита шарт бажарилганини кўриш осон; 1) x, y координаталарнинг кўпайтмаси бўлган xy ли ҳад қатнашмаяпти; 2) x^2 ва y^2 лар олдидаги коэффициентлар ўзаро тенг**.

Тескари масалани қарайлик. Иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламасида xy ли ҳад қатнашмасин ва x^2, y^2 олдидаги коэффициентлар ўзаро тенг, яъни $A = C$ ва $2B = 0$ бўлсин. Бу тенглама айлана тенгламаси бўла оладими? Аввало умумийликни сақлаган ҳолда (19) тенгламада $A = 1$, демак, $C = 1$ деб ҳисоблаш мумкин, агар бундай бўлмаганда тенгламанинг иккала томонини ҳам A га бўлиб юбориш мумкин эди.

Шундай қилиб, иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{22}$$

Бу тенгламанинг чап томонида иккита $x^2 + 2Dx$ ва $y^2 + 2Ey$ ҳад-

---

* xy, x ва y олдидаги коэффициентлар кейинчалик (19) тенгламани қулай ёзиш учун мос равишда $2B$, $2D$ ва $2E$ орқали белгиланган.

** Бу коэффициентларнинг ҳар бири бирга тенглиги муҳим эмас, (21) тенгламанинг иккала томонини бирорта $\lambda (\lambda \neq 0, \lambda \neq 1)$ сонга кўпайтирилса, айлана тенгламасидаги x^2 ва y^2 олдидаги коэффициентлар бирга тенг бўлмайди.

лар группасини ажратиб, уларнинг ҳар бирини тўла квадратгача тўлдирамиз. У ҳолда тенглама

$$x^2+2Dx+D^2+y^2+2Ey+E^2-D^2-E^2+F=0$$

ёки

$$(x+D)^2+(y+E)^2=D^2+E^2-F \qquad (23)$$

кўринишни олади.

Мумкин бўлган учта ҳолни кўрамиз:

1) $D^2+E^2-F>0$. Бу ҳолда (23) тенглама ва демак, унга тенг кучли бўлган (22) тенглама ҳам маркази $O_1(-D;\ -E)$ нуқтада бўлган, радиуси $R=\sqrt{D^2+E^2-F}$ дан иборат айланани аниқлайди;.

2) $D^2+E^2-F=0$. Бу ҳолда (23) тенглама қуйидаги

$$(x+D)^2+(y+E)^2=0$$

кўринишга эга бўлади. Ушбу тенгламани ва демак, унга тенг кучли бўлган (22) тенгламани ягона $O_1(-D;\ -E)$ нуқтанинг координаталари қаноатлантиради;

3) $D^2+E^2-F<0$. Бу ҳолда (23) тенглама ва демак, унга тенг кучли бўлган (22) тенглама ҳам ҳеч қандай чизиқни аниқламайди, чунки (23) тенгламанинг ўнг томони манфий, чап томони эса квадратлар йиғиндиси бўлганидан манфий бўла олмайди.

1-мисол. $x^2+y^2-2x+4y-11=0$ тенглама айланани ифодалашини кўрсатинг ва унинг маркази координаталарини ҳамда радиусини топинг.

Ечилиши. $A=C=1$ ва $2B=0$ шартлар бу ерда бажарилади. Берилган тенгламани ўзгартирамиз:

$$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)-1-4-11=0$$

ёки

$$(x-1)^2+(y+2)^2=16.$$

Биз маркази $O_1(1;\ -2)$ нуқтада, радиуси $R=4$ бўлган айлана тенгламасини ҳосил қилдик.

2-мисол. $x^2+y^2+6x-6y+22=0$ тенглама ҳеч қандай чизиқни аниқламаслигини кўрсатинг.

Ечилиши. Бу тенгламани ўзгартирамиз:

$$(x^2+6x+9)+(y^2-6y+9)-9-9+22=0$$

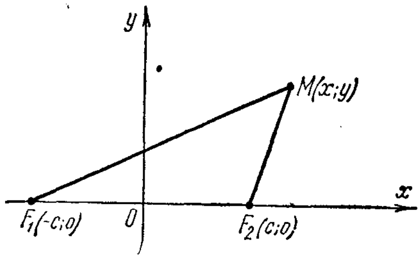
ёки

$$(x+3)^2+(y-3)^2=-4.$$

Энди бу тенглама ҳеч қандай чизиқни аниқламаслиги равшан.

3. Эллипс. *Эллипс* деб текисликнинг барча шундай нуқталари тўпламига айтиладики, бу нуқталарнинг ҳар биридан шу текисликнинг *фокуслар* деб аталувчи икки нуқтасигача бўлган масофалар йиғиндиси ўзгармас катталикдир (бу катталик фокуслар орасидаги масофадан катта бўлиши шарт).

Фокусларни F_1 ва F_2 орқали, улар орасидаги масофани $2c$ орқали, эллипснинг ҳар бир нуқтасидан фокусларгача бўлган масофалар йиғиндисига тенг ўзгармас миқдорни $2a$ (шартга кўра $2a>2c$) орқали белгилаймиз.



69- расм.

Декарт координаталар системасини F_1 ва F_2 фокуслар абсциссалар ўқида жойлашадиган қилиб, координаталар боши эса F_1F_2 кесманинг ўртаси билан устма-уст тушадиган қилиб ясаймиз (69-расм). Бундай танланган системада фокуслар қуйидаги координаталарга эга: чап фокус $F_1(-c; 0)$ ва ўнг фокус $F_2(c; 0)$. Ўзимиз танлаган координаталар системасида эллипс тенгламасини келтириб чиқарамиз. Шу мақсадда эллипснинг ихтиёрий $M(x; y)$ нуқтасини қарайлик. Эллипснинг таърифига кўра, бу нуқтадан F_1 ва F_2 фокусларгача бўлган масофалар йиғиндиси $2a$ га тенг:

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Икки нуқта орасидаги масофа формуласидан фойдаланиб, $MF_1 = \sqrt{(x+c)+y^2}$, $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ ни ҳосил қиламиз, демак,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \qquad (24)$$

Бу тенгламани соддалаштириш учун уни

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

кўринишда ёзамиз. Тенгламанинг икки томонини квадратга кўтариб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+(x-c)^2+y^2-4a\sqrt{x-c^2+y^2}$$

ёки соддалаштиришдан сўнг:

$$cx-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Энди бу тенгламанинг иккала томонини яна квадратга ошириб,

$$c^2x^2-2cxa^2+a^4=a^2[(x-c)^2+y^2]$$

ни ҳосил қиламиз ёки айний алмаштиришлардан сўнг:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \qquad (25)$$

Эллипснинг таърифига кўра $2a>2c$ бўлгани учун a^2-c^2 сон мусбат.

$$a^2-c^2=b^2 \qquad (26)$$

белгилаш киритамиз. У ҳолда (25) тенглама $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ ёки

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

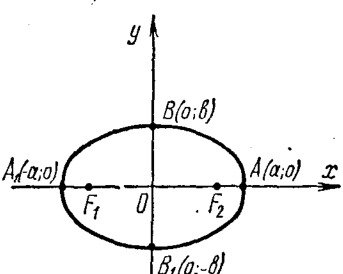
кўринишни олади. Эллипснинг таърифига кўра, унинг ихтиёрий нуқтасининг координаталари (24) тенгламани қаноатлантиради. Бироқ (27) тенглама (24) тенглама натижасидир. Демак, эллипс ихтиёрий нуқталарининг координаталари ҳам бу тенгламани қаноатлантиради.

Эллипсда ётмаган нуқталарнинг координаталари (27) тенгламани қаноатлантирмаслигини кўрсатиш мумкин. Шундай қилиб, (27) тенглама эллипс тенгламаси экан. *У эллипснинг каноник тенгламаси* дейилади.

Эллипснинг каноник тенгламасидан фойдаланиб, унинг шаклини аниқлаймиз. Даставвал тенглама x ва y ларнинг жуфт даражаларини ўз ичига олишига эътибор берайлик. Бу агар бирорта $M(x, y)$ нуқта эллипсга тегишли бўлса, у ҳолда абсциссалар ўқига нисбатан $M(x, y)$ нуқтага симметрик бўлган $M'(x, -y)$ нуқта ва ординаталар ўқига нисбатан $M(x, y)$ нуқтага симметрик бўлган $M''(-x, y)$ нуқта ҳам эллипсга тегишли бўлади. Шундай қилиб, эллипс иккита ўзаро перпендикуляр ўққа эга экан, улар биз танлаган координаталар системасида координаталар ўқи билан устма-уст тушади. Эллипснинг симметрия ўқларини эллипс *ўқлари* деб, уларнинг кесишиш нуқтасини эллипс *маркази* деб атаймиз. Эллипс фокуслари жойлашган ўқ (берилган ҳолда абсциссалар ўқи) *фокал ўқ* дейилади.

Эллипснинг шаклини аввал I чоракда аниқлаймиз. Бунинг учун (27) тенгламани y га нисбатан ечиб, $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ ни ҳосил қиламиз. Равшанки, бу ерда $0 \leqslant x \leqslant a$, чунки илдиз остидаги ифода манфий бўлмаслиги керак. x катталик 0 дан a гача ўсганда y катталик b дан 0 гача камаяди. Эллипснинг I чоракда ётган бўлаги координаталар ўқида жойлашган $A(a; 0)$ ва $B(0; b)$ нуқталар билан чегараланган ёй экан (70-расм). Энди эллипс симметриясидан фойдаланиб, эллипс 70-расмда тасвирланган шаклга эга экан, деган хулосага келамиз.

Эллипснинг ўқлар билан кесишган нуқталари унинг *учлари* дейилади. Эллипс симметриясидан эллипс $A(a, 0)$ ва $B(0, b)$ учларидан ташқари яна иккита $A_1(-a, 0)$ ва $B_1(0, -b)$ учларга эга бўлиши келиб чиқади. Эллипснинг қарама-қарши учларини бирлаштирувчи AA_1 ва BB_1 кесмалар ва уларнинг $2a$ ва $2b$ узунликлари мос равишда эллипснинг *катта* ва *кичик ўқлари* дейилади. a ва b сонлар мос равишда эллипснинг *катта* ва *кичик ярим ўқлари* дейилади. c/a нисбат, яъни фокуслар орасидаги масофа ярмининг эллипс катта ўқига нисбати эллипснинг *эксцентриситети* дейилади ва одатда ε ҳарфи билан белгиланади:



70- расм.

$$\varepsilon = c/a. \tag{28}$$

$c < a$ бўлгани учун эллипс эксцентриситети бирдан кичик: $\varepsilon < 1$. Эксцентриситет эллипснинг шаклини характерлайди. Ҳақиқатан, (26) формуладан $(b/a)^2 = 1-(c/a)^2 = 1-\varepsilon^2$ келиб чиқади. Бундан қуйидаги хулоса келиб чиқади: эллипснинг эксцентриситети қанчалик кичик бўлса, унинг кичик ярим ўқи b катта ярми ўқи a дан шунча кам фарқ қилади, яъни эллипс фокал ўқ бўйлаб шунча кам тортилган бўлади.

$b = a$ лимит ҳолда a радиусли айлана ҳосил бўлади: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ёки $x^2 + y^2 = a^2$. Бунда $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - a^2} = 0$ ва эллипс фокуслари гўё битта нуқтада—айлана марказида бирлашиб кетади. Айлана эксцентриситети нолга тенг: $\varepsilon = 0/a = 0$.

Эллипс ва айлана орасидаги боғланишни бошқа нуқтаи назардан ҳам ўрнатиш мумкин. Ярим ўқлари a ва b бўлган эллипсни a радиусли айлананинг проекцияси деб қараш мумкинлигини кўрсатамиз.

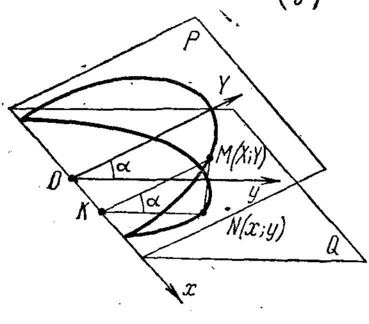
Ўзаро $\alpha(\cos\alpha = b/a)$ бурчакни ташкил қиладиган P ва Q текисликларни қарайлик (71-расм). P текисликда OXY координаталар системасини, Q текисликда эса Oxy координаталар системасини ясаймиз. Координаталар боши O ва текисликларнинг кесишиш нуқтаси билан устма-уст тушадиган абсциссалар ўқи иккала координаталар системаси учун умумий. P текисликда маркази координаталар бошида, радиуси a бўлган

$$X^2 + Y^2 = a^2 \tag{29}$$

айланани қарайлик. $M(X;\ Y)$ — айлананинг ихтиёрий нуқтаси, $N(x,\ y)$—унинг Q текисликдаги проекцияси ва $K(x,\ 0)$— M нуқтанинг OX ўқдаги проекцияси бўлсин. $N(x,\ y)$ нуқта ярим ўқлари a ва b бўлган эллипсда ётишини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан, ясалишига кўра $X = x$. Бундан ташқари, KMN учбурчакдан $y = KN = KM\cos\alpha = Y \cdot b/a$ га эгамиз, бундан $Y = ay/b$. (29) тенгламада X ва Y ларни x ва y ифодалари билан алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x^2 + \left(\frac{ay}{b}\right)^2 = a^2 \text{ ёки } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



71- расм.

Биз кўрамизки, $N(x;\ y)$ нуқтанинг координаталари ярим ўқлари a ва b бўлган эллипсни қаноатлантиради. Бу (29) айлананинг ихтиёрий $M(X,\ Y)$ нуқтасининг проекцияси эллипсга тегишли эканлигини билдиради. Аксинча, эллипснинг ихтиёрий $N(x,\ y)$ нуқтаси айлананинг $M(X,\ Y)$ нуқтасининг проекцияси бўлишини кўриш осон. Шундай қилиб, эллипс айлананинг проекцияси экан.

1-мисол. Катта ярим ўқи $a=5$ ва эксцентриситети $\varepsilon=0{,}6$ бўлган ҳолда эллипснинг каноник тенгламасини топинг.

Ечилиши. Шартга кўра $\varepsilon=c/a=0{,}6$ Демак, фокуслар орасидаги масофанинг ярми $c=a\cdot 6=5\cdot 0{,}6=3$. Бироқ бу ҳолда эллипс кичик ярим ўқининг квадрати $b^2=a^2-c^2=25-9=16$. Шундай қилиб, эллипснинг изланган каноник тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

2-мисол. $M_1(2; -3)$ нуқта орқали ўтувчи, катта ярим ўқи $a=4$ бўлган эллипснинг каноник тенгламасини тузинг.

Ечилиши. $a=4$ да эллипснинг каноник тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$M_1(2\ -3)$ нуқтанинг координаталари бу тенгламани қаноатлантириши керак. Демак, $\frac{2^2}{16}+\frac{(-3)^2}{b^2}=1$, Бундан $b^2=12$ ни топиб ва уни (*) тенгламага қўйиб, эллипснинг изланган каноник тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.$$

4. Гипербола. *Гипербола* деб, текисликнинг барча шундай нуқталари тўпламига айтиладики, бу нуқталарнинг ҳар биридан шу текисликнинг *фокуслар* деб аталувчи берилган икки нуқтасигача бўлган масофалар айирмаларининг абсолют қийматлари ўзгармас бўлади (бу катталик нолга тенг бўлмаган ва фокуслар орасидаги масофалардан кичик бўлган шартда).

F_1 ва F_2 фокуслар орасидаги масофани $2c$ орқали, гиперболанинг ҳар бир нуқтасидан фокусларгача бўлган масофалар айирмасининг модулига тенг бўлган ўзгармас миқдорни $2a$ орқали ($0<2a<2c$ шарт бўйича) белгилаймиз. Эллипс ҳолида бўлгани каби абсциссалар ўқини фокуслар орқали ўтказамиз, F_1F_2 кесманинг ўртасини эса координаталар боши деб қабул қиламиз (69-расмга қ). Бундай системада фокуслар $S_1(-c; 0)$ ва $F_2(c; 0)$ координаталарга эга бўлади. Танланган координаталар системасида гипербола тенгламасини келтириб чиқарамиз. Гиперболанинг таърифига кўра унинг ихтиёрий $M(x; y)$ нуқтаси учун $|MF_1 - MF_2|=2a$ ёки

$$MF_1-MF_2=\pm 2a.$$

Бироқ $MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ ва $MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Демак

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \qquad (30)$$

Эллипс тенгламасини келтириб чиқаришдагига ўхшаш соддалаштиришларни бажаргандан сўнг, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2), \qquad (31)$$

бу (30) тенгламанинг натижасидир.

Бу тенглама эллипс учун ҳосил қилинган (25) тенглама билан бир хил эканлиги кўриниб турибди. Бироқ (31) тенгламада гипербола учун $2a < 2c$ бўлгандан айирма нолдан кичик: $a^2-c^2<0$. Шунинг учун

$$c^2 - a^2 = b^2 \tag{32}$$

деймиз. У ҳолда (31) тенглама қуйидаги кўринишга келтирилади:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{33}$$

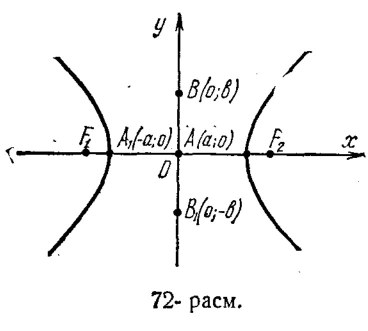
У гиперболанинг каноник тенгламаси дейилади. (33) тенглама (32) тенгламанинг натижаси сифатида гиперболанинг исталган нуқтаси координаталарини қаноатлантиради. Гиперболада ётмайдиган нуқталар (33) тенгламани қаноатлантирмаслигини кўрсатиш мумкин.

Каноник тенгламасидан фойдаланиб, гиперболанинг шаклини аниқлаймиз. Бу тенглама берилган координаталарнинг фақат жуфт даражаларини ўз ичига олади. Демак, гипербола иккита симметрия ўқига эга, бу ҳолда улар координаталар ўқи билан устма-уст тушади. Бундан буён гиперболанинг симметрия ўқларини гиперболанинг *ўқлари*, уларнинг кесишиш нуқталарини эса гиперболанинг *маркази* деб атаймиз. Гиперболанинг фокуслари жойлашган ўқ *фокал ўқ* дейилади.

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{34}$$

бўлган I чоракда гиперболанинг шаклини текшириб кўрамиз. Бу ерда $x \geqslant a$, чунки илдиз остида мусбат сон бўлиши керак. x миқдор a дан ∞ гача ўсганда y миқдор 0 дан $+\infty$ гача ўсади. Гиперболанинг I чоракда ётган бўлаги 72-расмда тасвирланган MA ёйдан иборат.

Гипербола координаталар ўқига нисбатан симметрик жойлашганидан, бу эгри чизиқ 72-расмда тасвирланган кўринишга эга. Гиперболанинг фокал ўқ билан кесишган нуқталари унинг *учлари* дейилади. Гипербола тенгламасида $y=0$ деб, унинг учларининг координаталарини топамиз: $x = \pm a$. Шундай қилиб, гипербола иккита учга эга экан: $A(a;\,0)$ ва $A_1(-a;\,0)$. Гипербола ординаталар ўқи билан кесишмайди. Ҳақиқатан, гипербола тенгламасига $x=0$ ни қўйиб, y учун мавҳум қийматларни ҳосил қиламиз*: $y = \pm\sqrt{-b^2}$. Шунинг учун гиперболанинг фокал ўқи *ҳақиқий*



72- расм.

* VII боб, 3- §, 1- пунктга қаранг.

ўқ, фокал ўққа перпендикуляр бўлган симметрия ўқи эса гиперболанинг *мавҳум ўқи* дейилади.

Шунингдек, гиперболанинг учларини туташтирувчи кесма ва унинг $2a$ узунлиги ҳам *ҳақиқий ўқ* деб аталади. $B(0,\ b)$ ва $B_1(0;\ -b)$ нуқталарни туташтирувчи кесма ва унинг $2b'$ узунлиги ҳам гиперболанинг *мавҳум ўқи* деб аталади. a ва b сонлар мос равишда гиперболанинг *ҳақиқий* ва *мавҳум ярим ўқлари* деб аталади.

Энди гиперболанинг I чоракда жойлашган ва $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ функциянинг графиги бўлган бўлагини қарайлик. Бу графикнинг координаталар бошидан етарлича катта масофада жойлашган нуқталари координаталар бошидан ўтувчи ва $k=b/a$ бурчак коэффициентига эга бўлган

$$y=\frac{b}{a}x \tag{35}$$

тўғри чизиққа исталганча яқин бўлишини кўрсатайлик.

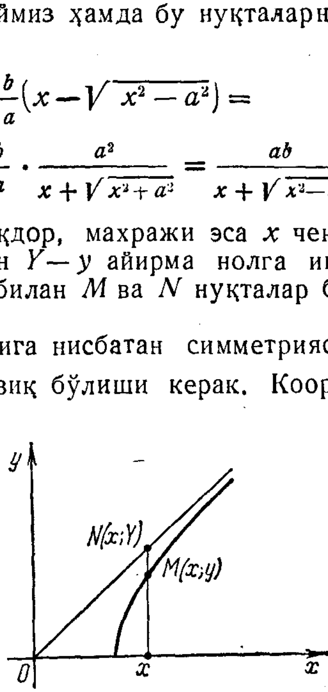
Шу мақсадда битта x абсциссага эга бўлган ва мос равишда (34) эгри чизиқда ва (35) тўғри чизиқда (73-расм) ётувчи иккита $M(x;\ y)$ ва $N(x;\ Y)$ нуқтани қараймиз ҳамда бу нуқталарнинг ординаталари айирмасини тузамиз*:

$$Y-y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

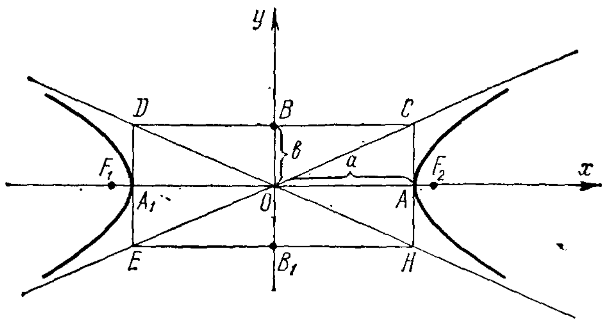
Бу касрнинг сурати ўзгармас миқдор, махражи эса x чексиз ўсганда чексиз ўсади. Шунинг учун $Y-y$ айирма нолга интилади, яъни абсцисса чексиз ўсиши билан M ва N нуқталар бир-бирига чексиз яқинлашади.

Гиперболанинг координаталар ўқига нисбатан симметриясига кўра яна битта $y=-\frac{b}{a}x$ тўғри чизиқ бўлиши керак. Координаталар бошидан чексиз узоқлашган сари гиперболанинг нуқталари бу тўғри чизиққа чексиз яқинлашади. $y=\frac{b}{x}x$ ва $y=-\frac{b}{a}x$ тўғри чизиқлар гиперболанинг *асимптоталари* дейилади. 74-расмда гипербола ва унинг асимптоталарининг ўзаро жойлашиши кўрсатилган. Бу чизмада гипербола асимптоталарининг қандай ясалиши ҳам



73- расм.

* Тўғри чизиқ нуқтасининг ординатасини гиперболада ётган нуқтанинг y ординатасидан фарқ қилиш учун Y орқали белгиланган.



74- расм.

кўрсатилган. Бунинг учун маркази координаталар бошида бўлган, томонлари мос равишда $2a$ ва $2b$ га тенг ҳамда Ox ва Oy ўқларига параллел бўлган $CDEH$ тўғри тўртбурчакни ясаш керак. Бу *асосий* тўғри тўртбурчак дейилади. Икки томонга чексиз давом этган унинг диагоналлари эса гиперболанинг асимптоталаридир. Гиперболани ясашдан аввал унинг асимптоталарини ясаш тавсия қилинади.

Фокуслари орасидаги масофа ярмининг гипербола ҳақиқий ўқига нисбати гиперболанинг *эксцентриситети* дейилади ва одатда ε ҳарфи билан белгиланади:

$$\varepsilon = c/a \tag{36}$$

Гипербола учун $c>a$ бўлганидан, гиперболанинг эксцентриситети бирдан катта: $\varepsilon > 1$. Эксцентриситет гиперболанинг шаклини характерлайди. Ҳақиқатан (32) формуладан қуйидаги келиб чиқади: $(b/a)^2 = (c/a)^2 - 1 = \varepsilon^2 - 1$. Бундан эксцентриситети қанчалик кичик бўлса, гиперболанинг ярим ўқлари нисбати b/a шунчалик кичик бўлиши кўринади. Бироқ b/a нисбат гипербола асосий тўғри тўртбурчагининг шаклини, демак, гиперболанинг ўзининг шаклини аниқлайди. Гиперболанинг эксцентриситети қанчалик кичик бўлса, унинг асосий тўғри тўртбурчаги фокал ўқ йўналиши бўйича шунчалик тортилган бўлади.

Агар гиперболанинг ҳақиқий ярим ўқи мавҳум ярим ўққа тенг бўлса ($a = b$), у *тенг томонли* (ёки *тенг ёнли*) *гипербола* дейилади. Тенг томонли гиперболанинг каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

ёки

$$x^2 - y^2 = a^2 \tag{37}$$

кўринишга эга бўлади. Тенг томонли гипербола асимптоталарининг тенгламаси

$$y = x, \qquad y = -x \tag{38}$$

кўринишда бўлади ва демак, координата бурчакларининг биссектрисалари бўлади.

Тенг томонли гиперболанинг эксцентриситети:

$$\varepsilon = c/a = \sqrt{a^2 + a^2}/a = \sqrt{2}.$$

1-мисол. Фокуслари орасидаги масофа 26 га, эксцентриситети эса 13/12 га тенглигини билган ҳолда гиперболанинг каноник тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Шартга кўра $2c = 26$ ва $\varepsilon = c/a = 13/12$. Демак, гиперболанинг катта ярим ўқи $a = 12/13 \cdot c = (12/13) \cdot 26/2 = 12$. (32) формулага кўра гиперболанинг кичик ярим ўқи $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. Гипербола тенгламасининг кўриниши қуйидагича бўлади: $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$.

2-мисол Ўқлари координата ўқлари билан устма-уст тушадиган гипербола $M_1(-3;\ \sqrt{2}/2)$ ва $M_2(4;\ -2)$ нуқталар орқали ўтади. Унинг каноник тенгламасини топинг.

Ечилиши. Гиперболанинг каноник тенгламасини ёзамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Бу тенгламани $M_1(-3;\ \sqrt{2}/2)$ ва $M_2(4,\ -2)$ нуқталарнинг координаталари қаноатлантиради. Демак,

$$\frac{(-3)^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{2}/2)}{b^2} = 1 \text{ ва } \frac{4^2}{a^2} - \frac{(-2)^2}{b^2} = 1$$

ёки

$$\frac{9}{a^2} - \frac{1/2}{b^2} = 1 \text{ ва } \frac{16}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1.$$

Бундан $a^2 = 8$ ва $b^2 = 4$ ни топамиз ва уни гиперболанинг каноник тенгламасига қўямиз ҳамда узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

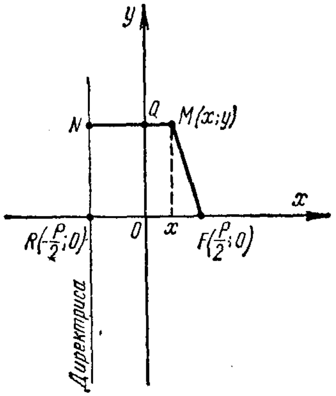
$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

5. Парабола. *Парабола* деб, текисликнинг *фокус* деб аталувчи берилган F нуқтасидан ва *директриса* деб аталувчи берилган тўғри чизиқдан баравар узоқлашган барча нуқталар тўпламига айтилади (фокус директрисада ётмайди деб фараз қилинади).

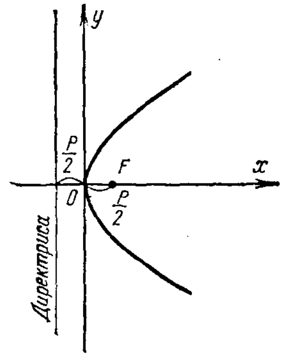
Фокусдан директрисагача бўлган масофани p орқали белгилаймиз. Бу катталик параболанинг *параметри* дейилади.

Парабола тенгламасини келтириб чиқарамиз. Абсциссалар ўқини шундай жойлаштирамизки, у директрисага перпендикуляр бўлиб, фокус орқали ўтсин ва директрисадан фокусга қараб мусбат йўналишга эга бўлсин (75-расм). Координаталар боши сифатида фокусдан директрисага туширилган FR перпендикулярнинг ўртасини танлаймиз. Шундай қилиб, танланган системада фокус $F(p/2;\ 0)$ координаталарга эга. Директриса тенгламаси $x = -p/2$ кўринишни олади.

Айтайлик, $M(x;\ y)$—параболанинг нуқтаси бўлсин. Параболанинг таърифига кўра, $M(x;\ y)$ нуқтанинг директрисадан MN узоқлиги унинг фокусдан бўлган MF масофасига тенг: $MN = MF$.



75- расм.



76- расм.

75-чизмадан равшанки, $MN = NQ + QM = \frac{p}{2} + x$, $MF = = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2}$. Демак,

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Бу тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтариб, $x^2 + px + + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$ ни ёки соддалаштиришлардан сўнг

$$y^2 = 2px \tag{39}$$

ни ҳосил қиламиз.

(39) тенглама *параболанинг каноник тенгламаси* дейилади. Уни равшанки, параболанинг ихтиёрий нуқталари қаноатлантиради. Параболада ётмаган нуқталарнинг координаталари (39) тенгламани қаноатлантирмаслигини кўрсатиш мумкин.

Каноник тенгламаси бўйича параболанинг шаклини текширамиз. Бу тенгламага y фақат жуфт даража билан (квадратда) қатнашганлиги учун абсциссалар ўқи параболанинг симметрия ўқи бўлади. Бутун эгри чизиқ ординаталар ўқидан ўнг томонда жойлашган, чунки (39) тенгламанинг чап томони манфиймас ва демак, бу тенгламанинг ўнг томонида жойлашган x манфий бўла олмайди. $x=0$ да $y=0$ га эга бўламиз. Демак, парабола координаталар бошидан ўтади. x чексиз ўсганда y нинг абсолют қиймати ҳам чексиз ўсади. (39) тенглама билан аниқланадиган парабола 76-расмда тасвирланган кўринишга эга.

Параболанинг симметрия ўқи *фокал ўқ* дейилади. Параболанинг симметрия ўқи билан кесишиш нуқтаси унинг *учи* дейилади. Берилган ҳолда параболанинг учи координаталар боши билан устма-уст тушади.

Мисол. $y^2=6x$ парабола берилган. Унинг директрисаси тенгламасини тузинг ва фокусини топинг.

Ечилиши. Берилган тенгламани параболанинг каноник тенгламаси (39) билан таққослаб, кўрамизки, $2p=6$, $p=3$. Парабола директрисасининг тенгламаси $x=-p/2$ ва фокуси $p/2$ ва 0 координаталарга эга бўлганидан, кўрилаётган ҳол учун директриса тенгламаси $x=-3/2$ ва фокус $F(3/2;\ 0)$ бўлади.

Эслатма. Агар параболанинг фокал ўқи деб ордината ўқини қабул қилсак, парабола тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x^2=2py. \qquad (40)$$

6. Айлана, эллипс, гипербола ва парабола конус кесимлар сифатида. Берилган тўғри чизиқни уни кесувчи бошқа бир тўғри чизиқ (айланиш ўқлари) атрофида айлантириш натижасида ҳосил қилинган сирт *доиравий конус* дейилади. Бунда айланаётган тўғри чизиқ ўзининг исталган ҳолатида конуснинг *ясовчиси* деб, тўғри чизиқнинг айланиш ўқи билан кесишиш нуқтаси эса конуснинг *учи* деб аталади. Конус унинг *учи* ажратиб турадиган иккита паллага эга.

Айлана, эллипс, гипербола ва параболани доиравий конуснинг учидан ўтмайдиган текисликнинг кесимлари сифатида ҳосил қилиш мумкин. (Бунинг исботини биз келтирмаймиз.) Шунинг учун бу эгри чизиқлар *конус кесимлар* дейилади.

Агар текислик конус ўқига перпендикуляр бўлса, кесимда айлана ҳосил бўлади.

Агар текислик ўққа перпендикуляр бўлмай, конуснинг фақат битта палласини кесса ва унинг ясовчиларидан биттасига ҳам параллел бўлмаса, кесимда эллипс ҳосил бўлади.

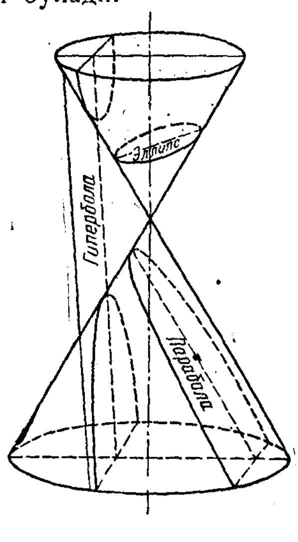
Агар текислик конус ясовчиларидан бирига параллел равишда унинг паллаларидан бирини кесса, кесимда парабола ҳосил бўлади.

Ниҳоят, агар текислик конуснинг иккала палласини кесса, кесимда гипербола ҳосил бўлади (77-расм).

Иккинчи тартибли эгри чизиқлар фан ва техниканинг кўп соҳаларида кенг қўлланилади. Бунга мисоллар келтирамиз.

1. Маълумки, қуёш системасининг планеталари Қуёш жойлашган умумий фокусга эга эллипслар бўйича ҳаракат қилади.

2. Агар парабола фокусига ёруғлик манбаи жойлаштирилса, параболадан қайтган нурлар унинг ўқига параллел ҳолда кетади. Прожекторнинг тузилиши шу хоссаги асосланган.



77-расм.

3. Механикада исбот қилинганидек, Ер юзидан горизонтга қараб бурчак остида $v_0=11{,}2$ км/с (иккинчи космик тезлик) бошланғич тезлик билан чиқарилган ракета парабола бўйлаб Ер юзидан чексиз узоқлашиб боради $v_0>11{,}2$ км/с бошланғич тезлик билан ҳаракат қилаётган ракета ҳам Ер юзасидан чексиз узоқлашиб боради, фақат—гипербола бўйлаб ҳаракат қилади. Ниҳоят, $v_0<11{,}2$ км/с бошланғич тезликда ракета эллипс бўйлаб ҳаракатланиб ёки яна Ерга қайтиб тушади, ёки Ернинг сунъий йўлдоши бўлиб қолади.

7. Иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламасини соддалаштириш. Квадрат учҳаднинг графиги Эгри чизиқ тенгламасининг кўриниши координаталар системасининг танланишига боғлиқ. Турли координаталар системасида битта эгри чизиқ учун турли мураккабликдаги тенгламани ҳосил қилишимиз мумкин. Шунинг учун кўпинча қуйидаги масала қўйилади. *Oxy* декарт координаталар системасида иккинчи тартибли эгри чизиқнинг унчалик содда бўлмаган тенгламаси берилган. Координаталарни алмаштириш билан (I боб, 3-§ га қ.) берилган эгри чизиқнинг тенгламасини ҳосил қилинг ва унинг кўринишига қараб эгри чизиқнинг турини, яъни эгри чизиқ эллипсни, гиперболани ва ҳ. к. ни тасвирлашини аниқланг. Ўнг томонда квадрат учҳад бўлган қуйидаги

$$y=ax^2+bx+c \tag{41}$$

тенглама берилган бўлсин. Берилган эгри чизиқнинг энг содда тенгламасини ҳосил қилиш учун ўқларни параллел кўчириш формуласидан (I боб, 3-§, 4-пунктга қ.) фойдаланамиз:

$$x=X+x_0,\quad y=Y+y_0, \tag{42}$$

бунда x_0 ва y_0—янги O_1 координата бошининг координаталари. (41) тенгламадаги эски x ва y координаталар ўрнига уларнинг янги X ва Y координаталар орқали ифодаларини қўйиб:

$$Y+y_0=a(X+x_0)^2+b(X+x_0)+c$$

ёки соддалаштиришдан сўнг

$$Y=aX^2+(2ax_0+b)X+ax_0^2+bx_0+c-y_0 \tag{43}$$

ни ҳосил қиламиз.

Янги координаталар бошининг x_0 ва y_0 координаталарини шундай танлаймизки, (43) тенгламанинг ўнг томонидаги X олдидаги коэффициент ва озод ҳад нолга айлансин, яъни

$$\left.\begin{aligned} &2ax_0+b=0,\\ &ax_0^2+bx_0+c-y_0=0 \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

шартлар бажарилсин.

Бу тенгламалар системасини номаълум x_0 ва y_0 га нисбатан ечиб, $x_0=-\dfrac{b}{2a}$, $y_0=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ ни ҳосил қиламиз*. Бундай тан-

* (44) дан $y_0=ax_0^2+bx_0+c$ эканлиги кўриниб турибди.

лашда янги тенгламалар системаси (43) нинг O_1 координаталар боши $Y=aX^2$ кўринишни олади, яъни O_1Y ўқ симметрия ўқи бўлган параболанинг энг содда тенгламаси бўлади.

Шундай қилиб, $y=ax^2+bx+c$ квадрат учҳаднинг графиги симметрия ўқи ординаталар ўқига параллел бўлган, учи $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ нуқтада бўлган параболадан иборат экан.

Худди шундай, $x=ay^2+by+c$ эгри чизиқ ўқ симметрияси абсциссалар ўқига параллел ва учи $\left(\frac{4ac-b^2}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$нуқтада бўлган параболадан иборат эканлигини кўрсатиш мумкин.

Мисол. $y=2x^2-8x+11$ парабола тенгламасини энг содда ҳолга келтиринг ва унинг учи координаталарини топинг.

Ечилиши. Берилган тенгламадаги x ва y ларни уларнинг (42) формула бўйича x ва y ифо алари билан алмаштириб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$Y+y_0=2(X+x_0)^2-8(X+x_0)+11$$

ёки

$$Y=2X^2+(4x_0-8)X+2x_0^2-8x_0+11-y_0$$

$4x_0-8=0$, $2x_0^2-8x_0+11-y_0=0$ деб олиб янги координаталар боши - парабола учлари координаталарини ҳосил қиламиз: $x_0=2$; $y_0=3$. Бунда парабола тенгламаси $Y=2X^2$ кўринишни олади.

8. Асимптоталари координаталар ўқи учун қабул қилинган тенг томонли гипербола тенгламаси.

$$y=k/x \qquad (45)$$

функциянинг графиги асимптоталари координаталар ўқлари билан устма-уст тушадиган тенг томонли гипербола эканлигини кўрсатамиз.

Бунинг учун координаталар ўқини $\alpha=\pi/4$ бурчакка буриб (78-расм), янги OXY координаталар системасини ҳосил қиламиз, бунда $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$ (I боб, 3-§, 5-пунктдаги мисолга қ.).

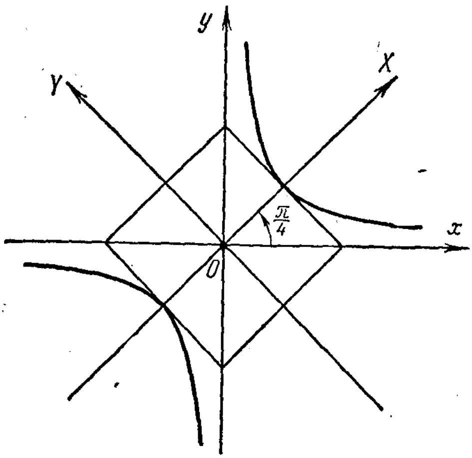
x ва y нинг бу ифодаларини (45) тенгламага қўйиб,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)=k/\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)$$

ёки соддалаштиришлардан сўнг

$$X^2-Y^2=2k$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенг томонли гиперболанинг тенгламасидир. Унинг ҳақиқий ўқи $k>0$ да OX ўқ билан, $k<0$ да эса OY ўқ билан устма-уст тушади (78-расмда $k>0$ деб фараз қилинади). Бунда эски Ox ва Oy ўқлар янги OXY координаталар системасининг биссектрисалари бўлиб хизмат қилади ва демак, тенг томонли гиперболанинг асимптоталари бўлади. Гипер-



78- расм.

боланинг ҳақиқий ўқи $a = \sqrt{2|k|}$. Шундай қилиб, $y = k/x$ функциянинг графиги Ox ва Oy ўқлар асимптоталар ролини бажарадиган тенг томонли гипербола экан.

9. Каср-чизиқли функциянинг графиги. Ушбу

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (46)$$

функция *каср-чизиқли функция* дейилади, бунда a, b, c ва d—ўзгармаслар ($a/b \neq c/d$). Бу функциянинг графиги асимптоталари координаталар ўқига параллел бўлган тенг томонли гипербола бўлишини кўрсатамиз.

(46) тенгламанинг ўнг томонида турган ифоданинг сурати ва махражини c га бўламиз ва $a/c = \alpha$; $b/c = \beta$; $d/c = \gamma$ белгилашлар киритамиз. У ҳолда $y = \frac{\alpha x + \beta}{x + \gamma}$ ифодани ҳосил қиламиз. Бу тенгламанинг ўнг томонида қуйидагича алмаштириш бажарамиз:

$$\frac{\alpha x + \beta}{x+\gamma} = \frac{\alpha x + \alpha\gamma + \beta - \alpha\gamma}{x+\gamma} = \frac{\alpha(x+\gamma) + \beta - \alpha\gamma}{x+\gamma} = \alpha + \frac{\beta - \alpha\gamma}{x+\gamma}.$$

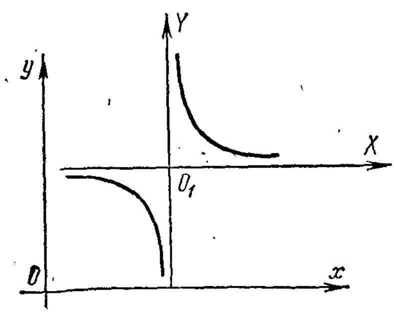
Шундай қилиб,

$$y = \alpha + \frac{\beta - \alpha\gamma}{x+\gamma} \quad \text{ёки} \quad y - \alpha = \frac{\beta - \alpha\gamma}{x+\gamma}.$$

$x + \gamma = X$ ва $y - \alpha = Y$ деб оламиз, яъни янги координаталар боши $O_1(-\gamma;\ \alpha)$ бўлган $x = X - \gamma$ ва $y = Y + \alpha$ ўқларни параллел кўчирамиз. У ҳолда

$$Y = \frac{\beta - \alpha\gamma}{X}$$

ифода ҳосил бўлади.



79- расм.

8-пунктга кўра, бу O_1X ва O_1Y асимптоталари мос равишда эски Ox ва Oy ўқларга параллел бўлган тенг томонли гиперболанинг тенгламасидир (79-расм).

Шундай қилиб, (46) каср-чизиқли функциянинг графиги асимптоталари координаталар ўқига параллел бўлган тенг томонли гипербола экан. Бу гиперболанинг маркази $O_1(-\gamma;\alpha)$ нуқтада жойлашган, бунда $\alpha = a/c;\ \gamma = d/c$.

10. Координаталар кўпайтмасини ўз ичига олган ҳад қатнашмаган иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг тенгламасини алмаштириш.

Биз иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг тўрттасини: айлана, гипербола, эллипс, параболани қараб чиқдик. Иккинчи тартибли $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ тенглама билан аниқланадиган бошқа эгри чизиқлар мавжудми? деган савол туғилади. Бу саволга жавоб бериш учун қуйидаги мисолларни кўрамиз.

1) Иккинчи тартибли $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$ тенгламани ягона $(x_0; y_0)$ нуқтанинг координатлари қаноатлантиради (2- пунктга қ.)

2) $x^2 - y^2 = 0$ тенгламани $(x - y)(x + y) = 0$ кўринишда ёзиб олиш мумкин ва у ҳолда равшан бўладики, бу тенгламани $x - y = 0$ тўғри чизиқнинг ва $x + y = 0$ тўғри чизиқнинг исталган нуқтасининг (фақат шу нуқталарнинг) координатлари қаноатлантириши мумкин. $x - y = 0$ ва $x + y = 0$ тўғри чизиқлар (координаталар бурчагининг биссектрисалари) ўзаро координаталар бошида кесишади. $x^2 - y^2 = 0$ тенглама ўзаро кесишувчи иккита тўғри чизиқнинг тенгламасидир.

3) $(y - 2)(y + 2) = 0$ кўринишда ёзиш мумкин бўлган $y^2 = 4$ тенгламани $y - 2 = 0$ ва $y + 2 = 0$ параллел тўғри чизиқлар нуқталарининг (фақат шу нуқталарнинг) координаталари қаноатлантиради. Бинобарин, $y^2 = 4$ тенглама иккита параллел тўғри чизиқнинг тенгламасидир.

4) $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ тенгламани $(x - y)^2 = 0$ деб қайтадан ёзиш мумкин, демак, у $x - y = 0$ тенгламага (I ва III координата бурчакларининг биссектрисаларига) тенг кучли. $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ тенгламани шартли равишда бир-бирига устма-уст тушувчи чизиқлар тенгламаси дейишимиз мумкин.

5) Ниҳоят, шундай бўлиши мумкинки, x ва y га нисбатан иккинчи тартибли тенглама ҳеч қандай чизиқни ифодаламайди. Масалан, $x^2 + y^2 + 1 = 0$ тенгламани x ва y ларнинг ҳеч қандай ҳақиқий қиймати қаноатлантирмайди, демак, у нуқталарнинг бўш тўпламини аниқлайди.

Шундай қилиб, коэффициентларининг қийматларига боғлиқ равишда иккинчи тартибли (19)

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

тенглама айланани, эллипсни, гиперболани, параболани, кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтини, параллел тўғри чизиқлар жуфтини, устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфтини, нуқтани аниқлаши ва ниҳоят, ҳеч қандай чизиқни аниқламаслиги мумкин.

Бу тенглама юқорида санаб ўтилган чизиқлардан фарқли бўлган ҳеч қандай чизиқни аниқлай олмаслигини кўрсатиш мумкин.

Коэффициентларнинг берилган сонли қийматларида (19) тенглама қандай чизиқни аниқлашини билиш учун координаталар ўқини буриш ва параллел кўчириш каби алмаштиришдан фойдаланилади. 11-пунктда буриш алмаштириши ёрдамида (19) тенгламадан координаталар кўпайтмасидан иборат ҳад қатнашмаган иккинчи тартибли тенгламага ҳар доим ўтиш мумкинлиги кўрсатилади. Сўнгра параллел кўчириш алмаштириши ёрдамида ҳар доим иккинчи тартибли эгри чизиқнинг энг содда тенгламасини ҳосил қилиш ва у бўйича эгри чизиқнинг турини аниқлаш мумкин. Бунинг қандай бажарилишини мисолда кўрсатамиз.

Мисол. Ўқларни параллел кўчириш ёрдамида $x^2-2y^2+2x+12y-33=0$ эгри чизиқнинг энг содда тенгламасини ҳосил қилинг ва уни ясанг.

Ечилиши. x ни ўз ичига олган ҳадлар ва y ни ўз ичига олган ҳадлар учун тўла квадрат ажратиш билан қуйидаги алмаштиришни бажарамиз:

$$x^2+2x=x^2+2x+1-1=(x+1)^2-1;$$

$$-2y^2+12y=-2(y^2-6y)=-2(y^2-6y+9-9)=-2(y-3)^2+18.$$

Берилган тенгламани энди қуйидагича қайта ёзиб олиш мумкин:

$$(x+1)^2-2(y-3)^2-1+18-33=0,$$

бундан

$$(x+1)^2-2(y-3)^2=16 \text{ ёки } \frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{8}=1.$$

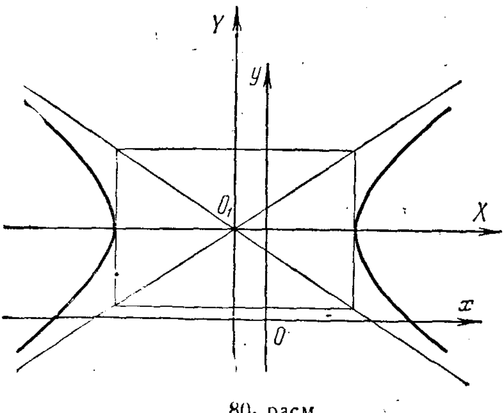
Янги координаталар боши $O_1(-1;3)$; $x=X-1$; $y=Y+3$ бўлган ўқларни параллел кўчириш алмаштиришини бажарамиз. У ҳолда эгри чизиқ тенгламаси

$$\frac{X^2}{16}-\frac{Y}{8}=1$$

кўринишни олади. Бу ярим ўқлари $a=4$ ва $b=2\sqrt{2}$ бўлган гипербола тенгламасидир. 80-расмда бу эгри чизиқ O_1XY координаталар системасида ясалган. Бироқ бу аввал берилган Oxy координаталар системасига ҳам тааллуқли дейиш мумкин (бу ҳам 80-расмда берилган).

11. Иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламасини соддалаштириш.

Квадратик шаклларни алмаштириш ёрдамида иккинчи тартибли эгри чизиқнинг (19) умумий тенгламаси $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ ни қандай соддалаштиришни кўрсатамиз. Агар бу тенглама координаталар кўпайтмасини ўз ичига олган ҳадни ўз ичига олмаса, яъни $2B=0$ бўлса, у ҳолда x ва y қатнашган ҳадларни тўла квадратларга тўлдириб, (19) тенгламани каноник кўринишга келтиришимиз мумкин (10-пунктга қ.).



80- расм.

Энди (19) тенгламада коэффициент $2B\neq0$ бўлсин. Бу ҳолда тенгламани координаталар кўпайтмасини ўз ичига олган ҳад қатнашмаган кўринишга келтириш учун қуйидагича иш тутамиз.

(19) тенгламанинг чап томонидаги юқори ҳадлардан ташкил топган $F=(x, y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2$ квадратик шаклни қараётиб, уни II боб, 8-§, 3-пунктда баён қилинган методлар билан каноник кўринишга келтирамиз. Бунда иккинчи тартибли эгри чизиқнинг умумий тенгламаси координаталар кўпайтмасини ўз ичига олган ҳад қатнашмаган кўринишга келади.

Мисол. Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг умумий

$$5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$$

тенгламасини каноник кўринишга келтиринг.

Ечилиши. Берилган тенгламанинг юқори ҳадларидан тузилган квадратик форма қуйидагича кўринишга эга:

$$F(x,y)=5x^2+8xy+5y^2.$$

Бу ерда $a_{11}=5$, $a_{12}=a_{21}=4$, $a_{22}=5$; матрица $A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$.

Характеристик тенгламани тузамиз [II боб, (151) формулага қ.]:

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\ 4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0 \text{ ёки } \lambda^2-10\lambda+9=0.$$

Бу тенгламанинг илдизлари $\lambda_1=9$, $\lambda_2=1$. II боб, (147) формулага биноан янги $Ox'\,y'$ координаталар системасидаги квадратик форма қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$F(x', y')=\lambda_1\, x'^2+\lambda_2 y'^2=9x'^2+1\cdot y'^2.$$

Эски Oxy координаталар системасидан янги $Ox'y'$ координаталар системасига ўтиш матрицаси $L=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$ ни топамиз. Бунинг учун тенгламалар системасини тузамиз:

$$\left.\begin{array}{r}(5-9)\,\alpha_{11}+4\,\alpha_{21}=0,\\ 4\alpha_{11}+(5-9)\,\alpha_{21}=0\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{r}(5-1)\,\alpha_{12}+4\alpha_{22}=0,\\ 4\alpha_{12}+(5-1)\,\alpha_{22}=0,\end{array}\right\}$$

ёки

$$\left.\begin{array}{r}-4\alpha_{11}+4\alpha_{21}=0,\\ 4\alpha_{11}-4\alpha_{21}=0\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{r}4\alpha_{12}+4\alpha_{22}=0,\\ 4\alpha_{12}+4\alpha_{22}=0\end{array}\right\}$$

(II бобдаги (149) ва (150) формулаларга қ.).

Бу системаларнинг ҳар бири битта тенгламага келтирилади: биринчи система $\alpha_{11}=\alpha_{21}$ тенгламага, иккинчиси эса $\alpha_{22}=-\alpha_{12}$ тенгламага. L матрица ортогоналдир (II боб, 8-§, 2-пунктга қ.). Шунинг учун қуйидаги тенгликлар ўринли бўлиши керак:

$$\alpha^2_{11}+\alpha^2_{12}=1 \text{ ва } \alpha^2_{21}+\alpha^2_{22}=1.$$

Айни пайтда $\alpha_{11}=\alpha_{21}$ ва $\alpha_{22}=-\alpha_{12}$ бўлгани учун

$$\alpha_{11}=\alpha_{21}=1/(\pm\sqrt{2})$$

ва

$$\alpha_{12}=-1/(\pm\sqrt{2}),\ \alpha_{22}=1/(\pm\sqrt{2})$$

ни топамиз ёки аниқлик учун илдизнинг „плюс“ ишорасини танлаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\alpha_{11}=1/\sqrt{2},\qquad \alpha_{21}=1/\sqrt{2},$$

$$\alpha_{12}=-1/\sqrt{2},\qquad \alpha_{22}=1/\sqrt{2}.$$

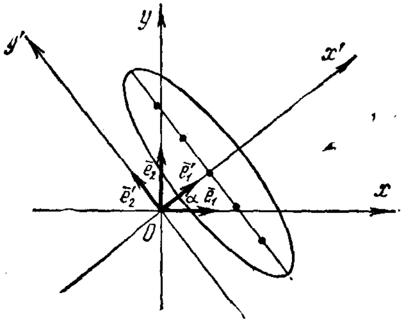
Шундай қилиб, координаталарни алмаштириш формуласи бу ҳолда қуйидагича бўлади:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y').$$

Энди янги координаталар системасида эгри чизиқ умумий тенгламасининг қуйи ҳадлари қандай бўлишини топамиз:

$$-18x - 18y + 9 = -\frac{18}{\sqrt{2}}(x' - y') - \frac{18}{\sqrt{2}}(x' + y') + 9 = -\frac{36}{\sqrt{2}}x' + 9.$$



81- расм.

Шундай қилиб, янги $Ox'y'$ координаталар системасида чизиқ тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$9x'^2 + y'^2 - \frac{36}{\sqrt{2}}x' + 9 = 0 \quad \text{ёки} \quad x'^2 + \frac{y'^2}{9} - \frac{4x'}{\sqrt{2}} + 1 = 0.$$

x' қатнашган ҳадларда тўлиқ квадрат ажратиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{(x' - \sqrt{2})^2}{1} + \frac{y'^2}{9} = 1.$$

Шундай қилиб, берилган чизиқ маркази янги координаталар системасида $O_1(\sqrt{2};\ 0)$ нуқтага жойлашган эллипс экан. Эллипснинг эски координаталар системасига нисбатан ҳолатини аниқлаш учун янги ўқларнинг эски системага нисбатан жойлашишини аниқлаш керак. Бунинг учун эски системанинг $\mathbf{e}_1$ ва $\mathbf{e}_2$ ортлари ҳамда янги системанинг $\mathbf{e}'_1$ ва $\mathbf{e}'_2$ ортлари орасидаги бурчакни аниқлаш етарли. II бобдаги (132) формулаларга кўра қуйидагиларни топамиз:

$$\cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1}) = \alpha_{11} = 1/\sqrt{2},\ \cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2}) = \alpha_{12} = -1/\sqrt{2},$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1'}) = \alpha_{21} = 1/\sqrt{2},\ \cos(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2}) = \alpha_{22} = 1/\sqrt{2}.$$

Демак, янги система ўқлари эски система ўқлари билан ташкил қиладиган бурчаклар $\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1'} = 45°$, $\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2'} = 135°$, $\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1'} = 45°$, $\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2'} = 45°$. Ўқларнинг жойлашиши ва эллипс 81- расмда келтирилган.

IV боб

ФАЗОДАГИ АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

1-§. ТЕКИСЛИК

1. Сирт тенгламаси. I боб, 5-§ да айтилганидек, $F(x, y) = 0$ тенглама, умуман айтганда, текисликда бирор тўғри чизиқни аниқлайди, яъни Oxy текисликнинг координаталари x ва y бўлган барча нуқталар тўплами бу тенгламани қаноатлантиради. Шунга ўхшаш

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

тенглама $Oxyz$ фазода бирор *сиртни*, яъни *x, y ва z координаталари $F(x, y, z)=0$ тенгламани қаноатлантирадиган нуқталар тўпламини аниқлайди.* (1) тенглама бу сиртнинг тенгламаси, x, y, z лар эса унинг ўзгарувчи координаталари дейилади.

Бироқ, кўпинча, фазо тенглама билан эмас, балки у ёки бу хоссага эга бўлган барча нуқталар тўплами билан берилади. Бундай ҳолда сиртнинг геометрик хоссаларидан келиб чиққан ҳолда унинг тенгламасини топиш талаб қилинади.

Мисол. Маркази $O_1(x_1; y_1; z_1)$ нуқтада, радиуси R бўлган шар сирт (сфера) тенгламасини топинг.

Ечилиши. Сферанинг таърифига кўра, унинг исталган $M(x, y, z)$ нуқтасининг $O_1(x_1; y_1; z_1)$ марказдан узоқлиги R радиусга тенг, яъни $O_1M = R$. Бироқ

$$O_1M = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$$

(I боб, (2) формулага қ.). Демак,

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} = R$$

ёки

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = R^2. \tag{*}$$

Биз сферанинг изланган тенгламасини ҳосил қилдик, чунки сферанинг исталган нуқтасининг координаталари тенгламани қаноатлантиради ва аксинча, бу сферада ётмаган нуқталар координаталари тенгламани қаноатлантирмайди.

Хусусан, агар сфера маркази координаталар боши билан устма-уст тушса, (*) сферанинг тенгламаси қуйидаги кўринишни олади:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \tag{**}$$

2. Текисликнинг нормал вектори. Берилган нуқта орқали ўтувчи текислик тенгламаси. Фазода Q текисликни қараймиз. Унинг ҳолати бу текисликка перпендикуляр бўлган $\mathbf{N}$ векторнинг ва Q текисликда ётувчи бирор белгиланган $M_1(x_1; y_1; z_1)$ нуқтанинг берилиши билан тўлиқ аниқланади. Q текисликка перпендикуляр бўлган $\mathbf{N}$ вектор шу текисликнинг *нормал вектори* дейилади. Агар нормал вектор $\mathbf{N}$ нинг проекцияларини A, B ва C орқали белгиласак,

$$\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}. \tag{2}$$

Берилган $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқта орқали ўтувчи ва берилган (2) нормал векторга эга бўлган Q текисликнинг тенгламасини келтириб чиқарамиз. Бунинг учун M_1 нуқтани Q текисликнинг ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуқтаси билан боғловчи (бирлаштирувчи) $\overline{M_1M}$ векторни қарайлик (82-расм).

Q текисликдаги M нуқтанинг ихтиёрий ҳолатида $\overline{M_1M}$ вектор Q текисликнинг нормал вектори $\mathbf{N}$ га перпендикуляр бўлади. Шунинг учун скаляр кўпайтма нолга тенг: $\overline{M_1M} \cdot \mathbf{N} = 0$. Скаляр кўпайтма $\overline{M_1M} \cdot \mathbf{N}$ ни проекциялар орқали ёзамиз. $\overline{M_1M} = (x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j} + (z - z_1)\mathbf{k}$, $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ бўлгани учун

$$\overline{M_1M} \cdot \mathbf{N} = A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1)$$

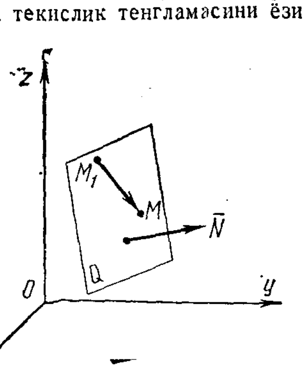
ва демак,

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \tag{3}$$

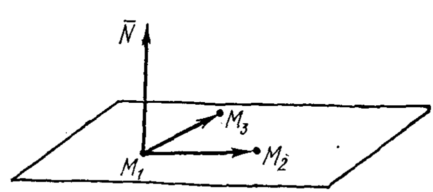
Биз Q текисликнинг ихтиёрий $M(x;\ y;\ z)$ нуқтаси (3) тенгламани қаноатлантиришини кўрсатдик. Q текисликда ётмаган нуқталарнинг координаталари бу тенгламани қаноатлантирмаслигини кўриш қийин эмас (охирги ҳолда $\overline{MM_1} \cdot \mathbf{N} \neq 0$). Демак, биз Q текисликнинг изланган тенгламасини ҳосил қилдик. (3) тенглама *берилган нуқта орқали ўтувчи текислик тенгламаси* дейилади. У x, y ва z ўзгарувчи координаталарга нисбатан биринчи даражалидир.

Шундай қилиб, биз *ҳар қандай текисликка ўзгарувчи координаталарга нисбатан биринчи даражали тенглама мос келишини* кўрсатдик.

1-мисол. $\mathbf{N} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$ векторга перпендикуляр, $M(1;\ -2;\ 3)$ нуқта орқали ўтувчи текислик тенгламасини ёзинг.



82- расм.



83- расм.

Ечилиши. Бу ерда $A=2$, $B=0$, $C=4$. (3) формулага биноан қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$2(x-1)+0(y+2)+4(z-3)=0 \text{ ёки } x+2z-7=0.$$

(3) тенгламанинг A, B ва C коэффициентларига турли қийматлар бериб, $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқта орқали ўтувчи ихтиёрий текислик тенгламасини ҳосил қилишимиз мумкин. Берилган нуқта орқали ўтувчи барча текисликлар тўплами *текисликлар боғлами* дейилади. A, B ва C коэффициентлар турли қийматларни қабул қиладиган (3) тенглама *текисликлар боғламининг тенгламаси* дейилади.

2-мисол. Берилган учта $M_1(1;\ -1;\ 0)$, $M_2(2;\ 1;\ -3)$ ва $M_3(-1;\ 0;\ 1)$ нуқталар орқали ўтувчи текислик тенгламасини тузинг (83-расм).

Ечилиши. M_1 нуқта орқали ўтувчи текисликлар боғлами тенгламасини ёзамиз:

$$A(x-1)+B(y+1)+Cz=0.$$

$\overline{M_1M_2}$ ва $\overline{M_1M_3}$ векторлар изланган текисликда ётганлиги учун уларнинг вектор кўпайтмасига тенг векторни ва демак, бу текисликка перпендикуляр векторни унинг нормал вектори сифатида қабул қилиш мумкин:

$$\mathbf{N}=\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & -3\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=5\mathbf{i}+5\mathbf{j}+5\mathbf{k}.$$

Шундай қилиб, $A=5$, $B=5$, $C=5$ ва изланган тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$5(x-1)+5(y+1)+5z=0 \quad \text{ёки} \quad x+y+z=0.$$

3. Текисликнинг умумий тенгламаси. 2-пунктда *ҳар қандай текисликка ўзгарувчи координаталарга нисбатан биринчи тартибли тенглама тўғри келишини* кўрсатдик.

Энди учта x, y ва z ўзгарувчили биринчи даражали умумий тенгламани қарайлик:

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{4}$$

A, B ёки C коэффициентлардан камида биттаси нолдан фарқли, акс ҳолда биз тенгламага эмас, балки $D=0$ айниятга эга бўлар эдик. Аниқлик учун $C\neq 0$ деб, (4) тенгламани қуйидагича ёзиб олайлик:

$$A(x-0)+B(y-0)+C\left(z+\frac{D}{C}\right)=0. \tag{5}$$

(5) тенглама (4) тенгламага тенг кучли. (5) тенгламани (3) тенглама билан таққослаб, у ва демак, унга тенг кучли бўлган (4) тенглама ҳам $\mathbf{N}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ нормал векторга эга, $M_1(0;\ 0;\ -D/C)$ нуқта орқали ўтувчи текислик тенгламаси эканлигини кўрамиз. Шундай қилиб, 2-пунктда исбот қилинган фикрга тескари фикр ўринли эканини кўрсатдик, чунончи, *ўзгарувчи x, y, z декарт координаталарига нисбатан биринчи тартибли бўлган ҳар қандай $Ax+By+Cz+D=0$ тенглама бирор текис-*

ликнинг тенгламасини ифодалайди. Бунда A, B, C коэффициентлар текислик нормал векторининг координаталар ўқидаги проекцияларидир.

(4) тенглама *текисликнинг умумий тенгламаси* дейилади.

Мисол. $M_1(1; 2; -3)$ ва $M_2(4; 2; 1)$ нуқталар $2x + 3y - 5z - 23 = 0$ текисликда ётиш-ётмаслигини аниқланг.

Ечилиши. Нуқта ўзининг координаталари текислик тенгламасини қаноатлантиргандагина, фақат шу ҳолда бу текисликда ётади. Шунинг учун масалани ечишда M_1 ва M_2 нуқталарнинг координаталари текислик тенгламасини қаноатлантиришини текшириш керак. M_1 нуқтанинг координаталарини бу тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз: $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 5(-3) - 23 = 0$, яъни M_1 нуқта текисликда ётар экан. $M_2(4; 2; 1)$ нуқта учун $2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 - 23 = -14 \neq 0$. Демак, M_2 нуқта бу текисликда ётмас экан.

Агар озод ҳад $D = 0$ бўлса, у ҳолда текислик тенгламаси $Ax + By + Cz = 0$ кўринишни олади ва уни координаталар бошининг $x = 0$, $y = 0$ ва $z = 0$ координаталари қаноатлантиради. Демак, текислик координаталар боши орқали ўтади.

$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ тенгламалар мос равишда Oyz, Oxz ва Oxy координата текисликларининг тенгламалари эканлигига осонгина ишонч ҳосил қилиши мумкин.

4. Текисликни тенгламаси бўйича ясаш. Текислик тенгламасини билган ҳолда унинг шаклини чизиш осон. Бунинг учун унинг бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқтасини топиш етарли. $Ax + By + Cz + D = 0$ текисликда бирор нуқтани топиш учун иккита координатага ихтиёрий қиймат бериб, учинчисини текислик тенгламасидан топиш етарли. Текисликнинг координаталар ўқи билан кесишган нуқталарини аниқлаш жуда осон.

1-мисол. $2x + 3y + 6z - 6 = 0$ текисликни ясанг.

Ечилиши. Текисликнинг координаталар ўқи билан кесишган нуқталарини топамиз. Текисликни Ox ўқ билан кесишган нуқтасини топиш учун текислик тенгламасида $y = 0$ ва $z = 0$ деб олиш керак (чунки Ox ўқнинг ихтиёрий нуқтаси учун $y = z = 0$). $2x + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 6 = 0$ га эгамиз, бундан $x = 3$. Шунга ўхшаш, $x = 0$, $y = 0$ деб, текисликнинг Oz ўқ билан кесишган нуқтасининг, аппликатасини топамиз: $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 6 \cdot z - 6 = 0$, бундан $z = 1$. Ниҳоят $x = z = 0$ да $y = 2$ ни топамиз. Шундай қилиб, берилган $2x + 3y + 6z - 6 = 0$ текислик $M_1(3; 0; 0)$, $M_2(0; 0; 1)$, $M_3(0; 2, 0)$ нуқталар орқали ўтар экан (84- расм).

2-мисол. $2x + 5y - 10 = 0$ текисликни ясанг.

Ечилиши. $\mathbf{N} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ нормал вектор Oz ўқига перпендикуляр бўлгани учун изланган текислик бу ўққа параллел. Текисликни ясаш учун унинг Ox ва Oy ўқлари билан кесишган нуқталарини топиш етарли. $x = 0$ деб, $y = 2$ ни топамиз; $y = 0$ деб, $x = 5$ ни топамиз. Демак, текислик $M_1(0; 2; 0)$, $M_2(5; 0; 0)$ нуқталар орқали ўтар экан (85- расм).

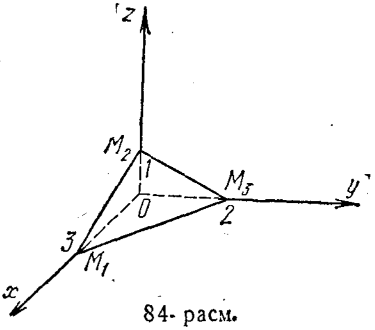
5. Текисликлар орасидаги бурчак. Иккита такисликнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари. Мос равишда

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad (Q_1)$$

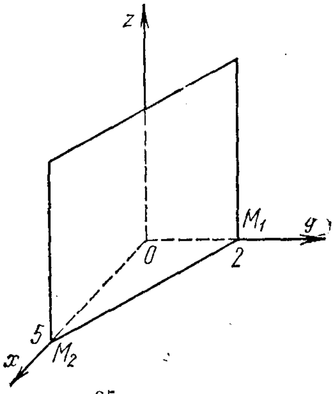
ва

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad (Q_2)$$

тенгламалар билан берилган иккита Q_1 ва Q_2 текисликни қарайлик. Иккита текислик орасидаги бурчак деганда бу текисликлар

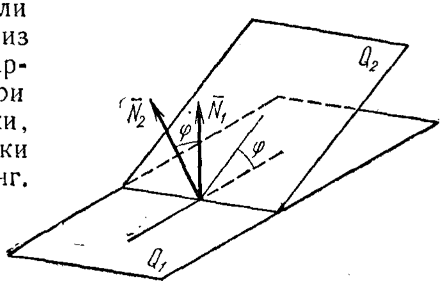


84- расм.



85- расм.

ташкил қилган қўшни икки ёқли бурчаклардан бирини тушунамиз (86- расм). Q_1 ва Q_2 текисликларнинг $\mathbf{N}_1$ ва $\mathbf{N}_2$ нормал векторлари орасидаги φ бурчак равшанки, юқорида кўрсатилган қўшма икки ёқли бурчаклардан бирига тенг. Шунинг учун



86- расм.

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2}{|\mathbf{N}_1| \cdot |\mathbf{N}_2|}$$

(II бобдаги (78) формулага қ.). Лекин

$$\mathbf{N}_1 = A_1\mathbf{i} + B_1\mathbf{j} + C_1\mathbf{k}, \quad \mathbf{N}_2 = A_2\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + C_2\mathbf{k}$$

бўлгани учун

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{6}$$

1- мисол. $x + 2y - 3z + 4 = 0$ ва $2x + 3y + z + 8 = 0$ текисликлар орасидаги бурчакни аниқланг.

Ечилиши. (6) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{5}{14}.$$

Жадвалдан $\varphi \approx 69°05'$ ни топамиз. Шундай қилиб, қўшма икки ёқли бурчаклардан бири тахминан $69°05'$ га тенг экан.

Иккита Q_1 ва Q_2 текислик:

а) уларнинг нормал векторлари $\mathbf{N}_1$ ва $\mathbf{N}_2$ коллинеар бўлгандагина, ва фақат шундагина бир-бирига параллел;

б) уларнинг нормал векторлари $\mathbf{N}_1$ ва $\mathbf{N}_2$ перпендикуляр бўлганда ва фақат шундагина бир-бирига перпендикуляр бўлишини эслатиб ўтамиз.

2-мисол. M_1 $(-2;\ 1;\ 4)$ нуқта орқали ўтувчи, $3x+2y-7z+8=0$ текисликка параллел бўлган текислик тенгламасини тузинг.

Ечилиши. (3) формулага биноан $M_1(-2,\ 1;\ 4)$ нуқта орқали ўтувчи текисликлар боғлами тенгламасини ёзамиз:

$$A(x+2)+B(y-1)+C(z-4)=0. \qquad (*)$$

Текисликлар боғламидан $3x+2y-7z+8=0$ текисликка параллел бўлганини ажратиш керак. Изланаётган ва берилган текислик параллел бўлгани учун изланаётган текисликнинг $A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ нормал вектори сифатида берилган текисликнинг $\mathbf{N}=3\mathbf{i}+2\mathbf{i}-7\mathbf{k}$ нормал векторини қабул қилиш мумкин. Демак, $A=3$, $B=2$, $C=-7$. Коэффициентларнинг бу қийматларини (*) тенгламага қўйиб, изланган текислик тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$3(x+2)+2(y-1)+(-7)(z-4)=0 \text{ ёки } 3x+2y-7z+32=0.$$

3-мисол. $M_1(-2;\ 3;\ 6)$ нуқта орқали $2x+3y-2z-4=0$ (Q_1) ва $3x+5y+z=0$ (Q_2) текисликларга перпендикуляр текислик ўтказинг.

Ечилиши. M_1 нуқта орқали ўтувчи текисликлар боғлами тенгламасини ёзамиз:

$$A(x+2)+B(y-3)+C(z-6)=0. \qquad (*)$$

Q_1 ва Q_2 текисликлар мос равишда $\mathbf{N}_1=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ ва $\mathbf{N}_2=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+\mathbf{k}$ нормал векторларга эга. Текисликларнинг перпендикулярлик шартига кўра изланган текисликнинг $\mathbf{N}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ нормал вектори $\mathbf{N}_1$ ва $\mathbf{N}_2$ векторларга перпендикуляр бўлиши керак. Шунинг учун $\mathbf{N}$ вектор сифатида $\mathbf{N}_1$ ва $\mathbf{N}_2$ векторларнинг вектор кўпайтмасини олиш мумкин:

$$\mathbf{N}=\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}=13\mathbf{i}-8\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

Демак, $A=13$, $B=-8$, $C=1$. A, B ва C ларнинг топилган қийматларини (*) тенгламага қўйиб, изланган текислик тенгламасини ҳосил қиламиз.

$$13(x+2)-8(y-3)+1(z-6)=0 \quad \text{ёки} \quad 13x-8y+z+44=0.$$

6. Учта текисликнинг кесишиш нуқтаси. Учта $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$ текислик берилган бўлсин. Бу текисликларнинг кесишиш нуқтасини топиш учун равшанки, қуйидаги тенгламалар системасини ечиш керак:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Агар бу системанинг

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\neq 0$$

детерминанти нолдан фарқли бўлса, система ягона ечимга эга*, яъни учта текислик битта нуқтада кесишади.

Мисол. Қуйидаги текисликларнинг кесишиш нуқтасини топинг:

$$x+y-2z+3=0,\quad 2x-2y+3z-7=0,\quad x+3y-z-4=0.$$

Ечилиши.

$$\left.\begin{aligned} x+y-2z+3&=0,\\ 2x-2y+3z-7&=0,\\ x+3y-z-4&=0\end{aligned}\right\}$$

системани ечиб, текисликларнинг кесишиш нуқтаси координаталарини топамиз: $x=1,\ y=2,\ z=3$.

7. Нуқтадан текисликкача бўлган масофа. $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқта ва $Ax+By+Cz+D=0$ тенгламага эга Q текислик берилган бўлсин. Улар орасидаги d масофа, яъни M_1 нуқтадан Q текисликка туширилган перпендикуляр узунлиги қуйидаги формула орқали аниқланади:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{8}$$

буни келтириб чиқариш нуқтадан текисликдаги тўғри чизиққача бўлган масофани топиш формуласини келтириб чиқаришга ўхшаш.

Мисол. $M_1(1;\ 0;\ -2)$ нуқтадан $2x-y+2z-4=0$ текисликкача бўлган масофани топинг.

Ечилиши. (8) формулага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\cdot 1-1\cdot 0+2\cdot(-2)-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{6}{3}=2.$$

2-§. ФАЗОДАГИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

1. Фазодаги тўғри чизиқнинг тенгламаси. Фазодаги тўғри чизиқни биз иккита кесишувчи сиртларнинг ҳар бирига тегишли бўлган барча нуқталар тўплами деб қараймиз. Агар бу сиртлар $F(x,\ y,\ z)=0$ ва $\Phi(x,\ y,\ z)=0$ тенгламалар билан берилган бўлса, уларнинг кесишиш чизиқлари қуйидаги тенгламалар системаси билан аниқланади:

$$\left.\begin{aligned} F(x,\ y,\ z)&=0,\\ \Phi(x,\ y,\ z)&=0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Масалан, $x^2+y^2+z^2=25$ сферанинг $z=3$ текислик билан кесишишидан ҳосил бўлган айлана қуйидаги тенгламалар системаси билан аниқланади:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=25,\\ z&=3\end{aligned}\right\}$$

---

* II боб, 2-§, 2-пунктга қаранг.

Кўрсатилган айлананинг ихтиёрий $M(x;\ y;\ z)$ нуқтасининг ўзгарувчи координаталари бу системанинг ҳар бир тенгламасини қаноатлантиради.

2. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламалари. Қуйидаги биринчи даражали тенгламалар системасини қараймиз:

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Бу системанинг ҳар бир тенгламаси текисликнинг тенгламасидир. Агар бу текисликлар параллел бўлмаса (яъни уларнинг нормал векторлари коллинеар бўлмаса), у ҳолда (10) система тўғри чизиқни иккита текисликнинг кесишиш чизиғи сифатида аниқлайди, яъни фазонинг координаталари (10) системанинг ҳар бир тенгламасини қаноатлантирадиган барча нуқталарининг тўплами сифатида аниқлайди.

(10) тенглама *тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси* дейилади.

Мисол. Қуйидаги умумий тенгламалар билан берилган тўғри чизиқни ясанг:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z - 3 = 0, \\ x - 3y - z + 5 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Ечилиши. Тўғри чизиқни ясаш учун унинг иккита нуқтасини билиш етарли. Тўғри чизиқнинг координаталар текислиги билан кесишиш нуқталарини танлаш анча қулай. Тўғри чизиқнинг координата текислиги билан кесишиш нуқтаси тўғри чизиқнинг *изи* дейилади. Берилган тўғри чизиқнинг Oxy текисликдаги M_1 изининг координаталарини тўғри чизиқ тенгламасида $z = 0$ деб топамиз. Бу $y = 2$, $x = 1$ ни беради. Шундай қилиб, M_1 нуқтанинг координаталари қуйидагича: $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$. Шунга ўхшаш, тўғри чизиқ тенгламасида $x = 0$ деб, тўғри чизиқнинг Oyz текисликдаги M_2 изининг координаталарини ҳосил қиламиз: $M_2(0;\ 1;\ 2)$. M_1 ва M_2 нуқталарни билган ҳолда улар орқали ўтувчи тўғри чизиқни ясашимиз мумкин.

3. Тўғри чизиқнинг вектор тенгламаси. Тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси. Тўғри чизиқнинг фазодаги вазияти унда белгиланган бирорта M_1 нуқтани ва бу тўғри чизиққа параллел ёки шу тўғри чизиқда ётган $\mathbf{s}$ векторнинг берилиши билан тўла аниқланади. $\mathbf{s}$ вектор бу тўғри чизиқнинг *йўналтирувчи вектори*, унинг координата ўқларидаги проекциялари тўғри чизиқнинг *йўналтирувчи коэффициентлари* дейилади. Айтайлик, L тўғри чизиқ ўзининг $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтаси ва йўналтирувчи коэффициентлари m, n ва p бўлган $\mathbf{s} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}$ йўналтирувчи вектори билан берилган бўлсин.

Тўғри чизиқдаги ихтиёрий $M(x,\ y,\ z)$ нуқтани қарайлик. 87-расмдан бевосита

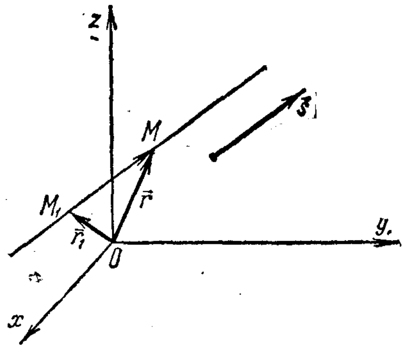
$$\overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{M_1M} \qquad (11)$$

ни ҳосил қиламиз. L тўғри чизиқда ётган $\overline{M_1M}$ вектор йўналтирувчи $\mathbf{s}$ векторга коллинеар, шунинг учун (II боб, 3-§, 2-пунктга қ.)

$$\overline{M_1M} = t\mathbf{s}. \qquad (12)$$

бу ерда *параметр* деб аталувчи t скаляр кўпайтувчи M нуқтанинг тўғри чизиқда жойлашишига қараб ихтиёрий қиймат қабул қилиши мумкин. M_1 ва M нуқталарнинг радиус-векторларини* мос равишда $\mathbf{r}_1 = \overline{OM_1}$, $\mathbf{r} = \overline{OM}$ орқали белгилаб ва (12) формулани эътиборга олган ҳолда (11) тенгламани

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{s} \qquad (13)$$



87- расм.

кўринишда ёзамиз. (13) тенглама *тўғри чизиқнинг вектор тенгламаси* дейилади. У t параметрнинг ҳар бир қийматига тўғри чизиқда ётадиган бирорта M нуқтанинг радиус-вектори мос келишини кўрсатади. (13) тенгламани координата шаклида ифодалаймиз.

$$\mathbf{r} = \overline{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{r}_1 = \overline{OM_1} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k},$$

$$t\mathbf{s} = tm\mathbf{i} + tn\mathbf{j} + tp\mathbf{k}$$

ни эътиборга олиб,

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + tm \\ y &= y_1 + tn \\ z &= z_1 + tp \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

ни ҳосил қиламиз. (14) тенглама *тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари* дейилади. t параметрнинг ўзгариши билан x, y ва z координаталар ўзгаради ҳамда $M(x, y, z)$ нуқта тўғри чизиқ бўйлаб силжийди.

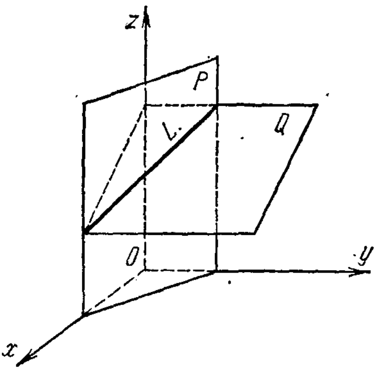
4. **Тўғри чизиқнинг каноник тенгламалари.** Айтайлик, $M_1(x_1; y_1; z_1)$ — тўғри чизиқ L да ётувчи нуқта, $\mathbf{s} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}$ — тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори бўлсин. L тўғри чизиқнинг ўзгарувчи $M(x, y, z)$ нуқтаси билан M_1 нуқтани бирлаштирувчи $\overline{M_1M}$ вектор $\mathbf{s}$ векторга коллинеар (87- расмга қ.). Шунинг учун $\overline{M_1M}$ ва $\mathbf{s}$ векторларнинг проекциялари пропорционал. $\overline{M_1M} = (x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j} + (z - z_1)\mathbf{k}$ бўлгани учун

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}. \qquad (15)$$

Шундай қилиб, тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасининг координаталари *берилган нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенг-*

---

* Нуқтанинг радиус-вектори деб, координаталар бошини шу нуқта билан туташтирувчи векторга айтилади.



88 расм.

ламалари ёки *тўғри чизиқнинг каноник тенгламалари* деб аталувчи (15) тенгламаларни қаноатлантириши керак.

Хусусий ҳолда $\mathbf{s}$ йўналтирувчи вектор бирлик вектор бўлганида, яъни $\mathbf{s} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$ (II боб, (69) формулага қ.) да (15) тенглама

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma} \tag{16}$$

кўринишга эга бўлади. $\mathbf{s}$ векторнинг йўналтирувчи косинуслари бу ерда йўналтирувчи коэффициентлар бўлади.

(15) тенгламалар биринчи тартибли иккита тенглама системасига тенг кучли, масалан:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}, \quad \frac{x - x_1}{m} = \frac{z - z_1}{p}. \tag{17}$$

Учинчи $\frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$ тенглама (17) тенгламанинг натижасидир. $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}$ тенгламада z координата қатнашмаяпти. Демак, текисликнинг нормал вектори Oz ўққа перпендикуляр (унинг Oz ўққа проекцияси нолга тенг). Шундай қилиб, бу тенглама Oz ўққа параллел P текисликни аниқлайди (88-расм). Бу текислик, равшанки, L тўғри чизиқни Oxy текисликка проекциялайди. Худди шунга ўхшаш, тенгламаси $\frac{x - x_1}{m} = \frac{z - z_1}{p}$ бўлган Q текислик L тўғри чизиқни Oxz координаталар текислигига проекциялайди. (17) тенгламалар системаси L тўғри чизиқни кесишувчи текисликларнинг тўғри чизиғи сифатида аниқлайди, бу текисликлар тўғри чизиқни Oxy ва Oxz координаталар текисликларига проекциялайди. (17) система ўрнига ўша L тўғри чизиқни аниқлайдиган

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}, \quad \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \tag{18}$$

системани ёки

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{z - z_1}{p}, \quad \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \tag{19}$$

системани қараш мумкин.

1 - изоҳ. (15) тенгламани тўғри чизиқларнинг параметрик тенгламаси (14) дан t ни йўқотиб бирданига топиш мумкин эди. Ҳақиқатан, (14) тенгламадан қуйидагиларни топамиз:

$$\frac{x - x_1}{m} = t, \quad \frac{y - y_1}{n} = t, \quad \frac{z - z_1}{p} \text{ ёки } \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

2-изоҳ. Тўғри чизиқ координаталар ўқидан бирига, масалан, Ox ўққа перпендикуляр бўлсин. У ҳолда $m=0$ ва (15) параметрик тенгламалар қуйидаги кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= y_1 + nt, \\ z &= z_1 + pt. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

(20) тенгламадан t параметрни йўқотиб, тўғри чизиқнинг қуйидаги кўринишдаги тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} & x - x_1 = 0, \\ & \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}. \end{aligned}\right\}$$

Бироқ бу ҳолда тўғри чизиқ тенгламасини формал равишда қуйидагича каноник кўринишда ёзишга келишиб оламиз:

$$\frac{x-x_1}{0} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}.$$

Бунда тенг нисбатларда махражларидан бири нолга тенг бўлса, у ҳолда тегишли касрнинг сурати ҳам нолга тенг бўлишини эсга олиш керак.

Шунга ўхшаш, тўғри чизиқнинг

$$\frac{x-x_1}{0} = \frac{y-y_1}{0} = \frac{z-z_1}{p}$$

каноник тенгламасига $x=x_1$, $y=y_1$ тенгламалар билан берилган тўғри чизиқ мос келади. Бу тўғри чизиқ Oz ўққа параллел, хусусан, $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$ тенглама Oz ўқнинг каноник тенгламасидир.

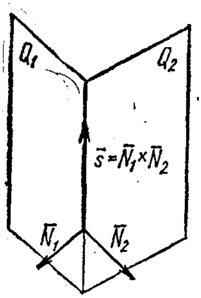
Бу пунктнинг ниҳоясида тўғри чизиқнинг умумий тенгламаларидан каноник тенгламаларига қандай ўтишни қараб ўтамиз. Бунинг учун тўғри чизиқнинг бирор $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтасини ва $\mathbf{s}$ йўналтирувчи векторини топиш керак.

Тўғри чизиқ (10) умумий тенгламалари

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

билан берилган бўлсин. M_1 нуқтанинг L тўғри чизиқдаги координаталарини координаталарга ихтиёрий қиймат бериб, (10) тенгламалар системасидан топамиз. Тўғри чизиқ $\mathbf{N}_1 = A_1\mathbf{i} + B_1\mathbf{j} + C_1\mathbf{k}$ ва $\mathbf{N}_2 = A_2\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + C_2\mathbf{k}$ нормал векторларга (89-расм) перпендикуляр бўлгани учун L тўғри чизиқнинг йўналтирувчи $\mathbf{s}$ вектори сифатида $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$ вектор кўпайтмани олиш мумкин:

$$\mathbf{s} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$



89-расм.

Мисол. Тўғри чизиқнинг қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - z + 8 = 0 \\ x - 3y + 2z + 1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

тенгламасини каноник кўринишга келтиринг.

Ечилиши. Тўғри чизиқнинг тенгламасини каноник кўринишда ёзамиз:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

$\mathbf{N}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{N}_2 = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ бўлганидан,

$$\mathbf{s} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$$

ва шунинг учун $m = 3$, $n = -5$, $p = -9$. Тўғри чизиқдаги M_1 нуқтани умумий тенгламада, масалан, $z = 0$ деб топамиз:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y + 8 = 0, \\ x - 3y + 1 = 0. \end{aligned}\right\}$$

У ҳолда бу тенгламалар системасини ечиб, $x = -3$, $y = -2/3$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, $M_1(-3;\ -2/3;\ 0)$. Демак, тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{x + 3}{3} = \frac{y + 2/3}{-5} = \frac{z - 0}{-9}.$$

5. Иккита нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси. L тўғри чизиқ $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталар орқали ўтсин. Бу тўғри чизиқнинг каноник тенгламасини тузамиз. Шу мақсадда тўғри чизиқнинг $\mathbf{s}$ йўналтирувчи векторини топамиз, ҳамда M_1 ва M_2 нуқталарни туташтирувчи векторни $\mathbf{s}$ йўналтирувчи вектор деб оламиз:

$$\mathbf{s} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}.$$

Демак, $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$ ва шунинг учун (15) тенгламалардан

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (21)$$

га эга бўламиз.

(21) тенглама *икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси* дейилади.

Мисол. $M_1(1;3,\ -5)$ ва $M_2(1;\ 4;\ 2)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечилиши. (21) тенгламадан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{x - 1}{1 - 1} = \frac{y - 3}{4 - 3} = \frac{z + 5}{2 + 5} \quad \text{ёки} \quad \frac{x - 1}{0} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z + 5}{7}.$$

$m = 0$ бўлгани учун берилган тўғри чизиқ Ox ўққа перпендикуляр ва тўғри чизиқ тенгламасини $x = 1$, $\dfrac{y - 3}{1} = \dfrac{z + 5}{7}$

ёки*
$$\left.\begin{aligned} x-1=0 \\ 7y-z-26=0 \end{aligned}\right\}$$
кўринишда ёзиб олиш мумкин.

6. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари. Фазода иккита

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\ (L_1)\ \text{ва}\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}\ (L_2)$$

тўғри чизиқлар берилган бўлсин. Маълумки, фазонинг бирор нуқтасидан берилган тўғри чизиқларга параллел қилиб ўтказилган тўғри чизиқлар ташкил қилган қўшни бурчаклардан бири икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак деб қабул қилинади. Бу қўшни бурчаклардан бири берилган тўғри чизиқларнинг $\mathbf{s}_1$ ва $\mathbf{s}_2$ йўналтирувчи векторлари орасидаги φ бурчакка тенг. $\mathbf{s}_1=m_1\mathbf{i}+n_1\mathbf{j}+p_1\mathbf{k}$, $\mathbf{s}_2=m_2\mathbf{i}+n_2\mathbf{j}+p_2\mathbf{k}$ бўлгани учун векторлар орасидаги бурчак косинуси формуласига кўра

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1||\mathbf{s}_2|}$$

ёки

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\,\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \tag{22}$$

ни топамиз.

Иккита тўғри чизиқнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари мос равишда уларнинг $\mathbf{s}_1$ ва $\mathbf{s}_2$ йўналтирувчи векторларининг коллинеарлик ва перпендикулярлик шартларига тенг кучли.

1-мисол. $\frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{-2}$, $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{5}$

тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечилиши. (22) формулага кўра

$$\cos\varphi=\frac{5\cdot3+3\cdot2+(-2)\cdot5}{\sqrt{25+9+4}\ \sqrt{9+4+25}}=\frac{11}{38}\approx0{,}2895$$

ни ҳосил қиламиз; жадвалдан $\varphi\approx73°10'$ ни топамиз.

2-мисол. $M_1(1;\ 2;\ 3)$ нуқта орқали ўтувчи

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y+5z-7=0 \\ 3x-4y+z-8=0 \end{aligned}\right\}$$

тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ тенгламасини топинг.

Ечилиши. Изланган тўғри чизиқ тенгламасини каноник кўринишда ёзамиз:

$$\frac{x-1}{m}=\frac{y-2}{n}=\frac{z-3}{p}$$

Изланган тўғри чизиқ $\mathbf{s}$ йўналтирувчи векторини $\mathbf{N}_1=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ ва

* 4-пунктдаги 2-эслатмага қаранг.

$N_2 = 3i - 4j + k$ нормал векторларнинг вектор кўпайтмаси сифатида топамиз (4-пунктга қ.):

$$s = N_1 + N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 23i + 13j - 17k.$$

Демак, $m = 23$, $n = 13$, $p = -17$. Йўналтирувчи коэффициентларнинг бу қийматларини (*) тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x-1}{23} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{-17}.$$

3-мисол. $M_1(-4;\ 0;\ 2)$ нуқта орқали ўтувчи $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4}$ ва $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{2}$ тўғри чизиқларга перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Берилган нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини ёзамиз:

$$\frac{x+4}{m} = \frac{y-0}{n} = \frac{z-2}{p}. \qquad (*)$$

Изланган тўғри чизиқнинг $s = mi + nj + pk$ йўналтирувчи вектори сифатида берилган тўғри чизиқларнинг $s_1 = 2i + 3j + 4k$ ва $s_2 = 3i + 2j + 2k$ йўналтирувчи векторларига перпендикуляр бўлган ихтиёрий векторни олиш мумкин. Хусусан, s векторни s_1 ва s_2 векторларнинг вектор кўпайтмаси деб олиш мумкин:

$$s = s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} j & i & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2i + 8j - 5k.$$

Бундан $m = -2$, $n = 8$, $p = -5$. Бу қийматларни (*) формулага қўйиб,

$$\frac{x+4}{-2} = \frac{y}{8} = \frac{z-2}{-5}$$

ни ҳосил қиламиз.

3-§. ФАЗОДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ВА ТЕКИСЛИК

1. Тўғри чизиқ ва текисликнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари. Қуйидаги тўғри чизиқ ва текисликни қараймиз:

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}\ (L):\quad Ax + By + Cz + D = 0.\ (Q)$$

Равшанки, L тўғри чизиқ ва Q текислик;

а) тўғри чизиқнинг $s = \{m,\ n,\ p\}$ йўналтирувчи вектори ва текисликнинг $N = \{A,\ B,\ C\}$ нормал вектори коллинеар бўлгандагина, фақат шундагина перпендикуляр бўлади;

б) $s = \{m,\ n,\ p\}$ ва $N = \{A,\ B,\ C\}$ векторлар перпендикуляр бўлгандагина ва фақат шундагина бир-бирига параллел бўлади.

Мисол $M_1(2;\ -3;\ 4)$ нуқта орқали ўтувчи,

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{8} \text{ ва } \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+5}{2}$$

тўғри чизиқларга параллел текислик тенгламасини ёзинг.

Ечилиши. Берилган M_1 нуқта орқали ўтувчи текисликлар боғлами тенгламасини ёзамиз:

$$A(x-2)+B(y+3)+C(z-4)=0. \qquad (*)$$

Изланган текислик шартга кўра берилган тўғри чизиқларга параллел бўлиши учун унинг $\mathbf{N}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ нормал вектори берилган тўғри чизиқларнинг $\mathbf{s}_1=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+8\mathbf{k}$ ва $\mathbf{s}_2=4\mathbf{i}+0\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ йўналтирувчи векторларига перпендикуляр бўлиши керак. Шунинг учун N вектор сифатида $\mathbf{s}_1$ ва $\mathbf{s}_2$ векторларнинг вектор кўпайтмасини олиш мумкин:

$$\mathbf{N}=\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & 8\\ 4 & 0 & 2\end{vmatrix}=4\mathbf{i}+30\mathbf{j}-8\mathbf{k}.$$

Демак, $A=4$, $B=30$, $C=-8$ Топилган қийматларни (*) тенгламага қўйиб, $4(x-2)+30(y+3)-8(z-4)=0$ ёки $2x+15y-4z+57=0$ ни ҳосил қиламиз

2. Тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишиш нуқтаси.

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p} \qquad (23)$$

тўғри чизиқ билан

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (24)$$

текисликнинг кесишиш нуқтасини топиш талаб қилинсин. Бунинг учун (23) ва (24) тенгламалар системасини ечиш керак. Буни тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари орқали бажариш енгилроқ:

$$\left.\begin{aligned} x&=x_1+mt,\\ y&=y_1+nt,\\ z&=z_1+pt.\end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

t параметрнинг ҳар бир қийматига тўғри чизиқнинг нуқтаси мос келади. t нинг шундай қийматини танлаш керакки, бунда тўғри чизиқ (24) текисликда ётсин. (25) муносабатдан x, y ва z ларни текисликнинг (24) тенгламасига қўйиб, t параметрнинг қийматини топиш мумкин бўлган тенгламани ҳосил қиламиз:

$$A(x_1+mt)+B(y_1+nt)+C(z_1+pt)+D=0$$

ёки

$$t(Am+Bn+Cp)=-(Ax_1+By_1+Cz_1+D). \qquad (26)$$

Фараз қилайлик, тўғри чизиқ ва текислик параллел бўлмасин. У ҳолда текисликнинг нормал вектори $\mathbf{N}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ ва тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\mathbf{s}=m\mathbf{i}+n\mathbf{j}+p\mathbf{k}$ перпендикуляр эмас ва демак, уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг эмас: $\mathbf{N}\cdot\mathbf{s}=Am+Bn+Cp\neq 0$. Бу ҳолда (26) тенгликдан қуйидагини топамиз:

$$t=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Am+Bn+Cp}. \qquad (27)$$

Мисол. $\frac{x-1}{2}+\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{2}$ тўғри чизиқнинг $2x+3y-2z+2=0$ текислик билан кесишиш нуқтасини топинг.

Ечилиши. Берилган тўғри чизиқ тенгламасини параметрик кўринишда ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2t + 1, \\ y &= 3t - 1, \\ z &= 2t + 5. \end{aligned}\right\}$$

x, y ва z ларнинг бу қийматларини текислик тенгламасига қўямиз:

$$2(2t + 1) + 3(3t - 1) - 2(2t + 5) + 2 = 0.$$

Бундан $t = 1$. Тўғри чизиқнинг параметрик тенгламасига $t = 1$ қийматни қўйиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз: $x = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $y = 3 \cdot 1 - 1 = 2$, $z = 2 \cdot 1 + 5 = 7$. Шундай қилиб, тўғри чизиқ ва текислик $M(3;\ 2;\ 7)$ нуқтада кесишар экан

3. Текисликлар дастаси. Берилган L тўғри чизиқ орқали ўтувчи текисликлар тўплами *текисликлар дастаси*, L тўғри чизиқ эса *даста ўқи* дейилади.

Даста ўқи қуйидаги тенгламалар билан берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

(28) тенгламалар системасининг иккинчи тенгламасини ўзгармас сон λ га ҳадма-ҳад кўпайтирамиз ва биринчи тенгламага қўшамиз:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \tag{29}$$

(29) тенглама x, y ва z ларга нисбатан биринчи тартибли, демак λ нинг ихтиёрий сонли қийматида бирор текисликни аниқлайди, (29) тенглама (28) тенгламанинг натижаси бўлганидан,(28) тенгламани қаноатлантирувчи нуқтанинг координаталари (29) тенгламани ҳам қаноатлантиради. Демак, λ нинг ихтиёрий сонли қийматида (29) тенглама (28) тўғри чизиқ орқали ўтувчи текислик тенгламасини беради.

(28) тенглама билан берилган ўқли текисликлар дастасининг $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ текисликдан ташқари ҳар қандай текислигини (29) кўринишда ифодалаш мумкинлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, дастанинг ихтиёрий текислиги унинг даста ўқида ётмаган $M(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтаси билан аниқланади. Бу текисликнинг тенгламасини топиш учун (29) тенгламага M_1 нуқтанинг координаталарини қўямиз:

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1 + \lambda(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D) = 0. \tag{30}$$

Агар $A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2 \neq 0$ бўлса, яъни берилган (28) текисликлардан иккинчисида M_1 нуқта ётмаса, (30) тенгламадан λ нинг қийматларини топамиз. λ нинг топилган қийматини (29) тенгламага қўйиб, M_1 нуқта орқали ўтувчи текисликлар дастаси тенгламасини ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, λ нинг турли қийматларида (29) тенглама ўқи (28) тенглама билан берилган дастанинг ихтиёрий текислигини ($A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ текисликдан ташқари) беради.

Шунинг учун (29) тенглама *текисликлар дастасининг тенгламаси* дейилади.

Текисликлар дастасининг тенгламасидан берилган тўғри чизиқ орқали ўтувчи текисликни топиш масаласини ечишда фойдаланилади, бунда λ кўпайтувчининг қиймати одатда изланаётган текисликнинг ҳолатини аниқлайдиган бирорта қўшимча шартдан топилади.

1-мисол. $\left.\begin{aligned} 2x+3y-5z+1=0 \\ 3x-y+z+28=0 \end{aligned}\right\}$

тўғри чизиқ ва $M_1(1;\ -2;\ 3)$ нуқта орқали ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Берилган тўғри чизиқ орқали ўтувчи текисликлар дастасининг тенгламасини ёзамиз:

$$2x+3y-5z+1+\lambda\,(3x-y+z+28)=0.$$

Даста тенгламасига M_1 нуқтанинг координаталарини қўямиз:

$$2\cdot1+3\,(-2)-5\cdot3+1+\lambda\,[3\cdot1-1\,(-2)+3+28]=0.$$

Демак, $\lambda=1/2$. λ нинг топилган қийматини дастанинг тенгламасига қўйиб, изланаётган текислик тенгламасини топамиз:

$$2x+3y-5z+1+\frac{1}{2}(3x-y+z+28)=0 \text{ ёки } 7x+5y-9z+30=0.$$

2-мисол. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{1}$ тўғри чизиқ орқали ўтувчи $3x+3y-z+1=0$ текисликка перпендикуляр текислик тенгламасини топинг.

Ечилиши. Берилган $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{1}$ тўғри чизиқни уни проекцияловчи

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3},\ \frac{y+1}{3}=\frac{z}{1} \text{ ёки } 3x-2y-5=0,\ y-3z+1=0$$

текисликларнинг кесишмаси деб тасаввур қиламиз. Текисликлар дастаси тенгламасини тузамиз:

$$3x-2y-5+\lambda\,(y-3z+1)=0 \qquad (*)$$

ёки

$$3x+(\lambda-2)\,y-3\lambda z-5+\lambda=0. \qquad (**)$$

(**) текислик ва берилган текислик перпендикуляр бўлгани учун уларнинг нормал векторлари $\mathbf{N}_1=3\mathbf{i}+(\lambda-2)\mathbf{j}-3\lambda\mathbf{k}$ ва $\mathbf{N}_2=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ нинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг:

$$3\cdot3+3(\lambda-2)+(-1)\cdot(-3\lambda)=0.$$

Бу тенгламани ечиб, $\lambda=-1/2$ ни топамиз. λ нинг топилган қийматини даста тенгламаси (*) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$3x-2y-5+\left(-\frac{1}{2}\right)(y-3z+1)=0 \text{ ёки } 6x-5y+3z-11=0.$$

4-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАР

1. Сфера. 1-§, 1-пунктда маркази $O_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтада, радиуси R бўлган сферанинг

$$(x-x_1)^2-(y-y_1)^2-(z-z_1)^2=R^2 \qquad (31)$$

тенгламаси келтириб чиқарилган эди.

Қавсларни очиб, барча ҳадларни тенгламанинг чап томонига ўтказиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x^2+y^2+z^2-2x_1x-2y_1y-2z_1z+x_1^2+y_1^2+z_1^2-R^2=0.$$

Бу x, y ва z ўзгарувчи координаталарга нисбатан иккинчи тартибли тенгламадир. Унда координаталар кўпайтмасини ўз ичига олган ҳад қатнашмайди, x^2, y^2 ва z^2 лар олдидаги коэффициентлар ўзаро тенг. x^2, y^2 ва z^2 лар олдидаги коэффициентлари ўзаро тенг бўлган, координаталар кўпайтмасини ўз ичига олган ҳад қатнашмаган, x, y ва z ларга нисбатан исталган иккинчи тартибли тенглама, умуман айтганда, сфера тенгламасидир. Аниқроғи, бундай тенглама тўлиқ квадрат ажратиш натижасида ҳамма вақт

$$(x-x_1)^2-(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=k \qquad (32)$$

кўринишга келтирилиши мумкин. Агар бунда $k>0$ бўлса,(32) тенглама маркази $O_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтада, радиуси $R=\sqrt{k}$ бўлган сферанинг тенгламасидир. $k=0$ да тенгламани фақат битта $O_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтанинг координаталари қаноатлантиради. Агар $k<0$ бўлса, тенглама ҳеч қандай сиртни аниқламайди.

Мисол. $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-2=0$ тенглама сферанинг тенгламаси эканлигини исботланг ва бу сферанинг радиуси ва марказини топинг.

Ечилиши. Берилган тенгламанинг чап томонида алмаштириш бажариб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+(z^2+6z+9)-14-2=0$$

ёки

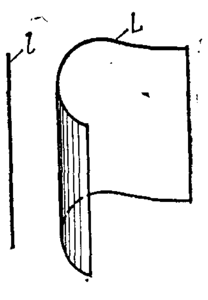
$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=16.$$

Биз маркази O_1 (1;—2;—3) нуқтада, радиуси $R=4$ бўлган сферанинг тенгламасини ҳосил қилдик.

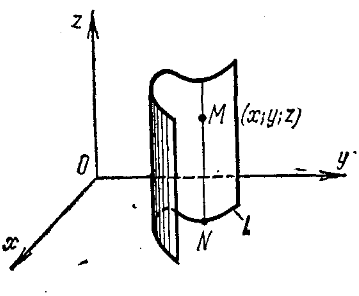
2. Цилиндрик сиртлар. Берилган L тўғри чизиқни кесувчи ва берилган l тўғри чизиққа параллел бўлган барча тўғри чизиқлардан ташкил топган сирт *цилиндрик сирт* дейилади. Бунда L тўғри чизиқ цилиндрик сиртнинг *йўналтирувчиси*, бу сиртни ташкил қилувчи ва l тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқлардан ҳар бири унинг *ясовчиси* дейилади (90-расм). Кейинчалик йўналтирувчилари координата текисликларидан бирида ётадиган, ясовчилари эса бу текисликка перпендикуляр координаталар ўқига параллел бўлган цилиндрик сиртларнигина қараймиз.

Oxy текисликда *Oxy* координаталар системасида

$$F(x,y)=0 \qquad (33)$$



90- расм.



91- расм.

тенгламага эга бўлган бирорта L чизиқни қараймиз. Ясовчилари Oz ўққа параллел, йўналтирувчиси L бўлган цилиндрик сирт ясаймиз (91-расм). Агар (33) тенгламани фазодаги $Oxyz$ координаталар системасида қарасак, бу сиртнинг тенгламаси (33) тенглама эканлигини кўрсатамиз. Айтайлик, M $(x; y; z)$ — ясалган цилиндрик сиртнинг ихтиёрий тайинланган нуқтаси бўлсин. L йўналтирувчи ва M нуқта орқали ўтувчи ясовчининг кесишган нуқтасини N билан белгилаймиз. N нуқта равшанки, M нуқтанинг Oxy текисликдаги проекциясидир. Шунинг учун M ва N нуқталар битта x абсцисса ва битта y ординатага эга. Лекин N нуқта L эгри чизиқда ётади, шунинг учун у ушбу эгри чизиқнинг (33) тенгламасини қаноатлантиради. Демак, бу тенгламани M $(x; y; z)$ нуқтанинг координаталари ҳам қаноатлантиради, чунки у z ни ўз ичига олмайди. Шундай қилиб, берилган цилиндрик сиртнинг ихтиёрий $M(x; y; z)$ нуқтаси (33) тенгламани қаноатлантиради. Бу сиртда ётмаган нуқталарнинг координаталари (33) тенгламани қаноатлантирмайди, чунки бу нуқталар L эгри чизиқдан ташқарида ётган Oxy текисликда проекцияланади.

Шундай қилиб, *z ни ўз ичига олмаган $F(x, y) = 0$ тенглама, агар уни фазодаги $Oxyz$ координаталар системасида олиб қарасак, ясовчилари Oz ўққа параллел, L йўналтирувчиси Oxy текисликда ўша $F(x, y) = 0$ тенглама билан бериладиган цилиндрик сиртнинг тенгламаси бўлади.*

$Oxyz$ фазода L йўналтирувчи қуйидаги иккита тенглама системаси билан аниқланади:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y,) &= 0, \\ z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Худди шунга ўхшаш, y ни ўз ичига олмаган $F(x, z) = 0$ тенглама ва x ни ўз ичига олмаган $F(y, z) = 0$ тенглама $Oxyz$ фазода ясовчилари мос равишда Oy ва Ox ўқларга параллел бўлган цилиндрик сиртларни аниқлашини кўрсатиш мумкин.

Цилиндрик сиртларга мисоллар кўрамиз.

1.

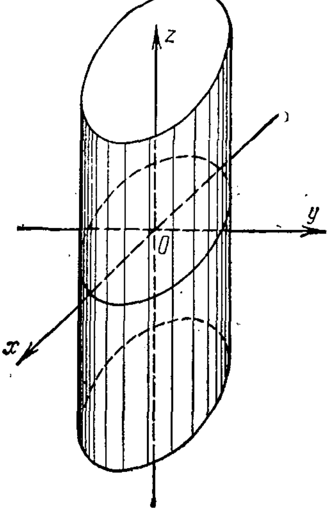
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{35}$$

тенглама билан аниқланадиган цилиндрик сирт *эллиптик* цилиндр дейилади (92-расм). Унинг ясовчилари Oz ўққа параллел, ярим ўқлари a ва b бўлган Oxy текисликда ётган эллипс эса унинг йўналтирувчисидир. Хусусан, агар $a = b$ бўлса, унинг йўналтирувчиси айлана бўлади, сирт эса *тўғри доиравий цилиндр* бўлади. Унинг тенгламаси:

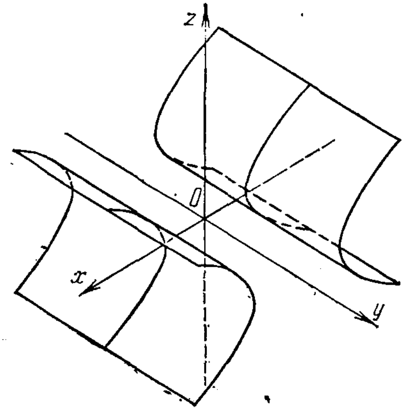
$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{35'}$$

2.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \tag{36}$$



92- расм.



93- расм.

тенглама билан аниқланадиган цилиндрик сирт *гиперболик цилиндр* дейилади (93-расм). Бу сиртнинг ясовчилари Oy ўққа параллел, ҳақиқий ўқи a, мавҳум ўқи b бўлган Oxz текисликда жойлашган гипербола унинг йўналтирувчиси бўлиб хизмат қилади.

3.

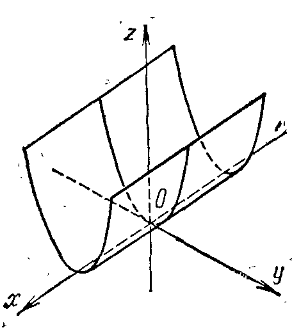
$$y^2 = 2pz \tag{37}$$

тенглама билан аниқланадиган цилиндрик сирт *параболик цилиндр* дейилади (94-расм). Oyz текисликда ётган парабола унинг йўналтирувчисидир, ясовчилари эса Ox ўққа параллел.

Эслатма. Маълумки, тўғри чизиқ фазода шу тўғри чизиқ бўйича кесишувчи текисликлар турли жуфтининг тенгламаси билан берилиши мумкин. Шунга ўхшаш, эгри чизиқ фазода бу эгри чизиқ бўйича кесишувчи сиртлар турли жуфтининг тенгламаси билан берилиши мумкин. Масалан, $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ сферанинг (2-§, 1-пунктга қаранг) $z=3$ текислик билан кесишишидан ҳосил бўлган c айлана

$$\left.\begin{aligned} z &= 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 25 \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

тенгламалар системаси билан берилиши мумкин. Иккинчи томондан, бу айлана $x^2+y^2=16$ тўғри доиравий цилиндрнинг



94- расм.

$z=3$ текислик билан кесишиш чизиғи сифатида ҳосил бўлган бўлиши, яъни (38) тенгламага тенг кучли

$$\left.\begin{aligned} z&=3\\ x^2+y^2&=16 \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

тенгламалар системаси билан берилиши ҳам мумкин.

Кейинчалик координаталар текислигига параллел бўлган у ёки бу сиртнинг шаклини текшираётганимизда бу кесимларни координаталар текислигига проекциялайдиган цилиндрик сиртлардан кўп фойдаланишимизга тўғри келади. Бу, кўриб ўтилган мисолдагидек, кўрсатилган кесимларнинг ўлчамлари ва шаклларини, шу билан бирга текширилаётган сиртларнинг шаклларини баҳолаш имконини беради.

3. Конус сиртлар. Берилган L чизиқни кесувчи барча тўғри чизиқлардан ташкил топган ва берилган P нуқта орқали ўтувчи сирт *конус сирт* дейилади. Бунда L чизиқ конус сиртнинг *йўналтирувчиси*, P нуқта — унинг *учи*, конус сиртларни ташкил қиладиган ҳар бир тўғри чизиқ конус сирт *ясовчиси* дейилади.

Мисол сифатида учи координаталар бошида, йўналтирувчиси ярим ўқлари a ва b бўлган $Z=c$ текисликда ётувчи

$$\left.\begin{aligned} Z&=c\\ \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}&=1 \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

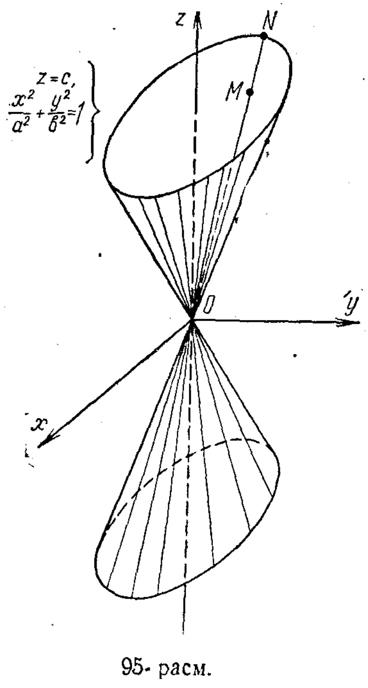
эллипсдан иборат конус сиртни қарайлик*. Бу сирт *иккинчи тартибли конус* дейилади. Унинг тенгламасини келтириб чиқарамиз.

Конус сиртнинг ихтиёрий танланган $M(x;\ y;\ z)$ нуқтасини қараймиз ва у орқали йўналтирувчи билан $N(X;\ Y;\ c)$ нуқтада кесишувчи OM ясовчини ўтказамиз (95-расм). $O(0;\ 0;\ 0)$ ва $N(X;\ Y;\ c)$ нуқталар орқали ўтувчи OM тўғри чизиқнинг тенгламасини тузамиз (2-§, 5-пунктга қаранг):

$$\frac{x-0}{X-0}=\frac{y-0}{Y-0}=\frac{z-0}{c-0} \quad \text{ёки}$$

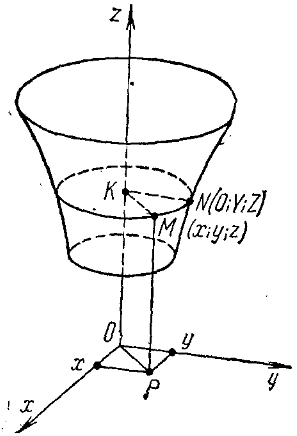
$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{c}.$$

Бундан $X=cx/z$; $Y=cy/z$. Бу ифодаларни эллипснинг иккинчи



95- расм.

* Эллипснинг ўзгарувчи координаталарини конус сиртнинг x, y ва z ўзгарувчи координаталаридан фарқлаш учун X, Y ва Z лар билан белгиладик.



96- расм.

(40) тенгламасига қўйиб, $\frac{c^2x^2}{a^2z^2}+\frac{c^2y^2}{b^2z^2}=$ $=1$ ни ёки соддалаштиришлардан сўнг

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (41)$$

ни ҳосил қиламиз. Биз иккинчи тартибли конус тенгламасини ҳосил қилдик. Хусусан, агар $a=b$ бўлса, конуснинг йўналтирувчиси

$$\left.\begin{aligned} z&=c\\ x^2+y^2&=a^2\end{aligned}\right\}$$

айланадан иборат бўлади, сирт эса тўғри доиравий конус бўлади. Унинг тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (41')$$

4. Айланма сиртлар. Oyz текисликда ётган L чизиқ

$$\left.\begin{aligned} X&=0\\ F(Y, Z)&=0\end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

тенгламалар* билан берилган бўлсин. Бу чизиқни Oz ўққа нисбатан айлантириш натижасида ҳосил бўлган сиртни қарайлик (96-расм). Бу сирт *айланма сирт* дейилади. Унинг тенгламасини топамиз. Айтайлик, M $(x;\ y;\ z)$ — айланма сиртнинг ихтиёрий танланган нуқтаси бўлсин. M нуқта орқали Oz ўққа перпендикуляр бўлган текислик ўтказамиз ва бу текисликнинг Oz ўқи ва L эгри чизиқ билан кесишган нуқталарини мос равишда K ва Nорқали белгилаймиз. KM ва KN кесмалар битта айлананинг радиусларидир. Шунинг учун $KM=KN$. Лекин, KN кесманинг узунлиги N нуқтанинг Y ординатасининг абсолют қийматига тенг, яъни $KN=|Y|$, $KM=OP=\sqrt{x^2+y^2}$. Демак, $|Y|=\sqrt{x^2+y^2}$ ёки $Y=\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Бундан ташқари равшанки, N нуқтанинг Z аппликатаси, M нуқтанинг z аппликатасига тенг.

N нуқта (42) тенгламалар билан берилган чизиқда ётганлиги учун N нуқтанинг Y ва Z координаталари бу тенгламалардан иккинчисини қаноатлантиради. Унда Y ва Z лар ўрнига уларга мос равишда тенг бўлган $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ ва z ни қўйиб,

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0 \qquad (43)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани айланма сиртнинг исталган M $(x;\ y;\ z)$ нуқтасининг координаталари қаноатлантиради.

* L чизиқнинг ўзгарувчи координаталарини айланма сиртнинг x, y, z ўзгарувчи координаталаридан фарқлаш учун X, Y ва Z билан белгиладик.

Бу сиртда ётмаган нуқталарнинг координаталари (43) тенгламани қаноатлантирмаслигини кўрсатиш мумкин. Шундай қилиб, (43) тенглама (42) тенгламалар системаси билан аниқланадиган L чизиқнинг Oz ўққа нисбатан айланишидан ҳосил бўлган айланма сиртнинг тенгламаси экан. (42) *тенгламалар системасининг иккинчи тенгламасида y ва z координаталарни*

$$\left.\begin{aligned} Y &= \pm\sqrt{x^2+y^2} \\ Z &= z \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

формулалар орқали x, y ва z ларга алмаштириш натижасида (43) *тенглама ҳосил қилинади.*

Эслатма. Биз L эгри чизиқ Oyz текисликда берилган ва Oz ўққа нисбатан айланади деб ҳисоблаган эдик. Лекин L эгри чизиқ бошқа координаталар текислигида берилиши ва бошқа координаталар ўқига нисбатан айланиши ҳам мумкин. (42), (43) ва (44) формулаларга ўхшаш формулаларни китобхоннинг ўзи осонгина тузиши мумкин.

Мисол.
$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2} &= 1, \\ x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

эллипснинг Oz ўққа нисбатан айланма сиртини топинг.

Ечилиши. Эллипс тенгламасини $\frac{Y^2}{a^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$ кўринишда ёзиб, унда (44) формулаларга кўра Y ва Z ларни ўзгарувчи x, y ва z лар билан алмаштириб, изланган тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{ёки} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Ҳосил қилинган сирт *айланма эллипсоид* дейилади.

5. Эллипсоид.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{45}$$

тенглама билан аниқланадиган сирт *эллипсоид* дейилади. a, b ва c сонлар эллипсоиднинг *ярим ўқлари* дейилади. (45) тенгламага ўзгарувчи координаталар жуфт даражаларда кирганлигидан, эллипсоид координата текисликларига нисбатан симметрик бўлади. Эллипсоиднинг шаклини аниқлаш учун уни координаталар текисликларига параллел текисликлар билан кесамиз. Агар эллипсоидни $z=h$ ($|h|<c$) текислик билан кессак, кесимда L эллипс ҳосил бўлишини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан,

$$\left.\begin{aligned} z &= h \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

тенгламалардан z аппликатани йўқотиб, L кесимни Oxy текисликка проекциялайдиган цилиндрик сиртнинг тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \text{ ёки } \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1.$$

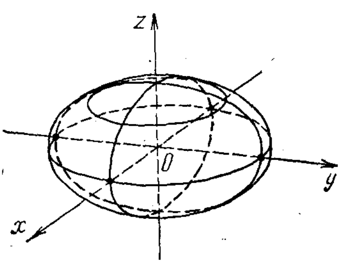
Бу тенгламадан кўринадики, L эгри чизиқ ярим ўқлари

$$\bar{a}=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \qquad \bar{b}=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}} \tag{46}$$

бўлган эллипс экан.

(46) формуладан кўринадики, $|h|$ ўсиши билан эллипснинг ярим ўқлари $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ камаяди. $|h|=c$ да $\bar{a}=\bar{b}=0$ га эга бўламиз ва кесим нуқтага айланади. $|h|>c$ да равшанки, эллипсоид $z=h$ текислик билан кесишмайди. Эллипсни $x=h$ ($|h|<a$) ва $y=h$ ($|h|<b$) текисликлар билан кесганда ҳам эллипслар ҳосил бўлишини шунга ўхшаш кўрсатиш мумкин. Эллипсоид 97-расмда тасвирланган кўринишга эга. Хусусий $a=b$ ҳолда айланма эллипсоидни ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{46'}$$



97- расм.

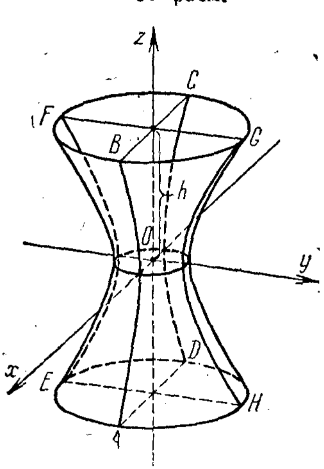
(4-пунктдаги мисолга қаранг). Агар учта ярим ўқ ўзаро тенг ($c=b=0$) бўлса, $x^2+y^2+z^2=a^2$ сфера ҳосил бўлади.

6. Гиперболоидлар.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{47}$$

тенглама билан аниқланадиган сирт *бир паллали гиперболоид* дейилади. Бу сирт учта симметрия ўқига эга, чунки ўзгарувчи x, y ва z координаталар (47) тенгламага жуфт даража билан кирган. Бир паллали гиперболоидни $y=0$ текислик билан кесиб, Oxz текисликда ётувчи $ABCD$ гиперболани ҳосил қиламиз (98-расм):

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}&=1,\\ y&=0.\end{aligned}\right\}$$



98- расм.

Шунга ўхшаш бир паллали гиперболоидни $x=0$ текислик билан кесилса, кесимда Oyz текисликда ётувчи $EFGH$ гипербола ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}&=1,\\ x&=0.\end{aligned}\right\}$$

Бир паллали гиперболоидни $z=h$ текислик билан кесилганда кесимда $BFCG$ эллипс ҳосил бўлади, у қуйидаги кўринишга эга:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}&=1+\frac{h^2}{c^2}\\ z&=h\end{aligned}\right\}\text{ ёки }\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}&=1,\\ z&=h.\end{aligned}\right\}$$

h абсолют қиймати бўйича ўсиши билан бу эллипснинг ярим ўқлари $\bar{a}=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ ва $\bar{b}=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ камайиб боради. $h=0$ да Oxy текисликда ётувчи, ярим ўқлари a ва b бўлган эллипс ҳосил бўлади.

$a=b$ да *бир паллали айланма гиперболоид* ҳосил бўлади:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{48}$$

Уни $z=h$ текисликлар билан кесганда айланалар ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned}z^2+y^2&=a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right),\\ z&=h.\end{aligned}\right\}$$

2- ва 3-пунктларда ҳар бири тўғри чизиқлардан ташкил топган цилиндрик ва конус сиртлар қаралган эди. Бир паллали гиперболоидни ҳам тўғри чизиқлардан ташкил топган сирт деб қараш мумкин экан.

Қуйидаги

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=k\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

тенгламалардан аниқланадиган тўғри чизиқни қарайлик, бунда, a, b ва c — бир паллали гиперболоиднинг ярим ўқлари, k — ихтиёрий танланган сон ($k\neq 0$).

Бу тенгламаларни ҳадма-ҳад кўпайтириб,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\text{ ёки }\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

яъни бир паллали гиперболоид тенгламасини ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, бир паллали гиперболоид тенгламаси (49) тенгламалар системасининг натижаси экан. Шунинг учун (49) системани қаноатлантирадиган исталган $M(x;\ y;\ z)$ нуқтанинг координаталари бир паллали гиперболоиднинг (47) тенгламасини ҳам қаноатлантиради. Бошқача айтганда, (49) тўғри чизиқнинг барча нуқталари (47) гиперболоидга тегишли бўлади. k нинг қийматларини ўзгартира бориб, (47) сиртда ётадиган тўғри чизиқлар оиласини ҳосил қиламиз. Худди шунга ўхшаш бир паллали гиперболоидга

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= l\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \frac{1}{l}\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

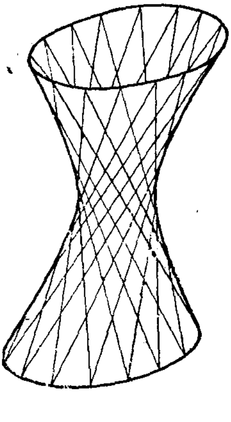
барча тўғри чизиқлар оиласи тегишли бўлишини кўрсатиш мумкин, бунда l — ихтиёрий параметр.

Бир паллали гиперболоиднинг ҳар бир нуқтаси орқали юқорида кўрсатилган тўғри чизиқлар оиласидан битта тўғри чизиқ ўтишини ҳам кўрсатиш мумкин. Шундай қилиб, бир паллали гиперболоидни тўғри чизиқлардан *ташкил топган* сирт деб қараш мумкин (99-расм). Бу тўғри чизиқлар бир паллали гиперболоиднинг тўғри йўналган *ясовчилари* дейилади.

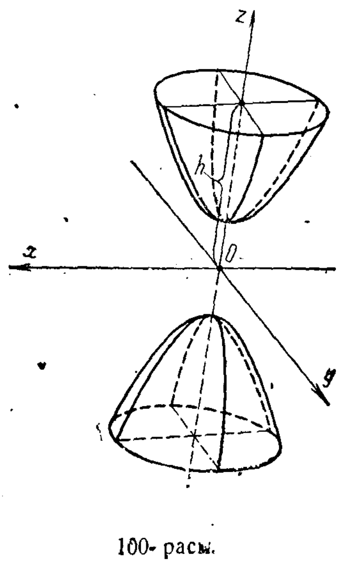
Тўғри чизиқлардан бир паллали гиперболоид сиртларни ясаш имкониятлари қурилиш техникасида кенг қўлланилади. Масалан, инженер Шуховнинг* таклиф қилган конструкцияси бўйича бир паллали гиперболоиднинг тўғри чизиқли ясовчилари бўйича балкалар жойлаштирилган радиомачта Москвада қурилган. Қуйидаги

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad (51)$$

тенглама билан аниқланадиган сирт *икки паллали гиперболоид* дейилади.



99- расм.



100- расм.

* В. Г. Шухов (1853—1939) — СССР ФА нинг фахрий аъзоси.

Координаталар текисликлари икки паллали гиперболоидлар учун симметрия текисликлари бўлади. Бу сиртни Oxz ва Oy координата текисликлари билан кесиб, мос равишда қуйидаги гиперболаларни ҳосил қиламиз (100-расм):

$$\left.\begin{aligned}\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,\\ y=0\end{aligned}\right\} \text{ ва } \left.\begin{aligned}\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\\ x=0.\end{aligned}\right\}$$

Агар икки паллали (51) гиперболоид $z=h$ текислик билан кесилса ($|h|>c$ да), кесимда ярим ўқлари $\bar{a}=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$ ва $\bar{b}=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$ бўлган

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1\\ z=h\end{aligned}\right\}$$

эллипс ҳосил бўлади. $|h|$ ўсиши билан бу ярим ўқлар ҳам ўсади. $|h|<c$ да равшанки, (51) сирт $z=h$ текислик билан кесишмайди. Икки паллали гиперболоид иккита айрим қисмлардан (паллалардан) иборатки, буни унинг номи ҳам айтиб турибди, $a=b$ да (51) тенглама

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ ёки } \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2+y^2}{b^2}=1 \qquad (51')$$

кўринишга эга бўлади ва *икки паллали айланма гиперболоид* тенгламасини беради. Икки паллали айланма гиперболоидни $z=h$ ($|h|>c$) текислик билан кесганда кесимда радиуси $R=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$ бўлган

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2=b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)\\ z=h\end{aligned}\right\}$$

айлана ҳосил бўлади.

7. Параболоидлар. Қуйидаги

$$2z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q} \qquad (52)$$

тенглама билан аниқланадиган сирт p ва q лар бир хил ишорали бўлган шартда *эллиптик параболоид* дейилади. Бундан буён аниқлик учун $p>0$, $q>0$ деб ҳисоблаймиз.

Эллиптик параболоидни Oxz ва Oyz координаталар текисликлари билан кесганда мос равишда

$$\left.\begin{aligned}z=\frac{x^2}{2p}\\ y=0\end{aligned}\right\} \text{ ва } \left.\begin{aligned}z=\frac{z^2}{2q}\\ x=0\end{aligned}\right\}$$

параболалар ҳосил бўлади, $z=h$ $(h>0)$ текислик билан кесганда эса ярим ўқлари $a=\sqrt{2ph}$ ва $b=\sqrt{2qh}$ бўлган

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1\\ z=h\end{aligned}\right\}$$

эллипс ҳосил бўлади (101-расм). $p=q$ бўлган ҳолда

$$2pz=x^2+y^2$$

айланма параболоидни ҳосил қиламиз, x ва y ўзгарувчилар (52) тенгламага иккинчи даражада киргани учун эллиптик параболоид иккита симметрия текислиги: Oxz ва Oyz га эга.

Қуйидаги

$$2z=\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q} \tag{53}$$

тенглама билан аниқланадиган сирт p ва q лар бир хил ишорали бўлган шартда *гиперболик параболоид* дейилади. (Кейинчалик аниқлик учун $p>0$, $q>0$ деб ҳисоблаймиз).

Бу сиртни Oxz текислик билан кесиб,

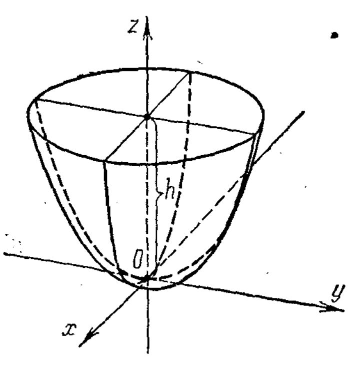
$$\left.\begin{aligned}2pz=x^2\\ y=0\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

параболани ҳосил қиламиз (102-расм).

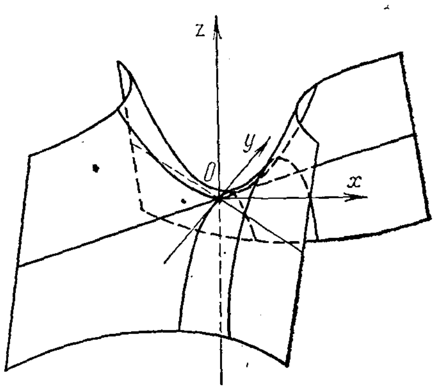
Гиперболик параболоидни $x=h$ текислик билан кесганда

$$\left.\begin{aligned}2z=\frac{h^2}{p}-\frac{y^2}{q}\\ x=h\end{aligned}\right\} \text{ ёки } \left.\begin{aligned}2q\left(z-\frac{h^2}{2p}\right)=-y^2\\ x=h\end{aligned}\right\}$$

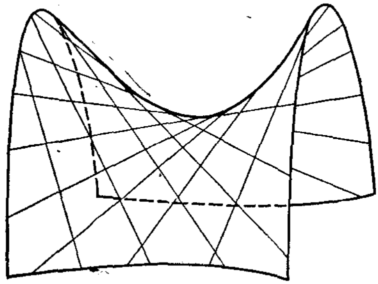
парабола ҳосил бўлади. h нинг турли қийматларида Oyz текисликка параллел текисликларда ётган ва бир хил q параметрли параболалар оиласи ҳосил бўлади.



101-расм.



102-расм.



103- расм.

Гиперболик параболоидни ҳаракатланаётган парабола текислиги Oyz текисликка параллел бўлиб қоладиган, параболанинг симметрия ўқи Oxz текисликда қоладиган, учи эса (54) парабола бўйича ҳаракат қиладиган шартда бу параболаларнинг ихтиёрий биттасининг ҳаракати билан тавсифланадиган сирт деб қараш мумкин. Гиперболик параболоидни $z=h$ текислик билан кесиб ($h \neq 0$ да) қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} 2h = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}, \\ z = h \end{aligned}\right\} \text{ ёки } \left.\begin{aligned} \frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1, \\ z = h \end{aligned}\right\}$$

гиперболани ҳосил қиламиз. 102-расмда бу гиперболанинг икки $h>0$ ва $h<0$ ҳол учун жойлашиши тасвирланган. $h=0$ да, яъни гиперболик параболоидни Oxy координаталар текислиги билан кесганда, Oxy текисликдаги тенгламаси $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$ бўлган чизиқ ҳосил бўлади. Охирги тенглама

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \quad \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$$

тенгламалар системасига тенг кучли. Бу гиперболик параболоид Oxy текислик билан иккита

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{aligned}\right\}.$$

тўғри чизиқ бўйича кесишади деган сўз. Бу тўғри чизиқлар Oxy текисликда ётади ва координаталар бошидан ўтади. Бу иккита тўғри чизиқдан ташқари гиперболик параболоидда тўлиқ ётадиган бошқа тўғри чизиқлар ҳам мавжуд. Бундан ташқари, бир паллали гиперболоидда бўлгани каби, гиперболик параболоиднинг ҳар бир нуқтаси орқали

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 2kz \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{1}{k} \end{aligned}\right\} \text{ ва } \left.\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{1}{l} \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 2lz \end{aligned}\right\}$$

тўғри чизиқлар оиласининг ҳар биридан биттадан тўғри чизиқ ўтишини кўрсатиш мумкин, бунда k ва l — ихтиёрий параметрлар.

Шундай қилиб, гиперболик параболоидни тўғри чизиқлардан ташкил топган сирт деб қараш мумкин (103-расм).

Изоҳ. Тўғри чизиқлардан ташкил топган сиртлар *тўғри чизиқли сиртлар* дейилади. Шундай қилиб, цилиндрик ва конус сиртлар, шунингдек бир паллали гиперболоид ва гиперболик параболоид тўғри чизиқли сиртлар экан.

V БОБ

ЛИМИТЛАР НАЗАРИЯСИ

1-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЛИМИТИ

1. Функциянинг $x \to +\infty$ даги лимити. $y = f(x) = 2 - \frac{1}{x}$ функция берилган бўлсин. Бу функциянинг қийматлар жадвалини тузамиз ва унинг графигини ясаймиз (104- расм):

x	1	2	10	100	1000
y	1	1,5	1,9	1,99	1,999

Жадвал ва графикни қараётиб, x аргументнинг ўсиши билан бу функция 2 сонга чексиз яқинлашади ёки бошқача айтилишича, x плюс чексизликка интилганда ($x \to +\infty$) функция лимити 2 сонга тенг деб фараз қилиш мумкин.

$M(x, y)$ нуқта $y = 2 - \frac{1}{x}$ функция графигининг нуқтаси бўлсин. M нуқтадан $y = 2$ тўғри чизиққача бўлган d масофани топамиз:

$$d = |y - 2| = |f(x) - 2| = \left|\left(2 - \frac{1}{x}\right) - 2\right| = \left|\frac{1}{-x}\right| = \frac{1}{|x|}.$$

$x \to +\infty$ да $y = 2 - \frac{1}{x}$ функциянинг лимити 2 сонга тенг деган факт функция графигининг $M(x; y)$ нуқтасидан $y = 2$ тўғри чизиққача бўлган масофа, яъни x нинг етарлича катта қийматлари учун $|f(x) - 2|$ ни олдиндан берилган исталган мусбат сондан кичик қилиб олиш мумкин деган сўздир.

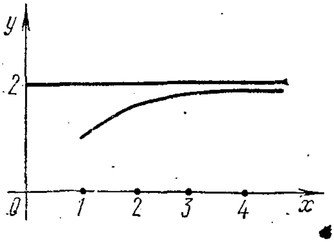
Масалан,

$|f(x) - 2| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{10}$, агар $x > 10$ бўлса;

$|f(x) - 2| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{100}$, агар $x > 100$ бўлса;

ва умуман $\varepsilon > 0$ бўлганда

$|f(x) - 2| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon$, агар $x > \frac{1}{\varepsilon}$ бўлса.



104- расм.

Энди $y=f(x)$ функциянинг $x\to+\infty$ даги лимитига аниқ таъриф берамиз, бунда $y=f(x)$ функция бутун сон ўқида ёки бирор сондан катта бўлган барча x лар учун аниқланган деб фараз қиламиз.

Агар ҳар қандай мусбат ε сон учун шундай N сон топилсаки, N дан катта барча x лар учун

$$|f(x)-b|<\varepsilon \qquad (1)$$

тенгсизлик бажарилса, b сон $y=f(x)$ функциянинг $x\to+\infty$ даги лимити дейилади.

$f(x)$ функциянинг $x\to+\infty$ даги лимитининг таърифи символик равишда қуйидагича ёзилади:

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon>0)\,\exists N\underset{x}{\forall}(x>N)\Longrightarrow|f(x)-b|<\varepsilon.$$

Бошқача айтганда, агар функциянинг лимити $x\to+\infty$ да b сон бўлса, у ҳолда x аргументнинг чексиз ўсиши билан бу функциянинг қиймати b сондан исталганча кам фарқ қилади, яъни функциянинг қиймати билан b сон орасидаги фарқ нолга исталганча яқин бўлади.

Функциянинг $x\to+\infty$ даги лимитининг b сонга тенг бўлиши қуйидагича ёзилади*.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b.$$

Бу қуйидагича ўқилади: „эф x функциянинг x плюс чексизликка интилгандаги лимити b га тенг“. Юқоридаги мисолга қайтсак, қуйидагига эгамиз:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2.$$

1- мисол. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+3}{x}=5$ ни исбот қилинг.

Ечилиши. Бу ҳолда $f(x)=\frac{5x+3}{x}$, $b=5$. Ихтиёрий мусбат ε сон оламиз ва $f(x)-b$ айирманинг абсолют қийматини қараймиз:

$$|f(x)-b|=\left|\frac{5x+3}{x}-5\right|=\left|\frac{3}{x}\right|=\frac{3}{|x|}.$$

Бу айирма ε дан кичик бўлиши учун яъни

$$\left|\frac{5x+3}{x}-5\right|=\frac{3}{|x|}<\varepsilon \qquad (*)$$

тенгсизлик бажарилиши учун $|x|>3/\varepsilon$ бўлиши етарли. Биз функциянинг $x\to+\infty$ даги лимитини қараётганимиз учун x ни мусбат деб ҳисоблаш мумкин. Шунинг учун (*) тенгсизлик барча $x>3/\varepsilon$ лар учун бажарилади. Бу ҳолда лимитнинг таърифида кўрсатилган N сон $3/\varepsilon$ га тенг. Шундай қилиб,

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon>0)\,\underset{N}{\exists}(N=3/\varepsilon)\,\underset{x}{\forall}(x>N=3/\varepsilon)\Longrightarrow\left|\frac{5x+3}{x}-5\right|<\varepsilon.$$

---

* lim — латинча „limes“ сўзининг биринчи учта ҳарфидир, у ўзбек тилида чегара (лимит) маъносини англатади.

Бу $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+3}{x}=5$ эканини билдиради. $y=\frac{5x+3}{x}$ функциянинг x аргументнинг мусбат қийматлари учун графиги 105- расмда тасвирланган.

2- мисол. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1$ ни исбот қилинг.

Ечилиши. $\varepsilon>0$ сон оламиз. Қуйидагига эгамиз:

$$|f(x)-1|=\left|\frac{x+\sin x}{x}-1\right|=\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\frac{|\sin x|}{|x|}\leqslant\frac{1}{|x|},$$

чунки $|\sin x|\leqslant 1$. Агар $1/|x|<\varepsilon$ ёки $1/x<\varepsilon$ бўлса, $\left|\frac{x+\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади, чунки $x\to+\infty$ да x ни мусбат деб ҳисоблаш мумкин. Охирги тенгсизлик барча $x>1/\varepsilon=N$ лар учун ўринли. Шундай қилиб,

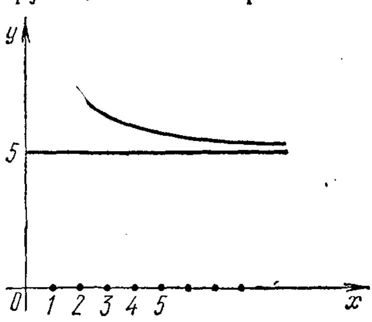
$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon>0)\ \underset{N}{\exists}\left(N=\frac{1}{\varepsilon}\right)\underset{x}{\forall}\left(x>\frac{1}{\varepsilon}\right)\Longrightarrow\left|\frac{x+\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon.$$

Шу билан биз $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1$ эканини кўрсатдик, қаралган функциянинг графиги 106- расмда тасвирланган.

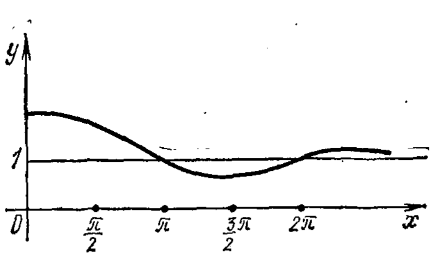
3- мисол. $y=\cos x$ функция $x\to+\infty$ да лимитга эга эмас. Бу функциянинг қийматлари $x\to+\infty$ да -1 ва 1 орасида ўзгариб туради.

Лимитнинг таърифидан келиб чиқадики, ўзгармас $f(x)\equiv A$ функциянинг $x\to+\infty$ даги лимити A га тенг, чунки ихтиёрий $\varepsilon>0$ да $|f(x)-A|=|A-A|<\varepsilon$ тенгсизлик барча x лар учун бажарилади (бу ерда N исталган сон бўлиши мумкин).

Юқорида кўриб ўтилган мисоллар шуни кўрсатадики, функция ўзининг лимитига (агар унинг лимити мавжуд бўлса) бу қийматдан доимо кичик бўлиб, масалан, $y=2-\frac{1}{x}$ функция каби (104- расмга қаранг) ёки лимит қийматидан катта бўлиб, масалан, $y=\frac{5x+3}{x}$ функция каби (105- расмга қаранг) интилиши мумкин ва ниҳоят, функция ўзининг лимити атрофида масалан, $y=\frac{x+\sin x}{x}$ функция каби тебраниши мумкин (106- расмга қаранг).



105- расм.



106- расм.

Энди функциянинг $x \to +\infty$ даги лимитининг **геометрик маъносини** ўрганамиз. Биз биламизки, агар $y = f(x)$ функциянинг лимити b сонга тенг бўлса, исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай N сон топиладики, барча $x > N$ лар учун $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Абсолют миқдорларнинг хоссасига асосан (I боб, 1-§, 3-пунктга қаранг) бу тенгсизлик қуйидаги тенгсизликларга тенг кучлидир:

$$-\varepsilon < f(x) - b < \varepsilon \tag{2}$$

ёки

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon. \tag{2'}$$

(2′) тенгсизликлар $y = f(x)$ функция графигидаги абсциссалари N дан катта бўлган барча нуқталарнинг ординаталари $b - \varepsilon$ ва $b + \varepsilon$ сонлар орасида ётишини кўрсатади. Бу эса x нинг N сонидан катта бўлган барча қийматлари учун $y = f(x)$ функциянинг графиги $y = b - \varepsilon$ ва $y = b + \varepsilon$ тўғри чизиқлар билан чегараланган полосада ётади, деган маънони англатади (107-*а* расм). Лимит таърифидаги N сон, умуман айтганда, ε га боғлиқ. ε қанча кичик бўлса, яъни $y = b - \varepsilon$ ва $y = b + \varepsilon$ тўғри чизиқлар орасидаги полоса қанча тор бўлса, N шунча катта бўлади.

2. **Функциянинг $x \to -\infty$ даги лимити.** Энди функциянинг x минус чексизликка интилгандаги ($x \to -\infty$) лимитнинг таърифини қарайлик.

Агар ҳар қандай мусбат ε сон учун шундай M сон топилсаки, M дан кичик барча x лар учун

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, b сон $y = f(x)$ функциянинг $x \to -\infty$ даги лимити дейилади.

$f(x)$ функциянинг $x \to -\infty$ даги лимитининг таърифи символик равишда қуйидагича ёзилади:

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\,\exists M\,\underset{x}{\forall}(x < M) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

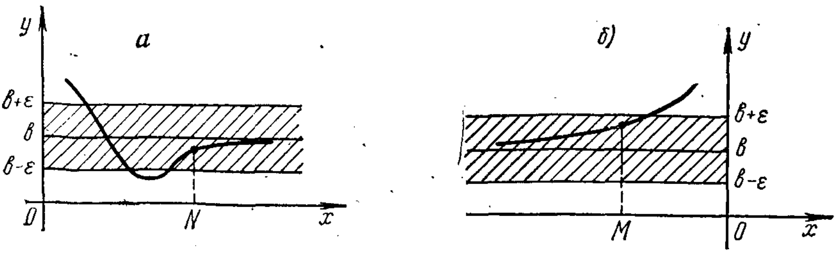
Функциянинг $x \to -\infty$ даги лимитининг b га тенг бўлиши қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Функциянинг $x \to -\infty$ даги лимитининг **геометрик маъноси** функциянинг $x \to +\infty$ даги лимитининг геометрик маъносига ўхшаш. Агар $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ бўлса, ҳар қандай мусбат ε сон учун шундай M сон топиладики, барча $x < M$ лар учун $y = f(x)$ функциянинг графиги $y = b - \varepsilon$ ва $y = b + \varepsilon$ тўғри чизиқлар билан чегараланган полоса орасида жойлашган бўлади (107-*б* расм).

---

* $|z| < \varepsilon$ тенгсизлик $-\varepsilon < z < \varepsilon$ тенгсизликларга тенг кучли бўлгани учун $z = f(x) - b$ деб, (2) тенгсизликларга келамиз.



107- расм.

3. Функциянинг $x \to x_0$ даги лимити. Биз функциянинг $x \to +\infty$ ва $x \to -\infty$ даги лимити тушунчасини киритдик. Энди функциянинг $x \to x_0$ даги лимити тушунчасини киритамиз. Дастлаб, x эркли ўзгарувчи x_0 га чапдан яқинлашган ҳолни қарайлик.

Агар ҳар қандай мусбат ε *сон учун шундай* (x_0 *дан кичик*) N *сон топилсаки,* N *ва* x_0 *орасида* ($N < x < x_0$) *ётувчи барча* x *лар учун* $|f(x) - b| < \varepsilon$ *тенгсизлик бажарилса,* b *сон* $y = f(x)$ *функциянинг* $x \to x_0$ *даги чап лимити дейилади.*

$f(x)$ функциянинг $x \to x_0$ даги чап лимитининг таърифи символик равишда қуйидагича ёзилади:

$$\underset{\varepsilon}{\forall} (\varepsilon > 0) \underset{N}{\exists} (N < x_0) \underset{x}{\forall} (N < x < x_0) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Функциянинг $x \to x_0$ даги чап лимити тушунчаси $x \to +\infty$ да лимит тушунчасига ўхшаш бўлиб, ундан шу билан фарқ қиладики, $x \to +\infty$ да лимит ҳолида (1) тенгсизлик N дан катта барча x лар учун бажарилади. $x \to x_0$ даги чап лимит ҳолида эса барча N дан катта, лекин x_0 дан кичик x лар учун бажарилади. Функциянинг $x \to x_0$ даги чап лимити қуйидагича белгиланади: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b$. $x \to x_0 - 0$ символи x катталик x_0 га чапдан интилишини билдиради.

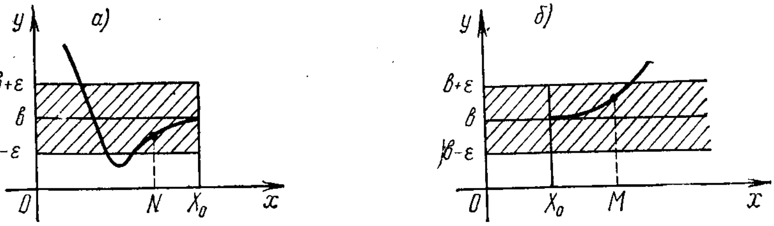
Функциянинг $x \to x_0 - 0$ даги лимитининг геометрик маъноси қуйидагидан иборат: ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун, шундай N ($N < x_0$) сон топиладики, N ва x_0 орасида жойлашган барча x лар учун функциянинг графиги $y = b - \varepsilon$ ва $y = b + \varepsilon$ (108-*а* расм) тўғри чизиқлар билан чегараланган полоса орасида жойлашган бўлади.

Функциянинг $x \to x_0$ даги чап лимити тушунчасига ўхшаш функциянинг $x \to x_0$ даги ўнг лимити тушунчаси киритилади.

Агар ҳар қандай мусбат ε *сон учун шундай* M *сон* (x_0 *дан катта*) *топилсаки,* M *ва* x_0 *орасида* ($x_0 < x < M$) *ётувчи барча* x *лар учун* $|f(x) - b| < \varepsilon$ *тенгсизлик бажарилса,* M *сон* $y = f(x)$ *функциянинг* $x \to x_0$ *даги ўнг лимити дейилади.*

$f(x)$ функциянинг $x \to x_0$ даги ўнг лимитининг таърифи символик равишда қуйидагича ёзилади:

$$\underset{\varepsilon}{\forall} (\varepsilon > 0) \underset{M}{\exists} (M > x_0) \underset{x}{\forall} (x_0 < x < M) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$



108- расм.

Функциянинг $x \to x_0$ даги ўнг лимити қуйидагича белгиланади: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = b$. Агар $f(x)$ функциянинг $x_0 \to x$ даги ўнг лимити b сонга тенг бўлса, у ҳолда унинг геометрик маъноси қуйидагича бўлади: функциянинг графиги x_0 ва M орасида жойлашган барча x лар учун $y = b - \varepsilon$ ва $y = b + \varepsilon$ тўғри чизиқлар билан чегараланган полоса орасида жойлашади (108- *б* чизма).

Функциянинг $x \to x_0$ даги чап ($x \to x_0 - 0$) ва $x \to x_0$ даги ўнг ($x \to x_0 + 0$) лимитлари унинг *бир томонлама лимитлари* дейилади.

Агар иккала бир томонлама лимит мавжуд бўлиб, улар ўзаро тенг бўлса, $f(x)$ функция $x \to x_0$ да *икки томонлама лимитга* эга ёки оддийгина $x \to x_0$ да лимитга эга дейилади.

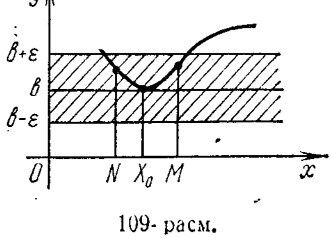
Шундай қилиб, *агар ҳар қандай мусбат* $\varepsilon > 0$ *сон учун шундай* M *ва* N *сонлар* ($N < x_0 < M$) *топилсаки,* $]N, M[$ *интервалда ётувчи барча* x *лар учун* (x_0 *нуқта бундан мустасно бўлиши мумкин*) $|f(x) - b| < \varepsilon$ *тенгсизлик бажарилса,* b *сон* $y = f(x)$ *функциянинг* $x \to x_0$ *даги лимити дейилади.*

$y = f(x)$ функциянинг $x \to x_0$ даги лимитининг таърифи символик равишда қуйидагича ёзилади:

$\underset{\varepsilon}{\forall} (\varepsilon > 0) \underset{M,N}{\exists} (N < x_0 < M) \underset{x}{\forall} (x \in]N, M[)$ (x_0 нуқта бундан мустасно бўлиши мумкин) $\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

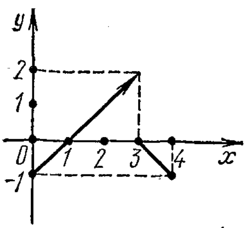
x_0 нуқтани ўз ичига олган исталган интервални унинг *атрофи* деб атаймиз. Агар b сон $y = f(x)$ функциянинг $x \to x_0$ даги лимити бўлса, у ҳолда $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик x_0 нуқтанинг бирор атрофининг барча нуқталари учун (x_0 нуқта бундан мустасно бўлиши мумкин) бажарилишини кўриш осон. Агар $f(x)$ функция $x \to x_0$ да b га тенг лимитга эга бўлса, у қуйидагича ёзилади: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

$x \to x_0$ даги лимитнинг геометрик маъноси 109- расмдан равшан кўриниб турибди.



109- расм.

1-эслатма. Функциянинг $x \to x_0$ даги (ёки $x \to x_0 - 0$, ёки $x \to x_0 + 0$ даги) лимитининг таърифида $x \neq x_0$



110- расм.

қийматлар қаралди. x_0 нуқтанинг ўзида функция аниқланмаган бўлиши ҳам мумкин. Кейинчалик бу эслатмадан кўп фойдаланилади.

2-эслатма. Функциянинг $x \to x_0$ даги (ёки $x \to x_0 - 0$ даги, ёки $x \to x_0 + 0$ даги) лимитининг таърифида таъкидланаётган M ва N сонлар ε ва x_0 га боғлиқ.

1-мисол. $y = 2x + 1$ функцияни қарайлик. $x = 4$ да унинг қиймати 9 га тенг. Эркли ўзгарувчи x чапдан ва ўнгдан 4 сонга яқинлашган сари функциянинг қиймати чегараланмаган ҳолда 9 сонга яқинлашишини, яъни $\lim\limits_{x \to 4}(2x+1)=9$ эканлигини кўрсатайлик.

Бунинг учун мусбат ε сонни оламиз ва x нинг $x_0 = 4$ га яқин қийматлари учун функция ва 9 сон орасидаги айирманинг абсолют қиймати бўйича ε дан кичик қилиниши мумкинлигига, яъни $|(2x + 1) - 9| < \varepsilon$ бўлиши мумкинлигига ишонч ҳосил қиламиз. Равшанки,

$$\{|(2x + 1) - 9| < \varepsilon\} \Longleftrightarrow \{-\varepsilon < (2x+1) - 9 < \varepsilon\} \Longleftrightarrow \left\{4-\frac{\varepsilon}{2} < x < 4 + \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Шундай қилиб, функция ва 9 сон орасидаги айирма (абсолют қиймати бўйича) $N = 4 - \frac{\varepsilon}{2}$ ва $M = 4 + \frac{\varepsilon}{2}$ сонлар орасида ётган барча x лар учун ε дан кичик бўлади. Шунинг учун $y = 2x + 1$ функциянинг $x \to 4$ даги лимити $\lim\limits_{x \to 4}(2x + 1) = 9$ бўлади.

2-мисол. [0, 4] сегментда қуйидагича аниқланган $y = f(x)$ функцияни қараймиз:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{агар } 0 \leqslant x \leqslant 3 \text{ бўлса;} \\ 3 - x, & \text{агар } 3 \leqslant x \leqslant 4 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Бу функциянинг графиги 110-расмда келтирилган. Равшанки,

$$\lim_{x \to 3-0} f(x) = \lim_{x \to 3-0}(x - 1) = 2, \quad \lim_{x \to 3+0} f(x) = \lim_{x \to 3+0}(3 - x) = 0.$$

Бундай бўлиши функциянинг графигидан яққол кўриниб турибди. Бу ерда чап лимит ҳам, ўнг лимит ҳам бир-бирига тенг эмас, шунинг учун $y = f(x)$ функция $x \to 3$ да лимитга икки томонлама лимитга эга эмас.

Энди агар функция лимитга эга бўлса, бу лимит ягона бўлишини кўрсатамиз. Буни геометрик нуқтаи назардан кўрсатиш осон. Ҳақиқатан ҳам, тескарисини фараз қилайлик, яъни $y = f(x)$ функция $x \to +\infty$ да иккита b_1 ва b_2 лимитга эга бўлсин. Бири $y = b_1 - \varepsilon$ ва $y = b_1 + \varepsilon$ тўғри чизиқлар билан, иккинчиси $y = b_2 - \varepsilon$ ва $y = b_2 + \varepsilon$ тўғри чизиқлар билан чегараланган иккита полосани қарайлик. Бунда ε ни шундай кичик қилиб оламизки, иккала полоса ҳам умумий нуқтага эга бўлмасин. У ҳолда x етарлича катта бўлганда функциянинг графиги бир вақтда бу полосаларнинг ҳар бирида ёта олмайди. Шундай қилиб, ҳар қандай функция ё ҳеч қандай лимитга эга эмас, ё фақат битта лимитга эга бўлади.

4. Чексиз кичик функциялар. Чегараланган функциялар. Агар $y=f(x)$ функциянинг $x\to+\infty$ даги лимити нолга тенг бўлса, у функция $x\to+\infty$ да *чексиз кичик* дейилади. $x\to-\infty$, $x\to x_0-0$, $x\to x_0+0$, $x\to x_0$ да чексиз кичик функциялар шунга ўхшаш аниқланади. Чексиз кичик функция учун лимит $b=0$ ва $|f(x)-b|=|f(x)-0|=|f(x)|$ бўлгани сабабли лимитнинг таърифига кўра, масалан, $x\to+\infty$ да чексиз кичик функциянинг юқорида берилган таърифига тенг кучли бўлган таърифни бериш мумкин.

Агар ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун шундай N сонни топиш мумкин бўлсаки, барча $x>N$ лар учун

$$|f(x)|<\varepsilon$$

тенгсизлик* бажарилса, $y=f(x)$ функция ($x\to+\infty$ да) *чексиз кичик* дейилади. $x\to+\infty$ да чексиз кичик функция таърифининг символик ёзуви қуйидагича:

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon>0)\,\exists N\,\underset{x}{\forall}(x>N)\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon.$$

1-мисол $y=\frac{1}{x^2}$ функция $x\to+\infty$ да чексиз кичик бўлишини кўрсатамиз. Бунинг учун унинг $x\to+\infty$ даги лимити $b=0$ эканлигини, яъни ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай N ни топиш мумкинлигини, бунда (3) тенгсизлик бажарилишини кўрсатиш керак:

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{x^2}\right|=\frac{1}{x^2}<\varepsilon.$$

Лекин бу тенгсизлик $x>1/\sqrt{\varepsilon}$ бўлганда ўринли бўлади.

Умуман айтганда, $y=1/x^\alpha$ функция (α — ихтиёрий мусбат сон) $x\to+\infty$ да чексиз кичик эканлигини кўрсатиш мумкин.

2-мисол. $y=x^3$ функция $x\to0$ да чексиз кичик функция бўлишини кўрсатамиз.

$|f(x)|=|x^3|<\varepsilon$ тенгсизлик, равшанки, x нинг $|x|<\sqrt[3]{\varepsilon}$ бўладиган барча қийматлари учун бажарилади. Шундай қилиб, $|x^3|<\varepsilon$ тенгсизлик $N=-\sqrt[3]{\varepsilon}$ ва $M=\sqrt[3]{\varepsilon}$ орасида ётувчи барча x лар учун бажарилади. Бу $\lim\limits_{x\to0}x^3=0$, яъни $y=x^3$ функция $x\to0$ да чексиз кичик функция бўлади деган сўздир.

Умуман айтганда $y=x^m$ (бу ерда $m>0$) функция $x\to0$ да чексиз кичик бўлишини кўрсатиш мумкин.

3-мисол. $y=2-\frac{1}{x}$ функция $x\to+\infty$ да чексиз кичик функция бўла олмайди, чунки $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2\neq0$.

Энди чексиз кичик функциялар ҳақидаги бир нечта теоремани исбот қиламиз. Аниқлик учун теоремаларнинг таърифлари ва исботларини $x\to+\infty$ даги чексиз кичик функциялар учун кел-

* $x\to-\infty$, $x\to x_0$, $x\to x_0-0$ ва $x\to x_0+0$ ҳоллар учун чексиз кичик функциянинг иккинчи таърифини ифодалашни китобхоннинг ўзига ҳавола қиламиз.

тирамиз, чунки таъриф ва исботларнинг бошқа барча ҳоллари шунга ўхшаш бўлади. Бу теоремаларни $x \to -\infty$, $x \to x_0$, $x \to x_0 - 0$ ва $x \to x_0 + 0$ ҳоллар учун мустақил таърифлашни ва исботлашни китобхоннинг ўзига ҳавола қиламиз.

1-теорема. *Агар* $\varphi(x)$ *ва* $\psi(x)$ *функциялар* ($x \to +\infty$ *да*) *чексиз кичик функциялар бўлса, уларнинг йиғиндиси* $\varphi(x) + \psi(x)$ *ҳам чексиз кичик функция* ($x \to +\infty$ *да*) *бўлади.*

Исботи. $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ бўлсин. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ эканини, яъни

$$\underset{\varepsilon}{\forall} (\varepsilon > 0)\, \exists N \underset{x}{\forall} (x > N) \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

эканини кўрсатиш талаб қилинади. Шундай қилиб, ε — ихтиёрий мусбат сон бўлсин. Шартга кўра $\varphi(x)$ чексиз кичик функция бўлганидан мусбат $\varepsilon/2$ сон учун:

$$\exists N_1 \underset{x}{\forall} (x > N_1) \Longrightarrow |\varphi(x)| < \varepsilon/2. \tag{4}$$

Шунга ўхшаш $\varepsilon/2$ мусбат сон учун

$$\exists N_2 \underset{x}{\forall} (x > N_2) \Longrightarrow |\psi(x)| < \varepsilon/2. \tag{5}$$

N сон N_1 ва N_2 сонлар ичида энг каттаси бўлсин. У ҳолда $x > N$ учун (4) ва (5) тенгсизликларнинг иккаласи бир вақтда бажарилади. Бундай ҳолда*

$$\underset{x}{\forall} (x > N) \Longrightarrow \{|f(x)| = |\varphi(x) + \psi(x)| \leqslant |\varphi(x)| + |\psi(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\}.$$

Демак, $\underset{x}{\forall} (x > N) \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon$, бу $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ функция $x \to +\infty$ да чексиз кичик функция бўлади демакдир.

Бу теорема x ихтиёрий чекли сондаги чексиз кичик функциялар учун умумлаштирилиши мумкин. Уни қисқача қуйидагича айтилади: *бир нечта чексиз кичик функцияларнинг йиғиндиси чексиз кичик функциядир.*

4-мисол. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$ функция $x \to +\infty$ да чексиз кичик функция бўлади, чунки $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{x^2}$ қўшилувчиларнинг ҳар бири $x \to +\infty$ да чексиз кичик функциядир (1-мисолга қаранг).

5-мисол. $y = x + x^3 + x^5$ функция $x \to 0$ да чексиз кичик функция бўлади, чунки $y = x$, $y = x^3$ ва $y = x^5$ функциялар $x \to 0$ да чексиз кичик функциялардир (2-мисолга қаранг).

Чексиз кичик функциялар ҳақидаги навбатдаги теоремаларга ўтишдан аввал чегараланган функция тушунчасини киритамиз.

---

* Бу ерда биз абсолют қийматларнинг қуйидаги хоссасидан фойдаландик $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ (I боб, 1-§, 3-пунктга қаранг).

Агар шундай мусбат C сон мавжуд бўлсаки, x аргументнинг қийматларидан иборат бирор M тўпламдаги барча $x \in M$ лар учун $|f(x)| \leqslant C$

тенгсизлик бажарилса, $y = f(x)$ функция M тўпламда *чегараланган* дейилади. Бундай тўплам, масалан, интервал, сегмент ёки бутун сон ўқи бўлиши ҳам мумкин.

6-мисол. $y = \sin x$ ва $y = \cos x$ функциялар бутун сон ўқида чегараланган, чунки ихтиёрий x қиймат учун $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$ га эгамиз.

7-мисол. $y = x^3 + 4$ функция $[0, 3]$ сегментда чегараланган, чунки бу сегментга тегишли барча x лар учун $|f(x)| \leqslant f(3) = 3$, яъни $|f(x)| \leqslant 3$ тенгсизлик ўринли.

8-мисол. $y = 1/x$ функция $]0, 1[$ интервалда чегараланмаган, чунки барча $x \in]0, 1[$ лар учун $|1/x| \leqslant C$ тенгсизлик ўринли бўладиган C сонни кўрсатиш мумкин эмас.

Навбатдаги иккита теорема чегараланган функция ва лимитга эга функция орасидаги боғланишни аниқлайди. Аниқлик учун функциянинг $x \to +\infty$ бўлган ҳолдаги лимитини қараймиз.

2-теорема. *Агар $y = f(x)$ функция $x \to +\infty$ да лимитга эга бўлса, y бирор чексиз $]N, +\infty[$ интервалда чегараланган бўлади.*

Исботи. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ бўлсин. У ҳолда лимит таърифига кўра $\varepsilon = 1$ учун $\exists N \forall_x (x > N) \Rightarrow \{|f(x) - b| < 1\}$. Абсолют қийматларнинг хоссасига кўра $|f(x) - b| \leqslant |f(x)| - |b|$ бўлгани учун $|f(x)| - |b| < 1$, бундан $|f(x)| < |b| + 1 = C$. Бу $y = f(x)$ функция чексиз $]N, +\infty[$ интервалда чегараланганлигини билдиради.

Эслатма. Чексиз $]N, +\infty[$ интервалда чегараланган функцияни $x \to +\infty$ да чегараланган деб атаймиз.

Натижа. *Чексиз кичик функция ($x \to +\infty$ да) чегараланган.*

Энди навбатдаги теоремани исбот қиламиз.

3-теорема *Агар $y = f(x)$ функция нолдан фарқли ($x \to +\infty$) лимитга эга бўлса, $y = 1/f(x)$ функция (бирор чексиз интервалда) чегараланган.*

Исботи. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (бу ерда $b \neq 0$) ва бирор мусбат $\varepsilon < |b|$ сон берилган бўлсин. Лимитнинг таърифига кўра $\exists N \forall_x (x > N) \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. $|f(x) - b| = |b - f(x)| \geqslant |b| - |f(x)|$ бўлгани учун $|b| - |f(x)| < \varepsilon$ ва $|f(x)| > |b| - \varepsilon > 0$.

Демак,

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{|b| - \varepsilon} = C.$$

Шундай қилиб, теорема исбот қилинди.

4-теорема. *Чексиз кичик функциянинг ($x \to +\infty$ да) чегараланган функцияга ($x \to +\infty$ да) кўпайтмаси чексиз кичик функциядир.*

Исботи. $\varphi(x)$ функция чексиз $N_0 < x < +\infty$ интервалда чегараланган бўлсин. Демак,

$$\underset{C}{\exists}(C > 0)\underset{x}{\forall}(x > N_0) \Longrightarrow |\varphi(x)| \leqslant C. \qquad (6)$$

Сўнгра $f(x)$ функция $x \to +\infty$ да чексиз кичик функция бўлсин. $\varphi(x) \cdot f(x)$ кўпайтма ҳам $x \to +\infty$ да чексиз кичик функция бўлишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ чексиз кичик функция бўлгани учун

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\exists N_1 \underset{x}{\forall}(x > N_1) \Longrightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{C}. \qquad (7)$$

N_0 ва N_1 сонларнинг энг каттаси N бўлсин. У ҳолда $x > N$ учун бир вақтнинг ўзида (6) ва (7) тенгсизликлар бажарилади. Демак, барча $x > N$ лар учун

$$|\varphi(x) \cdot f(x)| = |\varphi(x)| \cdot |f(x)| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon,$$

яъни $\varphi(x) \cdot f(x)$ чексиз кичик функция экан.

8-мисол. $y = \frac{\sin x}{x^2}$ функция $x \to +\infty$ да чексиз кичик функциядир, чунки у чегараланган $\sin x$ функция билан чексиз кичик ($x \to +\infty$да) $y = \frac{1}{x^2}$ функциянинг кўпайтмасидан иборат.

9-мисол. $y = x^2(1 + \sin x)$ функция чексиз кичик функциядир, чунки у чегараланган $1 + \sin x$ функция билан $x \to 0$ да чексиз кичик бўлган x^2 функциянинг кўпайтмасидан иборат.

1-натижа. Ҳар қандай чексиз кичик функция чегараланган бўлгани учун ҳозиргина исбот қилинган теоремадан *иккита чексиз кичик функциянинг кўпайтмаси чексиз кичик функция бўлиши* келиб чиқади.

2-натижа. *Чексиз кичик функциянинг сонга кўпайтмаси чексиз кичик функциядир.*

5-теорема. $x \to +\infty$ *да чексиз кичик функция лимитнинг* ($x \to +\infty$ *да*) *нолдан фарқли бўлган* $\varphi(x)$ *функцияга бўлинмаси чексиз кичик функциядир.*

Исботи. $f(x)/\varphi(x)$ функция чексиз кичик $f(x)$ функция билан чегараланган $1/\varphi(x)$ функциянинг кўпайтмаси шаклида ифодаланиши мумкин ($1/\varphi(x)$ функциянинг чегараланганлиги 3-теоремадан келиб чиқади). У ҳолда 4-теоремадан $f(x)/\varphi(x) = f(x) \cdot 1/\varphi(x)$ бўлинма чексиз кичик функция эканлиги келиб чиқади.

5. Чексиз катта функциялар ва уларнинг чексиз кичик функциялар билан боғлиқлиги. Агар ихтиёрий мусбат L сон учун шундай N сонни танлаш мумкин бўлсаки, x нинг барча $x > N$ қийматлари учун $|f(x)| > L$ тенгсизлик* бажарилса, $y = f(x)$ функция *чексиз катта* дейилади.

---

* N сон L сонга боғлиқ.

Масалан, $x \to +\infty$ да $y=x^2$ функция чексиз катта. Қандай мусбат L сонни олинишидан қатъи назар бу функция L дан катта қилиб олиниши мумкин (x нинг $N=\sqrt{L}$ дан катта бўлган барча қийматлари учун). Шунга ўхшаш, $y=\lg x$ функция $x \to +\infty$ да чексиз каттадир, чунки $|\lg x| > L$ тенгсизлик $N=10^L$ дан катта барча қийматлар учун бажарилади. Равшанки, ҳар қандай чексиз катта функция $x \to +\infty$ да чегараланган бўлмайди, шунинг учун у лимитга эга бўлмайди (2-пунктдаги 2-теоремага қаранг)

Чексиз катта функция чексизликка интилади ($x \to +\infty$ да) ёки у чексиз лимитга эга дейилади. Агар $f(x)$ функция $x \to +\infty$ да чексиз катта бўлса, уни символик равишда қуйидагича ёзилади: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$. Бу ёзувни (тенгликни) функция лимитга эга экан деб тушуниш керакмас; у функция (лимитга эга бўлмасдан) чексиз катта деб ҳисобланишини билдиради.

Агар чексиз катта функция (x нинг етарлича катта барча қийматлари учун) мусбат бўлса, у $+\infty$ га интилади дейилади ва қуйидагича ёзилади: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Агар чексиз катта функция (x нинг барча етарлича катта қийматлари учун) манфий бўлса, у $-\infty$ га интилади дейилади ва қуйидагича ёзилади: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ $=-\infty$.

Шунга ўхшаш, масалан, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3)=-\infty$. Исталган *кўпҳад* $x\to+\infty$ *да ҳам,* $x\to-\infty$ *да ҳам чексиз катта функция* бўлишини исбот қилиш мумкин.

Чексиз катта ва чексиз кичик функциялар орасида узвий боғланиш мавжуд, бу қуйидаги теоремалар орқали намоён бўлди.

1-теорема *Агар* $f(x)$ *функция* $x\to+\infty$ *да чексиз катта бўлса,* $1/f(x)$ *функция* $x\to+\infty$ *да чексиз кичик функция бўлади.*

Исботи. Ихтиёрий $\varepsilon>0$ ни оламиз. Етарлича катти x лар учун $|1/f(x)|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилишини кўрсатамиз, бу чексиз кичик эканлигини англатади. $f(x)$ функция шартга кўра чексиз катта функция бўлгани учун шундай N сон мавжудки, $x>N$ да $|f(x)|>1/\varepsilon$, у ҳолда ўша x лар учун $|1/f(x)|<\varepsilon$. Бу билан теорема исботланди.

1-мисол. $y=x^2$ функция $x\to+\infty$ да чексиз катта функция. Демак, $1/x^2$ функция $x\to+\infty$ да чексиз кичик функция бўлади.

2-теорема. *Агар нолга айланмайдиган* $f(x)$ *функция* $x\to+$ $+\infty$ *да чексиз кичик функция бўлса, у ҳолда* $1/f(x)$ $x\to+\infty$ *да чексиз катта функция бўлади.*

Бу теоремани исботлашни китобхонга тавсия қиламиз.

$$x\to-\infty,\ x\to x_0-0,\ x\to x_0+0 \text{ ва } x\to x_0$$

да чексиз катта функциялар шунга ўхшаш аниқланади. Жумладан, масалан, агар $\underset{L}{\forall}\,(L>0)\ \underset{N}{\exists}\,(N<x_0)\ \underset{x}{\forall}\,(x\in\,]N,x[\,)\Rightarrow|f(x)|>L$

бўлса, $y=f(x)$ функция $x\to x_0-0$ да ($x\to x_0$ да чапдан) чексиз катта функция дейилади.

Бу пунктда $x\to-\infty$ да чексиз катта функциялар тўғрисида айтилган барча гаплар $x\to+\infty$ да, $x\to x_0-0$, $x\to x_0+0$ ва $x\to x_0$ ҳолда чексиз катта функциялар учун ҳам ўринли.

2-мисол. $y=1/x^3$ функция 2-теоремага кўра $x\to 0$ да чексиз катта функция, чунки $y=x^3$ функция $x\to 0$ да чексиз кичик (4-пунктдаги 2-мисолга қаранг). Бунда $\lim\limits_{x\to 0-0}(1/x^3)=-\infty$ ва $\lim\limits_{x\to 0+0}(1/x^3)=+\infty$, чунки $1/x^3$ функция $x\to 0$ учун манфий, $x>0$ учун эса мусбат.

6. Лимитлар ҳақидаги асосий теоремалар. Бу пунктда биз лимитга ўтиш қоидалари ҳақидаги баъзи теоремаларни келтирамиз, булар кейинчалик кўрамизки, лимитларни топишни енгиллаштиради. Бунда

$$x\to+\infty,\ x\to-\infty,\ x\to x_0-0,\ x\to x_0+0$$

ҳоллар учун бу теоремаларнинг таърифлари ҳам, исботлари ҳам бир хил бўлишини эслатиб ўтамиз. Шунинг учун уларни биз фақат $x\to+\infty$ ҳол учун келтирамиз.

Аввало лимитга эга бўлган функция билан чексиз кичик функция орасидаги боғланишни аниқлаймиз. Бу боғланиш тубандаги икки теоремада ўз аксини топади.

1-теорема. *Агар $f(x)$ функция ($x\to+\infty$ да) b га тенг лимитга эга бўлса, у ҳолда уни чексиз кичик функция ($x\to+\infty$ да) ва b сонининг йиғиндиси сифатида ифодалаш мумкин.*

Исботи. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ бўлсин.

$$f(x)-b=\alpha(x) \tag{8}$$

айирмани қараймиз ва $\alpha(x)$ функция ($x\to+\infty$ да) чексиз кичик функция эканини кўрсатамиз. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ бўлгани учун $\forall(\varepsilon>0)\ \exists N\ \forall\limits_{x}\ (x>N)\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$, у ҳолда $x>N$ учун $|\alpha(x)|<\varepsilon$. Бу $\alpha(x)$ функция чексиз кичик деган сўз. (8) тенгликдан $f(x)=b+\alpha(x)$ ни топамиз. Шундай қилиб, теорема исботланди.

2-теорема (тескари теорема). *Агар $f(x)$ функцияни b сон ва чексиз кичик функция ($x\to+\infty$ да) йиғиндиси сифатида ифодалаш мумкин бўлса, у ҳолда b сон $f(x)$ функциянинг ($x\to+\infty$ да) лимити бўлади.*

Исботи. Шартга кўра $f(x)=b+\alpha(x)$, бу ерда $\alpha(x)$ чексиз кичик функция ($x\to+\infty$ да) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ эканини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)-b=\alpha(x)$. $\alpha(x)$ чексиз кичик функция бўлгани учун $\forall\limits_{\varepsilon}(\varepsilon>0)\ \exists N\ \forall\limits_{x}\ (x>N)\Rightarrow\{|\alpha(x)|<\varepsilon\}$. Лекин $|f(x)-b|=|\alpha(x)|$ бўлгани учун $x>N$ да $|f(x)-b|<\varepsilon$ га эгамиз. Бу лимитнинг таърифига кўра $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ эканини билдиради.

1-мисол. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=5$ эканини исбот қилинг.

Ечилиши. $6/x$ ва $1/x^2$ функциялар $x\to+\infty$ да чексиз кичик бўлгани учун $\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}$ йиғинди чексиз кичик функцияларнинг йиғиндиси сифатида чексиз кичикдир. $5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}$ функция 5 ва чексиз кичик функциянинг йиғиндисидир. Демак, 2-теоремага кўра

$$\lim_{x\to+\infty}\left(5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=5.$$

Энди лимитга ўтиш қоидаларини келтириб чиқаришга ўтамиз.

3-теорема. *Агар* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ ва $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=c$ *бўлса,* $f(x)+\varphi(x)$ *ва* $f(x)-\varphi(x)$ *функциялар ҳам* $x\to+\infty$ *да лимитга эга бўлади, шу билан бирга*

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)\pm\varphi(x)]=\lim_{x\to+\infty}f(x)\pm\lim_{x\to+\infty}\varphi(x),$$

яъни иккита функция йиғиндиси (айирмаси) нинг лимити уларнинг лимитлари йиғиндиси (айирмаси) га тенг.

Исботи. 1-теоремага асосан $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларни $f(x)=b+\alpha(x)$ ва $\varphi(x)=c+\beta(x)$ кўринишда ёзиш мумкин, бунда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ — чексиз кичик функциялар ($x\to+\infty$ да). У ҳолда

$$f(x)+\varphi(x)=[b+\alpha(x)]+[c+\beta(x)]=(b+c)+[\alpha(x)+\beta(x)]. \quad (9)$$

4-пунктдаги 1-теоремага кўра $\alpha(x)+\beta(x)$ йиғинди чексиз кичик функциядир. (9) тенгликдан $f(x)+\varphi(x)$ функциянинг $b+c$ сон ва $\alpha(x)+\beta(x)$ чексиз кичик функция йиғиндиси кўринишида тасвирланиши кўриниб турибди. Демак, 2-теоремага кўра $b+c$ сон $f(x)+\varphi(x)$ функциянинг лимити бўлади.
Шундай қилиб,

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+\varphi(x)]=b+c=\lim_{x\to+\infty}f(x)+\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$$

функциялар айирмаси бўлган ҳолда исбот шунга ўхшаш бўлади.

Эслатма. 3-теорема ихтиёрий чекли сондаги функцияларнинг алгебраик йиғиндиси учун ҳам ўринли.

4-теорема. *Агар* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ ва $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=c$ *бўлса,* $f(x)\varphi(x)$ *функция* $x\to+\infty$ *да лимитга эга, шу билан бирга*

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)\,\varphi(x)]=\lim_{x\to+\infty}f(x)\,\lim_{x\to+\infty}\varphi(x),$$

яъни иккита функция кўпайтмасининг лимити уларнинг лимитлари кўпайтмасига тенг.

Исботи. 1-теоремага асосан

$$f(x)=b+\alpha(x),\quad \varphi(x)=c+\beta(x)$$

га эгамиз, бу ерда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ лар $x \to +\infty$ да чексиз кичик функциялардир. Демак,

$$f(x)\varphi(x) = [b + \alpha(x)][c + \beta(x)] = bc + [c\alpha(x) + b\beta(x) + \alpha(x)\beta(x)]. \qquad (10)$$

$c\alpha(x) + b\beta(x) + \alpha(x)\beta(x)$ функция учта $c\alpha(x)$, $b\beta(x)$ ва $\alpha(x)\beta(x)$ чексиз кичик функцияларнинг йиғиндиси бўлгани учун чексиз кичик бўлади (4-пунктдаги 4-теорема натижасига қаранг). (10) тенглик $f(x)\varphi(x)$ функция bc сон ва $c\alpha(x) + b\beta(x) + \alpha(x)\beta(x)$ чексиз кичик функцияларнинг йиғиндиси шаклида ифодаланганлигини кўрсатади. Демак, 2-теоремага асосан $b \cdot c$ сон $f(x)\varphi(x)$ функциянинг лимитидир. Шундай қилиб,

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)\varphi(x)] = bc = \lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to+\infty} \varphi(x).$$

Натижа. *Ўзгармас кўпайтувчини лимит ишорасидан ташқарига чиқариш мумкин, яъни*

$$\lim_{x\to+\infty} [k \cdot \varphi(x)] = k \lim_{k\to+\infty} \varphi(x),$$

бу ерда k ўзгармас кўпайтувчи.

Исботи. Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{x\to+\infty} [k \cdot \varphi(x)] = \lim_{x\to+\infty} k \cdot \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = k \cdot \lim_{x\to+\infty} \varphi(x),$$

чунки

$$\lim_{x\to+\infty} k = k.$$

4-теорема ихтиёрий чекли сондаги кўпайтувчилар учун ўринли. Хусусан, агар бу кўпайтувчилар ўзаро тенг бўлса, қуйидагига эгамиз:

$$\lim_{x\to+\infty} \{[f(x)]^n\} = \lim_{x\to+\infty} [f(x) \cdot f(x) \ldots f(x)] =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} f(x) . \lim_{x\to+\infty} f(x) \ldots \lim_{x\to+\infty} f(x) = [\lim_{x\to+\infty} f(x)]^n.$$

Буни қуйидагича қисқа баён қилинади: *даражанинг лимити лимитнинг даражасига тенг.*

5-теорема. *Агар* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = c$ *ва* $c \neq 0$ *бўлса,* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *функция* $x \to +\infty$ *да лимитга эга, шу билан бирга* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)}$, *яъни махражнинг лимити нолдан фарқли бўлса, касрнинг лимити сурат лимитининг махраж лимитига нисбатига тенг.*

Исботи. 1-теоремага кўра $f(x) = b + \alpha(x)$, $\varphi(x) = c + \beta(x)$

га эгамиз, бунда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ лар $x\to+\infty$ да чексиз кичик функциялар. Қуйидаги айирмани қараймиз:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}-\frac{b}{c}=\frac{b+\alpha(x)}{c+\beta(x)}-\frac{b}{c}=\frac{c\,\alpha(x)-b\,\beta(x)}{c^2+c\,\beta(x)}. \qquad (11)$$

(11) тенгликнинг ўнг томонида турган $\frac{c\,\alpha(x)-b\,\beta(x)}{c^2+c\,\beta(x)}=\gamma(x)$ каср 4-пунктдаги 5-теоремага кўра чексиз кичик функциядир, чунки касрнинг сурати $c\,\alpha(x)-b\,\beta(x)$—чексиз кичик функция, махражи эса 2- теоремага кўра $c^2\neq 0$ лимитга эга.

(11) тенгликдан қуйидагига эгамиз:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{b}{c}+\frac{c\,\alpha(x)-b\,\beta(x)}{c^2+c\,\beta(x)}=\frac{b}{c}+\gamma(x).$$

Шунинг учун 2-теоремага кўра $f(x)/\varphi(x)$ бўлинма $x\to+\infty$ да b/c га тенг лимитга эга:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{b}{c}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)}.$$

Йиғиндининг, кўпайтманинг ва бўлинманинг лимити ҳақидаги теоремалар лимитларни топишни енгиллаштиради.

2-мисол. $y=x^4+3x^2+4$ функциянинг $x\to 2$ даги лимитини топинг.

Ечилиши. Қуйидагига эгамиз:

$$\lim_{x\to 2}(x^4+3x^2+4)=\lim_{x\to 2}x^4+\lim_{x\to 2}3x^2+\lim_{x\to 2}4.$$

Бу ерда биз йиғиндининг лимити ҳақидаги теоремадан фойдаландик. Энди даражанинг лимити лимитнинг даражасига тенг бўлгани учун

$\lim\limits_{x\to 2}x^4=[\lim\limits_{x\to 2}x]^4=2^4=16;\ \lim\limits_{x\to 2}3x^2=3\lim\limits_{x\to 2}x^2=3\,[\lim\limits_{x\to 2}x]^2=3\cdot 2^2=12.$

Ниҳоят, $\lim\limits_{x\to 2}4=4$ эканлигини эътиборга олиб, қуйидагини топамиз:

$$\lim_{x\to 2}(x^4+3x^2+4)=16+12+4=32.$$

3-мисол. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x+5}$ ни топинг.

Ечилиши. Суратнинг лимити

$$\lim_{x\to 1}(x^2+3x+2)=\lim_{x\to 1}x^2+3\lim_{x\to 1}x+2=1+3+2=6$$

га махражнинг лимити эса

$$\lim_{x\to 1}(x^2-2x+5)=\lim_{x\to 1}x^2-2\lim_{x\to 1}x+5=1-2+5=4\neq 0$$

га тенг бўлгани учун касрнинг лимити ҳақидаги теоремани қўлланиб. қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+5)}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

Лимитлар ҳақидаги теоремаларни бевосита қўлланиш ҳамма вақт ҳам мақсадга олиб келавермайди. Масалан, касрнинг махражи нолга интилаётган бўлса, унга касрнинг лимити ҳақидаг теоремани қўлланиб бўлмайди. Шунинг учун бу теоремаларн қўлланишдан олдин кўпинча лимити изланаётган функция усти да айний алмаштириш зарур. Бу қандай бажарилишини конкре мисолларда кўрсатамиз.

4-мисол. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}$ ни топинг.

Ечилиши. Бу ерда касрнинг лимити ҳақидаги теоремани бевосита қўлланиб бўлмайди, чунки $x\to4$ да махражнинг лимити 0 га тенг:

$$\lim_{x\to4}(x^2-6x+8)=\lim_{x\to4}x^2-6\lim_{x\to4}x+8=4^2-6\cdot4+8=0.$$

Ундан ташқари, касрнинг сурати ҳам нолга тенг лимитга эга. Шунинг учун бундай лимитни топиш,о датда айтилишича, 0/0 кўринишдаги аниқмасликни очишга келтирилади. Бунинг учун касрнинг махражи ва суратини кўпайтувчиларга ажратиб, касрни алмаштирамиз;

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}=\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)}.$$

Касрнинг сурат ва махражини $x-4$ га бўламиз. Бундай қисқартириш мумкин, чунки лимитни изланаётганда $x\neq4$ қийматлар қаралади (183 -бетдаги 1-эслатмага қаранг).

Шундай қилиб, барча $x\neq4$ қийматлар учун қуйидаги айният ўринли:

$$\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)}=\frac{x-1}{x-2}.$$

Шунинг учун бу функцияларнинг лимитлари ўзаро тенг:

$$\lim_{x\to4}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to4}\frac{x-1}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to4}(x-1)}{\lim\limits_{x\to4}(x-2)}=\frac{4-1}{4-2}=\frac{3}{2}.$$

5-мисол. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+2}$ ни топинг.

Ечилиши. Бу ерда касрнинг лимити ҳақидаги теоремани бевосита қўлланиш мумкин эмас, чунки касрнинг сурати ва махражи $x\to+\infty$ да бир вақтда чексизликка интилади ва лимитга эга эмас**. Шундай қилиб, бу ерда ∞/∞ кўринишдаги аниқмаслик билан иш кўришга тўғри келади. Берилган касрнинг лимитини топиш учун дастлаб сурат ва махражини x^2 га бўлиб юбориб, алмаштириш бажарамиз; бу билан каср ва, демак, лимит ҳам ўз миқдорини ўзгартирмайди. Бу алмаштиришдан сўнг лимитни топиш осон:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{6+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(5+6/x+1/x^2)}{\lim\limits_{x\to+\infty}(6+4/x+2/x^2)}=\frac{5}{6}$$

---

* Агар $f(x)/\varphi(x)$ касрнинг лимити изланаётганда сурат ва махраж бир вақтнинг ўзида нолга ёки чексизликка интилса, бу каср 0/0 ёки мос равишда ∞/∞ кўринишдаги *аниқмасликни* ифодалайди деймиз. Бундай касрнинг лимитини топишни 0/0 ёки ∞/∞ кўринишдаги *аниқмасликни очиш* деб аташга келишиб оламиз.

** 188 -бетдаги изоҳга қаранг.

6-мисол.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+6}{3x^2+4x+2} \text{ ни топинг.}$$

Ечилиши. Бу ерда ҳам бўлинманинг лимити ҳақидаги теоремани қўлланиш мумкин бўлиши учун сурат ва махражни x^2 га бўламиз:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+6}{3x^2+4x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5/x+6/x^2}{3+4/x+2/x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(5/x+6/x^2)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(3+4/x+2/x^2)}=\frac{0}{3}=0.$$

7-мисол $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^3+6x^2-2x}{6x^2+5x+13}$ ни топинг.

Ечилиши. Бу ерда тескари касрнинг лимити 0 га тенг:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2+5x+13}{7x^3+6x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6/x+5/x^2+13/x^3}{7+6/x-2/x^2}=\frac{0}{7}=0,$$

у ҳолда у $x\to+\infty$ да чексиз кичик функциядир. Демак, берилган каср 5-пунктдаги 2-теоремага кўра чексиз катта функция.

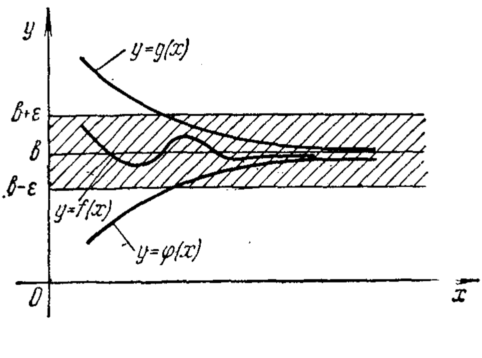
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^3+6x^2-2x}{6x^2+5x+13}=\infty.$$

Юқорида кўриб чиқилган мисолларни умумлаштириб, қуйидаги хулосага келиш мумкин: $x\to\pm\infty$ да *бир хил даражали иккита кўпҳаднинг лимити x нинг катта даражаси олдидаги коэффициентларнинг нисбатига тенг. Агар кўпҳадларнинг даражалари тенг бўлмасдан суратнинг даражаси махражнинг даражасидан кичик бўлса, улар нисбатининг лимити нолга тенг ва агар махражнинг даражаси суратнинг даражасидан катта бўлса, улар нисбатининг лимити чексизликка тенг.*

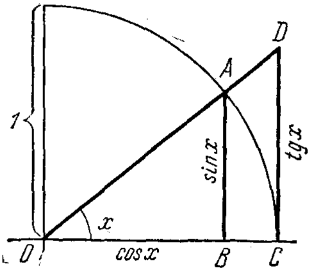
Бу пунктнинг ниҳоясида лимитлар ҳақидаги яна иккита теоремани келтирамиз.

6-теорема. *x нинг етарлича катта қийматларда $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи учта $\varphi(x)$, $f(x)$, $g(x)$ функциялар берилган бўлсин. Агар $\varphi(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x\to+\infty$ да бир хил лимитга эга бўлса у ҳолда улар орасида ётадиган $f(x)$ функция ҳам $\varphi(x)$ ва $g(x)$ функциялар лимитига тенг бўлган лимитга эга бўлади.*

Исботи. $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=b$ берилган. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ эканини исботлаш талаб қилинади. Теореманинг исботи 111-расмдан равшан. Ҳақи-



111 расм.



112- расм.

қатан ҳам, $\varphi(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x \to +\infty$ да b сонга тенг лимитга эга бўлгани учун ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай N сон топиладики, барча $x > N$ лар учун $y = \varphi(x)$ ва $y = g(x)$ функцияларнинг графиклари бир вақтнинг ўзида $y = b - \varepsilon$ ва $y = b + \varepsilon$ тўғри чизиқлар билан чегараланган полоса орасида қолади. У ҳолда $y = \varphi(x)$ ва $y = g(x)$ функцияларнинг графиклари орасида жойлашган $y = f(x)$ функциянинг графиги ҳам барча $x > N$ лар учун шу полоса ичига тушади. Бу $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ демакдир.

7-теорема. *Агар x нинг етарлича катта қийматлари учун $y = f(x) \geqslant 0$ бўлса ва $y = f(x)$ функция $x \to +\infty$ да лимитга эга бўлса, бу лимит манфий бўла олмайди.*

Исботи. Тескарисини фараз қиламиз, яъни $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b < 0$ бўлсин. У ҳолда иҳтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай N сон топиладики, $y = f(x)$ функциянинг графиги $x > N$ учун $y = b - \varepsilon$ ва $y = b + \varepsilon$ тўғри чизиқлар билан чегараланган полоса ичига тушади. ε ни бу полоса Ox ўқдан пастда ётадиган даражада кичик қилиб олсак, $x > N$ учун график Ox ўқдан пастда жойлашиши келиб чиқади, демак, унинг нуқталари манфий ординаталарга эга бўлади. Лекин бу барча етарлича катта x лар учун $f(x) \geqslant 0$ деган шартга зид. Шундай қилиб, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \geqslant 0$.

7. $\dfrac{\sin x}{x}$ функциянинг $x \to 0$ даги лимити. $\dfrac{\sin x}{x}$ функциянинг $x \to 0$ даги лимити билан кўп иш кўришга тўғри келади. Биз кўрамизки, у 1 га тенг. Дастлаб, $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ эканлигини исбот қиламиз.

$0 < x < \pi/2$ бўлсин. Бирлик радиусли айланани қарайлик. (112-расм.) $\smile{AC}$ ёй радианларда ифодаланган марказий x бурчакка сон жиҳатдан тенг, AB кесма эса сон жиҳатдан $\sin x$ га тенг $0 < AB < \smile{AC}$ (112-расм) бўлгани учун

$$0 < \sin x < x. \tag{12}$$

(12) тенгсизликлардан ва 6-пунктдаги 6-теоремадан $x \to 0$ да $\sin x \to 0$ экани келиб чиқади. Шундай қилиб*

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0. \tag{13}$$

---

* x манфий бўла туриб $x \to 0$ да ҳам (13) формула ўринли бўлишини исботлаш мумкин.

Энди $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ эканини исботлаймиз. $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ ни эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{x\to 0}\cos x=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)=1-2\lim_{x\to 0}\sin^2\frac{x}{2}=1-2\cdot 0=1.$$

Энди $\frac{\sin x}{x}$ функциянинг $x\to 0$ даги лимитини қарашга ўтамиз. Каср махражининг лимити нолга тенг бўлгани учун касрнинг лимити ҳақидаги теоремани бу ерда қўлланиб бўлмайди*.

112-расмдан кўриниб турибдики:

$$\triangle OAB_{\text{юзи}}<OAC_{\text{сектор юзи}}<\triangle ODC_{\text{юзи}};\qquad (14)$$

$$\triangle OAB_{\text{юзи}}=\frac{OB\cdot BA}{2}=\frac{\cos x\cdot\sin x}{2};\ OAC_{\text{сектор юзи}}=$$

$$=\frac{1}{2}R^2x=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x=\frac{x}{2};\ \triangle ODC=\frac{OC\cdot CD}{2}=\frac{1\cdot \operatorname{tg}x}{2}=\frac{\operatorname{tg}x}{2}.$$

Юзлар учун топилган ифодаларни (14) тенгсизликка қўямиз:

$$\frac{\cos x\cdot\sin x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\operatorname{tg}x}{2}.\qquad (15)$$

(15) тенгсизликлар x нинг 0 ва $\pi/2$ орасида жойлашган барча қийматлари учун ўринли. Бу тенгсизликларнинг барча ҳадларини $\frac{1}{2}\sin x$ га бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\cos x<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

ёки

$$\frac{1}{\cos x}>\frac{\sin x}{1}>\cos x.\qquad (16)$$

(16) тенгсизликлар $x>0$ деган фараз билан келтириб чиқарилди. Лекин улар $x<0$ да ҳам ўринли, чунки, $\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}$, $\cos(-x)=$ $=\cos x$, $\frac{1}{\cos(-x)}=\frac{1}{\cos x}$. Юқорида биз $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ эканини кўрдик. $1/\cos x$ бўлинмага касрнинг лимити ҳақидаги теоремани қўлланиб, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=\frac{1}{1}$ ни ҳосил қиламиз.

(16) тенгсизликларда икки четдаги $\cos x$ ва $1/\cos x$ функциялар $x\to 0$ да бир хил лимитга эга бўлиб, бу лимит y га тенг. У ҳолда $\frac{1}{\cos x}$ ва $\cos x$ функциялар орасида жойлашган $\frac{\sin x}{x}$

---

*$x\to 0$ да $\frac{\sin x}{x}$ касрнинг сурати ҳам нолга интилгани учун бу ерда 0/0 кўринишдаги аниқмаслик мавжуд.

функция ҳам 6-пунктдаги 6-теоремага кўра $x \to 0$ да ўша лимитга эга бўлади:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (17)$$

Бу лимит ёрдамида бошқа кўпгина лимитлар топилади.

1-мисол. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ ни топинг.

Ечилиши. Касрнинг сурат ва махражи $x \to 0$ да бир вақтда нолга интилади. Касрнинг лимити ҳақидаги теоремани бу ерда қўллаиб бўлмайди. Лимитни топиш учун касрда алмаштириш бажарамиз:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

2-мисол. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ни топинг.

Ечилиши.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{2}\, \frac{\sin(x/2)}{x/2} \cdot \frac{\sin(x/2)}{x/2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

8. Кетма-кетлик. e сони. Аниқланиш соҳаси натурал сонлар тўпламидан иборат бўлган $y = f(n)$ функцияни қараймиз. Бундай функция *натурал аргументли функция* ёки *кетма-кетлик* дейилади. Бу функциянинг қийматлари кетма-кетликнинг *ҳадлари* дейилади.

Кетма-кетликнинг ҳадлари, одатда аргументнинг ўсиб бориш тартибида жойлашади:

$$y_1 = f(1), y_2 = f(2), \ldots, y_n = f(n), \ldots;$$

$y_1 = f(1)$ кетма-кетликнинг биринчи ҳади, $y_2 = f(2)$ — иккинчи ҳади, ..., $y_n = f(n)$ эса n-ҳади ёки *умумий ҳади* дейилади. Кетма-кетлик қисқача $\{y_n\}$ билан белгиланади.

1-мисол. $\{y_n\} = \{n!\}$ бўлсин. Кетма-кетликнинг биринчи бир нечта ҳадини ёзамиз: $y_1 = 1! = 1$, $y_2 = 2! = 1 \cdot 2 = 2$, $y_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $y_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \ldots$

2-мисол. $\{y_n\} = \{1/n^2\}$ бўлсин. Ухолда

$$y_1 = 1/1^2 = 1, y_2 = 1/2^2 = 1/4, y_3 = 1/3^2 = 1/9, y_4 = 1/4^2 = 1/16, \ldots$$

3-мисол. $\{y_n\} = \{(-1)^n\}$ бўлсин. У ҳолда

$$y_1 = -1, y_2 = 1, y_3 = -1, y_4 = 1, \ldots.$$

Энди кетма-кетликнинг лимити тушунчасини киритамиз.

Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай N натурал сон топилсаки, кетма-кетликнинг номерлари $n \geqslant N$ бўлган барча ҳадлари учун $|y_n - b| < \varepsilon$ (ёки $|f(n) - b| < \varepsilon$) тенгсизлик бажарил-

са, b сон $y_1, y_2, \ldots, y_n = f(n), \ldots$ кетма-кетликнинг лимити дейилади.

$\{y_n = f(n)\}$ кетма-кетлик лимити таърифининг символик ёзилиши қуйидагича:

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\ \exists N\ (\text{натурал})\ \underset{n}{\forall}(n \geqslant N) \Longrightarrow |y_n - b| < \varepsilon.$$

Агар b сон кетма-кетликнинг лимити бўлса, у бундай ёзилади:

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = b \text{ ёки } \lim_{n \to \infty} y_n = b.$$

Кетма-кетлик лимитининг таърифи $x \to +\infty$ да функция лимитининг таърифига ўхшаш. Функция учун $|f(x) - b| < \varepsilon$ шарти $x > N$ барча $n \geqslant N$ ҳақиқий қийматлар учун бажарилган бўлса, кетма-кетлик учун $|f(n) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик барча $n \geqslant N$ *натурал сонлар* учун бажарилади.

$|y_n - b| < \varepsilon$ тенгсизлик $b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$ тенгсизликларга тенг кучли. Кетма-кетлик ҳадларини Oxy текисликнинг $x = n$, $y = f(n)$ координатани нуқталари орқали белгилаймиз;

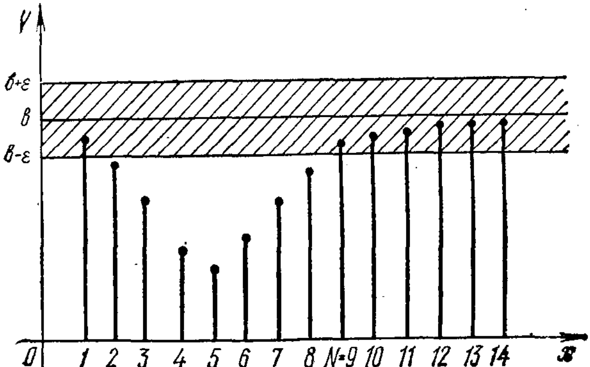
$y = f(n)$ кетма-кетлик лимитининг геометрик маъноси қуйидагидан иборат: агар кетма-кетлик b сонга тенг лимитга эга бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай N натурал сон топиладики, кетма-кетликнинг $n \geqslant N$ номерли ҳадларини ифодаловчи барча нуқталар $y = b - \varepsilon$, $y = b + \varepsilon$ (113-расмда $N = 9$) тўғри чизиқлар билан чегараланган полоса ичига тушади.

Бу параграфда исботланган функция лимити ҳақидаги барча теоремалар кетма-кетликлар учун ҳам ўринли бўлиб қолаверади.

4-мисол. $\{y_n\} = \left\{\dfrac{1 + 2 + \ldots + n}{n^2}\right\}$ кетма-кетлик лимитини топинг.

Ечилиши. Бу ерда сурат ва махраж бир вақтда $+\infty$ га интилади. Лимитни топиш учун суратни арифметик прогрессия формуласи бўйича ифодалаб, y_n ни алмаштирамиз:

$$1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2.$$



113- расм.

Шундай қилиб,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)/2}{n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

5-мисол. $\{y_n\} = \{(-1)^n\}$ кетма-кетликни қарайлик. Кетма-кетликнинг ҳадлари олдинма кейин 1 ва -1 қийматларни қабул қилади. Бу кетма-кетлик, равшанки, лимитга эга эмас.

6-мисол. $\{y_n\} = \{q^n\}$ кетма-кетликни қараймиз, бу ерда $q>0$.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{ агар } q<1 \text{ бўлса,} \\ 1, \text{ агар } q=1 \text{ бўлса,} \\ \infty, \text{ агар } q>1 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

эканлигини кўрсатамиз.

Ечилиши. Агар $q=1$ бўлса, исталган n да $y_n=1$ бўлади. Равшанки, бу ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

Энди $q>1$ бўлсин. У ҳолда $q = 1+\alpha$, бу ерда $\alpha>0$. Ньютон биномига* кўра

$$q^n = (1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha^2 + \ldots + \alpha^n.$$

$\alpha>0$ бўлгани учун охирги йиғиндида барча қўшилувчилар мусбат. Биринчи иккита қўшилувчидан бошқаларини ташлаб, $1+n\alpha<q^n$ ни ҳосил қиламиз. Бу ерда $n\to\infty$ да $1+n\alpha$ чегарасиз ўсгани учун q^n ҳам чегараланмаган ҳолда ўсишини эслатамиз, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.

Ниҳоят, $q<1$ бўлсин. У ҳолда $q = 1/r$. Бу ерда $r>1$. Юқорида баён қилинганларга кўра $r^n\to\infty$, шунинг учун $q^n = 1/r^n$ нолга интилади: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Агар $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ кетма-кетликда n ўсиши билан унинг ҳадлари ортиб борса, яъни

$$y_1<y_2<y_3<\ldots<y_n<y_{n+1}<\ldots$$

бўлса, бу кетма-кетлик *ўсувчи* дейилади.

Агар n ўсиши билан кетма-кетликнинг ҳадлари камайиб борса, яъни $y_1>y_2>y_3>\ldots>y_n>y_{n+1}>\ldots$ бўлса, кетма-кетлик *камаювчи* дейилади.

1-мисолдаги кетма-кетлик ўсувчи, 2-мисолдаги кетма-кетлик эса камаювчи, 3-мисолдаги кетма-кетлик ўсувчи ҳам эмас, камаювчи ҳам эмас.

Агар барча натурал n лар учун шундай C сон топилсаки, $|y_n|\leqslant C$ тенгсизлик бажарилса, $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ кетма-кетлик

---

* И. Ньютон (1642—1727)—буюк инглиз математиги, физиги ва астрономи. Ньютон биноми қуйидаги кўринишга эга: $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b +$

$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}b^n$$

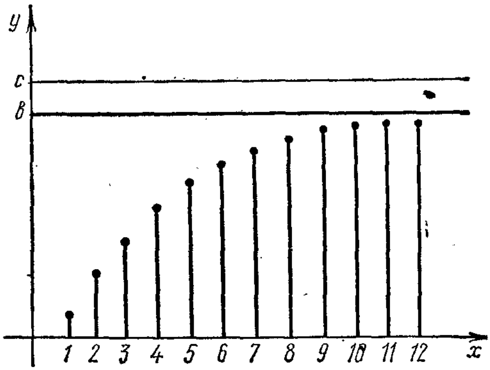
ёки $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} = 1$ бўлгани учун $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b +$

$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n.$$

Хусусан, $n=2$ ва $n=3$ да бизга маълум формулаларни ҳосил қиламиз:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,\ (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

чегараланган кетма-кетлик дейилади. 1-мисолдаги кетма-кетлик чегараланмаган.



114-расм.

Энди $y_1 < y_2 < \ldots < < y < \ldots$ ўсувчи кетма-кетликни қарайлик. Агар бу кетма-кетлик чегараланмаган бўлса, унинг ҳадлари чегараланмаган ҳолда ўсади ва демак, бундай кетма-кетлик лимитга эга бўлмайди. Агар ўсувчи кетма-кетлик чегараланган бўлса, унинг ҳадлари C сондан ортмасдан бирорта $b \leqslant C$ сонга чегараланмаган ҳолда яқинлашиб боради (114-расм). Бу фактни исботлаб ўтирмасдан, унинг аниқ таърифини келтириш билан чегараланамиз.

Теорема. (Кетма-кетлик лимити мавжудлигининг етарлилик аломати). *Ҳар қандай ўсувчи чегараланган кетма-кетлик лимитга эга*.*

Бу аломатнинг қўлланишига мисол қилиб умумий ҳади $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ бўлган кетма-кетликни оламиз. Бу кетма-кетлик ўсувчи ва чегараланганлигини кўрсатамиз. $a = 1$, $b = 1/n$ деб, Ньютон формуласига кўра қуйидагига эгамиз:

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times$$

$$\times \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \cdot \frac{1}{n^n}.$$

Бунда

$$\frac{n(n-1)}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right), \ldots,$$

$$\ldots, \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2 \cdot 1}{n^n} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n} \cdots \frac{[n-(n-1)]}{n} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

* Камаювчи чегараланган кетма-кетлик учун ҳам шунга ўхшаш теорема ўринлидир.

каэнини ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

n ўсиши билан $1/n$, $2/n$, $3/n, \dots$ касрлар камайиб боради, $1-\frac{1}{n}$, $1-\frac{2}{n}$, $1-\frac{3}{n}, \dots$ айирмалар эса ўсиб боради. Шунинг учун n ўсиши билан ёйилманинг 3-, 4- ва ҳ. к. ҳадлари ўсиб боради, бундан ташқари, янги мусбат қўшилувчилар қўшилиб боради. Демак, n ўсиши билан $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ўсиб боради. Шундай қилиб, $\{y_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ кетма-кетлик ўсувчи. Унинг чегараланганлигини кўрсатамиз.

Агар ёйилмада y_n учун ёйилмадаги қавсларда $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots$ ларни ташлаб юборсак, ҳар бир қўшилувчи учинчисидан бошлаб ортади ва биз дастлабки йиғиндидан ортиқ бўлган йиғиндини ҳосил қиламиз:

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\dots n}.$$

Лекин $\frac{1}{2\cdot 3}<\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{1}{2^3}, \dots$

$$\dots, \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\dots n}<\frac{1}{\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\dots 2}_{n-1 \text{ та кўпайтувчи}}}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Шунинг учун

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}$ йиғиндини геометрик прогрессия ҳадлари йиғиндиси формуласидан топамиз:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<2.$$

Шунинг учун $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+2=3$. Шундай қилиб, берилган кетма-кетлик чегараланган экан.

Демак, чегараланган ўсувчи кетма-кетлик лимитининг мавжудлик аломатига кўра умумий ҳади $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ бўлган кетма-кетлик лимитга эга деб хулосага келамиз. Бу лимит математикада катта роль ўйнайди. Уни e сони дейилади. Шундай қилиб,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (18)$$

e сон — иррационал. Унинг 10^{-6} аниқлик билан олинган тақрибий қиймати қуйидагича: $e \approx 2{,}718282$.

$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ функцияни қарайлик. x узлуксиз ўзгариб, $+\infty$ га интилганда бу функция ҳам e сонга тенг лимитга эга бўлишини исбот қилиш мумкин:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (19)$$

Бу фактнинг исботини келтирмаймиз.

(19) формула ёрдамида кўп лимитлар ҳисобланади.

1-мисол. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ эканини кўрсатинг.

Ечилиши. $x=-(t+1)$ деб ўзгарувчини алмаштирамиз. Унда равшанки $x\to-\infty$ да $t=+\infty$. Шунинг учун

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left[1+\frac{1}{-(t+1)}\right]^{-(t+1)} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)\right] =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \cdot \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Шундай қилиб,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ функция $x\to+\infty$ да ҳам, $x\to-\infty$ да ҳам битта лимитга эга бўлгани учун кўпинча

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

деб ёзилади.

2-мисол. $y=(1+\alpha)^{1/\alpha}$ функциянинг $\alpha\to0$ да лимитини топинг.

Ечилиши. Лимитини топиш учун $1/\alpha = x$ деб, ўзгарувчини алмаштирамиз. У ҳолда $\alpha\to0$ да $x\to\infty$. Шунинг учун:

$$\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

3-мисол. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ ни топинг.

Ечилиши. $x=2t$ дейлик. $x\to\infty$ да $t\to\infty$. Демак,

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e\cdot e=e^2.$$

Пировардида, асоси e бўлган кўрсаткичли функцияни $y=e^x$ ни бундан кейин кўп ишлатилишини эслатиб ўтамиз.

9. Натурал логарифмлар. Математикада асоси e бўлган логарифмлар асосий роль ўйнайди. e асосли логарифм *натурал* логарифм дейилади ва $\ln x$ деб белгиланади; шундай қилиб: $\ln x=\log_e x$.

Натурал ва ўнли логарифмлар орасидаги боғланишни топамиз. $y=\ln x$ бўлсин. У ҳолда логарифмнинг таърифига кўра $x=e^y$ га эгамиз. Бу тенгликнинг иккала томонини 10 асос бўйича логарифмлаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lg x=\lg e^y,\ \lg x=y\lg e \text{ ёки } \lg x=\ln x\cdot\lg e.$$

$\lg e\approx\lg 2{,}7183\approx 0{,}4343$ бўлгани учун

$$\lg x\approx 0{,}4343\ \ln x. \tag{20}$$

Бу формуладан

$$\ln x\approx\frac{1}{0{,}4343}\lg x$$

ёки

$$\ln x\approx 2{,}3026\ \lg x \tag{21}$$

экани келиб чиқади.

(20) ва (21) формулалар натурал ва ўнли логарифмлар орасидаги боғланишни беради.

Мисол. $\ln 32{,}94$ ни топинг.

Ечилиши. $\lg 32{,}94\approx 1{,}5177$ бўлгани учун (21) формулага кўра қуйидагини оламиз: $\ln 32{,}94\approx 2{,}3026\cdot 1{,}5177=3{,}4947$.

10. Чексиз кичик функцияларни таққослаш. $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар $x\to+\infty$ да чексиз кичик функциялар бўлсин. Бу функциялар нисбатининг $x\to+\infty$ даги лимитини қарайлик ва қуйидаги таърифларни киритайлик*.

Агар $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ мавжуд ва нолга тенг бўлмаса, $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар $x\to+\infty$ да *бир хил кичиклик тартибидаги чексиз кичик функция* дейилади.

Агар $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ бўлса, $\varphi(x)$ функция $\psi(x)$ функцияга нисбатан *юқори кичиклик тартибидаги чексиз кичик функция* дейилади.

---

* Шунга ўхшаш таърифлар $x\to-\infty$ да, $x\to x_0$ да ўнгдан ва чапдан, шунингдек $x\to x_0$ да ҳам киритилади.

Агар $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ бўлса, $\varphi(x)$ функция $\psi(x)$ функцияга нисбатан *қуйи кичиклик тартибидаги чексиз кичик функция* дейилади.

Агар $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ мавжуд бўлмаса ва ∞ га тенг бўлмаса, $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар *таққосланмайдиган чексиз кичик функциялар* дейилади.

1-мисол. $x\to 0$ да $y=x^2$ функция $y=5x$ функцияга нисбатан юқори кичиклик тартибидаги чексиз кичик функциядир, чунки $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{5x}=\frac{1}{5}\lim\limits_{x\to 0}x=0$ нолга интилган сари функция $y=5x$ функцияга нисбатан тезроқ нолга интилади

2-мисол. $y=x^2-4$ ва $y=x^2-5x+6$ функциялар $x\to 2$ да бир хил кичиклик тартибидаги чексиз кичик функциялардир, чунки,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-2}=\frac{4}{-1}=-4\neq 0.$$

3-мисол. $\varphi(x)=\frac{\cos x}{x}$ ва $\psi(x)=\frac{1}{x}$ функциялар $x\to+\infty$ да таққосланмайдиган беқиёс чексиз кичик функциялардир, чунки $x\to+\infty$ да улар нисбати $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\cos x$ нинг лимити мавжуд эмас.

Энди эквивалент чексиз кичик функциялар тушунчасини киритамиз.

Иккита $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функция нисбатининг $x\to+\infty$ даги лимити бирга тенг* бўлса, бу функциялар *эквивалент* (ёки *тенг кучли*) функциялар дейилади. Таърифдан *эквивалент* чексиз кичик функциялар бир хил кичиклик тартибига эга бўлиши келиб чиқади.

Масалан, x, $\sin x$, $\operatorname{tg}x$ функциялар $x\to 0$ да эквивалент чексиз кичик функциядир, чунки $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1$ (7-пунктга қаранг).

$\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ лар $x\to x_0$ да эквивалент чексиз кичик функциялар бўлсин: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$. У ҳолда x нинг x_0 га яқин қийматлари учун $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\approx 1$ ёки $\varphi(x)\approx\psi(x)$ тақрибий тенглик ўринли бўлиб, унинг аниқлиги x қийматининг x_0 га яқинлашиши билан ортиб боради.

$\sin x$ ва x лар $x\to 0$ да эквивалент чексиз кичик функциялар бўлгани учун x нинг 0 га яқин қийматлари учун $\sin x\approx x$ була-

---

* 204-бетдаги сноскага қаранг.

ди. Бу ҳол амалда кенг фойдаланилади: x чексиз кичик бўлганда $\sin x$ ни x аргументи билан алмаштириш мумкин.

Шунга ўхшаш, масалан, агар $x=0{,}1$ бўлса, $\sin x = \sin 0{,}1 = 0{,}0998 \approx 0{,}1$.

Агар $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ эквивалент чексиз кичик функция бўлса, уни қуйидагича белгиланади: $\varphi(x) \sim \psi(x)$.

1-теорема. $x \to +\infty$ *да* $\varphi(x) \sim \varphi_1(x)$ *ва* $\psi(x) \sim \psi_1(x)$ *бўлсин. Агар* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$ *мавжуд бўлса, у ҳолда* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ *ҳам мавжуд ва бу иккала лимит ўзаро тенг бўлади.*

Бу теорема қисқача қуйидагича баён қилинади: *иккита чексиз кичик функция нисбатининг лимити уларга эквивалент функциялар нисбатининг лимитига тенг.*

Исботи. Қуйидагига эгамиз:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} \cdot \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} \cdot \frac{\psi_1(x)}{\psi(x)}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} \times$$

$$\times \lim_{x\to+\infty} \frac{\psi_1(x)}{\psi(x)} = 1 \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} \cdot 1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}.$$

Исботланган теорема кўп ҳолларда лимитни топишни енгиллаштиришга имкон беради.

4-мисол $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$ ни топинг.

Ечилиши. $x \to 0$ да $\sin 5x \sim 5x$, $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$ бўлгани учун

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

Бу параграфнинг ниҳоясида иккита чексиз кичик функциянинг эквивалентлик аломатини келтирамиз.

2-теорема. $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ *чексиз кичик функцияларнинг айирмаси* $\varphi(x)$ *ва* $\psi(x)$ *га нисбатан юқори кичиклик тартибидаги бўлганда ва фақат шундагина улар эквивалент бўлади.*

Исботи. $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар, масалан $x \to +\infty$ да чексиз кичик бўлсин, уларнинг айирмасини $\beta(x)$ орқали белгилаймиз.

1. Агар $\varphi(x) \sim \psi(x)$ бўлса, $\beta(x)$ функция $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функцияларга нисбатан юқори кичиклик тартибидаги чексиз кичик бўлишини, яъни $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\beta(x)}{\varphi(x)} = 0$ ва $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\beta(x)}{\psi(x)} = 0$ эканини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\beta(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)-\psi(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left| 1 - \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \right| = 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} =$$

$$= 1 - 1 = 0.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\beta(x)}{\psi(x)}$ эканлиги шунга ўхшаш исботланади.

2. Аксинча $\beta(x)$ функция $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ га нисбатан юқори кичиклик тартибидаги чексиз кичик функция бўлсин.

$\varphi(x) \sim \psi(x)$ яъни $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$ эканини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан ҳам, $\beta(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ бўлгани учун $\varphi(x) = \beta(x) + \psi(x)$.

Демак,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\beta(x)+\psi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\beta(x)}{\psi(x)} + 1 = 0 + 1 = 1,$$

чунки шартга кўра $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\beta(x)}{\psi(x)}$ нолга тенг.

3-теорема. *Турли тартибдаги чексиз кичик функцияларнинг чекли сондаги йиғиндиси қуйи тартибдаги қўшилувчига эквивалент.*

Исботи. Аниқлик учун $x \to +\infty$ да учта чексиз кичик функциянинг йиғиндисини кўрамиз: $F(x) = f(x) + \varphi(x) + g(x)$. Масалан, $f(x)$ қолган қўшилувчиларга нисбатан қуйи кичиклик тартибидаги чексиз кичик бўлсин. Бу

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

демакдир. У ҳолда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)+\varphi(x)+g(x)}{f(x)}\right] = 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} + \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Демак, $f(x) + \varphi(x) + g(x)$ — йиғинди чексиз кичик $f(x)$ функцияга эквивалент.

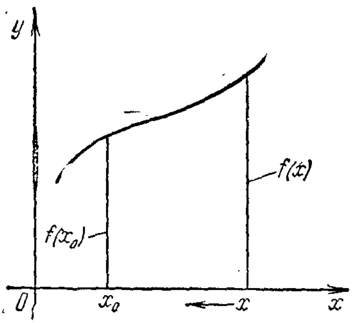
5-мисол. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5x+6x^2}{\sin x + \operatorname{tg}^3 x}$ ни топинг.

Ечилиши. $x \to 0$ да 3-теоремага кўра $5x + 6x^2 \sim 5x$ га эгамиз, 1-теоремани қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x+6x^2}{\sin x + \operatorname{tg}^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{\sin x} = 5.$$

2-§. УЗЛУКСИЗ ФУНКЦИЯЛАР

1. Функциянинг нуқтада узлуксизлиги. Узилиш нуқталари. Функциянинг узлуксизлиги тушунчаси бизнинг бу функциянинг графиги силлиқ ҳеч қаерда узилмайдиган чизиқ бўлиши ҳақидаги интуитив тасаввуримиз билан боғлиқ. Бундай $y = f(x)$ функциянинг графигини қараётганимизда биз кўрамизки, аргументнинг яқин қийматларига функциянинг яқин қийматлари тўғри келади; агар x эркли ўзгарувчи нуқтага яқинлашса, у $y = f(x)$ функциянинг қиймати функциянинг x_0 даги қийматига чегараланмаган ҳолда яқинлашади (115-расм).



115- расм.

Энди фунциянинг узлуксизлиги тушунчасининг қатъий таърифини берамиз. Ушбу шартлар ўринли бўлса $y = f(x)$ *функция* x_0 *нуқтада узлуксиз дейилади:*

1) *функция* x_0 *нуқтада ва бу нуқтани ўз ичига олувчи бирор атрофида аниқланган;*

2) *функция* $x \to x_0$ *да лимитга эга,*

3) *функциянинг* $x \to x_0$ *даги лимити функциянинг* x_0 *нуқтадаги қийматига тенг.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (22)$$

Агар x_0 нуқтада функция узлуксиз бўлса, у ҳолда бу x_0 нуқта берилган функциянинг *узлуксизлик нуқтаси* дейилади.

1-эслатма. (22) формулани

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) \qquad (23)$$

кўринишда ёзиш мумкин, чунки

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0$$

формула узлуксиз функциянинг лимитини топаётганда функция белгиси остида лимитга ўтиш мумкинлигини кўрсатади.

2-эслатма. Кўпинча функциянинг x_0 нуқтадан ўнгда ёки чапдан узлуксизлигини (яъни бир томонлама узлуксизлигини) қарашга тўғри келади. $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада аниқланган бўлсин. Агар $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$ бўлса, $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада *ўнгдан узлуксиз* дейилади; агар $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ бўлса, $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада *чапдан узлуксиз* дейилади.

Энди узилиш нуқтаси тушунчасини киритамиз.

Агар x_0 нуқта $y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасига ёки унинг чегарасига тегишли бўлса ва узлуксизлик нуқтаси бўлмаса бу нуқта шу функциянинг узилиш нуқтаси дейилади*.

Бу ҳолда функция $x = x_0$ да узилишга эга дейилади. Бу ҳол агар функция x_0 нуқтада аниқланмаган бўлса ёки $x \to x_0$ да функциянинг лимити мавжуд бўлмаса ёки, ниҳоят, функциянинг

---

* Агар x_0 нуқтанинг исталган атрофи функциянинг аниқланиш соҳасининг нуқталарини ҳам, аниқланиш соҳасига тегишли бўлмаган нуқталарни ҳам ўз ичига олса, x_0 нуқта функция аниқланиш соҳасининг *чегаравий нуқтаси* дейилади. Барча чегаравий нуқталар тўплами соҳанинг *чегараси* дейилади. Масалан, $y = 1/\sqrt{1-x^2}$ функция учун $]-1, 1[$ интервал аниқланиш соҳаси бўлади, унинг чегараси эса иккита $x = -1$ ва $x = 1$ нуқтадан иборат.

лимити мавжуд, лекин у функциянинг x_0 нуқтадаги қийматига тенг бўлмаса, яъни $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ бўлса, рўй бериши мумкин.

1-мисол. $y = 5x^3$ функцияни қарайлик. Бу функциянинг $x = 2$ нуқтада узлуксизлигини исботлаймиз. Бунинг учун функция узлуксизлиги таърифига кирувчи учта шартнинг бажарилишини кўрсатиш керак: 1) функция $x = 2$ нуқтада ва унинг бирор атрофида аниқланган; 2) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ мавжуд ва 3) бу лимит функциянинг $x = 2$ нуқтадаги қийматига тенг. $f(x) = 5x^3$ функция бутун сон ўқида аниқланган бўлгани учун биринчи шарт автоматик равишда бажарилади. Сўнгра $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} 5x^3 = 40$. Шундай қилиб, иккинчи шарт бажарилди. Ниҳоят, $f(2) = 40$ эканлигини эътиборга олсак, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ эканлигини кўрамиз, яъни функциянинг $x = 2$ нуқтада узлуксизлигини аниқловчи учинчи шарт ҳам бажарилди. Шундай қилиб, $y = 5x^3$ функция $x = 2$ нуқтада узлуксиз. Худди шунга ўхшаш, бу функция сон ўқининг исталган нуқтасида узлуксизлигини кўрсатиш мумкин.

2-мисол. 1-§ нинг 3-пунктидаги 2-мисолда келтирилган

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{агар } 0 \leqslant x < 3 \text{ бўлса,} \\ 3 - x, & \text{агар } 3 \leqslant x \leqslant 4 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

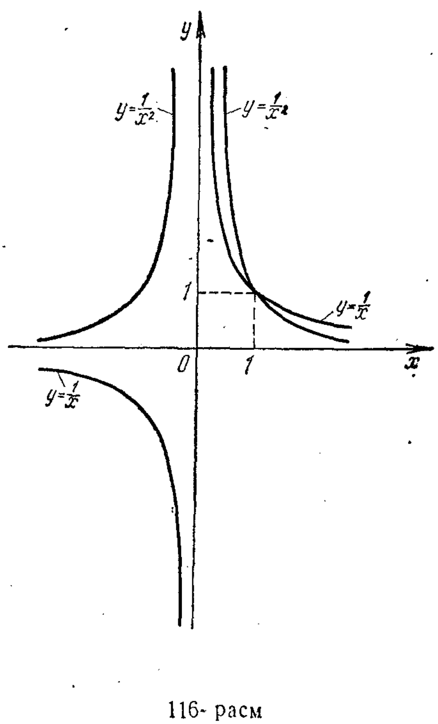
функцияни қарайлик. Бу функция $[0, 4]$ сегментнинг барча нуқталарида аниқланган ва унинг $x = 3$ даги қиймати 0 га тенг. (110-чизмадаги функция графигига қаранг). Бироқ $x = 3$ нуқтада функция узилишга эга, чунки у $x \to 3$ да лимитга эга эмас: $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = 0 \cdot f(x)$ функция $[0, 4]$ сегментнинг $x=3$ нуқтадан бошқа барча нуқталарида узлуксиз бўлишини эслатиб ўтишимиз керак. Бунда у $x = 0$ нуқтада ўнгдан, $x = 4$ нуқтада чапдан узлуксиз (208-бетдаги 2-эслатмага қаранг), чунки

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} (x - 1) = f(0) = -1,$$

$$\lim_{x\to 4-0} f(x) = \lim_{x\to 4-0} (3 - x) = f(4) = -1.$$

3-мисол. $y = 1/x$ ва $y = 1/x^2$ функциялар аниқланиш соҳасининг чегаравий нуқтаси $x=0$ да узилишга эга, чунки улар бу нуқтада аниқланмаган. $1/x$ ва $1/x^2$ функциялар $x \to 0$ да (116-расм) чексиз катта функциялардир. Шунинг учун $x = 0$ нуқтада бу функциялар чексиз узилишга эга дейилади.

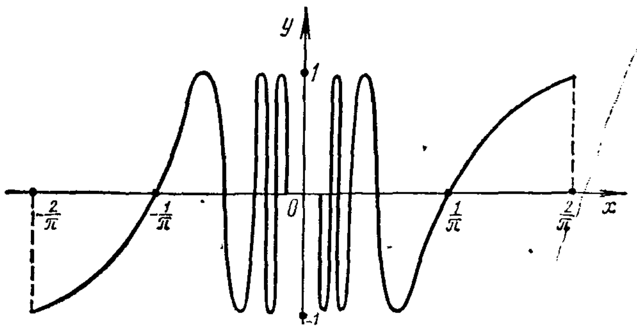
4-мисол. $y = \log_a x (a > 1)$ функция аниқланиш соҳасининг чегаравий нуқтаси $x = 0$ да чексиз узилишга эга, чунки бу нуқтада функция аниқланмаган ва $\lim\limits_{x\to 0+0} \log_a x = -\infty$ (24-расмга қаранг).



116-расм

Функциянинг узилиш нуқталарини икки типга ажратиш мумкин.

Агар иккала бир томонли



117- расм.

лимит $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ ва $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ мавжуд бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада I *тур узилишга* эга дейилади. I тур узилиш нуқтаси бўлмаган узилиш II *тур узилиш* нуқтаси дейилади.

2- мисолда келтирилган $f(x)$ функция $x=3$ нуқтада I тур узилишга эга, чунки у функция учун $x\to 3$ да чап ва ўнг лимитлар мавжуд.

3- мисолда кўрилган $y=1/x$ ва $y=1/x^2$ функциялар $x=0$ нуқтада II тур узилишга эга, чунки бу функциялар $x=0$ нуқтада чап лимитга ҳам ўнг лимитга ҳам эга эмас.

5- мисол. $y=\sin\frac{1}{x}$ функция x нинг $x=0$ дан ташқари барча қийматлари учун аниқланган. Бу нуқтада у узилишга эга. $x=0$ нуқта II тур узилиш нуқтасидир, чунки чапдан ҳам, ўнгдан ҳам $x\to 0$ да $f(x)$ функция -1 билан 1 орасида тебраниб ҳеч қандай қийматга яқинлашмайди. Унинг графиги 117-расмда келтирилган.

6- мисол. $\frac{\sin x}{x}$ функция $x=0$ нуқтада аниқланмаган. $x=0$ нуқта I тур узилиш нуқтаси, чунки $x\to 0$ да чап ва ўнг лимитлар мавжуд:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Агар $\frac{\sin x}{x}$ функцияни $x=0$ нуқтада $f(0)=1$ деб қайтадан аниқласак, у ҳолда энди узлуксиз функцияни ҳосил қиламиз, у қуйидагича аниқланган: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, агар $x\neq 0$; $f(0)=1$ бўлса.

$x=0$ нуқтада функцияни қайта аниқлаб, узилишни бартараф қилдик.

I тур узилиш нуқтаси x_0, бунда $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, *бартараф қилиниши мумкин бўлган узилиш нуқтаси* дейилади.

x_0 — I тур узилиш нуқтаси бўлсин $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ айирмани функциянинг x_0 нуқтадаги *сакраши* дейилади. 2- мисолда қурилган функция $x_0=3$ нуқтада $0-2=-2$ га тенг сакрашга эга экан.

Бу пунктнинг якунида нуқтада узлуксиз бўлган функциянинг яна битта хоссасини таъкидлаб ўтамиз. *x_0 нуқтада узлуксиз бўлган $f(x)$ функция x_0 нуқтада мусбат (манфий) қийматга эга бўлса, у x_0 нуқта бирор атрофининг барча нуқталарида мусбат (манфий) бўлиб қолади.*

Ҳақиқатан ҳам, масалан, $f(x_0)>0$ бўлсин. Шундай $\varepsilon>0$ ни оламизки, $f(x_0)-\varepsilon>0$ бўлсин. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ бўлгани учун (функциянинг x_0 нуқтада узлуксизлигига асосан) функциянинг $x\to x_0$ да узлуксизлиги ҳақидаги таърифга асосан (183-бетга қаранг),

$$\underset{N,M}{\exists}(N<x_0<M\ \underset{x}{\forall}(x\in[N,\ M])\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \{|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\}\Longleftrightarrow \{f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon\}.$$

Бироқ $f(x_0)-\varepsilon>0$ бўлгани сабабли $[N,\ M]$ интервалнинг барча нуқталари учун $f(x)>0$. Шундай қилиб, $f(x)$ функция x_0 нуқтанинг бирор атрофида мусбат.

2. Узлуксиз функциялар устида амаллар. Элементар функцияларнинг узлуксизлиги. Агар узлуксиз функциялар устида қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш (бўлувчи нолдан фарқли бўлган шартда) амаллари бажарилса, бунинг натижасида ҳосил бўлган функциялар узлуксиз бўлади.

2-теорема. *Агар $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, уларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси ҳам x_0 нуқтада узлуксиз бўлади. Агар, бундан ташқари $\psi(x_0)\neq 0$ бўлса, $\varphi(x)/\psi(x)$ функция ҳам узлуксиз бўлади.*

Исботи. Масалан, $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$ кўпайтманинг узлуксизлигини исботлайлик. x_0 нуқтада $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$ аниқланган, шу билан бирга $f(x_0)=\varphi(x_0)\cdot\psi(x_0)$. Функциянинг x_0 нуқтада узлуксизлигидан $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=\psi(x_0)$ келиб чиқади. Кўпайтманинг лимити ҳақидаги теоремага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}[\varphi(x)\cdot\psi(x)]=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\psi(x)=\varphi(x_0)\cdot\psi(x_0).$$

Шундай қилиб, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, бу эса $\varphi(x)\cdot\psi(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксизлигини кўрсатади. Теореманинг бошқа тасдиқлари ҳам шунга ўхшаш исботланади. Теорема ихтиёрий чекли сондаги қўшилувчилар ёки кўпайтирувчилар учун умумлаштирилади.

Баъзи элементар функцияларнинг узлуксизлигини аниқлаймиз.

Равшанки, $y=C$ ўзгармас функция бутун сон ўқида узлуксиз. $y=x$ функция ҳам ўзининг бутун аниқланиш соҳасида, яъни бутун сон ўқида узлуксизлигини кўрсатиш осон. Шунинг учун

$y = Cx^n$ функция, бу ерда n — бутун мусбат сон, узлуксиз функцияларнинг кўпайтмаси сифатида узлуксиздир:

$$Cx^n = C \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ та кўпайтувчи}}.$$

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

кўпҳад узлуксиз функцияларнинг йиғиндиси сифатида бутун сон ўқида узлуксиз. Сўнгра, иккита кўпҳаднинг бўлинмаси бўлган рационал функция ҳам 1-теоремага кўра махраж ноль бўладиган барча нуқталардан бошқа нутқаларда узлуксиз. Масалан, $y = \frac{x^2+5x+3}{x^2-1}$ функция $x = -1$ ва $x = 1$ нуқталардан ташқари бутун сон ўқида узлуксиз. Умуман айтганда, *барча элементар функциялар x нинг ўзлари аниқланган барча қийматларида узлуксизлигини исботлаш мумкин.*

I бобда биз мураккаб функция тушунчасини киритган эдик (4- §, 6- пунктга қаранг). Қуйидаги теорема ўринли.

2- теорема. *Агар $u = \varphi(x)$ функция x_0 нуқтада, $y = f(u)$ функция эса $u_0 = \varphi(x_0)$ нуқтада узлуксиз бўлса, $y = f[\varphi(x)]$ мураккаб функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлади.*

Исботи. Теоремани исботлаш учун $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\varphi(x_0)]$ ни кўрсатиш етарли. Ҳақиқатан ҳам, $u = \varphi(x)$ функциянинг узлуксизлигига асосан $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$ га эгамиз, яъни $x \to x_0$ да $u \to u_0$.

Шунинг учун $f(x)$ функциянинг узлуксизлигидан:

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) = f[\varphi(x_0)].$$

Исботланган теореманинг қисқача баёнини келтирамиз.

Иккита узлуксиз $f(u)$ ва $\varphi(x)$ функциядан тузилган мураккаб $y = f[\varphi(x)]$ функция узлуксиз функциядир.

Масалан, $y = \sin(x^3 + 4x - 2)$ мураккаб функция x нинг барча қийматлари учун узлуксиз, чунки $y = \sin u$ ва $u = x^3 + 4x - 2$ функциялар ҳамма жойда узлуксиз. $y = \ln(1 - x^2)$ мураккаб функция x нинг $1 - x^2 > 0$ тенгсизликни қаноатлантирадаган барча қийматлари учун, яъни $[-1, 1]$ интервалда узлуксиз.

Биз биламизки (I боб, 4- §, 6- пунктга қаранг), элементар функция деб асосий элементар функциялардан чекли сондаги арифметик амаллар ва чекли сондаги мураккаб функцияларни ҳосил қилиш ёрдамида тузилган, битта аналитик ифода билан бериш мумкин бўлган функцияга айтилади. Асосий элементар функциялар ўзлари аниқланган барча нуқталарда узлуксиз бўлгани учун 1- ва 2- теоремалардан қуйидаги натижа келиб чиқади: *ҳар қандай элементар функция ўзининг аниқланиш соҳасига тегишли бўлган барча нуқталарда узлуксиз бўлади.*

Бу муҳим натижа. агар элементар функция $x = x_0$ нуқтада аниқланган бўлса бу функциянинг $x \to x_0$ даги лимитини осон топиш имконини беради. Бунинг учун функциянинг шу нуқтадаги қийматини ҳисоблаш етарли:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) = f(x_0). \tag{24}$$

Мисол. $\lim\limits_{x\to\pi/4} 5^{\operatorname{tg} x}$ ни топинг.

Ечилиши. $5^{\operatorname{tg} x}$ функция $x=\pi/4$ нуқтада узлуксиз бўлгани учун

$$\lim_{x\to\pi/4} 5^{\operatorname{tg} x} = 5^{\operatorname{tg}(\pi/4)} = 5^1 = 5.$$

Бу пунктнинг ниҳоясида кейинчалик бизга зарур бўладиган иккита лимитни қараймиз.

Аввал $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$ ни топамиз. $x\to 0$ да сурат ва махраж ҳам нолга интилишини эслатамиз, чунки $\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)=\log_a(1+0)=0$. Шунинг учун бу ерда касрнинг лимити ҳақидиги теоремани қўлланиб бўлмайди. Қуйидаги алмаштиришни бажарамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+x)\right] = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x}.$$

Логарифмик функция узлуксиз бўлгани учун биз функция белгиси остида лимитга ўтишимиз мумкин (1-пунктдаги эслатмага қаранг), яъни

$$\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x} = \log_a[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}].$$

Бироқ $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ (1-§, 8-пункт, 2-мисолга қаранг). Шунинг учун

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e. \tag{25}$$

Хусусан, $a=e$ да

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \tag{25'}$$

Шундай қилиб, $y=\ln(1+x)$ ва $y=x$ лар $x\to 0$ да эквивалент чексиз кичик функциялар экан.

Энди $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ ни топамиз.

Бу ерда биз $0/0$ кўринишдаги аниқмаслик билан иш кўрамиз. Лимитни топиш учун $a^x-1=t$ деб ўзгарувчини алмаштирамиз. У ҳолда $x=\log_a(t+1)$. $x\to 0$ да $t\to 0$ эканини эътиборга олсак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(t+1)}{t}} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\log_a(t+1)}{t}}.$$

(25) формулага асосан $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\log_a(t+1)}{t}=\log_a e$ бўлгани учун

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a. \qquad (26)$$

Хусусан, бундан

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\ln e=1 \qquad (26')$$

экани келиб чиқади, яъни $x\to 0$ да $y=e^x-1$ ва $y=x$ — эквивалент чексиз кичик функциялар.

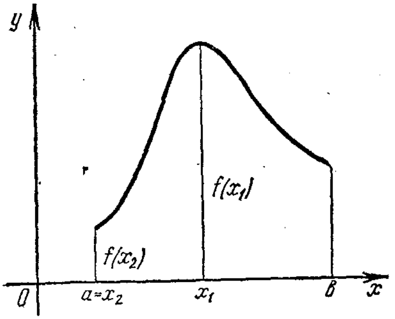
3. Сегментда узлуксиз функцияларнинг хоссалари. Бу пунктда узлуксиз функцияларнинг баъзи хоссаларини қараб чиқамиз; бунда, одатда, исботларни келтирмасдан баён қилиш ва тушунтириш билангина чегараланамиз.

Агар $y=f(x)$ функция $[a, b]$ сегментнинг барча ички нуқталарида узлуксиз, сегментнинг чегараларида, яъни a ва b нуқталарда мос равишда чапдан ва ўнгдан* узлуксиз бўлса, $[a, b]$ *сегментда узлуксиз* дейилади.

1-теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлса, у бу сегментда ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларига эришади.*

Бу теорема бундай тасдиқланади: $[a, b]$ сегментда шундай x_1 нуқта топиладики, $f(x)$ функциянинг бу нуқтадаги қиймати унинг сегментдаги барча қийматлари ичида энг каттаси бўлади: $f(x)\leqslant f(x_1)$. Шунга ўхшаш, сегментда шундай x_2 нуқта топиладики, $f(x)$ функциянинг бу нуқтадаги қиймати унинг сегментдаги барча қийматлари ичида энг кичиги бўлади: $f(x)\geqslant f(x_2)$ (118-расм).

Эслатма. Агар теореманинг баёнида сегментни $[a, b]$ интервалга алмаштирсак, умуман айтганда, тасдиқ тўғри бўлмайди. Масалан, $[0, 1]$ интервалда узлуксиз бўлган $y=5x$ функция бу интервалда энг катта қийматига эришмайди. У 5 га яқин ихтиёрий қийматни қабул қилиши мумкин, бироқ $[0, 1]$ интервалда функция 5 га тенг бўла оладиган битта ҳам нуқта йўқ ($x=1$ нуқта интервалга тегишли эмас). Бу функция $[0, 1]$ интервалда энг кичик қийматига ҳам эришмайди. Худди шунга ўхшаш, агар функция сегментда аниқланган бўлиб, сегментнинг бирор нуқтасида узилишга эга бўлса, теореманинг хулосаси, умуман айтганда, ўринли бўлмай қолиши мумкин.



118-расм.

* Яъни $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$ (208-бетдаги 2-эслатмага қаранг).

Натижа. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз функция бўлса, у бу сегментда чегараланган.*

Исботи. $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги энг катта ва энг кичик қийматларини мос равишда M ва m орқали белгилаймиз. У ҳолда $[a, b]$ сегментга тегишли ихтиёрий x учун $m \leqslant \leqslant f(x) \leqslant M$ тенгсизлик ўринли бўлади.

C ушбу $|m|$ ва $|M|$ сонларнинг энг каттаси бўлсин. У ҳолда $|f(x)| \leqslant C$ бу $y=f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда чегараланган демакдир.

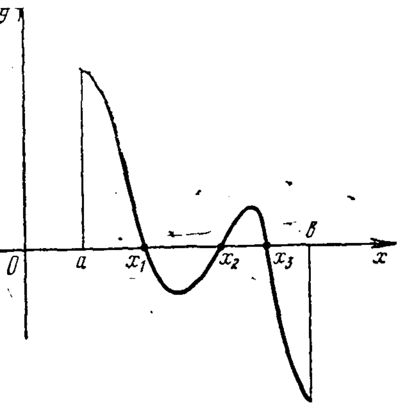
2-теорема. *Агар $y=f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлса ва унинг четкаларида турли ишораларни қабул қилса, у ҳолда бу сегмент ичида функция нолга тенг бўладиган камида битта нуқта топилади.*

Теореманинг геометрик мазмуни қуйидагича: агар $y = f(x)$ функция графигининг $[a, b]$ сегментнинг четкаларига тегишли нуқталари Ox ўқдан ҳар хил томонда ётса, у ҳолда бу функциянинг графиги Ox ўқни камида битта нуқтада кесади. 119-расмда кўрсатилган функция графигида бундай нуқталар учта: x_1, x_2 ва x_3.

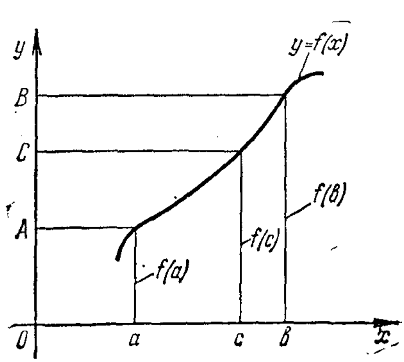
Бу теоремани қуйидагича умумлаштириш мумкин.

3-теорема. (оралиқ қийматлар ҳақидаги теорема). *$y=f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз ва $f(a)=A$, $f(b)=B$ бўлсин. У ҳолда A ва B орасида ётган ихтиёрий C сон учун бу сегмент ичида шундай c нуқта топиладики, $f(c)=C$ бўлади.*

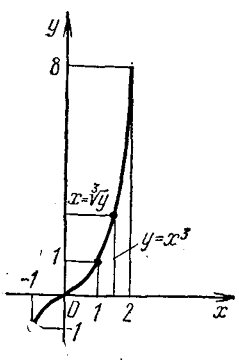
Бу теорема геометрик жиҳатдан тушунарли. $y=f(x)$ функциянинг графигини қарайлик (120-расм). $f(a)=A$, $f(b)=B$ бўлсин. У ҳолда $y=C$ тўғри чизиқ функция графигини камида битта нуқтада кесиб ўтади, бу ерда C — берилган A ва B орасида ётган ихтиёрий сон.



119-расм.



120-расм.



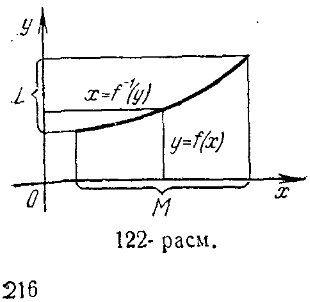
121- расм.

Шундай қилиб, узлуксиз функция битта қийматдан иккинчисига ўтаётиб, албатта барча оралиқ қийматлардан ўтади.

Эслатма. Агар функция сегментда ҳеч бўлмаганда битта нуқтада узилишга эга бўлса, 2- ва 3- теоремаларнинг тасдиқлари ўринсиз бўлиб қолади. Жумладан, $y=1/x$ функция $x=1$ да мусбат, $x=-1$ да манфий. Бироқ, $[-1, 1]$ сегментда функция нолга айланадиган битта ҳам нуқта йўқ. Бу $[-1, 1]$ сегментда $y=1/x$ функция узилиш нуқталарига эга бўлиши билан тушунтирилади (116- расмга қаранг).

4. Тескари функция ҳақида тушунча. $y=x^3$ функцияни барча $x \in [-1, 2]$ лар учун қараймиз. Графиги 121- расмда тасвирланган бу функция $[-1, 2]$ сегментни (функциянинг аниқланиш соҳасини) $[-1, 8]$ сегментга (бу функциянинг қийматлар тўпламига) акслантиради. $y=x^3$ тенгликни x га нисбатан тенглама деб қараймиз. Бу тенглама ҳар бир $y \in [-1, 8]$ қиймат учун $x=\sqrt[3]{y}$ формула бўйича ягона $x \in [-1, 2]$ қийматни аниқлайди. Геометрик нуқтаи назардан бу нарса $[-1, 8]$ сегментнинг нуқтасидан ўтувчи Ox ўққа параллел ихтиёрий тўғри чизиқ $y=x^3$ функциянинг графигини фақат битта нуқтада кесиб ўтишини англатади (121- чизмага қаранг). Бошқача айтганда, ҳар бир $y \in [-1, 8]$ қийматга ягона $x \in [-1, 2]$ қиймат мос қўйилади. Бу $[-1, 8]$ сегментда бу сегментни $[-1, 2]$ сегментга акслантирадиган $x=\sqrt[3]{y}$ функция берилган демакдир. $x=\sqrt[3]{y}$ функция $y=x^3$ функцияга нисбатан *тескари* функция дейилади.

Энди умумий ҳолга ўтайлик. Аниқланиш соҳаси M ва қийматлар соҳаси L бўлган $y=f(x)$ функцияни қарайлик. Бу функция шундай бўлсинки, Ox ўққа параллел бўлган L тўпламнинг нуқтасидан ўтувчи ихтиёрий тўғри чизиқ унинг графигини фақат битта нуқтада кессин, яъни $y=f(x)$ тенглама ҳар бир $y \in L$ учун $x \in M$ нинг ягона қийматини аниқлайди (122- расм). Бу ҳолда $y \in L$ нинг ҳар бир қийматига $x \in M$ нинг ягона қиймати мос келади, яъни L тўпламда қийматлар тўплами M бўлган функция берилган. Бу функция $y=f(x)$ функцияга нисбатан *тескари* функция дейилади ва $x=f^{-1}(y)$ билан белгиланади. Равшанки, $x=f^{-1}(y)$ функция учун $y=f(x)$ функция тескари функция. Шунинг учун бу функциялар *ўзаро тескари функциялар* дейилади.



122- расм.

Берилган $y=f(x)$ функция ҳам, унга тескари $x=f^{-1}(y)$ функция ҳам x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланишни бир хил ифодалайди. Бироқ биринчи ҳолда биз x ни эркли ўзгарувчи деб, y ни функция деб қараяпмиз; иккинчи ҳолда — аксинча: y ни эркли деб, x ни функция деб қараяпмиз. Шундай қилиб, битта чизиқнинг ўзи ҳам берилган $y=f(x)$ функциянинг, ҳам унга тескари $x=f^{-1}(y)$ функциянинг графиги бўлиб хизмат қилаяпти. Бироқ берилган функция учун Ox ўқ эркли ўзгарувчининг ўқи бўлса, тескари $x=f^{-1}(y)$ функция учун эркли ўзгарувчининг ўқи Oy ўқ бўлади.

Баъзи бир функциялар тескари функцияга эга эмаслигини айтиб ўтамиз. Масалан, $y=x^2$ функциянинг бутун сон ўқида қаралса, унга тескари функция мавжуд эмас, чунки $y>0$ нинг ҳар бир қийматига иккита $x: x=\sqrt{y}$ ва $x=-\sqrt{y}$ қиймат мос келади. Агар $y=x^2$ функцияни $0\leqslant x\leqslant+\infty$ интервалда қаралса, у тескари $x=\sqrt{y}$ функцияга эга, чунки y нинг $y=x^2$ тенгламани қаноатлантирадиган ҳар бир қийматига $x(0\leqslant x\leqslant+\infty)$ нинг ягона қиймати мос келади.

Агар $y=x^2$ функцияни $-\infty<x\leqslant 0$ интервалда қарасак, бошқа тескари $x=-\sqrt{y}$ функцияга келамиз. Табиийки, савол туғилади: тескари функцияга эга бўлиши учун $y=f(x)$ функция қандай бўлиши керак?

Бу саволга жавоб беришдан аввал ўсувчи ва камаювчи функция тушунчасини киритамиз: $y=f(x)$ функция сегментда (ёки интервалда) аниқланган бўлсин.

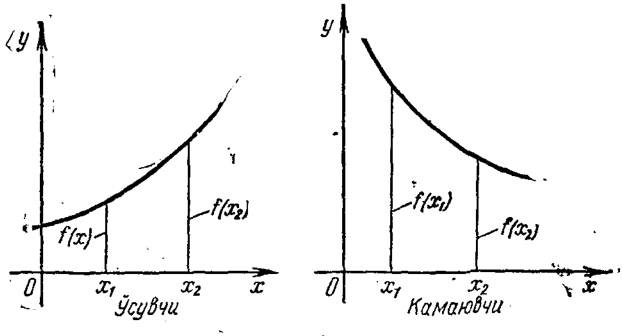
Агар бу сегментдан (ёки интервалдан) олинган эркли ўзгарувчининг катта қийматларига функциянинг катта қийматлари мос келса, яъни $x_2>x_1$ да $f(x_2)>f(x_1)$ бўлса, $y=f(x)$ функция бирор бир сегментда (интервалда) *ўсувчи* дейилади.

Агар эркли ўзгарувчининг катта қийматларига функциянинг кичик қийматлари мос келса, $y=f(x)$ функция бирор сегментда (ёки интервалда) *камаювчи* дейилади, яъни $x_2>x_1$ бўлса, $f(x_2)>$ $>f(x_1)$ бўлади.

123-расмда ўсувчи ва камаювчи функцияларнинг графиклари келтирилган. Масалан, $y=x^3$ функция бутун сон ўқида ўсувчидир, $y=x^2$ функция $0\leqslant x<+\infty$ да ўсади, $-\infty<x\leqslant 0$ да камаяди.

Агар интервалда (сегментда) берилган $y=f(x)$ функция бу интервалда (сегментда) фақат ўсувчи ёки фақат камаювчи бўлса, у интервалда (сегментда) *монотон* дейилади.

123-расмдан бевосита кўринадики, Ox ўққа параллел бўлган ҳар бир тўғри чизиқ монотон функциянинг графигини битта нуқтада кесади, яъни y нинг ҳар бир қийматига x нинг ягона қиймати мос келади, демак, $y=f(x)$ функция тескари функцияга эга. Агар $y=f(x)$ функция узлуксиз бўлса, унга тескари бўлган $x=$ $=f^{-1}(y)$ функция ҳам узлуксиз бўлади. Тескари функция мавжудлиги ҳақидаги теоремани исботсиз келтирамиз.



123- расм.

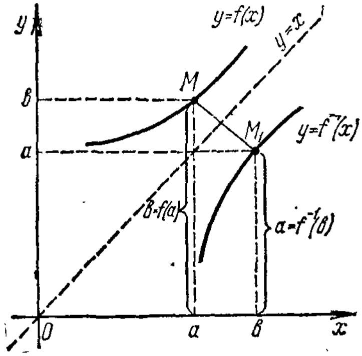
Теорема. *Агар $y = f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиб, бу сегментда ўсса (камайса), у ҳолда Оу ўқнинг тегишли сегментида тескари $x = f^{-1}(y)$ функция мавжуд ва у ҳам ўсувчи (камаювчи) функция бўлади.*

Формула ёрдамида берилган $y = f(x)$ функция учун унга тескари $x = f^{-1}(y)$ функцияни амалда топиш учун $y = f(x)$ тенгламани, агар мумкин бўлса, x га нисбатан ечиш керак. Масалан, $y = \frac{2x+3}{x-5}$ тенгламани x га нисбатан ечиб, унга тескари бўлган $x = \frac{5y+3}{y-2}$ функцияни ҳосил қиламиз.

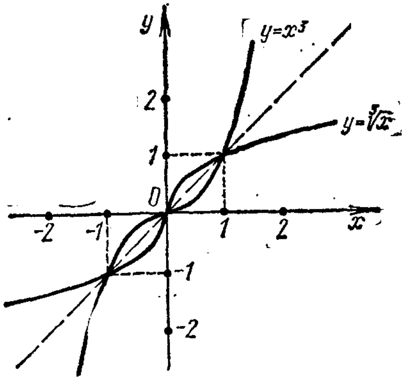
Эслатма. $x = f^{-1}(y)$ функция $y = f(x)$ функцияга нисбатан тескари бўлсин. Эркли ўзгарувчини одатдагидек x билан, функцияни y билан белгилашга қайтиб, бу тескари функцияни $y = f^{-1}(x)$ кўринишда ёзишимиз мумкин. Масалан, $y = x^3$ функция учун $x = \sqrt[3]{y}$ тескари функция бўлади ёки ўзгарувчиларни белгилашни ўзгартирсак, $y = \sqrt[3]{x}$ бўлади.

Тескари $y = f^{-1}(x)$ функциянинг графиги берилган $y = f(x)$ функция графигига I ва III координата бурчаклари биссектрисасига нисбатан симметрик. Бунга 124- расмга қараб ишонч ҳосил қилиш мумкин. 125-расмда $y = x^3$ функция ва унга тескари бўлган $y = \sqrt[3]{x}$ функциянинг графиклари берилган.

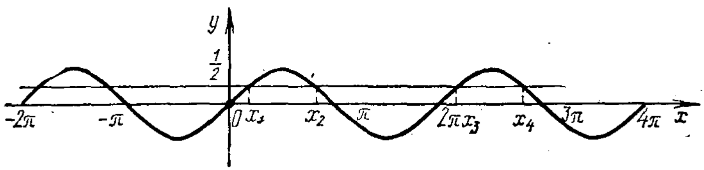
5. Тескари тригонометрик функциялар. $y = \arcsin x$ *функция.* Агар $y = \sin x$ функцияни бутун сон ўқида $(-\infty < x < +\infty)$ қаралса, у тескари функцияга эга эмас, чунки $y(-1 \leqslant y \leqslant 1)$ нинг битта қийматига x нинг чексиз кўп қийматлари тўғри келади. Масалан, $y = 1/2$ бўлса, $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi - \pi/6$, $x_3 = 2\pi + \pi/6$, ... (126- расм). Агар $y = \sin x$ функцияни фақат $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$ сегментда қаралса, унда $y = \sin x$ функция узлуксиз ва ўсувчи бўлади, демак, тескари функцияга эга, $x = \arcsin y$ орқали



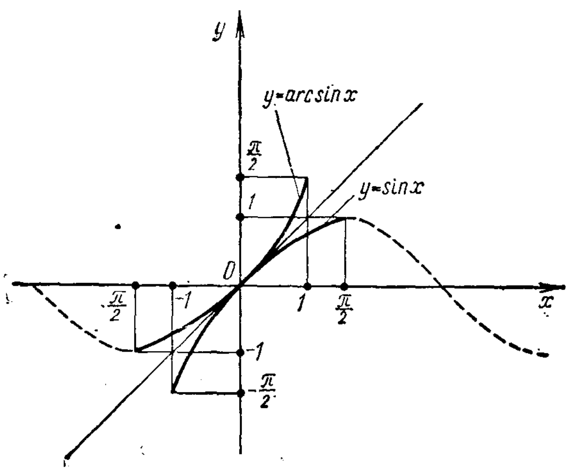
124- расм.



125- расм.

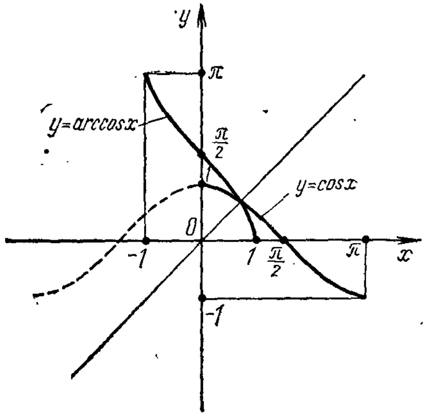


126- расм.



127- расм.

белгиланади. Эркли ўзгарувчини x орқали, функцияни эса y орқали белгилаб, $y = \arcsin x$ ни ҳосил қиламиз. 127-расмда тасвирланган бу функциянинг графиги $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан $y = \sin x\ (-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2)$ функция графигига симметрик.



128-расм.

$y = \arcsin x$ функция $[-1, 1]$ сегментда аниқланган ва $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \pi/2$ сегментга тегишли қийматларни қабул қилади.

$y = \arccos x$ *функция.* Агар $y = \cos x$ функцияни $[0, \pi]$ сегментда қаралса, бу функция $y = \cos x$ функцияга нисбатан тескари деб қаралади Бу сегментда $y = \cos x$ функция камаяди.

$y = \arccos x$ функция $[-1, 1]$ сегментда аниқланган, унинг қийматлари эса $[0, \pi]$ сегментга тегишли. $y = \arccos x$ функциянинг графиги 128-расмда келтирилган.

$y = \operatorname{arctg} x$ *функция.* Агар $y = \operatorname{tg} x$ функцияни $-\pi/2$ ва $\pi/2$ орасидаги қийматларга нисбатан қаралса, бу $y = \operatorname{arctg} x$ функцияни $y = \operatorname{tg} x$ функцияга нисбатан тескари деб қараш мумкин. 129-расмда функциянинг графиги тасвирланган.

$y = \operatorname{arctg} x$ функция бутун сон ўқида аниқланган, унинг қийматлари эса $[-\pi/2, \pi/2]$ интервалга тегишли; бунда

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2, \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$$

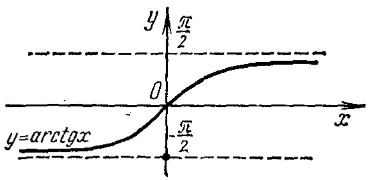
(129-расмга қаранг).

$y = \operatorname{arcctg} x$ *функция.* Бу функцияни $y = \operatorname{ctg} x$ функцияни $[0, \pi]$ интервалда қаралганда $y = \operatorname{ctg} x$ функциянинг тескари функцияси деб қараш мумкин. $y = \operatorname{arcctg} x$ функция графиги 130-расмда келтирилган.

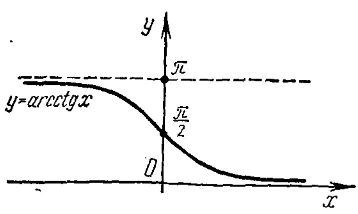
$y = \operatorname{arcctg} x$ функция бутун сон ўқида аниқланган, шу билан бирга $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$, $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$ (130-расмга қаранг).

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arcctg} x$$

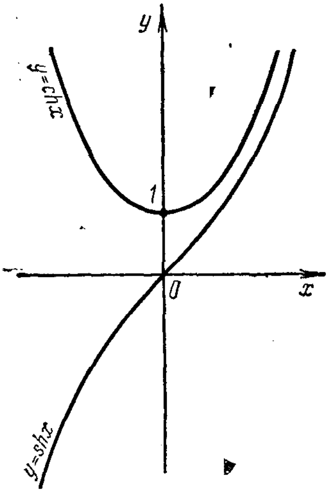
функциялар *тескари тригонометрик функциялар* дейилади.



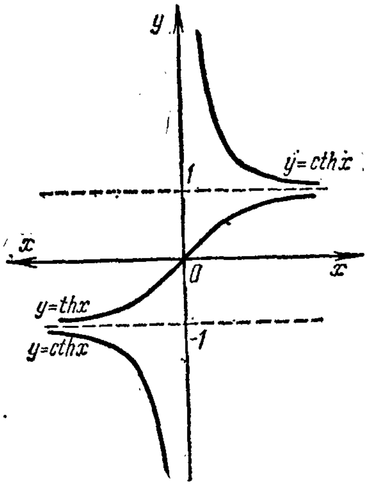
129-расм.



130-расм.



131- расм.



132- расм.

Уларнинг ҳаммаси $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ узлуксиз функцияларга нисбатан тескари функция сифатида аниқланиш соҳаларининг ҳар бир нуқтасида узлуксиздир.

6. Кўрсаткичли ва логарифмик функциялар. Биз биламизки, (I боб, 4-§, 5-пунктга қаранг), $y=a^x$ функция кўрсаткичли функция дейилади (унинг асоси a мусбат ва 1 га тенг эмас деб ҳисобланади). $\sqrt{x}$ нинг исталган қийматида $y=a^x>0$. Шунинг учун кўрсаткичли функциянинг графиги Ox ўқдан юқорида жойлашган. Агар $a>1$ бўлса, $y=a^x$ функция ўсувчи, $a<1$ бўлса, камаювчи. Кўрсаткичли функцияларнинг графиклари 24-расмда кўрсатилган. Агар асос $a>1$ бўлса, 24-расмдан кўриниб турибдики, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$.

$y=\log_a x$ *логарифмик функция* $y=a^x$ кўрсаткичли функцияга нисбатан тескари функциядир. Логарифмик функциянинг графиги 25-расмда тасвирланган. Чизмадан бевосита кўриниб турибдики, $y=\log_a x$ функция x нинг барча мусбат қийматлари учун аниқланган. Ундан ташқари, агар $a>1$ бўлса, $\lim\limits_{x\to0+0}\log_a x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$

Агар асос $a=e$ бўлса, $y=\ln x$ функция e^x кўрсаткичли функцияга нисбатан тескари функция. Пировардида логарифмик функциянинг кўрсаткичли функцияга тескари бўлиши таърифидан $a^{\log_a x}\equiv x$ келиб чиқишини эслатиб ўтамиз.

7. Гиперболик функциялар ҳақида тушунча. Математикада ва унинг татбиқларида гиперболик функциялар, жумладан *гиперболик синус, гиперболик косинус, гиперболик тангенс, ги-*

перболик котангенс қаралади. Бу функциялар қуйидаги формулалар билан аниқланади:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \tag{27}$$

бу ерда e — натурал логарифмнинг асоси.

Гиперболик функциялар орасида (27) формулалар билан осон текшириладиган асосий боғланишлар бор:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}. \tag{28}$$

Гиперболик функцияларнинг графиклари 131, 132-расмларда келтирилган. $y = \operatorname{ch} x$ функциянинг графиги *занжир чизиқ* дейилади.

VI БОБ

БИР ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛИНИ ҲИСОБЛАШ

1-§. ҲОСИЛА

1. Аргумент ва функциянинг орттирмаси. $y=f(x)$ функция берилган бўлсин. Аргументнинг иккита: бошланғич x_0 ва янги x қийматини қарайлик.

$x-x_0$ айирма *x аргументнинг x_0 нуқтадаги орттирмаси* (қисқача аргумент орттирмаси) дейилади ва Δx символ билан белгиланади („дельта икс" деб ўқилади). Худди шунга ўхшаш, $y-y_0=f(x)-f(x_0)$ айирма $y=f(x)$ *функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси* (қисқача—функция орттирмаси) дейилади ва Δy символ билан белгиланади („дельта игрек" деб ўқилади)*. Δx ва Δy миқдорлар 133-расмда кўрсатилган.

Шундай қилиб,

$$\Delta x = x - x_0, \tag{1}$$

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) \tag{2}$$

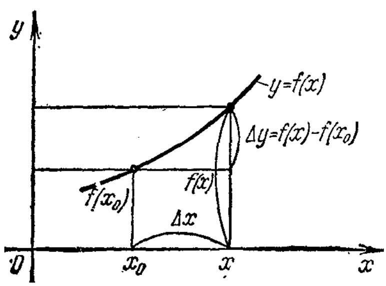
ёки

$$x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y. \tag{3}$$

(3) формуладан x нинг ифодасини (2) формулага қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \tag{4}$$

Қоидага кўра Δx ва Δy лар киритилаётганда аргументнинг бошланғич қиймати x_0 фиксирланган деб янги қиймати x эса ўзгарувчи деб ҳисобланади. У ҳолда $y_0=f(x_0)$ ўзгармас, $y=f(x)$ эса ўзгарувчи бўлади. Δy ва Δx орттирмалар ҳам ўзгарувчи бўлади. (4) формула Δy ўзгарувчи Δx ўзгарувчининг функцияси бўлишини кўрсатади.



133- расм.

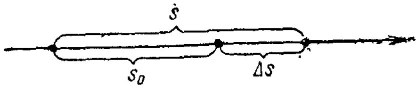
1-мисол $y=x^2$ функция учун x_0 нуқтада аргументнинг Δx орттирмасига мос келадиган Δy функция орттирмасини топинг

Ечилиши. (4 формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

---

* Δ ни Δ нин га кўпайтмаси деб қараш керак эмас, бу ягона символдир. Бу гап Δ а ҳам тегишли.



134- расм.

2- мисол. $y = x^3$ функциянинг аргумент $x_0 = 1$ нуқтадан $x = 1{,}1$ нуқтага ўтгандаги Δy орттирмасини топинг.

Ечилиши. (2) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = (1{,}1)^3 - 1^3 = 0{,}331.$$

2. Аргумент орттирмаси ва функция орттирмаси тушунчалари ёрдамида функция узлуксизлигини аниқлаш. V бобда (2-§, 1-пункт) функция узлуксизлигининг таърифи келтирилган эди, бу таърифга кўра, агар

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{5}$$

бўлса, $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз дейилади. Бунда функция x_0 нуқтада ва унинг бирор атрофида аниқланган деб фараз қилинган эди.

Бу таърифни функциянинг орттирмаси ва аргументнинг орттирмаси ёрдамида баён қилиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, (5) формула

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \tag{5'}$$

тенгликка тенг кучли бўлиши равшан. $x - x_0 = \Delta x$ ва $f(x) - f(x_0) = \Delta y$ деб фараз қилиб ҳамда $x \to x_0$ да $\Delta x \to 0$ (ва аксинча, $\Delta x \to 0$ да $x \to x_0$) эканини ҳисобга олиб, (5) муносабат ўрнига (5′) формулага тенг кучли бўлган қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{6}$$

Бошқача айтганда, *функция аргументининг x_0 нуқтадаги чексиз кичик орттирмаси Δx га функциянинг чексиз кичик орттирмаси Δy мос келганда ва фақат шунда $y = f(x)$ функция шу нуқтада узлуксиз дейилади.*

Изоҳ. Агар $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада узилишга эга бўлса, $\Delta x \to 0$ да у ё нолдан фарқли лимитга интилади, ё лимитга эга бўлмайди.

3. Ҳосила тушунчасига олиб келадиган масалалар. Моддий нуқта тўғри чизиқ бўйлаб, битта йўналишда $s = f(t)$ қонун бўйича ҳаракат қилаётган бўлсин, бу ерда t — вақт, s — нуқтанинг t вақт ичида босиб ўтган йўли. Вақтнинг бирор t_0 моментини белгилаб олайлик. Бу моментгача нуқта $s_0 = f(t_0)$ йўлни босиб ўтади. Моддий нуқтанинг t_0 моментдаги v_0 тезлигини аниқлаш масаласини қўямиз.

Бунинг учун вақтнинг бошқа бир $t_0 + \Delta t$ моментини қараймиз. Унга босиб ўтилган $s = f(t_0 + \Delta t)$ йўл мос келади. У ҳолда вақтнинг $\Delta t = t - t_0$ оралиғида нуқта $\Delta s = s - s_0 = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ йўлни босиб ўтади (134-расм). Вақтнинг Δt оралиғидаги ҳаракатнинг *ўртача тезлиги* $v_{\text{ўр}}$ ўтилган йўлнинг вақтга нисбати бўлган $v_{ўр}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$ муносабат билан аниқланади. Вақтнинг бошланғич t_0 моментини фиксирланган деб, Δt вақт оралиғини эса ўзгарувчи деб ҳисоблаймиз. У ҳолда $v_{ўр}$ ўртача тезлик Δt га боғлиқ бўлган ўзгарувчи миқдордир.

Берилган t_0 моментдаги v_0 тезлик деб $\Delta t\to 0$ даги ўртача $v_{ўр}$ тезликнинг лимитига айтилади, яъни

$$v_0=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{7}$$

ёки

$$v_0=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}. \tag{8}$$

Шундай қилиб, берилган t_0 моментдаги v_0 тезликни топиш учун $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$ лимитни ҳисоблаш зарур.

Ечилишида шунга ўхшаш лимитни топишга тўғри келадиган яна битта масалани қараймиз. Тўғри чизиқли бир жинсли бўлмаган, узунлиги l бўлган ингичка стержень берилган бўлсин. Стерженнинг исталган нуқтасидаги зичликни аниқлаймиз. Айтайлик, стержень Ox ўқда жойлаштирилган, шу билан бирга унинг учларидан бири координаталар боши билан устма-уст тушсин. У ҳолда стерженнинг ҳар бир нуқтасига аниқ координата мос келади.

Стерженнинг координаталари O ва x бўлган нуқталари орасидаги кесманинг массасини m орқали белгилаймиз. Равшанки, m x нинг функциясидир: $m=f(x)$. Стерженнинг иккита: фиксирланган x_0 ва ўзгарувчи $x_0+\Delta x$ нуқтасини қараймиз. Стерженнинг бу нуқталар орасида жойлашган кесмаси Δx узунликка ва $\Delta m=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ массага эга. $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ нисбат стерженнинг x_0 нуқтасидан $x_0+\Delta x$ нуқтасигача бўлган кесмасидаги *ўртача зичлиги* дейилади.

Стерженнинг x_0 нуқтадаги δ *зичлиги* деб Δx кесма нолга интилгандаги ўртача зичлик лимитига айтилади:

$$\delta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{9}$$

Кўрилган масалалар физик мазмунининг турлилигига қарамасдан бизни битта ўша лимитни—функция орттирмасининг аргумент орттирмаси нисбатининг лимитини топишга келтиради. Бунга ўхшаш лимитни топиш табиатнинг турли соҳаларига тегишли кўп масалалар олиб келади. Шунинг учун кўрсатилган лимитни муфассалроқ ўрганиш ва уни топиш йўлларини кўрсатиш мақсадга мувофиқ бўлади.

4. Ҳосиланинг таърифи ва унинг механик маъноси. $y=f(x)$ *функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи деб, шу нуқтадаги функ-*

ция орттирмасининг уни шу орттирмага эриштирадиган аргумент орттирмасига нисбатининг Δx нолга интилгандаги лимитига айтилади.

$y=f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи $f'(x_0)$ символ билан белгиланади.

Шундай қилиб, таъриф бўйича:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{10}$$

ёки

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{11}$$

Битта ўша $f(x)$ функциянинг ҳосиласини x нинг турли нуқталарида ҳисоблаш мумкин. M — x нинг шундай қийматлари тўплами бўлсин. Ҳар бир $x\in M$ га бу нуқтада $f'(x)$ ҳосила мос келадиган қоида, M тўпламда аниқланган функцияни тасвирлайди. Бу функция $f(x)$ дан олинган ҳосила дейилади ва $f'(x)$ орқали белгиланади („эф штрих x" деб ўқилади)*.

Шундай қилиб, $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи $f'(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги қиймати экан.

Функциянинг ҳосиласини $f'(x)$ билан белгилашдан ташқари бошқа белгилашлар ҳам ишлатилади: масалан, y', y'_x, $[f(x)]'_x$.

1-мисол. $y=x^2$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Ечилиши. Функциянинг Δy орттирмасини топамиз:

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+\Delta x^2.$$

Ҳосила таърифидан фойдаланиб ва x ни фиксирланган деб ҳисоблаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

Шундай қилиб, x^2 функциянинг ҳосиласи $2x$ га тенг экан: $(x^2)'=2x$. Бу ҳосила бутун сон ўқида аниқланган, чунки унинг топилишида x нинг қиймати ихтиёрий танланган эди.

2-мисол. $y=x^2$ функциянинг $x=2$ нуқтадаги ҳосиласини топинг.

Ечилиши. Берилган функциянинг ҳосиласининг ифодаси учун x сон ўрнига 2 ни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз: $(x^2)'\,|_{x=2}=2x\,|_{x=2}=4.$

Функция ҳосиласини топиш бу функцияни *дифференциаллаш* дейилади.

3-пунктда кўрилган масалаларга қайтиб, унда ҳосил қилинган лимитлар ҳосила эканлигини билиш осон. Биринчи масалада

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=s'_t,$$

яъни *моддий нуқта вақтнинг t моментидаги тўғри чизиқ бўйича ҳаракатининг v тезлиги s йўлдан t вақт бўйича олинган ҳосиладир.* Ҳосиланинг механик маъноси шундан иборатдир.

---

* Аниқлик учун $y'=f(x)$ функциядан олинган ҳосилани y дан x бўйича олинган ҳосила ёки $f(x)$ дан x бўйича ҳосила дейилади.

Иккинчи масалада

$$\delta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = m'_x,$$

яъни тўғри чизиқли стерженнинг x нуқтасидаги δ зичлиги m массадан x узунлик бўйича олинган ҳосила экан.

5. **Функциянинг дифференциалланувчанлиги.** x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлган $y = f(x)$ функция *бу нуқтада дифференциалланувчи* дейилади. Агар функция $[a, b]$ интервалнинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи бўлса, $y = f(x)$ функция *шу интервалда дифференциалланувчи* дейилади.

Масалан, $y = x^2$ функция исталган x_0 нуқтада дифференциалланувчи (яъни ҳосилага эга), демак, уни чексиз $]-\infty; +\infty[$ интервалда, яъни бутун сон ўқида дифференциалланувчи дейиш мумкин.

Функциянинг дифференциалланувчилиги ва узлуксизлиги орасидаги боғланишни ўрнатувчи қуйидаги теоремани исботлайлик.

Теорема. *Агар $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, y шу нуқтада узлуксиз бўлади.*

Исботи. Айтайлик, x аргумент x_0 нуқтада нолга тенг бўлмаган Δx орттирмани олсин. Унга функциянинг бирорта Δy орттирмаси мос келсин. Ўз-ўзидан кўриниб турган $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$ айниятни кўрамиз. Лимитга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

бундан, 2-пунктга кўра, $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксизлиги келиб чиқади.

Тескари теорема ўринли эмас: баъзи нуқталарида дифференциалланувчи бўлмаган узлуксиз функциялар мавжуд. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун $y = |x|$ функцияни қараймиз.

$x = 0$ да $f(x) = |x|$ функция узлуксиз, чунки

$$1)\ f(0) = |0| = 0;\quad 2)\ \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0;$$

$$3)\ \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0.$$

$f(x) = |x|$ функция $x = 0$ нуқтада ҳосилага эга эмаслигини кўрсатамиз. Дастлаб, $x = 0$ нуқтада

$$\Delta x = x - 0 = x$$

эканини таъкидлаймиз. Нолдан ўнг томонда $|x| = x$, шунинг учун

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{|x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{|x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Нолдан чап томонда $|x| = -x$. Шунинг учун

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{|x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Шундай қилиб, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбат $\Delta x \to 0$ да чап ва ўнгдан турли лимитларга эга, бу $\Delta x \to 0$ да бу нисбат лимитга эга эмас, яъни $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ҳосила $x \to 0$ нуқтада мавжуд эмас, демакдир.

Яна битта мисол кўрайлик. $y = \sqrt[3]{x}$ функция бутун сон ўқида, хусусан $x = 0$ нуқтада ҳам узлуксиз, $x = 0$ нуқтада функция ҳосилага эга эмаслигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, $x = 0$ нуқтада аргументнинг Δx орттирмасига функциянинг

$$\Delta y = \sqrt[3]{0 + \Delta x} - \sqrt[3]{0} = \sqrt[3]{\Delta x}$$

орттирмаси мос келади. Демак,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}.$$

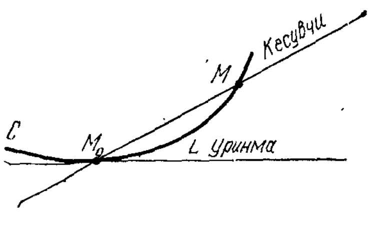
Лимитга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty.$$

Бу $y = \sqrt[3]{x}$ функция $x=0$ нуқтада ҳосилага эга эмас демакдир.

6. Ҳосиланинг геометрик маъноси Бу пунктда математик анализнинг кўп тушунчаларини ўзлаштиришда ва баъзи геометрик масалаларни ечишда жуда фойдали бўладиган ҳосиланинг геометрик маъносини ойдинлаштирамиз. Шу мақсадда берилган нуқтада эгри чизиққа ўтказилган уринма таърифини киритамиз.

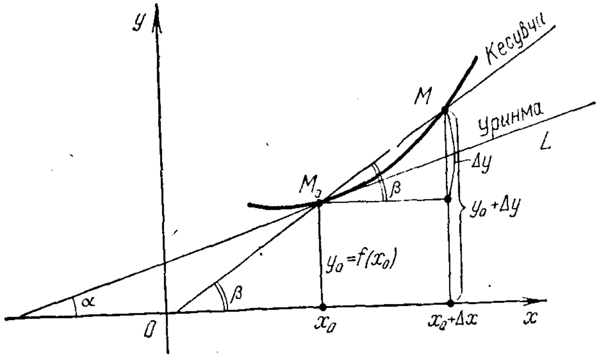
Текис эгри чизиқ C да M_0 нуқта берилган бўлсин. Бу эгри чизиқнинг бошқа M нуқтасини қараймиз. M_0M кесувчини ўтказамиз (135-расм). Агар M нуқта C эгри чизиқ бўйича силжий бошласа, M нуқта эса қўзғалмаса, у ҳолда кесувчи ўз ҳолатини ўзгартиради. M_0 нуқта орқали ўтувчи қуйидаги хоссага эга бўлган L тўғри чизиқ мавжуд бўлсин. Агар M нуқта C эгри чизиқ бўйича силжиётганда (исталган томондан) M нуқтага яқинлашиб борса, у ҳолда L тўғри чизиқ ва M_0M кесувчи орасидаги бурчак нолга интилади. У ҳолда бу L тўғри чизиқ C эгри чизиққа M_0 нуқтада ўтказилган уринма дейилади.



135- расм.

Қисқача айтганда, *уринма бу кесувчининг лимит ҳолатини эгаллаган тўғри чизиқдир.*

Изоҳ. Фазодаги эгри чизиққа ўтказилган уринма ҳам шунга ўхшаш аниқланади.



136- расм.

Энди абсциссаси x_0 бўлган M_0 нуқтада вертикал бўлмаган уринмага эга $y=f(x)$ узлуксиз функцияни қарайлик (136-расм). Унинг $k=\operatorname{tg}\alpha$ бурчак коэффициентини топамиз, бу ерда α — уринма билан Ox ўқ орасидаги бурчак. Бунинг учун M_0 нуқта ва графикнинг $x_0+\Delta x$ абсциссали M_0 нуқтаси орқали кесувчи ўтказамиз. Унинг бурчак коэффициенти $k_{\text{кес}}=\operatorname{tg}\beta=\frac{\Delta y}{\Delta x}$, бу ерда β — кесувчи билан Ox ўқ орасидаги бурчак (136-расм). $\Delta x\to 0$ да функциянинг узлуксизлигига асосан Δy ҳам нолга интилади ва шунинг учун M нуқта график бўйича силжиб, чегарасиз равишда M_0 нуқтага яқинлашиб боради Бунда кесувчи чегарасиз равишда уринмага яқинлашиб боради. яъни $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta=\alpha$ ва демак, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha$. Шунинг учун уринманинг бурчак коэффициенти

$$k=\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\beta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

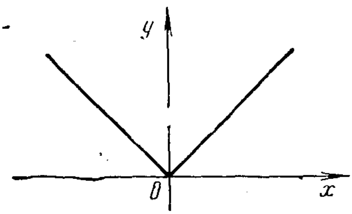
Шундай қилиб, *функция графигига абсциссаси x_0 нуқтада бўлган нуқтасидан ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти бу функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласига тенг:*

$$k_{\text{ур}}=f'(x_0). \tag{12}$$

Изоҳ Биз узлуксиз $y=f(x)$ функциянинг графиги x_0 абсциссали нуқтада вертикал бўлмаган уринмага эга бўлса, бу нуқтада у уринманинг $k_{\text{ур}}$ бурчак коэффициентга тенг бўлган $f'(x_0)$ ҳосилага тенг эканлигини кўрсатдик. Аксинча, агар функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, унинг графиги x_0 абсциссали нуқтада вертикал бўлмаган уринмага эга бўлишини кўрсатиш мумкин.

Мисол. $y=x^2$ параболага $M_0(2,4)$ нуқтадан ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топинг.

Ечилиши. Биз $(x^2)'|_{x=2}=2x|_{x=2}=4$ эканлигини (4- пункт, 2-мисолга қаранг) кўрдик. Функция графигининг M_0 (2, 4) нуқтадан ўтган уринмаси функциянинг $x=2$ нуқтадаги ҳосиласи қийматига, яъни $k=4$ га тенглигини изоҳлаш қолади.



137- расм.

5- пунктнинг охирида $y = |x|$ ва $y = \sqrt[3]{x}$ функциялар $x = 0$ нуқтада ҳосилага эга эмаслиги аниқланган эди. $y = |x|$ функциянинг графигида бунга сабаб O (0; 0) нуқтада функция уринмага эга эмаслигидир (137-расм). $y = \sqrt[3]{x}$ функциянинг графиги координаталар бошида уринмага (Oy ўқ) эга, бироқ у абсциссалар ўқига перпендикуляр ва унинг бурчак коэффициенти чекли қийматга эга эмас.

7. Баъзи элементар функцияларнинг ҳосилалари. Бу пунктда биз қуйидаги элементар функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз: $y = C$ ўзгармасни, натурал кўрсаткичли $y = x^n$ даражали функцияни, $y = a^x$ кўрсаткичли функцияни, $y = \log_a x$ логарифмик функцияни ва $y = \sin x$ ва $y = \cos x$ тригонометрик функцияларни.

Қолган элементар функцияларнинг ҳосилалари кейинги пунктларда қаралади.

$y = C$ ўзгармаснинг ҳосиласи. $y = C$ функция бутун бу сон ўқида ўзгармас қийматини сақлагани учун ихтиёрий танланган x нуқтада аргументнинг исталган Δx орттирмасига функциянинг нолга тенг бўлган Δy орттирмаси мос келади. Шунинг учун

$$(C') = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Шундай қилиб,

$$(C)' = 0. \tag{13}$$

n натурал кўрсаткичли $y = x^n$ даражали функциянинг ҳосиласи. x — ихтиёрий танланган нуқта, Δx — аргументнинг бу нуқтадаги орттирмаси ва Δy — берилган функциянинг мос орттирмаси бўлсин. У ҳолда Ньютон* биномига кўра:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots$$
$$\dots + (\Delta x)^n - x^n$$

ёки

$$\Delta y = nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n.$$

Демак

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right] = nx^{n-1}.$$

* 200 - бетдаги изоҳга қаранг.

Шундай қилиб,

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{14}$$

$y = a^x$ кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи. x аргументнинг ихтиёрий танланган қийматига Δx орттирма бериб, кўрсаткичли функциянинг қуйидаги орттирмасини ҳосил қиламиз:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right).$$

Демак,

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a,$$

чунки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$ (V бобдаги (26) формулага қаранг).

Шундай қилиб,

$$(a^x)' = a^x \ln a. \tag{15}$$

Хусусан, $a = e$ да

$$(e^x)' = e^x \tag{16}$$

ни ҳосил қиламиз, чунки $\ln e = 1$.

$y = \log_a x$ логарифмик функциянинг ҳосиласи. Логарифмик функциянинг аниқланиш соҳасидан ихтиёрий x қийматни оламиз ва унга Δx орттирма берамиз. У ҳолда функциянинг орттирмаси

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Шунинг учун

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Бу лимитни топиш учун қуйидаги алмаштиришни бажарамиз:

$$\frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

x миқдор ўзгармаслигини ва $\Delta x \to 0$ да $\frac{\Delta x}{x} \to 0$ бўлишини эътиборга олиб, V бобдаги (25) формулага кўра узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\right] = \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Шундай қилиб, $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$ ёки $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$ бўлгани учун пировардида қуйидагига эга бўламиз:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \tag{17}$$

Хусусан, $a = e$ да

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{18}$$

ни ҳосил қиламиз, чунки $\log_e e = \ln e = 1$.

$y = \sin x$ ва $y = \cos x$ *функцияларнинг ҳосилалари.* Δx $y = \sin x$ функциянинг ихтиёрий танланган қиймати аргументининг орттирмаси бўлсин. У ҳолда бу функциянинг орттирмаси:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Демак,

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x,$$

чунки V бобдаги (17) формулага кўра $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Шундай қилиб,

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{19}$$

$y = \cos x$ функциянинг ҳосиласи шунга ўхшаш келтириб чиқарилади:

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{20}$$

(20) формулани мустақил келтириб чиқаришни китобхонга ҳавола қиламиз.

8. Асосий дифференциаллаш қоидалари. Қўшилувчиларни, кўпайтувчиларни, бўлувчи ва бўлинувчининг ҳосилаларини билган ҳолда йиғиндининг, кўпайтманинг ва бўлинманинг ҳосилаларини топиш қоидаларини келтириб чиқарамиз.

Бу қоидаларни биз қуйидаги теоремаларда баён қиламиз.

1-теорема. *Агар $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ функциялар берилган x нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда шу нуқтада уларнинг йиғиндиси ҳам дифференциалланувчи бўлади, шу билан бирга йиғиндининг ҳосиласи қўшилувчилар ҳосилалари йиғиндисига тенг бўлади:*

$$(u + v)' = u' + v'. \tag{21}$$

Исботи. $y = f(x) = u(x) + v(x)$ функцияни қарайлик. x аргументнинг Δx орттирмасига u ва v функцияларнинг

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x) \text{ ва } \Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$$

орттирмалари мос келади. У ҳолда y функция қуйидаги орттирмани олади:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = [u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)] -$$
$$-[u(x) + v(x)] = [u(x+\Delta x) - u(x)] + [v(x+\Delta x) - v(x)] = \Delta u + \Delta v.$$

Демак,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Даъвога кўра u ва v функциялар дифференциалланувчи бўлгани учун $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$ ва демак, $y' = u' + v'$. Шундай қилиб,

$$(u+v)' = u' + v'.$$

Изоҳ. (21) формула қўшилувчиларнинг чекли сони учун ўринли:

$$(u+v+\ldots+t)' = u' + v' + \ldots + t'.$$

1-мисол. $y = x^3 + \sin x + \ln x$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Ечилиши. Аввал (22) формулани, сўнгра (14), (19) ва (18) формулаларни қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y' = (x^3 + \sin x + \ln x)' = (x^3)' + (\sin x)' + (\ln x)' = 3x^2 + \cos x + \frac{1}{x}$$

2-теорема. *Агар $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ функциялар берилган x нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда уларнинг кўпайтмаси ҳам шу нуқтада дифференциалланувчи бўлади. Бунда кўпайтманинг ҳосиласи қуйидаги формула бўйича топилади.*

$$(uv)' = u'v + uv'. \qquad (23)$$

Исботи. $y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$ бўлсин. Агар x аргумент Δx орттирма олса, у ҳолда u, v ва y функциялар ҳам мос равишда Δu, Δv ва Δy орттирмаларни олади бунда,

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v \cdot \Delta u + u\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Демак,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v\right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u\right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v\right).$$

$u = u(x)$ ва $v = v(x)$ лар фиксирланган x да ўзгармас бўлгани учун уларни лимит белгисидан ташқарига чиқариш мумкин. Шунинг учун

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v\right) = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) \cdot v = u'v; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \left(u \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = uv'.$$

Бундан ташқари

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0,$$

чунки v функция шартга кўра дифференциалланувчи ва демак, узлуксиз, шунинг учун $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$. Шундай қилиб,

$$y'=(uv)'=u'v+uv'.$$

Натижа. *Ўзгармас кўпайтувчини ҳосила белгисидан ташқарига чиқариш мумкин:*

$$(cu)'=cu'. \tag{24}$$

Ҳақиқатан ҳам, агар $v=c(c$ — ўзгармас) бўлса, у ҳолда (23) формулага кўра

$$(cu)'=(c)'u+cu'=0\cdot u+c\cdot u'=cu'.$$

Хусусан, —1 га тенг кўпайтувчини ҳосила белгисидан ташқарига чиқариш минус ишорани ҳосила белгисидан ташқарига чиқариш га тенг кучли:

$$(-u)'=-u'. \tag{25}$$

Бунинг асосида иккита функция айирмасининг ҳосиласи формуласини келтириб чиқариш мумкин:

$$(u-v)'=u'-v'. \tag{26}$$

2-мисол. $y=e^x\sin x$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Ечилиши. (23), (16) ва (20) формулаларга асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y'=(e^x\cos x)'=(e^x)'\cdot\cos x+e^x(\cos x)'=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=e^x(\cos x-\sin x).$$

3-мисол. $y=x^3-3x^2+5x+2$ кўпҳаднинг ҳосиласини топинг.

Ечилиши. (22), (24), (14) ва (13) формулаларни кетма-кет қўллаииб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y'=(x^3-3x^2+5x+2)'=(x^3)'+(-3x^2)'+(5x)'+(2)'=$$
$$=3x^2-3(x^2)'+5(x)'+0=3x^2-3\cdot 2x+5\cdot 1=3x^2-6x+5.$$

Изоҳ. (23) формулани сони чекли бўлган n та кўпайтувчи учун умумлаштириш мумкин. Агар масалан, $n=3$ бўлса,

$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw' \tag{27}$$

бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$(uvw)'=[(uv)w]'=(uv)'w+uvw'=u'vw+uv'w+uvw'.$$

3-теорема. *Агар берилган x нуқтада $u=u(x)$ ва $v=v(x)$ функциялар дифференциалланувчи ва $v\neq 0$ бўлса, бу нуқтада уларнинг бўлинмаси $y=\frac{u}{v}$ ҳам дифференциалланувчи, шу билан бирга*

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}. \tag{28}$$

Исботи. Δx аргумент орттирмаси, x, Δu ва Δv лар эса u ва

v функцияларнинг мос орттирмалари бўлсин. У ҳолда $y=\frac{u}{v}$ функция қуйидаги орттирмани олади:

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{\Delta u\cdot v-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$

Демак,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\cdot v-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

ёки

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Биз дифференциаллаш ҳақидаги даъвога кўра ва демак, v функциянинг узлуксизлигига кўра $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$ деб ҳисоблаган эдик.

Энди $y=\operatorname{tg}x$ функциянинг ҳосиласини топамиз.

Берилган функцияни $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ бўлинма шаклида ёзиб, (28) формулага кўра, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Шундай қилиб,

$$(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}. \tag{29}$$

Бунда $v=\cos x\neq 0$ шарт $\operatorname{tg}x$ функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлган ихтиёрий x учун бажарилади.

$y=\operatorname{ctg}x$ функциянинг ҳосиласи ҳам шунга ўхшаш келтириб чиқарилади:

$$(\operatorname{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{30}$$

Бу формулани мустақил келтириб чиқаришни тавсия қиламиз.

9. Тескари функциянинг ҳосиласи. Айтайлик, $x=f(y)$ функция бирор интервалда монотон ва дифференциалланувчи бўлсин ҳамда бу интервалнинг y нуқтасида нолга тенг бўлмаган $f'(y)$ ҳосилага эга бўлсин, $y=f^{-1}(x)$ тескари функция тегишли x нуқтада $[f^{-1}(x)]'$ ҳосилага эга бўлишини, шу билан бирга

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)} \tag{31}$$

бўлишини кўрсатамиз.

Шартга кўра $x=f(y)$ функция монотон ва дифференциалланувчи (ва демак, узлуксиз ҳам) бўлгани учун тескари функция мавжудлиги ҳақидаги теоремага биноан (V боб, 2-§, 4-пунктга қаранг) $y=f^{-1}(x)$ функция мавжуд, у монотон ва узлуксиз. x аргументга $\Delta x \neq 0$ орттирма берамиз. У ҳолда $y=f^{-1}(x)$ функция Δy орттирмани олади, у монотонлигига кўра нолдан фарқли бўлади. Бундан ташқари $y=f^{-1}(x)$ функциянинг узлуксизлиги натижасида $\Delta x \to 0$ да Δy орттирма ҳам нолга интилади. Демак,

$$[f^{-1}(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \right) = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{f'(y)}.$$

(31) формулани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}. \qquad (32)$$

10. Тескари тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари. $y = \arcsin x$ функциянинг ҳосиласини топамиз: $x = \sin y$ тескари функцияни қараймиз, бу функция $-\pi/2 < y < \pi/2$ интервалда монотон ва дифференциалланувчи, унинг ҳосиласи $x' = \cos y$ эса бу интервалда нолга айланмайди.

Демак, (32) формула бўйича $y'_x = 1/x'_y = 1/\cos y$ ни ҳосил қиламиз. Бироқ*, $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$. Шундай қилиб, $y' = 1/\sqrt{1-x^2}$ яъни

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (33)$$

$y = \operatorname{arctg} x$ функциянинг ҳосиласини шунга ўхшаш топамиз. Бу функция таърифга кўра $-\pi/2 < y < \pi/2$ шартни қаноатлантириши керак. Бунда тескари $x = \operatorname{tg} y$ функция монотон ва дифференциалланувчи. (29) формула бўйича $x'_y = 1/\cos^2 y$ ни топамиз. Демак, (32) формулага кўра $y'_x = \cos^2 y$ га эгамиз. Бироқ $\cos^2 y = 1/(1+\operatorname{tg}^2 y) = 1/(1+x^2)$. Шунинг учун $y' = 1/(1+x^2)$

ёки
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}. \qquad (34)$$

$y = \arccos x$ $y = \operatorname{arcctg} x$ функцияларнинг ҳосилалари учун формулаларни келтирамиз:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (35)$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad (36)$$

Бу формулаларни мустақил келтириб чиқаришни китобхоннинг ўзига ҳавола қиламиз.

---

* Илдиз олдидаги ишора „плюс" олинишига сабаб $\cos y$ — $-\pi/2 < y < \pi/2$ интервалда мусбат бўлишидир.

11. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Айтайлик, $y=f(u)$ ва $u=\varphi(x)$ бўлсин. У ҳолда y мураккаб функция экан: $y=f[\varphi(x)]$, u ўзгарувчи эса оралиқ аргументдир (I боб, 4-§, 6-пунктга қаранг).

y'_u ҳосилани ва оралиқ аргументнинг u'_x ҳосиласини билган ҳолда мураккаб функция y'_x нинг ҳосиласини қандай топиш мумкин?

Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема. *Агар $u=\varphi(x)$ функция x нуқтада u'_x ҳосилага, $y=f(u)$ функция эса тегишли u нуқтада y'_u ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $y=f[\varphi(x)]$ мураккаб функция ҳам бу нуқтада ҳосилага эга бўлади ва қуйидаги формула билан топилади:*

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x. \tag{37}$$

Кўпинча унча аниқ бўлмаган, лекин қисқа бўлган қуйидаги таърифдан фойдаланилади: *мураккаб функциянинг ҳосиласи берилган функциянинг оралиқ аргумент бўйича ҳосиласини оралиқ аргумент ҳосиласига кўпайтмасига тенг.*

Исботи. x га Δx орттирма берамиз. У ҳолда u ва y ҳам тегишли Δu ва Δy орттирмаларни олади.

Фараз қилайлик, $\Delta x\to 0$ да Δu нолга тенг бўлмаган қийматларни қабул қилсин. У ҳолда қуйидаги айният ўринли:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{38}$$

(38) тенгликда $\Delta x\to 0$ лимитга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\,\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

$u=\varphi(x)$ функция дифференциалланувчи ва демак, узлуксиз бўлгани учун $\Delta x\to 0$ да $\Delta u\to 0$. Шунинг учун $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}$.

Демак,
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Бироқ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_x$, $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u$. Шунинг учун $y'_x=y'_u\cdot u'_x$ Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

$x=0$ да Δu ноль қиймат қабул қилган ҳолда ҳам (37) формула ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин.

1-мисол. $y=\sin x^3$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Ечилиши. Берилган функция мураккаб функциядир. $u=x^3$ белгилаш киритиб, $y=\sin u$ ни ҳосил қиламиз (37) формулага кўра

$$y'_x=(\sin u)'_u\cdot(x^3)'_x=\cos u\cdot 3x^2$$

ни ҳосил қиламиз ёки $u=x^3$ бўлгани учун

$$y'_x=\cos x^3\cdot 3x^2=3x^2\cos x^3.$$

Мураккаб функция кўрилган мисолдагидек икк ита функциядангина иборат бўлмай, кўп сондаги функциялардан ҳам иборат бўлиши мумкин. Бундай ҳолларда мураккаб функциянинг қийматига келтирадиган амалларнинг қайси бири охирги бўлишини равшан тасаввур қила билиш керак. Мураккаб функцияни дифференциаллаётганда охирги амал бажарилаётган катталик оралиқ аргумент u сифатида қабул қилинади.

2-мисол. $y = \ln \operatorname{arctg} x^2$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Е ч и л и ш и. Берилган бу функция учун охирги амал натурал логарифм ҳисобланади. Бу амал $\operatorname{arctg} x^2$ функция устида бажарилади. Шунинг учун $u = \operatorname{arctg} x^2$ функцияни оралиқ аргумент деб қабул қиламиз. У ҳолда $y = \ln u \cdot y'$ ҳосилани (37) формулага кўра топамиз:

$$y'_x = (\ln u)'_u \cdot (\operatorname{arctg} x^2)'_x = \frac{1}{u}(\operatorname{arctg} x^2)'_x = \frac{1}{\operatorname{arctg} x^2} \cdot (\operatorname{arctg} x^2)'_x.$$

Дифференциаллаш бу билан тугагани йўқ, чунки $\operatorname{arctg} x^2$ функциянинг ҳосиласи ҳали топилганича йўқ. Бу ҳам мураккаб функция, шунинг учун охирги амал бўлиб x^2 бўйича арктангенсни топиш ҳисобланади. Шунинг учун (37) формулани қайта қўлланиб ва унда энди $u = x^2$ деб ҳисоблаб, қуйидагини топамиз:

$$(\operatorname{arctg} x^2)'_x = (\operatorname{arctg} u)'_u \cdot (x^2)'_x = \frac{1}{1+u^2} \cdot 2x = \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}.$$

Узил-кесил қуйидагига эга бўламиз:

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg} x^2} \cdot \frac{2x}{1+x^4} = \frac{2x}{(1+x^4)\cdot \operatorname{arctg} x^2}.$$

Етарлича малакага эга бўлгандан сўнг u ҳарфи белгилаш учун киритилмайди. Шунга ўхшаш, масалан, ҳозиргина кўрилган функцияларнинг ҳосилаларини топиш мумкин:

$$(\sin x^3)' = \cos x^3 \cdot (x^3)' = \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3.$$

Шунга ўхшаш

$$(\ln \operatorname{arctg} x^2)' = \frac{1}{\operatorname{arctg} x^2}\,(\operatorname{arctg} x^2)' = \frac{1}{\operatorname{arctg} x^2} \cdot \frac{1}{1+(x^2)^2} \times$$

$$\times (x^2)' = \frac{1}{\operatorname{arctg} x^2} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x = \frac{2x}{(1+x^4)\operatorname{arctg} x^2}.$$

12. Гиперболик функцияларнинг ҳосилалари. V боб, 2-§, 7-пунктда гиперболик функциялар киритилган эди. Уларнинг ҳосилаларини топамиз. $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ бўлгани учун

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}[(e^x)' - (e^{-x})'] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Бу ерда e^{-x} ни дифференциаллашда биз мураккаб функцияни дифференциаллашдан фойдаландик: $(e^{-x})' = e^{-x}(-x)' = -e^{-x}$.

Шундай қилиб,

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x. \qquad (39)$$

Гиперболик косинуснинг ҳосиласи шунга ўхшаш топилади:

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x. \qquad (40)$$

Гиперболик тангенснинг ҳосиласини бўлинманинг ҳосиласи каби топамиз:

$$(\text{th}x)' = \left(\frac{\text{sh}x}{\text{ch}x}\right)' = \frac{\text{ch}x(\text{sh}x)' - \text{sh}x(\text{ch}x)'}{\text{ch}^2x} = \frac{\text{ch}x \cdot \text{ch}x - \text{sh}x \cdot \text{sh}x}{\text{ch}^2x} = \frac{\text{ch}^2x - \text{sh}^2x}{\text{ch}^2x}$$

$\text{ch}^2x - \text{sh}^2x = 1$ бўлгани учун

$$(\text{th}x)' = \frac{1}{\text{ch}^2x}. \tag{41}$$

Шунга ўхшаш гиперболик котангенснинг ҳосиласи топилади:

$$(\text{cth}x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2x}. \tag{42}$$

13. Ихтиёрий кўрсаткичли даражали функциянинг ҳосиласи. 7-пунктда натурал кўрсаткичли $y = x^n$ даражали функциянинг ҳосиласи келтириб чиқарилган эди. Ихтиёрий ҳақиқий n даражали $y = x^n$ функциянинг ҳосиласини топамиз. x ни мусбат деб ҳисоблаб, $x^n = e^{n \ln x}$ айниятдан* фойдаланамиз. У ҳолда $y = e^{n \ln x}$ нинг мураккаб функциясидир ва унинг ҳосиласи (37) формула бўйича топилади:

$$y' = \left(e^{n \ln x}\right)' = e^{n \ln x} \cdot (n \ln x)' = e^{n \ln x} \cdot \frac{n}{x}.$$

$e^{n \ln x} = x^n$ бўлгани учун

$$y' = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1}.$$

Натижа натурал кўрсаткичли ҳолдаги каби ҳосил бўлди ((14) формулага қаранг):

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Агар $x < 0$ да $y = x^n$ функция мавжуд бўлса, (14) формула ҳам ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин.

14. Дифференциаллаш формулаларининг жадвали. Аввал келтириб чиқарилган дифференциаллаш формулаларини келтирамиз:

I. $y = C$; $y' = 0$.

II. $y = x^n$; $y' = nx^{n-1}$.

III. $y = a^x$; $y' = a^x \ln a$.

III'. $y = e^x$; $y' = e^x$.

VIII. $y = \text{ctg}x$; $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

IX. $y = \arcsin x$; $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

X. $y = \arccos x$; $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

XI. $y = \text{arctg}x$; $y' = \frac{1}{1 + x^2}$.

* Бу айниятнинг ўринли эканини унинг икки томонини e асос бўйича логарифмлаш билан осон кўрсатиш мумкин.

IV. $y=\log_a x$; $y'=\frac{1}{x\ln a}$.

IV′. $y=\ln x$; $y'=\frac{1}{x}$.

V. $y=\sin x$; $y'=\cos x$.

VI. $y=\cos x$; $y'=-\sin x$.

VII. $y=\operatorname{tg} x$; $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

XII. $y=\operatorname{arcctg} x$; $y'=-\frac{1}{1+x^2}$.

XIII. $y=\operatorname{sh} x$; $y'=\operatorname{ch} x$.

XIV. $y=\operatorname{ch} x$; $y'=\operatorname{sh} x$.

XV. $y=\operatorname{th} x$; $y'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

XVI. $y=\operatorname{cth} x$; $y'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

15. Эгри чизиқ уринмаси ва нормалининг тенгламаси. $y=f(x)$ функция графигининг унинг бирор $M_0(x_0;\ y_0)$ нуқтасида уринувчи уринма (бу ерда $y_0=f(x_0)$) бу нуқта орқали ўтувчи $f'(x_0)$ га тенг $k_{\text{ур}}$ бурчак коэффициентга эга бўлган тўғри чизиқлар (6-пунктга қаранг). Шунинг учун берилган нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасидан фойдаланиб, бу уринма тенгламасини топиш мумкин (III бобдаги (7) формулага қаранг):

$$y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0). \tag{43}$$

Уринмага перпендикуляр бўлиб, уриниш нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиқ эгри чизиқ *нормали* дейилади (138- расм).

$y=f(x)$ функциянинг графигини қараймиз: $M_0(x_0;\ y_0)$ унинг нуқталаридан бири бўлсин. У ҳолда функция графигининг $M_0(x_0,\ y_0)$ нуқтасидан ўтказилган нормал тенгламаси

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0), \tag{44}$$

кўринишга эга бўлади, чунки нормалнинг $k_{\text{н}}$ бурчак коэффициенти уринманинг $k_{\text{ур}}=f'(x_0)$ бурчак коэффициенти билан перпендикулярлик шарти орқали боғланган:

$$k_{\text{н}}=-\frac{1}{k_{\text{ур}}}=-\frac{1}{f'(x_0)}.$$

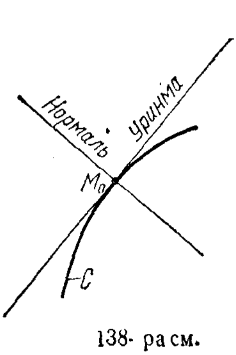
Мисол. $y=\operatorname{tg}x$ функция графигининг абсциссаси $x_0=\pi/4$ бўлган нуқтасидан ўтувчи уринмаси ва нормали тенгламасини топинг.

Ечилиши. Уриниш нуқтасининг ординатасини топамиз: $y_0=\operatorname{tg}x_0=\operatorname{tg}(\pi/4)=1$. Берилган функцияни дифференциаллаймиз ва уринманинг бурчак коэффициентини ва нормалнинг бурчак коэффициентини топамиз:

$(\operatorname{tg}x)'=1/\cos^2 x$, $k_{\text{ур}}=1/\cos^2 x|_{x=\pi/4}=2$, $k_{\text{н}}=-1/2$.

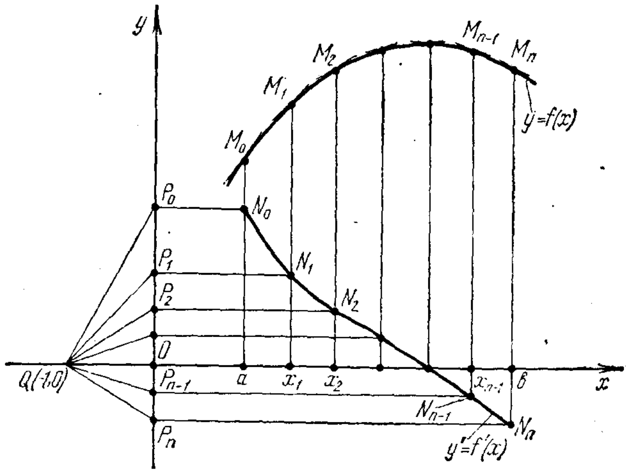
(43) ва (44) формулаларга кўра уринма ва нормал тенгламасини топамиз:

$$y-1=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\ y-1=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$



138- расм.

16. График дифференциаллаш. *График дифференциаллаш* деб $y=f(x)$



139- расм.

функциянинг берилган графиги бўйича $y'=f'(x)$ ҳосиланинг графигини (тахминан) ясашга айтилади. Бу ясашнинг қисқача баёнини келтирамиз. $y=f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги графиги берилган бўлсин (139-расм). $x_0=a$, x_1, $x_2 \ldots$, x_{n-1}, $x_n=b$ нуқталар ёрдамида бу сегментни n та бўлакка ажратамиз ва берилган графикда уларга мос M_0, M_1, $M_2, \ldots, M_{n-1}$, M_n нуқталарни белгилаймиз. Бу нуқталарнинг ҳар бири орқали уринма ўтказамиз. $Q(-1; 0)$ нуқта орқали уларнинг ординаталар ўқи билан кесишиш нуқтасигача бу уринмаларга параллел бўлган тўғри чизиқларни ўтказамиз. Бу нуқталарнинг ординаталари OP_0, OP_1, $OP_2, \ldots, OP_{n-1}$, OP_n мос равишда $y'=f'(x)$ ҳосиланинг a, x_1, $x_2 \ldots$, x_{n-1}, x_n нуқталардаги қийматларига тенг. Ҳақиқатан ҳам, OP_1Q учбурчакдан

$$OP_1/QO=\operatorname{tg} \alpha_1 \tag{45}$$

ни топамиз, бу ерда $\alpha_1 - OP_1$ кесма абсциссалар ўқи билан ва берилган функция графигининг M_1 нуқтаси орқали ўтган уринмага параллел тўғри чизиқлар ҳосил қилган бурчак. Ҳосиланинг геометрик маъносига кўра $\operatorname{tg}\alpha_1=f'(x_1)$ ни эътиборга олиб, (45) муносабатдан $OP_1=f'(x_1)$ ни ҳосил қиламиз.

P_1 нуқта орқали Ox ўқига параллел тўғри чизиқни, M_1 нуқта орқали эса Oy ўқини N_1 нуқтасигача параллел бўлган тўғри чизиқни ўтказамиз. N_1 нуқта x абсциссага ва $f'(x_1)$ ординатага эга, ва демак, $y'=f'(x)$ ҳосиланинг графигига тегишли. Шунга ўхшаш $N_0[x_0; f'(x_0)]$, $N_2[x_2; f'(x_2)], \ldots, N_{n-1}[x_{n-1}; f'(x_{n-1})]$ нуқталарни топамиз. Бу нуқталарнинг барчасини силлиқ эгри чизиқ билан бирлаштириб, $N_n[x_n; f'(x_n)]$ ҳосиланинг тахминий графигини ҳосил қиламиз, у бўйича бу ҳосиланинг $[a, b]$ сегмент ихтиёрий нуқтасидаги қийматини тақрибан топиш қийин эмас. $[a, b]$ сегментнинг бўлиниш нуқталари сони n қанчалик кўп бўлса, ҳосиланинг графигини ясаш шунга яқинроқ бўлади.

2-§. ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ҲОСИЛАЛАР

1. Юқори тартибли ҳосилаларни топиш. Фараз қилайлик $y = f(x)$ функция бирор интервалда дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда унинг $f'(x)$ ҳосиласи x нинг функцияси бўлади. Бу функция ҳам ҳосилага эга бўлсин. Бу ҳосила *иккинчи ҳосила* $y=f(x)$ функциянинг *иккинчи тартибли ҳосиласи* дейилади ва y'' ёки $f''(x)$ символ билан белгиланади*:

$$f''(x) = [f'(x)]'. \tag{46}$$

Бунда $f(x)$ *биринчи ҳосила* ёки $f(x)$ функциядан олинган функциянинг *биринчи тартибли ҳосиласи* дейилади.

1-мисол. $y = x^3$ функциянинг иккинчи ҳосиласини топинг.

Ечилиши. Берилган функциянинг биринчи ҳосиласини топамиз:

$$y' = (x^3)' = 3x^2.$$

Иккинчи тартибли ҳосилани биринчи ҳосиланинг ҳосиласи сифатида топамиз: $y'' = (3x^2)' = 6x$.

Иккинчи тартибли ҳосиланинг ҳосиласи *учинчи тартибли ҳосила* ёки *учинчи ҳосила* деб аталади ва y''' ёки $f'''(x)$ символ билан белгиланади.

$$f'''(x) = [f''(x)]'. \tag{47}$$

Умуман айтганда, $y = f(x)$ функциянинг *n-тартибли ҳосиласи* деб берилган функциянинг $(n-1)$-тартибли ҳосиласидан олинган биринчи тартибли ҳосилага айтилади ва $y^{(n)}$ ёки $f^{(n)}(x)$ символ билан белгиланади:

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'. \tag{48}$$

Биринчи тартибли ҳосиладан каттароқ тартибли ҳосилалар *юқори тартибли ҳосилалар* дейилади.

2-мисол. $y = \ln x$ функциянинг тўртинчи тартибли ҳосиласини топинг.

Ечилиши. Кетма-кет биринчи, иккинчи, учинчи, тўртинчи тартибли ҳосилани топамиз:

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x};\quad y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};\quad y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3};$$

$$y^{IV} = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{6}{x^4}.$$

3-мисол. y, e^{kx} функциянинг n-тартибли ҳосиласини топинг.

Ечилиши. Қуйидагига эгамиз:

$$y' = (e^{kx})' = ke^{kx};\; y'' = (ke^{kx})' = k^2e^{kx};\; y''' = (k^2e^{kx})' = k^3e^{kx}.$$

* „Игрек икки штрих" ёки „эф иксдан икки штрих" деб ўқилади.

Шунга ўхшаш қуйидагини топамиз: $y^{(n)}=k^n e^{kx}$.

4-мисол $y=\sin x$ функциянинг n-тартибли ҳосиласини топинг.

Ечилиши. Қуйидагига эгамиз:

$$y'=(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y''=(\cos x)'=-\sin x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\cdot 2\right);$$

$$y'''=(-\sin x)'=-\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\cdot 3\right);$$

$$y^{IV}=(-\cos x)'=\sin x-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\cdot 4\right).$$

Шунга ўхшаш қуйидагини топмиз*

$$y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\cdot n\right).$$

2. Иккинчи тартибли ҳосиланинг механик маъноси. 1-§, 4-пунктда биринчи тартибли ҳосиланинг механик маъноси аниқланган эди. Энди иккинчи тартибли ҳосиланинг механик маъносини аниқлаймиз.

Моддий нуқта тўғри чизиқ бўйлаб $s=f(t)$ қонун билан ҳаракат қилаётган бўлсин, бу ерда s—нуқтанинг t вақт оралиғида босиб ўтган йўл. У ҳолда бу ҳаракатнинг v тезлиги вақтнинг бирор функциясидир: $v=v(t)$. Вақтнинг t моментида тезлик $v=v(t)$ қийматга эга бўлади. Вақтнинг бошқа $t+\Delta t$ моментини қараймиз. Унга тезликнинг $v_1=v(t+\Delta t)$ қиймати мос келади. Вақтнинг Δt орттирмасига тезликнинг $\Delta v=v_1-v=v(t+\Delta t)-v(t)$ орттирмаси мос келади.

$\frac{\Delta v}{\Delta t}=w_{ўр}$ нисбат вақтнинг Δt оралиқдаги *ўртача тезланиши* дейилади.

t моментдаги w тезланиш деб $\Delta t\to 0$ даги ўртача тезланишнинг лимитига айтилади:

$$w=\lim_{\Delta t\to 0} w_{ўр}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=v_t'. \tag{49}$$

Шундай қилиб, *тўғри чизиқли ҳаракатнинг тезланиши деб вақт бўйича олинган тезликнинг ҳосиласига айтилади.*

Биз кўрдикки, тезлик s йўлнинг t вақт бўйича олинган ҳосиласи экан: $v=s'$. Буни ҳисобга олиб,

$$w=v_t'=(s')'=s'' \tag{50}$$

га эга бўламиз.

Шундай қилиб, *тўғри чизиқли (текис) ҳаракатнинг тезланиши йўлнинг вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосиласига тенг* экан.

* 3- ва 4-мисолларда ҳосил қилинган формулаларни қатъий келтириб чиқаришда математик индукция методидан фойдаланиш керак.

Мисол. Моддий нуқтанинг текис ҳаракати $s = \frac{t^3}{3}$ қонуни билан рўй бераётган бўлсин, бу ерда t вақт секундларда, s йўл эса сантиметрларда ифодаланган бўлсин. Ҳаракат қилаётган нуқтанинг вақтнинг $t = 5$ с моментидаги w тезланишини топинг.

Ечилиши. (50) формулага кўра $w = s'' = \left(\frac{t^3}{3}\right)'' = 2t$ га эга бўламиз. Демак, изланаётган тезланиш

$$w\,|_{t=5} = 2t\,|_{t=5} = 10\ (\text{см/с}^2)$$

бўлади.

3-§. ФУНКЦИЯНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

1. Функциянинг дифференциали ва унинг геометрик маъноси. $y = x^3$ функцияни қараймиз. Унинг бирор $x \neq 0$ нуқтада аргументнинг Δx орттирмасига мос келадиган Δy орттирмасини топамиз:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \Delta x + 3x (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 =$$
$$= 3x^2 \Delta x + (3x + \Delta x)(\Delta x)^2.$$

Кўриб турибмизки, функциянинг орттирмасини иккита қўшилувчи: биринчиси Δx га нисбатан чизиқли бўлган $3x^2 \Delta x$ (аниқроғи Δx га нисбатан пропорционал) ва иккинчиси Δx га нисбатан чизиқли бўлмаган $(3x + \Delta x)(\Delta x)^2$ кўринишда қараш мумкин. $x \to 0$ да иккала қўшилувчи чексиз кичик, яъни нолга интилади. Бироқ, бунда иккинчи қўшилувчи биринчисига нисбатан тез нолга интилади, яъни иккинчи қўшилувчининг биринчи қўшилувчига нисбатининг лимити нолга тенг:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{3x^2 \Delta x} = \frac{1}{3x^2} \lim_{\Delta x \to 0} (3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 0.$$

Бунинг натижасида Δx кичик бўлганда функция орттирмасини унинг чизиқли қисмига тақрибан тенг дейиш мумкин: $\Delta y \approx \approx 3x^2 \Delta x$. Шунинг учун орттирманинг чизиқли қисми функция орттирмасининг *асосий* (*бош*) *қисми* дейилади.

Қуйидаги жадвалда $x = 1$ нуқтада $y = x^3$ функция учун функциянинг орттирмаси $\Delta y = 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ нинг, унинг асосий чизиқли қисми $3\Delta x$, чизиқли бўлмаган қисми $3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ ва Δx нинг турли қийматлари учун қийматлари келтирилган.

Δx	Δy	Чизиқли қисм $3\Delta x$	Чизиқли бўлмаган қисм $3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$
0, 1	0, 331	0, 3	0, 031
0, 01	0, 030301	0, 03	0, 000301
0,001	0, 003003001	0, 003	0, 000003001

Бу жадвалдан чизиқли бўлмаган Δy қисм асосий чизиқли Δy қисмдан қанча тез камайиши яққол кўриниб турибди. Кўп функциялар шунга ўхшаш хоссага эга бўлади.

Айтайлик, $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги Δy орттирмасини

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha(\Delta x) \qquad (51)$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлсин, бу ерда Δx— функциянинг Δy орттирмасини келтириб чиқарадиган аргумент орттирмаси; A— ўзгармас катталик (яъни Δx га боғлиқ бўлмаган катталик); $\alpha(\Delta x)$ — Δx га нисбатан юқори даражали кичик бўлган чексиз кичик функция, яъни

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

Агар $y = f(x)$ функциянинг x нуқтадаги Δy орттирмасини (51) *формула кўринишида тасвирлаш мумкин бўлса, функциянинг аргумент орттирмасига тўғри пропорционал бўлган асосий қисми $A\Delta x$ бу функциянинг дифференциали дейилади.*

$y = f(x)$ функциянинг дифференциали dy символ билан белгиланади („де игрек“ деб ўқилади) ёки $df(x)$ („де эф икс“ деб ўқилади) билан билгиланади.

Демак, таърифга кўра

$$dy = A\,\Delta x. \qquad (52)$$

Шундай қилиб, агар $y = f(x)$ функция x нуқтада дифференциалга эга бўлса, у ҳолда унинг бу нуқтадаги орттирмаси иккита қўшилувчи: $dy = A\,\Delta x$ дифференциални ва $\Delta x \to 0$ да Δx га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик бўлган чизиқли бўлмаган $\alpha(\Delta x)$ қисмни ифодалар экан. Шунинг учун чексиз кичик Δx ларда чизиқли бўлмаган қисмга эътибор бермасдан, қуйидаги тақрибий $\Delta y \approx A\,\Delta x$ ёки

$$\Delta y \approx dy \qquad (53)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди ҳосиланинг мавжуд бўлиши билан дифференциалнинг мавжуд бўлиши орасидаги алоқани ўрнатувчи теоремаларни қараб чиқамиз.

Теорема. *Агар $y = f(x)$ функция x нуқтада дифференциалга эга бўлса, у ҳолда у бу нуқтада ҳосилага эга бўлади.*

Исботи. Шартга кўра $y = f(x)$ функция дифференциалга эга бўлгани учун унинг Δy орттирмасини (51) кўринишда ёзиб олиш мумкин:

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha(\Delta x),$$

шу билан бирга $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}$. (51) тенгликнинг иккала томонини Δx га бўлиб ва $\Delta x \to 0$ да лимитга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x + \alpha(\Delta x)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

Лекин $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ ва демак, $f'(x)$ ҳосила мавжуд экан ва у

A га тенг. Бунинг натижаси сифатида дифференциал қуйидаги кўринишни олади:

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{54}$$

Демак, дифференциалнинг мавжудлигидан ҳосиланинг мавжудлиги, яъни функциянинг дифференциалланувчанлиги келиб чиқади. Тескарисини, функциянинг дифференциалланувчи бўлишидан дифференциалнинг мавжуд бўлиши, яъни қуйидаги теорема ўринли бўлишини кўрсатамиз:

Теорема. *Агар $y=f(x)$ функция x нуқтада ҳосилага эга бўлса, у бу нуқтада дифференциалга эга бўлади.*

Исботи. $y=f(x)$ функция x нуқтада $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ҳосилага эга бўлсин. Фиксирланган (тайинланган) x да $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ нисбат Δx орттирманинг функциясидир. Лимитга эга бўлган ҳар қандай функция, бу лимитнинг ва ҳар бир чексиз кичик функциянинг йиғиндисига тенг (V боб, 1-§, 6-пунктга қаранг). Шунинг учун

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\beta(\Delta x), \tag{55}$$

бу ерда $\beta(\Delta x)$ — чексиз кичик Δx функция, яъни $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta(\Delta x)=0$.
(55) тенгликнинг иккала томонини Δx га кўпайтириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x+\Delta x\,\beta(\Delta x).$$

Шундай қилиб, функциянинг Δy орттирмаси иккита қўшилувчи $f'(x)\Delta x$ ва $\Delta x\cdot\beta(\Delta x)$ нинг йиғиндисидан иборат экан. Бунда биринчи қўшилувчи Δx га пропорционал, иккинчи қўшилувчи эса $\Delta x\to 0$ да Δx га нисбатан юқори даражали чексиз кичикдир, чунки

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\,\beta(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\beta(\Delta x)=0.$$

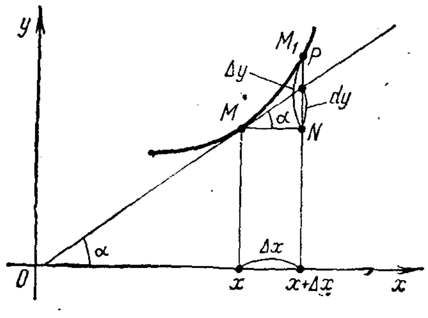
Демак, юқорида берилган таърифга кўра $y=f(x)$ функция x нуқтада дифференциалга эга ва у $f'(x)\Delta(x)$ га тенг бўлган.

Бинобарин, дифференциалнинг мавжудлиги ва функциянинг дифференциалланувчи бўлишлиги тушунчалари тенг кучлидир.
Дифференциалнинг геометрик маъносини ойдинлаштирамиз. Бунинг учун $y=f(x)$ функциянинг графигида $M(x; y)$ нуқта орқали уринма ўтказамиз ва унинг Ox ўқ билан ташкил қилган бурчагини α билан белгилаймиз (140-чизма). Бу уринманинг $x+\Delta x$ нуқта учун ординатасини қараймиз. Бу ордината билан уринманинг x ординатаси орасидаги айирмага тенг бўлган NP кесмани *уринма ординатасининг орттирмаси* деб атаймиз. Бу кесма dy дифференциалга тенглигини кўрсатамиз. Тўғри бурчакли MNP учбурчакдан $NP=\operatorname{tg}\alpha\cdot MN$ ёки $NP=\operatorname{tg}\alpha\cdot\Delta x$ га эгамиз.

Лекин ҳосиланинг геометрик маъносига кўра $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$. Шунинг учун

$$NP = f'(x)\,\Delta x = dy.$$

Шундай қилиб, биз дифференциалнинг геометрик маъносини ойдинлаштирдик: $y = f(x)$ *функциянинг x нуқтадаги дифференциали уринманинг ординатасининг орттирмасига тенг экан.*



140- расм.

2. Ҳосила — дифференциаллар нисбати кўринишида. $y = x$ функцияни қарайлик. Унинг ҳосиласи (54) формулага кўра

$$dy = dx = (x)'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

га тенг. Функциянинг x га тенг дифференциалини эркли ўзгарувчининг дифференциали деб аташга шартлашамиз, яъни *эркли ўзгарувчининг дифференциали унинг орттирмасига тенг:*

$$dx = \Delta x. \qquad (56)$$

У ҳолда функциянинг дифференциали учун (54) ифода қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$dy = f'(x)\,dx. \qquad (57)$$

Бу тенгликнинг иккала томонини dx га бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x). \qquad (58)$$

Шундай қилиб, *функциянинг ҳосиласи унинг дифференциалини эркли ўзгарувчининг дифференциалига нисбатига тенг экан.*

Кўпинча $\frac{dy}{dx}$ нисбатни y функциянинг x аргумент бўйича олинган ҳосиласини ифодаловчи символ деб қаралади.

3. Функциялар йиғиндисининг, кўпайтмасининг ва бўлинмасининг дифференциали. $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ лар x нинг дифференциалланувчи функциялари бўлсин. У ҳолда қуйидаги формулалар ўринли.

$$d(u + v) = du + dv, \qquad (59)$$

$$d(uv) = udv + vdu, \qquad (59')$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu + udv}{v^2} \quad (v \neq 0 \text{ шартда}). \qquad (59'')$$

(59) ва (59″) формулаларни келтириб чиқаришни китобхонга ҳавола қилиб, (59′) формулани келтириб чиқариш билангина чегараланамиз.

Дифференциал таърифига кўра:

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = vu'dx + uv'dx = vdu + udv,$$

чунки $u'dx = du$ ва $v'dx = dv$.

Мисол. $y = x^2e^x$ функциянинг дифференциалини топинг.

Ечилиши. (59′) формулага кўра қуйидагини топамиз:

$$dy = x^2\, d(e^x) + e^x d(x^2) = x^2(e^x)'dx + e^x(x^2)'dx = xe^x(x+2)dx.$$

4. Мураккаб функциянинг дифференциали. Дифференциал форманинг инвариантлиги. 2- пунктда кўрдикки, агар x эркли ўзгарувчи бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ функциянинг дифференциалини (57) кўринишда ёзиш мумкин: $dy = f'(x)dx$.

Бу кўриниш x эркли ўзгарувчи эмас, функция бўлганда ҳам сақланишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, $y = f(x)$ ва $x = \varphi(t)$ бўлсин, яъни y t нинг мураккаб функцияси бўлсин: $y = f[\varphi(t)]$. У ҳолда $dy = y'_t dt$. Мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасига кўра $y'_t = y'_x \cdot x'_t$ га эгамиз. Бундан

$$dy = y'_x \cdot x'_t dt = y'_x dx = f'(x)dx,$$

чунки $x'_t dt = dx$. Биз қуйидаги теоремани исбот қилдик.

Теорема. *$x = \varphi(t)$ бўлган $y = f(x)$ мураккаб функциянинг дифференциали аргумент x эркли ўзгарувчи бўлгандаги каби $dy = f'(x)\,dx$ кўринишга эга бўлади.*

Мураккаб функциянинг бу теорема билан ифодаланадиган хосиласи *дифференциалнинг инвариант формаси* дейилади.

(57) формуладан ҳосила учун $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ифода x аргумент эркли ўзгарувчи бўлмаганда ҳам ўз кўринишини сақлаши келиб чиқади.

5. Дифференциалнинг тақрибий ҳисоблашларга татбиқи. Тақрибий ҳисоблашларда абсолют ва нисбий хатоликлар учрайди.

Тақрибий катталик u_0 нинг *абсолют хатоси*, бу катталикнинг аниқ қиймати u билан тақрибий қиймати u_0 орасидаги айирманинг абсолют қийматига айтилади. Абсолют хатоликни Δ_u символ билан белгилаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta_u = |u - u_0|.$$

Кўпинча u нинг аниқ қиймати, демак, абсолют хатолик Δ_u ҳам номаълум бўлади. Шунинг учун абсолют хатолик чегараси тушунчаси киритилади.

u тақрибий катталикнинг Δ_u *абсолют хатолигининг чегараси* деб абсолют хатоликдан кичик бўлмаган ихтиёрий мусбат $\overline{\Delta}_u$ сонга айтилади:

$$|u - u_0| = \Delta_u \leqslant \overline{\Delta}_u. \tag{60}$$

(60) тенгсизликдан u катталикнинг аниқ қиймати $u_0 - \overline{\Delta}_u$ ва $u_0 + \overline{\Delta}_u$ ларнинг орасида, яъни $u_0 - \overline{\Delta}_u \leqslant u \leqslant u_0 + \overline{\Delta}_u$ орасида ётади.

Агар бирор u катталикнинг топилаётган абсолют хатолик чегараси $\bar{\Delta}_u$ га тенг бўлса, у ҳолда u катталик $\bar{\Delta}_u$ аниқликда топилган дейилади ва $u = u_0 \pm \bar{\Delta}_u$ каби ёзилади.

Равшанки, $\bar{\Delta}_u$ қанча кичик бўлса, u катталик шунча аниқ топилган бўлади. Бироқ хатолик чегарасини билган ҳолда яқинлашишнинг сифати ҳақида бир нарса дейиш қийин.

Шунга ўхшаш, масалан, Москвадан Ленинградгача бўлган масофани 1 км аниқликда ўлчаётганда одамнинг бўйини 10 см аниқликда ўлчаётгандаги абсолют хатоликка нисбатан анча катта абсолют хатоликка эга бўламиз. Лекин, равшанки, биринчи ҳолда ўлчаш сифати юқори. Яқинлашиш сифати ҳақида гапирилганда нисбий хатолик тушунчаси киритилади.

Нисбий хатолик деб Δ_u абсолют хатоликни ўлчанаётган катталикнинг u_0 тақрибий қиймати модулига нисбатига айтилади.

Нисбий хатоликни δ_u символ билан белгилаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\delta_u = \frac{\Delta_u}{|u_0|}.$$

Бу *нисбий хатоликнинг чегараси* деб абсолют хатоликнинг чегарасини қуйидаги катталик билан ўлчанадиган $\bar{\delta}_u$ тақрибий қиймати модулига нисбатига айтилади:

$$\bar{\delta}_u = \frac{\bar{\Delta}_u}{|u_0|}. \qquad (61)$$

δ_u ва $\bar{\delta}_u$ катталиклар кўпинча процентларда ифодаланади. Юқорида кўрилган мисолларга қайтиб, Москвадан Ленинградгача бўлган L масофани ва одам бўйининг l узунлигини ўлчашдаги нисбий хатоликларнинг чегарасини тахминан $L \approx 650$ км ва $l \approx 170$ см деб топамиз. $L_0 = 650$ км бўлгани учун $\bar{\Delta}_L = 1$ км, $\bar{\delta}_L = 1/650 \approx \approx 0{,}0015$ ёки $0{,}15\%$. Иккинчи ҳолда $l_0 = 170$ см, $\bar{\Delta}_l = 10$ см. Демак, $\bar{\delta}_l \approx 10/170 \approx 0{,}0588$ ёки $5{,}88\%$. Биринчи ҳолдаги ўлчаш иккинчисига нисбатан аниқроқ.

Энди дифференциални функциянинг тақрибий қийматларини ҳисоблашга қўлланамиз.

$y = f(x)$ функциянинг x нуқтадаги қиймати ва ҳосиласи бизга маълум бўлсин, $f(x + \Delta x)$ функциянинг бирор $x + \Delta x$ нуқтага яқин қийматини қандай топишни кўрсатамиз. Бунинг учун (53) тақрибий тенгсизликдан фойдаланамиз: $\Delta y \approx dy$ ёки $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ бўлгани учун $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, бундан

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \qquad (62)$$

Бу формула қўйилган масалани ҳал қилади. Бунда ҳосил бўладиган абсолют хатолик

$$\bar{\Delta} = \frac{M}{2}\cdot(\Delta x)^2 \qquad (63)$$

дан ортиб кетмаслигини кўрсатиш мумкин, бу ерда $M - |f''(x)|$ нинг $[x, x+\Delta x]$ сегментдаги энг катта қиймати.

1-мисол. (62) формуладан фойдаланиб, $\cos 61^\circ$ нинг тақрибий қийматини топинг.

Ечилиши. $\cos 61^\circ$ ни $y=f(x)=\cos x$ функциянинг хусусий қиймати сифатида қараймиз. Аргументнинг бошланғич қиймати сифатида $x=60^\circ$ ни ёки радианларда $x=\pi/3$ (бунда албатта $\cos x$ жадвалсиз ҳисобланади) деб оламиз. Аргументнинг янги (орттирилган) қиймати сифатида $x+\Delta x=61^\circ$ ни ёки радианларда $x+\Delta x=61\,\pi/180$ ни қабул қиламиз.

У ҳолда аргументнинг орттирмаси қуйидагича бўлади:

$$\Delta x = \frac{61\,\pi}{180} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}01745.$$

(62) формула бу ҳолда қуйидагича кўринишга эга бўлади:

$$\cos(x+\Delta x) \approx \cos x + (\cos x)' \cdot \Delta x \text{ ёки } \cos(x+\Delta x) \approx \cos x \cdot \sin x - \Delta x.$$

Бунга x ва Δx нинг қийматларини қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\cos 61^\circ \approx \cos 60^\circ - \sin 60^\circ\, 0{,}01745 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}01745 \approx 0{,}4849.$$

Хатоликни баҳолаш учун иккинчи тартибли ҳосилани топамиз: $f''(x) = (\cos x)'' = -\cos x$. Барча x лар учун, $|f''(x)| = |-\cos x| \leqslant 1$ бўлгани сабабли, абсолют хатолик (63) формуладан келиб чиқадики,

$$\frac{M}{2} \cdot (\Delta x)^2 < \frac{1}{2}\,(0{,}01745)^2 \approx 0{,}00015$$

дан ортмайди

2-мисол. Асосининг радиуси 0,5 см га орттирилганда баландлиги $H=40$ см ва асос радиуси $R=30$ см бўлган цилиндр ҳажмининг ортишини тақрибан ҳисобланг.

Ечилиши. Ўзгармас H баландликда ва асос радиуси ўзгарувчи бўлган да цилиндрнинг V ҳажми R нинг функцияси бўлади: $V=\pi H R^2$. Ҳажмнинг ΔV орттирмасини ҳисоблаётганда бу орттирмани дифференциал билан алмаштирамиз:

$$\Delta V \approx 2\pi H R \cdot \Delta R.$$

$\Delta R = 0{,}5$ см, $H=40$ см ва $R=30$ см бўлганда қуйидагини ҳисоблаб топамиз:

$$\Delta V \approx 2\pi \cdot 40 \cdot 30 \cdot 0{,}5 = 1200\,\pi \approx 3770 \text{ (см}^3\text{)}.$$

(63) формулани қўллаб, бу ҳолда абсолют хатолик чегараси $\bar{\Delta}_V = 31{,}4$ см^3 эканига китобхон осон ишонч ҳосил қилади.

6. Юқори тартибли дифференциаллар. $y=f(x)$ функцияни қарайлик ва унинг x аргументи эркли ўзгарувчи деб фараз қилайлик. У ҳолда бу функциянинг дифференциали $dy = f'(x)\,dx$ иккита ўзгарувчи x ва dx га боғлиқ бўлиб, бунда dx га боғлиқ эмас (берилган x нуқтадаги орттирмани бу нуқтадан эркли равишда танлаш мумкин). $dy = f'(x)\,dx$ ни фақат x нинг функцияси сифатида қараб (яъни dx ни ўзгармас деб ҳисоблаб), бу функциянинг дифференциалини топиш мумкин.

Берилган функциянинг дифференциалидан олинган иккинчи дифференциал унинг *иккинчи дифференциали* (ёки *иккинчи тартибли дифференциали*) дейилади ва d^2y ёки $d^2f(x)$ символ билан белгиланади. „де икки игрек“ ёки „де икки эф икс“ деб ўқилади.

Шундай қилиб, таърифга кўра

$$d^2y = d(dy).$$

$y = f(x)$ функциянинг иккинчи дифференциалини топамиз:

$$d^2y = d(dy) = d[f'(x)dx] = [f'(x)dx]'dx = f''(x)dxdx = f''(x)(dx)^2.$$

Дифференциаллашда dx ўзгармас деб ҳисобланади. Кейинчалик dx нинг қавсларини ташлаб юборамиз. У ҳолда d^2y учун ифода қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$d^2y = f''(x)dx^2. \qquad (64)$$

Учинчи, тўртинчи ва ҳ. к. тартибли дифференциаллар шунга ўхшаш топилади.

Умуман айтганда, $y = f(x)$ функциянинг *n-дифференциали* (ёки *n-тартибли дифференциали*) деб $(n-1)$-дифференциалнинг дифференциалига айтилади.

$y = f(x)$ функциянинг n-тартибли дифференциали d^ny ёки $d^nf(x)$ символ билан белгиланади. Шундай қилиб, таърифга кўра:

$$d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Функциянинг dy дифференциали баъзан *биринчи тартибли дифференциал* деб аталади.

Аргументи эркли ўзгарувчи $y = f(x)$ функция учун

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n \qquad (65)$$

формула ўринли бўлишини кўрсатиш осон.

(65) формуладан қуйидаги келиб чиқади:

$$f^n(x) = \frac{d^ny}{dx^n}. \qquad (66)$$

Хусусан, $n = 1$, 2 ва 3 да қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2y}{ax^2}, \quad f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Бошқача айтганда, берилган функциянинг n-тартибли ҳосиласини (унинг аргументи эркли ўзгарувчи бўлган шартда) унинг n-тартибли дифференциалини эркли ўзгарувчининг n-тартибли дифференциалига нисбати сифатида қараш мумкин.

4-пунктда биринчи тартибли $dy = f'dx$ дифференциал формаси инвариантлик хоссасига эга эканини кўрдик. Бироқ юқори тартибли дифференциал формаси инвариантлик хоссасига эга эмас.

Бинобарин, (65) формула ($n > 1$ да), умуман айтганда, аргумент эркли ўзгарувчи бўлмаган ҳол учун ўринли бўла олмайди. Бу ҳолда (66) формула ($n > 1$ да) ҳам, умуман айтганда, тўғри эмас. Шунинг учун x эркли ўзгарувчи бўлмаганда $f^{(n)}(x)$ ($n > 1$) ҳосилани d^ny нинг dx^n га нисбати сифатида қараш мумкин эмас.

Шунга қарамай, бу ерда ҳам $f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$ нисбатни дифференциалларнинг нисбати сифатида эмас, балки n-тартибли ҳосиланинг янги символик белгиланиши сифатида қараб (тушуниб) $f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$ ёзувни сақлашга ҳаракат қиламиз.

4-§. ПАРАМЕТРИК КЎРИНИШДА БЕРИЛГАН ФУНКЦИЯЛАР ВА УЛАРНИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ

1. Функцияларнинг ва чизиқларнинг параметрик берилиши. Биз бунгача текисликдаги шундай чизиқлар тенгламаларини қарадикки, бу тенгламалар чизиқларнинг бевосита берилган нуқталарининг координаталарини ўзаро боғлар эди. Бироқ, кўпинча чизиқнинг берилган x ва y координаталари учинчи бир ўзгарувчи катталикнинг функцияси деб қараладиган чизиқнинг берилиш усули қўлланилади. t ўзгарувчининг муайян қиймати учун қаралаётган иккита функцияси берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t),\\ y&=y(t), \end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

у ҳолда t нинг бу қийматларидан исталган биттасига x нинг аниқ бир қиймати ва y нинг аниқ бир қиймати мос келади ва демак, аниқ бир $M(x;\ y)$ нуқта мос келади. t ўзгарувчи (67) функцияларнинг аниқланиш соҳаси бўйича ўтганда $M(x;\ y)$ нуқта Oxy текисликда бирор C чизиқни чизади. (67) тенглама бу чизиқнинг *параметрик тенгламаси* дейилади, t—ўзгарувчи эса *параметр* дейилади.

Айтайлик, $x=x(t)$ функция тескари $t=\Phi(x)$ функцияга эга бўлсин. t учун бу ифодани (67) тенгламанинг иккинчисига қўйиб, y ни x нинг функцияси сифатида ифодаловчи

$$y=y[\Phi(x)] \qquad (68)$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Бу функция (67) тенгламалар билан параметрик ҳолда берилган деб шартлашиб оламиз. Бу тенгламалардан (68) тенгламага ўтиш *параметрни йўқотиш* дейилади. Параметрик ҳолда берилган функциялар қаралаётганда параметрни йўқотиш шарт бўлмаганидек, амалда параметрни йўқотиш ҳамма вақт ҳам мумкин бўлавермайди. Кўп ҳолларда (67) формулалар бўйича t параметрга турли қийматлар бериб x аргументнинг ва y функциянинг мос қийматларини ҳисоблаб топиш қулай.

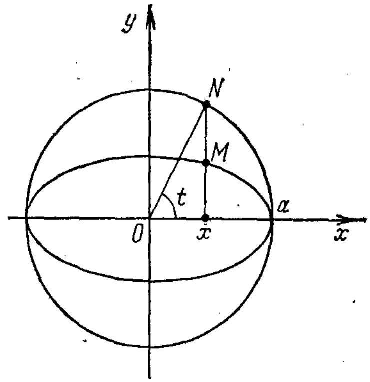
1-мисол. Маркази координаталар бошида, радиуси R бўлган айлананинг ихтиёрий нуқтаси M бўлсин Бу нуқтанинг x ва y декарт координаталари шу нуқтанинг қутб радиуси $r=R$ ва қутб бурчаги (биз бу ерда уни t орқали белгилаймиз) орқали қуйидагича белгиланади:

$$\left.\begin{aligned} x&=R\cos t,\\ y&=R\sin t, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

(I боб, 3-§ нинг 3-пунктига қаранг). (*) тенглама айлананинг параметрик тенгламаси дейилади. Бу тенгламада t 0 дан 2π гача ўзгарадиган қутб бурчаги параметр ҳисобланади.

Агар (*) тенгламани ҳадма-ҳад квадратга ошириб қўшсак, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ айниятга кўра параметр йўқотилади ва айлананинг Декарт координата системасидаги тенгламаси $x^2 + y^2 = R^2$ ҳосил бўлади, бу тенглама иккита элементар функцияга ажралади:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{ва} \quad y = -\sqrt{R^2 - x^2}.$$



141- расм.

Бу функцияларнинг ҳар бири (*) тенгламалар билан параметрик берилади бироқ бу функциялар учун параметрнинг ўзгариш соҳаси турлича бўлади. Бу функцияларнинг биринчиси учун $0 < t < \pi$; бу функциянинг графиги юқори ярим айланадир. Иккинчи функция учун $\pi < t < 2\pi$ унинг графиги қуйи ярим айланадир.

2-мисол. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсни ва маркази координаталар бошида, радиуси a бўлган айланани биргаликда кўрамиз (141-расм). Эллипснинг ҳар бир M нуқтасига айлананинг ўша M нуқта эга бўлган абсциссага эга ва y билан Ox ўқдан бир томонда ётган N нуқтасини мос қўямиз. N нуқтанинг ва демак, M нуқтанинг ҳолати ҳам N нуқтанинг t қутб бурчаги орқали тўлиқ аниқланади. Бунда уларнинг умумий абсциссаси x учун $x = a\cos t$ ифодани ҳосил қиламиз M нуқтанинг y ординатасини эллипс тенгламасидан топамиз:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - a^2\cos^2 t} = \pm b\sqrt{1 - \cos^2 t} = b\sin t.$$

Шундай қилиб, эллипс учун қуйидаги параметрик тенгламаларни ҳосил қиламиз:

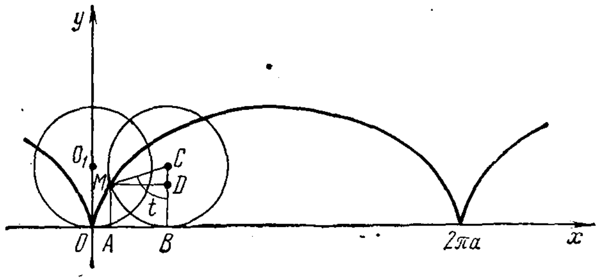
$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= b\sin t. \end{aligned}\right\}$$

Бу ерда t параметр 0 дан 2π гача ўзгаради.

3-мисол. Абсциссалар ўқи билан координаталар бошида уринадиган $O_1(0;\, a)$ нуқтада жойлашган ва радиуси a га тенг бўлган айланани қарайлик (142-расм). Фараз қилайлик, бу айлана абсциссалар ўқи бўйича сирпанмасдан силжисин. У ҳолда айлананинг бошланғич моментда координаталар боши билан устма-уст тушадиган M нуқтаси *циклоида* деб аталадиган чизиқни чизади. Айлананинг фиксирланган нуқтасини O ҳолатдан M ҳолатга кўчишидаги MCB бурилиш бурчагини t параметр деб олиб, циклоиданинг параметрик тенгламасини келтириб чиқарамиз. У ҳолда M нуқтанинг x ва y координаталари учун қуйидаги ифодаларни ҳосил қиламиз:

$x = OA = OB - AB = OB - MD$, $\quad y = AM = BD = BC - DC$. Айлана Ox бўйича силжимасдан силжигани учун OB кесманинг узунлиги $\smile{BM}$ ёйнинг узунлигига тенг. $\smile{BM}$ ёйнинг узунлиги a радиуснинг марказий бурчак t га кўпайтмасига тенг бўлгани учун $\smile{BM} = at$. Шунинг учун $\smile{OB} = at$. Бироқ $BC = a$, $MD = a\sin t$, $DC = a\cos t$. Демак,

$$\left.\begin{aligned} x &= at - a\sin t, \\ y &= a - a\cos t \end{aligned}\right\} \quad \text{ёки} \quad \left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}\right\}$$



142- расм.

Бу тенгламалар циклоиданинг параметрик тенгламаларидир t параметр 0 дан 2π гача ўзгарганда айлана бир марта тўлиқ айланиб чиқади M нуқта бунда циклоиданинг битта аркасини чизади.

Бу ҳолда t параметрни йўқотиш узундан-узоқ ифодага олиб келади ва у амалий жиҳатдан мақсадга мувофиқ эмас.

Чизиқларни параметрик берилиши механикада жуда кўп қўлланилади, бунда вақт параметр ролини ўйнайди.

4-мисол. Қуролдан горизонтга нисбатан α бурчак остида v_0 бошланғич тезлик билан отилган снаряднинг траекториясини аниқлайлик. Снарядни моддий нуқта деб, ҳавонинг қаршилигини, снаряднинг ўлчамларини ҳисобга олмаймиз.

Координаталар системасини танлаймиз Снаряднинг курол стволидан чиқиш нуқтасини координаталар боши деб оламиз. Ox ва Oy ўқларни қурол стволи билан бир текисликда жойлаштириб, Ox ўқни горизонтал, Oy ўқни вертикал йўналтирамиз. Агар Ернинг тортиш кучи бўлмаганда эди, снаряд Ox ўқ билан α бурчак ташкил қилган тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилар ва вақтнинг t моментида v_0t йўлни босиб ўтган бўлар эди. Вақтнинг t моментида снаряднинг координаталари $x = v_0t\cos\alpha$, $y = v_0t\sin\alpha$ га тенг бўлар эди. Ернинг тортиш кучи таъсирида снаряд шунча вақт ичида вертикал йўналишда $gt^2/2$ масофа (баландлик) га пасайган бўлиши керак. Шунинг учун ҳақиқатда вақтнинг t моментида снаряднинг координаталари қуйидаги формулалар орқали аниқланади:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0t\cos\alpha, \\ y &= v_0t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Бу тенгламаларда v_0, α ва g ўзгармас катталиклар. t ўзгариши билан снаряд нуқтасининг x ва y координаталари ҳам ўзгаради. (*) тенглама снаряд траекториясининг параметрик тенгламаларидир, бунда параметр t вақтдир.

(*) даги биринчи тенгламадан $t = \dfrac{x}{v_0\cos\alpha}$ деб белгилаб, уни иккинчи тенгламага қўйсак, снаряд траекториясининг қуйидаги кўринишдаги тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$y = x\cdot\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot x^2.$$

Бу – параболанинг тенгламасидир.

2. Параметрик кўринишда берилган функцияларни дифференциаллаш. Фараз қилайлик, x дан олинган y функция (67) тенгламалар билан параметрик кўринишда берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{aligned}\right\}$$

шу билан бирга t параметрнинг бирор ўзгариш соҳасида $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар дифференциалланувчи ва $x'(t) \neq 0$ бўлсин.

y'_x ҳосилани топамиз. Биз биламизки, $y'_x = \frac{dy}{dx}$. $dx = x'(t)\,dt$, $dy = y'(t)dt$ бўлгани учун

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)\,dt}{x'(t)\,dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{y'(t)}{x'_t}.$$

Шундай қилиб,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{69}$$

(69) формула параметрик кўринишда берилган функциянинг ҳосиласини топишга имкон беради.

1- мисол.

$$\left.\begin{aligned} x &= \sin^2 t, \\ y &= \sin 2t \end{aligned}\right\}$$

параметрик тенгламалари билан берилган y функциянинг ҳосиласини топинг.

Ечилиши. (69) формулага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(\sin 2t)'\ 2\cos t}{(\sin^2 t)'\ 2\sin t\cos t} = 2\operatorname{ctg} 2t.$$

2- мисол.

$$\left.\begin{aligned} x &= t - \sin t \\ y &= 1 - \cos t \end{aligned}\right\}$$

циклоидага $M_1(x_1;\ y_1)$ нуқтада параметрнинг $t = 3\pi/2$ қийматига мос келадиган уринма ва нормал тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Уриниш нуқтаси $M_1(x_1;\ y_1)$ нинг координаталарини топамиз:

$$x_1 = (t - \sin t)/_{t=3\pi/2} = \frac{3\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 1 = \frac{3\pi+2}{2};$$

$$y_1 = (1 - \cos t)/_{t=3\pi/2} = 1 - \cos\frac{3\pi}{2} = 1.$$

Уринма ва нормалнинг бурчак коэффициентини аниқлаш учун (69) формула бўйича ҳосилани топамиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-\cos t)'}{(t-\sin t)'} = \frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

Циклоиданинг M_1 нуқтасига уринувчи уринманинг ва нормалнинг бурчак коэффициентини топамиз:

$$k_{\text{ур}} = \frac{dy}{dx}\bigg|_{M_1} = \left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\bigg|_{t=3\pi/2} = -1;\ k_{\text{н}} = -\frac{1}{k_{\text{ур}}} = 1.$$

Энди берилган нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасидан фойдаланиб, уринма тенгламасини

$$y-1=-1\cdot\left(x-\frac{3\pi+2}{2}\right) \text{ ёки } x+y-\frac{3\pi+4}{2}=0$$

ва нормалнинг тенгламасини

$$y-1=1\left(x-\frac{3\pi+2}{2}\right) \text{ ёки } x-y-\frac{3\pi}{2}=0$$

ҳосил қилиш осон.

(69) формула ёрдамида параметрик берилган функцияларнинг юқори тартибли ҳосилаларини ҳам топиш мумкин. Иккинчи тартибли $\frac{d^2y}{dx^2}$ ҳосилани қандай топишни кўрсатамиз. Иккинчи тартибли ҳосила таърифига кўра $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$. (69) формула бўйича ҳосила t параметрнинг бирор функцияси сифатида топилади, яъни $\frac{dy}{dx}=f(t)$ деб ҳисоблаб кўрамизки, иккинчи ҳосилани топаётганда $\frac{dy}{dx}$ функцияни қуйидаги кўринишда параметрик берилган деб қараш керак

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=f(t),\\ x&=\varphi(t).\end{aligned}\right\}$$

Шунинг учун иккинчи ҳосила (69) формула бўйича топилади, бунда y ўрнига $\frac{dy}{dx}$ни қўйиш керак:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t}. \tag{70}$$

3- мисол.

$$\left.\begin{aligned}x&=\sin^2 t\\ y&=\sin 2t\end{aligned}\right\}$$

кўринишда параметрик берилган y функциянинг иккинчи тартибли $\frac{d^2y}{dx^2}$ ҳосиласини топинг.

Ечилиши. 1- мисолда биринчи тартибли $\frac{dy}{dx}$ ҳосила топилган эди. Бу ҳосилани

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=2\operatorname{ctg}2t,\\ x&=\sin^2 t\end{aligned}\right\}$$

кўринишда параметрик берилган функция деб қараб, (70) формула бўйича иккинчи ҳосилани топамиз:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t} = \frac{(2\operatorname{ctg} 2t)'}{(\sin^2 t)'} = \frac{-2 \cdot \frac{2}{\sin^2 t}}{2\sin t \cos t} = -\frac{4}{\sin^3 2t}.$$

5-§. СКАЛЯР АРГУМЕНТНИНГ ВЕКТОР-ФУНКЦИЯСИ

1. Фазовий эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари. Эгри чизиқ текисликдаги каби фазода ҳам параметрик берилиши мумкин. t ўзгарувчили қуйидаги учта функцияни қарайлик:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

Улар битта аниқланиш соҳасига эга. Бу соҳадан t нинг ҳар бир қийматига x, y ва z нинг маълум бир қийматлари ва демак, фазода маълум $M(x;\ y;\ z)$ нуқта мос келади. t ўзгариши билан M нуқта фазода бирор C эгриликни чизади. Бу эгри чизиқ (71) параметрик тенгламалар билан берилган деб шартлашайлик. t ўзгарувчини параметр деб атаймиз. IV бобда (2-§, 3-пункт) тўғри чизиқнинг фазодаги параметрик тенгламалари: $x = mt + x_1$, $y = nt + y_1$, $z = pt + z_1$ қаралган эди.

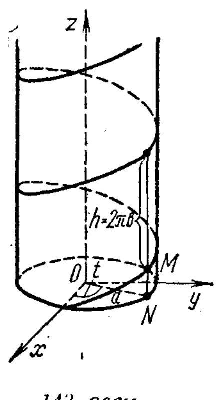
Яна битта мисол келтирамиз. Қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= a\sin t, \\ z &= bt \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

тенгламалар билан параметрик берилган эгри чизиқни қарайлик. Бу эгри чизиқ *винт чизиқ* дейилади (143-расм). t параметрнинг ихтиёрий қийматида

$$x^2 + y^2 = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2.$$

Бу винт чизиқ $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндрда жойлашган. Бунда M нуқта винт чизиқ бўйлаб силжиганда унинг Oxy текисликдаги проекцияси N радиуси a, маркази координаталар боши бўлган айлана бўйлаб ҳаракат қилади, шу билан бирга t N нуқтанинг қутб бурчаги бўлади. t параметр 0 дан 2π гача ўзгарганда $h = 2\pi b$ нуқта тўлиқ айланани чизади. Винт чизиқ M нуқтасининг z аппликатаси эса $h = 2\pi b$ га чўзилади. Бу катталик *винт чизиқнинг қадами* дейилади.



143-расм.

2. Скаляр аргументнинг вектор-функци-

яси ва унинг ҳосиласи. Бирор эгри чизиқ фазода (71) да кўрсатилган

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t), \end{aligned}\right\}$$

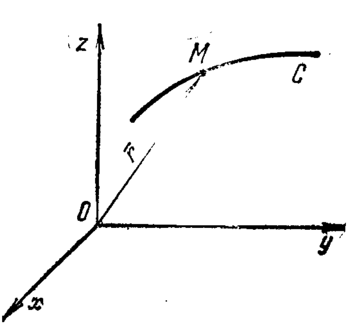
параметрик тенгламалари билан берилган бўлсин. Биз кўрдикки, $x(t)$, $y(t)$ ва $z(t)$ функцияларнинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлган t параметрнинг ҳар бир қийматига координаталари (71) формула бўйича топиладиган маълум бир $M(x;\ y;\ z)$ нуқта мос келади. Лекин ҳар бир M нуқтага унинг учи координаталар боши билан, охири эса M нуқта билан устма-уст тушадиган радиус-вектори $\mathbf{r} = \overline{OM}$ мос келади (144-расм). Бу векторнинг координата ўқларидаги проекциялари M нуқтанинг координаталари билан устма-уст тушади ва демак, (71) формула билан аниқланади. Шундай қилиб, t параметрнинг (71) функциянинг аниқланиш соҳасидан олинган ҳар бир қийматига қоида бўйича маълум бир вектор мос келади:

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \tag{73}$$

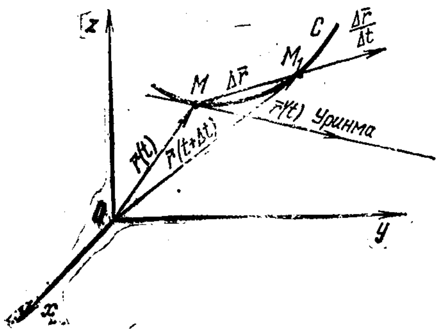
Бу қоидани ва $\mathbf{r}$ векторнинг ўзини t скаляр аргументнинг *векторли функцияси* (ёки *вектор-функцияси*) деб атаймиз ва $\mathbf{r}(t)$ символ билан белгилаймиз. $\mathbf{r}(t)$ радиус-векторнинг охири чизадиган C чизиқ *годограф* дейилади.

$\mathbf{r}(t)$ вектор-функциянинг берилиши учта скаляр функция —унинг $x(t)$, $y(t)$ ва $z(t)$ координата ўқларидаги проекцияларининг берилишига тенг кучлидир.

Вектор-функция учун лимит, узлуксизлик ва ҳосила тушунчасини киритамиз. Агар $t \to t_0$ да $\lim x(t) = x_0$, $\lim y(t) = y_0$, $\lim z(t) = z_0$ бўлса, $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$, $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ вектор-функциянинг лимити дейилади. Буни $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$ кўринишда ёзишга шартлашамиз. $\mathbf{r}(t)$ вектор-функция $t = t_0$ нуқтада ва t_0 ни ўз ичига олган интервалда аниқланган бўлсин. Агар $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}(t) =$



144-расм.



145-расм.

$\|\mathbf{r}(t_0)\|$ бўлса, $\mathbf{r}(t)$ вектор-функция t_0 нуқтада *узлуксиз* дейилади. $\mathbf{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$ вектор-функция $M(x; y; z)$ нуқтанинг радиус-вектори, яъни $\mathbf{r}(t) + \overline{OM}$ бўлсин (145-расм). t параметр ўзгариши билан M нуқта C годографни чизади. t параметрнинг қийматини танлаб оламиз ва фиксирлаймиз. Унга $\mathbf{r}(t)$ вектор ва M нуқта мос келади.

Параметрнинг бошқа $t + \Delta t$ қийматини қараймиз. Унга $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ вектор ва M_1 нуқта мос келади. $\mathbf{r}(t + \Delta t) = \overline{OM}$ ва $r(t) = \overline{OM}$ векторларнинг айирмасига тенг бўлган $\Delta\mathbf{r} = \overline{MM_1}$ векторни қараймиз:

$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ ва уни $\mathbf{r}(t)$ вектор-функциянинг орттирмаси деб атаймиз.

$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ нисбат $\Delta\mathbf{r}$ векторга коллинеар бўлган векторни ифодалайди, чунки бу вектор ундан $\frac{1}{\Delta t}$ кўпайтувчи билан фарқ қилади.

$\mathbf{r}(t)$ вектор-функция орттирмасининг унга мос аргументнинг Δt орттирмасига нисбатининг лимитига тенг бўлган вектор Δt нолга интилган шартда $\Delta\mathbf{r}$ *вектор-функциянинг скаляр аргумент* бўйича t *нуқтадаги ҳосиласи* дейилади.

$\mathbf{r}(t)$ *вектор-функция ҳосиласини* $\mathbf{r}'(t)$ ёки $\frac{dr}{dt}$ символ билан белгиланади. Шундай қилиб, таърифга кўра

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{74}$$

Вектор-функциянинг $\mathbf{r}'(t)$ ҳосиласини унинг координата ўқларидаги проекциялари орқали тасвирлаймиз:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

ва

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = x(t + \Delta t)\boldsymbol{i} + y(t + \Delta t)\boldsymbol{j} + z(t + \Delta t)\boldsymbol{k}$$

бўлгани учун

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) =$$

$$= [x(t + \Delta t) - \alpha(t)]\boldsymbol{i} + [y(t + \Delta t) - y(t)]\boldsymbol{j} + [z(t + \Delta t) - z(t)]\boldsymbol{k}$$

ва демак,

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}\boldsymbol{k}.$$

Шунинг учун

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \boldsymbol{i} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} + \boldsymbol{j} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} +$$

$$+ \boldsymbol{k} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} = x'(t)\boldsymbol{i} + y'(t)\boldsymbol{j} + z'(t)\boldsymbol{k}.$$

Шундай қилиб,

$$\mathbf{r}'(t)=x'(t)\boldsymbol{i}+y'(t)\boldsymbol{j}+z'(t)\boldsymbol{k}. \qquad (75)$$

Битта ўша $\mathbf{r}(t)$ вектор-функция учун t нинг турли қийматларидаги ҳосилани топиш мумкин. t нинг шундай қийматлари тўплами T бўлсин. Ҳар бир $t \in T$ учун $\mathbf{r}'(t)$ ҳосила мос келтирадиган қоида T тўпламда аниқланган янги вектор-функцияни тасвирлайди. Бу янги функция $\mathbf{r}(t)$ векторнинг ўзи каби $\mathbf{r}(t)$ *вектор-функциянинг t скаляр аргумент бўйича ҳосиласи* дейилади

3 Фазовий эгри чизиққа ўтказилган нормал текислик ва уринма тўғри чизиқ тенгламаси

$\mathbf{r}(t)$ векторнинг йўналишини аниқлаймиз. $\Delta\mathbf{r}$ векторга коллинеар бўлган $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ вектор MM_1 кесувчи бўйича йўналган (145-расмга қаранг). $\Delta t \to 0$ да M_1 нуқта M нуқтага чексиз яқинлашади, MM_1 кесувчи эса C эгри чизиқнинг M нуқтасидан ўтказилган L уринмага чексиз интилади.

Бундан $\mathbf{r}'(t)$ *вектор* $\overline{OM}=\mathbf{r}(t)$ *радиус-векторнинг годографига уринма бўйича йўналганлиги* келиб чиқади.

Параметрик (71) тенгламалар билан берилган фазовий эгри чизиққа параметрнинг $t=t_0$ қийматига мос келадиган бирор $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтасига ўтказилган уринма тенгламасини топамиз. Бу уринма M_0 нуқтадан ўтадиган тўғри чизиқдир. Шунинг учун унинг тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин (IV боб, 2-§ даги 4-пунктга қаранг):

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

бу ерда m, n ва p—тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторининг проекциялари. $\mathbf{r}'(t_0)=x'(t_0)\mathbf{i}+y'(t_0)\boldsymbol{j}+z'(t_0)\boldsymbol{k}$ вектор эгри чизиқ нинг M нуқтасидан ўтказилган уринма бўйича йўналган бўлгани учун унинг проекцияларини йўналтирувчи векторнинг проекциялари деб олиш мумкин: $m=x'(t_0)$, $n=y'(t_0)$, $p=z'(t_0)$. У ҳолда уринманинг изланган тенгламаси қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}. \qquad (76)$$

Фазовий эгри чизиққа ўтказилган *нормал текислик* деб уринма тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган ва уриниш нуқтасидан ўтадиган текисликка айтилади.

$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$—уриниш нуқтаси бўлсин. Бу нуқтадан ўтувчи нормал текислик тенгламасини келтириб чиқарамиз. Берилган $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

бу ерда A, B ва C— бу текисликнинг $N\{A;\ B;\ C\}$ нормал векторининг проекциялари (IV боб, 1-§ даги 2-пунктга қаранг).

Лекин нормал текислик таърифидан $\mathbf{r}'(t_0)\ \{x'(t_0);\ y'(t_0);\ z(t_0)\}$ векторни $\mathbf{N}$ вектор деб олиш мумкинлиги келиб чиқади. Шунинг учун $A=x'(t_0)$, $B=y'(t_0)$, $C=z'(t_0)$. Бу ҳолда нормал текисликнинг изланган тенгламаси қуйидаги кўринишга эга эканлиги келиб чиқади:

$$x'(t_0)\cdot(x-x_0)+y'(t_0)\cdot(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0. \qquad (77)$$

Мисол

$$\left.\begin{aligned} x&=2\cos t,\\ y&=2\sin t,\\ z&=t/\pi \end{aligned}\right\}$$

винт чизиққа параметрнинг $t_0=\pi/2$ мос келадиган M_0 нуқтадан ўтказилган уринма тўғри чизиқ ва нормал текислик тенгламасини топинг.

Ечилиши. Уриниш нуқтасининг координаталарини топамиз:

$$x_0=2\cos\frac{\pi}{2}=0;\quad y_0=2\sin\frac{\pi}{2}=2;\quad z_0=\frac{\pi/2}{\pi}=\frac{1}{2}.$$

$r'(t_0)$ векторнинг проекцияларини топамиз

$$x'(t_0)=(2\cos t)'\Big/_{t=\pi/2}=-2\sin\frac{\pi}{2}=-2;$$

$$y'(t_0)=(2\sin t)'\Big|_{t=\pi/2}=2\cos\frac{\pi}{2}=0;$$

$$z'(t_0)=\left(\frac{t}{\pi}\right)'\Big/_{t=\pi/2}=\frac{1}{\pi}.$$

(76) ва (77) формулалар бўйича уринма тўғри чизиқнинг тенгламасини

$$\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-\frac{1}{2}}{1/\pi}$$

ва нормал текисликнинг тенгламасини

$$-2(x-0)+0(y-2)+\frac{1}{\pi}\left(z-\frac{1}{2}\right)=0 \quad \text{ёки} \quad 4\pi x-2z+1=0$$

ҳосил қиламиз

4. Скаляр аргументли вектор-функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосиласининг механик маъноси. Вектор-функциянинг биринчи ҳосиласининг механик маъносини аниқлаймиз. Моддий нуқта $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ вектор-функция охири чизадиган эгри чизиқ бўйлаб (яъни векторнинг годографи бўйлаб) ҳаракат қилаётган бўлсин, бунда t параметр ҳаракат вақтини билдиради.

Моддий нуқтанинг вақтнинг t моментидаги $\mathbf{v}=\mathbf{v}(t)$ ҳаракат *тезлиги* деб уринма бўйлаб траектория ҳаракати бўйича йўналтирилган ва модули бўйича $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$ га тенг векторга айтилади, бунда Δs—вақтнинг t моментидан бошлаб Δt вақт оралиғида моддий нуқта босиб ўтган йўл.

Ҳаракатланаётган нуқта $\mathbf{r}(t)$ радиус-векторининг $\mathbf{r}'(t)$ ҳосиласи бу нуқтанинг ҳаракат тезлиги $\mathbf{v}=\mathbf{v}(t)$ га тенглигини кўрсатамиз.

3- пунктда $\mathbf{r}'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ вектор $\mathbf{r}$ векторнинг годографига уринма бўйича йўналтирилганлиги аниқланган эди. Бунда $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ вектор ва демак, $\mathbf{r}'(t)$ вектор ҳам нуқтанинг ҳаракат томонига йўналтирилган (145- расмга қаранг). Шундай қилиб, $\mathbf{r}'(t)$ вектор $\mathbf{v}$ тезлик вектори билан бир хил йўналишга эга экан. Бу векторларнинг модуллари ҳам тенг эканини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, ёй узунлигини (яъни нуқтанинг $\Delta t>0$ вақт оралиғида босиб ўтган йўлни) Δs билан белгилаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left|\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}\right|=\left|\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|=\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t},$$

бу ерда $|\Delta \mathbf{r}|$ — MM_1 ватарнинг узунлиги, Δs — MM_1 ёйнинг узунлиги. Кейинчалик (VIII боб, 3- § даги 6- пунктга қаранг) ёй узунлигининг уни тортиб турган ватар узунлигига нисбати бирга тенглиги $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta s}=1$ кўрсатилади. Лекин унда $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta s}=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}=1$ ва демак,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta s}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Тезликнинг таърифига кўра $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=|\mathbf{v}|$, иккинчи томондан $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}\right|=|\mathbf{r}'(t)|$ бўлгани учун $|\mathbf{r}'(t)|=|\mathbf{v}(t)|$. Шундай қилиб, $\mathbf{r}'(t)$ ва $\mathbf{v}(t)$ векторлар бир хил йўналишга ва тенг модулга эга. Шунинг учун

$$\mathbf{r}'(t)=\mathbf{v}(t). \tag{78}$$

Шундай қилиб, $\mathbf{r}'(t)$ *вектор-функциянинг ҳосиласи моддий нуқтанинг берилган* t *моментдаги ҳаракат тезлиги* $\mathbf{v}(t)$ *га тенг экан.*

Скаляр аргументли вектор функция ҳосиласининг механик маъноси мана шундадир. $\mathbf{r}(t)$ вектор-функциянинг $\mathbf{r}'(t)$ ҳосиласи ўз навбатида t скаляр аргументнинг вектор-функциясидир, буни ҳам, умуман айтганда, дифференциаллаш мумкин.

$\mathbf{r}'(t)$ дан t скаляр аргумент бўйича ҳосила $\mathbf{r}(t)$ *вектор-функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи* дейилади ва $\mathbf{r}''(t)$ ёки $\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}$ символ билан белгиланади. Шундай қилиб,

$$\mathbf{r}''(t)=\frac{d\mathbf{r}'(t)}{dt}.$$

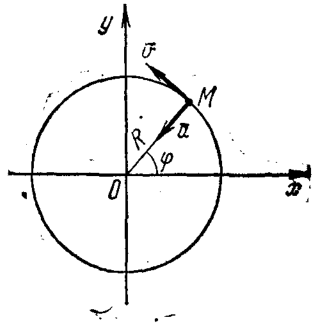
Биз кўрдикки, $\mathbf{r}'(t)=\mathbf{v}(t)$. Демак,

$$\mathbf{r}''(t)=\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}. \tag{79}$$

$\mathbf{v}(t)$ тезликнинг t вақт бўйича ҳосиласига тенг бўлган $\mathbf{a}(t)$ вектор *тезланиш* деб аталади.

Шундай қилиб, *вектор-функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи* $\mathbf{r}''(t)$ *моддий нуқта вақтнинг t моментдэ ҳаракати тезланишига тенг экан.*

Скаляр аргументли вектор-функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласининг механик маъноси шу билан характерланади.



146- расм.

Мисол. $x^2 + y^2 = R^2$ айлана бўйлаб ўзгармас ω бурчак тезлик билан ҳаракат қилувчи M моддий нуқтанинг тезлигини ва тезланишини топинг (146- расм).

Ечилиши. M нуқта радиус векторининг Ox ўқ билан ҳосил қилган бурчагини φ билан белгилаб, шартга кўра $\varphi/t = \omega$ ёки $\varphi = \omega t$ ни ҳосил қиламиз, бу ерда t — ҳаракат вақти. Бу M нуқтанинг x ва y координаталарини t вақт бўйича функция сифатида ифодалаш имконини беради:

$$x = R\cos\varphi = R\cos\omega t;\quad y = R\sin\varphi = R\sin\omega t.$$

Демак, M нуқтанинг радиус-вектори:

$$\mathbf{r} = xi + yj = R\cos\omega t\cdot i + R\sin\omega t\cdot j.$$

Энди M нуқтанинг $\mathbf{v}(t)$ тезлигини осон топамиз:

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t) = (R\cos\omega t)'i + (R\sin\omega t)'j = -R\omega\sin\omega t\cdot i + R\omega\cos\omega t\cdot j.$$

Тезлик модулини топамиз:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-R\omega\sin\omega t)^2 + (R\omega\cos\omega t)^2} = \omega R.$$

$\mathbf{v}$ ва $\mathbf{r}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенглигига ва демак, $\mathbf{v}$ ва $\mathbf{r}$ векторларнинг перпендикулярлигига ишонч ҳосил қилиш осон. Бундан $\mathbf{v}$ вектор M нуқта ҳаракат қилаётган айланага ўтказилган уринма бўйича йўналганлиги келиб чиқади (146- расмга қаранг).

Энди $\mathbf{a}(t)$ тезланишни топамиз:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -R\omega^2\cos\omega t\cdot i - R\omega^2\sin\omega t\cdot j.$$

$R\cos\omega t\cdot i + R\sin\omega t\cdot j = \mathbf{r}(t)$ бўлгани учун

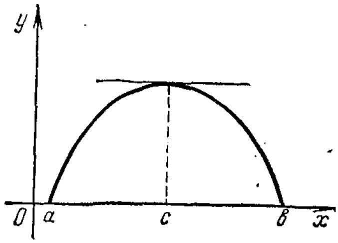
$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2\mathbf{r}(t).$$

Бундан $\mathbf{r}$ ва $\mathbf{a}$ векторлар қарама-қарши йўналишга эга эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, вақтнинг ҳар бир моментида айлана бўйлаб ўзгармас бурчак тезлик билан ҳаракатланувчи моддий нуқтанинг тезланиши бу айлана марказига йўналган бўлар экан (146- расмга қаранг).

6- §. ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАНУВЧИ ФУНКЦИЯЛАР ҲАҚИДА БАЪЗИ ТЕОРЕМАЛАР

1. Ферма теоремаси*. *$[a, b]$ интервалда аниқланган $f(x)$ функция бу интервалнинг бирор $x=c$ нуқтасида энг катта ва энг кичик қийматини қабул қилсин. Бундай ҳолда, агар бу*

* П. Ферма. (1601—1665)—француз математиги.



147- расм.

функциянинг $x=c$ нуқтада ҳосиласи мавжуд бўлса, у нолга тенг бўлади.

Исботи. Аниқлик учун функциянинг $]a, b[$ интервалдаги энг катта қиймати $f(c)=M$ бўлсин. $f'(c)=0$ эканлигини кўрсатамиз. Ҳосиланинг таърифига кўра:

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}.$$

Функция c нуқтада энг катта қийматни қабул қилгани учун Δx нинг ихтиёрий қийматида қуйидагига эгамиз:

$$f(c)\geqslant f(c+\Delta x) \text{ ва } f(c+\Delta x)-f(c)\leqslant 0.$$

Бундан, агар $\Delta x>0$ бўлса, $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\leqslant 0$ ва демак*,

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\leqslant 0.$$

Агар $\Delta x<0$ бўлса, $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\geqslant 0$ ва

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

Шундай қилиб, $f'(c)$ ҳосила мусбат ҳам, манфий ҳам бўла олмайди. Демак, $f'(c)=0$.

Ферма теоремасининг геометрик маъносини қуйидагича тушунтириш мумкин. Ҳосила функция графигида уринма абсциссалар ўқи билан ҳосил қилган α бурчак тангенсига тенг бўлгани учун $f'(c)=\operatorname{tg}\alpha=0$ тенглик функция энг катта ва энг кичик қийматга эга бўлган c абсциссали нуқтада функция графигига ўтказилган уринма Ox ўқига параллел бўлади (147- расмга қаранг).

2. **Ролль теоремаси****. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз, унинг ички нуқталарида дифференциалланувчи ва сегментнинг охирларида нолга айланса, яъни $f(a)=f(b)=0$ бўлса, у ҳолда $f'(x)$ ҳосила бу сегментнинг жуда бўлмаганда ички бир $x=c$ нуқтасида нолга тенг бўлади.*

Исботи. Бу функция сегментда узлуксиз бўлгани учун у ўзининг энг катта M ва энг кичик m қийматига эришади (V боб, 2- § даги 3- пунктга қаранг).

Агар $M=m$ бўлса, функция $[a, b]$ сегментда ўзгармас ва демак, сегментнинг ихтиёрий нуқтасида унинг ҳосиласи $f'(x)=0$. Энди $M\neq m$ бўлсин, у ҳолда бу сонлардан бири, масалан, $M\neq 0$. Шунинг учун, агар энг катта қиймат M га c нуқтада эришилса: $f'(c)=M$, у ҳолда c нуқта $[a, b]$ сегментнинг ички нуқтаси бў-

* V боб. 1- § даги 6- пункт, 7- теоремага қаранг.

** М. Ролль (1652—1719) — француз математиги.

лиши, яъни $]a, b[$ интервалга (чунки сегментнинг охирларида $f(a) = f(b) = 0$) тегишли бўлиши керак. Демак, Ферма теоремасига кўра $f'(c) = 0$.

Ролль теоремасининг геометрик маъносини қуйидагича тушунтириш мумкин: агар $[a, b]$ сегментда узлуксиз ва унинг ичида дифференциалланувчи функциянинг графиги Ox ўқни иккита $x = a$ ва $x = b$ нуқталарда кесиб ўтса, у ҳолда бу нуқталарнинг ўртасида ҳеч бўлмаганда битта c, $a < c < b$ нуқта топиладики, бунда функция графигига ўтказилган уринма абсциссалар ўқига параллел бўлади (147-расмга қаранг).

Мисол. $[0, \pi]$ сегментда $f(x) = \sin x$ функцияни қараймиз. Бу функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради: У $[0, \pi]$ сегментда узлуксиз ва дифференциалланувчи ҳамда унинг чегараларида нолга айланади: $\sin 0 = \sin \pi = 0$. Бу функциянинг $f'(x) = \cos x$ ҳосиласи $[0, \pi]$ сегментнинг ичида ёттан $x = \pi/2$ нуқтада нолга айланади.

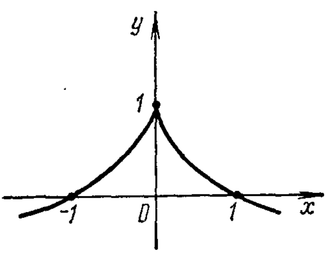
Изоҳ. Агар $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегмент ички нуқталарининг барчасида дифференциалланувчи бўлиш шарти бажарилмаса, Ролль теоремасидаги даъво тўғри бўлмаслиги мумкин.

Масалан, $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ функция $[-1, 1]$ сегментда узлуксиз ва сегментнинг чегараларида нолга айланади: $f(-1) = f(1) = 0$. Бироқ, $f'(x) = -2(3\sqrt[3]{x})$ ҳосила берилган сегментнинг ичида нолга айланмайди. $x = 0$ да ҳосила мавжуд бўлмагани учун шундай бўлади. 148-расмдан кўриниб турибдики, $[-1, 1]$ сегментда Ox ўқига параллел бўлган уринма мавжуд эмас.

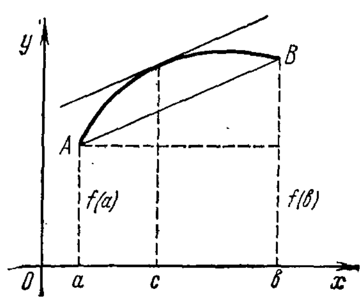
3. **Лагранж теоремаси***. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз ва унинг ички нуқталарида дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу сегмент ичида жуда бўлмаганда битта $x = c$ нуқта топиладики, бунда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{80}$$

Исботи. 149-расмда $y = f(x)$ функциянинг графиги кўрса-



148-расм.



149-расм.

* Ж. Лагранж (1736 — 1813) — француз математиги.

тилган. Иккита $A[a;\ f(a)]$ ва $B[b;\ f(b)]$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасидан фойдаланиб, AB ватар тенгламасини ёзамиз:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}.$$

Бундан ватарнинг ординатаси аниқланади:

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Энди функция графиги ва ватар ординаталари айирмасига тенг бўлган x нинг битта ўша қийматига мос келадиган $F(x)$ функцияни қарайлик:

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right].$$

Бу функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиришини осон текшириш мумкин. Ҳақиқатан, бу функция $[a,\ b]$ сегментда узлуксиз, чунки $f(x)$ ва $x-a$ лар бу сегментда узлуксиз.

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\tag{81}$$

ҳосила $]a,\ b[$ интервалда мавжуд, чунки унда $f'(x)$ мавжуд. Сегментнинг охирларида $F(a)=F(b)=0$. Ролль теоремасига кўра $[a,\ b]$ сегментнинг ичида $x=c$ нуқтани топиш мумкинки, унда $F'(c)=0$ бўлади. (81) тенглик асосида қуйидагини топамиз:

$$F'(c)=f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

Бундан

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

ни топамиз, шуни исбот қилиш талаб қилинган эди.

Лагранж теоремасини **г е о м е т р и к** маъносини қуйидагича тушунтириш мумкин. Теорема шартини қаноатлантирадиган $y=f(x)$ функциянинг графигини қарайлик (149-расмга қаранг). $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ нисбат ёйнинг охирларини туташтирувчи AB ватарнинг бурчак коэффициентини тасвирлайди. $f'(c)=\operatorname{tg}\alpha$ уринманинг бурчак коэффициенти бўлгани учун Лагранж теоремаси $y=f(x)$ функция графигида ҳеч бўлмаганда битта нуқта топилишини, бу нуқтада уринма ёй охирларини туташтирувчи ватарга параллел бўлишини тасдиқлайди. (80) формулани кўпинча қуйидагича ёзилади:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).\tag{82}$$

Бу тенглик қуйидагича ўқилади: $[a,\ b]$ *сегментда дифференциалланувчи бўлган функциянинг орттирмаси (яъни аргумент-*

нинг орттирмаси) сегмент узунлигининг бу сегмент ичидаги бирор нуқтасидаги функция ҳосиласининг кўпайтмасига тенг экан.

(82) формулани *Лагранж формуласи* ёки *чексиз орттирмалар формуласи* дейилади.

Мисол. $f(x) = x^4$ функция $[0, 1]$ сегментда берилган. x нинг функция графигига ўтказилган уринма графиклари ёй охирларини туташтирувчи ватарга параллел бўлгандаги қийматларини топинг.

Ечилиши. $f(b) = f(1) = 1$, $f(a) = f(0) = 0$ бўлгани учун (82) формулага кўра топамиз:

$$1 - 0 = (1 - 0)f'(c) \text{ ёки } f'(c) = 1.$$

Иккинчи томондан $f'(x)=4x^3$ ва демак, $f'(c)=4c^3$, яъни $4c^3=1$ ва $c=\sqrt[3]{1/4}\approx 0{,}63$.

Маълумки, $y = c$ ўзгармаснинг ҳосиласи нолга тенг. Лагранж теоремаси ёрдамида тескарисини исбот қиламиз.

Теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлса ва унинг барча ички нуқталарида $f'(x) = 0$ ҳосилага эга бўлса, $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ўзгармас бўлади.*

Исботи. x—аргументнинг a нуқтаси билан устма-уст тушмайдиган ихтиёрий нуқтаси бўлсин. (82) Лагранж формуласини $[a, x]$ сегментга мослаб ёзамиз: $f(x) - f(a) = (x - a)f'(c)$, c—бу ерда a ва x орасидаги бирор сон. $c]a, b[$ интервалга тегишли бўлгани учун $f'(c) = 0$. Демак, $f(x) - f(a) = 0$, яъни $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий x нуқтаси учун $f(x) = f(a)$, бу $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ўзгармас эканини билдиради.

Натижа. *Агар $\Phi(x)$ ва $F(x)$ функцияларнинг ҳосилалари $[a, b]$ сегментнинг барча нуқталарида тенг бўлса, бу функцияларнинг айирмаси бу сегментда ўзгармас бўлади.*

Исботи. $f(x) = \Phi(x) - F(x)$ бўлсин. У ҳолда $f'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = 0$, чунки шартга кўра $\Phi'(x) = F'(x)$. Демак, ҳозиргина исбот қилинган теоремага кўра $f(x) = \Phi(x) - F(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ўзгармас экан.

4. Коши теоремаси. *Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда узлуксиз ва унинг барча ички нуқталарида дифференциалланувчи бўлса, шу билан бирга $\varphi'(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда бу сегментнинг ичида шундай c нуқта топиладики, бунда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{83}$$

Исботи. Қуйидаги ёрдамчи функцияни қарайлик:

$$F(x) = [f(x) - f(a)] - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}[\varphi(x) - \varphi(a)].$$

Равшанки, бу функция $]a, b[$ интервалнинг барча нуқталарида дифференциалланувчи ва унинг охирларида нолга айланади:

$F(a)=F(b)=0$. Демак, Ролль теоремасига кўра шундай $c\in\,]a,\,b[$ нуқта топиладики, $F'(c)=0$ бўлади Шундай қилиб,

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\cdot\varphi'(c)=0.$$

Бундан

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

(83) тенглик *Коши формуласи* дейилади.

1-изоҳ. Теорема шартидан $\varphi(b)\neq\varphi(a)$ экани келиб чиқади, чунки акс ҳолда Ролль теоремасига кўра шундай $c\in\,]a,\,b[$ нуқта топиладики, унинг учун $\varphi'(c)\neq 0$ бўлар эди. Бу барча $x\in\,]a,\,b[$ лар учун $\varphi'(x)\neq 0$ шартга зид.

2-изоҳ. Агар $\varphi(x)=x$ дейилса, Лагранж теоремаси Коши теоремасининг хусусий ҳоли бўлар эди.

5. Лопиталь* қоидаси. V бобда биз иккита чексиз кичик ва чексиз катта функцияларнинг нисбатларининг лимитларини ҳисоблашни, яъни $0/0$ ва ∞/∞ кўринишдаги аниқмасликларни очиш (ҳал қилиш) билан танишдик. Қуйида шу аниқмасликларни ҳал қилиш учун қўлланиладиган *Лопиталь қоидаси* деб аталадиган янги қоида қаралади.

Теорема. *$f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар бирор $]a,\,b[$ интервалда дифференциалланувчи, шу билан бирга $\varphi'(x)\neq 0$ бўлсин ҳамда $x\to a+0$ да иккала функция ҳам нолга ёки чексизликка интилсин. Бундай ҳолда уларнинг ҳосилаларининг нисбати $x\to a+0$ да лимитга эга бўлса, бу функцияларнинг нисбати ҳам лимитга эга бўлади, яъни*

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{84}$$

Исботи. $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}\varphi(x)=0$ ҳол учун исботни келтириш билан чегараланамиз. $f(a)=\varphi(a)=0$ деб, a нуқтада $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларни аниқлаб оламиз У ҳолда бу функциялар исталган $[a,\,x]$ (бу ерда $a<x<b$) сегментда узлуксиз бўлиб қолади ва ихтиёрий $[a,\,x]$ сегмент учун Коши теоремасининг шартларини қаноатлантиради, Шунинг учун

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)},$$

бу ерда $a<c<x$. c катталик x га боғлиқ бўлишини, лекин $x\to a+0$ да c катталик a га интилишини айтиб ўтишимиз керак. Демак,

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{c\to a+0}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

---

* Г. Лопиталь (1661—1704) – француз математиги.

1-мисол. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$ ни топинг.

Ечилиши. Қуйидагига эгамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{1}=5\lim_{x\to 0}\cos 5x=5$$

Ҳосилаларнинг нисбати 0/0 ёки ∞/∞ кўринишдаги аниқмаслик бўлса, Лопиталь қоидасини яна қўллаш мумкин, яъни иккинчи тартибли ҳосилаларнинг нисбатига ўтиш мумкин.

2-мисол. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$ ни топинг.

Ечилиши. Бу ерда сурат ва махраж бир вақтда нолга интилади. Лопиталь қоидасини икки марта қўллаб, қуйидагини топамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{16\cos 4x}{2}=8\lim_{x\to 0}\cos 4x=8$$

$f(x)$ ва $\varphi(x)$ лар $x\to\pm\infty$ да ҳамда $x\to a-0$, $x\to a-0$ да бир вақтда 0 га ва ∞ га интилганда ҳам теорема ўринли бўлаверади.

3-мисол. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}$ ни топинг.

Ечилиши. Бу ерда $x\to+\infty$ да сурат ва махраж чексиз катта функцияларни беради Лопиталь қоидасини икки марта қўллаб, қуйидагини топамиз

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

Худди шунга ўхшаш

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{e^x}=0$$

бўлишини, *яъни ихтиёрий даражадаги кўпҳад кўрсаткичли функцияга нисбатан секин ўсишини кўрсатиш мумкин.*

Биз қараб чиққан 0/0 ва ∞/∞ кўринишдаги аниқмасликлардан ташқари қуйидаги кўринишдаги аниқмасликлар ҳам учрайди.

$\infty-\infty$ кўринишдаги аниқмаслик. Бундай аниқмаслик деганда $\lim\limits_{x\to c}[f(x)-\varphi(x)]$ лимитни топиш тушунилади, бунда $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар бир хил ишорали чексиз катта функциялар, яъни $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$ ва $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x)=\infty$.

Бу ҳол $f(x)-\varphi(x)$ ифодани алмаштириш ёрдамида 0/0 ёки ∞/∞ кўринишдаги аниқмасликка олиб келинади.

4-мисол. $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}(\sec x-\operatorname{tg}x)$ ни топинг.

Ечилиши. Агар $x\to\pi/2-0$ бўлса, $\sec x\to+\infty$ ва $\operatorname{tg}x\to+\infty$ демак, $\infty-\infty$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. Қуйидаги алмаштиришни бажарамиз:

$$\sec x-\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin x}{\cos x}.$$

---

* Бу ерда ва бундан кейин c ни сон деб ҳам, чексизлик деб ҳам тушуниш керак.

$x \to \pi/2-0$ да охирги ифодада сурат ва махраж бир вақтда нолга интилади Шундай қилиб, 0/0 кўринишдаги аниқмасликни ҳосил қиламиз. Лопиталь қоидасини қўлланиб, қуйидагини топамиз:

$$\lim_{x\to\pi/2-0}\frac{1-\sin x}{\cos x}\cdot\lim_{x\to\pi/2-0}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

Шундай қилиб, $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}(\sec x-\operatorname{tg} x)=0$.

$0\cdot\infty$ кўринишдаги аниқмаслик. Бу аниқмасликни очиш деганда $\lim\limits_{x\to c}f(x)=0$ ва $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x)=\infty$ бўлгандаги $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\,\varphi(x)]$ лимитни топиш тушунилади. Бу ҳолда ҳам $f(x)\,\varphi(x)$ ифодани алмаштириш ёрдамида 0/0 ёки ∞/∞ кўринишдаги аниқмасликни топишга келтирилади.

5-мисол. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\operatorname{tg}2x[\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x]$ ни топинг.

Ечилиши. $x\to\pi/4$ да $\operatorname{tg}2x\to\infty$ ва $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x\to 0$ бўлгани учун $\infty\cdot 0$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. Берилган ифодани қуйидагича алмаштириб:

$$\lim_{x\to\pi/4}\operatorname{tg}2x\,[\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x]=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}{\operatorname{ctg}2x}$$

га эга бўламиз. Бу ерда биз 0/0 кўринишдаги аниқмасликни ҳосил қилганимиз учун Лопиталь қоидасини қўлланишимиз мумкин:

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}{\operatorname{ctg}2x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\dfrac{1}{\cos^2x}+\dfrac{1}{\sin^2x}}{-\dfrac{2}{\sin^2 2x}}=-\frac{1}{2}.$$

1^∞ кўринишдаги аниқмаслик. Бу аниқмасликни очиш деганда $\lim\limits_{x\to c}f(x)=1$ ва $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x)=\infty$ бўлгандаги $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^{\varphi(x)}$ лимитни топиш тушунилади.

0^0 кўринишдаги аниқмаслик. Бу аниқмасликни очиш деганда $\lim\limits_{x\to c}f(x)=0$ ва $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x)=0$ бўлгандаги $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^{\varphi(x)}$ лимитни топиш тушунилади.

∞^0 кўринишдаги аниқмаслик. Бу аниқмасликни очиш деганда $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$ ва $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x)=0$ бўлгандаги $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^{\varphi(x)}$ лимитни топиш тушунилади. 1^∞, 0^0 ва ∞^0 кўринишдаги аниқмасликлар одатда $[f(x)]^{\varphi(x)}$ ифодани логарифмлаш натижасида 0/0 ёки ∞/∞ кўринишдаги аниқмасликларга келтирилади.

6-мисол. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)^{1/x}$ ни топинг.

Ечилиши. Бу ҳолда $(1+x^2)\to+\infty$, $1/x\to 0$ ва биз ∞^0 кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. $y=(1+x^2)^{1/x}$ деб белгилаймиз. Логарифмлаб, қуйидагини топамиз:

$$\ln y=\frac{1}{x}\ln(1+x^2)=\frac{\ln(1+x^2)}{x}.$$

$x \to +\infty$ да сурат ва махраж чексизликка интилгани учун ∞/∞ кўринишдаги аниқмасликни ҳосил қиламиз. Энди Лопиталь қоидасини қўлланиб, қуйидагини топамиз:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = 0.$$

$\ln y$ функция узлуксиз бўлгани учун $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln y) = \ln(\lim\limits_{x\to+\infty} y)$; демак, $\ln(\lim\limits_{x\to\infty} y) = 0$ ва $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$. Шундай қилиб, $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x^2)^{1/x} = 1$.

Изоҳ. Лопиталь қоидасига кўра берилган функциялар ҳосилаларининг нисбатининг лимити мавжуд бўлса, у ҳолда функциялар нисбатининг лимити ҳам мавжуд бўлади. Агар ҳосилалар нисбатининг лимити мавжуд бўлмаса, бу функциялар нисбатининг лимити мавжуд бўлмайди, деган сўз эмас. Масалан, $x\to+\infty$ да иккита чексиз катта: $f(x) = x + \sin x$ ва $\varphi(x) = x$ функцияларни қарайлик. $x \to +\infty$ да уларнинг нисбатининг лимити мавжуд, чунки

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

Лекин берилган функциялар ҳосилаларининг нисбати лимити мавжуд эмас:

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{(x+\sin x)'}{(x)'} = 1 + \cos x,$$

чунки $x \to +\infty$ да $\cos x$ ҳосилага эга эмас.

7-§. ФУНКЦИЯЛАРНИ ТЕКШИРИШДА ВА ГРАФИКЛАР ЯСАШДА ҲОСИЛАНИНГ ТАТБИҚИ

1. Функция ўсиши ва камайишининг етарли ва зарурий шартлари. V бобнинг 2-§ идаги 4-пунктда келтирилган ўсувчи ва камаювчи функцияларнинг таърифини келтирамиз.

Агар $x_2 > x_1$ тенгсизликдан (бу ерда x_2 ва x_1 — сегментга (ёки интервалга) тегишли бўлган ихтиёрий иккита нуқта) $f(x_2) > f(x_1)$ тенгсизлик келиб чиқса, сегментда (ёки интервалда) аниқланган $y = f(x)$ функция бу сегментда (ёки интервалда) *ўсувчи* дейилади (123-расмга қаранг).

$x_2 - x_1 = \Delta x$ ва $f(x_2) - f(x_1) = \Delta y$ белгилашларни киритиб, Δx ва Δy лар бир хил ишорали эканини айтиб ўтамиз. Демак, ўсувчи функция учун функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбати ҳар доим мусбат экан, яъни $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$.

Агар $x_2 > x_1$ тенгсизликдан, бу ерда x_2 ва x_1 — сегментга (ёки интервалга) тегишли бўлган ихтиёрий иккита нуқта, $f(x_2) < f(x_1)$ тенгсизлик келиб чиқса, сегментда (ёки интервалда) аниқланган $y = f(x)$ функция бу сегментда (ёки интервалда) *камаювчи* дейилади (123-расмга қаранг).

Бу ҳолда $\Delta x = x_2 - x_1$ ва $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ орттирмалар турли ишорага эга ва шунинг учун камаювчи функцияда орттирмаларнинг нисбати манфий, яъни $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$.

Функциянинг интервалда ўсувчи ва камаювчи бўлишининг етарли ва зарурий шартини аниқлаймиз.

1-теорема. (функция ўсувчи бўлишининг зарурий шарти). *Агар $]a, b[$ интервалда дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция ўсса, унинг ҳосиласи берилган интервалнинг ҳеч бир нуқтасида манфий бўлмайди, яъни $a < x < b$ учун $f'(x) \geqslant 0$ бўлади.*

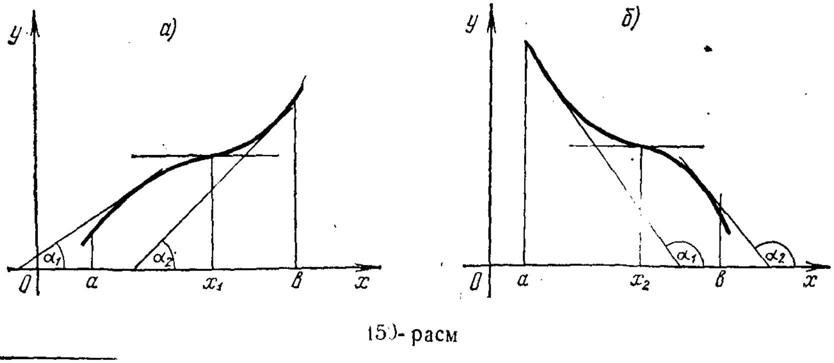
Исботи. $y = f(x)$ функция $]a, b[$ интервалда ўсувчи бўлсин. $]a, b[$ интервалга тегишли иккита x ва $x + \Delta x$ нуқтани қараймиз. У ҳолда юқорида кўрсатилгандек, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$.

$\Delta x \to 0$ да лимитга ўтиб, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$ ни ҳосил қиламиз*. Фаразимизга кўра функция дифференциалланувчи бўлгани учун $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ ва демак, $f'(x) \geqslant 0$.

Навбатдаги теорема ҳам худди шундай исбот қилинади.

2-теорема. (функция камаювчи бўлишининг зарурий шарти). *Агар $]a, b[$ интервалда дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция камайса, унинг ҳосиласи берилган интервалнинг ҳеч бир нуқтасида мусбат бўлмайди, яъни $a \leqslant x \leqslant b$ учун $f'(x) \leqslant 0$ бўлади.*

Қаралган теоремаларни геометрик равишда яққол тасвирлаш мумкин. Ҳақиқатан, ўсувчи функциянинг графиги абсцисса ўқи бўйича ўнг томонга қараб силжиганда юқорига кўтарилади. У ҳолда графикка ўтказилган уринмалар Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан ўткир бурчак α ни ҳосил қилади ёки баъзи нуқталарда (масалан, x_1 нуқтада) Ox ўққа параллел бўлади (150-*а* расм).



150-расм

* Чунки мусбат функциянинг лимити манфий бўлмайди (1-§, 6-пункт, 7-теоремага қаранг).

Ўткир бурчакларнинг тангенси мусбат (уринмалар Ox ўққа параллел бўлган нуқталарда нолга тенг) бўлгани учун ва ҳосиланинг геометрик маъносига кўра $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$ бўлгани учун ўсувчи функция учун $f'(x) \geqslant 0$ бўлади.

Шунга ўхшаш, агар функция камайса (150-б расм), уринмалар Ox ўқ билан α ўтмас бурчак ҳосил қилади ёки баъзи бир нуқталарда (масалан, x_2 нуқтада) Ox ўққа параллел бўлади.

Ўтмас бурчакларнинг тангенси манфий бўлганидан камаювчи функция учун $f'(x) \leqslant 0$ бўлади.

3-теорема (функция ўсувчи бўлишининг етарли шарти). *Агар $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлган $y = f(x)$ функция сегментнинг ҳар бир нуқтасида мусбат ҳосилага эга бўлса, у ҳолда бу функция $[a, b]$ сегментда ўсади.*

Исботи. Барча $a < x < b$ учун $f'(x)$ бўлсин. $[a, b]$ сегментдан иккита эркли x_1 ва x_2 қийматни оламиз, шу билан бирга $x_2 > x_1$. Лагранж формуласи (82) ни $[x_1, x_2]$ сегментга мослаб ёзамиз:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c), \quad x_1 < c < x_2.$$

$[a, b]$ сегментнинг барча нуқталарида $f'(x) > 0$, шунинг учун $f'(c) > 0$. Бундан ташқари $x_2 - x_1 > 0$ бўлгани учун $(x_2 - x_1) \times \times f'(c) > 0$ кўпайтма мусбат ва демак, $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Бундан $f(x_2) > f(x_1)$, яъни $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ўсувчи экан.

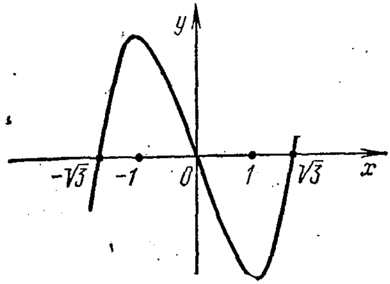
Навбатдаги теорема ҳам шунга ўхшаш исбот қилинади.

4-теорема (функция камайишининг етарли шарти). *Агар $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлган $y = f(x)$ функция бу сегментнинг ҳар бир ички нуқтасида манфий ҳосилага эга бўлса, бу функция $[a, b]$ сегментда камаювчи бўлади.*

Эслатиб ўтамизки, функция бирор интервалда фақат ўсувчи ёки фақат монотон камаювчи бўлгандагина монотон ўсувчи ёки монотон камаювчи бўлади (V боб, 2-§, 4-пунктга қаранг).

Мисол. $y = x^3 - 3x$ функциянинг монотонлик интервалларини аниқланг.

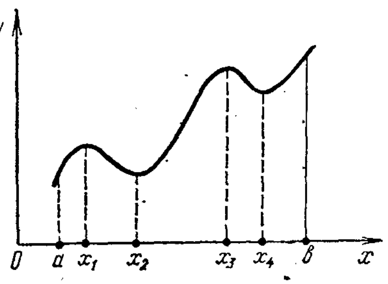
Ечилиши. Функциянинг ҳосиласи $y' = 3x^2 - 3$. x нинг $y' > 0$ бўладиган барча қийматлари учун функция ўсади. $3x^2 - 3 > 0$ тенгсизликни ечиб, $x > 1$ ёки $x < -1$ ни топамиз. Шундай қилиб, функция $-\infty < x < -1$ ва $1 < x < +\infty$ интервалларда ўсади. x нинг $y' < 0$ бўладиган барча қийматлари учун функция камаяди. $3x^2 - 3 < 0$ тенгсизликни ечиб, $x^2 < 1$ ёки $-1 < x < 1$ ни топамиз. Функция $-1 < x < 1$ интервалда камаяди. $y = x^3 - 3x$ функциянинг графиги 151-расмда тасвирланган.



151- расм

2. Функциянинг максимуми ва минимуми.

152-расмда тасвирланган узлуксиз $y = f(x)$ функциянинг графиги тасвирланган. Расмдан кўриниб турибдики, функциянинг x нуқтадаги қиймати функциянинг x нуқтадан чапдаги ва ўнгдаги „қўшни“ қиймат-



152- расм.

ларидан катта. Бу ҳолда функция x_1 нуқтада максимумга эга дейилади. x_3 нуқтада ҳам функция равшанки, максимумга эга.

Агар $x=c$ нуқтанинг атрофида бу атрофга тегишли бўлган барча $x \neq c$ нуқталар учун $f(x) < f(c)$ тенгсизлик бажарилса, $y=f(x)$ функция $x=c$ нуқтада максимумга эга бўлади.

x_2 нуқтада функциянинг қиймати „қўшни" қийматларнинг барчасидан кичик. Бу ҳолда функция x_2 нуқтада минимумга эга дейилади. x_4 нуқтада ҳам, равшанки, функция минимумга эга.

Агар $x=c$ нуқтанинг атрофида бу атрофга тегишли бўлган барча $x=c$ нуқталар учун $f(x) > f(c)$ тенгсизлик бажарилса, $y=f(x)$ функция $x=c$ нуқтада минимумга эга бўлади.

Максимум ва минимум умумий ном билан функциянинг *экстремуми* дейилади. Айтиб ўтиш керакки, агар функция нуқтада максимумга эга бўлса, бу шу нуқтада функция барча аниқланиш соҳасида энг катта қийматга эга бўлади деган сўз эмас. Максимумнинг таърифидан у функциянинг c нуқтага етарлича яқин бўлган қийматлари ичидан энг каттаси экани келиб чиқади. 152-расмдан кўриниб турибдики, функция x дан бошқа нуқталарда катта қийматларга эга бўлса ҳам, функция x_1 нуқтада максимумга эга дейилади. Функциянинг минимумига нисбатан ҳам худди шундай изоҳ бериш мумкин. Хусусан, функциянинг минимуми максимумига нисбатан катта бўлиши ҳам мумкин (152-расмдаги функциянинг x_1 ва x_4 нуқталардаги қийматларини қаранг).

Теорема (функция экстремумининг мавжуд бўлишининг зарурий шарти). *Агар $x=c$ нуқтада дифференциалланувчи $y=f(x)$ функция бу нуқтада максимум ва минимумга эга бўлса, у ҳолда унинг $x=c$ нуқтадаги ҳосиласи нолга айланади, яъни $f'(c)=0$ бўлади.*

Исботи. $y=f(x)$ функция, масалан, c нуқтада максимумга эга бўлсин. Максимумнинг таърифига кўра c нуқтанинг шундай атрофи мавжуд бўлиши керакки, бунда бу атрофнинг барча x ($x \neq c$) нуқталари учун $f(x) < f(c)$, яъни $f(c)$ — функциянинг шу атрофдаги энг катта қийматдир. Шартга кўра функция c нуқтада $f'(c)$ ҳосилага эга, бироқ Ферма теоремасига кўра (6-§, 1-пунктга қаранг) $f'(c)=0$ бўлиши керак.

Функциянинг минимуми учун ҳам шундай теоремани исбот қилиш мумкин.

Шу чоққача $y=f(x)$ функция экстремум нуқтасида ҳосилага эга бўлган ҳолнигина қаралди. Лекин шундай ҳоллар ҳам учраши мумкинки, функция экстремум нуқталарида ҳосилага эга бўлмаслиги мумкин.

Масалан, графиги 137-расмда тасвирланган $f(x)=|x|$ функция учун $x=0$ нуқтада ҳосила мавжуд эмас (1-§, 5 ва 6-пунктларга қаранг). Лекин равшанки, $x=0$ нуқтада функция минимумга эга.

Графиги 148- расмда тасвирланган $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ функция учун $f'(x)=-2/(3\sqrt[3]{x})$ ҳосила $x=0$ нуқтада мавжуд эмас (чексиз узилишга эга бўлади). Шунга қарамасдан, функция $x=0$ нуқтада максимумга эга.

Қаралган мисоллар тавсифланган функция экстремумининг мавжуд бўлишининг зарурий аломатини тўлдиришга имкон беради. *Агар узлуксиз* $y=f(x)$ *функция* $x=c$ *нуқтада экстремумга эга бўлса, функциянинг* $f'(x)$ *ҳосиласи бу нуқтада нолга айланади ёки мавжуд эмас.*

Айтиб ўтиш кераки, $f'(c)=0$ шарт (ёки $f'(c)$ мавжуд эмас) экстремум мавжудлигининг зарурий шарти бўлиши билан бирга, етарли бўла олмайди. Масалан, $f(x)=x^3$ функция учун $f'(x)=3x^2$ ҳосила $x=0$ нуқтада нолга айланади, лекин $x=0$ да функция экстремумга эга эмас (20- расмга қаранг).

Аргументнинг ҳосила нолга айланадиган ёки узилишга эга бўладиган (хусусан, чексизликка айланадиган) $x=c$ қиймати *критик қиймати* (*критик нуқтаси*) дейилади.

Шундай қилиб, функция экстремуми, агар у мавжуд бўлса, критик нуқталардагина маънога эга бўлиши мумкин. Лекин биз кўрдикки, ҳамма критик нуқталарда ҳам функция экстремумга эга бўлавермайди.

Энди критик нуқталарда ҳам экстремум бўлишини таъминлайдиган экстремум мавжудлигининг *етарли* деб аталадиган шартини кўрайлик.

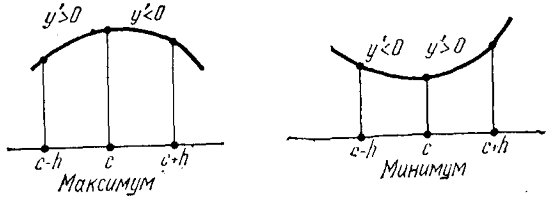
Дастлаб, кейинги мақсадларни кўзлаб, ҳосила критик нуқтасидан чапда битта ишорага, ўнг томондан бошқа ишорага эга бўлган ҳолларни—*ҳосила критик нуқтасидан ўтаётганда ўз ишорасини ўзгартиради деб* аташга келишиб оламиз.

Теорема (экстремум мавжудлигининг етарли аломати). *Агар* $y=f(x)$ *узлуксиз функция* $x=c$ *критик нуқтани ўз ичига оладиган бирор интервалнинг барча нуқталарида* $f'(x)$ *ҳосилага эга бўлса,* $f'(x)$ *ҳосила аргумент* $x=c$ *критик нуқтадан чапдан ўнгга ўтаётганда ўз ишорасини плюсдан минусга ўзгартирса, функция бу нуқтада максимумга эга, ишора минусдан плюсга ўзгарганда эса минимумга эга бўлади.*

Исботи. c — критик нуқта бўлсин, аниқлик учун аргумент c критик нуқтадан ўтаётганда ишорасини плюсдан минусга ўзгартирсин, яъни c дан ўнгда ҳосила мусбат, чапда эса манфий бўлсин. Бу шундай етарлича кичик $h>0$ сон топиладики, агар $c-h<x<c$ бўлса, $f'(x)>0$ ва агар $c<x<c+h$ бўлса, $f'(x)<0$ бўлади деган сўз.

Функциянинг ўсувчи ва камаювчи бўлиши ҳақидаги теоремаларга асосан, $[c-h, c]$ сегментда $f(x)$ функция ўсади, $[c, c+h]$ сегментда камаяди деган хулосага келамиз.

Демак, функциянинг c нуқтадаги қиймати $[c-h, c+h]$ сег-



153- расм.

ментнинг барча бошқа нуқталаридаги қийматига қараганда катта бўлади, бу c нуқтада функция максимумга эгалигини билдиради. Минимум учун бўлган ҳол ҳақидаги теорема ҳам шунга ўхшаш исботланади (153-расм).

Изоҳ. Агар $f'(x)$ ҳосила критик нуқтадан ўтаётганда ўз ишорасини ўзгартирмаса, функция бу нуқтада на максимумга, на минимумга эга бўлади.

1-мисол. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ функциянинг экстремумини текширинг.

Ечилиши. Бу функция бутун сон ўқида аниқланган ва дифференциалланувчи.

1. Ҳосиласини топамиз: $f'(x) = x^2 - 4x + 3$.

2. Ҳосилани нолга тенглаймиз ва ҳосиланинг илдизларини (критик нуқталарини) топамиз: $x^2 - 4x + 3 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Бу сонлар берилган функциянинг бутун аниқланиш соҳасини учта интервалга ажратади: $-\infty < x < 1$, $1 < x < 3$, $3 < x < +\infty$.

3. Бу интервалларнинг ҳар бирида ҳосила ўз ишорасини сақлайди (ишора ўзгариши фақат критик нуқтадан ўтаётганда рўй бергани учун). Шунинг учун ҳосила ишорасини ҳар бир интервалда текшираётганда бу интервалнинг ихтиёрий битта нуқтасини олиш етарли.

$-\infty < x < 1$ интервалда, масалан, $x = 0$ нуқтани олиш мумкин. Бу нуқтада $f'(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$. Шунинг учун $-\infty < x < 1$ интервалда ҳосила мусбат

Шунга ўхшаш $1 < x < 3$ интервалда ҳосила мусбатлигини, $3 < x < +\infty$ интервалда эса манфийлигини топамиз.

$x = 1$ критик нуқтадан ўтаётганда ҳосила ўз ишорасини плюсдан минусга ўзгартиргани учун функция бу нуқтада максимумга эга. Уни ҳисоблаймиз: $y_{max} = f(1) = 1/3 - 2 + 3 + 1 = 7/3$.

$x = 3$ нуқтадан ўтаётганда ҳосила ўз ишорасини минусдан плюсга ўзгартиради ва демак бу нуқтада функция минимумга эга:

$$y_{min} = f(3) = 1/3 \cdot 27 - 2 \cdot 9 + 3 \cdot 3 + 1 = 1.$$

Олинган натижаларни жадвалга ёзамиз:

x	$-\infty < x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$3 < x < +\infty$
y'	+	0	−	0	+
y	ўсади	максимум $y_{max} = 7/3$	камаяди	минимум $y_{min} = 1$	ўсади

Функциянинг графиги 154-расмда тасвирланган.

2-мисол. $f(x) = xe^x$ функциянинг экстремумини текширинг.

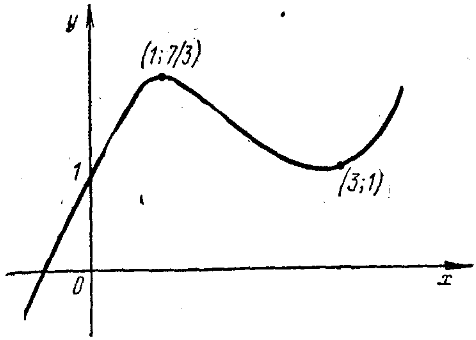
Ечилиши. Бу функция барча сон ўқида аниқланган ва дифференциалланувчи.

1. Ҳосилани топамиз: $f'(x) = e^x(x+1)$.

2. Ҳосилани нолга тенглаб, илдизларини топамиз: $f'(x) = 0$, $e^x(x+1) = 0$, $x = -1$. Бу сон функция аниқланиш соҳасини иккита интервалга ажратади:

$$-\infty < x < -1,$$
$$-1 < x < +\infty.$$

3. Ҳосила ишорасини ҳар бир интервалда текширамиз. $-\infty < x < -1$ интервалда, масалан, $x = -2$ қийматни оламиз, у ҳолда $f'(-2) = e^{-2}(-2+1) = -1/e^2 < 0$.



154- расм.

$-1 < x < +\infty$ интервалда $x = 0$ қиймат учун қуйидагига эгамиз: $f'(0) = e^0(0+1) = e^0 = 1 > 0$.

$x = -1$ нуқтадан ўтаётганда ҳосила ўз ишорасини минусдан плюсга ўзгартиргани учун $x = -1$ да функция минимумга эга:

$$y_{\min} = f(-1) = -e^{-1} = -1/e \approx -0{,}37.$$

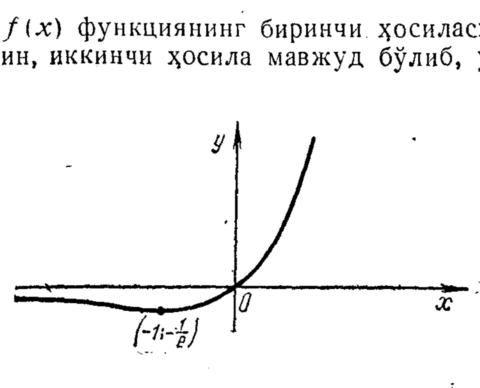
Олинган натижаларни жадвалга ёзамиз:

x	$-\infty < x < -1$	-1	$-1 < x < +\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	камаяди	минимум $y_{\min} = -1/e \approx -0{,}37$	ўсади

$y = xe^x$ функциянинг графиги 155-расмда тасвирланган.

3. Экстремум мавжуд бўлишининг иккинчи ҳосилага асосланган етарлилик аломати. Баъзи ҳолларда функциянинг экстремуми текширилаётганда иккинчи тартибли ҳосиланинг ишорасига асосланган экстремумнинг қуйидаги етарлилик аломати қулай бўлади.

Теорема. $x = c$ нуқтада $f(x)$ функциянинг биринчи ҳосиласи нолга тенг $[f'(c) = 0]$ бўлсин, иккинчи ҳосила мавжуд бўлиб, у нолдан фарқли бўлсин $[f''(c) \neq 0]$. Бу ҳолда, агар $f''(c) < 0$ бўлса, $x = c$ нуқтада функция максимумга эга бўлади, агар $f''(c) > 0$ бўлса, $x = c$ нуқтада функция минимумга эга бўлади.



155- расм.

И с б о т и. Аниқлик учун $f''(c) < 0$ бўлсин. c нуқтада функция максимумга эга бўлишини кўрсатамиз. Иккинчи ҳосиланинг таърифига кўра қуйидагига эгамиз:

$$f''(c) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f'(c+\Delta x) - f'(c)}{\Delta x}.$$

Шартга кўра $f'(c) = 0$ бўлгани учун

$$f''(c) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f'(c+\Delta x)}{\Delta x}.$$

$f''(c) < 0$ ни ҳисобга олсак, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f'(c+\Delta x)}{\Delta x} < 0$ ни ҳосил қиламиз.

Лимит манфий бўлгани учун Δx нинг абсолют қиймати бўйича кичик қийматлари учун $\frac{f'(c+\Delta x)}{\Delta x}$ тенгсизлик бажарилади.

$\Delta x < 0$ бўлсин; у ҳолда $f'(c+\Delta x) > 0$; агар $\Delta x > 0$ бўлса $f'(c+\Delta x) < 0$ бўлади. Бу c нуқтадан ўтаётганда биринчи ҳосила ўз ишорасини плюсдан минусга ўзгартиришини кўрсатади. Демак, 2-пунктда кўрилган экстремум мавжудлигининг етарлилик шартига кўра $f(x)$ функция c нуқтада максимумга эга. Агар $f''(c)$ бўлса, c нуқтада функция минимумга эга бўлишини шунга ўхшаш исбот қилиш мумкин.

1-мисол. $f(x) = x - 2\sin x$ функциянинг $[0, 2\pi]$ сегментдаги экстремумини топинг.

Ечилиши 1. $f'(x) = 1 - 2\cos x$ ҳосилани топамиз.

2. Ҳосилани нолга тенглаб, ҳосиланинг бу сегментга тегишли нуқталарини топамиз: $1 - 2\cos x = 0$, $\cos x = 1/2$, $x_1 = \pi/3$, $x_2 = 5\pi/3$.

3. $f''(x) = 2\sin x$ иккинчи ҳосилани топамиз ва унинг $x_1 = \pi/3$ ва $x_2 = 5\pi/3$ нуқталардаги ишорасини аниқлаймиз: $x_1 = \pi/3$ нуқтада қуйидагиларга эгамиз: $f''(\pi/3) = 2\sin(\pi/3) = \sqrt{3} > 0$. $x_2 = 5\pi/3$ нуқтада эса: $f''(5\pi/3) = 2\sin(5\pi/3) = -\sqrt{3} < 0$.

Демак, $x_1 = \pi/3$ да функция минимумга эга:

$y_{\min} = f(\pi/3) = \pi/3 - 2\sin(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3} \approx -0{,}68$, $x_2 = 5\pi/3$ нуқтада эса максимумга эга:

$y_{\max} = 5\pi/3 - 2\sin(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3} \approx 69{,}6$

Иккинчи ҳосила критик нуқтада нолга айланадиган ёки мавжуд бўлмаган ҳолда экстремум мавжуд бўлишлигининг етарлилик шартини қўлланиб бўлмайди. Бундай ҳолларда биринчи ҳосиланинг ишорасини ўзгартиришга асосланган етарлилик аломатидан фойдаланилади.

2-мисол. $f(x) = x^4$ функциянинг экстремумини топинг.

Ечилиши. Берилган функция барча сон ўқида аниқланган ва дифференциалланувчи.

1. Биринчи ҳосилани топамиз: $f'(x) = 4x^3$.

2. Ҳосилани нолга тенглаймиз ва унинг илдизларини топамиз:

$$f'(x) = 0,\ 4x^3 = 0,\ x = 0.$$

3. Иккинчи ҳосила $f''(x) = 12x^2$ ни топамиз $x = 0$ критик нуқтада иккинчи ҳосила ҳам нолга айланади. Бу ҳолда кўрилган етарлилик аломатини қўл-

ланиб бўлмайди. Биринчи ҳосиланинг ишораси ўзгаришига асосланган биринчи етарлилик аломатини қўлланиб, $x=0$ нуқтада функция минимумга эга бўлишини кўрсатиш мумкин, чунки $x=0$ нуқтадан ўтаётганда функциянинг биринчи ҳосиласи ўз ишорасини минусдан плюсга ўзгартиради (19-расмга қаранг).

4. Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматини топиш. $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлган, $y=f(x)$ функцияни қараймиз. Маълумки, бундай функция ўзининг энг катта ва энг кичик қийматига сегментнинг чегарасида ёки унинг ичида эришади (V боб, 2-§, 3-пунктга қаранг). Агар функциянинг энг катта қиймати (энг кичик қиймати) га сегментнинг ички c нуқтасида эришилса, чунки $[a, b]$ сегментнинг барча x нуқталарида $M=f(c)\geqslant f(x)$ (ёки $m=f(c)\leqslant f(x)$) тенгсизлик $[a, b]$ сегментнинг ичида ётадиган c нуқтанинг барча атрофи учун бажарилади, у ҳолда функциянинг бу қиймати максимум (минимум) бўлади.

Шундай қилиб, функциянинг $[a, b]$ сегментдаги **энг катта ва энг кичик қийматини топишнинг қуйидаги қоидасини ҳосил қиламиз:**

1. Функциянинг $]a, b[$ интервалдаги барча критик нуқталарини топамиз ва улардаги функция қийматларини ҳисоблаймиз.

2. Функциянинг сегмент чегараларида: $x=a$ ва $x=b$ нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз.

3. Бу қийматларнинг ичидан энг катта ва энг кичик қийматларини танлаймиз.

Изоҳ. Равшанки, сегментда узлуксиз бўлган функция, бу сегментнинг ички нуқтасида битта экстремумга эга бўлса, у бу нуқтада максимумга эга бўлса, энг катта қийматга, минимумга эга бўлса, энг кичик қийматга эга бўлади.

Мисол. $f(x)=x^3-3x$ функциянинг энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

Ечилиши. 1. Функциянинг $]-1{,}5;\ 2{,}5[$ интервалдаги критик қийматларини топамиз:

$$f'(x)=3x^2-3,\ 3x^2-3=0,\ x_1=-1,\ x_2=1.$$

Функциянинг бу нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)=2,\ f(1)=1-3=-2.$$

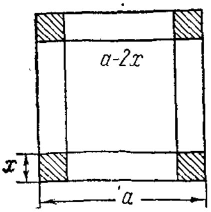
2. Функциянинг сегмент чегараларидаги қийматини ҳисоблаймиз:

$$f(-1{,}5)=(1{,}5)^3-3(-1{,}5)=1{,}125;\ f(2{,}5)=2{,}5^3-3\cdot 2{,}5=8{,}125.$$

Шундай қилиб, функциянинг энг катта қиймати $y_{\text{э. катта}}=8{,}125$ га сегментнинг ўнг чегарасида эришилади Функциянинг энг кичик қиймати $y_{\text{э. кич.}}=-2$ га $x=1$ нуқтада эришилади.

5. Максимум ва минимум назариясини масалалар ечишга қўлланилиши. Юқорида баён қилинган функциянинг максимум ва минимум назариясини амалий масалаларни ечишга қўллаш мумкин.

1-мисол. Томони a бўлган квадрат тунукадан тенг квадратчалар (расмда штрихлаб кўрсатилган) қирқиб ташлаб ва тунукани буклаб, ҳажми мумкин бўлгунча энг катта бўладиган очиқ яшик ясаш талаб қилинади (156-расм). Қирқиладиган квадратларнинг томони қандай бўлиши керак?



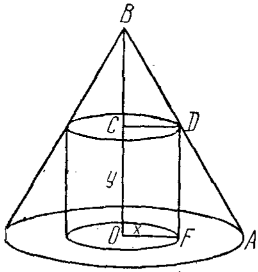
156- расм.

Ечилиши. Қирқиб олинадиган квадрат томони x га тенг бўлсин, у ҳолда яшикнинг тубини ташкил қилувчи квадратнинг томони $a-2x$ га тенг. Яшикнинг ҳажми:

$$V = (a - 2x)^2 x = a^2 x - 4ax^2 + 4x^3.$$

Масалани ечиш учун V функциянинг $]0, a/2[$ интервалдаги энг катта қийматини топиш керак. $V' = a^2 - 8ax + 12x^2$ ҳосилани топамиз. $a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$ тенгламани ечиб, кўрсатилган интервалга тегишли бўлган $x = a/6$ критик нуқтани топамиз*. $x = a/6$ нуқтада иккинчи ҳосила $V'' = -8a + 24x$ манфий бўлгани учун $[V''(a/6) = -8a + 24 \cdot a/6 = -4a < 0]$, $x = a/6$ нуқтада максимумга эришади:

$$V_{\max} = \left(a - \frac{2a}{6}\right)^2 \frac{a}{6} = \frac{2}{27} a^3.$$



157- расм.

4-пунктдаги изоҳга кўра бу максимум функциянинг энг катта қиймати бўлади. Шундай қилиб, қирқилган квадрат томони $a/6$ га тенг бўлса, қутининг ҳажми энг катта бўлади.

2-мисол. Берилган тўғри конусга ички чизиш мумкин бўлган ҳажми энг катта бўлган цилиндрнинг баландлигини топинг (157-расм).

Ечилиши. Конуснинг баландлиги $OB = h$, конус асосининг радиуси $OA = R$ бўлсин. Цилиндрнинг баландлиги OC ни y билан асос радиуси OF ни x билан белгилаймиз. Цилиндр ҳажми $V = \pi x^2 y$. Бу ҳолда V ҳажм иккита ўзгарувчи x ва y га боғлиқ. Бироқ бу ўзгарувчиларни боғлайдиган тенгламани тузиш мумкин. AOB ва DCB учбурчакларнинг ўхшашлигидан қуйидагиларни топамиз:

$$DC : CB = OA : OB \text{ ёки } x : (h - y) = R : h$$

Бундан $x = R(h - y)/h$. x нинг бу ифодасини цилиндр ҳажмининг формуласига қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$V = \frac{\pi R^2}{h^2}\left(h - y\right)^2 y.$$

Равшанки, y ўзгарувчи O дан h гача бўлган қийматларни қабул қилади. Бу функциянинг $]0, h[$ интервалдаги энг катта қийматини топамиз. V функциядан y ўзгарувчи бўйича ҳосилани топамиз:

$$V' = \frac{\pi R^2}{h^2}\left(h^2 - 4hy + 3y^2\right).$$

Ҳосилани нолга тенглаб, $]0, h[$ интервалдаги критик нуқтани топамиз

$$h^2 - 4hy + 3y^2 = 0; \quad y_1 = h/3.$$

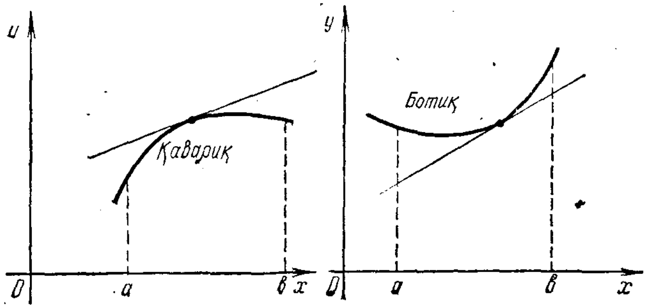
($y_2 = h$ нуқта $]0, h[$ интервалга тегишли эмас).

Иккинчи ҳосила $V'' = \frac{\pi R^2}{h^2}(-4h + 6y)$ нуқтада манфий бўлгани учун $y = h/3$ нуқтада V ҳажм максимумга эга. Бу максимал қиймат энг катта қиймат бўлади.

6. Функция графигининг ботиқлиги ва қавариқлиги. Букилиш нуқталари. Энди функция графигининг ботиқлик ва қавариқлиги билан боғлиқ бўлган хоссаларини ўрганамиз.

---

* Тенгламанинг иккинчи $x = a/2$ илдизи $]0, a/2[$ интервалга тегишли эмас.



158- расм.

Дифференциалланувчи $y=f(x)$ функциянинг графиги $]a, b[$ интервалда, агар у бу интервалда ўз уринмасидан пастда жойлашган бўлса, *қавариқ* дейилади (158-расм).

Агар функциянинг графиги унинг уринмасидан юқорида жойлашган бўлса, дифференциалланувчи $y=f(x)$ функциянинг графиги бу $]a, b[$ интервалда *ботиқ* дейилади (158-расм).

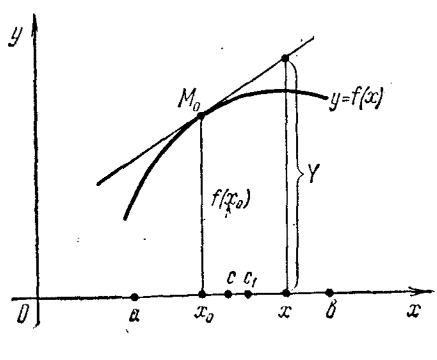
Шунга ўхшаш, масалан, $y=\sqrt{1-x^2}$ ярим айлана $]-1, 1[$ интервалда қавариқ, $y=x^2$ парабола $]-\infty, +\infty[$ интервалда ботиқ.

Функциянинг графиги баъзи интервалларда қавариқ, баъзи интервалларда ботиқ бўлиши мумкин. Масалан, 0 дан 2π гача бўлган интервалда қаралаётган $y=\sin x$ функциянинг графиги $]0, \pi[$ интервалда қавариқ, $]\pi, 2\pi[$ интервалда ботиқ (126-расмга қаранг).

Функция графиги берилган интервалда қавариқ ёки ботиқ бўлишининг етарли шартини қараймиз.

Теорема. $y=f(x)$ *функция* $]a, b[$ *интервалнинг барча нуқтасида иккинчи ҳосила* $f''(x)$ *га эга бўлсин. Агар бу интервалнинг барча нуқтасида* $f''(x)<0$ *бўлса, функция графиги бу интервалда қавариқ,* $f''(x)>0$ *бўлса, ботиқ бўлади.*

Исботи. Аниқлик учун $f''(x)<0$ бўлсин ва графикнинг қавариқлигини исбот қиламиз. Функция графигида $]a, b[$ интервалга тегишли x_0 абсциссага эга ихтиёрий M_0 нуқтани оламиз ва M_0 нуқта орқали уринма ўтказамиз (159 - расм). Теоремани исбот қилиш учун биз функциянинг гра-



159- расм.

фиги уринмадан пастда жойлашганлигини кўрсатишимиз керак Бошқача айтганда, битта ўша x абсцисса учун эгри чизиқ ординатаси уринма ординатасидан кичик бўлиши керак. График тенгламаси: $y = f(x)$; уринманинг M_0 нуқтадаги тенгламаси қуйидагича:

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)\ (x - x_0).$$

Бу ерда x абсциссага мос келадиган ордината Y билан белгиланган.

График ва уринманинг битта ўша x абсциссадаги айирмаси қуйидагига тенг:

$$y - Y = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0)]$$

ёки

$$y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\ (x - x_0).$$

$f(x) - f(x_0)$ айирмани Лагранж формуласи (82) бўйича алмаштирамиз,

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\ f'(c),$$

бу ерда c нуқта x_0 ва x орасида жойлашган.
У ҳолда

$$y - Y = f'(c)\,(x - x_0) - f'(x_0)\,(x - x_0) = (x - x_0)[f'(c) - f'(x_0)]. \quad (85)$$

$f'(c) - f'(x_0)$ айирмани уни $f'(x)$ ҳосилага қўлланиб, (82) формула бўйича яна алмаштирамиз:

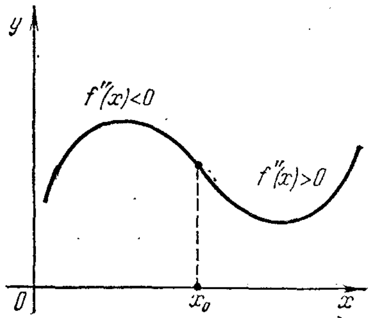
$$f'(c) - f'(x_0) = (c - x_0) f''(c_1),$$

бу ерда c_1 катталик x_0 ва c орасида, демак, x_0 ва x орасида жойлашган. Айирма ифодасини (85) тенгликка қўйиб, $y - Y = (x - x_0)\ (c - x_0) f''(c_1)$ ни ҳосил қиламиз $x - x_0$ ва $c - x_0$ айирмалар бир хил ишорага эга, чунки x_0 ва x орасида жойлашган, демак, уларнинг кўпайтмаси $(x - x_0)\ (c - x_0) > 0$. Шартга кўра $]a, b[$ интервалда $f''(x) < 0$ бўлгани учун, хусусан, $f''(c_1) < 0$. Шунинг учун $y - Y = (x - x_0)\ (c - x)_0 f''(c) < 0$. Шундай қилиб. $]a, b[$ интервалдаги барча нуқталар учун уринманинг ординатаси график ординатасидан катта, яъни график қавариқ.

Худди шунга ўхшаш $f''(x) > 0$ да график ботиқ бўлиши исботланади. Узлуксиз функция графигининг қавариқлик қисмидан ботиқлик қисмини ажратадиган нуқтаси *букилиш нуқтаси* дейилади. Функция графигининг букилиш нуқтасини топиш қуйидаги теоремаларга асосланган.

Теорема (букилиш нуқтаси мавжудлигининг зарурий шарти). *$y = f(x)$ функция $]a, b[$ интервалда узлуксиз иккинчи $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда, агар абсциссаси $x_0 \in]a, b[$ бўлган нуқта берилган функциянинг графигининг букилиш нуқтаси бўлса, $f''(x_0) = 0$ бўлади.*

Исботи. Тескарисини фараз қиламиз, яъни $f''(x_0) \neq 0$ бўлсин. Аниқлик учун $f''(x_0) > 0$ бўлсин. У ҳолда иккинчи ҳосиланинг узлуксизлиги ҳақидаги фаразга кўра у x_0 нуқтанинг бирор атрофида мусбат бўлади (V боб, 2-§, 1-пунктга қаранг) ва демак, функция графиги бу атрофда ботиқ (281-бетдаги теоремага қаранг). Лекин бу x_0 нуқта букилиш нуқтасининг абсциссаси эканлигига қарама-қаршидир. Бу қарама-қаршилик $f''(x_0) = 0$ тўғрилигини кўрсатади.



160- расм

$y = f(x)$ функция графиги абсциссаси $x = x_0$ бўлган букилиш нуқтасига эга бўлсин. Агар $x = x_0$ да иккинчи ҳосила узлуксиз бўлса, $f''(x_0) = 0$ бўлади. Бироқ бошқа ҳоллар, яъни узлуксиз функциянинг иккинчи ҳосиласи узилишга эга бўлган ҳол ҳам бўлиши мумкин.

Масалан, $y = \sqrt[3]{x^5}$ функциянинг иккинчи ҳосиласи $y'' = 10/(9\sqrt[3]{x})$ Равшанки, $-\infty < x < 0$ да $y'' < 0$ ва $0 < x < +\infty$ да $y > 0$ бўлади. Демак, берилган функциянинг графиги $x = 0$ да букилиш нуқтасига эга. Бироқ бу нуқтада функциянинг иккинчи ҳосиласи мавжуд эмас.

Шундай қилиб, *узлуксиз функция графигининг букилиш нуқталари абсциссаларини иккинчи ҳосила нолга тенг ёки узилишга эга бўлган (хусусан, мавжуд бўлмаган) нуқталардан излаш керак экан.*

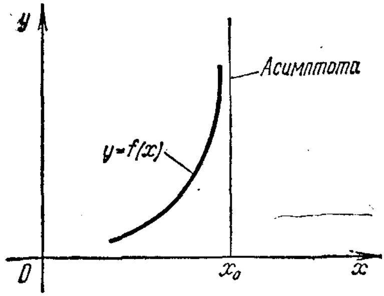
Теорема (букилиш нуқтаси мавжудлигининг етарли шарти). *Агар узлуксиз функциянинг иккинчи $f''(x)$ ҳосиласи x_0 нуқтадан ўтаётганда ўз ишорасини ўзгартирса, у ҳолда $x = x_0$ абсциссали с нуқта функция графигининг букилиш нуқтаси дейилади.*

Исботи. Масалан, $x < x_0$ да $f''(x) < 0$ ва $x > x_0$ да $f''(x) > 0$ бўлсин. Бу ҳолда x_0 дан чапда функция графиги қавариқ, ўнгда ботиқ. Демак, x_0 нуқта қавариқлик интервалини ботиқлик интервалидан ажратади, яъни функция графигининг $(x_0; f(x_0))$ нуқтаси букилиш нуқтаси бўлади (160-расм).

Мисол. $f(x) = x^3 - 3x$ функциянинг қавариқ ва ботиқлигини текширинг.
Ечилиши. Иккинчи ҳосилани топамиз: $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$.

$f''(x)$ ни нолга тенглаймиз: $6x = 0$, бундан $x = 0$. Агар $x < 0$ да $f''(x) = 6x < 0$ ва агар $x > 0$ да $f''(x) = 6x > 0$ ни эътборга олсак, $]-\infty, 0[$ интервалда график, қавариқ, $]0, +\infty[$ интервалда ботиқ бўлишини хулоса қиламиз: $x = 0$ нуқтада функция графиги $x = 0$ букилиш нуқтасига эга (151-расмга қаранг).

7. Функция графигининг асимптоталари. Функцияни текшираётганда функция графигининг нуқтаси координаталар бошидан чексиз узоқлашганда ёки бошқача айтганда унинг ўзгарувчи



161- расм.

нуқтаси чексизликка интилганда график формасини билиб олиш муҳим.

Ўзгарувчиси чексизликка интилганда функция графиги бирор тўғри чизиққа чексиз яқинлашиб борадиган ҳол алоҳида қизиқиш туғдиради.

Ўзгарувчи нуқта график бўйича координаталар бошидан* чексиз узоқлашганда функция графигидаги ўзгарувчи нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа нолга интилса, бундай хоссага эга бўлган тўғри чизиқ $y=f(x)$ функция графигининг *асимптотаси* дейилади. *Оу* ўққа параллел ва *Оу* ўққа параллел бўлмаган асимптоталарни айрим-айрим ҳолда қарайлик

Оу ўққа параллел бўлган асимптоталар. $x_0 \to 0$ да $y=f(x)$ функция абсолют қиймат бўйича чексиз ўссин, яъни $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$. У ҳолда таърифга кўра $x=x_0$ тўғри чизиқ асимптотадир (161-расм).

Шунга ўхшаш, агар $\lim\limits_{x\to x+0} f(x)=\infty$ бўлса ҳам $x=x_0$ тўғри чизиқ асимптота бўлади. Тескариси ҳам ўз-ўзидан равшан, яъни $x=x_0$ асимптота бўлса, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ ёки $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ лимитлардан камида биттаси чексиздир.

Шундай қилиб, $y=f(x)$ функция графигининг *Оу* ўққа параллел бўлган асимптоталарини излаш учун функция чексизликка айланадиган (чексиз узилишга эга бўлган) $x=x_0$ нинг қийматларини топиш керак экан. У ҳолда *Оу* ўққа параллел бўлган асимптота $x=x_0$ тенгламага эга бўлади.

1-мисол. $f(x)=x+\dfrac{1}{x-2}$ функция графигининг *Оу* ўққа параллел бўлган асимптотасини топинг.

Ечилиши. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x+\dfrac{1}{x-2}\right)=\infty$ бўлгани учун $x=2$ асимптотадир.

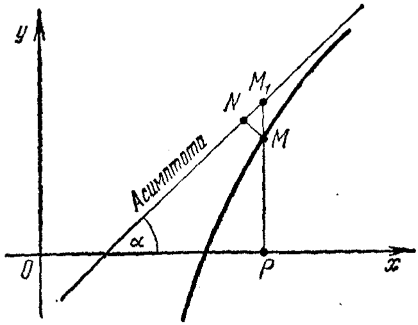
2-мисол. $f(x)=\operatorname{tg}x$ функция графигининг *Оу* ўққа параллел асимптотасини топинг.

Ечилиши $\lim\limits_{x\to \pi(2n+1)/2} \operatorname{tg}x=\infty$ бўлгани учун $f(x)=\operatorname{tg}x$ функция графиги чексиз кўп асимптоталарга эга: $x=\pi/2$, $x=3\pi/2$, $x=5\pi/2, \ldots$, $x=-\pi/2$, $x=-3\pi/2$, $x=-5\pi/2, \ldots$ (27-расмга қаранг).

Оу ўққа параллел бўлмаган асимптоталар. $y=f(x)$ функциянинг графиги *Оу* ўққа параллел бўлмаган асимптотага

* Асимптота тушунчаси билан биз гипербола мисолини кўраётганда танишган эдик (III боб, 2-§, 4-пунктга қаранг).

эга бўлсин. У ҳолда бундай асимптота тенгламаси $y=kx+b$ кўринишда бўлади. k ва b ни топиш учун қуйидаги ишни қиламиз. Функция графигининг M нуқтасидан асимптотага MN перпендикуляр туширамиз (162-расм).



162- расм.

Асимптотанинг таърифига кўра $x\to+\infty$ да $MN\to 0$. $\lim\limits_{x\to+\infty} MN=0$.

M_1MN учбурчакдан қуйидагига эгамиз: $M_1M=M_1N/\cos\alpha$ бунда α—асимптотанинг Ox ўққа оғиш бурчаги. α ўзгармас бўлгани учун M_1M катталик MN билан бир вақтда нолга интилади, яъни

$$M_1M=PM_1-PM=y_{\text{асим}}-y_{\text{график}}=(kx+b)-f(x)$$

бўлгани учун

$$\lim_{x\to+\infty}[(kx+b)-f(x)]=0. \qquad (86)$$

(86) дан квадрат қавс ичидаги айирма $x\to+\infty$ да чексиз кичик функция: $f(x)-(kx+b)=\beta(x)$ экани келиб чиқади. Охирги тенгликни ҳадма-ҳад x га бўлиб, лимитга ўтамиз:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{x}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0$ ва $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{x}=0$ бўлгани учун $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k\right]=0$ га эгамиз.

Бундан асимптотанинг бурчак коэффициенти

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}. \qquad (87)$$

Энди b ни аниқлаймиз. $f(x)-kx-b=\beta(x)$ бўлгани учун $b=f(x)-$ $-kx-\beta(x)$. $x\to+\infty$ да лимитга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]. \qquad (88)$$

Бундаги k (87) формула бўйича топилади.

Шундай қилиб, Oy ўққа параллел бўлмаган асимптотани топиш учун (87) ва (88) лимитларни топиш керак экан. Тескарисини, яъни (87) ва (88) лимитлар мавжуд бўлса, $y=kx+b$ тўғри чизиқ асимптота эканлигини кўрсатиш мумкин.

Агар бу лимитлардан ҳеч бўлмаганда биттаси мавжуд бўлмаса, $y=f(x)$ функциянинг графиги $x\to+\infty$ да асимптотага эга бўлмайди.

Хусусий ҳолда асимптота тенгламасидаги k коэффициент нолга тенг бўлиши мумкин. Бу ҳолда асимптота Ox ўққа параллел бўлади ва *горизонтал асимптота* дейилади.

$x\to-\infty$ да асимптоталар шунга ўхшаш топилади. Айтиб ўтамизки, (87) ва (88) формулалар $x\to+\infty$ ва $x\to-\infty$ да ҳар хил бўлиши мумкин, яъни функция графиги Oy ўққа параллел бўлмаган иккита ҳар хил асимптотага эга бўлиши мумкин.

3- мисол. $y = x - 2\operatorname{arctg} x$ функциянинг асимптоталарини топинг.

Ечилиши. Берилган функция барча сон ўқида аниқланган ва узлуксиз. Демак, график Oy ўққа параллел бўлган асимптоталарга эга эмас. Oy ўққа параллел бўлмаган асимптоталарни топамиз.

$$1)\ x \to +\infty;\ k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - 2\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{2\operatorname{arctg} x}{x}\right) =$$

$$= 1 - 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(x - 2\operatorname{arctg} x - x) = -2\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x = -2\cdot\pi/2 = -\pi.^*$$

Шундай қилиб, $x \to +\infty$ да асимптота тенгламаси $y = x - \pi$.

$$2)\ x \to -\infty;\ k = \lim_{x\to-\infty}\frac{x - 2\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{2\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(x - 2\operatorname{arctg} x - x) = -2\lim_{x\to-\infty}(\operatorname{arctg} x) = -2(-\pi/2) = \pi.$$

$x \to -\infty$ да асимптота тенгламаси $y = x + \pi$.

Шундай қилиб, $y = x - 2\operatorname{arctg} x$ функциянинг графиги Oy ўққа параллел бўлмаган иккита ҳар хил асимптотага эга экан:

$x \to +\infty$ да $y = x - \pi$ ва $x \to -\infty$ да $y = x + \pi$.

$y = x - 2\operatorname{arctg} x$ функциянинг графиги 163- расмда тасвирланган.

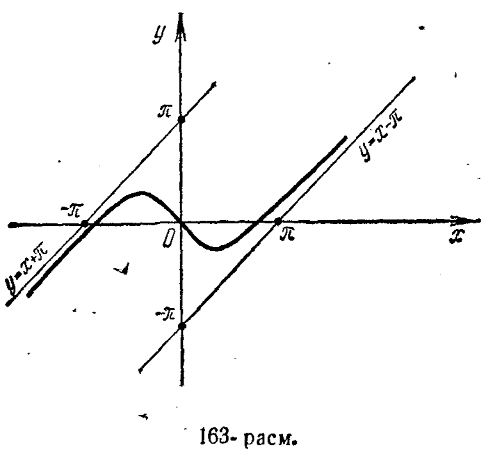
8. Функцияни текширишнинг умумий схемаси ва унинг графигини ясаш. Юқорида баён қилинганларга асосланиб, функцияни текширишнинг қуйидаги планини тавсия қилиш мумкин.

1. Функциянинг аниқланиш соҳасини, узлуксизлик интервалларини, узилиш нуқталарини топиш.
2. Функция графигининг асимптоталарини топиш.
3. Функциянинг монотонлик интервалларини ва унинг экстремумларини (максимум ва минимумини) топиш.
4. Функциянинг қавариқлик ва ботиқлик интервалларини ҳамда функция графигининг букилиш нуқталарини топиш.

Функция графигини ясаш.

1-изоҳ. Функция графигини ясашда графикнинг координаталар ўқи билан кесишиш нуқталарини билиш фойдали.

2-изоҳ. Функция графигини ясашдан аввал уни тоқ ёки жуфтлигини



163- расм.

* V боб, 2- §, 5- пунктга қаранг.

билиш ҳам фойдали. Жуфт ёки тоқ функциянинг графигини ясаётганда графикни ордината ўқига ёки координаталар бошига нисбатан симметриклигидан фойдаланиш тавсия қилинади.

1-мисол. $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ функцияни текширинг ва графигини ясанг.

Ечилиши. 1. Функция x нинг барча қийматларида аниқланган ва узлуксиз.

2. Функция графигининг Oy ўққа параллел бўлмаган асимптоталарини топамиз:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x - 3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(2 - 3\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right) = 2,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty}\left[2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x\right] = \lim_{x\to+\infty}(-3\sqrt[3]{x^2}) = -\infty.$$

b учун чекли лимит мавжуд бўлмагани учун $x \to +\infty$ да функция графигининг Oy ўққа параллел бўлмаган асимптоталари йўқ. $x \to -\infty$ да ҳам функция графиги Oy ўққа параллел бўлмаган асимптоталари йўқлигини осон текшириш мумкин Oy ўққа параллел бўлган асимптоталар ҳам йўқ, чунки $2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ функция x нинг барча қийматларида узлуксиз.

3. Функциянинг монотонлик интервалларини, максимум ва минимумини аниқлаймиз. $f'(x) = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ ҳосилани топамиз. Аргументнинг критик қийматларини топамиз:

$$2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = 0 \text{ ёки } \frac{2\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)}{\sqrt[3]{x}} = 0,\ \sqrt[3]{x} - 1 = 0,\ x = 1.$$

Бундан ташқари $x = 0$ да ҳосила чексиз узилишга эга бўлгани учун $x = 0$ қиймат ҳам критик ҳисобланади.

$]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ интервалларнинг ҳар бирида ҳосиланинг ишорасини аниқлаймиз, бунда 0 ва 1 нуқталар берилган функциянинг аниқланиш соҳасини ажратади. Қуйидагига эгамиз:

$$]-\infty, 0[;\ f'(-1) > 0;\ ]0, 1[;\ f'(1/8) < 0;\ ]1, +\infty[;\ f'(8) > 0.$$

Қуйидаги жадвални тузамиз:

x	$-\infty<x<0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < +\infty$
y'	$+$	мавжуд эмас	$-$	0	$+$
y	ўсади	максимум $y_{max} = 0$	камаяди	минимум $y_{min} = -1$	ўсади

Шундай қилиб, $y_{max} = f(0) = 0$, $y_{min} = f(1) = -1$.

4. Графикнинг қавариқлик ва ботиқлик интервалларини аниқлаймиз. Иккинчи ҳосилани топамиз:

$$f''(x) = -2\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3} = \frac{2}{3x\sqrt[3]{x}};$$

$f''(x)$ ҳосила x нинг ҳеч қандай қийматида нолга айланмайди, лекин $x = 0$ да мавжуд эмас (чексиз узилишга эга).

Иккинчи ҳосиланинг $]-\infty, 0[$ ва $]0, +\infty[$ интервалларнинг ҳар биридаги ишорасини аниқлаймиз ва жадвал тузамиз:

x	$-\infty<x<0$	0	$0<x<+\infty$
y''	$+$	мавжуд эмас	$+$
графиги	ботиқ	букилишга эга	ботиқ

Графикнинг координаталар ўқи билан кесишиш нуқталарини топамиз: $f(x)=0,\ 2x-3\sqrt[3]{x^2}=0,\ 8x^3-27x^2=0,\ x_1=x_2=0,\ x_3=27/8.$

Графикни ясаётганда $x\to 0$ да $f'(x)\to\infty$ ни кўзда тутиш керак, яъни координаталар бошида график вертикал уринмага эга (164-расм).

2-мисол. $\dfrac{\ln x}{x}$ функцияни текширинг ва графигини ясанг.

Ечилиши. Функция $0<x<+\infty$ интервалда аниқланган ва узлуксиз. Аниқланиш соҳасининг $x=0$ чегаравий нуқтасида функция чексиз узилишга эга, чунки $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty.$

2. $x=0$ нуқтада функция чексиз узилишга эга бўлгани учун $x=0$ (Oy ўқ) тўғри чизиқ асимптотадир. Oy ўққа параллел бўлмаган асимптотани топамиз

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}=\frac{1}{2x^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=0$$

(лимитларни топишда биз Лопиталь қоидасидан фойдаландик).

Шундай қилиб, $k=b=0$ ва $y=0$ асимптота тенгламаси, яъни Ox ўқ асимптота тенгламаси экан. График асимптоталари Ox ва Oy ўқлар экан.

3. $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ ҳосилани ва критик нуқталарни топамиз:

$$\frac{1-\ln x}{x^2}=0,\quad 1-\ln x=0,\ \ln x=1,\ x=e.$$

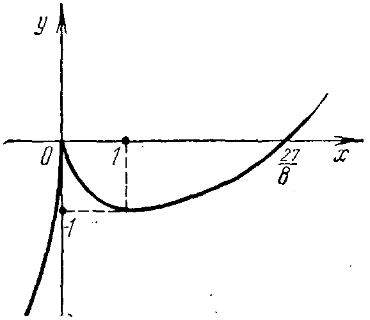
$x=e$ нуқта аниқланиш соҳасидан ажратадиган $]0, e[$, $]e, \infty[$ интервалларда ҳосила ишорасини текширамиз:

$$]0, e[;\ f'(1)=\frac{1-\ln 1}{1}=1>0;$$

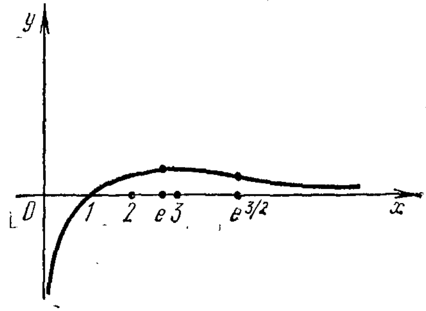
$$]e, +\infty[;\ f'(e^2)=\frac{1-\ln e^2}{e^4}=\frac{1-2\ln e}{e^4}=\frac{1-2}{e^4}=-\frac{1}{e^4}<0.$$

Жадвал тузамиз:

x	$0<x<e$	e	$e<x<+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	ўсади	максимум $y_{max}=1/e\approx 0{,}37$	камаяди



164- расм.



165- расм.

4. $f(x)$ функциянинг иккинчи ҳосиласини топамиз: $f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$.

$f''(x)$ ни нолга тенглаб, график букилиш нуқталарига эга бўладиган аргументнинг қийматларини топамиз:

$$f''(x) = 0, \frac{2\ln x - 3}{x^3} = 0, \quad 2\ln x - 3 = 0, \ \ln x = \frac{3}{2}; \quad x = e^{3/2}.$$

Иккинчи ҳосиланинг $]0, e^{3/2}[$ ва $]e^{3/2}, +\infty[$ интервалларнинг ҳар бириддаги ишорасини аниқлаймиз:

$$]0, e^{3/2}[: f''(e) = \frac{2\ln e - 3}{e^3} = \frac{2-3}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0;$$

$$]e^{3/2}, +\infty[: f''(e^2) = \frac{2\ln e^2 - 3}{e^6} = \frac{4-3}{e^6} = \frac{1}{e^6} > 0.$$

Жадвал тузамиз:

x	$0 < x < e^{3/2}$	$e^{3/2} \approx 4{,}48$	$e^{3/2} < x < +\infty$
y''	$-$	0	$+$
графиги	қаварик	букилиш нуқтаси $y = \frac{3}{2e^{3/2}} \approx 0{,}33$	ботиқ

Координаталар ўқи билан кесишиш нуқталарини топамиз. График Oy ўқ билан кесишиш нуқтасига эга эмас, чунки функция $0 < x < +\infty$ оралиқда аниқланган. Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси $y = 0$ тенгламадан топилади, бунда $\frac{\ln x}{x^2} = 0$, $\ln x = 0$, $x = 1$.

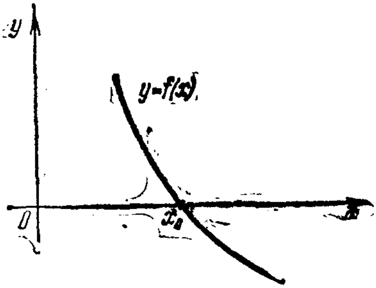
Ҳосил қилинган натижаларга асосланиб, $y = \frac{\ln x}{x}$ функциянинг 165- расмда тасвирланган графигини ҳосил қиламиз.

8- §. ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

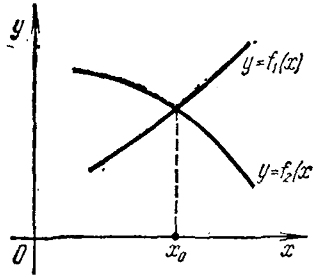
Ушбу

$$f(x) = 0 \tag{89}$$

тенгламанинг ҳақиқий илдизларини топиш талаб қилинсин, яъни x нинг шундай ҳақиқий қийматларини топиш керакки, бунда $f(x)$



166- расм.



167- расм.

функция нолга айлансин. Бунда $f(x)$ функция узлуксиз ҳамда биринчи ва иккинчи ҳосилага эга деб ҳисоблаймиз. Тенгламанинг илдизларини топиш икки этапдан иборат: 1) илдизларнинг қўпол тақрибий қийматларини топиш; 2) илдизларнинг топилган қийматларини аниқлаштириш.

1. **Илдизларнинг қўпол тақрибий қийматларини график усул билан топиш.** Илдизларнинг қўпол тақрибий қийматларини топиш учун $y=f(x)$ функциянинг графиги чизилади. Графикнинг Ox ўқ билан кесишган нуқталарининг абсциссалари $f(x)=0$ тенгламанинг илдизлари бўлади (166- расм). Кўпинча қуйидаги усул қўлланилади: $f(x)=0$ тенгламани $f_1(x)=f_2(x)$ кўринишга алмаштирилади, бунда $y=f_1(x)$ ва $y=f_2(x)$ функцияларнинг графикларининг абсциссалари берилган тенгламанинг илдизлари бўлади (167- расм).

2. **Топилган қийматларни ватарлар ва уринмалар методи ёрдамида аниқлаштириш.** График метод билан (89) тенгламанинг илдизи $[a, b]$ сегмент ичида ётиши топилган бўлсин. Бу сегмент шундай кичик қилиб танланадики, қуйидаги учта шарт бажарилсин:

а) $[a, b]$ сегментнинг чегараларида $f(x)$ функция турли ишорали қийматларни қабул қилсин;

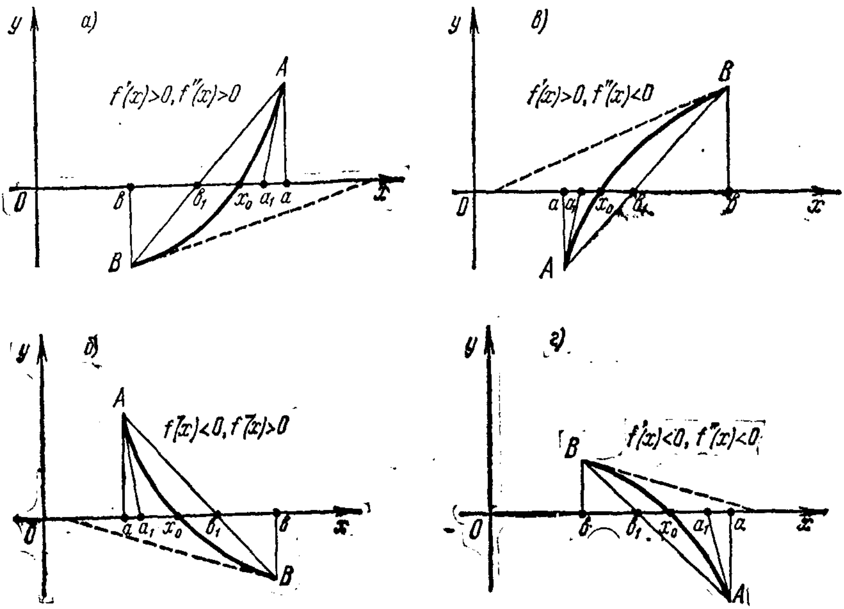
б) $[a, b]$ сегментда $f'(x)$ ҳосила ўзгармас ишорани сақласин;

в) $[a, b]$ сегментда иккинчи ҳосила $f''(x)$ ўзгармас ишорани сақласин*.

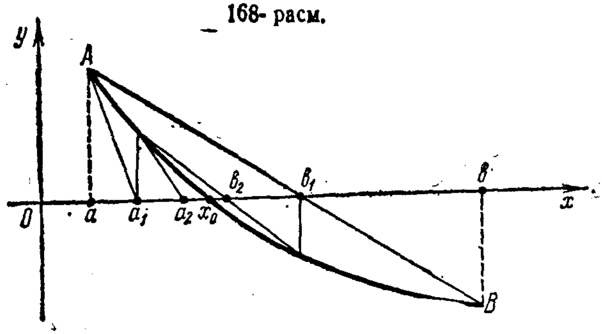
Агар $[a, b]$ сегментда бу учта шарт бажарилса, $f(x)$ функция 168- расмда тасвирланган графиклардан бирига эга бўлади. Ватарлар ва уринмалар методи қуйидагидан иборат: дастлаб AB ватарни ўтказамиз (169- расм) ва ватарнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтасининг абсциссасини топамиз.

---

* (а) ва (б) шартлар $[a, b]$ сегментда тенгламанинг битта илдизига эга бўлгани учун белгиланади. (в) шарт айтиб ўтилган методни қўлланиш учун муҳимдир ва у функция графиги $[a, b]$ сегментда қавариқ ва ботиқлигини билдиради.



168- расм.



169- расм.

Бунинг учун $A\ [a;\ f(a)]$ ва $B\ [b;\ f(b)]$ нуқталардан ўтадиган тўғри чизиқ тенгламасини топамиз:

$$\frac{x-b}{a-b}=\frac{y-f(b)}{f(a)-f(b)}.$$

Ватарнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси $x=b_1$ ва $y=0$ координаталарга эга. Бу қийматларни ватарнинг тенгламасига қўйиб қуйидагини топамиз:

$$b_1=b-f(b)\cdot\frac{a-b}{f(a)-f(b)}. \qquad (90)$$

b_1 сон илдизнинг тақрибий қийматини беради.

Энди AB ёйнинг охирларидан биридан унга уринма ўтказамиз ва бу уринманинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтасининг a абсциссасини топамиз. 168-расмдан кўриниб турибдики, уринмани AB ёйининг $f(x)$ функция ишораси иккинчи ҳосиласи $f''(x)$ нинг ишораси билан бир хил бўладиган учидан ўтказиш керак. Бу ҳолда a_1 абсцисса $[a, b]$ сегментнинг ичида ётади ва тенгламанинг илдизи a_1 ва b_1 орасида ётади. Агар уринмани ёйнинг иккинчи ҳосила ва функциянинг ишораси қарама-қарши бўладиган бошқа учидан ўтказилса, уринманинг Ox ўқ билан кесишадиган нуқтаси $[a, b]$ сегментнинг ичида ётиши мумкин (168-расмга қаранг). Бундан буён уринма ўтказиладиган ёй учининг абсциссасини a ҳарфи билан, иккинчи учининг абсциссасини эса b ҳарфи билан белгилаймиз.

Абсциссаси a бўлган нуқтадан ўтказилган уринманинг тенгламаси (169-расмга қаранг) қуйидаги кўринишда бўлади: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Уринманинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси $x = a_1$ ва $y = 0$ координаталарга эга. Бу координаталарни уринма тенгламасига қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(b)}. \tag{91}$$

a_1 сон илгари ҳосил қилинган b_1 сон каби илдизнинг тақрибий қийматини беради. Янги $[a_1, b_1]$ сегментга яна (90) ва (91) формулаларни қўлланамиз. Бунда уринмани абсциссаси a бўлган нуқтадан ўтказишга тўғри келади, чунки бу нуқтада $f''(x)$ ва $f(x)$ лар бир хил ишорага эга. У ҳолда қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$b_2 = b_1 - f(b_1)\,\frac{a_1 - b_1}{f(a_1) - f(b_1)},\quad a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}. \tag{92}$$

Бу ерда a_2 ва b_2 a_1 ва b_1 га қараганда илдизга яқин бўлган янги қийматларидир.

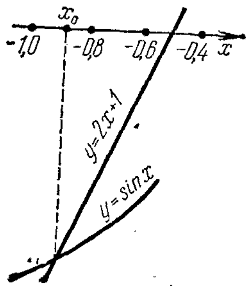
Шундай давом этиб, анча аниқ бўлган янги тақрибий (a_3, b_3), (a_4, b_4), . . . , (a_n, b_n) қийматларни топамиз:

$$b_n = b_{n-1} - f(b_{n-1})\,\frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{f(a_{n-1}) - f(b_{n-1})},\ a_n = a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})}, \tag{93}$$

шу билан бирга ихтиёрий n да $f(x) = 0$ тенгламанинг илдизи a_n ва b_n орасида жойлашади. Агар x_0 — илдизнинг аниқ қиймати бўлса, яқинлашиш хатолиги $|x_0 - a_n|$ ёки $|x_0 - b_n|$ $|a_n - b_n|$ дан ортмайди:

$$|x_0 - a_n| < |a_n - b_n|$$
$$|x_0 - b_n| < |a_n - b_n|.$$

x_0 илдизни ҳисоблашда мумкин бўлган хатолик ε бўлиши мумкин (яъни x_0 дан ε га фарқ қиладиган сонни изланади). Шундай қилиб, тақрибий яқинлаштириш ҳосил қилиш процессида кўрсатиб ўтилган ватарлар ва уринмалар методини $|a_n - b_n|$ айирма кичик бўлиши билан тўхтатиш керак. Барча ҳисоблашларни битта ёки иккита қўшимча қиймат билан ўтказиш керак, бунда ҳисоблаш процессида хатолик яхлитлашда мумкин бўлган хатоликдан ортиб кетиши керак эмас.



170- расм.

Мисол. $2x+1-\sin x=0$ тенгламанинг илдизини 0,001 аниқликда топинг.

Ечилиши. 1. Илдизнинг қўпол тақрибий қийматини топамиз. Бунинг учун $2x+1-\sin x=0$ тенгламани $2x+1=\sin x$ кўринишда ёзиб оламиз. $y=2x+1$ ва $y=\sin x$ функцияларнинг графикларини ясаймиз (170-расм) Расмдан тенглама $[-1,0;\ -0,8]$ сегментда ётадиган ягона илдизга эгалигини топамиз. $x=-1,0$ ва $x=-0,8$ илдизнинг қўпол тақрибий қийматларидир.

2. Топилган қўпол тақрибий қийматларни аниқлаштирамиз. Бизнинг ҳолда $f(x)=2x+1-\sin x$. Равшанки, $[-1,0;\ -0,8]$ сегментда:

$$f'(x)=2-\cos x>0 \text{ ва } f''(x)=\sin x<0.$$

$$f(-0,8)=2\cdot(-0,8)+1-\sin(-0,8)\approx-1,6+1+0,7174\approx0,1174;$$

$$f(-1)=2\cdot(-1)+1-\sin(-1)\approx-2+1+0,8415\approx-0,1585$$

бўлгани учун $b=-0,8$ ва $a=-1$ ни қабул қиламиз ($a=-1$ да функция ишораси унинг иккинчи ҳосиласининг ишораси билан бир хил бўлади).

(90) – (93) формулаларни кетма-кет қўлланиб, a_1, b_1, a_2, b_2 ва ҳ. к. яқинлашишларни топамиз* Қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$$f'(a)=2-\cos a=2-\cos(-1)=2-0,5403=1,4597.$$

Қуйидагиларни топамиз:

$$a_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}=1-\frac{-0,1585}{1,4597}=-0,8914;\quad b_1=b-f(b)\frac{a-b}{f(a)-f(b)}=$$

$$=-0,8-0,1174\cdot\frac{(-1+0,8)}{-0,1585-0,1174}=-0,8850.$$

$f(a_1)$, $f(b_1)$ ва $f'(a_1)$ ларни ҳисоблаймиз:

$$f(a_1)=2a_1+1-\sin a_1=2(-0,8914)+1+\sin 0,8914=$$

$$=-1,7828+1+0,7779\approx-0,0049;$$

$$f(b_1)=2b_1+1-\sin b_1=2(-0,8850)+1+\sin 0,8850=-1,7700+1+0,7739\approx0,0039;$$

$$f'(a_1)=2-\cos a_1=2-\cos(-0,8914)=2-0,6282=1,3718,$$

(92) формулага кўра қуйидаги яқинлашишларни топамиз:

$$a_2=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}=-0,8914-\frac{-0,0049}{1,3718}=-0,8878;$$

$$b_2=b_1-f(b_1)\frac{a_1-b_1}{f(a_1)-f(b_1)}=-0,8850-0,0039\cdot\frac{-0,8914+0,8850}{-0,0049-0,0039}=-0,8881.$$

$|a_2-b_2|=0,003$ айирма мумкин бўлган хатолик 0,001 дан кичик бўлгани учун кейинги ҳисоблашларни тўхтатиб ва $x_0\approx-0,888$ ни олиш мумкин.

---

* Барча ҳисоблашларни битта қўшимча хона билан оламиз.

9-§. ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАЛАР. СОНЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ

1. Умумий изоҳлар. $y=f(x)$ функциянинг $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нуқталарда қабул қиладиган $y_0, y, \ldots, y$ қийматлари бизга маълум бўлсин: $y_i=f(x_i)$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$. Қийматлари $x_0, x_i, \ldots \ldots, x_n$ нуқталарда $y=f(x)$ функция билан мос тушадиган n-даражали

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

кўпҳадни, яъни $P_n(x_i)=f(x_i)=y_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ ни топиш талаб қилинсин. Бундай қўйилган масалани интерполяциялаш масаласи, $P_n(x)$ кўпҳадни эса *интерполяцион кўпҳад* дейилади. $P_n(x)$ интерполяцион кўпҳадни $y=f(x)$ функциянинг яқинлаштирилган аналитик қиймати деб қабул қилиб, яъни $f(x)\approx P_n(x)$ деб, биз масалан, $f(x)$ функциянинг $x_0, x_1, \ldots, x_n$ лар орасида ётган x нуқтадаги тақрибий қийматини топишимиз мумкин. Энди интерполяцион масала ягона ечимга эга эканини кўрсатамиз. Соддалик учун иккинчи даражали интерполяцион кўпҳад билан чегараланамиз:

$$P_2(x)=a_0x^2+a_1x+a_2, \tag{94}$$

у x_0, x_1, x_2 (интерполяция тугунларида) нуқталарда мос y_0, y_1, y_2 қийматларни қабул қилади:

$$P_2(x_i)=y_i \quad (i=0,\ 1,\ 2).$$

Бу шартларда a_0, a_1, a_2 коэффициентлар бир хил аниқланишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, $x=x_0$, $x=x_1$, $x=x_2$ ларни (94) тенгламага қўйиб, a_0, a_1, a_2 коэффициентларни топиш учун биринчи даражали учта номаълумли қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} a_0x_0^2+a_1x_0+a_2&=y_0,\\ a_0x_1^2+a_1x_1+a_2&=y_1,\\ a_0x_2^2+a_1x_2+a_2&=y_2. \end{aligned}\right\}$$

x_0, x_1 ва x_2 сонлар турлича бўлгани учун бу системанинг детерминанти қуйидагича бўлади:

$$D=\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1\\ x_1^2 & x_1 & 1\\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}=(x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_1-x_2)\neq 0.$$

Демак, у ягона ечимга эга экан. Бу геометрик жиҳатдан берилган функциянинг графигининг учта $M_0(x_0;\ y_0)$, $M_1(x_1;\ y_1)$ ва $M_2(x_2;\ y_2)$ нуқтасидан $y=a_0x^2+a_1x+a_2$ тенглама билан аниқланадиган ягона чизиқ ўтишини билдиради. $a_0\neq 0$ да у симметрия ўқи Oy ўқига параллел бўлган парабола, $a_0=0$ да эса $y=a_1x+a_2$ тўғри чизиқ.

2. Лагранжнинг интерполяцион формуласи. Умумий ҳолда n-даражали кўпҳад учун $a_0, a_1, \ldots, a_n$ номаълумлари бўлган $n-1$ та номаълумли системани ҳосил қиламиз. Бундай системани ечиш қўпол ҳисоблашларга олиб келади. Шунинг учун $P_n(x)$ интерполяцион кўпҳадни номаълум коэффициентни енгилроқ (соддароқ) топиш имконини берадиган формада излаймиз:

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) + a_1(x-x_0)(x-x_2)\ldots$$
$$\ldots(x-x_n) + a_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n) + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}). \qquad (95)$$

$n=2$ ҳол учун интерполяцион кўпҳад қуйидаги кўринишда бўлади:

$$P_2(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2) + a_1(x-x_0)(x-x_2) +$$
$$+ a_2(x-x_0)(x-x_1). \qquad (96)$$

Унинг a_0, a_1 ва a_2 коэффициентлари қандай топилишини кўрсатамиз. Шартга кўра

$$P_2(x_0) = y_0, \quad P_2(x_1) = y_1, \quad P_2(x_2) = y_2$$

бўлгани учун (96) тенгликка x_0, x_1, x_2 ларни кетма-кет қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P_2(x_0) = y_0 = a_0(x_0-x_1)(x_0-x_2),$$
$$P_2(x_1) = y_1 = a_1(x_1-x_0)(x_1-x_2),$$
$$P_2(x_2) = y_2 = a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1).$$

Бундан

$$a_0 = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \quad a_1 = \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$

$$a_2 = \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

a_0, a_1 ва a_2 нинг топилган қийматларини (96) тенгликка қўйиб, функциянинг тақрибий аналитик қиймати учун қабул қилинадиган изланаётган интерполяцион кўпҳадни ҳосил қиламиз:

$$P_2(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} +$$
$$+ y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \qquad (97)$$

Шунга ўхшаш учинчи даражали интерполяцион кўпҳадни ҳосил қиламиз:

$$P_3(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x-x_0)(x-x_2)(x_0-x_3)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$
$$+ y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}. \qquad (98)$$

(97) ва (98) формулалар $n=2$ ва $n=3$ ҳол учун *Лагранжнинг интерполяцион формуласи* дейилади.

Мисол. Қуйидаги жадвалда x нинг баъзи қийматларига мос $\sin x$ функциянинг қийматлари келтирилган $\sin 0{,}57$ ни топинг.

x	0,40	0,50	0,65
$\sin x$	0,3894	0,4794	0,6052

Ечилиши Бу ерда $x_0 = 0{,}40$, $x_1 = 0{,}50$, $x_2 = 0{,}65$; $y_0 = 0{,}3894$, $y_1 = 0{,}4794$, $y_2 = 0{,}6052$. Лагранжнинг интерполяцион формуласини қўллаиб, $x = 0{,}57$ да қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sin 0{,}57 = 0{,}3894 \cdot \frac{(0{,}57-0{,}50)(0{,}57-0{,}65)}{(0{,}40-0{,}50)(0{,}40-0{,}65)} +$$

$$+0{,}4794\,\frac{(0{,}57-0{,}40)(0{,}57-0{,}65)}{(0{,}50-0{,}40)(0{,}50-0{,}65)} + 0{,}6052 \cdot \frac{(0{,}57-0{,}40)(0{,}57-0{,}50)}{(0{,}65-0{,}40)(0{,}65-0{,}50)} =$$

$$= -0{,}0872 + 0{,}4347 + 0{,}1920 = 0{,}5395.$$

Жадвал бўйича ҳам тўртта аҳамиятли рақамгача қиймати

$$\sin 0{,}57 = 0{,}5396,$$

Кўп ҳолларда бошқача ёзилган интерполяцион формуладан фойдаланиш қулай. Дастлаб, баъзи бир умумий тушунчаларни киритамиз.

3. Айирмалар ва уларнинг хоссалари $y = f(x)$ функция берилган бўлсин. Тенг оралиқда турган эркли ўзгарувчиларни қараймиз $x_0, x, \ldots, x_n$, улар h фарқ билан арифметик прогрессияни ташкил қилади: x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h, \ldots, x_n = x_0 + nh$. $y_0, y, \ldots y_n$ лар $y = f(x)$ функциянинг $x_0, x_1, x_2, \ldots \ldots x_n$ нуқталардаги мос қийматлари бўлсин:

$$y_k = f(x_k) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

$$y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0), \quad y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1), \ldots$$
$$\ldots, y_n - y_{n-1} = f(x_n) - f(x_{n-1})$$

катталиклар *биринчи тартибли* (ёки *биринчи*) *айирмалар* дейилади ва мос равишда $\Delta y_0, \Delta y_1, \ldots, \Delta y_{n-1}$ ёки $\Delta f(x_0), \Delta f(x_1), \ldots, \Delta f(x_n)$ билан белгиланади. Шундай қилиб,

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ldots, \quad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k, \ldots$$
$$\ldots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \ldots, \Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k, \ldots$$
$$\ldots, \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}$$

айирмалар иккинчи тартибли (ёки *иккинчи*) *айирмалар* дейилади. *Учинчи тартибли айирма*

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0, \quad \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$$

ва умуман айтганда, *p-тартибли айирма* шунга ўхшаш аниқланади.

$$\Delta^p y_k = \Delta^{p-1} y_{k+1} - \Delta^{p-1} y_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

Барча айирмаларни қуйидаги жадвал кўринишида жойлаштириш мумкин:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	. . .
x_0	y_0					
		Δy_0				
$x_1 = x_0 + h$	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_2$		. . .
$x_3 = x_0 + 3h$	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		. . .
$x_4 = x_0 + 4h$	y_4		$\Delta^2 y_3$		$\Delta^4 y_2$	
		Δy_4		$\Delta^3 y_3$		
$x_5 = x_0 + 5h$	y_5		$\Delta^2 y_4$			
		Δy_5				
$x_6 = x_0 + 6h$	y_6					
. . . .	. .	. . . .	. . . .	. . . .	. . .	. . .

Бу жадвал қадами h бўлган *диагонал жадвал* дейилади. Жадвалнинг ҳар бир устунида айирмалар камаювчи ва айирилувчининг мос қийматлари орасида ёзилади.

1-мисол. $y = x^5$ функциянинг $x_0 = -4$ деб $h = 1$ қадамда айирмаларнинг диагонал жадвалини тузинг.

Ечилиши. Қуйидаги жадвалда келтирилган:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
−4	−1024						
		781					
−3	−243		−570				
		211		390			
−2	−32		−180		−240		
		31		150		120	
−1	−1		−30		−120		0
				30		120	
0	0		0		0		0
		1		30		120	
1	1		30		120		0
		31		150		120	
2	32		180		240		0
		211		390		120	
3	243		570		360		
		781		750			
4	1024		1320				
		2101					
5	3125						

Айирмаларнинг ўз-ўзидан равшан қуйидаги хоссаларини кўрсатамиз:

1°. *Ўзгармаснинг айирмаси нолга тенг, яъни* $\Delta c = 0$.

2°. *Ўзгармас кўпайтувчини айирмадан ташқарига чиқариш мумкин, яъни* $\Delta kf(x) = k\Delta f(x)$.

3°. *Бир нечта функция айирмасининг йиғиндиси бу функциялар айирмаларининг йиғиндисига тенг, яъни* $\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$.

Бу хоссаларнинг исботини китобхонга ҳавола қиламиз.

$y = x^n$ даражали функциянинг биринчи айирмасини қараймиз:

$$\Delta(x^n) = (x+h)^n - x^n.$$

Ньютон биномига кўра:

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n.$$

Демак,

$$\Delta(x^n) = nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n.$$

Шундай қилиб, даражали $y = x^n$ функциянинг айирмаси x^{n-1} да коэффициентлари $(n-1)$ бўлган $(n-1)$-даражали кўпҳад экан. Хусусан, $\Delta(x)^2$ биринчи даражали кўпҳад, $\Delta(x)$ эса нолинчи даражали, яъни ўзгармас кўпҳад (чунки $\Delta x = (x+h) - x = h$).

Энди қуйидаги n-даражали кўпҳадни қараймиз:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Унинг биринчи айирмасини топамиз. Айирмалар хоссасини қўллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta P_n(x) = a_0\Delta(x^n) + a_1\Delta(x^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}\Delta x + \Delta(a_n).$$

Юқоридагига кўра $\Delta(x^n)$ $n-1$-кўпҳад $\Delta(x^{n-1})$ эса $n-2$-кўпҳад ... Δx — ўзгармас, $\Delta(a_n) = 0$. Демак, $\Delta P_n(x)$ коэффициенти юқори бўлганда a_0nh га тенг $(n-1)$-даражали кўпҳад экан:

$$\Delta P_n(x) = a_0nhx^{n-1} + a'_1x^{n-2} + \ldots + a'_{n-2}x + a'_{n-1}.$$

Биринчи айирма $\Delta P_n(x)$ дан иккинчи айирмани олиб, иккинчи тартибли $\Delta^2P_n(x) = \Delta[\Delta P_n(x)]$ айирмани ҳосил қиламиз, бу ҳозир юқорида айтилганидек, $(n-2)$-даражали айирма бўлади.

Шундай қилиб, навбатдаги ҳар бир айирманинг даражаси камайиб боради. Демак, n-тартибли айирма нолинчи даражали, яъни ўзгармас кўпҳад бўлар экан. Равшанки, навбатдаги барча айирмалар нолга тенг бўлади. Бу билан қуйидаги теорема исбот бўлади.

1-теорема. *x ўзгарувчи h га тенг бўлган тенг орттирмаларни қабул қилганда n-даражали кўпҳаднинг n-тартибли айирмаси ўзгармас катталикдир. Навбатдаги барча айирмалар нолга тенг.*

$y = x^5$ функция учун тузилган диагонал жадвал (297-бетга қаранг) бу теоремани тасвирлайди.

Биз қуйида келтирадиган тескари тасдиқ ҳам ўринли.

2-теорема. *Агар n-тартибли айирма x аргумент ўзгармас орттирма h ни қабул қилган шартда бирор функция учун ўзгармас бўлса, бу функция n-даражали дейилади.*

Бу теорема катта амалий аҳамиятга эга. Агар бирор тартибли айирмаси ўзгармас сон ёки ўзгармасдан кам фарқ қилса, бу теорема функцияни кўпҳад билан алмаштириш имконини беради.

2-мисол. Қуйидаги

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0,7	0,2580			
0,8	0,2881	301	−23	−1
0,9	0,3159	278	−24	0
1,0	0,3413	254	−24	0
1,1	0,3643	230	−24	
1,2	0,3849	206		

Жадвалда иккинчи айирмалари доим ўзгармас бўлган $\Phi(x)$ функция мисоли келтирилган*. Шунинг учун қаралаётган участкада берилган функция ўзини иккинчи даражали кўпҳад сифатида тутади

4. Ньютоннинг интерполяцион формуласи. Биз биламизки, (1-пунктга қаранг), кўпҳад учун интерполяцион масала қуйидагича қўйилади: агар $x_0, x_1, \ldots, x_n$ интерполяцион тугунларда қийматлари маълум бўлса, n-даражали кўпҳад $P_n(x)$ ни топиш керак. Юқорида кўрсатилдики, бу масала ягона ечимга эга. Бу ерда биз хусусий ҳолни, яъни интерполяцион тугунлар тенг оралиқда турганда, қадам h билан белгиланган арифметик прогрессия ташкил қиладиган ҳолни кўрамиз:

$$x_0,\ x_1 = x_0 + h,\quad x_2 = x_0 + 2h,\ \ldots,\ x_n = x_0 + nh.$$

Изланган кўпҳадни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + A_3(x - x_0)\times$$
$$\times(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + A_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots$$
$$\ldots(x - x_{n-1}). \tag{99}$$

$A_0, A_1, \ldots, A_n$ коэффициентларни топиш учун (99) муносабатга $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2$ ва ҳ. к. ларни кетма-кет қўямиз. $x = x_0$ да $y_0 = P_n(x_0) = A_0$ ни ҳосил қиламиз. Демак, $A_0 = y_0$. $x = x_1$ да $y_1 = P_n(x_1) = A_0 + A_1(x_1 - x_0) = A_0 + A_1 h = y_0 + A_1 h$. Демак,

$$A_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{1!h}.$$

---

* Айирмаларни олдидаги нолларни ёзмасдан, охирги хона бирлигида ёзишни шартлашиб оламиз.

$x = x_2$ да: $y_2 = P_n(x_2) = A_0 + A_1(x_2 - x_0) + A_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$.
Лекин $x_2 - x_1 = h$; $x_2 - x_0 = 2h$.

Демак, $y_2 = A_0 + A_1 \cdot 2h + A_2 \cdot 2h \cdot h$. A_0 ва A_1 ларнинг ўрнига ўз ифодаларини қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y_2 = y_0 + \frac{\Delta y_n}{h} \cdot 2h + A_2 \cdot 2h^2 \quad \text{ёки} \quad y_2 - y_0 - 2\Delta y_0 = A_2 \cdot 2h^2.$$

$$y_2 - y_0 - 2\Delta y_0 = (y_2 - y_1) + (y_1 - y_0) - 2\Delta y_0 = \\ = \Delta y_1 + \Delta y_0 - 2\Delta y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0$$

бўлгани учун $\Delta^2 y_0 = A_2 \cdot 2h^2$. Бундан $A_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$.

Шунга ўхшаш $A_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}$ ни, умуман, $A_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}$ ни топамиз:

$A_0, A_1, \ldots, A_n$ коэффициентларнинг топилган қийматларини (99) формулага қўйиб, изланган кўпҳадни топамиз:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \\ + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots \\ \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1}). \tag{100}$$

Бу формула *Ньютоннинг биринчи интерполяцион формуласи* дейилади. Хусусан, $n = 1$ да биринчи даражали кўпҳад — *чизиқли интерполяцион формулани* ҳосил қиламиз:

$$P_1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0). \tag{101}$$

$n = 2$ да *параболик* (ёки *квадратик*) *интерполяцион формулани* ҳосил қиламиз:

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1). \tag{102}$$

Ньютоннинг интерполяцион формуласига амалда қулай қўлланиладиган кўриниш бериш мумкин. $(x - x_0)/h = t$ дейлик. У ҳолда

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - (x_0 + h)}{h} = \frac{x - x_0}{h} - 1 = t - 1;$$

$$\frac{x - x_2}{h} = \frac{x - (x_0 + 2h)}{h} = \frac{x - x_0}{h} - 2 = t - 2, \ldots, \frac{x - x_k}{h} = t - k.$$

Бу тенгликларни ҳисобга олиб, (100) формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + ht) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t(t - 1) + \\ + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} t(t-1)(t-2) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1)(t-2) \ldots [t-(n-1)]. \tag{103}$$

Хусусан, (101) ва (102) формулалар қуйидаги кўринишни олади:

$$P_1(x) = P_1(x_0 + ht) = y_0 + \Delta y_0 t, \qquad (104)$$

$$P_2(x) = P_2(x_0 + ht) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1). \qquad (105)$$

Энди бирор $y = f(x)$ функция учун n-тартибли айирма ўзгармас бўлсин. Бу бирор кесмада $y = f(x)$ функция ўзининг n-даражали кўпҳад сифатида тутади (3-пунктдаги 2-теорема ва 2-мисолга қаранг). Берилган функцияни интерполяцион қийматлари интерполяцион тугунларда $f(x)$ функция қийматлари билан бир хил бўладиган $P_n(x)$ кўпҳад билан алмаштириб, қуйидаги тақрибий тенглигини ҳосил қиламиз:

$$f(x) \approx P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \qquad (106)$$

ёки

$$f(x_0 + ht) \approx P_n(x_0 + ht) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1) \ldots [t - (n-1)]. \qquad (107)$$

$f(x) - P_n(x) = R_n(x)$ белгилашни киритамиз. Бу айирма функцияни n-даражали интерполяцион кўпҳад билан алмаштирилганда яқинлашиш хатосини беради.

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})(x - x_n) \qquad (108)$$

ни ёки $(x - x_0)/h = t$ деб

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} t(t-1) \ldots (t-n) \qquad (109)$$

ни исбот қилиш мумкин. Хусусан, чизиқли интерполяцион ($n=1$ да) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$P_1(x) \approx \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1). \qquad (110)$$

(106) ёки (107) формулаларни одатда x нинг $x_0 < x < x_1$ интервалдаги қийматлари учун қўлланилади. Шунинг учун $0 < t = (x - x_0)/h < (x_1 - x_0)/h = 1$. $0 < t < 1$ кесмада $|t(t-1)| \leqslant 1/4$ тенгсизлик бажарилишини кўрсатиш осон. Демак,

$$|R_1(x)| \approx \left|\frac{\Delta^2 y_0}{2}\right| \cdot |t(t-1)| \leqslant \frac{|\Delta^2 y_0|}{8}. \qquad (111)$$

Шундай қилиб, *агар биринчи айирмалар доим ўзгармас бўлса, чизиқли интерполяция хатолиги иккинчи айирманинг абсолют катталигининг саккиздан биридан ортмас экан.*

Мисол. 299- бетдаги жадвалда $\Phi(x)$ функциянинг қийматлари келтирилган. $x = 0,75$ да $\Phi(x)$ функциянинг қийматини топинг.

Ечилиши. Иккинчи айирмалар доим ўзгармас бўлгани учун қаралаётган участкасида $\Phi(x)$ ўзини иккинчи даражали кўпҳад сифатида тутади. Шунинг учун $\Phi(x) \approx P_2(x)$. Хусусан, $\Phi(0,75) \approx P_2(0,75)$. 0,75 сони 0,7 ва 0,8 сони орасида бўлгани учун $x_0 = 0,7$ деб, берилган жадвалдан топамиз: $y_0 = 0,2580$, $\Delta y_0 = 0,0301$, $\Delta^2 y_0 = -0,0023$, $h = 0,1$. $t = (x - x_0)/h = (0,75 - 0,7)/0,1 = 0,5$ ни ҳисобга олиб, (105) формулага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Phi(0,75) \approx P_2(0,75) = 0,2580 + \frac{0,0301}{1} \cdot 0,5 + \frac{(-0,0023)}{2!} \cdot 0,5\,(0,5 - 1) =$$

$$= 0,2580 + 0,0151 + 0,0003 = 0,2734.$$

$n = 2$ ҳол учун (109) формулани қўлланиб, яқинлашиш хатосини топамиз:

$$R_2(x) \approx \frac{\Delta^3 y_0}{(2+1)!}\, t\,(t-1)\,(t-2).$$

$\Delta^3 y_0 = -0,0001$, $t = 0,5$ бўлгани учун

$$|R_2(0,75)| = \left| \frac{-0,0001}{3!}\, 0,5\,(0,5-1)\,(0,5-2) \right| < 0,00001.$$

Шундай қилиб, иккинчи даражали интерполяцион кўпҳадни қўлланиш нуқтадан кейин бешинчи рақамгача ҳисоблашда хатоликка йўл қўймас экан.

5. Сонли дифференциаллаш. Сонли дифференциаллаш масаласи қуйидагидан иборат: бирор $f(x)$ функциянинг қийматлар жадвали берилган; унинг ҳосиласининг бирор бир нуқтадаги қийматини топиш талаб қилинади.

Методнинг мазмуни шундаки, $f(x)$ функция хоҳлаганча дифференциаллаш мумкин бўлган $P_n(x)$ $[f(x) \approx P_n(x)]$ интерполяцион кўпҳад билан алмаштирилади. Бунда, табиийки, интерполяция тугунлари орасидаги масофа қанча кичик бўлса, ҳосил қилинган натижа шунча аниқ бўлади. Агар функциянинг қийматлар жадвали аргументнинг тенгмас оралиқдаги қийматлари учун тузилган бўлса, Лагранжнинг интерполяцион формуласидан фойдаланиш керак. Агар жадвал аргументнинг тенг оралиқдаги қийматлари учун тузилган бўлса, Ньютоннинг интерполяцион формуласидан фойдаланилади.

Масалан, $f(x)$ функция Ньютоннинг интерполяцион формуласи билан алмаштирилсин:

$$f(x) \approx P_n(x) = P(x_0 + th) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t\,(t-1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t\,(t-1)\,(t-2) \ldots (t-n+1),$$

бу ерда $t = (x - x_0)/h$. Бунда $f(x)$ функция эркли ўзгарувчиси t бўлган $P_n(x_0 + th)$ функция билан алмаштирилади. Мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасига кўра қуйидагига эгамиз:

$$\frac{dP_n}{dt} = \frac{dP_n}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}. \tag{112}$$

$\frac{dP_n}{dx} \approx f'(x)$, $\frac{dx}{dt} = h$ бўлгани учун (112) формула $\frac{dP_n}{dt} \approx f'(x)\,h$ кўринишда ёзилади. Бундан

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\frac{dP_n}{dt}. \tag{113}$$

Шунга ўхшаш

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\frac{d^2P_n}{dt^2} \tag{114}$$

ёки умуман, $f^{(k)}_{(x)} \approx \frac{1}{h^k}\frac{d^kP_n}{dt^k}$ ни топамиз.

Шундай қилиб, (107) муносабатнинг ўнг томонини дифференциаллаб, (113) ва (114) формулалардан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}(2t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!}(3t^2 - 6t + 2) + \ldots\right], \tag{115}$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 (t-1) + \ldots\right]. \tag{116}$$

Мисол. Қуйидаги жадвал билан берилган функциядан $x = 0{,}15$ да биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни топинг.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	2,0000			
		1152		
0,1	2,1152		310	
		1462		13
0,2	2,2614		323	
		1785		11
0,3	2,4399		334	
		2119		
0,4	2,6518			

Ечилиши. Бу ерда $x = 0{,}15$. $0{,}1 < x < 0{,}2$ бўлгани учун x_0 учун 0,1 ни оламиз. Шундай қилиб, $x_0 = 0{,}1$, $y_0 = 2{,}1152$, $\Delta y_0 = 0{,}1462$, $\Delta^2 y_0 = 0{,}0323$, $\Delta^3 y_0 = 0{,}0011$, $h = 0{,}1$, $t = (x - x_0)/h = 0{,}5$. (115) ва (116) формулаларга биноан қуйидагиларни топамиз:

$$f'(0{,}15) = \frac{1}{0{,}1}\left[0{,}1462 + \frac{0{,}0323}{2!}(2\cdot 0{,}5 - 1) + \frac{0{,}0011}{3!}(3\cdot 0{,}5^2 - 6\cdot 0{,}5 + 2)\right] =$$

$$= 10(0{,}1462 + 0 - 0{,}00004) = 1{,}4616;$$

$$f''(0{,}15) = \frac{1}{(0{,}1)^2}[0{,}0323 + 0{,}0011(0{,}5 - 1)] = 3{,}17.$$

Демак, $f'(0{,}15) = 1{,}4616$, $f''(0{,}15) = 3{,}17$ экан.

Юқорида келтирилган жадвал $f(x) = e^x + x^2 + 1$ функция учун келтирилган. Демак, $f'(x) = e^x + 2x$, $f''(x) = e^x + 2$. Ҳосилаларнинг $x = 0{,}16$ нуқтадаги қийматлари 0,0001 аниқликда қуйидагича:

$$f'(0{,}15) = 1{,}4618, \quad f''(0{,}15) = 3{,}1618.$$

Айтиб ўтиш керакки, ҳосила тартиби қанча юқори бўлса, ҳосила учун бошланадиган формуладаги айирма тартиби шунча юқори бўлади ва демак, функциянинг қийматларида хатолик шунча аниқ кўзга ташланади.

Изоҳ. Кўпинча ҳосилаларни топишда (115) ва (116) формулалар ўрнига унча аниқ бўлмаган қуйидаги формулалар қўлланилади:

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &\approx \frac{\Delta f(x)}{h}, \\ f''(x) &\approx \frac{\Delta^2 f(x)}{h^2}, \\ &\cdots\cdots \\ f^{n}(x) &\approx \frac{\Delta^n f(x)}{h^n}. \end{aligned}\right\} \tag{117}$$

Масалан, (117) формуланинг биринчиси ўринли эканини кўрсатайлик. Ҳосиланинг таърифидан $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta f(x)}{h}$ келиб чиқади. Шунинг учун етарлича кичик h ларда $f'(x) \approx \frac{\Delta f(x)}{h}$ тақрибий тенглик ўринли. Қолган формулаларнинг ўринлилиги шунга ўхшаш текширилади.

VII БОБ

АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

1- §. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ

1. Бошланғич ва аниқмас интеграл тушунчаси. Дифференциал ҳисобда биз қуйидаги асосий масалани ҳал қилдик: берилган функция бўйича унинг ҳосиласини топдик. Фан ва техниканинг кўп масалалари тескари масалага олиб келинади: берилган $f(x)$ функция учун шундай $F(x)$ функцияни топиш керакки, унинг ҳосиласи берилган $f(x)$ функцияга тенг бўлсин, яъни

$$F'(x) = f(x). \tag{1}$$

Қўйилган масалани яна қуйидаги кўринишда тавсифлаш мумкин: берилган $f(x)$ функция учун шундай $F(x)$ функцияни топиш керакки, унинг дифференциали берилган $f(x)\,dx$ ифодага тенг бўлсин:

$$dF(x) = f(x)dx. \tag{2}$$

$f(x)$ функция билан (1) муносабат орқали боғланган $F(x)$ функция унинг бошланғич функцияси дейилади.

Шундай қилиб, биз қуйидаги таърифга келдик.

Берилган функциянинг бошланғич функцияси деб, ҳосиласи берилган функцияга тенг бўлган ёки ўшанинг ўзи, дифференциали $f(x)\,dx$ ифодага тенг бўлган функцияга айтилади.

Масалан, $f(x) = x^2$ функциянинг бошланғич функцияси $F(x) = x^3/3$ чунки $F'(x) = (x^3/3)' = x^2$ ёки $dF(x) = d(x^3/3) = x^2dx$.

Берилган функция бўйича унинг бошланғич функциясини излаш интеграл ҳисобнинг асосий масалаларидан бири ҳисобланади.

Табиийки, қуйидагича савол туғилади: ҳамма функция учун ҳам бошланғич функция мавжуд бўлаверадими?

Бу саволга жавобни кенг функциялар синфи учун етарлича ҳозирча биз исботсиз қабул қиладиган қуйидаги теорема беради.

1-теорема. *Сегментда узлуксиз бўлган ихтиёрий функция бу сегментда бошланғич функцияга эга*.*

Агар бошланғични биз излаётган функция, узилиш нуқталарига эга бўлса, у ҳолда биз бу функцияни узлуксиз бўлган интерваллардагина қараймиз.

Берилган функция бўйича унинг бошланғичини излаш масаласи бир қийматли ечилмайди. Ҳақиқатан, агар $f(x) = x^2$ бўлса, унинг учун $x^3/3$ гина бошланғич бўлмай, $x^3/3 + 6$ ва $x^3/6 + 9$ ва

* Бу теореманинг исботи VIII боб, 2- §, 3- пунктда келтирилади.

умуман, $x^3/3+C$ ҳам бошланғич бўлиши мумкин, бу ерда C — бирор ихтиёрий танланган ўзгармас.

Қуйидаги теорема юқоридаги саволга узил-кесил жавоб беради.

2-теорема. *Агар $F(x)$ функция $a\leqslant x\leqslant b$ сегментда $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда $f(x)$ нинг ихтиёрий бошқа бошланғич функцияси $F(x)$ дан ўзгармас қўшилувчига фарқ қилади, яъни $F(x)+C$ кўринишда ёзилиши мумкин, бу ерда C — ўзгармас.*

Исботи. $\Phi(x)$ функция $f(x)$ функциянинг исталган бир бошланғич функцияси бўлсин, у ҳолда $\Phi'(x)=F'(x)=f(x)$. Лекин, агар иккита функция сегментда тенг ҳосилага эга бўлса, бу функцияларнинг берилган сегментдаги айирмаси ўзгармас бўлиши керак (VI боб, 6-§, 3-пунктга қаранг), яъни $\Phi(x)-F(x)=C$, бу ерда C — ўзгармас. Шундай қилиб, $\Phi(x)=F(x)+C$. Бу билан теорема исбот бўлди. Исбот қилинган теоремадан $F(x)+C$ ифода, бу ерда $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бирор бошланғич функцияси, C эса ихтиёрий ўзгармас катталик бўлиб берилган функциянинг барча бошланғич функцияларини ўз ичига олиши келиб чиқади.

Энди ноаниқ интеграл тушунчасини киритамиз.

Агар $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, $F(x)+C$ ифода, бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас, аниқмас интеграл дейилади.

Функциянинг аниқмас интеграли $\int f(x)dx$ символ билан белгиланади ($f(x)$ дан x бўйича олинган аниқмас интеграл деб ўқилади). Демак,

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C. \tag{3}$$

Бу ерда $f(x)$ *интеграл остидаги функция* $f(x)dx$ — *интеграл остидаги ифода, x — интеграллаш ўзгарувчиси* дейилади, $\int$ — символ эса *аниқмас интеграл* дейилади. Интеграл белгиси остида биз изланган функция ҳосиласини эмас, дифференциалини ёзамиз.

Масалан, $F(x)=x^3/3$ функция $f(x)=x^2$ функциянинг бошланғич функцияларидан бири бўлгани учун (3) формулага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C.$$

Аниқмас интегрални топиш амали ёки берилган функциянинг барча бошланғич функцияларини топиш бу функцияни *интеграллаш* дейилади.

Бошланғич функциянинг таърифидан бошланғичнинг дифференциали интеграл остидаги функцияга тенглиги келиб чиқади. Аниқмас интеграл бошланғич функция ва ўзгармаснинг йиғиндисидан иборат бўлгани учун аниқмас интегралнинг дифференциали ҳам интеграл остидаги ифодага тенг, яъни

$$d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx. \tag{4}$$

Іки аниқмас интегралдан олинган ҳосила интеграл остидаги функцияга тенг

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'_x = f(x). \tag{5}$$

Биринчи хоссага ўхшаб дифференциаллаш ва интеграллаш амаллари орасидаги алоқани ўрнатувчи яна битта хоссани айтиб ўтамиз.

$F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғичи бўлсин. У ҳолда

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Бироқ $f(x)dx = dF(x)$. Шунинг учун (3) тенгликни кўпинча қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\int dF(x) = F(x) + C. \tag{6}$$

Шундай қилиб, *бирор функция дифференциалидан олинган интеграл бу функция билан ўзгармаснинг йиғиндисига тенг экан.*

Масалан,

$$\int dx = x + C, \quad \int d\cos x = \cos x + C.$$

Кўрсатиб ўтилган хоссалар дифференциаллаш ва интеграллаш ўзаро тескари амал эканлигини билдиради.

2. Аниқмас интегралнинг геометрик маъноси. Уринманинг оғма бурчагининг тангенси ҳар бир нуқтасида берилган $y = f(x)$ функция нуқтасининг абсциссалари бўлиши берилган ҳолда $y = F(x)$ эгри чизиқни топиш талаб қилинсин. Ҳосиланинг геометрик маъносига кўра (VI боб, 1-§, 6-пунктга қаранг) берилган нуқтадан $y = F(x)$ эгри чизиққа ўтказилган уринманинг оғиш бурчаги тангенси $F(x)'$ ҳосиланинг қийматига тенг.

Демак, $F'(x) = f(x)$ бўладиган шундай $F(x)$ функцияни топишимиз керак. Бу муносабат изланган $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғичи эканлигини кўрсатади. Демак, масала интеграл ҳисобнинг масаласи — берилган функциянинг бошланғичини топишга келтирилади. Шундай қилиб, $y = \int f(x)dx$ ёки $y = F(x) + C$.

Биз кўрдикки, масала шартини битта эгри чизиқ эмас, балки эгри чизиқлар оиласи қаноатлантиради. Шу билан бирга $y = F(x)$ эгри чизиқ шу эгри чизиқлардан бири бўлса, у ҳолда ихтиёрий бошқа эгри чизиқни Oy ўқ бўйлаб параллел кўчириш ёрдамида ҳосил қилиш мумкин (171-расм).

Эгри чизиқларнинг берилган оиласидан битта маълум эгри чизиқни ажратиш учун масала шартига яна битта шарт — эгри чизиқ берилган $(x_0;\ y_0)$ нуқтадан ўтишини талаб қилиш керак. Бундай шарт *бошланғич шарт* дейилади. Бошланғич шартнинг берилиши эгри чизиқлар оиласидан $(x_0;\ y_0)$ нуқтадан ўтадиган эгри чизиқни ажратиш имконини беради. Бу нуқтанинг координаталари изланган эгри чизиқнинг $y = F(x) + C$ тенгламасини, яъни $y_0 = F(x_0) + C$ ни қаноатлантириши керак. Бу шартдан ни бир қийматли аниқлаймиз:

$$C = y_0 - F(x_0).$$

Мисол. $M(1, 2)$ нуқтадан абсциссаси x бўлган нуқталарда уринманинг бурчак коэффициенти x^2 га тенг бўладиган эгри чизиқ ўтказинг.

Е ч и л и ш и. $y' = x^2$. Демак, $y = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

Шундай қилиб, абсциссаси x бўлган нуқталарда уринманинг оғиш бурчаги тангенси x^2 га тенг эгри чизиқлар, $y = \frac{x^3}{3} + C$ кубик параболалар оиласини ташкил қилар экан (172-расм). Бу эгри чизиқлар оиласидан $M(1; 2)$ нуқтадан ўтадиганини ажратиб олишимиз керак (бошланғич шарт). Бу $2 = 1^3/3 + C$ ни беради, бундан $C = 5/3$. Демак, изланган эгри чизиқ тенгламаси $y = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{3}$ экан.

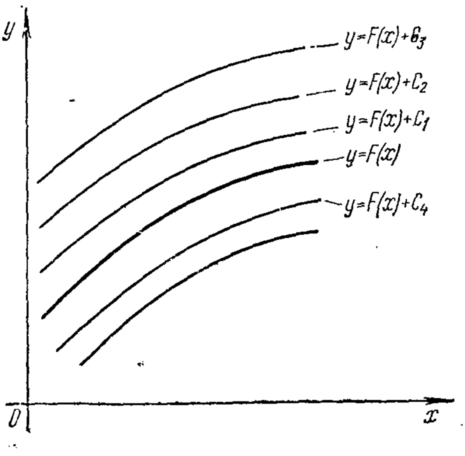
Қараб чиқилган бу мисол аниқмас интегралнинг геометрик маъносини ойдинлаштириш имконини беради.

$f(x)$ функция бошланғич функциясининг графигини *интеграл эгри чизиқ* деб атаймиз. Шундай қилиб, агар $F'(x) = f(x)$ бўлса, $y = F(x)$ функциянинг графиги интеграл эгри чизиқ бўлади.

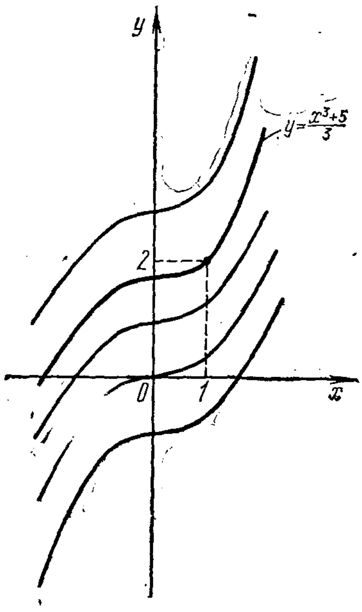
Аниқмас интеграл барча интеграл чизиқлар оиласи билан тасвирланади.

Бу $y = F(x) + C$ оиладан олинган барча эгри чизиқлар битта интеграл эгри чизиқни Oy ўқ бўйлаб параллел кўчириш натижасида ҳосил қилиниши мумкин.

3. Асосий интеграллар жадвали. Берилган функциянинг бошлан-



171-расм.



172-расм.

ғич функциясини излаш масаласи берилган функциянинг ҳосиласини топиш масаласига қараганда анча мураккабдир. Дифференциал ҳисоб курсида биз асосий элементар функцияларнинг ҳосилаларини топдик (VI бобга қаранг), йиғиндини, кўпайтмани, бўлинмани ва шунингдек, мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидаларини аниқладик.

Бу қоидалар бизга ихтиёрий элементар функция ҳосиласини топиш имконини берди. Элементар функцияларнинг бошланғич функцияларини топишнинг дифференциал ҳисобдаги каби содда, универсал қоидалари ва рецептлари мавжуд-эмас. Масалан, иккита элементар функциянинг кўпайтмаси, бўлинмасининг бошланғичини топиш имконини берадиган қоидалар йўқ. Ҳатто, бу элементар функциялардан ҳар биттасининг бошланғичи маълум бўлганда ҳам биз топа олмаймиз.

Функцияларни интеграллаш методлари (яъни бошланғични топиш) бажарилиши кўп ҳолларда мақсадга олиб келадиган қатор усулларни кўрсатишга олиб келади.

Интеграллашни енгиллаштириш учун асосий интеграллар жадвали деб аталадиган жадвал тузилади. Бу жадвал дифференциал ҳисобнинг асосий формулаларидан ҳосил қилинади:

I. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$

I′. $\int dx = x + C.$

II. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

III. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

IV. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

V. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

VI. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

VII. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$

VIII. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

IX. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

X. $\int e^x dx = e^x + C.$

XI. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$

XII. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$

XIII. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

XIV. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Бу формулаларни келтириб чиқариш ўнг томоннинг дифференциали тенгликнинг чап томонидаги интеграл остидаги ифодага тенглигини текширишга келтирилади ва иккинчи формулани ҳисобга олмаганда бошқа формулаларни келтириб чиқариш ҳеч қандай қийинчилик туғдирмайди.

(II) формуланинг ўринли эканини исботлаймиз. Интеграл остидаги $1/x$ функция x нинг нолдан фарқли барча қийматлари учун аниқланган ва узлуксиз.

Агар $x>0$ бўлса, $|x| = x$ ва $\ln|x| = \ln x$. Дифференциал ҳисобнинг маълум формуласига кўра қуйидагига эгамиз: $d \ln |x| = d \ln x = \frac{dx}{x}$. Шунинг учун $x > 0$ да

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C = \ln |x| + C.$$

Агар $x < 0$ бўлса, $|x| = -x$ ва $\ln |x| = \ln (-x)$. Бироқ $d \ln(-x) = \frac{-1}{-x} dx = \frac{dx}{x}$. Демак, $x < 0$ учун ҳам $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C = \ln |x| + C$. Шундай қилиб, (II) формула иккала ҳолда ҳам ўринли бўлиб қолаверади.

4. Аниқмас интегралнинг асосий хоссалари. Аниқмас интегралнинг асосий аниқмас интеграллар жадвали формулаларини қўлланиш имконини янада кенгайтирадиган икки қоидасини келтирамиз.

1°. *Чекли сондаги алгебраик йиғиндидан олинган аниқмас интеграл, ҳар бир қўшилувчидан айрим-айрим ҳолда олинган аниқмас интегралларнинг алгебраик йиғиндисига тенг, яъни*

$$\int [f(x) + g(x) - \varphi(x)]\, dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx - \int \varphi(x) dx. \quad (7)$$

2°. *Ўзгармас кўпайтувчини аниқмас интеграл белгисидан ташқарига чиқариш мумкин, яъни*

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (8)$$

($k \neq 0$ ўзгармас нолдан фарқли деб фараз қилинади).

(7) ва (8) тенгликларни шу маънода тушуниш керакки, уларнинг чап ва ўнг томонлари ўзгармас қўшилувчига фарқ қилади. Шунинг учун уларнинг ўринли бўлишини кўрсатиш учун чап томоннинг ҳосиласи (ёки дифференциали) ўнг томоннинг ҳосиласига (ёки дифференциалига) тенглигини кўрсатиш етарли (VI боб, 6- §, 3- пунктга қаранг).

Масалан, (8) тенгликнинг ўринли эканини исботлаймиз. (8) тенгликнинг чап томонини дифференциаллаб ва (4) формулани қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$d \int k f(x) dx = k f(x) dx.$$

(8) тенгликнинг ўнг томонини дифференциаллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$d\left(k \int f(x) dx\right) = k d \int f(x) dx = k f(x) dx.$$

Шундай қилиб,

$$d \int k f(x) dx = d(k \int f(x) dx),$$

бундан (8) тенглик келиб чиқади.

Мисол. $\int (x^3 + 3\sin x - 8)\,dx$ ни топинг.

Ечилиши. 1^0 ва 2^0 хоссаларга асосан қуйидагига эгамиз:

$$\int (x^3 + 3\sin x - 8)dx = \int x^3dx + 3\int \sin x\,dx - 8\int dx.$$

(I), (III) ва (I′) формулалардан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int x^3dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C_1 = \frac{x^4}{4} + C_1;$$

$$3\int \sin x\,dx = 3(-\cos x + C_2) = -3\cos x + 3C_2;$$

$$8\int dx = 8(x + C_3) = 8x + 8C_3,$$

Шундай қилиб,

$$\int (x^3 + 3\sin x - 8)\,dx = \frac{x^4}{4} - 3\cos x - 8x + (C_1 + 3C_2 - 8C_3).$$

Ҳар бир интеграллашда ўзининг эркли ўзгармасини ҳосил қилдик Лекин пировардида фақат битта ихтиёрий ўзгармасни ёзамиз, чунки C_1, C_2, C_3—ихтиёрий ўзгармас бўлса, $C = C_1 + 3C_2 - 8C_3$ ҳам ихтиёрий ўзгармас бўлади. Шунинг учун узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int (x^3 + 3\sin x - 8)\,dx = \frac{x^4}{4} - 3\cos x - 8x + C.$$

Ҳосил қилинган натижанинг тўғрилигини дифференциаллаш ёрдамида осон текшириш мумкин. Ҳақиқатан,

$$d\left(\frac{x^4}{4} - 3\cos x - 8x + C\right) = (x^3 + 3\sin x - 8)\,dx.$$

2-§. ИНТЕГРАЛЛАШНИНГ АСОСИЙ МЕТОДЛАРИ

Энди кўп ҳолларда берилган интегралларни жадвал интегралларига келтирадиган баъзи усулларни кўрсатиб ўтамиз: ёйиш методи билан интеграллаш, ўзгарувчини алмаштириш методи билан интеграллаш ва бўлаклаб интеграллаш.

1. **Ёйиш методи билан интеграллаш.** Бу метод интеграл остидаги функцияни ҳар бирининг бошланғичини бошқа методлар билан топиш мумкин бўлган функциялар йиғиндисига ёйишга асосланган.

1-мисол. $\int \frac{x^3 + 4x + 2}{2x}\,dx$ ни топинг.

Ечилиши. $\frac{x^3 + 4x + 2}{2x} = \frac{1}{2}x^2 + 2 + \frac{1}{x}$ бўлгани учун

$$\int \frac{x^4 + 4x + 2}{2x}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}x^2 + 2 + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\int x^2dx + 2\int dx + \int \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + 2x + \ln|x| + C = \frac{x^3}{6} + 2x + \ln|x| + C.$$

Текшириш:

$$d\left(\frac{x^3}{6} + 2x + \ln|x| + C\right) = \left(\frac{x^2}{2} + 2 + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^3 + 4x + 2}{2x}\,dx.$$

Кейинги ҳолларда текшириб ўтирмаймиз. Лекин, дастлабки ҳолларда ўз-ўзини текшириш мақсадида бу вазифани китобхоннинг ўзига ҳавола қиламиз

2-мисол. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$ ни топинг.

Ечилиши. Қуйидагига эгамиз:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Интеграл остидаги ифодани қулай усул билан ёйиб, биз интегрални жадвал интеграл кўринишга келтирдик.

Энди интеграллашнинг бошқа иккита методига тўхталамиз.

2. Ўзгарувчини алмаштириш методи билан интеграллаш. Кўп ҳолларда интеграл ўзгарувчиси x ўрнига z ўзгарувчини киритиш билан берилган интегрални асосий интеграллар жадвалида мавжуд ёки бошқа усул билан сон ҳисобланадиган интегралга келтирилади. Бу интеграллаш методи *ўзгарувчини алмаштириш методи* ёки *ўрнига қўйиш методи* дейилади.

Интеграл остида ички функциянинг ҳосиласига кўпайтирилган мураккаб функция турган бўлсин, яъни интеграл

$$\int f[\varphi(x)]\, \varphi'(x)\, dx = \int f[\varphi(x)]\, d\varphi(x)$$

кўринишда бўлсин, бунда $\varphi(x)$ ва $\varphi'(x)$ функциялар узлуксиз.

Янги z ўзгарувчи киритамиз, у $z=\varphi(x)$ бўлсин. Ушбу формула ўринли эканини кўрсатайлик:

$$\int f[\varphi(x)]\, \varphi'(x) dx = \int f(z) dz, \qquad (9)$$

бунда $f(z)$ функция узлуксиз деб фараз қиламиз. Бу муносабат *ўзгарувчини алмаштириш формуласи* деб аталади. Бу ерда, агар $\int f(z)dz = F(z) + C$ бўлса, $\int f[\varphi(x)]\, \varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C$ экани назарда тутилади.

Қилинган тасаввурларимизга кўра (9) формуладаги ҳар бир интеграл мавжуд, чунки тегишли интеграллар остидаги функциялар узлуксиздир, (9) формула ўринли эканини исбот қилиш учун иккала томоннинг дифференциали ўзаро тенг эканини кўрсатиш етарлидир.

(9) формуланинг чап томонини (4) формулага кўра дифференциаллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$d\left\{\int f[\varphi(x)]\, \varphi'(x) dx\right\} = f[\varphi(x)]\, \varphi'(x) dx.$$

Иккинчи томондан, (9) муносабатнинг ўнг томонини дифференциаллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$d\left[\int f(z)\, dz\right] = f(z)\, dz = f[\varphi(x)]\, \varphi'(x)\, dx,$$

чунки $f(z) = f[\varphi(x)]$, $d(z) = \varphi'(x)\, dx$.

Иккала ҳолда бир хил натижа келиб чиқди. Шу билан (9) формула исботланди.

1-мисол. $\int \sin ax\,dx$ ни топинг.

Ечилиши.

Қуйидаги алмаштиришларни бажарамиз:

$$\int \sin ax\,dx = \int \frac{1}{a}\sin ax \cdot a dx = \frac{1}{a}\int \sin a x d(ax).$$

Энди $z = ax$ деб, ва (9 формулани қўлланиб,

$$\int \sin ax\,dx = \frac{1}{a}\int \sin ax\,d(ax) = \frac{1}{a}\int \sin z\,dz =$$

$$= -\frac{\cos z}{a} + C = -\frac{\cos ax}{a} + C.$$

2-мисол. $\int \operatorname{tg} x\,dx$ ни топинг.

Ечилиши. $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$ экани маълум. $\sin x\,dx = -d\cos x$ ни эътиборга олиб $z = \cos x$ деймиз. У ҳолда

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\int \frac{dz}{z} = -\ln|z| + C =$$

$$= -\ln|\cos x| + C.$$

Шундай қилиб,

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C. \qquad \text{(XV)}$$

Шунга ўхшаш

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C \qquad \text{(XVI)}$$

ни топамиз.

Ўзгарувчини алмаштириш ёрдамида интеграллаш малакаси ҳосил қилингандан кейин содда интегралларни бунга ўхшаш ўрнига қўйишларни батафсил ёзиш шарт эмас.

3-мисол. $\int \sqrt[3]{1+x^2}\cdot x\,dx$ ни топинг.

Ечилиши. $d(1+x^2) = 2x\,dx$ ни эътиборга олиб, $x\,dx = \frac{1}{2}d(1+x^2)$ ни ҳосил қиламиз. Шунинг учун

$$\int \sqrt[3]{1+x^2}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{1/3}\,d(1+x^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}{8} + C.$$

Юқорида кўриб ўтганларимиздан асосий интеграллар жадвали x ўзгарувчи z ўзгарувчининг функцияси, яъни $x = \varphi(z)$ бўлганда ва $\varphi'(z)$ узлуксиз бўлган ҳолдагина ўз кучида қолиши келиб чиқади.

(9) формуладан баъзан қуйидагича фойдаланилади:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz, \qquad (10)$$

бу ерда $\int f(x)\,dx$ — берилган интеграл. Бироқ бу ерда $x=\varphi(z)$ алмаштиришдан сўнг интегралланадиган функция z аргументнинг функцияси бўлиб қоляпти. x ўзгарувчига қайтиш (ўтиш) учун $x=\varphi(z)$ функцияга тескари функцияни топиш керак. Бундай функция $\varphi(z)$ узлуксиз функция монотон бўлгандагина мавжуд бўлади.

(10) формула ҳам ўзгарувчини алмаштириш формуласи дейилади.

4-мисол. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ни топинг.

Ечилиши. $x=az$ деб олиб, $dx=adz$ ни топамиз. (10) формулани қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{adz}{\sqrt{a^2-a^2z^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Бироқ, (VIII) формулага кўра $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z + C$. Шунинг учун

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z + C.$$

$x=az$ га тескари $z=\frac{x}{a}$ функцияни топиб ва x ўзгарувчига қайтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C. \qquad (\mathrm{VIII}')$$

$x=az$ алмаштиришни яна бир қўлланиб, қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C. \qquad (\mathrm{VII}')$$

Кўпинча ёйиб ва ўзгарувчини алмаштириш ёрдамида интеграллаш методлари биргаликда қўлланилади.

Қуйидаги кўринишдаги интегралларни кўрайлик:

$$\int \sin mx \cdot \cos nx\,dx, \quad \int \sin mx \cdot \sin nx\,dx, \quad \int \cos mx \cdot \cos nx\,dx.$$

Бу интеграллар ёйиш методи билан қуйидаги тригонометрик айниятлар ёрдамида ечилади:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{2};$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2};$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x}{2}.$$

5- мисол. $\int \sin 2x \cdot \cos 6x\, dx$ ни ҳисобланг.

Ечилиши. Қуйидагига эгамиз:

$$\int \sin 2x \cdot \cos 6x\, dx = \frac{1}{2}\int [\sin(2+6)x + \sin(2-6)x]\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 8x\, dx -$$
$$-\frac{1}{2}\int \sin 4x\, dx = \frac{1}{16}\int \sin 8x\, d(8x) - \frac{1}{8}\int \sin 4x\, d(4x) =$$
$$= -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{8}\cos 4x + C.$$

3. Бўлаклаб интеграллаш. $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ лар узлуксиз ҳосилалари мавжуд бўлган x нинг иккита функцияси бўлсин. Дифференциал ҳисобдан биз биламизки, (VI боб, (59′) формулага қаранг),

$$d(uv) = udv + vdu. \tag{11}$$

(11) тенгликнинг иккала томонини интеграллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu \text{ ёки } \int udv = \int d(uv) - \int vdu.$$

Бироқ $\int d(uv) = uv + C$, шунинг учун

$$\int udv = uv - \int v\, du. \tag{12}$$

(12) тенгликда ихтиёрий ўзгармас C ни ёзмаймиз, чунки формуланинг ўнг томонида ихтиёрий ўзгармасни ўз ичига олган аниқмас интеграл қолди.

(12) формула *бўлаклаб интеграллаш формуласи* дейилади. У $\int udv$ интегрални ҳисоблашни кўп ҳолларда анча осон ҳисобланадиган $\int vdu$ интегрални ҳисоблашга келтирилади.

1- мисол. $\int x \sin x\, dx$ ни ҳисобланг.

Ечилиши. Бу ерда бизда бир нечта имконият бор. Масалан, $u = \sin x$, $x dx = dv$ деб олиш мумкин, $u = x$, $\sin x\, dx = dv$ дейиш ҳам мумкин.

$u = \sin x$, $dv = x\, dx$ деб, $du = \cos x\, dx$, $v = x^2/2$ ни топамиз*.

(12) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$\int x \sin x\, dx = \frac{x^2}{2}\sin x - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\, dx.$$

Интеграл остидаги ифодани бундай иккита йиғиндига ажратиш ноқулай эканини тан олиш керак, чунки бу анча мураккаб интегралга олиб келади.

$u = x$, $dv = \sin x dx$ деб оламиз; бундан $du = dx$, $v = -\cos x$ ни топамиз. (12) формуладан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int x \sin x\, dx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx.$$

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$ бўлгани учун узил-кесил қуйидагига эгамиз:

$$\int x \sin x\, dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

---

* Бу ерда $v = \int dv = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C$. v деб x функциянинг бошланғич функцияларидан бирини оламиз.

Баъзан узил-кесил натижани ҳосил қилиш учун бўлаклаб интеграллашни кетма-кет бир неча бор қўлланиш керак.

Бўлаклаб интеграллаш методи билан ҳисобланадиган баъзан кўп учрайдиган интегралларни кўрсатамиз:

I. $\int P(x)e^{kx}dx,\ \int P(x)\sin kx\,dx,\ \int P(x)\cos kx\,dx$

кўринишдаги интеграллар, бу ерда $P(x)$ — кўпҳад, k — бирор сон.

Бу типдаги интеграллар $u = P(x)$ деб олинса, бўлаклаб олинади.

2- мисол. $\int (x^2 - 2x + 7)e^{2x}dx$ ни топинг.

Ечилиши. $u = x^2 - 2x + 7$, $dv = e^{2x}dx$ дейлик, у ҳолда

$$du = (2x - 2)\,dx,\ v = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Бўлаклаб интеграллаш формуласини қўлланиб, қуйидагини топамиз:

$$\int (x^2 - 2x + 7)e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 7)e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}(2x - 2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 7)e^{2x} - \int (x - 1)e^{2x}dx.$$

Охирги интеграл биринчи интеграл типидан, бироқ $(x-1)$ кўпҳаднинг даражаси $x^2 - 2x + 7$ никидан кичик.

$\int (x-1)e^{2x}dx$ интегралга яна бўлаклаб интеграллашни қўлланиб, ҳамда $u = x - 1$, $dv = e^{2x}dx$; у ҳолда $du = dx$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$ деб қуйидагига эга бўламиз:

$$\int (x - 1)e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x - 1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Демак,

$$\int (x^2 - 2x + 7)e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 7)e^{2x} -$$

$$- \left[\frac{1}{2}(x - 1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right] + C = \frac{1}{4}(2x^2 - 6x + 17)e^{2x} + C.$$

II. $\int P(x)\ln x\,dx,\ \int P(x)\arcsin x\,dx,\ \int P(x)\arccos x\,dx,$

$\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx,\ \int P(x)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$

кўринишдаги интеграллар, бу ерда $P(x)$ — x га нисбатан кўпҳад.

Бу ҳолларнинг барчасида бўлаклаб интеграллашда u деб $P(x)$ ни кўпайтувчи бўлган функцияни олинади.

3- мисол. $\int (4x^3 + 6x - 7)\ln x\,dx$ ни топинг.

Ечилиши. $u = \ln x$, $dv = (4x^3 + 6x - 7)\,dx$ деймиз; у ҳолда $du = \frac{dx}{x}$, $v = x^4 + 3x^2 - 7x$. (12) формула қуйидагини беради:

$$\int (4x^3 + 6x - 7)\ln x\,dx = (x^4 + 3x^2 - 7x)\ln x - \int \frac{x^4 + 3x^2 - 7x}{x}\,dx =$$

$$= (x^4 + 3x^2 - 7x)\ln x - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - 7x\right) + C.$$

III. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, (*бу ерда* a ва b *сонлар*) кўринишдаги интеграллар. Бу интеграллар икки марта бўлаклаб интеграллаб топилади.

4- мисол. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ ни топинг.

Ечилиши. $u = e^{2x}$, $dv = \cos 3x\,dx$ деймиз*, бундан $du = 2e^{2x}dx$, $v = \frac{1}{3}\sin 3x$. У ҳолда $\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x\,dx$

Охирги интегралда $u = e^{2x}$, $dv = \sin 3x dx$, у ҳолда $du = 2e^{2x}dx$, $v = -\frac{1}{3}\cos 3x$ деб бўлаклаб интеграллашни яна бир марта қўлланамиз:

Демак,

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx.$$

Шундай қилиб,

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx\right)$$

ёки

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}e^{2x}\left(\sin 3x + \frac{2}{3}\cos 3x\right) - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x\,dx$$

Охирги муносабатнинг ўнг томонида изланган интеграл $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ турибди. Уни чап томонга ўтказиб, қуйидагини топамиз:

$$\left(1 + \frac{4}{9}\right)\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}e^{2x}\left(\sin 3x + \frac{2}{3}\cos 3x\right) + C_1.$$

Бундан

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{e^{2x}(3\sin 3x + 2\cos 3x)}{13} + C,$$

бу ерда C ўзгармас $9C_1/13$ га тенг бўлади

Энди баъзи элементар функцияларни интеграллашга ўтамиз. Бунда биз юқоридаги параграфда баён қилинган интеграллашнинг умумий методларидан фойдаланамиз.

---

* $u = \cos 3x$, $dv = e^{2x}dx$ деб олиш ҳам мумкин.

1. Комплекс соннинг таърифи ва унинг геометрик маъноси. Ҳақиқий сонларнинг тартибланган (x, y) жуфти комплекс сон дейилади; шундай қилиб, $z = (x, y)$.

Бунда $(x, 0)$ кўринишдаги комплекс сонлар x ҳақиқий сон билан айнийлаштирилади, яъни $(x, 0) = x$.

Хусусан, $(1, 0) = 1$ (бу ҳақиқий сонлар соҳасидаги каби бир деб аталади), $(0, 0) = 0$ (бу комплекс сон ноль дейилади).

$y \neq 0$ да (x, y) комплекс сон *мавҳум* дейилади. $(0, y)$ кўринишдаги мавҳум сон, *соф мавҳум* дейилади. Соф мавҳум $(0, 1)$ сон *мавҳум бир* дейилади ва i ҳарфи билан белгиланади. Шундай қилиб, $(0, 1) = i$.

$z = (x, y)$ комплекс сонни аниқлайдиган биринчи ҳақиқий сон, яъни x сон z нинг *ҳақиқий қисми* дейилади ва $\operatorname{Re} z$ символи билан белгиланади. Бу сонлардан иккинчиси, яъни y сон z нинг *мавҳум қисми* дейилади ва $\operatorname{Im} z$ символ билан белгиланади.

Комплекс соннинг геометрик маъносини аниқлаймиз. Маълумки, ихтиёрий тартибланган ҳақиқий сонларнинг (x, y) жуфтига Oxy координата текислигида ёки $M(x, y)$ нуқтани ёки проекциялари Ox ва Oy ўқида мос равишда x ва y бўлган $\mathbf{r}$ векторни мос қўйиш мумкин. Биз $M(x; y)$ ҳамда $\mathbf{r}$ вектор $z = (x, y)$ комплекс сонни тасвирлайди деб атаймиз. Бундан ташқари, бундан буён „комплекс сон z“ терминига „z нуқта“ термини* билан айнийлаштирамиз.

$z = (x, y)$ комплекс сонлар тасвирлаш учун хизмат қиладиган Oxy текислик *комплекс текислик* дейилади. Комплекс текисликда ҳақиқий сонлар Ox ўқнинг нуқталари билан тасвирланади ва бу ўқ *ҳақиқий ўқ* деб аталади. Соф мавҳум сонлар [яъни $y = 0$ да $(0, y)$ комплекс сонлар] Oy ўқнинг нуқталари билан тасвирланади, бу ўқ *мавҳум ўқ* деб аталади.

2. Алгебраик формадаги комплекс сонлар устида амаллар. Иккита комплекс соннинг тенглиги тушунчасини киритамиз. Агар ҳақиқий ва мавҳум қисмлари мос равишда тенг $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ бўлса, иккита $z_1 = (x_1, y_1)$ ва $z_2 = (x_2, y_2)$ комплекс сонлар *тенг* дейилади. Тенг комплекс сонларни тасвирлайдиган векторлар ҳам ўзаро тенг, чунки уларнинг Ox ва Oy ўқлардаги мос проекциялари ўзаро тенг.

$z_1 = (x_1, y_1)$ ва $z_2 = (x_2, y_2)$ комплекс сонларни қўшиш ва айиришни ҳамда ҳақиқий $\lambda = (\lambda, 0)$ сонга кўпайтиришни қуйидаги формулалар ёрдамида (ўз проекциялари билан берилган векторлар устида бажарилган амалларга ўхшаш) аниқлаймиз.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Қўшиш: } z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\, y_1 + x_2); \\ \text{Айириш: } z_1 - z_2 = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2,\, y_1 - y_2); \\ \text{Кўпайтириш: } \lambda z = \lambda (x, y) = (\lambda x, \lambda y). \end{array}\right\} \quad (13)$$

* 8-бетдаги ҳақиқий сонлар учун тўғри келадиган терминология билан таққосланг.

Агар қўшилувчилар сони иккитадан ортиқ бўлса, уларнинг йиғиндиси ҳақиқий сонларникидек аниқланади, масалан, $z_1+z_2+z_3=(z_1+z_2)+z_3$.

Айириш, маълумки, қўшишга тескари амал ҳисобланади. Шунинг учун $z_3=z_1-z_2$ бўлса, $z_3+z_2=z_1$.

(13) формулалардан фойдаланиб, ихтиёрий $z=(x, y)$ комплекс сонни унинг ҳақиқий қисми x билан мавҳум қисми y нинг $i=(0,1)$ га кўпайтмаси сифатида ифодалашни кўрсатамиз. Ҳақиқатан,

$$z=(x, y)=(x, 0)+(0, y)=x(1, 0)+y(0, 1)=$$
$$=x\cdot 1+y\cdot i=x+yi.$$

Шундай қилиб,

$$z=(x, y)=x+yi. \tag{14}$$

Комплекс соннинг (14) формула кўринишда ёзилиши комплекс соннинг *алгебраик формаси* дейилади. Бу формуладан фойдаланиб, (13) формулани қуйидагича ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} z_1\pm z_2&=(x_1+y_1i)\pm(x_2+y_2i)=(x_1\pm x_2)+(y_1\pm y_2)i,\\ \lambda z&=\lambda(x+yi)=\lambda x+\lambda yi.\end{aligned}\right\} \tag{13'}$$

1-мисол. $z_1=2+i$ ва $z_2=3-2i$ сонларнинг йиғиндиси ва айирмасини топинг.

Ечилиши. (13) формуланинг биринчисидан қуйидагини топамиз:

$$z_1+z_2=(2+i)+(3-2i)=(2+3)+(1-2)i=5-i,$$
$$z_1-z_2=(2+i)-(3-2i)=(2-3)+(1+2)i=-1+3i.$$

2-мисол. $3-4i$ комплекс сонни -5 га кўпайтиринг.

Ечилиши. (13′) формуланинг иккинчисидан қуйидагини топамиз:

$$(3-4i)(-5)=-15+20i.$$

Энди комплекс сонларни кўпайтириш ва бўлиш амалини кўрсатамиз.

$z_1=x_1+y_1i$ ва $z_2=x_2+y_2i$ *комплекс сонларнинг кўпайтмаси деб қуйидагича аниқланадиган z комплекс сонга айтилади:*

$$z=z_1z_2=(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i. \tag{15}$$

3-мисол. $x=2-3i$ ва $z_2=1+2i$ комплекс сонлар кўпайтмасини топинг.

Ечилиши. (15) формулага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$z_1\cdot z_2=[2\cdot 1-(-3)\cdot 2]+[2\cdot 2+1\cdot(-3)]i=8+i.$$

4-мисол. $i^2=i\cdot i$ ни топинг

Ечилиши. $i=0+1i$ бўлгани учун

$$i^2=i\cdot i=(0+1\cdot i)\cdot(0+1\cdot i)=(0\cdot 0-1\cdot 1)+(0\cdot 1+0\cdot 1)i=-1.$$

Шундай қилиб. $i^2=-1$ экан

Агар иккита $x+yi$ ва $x-yi$ комплекс сон бир-биридан фақат мавҳум қисмининг ишораси билан фарқ қилса, *қўшма комплекс* сон дейилади ва $z=x+yi$, $\bar{z}=x-yi$ каби белгиланади.

Қўшма комплекс сонни тасвирлайдиган нуқталар ҳақиқий Ox ўқига нисбатан симметрик жойлашган бўлади.

5-мисол $\bar{z} = x + yi$ ва $\bar{z} = x + yi$ қўшма комплекс сонларнинг кўпайтмасини топинг.

Ечилиши. Қуйидагига эгамиз:

$$z \cdot \bar{z} = [x \cdot x - y(-y)] + [x(-y) + x \cdot y] i = x^2 + y^2.$$

Шундай қилиб, $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$.

Бўлиш кўпайтиришга нисбатан тескари амал сифатида аниқланади. Агар $z_1 = z \cdot z_2$ бўлса, z сон $z_1 = x_1 + y_1 i$ ва $z_2 = x_2 + y_2 i$ комплекс сонларнинг *бўлинмаси* $(z = z_1/z_2)$ дейилади.

$z_2 = 0$ да бўлиш ҳар доим ўринли эканини таъкидлаб ўтамиз.

Ҳақиқатан, $z_1 = z z_2$ тенгликнинг иккала томонини $\bar{z}_2$ га кўпайтирсак, $\bar{z}_1 z_2 = z(z_2 \bar{z}_2)$ ни ҳосил қиламиз. Бу тенгликнинг иккала томонини $\frac{1}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{1}{x^2 + y^2}$ ҳақиқий сонга кўпайтиргандан сўнг қуйидагини топамиз:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}. \tag{16}$$

6-мисол. $z_1 = 2 + 3i$ сонни $z_2 = 1 + 4i$ га бўлинг.

Ечилиши. (16) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{1 + 4i} = \frac{(2 + 3i)(1 - 4i)}{(1 + 4i)(1 - 4i} = \frac{14 - 5i}{17} = \frac{14}{17} - \frac{5}{17} i.$$

3. Комплекс соннинг тригонометрик формаси. Қутб ўқини ҳақиқий Ox ўқ билан, қутбни эса координаталар боши O билан туташтириб, Oxy комплекс текисликда қутб координаталар системасини киритамиз. $z = x + yi$ комплекс сонни қараймиз. Унга комплекс текисликда $M(x;\ y)$ нуқта мос келади. $r\ (r > 0)$ ва φ лар M нуқтанинг поляр координаталари бўлсин. M нуқтанинг r қутб радиуси, яъни унинг қутбдан масофаси z комплекс соннинг *модули* дейилади ва $|z|$ символ билан белгиланади. Равшанки, $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (I боб, 3-§, 3-пунктга қаранг). M нуқтанинг қутб бурчаги z комплекс соннинг *аргументи* дейилади ва $\operatorname{Arg} z$ символ билан белгиланади. Маълумки, қутб бурчаги бир қийматли аниқланмай, балки $2\pi k$ қўшилувчигача аниқликда аниқланади, бу ерда k—ихтиёрий бутун сон.

Аргументнинг барча қийматларидан $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ тенгсизликни қаноатлантирадиганларини ажратамиз. Бу қиймат *асосий* қиймат дейилади ва $\varphi = \arg z$ билан белгиланади. $z = 0$ учун аргумент аниқланмаганини айтиб ўтиш керак. Қутб ва декарт координаталарини боғловчи $x = r\cos\varphi$ ва $y = r\sin\varphi$ формулаларни эътиборга олиб (I боб, (6) формулага қаранг) биз $z = x + yi$ комплекс сонни қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{17}$$

Ёзишнинг бундай формаси комплекс соннинг *тригонометрик формаси* дейилади.

1- мисол. Қуйидаги сонларни тригонометрик формада тасвирланг.

$$1)\ z_1 = 1 - \sqrt{3}\,i;\quad 2)\ z_2 = i;\quad 3)\ z_3 = 5.$$

Ечилиши: 1) $z_1 = 1 - \sqrt{3}\,i$ сон учун қуйидагига эгамиз:

$x=1$, $y=-\sqrt{3}$, $r=\sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$, $\cos\varphi=x/r=1/2$, $\sin\varphi=y/r=-\sqrt{3}/2$.

Синус ва косинуснинг бу қийматларига аргументнинг $\varphi(\pi/2)$ қиймати мос келади.

$$z_1 = 1-\sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

2) $z_2 = i$ учун $x=0$, $y=1$ га эгамиз, бундан $r=1$; $\cos\varphi=0$, $\sin\varphi=1$, яъни $\varphi=\pi/2$. Демак, $z_2 = i = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

3) $z_3 = 5$ учун $r=5$, $\varphi=0$ га эгамиз; шундай қилиб, $z_3=5=5(\cos 0+i\sin 0)$.

Тригонометрик формада берилган комплекс сонлар қандай бўлинишини кўрсатамиз. $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_2)$ ва $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ бўлсин.

У ҳолда

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + (\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \right.$$
$$\left. + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\,i\right] = r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right].$$

Шундай қилиб,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_1)\right]. \qquad (18)$$

(18) формуладан, *комплекс сонларни кўпайтирганда уларнинг модуллари кўпайтирилади, аргументлари эса қўшилиши келиб чиқади*. Бу қоида кўпайтувчиларнинг чекли n таси учун ўринли. Хусусан, n та кўпайтувчи бир хил бўлган қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (19)$$

(19) формула *Муавр* формуласи* дейилади.

2- мисол. $z=1-i$ сонни саккизинчи даражага кўтаринг.

Ечилиши. Берилган сонни тригонометрик формада тасвирлаймиз:

$$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Муавр формуласига кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$z^8 = (1-i)^8 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^8 =$$
$$= (\sqrt{2})^8\left[\cos\left(8\cdot\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(8\cdot\frac{7\pi}{4}\right)\right] = 16(\cos 14\pi + i\sin 14\pi) = 16.$$

---

* А. Муавр (1667 — 1754)—инглиз математиги.

z_1 ва z_2 комплекс сонларни бўлганда қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2)i}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_2-\varphi_1)+i\sin(\varphi_2-\varphi_1)].$$

Шундай қилиб,

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_2-\varphi_1)+i\sin(\varphi_2-\varphi_1)]. \tag{20}$$

(20)· формуладан, *комплекс сонларни бўлганда уларнинг модуллари бўлиниши, аргументлари эса айирилиши келиб чиқади.*

Комплекс сондан n- даражали илдиз чиқариш, комплекс сонни n- даражага кўтариш амалига тескари амалдир. Демак, $\omega=\sqrt[n]{z}$ бўлса, $z=\omega^n$. $z=r(\cos\varphi+\sin\varphi)$ ва $\omega=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ бўлсин. Муавр формуласига кўра қуйидагини ҳосил қаламиз:

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=[\rho(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

Бундан

$$r=\rho^n,\quad n\theta=\varphi+2k\pi.$$

r ва ρ — мусбат сонлар бўлгани учун $\rho=\sqrt[n]{r}$, бу ерда илдиз арифметик маънода тушунилади. $n\theta=\varphi+2k\pi$ тенгликдан $\theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}$ ни ҳосил қиламиз. Демак,

$$\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right). \tag{21}$$

k га кетма-кет 0, 1, 2, . . . , $n-1$ қийматларни бериб, $\sqrt[n]{z}$ нинг n та ҳар хил қийматини ҳосил қиламиз. Уларнинг ҳаммаси бир хил модулга эга. Агар $k>n-1$ бўлса, θ нинг қийматлари аввал θ ҳосил қилинган қийматлардан каррали 2π сонга фарқ қилади ва $\sqrt[n]{z}$ қийматлар қайтарилаверади.

3- мисол. $\sqrt{-1}$ ни топинг.

Ечилиши. -1 сонни тригонометрик формада тасвирлаймиз: $-1=1(\cos\pi+i\sin\pi)$. (21) формулага кўра қуйидагига эгамиз: $\sqrt{-1}=\sqrt{1(\cos\pi+i\sin\pi)}=\sqrt{1}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right)$. k га 0 ва 1 қийматларни бериб, илдизнинг иккита ҳар хил ε_0 ва ε_1 қийматини ҳосил қиламиз.

$$\varepsilon_0=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=i,\quad \varepsilon_1=1\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{2}\right)=-i.$$

4-мисол. Маълумки, $ax^2+bx+c=0$ квадрат тенглама, агар унинг дискриминанти $D=b^2-4ac$ манфий бўлса, ҳақиқий илдизларга эга эмас. Бунда тенглама иккита қўшма комплекс илдизга тенг эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, $D<0$ ва $D=-d^2 (d>0)$ десак, маълум $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ формулага кўра $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{-d^2}}{2a}$ ни ҳосил қиламиз. Бироқ $\sqrt{-d^2}=\pm\sqrt{d^2\cdot(-1)}=\sqrt{d^2}\cdot\sqrt{-1}=\pm di$ (3-мисолга қаранг). Демак,

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm di}{2a}=\frac{-b}{2a}\pm\frac{d}{2a}i.$$

Хусусан, $x^2+6x+13=0$ тенглама қуйидаги комплекс илдизларга эга: $x_1=-3+2i$, $x_2=-3-2i$.

4. Кўпҳадлар ҳақида баъзи маълумотлар. Бу пунктда бизга кейинчалик керак бўладиган баъзи кўпҳадлар ҳақидаги қисқа маълумотларни қараб чиқамиз.

$P(x)$ кўпҳаднинг *илдизи* деб бу кўпҳадни нолга айлантирадиган ҳар қандай (ҳақиқий ёки комплекс) $P(\alpha)=0$ сонни айтилади. Масалан, x^3+x^2-2x-8 кўпҳад учун $\alpha=2$ сон илдиз бўлади, чунки $2^3+2^2-2\cdot2-8=0$.

Исботсиз келтирадиган қуйидаги теорема ўринлидир.

n-даражали ҳар қандай кўпҳад $x-\alpha$ кўринишдаги n та чизиқли кўпайтувчи билан юқори даражали x нинг олдидаги a_0 ўзгармас коэффициентга кўпайтмаси кўринишида ифодаланиши мумкин, яъни

$$P(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n). \qquad (22)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сонлар равшанки, $P(x)$ кўпҳаднинг илдизидир.

1-мисол. Қуйидагининг тўғрилигини текшириш осон:

$$5x^4-40x^3+115x^2-140x+60=5(x-2)(x-2)(x-1)(x-3).$$

2-мисол. x^3+x^2+9x+9 кўпҳад учун қуйидаги ёйиш ўринли:

$$x^3+x^2+9x+9=(x+1)(x-3i)(x+3i).$$

Кўпҳад ёйилган кўпайтувчилар бир хил бўлиши ҳам мумкин. Чизиқли кўпайтувчиси $(x-a)$ (22) ёйилмада k_1 марта учрайдиган $P(x)$ кўпҳаднинг a илдизи k_1 *каррали илдиз* дейилади. Каррали илдизи бир бўлган илдиз эса *оддий илдиз* дейилади. (22) ёйилмадан бир хил кўпайтувчиларни бирлаштириб, уни қуйидаги кўринишда ёзишимиз мумкин:

$$P(x)=a_0(x-a)^{k_1}(x-b)^{k_2}\ldots(x-l)^{k_s}, \qquad (23)$$

бу ерда барча $a, b, \ldots, l$ илдизлар ҳар хил, $k_1+k_2+\ldots+k_s=n$.

Шунга ўхшаш, масалан, $P(x)=4(x-2)^3(x+1)^2(x-5)$ кўпҳад $a=2$, $b=-1$, $c=5$ илдизларга эга, шу билан бирга 2 карралиги 3 бўлган илдиз; (-1) — карралиги 2 бўлган илдиз; 5 — оддий илдиз*.

Алгебрада, *агар ҳақиқий коэффициентли кўпҳад k каррали $\gamma = \alpha + \beta i$ комплекс сонли илдизга эга бўлса, қўшма комплекс сон $\bar{\gamma} = \alpha - \beta i$ ҳам ўша кўпҳаднинг каррали илдизи бўлиши исботланади.*

Бундан, агар кўпҳадни кўпайтувчиларга ёйганда $\gamma = \alpha + \beta i$ комплекс илдизга тўғри келадиган $(x-\gamma)^k$ кўпайтувчи мавжуд бўлса, у ҳолда қўшма комплекс $\bar{\gamma} = \alpha - \beta i$ илдизга тўғри келадиган $(x-\bar{\gamma})^k$ кўпайтувчи мавжуд бўлади. Бу иккита кўпайтувчини мос қўшма компекс илдизларга кўпайтирамиз:

$$(x-\gamma)^k(x-\bar{\gamma})^k = [x-(\alpha+\beta i)]^k[x-(\alpha-\beta i)]^k =$$
$$= \{[(x-\alpha)-\beta i]\cdot[(x-\alpha)+\beta i]\}^k = (x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^k =$$
$$= (x^2+px+q)^k,$$

бу ерда $p = -2$, $q = \alpha^2 + \beta^2$.

Шундай қилиб, қўшма илдизларга мос келадиган чизиқли кўпайтувчилар кўпайтмасини, ҳақиқий коэффициентли квадрат учҳад билан алмаштириш мумкин.

Юқорида баён қилинганлар қуйидаги кўпҳадларни кўпайтувчиларга ёйганда мавҳум сонлардан қутулиш мумкин бўлган гапни айтишга имкон беради:

Ҳақиқий коэффициентли ҳар қандай кўпҳадни қуйидаги формада ёзиш мумкин:

$$P(x) = a_0(x-a)^{t_1}(x-b)^{t_2}\ldots(x^2+p_1x+q)^{k_1}(x^2+$$
$$+p_2x+q_2)^{k_2}\ldots. \qquad (24)$$

Бу ёйишда чизиқли кўпайтувчилар ҳақиқий илдизларга мос келади, квадрат учҳадлар эса кўпҳаднинг комплекс илдизига тўғри келади. a_0, a, b, $\ldots$, p_1, q_1, $\ldots$ ўзгармас катталиклар ҳақиқий сонлардир.

5. Рационал касрлар. Тўғри рационал касрни ажратиш. Биз биламизки (I боб, 4-§, 7-пунктга қаранг), *каср рационал функция* ёки *оддий рационал функция* деб иккита кўпҳаднинг бўлинмасига тенг бўлган функцияга айтилади:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

бу ерда $P_m(x)$ — m-даражали кўпҳад, $Q_n(x)$ — n-даражали кўпҳад.

Мисол учун:

$$R(x) = \frac{x^4+5x^3-6x+5}{x^3+2x-1}$$

Агар суратнинг даражаси махраж даражасидан кичик бўлса, рационал каср *тўғри каср* дейилади, акс ҳолда рационал каср

* (22) формуладан n-даражали ҳар қандай кўпҳад n та илдизга эга экани (агар ҳар бир илдизни унинг карралиги бўйича ҳисобланса) келиб чиқади.

нотўғри дейилади. Юқорида келтирилган рационал каср нотўғри касрдир. Бу параграфнинг вазифаси рационал касрларни интеграллаш методларини баён қилишдир.

Дастлаб, *ҳар қандай нотўғри рационал қасрни кўпҳад ва нотўғри каср йиғиндиси кўринишида тасвирлаш мумкин эканини айтиб ўтамиз.*

Ҳақиқатан, $R(x)=P(x)/Q(x)$ — нотўғри каср, яъни $P(x)$ нинг даражаси $Q(x)$ никидан катта ёки тенг бўлсин. Суратни махражга бўлиб, қуйидаги айниятни ҳосил қиламиз:

$$P(x)=Q(x)\,L(x)+r(x),$$

бу ерда $L(x)$ ва $r(x)$ қолдиқ — кўпҳадлар, шу билан бирга қолдиқнинг даражаси касрнинг $Q(x)$ сурат даражасидан кичик. Бундан $\frac{P(x)}{Q(x)}=L(x)+\frac{r(x)}{Q(x)}$, бу ерда $r(x)/Q(x)$ — тўғри рационал каср.

Мисол. $R(x)=\dfrac{x^4+5x^3-6x+5}{x^3+2x-1}$ бўлсин. x^4+5x^3-6x+5 ни x^3+2x-1 га бўлиб, $L(x)=x+5$ бўлинма ва $r(x)=-2x^2-15x+10$ қолдиқни ҳосил қиламиз. Демак,

$$\frac{x^4+5x^3-6x+5}{x^3+2x-1}=x+5+\frac{-2x^2-15x+10}{x^3+2x-1}.$$

Шундай қилиб, нотўғри $P(x)/Q(x)$ рационал касрни интеграллаш $L(x)$ кўпҳадни ва $r(x)/Q(x)$ тўғри касрни интеграллашга келтирилар экан:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\left[L(x)+\frac{r(x)}{Q(x)}\right]dx=\int L(x)dx+\int\frac{r(x)}{Q(x)}dx.$$

Кўпҳадни интеграллашни биз билганимиз учун энди фақат тўғри рационал касрни интеграллашни кўрсатиш қолади.

Биз қуйида кўрамизки (7-пунктга қаранг), ҳар қандай тўғри рационал касрни энг *содда рационал касрлар* деб аталувчи қуйидаги касрларнинг чекли йиғиндиси кўринишида тасвирлаш мумкин:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}; \qquad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^n} \quad (n=2,\ 3,\ \ldots);$$

$$\text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; \quad \text{IV. } \frac{Mx-N}{(x^2+px+q)^n} \quad (n=2,\ 3,\ \ldots),$$

бу ерда A, a, p, q, M ва N — ҳақиқий сонлар, x^2+px+q квадрат учҳад ҳақиқий илдизларга эга эмас, яъни $\frac{p^2}{4}-q<0$. Шунинг учун биз содда касрларни интеграллашни ўргансак ва тўғри рационал касрни соддаларининг йиғиндисига ажрата олсак, рационал касрларни интеграллаш масаласи ҳал қилинган бўлади

6. Энг содда рационал касрларни интеграллаш Энг содда рационал касрларнинг I ва II типларини интеграллаш қийинчилик туғдирмайди. Ҳақиқатан,

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$$

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}\,d(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

Энди III типдаги рационал касрларни интеграллашга ўтамиз:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx.$$

Махражда тўла квадрат ажратиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$x^2+px+q = x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+\left(q-\frac{p^2}{4}\right) = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Шартга кўра x^2+px+q учҳад ҳақиқий илдизларга эга бўлмагани учун $q-\frac{p^2}{4}>0$. $q-\frac{p^2}{4}=a^2$ белгилашни киритамиз. Энди интегралга $t=x+\frac{p}{2}$ деб ўзгарувчини алмаштиришни қўллана миз*. Бундан:

$$x=t-\frac{p}{2},\ dx=dt,\ x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=t^2+a^2.$$

Демак,

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}\,dt = M\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} +$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C.$$

t ва a нинг қийматларини ўз ўрнига қўйиб, ниҳоят қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Мисол. $\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx$ ни топинг.

Ечилиши. Махражнинг ярмига тенг бўлган янги t ўзгарувчини киритамиз:

$$t=\frac{1}{2}(x^2+2x+10)'=x+1,\quad x=t-1,\quad dx=dt;$$

$$x^2+2x+10=(t-1)^2+2(t-1)+10=t^2+9.$$

---

* Агар t маҳраж ҳосиласининг ярмига тенг деб белгилаб олсак бу алмаштиришни осон ёдда сақлаб қолиш мумкин: $t=\frac{1}{2}(x^2+px+q)'=x+\frac{p}{2}$.

Демак,

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}dx = \int \frac{3(t-1)+5}{t^2+9}dt = 3\int \frac{t\,dt}{t^2+9} + 2\int \frac{dt}{t^2+9} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(t^2+9) + \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10) + \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C.$$

Ниҳоят, IV типидаги рационал интеграллашни қараймиз:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx.$$

$t = x + \frac{p}{2}$ деб аввалгидек янги t ўзгарувчини киритамиз. Бу қуйидагини беради:

$$x = t - \frac{p}{2},\ dx = dt,\ x^2+px+q = t^2+a^2,$$

бу ерда $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$. Демак,

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = M\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}. \tag{25}$$

(25) тенгликнинг ўнг томонидаги интеграллардан биринчиси осон ҳисобланади:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-n}d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} + C.$$

Шундай қилиб, $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ интегрални ҳисоблаш қолади. Бу интегрални қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt = \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^n}\right].$$

$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} = I_{n-1}$ деб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left[I_{n-1} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^n}\right]. \tag{26}$$

$$u = t,\ du = dt,\ dv = \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n},\quad v = \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}$$

деб $\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^n}$ интегрални бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}I_{n-1}.$$

Ҳосил қилинган интегрални (26) формулага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I_n=\frac{1}{a^2}\left[I_{n-1}-\frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{2(1-n)}I_{n-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[\frac{3-2n}{2-2n}I_{n-1}+\frac{t}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}\right].$$

Шундай қилиб,

$$I_n=\frac{1}{a^2}\left[\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}+\frac{t}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}\right]. \qquad (27)$$

Ҳосил қилинган формула *келтириш формуласи* дейилади.

Мисол. $I_3=\int\frac{dt}{(t^2+1)^3}$ ни топинг.

Ечилиши. Бу ерда $a=1$, $n=3$. (27) формулани қўллаб, топамиз:

$$I_3=\frac{1}{1^2}\left[\frac{2\cdot 3-3}{2\cdot 2-2}I_2+\frac{t}{2(3-1)(t^2+1)^2}\right]=\frac{3}{4}I_2+\frac{t}{4(t^2+1)^2}.$$

Ўша (27) формулага кўра

$$I_2=\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\left[\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 3-2}I_1+\frac{t}{2(2-1)(t^2+1)}\right]=\frac{1}{2}I_1+\frac{t}{2(t^2+1)}.$$

$I_1=\int\frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg}t+C$ бўлгани учун $I_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+\frac{t}{2(t^2+1)}+C.$

Демак,

$$I_3=\frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+\frac{t}{2(t^2+1)}\right]+\frac{t}{4(t^2+1)^2}+C=$$

$$=\frac{t}{4(t^2+1)^2}+\frac{3t}{8(t^2+1)}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}t+C.$$

Шундай қилиб, рационал касрларни интеграллаш масаласини якунлаш учун тўғри рационал касрларни энг содда касрлар йиғиндисига қандай ажратиш мумкинлигини аниқлаш қолади.

7. Тўғри рационал касрни содда касрларга ёйиш. Юқорида биз рационал касрни интеграллаш кўпҳадни ва тўғри рационал касрни интеграллашга келтирилишини кўрдик (5-пунктга қаранг). Ҳар қандай рационал $P(x)/Q(x)$ тўғри каср содда касрларга қандай ёйилишини аниқлаймиз. Бу ёйишда касрнинг $Q(x)$ махражини чизиқли ва квадратик кўпайтувчиларга ажратиш муҳим аҳамиятга эга (4-пунктга қаранг).

Аниқлик учун $Q(x)$ махраж кўпайтувчиларга қуйидагича ажратилади:

$$Q(x)=(x-a)^k(x-b)^l(x^2+px+q)^m.$$

Бу ерда квадрат учҳад ҳақиқий илдизга эга эмас. У ҳолда қуйида биз исботсиз келтирадиган қуйидаги теорема ўринли.

Теорема. *Тўғри рационал $P(x)/Q(x)$ касрни, бу ерда $Q(x)=(x-a)^k(x-b)^l(x^2+px+q)^m$ ягона равишда содда касрлар йиғиндисига ажратиш мумкин:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{B_l}{(x-b)^l} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{M_m x + N_m}{(x^2 + px + q)^m}, \qquad (28)$$

бу ерда A_i, B_i, M_i, N_i — ҳақиқий сонлар ($i = 1, 2, \ldots$).

(28) формуладан кўринадики, $Q(x)$ махражнинг чизиқли кўпайтувчиларига I ва II типдаги содда касрлар, квадратик кўпайтувчилар эса III ва IV типдаги содда касрлар мос келар экан. Бунда берилган кўпайтувчига (чизиқли ёки квадратик) мос келадиган содда касрлар сони кўпайтувчи махраж ёйилмасига кирган даражасига боғлиқ. Тўғри рационал касрни ёйиш қоидаси $Q(x)$ махраж ёйилмасига кирадиган чизиқли ва квадратик кўпайтувчиларнинг чекли сони учун ўринли бўлиб қолади.

8. Аниқмас коэффициентлар методи. Тўғри рационал касрни коэффициентларини топишнинг энг содда методларидан бири аниқмас коэффициентлар методидир. Бу методни қўлланишни мисолларда тушунтирамиз.

1-мисол. $\dfrac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}$ ни содда касрларга ажратинг.

Ечилиши. (28) ёйилмадан фойдаланиб, ёзамиз:

$$\frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Mx + N}{x^2 + 2x + 2}, \qquad (*)$$

бу ерда A_1, A_2, M ва N — лар ҳали номаълум сонлар.

(*) айниятнинг ўнг томонини умумий махражга келтирамиз:

$$\frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A_1(x-1)(x^2+2x+2) + A_2(x^2+2x+2) + (Mx+N)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}$$

Бу айниятда касрларнинг махражи бир хил. Демак, суратлари ҳам айнан тенг:

$$x^2 - 5x + 9 = A_1(x-1)(x^2 + 2x + 2) + A_2(x^2 + 2x + 2) + (Mx + N)(x-1)^2.$$

Қавсларни очиб ва ўнг томондаги кўпҳадни x нинг даражаларини пасайиб бориши бўйича қўйсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x^2 - 5x + 9 = (A_1 + M)x^3 + (A_1 + A_2 - 2M + N)x^2 +$$
$$+ (2A_2 + M - 2N)x + (-2A_1 + 2A_2 + N).$$

Иккита кўпҳад x нинг бир хил даражаларида коэффициентлар бир хил бўлганда ва фақат шунда айнан тенг бўлади. Бу кўпҳадларнинг коэффициентларини x нинг бир хил даражаларида тенглаб, қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{ll} x^3 \text{ да:} & A_1 + M = 0; \\ x^2 \text{ да:} & A_1 + A_2 - 2M + N = 1; \\ x \text{ да:} & 2A_2 + M - 2N = -5; \\ \text{озод ҳад:} & -2A_1 + 2A_2 + N = 9. \end{array}\right\}$$

Бу системани ечиб, $A_1 = -7/5$, $A_2 = 1$, $M = 7/5$, $N = 21/5$ ларни топамиз*

* Тўғри рационал касрни содда касрлар йиғиндисига ёйиш ҳар доим мумкин бўлгани ва ягона бўлгани учун ёйилманинг номаълум коэффициентларини топиш учун тузиладиган система ягона ечимга эга.

(*) муносабатда A_1, A_2, M ва N лар ўрнига топилган қийматларни қўйиб узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=-\frac{7}{5(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{7x+21}{5(x^2+2x+2)}. \qquad (**)$$

2-мисол $\dfrac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}$ касрни энг содда касрларга ажратинг.

Ечилиши. Махраж фақат ҳақиқий илдизларга эга бўлгани учун касрнинг ёйилмаси (28) формулага кўра қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{(x-2)^2}+\frac{B_1}{x+3}. \qquad (*)$$

Ҳосил қилинган муносабатнинг ўнг томонини умумий махражга келтирамиз:

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{A_1(x-2)(x+3)+A_2(x+3)+B_1(x-2)^2}{(x-2)^2(x+3)}.$$

Суратни тенглаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x^2+2x+2=A_1(x-2)(x+3)+A_2(x+3)+B_1(x-2)^2.$$

Кўпҳаднинг ўнг томонини x нинг даражаси камайиб борадиган қилиб жойлаштирамиз:

$$x^2+2x-2=(A_1+B_1)x^2+(A_1+A_2-4B_1)x+(-6A_1+3A_2+4B_1).$$

Тенгликнинг ўнг ва чап томонида x нинг бир хил даражалари бўйича коэффициентларини тенглаб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} A_1+B_1&=1,\\ A_1+A_2+4B_1&=2,\\ -6A_1+3A_2+4B_1&=2\end{aligned}\right\}$$

Бу системани ечиб, $A_1=4/5$, $A_2=2$, $B_1=1/5$ ларни топамиз. Коэффициентларнинг топилган бу қийматларини (*) муносабатга қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{4}{5(x-2)}+\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{1}{5(x+3)}.$$

3-мисол. $\dfrac{2x^2+10x-18}{(x-1)(x+2)(x-3)}$ ни содда касрларга ажратинг:

Ечилиши. (28) муносабатдан фойдаланиб, қуйидаги айниятга эга бўламиз:

$$\frac{2x^2+10x-18}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3}.$$

Ўнг томондаги касрни умумий махражга келтириб, сўнгра ўнг ва чап томондаги касрларнинг суратларини тенглаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$2x^2+10x-18=A(x+2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x+2). \qquad (*)$$

бундан:

$$2x^2+10x-18=(A+B+C)x^2+(-A-4B+C)x+(-6A+3B-2C).$$

x нинг бир хил даражаларида коэффициентларни тенглаб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} A+B+C&=2,\\ -A-4B+C&=10.\\ -6A+3B-2C&=-18,\end{aligned}\right\}$$

Унда $A=1$, $B=-2$, $C=3$ ларни топамиз. Демак,

$$\frac{2x^2+10x-18}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x-3}.$$

Кўпинча ёйилманинг номаълум коэффициентларини топишни янада тезлаштириш мумкин. Ҳақиқатан, ҳозир кўрган мисолни қарайлик. Ҳосил қилинган (*) ифода, x нинг барча қийматларида ўринли бўладиган айниятдир.

x нинг (*) ифода энг содда кўринишга эга бўладиган қийматларини танлаб оламиз. Бу ерда махражнинг илдизларидан биттасини x деб олган маъқул.

$x=1$ деб $-6=-6A$ га эга бўламиз, бундан $A=1$. Шунга ўхшаш $x=-2$ деб $-30=15B$, $B=-2$ ни топамиз. $x=3$ да $30=10C$, яъни $C=3$.

Кўрсатиб ўтилган метод тўғри рационал касрнинг $Q(x)$ махражи ҳақиқий илдизларга эга бўлганда жуда қулай.

Амалда юқорида кўрилган иккала метод бирга ишлатилади.

4-мисол. $\frac{x^2+x+13}{(x-1)(x^2+4)}$ ни энг содда касрларга ажратинг.

Ечилиши. (28) тенгликдан фойдаланиб қуйидагига эгамиз:

$$\frac{x^2+x+13}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+4}.$$

Ўнг томондаги касрни умумий махражга келтириб, сўнгра чап ва ўнг томондаги касрларнинг суратларини тенглаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x^2+x+13=A(x^2+4)+(Mx+N)(x-1), \qquad (*)$$

ёки

$$x^2+x+13=(A+M)x^2+(-M+N)x+4A-N.$$

(*) айниятда $x=1$ деб $15=5A$ ни ҳосил қиламиз, бундан $A=3$. x^2 ва x да коэффициентларни тенглаб ва $A=3$ ни эътиборга олиб,

$$\left.\begin{aligned}3+M&=1,\\ -M+N&=1,\end{aligned}\right\}$$

ни ҳосил қиламиз, бундан $M=-2$, $N=-1$.

Демак,

$$\frac{x^2+x+13}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{3}{x-1}-\frac{2x+1}{x^2+4}.$$

9. Рационал касрларни интеграллаш. Юқорида баён қилинган фикрлар рационал касрларни интеграллашнинг асосий қоидаларини тавсифлашга имкон беради.

1. Агар рационал каср нотўғри бўлса, у ҳолда уни кўпҳад ва тўғри рационал каср йиғиндиси кўринишида ифодаланади (5-пунктга қ.).

Шу билан нотўғри рационал касрни интеграллаш кўпҳад ва тўғри рационал касрни интеграллашга келтирилади.

2. Тўғри рационал касрнинг махражи кўпайтувчиларга ажратилади.

3. Тўғри рационал касрни содда касрлар йиғиндисига ажратилади. Бу билан тўғри рационал касрни интеграллаш содда касрларни интеграллашга келтирилади.

1-мисол. $\int\frac{x^4-3x^3-5x^2+30x-22}{x^3-x^2-8x+12}dx$ ни топинг.

Ечилиши. Интеграл остида нотўғри каср турибди. Бутун қисмни ажратиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^4-3x^3-5x^2+30x-22}{x^3-x^2-8x+12}=x-2+\frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12}.$$

Демак,

$$\int\frac{x^4-3x^3-5x^2+30x-22}{x^3-x^2-8x+12}\,dx=\int\left[x-2+\frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12}\right]dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x+\int\frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12}\,dx.$$

$x^3-x^2-8x+12=(x-2)^2(x+3)$ ни эътиборга олиб,

$$\frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12}=\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}$$

тўғри рационал касрни оддий касрларга ажратамиз (8-пунктдаги 2-мисолга қ.):

$$\frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12}=\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{4}{5(x-2)}+\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{1}{5(x+3)}.$$

Шунинг учун

$$\int\frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12}\,dx=\int\left[\frac{4}{5(x-2)}+\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{1}{5(x+3)}\right]dx=$$

$$=\frac{4}{5}\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{5}\ln|x+3|+C.$$

Шундай қилиб, узил-кесил қуйидагига эга бўламиз:

$$\int\frac{x^4-3x^3-5x^2+30x-22}{x^3-x^2-8x+12}\,dx=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{4}{5}\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+$$

$$+\frac{1}{5}\ln|x+3|+C.$$

2-мисол $\int\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}\,dx$ ни топинг.

Ечилиши. Интеграл остида тўғри рационал каср турибди. Уни содда касрларга ажратамиз (8-пунктдаги 1-мисолга қаранг):

$$\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=-\frac{7}{5(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{7x+21}{5(x^2+2x+2)}.$$

Демак,

$$\int\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}\,dx=-\frac{7}{5}\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{7}{5}\int\frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx.$$

Охирги интегралнинг ўнг томонига келсак, у маълумки, $t=\frac{1}{2}(x^2+2x+2)'$ ўрнига қўйиш билан олинади. Бу $t=x+1$, $x=t-1$, $dx=dt$, $x^2+2x+2=t^2+1$ ни беради. У ҳолда

$$\int\frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx=\int\frac{t+2}{t^2+1}\,dt=\int\frac{t\,dt}{t^2+1}+2\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+$$

$$+2\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+2\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

Шундай қилиб,

$$\int \frac{x^2-5x+9}{(x-1)(x^2+2x+2)}dx = -\frac{7}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{7}{10}\ln(x^2+2x+2) + $$

$$+\frac{14}{5}\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

4-§. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

1. $\int \sin^n x \cos^n x\, dx$ кўринишдаги интеграллар, бу ерда m ва n — бутун сонлар. Сонлардан бири m ёки n тоқ бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда интеграллар рационал функцияларни интеграллашга келтирилади. Интеграллаш методининг мазмуни қуйидаги мисоллардан яққол кўринади.

1- мисол. $\int \sin^5 x \cos^4 x\, dx$ ни топинг.

Ечилиши. $\sin x\, dx = -d\cos x$ ни эътиборга олиб, $z=\cos x$ деб ўзгарувчини алмаштирамиз. Бу $dz = -\sin x\, dx$ ни беради ва демак, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - z^2$ бўлгани учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int \sin^5 x\cos^4 x\, dx = \int \sin^4 x \cos^4 x\cdot \sin x\, dx = -\int (1-z^2)^2 z^4 dz =$$

$$-\int (z^4 - 2z^6 + z^8)\,dz = -\frac{z^5}{5} + \frac{2z^7}{7} - \frac{z^9}{9} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} +$$

$$+\frac{2\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^2 x}{9} + C.$$

2- мисол. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$ ни топинг.

Ечилиши. $\cos dx = a\sin x$ бўлгани учун $z=\sin x$ деб, $dz=\cos x\, dx$, $\cos^2 x = 1-\sin^2 x = 1 - z^2$, $\sin^2 x = z^2$ ни ҳосил қиламиз ва демак,

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x\, dx}{\sin^2 x} = \int \frac{1-z^2}{z^2}dz = \int\left(\frac{1}{z^2}-1\right)dz =$$

$$= -\frac{1}{z} - z + C = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.$$

Изоҳ. Шу методни m ва n сонлардан бири тоқ ва мусбат, иккинчиси эса ихтиёрий бўлганда ҳам қўлланамиз.

3- мисол. $\int \sqrt[3]{\cos^4 x}\sin^3 x\, dx$ ни ҳисобланг.

Ечилиши. Қуйидагига эгамиз: $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^3 x\, dx = \int \cos^{2/3} x \sin^2 x \times \sin x\, dx$. $\cos x = z$ деймиз. У ҳолда $dz = -\sin x\, dx$. Демак,

$$\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^3 x\, dx = -\int z^{2/3}(1-z^2)dz = -\int z^{2/3} - z^{8/3})dz =$$

$$= -\frac{3z^{5/3}}{5} + \frac{3z^{11/3}}{11} + C = 3z^{5/3}\left(\frac{z}{11} - \frac{1}{5}\right) + C =$$

$$= 3\cos x\sqrt[3]{\cos^2 x}\left(\frac{\cos^2 x}{11} - \frac{1}{5}\right) + C.$$

Энди m ва n кўрсаткичларнинг иккаласи ҳам жуфт ва манфиймас (хусусан биттаси нолга тенг бўлиши мумкин) бўлсин. $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin x \cos x$ ларни

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

формулалар билан алмаштириб, $\sin^n x \cos^m x$ кўпайтма шунга ўхшаш йиғинди билан алмаштирилади, лекин бу йиғиндини даражаси кичик (паст) бўлади. Интеграллаш методи қуйидаги мисоллардан равшан бўлади.

4-мисол. $\int \cos^2 x\, dx$ ни топинг.

Ечилиши. Қуйидагига эгамиз:

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

5-мисол. $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx$ ни топинг.

Ечилиши. Қуйидагига эгамиз:

$$\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)^2 (1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x (1-\cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\, dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\, dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\, dx -$$

$$- \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\, d\sin 2x = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

Изоҳ. Биз биламизки, битта ўша функциянинг бошланғич функциялари бир-биридан ўзгармас қўшилувчига фарқ қилади. Бу ҳолатни эътиборга олишга тўғри келади (айниқса тригонометрик функцияларни интеграллашда), чунки интеграллаш методига боғлиқ равишда жавоблар ҳам турли формада бўлади.

Масалан, $\int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$. Лекин иккинчи томондан

$$\int \sin 2x\, dx = \int 2\sin x \cos x\, dx = 2\int \sin x\, d\sin x = \sin^2 x + C.$$

Шундай қилиб, $-\frac{1}{2}\cos x$ ва $\sin^2 x$ битта $\sin 2x$ функциянинг бошланғич функцияларидир, кўриш осонки, улар бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қилади:

$$-\frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) =$$

$$= -\frac{1}{2} + \sin^2 x.$$

Тригонометрик функцияларни интеграллаш методларини бундан буён ўрганиш учун навбатдаги пунктда баён қилинадиган янги тушунчалар керак бўлади.

2. Икки ўзгарувчили рационал функциялар. Иккита u ва v ўзгарувчига нисбатан кўпҳад деб $Au^n v^m$ кўринишдаги кўпайтмага айтилади, бу ерда n ва m — бутун манфиймас сонлар. Масалан, $3u^2v+5u^5v^4-5v^3+6$, $5v^2+4u$ ифодалар u ва v га нисбатан кўпҳадлардир.

u ва v га нисбатан кўпҳадларнинг бўлинмаси u ва v нинг *рационал функцияси* ёки u ва v га нисбатан *рационал ифода* дейилади.

Масалан, $\frac{u^2+2v}{u^3+4v^2}$, $\frac{2u^2-v^2}{4v}$, $\frac{3}{u^2+v^2}$ касрлар u ва v га нисбатан рационал ифодалардир. u ва v га нисбатан рационал функцияни $R(u, v)$ каби белгиланади.

Кўриш осонки, u ва v га нисбатан рационал функциянинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмаси ҳам рационал функция. $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функцияларга нисбатан *рационал ифода* деб, u ва v ўрнига $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар қўйилган u ва v га нисбатан рационал функцияга айтилади. $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ ларга нисбатан рационал ифодани $R(\varphi(x), \psi(x))$ билан белгиланади.

1-мисол. $\dfrac{\sqrt{x+4}-x}{x^2+3\sqrt{(x+4)^3}}$ ифода x ва $\sqrt{x+4}$ га нисбатан рационал.

2-мисол. $\dfrac{\sin x+\cos^3 x}{\sin^3 x+2\cos^2 x}$ ифода $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан рационал.

Кўрамизки, агар $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ лар x га нисбатан рационал функция бўлса, у ҳолда $R(\varphi(x), \psi(x))$ ҳам ўз навбатида x га нисбатан рационал функция бўлади.

3. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ кўринишдаги интеграллар. Бу пунктда биз $\int R(\sin x, \cos x)dx$ кўринишдаги интегралларни ҳисоблашнинг умумий методини қараймиз, бу ерда $R(\sin x, \cos x)$ — $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан рационал. Бундай интеграллар масалан, қуйидагилар:

$$\int \frac{\sin x+\cos x}{\cos^2 x+2}dx, \quad \int \sin^3 x\cos^2 x\,dx, \quad \int \frac{dx}{\sin x}.$$

Аксинча, $\int \sin^{7/4} x\cos^2 x\,dx$ интеграл юқорида кўрсатилган интеграл турига кирмайди, чунки интеграл остида $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан рационал бўлмаган функция турибди.

Ҳар қандай $\int R(\sin x, \cos x)dx$ кўринишдаги интегрални рационал функциянинг интегралига олиб келиш мумкинлигини кўрсатамиз. Бунинг учун x ўрнига y билан $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ муносабат орқали боғланган янги z ўзгарувчини киритамиз. У ҳолда $\sin x$ ва

$\cos x$ орқали ифодаланади. Ҳақиқатан, тригонометриядан маълум формулаларни қўлланиб, қуйидагини топамиз:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1+z^2}.$$

Шунга ўхшаш

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Ниҳоят, $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ни ҳисобга олиб, $x = 2\operatorname{arc\,tg} z$, $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$ ни топамиз. Шундай қилиб, агар $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ десак,

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2},\quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2},\quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}. \tag{29}$$

(29) формулалар $\sin x$, $\cos x$ ва dx лар z орқали рационал ифодаланишини кўрсатади. $\sin x$, $\cos x$ ва dx ларни z орқали ифодаларини ўрнига қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2}{1+z^2}dz.$$

Охирги интеграл z га нисбатан рационал функциянинг интегралини билдиради, у 3-§ да кўрилган методлар ёрдамида ечилиши мумкин.

1-мисол. $\int\frac{dx}{\sin x}$ ни топинг.

Ечилиши: $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ деб ва (29) формуладан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}} = \int\frac{dz}{z} = \ln|z| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

2-мисол. $\int\frac{dx}{\cos x}$ ни топинг.

Ечилиши: $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ деб қуйидагини топамиз:

$$\int\frac{dx}{\cos x} = \int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{1-z^2}{1+z^2}} = 2\int\frac{dz}{1-z^2} = \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Шундай қилиб,

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C, \qquad \text{(XVII)}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C. \qquad \text{(XVIII)}$$

Бу формулаларни ёдда сақлаб қолиш тавсия қилинади.

$z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ алмаштириш билан $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ интеграл ҳамма вақт ҳам рационал функция интегралига келтирилгани билан, кўпинча жуда қўпол ҳисоблашларга олиб келади. Шунинг учун кўп ҳолларда интегрални топишнинг бошқа методларидан фойдаланган маъқул. Масалан, $R(\sin x, \cos x) = \sin^n x \cos^m x$ бу ерда m ва n — бутун сонлар, интегрални ҳисоблашда 1-пунктда баён қилинган методлардан фойдаланиш қулай. $R(\sin x, \cos x)$ функция учун яна бир хусусий ҳолни кўрайлик, бунда иккинчи марта ўрнига қўйиш ҳисоблашни янада қисқартиради. Фақат $\operatorname{tg} x$ га нисбатан рационал боғлиқ бўлган функция интеграли, яъни $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$ ни кўрайлик.

Бу интегрални $\operatorname{tg} x = z$ ўзгарувчини алмаштириш билан топиш мумкин.

Ҳақиқатан, $x = \operatorname{arc\,tg} z$ ва $dx = \frac{dz}{1+z^2}$, шунинг учун

$\int R(\operatorname{tg} x)dx = \int R(z)\frac{dz}{1+z^2}$. Охирги интеграл остидаги ифода z нинг рационал функциясидир.

3-мисол. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}x+1}$ ни топинг.

Ечилиши $z = \operatorname{tg} x$ деб ўзгарувчини алмаштирамиз. У ҳолда $x = \operatorname{arc\,tg} z$, $dx = \frac{dx}{1+z^2}$. Демак,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 1} = \int \frac{dz}{(1+z)(1+z^2)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{z+1} + \frac{1-z}{1+z^2}\right)dz =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|z+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z - \frac{1}{4}\ln(1+z^2) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x + 1| + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x + 1| + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + \frac{1}{2}x + C.$$

4-мисол. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$ ни топинг.

Ечилиши. $z = \operatorname{tg} x$ деб, қуйидагига эгамиз:

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int \frac{z^3dz}{1+z^2} = \int\left(z - \frac{z}{1+z^2}\right)dz = \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) + C =$$
$$= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x) + C = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\cos^2 x} + C =$$
$$= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

Изоҳ. Агар $\sin x$ ва $\cos x$ лар жуфт даражада олинса $R(\sin x, \cos x)dx$ кўринишдаги интеграллар ҳам шундай ўрнига қўйиш билан олинади. $\sin^2 x$ ва $\cos^2 x$ лар $\operatorname{tg} x$ га нисбатан рационал ифодаланишидан келиб чиқади:

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x},\quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

5- мисол. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$ ни топинг.

Ечилиши. $\operatorname{tg} x = z$ ўрнига қўйишни бажариб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int\frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int\frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1+\frac{1}{1+z^2}} = \int\frac{dz}{2+z^2} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

5- §. БАЪЗИ ИРРАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Иррационал ифодаларни ўз ичига олган интегралларнинг баъзи типларини қараб чиқамиз.

1. $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ **кўринишдаги интеграллар.** $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ кўринишдаги интеграл рационал функциянинг интегралига келтирилиши мумкин, бу ерда n — бутун сон, $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ эса x ва $\sqrt[n]{ax+b}$ га нисбатан рационал функция. Ҳақиқатан, берилган интегралда $ax+b = z^n$ деб ўзгарувчини алмаштирамиз, у ҳолда $x = \frac{z^n - b}{a}$, $dx = \frac{nz^{n-1}}{a}dz$, $\sqrt[n]{ax+b} = z$. Демак,

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx = \int R\left(\frac{z^n-b}{a}, z\right)\frac{nz^{n-1}}{a}dz.$$

Тенгликнинг ўнг томонида турган интеграл интеграллаш ўзгарувчиси z га нисбатан рационал функция интегралидир ва демак, у 3- § да баён қилинган методлар ёрдамида топилиши мумкин.

1- мисол $\int\frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}dx$ ни топинг.

Ечилиши. Бу ерда $ax+b=x$, $n=2$. $x=z^2$ деб, $dx=2z\,dz$ ни топамиз. Демак,

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}\,dx=\int \frac{(1-z)2z\,dz}{z^2-2z}=2\int \frac{(1-z)dz}{z-2}$$

Шундай қилиб, биз интегрални рационал функция интегралига келтирдик:

$$2\int \frac{(1-z)\,dz}{z-2}=2\int\left(-1-\frac{1}{z-2}\right)dz=-2z-2\ln|z-2|+C.$$

z ўрнига x нинг ифодасини, яъни $z=\sqrt{x}$ ни қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}\,dx=-2(\sqrt{x}+\ln|\sqrt{x}-2|)+C.$$

2-мисол $\displaystyle\int \frac{2x+\sqrt{2x-3}}{3\sqrt[4]{2x-3}+\sqrt[4]{(2x-3)^3}}\,dx$ ни топинг.

Ечилиши. Интеграл остидаги ифодадаги радикалларни битта кўрсаткичга келтириб, у x ва $\sqrt[4]{2x-3}$ ларга нисбатан рационал функция эканлигига ишонч ҳосил қиламиз:

$$\frac{2x+\sqrt{2x-3}}{3\sqrt[4]{2x-3}+\sqrt[4]{(2x-3)^3}}=\frac{2x+\left(\sqrt[4]{2x-3}\right)^2}{3\sqrt[4]{2x-3}+\left(\sqrt[4]{2x-3}\right)^3}.$$

Бу ерда $n=4$, шунинг учун $2x-3=z^4$. Бундан $x=(z^4+3)/2$, $dx=2z^3\,dz$. Демак,

$$\int \frac{2x+\sqrt{2x-3}}{3\sqrt[4]{2x-3}+\sqrt[4]{(2x-3)^3}}\,dx=\int \frac{(z^4+3+z^2)\,2z^3}{3z+z^3}\,dz=2\int \frac{z^6+z^4+3z^2}{3+z^2}\,dz=$$

$$=2\int\left(z^4-2z^2+9-\frac{27}{3+z^2}\right)dz=$$

$$=2\left(\frac{z^5}{5}-\frac{2z^3}{3}+9z-\frac{27}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

бунда $z=\sqrt[4]{2x-3}$.

Умумий кўринишдаги

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

интеграл рационал функцияли интегралга $\frac{ax+b}{cx+d}=z^n$ ўрнига қўйиш ёрдамида рационал ифодага келтирилади, бу ерда x ва $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ларга нисбатан рационал ифода.

2. $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}\,dx$ **кўринишдаги интеграллар.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ва $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}$ интеграллар бу интегралларнинг хусусий ҳолидир. Биринчи интеграл жадвалдаги интегралдир (VIII′):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Иккинчи интегрални ҳисоблаш учун $\sqrt{x^2+m}=-x+t$ алмаштиришни бажарамиз. Тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтариб, $x^2+m=x^2-2xt+t^2$ ни ҳосил қиламиз. Бундан:

$$x=\frac{t^2-m}{2t}, \qquad dx=\frac{t^2+m}{2t^2}dt.$$

Бундан ташқари, $\sqrt{x^2+m}=-x+t=-\frac{t^2-m}{2t}+t=\frac{t^2+m}{2t}$ бўлгани учун

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}=\int\frac{\frac{t^2+m}{2t^2}dt}{\frac{t^2+m}{2t}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C.$$

Лекин $t=\sqrt{x^2+m}+x$ бўлгани учун узил-кесил қуйидагига эга бўламиз:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right|+C. \qquad \text{(XIX)}$$

Бу интеграл кўп учрайди, шунинг учун (XIX) ни эслаб қолиш зарур.

Энди $\int\frac{Mx+N}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}dx$ кўринишдаги интегралларга ўтамиз. Бу интеграллар $t=\frac{1}{2}(Ax^2+Bx+C)'$ ўзгарувчини алмаштириш билан $\int\frac{Dt+E}{\sqrt{at^2+m}}dt$ кўринишдаги интегралга келтирилади. $a>0$ да охирги интегрални ҳисоблаш (XIX) интегрални, $a<0$ да эса (VIII)$'$ кўринишдаги интегрални ҳисоблашга келтирилади.

1-мисол. $\int\frac{x+5}{\sqrt{6-2x-x^2}}dx$ ни топинг.

Ечилиши. $t=\frac{1}{2}(6-2x-x^2)'$ деб, $t=-1-x$, $x=-1-t$, $dx=-dt$ ва $6-2x-x^2=6-2(-1-t)-(-1-t)^2=7-t^2$ га эгамиз. Шундай қилиб,

$$\int\frac{x+5}{\sqrt{6-2x-x^2}}dx=\int\frac{-1-t+5}{\sqrt{7-t^2}}(-dt)=\int\frac{t-4}{\sqrt{7-t^2}}dt=$$

$$=\int\frac{t\,dt}{\sqrt{7-t^2}}-4\int\frac{dt}{\sqrt{7-t^2}}=-\sqrt{7-t^2}-4\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}}+C=$$

$$=-\sqrt{6-2x-x^2}+4\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{7}}+C.$$

2-мисол $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ ни топинг.

Ечилиши. $t=\frac{1}{2}(x^2+4x+5)'=x+2$ деймиз. У ҳолда $x=t-2$, $dx=dt$, $x^2+4x+5=(t-2)^2+4(t-2)+5=t^2+1$. Демак,

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\int\frac{(t-2)\,dt}{\sqrt{t^2+1}}=\int\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}}-2\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=$$
$$=\sqrt{t^2+1}-2\ln|t+\sqrt{t^2+1}|+C=\sqrt{x^2+4x+5}-$$
$$-2\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}|+C.$$

3. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ **ва** $\int\sqrt{x^2+m}\,dx$ **кўринишдаги интеграллар.** Масалан, иккинчи интегрални қарайлик:

$$\int\sqrt{x^2+m}\,dx=\int\frac{x^2+m}{\sqrt{x^2+m}}\,dx=\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+m}}+m\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}.\quad(30)$$

(XIX) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}=\ln|x+\sqrt{x^2+m}|+C.$$

$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+m}}$ интегрални ҳисоблаш учун бўлаклаб интеграллаш методини қўлланамиз, бунда $u=x$, $dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+m}}$; у ҳолда $du=dx$, $v=\sqrt{x^2+m}$. Демак,

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+m}}=x\sqrt{x^2+m}-\int\sqrt{x^2+m}\,dx.$$

Интегралларнинг топилган қийматларини (30) тенгликка қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$\int\sqrt{x^2+m}\,dx=x\sqrt{x^2+m}-\int\sqrt{x^2+m}\,dx+m\ln|x+\sqrt{x^2+m}|.$$

Охирги муносабатнинг чап ва ўнг томонларида изланган $\int\sqrt{x^2+m}\,dx$ интеграл турибди. Уни чап томонга ўтказиб, қуйидагини топамиз:

$$\int\sqrt{x^2+m}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+m}+m\ln|x+\sqrt{x^2+m}|\right)+C.$$

Шу усул билан

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)+C$$

эканлигини кўрсатиш мумкин.

4. $\int R\left(x,\sqrt{Ax^2+Bx+C}\right)dx$ **кўринишдаги интеграллар.** Бу кўринишдаги интегралда илдиз остидаги ифода $t=\frac{1}{2}(Ax^2+Bx+C)'=Ax+\frac{B}{2}$ ўрнига қўйиш ёрдамида квадратларнинг йиғиндиси ва айирмасига алмаштирилади, бу ерда $R(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C})-x$ ва $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ ларга нисбатан рационал функция. У ҳолда $\int R\left(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C}\right)dx$ интеграл A B ва C коэффициентларга боғлиқ равишда қуйидаги интеграллардан бирига келтирилади:

$$\text{I. } \int R\left(t, \sqrt{a^2-t^2}\right)dt, \quad \text{II. } \int R\left(t, \sqrt{a^2+t^2}\right)dt,$$

$$\text{III. } \int R\left(t, \sqrt{t^2-a^2}\right)dt.$$

Бу интеграллар қуйидаги ўрнига қўйишларнинг бири ёрдамида топилади:

I тип интеграллар учун $t=a\sin z$,

II тип интеграллар учун $t=a\,\mathrm{tg}\,z$;

III. тип интеграллар учун $t=\dfrac{a}{\cos z}$.

1-мисол. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^3}dx$ ни топинг.

Ечилиши. Аввал интегралда $t=\frac{1}{2}(x^2+2x-3)'=x+1$, $x=t-1$, $dx=dt$ ўрнига қўйишларни бажарамиз У ҳолда $x^2+2x-3=(t-1)^2+ +2(t-1)-3=t^2-4$ Демак,

$$\int\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^3}dx=\int\frac{\sqrt{t^2-4}}{t^3}dt.$$

Охирги тенгликнинг ўнг томонидаги III типдаги интегралдир. Уни ҳисоблаш учун $t=2/\cos z$ деб оламиз У ҳолда

$$dt=\frac{2\sin z}{\cos^2 z}dz,\ \sqrt{t^2-4}=\sqrt{\frac{4}{\cos^2 z}-4}=2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 z}-1}=2\mathrm{tg}\,z.$$

Шундай қилиб,

$$\int\frac{\sqrt{t^2-4}}{t^3}dt=\int\frac{2\,\mathrm{tg}\,z}{(2/\cos z)^3}\cdot\frac{2\sin z}{\cos^2 z}dz=\frac{1}{2}\int\sin^2 z\,dz=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1-\cos 2z}{2}dz=\frac{1}{4}\left(z-\frac{\sin 2z}{2}\right)+C=\frac{1}{4}(z-\sin z\cos z)+C.$$

$t=\dfrac{2}{\cos z}$ бўлгани учун $\cos z=\dfrac{2}{t}$, $z=\arccos\left(\dfrac{2}{t}\right)$, $\sin z=\sqrt{1-\cos^2 z}=$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{2}{t}\right)^2}=\frac{\sqrt{t^2-4}}{t}.$$

Шунинг учун

$$\int\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^3}dx=\int\frac{\sqrt{t^2-4}}{t^3}dt=\frac{1}{4}\left[\arccos\left(\frac{2}{t}\right)-\frac{2\sqrt{t^2-4}}{t^2}\right]+C$$

x ($t=x+1$) ўзгарувчига қайтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^3}dx=\frac{1}{4}\left[\arccos\frac{2}{x+1}-\frac{2\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^2}\right]+C.$$

2-мисол. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$ ни топинг.

Ечилиши. Берилган интеграл I тип. $x=2\sin t$ дейлик. У ҳолда $dx = 2\cos t\,dt$, $4-x^2=4-4\sin^2 t=4\cos^2 t$. Қуйидагига эгамиз:

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} = \int \frac{\sqrt{4\cos^2 t}}{(2\sin t)^2}2\cos t\,dt = \int \operatorname{ctg}^2 t\,dt = \int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt =$$
$$= -\operatorname{ctg} t - t + C.$$

$\sin t = \frac{x}{2}$ бўлгани учун $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-(x/2)^2}}{x/2} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$, $t=\arcsin\frac{x}{2}$. Шунинг учун

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{2} + C.$$

3-пунктда қаралган $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ интеграл I типга тегишли, шунинг учун $x=a\sin t$ ўрнига қўйиш ёрдамида ҳисобланади.

3-мисол. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$ ни топинг.

Ечилиши. Бу II типдаги интеграл. $x=2\operatorname{tg} t$ деймиз. Бундан $dx = \frac{2\,dt}{\cos^2 t}$, $\sqrt{x^2+4}=\sqrt{4\operatorname{tg}^2 t+4}=\sqrt{\frac{4}{\cos^2 t}}=\frac{2}{\cos t}$. Демак,

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{4+x^2})^3}dx = \int \frac{\frac{2\,dt}{\cos^2 t}}{(2/\cos t)^3} = \frac{1}{4}\int \cos t\,dt = \frac{1}{4}\sin t + C =$$
$$= \frac{1}{4}\frac{tdt}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} + C = \frac{1}{4}\frac{x/2}{\sqrt{1+(x/2)^2}} + C = \frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C.$$

6-§. ИНТЕГРАЛЛАШ МЕТОДЛАРИ ҲАҚИДА УМУМИЙ МАЪЛУМОТЛАР ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАРДА ОЛИНМАЙДИГАН ИНТЕГРАЛЛАР

1. Умумий маълумотлар. Биз интеграллашнинг элементар функцияларнинг кенг синфини қамраб олган энг муҳим методларни қараб чиқдик. Лекин шуни эсга тутиш керакли, амалда ҳамма вақт ҳам трафарет бўйича иш тутиб бўлмайди.

Масалан, $\int \frac{3x^2+4x-1}{x^3+2x^2-x-2}dx$ интегрални иинтеграл остидаги функцияни содда касрларга ажратиб, рационал функцияни интеграллашнинг оддий методи билан олиш мумкин эди:

$$\frac{3x^2+4x-1}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{3x^2+4x-1}{(x-2)(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}.$$

Лекин интеграл остидаги функцияга диққат билан қаралса $3x^2+4x-1$ сурат махражнинг ҳосиласидир. Шунинг учун

$$\int \frac{3x^2+4x-1}{x^3+2x^2-x-2}dx = \int \frac{d(x^3+2x^2-x-2)}{x^3+2x^2-x-2} = \ln|x^3+2x^2-x-2|+C.$$

Кўп интегралларни топиш аввал маълум бўлган шаклга келтирилади. Шунинг учун амалда интегралларни ҳисоблашда жуда кўп интегралларни ўз ичига олган жадвалларни тавсия қилиш мумкин*.

2. Элементар функцияларда олинмайдиган интеграллар ҳақида тушунча. Дифференциал ҳисобда биз кўрдикки, ихтиёрий элементар функциянинг ҳосиласи ҳам элементар функция экан. Дифференциаллашга тескари бўлган интеграллашда эса бошқача гап. Бошланғич функцияси мавжуд бўлиб, лекин у элементар функция бўлмаган жуда кўп элементар функцияларни мисол қилиб келтириш мумкин. Шунга ўхшаш, масалан, мавжудлик теоремасига кўра e^{-x^2}, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$ функциялар учун бошланғич функциялар мавжуд бўлишига қарамасдан, улар элементар функцияларда ифодаланмайди. Бунга қарамасдан бу бошланғич функциялар етарлича ўрганилган ва улар учун батафсил жадваллар тузилган. Кейинчалик биз бундай функцияларни ҳисоблаш методлари билан танишамиз.

Масалан, кўп иловаларда $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ функциянинг $\Phi(0)=0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган $\Phi(x)$ бошланғич функцияси катта аҳамиятга эга. Бу функция, хусусан, эҳтимоллар назариясида учрайди ва *эҳтимоллик интеграли* деб аталади. Унинг учун x аргументнинг турли қийматларининг жадвали келтирилган*.

Агар бирор функциянинг бошланғич функцияси элементар бўлмаса, интеграл элементар функцияларда олинмайди дейилади.

* Масалан: И. Н. Бронштейн ва К. А. Семендяев. „Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М., „Наука", 1967; М. Л. Смолянский Таблицы неопределенных интегралов. М., „Наука", 1967 га қаранг.
* XIII боб, 3-§, 5-пунктга ва II иловага қаранг.

VIII БОБ

АНИҚ ИНТЕГРАЛ

1-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛГА КЕЛТИРИЛАДИГАН МАСАЛАЛАР

1. Юз ҳақидаги масалалар. Элементар геометрияда тўғри чизиқли кесмалар билан чегараланган текис фигураларнинг юзи, доира ва унинг бўлаклари қаралган эди. Ихтиёрий ёпиқ чизиқ билан чегараланган K текис фигуранинг юзини ҳисоблаш масаласини қўямиз (173-расм).

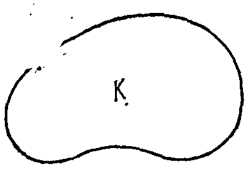
Аввал хусусий ҳолни, Oxy текисликда ётган AB эгри чизиқ билан, абсциссалар ўқидаги CD кесма билан ҳамда кесманинг охирларидан Oy ўққа параллел қилиб ўтказилган CA ва DB тўғри чизиқлар билан чегараланган K фигурани қараймиз. Бу фигурани *эгри чизиқли трапеция*, CD кесмани эса унинг асоси деймиз. Фараз қилайлик, C ва D нуқталар мос равишда a ва b $(b > a)$ абсциссаларга эга бўлсин ва AB эгри чизиқ танланган координаталар системасига нисбатан $y = f(x)$ тенглама билан берилган бўлсин, бу ерда $f(x)$ — $[a, b]$ сегментда узлуксиз ва мусбат функция.

$[a, b]$ сегментни абсциссалари $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1}$ бўлган $n-1$ та нуқта ёрдамида бўлакларга бўламиз. Бундан ташқари, ёзувни бир хил қилиш учун $a = x_0$ ва $b = x_n$ деймиз. Бўлиш нуқталари $[a, b]$ сегментни n та кичик сегментларга бўлади:

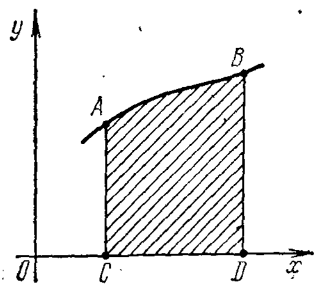
$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n].$$

Бўлиниш нуқталаридан Oy ўқига параллел тўғри чизиқлар ўтказиб, эгри чизиқли трапецияни n та кичик эгри чизиқли трапецияларга ажратамиз (175-расм). Равшанки. эгри чизиқли трапециянинг барча юзи n та кичик эгри чизиқли трапецияларнинг йиғиндисига тенг.

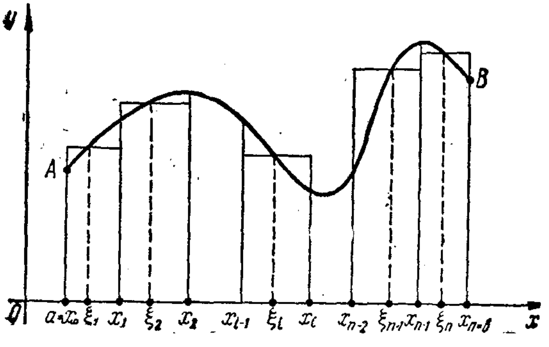
Шунинг учун эгри чизиқли трапециянинг юзини S билан, асоси $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ бўлган эгри чи-



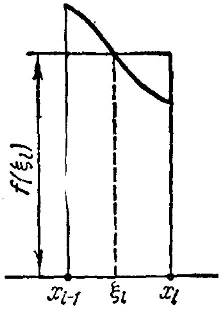
1/3- расм.



174- ра.м.



175- расм.



176- расм.

зиқли кичик трапециянинг юзини эса ΔS_i билан белгиласак, қуйидагича бўлади:

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_i + \ldots + \Delta S_n \qquad (1)$$

ёки қисқароқ ёзсак, $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i$, $\qquad (1')$

бу ерда $\sum$ (сигма) йиғинди белгиси, $\sum\limits_{i=1}^{n}$ символ* i индекс 1 дан n гача ўзгарганда n та қўшилувчи қўшилишни билдиради.

Лекин бу кичик трапецияларнинг юзларини ҳисоблаш, катталикларининг юзини ҳисоблаш каби мураккаб. Шунинг учун қуйидагича иш тутамиз: кичик $[x_{i-1}, x_i]$ сегментларнинг ҳар бирида ихтиёрий ξ_i $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$ нуқтани оламиз ва бу нуқтада $f(\xi_i)$ эгри чизиқнинг ординаталарини ясаймиз (175 ва 176-расмларга қаранг).

Энди асоси $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ бўлган ҳар бир эгри чизиқли трапецияни шу асосдаги ва баландлиги $f(\xi_i)$ га тенг бўлган тўғри тўртбурчак билан алмаштирамиз (176-расмга қаранг). Бундай тўғри тўртбурчакнинг юзи $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ га тенг, чунки $x_i - x_{i-1}$ кичик $[x_{i-1}, x_i]$ сегментнинг узунлигидир. Бу тўғри тўртбурчак юзини эгри чизиқли кичик трапеция юзи деб қабул қилиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta S_i \approx f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \qquad (2)$$

Ҳар бир эгри чизиқли кичик трапециянинг юзини ўша асосдаги, лекин баландлиги эгри чизиқнинг бирор ихтиёрий нуқтасининг ординатасига тенг бўлган тўғри тўртбурчак юзи билан алмашти-

---

* Масалан, $\sum\limits_{i=1}^{5} \sin ix = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x$.

риб, 175-расмда тасвирланган поғонасимон фигурани ҳосил қиламиз. Бу поғонасимон фигуранинг юзи эгри чизиқли трапеция юзини тахминан беради. Шунинг учун эгри чизиқли трапециянинг юзи S учун қуйидаги тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз:

$$S \approx f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \quad (3)$$

ёки яна қисқароқ ёзсак:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \quad (3')$$

Кичик сегмент узунликларидан энг каттасини λ билан белгилаймиз:

$$\lambda = \text{энг кат.}\ \{(x_1 - x_0); (x_2 - x_1); \ldots; (x_n - x_{n-1})\}.$$

λ кичрайиши билан (3′) тақрибий формуланинг аниқлиги ортиб боради. Шунинг учун эгри чизиқли трапециянинг юзининг тақрибий қиймати деб кичик сегментлар узунлигининг энг каттаси S нолга интилган шартда поғонасимон фигуралар юзининг лимитини қабул қилиши ўз-ўзидан табиий. Шундай қилиб,

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \quad (4)$$

Агар ундан ташқари $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ десак, (4) формула узилкесил қуйидаги кўринишга келади:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (4')$$

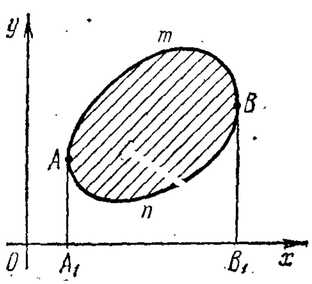
Шундай қилиб, эгри чизиқли трапециянинг юзини ҳисоблаш, бизни (4′) кўринишдаги бирор йиғиндининг лимитини хисоблашга олиб келди.

Ихтиёрий ёпиқ эгри чизиқ билан чегараланган K текис соҳанинг юзини ҳисоблаш масаласига қайтиб, бу масала эгри чизиқли трапецияларни топишга келтирилишини айтиб ўтамиз. Масалан, 177-расмда $AnBmA$ контур билан чегараланган соҳа юзини $A_1B_1BmAA_1$ ва $A_1B_1BnAA_1$ эгри чизиқли трапецияларнинг айирмаси сифатида топиш мумкин.

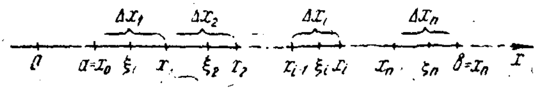
2. Ўзгарувчи куч бажарган иш ҳақидаги масала. Агар катталиги билан ҳам, йўналиши билан ҳам ўзгармайдиган F куч таъсирида моддий нуқта кучнинг йўналиши бўйича l масофага силжиган бўлса, кучнинг иши, механикадан маълумки, куч катталиги F нинг силжиш l га кўпайтмасига тенг, яъни

$$E = Fl. \quad (5)$$

Энди F куч ўзгармас йўналишни



177-расм.



178- расм.

сақласа ҳам сонли катталиги (миқдори) бўйича ўзгарган ҳолни қараймиз. Айтайлик, бу куч таъсирида моддий нуқта кучнинг таъсир чизиғи йўналиши бўйлаб йўналган тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилсин. F куч бажарган ишни ҳисоблаш масаласини қўямиз.

Моддий нуқта ҳаракат қилаётган чизиқни Ox ўқ деб қабул қиламиз. Йўлнинг бошланғич ва охирги нуқталари мос равишда a ва b ($a < b$) абсциссаларга эга бўлсин. $[a, b]$ сегментнинг ҳар бир нуқтасида кучнинг катталиги маълум қийматга эга бўлади, яъни бирор функция $F = f(x)$ нинг абсциссаси бўлади.

Бу функцияни биз узлуксиз деб ҳисоблаймиз. $[a, b]$ сегментни бошланғич ва охирги нуқталари орасида n та кичик сегментга бўламиз (178-расм): $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, . . . $[x_{i-1}, x_i]$, . . . $[x_{n-1}, x_n]$ $[a = x_0, b = x_n]$. Уларнинг узунликлари мос равишда

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

$$\ldots \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

$[a, b]$ сегментнинг ҳаммасида бажарилган иш йўлнинг барча кичик участкаларида бажарилган ишлар йиғиндисига тенг. Ҳамма йўлда бажарилган ишни E билан, кичик участка $[x_{i-1}, x_i]$ да бажарилган ишни ΔE_i билан белгилаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \Delta E_i.$$

Лекин кичик участкада бажарилган ишни ҳисоблаш, ҳамма йўлда бажарилган участкани ҳисоблаш каби мураккаб, чунки куч ўзгарувчи. Бироқ сегментларни бўлишда $[x_{i-1}, x_i]$ бўлаклар қанчалик кичик қилиб олинса, у ҳолда $F(x)$ функциянинг узлуксизлиги шартга кўра йўлнинг ҳар бир участкасида куч деярли ўзгармайди. Ҳар бир куч $[x_{i-1}, x_i]$ сегментда ξ_i $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$ тадан нуқта оламиз ва ҳар бир кичик сегментда куч катталиги унинг ξ_i нуқтасидаги $F_i = f(\xi_i)$ қийматига тенг бўлган ўзгармас қийматга эга бўлади деб фараз қиламиз.

Бундай фаразда йўлнинг $[x_{i-1}, x_i]$ кесмасида куч бажарган иш (5) формулага кўра

$$F_i \Delta x_i = f(\xi_i) \Delta x_i$$

га тенг бўлади.

Лекин ҳақиқатда эса $[x_{i-1}, x_i]$ кичик сегментда куч ўзгарувчи, шунинг учун $f(\xi_i)\Delta x_i$ ифода бу кичик участкада бажарилган ишнинг тақрибий қийматинигина беради. Шундай қилиб,

$[x_{i-1}, x_i]$ участкада $\Delta E_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$ га, бутун $[a, b]$ йўлда эса

$$E \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{6}$$

га эга бўламиз. Δx_i қанчалик кичик бўлса, бу тақрибий тенглик шунча аниқ бўлади. Шунинг учун бажарилган ишнинг тақрибий қиймати учун кичик кўчишларнинг λ энг катта узунлиги нолга интилган шартда табиийки, (6) йиғиндининг лимити қабул қилинади, яъни

$$E = \lim_{x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{7}$$

2-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛ

1-§ да қўйилган масаланинг асосий (конкрет) мазмунидан четлашадиган бўлсак, уни ҳал қилаётганда битта усул қўлланилади, яъни масалан маълум кўринишдаги йиғиндининг лимитини топишга келтирилади.

Ҳар бир масаланинг ечилиши сегментда берилган узлуксиз функция устида қандайдир амал билан боғланган. Хусусан, эгри чизиқли трапециянинг юзини ҳисоблаётганда бундай функция эгри чизиқнинг ўзгарувчи ординатаси эди, бажарилган ишни ҳисоблаётганда эса ўзгарувчи куч бўлади. Юқорида қаралган йиғиндиларнинг лимитини топишга табиий фанларнинг кўп масалалари келтирилади. Шунинг учун бу жараённи у ёки бу масаланинг конкрет мазмунига қараб эркли равишда ўрганиш табиийдир.

1. Интеграл йиғинди. Аниқ интеграл. $[a, b]$ сегментда $y = f(x)$ функция берилган бўлсин. Қуйидаги амалларни бажарамиз.

1. $x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1}$ бўлиш нуқталари ёрдамида $[a, b]$ сегментни n та кичик сегментларга ажратамиз (178-расмга қаранг:)

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$
бу ерда $x_0 = a, x_n = b$.

2. $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$ кичик сегментларнинг ҳар бирида ихтиёрий ξ_i, $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$ нуқтани танлаймиз ва $f(x)$ функциянинг ξ_i нуқтадаги қийматини мос сегментнинг $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ узунлигига кўпайтирамиз:

$$f(\xi_i)\Delta x_i$$

3. Бундай σ_n кўпайтмаларнинг барча йиғиндисини ёзамиз:

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_i)\Delta x_i + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

ёки қисқача ёзсак:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{8}$$

(8) йиғинди *интеграл йиғинди* дейилади.

4. $[x_{i-1}, x_i]$ кичик сегментларнинг энг катта узунлигини *бўлиш қадами* деймиз ва λ орқали белгилаймиз.

$[x_{i-1}, x_i]$ сегментнинг бўлиш сони n чексиз ўссин ва $\lambda \to 0$ бўлсин. Агар бунда σ_n интеграл йиғинди $[a, b]$ сегментни $[x_{i-1}, x_i]$ сегментларга ажратиш усулига ва уларнинг ҳар бирида ξ_i нуқтанинг танланишига боғлиқ бўлмайдиган I лимитга эга бўлса, у ҳолда бу I сон $[a, b]$ сегментда $f(x)$ функциядан олинган *аниқ интеграл* дейилади ва $\int\limits_a^b f(x)\, bx$ символ билан белгилананди („$f(x)$ дан x бўйича a дан b гача олинган аниқ интеграл“ деб ўқилади).

Шундай қилиб,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i. \tag{9}$$

a ва b сонлар мос равишда *интеграллашнинг қуйи ва юқори чегаралари* дейилади*, $f(x)$ — интеграл остидаги функция, x—интеграллаш ўзгарувчиси, $[a, b]$ сегмент эса *интеграллаш сегменти* (ёки интеграллаш соҳаси) дейилади.

Шундай қилиб, қуйидаги таърифга келамиз.

Бўлиш қадами нолга интилганда интеграл йиғинди интилган лимитга тенг сон аниқ интеграл дейилади.

$[a, b]$ сегментда $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интеграли мавжуд бўлган $f(x)$ функция бу сегментда *интегралланувчи* дейилади.

1-изоҳ. Берилган $f(x)$ функция ва берилган $[a, b]$ сегмент учун равшанки, биз чексиз кўп интеграл йиғиндиларга эга бўламиз. Бу интеграл йиғиндиларнинг қиймати бўлиш нуқталари x_1, $x_2, \ldots, x_i \ldots, x_{n-1}$ ларга қандай боғлиқ бўлса, оралиқ нуқта ξ_i ларнинг танланишига ҳам шундай боғлиқ бўлади.

2-изоҳ. Агар $y = f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда манфиймас бўлса, у ҳолда интеграл йиғинди унинг қўшилувчилари каби оддий геометрик маънога эга. Шу билан бирга $f(\xi_i)\Delta x_i$ кўпайтма асоси $[x_{i-1}, x_i]$ ва баландлиги —эгри чизиқнинг ξ_i нуқтадаги ординатаси бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзига тенг (177-расмга қаранг). Ҳар бир кичик сегментда баландлиги $f(\xi_i)$ бўлган тўғри тўртбурчакни ясаб, поғонали фигурани ҳосил қиламиз, унинг юзи $[a, b]$ сегментнинг бўлакларга бўлинишига ва ξ_i нуқталарнинг танланишига мос келадиган интеграл йиғинди σ_n га тенг (175-расмга қаранг).

3-изоҳ. Равшанки, (8) интеграл йиғинди берилган функциянинг аргументи қандай ҳарф билан белгиланишига боғлиқ эмас. Демак, унинг лимити, яъни аниқ интеграллаш ўзгарувчисининг белгиланишига боғлиқ эмас:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(z)\,dz = \int\limits_a^b f(t)\,dt \text{ ва ҳ. к.}$$

---

* Интеграллаш чегаралари интеграллаш лимитлари ҳам дейилади.

Энди 1-§ да қаралган масалаларга қайтамиз, кўрамизки;

1. $y=f(x)$ эгри чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи, бу ерда $[a, b]$ сегментнинг барча x қийматлари учун $f(x) \geqslant 0$, сон жиҳатдан $[a, b]$ сегмент бўйича $f(x)$ функциядан олинган аниқ интегралга тенг экан:

$$S=\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Аниқ интегралнинг геометрик маъносини ифодалайдиган бу факт қисқача бундай таърифланади: манфиймас функциядан олинган аниқ интеграл сон жиҳатдан эгри чизиқли трапециянинг юзига тенг экан.

2. Катталиги $F=f(x)$ бўлган E ўзгарувчи кучнинг бажарган иши кучдан олинган аниқ интегралга тенг, яъни:

$$E=\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Мисол. $\int_a^b 1 \cdot dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $[a, b]$ сегментни $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}$ бўлиш нуқталари билан n та тенг бўлакка бўламиз ва тегишли интеграл йиғиндини тузамиз. Интеграл остидаги функция ўзгармас бўлгани учун ва бирга айнан тенг бўлгани учун оралиқ ξ_i нуқталарни ихтиёрий танлаганимизда ҳам қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sigma_n = 1 \cdot \Delta x_1 + \ldots + 1 \cdot \Delta x_i + \ldots + 1 \cdot \Delta x_n =$$
$$=(x_1-a)+\ldots+(x_i-x_{i-1})+\ldots+(b-x_{n-1})=b-a.$$

Шундай қилиб, берилган функция учун ихтиёрий интеграл йиғинди $b-a$ га тенг ва демак, унинг лимити (яъни аниқ интеграл) ҳам $b-a$ га тенг:

$$\int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b-a.$$

$\int_a^b$ интегрални аниқлаганда қуйи чегара a ва юқори чегара b дан кичик $(a<b)$ деб фараз қилдик. $a>b$ ва $a=b$ бўлган ҳол учун аниқ интеграл тушунчасини умумлаштирамиз. $a>b$ да таъриф бўйича қуйидагича бўлсин деймиз:

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx. \tag{10}$$

Буни қисқача бундай ифодаланади: интеграл чегараларининг ўрнини алмаштирилганда аниқ интеграл ўз ишорасини қарама-қаршисига ўзгартиради.

Юқори ва қуйи чегаралари тенг бўлган аниқ интеграл таърифга кўра нолга тенг деб қабул қилинади,

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0. \tag{11}$$

Аниқ интегралга таъриф берилиши муносабати билан қандай шартларда интеграл йиғинди лимитга эга бўлади, яъни аниқ интеграл мавжуд бўлади деган савол туғилади.

Биз қуйида исботсиз келтирадиган **аниқ интегралнинг мавжудлик теоремаси ўринлидир.**

$[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлган ҳар қандай функция интегралланувчидир, яъни бундай функциянинг аниқ интеграли мавжуд.

Шундай қилиб, функция интегралланувчи бўлиши учун унинг берилган сегментда узлуксиз бўлиши етарли. Бироқ узилишга эга бўлган баъзи функцияларнинг аниқ интеграли мавжуд бўлиши ҳам мумкин. Масалан, сегментда чегараланган ва бу сегментда чекли узулиш нуқталарига эга бўлган ҳар қандай функциянинг аниқ интеграли мавжудлигини исботлаш мумкин.

2. Аниқ интегралнинг хоссалари. Энди интегралнинг таърифидан келиб чиқиб, унинг содда хоссаларини ўрганамиз. Бунда интеграл остидаги функцияни узлуксиз деб ҳисоблаймиз.

1^0. *Ўзгармас кўпайтувчини аниқ интеграл белгиси ташқарисига чиқариш мумкин, яъни агар k—бирор сон бўлса, у ҳолда*

$$\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx. \tag{12}$$

Ҳақиқатан,

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\lambda>0}\sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\left[k\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i\right] =$$

$$= k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Бунда биз ўзгармас кўпайтувчининг лимит белгисидан ташқарига чиқариш хоссасидан фойдаландик.

2^0. *Бир нечта функциянинг йиғиндисидан олинган аниқ интеграл қўшилувчилардан олинган аниқ интегралнинг йиғиндисига тенг.*

Масалан, иккита $f(x)$ ва $\varphi(x)$ қўшилувчи учун қуйидагига эгамиз:

$$\int_a^b [f(x)+\varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{13}$$

Ҳақиқатан, интегралнинг таърифига кўра қуйидагига эгамиз:

$$\int_a^b \Big[f(x)+\varphi(x)\Big]dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n \Big[f(\xi_i)+\varphi(\xi_i)\Big]\Delta x_i =$$

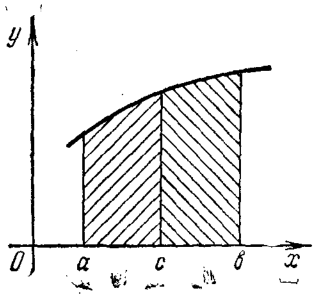
$$= \lim_{\lambda\to 0}\left[\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)\,\Delta x_i\right] = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i +$$

$$+ \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

1^0 ва 2^0 хоссалар биргаликда чизиқлилик хоссаси дейилади.

3^0. Агар интеграллаш сегменти $[a, b]$ ни иккита $[a, c]$ ва $[c, b]$ сегментга ажратсак,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (14)$$



179- расм.

Ҳақиқатан, интеграл йиғиндининг лимити $[a, b]$ сегментни ажратиш усулига ва оралиқ нуқталар ξ_i ни танланишига боғлиқ бўлмайди. Бу ҳар бир интеграл йиғиндини тузаётганда c нуқтани ҳам бўлиниш нуқталари ҳисобига киритиш имконини беради. $c = x_k$ бўлсин. У ҳолда интеграл йиғинди иккита қисмдан иборат бўлади, улардан бири $[a, c]$ сегментга, иккинчиси эса $[c, b]$ сегментга тегишли бўлади:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Лимитга ўтиб қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

ёки

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3^0 хоссанинг геометрик маъноси: агар $[a, b]$ сегмент бўлган эгри чизиқли трапециянинг юзи асослари $[a, c]$ ва $[c, b]$ сегментлар бўлган эгри чизиқли трапецияларнинг юзлари йиғиндисига тенг бўлса (179- расм).

Изоҳ. 3^0 хосса $a < c < b$ ҳол учун тавсифланади. Бироқ (14) тенглик исталган a, b ва c сонлар учун ўринли. Ҳақиқатан, аниқлик учун $c < a < b$ бўлсин. У ҳолда 3^0 хоссани $[c, b]$ сегментга* қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx.$$

Лекин $\int_c^a f(x)dx = -\int_a^c f(x)dx$ [(10) формулага қаранг],

шунинг учун:

$$\int_c^b f(x)dx = -\int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx.$$

* Бунда биз $f(x)$ функция $[c, b]$ сегментда узлуксиз деб фараз қиламиз

ёки

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3^0 хоссани кўпинча а д д и т и в л и к хоссаси дейилади.

4^0. *Агар* $[a, b]$ *сегментда* $f(x) \geqslant 0$ *бўлса*, $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

Ҳақиқатан, $f(\xi_i) \geqslant 0$ ва $\Delta x_i > 0$ бўлгани учун ихтиёрий i лар учун ушбу интеграл йиғинди $\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geqslant 0$. Шунинг учун $\lambda \to 0$ да интеграл йиғиндининг лимити, яъни $\int_a^b f(x)dx$ ҳам манфиймас.

Агар $[a, b]$ сегментда $f(x) \geqslant 0$ бўлса ёки жуда бўлмаса бу сегментнинг битта нуқтасида $f(x) > 0$ бўлса, $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ қатъий тенгсизлик ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин.

5^0. *Агар* $[a, b]$ *сегментда иккита* $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функция $f(x) \geqslant \varphi(x)$ тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{15}$$

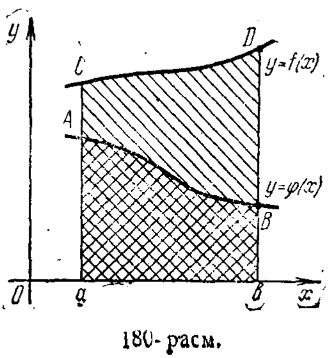
Бошқача айтганда, тенгсизликни ҳадма-ҳад интеграллаш мумкин.

Ҳақиқатан, $f(x) - \varphi(x) \geqslant 0$, шунинг учун 4^0 хоссага кўра $\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] \geqslant 0$. 1^0 ва 2^0 хоссаларга кўра

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)dx,$$

бўлгани учун $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \geqslant 0$, бундан $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx$.

Бу хосса оддий геометрик маънога эга. $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларнинг иккаласи ҳам $[a, b]$ сегментда манфиймас бўлсин. У ҳолда $y = f(x)$ эгри чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапеция $y = \varphi(x)$ эгри чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапецияни ўз ичига олади (180-расм). Шунинг учун биринчи фигуранинг юзи иккинчи фигуранинг юзидан кичик эмас. Агар интегралнинг геометрик маъносидан келиб чиқсак:



180-расм.

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Хусусан, ҳамма вақт $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$ бўлгани учун маълум 5^0 хоссадан

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

келиб чиқади. Бундан қуйидагига эгамиз:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{16}$$

Ўрта қиймат ҳақидаги теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу сегментнинг шундай нуқтаси топиладики, бунда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a) \tag{17}$$

бўлади.

$f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги энг катта ва энг кичик қийматларини мос равишда m ва M билан белгилаймиз. У ҳолда исталган x учун $a \leqslant x \leqslant b$ қуйидаги тенгсизлик бажарилади:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M. \tag{18}$$

5^0 ва 1^0 хоссаларни қўлланиб, (18) тенгсизликдан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$m\int_a^b dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M\int_a^b dx.$$

Лекин $\int_a^b dx = b - a$ (1- пунктдаги мисолга қаранг). Демак,

$$m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a). \tag{19}$$

Икки ёқлама (19) тенгсизликнинг ҳамма ҳадларини $b-a$ га бўлиб, $m \leqslant \mu \leqslant M$ ни ҳосил қиламиз, бунда

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = \mu. \tag{20}$$

Шундай қилиб, μ сон $f(x)$ функциянинг энг кичик m қиймати ва энг катта M қиймати орасидаги оралиқ бўлар экан. Сегментда узлуксиз бўлган $f(x)$ функция m ва M орасидаги барча оралиқ қийматларни қабул қилгани учун (V боб, 2- §, 3- пунктга қаранг) ξ нинг $[a, b]$ сегментда шундай қиймати топиладики, шунинг учун $f(\xi) = \mu$ бўлади.

(20) ифодада μ ўрнига унинг $f(\xi)$ га тенг қийматини қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(\xi)$$

ёки

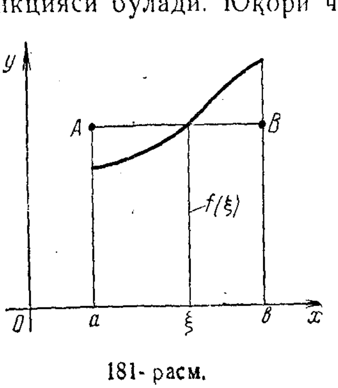
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Шундай қилиб, *узлуксиз функциянинг аниқ интеграли интеграл остидаги функциянинг бирор оралиқ нуқталаридаги қиймати билан интеграллаш сегменти узунлигининг кўпайтмасига тенг.*

Ўрта қиймат ҳақидаги теорема яққол геометрик мазмунга эга. $[a, b]$ сегментда $f(x) \geqslant 0$ бўлсин. $\int_a^b f(x)dx$ интеграл эгри чизиқли трапециянинг юзига сон жиҳатдан тенг (181-расм). Асоси эгри чизиқли трапециянинг $[a, b]$ асоси бўлган, баландлиги $f(\xi)$ га тенг $aABb$ тўғри тўртбурчакни қарайлик. $f(\xi)(b-a)$ кўпайтма сон жиҳатдан тўғри тўртбурчак юзига тенг. Демак, *эгри чизиқли трапеция ўша асосдаги ва баландлиги асоснинг бирор оралиқ ξ нуқтасининг ординатасига тенг бўлган тўғри тўртбурчак билан тенг катталикка эга экан.*

Функциянинг (17) формуладан топиладиган ξ нуқтадаги қиймати функциянинг *сегментдаги ўрта қиймати* дейилади.

3. Интегралнинг ўзгарувчи юқори чегараси бўйича ҳосиласи. $y = f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлсин. $\int_a^b f(x)dx$ интегрални қараймиз. Берилган интеграл остидаги функцияда интегралнинг қиймати иккала интеграллаш чегараси a ва b га боғлиқ бўлади Агар қуйи чегара a ни ўзгартирмасдан, юқори чегара b ўзгартирилса, у ҳолда интеграл ўз юқори чегарасининг функцияси бўлади. Юқори чегаранинг ўзгарувчанлигини таъкидлаш учун уни b нинг ўрнига x билан белгилаймиз Интеграллаш ўзгарувчисини юқори чегара билан чалкаштирмаслик учун t билан белгилаймиз; равшанки, бу билан интегралнинг қиймати ўзгармайди (1-пунктдаги 3-изоҳга қаранг). Шундай қилиб, юқори чегараси ўзгарувчи бўлган интеграл x нинг бирор функцияси бўлар экан:



181-расм.

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Бу функция қуйидаги теоремада баён қилинадиган ажойиб хоссага эга.

Теорема. *Интегралнинг ўзгарувчи юқори чегараси бўйича ҳосиласи интеграллаш ўзгарувчиси юқори чегара билан алмаштирилган интеграл ости функцияга тенг:*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{21}$$

Исботи. $I(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ функциянинг ҳосиласини топиш учун x га Δx орттирма берамиз. У ҳолда функциянинг янги қиймати қуйидагига тенг бўлади:

$$I(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Демак, $I(x)$ функциянинг орттирмаси x нуқтадан $x+\Delta x$ нуқтага ўтаётганда қуйидагига тенг бўлар экан:

$$\Delta I = I(x+\Delta x)-I(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt.$$

Лекин аддитивлик хоссасига кўра

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt,$$

шунинг учун

$$\Delta I=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Сўнгги интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаймиз:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=f(c)\Delta x,$$

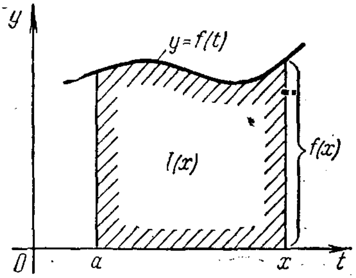
бу ерда c катталик x ва $x+\Delta x$ орасида жойлашган. Шундай қилиб, $\Delta I=f(c)\Delta x$. Ҳосиланинг таърифига кўра қуйидагига эгамиз

$$\frac{d\int_a^x f(t)dt}{dx}=\frac{dI(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c).$$

$\Delta x\to 0$ бўлгани учун $x+\Delta x$ ва демак, c ҳам x га интилади. Шартга кўра интеграл остидаги $f(t)$ функция x нуқтада узлуксиз. Шунинг учун $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c)=\lim\limits_{c\to x} f(c)=f(x)$. Демак,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x),$$

шуни исбот қилиш талаб қилинган эди.



182- расм.

Интегралнинг юқори чегараси бўйича ҳосиласи ҳақидаги теорема математик анализнинг асосий теоремаларидан бири ҳисобланади. Бу теорема аниқ интеграллаш ва дифференциаллаш амаллари орасидаги чуқур боғланишни очиб беради. Интегралнинг юқори чегараси бўйича ҳосиласи ҳақидаги теорема $\int_a^x f(t)\,dt$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлишини кўрсатади. Лекин $\int_a^x f(t)dt$ интеграл узлуксиз функциянинг аниқ интеграли мавжудлиги ҳақидаги теоремага асосан x нинг исталган қиймати учун мавжуд.

Шундай қилиб, **узлуксиз функциянинг бошланғич функцияси мавжудлиги** ҳақидаги қуйидаги теорема ўринли: *исталган узлуксиз $f(x)$ функция бошланғич функцияларга эга, улардан бири $\int_a^x f(t)\,dt$ интегралдир.*

1- изоҳ. Интегралнинг геометрик маъноси, яъни юзни ифодалашидан келиб чиқиб, $I(x)=\int_a^x f(t)dt$ интеграл асоси $[a, x]$ бўлган эгри чизиқли трапециянинг ўзгарувчи юзини ифодалашини айтиб ўтамиз (182- расм). Демак, ҳозиргина баён қилинган теоремага асосланиб, ўзгарувчи юз бу эгри чизиқли трапецияни чегаралайдиган $y=f(x)$ чизиқнинг ординатаси учун бошланғич функция бўлишини айтиб ўтиш мумкин.

2- изоҳ. $f(x)>0$ да $I(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ функция ўсувчи, чунки x ўсиши билан эгри чизиқли трапециянинг юзи ортиб боради.

4. Ньютон- Лейбниц формуласи. Аниқ интегрални интеграл йиғиндиларнинг лимити сифатида ҳисоблаш ҳатто оддий функциялар учун ҳам мураккаб. Интегралнинг юқори чегараси бўйича ҳосиласи ҳақидаги теорема йиғиндиларни жамлаш ва лимитга ўтиш процессларини четлаб ўтиб, аниқ интегралларни ҳисоблашнинг содда усулларини аниқлаш имконини беради. Аниқ интегрални ҳисоблашнинг бу янги усули биз келтириб чиқаришга энди киришадиган Ньютон- Лейбниц* формуласи орқали ифодаланади.

Аввалги пунктда $I(x)=\int_a^x f(t)dt$ функция интеграл остидаги узлуксиз функция $f(x)$ учун бошланғич функция бўлишини кўр-

* Г. Лейбниц (1646—1716) — буюк немис математиги.

сатдик. Маълумки, $f(x)$ нинг бошқа бошланғич функциялари $I(x)$ дан фақат ўзгармас қўшилувчиси билан фарқ қилади. Шунинг учун, агар $F(x)$ функция $f(x)$ учун бошқа бошланғич функция бўлса, у ҳолда $I(x)=F(x)+C$ ёки

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C. \tag{22}$$

Интеграллаш чегаралари тенг бўлгани учун

$$I(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

бўлишини эътиборга олсак, C ўзгармасни топиш осон. Шунинг учун (22) муносабатга $x=a$ ни қўйсак, $\int_a^a f(t)\,dt = F(a)+C=0$ ни ҳосил қиламиз. Бундан $C=-F(a)$ ва демак, $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)-F(a)$. Хусусан, $x=b$ да қуйидагига эгамиз:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a). \tag{23}$$

Бу *Ньютон-Лейбниц формуласидир.*

У аниқ интегрални ҳисоблаш интеграл остидаги $f(x)$ функция учун бирор $F(x)$ бошланғич функцияни топиш бошланғич функциянинг x нинг интеграли юқори ва қуйи чегараларига тенг қийматларида ҳисобланган қийматлари айирмасини олиш кераклигини кўрсатади. Қисқача қилиб айтганда, *аниқ интеграл интеграл остидаги функция бошланғич функциясининг интеграллаш сегментидаги орттирмасига тенг экан.*

$F(b)-F(a)$ айирма символик равишда $F(x)\Big|_a^b$ каби белгиланади.

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Бу символдан фойдаланиб, Ньютон—Лейбниц формуласини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{24}$$

1-мисол. $\int_1^2 e^x dx$ ни ҳисобланг.

Ечилиши. Интеграл остидаги функциянинг бошланғич функцияларидан бири e^x. Шунинг учун (24) Ньютон—Лейбниц формуласини қўллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз: $\int_1^2 e^x dx = e^x \Big|_1^2 = e^2 - e^1 = e(e-1)$.

---

* Баъзан $F(x)\Big|_a^b$ ёзув ўрнига $[F(x)]_a^b$ ёзувдан фойдаланамиз.

2- мисол. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ни ҳисобланг.

Ечилиши. Ньютон—Лейбниц формуласига кўра

$$\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_0^{0,5} = \arcsin 0,5 - \arcsin 0 = \pi/6.$$

Изоҳ. Ньютон—Лейбниц формуласи интеграл остидаги $f(x)$ функция узлуксиз деган фаразда келтириб чиқарилган эди. Узилишга эга бўлган функциялар учун Ньютон—Лейбниц формуласи ўринли бўлмаслиги ҳам мумкин.

5. Аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштириш. Аниқмас интеграл ҳолидаги каби аниқ интегрални ҳисоблашни ҳам ўзгарувчини алмаштириш ёрдамида соддалаштириш мумкин.

1- мисол. $\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$ аниқ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $\sqrt{x+1} = t$ формула ёрдамида ўзгарувчини алмаштириб, интеграл остидаги функциянинг бошланғич функциясини топамиз. У ҳолда $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$ ва демак,

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \int \frac{(t^2-1)\,2t\,dt}{t} = 2\int (t^2-1)\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + C.$$

x ўзгарувчига қайтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} = 2\left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} - \sqrt{x+1}\right) + C.$$

Шундай қилиб,

$$2\left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} - \sqrt{x+1}\right)$$

функция интеграл остидаги $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ функциянинг бошланғич функцияларидан бири экан. Демак, Ньютон—Лейбниц формуласидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} = 2\left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} - \sqrt{x+1}\right)\Bigg|_3^8 =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{(8+1)^3}}{3} - \sqrt{8+1}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{(3+1)^3}}{3} - \sqrt{3+1}\right) = 10\frac{2}{3}.$$

Бироқ бу ерда фойдаланилган усул жуда мураккаб ҳисоблашларга олиб келади. Қуйида t ўзгарувчидан яна x ўзгарувчига қайтмасдан туриб, аниқ интеграллаш ҳисоблашни соддалаштириш мумкинлиги кўрсатилади.

Фараз қилайлик $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ аниқ интегрални ҳисоблаш керак бўлсин, бу ерда $f(x)$ — $[a, b]$ сегментда узлуксиз функция. $x = \varphi(t)$ деб, x ўзгарувчидан t ўзгарувчига ўтамиз. Айтайлик, $x = \varphi(t)$ формула бўйича $t = \alpha$ қийматга $x = a$ қиймат, $t = \beta$

қийматга ўша формула бўйича $x=b$ қиймат тўғри келсин; шундай қилиб, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

Бундан ташқари,

1) $\varphi(t)$ функция ва унинг $\varphi'(t)$ ҳосиласи $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ сегментда узлуксиз бўлсин;

2) t ўзгарувчи α дан β гача ўзгарганда $\varphi(t)$ функциянинг қиймати $a \leqslant x \leqslant b$ сегментдан ташқарига чиқмасин.

Бу шартларда аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштиришнинг қуйидаги формуласи ўринли бўлади:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Ҳақиқатан, $F(x)$ берилган $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлсин, яъни $F'(x)=f(x)$. У ҳолда Ньютон — Лейбниц формуласи бўйича

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \tag{25}$$

га эгамиз. Энди бошланғич функция $F(x)$ да $x=\varphi(t)$ десак, у ҳолда $F[\varphi(t)]$ функция алмаштирилган интегралнинг интеграл остидаги функциясининг, яъни $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ нинг бошланғич функцияси бўлади. Ҳақиқатан, мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасини қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dF[\varphi(t)]}{dt}=\frac{dF(x)}{dt}=\frac{dF(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)\cdot\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

Шунинг учун яна Ньютон—Лейбниц формуласига кўра

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)].$$

Лекин шартга кўра $\varphi(\beta)=b$, $\varphi(\alpha)=a$ бўлгани учун $F[\varphi(\beta)]=$ $=F(b)$, $F[\varphi(\alpha)]=F(a)$. Демак,

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)\,\varphi'(t)\,dt=F(b)-F(a). \tag{25'}$$

(25) ва (25') тенгликларни таққослаб, *ўзгарувчини алмаштириш* формуласига келамиз;

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{26}$$

Ўзгарувчини алмаштириш формуласи ёрдамида $\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$ аниқ интегрални қандай ҳисоблаш мумкинлигини кўрсатамиз (1-мисолга қаранг), $\sqrt{x+1}=t$, яъни $x=\varphi(t)=t^2-1$ дейлик. Мазкур ҳолда $a=3$, $b=8$. $x=a=3$ да $t=$

$= \sqrt{3+1} = 2$ га эгамиз; $x = b = 8$ да $t = \sqrt{8+1} = 3$ га эгамиз. Шундай қилиб, $\alpha = 2$, $\beta = 3$. Сўнгра $\varphi'(t)\,dt = 2t\,dt$ ни топамиз. Энди (26) ўзгарувчини алмаштириш формуласидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)}{t}\,2t\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3} - t\right]_2^3 = 2\left[\left(\frac{3^3}{3} - 3\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2\right)\right] = 10\frac{2}{3}.$$

2- мисол. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $x = a\sin t$ деб, $dx = a\cos t\,dt$ ни ҳосил қиламиз. Агар $x = 0$ бўлса, у ҳолда $\sin t = 0$, бундан $t = 0$; агар $x = a$ бўлса, $\sin t = 1$, бундан $t = \pi/2$. Шундай қилиб, $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$.

Демак, ўзгарувчини алмаштириш формуласидан қуйидагига эгамиз:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt = a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1 + \cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Кўпинча $x = \varphi(t)$ ўзгарувчини алмаштириш ўрнига тескари алмаштириш $t = \psi(x)$ қўлланилишини айтиб ўтамиз; бироқ бунда $t = \psi(x)$ функцияга тескари бўлган функция мавжуд бўлиши ва унинг учун ўзгарувчини алмаштириш формуласини келтириб чиқаришда қўйилган шартлар бажарилиши керак.

3- мисол. $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ ни ҳисобланг.

Ечилиши. $\sqrt{e^x - 1} = t$ деймиз. Бунда $x = \ln(1 + t^2)$ тескари функция мавжудлигига ва у ўзгарувчини алмаштириш формуласини келтириб чиқаришда қўйилган шартларни қаноатлантиришига ишонч ҳосил қилиш осон. $dx = \frac{2t\,dt}{1+t^2}$ ни топамиз. Агар $x = \ln 2$ бўлса, $t = 1$; агар $x = 2\ln 2$ бўлса $t = \sqrt{3}$.

Шундай қилиб, $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{3}$. Ўзгарувчини алмаштириш формуласини қўллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t\,dt}{t(1+t^2)} = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = 2\,[\operatorname{arctg} t]_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

6. Аниқ интегралда бўлаклаб интеграллаш. Иккита $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ функция ўзларининг биринчи ҳосилалари билан $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлсин. Уларнинг кўпайтмасини дифференциаллаймиз:

$$d[u(x)vx] = u(x)dv(x) + v(x)\,du(x) = u(x)v'(x)dx + v(x)\,u'(x)\,dx.$$

Бу айниятни a дан b гача оралиқда интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_a^b d[u(x)\,v(x)] = \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx + \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx. \qquad (27)$$

Лекин Ньютон—Лейбниц формуласига кўра

$$\int_a^b d[u(x)\,v(x)] = u(x)\,v(x)\Big|_a^b.$$

Шундай қилиб, (27) тенглик қуйидаги кўринишни олади:

$$u(x)\,v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx + \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx,$$

бундан

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx. \qquad (28)$$

Бу формула *аниқ интегралда бўлаклаб интеграллаш формуласи* дейилади.

$du = u'(x)\,dx$ ва $dv = v'(x)\,dx$ бўлгани учун (28) формулани қуйидаги ихчам кўринишда ёзиш мумкин:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (29)$$

Бунда интеграллаш чегаралари x эркли ўзгарувчига тегишли эканлигини назарда тутиш керак.

1- мисол. $\int_0^\pi x\cos x\,dx$ ни ҳисобланг.

Ечилиши. $x = u$, $\cos x\,dx = dv$. У ҳолда $du = dx$, $v = \sin x$. Бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаб, қуйидагини топамиз:

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx = [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = [\cos x]_0^\pi = -2,$$

чунки $[x\sin x]_0^\pi = \pi\sin\pi - 0\sin 0 = 0.$

2- мисол. $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ ни ҳисобланг.

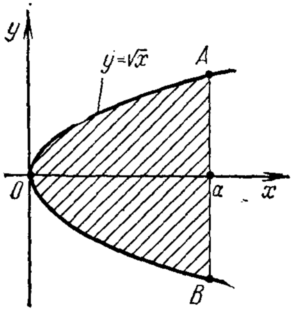
Ечилиши. $\ln x = u$, $\frac{dx}{\sqrt{x}} = dv$ деймиз, бундан $du = \frac{dx}{x}$, $v = 2\sqrt{x}$. Демак, бўлаклаб интеграллаш формуласига кўра қуйидагига эгамиз:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = [2\sqrt{x}\ln x]_1^e - \int_1^e 2\sqrt{x}\,\frac{dx}{x} = 2\sqrt{e}\ln e - 2\sqrt{1}\ln 1 - 4[\sqrt{x}]_1^e =$$

$$= 2\sqrt{e} - (4\sqrt{e} - 4) = 2(2 - \sqrt{e}).$$

3- §. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ГЕОМЕТРИК ВА ФИЗИК ТАТБИҚЛАРИ

1. Юзни декарт координаталарида ҳисоблаш. Агар $y = f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз ва мусбат бўлса, у ҳолда асоси $[a, b]$ бўлган ва юқоридан бу функциянинг графиги би-



183- расм.

лан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини

$$S=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b y\,dx \qquad (30)$$

формула билан топиш мумкинлигини юқорида аниқлаган эдик (2- § даги 1- пунктга қаранг).

1- мисол. Парабола сегментининг юзини, яъни $x=y^2$ парабола ёйи ва $x=a$ тўғри чизиқнинг AB кесмаси билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг (183- расм)

Ечилиши. Парабола сегментининг Ox ўқига нисбатан симметриясидан келиб чиқиб унинг S юзини AO эгри чизиқли трапециянинг иккиланган юзи сифатида топамиз:

$$S=2\int_0^a y\,dx=2\int_0^a \sqrt{x}\,dx=\frac{4}{3}x^{3/2}\Big|_0^a=\frac{4a^{3/2}}{3}\frac{4}{3}a\sqrt{a}.$$

2- мисол. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс билан чегараланган фигуранинг юзини аниқланг.

Ечилиши. Эллипснинг ўқларга нисбатан симметриясидан изланган юз OAB эгри чизиқли трапециянинг тўртланган юзига тенглиги келиб чиқади (70-расмга қаранг):

$$S=4\int_0^a y\,dx=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

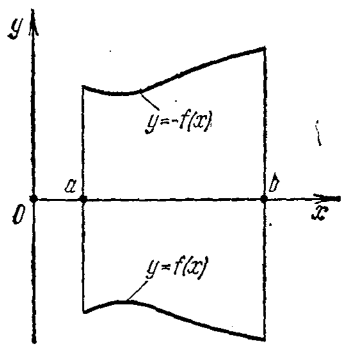
Лекин 2- §, 5- пунктдаги 2- мисолда биз $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\pi a^2/4$ ни топган эдик. Демак,

$$S=4\,\frac{b}{a}\,\frac{\pi a^2}{4}=\pi ab.$$

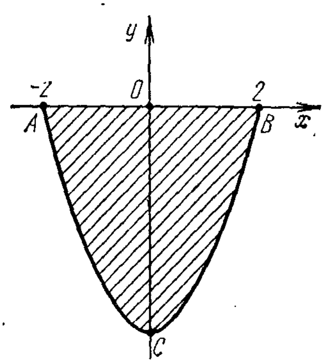
Хусусан, агар $a=b=R$ бўлса, у ҳолда эллипс радиуси R бўлган айланага ўтади ва биз доира юзининг маълум формуласига келамиз: $S=\pi R^2$

Энди $[a, b]$ сегментда $f(x)<0$ бўлсин (184- расм). Асоси $[a, b]$ бўлган, қуйидан $y=f(x)$ эгри чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапеция Ox ўқидан пастда ётади. Симметрия ҳақидаги тасаввуримизга кўра унинг S юзи ўша асосга эга бўлган, лекин юқоридан $y=-f(x)$ эгри чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапеция юзига тенглигини айтиб ўтамиз (184- расмга қаранг). Шартга кўра $f(x)<0$ бўлгани учун $-f(x)>0$ ва (30) формулани қўлланиб, қуйидагини топамиз:

$$S=\int_a^b[-f(x)]dx=-\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (31)$$



184- расм.



185- расм.

Интеграл остидаги функция манфий бўлганда эгри чизиқли трапециянинг юзи шундай ифодаланади.

3- мисол. $y = x^2 - 4$ парабола ва абсциссалар ўқи билан чегараланган фигура юзини топинг (185- расм).

Ечилиши. $y = x^2 - 4$ парабола абсциссалар ўқи билан $A(-2; 0)$ ва $B(2; 0)$ нуқталарда кесишади. Бинобарин, асоси $[-2, 2]$ сегмент бўлган эгри чизиқли ACB трапециянинг юзини топиш керак. Бу сегментда $y \leqslant 0$ бўлгани сабабли S юзни топиш учун (31) формуладан фойдаланамиз.

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx = -\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.$$

(30) ва (31) формулаларни битта формула қилиб бирлаштириш мумкин:

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{32}$$

Бу формула $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда ишораси ўзгарадиган бўлганда ҳам, яъни у бу сегментда мусбат қийматларни ҳам, манфий қийматларни ҳам қабул қилганда ҳам ўринли бўлиб қолади.

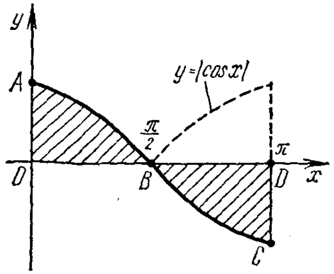
4- мисол. $y = \cos x$ косинусоида, координаталар ўқлари ва $x = \pi$ тўғри чизиқ билан чегараланган $OABCD$ фигуранинг юзини ҳисобланг.

Ечилиши. (32) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$S = \int_0^\pi |\cos x|\,dx.$$

Бу $\cos x$ функция $]0, \pi/2[$ интервалда мусбат бўлгани ва $]\pi/2, \pi[$ интервалда манфий бўлгани учун

$$|\cos x| = \begin{cases} \text{агар } 0 < x < \pi/2 \text{ бўлса}, & \cos x, \\ \text{агар } \pi/2 < x < \pi \text{ бўлса}, & -\cos x. \end{cases}$$



186- расм.

Шунинг учун

$$S=\int_0^\pi|\cos x|dx=\int_0^{\pi/2}|\cos x|dx+\int_{\pi/2}^{\pi}|\cos x|\,dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(-\cos x)dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}.$$

Энди юқоридан $y=f(x)$ эгри чизиқ, қуйидан $y=\varphi(x)$ эгри чизиқ $[f(x)\geqslant\varphi(x)]$ билан ва $x=a$ ҳамда $x=b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисоблаймиз (180- расмга қаранг). Изланган юз $aCDb$ ва $aABb$ эгри чизиқли трапециялар юзларининг айирмасига тенг:

$$ACDB_{юз}=aCDb_{юз}-aABb_{юз}=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b\varphi(x)\,dx=$$

$$=\int_a^b[f(x)-\varphi(x)]\,dx. \qquad (33)$$

(33) формула $y=f(x)$ ва $y=\varphi(x)$ функцияларнинг графиклари $f(x)\geqslant\varphi(x)$ шартда қандай жойлашишидан қатъи назар ўринли бўлади.

5- мисол. $y=-x^2$ ва $y=e^x$ эгри чизиқлар, ординаталар ўқи ва $x=1$ тўғри чизиқ билан чегараланган S юзни ҳисобланг (187- расм).

Ечилиши. Берилган мисолда $f(x)=e^x$, $\varphi(x)=-x^2$. $f(x)>\varphi(x)$, $a=0$, $b=0$. Демак, (33) формулага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$S=\int_a^b[f(x)-\varphi(x)]\,dx=\int_0^1[e^x-(-x^2)]\,dx=\int_0^1(e^x+x^2)\,dx=$$

$$=\left[e^x+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=e+\frac{1}{3}-1=e-\frac{2}{3}.$$

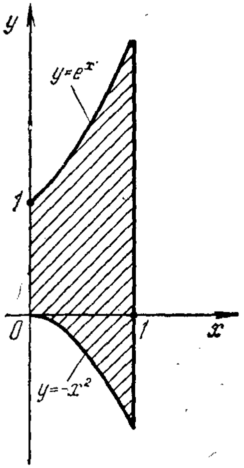
Пировардида параметрик равишда берилган эгри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисоблашга доир мисолни қараб чиқамиз.

6- мисол. Абсциссалар ўқи ва циклоиданинг битта арки билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ (142- расмга қаранг)

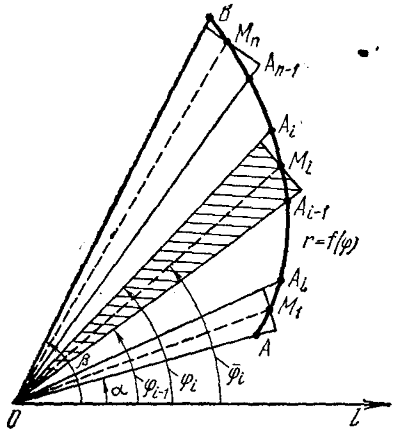
Ечилиши. Изланган S юз $\int_0^{2\pi a}y\,dx$ га тенг. $x=a(t-\sin t)$ деб, бу интегралда ўзгарувчини алмаштирамиз. У ҳолда $dx=a(1-\cos t)dt$ бўлади. Циклоида тенгламасидан $y=a(1-\cos t)$. Бундан ташқари, $x=0$ да $t=0$ ва $x=2\pi a$ да $t=2\pi$ бўлишини ҳисобга олган ҳолда қуйидагиларни топамиз:

$$S=\int_0^{2\pi a}y\,dx=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt=a^2\left|t-2\sin t+\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$



187- расм.



188- расм.

2. Юзни қутб координаталарида ҳисоблаш. OA ва OB радиус-векторлар ва тенгламаси $r=f(\varphi)$ қутб координаталарида берилган эгри чизиқ билан чегараланган OAB эгри чизиқли сектор берилган бўлсин. Бунда $r=f(\varphi)$ функция $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ шартни қаноатлантирадиган барча φ лар учун узлуксиз функция деб фараз қиламиз.

Айтайлик, OA радиус-вектор қутб ўқи билан α бурчакни, OB радиус-вектор эса β бурчакни ташкил қилсин. AOB бурчакни O қутбдан чиқадиган ва қутб ўқи билан кетма-кет $\alpha<\varphi_1<\varphi_2<$ $<\ldots<\varphi_{i-1}<\varphi_i<\ldots<\varphi_{n-1}<\beta$ бурчак ташкил қиладиган нурлар ёрдамида қисмларга ажратамиз. Бундан ташқари, $\alpha=\varphi_0$ ва $\beta=\varphi_n$ деб белгилаймиз. Нурларнинг эгри чизиқ билан кесишадиган нуқталарини $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_i, \ldots, A_{n-1}$ белгилаймиз.

AOB эгри чизиқли сектор n та кичик эгри чизиқли AOA_1, $A_1OA_2, \ldots, A_{i-1}OA_i, \ldots, A_{n-1}OB$ секторларга ажралади (188-расм). AOA_1, $A_1OA_2, \ldots, A_{i-1}OA_i, \ldots, A_{n-1}OB$ бурчаклар мос равишда $\Delta\varphi_1=\varphi_1-\varphi_0$, $\Delta\varphi_2=\varphi_2-\varphi_1, \ldots, \Delta\varphi_i=\varphi_i-\varphi_{i-1}, \ldots,$ $\Delta\varphi_n=\varphi_n-\varphi_{n-1}$ га тенг. Агар бутун эгри чизиқли секторнинг юзини S билан, OA_{i-1} ва OA_i нурлар билан чегараланган кичик эгри чизиқли секторларнинг юзини ΔS_i билан белгиласак, у ҳолда $S=\Delta S_1+\Delta S_2+\ldots+\Delta S_i+\ldots+\Delta S_n$ ёки $S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i$. Кичик эгри чизиқли секторнинг юзини ҳисоблаш каттасининг юзини ҳисоблаш каби қийин. Шунинг учун қуйидагича иш тутамиз: ҳар бир кичик $A_{i-1}OA_i$ сектор ичида $\bar{\varphi}_i(\varphi_{i-1}\leqslant\bar{\varphi}_i\leqslant\varphi_i)$ бурчак остида нур ўтказамиз. Бу нурнинг эгри чизиқ билан кесишиш нуқтасини M_i орқали белгилаймиз. У ҳолда $OM_i = r_i = f(\overline{\varphi}_i)$ Энди ҳар бир кичик эгри чизиқли $A_{i-1}OA_i$ секторни O учидан $r_i = f(\overline{\varphi}_i)$ радиус билан ташқи чизилган доиравий сектор билан алмаштирамиз (188-расмга қаранг). Бундай доиравий секторнинг ҳар бирининг юзи $\frac{OM_i^2}{2}\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}f^2(\overline{\varphi}_i)\Delta\varphi_i$ га тенг ва тақрибан кичик эгри чизиқли секторнинг юзини беради. Шундай қилиб, қуйидаги тақрибий тенгликка эгамиз:

$$\Delta S_i \approx \frac{1}{2}f^2(\overline{\varphi}_i)\Delta\varphi_i.$$

Ҳар бир эгри чизиқли сектор юзини тегишли доиравий сектор юзи билан алмаштириб, қатор доиравий секторлардан иборат фигурани ҳосил қиламиз. Бу фигуранинг юзи эгри чизиқли сектор S юзининг тақрибий қийматини беради. Шунинг учун

$$S \approx \frac{1}{2}f^2(\overline{\varphi}_1)\Delta\varphi_1 + \frac{1}{2}f^2(\overline{\varphi}_2)\Delta\varphi_2 + \ldots + \frac{1}{2}f^2(\overline{\varphi}_i)\Delta\varphi_i + \\ + \ldots + \frac{1}{2}f^2(\overline{\varphi}_n)\Delta\varphi_n$$

ёки қисқача ёзсак:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}f^2(\overline{\varphi}_i)\Delta\varphi_i.$$

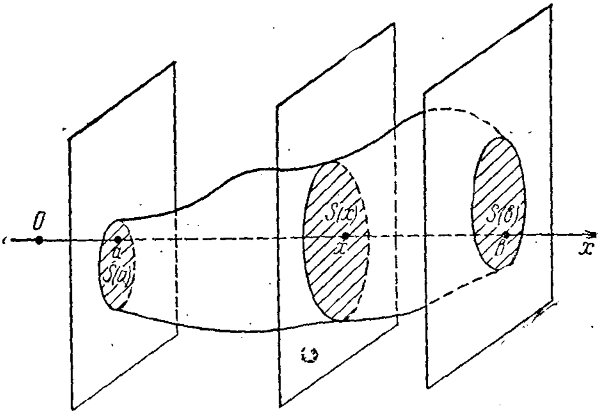
Бу тақрибий тенгликнинг аниқлиги $\Delta\varphi_i$ нинг камайиши билан ортиб боради. Шунинг учун эгри чизиқли сектор S юзининг аниқ қиймати барча $\Delta\varphi_i$ лар нолга интилган шартда доиравий секторлардан ташкил топган фигура юзининг лимити сифатида ҳосил қилинади. Шундай қилиб,

$$S = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}f^2(\overline{\varphi}_i)\Delta\varphi_i.$$

$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}f^2(\overline{\varphi}_i)\Delta\varphi_i$ йиғинди α ва β орасида жойлашган φ нинг қийматлари учун берилган узлуксиз $\frac{1}{2}f^2(\varphi)$ функциянинг интеграл йиғиндиси бўлгани учун унинг лимити $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}f^2(\varphi)d\varphi$ аниқ интегралдир.

Демак,

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}f^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2d\varphi. \tag{34}$$



189- расм.

Мисол. $r = a(1 + \cos\varphi)$ кардиоида билан чегараланган фигура юзини ҳисобланг (30- расмга қаранг).

Ечилиши. (34) формулани $\alpha = 0$ ва $\beta = 2\pi$ да қўллаииб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

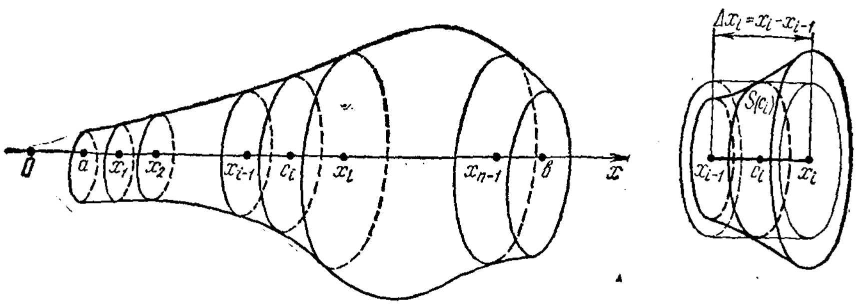
$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1 + \cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left[\varphi + 2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

3. Жисмнинг ҳажмини маълум кўндаланг кесимлари бўйича ҳисоблаш. V ҳажми аниқланиши лозим бўлган бирор жисмни қараймиз (189- расм). Фараз қилайлик, бу жисмнинг Ox ўққа перпендикуляр бўлган текисликлар билан кесилган кесимларининг юзлари маълум бўлсин. Бу кесимлар *кўндаланг кесимлар* дейилади. Кўндаланг кесимнинг ҳолати унинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтасининг x абсциссаси билан аниқланади.

x нинг ўзгариши билан кесим юзи, умуман айтганда, ўзгаради. Демак, кўндаланг кесим x нинг бирор функцияси экан, уни биз $S(x)$ билан белгилаймиз ва маълум деб ҳисоблаймиз. Сўнгра жисмнинг четки кесимларининг абсциссаларини a ва b билан белгилаймиз*. Жисмнинг V ҳажмини ҳисоблаш учун қуйидагича иш тутамиз: $[a, b]$ сегментни $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ нуқталар билан n та бўлакка ажратамиз ва бўлиниш нуқталари орқали Ox ўқига перпендикуляр текисликлар ўтказамиз. Бу текисликлар жисмни n та қатламга ажратади (190- расм). x_{i-1} ва x_i нуқталардан ўтказилган текисликлар орасида жойлашган қат-

* Бу иккала кесим (ёки улардан биттаси) хусусий ҳолларда нуқтага айланиши мумкин.



190- расм.

лам ҳажмини ΔV_i орқали белгилаймиз. У ҳолда $V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots + \Delta V_n$ ёки $V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$.

x_{i-1} ва x_i абсциссали кесимлар ҳосил қилган битта қатламни қарайлик. Унинг ΔV_i ҳажми баландлиги $[x_{i-1}, x_i]$ кесма узунлиги, яъни $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ га тенг, асоси бирорта c_i абсциссага мос кўндаланг кесим билан устма-уст тушадиган тўғри цилиндрнинг ҳажмига тақрибан тенг. Демак, қатламнинг юзи $S(c_i)$ бўлади.

Бундай цилиндрнинг ҳажми доиравий цилиндрнинг ҳажми каби асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг: $S(c_i)\Delta x_i$. Шундай қилиб, $\Delta V_i \approx S(c_i)\Delta x_i$. Шунинг учун берилган жисмнинг ҳажми учун қуйидаги тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i.$$

$[a, b]$ сегментни бўлиш қадами λ кичрайиб бориши билан бу тақрибий тенгликнинг аниқлиги ортиб боради. Шунинг учун ҳажмнинг аниқ қийматини бўлиш қадамини нолга интилтириб ҳосил қиламиз:

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i.$$

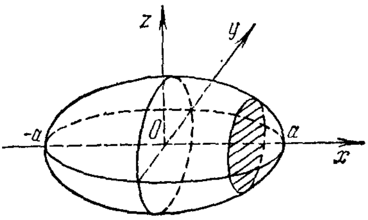
$\sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i$ йиғинди $S(x)$ функциянинг интеграл йиғиндисидир. Шунинг учун

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Демак,

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \qquad (35)$$

Бу формулада $S(x)$ — кўндаланг кесим юзи, a ва b — жисм кесими четки нуқталарининг абсциссаларидир.



191- расм.

Мисол. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоид билан чегараланган жисм ҳажмини ҳисобланг.

Ечилиши. Эллипсоидни $x=h$ текислик билан кесиб, ярим ўқлари $b\sqrt{1-h^2/a^2}$ ва $c\sqrt{1-h^2/a^2}$ бўлган қуйидаги эллипсни ҳосил қиламиз (191-расм):

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{y^2}{b^2(1-h^2/a^2)}+\dfrac{z^2}{c^2(1-h^2/a^2)}=1\\ x=h\end{array}\right\}$$

Демак, (2-пунктдаги 1-мисолга қаранг) кесим юзи $S(h)=\pi bc(1-h^2/a^2)$. Шунинг учун (35) формулада x ни h га алмаштириб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$V=\int_{-a}^{a}S(h)\,dh=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)dh=\pi bc\left[h-\frac{h^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Хусусан, $a=b=c=R$ да R радиусли шарни ҳосил қиламиз, унинг ҳажми $\frac{4}{3}\pi R^3$ га тенг.

4. Айланиш жисмининг ҳажми. Асоси $[a, b]$ бўлган, $y=f(x)$ эгри чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапецияни қараймиз. Трапецияни Ox ўқи атрофида айлантириш натижасида ҳосил қилинган айланиш жисмининг ҳажмини аниқлаймиз. Кўндаланг кесимлар бу ерда радиуси айланаётган эгри чизиқ y ординатасининг модулига тенг бўлган доиралардир. Демак, кесим юзи $S(x)=\pi y^2=\pi[f(x)]^2$ экан. (35) формулага кўра айланиш жисмининг ҳажмини топамиз:

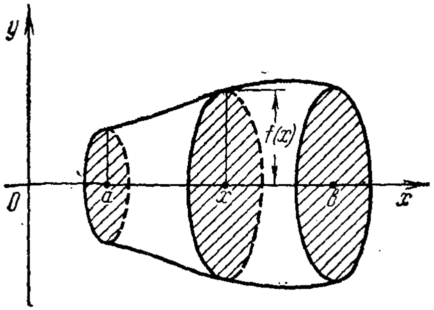
$$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx=\pi\int_a^b y^2dx. \qquad (36)$$

Мисол. $y^2=x$ параболани Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт ва $x=h$ текислик билан чегараланган жисмнинг ҳажмини аниқланг (193-расм).

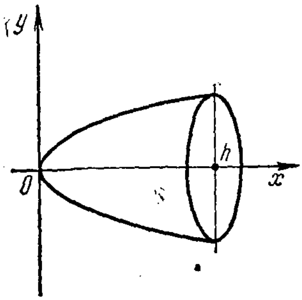
Ечилиши. (36) формулани қўллаб, қуйидагини топамиз:

$$V=\pi\int_0^h y^2dx=\pi\int_0^h x\,dx=\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^h=\frac{\pi h^2}{2}.$$

5. Эгри чизиқ ёйининг узунлиги. Элементар геометрияда тўғри чизиқли кесмалар, шунингдек, айлана ва унинг бўлакларининг узунликлари ўлчанган эди. Айлана узунлиги учун унга ички чизилган мунтазам кўпбурчаклар томонлари периметрининг



192- расм.



193- расм.

томонлар сони чексиз орттириб борилгандаги лимити қабул қилинган эди. Бу таърифни исталган эгри чизиқ бўлган ҳол учун умумлаштирамиз.

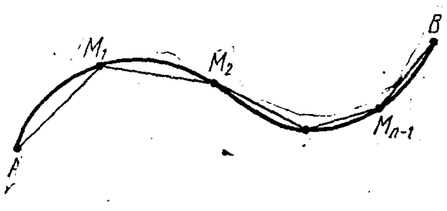
Фазода $\overset{\frown}{AB}$ ёй берилган бўлсин (194-расм). Уни M_1, M_2, ..., M_{n-1} нуқталар ёрдамида n та бўлакка ажратамиз. Қўшни бўлиниш нуқталарини кесмалар билан туташтириб, $\overset{\frown}{AB}$ ёйга ички чизилган синиқ чизиқни ҳосил қиламиз. Бу синиқ чизиқ M_0M_1, M_1M_2, ..., $M_{i-1}M_i$, ..., $M_{n-1}M_n$ бўғинлардан ташкил топган, бу ерда M_0 нуқта A нуқта билан, M_n нуқта эса B нуқта билан устма-уст тушади.

Бу бўғинларнинг узунликлари учун қуйидаги белгилашларни киритамиз: $M_0M_1 = \Delta L_1$, $M_1M_2 = \Delta L_2$, ..., $M_{i-1}M_i = \Delta L_i$, ..., $M_{n-1}M_n = \Delta L_n$. У ҳолда бу синиқ чизиқнинг L_n периметри

$$L_n = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \ldots + \Delta L_i + \ldots + \Delta L_n$$

ёки қисқача ёзсак: $L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i$. Равшанки, бўғинларнинг ΔL_i узунликлари камайиб бориши билан синиқ чизиқнинг шакли $\overset{\frown}{AB}$ ёйга яқинлашиб боради. Шунинг учун қуйидаги таърифнинг киритилиши табиий.

Ёйга ички чизилган синиқ чизиқнинг периметри интилган лимит $\overset{\frown}{AB}$ ёйнинг l *узунлиги* дейилади. Бунда синиқ чизиқ бўғинларининг сони чексиз ўсиб боради, бўғинларнинг энг каттасининг узунлиги нолга интилади:

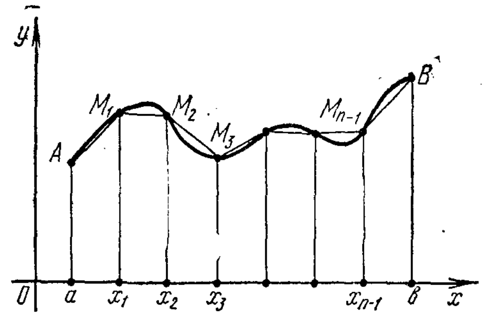


194- расм.

$$l = \lim_{\max \Delta L_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i. \qquad (37)$$

Бунда (37) лимит мавжуд ва ички чизилган синиқ чизиқларнинг танланишига боғлиқ бўлмайди, деб фараз қилинади.

(37) лимит мавжуд бўлган эгри чизиқлар *тўғриланувчи эгри чизиқлар* деб аталади. Эгри чизиқларга қўйилган баъзи чегараланишлар бажарилганда бу лимит ҳар доим мавжуд бўлишини биз қуйида кўрсатамиз.



195- расм.

Аввал ошкор кўринишдаги тенглама билан берилган текис эгри чизиқ ёйининг узунлиги ҳақидаги масалани қараймиз.

Теорема. *$\breve{AB}$ эгри чизиқ $y = f(x)$ тенглама билан берилган бўлсин, бу ерда $f(x)$ — сегмент $[a, b]$ да узлуксиз биринчи тартибли ҳосилага эга бўлган узлуксиз функция. У ҳолда $\breve{AB}$ ёй $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ га тенг узунликка эга.*

Исботи. $\breve{AB}$ ёйни $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ нуқталар билан n та бўлакка ажратамиз (195- расм). Бу нуқталар мос равишда $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ абсциссаларга эга бўлсин, шу билан бирга $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. $\breve{AB}$ ёйга $M_0\ M_1, M_2, \ldots M_{i-1} \ldots M_{n-1}, M_n$ синиқ чизиқни ички чизамиз. У ҳолда бу синиқ чизиқнинг периметри $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta L_i$ га тенг бўлади, ΔL_i бу ерда — $M_{i-1}\ M_i$ бўғиннинг узунлиги. Текисликдаги иккита $M_{i-1}(x_{i-1};\ y_{i-1})$ ва $M_i(x_i;\ y_i)$ нуқта орасидаги масофа формуласига кўра

$$\Delta L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2},$$

бу ерда $y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Лекин $[x_{i-1}, x_i]$ сегментга қўлланилган чекли орттирма формуласига кўра (VI боб, 6- §, 3-пунктга қаранг) қуйидагига эгамиз:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}), \text{ бунда } x_{i-1} < c_i < x_i.$$

Демак,

$$\Delta L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)(x_i - x_{i-1})]^2} = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

ёки

$$\Delta L_i = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i, \tag{38}$$

бу ерда $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Шунинг учун синиқ чизиқ периметри:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i. \tag{39}$$

Шундай қилиб, синиқ чизиқ периметри $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ функция учун тузилган интеграл йиғиндига тенг бўлиб чиқди. Бу функция $f'(x)$ нинг узлуксизлиги натижасида $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлади. Демак, бўлиш қадами λ нолга интилади деган шартда аниқ интегралнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремага кўра (39) интеграл йиғинди $\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}$ га тенг лимитга эга бўлади.

Эгри чизиқнинг l узунлиги унга ички чизилган синиқ чизиқ периметри $\sum_{i=1}^{n} \Delta L_i$ нинг унинг бўғинлари узунликларидан энг каттаси ΔL_i нолга интилгандаги лимитига тенг. $\Delta L_i \to 0$ да $\Delta x_i \to 0$* бўлишини эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$l = \lim_{\max \Delta L_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Шундай қилиб,

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{40}$$

1-мисол. $0 \leqslant x \leqslant 1$ учун $y = \operatorname{ch} x$ занжир чизиқ ёйининг узунлигини ҳисобланг (131-расмга қаранг)

Ечилиши. $y' = (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ ни топамиз. Демак, $1+y'^2 = 1+\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x$. (40) формулага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$l = \int_0^1 \sqrt{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \int_0^1 \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x \Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 - \operatorname{sh} 0 = \operatorname{sh} 1 \approx 1{,}17.$$

Энди эгри чизиқ $x = x(t)$ ва $y = y(t)$ параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин ($\alpha \leqslant t \leqslant \beta$). Бунда $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар ҳамда уларнинг ҳосилалари узлуксиз ва $x'(t) > 0$ бўлсин. $x = x(t)$ деб, (40) интегралда ўзгарувчини алмаштирамиз. Бунда $y = y(t)$ бўлгани учун параметрик кўринишда берилган функцияни дифференциаллаш қоидасига кўра $y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ ни топамиз, шу билан бирга $dx = x'(t)\,dt$ ни эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sqrt{1+y_x'^2}\,dx = \sqrt{1+\left|\frac{y'(t)}{x'(t)}\right|^2}\,x'(t)\,dt = \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt.$$

---

* $\Delta L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$ бўлганидан, $|\Delta x_i| < \Delta L_i$.

Демак,

$$l=\int_a^b \sqrt{1+y_x'^2}\,dx=\int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt, \qquad (41)$$

бу ерда $a=x(\alpha)$ ва $b=x(\beta)$.

Изоҳ. $x'(t)$ ҳосила $[\alpha, \beta]$ сегментда манфий бўлганда ёки ўз ишорасини сақламаганда ҳам (41) формула ўринли.

2-мисол. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ циклоиданинг битта арки узунлигини аниқланг ($0\leqslant t\leqslant 2\pi$) (142-расмга қаранг).

Ечилиши. $x'(t)=a(1-\cos t)$, $y'(t)=a\sin t$ бўлгани учун

$$\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}=a\sqrt{2(1-\cos t)}=2a\sin\frac{t}{2}.$$

(41) формулага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$l=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4a\cos\pi+4a\cos 0=4a+4a=8a.$$

Энди тенгламалари $r=r(\varphi)$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$ қутб координаталарида берилган эгри чизиқ узунлиги учун ифодани топамиз, бунда $r(\varphi)$ ва $r'(\varphi)$ лар $[\alpha, \beta]$ сегментда узлуксиз деб фараз қилинади. Параметр сифатида φ бурчакни қабул қилиб, бу эгри чизиқни параметрик кўринишда ифодалаш мумкин Ҳақиқатан, декарт ва қутб координаталари орасига $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ боғланиш мавжуд бўлгани учун $r=r(\varphi)$ ни эътиборга олиб, $x=r(\varphi)\cos\varphi$, $y=r(\varphi)\sin\varphi$ ни ҳосил қиламиз. $x'=r'\cos\varphi-r\sin\varphi$, $y'=r'\sin\varphi+r\cos\varphi$ бўлгани учун (41) формуладан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2+y'^2}\,d\varphi=\int_\alpha^\beta\sqrt{(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)^2+(r'\sin\varphi+r\cos\varphi)^2}\,d\varphi.$$

Маълум соддалаштиришлардан сўнг қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi. \qquad (42)$$

3-мисол. $r=a(1+\cos\varphi)$ кардиоида узунлигини топинг (30-расмга қаранг)

Ечилиши. Кардиоида қутб ўқига нисбатан симметрик. φ қутб бурчагини 0 дан π гача ўзгартириб, (42) формула бўйича кардиоиданинг ярим узунлигини ҳосил қиламиз:

$$\frac{l}{2}=\int_0^\pi\sqrt{[a(1+\cos\varphi)]^2+\{[a(1+\cos\varphi)]'\}^2}\,d\varphi=$$

$$=\int_0^\pi\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=a\int_0^\pi\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi=2a\int_0^\pi\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi=4a\sin\frac{\pi}{2}=4a.$$

Кардиоиданинг бутун узунлиги $l=2\cdot 4a=8a$.

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ тенгламалар билан берилган фазовий эгри чизиқ ёйининг узунлиги учун (41) формулага ўхшаш қуйидаги формула ўринли эканини кўрсатиш мумкин:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt. \qquad (43)$$

4- мисол. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ винт чизиқнинг битта ўрами узунлигини аниқланг. $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (143- расмга қаранг).

Ечилиши. (43) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

6. Ёйнинг дифференциали. Ёй узунлигининг (40) формуласида қуйи чегара a ўзгармасдан, юқори чегара ўзгарсин. Буни таъкидлаш учун юқори чегарани x билан, интеграллаш ўзгарувчисини юқори чегара билан чалкаштирмаслик учун t билан белгилаймиз. Агар бунда ёйнинг l узунлиги юқори чегаранинг функцияси эканлигини эътиборга олсак, (40) формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt.$$

Интегралнинг юқори чегараси бўйича ҳосиласи ҳақидаги теоремага кўра бу функция дифференциалланувчи ва унинг ҳосиласи:

$$l'(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}. \qquad (44)$$

Бундан ёйнинг дифференциали:

$$dl(x) = l'(x)\, dx = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

ёки қисқача ёзсак

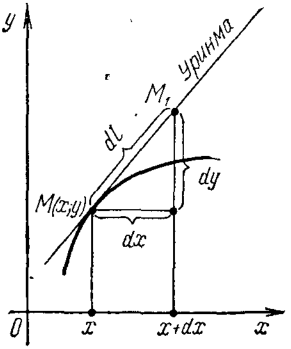
$$dl = \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

$y' = \frac{dy}{dx}$ бўлгани учун $dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ ёки

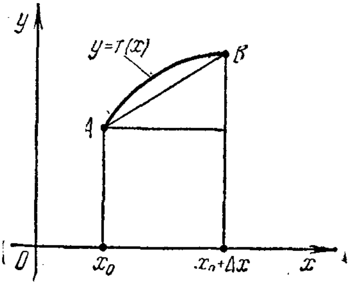
$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} \qquad (45)$$

(45) формуладан фойдаланиб ва функциянинг дифференциали уринма ординатасининг орттирмасига тенглигини ҳисобга олиб (VI боб, 3- §, 1- пунктга қаранг), ёй дифференциалининг қуйидаги геометрик маъносига келамиз (196- расм): *ёйнинг dl дифференциали уринманинг абсциссаси x бўлган M уриниш нуқтаси билан абсциссаси $x+dx$ бўлган M_1 нуқта орасидаги кесма узунлигига тенг.*

VI бобда (5- §, 4- пункт) ёй узунлигининг уни тортиб турувчи ватар узунлигига нисбатининг лимити ҳақидаги теорема ис-



196- расм.



197- расм.

ботсиз келтирилган ва ундан фойдаланилган эди. Энди бу теоремани исбот қиламиз. Исботни соддалаштириш мақсадида $y = f(x)$ тенглама билан берилган текис эгри чизиқ ҳоли билан чегараланамиз.

Теорема. *Ёй $y=f(x)$ тенглама билан берилган бўлсин, бунда $f(x)$ ва $f'(x)$ — узлуксиз функциялар. У ҳолда бу ёйнинг уни тортиб турган ватар узунлигига нисбатининг ватар узунлиги нолга интилгандаги лимити бирга тенг бўлади.*

Исботи. Ёйнинг абсциссалари x_0 ва $x_0+\Delta x$ бўлган нуқталар орасидаги қисмини қараймиз (197- расм). Ёй узунлиги:

$$l = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx.$$

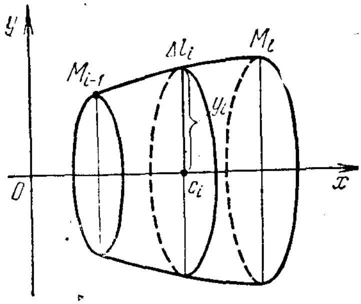
Ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўлланиб [(17) формулага қаранг], қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$l = \sqrt{1+[f'(c_1)]^2}\,\Delta x, \text{ бу ерда } x_0 < c_1 < x_0+\Delta x.$$

Иккинчи томондан, тортиб турган ватарнинг узунлиги $AB = \sqrt{1+[f'(c_2)]^2}\,\Delta x$, бу ерда $x_0 < c_2 < x_0+\Delta x$ [(38) формулага қаранг]. $\Delta x \to 0$ да c_1 ва c_2 лар x_0 га интилишини эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{AB\to 0} \frac{l}{AB} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{1+[f'(c_1)]^2}\,\Delta x}{\sqrt{1+[f'(c_2)]^2}\,\Delta x} = \frac{\sqrt{1+[f'(x_0)]^2}}{\sqrt{1+[f'(x_0)]^2}} = 1.$$

7. Айланиш сиртининг юзи. $y=f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ эгри чизиқнинг $\overset{\frown}{AB}$ ёйнинг Ox ўққа нисбатан айлантириш натижасида ҳосил бўлган сиртнинг юзини аниқлаймиз. Фараз қилайлик, $[a, b]$ сегментда $y=f(x)$ функция ва унинг $f'(t)$ ҳосиласи узлуксиз ва бундан ташқари, $f(x) \geqslant 0$ бўлсин. $\overset{\frown}{AB}$ ёйда x абсциссали M нуқ-



198- расм.

тани қараймиз. $\overset{\frown}{AM}$ ёйнинг узунлиги қуйидаги формула бўйича аниқланади:

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\,dt. \qquad (46)$$

Интеграл остидаги функция мусбат, шунинг учун $l(x)$ функция ўсувчи (2- §, 3- пунктдаги 2- изоҳга қаранг). Бундан ташқари, 6- пунктда $l(x)$ функция $[a, b]$ сегментда дифференциалланувчи (демак, узлуксиз ҳам) эканлиги эслатилган эди. Бинобарин, тескари узлуксиз функция $x = x(l)$ мавжуд (V боб, 2- §, 4- пунктга қаранг). Лекин у ҳолда $y = f(x) = f[x(l)] = y(l)$ ҳам l функциянинг узлуксиз функцияси бўлади. Шундай қилиб, $y = f(x)$ эгри чизиқ $[a, b]$ сегментда параметрик равишда $\left.\begin{matrix} x = x(l) \\ y = y(l) \end{matrix}\right\}$ каби берилиши мумкин, бунда ёйнинг l узунлиги параметрдир, L — $\overset{\frown}{AB}$ ёйнинг бутун узунлиги ($0 \leqslant l \leqslant L$).

$\overset{\frown}{AB}$ ёйни M_1, M_2, ..., M_{l-1}, M_l, ..., M_{n-1} нуқталар билан n та: $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{M_1M_2}$..., $\overset{\frown}{M_{l-1}M_l}$, ..., $\overset{\frown}{M_{n-1}B}$ ёйга ажратамиз ва бу ёйларнинг узунликларини мос равишда Δl_1, Δl_2, ..., Δl_i, ..., Δl_n лар билан белгилаймиз. Айланиш сирти ҳам бунда юзлари ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_i, ..., ΔS_n га тенг бўлган бўлакларга ажралади. Бўлиш қадами кичик бўлганда бу қисм сиртлар шакли бўйича кесик конуснинг ён сиртидан кам фарқ қилади (198- расм).

Агар $m = \Delta l_i$, $R = y_i = y(c_i)$ десак, ўрта кесим айланаси узунлиги $2\pi R$ нинг ясовчи m га кўпайтмасига тенг бўлган кесик конус ён сиртининг юзи ΔS_i тақрибий қийматни беради (бу ерда c_i — ўрта қийматга мос келадиган l параметрнинг қиймати). Шундай қилиб,

$$\Delta S_i \approx 2\pi y(c_i)\Delta l_i. \qquad (47)$$

Айланиш сиртининг бутун сирти юзи қисм сиртлар юзларининг йиғиндиси $\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$ га тенг. Демак,

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi y(c_i)\Delta l_i. \qquad (48)$$

S нинг аниқ қиймати учун таърифга кўра (48) интеграл йиғинди лимитини қабул қиламиз:

$$S = \lim_{\max\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi y(c_i)\Delta l_i$$

ёки

$$S = 2\pi \int_0^L y(l)\,dl. \tag{49}$$

(49) интегралда интеграл ўзгарувчиси l ни x ўзгарувчига алмаштирамиз. Бу ўзгарувчилар (46) формула билан боғланган. Интеграллашнинг янги чегараларини топамиз: $l = 0$ да $x = a$, $l = L$ да $x = b$ га эгамиз. Сўнгра $dl = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$ ва $y = y(l) = f(x)$ бўлгани учун (49) формуладан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{50}$$

Мисол. $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ синусоида ёйининг айланиш сирти юзини топинг.

Ечилиши. (50) формула бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$S = 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + [(\sin x)']^2}\,dx = 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx.$$

$\cos x = t$ деб ўзгарувчини алмаштирамиз. У ҳолда $dt = -\sin x\,dx$, $t|_{x=0} = \cos 0 = 1$, $t|_{x=\pi} = \cos \pi = -1$ ва демак,

$$S = -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + t^2}\,dt = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{2\pi}{2}\left[t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \pi\left[2\sqrt{2} + \ln(3 + 2\sqrt{2})\right] \approx 14{,}38 \text{ кв. бирл.}$$

(VII боб, 5-§, 3-пунктга қаранг).

8. Масалаларни интеграл йиғиндилар методи билан ечиш ҳақидаги умумий изоҳлар. Эгри чизиқли трапециянинг юзини топиш, жисм ҳажмини кўндаланг кесимлар бўйича топиш, ўзгарувчи куч бажарган ишни топиш билан боғлиқ бўлган масалаларни ҳал қилишда айни бир усул қўлланилди. Бизни қизиқтирган катталикни топиш интеграл йиғиндининг лимитини топишга келтирилди. Бунда ҳамма масалаларда изланаётган катталик тўлиқ аниқ бўлган бирор $[a, b]$ сегмент ва бу сегментда берилган бирор функция билан боғлиқ бўлган. Масалан, юз ҳақидаги масалада $[a, b]$ эгри чизиқли трапециянинг асоси ва $y = f(x)$ эгри чизиқнинг ординатасидир.

Бундан ташқари, биз Q орқали белгилайдиган изланаётган катталик қуйидаги хоссаларга эга:

1° Аддитивлик хоссаси. $[a, b]$ сегментни $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, b]$ бўлакларга ажратамиз. Бу бўлакларнинг ҳар бирига Q нинг ΔQ_1, ΔQ_2, ..., ΔQ_n қийматлари мос келади.

Агар $[a, b]$ сегментни бўлакларга исталганча бўлганда қуйидаги

$$Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \ldots + \Delta Q_n \tag{51}$$

тенглик ўринли бўлса, Q катталик аддитив дейилади.

Масалан, кучнинг ҳамма $[a, b]$ йўлда бажарган иши айрим $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, b]$ бўлакларда бажарилган ишлар йиғиндисига тенг эди (1-§, 2-пунктга қаранг).

2^0. Кичикликдаги чизиқлилик хоссаси. Айтайлик, $[x, x+\Delta x]$ сегмент $[a, b]$ сегментга тегишли бўлган исталган кичик сегмент бўлсин. $[x, x+\Delta x]$ сегментга мос ΔQ катталик унинг узунлиги Δx га тахминан пропорционал, деб фараз қилайлик:

$$\Delta Q \approx k\Delta x. \tag{52}$$

$\frac{\Delta Q}{\Delta x}$ нисбат k сондан $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x}$ лимит мавжуд бўлиши билан фарқ қилади.

Ҳар бир x нуқтага ўзининг k қиймати мос келади, яъни k сон x нинг узлуксиз функциясидир: $k = f(x)$. Шунинг учун (52) формулани қуйидаги кўринишда ёзиш ҳам мумкин:

$$\Delta Q \approx f(x)\,\Delta x. \tag{53}$$

Агар изланаётган Q катталик 1^0 ва 2^0 хоссаларга эга бўлса, уни топиш аниқ интегрални топишга келтирилишини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан, $[a, b]$ сегментни Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n узунликдаги кичик бўлакларга ажратсак, Q катталикнинг аддитивлик хоссасига кўра қуйидагига эгамиз:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i.$$

Узунлиги Δx_i бўлган ҳар бир кичик сегментда Q катталик кичикликдаги чизиқлилик хоссасига кўра Δx_i га тахминан пропорционал, яъни (53) формулага кўра:

$$\Delta Q_i \approx f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Шундай қилиб, Q учун қуйидаги тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i. \tag{54}$$

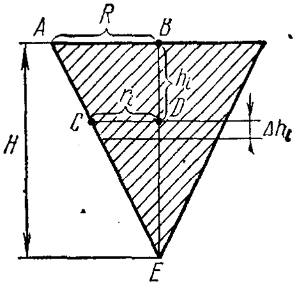
(54) тенгликнинг ўнг томонида турган ифода $f(x)$ функция учун интеграл йиғиндидир. Бўлиш қадами λ нолга интиладиган лимитда Q нинг аниқ қийматини ҳосил қиламиз:

$$Q = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Q катталикнинг x дан $x+dx$ гача бўлган сегментдаги тақрибий қийматини берадиган интеграл остидаги $f(x)\,dx$ ифода Q *катталикнинг элементи* дейилади ва dQ билан белгиланади.

Агар элемент учун ифода топилган бўлса, интеграл йиғиндини тузиш ва лимитга ўтишнинг ҳожати йўқ. dQ элементдан аниқ интеграл олиш етарли:

$$Q=\int_a^b dQ=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (55)$$



199- расм.

1-мисол. Конус идишдан суюқликни сўриб чиқариш учун қанча иш бажарилишини ҳисобланг. Идиш учи билан ерга қараган бўлиб, асосининг радиуси R, баландлиги H.

Ечилиши. Оғирлиги P бўлган жисмни h баландликка кўтаришда бажарилган иш Ph га тенг. Суюқликнинг айрим қатламлари турли чуқурликда бўлгани ва кўтарилиш баландлиги турли қатламлар учун бир хил бўлмагани бизнинг масалада ишни мураккаблаштиради. Шунинг учун конус асосига параллел бўлган текисликлар ёрдамида конус идишни n та Δh_i қалинликдаги юпқа горизонтал қатламларга ажратамиз (199-расм)*. Суюқликнинг i-қатламини сиртга кўтариб чиқариш учун зарур бўлган ишни ΔE_i орқали белгилаймиз. У ҳолда суюқликни идишдан чиқариш учун зарур бўлган E иш элементар ишлар йиғиндисига тенг: $E=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta E_i$, яъни иш аддитивлик хоссасига эга экан. Δh_i ни етарлича кичик қилиб олинса, i-қатламдаги барча суюқлик бир хил h_i чуқурликда жойлашганлигини тақрибан ҳисоблаш мумкин. ΔE_i иш суюқликнинг i-қатлами оғирлиги ΔP_i нинг h_i кўтариш баландлигига кўпайтмасига тақрибан тенг:

$$\Delta E_i\approx\Delta P_i h_i. \qquad (*)$$

ΔP_i оғирликни топиш учун i-қатламнинг Δv_i ҳажмини ҳисоблаймиз. Δh_i кичиклигини ҳисобга олиб, бу қатламнинг баландлиги Δh_i ва асосининг радиуси r_i бўлган цилиндр деб олишимиз мумкин. AEB ва CED учбурчакларнинг ўхшашлигидан (199-расмга қаранг) $r_i=\frac{R}{H}(H-h_i)$ ни топамиз. Шунинг учун $\Delta V_i\approx\pi r_i^2\Delta h_i=\pi\frac{R^2}{H^2}(H-h_i)^2\Delta h_i$. $\Delta P_i=\rho g\Delta V_i$ бўлгани учун

$$\Delta P_i\approx\pi\rho g\frac{R^2}{H^2}(H-h_i)^2\Delta h_i,$$

бу ерда ρ — суюқликнинг зичлиги, g — тортиш кучининг тезланиши. ΔP_i нинг топилган қийматини (*) формулага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta E_i\approx\pi\rho g\frac{R^2}{H^2}(H-h_i)^2 h_i\,\Delta h_i,$$

яъни иш чексиз кичикликда чизиқлилик хоссасига эга. Барча иш:

$$E=\sum_{i=1}^{n}\Delta E_i\approx\sum_{i=1}^{n}\pi\rho\, g\frac{R^2}{H^2}(H-h_i)^2 h_i\Delta h_i. \qquad (**)$$

Δh_i қанча кичик бўлса, бу тенглик шунча аниқ бўлади. Бўлиш қадами λ- энг кат. $\{\Delta h_1, \Delta h_2, \ldots, \Delta h_n\}\to 0$ даги лимитда аниқ тенгликни ҳосил қиламиз:

$$E=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi\rho\, g\frac{R^2}{H^2}(H-h_i)^2 h_i\,\Delta h_i.$$

---

* 199-расмда конус идишнинг конус ўқидан ўтадиган кесими берилган.

(**) йиғинди $\pi\rho g \frac{R^2}{H^2}(H-h)^2 h$ функция учун интеграл йиғиндидир. Шунинг учун бу йиғиндининг лимити $h=0$ дан $h=H$ гача чегара орасидаги интегралга тенг. Шундай қилиб,

$$E=\int_0^H \frac{\pi\rho g R^2}{H^2}(H-h)^2 h dh = \frac{\pi\rho g R^2}{H^2}\int_0^H (H^2h-2Hh^2+h^3)\,dh =$$

$$=\frac{\pi\rho g R^2}{H^2}\left(\frac{H^2h^2}{2}-\frac{2Hh^3}{3}+\frac{h^4}{4}\right)\Bigg|_0^H=\frac{\pi\rho g R^2 H^2}{12}.$$

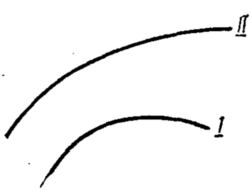
2-мисол. Нуқта v тезлик билан ҳаракатланмоқда, у t вақт бўйича функциядир: $v=v(t)$. Нуқтанинг вақтнинг $t=t_1$ моментидан $t=t_2$ моменти оралиғида босиб ўтган йўлини топинг.

Ечилиши. Вақтнинг t моментини ва унга яқин бўлган $t+dt$ моментни қараймиз. Вақтнинг кичик dt оралиғи мобайнида ҳаракат тезлиги v ўзгармайди ва у вақтнинг t моментидаги тезлигига тенг деб ҳисоблаб, dt вақт мобайнида босиб ўтилган ds йўл элементини топамиз: $ds=v(t)\,dt$. s йўл аддитивлик хоссасига эга бўлсин; шунинг учун йўл элементидан интеграл олиб, изланган $s=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$ катталикни ҳосил қиламиз.

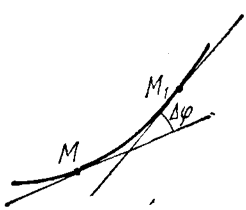
4-§. ЯССИ ЧИЗИҚ ЭГРИЛИГИ

1. Асосий таърифлар. Тўғри чизиқнинг битта нуқтасидан иккинчисига ўтаётганда унга ўтказилган уринма (тўғри чизиқ билан устма-уст тушадиган) ўзининг йўналишини ўзгартирмайди, эгри чизиқнинг битта нуқтасидан иккинчисига ўтаётганда эса уринма бирор бурчакка бурилади, бу эгри чизиқнинг „эгилувчанлигидан" далолат беради. Тўғри чизиқ билан эгри чизиқнинг асосий фарқи ҳам мана шунда. Энди иккита эгри чизиқни бир-бири билан taққослаймиз (200-расм). Интуитив равшанки, I чизиқ II чизиққа нисбатан эгилган. Бироқ у ёки бу чизиқнинг эгрилик даражасини қатъий баҳолаш учун эгриликнинг аниқ математик таърифини бериш керак.

Эгри чизиқ берилган бўлсин. Бу эгри чизиқда узунлиги Δl бўлган $\overset{\frown}{MM_1}$ ёйни қараймиз (201-расм). M ва M_1 нуқталарда эгри чизиққа уринма ўтказамиз. Эгри чизиқ бўйича M нуқтадан M_1 нуқтага ўтаётганда уринма $\Delta\varphi$ бурчакка бурилади, бу бурчак *қўшни бурчак* дейилади. Бу бурчакни мусбат деб ҳисоблаймиз.

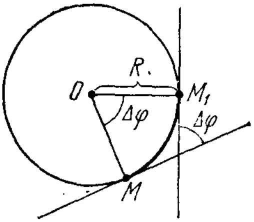


200- расм.



201- расм.

Қўшнилик бурчак $\Delta\varphi$ нинг бу ёйнинг Δl узунлигига нисбати MM_1 ёйнинг *ўртача эгрилиги* дейилади:



202- расм.

Мисол. R радиусли айлана $\overset{\frown}{MM_1}$ ёйининг ўртача эгрилигини топинг.

Ечилиши. Айлананинг M ва M_1 нуқталаридан ўтказилган уринмалар орасидаги бурчак равшанки, OM ва OM_1 радиуслар орасидаги марказий бурчакка тенг. Айлана $\overset{\frown}{MM_1}$ ёйининг узунлиги $\Delta l = R\Delta\varphi$. Демак, ёйнинг ўртача эгрилиги:

$$K_{\text{ўрт}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = \frac{\Delta\varphi}{R\Delta\varphi} = \frac{1}{R}.$$

Шундай қилиб, берилган айлана исталган ёйининг эгрилиги унинг радиусига тескари бўлган ўзгармас катталикдир. Бироқ умумий ҳолда ўртача эгрилик эгри чизиқнинг ҳамма участкаларида бир хил бўлмасдан қолиши ҳам мумкин. Берилган нуқта атрофида чизиқнинг эгрилигини характерлаш учун ёйнинг бу нуқтани ўз ичига оладиган энг катта ва кичик участкаларидаги ўртача эгриликни олиш керак. Шундай қилиб, биз табиийки, берилган нуқтадаги эгрилик тушунчасига келамиз.

Берилган чизиқнинг унинг M нуқтадаги *эгрилиги* деб, M_1 нуқта берилган чизиқ бўйича M нуқтага чексиз яқинлашган шартда MM_1 ёй ўртача эгрилигининг лимитига айтилади.

Чизиқнинг M нуқтадаги эгрилигини K билан белгилаб, таърифга кўра қуйидагини топамиз:

$$K = \lim_{M_1 \to M} K_{\text{ўрт.}} \tag{56}$$

Хусусан, R радиусли айлананинг M нуқтадаги эгрилиги:

$$K = \lim_{M_1 \to M} K_{\text{ўрт.}} = \lim_{M_1 \to M} \frac{1}{R} = \frac{1}{R}.$$

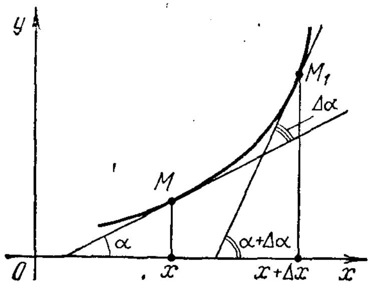
Шундай қилиб, айлананинг исталган нуқтасида эгрилик радиуснинг тескарисига тенг бўлган қийматга эга бўлади:

$$K = 1/R. \tag{57}$$

Тўғри чизиқнинг исталган нуқтасидаги эгрилиги нолга тенг бўлишини исботлашни китобхонга ҳавола қиламиз.

2. Эгриликни ҳисоблаш. Эгри чизиқ $y = f(x)$ тенглама билан берилган бўлиб, $f(x)$ функция $]a, b[$ интервалда икки марта дифференциалланувчи, яъни бу интервалнинг ҳар бир нуқтасида биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларга эга бўлсин. Бу эгри чизиқнинг абсциссаси x бўлган M нуқтасидаги эгриликни ҳисоблаймиз (203-расм).

Берилган эгри чизиқда абсциссаси $x + \Delta x$ бўлган иккинчи M_1 нуқтани қараймиз. M ва M_1 нуқталардан $y = f(x)$ эгри чизиққа уринмалар ўтказамиз ва уларнинг Ox ўқ билан ҳосил қил-



203- расм.

ган бурчакларини мос равишда α ва $\alpha+\Delta\alpha$ билан белгилаймиз. Унда қўшни бурчак* $\Delta\varphi=|\Delta\alpha|$ бўлади. Ёйнинг ўртача эгрилиги:

$$K_{\text{ўрт.}}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}=\frac{|\Delta\alpha|}{\Delta l}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta l}\right|,$$

бу ерда $\Delta l-\overset{\frown}{MM_1}$ ёйнинг узунлиги. Агар M_1 нуқта эгри чизиқ бўйича M нуқтага яқинлашиб борса, $\Delta x\to 0$. Демак, чизиқнинг M нуқтадаги эгрилиги

$$K=\lim_{M_1\to M}K_{\text{ўрт.}}=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta x}{\Delta l}\right|.$$

Сурат ва махражни Δx га бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$K=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}}{\frac{\Delta l}{\Delta x}}\right|=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta x}{\Delta x}\right|}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta l}{\Delta x}\right|}=\frac{\left|\frac{d\alpha}{dx}\right|}{\left|\frac{dl}{dx}\right|}. \qquad (58)$$

Ҳосиланинг геометрик маъносига кўра $y'=\mathrm{tg}\,\alpha$, бундан $\alpha=$ $=\mathrm{arctg}\,y'$ (агар $y'\geqslant 0$ бўлса) ёки $\alpha=\pi+\mathrm{arctg}\,y'$ (агар $y'<0$ бўлса). Иккала ҳолда ҳам

$$\frac{d\alpha}{dx}=(\mathrm{arctg}\,y')'_x=\frac{(y')'_x}{1+y'^2}=\frac{y''}{1+y'^2}.$$

Бундан ташқари, $\frac{dl}{dx}=\sqrt{1+y'^2}$ [(44) формулага қаранг]. Бу ердаги $\frac{d\alpha}{dx}$ ва $\frac{dl}{dx}$ ларнинг қийматларини (58) формулага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$K=\left|\frac{\frac{y''}{1+y'^2}}{\sqrt{1+y'^2}}\right|=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Шундай қилиб, чизиқнинг эгрилигини ҳисоблаш учун қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}. \qquad (59)$$

1-мисол $y=1/x$ гиперболанинг $x=1$ абсциссали нуқтасидаги эгрилигини топинг.

---

*$\Delta\varphi$ қўшни бурчак шартга кўра мусбат деб ҳисобланади, ҳолбуки $\Delta\alpha$ манфий бўлиб қолиши ҳам мумкинлигини эслатиб ўтамиз.

Ечилиши. Кетма-кет $y' = -1/x^2$, $y'' = 2/x^3$ ни топамиз. (59) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{|2/x^3|}{(1+1/x^4)^{3/2}} = \frac{2|x|^3}{(1+x^4)^{3/2}}.$$

Бинобарин, $x = 1$ да $K|_{x=1} = \frac{2\cdot 1^3}{(1+1^4)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707.$

$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\}$ параметрик тенгламалар билан берилган чизиқнинг эгрилигини ҳисоблаш формуласини келтириб чиқарамиз, бунда $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар икки марта дифференциалланувчи деб фараз қиламиз.

У ҳолда (VI бобдаги (69) ва (70) формулаларга қаранг):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^2}}{x'_t} = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3}.$$

y'_x ва y''_x ларнинг ифодаларини (59) формулага қўйиб, соддалаштиришлардан сўнг қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$K = \frac{|y''_t x'_t - y'_t x''_t|}{\left[(x'_t)^2 + (y'_t)^2\right]^{3/2}}. \tag{60}$$

2-мисол. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоиданинг эгрилигини топинг.

Ечилиши. Кетма-кет қуйидагиларни топамиз: $x'_t = a(1 - \cos t)$, $y'_t = a \sin t$, $x''_t = a \sin t$, $y''_t = a \cos t$.

Бу ифодаларни (60) формулага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

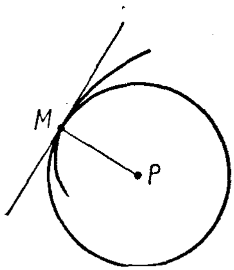
$$K = \frac{|a\cos t \cdot a(1-\cos t) - a\sin t \cdot a \sin t|}{[a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t]^{3/2}} = \frac{|\cos t - 1|}{a[2(1-\cos t)]^{3/2}} = \frac{1}{4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}.$$

3. Эгрилик радиуси. Эгрилик айланаси. Эгрилик маркази. Юқорида биз айлана эгрилиги унинг радиусига тескари бўлган катталик эканлигини аниқлаган эдик: $K = 1/R$. Айлананинг радиуси қанча катта бўлса, унинг эгрилиги шунча кичик бўлади. Аналогияга кўра, чизиқнинг берилган нуқтадаги эгрилик радиуси тушунчаси киритилади.

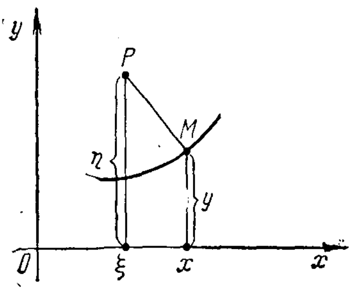
Чизиқнинг берилган нуқтасидаги R *эгрилик радиуси* деб, K эгриликка тескари бўлган катталикка айтилади:

$$R = 1/K. \tag{61}$$

Чизиқнинг эгрилиги, умуман айтганда, бир нуқтадан иккинчи нуқтага ўтаётганда ўзгаргани учун эгрилик радиуси ҳам ўзгарувчи катталикдир.



204- расм.



205- расм.

Агар эгри чизиқ $y=f(x)$ тенглама билан берилган бўлса, унинг эгрилик радиуси, эгриликка тескари катталик сифатида қуйидаги формула билан аниқланади:

$$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{(y'')}. \tag{62}$$

Агар эгри чизиқ параметрик равишда берилган бўлса, унинг эгрилик радиуси қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$R=\frac{\left[\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2\right]^{3/2}}{\left|y''_t x'_t-y'_t x''_t\right|}. \tag{63}$$

Мисол. $y=\ln x$ чизиқнинг $M(1{,}0)$ нуқтадаги эгрилик радиусини топинг.

Ечилиши. $y'=1/x$ ва $y''=-1/x^2$ ни топамиз. (62) формула бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$R\Big|_M=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}\Big|_M=\frac{(1+1/x^2)^{3/2}}{1/x^2}\Big|_{x=1}=\frac{(1+x^2)^{3/2}}{|x|}\Big|_{x=1}=2\sqrt{2}.$$

Энди эгри чизиқнинг берилган M нуқтасида MP кесмани ўтказамиз. У нормаль бўйича эгри чизиқнинг ботиқ томонига қараб йўналган ва катталиги бўйича чизиқнинг M нуқтасидаги эгрилик радиусига тенг, яъни $MP=R=1/K$ (204-расм). Маркази P нуқтада ва радиуси чизиқнинг берилган нуқтасидаги эгрилик радиусига тенг бўлган айлана *эгрилик айланаси* дейилади. Бу айлананинг P маркази *эгрилик маркази* дейилади. Равшанки, берилган чизиқ ва унинг эгрилик айланаси M нуқтада умумий уринмага эга (204-расм).

$y=f(x)$ тенглама билан берилган чизиқ эгрилик марказининг координаталарини қандай топишни кўрсатамиз. Айтайлик, $M(x, y)$ — берилган чизиқнинг нуқтаси ва $P(\xi, \eta)$ — эгриликнинг мос маркази бўлсин (205-расм). $M(x, y)$ нуқтага ўтказилган нормалнинг тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x).$$

$P(\xi; \eta)$ нуқта нормалда ётгани учун унинг координаталари

$$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x)$$

тенгламани қаноатлантиради. Бундан ташқари, $P(\xi; \eta)$ ва $M(x; y)$ нуқталар орасидаги масофа эгрилик радиуси R га тенг:

$$\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} = R,$$

бундан

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = R^2.$$

Қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} \eta - y &= -\frac{1}{y'}(\xi - x), \\ (\xi - x)^2 &+ (\eta - y)^2 = R^2 \end{aligned}\right\}$$

тенгламалар системасини биргаликда ечиб ва R ни (62) формуладаги ифодаси билан алмаштириб,

$$\xi = x \pm \frac{y'(1 + y'^2)}{|y''|}, \quad \eta = y \mp \frac{1 + y'^2}{|y''|} \tag{64}$$

га эга бўламиз.

Аниқлик учун $y'' > 0$ дейлик. У ҳолда эгри чизиқ қаварик ва $\eta > y$ (205-расмга қаранг), яъни (64) формуланинг ўнг томонида η учун „плюс“ ишора ва демак, формуланинг ўнг томонида ξ учун „минус“ ишора олинади. Бунда $y'' > 0$, $|y''| = y''$ бўлганидан, эгрилик марказининг ξ ва η координаталари учун қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз:

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \tag{65}$$

$y'' < 0$ ҳолда (65) формула ўз кўринишини сақлашини кўрсатиш мумкин.

4. Эволюта ва эвольвента. Агар M нуқта берилган эгри чизиқ бўйича ҳаракат қилса (силжиса), у ҳолда унга мос бўлган эгрилик маркази P ҳам, умуман айтганда, бирор эгри чизиқни чизади.

Берилган чизиқнинг барча эгрилик марказлари тўплами унинг *эволютаси* дейилади. Чизиқнинг ўзи эволютасига нисбатан эвольвента (ёки *ёйилма*) дейилади.

Эгри чизиқнинг тенгламаларини билган ҳолда (65) формулалар бўйича эгрилик марказининг ξ ва η координаталарини x га боғлиқ равишда ифодалаш, яъни эволютанинг параметрик тенгламаларини топиш мумкин.

Бу тенгламалардан x ни йўқотиб, эволютанинг унинг ўзгарувчи координаталарини бевосита боғлайдиган $F(\xi, \eta) = 0$ шаклдаги тенгламасини ҳосил қиламиз.

Мисол. $y = x^2/2$ параболанинг эволютасини топинг.

Ечилиши. Аввал берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз: $y' = x$ ва $y'' = 1$, сўнгра (65) формулаларга кўра эволютанинг параметрик тенгламаларини топамиз:

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x - \frac{x(1+x^2)}{1} = -x^3,$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{x^2}{2} + \frac{1+x^2}{1} = \frac{3}{2}x^2 + 1.$$

Шундай қилиб, эволютанинг параметрик тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -x^3, \\ \eta &= \frac{3}{2}x^2 + 1. \end{aligned}\right\}$$

Бу тенгламалардан x ни йўқотиб, кетма-кет қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -x^3, \\ \eta - 1 &= \frac{3}{2}x^2, \end{aligned}\right\} \text{ ёки } \left.\begin{aligned} \xi &= -x^3. \\ \frac{2}{3}(\eta - 1) &= x^2, \end{aligned}\right\} \text{ ёки } \left.\begin{aligned} \xi^2 &= x^6, \\ \frac{8}{27}(\eta - 1)^3 &= x^6, \end{aligned}\right\}$$

бундан

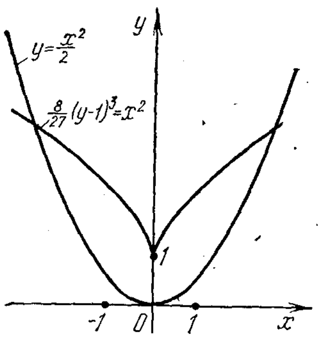
$$\frac{8}{27}(\eta - 1)^3 = \xi^2.$$

Биз эволютанинг ўзгарувчи координаталарини бевосита боғловчи тенгламасини ҳосил қилдик. $y = x^2/2$ параболанинг эволютаси ярим кубик парабола экан 206-расмда $y = x^2/2$ парабола ва унинг эволютаси тасвирланган.

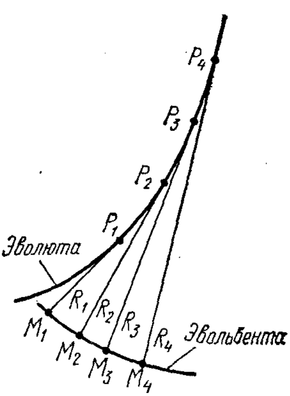
Эволюта ва эвольвентанинг бир-бирини боғлайдиган қуйидаги иккита зарур хоссасини (келтириб чиқармасдан) кўрсатамиз.

1°. *Эвольвентага ўтказилган нормаль эволютанинг мос нуқтасига ўтказилган уринма бўлади* (207-расм).

2°. *Агар эвольвентанинг бирор участкасида эгрилик радиуси монотон ўзгарса, у ҳолда эгрилик радиусининг бу участкадаги орттирмаси абсолют қиймати бўйича эволютанинг*



206-расм.



207-расм.

мос участкасидаги ёй узунлигига тенг бўлади. Масалан, 207-расмда $\overset{\frown}{P_1P_2} = R_2 - R_1$; $\overset{\frown}{P_2P_3} = R_3 - R_2$.

Бу хоссалар ёрдамида эволютасини билган ҳолда эвольвентани қандай ясаш мумкинлигини кўрсатамиз. Бунда эволюта букилиш нуқталарига эга эмас, деб ҳисоблаймиз.

P_1P_4 эволютага эркин (эволютага тортилмаган) тўғри чизиқли P_1M_1 участкага эга бўлган чўзилмайдиган ип тортамиз.

M_1 нуқтага қалам қўямиз. Энди ипни тортилган ҳолда айлантира бошлаймиз. У ҳолда қалам берилган P_1P_4 эволютага эвольвента бўлган чизиқни чизади. Равшанки, ипнинг P_1M_1 эркин участкасининг узунлигига қараб, биз берилган эволюта учун чексиз кўп эвольвенталар тўпламини ҳосил қиламиз.

5-§. ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАР

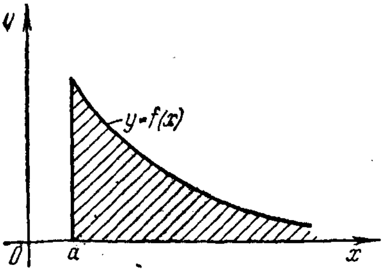
1. Чексиз чегарали интеграллар. 2-§ да аниқ интегралга таъриф берилаётганда интегралланиш чегараси чекли $[a, b]$ сегмент деб фараз қилинган эди. Агар интегралланиш чегараси чексиз, масалан $[a, +\infty[$ деб фараз қилинса, ҳатто $f(x)$ узлуксиз функция учун ҳам аниқ интеграл таърифини қўллаб бўлмайди. Бу ҳолда интеграл йиғинди тўғрисида гапириб бўлмайди, чунки $[a, +\infty[$ интегрални исталганча кичик бўлакларга ажратганимизда ҳам бу бўлаклардан биттаси чексиз бўлади. Энди интеграллаш соҳаси чексиз бўлган ҳол учун аниқ интеграл тушунчасини умумлаштирамиз.

Таърифга ўтишдан аввал мисол кўрайлик. $y = 1/x^2$ функция $[1, +\infty[$ чексиз интервалда узлуксиз. Шунинг учун исталган $[1, b]$ сегментда (бу ерда $b > 1$) $\int\limits_1^b \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{b}$ интеграл мавжуд, у $b \to +\infty$ да 1 га тенг лимитга эга. Бу лимитни $1/x^2$ функциядан олинган *хосмас интеграл* дейилади ва $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ символ билан белгиланади.

Шундай қилиб,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

Бу мисолни умумлаштириб, чексиз $a \leqslant x < +\infty$ интервалда узлуксиз бўлган $y_b = f(x)$ функцияни қараймиз. Исталган чекли $[a, b]$ сегмент учун $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интеграл мавжуд.



208-расм.

Агар b чексиз ўсганда $\int_a^b f(x)\,dx$ интеграл чекли лимитга интилса, у ҳолда бу лимит *$f(x)$ функциядан чексиз юқори чегара бўйича олинган хосмас интеграл* дейилади ва $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ символ билан белгиланади. Шундай қилиб,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{66}$$

Бу ҳолда $\int_a^b f(x)\,dx$ хосмас интеграл *мавжуд* ёки *яқинлашади* деб гапирилади. Агар кўрсатилган лимит мавжуд бўлмаса (хусусан, агар у чексиз бўлса), у ҳолда интеграл *мавжуд эмас* ёки *узоқлашади* дейилади. Қуйи чегараси чексиз бўлган хосмас интеграл шунга ўхшаш аниқланади:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{67}$$

Иккита чексиз чегарага эга бўлган хосмас интеграл қуйидаги формула орқали аниқланади:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{68}$$

бу ерда c — Ox ўқнинг исталган фиксирланган нуқтаси.

Шундай қилиб, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграл $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ ва $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралларнинг ҳар қайсиси мавжуд бўлгандагина мавжуд бўлади.

Келтирилган таърифлардан бевосита кўриниб турибдики, хосмас интеграл интеграл йиғиндиларнинг эмас, балки ўзгарувчи чегарали аниқ интегралнинг лимити экан.

Эслатиб ўтамизки, агар функция чексиз $[a, +\infty[$ интервалда узлуксиз ва мусбат ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ мавжуд бўлса, у ҳолда биз

---

* (68) формула билан аниқланувчи $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграл c нуқтанинг танланишига боғлиқ эмаслигини кўрсатиш мумкин.

уни $y=f(x)$ эгри чизиқ, Ox ўқнинг $[a, +\infty[$ интервали ҳамда $x=a$ тўғри чизиқ билан чегараланган чексиз эгри чизиқли трапециянинг юзи сифатида талқин қилишимиз мумкин (208- расм).

1- мисол. $\alpha > 0$ да $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ интегралнинг яқинлашишини текширинг.

Ечилиши. $\int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x\alpha}$ интегрални қараймиз ($b > 0$).

Агар $\alpha \neq 1$ бўлса, $\int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{1}^{b} = \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha} - 1\right).$

Агар $\alpha = 1$ бўлса, $\int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_{1}^{b} = \ln b.$

Айтайлик, $\alpha > 1$ бўлсин, у ҳолда $\alpha - 1 > 0$ ва шунинг учун $\lim\limits_{b\to+\infty} (b^{1-\alpha}) = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1}{b^{\alpha-1}} = 0$. Демак, бу ҳолда $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha}-1\right) = \frac{1}{\alpha-1}$.

$\alpha < 1$ бўлсин, у ҳолда $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = +\infty$ га эгамиз Шунга ўхшаш $\alpha = 1$ да $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln b = +\infty$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, $\alpha > 1$ да $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ интеграл яқинлашади, $\alpha \leqslant 1$ да узоқлашади.

2- мисол. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ интегралнинг яқинлашишини текширинг.

Ечилиши (68) формулада $c = 0$ деб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Лекин

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_{a}^{0} = \lim_{a\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) =$$
$$= 0 - (-\pi/2) = \pi/2.$$

Шунга ўхшаш $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi/2$ эканлигини кўрсатиш мумкин. Шунинг учун $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, яъни интеграл яқинлашади.

3- мисол. $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\,dx$ интеграл узоқлашади, чунки $b \to +\infty$ да $\int\limits_0^b \sin x\,dx =$ $= 1 - \cos b$ лимитга эга бўлмайди, гарчи 0 ва 2 орасида бўлса ҳам.

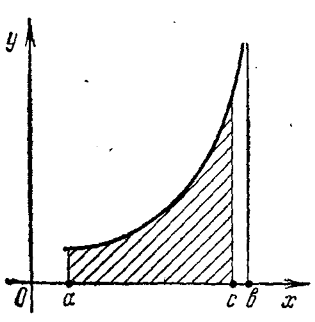
Аниқ интегралнинг асосий хоссаларининг кўпчилиги чексиз чегарали яқинлашувчи интеграллар учун ҳам сақланишини кўрсатиш мумкин, хусусан, ўзгарувчини алмаштириш формуласи ўринлидир. Кўпинча ўзгарувчини қулай алмаштириш билан чексиз чегарали хосмас интеграл аниқ интегралга келтирилади.

4- мисол. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $x = \operatorname{tg} z$ деб оламиз, у ҳолда $dx = \frac{dz}{\cos^2 z}$, $\frac{1}{(1+x^2)^2} =$ $= \frac{1}{(\sec^2 z)^2} = \cos^4 x$. Бунда агар z ўзгарувчи 0 дан $\pi/2$ гача ўзгарса, x ўзгарувчи 0 дан $+\infty$ гача ўзгаради. Шундай қилиб,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 z\,dz = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2z}{2}\,dz = \frac{\pi}{4}.$$

2. Узилишга эга бўлган функцияларнинг интеграллари. $y = f(x)$ функция $a \leqslant x < b$ да узлуксиз ва b нуқтада узилишга эга бўлсин. Бу ҳолда $f(x)$ функциядан $[a, b]$ сегментда олинган интегрални интеграл йиғиндиларнинг лимити сифатида таърифлаш, умуман айтганда, мумкин эмас, чунки бу лимит мавжуд бўлмаслиги ҳам мумкин. Ҳақиқатан, $f(x) > 0$ ва $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$ бўлсин (209-расм). У ҳолда $[a, b]$ сегментни исталганча $[a, x_1]$, $[x, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, b]$ бўлакларга ажратганимизда ҳам $f(x)$ функция охирги $[x_{n-1}, b]$ сегментда чегараланмаган бўлади (чунки фаразга кўра $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$). Шунинг учун, агар ξ_n нуқтани b нуқтага етарлича яқин қилиб олинса, $f(\xi_n)\Delta x_n$ кўпайтмани ва демак, $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ интеграл йиғиндини исталганча катта қилиб олиш мумкин. Бу интеграл йиғиндилар чегараланмаган ва демак, бўлиш қадами λ нолга интилганда улар лимитга эга бўлмайди деган сўздир.



209- расм.

Бироқ бу ҳолда ҳам интегралнинг аввалги таърифини қўллаб бўлмасада, интеграл тушунчасини умумлаштириш мумкин.

Таърифларга ўтишдан аввал конкрет мисол кўрамиз. $y = 1/\sqrt{1-x}$

функцияни қарайлик. Бу функция $x \to 1$ да чапдан чексизликка интилади. Бироқ $0 < c < 1$ бўлган $[0, c]$ сегментда функция узлуксиз ва шунинг учун $c \to 1-0$ да $\lim\limits_{c\to 1-0} 2(1-\sqrt{1-c}) = 2$ лимитга эга бўлган

$$\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}\,\Big|_0^c = 2\left(1-\sqrt{1-c}\right)$$

интеграл мавжуд. Бу лимитни $[0, 1]$ сегментда узилишга эга бўлган, $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ функциядан олинган хосмас интеграл деб аталади ва $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ символ билан белгиланади. Шундай қилиб,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{c\to 1-0} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{c\to 1-0} 2\left(1-\sqrt{1-c}\right) = 2.$$

Бу мисолни умумлаштириб, $[a, b]$ сегментнинг b нуқтасида узилишга эга бўлган, $[a, c]$ сегментда узлуксиз бўлган $y = f(x)$ функцияни қараймиз (бу ерда c — $]a, b[$ интервалнинг исталган нуқтаси).

Агар $c \to b$ да $\int_a^c f(x)\,dx$ интеграл чапдан чекли лимитга интилса, у ҳолда ушбу лимитни *узилишга эга бўлган функциядан олинган хосмас интеграл* дейилади ва $\int_a^b f(x)\,dx$ символ билан белгиланади.

Шундай қилиб,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b-0} \int_a^c f(x)\,dx. \qquad (69)$$

Бу ҳолда $\int_a^b f(x)\,dx$ хосмас интеграл *мавжуд* ёки *яқинлашади* дейилади. Агар кўрсатилган лимит мавжуд бўлмаса, интеграл *мавжуд эмас* ёки *узоқлашади* дейилади.

Шунга ўхшаш, агар $f(x)$ функция x нинг a га ўнгдан яқинлашишида узилишга эга бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+0} \int_c^b f(x)\,dx, \quad (a < c < b). \qquad (70)$$

Ниҳоят, агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментнинг бирор ички d нуқтасида узилишга эга бўлса, у ҳолда бу сегментни биз иккита: $[a, d]$ ва $[d, b[$ сегментга ажратамиз. Агар берилган функциядан олинган хосмас интеграллар сегментларнинг ҳар бирида мавжуд бўлса, у ҳолда бу интегралларнинг йиғиндиси, таърифга кўра, $f(x)$ функциядан $[a, b]$ сегментда олинган хосмас интеграл дейилади, яъни

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx. \qquad (71)$$

Шундай қилиб, таърифлардан бевосита кўриниб турибдики, узилишга эга бўлган функциядан олинган хосмас интеграл интеграл йиғиндиларнинг лимити эмас, балки аниқ интегралнинг лимити экан.

1-мисол. $\mu > 0$ да $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\mu}$ $(a < b)$ интегралнинг яқинлашишини текширинг.

Ечилиши. Интеграл остидаги функция $x = b$ нуқтада узилишга эга. $\int\limits_a^c \frac{dx}{(b-x)^\mu}$ интегрални қараймиз, бу ерда $a < c < b$. Агар $\mu \neq 1$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\mu} = \frac{1}{\mu-1}\cdot\frac{1}{(b-x)^{\mu-1}}\Bigg|_a^c = \frac{1}{\mu-1}\left[\frac{1}{(b-c)^{\mu-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\mu-1}}\right].$$

Агар $\mu = 1$ бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^c \frac{dx}{b-x} = -\ln(b-x)\Big|_a^c = \ln(b-a) - \ln(b-c)$.

Айтайлик, $\mu < 1$ бўлсин, у ҳолда $\mu - 1 < 0$, демак,

$$\lim_{c\to b-0}\int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\mu} = \frac{1}{\mu-1}\cdot\lim_{c\to b-0}\left[\frac{1}{(b-c)^{\mu-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\mu-1}}\right] = \frac{1}{(1-\mu)(b-a)^{\mu-1}}.$$

$\mu = 1$ бўлсин, у ҳолда

$$\lim_{c\to b-0}\int_a^c \frac{dx}{b-x} = \lim_{c\to b-0}[\ln(b-a) - \ln(b-c)] = +\infty.$$

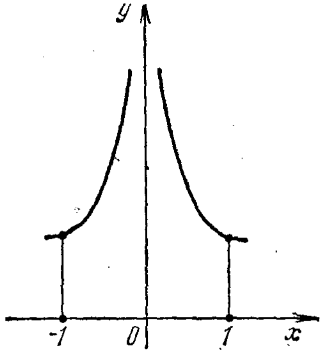
Ниҳоят, $\mu > 1$ бўлсин, у ҳолда $\mu - 1 > 0$ ва шунинг учун

$$\lim_{c\to b-0}\int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\mu} = \frac{1}{\mu-1}\cdot\lim_{c\to b-0}\left[\frac{1}{(b-c)^{\mu-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\mu-1}}\right] = +\infty.$$

Демак, $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\mu}$ хосмас интеграл $\mu < 1$ да яқинлашади ва $\mu \geqslant 1$ да узоқлашади.

2-мисол. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ интегралнинг яқинлашишини текширинг. Интеграл остидаги функция 210-расмда тасвирланган.

Ечилиши. Интеграл остидаги $1/\sqrt[3]{x^2}$ функция $x=0$ нуқтада узилишга эга $\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty\right)$. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ ва $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ интегралларни қараймиз. Уларнинг иккаласи ҳам мавжуд, бунда $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=3$, $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=3$. Шунинг учун таърифга кўра



210- расм.

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}+\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=3+3=6$$

интеграл мавжуд.

3-мисол. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ интегралнинг яқинлашишини текширинг.

Ечилиши Интеграл остидаги $1/x^2$ функция $x=0$ нуқтада узилишга эга Шунинг учун 2-мисолдаги каби $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}$ ва $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$ интегралларни айрим-айрим кўрамиз. Бу интегралларнинг иккаласи ҳам мавжуд эмаслигига осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин. Демак, таърифга кўра, $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ интеграл мавжуд эмас. Эслатиб ўтамизки, агар биз $\int\frac{dx}{x^2}$ интегрални ҳисоблашда Ньютон—Лейбниц формуласидан фойдаланиб, формал иш кўрганимизда эди, олдиндан нотўғри натижага эришган бўлар эдик: $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2$. Бу натижа нотўғри, чунки $[-1, 1]$ сегментда мусбат функциядан олинган аниқ интегралнинг манфий бўлиши мумкин эмас. Хато шундаки, биз Ньютон—Лейбниц формуласини (интеграл остидаги функция интегралланиш сегментида узлуксиз бўлиши керак, деган фараз билан келтириб чиқарилган формулани) ўринсиз қўлладик. Бизнинг ҳолда $1/x^2$ функция $x=0$ нуқтада чексиз узилишга эга.

3. Хосмас интегралларнинг яқинлашиш аломатлари. Баъзи ҳолларда хосмас интегрални ҳисоблаб ўтиришга ҳожат йўқ, балки у яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканлигини билиш етарли. Бундай ҳолларда берилган хосмас интегрални яқинлашиши ёки узоқлашиши маълум бўлган бошқа хосмас интеграл билан таққослаш фойдали бўлади. Хосмас интегралларни таққослашга асосланган яқинлашиш ва узоқлашиш аломатларини аниқловчи теоремаларни исботсиз келтирамиз.

1-теорема. *$[a, +\infty[$ интервалда $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар узлуксиз бўлсин ва $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$ тенгсизликни қаноатлантирсин. У ҳолда:*

а) агар $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграл яқинлашса, $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ интеграл ҳам яқинлашади;

б) агар $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ интеграл узоқлашса, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграл ҳам узоқлашади.

1-мисол. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}}$ интегралнинг яқинлашишини текширинг.

Ечилиши. Интеграл остидаги $x/\sqrt{x^5+1}$ функцияни $x/\sqrt{x^5}$ функция билан таққослаймиз Равшанки, $1 \leqslant x < +\infty$ интервалда

$$\frac{x}{\sqrt{x^5+1}} < \frac{x}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Лекин $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ интеграл яқинлашади, чунки $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ (1-пунктдаги 1-мисолга қаранг). Демак, 1-теоремага кўра берилган интеграл яқинлашувчи бўлади.

2-мисол. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx$ интегралнинг яқинлашишини текширинг.

Ечилиши. $2 \leqslant x < +\infty$ интервалда $\ln(x^2+1) > 1$ га эгамиз, чунки $x \geqslant 2$ да x^2+1 йиғинди натурал логарифм асоси e дан катта. Демак, бу интервалда $\frac{\ln(x^2+1)}{x} > \frac{1}{x}$. Лекин $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ интеграл узоқлашади (1-пунктдаги 1-мисолга қаранг). Демак, берилган интеграл ҳам узоқлашади.

2-теорема. *$f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $[a, b]$ интервалда узлуксиз бўлсин ва $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$ тенгсизликни қаноатлантирсин, $x = b$ нуқтада эса узилишга эга бўлсин. У ҳолда:*

а) агар $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ интеграл яқинлашса, $\int\limits_a^{b} \varphi(x)\,dx$ интеграл ҳам яқинлашади;

б) агар $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ интеграл узоқлашса, $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интеграл ҳам узоқлашади.

3-мисол. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$ интегралнинг яқинлашишини текширинг.

Ечилиши. Интеграл остидаги функция $[0, 1[$ интервалда узлуксиз, $x=1$ нуқтада эса чексиз узилишга эга. Уни $1/\sqrt[3]{1-x}$ функция билан таққослаймиз, бу функция ҳам $[0, 1[$ интервалда узлуксиз ва $x=1$ нуқтада чексиз узилишга эга. Аввал $0 \leqslant x < 1$ учун $x^4 < x$ тенгсизлик ва демак, $1-x^4 \geqslant 1-x$ тенгсизлик ўринли бўлишини таъкидлаб ўтамиз. Лекин у ҳолда $\sqrt[3]{1-x^4} \geqslant \sqrt[3]{1-x}$ ва шунинг учун $1/\sqrt[3]{1-x^4} \leqslant 1/\sqrt[3]{1-x}$. Шундай қилиб, интеграл остидаги $1/\sqrt[3]{1-x^4}$ функция $[0, 1[$ интервалда $1/\sqrt[3]{1-x^4}$ функциядан кичик. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ интеграл яқинлашувчи бўлгани учун (2-пунктдаги 1-мисолга қаранг) 2-теоремага кўра берилган интеграл ҳам яқинлашади.

6-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШ МЕТОДЛАРИ

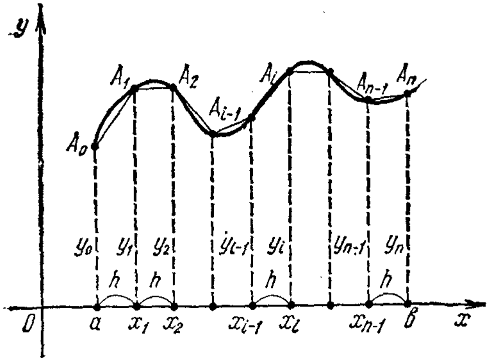
1. Умумий мулоҳазалар. Масаланинг қўйилиши. Узлуксиз $f(x)$ функциядан олинган $I=\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интегрални ҳисоблаш талаб қилинсин. Агар $F(x)$ бошланғич функцияни топиш мумкин бўлса, у ҳолда Ньютон—Лейбниц формуласига кўра $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$. Агар бошланғич функцияни топиб бўлмаса ёки $y=f(x)$ функция график равишда ёки жадвал кўринишда берилган бўлса, аниқлигини исталганча катта қилиш мумкин бўлган тақрибий ҳисоблаш формулаларига мурожаат қилинади.

Аниқ интегрални ҳисоблашнинг тақрибий методлари кўп ҳолларда аниқ интеграл сон жиҳатдан $y=f(x)$ эгри чизиқ, Ox ўқнинг $[a, b]$ сегменти ва $x=a$ ва $x=b$ нуқталардан вертикал ўтказилган тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция юзини топишга асосланган. Бунга кўра интегрални тақрибий ҳисоблаш масаласи эгри чизиқли трапециянинг юзини тақрибий ҳисоблаш масаласига тенг кучли бўлади.

Интегрални тақрибий ҳисоблаш ғояси шундаки, $y=f(x)$ эгри чизиқ „ўзига яқин“ бўлган эгри чизиқ билан алмаштирилади.

У ҳолда изланган юз янги эгри чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзига тахминан тенг бўлади.

Янги чегараловчи эгри чизиқ деб, эгри чизиқли трапециянинг юзи осон ҳисобланадиган қилиб танланадиган эгри чизиққа айти-



211-расм.

лади. Янги эгри чизиқнинг танланишига қараб биз интегралнинг у ёки бу тақрибий формуласини ҳосил қиламиз.

2. Трапециялар методи. $I=\int_a^b f(x)\,dx$ интегрални ҳисоблаш талаб қилинсин. Интеграллаш сегменти $[a,\ b]$ ни x_1, $x_2, \ldots x_{i-1}^i$, $x_i, \ldots, x_{n-1}$ нуқталар ёрдамида n та тенг кичик сегментларга ажратамиз. Бундан ташқари, $x_0=a$, $x_n=b$ деймиз. Ҳар бир кичик сегментнинг узунлиги $h=(b-a)/n$ га тенг. Бўлиниш нуқталаридан Oy ўққа параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Улар эгри чизиқни A_0, A_1, A_2, $\ldots$, A_{i-1}, A_i, $\ldots$, A_{n-1}, A_n нуқталарни кесиб ўтсин. Берилган $y=f(x)$ эгри чизиқни унга ички чизилган $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$ синиқ чизиқ билан алмаштирамиз (211-расм), қўшни ординаталарнинг учларини тўғри чизиқлар билан туташтирамиз.

Кўргазмали бўлиши учун $[a,\ b]$ сегментда $f(x)\geqslant 0$ деймиз. Юқоридан синиқ чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапеция юзи $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралнинг тақрибий қийматини беради.

Бу юз юқоридан синиқ чизиқ звенолари билан чегараланган тўғри чизиқли трапециялар юзларининг йиғиндисига тенг. Ҳар бир трапециянинг юзини ҳисоблаш мумкин. Ҳақиқаган, унинг асоси қўшни бўлиниш нуқталари x_{n-1} ва x_i нинг ординаталари, баландлиги эса узунлиги $h=(b-a)/n$, бўлган $[x_{i-1},\ x_i]$ кичик сегментдир. (211-расмга қ.) Шунинг учун бундай трапециянинг юзи $h=(y_{i-1}+y_i)/2$, бу ерда $y_{i-1}=f(x_{i-1})$, $y_i=f(x_i)$.

Демак, юқоридан $A_0A_1\ \ldots\ A_n$ синиқ чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзи:

$$S_n=\frac{y_0+y_1}{2}h+\frac{y_1+y_2}{2}h+\ldots+\frac{y_{i-1}+y_i}{2}h+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}h.$$

Ўз-ўзидан равшанки, алмаштиришлардан сўнг қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$S_n=h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right),\quad \text{бу ерда } h=\frac{b-a}{n}.$$

Шундай қилиб, қуйидаги тақрибий формулани ҳосил қиламиз:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right), \qquad (72)$$

бу формула *трапециялар формуласи* дейилади. $f(x)\geqslant 0$ да келтириб чиқарилган трапециялар формуласи $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлган исталган $f(x)$ функция учун ўринли бўлиб қолаверади.

Равшанки, бўлиш нуқталари сони n ортиб борган сари берилаётган трапециялар формуласининг аниқлиги ортиб боради.

Интегрални трапециялар формуласи билан ҳисоблаёгганда одатда қуйидагича иш тутилади:

1) бўлиниш нуқталари n ва $2n$ да I_n ва I_{2n} интегралларнинг ги қийматлари ҳисобланади;

2) ҳисоблаш натижалари таққосланади ва бир хил биринчи рақамлар қолдирилади.

Мисол. $n=8$ ва $n=16$ деб, $\int_0^{1,6}\sin(x^2)\,dx$ интегрални трапециялар формуласи ёрдамида ҳисобланг.

Ечилиши $n=8$ ва $h=(b-a)/n=(1,6-0)/8=0,2$ да интеграл остидаги функциянинг қийматлар жадвалини тузамиз:

i	x_i	x_i^2	$y_i=\sin(x_i^2)$	i	x_i	x_i^2	$y_i=\sin(x_i^2)$
0	0	0,00	0,0000	5	1,0	1,00	0,8415
1	0,2	0,04	0,0400	6	1,2	1,44	0,9915
2	0,4	0,16	0,1593	7	1,4	1,96	0,9249
3	0,6	0,36	0,3523	8	1,6	2,56	0,5487
4	0,8	0,64	0,5972				

(72) формулада $n=8$ деб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_0^{1,6}\sin(x^2)dx \approx h\left(\frac{y_0+y_8}{2}+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7\right)=$$

$$=0,2\left[\frac{0+0,5487}{2}+0,0400+0,1593+0,3523+0,5972+0,8415+\right.$$

$$\left.+0,9915+0,9249\right]=0,2\cdot 4,1807=0,8362,$$

Энди интеграл остидаги функциянинг $n=10$ ва $h=(b-a)/n=1,6-0)/16=$ $=0,1$ даги қийматларининг жадвалини тузамиз:

i	x_i	x_i^2	$y_i=\sin\left(x_i^2\right)$	i	x_i	x_i^2	$y_i=\sin\left(x_i^2\right)$
0	0	0,00	0,0000	9	0,9	0,81	0,7243
1	0,1	0,01	0,0100	10	1,0	1,00	0,8415
2	0,2	0,04	0,0400	11	1,1	1,21	0,9356
3	0,3	0,09	0,0899	12	1,2	1,44	0,9915
4	0,4	0,16	0,1593	13	1,3	1,69	0,9928
5	0,5	0,25	0,2474	14	1,4	1,96	0,9249
6	0,6	0,36	0,3523	15	1,5	2,25	0,7776
7	0,7	0,49	0,4706	16	1,6	2,56	0,5487
8	0,8	0,64	0,5972				

$n = 16$ учун (72) формулани қўллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_0^{1,6} \sin(x^2)\,dx \approx \frac{1,6}{16}\left[\frac{0,+0,5487}{2} + 0,0100 + 0,0400 + 0,0899 + 0,1593 + 0,2474 + \right.$$
$$+ 0,3523 + 0,4706 + 0,5972 + 0,7243 + 0,8415 + 0,9356 + 0,9915 + 0,9928 +$$
$$\left. + 0,9249 + 0,7776\right] = 0,8429.$$

Иккала ҳисоблаш натижаларини таққослаб кўрамизки, яхлитлашда биринчи иккита рақам устма-уст тушади. Демак интегралнинг тақрибий қиймати учун $\int_0^{1,6} \sin(x^2)\,dt \approx 0,84$ интегрални олиш мумкин. Бу интегралнинг жадвал қиймати 0,00001 аниқликда 0,84528 га тенг.

3 Параболик трапециялар (Симпсон) методи. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблашнинг бу методи трапециялар методида бўлганидек интеграл остидаги функцияни ватарлар билан эмас, балки ўқлари Oy ўққа параллел бўлган параболаларнинг ёйлари билан алмаштиришга асосланган. Бу методни баён қилишдан аввал, берилган эгри чизиқли трапецияни чегараловчи эгри чизиқ $y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$ квадрат учҳаднинг графиги бўлган хусусий ҳолни қараймиз.

Қуйидаги формула ўринли:

$$\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \frac{b-a}{6}(y_ч + 4y_{ўрт} + y_ў), \tag{73}$$

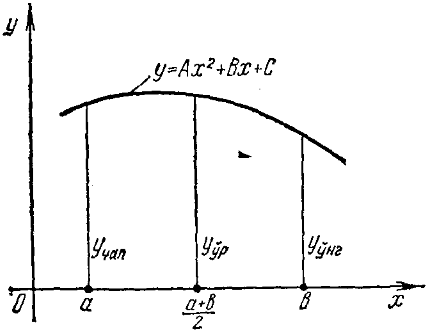
бу ерда $y_ч$ — эгри чизиқнинг $x = a$ нуқтадаги ординатаси, (чап ордината) $y_ў$ — эгри чизиқнинг $x = b$ нуқтадаги ординатаси, (ўнг ордината) $y_{ўрт}$ — эгри чизиқнинг $[a, b]$ сегмент ўрта нуқтасининг, яъни $x = (a + b)/2$ нуқта ординатаси (212-расм).

Бу муносабатни келтириб чиқариш уни бевосита текширишга келтирилади. Формуланинг чап томонидаги ифодани ҳисоблаймиз:

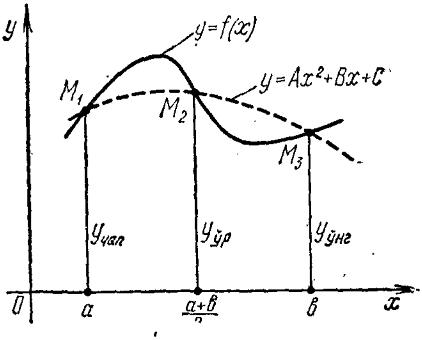
$$\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \frac{A(b^3 - a^3)}{3} + \frac{B(b^2 - a^2)}{2} + C(b - a) =$$
$$= \frac{b-a}{6}\left[2A(b^2 + ab + a^2) + 3B(b + a) + 6C\right].$$

(73) формуланинг ўнг томонидаги ифодаларни ҳисоблаш учун дастлаб $y_ч$, $y_ў$ ва $y_{ўрт}$ ларни топамиз:

$$y_ч = f(a) = Aa^2 + Ba + C;\quad y_ў = f(b) = Ab^2 + Bb + C;$$
$$y_{ўрт} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = A\frac{(a+b)^2}{4} + B\frac{a+b}{2} + C.$$



212- расм.



213- расм.

Топилган қийматларни (73) формуланинг ўнг томонига қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз: $\frac{b-a}{6}(y_ч + 4y_{ўрт} + y_ў) = \frac{b-a}{6}[Aa^2 + Ba +$

$$+ C + A(a^2 + b^2 + 2ab) + 2B(a+b) + 4C + Ab^2 + Bb + C] =$$

$$= \frac{b-a}{6}[2A(a^2 + b^2 + ab) + 3B(b+a) + 6C].$$

Биз кўрамизки, (73) муносабатнинг чап ва ўнг томонлари мос равишда тенг, бу унинг ўринлилигини исбот қилади.

Энди ихтиёрий $y = f(x)$ эгри чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапецияни қараймиз (213-расм). Эгри чизиқнинг M_1 $(x_ч;\ y_ч)$, $M_2(x_{ўрт}, y_{ўрт})$, M_3 $(x_ў;\ y_ў)$ нуқталари орқали ёрдамчи $y = Ax^2 + Bx + C$ параболани ўтказамиз (бу ерда $x_ч = a$, $x_{ўрт} = (a+b)(2, x_ў = b)$. Бундай учта нуқта орқали ҳар вақт парабола ўтказиш мумкин, шу билан бирга бундай парабола фақат битта бўлади (VI боб, 9-§, 1-пунктга қаранг).

Ёрдамчи парабола билан чегараланган эгри чизиқли трапеция юзи тақрибан берилган эгри чизиқли трапеция юзига тенг:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b (Ax^2 + Bx + C)\,dx.$$

(73) формулага кўра

$$\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \frac{b-a}{6}(y_ч + 4y_{ўрт} + y_ў)$$

бўлгани сабабли ихтиёрий $y = f(x)$ функция учун қуйидаги тақрибий тенглик ўринли:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\,(y_{ч} + 4y_{ўрт} + y_{ў}). \tag{73'}$$

Бироқ, агар $[a, b]$ сегмент қанча катта бўлса, (73) формула берадиган яқинлашиш шунча қўпол бўлади. Шунинг учун $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралнинг анча аниқ қийматини ҳосил қилиш учун қуйидагича иш тутамиз: $[a, b]$ сегментни узунлиги $h = (b-a)/2n$ бўлган $2n$ та жуфт бўлакка ажратамиз. Айтайлик, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}$ лар бўлиш нуқталари бўлсин. Узунлиги $(b-a)/n$ бўлган кичик сегментларни қараймиз:

$$[x_0, x_2], [x_2, x_4], \ldots, [x_{2n-2}, x_2\ ]\ (x_0 = a,\ x_{2n} = b);$$

бу сегментларнинг ўрталари мос равишда $x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1}$ нуқталар бўлади.

$\int_a^b f(x)\,dx$ интегрални бир нечта интеграл йиғиндисига ажратамиз:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx. \tag{74}$$

(74) тенгликдаги интегралларнинг ҳар бирига (73′) формулани қўлланамиз:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\,(y_0 + 4y_1 + y_2);\\
&\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\,(y_2 + 4y_3 + y_4);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\,(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}),
\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

бу ерда $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 2n$. (75) муносабатларнинг ўнг ва чап томонларини қўшиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[(y_0+y_{2n})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})+$$
$$+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})]. \qquad (76)$$

Бу формула *параболик трапециялар* ёки *Симпсон формуласи** дейилади.

Интегрални Симпсон формуласи билан ҳисоблаганда трапециялар методидаги каби қуйидагича иш тутилади:

1) бўлиниш нуқталари $2n$ ва $4n$ бўлганда I_{2n} ва I_{4n} интегралларнинг қийматлари ҳисобланади;

2) ҳисоблаш натижалари таққосланиб, бир хил биринчи рақамлар қолдирилади.

Мисол. $2n=4$ ва $2n=8$ да $\int_0^{1,6}\sin(x^2)\,dx$ интегрални Симпсон формуласи ёрдамида ҳисобланг.

Ечилиши. $2n=4$ ва $h=(b-a)/2n=(1,6-0)/4=0,4$ учун жадвал тузамиз:

i	x_i	x_i^2	$y_i=\sin(x_i^2)$
0	0	0,00	0,0000
1	0,4	0,16	0,1593
2	0,8	0,64	0,5972
3	1,2	1,44	0,9915
4	1,6	2,56	0,5487

(76) формулага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_0^{1,6}\sin(x^2)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[y_0+y_4+4(y_1+y_3)+2y_2]=$$
$$=\frac{1,6-0}{12}[0+0,5487+4(0,1593+0,9915)+2\cdot 0,5972]=0,8462.$$

$2n=8$ ва $h=(b-a)/(2n=(1,6-0)/8=0,2$ да 399 - бетдаги жадвалдан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\int_0^{1,6}\sin(x^2)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[y_0+y_8+4(y_1+y_3+y_5+y_7)+$$
$$+2(y_2+y_4+y_6)]=\frac{1,6-0}{24}[0+0,5487+4(0,0400+0,3523+$$
$$+0,8415+0,9249)+2(0,1593+0,5972+0,9915)]=0,8455.$$

---

* Т. Симпсон (1710 — 1761) — инглиз математиги.

Иккала ҳисоблаш натижаларини таққослаб кўрамизки, яхлитлашдан сўнг б ринчи учта рақам бир хил. Шунинг учун интегралнинг тақрибий қиймати д $\int_0^{1,6} \sin(x^2)\,dx \approx 0,846$ ни қабул қиламиз Эслатиб ўтамизки, берилган интегра. ни 0,00001 аниқликдаги жадвал қиймати 0,84528 га тенг.

Изоҳ. Интеграллаш сегменти бир хил сондаги нуқталарг бўлинганда Симпсон методи трапециялар методига қаранд одатда анча аниқ натижа беради. Трапециялар методида хатоли бўлиш нуқталари сонининг квадратига тескари пропорционал Симпсон методида эса бўлиш нуқталари сонининг тўртинчи да ражасига тескари пропорционал эканлигини кўрсатиш мумкин.

МУНДАРИЖА

На узбекском языке

ВЛАДИМИР ЕВГЕНЬЕВИЧ ШНЕЙДЕР
АЛЕКСАНДР ИСАХАРОВИЧ СЛУЦКИЙ
АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ ШУМОВ

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ I

Учебное пособие для втузов

Перевод со второго, переработанного и дополненного издания, издательства „Высшая школа" М., 1978 г.

Ташкент „Ўқитувчи" 1985

Таржимонлар: *Н. Рахимова, Ё. Соатов, Д. Азимова, Н. Шохайдарова*
Редакторлар *М. Шерматова, М. Пўлатов*
Расмлар редактори *С. Соин*
Техредактор *Т. Грешникова*
Корректор *Д. Умарова*

ИБ № 2926

Теришга берилди 22. 06. 84 й. Босишга рухсат этилди 29. 05. 85 й. Формати $60\times90_{16}$ Тип. қоғози № 3. Кегли 8, 10 шпонсиз. Гарнитура Литературная. Юқори босма усулида босилди. Шартли *б. л, 25,5. Шартли кр.-отт. 25. 69. Нашр. л. 24,93. Тиражи 7000. Заказ № 585. Баҳоси* 1 с.

„Ўқитувчи" нашриёти, Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 9—12—84.

Область газета ва босмахоналарининг М. В. Морозов номидаги бирлашган нашриёти, Самарқанд, У. Турсунов кўчаси, 82. 1985

Объединенное издательство и типография областных газет им. М. В. Морозова
Самарканд, ул. У. Турсунова, 82.

Ш 73

Шнейдер В. Е. ва бошқ.

Олий математика қисқа курси: 2 томлик В. Е. Шнейдер, А. И. Слуцкий, А. С. Шумов Т. I. —2-тўлдирилган ва қайта ишланган русча нашридан тарж. —Т. :Ўқитувчи, 1985 — 408 б.

1,2 Автордош.

Шнейдер В. Е. и др. Краткий курс высшей математики, Т. I.

ББК 22. 11я73