

Т. АЗЛАРОВ, Ҳ. МАНСУРОВ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ

2-ҚИСМ

ЎзССР Халқ таълими министрлиги университетларнинг
ва педагогика институтларининг студентлари учун ўқув
қўлланма сифатида руҳсат этган

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1989

Тақризчилар:

физика-математика фанлари доктори, профессор *Х. Р. Латипов*,
физика-математика фанлари доктори, профессор *А. С. Сағдулаев*

Ушбу китоб университетлар ҳамда педагогика инситутлари, шунингдек, олий техника ўқув юртларининг олий математика предмети чуқур программа асосида ўқитиладиган факультетлари студентлари учун мўлжалланган. Уни ёзишда авторлар В. И. Ленин номидаги Тошкент Давлат университетининг математика, амалий математика ва механика факультетларида бир неча йиллар давомида ўқиган лекцияларидан фойдаланганлар.

Китобни ёзишда, бир томондан математика фанининг тобэрз инженер ривожлана бориши, янги тушунчалар, янги ғоялар билан бўлиб бўрнилига эътибор қаратилган бўлса, иккиччи томондан математиканинг фан ва техниканинг турли соҳаларига татбиқ доираси кенгайиб бориши ҳисобга олинган.

Китоб анализ курсининг 2-қисми бўлиб, унда кўп ўзгарувчили функциялар дифференциал ва интеграл ҳисоби, функционал қаторлар назарияси ва Фурье қаторлари назарияси батағсил баён этилган.

A $\frac{1602070000 - 117}{353 (04) - 89}$ 148—89

© «Ўқитувчи» нашриёти, Т., 1989

ISBN 5—645—00480—9

СҮЗ БОШИ

Ушбу ўқув қўлланма 1986 йили нашр этилган «Математик анализ, 1-қисм» китобимизнинг давоми бўлиб, мазкур курснинг қолган анъанавий мавзуларини ўз ичига олади. Қўлланмани ёзишдаги асосий принципларимиз 1-қисмга ёзилган сўз босида келтирилган, 2-қисмни тайёрлаш жараёнида улар деярли ўзгаргани йўқ. Факат қуидаги мулоҳазаларимизни қўшимча қилишини лозим топамиз.

Қўлланма кўп ўзгарувчили функциялар ва уларнинг дифференциал ҳисоби баёнидан бошланади. Маълумки, бир ўзгарувчили ва кўп ўзгарувчили функциялар учун дифференциал ҳисоб масалаларининг қўйилиши ва ечилиши орасида ўхшашликлар ва тафовутлар бор. Биз анашу ўхшашликлар ва тафовутларни бутун дифференциал ҳисоб давомида яққолроқ таъкидлашга ҳаракат қилдик.

Баъзи мавзуларга одатдагидан кўпроқ эътибор берилиб, улар жуда батафсил баён қилинди (масалан, каррали ва такрорий лимитлар, функционал қаторларнинг текис ва нотекис яқинлашувчилиги, даврий бўлган ҳамда даврий бўлмаган функциялар ва ҳоказо). Бу ўринда шу мавзуларнинг мавжуд адабиётларда етарлича ёритилмаганлигини ҳисобга олдик.

Айни пайтда баъзи мағзуларга, масалан, каррали интеграллар, сирт интеграллари, эгри чизиқли интеграллар мағзуларига одатдагидан камроқ эътибор берилиб, улар қисқароқ баён этилди. Шуни ҳам айтиш керакки, эгри чизиқ, сирт, жисм каби тушунчалар геометрия курсларида тўла баён этилишини ҳиссбга олиб, биз уларнинг математик анализ курси учун зарур бўлган ўринларинигина келтирдик. Юқоридаги интеграллар тушунчаларининг киритилиши ва ўрганилиши жараёни бир-бирига ўхаша бўлганлиги учун ҳам уларга кам ўрин ажратдик.

Қўлланманинг илмий ва методик жиҳатдан яхшиланишига ўз ҳиссаларини қўшганликлари учун профессорлар А. С. Саъдуллаев, Х. Р. Латипов, доцентлар М. Зохиров, Э. Х. Якубов, Б. Наимжонов, А. Ворисов, Р. Ганихўжаевларга, шунингдек, уни нашрга тайёрлашда қатнашган А. Умаров (ТошДУ) га миннатдорчилик билдирамиз.

Қўлланмадаги камчиликларни бартараф этишга ва унинг сифатини яхшилашга қаратилган фикр ва мулоҳазаларини билдирган ўртоқларга аввалдан ўз миннатдорчилигимизни билдирамиз.

Авторлар

12- Б О Б

КҮП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАР, УЛАРНИНГ ЛИМИТИ, УЗЛУҚСИЗЛИГИ

«Математик анализ» курсининг 1-қисмидаги бир ўзгарувчили функциялар батафсил ўрганилди.

Математика, физика, техника ва фаннинг бошқа турли тармоқларида шундай функциялар учрайдики, улар кўп ўзгарувчиларга боғлиқ бўлади. Масалан, доиравий цилиндрнинг ҳажми

$$V = \pi \cdot r^2 h \quad (12.1)$$

икки ўзгарувчи: r — радиус ҳамда h — баландликка боғлиқ.

Ток кучи

$$I = \frac{E}{R} \quad (12.2)$$

ҳам икки ўзгарувчи: E — электр юритувчи куч ва R — қаршиликнинг функцияси бўлади. Бунда цилиндрнинг ҳажми (12.1) формула ёрдамида бир-бира боғлиқ бўлмаган r ва h ўзгарувчиларнинг қийматларига кўра, ток кучи (12.2) формула ёрдамида бир-бира боғлиқ бўлмаган E ва R ўзгарувчиларнинг қийматларига кўра топилади. Шунга ўхшаш мисолларни жуда кўплаб келтириш мумкин*. Бинобарин, кўп ўзгарувчили функцияларни юқоридагидек чуқурроқ ўрганиш вазифаси туғилади.

Кўп ўзгарувчили функциялар назариясида ҳам бир ўзгарувчили функциялар назариясидагидек, функция ва унинг лимити, функциянинг узлуксизлиги ва ҳоказо каби тушунчалар ўрганилади. Бунда бир ўзгарувчили функциялар ҳақидаги маълумотлардан муттасил фойдалана борилади.

Маълумки, бир ўзгарувчили функцияларни ўрганишни уларнинг аниқланиш тўпламларини (соҳаларини) ўрганишдан бошлаган эдик. Кўп ўзгарувчили функцияларни ўрганишни ҳам уларнинг аниқланиш тўпламларини (соҳаларини) баён этишдан бошлаймиз.

1- §. R^n фазо ва унинг муҳим тўпламлари

1. R^2 , R^3 фазолар. Ихтиёрий иккита A ва B тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси билан танишган эдик (қаралсин, 1-қисм, 1-боб, 1-§). Энди A ва B тўпламлар деб R тўпламни олайлик: $A = B = R$.

Унда

$$A \times B = R \times R = \{(x_1, x_2): x_1 \in R, x_2 \in R\}$$

бўлади.

*Сирасини айтганда, аслида табиатда, фан тармоқларида, кундалик ҳаётда деярли ҳамма вақт кўп ўзгарувчили функцияларни учратамиз. Аммо, биз аввал соддалик учун бир ўзгарувчили функцияларни муфассал ўргангандай эдик ва математик анализнинг асосий масалаларини шу содда ҳол учун ту шунниб етган эдик.

Ушбу

$$\{(x_1, x_2) : x_1 \in R, x_2 \in R\}$$

түплам R^2 түплам деб аталади. Равшанки, R^2 түплам элементлари жуфтликлар бўлади. Улар шу түплам нуқталари деб юритилади. Одатда R^2 түпламнинг нуқтаси битта ҳарф, масалан $(x_1, x_2) \in R^2$ нуқта x орқали белгиланади: $x = (x_1, x_2)$. Бунда x_1 ва x_2 сонлар x нуқтанинг мос равища биринчи ва иккинчи координаталари дейилади.

Текислика тўғри бурчакли Oxy Декарт координаталар системасини олайлик. Ox ўқда (абсцисса ўқида) x_1 ўзгарувчининг қийматлари, Oy ўқда (ордината ўқида) эса x_2 ўзгарувчининг қийматлари жойлашган бўлсин. У ҳолда (x_1, x_2) жуфтлик текислика координаталари x_1 ва x_2 бўлган $M(x_1, x_2)$ нуқтани ифодалайди (1-чизма).

1- чизма

Ҳақиқий сонлар тўплами R билан тўғри чизик нуқталари орасида ўзаро бир қийматли мосслик ўрнатилгани каби (қаралсин, 1-қисм, 2-боб, 10-§) R^2 түплам нуқталари билан текислиқ нуқталари орасида ҳам ўзаро бир қийматли мосслик ўрнатиш мумкин. Бу эса R^2 түпламнинг геометрик тасвирини текислик деб қарашиб имконини беради. Юқорида R^2 түпламнинг элементларини нуқта деб аталганининг боиси ҳам шундадир. Аналитик геометрия курсида келтирилганидек, R^2 түпламда (текислика) икки нуқта орасидаги масофа тушунчасини киритиш мумкин.

$$x = (x_1, x_2) \in R^2, y = (y_1, y_2) \in R^2 \text{ бўлсин.}$$

12.1-таъриф. Ушбу

$$\rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

миқдор $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ нуқталар орасидаги масофа деб аталади. Киритилган $\rho(x, y)$ масофа қўйидаги хоссаларга эга (бунда $\forall x, y, z \in R^2$):

$$1^{\circ}. \rho(x, y) \geq 0 \text{ ва } \rho(x, y) = 0 \iff x = y^*.$$

$$2^{\circ}. \rho(x, y) = \rho(y, x).$$

$$3^{\circ}. \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Бу хоссаларнинг исботи кейинги пунктда (умумий ҳолда) келтирилади.

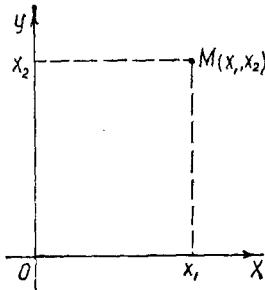
Одатда R^2 түплам R^2 фазо (икки ўлчовли Евклид фазаси) деб аталади.

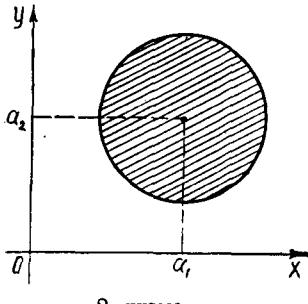
Энди R^2 фазонинг келгусида тез-тез учраб турадиган баъзи бир муҳим тўпламларини келтирамиз.

R^2 фазонинг $a = (a_1, a_2)$ нуқтасини ҳамда мусбат r сонни олайлик. Қўйидаги

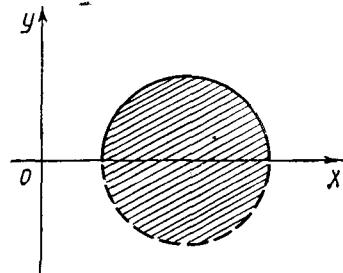
$$\{(x_1, x_2) \in R^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2\}, \quad (12.3)$$

*Агар $x = (x_1, x_2) \in R^2, y = (y_1, y_2) \in R^2$ нуқталар учун $x_1 = y_1, x_2 = y_2$ бўлса, у ҳолда $x = y$ деб аталади.





2- чизма



3- чизма

$$\{(x_1, x_2) \in R^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\} \quad (12.4)$$

түпламлар мос равища доира ҳамда очиқ доира деб аталади. Бунда a нүкта доира маркази, r эса доира радиуси дейилади. Ушбу

$$\{(x_1, x_2) \in R^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2\}$$

түплам айланада дейилади. Бу айланада (12.3) ва (12.4) доираларнинг чегараси бўлади.

(Ихтиёрий түпламнинг чегараси таърифини кейинроқ келтирамиз.)

(12.3) түпламнинг геометрик тасвири 2-чизмада ифодаланган.

(12.3) түпламда (доирада) чегараси шу түпламга тегишли бўлади, (12.4) түпламда эса (очиқ доирада) чегараси (12.4) түпламга тегишли бўлмайди.

Очиқ доира ҳамда бу доира чегарасининг баъзи бир нүкталаридан иборат бўлган түпламларни тузиб ҳам қараш мумкин. Масалан, 3-чизмада очиқ доира ҳамда унинг чегарасининг юқори ярим текисликда жойлашган нүкталаридан иборат түплам келтирилган.

Масофа таърифидан фойдаланиб, доира ҳамда очиқ доираларни мос равища қўйидаги

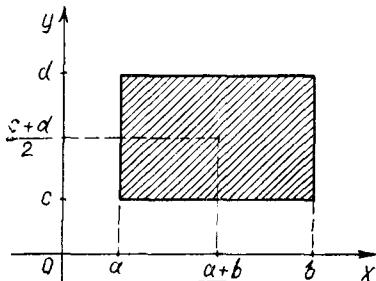
$$\{x \in R^2 : \rho(x, a) \leq r\}, \quad (12.3') \quad \{x \in R^2 : \rho(x, a) < r\} \quad (12.4')$$

түпламлар деб ҳам қараш мумкин.

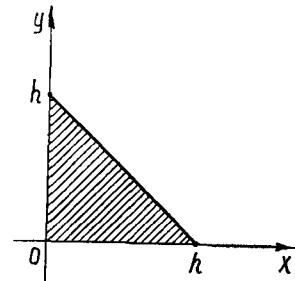
a, b, c, d — ҳақиқий сонлар ва $a < b, c < d$ бўлсин. Қўйидаги

$$\{(x_1, x_2) \in R^2 : a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d\}, \quad (12.5)$$

$$\{(x_1, x_2) \in R^2 : a < x_1 < b, c < x_2 < d\} \quad (12.6)$$



4- чизма



5- чизма

түплемлар, мос равища түртбұрчак ҳамда очиқ түрғи түртбұрчак деб аталади. Бу (12.5) түплем 4-чизмада Oxy текисликтеги штрихланган соңа сифатыда тасвирланган.

Ушбу $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \in R^2$ нүкта (12.5) ва (12.6) түрғи түртбұрчакларнинг марказы дейилади.

R^2 фазонинг ушбу

$$\{(x_1, x_2) \in R^2: x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq h\} \quad (12.7)$$

нүкталаридан иборат түплем (икки ўлчовли) симплекс деб аталади, бунда h — мусбат сон. Симплекс (simplex) латинча сөз бўлиб, у содда деган маънони англатади. (12.7) түплемнинг геометрик тасвири 5-чизмада ифодаланган.

Энди R^3 фазо тушунчаси билан танишамиз. R^3 фазо ҳам юқоридағи R^2 фазо қаби таърифланади. Иккита түплемнинг Декарт кўпайтмаси қаби ихтиёрий учта A, B, C түплемнинг ҳам Декарт кўпайтмаси тушунчаси киритилади. Хусусан $A = B = C = R$ бўлганда

$$A \times B \times C = R \times R \times R = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 \in R, x_2 \in R, x_3 \in R\}$$

бўлади.

Ушбу

$$\{(x_1, x_2, x_3): x_1 \in R, x_2 \in R, x_3 \in R\}$$

түплем R^3 түплем деб аталади.

R^3 түплемнинг элементи (x_1, x_2, x_3) учлик шу түплем нүктаси дейилади ва уни, одатда битта ҳарф, масалан, x орқали белгиланади: $x = (x_1, x_2, x_3)$. Бунда x_1, x_2 ва x_3 сонлар x нүктанинг мос равища биринчи, иккинчи ва учинчи координаталари дейилади.

Фазода түрғи бурчакли $Oxyz$ Декарт координаталар системасини олайлик. Ox ўқда x_1 ўзгарувчининг қийматлари, Oy ўқда x_2 ўзгарувчининг қийматлари ва Oz ўқда x_3 ўзгарувчининг қийматлари жойлашган бўлсин. У ҳолда (x_1, x_2, x_3) учлик фазода координаталари x_1, x_2 ва x_3 бўлган M нүктани ифодалайди (6-чизма).

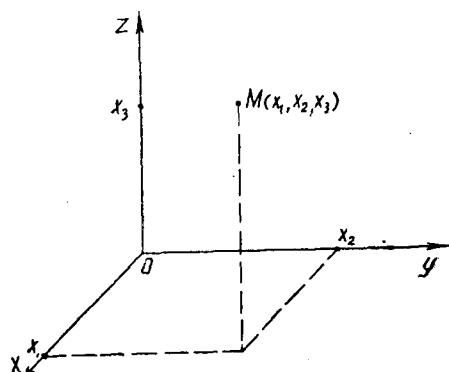
R^3 түплемда ихтиёрий $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ нүкталарни олайлик. Ушбу

$$\rho(x, y) =$$

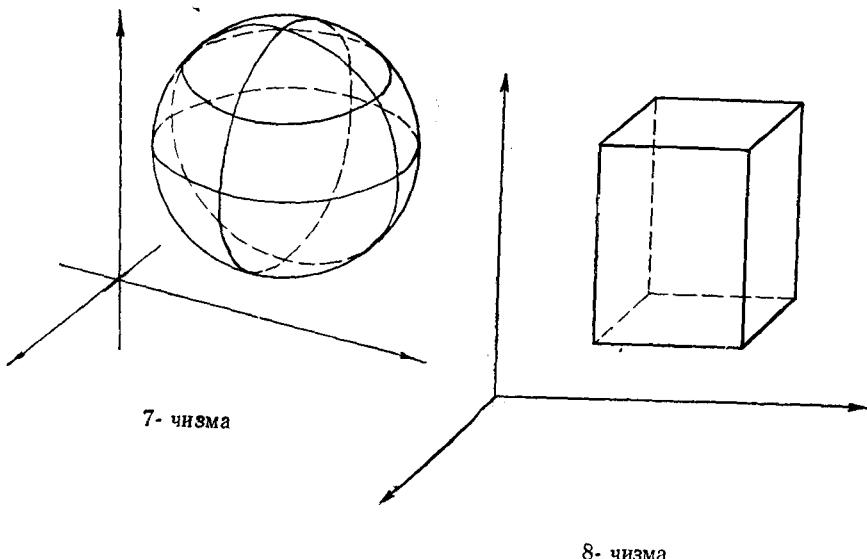
$$= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$$

миқдор x ва y нүкталар орасидаги масофа деб аталади. Шу тарзда аниқланган масофа қўйидаги хоссаларга эга (бунда $\forall x, y, z \in R^3$):

$$1^\circ. \rho(x, y) \geq 0 \text{ ва } \rho(x, y) = 0 \iff x = y^*.$$



*Агар $x = (x_1, x_2, x_3)$ ва $y = (y_1, y_2, y_3)$ нүкталар учун $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$ бўлса, у ҳолда $x = y$ деб агалади.



$$2^\circ. \rho(x, y) = \rho(y, x).$$

$$3^\circ. \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Бу хоссаларнинг исботи 2-пунктда (умумий ҳолда) келтирилади.

Юқорида келтирилган R^3 тўплам R^3 фазо (уч ўлчовли Евклид фазоси) деб аталади.

Энди R^3 фазонинг муҳим тўпламларини келтирамиз.

R^3 фазонинг $a = (a_1, a_2, a_3)$ нуқтасини ҳамда мусбат r сонни олайлик. Қўйидаги

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 \leq r^2\}, \quad (12.8)$$

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 < r^2\} \quad (12.9)$$

тўпламлар мос равишда шар ҳамда очиқ шар деб аталади. Бунда a нуқта шар маркази, r эса шар радиуси дейилади. Ушбу

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = r^2\}$$

тўплам сфера дейилади. Бу сфера (12.8), (12.9) шарларнинг чегараси бўлади.

Юқорида келтирилган (12.8) тўпламнинг геометрик тасвири 7-чизмада ифодаланган.

Демак, (12.8) тўпламда (шарда) шар чегараси шу тўпламга тегишли бўлади, (12.9) тўпламда эса (очиқ шарда) шар чегараси (12.9) тўпламга тегишли бўлмайди.

R^3 фазодаги масофа тушунчгисидан фойдаланиб, шар ва очиқ шарларни мос равишда ушбу

$$\{x \in R^3 : \rho(x, a) \leq r\}, \quad (12.8') \quad \{x \in R^3 : \rho(x, a) < r\} \quad (12.9')$$

тўпламлар сифатида ҳам аниқлаш мумкин.

Ушбу

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d, l \leq x_3 \leq s\},$$

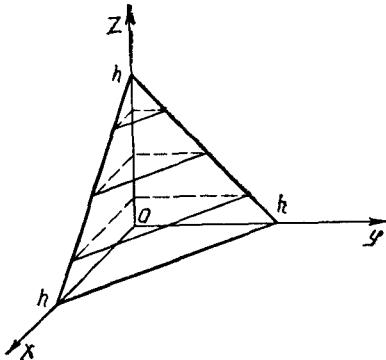
$$\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : a < x_1 < b, c < x_2 < d, l < x_3 < s\}$$

түпламлар (бунда a, b, c, d, l, s — ҳақиқий сонлар) мөс равиша *параллелепипед* ҳамда очык *параллелепипед* деб аталади. Юқорида көлтирилган параллелепипед 8-чизмада тасвирланган.

Ушбу

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq h\}$$

9- чизма



түплам *симплекс* (уч үйчөвли симплекс) дейилади, бунда $h > 0$ — ўзгартуши сон. Бу түплам 9-чизмада тасвирланган.

2. R^m фазо. m та A_1, A_2, \dots, A_m түпламларнинг Декарт кўпайтмаси иккита A ва B түпламларнинг Декарт кўпайтмасига ўхшаш таърифланади. Агар $A_1 = A_2 = \dots = A_m = R$ бўлса, у ҳолда

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m = R \times R \times \dots \times R = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1 \in R, x_2 \in R, \dots, x_m \in R\}$$

бўлади. Ушбу

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1 \in R, x_2 \in R, \dots, x_m \in R\}$$

түплам R_m түплам деб аталади. R^m түпламнинг элементли (x_1, x_2, \dots, x_m) шу түплам нуқтаси дейилади ва у одатда битта ҳароф билан белгиланади: $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Бунда x_1, x_2, \dots, x_m сонлар x нуқтанинг мөс равиша *биринчи, иккинчи, ..., m-координаталари* дейилади.

R^m түпламда иктиёрий $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ нуқтадарни олайлик.

Ушбу

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i - x_i)^2} \end{aligned} \tag{12.10}$$

миқдор x ва y нуқталар орасидаги *масофа* деб аталади. Бундай аникланган масофа қуйидаги хоссаларга эга (бунда $\forall x, y, z \in R^m$):

1°. $\rho(x, y) \geq 0$ ва $\rho(x, y) = 0 \iff x = y^*$.

2°. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

3°. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

*Агар $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in R^m$ нуқталар учун $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_m = y_m$ бўлса, у ҳолда $x = y$ деб аталади.

Бу хоссаларни исботлайлиқ. (12.10) муносабатдан $\rho(x, y)$ миқдорнинг ҳар доим манфий эмаслигини кўрамиз. Агар $\rho(x, y) = 0$ бўлса, унда $y_1 - x_1 = 0, y_2 - x_2 = 0, \dots, y_m - x_m = 0$ бўлиб, $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_m = y_m$, яъни $x = y$ бўлади. Аксинча $x = y$, яъни $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_m = y_m$ бўлса, у ҳолда яна (12.10) дан $\rho(x, y) = 0$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса 1° -хоссани исботлайди. (12.10) муносабатдан

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2} = \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2} = \rho(y, x)\end{aligned}$$

бўлади.

Масофанинг 3° -хоссаси ушбу

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2} \quad (12.11)$$

тengsizlikka асосланиб исботланади, бунда $a_1, a_2, \dots, a_m; b_1, b_2, \dots, b_m$ — ихтиёрий ҳақиқий сонлар. Аввало шу tengsizlikning тўғрилигини кўрсатайлиқ. Равшанки, $\forall x \in R$ учун

$$\sum_{i=1}^m (a_i x + b_i)^2 \geq 0.$$

Бундан x га нисбатан квадрат учҳаднинг манфий эмаслиги

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i^2 \right) x^2 + \left(2 \sum_{i=1}^m a_i b_i \right) x + \sum_{i=1}^m b_i^2 \geq 0$$

келиб чиқади. Демак, бу квадрат учҳад иккита турли ҳақиқий илдизга эга бўлмайди. Бинобарин, унинг дискриминанти

$$-\sum_{i=1}^m a_i^2 \sum_{i=1}^m b_i^2 + \left[\sum_{i=1}^m a_i b_i \right]^2 \leq 0$$

бўлиши керак. Бундан эса

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}$$

бўлиб,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m a_i^2 + \sum_{i=1}^m b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^m a_i b_i &\leq \left[\sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} \right]^2 + \\ &+ \left[\sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2} \right]^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}\end{aligned}$$

бўлади. Кейинги tengsizlikdan эса

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2} \quad (12.11)$$

бўлиши келиб чиқади. Одатда (12.11) тенгсизлик Коши — Буняковский тенгсизлиги деб аталади.

Ихтиёрий $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in R^m$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_m) \in R^m$ нуқталарни олиб, улар орасидаги масофани (12.10) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i - x_i)^2}, \\ \rho(y, z) &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (z_i - y_i)^2}, \\ \rho(x, z) &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (z_i - x_i)^2}.\end{aligned}\quad (12.12)$$

Энди Коши — Буняковский тенгсизлиги (12.11) да

$$a_i = y_i - x_i, \quad b_i = z_i - y_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

деб олсак, унда

$$a_i + b_i = z_i - x_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

бўлиб,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (z_i - x_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i - x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m (z_i - y_i)^2}$$

бўлади. Юқоридаги (12.12) муносабатларни эътиборга олиб, топамиз:

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Бу эса 3° -хоссани исботлайди. Одатда 3° -хосса билан ифодаланадиган тенгсизлик учбуручак тенгсизлиги (учбуручак бир томонининг узунлиги қолган икки томон узунлклари йиғиндисидан катта эмаслигини эътиборга олиб) деб юритилади*.

R^m тўплам R^m фазо (*тўчловли Евклид фазоси*) деб аталади. Энди R^m фазонинг баъзи бир муҳим тўпламларини келтирамиз.

Бирор $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m$ нуқта ва $r > 0$ сонни олайлик. Кўйидаги

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m: (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2 \leq r^2\}, \quad (12.13)$$

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m: (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2 < r^2\}, \quad (12.14)$$

яъни

$$\{x \in R^m: \rho(x, a) \leq r\}, \quad (12.13')$$

$$\{x \in R^m: \rho(x, a) < r\} \quad (12.14')$$

* R^m фазонинг ихтиёрий иккита x, y ($x \in R^m, y \in R^m$) нуқталари учун $1^\circ — 3^\circ$ -шартларни қаноатлантирувчи функцияларни кўплаб топиш мумкин, яъни x, y нуқталар орасида «масофа» тушунчасини турлича киритиш мумкин (бу ҳақда 14-боб, 1-§ га қаранг).

түпламлар мос равища шар ҳамда очиқ шар деб аталади. Бунда a нүкта шар *маркази*, r эса шар радиуси дейилади.

Ушбу

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_m - a_n)^2 = r^2\},$$

яъни

$$\{x \in R^m : \rho(x, a) = r\}$$

түплам *сфера* деб аталади. Бу сфера (12.13) ва (12.14) түпламларнинг чегараси бўлади.

Ушбу $\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^n : a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2, \dots,$

$$\begin{aligned} & a_m \leq x_m \leq b_m\}, \\ & \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^n : a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2, \dots, \\ & a_m < x_m < b_m\} \end{aligned}$$

түпламлар (бунда $a_1, a_2, \dots, a_m; b_1, b_2, \dots, b_m$ — ҳақиқий сонлар) мос равища *параллелепипед* ҳамда очиқ *параллелепипед* деб аталади.

Ушбу

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^n : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_m \leq h\}$$

түплам *симплекс* (*m*-ўлчовли симплекс) деб аталади, бунда h — мусбат сон.

Юқорида келтирилган түпламлар тез-тез ишлатилиб турилади. Улар ёрдамида муҳим тушунчалар, жумладан атроф тушунчаси таърифланади.

3. R^m фазода очиқ ва ёпиқ түпламлар. Бирор $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүкта ҳамда $\varepsilon > 0$ сонни олайлик.

12.2-тага таъриф. Маркази x^0 нүктада, радиуси ε га тенг бўлган очиқ шар x^0 нүктанинг *сферик атрофи* (ε -атрофи) дейилади ва $U_\varepsilon(x^0)$ каби белгиланади:

$$U_\varepsilon(x^0) = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < \varepsilon\}. \quad (12.15)$$

Нүктанинг бошқача атрофи тушунчасини ҳам киритиш мумкин.

12.3-тага таъриф. Ушбу

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\} \quad (12.16)$$

очиқ параллелепипед x^0 нүктанинг *параллелепипедиал атрофи* деб аталади ва $\widetilde{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0)$ каби белгиланади.

Хусусан $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_m = \delta$ бўлса, (12.16) очиқ параллелепипед очиқ кубга айланади ва уни $\widetilde{U}_\delta(x^0)$ каби белгиланади.

Шундай қилиб, R^m фазода нүктанинг икки хил атрофига таъриф берилди.

12.1-лемма. $x^0 \in R^m$ нүктанинг ҳар қандай $U_\varepsilon(x^0)$ сферик атрофи олинганда ҳам ҳар доим x^0 нүктанинг шундай $\widetilde{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0)$ параллелепипедиал атрофи мавжудки, бунда

$$\widetilde{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0) \subset U_\varepsilon(x^0)$$

бўлади.

Шунингдек, x^0 нүктанинг ҳар қандай $\widetilde{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0)$ параллелепипедиал атрофи олинганда ҳам ҳар доим шу нүктанинг шундай $U_\varepsilon(x^0)$ сферик атрофи мавжудки, бунда

$$U_\varepsilon(x^0) \subset \widetilde{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0)$$

бўлади.

Исбот. $x^0 \in R^m$ нүктанинг сферик атрофи

$$U_\varepsilon(x^0) = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < \varepsilon\}$$

берилган бўлсин. Бундаги $\varepsilon > 0$ сонга кўра $\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ тенгсизликни қа-

ноатлантирувчи δ сонни оламиз. Сўнг x^0 нүктанинг ушбу

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_\delta(x^0) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : & x_1^0 - \delta < x_1 < x_1^0 + \delta, \dots, \\ & x_m^0 - \delta < x_m < x_m^0 + \delta\} \end{aligned}$$

параллелепипедиал атрофини тузамиз.

$\forall x \in \widetilde{U}_\delta(x^0)$ бўлсин. Унда $|x_i - x_i^0| < \delta$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) бўлиб,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^m \delta^2} = \delta \sqrt{m}$$

бўлади. Юқоридаги $\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ тенгсизликни эътиборга олиб топамиз:

$$\rho(x, x^0) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2} < \varepsilon.$$

Демак, $\rho(x, x^0) < \varepsilon$. Бу эса $x \in U_\varepsilon(x^0)$ эканини билдиради. Шундай қилиб,

$$\forall x \in \widetilde{U}_\delta(x^0) \Rightarrow x \in U_\varepsilon(x^0),$$

яъни

$$\widetilde{U}_\delta(x^0) \subset U_\varepsilon(x^0)$$

бўлади.

$x^0 \in R^m$ нуқтанинг

$$\tilde{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m: x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$$

параллелепипедиал атрофи берилган бўлсин. Унда

$$\varepsilon = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$$

ни олиб, x^0 нуқтанинг сферик атрофи

$$U_\varepsilon(x^0) = \{x \in R^m: \rho(x, x^0) < \varepsilon\}$$

ни тузамиз.

$\forall x \in U_\varepsilon(x^0)$ бўлсин. У ҳолда

$$\rho(x, x^0) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2} < \varepsilon \leq \delta_i, (i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

бўлади. Демак,

$$|x_i - x_i^0| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2} < \delta_i, (i = 1, 2, 3, \dots, m).$$

Бундан эса $x \in \tilde{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0)$ бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$\forall x \in U(x^0) \Rightarrow x \in \tilde{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0),$$

яъни

$$U_\varepsilon(x^0) \subset \tilde{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0)$$

бўлади. Лемма исбот бўлди.

R^m фазода бирор G тўплам берилган бўлсин: $G \subset R^m$. Агар $x^0 \in G$ нуқтанинг шундай бирор ε -атрофи $U_\varepsilon(x^0)$ мавжуд бўлсаки, бу атрофинг барча нуқталари шу G тўпламга тегишли бўлса ($U_\varepsilon(x^0) \subset G$), у ҳолда x^0 нуқта G тўпламнинг ички нуқтаси деб аталади.

Мисоллар. 1. Очиқ шар

$$A = \{x \in R^m: \rho(x, a) < r\}$$

ининг барча нуқталари унинг ички нуқтаси бўлди. Буни исботлайлик. $\forall x^0 \in A$ нуқтани олиб, ушбу $\delta = r - \rho(x^0, a)$ тенглик билан аниҳланадиган δ сонини оламиз. Равшанки, $\delta > 0$ бўлади. Маркази x^0 нуқтада, радиуси δ бўлган

$$U_\delta(x^0) = \{x \in R^m: \rho(x, x^0) < \delta\}$$

очиқ шар x^0 нуқтанинг сферик атрофи бўлиб, юқоридаги A тўпламнинг қисми бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $\forall x \in U_\delta(x^0) \Rightarrow \rho(x, x^0) < \delta$ бўлиб, масофанинг 3° -хосасига кўра

$$\rho(x, a) \leq \rho(x, x^0) + \rho(x^0, a) < \delta + \rho(a, x^0) = r$$

бўлади. Демак, $\forall x \in U_\delta(x^0) \Rightarrow x \in A$. Бу эса $U_\delta(x^0) \subset A$ эканлигини билдиради. Бундан A очиқ шарнинг ҳар бир нуқтаси ички нуқта эканлиги келиб чиқади.

2. Ушбу

$C = A \cup \{(r, 0, 0, \dots, 0), (0, r, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 0, r)\}$ түпламнинг нуқталари орасида унинг ички нуқтаси бўлмаган нуқталар бор. Масалан, $(r, 0, 0, \dots, 0) \in C$ нуқтанинг ихтиёрий $U_\varepsilon((r, 0, 0, \dots, 0))$ ($\varepsilon > 0$) сферик атрофини олганимизда ҳам, унга тегишли бўлган $(r + \frac{\varepsilon}{2}, 0, 0, \dots, 0)$ нуқта C тўпламга тегишли бўлмайди.

12.4-таъриф. G тўпламнинг ҳар бир нуқтаси унинг ички нуқтаси бўлса, бундай тўплам очиқ тўплам деб аталади.

Масалан, очиқ шар очиқ тўплам бўлади.

R^m фазода бирор F тўплам ва бирор x^0 нуқта берилган бўлсин: $F \subset R^m$, $x^0 \in R^m$.

12.5-таъриф. Агар x^0 нуқтанинг исталган сферик атрофи $U_\varepsilon(x^0)$ да F тўпламнинг x^0 дан фарқли камида битта нуқтаси топилса, x^0 нуқта F тўпламнинг лимит нуқтаси деб аталади.

Ушбу $R^m - \{x \in R^m: \rho(0, x) \leq \varepsilon\}$ очиқ тўплам «нуқта» нинг атрофи дейилади ($0 = (0, 0, \dots, 0)$).

Қаралаётган x^0 нуқтанинг ўзи F га тегишли бўлиши ҳам, тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин (қўйидаги 1-мисолга қаранг).

F тўпламнинг барча лимит нуқталаридан ташкил топган тўплам F тўпламнинг ҳосилавий тўплами дейилади ва F' каби белгиланади.

Ушбу $F \cup F'$ тўплам F тўпламнинг ёнилмаси дейилади ва у \bar{F} каби белгиланади:

$$\bar{F} = F \cup F'.$$

Мисоллар. 1. Қўйидаги

$$A = \{x \in R^m: \rho(x, x^0) < r\}$$

очиқ шарни қарайлик. Бу тўплам учун шу тўпламнинг барча нуқталари ҳамда ушбу $\{x \in R^m: \rho(x, x^0) = r\}$

сферанинг ҳамма нуқталари лимит нуқта бўлади. Демак, A нинг ҳосилавий тўплами $A' = \{x \in R^m: \rho(x, x^0) \leq r\}$,

A нинг ёнилмаси $\bar{A} = A \cup A' = A'$ бўлади.

2. Шар

$$E = \{x \in R^m: \rho(x, x^0) \leq r\}$$

нинг барча нуқталари шу тўпламнинг лимит нуқталаридир. Бунда

$$E' = E, \quad \bar{E} = E$$

бўлади.

12.6-таъриф. $F \subset R^m$ тўпламнинг барча лимит нуқталари шу тўпламга тегишли бўлса, F ёниқ тўплам деб аталади.

Бу ҳолда $F' \subset F$, $F \cup F' \Rightarrow \bar{F} = F$.

Шар

$$E = \{x \in R^m: \rho(x, x^0) \leq r\}$$

ёниқ тўплам бўлади, чунки $E = \bar{E}$.

Бирор $M \subset R^m$ түпламни қарайлык. Равшанки, $R^m \setminus M$ айирма M түпламни R^m түпламга тұлдирувчи түплам бўлади (қаралсın 1-қисм, 1-боб, 1-§).

12.7-таъриф. Агар $x^0 (x^0 \in R^m)$ нуқтанинг исталган $U_{\epsilon} (x^0)$ атрофида ҳам M түпламнинг, ҳам $R^m \setminus M$ түпламнинг нуқталари бўлса, x^0 нуқта M түпламнинг чегаравий нуқтаси деб аталади. M түпламнинг барча чегаравий нуқталаридан иборат түплам M түпламнинг чегараси дейилади ва уни одатда $\partial(M)$ каби белгиланади.

Бу тушунча ёрдамида ёпиқ түпламни қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

12.8-таъриф. Агар $F (F \subset R^m)$ түпламнинг чегараси шу түпламга тегишили, яъни $\partial(F) \subset F$ бўлса, F ёпиқ түплам деб аталади.

Юқорида келтирилган ёпиқ түпламнинг 12.6- ва 12.8-таърифлари эквивалент таърифлардир.

Бирор $M \subset R^m$ түплам берилган бўлсин.

12.9-таъриф. Агар R^m фазода шундай шар

$$U^0 = \{x \in R^m : \rho(x, 0) < r\}, \quad (0 = (0, 0, \dots, 0))$$

топилсаки, $M \subset U^0$ бўлса, у ҳолда M чегараланган түплам деб аталади.

Маълумки, бирор $E \subset R$ түплам берилган бўлиб, шундай ўзгармас r сони топилсаки, $\forall x \in E$ учун $|x| < r$, яъни E түпламнинг барча элементлари $(-r, r)$ интервалда жойлашса, E чегараланган түплам деб аталар эди. Юқорида келтирилган таъриф $m = 1$ бўлганда худди шу таърифнинг ўзи бўлади.

R^m фазодаги шар, параллелепипед, симплекслар чегараланган түпламлардир.

Ушбу

$$D_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0\}$$

түплам чегараланмаган түплам бўлади, чунки R^m да ҳар қандай

$$U^0 = \{x \in R^m : \rho(x, 0) < r\}$$

шар олинганда ҳам ҳар доим D түпламда шундай нуқта, масалан, $(a_1, 0, 0, \dots, 0)$ нуқта ($a_1 > r$) топиладики, бу нуқта U^0 түпламга тегишили бўлмайди.

Маълумки

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t), \\ y = y(t) \end{array} \right\} \quad (a \leq t \leq b), \quad (12.17)$$

яъни $\{x(t), y(t)\}$ система (түплам) R^2 фазода,

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{array} \right\} \quad (a \leq t \leq b), \quad (12.18)$$

яъни $\{x(t), y(t), z(t)\}$ система (түплам) R^3 фазода эгри чизиқни ифодалар эди, бунда $x(t), y(t)$ ҳамда $z(t) - [a, b]$ сегментда узлуксиз функциялар. Хусусан, $x = \alpha_1 t + \beta_1$, $y = \alpha_2 t + \beta_2$, $z = \alpha_3 t + \beta_3$ ($-\infty < t < +\infty$), $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3$ — ҳақиқий сонлар за α_1 ,

α_2, α_3 ларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси нолга тенг эмас) бўлганда (12.17) ва (12.18) система мос равища R^2 ва R^3 фазоларда тўғри чизиқлар бўлади. Ана шу тушунчаларга ўхшаш, R^m фазода ҳам эгри чизиқ ҳамда тўғри чизиқ тушунчалари киритилади.

Фараз қиласайлик, $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин.

Ушбу

$$\{(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))\} (a \leq t \leq b) \quad (12.19)$$

система ёки нуқталар тўплами R^m фазода эгри чизиқ деб аталади. Xусусан, $x_1 = \alpha_1 t + \beta_1, x_2 = \alpha_2 t + \beta_2, \dots, x_m = \alpha_m t + \beta_m (-\infty < t < +\infty, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ – ҳақиқий сонлар ва $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси нолга тенг эмас) бўлганда (12.19) система R^m фазода тўғри чизиқ дейилади. R^m фазода ихтиёрий иккита $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ ва $x'' = (x''_1, x''_2, \dots, x''_m)$ нуқтани олайлик. Бу нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ қуйидаги

$$\{(x'_1 + t(x''_1 - x'_1), x'_2 + t(x''_2 - x'_2), \dots, x'_m + t(x''_m - x'_m))\} \\ (-\infty < t < +\infty) \quad (12.20)$$

система билан ифодаланади. Бунда $t = 0$ ва $t = 1$ бўлганда R^m фазонинг мос равища x' ва x'' нуқталари ҳосил бўлиб, $0 \leq t \leq 1$ бўлганда (12.20) система R^m фазода x' ва x'' нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси бўлади.

R^m фазода чекли сондаги тўғри чизиқ кесмаларини бирин-кетин бирлаштиришдан ташкил топган чизиқ синиқ чизиқ деб аталади.

$M \subset R^m$ тўплам берилган бўлсин.

12.10-та ўриф. Агар M тўпламнинг ихтиёрий икки нуқтасини бирлаштирувчи шундай синиқ чизиқ топилсанки, у M тўпламга тегишли бўлса, M боғламли тўплам деб аталади.

Мисоллар 1. R^m фазодаги параллелепипед, шар, симплекслар боғламли тўпламлар бўлади.

2. R^m фазонинг иккита x' ва x'' нуқталаридан ташкил топган $\{x', x''\}$ тўплам ($\{x', x''\} \subset R^m$) боғламли тўплам бўлмайди, чунки бу нуқталарни бирлаштирувчи синиқ чизиқ $\{x', x''\}$ тўпламга тегишли эмас.

12.11-та ўриф. Агар $M \subset R^m$ тўплам очиқ ҳамда боғламли тўплам бўлса, у соҳа деб аталади.

R^m фазодаги очиқ параллелепипед, очиқ шар, очиқ симплекслар R^m фазодаги соҳалар бўлади.

2- §. R^m фазода кетма-кетлик ва унинг лимити

Натурал сонлар тўплами N ва R^m фазо берилган бўлиб, f ҳар бир $n (n \in N)$ га R^m фазонинг бирор миайян $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \in R^m$ нуқтасини мос қўювчи акслантириш бўлсин:

$$f: N \rightarrow R^m \text{ ёки } n \rightarrow x^{(n)} \quad (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}).$$

Бу акслантиришни қўйидагида тасвирилаш мумкин:

$$1 \rightarrow x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}),$$

$$2 \rightarrow x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_m^{(2)}),$$

$$3 \rightarrow x^{(3)} = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, \dots, x_m^{(3)}),$$

· · · · · · · · · ·

$$n \rightarrow x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}).$$

· · · · · · · · · ·

$f : N \rightarrow R^m$ акслантиришнинг тасвирилари (образлари) дан тузилган

$$x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}, \dots \quad (12.21)$$

тўплам кетма-кетлик деб аталади ва у $\{x^{(n)}\}$ каби белгиланади. Ҳар бир $x^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) ни кетма-кетликнинг ҳади дейилади. Демак, (12. 21) кетма-кетлик ҳадлари R^m фазо нуқталаридан иборат.

Шуни таъкидлаш керакки, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг мос координаталаридан тузилган $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ лар сонли кетма-кетликлар бўлиб, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликни шу m та кетма-кетликнинг (маълум тартибдаги) биргаликда қаралиши деб ҳисоблаш мумкин.

Кетма-кетликларга мисоллар келтирайлик.

$$1. x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) : (1, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \dots$$

$$2. x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, 0 \right) : (1, 0), \left(\frac{1}{2}, 0 \right), \left(\frac{1}{3}, 0 \right), \dots$$

$$3. x^{(n)} = \left(0, \frac{1}{n} \right) : (0, 1), \left(0, \frac{1}{2} \right), \left(0, \frac{1}{3} \right), \dots$$

$$4. x^{(n)} = ((-1)^{n+1}, (-1)^{n+1}) : (1, 1), (-1, -1), (1, 1), \dots$$

$$5. x^{(n)} = (1, n) : (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots$$

Бу келтирилган кетма-кетликлар R^2 фазо нуқталаридан ташкил топган кетма-кетликлардир.

1. Кетма-кетликнинг лимити. Энди (12. 21) кетма-кетликнинг лимити тушунчасини киритамиз. R^m фазода кетма-кетликнинг лимити тушунчаси ҳақиқий сонлар кетма-кетлигининг лимити тушунчасига ўхшаши киритилади.

R^m фазода бирор

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots \quad (12.21)$$

кетма-кетлик ҳамда $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m$ нуқта берилган бўлсин.

12.12-та ёриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ то-пилсаки, барча $n > n_0$ учун

$$\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon \quad (12.22)$$

тengсизлик бажарилса, a нүкта $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \text{ ёки } n \rightarrow \infty \text{ да } x^{(n)} \rightarrow a$$

каби белгиланади.

1-§ да келтирилган a нүктанинг ε -атрофи таърифини эътиборга олиб, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг лимитини қўйидагида ҳам таърифласа бўлади.

12.13-таъриф. Агар a нүктанинг ихтиёрий $U_\varepsilon(a)$ атрофи олингандан ҳам, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб, кейинги барча ҳадлари шу атрофга тегишли бўлса, a $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади.

Агар (12.21) кетма-кетлик лимитга эга бўлса, у яқинлашувчи кетма-кетлик деб аталади.

Лимит таърифидаги шартни қаноатлантирувчи a мавжуд бўлмаса, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас дейилади, кетма-кетликнинг ўзи эса узоклашувчи деб аталади.

Шунга эътибор бериш керакки, кетма-кетликнинг лимити таърифидаги ε ихтиёрий мусбат сон бўлиб, изланаётган n_0 ($n_0 \in N$) эса шу ε га (ва, табийки, қаралаётган кетма-кетликка) боғлиқ равишда топилади.

Мисоллар. 1. R^m фазода ушбу $\{x^{(n)}\} = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right\}$ кетма-кетликнинг лимити $a = (0, 0, \dots, 0)$ бўлиши кўрсагилсан. $\forall \varepsilon > 0$ сонни олайлик. Шу ε га кўра $n_0 = \left[\frac{\sqrt{m}}{\varepsilon} \right] + 1$ ни топамиз. Натижада барча $n > n_0$ учун

$$\rho(x^{(n)}, a) = \rho\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right), (0, 0, \dots, 0)\right) = \frac{\sqrt{m}}{n} < \frac{\sqrt{m}}{n_0} = \frac{\sqrt{m}}{\left[\frac{\sqrt{m}}{\varepsilon}\right] + 1} < \varepsilon$$

бўлади. Демак, таърифга кўра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) = (0, 0, \dots, 0) = a$$

бўлади.

2. Қўйидаги $\{x^{(n)}\} = \{((-1)^{n+1}, (-1)^{n+1})\}$:

$$(1, 1), (-1, -1), (1, 1), (-1, -1), \dots$$

кетма-кетликнинг лимити мавжуд эмаслиги кўрсатилисан. Тескарисини фараз қиласлик, яъни берилган кетма-кетлик лимитга эга ва у $a = (a_1, a_2)$ га тенг бўлсан. Лимит таърифига кўра $\forall \varepsilon > 0$, жумладан $\varepsilon = 1$ учун шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$\rho((1, 1), (a_1, a_2)) < \varepsilon, \quad \rho((-1, -1), (a_1, a_2)) < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса ушбу

$$2\sqrt{2} = \rho((-1, -1), (1, 1)) \leqslant \rho((-1, -1), (a_1, a_2)) + \rho((a_1, a_2), (1, 1)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = 2$$

зиддиятга олиб келади. Бунга сабаб қаралаётган кетма-кетликнинг лимитга эга деийлишидир. Демак, берилган кетма-кетлик лимитга эга эмас.

R^m фазода $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик берилган бўлиб, у $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ лимитга эга бўлсин. У ҳолда лимит таърифига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ берилганда ҳам, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг бирор n_0 -ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари a нуқтанинг

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) < \varepsilon\}$$

сферик атрофига тегишли бўлади. Бу сферик атроф ушбу бобнинг 1-§ даги 12.1-леммага мувофиқ шу a нуқтанинг $\widetilde{U}_\varepsilon(a)$ паралелепипедиал атрофининг қисми бўлади:

$$U_\varepsilon(a) \subset \widetilde{U}_\varepsilon(a).$$

Демак, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг ўша n_0 -ҳадидан бошлаб, кейинги барча ҳадлари a нуқтанинг $\widetilde{U}_\varepsilon(a)$ атрофида ётади, яъни барча $n > n_0$ учун

$$\begin{aligned} x^{(n)} \in \widetilde{U}_\varepsilon(a) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : a_1 - \varepsilon < x_1 < a_1 + \\ + \varepsilon, \dots, a_m - \varepsilon < x_m < a_m + \varepsilon\} \end{aligned}$$

бўлади. Бундан эса, барча $n > n_0$ учун

$$\begin{aligned} a_1 - \varepsilon &< x_1^{(n)} < a_1 + \varepsilon, \\ a_2 - \varepsilon &< x_2^{(n)} < a_2 + \varepsilon, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ a_m - \varepsilon &< x_m^{(n)} < a_m + \varepsilon \end{aligned}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олингандан ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$|x_1^{(n)} - a_1| < \varepsilon, |x_2^{(n)} - a_2| < \varepsilon, \dots, |x_m^{(n)} - a_m| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} &= a_1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} &= a_2, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} &= a_m \end{aligned}$$

еканлигини билдиради.

Шундай қилиб, R^m фазода $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетликнинг лимити $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ бўлса, у ҳолда бу кетма-кетликнинг координаталаридан ташкил топган сонлар кетма-кетликлари $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ ҳам лимитга эга бўлиб, улар мос равишда a нуқтанинг a_1, a_2, \dots, a_m координаталарига тенг.

Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = a_1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = a_2, \\ \dots \dots \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} = a_m. \end{cases} \quad (12.23)$$

Энди^c R^m фазода кетма-кетликнинг координаталаридан ташкил топганъ $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ сонлар кетма-кетликлари лимитга эга бўлиб, уларнинг лимитлари мос равища $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m$ нуқта координаталари a_1, a_2, \dots, a_m ларга тенг бўлсин:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} &= a_1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} &= a_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} &= a_m. \end{aligned}$$

Лимит таърифига асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ га кўра шундай $n_0^{(1)} \in N$ топиладики, барча $n > n_0^{(1)}$ учун

$$|x_1^{(n)} - a_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},$$

шундай $n_0^{(2)} \in N$ топиладики, барча $n > n_0^{(2)}$ учун

$$|x_2^{(n)} - a_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},$$

ва ҳоказо, шундай $n_0^{(m)} \in N$ топиладики, барча $n > n_0^{(m)}$ учун

$$|x_m^{(n)} - a_m| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

бўлади. Агар $n_0 = \max \{n_0^{(1)}, n_0^{(2)}, \dots, n_0^{(m)}\}$ деб олсак, унда барча $n > n_0$ учун бир йўла

$$|x_i^{(n)} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

тенгсизликлар бажарилади. У ҳолда

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i^{(n)} - a_i)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2} = \varepsilon$$

бўлиб, ундан

$$\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon$$

Бўлиши келиб чиқади. Бу эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a$$

эканини билдиради.

Демак, $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик координаталаридан ташкил топган $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ сонлар кетма-кетликларининг лимитлари мос равишда $a_1 = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ нуқта координаталари a_1, a_2, \dots, a_m ларга тенг бўлса, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг лимити юқоридаги таъриф маъносида шу a нуқта бўлади:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = a_1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = a_2, \\ \dots \dots \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} = a_m \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a. \quad (12.24)$$

Юқоридаги (12.23) ва (12.24) муносабатлардан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = a_1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = a_2, \\ \dots \dots \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} = a_m \end{array} \right.$$

эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб қўйидаги теоремага келамиз:

12.1-төрима. R^m фазода $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетликнинг $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m$ га интилиши

$$x^{(n)} \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty \partial a)$$

учун $n \rightarrow \infty$ да бир йўла

$$\begin{aligned} x_1^{(n)} &\rightarrow a_1, \\ x_2^{(n)} &\rightarrow a_2, \\ &\dots \dots \\ x_m^{(n)} &\rightarrow a_m \end{aligned}$$

бўлиши зарур ва етарли.

Юқоридаги 2-мисолда қаралган $\{((-1)^{n+1}, (-1)^{n+1})\}$ кетма-кетликнинг лимити мавжуд эмаслиги ушбу теоремадан дарров келиб чиқади.

Бу теорема R^m фазода кетма-кетликнинг лимитини ўрганишини ифодалайди. Маълумки, «Математик анализ» курсининг 1-қисм, 3- бобида сонлар кетма-кетлиги ва унинг лимити батафсил ўрганилган. Шуни

Эътиборга олиб, биз қўйида R^m фазода кетма-кетликлар лимитлари назариясининг баёнида асосий фактларнигина келтириш, уларнинг айримларинигина исботлаш билан чегараланамиз.

Юқорида исбот этилган теорема ҳамда яқинлашувчи сонлар кетма-кетлигининг хоссаларидан R^m фазода яқинлашувчи кетма-кетликнинг қўйидаги хоссалари келиб чиқади.

R^m фазода $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

1°. Агар $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, унинг лимити ягонадир.

Кейинги хоссани келтиришдан аввал, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг чегараланганлиги тушунчаси билан танишамиз.

Агар $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг барча ҳадларидан тузилган тўплам чегараланган бўлса, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик чегараланган кетма-кетлик деб аталади.

R^m фазода $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлсин. Таърифга кўра (12.9-таъриф) шундай шар $U^0 = \{x \in R^m : \rho(x, 0) < r\}$ топиладики, $\forall n \in N$ учун $x^{(n)} \in U^0$ бўлади. Демак,

$$\rho(x^{(n)}, 0) < r.$$

Кейинги тенгсизликдан эса

$$|x_1^{(n)}| < r, |x_2^{(n)}| < r, \dots, |x_m^{(n)}| < r \quad (\forall n \in N)$$

бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлса, бу кетма-кетликнинг координаталаридан иборат $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири ҳам чегараланган бўлар экан.

Энди $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетликнинг координаталаридан иборат $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири чегараланган бўлсин. Сонлар кетма-кетлигининг чегараланганлиги таърифига кўра (1-қисм, 3-боб, 2-§) шундай C_1, C_2, \dots, C_m ўзгармас сонлар топиладики, $\forall n \in N$ учун

$$|x_1^{(n)}| < C_1,$$

$$|x_2^{(n)}| < C_2,$$

...

$$|x_m^{(n)}| < C_m$$

бўлади. Агар $C = \max \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ деб олсак, $|x_k^{(n)}| < C$ ($k = 1, 2, 3, \dots, m$) бўлиб, ундан $\forall n \in N$ учун

$$\rho(x^{(n)}, 0) < C \sqrt{m}$$

бўлишини топамиз. Бу эса $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг чегараланганлигини билдиради.

Шундай қилиб, $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетликнинг координаталаридан иборат $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бирининг чегараланганлигидан $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг чегараланганлиги келиб чиқар экан.

Натижада қуйидаги теоремага келамиз.

12.2-төрөм. R^m фазода $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетликнинг чегараланган бўлиши учун бу кетма-кетлик координаталаридан иборат $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ сонлар кетма-кетликлари нинг ҳар бирининг чегараланган бўлиши зарур ва етарли.

Масалан, R^2 фазода $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\} (n = 1, 2, \dots)$ кетма-кетлик чегараланган бўлади, чунки бу кетма-кетлик координаталаридан иборат кетма-кетликларнинг ҳар бири чегаралангандир. R^2 фазода $\{(n, n)\} (n = 1, 2, \dots)$ кетма-кетлик чегараланмаган кетма-кетлик.

Юқорида келтирилган $(1, 1), (-1, -1), (1, 1), (-1, -1), \dots$ кетма-кетлик ҳам чегараланган кетма-кетлик бўлади. Бу мисолдан кўринадиги, чегараланган кетма-кетликлар лимитга эга бўлиши ҳам, лимитга эга бўлмаслиги ҳам мумкин экан.

2°. Агар $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у чегараланган бўлади.

Яқинлашувчи кетма-кетликлар устида арифметик амалларни ўрганишдан аввал R^m фазо элементлари устида бажариладиган амалларни келтирамиз.

R^m фазонинг $a = (a_1, a_2, \dots, a_m), b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ нуқтаси a ва b нуқталар йиғиндиси деб аталади ва $a+b$ каби белгиланади: $a+b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m)$.

R^m фазонинг $(\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_m)$ (α – ҳақиқий сон) нуқтаси α ҳақиқий сон билан $a \in R^m$ нуқта кўпайтмаси деб аталади ва αa каби белгиланади: $\alpha a = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_m)$. R^m фазонинг a ва b нуқталари орасидаги айрима $a+(-1) \cdot b$ кўринишда аниқланади ва $a-b$ каби белгиланади: $a-b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_m - b_m)$. Шундай қилиб, R^m фазо нуқталари устида қўшиш, айриш ва R^m фазо нуқтасини ҳақиқий сонга кўпайтириш амаллари киритилди.

R^m фазода иккита $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}, \{y^{(n)}\} = \{(y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Ушбу

$\{(x_1^{(n)} + y_1^{(n)}, x_2^{(n)} + y_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)} + y_m^{(n)})\} (n = 1, 2, 3, \dots)$

кетма-кетлик $\{x^{(n)}\}$ ва $\{y^{(n)}\}$ кетма-кетликлар йиғиндиси деб аталади ва $\{x^{(n)} + y^{(n)}\}$ каби белгиланади. $\{x^{(n)}\}$ ва $\{y^{(n)}\}$ кетма-кетликлар айримаси эса қуйидаги

$\{(x_1^{(n)} - y_1^{(n)}, x_2^{(n)} - y_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)} - y_m^{(n)})\} (n = 1, 2, 3, \dots)$

кетма-кетлик сифатида аниқланади ва $\{x^{(n)} - y^{(n)}\}$ каби белгиланади.

R^m фазодаги $\{(\alpha x_1^{(n)}, \alpha x_2^{(n)}, \dots, \alpha x_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик α соң билан $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик күпайтмаси деб аталади ва $\{\alpha x^{(n)}\}$ каби белгиләнди.

3°. Агар $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити a ($a \in R^m$) бўлса, у ҳолда $\{\alpha x^{(n)}\}$ ($\alpha \in R$) кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи бўлиб, бу кетма-кетликнинг лимити αa га тенг бўлади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha x^{(n)} = \alpha a = \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}.$$

4°. Агар $\{x^{(n)}\}$ ҳамда $\{y^{(n)}\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг лимити мосравишида a ва b бўлса, у ҳолда $\{x^{(n)} \pm y^{(n)}\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи бўлиб, бу кетма-кетликнинг лимити $a \pm b$ га тенг бўлади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^{(n)} \pm y^{(n)}) = a \pm b = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y^{(n)}.$$

5°. Агар a нуқта M ($M \subset R^m$) тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, у ҳолда M тўплам нуқталаридан a га интигуви $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик ($x^{(n)} \in M, n = 1, 2, \dots$) ажратиш мумкин.

Маълумки, a нуқта M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, a нинг ҳар бир $U_\varepsilon(a)$ атрофида ($\forall \varepsilon > 0$) M тўпламнинг чексиз кўп нуқталари бўлади.

Нолга интигуви мусбат сонлар кетма-кетлиги $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ ни олиб, a нуқтанинг

$$U_{\frac{1}{n}}(a) = \left\{ x \in R^m : \rho(x, a) < \frac{1}{n} \right\}$$

атрофини тузамиз. Бу a нуқта M тўпламнинг лимит [нуқтаси бўлгани учун a нуқтанинг $U_1(a)$ атрофида M тўпламнинг a дан фарқли нуқталари бўлади. Уларнинг бирини $x^{(1)}$ деб оламиз. Энди a нуқтанинг $U_{\frac{1}{2}}(a)$ атрофини қарайлик. Бу атрофда ҳам M тўпламнинг a дан фарқли

нуқталари бўлади. Улардан $x^{(1)}$ га тенг бўлмаган бирини олиб, уни $x^{(2)}$ дейлик. Бу жараённи давом эттириб, n -қадамда a нуқтанинг $U_{\frac{1}{n}}(a)$

атрофи олинса, бу атрофда ҳам M тўпламнинг a дан фарқли нуқталари бўлади. Улардан $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n-1)}$ нуқталарнинг ҳар бирига тенг бўлмаганини олиб, уни $x^{(n)}$ билан белгилаймиз. Яна бу жараённи давом эттираверамиз. Натижада M тўплам нуқталаридан $\{x^{(n)}\}$:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots$$

ажралади. Бу кетма-кетлик учун

$$\rho(x^{(n)}, a) < \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$$

бўлгани сабабли, $n \rightarrow \infty$ да $x^{(n)} \rightarrow a$ бўлиши келиб чиқади.

2. Коши төрөмаси (яқинлашиш принципи). Авшал айтиб ўтганимиздек, кетма-кетликнинг қачон лимитга эга бўлишини аниқлаш лимитлар назариясининг муҳим масалаларидан бири.

Юқорида келтирилган 12.1-төрөмаса, R^m фазода $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг яқинлашувчи бўлиши бу кетма-кетлик ҳадлари координаталаридан ташкил топган сонли кетма-кетликларнинг яқинлашувчи бўлиши орқали ифодаланишини кўрсатади.

Авшало, бу ерда ҳам фундаментал кетма-кетлик тушунчаси билан танишамиз.

R^m фазода $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

12.14-та ъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ то-пилсаки, барча $n > n_0$, $p > n_0$ лар учун

$$\rho(x^{(p)}, x^{(n)}) < \varepsilon$$

тengsizlik bажарилса, $\{x^{(n)}\}$ фундаментал кетма-кетлик деб аталади.

Мисоллар. 1. R^2 фазода ушбу $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлади. Ҳақиқатан,

$$\begin{aligned} \rho\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right)\right) &= \sqrt{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right)^2} = \\ &= \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \right| \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n} \right) \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Агар $\forall \varepsilon > 0$ сонга n_0 натурал сонни

$$n_0 = \left[\frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon} \right] + 1$$

деб олсак, у ҳолда барча $n > n_0$, $p > n_0$ лар учун

$$\rho\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right)\right) < \left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} \right) \sqrt{2} < \frac{2}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \varepsilon = \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Демак, берилган кетма-кетлик фундаменталdir.

2. R^2 фазода қуйидаги $\{(x_n, 0)\}$; $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ кетма-кетлик фундаментал бўлмайди. Ҳақиқатан ҳам, бу кетма-кетлик учун, масалан, $n > p$ да

$$\begin{aligned} \rho((x_p, 0); (x_n, 0)) &= \sqrt{(x_n - x_p)^2} = (x_n - x_p) = \\ &= \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{n-p}{n} \end{aligned}$$

бўлиб, $n = 2p$ бўлганда эса

$$\rho((x_p, 0), (x_n, 0)) > \frac{1}{2}$$

эканлиги келиб чиқади. Бу эса берилган кетма-кетликнинг фундаментал эмаслигини кўрсатади.

Фараз қилаілік, $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ фундаментал кетма-кетлик бўлсин. Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олингандан ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилади, барча $n > n_0$, $p > n_0$ учун

$$\rho(x_i^{(n)}, x_i^{(p)}) < \varepsilon$$

бўлади. Бу тенгсизликни қуийдагича

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i^{(n)} - x_i^{(p)})^2} < \varepsilon$$

ёзиб, ундан

$$|x_i^{(n)} - x_i^{(p)}| < \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Бу эса $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$, \dots , $\{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири фундаментал кетма-кетликлар (қаралсин, 1-қисм, 3-боб, 10-§) эканлигини билдиради. Шундай қилиб, R^m фазода

$$\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$$

кетма-кетликнинг фундаментал бўлишидан бу кетма-кетлик координаталаридан иборат $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$, \dots , $\{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бирининг фундаментал бўлсин. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ олингандан ҳам, $\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ га кўра шундай $n_0^{(1)}$, $n_0^{(2)}$, \dots , $n_0^{(m)}$ натурал сонлар топилади,

$$\text{барча } n > n_0^{(1)}, p > n_0^{(1)} \Rightarrow |x_1^{(n)} - x_1^{(p)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},$$

$$\text{барча } n > n_0^{(2)}, p > n_0^{(2)} \Rightarrow |x_2^{(n)} - x_2^{(p)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},$$

$$\text{барча } n > n_0^{(m)}, p > n_0^{(m)} \Rightarrow |x_m^{(n)} - x_m^{(p)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

бўлади. Агар $n_0 = \max\{n_0^{(1)}, n_0^{(2)}, \dots, n_0^{(m)}\}$ деб олсак, унда барча $n > n_0$, $p > n_0$ учун бир йўла

$$|x_i^{(n)} - x_i^{(p)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

тенгсизликлар бажарилади. Натижада

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i^{(n)} - x_i^{(p)})^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2} = \varepsilon$$

бўлади. Демак,

$$\rho(x^{(n)}, x^{(p)}) < \varepsilon.$$

Бу эса $\{x^{(n)}\}$ фундаментал кетма-кетлик эканини билдиради.

Натижада қүйудаги теоремага келамиз:

12.3-теорема. R^m фазода $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-көтликтік фундаментал бўлиши учун бу кетма-кетлик координаталаридан иборат $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бирининг фундаментал бўлиши зарур ва етарли.

Юқоридаги 12.1 ва 12.3-теоремалардан R^m фазода $\{x^n\}$ кетма-кетликнинг яқинлашувчилиги ҳақида қўйидаги теорема келиб чиқади.

12.4-теорема. $\{x^n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши учун у фундаментал бўлиши зарур ва етарли.

Бу теорема Коши теоремаси ёки яқинлашиши принципи деб аталади.

3. Ичма-ич жойлашган шарлар принципи. «Математик анализ» курсининг 1-қисми, 3-боб, 8-§ да ҳақиқий сонлар тўплами R нинг тўлиқлигига асосланган ичма-ич жойлашган сегментлар принципи қараб ўтилган эди. Шунга ўхашаш принцип R^m фазода ҳам ўринлидир ва ундан қелгусида биз кўп марта фойдаланамиз.

Марказлари $a^{(n)} = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_m^{(n)}) \in R^m$ нуқталарда, радиуслари $r_n \in R_+$ ($n = 1, 2, \dots$) бўлган ушбу

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1(a^{(1)}, r_1) = \{x \in R^m : \rho(x, a^{(1)}) \leq r_1\}, \\ S_2 &= S_2(a^{(2)}, r_2) = \{x \in R^m : \rho(x, a^{(2)}) \leq r_2\}, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ S_n &= S_n(a^{(n)}, r_n) = \{x \in R^m : \rho(x, a^{(n)}) \leq r_n\}, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

шарлар берилган бўлсин. Агар қўйидаги

$$S_1 \supset S_2 \supset \dots \supset S_n \supset \dots$$

муносабат ўринили бўлса, у ҳолда $\{S_n\}$ ичма-ич жойлашган шарлар кетма-кетлиги деб аталади.

12.5-теорема. R^m фазода ичма-ич жойлашган шарлар кетма-кетлиги $\{S_n\}$ берилган бўлсин. Агар $n \rightarrow \infty$ да шар радиуслари r_n нолга интилса, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

бўлса, у ҳолда барча шарларга тегишили бўлган $a (a \in R^m)$ нуқта мавжуд ва ягонадир.

Исбот: $\{S_n\} — R^m$ фазода ичма-ич жойлашган шарлар кетма-кетлиги бўлсин. Бу шар марказлари $a^{(n)}$ ($a^{(n)} \in R^m$, $n = 1, 2, \dots$) дан $\{a^{(n)}\}$ кетма-кетлик тузайлик. Равшанки, $a^{(n)} \in S_n$. Агар $r > n$ бўлса, унда $S_n \supset S_r$ бўлганлигидан $a^{(r)} \in S_n$ бўлади. Модомики, $a^{(n)} \in S_n, a^{(r)} \in S_n$ экан, унда

$$\rho(a^{(n)}, a^{(r)}) \leq 2r$$

бўлади. Теореманинг шартига кўра, $n \rightarrow \infty$ да $r_n \rightarrow 0$ дан ва юқоридаги тенгсизликдан $\{a^{(n)}\}$ — фундаментал кетма-кетлик эканлиги келиб чиқади. Коши теоремасига асосан бу кетма-кетлик лимитга эга. Биз уни a билан бэлгилайл ик:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{(n)} = a$$

Ихтиёрий S_n ($n = 1, 2, \dots$) шарни олайлик. Бу шар $\{a^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадларини ўз ичига олади (ошиб борса, $\{a^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг чекли сондаги $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n-1)}$ ҳадларигина S_n шарга тегишли бўлмаслиги мумкин). Демак, a нуқта S_n нинг лимит нуқтаси ва S_n ёпиқ тўплам бўлгани учун $a \in S_n$ ($n = 1, 2, \dots$) бўлади. Шундай қилиб, a нуқтанинг барча шарларга тегишли эканлигини кўрсатдик. Энди бундай a нуқтанинг ягоналигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, a нуқтадан фарқли барча шарларга тегишли бўлган b нуқта ҳам бор бўлсин: $b \in S_n$ ($n = 1, 2, \dots$) $b \neq a$. Масофада хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, a^{(n)}) + \rho(a^{(n)}, b) \leq 2 \cdot r_n.$$

Бундан эса $n \rightarrow \infty$ да $r_n \rightarrow 0$ бўлгани учун

$$\rho(a, b) = 0,$$

яъни $a = b$ бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

4. Қисмий кетма-кетликлар. Больцано — Вейерштрасс теоремаси. R^m фазода $\{x^{(n)}\}$:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots (x^{(n)} \in R^m, n = 1, 2, \dots)$$

кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу кетма-кетликнинг $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ ($n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots, n_k \in N, k = 1, 2, \dots$) номерли ҳадларидан ташкил топган ушбу

$$x^{(n_1)}, x^{(n_2)}, \dots, x^{(n_k)}, \dots (x^{(n_k)} \in R^m)$$

кетма-кетлик $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги деб аталади ва $\{x^{(n_k)}\}$ каби белгиланади. Масалан, R^2 фазода қўйидаги

$$(1, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \dots, \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right), \dots$$

$$(1, 1), \left(\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}\right), \left(\frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^2}\right), \dots, \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}\right), \dots$$

кетма-кетликлар

$$(1, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \dots, \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \dots$$

кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетликлари бўлади.

Равшанки, битта кетма-кетликдан жуда кўп турлича қисмий кетма-кетликлар ажратиш мумкин.

12.6-теорема. Агар $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити a ($a \in R^m$) бўлса, у ҳолда бу кетма-кетликнинг ҳар қандай қисмий $\{x^{(n_k)}\}$ кетма-кетлиги ҳам яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити ҳам a га тенг бўлади.

Бу теореманинг исботи кетма-кетликнинг лимити таърифидан бе-восита келиб чиқади.

12.1-эслатма. Кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги лимити

мавжуд бўлишидан [берилган кетма-кетликнинг лимити мавжуд бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, ушбу

$$(1, 1), (-1, -1), (1, 1), (-1, -1), \dots, ((-1)^{n+1}, (-1)^{n+1}),$$

кетма-кетликнинг

$$(1, 1), (1, 1), \dots, (1, 1), \dots \\ (-1, -1), (-1, -1), \dots, (-1, -1), \dots$$

қисмий кетма-кетликлари лимитга эга (улар мос равища $(1, 1)$ ва $(-1, -1)$ нуқталарга тенг) бўлган ҳолда берилган $\{((-1)^{n+1}, (-1)^{n+1})\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Демак, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик лимитга эга бўймаган ҳолда унинг қисмий кетма-кетликлари лимитга эга бўлиши мумкин экан.

12.7-теорема (Больцано—Вейерштрасс теоремаси.) *Ҳар қандай чегараланган кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратили мумкин.*

Исбот. $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлсин. Таърифга кўра шундай шар $\{x \in R^m : \rho(x, 0) \leq r\}$ топилади, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг барча ҳадлари шу шарда ётади.

Агар ушбу

$$\{x \in R^m : \rho(x, 0) \leq r\} \subset \tilde{U}_r(0)$$

муносабатни эътиборга олсак, у ҳолда барча n лар учун

$$-r \leq x_i^{(n)} \leq r, (i = 1, 2, \dots, m)$$

бўлиши топилади. Бу эса $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$, \dots , $\{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бирининг чегараланганигини билдиради.

1-қисм, 3-бобда келтирилган Больцано—Вейерштрасс теоремасига кўра $\{x_1^{(n)}\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик $\{x_1^{(n_{k_1})}\}$ ни ажратиш мумкин. Натижада, биринчи координатаси яқинлашувчи бўлган ушбу

$$\{(x_1^{(n_{k_1})}, x_2^{(n_{k_1})}, \dots, x_m^{(n_{k_1})})\}$$

қисмий кетма-кетликка келамиз.

Энди $\{x_2^{(n_{k_1})}\}$ кетма-кетликни қарайлик. Бу кетма-кетлик ҳам чегараланган. Яна Больцано—Вейерштрасс теоремасига кўра $\{x_2^{(n_{k_1})}\}$ дан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик $\{x_2^{(n_{k_2})}\}$ ни ажратиш мумкин. Натижада, биринчи ва иккинчи координаталари яқинлашувчи бўлган

$$\{(x_1^{(n_{k_2})}, x_2^{(n_{k_2})}, \dots, x_m^{(n_{k_2})})\}$$

қисмий кетма-кетлик ҳосил бўлади.

Юқоридаги жараённи давом эттира бориб, m қадамдан кейин, барча координаталари яқинлашувчи бўлган ушбу

$$\{(x_1^{(n_{k_m})}, x_2^{(n_{k_m})}, \dots, x_m^{(n_{k_m})})\} = \{x^{(n_{k_m})}\}$$

қисмий кетма-кетликка эга бўламиз. Равшанки, бу кетма-кетлик $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги бўлади. Иккинчи томондан, 12.1-теоремага кўра $\{x^{(n_{km})}\}$ яқинлашувчи кетма-кетлик бўлади. Теорема исботланди.

3-§. Кўп ўзгарувчили функция ва унинг лимити

Дастлабки тушунчалар қаторида (1-қисм, 1-боб, 3-§) ихтиёрий E тўпламни F тўпламга акслантириш ($\Phi:E \rightarrow F$) тушунчаси келтирилган эди. Сўнг $E = N$, $F = R$; $E = R$, $F = R$ ва $E = N$, $F = R^m$ деб ушбу

$$f:N \rightarrow R \quad (f:n \rightarrow x_n; \quad n \in N, \quad x_n \in R),$$

$$\varphi:R \rightarrow R \quad (\varphi:x \rightarrow y; \quad x \in R, \quad y \in R),$$

$$\psi:N \rightarrow R^m \quad (\psi:n \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_m); \quad n \in N, \quad (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m)$$

акслантиришларга эга бўлдик. Бу акслантиришлар мос равища сонлар кетма-кетлиги, функция ҳамда R^m фазо нуқталари кетма-кетлиги тушунчаларига олиб келди. Сонлар кетма-кетлиги ва унинг лимити 1-қисмнинг 3-бобида, функция ва унинг лимити 1-қисмнинг 4-бобида, R^m фазо нуқталари кетма-кетлиги ва унинг лимити эса ушбу бобнинг 2-§ да батафсил баён этилди.

Энди $E = R^m$, $F = R$ деб $f:R^m \rightarrow R$ акслантиришни қараймиз. Бу кўп ўзгарувчили функция тушунчасига олиб келади.

1. Функция. Бирор $M (M \subset R^m)$ тўплам берилган бўлсин.

12.15-таъриф. Агар M тўпламдаги ҳар бир $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқтага бирор қоида ёки қонунга кўра битта ҳақиқий сон $y (y \in R)$ мос қўйилган бўлса, M тўпламда *кўп ўзгарувчили* (*т ма ўзгарувчили*) функция берилган (аниқланган) деб аталади ва уни

$$f:(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow y \quad \text{ёки} \quad y = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (12.25)$$

каби белгиланади. Бунда M — функцияниң берилшиши (аниқланши) тўплами, x_1, x_2, \dots, x_m эркли ўзгарувчилар — функция аргументлари, y эркисиз ўзгарувчи — x_1, x_2, \dots, x_m ўзгарувчиларнинг функцияси дейилади.

(x_1, x_2, \dots, x_m) нуқта битта x билан белгиланишини эътиборга олиб, бундан кейин деярлик ҳамма вақт (x_1, x_2, \dots, x_m) ўрнига x ни ишлатаверамиз. Унда юқоридаги (12.25) белгилашлар қўйидагича ёзилади.

$$f:x \rightarrow y \quad \text{ёки} \quad y = f(x) \quad (x \in R^m, \quad y \in R).$$

Функцияниң берилиш тўпламидан олинган $x^0 \in M$ нуқтага мос келувчи y_0 сон $y = f(x)$ функцияниң $x = x^0$ нуқтадаги хусусий қиймати деб аталади:

Мисоллар. 1. $f: R^n$ физэдага ҳир бир x нуқтага шу нуқта координатлари квадратларининг йигиндисини мос қўювчи қоида, яъни

$$f:x \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$$

бўлсин. Бу ҳолда $y = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$ функция ҳосил бўлади. Бу функция $M = R^m$ тўпламда берилган.

2. f — ҳар бир $x \in M = \{x \in R^m : \rho(x, 0) \leq 1\}$ нүктага ушбу

$$x \rightarrow \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_m^2}$$

қоида билан битта ҳақиқий сонни мос қўйисин. Бу ҳолда ҳам кўп ўзгарувчили

$$y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_m^2}$$

функцияга эга бўламиз. Равшанки, бу функция M тўпламда берилган.

$f(x)$ функция $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин. x ўзгарувчи M тўпламда ўзгаргандада функциянинг мос қийматларидан иборат $\{f(x) : x \in M\}$ тўплам функция қийматлари тўплами (функциянинг ўзгарши соҳаси) деб аталади. Юқорида келтирилган мисолларнинг биринчисида функциянинг қийматлари тўплами $[0, +\infty)$, иккинчисида эса $[0, 1]$ сегментдан иборатdir.

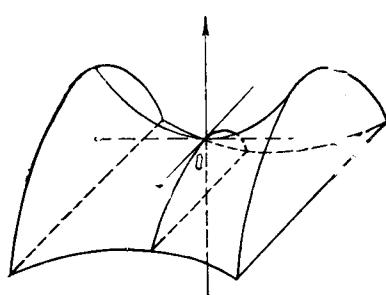
Шуни яна бир бор таъкидлаймизки, кўп ўзгарувчили (m та ўзгарувчили) функцияларда функциянинг берилиш тўплами R^m фазодаги тўплам бўлиб, бу функция қийматлари тўплами эса ҳақиқий сонларнинг қисм тўпламидан иборатdir.

R^{m+1} фазонинг (x, y) ($x \in R^m$, $y = f(x) \in R$) нүкталаридан иборат ушбу

$$\{(x, f(x))\} = \{(x, f(x)) : x \in R^m, f(x) \in R\}$$

тўплам $y = f(x)$ функция графиги деб аталади.

Масалан, $m = 2$ бўлганда (R^2 фазода)

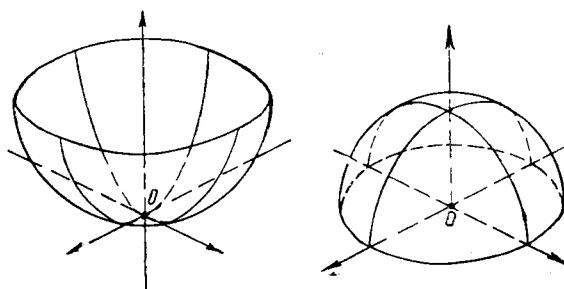


$$y = x_1 \cdot x_2, \quad y = x_1^2 + x_2^2,$$

$$y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

функциялар графиги мос равища R^3 фазода гиперболик параболоид, айланма параболоид ҳамда юқори ярим сфералардан иборатdir (10-чизма).

$M \subset R^m$ тўпламда $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция берил-



1 - чизма

ган бўлиб, x_1, x_2, \dots, x_m ларнинг ҳар бири $T \subset R^k$ ($k \in N$) тўпламда берилган функциялар бўлсин:

$$x_1 = \varphi_1(t) = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

$$x_2 = \varphi_2(t) = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$x_m = \varphi_m(t) = \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k).$$

Бунда $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ ўзгарувчи $T \subset R^k$ тўпламда ўзгарганда уларга мос $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқта $M \subset R^m$ тўпламда бўлсин. Натижада y ўзгарувчи $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ўзгарувчи орқали $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ ўзгарувчиларнинг функцияси бўлади:

$$t \rightarrow x \rightarrow y$$

$$((t_1, t_2, \dots, t_k) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow y).$$

Бу

$y = f(x(t)) = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k))$ функция мураккаб функция ёки $f(x)$ ҳамда $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) функциялар суперпозицияси деб аталади.

Элементар функциялар устида қўшиш, айриш, қўпайтириш ва бўлиш амаллари ҳамда функциялар суперпозицияси ёрдамида кўп ўзгарувчили элементар функциялар ҳосил қилинади. Ушбу

$$y = e^{x_1 \cdot x_2 \cdots x_m}, \quad y = \ln \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_m},$$

$$y = \sin(x_1 \cdot x_2) + \sin(x_2 \cdot x_3) + \dots + \sin(x_{m-1} \cdot x_m)$$

функциялар шулар жумласидандир.

$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин. Агар бу функция қийматлари тўплами

$$Y = \{f(x_1, x_2, \dots, x_m) : (x_1, x_2, \dots, x_m) \in M\}$$

юқоридан (қуйидан) чегараланган бўлса, яъни шундай ўзгармас C (ўзгармас P) сон топилсаки, $\forall (x_1, x_2, \dots, x_m) \in M$ учун

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq C \quad (f(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq P)$$

тengsizlik ўринли бўлса, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция M тўпламда юқоридан (қуйидан) чегараланган деб аталади, акс ҳолда, яъни ҳар қандай катта мусбат S сон олинганда ҳам, M тўпламда шундай $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқта топилсаки,

$$f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) > S \quad (f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) < -S)$$

тengsizlik ўринли бўлса, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция M тўпламда юқоридан (қуйидан) чегараланмаган деб аталади.

Агар $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция M тўпламда ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган бўлса, функция шу тўпламда чегараланган дейилади.

Масалан, $M = R^2 \setminus \{(0,0)\}$ да берилган

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}$$

функция шу M түпламда қуйидан чегараланган, аммо юқоридан чегараланмагандир: $Y = (0, \infty)$.

2. Функциянынг лимити. R^n фазода бирор M түплам олайлик. a нүкта ($a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$) шу түпламнинг лимит нүктаси бўлсин. У ҳолда M түпламнинг нүқталаридан a га интилевчи турли $\{x^{(n)}\}$ ($x^{(n)} \in M$, $x^{(n)} \neq a$, $n = 1, 2, \dots$) кетма-кетликлар тузиш мумкин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a.$$

Энди шу M түпламда бирор $y = f(x)$ функция берилган бўлсин.

12.16-таъриф (Гейне таърифи). Агар M түпламнинг нүқталаридан тузилган, a га интилевчи ҳар қандай $\{x^{(n)}\}$ ($x^{(n)} \neq a$, $n = 1, 2, \dots$) кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b (чекли ёки чексиз) лимита интилса, b $f(x)$ функциянинг a нүқтадаги (ёки $x \rightarrow a$ даги) лимити* деб аталади ва уни

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ ёки } x \rightarrow a \text{ да } f(x) \rightarrow b$$

каби белгиланади.

Функция лимитини бошқача ҳам таърифлаш мумкин.

12.17-таъриф (Коши таърифи). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ топилсаки, ушбу $0 < \rho(x, a) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x \in M$ нүқталарда

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функциянинг a нүқтадаги ($x \rightarrow a$ даги) лимити деб аталади.

12.18-таъриф (Коши таърифи). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ топилсаки, ушбу $0 < \rho(x, a) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x \in M$ нүқталарда

$$|f(x)| > \varepsilon \quad (f(x) > \varepsilon; f(x) < -\varepsilon)$$

бўлса, $f(x)$ функциянинг a нүқтадаги ($x \rightarrow a$ даги) лимити ∞ ($+\infty$; $-\infty$) дейилади.

Шундай қилиб функциянинг лимити икки хил таърифланди. Бу таърифлар эквивалент таърифлардир. Бунинг исботи 1-қисм, 4-боб, 3-§ да келтирилган бир ўзгарувчили функция лимити таърифларининг эквивалентлигининг исботи кабидир.

Юқоридаги $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ёки $x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow b$ белгилашларни $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ ҳамда

$$x \rightarrow a \iff \begin{cases} x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_m \rightarrow a_m \end{cases}$$

* Биз қўйда кўп ўзгарувчили функция учун лимитлар тушунчаси бошқача киритилиши ҳам мумкинлигини кўрамиз. Улардан фарқи этиш учун, баъзан, бу лимит каррали лимит деб ҳам аталади.

эканлигини эътиборга олған, қуйидагича

$$\lim_{\begin{array}{c}x_1 \rightarrow a_1 \\ \vdots \\ x_m \rightarrow a_m\end{array}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b \quad \left. \begin{array}{l} x_1 \rightarrow a_1 \\ \text{ёки} \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_m \rightarrow a_m \end{array} \right\} \text{да } f(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow b$$

ёэса ҳам бўлади.

R^n фазода бирор M тўплам берилган бўлиб, ∞ эса шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу M тўпламда $y = f(x)$ функция берилган.

12.19-таъриф (Гейне таърифи). Агар M тўпламнинг нуқтасидан тузилган ҳар қандай $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик учун $x^{(n)} \rightarrow \infty$ да мос $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b га интилса, $b = f(x)$ функцияниг $x \rightarrow \infty$ даги лимити деб аталади ва

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

каби белгиланади.

12.20-таъриф (Коши таърифи). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ топилсанки, ушбу $\rho(x, 0) > \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x \in M$ нуқталарда

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $b = f(x)$ функцияниг $x \rightarrow \infty$ даги лимити деб аталади ва

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

каби белгиланади.

Шуни таъкидлаш лозимки, функция лимити тушунчаси киритилишида лимити қаралаётган нуқтада функцияниг берилиши (аниқланиши) шарт эмас.

12.2-е слатма. Юқорида функция лимитига берилган Гейне таърифининг моҳияти, ҳар қандай $\{x^{(n)}\}$ ($x^{(n)} \neq a$, $n = 1, 2, \dots, x^{(n)} \rightarrow a$) кетма-кетлик учун мос $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетликнинг лимити олинган $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликка боғлиқ бўлмаслигидадир.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 > 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияниг $x = (x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ (яъни $x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow 0$) даги лимит ноль эканлиги кўрсатилсан. Бу функция R^2 тўпламда берилган бўлиб, $(0, 0)$ нуқта шу тўпламнинг лимит нуқтаси.

а) Гейне таърифи бўйича: $(0, 0)$ нуқтага интилувчи ихтиёрий $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \rightarrow (0, 0)$ (яъни $x_1^{(n)} \rightarrow 0, x_2^{(n)} \rightarrow 0$) ($x^{(n)} \neq (0, 0)$) кетма-кетлик оламиз. Унда мос $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлик учун қўйидагича

$$(x^{(n)}) = f(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) = \frac{x_1^{(n)} \cdot x_2^{(n)}}{\sqrt{(x_1^{(n)})^2 + (x_2^{(n)})^2}} = \sqrt{\frac{x_1^{(n)} \cdot x_2^{(n)}}{(x_1^{(n)})^2 + (x_2^{(n)})^2}} \cdot \sqrt{\frac{(x_1^{(n)})^2 + (x_2^{(n)})^2}{(x_1^{(n)})^2 + (x_2^{(n)})^2}} \leqslant$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x_1^{(n)} x_2^{(n)}}$$

бўлиб, $x_1^{(n)} \rightarrow 0$, $x_2^{(n)} \rightarrow 0$ да

$$\lim_{n \rightarrow (0, 0)} f(x^{(n)}) = 0$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{x \rightarrow (0, 0)} f(x) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0;$$

б) Коши таърифи бўйича: $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра $\delta = 2\varepsilon$ деб олинса, у ҳолда $0 < \rho(x, 0) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x нуқталарда

$$|f(x) - 0| = \left| \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right| = \frac{|x_1| \cdot |x_2|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \frac{1}{2} \rho(x, 0) < \frac{1}{2} \delta = \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса

$$\lim_{x \rightarrow (0, 0)} f(x) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0$$

эканлигини билдиради.

2. Қуйидаги

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}$$

функциянинг $x = (x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ (яъни $x_1 \rightarrow 0$, $x_2 \rightarrow 0$) даги лимитининг мавжуд эмаслиги кўрсатилсин. Бу функция ҳам $R^2 \setminus \{(0, 0)\}$ тўпламда берилган бўлиб, $(0, 0)$ нуқта шу тўпламнинг лимит нуқтаси.

$(0, 0)$ нуқтага интилувчи иккита

$$x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \rightarrow (0, 0),$$

$$\bar{x}^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} \right) \rightarrow (0, 0)$$

кетма-кетликлар олинса, улар учун мос равиша

$$f(x^{(n)}) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} = 1 \rightarrow 1,$$

$$f(\bar{x}^{(n)}) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{4}{n^4}} = \frac{1}{5} \rightarrow \frac{1}{5}$$

бўлади. Бу эса $x \rightarrow (0, 0)$ да берилган функциянинг лимити мавжуд эмаслигини билдиради.

3. Чексиз кичик ва чексиз катта функциялар. 1-қисм-нинг 3-боби; 4-ғ ҳамда 5-ғ ларида чексиз кичик ва чексиз катта миқдорлар тушунчалари, 4-бобнинг 7-ғ ида эса чексиз катта ва чексиз кичик функциялар тушунчалари киритилиб, улар кўрсатилган параграфларда ўрганилган эди.

Худди шундай тушунчалар кўп ўзгарувчили функцияларга нисбатан ҳам киритилиши мумкин. Уларни ўрганиш эса бир ўзгарувчили функция ҳолидагига ўхаш бўлганлигини эътиборга олиб, чексиз кичик ҳамда чексиз катта кўп ўзгарувчили функциялар ҳақидаги маълумотларни санаб ўтиш билан кифояланамиз.

Бирор $\alpha(x)$ функция $M \subset R^n$ тўпламда берилган бўлиб, a ($a \in R^n$) нуқта шу тўпламнинг лимити нуқтаси бўлсин.

12.21-таъриф. Агар $x \rightarrow a$ да $\alpha(x)$ нинг лимити ноль, яъни

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$$

бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ функция $x \rightarrow a$ да чексиз кичик функция деб атади.

Берилган $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да чекли b лимитга эга бўлиши учун

$$\alpha(x) = f(x) - b$$

чексиз кичик функция бўлиши зарур ва етарли.

Бунинг исботи функциянинг лимити ҳамда чексиз кичик функциянинг таърифларидан келиб чиқади.

Шундай қилиб, $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция b лимитга эга бўлса, бу функцияни ҳар доим

$$f(x) = b + \alpha(x)$$

кўринишда ифодалаш мумкин, бунда $\alpha(x)$ — чексиз кичик функция.

Чексиз кичик функциялар қўйидаги хоссаларга эга.

Фараз қилайлик, $\beta(x)$ функция ҳам шу M тўпламда берилган бўлсин.

1°. Агар $x \rightarrow a$ да $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ функциялар чексиз кичик функциялар бўлса, у ҳолда уларнинг йиғиндиси $\alpha(x) + \beta(x)$ функция ҳам чексиз кичик функция бўлади.

2°. Агар $x \rightarrow a$ да $\alpha(x)$ чексиз кичик функция бўлиб, $\beta(x)$ функция эса чегараланган функция бўлса, у ҳолда уларнинг кўпайтмаси $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ ҳам чексиз кичик функция бўлади.

12.22-таъриф. Агар M тўпламда берилган $\gamma(x)$ функция учун

$$\lim_{x \rightarrow a} \gamma(x) = \infty$$

бўлса, $\gamma(x)$ функция $x \rightarrow a$ да чексиз катта функция деб атади.

3°. Агар $x \rightarrow a$ да $\alpha(x)$ функция чексиз кичик ($\alpha(x) \neq 0$) функция бўлса, $\frac{1}{\alpha(x)}$ функция $x \rightarrow a$ да чексиз катта функция бўлади.

4°. Агар $x \rightarrow a$ да $\gamma(x)$ функция чексиз катта функция бўлса, $\frac{1}{\gamma(x)}$ функция $x \rightarrow a$ да чексиз кичик функция бўлади.

4. Лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссалари.

Чекли лимитга эга бўлган кўп ўзгарувчили функциялар ҳам чекли лимитга эга бўлган бир ўзгарувчили функцияларнинг хоссаларига (қаралсин, 1-қисм, 4-боб, 4-§) ўхшаш хоссаларга эга. Уларнинг исботи худди бир ўзгарувчили функциялар хоссаларининг исботи кабидир. Шуни эътиборга олиб, биз қуйида чекли лимитга эга бўлган кўп ўзгарувчили функцияларнинг хоссаларини исботсиз келтирамиз.

Бирор $M \subset R^n$ тўпламда $f(x)$ функция берилган бўлиб, $a (a \in R^m)$ нуқта шу M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

1°. Агар

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

мавжуд бўлиб, $b > p$ ($b < q$) бўлса, a нуқтанинг етарли кичик атрофидаги $x \in M$ ($x \neq a$) нуқталарда $f(x) > p$ ($f(x) < q$) бўлади. Хусусан, $b \neq 0$ бўлса, у ҳолда a нуқтанинг етарлича кичик атрофифа $f(x) \neq 0$ бўлади.

2°. Агар

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

мавжуд бўлса, a нуқтанинг етарли кичик атрофидаги $x \in M$ ($x \neq a$) нуқталарда $f(x)$ функция чегаралантан бўлади.

Энди M да иккита $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар берилган бўлсин.

3°. Агар

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b_2$$

бўлиб, a нуқтанинг $U_\delta(a)$ атрофидаги барча x нуқталарда ($x \in M \cap U_\delta(a)$) $f_1(x) \leq f_2(x)$ бўлса, у ҳолда $b_1 \leq b_2$ бўлади.

4°. Агар a нуқтанинг $U_\delta(a)$ атрофидаги $x \in M \cap U_\delta(a)$ нуқталарда

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$$

бўлиб, $x \rightarrow a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар лимитга эга ҳамда

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

бўлади.

5°. Агар $x \rightarrow a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар лимитга эга бўлса, $f_1(x) \pm f_2(x)$ функция ҳам лимитга эга бўлади ва

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x).$$

6°. Агар $x \rightarrow a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар лимитга эга бўлса, $f_1(x) \cdot f_2(x)$ функция ҳам лимитга эга бўлади ва

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x).$$

7°. Агар $x \rightarrow a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар лимитга эга бўлиб, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$ бўлса, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ функция ҳам лимитга эга бўлади ва

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)}.$$

12.3- эслатма. Бир ўзгарувчили функциялардагидек, $x \rightarrow a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар йиғиндиши, кўпайтмаси ва нисбатидан иборат бўлган функцияларнинг лимитга эга бўлишидан бу функцияларнинг ҳар бирининг лимитга эга бўлиши келиб чиқавермайди.

12.4- эслатма. Агар $x \rightarrow a$ да 1) $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг ҳар бирининг лимити ноль (ёки чексиз) бўлса, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ифода; 2) $f_1(x) \rightarrow 0$, $f_2(x) \rightarrow \infty$ бўлганда $f_1(x) \cdot f_2(x)$ ифода ва ниҳоят 3) $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ турли ишорали чексиз лимитга эга бўлганда $f_1(x) + f_2(x)$ йиғинди мос равища $\frac{0}{0}$ ($\frac{\infty}{\infty}$), $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ кўринишдаги аниқмасликларни ифодалайди.

Агар $x \rightarrow a$ да 1) $f_1(x) \rightarrow 0$, $f_2(x) \rightarrow 0$ бўлса, 2) $f_1(x) \rightarrow 1$, $f_2(x) \rightarrow \infty$ бўлса, 3) $f_1(x) \rightarrow \infty$, $f_2(x) \rightarrow 0$ бўлса, у ҳолда $[f_1(x)]^{f_2(x)}$ мос равища 0^0 , 1^∞ , ∞^0 кўринишдаги аниқмасликларни ифодалайди. Бундай аниқмасликлар бир ўзгарувчили функцияларда қарапганидек, $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг ўз лимитларига интилиш характеристига қараб очилади.

5. Такрорий лимитлар. Биз юқорида $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияларнинг $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ нуқтадаги лимити

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \left(\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ \vdots \\ x_m \rightarrow a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b \right)$$

билиан танишдик. Демак, функцияларнинг лимити, унинг аргументлари x_1, x_2, \dots, x_m ларнинг бир йўла, мос равища a_1, a_2, \dots, a_m сонларга интилгандалигидек лимитидан иборатдир.

Кўп ўзгарувчили функциялар учун (уларгагина хос бўлган) бошқа формадаги лимит тушунчасини ҳам киритиш мумкин.

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ нуқта M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу функцияларнинг $x_1 \rightarrow a_1$ даги (бошқа ёарча ўзгарувчиларни тайинлаб) лимити

$$\lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

ни қарайлик. Равшанки, бу лимит, биринчидан бир ўзгарувчили функция лимитининг ўзгинаси, иккинчидан у x_2, x_3, \dots, x_m ўзгарувчиларга борлиқ:

$$\lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_m).$$

Сўнг $\varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_m)$ функцияниңг $x_2 \rightarrow a_2$ даги (бошқа барча ўзга-
рувчилирини тайинлаб) лимити

$$\lim_{x_2 \rightarrow a_2} \varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_m) = \varphi_2(x_3, x_4, \dots, x_m)$$

ни қарайлик.

Юқоридагидек бирин-кетин $x_3 \rightarrow a_3, x_4 \rightarrow a_4, \dots, x_m \rightarrow a_m$ да ли-
митга ўтиб

$$\lim_{x_m \rightarrow a_m} \lim_{x_{m-1} \rightarrow a_{m-1}} \dots \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

ни ҳосил қиласиз. Бу лимит $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияниңг тақро-
рий лимити деб аталади.

Демак, функцияниңг тақориий лимити, унинг аргументлари x_1, x_2, \dots, x_m ларнинг ҳар бирининг бирин-кетин мос равишида a_1, a_2, \dots, a_m сонларга интилгандаги лимитидан иборат.

Худди юқоридагидек, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияниңг $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ аргументлари мос равишида $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ ларга интилгандаги тақро-
рий лимити

$$\lim_{x_{i_k} \rightarrow a_{i_k}} \dots \lim_{x_{i_1} \rightarrow a_{i_1}} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

ни ҳам қарашиб мүмкин.

Шуни ҳам айтиш керакки, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция аргументла-
ри x_1, x_2, \dots, x_m лар мос равишида a_1, a_2, \dots, a_m сонларга турли
тартибда интилгандан функцияниңг турли тақориий лимитлари ҳосил
бўлади.

Мисоллар 1. Ушбу параграфининг 2- пунктида келтирилган

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 > 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияниңг лимити

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = 0$$

бўлишини кўрсатган эди. Бу функцияниңг тақориий лимитлари мавжуд ва улар
ҳам 0 га тенг. Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = 0.$$

Шунингдек,

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0, \quad \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = 0.$$

Демак, берилган функцияниңг тақориий лимитлари мавжуд ва улар бир-бирига
тенг бўлиб, бу тақориий лимитлар функцияниңг (каррали) лимитига тенг бўлади.

2. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2}, & \text{агар } x_1 + 3x_2 \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x_1 + 3x_2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функцияning тақрорий лимитлари қўйидаги:

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2} = -\frac{1}{3}, \quad \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2} = -\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2} = 2, \quad \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2} = 2.$$

Демак, берилган функцияning тақрорий лимитлари мавжул бўлиб, уларнинг бир и
- $\frac{1}{3}$ га, иккинчи эса 2 га тенг.

Бироқ $x = (x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ да $f(x_1, x_2)$ функцияning (каррали) лимити мавжуд эмас. Чунки $(0, 0)$ нуқтага интигувчи иккита

$$x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \rightarrow (0, 0),$$

$$\bar{x}^{(n)} = \left(\frac{5}{n}, \frac{4}{n} \right) \rightarrow (0, 0)$$

кетла- кетликлар олиса, улар учун мос равиша

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{5}{n}, \frac{4}{n}\right) = \frac{6}{17} \rightarrow \frac{6}{17}$$

бўлади. Бу эса $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ да берилган функцияning (каррали) лимити мав- жуд эмаслигини билдиради.

3. Қўйидаги

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}$$

функцияning тақрорий лимитлари

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2} = 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2} = 0,$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2} = 0, \quad \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2} = 0$$

бўлади. Демак, берилган функцияning тақрорий лимитлари мавжуд ва улар бир- бирига тенг экан. Биз юқорида бу функцияning $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ да (каррали) ли- мити мавжуд эмаслигини кўрсатган эдик.

4. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 \sin \frac{1}{x_1}, & \text{агар } x_1 \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x_1 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функция учун

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = x_1, \quad \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} (x_1, x_2) = 0$$

бўлиб, $\lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2)$ — мавжуд эмас. Демак, берилган функцияning битта так-

порий лимити мавжуд бўлиб, иккинчи тақорий лимити эса мавжуд эмас. Аммо

$$|f(x_1, x_2) - 0| = \left| x_1 + x_2 \sin \frac{1}{x_1} \right| \leq |x_1| + |x_2| \quad (x_1 \neq 0)$$

муносабатдан $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ да $f(x_1, x_2)$ функциянинг (каррали) лимити мавжуд [ва

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = 0$$

бўлиши келиб чиқади.

5. Куйидаги

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \cdot \sin \frac{1}{x_1} \cdot \sin \frac{1}{x_2}$$

функцияни қарайлик. Бу функциянинг $x_1 \rightarrow 0$ даги лимити мавжуд эмас. Чунки нолга интилувчи иккита

$$x_1^{(n)} = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0, \quad \bar{x}_1^{(n)} = \frac{2}{(4n+1)\pi} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

жетма-кетликлар олинса, улар учун мос равишда ($x_2 \neq 0$ да)

$$f\left(\frac{1}{n\pi}, x_2\right) \rightarrow 0, \quad f\left(\frac{2}{(4n+1)\pi}, x_2\right) \rightarrow x_2 \cdot \sin \frac{1}{x_2}$$

бўлади.

Худди шунга ўхшаш кўрсатиш мумкинки,

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2)$$

ҳам мавжуд бўлмайди. Аммо

$$|f(x_1, x_2) - 0| = \left| (x_1 + x_2) \sin \frac{1}{x_1} \sin \frac{1}{x_2} \right| \leq |x_1| + |x_2|$$

тенгизликтан $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ да $f(x_1, x_2)$ функциянинг (каррали) лимити мавжуд ва

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = 0$$

бўлишини топамиз.

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, функциянинг бирор нуқтада каррали лимитининг мавжуд бўлишидан, унинг шу нуқтада тақорорий лимитининг мавжуд бўлиши ва аксинча, функциянинг бирор нуқтада тақорорий лимитларининг мавжуд бўлишидан, унинг шу нуқтада каррали лимитининг мавжуд бўлиши келиб чиқавермас экан. Ундан ташқари функциянинг тақорорий лимитлари бир-бирига ҳар доим тенг бўлавермас экан.

Биз қўйида функциянинг каррали ва тақорорий лимитлари орасида-ги боғланиш ҳамда уларнинг маълум шартларда ўзаро тенглиги ҳақида теорема исботлаймиз.

$f(x_1, x_2)$ функция $M = \{(x_1, x_2) \in R^2 : |x_1 - x_1^0| < a_1, |x_2 - x_2^0| < a_2\}$ тўпламда берилган бўлсин.

12.8- теорема. Агар 1) $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ да $f(x_1, x_2)$ функциянинг каррали лимити мавжуд:

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0}} f(x_1, x_2) = b,$$

2) ҳар бир тайинланган x_1 да қуийдаги

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = \varphi(x_1)$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2)$$

такрорий лимит ҳам мавжуд бўлиб,

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = b$$

бўлади.

Исбот. $f(x_1, x_2)$ функция $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ да каррали

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0}} f(x_1, x_2) = b$$

лимитга эга бўлсин. Лимитнинг таърифига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон олингандан ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, ушбу

$$\{(x_1, x_2) \in R^2 : |x_1 - x_1^0| < \delta, |x_2 - x_2^0| < \delta\} \subset M$$

тўпламнинг барча (x_1, x_2) нуқталари учун

$$|f(x_1, x_2) - b| < \varepsilon \quad (12.26)$$

бўлади. Энди теореманинг 2) шартини эътиборга олиб, x_1 ўзгарувчнинг $|x_1 - x_1^0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматини тайинлаб, $x_2 \rightarrow x_2^0$ да (12.26) тенгсизликда лимитга ўтиб

$$|\varphi(x_1) - b| \leq \varepsilon$$

ни топамиз. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ сон олингандан ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, $|x_1 - x_1^0| < \delta$ бўлганда $|\varphi(x_1) - b| \leq \varepsilon$ бўлади. Бу эса

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \varphi(x_1) = b$$

бўлишини билдиради. Кейинги муносабатдан

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = b$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Қуийдаги теорема худди шунга ўхшаш исботланади.

12.9- теорема. Агар 1) $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ да $f(x_1, x_2)$ функциянинг каррали лимити мавжуд:

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0}} f(x_1, x_2) = b,$$

2) ҳар бир тайинланган x_2 да қуийидағы

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2) = \psi(x_2)$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2)$$

такрорий лимит ҳам мавжуд бўлиб,

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2) = b$$

бўлади.

12.1- натижада. Агар бир вақтда юқоридаги 12.8- ва 12.9- теоремаларнинг шартлари бажарилса, у ҳолда

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2)$$

бўлади.

Биз икки ўзгарувчили функциянинг каррали ва такрорий лимитлари орасидаги боғланишни ифодаловчи теоремаларни келтиридик.

Худди юқоридагидек $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ ўзгарувчилари бўйича

$$\lim_{\substack{x_{i_1} \rightarrow x_{i_1}^0 \\ x_{i_2} \rightarrow x_{i_2}^0 \\ \dots \\ x_{i_k} \rightarrow x_{i_k}^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

каррали ҳамда

$$\lim_{x_{i_1} \rightarrow x_{i_1}^0} \lim_{x_{i_2} \rightarrow x_{i_2}^0} \dots \lim_{x_{i_k} \rightarrow x_{i_k}^0} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

такрорий лимитлари ва улар орасидаги боғланишни қараш мумкин.

6. Коши теоремаси (яқинлашиш принципи). Энди қўп ўзгарувчили функция лимитининг мавжудлиги ҳақида умумий теорема келтирамиз.

R^n фазода M тўплам берилган бўлиб, a ($a \in R^n$) унинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $f(x)$ функция берилган.

12.23- таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, ушбу $0 < \rho(x, a) < \delta$, $0 < \rho(x, a) < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x ва \bar{x} ($x \in M$, $\bar{x} \in M$) нуқталарда

$$|f(\bar{x}) - f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция учун a нуқтада Коши шарти бажарилади дейилади.

12.10- теорема (Коши теоремаси). $f(x)$ функция a нүктада чекли лимитга эга бўлиши учун а нүктада Коши шартининг бажарилиши зарур ва етарли.

Ис ёт. Зарурлиги $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция чекли лимит

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

га эга бўлсин. Таърифга бинсан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олингандан ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $\delta > 0$ топиладики, ушбу $0 < \rho(x, a) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x (x \in M)$ нүқталарда

$$|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

жумладан $0 < \rho(\bar{x}, a) < \delta \Rightarrow |\bar{f(x)} - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Бу тенгсизликлардан

$$|\bar{f(x)} - f(x)| \leq |\bar{f(x)} - b| + |f(x) - b| < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $f(x)$ функция учун a нүктада Коши шартининг бажарилишини кўрсатади.

Етарлиги. $f(x)$ функция учун a нүктада Коши шарти бажарилсин, яъни $\forall \varepsilon > 0$ сон олингандан ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, ушбу $0 < \rho(x, a) < \delta, 0 < \rho(\bar{x}, a) < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x ва $\bar{x} (x, \bar{x} \in M)$ нүқталарда

$$|\bar{f(x)} - f(x)| < \varepsilon$$

бўлсин. Бу ҳолда $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да чекли лимитга эга бўлишини кўрсатамиз.

a нүкта M тўпламнинг лимит нүқтаси. Шунинг учун M тўпламнинг нүқталаридан $\{x^{(n)}\} (x^{(n)} \neq a, n = 1, 2, \dots)$ кетма-кетлик тузиш мумкинки, бунда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a$$

бўлади. Лимитнинг таърифига биноан, юқорида келтирилган $\delta > 0$ га кўра, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0, p > n_0$ учун $0 < \rho(x^{(n)}, a) < \delta, 0 < \rho(x^{(p)}, a) < \delta$ бўлади. Бу тенгсизликларнинг бажарилишидан эса, шартга кўра:

$$|\bar{f(x^{(p)})} - f(x^{(n)})| < \varepsilon$$

бўлади. Демак, $\{f(x^{(n)})\}$ — фундаментал кетма-кетлик. 2- § да келтирилган 12.4- теоремага кўра $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи. Бу кетма-кетликнинг лимитини b билан белгилайлик:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{(n)}) = b.$$

Энди M тўпламнинг нуқталаридан тузилган ва a нуқтага интилувчи ихтиёрий $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик

$$\bar{x}^{(n)} \rightarrow a \quad (\bar{x}^{(n)} \neq a, n = 1, 2, \dots)$$

олинганда ҳам мос $\{f(\bar{x}^{(n)})\}$ кетма-кетлик (у юқорида кўрсатганимизга биноан яқинлашувчи бўлади) ҳам ўша b га интилишини кўрсатамиз.

Фараз қиласайлик, $\bar{x}^{(n)} \rightarrow a \quad (\bar{x}^{(n)} \neq a, n = 1, 2, \dots)$ бўлганда

$$f(\bar{x}^{(n)}) \rightarrow b'$$

бўлсин.

$\{x^{(n)}\}, \{\bar{x}^{(n)}\}$ кетма-кетлик ҳадларидан ушбу

$$x^{(1)}, \bar{x}^{(1)}, x^{(2)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \bar{x}^{(n)}, \dots$$

кетма-кетликни тузайлар. Равшанки, бу кетма-кетлик a ($a \in R^m$) га интилади. У ҳолда

$$f(x^{(1)}), f(\bar{x}^{(1)}), f(x^{(2)}), f(\bar{x}^{(2)}), \dots, f(x^{(n)}), f(\bar{x}^{(n)}), \dots \quad (12.27)$$

кетма-кетлик чекли лимитга эга. Уни b^* орқали белгилайлик. Агар $\{f(x^{(n)})\}$ ва $\{f(\bar{x}^{(n)})\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири (12.27) кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетликлари эканлигини эътиборга олсақ, у ҳолда

$$f(x^{(n)}) \rightarrow b^*, f(\bar{x}^{(n)}) \rightarrow b^*$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$b^* = b = b'.$$

Шундай қилиб, $f(x)$ функция учун a нуқтада Коши шартининг бажарилишидан M тўплам нуқталаридан тузилган ва a га интилувчи ҳар қандай $\{x^{(n)}\}$ ($x^{(n)} \neq a, n = 1, 2, \dots$) кетма-кетлик олингандан ҳам, мос $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлик битта сонга интилишини топдик. Бу эса функция лимитининг Гейне таърифига кўра $f(x)$ функция a нуқтада чекли лимитга эга бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

12.5- эслатма. Коши шарти ва Коши теоремаси $x \rightarrow \infty$ да ҳам юқоридагига ўхшаш ифодаланади ва исбот этилади.

4- §. Кўп ўзгарувчили функциянинг узлуксизлиги

1. Функция узлуксизлиги таърифлари. $M \subset R^m$ тўпламда $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция берилган бўлиб, $a \in M$ ($a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$) нуқта эса M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

12.24- таъриф. Агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функциянинг лимити мавжуд бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \left(\begin{array}{c} \lim f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(a_1, a_2, \dots, a_m) \\ \begin{matrix} x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \vdots \\ x_m \rightarrow a_m \end{matrix} \end{array} \right) (*)$$

бўлса, $f(x)$ функция a нуқтада узлуксиз деб аталади.

Мисол. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функцияning ихтиёрий $(x_1^0, x_2^0) \neq (0,0)$ нуқтада узлуксиз бўлишини функция лимитининг хоссаларидан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0}} f(x_1, x_2) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0}} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x_1^0 \cdot x_2^0}{\sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}} = f(x_1^0, x_2^0).$$

Ушбу бобнинг 3-§ да келтирилган мисолга кўра

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0 = f(0,0)$$

бўлиб, ундан берилган функцияning $(0, 0)$ нуқтада ҳам узлуксиз эканлиги келиб чиқади. Демак, қаралаётган функция R^2 тўпламда узлуксиз.

Шундай қилиб функцияning узлуксизлиги унинг лимити орқали таърифланар экан. Функцияning лимити эса ўз навбатида Гейне ва Коши таърифларига эга. Шуни эътиборга олиб, функция узлуксизлигининг Гейне ва Коши таърифларини келтириш мумкин.

12. 25-таъриф (Гейне таърифи). Агар $M \subset R^m$ тўпламнинг нуқталаридан тузилган, $a(a \in M)$ га интигувчи ҳар қандай $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик олингандан ҳам, мос $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт $f(a)$ га интилса, $f(x)$ функция a нуқтада узлуксиз деб аталади.

12. 26-таъриф (Коши таърифи). Агар $\forall \epsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ топилсанки, ушбу $\rho(x, a) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x \in M$ нуқталарда

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция a нуқтада узлуксиз деб аталади.

Атроф тушунчаси ёрдамида функцияning узлуксизлигини қўйидаги-ча ҳам таърифлаш мумкин.

12. 27-таъриф. Агар $\forall \epsilon > 0$ сон учун, шундай $\delta > 0$ топилсанки, барча $x \in U_\delta(a) \cap M$ нуқталарда $f(x)$ функцияning қийматлари $f(x) \in U_\epsilon(f(a))$ бўлса, яъни

$$x \in U_\delta(a) \cap M \Rightarrow f(x) \in U_\epsilon(f(a))$$

бўлса, $f(x)$ функция a нуқтада узлуксиз деб аталади.

$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияning $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ нуқтада узлуксизлигини функция орттирмаси ёрдамида ҳам таърифлаш мумкин.

Функция аргументларининг орттирмалари

$$\Delta x_1 = x_1 - a_1, \Delta x_2 = x_2 - a_2, \dots, \Delta x_m = x_m - a_m$$

га мос ушбу

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f(x_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m) = \\ &= f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \dots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m) \end{aligned}$$

айрма $f(x)$ функцияниң a нүктадаги түлиқ орттырмасы деб аталади
ва Δf ёки $\Delta f(a)$ каби белгиланади:

$$\Delta f(a) = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \dots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

Қүйидаги

$$\begin{aligned} f(a_1 + \Delta x_1, a_2, \dots, a_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m), \\ f(a_1, a_2 + \Delta x_2, a_3, \dots, a_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m), \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ f(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m) \end{aligned}$$

айрмалар $f(x)$ функциянынг a нүктөдөгө хүсүсий орттормалари дейилди ва улар мөсравищда $\Delta_x f, \Delta_{x^2} f, \dots, \Delta_{x^n} f$ каби белгиланади.

Юқоридаги (*) лимит мұносабатдан топамыз:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0.$$

Натижада (*) тенглик қуйидаги

$$\lim_{x \rightarrow a} \Delta f(a) = 0, \text{ яъни } \lim_{\begin{array}{l} \Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0 \\ \vdots \\ \Delta x_m \rightarrow 0 \end{array}} \Delta f(a) = 0$$

күринишга келади. Демак, $f(x)$ функциянынг a нүктадаги узлуксизлиги

$$\lim_{x \rightarrow a} \Delta f(a) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \Delta f(a) = 0 \\ \vdots \\ \lim_{\Delta x_m \rightarrow 0} \Delta f(a) = 0 \end{array} \right)$$

қаби ҳам таърифланиши мумкин экан.

12. 28-тә ъриф. Агар $f(x)$ функция $M(M \subset R^m)$ тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, функция шу M тўпламда узлуксиз деб аталади.

Биз юқорида келтирган қўп ўзгарувчили функцияларнинг узлуксизлиги уларнинг барча ўзгарувчилари бўйича узлуксизлигини, яъни бир йўла узлуксизлигини ифодалайди.

Аввалидик $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $M \subset R^m$ түпламда берилган бўлсинг. Берилган функциянинг бирор $x_k (k = 1, 2, \dots, m)$ аргументидан бошқа барча аргументларини тайинлаб, бу x_k аргументга Δx_k орттирма берайлик, бунда $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) \in M$ бўлсинг. Натижада $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция ҳам

$$\Delta_{x_k} f = f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

($k = 1, 2, \dots, m$) хусусий орттиргага эга бүлэд.

Агар $\Delta x_k \rightarrow 0$ да функциянинг хусусий орттираси $\Delta_{x_k} f$ ҳам нолга иштилса, яъни

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \Delta_{x_k} f = 0$$

бўлса, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция (x_1, x_2, \dots, x_m) нуқтада x_k ўзгарувчиси

бўйича узлуксиз деб аталади. Одатда функцияниң бундай узлуксизлиги, унинг ҳар бир ўзгарувчи бўйича хусусий узлуксизлиги деб аталади.

Демак, кўп ўзгарувчили функцияниң ҳар бир ўзгарувчи бўйича хусусий узлуксизлиги, бир ўзгарувчили функция узлуксизлигининг худди ўзи экан.

Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ нуқтада (бир йўла) узлуксиз бўлса, функция шу нуқтада ҳар бир ўзгарувчи бўйича ҳам хусусий узлуксиз бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ нуқтада узлуксиз бўлсин. Таърифга кўра

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_m \rightarrow 0}} \Delta f = \lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_m \rightarrow 0}} [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, \dots, x_m^0)] = 0$$

бўлади.

Хусусан,

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_{k-1} = \Delta x_{k+1} = \dots = \Delta x_m = 0, \Delta x_k \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

бўлганда

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \Delta_x f = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} [f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)] = 0$$

бўлади. Бу эса берилган функцияниң $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада $x_k (k = 1, 2, \dots, m)$ ўзгарувчи бўйича хусусий узлуксиз бўлишини билдиради.

12.6-эслат ма. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияниң бирор нуқтада ҳар бир ўзгарувчи бўйича хусусий узлуксиз бўлишидан, унинг шу нуқтада (бир йўла) узлуксиз бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функцияниң ҳар бир ўзгарувчи бўйича узлуксиз бўлишини кўрсатамиз. Равшанки, $f(x_1, 0) = f(0, x_2) = 0$. Ихтиёрий $(x_1, x_2) \in R^2$ нуқта олиб, унда x_2 ўзгарувчини тайинлаймиз.

Агар $x_2 \neq 0$ ва $x_1 \rightarrow x_1^0 \neq 0$ бўлса,

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \frac{2x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{2x_1^0 \cdot x_2}{(x_1^0)^2 + x_2^2} = f(x_1^0, x_2)$$

бўлади.

Агар $x_2 = 0$ ва $x_1 \rightarrow x_1^0 \neq 0$ бўлса,

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, 0) = 0 = f(x_1^0, 0)$$

бўлади.

Агар $x_2 = 0$ ва $x_1 \rightarrow x_1^0 = 0$ бўлса,

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, 0) = 0 = f(0, 0)$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2) = f(x_1^0, x_2).$$

Бу эса берилган $f(x_1, x_2)$ функция x_1 ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз эканлигини билдиради. Берилган функциянинг x_2 ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз бўлиши худди шунга ўхшаш кўрсатилади. Демак, $f(x_1, x_2)$ функция ҳар бир ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз. Бироқ, бу функция $(0, 0)$ нуқтада узлуксиз эмас. Бу нуқтада функция ҳатто лимитта эга эмаслигини кўрсатайлик. Ҳақиқатан ҳам, $(0, 0)$ нуқтага интиладиган қўйидаги иккита $\left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\}$ ва $\left\{ \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\}$ кетма-кетликлар:

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \rightarrow (0, 0) \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n} \right) \rightarrow (0, 0) \quad (n \rightarrow \infty)$$

олинганда, уларга мос келадиган функция қийматларидан иборат

$\left\{ f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \right\}$ ва $\left\{ f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \right\}$ кетма-кетликлар учун

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 1 \rightarrow 1, \quad f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{4}{5} \rightarrow \frac{4}{5}$$

бўлади.

Биз юқорида кўп ўзгарувчили $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг ҳар бир x_k ($k = 1, 2, \dots, m$) ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксизлиги тушунчалини билан танишдик. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ ўзгарувчилари бўйича узлуксизлиги худди шунга ўхшаш таърифланади.

12. 29- таъриф. Агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функциянинг лимити мавжуд бўлмаса, ёки

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty,$$

ёки функциянинг лимити мавжуд, чекли бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq f(a)$$

бўлса, унда функция a нуқтада узилишига эга деб аталади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2, & \text{агар } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } (x_1, x_2) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функция R^2 тўпламда берилган бўлиб, унинг $(0, 0)$ нуқтадаги лимити

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = 0 \neq f(0, 0) = 1$$

бўлади. Демак, берилган функция $(0, 0)$ нуқтада узилишга эга.

2. Ушбу бобнинг 1- § ида келтирилган

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{агар } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x_1, x_2) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция узилишга эга, чунки

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = +\infty.$$

3. Қуйидаги

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 - 1}, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 \neq 1 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция $\{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узилишга эга бўлади, чунки $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$, $(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 = 1$ да $f(x_1, x_2)$ функцияниң чекли лимити мавжуд эмас.

4. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2}, & \text{агар } x_1 + 3x_2 \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x_1 + 3x_2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция $(0, 0)$ нуқтада узилишга эга, чунки $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ да берилган функцияниң лимиги мавжуд эмас (қаралсин 41-бет).

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, $f(x_1, x_2)$ функция текисликнинг муайян нуқталарида ёки текисликдаги бирор чизикнинг барча нуқталарида (яъни чизик бўйлаб) узилиши мумкин экан.

2. Узлуксиз функциялар устида арифметик амаллар. Мураккаб функцияниң узлуксизлиги. Энди узлуксиз функцияларниң йиғиндиси, айримаси, кўпайтмаси ва нисбатининг узлуксизлиги масаласини ўрганимиз.

12. 11- төрима. Агар $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларниң ҳар бирни $M \subset R^n$ тўпламда берилган бўлиб, улар $a \in M$ нуқтада узлуксиз бўлса,

$$f_1(x) \pm f_2(x), \quad f_1(x) \cdot f_2(x) \quad ҳамда \quad \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad (f_2(a) \neq 0)$$

функциялар ҳам шу нуқтада узлуксиз бўлади.

Исбот. Бу теореманинг исботи, аслида лимитга эга бўлган функциялар устида арифметик амаллар ҳақидаги маълумотлардан (ушбу бобнинг 3- § даги 5° , 6° ва 7° -хоссалар) бевосита келиб чиқади. Уни лимитга эга бўлган функцияниң хоссалари (3- § даги 1° ва 2° -хоссалар) ҳамда берилган функцияниң нуқтада узлуксизлигидан фойдаланиб

хам ишботлаш мүмкін. Бив қуйида иккі функция нисбатининг узлуксиз бўлишини кўрсатамиз. $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияниң ҳар бирини a нуқтада узлуксиз бўлиб, $f_2(a) \neq 0$ бўлсин. Раешанки, $x \rightarrow a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар мос равища $f_1(a)$, $f_2(a)$ лимитларга эга:

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = f_1(a); \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = f_2(a) \quad (f_2(a) \neq 0).$$

У ҳолда ушбу бобнинг 3- § идаги 2°-хоссага кўра, a нуқтанинг етарлича киичик атрофи $U_{\delta_1}(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) < \delta_1\}$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар чегараланган бўлади:

$$m_1 < f_1(x) < M_1, \quad m_2 < f_2(x) < M_2, \quad x \in U_{\delta_1}(a),$$

бунда m_1 , M_1 ва m_2 , M_2 — ўзгармас сонлар. Иккинчи томондан $f_2(a) \neq 0$ бўлгандиги сабабли 3- § даги 1°-хоссага кўра шу a нуқтанинг етарличи киичик атрофи $U_{\delta_2}(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) < \delta_2\}$ да $f_2(x) \neq 0$ бўлади.

Энди ушбу

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(a)}{f_2(a)} \quad (x \in U_{\delta_2}(a))$$

айирмани қарайлик. Уни қуйидагида ёзиб оламиз:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(a)}{f_2(a)} = \frac{f_1(x)}{f_2(a) f_2(x)} [f_2(a) - f_2(x)] + \frac{1}{f_2(a)} [f_1(x) - f_1(a)].$$

Агар $\delta' = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ деб олсан, унда $\forall x \in U_{\delta'}(a)$ учун

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(a)}{f_2(a)} \right| &\leqslant \left| \frac{M_1}{m_2 \cdot f_2(a)} \right| \cdot |f_2(x) - f_2(a)| + \\ &+ \frac{1}{|f_2(a)|} |f_1(x) - f_1(a)| \end{aligned} \quad (12.28)$$

бўлади.

$f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг a нуқтада узлуксизлигига асосан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, $\frac{|f_2(a)|}{2} \cdot \varepsilon$ га кўра шундай $\delta'' > 0$ топиладики, $\forall x \in U_{\delta''}(a)$ учун

$$|f_1(x) - f_1(a)| < \frac{|f_2(a)|}{2} \varepsilon, \quad (12.29)$$

шунингдек, ўша $\varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\left| \frac{m_2 \cdot f_2(a)}{M_1} \right| \cdot \frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $\delta''' > 0$ топиладики, $\forall x \in U_{\delta'''}(a)$ учун

$$|f_2(x) - f_2(a)| < \left| \frac{m_2 \cdot f_2(a)}{M_1} \right| \frac{\varepsilon}{2} \quad (12.30)$$

бўлади. Агар $\delta = \min\{\delta', \delta'', \delta'''\}$ деб олсан, унда $\forall x \in U_{\delta}(a)$ учун юқоридаги (12.28), (12.29) ва (12.30) муносабатлар бир йўла ўринли бўлиб, натижада ушбу

$$\left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(a)}{f_2(a)} \right| < \varepsilon$$

тengсизликка эга бўламиз. Бу эса $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ функцияниң a нуқтада узлуксиз эканлигини билдиради.

Худди шу йўл билан теореманинг қолган қисмлари ҳам исботланади.

12. 7-эслатма. Иккита функция йигинди, айрмаси, кўпайтмаси ва нисбати узлуксиз бўлишидан бу функцияларниң ҳар бирининг узлуксиз бўлиши келиб чиқавермайди.

Мисол. Ушбу $D = \{(x_1, x_2) \in R^2 : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\} \subset R^2$ квадратни олиб, унинг рационал нуқталари (яъни ҳар иккала координаталари рационал сон бўлган нуқталари) тўпламини D_p билан белгилаймиз. Бу D тўпламда қўйидаги

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{агар } (x_1, x_2) \in D_p \text{ бўлса}, \\ 0, & \text{агар } (x_1, x_2) \in D \setminus D_p \text{ бўлса} \end{cases}$$

ҳамда

$$f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} -1, & \text{агар } (x_1, x_2) \in D_p \text{ бўлса}, \\ 0, & \text{агар } (x_1, x_2) \in D \setminus D_p \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияларни қарайлик. Бу функциялар йигинди $f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2) = 0$ ($\forall (x_1, x_2) \in D$) бўлиб, у шу тўпламда узлуксиз бўлса-да, $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$ функцияларниң ҳар бири D да узлуксиз эмас.

Юқорида келтирилган теорема қўшилувчилар ҳамда кўпайгувчилар сони ихтиёрий чекли бўлган ҳолда ҳам ўринли бўлишини кўрсатиш қўйин эмас.

Энди мураккаб функцияниң узлуксизлиги ҳақидаги теоремани келтирамиз.

Фараз қиласлик, $M \subset R^m$ тўпламда $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция берилган бўлиб, x_1, x_2, \dots, x_m ларниң ҳар бири $T \subset R^k$ ($k \in N$) тўпламда берилган функциялар бўлсин:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t) = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \\ x_2 &= \varphi_2(t) = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \\ x_m &= \varphi_m(t) = \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k). \end{aligned}$$

Биз $t = (t_1, t_2, \dots, t_k) \in T$ бўлганда унга мос $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in M$ деб қараймиз. Бу функциялар ёрдамида

$$\begin{aligned} y &= f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)) = \\ &= \Phi(t_1, t_2, \dots, t_k) = \Phi(t) \end{aligned}$$

мураккаб функцияни тузамиз (қаралсин, 33-бет).

12. 12-теорема. Агар $\varphi_i(t) = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) функцияларниң ҳар бири $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада узлуксиз бўлиб, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция эса $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтага мос

$$\begin{aligned} x^0 &= (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \quad (x_1^0 = \varphi_1(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0), x_2^0 = \varphi_2(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0), \dots, x_m^0 = \\ &= \varphi_m(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)) \end{aligned}$$

нуқтада узлуксиз бўлса, $y = \Phi(t) = \Phi(t_1, t_2, \dots, t_k)$ мураккаб функция $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада узлуксиз бўлади.

Исбот. $x_i = \varphi_i(t) = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) функция $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада узлуксиз бўлсин.

$T \subset R^k$ тўпламда $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтага интиёрий

$$\{t^{(n)}\} = \{(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)})\} (n = 1, 2, \dots)$$

кетма-кетлик олайлик. У ҳолда узлуксизликнинг Гейне таърифига кўра

$$\left. \begin{array}{l} t_1^{(n)} \rightarrow t_1^0 \\ t_2^{(n)} \rightarrow t_2^0 \\ \vdots \\ t_k^{(n)} \rightarrow t_k^0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1^{(n)} = \varphi_1(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}) \rightarrow \varphi_1(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) = x_1^0, \\ x_2^{(n)} = \varphi_2(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}) \rightarrow \varphi_2(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) = x_2^0, \\ \vdots \\ x_m^{(n)} = \varphi_m(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}) \rightarrow \varphi_m(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) = x_m^0 \end{array}$$

бўлади.

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада узлуксиз. У ҳолда яна Гейне таърифига кўра

$$\left. \begin{array}{l} x_1^{(n)} \rightarrow x_1^0 \\ x_2^{(n)} \rightarrow x_2^0 \\ \vdots \\ x_m^{(n)} \rightarrow x_m^0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \rightarrow f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

бўлади. Демак, $t_1^{(n)} \rightarrow t_1^0, t_2^{(n)} \rightarrow t_2^0, \dots, t_k^{(n)} \rightarrow t_k^0$ да

$$f(\varphi_1(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}), \varphi_2(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}), \dots, \varphi_m(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)})) \rightarrow \\ \rightarrow f(\varphi_1(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0), \varphi_2(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0), \dots, \varphi_m(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)).$$

Бу эса $y = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)) = \Phi(t_1, t_2, \dots, t_k)$ функцияниң $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада узлуксиз эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

5- §. Узлуксиз функцияларнинг хоссалари

Биз қуйида кўп ўзгарувчили узлуксиз функцияларнинг хоссалари ни келтирамиз. Бунда бир ўзгарувчили узлуксиз функцияларнинг хоссалари тўғрисидаги маълумотлардан тўла фойдалана борамиз.

Кўп ўзгарувчили узлуксиз функциялар ҳам бир ўзгарувчили узлуксиз функцияларнинг хоссалари каби хоссаларга эга.

1. Нуқтада узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссалари (локал хоссалари). $f(x)$ функция M ($M \subset R^m$) тўпламда берилган бўлсин, M тўпламдан бирор x^0 нуқта олиб, бу нуқтанинг шу тўпламга тегишли бўлган етарли кичик атрофини қарайлик. $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксиз бўлсин. Бундай $f(x)$ функцияниң x^0 нуқтанинг етарли кичик атрофидаги хоссаларини (локал хоссаларини) ўрганамиз.

1°. Агар $f(x)$ функция $x^0 \in M$ нүктада узлуксиз бўлса, у ҳолда x^0 нүктанинг етарли кичик атрофида функция чегараланган бўлади.

Исбот. Функция узлуксизлиги таърифига кўра

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = f(x^0)$$

бўлиб, ундан $f(x)$ функцияни x^0 нүктада чекли лимитга эга эканлиги келиб чиқади. Чекли лимитга эга бўлган функциянинг хоссаларидан (қаранг, 38-бет) эса, $f(x)$ функцияни x^0 нүктанинг етарли кичик атрофида чегараланганигини топамиз.

2°. Агар $f(x)$ функция x^0 нүктада узлуксиз бўлиб, $f(x^0) > 0$ ($f(x^0) < 0$) бўлса, x^0 нүктанинг етарли кичик атрофидаги x нүкталарда $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция x^0 нүктада узлуксизлиги таърифига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олингандан ҳам шундай $\delta > 0$ топиладики, барча $x \in U_\delta(x^0) \cap M$ нүкталар учун

$$f(x^0) - \varepsilon < f(x) < f(x^0) + \varepsilon$$

бўлади.

Бу ерда $\varepsilon = f(x^0) > 0$ (агар $f(x^0) < 0$ бўлса, $\varepsilon = -f(x^0)$) деб олсак, фикримизнинг тасдиғига эга бўламиз.

Демак, $f(x)$ функция x^0 нүктада узлуксиз ва $f(x^0) \neq 0$ бўлса, x^0 нүктанинг етарли кичик атрофидаги x нүкталарда функция қийматларининг ишораси $f(x^0)$ нинг ишораси билан бир хил бўлар экан:

$$\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(x^0).$$

3°. Агар $f(x)$ функция x^0 нүктада узлуксиз бўлса, x^0 нүктанинг етарли кичик атрофидаги $x' \in M$, $x'' \in M$ нүкталар учун

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ функциянинг x^0 нүктада узлуксизлигига асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олингандан ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $\delta > 0$ топиладики, барча $x \in U_\delta(x^0)$ нүкталар учун

$$|f(x) - f(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади. Жумладан, $x' \in U_\delta(x^0)$, $x'' \in U_\delta(x^0)$ нүкталар учун ҳам

$$|f(x') - f(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x'') - f(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Қейинги тенгсизликлардан эса $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади.

2. Тўпламда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссалари (глобал хоссалари). Энди $M \subset R^n$ тўпламда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссаларини (глобал хоссаларини), аниқроғи $f(x)$ функция қийматларидан иборат $\{f(x) : x \in M\}$ тўпламнинг хоссаларини ўрганамиз.

12. 13-теорема (Больцано—Коши нинг биринчи теоремаси). $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция боғламли* $M \subset R^m$ түпламда берилган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функция түпламнинг иккита $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ ва $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ нуқтасида ҳар-хил ишорали қийматларга эга бўлса, у ҳолда шундай $c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in M$ нуқта топиладики, бу нуқтада функция нолга айланади:

$$f(c) = f(c_1, c_2, \dots, c_m) = 0.$$

Исбот. Аниқлик учун $f(a) = f(a_1, a_2, \dots, a_m) < 0$, $f(b) = f(b_1, b_2, \dots, b_m) > 0$ бўлсин. $M \subset R^m$ боғламли тўплам бўлгани учун бу a ва b нуқталарини бирлаштирувчи ва M тўпламда ётувчи синиқ чизик топилади. Бу синиқ чизик учлари бўлган нуқталарда $f(x)$ функцияning қийматларини хисоблаб борамиз. Бунда икки ҳол юз беради:

1) Синиқ чизиқ учларининг бирда $f(x)$ функция нолга айланади. Бу ҳолда синиқ чизиқнинг шу учини теоремадаги с нүқта деб олинса, $f(c) = 0$ бўлиб, теорема исботланади.

2) Синиқ чизиқ учларида $f(x)$ функция нолга айланмайды. Бу ҳолда синиқ чизиқнинг шундай кесмаси топиладики, унинг учларида $f(x)$ функцияниң қыйматлари ҳар хил ишорали бўлади. Синиқ чизиқнинг худди шу учларининг бирини $a' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_m)$ билан, иккинчи учни эса $b' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_m)$ билан белгиласак, унда

$$f(a') = f(a'_1, a'_2, \dots, a'_m) < 0,$$

$$f(b') = f(b'_1, b'_2, \dots, b'_m) > 0$$

бўлади. Синиқ чизиқнинг бу кесмасининг тенгламаси ушбу

$$x_1 = a'_1 + t(b'_1 - a'_1),$$

$$x_2 = a'_2 + t(b'_2 - a'_2),$$

• • • • • • •

$$x_m = a'_m + t(b'_m - a'_m)$$

($0 \leq t \leq 1$) күринишда ёзилади.

Агар ўзгарувчи $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in M$ нүктаны синиқ чизиқнинг шу кесмаси бўйичагина ўзгаради деб олинадиган бўлса, у ҳолда $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ кўп ўзгарувчили функция қўйидагича

$$F(t) = f(a'_1 + t(b'_1 - a'_1), a'_2 + t(b'_2 - a'_2), \dots, a'_m + t(b'_m - a'_m))$$

битта t ўзгарувчининг мураккаб функцияси бўлиб қолади. Мураккаб функцияниң узлуксизлиги ҳақидаги теоремага кўра $F(t)$ функция $[0,1]$ сегментда узлуксизdir. Иккинчи томондан $t = 0$ ва $t = 1$ да бу функция турли ишорали қийматларга эга:

$$F(0) = f(a'_1, a'_2, \dots, a'_m) < 0,$$

$$F(1) = f(b'_1, b'_2, \dots, b'_m) > 0.$$

Шундай қилиб, $F(t)$ функция $[0,1]$ сегментда узлуксиз ва шу сег-

* Бөглөмли түплам таърифини 1- §, 17- бетдан қаранг.

ментнинг четки нүқталарида ҳар хил ишорали қийматларга эга. У ҳолда 1-қисм, 5-боб, 7-§ даги 5.5- теоремага кўра, $(0,1)$ интервалда шундай t_0 нүқта топиладики,

$$F(t_0) = 0$$

бўлади. Демак,

$$F(t_0) = f(a'_1 + t_0(b'_1 - a'_1), a'_2 + t_0(b'_2 - a'_2), \dots, a'_m + t_0(b'_m - a'_m)) = 0.$$

Агар

$$c_1 = a'_1 + t_0(b'_1 - a'_1),$$

$$c_2 = a'_2 + t_0(b'_2 - a'_2),$$

.....

$$c = a'_m + t_0(b'_m - a'_m)$$

деб олсак, равшанки, $c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in M$ ва $f(c) = f(c_1, c_2, \dots, c_m) = 0$ бўлади. Бу юқорида келтирилган теоремани исботлайди.

Қўйидаги теорема ҳам шунга ўхшашиб исботланади.

12. 14- теорема (Больцано—Кошининг иккинчи теоремаси). $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция боғламли $M \subset R^m$ тўпламда берилган ва узлуксиз бўлиб, M тўпламнинг иккита $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ ва $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ нүқтасида $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$ бўлсин. А билан B орасида ҳар қандай C сон олинса ҳам, M тўпламда шундай $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ нүқта топиладики,

$$f(c) = f(c_1, c_2, \dots, c_m) = C$$

бўлади.

12. 15-теорема (Вейерштрасснинг биринчи теоремаси). Агар $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ $M \subset R^m$ тўпламда берилган ва узлуксиз бўлса, функция шу M тўпламда чегараланган бўлади.

Исбот. Тескарисини фараз қиласайлик, яъни $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ M тўпламда узлуксиз бўлса ҳам, у шу тўпламда чегараланмаган бўлсин. У ҳолда $\forall n \in N$ учун шундай $x^{(n)} \in M$ нүқта топиладики,

$$|f(x^{(n)})| > n \quad (12.31)$$

бўлади. Бундай нүқталардан $\{x^{(n)}\}$, $x^{(n)} \in M$ ($n = 1, 2, \dots$) кетма-кетлик тузамиз. Модомики, M тўплам чегараланган экан, унда $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик ҳам чегаралангандир. Больцано—Вейерштрасс теоремасига (ушбу бобнинг 2- § ига) кўра $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи бўлган $\{x^{(n_k)}\}$ қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин: $\{x^{(n_k)}\} \rightarrow x^0 (k \rightarrow \infty)$. M ёпиқ тўплам бўлгани учун $x^0 \in M$ бўлади. $f(x)$ функциянинг M тўпламда узлуксиз эканлигидан эса

$$f(x^{(n_k)}) \rightarrow f(x^0)$$

бўлиши келиб чиқади, натижада бир томондан (12.31) муносабатга кўра

$$|f(x^{(n_k)})| > n_k,$$

яъни $f(x^{(n_k)}) \rightarrow \infty (k \rightarrow \infty)$ да бўлса, иккинчи томондан $f(x^{(n_k)}) \rightarrow f(x^0)$ бўлиб қолди. Бундай зиддият $f(x)$ функцияни M тўпламда чегаралан-

маган деб олиниши оқибатида келиб чиқди. Демак, $f(x)$ функция M түпламда чегараланган. Теорема исбот бўлди.

12. 16-төрима (Вейерштрасснинг иккинчи теоремаси). Агар $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ $M \subset R^m$ түпламда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у шу түпламда ўзининг аниқ юқори ҳамда аниқ қўйи чегараларига эришади.

Бу теореманинг исботи 1-қисм, 5-боб, 7-§ даги 5.8-теореманинг исботи кабидир. Уни исботлашни ўқувчига ҳавола этамиш.

6- §. Кўп ўзгарувчили функциянинг текис узлуксизлиги. Кантор теоремаси

Ушбу параграфда кўп ўзгарувчили функциянинг текис узлуксизлиги тушунчасини киритамиз ва уни батафсил ўрганамиз.

$f(x)$ функция $M \subset R^m$ түпламда берилган бўлсин.

12. 30-тадъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун, шундай $\delta > 0$ топилсанки, M түпламниг $\rho(x', x'') < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва $x'' (x' \in M, x'' \in M)$ нуқталарида

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция M түпламда текис узлуксиз функция деб аталади.

Функциянинг текис узлуксизлиги таърифидаги $\delta > 0$ сон $\varepsilon > 0$ гагина боғлиқ бўлади. Табиййки, агар $f(x)$ функция $M \subset R^m$ түпламда текис узлуксиз бўлса, у шу түпламда узлуксиз бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

функцияниг $D = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ түпламда текис узлуксиз бўлиши кўрсатилин.

$\forall \varepsilon > 0$ сонни олиб, унга кўра топиладиган $\delta > 0$ сонни $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ деб олсак, у ҳолда

$$\rho(x', x'') = \rho((x'_1, x'_2), (x''_1, x''_2)) = \sqrt{(x''_1 - x'_1)^2 + (x''_2 - x'_2)^2} < \delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall (x'_1, x'_2) \in D, \forall (x''_1, x''_2) \in D$ нуқталар учун

$$\begin{aligned} |f(x'_1, x'_2) - f(x''_1, x''_2)| &= |(x'_1)^2 + (x'_2)^2 - [(x''_1)^2 + (x''_2)^2]| = |(x'_1 - x''_1)(x'_1 + x''_1) + \\ &+ (x'_2 - x''_2)(x'_2 + x''_2)| \leqslant 2\sqrt{(x''_1 - x'_1)^2 + (x''_2 - x'_2)^2} + 2\sqrt{(x''_1 - x'_1)^2 + (x''_2 - x'_2)^2} = \\ &= 4\delta < \varepsilon \text{ бўлади.} \end{aligned}$$

Демак, берилган функция $D \subset R^2$ түпламда текис узлуксиз.

2. Қўйидаги

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}$$

функцияни $A = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 0 < x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ түпламда қарайлик. Равшанки, бу функция A түпламда узлуксиз. Бироқ қаралаётган функция учун A түпламда текис узлуксизлик таърифидаги шарт бажарилмайди, яъни $\forall \delta > 0$ учун шундай $\varepsilon > 0$ ва $x' = (x'_1, x'_2) \in A, x'' = (x''_1, x''_2) \in A$ нуқталар топиладики, $\rho(x', x'') < \delta$ ҳамда

$$|f(x'_1, x'_2) - f(x''_1, x''_2)| > \varepsilon$$

бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $\forall \delta > 0$ учун $\varepsilon = 1$ деб ва $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in A, \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right) \in A$

нуқталарни олсак, $n > n_0 = \left\lceil \frac{1}{V^2 \delta} \right\rceil$ учун

$$\rho \left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right), \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n} \right) \right) = \frac{1}{nV^2} < \delta$$

ҳамда

$$\left| f \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) - f \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n} \right) \right| = 3n^2 > 1 = \varepsilon$$

бўлади.

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадиди, бирор тўпламда узлуксиз бўлган функциялар ҳар доим шу тўпламда текис узлуксизлик таърифидаги шартни бажаравермас экан. Аммо қуйидаги теорема ўринлидир.

12.17-теорема (Кантор теоремаси). *Агар $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ $M (M \subset R^n)$ тўпламда берилган ва узлуксиз бўлса, функция шу тўпламда текис узлуксиз бўлади.*

Исбот. Тескарисини фараз қиласайлик, яъни $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ M тўпламда узлуксиз бўлсин-у, аммо текис узлуксизлик таърифидаги шарт бажарилмасин. Бу ҳолда бирор $\varepsilon > 0$ сон ва ихтиёрий $\delta > 0$ сон учун M тўпламда $\rho(x', x'') < \delta$ тенгизликини қаноатлантирувчи шундай x' ва $x'' (x' \in M, x'' \in M)$ нуқталар топиладики,

$$|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon$$

бўлади.

Нолга интилевчи мусбат сонлар кетма-кетлиги $|\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \dots|$ ни олайлик:

$$\delta_n \rightarrow 0 \quad (\delta_n > 0 \quad n = 1, 2, \dots). \quad (12.32)$$

Фаразимизга кўра, юқоридаги $\varepsilon > 0$ сон ва ихтиёрий $\delta_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ учун M тўпламда шундай $a^{(n)}$ ва $b^{(n)} (n = 1, 2, \dots)$ нуқталар топиладики,

$$\rho(a^{(1)}, b^{(1)}) < \delta_1 \text{ ва } |f(a^{(1)}) - f(b^{(1)})| \geq \varepsilon,$$

$$\rho(a^{(2)}, b^{(2)}) < \delta_2 \text{ ва } |f(a^{(2)}) - f(b^{(2)})| \geq \varepsilon,$$

.....

$$\rho(a^{(n)}, b^{(n)}) < \delta_n \text{ ва } |f(a^{(n)}) - f(b^{(n)})| \geq \varepsilon,$$

.....

бўлади.

Модомики, M — чегараланган тўплам ва $a^{(n)} \in M (n = 1, 2, \dots)$ экан, унда Больцано — Вейерштрасс теоремасига кўра $\{a^{(n)}\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи $\{a^{(n_k)}\}$ кетма-кетлик ажратиш мумкин:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a^{(n_k)} = a^0. \quad (12.33)$$

M ёпиқ тўплам бўлгани сабабли $a^0 \in M$ бўлади. Юқоридаги $\{b^{(n)}\}$ жетма-кетликдан ажратилган $\{b^{(n_k)}\}$ қисмий жетма-кетликнинг лимити ҳам a^0 га тенг бўлади. Ҳақиқатан ҳам, ушбу

$$\rho(b^{(n_k)}, a^0) \leq \rho(b^{(n_k)}, a^{(n_k)}) + \rho(a^{(n_k)}, a^0) < \delta_{n_k} + \rho(a^{(n_k)}, a^0)$$

тенгсизликдаги δ_{n_k} ва $\rho(a^{(n_k)}, a^0)$ лар учун (12.32) ва (12.33) муносабатларга $k \rightarrow \infty$ да

$$\delta_{n_k} \rightarrow 0, \quad \rho(a^{(n_k)}, a^0) \rightarrow 0$$

бўлишини эътиборга олиб, $k \rightarrow \infty$ да $\rho(b^{(n_k)}, a^0) \rightarrow 0$ эканлигини топамиз.

Шундай қилиб, $k \rightarrow \infty$ да

$$a^{(n_k)} \rightarrow a^0, \quad b^{(n_k)} \rightarrow a^0.$$

Қаралаётган $f(x)$ функциянинг, шартга кўра M тўпламда узлуксиз эканлигидан

$$f(a^{(n_k)}) \rightarrow f(a^0), \quad f(b^{(n_k)}) \rightarrow f(a^0)$$

бўлиб, улардан эса

$$f(b^{(n_k)}) - f(a^{(n_k)}) \rightarrow 0$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\forall n_k$ лар учун

$$|f(b^{(n_k)}) - f(a^{(n_k)})| \geq \varepsilon$$

деб қилинган фаразга зиддир. Бундай зиддиятнинг келиб чиқишига сабаб $f(x)$ функциянинг M тўпламда текис узлуксизлик шартини қаноатлантируйди деб олиннишидир. Демак, функция M тўпламда текис узлуксиз. Теорема исбот бўлади.

Бирор $M \subset R^n$ тўплам берилган бўлсин. Бу тўпламда ихтиёрий иккита x' ва x'' нуқталарни олиб, улар орасидаги $\rho(x', x'')$ масофани топамиз. Равшонки, масофа олинган нуқталарга боғлиқ ёлади. Агар x' ва x'' нуқталарни M тўпламда ўзгартира борсак, унда $\{\rho(x', x'')\}$ тўплам ҳосил бўлади. Одатда, бу тўпламнинг аниқ юқори чегараси $\sup \{\rho(x', x'')\}$ ($x' \in M, x'' \in M$) M тўпламнинг диаметри деб аталади ва у $d(M)$ каби белгиланади:

$$d(M) = \sup \{\rho(x', x'')\} \quad (x' \in M, x'' \in M).$$

$f(x)$ функция $M \subset R^n$ тўпламда берилган бўлсин.

12.31-таъриф. Ушбу

$$\sup \{|f(x'') - f(x')|\} \quad (x' \in M, x'' \in M)$$

миқдор $f(x)$ функциянинг M тўпламдаги тебранини деб аталади ва у $\omega(f; M)$ каби белгиланади:

$$\omega(f; M) = \sup \{|f(x'') - f(x')|\} \quad (x' \in M, x'' \in M).$$

Юқорида келтирилган Кантор теоремасидан муҳим натижа келиб чиқади.

12.2-натижаси. $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ тўпламда берил-

ган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ сон олингандада ҳам M тўпламни чекли сондаги M_k тўпламларга шундай ажратиш мумкинки,

$$\bigcup_k M_k = M, M_k \cap M_j = \emptyset (k \neq j) \text{ ва } \omega(f; M_k) \leq \varepsilon$$

бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ M тўпламда узлуксиз бўлсин. Кантор теоремасига кўра бу функция M тўпламда текис узлуксиз бўлади. Бинобарин, $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топиладики, $\rho(x', x'') < \delta$ бўлган $\forall x', x''$ лар учун $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ бўлади. M тўпламни диаметрлари шу бўлган M_k тўпламларга ажратамиз. Равшанки, бу ҳолда $\forall x' \in M_k, \forall x'' \in M_k$ нуқталар учун $\rho(x', x'') < \delta$ бўлади ва демак,

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

тengsizlik bажарилади. Бундан эса

$$\sup \{|f(x'') - f(x')|\} \leq \varepsilon,$$

яъни

$$\omega(f; M_k) \leq \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Натижা исбот бўлди.

Биз ушбу параграфда функциянинг текис узлуксизлиги билан борлиқ бўлган функциянинг узлуксизлик модули тушунчаси билан ҳам танишамиз.

$f(x)$ функция $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин. $\forall \delta > 0$ сонни олиб, M тўпламнинг $\rho(x', x'') \leq \delta$ tengsizlikni қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва x'' ($x' \in M, x'' \in M$) нуқталардаги функция қийматларидан тузилган $|f(x'') - f(x')|$ айрмаларни қарайлик.

12.32-та ъриф. Ушбу

$$|f(x'') - f(x')| \quad (x' \in M, x'' \in M)$$

айрмалар тўпламининг аниқ юқори чегараси

$$\sup_{\rho(x', x'') < \delta} \{|f(x'') - f(x')|\} \quad (x' \in M, x'' \in M)$$

$f(x)$ функциянинг M тўпламдаги узлуксизлик модули деб аталади ва $\omega(f; \delta)$ каби белгиланади:

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\rho(x', x'') < \delta} \{|f(x'') - f(x')|\} \quad (x' \in M, x'' \in M).$$

Бу таърифдан, функциянинг узлуксизлик модули δ нинг манфий бўлмаган функцияси эканини кўрамиз. Бундан ташқари $\delta_1 > \delta_2 > 0$ бўлганда ушбу

$$\sup_{\rho(x', x'') < \delta_1} \{|f(x'') - f(x')|\} \geq \sup_{\rho(x', x'') < \delta_2} \{|f(x'') - f(x')|\}$$

$(x' \in M, x'' \in M)$ tengsizlik ўринли бўлиб, ундан

$$\omega(f; \delta_1) \geq \omega(f; \delta_2)$$

эканилиги келиб чиқади. Бу эса $\omega(f; \delta) — \delta$ нинг ўсувлари функцияси эканини билдиради.

Энди $f(x)$ функцияниң текис узлуксизлиги билан унинг узлуксизлиги модули орасидаги боғланишни ифодалайдиган теоремани келтирамиз.

12.18-теорема. $f(x)$ функцияниң $M \subset R^m$ түпламда текис узлуксиз бўлиши учун

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} J_\omega(f; \delta) = 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

13- Б О Б

КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ

Ушбу бобда биз кўп ўзгарувчили функциялар дифференциал ҳисоби билан шуғулланамиз. Киритиладиган ва ўрганиладиган ҳосилалар ва дифференциаллар тушунчалари бир ўзгарувчининг функциялари учун киритилган мос тушунчаларнинг тегишлича умумлаштирилишидан иборат бўлади. Айни пайтда, биз кўрамизки, кўп ўзгарувчили функциялар учун хос бўлган бир қанча янги тушунчалар ҳам (йўналиш бўйича ҳосила, тўла дифференциал ва ҳоказо) ўрганилади.

1- §. Кўп ўзгарувчили функцияниң хусусий ҳосилалари

1. Функция хусусий ҳосиласининг таърифлари. $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очиқ $M (M \subset R^m)$ түпламда берилган бўлсин. Бу түпламда $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқта олиб, унинг биринчи координатаси x_1^0 , га шундай $\Delta x_1 (\Delta x_1 \geq 0)$ орттирма берайликки, $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ бўлсин. Натижада $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция ҳам $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада x_1 ўзгарувчиси бўйича

$$\Delta_{x_1} f = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

хусусий орттиргмага эга бўлади.

Ушбу

$$\frac{\Delta_{x_1} f}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_1} \quad (13.1)$$

нисбатни қарайлик. Равшанки, бу нисбат Δx_1 нинг функцияси бўлиб, у Δx_1 нинг нолдан фарқли қийматларида аниқланган.

13.1- таъриф. Агар $\Delta x_1 \rightarrow 0$ да (13.1) нисбатнинг лимити

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_1} f}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_1}$$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияниң $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтадаги x_1 ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи деб аталади ва

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0), f'_{x_1}$$

белгиларнинг бири билан белгиланади. Демак,

$$f'_{x_1}(x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_1} f}{\Delta x_1}.$$

Агар $x_1^0 + \Delta x_1 = x_1$ деб олсак, унда $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$ ва $\Delta x_1 \rightarrow 0$ да $x_1 \rightarrow x_1^0$ бўлиб, натижада

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} = \frac{\Delta x_1 f}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_1} =$$

$$= \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \frac{f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{x_1 - x_1^0}$$

бўлади. Демак, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтадаги x_1 ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласини ушбу

$$\frac{f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{x_1 - x_1^0}$$

нисбатнинг $x_1 \rightarrow x_1^0$ даги лимити сифатида таърифлаш мүмкун.

Худди шунга ўхшаш $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг бошқа ўзгарувчилари бўйича хусусий ҳосилалари таърифланади:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_2 f}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_2}$$

.....

$$\frac{\partial f}{\partial x_m} = \lim_{\Delta x_m \rightarrow 0} \frac{\Delta x_m f}{\Delta x_m} = \lim_{\Delta x_m \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_m}.$$

Демак, күп ўзгарувчили $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянынг бирор $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктада x_k ($k=1, 2, \dots, m$) ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласини таърифлашда бу функциянынг x_k ($k=1, 2, \dots, m$) ўзгарувчидан бошқа барча ўзгарувчилари ўзгармас деб ҳисобланар экан. Шундай қилиб, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянынг хусусий ҳосилалари $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_m}$ 1-қисм, 6-боб, 1-§ да ўрганилган ҳосила — бир ўзгарувчили функция ҳосиласи каби эканлигини кўрамиз. Демак, кўп ўзгарувчили функцияларниң хусусий ҳосилаларини ҳисоблашда бир ўзгарувчили функцияниң ҳосиласини ҳисоблашдаги маълум бўлган қоида ва жадваллардан тўлиқ фойдаланиш мумкин.

Мисоллар. 1. $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ бўлсин. Бу функциянинг $\forall (x_1, x_2) \in R^2$ нуқтадаги хусусий хосилалари

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

$$2. f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} \text{ функциянинг } (x_1, x_2) \in R^2 (x_2 > 0) \text{ нүктадаги}$$

хусусий ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} \right) = -\frac{1}{2 \sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} \right) = -\frac{1}{2 \sqrt{x_2^3}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} - \\ &\quad -\frac{1}{2 \sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} = -\frac{1}{2 \sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} \left(1 + \frac{1}{x_2} \right). \end{aligned}$$

3. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{агар } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x_1, x_2) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Айтайлик, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ бўлсин. У ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{2x_2 (x_1^2 + x_2^2) - 2x_1 x_2 \cdot 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{2x_2 (x_2^2 - x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{2x_1 (x_1^2 + x_2^2) - 2x_1 x_2 \cdot 2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{2x_1 (x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

бўлади.

Энди $(x_1, x_2) = (0, 0)$ бўлсин. У ҳолда

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x_1, 0) - f(0, 0)}{\Delta x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta x_2) - f(0, 0)}{\Delta x_2} = 0$$

бўлади.

Демак, берилган $f(x_1, x_2)$ функция $\forall (x_1, x_2) \in R^2$ да хусусий ҳосилаларга эга.

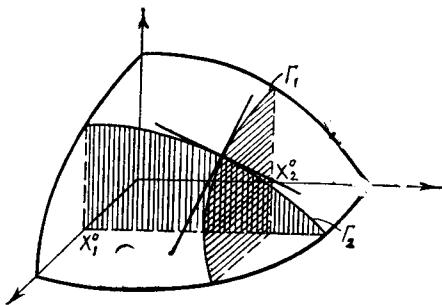
2. Хусусий ҳосиланинг геометрик маъноси. Соддалик учун икки ўзгарувчили функция хусусий ҳосилаларининг геометрик маъносини келтирамиз.

$f(x_1, x_2)$ функция очиқ $M(M \subset R^2)$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_1^0, x_2^0) \in M$ бўлсин. Бу функция (x_1^0, x_2^0) нуқтада $f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$, $f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Таърифга кўра $f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$ ва $f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$ хусусий ҳосилалар мос равишда ушбу $y_1 = f(x_1, x_2^0)$ ва $y_2 = f(x_1^0, x_2)$ бир ўзгарувчили функцияларнинг x_1^0 ва x_2^0 даги ҳосилаларидан иборат.

Фараз қиласлий, $y = f(x_1, x_2)$ функциянинг графиги 11- чизмада кўрсатилган сиртни тасвирласин. Унда $y_1 = f(x_1, x_2^0)$ ва $y_2 = f(x_1^0, x_2)$

функцияларнинг графиклари мос равишида $y = f(x_1, x_2)$ сирт билан $x_2 = x_2^0$ текисликнинг ҳамда шу сирт билан $x_1 = x_1^0$ текисликнинг кесишишидан ҳосил бўлган Γ_1 ва Γ_2 чизиқлардан иборат.

Маълумки, бир ўзгарувчили $u = \phi(x)$ функцияниң бирор x_0 ($x_0 \in R$) нуқтадаги ҳосиласининг геометрик маъноси (1- қисм, 6-боб, 1- §) бу функция тасвирланган эгри чизиқка $(x_0, \phi(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентидан, яъни уринманинг Ox ўқи билан ташкил этган бурчакнинг тангенсидан иборат эди. $f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$ ва $f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$ хусусий ҳосилалар мос равишида Γ_1 ва Γ_2 эгри чизиқларга (x_1^0, x_2^0) нуқтада ўтказилган уринмаларнинг Ox_1 ва Ox_2 ўқлар билан ташкил этган бурчакнинг тангенсини билдиради. Демак, $f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$ ва $f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$ хусусий ҳосилалар $y = f(x_1, x_2)$ сиртнинг мос равишида Ox_1 ва Ox_2 ўқлар йўналиши бўйича ўзгариш даражасини кўрсатади.



11- чизма

3. Функцияниң узлуксиз бўлиши билан унинг хусусий ҳосилага эга бўлиши орасидаги боғланиш. $f(x)$ функция очиқ M ($M \subset R^n$) тўпламда берилган бўлиб, $x_0 \in M$ нуқтада чекли $f'_{x_1}(x^0)$ хусусий ҳосилага эга бўлсин. Таърифга кўра

$$f'_{x_1}(x^0) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_1}{\Delta x_1}$$

бўлиб, ундан

$$\Delta x_1 f = f'_{x_1}(x^0) \cdot \Delta x_1 + \alpha_1 \Delta x_1$$

бўлишини топамиз, бунда $\Delta x_1 \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0$. Натижада

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \Delta x_1 f = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} [f'_{x_1}(x^0) \cdot \Delta x_1 + \alpha_1 \Delta x_1] = 0$$

бўлади. Бу эса $f(x)$ функцияниң x^0 нуқтада x_1 ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз эканлигини билдиради. Демак, $f(x)$ функция x^0 нуқтада чекли $f'_{x_k}(x^0)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) хусусий ҳосилага эга бўлса, $f(x)$ функция шу нуқтада мос x_k ($k = 1, 2, \dots, m$) ўзгарувчилари бўйича хусусий узлуксиз бўлади.

Бироқ кўп ўзгарувчили $f(x)$ функцияниң бирор x^0 нуқтада барча хусусий ҳосилаларга эга бўлишидан, унинг шу нуқтада узлуксиз (барча ўзгарувчилари бўйича бир йўла узлуксиз) бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Масалан, ушбу параграфнинг 1- пунктида келтирилган 3- мисолдаги $f(x_1, x_2)$ функция $\forall (x_1, x_2) \in R^2$ нуқтада $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлса-да, бу функция $(0, 0)$ нуқтада узлуксиз (иккала ўзгарувчиси бўйича бир йўла узлуксиз) эмас (қаралсин, 12- боб, 1- §).

2- §. Қўп ўзгарувчили функцияларнинг дифференциалланувчилиги

1. Функцияниң дифференциалланувчилиги тушунчаси. Дифференциалланувчиликнинг зарурый шарти. $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очиқ $M (M \subset R^m)$ тўпламда берилган бўлсин. Бу тўпламда $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = x^0$ нуқта билан бирга $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$ нуқтани олиб, берилган функцияниң тўла орттирмаси

$$\Delta f(x^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

ни қараймиз.

Равшанки, функцияниң $\Delta f(x^0)$ орттирмаси аргументлар орттирмалари $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга боғлиқ бўлиб, кўпчилик ҳолларда $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ лар билан Δf орасидаги боғланиш мураккаб бўлади. Табиимикки, бунда $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга кўра Δf ни аниқ ёки тақрибий ҳисоблаш қўйинлашади. Натижада орттирмаси $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ орттирмалар билан соддароқ боғланишда бўлган функцияларни ўрганиш масаласи юзага келади.

13.2-таъриф. Агар $f(x)$ функцияниң x^0 нуқтадаги $\Delta f(x^0)$ орттирмасини

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \quad (13.2)$$

кўринишида ифодалаш мумкин бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи деб аталади, бунда A_1, A_2, \dots, A_m лар $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга боғлиқ бўлмаган ўзгармаслар, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ лар эса $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга боғлиқ ва $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \dots, \alpha_m \rightarrow 0 (\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_m = 0)$ бўлганда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ деб олинади).

Агар $f(x)$ функция M тўпламнинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи бўлса, $f(x)$ функция M тўпламда дифференциалланувчи деб аталади.

Мисол. Ушбу $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ функцияни қарайлик. Бу функция $\forall (x_1^0, x_2^0) \in R^2$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади. Ҳақиқатан ҳам, (x_1^0, x_2^0) нуқтада берилган функцияниң орттирмаси

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0, x_2^0) = (x_1^0 + \Delta x_1)^2 + (x_2^0 + \Delta x_2)^2 - \\ &- (x_1^0)^2 - (x_2^0)^2 = 2x_1^0 \Delta x_1 + 2x_2^0 \Delta x_2 + (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 \end{aligned}$$

бўлиб, унда $A_1 = 2x_1^0, A_2 = 2x_2^0, \alpha_1 = \Delta x_1, \alpha_2 = \Delta x_2$ дейилса, натижада

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2$$

бўлади. Бу эса берилган функцияниң $\forall (x_1, x_2) \in R^2$ нуқтада дифференциалланувчи эканлигини билдиради.

$f(x)$ функцияниң x^0 нуқтада дифференциалланувчилик шарти (13.2) ни қўйидаги

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + o(\rho) \quad (13.3)$$

кўринишида ҳам ёзиш мумкинлигини кўрсатамиз, бунда ρ ($x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0$) = x^0 ва ($x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m$) нуқталар орасидаги масофа:

$$\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}.$$

Равшанки,

$$\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0 \Rightarrow \rho \rightarrow 0$$

ва

$$\rho \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$$

бўлади.

Энди $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да (13.2) муносабатдаги $\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$ миқдор ρ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор эканлигини кўрсатамиз. Агар

$$\begin{aligned} \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m &= \rho \left(\alpha_1 \frac{\Delta x_1}{\rho} + \alpha_2 \frac{\Delta x_2}{\rho} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_m \frac{\Delta x_m}{\rho} \right) \quad (\rho \neq 0) \end{aligned}$$

муносабатда

$$\frac{|\Delta x_k|}{\rho} \leq 1 \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

бўлишини эътиборга олсақ, унда

$$|\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m| \leq (|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_m|) \rho$$

бўлади. Демак,

$$\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m = o(\rho).$$

Шундай қилиб, (13.2) шартнинг ўринли бўлишдан (13.3) нинг ўринли бўлиши келиб чиқди.

Агар $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада дифференциалланувчилик шарти (13.3) кўринишида ўринли бўлса, бундан бўш шартнинг (13.2) кўриниши ҳам ўринли бўлиши келиб чиқади. Шуни исботлайлик.

Агар $\rho = 0$ бўлса, унда $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_m = 0$ бўлади ва (13.3) дан (13.2) келиб чиқади.

$\rho \neq 0$ бўлсин. Унда $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларнинг барчаси бир йўла нолга тенг бўлмайди. Шуни эътиборга олиб қўйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} o(\rho) &= \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}{\rho} = \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_1}{\rho} \cdot \Delta x_1 + \\ &+ \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_2}{\rho} \cdot \Delta x_2 + \dots + \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_m}{\rho} \cdot \Delta x_m = \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \\ &\quad + \dots + \alpha_m \Delta x_m, \end{aligned}$$

бунда

$$\alpha_k = \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_k}{\rho} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

бўлиб, $\rho \rightarrow 0$, яъни $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \dots, \alpha_m \rightarrow 0$.

Демак, $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада дифференциалланувчилигининг (13.2) ва (13.3) шартлари ўзаро эквивалентdir.

Энди дифференциалланувчи функциялар ҳақида иккита теорема келтирамиз.

13.1- теорема. Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функция шу нуқтада узлуксиз бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда таърифга кўра функция орттирмаси учун

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$$

бўлади, бунда A_1, A_2, \dots, A_m — ўзгармас, $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \dots, \alpha_m \rightarrow 0$.

Юқоридаги тенглиқдан

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0 \\ \vdots \\ \Delta x_m \rightarrow 0}} \Delta f(x^0) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада узлуксизлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

13.2. теорема. Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функциянинг шу нуқтада барча хисусий ҳосилалари $f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0)$ мавжуд ва улар мос равишда (13.2) муносабатдаги A_1, A_2, \dots, A_m ларга тенг бўлади, яъни

$$f'_{x_1}(x^0) = A_1, f'_{x_2}(x^0) = A_2, \dots, f'_{x_m}(x^0) = A_m.$$

Исбот. $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда таърифга кўра функция орттирмаси учун

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \quad (13.2)$$

бўлади. Бу тенглиқда

$$\Delta x_1 \neq 0, \Delta x_2 = \Delta x_3 = \dots = \Delta x_m = 0$$

деб олсак, унда (13.2) ушбу

$$\Delta_{x_1} f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + \alpha_1 \cdot \Delta x_1$$

кўринишни олади. Бу тенглиқнинг ҳар икки томонини Δx_1 га бўлиб, сўнг $\Delta x_1 \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб, қўйидагини топамиз:

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_1} f(x^0)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} (A_1 + \alpha_1) = A_1.$$

Демак,

$$f'_{x_1}(x^0) = A_1.$$

Худди шунга ўхшаш $f(x)$ функцияниң x^0 нүктада $f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0)$ хусусий ҳосилаларининг мавжудлиги ҳамда

$$f'_{x_1}(x^0) = A_1, f'_{x_2}(x^0) = A_2, \dots, f'_{x_m}(x^0) = A_m$$

әканлиги күрсатиласы. Теорема исбөт бўлди.

13.1-натижаси. Агар $f(x)$ функция x^0 нүктада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда

$$\Delta f(x^0) = f'_{x_1}(x^0) \Delta x_1 + f'_{x_2}(x^0) \Delta x_2 + \dots + f'_{x_m}(x^0) \Delta x_m + o(\rho)$$

бўлади.

13.1-эслатма. $f(x)$ функцияниң бирор x^0 нүктада барча хусусий ҳосилалари $f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0)$ нинг мавжуд бўлишидан, функцияниң шу нүктада дифференциалланувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Масалан, ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{агар } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{агар } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функция $(0, 0)$ нүктада хусусий ҳосилаларга эга:

$$\begin{aligned} f'_{x_1}(0, 0) &= \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x_1, 0) - f(0, 0)}{\Delta x_1} = 0, \\ f'_{x_2}(0, 0) &= \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta x_2) - f(0, 0)}{\Delta x_2} = 0. \end{aligned}$$

Берилган функцияниң $(0, 0)$ нүктадаги орттирилмаси

$$\Delta f(0, 0) = f(\Delta x_1, \Delta x_2) - f(0, 0) = \frac{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2}{\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}}$$

бўлиб, уни (13.2) ёки (13.3) кўринишида ифодалаб бўлмайди. Буни исботлаш мақсадида, тескарисини, яни $f(x_1, x_2)$ функция $(0, 0)$ нүктада дифференциалланувчи бўлсин деб фараз қиласайлик. Унда

$$\Delta f(0, 0) = f'_{x_1}(0, 0) \Delta x_1 + f'_{x_2}(0, 0) \Delta x_2 + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 = \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 \quad (13.4)$$

бўлиб, бу муносабатда $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0$ бўлади. Демак,

$$\frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}} = \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2. \quad (13.5)$$

Маълумки, Δx_1 ва Δx_2 лар иктиёрий орттирилмалар. Жумладан, $\Delta x_1 = \Delta x_2$ бўлганда (13.5) тенглик ушбу

$$\frac{\Delta x_1}{\sqrt{2}} = \Delta x_1 (\alpha_1 + \alpha_2)$$

кўринишга келиб, ундан эса

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

бўлиши келиб чиқади. Натижада $\Delta x_1 \rightarrow 0$, $\Delta x_2 \rightarrow 0$ да α_1 ва α_2 миқдорларнинг нолга интилмаслигини топамиз. Бу эса $f(x_1, x_2)$ функцияниг (0, 0) нуқтада дифференциалланувчи бўлсин деб қилинган фаразга зид. Демак, берилган функция (0, 0) нуқтада хусусий ҳосилаларга эга, аммо у шу нуқтада дифференциалланувчилик шартини бажармайди.

Шундай қилиб, функцияниг бирор нуқтада барча хусусий ҳосилаларга эга бўлиши, функцияниг шу нуқтада дифференциалланувчи бўлишининг зарурий шартидан иборат экан.

2. Функция дифференциалланувчилигининг етарли шарти. Энди кўп ўзгарувчили функция дифференциалланувчи бўлишининг етарли шартини келтирамиз.

$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очиқ $M(M \subset R^m)$ тўпламда берилган бўлиб, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқта шу тўпламга тегишли бўлсин.

13.3-теорема. Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтанинг бирор атрофига барча ўзгарувчилари бўйича хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар шу x^0 нуқтада узлуксиз бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлади.

Исбот. $x^0 \in M$ нуқтани олиб, унинг координаталарига мос равишида шундай $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ орттирмалар берайликки, $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$ нуқта x^0 нуқтанинг айтилган атрофига тегишли бўлсин. Сўнг функция тўла орттирмаси

$\Delta f(x^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ ни қўйидагича ёёз оламиз:

$$\begin{aligned} \Delta f(x^0) &= [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - \\ &- f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)] + [f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3, \dots, \\ &x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0 + \Delta x_3, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)] + \dots + [f(x_1^0, x_2^0, \dots, \\ &x_{m-1}^0, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_m^0)]. \end{aligned}$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир айирма тегишли битта аргументнинг функцияси орттирмаси сифатида қаралиши мумкин. Унинг учун Лагранж теоремасини татбиқ қила оламиз, чунки теоремамизда келтирилган шартлар Лагранж теоремаси шартларининг бажарилишини таъминлайди:

$$\begin{aligned} \Delta f(x^0) &= f'_x_1(x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \cdot \Delta x_1 + \\ &+ f'_x_2(x_1^0, x_2^0 + \theta_2 \Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \cdot \Delta x_2 + \quad (13.6) \\ &+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \\ &+ f'_{x_m}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m^0 + \theta_m \Delta x_m) \cdot \Delta x_m, \end{aligned}$$

бунда

$$0 < \theta_i < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Одатда (13.6) функция орттап масынанға формуласы табылады.

Шартга күра x^0 нүктада $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилалар уз-луксиз. Шунга күра

$$f'_{x_1}(x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \equiv f'(x^0) + \alpha,$$

$$f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0 + \theta_2 \Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) = f'_v(x^0) + \alpha_0.$$

$$f_{x_m}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m^0 + \theta_m \Delta x_m) = f'_{x_m}(x^0) + \alpha_m \quad (13.7)$$

бўлиб, унда $\Delta x_1 \rightarrow 0$, $\Delta x_2 \rightarrow 0$, ..., $\Delta x_m \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0$, $\alpha_2 \rightarrow 0$, ..., $\alpha_m \rightarrow 0$ бўлади.

(13.6) ва (13.7) мұносабатлардан

$$\Delta \hat{f}(x^0) = \hat{f}'_{x_1}(x^0)\Delta x_1 + \hat{f}'_{x_2}(x^0)\Delta x_2 + \hat{f}'_{x_m}(x^0)\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + \dots + \alpha_m\Delta x_m$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $f(x)$ функцияning x^0 нуқтада дифференциалланувчи эканлигини билдиради. Теорема избор ёки

Бир ва кўп ўзгарувчили функцияларда функциянинг дифференциал-
декани

уучилиги түшүнчеси киритилди (каралсın, 1-кисм 6-боб 4-8 үзмөдө)

1) Бир ўзгарувчили функцияларда ҳам, күп ўзгарувчили функцияларда ҳам функциянынг бирор нүктада дифференциалланувчи бўлишидан унинг шу нүктада узлуксиз бўлиши келиб чиқади. Демак, бир ва күп ўзгарувчили функцияларда функциянынг дифференциалланувчи бўлишидан унинг шу нүктада узлуксиз бўлиши келиб чиқади.

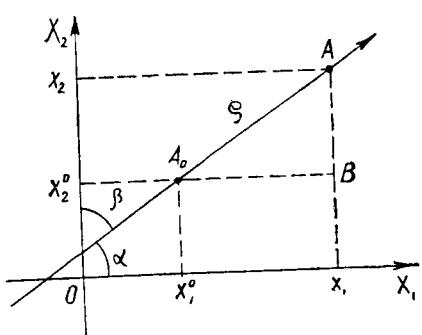
2) Маълумки, бир ўзгарувчи функцияларда функциянинг бирор нуқтада дифференциалланувчи бўлишидан унинг шу нуқтада чекли ҳосилага эга бўлиши келиб чиқади ва, аксинча, функциянинг бирор нуқтада чекли ҳосилага эга бўлишидан унинг шу нуқтада дифференциалланувчи бўлиши келиб чиқади.

Күп ўзгарувчили функцияларда функциянынг бирор нүктада дифференциаллануучи бўлишидан унинг шу нүктада барча чекли хусусий ҳосилаларга эга бўлиши келиб чиқади. Бироқ, функциянынг бирор нүктада барча чекли хусусий ҳосилаларга эга бўлишидан унинг шу нүктада дифференциаллануучи бўлиши келиб чиқади.

Демак, бир ва кўп ўзгарувчили функцияларда функциянинг дифференциалланувчи бўлиши билан унинг ҳосилага (хусусий ҳосилага) эга бўлиши орасидаги муносабат бир хил эмас экан.

3- §. Йўналиш бўйича хосида

Маълумки, бир ўзгарувчили $y = f(x)$ функциянинг $(x \in R, y \in R)$ дифференциалларига $\frac{dy}{dx}$ ҳосиласи бу функциянинг ўзгариш тезлигини билдирад эди. Кўп ўзгарувчили $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $((x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m)$



12- чизма

$y \in R$) хусусий ҳосиалари ҳам бир ўзгарувчили функцияниң ҳосиласи каби эканлигини эътиборга олиб, бу $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$ хусусий ҳосиалар ҳам $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияниң мос равища Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_m ўқлар бўйича (R^m фазода) ўзгариш тезлигини ифодалайди деб айтиш мумкин.

Энди функцияниң ихтиёрий йўналиш бўйича ўзгариш тезлигини ифодаловчи тушунча билан танишайлик. Соддалик учун икки ўзгарувчили функцияни қараймиз.

$y = f(x_1, x_2) = f(A)$ функция очиқ M тўпламда ($M \in R^2$) берилган бўлсин. Бу тўпламда ихтиёрий $A_0 = (x_1^0, x_2^0)$ нуқтани олиб, у орқали бирор тўғри чизиқ ўтказайлик ва ундаги икки йўналишдан бирини мусбат йўналиш, иккинчисини манфий йўналиш деб қабул қиласайлик. Бу йўналган тўғри чизиқни l дейлик.

α ва β деб l йўналган тўғри чизиқ мусбат йўналиши билан мос равища Ox_1 ва Ox_2 координата ўқларининг мусбат йўналиши орасидаги бурчакларни олайлик (12- чизма). Унда $\triangle A_0AB$ дан

$$\frac{x_1 - x_1^0}{\rho} = \cos \alpha, \quad \frac{x_2 - x_2^0}{\rho} = \cos \beta$$

бўлиши келиб чиқади. Одатда $\cos \alpha$ ва $\cos \beta$ [лар l тўғри чизиқнинг йўналтирувчи косинуслари дейилади.

l тўғри чизиқда A_0 нуқтадан фарқли ва M тўпламга тегишли бўлган A нуқтани ($A = (x_1, x_2)$) олайликки, A_0A кесма M тўпламга тегишли бўлсин. Агарда A нуқта A_0 га нисбатан l тўғри чизиқнинг мусбат йўналиши томонида бўлса (шаклдагидек), у ҳолда A_0A кесма узунлиги $\rho(A_0, A)$ ни мусбат ишора билан, манфий йўналиши томонида жойлашган бўлса, манфий ишора билан олишга келишайлик.

13.3- та ёриф. A нуқта l йўналган тўғри чизиқ бўйлаб A_0 нуқтага интилганда ($A \rightarrow A_0$) ушбу нисбат

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0)}{\rho((x_1^0, x_2^0), (x_1, x_2))}$$

нинг лимити мавжуд бўлса, бу лимит $|f(x_1, x_2)| = |f(A)|$ функцияниң $A_0 = (x_1^0, x_2^0)$ нуқтадаги l йўналиши бўйича ҳосиласи деб аталади ва

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial l} \text{ ёки } \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial l}$$

каби белгиланади. Демак,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{A \rightarrow A_0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)}.$$

Энди $f(x_1, x_2)$ функцияниң l йүналиш бүйича ҳосиласининг мавжудлиги ҳамда уни топиш масаласи билан шуғулланамиз.

13.4-теорема. $f(x_1, x_2)$ функция очиқ M түпламда ($M \subset R^2$) берилган бўлсин. Агар бу функция $A_0 = (x_1^0, x_2^0)$ нуқтада ($(x_1^0, x_2^0) \in M$) дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функция шу нуқтада ҳар қандай l йўналиши бўйича ҳосилага эга ва

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \cos \beta. \quad (13.8)$$

Исбот. Шартга кўра $f(x_1, x_2)$ функция $A_0 = (x_1^0, x_2^0)$ нуқтада дифференциалланувчи. Демак, функция орттирмаси

$$f(A) - f(A_0) = f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0)$$

учун

$$f(A) - f(A_0) = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^0) + o(\rho) \quad (13.9)$$

бўлади, бунда

$$\rho = \rho(A_0, A) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}.$$

(13.9) тенгликнинг ҳар икки томонини $\rho = \rho(A_0, A)$ га бўлсак, у ҳолда

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1 - x_1^0}{\rho} + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2 - x_2^0}{\rho} + \frac{o(\rho)}{\rho} \quad (13.10)$$

бўлади.

Натижада (13.10) тенглик ушбу

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \cos \beta + \frac{o(\rho)}{\rho}$$

кўринишга келади. Бу тенгликда $A \rightarrow A_0$ да (яъни $\rho \rightarrow 0$ да) лимитга ўтсак, унда

$$\lim_{A \rightarrow A_0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \cos \beta$$

бўлади. Демак,

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \cos \beta.$$

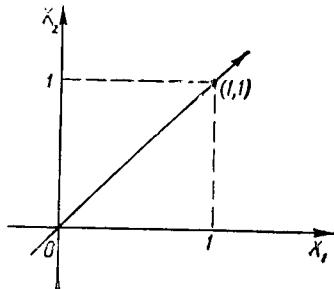
Бу эса теоремани исботлайди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2}$$

функцияни қарайлик.

l биринчи квадрантнинг $(1, 1)$ нуқтадан ўтувчи ва $(0, 0)$ нуқтадан $(1, 1)$ нуқ-



13- чизма

тага қараб йўналган биссектрисасидан иборат (13-чизма). Берилган функцияниг $A_0 = (1, 1)$ нуқтадаги l йўналиш бўйича ҳосиласини топинг.

Берилган

$$f(x_1, x_2) = \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2}$$

функцияниг $A_0 = (1, 1)$ нуқтада дифференциалланувчи эканлиги равшан. Унда юқорида келтирилган (13.8) формуладан фойдаланиб,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(1, 1)}{\partial l} &= \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x_1} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x_2} \times \\ &\times \cos \frac{\pi}{4} = \left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \Big|_{\substack{x_1=1 \\ x_2=1}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{aligned}$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial l} = 0.$$

Қаралаётган функцияниг $A_0 = (1, 1)$ нуқтадаги Ox_1 ва Ox_2 координата ўқлари бўйича ҳосилалари мос равиша

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}$$

бўлади.

2. Қўйидаги

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

функцияниг $A_0 = (0, 0)$ нуқтада исталган l йўналиш бўйича ҳосиласи

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial l} = 1$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\rho} = \frac{\rho}{\rho} = 1$$

бўлиб,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = 1$$

бўлади.

3. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = x_1 + |x_2|$$

функцияниг $(0, 0)$ нуқтада Ox_1 координата ўқи бўйича ҳосиласи 1 га тенг бўлиб, Ox_2 координата ўқи бўйича ҳосиласи мавжуд эмас.

13.2-эслатма. Функция бирор нуқтада дифференциалланувчилик шартини қаноатлантирумаса ҳам, у шу нуқтада бирор йўналиш бўйича

ва ҳатто ҳар қандай йўналиш бўйича ҳосилага эга бўлиши мумкин.
Масалан, ушбу

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

функция $A_0 = (0, 0)$ нуқтада дифференциалланувчилик шартини бажармайди. Юқорида кўрдикки, бу функция $(0, 0)$ нуқтада исталган йўналиш бўйича ҳосилага эга.

4- §. Кўп ўзгарувчили мураккаб функцияларнинг дифференциалланувчилиги. Мураккаб функциянинг ҳосиласи

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $M (M \subset R^m)$ тўпламда берилган бўлиб, x_1, x_2, \dots, x_m ўзгарувчиларнинг ҳар бирни ўз навбатида t_1, t_2, \dots, t_k ўзгарувчиларнинг $T (T \subset R^k)$ тўпламда берилган функцияси бўлсин:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ x_m &= \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k). \end{aligned} \tag{13.11}$$

Бунда $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in T$ бўлганда унга мос $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in M$ бўлсин. Натижада ушбу

$$\begin{aligned} y &= f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)) = \\ &= F(t_1, t_2, \dots, t_k) \end{aligned}$$

мураккаб функцияяга эга бўламиз.

1. Мураккаб функциянинг дифференциалланувчилиги.

13.5-теорема. Агар (13.11) функцияларнинг ҳар бирни $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \in T$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция эса мос $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ нуқтада ($x_1^0 = \varphi_1(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$, $x_2^0 = \varphi_2(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$, \dots , $x_m^0 = \varphi_m(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$) дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда мураккаб функция $F(t_1, t_2, \dots, t_m)$ ҳам $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади.

Исбот. $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \in T$ нуқтани олиб, унинг координаталарига мос равишда шундай $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_k$ орттирилалар берайликки $(t_1^0 + \Delta t_1, t_2^0 + \Delta t_2, \dots, t_k^0 + \Delta t_k) \in T$ бўлсин. У ҳолда (13.11) ифодадаги ҳар бир функция ҳам $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ орттирилаларга ва ниҳоят $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция Δf орттирилмага эга бўлади.

Шартга кўра (13.11) ифодадаги функцияларнинг ҳар бирни $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи. Демак,

$$\Delta x_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho),$$

$$\Delta x_2 = \frac{\partial x_2}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_2}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho), \quad (13.12)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta x_m = \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho)$$

бўлади, бунда $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k$) хусусий ҳосилаларнинг $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтадаги қийматлари олинган,

$$\rho = \sqrt{(\Delta t_1)^2 + (\Delta t_2)^2 + \dots + (\Delta t_k)^2}.$$

Шартга асосан, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада дифференциалланувчи. Демак,

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \quad (13.13)$$

бўлади, бунда $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) хусусий ҳосилаларнинг $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтадаги қийматлари олинган ва $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \dots, \alpha_m \rightarrow 0$ бўлади.

(13.12) ва (13.13) муносабатлардан топамиз:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \left[\frac{\partial x_1}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho) \right] + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_2} \left[\frac{\partial x_2}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_2}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho) \right] + \\ &\quad + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_m} \left[\frac{\partial x_m}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho) \right] = \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \right] \Delta t_1 + \\ &\quad + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_2} \right] \Delta t_2 + \quad (13.14) \\ &\quad + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \\ &\quad + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_k} \right] \Delta t_k + \\ &+ \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \right] \cdot o(\rho) + \alpha_1 \cdot \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m. \end{aligned}$$

Бу тенгликдаги $\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}$ йиғинди ўзгармас (ρ га боялиқ эмас) бўлганилиги сабабли

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \right] \cdot o(\rho) = o(\rho)$$

бўлади.

Модомики $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) функциялар $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нүктада дифференциалланувчи экан, улар шу нүктада узлуксиз бўлади. Унда узлуксилик таърифига кўра $\Delta t_1 \rightarrow 0, \Delta t_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta t_k \rightarrow 0$ да, яъни $\rho \rightarrow 0$ да $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ бўлади. Яна ҳам аниқроқ айтсак, (13.12) формулалардан $\rho \rightarrow 0$ да $\Delta x_1 = o(\rho), \Delta x_2 = o(\rho), \dots, \Delta x_m = o(\rho)$ эканлиги келиб чиқади.

$\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да эса $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \dots, \alpha_m \rightarrow 0$.

Демак,

$$\rho \rightarrow 0 \Rightarrow \text{барча } \Delta x_i \rightarrow 0 \Rightarrow \text{барча } \alpha_i \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m = o(\rho).$$

Шундай қилиб,

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \right] \cdot o(\rho) + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m = o(\rho) \quad (13.15)$$

бўлади. Агар ушбу

$$A_j = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_j}$$

$(i = 1, 2, \dots, k)$ белгилашни киритсак, у ҳолда (13.14) ва (13.15) муносабатлардан

$$\Delta f = A_1 \Delta t_1 + A_2 \Delta t_2 + \dots + A_k \Delta t_k + o(\rho)$$

келиб чиқади. Бу эса $y = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k)) = F(t_1, t_2, \dots, t_k)$ мураккаб функциянинг $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нүктада дифференциалланувчи эканлигини билдиради.

Теорема исбот бўлди.

2. Мураккаб функцияниң ҳосиласи. Энди

$$y = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)) = F(t_1, t_2, \dots, t_k)$$

мураккаб функциянинг t_1, t_2, \dots, t_k ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилаларини топамиз.

Агар (13.11) функцияларнинг ҳар бири $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \in T$ нүктада дифференциаллануви бўлиб, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция эса мос $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда мураккаб функция

$y = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k))$ ҳар бир t_1, t_2, \dots, t_k ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосилаларга эга бўлиб,

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_k}$$

бўлади, бунда $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$ ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, k$) хусусий ҳосилаларнинг $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтадаги, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) хусусий ҳосилаларнинг эса $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтадаги қийматлари олинган.

13.5-теоремага кўра мураккаб функция $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади.

Демак, бир томондан

$$\Delta f = A_1 \cdot \Delta t_1 + A_2 \cdot \Delta t_2 + \dots + A_k \cdot \Delta t_k + o(\rho) \quad (13.16)$$

бўлиб, бунда

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_j} \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (13.17)$$

(қаралсин, 13.5-теорема), иккинчи томондан 13.1-натижага асосан

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho) \quad (13.18)$$

бўлади. (13.16), (13.17) ва (13.18) муносабатларда

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial f}{\partial t_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_2}, \\ &\dots \\ \frac{\partial f}{\partial t_k} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_k} \end{aligned} \quad (13.19)$$

бўлишини топамиз.

5- §. Кўп ўзгарувчили функциянинг дифференциали

1. Функция дифференциалининг таърифи. $y = f(x)$ функция очиқ $M(M \subset \mathbb{R}^m)$ тўпламда берилган бўлиб, бу тўпламнинг x^0 нуқтасида дифференциалланувчи бўлсин. Таърифга кўра, у ҳолда $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + o(\rho) \quad (13.3)$$

бўлиб, бунда

$$A_i = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

ва $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да $\rho \rightarrow 0$ бўлади. (13.3) тенгликинг ўнг томони икки қисмдан 1) $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ орттирмаларга нисбатан чизиқли ифода $A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m$ дан, 2) $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да, яъни $\rho \rightarrow 0$ да ρ га нисбатан юқори тартибли чексиз қичик миқдор о(ρ) дан иборат.

Шунингдек, (13.3) муносабатдан, $\rho \rightarrow 0$ да $A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m$ — чексиз кичик миқдор $\Delta f(x^0)$ — чексиз кичик миқдорнинг бош қисми эканлигини пайқаймиз.

13.4-тада төрли $f(x)$ функция орттирамаси $\Delta f(x^0)$ нинг $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга нисбатан чизиқли бош қисми

$$A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + A_m \cdot \Delta x_m = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m} \Delta x_m$$

$f(x)$ функцияниң x^0 нүктадаги дифференциали (*түлүк дифференциали*) деб аталади ва $d\bar{f}(x^0)$ ёки $d\bar{f}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ каби белгиланади. Демак,

$$\begin{aligned} d\bar{f}(x^0) &= d\bar{f}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + A_m \cdot \Delta x_m = \\ &= \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m} \Delta x_m. \end{aligned}$$

Агар x_1, x_2, \dots, x_m эркли ўзгарувчиларнинг ихтиёрий орттирамалари $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ лар мос равишда бу ўзгарувчиларнинг дифференциаллари dx_1, dx_2, \dots, dx_m га тенг эканлигини эътиборга олсак, унда $\bar{f}(x)$ функцияниң дифференциали қуйидаги

$$d\bar{f}(x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m} dx_m \quad (13.20)$$

кўринишга келади.

Одатда $\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m$ лар $\bar{f}(x)$ функцияниң *хусусий дифференциаллари* деб аталади ва улар мос равишда $d_{x_1}\bar{f}, d_{x_2}\bar{f}, \dots, d_{x_m}\bar{f}$ каби белгиланади:

$$d_{x_1}\bar{f} = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1, \quad d_{x_2}\bar{f} = \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2, \dots, \quad d_{x_m}\bar{f} = \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m.$$

Демак, $f(x)$ функцияниң x^0 нүктадаги дифференциали, унинг шу нүктадаги хусусий дифференциаллари йиғиндисидан иборат.

Мисол. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1 \sin x_2}$$

функция $\forall (x_1, x_2) \in R^2$ нүктада дифференциалланувчи бўлиб, унинг дифференциали

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 = \sin x_2 e^{x_1 \sin x_2} dx_1 + x_1 \cos x_2 e^{x_1 \sin x_2} dx_2 = \\ &= e^{x_1 \sin x_2} (\sin x_2 dx_1 + x_1 \cos x_2 dx_2) \end{aligned}$$

бўлади.

Шуни таъкидлаш лозимки, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияниң дифференциали $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктага борлиқ бўлиши билан бирга бу ўзгарувчиларнинг орттирамалари $\Delta x_1 = dx_1, \Delta x_2 = dx_2, \dots, \Delta x_m = dx_m$ ларга ҳам борлиқдир.

Функцияниң дифференциали содда геометрик маңнога әга. Қуйида уни көлтирамиз.

$y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очиқ M түплемдә ($M \subset R^m$) берилған бўлиб, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада ($x^0 \in M$) дифференциалланувчи бўлсин. Демак, бу функцияниң x^0 нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(x^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

учун

$$\Delta f(x^0) = f'_{x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + f'_{x_2}(x^0)(x_2 - x_2^0) + \dots + f'_{x_m}(x^0)(x_m - x_m^0) + o(\rho)$$

бўлади.

Фараз қиласлик $y = f(x)$ функцияниң графиги R^{m+1} фазодаги ушбу

$$(S) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m; y): (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m, y \in R\}$$

сиртдан иборат бўлсин. Геометриядан маълумки, бу сиртнинг $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0)$ нуқтасидан ($y_0 = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$) ўтувчи ҳамда Oy ўқига параллел бўлмаган текисликларнинг умумий тенгламаси

$Y - y_0 = A_1(X_1 - x_1^0) + A_2(X_2 - x_2^0) + \dots + A_m(X_m - x_m^0)$
бўлади, бунда X_1, X_2, \dots, X_m, Y — текисликдаги ўзгарувчи нуқтанинг координаталари.

Хусусан, ушбу

$$Y - y_0 = f'_{x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + f'_{x_2}(x^0)(x_2 - x_2^0) + \dots + f'_{x_m}(x^0)(x_m - x_m^0) \quad (13.21)$$

текислик эса (S) сиртга $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0)$ нуқтасида ўтказилган уринма текислик деб аталади.

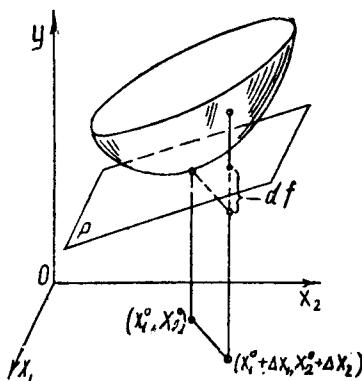
Агар $x_1 - x_1^0 = dx_1, x_2 - x_2^0 = dx_2, \dots, x_m - x_m^0 = dx_m$ дейилса, унда (13.21) уринма текислик

$$Y - y_0 = f'_{x_1}(x^0)dx_1 + f'_{x_2}(x^0)dx_2 + \dots + f'_{x_m}(x^0)dx_m = df(x^0)$$

кўринишга келади.

Натижада қуйидагига келамиз: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция аргументлари x_1, x_2, \dots, x_m ларнинг $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \dots, x_m = x_m^0$ қийматларига мос равишда орттирмалар берайлик. У ҳолда функцияниң мос орттирмаси

$$\begin{aligned} \Delta f(x^0) &= f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, \\ &x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = y - \\ &- y_0 \quad (S) \text{ сирт } (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0) \text{ ва } (x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \\ &+ \Delta x_m, y) \end{aligned}$$



14- чизма

нуқтадарининг охирги, y координатаси олган орттирумани билдиради.
Функцияниң шу нуқтадаги дифференциали эса

$$df(x^0) = Y - y_0$$

уринма текислик $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0)$ ва $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m, Y)$ нуқтадарининг охирги, y координатаси олган орттирумани билдиради.

Хусусан, $y = f(x_1, x_2)$ функция очиқ M түпламда ($M \subset R^2$) берилген бўлиб, $(x_1^0, x_2^0) \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Бу функцияниң графиги 14-чизмада тасвирланган (S) сиртни ифодаласин. (S) сиртга (x_1^0, x_2^0, y_0) нуқтасида ($y_0 = f(x_1^0, x_2^0)$) ўтказилган уринма текислик ушбу

$$Y - y_0 = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^0)$$

кўринишда бўлиб, ундан

$$Y - y_0 = df(x_1^0, x_2^0)$$

эканлиги келиб чиқади. Демак, $y = f(x_1, x_2)$ функцияниң (x_1^0, x_2^0) нуқтадаги дифференциали бу функция графигига $(x_1^0, x_2^0, f(x_1^0, x_2^0))$ нуқтасида ўтказилган уринма текислик аппликацасининг орттирумасидан иборат экан.

2. Мураккаб функцияниң дифференциали. $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция M ($M \subset R^m$) түпламда берилган бўлиб, x_1, x_2, \dots, x_m ўзгарувчиларнинг ҳар бири ўз навбатида t_1, t_2, \dots, t_k ўзгарувчиларнинг T ($T \subset R^k$) түпламда берилган функцияси бўлсин:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \\ &\vdots \\ x_m &= \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k). \end{aligned} \tag{13.11}$$

Бунда $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in T$ бўлгандада унга мос $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in M$ бўлиб, ушбу

$y = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k))$ мураккаб функция тузилган бўлсин.

Фараз қиласайлик (13.11) функцияларнинг ҳар бири $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \in T$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция эса мос $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда 13.5-теоремага кўра мураккаб функция $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади. Унда мураккаб функцияниң шу нуқтадаги дифференциали

$$df = \frac{\partial f}{\partial t_1} \cdot dt_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2} \cdot dt_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial t_k} dt_k$$

бўлади.

Энди $\frac{\partial f}{\partial t_1}, \frac{\partial f}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_k}$ хусусий ҳосилаларни, ушбу бобнинг

4-§ да келтирилган (13.19) формулалардан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_b} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_b} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_b} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_b}$$

Натижада

$$\begin{aligned}
 df &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \right) dt_1 + \\
 &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_2} \right) dt_2 + \\
 &+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \\
 &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_k} \right) dt_k = \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} dt_k \right) + \\
 &+ \frac{\partial f}{\partial x_2} \left(\frac{\partial x_2}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_2}{\partial t_k} dt_k \right) + \\
 &+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \\
 &+ \frac{\partial f}{\partial x_m} \left(\frac{\partial x_m}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} dt_k \right)
 \end{aligned}$$

бүләди.

Arap

$$\frac{\partial x_1}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} dt_k = dx_1,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_2}{\partial t_k} dt_k = dx_2,$$

$$\frac{\partial x_m}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} dt_k = dx_m$$

эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда мураккаб функция дифференциали учун

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m \quad (13.22)$$

бўлиши келиб чиқади.

Мураккаб функция дифференциалини ифодаловчи (13.22) формула-ни аввал қараб ўтилган (13.20) формула билан солишириб, функция мураккаб бўлган ҳолда ҳам функция дифференциали функция хусусий

хосилалари $\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) билан (бу ҳолда x_1, x_2, \dots, x_m аргументларнинг ҳар бири t_1, t_2, \dots, t_k ўзгарувчиларнинг функцияси) мос аргумент дифференциаллари dx_i ($i = 1, 2, \dots, m$) кўпайтмасидан иборат эканини кўрамиз.

Шундай қилиб, қаралаётган функциялар мураккаб

$f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k))$ ($x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$, ($i = 1, 2, \dots, m$)) кўринишда бўлганда ҳам, бу функцияларнинг дифференциаллари бир хил (13. 22) формага эга бўлади (яъни дифференциал формаси сақланади). Одатда бу хоссани дифференциал формасининг (шаклининг) инвариантлиги хоссаси ўринли экан.

Демак, кўп ўзгарувчили функцияларда ҳам, бир ўзгарувчили функциялардагидек, дифференциал шаклининг инвариантлиги хоссаси ўринли экан.

Шуни алоҳида таъкидлаш лозимки, (13. 22) ифодада dx_1, dx_2, \dots, dx_m лар x_1, x_2, \dots, x_m ларнинг ихтиёрий орттирмалари $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ лар бўлмасдан, улар t_1, t_2, \dots, t_k ўзгарувчиларнинг функциялари бўлади.

3. Функция дифференциалини ҳисоблашнинг содда қоидалари. $u = f(x)$ ва $v = g(x)$ функциялар очиқ M ($M \subset R^m$) тўпламда берилган бўлиб, $x^0 \in M$ нуқтада улар дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда $u \pm v$, $u \cdot v$, $\frac{u}{v}$ ($v \neq 0$) функциялар ҳам шу x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлади ва уларнинг дифференциаллари учун қуидаги

- 1) $d(u \pm v) = du \pm dv$,
- 2) $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$,
- 3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$ ($v \neq 0$)

формулалар ўринли бўлади.

Бу муносабатлардан бирининг, масалан, 2) нинг исботини келтириш билан чегараланамиз.

$u = f(x)$ ва $v = g(x)$ функциялар кўпайтмасини F функция деб қарайлик: $F = u \cdot v$. Натижада F функция u ва v лар орқали x_1, x_2, \dots, x_m ўзгарувчиларнинг ($x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$) мураккаб функцияси бўлади. Мураккаб функциянинг дифференциалини топиш формуласи (13.22) га кўра

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot dv$$

бўлади.

Агар

$$\frac{\partial F}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = u$$

эканлигини эътиборга олсак, унда

$$dF = v \cdot du + u \cdot dv$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$d(u \cdot v) = vdu + udv.$$

4. Тақрибий формулалар. Маълумки, функция математик анализ курсида ўрганиладиган асосий обьект. Қўпгина масалалар эса функцияларни ҳисоблаш (берилган нуқтада қийматини топиш) билан боғлиқ. Қаралаётган функция мураккаб кўринишда бўлса, равшанки, унинг қийматини аниқ ҳисаблаш қийин, баъзида эса мавжуд усуllibар ёрдамида ҳисобланмай қолиши мумкин*.

Чексиз сондаги операцияларни бажариш билан ҳал бўладиган масалаларни, жумладан баъзи функцияларнинг қийматларини ҳисоблаш билан боғлиқ масалаларни ечишда қаралаётган функция ундан соддароқ, ҳисоблаш учун осонроқ бўлган функция билан алмаштирилади. Бундай алмаштиришлар билан тақрибий формуласини ҳосил қилишда функцияянинг дифференциали тушунчаси муҳим роль ўйнайди.

$f(x)$ функция очиқ M ($M \subset R^m$) тўпламда берилган бўлиб, $x^0 \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда таърифга кўра

$$\begin{aligned}\Delta f = \Delta f(x^0) &= \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m} \Delta x_m + \\ &+ o(\rho) = df(x^0) + o(\rho)\end{aligned}$$

бўлиб, ундан ($df \neq 0$)

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{df} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{df + o(\rho)}{df} = 1$$

бўлиши келиб чиқади. Бундан эса қўйидаги

$$\Delta f(x^0) \approx df(x^0) \quad (13.23)$$

тақрибий формула келиб чиқади. Бу (13.23) формула $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада дифференциалланувчи $f(x)$ функцияянинг шу нуқтадаги $\Delta f(x^0)$ орттиринаси, унинг x^0 нуқтадаги $df(x^0)$ дифференциали билан тақрибан алмаштириш мумкинлигини кўрсатади. Бу алмаштиришнинг мөҳияти шундаки, функцияянинг Δf орттиринаси x_1, x_2, \dots, x_m ($x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$) ўзгарувчилар $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ орттириларининг, умуман айтганда, мураккаб функцияси бўлган ҳолда функцияянинг df дифференциали эса $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларнинг чизиқли функцияси бўлишидадир.

(13.23) формулани ушбу

$$\begin{aligned}f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) &\approx f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + \\ &+ \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \\ &+ \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_m} \Delta x_m \quad (13.24)\end{aligned}$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин.

* Тўғри, функцияларнинг қийматини ҳисоблашда электрон ҳисоблаш машиналаридан кенг фойдаланилади. Шубҳасиз, ҳозирги замон электрон ҳисоблаш машиналари қисқа вақт ичida жуда кўп операцияларни бажағиб, қўйилган масалаларни эффектив ҳал қилиб беради.

Агар $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_2^0$, ..., $\Delta x_m = x_m - x_m^0$ әканини эътиборга олсак, унда юқоридаги (13.24) формула қўйидагича бўлади:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) \approx f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^0) + \\ + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_m} (x_m - x_m^0).$$

Хусусан, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = (0, 0, \dots, 0) \in M$ бўлганда

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) \approx f(0, 0, \dots, 0) + \frac{\partial f(0, 0, \dots, 0)}{\partial x_1} x_1 + \\ + \frac{\partial f(0, 0, \dots, 0)}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial f(0, 0, \dots, 0)}{\partial x_m} x_m$$

бўлади.

5. Бир жинсли функциялар. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очиқ $M (M \subset R^m)$ тўпламда берилган. M тўпламда (x_1, x_2, \dots, x_m) нуқта билан ушбу $(t x_1, t x_2, \dots, t x_m)$ нуқта ($-\infty < t < \infty$) ҳам шу M тўпламга тегишили бўлсин.

13.5-тадъриф. Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция учун

$$f(t x_1, t x_2, \dots, t x_m) = t^p f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (13.25) \\ ((x_1, x_2, \dots, x_m) \in M, p \in R)$$

бўлса, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ p -даражали бир жинсли функция деб аталади.

Мисоллар. 1. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ функция иккинчи даражали бир жинсли функция бўлади, чунки

$$f(t x_1, t x_2) = (t x_1)^2 + (t x_2)^2 = t^2 (x_1^2 + x_2^2) = t^2 f(x_1, x_2).$$

$$2. f(x_1, x_2) = \arctg \frac{x_1}{x_2} + e^{x_2} \text{ функцияни қарайлик.}$$

Бунда

$$f(t x_1, t x_2) = \arctg \frac{t x_1}{t x_2} + e^{t x_2} = \arctg \frac{x_1}{x_2} + e^{x_2} = f(x_1, x_2)$$

бўлади. Демак, берилган функция иолинчи даражали бир жинсли функция экан.

3. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = e^{\sin x_1 x_2}$$

функция учун (13.25) шарт бажарилмайди. Демак, бу бир жинсли функция эмас.

Фараз қилайлик p -даражали бир жинсли $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция M тўпламда дифференциалланувчи бўлсин. Унда

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) = t^p \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

тenglikning ҳар икки томонини t бүйича дифференциаллаб қуайдагини топамиз:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m)}{\partial(tx_1)} x_1 + \frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m)}{\partial(tx_2)} x_2 + \dots + \\ & + \frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m)}{\partial(tx_m)} x_m = p \cdot t^{p-1} f(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Хусусан, $t = 1$ бўлганда

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_2} x_2 + \dots + \\ & + \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_m} x_m = p f(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{aligned} \quad (13.26)$$

бўлади. Бу (13.26) формула Эйлер формуласи деб аталади.

Айтайлик, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция нолинчи даражали бир жинсли функция бўлсин. Таърифга кўра

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) = t^0 \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

бўлади. Агар бу tenglikda $t = \frac{1}{x_1}$ ($x_1 \neq 0$) деб олсак, унда

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_m}{x_1}\right)$$

бўлиб, натижада m та ўзгарувчига боғлиқ бўлган $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $m-1$ та y_1, y_2, \dots, y_{m-1} ($y_1 = \frac{x_2}{x_1}, y_2 = \frac{x_3}{x_1}, \dots, y_{m-1} = \frac{x_m}{x_1}$) ўзгарувчига боғлиқ бўлган функцияга айланади:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = F(y_1, y_2, \dots, y_{m-1}).$$

Энди $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция p -даражали бир жинсли функция бўлсин. У ҳолда

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) = t^p \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

бўлади. Бу tenglikda ҳам $t = \frac{1}{x_1}$ ($x_1 \neq 0$) десак, ундан

$$\frac{1}{x_1^p} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_m}{x_1}\right) = F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_m}{x_1}\right)$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, p -даражали бир жинсли функция ушбу

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_1^p \cdot F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_m}{x_1}\right)$$

кўринишга эга бўлар экан.

6-§. Кўп ўзгарувчили функциянинг юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллари

1. Функцияниңг юқори тартибли хусусий ҳосилалари. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очиқ M ($M \subset R^m$) тўпламда берилган бўлиб, унинг ҳар бир (x_1, x_2, \dots, x_m) нуқтасида $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Равшанки, бу хусусий ҳосилалар ўз навбатида x_1, x_2, \dots, x_m ўзгарувчиларга боғлиқ бўлиб, уларнинг функциялари бўлади. Демак, берилган функция хусусий ҳосилалари $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ ларнинг ҳам хусусий ҳосилаларини қарааш мумкин.

13.6-таъриф. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция хусусий ҳосилалари $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ ларнинг x_k ($k = 1, 2, \dots, m$) ўзгарувчи бўйича хусусий ҳосилалари берилган функцияниңг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари деб аталади ва

$$f''_{x_1 x_k}, f''_{x_2 x_k}, \dots, f''_{x_m x_k} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

ёки

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_k} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

каби белгиланади. Демак,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} &= f''_{x_1 x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k} &= f''_{x_2 x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right), \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_k} &= f''_{x_m x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

Бу иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни умумий ҳолда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = f''_{x_i x_k} \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, m)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бунда $k = i$ бўлганда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k} = f''_{x_k x_k}$$

деб ёзиш ўрнига

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = f''_{x_k x_k}$$

деб ёзилади.

Агар юқоридаги иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар турли ўзгарувчилар бўйича олинган бўлса, унда бу

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = f''_{x_i x_k} \quad (i \neq k)$$

2-тартибли хусусий ҳосилалар аралаш ҳосилалар деб аталади.

Худди шунга ўхшаш, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянынг учинчи, түрткінчи ва ҳоказо тартибдаги хусусий ҳосилалари таърифланади. Үмуман, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция ($n - 1$)-тартибли хусусий ҳосиласининг хусусий ҳосиласи берилган функциянынг n -тартибли хусусий ҳосиласи деб аталади.

Шуны ҳам айтиш керакки, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянынг $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ ўзгарувчилар бүйича турли тартибда олинган хусусий ҳосилалари берилган функциянынг турли аралаш ҳосилаларини юзага келтиради.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} (x_2 \neq 0)$$

функциянынг 2-тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1} &= -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = -\frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.\end{aligned}$$

2. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянынг аралаш ҳосилаларини топамиз.

Айтайлик $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1} &= x_2 \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{4x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{4x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \left(1 + \frac{8x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \left(1 + \frac{8x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right)\end{aligned}$$

бўлади.

Берилган $f(x_1, x_2)$ функциянынг $(0, 0)$ нүктадаги хусусий ҳосилаларини таърифга кўра топамиз:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_1} &= \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x_1, 0) - f(0, 0)}{\Delta x_1} = 0, \\ \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_2} &= \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta x_2) - f(0, 0)}{\Delta x_2} = 0, \\ \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x_1 \partial x_2} &= \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(0, \Delta x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_1}}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{-\Delta x_2^3}{\Delta x_2^3} = -1, \\ \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x_2 \partial x_1} &= \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(\Delta x_1, 0)}{\partial x_2} - \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_2}}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_1^3}{\Delta x_1^3} = 1.\end{aligned}$$

Бу келтирилган мисоллардан кўринадики, функциянынг $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ ва $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ аралаш ҳосилалари бир-бирига тенг бўлиши ҳам, тенг бўлмаслиги ҳам мумкин экан.

13.6-төреема. $f(x_1, x_2)$ функция очиқ M ($M \subset R^2$) тўпламда берилган бўлиб, шу тўпламда f'_{x_1}, f'_{x_2} ҳамда $f''_{x_1 x_2}, f''_{x_2 x_1}$ аралаш ҳосилаларга эга бўлсин. Агар аралаш ҳосилалар $(x_1^0, x_2^0) \in M$ нүктада узлуксиз бўлса, у ҳолда шу нүктада

$$f''_{x_1 x_2}(x_1^0, x_2^0) = f''_{x_2 x_1}(x_1^0, x_2^0)$$

бўлади.

Исбот. (x_1^0, x_2^0) нүкта координаталарига мос равишда шундай $\Delta x_1 > 0, \Delta x_2 > 0$ орттириналар берайликки,

$$D = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1^0 \leq x_1 \leq x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 \leq x_2 \leq x_2^0 + \Delta x_2\} \subset M$$

бўлсин. Бу тўғри тўртбурчак учларини ифодаловчи $(x_1^0, x_2^0), (x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0), (x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2), (x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2)$ нүкталарда функциянынг қийматларини топиб, улардан ушбу

$P = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2) + f(x_1^0, x_2^0)$ ифодани ҳосил қиласмиз. Бу ифодани қуйидаги икки

$$P = [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0)] - [f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0, x_2^0)],$$

$$P = [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2)] - [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0)]$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Энди берилган $f(x_1, x_2)$ функция ёрдамида x_1 ўзгарувчига боғлик бўлган

$$\varphi(x_1) = f(x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2^0),$$

x_2 ўзгарувчига бөглиқ бўлган

$$\psi(x_2) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2)$$

функцияларни тузайлик. Равшанки, $\varphi(x_1)$, $\psi(x_2)$ функциялар

$$\varphi'(x_1) = f'_{x_1}(x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f'_{x_1}(x_1, x_2^0),$$

$$\psi'(x_2) = f'_{x_2}(x_1^0 + \Delta x_1, x_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2)$$

ҳосилаларга эга бўлиб, Лагранж теоремасига асосан

$$\varphi'(x_1) = f''_{x_1 x_2}(x_1, x_2^0 + \theta_2 \Delta x_2) \Delta x_2,$$

$$\psi'(x_2) = f''_{x_2 x_1}(x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1, x_2) \Delta x_1 \quad (13.27)$$

бўлади, бунда $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$.

Юқорида келтирилган P ифодани $\varphi(x_1)$ ва $\psi(x_2)$ функциялар орқали ушбу

$$P = \varphi(x_1^0 + \Delta x_1) - \varphi_1(x_1^0),$$

$$P = \psi(x_2^0 + \Delta x_2) - \psi(x_2^0)$$

қўринишда ёзиб, сўнг яна Лагранж теоремасини қўллаб қўйидагиларни топамиз:

$$P = \varphi'(x_1^0 + \theta'_1 \Delta x_1) \Delta x_1, \quad P = \psi'(x_2^0 + \theta'_2 \Delta x_2) \Delta x_2 \\ (0 < \theta'_1, \theta'_2 < 1). \quad (13.28)$$

Натижада (13.27) ва (13.28) муносабатлардан

$$P = f''_{x_1 x_2}(x_1^0 + \theta'_1 \Delta x_1, x_2^0 + \theta'_2 \Delta x_2) \cdot \Delta x_1 \Delta x_2,$$

$$P = f''_{x_2 x_1}(x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1, x_2^0 + \theta'_2 \Delta x_2) \Delta x_1 \Delta x_2$$

бўлиб, улардан эса

$$f''_{x_1 x_2}(x_1^0 + \theta'_1 \Delta x_1, x_2^0 + \theta_2 \Delta x_2) = f''_{x_2 x_1}(x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1, x_2^0 + \theta'_2 \Delta x_2) \quad (13.29)$$

бўлиши келиб чиқади.

Шартга кўра $f''_{x_1 x_2}$ ва $f''_{x_2 x_1}$ аралаш ҳосилалар (x_1^0, x_2^0) нуқтада узлуксиз. Шунинг учун (13.29) да $\Delta x_1 \rightarrow 0$, $\Delta x_2 \rightarrow 0$ (бунда $x_1^0 + \theta'_1 \Delta x_1 \rightarrow x_1^0$, $x_2^0 + \theta_2 \Delta x_2 \rightarrow x_2^0$, $x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1 \rightarrow x_1^0$, $x_2^0 + \theta'_2 \Delta x_2 \rightarrow x_2^0$) лимитга ўтсан, $f''_{x_1 x_2}(x_1^0, x_2^0) = f''_{x_2 x_1}(x_1^0, x_2^0)$

бўлади. Бу эса теоремани исботлайди.

Агар $f(x_1, x_2)$ функция очиқ M ($M \subset R^2$) тўпламда юқори тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, бу ҳосилаларга нисбатан юқоридаги теоремани такрор қўллаш мумкин.

Масалан, f'_{x_1} , f'_{x_2} , $f''_{x_1 x_2}$ ларга теоремани татбиқ этиб қўйидагиларни топамиз:

$$f'''_{x_1 x_1 x_2} = f'''_{x_1 x_2 x_1} = f'''_{x_2 x_1 x_1},$$

$$f'''_{x_1 x_2 x_2} = f'''_{x_2 x_1 x_2} = f'''_{x_2 x_2 x_1},$$

$$f^{(IV)}_{x_1 x_1 x_2 x_2} = f^{(IV)}_{x_1 x_2 x_1 x_2} = f^{(IV)}_{x_1 x_2 x_2 x_1} = f^{(IV)}_{x_2 x_1 x_1 x_2} = f^{(IV)}_{x_2 x_2 x_1 x_1}.$$

2. Функцияниңгүүрдөрдү тартибли дифференциаллари. Күп ўзгарувчилди функцияниңгүүрдөрдү тартибли дифференциали түшүнчесин көлтиришдан аввал, функцияниңгүүрдөрдү n ($n > 1$) марта дифференциалланувчилди түшүнчеси билан танишамыз.

$f(x)$ функция очиқ M ($M \subset R^n$) түпламда берилган бўлиб, $x^0 \in M$ бўлсин. Маълумки, $f(x)$ функцияниңгүүрдөрдү нуқтадаги орттирмаси ушбу

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + o(\rho)$$

кўринишда ифодаланса, функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи деб аталар эди, бунда A_1, A_2, \dots, A_m — ўзгармас сонлар, $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$. Бу ҳолда кўрган эдикки, $A_i = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$, ($i = 1, 2, \dots, m$).

Айтайлик, $f(x)$ функция M түпламда $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Агар бу хусусий ҳосилалар x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, $f(x)$ шу нуқтада икки марта дифференциалланувчи функция деб аталади.

Умуман, $f(x)$ функция M түпламда барча $n-1$ -тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар $x^0 \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада n марта дифференциалланувчи функция деб аталади.

13.7-тадеорема. Агар очиқ M түпламда $f(x)$ функцияниңгүүрдөрдү n -тартибли хусусий ҳосилалари мавжуд ва $x^0 \in M$ нуқтада узлуксиз бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада n марта дифференциалланувчи бўлади.

Бу теорема функция дифференциалланувчи бўлишининг етарли шартини ифодаловчи 13.3-теореманинг исботланганлиги каби исботланади.

Фараз қиласайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очиқ M ($M \subset R^n$) түпламда берилган бўлиб, у $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда бу функцияниңгүүрдөрдү x нуқтадаги дифференциали

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m \quad (13.20)$$

бўлади, бунда dx_1, dx_2, \dots, dx_m лар x_1, x_2, \dots, x_m ўзгарувчиларнинг ихтиёрий орттирмалариидир.

Энди $f(x)$ функция $x \in M$ нуқтада икки марта дифференциалланувчи бўлсин.

13.7-тадеорема. $f(x)$ функцияниңгүүрдөрдү x нуқтадаги дифференциали $df(x)$ нинг дифференциали берилган $f(x)$ функцияниңгүүрдөрдү иккинчи тартибли дифференциали деб аталади ва у $d^2 f$ каби белгиланади:

$$d^2 f = d(df).$$

Юқоридаги (13.20) муносабатни эътиборга олиб, дифференциаллаш қоидаларидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= dx_1 d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + dx_2 d\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \dots + dx_m d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) = \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} dx_m \right) dx_1 + \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} dx_m \right) dx_2 + \\
&\quad + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} dx_m \right) dx_m = \quad (13.30) \\
&\quad = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} dx_m^2 + \\
&\quad + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 dx_3 + \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} dx_1 dx_m + \\
&\quad + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} dx_2 dx_3 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_4} dx_2 dx_4 + \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} dx_2 dx_m + \\
&\quad + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \\
&\quad \quad \quad + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_{m-1} \partial x_m} dx_{m-1} dx_m.
\end{aligned}$$

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияниң (x_1, x_2, \dots, x_m) нүктадаги учинчи, түртінчи ва ҳоказо тартибли дифференциаллари ҳам худди юқоридаги-дек таърифланади.

Умуман, $f(x)$ функцияниң x нүктадаги $(n - 1)$ -тартибли дифференциали $d^{n-1} f(x)$ нинг дифференциали берилған $f(x)$ функцияниң шу нүктадаги n -тартибли дифференциали деб аталади ва $d^n f$ каби белгіланади. Демек,

$$d^n f = d(d^{n-1} f).$$

Биз юқорида $f(x)$ функцияниң иккінчи тартибли дифференциали унинг хусусий ҳосиалари орқали (13.30) муносабат билан ифодаланишини күрдик.

$f(x)$ функцияниң кейинги тартибли дифференциалларининг функция хусусий ҳосиалари орқали ифодаси борған сари мураккаблаша боради. Шу сабабли юқори тартибли дифференциалларни, символик равища, солдарақ формада ифодалаш мүхим.

$f(x)$ функция дифференциали

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m$$

ни символик равища (f ни формал равища қавс ташқарисига чиқариб) қўйидагича

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right) f$$

ёзамиз. Унда функцияниң иккінчи тартибли дифференциалини

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f \quad (13.31)$$

деб қарааш мүмкін. Бунда қавс ичидаги йиғинди квадратта күтарилиб, сүңг f га «күпайтирилади». Кейин даража күрсаткічлары хусусий ҳоси-лалар тартиғи деб ҳисобланади.

Шу тарзда киритилген символик ифодалаш $f(x)$ функцияның n -тар-тибли дифференциалини

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f$$

каби ёзиш имконини беради.

3. Мураккаб функцияның юқори тартибли дифференциаллары. Ушбу пунктта $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ($x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k)$, $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k)$, \dots , $x_m = \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)$) мураккаб функцияның юқори тартибли дифференциалларини топамиз.

Маълумки, (13.11) функцияның ҳар бири $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \in T$ нүктада дифференциаллану вчибўлиб, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция эса мос $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ нүктада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда 13.5-теоремага кўра мураккаб функция $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нүктада дифференциалланувчи бўлади ва дифференциал шаклининг инвариантлик хосса-сига асосан мураккаб функцияның дифференциали

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m.$$

Фараз қиласайлик, (13.11) функцияларнинг ҳар бири $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \in T$ нүктада икки марта дифференциалланувчи, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция эса мос $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ нүктада икки марта дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда мураккаб функция ҳам $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нүктада икки марта дифференциалланувчи бўлади. Дифференциаллаш қоидаларидан фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(df) = d \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m \right) = \\ &= d \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1} d(dx_1) + d \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_2} d(dx_2) + \\ &\quad + \dots + d \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} \right) dx_m + \frac{\partial f}{\partial x_m} d(dx_m) = \\ &= d \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) dx_1 + d \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) dx_2 + \dots + d \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} \right) dx_m + \quad (13.32) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_1} d^2 x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} d^2 x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} d^2 x_m = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_1} d^2 x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} d^2 x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} d^2 x_m. \end{aligned}$$

Шу ўйл билан берилган мураккаб функцияның қейинги тартибдаги дифференциаллари топилади.

(13.31), (13.32) формулаларни солиштириб, иккинчи тартибли дифференциалларда дифференциал шаклининг инвариантлиги хосаси ўринли әмаслигини кўрамиз.

13.3- эслатма. Агар (13.11) функцияларнинг ҳар бири t_1, t_2, \dots, t_k ўзгарувчиларнинг чизқли функцияси

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}t_1 + \alpha_{12}t_2 + \dots + \alpha_{1k}t_k + \beta_1, \\ x_2 &= \alpha_{21}t_1 + \alpha_{22}t_2 + \dots + \alpha_{2k}t_k + \beta_2, \\ &\vdots \\ x_m &= \alpha_{m1}t_1 + \alpha_{m2}t_2 + \dots + \alpha_{mk}t_k + \beta_m \end{aligned} \quad (13.33)$$

бўлса $(\alpha_j, \beta_j \mid i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, m)$ — ўзгармас сонлар), у ҳолда бундай $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ мураккаб функцияning юқори тартибли дифференциаллари дифференциал шақлининг инвариантлиги хоссасига эга бўлади.

Хәкіқатан ҳам, (13.33) ифодадаги функцияларни дифференциалла-
сак, үнда

бўлиб, dx_1, dx_2, \dots, dx_m ларнинг ҳар бирни t_1, t_2, \dots, t_k ўзгарувчиларга боғлиқ эмаслигини кўрамиз. Равшанки, бундан $d^2x_1 = d^2x_2 = \dots = d^2x_m = 0$. Бинобарин,

$$\begin{aligned} d^2f &= d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m\right) = \\ &= dx_1 d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + dx_2 d\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \dots + dx_m d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^2 f \end{aligned}$$

бўлади.

Демак, иккинчи тартиғли дифференциаллар дифференциал шаклининг инвариантлыгы хоссасига эга экан.

Шунга ўхшаш, бу ҳолда мураккаб функцияниң иккidan катта тартибдаги дифференциалларида дифференциал шаклининг инвариантлиги хоссаси ўринли бўлиши кўрсатилиади.

7-§. Ўрта қиймат ҳақида теорема

$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция M ($M \subset R^m$) түпламда берилган. Бу түпламда шундай $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ ва $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ нүкталарни олайликин, бу нүкталарни бирлаштирувчи түғри чизик кесмасы

$$A = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m: x_1 = a_1 + t(b_1 - a_1), x_2 = a_2 + t(b_2 - a_2), \dots, x_m = a_m + t(b_m - a_m); 0 \leq t \leq 1\}$$

шү M түпламга тегишли бўлсин: $A \subset M$.

13-теорема. Агар $f(x)$ функция A кесманинг a ва b нүкталарида үзүлксиз бўйлиб, кесманинг қолган барча нүкталарида функция

дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда A кесмада шундай с нуқта ($c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$) топиладики,

$f(b) - f(a) = f'_{x_1}(c)(b_1 - a_1) + f'_{x_2}(c)(b_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(c)(b_m - a_m)$ бўлади.

Исбот. $f(x)$ функцияни A тўпламда қарайлик. Унда

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), \dots, a_m + t(b_m - a_m)) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

бўлиб, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ t ўзгарувчининг $[0, 1]$ сегментда берилган функциясига айланади:

$$F(t) = f(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), \dots, a_m + t(b_m - a_m)).$$

Бу функция $(0, 1)$ интервалда ушбу

$$F'(t) = f'_{x_1}(b_1 - a_1) + f'_{x_2}(b_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(b_m - a_m)$$

ҳосилага эга бўлади.

Демак, $F(t)$ функция $[0, 1]$ сегментда узлуксиз, $(0, 1)$ интервалда эса $F'(t)$ ҳосилага эга. Унда Лагранж теоремасига (1-қисм, б-боб, б-§) кўра $(0, 1)$ интервалда шундай t_0 нуқта топиладики,

$$F(1) - F(0) = F'(t_0) \quad (0 < t_0 < 1) \quad (13.34)$$

бўлади. Равшанки,

$$F(0) = f(a), \quad F(1) = f(b),$$

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= f'_{x_1}(a_1 + t_0(b_1 - a_1), a_2 + t_0(b_2 - a_2), \dots, a_m + t_0(b_m - \\ &+ a_m))(b_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1 + t_0(b_1 - a_1), a_2 + t_0(b_2 - a_2), \dots, a_m + \\ &+ t_0(b_m - a_m))(b_2 - a_2) + \dots + \\ &+ f'_{x_m}(a_1 + t_0(b_1 - a_1), a_2 + t_0(b_2 - a_2), \dots, a_m + \\ &+ t_0(b_m - a_m))(b_m - a_m). \end{aligned} \quad (13.35)$$

Агар

$$\begin{aligned} a_1 + t_0(b_1 - a_1) &= c_1, \\ a_2 + t_0(b_2 - a_2) &= c_2, \\ \dots &\dots \dots, \\ a_m + t_0(b_m - a_m) &= c_m \end{aligned}$$

деб белгиласак, унда $c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in A$ бўлиб, юқоридаги (13.34) ва (13.35) тенгликлардан

$$f(b) - f(a) = f'_{x_1}(c)(b_1 - a_1) + f'_{x_2}(c)(b_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(c)(b_m - a_m)$$

келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Бу теорема ўрта қиймат ҳақидаги теорема деб аталади.

13.2-натижада, $f(x)$ функция бўғламли M ($M \subset R^m$) тўпламда берилган бўлиб, унинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи бўлсин. Агар M тўпламнинг ҳар бир нуқтасида $f(x)$ функцияниң барча хусусий ҳосилалари нолга тенг бўлса, функция M тўпламда ўзгармас бўлади.

Шуни исботлайлык. M түп搭乘да $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ ҳамда ихтиёрий $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүқталарни олайлык. Бу нүқталарни бирлаштирувчи кесма шу M түп搭乘га тегишли бўлсин. У ҳолда шу кесма нүқтадаридан 13.8-теоремага кўра

$$f(a)' = f(x) + f'_{x_1}(c)(a_1 - x_1) + f'_{x_2}(c)(a_2 - x_2) + \dots + f'_{x_m}(c)(a_m - x_m)$$

бўлади. Функциянинг барча хусусий ҳосилалари нолга teng эканидан
 $f(a) = f(x)$

бўлиши келиб чиқади.

a ва x нүқталарни бирлаштирувчи кесма M түп搭乘га тегишли бўлмаса, унда M түп搭乘нинг боғламли эканлигидан a ва x нүқталарни бирлаштирувчи ва шу түп搭乘га тегишли бўлган синиқ чизик топилади, Бу синиқ чизик кесмаларига юқоридаги 13.8-тесримани қўллай бориб.

$$f(a) = f(x)$$

бўлишини топамиз.

8-§. Кўп ўзгарувчили функциянинг Тейлор формуласи

1-қисм, 6-боб, 7-§ да бир ўзгарувчили функциянинг Тейлор формуласи, унинг турли формада ёзилиши ҳамда Тейлор формуласининг турли формадаги қолдиқ ҳадлари ўрганилган эди. Масалан, $F(t)$ функция $t = t_0$ нүқтанинг атрофида берилган бўлиб, унда $F'(t)$, $F''(t)$, \dots , $F^{(n+1)}(t)$ ҳосилаларга эга бўлганда

$$\begin{aligned} F(t) &= F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!} F''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n!} F^{(n)}(t_0)(t - t_0)^n + R_n(t) \end{aligned} \quad (13.36)$$

бўлади, бунда қолдиқ ҳад $R_n(t)$ эса қўйидагича

а) Коши кўринишида $R_n(t) = \frac{F^{(n+1)}(c)}{n!} (t - t_0)^{n+1} (1 - \theta)^n$,

б) Лагранж кўринишида $R_n(t) = \frac{F^{(n+1)}(c)}{(n+1)} (t - t_0)^{n+1}$,

в) Пеано кўринишида $R_n(t) = \Theta((t - t_0)^n)$ ёзилади (бунда $0 < \theta < 1$, $c = t_0 + \theta(t - t_0)$).

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очиқ M ($M \subset R^m$) түп搭乘да берилган. Бу түп搭乘да $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүқтани олиб, унинг $U_\delta((x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)) \subset M$ атрофини қарайлик. Равшанки, $\forall (x'_1, x'_2, \dots, x'_m) \in U_\delta((x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0))$ нүқта билан $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүқтани бирлаштирувчи тўғри чизик кесмаси

$$A = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1 = x_1^0 + t(x'_1 - x_1^0),$$

$$x_2 = x_2^0 + t(x'_2 - x_2^0), \dots, x_m = x_m^0 + t(x'_m - x_m^0); 0 \leq t \leq 1\}$$

шу $U_\delta((x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0))$ атрофга тегишли бўлади.

Айтайлик, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $U_\delta((x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0))$ да $n+1$ марта дифференциалланувчи бўлсин.

Энди $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияни A тўпламда қарайлик. Унда

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1^0 + t(x'_1 - x_1^0), x_2^0 + t(x'_2 - x_2^0), \dots, x_m^0 + t(x'_m - x_m^0))$$

бўлиб, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ t ўзгарувчининг $[0,1]$ да берилган функциясига айланисиб қолади:

$$F(t) = f(x_1^0 + t(x'_1 - x_1^0), x_2^0 + t(x'_2 - x_2^0), \dots, x_m^0 + t(x'_m - x_m^0)) \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (13.37)$$

Бу функцияниң ҳосилаларини ҳисоблайлик:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x'_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x'_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x'_m - x_m^0) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x'_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x'_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}(x'_m - x_m^0) \right) f, \\ F''(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x'_1 - x_1^0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x'_2 - x_2^0)^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(x'_m - x_m^0)^2 + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x'_1 - x_1^0)(x'_2 - x_2^0) + \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_{m-1} \partial x_m}(x'_{m-1} - x_{m-1}^0)(x'_m - \\ &- x_m^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x'_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x'_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}(x'_m - x_m^0) \right)^2 f. \end{aligned}$$

Умуман k -тартибли ҳосила ушбу

$$F^{(k)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x'_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x'_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}(x'_m - x_m^0) \right)^k f \quad (k = 1, 2, \dots, n+1) \quad (13.38)$$

кўринишида бўлади. (Унинг тўғрилиги математик индукция методи ёрдамида исботланади.)

Юқоридаги $F'(t), F''(t), \dots, F^{(n)}(t)$ ҳосилаларининг ифодаларига кирган $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияниң барча хусусий ҳосилалари $(x_1^0 + t(x'_1 - x_1^0), x_2^0 + t(x'_2 - x_2^0), \dots, x_m^0 + t(x'_m - x_m^0))$ нуқтада ҳисобланган.

(13.36) формулада $t_0 = 0$ ва $t = 1$ деб олинса, ушбу

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!} F'(0) + \frac{1}{2!} F''(0) + \dots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\theta) \quad (0 < \theta < 1) \quad (13.36)$$

ҳосил бўлади. (Бу ерда қолдиқ ҳад Лагранж кўринишида олинган.)

(13. 37) ва (13. 38) мунссабатлардан фойдаланиб қўйидагиларни то-памиз:

$$F(0) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0),$$

$$F(1) = f(x'_1, x'_2, \dots, x'_m),$$

$$F^{(k)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (x'_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2} (x'_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (x'_m - x_m^0) \right)^k f$$

$$(k = 1, 2, \dots, n+1).$$

Кейинги тенгликтеги $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянынг барча хусусий ҳосилалари $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктада ҳисобланган.

Демак, (13.36) формулага кўра

$$\begin{aligned} f(x'_1, x'_2, \dots, x'_m) &= f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (x'_1 - x_1^0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} (x'_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (x'_m - x_m^0) \right) f + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (x'_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2} (x'_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (x'_m - x_m^0) \right)^2 f + \\ &\quad + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (x'_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2} (x'_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (x'_m - x_m^0) \right)^n f + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (x'_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2} (x'_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (x'_m - x_m^0) \right)^{n+1} f \end{aligned}$$

бўлади, бунда $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянынг барча биринчи, иккинчи ва ҳоказо n -тартибли хусусий ҳосилалари $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктада, шу функциянынг барча $(n+1)$ -тартибли хусусий ҳосилалари эса $(x_1^0 + \theta(x'_1 - x_1^0), x_2^0 + \theta(x'_2 - x_2^0), \dots, x_m^0 + \theta(x'_m - x_m^0))$ ($0 < \theta < 1$) нүктада ҳисобланган.

Бу формула кўп ўзгарувчили $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянынг Тейлор формуласи деб аталади.

Хусусан, икки ўзгарувчили функциянынг Тейлор формуласи қуидагича бўлади:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f(x_1^0, x_2^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2} (x_1 - x_1^0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1 \partial x_2} (x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^2} (x_2 - x_2^0)^2 \right] + \dots + \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^n} (x_1 - x_1^0)^n + \right. \\ &+ C_n \frac{\partial^n f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^{n-1} \partial x_2} (x_1 - x_1^0)^{n-1} (x_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial^n f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^n} (x_2 - x_2^0)^n \Big] + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{\partial^{n+1} f(x_1^0 + \theta(x_1 - x_1^0), x_2^0 + \theta(x_2 - x_2^0))}{\partial x_1^{n+1}} (x_1 - x_1^0)^{n+1} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^{n+1} f(x_1^0 + \theta(x_1 - x_1^0), x_2^0 + \theta(x_2 - x_2^0))}{\partial x_2^{n+1}} (x_2 - x_2^0)^{n+1} \right]. \end{aligned}$$

9- §. Күп ўзгарувчили функциянинг экстремум қийматлари. Экстремумнинг зарурый шарти

1. Функцияниң максимум ва минимум қийматлари. Күп ўзгарувчили функциянинг экстремум қийматлари таърифлари худди бир ўзгарувчили функцияники сингари киритилади. $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция өнор оциқ M ($M \subset R^m$) тўпламда берилган бўлиб, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ бўлсин.

13. 8-таъриф. Агар x^0 нуқтанинг шундай $U_\delta(x^0) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : \rho(x, x^0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2} < \delta\} \subset M$ атрофи мавжуд бўлсанки, $\forall x \in U_\delta(x^0)$ учун

$$f(x) \leq f(x^0) \quad (f(x) \geq f(x^0))$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада **максимумга** (**минимумга**) эга дейилади, $f(x^0)$ қиймат эса $f(x)$ функцияниң **максимум** (**минимум**) қиймати ёки **максимуми** (**минимуми**) дейилади.

13. 9-таъриф. Агар x^0 нуқтанинг шундай $U_\delta(x^0)$ атрофи мавжуд бўлсанки, $\forall x \in U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}$ учун $f(x) < f(x^0)$ ($f(x) > f(x^0)$) бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада **қатъий максимумга** (**қатъий минимумга**) эга дейилади. $f(x^0)$ қиймат эса $f(x)$ функцияниң **қатъий максимум** (**минимум**) қиймати ёки **қатъий максимуми** (**қатъий минимуми**) дейилади.

Юқоридаги таърифлардаги x^0 нуқта $f(x)$ функцияга максимум (минимум) (13. 8-таърифда), қатъий максимум (қатъий минимум) (13. 9-таърифда) қиймат берадиган нуқта деб аталади.

Функцияниң максимум (минимум) қиймати қуйидагича белгиланади:

$$f(x^0) = \max_{x \in U_\delta(x^0)} \{f(x)\}, \quad (f(x^0) = \min_{x \in U_\delta(x^0)} \{f(x)\}).$$

Функцияниң максимум ва минимуми умумий ном билан унинг **экстремуми** деб аталади.

Мисол. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \quad (x_1^2 + x_2^2 \leq 1)$$

функцияни қарайлик. Бу функция $(0, 0)$ нуқтада қатъий максимумга эришади. Ҳақиқатан ҳам, $(0, 0)$ нуқтанинг ушбу

$$U_r((0, 0)) = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 < r^2\} \quad (0 < r < 1)$$

атрофи олинса, унда $\forall (x_1, x_2) \in U_r((0, 0)) \setminus \{(0, 0)\}$ учун

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} < f(0, 0) = 1$$

бўлади.

13. 8 ва 13. 9-таърифлардан кўринадики, $f(x)$ функцияниң x^0 нуқтадаги қиймати $f(x^0)$ ни унинг шу нуқта атрофидаги нуқталардаги қий-

матлари билангина солиширилар экан. Шунинг учун функцияниң экстремуми (максимуми, минимуми) локал экстремум (локал максимум, локал минимум) деб аталади.

2. Функция экстремумининг зарурый шарти. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очиқ M ($M \subset R^m$) түплемда берилган. Айтайлик, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктада максимумга (минимумга) эга бўлсин. Таърифга кўра $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүкта-нинг шундай $U_\delta(x^0) \subset M$ атрофи мавжудки, $\forall (x_1, x_2, \dots, x_m) \in U_\delta(x)$ учун

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_m) &\leq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \quad (f(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq \\ &\geq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)), \end{aligned}$$

хусусан

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) &\leq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \quad (f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) \geq \\ &\geq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)) \end{aligned}$$

бўлади. Натижада бир ўзгарувчига (x_1 га) бўклиқ йўлган $f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0)$ функцияниң $U_\delta(x^0)$ да энг катта (энг кичик) қиймати $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ га эришишини кўрамиз. Агарда x^0 нүктада $f'_{x_1}(x^0)$ хусусий ҳосила мавжуд бўлса, унда Ферма теоремаси (қаралсин, 1-қисм, 6-боб, 6-§) га кўра

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = f'_{x_1}(x^0) = 0$$

бўлади.

Худди шунингдек, $f'_{x_1}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0)$ хусусий ҳосилалар мавжуд бўлса,

$$f'_{x_1}(x^0) = 0, f'_{x_2}(x^0) = 0, \dots, f'_{x_m}(x^0) = 0$$

бўлишини топамиз.

Шундай қилиб қўйидаги теоремага келамиз.

13. 9-теорема. Агар $f(x)$ функция x^0 нүктада экстремумга эришиша ва шу нүктада барча $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда

$$f'_{x_1}(x^0) = 0, f'_{x_2}(x^0) = 0, \dots, f'_{x_m}(x^0) = 0$$

бўлади.

Бироқ $f(x)$ функцияниң бирор $x' \in R^m$ нүктада барча хусусий ҳосилаларга эга ва

$$f'_{x_1}(x') = 0, f'_{x_2}(x') = 0, \dots, f'_{x_m}(x') = 0$$

бўлишидан, унинг шу x' нүктада экстремумга эга бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди.

Масалан, R^2 тўпламда берилган

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

функцияни қарайлиқ. Бу функция $f'_{x_1}(x_1, x_2) = x_2$, $f'_{x_2}(x_1, x_2) = x_1$ хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, улар $(0, 0)$ нуқтада нолга айланади. Аммо $f(x_1, x_2) = x_1, x_2$ функция $(0, 0)$ нуқтада экстремумга эга эмас (бу функцияниң графиги гиперболик параболоидни ифодалайди, қаралсин 12-боб, 3-§).

Демак, 13. 9-теорема бир аргументли функциялардагидек функция экстремумга эришишининг зарурый шартини ифодалар экан.

$f(x)$ функция хусусий ҳосилаларини нолга айлантирадиган нуқталар унинг *стационар нуқталари* дейилади.

13. 4-эслатма. Атар $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функцияниң экстремумга эришишининг зарурый шартини ушбу

$$df(x^0) = 0 \quad (13.39)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ функцияниң x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлишидан унинг шу нуқтада барча $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлиши келиб чиқади. x^0 нуқтада функция экстремумга эришишидан теоремага кўра

$$f'_{x_1}(x^0) = 0, f'_{x_2}(x^0) = 0, \dots, f'_{x_m}(x^0) = 0$$

бўлади. Бундан эса (13. 39) бўлиши топилади.

10- §. Функция экстремумининг етарли шарти

Биз юқорида $f(x)$ функцияниң x^0 нуқтада экстремумга эришишининг зарурый шартини кўрсатдик. Энди функцияниң экстремумга эришишининг етарли шартини ўрганамиз.

$f(x)$ функция $x^0 \in R^m$ нуқтанинг бирор

$$U_\delta(x^0) = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < \delta\} \quad (\delta > 0)$$

атрофида берилган бўлсин. Ушбу

$$\Delta = f(x) - f(x^0) \quad (13.40)$$

айрмани қарайлиқ. Равшанки, бу айрма $U_\delta(x^0)$ атрофда ўз ишорасини сақласа, яъни ҳар доим $\Delta \geqslant 0$ ($\Delta \leqslant 0$) бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада минимумга (максимумга) эришади. Агар (13. 40) айрма ҳар қандай $U_\delta(x^0)$ атрофда ҳам ўз ишорасини сақламаса, у ҳолда $f(x)$ функция x^0 нуқтада экстремумга эга бўлмайди. Демак, масала (13. 40) айрма ўз ишорасини сақлайдиган $U_\delta(x^0)$ атроф мавжудми ёки йўқми, шуни аниқлашдан иборат. Бу масалани биз, хусусий ҳолда, яъни $f(x)$ функция маълум шартларни бажарган ҳолда ечамиз.

$f(x)$ функция қўйидаги шартларни бажарсан:

1) $f(x)$ функция бирор $U_\delta(x_0)$ да узлуксиз, барча ўзгарувчилари бўйича сиринчи ва иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга;

2) x^0 нуқта $f(x)$ функцияниң стационар нуқтаси, яъни

$$f'_{x_1}(x^0) = 0, f'_{x_2}(x^0) = 0, \dots, f'_{x_m}(x^0) = 0.$$

Ушбу бобнинг 8-§ ида келтирилган Тейлор формуласидан фойдаланиб, x^0 нуқтанинг стационар нуқта эканлигини эътиборга олиб қуайи-дагини топамиз:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^0) + \frac{1}{2} [f''_{x_1} \Delta x_1^2 + f''_{x_2} \Delta x_2^2 + \dots + f''_{x_m} \Delta x_m^2 + \\ &+ 2(f''_{x_1 x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 + f''_{x_1 x_3} \Delta x_1 \Delta x_3 + \dots + f''_{x_{m-1} x_m} \Delta x_{m-1} \Delta x_m)] = \\ &= f(x^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^m f''_{x_i x_k} \Delta x_i \Delta x_k. \end{aligned}$$

Бу муносабатда $f(x)$ функциянинг барча ҳусусий ҳосилалари $f''_{x_i x_k}$ ($i, k = 1, 2, \dots, m$) лар ушбу

$$(x_1^0 + \theta \Delta x_1, x_2^0 + \theta \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \theta \Delta x_m) \quad (0 < \theta < 1)$$

нуқтада ҳисобланган ва

$$\Delta x_1 = x_1 - x_1^0, \Delta x_2 = x_2 - x_2^0, \dots, \Delta x_m = x_m - x_m^0.$$

Демак,

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^m f''_{x_i x_k} \Delta x_i \Delta x_k.$$

Берилган $f(x)$ функция иккинчи тартибли ҳосилаларининг стационар нуқтадаги қийматларини қўйидагича белгилайлик:

$$a_{ik} = f''_{x_i x_k}(x^0) \quad (i, k = 1, 2, \dots, m).$$

Унда $f''_{x_i x_k}(x)$ нинг x^0 нуқтада узлуксизлигидан

$$f''_{x_i x_k} = f''_{x_i x_k}(x_1^0 + \theta \Delta x_1, x_2^0 + \theta \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \theta \Delta x_m) = a_{ik} + \alpha_{ik}$$

($i, k = 1, 2, \dots, m$) бўлиши келиб чиқади. Бу муносабатда $\Delta x_1 \rightarrow 0$, $\Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да барча $\alpha_{ik} \rightarrow 0$ ва 6-§ да келтирилган 13.6-теоремага асосан

$$a_{ik} = a_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \dots, m)$$

бўлади. Натижада (13.40) айрма ушбу

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \Delta x_i \Delta x_k + \sum_{i,k=1}^m \alpha_{ik} \Delta x_i \Delta x_k \right)$$

кўринишни олади. Буни қўйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2} \left(\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \frac{\Delta x_i}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_k}{\rho} + \sum_{i,k=1}^m \alpha_{ik} \frac{\Delta x_i}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_k}{\rho} \right).$$

Агар

$$\xi_i = \frac{\Delta x_i}{\rho} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

деб белгиласак, унда

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2} \left(\sum_{i, k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k + \sum_{i, k=1}^m \alpha_{ik} \xi_i \xi_k \right) \quad (13.41)$$

бўлади.

Ушбу

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i, k=1}^m b_{ik} \xi_i \xi_k$$

ифода $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ ўзгарувчиларнинг квадратик формаси деб аталади. b_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, m$) лар эса квадратик форманинг коэффициентлари дейилади. Равшанки, ҳар қандай квадратик форма ўз коэффициентлари орқали тўла аниқланади. Квадратик формалар алгебра курсида батафсил ўрганилади. Қуйида биз квадратик формага доир баъзи (келгусида қўлланиладиган) тушунчаларни эслатиб ўтамиз.

Равшанки, $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_m = 0$ бўлса, ҳар қандай квадратик форма учун

$$P(0, 0, \dots, 0) = 0$$

бўлади.

Энди бошқа нуқталарни қарайлик. Қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1. Барча $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_m^2 > 0$ нуқталар учун

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) > 0.$$

Бу ҳолда квадратик форма мусбат аниқланган дейилади.

2. Барча $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_m^2 > 0$ нуқталар учун

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) < 0.$$

Бу ҳолда квадратик форма манғий аниқланган дейилади.

3. Баъзи $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ нуқталар учун $P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) > 0$, баъзи нуқталар учун

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) < 0.$$

Бу ҳолда квадратик форма ноаниқ дейилади.

4. Барча $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_m^2 > 0$ нуқталар учун

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \geq 0$$

ва улар орасида шундай $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ нуқталар ҳам борки,

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = 0.$$

Бу ҳолда квадратик форма яриммусбат аниқланган дейилади.

5. Барча $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_m^2 > 0$ нуқталар учун

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \leq 0$$

ва улар орасида шундай $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ нуқталар ҳам борки,

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = 0.$$

Бу ҳолда квадратик форма яримманғий аниқланган дейилади.

1. Ушбу

$$Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k$$

квадратик форма мусбат аниқланган бўлсин. Аввало юқоридаги

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_m^2}$$

ва

$$\xi_i = \frac{\Delta x_i}{\rho} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

тенгликлардан

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_m^2 = 1$$

эканлигини топамиз. Маълумки, R^m фазода

$$S_1(0) = S_1((0, 0, \dots, 0)) = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in R^m : \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_m^2 = 1\}$$

маркази $0 = (0, 0, \dots, 0)$ нуқтада, радиуси 1 га тенг сферани ифодалайди. Сфера ёпиқ ва чегараланган тўплам. Вейерштрасснинг биринчи теоремасига асосан шу сферада $Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ функция узлуксиз функция сифатида чегараланган, хусусан қуйидан чегараланган бўлади:

$$Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \geq c \quad (c - \text{const}).$$

Агар $Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ квадратик форманинг мусбат аниқланган эканлигини эътиборга олсак, унда $c \geq 0$ бўлишини топамиз.

Иккинч томондан, Вейерштрасснинг иккинчи теоремасига кўра бу $Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ функция $S_1(0)$ сферада ўзининг аниқ қуйи чегарасига эришади, яъни бирор $(\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_m^0) \in S_1(0)$ учун

$$Q(\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_m^0) = \min Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$$

бўлади. Яна $Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ квадратик форманинг мусбат аниқланганлигини эътиборга олсак,

$$Q(\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_m^0) > 0$$

эканини топамиз. Демак, $S_1(0)$ сферада

$$Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k \geq c > 0$$

бўлади.

Энди

$$\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k$$

ни баҳолаймиз. Коши—Буняковский тенгсизлигидан фойдаланиб, то-
памиз:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,k=1}^m \alpha_{ik} \xi_i \xi_k \right| &= \left| \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} \xi_k \right) \xi_i \right| \leqslant \\ &\leqslant \left[\sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} \xi_k \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^m \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left[\sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} \xi_k \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \alpha_{ik}^2 \sum_{k=1}^m \xi_k^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i,k=1}^m \alpha_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Маълумки, $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да барча $\alpha_{ik} \rightarrow 0$.
Бундан фойдаланиб x^0 нуқтанинг атрофини етарлича кичик қилиб олиш
ҳисобига

$$\left(\sum_{i,k=1}^m \alpha_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{c}{2}$$

тенгсизликка эришиш мумкин. Демак, (13.41) дан

$$\Lambda = \frac{\rho^2}{2} \left(\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k + \sum_{i,k=1}^m \alpha_{ik} \xi_i \xi_k \right) \geqslant \frac{\rho^2}{2} \left(c - \frac{c}{2} \right) = \frac{\rho^2 c}{4} > 0.$$

2. Қўйидаги

$$Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k$$

квадратик форма манғий аниқланган бўлсин. Бу ҳолда x^0 нуқтанинг
етарлича кичик атрофида $\Delta = \frac{\rho^2}{2} \left(\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k + \sum_{i,k=1}^m \alpha_{ik} \xi_i \xi_k \right) < 0$ бў-
лиши 1-ҳолдагига ўхшаш кўрсатилади. Натижада қўйидаги теоремага
келамиз.

13.10-төре ма. $f(x)$ функция x^0 нуқтанинг бирор $U_\delta(x^0)$ атро-
фида ($\delta > 0$) берилган бўлсин ва у ўшибу шартларни бажарсан:

- 1) $f(x)$ функция $U_\delta(x^0)$ да барча ўзгарувчилар x_1, x_2, \dots, x_m бўйича
бираини ва иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга;
- 2) x^0 нуқта $f(x)$ функциянинг стационар нуқтаси;
- 3) коэффициентлари

$$a_{ik} = f''_{x_i x_k}(x^0) \quad (i, k = 1, 2, \dots, m)$$

бўлган

$$Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k$$

квадратик форма мусбат (манфий) аниқланган. У ҳолда $f(x)$ функция x^0 нүктада минимумга (максимумга) эришади.

Бу теорема функция экстремумининг етарли шартини ифодалайди.

3. Агар

$$Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k$$

квадратик форма ноаниқ бўлса, $f(x)$ функция x^0 нүктада экстремумга эришмайди. Шуни исботлайлик. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ ларнинг шундай (h_1, h_2, \dots, h_m) ва ($\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_m$) қийматлари топилади,

$$Q(h_1, h_2, \dots, h_m) > 0, \quad Q(\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_m) < 0 \quad (13.42)$$

бўлади.

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \text{ ва } (x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \dots, x_m^0 + h_m)$$

нүқталарни бирлаштирувчи

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + th_1, \\ x_2 &= x_2^0 + th_2, \\ &\dots \dots \dots \\ x_m &= x_m^0 + th_m \quad (0 \leq t \leq 1) \end{aligned} \quad (13.43)$$

кесманинг нүқталари учун юқоридаги (13.41) муносабат ушбу

$$\Delta = \frac{t^2}{2} \left(\sum_{i,k=1}^m a_{ik} h_i h_k + \sum_{i,k=1}^m \alpha_{ik} h_i h_k \right)$$

кўринишга келади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи (13.42) га кўра мусбат бўлади. Иккинчи қўшилувчи эса, $t \rightarrow 0$ да нолга интилади (чунки $t \rightarrow 0$ да $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0 \rightarrow 0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_2^0 \rightarrow 0$, \dots , $\Delta x_m = x_m - x_m^0 \rightarrow 0$). Демак, (13.43) кесманинг x^0 нүқтага етарлича яқин бўлган x нүқталари учун Δ айрма мусбат, яъни

$$f(x) > f(x^0)$$

бўлади.

Худди шунга ўхшаш,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + t\bar{h}_1, \\ x_2 &= x_2^0 + t\bar{h}_2, \\ &\dots \dots \dots \\ x_m &= x_m^0 + t\bar{h}_m \end{aligned}$$

кесманинг x^0 нүқтага етарлича яқин бўлган x нүқталари учун Δ айрма манфий, яъни

$$f(x) < f(x^0)$$

бўлиши кўрсатилади.

Демак, $\Delta = f(x) - f(x^0)$ айирма x^0 нүқтанинг ҳар қандай етарлича кичик атрофида ўз ишорасини сақламайди. Бу эса $f(x)$ функцияниң x^0 нүқтада экстремумга эришмаслигини билдиради.

4 — 5. Агар

$$Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k$$

квадратик форма яриммусбат аниқланган бўлса ёки яримманфий аниқланган бўлса, $f(x)$ функция x^0 нүқтада экстремумга эришиши ҳам, эришмаслиги ҳам мумкин. Бу «шубҳали» ҳол қўшимча текшириб аниқланади.

Юқоридаги 13.10-теореманинг 3-шарти, яъни $Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ квадратик форманинг мусбат ёки манфий аниқланганликка алоқадор шарти теореманинг марказий қисмини ташкил этади. Квадратик форманинг мусбат ёки манфий аниқланганлигини алгебра курсидан маълум бўлган Сильвестр аломатидан фойдаланиб топиш мумкин. Қуйида бу аломатни исботсиз келтирамиз.

Сильвестр аломати. Ушбу

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^m b_{ik} \xi_i \xi_k$$

квадратик форманинг мусбат аниқланган бўлиши учун

$$b_{11} > 0, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} > 0$$

тенгсизликларниң, манфий аниқланган бўлиши учун

$$b_{11} < 0, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} < 0, \dots, (-1)^m \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} > 0$$

тенгсизликларниң бажарилиши зарур ва етарли.

Хусусий ҳолни, функция икки ўзгарувчига боғлиқ бўлган ҳолни қаралайлик.

$f(x_1, x_2)$ функция $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ нүқтанинг бирор атрофи

$$U_\delta(x^0) = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 : \rho(x, x^0) < \delta\} \quad (\delta > 0)$$

да берилган бўлсин ва бу атрофда барча биринчи, иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин. x^0 эса қаралаётган функцияниң стационар нүқтаси бўлсин:

$$f'_{x_1}(x^0) = 0, f''_{x_2}(x^0) = 0.$$

Одатдагидек

$$a_{11} = f''_{x_1}(x^0), a_{12} = f''_{x_1 x_2}(x^0), a_{22} = f''_{x_2}(x^0).$$

1°. Агар

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0 \text{ ва } a_{11} > 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада минимумга эришади.

2°. Агар

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0 \text{ ва } a_{11} < 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада максимумга эришади.

3°. Агар

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 < 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада экстремумга эришмайди.

4°. Агар

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада экстремумга эришиши ҳам мумкин, эришмаслиги ҳам мумкин. Бу «шубҳали» ҳол қўшимча текшириш ёрдамида аниқланади.

Ҳақиқатан ҳам, 1°- ва 2°- ҳолларда квадратик форма мос равишда мусбат аниқланган ёки манфий аниқланган бўлади (қаралсин: Сильвестр аломати).

3°- ҳолда, яъни

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 < 0 \quad (13.44)$$

бўлганда $Q(\xi_1, \xi_2) = a_{11} \xi_1^2 + 2 a_{12} \xi_1 \xi_2 + a_{22} \xi_2^2$ квадратик форма ноаниқ бўлади. Шуну исботлайлик.

$a_{11} = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (13.44) дан $a_{12} \neq 0$ бўлиши келиб чиқади. Натижада $Q(\xi_1, \xi_2)$ квадратик форма ушбу

$$Q(\xi_1, \xi_2) = (2 a_{12} \xi_1 + a_{22} \xi_2) \xi_2$$

курнишга келади. Бу квадратик форма

$$\xi_1 = \frac{1-a_{22}}{2 a_{12}}, \quad \xi_2 = 1$$

қийматда мусбат:

$$Q\left(\frac{1-a_{22}}{2 a_{12}}, 1\right) = 1 > 0 \text{ ва } \xi_1 = \frac{1+a_{22}}{2 a_{12}}, \quad \xi_2 = -1,$$

қийматда эса манфий:

$$Q\left(\frac{1+a_{22}}{2 a_{12}}, -1\right) = -1 < 0$$

бўлади.

Энди $a_{11} > 0$ бўлсин. Бу ҳолда $Q(\xi_1, \xi_2)$ квадратик формани қўйидагича ёзib оламиз:

$$Q(\xi_1, \xi_2) = a_{11} \left[\left(\xi_1 + \frac{a_{12} \xi_2}{a_{11}} \right)^2 + \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}^2} \xi_2^2 \right]. \quad (13.45)$$

Кейинги тенгликтан $\xi_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$, $\xi_2 = 1$ қийматда

$$Q \left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}, 1 \right) < 0$$

ва $\forall \xi_1 > -\frac{a_{12}}{a_{11}} + \sqrt{\frac{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}{a_{11}^2}}$, $\xi_2 = 1$ қийматларда эса

$$Q (\xi_1, 1) > 0$$

бўлишини топамиз.

Ва ниҳоят, $a_{11} < 0$ бўлсин. Бу ҳолда (13.45) муносабатдан фойдаланиб, $Q (\xi_1, \xi_2)$ квадратик форманинг $\xi_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$, $\xi_2 = 1$ қийматда мусбат

$Q \left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}, 1 \right) > 0$ ва $\forall \xi_1 > -\frac{a_{12}}{a_{11}} + \sqrt{\frac{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}{a_{12}^2}}$, $\xi_1 = 1$ қийматларда эса манфий

$$Q (\xi_1, 1) > 0$$

бўлишини топамиз.

Шундай қилиб, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ бўлганда $Q (\xi_1, \xi_2)$ квадратик форма нинг ноаниқ бўлиши исбот этилди.

4°-ҳолни, яъни $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ бўлган ҳолни қарайлик. Бу ҳолда, $a_{11} = 0$ бўлса, унда $a_{12} = 0$ бўлиб, $Q (\xi_1, \xi_2)$ квадратик форма ушбу

$$Q (\xi_1, \xi_2) = a_{22}\xi_2^2$$

кўринишни олади.

Равшанки, $a_{22} \geq 0$ бўлганда

$$Q (\xi_1, \xi_2) \geq 0,$$

$a_{22} \leq 0$ бўлганда

$$Q (\xi_1, \xi_2) \leq 0$$

бўлиб, ξ_1 нинг ихтиёрий қийматида

$$Q (\xi_1, 0) = 0$$

бўлади.

Агар $a_{11} > 0$ бўлса,

$$Q (\xi_1, \xi_2) = a_{11} \left(\xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \xi_2 \right)^2 \geq 0,$$

$a_{11} < 0$ бўлганда

$$Q (\xi_1, \xi_2) = a_{11} \left(\xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \xi_2 \right)^2 \leq 0$$

бўлиб, ξ_1 ва ξ_2 ларнинг

$$\xi_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \xi_2$$

тенгликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $Q(\xi_1, \xi_2)$ квадратик форма нолга тенг бўлади. Демак, қаралётган ҳолда $Q(\xi_1, \xi_2)$ квадратик форма яриммусбат аниқланган ёки яримманфий аниқланган бўлади.

Энди мисоллар қараймиз.

Мисоллар 1. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3ax_1x_2 \quad (a \neq 0)$$

функцияни қарайлик. Бу функцияning биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари

$$\begin{aligned} f'_{x_1}(x_1, x_2) &= 3x_1^2 - 3ax_2, \quad f'_{x_2}(x_1, x_2) = 3x_2^2 - 3ax_1, \\ f''_{x_1^2}(x_1, x_2) &= 6x_1, \quad f''_{x_1x_2}(x_1, x_2) = -3a, \quad f''_{x_2^2}(x_1, x_2) = 6x_2 \end{aligned}$$

бўлади.

$$\begin{cases} 3x_1^2 - 3ax_2 = 0, \\ 3x_2^2 - 3ax_1 = 0 \end{cases}$$

системани ечиб, берилган функцияning стационар нуқталари $(0, 0)$ ва (a, a) эканини топамиз.

(a, a) нуқтада

$$a_{11} = 6a, \quad a_{12} = -3a, \quad a_{22} = 6a$$

бўлиб,

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 27a^2 > 0$$

бўлади.

Демак, $a > 0$ бўлганда ($a_{11} > 0$ бўлиб) функция (a, a) нуқта минимумга эришади, $a < 0$ бўлганда функция (a, a) нуқтада максимумга эришади. Равшанки, $f(a, a) = -a^3$. $(0, 0)$ нуқтада

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -9a^2 < 0$$

бўлади. Демак, берилган функция $(0, 0)$ нуқтада экстремумга эришмайди.

2. Қуйидаги

$$f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1)^2 + (x_2 + 2)^3$$

функцияни қарайлик. Берилган функцияning стационар нуқтаси $(-2, -2)$ нуқта бўлади. Бу нуқтада

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

бўлишини топиш қийин эмас. Демак, биз бу ерда юқоридаги 4° - «шубҳали» ҳолни учратяпмиз. Экстремум бор-йўлигини аниқлаш учун қўшимча текшириш ўтказишимиш керак. $(-2, -2)$ нуқтадан ўтувчи $x_2 = x_1$ тўғри чизиқнинг нуқталарини қараймиз. Равшанки, бу тўғри чизиқ нуқталарида берилган функция

$$f(x_1, x_2) = (x_2 + 2)^3$$

бўлиб, $x_2 < -2$ да $f(x_1, x_2) < 0$, $x_2 > -2$ да $f(x_1, x_2) > 0$ бўлади. Демак, $f(x_1, x_2)$ функция $(-2, -2)$ нуқта атрофидаги ишора сақламайди. Бинобарин, берилган функция $(-2, -2)$ нуқтада экстремумга эришмайди.

11- §. Ошкормас функциялар

1. Ошкормас функция тушунчаси. Мазкур курснинг 1-қисм, 4-боб, 1-§ ида функция таърифи келтирилган эди. Уни эслатиб ўтамиз. Агар X тўпламдаги ($X \subset R$) ҳар бир x сонга бирор қоида ёки қонунга кўра Y тўпламдан ($Y \subset R$) битта y сон мос қўйилган бўлса, X тўпламда функция берилган деб аталар ва у

$$f : x \rightarrow y \text{ ёки } y = f(x)$$

каби белгиланар эди. Бунда x га y ни мос қўядиган қоида ёки қонун турлича, жумладан аналитик, жадвал ҳамда график усулларда бўлишини кўрдик. Масалан, функциянинг график усулда берилишида x билан y орасидаги боғланиш текисликдаги эгри чизиқ ёрдамида бажариларди.

Энди икки x ва y аргументларнинг $F(x, y)$ функцияси

$$M = \{(x, y) \in R^2 : a < x < b, c < y < d\}$$

тўпламда берилган бўлсин. Ушбу

$$F(x, y) = 0$$

тенгламани қарайлик. Бирор x_0 сонни ($x_0 \in (a, b)$) олиб, уни юқоридаги тенгламадаги x нинг ўрнига қўйамиз. Натижада y ни топиш учун қўйидаги

$$F(x_0, y) = 0 \quad (13.46)$$

тенгламага келамиз. Бу тенгламанинг ечими ҳақида ушбу ҳоллар бўлиши мумкин:

1°. (13.46) тенглама ягона ҳақиқий y_0 ечимга эга,

2°. (13.46) тенглама битта ҳам ҳақиқий ечимга эга эмас,

3°. (13.46) тенглама бир нечта, ҳатто чексиз кўп ҳақиқий ечимга эга.

Масалан,

$$F(x, y) = \begin{cases} y - x^2, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ y^2 + x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлсин. У ҳолда

$$F(x, y) = 0 \quad (13.47)$$

тенглама $x_0 \geq 0$ бўлганда ягона $y = x_0^2$ ечимга, $x_0 < 0$ бўлганда иккита

$$y = \sqrt{-x_0}, \quad y = -\sqrt{-x_0}$$

ечимларга эга бўлади.

Агар бирор $F(x, y) = 0$ тенглама учун 1°-хол ўринли бўлса, бундай тенглама эътиборга лойиқ. Унинг ёрдамида функция аниқланиши мумкин.

Энди x ўзгарувчининг қийматларидан иборат шундай X тўпламни қарайликки, бу тўпламдан олинган ҳар бир қийматда $F(x, y) = 0$ тенглама ягона ечимга эга бўлсин.

X тўпламдан иктиёрий x сонни олиб, бу сонга $F(x, y) = 0$ тенгламанинг ягона ечими бўлган y сонни мос қўйамиз. Натижада X тўплам-

дан олинган ҳар бир x га юқорида күрсатылған қоидага күра битта y мос қўйилиб, функция ҳосил бўлади. Бунда x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш $F(x, y) = 0$ тенглама ёрдамида бўлади. Одатда бундай берилган (аниқланган) функция ошкормас кўринишда берилган функция (ёки ошкормас функция) деб аталади ва

$$x \rightarrow y : F(x, y) = 0$$

каби белгиланади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$F(x, y) = y \sqrt{x^2 - 1} - 2$$

функцияни қарайлик. Равшанки,

$$F(x, y) = y \sqrt{x^2 - 1} - 2 = 0 \quad (13.48)$$

тенглама x нинг $R \setminus \{x \in R : -1 < x < 1\}$ дан олинган ҳар бир қийматида ягона

$$y = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

ечимга эга, бундан

$$F\left(x, \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) \equiv 0.$$

Натижада (13.48) тенглама ёрдамида берилган ушбу

$$x \rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}} : F\left(x, \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функцияга эга бўламиз.

2. Ушбу

$$F(x, y) = x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0 \quad (13.49)$$

тенгламани қарайлик. Уни қўйидагича

$$x = y - \frac{1}{2} \sin y = \varphi(y) \quad (y \in (-\infty, \infty))$$

кўринишда ёзиб оламиз. Равшанки, $\varphi(y)$ функция $(-\infty, \infty)$ да узлуксиэ ва $\varphi'(y) = 1 - \frac{1}{2} \cos y > 0$ ҳосилага эга.

Унда тескари функция ҳақидаги теоремага кўра (1-қисм, 5-боб, 7-§) $y = \varphi^{-1}(x)$ функция мавжуддир. Демак, $(-\infty, \infty)$ дан олинган x нинг ҳар бир қийматида (13.49) тенглама ягона $y = \varphi^{-1}(x)$ ечимга эга, бундан

$$F(x, \varphi^{-1}(x)) = 0.$$

Ҳар бир x га $\varphi^{-1}(x)$ ни мос қўйинб,

$$x \rightarrow \varphi^{-1}(x) : F(x, \varphi^{-1}(x)) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функцияга эга бўламиз.

3. Юқорида келтирилган (13.47) тенглама ҳам $x \geq 0$ да

$$x \rightarrow x^2 : F(x, x^2) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлайди.

4. Қўйидаги

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - \ln y = 0 \quad (y > 0)$$

Тенгламани қарайлык. Бу тенглама x нинг $(-\infty, \infty)$ оралиқдан олинган ҳеч бир қийматида ечимга эга әмас. Чунки ҳар доим $y^2 - \ln y > 0$. Бу ҳолда берилған тенглама ёрдамида функция аниқланмайды.

13.5-әслатма. Фараз қылайлык, ушбу

$$F(x, y) = 0$$

тенглама ошкормас күриништаги функцияни аниқламасин. Баъзан, бу ҳолда y га маълум шарт қўйиш натижасида юқоридаги тенглама ошкормас күриништаги функцияни аниқлаши мумкин.

Масалан, қўйидаги

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (13.50)$$

тенгламани қарайлык. Бу тенглама x нинг $(-1, 1)$ оралиқдан олинган ҳар бир қийматида иккита

$$\begin{aligned} y &= -\sqrt{1-x^2}, \\ y &= \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

ечимларга эга. Агар y га, унинг қийматлари $[-1, 0]$ сегментда бўлсин, деб шарт қўйилса, у ҳолда (13.50) тенглама ёрдамида аниқланган

$$x \rightarrow -\sqrt{1-x^2}, F(x, -\sqrt{1-x^2}) = 0$$

ошкормас күриништаги функция ҳосил бўлади.

2. Ошкормас функцияниң мавжудлиги. Биз юқорида

$$F(x, y) = 0$$

тенглама ёрдамида ҳар доим ошкормас күриништаги функция аниқланавермаслигини кўрдик.

Энди тенглама, яъни $F(x, y)$ функция қандай шартларни бажарганда ошкормас күриништаги функцияниң аниқланиши, бошқача айтганда ошкормас күриништаги функцияниң мавжуд бўлиши масаласи билан шуғулланамиз.

13.11-төрима. $F(x, y)$ функция $(x_0, y_0) \in R^2$ нуқтаниң бирор

$$U_{h,k}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2 : x_0 - h < x < x_0 + h, y_0 - k < y < y_0 + k\}$$

атрофида ($h > 0, k > 0$) берилган ва у қўйидаги шартларни бажарсиз:

1) $U_{h,k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз;

2) x ўзгарувчининг $(x_0 - h, x_0 + h)$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида у ўзгарувчининг функцияси сифатида ўсувчи;

3) $F(x_0, y_0) = 0$.

Ү ҳолда (x_0, y_0) нуқтаниң шундай

$U_{\delta,\epsilon}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \epsilon < y < y_0 + \epsilon\}$ атрофи ($0 < \delta < h, 0 < \epsilon < k$) төспиладики,

1') $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ учун

$$F(x, y) = 0$$

тенглама ягона y ечимга ($y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$) эга, яғни $F(x, y) = 0$ тенглама ёрдамида

$$x \rightarrow y : F(x, y) = 0$$

ошкормас күринишдаги функция аниқланады,

2') $x = x_0$ бўлганда унга мос келган $y = y_0$ бўлади,

3') ошкормас күринишда аниқланган

$$x \rightarrow y : F(x, y) = 0$$

функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ оралиқда узлуксиз бўлади.

Исбот. $U_{h,k}((x_0, y_0))$ атрофга тегишли бўлган $(x_0, y_0 - \varepsilon), (x_0, y_0 + \varepsilon)$ нуқталарни олайлик. Равшанки, $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ оралиқда $F(x_0, y)$ функция ўсувчи бўлади. Демак,

$$\begin{aligned} y_0 - \varepsilon &< y_0 \Rightarrow F(x_0, y_0 - \varepsilon) < F(x_0, y_0), \\ y_0 + \varepsilon &> y_0 \Rightarrow F(x_0, y_0 + \varepsilon) > F(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Теореманинг 3-шартига кўра

$$F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$$

бўлади.

Теореманинг 1- шартига кўра $F(x, y)$ функция $U_{h,k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз. Бинобарин $F(x, y_0 - \varepsilon)$ ва $F(x, y_0 + \varepsilon)$ функциялар $(x_0 - h, x_0 + h)$ оралиқда узлуксиз бўлади. Унда узлуксиз функциянинг хосса-сига кўра (қаралсин, 1-қисм, 5-боб, 7-§) x_0 нуқтанинг шундай атрофи $x_0 - \delta, x_0 + \delta$ топиладики ($0 < \delta < h$), $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ учун $F(x, y_0 - \varepsilon) < 0, F(x, y_0 + \varepsilon) > 0$ бўлади.

Равшанки, (x_0, y_0) нуқтанинг ушбу

$$U_{\delta,k}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - k < y < y_0 + k\}$$

атрофи учун теореманинг барча шартлари бажарилаверади, чунки

$$U_{\delta,k}((x_0, y_0)) < U_{h,k}((x_0, y_0)).$$

$\forall x^* \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ нуқтани олиб, $F(x^*, y)$ функцияни қарайлик. Бу функция, юқорида айтилганига кўра $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ оралиқда узлуксиз ва унинг четки нуқталарида турли ишорали қийматларга эга:

$$F(x^*, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x^*, y_0 + \varepsilon) > 0.$$

У ҳолда Больцано — Кошиннинг биринчи теоремасига кўра (қаралсин, 1-қисм, 5-боб, 7-§) шундай y^* топиладики ($y^* \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$).

$$F(x^*, y^*) = 0$$

бўлади. Бу топилган y^* ягона бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$y \neq y^* \Rightarrow F(x^*, y) \neq F(x^*, y^*), \quad (y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon])$$

чунки, $F(x^*, y)$ ўсувчи бўлганлиги сабабли $y > y^*$ учун $F(x^*, y) > F(x^*, y^*)$ ва $y < y^*$ учун $F(x^*, y) < F(x^*, y^*)$ бўлади.

Шундай қилиб, x нинг $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ оралиқдан олинган ҳар бир қийматида $F(x, y) = 0$ тенглама ягона y ечимга эга эканлиги кўрсатилди. Бу эса $F(x, y) = 0$ тенглама ёрдамида

$$x \rightarrow y : F(x, y) = 0 \tag{13.51}$$

ошкормас күринишдаги функция аниқланганлигини билдиради.

$x = x_0$ бўлсин. Унда теореманинг 3-шарти $F(x_0, y_0) = 0$ дан, x_0 га y_0 ни мос қўйилгандагина:

$$x_0 \rightarrow y_0 : F(x_0, y_0) = 0.$$

Демак, $x = x_0$ да ошкормас функциянинг қиймати y_0 га тенг бўлади.

Энди ошкормас функциянинг $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ оралиқда узлуксиз бўлишини кўрсатамиз.

Равшанки, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ га мос қўйиладиган $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ бўлади. Бу эса ошкормас функциянинг $x = x_0$ нуқтада узлуксиз эканлигини билдиради.

Ошкормас функциянинг $\forall x^* \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатиш бу функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатиш кабидир.

Ҳақиқатан ҳам, $F(x, y) = 0$ тенглама (x_0, y_0) нуқтанинг атрофи $U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ да ошкормас функцияни аниқлаганлигидан, шундай $y^* \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ топиладики, $F(x^*, y^*) = 0$ бўлади. Юқоридаги мулоҳазани (x^*, y^*) нуқтага нисбатан юритиб, $F(x, y) = 0$ тенглама (x^*, y^*) нуқтанинг атрофида ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлашини (бу аниқланган функция (13.51) нинг ўзи бўлади), уни x^* нуқтада узлуксиз бўлишини топамиз. Демак, ошкормас функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ оралиқда узлуксиз сўлади. Теорема исбот бўлди.

13.6-эслатма. 13.11-теорема, $F(x, y)$ функция x ўзгарувчининг $(x_0 - h, x_0 + h)$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида y ўзгарувчининг функцияси сифатида камаювчи бўлганда ҳам ўринли бўлади.

Биз юқорида $F(x, y) = 0$ тенгламани (x_0, y_0) нуқтанинг атрофида x ни y нинг функцияси сифатида аниқлашини ифодалайдиган теоремани келтирдик.

Худди шунга ўхшащ, $F(x, y) = 0$ тенглама (x_0, y_0) нуқтанинг атрофида y ни x нинг функцияси сифатида аниқлашини ифодалайдиган теоремани келтириш мумкин.

13.12-теорема. $F(x, y)$ функция $(x_0, y_0) \in R^2$ нуқтанинг бирор $U_{h, k}((x_0, y_0))$ атрофида ($h > 0, k > 0$) берилган ва y қуийдаги шартларни бажарсан:

1) $U_{h, k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз;

2) y ўзгарувчининг $(y_0 - k, y_0 + k)$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида x ўзгарувчининг функцияси сифатида ўсувчи (камаювчи),

3) $F(x_0, y_0) = 0$.

y ҳолда (x_0, y_0) нуқтанинг шундай

$U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}$ атрофи ($0 < \delta < h, 0 < \varepsilon < k$) топиладики,

1') $\forall y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ учун

$$F(x, y) = 0$$

тенглама ягона x ($x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$) ечимга эга, яъни $F(x, y) = 0$ тенглама ёрдамида $y \rightarrow x : F(x, y) = 0$ ошкормас кўринишдаги функция аниқланади;

2') $y = y_0$ бўлганда унга мос келган $x = x_0$ бўлади,

3') ошкормас кўринишда аниқланган функция

$$y \rightarrow x : F(x, y) = 0$$

$(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ да узлуксиз бўлади.

Бу теореманинг исботи юқорида келтирилган 13.11-теореманинг исботи кабидир.

3. Ошкормас функциянинг ҳосиласи. Энди ошкормас функциянинг ҳосиласини топиш билан шуғулланамиз.

13.13-төре ма. $F(x, y)$ функция $(x_0, y_0) \in R^2$ нуқтанинг бирор

$U_{h,k}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2 : x_0 - h < x < x_0 + h, y_0 - k < y < y_0 + k\}$ атрофида ($h > 0, k > 0$) берилган ва у қўйидаги шартларни бажарсан:

1) $U_{h,k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз,

2) $U_{h,k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз $F'_x(x, y), F'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга ва $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$;

3) $F(x_0, y_0) = 0$.

У ҳолда (x_0, y_0) нуқтанинг шундай

$U_{\delta,\varepsilon}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}$ атрофи ($0 < \delta < h, 0 < \varepsilon < k$) топиладики,

1') $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ учун

$$F(x, y) = 0$$

тенглама ягона у ечимга ($y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$) эга, яъни $F(x, y) = 0$ тенглама ёрдамида

$$x \rightarrow y : F(x, y) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функция аниқланади;

2') $x = x_0$ бўлганда унга мос келадиган $y = y_0$ бўлади;

3') ошкормас кўринишда аниқланган

$$x \rightarrow y : F(x, y) = 0$$

функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ оралиқда узлуксиз бўлади;

4') бу ошкормас кўринишдаги функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ оралиқда узлуксиз ҳосилага эга бўлади.

Исбот. Шартга кўра $F'_y(x, y)$ функция $U_{h,k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз ва $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Аниқлик учун $F'_y(x_0, y_0) > 0$ дейлик. У ҳолда узлуксиз функциянинг хосасига кўра (x_0, y_0) нуқтанинг шундай

$U_{\delta,\varepsilon}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}$ атрофи ($0 < \delta < h, 0 < \varepsilon < k$ топиладики, $\forall (x, y) \in U_{\delta,\varepsilon}((x_0, y_0))$ учун $F'_y(x, y) > 0$ бўлади. Демак, $F(x, y)$ функция x ўзгарувчининг $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида, у ўзгарувчининг функцияси сифатида ўсувчи. Юқорида исбот этилган 13.11-теоремага кўра

$$F(x, y) = 0$$

тенглама $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да

$$x \rightarrow y : F(x, y) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлайди, $x = x_0$ бўлганда унга

мос келган $y = y_0$ бўлади ва ошкормас функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да узлуксиз бўлади.

Энди ошкормас функцияниг ҳосиласини топамиз. x_0 нуқтага шундай Δx ортирима берайликки, $x_0 + \Delta x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ бўлсин. Натижада

$$x \rightarrow y : F(x, y) = 0$$

ошкормас функция ҳам ортиримага эга бўлиб,

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0$$

бўлади. Демак,

$$\Delta F(x_0, y_0) = F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = 0. \quad (13.52)$$

Шартга кўра $F'_x(x, y)$ ва $F'_y(x, y)$ хусусий ҳосилалар $U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ да узлуксиз. Бинобарин $F(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада дифференциалланувчи:

$$\Delta F(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y. \quad (13.52')$$

Бу муносабатдаги α ва β лар Δx ва Δy ларга боғлиқ ва $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta y \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$.

(13.52') ва (13.52) муносабатлардан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{F'_x(x_0, y_0) + \alpha}{F'_y(x_0, y_0) + \beta}$$

эканлиги келиб чиқади.

Ошкормас функцияниг x_0 нуқтада узлуксизлигини эътиборга олиб, кейинги тенглика $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб қўйидагини топамиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(- \frac{F'_x(x_0, y_0) + \alpha}{F'_y(x_0, y_0) + \beta} \right) = - \frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Демак,

$$y'_x = x_0 = - \frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

$U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ да $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ хусусий ҳосилалар узлуксиз ва $F'_y(x, y) \neq 0$ бўлишидан ошкормас функцияниг ҳосиласи

$$y'_x = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

нинг $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ оралиқда узлуксиз бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Мисол. Ушбу

$$F(x, y) = xe^y + ye^x - 2 = 0 \quad (13.53)$$

тенгламани қарайлик. Равшанки, $F(x, y) = xe^y + ye^x - 2$ функция $\{(x, y) \in R^2 : -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$ тўпламда юқоридаги 13.11- теореманинг бар-а

шартларини қаноатлантиради. Демак, $\forall (x_0, y_0) \in R^2$ нүктанынг $U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ атрофида (13.53) тенглама ошкормас күринищдаги функцияни аниқлады ва бу ошкормас функциянынг ҳосиласи

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}$$

бўлади.

Ошкормас күринищдаги функциянынг ҳосиласини қўйидагича ҳам ҳисобласа бўлади. y нинг x га боғлиқ эканини эътиборга олиб, $F(x, y) = 0$ дан топамиз:

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot y' = 0.$$

Бундан эса

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

бўлиши келиб чиқади.

Юқорида келтирилган (13.53) тенглама ёрдамида аниқланган ошкормас күринищдаги функциянынг ҳосиласини ҳисоблайлик:

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) y' = e^y + ye^x + (xe^y + e^x) y' = 0, \quad (*)$$

$$y' = -\frac{e^y + ye^x}{e^x + xe^y}.$$

4. Ошкормас функциянынг юқори тартибли ҳосилалари. Фараз қиласайлик,

$$F(x, y) = 0$$

тенглама $(x_0, y_0) \in R^2$ нүктанынг $U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ атрофида ошкормас күринищдаги функцияни аниқласин. Агар $F(x, y)$ функция $U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ да узлуксиз $F'_x(x, y), F'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга ($F'_y(x, y) \neq 0$) эга бўлса, ошкормас күринищдаги функция узлуксиз ҳосилага эга бўлиб,

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (13.54)$$

бўлади.

Энди $F(x, y)$ функция $U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ да узлуксиз иккинчи тартибли $F''_{xx}(x, y), F''_{xy}(x, y), F''_{yy}(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. y нинг x га боғлиқлигини эътиборга олиб, (13.54) тенгликни x бўйича дифференциаллаб қўйидагини топамиз:

$$y'' = -\frac{(F'_x(x, y))'_x F'_y(x, y) - (F'_y(x, y))'_x F'_x(x, y)}{(F'_y(x, y))^2}.$$

Агар

$$\begin{aligned} (F'_x(x, y))'_x &= F''_{xx}(x, y) + F''_{xy}(x, y)y', \\ ((F'_y(x, y))'_x) &= F''_{yx}(x, y) + F''_{yy}(x, y)y' \end{aligned} \quad (13.55)$$

экванилигини ҳисобга олсак, унда

$$y'' = \frac{(F''_{yx}(x, y) + F''_{y^2}(x, y) \cdot y') \cdot F'_x(x, y) - (F''_{x^2}(x, y) + F''_{xy}(x, y) \cdot y') \cdot F'_y(x, y)}{(F'_y(x, y))^2} = \\ = \frac{F''_{yx}(x, y) \cdot F'_x(x, y) - F''_{x^2}(x, y) \cdot F'_y(x, y) + [F''_{y^2}(x, y) \cdot F'_x(x, y) - F''_{xy}(x, y) \cdot F'_y(x, y)]y'}{(F'_y(x, y))^2}$$

бўлади. Бу ифодадаги y' нинг ўрнига унинг қиймати $-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$ ни қўйиб, ошкормас кўринишдаги функцияning иккинчи тартибли ҳосиласи учун қўйидаги формулага келамиз:

$$y'' = \frac{2F'_x(x, y) \cdot F'_y(x, y) \cdot F''_{xy}(x, y) - F''_{y^2}(x, y) F''_{x^2}(x, y) - F''_{x^2}(x, y) F''_{y^2}(x, y)}{(F'_y(x, y))^3}.$$

Худди шу йўл билан ошкормас функцияning учинчи ва ҳоказо тартибдаги ҳосилалари топилади.

13. 7-эслатма. Ушбу

$$F(x, y) = 0$$

тenglama билан аниқланган ошкормас кўринишдаги функцияning юқори тартибли ҳосилаларини қўйидагича ҳам ҳисобласа бўлади.

$F(x, y) = 0$ ни дифференциаллаб,

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot y' = 0$$

бўлишини топган эдик. Буни яна бир марта дифференциаллаймиз:

$$(F'_x(x, y))'_x + (F'_y(x, y) \cdot y')'_x = \\ = (F'_x(x, y))'_x + y' \cdot (F'_y(x, y))'_x + F'_y(x, y) \cdot y'' = 0.$$

Юқоридаги (13. 55) муносабатдан фойдалансак, у ҳолда ушбу

$$F''_{x^2}(x, y) + 2F''_{xy}(x, y) y' + F''_{y^2}(x, y) \cdot y'^2 + F'_y(x, y) \cdot y'' = 0$$

тenglikка келамиз. Унда эса

$$y'' = -\frac{F''_{x^2}(x, y) + 2F''_{xy}(x, y) \cdot y' + F''_{y^2}(x, y) \cdot y'^2}{F'_y(x, y)}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу tenglikдаги y' нинг ўрнига унинг қиймати

$$-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

$$y'' = \frac{2F'_x(x, y) F'_y(x, y) F''_{xy}(x, y) - F''_y(x, y) F''_{x^2}(x, y) - F''_x(x, y) \cdot F''_{y^2}(x, y)}{(F'_y(x, y))^3}$$

бўлади.

Миссул. Ушбу

$$F(x, y) = xe^y + ye^x - 2 = 0$$

ни дифференциаллаб (қаралсın (*)) формулаз,

$$e^y + ye^x + (xe^y + e^x) \cdot y' = 0$$

бўлишини топган эдик. Буни яна бир марта дифференциаллаб топамиз:

$$e^y \cdot y' + y'e^x + ye^x + e^y \cdot y' + xe^y y' \cdot y' + xe^y y'' + y''e^x + y'e^x = 0,$$

яъни

$$y''(xe^y + e^x) + 2e^y y' + 2e^x y' + xe^y y'^2 + ye^x.$$

Бундан эса

$$y'' = -\frac{2e^y y' + 2e^x y' + xe^y y'^2 + ye^x}{xe^y + e^x}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгликдаги y' унинг ўрнига унинг қиймати

$$y' = -\frac{e^y + ye^x}{e^x + xe^y}$$

ни қўйиб, ошкормас функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топамиз.

5. Кўп ўзгарувчили ошкормас функциялар. Кўп ўзгарувчили ошкормас кўринишдаги функция тушунчаси юқорида ўрганилган бир ўзгарувчили ошкормас кўринишдаги функция тушунчаси каби киритилади.

$F(x, y) = F(x_1, x_2, \dots, x_m, y)$ функция ($x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$) $M = \{(x, y) \in R^{m+1} : a_1 < x_1 < b_1, \dots, a_m < x_m < b_m, c < y < d\}$ тўпламда берилган бўлсин. Ушбу

$$F(x, y) = F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0 \quad (13.56)$$

тенгламани қарайлик.

$x \in R^m$ нуқталардан иборат шундай X тўпламни ($X \subset R^m$) қарайликки, бу тўпламдан олинган ҳар бир нуқтада (13.56) тенглама ягона ҳақиқий ечимга эга бўлсин. Энди X тўпламдан ихтиёрий x нуқтани олиб, бу нуқтага (13.56) тенгламанинг ягона ечими бўлган y ни мос қўйамиз. Натижада X тўпламдан олинган ҳар бир x нуқтага, юқорида кўрсатилган қоидага кўра, битта y мос қўйишиб, функция ҳосил бўлади. Бундай аниқланган функция кўп ўзгарувчили (m та ўзгарувчили) ошкормас кўринишда берилган функция деб аталади ва

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow y : F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$$

ёки

$$x \rightarrow y : F(x, y) = 0$$

каби белгиланади.

Мисол. Ушбу

$$F(x_1, x_2, y) = x_1^2 x_2 - x_2^2 y + x_1 y$$

функцияни қарайлик. Равшонки,

$$F(x_1, x_2, y) = x_1^2 x_2 - x_2^2 y + x_1 y = 0$$

тенглама $R^2 \setminus \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 = x_2^2\}$ тўпламдан олинган ҳар бир (x_1, x_2) нуқтада ягона

$$y = \frac{x_1^2 x_2}{x_2^2 - x_1}$$

ечимга эга, яъни

$$F\left(x_1, x_2, \frac{x_1^2 x_2}{x_2^2 - x_1}\right) = 0.$$

Демак, берилган тенглама ёрдамида x_1, x_2 ўзгарувчиларнинг ошкормас кўринишдаги функцияси аниқланади:

$$(x_1, x_2) \rightarrow \frac{x_1^2 x_2}{x_2^2 - x_1} : F\left(x_1, x_2, \frac{x_1^2 x_2}{x_2^2 - x_1}\right) = 0.$$

Энди кўп ўзгарувчили ошкормас кўринишдаги функциянинг мавжудлиги, узлуксизлиги ҳамда ҳосилаларга эга бўлиши ҳақидаги теоремаларни келтирамиз.

13. 14-теорема. $F(x, y) = F(x_1, x_2, \dots, x_m, y)$ функция $(x^0, y_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0) \in R^{m+1}$ нуқтанинг бирор $U_{h_1, h_2, \dots, h_m k}((x^0, y_0)) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m, y) \in R^{m+1} : x_1^0 - h_1 < x_1 < x_1^0 + h_1, x_2^0 - h_2 < x_2 < x_2^0 + h_2, \dots, x_m^0 - h_m < x_m < x_m^0 + h_m, y_0 - k < y < y_0 + k\}$ атрофидада ($h_i > 0, i = 1, 2, \dots, m, k > 0$) берилган ва y қўйидаги шартларни бажарсин:

- 1) $U_{h_1, h_2, \dots, h_m k}((x^0, y_0))$ да узлуксиз;
- 2) $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ўзгарувчининг

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1^0 - h_1 < x_1 < x_1^0 + h_1, x_2^0 - h_2 < x_2 < x_2^0 + h_2, \dots, x_m^0 - h_m < x_m < x_m^0 + h_m\}$$

тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида y ўзгарувчининг функцияси сифатида ўсуви (камаювчи);

$$3) F(x^0, y_0) = 0.$$

У ҳолда (x^0, y_0) нуқтанинг шундай

$$U_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \varepsilon}((x^0, y_0)) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m, y) \in R^{m+1} : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}$$

атрофи ($0 < \delta_i < h_i, i = 1, 2, \dots, m, 0 < \varepsilon < k$) топиладики,

$$1') \forall x \in \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\} \text{ учун}$$

$$F(x, y) = 0 \quad (13.56)$$

тенглама ягона y ($y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$) ечимга эга, яъни (13.56) тенглама $x \rightarrow y : F(x, y) = 0$ ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлайди;

$$2') x = x^0 \text{ бўлганда, унга мос келган } y = y_0 \text{ бўлади};$$

3') ошкормас кўринишда аниқланган

$$x \rightarrow y : F(x, y) = 0$$

функция

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$$

тўпламда узлуксиз бўлади.

13.15-теорема. $F(x, y)$ функция $(x^0, y_0) \in R^{m+1}$ нуқтанинг бирор $U_{h_1 h_2 \dots h_m k}((x^0, y_0))$ атрофида берилган ва y қўйидаги шартларни бажарсин:

1) $U_{h_1 h_2 \dots h_m k}((x^0, y_0))$ да узлуксиз;

2) $U_{h_1 h_2 \dots h_m k}(x^0, y_0)$ да узлуксиз $F'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_m, y)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $F'_y(x_1, x_2, \dots, x_m, y)$ хусусий ҳосилаларга эга ва $F'_y(x_1, x_2, \dots, x_m, y) \neq 0$;

3) $F(x^0, y_0) = 0$.

У ҳолда (x^0, y_0) нуқтанинг шундай $U_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_m \varepsilon}((x^0, y_0))$ атрофи ($0 < \delta_i < h_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, $0 < \varepsilon < k$) топиладики,

1') $\forall x \in \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$ учун

$$F(x, y) = 0 \quad (13.56)$$

тенглама ягона y ($y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$) ечимга эга, яъни (13.56) тенглама $x \rightarrow y : F(x, y) = 0$ ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлайди;

2') $x = x^0$ бўлганда, унга мос келадиган $y = y_0$ бўлади;

3') ошкормас кўринишда аниқланган функция

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$$

тўпламда узлуксиз бўлади;

4') бу ошкормас кўринишдаги функция узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлади.

Бу теоремаларнинг исботи юқорида келтирилган 13.12 ва 13.13-теоремаларнинг исботи кабидир. Уларни исботлашни ўқувчига ҳавола этамиз.

Кўп ўзгарувчили ошкормас функциянинг ҳосилалари ҳам юқорида-гига ўхшаш ҳисобланади.

Фараз қиласайлик,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0 \quad (13.56)$$

тенглама берилган бўлиб, $F(x_1, x_2, \dots, x_m, y)$ функция 13.15-теореманинг барча шартларини қонаотлантирилар. Бу тенглама аниқлаган ошкормас функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз. y нинг $x_1, x_2,$

\dots, x_m ларга боғлиқ эканини эътиборга олиб, (13. 56) дан қўйидаги-
ларни топамиз:

$$\begin{aligned} F'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_m, y) + F'_y(x_1, x_2, \dots, x_m, y) \cdot y'_{x_1} &= 0, \\ F'_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_m, y) + F'_y(x_1, x_2, \dots, x_m, y) \cdot y'_{x_2} &= 0, \\ \dots &\dots \\ F'_{x_m}(x_1, x_2, \dots, x_m, y) + F'_y(x_1, x_2, \dots, x_m, y) \cdot y'_{x_m} &= 0. \end{aligned}$$

Кейинги тенгликлардан эса

$$\begin{aligned} y'_{x_1} &= -\frac{F'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_m, y)}{F'_y(x_1, x_2, \dots, x_m, y)}, \\ y'_{x_2} &= -\frac{F'_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_m, y)}{F'_y(x_1, x_2, \dots, x_m, y)}, \\ \dots &\dots \\ y'_{x_m} &= -\frac{F'_{x_m}(x_1, x_2, \dots, x_m, y)}{F'_y(x_1, x_2, \dots, x_m, y)} \end{aligned}$$

бўлиши келиб чиқади.

$F(x, y)$ функция $U_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_m e}((x^0, y_0))$ да узлуксиз юқори тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлганда $F(x, y) = 0$ тенглама аниқлаган ошкормас кўринишдаги функциянинг ҳам юқори тартибли ҳосилалари мавжуд бўлади.

Мисол. Ушбу

$$F(x_1, x_2, y) = y^3 - 3x_1 x_2 y - 1 = 0$$

тенгламани қарайлик. Равшанки, $F(x_1, x_2, y) = y^3 - 3x_1 x_2 y - 1$ функция 13. 15-теореманинг барча шартларини қаноатлантиради. Бу тенглама ёрдамида аниқланган ошкормас кўринишдаги функциянинг ҳам ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} y'_{x_1} &= -\frac{F'_{x_1}(x_1, x_2, y)}{F'_y(x_1, x_2, y)} = -\frac{-3x_2 y}{3y^2 - 3x_1 x_2} = \frac{x_2 y}{y^2 - x_1 x_2}, \quad (y^2 \neq x_1 x_2) \\ y'_{x_2} &= -\frac{F'_{x_2}(x_1, x_2, y)}{F'_y(x_1, x_2, y)} = -\frac{-3x_1 y}{3y^2 - 3x_1 x_2} = \frac{x_1 y}{y^2 - x_1 x_2}. \end{aligned}$$

Бу ошкормас функциянинг иккинчи тартибли ҳосилалари қўйидагича топилади:

$$\begin{aligned} y''_{x_1} &= \frac{(y^2 - x_1 x_2) x_2 y'_{x_1} - x_2 y (2y \cdot y'_{x_1} - x_2)}{(y^2 - x_1 x_2)^2}, \\ y''_{x_2} &= \frac{(y^2 - x_1 x_2) x_1 y'_{x_2} - x_1 y (2y \cdot y'_{x_2} - x_1)}{(y^2 - x_1 x_2)^2}, \\ y''_{x_1 x_2} &= \frac{(y^2 - x_1 x_2) (y + x_2 y'_{x_1}) - x_2 y (2y \cdot y'_{x_1} - x_2)}{(y^2 - x_1 x_2)^2}. \end{aligned}$$

Бу тенгликлардаги $y'_{x_1} y'_{x_2}$ ларнинг ўрнига уларнинг қийматларини қўйиб қўйидаги-
ларни топамиз:

$$y''_{x_1^2} = \frac{(y^2 - x_1 x_2) x_2 \frac{x_2 y}{y^2 - x_1 x_2} - x_2 y (2y \frac{x_2 y}{y^2 - x_1 x_2} - x_2)}{(y^2 - x_1 x_2)^2} =$$

$$= -\frac{2x_1 x_2^3 y}{(y^2 - x_1 x_2)^3},$$

$$y''_{x_2^2} = \frac{(y^2 - x_1 x_2) x_1 \frac{x_1 y}{y^2 - x_1 x_2} - x_1 y (2y \frac{x_1 y}{y^2 - x_1 x_2} - x_1)}{(y^2 - x_1 x_2)^2} =$$

$$= -\frac{2x_1^3 x_2 y}{(y^2 - x_1 x_2)^3},$$

$$y''_{x_1 x_2} = \frac{(y^2 - x_1 x_2) \left(y + x_2 \frac{x_1 y}{y^2 - x_1 x_2} \right) - x_2 y (2y \frac{x_1 y}{y^2 - x_1 x_2} - x_1)}{(y^2 - x_1 x_2)^2} =$$

$$= \frac{y (y^4 - 2y^2 x_1 x_2 - x_1^2 x_2^2)}{(y^2 - x_1 x_2)^3}.$$

6. Тенгламалар системаси билан аниқланадиган ошкормас функциялар. Энди, келгусида биз учун керак бўладиган янада умумийроқ ҳол билан, тенгламалар системаси орқали аниқланадиган бир неча функциялар системаси билан танишайлик.

$m+n$ та x_1, x_2, \dots, x_m ва y_1, y_2, \dots, y_n аргументларнинг ушбу n та

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

функциялари R^{m+n} фазодаги бирор

$$M = \{(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^{m+n} :$$

$$a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2, \dots, a_m < x_m < b_m, c_1 < y_1 < d_1, \dots,$$

$$c_n < y_n < d_n\}$$

тўпламда берилган бўлсин. Қўйидаги

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ F_2 &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ &\dots \\ F_n &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \end{aligned} \quad (13.57)$$

тенгламалар системасини қарайлик. $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ўзгарувчининг қийматларидан иборат шундай

$$\begin{aligned} M_x &= \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2, \dots, \\ &\quad a_m < x_m < b_m\} \subset R^n \end{aligned}$$

түплемни қарайлики, бу түплемдан олинган ҳар бир $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ нүктада (13.57) система, яғни

$$\left. \begin{array}{l} F_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ F_2(x'_1, x'_2, \dots, x'_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_n(x'_1, x'_2, \dots, x'_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \end{array} \right\}$$

система ягона ечимлар системаси y_1, y_2, \dots, y_n га әга бўлсин. Энди M_x түплемдан ихтиёрий (x_1, x_2, \dots, x_m) нүктани олиб, бу нүктага (13.57) тенгламалар системасининг ягона ечимлари системаси бўлган y_1, y_2, \dots, y_n ни мос қўямиз. Натижада M_x түплемдан олинган ҳар бир (x_1, x_2, \dots, x_m) га юқорида кўрсатилган қоидага кўра y_1, y_2, \dots, y_n лар мос қўйилиб, n та функция ҳосил бўлади. Бундай аниқланган функциялар (13.57) тенгламалар системаси ёрдамида аниқланган ошкормас кўринишдаги функциялар деб аталади. Қандай шартлар бажарилганда шу (13.57) тенгламалар системаси y_1, y_2, \dots, y_n ларнинг ҳар бирини x_1, x_2, \dots, x_m ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида аниқлаши мумкинлиги ҳақидаги масала муҳим. Бундай умумий масалани ҳал қилишни битта соддароқ ҳолни ўрганишдан бошлаймиз.

Икки $F_1 = F_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ ва $F_2 = F_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$ функция $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) \in R^4$ нүктанинг бирор $U_{h_1, h_2, k_1, k_2}((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)) = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in R^4 : x_1^0 - h_1 < x_1 < x_1^0 + h_1, x_2^0 - h_2 < x_2 < x_2^0 + h_2, y_1^0 - k_1 < y_1 < y_1^0 + k_1, y_2^0 - k_2 < y_2 < y_2^0 + k_2\}$ атрофида ($h_1 > 0, h_2 > 0, k_1 > 0, k_2 > 0$) берилган бўлсин. Ушбу

$$\left. \begin{array}{l} F_1 = F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \\ F_2 = F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \end{array} \right\} \quad (13.58)$$

тенгламалар системасини қарайлик.

Энди $F_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ ва $F_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$ функциялар қандай шартларни бажарганда (13.58) тенгламалар системаси ошкормас функцияларни аниқлаши масаласи билан шуғулланамиз.

Фараз қиласайлик, $F_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ ва $F_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$ функциялар учун

$$F_1(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) = 0, \quad F_2(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) = 0$$

бўлсин. Бундан ташқари қаралаётган функциялар $U_{h_1, h_2, k_1, k_2}((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0))$ да узлуксиз барча хусусий ҳосилаларга әга ва, айтайлик,

$$\frac{\partial F_1(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)}{\partial y_1} \neq 0$$

бўлсин. У ҳолда 13.14-теоремага кўра $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)$ нүктанинг шундай U_1 атрофи ($U_1 \subset U_{h_1, h_2, k_1, k_2}((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0))$) топиладики, бу атрофда

$$F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$$

тенглама

$$(x_1, x_2, y_2) \rightarrow y_1 : F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлайди. Шу функцияни

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, y_2)$$

деб белгилайлик. Буни (13.58) системанинг иккинчи тенгламасидаги y_1 нинг ўрнига қўйиб қуйидагини топамиз:

$$F_2(x_1, x_2, f_1(x_1, x_2), y_2) = 0.$$

Энди

$$\frac{\partial F_2(x_1^0, x_2^0, f_1(x_1^0, x_2^0), y_1^0)}{\partial y_2} \neq 0 \quad (13.59)$$

бўлсин дейлик. У ҳолда яна 13.14-теоремага кўра $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)$ нуқтанинг шундай U_2 атрофи ($U_2 \subset U_{h_1 h_2 k_1 k_2}((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0))$) топиладики, бу атрофда

$$F_2(x_1, x_2, f(x_1, x_2), y_2) = 0$$

тенглама

$$(x_1, x_2) \rightarrow y_2 : F_2(x_1, x_2, f(x_1, x_2), y_2) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлайди. Бу функцияни $y_2 = f_2(x_1, x_2)$ деб белгилайлик.

Шундай қилиб, (13.58) тенгламалар системаси $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)$ нуқтанинг бирор атрофида y_1 ва y_2 ларни x_1, x_2 ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида аниқлайди:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, f_2(x_1, x_2)), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Равшанки, $f_1(x_1^0, x_2^0), f_2(x_1^0, x_2^0) = y_1^0, f_2(x_1^0, x_2^0) = y_2^0$. Йоқоридаги (13.59) шартни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y_2} \neq 0.$$

Бунда барча хусусий ҳосилалар $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)$ нуқтада ҳисобланган. Агар

$$\frac{\frac{\partial y_1}{\partial y_2}}{\frac{\partial F_2}{\partial y_1}} = -\frac{\frac{\partial F_1}{\partial y_2}}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}}$$

эканини эътиборга олсак, унда

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y_2} = \frac{\partial F_2}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \left(-\frac{\frac{\partial F_1}{\partial y_2}}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}} \right) = \frac{\frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y_1} - \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y_2}}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}} \neq 0$$

бүләди. Модомики,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} \neq 0$$

әкан, унда

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y_1} - \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \neq 0,$$

яъни

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (13.60)$$

бүләди. Шундай қилиб (13.59) муносабатни (13.60) кўринишда ёзиш мумкин әкан.

Натижада ушбу теоремага келамиз.

13.16- төре ма. $F_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ ва $F_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$ функциялар $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) \in R^4$ нуқтанинг бирор U_{h_1, h_2, k_1, k_2} атрофида ($h_1 > 0, h_2 > 0, k_1 > 0, k_2 > 0$) берилган ва улар қўйидағи шартларни ба-жарсинг:

- 1) $U_{h_1, h_2, k_1, k_2}((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0))$ да узлуксиз;
- 2) $U_{h_1, h_2, k_1, k_2}((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0))$ да барча хусусий ҳосилаларга эга ва улар узлуксиз;
- 3) хусусий ҳосилаларнинг $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)$ нуқтадаги қийматлари-дан тузилган ушбу дөттерминант нолдан фарқли:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \neq 0;$$

- 4) $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)$ да

$$F_1(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) = 0, F_2(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) = 0.$$

У ҳолда $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)$ нуқтанинг шундай $U_{\delta_1, \delta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2}((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0))$ ат-рофи ($0 < \delta_1 < h_1, 0 < \delta_2 < h_2, 0 < \varepsilon_1 < k_1, 0 < \varepsilon_2 < k_2$) топилади, бу атрофда

1') (13.58) тенгламалар системаси ошкормас кўринишдиги

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, f_2(x_1, x_2)), y_2 = f_2(x_1, x_2)$$

функцияларни аниқлайди;

- 2') $(x_1, x_2) = (x_1^0, x_2^0)$ бўлганда, унга мос келадиган

$$y_1 = y_1^0 = f_1(x_1^0, x_2^0, f_2(x_1^0, x_2^0)), y_2 = y_2^0 = f_2(x_1^0, x_2^0)$$

бўләди;

- 3') ошкормас кўринишда аниқланган f_1 ва f_2 функциялар

$$\{(x_1, x_2) \in R^2: x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2\}$$

тўпламда узлуксиз ва барча узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бў-лади.

$$\begin{cases} x_1 x_2 + y_1 y_2 = 1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 = 3 \end{cases} \quad (13.61)$$

системани қарайлик. Бунда

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2) &= x_1 x_2 + y_1 y_2 - 1, \\ F_2(x_1, x_2) &= x_1 y_2 - x_2 y_1 - 3 \end{aligned}$$

бўлиб, бу функциялар $(1, -1, 1, 2)$ нуқтанинг атрофида 13.16- теореманинг барча шартларини бажаради. Ҳақиқатан ҳам, $F_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$, $F_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$ функциялар узлуксиз, узлуксиз барча хусусий ҳосилаларга эга, $(1, -1, 1, 2)$ нуқтада

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = 1 \neq 0$$

ҳамда

$$F_1(1, -1, 1, 2) = 0, \quad F_2(1, -1, 1, 2) = 0$$

бўлади. Демак, (13.61) система y_1 ва y_2 ларни x_1, x_2 ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида аниқлайди. Равшанки, бу функциялар узлуксиз, узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга. Берилган (13.61) тенгламалар системасини бевосита y_1 ва y_2 ларга нисбатан ечиб қўйидагиларни топамиз:

$$y_1 = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x_1 x_2 - 4x_1^2 x_2^2}}{2x_2}, \quad y_2 = \frac{3 + \sqrt{9 + 4x_1 x_2 - 4x_1^2 x_2^2}}{2x_1}.$$

Энди (13.57) системанинг ошкормас функцияларнинг аниқлашини таъминлайдиган (ошкормас функцияларнинг мавжудлигини ифодалайдиган) теоремани исботсиз келтирамиз.

13.17- теорема. F_1, F_2, \dots, F_n функцияларнинг ҳар бирни $(x^0, y^0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ нуқтанинг бирор

$$\begin{aligned} U_{hk}((x^0, y^0)) &= U_{h_1 h_2 \dots h_m k_1 k_2 \dots k_n}((x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)) = \\ &= \{(x^0, y^0) \in R^{m+n} : x_1^0 - h_1 < x_1 < x_1^0 + h_1, x_2^0 - h_2 < x_2 < x_2^0 + h_2, \dots, x_m^0 - h_m < x_m < x_m^0 + h_m, y_1^0 - k_1 < y_1 < y_1^0 + k_1, \\ &\quad y_2^0 - k_2 < y_2 < y_2^0 + k_2, \dots, y_n^0 - k_n < y_n < y_n^0 + k_n\} \end{aligned}$$

атрофида ($h_i > 0, i = 1, 2, \dots, m, k_j > 0, j = 1, 2, \dots, n$) берилган ва улар қўйидаги шартларни бажарсин:

- 1) $U_{hk}((x^0, y^0))$ да узлуксиз;
- 2) $U_{hk}((x^0, y^0))$ да барча хусусий ҳосилаларга эга ва улар узлуксиз;
- 3) хусусий ҳосилаларнинг (x^0, y^0) нуқтадаги қийматларидан тузилган ушибу дөттерминант нолдан фарқли:

$$\left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{array} \right| \neq 0;$$

$$4) (x^0, y^0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) \text{ нүктада}$$

$$F_1(x^0, y^0) = 0, F_2(x^0, y^0) = 0, \dots, F_n(x^0, y^0) = 0.$$

Үш ҳолда (x^0, y^0) нүктанинг шундай $U_{\delta, \varepsilon}((x^0, y^0)) = U_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}((x^0, y^0))$ атрофи ($0 < \delta_1 < h_1, 0 < \delta_2 < h_2, \dots, 0 < \delta_m < h_m, 0 < \varepsilon_1 < k_1, \dots, 0 < \varepsilon_n < k_n$) топиладики бу атрофда

1') (13.57) система ошкормас күриншидаги функциялар системасини аниқтайди. Уларни $y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m), y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$ дейлик;

$$2') (x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \text{ да } f_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = y_1^0,$$

$$f_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = y_2^0, \dots, f_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = y_n^0$$

бўлади;

3') ошкормас күриншида аниқланган f_1, f_2, \dots, f_n функциялар $\{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m; x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$ тўпламда узлуксиз ва узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлади.

14- Б О Б

ФУНКЦИОНАЛ ҚЕТМА- ҚЕТЛИК ВА ҚАТОРЛАР

1- §. Функционал кетма- кетлик ва қаторлар, уларнинг яқинлашувчилиги

1. Функционал кетма-кетликлар. Ихтиёрий E ва F тўпламлар берилганда, E тўпламни F тўпламга $f: E \rightarrow F$ акслантириш тушинаси 1- қисм, 1- боб, 1- § да ўрганилган эди.

Энди $E = N$, F тўплам сифатида эса $X \subset R$ тўпламда берилган функциялар тўплами $\{f(x)\}$ ни олиб, ушбу

$$\varphi: N \rightarrow \{f(x)\} \quad (\varphi: n \rightarrow f_n(x)) \quad (14.1)$$

акслантиришни қараймиз. Бу акслантириш функционал кетма- кетлик тушунчасига олиб келади.

(14.1) акслантиришни қуйидагича тасвирлаш мумкин:

$$\begin{matrix} 1 & , & 2 & , & \dots & , & n & , & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ f_1(x), & f_2(x), & \dots, & f_n(x), & \dots \end{matrix}$$

Натижада $\varphi: n \rightarrow f_n(x)$ акслантиришнинг аксларидан (образларидан) ташкил топган ушбу

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (14.2)$$

тўплам ҳосил бўлади.

(14.2) тўплам $X(X \subset R)$ да берилган функционал кетма- кетлик (функциялар кетма- кетлиги) деб аталади ва у $\{f_n(x)\}$ каби белгиланади.

Шундай қилиб, функционал кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади, биз аввал 1-қисм, 3- бобда кўрган сонли кетма-кетликнинг ҳадларидан фарқли ўлароқ муайян функциялардан иборатdir.

Шуни ҳам таъкидлаш лозимки, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ кетма-кетлик турли ҳадларининг аниқланиш соҳаси, умуман айтганда, турлича бўлиши мумкин. Биз бу ерда X сифатида шу соҳаларнинг умумий қисмини олиб қараймиз.

(14.2) кетма-кетликда $f_n(x)$ функция шу кетма-кетликнинг **умумий ҳади** (n - ҳади) дейилади. Демак, (14.2) функционал кетма-кетликнинг **умумий ҳади** x ва n ўзгарувчиларга ($x \in X, n \in N$) боғлиқ бўлади.

Мисоллар 1. φ — ҳар бир натурал n сонга $\frac{1}{n^2+x^2}$ функцияни мос қўювчи акслантириш бўлсин. У ҳолда ушбу $X = (-\infty, +\infty)$ тўпламда берилган

$$\frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{4+x^2}, \frac{1}{9+x^2}, \dots, \frac{1}{n^2+x^2}, \dots$$

функционал кетма-кетликка эга бўламиз. Бу кетма-кетликнинг умумий ҳади $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$ бўлади.

2. φ — ҳар бир натурал n сонга $\sin \frac{\sqrt[n]{x}}{n}$ функцияни мос қўювчи акслантириш бўлсин. Бу ҳолда қўйндаги

$$\sin \frac{\sqrt[n]{x}}{1}, \sin \frac{\sqrt[n]{x}}{2}, \sin \frac{\sqrt[n]{x}}{3}, \dots, \sin \frac{\sqrt[n]{x}}{n}, \dots$$

функционал кетма-кетлик ҳосил бўлади. У $X = [0, +\infty)$ тўпламда берилган бўлиб, умумий ҳади $f_n(x) = \sin \frac{\sqrt[n]{x}}{n}$ бўлади.

3. Ушбу

$$x, \sqrt{x}, x^2, \sqrt[3]{x}, \dots$$

функциялар кетма-кетлик қарайлик. Бу кетма-кетликнинг n -тоқ номерли ўринда турган ҳадлари $(-\infty, +\infty)$ оралиқда берилган функциялар бўлиб, жуфт номерли ўринда турган ҳадлари эса $[0, +\infty)$ оралиқда берилган функциялардир. Бу кетма-кетликни $X = [0, +\infty)$ оралиқда берилган деб қараймиз. Унинг умумий ҳади

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{\frac{n+1}{2}}, & \text{агар } n - \text{тоқ сон} \text{ бўлса,} \\ \sqrt[n]{x}, & \text{агар } n - \text{жуфт сон} \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади.

X тўпламда берилган бирор

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (14.2)$$

кетма-кетликни қарайлик. Бу X тўпламда $x_0 (x_0 \in X)$ нуқтани олиб, (14.2) кетма-кетлик ҳар бир $f_n(x)$ ҳадинин г шу нуқтадаги қийматини ҳисоблаймиз. Натижада қўйидаги

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_n(x_0), \dots \quad (14.3)$$

сонлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади.

Сонлар кетма-кетлиги эса, аникроғи уларнинг яқинлашувчилиги, узоқлашувчилиги, яқинлашувчи кетма-кетликнинг хоссалари 1-қисмнинг 3- бобида батафсил ўрганилган эди.

14.1- таъриф. Агар $\{f_n(x_0)\}$ сонлар кетма-кетлигиде яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик x_0 нуқтада яқинлашувчи (узоқлашувчи) деб аталади, x_0 нуқта эса бу функционал кетма-кетликнинг яқинлашиши (узоқлашиши) нуқтаси дейилади.

$\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг барча яқинлашиш (узоқлашиш) нуқталаридан иборат тўплам $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг яқинлашиши (узоқлашиши) соҳаси (тўплами) деб аталади.

Биз баязан M тўплам ($M \subset R$) $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш (узоқлашиш) соҳаси (тўплами) бўлсин деган ибора ўрнига, унинг эквиваленти — $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M соҳада (тўпламда) яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлсин деган иборани ишлатавермиз.

Бирор $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, $M(M \subset R)$ эса шу кетма-кетликнинг яқинлашиш соҳаси бўлсин. Унда $\forall x_0 \in M$ учун унга мос

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_n(x_0), \dots$$

кетма-кетлик $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ лимитга эга бўлади.

Агар $M(M \subset R)$ тўпламдан олинган ҳар бир x га, унга мос кела-диган $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ кетма-кетликнинг лимитини мос қўйсак, яъни

$$f : x \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

унда M тўпламда берилган $f(x)$ функция ҳосил бўлади. Бу $f(x)$ функцияни $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг лимит функцияси деб атамиз. Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in M). \quad (14.4)$$

Мисоллар 1. Ушбу

$$f_n(x) = \left\{ \frac{1}{n^2 + x^2} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

функционал кетма-кетлик $\forall x \in R$ да яқинлашувчи бўлиб, лимит функция айнан 0 га teng: $\forall x \in R$ учун,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + x^2} = 0.$$

2. Кўйидаги

$$\{f_n(x)\} = \{n^2 x + 1\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

функционал кетма-кетлик фақат битта $x = 0$ [нуқтадагина яқинлашувчи, болган барча нуқталарда узоқлашувчи бўлади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 x + 1) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ +\infty, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ -\infty, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

3. Ушбу

$$\{f_n(x)\} = \left\{ n \cdot \sin \frac{\sqrt{x}}{n} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

функционал кетма-кетлик $\forall x \in R_+$ да яқинлашувчи бўлиб, унинг лими т функцияси $f(x) = \sqrt[n]{x}$ бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{\sqrt[n]{x}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\sqrt[n]{x}}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x}.$$

4. Қўйидаги

$$\{f_n(x)\} = \{x^n\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

функционал кетма-кетликни қарайлик. Бу функционал кетма-кетлик учун, $\forall x \in (1, +\infty)$ да

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty,$$

$x = 1$ бўлганда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1,$$

$\forall x \in (-1, 1)$ да

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0,$$

$\forall x \in (-\infty, -1]$ бўлганда эса берилган функционал кетма-кетликнинг лимити мавжуд эмас.

Шундай қилиб, берилган $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$ функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш соҳаси $M = (-1, 1]$ бўлиб, лимит функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } -1 < x < 1 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади.

2. Функционал қаторлар. Бирор $X (X \subset R)$ тўпламда $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ функционал кетма-кетлик берилган бўлсин.

14.2-таъриф. Қўйидаги

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

ифода функционал қатор деб аталади ва у $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ каби белгиланади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (14.5)$$

$u_1(x), u_2(x), \dots$ функциялар (14.5) функционал қаторнинг ҳадлари, $u_n(x)$ эса функционал қаторнинг умумий ҳади (n -ҳади) деб аталади.

Функционал қаторга мисоллар келтирамиз:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} = \frac{x}{1 \cdot (x+1)} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} +$$

$$+ \frac{x}{(2x+1)(3x+1)} + \dots \quad (0 < x < \infty).$$

Шундай қилиб, функционал қаторнинг ҳар бир ҳади, аввал (1-қисм-

нинг 11- бобида) ўрганилган сонли қаторнинг ҳадларидан фарқли ўла-роқ, муайян функциялардан иборатdir.

14.1- эслатма. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор турли ҳадларининг бе-

рилиш соҳалари (тўпламлари), умуман айтганда, турлича бўлади. Биз бу ерда X тўплам сифатида шу соҳаларнинг умумий қисмини тушу-намиз.

X тўпламда $x_0 (x_0 \in X)$ нуқтани олиб, (14.5) функционал қаторнинг ҳар бир $u_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ ҳадининг шу нуқтадаги қийматини топа-миз. Натижада ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad (14.6)$$

сонли қатор ҳосил бўлади.

Маълумки, сонли қаторлар, уларнинг яқинлашувчилиги, узоқлашувчилиги, яқинлашиш аломатлари, яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари 1- қисмининг 11- бобида батафсил баён этилган эди.

14.3- таъриф. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сонли қатор яқинлашувчи (узоқла-шувчи) бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор $x_0 (x_0 \in X)$ нуқтада яқинла-шувчи (узоқлашувчи) деб аталади, x_0 нуқта эса бу функционал қаторнинг яқинлашиш (узоқлашиш) нуқтаси дейилади.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг барча яқинлашиш (узоқлашиш) нуқ-таларидан иборат тўплам, бу функционал қаторнинг яқинлашиш (узоқ-лашиш) соҳаси (тўплами) дейилади.

Кейинги баёнимизда биз $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг яқинлашиш (узоқлашиш) соҳаси M тўплам бўлсин дейиш ўрнига $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор M тўпламда яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлсин деган ибо-рани ҳам ишлатаверамиз.

Бирор $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор берилган бўлиб, $M (M \subset R)$ эса шу функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси бўлсин. $\forall x_0 \in M$ учун, унга мос $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$ қатор яқин-лашувчи, унинг йиғиндисини эса S_0 дейлик.

Агар M тўпламдан олинган ҳар бир x га унга мос келадиган $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ қаторнинг йиғиндисини мос қўйсак, унда M тўпламда берилган $S(x)$ функция ҳосил бўлади.

Бу $S(x)$ функцияни $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ функционал қаторнинг йиғиндиси деб атайдиз. Демак, $\forall x \in M$ учун

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = S(x).$$

Функционал қаторларда ҳам, худди сонли қаторлардаги каби, қаторнинг қисмий йиғиндилари тушунчаси киритилади.

(14.5) функционал қаторнинг дастлабки ҳадларидан тузилган ушбу

$$\begin{aligned} S_1(x) &= u_1(x), \\ S_2(x) &= u_1(x) + u_2(x), \\ S_n(x) &= u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x), \\ &\vdots \end{aligned}$$

йиғиндилар (14.5) функционал қаторнинг қисмий йиғиндилари дейилади. Демак, (14.5) функционал қатор берилган ҳолда ҳар доим бу қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n(x)\}$:

$$[S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots] \quad (14.7)$$

функционал кетма-кетликни ҳосил қилиш мумкин.

Аксинча, (14.5) функционал қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат (14.7) функционал кетма-кетлик берилган ҳолда, ҳар доим ҳадлари (14.5) функционал қаторнинг мөс ҳадларига тенг бўлган қўйидаги

$$S_1(x) + [S_2(x) - S_1(x)] + \dots + [S_n(x) - S_{n-1}(x)] + \dots$$

функционал қаторни ҳосил қилиш мумкин.

Сонли қаторнинг яқинлашувчилиги (узоқлашувчилиги) таърифини эслаб (қаралсин, 1- қисм, 11- боб, 1- §) (14.5) функционал қаторнинг x_0 нуқтада яқинлашувчилиги (узоқлашувчилиги) ни қўйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

14.4- таъриф. Агар $n \rightarrow \infty$ да $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик $x_0 (x_0 \in M)$ нуқтада яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор x_0 нуқтада яқинлашувчи (узоқлашувчи) деб аталади.

Бу функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш (узоқлашиш) соҳаси (тўплами) тегишли функционал қаторнинг яқинлашиш (узоқлашиш) соҳаси (тўплами) деб аталади.

(14.7) функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси $S(x)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$$

(14.5) функционал қаторнинг йиғиндиси деб аталади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$$

функционал қаторни қарайлик. Бу қаторнинг ҳар бир ҳади: $u_n(x) = x^{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) функция $R = (-\infty, +\infty)$ да берилган. Қаралётган функционал қаторнинг қисмий йигиндиси

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-x^n}{1-x}, & \text{агар } x \neq 1 \text{ бўлса,} \\ n, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади. Унда

$$\forall x \in (-1, +1) \text{ учун } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} \right) = \frac{1}{1-x},$$

$$\forall x \in [1, +\infty) \text{ учун } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \infty, \quad \forall x \in (-\infty, -1] \text{ учун } \{S_n(x)\} \text{ функционал кетма-кетлик лимитга эга эмас.}$$

Шундай қўл иб, берилган функционал қаторнинг якинлашиш соҳаси $M = (-1, +1)$, узоқлашиш соҳаси эса $R \setminus M = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ дан иборат.

$(-1, +1)$ оралиқда функционал қаторнинг йигиндиси $S(x) = \frac{1}{1-x}$ бўлади.

2. Кўйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} \quad (0 < x < +\infty)$$

функционал қаторни қарайлик. Бу қаторнинг қисмий йигиндисини топамиз:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x}{[(k-1)x+1](kx+1)} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1} \right] = 1 - \frac{1}{nx+1}.$$

Унда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{nx+1} \right] = 1 \quad (0 < x < +\infty)$$

бўлади. Демак, берилган қаторнинг йигиндиси $S(x) = 1$ бўлади.

Биз юқорида функционал кетма-кетлик ҳамда функционал қаторлар, уларнинг якинлашувчилиги (узоқлашувчилиги) тушунчалари билан танишдик.

Аслида бундай тушунчалар билан биз, аввал, хусусий ҳолда (ўзгарувчи x нинг ҳар бир тайин қийматида) 1- қисмнинг 3- ва 11- бобларида сонлар кетма-кетлиги, сонли қаторлар деб танишиб, уларни ба-тафсил ўрганган эдик.

Хозирги ҳол, яъни функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси $f(x)$, функционал қатор йигиндиси $S(x)$ лар x ўзгарувчининг функциялари бўлиши бу $f(x)$ ва $S(x)$ ларнинг функционал хоссаларини ўрганишини тақозо этади.

Масала $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик ҳар бир $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳадининг функционал хоссаларига кўра (узлуксизлиги, дифференциалланувчилиги ва ҳоказо) $f(x)$ лимит функциянинг мос хоссаларини, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор ҳар бир $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳади функционал хоссаларига кўра, қатор йигиндиси $S(x)$ нинг мос хоссаларини ўрганишдан иборат.

Бу $f(x)$ ҳамда $S(x)$ функцияларнинг хоссаларини ўрганишда, $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг лимит функция $f(x)$ га, қатор қисмий йиғиндиши $S_n(x)$ нинг қатор йиғиндиши $S(x)$ га яқинлашиш (интилиш) характеристи мұхим роль ўйнайды. Шунинг учун баённимизни функционал кетма-кетлик ҳамда функционал қаторнинг текис яқинлашиши тушунчасини кириши ва уни ўрганишдан бошлаймиз.

2-§. Функционал кетма-кетлик ва қагәрларчынг текис яқинлашуви

1. Функционал кетма-кетликнинг текис яқинлашуви
чилиги. Бирор $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (14.2)$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, $M(M \subset R)$ эса бу кетма-кетликнинг яқинлашиши соҳаси бўлсун. $f(x)$ функция (14.2) функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси бўлсун. Демак, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M тўпламинг ҳар бир $x_0(x_0 \in M)$ нуқтасида, $n \rightarrow \infty$ да мос $f(x_0)$ га интилади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

Кетма-кетликнинг лимити таърифига кўра бу қўйидагини англатади:
 $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $\exists n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

бўлади. Бунда n_0 натурал сон $\varepsilon > 0$ га ва олинган x_0 нуқтага боғлиқ бўлади: $n_0 = n_0(\varepsilon, x_0)$ (чунки, x ўзгарувчининг M тўпламдан олинган турли қийматларида $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик, умуман айтганда, турлича бўлади).

M тўпламдаги барча нуқталар учун умумий бўлган n_0 натурал сонни топиш мумкинми деган савол туғилади. Буни қўйидагича тушуниш керак: $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам $\forall n > n_0$ ва $\forall x \in M$ учун $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ бўладиган $n_0 \in N$ топиладими?

Қўйида келтириладиган мисоллар кўрсатадики, баъзи функционал кетма-кетликлар учун бундай n_0 натурал сон топилади; баъзи функционал кетма-кетликлар учун эса топилмайди, яъни бирор $\varepsilon_0 > 0$ сони учун исталган катта $n \in N$ сони олинганда ҳам шундай $x \in M$ нуқта топиладики,

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0$$

тенгсизлик бажарилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{\sin nx}{n} \right\}$$

функционал кетма-кетликни қарайлик. Бу кетма-кетликнинг яқинлашиш соҳаси $M = (-\infty, +\infty)$, лимит функцияси эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{n} = 0$$

бўлади. Демак, $f(x) \equiv 0$. Бу яқинлашишнинг характери қўйидагичадир:

$\forall \varepsilon > 0$ сон олингандан ҳам $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ дейилса, барча $n > n_0$ да ва $\forall x \in M$ да

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{\sin nx}{n} - 0 \right| \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0 + 1} < \varepsilon$$

бўлади.

Бу ҳолда n_0 натурал сон фақат ε гагина боғлиқ бўлаб, қаралаётган $x (x \in (-\infty, +\infty))$ нуқтага боғлиқ эмас. Бошқача айтганда, топилган n_0 натурал сон барча $x (x \in (-\infty, +\infty))$ нуқталар учун умумийдир.

2. Ушбу

$$\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{nx}{1+n+x} \right\} (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

функционал кетма-кетликни қарайлик.

Бу функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси $f(x) = x$ бўлади:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n+x} = x.$$

Бу яқинлашишнинг характери ҳам аввалги исолдагидек. Ҳақиқатдан ҳам, $\forall \varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$) сонни олайлик. n_0 сифатида

$$n_0 = \left\lceil (1+x_0) \left(\frac{x_0}{\varepsilon} - 1 \right) \right\rceil$$

ни олсак, $\forall n > n_0$ ва $x \in [0, 1]$ нуқта учун

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = \left| \frac{nx_0}{1+n+x_0} - x_0 \right| = \frac{x_0(1+x_0)}{1+n+x_0} \leqslant \frac{x_0(1+x_0)}{2+n_0+x_0} < \varepsilon \quad (14.8)$$

бўлади. Бу ерда, равшанки, n_0 сон ε га ва x_0 нуқтага боғлиқдир. Бироқ n'_0 деб

$$n'_0 = \max_{0 < x < 1} n_0 = \left\lceil 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right\rceil$$

олинса, $\forall n > n'_0$ ва $\forall x \in [0, 1]$ учун (14.8) бажарилаверади. Демак, n'_0 натурал сон барча $x (0 \leqslant x \leqslant 1)$ нуқталар учун умумий бўлади.

3. Қўйидаги

$$\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{nx}{1+n^2 x^2} \right\} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

функционал катма-кетликни қарайлик. Унинг лимит функцияси

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2 x^2} = 0$$

бўлади. Бу эса таърифга кўра, қўйидагини билдиради:

$\forall \varepsilon > 0$ сон олингандан ҳам,

$$n_0 = n_0(\varepsilon, x) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon x} \right\rceil (x \neq 0) \quad (14.9)$$

дейилса, барча $n > n_0$ учун

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{1+n^2 x^2} - 0 \right| = \frac{nx}{1+n^2 x^2} < \frac{1}{n x} \leqslant \frac{1}{(n_0 + 1)x} < \varepsilon \quad (14.10)$$

бўлади, $x = 0$ бўлса, равшанки, $\forall n$ учун $f_n(0) = f(0) = 0$.

Бирок, масалан, $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ деб олсак, исталган $n \in N$ сони ва $x = \frac{1}{n}$ нүқта учун

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2} \cdot n^2} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0$$

бўлади.

Демак, барча x ($0 \leq x \leq 1$) нүқталар учун умумий бўлган ва (14.10) тенгизлик бажариладиган n_0 натурал сон топалазайди. (Бу хулесага ююзоридаги n_0 учун (14.9) формулани ўрганиб (кўриниб турабики, у ерда $x \rightarrow 0$ да $n_0 \rightarrow +\infty$) ҳам келиш мумкинэди.)

$M (M \subset R)$ тўпламда бирор $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, у лимит функцияга эга бўлсин. Бу лимит функцияни $f(x)$ ($x \in M$) деб белгилайлик.

14.5-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топилсанки, ихтиёрий $n > n_0$ ва ихтиёрий $x \in M$ нүқталар учун бир йўла

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

тенгизлик бажарилса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M тўпламда $f(x)$ га текис яқинлашади (функционал кетма-кетлик текис яқинлашувчи) деб аталади. Акс ҳолда, (яъни $\forall n \in N$ олинганда ҳам, шундай $\varepsilon_0 > 0$ ва $x_0 \in M$ мавжуд бўлсанки,

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

тенгизлик бажарилса) $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M тўпламда $f(x)$ га текис яқинлашмайди (функционал кетма-кетлик текис яқинлашучи эмас) деб аталади. $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг $f(x)$ га текис яқинлашувчилиги қўйидагича белгиланади:

$$f_n(x) \neq f(x) \quad (x \in M).$$

Юқорида келтирилган мисолларнинг биринчисида $\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{\sin nx}{n} \right\}$ функционал кетма-кетлик лимиг функция $f(x) = 0$ га $[0, 1]$ оралиқда текис яқинлашади:

$$\frac{\sin nx}{n} \neq 0 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Учинчисида эса, яъни $\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{nx}{1 + n^2 x^2} \right\}$ [функционал кетма-кетлик $f(x) = 0$ лимит функцияга яқинлашада

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1 + n^2 x^2} = 0,$$

бу функционал кетма-кетлик учун текис яқинлашиш шарти бажарилмайди.

14.1.-теорема. $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг M тўпламда $f(x)$ га текис яқинлашиши учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. M тўпламда $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик $f(x)$ лимит функцияга текис яқинлашсин. Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олингандан ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, $n > n_0$ бўлганда M тўпламнинг барча x нуқталари учун

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

бўлади. Бундан эса $\forall n > n_0$ учун

$$M_n = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Етарлилиги. M тўпламда $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик $f(x)$ лимит функцияга эга бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

бўлсин. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олингандан ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

бўлади. Агар ушбу

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \quad (x \in M)$$

муносбатни эътиборга олсак, у ҳолда $\forall x \in M$ учун

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Бу эса M тўпламда $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик $f(x)$ лимит функцияга текис яқинлашишини билдиради.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\{f_n(x)\} = \{e^{-(x-n)^2}\}$$

функционал кетма-кетликни $-c < x < c$ ($c > 0$) интервалда қарайлик. Бу функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(x-n)^2} = 0$$

бўлади. Натижада

$$M_n = \sup_{-c < x < c} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{-c < x < c} |e^{-(x-n)^2} - 0| = \sup_{-c < x < c} e^{-(x-n)^2} = e^{-(-c-n)^2}$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(-c-n)^2} = 0$$

бўлишини топамиз.

Демак, берилган функционал кетма-кетлик $(-c, c)$ оралиқда $f(x) = 0$ лимит функцияға текис яқиналашади:

$$e^{-(x-n)^2} \rightarrow 0 \quad (-c < x < c; c > 0).$$

2. Қүйидеги

$$\{f_n(x)\} = \left\{ n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) \right\} \quad (0 < x < \infty)$$

функционал кетма-кетликни қарайлық. Бұл функционал кетма-кетликнинг лимит функциясини топамыз:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} \right)^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (0 < x < +\infty). \end{aligned}$$

Демек, $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Бұл ҳолда $M_n = \sup_{0 < x < \infty} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0 < x < \infty} \left| n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right|$

$$\begin{aligned} &= \sup_{0 < x < \infty} \left| \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right| = \\ &= \sup_{0 < x < \infty} \frac{\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x} \right)} = \sup_{0 < x < \infty} \frac{1}{2n\sqrt{x} \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x} \right)^2} = \end{aligned}$$

$= \infty$ бўлиб берилган, функционал кетма-кетлик учун 14.1- теореманинг шарты ба- жарилмайди.

Маълумки, 1-қисм, 3-боб, 10-§ да сонлар кетма-кетлигининг ли- митга эга бўлиши ҳақида Коши теоремаси келтирилган эди. Шунга ўхшашиб теоремани функционал кетма-кетликларда ҳам айтиш мумкин.

Биз қуидаги функционал кетма-кетлик қандай шартда лимит функцияға эга бўлиши ва унга текис яқинлашишини ифодалайдиган теоре- мани келтирамиз. Аввал фундаментал кетма-кетлик тушунчаси билан танишамиз.

X ($X \subset R$) тўпламда $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (14.2)$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлсин.

14.6-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон мавжуд бўлсаки, $n > n_0$, $m > n_0$ бўлганда $\forall x \in X$ нуқталар учун бир йўла

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (14.11)$$

тengsизлик бажарилса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик X тўпламда фундаментал кетма-кетлик деб аталади.

Масалан, юқорида келтирилган

$$\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{\sin nx}{n} \right\}$$

функционал кетма-кетлик $X = (-\infty, +\infty)$ тўпламда фундаментал кетма-кетлик бўлади,

$$\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{nx}{1+n^2x^2} \right\}$$

кетма-кетлик эса $X = [0, 1]$ тўпламда фундаментал кетма-кетлик бўлмайди.

14.2-теорема. (Коши теоремаси.) $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик X тўпламда лимит функцияга эга бўлиши ва унга текис яқинлашиши учун у X тўпламда фундаментал бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. X тўпламда $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик лимит функцияга эга бўлиб, унга текис яқинлашсин:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (x \in X).$$

Текис яқинлашиш таърифига мувосфиқ $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ га

кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики, $n > n_0$ бўлганда $\forall x \in M$ нуқталар учун

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

шунингдек, $m > n_0$ бўлганда $\forall x \in X$ учун

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади. У ҳолда $n > n_0$, $m > n_0$ ва $\forall x \in X$ учун

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик X тўпламда фундаментал кетма-кетлик эканини билдиради.

Етарлилиги. $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик X тўпламда фундаментал кетма-кетлик бўлсин. X тўпламдан олинган ҳар бир $x_0 (x_0 \in X)$ да $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик $\{f_n(x_0)\}$ сонлар кетма-кетлигига айланади. Равшанки, $\{f_n(x_0)\}$ кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлади. У ҳолда Коши теоремасига асосан (1-қисм, 3-боб, 10-§) $\{f_n(x_0)\}$ яқинлашувчи. Демак, X тўпламнинг ҳар бир $x_0 (x_0 \in X)$ нуқтасида $\{f_n(x_0)\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи. Бу $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг лимит функциясини $f(x)$ дейлик:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in X).$$

Энди (14.11) тенгсизликда $m \rightarrow \infty$ да (бунда n ва x ларни тайынлаб) лимитта ўтиб қойыладыны топамиз:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Бундан эса $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг $f(x)$ лимит функцияга текис яқинлашиши келиб чиқади. Теорема исбот сүлди.

2. Функционал қаторларнинг текис яқинлашувчилиги. $M(M \subset R)$ түплемада бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (14.5)$$

функционал қатор берилган бўлсин. Бу функционал қатор M түплемада яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин. Демак, M түплемада

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)] = S(x)$$

бўлади, бунда $\{S_n(x)\}$ — берилган функционал қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат функционал кетма-кетликдир.

14.7-таъриф. Агар M түплемада $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик қатор йиғиндиси $S(x)$ га текис яқинлашса, у ҳолда бу функционал қатор M түплемада текис яқинлашувчи деб аталади, акс ҳолда, яъни $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M түплемада $S(x)$ га текис яқинлашмаса, (14.5) функционал қатор M түплемада $S(x)$ га текис яқинлашмайди дейилади.

Шундай қилиб, функционал қаторларнинг текис яқинлашувчилиги (яқинлашмовчилиги) тушунчаси ҳам, уларнинг оддий яқинлашувчилиги сингари, функционал кетма-кетликларнинг текис яқинлашувчилиги (яқинлашмовчилиги) орқали киритилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \quad (0 \leq x < +\infty)$$

функционал қаторни қарайлик. Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \\ &= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} \end{aligned}$$

бўлиб, унинг йиғиндиси

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \frac{1}{x+1}.$$

Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - (1+x) \right]$ дейилса, барча $n > n_0$

үчүн

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x+1} \right| = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{x+n_0+2} < \varepsilon \quad (14.12)$$

бўлади. Бундаги n_0 натурал сон $\varepsilon > 0$ га ҳамда x ($0 \leq x \leq +\infty$) нуқталарга боғлиқ. Бироқ n'_0 деб

$$n'_0 = \max_{0 < x < \infty} \left[\frac{1}{\varepsilon} - (1+x) \right] = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right]$$

ни олинса, унда $n > n'_0$ бўлган n ларда юқоридаги (14.12) тенгисиелк бажарилаверди. Демак, берилган функционал қатор учун таърифдаги n'_0 натурал сон барча x ($0 \leq x < \infty$) нуқталари учун умумий бўлади, яъни x га боғлиқ бўлмайди. Демак, берилган функционал қатор текис яқинлашувчи.

2. Қўйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} \quad (0 < x < \infty)$$

функционал қаторни қарайлик. Бу функционал қаторнинг қисмий йигиндиши

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{x}{1 \cdot (x+1)} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \dots + \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{nx+1} \end{aligned}$$

бўлиб, унинг йигиндиши

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{nx+1}\right) = 1 \quad (0 < x < \infty).$$

Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда $n_0 = \left[\frac{1}{x} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right]$ ($x \neq 0$) дейилса, барча $n > n_0$ учун

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| 1 - \frac{1}{nx+1} - 1 \right| = \frac{1}{nx+1} \leq \frac{1}{(n_0+1)x+1} < \varepsilon$$

бўлади. Агар $x = 0$ бўлса, равшанки, $\forall n$ учун $S_n(0) = S(0) = 1$ бўлиб,

$$S_n(0) - S(0) = 0$$

бўлади. Бундаги n_0 натурал сон $\varepsilon > 0$ ва x ($0 < x < \infty$) нуқталарга боғлиқ бўлиб, у барча x ($0 < x < +\infty$) нуқталар учун умумий бўла олмайди (бу ҳолда $n_0 = \left[\frac{1}{x} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right]$ нинг $(0, +\infty)$ да x бўйича максимуми чекли сон эмас).

Бошқача қилиб айтганда исталган n натурал сон олсан ҳам, шундай $\varepsilon_0 > 0$ (масалан, $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$) ва $x = \frac{1}{n} \in (0, +\infty)$ нуқта топиладики,

$$\left| S_n \left(\frac{1}{n} \right) - S \left(\frac{1}{n} \right) \right| = \frac{1}{n \frac{1}{n} + 1} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0$$

бўлади.

14.3-теорема. M ($M \subset R$) түпламда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор берилган бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин. Бу функционал қаторниңг M да текис яқинлашувчи бўлиши учун, унинг қисмий йиғиндилари кетма-кетлиги $\{S_n(x)\}$ нинг M да фундаментал кетма-кетлик бўлиши зарур ва етарли.

Бу теорема функционал кетма-кетликнинг текис яқинлашиши ҳақидаги 14.2-теоремани функционал қаторга нисбатан айтилиши бўлиб, унинг исботи 14.2-теореманинг исботи кабидир.

Функционал қатор

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

нинг текис яқинлашувчи бўлиши ҳақидаги 14.7-таъриф ҳамда функционал кетма-кетликнинг текис яқинлашувчи бўлишининг зарур ва етарли шартини ифодаловчи 14.1-теоремадан фойдаланиб қўйидаги теоремага келамиз.

14.4-теорема. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор M түпламда $S(x)$ га текис яқинлашиши учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

Мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

функционал қатор $(-1, +1)$ да яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

эканини кўрган эдик. Бу функционал қатор учун

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \frac{x^n}{1-x} \right| \quad (x \in (-1, +1))$$

бўлиб,

$$\sup_{-1 < x < 1} |S_n(x) - S(x)| = +\infty$$

6 ўлади. Демак, берилган қатор $(-1, +1)$ оралиқда текис яқинлашувчи эмас.

14.5-теорема. (Вейерштрас саломати.) Агар ушибу

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (14.5)$$

функционал қаторниң ҳар бир ҳади M ($M \subset R$) түпламда қўйидаги

$$|u_n(x)| \leq c_n \quad (n = 1, 2, \dots) (*)$$

тенгсизликни қаноатлантиру ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots \quad (14.13)$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (14.5) функционал қатор M тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Модомики, (14.13) қатор яқинлашувчи экан, 1-қисм, 11-боб, 2-§ да келтирилган теоремага асосан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олингандан ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилади, барча $n > n_0$, $m > n$ учун

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_m < \varepsilon$$

бўлади. (*) тенгсизликдан фойдаланиб, M тўпламнинг барча $x (x \in M)$ нуқталари учун

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_m(x)| < \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Бундан эса 14.8-теоремага кўра берилган функционал қаторнинг M тўпламда текис яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \quad (0 \leq x < +\infty)$$

функционал қаторнинг текис яқинлашувчилиги аниқланган эди. Бу қаторнинг текис яқинлашувчилигини Вейерштрасс аломати ердамида осонгина кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$|u_n(x)| = \left| \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \right| = \frac{1}{|x+n| \cdot |x+n+1|} \leq \frac{1}{n^2}$$

бўлиши ҳамда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

қаторнинг яқинлашувчилигидан берилган функционал қаторнинг $(0, +\infty)$ да текис яқинлашувчилиги келиб чиқади.

2. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5 x^2} \quad (0 \leq x < +\infty)$$

функционал қаторни қарайлик. Бу функционал қаторнинг умумий ҳади

$$u_n(x) = \frac{nx}{1+n^5 x^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

функциядан иборат. Бу функцияни $[0, +\infty)$ оралиқда экстремумга текширамиз $\frac{5}{5}$ $u_n(x)$ функцияниң ҳосиласи ягона $x = n^{-\frac{2}{3}}$ нуқтада нолга айланади ($x = n^{-\frac{2}{3}}$ — стационар нуқта). Бу стационар нуқтада

$$u_n''(n^{-\frac{5}{3}}) < 0$$

бўлади. Демак, $u_n(x)$ функция $x = n^{-\frac{2}{3}} \in [0, +\infty)$ нуқтада максимумга эришади.

Унинг максимум қиймати эса $\frac{1}{2} n^{-\frac{5}{3}}$ га teng. Демак, $0 \leq x < +\infty$ да

$$|u_n(x)| = \left| \frac{nx}{1+n^5 x^2} \right| \leq \frac{1}{2n^{\frac{5}{3}}}$$

бўлади. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ қаторнинг яқинлашувчилигини эътиборга олсак, унда Веїерштрасс алломатига кўра, берилган функционал қаторнинг $[0, +\infty)$ да текис яқинлашувчи эканлигини топамиз.

3-§. Функционал қатор йифиндисининг ҳамда функционал кетма-келий лимит функциясининг узлуксизлиги

1. Функционал қатор йифиндисининг узлуксизлиги, M ($M \subset R$) тўпламда бирор яқинлашувчи

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (14.5)$$

функционал қатор берилган бўлиб, унинг йифиндиси $S(x)$ бўлсин.

14. 6-теорема. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг ҳар бир ҳади $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) M тўпламда узлуксиз бўлиб, бу функционал қатор M да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қаторнинг йифиндиси $S(x)$ ҳам M тўпламда узлуксиз бўлади.

Исбот. $x_0 - M$ тўпламдан олинган ихтиёрий нуқта. Функционал қатор текис яқинлашувчи. Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, M тўпламнинг барча x нуқталари учун бир йўла

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (14.14)$$

жумладан

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (14.15)$$

тengsизлик бажарилади.

Модомики, (14.5) функционал қаторнинг ҳар бир ҳади M тўпламда узлуксиз экан, унда

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

функция ҳам M да, жумладан x_0 нуқтада узлуксиз бўлади. Демак, юқоридаги $\varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{3}$ га кўра шундай $\delta > 0$ топиладики, $|x - x_0| < \delta$ бўлганда

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (14.16)$$

бўлади.

Юқоридаги (14.14), (14.15) ҳамда (14.16) tengsizlikлардан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} |S(x) - S(x_0)| &\leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + \\ &+ |S_n(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Демек, $\forall \varepsilon > 0$ олинганды ҳам, шундай $\delta > 0$ топилади $|x - x_0| < \delta$ бўлганда

$$|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса $S(x)$ функциянинг x_0 ($\forall x_0 \in M$) нуқтада узлуксиз эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Бу теореманинг шартлари бажарилганда ушбу

$$S(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} [\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{x \rightarrow x_0} S_n(x)]$$

муносабат ўринлайди бўлди.

14. 2-эслатма. 14. 6-теоремадаги $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг M да текис яқинлашувчилик шарти функционал қатор йифиндиси $S(x)$ нинг узлуксиз бўлиши учун жуда мухимдир. Бу шарт бажарилмай қолса, теоремадаги тасдиқ, умуман айтганда, тўғри бўлмайди. Бунга қўйидаги қатор мисол бўла олади:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x) &= (1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \dots + \\ &\quad + x^{n-1}(1-x) + \dots \quad (0 \leq x \leq 1) \end{aligned}$$

Функционал қаторнинг ҳар бир $u_n(x) = x^{n-1}(1-x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳади $[0, 1]$ оралиқда узлуксиз. Қатор йифиндиси

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } 0 \leq x < 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

эса $[0, 1]$ оралиқда (аниқрофи, $x = 1$ нуқтада) узлуксиз эмас.

Айни пайтда, қаторнинг текис яқинлашувчилиги етарли шарт бўлиб, зарурӣ ҳам эмас. Яъни баъзан текис яқинлашувчилик шартини бажармаган функционал қаторнинг йифиндиси ҳам узлуксиз бўлиши мумкин. Масалан, ушбу бобнинг 2-§¹ да келтирилган

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} \quad (0 < x < +\infty)$$

функционал қатор $(0, +\infty)$ оралиқда текис яқинлашувчилик шартини бажармасада, бу функционал қаторнинг йифиндиси $S(x) = 1$ $(0, +\infty)$ оралиқда узлуксиздир.

2. Функционал кетма-кетлик лимит функциясининг узлуксизлиги. M ($M \subset R$) тўпламда $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (14.2)$$

функционал кетма-кетлик бўрилган бўлиб, унинг лимит функцияси $f(x)$ бўлсин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

14. 7-теорема. Агар $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳади M тўпламда узлуксиз бўлиб, бу функция

ционал кетма-кетлик M да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $f(x)$ лимит функция ҳам M тўпламда узлуксиз бўлади.

Бу теореманинг шартлари бажарилганда ушбу

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow x} [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{t \rightarrow x} f_n(t)]$$

муносабат ўринли бўлади.

4-§. Функционал қаторларда ҳамда функционал кетма-кетликларда ҳадлаб лимитга ўтиш

1. Функционал қаторларда ҳадлаб лимитга ўтиш. M ($M \subset R$) тўпламда яқинлашувчи

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (14.5)$$

функционал қатор берилган бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин. x_0 нуқта эса M тўпламнинг лимит нуқтаси.

14.8-теорема. Агар $x \rightarrow x_0$ да $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг ҳар бир $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳади чекли

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = c_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (14.17)$$

лимитга ёга бўйлиб, бу қатор M да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots$$

қатор ҳам яқинлашувчи, унинг йиғиндиси C эса $S(x)$ нинг $x \rightarrow x_0$ даги лимити

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = C$$

га тенг бўлади.

Исбот. Шартга кўра (14.5) функционал қатор текис яқинлашувчи. У ҳолда 14.3-теоремага асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$, $m > n$ лар ва M тўпламнинг барча x нуқталари учун

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_m(x)| < \varepsilon \quad (14.18)$$

тенгсизлик бажарилади. (14.17) шартни эътиборга олиб, (14.18) тенгсизликда $x \rightarrow x_0$ да лимитга ўтиб қўйидагини топамиз:

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_m| \leq \varepsilon.$$

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$, $m > n$ лар учун

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_m| \leq \varepsilon$$

тengsizlik бажарилар әкан. Қатор яқинлашувчилигининг зарурий ва етарлы шартини ифодаловчи теоремага мувофиқ (қаралсın, 1-қисм, 11-боб, 3-§)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots$$

қатор яқинлашувчи бўлади. Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C,$$

бунда

$$C_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Энди $x \rightarrow x_0$ да (14.5) функционал қатор йиғиндиси $S(x)$ нинг лимити C га тенг, яъни

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = C$$

бўлишини кўрсатамиз. Шу мақсадда ушбу

$$S(x) - C$$

айрмани олиб, уни қўйидагича ёзамиш:

$$S(x) - C = [S(x) - S_n(x)] + [S_n(x) - C_n] + [C_n - C], \quad (14.19)$$

Бунда

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x).$$

Теореманинг шартига кўра (14.5) функционал қатор текис яқинлашувчи.

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{3}$ га кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ ва M тўпламнинг барча x нуқталари учун

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (14.20)$$

тengsizlik бажарилади.

(14.17) шартдан фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} S_n(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} [u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)] = c_1 + c_2 + \dots + \\ &\quad + c_n = C_n. \end{aligned}$$

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{3}$ га кўра шундай $\delta > 0$ топиладики $|x - x_0| < \delta$ бўлганда

$$|S_n(x) - C_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (14.21)$$

tengsizlik бажарилади.

Юқорида исбот этилганига кўра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C.$$

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{3}$ га кўра, шундай $n'_0 \in N$ топилади, барча $n > n'_0$ учун

$$|C_n - C| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (14.22)$$

бўлади. Шуни ҳам айтиш керакки, агар $\bar{n}_0 = \max\{n_0, n'_0\}$ деб олинса, унда барча $n > \bar{n}_0$ учун (14.22) ва (14.20) тенгсизликлар бир вақтда бажарилади.

Натижада (14.19) муносабатдан, (14.20), (14.21) ва (14.22) тенгсизликларни эътиборга олган ҳолда, қуйидагини топамиш:

$$\begin{aligned} |S(x) - C| &\leq |S(x) - S_{\bar{n}}(x)| + |S_{\bar{n}}(x) - C_{\bar{n}}| + |C_{\bar{n}} - C| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилади, $|x - x_0| < \delta$ учун ($x \in M$)

$$|S(x) - C| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса $\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = C$ эканини билдиради.

Теорема исбот бўлди.

Юқоридаги лимит муносабатни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x)].$$

Бу эса 14.8-теореманинг шартлари бажарилганда чексиз қаторларда ҳам ҳадлаб лимитга ўтиш қоидаси ўрини бўлишини кўрсатади.

2. Функционал кетма-кетликларда ҳадлаб лимитга ўтиш. M ($M \subset R$) тўпламда $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (14.2)$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, унинг лимит функцияси $\hat{f}(x)$ бўлсин. x_0 нуқта эса M тўпламнинг лимит нуқтаси.

14.9-теорема. Агар $x \rightarrow x_0$ да $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳади чекли

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

лимитга эга бўлиб, бу кетма-кетлик M да текис яқинлашиувчи бўлса, у ҳолда $\{a_n\}$:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

кетма-кетлик ҳам яқинлашиувчи, унинг $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ лимити эса $f(x)$ нинг $x \rightarrow x_0$ даги лимитига тенг

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

бўлади.

5-§. Функционал қаторларни ҳамда функционал кетма-кетликларни ҳадлаб интеграллаш

1. Функционал қаторларни ҳадлаб интеграллаш. $[a, b]$ сегментда яқинлашувчи

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (14.5)$$

функционал қатор бәрилган бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

14.10-теорема. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қаторнинг ҳар бир $u_n(x)$ ҳади ($n = 1, 2, \dots$) $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиб, бу қатор шу сегментда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қатор ҳадларининг интегралларидан тузилган

$$\int_a^b [u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \dots + \int_a^b u_n(x) dx + \dots]$$

қатор ҳам яқинлашувчи бўлади, унинг йиғиндиси эса $\int_a^b S(x) dx$ га тенг бўлади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx.$$

Исбот. Берилган функционал қаторнинг ҳар бир $u_n(x)$ ҳади ($n = 1, 2, \dots$) $[a, b]$ да узлуксиз, демак, $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) функциялар $[a, b]$ сегментда интегралланувчи. (14.5) функционал қатор $[a, b]$ сегментда текис яқинлашувчи. Унда 14.6-теоремага кўра, функционал қаторнинг йиғиндиси $S(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз, демак, интегралланувчи бўлади.

Аввало (14.5) функционал қатор ҳадларининг интегралларидан тузилган

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \dots + \int_a^b u_n(x) dx + \dots$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлишини кўрсатамиз.

Шартга кўра (14.5) функционал қатор $[a, b]$ да текис яқинлашувчи. У ҳолда 14.3-теоремага асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олингандан ҳам, $\frac{\varepsilon}{b-a}$ га кўра, шундай $n_0 \in N$ топиладики, $n > n_0$, $m > n$ бўлганда

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_m(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

бўлади. Бу тенгсизликдан фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$\left| \int_a^b u_{n+1}(x) dx + \int_a^b u_{n+2}(x) dx + \dots + \int_a^b u_m(x) dx \right| \leqslant \int_a^b |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_m(x)| dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon$$

$$+ u_{n+2}(x) + \dots + u_m(x) \Big| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon. \quad (14.23)$$

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганды ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилади, $n > n_0$, ва $m > n$ бўлганда (14.23) тенгсизлик ўринли бўлади. 14.3-төремага асосан

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

қатор яқинлашувчи бўлади. Одатдагидек берилган функционал қаторнинг қисмий йиғиндинсини $S_n(x)$ деймиз. Функционал қаторнинг текис яқинлашувчилиги таърифидан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганды ҳам, $\frac{\varepsilon}{b-a}$ га кўра шундай $n_0 \in N$ топилади, барча $n > n_0$ ва $[a, b]$ сегментнинг барча x нуқталари учун

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

бўлади.

Аниқ интеграл хоссасидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \int_a^b S(x) dx &= \int_a^b S_n(x) dx + \int_a^b [S(x) - S_n(x)] dx = \int_a^b u_1(x) dx + \\ &+ \int_a^b u_2(x) dx + \dots + \int_a^b u_n(x) dx + \int_a^b [S(x) - S_n(x)] dx. \end{aligned}$$

Агар

$$\left| \int_a^b [S(x) - S_n(x)] dx \right| \leq \int_a^b |S(x) - S_n(x)| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [S(x) - S_n(x)] dx = 0$$

бўлиб, натижада

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \dots + \int_a^b u_n(x) dx + \dots$$

эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди. Юқоридаги муносабатни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^b u_n(x) dx \right].$$

Бу эса 14.10-теореманинг шартлари бажарилганда чексиз қаторларда ҳам ҳадлаб интеграллаш қондаси ўринли бўлишини кўрсатади.

14.3-эс латма. Келтирилган теоремада функционал қаторнинг текис яқинлашувчилиги шарти етарли бўлиб, у зарурий шарт эмас, яъни баъзан текис яқинлашувчилик шартини бажармаган функционал қаторларни ҳам ҳадлаб интеграллаш мумкин бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

қаторни қарайлык. Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \left(x^{\frac{1}{2k+1}} - x^{\frac{1}{2k-1}} \right) = -x + x^{\frac{1}{2n+1}}$$

бўлиб, йиғиндиси эса

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-x + x^{\frac{1}{2n+1}} \right) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ 1-x, & \text{агар } 0 < x \leq 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади. Бу функционал қатор $[0,1]$ оралиқда текис яқинлашувчилик шартини ба- жармайди. Аммо

$$\int_0^1 S(x) dx = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right) dx \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\int_0^1 S(x) dx = \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right) dx$$

бўлиши топилади.

2. Функционал кетма-кетликларни ҳадлаб интеграллаш. $[a, b]$ сегментда $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (14.2)$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, унинг лимит функцияси $f(x)$ бўлсин.

14.11-теорема. Агар $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳади $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиб, бу функционал кетма-кетлик $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f_1(x) dx, \quad \int_a^b f_2(x) dx, \quad \dots, \quad \int_a^b f_n(x) dx, \quad \dots$$

кетма-кетлик яқинлашувчи бўлади, унинг лимити эса $\int_a^b f(x) dx$ га тенг бўлади, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (14.24)$$

Бу теоремадаги (14.24) лимит муносабатни қүйидагида

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b f_n(x) dx \right] = \int_a^b \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx$$

жам ёзиш мүмкін.

6-§. Функционал қаторларни ҳамда функционал кетма-кетликларни ҳадлаб дифференциаллаш

1. Функционал қаторларни ҳадлаб дифференциаллаш. $[a, b]$ сегментде яқынлашувчи

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (14.5)$$

функционал қатор берилған бўлиб, унинг йигиндиси $S(x)$ бўлсин:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

14.12-төрима. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қаторнинг ҳар бир ҳади $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) $[a, b]$ сегментда узлуксиз $u'_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳосилага эга бўлиб, бу ҳосилалардан тузилган

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots$$

функционал қатор $[a, b]$ да текис яқынлашувчи бўлса, у ҳолда берилған функционал қаторнинг $S(x)$ йигиндиси шу $[a, b]$ да $S'(x)$ ҳосилага эга ва

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \quad (14.25)$$

бўлади.

Исбот. Шартга кўра

$$u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots$$

функционал қатор $[a, b]$ да текис яқынлашувчи. Унинг йигиндисини $\bar{S}(x)$ дейлик: $\bar{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$. Бу $\bar{S}(x)$ 14.6-төримага асосан $[a, b]$ да узлуксиз бўлади.

Функционал қаторни ҳадлаб интеграллаш ҳақидаги 14.10-төримадан фойдаланиб, ушбу

$$\bar{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

қаторни $[a, x]$ оралиқ ($a < x \leq b$) бўйича ҳадлаб интеграллаб қўйидаги ни топамиз:

$$\begin{aligned} \int_a^x \bar{S}(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^x u_n(x) dx \right] = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = S(x) - S(a). \end{aligned} \quad (14.26)$$

Модомики, $\bar{S}(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз экан, 1-қисм, 6-боб, 4-§ да келтирилган теоремага биноан

$$\int_a^x \bar{S}(t) dt$$

функция дифференциалланувчи бўлиб, унинг ҳосиласи

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x \bar{S}(t) dt \right] = \bar{S}(x)$$

бўлади.

Иккинчи томондан (14. 26) тенгликка кўра:

$$\frac{d}{dx} [S(x) - S(a)] = \bar{S}(x),$$

яъни

$$S'(x) = \bar{S}(x)$$

бўлишини топамиз. Бу эса (14.5) функционал қатор йиғиндиси ҳосилага эга ва унинг учун (14.25) тенглик ўринли бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

(14.25) тенгликни қўйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} [u_n(x)].$$

Бу эса 14. 12-теореманинг шартлари бажарилганда ғчексиз 1 қаторларда ҳам ҳадлаб дифференциаллаш қоидаси ўринли бўлишини кўрсатади.

14.4- эслатма. 14. 12-теоремадаги функционал қаторнинг текис яқинлашувчилик шарти ҳам етарли бўлиб, у зазурый шарт эмас.

2. Функционал кетма-кетликларни ҳадлаб дифференциаллаш. $[a, b]$ сегментда яқинлашувчи $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (14.2)$$

функционал кетма-кетлик бўрилган бўлаб, унинг лимит функцияси $f(x)$ бўлсин.

14. 13-теорема. Агар $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) $[a, b]$ сегментда узлуксиз $f'_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳосилага эга бўлиб, бу ҳосилалардан тузилган

$$f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_n(x), \dots$$

функционал кетма-кетликтік $[a, b]$ да текис яқынлашувчи бўлса, у ҳолда $f(x)$ лимит функция шу $[a, b]$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\{f'_n(x)\}$ кетма-кетликтинг лимити $f'(x)$ га тенг бўлади.

7-§. Даражали қаторлар

1. Даражали қаторлар. Абелъ теоремаси. Биз аввалги параграфларда функционал қаторларни ўргандик. Функционал қаторлар орасида, уларнинг хусусий ҳоли бўлган ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (14.27)$$

ёки, умумийроқ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots \quad (14.28)$$

қаторлар (бунда $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, x_0$ — ўзгармас ҳақиқий сонлар) математикада ва унинг татбиқларида муҳим роль ўйнайди. Бу ерда, ушбу бобнинг 1-§ идаги (14.5) ифодада қатнашган $u_n(x)$ сифатида

$$u_n(x) = a_n x^n \text{ (ёки } u_n(x) = a_n (x - x_0)^n\text{),}$$

яъни x (ёки $x - x_0$) ўзгарувчининг даражалари қараляпти. Шу сабабли (14.27) ва (14.28) қаторлар *даражали қаторлар* деб аталади.

Агар (14.28) қаторда $x - x_0 = t$ деб олинса, у ҳолда бу қатор t ўзгарувчига нисбатан (14.27) қатор кўринишига келади. Демак, (14.27) қаторларни ўрганиш кифоядир.

(14.27) ифодадаги $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ ҳақиқий сонлар (14.27) даражали қаторнинг *коэффициентлари* деб аталади.

Даражали қаторни тузилишидан, даражали қаторлар бир-бираидан фақат коэффициентлари билангина фарқ қилишини кўрамиз. Демак, даражали қатор берилган деганда унинг коэффициентлари берилган деганини тушунамиз.

Мисоллар. Ушбу

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (0!=1)$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

қаторлар даражали қаторлардир.

Шундай қилиб, даражали қаторларнинг ҳар бир ҳади $(-\infty, +\infty)$ да берилган функциядир. Бинобарин, даражали қаторни, формал нуқтаи назардан, $(-\infty, +\infty)$ да қараш мумкин. Аммо, табиийки, уларни ихтиёрий нуқтада яқинлашувчи бўлади дея олмаймиз.

Албатта, ихтиёрий даражали қатор $x = 0$ нүктада яқинлашувчи бўлади. Бу равшан. Демак, даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси албатта $x = 0$ нүктани ўз ичига олади.

Даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси (тўплами) структурасини аниқлашда қўйидаги Абелъ теоремасига асосланилади.

14.14-теорема (Абелъ теоремаси). Агар

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (14.27)$$

даражали қатор x нинг $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$) қийматида яқинлашувчи бўлса, x нинг

$$|x| < |x_0| \quad (14.29)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида (14.27) даражали қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Шартга кўра

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + \dots$$

қатор (сонли қатор) яқинлашувчи. У ҳолда қатор яқинлашувчилигининг зарурый шартига асосан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$$

бўлади. Демак, $\{a_n x_0^n\}$ кетма-кетлик чегаралангандан бўлади, яъни шундай ўзгармас M сони мавжудки, $\forall n \in N$ учун

$$|a_n x_0^n| \leq M$$

тенгсизлик бажарилади. Бу тенгсизликни эътиборга олиб қўйидагини топамиз:

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

Энди ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots \quad (14.30)$$

қатор билан бирга қўйидаги

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots \quad (14.31)$$

қаторни қарайлик. Бунда, биринчидан (14.31) қатор яқинлашувчи (чунки бу қатор геометрик қатор бўлиб, унинг маҳражи (14.29) га кўра 1 дан кичик: $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$), иккинчидан (14.30) қаторнинг ҳар бир ҳади (14.31) қаторнинг мос ҳадидан катта эмас. У ҳолда 1-қисм 11-боб, 3-§ да келтирилган теоремага кўра (14.30) қатор яқинлашувчи бўла-

ди. Демак, берилган (14.27) даражали қатор абсолют яқинлашувчи. Теорема исбот бўлди.

14.1-натижада. Агар

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (14.27)$$

даражали қатор x нинг $x = x_0$ қийматида узоқлашувчи бўлса, x нинг $|x| > |x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида узоқлашувчи бўлади.

Исбот. Берилган (14.27) даражали қатор x_0 нуқтада узоқлашувчи бўлсин. Унда бу қатор x нинг $|x| > |x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида ҳам узоқлашувчи бўлади, чунки (14.27) қатор x нинг $|x| > |x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи бирор $x = x_1$ қийматида яқинлашувчи бўладиган бўлса, унда Абелъ теоремасига кўра бу қатор $x = x_0$ ($|x_0| < |x_1|$) нуқтада ҳам яқинлашувчи бўлиб қолади. Бу эса (14.27) қаторнинг $x = x_0$ да узоқлашувчи дейилишига зиддир. Натижада исбот бўлди.

2. Даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ва яқинлашиш интервали. Энди даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси структурасини аниқлайлик.

14.15-теорема. Агар

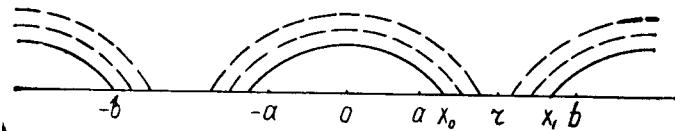
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (14.27)$$

даражали қатор x нинг баъзи ($x \neq 0$) қийматларида яқинлашувчи, баъзи қийматларида узоқлашувчи бўлса, у ҳолда шундай ягона $r > 0$ ҳақиқий сон топиладики (14.27) даражали қатор x нинг $|x| < r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида абсолют яқинлашувчи, $|x| > r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида эса узоқлашувчи бўлади.

Исбот. Берилган (14.27) даражали қатор $x = x_0 \neq 0$ да яқинлашувчи, $x = x_1$ да эса узоқлашувчи бўлсин. Равшанки, $|x_0| < |x_1|$ бўлади. Унда 14.14-теорема ҳамда 14.1-натижага мувофиқ (14.27) даражали қатор x нинг $|x| < |x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида абсолют яқинлашувчи, x нинг $|x| > |x_1|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида эса узоқлашувчи бўлади. Жумладан (14.27) даражали қатор a ($a < |x_0|$) нуқтада яқинлашувчи, b ($b > |x_1|$) нуқтада эса узоқлашувчи бўлади (15-чизма). Демак, (14.27) қатор $[a, b]$ сегментнинг чап чеккасида яқинлашувчи, ўнг чеккасида эса узоқлашувчи.

$[a, b]$ сегментнинг ўртаси $\frac{a+b}{2}$ нуқтани олиб, бу нуқтада (14.27)

қаторни яқинлашувчи. Агар (14.27) қатор $\frac{a+b}{2}$ нуқтада яқинлашувчи бўлса, унда $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ сегментни, $\frac{a+b}{2}$ нуқтада узоқлашувчи бўлса, $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ сегментни олиб, уни $[a, b_1]$ орқали белгилайлик. Демак, (14.27) қатор a_1 нуқтада яқинлашувчи, b_1 нуқтада эса узоқлашувчи



15- чизма

бўлиб, $[a_1, b_1]$ сегментнинг узунлиги $b_1 - a_1 = \frac{b - a}{2}$ га тенгдир. Сўнг $[a_1, b_1]$ сегментнинг ўртаси $\frac{a_1 + b_1}{2}$ нуқтани олиб, бу нуқтада (14.27) қаторни қараймиз. Агар у $\frac{a_1 + b_1}{2}$ нуқтада яқинлашувчи бўлса, унда $\left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1 \right]$ сегментни, узоқлашувчи бўлса, $\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2} \right]$ сегментни олиб, уни $[a_2, b_2]$ орқали [бэлгилаймиз. Демак, (14.27) қатор a_2 нуқтада яқинлашувчи, b_2 нуқтада эса узоқлашувчи бўлиб, $[a_2, b_2]$ сегментнинг узунлиги $b_2 - a_2 = \frac{b - a}{2^2}$ га тенгдир. Шу жараённи давом эттираверамиз. Натижада ичма-ич жойлашган

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

сегментлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. Бу сегментларнинг ҳар бирининг чап чеккасида (a_n -нуқталарда) (14.47) қатор яқинлашувчи, ўнг чеккасида эса (b_n -нуқталарда) узоқлашувчи, $n \rightarrow \infty$ да бу сегментлар узунлиги нолга интила боради ($b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \rightarrow 0$).

Унда ичма-ич жойлашган сегментлар принципига кўра (қаралсин, 1-қисм, 3-боб, 8-§) шундай ягона r сони топиладики,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r$$

бўлиб, сув r нуқта барча сегментларга тегишли бўлади.

Энди x ўзгарувчининг $|x| < r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий қийматини қарайлик. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$ бўлгани сабабли, шундай натурал n_0 сони топиладики, $|x| < a_{n_0} < r$ бўлади. a_{n_0} нуқтада (14.27) қатор яқинлашувчи. Демак, 14.14-теоремага кўра x нуқтада ҳам (14.27) даражали қатор яқинлашувчи бўлади.

x ўзгарувчининг $|x| > r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий қийматини қарайлик. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r$ бўлганилиги сабабли, шундай натурал n_1 сони топиладики, $|x| > b_{n_1} > r$ бўлади. b_{n_1} нуқтада (14.27) қатор узоқлашувчи. Унда 14.1-натижага кўра x да (14.27) қатор узоқлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, шундай r сони топиладики (14.27) даражали қатор x нинг $|x| < r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида абсолют яқинлашувчи, $|x| > r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида эса узоқлашувчи бўлади. Теорема исботланди.

14.8-таъриф. Юқоридаги 14.15-теоремада топилган r сони (14.27) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси, $(-r, r)$ интервал эса (14.27) даражали қаторнинг яқинлашиш интервали деб аталади.

14.5-эслатма. 14.15-теорема x нинг $x = \pm r$ қийматларида (14.27) даражали қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши тўғрисида хулоса чиқариб бермайди. Бу $x = \pm r$ нуқталарда (14.27) даражали қатор яқинлашувчи ҳам бўлиши мумкин, узоқлашувчи ҳам бўлиши мумкин.

Энди мисоллар қараймиз.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

даражали қатор (геометрик қатор) нигатив яқинлашиш радиуси $r = 1$, яқинлашиш интервали $(-1, +1)$ бўлади. Бу қатор интервалнинг чекка нуқталари $r = \pm 1$ да узоқлашувчи.

2. Куйидаги

$$1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$$

қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = 1$, яқинлашиш интервали $(-1, 1)$ бўлади. Берилган даражали қатор $r = \pm 1$ да яқинлашувчи. Демак, даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси (тўплами) $[-1, 1]$ сегментдан иборат.

3. Ушбу

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = 1$, яқинлашиш интервали эса $(-1, 1)$ бўлади. Берилган қатор $r = 1$ да яқинлашувчи, $r = -1$ да эса узоқлашувчикидир. Демак, қаторнинг яқинлашиш соҳаси $(-1, 1]$ ярим интервалдан иборат.

14.6-эслатма. Юқоридаги теорема баъзи $x_0 \neq 0$ нуқталарда яқинлашувчи, баъзи $x_1 \neq 0$ нуқталарда узоқлашувчи бўлган даражали қаторлар ҳақидадир. Аммо шундай даражали қаторлар ҳам борки, улар

фақат $x = 0$ нуқтадагина яқинлашувчи бўлади. Масалан, $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$

қатор исталган $x_0 \neq 0$ нуқтада узоқлашувчикидир. Ҳақиқатан ҳам, Даламбер алломатига кўра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x_0^{n+1}}{n! x_0^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) x_0 = \infty$$

бўлади. Демак, $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ қатор исталган $x \neq 0$ да узоқлашувчи. Бундай даражали қаторларнинг яқинлашиш радиусини $r = 0$ деб оламиз.

Айни вақтда шундай даражали қаторлар ҳам борки, улар ихтиёрий

$x \in (-\infty, \infty)$ да яқинлашувчи бўлади. Масалан, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ни олайлик.

Бу қатор исталган x_0 нүктада яқинлашувчидир. Ҳақиқатан ҳам, яна Далямбер аломатига күра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{n!}{x_0^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_0}{n+1} = 0$$

бүләди. Демак, бу қатор исталган $x \in (-\infty, +\infty)$ да яқинлашувчи. Бундай даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуси $r = +\infty$ деб олинади.

3. Коши—Адамар теоремаси. Юқорида күрдикки, даражали қаторларнинг яқинлашиш соҳаси содда структурага эга бўлар экан: ёки интервал, ёки ярим интервал, ёки сегмент. Ҳамма ҳолларда ҳам бу соҳа яқинлашиш радиуси r орқали ифодаланади.

Маълумки, ҳар қандай даражали қатор

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (14.27)$$

ўзининг коэффициентлари кетма-кетлиги $\{a_n\}$ билан аниқланади. Бинобарин, унинг яқинлашиш радиуси ҳам шу коэффициентлар кетма-кетлиги орқали қандайдир топилиши керак. Берилган (14.27) даражали қатор коэффициентлари ёрдамида $\sqrt[n]{|a_n|}$:

$$|a_0|, |a_1|, \sqrt{|a_2|}, \dots, \sqrt[n]{|a_n|}, \dots \quad (14.32)$$

сонлар кетма-кетлигини тузамиз. Маълумки, ҳар қандай сонлар кетма-кетлигининг юқори лимити мавжуд (қаралсин, 1-қисм, 3-боъ, 11-§). Демак, (14.32) кетма-кетлик ҳам юқори лимитга эга. Уни b билан белгилайлик:

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (0 \leq b \leq +\infty)$$

14.16-теорема (Коши—Адамар теоремаси). *Берилган $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси*

$$r = \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (14.33)$$

бўләди.

14.6-эслатма. Юқоридаги (14.33) формулада $b = 0$ бўлганда $r = +\infty$, $b = +\infty$ бўлганда эса $r = 0$ деб олинади.

Исбот. (14.33) формуланинг тўғрилигини кўрсатишда қўйидаги

1) $b = +\infty$ ($r = 0$),

2) $b = 0$ ($r = +\infty$),

3) $0 < b < +\infty$ ($r = \frac{1}{b}$)

ҳолларни алоҳида-алоҳида қараймиз.

1) $b = \infty$ бўлсин. Бу ҳолда $\sqrt[n]{|a_n|}$ кетма-кетлик чегараланмагандир. Ихтиёрий x_0 ($x_0 \neq 0$) нүктани олиб, бу нүктада (14.27)

даражали қаторнинг узоқлашувчи эканини кўрсатамиз. Тескарисини фараз қиласайлик, яъни шу x_0 нуқтада (14.27) даражали қатор яқинлашувчи бўлсин. Демак, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ қатор (сонли қатор) яқинлашувчи. Унда қатор яқинлашувчилигининг зарурий шартига асосан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$$

бўлади. Демак, $\{a_n x_0^n\}$ кетма-кетлик чегараланган, яъни шундай ўзгармас M сони мавжудки (уни 1 дан катта қилиб олиш мумкин), $\forall n \in N$ учун

$$|a_n x_0^n| \leq M \quad (M > 1)$$

тенгсизлик бажарилади. Бу тенгсизликдан

$$\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x_0| \leq \sqrt[n]{M} < M,$$

яъни

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{M}{|x_0|} \quad /$$

бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб $\sqrt[n]{|a_n|}$ кетма-кетлик чегараланган бўлиб қолди. Натижада зиддиятлик юзага келди. Зиддиятликнинг келиб чиқишига сабаб x_0 ($x_0 \neq 0$) нуқтада (14.27) қаторнинг яқинлашувчи бўлсин деб олинишидир. Демак, (14.27) даражали қатор ихтиёрий x_0 ($x_0 \neq 0$) нуқтада узоқлашувчи.

2) $b = 0$ бўлсин. Бу ҳолда ихтиёрий x_0 ($x_0 \neq 0$) нуқтада (14.27) даражали қаторнинг яқинлашувчи бўлишини кўрсатамиз. Модомики, $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ кетма-кетликнинг юқори лимити нолга тенг экан, бундан унинг лимити ҳам мавжуд ва нолга тенглиги келиб чиқади. Таърифга асосан $\forall \epsilon > 0$ сон олинганда ҳам, жумладан $\epsilon = \frac{1}{2|x_0|}$ га кўра шундай $n_0 \in N$ топилади, барча $n > n_0$ учун

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x_0|}$$

бўлади. Кейинги тенгсизликдан эса

$$|a_n x_0^n| < \frac{1}{2^n}$$

бўлиши келиб чиқади.

Равшанки

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

қатор яқинлашувчи. Таққослаш теоремасига кўра (қаралсин, 1- қисм, 11-боб, 3-§)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$$

қатор ҳам яқинлашувчи бўлади. Демак,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

қатор абсолют яқинлашувчи.

3) $0 < b < +\infty$ бўлсин. Бу ҳолда (14.27) даражали қатор ихтиёрий $x_0 \left(|x_0| < \frac{1}{b} \right)$ нуқтада яқинлашувчи, ихтиёрий $x_1 \left(|x_1| > \frac{1}{b} \right)$ нуқтада узоқлашувчи бўлишини кўрсатамиз.

$|x_0| < \frac{1}{b}$ бўлсин. У ҳолда шундай $\delta > 0$ сонни топиш мумкинки, $|x_0| = \frac{1}{b+\delta}$ бўлади. Энди $\delta_1 (0 < \delta_1 < \delta)$ сонни олайлик. Бу $\delta_1 > 0$ сонга кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун (юқори лимитнинг хоссасига кўра, 1- қисм, 3-боб, 11-§) $\sqrt[n]{|a_n|} < b + \delta_1$, яъни $|a_n| < (b + \delta_1)^n$ бўлади. Демак, барча $n > n_0$ учун

$$|a_n x_0^n| = |a_n| \cdot |x_0^n| < (b + \delta_1)^n \frac{1}{(b + \delta)^n} = \left(\frac{b + \delta_1}{b + \delta} \right)^n \quad (14.34)$$

бўлиши келиб чиқади, бунда

$$\frac{b + \delta_1}{b + \delta} = \frac{(b + \delta) - (\delta - \delta_1)}{b + \delta} = 1 - \frac{\delta - \delta_1}{b + \delta} < 1.$$

Энди ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n| = |a_0| + |a_1 x_0| + |a_2 x_0^2| + \dots + |a_n x_0^n| + \dots \quad (14.30)$$

қатор билан қўйидаги

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b + \delta_1}{b + \delta} \right)^n = 1 + \frac{b + \delta_1}{b + \delta} + \dots + \left(\frac{b + \delta_1}{b + \delta} \right)^n + \dots \quad (14.35)$$

қаторни солиштирайлик. Бунда, биринчидан, (14.35) қатор яқинлашувчи (чунки бу қатор геометрик қатор бўлиб, унинг маҳражи $0 < \frac{b + \delta_1}{b + \delta} < 1$), иккинчидан, n нинг бирор қийматидан бошлаб ($n > n_0$) (14.34) муноса-батга кўра (14.30) қаторнинг ҳар бир ҳади (14.35) қаторнинг мос ҳа-дидан катта эмас. Ўнда қаторлар назариясида келтирилган таққослаш теоремасига (1- қисм, 11-боб, 3-§) кўра (14.30) қатор яқинлашувчи бў-лади.

$|x_1| > \frac{1}{b}$ бўлсин. Унда шундай $\delta' > 0$ сонни топиш мумкинки,

$$|x_1| = \frac{1}{b - \delta'}$$

бўлади. Энди δ'_1 ($0 < \delta'_1 < \delta'$) сонни олайлик. Юқори лимитнинг хосса-сига асосан (1-қисм, 3-боб, 2-§) $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ кетма-кетликнинг ушбу

$$\sqrt[n]{|a_n|} > b - \delta'_1, \text{ яъни } |a_n| > (b - \delta'_1)^n$$

тенгизликини қаноатлантирадиган ҳадларининг сони чексиз кўп бўлади. Демак, бу ҳолда

$$|a_n x_1^n| = |a_n| \cdot |x_1^n| > (b - \delta'_1)^n \frac{1}{(b - \delta')^n} = \left(\frac{b - \delta'_1}{b - \delta'}\right)^n \quad (14.36)$$

бўлиб, бунда

$$\frac{b - \delta'_1}{b - \delta'} = \frac{(b - \delta') + (\delta' - \delta'_1)}{b - \delta'} = 1 + \frac{\delta' - \delta'_1}{b - \delta'} > 1$$

бўлади.

Юқоридаги (14.36) муносабатдан $n \rightarrow \infty$ да $\{a_n x_1^n\}$ кетма-кетликнинг лимити нолга тенг эмаслигини топамиз. Демак,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$$

қатор узоқлашувчи (қатор яқинлашувчилигининг зарурий шарти бажарилмайди).

Шундай қилиб ҳар бир x_0 ($|x_0| < \frac{1}{b}$) нуқтада (14.27) даражали қатор яқинлашувчи, ҳар бир x_1 ($|x_1| > \frac{1}{b}$) нуқтада эса шу даражали қатор узоқлашувчи бўлар экан.

Даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси таърифини эътиборга олиб, $\frac{1}{b}$ берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси эканини топамиз. Теорема исбот бўлди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^{\sqrt{2}}} + \dots + \frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}} + \dots$$

даражали қаторни қарайлик. Бу даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини (14.33) формуласа кўра топамиз:

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = 1.$$

Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = 1$, яқинлашиш интервали эса $(-1, +1)$ дан иборат. Бу даражали қатор яқинлашиш интервали. нинг чеккаларида мос равишда қўйндаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\sqrt{n}}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$

сонли қаторларга айланиб, уларни Лейбниц теоремаси ҳамда Раабе аломатидан фойдаланиб яқинлашувчи эквиваленттеги исботлаш қийин эмас.

Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси $[-1, +1]$ сегментдан иборат.

Кўпинча практикада даражали қаторларнинг яқинлашиш соҳаларини топишда сонли қаторлар назариясида келтирилган алломатлардан фойдаланилади. Бунда ўзгаришчи x ни параметр сифатида қаралади.

2. Ушбу

$$1 + \frac{x}{2 \cdot 5} + \frac{x^2}{3 \cdot 5^2} + \dots + \frac{x^n}{(n+1) \cdot 5^n} + \dots$$

даражали қаторни қарайлик. Бу қаторга Даламбер алломати (1-қисм 11-боб, 4-§)ни қўллаб қўйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+2) 5^{n+1}} : \frac{x^n}{(n+1) 5^n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) 5^n x^{n+1}}{(n+2) 5^{n+1} x^n} \right| = \\ &= \frac{|x|}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{|x|}{5}. \end{aligned}$$

Демак, $\frac{|x|}{5} < 1$, яъни $|x| < 5$ бўлганда қатор яқинлашувчи, $\frac{|x|}{5} > 1$, яъни $|x| > 5$ бўлганда қатор узоқлашувчи.

Шундай қилиб, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = 5$, яқинлашиш интервали эса $(-5, 5)$ бўлади.

Яқинлашиш интервали $(-5, 5)$ нинг чеккаларида даражали қатор мос равишда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

сонли қаторларга айланиб, бу қаторларнинг биринчиси яқинлашувчи, иккинчиси эса узоқлашувчидир. Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси $[-5, 5]$ ярим интервалдан иборат экан.

8- §. Даражали қаторларнинг хоссалари

Бирор

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots \quad (14.27)$$

даражали қатор берилган бўлсин.

14.17-теорема. Агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси r ($r > 0$) бўлса, у ҳолда бу қатор $[-c, c]$ ($0 < c < r$) сегментда текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Шартга кўра r — (14.27) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси. Демак, берилган қатор $(-r, r)$ интервалда яқинлашувчи. Жумладан, $c < r$ бўлганлигидан, (14.27) даражали қатор c нуқтада ҳам яқинлашувчи (абсолют яқинлашувчи) бўлади. Демак,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| c^n = |a_0| + |a_1| c + |a_2| c^2 + \dots + |a_n| c^n + \dots \quad (14.37)$$

қатор яқинлашувчи.

$\forall x \in [-c, c]$ учун ҳар доим $|a_n x^n| \leq |a_n| c^n$ бўлади. Натижада, ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots$$

қаторнинг ҳар бир ҳади (14.37) қаторнинг мос ҳадидан катта эмаслигини топамиз. У ҳолда Вейерштрасс аломатига кўра $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор $[-c, c]$ сегментда текис яқинлашувчи бўлади. Теорема исбот бўлди.

14.7- эслатма. Бу хоссадаги $c (c > 0)$ сонни (14.27) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси r га ҳар қанча яқин қилиб олиш мумкин. Аммо, умуман айтганда, (14.27) даражали қатор $(-r, r)$ да текис яқинлашувчи бўлавермайди.

Масалан, ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

даражали қатор $(-1, +1)$ оралиқда яқинлашувчи ($r = 1$), аммо у $(-1, +1)$ да текис яқинлашувчи эмас (134-бетга қаралсин).

14.18-теорема. Агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r > 0$ бўлса, у ҳолда бу қаторнинг $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ийфиндиси $(-r, r)$ оралиқда узлуксиз функция бўлади.

Исбот. (14.27) даражали қаторнинг яқинлашиш интервали $(-r, r)$ дан ихтиёрий $x_0 (x_0 \in (-r, r))$ нуқтани оламиз. Равшанки, $|x_0| < r$ бўлади. Ушбу $|x_0| < c < r$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи c сонини олайлик. (14.27) даражали қатор юқорида келтирилган 14.17-теоремага кўра $[-c, c]$ да текис яқинлашувчи бўлади. Унда ушбу бобнинг З-§идаги 14.6-теоремага асосан, берилган (14.27) даражали қаторнинг ийфиндиси $S(x)$ функция $[-c, c]$ да, ва демак, x_0 нуқтада узлуксиз бўлади. Демак, (14.27) қаторнинг ийфиндиси $S(x)$ функция $(-r, r)$ интервалда узлуксизdir. Теорема исбот бўлди.

14.19-теорема (Абелъ теоремаси). Агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r > 0$ бўлиб, бу қатор $x = r$ ($x = -r$) нуқтада яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (14.27) қаторнинг ийфиндиси $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ функция, шу $x = r$ ($x = -r$) нуқтада чапдан (ўнгдан) узлуксиз бўлади.

Исбот. Берилган (14.27) даражали қатор

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$x = r$ нүктада яқинлашувчи бўлсин. Демак, ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n + \dots \quad (14.38)$$

сонли қатор яқинлашувчи. Унинг йиғиндисини $S(r)$ билан белгилайлик: $S(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$. Биз $\lim_{x \rightarrow r-0} S(x) = S(r)$, яъни $\lim_{x \rightarrow r-0} [S(x) - S(r)] = 0$ бўлишини исботлашимиз керак.

Агар $x = tr$ ($0 < t < 1$) деб олинса, унда $t \rightarrow 1 - 0$ бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow r-0} [S(x) - S(r)] = \lim_{t \rightarrow 1-0} [S(tr) - S(r)] = \lim_{t \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n t^n - a_n r^n) \text{ бўлади.}$$

Шартга кўра (14.38) қатор яқинлашувчи. У ҳолда 1-қисм, 11-боб, 4-§ да келтирилган теоремага асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олингандан ҳам, $\frac{\varepsilon}{3}$ га кўра шуғдай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ ва $p = 1, 2, 3, \dots$ да

$$|a_{n+1} r^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} + \dots + a_{n+p} r^{n+p}| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (14.39)$$

бўлади. Бу тенгсизликда $p \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб қўйидагини топамиз:

$$|a_{n+1} r^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} + \dots| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Энди қўйидаги

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n t^n = a_0 + a_1 r t + a_2 r^2 t^2 + \dots + a_n r^n t^n + \dots \quad (0 < t < 1) \quad (14.40)$$

қаторни қараймиз. Бу қатор $\forall t \in (0, 1)$ да яқинлашувчи бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} a_{n+1} r^{n+1} t^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} t^{n+2} + \dots + a_{n+p} r^{n+p} t^{n+p} &= \\ &= [a_{n+1} r^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} + \dots + a_{n+p} r^{n+p}] t^{n+p} - \\ &- \sum_{i=1}^{p-1} [(a_{n+1} r^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} + \dots + a_{n+i} r^{n+i}) (t^{n+1+i} - t^{n+i})] \end{aligned}$$

бўлишини ва юқоридаги (14.39) тенгсизликни эътиборга олиб қўйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} |a_{n+1} r^{n+1} t^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} t^{n+2} + \dots + a_{n+p} r^{n+p} t^{n+p}| &< \\ &< \frac{\varepsilon}{3} t^{n+p} + \frac{\varepsilon}{3} [\sum_{i=1}^{p-1} (t^{n+i} - t^{n+i+1})] = \frac{\varepsilon}{3} t^{n+1} < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Бу эса (14.40) қаторнинг яқинлашувчилигиги, яъни $\forall \varepsilon > 0$ олингандан ҳам, шундай $n'_0 \in N$ топиладики, барча $n > n'_0$ ва $p = 1, 2, \dots$ лар учун

$$|a_{n+1} r^{n+1} t^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} t^{n+2} + \dots + a_{n+p} r^{n+p} t^{n+p}| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (14.41)$$

бўлишини кўрсатади. Бу тенгсизликда $p \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб, қўйидагини топамиз:

$$|a_{n+1}r^{n+1}t^{n+1} + a_{n+2}r^{n+2}t^{n+2} + \dots| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (14.42)$$

Агар $\bar{n}_0 = \max\{n_0, n'_0\}$ деб олинса, унда $n > \bar{n}_0$ бўлганда (14.41) ва (14.42) тенгсизликлар бир йўла бажарилади.

Барча $n > \bar{n}_0$ учун

$$\begin{aligned} |S(tr) - S(r)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n t^n - a_n r^n) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k r^k (t^k - 1) \right| + \\ &+ |a_{n+1}r^{n+1}t^{n+1} + a_{n+2}r^{n+2}t^{n+2} + \dots| + |a_{n+1}r^{n+1} + a_{n+2}r^{n+2} + \dots| \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k r^k (t^k - 1) \right| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

бўлади.

Равшанки, $t \rightarrow 1 - 0$ да $t^k - 1 \rightarrow 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Шу сабабли

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k r^k (t^k - 1) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

деб олиш мумкин.

Натижада

$$|S(tr) - S(r)| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{t \rightarrow 1 - 0} S(tr) = S(r), \text{ яъни } \lim_{x \rightarrow r - 0} S(x) = S(r)$$

бўлишини билдиради. Демак, (14.27) даражали қаторнинг йифиндиси $S(x)$ функция $x = r$ да чапдан узлуксиз.

Худди шунга ўхшаш (14.27) даражали қатор $x = -r$ да яқинлашувчи бўлса, қаторнинг йифиндиси $-r$ нуқтада ўнгдан узлуксиз бўлиши кўрсатилади. Теорема исбот бўлди.

14.20-теорема. Агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиши радиуси r ($r > 0$) бўлса, бу қаторни $[a, b]$ ($[a, b] \subset (-r, r)$) оралиқда ҳадлаб интеграллаш мумкин.

Исбот. Шундай c ($0 < c < r$) топа оламизки, $[a, b] \subset [-c, c] \subset (-r, r)$ бўлади. Берилган даражали қатор $[-c, c]$ да текис яқинлашувчи бўлади. Демак, $[a, b]$ да (14.27) даражали қатор текис яқинлашувчи. Унда (14.27) қаторнинг йифиндиси

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

узлуксиз бўлиб, ушбу бобнинг 5-§ да келтирилган теоремага кўра бу қаторни ҳадлаб интеграллаш мумкин.

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Теорема исбот бўлди.

Хусусан, $a = 0$, $b = x$ ($|x| < r$) бўлганда

$$\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \cdots$$

бўлади. Бу қаторнинг яқинлашиш радиуси ҳам r га тенг. Ҳақиқатан ҳам, Коши—Адамар теоремасидан фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{a_n}{n+1} \right|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r. \end{aligned}$$

14. 21-теорема. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиши радиуси r бўлса, $(-r, r)$ да бу қаторни ҳадлаб дифференциаллаши мумкин.

Исбот. Аввало берилган (14. 27) даражали қатор ҳадларининг ҳосилаларида тузилган ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots \quad (14.43)$$

қаторниң $|x_0| < r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқтада яқинлашувчи бўлишини кўрсатамиз. Қўйидаги $|x_0| < c < r$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи c сонни олайлик. Унда $\frac{1}{c} |x_0| = q < 1$ бўлиб,

$$|n a_n x_0^{n-1}| = n q^{n-1} \cdot \frac{1}{c} |a_n c^n|$$

бўлади. Равшанки, $\sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1}$ ($q < 1$)

қатор яқинлашувчи (уни Даламбер аломатига кўра кўрсатиш қийин эмас). Унда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n q^{n-1} = 0$$

бўлади. Демак, n нинг бирор n_0 қийматидан бошлаб, ($n > n_0$ учун) $n q^{n-1} < c$ бўлиб, натижада $\forall n > n_0$ учун ушбу

$$|n a_n x_0^{n-1}| \leq |a_n c^n| \quad (14.44)$$

тенгсизликка келамиз.

$c \in (-r, r)$ бўлганлиги сабабли $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ қатор абсолют яқинлашувчи.

Унда (14. 44) муносабатни ҳисобга олиб, Вейерштрасс аломатидан фой-

даланиб, $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ қаторынг $(-r, r)$ да яқинлашувчи бўлишини топамиз. Демак, бу қатор $[-c, c]$ да текис яқинлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, берилган (14. 27) даражали қатор ҳадларининг ҳосилаларидан тузилган (14. 43) қатор текис яқинлашувчи. У ҳолда ушбу бобнинг 6- § да келтирилган 14. 12- теоремага кўра

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

бўлади.

Шуни ҳам айтиш керакки, (14. 27) ва (14. 43) қаторларнинг яқинлашиш радиуслари бир хил бўлади. Ҳақиқатан ҳам, Коши — Адамар төримасидан фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n |a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n |a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Бу хоссадан қўйидаги натижа келиб чиқади.

14. 2- натижа. Агар (14. 27) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси r бўлса, бу қаторни $(-r, r)$ да исталган марта дифференциаллаш мумкин. Шундай қилиб, яқинлашиш радиуси $r > 0$ бўлган $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторни ҳадлаб интеграллаш ва ҳадлаб (исталган марта) дифференциаллаш мумкин ва ҳосил бўлган даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуси ҳам r га teng бўлади.

14. 9- таъриф. Агар $f(x)$ функция $(-r, r)$ да яқинлашувчи даражали қаторнинг йиғиндиси бўлса, $f(x)$ функция $(-r, r)$ да аналитик деб аталади.

14.22- теорема. Иккита

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (14. 27)$$

ва

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots \quad (14. 45)$$

даражали қаторлар берилган бўлиб, (14. 27) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r_1 > 0$, йиғиндиси эса $S_1(x)$, (14. 45) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r_2 > 0$, йиғиндиси $S_2(x)$ бўлсин.

Агар $\forall x \in (-r, r)$ ($r = \min(r_1, r_2)$) да

$$S_1(x) = S_2(x) \quad (14. 46)$$

бўлса, у ҳолда $\forall n \in N$ учун

$$a_n = b_n,$$

яъни (14. 27) ва (14. 45) даражали қаторлар бир хил бўлади.

Исбот. Равшанки, (14. 27) ва (14. 45) даражали қаторлар $(-r, r)$ да яқинлашувчи ва уларнинг йиғиндилиари $S_1(x)$ ва $S_2(x)$ функциялар шу интервалда узлуксиз бўлади. Демак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} S_1(x) = S_1(0), \quad \lim_{x \rightarrow 0} S_2(x) = S_2(0).$$

Юқоридаги (14. 46) шартга кўра $S_1(0) = S_2(0)$ бўлади. Бундан эса $a_0 = b_0$ эканлиги келиб чиқади. Бинобарин, $\forall x \in (-r, r)$ учун $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$. Агар $x \neq 0$ десак, бу тенгликдан барча $x \in (-r, 0) \cup \cup (0, r)$ учун

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1}$$

га эга бўламиз. Бу даражали қаторларнинг ҳар бир ҳам $(-r, r)$ да яқинлашувчи бўлади, ва демак, уларнинг йиғиндилиари шу интервалда узлуксиз функция бўлади. Шу хусусиятдан фойдалансак, $x \rightarrow 0$ да

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = a_1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1} = b_1$$

бўлишини, ва демак, $a_1 = b_1$ эканлигини топамиз. Бу жараённи давом эттира бориб, барча $n \in N$ учун $a_n = b_n$ бўлиши топилади. Демак, (14. 27) ва (14. 45) даражали қаторлар бир хил. Теорема исбот бўлди.

$(-r, r)$ ($r > 0$) оралиқда $f(x)$ функция берилган ва узлуксиз бўлсин. Юқоридаги теорема, $f(x)$ ни даражали қатор йиғиндиси сифатида ифодалай оладиган бўлсан, бундай ифодалаш ягона бўлишини билдиради.

9- §. Тейлор қатори

Биз юқорида, ҳар қандай даражали

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

қатор ўзининг яқинлашиш интервали $(-r, r)$ да узлуксиз $S(x)$ функцияни (даражали қатор йиғиндисини) ифодалаб, бу функция шу оралиқда исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлишини кўрдик.

Энди бирор оралиқда исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлган функцияни даражали қаторга ёйиш масаласини қараймиз.

1. Функцияларни Тейлор қаторига ёйиш. $f(x)$ функция $x = x_0$ нуқтанинг бирор

$$U_{\delta}(x_0) = \{x \in R : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$

атрофида берилган бўлиб, шу атрофда функция исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлсин. Равшанки, бу ҳолда функциянинг 1- қисм, 6- боб, 7- § да батафсил ўрганилган Тейлор формуласи

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + r_n(x)$$

ни ёзиш мумкин, бунда $r_n(x)$ — қолдиқ ҳад.

Берилган $f(x)$ функцияниң x_0 нүктада исталған тартибдаги ҳоси-
лага эга бўлиши Тейлор формуласидаги ҳадларнинг сонини ҳар қанча
кatta сонда олиш имконини беради. Бинобарин, табийи равища ушбу

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \quad (14.47)$$

қатор юзага келади. Бу махсус даражали қатор бўлиб, унинг коэф-
фициентлари $f(x)$ функция ва унинг ҳосилаларининг x_0 нүктадаги қий-
матлари орқали ифодаланган.

Одатда (14.47) даражали қатор $f(x)$ функцияниң *Тейлор қатори*
деб аталади.

Хусусан, $x_0 = 0$ да қатор қуйидагида бўлади:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (14.48)$$

Даражали қаторлар деб номланган 8- § нинг бошланишида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
кўринишдаги даражали қаторларни ўрганишни келишиб олинган эди.
Шуни эътиборга олиб, $f(x)$ функцияниң (14.48) кўринишдаги Тейлор
қаторини ўрганамиз.

Яна бир бор таъкидлаймизки, (14.47) қатор $f(x)$ функция билан
ўзининг коэффициентлари орқали боғланган бўлиб, бу (14.47) қатор
яқинлашувчи бўладими, яқинлашувчи бўлган ҳолда унинг йиғиндиси
 $f(x)$ га teng бўладими, бундан қатъи назар, уни $f(x)$ функцияниң
Тейлор қатори деб атадик.

Табийи равища қуйидаги савол туғилади: қачон бирор $U_\delta(0)$ ора-
лиқда берилган, исталған тартибдаги ҳосилага эга бўлган $f(x)$ функцияниң
Тейлор қатори

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

шу оралиқда худди шу $f(x)$ га яқинлашади?

14.23- теорема. $f(x)$ функция бирор $(-r, r)$ ($r > 0$) сралиқда ис-
талған тартибдаги ҳосилага эга бўлиб, унинг $x = 0$ нүктадаги
Тейлор қатори

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (14.48)$$

бўлсин.

Бу қатор $(-r, r)$ оралиқда $f(x)$ га яқинлашиши учун $f(x)$ функцияни
Тейлор формуласи

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x) \quad (14.49)$$

нинг қордик ҳади барча $x \in (-r, r)$ да нолга интилиши ($\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$)

зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. Аввало (14.48) қаторнинг коэффициент-
лари билан (14.49) Тейлор формуласидаги коэффициентларнинг бир
хил эканлигини таъкидлаймиз.

(14. 48) қатор яқынлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $f(x)$ га teng бўлсин. У ҳолда бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

УЧУН

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x) \quad (\forall x \in (-r, r))$$

бўлади. Ундан эса $\forall x \in (-r, r)$ учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилги. $\forall x \in (-r, r)$ да $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ бўлсин. У ҳолда $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = 0$ бўлиб, ундан эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса (14. 48) қатор ($-r, r$) да яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $f(x)$ га тенг бўлишини, яъни

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \quad (*)$$

акан лигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Одатда (*) муносабат ўринли бўлса, $f(x)$ функция Тейлор қаторига ёйилган деб аталади.

14.24-теорема. Агар $f(x)$ функция $(-r, r)$ ($r > 0$) сралиқда даражалы каторга єйнлек болса:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots, \quad (14.50)$$

Бы қатар $f(x)$ функцияның Тейлор қатори бўлади.

Исбот. 14.21-теорема ва унинг натижасига кўра (14.50) даражали қатор $(-r, r)$ оралиқда исталган марта (ҳадлаф) дифференциалланувчи бўлиб,

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1 \cdot a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots, \\f''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + \dots + n \cdot (n-1) a_n x^{n-2} + \dots, \\f'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \dots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + \dots, \\&\vdots \\f^{(n)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) n a_n + \dots,\end{aligned}$$

бўлади. Кейинги тенгликларда $x = 0$ деб қўйидагиларни топамиз:

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad \dots$$

Натижада (14.50) қаторнинг кўриниши қўйидагича бўлади:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Бу эса теоремани исботлайди.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функция $(-\infty, +\infty)$ да барча тартибдаги ҳосилаларга эга:

a) $x \neq 0$ бўлганда

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$f''(x) = -\left(\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

• • • • • • • • •

$$f^{(n)}(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

• • • • • • • • •

бунда $P(u)$ — u нинг рационал функцияси. Бу

$$f^{(n)}(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

муносабатнинг тўғрилиги математик индукция методи ёрдамида кўрсатилади.

б) $x = 0$ бўлсин. Берилган функция $x = 0$ нуқтада барча тартибдаги ҳосилаларга эга бўлиб, улар нолга тенг бўлади:

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = 0, \quad f'(0) = 0,$$

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0, \quad f''(0) = 0,$$

• • • • • • • • •

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

• • • • • • • • •

Умумий ҳолда, $f^{(n)}(0) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) бўлишини математик индукция методи ёрдамида кўрсатиш мумкин.

Демак, берилган функцияның $x = 0$ нүктадаги барча тартибдаги ҳосилалари нолга тең экан.

Бу функцияның $x = 0$ нүктадаги Тейлор қаторы

$$0 + \frac{0}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \dots + \frac{0}{n!}x^n + \dots$$

бўлиб, унинг йигиндиси 0 га тең.

Келтирилган мисолдан кўринадики, бирор оралиқда исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлган баъзи функцияларнинг Тейлор қатори шу оралиқда қаралаётган функцияга яқинлашмаслиги мумкин экан.

Қуйида функцияның Тейлор қаторига ёйилишининг етарли шартини ифодаловчи теоремани келтирамиз.

14.25-төрима. $f(x)$ функция бирор $(-r, r)$ оралиқда исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлсин. Агар шундай ўзгармас $M > 0$ сони мавжуд бўлсаки, барча $x \in (-r, r)$ ҳамда барча $n = 0, 1, 2, \dots$ учун

$$|f^{(n)}(x)| \leq M$$

тенгесизлик бажарилса, у ҳолда $(-r, r)$ оралиқда $f(x)$ функция Тейлор қаторига ёйилади, яъни

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots \quad (14.50)$$

Исбот. $f(x)$ функция учун Тейлор формуласи

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_n(x)$$

ни ёзиб, унинг Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳади

$$r_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

ни олайлик. У ҳолда

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (x \in (-r, r))$$

бўлади. Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0 \quad x \in (-r, r)$$

эканлигини аниқлаймиз. Бу эса (14.50) муносабатнинг ўринли бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

2. Элементар функцияларнинг Тейлор қаторлари. 1°. $f(x) = e^x$ функцияның Тейлор қатори. Маълумки, $f(x) = e^x$ функцияның (ихтиёрий чекли $[-a, a]$ ($a > 0$) оралиқдаги) Тейлор формуласи

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x)$$

бўлиб, унинг қолдиқ ҳади эса Лагранж кўринишида қўйидагича бўлади:

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1)$$

(қаранг, 1-қисм, 6-боб, 7-§). Ҳар бир $x \in [-a, a]$ ($a > 0$) да $e^{\theta x} < e^a$ бўлишини эътиборга олсак, унда

$$|r_n(x)| \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a$$

эканлиги келиб чиқади ва $n \rightarrow \infty$ да у нолга интилади. Демак, ихтиёрий чекли x да

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

бўлади.

2°. $f(x) = \sin x$ функцияниг Тейлор қатори. Маълумки $f(x) = \sin x$ функцияниг (ихтиёрий чекли $[-a, a]$ ($a > 0$) оралиқдаги) Тейлор формуласи.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_{2n}(x)$$

бўлади. Бу формула қолдиқ ҳадининг Лагранж кўринишидан фойдаланиб (қаралсин, 1-қисм, 6-боб, 7-§) $\forall x \in [-a, a]$ ($a > 0$) учун

$$|r_{2n}(x)| \leq \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

бўлишини топамиз. Ундан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n}(x) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\forall x$ учун

$$\begin{aligned} \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \end{aligned}$$

бўлади.

3°. $f(x) = \cos x$ функцияниг Тейлор қатори. Бу функцияниг Тейлор формуласи

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n}(x)$$

қолдиқ ҳадининг Лагранж кўринишидан фойдаланиб (қаралсин, 1-қисм, 6-боб, 7-§) $\forall x \in [-a, a]$ ($a > 0$) учун

$$|r_{2n}(x)| \leq \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

бўлишини топамиз. Ундан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n}(x) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\forall x$ учун

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

4°. $f(x) = \ln(1+x)$ функциянинг Тейлор қатори. Маълумки бу функциянинг Тейлор формуласи қўйидагича бўлади:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

Бу формулада $x \in [0, 1]$ да $r_n(x)$ қолдиқ ҳадни Лагранж қўринишида қўйидагича ёзиб

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},$$

унинг учун

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \quad (14.51)$$

бўлишини, $x \in [-a, 0]$ ($0 < a < 1$) дўйлганда эса $r_n(x)$ қолдиқ ҳадни Коши қўринишида қўйидагича ёзиб

$$r_n(x) = (-1)^n x^{n+1} \frac{(1-\theta_1)^n}{(1+\theta_1 x)^{n+1}} \quad (0 < \theta_1 < 1),$$

унинг учун

$$|r_n(x)| < \frac{a^{n+1}}{1-a} \quad (14.52)$$

бўлишини кўрган эдик (1-қисм, 6-боб, 7-§).

(14.51) ва (14.52) муносабатлардан $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ бўлишини топамиз.

Демак, $\forall x \in (-1, 1]$ да

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \\ &\quad + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \end{aligned} \quad (14.53)$$

бўлади.

Шуни таъкидлаш лозимки, $\ln(1+x)$ функция $(-1, +\infty)$ оралиқ-да берилган бўлса ҳам бу функциянинг Тейлор қатори — (14.53) муносабат $(-1, +1]$ ярим интервалда ўринлидир.

5°. $f(x) = (1+x)^\alpha$ функциянинг Тейлор қатори. Бу функциянинг Тейлор формуласи

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + r_n(x) \end{aligned}$$

бўлиб (қаралсин, 1-қисм, 6-боб, 7-§), унинг қолдиқ ҳади Коши кўринишида қўйидагича бўлади:

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} (1-\theta)^n x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

Уни ушбу

$$r_n(x) = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots[(\alpha-1)-(n-1)]}{n!} x^n \alpha x (1+\theta x)^{\alpha-1} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n$$

кўринишида ёзиб оламиз.

Агар $-1 < x < 1$ бўлганда: биринчидан. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} (\alpha-1)(\alpha-2)\dots[(\alpha-1)-(n-1)] x^n = 0$, чунки бу яқинлашувчи

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

қаторнинг умумий ҳади (бу қаторнинг яқинлашувчилиги Даламбер аломатига кўра кўрсатилади), иккинчидан, $|\alpha x| (1-|x|)^{\alpha-1} < \alpha x (1+|\theta x|)^{\alpha-1} < |\alpha x| (1+|x|)^{\alpha-1}$, ва ниҳоят, учинчидан $\left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right|^n \leqslant \left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right| < 1$ бўлганлигидан $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ бўлиши келиб чиқади.

Демак, $|x| < 1$ да

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

бўлади.

10- §. Функцияни кўпхад билан яқинлаштириш

Маълумки, функция математик анализ курсида ўрганиладиган асосий объект. Кўпгина масалалар эса, функцияни ҳисоблаш (берилган нуқтада қийматини топиш) билан боғлиқ. Функциянинг мураккаб бўлиши бундай ҳисоблашларда катта қийинчиликлар туғдиради. Натижада функцияни унга қараганда содда ва ҳисоблашга қулай бўлган функция билан яқинлаштириш — тақрибий ифодалаш масаласи юзага келади.

Функцияниң даражали қаторга ёйилишидан, уни тақрибий ҳисоблашда кенг фойдаланилади. Бунда функцияни даражали қатор қисмий йиғиндиси билан алмаштирилиб, функциянинг берилган нуқтадаги қийматини топиш кўпхаднинг шу нуқтадаги қийматини ҳисоблашга келтирилади. Даражали қатор тузилишига кўра содда бўлиши, унинг қисмий йиғиндиси эса оддий кўпхад эканлиги функциянинг берилган нуқтадаги қийматини эффектив ҳисоблай олинни мумкинлигига олиб келади.

Шуни ҳам таъкидлаш лозимки, бундай имконият фақат «яхши» функциялар учун, яъни исталган тартибдаги ҳосилаларга эга бўлган ва маълум шартни қаноатлантирган (қаранг 14.23-теорема) функциялар учун мавжуд бўлади. Ихтиёрий узлуксиз функция берилган бўлса, уни

бирор күпхад ёрдамида тақрибий ҳисоблаш мүмкін бўлармикан деган савол туғилди. Яъни функцияни күпхад билан тақрибан алмаштириш имкониятини аналитик функциялар синфидан узлуксиз функциялар синфига умумлаштириш масаласи пайдо бўлади.

1885 йилда машҳур немис математиги К. Вейерштрасс томонидан узлуксиз функцияни күпхад билан яқинлаштириш мүмкинлиги кўрсастилди. Бу факт қўйида келтириладиган теорема орқали ифодаланади.

14.26-теорема (Вейерштрасс теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[0, 1]$ сегментда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда шундай

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

кўпхадлар топиладики

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 < x < 1} |f(x) - P_n(x)| = 0$$

бўлади*.

Бу теореманинг турлича исботлари мавжуд бўлиб, биз унинг Бернштейн кўпхадлари ёрдамидаги исботини келтирамиз.

14.10-таъриф. $f(x)$ функция $[0, 1]$ сегментда берилган бўлсин. Ушбу

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (14.54)$$

кўпхад $f(x)$ нинг Бернштейн кўпхади деб аталади.

Бернштейн кўпхади n -даражали кўпхад бўлиб, унинг коэффициентлари $f(x)$ функциянинг $\frac{k}{n}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) нуқталардаги қийматлари орқали ифодаланади. Масалан, $n = 1, n = 2, n = 3$ бўлганда

$$\begin{aligned} B_1(f, x) &= f(0) + [f(1) - f(0)] x, \\ B_2(f, x) &= f(0) + \left[2f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f(0) \right] x + \left[f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right] x^2, \\ B_3(f, x) &= f(0) + \left[3f\left(\frac{1}{3}\right) - 3f(0) \right] x + \left[3f(0) - 6f\left(\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{2}{3}\right) \right] x^2 + \\ &\quad + \left[f(1) - 3f\left(\frac{2}{3}\right) - f(0) \right] x^3 \end{aligned}$$

бўлади.

14.27-теорема (Бернштейн теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[0, 1]$ сегментда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 < x < 1} |f(x) - B_n(f, x)| = 0$$

бўлади.

Аввало битта лемма исботлаймиз.

*Функция берилган ва узлуксиз бўлган оралик ихтиёрий сегментдан иборат бўлган ҳолда теореманинг исботи 183-бетда келтирилади.

14.1. Лемма. Ушбу

$$\sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1, \quad (14.55)$$

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (14.56)$$

айниятлар ўринлидир.

Исбот. Маълумки, $\forall a, b \in R$ учун

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Бу айниятда $a = x$, $b = 1 - x$ ($0 \leq x \leq 1$) деб олинса, ундан

$$\sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1$$

бўлиши келиб чиқади.

(14.56; айниятни исботлаш учун ушбу

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

йиғиндиларни ҳисоблаймиз.

Агар

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\frac{k}{n} C_n^k = \frac{k}{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{(k-1)!} = C_{n-1}^{k-1}, \quad (14.57)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)} = x[x + (1-x)]^{n-1} = x. \end{aligned}$$

бўлишини топамиз. Энди

$$\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

йиғиндини ҳисоблаймиз.

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = \\
& = \sum_{k=0}^n \frac{n-1}{n} \frac{k-1}{n-1} C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = \\
& = \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=2}^n C_{n-2}^{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-2-(k-2)} + \frac{1}{n} x \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)} = \\
& = \frac{n-1}{n} x^2 [x + (1-x)]^{n-2} + \frac{1}{n} x [x + (1-x)]^{n-1} = \\
& = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.
\end{aligned}$$

Бу ҳамда юқоридаги (14.56) ва (14.57) муносабатлардан фойдаланиб, қүйидегини топамиз:

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - 2x^2 + x^2 = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Лемма исбот бўлди.

Бу леммадан қўйидаги натижа келиб чиқади.

14.3-натижа. Ихтиёрий $x \in [0, 1]$ ва $n \in N$ учун

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n} \quad (14.58)$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, ихтиёрий $x \in [0, 1]$ учун $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ бўлиб, (14.56) муносабатдан (14.58) тенгсизликнинг ўринли бўлиши келиб чиқади.

Бернштейн теоремасининг исботи. Юқоридаги (14.54) ва (14.55) муносабатларга кўра

$$B_n(f, x) - f(x) = \sum_{k=0}^n \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (14.59)$$

бўлади.

$f(x)$ функция $[0, 1]$ сегментда узлуксиз. Демак, Кантор теоремасига асоссан у шу сегментда текис узлуксиз бўлади, яъни $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилади, $\forall x', x'' \in [0, 1]$ учун $|x' - x''| < \delta$ бўлганда $|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлик бажарилади.

Юқоридаги (14.59) йиғинди k нинг $k = 0, 1, 2, \dots, n$ қийматлари бўйича йиғилган. Бу йиғиндининг ҳадларини k нинг

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta \quad (x \in [0, 1])$$

тengсизликни қаноатлантирувчи қийматлари бўйича ҳамда k нинг

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta \quad (x \in [0, 1])$$

тengсизликни қаноатлантирувчи қийматлари бўйича ажратиб, улардан ушбу

$$\sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| > \delta} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

ларни ҳосил қиласиз. Равшанки,

$$B_n(f, x) - f(x) = \sum_{k=0}^n \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \\ = \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| > \delta} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (14.60)$$

бўлади.

Энди кейинги тенгликтинг ўнг томонидаги йигиндиларнинг ҳар бирини алоҳида-алоҳида баҳолаймиз.

$$\left| \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \leq \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} < \frac{1}{2} \epsilon \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \\ \leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\epsilon}{2}, \\ \left| \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| > \delta} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \leq \\ \leq 2M \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| > \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad (14.61)$$

бунда $M = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

Агар $\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta$ бўлганда $\left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \cdot \frac{1}{\delta^2} \geq 1$ бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\begin{aligned} \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| > \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| > \delta} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \\ &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

бўлади. Юқорида келтирилган лемманинг натижасидан фойдаланиб, қуидагини топамиз:

$$\sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| > \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n \delta^2}.$$

Демак,

$$\left| \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| > \delta} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \leq \frac{M}{2n \delta^2}. \quad (14.62)$$

Натижада (14.60), (14.61) ва (14.62) муносабатлардан

$$|B_n(f, x) - f(x)| < \frac{1}{2} \epsilon + \frac{M}{2n \delta^2} \quad (\forall x \in [0, 1])$$

бўлиши келиб чиқади. Агар n ни $n > \frac{M}{2 \delta^2 \epsilon}$ қилиб олинса, у ҳолда

$$|B_n(f, x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

бўлади. Бундан эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq 1} |B_n(f, x) - f(x)| = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Теэрэма исбот бўлди.

Энди $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда берилган ва узлуксиз бўлсин. Қуйидаги

$$t = \frac{1}{b-a} x - \frac{a}{b-a}$$

чизиқли алмаштириш $[a, b]$ сегментни $[0, 1]$ сегментга акслантиради. Бу алмаштиришдан фойдаланиб, ушбу

$$\varphi(t) = f(a + (b-a)t) \quad (14.63)$$

функцияни ҳосил қиласиз. Бу $\varphi(t)$ функция $[0, 1]$ сегментда берилган ва шу сегментда узлуксиз бўлади. У ҳолда Бернштейн теоремасига кўра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq 1} |B_n(\varphi, t) - \varphi(t)| = 0 \quad (14.64)$$

бўлади, бунда

$$B_n(f, t) = \sum_{k=0}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k t^k (1-t)^{n-k}.$$

(14.63) ва (14.64) муносабатлардан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{a < x < b} \left| B_n(f, \frac{x-a}{b-a}) - f(x) \right| = 0$$

бўлиши келиб чиқади, бунда

$$\begin{aligned} B_n\left(f, \frac{x-a}{b-a}\right) &= \sum_{k=0}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} k\right) C_n^k \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \left[1 - \frac{x-a}{b-a}\right]^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} k\right) C_n^k \frac{(x-a)^k (b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}. \end{aligned}$$

Шундай қилиб қаралаётган оралиқ $[a, b]$ сегментдан иборат бўлган ҳолда қўйидаги теорема (Вейерштрасс теоремаси) га қеламиз.

14.28-төрима (Вейерштрасс төримаси). Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{a < x < b} \left| B_n\left(f, \frac{x-a}{b-a}\right) - f(x) \right| = 0$$

бўлади.

Гарчи Вейерштрасс теоремаси $f(x)$ функцияни $B_n(f, x)$ кўпҳад билан яқинлаштириш мумкинлигини ифодаласада, яқинлашиш хатолиги

$$r_n(f, x) = f(x) - B_n(f, x)$$

ни баҳолаш имконини аниқлаб бермайди. Кейинги ўрганишлар $r_n(f, x)$ нинг нолга интилиш тартиби, яқинлаштириладиган $f(x)$ функциянинг узлуксизлик модулига (1-қисм, 5-боб, 9-ѓа қаранг) боғлиқ эканлигини кўрсатади.

14.29-төрима. Агар $f(x)$ функция $[0, 1]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $B_n(f, x)$ эса унинг Бернштейн кўпҳади бўлса, у ҳолда

$$\sup_{0 < x < 1} |B_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (14.65)$$

бўлади, бунда $\omega(\delta) = f(x)$ функциянинг узлуксиэлик модули.

Исбот. (14.59) формуладан фойдаланиб, қўйидагини тоғамиз.

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Функция узлуксизлик модулининг ушбу

$$\omega(\lambda \delta) \leq (1 + \lambda) \omega(\delta)$$

хоссасига күра

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| &\leq \omega\left(\left|\frac{k}{n} - x\right|\right) = \omega\left(\sqrt{n} \left|\frac{k}{n} - x\right| \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \\ &\leq \left[\left|\frac{k}{n} - x\right| \sqrt{n} + 1 \right] \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

бүлиб, натижада

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq \left[\sqrt{n} \sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + 1 \right] \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

бүләди.

$$\text{Энди } \sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \text{ йиғиндини}$$

$$\sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right| \sqrt{C_n^k x^k (1-x)^{n-k}} \sqrt{C_n^k x^k (1-x)^{n-k}}$$

күрнишда ёзаб, унга Коши—Буняковский тенгизлигини (қаралсан, 12-боб, 1- §) қўллаймиз:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right| \sqrt{C_n^k x^k (1-x)^{n-k}} \sqrt{C_n^k x^k (1-x)^{n-k}} &\leq \\ \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}} \sqrt{\sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k}} &= \\ = \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} &\leq \frac{1}{2\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Демак,

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq \left(\sqrt{n} \frac{1}{2\sqrt{n}} + 1 \right) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Теорема исбот бўлди.

Хусусан, $f(x)$ функция $[0, 1]$ оралиқда $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\forall x \in [0, 1]$ учун $|f'(x)| \leq M$ ($M = \text{const}$) бўлсин. У ҳолда, Лагранж теоремасидан фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} |B_n(f, x) - f(x)| &= \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \\ &\leq M \sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Демак, бу ҳолда

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |B_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}$$

бўлади.

15- Б О Б МЕТРИК ФАЗОЛАР

Юқоридаги баённимиздан маълумки, математик анализнинг биз ўрганган барча асосий тушунчалари (лимит, узлуксизлик, ҳосила, интеграл, яқинлашувчилик ва ҳоказо) турли тўпламлар (\bar{R} , R^m , $C[a, b]$ ва ҳоказо) элементлари кетма-кетлигига лимитга ўтиш амали орқали таърифланади. Бу амал ҳар бир тўпламда ўзига хос киритилган эди. Масалан,

1) R да $\{x_n\}: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ($x_n \in R, n = 1, 2, \dots$) кетма-кетлик берилган бўлсин. Унинг лимити қўйидагича таърифланар эди:

$\forall \varepsilon > 0$ сон олингандан ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилсанки, барча $n > n_0$ учун

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (a \in R)$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити дейилади.

2) R^m да берилган $\{x^n\}$:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots \quad (x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \in R^m, n=1, 2, \dots)$$

кетма-кетлик лимити қўйидагича таърифланар эди:

$\forall \varepsilon > 0$ сон олингандан ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилсанки, барча $n > n_0$ учун

$$\sqrt{(x_1^{(n)} - a_1)^2 + (x_2^{(n)} - a_2)^2 + \dots + (x_m^{(n)} - a_m)^2} < \varepsilon$$

$$(a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m)$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда a нуқта $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади.

3) $C[a; b]$ да $\{f_n(x)\}: f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots, (f_n(x) \in C[a, b], n = 1, 2, \dots)$

функционал кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу функционал кетма-кетликнинг лимити қўйидагича таърифланар эди:

$\forall \varepsilon > 0$ сон олингандан ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилсанки, барча $n > n_0$ учун

$$\sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг лимити ($\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик $f(x)$ га текис яқинлашади) деб аталади.

Агар $|x_n - a|$ миқдор R даги x_n ва a ($x_n \in R, a \in R, n = 1, 2, \dots$) нуқта-лар орасидаги масофа — $\rho(x_n, a)$ (1-қисм, 1-боб, 10-§),

$$\sqrt{(x_1^{(n)} - a_1)^2 + (x_2^{(n)} - a_2)^2 + \dots + (x_m^{(n)} - a_m)^2} \quad (x^{(n)} \in R^m, n = 1, 2, \dots)$$

миқдор R^m даги x^n ва a нуқталар орасидаги масофа $\rho(x^n, a)$ (12-боб 1-§), ҳамда

$$\sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)|$$

миқдор $\mathbb{C}[a, b]$ нинг $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ва $f(x)$ элементлари орасидаги масофа — $\rho(f_n(x), f(x))$ (1-қисм, 5-боб, 11-§) эканлигини эътиборга олсан, R ,

$R^m, C [a, b]$ тўпламларда, уларнинг элементларидан тузилган кетма-кетликнинг лимити масофа а ушунчасига асосланганлигини кўрамиз.

Бир томондан $R, R^m, C [a, b]$ тўпламларнинг тури табиатдаги элементлардан ташкил топганлиги, иккинчи томондан эса уларда лимитга ўтиш амалининг фойдат масофага асосланишдек умумийликка эга бўлиши, табиий равиша бу тўпламларни умумий ҳолда қарашга, яъни ихтиёрий тўплам элементлари орасида массфа тушунчасини киритиб, уни ўрганишга олиб келади.

1-§. Метрик фазо

E — ихтиёрий тўплам бўлсин. Бу тўпламнинг ўзини ўзига тўғри (Декарт) кўйпайтмаси

$$E \times E = \{(x, y) : x \in E, y \in E\}$$

(қаралсин, 1-қисм, 1-боб, 1-§) ни олайлик.

Маълумки, дастлабки тушунчалар қаторида ихтиёрий A тўпламни B тўпламга акслантириши

$$f : A \rightarrow B$$

тушунчаси кеятирилган эди (1-қисм, 1-боб, 3-§).

Энди $A = E \times E, B = R_+$ (R_+ — барча манфий бўлмаган ҳақиқий сонлар тўплами) деб ушбу

$$\rho : E \times E \rightarrow R_+ \quad (\rho = \rho(x, y)) \quad (15.1)$$

акслантиришини қарайлик.

15.1-таъриф. Агар $\rho : E \times E \rightarrow R_+$ акслантириш учун

1°. $\forall x, y \in E$ учун $\rho(x, y) \geq 0$ ($\rho(x, y) = 0$ муносабат $x = y$ бўлган дагина бажарилади),

2°. $\forall x, y \in E$ учун $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметриклик),

3°. $\forall x, y, z \in E$ учун $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (учбурчак тенгсизлигига шартлар бажарилса, у ҳолда бу ρ акслантириш масофа (метрика), E тўплам эса метрик фазо деб аталади. Метрик фазо (E, ρ) каби белгиланади. 1° — 3° шартлар метрик фазо аксиомалари дейилади. Метрик фазо элементларини шу фазо нуқтатарига ҳам деб аталади.

Мисоллар. 1. R тўпламни олайлик. ρ акслантириш қўйидагича аниқланса,

$$\rho(x, y) = |x - y| \quad (\forall x, y \in R),$$

1-қисм, 2-боб, 10-§ да исботланганга кўра бу $\rho(x, y)$ учун 1° — 3° шартлар бажарилади. Демак, $\rho(x, y)$ — масофа ва (R, ρ) — метрик фазо.

2. R^m тўпламни олайлик, $\rho(x, y)$ акслантириш қўйидагича аниқлансан:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^m (y_k - x_k)^2}. \end{aligned}$$

Юқеридан, 12-боб, 1-§ да бу $\rho(x, y)$ учун 1° — 3° шартларнинг бажарилиши кўрсатилиган эди. Демак, ρ — масофа, (R^m, ρ) — метрик фазо.

3. $C [a, b]$ тўпламни кўрайлик. ρ акслантириш қўйидагича бўлсин:

$$\rho(x, y) = \max_{a < t < b} |x(t) - y(t)| \quad (\forall x(t), y(t) \in C [a, b]),$$

бу $\rho(x, y)$ юқоридаги 1° — 3° шартларни қаноатлантиради (қаралсин, 1-қисм, 5-боб, 11-§). Демак, қаралаётган ρ — масофа, ($C [a, b], \rho$) эса метрик фазо.

4. c — барча яқинлашувчи кетма-кетликлар (сонлар кетма-кетликлари) тўплами бўлсин. ρ акслантириш ушбу

$$\rho(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in c, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in c$$

күринишда берилсин. 1- қисм, 3- боб, 4- § да исботланғанға күра бу $\rho(x, y)$ учун $1^{\circ} \rightarrow 3^{\circ}$ -шартлар бажарылади. Демек, ρ — масофа, (c, ρ) — метрик фазо.

5. т—барча чегаралған кетма-кетликлар (сонлар кетма-кетликлары) түплами бўлсин. ρ акслантириш 4- мисолдагидек қўйидагича берилсин:

$$\rho(x, y) = \sup_n |x_n - y_n| \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in m,$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in m).$$

Бу акслантириш учун $1^{\circ} \rightarrow 3^{\circ}$ -шартларнинг бажарилишини кўрсатиш қийин эмас. Аввало $\rho(x, y) \geq 0$ бўлиши равшандир. Агар $\rho(x, y) = \sup_n |x_n - y_n| = 0$ бўлса, ундан $\forall n \in N$ учун $x_n = y_n$, яъни $x = y$ бўлиши келиб чиқади. Аксинча, агар $x = y$, яъни $\forall n \in N$ учун $x_n = y_n$ бўлса, ундан $\rho(x, y) = \sup_n |x_n - y_n| = 0$ экани келиб чиқади.

Иккинчидан $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, чунки $\rho(x, y) = \sup_n |x_n - y_n| = \sup_n |y_n - x_n| = \rho(y, x)$. Энди $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in m$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in m$ ва $z = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots) \in m$ бўлсин. Абсолют қиймат хоссасига кўра

$$|x_n - z_n| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n| \quad (n \in N)$$

бўлади. Бундан эса

$$|x_n - z_n| \leq \sup_n |x_n - y_n| + \sup_n |y_n - z_n|$$

эканлиги келиб чиқади. Аниқ юқори чегара хоссасига кўра

$$\sup_n |x_n - z_n| \leq \sup_n |x_n - y_n| + \sup_n |y_n - z_n|$$

бўлади. Бундан,

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Демак, ρ — масофа, (m, ρ) — метрик фазо.

(E, ρ) метрик фазо берилган. E_1 тўплам E нинг қисм тўплами, яъни $E_1 \subset E$ бўлсин. У ҳолда E_1 ҳам E да киритилган метрика бўйича метрик фазо бўлади: (E_1, ρ) . Бу метрик фазо таърифидан келиб чиқади. Мисол келтирамиз. Равшанки, барча рационал сонлар тўплами Q барча ҳақиқий сонлар тўплами R нинг қисм тўплами: $Q \subset R$. (R, ρ) метрик фазо эди. (Q, ρ) ҳам R да киритилган метрика бўйича метрик фазо бўлади.

Ўқувчининг эътиборини яна битта фактга жалб этамиз. Агар F тўплам берилган бўлиб, $\rho : F \times F \rightarrow R_+$ акслантиришлар турлича киритилиб, уларнинг ҳар биря $1^{\circ} \rightarrow 3^{\circ}$ -шартларни бажарса, натижада турли метрик фазолар ҳосил бўлади. Мисол қарайлик. Биз юқорида $C[a, b]$ тўплам берилганда ушбу

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \quad (x(t), y(t) \in C[a, b])$$

акслантириши аниқлаб, унинг $1^{\circ} \rightarrow 3^{\circ}$ -шартларни бажаришини кўрсатдик ва натижада $(C[a, b], \rho)$ метрик фазога эга бўлдик.

Энди худди шу $C[a, b]$ тўплам берилганда ρ_1 акслантиришни қўйидагича аниқлаймиз:

$$\rho_1(x, y) = \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt}. \quad (15.2)$$

Бу $\rho_1(x, y)$ нинг $1^{\circ} \rightarrow 3^{\circ}$ -шартларни бажаришини кўрсатамиз.

(15.2) муносабатдан ҳар доим $\rho_1(x, y) \geq 0$ әкани күрінади. Агар $\forall t \in [a, b]$ да $x(t) = y(t)$ бўлса, ундан

$$\rho_1(x, y) = \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt} = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Аксинча, агар

$$\rho_1(x, y) = \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt} = 0$$

бўлса, ундан $\forall t \in [a, b]$ учун $x(t) = y(t)$ бўлиши келиб чиқади. Шуни исботлаймиз.

Тескарисини фараз қиласайлик. Бирор $t_0 (t_0 \notin (a, b))$ нуқтада $x(t_0) \neq y(t_0)$, яъни, масалан, $x(t_0) - y(t_0) > 0$ бўлсин. У ҳолда узлуксиз функциянинг локал хоссасига кўра (қаралсин, 1-қисм, 5-боб, 7-§) t_0 нуқтанинг етарлича кичик $U_\delta(t_0)$ атрофи ($U_\delta(t_0) \subset [a, b]$) топиладики, $\forall t \in U_\delta(t_0)$ учун $x(t) - y(t) > 0$ бўлади. У ҳолда

$$\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt > 0$$

бўлиб, бу $\rho_1(x, y) = 0$ деб олиннишига эид бўлиб қолади. Демак, $\forall t \in [a, b]$ учун $x(t) = y(t)$ бўлади.

Иккинчидан, $\rho_1(x, y) = \rho_1(y, x)$ бўлади, чунки

$$\rho_1(x, y) = \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt} = \sqrt{\int_a^b [y(t) - x(t)]^2 dt} = \rho_1(y, x).$$

Коши—Буняковск ий тенгсизлиги

$$\left[\int_a^b f(t) g(t) dt \right]^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt \int_a^b g^2(t) dt$$

дан (қаралсин, 1-қисм, 9-боб, 7-§) фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(t) + g(t)]^2 dt &= \int_a^b f^2(t) dt + 2 \int_a^b f(t) g(t) dt + \int_a^b g^2(t) dt \leq \\ &\leq \int_a^b f^2(t) dt + 2 \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt \int_a^b g^2(t) dt} + \int_a^b g^2(t) dt = \\ &= \left(\sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt} \right)^2. \end{aligned}$$

Демак,

$$\sqrt{\int_a^b [f(t) + g(t)]^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}$$

бўлади. Бу тенгсизликда

$f(t) = x(t) - z(t)$, $g(t) = z(t) - y(t)$ ($z(t) \in C[a, b]$)
деб олинса, у ҳолда

$$\begin{aligned} \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt} &\leq \sqrt{\int_a^b [x(t) - z(t)]^2 dt} + \\ &+ \sqrt{\int_a^b [z(t) - y(t)]^2 dt}, \end{aligned}$$

яъни

$$\rho_1(x, y) \leq \rho_1(x, z) + \rho_1(z, y)$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, ρ_1 акслантириш масофа, $(C [a, b], \rho_1)$ эса метрик фазо бўлади. Шундай қилиб $C [a, b]$ тўплам берилганда қўйидаги

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$

ва

$$\rho_1(x, y) = \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt}$$

акслантиришларнинг ҳар бирин масофа эканлигини кўрсатиб, натижада иккита турли $(C [a, b], \rho)$ ва $(C [a, b], \rho_1)$ метрик фазоларга эга бўлди.

Энди метрик фазодаги баъзи бир тўпламларни таърифлайдик. (E, ρ) метрик фазо берилган бўлсин. Бу фазода бирор a ($a \in E$) элемент олайлик.

15.2-тада ўзиб. Ушбу

$$\{x \in E : \rho(x, a) < r\} \quad (\{x \in E : \rho(x, a) \leq r\}) \quad (r > 0)$$

тўплам (E, ρ) метрик фазодаги очиқ шар (шар) деб аталади. a нуқта шар маркази, $r > 0$ эса шар радиуси дейилади.

15.3-тада ўзиб. Маркази a нуқтада, радиуси ε ($\varepsilon > 0$) бўлган очиқ шар

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in E : \rho(x, a) < \varepsilon\}$$

a нуқтанинг атрофи (ε -атрофи) дейилади.

Хусусан, (R, ρ) метрик фазода a ($a \in R$) нуқтанинг атрофи (қаралсан, 1-қисм, 3-боб, 2-§)

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in R : \rho(x, a) = |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

интервални, (R^m, ρ) фазода a ($a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m$) нуқтанинг атрофи

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} < \varepsilon\}$$

эса 12-боб, 1-§ да киритилган сферик атрофини билдиради.

$G - (E, \rho)$ метрик фазодаги бирор тўплам бўлсин. Бу тўпламда бирор x_0 нуқтанинг олайлик. Агар x_0 ($x_0 \in G$) нуқтанинг шундай $U_\rho(x_0)$ ($\varepsilon > 0$) атрофи мавжуд бўлсаки,

$$U_\varepsilon(x_0) \subset G$$

бўлса, у ҳолда x_0 нуқта G тўпламнинг ички нуқтаси дейилади.

15.4-тада ўзиб. G тўпламнинг ҳар бир нуқтаси унинг ички нуқтаси бўлса, бундай тўплам очиқ тўплам деб аталади.

Масалан, (E, ρ) метрик фазодаги ҳар қандай очиқ шар

$$A = \{x \in E : \rho(x, a) < r\} \quad (a \in E, r > 0)$$

очиқ тўплам бўлади (солиштиринг: 12-боб, 1-§).

$F - (E, \rho)$ метрик фазодаги бирор тўплам бўлсин: $F \subset E$. x_0 эса E га тегишли бирор нуқта: $x_0 \in E$. Агар x_0 ($x_0 \in F$) нуқтанинг исталган $U_\varepsilon(x_0)$ атрофида F тўпламнинг x_0 дан фарқли камидаги битта нуқтаси топилса, x_0 нуқта F тўпламнинг лимит нуқтаси деб аталади. Бунда x_0 лимит нуқта F тўпламга тегишли бўлиши ҳам, тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин.

F тўпламнинг барча лимит нуқталаридан ташкил топган тўплам F тўпламнинг ҳосилавий тўплами дейилади ва F' каби белгиланади.

Ушбу $F \cup F'$ тўплам F тўпламнинг ёпилемаси деб аталади ва у \bar{F} каби белгиланади: $\bar{F} = F \cup F'$.

15.5-тада ўзиб. Агар F ($F \subset E$) тўпламнинг барча лимит нуқталари шу тўпламга тегишли бўлса, яъни $F' \subset F$ бўлса, F ёпиқ тўплам деб аталади.

Равшанки, F ёпиқ тўплам бўлса, $F \cup F' = \bar{F} = F$ бўлади.

Масалан, (E, ρ) метрик фазодаги шар

$$B = \{x \in E : \rho(x, a) \leq r\} \quad (a \in E, r > 0)$$

ёпиқ тўплам бўлади.

$M = (E, \rho)$ метрик фазодаги бирор түплам бўлсан.

15.6-таъриф. Агар (E, ρ) метрик фазода шундай шар

$$B = \{x \in E : \rho(x, a) \leq r\} \quad (a \in E, r > 0)$$

топилсаки, $M \subset B$ бўлса, у ҳолда M чегараланган түплам деб аталади. Акс ҳолда, яъни ҳар қандай B шар олингдана ҳам, шундай $x \in M$ мавжуд бўлсан, $x \in B$ бўлса, M түплами чегараланмаган түплам дейилади.

Масалан, (R^m, ρ) метрик фазода шар, параллелепипед, симплекслар (қаралсин, 12-боб, 1-§) чегараланган түпламлар бўлади.

Шу метрик фазода ушбу

$$M = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0\}$$

түплам чегараланмаган түплам бўлади.

2-§. Метрик фазода кетма-кетлик ва унинг лимити

Бирор (E, ρ) метрик фазо берилган бўлсан. f ҳар бир натураг n ($n \in N$) сонга, E нинг бирор муайян x_n ($x_n \in E$) нуқтасини мос қўювчи акслантириш бўлсан:

$$f: N \rightarrow E \text{ ёки } n \mapsto x_n \quad (n \in N, x_n \in E).$$

Бу $f: N \rightarrow E$ акслантиришнинг тасвирлари (образлари) дан тузиленган

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (x_n \in E, n = 1, 2, \dots) \quad (15.3)$$

түплам (E, ρ) метрик фазода кетма-кетлик деб аталади ва у $\{x_n\}$ каби белгиланади

(15.3) кетма-кетликнинг бирор n_1 номерли x_{n_1} ҳадини, сўнгра номери n_1 дан кatta бўлган n_2 номерли x_{n_2} ҳадини ва ҳоказо, шу усул билан (15.3) кетма-кетликнинг ҳадларини олиб, улардан ушбу

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots \quad (n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots) \quad (15.4)$$

кетма-кетликни ҳосил қиласиз.

Одатда (15.4) кетма-кетлик (15.3) кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги деб аталади ва $\{x_{n_k}\}$ каби белгиланади.

Энди (E, ρ) метрик фазода

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (x_n \in E, n = 1, 2, \dots) \quad (15.3)$$

кетма-кетликнинг лимити тушунчасини киритамиз.

(E, ρ) метрик фазода (15.3) кетма-кетлик берилган бўлсан, a нуқта E га тегишили нуқта бўлсан: $a \in E$.

15.7-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олингдана ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилсаки, барча $n > n_0$ учун $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, яъни $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$ бўлса, a нуқта $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади ва $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ёки $x_n \rightarrow a$ каби белгиланади.

Юқорида келтирилган таърифга эквивалент бўлган қўйидаги таърифни ҳам бериш мумкин.

15.8-таъриф. Агар a нуқтанинг иктиёрий $U_\varepsilon(a)$ ($\forall \varepsilon > 0$) атрофи олингдана ҳам, (15.3) кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлиб, кейинги барча ҳадлари шу атрофга тегишили бўлса, a нуқта (15.3) кетма-кетликнинг лимити деб аталади.

Агар (15.3) кетма-кетлик лимитга эга бўлса, у яқинлашувчи кетма-кетлик дейилади. Одатда бундай яқинлашиш масофа бўйича яқинлашиш деб аталади.

Мисоллар 1. (E, ρ) метрик фазо берилган бўлсан. $\forall x_0 \in E$ нуқтани олиб, ушбу

$$x_0, x_1, \dots, x_0, \dots$$

кетма-кетликни ҳосил қиласиз. Равшанки, бу яқинлашувчи кетма-кетлик бўлади.¹

2. (E, ρ) метрик фазо берилган бўлиб, бу фазо ҳеч бўлмаганда иккита турли нуқталарга эга бўлсин. Бу нуқталарни x_0 ва x_1 билан белгилаб ($x_0 \neq x_1$, $x_0 \in E$, $x_1 \notin E$),

$$x_0, x_1, x_0, x_1, \dots, x_0, x_1, \dots$$

кетма-кетликни тузамиз. Бу кетма-кетлик яқинлашувчи эмас.

3. (Q, ρ) метрик фазода қўйидаги

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots,$$

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots$$

кетма-кетликларни қарайлик. Бу кетма-кетликларнинг биринчиси $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ нинг лимити 0 га тенг ($0 \in Q$). Демак, (Q, ρ) метрик фазодаги $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлади.

Иккинчи кетма-кетлик $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ нинг лимити e га тенг:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

(қаралсин, 1-қисм, 3-боб, 8-§). Бироқ $e \notin Q$. Демак, (Q, ρ) метрик фазода $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи эмас.

Энди, хусусий ҳолларда, (E, ρ) метрик фазо сифатида (R, ρ) , (R^m, ρ) ва $(C[a, b], \rho)$ фазоларни олиб, бу фазоларда кетма-кетликнинг масофа бўйича яқинлашувчилиги тушунасини изоҳлаб ўтамиш.

(R, ρ) метрик фазодаги $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (x_n \in R, n = 1, 2, \dots)$$

кетма-кетлик ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги бўлиб, унинг масофа бўйича яқинлашиши, 1-қисм, 3-бобда ўрганилган сонлар кетма-кетлигининг яқинлашишидан иборат.

(R^m, ρ) метрик фазодаги $\{x^{(n)}\}$:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots \quad (x^{(n)} \in R^m, n = 1, 2, \dots)$$

кетма-кетлик R^m тўпламнинг $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})$ ($n = 1, 2, \dots$) нуқталаридан иборат кетма-кетлик бўлиб, унинг масофа бўйича яқинлашиши координаталар бўйича яқинлашиши билдиради (қаралсин 12-боб, 2-§).

$(C[a, b], \rho)$ метрик фазодаги $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots, f_n(x) \in C[a, b]; n = 1, 2, \dots$ кетма-кетлик функционал кетма-кетлик бўлиб, унинг масофа бўйича яқинлашиши 14-бобда батагасил ўрганилган текис яқинлашиши ифодалайди.

Энди метрик фазода яқинлашувчи кетма-кетликларнинг хоссаларини келтирамиз.

1°. Агар (E, ρ) метрик фазода $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, бу кетма-кетликнинг лимити битта бўлади.

Исбот. $\{x_n\}$ ($x_n \in E, n = 1, 2, \dots$) кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити иккита: a ва b ($a \in E, b \in E$) бўлсин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, b) = 0,$$

яъни $\forall \varepsilon > 0$ сон олингандага ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ да $\rho(x_n, a) <$

$\frac{\varepsilon}{2}$, шунингдек шу $\varepsilon > 0$ учун шундай $n_0 \in N$ топилади, $\forall n > n_0$ да $\rho(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Агар $\bar{n}_0 = \max(n_0, n'_0)$ дейилса, унда $\forall n > \bar{n}_0$ да бир вақтда $\rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Масофа таърифидаги З°-шартдан, яъни учбурчак тенгсизлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b).$$

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ ва $\forall n > \bar{n}_0$ учун $\rho(a, b) < \varepsilon$ бўлиб, ундан $\rho(a, b) = 0$ бўлиши келиб чиқади. Масофа таърифидаги 1°-шартга $a = b$ бўлади.

2°. Агар (E, ρ) метрик фазода $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (a \in E)$$

бўлса, у ҳолда бу кетма-кетликнинг ҳар қандай қисмий кетма-кетлиги $\{x_{n_k}\}$ ($n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$) ҳам яқинлашувчи бўлади ва $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$.

Исбот. $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити a га тенг бўлсин; $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Бу $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг $\{x_{n_k}\}$: $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ қисмий кетма-кетлигини олайлик.

Модомики $x_n \rightarrow a$ экан, унда $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топилади, $\forall n > n_0$ учун $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ бўлади. $k \rightarrow \infty$ да $n_k \rightarrow \infty$ бўлишидан $m \in N$ топилади, $n_m > n_0$ бўлади. Демак, $k > m \Rightarrow n_k > n_0 \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$. Бу эса $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ эканлигини билдиради.

3- §. Коши теоремаси. Тўлиқ метрик фазо

Биз юқорида R даги (1-қисм, 3-боб, 10-§), R^m даги (12-боб, 2-§), $C[a, b]$ даги (14-боб, 2-§) кетма-кетликларнинг яқинлашувчи бўлишлари учун уларнинг фундаментал бўлишлари зарур ва етарли эканлигини (Коши теоремасини) кўриб ўтдик. Математик анализнинг бу муҳим теоремаси и хотирий метрик фазо учун ҳам ўринли бўладими деган савол туғилади. Аввало, фундаментал кетма-кетлик тушунчасини киритайлик.

(E, ρ) — иктиёрий метрик фазо, $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (x_n \in E, n = 1, 2, \dots)$$

— ундаги бирор кетма-кетлик бўлсин.

15.9-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топилсанки, $\forall n > n_0$ ва $\forall m > n_0$ лар учун $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ бўлса, $\{x_n\}$ фундаментал кетма-кетлик дейилади.

$R, R^m, C[a, b]$ фазолардаги фундаментал ва фундаментал бўлмаган кетма-кетликларга мисолларни биз юқорида кўрган эдик. Яна битта мисол сифатида (Q, ρ) метрик фазодаги

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots \quad (15.5)$$

кетма-кетликни келтирайлик. $Q \subset R$ бўлгани сабабли (15.5) ни R даги кетма-кетлик деб қарааш ҳам мумкин. R да бу кетма-кетлик яқинлашувчи, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Коши теоремасига кўра $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ кетма-кетлик фундаменталдир. Q да киритилган масофа R даги $\rho(x, y) = |x - y|$ масофанинг айнан ўзи бўлгани учун $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ кетма-кетлик (Q, ρ) да ҳам фундаменталдир.

Ихтиёрий (E , ρ) метрик фазо берилган бўлсин. Ундаги барча яқинлашувчи кетма-кетликлар тўпламини $L(E)$, барча фундаментал кетма-кетликлар тўпламини $\Phi(E)$ деб белгилайлик.

Юқорида биз келтирган Коши теоремаси R , R^m , $C[a, b]$ лар учун $L(E) = \Phi(E)$ эканини билдиради.

15.1-төрима. *Ихтиёрий (E , ρ) метрик фазо учун $L(E) \subset \Phi(E)$, яъни-ҳар қандай яқинлашувчи кетма-кетликлар фундаментал бўлади.*

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, $\{x_n\}$ ($x_n \in E$, $n = 1, 2, \dots$) яқинлашувчи бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (a \in E)$$

бўлсин. Яъни $\forall \varepsilon > 0$ сон олингданда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ учун

$$\rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгизлик бажарилсин. Масофа таърифидаги З°-шартдан фойдаланиб, $\forall n > n_0$ ва $\forall m > n_0$ лар учун

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Бу эса, $\{x_n\}$ нинг фундаментал кетма-кетлик эканини билдира ди. Теорема исбот бўлди.

Аммо $\Phi(E) \subset L(E)$ муносабат, яъни ҳар қандай фундаментал кетма-кетликнинг яқинлашувчи бўлиши ихтиёрий метрик фазо учун тўғри бўлавермайди. Бошқача айтганда шундай метрик фазо ва унда шундай фундаментал кетма-кетлик топиладики, у яқинлашувчи бўлмайди.

Мисол сифатида (Q , ρ) фазони ва ундаги (15.5) кетма-кетликни қарашимиз мумкин. Бу кетма-кетлик, кўрсатганимиздек, фундаментал бўлса-да, яқинлашувчи эмас. Яна бир мисол келтирайлик.

($C[0; 1]$, ρ_1) метрик фазода қўйидаги $\{x_n\}$:

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

кетма-кетликни олайлик. Бу фундаментал кетма-кетлик бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil$ деб олинса, унда $\forall n > n_0$, $\forall m > n_0$ учун

$$\begin{aligned} \rho^2(x^n, x^m) &= \int_0^1 (x^n - x^m)^2 dx = \int_0^1 [x^{2n} + x^{2m} - 2x^{n+m}] dx = \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2m+1} - 2 \frac{1}{n+m+1} < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2m} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n_0} \leq \varepsilon^2 \end{aligned}$$

ва демак,

$$\rho(x^n, x^m) < \varepsilon$$

бўлади.

Бироқ бу $\{x^n\}$ кетма-кетлик ($C[0, 1]$, ρ) метрик фазода яқинлашувчи эмас (чунки

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{агар } 0 \leq x < 1 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлиб, $f(x) \notin C[a, b]$).

Шундай қилиб, байзи бир метрик фазоларда ҳар қандай фундаментал кетма-кетлик яқинлашувчи бўлар экан, байзи бир метрик фазоларда ҳар қандай фундаментал кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи бўлавермас экан.

15.10-та ўриф (E , ρ) метрик фазо берилган бўлсин. Агар бу фазода $\Phi(E) \subset L(E)$ бўлса, яъни ҳар қандай $\{x_n\}$ фундаментал кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, (E , ρ) тўлиқ метрик фазо деб аталади.

Мисоллар. Юқорида, 1- § да келтирилган (R, ρ) , (R^m, ρ) , $(C [a, b], \rho)$, (m, ρ) , (c, ρ) метрик фазолар түлиқ метрик фазолар бўлади.

(R, ρ) фазонинг түлиқлиги 1-қисм, 3-боб, 10- § да келтирилган теоремадан, (R^m, ρ) фазонинг түлиқлиги 12-боб, 2- § да келтирилган теоремадан $(C [a, b], \rho)$ метрик фазонинг түлиқлиги эса 14- боб, 2- § да келтирилган теоремадан келиб чиқади.

Энди (m, ρ) метрик фазонинг тўл иқлигини кўрсатамиз. Бу метрик фазода $\{x_n\}$ ($x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots) \in m$) кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлсин. Фундаменталлик таърифидан: $\forall \varepsilon > 0$ сон олингандан ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$, $\forall p > n_0$ учун

$$\rho(x_n, x_p) < \varepsilon,$$

яъни

$$\rho(x_n, x_p) = \sup_k |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(p)}| < \varepsilon$$

бўлади. Демак, $\forall k \in N$ ҳамда $\forall n > n_0$, $\forall p > n_0$ учун

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(p)}| < \varepsilon$$

бўлади. Бундан $\{\xi_k^{(n)}\} = \{\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots\}$ сонлар кетма-кетлигининг фундаментал кетма-кетлик экани келиб чиқади. Унда Коши теоремасига мувофиқ (1-қисм, 3- боб, 10- §) бу кетма-кетлик яқинлашувчи бўлади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k \quad (\forall k \in N). \quad (15.6)$$

Энди $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots)$ нинг m тўпламга тегишли бўлишини кўрсатамиз.

Аввало, $x_n \in m$ эканлигидан шундай M_n сон мавжудки, $\forall k \in N$ учун

$$|\xi_k^{(n)}| < M_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

бўлади. Иккинчи томондан $\{x_n\}$ нинг фундаменталлигидан топамиз:

$\forall \varepsilon > 0$ олингандан ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ ва $\forall p > n_0$ учун $\forall k \in N$ да

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(p)}| < \varepsilon \quad (15.7)$$

бўлади. Юқоридаги тенгизликлардан $\forall n > n_0$ учун

$$M_{n_0+1} - \varepsilon < \xi_k^{(n)} < M_{n_0+1} + \varepsilon$$

муносабатларга эга бўламиз. Бу тенгизликлардан, $n \rightarrow \infty$ да $\forall k \in N$ учун

$$M_{n_0+1} - \varepsilon \leq \xi_k < M_{n_0+1} + \varepsilon$$

келиб чиқади. Демак, $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots)$ кетма-кетлик чегараланган экан, яъни $x \in m$.

Юқоридаги (15.7) муносабатдан $n > n_0$ бўлганда $\sup_k |\xi_k^{(n)} - \xi_k| \leq \varepsilon$ эканлиги келиб чиқади. Бу эса $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ бўлишини ифодалайди. Демак, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$, яъни $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи.

Шундай қилиб, (m, ρ) метрик фазодаги ихтиёрий $\{x_n\}$ фундаментал кетма-кетликнинг яқинлашувчи бўлишини кўрсатдик. Демак, (m, ρ) — тўлиқ метрик фазо.

Худди шунга ўхшаш (c, ρ) метрик фазонинг тўлиқлиги кўрсатилади.

Юқорида келтирилган мисоллар (Q, ρ) ва $(C [0,1], \rho_1)$ метрик фазоларнинг тўлиқ эмаслигини кўрсатади. 15.1-теорема ҳамда тўлиқ метрик фазо таърифидан қўйидаги теоремага келамиз.

15.2-ге орема (Коши теоремаси). (E, ρ) тўлиқ метрик фазо бўлсин. Бу фазода $\Phi(E) = L(E)$, яъни $\{x_n\}$ ($x_n \in E$, $n = 1, 2, \dots$) кетма-кетликнинг яқинлашувчи бўлиши учун унинг фундаментал бўлиши сарур ва етарли.

Тўлиқ метрик фазола рда R даги ичма-ич жойлашган сегментлар принципи (1-қисм, 3-боб, 8- §), R^m даги ичма-ич жойлашган шарлар принципи (12-боб, 2- §) каби принцип ўринли бўлади.

(E, ρ) метрик фазо берилган бўлсин. Марказлари x_n ($x_n \in E, n = 1, 2, \dots$) нуқтадарда, радиуслари r_n ($r_n \in R_+, n = 1, 2, \dots$) бўлган ушбу

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1(x_1, r_1) = \{x \in E : \rho(x, x_1) \leq r_1\}, \\ S_2 &= S_2(x_2, r_2) = \{x \in E : \rho(x, x_2) \leq r_2\}, \\ &\dots \\ S_n &= S_n(x_n, r_n) = \{x \in E : \rho(x, x_n) \leq r_n\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

шарлар кетма-кетлиги $\{S_n\}$ берилган бўлсин. Агар бу кетма-кетлик учун қуйидаги

$$S_1 \supset S_2 \supset \dots \supset S_n \supset \dots$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $\{S_n\}$ — ичма-ич жойлашган шарлар кетма-кетлиги деб аталади.

15.3-төрима (E, ρ) — тўйлиқ метрик фазо бўлсин. Бу фазода $\{S_n\}$ ичма-ич жойлашган шарлар кетма-кетлиги бўлсин. Агар $n \rightarrow \infty$ да шар радиусларидан иборат $\{r_n\}$ кетма-кетликнинг лимити ноль бўлса, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0,$$

у ҳолда барча шарларга тегишили бўлган x_0 ($x_0 \in E$) нуқта мавжуд ва ягонадир.

Бу теореманинг исботи 12-боб, 2-§ да келтирилган R^n даги ичма-ич жойлашган шарлар ҳақидаги теореманинг исботига ўхшашибди.

4-§. Больцано—Вейерштрасс теоремаси. Компакт метрик фазолар

Биз юқорида R даги (1-қисм, 3-боб, 9-§), R^m даги (12-боб, 2-§) ҳар қандай чегараланган кетма-кетликтан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкинлигини (Больцано—Вейерштрасс теоремасини) кўриб ўтдик. Математик анализнинг бу муҳим теоремаси и хотиёрий метрик фазо учун ҳам ўринли бўладими дебан савол туғилади.

Аввало, ушбу бобнинг 1-§ ида ихтиёрий метрик фазода берилган тўпламнинг чегараланганлиги тушунчаси билан танишганимизни эслатиб ўтамиш.

Биз, шунингдек, ихтиёрий яқинлашувчи кетма-кетлик чегараланган тўплам ташкил қилишини ҳам кўрган эдик. Юқорида айтилганига кўра, $(R, \rho), (R^m, \rho)$ метрик фазолар да ҳар қандай чегараланган кетма-кетликтан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин, яъни бу метрик фазоларда Больцано—Вейерштрасс теоремаси ўринли бўлади.

Бироқ бу ҳол ҳамма метрик фазоларда ҳам ўринли бўлавермайди. Масалан, (m, ρ) метрик фазони олайлик. Бу фазода ушбу

$$(1, 0, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, 0, \dots), (0, 0, 1, 0, \dots), \dots \quad (15.8)$$

кетма-кетликни қарайлик. Бу кетма-кетликнинг барча ҳадлари қуйидаги

$$\{x \in m : \rho(x, 0) \leq 1\} \quad (0 = (0, 0, 0, \dots))$$

шарда жойлашгандир. Демак, (15.8) кетма-кетлик чегараланган. Айни пайтда бу (15.8) кетма-кетликтан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиб бўлмайди. Чунки (15.8) кетма-кетликнинг ихтиёрий икки x_k ва x_n ($k \neq n$) элементлари орасидаги масофа ҳар доим

$$\rho(x_k, x_n) = 1 \quad (k \neq n)$$

бўлади.

Демак, баъзи бир метрик фазоларда, ундаги ихтиёрий чегараланган кетма-кетликтан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажрагиши мумкин (масалан, $(R, \rho), (R^m, \rho)$ фазолар), баъзи бир метрик фазоларда эса, ундаги ҳар қандай чегараланган кетма-кетликтан ҳам яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиб бўлавермас экан (масалан, (m, ρ) метрик фазо).

15.11-тадириф. (E, ρ) — ихтиёрий метрик фазо. Агар бу фазодаги ҳар қандай чегараланган $\{x_n\}$ ($x_n \in E, n = 1, 2, \dots$) кетма-кетликтан яқинлашувчи $\{x_{n_k}\}$ ($x_{n_k} \in E, k = 1, 2, \dots ; n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$) қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин бўлса, (E, ρ) компакт метрик фазо деб аталади. Акс ҳолда, яъни (E, ρ) да шундай чегараланган кетма-кетлик топилсанки, ундан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин бўлмаса, (E, ρ) компакт бўлмаган фазо деб аталади.

Шундай қилиб, юқоридаги R, R^m фазолар компакт фазолардир. (m, ρ) фазо компакт бўлмаган фазодир.

ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАР

Биз 1-қисмнинг 9-бобида $[a, b]$ оралиқда берилған $f(x)$ функцияниянг Риман интегралы тушунчасини киритдик ва батағсил ўргандик. Интегралнинг баёнида оралиқнинг чекилилги ва функцияниянг чегараланганилиги бевосита иштироқ этди. Биз күрдикки, ушбу таъриф маъносидаги интегралланувчи функциялар синфи анча кенг экан.

Хўш, $[a, +\infty)$ (ёки $(-\infty, a]$, ёки $(-\infty, +\infty)$) оралиқда берилған $f(x)$ функцияниянг интегралы ёки $[a, b]$ да берилған, аммо чегараланмаган $f(x)$ функцияниянг интегралы тушунчаларини ҳам киритиб бўлармикан? Яъни аввалги интеграл тушунчасини маълум маъноларда умумлаштириш имконияти бормиқан деган савол туғилади. Албатта, умумлаштириш шундай бўлиши керакки, натижада Риман интегралнинг асосий хоссалари ўз кучини сақлаб қолсин.

Биз ушбу бобда ана шундай умумлашган (ёки хосмас) интегралларни киритамиз ва ўрганамиз.

1- §. Чегаралари чексиз хосмас интеграллар

1. Чегаралари чексиз хосмас интеграл тушунчаси. Бирор $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда берилған бўлиб, бу оралиқнинг исталған $[a, t]$ ($a < t < +\infty$) қисмидаги интегралланувчи (қаралсин, 1-қисм, 9-боб), яъни ихтиёрий t ($t > a$) учун ушбу

$$\int_a^t f(x) dx$$

интеграл мавжуд бўлсин. Бу интеграл, қаралаётган функция ҳамда олинган t га боғлиқ бўлиб, тайин $f(x)$ учун у фақат t ўзгарувчининг функцияси бўлади:

$$\int_a^t f(x) dx = F(t). \quad (16.1)$$

Натижада (16.1) муносабат билан аниқланған $F(t)$ ($t \in (a, +\infty)$) функцияга эга бўламиз.

16.1-таъриф. Агар $t \rightarrow +\infty$ да $F(t)$ функцияниянг лимити мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функцияниянг $[a, +\infty)$ оралиқдаги хосмас интегралы деб аталади ва у

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx. \quad (16.2)$$

16.2-таъриф. Агар $t \rightarrow +\infty$ да $F(t)$ функцияниянг лимити мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (16.2) хосмас интеграл яқинлашувчи дейи-

лади, $f(x)$ эса чексиз $[a, +\infty)$ оралиқда интегралланувчи функция деб аталади.

Агар $t \rightarrow +\infty$ да $F(t)$ функцияның лимити чексиз бўлса, (16.2) интеграл узоқлашувчи деб аталади.

Функцияның $(-\infty, a]$ ва $(-\infty, +\infty)$ оралиқлар бўйича хосмас интеграллари ҳам юқоридаги каби таърифланади.

$f(x)$ функция $(-\infty, a]$ оралиқда берилган бўлиб, бу оралиқнинг исталган $[\tau, a]$ $(-\infty < \tau < a)$ қисмида интегралланувчи, яъни

$$\int_{\tau}^a f(x) dx = \Phi(\tau)$$

интеграл мавжуд бўлсин.

16.3-таъриф, $\tau \rightarrow -\infty$ да $\Phi(\tau)$ функцияның лимити $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Phi(\tau)$ мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функцияның $(-\infty, a]$ оралиқдаги хосмас интеграли деб аталади ва у

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Phi(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \int_{\tau}^a f(x) dx. \quad (16.3)$$

16.4-таъриф. Агар $\tau \rightarrow -\infty$ да $\Phi(\tau)$ функцияның лимити мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (16.3) интеграл яқинлашувчи дейилади, $f(x)$ эса чексиз $(-\infty, a]$ оралиқда интегралланувчи функция деб аталади.

Агар $\tau \rightarrow -\infty$ да $\Phi(\tau)$ функцияның лимити чексиз бўлса, (16.3) интеграл узоқлашувчи деб аталади.

$f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, бу оралиқнинг исталган $[\tau, t]$ $(-\infty < \tau < t < +\infty)$ қисмида интегралланувчи, яъни

$$\int_{\tau}^t f(x) dx = \psi(\tau, t)$$

интеграл мавжуд бўлсин.

16.5-таъриф. $\tau \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$ да $\psi(\tau, t)$ функцияның лимити

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} \psi(\tau, t)$$

мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функцияның чексиз $(-\infty, +\infty)$ оралиқдаги хосмас интеграли деб аталади ва у

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{\tau \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} \psi(\tau, t) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} \int_{\tau}^t f(x) dx. \quad (16.4)$$

16.6-таъриф. Агар $\tau \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$ да $\psi(\tau, t)$ функциянинг лимити мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (16.4) интеграл яқинлашувчи дейилади, $f(x)$ эса чексиз $(-\infty, +\infty)$ оралиқда интегралланувчи функция деб аталади.

Агар $\tau \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$ да $\psi(\tau, t)$ функциянинг лимити чексиз бўлса, (16.4) интеграл узоқлашувчи деб аталади.

Аниқ интеграл хоссасига кўра, $\forall a \in R$ учун

$$\int_{\tau}^t f(x) dx = \int_{\tau}^a f(x) dx + \int_a^t f(x) dx$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ нинг мавжуд бўлиши $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ ва $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралларнинг ҳар бирининг алоҳида-алоҳида мавжуд бўлишидан келиб чиқади. Бинобарин, уни қўйидагича ҳам аниқлаш мумкин бўлади:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (\forall a \in R)$$

16.1-эслатма. Юқорида $[a, +\infty)$ ($(-\infty, a]$; $(-\infty, +\infty)$) да берилган $f(x)$ функциянинг хосмас интеграли тушунчаси $F(t)$ ($\Phi(\tau)$, $\psi(\tau, t)$) нинг $t \rightarrow +\infty$, $(\tau \rightarrow -\infty, t \rightarrow +\infty)$ да лимити мавжуд бўлган ҳоллар учун киритилди ва унинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчилиги таърифланди. Маълумки, $F(t)$ ($\Phi(\tau)$, $\psi(\tau, t)$) нинг $t \rightarrow +\infty$ ($\tau \rightarrow -\infty, t \rightarrow +\infty$) даги лимити мавжуд бўлмаган ҳол ҳам бўлиши мумкин. Бу ҳолда биз шартли равища $f(x)$ нинг хосмас интеграли

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \left(\int_{-\infty}^a f(x) dx, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right)$$

узоқлашувчи деб қабул қиласиз.

Шундай қилиб, хосмас интеграл тушунчаси аввал ўрганилган Риман интеграли тушунчасидан яна 6ир марта лимитга ўтиш амали орқали юзага келар экан. Қулайлик учун қўйида биз кўпинча «хосмас интеграл» дейиш ўрнига «интеграл» деб кетаверамиз.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

интегрални қарайлик. Таърифига кўра

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x} dx$$

бўлиб,

$$F(t) = \int_0^t e^{-x} dx = -e^{-t} + 1$$

бўлганлигидан эса

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x} dx = 1$$

бўлади. Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

2. Қуийдаги

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$$

интегрални қарайлик. Хосмас интеграл таърифига кўра

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \int_{\tau}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} (-\arctg \tau) = \frac{\pi}{2}$$

бўлади. Демак, интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

3. Ушбу

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (a > 0, \alpha > 0) \quad (16.5)$$

интегрални яқинлашувчиликка текширинг. Равшанки, $[a, t]$ ($a > 0$) оралиқда $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ функция узлуксиз бўлиб, $\int_a^t \frac{dx}{x^\alpha}$ мавжуд бўлади. Қуийдаги ҳолларни қарайлик:

а) $\alpha > 1$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (t^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) = \frac{1}{\alpha-1} a^{1-\alpha}$$

бўлади. Демак, $\alpha > 1$ бўлганда берилган интеграл яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} a^{1-\alpha}$$

бўлади.

б) $\alpha < 1$ ва $\alpha = 1$ бўлганда эса, мис равишда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (t^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln t - \ln a) = +\infty$$

бўлади. Демак, $\alpha \leq 1$ бўлганда берилган интеграл узоқлашувчи бўлади.

Шундай қилиб

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (a > 0, \alpha > 0)$$

хосмас интеграл $\alpha > 1$ бўлганда яқинлашувчи, $0 < \alpha < 1$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.

4. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \cos x \, dx$$

хосмас интеграл, юқоридаги келишувимизга кўра узоқлашувчидир, чунки $t \rightarrow +\infty$ да

$$F(t) = \int_0^t \cos x \, dx = \sin t$$

функция лимитга эга эмас.

Юқорида $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ хосмас интеграл $F(t) = \int_a^t f(x) \, dx$ интегралнинг $t \rightarrow +\infty$ даги лимити сифатида таърифланди. Сўнгра бу хосмас интеграл мавжуд (мавжуд эмас) дейилиши ўрнига хосмас интеграл яқинлашувчи (узоқлашувчи) дейилди. Бундай дейилишининг боиси, бир томондан, хосмас интегралнинг лимитга ўтиш амали билан таърифланиши бўлса, иккинчи томондан унинг, қаторлар билан ўхшашлигидир. Маълумки, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ қатор $F(n) = \sum_{k=1}^n a_k$ қисмий йиғиндининг $n \rightarrow +\infty$ даги лимити сифатида таърифланиб, бу

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

лимит чекли бўлганда қатор яқинлашувчи, чексиз бўлганда ёки мавжуд бўлмаганда эса қатор узоқлашувчи деб аталар эди.

Биз қўйида хосмас интегралларнинг турли хоссаларини ўрганар эканмиз, уларни, асосан, $f(x)$ функцияниянг $[a, +\infty)$ оралиқ бўйича олинган $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ интеграти учун келтирамиз. Бу хоссаларни $\int_{-\infty}^a f(x) \, dx$ ёки $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$ каби хосмас интеграллар учун ҳам тегишлича баён этиш мумкин. Бу ишни китобхоннинг ўзига ҳавола қиласиз.

2. Яқинлашувчи хосмас интегралларнинг хоссалари. Риман интегралини умумлаштиришдан ҳосил қилинган яқинлашувчи хосмас интеграллар ҳам шу Риман интеграти хоссалари сингари хоссаларга эга.

$f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлсин.

1°. Агар $f(x)$ функцияниянг $[a, +\infty)$ оралиқ бўйича $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ ин-

тегралы яқинлашувчи бўлса, бу функциянинг $[b, +\infty)$ ($a < b$) оралиқ бўйича $\int_b^{+\infty} f(x) dx$ интегралы ҳам яқинлашувчи бўлади ва аксинча.

Бунда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx \quad (16.6)$$

бўлади.

Исбот. Аниқ интеграл хоссасига кўра

$$\int_a^t f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^t f(x) dx \quad (a < t < \infty) \quad (16.7)$$

бўлади.

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи, яъни

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

лимит мавжуд ва чекли бўлсин. Юқоридаги (16.7) муносабатни ушбу

$$\int_b^t f(x) dx = \int_a^t f(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

кўринишда ёзиб, $t \rightarrow +\infty$ да лимитга ўтиб қўйидагини топамиз:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_b^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx.$$

Бундан эса $\int_b^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчи ва

$$\int_b^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx,$$

яъни

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

эканлиги келиб чиқади.

Худди шунга ўхшаш $\int_b^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчи бўлиши-
дан $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг ҳам яқинлашувчи ҳамда (16.6) формула-
нинг ўринли бўлиши кўрсатилади.

2°. Агар $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} cf(x) dx$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^{+\infty} c f(x) dx = c \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

бўлади, бунда $c = \text{const.}$

3°. Агар $\forall x \in [a, +\infty)$ да $f(x) \geq 0$ бўлса, бу функциянинг хосмас интеграли

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \geq 0$$

бўлади.

Энди $f(x)$ функция билан бир қаторда $g(x)$ функция ҳам $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлсин.

4°. Агар $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ва $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)] dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx \pm \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

бўлади.

16.1-натижада. Агар $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, $\int_a^{+\infty} f_k(x) dx$ ($k = 1, 2, \dots, n$) интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)] dx \quad (c_k = \text{const}, k = 1, 2, \dots, n)$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)] dx &= c_1 \int_a^{+\infty} f_1(x) dx + c_2 \int_a^{+\infty} f_2(x) dx + \\ &+ \dots + c_n \int_a^{+\infty} f_n(x) dx \end{aligned}$$

бўлади.

5°. Агар $\forall x \in [a, +\infty)$ учун $f(x) \leq g(x)$ тенгсизлик ўринли бўлиб, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ва $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

бўлади.

Юқорида келтирилган 2° — 5°-хоссалар хосмас интеграл ва унинг яқинлашувчилиги таърифларидан бевосита келиб чиқади.

Үртә қиймат ҳақидағи теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, +\infty)$ оралиқда берилған бўлсин. Шунингдек $f(x)$ функция шу оралиқда чегараланган, яъни шундай m ва M ўзгармас сонлар мавжудки, $\forall x \in [a, +\infty)$ учун

$$m \leq f(x) \leq M$$

бўлиб, $g(x)$ функция эса $[a, +\infty)$ да ўз ишорасини ўзгартирмасин яъни $\forall x \in [a, +\infty)$ учун ҳар доим $g(x) \geq 0$ ёки $g(x) \leq 0$ бўлсин.

6°. Агар $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$ ва $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас μ ($m \leq \mu \leq M$) сон топиладики,

$$\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx = \mu \int_a^{+\infty} g(x) dx \quad (16.8)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Юқорида келтирилған $g(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда мағфий бўлмасин: $g(x) \geq 0$ ($\forall x \in [a, +\infty)$). У ҳолда

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

бўлиб, унда эса (Риман интегралининг тегишли хоссасига кўра)

$$m \int_a^t g(x) dx \leq \int_a^t f(x) g(x) dx \leq M \int_a^t g(x) dx \text{ бўлишини топамиз. Кейинги,}$$

тенгсизликларда $t \rightarrow +\infty$ да лимитга ўтсанак,

$$m \int_a^{+\infty} g(x) dx \leq \int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx \leq M \int_a^{+\infty} g(x) dx \quad (16.9)$$

эканлиги келиб чиқади.

Икки ҳолни қарайлик:

a) $\int_a^{+\infty} g(x) dx = 0$ бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx = 0$$

бўлиб, бунда μ деб $m \leq \mu \leq M$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий сонни олиш мумкин.

b) $\int_a^{+\infty} g(x) dx > 0$ бўлсин. Бу ҳолда (16.9) тенгсизликлардан

$$m \leq \frac{\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx}{\int_a^{+\infty} g(x) dx} \leq M$$

бўлиши келиб чиқади. Агар

$$\mu = \frac{\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx}{\int_a^{+\infty} g(x) dx}$$

деб олсак, унда

$$\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx = \mu \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

бўлади.

$[a, +\infty)$ оралиқда $g(x) \leq 0$ бўлганда (16.8) формула худди шунга ўхшаш исботланади. Бу бўлганда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги деб ҳам юритилади.

2-§. Чегаралари чексиз хосмас интегралларнинг яқинлашувчилиги

Энди $[a, +\infty)$ оралиқда берилган $f(x)$ функция $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интегралининг яқинлашувчилиги шартини топиш билан шуғулланамиз.

Маълумки, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги $t \rightarrow +\infty$ да

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx \quad (t > a)$$

функцияниң чекли лимитга эга бўлиши билан таърифланар эди. Бино- барин, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги шарти, $t \rightarrow +\infty$ да

$F(t)$ функцияниң чекли лимитга эга бўлиши шартидан иборат. Биз функцияниң чекли лимитга эга бўлиши ҳақидаги теоремани дастлаб монотон функция, сўнг ихтиёрий функция учун келтирган эдик (1-қисм, 4-боб, 5-§, 6-§).

Аввало $[a, +\infty)$ оралиқда берилган ҳамда $\forall x \in [a, +\infty)$ да $f(x) \geq 0$ бўлган функция хосмас интегралининг яқинлашувчилигини ифодалайдиган теоремани келтирамиз.

1. Манфий бўлмаган функция хосмас интегралининг яқинлашувчилиги. $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, $\forall x \in [a, +\infty)$ да $f(x) \geq 0$ бўлсин. Бу $f(x)$ функцияни $[a, +\infty)$ оралиқнинг исталган $[a, t]$ ($a < t < +\infty$) қисмida интегралланувчи деб қарайлик. Унда $a < t_1 < t_2 < +\infty$ лар учун

$$\begin{aligned} F(t_2) &= \int_a^{t_2} f(x) dx = \int_a^{t_1} f(x) dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx = F(t_1) + \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx \geq F(t_1) \end{aligned}$$

бўлади. Демак, $f(x) \geq 0$ бўлганда $F(t)$ функция ўсувчи бўлар экан. Биноба рин, $t \rightarrow +\infty$ да $F(t)$ ҳамма вақт лимитга (чекли ёки чексиз) эга бўлади.

Монотон функцияниң лимити ҳақидаги 4.4-теоремадан (1-қисм, 4-боб, 5-§) фойдаланиб, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги шартини ифодалайдиган қуйидаги теоремага келамиз.

16.1-теорема. $f(x)$ ($f(x) \geq 0$) функция хосмас интеграли $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

нинг яқинлашувчи бўлиши учун, $\{F(t)\}$ нинг юқоридан чегараланган, яъни $\forall t \in (a, +\infty)$ учун

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx \leq C \quad (C = \text{const})$$

бўлиши зарур ва етарли.

Одатда бу теорема $f(x)$ ($f(x) \geq 0$) функция хосмас интеграли $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ нинг яқинлашувчилик критерийси деб аталади.

Яна ўша теоремага асосан қўйидаги натижани айта оламиз.

16.2-натижа. Агар $\{F(t)\} = \{\int_a^t f(x) dx\}$ тўплам юқоридан чегараланмаган бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади.

2. Манфий бўлмаган функциялар хосмас интегралларини таққослаш ҳақида теоремалар.

16.2-теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, $\forall x \in [a, +\infty)$ да

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad (16.10)$$

бўлсин. У ҳолда $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ яқинлашувчи бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ узоқлашувчи бўлса, $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ ҳам узоқлашувчи бўлади.

Исбот. $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлсин. Унда 16.1-теоремага кўра $\{G(t)\} = \{\int_a^t g(x) dx\}$ тўплам юқоридан чегараланган, яъни

$$G(t) = \int_a^t g(x) dx \leq C \quad (C = \text{const})$$

бўлади. (16.10) муносабатга асосан $\forall t$ учун ($t \in (a, +\infty)$)

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx \leq \int_a^t g(x) dx = G(t) \leq C$$

бўлиб, ундан яна 16.1-теоремага кўра $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги келиб чиқади.

Энди $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл узоқлашузчи бўлсин. У ҳолда $\{F(t)\} = \{\int_a^t f(x) dx\}$ юқоридан чегараланмаган бўлиб,

$$\int_a^t f(x) dx \leq \int_a^t g(x) dx$$

тengsизликдан эса $\{G(t)\} = \left\{ \int_a^t g(x) dx \right\}$ нинг ҳам юқоридан чегараланмаганлигини топамиз. Демак, юқорида келтирилган натижага кўра, $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграл — узоқлашувчи. Теорема исбот бўлди.

16.3-теорема. $[a, +\infty)$ да $f(x)$ ва $g(x)$ манфий бўлмаган функциялар берилган бўлсин. $x \rightarrow +\infty$ да $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбатнинг лимити k бўлсин:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Агар $k < +\infty$ ва $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади. Агар $k > 0$ ва $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграл узоқлашувчи бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл ҳам узоқлашувчи бўлади.

Исбот. $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлиб, $k < +\infty$ бўлсин. Лимит таърифига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олингандан ҳам, шундай t_0 ($t_0 > a$) тошлидикни, барча $x > t_0$ учун

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| < \varepsilon,$$

яъни

$$(k - \varepsilon)g(x) < f(x) < (k + \varepsilon)g(x) \quad (16.11)$$

бўлади.

Шартга кўра $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграл яқинлашувчи. У ҳолда $\int_a^{+\infty} (k + \varepsilon)g(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади. (16.11) tengsизликни эътиборга олиб, сўнг 16.2-теоремадан фойдаланиб, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл нинг яқинлашувчилигини топамиз.

Энди $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграл узоқлашувчи бўлиб, $k > 0$ бўлсин. Агар $k > k_1 > 0$ tengsизликни қаноатлантирувчи k_1 сон олинса ҳам, шундай t'_0 ($t'_0 > a$) тошлидикни, барча $x > t'_0$ учун

$$\frac{f(x)}{g(x)} > k_1$$

бўлади. Демак, $x > t'_0$ да

$$g(x) < \frac{1}{k_1} f(x)$$

Бўлиб, ундан 16.2-теоремага асосан $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг узоқлашувчилиги келиб чиқади. Теорема тўлиқ исбот бўлди.

16.3-натижада. 16.3-теорема шартларида агар $0 < k < +\infty$ бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ва $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграллар бир вақтда ёки яқинлашувчи, ёки узоқлашувчи бўлади.

Одатда, бирор (мураккаброқ) хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги ҳақида аввалдан яқинлашувчилиги ёки узоқлашувчилиги маълум бўлган хосмас интеграл билан солиштириб хуроса чиқарилади. Ҳусусан, текширилаётган $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ($f(x) \geq 0$) интегрални $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ ($a > 0$, $\alpha > 0$, қаралсин, (16.5)) интеграл билан солиштириб қўйидаги аломатларни ҳосил қиласиз.

1°. Агар x нинг етарли катта қийматларида ($x > x_0 > a$)

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}$$

Бўлса, у ҳолда $\forall x > x_0$ учун $\varphi(x) \leq c < +\infty$ ва $\alpha > 1$ бўлганда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи, $\varphi(x) \geq c > 0$ ва $\alpha \leq 1$ бўлганда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл узоқлашувчи бўлади.

Исбот. Аргумент x нинг етарли катта қийматларида

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} \quad (x > x_0)$$

бўлиб, $\varphi(x) \leq c < +\infty$ ва $\alpha > 1$ бўлсин. У ҳолда

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} \leq \frac{c}{x^\alpha}$$

бўлиб, $\alpha > 1$ да $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ интегралнинг яқинлашувчилигига ҳамда 16.2-теоремага асосланиб, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз.

Агар $\varphi(x) \geq c > 0$ ва $\alpha \leq 1$ бўлса, унда $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ интегралнинг узоқлашувчилигини эътиборга олиб, яна 16.2-теоремага кўра $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг узоқлашувчилигини топамиз. 1°-аломат исбот бўлди.

2°. Агар $x \rightarrow +\infty$ да $f(x)$ функция $\frac{1}{x}$ га нисбатан α ($\alpha > 0$) тартибли чексиз кичик бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл $\alpha > 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \leq 1$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.

Бу алматтинг түрлилги юқорида келтирилган 16.2-теоремадан ундағы $g(x)$ функцияни $\frac{1}{x^\alpha}$ деб олининишидан келиб чиқади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

интегрални қарайлык. Равшанки, ихтиёрий $x \geq 1$ учун

$$e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

бўлади. Агар $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ ҳамда $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ интегралнинг яқинлашувчилигини эътиборга олсак, унда 1°- алматга кўра берилган интегралнинг яқинлашувчи эканини топамиз.

2. Қўйидаги

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 + x}}$$

интегрални қарайлык. Бу интеграл остидаги функция учун

$$\frac{1}{x^3 \sqrt{x^2 + x}} = \frac{1}{x^{5/3} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}}} \leq \frac{1}{x^{5/3}}, \quad x \geq 1$$

бўлиб, юқорида келтирилган алматга кўра берилган интеграл яқинлашувчи бўлади.

3. Ихтиёрий функция хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги. Биз $[a, +\infty)$ оралиқда берилган $f(x)$ функцияни шу

оралиқ бўйича олинган $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интегралини

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

функция $t \rightarrow +\infty$ да чекли лимитга эга бўлган ҳолда яқинлашувчи деб атадик. Демак, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги

тушунчasi, биз аввал ўрганган тушунча — функцияниң чекли лимити орқали ифодаланди. Бинобарин, бу интегралнинг яқинлашувчилик шарти $F(t)$ функцияниң $t \rightarrow +\infty$ даги чекли лимити мавжуд бўлиши шартдан иборат бўлади.

Мазкур курснинг 1-қисм, 4-боб, 6-§ ида келтирилган теоремадан (Коши теоремасидан) фойдаланиб, қўйидаги теоремага келамиз.

16.4-теорема (Коши теоремаси). Қўйидаги хосмас интеграл-

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

нинг яқинлашувчи бўлиши учун, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $t_0 (t_0 > a)$ сони топилиб, $t' > t_0$, $t'' > t_0$ бўлган ихтиёрий t' , t'' лар учун

$$|F(t'') - F(t')| = \left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилши зарур ва етарли.

Бу теорема назарий аҳамиятга эга бўлган муҳим теорема бўлиб, ундан хосмас интегралларнинг яқинлашувчилигини аниқлашда фойдаланиш қийин бўлади (аввалги Коши критерийлари сингари).

16.5-теорема. Агар $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Шартга кўра $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интеграл яқинлашувчи. 16.4-теоремага асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $t_0 (t_0 > a)$ топиладики, $t' > t_0$, $t'' > t_0$ ($t'' > t'$) бўлганда $\int_{t'}^{t''} |f(x)| dx < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади.

Аммо

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| \leq \int_{t'}^{t''} |f(x)| dx$$

тенгсизликни эътиборга олсан, у ҳолда

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

бўлишини топамиз.

Шундай қилиб, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $t_0 (t_0 > a)$ топиладики, $t'' > t_0$, $t' > t_0$ бўлганда

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

бўлади. Бундан 16.4-теоремага асосан $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчилигини топамиз. Теорема исбот бўлди.

16.2-эслатма. $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интегралнинг узоқлашувчи бўлишидан $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг узоқлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди, яъни баъзи функциялар учун $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ узоқлашувчи, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ эса яқинлашувчи бўлади.

Масалан, ушбу

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{[x]} dx$$

интеграл яқынлашувчи, аммо

$$\int_{-1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{[x]}}{[x]} \right| dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{[x]}$$

эса узоклашувчидир.

16.7-таъриф. Агар $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интеграл яқынлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ абсолют яқынлашувчи интеграл деб аталади, $f(x)$ функция эса $[a, +\infty)$ оралиқда абсолют интегралланувчи функция дейилади.

16.8-таъриф. Агар $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл яқынлашувчи бўлиб, $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интеграл узоклашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ шартли яқынлашувчи интеграл дейилади.

Шундай қилиб, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интегрални яқынлашувчиликка текшириш қўйидаги тартибда олиб борилиши мумкин:

$\forall x \in [a, +\infty)$ да $f(x) \geqslant 0$ бўлсин. Бу ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқынлашувчи (узоклашувчи) лигини 2-§ да келтирилган аломатлардан фойдаланиб топиш мумкин. Бошқа ҳолларда $f(x)$ функциянинг $|f(x)|$ абсолют қийматининг $[a, +\infty)$ оралиқ бўйича $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интегралини қараймиз. Равшанки, кейинги интегралга нисбатан яна 2-§ даги алломатларни қўллаш мумкин. Агар бирор алломатга кўра $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интегралнинг яқынлашувчилиги топилса, унда 16.5-теоремага кўра берилган $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг ҳам яқынлашувчилиги (ҳатто абсолют яқынлашувчилиги) топилган бўлади.

Агар бирор алломатга кўра $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интегралнинг узоклашувчилигини аниқласак, айтиш мумкинки, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ёки узоклашувчи бўлади, ёки шартли яқынлашувчи бўлади ва буни аниқлаш қўшимча таҳлил қилишни талаб этади.

Пировардида, хосмас интегралларнинг яқынлашувчилигини аниқлашда кўп қўлланадиган алломатлардан бирини келтирамиз.

16.6-теорема (Дирихле аломати). $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, улар қўйидаги шартларни бажарсан:

- 1) $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда үзлуксиз ва унинг шу оралиқдаги бошланғыч $F(x)$ ($F'(x) = f(x)$) функциясы чегараланған,
 - 2) $g(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда $g'(x)$ ҳосилага әга ва у үзлуксиз функция,
 - 3) $g(x)$ функция $[a, +\infty)$ да камаючи,
 - 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
- У ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Узлуксиз $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг кўпайтмаси $f(x)g(x)$ функция ҳам $[a, +\infty)$ оралиқда үзлуксиз бўлгани учун, бу $f(x)g(x)$ функция исталган $[a, t]$ ($t > a$) оралиқда интегралланувчи бўлади, яъни

$$\varphi(t) = \int_a^t f(x) g(x) dx \quad (16.12)$$

интеграл мавжуд.

$t \rightarrow +\infty$ да $\varphi(t)$ функцияниң чекли лимитга әга бўлишини кўрсатмиз. Теореманинг 1-ва 2-шартларидан фойдаланиб, (16.12) интегрални бўлаклаб ҳисоблаймиз:

$$\int_a^t f(x) g(x) dx = \int_a^t g(x) dF(x) = g(x) F(x) \Big|_a^t - \int_a^t F(x) g'(x) dx. \quad (16.13)$$

Ўнг томондаги биринчи қўшилувчи учун ушбу

$$|g(t)F(t)| \leq Mg(t) \quad (M = \sup |F(t)| < +\infty)$$

тенгсизликка әга бўламиз. Ундан, $t \rightarrow +\infty$ да $g(t) \rightarrow 0$ бўлишини эътиборга олсақ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)F(t) = 0$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди ўнг томондаги иккинчи $\int_a^t F(x) g'(x) dx$ ҳадни қараймиз. Модомики, $g(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда үзлуксиз дифференциалланувчи ҳамда шу оралиқда камаючи экан, унда $\forall x \in [a, +\infty)$ да $g'(x) \leq 0$ бўлиб,

$$\begin{aligned} \int_a^t |F(x) \cdot g'(x)| dx &\leq M \int_a^t |g'(x)| dx = -M \int_a^t g'(x) dx = \\ &= M[g(a) - g(t)] \leq Mg(a) \quad (g(t) \geq 0) \end{aligned}$$

бўлади. Шундай қилиб, t ўзгарувчининг барча $t > a$ қийматларида

$$\int_a^t |F(x) \cdot g'(x)| dx$$

интеграл (t ўзгарувчининг функцияси) юқоридан чегараланган. У ҳолда ушбу бобнинг 2-§ ида келтирилган теоремага кўра $\int_a^{+\infty} F(x) g'(x) dx$ интеграл яқинлашувчи (ҳаито абсолют яқинлашувчи) бўлади. Демак,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t F(x) g'(x) dx$$

лимит мавжуд ва чекли.

Юқоридаги (16.13) тенгликда $t \rightarrow +\infty$ да лимитга ўтиб, ушбу

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) g(x) dx$$

лимитнинг мавжуд ҳамда чекли бўлишини топамиз. Бу эса $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчилигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Мисол. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \quad (\alpha > 0)$$

интегрални қарайлик. Бу интегралдаги $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$) функциялар юқори да келтирилган теорема нинг сарча шартларини қансатлатиради:

1) $f(x) = \sin x$ функция $[1, +\infty)$ оралиқда узлуксиз ва бошлангич функцияси $F(x) = -\cos x$ чегараланган,

2) $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ функция $[1, +\infty)$ оралиқда $g'(x) = -\frac{\alpha}{x^{1+\alpha}}$ ҳосилага эга ва у узлуксиз,

3) $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$) функция $[1, +\infty)$ оралиқда камақсочи,

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$$

бўлади. Демак, Дирихле аломатига кўра берилган интеграл яқинлашувчи.

3- §. Чегараси чексиз хосмас интегралларни ҳисоблаш

Чекли $[a, b]$ оралиқ бўйича олинган $\int_a^b f(x) dx$ Риман интеграли Ньютон — Лейбниц формуласи ёрдамида, ёки бўлаклаб, ёки ўзгарувчиларни алмаштириб, ёки бошқа усувлар билан ҳисобланар эди.

Энди яқинлашувчи ушбу

$$I = \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

хосмас интегрални ҳисоблаш талаб этилсин.

1. Ньютон — Лейбниц формуласи. Фараз қиласлик, $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда узлуксиз бўлсин. Матлумки, бу ҳолда

$f(x)$ функция шу оралиқда $\Phi(x)$ ($\Phi'(x) = f(x)$, $x \in [a, +\infty)$) бошланғич функцияга эга бўлади. $x \rightarrow +\infty$ да $\Phi(x)$ функцияниң лимити мавжуд ва чекли бўлса, бу лимитни $\Phi(x)$ бошланғич функцияниң $+\infty$ даги қиймати деб қабул қиласиз, яъни

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \Phi(+\infty).$$

Хосмас интеграл таърифи ҳамда Ньютон — Лейбниц формуласидан фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\Phi(t) - \Phi(a)] = \\ &= \Phi(+\infty) - \Phi(a) = \Phi(x) \Big|_a^{+\infty}. \end{aligned} \quad (16.14)$$

Бу эса юқоридаги келишувга кўра бошланғич функцияга эга бўлган $f(x)$ функция хосмас интеграли учун Ньюトン — Лейбниц формуласи ўринли бўлишини кўрсатади.

Мисол. Ушбу

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$$

хосмас интегрални қарайлик. Равшанки, $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ функция $\left[\frac{2}{\pi}, +\infty \right]$ оралиқда узлуксиз Сўлиб, унинг бошланғич функцияси $\Phi(x) = \cos \frac{1}{x}$ бўлади. Демак, (16.14) формулага кўра

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \cos \frac{1}{x} \Big|_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} = 1.$$

Баъзан, берилган I хосмас интеграл ўзгарувчиларни алмаштириб ёки бўлаклаб интеграллаш натижасида ҳисобланади.

2. Бўлаклаб интеграллаш усули. $u(x)$ ва $v(x)$ функцияларниң ҳар бири $[a, +\infty)$ оралиқда берилган ҳамда узлуксиз $u'(x)$ ва $v'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин.

Агар $\int_a^{+\infty} v(x) du(x)$ интеграл яқинлашувчи ҳамда ушбу

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = u(+\infty), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v(+\infty)$$

лимитлар мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} u(x) dv(x)$ интеграл яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^{+\infty} u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v(x) du(x) \quad (16.15)$$

бўлади.

Хақиқатан ҳам, 1- қисм, 5- боб, 10- § да келтирилган формулага күра

$$\int_a^t u(x) dv(x) = u(x)v(x)|_a^t - \int_a^t v(x) du(x) = [u(t)v(t) - u(a)v(a)] - \int_a^t v(x)du(x)$$

бўлиб, бу тенгликда $t \rightarrow +\infty$ да лимитга ўтиб, қўйидагини топамиз:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t u(x) dv(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [u(t)v(t) - u(a)v(a)] - \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t v(x) du(x). \quad (16.16)$$

Шартга кўра $\int_a^{+\infty} v(x) du(x)$ интеграл яқинлашувчи ҳамда $\lim_{t \rightarrow +\infty} [u(t)v(t) - u(a)v(a)]$ лимит мавжуд ва чекли эканлигини эътиборга олсак, унда (16.16) муносабатдан $\int_a^{+\infty} u(x) dv(x)$ интегралнинг яқинлашувчилиги ҳамда (16.15) формуланинг ўринли бўлиши келиб чиқади.

Мисоъл. Қўйидаги

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$$

интегрални ҳисоблайлик. Агар $u(x) = x$, $dv(x) = e^{-x} dx$ дейилса, унда $u(x)v(x)|_0^{+\infty} = x(-e^{-x})|_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = 0$, $\int_0^{+\infty} v(x) du(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -1$ бўлиб,

(16.15) формулага кўра

$$\int_0^{+\infty} u(x) dv(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = -xe^{-x}|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-x}) dx = 1$$

бўлади. Демак,

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = 1.$$

16.3- эслатма. Юқоридаги (16.15) формулани келтириб чиқаришда $\int_a^{+\infty} v(x) du(x)$ интегралнинг яқинлашувчилиги ҳамда $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t)$ лимитнинг мавжуд ва чекли бўлиши талаб этилди.

Агар $\int_a^{+\infty} u(x) dv(x)$, $\int_a^{+\infty} v(x) du(x)$ интегралларнинг яқинлашувчилиги ҳамда $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t)$ лимитнинг мавжуд ва чекли бўлиши каби учта фактдан исталган иккитаси ўринли бўлса, у ҳолда уларнинг учинчиси ҳамда (16.15) формула ўринли бўлади.

3. Ўзгарувчиларни алмаштириш усули. $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлсин. Қўйидаги

$$I = \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

интегрални қарайлык. Бу интегралда $x = \varphi(z)$ дейлик, бунда $\varphi(z)$ функция құйидаги шартларни бажарсın:

- 1) $\varphi(z)$ функция $[\alpha, +\infty)$ оралиқда берилған, $\varphi'(z)$ ҳосилага әга
ва бу ҳосила узлуксиз,
- 2) $\varphi(z)$ функция $[\alpha, +\infty)$ оралиқда қатъий ўсуvчи,
- 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(+\infty) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \varphi(z) = +\infty$ бўлсин.

У ҳолда $\int_{\alpha}^{+\infty} f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz$ интеграл яқинлашувчи бўлса, унда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$
ҳам яқинлашувчи ва

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_{\alpha}^{+\infty} f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z) dz \quad (16.17)$$

бўлади.

Ихтиёрий $z (\alpha < z < +\infty)$ нүктани олиб, унга мос $\varphi(z) = t$ нүктани топамиз. $[a, t)$ оралиқда I- қисм, 9- боб, 2- § да келтирилган фор-
мулага кўра

$$\int_a^t f(x) dx = \int_{\alpha}^z f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z) dz$$

бўлади. Бу муносабатда $t \rightarrow +\infty$ да (бунда $z = \varphi^{-1}(t) \rightarrow +\infty$) лимит-
га ўтиб қуйидагини топамиз:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx = \int_{\alpha}^{+\infty} f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz.$$

Бу эса $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчилигини ҳамда (16.17) фор-
муланинг ўринли бўлишини кўрсатади.

16.4- эслатма. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ яқинлашувчи бўлсин. Бу интегралда

$$x = \varphi(z) \quad (16.18)$$

бўлиб, (16.18) функция юқоридаги шартларни бажарсın. У ҳолда

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_{\alpha}^{+\infty} f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz$$

бўлади.

Мисол. Ўшбу

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} \quad (16.19)$$

интегрални қарайлар. Равшанки, бу интеграл яқынлашувчи. Уни ҳиссеблайлик. Аввало бу интегралда $x = \frac{1}{z}$ алмаштириш қиласыз. Натижада

$$I = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{1 + \frac{1}{z^4}} \left(-\frac{1}{z^2} \right) dz = \int_0^{+\infty} \frac{z^2 dz}{1 + z^4} \quad (16.20)$$

бўлиб, (16.19) ва (16.20) тенгликлардан

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1 + x^4}{1 + x^4} dx$$

бўлиши келиб чиқади. Кейинги интегралда

$$x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2} \quad \left(x - \frac{1}{x} = y \right)$$

алмаштиришни бажариб, қўйидагини топамиз:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{2 + y^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Демак,

$$\int_0^{-\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

4. Чегараси чексиз бўлган ҳосмас интегралларни ҳам баъзан (аниқ интеграл сингари) интеграл йигиндининг лимити сифатида ҳисоблаш мумкин бўлади.

$f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда ($a \geq 0$) берилган бўлиб, қўйидаги шартларни бажарсинг:

1) $[a, +\infty)$ да $f(x)$ функция интегралланувчи,

2) $[a, +\infty)$ да $f(x)$ функция камаювчи ва $\forall x \in [a, +\infty)$ учун $f(x) > 0$.

У ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{k=0}^{\infty} f(a + kh) \quad (16.21)$$

бўлади.

Исботлайлик. $[a, +\infty)$ оралиқни $[(a, a+h], [a+h, a+2h], \dots, [a+kh, a+kh+h], \dots$ ($h > 0$) оралиқларга ажратайлик. $A > a$ бўлсин. Функцияниң мусбатлигидан

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{A}{h}-1\right]} \int_{a+kh}^{a+kh+h} f(x) dx \leq \int_a^A f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{\left[\frac{A}{h}\right]} \int_{a+kh}^{a+kh+h} f(x) dx \quad (16.22)$$

тенгсизликларни ёза оламиз. Функцияниң камаювчи эканлигидан

$\forall x \in [a+kh, a+kh+h]$ учун

$$f(a + kh + h) \leq f(x) \leq f(a + kh)$$

бўлади. Шундан фойдалансак, (16.22) ни қўйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{A}{h}\right]-1} hf(a+kh+h) \leq \int_a^A f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{\left[\frac{A}{h}\right]} hf(a+kh). \quad (16.23)$$

Шартга қўра, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ яқинлашувчи. Функцияниг мусбатлигидан $\forall A > a$ учун

$$\int_a^A f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Бу тенгсизликдан ва (16.23) дан $\forall A > a, \forall h > 0$ учун

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \geq \sum_{k=0}^{\left[\frac{A}{h}\right]-1} hf(a+kh) - hf(a).$$

Бундан эса

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \geq \sum_{k=0}^{\infty} hf(a+kh) - hf(a)$$

бўлади. Шундай қилиб, $\sum_{k=0}^{\infty} f(a+kh)$ қатор яқинлашувчи бўлар экан.

Буни эътиборга олсак, $f(x)$ нинг мусбатлигидан ва (16.22) муносабатниг ўнг томонидаги тенгсизликдан

$$\int_a^A f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{\infty} hf(a+kh)$$

ни ҳосил қиласиз. Бу тенгсизликниг ихтиёрий $A > a$ учун тўғри эканлигидан

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq h \sum_{k=0}^{\infty} f(a+kh).$$

Демак,

$$h \sum_{k=0}^{\infty} f(a+kh) - hf(a) \leq \int_a^{+\infty} f(x) dx \leq h \sum_{k=0}^{\infty} f(a+kh)$$

екан. Бу ерда $h \rightarrow 0$ да лимитга ўтсанк (16.21) формулани ҳосил қиласиз.

Мисол. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x} dx$$

интегрални қарайлик. Равшанки, бу интеграл яқинлашувчи, $[1, +\infty)$ оралиқда эса $f(x) = xe^{-x}$ функция камаювчи ҳамда $\forall x \in [1, +\infty)$ учун $f(x) = xe^{-x} > 0$ дир. Юқорида келтирилган (16.21) формуласдан фойдаланб қўйилдагиги топамиз:

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x} dx = \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{k=0}^{\infty} (1+kh)e^{-(1+kh)} = e^{-1} \lim_{h \rightarrow 0} \left[h \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kh} + h^2 \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-kh} \right] =$$

$$= e^{-1} \left[\lim_{h \rightarrow 0} h \frac{1}{1-e^{-h}} + \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \frac{e^{-h}}{(1-e^{-h})^2} \right] = e^{-1} \left[1 + \lim_{h \rightarrow 0} e^{-h} \left(\frac{h}{e^{-h}-1} \right)^2 \right] = e^{-1} (1+1) = 2e^{-1}.$$

Демак,

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x} dx = 2e^{-1}.$$

16.5- эс латма. Юқорида келтирилгандык (16.21) формула $f(x)$ функция x ўзгарувларининг бирор x_0 ($x_0 > a$) қийматидан бошлаб камаювчи бўлганда ҳам ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин.

5. Чегараси чексиз хосмас интегралларниг бош қийматлари. $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, бу оралиқнинг исталган $[t', t]$ ($-\infty < t' < t < +\infty$) қисмида интегралланувчи бўлсан: $F(t', t) = \int_{t'}^t f(x) dx$.

Маълумки, $f(x)$ функциянинг $(-\infty, +\infty)$ оралиқ бўйича хосмас интегрални ушибу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{t' \rightarrow -\infty \\ t' \rightarrow +\infty}} F(t', t) = \lim_{\substack{t' \rightarrow -\infty \\ t' \rightarrow +\infty}} \int_{t'}^t f(x) dx$$

лимит билан аниқланар эди. t' , t ўзгарувчилар бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда $t' \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$ да $F(t', t)$ функция чекли ли-

митга эга бўлса, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи деб аталаради.

Равшанки, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, яъни ихтиёрий равишда $t' \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$ да $F(t', t)$ функция чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда бу функция $t' = -t$ бўлиб, $t \rightarrow +\infty$ бўлганда ҳам, чекли лимитга эга (интеграл яқинлашувчи) бўлаверади. Бироқ $F(t', t) = \int_{t'}^t f(x) dx$ функция, $t' = -t$ бўлиб, $t \rightarrow +\infty$ да чекли лимитга эга

бўлишидан $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интегралниг яқинлашувчи бўлиши келиб чиқавермайди.

Мисол. Ушибу

$$\int_{t'}^t \sin x dx$$

интеграл учун $t' = -t$ бўлса, равшанки, $\forall t > 0$ учун $\int_{-t}^t \sin x dx = 0$ ва демак,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t \sin x dx = 0$$

бўлади. Бироқ $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ интеграл яқинлашувчи эмас.

16.9- таъриф. Агар $t' = -t$ бўлиб, $t \rightarrow +\infty$ да $F(t', t) = \int_{t'}^t f(x) dx$

функцияниң лимити мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интеграл боши қиймат маъносида яқинлашувчи дейилиб,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x) dx$$

лимит эса $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интегралнинг боши қиймати деб аталади.

Одатда $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интегралнинг боши қиймати

$$v. p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

каби бўлгиланади. Демак,

$$v. p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x) dx.$$

Бунда v. p. белги французча «valeur principale» «бош қиймат» сўзларининг дастлабки ҳарфларини ифодалайди.

Шундай қилиб, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, у

бош қиймат маъносида ҳам яқинлашувчи бўлади. Бироқ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интегралнинг боши қиймат маъносида яқинлашувчи бўлишидан унинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқа вермайди.

6. Чегараси чексиз хосмас интегралларни тақриби ҳисоблаш. $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда берилган ва узлуксиз бўлиб,

$$I = \int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (16.24)$$

интеграл яқинлашувчи бўлсин.

Кўп ҳолларда бундай интегрални аниқ ҳисоблаш қийин бўлиб, уни тақриби ҳисоблашга тўғри келади.

(16.24) хосмас интегрални тақриби ҳисоблаш хос интегрални — аниқ интегрални тақриби ҳисоблашга келтирилади. Аниқ интегрални ҳисоблашда, бизга маълум формулалар (тўғри тўртбурчаклар, трапеция, Симпсон формулалари (қаралсин 1- қисм, 9- боб, 11- §)) дан фойдалана нилади.

Таърифга кўра

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

лимит мавжуд ва чекли, яъни $\forall \epsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай t_0 ($a < t_0 < \infty$) топиладики, $t > t_0$ да

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx - \int_a^t f(x) dx \right| < \epsilon \quad (16.25)$$

бўлади. Агар

$$\int_t^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx - \int_a^t f(x) dx$$

эканлигини эътиборга олсак, унда юқоридаги (16.25) тенгсизлик ушбу

$$\left| \int_t^{+\infty} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

кўринишни олади.

Натижада берилган I интегрални тақрибий ифодаловчи қўйидаги формулага келамиз:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \approx \int_a^t f(x) dx. \quad (16.26)$$

Бу тақрибий формуланинг хатолиги

$$\left| \int_t^{+\infty} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

интегрални қарайлик. Бу интеграл яқинлашувчидир. Уни $[0, a]$ ($a > 0$) оралиқ бўйича $\int_0^a e^{-x^2} dx$ интеграл билан алмаштириб, ушбу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \approx \int_0^a e^{-x^2} dx \quad (a > 0) \quad (16.27)$$

тақрибий формулага келамиз. (16.27) формуланинг хатолиги

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx - \int_0^a e^{-x^2} dx = \int_a^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

учун қўйидаги баҳога эга бўламиш:

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{a} \int_a^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2a} \int_a^{+\infty} e^{-x^2} d(x^2) = \frac{1}{2a} \left[-e^{-x^2} \right]_a^{+\infty} = \frac{1}{2a} e^{-a^2}.$$

Энди $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$ бўлган ҳолларни қарайлик. $a = 1$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \approx \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

бўлиб, бу тақрибий формуланинг хатолиги

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx - \int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq 0,1839$$

бўлади.

$a = 2$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \approx \int_0^2 e^{-x^2} dx$$

бўлиб, бу тақрибий формуланинг хатолиги учун ушбу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx - \int_0^2 e^{-x^2} dx = \int_2^{+\infty} e^{-x^2} dx \leqslant 0,00458$$

Саҳога эга бўламиз.

$a = 3$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \approx \int_0^3 e^{-x^2} dx$$

бўлиб, унинг хатолиги

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx - \int_0^3 e^{-x^2} dx = \int_3^{+\infty} e^{-x^2} dx \leqslant 0,00002$$

бўлади.

4- §. Чегараланмаган функциянинг хосмас интеграллари

1. Махсус нуқта $f(x)$ функция $X (X \subset R)$ тўпламда берилган бўлсин. Бирор $x_0 (x_0 \in R)$ нуқтани олиб, унинг ушбу

$$\dot{U}_\delta(x_0) = \{x : x \in R : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, x \neq x_0\} (\delta > 0)$$

атрофини (1-қисм, 118, 122-бетлар) қарайлик.

16. 10-таъриф. Агар x_0 нуқтанинг ҳар қандай $\dot{U}_\delta(x_0)$ атрофи олинганда ҳам $\dot{U}_\delta(x_0) \cap X \neq \emptyset$ тўпламда $f(x)$ функция чегараланмаган бўлса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг *махсус нуқтаси* деб аталади.

Мисоллар. 1. $[a, b]$ ярим интервалда ушбу $f(x) = \frac{1}{b-x}$ функцияни қарайлик. b нуқта бу функциянинг махсус нуқтаси бўлади, чунки $[a, b] \cap \dot{U}_\delta(b)$ тўпламда берилган функция чегараланмагандир.

2. $(a, b]$ ярим интервалда $f(x) = \frac{1}{x-a}$ функция берилган бўлсин. Равшани

бу функция $(a, b] \cap \dot{U}_\delta(a)$ тўпламда чегараланмаган. Демак, a махсус нуқта.

3. (a, b) интервалда ушбу $f(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha (b-x)^\beta}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) функцияни қарайлик. a ва b нуқталар бу функциянинг махсус нуқталари бўлади, чунки берилган функция $(a, b) \cap \dot{U}_\delta(a)$ ва $(a, b) \cap \dot{U}_\delta(b)$ тўпламларда чегараланмагандир.

4. Ушбу $f(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$ функция $R \setminus \{-1, 0, 1\}$ тўпламда берилган. Равшани, бу функция $-1, 0, 1$ нуқталар атрофидаги чегараланмаган. Демак, $-1, 0, 1$ махсус нуқталар бўлади.

2. Чегараланмаган функциянинг хосмас интеграли тушунчаси. Мазкур курснинг 1-қисм, 9-бобида математик анализининг асосий тушунчаларидан бири — функциянинг $[a, b]$ оралиқ бўйича аник интеграли (Риман интеграли) тушунчаси киритилди ва уни батафсил ўрганилди. Ўнда функциянинг интегралланувчи бўлиши функциянинг чегараланган бўлишини тақозо этди.

Энди чекли $[a, b]$ оралиқда чегараланмаган функциялар учун интеграл тушунчасини киритамиз ва уни ўрганамиз.

$f(x)$ функция $[a, b]$ ярим интервалда берилган бўлиб, b нуқта шу функцияниңг махсус нуқтаси бўлсин. Бу функция $[a, b]$ ярим интервалниң исталган $[a, t]$ ($a < t < b$) қисмида интегралланувчи (1-қисм, 9-боб, 2-§), яъни ихтиёрий t учун ушбу

$$\int_a^t f(x) dx$$

интеграл мавжуд бўлсин. Бу интеграл, равшанки, қаралаётган функцияга ва олинган t га боғлиқ бўлади. Агар $f(x)$ ни тайинлаб олсак, қаралаётган интеграл фақат t ўзгарувчининг функцияси бўлади:

$$\int_a^t f(x) dx = F(t) \quad (a < t < b).$$

Натижада (a, b) интервалда берилган $F(t)$ функцияга эга бўламиз.

16. 11-таъриф. Агар $t \rightarrow b - 0$ да $F(t)$ функцияниңг лимити

$$\lim_{t \rightarrow b - 0} F(t)$$

мавжуд бўлса, бу лимит (чегараланмаган) $f(x)$ функцияниңг $[a, b]$ бўйича хосмас интеграли деб аталади ва у

$$\int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b - 0} F(t) = \lim_{t \rightarrow b - 0} \int_a^t f(x) dx. \quad (16.28)$$

16. 12-таъриф. Агар $t \rightarrow b - 0$ да $F(t)$ функцияниңг лимити мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (16.28) хосмас интеграл яқинлашувчи дейилади, $f(x)$ эса $[a, b]$ да интегралланувчи функция дейилади.

Агар $t \rightarrow b - 0$ да $F(t)$ функцияниңг лимити чексиз бўлса, (16.28) интеграл узоқлашувчи деб аталади.

Худди юқоридагидек, a нуқта $f(x)$ функцияниңг махсус нуқтаси бўлганда $(a, b]$ оралиқ бўйича хосмас интеграл, a ва b нуқталар функцияниңг махсус нуқталари бўлганда $(a, b]$ оралиқ бўйича хосмас интеграл таърифланади.

$f(x)$ функция $(a, b]$ ярим интервалда берилган бўлиб, a нуқта шу функцияниңг махсус нуқтаси бўлсин. Бу $f(x)$ функция $(a, b]$ ярим интервалниң исталган $[t, b]$ ($a < t < b$) қисмида интегралланувчи, яъни ихтиёрий t ($a < t < b$) учун ушбу

$$\int_t^b f(x) dx = \Phi(t) \quad (16.29)$$

интеграл мавжуд бўлсин.

16. 13-таъриф. Агар $t \rightarrow a + 0$ да $\Phi(t)$ функцияниңг

$$\lim_{t \rightarrow a + 0} \Phi(t)$$

лимити мавжуд бўлса, бу лимит (чегараланмаган) $f(x)$ функциянинг $(a, b]$ бўйича хосмас интеграли деб аталади ва

$$\int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a+0} \Phi(t). \quad (16.30)$$

16. 14-таъриф. Агар $t \rightarrow a+0$ да $\Phi(t)$ функциянинг лимити мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, $\int_a^b f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи деб аталади, $f(x)$ эса $(a, b]$ да интегралланувчи функция дейилади.

Агар $t \rightarrow a+0$ да $\Phi(t)$ функциянинг лимити чексиз бўлса (16.30) интеграл узоқлашувчи деб аталади.

$f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган бўлиб, a ва b нуқталар шу функциянинг махсус нуқталари бўлсин. Шунингдек, $f(x)$ функция (a, b) интервалнинг исталган $[\tau, t] (a < \tau < t < b)$ қисмида интегралланувчи, яъни

$$\int_{\tau}^t f(x) dx = \varphi(\tau, t) \quad (16.31)$$

интеграл мавжуд бўлсин.

16. 15-таъриф. $\tau \rightarrow a+0, t \rightarrow b-0$ да $\varphi(\tau, t)$ функциянинг

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow a+0 \\ t \rightarrow b-0}} \varphi(\tau, t)$$

лимити мавжуд бўлса, бу лимит (чегараланмаган) $f(x)$ функциянинг (a, b) бўйича хосмас интеграли деб аталади ва у

$$\int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_a^b f(x) dx = [\lim_{\substack{\tau \rightarrow a+0 \\ t \rightarrow b-0}} \int_{\tau}^t f(x) dx] = \lim_{\substack{\tau \rightarrow a+0 \\ t \rightarrow b-0}} \varphi(\tau, t). \quad (16.32)$$

16. 16-таъриф. Агар $\tau \rightarrow a+0, t \rightarrow b-0$ да $\varphi(\tau, t)$ функциянинг лимити мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (16.32) интеграл яқинлашувчи дейилади, $f(x)$ эса (a, b) да интегралланувчи функция деб аталади.

Агар $\tau \rightarrow a+0, t \rightarrow b-0$ да $\varphi(\tau, t)$ функциянинг лимити чексиз бўлса, (16.31) интеграл узоқлашувчи деб аталади.

$c_1, c_2, \dots, c_n (c_i \in (a, b), i = 1, 2, \dots, n)$ нуқталар $f(x)$ функциянинг махсус нуқталари бўлган ҳолда ҳам $f(x)$ нинг (a, b) бўйича хосмас интеграли юқоридагидек таърифланади. Соддалик учун a, b ҳамда $c (a < c < b)$ махсус нуқталар бўлган ҳолда, хосмас интеграл таърифини

келтирамиз. $f(x)$ функция $(a, b) \setminus \{c\}$ тўпламнинг исталган $[\tau, t]$ ($a < \tau < t < c$) ҳамда $[u, v]$ ($c < u < v < b$) қисмларида интегралланувчи, яъни

$$\int_{\tau}^t f(x) dx = \varphi(\tau, t), \quad \int_u^v f(x) dx = \psi(u, v) \quad (16.33)$$

интеграллар мавжуд бўлсин.

16. 17-таъриф. Агар $\tau \rightarrow a + 0, t \rightarrow c - 0$ ҳамда $u \rightarrow c + 0, v \rightarrow b - 0$ да $\varphi(\tau, t) + \psi(u, v)$ функцияниңг

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow a+0 \\ t \rightarrow c-0 \\ u \rightarrow c+0 \\ v \rightarrow b-0}} [\varphi(\tau, t) + \psi(u, v)] = \lim_{\substack{\tau \rightarrow a+0 \\ t \rightarrow c-0 \\ u \rightarrow c+0 \\ v \rightarrow b-0}} [\int_{\tau}^t f(x) dx + \int_u^v f(x) dx]$$

лимити мавжуд бўлса, бу лимит (чегараланмаган) $f(x)$ функцияниңг (a, b) бўйича хосмас интегрални деб аталади ва у

$$\int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\tau \rightarrow a+0 \\ t \rightarrow c-0 \\ u \rightarrow c+0 \\ v \rightarrow b-0}} [\int_{\tau}^t f(x) dx + \int_u^v f(x) dx]. \quad (16.34)$$

16. 18-таъриф. Агар $\tau \rightarrow a + 0, t \rightarrow c - 0$ ҳамда $u \rightarrow c + 0, v \rightarrow b - 0$ да $\varphi(\tau, t) + \psi(u, v)$ функцияниңг лимити мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (16.34) интеграл яқинлашувчи дейилади, $f(x)$ эса (a, b) да интегралланувчи функция дейилади.

Агар $\tau \rightarrow a + 0, t \rightarrow c - 0$ ҳамда $u \rightarrow c + 0, v \rightarrow b - 0$ да $\varphi(\tau, t) + \psi(u, v)$ функцияниңг лимити чексиз бўлса, (16.34) интеграл узоқлашувчи деб аталади.

16. 6-эслатма. Юқорида маҳсус нуқтаси a (ёки b , ёки a ва b) бўлган $f(x)$ функцияниңг (a, b) (ёки $[a, b]$, ёки (a, b)) оралиқ бўйича хосмас интеграл тушиунчаси $F(t)$ нинг $t \rightarrow a + 0$ (ёки $\Phi(t)$ нинг $t \rightarrow b - 0$, ёки $\varphi(\tau, t)$ нинг $\tau \rightarrow a + 0, t \rightarrow b - 0$) да лимити мавжуд бўлган ҳоллар учун киритилди ва унинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчилиги таърифланди. Маълумки, $F(t)$ нинг $t \rightarrow a + 0$ (ёки $\Phi(t)$ нинг $t \rightarrow b - 0$, ёки $\varphi(\tau, t)$ нинг $\tau \rightarrow a + 0, t \rightarrow b - 0$) даги лимити мавжуд бўлмаган ҳол бўлиши мумкин. Бу ҳолда биз шартли равишда $f(x)$ нинг [хосмас интеграли

$$\int_a^b f(x) dx$$

узоқлашувчи деб қабул қиласиз.

Шундай қилиб, чегараланмаган функция хосмас интегрални тушиунчаси аввал ўрганилган Риман интеграли тушиунчасидан яна бир марта лимитга ўтиш амали орқали юзага келар экан. Қулайлик учун қўйида кўпинча «хосмас интеграл» дейиш ўрнига интеграл деб кетаверамиз.

Мисоллар. 1. $(0, 1]$ ярим интервалда $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функцияни қарайлык. Равшанки, $x = 0$ нүкта бу функцияның махсус нүктасидир. Берилган функция ихтиёрий $[t, 1] (0 < t < 1)$ оралиқ бўйича интеграллану вчи

$$\Phi(t) = \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(1 - \sqrt[4]{t}).$$

У ҳолда

$$\lim_{t \rightarrow +0} \Phi(t) = \lim_{t \rightarrow +0} 2(1 - \sqrt[4]{t}) = 2$$

бўлади. Демак, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ интеграл яқинлашувчи ва у 2 га тенг.

2. Ушбу $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади, чунки

$$\lim_{t \rightarrow +0} \Phi(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow +0} [\ln x]_t^1 = +\infty.$$

3. Ушбу $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ интегрални қарайлык. Равшанки, $x = 0$ ва $x = 1$ нүқталар махсус нүқталардир. Хосмас интеграл таърифига кўра

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= \lim_{\substack{\tau \rightarrow +0 \\ t \rightarrow 1-0}} \int_\tau^t \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{\substack{\tau \rightarrow +0 \\ t \rightarrow 1-0}} [\arcsin(2x-1)]_\tau^t = \\ &= \lim_{\substack{\tau \rightarrow +0 \\ t \rightarrow 1-0}} [\arcsin(2t-1) - \arcsin(2\tau-1)] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

бўлади. Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi.$$

4. Ушбу

$$I_1 = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad (\alpha > 0), \quad I_2 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

интегралларни қарайлык. Хосмас интеграл таърифидан фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} &= \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{t \rightarrow a+0} \left[\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_t^b = \\ &= \lim_{t \rightarrow a+0} \frac{1}{1-\alpha} [(b-a)^{1-\alpha} - (t-a)^{1-\alpha}], \quad (\alpha \neq 1). \end{aligned}$$

Бу лимит $\alpha < 1$ бўлганда чекли, демак I_1 хосмас интеграл яқинлашувчи, $\alpha > 1$ бўлганда эса чексиз бўлиб, унда I_1 хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади. $\alpha = 1$ бўлганда

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{t \rightarrow a+0} [\ln(x-a)]_t^b$$

бўлиб, I_1 интеграл узоқлашувчидир.

Демак,

$$I_1 = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

хосмас интеграл $\alpha < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \geq 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

Худди шунга ўхшаш кўрсатиш мумкинки,

$$I_2 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

хосмас интеграл $\alpha < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \geq 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

Биз қўйида хосмас интегралларнинг турли хоссаларини ўрганар эканмиз, уларни, асосан маҳсус нуқтаси b бўлган $f(x)$ функцияниңг $[a, b]$ оралиқ бўйича олинган $\int_a^b f(x) dx$ интеграли учун келтирамиз. Бу хоссаларни маҳсус нуқтаси a (ёки a ва b) бўлган функцияниңг мос равища (a, b) (ёки (a, b)) оралиқ бўйича олинган хосмас интеграллари учун ҳам тегишлича баён этиш мумкин.

3. Яқинлашувчи хосмас интегралларнинг хоссалари. $f(x)$ функция $[a, b]$ да ўрилган бўлиб, b шу $f(x)$ функцияниңг маҳсус нуқтаси бўлсин. Бу функция исталган $[a, t]$ ($a < t < b$) да интегралланувчи бўлсин.

1°. Агар $f(x)$ функцияниңг $[a, b]$ оралиқ бўйича $\int_a^b f(x) dx$ интеграли яқинлашувчи бўлса, бу функцияниңг $[c, b]$ ($a < c < b$) оралиқ бўйича $\int_c^b f(x) dx$ интеграли ҳам яқинлашувчи бўлади ва аксинча. Бунда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (16.35)$$

бўлади.

Исбот. Аниқ интеграл хоссасига кўра

$$\int_a^t f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^t f(x) dx \quad (a < t < b) \quad (*)$$

бўлади.

$\int_a^b f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи, яъни

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b-0} \int_a^t f(x) dx$$

лимит мавжуд ва чекли бўлсин. Юқоридаги (*) тенгликни қўйидагида ёзамиш:

$$\int_c^t f(x) dx = \int_a^t f(x) dx - \int_a^c f(x) dx.$$

Кейинги тенгликда $t \rightarrow b - 0$ да лимитга ўтиб қўйидагини топамиш:

$$\lim_{t \rightarrow b-0} \int_c^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b-0} \int_a^t f(x) dx - \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^c f(x) dx.$$

Бундан $\int_c^b f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчи ва

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

эканлиги келиб чиқади.

Худди шунга ўхшаш $\int_c^b f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчи бўлишидан $\int_a^b f(x) dx$ интегралнинг ҳам яқинлашувчи ҳамда (16.35) формуланинг ўринли бўлиши кўрсатилади.

Қўйида келтириладиган 2° — 5° -хоссалар хосмас интеграл ва унинг яқинлашувчилиги таърифларидан бевосита келиб чиқади.

2° . Агар $\int_a^b f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b c f(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

бўлади, бунда $c = \text{const.}$

3° . Агар $\int_a^b f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ да $f(x) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx \geqslant 0$$

бўлади.

Энди $f(x)$ функция билан бир қаторда $g(x)$ функция ҳам $[a, b]$ да берилган бўлиб, b эса бу функцияларнинг махсус нуқтаси бўлсин.

4° . Агар $\int_a^b f(x) dx$ ва $\int_a^b g(x) dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

бўлади.

16.4-н атижа. $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, b]$ да берилган бўлиб, b эса бу функцияларнинг махсус нуқтаси бўлсин. Агар $\int_a^b f_k(x) dx (k = 1, 2, \dots, n)$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)] dx$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\begin{aligned} \int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)] dx &= c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx + \\ &\quad + \dots + c_n \int_a^b f_n(x) dx \quad c_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

бўлади.

5°. Агар $\int_a^b f(x) dx$ ва $\int_a^b g(x) dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ да $f(x) \leq g(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

бўлади.

Юқоридаги $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар қўйидаги шартларни ҳам ба жарсинг:

1) $f(x)$ функция $[a, b]$ да чегараланган, яъни шундай m ва M ўзгармас сонлар мавжудки, $\forall x \in [a, b]$ да $m \leq f(x) \leq M$;

2) $g(x)$ функция $[a, b]$ да ўз ишорасини ўзgartирмасин, яъни барча $x (x \in [a, b])$ ларда $g(x) \geq 0$ ёки $g(x) \leq 0$.

6°. Агар $\int_a^b f(x) g(x) dx$ ва $\int_a^b g(x) dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас $\mu (m \leq \mu \leq M)$ сон топиладики,

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx$$

тенглик ўринли бўлади.

Бу хосса ушбу бобнинг 1-§ да келтирилган 6°-хосса исботи каби исботланади. Одатда бу хосса ўрта қиймат ҳақидаги теорема деб юритилади.

5. §. Чегараланмаган функция хосмас интегралининг яқинлашувчилиги

$f(x)$ функция $[a, b]$ ярим интервалда берилган бўлиб, b шу функцияларнинг махсус нуқтаси бўлсин. Бу функция хосмас интегралининг яқинлашувчилиги шартини топиш билан шуғулланамиз.

Биз юқорида $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги $t \rightarrow b - 0$ да

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx \quad (a < t < b)$$

функцияниг чекли лимитга эга бўлиши билан таърифланишини кўрдик. Бинобарин, $\int_a^b f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги шарти, $t \rightarrow b - 0$ да $F(t)$ функцияниг чекли лимитга эга бўлиши шартидан иборат.

1-қисм, 4-боб, 5-§, 6-§ даги функцияниг чекли лимитга эга бўлиши ҳақидаги теоремалардан фойдаланиб, $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги шартини ифодаловчи теоремаларни келтирамиз.

1. Манфий бўлмаган функция хосмас интегралининг яқинлашувчилиги. $f(x)$ функция $[a, b]$ ярим интервалда берилган бўлиб, b эса шу функцияниг махсус нуқтаси бўлсин.

Бу функция $[a, b]$ орнлайды манфий бўлмасин ($\forall x \in [a, b]$) учун $f(x) \geq 0$) ва оралиқнинг исталган $[a, t]$ қисмida ($a < t < b$) интегралланувчи бўлсин. У ҳолда $a < t_1 < t_2 < b$ лар учун

$$F(t_2) = \int_a^{t_2} f(x) dx = F(t_1) + \int_1^{t_2} f(x) dx \geq F(t_1)$$

бўлади. Демак, $f(x) \geq 0$ бўлганда $F(t)$ функция ўсувчи бўлар экан. Бинобарин, $t \rightarrow b - 0$ да $F(t)$ ҳамма вақт лимитга (чекли ёки чексиз) эга бўлади. Монотон функция лимити ҳақидаги теоремадан фойдаланиб (қаралсин, 1-қисм, 4-боб, 5-§) $\int_a^b f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги шартини ифодалайдиган қўйидаги теоремага келамиз.

16.7-теорема. $[a, b]$ да манфий бўлмаган $f(x)$ функция $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчи бўлиши учун, $\{F(t)\}$ нинг юқоридаги чегараланган, яъни $\forall t \in (a, b)$ учун

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx \leq c \quad (c = \text{const})$$

бўлиши зарур ва етарли.

Одатда бу теорема $f(x)$ ($f(x) \geq 0$) функция $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги критерийси деб аталади.

Яна ўша теоремага асосан қўйидаги натижани айта оламиз.

16.5-натижаси. Агар $\{F(t)\} = \{\int_a^t f(x) dx\}$ тўплам юқоридан чегара-

ланмаган бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади.

Манфий бўлмаган функциялар хосмас интегралларини таққослаш ҳақида теоремалар.

16.8-теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ да берилган бўлиб, b эса бу функцияларнинг махсус нуқтаси ва $\forall x \in [a, b]$ да

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad (16.36)$$

бўлсин. У ҳолда:

$\int_a^b g(x) dx$ яқинлашувчи бўлса, $\int_a^b f(x) dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади,

$\int_a^b f(x) dx$ узоқлашувчи бўлса, $\int_a^b g(x) dx$ ҳам узоқлашувчи бўлади.

Исбот. $\int_a^b g(x) dx$ яқинлашувчи бўлсин. Унда 16.7-теоремага кўра

$\{G(t)\} = \{\int_a^t g(x) dx\}$ ($a < t < b$) тўплам юқоридан чегараланган:

$$G(t) = \int_a^t g(x) dx \leq C \quad (C = \text{const})$$

бўлади. (16.36) муносабатга асосан

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx \leq \int_a^t g(x) dx = G(t) \leq C$$

бўлиб, ундан яна 16.7-теоремага кўра $\int_a^b f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги келиб чиқади.

Энди $\int_a^b f(x) dx$ интеграл узоқлашувчи бўлсин. У ҳолда $\{F(t)\} = \{\int_a^t f(x) dx\}$ юқоридан чегараланмаган бўлиб,

$$\int_a^t f(x) dx \leq \int_a^t g(x) dx,$$

тенгсизликдан эса

$$\{G(t)\} = \{\int_a^t g(x) dx\}$$

нинг ҳам юқоридан чегараланмаганигини топамиз. Демак, юқорида келтирилган натижага кўра, $\int_a^b g(x) dx$ интеграл узоқлашувчи. Теорема исбот бўлди.

16.9-теорема. $[a, b]$ да $f(x)$ ва $g(x)$ манфий бўлмаган функциялар берилган. $x \rightarrow b - 0$ да $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбатнинг лимити k бўлсин:

$$\lim_{x \rightarrow b - 0} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Агар $k < +\infty$ ва $\int_a^b g(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, $\int_a^b f(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

Агар $k > 0$ ва $\int_a^b g(x) dx$ интеграл узоқлашувчи бўлса, $\int_a^b f(x) dx$ интеграл ҳам узоқлашувчи бўлади.

Бу теореманинг исботи ушбу бобнинг 2-§ ида келтирилган 16.3-теореманинг исботи кабидир. Уни исботлашни ўқувчига ҳавола этамиш.

Юқорида келтирилган теоремалардан қўйидаги натижа келиб чиқади.

16.6-натижаси. 16.9-теорема шартларида агар $0 < k < +\infty$ бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ ва $\int_a^b g(x) dx$ интеграллар бир вақтда ёки яқинлашувчи, ёки узоқлашувчи бўлади.

Бирор $\int_a^b f(x) dx$ ($f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$) хосмас интеграл берилган бўлсин. Бу интегрални $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ интеграл билан солиштириб, қўйидаги аломатларни топамиш.

1°. Агар x нинг b га етарлича яқин қийматларида

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

бўлса, у ҳолда $\varphi(x) \leq c < +\infty$ ва $\alpha < 1$ бўлганда $\int_a^b f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи, $\varphi(x) \geq c > 0$ ва $\alpha \geq 1$ бўлганда $\int_a^b f(x) dx$ интеграл узоқлашувчи бўлади.

2°. Агар $x \rightarrow b - 0$ да $f(x)$ функция $\frac{1}{b-x}$ га нисбатан α ($\alpha > 0$) тартибли чексиз катта бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ интеграл $\alpha < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \geq 1$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.

Бу аломатларнинг исботи ҳам ушбу бобнинг 2-§ ида келтирилган аломатларнинг исботи кабидир.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}} dx$$

интегрални қарайлик. Бунда интеграл остидаги функция

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}} = \frac{\varphi(x)}{(1-x)^{1/4}}$$

бўлади. Равшанки, $\forall x \in [0, 1]$ учун $\Phi(x) = \cos^2 x \leqslant 1$ ва $\alpha = \frac{1}{4} < 1$. Демак, юқоридаги 1° -аломатга кўра берилган интеграл яқинлашувчи бўлади.

2. Қўйидаги

$$\int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

интегрални қарайлик.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} x \sqrt{\frac{1-x}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ҳамда

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

интегралнинг яқинлашувчилигини эътиборга олиб, 16.6-натижага асосланиб берилган интегралнинг яқинлашувчилигини топамиз.

2. Ихтиёрий функция хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги. $f(x)$ функция $[a, b]$ ярим интервалда берилган бўлиб, b нуқта $f(x)$ функциянинг махсус нуқтаси бўлсин.

Маълумки, $t \rightarrow b - 0$ да

$$F(t) = \int_a^t f(x) \, dx$$

функция чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) \, dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи деб аталар эди. Демак, $\int_a^b f(x) \, dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги тушунчаси ҳам функциянинг чекли лимитга эга бўлиши орқали ифодаланади. Функциянинг чекли лимитга эга бўлиши ҳақидаги теоремадан (1-қисм, 4-боб, 6-§) фойдаланиб қўйидаги теоремага келамиз.

16.10-теорема (Коши теоремаси). Қўйидаги

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

хосмас интегралнинг (b — махсус нуқта) яқинлашувчи бўлиши учун, $\forall \epsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилиб, $b - \delta < t' < b$, $b - \delta < t'' < b$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи t' ва t'' лар учун

$$|F(t'') - F(t')| = \left| \int_{t'}^{t''} f(x) \, dx \right| < \epsilon$$

тенгсизликнинг бажарилшии зарур ва етарли.

Бу теорема мұхым назарий ақамиятта әга бўлган теорема. Бироқ ундан амалда — хосмас интегралларнинг яқинлашувчилигини аниқлашда фойдаланиш қийин бўлади.

16.11-төрима. Агар $\int_a^b |f(x)| dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

Бу теореманинг исботи ушбу бобнинг 2-§ идаги 16.5-теореманинг исботи кабидир.

16.7-эслатма. $\int_a^b |f(x)| dx$ интегралнинг узоқлашувчи бўлишидан $\int_a^b f(x) dx$ интегралнинг узоқлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Мисол. Ушбу $\int_0^1 (-1)^{\left[\frac{1}{1-x}\right]} \frac{1}{1-x} dx$ интеграл яқинлашувчи, аммо $\int_0^1 \left|(-1)^{\left[\frac{1}{1-x}\right]}\right| \left|\frac{1}{1-x}\right| dx = \int_0^1 \left|\frac{1}{1-x}\right| dx$ интеграл эса узоқлашувчидир.

16.19-таъриф. Агар $\int_a^b |f(x)| dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ абсолют яқинлашувчи интеграл деб аталади, $f(x)$ функция эса $[a, b]$ да абсолют интегралланувчи функция деб аталади.

Агар $\int_a^b f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлиб, $\int_a^b |f(x)| dx$ интеграл узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ шартли яқинлашувчи интеграл деб аталади.

Бирор $f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган бўлиб, b эса шу функциянинг махсус нүктаси бўлсин. Бу $f(x)$ функция $|f(x)|$ абсолют қийматининг $[a, b]$ бўйича $\int_a^b |f(x)| dx$ интегралини қарайлик. Кейинги интегралга нисбатан 6-§ даги аломатларни қўллаш мумкин. Агар бирор аломатга кўра $\int_a^b |f(x)| dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги топилса, унда

16.11-теоремага асосан берилган $\int_a^b f(x) dx$ интегралнинг ҳам яқинлашувчилиги (ҳатто абсолют яқинлашувчилиги) топилган бўлади.

Агар бирор аломатга кўра $\int_a^b |f(x)| dx$ интегралнинг узоқлашувчилигини аниқласак, айтиш мумкинки, $\int_a^b f(x) dx$ ёки узоқлашувчи бўлади, ёки шартли яқинлашувчи бўлади ва буни аниқлаш қўшимча текшириш талаб этади.

6- §. Чегараланмаган функция хосмас интегралини ҳисоблаш

Биз аввалги параграфларда функция хосмас интегралининг яқинлашувчилигини ўргандик. Энди яқинлашувчи хосмас интегралларни ҳисоблаш билан шуғулланамиз.

Бирор $f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган бўлиб, b эса шу функцияниг махсус нуқтаси бўлсин. Бу функцияниг хосмас интеграли

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

яқинлашувчи, уни ҳисоблаш талаб этилсин.

1. Ньютон—Лейбниц формуласи. Фараз қиласи, $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз бўлсин. Маълумки, бу ҳолда $f(x)$ функция шу оралиқда $\Phi(x)$ ($\Phi'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$) бошланғич функцияга эга бўлади. $x \rightarrow b - 0$ да $\Phi(x)$ функцияниг лимити мавжуд ва чекли бўлса, бу лимитни $\Phi(x)$ бошланғич функцияниг b нуқтадаги қиймати деб қабул қиласиз:

$$\lim_{x \rightarrow b - 0} \Phi(x) = \Phi(b).$$

Хосмас интеграл таърифи ҳамда Ньютон—Лейбниц формуласидан фойдаланиб қуидагини топамиз:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b - 0} \int_a^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b - 0} [\Phi(t) - \Phi(a)] = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)|_a^b.$$

Бу эса, юқоридаги келишув асосида, бошланғич функцияга эга бўлган $f(x)$ функция хосмас интеграли учун Ньютон—Лейбниц формуласи ўринли бўлишини кўрсатади.

Берилган хосмас интеграл ўзгарувчиларни алмаштириб ёки бўлаклаб интеграллаш натижасида ҳисобланishi мумкин.

Биз ушбу бобнинг 3- § ида чегаралари чексиз хосмас интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш ва бўлаклаб интеграллаш усуllibарини келтирган эдик. Худди шу усуllibар чегараланмаган функция хосмас интегралларида ҳам мавжуддир. Уларни исботсиз келтирамиз.

2. Бўлаклаб интеграллаш усули. $u(x)$ ва $v(x)$ функцияларининг ҳар бири $[a, b]$ да берилган бўлиб, шу оралиқда узлуксиз $u'(x)$ ва $v'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. b нуқта эса $v(x) \cdot u'(x)$ ҳамда $u(x) v'(x)$ функцияларининг махсус нуқталари.

Агар $\int_a^b v(x) du(x)$ интеграл яқинлашувчи ҳамда ушбу

$$\lim_{t \rightarrow b - 0} u(t) v(t)$$

лимит мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\int_a^b u(x) dv(x)$ интеграл яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x) v(x)|_a^b - \int_a^b v(x) du(x) \quad (16.37)$$

бўлади, бунда

$$u(b) \cdot v(b) = \lim_{t \rightarrow b-0} u(t)v(t).$$

Мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

интегрални қарайлик. Агар $u(x) = x+1$, $d v(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx$ деб олсак, унда

$$u(x) \cdot v(x) \Big|_0^1 = (x+1) \sqrt[3]{(x-1)^2} \Big|_0^1 = 3,$$

$$\int_0^1 v(x) du(x) = \int_0^1 3(x-1)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{9}{4} (x-1)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 = -\frac{9}{4}$$

бўлиб, (16.37) формулага кўра

$$\int_0^1 u(x) dv(x) = \int_0^1 \frac{(x+1) dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 3 - \left(-\frac{9}{4} \right) = \frac{21}{4}$$

бўлади. Демак,

$$\int_0^1 \frac{(x+1) dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{21}{4}.$$

16.8- эслатма. Юқоридаги (16.37) формулани келтириб чиқаришда $\int_a^b v(x) du(x)$ интегралнинг яқинлашувчилиги ҳамда $\lim_{t \rightarrow b-0} [u(t) \cdot v(t)]$ лимитнинг мавжуд ва чекли бўлиши талаб этилди.

Агар $\int_a^b u(x) dv(x)$, $\int_a^b v(x) du(x)$ интегралларнинг яқинлашувчилиги ҳамда $\lim_{t \rightarrow b-0} [u(t) \cdot v(t)]$ лимитнинг мавжуд ва чекли бўлиши каби учта фактдан исталган иккитаси ўринли бўлса, унда уларнинг учинчиси ҳамда (16.37) формула ўринли бўлади.

3. Ўзгарувчи ларни алмаштириш усули. $f(x)$ функция $[a, b)$ да берилган бўлиб, b эса шу функцияning маҳсус нуқтаси бўлсин. Қуйидаги

$$\int_a^b f(x) dx$$

хосмас интегрални қарайлик. Бу интегралда $x = \varphi(z)$ дейлик, бунда $\varphi(z)$ функция $[\alpha, \beta)$ оралиқда $\varphi'(z) > 0$ ҳосилага эга ва у узлуксиз ҳамда $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Агар $\int_\alpha^\beta f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z) dz$ интеграл яқинлашув-

чи бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz$$

бўлади.

16.9- эслатма. $\int_a^b f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлсин. Бу интегралда $x = \varphi(z)$ бўлиб, у юқоридаги шартларни бажарсинг. У ҳолда $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

интегралда $x = \varphi(z) = z^2$ алмаштириш бажарамиз. Равшаники, бу $x = z^2$ функция $(0, 1]$ оралиқда $x' = 2z > 0$ досилага эга ва у узлуксиз ҳамда $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Интегрални ҳисоблаймиз:

$$I = \int_0^1 \frac{2dz}{1+z^2} = 2 \operatorname{arctg} z \Big|_0^1 = 2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

4. Чегараланмаган функциялар хосмас интеграллари ни ҳам баъзан (аниқ интеграл сингари) интеграл йиғиндининг лимити сифатида ҳисоблаш мумкин бўлади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган бўлиб, b нуқта шу функцияning максус нуқтаси бўлсин. Бу функция кўйидаги шартларни бажарсинг:

- 1) $[a, b]$ да $f(x)$ функция интегралланувчи,
 - 2) $[a, b]$ да $f(x)$ функция ўсувчи ва $\forall x \in [a, b]$ учун $f(x) > 0$.
- У ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left[a + \frac{k}{n}(b-a)\right] \quad (16.38)$$

бўлади.

Бу (16.38) муносабатнинг исботи ушбу бобнинг 4-§ ида исботланган (16.21) муносабатнинг исботи кабидир.

Чегараланмаган функция хосмас интегралининг бош қиймати. $f(x)$ функция $[a, b]$ интервалда берилган бўлиб, $c(a < c < b)$ эса шу функцияning максус нуқтаси бўлсин.

Маълумки, $\tau \rightarrow c - 0$, $t \rightarrow c + 0$ да, яъни $\eta = c - \tau \rightarrow 0$, $\eta' = t - c \rightarrow 0$ да ушбу

$$F(\tau, t) = \int_a^{\tau} f(x) dx + \int_t^b f(x) dx = \int_a^{c-\eta} f(x) dx + \int_{c+\eta'}^b f(x) dx = F_0(\eta, \eta')$$

функциянинг лимити мавжуд бўлса, бу лимит чегараланмаган функциянинг хосмас интегрални деб аталар эди:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \eta' \rightarrow 0}} F_0(\eta, \eta') = \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \eta' \rightarrow 0}} [\int_a^{c-\eta} f(x) dx + \int_{c+\eta'}^b f(x) dx].$$

Агар бу лимит чекли бўлса, $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи дейилар эди.

Равшанки, $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, яъни ихтиёрий равища $\eta \rightarrow 0$, $\eta' \rightarrow 0$ да $F_0(\eta, \eta')$ функция чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $\eta = \eta'$ ва $\eta \rightarrow 0$ да ҳам бу функция чекли лимитга эга — интеграл яқинлашувчи бўлаверади.

Бироқ $F_0(\eta, \eta')$ функциянинг $\eta = \eta'$ бўлиб, $\eta \rightarrow 0$ да чекли лимитга эга бўлишидан $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Мисол. Ушбу

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} \quad (a < c < b)$$

хосмас интегрални қарайлик. Равшанки,

$$F_0(\eta, \eta') = \int_a^{c-\eta} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\eta'}^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a} + \ln \frac{\eta}{\eta'} \quad (16.39)$$

бўлади.

$\eta = \eta'$ ва $\eta \rightarrow 0$ да $F_0(\eta, \eta') \rightarrow \ln \frac{b-c}{c-a}$ бўлади.

Бироқ ихтиёрий равища $\eta \rightarrow 0$, $\eta' \rightarrow 0$ да (16.39) муносабатдан кўринадики, $F_0(\eta, \eta')$ функция аниқ лимитга эга бўлмайди.

16.20-таъриф. Агар $\eta = \eta'$ ва $\eta \rightarrow 0$ да $F_0(\eta, \eta')$ функциянинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интеграл бош қиймат маъносида яқинлашувчи дейилиб,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} F_0(\eta, \eta)$$

лимит эса $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интегралнинг бош қиймати деб аталади ва

$$\text{v.p. } \int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\text{v.p. } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} F_0(\eta, \eta).$$

Шундай қилиб, $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, у бош қиймат маъносида ҳам яқинлашувчи бўлади. Бироқ $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интегралнинг бош қиймат маъносида яқинлашувчи бўлишидан унинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

5. Чегараланмаган функция хосмас интегралини тақрибий ҳисоблаш. $f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган ва b шу функцияning махсус нуқтаси, бу функция $[a, b]$ да узлуксиз бўлиб,

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлсин. Кўп ҳолларда бундай интегрални аниқ ҳисоблаш қўйин бўлиб, уни тақрибий ҳисоблашга тўғри келади.

Хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги таърифига асосан

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b-0} \int_a^t f(x) dx$$

лимит маёжуд ва чекли, яъни $\forall \epsilon > 0$ олингандага ҳам шундай $\delta > 0$ тспиладики, $b - \delta < t < b$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча t ларда

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^t f(x) dx \right| = \left| \int_t^b f(x) dx \right| < \epsilon$$

бўлади.

Натижада берилган I интегрални тақрибий ифодаловчи қўйидаги

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^t f(x) dx \quad (b - \delta < t < b)$$

формулага келамиз. Бу тақрибий формуланинг хатолиги

$$\left| \int_t^b f(x) dx \right| < \epsilon$$

бўлади.

Шундай қилиб, хосмас интегрални тақрибий ҳисоблаш — аниқ интегрални тақрибий ҳисоблашга келтирилади. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблашда эса, бизга маълум формулалар (тўғри тўртбурчаклар, трапеция, Симпсон формулалари, қаралсин, 1-қисм, 9-боб, 11-§) дан фойдаланилади.

7- §. Үмумий ҳол

Ушбу параграфда чегараланмаган $f(x)$ функцияниянг чексиз оралиқ бўйича хосмас интеграли тушунчаси келтирилади.

Соддалик учун, $(a, +\infty)$ оралиқда берилган $f(x)$ функция шу оралиқда битта a махсус нуқтага эга бўлсин. Бу функция исталган чекли $[t, \tau]$ ($a < t < \tau < +\infty$) оралиқда интегралланувчи, яъни ушбу

$$\int_t^\tau f(x) dx \quad (16.40)$$

интеграл мавжуд бўлсин.

τ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида ($t < \tau < +\infty$) (16.40) интеграл t га боғлиқ бўлади:

$$\int_t^\tau f(x) dx = F_\tau(t).$$

Маълумки, агар $t \rightarrow a+0$ да $F_\tau(t)$ функцияниянг

$$\lim_{t \rightarrow a+0} F_\tau(t)$$

лимити мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функцияниянг $(a, \tau]$ оралиқ бўйича хосмас интеграли деб аталиб, у

$$\int_a^\tau f(x) dx$$

каби белгиланар эди. Демак,

$$\int_a^\tau f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a+0} F_\tau(t) = \lim_{t \rightarrow a+0} \int_a^t f(x) dx. \quad (16.41)$$

Қаралаётган $f(x)$ функцияниянг $(a, \tau]$ ($a < \tau < +\infty$) оралиқ бўйича хосмас интеграли $\int_a^\tau f(x) dx$ мавжуд бўлсин. Равшанки, бу интеграл τ га боғлиқ бўлади:

$$\int_a^\tau f(x) dx = \varphi(\tau).$$

Агар $\tau \rightarrow +\infty$ да $\varphi(\tau)$ функцияниянг лимити

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi(\tau)$$

мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функцияниянг $(a, +\infty)$ оралиқ бўйича хосмас интеграли деб аталиб, у

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_a^\tau f(x) dx. \quad (16.42)$$

Юқоридаги (16.41) ва (16.42) мұносабатларға күра

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_a^{\tau} f(x) dx = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^{\tau} f(x) dx \quad (16.43)$$

бўлади.

Агар (16.43) лимит мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи дейилиб, $f(x)$ эса $(a, +\infty)$ оралиқда интегралланувчи деб аталади.

Агар (16.43) лимит мавжуд бўлиб, у чексиз бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интеграл узоқлашувчи деб аталади.

16. 10-эслатма. Агар (16.43) лимит мавжуд бўлмаса, бу ҳолда шартли равишда $f(x)$ функциянинг $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интеграли узоқлашувчи деб қабул қилинади.

Умуман, юқоридагидек, $f(x)$ функция $(a, +\infty) \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ ($a < c_i < +\infty, i = 1, 2, \dots, n$) тўпламда берилган, c_1, c_2, \dots, c_n эса шу функцияниң махсус нүқталари бўлган ҳолда ҳам $f(x)$ функцияниң $(a, +\infty)$ оралиқ бўйича хосмас интегралини таърифлаш ва уни ўрганиш мумкин.

Биз ушбу бобнинг 1—8-параграфларида функцияниң чексиз оралиқ бўйича хосмас интегралининг ҳамда чегараланмаган функцияниң хосмас интегралининг яқинлашувчилиги шарти, яқинлашувчи интегралларниң хоссалари, уларни ҳисоблаш билан шуғулланган эдик. Худди шунга ўхшаш масалаларни 9-§ да келтирилган интегралларга нисбатан айтиб, уларни ўрганиш мумкин.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (16.44)$$

хосмас интегрални қарайлик. $a < 1$ қийматларда, $x = 0$ нүқта интеграл остидаги функцияниң махсус нүқтаси бўлади (чунки, $x \rightarrow +0$ да интеграл остидаги функция чексизга итилади). Демак, бу ҳолда (16.44) интеграл ҳам чексиз оралиқ бўйича олинган хосмас интеграл, ҳам чегараланмаган функцияниң хосмас интеграли экан. Бу интегрални икки қисмга:

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

ажратиб, уларниң ҳар бирини алоҳида алоҳида яқинлашувчиликка текширамиз.

Биринчи

$$\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx$$

интегралда, интеграл остидаги функция учун

$$\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{x^{1-a}} \leqslant x^{a-1} e^{-x} \leqslant \frac{1}{x^{1-a}} \quad (0 < x \leqslant 1)$$

тengsизликлар ўринили бўлади.

Ушбу

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1-a}} dx$$

интеграл $1 - a < 1$, яғни $a > 0$ да яқынлашувчи, $1 - a > 1$, яғни $a \leq 0$ да узек-лашувчи (қаралсın, 5- §).

5- § да келтирилган таққослаш ҳақидағи 16. 8- теоремага күра

$$\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx$$

интеграл $a > 0$ да яқынлашувчи, $a \leq 0$ да эса узоқлашувчи.

Әнді $\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ интегрални яқынлашувчиликка текширамиз.

Равшанки,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{a-1} e^{-x}}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{a+1}}{e^x} = 0.$$

Ушбу $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ интеграл яқынлашувчи бўлганилигидан, 2- § да келтирилган 16.3-

натижага кўра $\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ интеграл ҳам яқынлашувчидир. Шундай қилиб,

$\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ интеграл a нинг ихтиёрий қийматида яқынлашувчи. Натижада бе-рилган $\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ интегралнинг $a > 0$ да яқынлашувчи бўлишини топамиз.

2. Ушбу

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \quad (16.45)$$

интегрални қарайлик. Интеграл остидаги функция учун

- 1) $a < 1, b > 1$ бўлганда $x = 0$ махсус нуқта,
- 2) $a \geq 1, b < 1$ бўлганда $x = 1$ махсус нуқта,
- 3) $a < 1, b < 1$ бўлганда $x = 0$ ва $x = 1$ нуқталар махсус нуқталари бўлади, бинобарин (16. 45) интеграл чегараланмаган функцияянинг хосмас интегралидир.

Берилган интегрални яқынлашувчиликка текшириш учун уни қўйидагича ёзиб оламиз:

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир интегралда, интеграл остидаги функцияянинг кўпү билан битта махсус нуқтаси бўлади.

Равшанки,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{b-1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^{a-1} = 1.$$

Ү ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{x^{a-1}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(1-x)^{b-1}} = 1$$

бўлиб, хосмас интегралларда таққослаш ҳақидаги 16. 9- теоремага кўра

ҳамда

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx \text{ билан } \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1} dx$$
$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx \text{ билан } \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{b-1} dx$$

интеграллар бир вақтда ёки яқинлашади, ёки узоқлашади.

Маълумки, $a > 0$ бўлганда

$$\int_0^{1/2} x^{a-1} dx$$

интеграл яқинлашувчи, $b > 0$ бўлганда

$$\int_{1/2}^1 (1-x)^{b-1} dx$$

интеграл яқинлашувчи. Демак, $a > 0$ бўлганда

$$\int_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади, $b > 0$ бўлганда

$$\int_{1/2}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, қаралаётган

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

интеграл $a > 0$ ва $b > 0$ бўлганда, яъни

$$M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty), b \in (0, \infty)\}$$

тўпламда яқинлашувчи бўлади.

17- Б О Б ПАРАМЕТРГА БОҒЛИҚ ИНТЕГРАЛЛАР

Мазкур курснинг 12- ва 13- бобларида кўп ўзгарувчили функциялар ва уларнинг дифференциал ҳисоби батафсил ўрганилди. Энди бундай функцияларнинг интеграл ҳисоби билан шуғулланамиз. Шуни айтиш керакки, кўп ўзгарувчили функцияларга нисбатан интеграл тушунчалик турлича бўлади.

Ушбу боода кўп ўзгарувчили функцияларнинг битта ўзгарувчиси бўйича интеграли билан танишамиз ва уни ўрганамиз.

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция бирор $M (M \subset R^m)$ түпламда берилган бўлсин. Бу функцияниңг битта $x_k (k = 1, 2, \dots, m)$ ўзгарувчисидан бошқа барча ўзгарувчиларини ўзгармас деб ҳисобласак, у ҳолда $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция битта x_k ўзгарувчига боғлиқ бўлган функцияга айланади. Унинг шу ўзгарувчи бўйича интеграл (агар у мавжуд бўлса), равшанки $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m$ ларга боғлиқ бўлади. Бундай интеграллар параметрга боғлиқ интеграллар тушунчасига олиб келади.

Соддалик учун икки ўзгарувчили $f(x, y)$ функцияниңг битта ўзгарувчи бўйича интегралини ўрганамиз.

$f(x, y)$ функция R^2 фазодаги бирор

$$M = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, y \in E \subset R\}$$

түпламда берилган бўлсин. y ўзгарувчининг $E (\bar{E} \subset R)$ түпламдан олинган ҳар бир тайинланган қийматида $f(x, y)$ функция x ўзгарувчиси бўйича $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи, яъни

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл мавжуд бўлсин. Равшанки, бу интеграл y ўзгарувчининг E түпламдан олинган қийматига боғлиқ бўлади:

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx. \quad (17.1)$$

Одатда (17.1) интеграл *параметрга боғлиқ интеграл* деб аталади, y ўзгарувчи эса *параметр* дейилади.

Параметрга боғлиқ интегралларда, $f(x, y)$ функцияниңг функционал хоссаларига (лимити, узлуксизлиги, дифференциалланувчилиги, интегралланувчилиги ва ҳоказо) кўра $\Phi(y)$ функцияниңг тегишли функционал хоссалари ўрганилади. Бундай хоссаларни ўрганишда $f(x, y)$ функцияниңг y ўзгарувчиси бўйича лимити ва унга интилиши характеристи мухим роль ўйнайди.

1- §. Лимит функция. Тенис яқинлашиш. Лимит функцияниңг узлуксизлиги

$f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, y \in E \subset R\}$ түпламда берилган, y_0 эса $E (E \subset R)$ түпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

x ўзгарувчининг $[a, b]$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ фақат y нингина функциясига айланади. Агар $y \rightarrow y_0$ да бу функцияниңг лимити мавжуд бўлса, равшанки, у лимит x ўзгарувчи-ниңг $[a, b]$ оралиқдан олинган қийматига боғлиқ бўлади:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x, y_0) = \varphi(x).$$

17.1- таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\forall x \in [a, b]$ учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ топилсанки, $|y - y_0| < \delta$ тенгсизликни қа-ноатлантирувчи $\forall y \in E$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

бўлса, у ҳолда $\varphi(x)$ функция $f(x, y)$ функцияниңг $y \rightarrow y_0$ даги лимит функцияси дейилади.

$f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2; x \in [a, b], y \in E\}$ тўпламда берилган бўлиб, ∞ эса E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

17.2- таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $\forall x \in [a, b]$ учун шундай $\Delta = \Delta(\varepsilon, x) > 0$ топилсанки, $|y| > \Delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y \in E$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

бўлса, у ҳолда $\varphi(x)$ функция $f(x, y)$ функцияниңг $y \rightarrow \infty$ даги лимит функцияси дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x, y) = xy$$

функцияни $M = \{(x, y) \in R^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ тўпламда қарайлик. $y_0 = 1$ бўлсин.

Агар $\forall \varepsilon > 0$ кўра, $\delta = \varepsilon$ деб олинса, унда $|y - y_0| = |y - 1| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y \in [0, 1]$ ва $\forall x \in [0, 1]$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| = |xy - x| = |x| \cdot |y - 1| \leq |y - 1| < \varepsilon$$

бўлади. Демак, $y \rightarrow 1$ да $f(x, y) = xy$ функцияниңг лимит функцияси

$$\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow 1} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 1} xy = x$$

бўлади.

2. Қуйидаги

$$f(x, y) = x^y$$

функцияни $M = \{(x, y) \in R^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ тўпламда қарайлик. $y_0 = 0$ бўлсин.

Агар $x = 0$ бўлса, у ҳолда $\forall y \in [0, 1]$ учун

$$f(0, y) \equiv 0$$

бўлади.

Агар x ўзгарувчи тайинланган ва $x \neq 0$ бўлса, у ҳолда $y \rightarrow 0$ да

$$f(x, y) = x^y \rightarrow x^0 = 1$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра $\delta = \log_x(1 - \varepsilon)$ ($x > 0$) деб олинадиган бўлса, унда $|y - y_0| = |y - 0| = |y| < \delta$ тенгсизликни бажарадиган $\forall y \in [0, 1]$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| = |x^y - 1| = 1 - x^y < 1 - x^{\log_x(1-\varepsilon)} = 1 - (1 - \varepsilon) = \varepsilon$$

бўлади.

Демак, $y \rightarrow 0$ да берилган $f(x, y) = x^y$ функцияниңг лимит функцияси

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \in (0, 1] \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

га тенг бўлади.

Юқорида келтирилган мисолларнинг биринчисида, лимит функция таърифидаги $\delta = \varepsilon$ бўлиб, у факат ε гагина боғлиқ, иккинчисида эса $\delta = \log_x(1 - \varepsilon)$ бўлиб, у берилган $\varepsilon > 0$ билан бирга қаралётган x нуқтага ҳам боғлиқ эканини кўрамиз.

Лимит функция таърифидаги $\delta > 0$ нинг қаралаётган x нуқталарга боғлиқ бўлмай, факат $\varepsilon > 0$ гагина боғлиқ қилиб танлаб олиниши мумкин бўлган ҳол муҳимdir.

17.3- таъриф. M тўпламда берилган $f(x, y)$ функцияниг $y \rightarrow y_0$ даги лимит функцияси $\varphi(x)$ бўлсин. $\forall \varepsilon > 0$ олингданда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топилсаки, $|y - y_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y \in E$ ва $\forall x \in [a, b]$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

бўлса, $f(x, y)$ функция ўз лимит функцияси $\varphi(x)$ га $[a, b]$ да текис яқинлашиади дейилади.

Акс ҳолда яқинлашиш нотекис дейилади. Нотекис яқинлашишнинг қатъий таърифи келтирайлик.

17.4- таъриф. M тўпламда берилган $f(x, y)$ функцияниг $y \rightarrow y_0$ даги лимит функцияси $\varphi(x)$ бўлсин. $\forall \delta > 0$ олингданда ҳам шундай $\varepsilon_0 > 0$, $x_0 \in [a, b]$ ва $|y_1 - y_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $y_1 \in E$ топилсаки, ушбу

$$|f(x_0, y_1) - \varphi(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция $\varphi(x)$ га нотекис яқинлашиади дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x, y) = x \sin y$$

функцияни $M = \{(x, y) \in R^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi\}$ тўпламда қарайлик. $y_0 = \frac{\pi}{3}$

бўлсин. Равшанки, $y \rightarrow y_0 = \frac{\pi}{3}$ бўлганда $f(x, y) = x \cdot \sin y$ функцияниг лимити $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ га тенг бўлади. Демак, $\varphi(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

$\forall \varepsilon > 0$ сонни олайлик. Агар $\delta = \varepsilon$ десак, у ҳолда $\left| y - \frac{\pi}{3} \right| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирган $\forall y$ учун ва $\forall x \in [0, 1]$ учун

$$\begin{aligned} |f(x, y) - \varphi(x)| &= \left| x \sin y - \frac{\sqrt{3}}{2}x \right| = |x| \cdot \left| \sin y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = |x| \left| \sin y - \sin \frac{\pi}{3} \right| \leq \\ &\leq \left| y - \frac{\pi}{3} \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

тенгсизлик бажарилади. 17.3- таърифга кўра, $y \rightarrow \frac{\pi}{3}$ да берилган $f(x, y) = x \cdot \sin y$

функция ўз лимит функцияси $\varphi(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ га текис яқинлашади.

3. Юқорида келтирилган

$$f(x, y) = x^y$$

функция $y \rightarrow 0$ да ўз лимит функцияси

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \in (0, 1] \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \end{cases}$$

га нотекис яқинлашади.

Ҳақиқатан ҳам, $\forall \delta > 0$ сонни олайлик. Агар $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$, y_1 сифатида $0 < y_1 < \delta$

төңгизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий y_1 ни ва $x_0 = 2^{-1/y_1}$ деб олсак, у ҳолда

$$|f(x_0, y_1) - \varphi(x_0)| = 1 - x_0^{y_1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0 = \frac{1}{4}.$$

Бу эса, 17.4- таърифга кўра, $y \rightarrow 0$ да $f(x, y) = x^y$ функция ўз лимит функцияси $\varphi(x)$ га нотекис яқинлашишини билдиради.

Энди $f(x, y)$ функциянинг лимит функцияга эга бўлиши ва унга текис яқинлашиши ҳақидаги теоремани келтирамиз.

$f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2: a \leq x \leq b, y \in E\}$ тўпламда берилган бўлиб, y_0 эса $E (E \subset R)$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

17.1- теорема. $f(x, y)$ функция $y \rightarrow y_0$ да лимит функция $\varphi(x)$ га эга бўлиши ва унга текис яқинлашиши учун $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $x (x \in [a, b])$ га боғлиқ бўлмаган шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топилиб, $|y - y_0| < \delta, |y' - y_0| < \delta$ төңгизликларни қаноатлантирувчи $\forall y, y' \in E$ ҳамда $\forall x \in [a, b]$ учун

$$|f(x, y) - f(x, y')| < \varepsilon \quad (17.2)$$

төңгизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $f(x, y)$ функция $y \rightarrow y_0$ да $\varphi(x)$ лимит функцияга эга бўлиб, унга $[a, b]$ да текис яқинлашсан. Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $|y - y_0| < \delta$ төңгизликни қаноатлантирувчи $\forall y \in E$ ҳамда $\forall x \in [a, b]$ учун $|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Жумладан $|y' - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Натижада

$$|f(x, y) - f(x, y')| \leq |f(x, y) - \varphi(x)| + |f(x, y') - \varphi(x)| < \varepsilon$$

бўлиб, (17.2) шартнинг бажарилишини топамиз.

Етарлилиги. Теоремадаги (17.2) шарт бажарилсан. У ҳолда x -ўзгарувчининг $[a, b]$ оралиқда олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ функция y ўзгарувчининггина функцияси бўлиб, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $|y - y_0| < \delta, |y' - y_0| < \delta$ төңгизликларни қаноатлантирувчи $\forall y, y' \in E$ учун

$$|f(x, y) - f(x, y')| < \varepsilon \quad (17.2)$$

бўлади. Функция лимитининг мазжудлиги ҳақидаги Коши теоремасига асосан (қаралсан, 1- қисм, 4- боб, 6- §) $y \rightarrow y_0$ да $f(x, y)$ функция лимитга эга бўлади. Равшанки, бу лимит тайинланган $x (x \in [a, b])$ га боғлиқ. Демак,

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x).$$

Шу билан $y \rightarrow y_0$ да $f(x, y)$ функция $\varphi(x)$ лимит функцияга эга бўлиши кўрсатилди.

Энди y ўзгарувчанинг $|y - y_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматида тайинлаб, (17.2) тенгсизликда $y' \rightarrow y_0$ да лимитта ўтсак, у ҳолда

$$|f(x, y) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

хосил бўлади. Бу эса $y \rightarrow y_0$ да $f(x, y)$ функцияниң $\varphi(x)$ лимит функцияга $[a, b]$ да текис яқинлашишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Энди лимит функцияниң узлуксизлиги ҳақидаги теоремани келтирайлик. Бу теоремадан келгусида биз фойдаланамиз.

17.2- теорема. Агар $f(x, y)$ функция y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир қийматида, x ўзгарувчининг функцияси сифатида, $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса ва $y \rightarrow y_0$ да $f(x, y)$ функция $\varphi(x)$ лимит функцияга $[a, b]$ да текис яқинлашиша, у ҳолда $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз бўлади.

Исбот. y_0 га интиладиган $\{y_n\}$ кетма-кетликни олайлик ($y_n \in E$, $n = 1, 2, \dots$). Шартга кўра ҳар бир y_n ($n = 1, 2, \dots$) да $f(x, y_n)$ функция x ўзгарувчининг $[a, b]$ оралиқдаги узлуксиз функцияси бўлади. Демак, $\{f(x, y_n)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади $[a, b]$ оралиқда узлуксиз.

Теореманинг иккинчи шартига кўра $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $\forall x \in [a, b]$ учун

$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad (y \in E) \quad (17.3)$$

бўлади.

$y_n \rightarrow y_0$ дан юқорида олинган $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ га кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ учун $|y_n - y_0| < \delta$ бўлади. У ҳолда, (17.3) га асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ ва $\forall x \in [a, b]$ учун

$$|f(x, y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса $\{f(x, y_n)\}$ функционал кетма-кетлик $\varphi(x)$ га $[a, b]$ да текис яқинлашувчиликни билдиради. 14- боб, 3- § да келтирилган 14.6- теоремага асосан $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиздир. Теорема исбот бўлди.

2- §. Параметрга боғлиқ интеграллар

$f(x, y)$ функция

$$M = \{(x, y) \in R^2: x \in [a, b], y \in E \subset R\}$$

тўпламда берилган бўлиб, y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y) - x$ ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. Яъни y ни ўзгармас деб ҳисобланганда

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл мавжуд бўлсин. Равшанки, бу интегралнинг қиймати олинган y га (параметрга) боғлиқ бўлади:

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx. \quad (17.1)$$

Мисол. Ушбу $f(x, y) = \sin xy$ функцияниг x ўзгарувчиси бўйича $[a, b]$ даги интеграли (бу ерда $y \neq 0$)

$$\int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \sin xy dx = \frac{1}{y} \int_a^b \sin xy d(xy) = \frac{\cos ay - \cos by}{y}$$

бўлиб, $E = R \setminus \{0\}$ тўпламда берилган

$$\Phi(y) = \frac{1}{y} (\cos ay - \cos by)$$

функциядан иборатдир.

Ушбу параграфда параметрга боғлиқ (17.1) интегралнинг ($\Phi(y)$ — функцияниг) функционал хоссаларини ўрганамиз.

1. Интеграл белгиси остида лимитга ўтиш. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган бўлиб, y_0 нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

13.3-теорема. $f(x, y)$ функция y нинг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида x нинг функцияси сифатида $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция $y \rightarrow y_0$ да $\varphi(x)$ лимит функцияига эга бўлса ва унга текис яқинлашиша, y ҳолда

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx \quad (17.4)$$

бўлади.

Исбот. Шартга кўра $f(x, y)$ функция $y \rightarrow y_0$ да $\varphi(x)$ лимит функцияига эга ва унга текис яқинлашади. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $|y - y_0| < \delta$ ни қаноатлантирувчи $\forall y \in E$ ва $\forall x \in [a, b]$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

бўлади.

Иккинчи томондан, 17.2-теоремага асосан, $\varphi(x)$ [функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлади. Демак, бу функцияниг интеграли $\int_a^b \varphi(x) dx$ мавжуд.

Натижада

$$\left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x, y) - \varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \varepsilon$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx$$

еканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

(17.4) муносабатни қуйидаги

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b [\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)] dx$$

хам ёзиш мүмкін. Бу эса интеграл белгиси сстида лимитта ўтиш мүмкінлігінің күрсатади.

Мисол. Биз $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ түпламда берилған

$$f(x, y) = x \sin y$$

функцияның $y \rightarrow 0$ да $\varphi(x) = 0$ лимит функцияға текис яқынлашишини күрган әдік: $\lim_{y \rightarrow 0} x \sin y = 0$.

Берилған функция y ўзгарувчининг ҳар бир тайин қыйматида x ўзгарувчининг $[0, 1]$ оралиқдаги узлуксиз функциясы эканлығы равшан. Демак, 17.3- теоремага күра

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 f(x, y) dx = \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 x \sin y dx = \int_0^1 [\lim_{y \rightarrow 0} x \sin y] dx = 0$$

бўлади.

2. Интегралнинг параметр бўйича узлуксизлиги.
17.4- теорема. Агар $f(x, y)$ функция

$$M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

түпламда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

функция $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлади.

Исбот. Ихтиёрий $y_0 \in [c, d]$ нуқтани олайлик. Шартга кўра $f(x, y)$ функция M түпламда (тўғри тўртбурчакда) узлуксиз. Қантор теоремасига кўра бу функция M түпламда текис узлуксиз бўлади. Унда $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики,

$$\rho((x, y), (x, y_0)) = |y - y_0| < \delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall (x, y) \in M, \forall (x, y_0) \in M$ учун

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса $f(x, y)$ функцияның $y \rightarrow y_0$ да $f(x, y_0)$ лимит функцияга текис яқынлашишини билдиради. У ҳолда 17.3- теоремага асосан

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow y_0} \Phi(y) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b [\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)] dx = \int_a^b f(x, y_0) dx = \Phi(y_0) \\ (\forall y_0 \in [c, d]) \end{aligned}$$

бўлади. Демак, $\Phi(y)$ функция y_0 нуқтада узлуксиз. Теорема исбот бўлди.

Мисол. Ушбу $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$

функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ түпламда қаралаётган бўлсин. Рав-

шанки, $f(x, y)$ функция M да узлуксизdir. Юқоридаги теоремага күра $\Phi(y)$ функция ҳам $[0, 1]$ да узлуксиз бўлади. Берилган интегрални ҳисоблаб топамиз:

$$\Phi(y) = \int_0^1 \frac{xdx}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2 + y^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln \frac{2 + y^2}{1 + y^2}.$$

3. Интегрални параметр бўйича дифференциаллаш. Энди параметрга боғлиқ интегрални параметр бўйича дифференциаллаши қараймиз.

17.5-теorema. $f(x, y)$ функция

$$M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

тўпламда берилган ва у ўзгарувчининг $[c, d]$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция M тўпламда $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилага эга бўлиб, у узлуксиз бўлса, у ҳолда $\Phi(y)$ функция ҳам $[c, d]$ оралиқда $\Phi'(y)$ ҳосилага эга ва ушибу

$$\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx \quad (17.5)$$

муносабат ўринилидир.

Исбот. Шартга кўра $f(x, y)$ функция x ўзгарувчиси [бўйича $[a, b]$ оралиқда узлуксиз. Бинобарин

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл мавжуд.

Энди $\forall y_0 \in [c, d]$ нуқтани олиб, унга шундай $\Delta y (\Delta y \geq 0)$ орттирма берайликки, $y_0 + \Delta y \in [c, d]$ бўлсин. $\Phi(y)$ функцияning y_0 нуқтадаги орттиринасини топиб, ушбу

$$\frac{\Phi(y_0 + \Delta y) - \Phi(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx$$

тенгликни ҳосил қиласиз. Лагранж теоремаси (1-қисм, 6-боb, 6-§) га кўра (уни қўллай олишимиз теорема шартлари билан таъминланган)

$$\frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} = f'_y(x, y_0 + \theta \cdot \Delta y)$$

бўлади, бунда $0 < \theta < 1$.

Натижада

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(y_0 + \Delta y) - \Phi(y_0)}{\Delta y} &= \int_a^b f'_y(x, y_0 + \theta \cdot \Delta y) dx = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx + \\ &+ \int_a^b [f'_y(x, y_0 + \theta \cdot \Delta y) - f'_y(x, y_0)] dx \end{aligned}$$

Бўлиб, ундан эса

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Phi(y_0 + \Delta y) - \Phi(y_0)}{\Delta y} - \int_a^b f'_y(x, y_0) dx \right| \leqslant \\ & \leqslant \int_a^b |f'_y(x, y_0 + \theta \cdot \Delta y) - f'_y(x, y_0)| dx \leqslant \\ & \leqslant \int_a^b \omega(f'_y, \Delta y) dx = \omega(f'_y, \Delta y) \cdot (b - a) \end{aligned} \quad (17.6)$$

Бўлишини топамиз, бунда $\omega(f'_y, \Delta y) - f'_y(x, y)$ функцияниг узлуксизлик модули.

Модомики, $f'_y(x, y)$ функция M тўпламда узлуксиз экан, унда Қантор теоремасига кўра бу функция шу тўпламда текис узлуксиз бўлади. У ҳолда мазкур курсининг 12-боб, 4-§ ида келтирилган теоремага асоссан

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \omega(f'_y, \Delta y) = 0$$

бўлади.

(17.6) муносабатдан

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Phi(y_0 + \Delta y) - \Phi(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\Phi'(y_0) = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx.$$

Қаралаётган y_0 нуқта $[c, d]$ оралиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлғанлигини эътиборга олсак, унда кейинги тенглик теореманинг исботланганлигини кўрсатади.

(17.5) муносабатни қўйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{d}{dy} f(x, y) dx.$$

Бу эса дифференциаллаш амалини интеграл белгиси остига ўтказиш мумкинлигини кўрсатади.

Исбот этилган бу 17.5-теорема Лейбниц қоидаси деб аталади.

Мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \ln(y^2 \sin^2 x)$$

функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right], 0 < y_0 \leqslant y \leqslant y_1 < \infty\}$ тўпламда узлуксиз ҳамда $f'_y(x, y) = \frac{2}{y}$ ҳосилага эга ва у ҳам узлуксиз. Ундан олинган $\Phi(y) =$

$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \ln(y^2 \sin^2 x) dx$ интегрални қарайлык. 17.5-теоремага күра $\Phi(y)$ функция ҳосилага эга бўлиб,

$$\Phi'(y) = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (\ln(y^2 \sin^2 x))'_y dx = \frac{2}{y} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{y}$$

бўлади.

4. Интегрални параметр бўйича интеграллаш. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2: x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ тўпламда берилган ва шу тўпламда узлуксиз бўлсин. У ҳолда 17.4-теоремага кўра

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (17.1)$$

функция $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлади. Бинобарин, бу функцияниң $[c, d]$ оралиқ бўйича интеграли мавжуд.

Демак, $f(x, y)$ функция M тўпламда узлуксиз бўлса, у ҳолда параметрга боғлиқ интегрални параметр бўйича $[c, d]$ оралиқда интеграллаш мумкин:

$$\int_c^d \Phi(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонида $f(x, y)$ функцияни аввал x ўзгарувчи бўйича $[a, b]$ оралиқда интеграллаб (бунда y ни ўзгармас ҳисоблаб), сўнг натижани $[c, d]$ оралиқда интегралланади.

Баъзан $f(x, y)$ функция M тўпламда узлуксиз бўлган ҳолда бу функцияни аввал y ўзгарувчиси бўйича $[c, d]$ оралиқда интеграллаб (бунда x ни ўзгармас ҳисоблаб), сўнг ҳосил бўлган x ўзгарувчининг функциясини $[a, b]$ оралиқда интеграллаш қулай бўлади. Натижада ушбу

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy, \quad \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

интеграллар ҳосил бўлади. Бу интеграллар бир-бирига тенг бўладими деган савол туғилади. Бу саволга қўйидаги теорема жавоб беради.

17.6-теорема. Агар $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2: x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ тўпламда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

бўлади.

Исбот. $\forall t \in [c, d]$ нуқтани олиб, қўйидаги

$$\varphi(t) = \int_c^t \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy, \quad \psi(t) = \int_a^b \left[\int_c^t f(x, y) dy \right] dx$$

интегралларни қарайлик. Бу $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз.

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

функция $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлгани сабабли

1-қисм; 9-боб, 9-§ да келтирилган 9.9-теоремага асосан

$$\varphi'(t) = \left(\int_c^t \Phi(y) dy \right)' = \Phi(t) = \int_a^b f(x, t) dx \quad (17.7)$$

бўлади.

$f(x, y)$ функция M тўпламда узлуксиз. Яна ўша 1-қисм, 9-боб, 9-§ даги теоремага кўра

$$\left(\int_c^t f(x, y) dy \right)'_t = f(x, t) \quad (x - \text{ўзгармас})$$

бўлади. Демак, $\int_c^t f(x, y) dy$ функциянинг $M = \{(x, t) \in R^2: x \in [a, b], t \in [c, d]\}$ тўпламдаги t бўйича хусусий ҳосиласи $f(x, t)$ га тенг, ва демак, узлуксиз. У ҳолда 17.5-теоремага мувофиқ

$$\psi'(t) = \left(\int_a^b \left[\int_c^t f(x, y) dy \right] dx \right)'_t = \int_a^b \left[\int_c^t f(x, y) dy \right]'_t dx = \int_a^b f(x, t) dx \quad (17.8)$$

бўлади.

(17.7) ва (17.8) муносабатлардан

$$\varphi'(t) = \psi'(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\varphi(t) = \psi(t) + C \quad (C - \text{const}).$$

Бироқ $t = c$ бўлганда $\varphi(c) = \psi(c) = 0$ бўлиб, ундан $C = 0$ бўлишини топамиз. Демак, $\varphi(t) = \psi(t)$ бўлади. Хусусан, $t = d$ бўлганда $\varphi(d) = \psi(d)$ бўлиб, у теоремани исботлайди.

Мисол. Параметрга боғлиқ интегрални параметр бўйича интеграллашдан фойдаланиб, ушбу

$$A = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (0 < a < b)$$

интегрални ҳисоблаймиз.

Равшанки, ($x > 0$)

$$\int_a^b x^y dy = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$$

бўлади. Демак,

$$A = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy.$$

Интеграл остидаги $f(x, y) = x^y$ функция $M = \{(x, y) \in R^2: x \in [0, 1], y \in [a, b]\}$ түпнамда узлуксизdir. Ў ҳолда 17.6-теоремага кўра

$$A = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx$$

бўлади. Аммо

$$\int_0^1 x^y dx = \frac{1}{y+1}$$

бўлганлигидан $A = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln \frac{b+1}{a+1}$ бўлади. Демак, $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln \frac{b+1}{a+1}$.

3- §. Параметрга боғлиқ интеграллар (умумий ҳол)

$f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2: x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ түпнамда берилган. y ўзгарувчининг $[c, d]$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ функция x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин.

$x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$ функцияларнинг ҳар бири $[c, d]$ да берилган ва $\forall y \in [c, d]$ учун

$$a \leq \alpha(y) \leq \beta(y) \leq b \quad (17.9)$$

бўлсин.

Равшанки, ушбу

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

интеграл мавжуд, y ўзгарувчи (параметр) га боғлиқдир:

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx. \quad (17.10)$$

Бу интеграл ушбу бобнинг 2-§ ида ўрганилган интегралга қараганда умумийроқ. Ҳақиқатан ҳам, (17.9) да $\alpha(y) = a$, $\beta(y) = b$, ($y \in [c, d]$) бўлганда (17.10) интеграл (17.1) кўринишдаги интегралга айланади.

Ушбу параграфда $f(x, y)$ ҳамда $\alpha(y)$, $\beta(y)$ функцияларнинг функционал хоссаларига кўра параметрга боғлиқ

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

интегралнинг хоссаларини ўрганамиз.

17.7-теорема. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2: x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ түпнамда узлуксиз, $\alpha(y)$ ва $\beta(y)$ функцияларнинг ҳар бири $[c, d]$ да узлуксиз ва улар (17.9) шартни қаноатлантирун. Ў ҳолда

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

функция ҳам $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлади.

Исбот. $\forall y_0 \in [c, d]$ нүктани олиб, унга шундай Δy ($\Delta y \geq 0$) орттира берайликки, $y_0 + \Delta y \in [c, d]$ бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned} F(y_0 + \Delta y) - F(y_0) &= \int_{\alpha(y_0 + \Delta y)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx = \\ &= \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} [f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)] dx + \\ &+ \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx \end{aligned} \quad (17.11)$$

бўлади. Бу тенгликинг ўнг томонидаги қўшилувчиларни баҳолаймиз.

$f(x, y)$ функция M тўпламда узлуксиз, демак, Кантор теоремасига асосан, текис узлуксиз бўлади. У ҳолда $\Delta y \rightarrow 0$ да $f(x, y_0 + \Delta y)$ функция ўз лимит функцияси $f(x, y_0)$ га текис яқинлашади (қаралсин, 250-бет) ва 17.3-теоремага кўра

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} [f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)] dx &= \\ &= \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} [f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)] dx = 0 \end{aligned} \quad (17.12)$$

бўлади.

(17.11) муносабатдаги

$$\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx, \quad \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx$$

интеграллар учун қўйидаги баҳога эгамиз:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx \right| &\leq M |\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)|, \\ \left| \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx \right| &\leq M |\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)|, \end{aligned} \quad (17.13)$$

бунда $M = \sup |f(x, y)| ((x, y) \in M)$.

Шартга кўра $\alpha(y)$, $\beta(y)$ функцияларнинг ҳар бирни $[c, d]$ да узлуксиз. Демак,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} [\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)] &= 0, \\ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} [\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)] &= 0. \end{aligned} \quad (17.14)$$

Юқоридаги (17.12), (17.13) ва (17.14) муносабатларни эътиборга олиб, (17.11) тенглика $\Delta y \rightarrow 0$ да лимитга ўтсан, унда

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} [F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)] = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $F(y)$ функция $\forall y_0 \in [c, d]$ да узлуксиз. Теорема исбот бўлди.

17.8-теорема. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ түплемдә үзлүксиз, $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилага әга ва y үзлүксиз, $\alpha(y)$ ва $\beta(y)$ функциялар әса $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$ ҳосилаларга әга ҳамда улар (17.9) шартни қаноатлантирысін. y ҳолда

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

функция $[c, d]$ оралиқда $F'(y)$ ҳосилага әга ва

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + \beta'(y) \cdot f(\beta(y), y) - \alpha'(y) \cdot f(\alpha(y), y)$$

бўлади.

Исбот. $\forall y_0 \in [c, d]$ нүктани олиб, унга шундай $\Delta y (\Delta y \geq 0)$ ортирма берайликки, $y_0 + \Delta y \in [c, d]$ бўлсин.

(17.11) муносабатдан фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)}{\Delta y} &= \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx + \frac{1}{\Delta y} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \\ &\quad + \Delta y) dx - \frac{1}{\Delta y} \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx. \end{aligned} \quad (17.15)$$

$\Delta y \rightarrow 0$ да

$$\frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y}$$

функция ўз лимит функцияси $f'_y(x, y_0)$ га $[a, b]$ оралиқда текис яқинлашади (қаралсин, 250-бет). Унда

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0) dx \quad (17.16)$$

бўлади.

Энди

$$\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx, \quad \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx$$

интегралларга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаб (қаралсин, 1-қисм, 9-боб, 8-§), ушбу

$$\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx = f(x', y_0 + \Delta y) [\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)],$$

$$\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx = f(x'', y_0 + \Delta y) [\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)]$$

тенгликларни ҳосил қиласиз, бунда x' нүкта $\beta(y_0)$, $\beta(y_0 + \Delta y)$ нүкталар орасида, x'' әса $\alpha(y_0)$, $\alpha(y_0 + \Delta y)$ нүкталар орасида жойлашган. $f(x, y)$ функциянинг M түплемдә үзлүксизлигини, $\alpha(y)$ ва $\beta(y)$ функцияларни орасида үзлүксизлигини докажибди.

цияларнинг эса $[c, d]$ оралиқда ҳосилага эга бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} [f(x', y_0 + \Delta y) \times \\ &\times \frac{\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)}{\Delta y}] = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} f(x', y_0 + \Delta y) \cdot \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)}{\Delta y} = \\ &= f(\beta(y_0), y_0) \cdot \beta'(y_0), \\ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} [f(x'', y_0 + \Delta y) \times \\ &\times \frac{\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)}{\Delta y}] = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} f(x'', y_0 + \Delta y) \cdot \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)}{\Delta y} = \\ &= f(\alpha(y_0), y_0) \alpha'(y_0) \end{aligned} \quad (17.17)$$

эканлиги келиб чиқади.

Юқоридаги (17.15) муносабатда, $\Delta y \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб, (17.16) ва (17.17) тенгликларни эътиборга олиб ушбуни топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)}{\Delta y} &= \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f_y(x, y_0) dx + f(\beta(y_0), y_0) \cdot \beta'(y_0) - \\ &- f(\alpha(y_0), y_0) \cdot \alpha'(y_0). \end{aligned}$$

Демак,

$$F'(y_0) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f_y(x, y_0) dx + f(\beta(y_0), y_0) \cdot \beta'(y_0) - f(\alpha(y_0), y_0) \cdot \alpha'(y_0).$$

Модомики, y_0 нуқта $[c, d]$ оралиқдаги ихтиёрий нуқта экан, у ҳолда $\forall y \in [c, d]$ учун

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y(x, y) dx + f(\beta(y), y) \cdot \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \cdot \alpha'(y)$$

бўлиши равшандир. Бу эса теоремани исботлайди.

Хусусан, $\alpha(y) \equiv a$, $\beta(y) \equiv b$ бўлса, бу формуладан 2-§ да келтирилган (17.5) формула келиб чиқади.

17.9-төрима. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ тўтламда узлуксиз, $\alpha(y)$ ва $\beta(y)$ функцияларнинг ҳар бирни $[c, d]$ да узлуксиз ва улар (17.9) шартни қаноатлантирун. У ҳолда $F(y)$ функция $[c, d]$ да интегралланувчи бўлади.

Бу теоремани исботлашни ўқувчига ҳавола қиласиз.

4-§. Параметрга боғлиқ ҳосмас интеграллар. Интегралнинг текис яқинлашиши

Биз мазкур курснинг 16-бобида ҳосмас интеграл (чегараси чексиз ҳосмас интеграл, чегараланмаган функциянинг ҳосмас интеграли) тушунчали билан танишиб, уни ўргандик. Ушбу бобнинг 2-§ ва 3-§ ларида параметрга боғлиқ интеграллар баён этилди.

Энди умумий ҳол—параметрга боғлиқ хосмас интеграллар билан шүрхаланамиз.

1. Параметрга боғлиқ хосмас интеграл түшүнчеси.

1°. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in E \subset R\}$ түпламда берилгандан. Сүнг y ўзгарувчининг E түпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, +\infty)$ оралиқ бўйича интегралланувчи, яъни

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (y \in E \subset R)$$

хосмас интеграл мавжуд ва чекли бўлсин. Бу интеграл y нинг қийматига боғлиқдир:

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (17.18)$$

(17.18) интеграл параметрга боғлиқ чегараси чексиз хосмас интеграл деб аталади.

$f(x, y)$ функция $M' = \{(x, y) \in R^2 : x \in (-\infty, a], y \in E \subset R\}$ ($M'' = \{(x, y) \in R^2 : x \in (-\infty, +\infty), y \in E \subset R\}$) түпламда берилгандан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ — x нинг функцияси сифатида $(-\infty, a]$ ($(-\infty, +\infty)$) да интегралланувчи бўлсин. Бунда

$$\int_{-\infty}^a f(x, y) dx \quad (\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx)$$

интеграл ҳам параметрга боғлиқ, чегараси чексиз хосмас интеграл деб аталади.

2°. $f(x, y)$ функция $M_1 = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in E \subset R\}$ түпламда берилгандан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ ни x ўзгарувчининг функцияси сифатида қаралганда унинг учун $x = b$ максус нуқта бўлсин ва ў функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи, яъни

$$\int_a^b f(x, y) dx \quad (y \in E \subset R)$$

хосмас интеграл мавжуд бўлсин. Равшонки, бу интеграл y нинг қийматига боғлиқ:

$$I_1(y) = \int_a^b f(x, y) dx. \quad (17.19)$$

(17.19) интеграл параметрга боғлиқ, чегараланмаган функцияниң хосмас интеграли деб аталади.

$f(x, y)$ функция $M'_1 = \{(x, y) \in R^2 : x \in (a, b], y \in E \subset R\}$ түпламда берилгандан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ — x нинг функцияси сифатида қаралганда, унинг учун $x = a$ максус нуқта бўлсин. Бу функция $(a, b]$ да интегралланувчи бўлсин. У ҳолда

$$I_2(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл ҳам параметрга боғлиқ чегараланмаган функциянынг хосмас интегралы деб аталади.

3°. Умумий ҳолда, параметрга боғлиқ чегараланмаган функциянынг чегараси чексиз хосмас интегралы тушунчаси ҳам юқоридагидек киристилади.

$f(x, y)$ функция $M_2 = \{(x, y) \in R^2 : x \in (c, +\infty), y \in E \subset R\}$ түплемда берилган. y ўзгарувчининг E түплемдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ ни x ўзгарувчининг функцияси сифатида қаралганда унинг учун $x = c$ махсус нуқта бўлсин ва бу функция $(c, +\infty)$ оралиқда интегралланувчи (қаралсин: 16-боб, 9-§), яъни

$$\int_c^{+\infty} f(x, y) dx$$

чегараланмаган функциянынг чегараси чексиз хосмас интегралы мавжуд бўлсин. Бу интеграл y нинг қийматига боғлиқдир:

$$I_3(y) = \int_c^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (17.20)$$

(17.20) интеграл параметрга боғлиқ чегараланмаган функциянынг чегараси чексиз хосмас интегралы деб аталади.

Биз юқорида келтирилган (17.18), (17.19), (17.20) интегралларни параметрга боғлиқ хосмас интеграллар деб кетаверамиз.

Масалан, 16-бобнинг 1-§ ида қаралган

$$I(\alpha) = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (a > 0, \alpha > 0)$$

интеграл, шу бобнинг 5-§ да қаралган

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

интеграллар, 16-бобнинг 9-§ да қаралган

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

интеграллар параметрга боғлиқ хосмас интеграллардир.

Бу ерда ҳам асосий масалалардан бири — $f(x, y)$ функциянынг функционал хоссаларига кўра, (17.18), (17.19) ва (17.20) параметрга боғлиқ хосмас интегралларнинг функционал хоссаларини ўрганишдир.

Биз қўйида уларнинг турли хоссаларини, асосан,

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (17.18)$$

интеграл учун келтирамиз. Бу хоссаларни

$$\int_a^b f(x, y) dx, \quad \int_c^{+\infty} f(x, y) dx$$

каби хосмас интеграллар учун ҳам тегишлича баён этиш мумкин.

Параметрга бөглиқ хосмас интегралларни үрганишда интегралнинг текис яқинлашиши тушунчаси мұхим роль үйнайды.

2. Интегралнинг текис яқинлашиши. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in E \subset R\}$ түпламда берилған. y ўзгаруvinнинг E түпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ x ўзгаруvinнинг функцияси сифатида $[a, +\infty)$ да интегралланувчи бўлсин.

Чегараси чексиз хосмас интеграл таърифига кўра ихтиёрий $[a, t]$ да ($a < t < +\infty$)

$$F(t, y) = \int_a^t f(x, y) dx \quad (17.21)$$

интеграл мавжуд ва

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t, y). \quad (17.22)$$

Шундай қилиб, (17.21) ва (17.22) интеграллар билан аниқланган $F(t, y)$ ва $I(y)$ функцияларга эга бўламиз ва $I(y)$ функция $F(t, y)$ функцияниг $t \rightarrow +\infty$ даги лимит функцияси бўлади.

17.5-таъриф. Агар $t \rightarrow +\infty$ да $F(t, y)$ функция ўз лимит функцияси $I(y)$ га E түпламда текис яқинлашса, у ҳолда

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл E түпламда текис яқинлашувчи деб аталади.

17.6-таъриф. Агар $t \rightarrow +\infty$ да $F(t, y)$ функция ўз лимит функцияси $I(y)$ га E да нотекис яқинлашса, у ҳолда

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл E түпламда нотекис яқинлашувчи деб аталади.

Равшанки, $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ интеграл E түпламда текис яқинлашувчи бўлса, у шу түпламда яқинлашувчи бўлади.

Шундай қилиб,

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интегралнинг E түпламда текис яқинлашувчи бўлиши қўйидагини англаладади:

1) $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ хосмас интеграл y ўзгаруvinнинг E түпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида яқинлашувчи,

2) $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $\forall t > \delta$ ва $\forall y \in E$ учун

$$\left| \int_t^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

бўлади.

$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ интеграл E түпламда яқынлашувчи, аммо у шу түпламда нотекис яқынлашувчи дегани қуйидагини англатади:

1) $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ хосмас интеграл y ўзгарувчининг E түпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида яқынлашувчи,

2) $\forall \delta > 0$ олинганда ҳам, шундай $\epsilon_0 > 0$, $y_0 \in E$ ва $t_1 > \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $t_1 \in [a, +\infty)$ топиладики,

$$\left| \int_{t_1}^{+\infty} f(x, y_0) dx \right| \geq \epsilon_0$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$I(y) = \int_0^{+\infty} y e^{-xy} dx \quad (y \in E = (0, +\infty))$$

интегрални қарайлик. Бу ҳолда

$$F(t, y) = \int_0^t y e^{-xy} dx = 1 - e^{-ty} \quad (0 < t < +\infty)$$

бўлиб, y ўзгарувчининг $E = (0, +\infty)$ түпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - e^{-ty}) = 1$$

бўлади. Демак, берилган хосмас интеграл яқынлашувчи ва

$$I(y) = \int_0^{+\infty} y e^{-xy} dx = 1$$

бўлади.

Энди берилган интегрални текис яқынлашувчиликка текширамиз.

$y \in E = (0, +\infty)$ бўлсин. Ихтиёрий катта мусбат δ сонни олайлик. Агар $\epsilon_0 = \frac{1}{3}$, $t_0 > \delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган ихтиёрий t_0 ва $y_0 = \frac{1}{t_0}$ деб олсак, у ҳолда

$$\left| \int_{t_0}^{+\infty} y_0 e^{-xy_0} dx \right| = e^{-t_0 y_0} = e^{-1} > \frac{1}{3} = \epsilon_0$$

бўлади. Бу эса

$$I(y) = \int_0^{+\infty} y e^{-xy} dx$$

интеграл $E = (0, +\infty)$ да нотекис яқынлашувчи эканини билдиради.

Энди $y \in E' = [c, +\infty) \subset E$ бўлсин, бунда c — ихтиёрий мусбат сон. Унда $\forall \epsilon > 0$ олинганда ҳам ($0 < \epsilon < 1$) $\delta = \frac{1}{c} \ln \frac{1}{\epsilon}$ дейилса, $\forall t > \delta$ ва $\forall y \in E' = [c, +\infty)$ учун

$$\left| \int_t^{+\infty} y e^{-xy} dx \right| = e^{-ty} < e^{-c \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$$

бўлади. Демак,

$$I(y) = \int_0^{+\infty} y e^{-xy} dx$$

интеграл $E' = [c, +\infty)$ да ($c > 0$) текис яқинлашувчи.

Биз кўрдикки, параметрга боғлиқ хосмас интеграл

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (17.18)$$

нинг E тўпламда текис яқинлашувчи бўлиши, $t \rightarrow +\infty$ да $F(t, y)$ функцияни лимит функция $I(y)$ га ($y \in E$) текис яқинлашишидан иборат.

Ушбу бобнинг 1-§ ида $y \rightarrow y_0$ да $f(x, y)$ функцияни лимит функция $\varphi(x)$ га текис яқинлашишининг зарурй ва етарли шартини ифодаловчи 17.1-теоремани келтиридик. Бу теоремадан фойдаланиб, (17.18) интегралнинг текис яқинлашувчи бўлишининг зарурй ва етарли шарти келтирилади.

$f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган. y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y) - x$ ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, +\infty)$ да интегралланувчи, яъни

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (17.18)$$

хосмас интеграл мавжуд бўлсин.

17.7-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, y га соғлиқ бўлмаган шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топилсаки, $t' > \delta$, $t'' > \delta$ ни қаноатлантирувчи $\forall t', t''$ ва $\forall y \in E$ учун

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

тенгизлик бажарилса, у ҳолда (17.18) хосмас интеграл E тўпламда фундаментал интеграл деб аталади.

17.10-те орема (Қоши теоремаси). Ушбу $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ интегралнинг E тўпламда текис яқинлашувчи бўлиши учун унинг E тўпламда фундаментал бўлиши зарур ва етарли.

Бу теорема назарий аҳамиятга эга. Ундан амалиётда фойдаланиш қийин.

Қўйида биз интегралнинг текис яқинлашувчилигини таъминлайдиган, қўпинча қўлланиладиган аломатларни келтирамиз.

Ве йер штрасс аломати. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган, y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ функция x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, +\infty)$ да интегралланувчи бўлсин. Агар шундай $\varphi(x)$ функция ($x \in [a, +\infty)$) топилсаки,

1) $\forall x \in [a, +\infty)$ ва $\forall y \in E$ учун $|f(x, y)| \leq \varphi(x)$ бўлса,

2) $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Шартга кўра $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ яқинлашувчи. Унда 16-бобнинг 2- § ида келтирилган 16.4-теоремага асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олингандан ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $\forall t' > \delta, \forall t'' > t'$ бўлганда $|\int_{t'}^{t''} \varphi(x) dx| < \varepsilon$ бўлади. Иккинчи томондан, 1) шартдан фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x, y) dx \right| \leq \int_{t'}^{t''} |f(x, y)| dx \leq \int_{t'}^{t''} \varphi(x) dx \quad (t' < t'').$$

Демак,

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Бу эса $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ хосмас интегралнинг E тўпламда фундаментал эканни билдиради. Юқоридаги 17.10-теоремага асосан $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x y}{1+x^2} dx \quad (y \in E = (-\infty, \infty))$$

интегрални қарайлик.

Агар $\varphi(x)$ функция сифатида $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ олинса, у ҳолда

1) $\forall x \in [0, +\infty)$ ва $\forall y \in (-\infty, +\infty)$ учун

$$|f(x, y)| = \left| \frac{\cos x y}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x),$$

2) $\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ интеграл яқинлашувчи (қаралсин, 16-боб, 1- §) бўлади. Демак, Вейерштрасс аломатига кўра берилган интеграл $E = (-\infty, +\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлади.

Интегралнинг текис яқинлашувчилигини аниқлашда қўл келадиган алломатлардан — Абелъ ва Дирихле алломатларини исботсиз келтирамиз.

Абелъ аломати. $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган. y ўзгарувчининг E тўп-

ламдан олинган ҳар бир тайин қийматида $g(x, y)$ функция x нинг функцияси сифатида $[a, +\infty)$ да монотон функция бўлсин.

Агар

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи ва $\forall (x, y) \in M$ учун

$$|g(x, y)| \leq c \quad (c = \text{const})$$

бўлса,

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \cdot g(x, y) dx$$

интеграл E да текис яқинлашувчи бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx \quad (y \in E = [0, +\infty))$$

интегрални қарайлик. Агар

$$f(x, y) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(x, y) = e^{-xy}$$

деб олинса, Абелъ аломати шартлари бажарилади. Ҳақиқатан ҳам, $\int_0^{+\infty} f(x, y) dx$ текис яқинлашувчи:

$$\int_0^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

(16-боб, 2-§ ва 17-боб, 8-§), $g(x, y) = e^{-xy}$ эса y нинг $E = [0, +\infty)$ дан олинган ҳар бир тайин қийматида x нинг камаючи функцияси ва $\forall x \in [0, +\infty)$, $\forall y \in E = [0, +\infty)$ учун $|g(x, y)| = e^{-xy} \leq 1$ бўлади. Демак, берилган интеграл Абелъ аломатига кўра $E = [0, +\infty)$ да текис яқинлашувчи.

Дирихле аломати. $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар M тўпламда берилган. Агар $\forall t \geq a$ ҳамда $\forall y \in E$ учун

$$\left| \int_a^t f(x, y) dx \right| \leq c \quad (c = \text{const})$$

бўлса ва y ўзгарувчининг E дан олинган ҳар бир тайин қийматида, $x \rightarrow +\infty$ да $g(x, y)$ функция ўз лимит функцияси $\varphi(y) = 0$ га текис яқинлашса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dx$$

интеграл E да текис яқинлашувчи бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} y dx \quad (y \in E = [1, 2])$$

интегрални қарайлар. Агар

$$f(x, y) = \sin xy, g(x, y) = \frac{1}{x}$$

дайылса, унда $\forall t > 0, \forall y \in [1, 2]$ учун

$$\left| \int_0^t f(x, y) dx \right| = \left| \int_0^t \sin xy dx \right| = \left| 1 - \frac{\cos ty}{y} \right| \leq 2$$

бўлади. $x \rightarrow +\infty$ да $g(x, y) = \frac{1}{x}$ функция E тўпламда нолга текис яқинлашади:

$$g(x, y) = \frac{1}{x} \rightarrow 0.$$

Демак, берилган интеграл Дирихле аломатига кўра $E = [1, 2]$ да текис яқинлашувчиликни билдиришади.

Чегараланмаган функция хосмас интегралининг текис (нотекис) яқинлашувчилиги тушунчаси ҳам юқоридагидек киритилади.

$f(x, y)$ функция $M_1 = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган. y ўзгарувчининг E дан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ ни x ўзгарувчининг функцияси сифатида қаралганда унинг учун $x = b$ махсус нуқта бўлсин ва бу функция $[a, b]$ да интегралланувчи бўлсин. Чегараланмаган функция хосмас интеграли таърифига кўра ихтиёрий $[a, t]$ да ($a < t < b$)

$$F_1(t, y) = \int_a^t f(x, y) dx$$

интеграл мавжуд ва

$$I_1(y) = \int_a^b f(x, y) dx = \lim_{t \rightarrow b-0} F_1(t, y) \quad (17.23)$$

бўлади. Демак, $I_1(y)$ функция $F_1(t, y)$ функцияниң $t \rightarrow b-0$ даги лимит функцияси.

17.8-таъриф. Агар $t \rightarrow b-0$ да $F_1(t, y)$ функция ўз лимит функцияси $I_1(y)$ га E тўпламда текис яқинлашса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи деб аталади.

17.9-таъриф. Агар $t \rightarrow b-0$ да $F_1(x, y)$ функция ўз лимит функцияси $I_1(y)$ га E тўпламда нотекис яқинлашса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл E тўпламда нотекис яқинлашувчи деб аталади.

Бу таърифларни «е — б» орқали баён этишини ўқувчига ҳавола этамиш.

17.10-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олингандың ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топилсаки, $b - \delta < t' < b$, $b - \delta < t'' < b$ бўлган $\forall t'$, t'' лар ва $\forall y \in E$ учун

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

тенгизлиқ бажарилса, у ҳолда (17.23) интеграл E тўпламда фундаментал интеграл деб аталади.

17.11-теорема. $\int_a^b f(x, y) dx$ интегралнинг E тўпламда текис яқинлашувчи бўлиши учун унинг E тўпламда фундаментал бўлиши зарур ва етарли.

5-§. Параметрга боғлиқ хосмас интегралларда интеграл белгиси остида лимитга ўтиш

1. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in E \subset R\}$ тўп ламда берилган. y_0 нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

17.12-теорема. $f(x, y)$ функция

1) $y \rightarrow y_0$ дан слингандан ҳар бир тайин қийматида x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, +\infty)$ да узлуксиз,

2) $y \rightarrow y_0$ да ихтиёрий $[a, t]$ ($a < t < +\infty$) сралиқда $\varphi(x)$ лимит функцияга текис яқинлашувчи бўлсин.

Агарда

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $y \rightarrow y_0$ да $I(y)$ функция лимитга эга ва

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \quad (17.24)$$

бўлади.

Исбот. Теореманинг 1) ва 2) шартлари ҳамда ушбу бобнинг 1-§ идаги 17.2-теоремадан $\varphi(x)$ лимит функциянинг $[a, +\infty)$ да узлуксиз бўлиши келиб чиқади. Демак, $\varphi(x)$ функция ҳар бир чекли $[a, t]$ ($a < t < +\infty$) оралиқда интегралланувчи.

$\varphi(x)$ ни $[a, +\infty)$ да интегралланувчи эканлигини кўрсатайлик.

Теореманинг шартига кўра

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл E да текис яқинлашувчи. Унда 17.10-теоремага асоссан, $\forall \varepsilon > 0$ олингандың ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $t' > \delta$, $t'' > \delta$ бўлган $\forall t'$, t'' лар ва $\forall y \in E$ учун

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad (17.25)$$

бўлади. $f(x, y)$ функцияга қўйилган шартлар 2-§ да келтирилган 17.3-теорема шартларининг бажарилишини таъминлайди. (17.25) тенгликда $y \rightarrow y_0$ да лимитга ўтиб қўйидагини топамиз:

$$\left| \int_a^t \varphi(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

Бундан эса $\varphi(x)$ нинг $[a, +\infty)$ да интегралланувчи бўлиши келиб чиқади (16-боб, 2-§).

Энди

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \right|$$

айирмани қўйидагича ёзиб,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \right| &= \left| \int_a^t [f(x, y) - \varphi(x)] dx + \int_t^{+\infty} f(x, y) dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_t^{+\infty} \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^t |f(x, y) - \varphi(x)| dx + \left| \int_t^{+\infty} f(x, y) dx \right| + \\ &\quad + \left| \int_t^{+\infty} \varphi(x) dx \right| \quad (a < t < +\infty) \end{aligned} \quad (17.26)$$

тенгсизликнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчини баҳолаймиз.

$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ интеграл E да текис яқинлашувчи. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ топиладики, барча $t > \delta_1$ ва $\forall y \in E$ учун

$$\left| \int_t^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (17.27)$$

бўлади.

$\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи. Демак, юқоридаги $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ топиладики, барча $t > \delta_2$ учун

$$\left| \int_t^{+\infty} \varphi(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (17.28)$$

бўлади.

Агар $\delta_0 = \max \{\delta_1, \delta_2\}$ деб олинса, барча $t > \delta_0$ учун (17.27) ва (17.28) тенгсизликлар бир йўла бажарилади. $y \rightarrow y_0$ да $f(x, y)$ функция $\varphi(x)$ лимит функцияга ҳар бир $[a, t]$ (жумладан $t > \delta_0$) да текис яқинлашувчи. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta' > 0$ топиладики, $|y - y_0| < \delta'$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $y \in E$ ва $\forall x \in [a, t]$ ($a < t < +\infty$) учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3(t-a)} \quad (17.29)$$

бўлади. Натижада (17.26), (17.27), (17.28) ва (17.29) тенгсизликларга кўра

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \right| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \quad (17.30)$$

бўлишини билдиради. Теорема исбет бўлди.

(17.30) лимит муносабатни қўйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \left[\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right] dx.$$

Бу эса 17.12-теореманинг шартлари бажарилганда параметрга боғлиқ хосмас интегралларда ҳам интеграл белгиси остида лимитга ўтиш мумкинлигини кўрсатади.

2. $f(x, y)$ фуникция $M_1 = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган. y_0 нуқта E тўпламининг лимит нуқтаси бўлсин. Шунингдек, y ўзгарувчининг E дан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ ни x ўзгарувчининг функцияси сифатида қаралганда унинг учун $x = b$ махсус нуқта бўлсин.

17.13-теорема. $f(x, y)$ функция

1) y ўзгарувчининг E дан олинган ҳар бир тайин қийматида x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, b]$ да узлуксиз,

2) $y \rightarrow y_0$ да ихтиёрий $[a, t] (a < t < b)$ оралиқда $\varphi(x)$ лимит функцияга текис яқинлашувчи бўлсин.

Агар

$$I_1(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $y \rightarrow y_0$ да $I_1(y)$ функция лимитга эга ва

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I_1(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \left[\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right] dx = \int_a^b \varphi(x) dx$$

бўлади.

6-§. Параметрга боғлиқ хосмас интегралларнинг параметр бўйича узлуксизлиги

1. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in [c, d]\}$ тўпламда берилган.

17.14-теорема. $f(x, y)$ функция M тўпламда узлуксиз ва

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл $[c, d]$ да текис яқынлашувчи бўлсин. У ҳолда $I(y)$ функция $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлади.

Исбот. $f(x, y)$ функциянинг M тўпламда узлуксизлигидан, аввало бу функция y ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида x нинг узлуксиз функцияси бўлиши келиб чиқади. Шу билан бирга $f(x, y)$ функция $M_t = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, t], y \in [c, d]\}$ ($a < t < +\infty$) тўпламда ҳам узлуксиз, демак, шу тўпламда текис узлуксиз бўлади.

$\forall y_0 \in [c, d]$ нуқтани олайлик. $y \rightarrow y_0$ да $f(x, y)$ функция $f(x, y_0)$ лимит функцияга $[a, t]$ да текис яқынлашади (қаралсин, 250-бет). Агар теореманинг иккинчи шартини эътиборга олсан, у ҳолда $f(x, y)$ функция 17.12-теореманинг барча шартларини бажаришини кўрамиз. У ҳолда 17.12-теоремага асосан

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow y_0} I(y) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \left[\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right] dx = \\ &= \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx = I(y_0) \end{aligned}$$

бўлади. Бу эса $I(y)$ функциянинг $[c, d]$ оралиқда узлуксиз эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

2. $f(x, y)$ функция $M_1 = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ тўпламда берилган. y ўзгарувчининг $[c, d]$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ ни x ўзгарувчининг функцияси сифатида қаралганда унинг учун $x = b$ максус нуқта бўлсин.

17.15-теорема. $f(x, y)$ функция M_1 тўпламда узлуксиз ва

$$I_1(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл $[c, d]$ да текис яқынлашувчи бўлсин. У ҳолда $I_1(y)$ функция $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлади.

7- §. Параметрга боғлиқ хосмас интегралларни параметр бўйича дифференциаллаш

1. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in [c, d]\}$ тўпламда берилган.

17.16-теорема. $f(x, y)$ функция M тўпламда узлуксиз, $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилига эга ва у ҳам узлуксиз ҳамда у ўзгарувчининг $[c, d]$ дан олинган ҳар бир тайин қийматида

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл яқынлашувчи бўлсин.

Агар $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ интеграл $[c, d]$ да текис яқынлашувчи бўлса,

y ҳолда $I(y)$ функция ҳам $[c, d]$ оралықда $I'(y)$ ҳосилага әга бүләди ва

$$I'(y) = \int_a^{+\infty} f_y(x, y) dx \quad (17.31)$$

муносабат үринлидир.

Исбет. $\forall y_0 \in [c, d]$ нүктаны олиб, унга шундай Δy ($\Delta y \geq 0$) орттирима берайликки, $y_0 + \Delta y \in [c, d]$ бўлсин.

$I(y)$ функцияниң y_0 нүктадаги орттирмасини олиб, ушбу

$$\frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int_a^{+\infty} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx \quad (17.32)$$

төнгликни ҳосил қиласиз. Энди (17.32) төнгликдаги интегралда $\Delta y \rightarrow 0$ да интеграл белгиси остида лимитга ўтиш мумкинлигини кўрсатамиз.

Лагранж теоремасига кўра

$$\frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} = f'_y(x, y_0 + \theta \cdot \Delta y) \quad (17.33)$$

бўлади, бунда $0 < \theta < 1$.

Шартга кўра $f'_y(x, y)$ функция $M_t = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, t], y \in [c, d]\}$ ($a < t < +\infty$) тўпламда узлуксиз, демак, текис узлуксиз. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $|x'' - x'| < \delta$, $|y'' - y'| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи иктиёрий $(x', y') \in M_t$, $(x'', y'') \in M_t$ нүқталар учун

$$|f'_y(x'', y'') - f'_y(x', y')| < \varepsilon$$

бўлади. Агар $x' = x'' = x$, $y' = y_0$, $y'' = y_0 + \Delta y \cdot \theta$ дейилса, унда $|\Delta y| < \delta$ бўлганда

$$|f'_y(x, y_0 + \theta \cdot \Delta y) - f'_y(x, y_0)| < \varepsilon \quad (\forall x \in [a, t])$$

бўлади. Юқоридаги (17.33) төнгликдан фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$\left| \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} - f'_y(x, y_0) \right| < \varepsilon.$$

Бу эса $\Delta y \rightarrow 0$ да $\frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y}$ функция $f'_y(x, y_0)$ лимит функцияга текис яқинлашишини билдиради.

Теореманиң шартига кўра

$$\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$$

текис яқинлашувчи. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $t' > \delta$, $t'' > \delta$ бўлган t' , t'' ва $\forall y \in [c, d]$ учун

$$\left| \int_{t'}^{t''} f'_y(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

бўлади. Жумладан

$$\left| \int_{t'}^{t''} f'_y(x, y_0 + \Delta y \cdot \theta) dx \right| < \varepsilon$$

бўлади. (17.33) тенглика асосан

$$\left| \int_{t'}^{t''} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx \right| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx$$

интегралнинг текис яқинлашувчилигини билдиради.

Натижада 17.12-теоремага кўра

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \int_a^{+\infty} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx = \int_a^{+\infty} \left[\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} \right] dx$$

тенглик ўринли бўлади.

Юқоридаги (17.32) тенглика $\Delta y \rightarrow 0$ да лимитга ўтамиш:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \int_a^{+\infty} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx = \\ &= \int_a^{+\infty} \left[\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} \right] dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y_0) dx. \end{aligned}$$

Демак,

$$I'(y_0) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y_0) dx.$$

Теорема исбот бўлди.

(17.31) муносабатни қўйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

Бу эса теорема шартларида дифференциаллаш амалини интеграл белгиси остига ўтказиш мумкинлигини кўрсатади.

2. $f(x, y)$ функция $M_1 = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ тўпламда берилган. y ўзгарувчининг $[c, d]$ дан олинган ҳар бир тайин қўйматида $f(x, y)$ ни x ўзгарувчининг функцияси сифа тида қаралганда унинг учун $x = b$ маҳсус нуқта бўлсин.

17.17-теорема. $f(x, y)$ функция M_1 түпламда узлуксиз, $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилага әга ва у ҳам узлуксиз ҳамда у үзгаруvinине $[c, d]$ даан олинған ҳар бир тайин қийматида

$$I_1(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлсин.

Агар

$$\int_a^b f'_y(x, y) dx$$

интеграл $[c, d]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $I_1(y)$ функция ҳам $[c, d]$ оралиқда $I'_1(y)$ ҳосилага әга бўлади ва

$$I'_1(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

муносабат ўринлидир.

8- §. Параметрга боғлиқ ҳосмас интегралларни параметр бўйича интеграллаш

1. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in [c, d]\}$ түпламда берилган.

17.18-теорема. Агар $f(x, y)$ функция M түпламда узлуксиз ва

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл $[c, d]$ оралиқда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $I(y)$ функция $[c, d]$ да интегралланувчи ва

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

бўлади.

Исбот. Теореманинг шартларидан $I(y)$ функциянинг $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлиши келиб чиқади (қаралсин, 17.4-теорема). Демак, $I(y)$ функция $[c, d]$ да интегралланувчи.

Энди

$$\int_a^d \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

тенгликнинг ўринли бўлишини кўрсатамиз.

Шартга кўра

$$I(y) = \int_c^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл $[c, d]$ да текис яқинлашувчи. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олингандыңда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топилады, $\forall t > \delta$ да $\forall y \in [c, d]$ учун

$$\left| \int_t^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad (17.34)$$

бўлади. Мана шундай t бўйича

$$\int_c^d \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy = \int_c^d \left[\int_a^t f(x, y) dx \right] dy + \int_c^d \left[\int_t^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy.$$

17.6-теоремага асосан

$$\int_c^d \left[\int_a^t f(x, y) dx \right] dy = \int_a^t \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

бўлади. Натижада

$$\int_c^d I(y) dy = \int_a^t \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx + \int_c^d \left[\int_t^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy$$

бўлади. Юқоридаги (17.34) муносабатни эътиборга олиб қўйидагини топамиз:

$$\left| \int_c^d I(y) dy - \int_a^t \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \right| \leq \int_c^d \left| \int_t^{+\infty} f(x, y) dx \right| dy < \varepsilon(d - c).$$

Бу эса

$$\int_c^d I(y) dy = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

эканини билдиради. Демак,

$$\int_c^{+\infty} \left[\int_a^d f(x, y) dx \right] dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

Теорема исбот бўлди.

Энди $f(x, y)$ функция $M_2 = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in [c, +\infty)\}$ тўпламда берилган бўлсин.

17.19-теорема. $f(x, y)$ функция M_2 тўпламда узлуксиз ва

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx, \quad \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$$

интеграллар мос равишда $[c, +\infty)$ ва $[a, +\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлсин.

Агар

$$\int_c^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx \right] dy \text{ ёки } \int_a^{+\infty} \left[\int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy \right] dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} \left[\int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx, \quad \int_c^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy$$

интеграллар яқынлашувчи ва

$$\int_c^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx$$

бүләди.

Бу теореманинг исботини ўқувчига ҳавола қиласыз.

2. $f(x, y)$ функция $M_1 = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ түплемда берилган. y нинг $[c, d]$ дан олинган ҳар бир тайин қийматыда $f(x, y)$ ни x үзгаруучининг функцияси сифатида қаралғанда унинг учун $x = b$ махсус нүкта бўлсин.

17.20-теорема. $f(x, y)$ функция M_1 түплемда узлуксиз ва

$$I_1(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл $[c, d]$ оралиқда текис яқынлашувчи бўлса, y ҳолда $I_1(y)$ функция $[c, d]$ да интегралланувчи ва

$$\int_c^d I_1(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

бўләди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$$

интегрални қарайдик. У чегараланмаган функцияning ($a < 1$ да $x = 0$ махсус нүкта) чегараси чексиз хосмас интеграли бўлиб, a параметрга боғлиқдир:

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx.$$

Бу интегрални қуйидаги икки қисмга ажратиб,

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = I_1(a) + I_2(a)$$

уларнинг ҳар бирини алоҳида-алоҳида яқынлашувчиликка текширамиз.
 $0 < x < 1$ да қуйидаги

$$\frac{1}{2} x^{a-1} < \frac{x^{a-1}}{1+x} < x^{a-1}$$

тенгсизликлар ўринли ва $\int_0^1 x^{a-1} dx$ интеграл $a > 0$ да яқынлашувчи, $a \leq 0$ да узоқлашувчи (қаралсин, 16-боб, 5-§). 16-бобнинг 6-§ ида келтирилган 16.8-теоремага кўра

$$I_1(a) = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$$

интеграл $a > 0$ да яқинлашувчи, $a \leq 0$ да узоклашувчи бўлади. $x > 1$ да қўйидаги

$$\frac{1}{2} x^{a-2} \leq \frac{x^{a-1}}{1+x} < x^{a-2}$$

тенгсизликлар ўринли ва $\int_1^{+\infty} x^{a-2} dx$ интеграл $a < 1$ да яқинлашувчи, $a \geq 1$ да узоклашувчи (қаралсин, 16-боб, 1-§). 16-бобнинг 2-§ ида келтирилган 16.2-теоремага кўра

$$I_2(a) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$$

интеграл $a < 1$ да яқинлашувчи, $a \geq 1$ да узоклашувчи бўлади. Шундай қилиб, беприлган

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$$

интегралнинг $0 < a < 1$ да яқинлашувчи бўлишини топамиз.

Эди $I(a)$ интегрални ҳисоблаймиз.

Равшанки, $0 < x < 1$ да

$$\frac{x^{a-1}}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{a+k-1} \quad (*)$$

бўлиб, бу қатор $[a_0, b_0]$ ($0 < a_0 \leq x \leq b_0 < 1$) да текис яқинлашувчи бўлади.

(*) даражали қаторнинг қисмий йифиндиси

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{a+k-1} = \frac{x^{a-1} [1 - (-x)^n]}{(1+x)}$$

бўлади. Агар $\forall n \in N$ ва $\forall x \in (0, 1)$ учун

$$\frac{x^{a-1} [1 - (-x)^n]}{1+x} < x^{a-1}$$

тенгсизликнинг ўринли бўлишини ҳамда

$$\int_0^1 x^{a-1} dx \quad (0 < a < 1)$$

интегралнинг яқинлашувчилигини эътиборга олсак, унда Вейерштрасс аломатига кўра интеграл $\int_0^1 S_n(x) dx$ ($n = 1, 2, 3 \dots$) текис яқинлашувчи бўлади. 17.13-теоремага кўра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)] dx,$$

яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{a+k-1} \right] dx = \int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{a+k-1} \right] dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$$

бўлади. Бу тенгликтан қўйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} I_1(a) &= \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_0^1 (-1)^k x^{a+k-1} dx \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_0^1 (-1)^k x^{a+k-1} dx \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a+k}. \end{aligned}$$

Демак,

$$I_1(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a+k}.$$

Агар

$$I_2(a) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$$

интегралда $x = \frac{1}{t}$ алмаштиришни бажарсак, у ҳолда

$$I_2(a) = \int_0^1 \frac{t^{-a}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{(1-a)-1}}{1+t} dt$$

бўлади. Юқоридаги йўл билан

$$I_2(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a-k}$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\begin{aligned} I(a) &= I_1(a) + I_2(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a+k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a-k} = \frac{1}{a} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k} \right) \end{aligned}$$

бўлади.

Агар

$$\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k} \right) = \frac{\pi}{\sin a \pi} \quad (0 < a < 1)$$

бўлишини (қаралсин, 21-боб, 4-§) эътиборга олсак, унда

$$I(a) = \frac{\pi}{\sin a \pi}$$

эканлиги келиб чиқади. Демак,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a \pi} \quad (0 < a < 1).$$

2. Ушбу

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

интегрални қарайлик. Бу хосмас интегралнинг яқинлашувчи бўлиши 16-бобнинг 2-§ ида кўрсатилган эди. Энди берилган интегрални ҳисоблаймиз. Бунинг учун қуидаги

$$I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$$

параметрга боғлиқ хосмас интегрални қараймиз.

Равшанки,

$$f(x, a) = e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \quad (f(0, a) = 1)$$

функция

$$\{(x, a) \in R^2 : x \in [0, +\infty), a \in [0, c]\} \quad (c > 0)$$

тўпламда узлуксиз,

$$f'_a(x, a) = -e^{-ax} \sin x$$

хусусий ҳосилага эга ва у ҳам узлуксиз функция. Қуидаги

$$\int_0^{+\infty} f'_a(x, a) dx = - \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx$$

интеграл эса $a \geq a_0$ ($a_0 > 0$) да текис яқинлашувчи. 17.16-теоремага кўра

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} \left(e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \right)' dx = - \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx = - \frac{1}{1+a^2}$$

бўлади (қаралсин, 1-қисм, 8-боб, 2-§). Демак,

$$I(a) = -\operatorname{arctg} a + C.$$

$a = +\infty$ бўлганда, $I(+\infty) = 0$ бўлиб, $-\frac{\pi}{2} + C = 0$, яъни $C = \frac{\pi}{2}$ бўлади. Демак,

$$I(a) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a.$$

Бу тенгликда $a \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб қуидагини топамиз:

$$\lim_{a \rightarrow 0} I(a) = \frac{\pi}{2}.$$

Шундай қилиб, $I(0) = \frac{\pi}{2}$, яъни

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

бўлади.

9- §. Бета функция (I тур Эйлер интеграли) ва унинг хоссалари

Биз 16-бобнинг 9- § ида ушбу

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \quad (17.35)$$

хосмас интегрални қарадик.

Интеграл остидаги функция учун

1) $a < 1, b \geq 1$ бўлганда $x=0$ махсус нуқта,

2) $a \geq 1, b < 1$ бўлганда $x=1$ махсус нуқта,

3) $a < 1, b < 1$ бўлганда $x=0$ ва $x=1$ нуқталар махсус нуқтадар бўлади.

Бинобарин, (17.35) чегараланмаган функцияning хосмас интегралидир. Демак, (17.35) интеграл — параметрга боғлиқ хосмас интегралдир. Ўша ерда (17.35) хосмас интегралниң $a > 0, b > 0$ да, яъни

$$M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty), b \in (0, +\infty)\}$$

тўпламда яқинлашувчи бўлиши кўрсатилди.

17.11-та ўриф. (17.35) интеграл бета функция ёки I тур Эйлер интеграли деб аталади ва $B(a, b)$ каби белгиланади, демак

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

Шундай қилиб $B(a, b)$ функция R^2 фазодаги $M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty), b \in (0, +\infty)\}$ тўпламда берилгандир.

Энди $B(a, b)$ функцияning хоссаларини ўрганайлик.

1°. (17.35) интеграл

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

ихтиёрий $M_0 = \{(a, b) \in R^2 : a \in [a_0, +\infty), b \in [b_0, +\infty)\}$ ($a_0 > 0, b_0 > 0$) тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

И сбот. Берилган интегрални текис яқинлашувчиликка текшириш учун уни қуйидагича

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \int_0^{1/2} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

ёзиб оламиз.

Равшанки, $a > 0$ бўлганда $\int_0^{1/2} x^{a-1} dx$ интеграл яқинлашувчи, $b > 0$

бўлганда $\int_{1/2}^1 (1-x)^{b-1} dx$ интеграл яқинлашувчи.

Параметр a нинг $a \geq a_0$ ($a_0 > 0$) қийматлари ва $\forall b > 0$, $\forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ учун

$$x^{a-1}(1-x)^{b-1} \leq x^{a_0-1}(1-x)^{b-1} \leq 2x^{a_0-1}$$

бўлади. Вейерштрасс аломатидан фойдаланиб

$$\int_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

интегралнинг текис яқинлашувчилигини топамиз.

Шунингдек, параметр b нинг $b \geq b_0$ ($b_0 > 0$) қийматлари ва $\forall a > 0$, $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ учун

$$x^{a-1}(1-x)^{b-1} \leq x^{a-1}(1-x)^{b_0-1} \leq 2(1-x)^{b_0-1}$$

бўлади ва яна Вейерштрасс аломатига кўра $\int_{1/2}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$ интегралнинг текис яқинлашувчилиги келиб чиқади.

Демак, $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$ интеграл $a \geq a_0 > 0$ ва $b \geq b_0 > 0$ бўлганда, яъни

$$M_0 = \{(a, b) \in R^2 : a \in [a_0, +\infty), b \in [b_0, +\infty)\}$$

тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

17.1-эслатма. $B(a, b)$ нинг $M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty), b \in (0, +\infty)\}$ тўпламда иотекис яқинлашувчилигини кўриш қийин эмас.

2°. $B(a, b)$ функция $M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty), b \in (0, +\infty)\}$ тўпламда узлуксиз функциядир.

Ҳақиқатан ҳам,

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

интегралчинг M_0 тўпламда текис яқинлашувчи бўлишидан ва интеграл остидаги функциянинг $\forall (a, b) \in M$ да узлуксизлигидан 17.15-теоремага асосан $B(a, b)$ функция

$$M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty), b \in (0, +\infty)\}$$

тўпламда узлуксиз бўлади.

3°. $\forall (a, b) \in M$ учун $B(a, b) = B(b, a)$ бўлади. Дарҳақиқат $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$ интегралда $x = 1-t$ алмаштириш бажа-

рилса, унда

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{a-1} dt = B(b, a)$$

бўлишини топамиз.

4°. $B(a, b)$ функция қўйидагича ҳам ифодаланади:

$$B(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt. \quad (17.36)$$

Ҳақиқатан ҳам, (17.35) интегралда $x = \frac{t}{1+t}$ алмаштириш бажарилса, у ҳолда

$$\begin{aligned} B(a, b) &= \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{t}{1+t}\right)^{b-1} \frac{dt}{(1+t)^2} = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt \end{aligned}$$

бўлади.

Хусусан, $b = 1 - a$ ($0 < a < 1$) бўлганда

$$B(a, 1-a) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin a \pi} \quad (17.37)$$

бўлади. (17.37) муносабатдан қўйидагини топамиз:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

5°. $\forall (a, b) \in M'$ ($M' = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty), b \in (1, +\infty)\}$) учун

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a+b+1} B(a, b-1) \quad (17.38)$$

бўлади.

(17.35) интегрални бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\begin{aligned} B(a, b) &= \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \int_0^1 (1-x)^{b-1} d\left(\frac{x^a}{a}\right) = \frac{1}{a} x^a (1-x)^{b-1} \Big|_0^1 + \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^a (1-x)^{b-2} dx = \\ &= \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^a (1-x)^{b-2} dx \quad (a > 0, b > 1). \end{aligned}$$

Агар

$$x^a(1-x)^{b-2} = x^{a-1}[1-(1-x)](1-x)^{b-2} = x^{a-1}(1-x)^{b-2} - \\ - x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2} dx = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2} dx - \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \\ = B(a, b-1) - B(a, b)$$

бўлиб, натижада

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a} [B(a, b-1) - B(a, b)]$$

бўлади. Бу тенгликдан эса

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1) \quad (a > 0, b > 1)$$

бўлишини топамиз.

Худди шунга ўхшаш $\forall (a, b) \in M''$ учун

$$(M'' = \{(a, b) \in R^2 : a \in (1, +\infty), b \in (0, +\infty)\})$$

$$B(a, b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1, b)$$

бўлади.

Хусусан, $b = n$ ($n \in N$) бўлганда

$$B(a, b) = B(a, n) = \frac{n-1}{a+n-1} B(a, n-1)$$

бўлиб, (17.38) формулани такрор қўллаб қўйидагини топамиз.

$$B(a, n) = \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} \cdots \frac{1}{a+1} B(a, 1).$$

$$\text{Равшанки, } B(a, 1) = \int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a}. \text{ Демак,}$$

$$B(a, n) = \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1)}. \quad (17.39)$$

Агар (17.39) да $a = m$ ($m \in N$) бўлса, у ҳолда

$$B(m, n) = \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{m(m+1) \cdots (m+n-1)} = \frac{(n-1)! (m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

10- §. Гамма функция (II тур Эйлер интеграли) ва унинг хоссалари

Биз 16-бобнинг 9-§ ида қўйидаги

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (17.40)$$

хосмас интегрални қарайдик. Бу чегараланмаган функцияning ($a < 1$ да $x = 0$ махсус нуқта) чексиз оралиқ бўйича олинган хосмас интеграли

бўлиши билан бирга a га (параметрга) ҳам боғлиқдир. Ўша ерда (17.40) хосмас интегралнинг $a > 0$ да, яъни $(0, +\infty)$ да яқинлашувчи, $a \leq 0$ да, яъни $(-\infty, 0]$ да узоқлашувчи бўлиши кўрсатилди.

17.12-т аъриф. (17.40) интеграл гамма функция ёки *II тур Эйлер интеграли* деб аталади ва $\Gamma(a)$ каби белгиланади. Демак

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx.$$

Шундай қилиб, $\Gamma(a)$ функция $(0, +\infty)$ да берилгандир. Энди $\Gamma(a)$ функциянинг хоссаларини ўрганайлик.

1°. (17.40) интеграл

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

ихтиёрий $[a_0, b_0]$ · $(0 < a_0 < b_0 < +\infty)$ оралиқда текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. (17.40) интегрални қуийдаги икки қисмга ажратиб,

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

уларнинг ҳар бирини алоҳида-алоҳида текис яқинлашувчиликка текширамиз.

Агар a_0 ($a_0 > 0$) сонни олиб, параметр a нинг $a \geq a_0$ қийматлари қаралса, унда барча $x \in (0, 1]$ учун $x^{a-1} e^{-x} \leq \frac{1}{x^{1-a_0}}$ бўлиб, ушбу бобнинг 4-§ ида келтирилган Вейерштрасс аломатига асосан

$$\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx$$

интеграл текис яқинлашувчи бўлади.

Агар b_0 ($b_0 > 0$) сонни олиб, параметр a нинг $a \leq b_0$ қийматлари қараладиган бўлса, унда барча $x \geq 1$ учун

$$x^{a-1} e^{-x} \leq x^{b_0-1} e^{-x} \leq \left(\frac{b_0+1}{e}\right)^{b_0+1} \cdot \frac{1}{x^2}$$

бўлиб,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

интегралнинг яқинлашувчилигидан, яна Вейерштрасс аломатига кўра

$$\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

интегралнинг текис яқинлашувчи бўлишини топамиз. Шундай қилиб,

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

интеграл $[a_0, b_0]$ ($0 < a_0 < b_0 < +\infty$) да текис яқынлашувчи бўлади.

17.2-эслатма. $\Gamma(a)$ нинг $(0, +\infty)$ да нотекис яқынлашувчилигини кўриш қийин эмас.

2°. $\Gamma(a)$ функция $(0, +\infty)$ да узлуксиз ҳамда барча тартибдаги узлуксиз ҳосилаларга эга ва

$$\Gamma^{(n)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} (\ln x)^n dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Исбот. $\forall a \in (0, +\infty)$ нуқтани олайлик. Унда шундай $[a_0, b_0]$ ($0 < a_0 < b_0 < +\infty$) оралиқ топиладики, $a \in [a_0, b_0]$ бўлади.

Равшанки,

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

интеграл остидаги $f(x, a) = x^{a-1} e^{-x}$ функция $M = \{(x, a) \in R^2; x \in (0, +\infty), a \in (0, +\infty)\}$ тўпламда узлуксиз функциядир. (17.40) интеграл эса (юқорида исбот этилганга кўра) $[a_0, b_0]$ да текис яқынлашувчи. У ҳолда 17.4-теоремага асосан $\Gamma(a)$ функция $[a_0, b_0]$ да, бино-барин, a нуқтада узлуксиз бўлади.

(17.40) интеграл остидаги $f(x, a) = x^{a-1} e^{-x}$ функция

$$f_a^1(x, a) = x^{a-1} e^{-x} \ln x$$

ҳосиласининг M тўпламда узлуксиз функция эканлигини пайқаш қи-йин эмас.

Энди

$$\int_0^{+\infty} f_a^1(x, a) dx = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x dx$$

интегрални $[a_0, b_0]$ да текис яқынлашувчи бўлишини кўрсатамиз. Ушбу $\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x dx$ интеграл остидаги $x^{a-1} e^{-x} \ln x$ функция учун $0 < x \leqslant 1$ да $|x^{a-1} e^{-x} \ln x| \leqslant x^{a_0-1} |\ln x|$ тенгсизлик ўринлидир. $\Psi_1(x) = x^{\frac{a_0}{2}} |\ln x|$ функция $0 < x \leqslant 1$ да чегараланганилигидан ва $\int_0^1 x^{\frac{a_0}{2}-1} dx$

интегралнинг яқынлашувчилигидан $\int_0^1 x^{a_0-1} |\ln x| dx$ нинг ҳам яқынлашувчи бўлишини ва Вейерштрасс аломатига кўра қаралаётган $\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} \ln x dx$ интегралнинг текис яқынлашувчилигини топамиз.

Шунга ўхшаш қўйидаги

$$\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x dx$$

интегралда, интеграл остидаги $x^{a-1} e^{-x} \ln x$ функция учун барча $x \geqslant 1$ да

$$x^{a-1} e^{-x} \ln x \leqslant x^{b_0-1} e^{-x} \ln x < x^{b_0} e^{-x} \leqslant \left(\frac{b_0+2}{e}\right)^{b_0+2} \cdot \frac{1}{x^2}$$

бўлиб, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ интегралнинг яқинлашувчилигидан, яна Вейерштрасс аломатига кўра $\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x dx$ нинг текис яқинлашувчилиги келиб чиқади. Демак, $[a_0, b_0]$ да $\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x dx$ интеграл текис яқинлашувчи. Унда 17.16-теоремага асосан

$$\Gamma'(a) = \left(\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \right)' = \int_0^{+\infty} (x^{a-1} e^{-x})' dx = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x dx$$

бўлади ва $\Gamma'(a)$ $[a_0, b_0]$ да, бинобарин, a нуқтада узлуксизdir.

Худди шу йўл билан $\Gamma(a)$ функциянинг иккинчи, учинчи ва ҳоказо тартибдаги ҳосилаларининг мавжудлиги, узлуксизлиги ҳамда

$$\Gamma^{(n)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} (\ln x)^n dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

бўлиши кўрсатилади.

3°. $\Gamma(a)$ функция учун ушбу

$$\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a) \quad (a > 0)$$

формула ўринили.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} d\left(\frac{x^a}{a}\right)$$

интегрални бўлаклаб интегралласак,

$$\Gamma(a) = e^{-x} \cdot \frac{x^a}{a} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{a} e^{-x} dx = \frac{1}{a} \Gamma(a+1)$$

бўлиб, ундан

$$\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a) \quad (17.41)$$

бўлиши келиб чиқади.

Бу формула ёрдамида $\Gamma(a+n)$ ни топиш мумкин. Дарҳақиқат, (17.41) формулани такор қўллаб,

$$\Gamma(a+2) = \Gamma(a+1) \cdot (a+1),$$

$$\Gamma(a+3) = \Gamma(a+2) \cdot (a+2),$$

$$\Gamma(a+n) = \Gamma(a+n-1) (a+n-1)$$

бўлишини, улардан эса

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2) \dots (a+2)(a+1) \cdot a \Gamma(a)$$

эканлигини топамиз. Хусусан, $a = 1$ бўлганда

$$\Gamma(n+1) = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1)$$

бўлади. Агар $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$ бўлишини эътиборга олсак, унда $\Gamma(n+1) = n!$ эканлиги келиб чиқади.

Яна (17.41) формуладан фойдаланиб $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$ бўлишини топамиз.

4°. $\Gamma(a)$ функцияниң ўзгариш характеристи.

$\Gamma(a)$ функция $(0, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, шу оралиқда ис-талган тартибли ҳосилага эга. Бу функцияниң $a=1$ ва $a=2$ нуқтадаги қийматлари бир-бирига тенг:

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$$

$\Gamma(a)$ функцияга Ролль теоремасини (қаралсин, 1-қисм, 6-боб, 6-§) татбиқ қила оламиз, чунки юқорида келтирилган фактлар Ролль теоремаси шартларининг бажарилишини таъминлайди. Демак, Ролль теоремасига кўра, шундай $a^*(1 < a^* < 2)$ топиладики, $\Gamma'(a^*) = 0$ бўлади. $\forall a \in (0, +\infty)$ да

$$\Gamma''(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln^2 x dx > 0$$

бўлиши сабабли, $\Gamma'(a)$ функция $(0, +\infty)$ оралиқда қатъий ўсувчи бўлади. Демак, $\Gamma'(a)$ функция $(0, +\infty)$ да a^* нуқтадан бошқа нуқталарда нолга айланмайди, яъни

$$\Gamma'(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x dx = 0$$

тенглама $(0, +\infty)$ оралиқда a^* дан бошқа ечимга эга эмас. У ҳолда

$$\begin{aligned} 0 < a < a^* &\text{ да } \Gamma'(a) < 0, \\ a^* < a < +\infty &\text{ да } \Gamma'(a) > 0 \end{aligned}$$

бўлади. Демак, $\Gamma(a)$ функция a^* нуқтада минимумга эга. Унинг минимум қиймати $\Gamma(a^*)$ га тенг.

Тақрибий хисоблаш усули билан

$$\begin{aligned} a^* &= 1,4616 \dots \\ \Gamma(a^*) &= \min \Gamma(a) = 0,8856 \dots \end{aligned}$$

бўлиши топилган.

$\Gamma(a)$ функция $a > a^*$ да ўсувчи бўлганлиги сабабли $a > n+1$ ($n \in N$) бўлганда $\Gamma(a) > \Gamma(n+1) = n!$ бўлиб, ундан

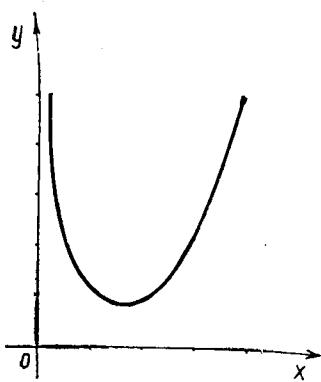
$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \Gamma(a) = +\infty$$

бўлишини топамиз.

Иккинчи томондан, $a \rightarrow +0$ да $\Gamma(a+1) \rightarrow \rightarrow \Gamma(1) = 1$ ҳамда $\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a}$ эканлиги-

дан $\lim_{a \rightarrow +0} \Gamma(a) = +\infty$ келиб чиқади.

$\Gamma(a)$ функцияниң графиги 16-чизмада тасвирланган.



16- чизма

11-§. Бета ба гамма функциялар орасидаги боғланиш

Биз қуйида $B(a, b)$ ва $\Gamma(a)$ функциялар орасидаги боғланишни ифодалайдиган формуланы көлтирамиз.

Маълумки, $\Gamma(a)$ функция $(0, +\infty)$ да, $B(a, b)$ функция эса R^2 фазодати $M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty), b \in (0, +\infty)\}$ тўпламда берилган.

17.21-теорема. $\forall (a, b) \in M$ учун

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

формула ўринлидир.

Исбот. Ушбу $\Gamma(a+b) = \int_0^{+\infty} x^{a+b-1} e^{-x} dx$ ($a > 0, b > 0$) гамма функцияда ўзгарувчини қуйидагича алмаштирамиз:

$$x = (1+t)y \quad (t > 0).$$

Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \Gamma(a+b) &= \int_0^{+\infty} (1+t)^{a+b-1} \cdot y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} \cdot (1+t) dy = \\ &= (1+t)^{a+b} \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy. \end{aligned}$$

Кейинги тенгликдан қуйидагини топамиз:

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини t^{a-1} га кўпайтириб, натижани $(0, +\infty)$ оралиқ бўйича интеграллаймиз:

$$\Gamma(a+b) \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy \right] t^{a-1} dt.$$

Агар (17.36) формулага кўра

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt = B(a, b)$$

эканини эътиборга олсак, унда

$$\Gamma(a+b) \cdot B(a, b) = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy \right] t^{a-1} dt \quad (17.42)$$

бўлади. Энди (17.42) тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл $\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)$ га тенг бўлишини исботлаймиз. Унинг учун, аввало бу интегралларда интеграллаш тартибини алмаштириш мумкинлигини кўрсатамиз. Бунинг учун 17.19-теорема шартлари бажарилишини кўрсатишмиз керак.

Дастлаб $a > 1, b > 1$ бўлган ҳолни кўрайлилек.

$a > 1, b > 1$ да, яъни $\{(a, b) \in R^2 : a \in (1, +\infty), b \in (1, +\infty)\}$ тўпламда интеграл остидаги

$$f(t, y) = y^{a+b-1} t^{a-1} e^{-(1+t)y}$$

функция $\forall (t, y) \in \{(t, y) \in R^2 : t \in [0, +\infty), y \in [0, +\infty)\}$ да узлуксиз бўлиб, $f(t, y) = y^{a+b-1} t^{a-1} e^{-(1+t)y} \geq 0$ бўлади.

Ушбу $\int_0^{+\infty} f(t, y) dy = \int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy$ интеграл t ўзгарувчининг $[0, +\infty)$ оралиқда узлуксиз функцияси бўлади, чунки

$$\int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy = \Gamma(a+b) \cdot \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}.$$

Ушбу

$$\int_0^{+\infty} f(t, y) dt = \int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dt$$

интеграл y ўзгарувчининг $[0, +\infty)$ оралиқдаги узлуксиз функцияси бўлади, чунки

$$\int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dt = \Gamma(a) \cdot y^{b-1} e^{-y}$$

ва ниҳоят, юқоридаги (17.42) муносабатга кўра

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy \right] dt$$

интеграл яқинлашувчи.

У ҳолда 17.19-теоремага асосан

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dt \right] dy$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy \right] dt = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dt \right] dy$$

бўлади. Ўнг томондаги интегрални ҳисоблайлик:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy \right] dt &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dt \right] dy = \\ &= \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-y} \left[\int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-ty} dt \right] dy = \\ &= \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-y} \cdot \frac{1}{y^a} \left[\int_0^{+\infty} (ty)^{a-1} e^{-ty} d(ty) \right] dy = \\ &= \int_0^{+\infty} y^{b-1} e^{-y} \cdot \Gamma(a) dy = \Gamma(a) \cdot \Gamma(b). \end{aligned} \tag{17.43}$$

Натижада (17.42) ва (17.43) муносабатлардан

$$\Gamma(a+b) \cdot B(a, b) = \Gamma(a) \cdot \Gamma(b),$$

яъни

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (17.44)$$

бўлиши келиб чиқади. Биз бу формулани $a > 1, b > 1$ бўлган ҳол учун исботладик. Энди умумий ҳолни кўрайлик.

Айтайлик, $a > 0, b > 0$ бўлсин. У ҳолда исбот этилган (17.44) формулага кўра

$$B(a+1, b+1) = \frac{\Gamma(a+1) \cdot \Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} \quad (17.45)$$

бўлади.

$B(a, b)$ ва $\Gamma(a)$ функцияларнинг хоссаларидан фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$B(a+1, b+1) = \frac{a}{a+b+1} B(a, b+1) = \frac{a}{a+b+1} \cdot \frac{b}{a+b} B(a, b),$$

$$\begin{aligned} \Gamma(a+1) &= a \cdot \Gamma(a), \quad \Gamma(b+1) = b \cdot \Gamma(b), \quad \Gamma(a+b+2) = (a+b+1) \Gamma(a+b+1) \\ &= (a+b+1)(a+b) \cdot \Gamma(a+b). \end{aligned}$$

Натижада (17.45) формула қўйидаги

$$\frac{a \cdot b}{(a+b)(a+b+1)} B(a, b) = \frac{a \cdot \Gamma(a) \cdot b \cdot \Gamma(b)}{(a+b)(a+b+1) \Gamma(a+b)}$$

кўринишга келади. Бу эса (17.44) формула $a > 0, b > 0$ да ҳам ўринли эканини билдиради.

17.1-натижада. $\forall a \in (0, 1)$ учун

$$\Gamma(a) \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a \pi} \quad (17.46)$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, (17.44) формулада $b = 1 - a$ ($0 < a < 1$) дейилса, унда

$$B(a, 1-a) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a)}{\Gamma(1)}$$

бўлиб, (17.37) ва $\Gamma(1) = 1$ муносабатларга мувофиқ

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a \pi} \quad (0 < a < 1).$$

Одатда (17.46) формула *келтириши формуласи* деб аталади.

Хусусан, (17.46) да $a = \frac{1}{2}$ деб олсак, унда

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (*)$$

бўлишини топамиз.

17.2- натижада. Ушбу

$$\Gamma(a) \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \Gamma(2a) \quad (a > 0)$$

формула ўринлидир. Шуни исботлаймиз.

(17.44) муносабатда $a = b$ деб

$$B(a, a) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(a)}{\Gamma(2a)}$$

бўлишини топамиз. Сўнгра

$$\begin{aligned} B(a, a) &= \int_0^1 [x(1-x)]^{a-1} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \right]^{a-1} dx = \\ &= 2 \int_0^{1/2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \right]^{a-1} dx \end{aligned}$$

интегралда $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{2}\sqrt{t}$ алмаштиришни бажариб,

$$\begin{aligned} B(a, a) &= 2 \int_0^1 \left[\frac{1}{4}(1-t) \right]^{a-1} \frac{1}{4} t^{-\frac{1}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{2^{2a-1}} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{a-1} dt = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right) \end{aligned}$$

га эга бўламиз. Натижада

$$\frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right)$$

бўлади.

Яна (17.44) формулага кўра

$$B\left(\frac{1}{2}, a\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(a)}{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)} \quad (**)$$

бўлиб, (**) муносабатдан

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{1}{2^{2a-1}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)}$$

эканлиги келиб чиқади. Демак,

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \Gamma(2a). \quad (17.47)$$

Одатда (17.47) формула *Лежандр формуласи* деб аталади.

18- Б О Б
ҚАРРАЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

«Математик анализ» курсининг 1- қисм, 9 — 10- бобларида функцияниң аниқ интегралы батафсил ўрганилди.

Математика ва фаннинг бошқа тармоқларида кўп ўзгарувчили функцияларнинг интеграллари билан боғлиқ масалаларга дуч келамиз (қўйида, 1- § да келтириладиган масала шулар жумласидандир). Бинобарин, уларни — каррали интегралларни ўрганиш вазифаси юзага келади.

Каррали интеграллар назариясида ҳам, аниқ интеграллар назариясидагиек, интегралнинг мавжудлиги, унинг хоссалари, каррали интегрални ҳисоблаш, интегралнинг татбиқлари ўрганилади. Бунда аниқ интеграл ҳақидаги маълумотлардан муттасил фойдалана борилади.

Шуни таъкидлаш лозимки, аниқ интегралда интеграллаш оралиғи тўғри чизиқ (R — фазо) даги кесмадан иборат бўлса, каррали интегралларда мос фазодаги соҳалар бўлади. Бундай соҳаларнинг турлича бўлиши каррали интегралларни ўрганишни бирмунча мураккаблаштиради. Ва, ҳатто, кейинроқ кўрамизки, интеграл тушунчасини ҳам турлича киритишни тақозо қиласи (кейинги бобларга қаранг).

Қўйида биз, соддалик учун, икки ўзгарувчили функцияларнинг интеграллари билан танишамиз.

1-§. Икки каррали интеграл таърифи

Аниқ интегралнинг баёнини шу интеграл тушунчасига олиб келадиган масаладан бошлаган эдик. Икки каррали интеграл тушунчасини ўрганишни ҳам унга олиб келадиган масалани келтиришдан бошлаймиз.

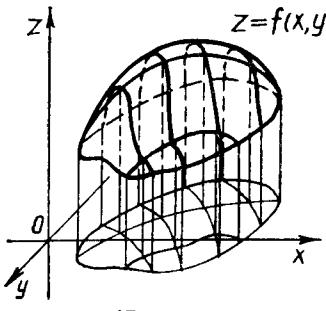
1. **Масала.** $f(x, y)$ функция чегараланган (D) соҳада* ($(D) \subset \subset R^2$) берилган, узлуксиз ҳамда $\forall (x, y) \in (D)$ учун $f(x, y) \geq 0$ бўлсин. R^3 фазода $Oxyz$ — Декарт координата системасини олайлик. Юқоридан $z = f(x, y)$ сирт билан, ён томонидан, ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган цилиндрик сирт ҳамда пастдан Oxy текислигидаги (D) соҳа билан чегараланган (V) жисмни қарайлик (17- чизма). (V) жисмнинг ҳажмини топиш талаб этилсин.

Агар $f(x, y)$ функция (D) да ўзгар-
мас бўлса, $f(x, y) = C$ ($C = \text{const}$), у
ҳолда (V) жисмнинг (цилиндрнинг) ҳажми

$$V = C \cdot D$$

га тенг бўлади, бунда D — (D) соҳанинг юзи.

Агар (D) соҳада $f(x, y) x$ ва y ўзгарувчилярнинг ихтиёрий узлуксиз функцияси бўлса, у ҳолда (V) жисмнинг ҳажмини топиш учун, аввало (D) соҳани эгри чи-



17- чизма

* Бу ерда ва келгусида ҳамма вақт функцияни нг аниқланиш соҳаси (D) ни юзга эга бўлган соҳа деб ҳисблаймиз.

зиқлар билан n та бўлакка бўламиш: $(D) = \bigcup_{k=1}^n (D_k)$. Бўлувчи чизик-ларни йўналтирувчи сифатида олиб Oz ўқига параллел цилиндрек сиртлар ўтказамиш. Натижада (V) жисм n та (V_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) бўлакларга ажралади. Сўнг ҳар бир (D_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) да ихтиёрий (ξ_k, η_k) нуқта оламиш. Бу (D_k) да $f(x, y)$ функцияни ўзгармас ва $f(\xi_k, \eta_k)$ га тенг десак, у ҳолда (V_k) Сўлакнинг ҳажми тахминан

$$\int (\xi_k, \eta_k) \cdot D_k$$

бўлиб, (V) жисмнинг ҳажми эса тахминан

$$V \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k$$

бўлади, бунда D_k — (D_k) нинг юзи.

(V) жисмнинг ҳажмини ифодаловчи бу формула тақрибийдир. Чунки, $f(x, y)$ ни ҳар бир (D_k) да ўзгармас $f(\xi_k, \eta_k)$ деб ҳисобладик: $f(x, y) = f(\xi_k, \eta_k)$, агар $(x, y) \in (D_k)$ бўлса.

Энди (D) соҳани бўлакларга бўлиниш сонини шундай орттира борайликки, бунда ҳар бир (D_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) бўлакнинг диаметри нолга интила борсин. У ҳолда

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k$$

қиймат изланётган (V) жисмнинг ҳажмини тобора аниқроқ ифодалай боради деб ҳисоблаш табиийдир. Демак, масала юқоридаги йиғиндининг лимитини топиш билан ҳал қилинади. Бундай йиғиндининг лимити икки каррали интеграл тушунчасига олиб келади.

2. Икки каррали интеграл таърифи. Икки каррали интегрални таърифлашдан аввал баъзи бир тушунчалар, жумладан (D) соҳанинг бўлинishi, функциянинг интеграл йиғиндиси тушунчалари билан танишамиз.

Бирор чегараланган $(D) \subset R^2$ соҳа берилган бўлсин. (D) соҳанинг чегарасидаги ихтиёрий икки нуқтани бирлаштирувчи ва бутунлай шу соҳада ётувчи чизикни (эгри чизикни) l чизик деб атаемиз. Равшанки, бундай чизиклар (D) соҳани бўлакларга ажратади.

Шунингдек, (D) соҳада бутунлай ётувчи ёпиқ чизикни ҳам l чизик деб қараймиз. Бундай чизиклар ҳам (D) соҳани бўлакларга ажратади. Бу соҳани бўлакларга ажратувчи чекли сондаги l чизиклар системаси $\{l : l \subset (D)\}$ (D) соҳанинг бўлинishi деб аталади ва $P = \{l : l \subset (D)\}$ каби белгиланади. (D) соҳани бўлакларга ажратувчи ҳар бир l чизик P бўлинешнинг бўлаги чизиги, (D) соҳанинг бўлаги эса P бўлинешнинг бўлаги дейилади. P бўлинеш бўлаклари диаметрининг энг катаси P бўлинешнинг диаметри деб аталади ва у λ_P каби белгиланади.

Мисол: $(D) = \{(x, y) \} \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ бўлсин.
Куйидаги

$$x = x_i = \frac{i}{4} \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4),$$

$$y = y_k = \frac{k}{3} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

чизиқлар системаси (D) соҳанинг P_1 бўлиниши,

$$x = x_i = \frac{i}{n} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

$$y = y_k = \frac{k}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

чизиқлар системаси эса шу соҳанинг бошқа P_2 бўлиниши бўлади. Уларнинг диаметри $\lambda_{P_1} = \frac{5}{12}$, $\lambda_{P_2} = \frac{\sqrt{2}}{n}$ га тенг.

Демак, (D) соҳа берилган ҳолда, бу соҳани турли усуллар билан бўлинишларини тузиш мумкун. Натижада (D) соҳанинг бўлинишлари тўплами ҳиссил бўлади. Ўни $\mathcal{P} = \{P\}$ каби белгилайлик.

$f(x, y)$ функция ($D \subset R^2$) соҳада берилган бўлсин. Бу соҳанинг $P \in \mathcal{P}$ бўлинишини ва бу бўлинишнинг ҳар бир (D_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) бўлагида ихтиёрий (ξ_k, η_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) нуқтани олайлик. Берилган функциянинг (ξ_k, η_k) нуқтадаги қиймати $f(\xi_k, \eta_k)$ ни D_k ($D_k - (D_k)$ соҳанинг юзи) га кўпайтириб, қўйидаги

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k$$

йигиндини тузамиз.

18.1- таъриф. Ушбу

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k \quad (18.1)$$

йигинди, $f(x, y)$ функциянинг интеграл йигиндиси ёки Риман йигиндиси деб аталади.

Мисол. 1. $f(x, y) = x \cdot y$ функциянинг (D) соҳадаги интеграл йигиндиси

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k = \sum_{k=1}^n \xi_k \cdot \eta_k \cdot D_k$$

бўлади, бунда

$$(\xi_k, \eta_k) \in (D_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

2. Ушбу

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{агар } (x, y) \in (D) \text{ да, } x \text{ — рационал сон, } y \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x, y) \in (D) \text{ да, } x \text{ ва } y \text{ ларнинг камиди биттаси иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

функциянинг интеграл йигиндиси қўйидагича бўлади:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n \psi(\xi_k, \eta_k) D_k = \begin{cases} D, & \text{агар барча } \xi_k \text{ ва } \eta_k \text{ лар рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар барча } \xi_k \text{ ёки барча } \eta_k \text{ лар иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

Юқорида келтирилган таърифдан кўринадики, $f(x, y)$ функциянинг интеграл йигиндиси σ қаралаётган $f(x, y)$ функцияга, (D) соҳанинг бўлиниш усулига ҳамда ҳар бир (D_k) дан олинган ξ_k, η_k нуқталарга боғлиқ бўлади, яъни

$$\sigma_F = \sigma_P(f, \xi_k, \eta_k).$$

$f(x, y)$ функция чегараланган $(D) \subset R^2$ соҳада берилган бўлсин. Бу (D) соҳанинг шундай

$$P_1, P_2, \dots, P_m, \dots \quad (18.2)$$

бўлинишларини қараймизки, уларнинг диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \dots, \lambda_{P_m}, \dots$$

кетма-кетлик нолга интилсин: $\lambda_{P_m} \rightarrow 0$. Бундай P_m ($m = 1, 2, \dots$) бўлинишларга нисбатан $f(x, y)$ функциянинг интеграл йиғиндисини тузамиз.

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k.$$

Натижада (D) соҳанинг (18.2) бўлинишларига мос $f(x, y)$ функция интеграл йиғиндилари қийматларидан иборат қўйидаги

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m \dots$$

кетма-кетлик ҳосил бўлади. Бу кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади (ξ_k, η_k) нуқталарга боғлиқ.

18.2-таъриф. Агар (D) соҳанинг ҳар қандай (18.2) бўлинишлар кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос интеграл йиғинди қийматларидан иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик, (ξ_k, η_k) нуқталарни танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу I га σ йиғиндининг лимити деб аталади ва у

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k = I$$

каби белгиланади.

Интеграл йиғиндининг лимитини қўйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

18.3-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилсанки, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиниши ҳамда ҳар бир (D_k) бўлакдаги ихтиёрий (ξ_k, η_k) лар учун

$$\boxed{\text{Лемма}} \quad |\sigma - I| < \varepsilon$$

тенгизлилк бажарилса, у ҳолда I га σ йиғиндининг лимити деб аталади ва у

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = I$$

каби белгиланади.

Энди $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳа бўйича икки каррали интегралининг таърифини келтирамиз.

18.4-таъриф. Агар $\lambda_P \rightarrow 0$ да $f(x, y)$ функциянинг интеграл йиғиндиси σ чекли лимитга эга бўлса, $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи (Риман маъносида интегралланувчи) функция дейилади.

Бу σ йиғиндининг чекли лимити I эса $f(x, y)$ функцияниң (D) соҳа бўйича икки каррали интегралы (Риман интегралы) дейилади ва у

$$\iint_D f(x, y) dD$$

каби белгиланади. Демак,

$$\iint_D f(x, y) dD = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k.$$

Биринчи пунктда келтирилган (V) жисмнинг ҳажми $f(x, y)$ функцияниң (D) соҳа бўйича икки каррали интегралдан иборат экан.

Мисол. 1. $f(x, y) = C - \text{const}$ функцияниң (D) соҳа бўйича икки каррали интегралини топамиз. Бу функцияниң интеграл йиғиндиси

$$\sigma = \sum_{k=1}^n C \cdot D_k = C \cdot D$$

бўлиб, $\lambda_P \rightarrow 0$ да $\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = C \cdot D$ бўлади. Демак,

$$\iint_D C \cdot dD = C \cdot D.$$

Хусусан, $f(x, y) = 1$ бўлганда

$$\iint_D dD = D \tag{18.3}$$

бўлади.

2. Ушбу пунктда $\psi(x, y)$ функцияниң (D) $\subset R^2$ соҳада интеграл йиғиндисини топган эдик. Унинг ифодаси ҳамда интеграл таърифидан бу функцияниң (D) соҳада интегралланувчи эмаслиги келиб чиқади.

18.1-эслатма. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада чегараланмаган бўлса, у шу соҳада интегралланмайди.

2- §. Дарбу йиғиндилари. Икки каррали интегралниң бошқача таърифи

1. Дарбу йиғиндилари. $f(x, y)$ функция (D) $\subset R^2$ соҳада бе-рилган бўлиб, у шу соҳада чегараланган бўлсин. Демак, шундай ўзгармас m ва M сонлар мавжудки, $\forall (x, y) \in (D)$ да

$$m \leq f(x, y) \leq M$$

бўлади.

(D) соҳанинг бирор P бўлинишини олайлик. Бу бўлинишнинг ҳар бир (D_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) бўлагида $f(x, y)$ функция чегаралангандан бўлиб, унинг аниқ чегаралари

$m_k = \inf \{f(x, y) : (x, y) \in (D_k)\}, M_k = \sup \{f(x, y) : (x, y) \in (D_k)\}$
мавжуд бўлади. Равшанки, $\forall (x, y) \in (D_k)$ учун

$$m_k \leq f(x, y) \leq M_k. \tag{18.4}$$

18.5-таъриф. Ушбу

$$s = \sum_{k=1}^n m_k D_k, \quad S = \sum_{k=1}^n M_k D_k$$

Йиғиндилар мос равища Даrbунинг қуий ҳамда юқори йиғиндилари деб аталади.

Бу таърифдан, Даrbу йиғиндиларининг $f(x, y)$ функцияга ҳамда (D) соҳанинг бўлинишига боғлиқ эканлиги кўринади:

$$s = s_P(f), \quad S = S_P(f).$$

Шунингдек, ҳар доим

$$s \leq S$$

бўлади.

Юқоридаги (18.4) тенгсизликдан фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$\sum_{k=1}^n m_k D_k \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k \leq \sum_{k=1}^n M_k D_k.$$

Демак,

$$s_P(f) \leq \sigma_P(f; \xi_k, \eta_k) \leq S_P(f).$$

Шундай қилиб, $f(x, y)$ функциянинг интеграл йиғиндиси ҳар доим унинг Даrbу йиғиндилари орасида бўлар экан.

Аниқ чегаранинг хоссасига кўра

$$m \leq m_k, \quad M_k \leq M \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

бўлади. Натижада ушбу

$$s = \sum_{k=1}^n m_k D_k \geq m \sum_{k=1}^n D_k = mD,$$

$$S = \sum_{k=1}^n M_k D_k \leq M \sum_{k=1}^n D_k = M \cdot D$$

тенгсизликларга келамиз. Демак, $\forall P \in \{\mathcal{P}\}$ учун

$$m \cdot D \leq s \leq S \leq M \cdot D \tag{18.5}$$

бўлади. Бу эса Даrbу йиғиндиларининг чегараланганлигини билдиради.

2. Икки каррали интегралнинг бошқача таърифи. $f(x, y)$ функция (D) $\subset R^2$ соҳада берилган бўлиб, у шу соҳада чегараланган бўлсин. (D) соҳанинг бўлинишлари тўплами $\mathcal{P} = \{P\}$ нинг ҳар бир $P \in \mathcal{P}$ бўлинишига нисбатан $f(x, y)$ функциянинг Даrbу йиғиндилари $s_P(f)$, $S_P(f)$ ни тузиб

$$\{s_P(f)\}, \{S_P(f)\}$$

тўпламларни қараймиз. Бу тўпламлар (18.5) га кўра чегараланган бўлади.

18.6-таъриф. $\{s_P(f)\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳадаги қуий икки каррали интеграли (қуий Риман интеграли) деб аталади ва у

$$I = \iint_{(D)} f(x, y) dD$$

каби белгиланади.

$\{S_P(f)\}$ тўпламнинг аниқ қўйи чегараси $f(x, y)$ функцияниңг (D) соҳада юқори икки каррали интегралы (юқори Риман интегралы) деб аталади ва у

$$\bar{I} = \overline{\iint_D f(x, y) dD}$$

каби белгиланади. Демак,

$$\underline{I} = \underline{\iint_D f(x, y) dD} = \sup \{s\}, \quad \bar{I} = \overline{\iint_D f(x, y) dD} = \inf \{S\}.$$

18.7- таъриф. Агар $f(x, y)$ функцияниңг (D) соҳада қўйи ҳамда юқори икки каррали интеграллари бир-бира га тенг бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи деб аталади, уларнинг умумий қўймати

$$I = \iint_D f(x, y) dD = \overline{\iint_D f(x, y) dD}$$

$f(x, y)$ функцияниңг (D) соҳадаги икки каррали интегралы (Риман интегралы) дейилади ва у

$$\iint_D f(x, y) dD$$

каби белгиланади. Демак,

$$\iint_D f(x, y) dD = \underline{\iint_D f(x, y) dD} = \overline{\iint_D f(x, y) dD}.$$

Агар

$$\iint_D f(x, y) dD \neq \overline{\iint_D f(x, y) dD}$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланмайди деб аталади.

Шундай қилиб, $f(x, y)$ функцияниңг икки каррали интегралига икки хил таъриф берилди. Бу таърифлар ўзаро эквивалент таърифлар. У 1- қисм, 9- бобдаги аниқ интеграл таърифларининг эквивалентлигини исботланганидек кўрсатилади.

3-§. Икки каррали интегралнинг мавжудлиги

$f(x, y)$ функцияниңг (D) $\subset R^2$ соҳа бўйича икки каррали интегралы мавжудлиги масаласини қараймиз. Бунинг учун аввало (D) соҳанинг ҳамда Дарбу йиғиндилаrinинг хоссаларини келтирамиз.

(D) соҳанинг бўлиншилари хоссалари 1- қисм, 9- бобда ўрганилган $[a, b]$ оралиқнинг бўлиншилари хоссалари кабидир. Уларни исботлаш деярли бир хил мулоҳаза асосида олиб борилишини эътиборга олиб, қўйида у хоссаларни исботсиз келтиришни лозим топдик.

$f(x, y)$ функцияниңг Дарбу йиғиндилаrin хоссалари ҳақидаги вазият ҳам худди шундайдир.

1. (D) соҳа бўйинишларининг хоссалари. Фараз қиласлик, $\mathcal{P} = \{P\}$ — (D) соҳа бўлиншиларидан иборат тўплам бўлиб, $P_1 \in \mathcal{P}$, $P_2 \in \mathcal{P}$ бўлсин.

Агар P_1 бўлинишнинг ҳар бир бўлувчи чизиги P_2 бўлинишнинг ҳам бўлувчи чизиги бўлса, P_2 бўлиниш P_1 ни эргаштиради деб аталади ва $P_1 \prec P_2$ каби белгиланади.

1°. Агар $P_1 \in \mathcal{P}$, $P_2 \in \mathcal{P}$, $P_3 \in \mathcal{P}$ бўлинишлар учун $P_1 \prec P_2$, $P_2 \prec P_3$ бўлса, у ҳолда $P_1 \prec P_3$ бўлади.

2°. $\forall P_1 \in \mathcal{P}, \forall P_2 \in \mathcal{P}$ бўлинишлар учун, шундай $P \in \mathcal{P}$ топиладики, $P_1 \prec P$, $P_2 \prec P$ бўлади.

2. Дарбу йифиндилаrinинг хоссалари. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва чегараланган бўлсин. (D) соҳанинг P бўлинишини олиб, бу бўлинишга нисбатан $f(x, y)$ функциянинг интеграл ва Дарбу йифиндилаrinи тузамиз:

$$\sigma = \sigma_P(f; \xi_k, \eta_k) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k,$$

$$s = s_P(f) = \sum_{k=1}^n m_k D_k,$$

$$S = S_P(f) = \sum_{k=1}^n M_k D_k.$$

1°. $\forall \epsilon > 0$ олинганда ҳам $(\xi_k, \eta_k) \in (D_k)$ нуқталарни ($k = 1, 2, \dots, n$) шундай танлаб олиш мумкинки,

$$0 \leq s_P(f) - \sigma_P(f) < \epsilon,$$

шунингдек, $(\xi_k, \eta_k) \in (D_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) нуқталарни яна шундай танлаб олиш мумкинки,

$$0 \leq \sigma_P(f) - s_P(f) < \epsilon$$

бўлади.

Бу хосса Дарбу йифиндилаri $s_P(f)$, $S_P(f)$ лар интеграл йифинди $\sigma_P(f)$ муайян бўлиниш учун мос равишда аниқ қуий ҳамда аниқ юқори чегара бўлишини билдиради.

2°. Агар P_1 ва P_2 лар (D) соҳанинг икки бўлинишлари бўлиб, $P_1 \prec P_2$ бўлса, у ҳолда

$$s_{P_1}(f) \leq s_{P_2}(f), S_{P_2}(f) \leq S_{P_1}(f)$$

бўлади.

Бу хосса (D) соҳанинг бўлинишдаги бўлаклар сони орта боргданда уларга мос Дарбунинг қуий йифиндисининг камаймаслиги, юқори йифиндисининг эса ошмаслигини билдиради.

3°. Агар P_1 ва P_2 лар (D) соҳанинг ихтиёрий икки бўлинишлари бўлиб, $s_{P_1}(f)$, $S_{P_1}(f)$ ва $s_{P_2}(f)$, $S_{P_2}(f)$ лар $f(x, y)$ функциянинг шу бўлинишларга нисбатан Дарбу йифиндилаri бўлса, у ҳолда

$$s_{P_1}(f) \leq S_{P_2}(f), s_{P_2}(f) \leq S_{P_1}(f)$$

бўлади.

Бу хосса, (D) соҳанинг бўлинишларига нисбатан тузилган қуий йифиндилаr тўплами $\{s_P(f)\}$ нинг ҳар бир элементи (юқори йифиндилаr тўпла-

ми $\{S_p(f)\}$ нинг ҳар бир элементи) юқори йиғиндишлар түплами $\{S_P(f)\}$ нинг исталган элементидан (қуийи йиғиндишлар түплами $\{s_P(f)\}$ нинг исталган элементидан) катта (кичик) эмаслигини билдиради.

4°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва чегараланган бўлса, у ҳолда

$$\sup \{s_P(f)\} \leqslant \inf \{S_P(f)\}$$

бўлади.

Бу хосса $f(x, y)$ функциянинг қуийи икки каррали интеграли, унинг юқори икки каррали интегралидан катта эмаслигини билдиради:

$$I \leqslant \bar{I}.$$

5°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва чегараланган бўлса, у ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ олингданда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган барча бўлинишлари учун

$$\begin{aligned} S_P(f) &< \bar{I} + \varepsilon \quad (0 \leqslant S_P(f) - \bar{I} < \varepsilon), \\ s_P(f) &> I - \varepsilon \quad (0 \leqslant I - s_P(f) < \varepsilon) \end{aligned} \quad (18.6)$$

бўлади.

Бу хосса $f(x, y)$ функциянинг юқори ҳамда қуийи интеграллари $\lambda_P \rightarrow 0$ да мос равишда Дарбунинг юқори ҳамда қуийи йиғиндишларининг лимити эканлигини билдиради:

$$\bar{I} = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} S_P(f), \quad I = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} s_P(f).$$

3. Икки каррали интегралнинг мавжудлиги. Энди икки каррали интегралнинг мавжуд бўлишининг зарур ва етарли шартини (критерийсими) келтирамиз.

18.1-теорема. $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлиши учун, $\forall \varepsilon > 0$ олингданда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилиб, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишига нисбатан Дарбу йиғиндишлари

$$S_P(f) - s_P(f) < \varepsilon \quad (18.7)$$

тенгсизликни қаноатлантириши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлсин. Таърифга кўра

$$I = \underline{I} = \bar{I}$$

бўлади, бунда

$$\underline{I} = \sup \{s_P(f)\}, \quad \bar{I} = \inf \{S_P(f)\}.$$

$\forall \varepsilon > 0$ олингданда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $\delta > 0$ топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишига нисбатан Дарбу йиғиндишлари учун (18.6) муносабатларга кўра

$$S_P(f) - \bar{I} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \underline{I} - s_P(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлиб, ундан

$$S_P(f) - s_P(f) < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлиги. $\forall \varepsilon > 0$ олингандага ҳам, шундай $\delta > 0$ топилиб, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишига нисбатан Дарбу йифиндилиари учун

$$S_P(f) - s_P(f) < \varepsilon$$

бўлсин. Қаралаётган $f(x, y)$ функция (D) соҳада чегараланганилиги учун, унинг қуёйи ҳамда юқори интеграллари

$$\underline{I} = \sup \{s_P(f)\}, \quad \overline{I} = \inf \{S_P(f)\}$$

мавжуд,

$$\underline{I} \leq \overline{I}$$

бўлади. Равшанки,

$$s_P(f) \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S_P(f).$$

Бу муносабатдан

$$0 \leq \overline{I} - \underline{I} \leq S_P(f) - s_P(f)$$

бўлишини топамиз. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ учун

$$0 \leq \overline{I} - \underline{I} < \varepsilon$$

бўлиб, ундан $\underline{I} = \overline{I}$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳада интегралланувчи эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Агар $f(x, y)$ функциянинг (D_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) соҳадаги тебранишини ω_k билан белгиласак, у ҳолда

$$S_P(f) - s_P(f) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) D_k = \sum_{k=1}^n \omega_k D_k$$

бўлиб, теоремадаги (18.7) шарт ушбу

$$\sum_{k=1}^n \omega_k D_k < \varepsilon,$$

яъни

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k D_k = 0$$

кўринишларни олади.

4- §. Интегралланувчи функциялар синфи

Ушбу параграфда икки каррали интегралнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, маълум синф функцияларнинг интегралланувчи бўлишини кўрсатамиз.

18.2-теорема. Агар $f(x, y)$ функция чегараланган ётик ($D \subset R^2$) соҳада берилган ва узлуксиз бўлса, у шу соҳада интегралланувчи бўлади.

Исбот. $f(x, y)$ функция (D) соҳада текис узлуксиз бўлади. У ҳолда Кантор теоремасининг натижасига асосан (12-боб, 6-§), $\forall \varepsilon > 0$ олингандан ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ гана ҳам, бўлиниши олингандан, бу бўлинишнинг ҳар бир бўлагида функциянинг тебраниши $\omega < \varepsilon$ бўлади. Демак, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишида

$$S_P(f) - s_P(f) = \sum_{k=1}^n \omega_k D_k < \varepsilon \sum_{k=1}^n D_k = \varepsilon \cdot D$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k D_k = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи. Теорема исбот бўлди.

Баъзи бир узиладиган функцияларнинг ҳам интегралланувчи бўлишини кўрсатишдан аввал ноль юзли чизиқ тушунчасини эслатиб, битта лемма исботлаймиз. R^2 текисликда бирор Γ чизиқ берилган бўлсин. Маълумки, $\forall \varepsilon > 0$ берилгандан ҳам, Γ чизиқни шундай кўпбурчак (Q) билан ўраш мумкин бўлсанки, бу кўпбурчакнинг юзи $Q < \varepsilon$ бўлса, у ҳолда I — ноль юзли чизиқ деб аталар эди. Масалан, $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз $y = f(x)$ функция тасвирлаган чизиқ ноль юзли чизиқ бўлади. Шуни ҳам айтиш керакки, гарчанд юзаки қараганда ҳар қандай чизиқ ноль юзли бўлиб кўринса ҳам, аслида ундан эмас.

(D) соҳада ноль юзли Γ чизиқ берилган бўлсин.

18.1-лемма. $\forall \varepsilon > 0$ олингандан ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган P бўлиниши олингандан бу бўлинишнинг Γ чизиқ билан умумий нуқтага эга бўлган бўлаклари юзларининг йигиндиси ε дан кичик бўлади.

Исбот. Шартга кўра Γ — ноль юзли чизиқ. Демак, уни шундай (Q) кўпбурчак билан ўраш мумкинки, бу кўпбурчакнинг юзи $Q < \varepsilon$ бўлади.

Γ чизиқ билан (Q) кўпбурчак чегараси умумий нуқтага эга эмас сидаги масофани қарайлик. Бу нуқталар орасидаги масофа ўзининг энг кичик қийматига эришади. Биз уни $\delta > 0$ орқали белгилаймиз. Агар (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган P бўлиниши олинса, равшанки, бу бўлинишнинг Γ чизиқ билан умумий нуқтага эга бўлган бўлаклари бутунлай (Q) кўпбурчакда жойлашади. Демак, бундай бўлаклар юзларининг йигиндиси ε дан кичик бўлади. Лемма исбот бўлди.

18.3-теорема. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада чегараланган ва бу соҳанинг чекли сонда и ноль юзли чизиқларида узилишига эга бўлиб, қолган барча нуқталарида узлуксиз бўлса, функция (D) соҳада интегралланувчи бўлади.

Исбот. $f(x, y)$ функция (D) соҳада чегараланган бўлиб, у шу соҳанинг фақат битта ноль юзли Γ чизигида ($\Gamma \subset (D)$) узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарда узлуксиз бўлсин.

$\forall \varepsilon > 0$ сонни олиб, Γ чизиқни юзи ε дан кичик бўлган (Q) кўпбурчак билан ўраймиз. Натижада (D) соҳа (Q) ва $(D) \setminus (Q)$ соҳаларга ажралади.

Шартга кўра, $f(x, y)$ функция $(D) \setminus (Q)$ ла узлуксиз. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олингданда ҳам шундай $\delta_1 > 0$ топиладики, диаметри $\lambda_P < \delta_1$ бўлган P бўлинишнинг ҳар бир бўлагидаги $f(x, y)$ функциянинг тебраниши $\omega_k < \varepsilon$ бўлади.

Юқоридаги лемманинг исботи жараёни кўрсатадики, шу $\varepsilon > 0$ га кўра, шундай $\delta_2 > 0$ топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta_2$ бўлган бўлиниши олинса, бу бўлинишнинг (Q) кўпбурчак билан умумий нуқтага эга бўлган бўлаклар юзларининг йифинди ε дан кичик бўлади.

Энди $\min\{\delta_1, \delta_2\} = \delta$ деб, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган P бўлинишини оламиз. Бу бўлинишга нисбатан $f(x, y)$ функциянинг Дарбу йифиндиарини тузиб, қўйидаги

$$S_P(f) - s_{P'}(f) = \sum_{k=1}^n \omega_k D_k \quad (18.8)$$

айирмани қараймиз.

Бу (18.8) йифиндининг (Q) кўпбурчакдан ташқарида жойлашган (D_k) бўлакларга мос ҳадларидан иборат йифинди

$$\sum'_k \omega_k D_k$$

бўлсин.

(18.8) йифиндининг қолган барча ҳадларидан ташкил топган йифинди

$$\sum''_k \omega_k D_k$$

бўлсин. Натижада (18.8) йифинди икки қисмга ажралади:

$$\sum_{k=1}^n \omega_k D_k = \sum'_k \omega_k D_k + \sum''_k \omega_k D_k. \quad (18.9)$$

$(D) \setminus (Q)$ соҳадаги бўлакларда $\omega_k < \varepsilon$ бўлганлигидан

$$\sum'_k \omega_k D_k < \varepsilon \sum'_k D_k \leq \varepsilon \cdot D \quad (18.10)$$

бўлади.

Агар $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳадаги тебранишини Ω билан белгиласак, у ҳолда

$$\sum''_k \omega_k D_k \leq \Omega \sum''_k D_k$$

бўлади. (Q) кўпбурчакда бутунлай жойлашган P бўлинишнинг бўлаклари юзларининг йифинди ε дан кичик ҳамда (Q) кўпбурчак чегараси билан умумий нуқтага эга бўлган бўлаклар юзларининг йифинди ҳам ε дан кичик бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\sum''_k D_k < 2\varepsilon$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\sum_k'' \omega_k D_k < 2\Omega \varepsilon. \quad (18.11)$$

Натижада (18.9), (18.10) ва (18.11) муносабатлардан

$$\sum_{k=1}^n \omega_k D_k < \varepsilon D + 2\Omega \varepsilon = \varepsilon (D + 2\Omega)$$

эканлиги келиб чиқади. Демак,

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k D_k = 0.$$

Бу эса $f(x, y)$ функцияниг (D) соҳада интегралланувчи бўлишини билдиради.

$f(x, y)$ функция (D) соҳанинг чекли сондаги ноль юзли чизиқларида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарида узлуксиз бўлса, унинг (D) да интегралланувчи бўлиши юқоридагидек исбот этилади. Теорема исбот бўлди.

5-§ Икки каррали интегралнинг хоссалари

Қўйида $f(x, y)$ функция икки каррали интегралининг хоссаларини ўрганамиз.

Икки каррали интеграл ҳам аниқ интегралнинг хоссалари сингари хоссаларга эга. Уларни асосан исботсиз келтирамиз.

1°. $f(x, y)$ функция (D) соҳага ($(D) \subset R^2$) интегралланувчи бўлсин. Бу функцияниг (D) соҳага тегишли бўлган ноль юзли L чизиқдаги ($L \subset (D)$) қийматларинигина (чегараланганингини сақлаган ҳолда) ўзгартиришдан ҳосил бўлган $F(x, y)$ функция ҳам (D) соҳада интегралланувчи бўлиб,

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \iint_{(D)} F(x, y) dD$$

бўлади.

Исбот. Равшанки, $\forall (x, y) \in (D) \setminus L$ учун

$$f(x, y) \equiv F(x, y).$$

Шартга кўра L — ноль юзли чизиқ. Унда 18.1-леммага асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олингандаги ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиниши олингандаги ҳам, бу бўлинишнинг L чизиқ билан умумий нуқтага эга бўлган бўлаклари юзларининг йиғиндиси ε дан кичик бўлади. Шу P бўлинишга нисбатан $f(x, y)$ ва $F(x, y)$ функцияларининг ушбу интеграл йиғиндиларини тузамиз:

$$\sigma_P(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k,$$

$$\sigma_P(F) = \sum_{k=1}^n F(\xi_k, \eta_k) D_k.$$

$\sigma_P(f)$ йиғиндини құйидагица икки қисмга ажратамиз:

$$\sigma_P(f) = \sum_k' f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k + \sum_k'' f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k,$$

бунда \sum_k' йиғинди L чизик билан умумий нүктеге эга бўлган (D_k) бўлаклар бўйича олинган, \sum_k'' эса қолган барча ҳадлардан ташкил топган йиғинди.

Худди шунга ўхшаш

$$\sigma_P(F) = \sum_k' F(\xi_k, \eta_k) D_k + \sum_k'' F(\xi_k, \eta_k) D_k.$$

Агар $\forall (x, y) \in (D) \setminus L$ учун $f(x, y) \equiv F(x, y)$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$|\sigma_P(f) - \sigma_P(F)| \leq \sum_k |f(\xi_k, \eta_k) - F(\xi_k, \eta_k)| \cdot D_k \leq M \cdot \sum_k D_k < M \epsilon$$

бўлиши келиб чиқади, бунда $M = \sup |f(x, y) - F(x, y)|$, $((x, y) \in (D) \setminus L)$.
Демак,

$$|\sigma_P(f) - \sigma_P(F)| < M \epsilon.$$

Кейинги тенгсизликда $\lambda_P \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб құйидагини топамиз:

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \iint_{(D)} F(x, y) dD.$$

2º. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган бўлиб, (D) соҳа ноль юзли L чизик билан (D_1) ва (D_2) соҳаларга ежралган бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, функция (D_1) ва (D_2) соҳаларда ҳам интегралланувчи бўлади, ва аксинча, яъни $f(x, y)$ функция (D_1) ва (D_2) соҳаларнинг ҳар бирида интегралланувчи бўлса, функция (D) соҳада ҳам интегралланувчи бўлади. Бунда

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \iint_{(D_1)} f(x, y) dD + \iint_{(D_2)} f(x, y) dD.$$

3º. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда $c f(x, y)$ ($c = \text{const}$) ҳам шу соҳада интегралланувчи ва ушбу

$$\iint_{(D)} c \cdot f(x, y) dD = c \iint_{(D)} f(x, y) dD$$

формула ўринли бўлади.

4º. Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x, y) \pm g(x, y)$ функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва ушбу

$$\iint_{(D)} [f(x, y) \pm g(x, y)] dD = \iint_{(D)} f(x, y) dD \pm \iint_{(D)} g(x, y) dD$$

формула ўринли бўлади.

18.1-натижа. Агар $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_n(x, y)$ функцияларнинг ҳар бири (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда ушбу

$$c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) + \dots + c_n f_n(x, y) \quad (c_i = \text{const}, i = 1, 2, \dots, n)$$

функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва

$$\begin{aligned} & \int \int_{(D)} [c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) + \dots + c_n f_n(x, y)] dD = \\ & = c_1 \int \int_{(D)} f_1(x, y) dD + c_2 \int \int_{(D)} f_2(x, y) dD + \dots + c_n \int \int_{(D)} f_n(x, y) dD \end{aligned}$$

бўлади.

5°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлиб, $\forall (x, y) \in (D)$ учун $f(x, y) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int \int_{(D)} f(x, y) dD \geqslant 0$$

бўлади.

18.2-нати жа. Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар (D) соҳада интегралланувчи бўлиб, $\forall (x, y) \in (D)$ учун

$$f(x, y) \leqslant g(x, y)$$

бўлса, у ҳолда

$$\int \int_{(D)} f(x, y) dD \leqslant \int \int_{(D)} g(x, y) dD$$

бўлади.

6°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда $|f(x, y)|$ функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва

$$\left| \int \int_{(D)} f(x, y) dD \right| \leqslant \int \int_{(D)} |f(x, y)| dD$$

бўлади.

7°. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремалар. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва у шу соҳада чегараланган бўлсин. Демак, шундай m ва M ўзгармас сонлар ($m = \inf \{f(x, y); (x, y) \in (D)\}$, $M = \sup \{f(x, y); (x, y) \in (D)\}$) мавжудки, $\forall (x, y) \in (D)$ учун

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M$$

бўлади.

18.4-теорема. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас μ ($m \leqslant \mu \leqslant M$) сон мавжудки,

$$\int \int_{(D)} f(x, y) dD = \mu \cdot D$$

бўлади, бунда $D - (D)$ соҳанинг юзи.

18.3-нати жа. Агар $f(x, y)$ функция ёпиқ (D) соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу соҳада шундай $(a, b) \in (D)$ нуқта топиладики,

$$\int \int_{(D)} f(x, y) dD = f(a, b) \cdot D$$

бўлади.

18.5-теорема. Агар $g(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлиб, у шу соҳада ўз шорасини ўзгартириласа ва $f(x, y)$ функция (D) соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда шундай $(a, b) \in (D)$ нуқта топила-дики,

$$\int \int_{(D)} f(x, y) g(x, y) dD = f(a, b) \int \int_{(D)} g(x, y) dD$$

бўлади.

8°. Интеграллаш соҳаси ўзгарувчи бўлган икки каррали интеграллар. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган бўлиб, у шу соҳада интегралланувчи бўлсин. Бу функция, (D) соҳанинг юзга эга бўлган ҳар қандай (d) қисмида ($(d) \subset (D)$) ҳам интегралланувчи бўлади. Равшанки, ушбу

$$\iint_{(d)} f(x, y) dD$$

интеграл (d) га боғлиқ бўлади.

(D) соҳанинг юзга эга бўлган ҳар бир (d) қисмига юқоридаги интегрални мос қўямиз:

$$\Phi(d) \rightarrow \iint_{(d)} f(x, y) dD.$$

Натижада функция ҳосил бўлади. Одатда бу

$$\Phi((d)) = \iint_{(d)} f(x, y) dD$$

функция соҳанинг функцияси деб аталади.

(D) соҳада бирор (x_0, y_0) нуқтани олайлик. (d) эса шу нуқтани ўзичига олган ва $(d) \subset (D)$ бўлган соҳа бўлсин. Бу соҳанинг юзи d , диаметри эса λ бўлсин.

Агар $\lambda \rightarrow 0$ да $\frac{\Phi((d))}{d}$ нисбатининг лимити $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi((d))}{d}$ мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $\Phi((d))$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги соҳа бўйича ҳосиласи деб аталади.

Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда $\Phi((d))$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги соҳа бўйича ҳосиласи $f(x_0, y_0)$ га тенг бўлади.

6-§. Икки каррали интегралларни ҳисоблаш

$f(x, y)$ функциянинг (D) соҳадаги ($(D) \subset R^2$) икки каррали интеграли тегишли интеграл йиғиндининг маълум маънодаги лимити сифатида таърифланди. Бу лимит тушунчаси мураккаб характерга эга бўлиб, уни шу таъриф бўйича ҳисоблаш ҳатто содда ҳолларда ҳам анча қийин бўлади.

Агар $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳада интегралланувчилиги маълум бўлса, унда биламизки, интеграл йиғинди (D) соҳанинг бўлинниш усулига ҳам, ҳар бир бўлакда олинган (ξ_k, η_k) нуқталарга ҳам боғлиқ бўлмай, $\lambda_p \rightarrow 0$ да ягона $\iint_{(D)} f(x, y) dD$ сонга интилади. Натижада функциянинг икки каррали интегралини топиш учун бирорта бўлиннишга нисбатан интеграл йиғиндининг лимитини ҳисоблаш етарли бўлади. Бу ҳол (D) соҳанинг бўлинини ҳамда (ξ_k, η_k) нуқталарни, интеграл йиғиндини ва унинг лимитини ҳисоблашга қулай қилиб олиш имконини беради.

Мисол. Ушбу

$$\iint_D xy \, dD$$

интегрални ҳисоблайлиқ. Бунда

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Равшанки, $f(x, y) = xy$ функция (D) да узлуксиз. Демак, бу функция (D) соҳада интегралланувчи.

(D) соҳани

$$(D_{ik}) = \left\{ (x, y) \in R^2 : \frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n}, \frac{k}{n} \leq y \leq \frac{k+1}{n}, \frac{i}{n} + \frac{k}{n} \leq 1 \right\}$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n-1, k = 0, 1, 2, \dots, n-i)$$

Бўлакларга ажратиб, ҳар бир (D_{ik}) да $(\xi_i, \eta_k) = \left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n} \right)$ деб қараймиз.

У ҳолда

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i} f(\xi_i, \eta_k) D_{ik} = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{n-i-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{i}{n} \cdot \frac{n-i}{n} \cdot \frac{1}{2n^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2n^4} \sum_{i=0}^{n-1} i(n-i)^2 = \frac{1}{2n^2} \left(\frac{n^2(n-1)n}{2} - 2n \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \right.$$

$$\left. + \frac{n^2(n-1)^2}{4} \right)$$

бўлади. Бундан эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma = \frac{1}{24}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\iint_D xy \, dD = \frac{1}{24}.$$

Умуман, кўп ҳолларда функцияларнинг каррали интегралларини таърифга кўра ҳисоблаш қийин бўлади. Шунинг учун каррали интегралларни ҳисоблашнинг амалий жиҳатдан қулай бўлган йўлларини топиш зарурияти туғилади.

Юқорида айтиб ўтганимиздек, $f(x, y)$ функцияниянг каррали интегрални ва уни ҳисоблаш (D) соҳага борлиқ,

Аввал, содда ҳолда, (D) соҳа тўғри тўртбурчак соҳадан иборат бўлган ҳолда функцияниянг каррали интегралини ҳисоблаймиз.

18.6-теорема. $f(x, y)$ функция $(D) = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин.

Агар $x(x \in [a, b])$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

интеграл ҳам мавжуд бўлади ва

$$\int \int_{(D)} f(x, y) dD = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

бўлади.

Исбот. (D) соҳани

$$(D_{ik}) = \{(x, y) \in R^2 : x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_k \leq y \leq y_{k+1}\} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1, k = 0, 1, \dots, m-1)$$

($a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$) бўлакларга ажратамиз. Бу бўлниши P_{nm} деб белгилаймиз. Унинг диаметри

$$\lambda_{P_{nm}} = \max \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_k^2} \quad (\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta y_k = y_{k+1} - y_k).$$

Модомики, $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи экан, у шу соҳада чегараланган бўлади. Бинобарин, $f(x, y)$ функция ҳар бир (D_{ik}) да чегараланган, ва демак, у шу соҳада аниқ юқори ҳамда аниқ қўйи чегараларига эга бўлади:

$$\begin{aligned} m_{ik} &= \inf \{f(x, y) : (x, y) \in (D_{ik})\}, \\ M_{ik} &= \sup \{f(x, y) : (x, y) \in (D_{ik})\}, \\ (i &= 0, 1, \dots, n-1, k = 0, 1, \dots, m-1). \end{aligned}$$

Равшанки, $\forall (x, y) \in (D_{ik})$ учун $m_{ik} \leq f(x, y) \leq M_{ik}$, хусусан, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ учун ҳам $m_{ik} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{ik}$ бўлади. Теореманинг шартидан фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} m_{ik} dy \leq \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y) dy \leq \int_{y_k}^{y_{k+1}} M_{ik} dy,$$

яъни

$$m_{ik} \Delta y_k \leq \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y) dy \leq M_{ik} \Delta y_k, \text{ бунда } \Delta y_k = y_{k+1} - y_k.$$

Агар кейинги тенгсизликларни k нинг $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ қийматларида ёзиб, уларни ҳадлаб қўшсак, у ҳолда

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} \Delta y_k \leq \sum_{k=1}^{m-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y) dy \leq \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik} \Delta y_k,$$

яъни

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} \Delta y_k \leq \int_c^d f(\xi_i, y) dy = I(\xi_i) \leq \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik} \Delta y_k$$

($i = 0, 1, \dots, n-1$) бўлади.

Энди кейинги тенгсизликларни $\Delta x_i (\Delta x_i = x_{i+1} - x_i)$ га кўпайтириб, сўнг ҳадлаб қўшамиз. Натижада

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} \Delta y_k \right) \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} M_{ik} \Delta y_k \right) \cdot \Delta x_i$$

бўлади.

Равшанки,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} \Delta y_k \right) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} \cdot \Delta x_i \Delta y_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} D_{ik} = s$$

$f(x, y)$ функция учун Дарбунинг қўйи йиғиндиси,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} M_{ik} \Delta y_k \right) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik} D_{ik} = S$$

эса Дарбунинг юқори йиғиндисидир. Демак,

$$s \leq \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i \leq S. \quad (18.12)$$

Шартга кўра $f(x, y)$ функция (D) да интегралланувчи. У ҳолда $\lambda_{P_{nm}} \rightarrow 0$ да

$$s \rightarrow \iint_D f(x, y) dD, \quad S \rightarrow \iint_D f(x, y) dD$$

бўлади.

(18.12) муносабатдан эса,

$$\sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i$$

йиғиндининг лимитга эга бўлиши ва бу лимит

$$\iint_D f(x, y) dD$$

та тенг бўлиши келиб чиқади:

$$\lim_{\lambda_{P_{nm}} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i = \iint_D f(x, y) dD.$$

Агар

$$\lim_{\lambda_{P_{nm}} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b I(x) dx$$

ва

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

эканилигини эътиборга олсак, унда

$$\iint_D f(x, y) dD = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

бўлишини топамиз. Бу эса теоремани исботлайди.

18.7-теорема. $f(x, y)$ функция ($D = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$) соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин. Агар $y(y \in [c, d])$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

интеграл ҳам мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

бўлади.

Бу теореманинг исботи юқоридаги теореманинг исботи кабидир.

18.6-теорема ва 18.7-теоремалардан қўйидаги натижалар келиб чиқади.

18.4-натижаси. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин. Агар x ($x \in [a, b]$) ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида $\int\limits_c^d f(x, y) dy$ интеграл мавжуд бўлса, y ($y \in [c, d]$) ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида $\int\limits_a^b f(x, y) dx$ интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x, y) dy \right] dx, \quad \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (18.13)$$

интеграллар ҳам мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

бўлади.

18.5-натижаси. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD, \quad \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x, y) dy \right] dx, \quad \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

интегралларнинг ҳар бири мавжуд ва улар бир-бира тенг бўлади.

(18.13) интеграллар, тузилишига кўра, икки аргументли функциядан аввал бир аргументи бўйича (иккинчи аргументини ўзгармас ҳисоблашиб туриб), сўнг иккинчи аргументи бўйича олинган интеграллардир. Бундай интегралларни *такрорий интеграллар* деб аташ (такрорий лимитлар сингари) табиийdir.

Шундай қилиб, қаралаётган ҳолда каррали интегралларни ҳисоблаш тақрорий интегралларни ҳисоблашга келтирилар экан. Тақрорий интегрални ҳисоблаш эса иккита оддий (бир аргументли функциянинг интегралини) Риман интегралини кетма-кет ҳисоблаш демакдир.

18.2-эслатма. Юқорида келтирилган 18.6-теоремани исботлаш жараёнида кўрдикки, тўғри тўртбурчак (D) соҳа, томонлари мос равишда $\Delta x_i, \Delta y_k$ бўлган тўғри тўртбурчак соҳалар (D_{ik}) ларга ажратилиди. Равшанки, бу элементар соҳанинг юзи $D_{ik} = \Delta x_i \Delta y_k$ бўлади.

Абвал айтганимиздек, Δx ни dx га, Δy ни dy га алмаштириш мумкінлігини ұамда $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ әканини әтеборга олиб, бундан бүён интегрални ушбу

$$\iint_D f(x, y) dD$$

күрнишда ёзиш үрніга

$$\iint_{a c}^{b d} f(x, y) dy dx \quad \left(\text{ески } \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \right)$$

каби ұам ёзиб кетаверамиз.

Мисол. Ушбу

$$\iint_D \frac{x}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy$$

интеграл ҳисоблансин, бунда $(D) = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Интеграл остидаги

$$f(x, y) = \frac{x}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$$

функция (D) соқада узлуксиз. Үнда қаралаёттан иккі карралы интеграл ҳам,

$$\int_0^1 \frac{x}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} dx$$

интеграл ҳам мавжуд. 18.7- теоремага күра

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} dx \right] dy$$

интеграл мавжуд бўлади ва

$$\iint_D \frac{x}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} dx \right] dy$$

бўлади.

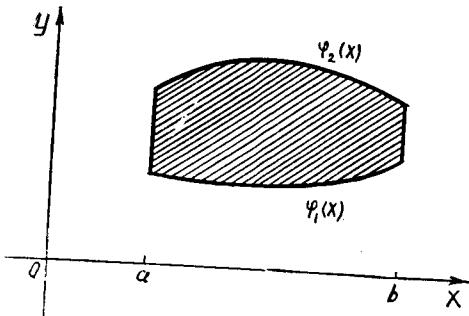
Агар

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + x^2 + y^2)^{-3/2} d(1 + x^2 + y^2) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2 + 2}} \end{aligned}$$

бўлишини ҳисобга олсак, унда

$$\iint_D \frac{x dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} = \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2 + 2}} \right] dy =$$

$$= [\ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) - \ln(y + \sqrt{y^2 + 2})]_0^1 = \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}$$



еканинни топамиз. Демак,

$$\iint_{(D)} \frac{x dx dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \\ = \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

Энди (D) соҳа ушбу

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : a \leqslant x \leqslant b, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$$

кўринишида бўлсин. Бунда $\varphi_1(x)$ кўринганда берилган ва узлуксиз функциялар (18-чизма).

18-чизма

ва $\varphi_2(x)$ $[a, b]$ да берилган ва узлуксиз интегралланувчи бўлсин. Агар x ($x \in [a, b]$) ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида

$$I(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int_a^b [\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy] dx$$

интеграл ҳам мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \int_a^b [\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy] dx$$

бўлади.

Исбот. $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функциялар $[a, b]$ да узлуксиз. Вейерштрасс теоремасига кўра бу функциялар $[a, b]$ да ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларига эришади. Уларни

$$\min_{a \leqslant x \leqslant b} \varphi_1(x) = c, \max_{a \leqslant x \leqslant b} \varphi_2(x) = d$$

деб белгилайлик.

Энди

$$(D_1) = \{(x, y) \in R^2 : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

соҳада ушбу

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{агар } (x, y) \in (D) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x, y) \in (D_1) \setminus (D) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик.

Равшанки, теорема шартларида бу функция (D_1) соҳада интегралланувчи ва интеграл хоссасига кўра

$$\iint_{(D_1)} f^*(x, y) dD = \iint_{(D)} f^*(x, y) dD + \iint_{(D_1) \setminus (D)} f^*(x, y) dD = \\ = \iint_{(D)} f(x, y) dD \quad (18.14)$$

бўлади. Шунингдек, x ($x \in [a, b]$) ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида

$$I_1(x) = \int_c^d f^*(x, y) dy$$

интеграл мавжуд ва

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_c^d f^*(x, y) dy = \int_c^{\Psi_1(x)} f^*(x, y) dy + \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f^*(x, y) dy + \\ &+ \int_{\Psi_2(x)}^d f^*(x, y) dy = \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f(x, y) dy \end{aligned} \quad (18.15)$$

бўлади. Унда 18. 6- теоремага кўра

$$\int_a^b [\int_c^d f^*(x, y) dy] dx$$

интеграл ҳам мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(D_1)} f^*(x, y) dD = \int_a^b [\int_c^d f^*(x, y) dy] dx$$

бўлади.

(18. 14) ва (18. 15) муносабатлардан

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \int_a^b [\int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f(x, y) dy] dx$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Энди (D) соҳа ушбу

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), c \leqslant y \leqslant d\}$$

кўринишда бўлсин. Бунда $\psi_1(y)$ ва $\psi_2(y)$ $[c, d]$ да берилган узлуксиз функциялар (19- чизма).

18. 9- теорема. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин. Агар y ($y \in [c, d]$) ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида

$$I(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

интеграл мавжуд бўлса, y ҳолда ушибу

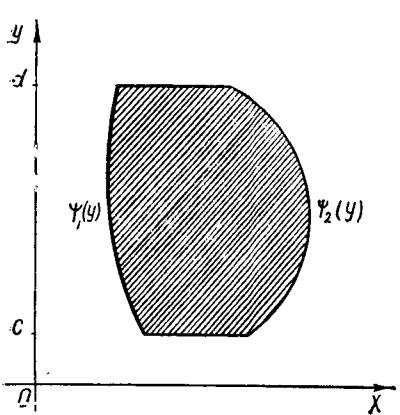
$$\int_c^d [\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx] dy$$

интеграл ҳам мавжуд бўлади ва

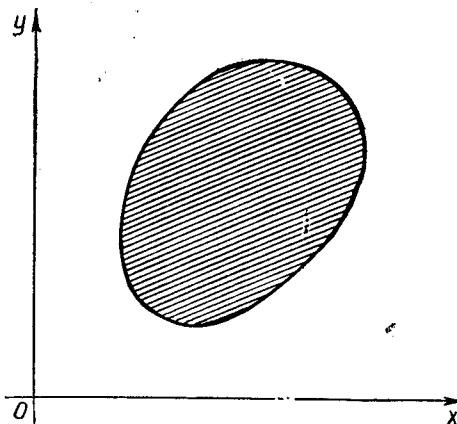
$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \int_c^d [\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx] dy$$

бўлади.

Бу теореманинг исботи 18. 8- теореманинг исботи кабидир.



19- чизма



20- чизма

Фараз қиласылғык, (D) соҳа $((D) \subset R^2)$ юқорида қаралған соҳаларнинг ҳар бирининг хусусиятига әга бўлсин (20- чизма).

18. 6- натижада. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин. Агар $x (x \in [a, b])$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

интеграл мавжуд бўлса, $y (y \in [c, d])$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида

$$\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx, \quad \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

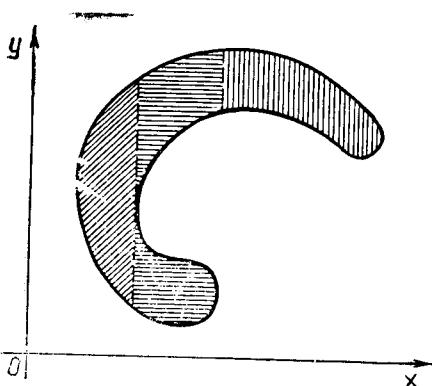
интеграллар ҳам мавжуд ва

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) dD &= \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx = \\ &= \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$

бўлади.

Бу натижанинг исботи 18.8- теорема ва 18. 9- теоремадан келиб чиқади.

Агар (D) соҳа 21-чизмада тасвирланган соҳа бўлса, у ҳолда бу соҳа юқорида ўрганилган соҳалар кўринишига келадиган қи-



21- чизма

либ бўлакларга ажратилади. Натижада (D) соҳа бўйича икки каррали интеграл ажратилган соҳалар бўйича икки каррали интеграллар йиғин-дисига тенг бўлади. Шундай қилиб, биз интеграллаш соҳаси (D) нинг етарли кенг синфи учун каррали интегралларни такорий интегралларга келтириб ҳисоблаш мумкинлигини кўрамиз.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\iint_{(D)} e^{-y^2} dx dy$$

интегрални қарайлик, бунда $(D) = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leqslant x \leqslant y, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Бу ҳолда 18. 7- теореманинг барча шартлари бажарилади. Ўша теоремага кўра

$$\iint_{(D)} e^{-y^2} dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^y e^{-y^2} dx \right] dy$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегралларни ҳисоблаб қўйидагиларни топамиз:

$$\int_0^y e^{-y^2} dx = y e^{-y^2},$$

$$\int_0^1 y e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-y^2} d(y^2) = -\frac{1}{2} e^{-y^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$

Демак,

$$\iint_{(D)} e^{-y^2} dx dy = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$

2. Ушбу

$$\iint_{(D)} xy dx dy$$

интегрални қарайлик, бунда $(D) = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1-x\}$. Бу ҳолда 18. 6- теореманинг барча шартлари бажарилади. Ўнда

$$\iint_{(D)} xy dx dy = \int_0^1 x \left[\int_0^{1-x} y dy \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x (1-x)^2 dx = \frac{1}{24}$$

бўлади.

3. Ушбу

$$\iint_{(D)} \sqrt{x+y} dx dy$$

интегрални қарайлик, бунда $(D) = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x \leqslant 1, 0 < y \leqslant 1-x\}$. Бу ҳолда 18. 6- теореманинг барча шартлари бажарилади. Ўша теоремага кўра

$$\iint_{(D)} \sqrt{x+y} dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \sqrt{x+y} dy \right] dx$$

бўлади. Интегралларни ҳисоблаб топамиз:

$$\int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \sqrt{x+y} dy \right] dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} \sqrt{(x+y)^3} \Big|_{y=0}^{y=1-x} \right) dx =$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 (1 - \sqrt[3]{x}) dx = \frac{2}{5}.$$

Демак,

$$\iint_D \sqrt{x+y} dx dy = \frac{2}{5}.$$

Бу келтирилган мисолларда содда функцияларнинг содда соҳа бўйича икки каррали интеграллари қаралди. Кўп ҳолларда содда функцияларни мураккаб соҳа бўйича, мураккаб функцияларни содда соҳа бўйича ва айниқса, мураккаб функцияларни мураккаб соҳа бўйича икки каррали интегралларини ҳисоблашга тўғри келади. Бундай интегралларни ҳисоблаш эса анча қийин бўлади.

7-§. Икки каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш

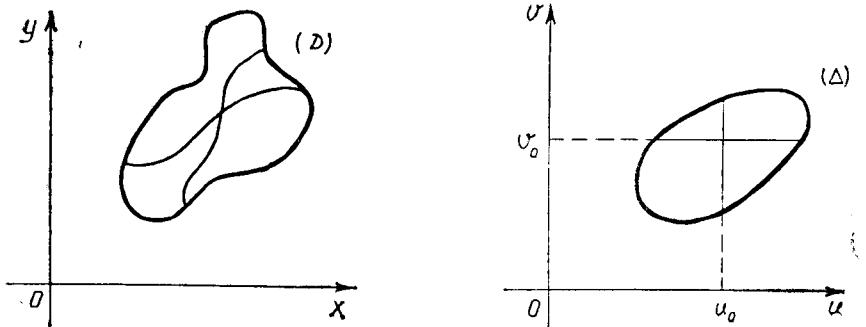
$f(x, y)$ функция (D) соҳада ($(D) \subset R^2$) берилган бўлсин. Бу функциянинг икки каррали

$$\iint_D f(x, y) dx dy \quad (18.16)$$

интеграли мавжудлиги маълум бўлиб, уни ҳисоблаш талаб этилсин. Равшанки, $f(x, y)$ функция ҳамда (D) соҳа мураккаб бўлса, (18.16) интегрални ҳисоблаш қийин бўлади. Кўпинча, x ва y ўзгарувчиларни, маълум қоидага кўра бошқа ўзгарувчиларга алмаштириш натижасида интеграл остидаги функция ҳам, интеграллаш соҳаси ҳам соддалашиб, икки каррали интегрални ҳисоблаш осонлашади.

Ушбу параграфда икки каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш билан шуғулланамиз. Аввало текисликда соҳани соҳага акслантириш, эгри чизиқли координаталар ҳамда соҳанинг юзини эгри чизиқли координаталарда ифодаланишини келтирамиз.

Иккита текислик берилган бўлсин (22-чизма). Биринчи текисликда тўғри бурчакли Oxy координата системасини ва чегараланган (D) соҳани қарайлик. Бу соҳанинг чегараси $\partial(D)$ содда, бўлакли- силлиқ чизиқдан иборат бўлсин. Иккинчи текисликда эса, тўғри бурчакли Ouv ко-



22- чизма

ордината системасини ва чегараланган (Δ) соҳани қарайлик. Бу соҳанинг чегараси $\partial(\Delta)$ ҳам содда, бўлакли- силлиқ қизиқдан иборат бўлсин.

$\varphi(u, v)$ ва $\psi(u, v)$ лар (Δ) соҳада берилган шундай функциялар бўлсинки, улардан тузилган $\{\varphi(u, v), \psi(u, v)\}$ система (Δ) соҳадаги (u, v) нуқтани (D) соҳадаги (x, y) нуқтага акслантирсин:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi : (u, v) \rightarrow x, \\ \psi : (u, v) \rightarrow y. \end{array} \right\}$$

Ва бу акслантиришнинг аксларидан иборат $\{(x, y)\}$ тўплам (D) га тегишли бўлсин.

Демак, ушбу

$$\left. \begin{array}{l} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v) \end{array} \right\} \quad (18.17)$$

система (Δ) соҳани (D) соҳага акслантиради.

Бу акслантириш қўйидаги шартларни бажарсинг:

1°. (18.17) акслантириш ўзаро бир қийматли акслантириш, яъни (Δ) соҳанинг турли нуқталарини (D) соҳанинг турли нуқталарига акслантириб, (D) соҳадаги ҳар бир нуқта учун (Δ) соҳада унга мос келадиган нуқта биттагина бўлсин.

Равшанки, бу ҳолда (18.17) система u ва v ларга нисбатан бир қийматли ечилади: $u = \varphi_1(x, y)$, $v = \psi_1(x, y)$ ва ушбу

$$\left. \begin{array}{l} u = \varphi_1(x, y), \\ v = \psi_1(x, y) \end{array} \right\} \quad (18.18)$$

система билан акслантириш юқоридаги акслантиришга тескари бўлиб (D) соҳани (Δ) соҳага акслантиради. Демак,

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(\varphi_1(x, y), \psi_1(x, y)) \equiv x, \\ \psi(\varphi_1(x, y), \psi_1(x, y)) \equiv y. \end{array} \right\} \quad (18.19)$$

2°. $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ функциялар (Δ) соҳада, $\varphi_1(x, y)$ ва $\psi_1(x, y)$ функциялар (D) соҳада узлуксиз ва барча хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар ҳам узлуксиз бўлсин.

3°. (18.17) системадаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларидан тузилган ушбу

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right| \quad (18.20)$$

функционал детерминант (Δ) соҳада нолдан фарқли (яъни (Δ) соҳанинг ҳар бир нуқтасида нолдан фарқли) бўлсин. Одатда (18.20) детерминантни системанинг якобиани дейилади ва $I(u, v)$ ёки $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ каби белгиланади.

Бу 2° ва 3° шартлардан, (Δ) боғламли соҳа бўлганда, (18.20) якобианинг шу соҳада ўз ишорасини сақлаши келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, $I(u, v)$ функция (Δ) соҳанинг иккита турли нуқтадарига турли ишорали қийматларга эга бўлса, у ҳолда 12-бобнинг 5- §

идаги 12. 13- теоремага кўра, (Δ) да шундай (u_0, v_0) нуқта топиладики, $I(u_0, v_0) = 0$ бўлади. Бу эса $I(u, v) \neq 0$ бўлишига зиддир.
 \exists^o - шартдан (18. 18) системанинг якобиани, яъни ушбу

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (18.21)$$

функционал детерминантнинг ҳам (D) соҳада нолдан фарқли бўлиши келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, (18. 19) муносабатдан

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x} &= \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \\ \frac{\partial y}{\partial y} &= \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 1, \\ \frac{\partial x}{\partial y} &= \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 1$$

бўлиб,

$$I_1(x, y) = \frac{D(u, v)}{D(x, y)} \neq 0$$

бўлишини топамиз.

Демак, (D) боғламли соҳа бўлганда (18. 21) якобиан ҳам (D) соҳада ўз ишорасини сақлади.

Юқоридаги шартлардан яна қўйидагилар келиб чиқади.

(18. 17) акслантириш (Δ) соҳанинг ички нуқтасини (D) соҳанинг ички нуқтасига акслантиради. Ҳақиқатан ҳам, ошкормас функциянинг мавжудлиги ҳақидаги теоремага кўра (18. 17) система (x_0, y_0) нуқтанинг бирор атрофида u ва v ларни x ва y ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида аниқлайди: $u = \varphi_1(x, y)$, $v = \psi_1(x, y)$. Бунда $\varphi_1(x_0, y_0) = u_0$, $\psi_1(x_0, y_0) = v_0$ бўлади. Демак, (x_0, y_0) (D) соҳанинг ички нуқтаси. Бундан (18. 17) акслантириш (Δ) соҳанинг чегараси $\partial(\Delta)$ ни (D) соҳанинг чегараси $\partial(D)$ га акслантириши келиб чиқади.

Шунингдек, (18. 17) акслантириш (Δ) соҳадаги силлиқ (бўлакли- силлик) эгри чизик

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

ни (D) соҳадаги силлиқ (бўлакли- силлик) эгри чизик

$$\begin{cases} x = \varphi(u(t), v(t)) \\ y = \psi(u(t), v(t)) \end{cases}$$

га акслантиради.

(Δ) соҳада $u = u_0$ тўғри чизиқни олайлик. (18.17) акслантириш бу тўғри чизиқни (D) соҳадаги

$$\left. \begin{array}{l} x = \varphi(u_0, v), \\ y = \psi(u_0, v) \end{array} \right\} \quad (18.22)$$

эгри чизиққа акслантиради. Худди шундай (Δ) соҳадаги $v = v_0$ тўғри чизиқни (18.17) акслантириш (D) соҳадаги

$$\left. \begin{array}{l} x = \varphi(u, v_0), \\ y = \psi(u, v_0) \end{array} \right\} \quad (18.23)$$

эгри чизиққа акслантиради. Одатда, (18.22) ва (18.23) эгри чизиқларни координат чизиқлари ((18.22) ни v координат чизиги, (18.23) ни эса u координат чизиги) деб аталади.

Модомики, (18.17) акслантириш ўзаро бир қийматли акслантириш экан, унда (D) соҳанинг ҳар бир (x, y) нуқтасидан ягона v — координат чизиги (u нинг тайин ўзгармас қийматига мос бўлган чизик), ягона u — координат чизиги (v нинг тайин ўзгармас қийматига мос бўлган чизик) ўтади. Демак, (D) соҳанинг шу (x, y) нуқтаси юқорида айтилган u ва v лар билан, яъни (Δ) соҳанинг (u, v) нуқтаси билан тўла аниқланади. Шунинг учун u ва v ларни (D) соҳа нуқталарининг координаталари деб қараш мумкин. (D) соҳа нуқталарининг бундай координаталари эгри чизиқли координаталар деб аталади.

Шундай қилиб, u ва v лар бир томондан (Δ) соҳа нуқтасининг Dekart координаталари, иккинчи томондан худди шу u ва v лар (D) соҳа нуқтасининг эгри чизиқли координаталари бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\left. \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{array} \right\} (\rho > 0, 0 \leqslant \varphi < 2\pi)$$

системани қарайлик.

Бу система $(\Delta) = \{(u, v) \in R^2 : 0 \leqslant \rho < +\infty, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$ соҳани Oxy текисликка акслантиради. Бу системанинг якобиани

$$I(u, v) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho$$

бўлади.

ρ ва φ лар (D) соҳа нуқталарининг эгри чизиқли координаталари бўлиб, шу соҳанинг координат чизиқлари эса, маркази $(0, 0)$ нуқтада, радиуси ρ га тенг ушбу

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

айланалардан (v — координат чизиқлари) ҳамда $(0, 0)$ нуқтадан чиққан $\varphi = \varphi_0$ ($0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi$) нурлардан (v — координат чизиқлар) иборатдир.

Фараз қилайлик, ушбу

$$\left. \begin{array}{l} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{array} \right\} \quad (18.17)$$

система (Δ) соҳани (D) соҳага акслантирасин. Бу акслантириш юқоридаги 1° — 3° -шартларни бажарсин. У ҳолда, (D) соҳанинг юзи

$$D = \iint_{(\Delta)} |I(u, v)| du dv = \iint_{(\Delta)} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv \quad (18.24)$$

бўлади.

Бу формуланинг исботи кейинги бобда келтирилади (қаранг, 19-боб, 3-§).

$f(x, y)$ функция (D) соҳада ($(D) \subset R^2$) берилган ва шу соҳада уз-луксиз бўлсин. (D) эса содда, бўлакли-силлиқ чизиқ билан чегараланган соҳа бўлсин. Равшанки, $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлади.

Айтайлик, ушбу

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \quad (18.17)$$

система (Δ) соҳани (D) соҳага акслантириш юқоридаги 1° — 3° -шартларни бажарсан.

Хар бир бўлувчи чизиги бўлакли-силлиқ бўлган (Δ) соҳанинг P_Δ бўлинишини олайлик. (18.17) акслантириш натижасида (D) соҳанинг P_D бўлиниши ҳосил бўлади. Бу бўлинишга нисбатан $f(x, y)$ функциянинг интеграл йиғиндиси

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k$$

ни тузамиз. Равшанки,

$$\lim_{\lambda_{P_D} \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_{P_D} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k = \iint_{(D)} f(x, y) dx dy. \quad (18.25)$$

Юқорида келтирилган (18.24) формулага кўра

$$D_k = \iint_{(\Delta_k)} |I(u, v)| du dv$$

бўлади. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$D_k = |I(u_k^*, v_k^*)| \cdot \Delta_k \quad ((u_k^*, v_k^*) \in (\Delta_k)),$$

бунда $\Delta_k = (\Delta_k)$ нинг юзи. Натижада (18.25) йиғинди ушбу

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot |I(u_k^*, v_k^*)| \cdot \Delta_k$$

кўринишга келади.

(ξ_k, η_k) нуқтанинг (D_k) соҳадаги ихтиёрий нуқта эканлигидан фойдаланиб, уни

$$\begin{aligned} \varphi(u_k^*, v_k^*) &= \xi_k, \\ \psi(u_k^*, v_k^*) &= \eta_k \end{aligned}$$

деб олиш мумкин. У ҳолда

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\varphi(u_k^*, v_k^*), \psi(u_k^*, v_k^*)) |I(u_k^*, v_k^*)| \cdot \Delta_k$$

бўлади.

Равшанки,

$$f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \cdot |I(u, v)|$$

функция (Δ) соҳада узлуксиз. Демак, у шу соҳада интегралланувчи. У ҳолда

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_{P_\Delta} \rightarrow 0} \sigma &= \lim_{\lambda_{P_\Delta} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\varphi(u_k^*, v_k^*), \psi(u_k^*, v_k^*)) |I(u_k^*, v_k^*)| \Delta_k = \\ &= \int_{(\Delta)} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |I(u, v)| du dv \end{aligned} \quad (18.26)$$

бўлади.

$\lambda_{P_\Delta} \rightarrow 0$ да $\lambda_{P_D} \rightarrow 0$ бўлишини эътиборга олиб, (18.25) ва (18.26) муносабатлардан

$$\int \int_{(D)} f(x, y) dx dy = \int \int_{(\Delta)} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |I(u, v)| du dv \quad (18.27)$$

бўлишини топамиз.

Бу икки каррали интегралда ўзгарувчиларни алмаштириш формуласидир.

У берилган (D) соҳа бўйича интегрални ҳисоблашни (Δ) соҳа бўйича интегрални ҳисоблашга келтиради. Агарда (18.27) да ўнг томондаги интегрални ҳисоблаш енгил бўлса, бажарилган ўзгарувчиларни алмаштириш ўзини оқлайди.

Мисол. Ушбу

$$\int \int_{(D)} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy$$

интегрални қарайлик, бунда

$$D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$$

маркази $(0, 0)$ нуқтада, радиуси 1 га teng бўлган юқори текисликдаги ярим доира. Берилган интегралда ўзгарувчиларни қўйидагича алмаштирамиз:

$$x = \rho \cos \Phi,$$

$$y = \rho \sin \Phi.$$

Бу алмаштириш ушбу

$$(\Delta) = \{(\rho, \Phi) \in R^2 : 0 < \Phi < \pi, 0 < \rho < 1\}$$

тўғри тўртбурчакни (D) соҳага акслантиради ва у $1^\circ - 3^\circ$ -шартларни қаноатлантиради. Ўнда (18.27) формулага кўра

$$\int \int_{(D)} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy = \int \int_{(\Delta)} \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} |I(\rho, \Phi)| d\rho d\Phi$$

бўлади. Бунда якобиан $I(\rho, \Phi) = \rho$ бўлади. Бу тенгликнинг ўнг [томонидаги интегрални ҳисоблаб топамиз:

$$\begin{aligned} \int \int_{(\Delta)} \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} |I(\rho, \Phi)| d\rho d\Phi &= \int_0^1 \left(\int_0^\pi d\Phi \right) \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \rho d\rho = \\ &= \pi \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \rho d\rho = \frac{\pi}{4} (\pi - 2). \end{aligned}$$

Демак,

$$\iint_{(D)} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy = \frac{\pi}{4} (\pi - 2).$$

8-§. Икки карралы интегрални тақрибий ҳисоблаш

$f(x, y)$ функция (D) соҳада ($D \subset R^2$) берилган ва шу соҳада интегралланувчи, яъни

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy \quad (18.28)$$

интеграл мавжуд бўлсин. Маълум кўринишга эга бўлган (D) соҳалар учун бундай интегрални ҳисоблаш 6-§ да келтирилди. Равшанки, $f(x, y)$ функция мураккаб бўлса, шунингдек, интеграллаш соҳаси мураккаб кўринишга эга бўлса, унда (18.28) интегрални ҳисоблаш анча қийин бўлади ва кўп ҳолларда бундай интегрални тақрибий ҳисоблашга тўғри келади.

Ушбу параграфда (18.28) интегрални тақрибий ҳисоблашни амалга оширадиган содда формулалардан бирини келтирамиз.

Айтайлик, $f(x, y)$ функция $(D) = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ тўғри тўртбурчакда берилган ва узлуксиз бўлсин. Унда 6-§ да келтирилган формулага кўра

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \int_a^b [\int_c^d f(x, y) dy] dx \quad (18.29)$$

бўлади.

Энди

$$\int_c^d f(x, y) dy \quad (x \in [a, b])$$

интегралга 1-қисм, 9-боб, 11-§ даги (9.52) формулани — тўғри тўртбурчаклар формуласини татбиқ этиб, ушбу

$$\int_c^d f(x, y) dy \approx \frac{d-c}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x, y_{k+\frac{1}{2}}) \quad (x \in [a, b]) \quad (18.30)$$

тақрибий формулани ҳосил қиласиз. Сўнг

$$\int_a^b f(x, y_{k+\frac{1}{2}}) dx$$

интегралга яна ўша (9.53) формулани қўллаб, қуйидаги

$$\int_a^b f(x, y_{k+\frac{1}{2}}) dx \approx \frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}) \quad (18.31)$$

тақрибий формулага келамиз.

Натижада (18.29), (18.30) ва (18.31) муносабатлардан

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{nm} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}\right) \quad (18.32)$$

бўлиши келиб чиқади.

Бу икки каррали интегрални тақрибий ҳисоблаш формуласи, «тўғри тўртбурчаклар» формуласи деб аталади.

Шундай қилиб, «тўғри тўртбурчаклар» формуласида, икки каррали интеграл маҳсус тузилган йифинди билан алмаштирилади. Бу йифинди эса қуйидагича тузилади:

$(D) = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ – тўғри тўртбурчак nm та тенг

$(D_{ik}) = \{(x, y) \in R^2 : x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_k \leq y \leq y_{k+1}\}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, m-1; k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) тўғри тўртбурчакларга ажратилади. Бунда

$$x_i = a + i \frac{b-a}{m}, \quad y_k = c + k \frac{d-c}{n}.$$

Ҳар бир (D_{ik}) нинг маркази бўлган $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}})$ ($i = 0, 1, 2, \dots, m-1; k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) нуқтада $f(x, y)$ функцияниң қиймати

$f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}})$ ҳисобланаб, уни шу (D_{ik}) нинг юзига кўпайтирилади.

Сўнгра улар барча i ва k лар ($i=0, 1, 2, \dots, m-1; k=0, 1, 2, \dots, n-1$) бўйича йифилади.

Одатда, ҳар бир тақрибий формуланинг хатолиги топилади ёки баҳоланади. Келтирилган (18.32) тақрибий формуланинг хатолигини ҳам ўрганиш мумкин.

Мисол. Ушбу

$$\iint_{(D)} \frac{1}{(x+y+1)^2} dx dy$$

интегрални қарайлик, бунда $(D) = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Уни тақрибий ҳисоблаймиз. (D) ни ушбу тўртта тенг бўлакка бўламиш:

$$(D_{00}) = \left\{ (x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right\},$$

$$(D_{01}) = \left\{ (x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \right\},$$

$$(D_{10}) = \left\{ (x, y) \in R^2 : \frac{1}{2} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right\},$$

$$(D_{11}) = \left\{ (x, y) \in R^2 : \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \right\}.$$

Бу бўлакларнинг марказлари

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

нуқталарда

$$f(x, y) = \frac{1}{(1+x+y)^2}$$

функцияниң қийматларини ҳисоблаб, (18.32) формулага кўра

$$\iint_D \frac{1}{(1+x+y)^2} dx dy \approx 0,2761$$

бўлишини топамиз. Бу интегралнинг аниқ қиймати эса

$$\iint_D \frac{1}{(1+x+y)^2} dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{dx}{(1+x+y)^2} \right] dy = \ln \frac{4}{3} = 0,287682 \dots$$

бўлади.

9- §. Икки каррали интегралнинг баъзи бир татбиқлари

Ушбу параграфда икки каррали интегралнинг баъзи бир татбиқларини келтирамиз.

1. Жисмнинг ҳажми ва унинг икки каррали интеграл орқали ифодаланиши. R^3 фазода бирор чегараланган (V) жисмни қарайлик. Бу (V) жисмнинг ичига (A) кўпёқлар жойлашган, ўз навбатида (V) жисм эса (B) кўпёқлар ичига жойлашган бўлсин. (A) кўпёқлар ҳажмларини V_A билан, (B) кўпёқлар ҳажмларини V_B билан белгилайлик. Биз кўпёқларнинг ҳажмлари тушунчасини ва уни ҳисоблашни (худди текисликдаги кўпбуручакнинг юзи тушунчаси ва уни ҳисоблаш каби) биламиз деб оламиз. Натижада (V) жисмнинг ичига жойлашган кўпёқлар ҳажмларидан иборат $\{V_A\}$ тўплам, ичига (V) жисм жойлашган кўпёқлар ҳажмларидан иборат $\{V_B\}$ тўпламлар ҳосил бўлади. $\{V_A\}$ тўплам юқоридан, $\{V_B\}$ тўплам қўйидан чегараланганлиги сабабли $\{V_A\}$ тўплам аниқ юқори чегарага, $\{V_B\}$ тўплам эса аниқ қўйи чегарага эга бўлади:

$$\sup \{V_A\} = \underline{V}, \quad \inf \{V_B\} = \bar{V}.$$

Равшанки,

$$\underline{V} \leqslant \bar{V}.$$

18.8-таъриф. Агар $\underline{V} = \bar{V}$, яъни $\sup_A \{V_A\} = \inf \{V_B\}$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда (V) жисм ҳажмга эга деб аталади ва $V = \underline{V} = \bar{V}$ миқдор (V) жисмнинг ҳажми дейилади.

Демак,

$$V = \sup \{V_A\} = \inf \{V_B\}.$$

Энди (V) жисм сифатида юқоридан $z = f(x, y)$ сирт билан, ён томонларидан ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган цилиндрик сирт ҳамда пастдан Oxy текислигидаги (D) соҳа билан чегараланган жисмни қарайлик.

(D) ёпиқ соҳанинг P бўлинишини оламиз. $f(x, y)$ функция (D) да узлуксиз бўлганлиги сабабли, бу функция P бўлинишнинг ҳар бир (D_k) бўлагида ҳам узлуксиз бўлиб, унда

$$\inf_{(k=1, 2, \dots, n)} \{f(x, y) : (x, y) \in (D_k)\} = m_k, \quad \sup_{(k=1, 2, \dots, n)} \{f(x, y) : (x, y) \in (D_k)\} = M_k$$

Қуийдаги

$$V_A = \sum_{k=1}^n m_k D_k,$$

$$V_B = \sum_{k=1}^n M_k D_k$$

йигиндиларни тузамиз. Бу йигиндиларнинг биринчиси (V) жисм ичига жойлашган кўпёқнинг ҳажмини, иккинчиси эса (V) жисмни ўз ичига олган кўпёқнинг ҳажмини ифодалайди.

Равшанки, бу кўпёқлар, демак, уларнинг ҳажмлари ҳам $f(x, y)$ функцияга ҳамда (D) соҳанинг бўлинишига боғлиқ бўлади:

$$V_A = V_A^P(f), \quad V_B = V_B^P(f).$$

(D) соҳанинг турли бўлинишлари олинса, уларга нисбатан (V) жисмнинг ичига жойлашган ҳамда (V) жисмни ўз ичига олган турли кўпёқлар ясалади. Натижада бу кўпёқлар ҳажмларидан иборат қуийдаги

$$\{V_A^P(f)\}, \quad \{V_B^P(f)\}$$

тўпламлар ҳосил бўлади. Бунда $\{V_A^P(f)\}$ тўплам юқоридан, $\{V_B^P(f)\}$ тўплам эса қуийдан чегараланган бўлади. Демак, бу тўпламларнинг аниқ чегаралари

$$\sup \{V_A^P(f)\}, \quad \inf \{V_B^P(f)\}$$

мавжуд. Шартга кўра $f(x, y)$ функция (D) ёпиқ соҳада узлуксиз. У ҳолда Кантор теоремасининг натижасига асосан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{D}$ сонга кўра шундай $\delta > 0$ сон топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_D < \delta$ бўлган ҳар қандай бўлиниши P учун ҳар бир (D_k) да функциянинг тебраниши

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{D}$$

бўлади. Унда

$$\begin{aligned} \inf \{V_B^P(f)\} - \sup \{V_A^P(f)\} &\leq V_B^P(f) - V_A^P(f) = \\ &= \sum_{k=1}^n M_k D_k - \sum_{k=1}^n m_k D_k = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) D_k < \\ &< \frac{\varepsilon}{D} \sum_{k=1}^n D_k = \frac{\varepsilon}{D} D = \varepsilon. \end{aligned}$$

Демак, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай бўлиниши олингандা ҳам бу бўлинишга мос (V) жисмнинг ичига жойлашган ҳамда бу (V) ни ўз ичига олган кўпёк ҳажмлари учун ҳар доим

$$0 \leq \inf \{V_B^P(f)\} - \sup \{V_A^P(f)\} < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан эса

$$\inf \{V_B^P(f)\} = \sup \{V_A^P(f)\} \quad (18.33)$$

тенглик келиб чиқади. Бу тенглик (V) жисм ҳажмга эга бўлишини билдиради.

Энди юқорида ўрганилган $V_A^P(f)$, $V_B^P(f)$ йиғиндилярни Дарбу йиғиндилари билан таққослаб, $V_A^P(f)$ ҳам $V_B^P(f)$ йиғиндилар $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳада мос равишда Дарбунинг қуий ҳамда юқори йиғиндилари эканини топамиз. Шунинг учун ушбу

$$\sup \{V_A^P(f)\}, \inf \{V_B^P(f)\}$$

миқдорлар $f(x, y)$ функциянинг қуий ҳамда юқори икки каррали интеграллари бўлади, яъни

$$\sup \{V_A^P(f)\} = \iint_{(D)} f(x, y) dD, \inf \{V_B^P(f)\} = \overline{\iint}_{(D)} f(x, y) dD.$$

Юқоридаги (18.33) муносабатга кўра

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \overline{\iint}_{(D)} f(x, y) dD$$

тенглик ўринли экани кўринади. Демак,

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \iint_{(D)} f(x, y) dD = \overline{\iint}_{(D)} f(x, y) dD.$$

Шундай қилиб, бир томондан, қаралётган (V) жисм ҳажмга эга экани, иккинчи томондан, унинг ҳажми $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳа бўйича икки каррали интегралига тенг экани исбот этилди. Демак, (V) жисмнинг ҳажми учун ушбу

$$V = \iint_{(D)} f(x, y) dD \quad (18.34)$$

формула ўринли.

Мисол. Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

эллипсоиднинг ҳажми топилсин. Бу эллипсоид $z=0$ текисликка нисбатан симметрик дир. Юқори қисмини ($z \geq 0$) ўраб турган сирт

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

бўлади.

Юқоридаги (18.34) формулага күра эллипсоиднинг ҳажми V :

$$V = 2c \iint_{(D)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$$

бўлади, бунда

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

Интегралда

$$\begin{cases} x = a \rho \cos \varphi \\ y = b \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (18.35)$$

алмаштиришни бажарамиз. Бу системанинг якобиани

$$I(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & b \sin \varphi \\ -a \rho \sin \varphi & b \rho \sin \varphi \end{vmatrix} = ab \rho$$

бўлади. (18.35) система $(\Delta) = \{(\rho, \varphi) \in R^2 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ соҳани (D) соҳага акслантиради. (18.27) формулага кўра

$$\iint_{(D)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = \iint_{(\Delta)} \sqrt{1 - \rho^2} ab \rho d\rho d\varphi$$

бўлади. Демак,

$$\begin{aligned} V &= 2abc \iint_{(\Delta)} \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho d\varphi = 2abc \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho = \\ &= 4\pi abc \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho = \frac{4\pi}{3} abc. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, эллипсоиднинг ҳажми

$$V = \frac{4}{3}\pi abc$$

бўлади.

2. Ясси шаклнинг юзи. Ушбу бобнинг 1-§ ида (D) соҳанинг юзи қўйидаги

$$D = \iint_{(D)} dD = \iint_{(D)} dx dy$$

интегралга тенг бўлишини кўрдик. Демак, икки каррали интеграл ёрдамида ясси шаклнинг юзини хисоблаш мумкин экан.

Хусусан, соҳа

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

эгри чизиқли трапециядан иборат бўлса ($f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз), у ҳолда

$$D = \iint_{(D)} dx dy = \int_a^b \left[\int_0^{f(x)} dy \right] dx = \int_a^b f(x) dx$$

бўлиб, 1-қисм, 10-боб, 2-§ да топилган формулага келамиз.

Мисол. Ушбу

$$x = \frac{y^2 + a^2}{2a}, \quad x = \frac{y^2 + b^2}{2b} \quad (0 < a < b)$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин. Бу чизиқлар параболадан иборат (23-чизма). Қуйидаги

$$\left. \begin{aligned} x - \frac{y^2 + a^2}{2a} &= 0 \\ x - \frac{y^2 + b^2}{2b} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

системани ечиб, параболаларнинг кесишган нукталари

$$\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab} \right) \text{ and } \left(\frac{a+b}{2}, -\sqrt{ab} \right)$$

Эканини топамиз. Қаралаётган шакл Ox ўқига нисбатан симметрик бўлишини ётти-
борга олсак, у ҳолда (D) нинг юзи

$$D = 2 \iint_{(P_1)} dx \, dy$$

бүләди, бунда

$$(D_1) = \left\{ (x, y) \in R^2 : \frac{y^2 + a^2}{2a} \leq x \leq \frac{y^2 + b^2}{2b}, 0 < y \leq \sqrt{ab} \right\}.$$

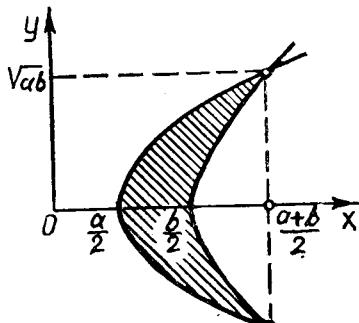
Интегрални ҳисоблаб, қуйидагини топамиз:

$$\iint_D dx dy = \int_0^{\sqrt{ab}} \left(\int_{\frac{y^2+a^2}{2a}}^{b^2} dx \right) dy =$$

$$= \int_0^{\sqrt{ab}} \left(\frac{y^2 + b^2}{2b} - \frac{y^2 + a^2}{2a} \right) dy = \frac{1}{3} (b-a) \sqrt{ab}.$$

Демак,

$$D = \iint_D dx dy = \frac{2}{3} (b-a) \sqrt{ab}.$$



22 - where

3. Сиртнинг юзи ва унинг икки каррали интеграл орқали ифодаланиши. Икки каррали интеграл ёрдамида сирт юзини хисоблаш мумкин. Аввало сиртнинг юзи тушун-часини келтирамиз.

Фараз қылайлык, $z = f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва узлуксиз бўлсин. Бу функцияning графиги 17-чизмада тасвирланган (S) сиртдан иборат бўлсин.

(D) соҳанинг P бўлинишини олайлик. Унинг бўлаклари (D_1) , (D_2) , ...

(D_n) бўлсин. Бу бўлинишнинг бўлувчи чизиқларини йўналтирувчилар сифатида қараб, улар орқали ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган цилиндрик сиртлар ўтказамиз. Равшанки, бу цилиндрик сиртлар (S) сиртни (S_1), (S_2), ..., (S_n) бўлакларга ажратади. Ҳар бир (D_k) ($k=1, 2, \dots, n$) да ихтиёрий (ξ_k, η_k) нуқта олиб, (S) сиртда унга мос нуқта (ξ_k, η_k, z_k) ($z_k = f(\xi_k, \eta_k)$) ни топамиз. Сўнг (S) сиртга шу (ξ_k, η_k, z_k) нуқтада уринма текислик ўтказамиз. Бу уринма текислик билан юқорида айтилган цилиндрик сиртнинг кесишишидан ҳосил бўлган уринма текислик қисмини (T_k) билан, унинг юзини эса T_k билан белгилайлик.

Геометриядан маълумки, (D_k) соҳа (T_k) нинг ортогонал проекцияси бўлиб,

$$D_k = T_k |\cos \gamma_k| \quad (18.36)$$

бўлади, бунда γ_k — (S) сиртга (ξ_k, η_k, z_k) ($z_k = f(\xi_k, \eta_k)$) нуқтада ўтказилган уринма текислик нормалининг Oz ўқи билан ташкил этган бурчак.

Равшанки, $\lambda_P \rightarrow 0$ да (S_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) нинг диаметри ҳам нолга интилади.

Агар $\lambda_P \rightarrow 0$ да

$$\sum_{k=1}^n T_k$$

йиғинди чекли лимитга эга бўлса, бу лимит (S) сиртнинг юзи деб аталади. Демак, (S) сиртнинг юзи

$$S = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n T_k \quad (18.37)$$

бўлади.

Юқорида қаралаётган $z = f(x, y)$ функция (D) соҳада $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар (D) соҳада узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\cos \gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(\xi_k, \eta_k) + f'^2_y(\xi_k, \eta_k)}}$$

бўлади.

(18.36) муносабатдан

$$T_k = \frac{1}{\cos \gamma_k} D_k$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\sum_{k=1}^n T_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos \gamma_k} D_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_k, \eta_k) + f'^2_y(\xi_k, \eta_k)} D_k. \quad (18.38)$$

Тенгликнинг ўнг томонидаги йиғинди

$$\sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}$$

функцияниң интеграл йиғиндиңдир (қаранг, 1-§). Бу функция (D) со-
ҳада узлуксиз, демак, интегралланувчи. Шунинг учун

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + f_x^2(\xi_k, \eta_k) + f_y^2(\xi_k, \eta_k)} \cdot D_k = \\ = \iint_{(D)} \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dD$$

бўлади.

Шундай қилиб, (18.37) ва (18.38) муносабатлардан

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dD \quad (18.39)$$

бўлиши келиб чиқади.

Мисол. Асосининг радиуси r , баландлиги h бўлган доиравий конуснинг ён сирти топилсин.

Бундай конус сиртининг тенгламаси

$$z = \frac{h}{r} \sqrt{x^2 + y^2}$$

бўлади. Юқоридаги (18.39) формулага кўра

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$$

бўлади, бунда

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

Энди

$$z'_x = \frac{h}{r} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{h}{r} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ва

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2} \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{h^2}{r^2} \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}}$$

эканини эътиборга олиб, қўйидагини топамиш:

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}} dx dy = \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}} \iint_{(D)} dx dy = \\ = \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}} \pi r^2 = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}.$$

10-§. Уч каррали интеграл

Юқорида Риман интеграли тушунчасининг икки ўзгарувчили функция учун қандай киритилишини кўрдик ва уни батафсил ўргандик. Худди шунга ўхшаш бу тушунча уч ўзгарувчили функция учун ҳам киритилади. Уни ўрганишда Риман интеграли ҳамда икки каррали ин-

тегралда юритилган барча мулоҳазалар (интеграллаш соҳасининг бўлинишини олиш, бўлакларда ихтиёрий нуқта танлаб олиб, интеграл йиғинди тузиш, тегишлича лимитга ўтиш ва ҳоказо) қайтарилади. Шуни эътиборга олиб, қўйида уч каррали интеграл ҳақидаги фактларни келтириши билан чегараланамиз.

1. Уч каррали интеграл таърифи. $f(x, y, z)$ функция R^3 фазодаги чегараланган (V) соҳада берилган бўлсин. (Бу ерда ва келгусида ҳамма вақт функцияning берилиш соҳаси (V) ни ҳажмга эга бўлган деб қараймиз.) (V) соҳанинг P бўлининини ва бу бўлинининг ҳар бир (V_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) бўлагида ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқтани олайлик. Сўнгра қўйидаги

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot V_k$$

йиғиндини тузамиз, бунда V_k — (V_k) нинг ҳажми.

Бу йиғинди $f(x, y, z)$ функцияning интеграл йиғиндиси ёки Риман йиғиндиси деб аталади.

Энди (V) соҳанинг шундай

$$P_1, P_2, \dots, P_m, \dots \quad (18.40)$$

бўлининшларини қараймизки, уларнинг диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \dots, \lambda_{P_m}, \dots$$

кетма-кетлик нолга интилсн: $\lambda_{P_m} \rightarrow 0$. Бундай P_m ($m = 1, 2, \dots$) бўлининшларга нисбатан $f(x, y, z)$ функцияning интеграл йиғиндисини тузамиз:

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot V_k.$$

Натижада қўйидаги

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$$

кетма-кетлик ҳосил бўлади. Бу кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқталарга боғлиқ.

18.9-таъриф. Агар (V) нинг ҳар қандай (18.40) бўлининшлар кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос интеграл йиғинди қийматларидан иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқталарни танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу I сон σ йиғиндининг лимити деб аталади ва у

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot V_k = I$$

каби белгиланади.

18.10-таъриф. Агар $\lambda_P \rightarrow 0$ да $f(x, y, z)$ функцияning интеграл йиғиндиси σ чекли лимитга эга бўлса, $f(x, y, z)$ функция (V) да интегралланувчи (Риман маъносида интегралланувчи) функция дейилади. Бу σ йиғиндининг чекли лимити I эса $f(x, y, z)$ функцияning (V)

бўйича уч каррали интегралли (*Риман интегралли*) дейилади ва у

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV$$

каби белгиланади. Демак,

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot V_k.$$

$f(x, y, z)$ функция (V) да $((V) \subset R^3)$ берилган бўлиб, у шу соҳада чегараланган бўлсин:

$$m \leq f(x, y, z) \leq M \quad (\forall (x, y, z) \in (V)).$$

(V) соҳанинг бўлинишлар тўплами $\{P\}$ нинг ҳар бир бўлинишига нисбатан $f(x, y, z)$ функциясининг Дарбу йиғиндилари

$$s_P(f) = \sum_{k=1}^n m_k V_k, \quad S_P(f) = \sum_{k=1}^n M_k V_k$$

ни тушиб, ушбу

$$\{s_P(f)\}; \{S_P(f)\}$$

тўпламларни қарайлик. Равшанки, бу тўпламлар чегараланган бўлади.

18.11-таъриф. $\{s_P(f)\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси $f(x, y, z)$ функциясининг қўйи уч каррали интегралли деб аталади ва у

$$\underline{I} = \underline{\iiint}_{(V)} f(x, y, z) dV$$

каби белгиланади.

$\{S_P(f)\}$ тўпламнинг аниқ қўйи чегараси $f(x, y, z)$ функциясининг юқори уч каррали интегралли деб аталади ва у

$$\overline{I} = \overline{\iiint}_{(V)} f(x, y, z) dV$$

каби белгиланади.

18.12-таъриф. Агар $f(x, y, z)$ функциясининг қўйи ҳамда юқори уч каррали интеграллари бир-бирига тенг бўлса, у ҳолда $f(x, y, z)$ функция (V) да интегралланувчи деб аталади ва уларнинг умумий қўймати

$$I = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \overline{\iiint}_{(V)} f(x, y, z) dV$$

$f(x, y, z)$ функциясининг уч каррали интегралли (*Риман интегралли*) дейилади.

Демак,

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \overline{\iiint}_{(V)} f(x, y, z) dV.$$

2. Уч каррали интегралнинг мавжудлиги. $f(x, y, z)$ функция (V) $((V) \subset R^3)$ соҳада берилган бўлсин.

18.10-төрөмдөр. $f(x, y, z)$ функция (V) соҳада интегралланувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ олингандай ҳам шундай $\delta > 0$ топилиб, (V) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлининишига нисбатан Дарбу йигиндилиари

$$S_P(f) - s_P(f) < \varepsilon$$

тенгизлизикни қаноатлантириши зарур ва етарли.

3. Интегралланувчи функциялар синфи. Уч каррали интегралнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, маълум синф функцияларининг интегралланувчи бўлиши кўрсатилади.

18.11-төрөмдөр. Агар $f(x, y, z)$ функция чегараланган ёпиқ (V) ($(V) \subset R^3$) соҳада берилган ва узлуксиз бўлса, у шу соҳада интегралланувчи бўлади.

18.12-төрөмдөр. Агар $f(x, y, z)$ функция (V) соҳада чегараланган ва бу соҳанинг чекли сондаги ноль ҳажмли сиртларида узилишига эга бўлиб, қолган барча нуқталарда узлуксиз бўлса, функция (V) да интегралланувчи бўлади.

4. Уч каррали интегралнинг хоссалари. Уч каррали интеграллар ҳам ушбу бобнинг 5-§ ида келтирилган икки каррали интегралнинг хоссалари каби хоссаларга эга.

1°. $f(x, y, z)$ функция (V) соҳада берилган бўлиб, (V) соҳа ноль ҳажмли (S) сирт билан (V_1) ва (V_2) соҳаларга ажратилган бўлсин. Агар $f(x, y, z)$ функция (V) да интегралланувчи бўлса, функция (V_1) ва (V_2) соҳаларда ҳам интегралланувчи бўлади, ва аксинча, яъни $f(x, y, z)$ функция (V_1) ва (V_2) соҳаларнинг ҳар бирида интегралланувчи бўлса, функция (V) да ҳам интегралланувчи бўлади. Бунда

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_{(V_1)} f(x, y, z) dV + \iiint_{(V_2)} f(x, y, z) dV$$

бўлади.

2°. Агар $f(x, y, z)$ функция (V) да интегралланувчи бўлса, у ҳолда $c \cdot f(x, y, z)$ ($c = \text{const}$) функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва ушбу

$$\iiint_V c f(x, y, z) dV = c \iiint_V f(x, y, z) dV$$

формула ўринли бўлади.

3°. Агар $f(x, y, z)$ ва $g(x, y, z)$ функциялар (V) да интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x, y, z) \pm g(x, y, z)$ функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва ушбу

$$\iiint_V [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)] dV = \iiint_V f(x, y, z) dV \pm \iiint_V g(x, y, z) dV$$

формула ўринли бўлади.

4°. Агар $f(x, y, z)$ функция (V) да интегралланувчи бўлиб, $\forall (x, y, z) \in (V)$ учун $f(x, y, z) \geq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\iiint_V f(x, y, z) dV \geq 0$$

бўлади.

5°. Агар $f(x, y, z)$ функция (V) да интегралланувчи бўлса, у ҳолда $|f(x, y, z)|$ функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва

$$\left| \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV \right| \leq \iiint_{(V)} |f(x, y, z)| dV$$

бўлади.

6°. Агар $f(x, y, z)$ функция (V) да интегралланувчи бўлса, у ҳолда ўзгармас μ ($m \leq \mu \leq M$) сон мавжудки,

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \mu \cdot V$$

бўлади, бунда $V = (V)$ соҳанинг ҳажми.

7°. Агар $f(x, y, z)$ функция ёпиқ (V) соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу соҳада ўзандай $(a, b, c) \in (V)$ нуқта топиладики,

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = f(a, b, c) \cdot V$$

бўлади.

5. Уч каррали интегралларни ҳисоблаш. $f(x, y, z)$ функция (V) = $\{(x, y, z) \in R^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq l\}$ соҳада (параллелепипедда) берилган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_e^l f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx$$

бўлади.

Энди (V) ($(V) \subset R^3$) соҳа — пастдан $z = \psi_1(x, y)$, юқоридан $z = \psi_2(x, y)$ сиртлар билан, ён томондан эса Oz ўқига параллел цилиндрик сирт билан чегараланган соҳа бўлсин. Бу соҳанинг Oxy текисликдаги проекцияси эса (D) бўлсин.

Агар $f(x, y, z)$ функция ўзандай (V) соҳада узлуксиз бўлиб, $z = \psi_1(x, y)$, $z = \psi_2(x, y)$ функциялар (D) да узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iint_{(D)} \left(\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

бўлади. Агар юқоридаги ҳолда (D) = $\{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ бўлиб, $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функциялар $[a, b]$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx.$$

6. Уч каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш иш. Уч каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш, ушбу бобнинг 7-§ да келтирилган икки каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш кабидир. Шуни ҳисобга олиб, қуйида уч каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш формуласини келтириш билан кифояланамиз.

$f(x, y, z)$ функция (V) ($(V) \subset R^3$) соҳада берилган ва узлуксиз бўлсин, (V) соҳа эса силлиқ ёки бўлакли-силлиқ сиртлар билан чегараланган бўлсин.

Ушбу

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v, w), \\ y &= \psi(u, v, w), \\ z &= \chi(u, v, w), \end{aligned}$$

система (Δ) ($(\Delta) \subset R^3$) соҳани (V) соҳага акслантирун ва бу акслантириш 7- § да келтирилган $1^\circ - 3^\circ$ - шартларни бажарсинг. У ҳолда

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_{(\Delta)} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) |I| du dv dw$$

бўлади, бунда

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

7. Уч каррали интегралнинг баъзи бир татбиқлари. Уч каррали интеграл ёрдамида R^3 фазодаги жисмнинг ҳажмини, жисмнинг массасини, инерция моментларини топиш мумкин.

19-БЮЛ ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

Юқоридаги бобда Риман интегрални тушунчасини икки ўзгарувчили функция учун қандай киритилишини кўрдик ва уни ўргандик. Шуни ҳам айтиш керакки, кўп ўзгарувчили функциялар учун интеграл тушунчаси турлича киритилиши мумкин. Биз қўйида келтирадиган эгри чизиқли интеграллар ҳам конкрет амалий масалалардан пайдо бўлгандир.

1-§. Биринчи тур эгри чизиқли интеграллар

1. Биринчи тур эгри чизиқли интеграл таърифи.

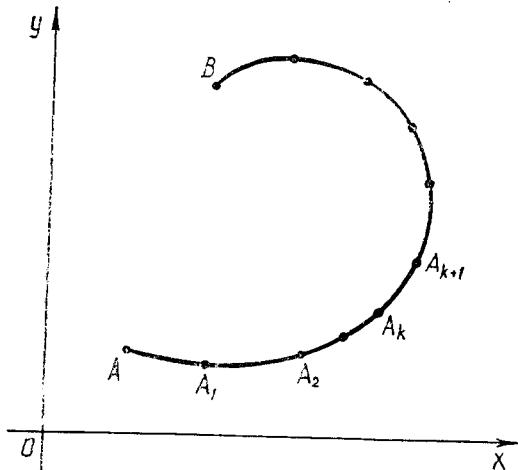
Текисликда бирор содда \overrightarrow{AB}^* ($A = (a_1, a_2) \in R^2$, $B = (b_1, b_2) \in R^2$) эгри чизиқни (ёйни) олайлик. Бу эгри чизиқда икки йўналишдан бирини мусбат йўналиш, иккинчисини манфий йўналиш деб қабул қиласлик (24-чиизма).

*Айтайлик, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ функцияларнинг ҳар бири (α, β) да берилган бўлсин. Бу функциялар (α, β) да $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ ҳосилаларга эга ва улар узлуксиз бўлиб, $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$ бўлсин.

R^2 текисликдаги ушбу

$$L = \{(x, y) \in R^2: x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in (\alpha, \beta)\}$$

тўплам содда эгри чизиқ деб аталади. Содда эгри чизиқ узунликка эга бўлади.



\overline{AB} эгри чизиқни A дан B га қараб $A_0 = A$, A_1 , A_2 , ..., $A_n = B$ ($A_k = (x_k, y_k) \in \overline{AB}$, $k = 0, 1, \dots, n$, $A_0 = (x_0, y_0) = (a_1, a_2)$, $A_n = (x_n, y_n) = (b_1, b_2)$) нүқталар ёрдамида n та бўлакка бўламиз. Бу A_0, A_1, \dots, A_n нүқталар системаси \overline{AB} ёйининг бўлиниши деб аталади ва у

$$P = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$$

24- чизма

каби белгиланади. $\overline{A_k A_{k+1}}$ ёй (бўлиниш ёйлари) узунликлари Δs_k ($k = 0, 1, \dots, n$) нинг энг каттаси P бўлишнинг диаметри дейилади ва у λ_P билан белгиланади:

$$\lambda_P = \max_k \{\Delta s_k\}.$$

Равшанки, \overline{AB} эгри чизиқни турли усуллар билан исталган сонда бўлинишларини тузиш мумкин.

\overline{AB} эгри чизиқда $f(x, y)$ функция берилган бўлсин. Бу эгри чизиқнинг

$$P = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$$

бўлинишини ва унинг ҳар бир $\overline{A_k A_{k+1}}$ ёйида ихтиёрий $Q_k = (\xi_k, \eta_k)$ ($Q_k = (\xi_k, \eta_k) \in \overline{A_k A_{k+1}}$, $k = 0, 1, \dots, n$) нүқта оламиз. Берилган функциянинг $Q_k = (\xi_k, \eta_k)$ нүқтадаги $f(\xi_k, \eta_k)$ қийматини $\overline{A_k A_{k+1}}$ нинг Δs_k узунлигига кўпайтириб қўйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta s_k. \quad (19.1)$$

Энди \overline{AB} эгри чизиқнинг шундай

$$P_1, P_2, \dots, P_m, \dots \quad (19.2)$$

бўлинишлари кетма-кетлигини қараймизки, уларнинг мос диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \dots, \lambda_{P_m}, \dots$$

кетма-кетлик нолга интилсан: $\lambda_{P_m} \rightarrow 0$. Бундай бўлинишларга нисбатан (19.1) каби йиғиндиларни тузиб, ушбу

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$$

кетма-кетликни ҳосил қиласыз. Равшанки, бу кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади $Q_k = (\xi_k, \eta_k)$ нүкталарга боғлиқ.

19.1-тағыриф. Агар \overline{AB} әгри чизиқнинг ҳар қандай (19.2) күришишдеги бўлинишлари кетма-кетлиги $\{\bar{P}_m\}$ олинганда ҳам, унга мос йиғиндиардан иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик (ξ_k, η_k) нүкталарнинг танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу сон σ йиғиндининг лимити деб аталади ва

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta s_k = I \quad (19.3)$$

каби белгиланади.

(19.1) йиғиндининг лимитини қўйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

19.2-тағыриф. Агар $\forall \epsilon > 0$ сони олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ тоғилсаки, \overline{AB} әгри чизиқнинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиниши учун тузилган σ йиғинди ихтиёрий $(\xi_k, \eta_k) \in \overline{A_k A_{k+1}}$ нүкталарда

$$|\sigma - I| < \epsilon$$

тengsизликни бажарса, I сон σ йиғиндининг $\lambda_P \rightarrow 0$ даги лимити деб аталади ва (19.3) каби белгиланади.

(19.1) йиғинди лимитининг бу таърифлари эквивалент таърифлардир.

19.3-тағыриф. Агар $\lambda_P \rightarrow 0$ да σ йиғинди чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция \overline{AB} әгри чизиқ бўйича интегралланувчи деийлади. Бу лимит $f(x, y)$ функциянинг әгри чизиқ бўйича биринчи тур әгри чизиқли интеграл деб аталади ва у

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dS$$

каби белгиланади.

Шундай қилиб, киритилган әгри чизиқли интеграл тушунчасининг ўзига хослиги қаралаётган икки аргументли функциянинг берилиш соҳаси текисликдаги бирор \overline{AB} әгри чизиқ эканлигидир. Қолган бошқа мулоҳазалар (бўлинишларининг олиниши, бўлаклардан ихтиёрий нүкта танлаб интеграл йиғинди тузиш, тегишлича лимитга ўтиш) юқорида киритилган интеграл тушунчалари сингаридир.

2. Узлуксиз функция биринчи тур әгри чизиқли интеграл. Энди биринчи тур әгри чизиқли интегралнинг мавжуд бўлишини таъминлайдиган шартни топиш билан шуғулланамиз. Юқорида келтирилган 19.3-тағырифдан кўринадики, биринчи тур әгри чизиқли интеграл \overline{AB} әгри чизиқка ҳамда унда берилган $f(x, y)$ функцияга боғлиқ бўлади. Демак, интегралнинг мавжуд бўлиши шартини \overline{AB} әгри чизиқ ҳамда $f(x, y)$ функцияга қўйиладиган шартлар орқали топиш ке рак бўлади.

Фараз қилайлик, \overline{AB} әгри чизиқ ушбу

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \quad (0 \leq s \leq S) \quad (19.4)$$

система билан берилган бўлсин. Бунда $s - \overline{AQ}$ ёйининг узунлиги ($Q = (x, y) \in \overline{AB}$), S эса \overline{AB} нинг узунлиги. $f(x, y)$ функция шу \overline{AB} әгри чизиқда берилган бўлсин. Модомни, $x = x(s)$, $y = y(s)$ ($0 \leq s \leq S$) экан, унда $f(x, y) = f(x(s), y(s))$ бўлиб, натижада ушбу

$$f(x(s), y(s)) = F(s) \quad (0 \leq s \leq S)$$

мураккаб функцияга эга бўламиз.

\overline{AB} әгри чизиқнинг $P = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ бўлинишини ва ҳар бир $\overline{A_k A_{k+1}}$ да ихтиёрий $Q_k = (\xi_k, \eta_k)$ нуқтани олайлик. Ҳар бир A_k нуқтага мос келадиган \overline{AA}_k нинг узунлиги s_k , ҳар бир Q_k нуқтага мос келадиган \overline{AQ}_k нинг узунлиги s_k^* дейлик. Равшанки, $\overline{A_k A_{k+1}}$ нинг узунлиги $s_{k+1} - s_k = \Delta s_k$ бўлади.

Натижада P бўлинишга нисбатан тузилган

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta s_k$$

йифинди ушбу

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta s_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(x(s_k^*), y(s_k^*)) \cdot \Delta s_k = \sum_{k=0}^{n-1} F(s_k^*) \cdot \Delta s_k$$

кўринишга келади. Демак,

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} F(s_k^*) \cdot \Delta s_k. \quad (19.5)$$

Бу йифиндини $[0, S]$ оралиқдаги $F(s)$ функциянинг интеграл йифиндици (Риман йифиндиси) эканлигини пайқаш қийин эмас (қаралсин, 1-қисм, 9-боб, 1-§).

Агар $f(x, y)$ функция \overline{AB} әгри чизиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда $F(s)$ функция $[0, S]$ да узлуксиз бўлади. Демак, бу ҳолда $F(s)$ функция $[0, S]$ да интегралланувчи:

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(s_k^*) \cdot \Delta s_k = \int_0^S F(s) ds. \quad (19.6)$$

Шундай қилиб, (19.5), (19.6) муносабатлардан $\lambda_P \rightarrow 0$ да σ йифиндининг лимити мавжуд бўлиши ва

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \int_0^S F(s) ds$$

еканлигини топамиз. Натижада қўйидаги теоремага келамиз.

19. 1-теорема. Агар $f(x, y)$ функция \overline{AB} эгри чизиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг \overline{AB} эгри чизиқ бўйича биринчи тур эгри чизиқли интеграли мавжуд бўлади ва

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) ds = \int_0^s f(x(s), y(s)) ds$$

бўлади.

Бу теорема, бир томондан узлуксиз функция биринчи тур эгри чизиқли интегралининг мавжудлигини аниқлаб берса, иккинчи томондан бу интегралнинг аниқ интегралга (Риман интегралига) келишини кўрсатади.

19.1-эслатма. Эгри чизиқли интеграл тушунчаси билан Риман интеграли тушунчасини солиштириб, уларнинг ҳар иккаласи йиғиндинг лимити сифатида таърифланишини кўрдик. Айни пайтда бу тушунчаларнинг фарқли томони ҳам бор. Ушбу

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta s_k \quad (19.5)$$

йиғиндидаги Δs_k ҳар доим мусбат бўлиб, \overline{AB} эгри чизиқнинг йўналишига боғлиқ эмас. Демак,

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) ds = \int_{\overline{BA}} f(x, y) ds.$$

3. Биринчи тур эгри чизиқли интегралларнинг хоссалари. Юқорида кўрдикки, узлуксиз функцияларнинг биринчи тур эгри чизиқли интеграллари Риман интегралларига келади. Бинобарин, эгри чизиқли интеграллар ҳам Риман интеграллари хоссалари каби хоссаларга эга бўлади. Шуни эътиборга олиб, эгри чизиқли интегралларнинг асосий хоссаларини санаб ўтиш билан кифояланамиз.

(19.4) система билан аниқланган \overline{AB} эгри чизиқда $f(x, y)$ функция берилган ва узлуксиз.

1°. Агар $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ бўлса, у ҳолда

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) ds = \int_{\overline{AC}} f(x, y) ds + \int_{\overline{CB}} f(x, y) ds$$

бўлади.

2°. Ушбу

$$\int_{\overline{AB}} c f(x, y) ds = c \int_{\overline{AB}} f(x, y) ds \quad (c=)-\text{const}$$

тенглик ўринли.

\overline{AB} эгри чизиқда $f(x, y)$ функция билан $g(x, y)$ функция ҳам берилган ва у узлуксиз бўлсин.

3°. Қўйидаги

$$\int_{\overline{AB}} [f(x, y) \pm g(x, y)] ds = \int_{\overline{AB}} f(x, y) ds \pm \int_{\overline{AB}} g(x, y) ds$$

формула ўринли бўлади.

4°. Агар $\forall (x,y) \in \overline{AB}$ да $f(x, y) \geq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) ds \geq 0$$

бўлади.

5°. $|f(x, y)|$ функция шу \overline{AB} да интегралланувчи ва

$$\left| \int_{\overline{AB}} f(x, y) ds \right| \leq \int_{\overline{AB}} |f(x, y)| ds$$

бўлади.

6°. Шундай $(c_1, c_2) \in \overline{AB}$ нуқта топиладики,

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) ds = f(c_1, c_2) \cdot S$$

бўлади, бунда $S = \overline{AB}$ нинг узунлиги.

Бу 6°-хосса ўрта қиймат ҳақидағи теорема деб аталади.

4. Биринчи тур эгри чизиқли интегралларни ҳисоблаш. Биринчи тур эгри чизиқли интеграллар, ассан Риман интегралларига келтирилиб ҳисобланади. Юқорида келтирилган 19.1- теоремага кўра \overline{AB} эгри чизиқ ушбу

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \quad (0 \leq s \leq S)$$

система билан берилганда (бунда s —ёй узунлиги)га $f(x, y)$ функция шу \overline{AB} да узлуксиз бўлганда этри чизиқли интеграл Риман интегралига келди. Демак, бу Риман интегралини ҳисоблаш натижасида этри чизиқли интеграл топилади.

Энди \overline{AB} эгри чизиқ ушбу

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (19.7)$$

система билан (параметрик формада) берилган бўлсин. Бунда $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ ҳосилаларга эга ва бу ҳосилалар шу оралиқда узлуксиз ҳамда $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = A$ ва $(\varphi(\beta), \psi(\beta)) = B$ бўлсин.

Равшанки, (19.7) система $[\alpha, \beta]$ оралиқни \overline{AB} эгри чизиқка акслантиради. Бунда $[\gamma, \delta] \subset [\alpha, \beta]$ нинг \overline{AB} чизиқлаги $\overline{A_\gamma A_\delta}$ аксининг узунлиги

$$\int_{\gamma}^{\delta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

бўлади (қаралсин, 1- қисм, 10- боб, 1- §).

19.2-теорема. Агар $f(x, y)$ функция \overline{AB} да берилган ва узлук-сиз бўйса, у ҳолда

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (19.8)$$

бўлади.

Исбот. $[\alpha, \beta]$ оралиқнинг

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \quad (\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta)$$

бўлинишини олайлик. Бу бўлинишнинг бўлувчи нуқталари t_k ($k = 0, 1, \dots, n$) нинг \overline{AB} даги мос аксларини A_k ($k = 0, 1, \dots, n$), дейлик. Равшанки, бу A_k ($k = 0, 1, \dots, n$) нуқталар \overline{AB} эгри чизикнинг

$$\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$$

бўлинишини ҳосил қиласди. Бунда $A_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k))$ ($k = 0, 1, \dots, n$), ва $\overline{A_k A_{k+1}}$ нинг узунлиги

$$\Delta s_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

бўлади. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$\Delta s_k = \sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\tau_k)} \cdot (t_{k+1} - t_k) = \sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\tau_k)} \cdot \Delta t_k,$$

бунда $t_k < \tau_k < t_{k+1}$. Энди $\varphi(\tau_k) = \xi_k$, $\psi(\tau_k) = \eta_k$ деб оламиз. Равшанки, $(\xi_k, \eta_k) \in A_k A_{k+1}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) бўлади. \overline{AB} эгри чизикнинг юқорида айтилган

$$\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$$

бўлинишини ва ҳар бир $\overline{A_k A_{k+1}}$ да (ξ_k, η_k) нуқтани олиб,

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta s_k$$

йиғиндини тузамиз. Уни қўйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\tau_k)} \Delta t_k. \end{aligned} \quad (19.8)$$

Бу тенглиқнинг ўнг томонидаги йиғинди $f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ функцияниң $[\alpha, \beta]$ оралиқдаги Риман йиғиндисидир.

Шартга кўра $f(x, y)$ яв^т $\varphi'(t), \psi'(t)$ функциялар узлуксиз. Демак, мураккаб функцияниң узлуқсизлигі ҳақидаги теоремага кўра $f(\varphi(t), \psi(t))$ ва демак, $f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз. Демак, бу функция $[\alpha, \beta]$ да интегралланувчи бўлади. Яъни

$$\lim_{\max\{\Delta t_k\} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\tau_k)} \Delta t_k = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

Модомики, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз экан, унда $\max_k \{\Delta t_k\} \rightarrow 0$ да $\Delta x_k \rightarrow 0$, $\Delta y_k \rightarrow 0$ ва демак, $\Delta s_k \rightarrow 0$. Бундан эса $\lambda_P \rightarrow 0$ бўлиши келиб чиқади. (19.8) муносабатдан фойдаланиб

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

Бўлишини топамиз. Бу эса

$$\intop_{AB} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Бу теоремадан қўйидаги натижалар келиб чиқади.

19. 1-натижада. \overbrace{AB} эгри чизиқ ушбу

$$y = y(x) (a \leq x \leq b, y(a) = A, y(b) = B)$$

тenglама билан аниқланган бўлиб, $y(x)$ функция $[a, b]$ да ҳосилага эга ва у узлуксиз бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция шу \overbrace{AB} да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\intop_{AB} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \quad (19.9)$$

бўлади.

19.2-натижада. \overbrace{AB} эгри чизиқ ушбу

$$\rho = \rho(\theta) (0_0 \leq \theta \leq \theta_1)$$

тenglама билан (қутб координата системасида) берилган бўлиб, $\rho(\theta)$ функция $[\theta_0, \theta_1]$ да ҳосилага эга ва у узлуксиз бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция шу \overbrace{AB} да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\intop_{AB} f(x, y) ds = \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta \quad (19.10)$$

бўлади.

Бу натижаларни исботлашни ўқувчига ҳавола этамиз.

Мисол. Ушбу

$$\int_{\overbrace{AB}} \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$$

эгри чизиқли интеграл ҳисобланснин, бунда \overbrace{AB} — маркази координата бошида, радиуси $r > 0$ га тенг берилган айлананинг юқори ярим текисликдаги қисми.

Равшанки, бу \overbrace{AB} эгри чизиқ қүйидаги

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{array} \right\} (0 \leq t \leq \pi)$$

система билан аниқланади. \overbrace{AB} да $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(r \cos t)^2 + (r \sin t)^2}$ функция узлуксиз. Демак,

$$\begin{aligned} \int_{\overbrace{AB}} \sqrt{x^2 + y^2} \, ds &= \int_0^\pi \sqrt{(r \cos t)^2 + (r \sin t)^2} \cdot \sqrt{(r \cos t)'^2 + (r \sin t)'^2} \, dt = \\ &= r^2 \int_0^\pi dt = \pi r^2 \end{aligned}$$

бўлади.

5. Биринчи тур эгри чизиқли интегралларнинг баъзи бир татбиқлари. Биринчи тур эгри чизиқли интеграллар ёрдамида ёй узунлигини, жисмнинг массасини, оғирлик марказларини топиш мумкин. Қўйида биз биринчи тур эгри чизиқли интеграллар ёрдамида ёй узунлиги қандай ҳисобланишини кўрсагамиз.

Текисликда содда \overbrace{AB} эгри чизиқ берилган бўлсин. Бу чизиқда $f(x, y) = 1$ функцияни қарайлик. Равшанки, бу функция \overbrace{AB} да узлуксиз. $f(x, y)$ функциянинг биринчи тур эгри чизиқли интеграли таърифидан қўйидагини топамиз:

$$\int_{\overbrace{AB}} f(x, y) \, ds = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta s_k = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta s_k = S.$$

Демак,

$$S = \int_{\overbrace{AB}} ds. \quad (*)$$

Мисол. Ушбу

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t) = a \cos^3 t \\ y = y(t) = a \sin^3 t \end{array} \right\}$$

система билан берилган \overbrace{AB} чизиқнинг узунлиги топилсин. Бу чизиқ астрондани ифодалайди.

(*) формулага кўра астроиданинг узунлиги

$$S = \int_{\overbrace{AB}} ds$$

Бұлади. Астронда координата ўқларига нисбатан симметрик бўлишини эътиборга олиб, юқорида келтирилган (19.8) формуладан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \int_{AB} ds &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a \cos^2 t \cdot \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{9a^2}{4} \sin^2 2t} dt = 6a \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = 6a \left(-\frac{\cos 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = 6a. \end{aligned}$$

2- §. Иккинчи тур әгри чизиқли интеграллар

1. Иккинчи тур әгри чизиқли интеграл таърифи. Текисликда бирор содда \overline{AB} әгри чизиқни қарайлик. Бу әгри чизиқда $f(x, y)$ функция берилған бўлсин. \overline{AB} әгри чизиқнинг

$$P = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$$

бўлинишини ва унинг ҳар бир $\overline{A_k A_{k+1}}$ ($k = 0, 1, \dots, n - 1$) ёйида ихтиёрий $Q_k = (\xi_k, \eta_k)$ нүктаны ($Q_k = (\xi_k, \eta_k) \in \overline{A_k A_{k+1}}$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$) олайлик. Берилған функциянинг $Q_k = (\xi_k, \eta_k)$ нүктадаги $f(\xi_k, \eta_k)$ қийматини $\overline{A_k A_{k+1}}$ нинг Ox (Oy) ўқдаги Δx_k (Δy_k) проекциясига кўпайтириб қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k \quad (\sigma'' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta y_k). \quad (19.11)$$

Энди \overline{AB} әгри чизиқнинг шундай

$$P_1, P_2, \dots, P_m, \dots \quad (19.12)$$

бўлинишлари кетма-кетлигини қараймизки, уларнинг диаметларидан ташкил топган мос

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \dots, \lambda_{P_m}, \dots$$

кетма-кетлик нолга интилсин:

$$\lambda_{P_m} \rightarrow 0.$$

Бундай бўлинишларга нисбатан (19.11) каби йиғиндиларни тузиб ушбу

$$\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_m, \dots \quad (\sigma''_1, \sigma''_2, \dots, \sigma''_m, \dots)$$

кетма-кетликни ҳосил қиласиз. Равшанки, бу кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади, хусусан, (ξ_k, η_k) нүкталарга ҳам боғлиқ.

19.4-таъриф. Агар \overline{AB} әгри чизиқнинг ҳар қандай (19.12) кўришишдаги бўлинишлари кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос йиғиндилардан иборат $\{\sigma'_m\}$ ($\{\sigma''_m\}$) кетма-кетлик (ξ_k, η_k) нүкталарнинг $((\xi_k, \eta_k) \in \overline{A_k A_{k+1}})$ танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган равишда ҳамма

вакт битта I' сонга (I'' сонга) интилса, бу сон σ' (σ'') йиғиндининг лимити деб аталади ва

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma' = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k = I'$$

$$(\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma'' = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta y_k = I'') \quad (19.13)$$

каби белгиланади.

σ' (σ'') йиғиндининг бу лимитини қуийдагича ҳам таърифлаш мумкин.

19.5-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилсаки, \overline{AB} әгри чизиқнинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиниши учун тузилган σ' (σ'') йиғинди учун ихтиёрий (ξ_k, η_k) нуқталарда, $((\xi_k, \eta_k) \in \overline{A_k A_{k+1}}, k = 0, 1, \dots, n - 1)$

$$|\sigma' - I'| < \varepsilon \quad (|\sigma'' - I''| < \varepsilon)$$

тенгсизлик бажарилса, I' сон (I'' сон) σ' (σ'') йиғиндининг (σ' (σ'') йиғиндининг) $\lambda_P \rightarrow 0$ даги лимити деб аталади ва (19.13) каби белгиланади.

Йиғинди лимитининг бу таърифлари эквивалент таърифлардир.

19.6-таъриф. Агар $\lambda_P \rightarrow 0$ да σ' йиғинди (σ'' йиғинди) чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция \overline{AB} әгри чизиқ бўйича интегралланувчи дейилади. Бу лимит $f(x, y)$ функциянинг \overline{AB} әгри чизиқ бўйича иккинчи тур әгри чизиқли интеграл деб аталади ва у

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx \quad (\int_{\overline{AB}} f(x, y) dy)$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma' = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k,$$

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dy = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma'' = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta y_k.$$

Шундай қилиб, \overline{AB} әгри чизиқда берилган $f(x, y)$ функциядан иккита— Ox ўқидаги проекциялар воситасида ва Oy ўқидаги проекциялар воситасида олинган иккинчи тур әгри чизиқли интеграл тушунчалари киритилди.

Фараз қиласли, \overline{AB} әгри чизиқда иккита $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар берилган бўлиб, $\int_{\overline{AB}} P(x, y) dx$, $\int_{\overline{AB}} Q(x, y) dy$ лар эса уларнинг ик-

кинчи тур әгри чизиқли интеграллари бўлсин. Ушбу

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y) dx + \int_{\overline{AB}} Q(x, y) dy$$

йиғинди иккінчи тур әгри чизиқли интегралнинг умумий күриниши деб аталади ва

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

жаби ёзилади. Демак,

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\overline{AB}} P(x, y) dx + \int_{\overline{AB}} Q(x, y) dy.$$

Иккінчи тур әгри чизиқли интеграл таърифидан қойыдаги натижалар келиб чиқади.

19. З-натижа. Иккінчи тур әгри чизиқли интеграл әгри чизиқнинг йұналишига бөлек бұлади.

Шуны исботтайлык.

Маълумки \overline{AB} әгри чизиқда иккита йұналиш (A нүктадан B нүктеге таңда B нүктадан A нүктеге) олиш мүмкін ($\overline{AB}, \overline{BA}; A \neq B$).

\overline{AB} әгри чизиқнинг юқоридаги P бўлинишини олиб, бу бўлинишга нисбатан (19.11) йиғиндини тузамиз:

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k \quad (\Delta x_k = x_{k+1} - x_k).$$

Айтайлик, $\lambda_P \rightarrow 0$ да бу йиғинди чекли лимитта эга бўлсин. Демак,

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k = \int_{\overline{AB}} f(x, y) dx. \quad (19.14)$$

Энди \overline{AB} нинг ўша P бўлинишини ҳамда ҳар бир $\overline{A_k A_{k+1}}$ даги ўша (ξ_k, η_k) нүкталарни олиб, \overline{AB} әгри чизиқнинг йұналишини эса B дан A га қараб деб ушбу йиғиндини тузамиз:

$$\bar{\sigma}' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot (x_k - x_{k+1}).$$

$\lambda_P \rightarrow 0$ да бу йиғинди чекли лимитта эга бўлса, у таърифга биноан ушбу

$$\int_{\overline{BA}} f(x, y) dx$$

интеграл бўлади:

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \bar{\sigma}' = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot (x_k - x_{k+1}) = \int_{\overline{BA}} f(x, y) dx.$$

Агар

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k = - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot (x_k - x_{k+1}) = - \bar{\sigma}'$$

Эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда $\lambda_p \rightarrow 0$ да $\sigma' = -\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \bar{\sigma}'$ йиғиндининг чекли лимитга эга бўлишидан $\bar{\sigma}'$ йиғиндининг ҳам чекли лимитга эга бўлиши ва

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \bar{\sigma}' = -\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma'$$

тenglikning бажарилишини топамиз. Демак,

$$\int_{BA} f(x, y) dx = - \int_{AB} f(x, y) dx.$$

Худди шунга ўхшаш

$$\int_{BA} f(x, y) dy = - \int_{AB} f(x, y) dy$$

бўлади.

19.4-натижада \overline{AB} эгри чизик Ox ўқига (Oy ўқига) перпендикуляр бўлган тўғри чизик кесмасидан иборат бўлсин. $f(x, y)$ функция шу чизикда берилган бўлсин.

У ҳолда

$$\int_{AB} f(x, y) dx \quad \left(\int_{AB} f(x, y) dy \right)$$

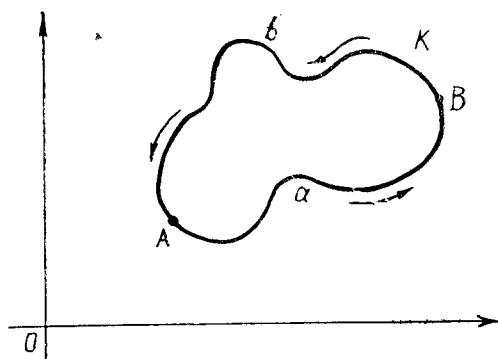
мавжуд бўлади ва

$$\int_{AB} f(x, y) dx = 0 \quad \left(\int_{AB} f(x, y) dy = 0 \right).$$

Бу tenglik бевосита иккинчи тур эгри чизиқли интеграл таърифидан келиб чиқади.

Энди \overline{AB} — содда ёпиқ эгри чизик бўлсин, яъни A ва B нуқталар устма-уст тушсин. Бу ёпиқ чизиқни K деб белгилайлик. Бу содда ёпиқ чизиқда ҳам икки йўналиш бўлади. Уларнинг бирини мусбат йўналиш, иккинчисини манғий йўналиш деб қабул қиласайлик. Шундай йўналиши мусбат деб қабул қиласаизки, кузатувчи ёпиқ чизик бўйлаб ҳаракат қиласанди, ёпиқ чизик билан чегараланган соҳа унга нисбатан ҳар доим чап томонда ётсин.

Фараз қиласайлик, K содда ёпиқ чизиқда $f(x, y)$ функция берилган бўлсин. Бу K чизиқда ихтиёрий иккита турли нуқталарни олиб, уларни A ва B билан белгилайлик. Натижада K ёпиқ чизик иккита \overline{AaB} ва \overline{BbA} чизиқларга ажралади (25-чизма).



25-чизма

Ушбу

$$\int_{\overbrace{AaB}} f(x, y) dx + \int_{\overbrace{BbA}} f(x, y) dx$$

интеграл (агар у мавжуд бўлса) $f(x, y)$ функциянинг K ёпиқ чизиқ бўйича иккинчи тур эгри чизиқли интегрални деб аталади ва

$$\int_K f(x, y) dx \text{ ёки } \int_K f(x, y) dx$$

каби белгиланади. Бунда K ёпиқ чизиқнинг мусбат йўналиши олинган. (Бундан буён ёпиқ чизиқ бўйича олинган интегралларда, ёпиқ чизиқ мусбат йўналишида деб қараймиз.) Демак,

$$\int_K f(x, y) dx = \int_{\overbrace{AaB}} f(x, y) dx + \int_{\overbrace{BbA}} f(x, y) dx.$$

Худди шунга ўхшаш

$$\int_K f(x, y) dy$$

ҳамда, умумий ҳолда

$$\int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

интеграллар таърифланади.

\overbrace{AB} фазовий эгри чизиқ бўлиб, бу чизиқда $f(x, y, z)$ функция берилган бўлсин. Юқоридагидек, $f(x, y, z)$ функциянинг \overbrace{AB} эгри чизиқ бўйича иккинчи тур эгри чизиқли интеграллари таърифланади ва улар

$$\int_{\overbrace{AB}} f(x, y, z) dx, \int_{\overbrace{AB}} f(x, y, z) dy, \int_{\overbrace{AB}} f(x, y, z) dz$$

каби белгиланади. Умумий ҳолда \overbrace{AB} да $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ $R(x, y, z)$ функциялар берилган бўлиб, ушбу

$$\int_{\overbrace{AB}} P(x, y, z) dx, \int_{\overbrace{AB}} Q(x, y, z) dy, \int_{\overbrace{AB}} R(x, y, z) dz$$

интеграллар мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\int_{\overbrace{AB}} P(x, y, z) dx + \int_{\overbrace{AB}} Q(x, y, z) dy + \int_{\overbrace{AB}} R(x, y, z) dz$$

йиғинди иккинчи тур эгри чизиқли интегралнинг умумий кўриниши деб аталади ва у

$$\int_{\overbrace{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

жаби белгиланади. Демак,

$$\begin{aligned} \int_{\overline{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz &= \int_{\overline{AB}} P(x, y, z) dx + \\ &+ \int_{\overline{AB}} Q(x, y, z) dy + \int_{\overline{AB}} R(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

2. Узлуксиз функция иккинчи тур эгри чизикли интегрални. Энди иккинчи тур эгри чизикли интегралнинг мавжуд бўлишини таъминлайдиган шартни топиш билан шуғулланамиз.

Фараз қиласайлик, \overline{AB} эгри чизик ушбу

$$\left. \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array} \right\} (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (19.15)$$

система билан (параметрик формада) берилган бўлсин. Бунда $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ да $\varphi'(t)$ ҳосилага эга ва бу ҳосила шу оралиқда узлуксиз, $\psi(t)$ функция ҳам $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз ҳамда ($\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = A$ ва ($\varphi(\beta), \psi(\beta)) = B$ бўлсин.

t параметр α дан β га қараб ўзгарганда $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$ нуқта A дан B га қараб \overline{AB} ни чиза борсин.

19.3-төрима. Агар $f(x, y)$ функция \overline{AB} да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функцияниң \overline{AB} эгри чизик бўйича иккинчи тур эгри чизикли интегрални

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx$$

мавжуд ва

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

бўлади.

Исбот. $[\alpha, \beta]$ оралиқнинг

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \quad (\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta)$$

бўлинишини олайлик. Бу бўлинишнинг бўлувчи нуқталари t_k ($k = 0, 1, \dots, n$) нинг \overline{AB} даги мос аксларини A_k дейлик ($k = 0, 1, \dots, n$).

Равшанки, бу A_k нуқталар AB эгри чизикнинг

$$\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$$

бўлинишини ҳосил қиласади. Бундан $A_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k))$ ($k = 0, 1, \dots, n$) бўлади. Бу бўлинишга нисбатан (19.11) йиғиндини

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k$$

тузамиз. Кейинги тенгликкда $\Delta x_k = \overline{A_k A_{k+1}}$ нинг Ox ўқдаги проекцияси

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)$$

га тенгдир.

Лагранж теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(\theta_k) \cdot (t_{k+1} - t_k) = \varphi'(\theta_k) \cdot \Delta t_k \quad (\theta_k \in [t_k, t_{k+1}]).$$

Маълумки, $(\xi_k, \eta_k) \in \overline{A_k A_{k+1}}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Агар бу (ξ_k, η_k) нуқтага аксланувчи нуқтани τ_k ($\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$) дейилса, унда

$$\xi_k = \varphi(\tau_k), \eta_k = \psi(\tau_k)$$

бўлади. Натижада σ' йиғинди қўйидаги кўринишга келади:

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \cdot \varphi'(\theta_k) \cdot \Delta t_k.$$

Энди $\lambda'_P = \max_k \{\Delta t_k\} \rightarrow 0$ да (бу ҳолда λ_P ҳам нолга интилади) σ' йиғиндининг лимитини топиш мақсадида унинг ифодасини ўзгартириб қўйидагича ёзамиш:

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \cdot \varphi(\tau_k) \Delta t_k + \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) [\varphi'(\theta_k) - \\ &\quad - \varphi'(\tau_k)] \cdot \Delta t_k. \end{aligned} \quad (19.16)$$

Бу тенгликкниг ўнг томонидаги иккинчи қўшилувчини баҳолаймиз:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) [\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)] \cdot \Delta t_k \right| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))| |\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)| \Delta t_k \leqslant \\ &\leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)| \Delta t_k, \end{aligned}$$

бунда

$$M = \max_{\alpha < t < \beta} |f(\varphi(t), \psi(t))|.$$

$\varphi'(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз. У ҳолда Кантор теоремасининг натижасига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ топиладики, $[\alpha, \beta]$ оралиқнинг диаметри $\lambda'_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлниш учун

$$|\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)| < \frac{\varepsilon}{M \cdot (\beta - \alpha)} \quad (\theta_k, \tau_k \in [t_k, t_{k+1}])$$

бўлади. Унда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) [\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)] \Delta t_k \right| &< M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{M(\beta - \alpha)} \Delta t_k = \\ &= \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k = \varepsilon. \end{aligned}$$

Демак,

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) [\varphi'(\theta_k) - \varphi(\tau_k)] \Delta t_k = 0$$

бўлади. Бу муносабатни эътиборга олиб, (19.16) тенглиқда $\lambda_P \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб қўйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma' &= \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \varphi'(\tau_k) \Delta t_k = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt. \end{aligned}$$

Демак,

$$\int_{\overbrace{AB}} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Теорема исбот бўлди.

Энди (19.15) системада $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз, $\psi(t)$ функция эса $[\alpha, \beta]$ да $\psi'(t)$ ҳосилага эга ва бу ҳосила шу оралиқда узлуксиз бўлсин.

19.4-теорема. Агар $f(x, y)$ функция \overbrace{AB} да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функцияниң \overbrace{AB} эгри чизиқ бўйича олинган иккинчи тур эгри чизиқли интеграли

$$\int_{\overbrace{AB}} f(x, y) dy$$

мавжуд ва

$$\int_{\overbrace{AB}} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt$$

бўлади.

Бу теорема юқоридаги 19.3-теорема каби исботланади.

Бу теоремалар, бир томондан, узлуксиз функция иккинчи тур эгри чизиқли интегралининг мавжудлигини аниқлаб берса, иккинчи томондан, бу интеграл аниқ интеграл (Риман интеграли) орқали ифодаланишини кўрсатади.

\overbrace{AB} эгри чизиқ (19.15) система билан берилган бўлиб, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ ҳосилаларга эга ва бу ҳосилалар узлуксиз бўлсин.

Агар \overbrace{AB} эгри чизиқда иккита $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар берилган бўлиб, улар шу чизиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\begin{aligned} \int_{\overbrace{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + \\ &+ Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt \end{aligned}$$

бўлади.

3. Иккинчи тур әгри чизиқли интегралнинг хоссалари. Юқорида келтирилган теоремалар узлуксиз функцияларнинг иккинчи тур әгри чизиқли интегралларини, бизга маълум бўлган аниқ интеграл—Риман интегралларига келишини кўрсатади. Бинобарин, бу әгри чизиқли интеграллар ҳам Риман интеграллари хоссалари каби хоссаларга эга бўлади. Ўтган параграфда эса худди шундай мулоҳаза биринчи тур әгри чизиқли интегралларга нисбатан бўлган эди. Шуларни эътиборга олиб, иккинчи тур әгри чизиқли интегралларнинг хоссалари келтиришни ва тегишли хуносалар чиқаришни ўқувчига ҳавола этамиз.

4. Иккинчи тур әгри чизиқли интегралларни ҳисоблаш. Юқорида келтирилган теоремалар функцияларнинг иккинчи тур әгри чизиқли интегралларининг мавжудлигини тасдиқлабгина қолмасдан уларни ҳисоблаш йўлини кўрсатади. Демак, иккинчи тур әгри чизиқли интеграллар ҳам, асосан Риман интегралларига келтирилиб ҳисобланади:

$$\int_{\overbrace{AB}} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt, \quad (19.17)$$

$$\int_{\overbrace{AB}} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt, \quad (19.18)$$

$$\begin{aligned} \int_{\overbrace{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + \\ &+ Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt. \end{aligned} \quad (19.19)$$

Хусусан, \overbrace{AB} әгри чизиқ

$$y = y(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

тengлама билан аниқланган бўлиб, $y(x)$ функция $[a, b]$ да ҳосилага эга ва у узлуксиз бўлса, (19.17), (19.19) формулалар қўйидаги

$$\int_{\overbrace{AB}} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y(x)) dx, \quad (19.20)$$

$$\int_{\overbrace{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)] dx$$

кўринишга келади.

Шунингдек, \overbrace{AB} әгри чизиқ

$$x = x(y) \quad (c \leqslant y \leqslant d)$$

тengлама билан аниқланган бўлиб, $x(y)$ функция $[c, d]$ оралиқда ҳосилага эга ва узлуксиз бўлса, (19.18) ва (19.19) формулалар қўйидаги

$$\int_{\overbrace{AB}} f(x, y) dy = \int_c^d f(x(y), y) dy, \quad (19.21)$$

$$\int\limits_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int\limits_c^d [P(x(y), y) x'(y) + Q(x(y), y)] dy \quad (19.22)$$

курнишга келади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int\limits_{AB} y^2 dx + x^2 dy$$

интегрални қарайлик. Бунда $\overline{AB} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипснинг юқори ярим текислик-

даги қисмидан иборат.

Эллипснинг параметрик тенгламаси қуидагича бўлади:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

$A = (a, 0)$ нуқтага параметр t нинг $t = 0$ қиймати, $B = (-a, 0)$ нуқтага эса $t = \pi$ қиймати мос келиб, t параметр 0 дан π гача ўзгарганда (x, y) нуқта A дан B га қараб эллипснинг юқори ярим текисликдаги қисмини чизиб чиқади. $P(x, y) = y^2$, $Q(x, y) = x^2$ функциялар эса \overline{AB} да узлуксиз. (19.9) формуладан фойдаланиб қуидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \int\limits_{AB} y^2 dx + x^2 dy &= \int\limits_0^\pi [b^2 \sin^2 t (-a \sin t) + a^2 \cos^2 t b \cos t] dt = \\ &= ab \int\limits_0^\pi (a \cos^3 t - b \sin^3 t) dt = -\frac{4}{3} ab^2. \end{aligned}$$

2. Ушбу

$$\int\limits_{AB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy$$

интегрални қарайлик. Бунда \overline{AB} эгри чизик:

- а) $(0,0)$ нуқтадан чиқсан $(0,0)$ ва $(1,1)$ нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизик кесмаси,
- б) $(0,0)$ дан чиқсан $(0,0)$ ва $(1,1)$ нуқталарни бирлаштирувчи $y = x^2$ парabolанинг ёйи,
- в) $(0,0)$ нуқтадан чиқсан $(0,0), (1,0), (1,1)$ нуқталарни бирлаштирувчи синик чизикдан иборат.

Юқоридаги (19.20), (19.21) ва (19.22) формулалардан фойдаланиб қуидагиларни топамиз:

а) ҳолда

$$\int\limits_{AB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy = \int\limits_0^1 [3x^2 x + (x^3 + 1)] dx = \int\limits_0^1 (4x^3 + 1) dx = 2,$$

б) ҳолда

$$\int\limits_{AB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy = \int\limits_0^1 [3x^2 x^2 + (x^3 + 1) 2x] dx = \int\limits_0^1 (5x^4 + 2x) dx = 2,$$

в) ҳолда

$$\int\limits_{AB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy = \int\limits_{AC} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy + \int\limits_{CB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy,$$

бунда $\overline{AC} - (0, 0)$ ва $(1, 0)$ нуқталарни, $\overline{CB} - (1, 0)$ ва $(1, 1)$ нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизик кесмаларидан иборат.

Равшанки,

$$\int\limits_{AC} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy = 0, \int\limits_{CB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy = \int\limits_0^1 2 dy = 2.$$

Демак,

$$\int\limits_{AB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy = 2.$$

3- §. Грин формуласи ва унинг татбиқлари

Маълумки, Ньютон—Лейбниц формуласи $f(x)$ функцияниң [a, b] оралиқ бўйича олинган аниқ интегралини шу функция бошлиланғич функциясининг оралиқ чеккалари (чегаралари) даги қийматлари орқали ифодалади.

Бирор (D) соҳада ($(D) \subset R^2$) берилган $f(x, y)$ узлуксиз функцияниң икки каррали

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

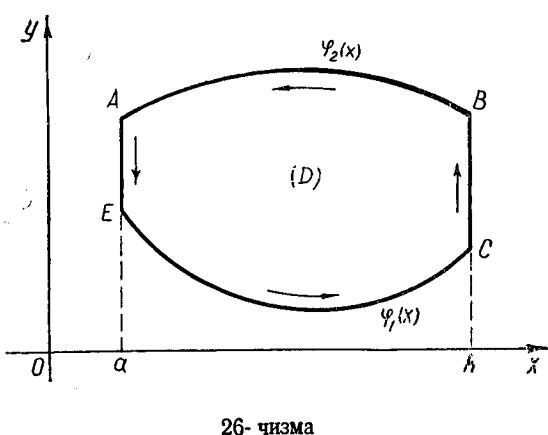
интегралини тегишли функцияниң шу соҳа чегарасидаги қийматлари орқали (аниқроғи, соҳа чегараси бўйича олинган эгри чизикли интеграл орқали) ифодалайдиган формула ҳам мавжуд. Қуйида бу формулани келтирамиз.

1. Грин формуласи. Юқоридан $y = \varphi_2(x)$ ($a \leq x \leq b$) функция графиги, ён томонлардан $x = a$, $x = b$ вертикал чизиклар ҳамда пастдан $y = \varphi_1(x)$ ($a \leq x \leq b$) функция графиги билан чегараланган соҳа—эгри чизикли трапецияни қарайлик. Бу соҳани (D) билан, унинг чегараси — ёпиқ чизикни $\partial(D)$ билан белгилайлик (26- чизма).

Равшанки, $\overrightarrow{AB} = \varphi_2(x)$ функция графиги, $\overrightarrow{EC} = \varphi_1(x)$ функция графиги ҳамда

$$\partial(D) = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}.$$

$P(x, y)$ функция шу (D) соҳада берилган ва узлуксиз бўлиб, $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ хусусий ҳосилага эга ва у ҳам (D) да узлуксиз бўлсин. У ҳолда ушбу



$$\iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy$$

интеграл мавжуд бўлади ва 18- бобнинг 6- § идаги формулага кўра

$$\begin{aligned} & \int\limits_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = \\ & = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy \right) dx \end{aligned}$$

бўлади. Энди

$$\int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = P(x, y) \Big|_{y=\Phi_1(x)}^{y=\Phi_2(x)} = P(x, \Phi_2(x)) - P(x, \Phi_1(x))$$

бўлишини эътиборга олиб қўйидагини топамиз:

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = \int_a^b P(x, \Phi_2(x)) dx - \int_a^b P(x, \Phi_1(x)) dx.$$

Ушбу бобнинг 2- § идаги (19.20) формулага биноан

$$\int_a^b P(x, \Phi_2(x)) dx = \int_{AB} P(x, y) dx, \quad \int_a^b P(x, \Phi_1(x)) dx = \int_{EC} P(x, y) dx.$$

бўлади. Демак,

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy &= \int_{AB} P(x, y) dx - \int_{EC} P(x, y) dx = \\ &= - \int_{BA} P(x, y) dx - \int_{CE} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Равшанки,

$$\int_{CB} P(x, y) dx = 0, \quad \int_{EA} P(x, y) dx = 0.$$

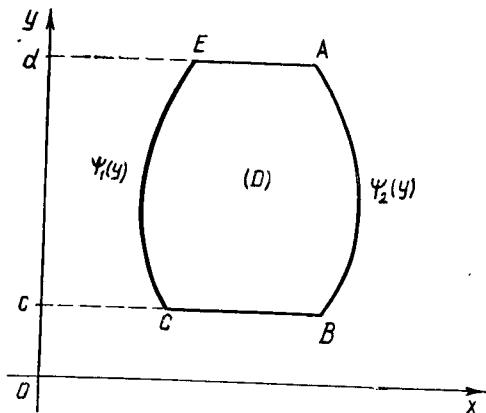
Бу тенгликларни ҳисобга олиб қўйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy &= - \int_{EC} P(x, y) dx - \int_{CB} P(x, y) dx - \int_{BA} P(x, y) dx - \\ &- \int_{AE} P(x, y) dx = - \left(\int_{EC} P(x, y) dx + \int_{CB} P(x, y) dx + \int_{BA} P(x, y) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{AE} P(x, y) dx \right) = - \int_{\partial(D)} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Демак,

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial(D)} P(x, y) dx. \quad (19.23)$$

Энди, юқоридан $y = c$, пастдан $y = d$ чизиқлар, ён томондан эса $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ функциялар графиклари билан чегараланган соҳа — эгри чизиқли трапецияни қарайлик. Бу соҳани (D) билан, унинг



27- чизма

чегараси — ёпик чизиқни $\partial(D)$ билан белгилайлик (27- чизма).

$Q(x, y)$ функция шу (D) соҳада берилган, узлуксиз бўлиб, $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ хусусий ҳосила-

га эга ва бу ҳосила (D) да узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned} & \int \int_{(D)} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \\ & = \int_{\partial(D)} Q(x, y) dy \quad (19.24) \end{aligned}$$

бўлади.

Бу формуланинг тўғрилиги юқоридагидек муроҳаза юритиш билан исботланади.

Энди R^2 фазода қараладиган (D) соҳа юқоридаги икки ҳолда қаралган соҳанинг ҳар бирининг характеристига эга бўлган соҳа бўлсин, $\partial(D)$ эса унинг чегараси бўлсин. Бу (D) соҳада иккита $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар берилган, узлуксиз бўлиб, улар $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ хусусий ҳосилаларга эга ҳамда бу ҳосилалар ҳам (D) да узлуксиз бўлсин. Равшанки, бу ҳолда (19.23) ва (19.24) формуулалар ўринли бўлади. Уларни ҳадлаб қўшиб ушбуни топамиз:

$$\int_{\partial(D)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int \int_{(D)} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy. \quad (19.25)$$

Бу Грин формуласи деб аталади.

Демак, Грин формуласи соҳа бўйича олинган икки каррали интегрални шу соҳа чегараси бўйича олинган эгри чизиқли интеграл билан боғлайдиган формула экан.

Биз юқорида Грин формуласини махсус кўринишдаги (D) соҳалар (эгри чизиқли трапециялар) учун келтиридик. Аслида бу формула анча кенг синфдаги соҳалар учун ҳам тўғри бўлиб, бу факт у соҳаларни чекли сондаги эгри чизиқли трапециялар йиғиндиси сифатида тасвирлаш билан исбот қилинади.

2. Грин формуласининг баъзи бир татбиқлари.
1°. Шаклнинг юзини топиш. Грин формуласидан фойдаланиб, ясси шаклнинг юзини содда функцияларнинг эгри чизиқли интеграллари ёрдамида ҳисобланишини кўрсатиш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, (19.25) формулада $P(x, y) = -y, Q(x, y) = 0$ дейилса, у ҳолда

$$\int_{\partial(D)} (-y) dx = \int \int_{(D)} dx dy = D$$

бўлади. Демак,

$$D = - \int_{\partial(D)} y dx.$$

Агар (19.25) формулада $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = x$ дейилса, у ҳолда

$$D = \int_{\partial(D)} x dy \quad (19.26)$$

бўлади.

(19.25) формулада $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$, $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$ деб олинса, (D) соҳанинг юзи

$$D = \frac{1}{2} \int_{\partial(D)} x dy - y dx \quad (19.27)$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

эллипс билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин. (19.27) формулага кўра

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \int_{\partial(D)} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos tb \cos t + b \sin ta \sin t) dt = \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi ab \end{aligned}$$

бўлади.

2°. Иккия каррали интегралларни ўзгарувчи ларни алмаштириб ҳисоблаш. Мазкур курснинг 18- боб, 7- § ида (Δ) соҳани (D) соҳага акслантирувчи

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \quad (19.28)$$

система ўша параграфда келтирилган $1^{\circ} - 3^{\circ}$ - шартларни бажарганда (D) соҳанинг юзи

$$D = \iint_{(\Delta)} I(u, v) |dudv| = \iint_{(\Delta)} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| dudv \quad (19.29)$$

бўлиши айтилган эди. Грин формуласидан фойдаланиб шу формулатнинг тўғрилигини исботлаймиз.

Аввало (19.26) формуладан фойдаланиб, (D) соҳанинг юзи

$$D = \int_{\partial(D)} x dy \quad (19.30)$$

бўлишини топамиз. Фараз қиласлик, $\partial(\Delta)$ параметрик формада ушбу

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta \text{ ёки } \alpha \geq t \geq \beta)$$

система билан ифодалансин. У ҳолда қўйидаги

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) = \varphi(u(t), v(t)), \\ y = \psi(u, v) = \psi(u(t), v(t)) \end{cases}$$

система (D) соҗанинг $\partial(D)$ чегарасини ифодалайди. Бунда параметрнинг ўзгариш чегарасини шундай танлаб оламизки, t параметр α дан β га қараб ўзгарганда $\partial(D)$ эгри чизиқ мусбат йўналишда бўлсин. У ҳолда (19.30) тенглик ушбу

$$\begin{aligned} D &= \int_{\partial(D)} x dy = \int_{\partial(D)} \varphi(u, v) d\psi(u, v) = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u(t), v(t)) \left[\frac{\partial \psi}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial \psi}{\partial v} v'(t) \right] dt \end{aligned} \quad (19.31)$$

кўринишга келади.

Агар

$$\begin{aligned} &\int_{\partial(\Delta)} \varphi(u, v) \left[\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv \right] = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u(t), v(t)) \left[\frac{\partial \psi}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial \psi}{\partial v} v'(t) \right] dt \end{aligned} \quad (19.32)$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$D = \pm \int_{\partial(\Delta)} x \frac{\partial y}{\partial u} du + x \frac{\partial y}{\partial v} dv \quad (19.33)$$

бўлишини топамиз. Бу тенгликдаги интеграл белгиси олдига қўйилган ишорани тушунтирамиз. Юқорида, t параметр α дан β га қараб ўзгарганда $\partial(D)$ эгри чизиқни мусбат йўналишда бўлишини айтдик. Бу ҳолда $\partial(\Delta)$ эгри чизиқнинг йўналиши мусбат ҳам бўлиши мумкин, манфий ҳам бўлиши мумкин. Шунинг учун (19.31) ва (19.32) муносабатлар бир-бираидан ишора билан фарқ қиласди. Агар $\partial(D)$ эгри чизиқнинг мусбат йўналишига $\partial(\Delta)$ эгри чизиқнинг ҳам мусбат йўналиши мос келса, унда «+» ишора олинади, акс ҳолда эса «—» ишора олинади.

Энди ушбу

$$\int_{\partial(\Delta)} [P(u, v) du + Q(u, v) dv] = \int_{(\Delta)} \int \left(\frac{\partial Q(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} \right) du dv \quad (19.34)$$

Грин формуласида

$$P(u, v) = x \frac{\partial y}{\partial u}, \quad Q(u, v) = x \frac{\partial y}{\partial v}$$

деб олсак, у ҳолда бу формула қўйидаги кўринишга келади:

$$\int_{\partial(\Delta)} x \frac{\partial y}{\partial u} du + x \frac{\partial y}{\partial v} dv = \int_{(\Delta)} \int \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(x \frac{\partial y}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(x \frac{\partial y}{\partial u} \right) \right] du dv. \quad (19.35)$$

Агар

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(x \frac{\partial y}{\partial v} \right) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + x \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(x \frac{\partial y}{\partial u} \right) = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} + x \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$$

ва

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(x \frac{\partial y}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(x \frac{\partial y}{\partial u} \right) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

эканини эътиборга олсак, унда (19.33), (19.34) ва (19.35) муносабатлардан]

$$D = \pm \iint_{(\Delta)} \frac{D(x, y)}{D(u, v)} du dv$$

бўлиши келиб чиқади.

Маълумки,

$$I(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

якобиан аниқ ишорали, D эса маъносига кўра мусбат бўлиши керак. Демак, интеграл белгиси олдидаги ишора якобианнинг ишораси билан бир хил бўлиши керак. Шунинг учун

$$D = \iint_{(\Delta)} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv$$

бўлади. Шуни исботлаш лозим эди.

3°. Эгри чизиқли интеграл қийматининг интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслиги. Чегараланган ёпиқ боғламли (D) ($(D) \subset R^2$) соҳада иккита $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар берилган бўлсин. Бу функциялар (D) соҳада узлуксиз ва $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ хусусий ҳосилаларга эга ва бу ҳосилалар ҳам шу соҳада узлуксиз бўлсин.

1) Агар (D) соҳада

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \quad (19.36)$$

бўлса, у ҳолда (D) соҳага тегишли бўлган ҳар қандай K ёпиқ чизиқ бўйича олинган ушбу

$$\iint_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

интеграл нолга teng бўлади:

$$\iint_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

Исбот. K ёпиқ чизиқ чегаралаган соҳани (G) дейлик. Равшанки, ($G \subset D$). Грин формуласига кўра:

$$\iint_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{(G)} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy$$

бўлади. Шартга кўра (D) да, демак (G) да

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

У ҳолда (19.36) муносабатдан

$$\iint_{(G)} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

бўлади. Демак,

$$\int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

2) Агар (D) соҳага тегишли бўлган ҳар қандай K ёпиқ чизиқ бўйича олинган ушбу интеграл

$$\int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

бўлса, у ҳолда қўйидаги

$$\int_{\widetilde{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (\widetilde{AB} \subset (D)) \quad (19.37)$$

интеграл A ва B нуқталарни бирлаштирувчи эгри чизиққа боғлиқ бўлмайди, яъни (19.37) интеграл қиймати интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмайди.

Исбот. (D) соҳанинг A ва B нуқталарини бирлаштирувчи ва шу соҳага тегишли бўлган ихтиёрий иккита \widetilde{AaB} ҳамда \widetilde{AbB} эгри чизиқни олайлик. Бу ҳолда \widetilde{AaB} ва \widetilde{AbB} эгри чизиқлар биргаликда (D) соҳага тегишли бўлган ёпиқ чизиқни ташкил этади. Уни K билан белгилайлик:

$$K = AaBbA.$$

Шартга кўра

$$\int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AaBbA} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = 0$$

бўлади. Интегралнинг хоссасидан фойдаланиб ушбуни топамиш:

$$\begin{aligned} \int_{AaBbA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_{\widetilde{AaB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \\ &+ \int_{BbA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\widetilde{AaB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \\ &- \int_{\widetilde{AbB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \end{aligned}$$

Демак,

$$\int_{\widetilde{AaB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \int_{\widetilde{AbB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

Бундан эса

$$\int_{AaB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\widetilde{AbB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

еканлиги келиб ғиқади.

19.2- эслатма. Юзоридаги тасдиқ, исбетг жараёнидан кўринадиги, \widetilde{AB} эгри чизиқ содда эгри чизиқлар тўпламидан ихтиёрий олингандан ўринлидир.

3) Агар ушбу

$$\int_{\widetilde{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (\widetilde{AB} \subset (D)) \quad (19.37)$$

интеграл A өз B нүқталарни бирлаштируғчи әгри чизиққа боелиқ бўлмаса, яъни интеграл интеграллаш йўлига боелиқ бўлмаса, у ҳолда

$$\int P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

ифода (D) соҳада берилган бирор функцияning тўлиқ дифференциали бўлади.

Исбот. Модомики, (19.37) интеграллаш йўлига боелиқ эмас экан, у ҳолда интеграл $A = (x_0, y_0)$ өз $B = (x_1, y_1)$ нүқталар билан бир қийматли аниқланади. Шунинг учун бу ҳолда (19.27) интеграл қўйида-гича ҳам ёзилади:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Энди A нүқтани тайинлаб, B нүқта сифатида (D) соҳанинг ихтиёрий (x, y) нүқтасини олиб, ушбу:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

интегрални қараймиз. Равшанки, бу интеграл (x, y) га боелиқ бўлади:

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Бу функцияning хусусий ҳосилаларини ҳисоблаймиз. (x, y) нүқтанинг x координатасига шундай Δx орттирма берайликки, $(x + \Delta x, y)$ нүқта өз (x, y) , $(x + \Delta x, y)$ нүқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси ҳам (D) соҳага тегишли бўлсин. Натижада $F(x, y)$ функция ҳам ху-сусий орттиргмага эга бўлади:

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x, y) - F(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \\ &- \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$\int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P(x, y) dx = P(x + \theta \cdot \Delta x, y) \Delta x \quad (0 < \theta < 1).$$

Натижада

$$\frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} = P(x + \theta \cdot \Delta x, y)$$

бўлади. Бундан

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta \cdot \Delta x, y) = P(x, y)$$

бўлади. Демак,

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y).$$

Худди шунга ўхшаш

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$$

бўлиши кўрсатилади.

Шундай қилиб,

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy = dF(x, y)$$

бўлади.

4) Агар

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (19.38)$$

ифода (D) соҳада берилган бирор функциянинг тўлиқ дифференциали бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

бўлади.

Исбот. Айтайлик, (19.38) ифода (D) соҳада берилган $F(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлсин:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y).$$

Равшанки,

$$P(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}.$$

Кейинги тенгликлардан ушбуни топамиз:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

Шартга кўра $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ лар [(D) соҳада узлуксиз. Арадаш хосилаларнинг тенглиги ҳақидаги теоремага биноан (қаралсин, 13-боб, 6-§)

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

бўлади.

Шундай қилиб, Грин формуласидан фойдаланган ҳолда, юқоридаги 1) — 4) тасдиқлар орасида

$$1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1)$$

муносабат борлиги кўрсатилди.

4-§. Биринчи ва иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар орасидаги бөләниш

Ушбу параграфда биринчи ва иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар орасидаги бөләнишни ифодаловчи формулаларни келтирамиз.

Текисликда содда силлиқ \overline{AB} эгри чизиқ ушбу

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \quad (0 \leq s \leq S)$$

система билан аниқланган бўлсин, бунда s —ёй узунлиги (қаралсин, ушбу бобнинг 1- §), $x(s)$ ва $y(s)$ функциялар $x'(s)$, $y'(s)$ ҳосилаларга эга ҳамда бу ҳосилалар узлуксиз.

Равшанки, бу эгри чизиқ ҳар бир нуқтада уринмага эга бўлади. Агар Ox ва Oy ўқлар билан уринманинг ёй ўсиши томонига қараб йўналиш срасидаги бурчак мос равишда α ва β дейилса, унда

$$x'(s) = \cos \alpha, \quad y'(s) = \cos \beta$$

бўлади.

Айтайлик, бу \overline{AB} эгри чизиқда $f(x,y)$ функция берилган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx$$

интеграл мавжуд бўлади ва (19 .17) формулага кўра

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx = \int_0^S f(x(s), y(s)) \cdot x'(s) ds$$

тенглик ўринли. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални қўйида-гича

$$\int_0^S f(x(s), y(s)) \cdot x'(s) ds = \int_0^S f(x(s), y(s)) \cos \alpha ds$$

ёзиш мумкин. Ушбу ёобнинг 1- § да келтирилган 19.1-теоремадан фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$\int_0^S f(x(s), y(s)) \cos \alpha ds = \int_{\overline{AB}} f(x, y) \cos \alpha ds.$$

Натижада юқоридаги тенгликлардан

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx = \int_{\overline{AB}} f(x, y) \cos \alpha ds$$

бўлиши келиб чиқади.

Худди шунга ўхашаш, тегишли шартларда

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dy = \int_{\overline{AB}} f(x, y) \cos \beta ds$$

ва умумий ҳолда

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\overline{AB}} [P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta] ds$$

бўлади.

20- Б О Б
СИРТ ИНТЕГРАЛЛАРИ

Мазкур курснинг 18-бобида $z = z(x, y)$ тенглама аниқлаган силлиқ (S) сирт билан танишган эдик. Бунда $z(x, y)$ функция (D) соҳада ($(D) \subset R^2$) берилган, узлуксиз ва $z'_x(x, y), z'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга ҳамда бу ҳосилалар ҳам (D) да узлуксиз функция эди. (S) сирт юзга эга бўлиб, унинг юзи

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + z'_x^2(x, y) + z'_y^2(x, y)} \, dx \, dy \quad (20.1)$$

га тенг эканлиги кўрсатилди.

Ўша бобнинг пировардидаги R^3 фазодаги (V) соҳада ($(V) \subset R^3$) берилган функциянинг уч каррали интегрални билан танишиб, уни ўргандик.

Энди R^3 фазодаги (S) сиртда берилган функциянинг интегрални тушунчаси билан танишамиз. Сирт интегрални тушунчасини киритишдан аввал, бу ерда ҳам функция берилиши соҳасининг бўлиниши, бўлиниш бўлаклари, бўлинишининг диаметри тушунчалари киритилиши керак.

Бу тушунчалар $[a, b]$ оралиқнинг бўлиниши (қаралсин, 1-қисм, 9-боб, 1-§) ва текисликдаги (D) соҳанинг бўлиниши (қаралсин, 18-боб, 1-§) даги каби киритилади ва ўхшаш хоссаларга эга бўлади. Шунинг учун бу ерда биз бу тушунчаларни киритилган ҳисоблаб бевосита баёнимизни сирт интегралининг таърифидан бошлаб кетаверамиз.

1-§. Биринчи тур сирт интеграллари

1. Биринчи тур сирт интегралининг таърифи. $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда ($(S) \subset R^3$) берилган бўлсин. Бу сиртнинг P бўлинишини ва бу бўлинишининг ҳар бир (S_k) бўлагида ($k=1, 2, \dots, n$) ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқтани олайлик. Берилган функциянинг (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқтадаги $f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ қийматини (S_k) нинг S_k юзига кўпайтириб, қўйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot S_k.$$

20.1-таъриф. Ушбу

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot S_k \quad (20.2)$$

йиғинди $f(x, y, z)$ функциянинг интеграл йиғиндиси ёки Риман йиғиндиси деб аталади.

(S) сиртнинг шундай

$$P_1, P_2, \dots, P_m, \dots \quad (20.3)$$

бўлинишларини қара ймиэки, уларнинг мос диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \dots, \lambda_{P_m}, \dots$$

кетма-кетлик нолга интилсін: $\lambda_{P_m} \rightarrow 0$. Бундай P_m ($m = 1, 2, \dots$) бүлинишларға нисбатан $f(x, y, z)$ функцияның интеграл йиғиндиларини тузамиз. Нәтижада (S) сиртнинг (20.3) бүлинишларыңа мос интеграл йиғиндилар қийматларидан иборат құйидаги кетма-кетлик ҳосил бўла-ди:

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$$

20.2-таъриф. Агар (S) сиртнинг ҳар қандай (20.3) бүлинишлари кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос интеграл йиғинди қийматларидан иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик, (ξ_k, η_k, ζ_k) нүкталарни танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда, ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу I σ йиғиндининг лимити деб аталади ва у

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot S_k = I \quad (20.4)$$

каби белгиланади.

Интеграл йиғиндининг лимитини құйидаги ҳам таърифлаш мумкин.

20.3-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиласки, (S) сиртнинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай бўлиниши ҳамда ҳар бир (S_k) бўлакдан олинган ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) лар учун

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

тengsizlik бажарилса, у ҳолда I сони σ йиғиндининг лимити деб аталади ва у (20.4) каби белгиланади.

20.4-таъриф. Агар $\lambda_P \rightarrow 0$ да $f(x, y, z)$ функцияның интеграл йиғиндиси σ чекли лимитга эга бўлса, $f(x, y, z)$ функция (S) сирт бўйича интегралланувчи (Риман маъносида интегралланувчи) функция деб аталади. Бу йиғиндининг чекли лимити I эса, $f(x, y, z)$ функцияниң биринчи тур сирт интегралди дейилади ва у

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds$$

каби белгиланади. Демак,

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot S_k.$$

2. Узлуксиз функция биринчи тур сирт интеграли. Энди биринчи тур сирт интегралининг мавжуд бўлишини таъминлайдиган шартни топиш билан шуғулланамиз.

Фараз қилайлик R^3 фазодаги (S) сирт

$$z = z(x, y)$$

тenglama билан берилган бўлсан. Бунда $z = z(x, y)$ функция чегараланган ёпик (D) соҳада ($(D) \subset R^2$) узлуксиз ва $z'_x(x, y), z'_y(x, y)$ ҳосилаларга эга ҳамда бу ҳосилалар ҳам (D) да узлуксиз.

20.1-теорема. Агар $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг (S) сирт бўйича биринчи тур сирт интеграли

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds$$

мавжуд ва

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds = \iint_{(D)} f(x, y, z, (x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} dx dy$$

бўлади.

Исбот. (S) сиртнинг P_S бўлинишини олайлик. Унинг бўлаклари $(S_1), (S_2), \dots, (S_n)$ бўлсин. Бу сирт ва унинг бўлакларининг Oxy текисликдаги проекцияси (D) соҳанинг P_D бўлинишини ва унинг $(D_1), (D_2), \dots, (D_n)$ бўлакларини ҳосил қиласди. P_S бўлинишга нисбатан (20.2) йиғиндини тузамиш:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) S_k.$$

Маълумки, $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in (S_k)$. Бу нуқтага эксланувчи нуқта (ξ_k, η_k) бўлади. Демак, $\zeta_k = z(\xi_k, \eta_k)$. (20.1) формулага биноан

$$S_k = \iint_{(D_k)} \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} dx dy$$

бўлади.

Ўрта қиймат ҳақидаги теорема (каралсин, 18-боб, 5-§) дан фойдаланиб топамиш:

$$S_k = \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k^*, \eta_k^*) + z_y'^2(\xi_k^*, \eta_k^*)} D_k \quad ((\xi_k^*, \eta_k^*) \in (D_k)).$$

Натижада σ йиғинди қуийдаги

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) S_k = \\ &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k^*, \eta_k^*) + z_y'^2(\xi_k^*, \eta_k^*)} D_k \end{aligned}$$

кўринишга келади.

Энди $\lambda_{P_S} \rightarrow 0$ да (бу ҳолда $\lambda_{P_D} \rightarrow 0$ ҳам нолга интилади) σ йиғиндининг лимитини топиш мақсадида унинг ифодасини ўзгартириб ёзамиш:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} D_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \left[\sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k^*, \eta_k^*) + z_y'^2(\xi_k^*, \eta_k^*)} - \right. \\ \left. - \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} \right] D_k. \quad (20.5)$$

Бу тенгликтининг ўнг томонидаги иккинчи қўшилувчини баҳолаймиз:

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \left[\sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k^*, \eta_k^*) + z_y'^2(\xi_k^*, \eta_k^*)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} \right] D_k \right| \leqslant \\ \leqslant M \sum_{k=1}^n \left| \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k^*, \eta_k^*) + z_y'^2(\xi_k^*, \eta_k^*)} - \right. \\ \left. - \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} \right| D_k,$$

бунда

$$M = \max |f(x, y, z)|.$$

Равшанки,

$$\sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}$$

функция (D) да узлуксиз, демак, текис узлуксиз. У ҳолда Кантор теоремасининг натижасига кўра $\forall \varepsilon > 0$ олингандা ҳам шундай $\delta > 0$ топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_{P_D} < \delta$ бўйлган ҳар қандай P_D бўлиниши учун

$$\left| \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k^*, \eta_k^*) + z_y'^2(\xi_k^*, \eta_k^*)} - \right. \\ \left. - \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} \right| < \frac{\varepsilon}{M \cdot D}$$

бўлади. Унда

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \left[\sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k^*, \eta_k^*) + z_y'^2(\xi_k^*, \eta_k^*)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} \right] D_k \right| < M \frac{\varepsilon}{MD} \sum_{k=1}^n D_k = \varepsilon$$

ва, демак,

$$\lim_{\lambda_{P_D} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \left[\sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k^*, \eta_k^*) + z_y'^2(\xi_k^*, \eta_k^*)} - \right. \\ \left. - \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} \right] D_k = 0$$

бўлади.

(20.5) тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} D_k$$

эса

$$f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}$$

функцияниң интеграл йиғиндисидир. Бу функция (D) соҳада узлуксиз. Демак, $\lambda_{P_D} \rightarrow 0$ да интеграл йиғинди чекли лимитга эга ва

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_{P_D} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} D_k = \\ = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} dx dy \end{aligned}$$

бўлади. Бу муносабатни эътиборга олиб, (20.5) тенгликда $\lambda_{P_S} \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_{P_S} \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_{P_S} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} D_k = \\ = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} dx dy. \end{aligned}$$

Демак,

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} dx dy.$$

Теорема исбот бўлди.

Бу теорема, бир томондан, узлуксиз функция биринчи тур сирт интегралининг мавжудлигини аниқлаб берса, иккинчи томондан, бу интеграл икки каррали Риман интеграли орқали ифодаланишини кўрсатади.

20.1-эслатма. (S) сирт $x = x(y, z)$ ($y = y(z, x)$) тенглами билан аниқланган бўлиб, $x = x(y, x)$ функция ($y(z, x)$ функция) (D) соҳада ($(D) \subset R^2$) узлуксиз ва $x'_y(y, z), x'_z(y, z)$ хусусий ҳосилаларга ($y'_z(z, x), y'_x(z, x)$ хусусий ҳосилаларга) эга ҳамда бу ҳосилалар (D) да узлуксиз бўлсин.

Агар $f(x, y, z)$ функция шу (S) сиртда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функцияниң биринчи тур сирт интеграли

$$\iint_S f(x, y, z) ds$$

мавжуд ва

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_D f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y'^2(y, z) + x_z'^2(y, z)} dy dz,$$

$$\left(\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_D f(x, y(z, x), z) \sqrt{1 + y_z'(z, x) + y_x'(z, x)} dz dx \right)$$

бўлади.

20.2-эслатма. Биз $f(x, y, z)$ функция биринчи тур сирт интегралининг мавжудлигини маҳсус кўринишдаги (S) сиртлар ($z = z(x, y)$, $x = x(y, z)$, $y = y(z, x)$ тенгламалар билан аниқланган сиртлар) учун келтирилди. Аслида функция интегралининг мавжудлиги кенг синфдаги сиртлар учун тўғри бўлади. Жумладан, агар (S) сирт чекли сондаги юқорида айтилган сиртлар йиғиндиси сифатида тасвирланган бўлса, унда берилган ва узлуксиз бўлган $f(x, y, z)$ функцияниң сирт интегрални мавжуд бўлади ва у мос икки каррали интеграллар йиғиндисига тенг бўлади.

3. Биринчи тур сирт интегралларининг хоссалари. Юқорида келтирилган теорема узлуксиз функциялар биринчи тур сирт интегралларининг икки каррали Риман интегралларига келишини кўрсатади. Бинобарин, бу сирт интеграллар ҳам икки каррали Риман интеграллари хоссалари каби хоссаларга эга бўлади. Икки каррали Риман интегралларининг хоссалари 18-бобнинг 5-§ ида ўрганилган.

4. Биринчи тур сирт интегралларни ҳисоблаш. Юқорида келтирилган теорема функция биринчи тур сирт интегралининг мавжудлигини тасдиқлабгина қолмасдан, уни ҳисоблаш йўлини ҳам кўрсатади. Демак, биринчи тур сирт интеграллар икки каррали Риман интегралларига келтирилиб ҳисобланади:

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} f(x, y, z) ds &= \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z'_x^2(x, y) + z'_y^2(x, y)} dx dy, \\ \iint_{(S)} f(x, y, z) ds &= \iint_{(D)} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x'_y^2(y, z) + x'_z^2(y, z)} dy dz, \quad (20.6) \\ \iint_{(S)} f(x, y, z) ds &= \iint_{(D)} f(x, y(z, x), z) \sqrt{1 + y'_z^2(z, x) + y'_x^2(z, x)} dz dx. \end{aligned}$$

Мисоллар. 1. Ушбу

$$I = \iint_{(S)} (x + y + z) ds$$

интегрални қарайлик. Бунда (S) — $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ сферанинг $z = 0$ текисликнинг юқорисида жойлашган қисми.

Равшани. (S) сирт

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

тенглами билан аниқланган бўлиб, бу сиртда берилган

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

функция узлуксиздир. 20.1-теоремага кўра

$$I = \iint_{(D)} (x + y + \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}) \sqrt{1 + z'_x^2(x, y) + z'_y^2(x, y)} dx dy$$

бўлади, бунда (D) = $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$.

Энди бу тенгликнинг ўнг томонидаги икки каррали интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} z'_x(x, y) &= -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}, z'_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}, \\ \sqrt{1 + z'_x^2(x, y) + z'_y^2(x, y)} &= \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

Демак,

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x + y + \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}) \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy = \\ &= r \iint_D \left(\frac{x + y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} + 1 \right) dx dy. \end{aligned}$$

Кейинги интегралда ўзгарувчиларни алмаштирамиз:

$$x = \rho \cos \psi, \quad y = \rho \sin \psi.$$

Натижада

$$\begin{aligned} I &= r \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \left[\frac{\rho (\cos \psi + \sin \psi)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} + 1 \right] \rho d\rho \right) d\psi = r \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \frac{\rho (\cos \psi + \sin \psi)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \rho d\rho \right) d\psi + \\ &+ r \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \rho d\rho \right) d\psi = r \int_0^{2\pi} (\cos \psi + \sin \psi) d\psi \int_0^r \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} + r \cdot 2\pi \frac{r^2}{2} = \pi r^3. \end{aligned}$$

Демак, берилган интеграл

$$\iint_S (x + y + z) ds = \pi r^3$$

бўлади.

2. Ушбу

$$\iint_S x(y + z) ds$$

интегрални қарайлик, бунда $(S) : x = \sqrt{b^2 - y^2}$ цилиндрик сиртнинг $z = 0$, $z = c$ ($c > 0$) текисликлар орасидаги қисми.

Модомики, бу (S) сирт $x = \sqrt{b^2 - y^2}$ кўринишда берилган экан, унда интегрални ҳисоблаш учун (20.6) формуладан фойдаланиш лозимдир:

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_D f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y^2(y, z) + x_z^2(y, z)} dy dz.$$

Бунда (D) соҳа (S) сиртнинг Oyz текисликдаги проекциясидан иборат:

$$\begin{aligned} (D) &= \{(y, z) \in R^2 : x = \sqrt{b^2 - y^2}, z = 0, z = c\} = \\ &= \{(y, z) \in R^2 : -b \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}. \end{aligned}$$

$x = \sqrt{b^2 - y^2}$ функцияning хусусий ҳосиллари

$$x'_y(y, z) = -\frac{y}{\sqrt{b^2 - y^2}}, \quad x'_z(y, z) = 0$$

бўлади. Демак,

$$\begin{aligned} \iint_S x(y + z) ds &= \iint_D \sqrt{b^2 - y^2} (y + z) \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2 - y^2}} dy dz = \\ &= b \iint_D (y + z) dy dz \end{aligned}$$

бўлади. Бу тенгликтин ўнг томонидаги икки каррали интегрални ҳисоблаб топамиз:

$$\begin{aligned} b \iint_D (y + z) dy dz &= b \int_{-b}^b \left(\int_0^c (y + z) dz \right) dy = b \int_{-b}^b \left(yz + \frac{z^2}{2} \right)_{z=0}^{z=c} dy = \\ &= b \int_{-b}^b \left(cy + \frac{c^2}{2} \right) dy = \frac{bc}{2} y^2 \Big|_{-b}^b + \frac{bc^2}{2} y \Big|_{-b}^b = b^2 c^2. \end{aligned}$$

$$\iint_S x(y+z) ds = b^2 c^2.$$

2- §. Иккинчи тур сирт интеграллари

R^3 фазода $z = z(x, y)$ тенглама билан аниқланган (S) сиртни қарайлик. Бунда $z(x, y)$ функция чегараси бўлакли-силлиқ чизикдан иборат бўлган ($D \subset R^2$) берилган, узлуксиз, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга ҳамда бу ҳосилалар ҳам узлуксиз. Одатда бундай сиртни силлиқ сирт дейилади. Силлиқ сирт ҳар бир (x_0, y_0, z_0) нуқтасида уринма текисликка эга бўлади.

Энди (S) сиртда унинг чегараси билан кесишмайдиган K ёпиқ чизикини олайлик. (x_0, y_0, z_0) нуқта сиртнинг K ёпиқ чизик билан чегараланган қисмига тегиши бўлсин. Бу чизикини Oxy текислигига проекциялаймиз. Натижада Oxy текисликда ҳам K_p ёпиқ чизик ҳосил бўлади. Мазкур курснинг 19-боб, 2-§ ида текисликдаги ёпиқ чизикнинг мусбат ва манфий йўналишлари киритилган эди. (S) сиртдаги ёпиқ чизикининг мусбат ва манфий йўналишлари ҳам шу сингари киритилади. Шуни ҳам айтиш керакки, йўналишнинг мусбат ёки манфийлигини аниқлаш ҳаракатланаётган нуқтага қай томондан қарашга ҳам боғлиқ.

Сиртнинг (x_0, y_0, z_0) нуқтасидаги уринма текисликка шу нуқтада перпендикуляр ўтказайлар. Бу перпендикулярнинг мусбат йўналиши деб шундай йўналиш оламизки, унинг томонидан қаралганда иккала (K ҳамда K_p) ёпиқ чизикларнинг йўналишлари мусбат бўлади. Унинг манфий йўналиши эса шундай йўналишки, у томондан қаралганда K_p нинг мусбат йўналишига K нинг манфий йўналиши мос қелади. Перпендикулярнинг мусбат йўналиши бўйича олинган бирлик кесма сиртнинг (x_0, y_0, z_0) нуқтадаги *нормали* дейилади.

Нормалнинг Ox , Oy ва Oz ўқларининг мусбат йўналишлари билан ташкил қилган бурчакларини мос равищда α , β , γ орқали белгиласак,

$$\cos \alpha = -\frac{z'_x}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, \quad \cos \beta = -\frac{z'_y}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}} \quad (20.7)$$

бўлади ва улар нормалнинг йўналтирувчи косинулари дейилади (қаранг, Г. М. Фихтенгольц, «Математик анализ асослари», II қисм).

Исботлаш мумкинки, силлиқ (S) сиртнинг барча нуқталаридаги перпендикулярларнинг мусбат йўналишлари (нормаллари) бир хил бўлади. Ва, демак, манфий йўналишлари ҳам. Шунга кўра, сиртнинг иккита томони ҳақида тушунча киритилади.

Сиртнинг устки томони деб, унинг шундай томони олинадики, бу томондан қаралганда иккала (K ва K_p) ёпиқ чизикларнинг йўналишлари мусбат бўлади.

Сиртнинг устки томони қаралганда K_n билан чегараланган текис шаклнинг юзи мусбат ишора билан, пастки томони (иккинчи томони) қаралганда манфий ишора билан олинади.

1. Иккинчи тур сирт интегралининг таърифи. $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда берилган бўлсин. Бу сиртнинг маълум бир томонини олайлик. Сиртнинг P бўлинишини ва бу бўлинишинг ҳар бир (S_k) бўлагида ($k = 1, 2, \dots, n$) ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқта ($k = 1, 2, \dots, n$) олайлик. Берилган функцияning (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқтадаги $f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ қийматини (S_k) нинг Oxy текисликдаги проекцияси (D_k) нинг юзига кўпайтириб қўйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) D_k. \quad (20.8)$$

(S) сиртнинг шундай

$$P_1, P_2, \dots, P_m, \dots \quad (20.9)$$

бўлинишларини қараймизки, уларнинг мос диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \dots, \lambda_{P_m}, \dots$$

кетма-кетлик нолга интилсиз: $\lambda_{P_m} \rightarrow 0$. Бундай P_m ($m = 1, 2, \dots$) бўлинишларга нисбатан $f(x, y, z)$ функцияning интеграл йиғиндилини тузамиз. Натижада (S) сиртнинг (20.9) бўлинишларига мос интеграл йиғиндилар қийматларидан иборат қўйидаги

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$$

кетма-кетлик ҳосил бўлади.

20.5-таъриф. Агар (S) сиртнинг ҳар қандай (20.9) бўлинишлари кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос интеграл йиғинди қийматларидан иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик, (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқталарни танлаб олинишига бўғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу I σ йиғиндининг лимити деб аталади ва у

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) D_k = I \quad (20.10)$$

каби белгиланади.

Интеграл йиғиндининг лимитини қўйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

20.6-таъриф. Агар $\forall \epsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилсанки, (S) сиртнинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиниши ҳамда ҳар бир (S_k) бўлакдан олинган ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) лар учун

$$|\sigma - I| < \epsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда I сони σ йиғиндининг лимити деб аталади ва у (20.10) каби белгиланади.

20.7-таъриф. Агар $\lambda_P \rightarrow 0$ да $f(x, y, z)$ функцияning интеграл йиғиндиσ чекли лимитга эга бўлса, $f(x, y, z)$ функция (S) сиртнинг танланган томони бўйича интегралланувчи функция деб атала-

ди. Бу йиғиндининг чекли лимити I эса, $f(x, y, z)$ функцияниңг (S) сиртнинг танланган томони бўйича иккинчи тур сирт интеграли деб аталади ва у

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy$$

каби белгиланади. Демак,

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) D_k.$$

Функция иккинчи тур сирт интегралининг қуидагида

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy \quad (20.11)$$

белгиланишидан, интеграл (S) сиртнинг қайси томони бўйича олинганлиги кўринмайди. Бинобарин, (20.11) интеграл тўғрисида гап боргандা, ҳар гал интеграл сиртнинг қайси томони бўйича олинаётганлиги айтиб борилади.

Равшанки, $f(x, y, z)$ функцияниңг (S) сиртнинг бир томони бўйича олинган иккинчи тур сирт интеграли, функцияниңг шу сиртнинг иккинчи томони бўйича олинган иккинчи тур сирт интегралидан фақат ишораси билангина фарқ қиласи.

Юқоридагидек,

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dy dz, \quad \iint_{(S)} f(x, y, z) dz dx$$

иккинчи тур сирт интеграллари таърифланади.

Шундай қилиб, сиртда берилган $f(x, y, z)$ функциядан учта — Oxy текисликдаги проекциялар, Oyz текисликдаги проекциялар ҳамда Ozx текисликдаги проекциялар воситасида олинган иккинчи тур сирт интегрални тушунчалари киритилади.

Умумий ҳолда, (S) сиртда $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ функциялар берилган бўлиб, ушбу

$$\iint_{(S)} P(x, y, z) dx dy, \quad \iint_{(S)} Q(x, y, z) dy dz, \quad \iint_{(S)} R(x, y, z) dz dx$$

интеграллар мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\iint_{(S)} P(x, y, z) dx dy + \iint_{(S)} Q(x, y, z) dy dz + \iint_{(S)} R(x, y, z) dz dx$$

ийғинди иккинчи тур сирт интегралининг умумий кўриниши деб аталади ва у

$$\iint_{(S)} P(x, y, z) dx dy + Q(x, y, z) dy dz + R(x, y, z) dz dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\begin{aligned} & \iint_{(S)} P(x, y, z) dx dy + Q(x, y, z) dy dz + R(x, y, z) dz dx = \\ & = \iint_{(S)} P(x, y, z) dx dy + \iint_{(S)} Q(x, y, z) dy dz + \iint_{(S)} R(x, y, z) dz dx. \end{aligned}$$

Энди R^3 фазода бирор (V) жисм берилган бўлсин. Бу жисмни ўраб турган ёпиқ сирт силлиқ сирт бўлиб, уни (S) дейлик. $f(x, y, z)$ функция (V) да берилган. Oxy текисликка параллел бўлган текислик билан (V) ни икки қисмга ажратамиз: $(V) = (V_1) + (V_2)$. Натижада уни ўраб турган (S) сирт ҳам (S_1) ва (S_2) сиртларга ажралади. Ушбу

$$\iint_{(S_1)} f(x, y, z) dx dy + \iint_{(S_2)} f(x, y, z) dx dy \quad (20.12)$$

интеграл (агар у мавжуд бўлса) $f(x, y, z)$ функцияниңг ёпиқ сирт бўйича иккинчи тур сирт интеграли деб аталади ва

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy$$

каби белгиланади. Бунда (20.12) муносабатдаги биринчи интеграл (S_1) сиртнинг устки томони, иккинчи интеграл эса (S_2) сиртнинг пастки томони бўйича олинган. Худди шунга ўхшаш

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dy dz, \quad \iint_{(S)} f(x, y, z) dz dx$$

ҳамда, умумий ҳолда

$$\iint_{(S)} P(x, y, z) dx dy + Q(x, y, z) dy dz + R(x, y, z) dz dx$$

интеграллар таърифланади.

2. Узлуксиз функция иккинчи тур сирт интеграли. Фараз қилайлик, R^3 фазода (S) сирт $z = z(x, y)$ тенглама билан берилган бўлсин. Бунда $z = z(x, y)$ функция чегараланган ёпиқ (D) соҳада ($(D) \subset R^2$) узлуксиз ва $z'_x(x, y), z'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга ҳамда бу ҳосилалар ҳам (D) да узлуксиз.

20.2-теорема. Агар $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функцияниңг (S) сирт бўйича олинган иккинчи тур сирт интеграли

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy$$

мавжуд ва

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy$$

бўлади.

И сбот. (S) сиртнинг P_S бўлинишини олайлик. Унинг бўлаклари (S_1), (S_2), ..., (S_n) бўлсин. Бу сирт ва унинг бўлакларининг Oxy текисликдаги проекцияси (D) нинг P_D бўлинишини ва унинг (D_1), (D_2), ..., (D_n) бўлакларини ҳосил қиласди. P_S бўлинишга нисбатан ушбу йифиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot D_k. \quad (20.8)$$

Агар (S) сиртнинг устки томони қаралаётган бўлса, у ҳолда барча D_k лар мусбат бўлади.

Модомики, $f(x, y, z)$ функция $z = z(x, y)$ сиртда берилган экан, у x ва y ўзгарувчиларнинг қуидаги функциясига айланади:

$$f(x, y, z) = f(x, y, z(x, y)).$$

Бундан эса

$$\xi_k = z(\xi_k, \eta_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

бўлиши келиб чиқади. Натижада (20.8) йиғинди ушбу

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \cdot D_k$$

кўринишга келади. Бу йиғинди $f(x, y, z(x, y))$ функциянинг интеграл йиғиндиси (иikki каррали интеграл учун интеграл йиғинди) эканини пайқаш қийин эмас. Агар $f(x, y, z(x, y))$ функциянинг (D) да узлуксиз эканлигини эътиборга олсак, унда $\lambda_{P_D} \rightarrow 0$ да

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) D_k$$

йиғинди чекли лимитга эга бўлади ва

$$\lim_{\lambda_{P_D} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) D_k = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy$$

бўлади. Демак,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_{P_S} \rightarrow 0} \sigma &= \lim_{\lambda_{P_S} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot D_k = \\ &= \lim_{\lambda_{P_D} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) D_k = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Бундан эса

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Агар (S) сиртнинг пастки томони қаралса, унда барча D_k лар ман-фий бўлиб,

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = - \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy$$

бўлади.

Худди юқоридагидек, тегишли шартларда

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dy dz, \quad \iint_{(S)} f(x, y, z) dz dx$$

интеграллар мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dy dz = \iint_{(D)} f(x(y, z), y, z) dy dz,$$

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dz dx = \iint_{(D)} f(x, y(z, x), z) dz dx$$

бўлади.

20.1-натижада. Ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган (S) цилиндрик сиртни қарайлик. $f(x, y, z)$ функция шу сиртда берилган бўлсин. У ҳолда

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy$$

мавжуд бўлади ва у нолга тенг:

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = 0.$$

Худди шунга ўхшаш, тегишли шартларда

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dy dz = 0, \quad \iint_{(S)} f(x, y, z) dz dx = 0$$

бўлади.

Бу тенгликлар бевосита иккинчи тур сирт интеграллари таърифдан келиб чиқади.

Юқорида келтирилган теоремадан фойдаланиб, иккинчи тур сирт интеграллари ҳам икки каррали Риман интеграллари хоссалари каби хоссаларга эга бўлишини кўрсатиш ва уларни келтириб чиқаришни ўқувчига ҳавола этамиз.

3. Иккинчи тур сирт интегралларини ҳисоблаш. Юқорида келтирилган теоремадан фойдаланиб иккинчи тур сирт интегралларини ҳисоблаш мумкин. Унда иккинчи тур сирт интеграллари икки каррали Риман интегралларига келтириб ҳисобланади:

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy,$$

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dy dz = \iint_{(D)} f(x(y, z), y, z) dy dz,$$

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dz dx = \iint_{(D)} f(x, y(z, x), z) dz dx.$$

Мисол. Ушбу

$$\iint_{(S)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + kz \right) dx dy$$

интегрални қарайлик. Бунда $(S) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоиднинг $z = 0$ текисликдан пастда жойлашган қисми бўлиб, интеграл шу сиртнинг пастки томони бўйича олинган.

Равшанки, бу (S) сиртнинг тенгламаси қўйидагича бўлиб,

$$z = -c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

унинг Oxy текислигидаги проекцияси

$$(D) = \{(x, y) \in R^2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$$

эллипсдан иборатdir.

(S) сирт ҳам, бу сиртда берилган

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + kz$$

функция ҳам 20.2- теореманинг шартларини қаноатлантиради. У ҳолда

$$\iint_{(S)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + kz \right) dx dy = - \iint_{(D)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - kc \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right) dx dy$$

бўлади. Интеграл (S) сиртнинг пастки томони бўйича олингандиги сабабли тенглиқнинг ўнг томонидаги икки каррали интеграл олдига минус ишораси қўйилди.

Энди бу

$$\begin{aligned} & - \iint_{(D)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - kc \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right) dx dy = \\ & = \iint_{(D)} \left(kc \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy \end{aligned}$$

икки каррали интегрални ҳисоблаймиз. Икки каррали интегралда ўзгарувчиларни
 $x = a \rho \cos \varphi, \quad y = b \rho \sin \varphi$

каби алмаштириб қўйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} & \iint_{(D)} \left(kc \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (kc \sqrt{1 - \rho^2} - \rho^2) ab \rho d \rho \right] d \varphi = \\ & = ab \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (kc \rho \sqrt{1 - \rho^2} - \rho^3) d \rho \right] d \varphi = 2\pi ab \left[-\frac{kc}{2} \frac{(1 - \rho^2)^{3/2}}{3/2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \\ & = 2\pi ab \left(-\frac{1}{4} + \frac{kc}{3} \right). \end{aligned}$$

Демак,

$$\iint_{(S)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + kz \right) dx dy = 2\pi ab \left(\frac{kc}{3} - \frac{1}{4} \right).$$

4. Биринчи ва иккинчи тур сирт интеграллари орасидаги боғланиш. Биз 19-бобнинг 4- § да биринчи ва иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар орасидаги боғланишни ифодалайдиган формулаларни келтирган эдик.

Шунга ўхшашиб, биринчи ва иккинчи тур сирт интеграллари орасидаги боғланишни ифодаловчи формулалар ҳам мавжуд.

(S) сирт ва унда берилган $f(x, y, z)$ ва $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ функциялар тегишли шартларни қаноатлантирганда (қаралсин, 2-§ нинг 1-пункти) ушбу

$$\begin{aligned} & \iint_{(S)} f(x, y, z) dy dz = \iint_{(S)} f(x, y, z) \cos \alpha ds, \\ & \iint_{(S)} f(x, y, z) dz dx = \iint_{(S)} f(x, y, z) \cos \beta ds, \\ & \iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \iint_{(S)} f(x, y, z) \cos \gamma ds, \end{aligned} \tag{20.13}$$

умумий ҳолда

$$\begin{aligned} & \iint_{(S)} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \\ & = \iint_{(S)} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] ds \end{aligned}$$

формулалар ўринли бўлади.

Бу формулаларнинг тўғрилигини исботлашни ўқувчига ҳавола этамиз.

3- §. Стокс формуласи

R^3 фазода $z = z(x, y)$ тенглама билан аниқланган силлиқ (S) сирт берилген бўлсин. Бу сиртнинг чегараси $\partial(S)$ бўлакли-силлиқ эгри чизик бўлсин. (S) сиртнинг Oxy текисликдаги проекциясини (D) дейлик. Унда $\partial(S)$ нинг проекцияси $\partial(D)$ дан иборат бўлади.

Фараз қилайлик, (S) сиртда $P(x, y, z)$ функция берилган бўлиб, у узлуксиз бўлсин. Ундан ташқари бўлсин (S) да

$$\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}$$

хусусий ҳосилаларга эга ва улар узлуксиз бўлсин.

Ушбу

$$\int_{\partial(S)} P(x, y, z) dx$$

эгри чизиқли интегрални қарайлик (унинг мавжудлиги разшан). Агар $\partial(S)$ чизиқнинг (S) сиртда ётишини эътиборга олсан, у ҳолда

$$\int_{\partial(S)} P(x, y, z) dx = \int_{\partial(D)} P(x, y, z(x, y)) dx$$

бўлади.

Энди Грин формуласидан фойдаланиб ушбуни топамиз:

$$\int_{\partial(D)} P(x, y, z(x, y)) dx = - \iint_{(D)} \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} dxdy.$$

Равшанки, $P(x, y, z(x, y))$ функцияниң y ўзгарувчи бўйича хусусий ҳосиласи

$$\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial z} \cdot z'_y(x, y)$$

бўлади.

Ушбу бобнинг 2-§ идаги (20.7) муносабатлардан

$$z'_y(x, y) = - \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}$$

бўлишини эътиборга олсан,

$$\begin{aligned} & \iint_{(D)} \left[\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial z} \cdot z'_y(x, y) \right] dxdy = \\ & = \iint_{(D)} \left[\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial z} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right] dxdy \end{aligned}$$

бўлади.

Натижада қаралаётган интеграл учун қўйидаги тенгликка эга бўламиш:

$$\int_{\partial(S)} P(x, y, z) dx = - \iint_{(D)} \left[\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial z} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right] dxdy. \quad (20.14)$$

2- § даги 20.2-теоремадан фойдаланиб (20.14) тенгликтининг ўнг томонидаги икки карралы интегрални иккинчи тур сирт интегрални орқали ифодалаймиз:

$$\begin{aligned} & \iint_{(D)} \left[\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial z} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right] dxdy = \\ & = \iint_{(S)} \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right] dxdy. \end{aligned}$$

Бу тенгликтининг ўнг томонидаги иккинчи тур сирт интегралини, (20.13), формулага асосланиб, биринчи тур сирт интегралига келтирамиз:

$$\begin{aligned} & \iint_{(S)} \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right] \cdot dxdy = \\ & = \iint_{(S)} \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right] \cdot \cos \gamma ds = \quad (20.15) \\ & = \iint_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} \cos \gamma ds - \iint_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \cos \beta ds. \end{aligned}$$

Ва ниҳоят, яна (20.13) формулалардан фойдаланиб қўйидагини топамиз::

$$\begin{aligned} & \iint_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} \cos \gamma ds = \iint_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} dxdy, \\ & \iint_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \cos \beta ds = \iint_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} dzdx. \quad (20.16) \end{aligned}$$

(20.14), (20.15) ва (20.16) муносабатлардан

$$\int_{\partial(S)} P(x, y, z) dx = \iint_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} dxdy \quad (20.17),$$

бўлиши келиб чиқади.

Худди шундай муроҳаза асосида (S) сирт ва унда берилган $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ функциялар тегишли шартларни бажарганда ушбу

$$\int_{\partial(S)} Q(x, y, z) dy = \iint_{(S)} \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial z} dy dz,$$

$$\int_{\partial(S)} R(x, y, z) dz = \iint_{(S)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x} dz dx \quad (20.18)$$

формулаларнинг ўринли бўлиши кўрсатилади. (20.17) ва (20.18) формулаларни ҳадлаб қўшиб қуидагини топамиз:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial(S)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \iint_{(S)} \left[\frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} \right] dx dy + \left[\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial y} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial z} \right] dy dz + \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x} \right] dz dx. \quad (20.19) \end{aligned}$$

Бу Стокс формуласи деб аталади.

20.2-натижада. Мазкур курснинг 19-боб, 3-§идаги Грин формуласи Стокс формуласининг хусусий ҳолидир. Ҳақиқатан ҳам, (20.19) Стокс формуласида (S) сирт сифатида Oxy текисликдаги (D) соҳа олинса, унда $z = 0$ бўлиб, (20.19) формуладан

$$\int_{\partial(D)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{(D)} \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dx dy$$

бўлиши келиб чиқади. Бу Грин формуласидир.!

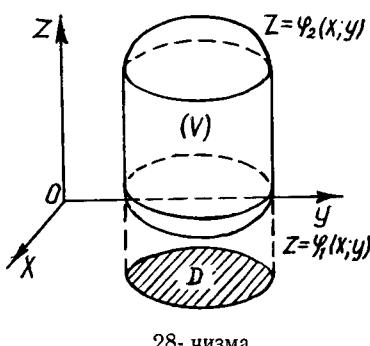
Шундай қилиб, Стокс формуласи (S) сирт бўйича олинган II тур сирт интеграли билан шу сиртнинг чегараси бўйича олинган эгри чизиқли интегрални боғловчи формуладир.

4-§. Сєгроградский формуласи

R^3 фазода, пастдан $z = \varphi_1(x, y)$ тенглама билан аниқланган силлиқ (S_1) сирт билан, юқоридан $z = \varphi_2(x, y)$ тенглама ёрдамида аниқланган силлиқ (S_2) сирт билан, ён томондан эса ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган цилиндрик (S_3) сирт билан чегаралган (V) соҳани (жисмни) қарайлик. Унинг Oxy текисликдаги проекцияси (D) бўлиб, бу (D) нинг чегараси юқорида айтилган цилиндрик сиртнинг йўналтирувчиси сифатида олинади (28-чизма)

$$(\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y), \quad (x, y) \in (D)).$$

Фараз қиласайлик, (V) да $R(x, y, z)$ функция берилган ва узлуксиз бўл-



син. Бундан ташқари бу функция шу соҳада

$$\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}$$

хусусий ҳосилага эга ва бу ҳосила ҳам узлуксиз.

Равшанки, бу ҳолда

$$\iiint_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}$$

мавжуд бўлади ва 18-бобнинг 10-§ ида келтирилган формулага кўра

$$\iint_V \int \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\Phi_1(x, y)}^{\Phi_2(x, y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz \right) dx dy \quad (20.20)$$

бўлади.

Агар

$$\int_{\Phi_1(x, y)}^{\Phi_2(x, y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz = R(x, y, \Phi_2(x, y)) - R(x, y, \Phi_1(x, y))$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\int_{\Phi_1(x, y)}^{\Phi_2(x, y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz \right) dx dy &= \iint_D R(x, y, \Phi_2(x, y)) dx dy - \\ &\quad - \iint_D R(x, y, \Phi_1(x, y)) dx dy \end{aligned} \quad (20.21)$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги икки каррали интегралларни, 2-§ даги формулалардан фойдаланиб, сирт интеграллари орқали ёзамиш:

$$\begin{aligned} \iint_D R(x, y, \Phi_2(x, y)) dx dy &= \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy, \\ \iint_D R(x, y, \Phi_1(x, y)) dx dy &= \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy. \end{aligned} \quad (20.22)$$

Келтирилган тенгликлардаги сирт интеграллари сиртнинг устки томони бўйича олинган. (20.20), (20.21) ва (20.22) муносабатлардан қўйидаги топамиш:

$$\begin{aligned} \iint_V \int \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy +] \\ &\quad + \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy. \end{aligned} \quad (20.23)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи интеграл (S_1) сиртнинг пастки томони бўйича олинган.

(S_3) сирт ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган цилиндрик сирт бўлганинидан

$$\iint_{(S_3)} R(x, y, z) dx dy = 0 \quad (20.24)$$

бўлади. (20.23) ва (20.24) муносабатлардан

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{(S_1)} R(x, y, z) dx dy + \iint_{(S_2)} R(x, y, z) dx dy + \\ &+ \iint_{(S_3)} R(x, y, z) dx dy = \iint_{(S)} R(x, y, z) dx dy \end{aligned}$$

бўлиши келиб чиқади. Бунда (S) — (V) жисмни ўраб турувчи сирт. Демак,

$$\iint_{(V)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \iint_{(S)} R(x, y, z) dx dy. \quad (20.25)$$

Худди шу йўл билан, (V) ҳамда $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ лар тегишли шартларни қаноатлантирганда қўйидаги

$$\iint_{(V)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz = \iint_{(S)} P(x, y, z) dy dz, \quad (20.26)$$

$$\iint_{(V)} \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} dx dy dz = \iint_{(S)} Q(x, y, z) dz dx \quad (20.27)$$

формулаларнинг тўғрилиги исботланади.

Юқоридаги (20.25), (20.26) ва (20.27) тенгликларни ҳадлаб қўшиб қўйидагини топамиз: $\iint_{(V)} \left(-\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \right.$

$$+ \left. \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{(S)} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx +$$

$$+ R(x, y, z) dx dy.$$

Бу формула *Остроградский формуласи* деб аталади.

21- Б О Б ФУРЬЕ ҚАТОРЛАРИ

Биз юқорида, курсимиз давомида, мураккаб функцияларни улардан соддороқ бўлган функциялар орқали ифодалаш масалаларига бир неча марта дуч келдик ва уларни ўргандик. Бу соҳадаги классик масалалардан бири — функцияларни даражали қаторларга ёйишдан иборат бўлиб, у мазкур курснинг 13- бобида батафсил ўрганилди.

Агар қаралаётган функциялар даврий функциялар бўлса, табиийки, уларни соддороқ даврий функциялар билан ифодалаш лозим бўлади. Ҳар бир ҳади содда даврий функциялар бўлган функционал қаторларни ўрга-

ниш мураккаб даврий функцияларни соддароқ даврий функциялар билан ифодалаш масаласини ҳал этишда муҳим роль ўйнайди.

Ушбу бобда, ҳар бир ҳади маҳсус даврий функциялар бўлган функционал қаторлар—Фурье қаторларини ўрганамиз.

Фурье қаторлари назарияси математик анализнинг чуқур ва кенг ўрганилган бўлими бўлиб, унинг амалий масалаларни ҳал қилишдаги роли каттадир. Бу соҳада жуда кўп илмий изланишлар олиб борилган ва муҳим натижаларга эришилган.

Биз қўйида Фурье қаторлари назариясининг асосий тушунчалари, методлари ва ютуқлари билан дастлабки тарзда танишамиз.

1-§. Баъзи муҳим тушунчалар

Ушбу параграфда келгусида керак бўладиган баъзи муҳим тушунчаларни— даврий ва давриймас функциялар, функцияларни даврий давом эттириш, гармоникалар ҳамда бўлакли-узлуксизлик, бўлакли-дифференциалланувчилик тушунчаларини келтирамиз.

I. Да врий вадрий масфуникиялар. Биз 1-қисмнинг 4-бобида даврий функция тушунчасини киритиб ўтган эдик. Бу функцияларнинг Фурье қаторлари назариясидаги роли муҳимлигини эътиборга олиб қўйида уларни батағсилроқ ўрганамиз.

21. I-таъриф. $f(x)$ функция X тўпламда ($X \subset R$) берилган бўлсин. Агар шундай ўзгармас T ($T \neq 0$) сони мавжуд бўлсанки, $\forall x \in X$ учун

1) $x - T$ ва $x + T$ сонлар функциянинг берилishi соҳаси X тўпламга тегишли бўлса ва

$$2) f(x + T)' = f(x) \quad (21.1)$$

бўлса, $f(x)$ функция даврий функция деб аталади.

Даврий бўлмаган функцияларни давриймас функциялар деймиз.

Бу таърифдаги T сони ($T \neq 0$) $f(x)$ функциянинг даври дейилади.

Айтайлик, X тўпламда берилган $f(x)$ функция даврий функция бўлсин. Таърифга кўра, шундай T ($T \neq 0$) сон топиладики, $\forall x \in X$ учун $x - T \in X$, $x + T \in X$ бўлади ва (21.1) тенглик бажарилади. Бу ҳолда, равшанки, kT ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) кўринишдаги сонларнинг ҳар бири учун ва $\forall x \in X$ учун $x + kT \in X$ ва $f(x + kT) = f(x)$ бўлади.

Шундай қилиб, агар бирор $T \neq 0$ ва $\forall x \in X$ учун (21.1) муносабат ўринли бўлса, бу муносабат ихтиёрий kT ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) учун ҳам ўринли бўлар экан.

Демак, $\pm T, \pm 2T, \dots$ лар ҳам $f(x)$ функциянинг даврлари бўлади. $f(x)$ функциянинг мусбат даврлари тўпламини M деб белгилайлик. Агар

$$T_0 = \inf M$$

ҳам $f(x)$ функциянинг даври бўлса, яъни $T_0 \in M$ бўлса, у энг кичик мусбат давр дейилади. Энг кичик мусбат давр мавжуд бўлиши ҳам мумкин, мавжуд бўлмаслиги ҳам мумкин.

Мисоллар. 1. $f(x) = \sin x$ функция даврий функция. Унинг даврлари тўплами $\{2k\pi : k = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ бўлиб, энг кичик мусбат даври $T_0 = 2\pi$ бўлади.

2. $f(x) = \{x\}$ функцияни қаралайлик, бунда $\{x\} — x$ сонининг каср қисми. Бу

даврий функциядир. Унинг даврлари түплами $\{m : m = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ бўлиб, энг кичик мусбат даври $T_0 = 1$ бўлади.

3. $f(x) = C$ бўлсин, бунда $C = \text{const}$. Бу даврий функциядир. Ихтиёрий T ($T \neq 0$) сон берилган функциянинг даври, яъни унинг даврлари $R \setminus \{0\}$ дан ибораг. Бу ҳолда энг кичик мусбат давр мавжуд эмас.

4. Дирихле функцияси

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

ни қарайлик. Айтайлик, T — бирор рационал сон ($T \neq 0$) бўлсин. У ҳолда

$$x + T = \begin{cases} \text{рационал сон, агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ \text{иррационал сон, агар } x \text{ — иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

бўлади. Демак,

$$\chi(x + T) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

Шундай қилиб, $\forall x$ учун, T — рационал сон бўлганда

$$\chi(x + T) = \chi(x) \quad (21.2)$$

бўлади. Демак, Дирихле функцияси даврий функция, ихтиёрий $T \neq 0$ рационал сон бўйни функциянинг даври экан.

Энди бирор T иррационал сонни олайлик. Унда $\forall x$ учун (21.2) муносабат ўринли бўлмайди, чунки x рационал сон бўлганда $x + T$ иррационал сон бўлиб, $\chi(x) = 1$, $\chi(x + T) = 0$, яъни $\chi(x + T) \neq \chi(x)$ бўлади. Шундай қилиб, иррационал сонлар Дирихле функцияси учун давр эмас.

Бинобарин, Дирихле функциясининг даврлари түплами $Q \setminus \{0\}$ дан иборат. Энг кичик мусбат давр эса мавжуд эмас — барча мусбат рационал сонлар түпламининг инфимуми ноль бўлиб, у $Q \setminus \{0\}$ га тегишили эмас.

5. Ушбу

$$f(x) = \ln \sin x$$

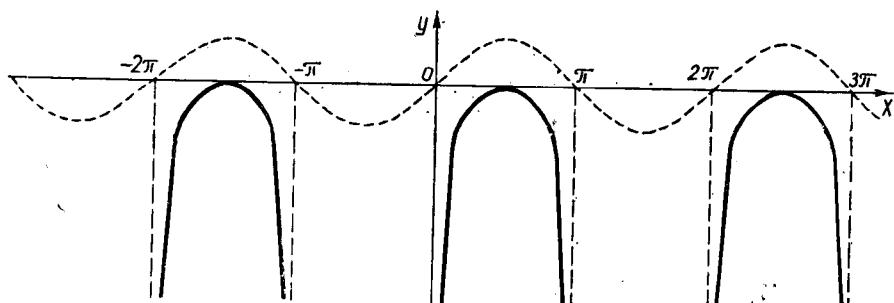
функцияни қарайлик. Бу функция $\{x \in R : x \in (2\pi k, (2k+1)\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ түпламда берилган. У даврий функция, даврлари түплами эса $\{2k\pi : k = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ бўлади. Энг кичик мусбат даври 2π га тенг (29-чизма).

6. $f(x) = x^2$ нинг давриймас функцияя эканлиги равшандир. Чунки $\forall x$ ва бирор T ($T \neq 0$) сони учун (21.1) муносабат ўринли бўлмайди.

7. Қуйидаги

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{x(1-x)}, & f_4(x) &= 2x \cdot \cos(x^2), \\ f_2(x) &= 2x - \cos x, & f_5(x) &= \sin(x^2) \\ f_3(x) &= e^{-x^2}, \end{aligned}$$

функциялар давриймас функциялар бўлади. Уларнинг давриймас функциялар бўлишини кейинроқ кўрсаганиз.



29- чизма

Даврий функцияларнинг хоссалари. Даврий функция таърифидан бевосита қўйидаги хоссалар келиб чиқади.

1°. Агар X тўпламда берилган $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири даврий функциялар бўлиб, $T \neq 0$ уларнинг даври бўлса, у ҳолда $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ ва $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) функциялар ҳам даврий функциялар бўлади ва T уларнинг ҳам даври бўлади.

2°. X тўпламда берилган $f(x)$ функция даврий функция, $T \neq 0$ унинг даври бўлсин. g эса $f(x)$ нинг қўйматлари тўплами $\{f(x) : x \in X\}$ да берилган ихтиёрий функция бўлсин. У ҳолда $g(f(x))$ мураккаб функция ҳам даврий функция бўлади ва T унинг ҳам даври бўлади.

Юқорида келтирилган хоссалардан фойдаланиб, бизга маълум бўлган содда даврий функциялар воситасида исталганча мураккабликка эга бўлган даврий функцияларни тузиш мумкин.

Мисол. Ушбу

$$\varphi_1(x) = \sin^3 2x,$$

$$\varphi_2(x) = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}},$$

$$\varphi_3(x) = \log_2 \cos(x - 4),$$

$$\varphi_4(x) = \arcsin(\cos x),$$

$$\varphi_5(x) = \ln \sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right)}$$

функциялар даврий функциялар бўлади. (Уларнинг даврийлиги $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ функцияларнинг даврийлиги ҳамда 1°- ва 2°- хоссалардан келиб чиқади.)

Қўйидаги хоссалар даврий функциялар синфини характерловчи хоссалар бўлиб, бирор функциянинг даврийлигини ва, айниқса, даврий маслигини текширишда қўлланиладилар.

$f(x)$ функция X тўпламда берилган бўлсин.

3°. $f(x)$ даврий функция, $T \neq 0$ сони унинг даври бўлсин. Агар x_0 нуқта бу функциянинг берилиш соҳасига тегишли, яъни $x_0 \in X$ бўлса, у ҳолда барча $x_0 + kT$ кўринишдаги ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) нуқталар ҳам шу соҳага тегишли бўлади:

$$x_0 + kT \in X \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Агар x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг берилиш соҳасига тегишли бўлмаса ($x_0 \notin X$), у ҳолда барча $x_0 + kT$ кўринишдаги ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) нуқталар ҳам шу соҳага тегишли бўлмайди ($x_0 + kT \notin X$).

Шундай қилиб, бу хосса даврий функциянинг берилиш соҳаси маълум структурага эга бўлиши кераклигини кўрсатади.

Бу хоссадан қўйидаги натижа келиб чиқади.

21.1-натижа. Даврий функциянинг берилиш соҳасида абсолют қўймати бўйича исталганча катта бўлган мусбат ва манғий сонлар бўлади.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = \ln \sin x$$

функцияни қарайлик. Бу функция¹

$$A = \{x \in R : x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

түпламда берилган. Қаралаётган функцияниң даврийлиги юқоридаги 2°- хоссадан ҳам келиб чиқады.

$\forall x_0 \in A$ нүктаны олайлик. A түпламнинг тузилишига кўра барча $x_0 + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) кўринишдаги нүқталар шу A түпламга теги шли бўлишини пайқаш қийин эмас. Агар $x_1 \in A$ бўлса, у ҳолда барча $x_1 + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) кўринишдаги нүқталар ҳам A түпламга тегишли бўлмайди.

Куйидаги

$$f_1(x) = \sqrt{x(1-x)}$$

функция давриймас функциядир, чунки унинг берилиш соҳаси $X = [0, 1]$ сегментдангина иборат.

4°. Агар $f(x)$ даврий функция бўлса, бу функция ўзининг ҳар бир қийматини x аргументнинг чексиз кўп қийматларида (бу қийматлар орасида абсолют қиймати бўйича ҳар қанча катта бўлганлари ҳам бор) қабул қиласди.

Бу хоссадан қуйидаги натижага келиб чиқади.

21.2-натижага. Агар $f(x)$ даврий функция бўлса, у берилиш соҳаси монотон функция бўлмайди.

Мисол. $f(x) = \sin x$ даврий функция. [Унинг $X = (-\infty, +\infty)$ да монотон эмаслиги равшан.

Куйидаги

$$f_2(x) = 2x - \cos x, f_3(x) = e^{-x^2}$$

функциялар давриймас функциялар бўлади, чунки $f_2(x) = 2x - \cos x$ функция $(-\infty, +\infty)$ да ўсувчи ($f'_2(x) = 2 + \sin x > 0$), $f_3(x) = e^{-x^2}$ функция эса 1 қийматни x аргументнинг фақат битта $x = 0$ қийматидагина қабул қиласди.

Юқорида келтирилган 4°-хоссани қуйидагича айтса ҳам бўлади.

21.3-натижага. Агар $f(x)$ даврий функция бўлса, у ҳолда $\forall a \in R$ учун $f(x) = a$ tenglama ёки ечимга эга бўлмайди ёки чексиз кўп ечимга эга бўлади.

Мисол. $f(x) = x^2 - 5x + 6$ давриймас функция бўлади. Чунки $\forall a \in R$ учун, жумладан $a = 0$ да $f(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$ tenglama иккитагина ечимга эга.

5°. $f(x)$ даврий функция бўлсин. Агарда

$$f(x+T) = f(x) \quad (21.1)$$

ни T га нисбатан тенглама сифатида қаралса (x ни эса параметр дейилса), у ҳолда (21.1) тенглама x параметрнинг барча қийматлари учун умумий ($x \in X$) бўлган нолдан фарқли камидаги $T = T_1$ ечимга эга бўлади.

Бу хоссага кўра $f(x)$ функцияни давриймаслигини кўрсатиш учун x нинг иккита $x = x_0, x = x_1$ қийматларида T га нисбатан ушбу

$$f(x_0 + T) = f(x_0), f(x_1 + T) = f(x_1)$$

тенгламаларнинг нолдан фарқли умумий ечимга эга эмаслигини кўрсатиш етарлидир.

Мисол. Ушбу $(-\infty, +\infty)$ да берилган

$$f(x) = \{x\} + \sin x$$

функцияни қарайлык, бунда $\{x\} - x$ сочининг каср қисми.

Фараз қилайлик, бу даврий функция бўлсин. $T \neq 0$ сони унинг даври бўлсин. У ҳолда $\forall x \in R$ учун

$$\{x+T\} + \sin(x+T) = \{x\} + \sin x$$

бўлади. Хусусан,

$$\begin{cases} x=0 \text{ бўлганда } \{T\} + \sin T = 0, \\ x=-T \text{ бўлганда } \{-T\} + \sin(-T) = 0 \end{cases} \quad (21.3)$$

бўлади. Бу тенгликлардан

$$\{T\} + \{-T\} = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Агар ҳар қандай $x (x \in R)$ сочининг каср қисми $\{x\}$ манфиқ бўймаслигини эътиборга олсак, унда кейинги тенглик фақат $\{T\} = \{-T\} = 0$ бўлганда, яъни T бутун бўлгандагина ўринли бўлишини топамиз.

Иккинчи томондан, агар $\{T\} = 0$ бўлса, (21.3) тенглиқдан $\sin T = 0$, яъни

$$T = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

бўлиши келиб чиқади. $T = k\pi$ кўринишдаги сонлар орасида фақат 0 сонигина бутун бўлади. Демак,

$$\{T\} + \sin T = 0, \{-T\} - \sin T = 0$$

тенгламалар ягона $T = 0$ умумий ечимга эга. Бундан эса, юқоридаги 5²-хоссага кўра берилган функцияning давриймас эканлиги келиб чиқади.

6°. $f(x)$ даврий функция [бўлиб, $T \neq 0$ унинг даври бўлсин. Агар узунлиги T га тенг бўлган бирор $[\alpha, \alpha+T]$ оралиқда

$$|f(x)| \leq M (x \in [\alpha, \alpha+T])$$

бўлса, аргумент x нинг ихтиёрий қийматида ҳам шу тенгсизлик ўринли бўлади.

Мисол. Ушбу

$$f_4(x) = 2x \cos(x^2)$$

функцияни қарайлык. Фараз қилайлик, бу даврий функция бўлиб, $T \neq 0$ сон унинг даври бўлсин. Равшанки, $\forall x \in [0, T]$ учун

$$|2x \cos(x^2)| \leq 2|x| \leq 2T$$

бўлади. 6°-хоссага кўра бу тенгсизлик $\forall x \in R$ учун ҳам ўринли бўлиши керак. Бироқ $x = \sqrt{2k\pi}$ бўлганда $\left(k > \frac{T^2}{2\pi}\right)$ бу тенгсизлик бажарилмайди. Демак, $f_4(x) = 2x \cos(x^2)$ давриймас функция.

7°. Агар $f(x)$ даврий функция бўлса ва у ҳар бир x нуқтада ($x \in X$) дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функцияning ҳосиласи $f'(x)$ ҳам даврий функция бўлади.

Мисол. Ушбу

$$f_5(x) = \sin(x^2)$$

функцияни қарайлык. Бу функцияning ҳосиласи

$$f'_5(x) = 2x \cos(x^2)$$

Функция, юқорида күрдикки, давриймас функция. Демак, берилган $f_5(x) = \sin(x^2)$ функция давриймас функция.

Юқоридаги хоссалар, албатта, функцияниң даври сифатида унинг энг кичик мусбат даври (агар у мавжуд бўлса) олинганда ҳам ўринлидир. Келгусида биз ушбу бобда энг кичик мусбат даври мавжуд функцияларнига қараймиз ва функция даври деганда шу энг кичик мусбат давни тушунамиз.

2. Функцияларни даврий давом эттириш. $f(x)$ функция $(a, b]$ ярим интервалда берилган бўлсин. Бу функция ёрдамида қўйидаги

$$f^*(x) = f(x - (b - a)m), \quad x \in (a + m(b - a), b + m(b - a)] \\ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (21.4)$$

функцияни тузамиз. Равшанки, энди $f^*(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ оралиқда берилган ва даврий функция бўлади. Унинг даври $T_0 = b - a$ га тенг. Бу бажарилган жараённи функцияни даврий давом эттириши дейилади.

Агарда берилган $f(x)$ функция $(a, b]$ да узлуксиз функция бўлса ва

$$f(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(b)$$

бўлса, у ҳолда давом эттирилган $f^*(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да узлуксиз бўлади.

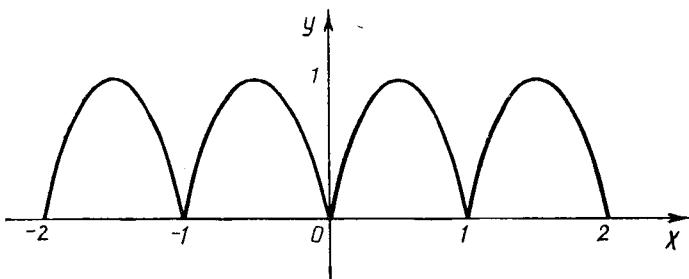
Масалан, $f(x) = 2\sqrt{x(1-x)}$ функцияни даврий давом эттиришдан ҳосил бўлган функцияниң графиги 30- чизмада тасвирланган.

Агарда берилган $f(x)$ функция $(a, b]$ да узлуксиз функция бўлса ва

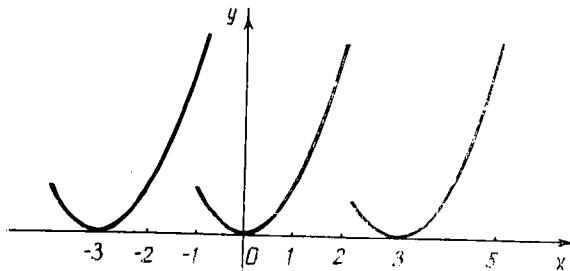
$$f(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq f(b)$$

бўлса, равшанки $f^*(x)$ функция $x = a + m(b - a)$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$) нуқталарда узилишга эга бўлади.

Масалан, $(-1, 2]$ оралиқда берилган $f(x) = x^2$ функцияни даврий давом эттиришдан ҳосил бўлган функцияниң графиги 31- чизмада тасвирланган.



30- чизма



31- чизма

$f(x)$ функция $[a, b]$ ярим интервалда берилган бўлса, уни даврий давом эттириш ҳам юқоридаги сингари бажарилади:

$$f^*(x) = f(x - (b - a)m), \quad x \in [a + m(b - a), b + m(b - a)] \\ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Агарда $f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлса, уни $(-\infty, +\infty) / \{a + m(b - a); m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = X^*$ тўпламга даврий давом эттириш мумкин:

$$f^*(x) = f(x - (b - a)m), \quad x \in (a + m(b - a), b + m(b - a)) \\ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Изоҳ. $f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган бўлса, уни $(-\infty, +\infty)$ га, умуман айтганда, икки хил даврий даром эттириш мумкин:

$$f^*(x) = f(x - (b - a)m), \quad x \in (a + m(b - a), b + m(b - a)] \\ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$f^{**}(x) = f(x - (b - a)m), \quad x \in [a + m(b - a), b + m(b - a)) \\ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

21.1-лемма. $f(x)$ функция $(a, b]$ оралиқда берилган ва y шу оралиқда интегралланувчи бўлсин. У ҳолда $f(x)$ ни $(-\infty, +\infty)$ га даврий давом эттиришидан ҳосил бўлган $f^*(x)$ функция ихтиёрий $(\alpha, \alpha + (b - a)]$ да интегралланувчи бўлади ва

$$\int_{\alpha}^{\alpha+(b-a)} f^*(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (*)$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. Шартга кўра $f(x)$ функция $(a, b]$ да интегралланувчи. $f^*(x)$ функциянинг тузилишига биноан (қаралсан, (21.4)) унинг $(\alpha, \alpha + (b - a)]$ ($\forall \alpha \in R$) да интегралланувчи бўлишини топамиз.

Аниқ интегралнинг хоссасига кўра

$$\int_{\alpha+(b-a)}^{\alpha+(b-a)} f^*(x) dx = \int_{\alpha}^a f^*(x) dx + \int_a^b f^*(x) dx + \int_b^{\alpha+(b-a)} f^*(x) dx \quad (21.5)$$

бўлади. Равшанки, $\forall x \in (a, b]$ учун $f^*(x) = f(x)$. Демак,

$$\int_a^b f^*(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Энди

$$\int_b^{\alpha+(b-a)} f^*(x) dx$$

интегралда $x = y + (b - a)$ алмаштириши бажарамиз:

$$\int_b^{\alpha+(b-a)} f^*(x) dx = \int_a^{\alpha} f^*(y + (b - a)) dy = \int_a^{\alpha} f^*(y) dy = - \int_{\alpha}^a f^*(y) dy.$$

Натижада (21.5) тенглик ушбу

$$\int_a^{\alpha+(b-a)} f^*(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

кўринишга келади. Бу эса 21.1-леммани исботлайди. Бу леммадаги (*) формула содда геометрик маънога эга: 32-чизмадаги штрихланган юзалар бир-бирига тенг.

3. Гармоникалар. Ушбу

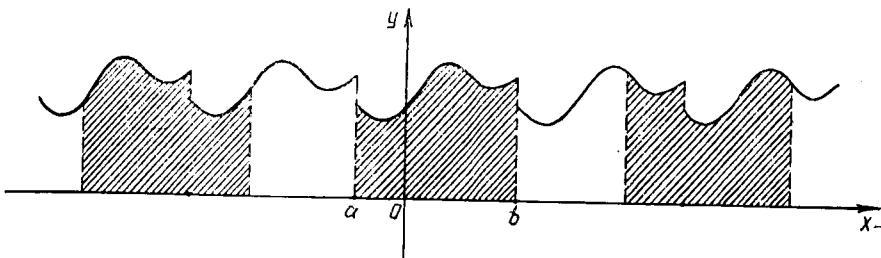
$$f(x) = A \cdot \sin(\alpha x + \beta) \quad (21.6)$$

функцияни қарайлик, бунда A, α, β — ўзгармас сонлар. Бу даврий функция бўлиб, унинг даври $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ га тенгдир. Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{\alpha}\right) &= A \cdot \sin \left[\alpha \left(x + \frac{2\pi}{\alpha} \right) + \beta \right] = A \cdot \sin [(\alpha x + \beta) + 2\pi] = \\ &= A \cdot \sin (\alpha x + \beta) = f(x). \end{aligned}$$

Бу $f(x) = A \cdot \sin(\alpha x + \beta)$ функция гармоника деб аталади.

Гармоникалар математика ва унинг татбиқларида, физика ва техникида кўп учрайди. Масалан, массаси m га тенг бўлган M нуқтанинг тўғри чизиқ бўйлаб OM ($OM = s$) масофага пропорционал бўлган $F = -ks$ куч таъсири остидаги ҳаракати (тебранма ҳаракати) $s = s(t)$ ни топиш ушбу



32- чизма

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \gamma^2 \cdot s = 0, \quad \left(\gamma = \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$$

дифференциал тенгламани ечишга келади. Бу тенгламанинг ечими гармоникадан иборат бўлади.

Берилган

$$f(x) = A \cdot \sin(\alpha x + \beta)$$

гармониканинг графиги, $y = \sin x$ функция графигини Ox ва Oy ўқлар бўйича сиқиш (чўзиш) ҳамда Ox ўқи бўйича суриш натижасида ҳосил бўлади. Масалан,

$$f(x) = 2 \cdot \sin(2x + 1)$$

гармониканинг графигини ясаш процесси ва унинг графиги 33-чи замада тасвирланган.

Тригонометриядан маълум бўлган формуладан фойдаланиб, гармоникани қўйидагича ёзиш мумкин:

$$f(x) = A \cdot \sin(\alpha x + \beta) = A \cdot (\cos \alpha x \cdot \sin \beta + \sin \alpha x \cdot \cos \beta).$$

Агар

$$A \cdot \sin \beta = a, \quad A \cdot \cos \beta = b$$

деб белгиласак, унда гармоника ушбу

$$f(x) = a \cos \alpha x + b \sin \alpha x \quad (21.7)$$

кўринишга келади.

Демак, ҳар қандай (21.6) гармоника (21.7) кўринишда ифодаланади.

Аксинча, ҳар қандай (21.7) кўринишдаги функция гармоникани ифодалайди. Шуни исботлаймиз. $f(x) = a \cos \alpha x + b \sin \alpha x$ бўлиб, a ва b лар ўзгармас бўлсин. Уни қўйидагича ёзиб оламиз:

$$f(x) = a \cos \alpha x + b \sin \alpha x = \sqrt{a^2 + b^2} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha x \right].$$

Агар

$$\sqrt{a^2 + b^2} = A, \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \beta, \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \beta$$

дейилса, у ҳолда

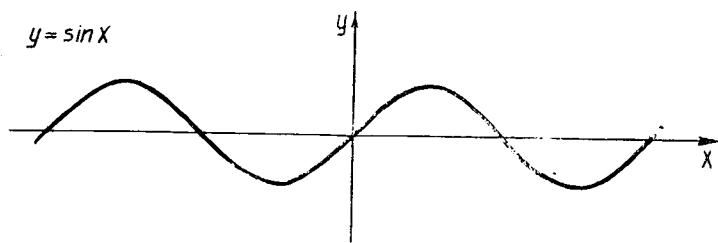
$$f(x) = A \cdot [\sin \beta \cos \alpha x + \cos \beta \sin \alpha x] = A \sin(\alpha x + \beta)$$

бўлишини топамиз.

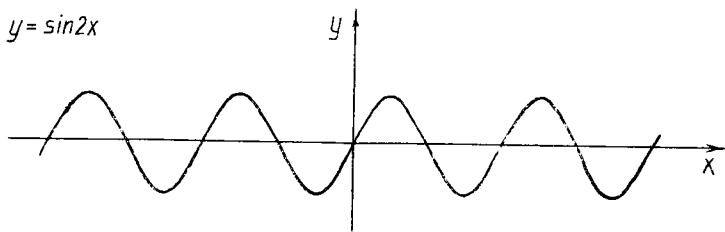
Биз юқорида гармоникалар содда даврий функциялар бўлиб, уларнинг графиклари $y = \sin x$ функция графиги характеристига эга бўлишини кўрдик.

Аммо бир нечта (турли) гармоникалар йиғиндисини олсан, у ҳам даврий функция бўлсада, аммо анча мураккаб функция бўлади, график-

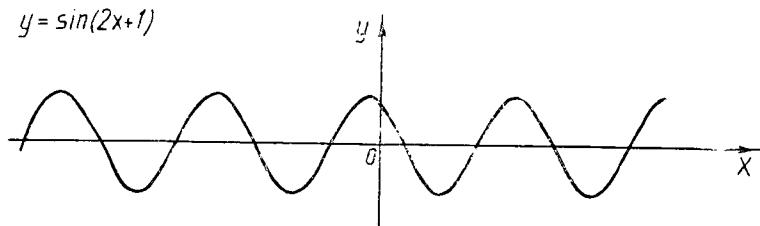
$$y = \sin x$$



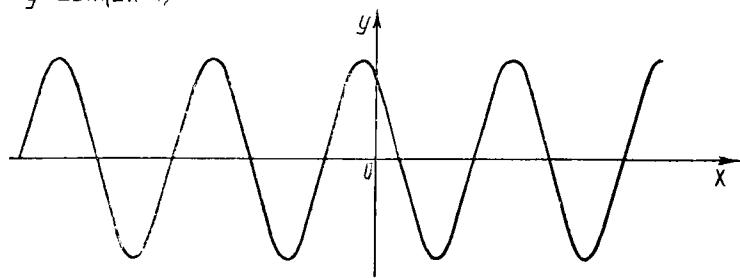
$$y = \sin 2x$$



$$y = \sin(2x+1)$$



$$y = 2\sin(2x+1)$$



ти эса $y = \sin x$ функция графиги характеридан бир мунча фарқ қиласы. Масалан, учта турли гармоникалар:

$$-\frac{4}{\pi} \sin x, \quad -\frac{4}{3\pi} \sin 3x, \\ -\frac{4}{5\pi} \sin 5x$$

йиғиндисидан иборат ушбу

$$\varphi(x) = -\frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \sin 5x \right)$$

функция графигини қарайдыган бўлсак, у 34-чиизмада тасвирланган бўлиб, $y = \sin x$ функция графия характеристига ўхшамайди.

4. Бўлакли-узлуксизлик ва бўлакли-дифференциалланувчилик. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда берилган бўлсин. Маълумки, бу функция $\forall x \in (a, b)$ нуқтада узлуксиз бўлса, ҳамда a нуқтада ўнгдан, b нуқтада чапдан узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз дейилар эди.

Энди $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ да бўлакли-узлуксизлиги тушунчаси билан танишамиш.

Агар $[a, b]$ оралиқни шундай

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n] \quad (a_0 = a, a_n = b)$$

бўлакларга ажратиш мумкин бўлсанки,

$$([a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n])$$

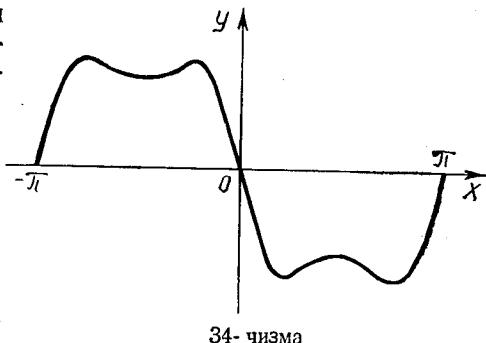
ҳар бир (a_k, a_{k+1}) ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) да $f(x)$ функция узлуксиз бўлса, ҳамда $x = a_k$ нуқталарда чекли ўнг $f(a_k + 0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) ва чап $f(a_k - 0)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) лимитларга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ да бўлакли-узлуксиз деб аталади.

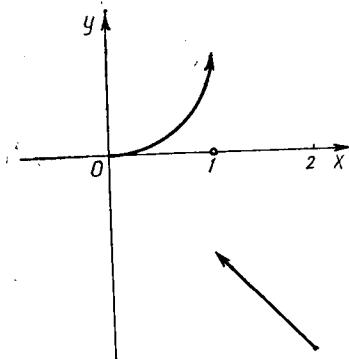
Бошқача айтганда, агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқнинг чекли сондаги нуқталаридан бошқа барча нуқталарнда узлуксиз бўлса ва шу чекли сондаги нуқталардаги узилиши эса биринчи гур узилиш бўлса, функция $[a, b]$ да бўлакли-узлуксиз деб агалади. $f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган ва узлуксиз бўлсин. Равишанки, бу функция $[a, b]$ да бўлакли-узлуксиз бўлади.

Ч 4.5.3. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{ягар } 0 \leqslant x < 1 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{ягар } x = 1 \quad \text{бўлса,} \\ -x, & \text{ягар } 1 < x \leqslant 2 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайдык. Агар $[0, 2]$ оралиқни $[0, 1] \cup [1, 2]$ ва $[1, 2]$ бўлакларга ажратсак ($[0, 2] = [0, 1] \cup [1, 2]$), у ҳолда $[0, 1]$ ва $(1, 2]$ бўлакларда берилган функция уз-





35- чизма

луксиз, $x = 1$ нүктада эса чекли ўнг ва чап $f(1 + 0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = -1$, $f(1 - 0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1$

лимитларга эга бўлиши топилади. Демак, берилган функция $[0, 2]$ оралиқда бўлакли-узлуксизdir (35- чизма).

Агар $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да берилган бўлиб, унинг исталган чекли $[\alpha, \beta] \subset (-\infty, +\infty)$ қисмидаги (α, β) бўлакли-узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да бўлакли-узлуксиз деб аталади.

Айтайлик, $f(x)$ функция (a, b) да берилган ва бўлакли-узлуксиз бўлсин. Бу функцияни $(-\infty, +\infty)$ га даврий давом

эттиришдан ҳосил бўлган $f^*(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да бўлакли-узлуксиз бўлади.

Масалан, $f(x) = x$ ($x \in (-\pi, \pi)$) бўлсин. Бу функцияни $(-\infty, +\infty)$ га даврий давом эттиришдан ҳосил бўлган функцияning графиги 36- чизмада тасвирланган.

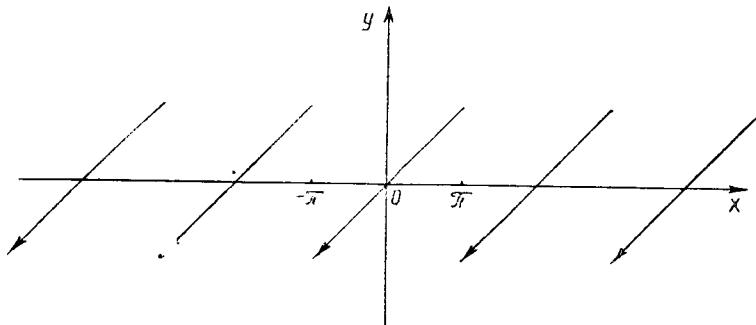
Энди бўлакли-дифференциалланувчилик тушунчаси билан танишамиз. $f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган бўлсин. Маълумки, бу функция $\forall x \in (a, b)$ нүктада дифференциалланувчи бўлса, ҳамда унинг a нүктада ўнг ҳосиласи

$$f'(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

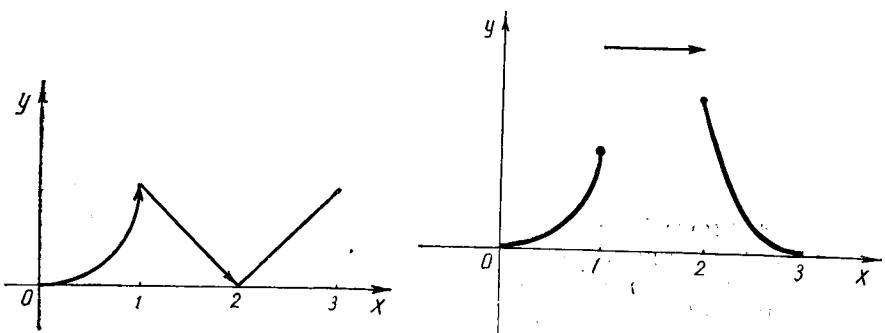
b нүктада чап ҳосиласи

$$f'(b - 0) = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда дифференциалланувчи дейилар эди.



36- чизма



37- чизма

38- чизма

Агар $[a, b]$ оралиқни $[a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n]$ бўладиган шундай $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n]$ ($a_0 = a, a_n = b$) бўлакларга ажратиш мумкин бўлсаки, ҳар бир (a_k, a_{k+1}) да ($k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$) функция дифференциалланувчи бўлса ҳамда $x = a_k$ нуқталарда чекли ўнг $f'(a_k + 0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$) ва чап $f'(a_k - 0)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ да бўлакли-дифференциалланувчи деб аталади.

Бошқача айтганда, агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқнинг чекли сондаги нуқталаридан бошқа барча нуқталарида дифференциалланувчи бўлса ва шу чекли сондаги нуқталарда чекли бир томонли ҳосилаларга эга бўлса, функция $[a, b]$ да бўлакли-дифференциалланувчи бўлади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган ва дифференциалланувчи бўлсин. Равшанки, бу функция $[a, b]$ да бўлакли-дифференциалланувчи бўлади.

Мисол. 1. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } 0 \leq x < 1 \text{ бўлса,} \\ 2 - x, & \text{агар } 1 \leq x < 2 \text{ бўлса,} \\ x - 2, & \text{агар } 2 \leq x \leq 3 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик (37- чизма). Агар $[0, 3]$ оралиқни $[0, 1], [1, 2], [2, 3]$ бўлакларга ажратсан, унда $[0, 1], (1, 2)$ ва $(2, 3]$ ларда $f(x)$ функция дифференциалланувчи бўлиб, $x = 1, x = 2$ нуқталарда эса чекли ўнг ва чап ҳосилалар

$$f'(1 - 0) = 2, f'(1 + 0) = -1, f'(2 - 0) = -1, f'(2 + 0) = 1$$

га эга бўлишини топамиз.

Демак, $f(x)$ функция $[0, 3]$ да бўлакли- дифференциалланувчи.

2. Ушбу

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } 0 \leq x < 1 \text{ бўлса,} \\ 2, & \text{агар } 1 \leq x < 2 \text{ бўлса,} \\ \frac{3}{2}(x-3)^2, & \text{агар } 2 \leq x \leq 3 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик (38- чизма). Агар $[0, 3]$ оралиқни $[0, 1], [1, 2], [2, 3]$ бўлакларга ажратсан, унда $[0, 1], (1, 2), (2, 3]$ ларда $\varphi(x)$ функция дифференциалланувчи бўлиб, $x = 1, x = 2$ нуқталарда эса чекли ўнг ва чап ҳосилалар

$$f'(1 - 0) = 2, f'(1 + 0) = 0, f'(2 - 0) = 0, f'(2 + 0) = -3$$

га эга бўлишини топамиз. Демак, $\varphi(x)$ функция $[0, 3]$ да бўлакли- дифференциалланувчи.

Юқорида келтирилган таъриф ва мисоллардан, $[a, b]$ оралиқда бўлакли-дифференциалланувчи функция шу оралиқда бўлакли-узлуксиз функция бўлишини кўриш мумкин.

Агар $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да берилган бўлиб, унинг исталган чекли $[\alpha, \beta]$ ($\alpha, \beta \subset (-\infty, +\infty)$) қисмидаги бўлакли-дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да бўлакли-дифференциалланувчи деб аталади.

$f(x)$ функция (a, b) да берилган ва бўлакли-дифференциалланувчи бўлса, уни $(-\infty, +\infty)$ га даврий давом эттиришдан ҳосил бўлган $f^*(x)$ $(-\infty, +\infty)$ да бўлакли-дифференциалланувчи бўлади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган бўлсин. Агар $[a, b]$ оралиқни $[a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n]$ бўладиган шундай $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n]$ ($a_0 = a, a_n = b$) бўлакларга ажратиш мумкин бўлсанки, ҳар бир (a_k, a_{k+1}) да ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) функция $f'(x)$ ҳосилага эга ва бу ҳосила узлуксиз бўлса ҳамда $x = a_k$ нуқталарда чекли ўнг $f'(x_k + 0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) ва чап $f'(a_k - 0)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ да бўлакли-силлиқ деб аталади.

Бошқача айтганда, агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқнинг чекли сондаги нуқталаридан бошқа барча нуқталарида $f'(x)$ ҳосилага эга ва бу ҳосила узлуксиз бўлса ҳамда шу чекли сондаги нуқталарда чекли бир томонли ҳосилаларга эга бўлса, функция $[a, b]$ да бўлакли-силлиқ деб аталади.

2- §. Фурье қаторининг таърифи

Биз мазкур курснинг 14-бобида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

функционал қаторни батафсил ўргандик. Энди ҳар бир ҳади

$$u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

гармоникадан иборат ушбу

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (21.8)$$

хусусий функционал қаторни қарайлик.

Одатда (21.8) қатор тригонометрик қатор деб аталади.

$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ сонлар эса тригонометрик қаторнинг коэффициентлари дейиллади.

Шундай қилиб, тригонометрик қатор гарчанд функционал қатор бўлса ҳам (унинг ҳар бир ҳади муайян функциялар бўлганлиги учун) ўз коэффициентлари $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ лар билан гўла аниқланади.

(21.8) тригонометрик қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

тригонометрик кўпқад деб аталади.

1. Фурье қаторининг таърифи. $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган ва шу оралиқда интегралланувчи бўлсин. Ўхода

$$f(x) \cos nx, f(x) \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

функциялар ҳам, иккита интегралланувчи функциялар кўпайтмаси сифатида (қаралсин, 1-қисм, 9-боб, 7-§) $[-\pi, \pi]$ да интегралланувчи бўлади. Бу функцияларнинг интегралларини ҳисоблаб, уларни қўйида-гича белгилайлик:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (21.9)$$

Бу сонлардан фойдаланиб ушбу

$$T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (21.10)$$

тригонометрик қаторни тузамиз.

21. 2-таъриф. $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ коэффициентлари (21.9) формулалар билан аниқланган (21.10) тригонометрик қатор $f(x)$ функцияниң Фурье қатори деб аталади. $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ сонлар эса $f(x)$ функцияниң Фурье коэффициентлари дейилади.

Демак, берилган функцияниң Фурье қатори шундай тригонометрик қаторки, унинг коэффициентлари шу функцияга боғлиқ бўлиб, (21.9) формула билан аниқланади. Шу сабабли (21.10) қаторни (унинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлишидан қатъи назар) ушбу «~» белги билан қўйидагича ёзилади:

$$f(x) \sim T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Мисол. Ушбу

$$f(x) = e^{ix} \quad (-\pi \leq x \leq \pi, x \neq 0)$$

функцияниң Фурье қатори тузилсин.

(21.9) формуладан фойдаланиб, бу функцияниң Фурье коэффициентларини тозамиш:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix} dx = \frac{1}{i\pi} \left(e^{ix} - e^{-ix} \right) = \frac{2}{\pi} \sin x.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha \cos nx + n \sin nx}{\alpha^2 + n^2} e^{\alpha x} \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= (-1)^n \frac{1}{\pi} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} \operatorname{sh} \alpha \pi, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha \sin nx - n \cos nx}{\alpha^2 + n^2} e^{\alpha x} \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{1}{\pi} \frac{2n}{\alpha^2 + n^2} \operatorname{sh} \alpha \pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(қаранг, 1- қисм, 8- боб, 2- §).

Демак, берилган функцияның Фурье қатори

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \\ &= \frac{2 \operatorname{sh} \alpha \pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{2\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2} (\alpha \cos nx - n \sin nx) \right\} \end{aligned}$$

бүләди.

Фараз қилайлык, бирор

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (21.10)$$

тригонометрик (функционал) қатор $[-\pi, \pi]$ да яқынлашувчи бүлсін. Үннің йиғиндисини $f(x)$ деб белгилайлык:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = f(x). \quad (21.11)$$

Бундан ташқари, (21.10) ни ҳамда уни $\cos kx$ ва $\sin kx$ ($k = 1, 2, \dots$) ларга күпайтиришдан ҳосил бўлган

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cdot \cos kx + b_n \sin nx \cdot \cos kx) &= \\ &= f(x) \cos kx, \end{aligned} \quad (21.12)$$

$$\frac{a_0}{2} \sin kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cdot \sin kx + b_n \sin nx \cdot \sin kx) = f(x) \sin kx$$

($k = 1, 2, 3, \dots$) қаторларни $[-\pi, \pi]$ да ҳадлаб интеграллаш мүмкин бўлсін.

(21. 11) ва (21. 12) ларни $[-\pi, \pi]$ да интеграллаймиз:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx = \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) = \pi \cdot a_0, \\
 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cdot \cos kx + \right. \\
 &\quad \left. + b_n \sin nx \cdot \cos kx) \right] dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos kx dx \right), \\
 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} \sin kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cdot \sin kx + \right. \\
 &\quad \left. + b_n \sin nx \cdot \sin kx) \right] dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin kx dx \right).
 \end{aligned}$$

Аяп $n \neq k$ да

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-k)x - \cos(n+k)x] dx = \\
 &= \left[\frac{\sin(n-k)x}{n-k} - \frac{\sin(n+k)x}{n+k} \right]_{-\pi}^{\pi} \cdot \frac{1}{2} = 0
 \end{aligned}$$

Ва

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \pi,$$

шунингдек,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx dx &= 0 \quad (n \neq k), \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi, \\
 \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin kx dx &= 0 \quad (n, k = 0, 1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \pi \cdot a_0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= \pi \cdot a_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx &= \pi \cdot b_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

эканини топамиз. Бу тенгликлардан эса

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \tag{21.9}$$

келиб чиқади.

Демак, $f(x)$ функция тригонометрик қаторга ёйилган бўлса ва бу қатор учун юқорида айтилган шартлар бажарилган бўлса, у ҳолда бу тригонометрик қаторнинг коэффициентлари $f(x)$ функция орқали (21.9) формулалар билан ифодаланади, яъни $f(x)$ нинг Фурье коэффициентлари бўлади. Бинобарин, қаторнинг ўзи $f(x)$ нинг Фурье қатори бўлади.

2. Жуфт ва тоқ функцияларнинг Фурье қаторлари. Жуфт ва тоқ функцияларнинг Фурье қаторлари бирмунча содда кўришишга эга бўлади. Биз қўйнда уларни келтирамиз.

$f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган жуфт функция бўлсин. У шу $[-\pi, \pi]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. Равшанки, бу ҳолда $f(x) \cos nx$ жуфт функция, $f(x) \sin nx$ ($n = 1, 2, \dots$) эса тоқ функция бўлади ва улар $[-\pi, \pi]$ да интегралланувчи бўлади.

(21.9) формулалардан фойдаланиб, $f(x)$ функцияянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \right] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[- \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \right] = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Демак, жуфт $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (21.13)$$

бўлиб, Фурье қатори эса

$$f(x) \sim T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

бўлади.

Энди $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган тоқ функция бўлсин ва у шу $[-\pi, \pi]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. Бу ҳолда $f(x) \cos nx$ тоқ функция, $f(x) \sin nx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) эса жуфт функция бўлади. (21.9) формулалардан фойдаланиб, $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[- \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \right] = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Демак, тоқ $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (21.14)$$

бўлиб, Фурье қатори эса

$$f(x) \sim T(f; x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

бўлади.

Мисоллар. 1. $f(x) = x^2$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) функциянинг Фурье қатори ёзилсин. (21.13) формулалардан фойдаланиб берилган функциянинг Фурье коэффициент-

ларини топамиз:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} x^2 \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^\pi - \frac{4}{n\pi} \int_0^\pi x \sin nx dx = \\ = -\frac{4}{n\pi} \left[\left(-x \cdot \frac{\cos nx}{n} \right)_0^\pi + \int_0^\pi \cos nx dx \right] = (-1)^n \frac{4}{n^2} (n = 1, 2, \dots).$$

Демак, $f(x) = x^2$ функциянынг Фурье қатори ушбу

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right)$$

күренишида бўлади.

2. Ушбу

$$f(x) = x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

төқ функциянынг Фурье қатори ёзилсин.

(21.14) формулаардан фойдаланиб берилган функциянынг Фурье коэффициентлари-

$$\text{ни топамиз: } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi} x \cos nx \Big|_0^\pi + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos nx dx =$$

$= -\frac{2}{n} \cos n\pi = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} (n = 1, 2, 3, \dots)$. Демак, $f(x) = x$ функциянынг Фурье қатори қуидагича бўлади:

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} \sin nx = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right).$$

3. $[-l, l]$ оралиқда берилган функциянынг Фурье қатори. Биз юқорида $[-\pi, \pi]$ оралиқда берилган функция учун унинг Фурье қатори тушунчасини киритдик. Бундай тушунчани иҳтиёрий $[-l, l]$ ($l > 0$) оралиқда берилган функция учун ҳам киритиш мумкин. $f(x)$ функция $[-l, l]$ ($l > 0$) да берилган ва шу оралиқда интегралланувчи бўлсин.

Равшанки, ушбу

$$t = \frac{\pi}{l} x \tag{21.15}$$

алмаштириш $[-l, l]$ оралиқни $[-\pi, \pi]$ оралиққа ўтказади. Агар

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi} t\right) = \varphi(t)$$

дейилса, $\varphi(t)$ функцияни $[-\pi, \pi]$ да берилган ва шу оралиқда интегралланувчи бўлишини кўриш қийин эмас. Бу $\varphi(t)$ функциянынг Фурье қатори қуидагича бўлади:

$$\varphi(t) \sim T(\varphi; t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

бунда

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt dt$$

($n = 1, 2, 3, \dots$).

Юқоридаги (21.15) тенгликтин әзтиборга олсак, унда

$$\Phi\left(\frac{\pi}{l}x\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{\pi}{l} x + b_n \sin n \frac{\pi}{l} x \right)$$

бўлиб, унинг коэффициентлари эса

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \Phi\left(\frac{\pi}{l}x\right) \cos n \frac{\pi}{l} x dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \Phi\left(\frac{\pi}{l}x\right) \sin n \frac{\pi}{l} x dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

бўлади.

Натижада

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (21.16)$$

га эга бўламиз, бунда

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (21.17)$$

(21.16) нинг ўнг томонидаги тригонометрик қаторни $[-l, l]$ да берилган $f(x)$ нинг Фурье қатори дейилади, (21.17) Фурье коэффициентлари дейилади.

Мисол. Ушбу]

$$f(x) = e^x \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

функциянинг Фурье қатори ёзилсин.

(21.17) формуулалардан фойдаланиб берилган функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз (бунда $l = 1$):

$$a_0 = \int_{-1}^1 e^x dx = e - e^{-1},$$

$$a_n = \int_{-1}^1 e^x \cos n\pi x dx = \frac{n\pi \sin n\pi x + \cos n\pi x}{1 + n^2\pi^2} e^x \Big|_{-1}^{+1} =$$

$$= \frac{1}{1 + n^2\pi^2} (e \cos n\pi - e^{-1} \cos n\pi) = (-1)^n \frac{e - e^{-1}}{1 + n^2\pi^2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \int_{-1}^1 e^x \sin n\pi x dx = \frac{\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x}{1 + n^2\pi^2} e^x \Big|_{-1}^{+1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1+n^2\pi^2} (e \cdot n \pi \cos n \pi + e^{-1} n \pi \cos n \pi) = \frac{n \pi \cos n \pi}{1+n^2\pi^2} (e^{-1} - e) = \\
&= \frac{n \pi (-1)^n}{1+n^2\pi^2} (e^{-1} - e) = (-1)^{n+1} \frac{e - e^{-1}}{1+n^2\pi^2} n \pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots).
\end{aligned}$$

Демак, $f(x) = e^x$ функцияниң $(-1 \leq x < 1)$ Фурье қатори ушбу

$$e^x \sim \frac{e - e^{-1}}{2} + (e - e^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2} \cos n \pi x + \frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2\pi^2} n \pi \sin n \pi x \right]$$

күринища бўлади.

Изоҳ. (21.10) формула билан аниқланган

$$T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

тригонометрик қаторнинг $(-\infty, +\infty)$ да берилган 2π даврли функция эканлигини кўриш қийин эмас:

$$T(f; x + 2\pi) = T(f; x).$$

Агар $[-\pi, \pi]$ да берилган $f(x)$ функцияни $(-\infty, +\infty)$ га даврий давом эттирасек (қаранг ушбу бобнинг 1-§).

$f^*(x) = f(x - 2\pi m)$, $x \in (-\pi + 2\pi m, \pi + 2\pi m)$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), у ҳолда, равшанки, $(-\infty, +\infty)$ да

$$f^*(x) \sim T(f^*; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

бўлади.

3-§. Леммалар. Дирижле интеграл

Функцияларни Фурье қаторига ёйиш шартларини аниқлаш, юқорида айтиб ўтганимиздек, Фурье қаторлари назариясининг муҳим масалаларидан бири. Уни ҳал этувчи теоремани келтиришдан аввал баъзи бир фактларни ўрганамиз.

1. Леммалар. Қуйида келтириладиган леммалар Фурье қаторлари назариясида муҳим роль ўйнайди.

21.2-лемма. $[a, b]$ оралиқда берилган ва интегралланувчи ихтиёрий $\varphi(x)$ функция учун

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin px dx = 0, \quad (21.18)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \cos px dx = 0 \quad (21.19)$$

бўлади.

Исбот. $[a, b]$ оралиқнинг бирор

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b)$$

бўлинишини олайлик. Интегралнинг хоссасига кўра

$$\int_a^b \varphi(x) \sin px dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x) \sin px dx \quad (21.20)$$

бўлади. $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да чегараланган. Демак,

$$\inf \{ \varphi(x); x \in [x_k, x_{k+1}] \} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

мавжуд. Уни m_k билан белгилаймиз:

$$m_k = \inf \{ \varphi(x); x \in [x_k, x_{k+1}] \} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Энди (21. 20) интегрални

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) \sin px dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x) \sin px dx = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\varphi(x) - m_k) \sin px dx + \sum_{k=0}^{n-1} m_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin px dx = S_1 + S_2 \end{aligned} \quad (21.21)$$

кўринишида ёзиб, сўнгра ҳар бир

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\varphi(x) - m_k) \sin px dx, \\ S_2 &= \sum_{k=0}^{n-1} m_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin px dx \end{aligned}$$

қўшилувчини баҳолаймиз.

Агар $\omega_k \varphi(x)$ функцияниң $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) даги тебраниши бўлса, S_1 учун ушбу

$$|S_1| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_k dx = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k \quad (\Delta x_k = x_{k+1} - x_k) \quad (21.22)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Шартга кўра $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да интегралланувчи. Унда 1- қисм, 9- боб, 5- § да келтирилган теоремага асоссан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, $[a, b]$ оралиқнинг диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиниши учун

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} \quad (21.23)$$

бўлади. (21.22) ва (21.23) муносабатлардан

$$|S_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (21.24)$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди $S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin px dx$ йиғиндини баҳолаймиз. Равшанки,

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin px dx \right| = \left| \frac{\cos px_k - \cos px_{k+1}}{p} \right| \leq \frac{2}{p}.$$

Демак, $|S_2| \leq \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{n-1} |m_k|$ бўлади. p ни етарли катта қилиб олиш ҳисобига

$$\frac{2}{p} \sum_{k=0}^{n-1} |m_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (21.25)$$

бўлади. Натижада (21.21), (21.24) ва (21.25) муносабатлардан етарли катта p лар учун $\left| \int_a^b \varphi(x) \sin px dx \right| < \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin px dx = 0.$$

(21.19) муносабатнинг ўринли бўлиши худди шунга ўхшаш кўрсатилади. Лемма исбот бўлди.

Хусусан, $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда бўлакли-узлуксиз бўлса, унинг учун лемманинг тасдиғи ўринли бўлди.

21.1-эслатма. Леммадаги

$$I(p) = \int_a^b \varphi(x) \sin px dx, \quad I_1(p) = \int_a^b \varphi(x) \cos px dx$$

интеграллар, равшанки, параметрга (p — параметр) боғлиқ интеграллардир. Мазкур курснинг 17-боб, 5-§ ида биз бундай интегралларнинг лимитини интеграл белгиси остида лимитга ўтиб ҳисоблаш ҳақидаги теоремада исбот қилган эдик. Бу теорема шартлари юқоридаги интеграллар учун бажарилмайди ($p \rightarrow \infty$ да интеграл остидаги функциянинг лимити мавжуд эмас) ва, демак, ундан фойдалана олмаймиз. Шунинг учун ҳам лемма юқорида алоҳида исботланди. Иккинчи томондан, лемма параметрга боғлиқ интегралларнинг лимитини бевосита, интеграл белгиси остида лимитга ўтмасдан ҳам, ҳисоблаш мумкин эканлигига мисол бўлди.

Юқоридаги лемма чегараланмаган функциянинг хосмас интеграли учун ҳам умумлаштирилиши мумкин.

$\varphi(x)$ функция $[a, b]$ ярим интервалда берилган, b нуқта шу функциянинг маҳсус нуқтаси бўлсин.

21.3-лемма. $[a, b]$ да абсолют интегралланувчи ихтиёрий $\varphi(x)$ функция учун

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin px dx = 0, \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \cos px dx = 0 \quad (21.26)$$

бўлади.

Исбот. Ихтиёрий η ($0 < \eta < b - a$) олиб,

$$\int_a^b \varphi(x) \sin px dx$$

интегрални қўйидагича ёзиб

$$\int_a^b |\varphi(x)| \sin px dx = \int_a^{b-\eta} |\varphi(x)| \sin px dx + \int_{b-\eta}^b |\varphi(x)| \sin px dx, \quad (21.27)$$

бу тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчини баҳолаймиз.

Қаралаётган $\varphi(x)$ функция $[a, b - \eta]$ да интегралланувчи бўлганлиги сабабли юқорида келтирилган 21.2-леммага кўра

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^{b-\eta} \varphi(x) \sin px dx = 0$$

бўлади. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $p_0 > 0$ топиладики, барча $p > p_0$ учун

$$\left| \int_a^{b-\eta} \varphi(x) \sin px dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (21.28)$$

бўлади.

Шартга кўра $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да абсолют интегралланувчи. Таърифга биноан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики,

$0 < \eta < \delta$ бўлганда $\int_{b-\eta}^b |\varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Демак,

$$\left| \int_{b-\eta}^b \varphi(x) \sin px dx \right| \leq \int_{b-\eta}^b |\varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (21.29)$$

Юқоридаги (21.27), (21.28) ва (21.29) муносабатлардан етарли катта p лар учун $\left| \int_a^b \varphi(x) \sin px dx \right| < \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади. Демак,

$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin px dx = 0$. (21.26) муносабатнинг ўринли бўлиши худди шунга ўхшаш кўрсатилади. Лемма исбот бўлди.

Исбот этилган леммалардан муҳим натижа келиб чиқади.

21.4-натижада $f(x)$ орлиқда бўлакли-узлуксиз ёки шу оралиқда абсолют интегралланувчи $f(x)$ функцияниң Фурье коэффициентлари $n \rightarrow \infty$ да нолга интилади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0.$$

2. Дирихле интегралы. Фурье қаторининг яқинлашувчилигиги үрганиш, бу қатор қисмий йиғиндилари кетма-кетлигининг лимити ни аниқлаш демакдир. Шу мақсадда қатор қисмий йиғиндинин қулай күрнишда ёзиб оламиз.

$f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ оралиқда берилған ва абсолют интегралланувчи (хос ёки хосмас маңнода) бўлсин. Бу функцияning Фурье коэффициентларин топиб,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \quad (k = 1, 2, \dots),$$

сўнгра топилган коэффициентлар бўйича $f(x)$ функцияning Фурье қаторини тузамиз:

$$f(x) \sim T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Энди бу қаторнинг ушбу

$$F_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

қисмий йиғиндинин оламиз. Бу йиғиндиаги $a_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ ва $b_k (k = 1, 2, \dots)$ ларнинг ўрнига уларнинг ифодаларини қўйисак, у ҳолда

$$F_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [\cos kt \cdot \cos kx + \sin kt \cdot \sin kx] dt.$$

Маълумки,

$$\cos kt \cdot \cos kx + \sin kt \cdot \sin kx = \cos k(t - x).$$

Демак,

$$F_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t - x) \right] dt.$$

Интеграл остидаги ифода учун қўйидаги муносабат ўринли:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t - x) = \frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}}.$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$2 \sin \frac{u}{2} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku \right] = \sin \frac{u}{2} + \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{u}{2} \cos ku = \sin \frac{u}{2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \left[\sin \left(k + \frac{1}{2} \right) u - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) u \right] = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u$$

$$(u = t - x).$$

Бу тенгликтің өрдамыда $F_n(f; x)$ йиғинди құйидагида ифодаланади:

$$F_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1) \cdot \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} dt. \quad (21.30)$$

(21.30) тенгликтің ўнг томонидаги интеграл $f(x)$ функцияның Дирихле интегралы деб аталади.

Шундай қылыш, $f(x)$ функция Фурье қаторининг қисмий йиғинди $F_n(f; x)$ параметрга бояғылған (21.30) күрнишдеги интеграл (Дирихле интегралы) дан иборат экан.

$f^*(x)$ функция $\hat{f}(x)$ функцияның $(-\infty, +\infty)$ га даврий давоми бўлсин. Бинобарин, $f^*(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да берилган, 2π даврли, $[-\pi, \pi]$ да абсолют интегралланувчи функциядир. Қулайлик учун биз қуйидеги $f(x)$ функцияның ўзини $(-\infty, +\infty)$ да берилган, 2π даврли, $[-\pi, \pi]$ да абсолют интегралланувчи функция деб ҳи-соблаймиз ва $f^*(x)$ ўрнига $\hat{f}(x)$ ни ёзиб кетаверамиз.

$$\text{Энди } F_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{|t-x|}{2}} dt \quad \text{интегралда}$$

$t = x + u$ алмаштириш қиласыз. Интеграл остидаги функция 2π даврли функция бўлганлиги сабабли, бу алмаштириш натижасида интеграллаш чегараси ўзгармасдан қолади (ушбу бобнинг 1-§ ига қаралсин). Натижада

$$F_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin(2n+1) \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} du$$

бўлади. Бу интегрални ушбу

$$F_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x+u) \frac{\sin(2n+1) \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} du + \right. \\ \left. + \int_0^{\pi} f(x+u) \frac{\sin(2n+1) \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} du \right]$$

икки қисмга ажратиб, ўнг томондаги биринчи интегралда u ўзгарувчина $-u$ га алмаштирамиз. Ўзгарува

$$F_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \quad (21.31)$$

бўлади. Дирихле интеграли $F_n(f; x)$ нинг бу кўринишидан келгусида фойдаланилади.

Хусусан, $f(x) \equiv 1$ бўлса, (21.31) муносабатдан

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (21.32)$$

бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқата н ҳам, бу ҳолда

$$a_0 = 2, \quad a_k = b_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

бўлиб,

$$F_n(1; x) \equiv 1$$

бўлади.

4- §. Фурье қаторининг яқинлашувчилиги

Энди берилган $f(x)$ функция қандай шартларни бажарганда, унинг Фурье қатори яқинлашувчи бўлишини топиш билан шуғулланамиз.

1. Локаллаштириш принципи. Юқорида келтирилган Дирихле интеграли

$$F_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \quad (21.31)$$

қўйидаги муҳим хоссага эга. Ихтиёрий $\delta (0 < \delta < \pi)$ сонни олиб, (21.31) интегрални икки қисмга ажратамиз:

$$\begin{aligned} F_n(f; x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\delta [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du. \end{aligned}$$

Ўнг томондаги иккинчи

$$I_2(n, \delta) = \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

интегралнинг $n \rightarrow \infty$ да лимити мавжуд ва нолга teng. Ҳақиқатан ҳам, берилган $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да, ва демак, $[\delta, \pi]$ да абсолют интегралланувчи бўлганлигидан

$$\varphi(u) = \frac{1}{2 \sin \frac{u}{2}} [f(x+u) + f(x-u)]$$

функция ҳам шу оралиқда абсолют интегралланувчи бўлади ($[\delta, \pi]$ да $\sin \frac{u}{2}$ функция чегараланган) ва 21.3-леммага асосан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_2(n, \delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\pi} \varphi(u) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u du = 0.$$

Натижада қуйидаги теоремага келамиз.

21.1-теорема. *Ушбу*

$$I_1(n, \delta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

интегралнинг $n \rightarrow \infty$ даги лимити маёжуд бўлгандагина Дирихле интегралнинг $n \rightarrow \infty$ даги лимити мавжуд бўлади ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(f; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_1(n, \delta).$$

Равшанки, $I_1(n, \delta)$ интегралда f функцияниң $[x-\delta, x+\delta]$ оралиқдаги қийматларигина қатнашади.

Шундай қилиб, берилган $f(x)$ функция Фурье қаторининг x нуқтада яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши бу функцияниң шу нуқта $(x-\delta, x+\delta)$ атрофидаги қийматларигагина боғлиқ бўлар экан. Шунинг учун келтирилган теорема *локаллаштириши принципи* деб юритилади. Унинг моҳиятини қуйидагича ҳам тушунтириш мумкин.

Иккита турли 2π даврли $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларнинг ҳар бирни $[-\pi, \pi]$ да абсолют интегралланувчи бўлсин. Равшанки, бу функцияларнинг Фурье қаторлари ҳам, умуман айтганда, турлича бўлади. Бирор $x_0 \in (-\pi, \pi)$ ва $\delta (0 < \delta < \pi)$ учун

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi(x), \text{ агар } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \\ f(x) &\neq \varphi(x), \text{ агар } x \in [-\pi, \pi] \setminus [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \end{aligned}$$

бўлса, у ҳолда $n \rightarrow \infty$ да бу функциялар Фурье қаторлари қисмий йиғиндилигининг x_0 нуқтадаги лимитлари ёки бир вақтда мавжуд (бу ҳолда улар бир-бирига тенг) бўлади, ёки улар бир вақтда мавжуд бўлмайди.

Пировардида, ўқувчиларимиз эътиборини локаллаштириш принципининг яна бир муҳим томонига жалб қилайлик.

Келтирилган теоремадан $I_1(n, \delta)$ интегралнинг $n \rightarrow \infty$ даги лимити барча $\delta (0 < \delta < \pi)$ лар учун бир вақтда ёки мавжуд бўлиши, ёки мавжуд бўлмаслиги келиб чиқади.

2. Фурье қаторининг яқинлашувчилиги.

21.2-теорема. 2π даврли $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ оралиқда бўлакли-дифференциалланувчи функция бўлса, у ҳолда бу функцияниң Фурье қатори

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

[$-\pi, \pi$] да яқинлашувчи бўлади. Унинг ийғиндиси

$$T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

бўлади ($x \in [-\pi, \pi]$).

Исбот. (21.32) тенгликнинг ҳар икки томонини

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$$

га кўпайтириб қўйидагини топамиз:

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du. \quad (21.33)$$

(21.31) ва (21.33) муносабатлардан фойдаланиб ушбу

$$F_n(f; x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$$

айирмани қўйидагича ёзиш мумкин:

$$F_n(f; x) - \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u) - f(x+0) - f(x-0)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du.$$

Агар

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) - f(x+0)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = I_{1n}(f; x),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x-u) - f(x-0)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = I_{2n}(f; x)$$

деб белгиласак, унда

$$F_n(f; x) - \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = I_{1n}(f; x) + I_{2n}(f; x)$$

бўлади.

Энди $I_{1n}(f; x)$ ва $I_{2n}(f; x)$ ларни баҳолаймиз. Ихтиёрий δ ($0 < \delta < \pi$) сонни олиб, $I_{1n}(f; x)$ ни икки қисмга ажратиб ёзайлик:

$$I_{1n}(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta [f(x+u) - f(x+0)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du + \\ + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi [f(x+u) - f(x+0)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du. \quad (21.34)$$

Локаллаштириш принципига асосан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) - f(x+0)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = 0$$

Бўлади. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 = n_0(\varepsilon, \delta) \in N$ тошлиадики, $\forall n > n_0$ учун

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) - f(x+0)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (21.35)$$

бўлади.

Энди (21.34) тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи интегрални баҳолайлик. Уни δ ни танлаб олиш ҳособига етарлича кичик қила олишимиз мумкинлигини кўрсатайлик.

Шартга кўра, $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да бўлакли-дифференциаллачувчи. Бинобарин, $\forall x (x \in [-\pi, \pi])$ нуқтада унинг бир томонли чекли ҳосилалари, хусусан, ўнг ҳосиласи

$$\lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} = f'(x+0)$$

мавжуд. Демак, шундай $\delta_1 > 0$ топиладики $0 < u < \delta_1$ бўлганда

$$\left| \frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} \right| \leq M_1 \quad (M_1 = \text{const})$$

бўлади.

Шунингдек, шундай $\delta_2 > 0$ топиладики, $0 < u < \delta_2$ бўлганда

$$\frac{\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \leq M_2 \quad (M_2 = \text{const})$$

бўлади.

Агар $\delta = \min \left\{ \delta_1, \delta_2, \frac{\pi \varepsilon}{2 M_1 M_2} \right\}$ дейилса, унда ихтиёрий $n \in N$ учун

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \left[\frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} \right] \frac{\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u du \right| \leq$$



$$\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \left| \frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} \right| \cdot \frac{\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} du \leq \frac{1}{\pi} \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot \delta < \frac{\varepsilon}{2} \quad (21.36)$$

бўлади. Натижада (21.34), (21.35) ва (21.36) муносабатлардан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун $|I_{1n}(f; x)| < \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади.

Икинчи интеграл

$$I_{2n}(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x-u) - f(x-0)] \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

ҳам ҳудди шунга ўхшаш баҳоланади ва $|I_{2n}(f; x)| < \varepsilon$ бўлиши топила-ди. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$|F_n(f; x) - \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]| < 2\varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(f; x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$$

эканини билдиради.

Шундай қилиб, $f(x)$ функциянинг Фурье қатори $[-\pi, \pi]$ да яқинлашувчи, унинг йиғиндиси $T(f; x)$ эса $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ га тенг:

$$T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Теорема исбот бўлди.

Равшанки, теорема шартларини қаноатлантирувчи $f(x)$ функциянинг узлуксизлик нуқталарида

$$T(f; x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = f(x)$$

бўлади.

$x = \pm \pi$ бўлганда ушбу бобнинг 1- § ида айтилган ушбу

$$f(\pi+0) = f(-\pi+0), f(-\pi-0) = f(\pi-0)$$

тенгликлар эътиборга олинса, унда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(f; -\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(-\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(f; \pi) = \frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(f; -\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(f; \pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)],$$

ъни

$$T(f; -\pi) = T(f; \pi) = \frac{1}{2} [f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)]$$

ўлади.

21.5-натижада. Агар 2π даврли $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да узлукиз, бўлакли-дифференциалланувчи ва $f(-\pi) = f(\pi)$ бўлса, бу функциянинг Фурье қатори $[-\pi, \pi]$ да яқинлашувчи, йиғиндиши

$$T(f; x) = f(x) \quad (x \in [-\pi, \pi])$$

ўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x) = x^2 \quad (x \in [-\pi, \pi])$$

ункциянинг Фурье қатори қўйидагида

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos kx = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right)$$

ўлишини кўрган эдик. Равшани, x^2 функция $[-\pi, \pi]$ оралиқда 21.5-натижанинг шартларини қаноатлантиради. Шу натижага кўра $[-\pi, \pi]$ да унинг Фурье қатори яқинлашувчи, йиғиндиши эса x^2 га тенг бўлади. Демак,

$$\begin{aligned} x^2 = & \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos kx = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right) \quad (x \in [-\pi, \pi]). \end{aligned}$$

2. Ушбу

$$f(x) = \cos ax \quad (0 < a < 1)$$

ункцияни қарайлик. Унинг Фурье коэффициентлари

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax dx = 2 \frac{\sin a\pi}{a\pi},$$

$$\begin{aligned} a_n = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(a+n)x + \cos(a-n)x) dx = \\ & = (-1)^n \frac{2a}{a^2 - n^2} \frac{\sin a\pi}{\pi} \quad (n = 1, 2, \dots), \\ b_n = & 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

ўлади. Демак, берилган функциянинг Фурье қатори

$$\cos ax \sim \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2} \cos kx$$

ўлади. Агар бу $f(x) = \cos ax$ функция 21.5-натижанинг шартларини бажаришини ўтиборга олсак, унда

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2} \cos kx$$

ўлишини топамиз.

Кейинги тенгликтан $x = 0$ дейилса,

$$1 = \frac{\sin a\pi}{\pi} \left[\frac{1}{a} + 2a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2} \right],$$

яъни

$$\frac{\pi}{\sin a \pi} = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k} \right)$$

келиб чиқади.

3. Күйидаги

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{агар } -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{агар } 0 < x < \pi \end{cases} \text{ бўлса}$$

функцияни қарайлик. Бу функция юқоридаги 21.2- теорема шартиниң қаноатлантишини кўриш қийин эмас.

Берилган функциянинг Фурье коэффициентларини топиб, Фурье қаторини ёзамиш:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x dx = - \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^0 = \frac{\pi}{2},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \cos kx dx = - \frac{1}{k\pi} \left[x \sin kx \right]_{-\pi}^0 +$$

$$+ \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^0 \sin kx dx = \frac{1}{k^2\pi} (\cos k\pi - \cos 0) = \frac{1}{k^2\pi} [(-1)^k - 1].$$

Демак,

$$a_k = \begin{cases} -\frac{2}{k^2\pi}, & \text{агар } k - \text{тоқ сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } k - \text{жуфт сон бўлса.} \end{cases}$$

Энди b_k коэффициентларни ҳисоблаймиз:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left[x \frac{\cos kx}{k} \right]_{-\pi}^0 -$$

$$- \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos kx}{k} \right]_{-\pi}^0 dx = \frac{\cos k\pi}{k} = \frac{(-1)^k}{k}.$$

Шундай қилиб, $x \in (-\pi, \pi)$ учун

$$T(f; x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin kx}{k} = f(x),$$

$x = \pm \pi$ да эса

$$T(f; -\pi) = T(f; \pi) = \frac{0 + \pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

бўлади.

4. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } -\pi \leq x < 0 \\ -1, & \text{агар } 0 \leq x < \pi \end{cases} \text{ бўлса}$$

функцияни қарайлик. Бу функция юқоридаги теореманинг шартларини қаноатлашибдири. Берилган функцияниг Фурье коэффициентларини ҳисоблаб, унинг Фурье қаторини топамиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos nx dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin nx dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx =$$

$$= -\frac{1}{n\pi} [\cos 0 - \cos nx] + \frac{1}{n\pi} [\cos nx - \cos 0] = \frac{2}{n\pi} (\cos n\pi - \cos 0) =$$

$$= \frac{2}{n\pi} [(-1)^n - 1].$$

емак,

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{агар } n = \text{жуфт сон бўлса,} \\ -\frac{4}{n\pi}, & \text{агар } n = \text{тоқ сон бўлса.} \end{cases}$$

Шундай қилиб, берилган $f(x)$ функцияниң Фурье қатори

$$T(f; x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = -\frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

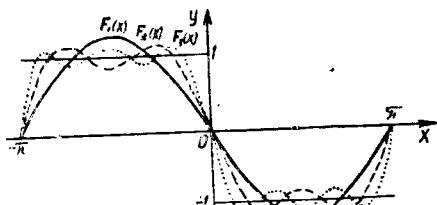
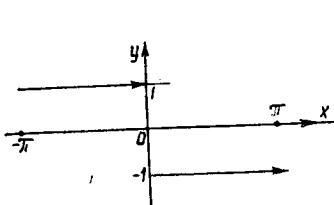
бўлади ва унинг йигиндиси!

$$T(f; x) = \begin{cases} f(x), & \text{агар } x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\} \text{ бўлса,} \\ \frac{f(-0) + f(+0)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{f(-\pi - 0) + f(-\pi + 0)}{2} = 0, & \text{агар } x = -\pi \text{ бўлса,} \\ \frac{f(\pi - 0) + f(\pi + 0)}{2} = 0, & \text{агар } x = \pi \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади. 39- чизмада $f(x)$ функцияниң ва унинг Фурье қаторининг $F_1(f; x)$, $F_2(f; x)$ ва $F_3(f; x)$ қисмий йигиндилари тасвирланган.

5- §. Қисмий йигиндиларнинг бир экстремал хоссаси. Бессель тенгизлиги

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда берилган. Бу функция ва унинг квадрати $f^2(x)$ ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлсин. Одатда бундай функциялар квадрати билан интегралланувчи деб аталади.



39- чизма

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ да квадрати билан интегралланувчи бўлса, у шу оралиқда абсолют интегралланувчи бўлади. Ҳақиқатан ҳам ушбу

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2} (1 + f^2(x))$$

тengsизликдан фойдаланиб

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

нинг мавжуд бўлишини топамиз. Бу эса $f(x)$ функцияning $[a, b]$ да абсолют интегралланувчи эканини билдиради.

Аммо $f(x)$ функцияning абсолют интегралланувчи бўлишидан, унинг квадрати билан интегралланувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, ушбу

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

функция $(0, 1]$ да интегралланувчи, лекин

$$f^2(x) = \frac{1}{x}$$

функция эса $(0, 1]$ да интегралланувчи эмас (қаралсин, 16- боб, 5- §).

Демак, квадрати билан интегралланувчи функциялар тўплами, абсолют интегралланувчи функциялар тўпламининг қисми бўлади.

$f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да квадрати билан интегралланувчи функция, $T_n(x)$ — даражаси n дан катта бўлмаган тригонометрик кўпхад бўлсин:

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx).$$

Равшанки, бундай кўпхадлар ҳам $[-\pi, \pi]$ да [квадрати билан интегралланувчи бўладилар. Коши — Буняковский тенгсизлигидан

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx \quad (21.37)$$

интегралнинг ҳам мавжудлиги келиб чиқади. Бу интеграл муайян $I(x)$ да $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_n, \beta_n$ ларга боғлиқ:

$$I = I(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_n, \beta_n) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx.$$

Энди қуйидаги масалани қарайлик. Шу коэффициентлар қандай танлаб олинганда I энг кичик қийматга эга бўлади? Бу масалани ҳал этиш учун юқоридаги (21.37) интегрални ҳисоблайлик:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x) dx \quad (21.38)$$

$f(x)$ функция Фурье коэффициентлари учун

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

формулалардан фойдалансак,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \right) \right] dx = \\ &= \frac{a_0}{2} a_0 \pi + \sum_{k=1}^n \left(\alpha_k \cdot a_k \pi + \beta_k \cdot b_k \cdot \pi \right) = \\ &= \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\alpha_k \cdot a_k + \beta_k \cdot b_k \right) \right] \end{aligned} \quad (21.39)$$

бўлади.

Агар

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \sin kx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi$$

(қаранг, ушбу бобнинг 2- § ига) эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \right) \right]^2 dx = \\ &= \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\alpha_k^2 + \beta_k^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (21.40)$$

бўлади. Юқоридаги (21.38), (21.39), (21.40) тенгликлардан фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2\pi \left[\frac{a_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \beta_k b_k \right] + \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^n \beta_k^2 \right] = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \right] + \pi \left[\frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - a_k)^2 + \sum_{k=1}^n (\beta_k - b_k)^2 \right]. \end{aligned}$$

Бу тенглиқдан кўринадики,

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx$$

интеграл

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= a_0, \\ \alpha_k &= a_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ \beta_k &= b_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n)\end{aligned}$$

бўлгандағина ўзининг энг кичик қийматига эришади ва у қиймат

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \right]$$

бўлади, яъни:

$$\begin{aligned}&\min_{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \right].\end{aligned}$$

Шундай қилиб, қўйидаги теоремани исботлади.

21.3- теорема. $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган, квадрати билан интегралланувчи бўлсин. Даражаси n дан кепта бўлмаган барча тригонометрик кўпхадлар $\{T_n(x)\}$ ичida ушибу

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx$$

интегралга энг кичик қиймат берувчи кўпхад $f(x)$ функция Фурье қаторининг n - қисмий ийғиндиси бўлади:

$$\begin{aligned}&\min_{T(x)} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F_n(f; x)]^2 dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \right]. \quad (21.41)\end{aligned}$$

21-6- натижада. Агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да квадрати билан интегралланувчи бўлса, у ҳолда бу функциянинг Фурье коэффициентлари квадратларидан тузилган

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \text{ ва } \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$$

қаторлар яқинлашувчи бўлади ва қўйидаги тенгсизлик ўринлидир:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (21.42)$$

Исбот. (21.41) муносабатдан $\forall n$ учун

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \right] \geqslant 0,$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

бўлади. Бу ерда n ни чексизликка интилтириб, келтирилган натижани ва тенгсизликин ҳосил қиласиз.

(21.42) тенгсизлик *Бессель тенгсизлиги* деб аталади.

6- §. Яқинлашувчи Фурье қатори йиғиндисининг функционал хоссалари

Биз мазкур курснинг 14- бобида яқинлашувчи функционал қаторлар йиғиндисининг функционал хоссаларини баттафсил ўргандик. Равшанки, берилган функциянинг Фурье қатори функционал қаторларнинг хусусий ҳолидир. Бинобарин, тегишли шартларда Фурье қаторлари йиғиндилари ҳам 14- бобда келтирилган хоссаларга эга бўлади. Қўйида уларни исботсиз келтирамиз.

$f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган ва унинг Фурье қатори

$$T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (21.43)$$

$[-\pi, \pi]$ да яқинлашувчи бўлсин.

1°. Фурье қатори йиғиндисининг узлуксизлиги. Агар (21.43) қатор $[-\pi, \pi]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу қаторнинг $T(f; x)$ йиғиндиси $[-\pi, \pi]$ оралиқда узлуксиз функция бўлади.

2°. Фурье қаторини ҳадлаб интеграллаш. Агар (21.43) қатор $[-\pi, \pi]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (21.43) қатор ҳадларининг интегралларидан тузилган

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_a^b \cos nx dx + b_n \int_a^b \sin nx dx \right) = \\ & = \frac{a_0}{2} (b - a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{\sin nb - \sin na}{n} + b_n \frac{\cos na - \cos nb}{n} \right) \end{aligned}$$

қатор $(-\pi \leq a < b \leq \pi)$ ҳам яқинлашувчи бўлади ва унинг йиғиндиси

$$\int_a^b T(f; x) dx$$

га тенг бўлади, яъни

$$\begin{aligned} & \int_a^b T(f; x) dx = \int_a^b \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx = \\ & = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx \right]. \end{aligned}$$

3°. Фурье қаторини ҳадлаб дифференциаллаш. Агар (21.43) қаторнинг ҳар бир ҳадининг ҳосилаларидан тузилган

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx)$$

қатор $[-\pi, \pi]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда берилган Фурье қаторининг йиғиндиси $T(f; x)$ шу $[-\pi, \pi]$ да $T'(f; x)$ ҳосилага эга ва

$$T'(f; x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx)$$

бўлади.

Шундай қилиб, умумий ҳолдагидек $f(x)$ функция Фурье қатори йиғиндисининг функционал хоссаларини ўрганишда Фурье қаторининг текис яқинлашувчи бўлиши муҳим роль ўйнашти. Бинобарин, Фурье қаторининг текис яқинлашувчи бўлишини таъминлайдиган шартларни аниқлаш лозим бўлади.

Энди шу ҳақида теорема келтира миз.

Фурье қаторининг текис яқинлашиши. 21.4- теорема. $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ оралиқда берилган, узлуксиз ҳамда $f(-\pi) = f(\pi)$ бўлсин. Агар бу функция $[-\pi, \pi]$ оралиқда бўлакли-силлик бўлса, у ҳолда $f(x)$ функцияниңг Фурье қатори

$$T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (21.43)$$

$[-\pi, \pi]$ оралиқда текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Берилган $f(x)$ функция Фурье қатори (21.43) нинг ҳар бир

$$u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ҳади учун

$$|u_n(x)| = |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| \quad (n = 1, 2, \dots)$$

бўлади.

Энди

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлишини кўрсатамиз.

Фурье коэффициентлари

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ни қарайлик.

Бўлаклаб интеграллаш қоидасига кўра

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = \frac{1}{\pi} f(x) \cdot \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$-\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx, \quad (21.44)$$

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\left(\frac{\cos nx}{n}\right) = -\frac{1}{\pi} f(x) \cdot \frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \\ &+ \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx = -\frac{1}{n\pi} (-1)^n [f(\pi) - f(-\pi)] + \\ &+ \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx. \end{aligned}$$

Агар $f(-\pi) = f(\pi)$ шартни эътиборга олсак, у ҳолда

$$b_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx \quad (21.45)$$

бўлади.

$f'(x)$ нинг Фурье коэффициентларини a'_n ва b'_n десак:

$$a'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx, \quad b'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

у ҳолда (21.44) ва (21.45) муносабатларга кўра

$$a_n = -\frac{1}{n} b'_n, \quad b_n = \frac{1}{n} a'_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

бўлади. Натижада

$$|a_n| + |b_n| = \frac{1}{n} (|a'_n| + |b'_n|)$$

бўлади.

Агар

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} (|a'_n| + |b'_n|) &= \frac{1}{n} |a'_n| + \frac{1}{n} |b'_n| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2} \left(a'^*_n + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{2} \left(b'^*_n + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2} \left(a'^*_n + b'^*_n \right) + \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

бўлишини ҳисобга олсак, унда ушбу

$$|a_n| + |b_n| \leqslant \frac{1}{2} (a'^*_n + b'^*_n) + \frac{1}{n^2} \quad (21.46)$$

тengsизликка эга бўламиз.

Шартга кўра $f'(x)$ функция бўлакли-узлуксиздир. Бинобарин, у квадрати билан интегралланувчиdir. Шунинг учун бу функцияning a'_n, b'_n Фурье коэффициентлари Бессель тengsизлигини қаноатлантиради, яъни

$$\frac{a_0''}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n'' + b_n'') \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) dx$$

бўлади. Демак,

$$\frac{a_0''}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n'' + b_n'')$$

қатор яқинлашувчи. Унда яқинлашувчи қаторларнинг хоссаларига кўра ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_n'' + b_n'') + \frac{1}{n^2} \right] \quad (21.47)$$

қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

Юқорида келтирилган (21.46) тенгсизликка мувофиқ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \quad (21.48)$$

қаторнинг ҳар бир ҳади (21.47) қаторнинг мос ҳадидан катта эмас. Таққослаш теоремасига кўра (қаралсин, 1- том, 11- боб, 8- §) (21.48) қатор яқинлашувчи, демак,

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

қатор яқинлашувчи бўлади.

Вейерштрасс аломатидан (14- боб, 2- §) фойдаланиб, (21.43) Фурье қаторининг $[-\pi, \pi]$ да текис яқинлашувчи бўлишини топамиз. Теорема исбот бўлди.

7- §. Функцияларни тригонометрик кўлҳад билан яқинлаштириш

Юқорида, 6- § да кўрдикки, агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да узлуксиз, бўлакли-узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, унинг Фурье қатори $T(x)$ шу оралиқда текис яқинлашувчи бўлади, яъни қисмий йиғиндилар кетма-кетлиги $\{F_n(f; x)\}$ шу $f(x)$ функцияга текис яқинлашади. Текис яқинлашувчиликнинг таърифига биноан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ учун

$$\sup_{-\pi < x < \pi} |F_n(f; x) - f(x)| < \varepsilon \quad (21.49)$$

бўлади. Бу эса юқорида айтилган шартларни қаноатлантирувчи функцияларни исталган аниқликда $F_n(x)$ тригонометрик кўпҳад билан тақрибан алмаштириш мумкинligини ифодалайди.

Аммо, 14- бобда келтирилган Вейерштрасс теоремасига кўра, ихтиёрий $[a, b]$ да узлуксиз функцияни исталган аниқликда алгебраик кўпҳад билан тақрибан алмаштириш мумкин эди.

Табиийки, (21.49) ўринли бўлиши учун $f(x)$ нинг $[-\pi, \pi]$ да узлуксиз бўлишининг ўзи етарли бўлмасмикин, деган савол туғилади. Бу саволга жавоб салбайдир. Ҳаттоқи, узлуксиз функцияниң Фурье қатори, умуман айтганда, яқинлашувчи бўлмай ҳолиши ҳам мумкин экан (қаранг, И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, Москва, 1947, 7- боб, 3- §). Демак, Фурье қаторлари қисмий йиғиндиларидан, функцияларнинг бу, кенгроқ синфи учун тақрибий ҳисоблаш аппаратлари сифатида фойдалана олмас эканмиз. Қуйида биз $[-\pi, \pi]$ да узлуксиз ихтиёрий $f(x)$ функция учун шундай тригонометрик кўпҳадлар $\{\sigma_n(f; x)\}$ кетма-кетлигини тузамизки,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\pi < x < \pi} |\sigma_n(f; x) - f(x)| = 0$$

бўлади. Шуни ҳам таъкидлаймизки, бу тригонометрик кўпҳадлар Фурье қаторлари қисмий йиғиндилари ёрдамида осонгина тузилади.

Фейер йиғиндиси. $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ оралиқда берилган ва узлуксиз бўлсин. Бу функция Фурье қаторининг қисмий йиғиндиси

$$F_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

дан фойдаланиб, ушбу

$$\begin{aligned} \sigma_n(f; x) &= \frac{1}{n} [F_0(f; x) + F_1(f; x) + \dots + F_{n-1}(f; x)], \\ F_0(f; x) &= \frac{a_0}{2} \end{aligned} \quad (21.50)$$

йиғиндини тузамиз. Одатда (21.50) йиғинди $f(x)$ функцияниң *Фейер йиғиндиси* деб аталади.

$f(x)$ функцияниң Фейер йиғиндиси $\sigma_n(f; x)$ тригонометрик кўпҳад бўлади. Ҳақиқатан ҳам, Фурье қатори қисмий йиғиндиларининг ифодалари

$$\begin{aligned} F_0(f; x) &= \frac{a_0}{2}, \\ F_1(f; x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x, \\ F_2(f; x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x, \\ &\dots \\ F_{n-1}(f; x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_{n-1} \cos(n-1)x + \\ &+ b_{n-1} \sin(n-1)x \end{aligned}$$

га кўра

$$\sigma_1(f; x) = \frac{a_0}{2},$$

$$\sigma_2(f; x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} a_1 \cos x + \frac{1}{2} b_1 \sin x,$$

$$\sigma_3(f; x) = \frac{a_0}{2} + \frac{2}{3} a_1 \cos x + \frac{2}{3} b_1 \sin x + \frac{1}{3} a_2 \cos 2x + \frac{1}{3} b_2 \sin 2x,$$

$$\dots$$

$$\sigma_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \frac{n-1}{n} a_1 \cos x + \frac{n-1}{n} b_1 \sin x + \dots + \frac{1}{n} a_{n-1} \cos(n-1)x +$$

$$+ \frac{1}{n} b_{n-1} \sin(n-1)x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n} a_k \cos kx + \frac{n-k}{n} b_k \sin kx \right)$$

бўлади.

Агар 3- § да келтирилган (21.32) тенглик

$$F_n(1, x) = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ни эътиборга олсак, унда (21.50) дан

$$\sigma_n(1; x) = 1 \quad (21.51)$$

бўлиши келиб чиқади.

(21.50) муносабатдаги $F_k(f; x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) нинг ўрнига унинг ифодаси (қаралсин, (21.31))

$$F_k(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin \frac{2k+1}{2} u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

ни қўйиб қўйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \sigma_n(f; x) &= \frac{1}{n\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin \frac{2k+1}{2} u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \right\} = \\ &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi \left[\frac{f(x+u) + f(x-u)}{\sin \frac{u}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1) \frac{u}{2} \right] du = \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{\sin t} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)t \right] dt. \end{aligned}$$

Интеграл остидаги йиғинди учун

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)t = \frac{\sin^2 nt}{\sin t}$$

муносабат ўринли. Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} \sin t \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)t &= \sum_{k=0}^{n-1} \sin t \cdot \sin(2k+1)t = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left[\cos 2kt - \cos(2k+2)t \right] = \frac{1}{2} (1 - \cos 2nt) = \sin^2 nt. \end{aligned}$$

Натижада $f(x)$ функцияниң Фейер йиғиндиси ушбу

$$\sigma_n(f; x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) + f(x-2t)] \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt \quad (21.52)$$

күренишни олади. Бу ва юқоридаги (21.51) тенгликтан

$$1 = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt \quad (21.53)$$

бўлиши келиб чиқади.

21.5-теорема (Фейер теоремаси). $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ оралиқда берилган, узлуксиз ва $f(-\pi) = f(\pi)$ бўлсин. У ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\pi < x < \pi} |\sigma_n(f; x) - f(x)| = 0$$

бўлади.

Исбот. (21.53) тенгликтинг ҳар икки томонини $f(x)$ га кўпайтирасак, у ҳолда

$$f(x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2f(x) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt$$

бўлади. Бу ва (21.52) муносабатдан фойдаланиб, ушбуни топамиз:

$$\begin{aligned} \sigma_n(f; x) - f(x) &= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \left[f(x+2t) + f(x-2t) - \right. \\ &\quad \left. - 2f(x) \right] \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt. \end{aligned} \quad (21.54)$$

Модомики, шартга кўра $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да узлуксиз экан, у Кантор теоремасига биноан текис узлуксиз бўлади. Демак, $\forall \epsilon > 0$ олингандা ҳам, шундай $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ топиладики, $|x' - x''| < 2\delta$ тенгизлигни қаноатлантирувчи $\forall x', x'' \in [-\pi, \pi]$ учун

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2} \quad (21.55)$$

бўлади. Шу топилган δ сонни олиб (уни $\delta < \frac{\pi}{2}$ деб ҳисоблаш мумкин), (21.54) интегрални икки қисмга ажратамиз:

$$\sigma_n(f; x) - f(x) = I_1(n, \delta) + I_2(n, \delta),$$

бунда

$$I_1(n, \delta) = \frac{1}{n\pi} \int_0^\delta [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)] \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt,$$

$$I_2(n, \delta) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\delta}^{\pi/2} \left[f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x) \right] \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt.$$

Энди $I_1(n, \delta)$ ва $I_2(n, \delta)$ интегралларни баҳолаймиз. Юқоридаги (21.55) муносабатни эътиборга олиб қўйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} |I_1(n, \delta)| &\leq \frac{1}{n\pi} \int_0^\delta \left[|f(x+2t) - f(x)| + |f(x-2t) - f(x)| \right] \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt < \frac{1}{n\pi} \int_0^\delta \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{t^2} \right) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt \leq \\ &\leq \frac{\epsilon}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Демак, $\forall \epsilon > 0$ олингандага ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, барча $n \in N$ лар учун $|I_1(n, \delta)| < \frac{\epsilon}{2}$ бўлади.

Энди $I_2(n, \delta)$ интегрални баҳолаймиз.

$$\begin{aligned} |I_2(n, \delta)| &\leq \frac{1}{n\pi} \int_{-\delta}^{\pi/2} |f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)| \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt \leq \\ &\leq \frac{1}{n\pi} \cdot 4M \int_{-\delta}^{\pi/2} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt, \end{aligned}$$

бунда $M = \max_{-\pi < x < \pi} |f(x)|$. Равшанки,

$$t \in \left[\delta, \frac{\pi}{2} \right] (\delta > 0) \text{ да } \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 \leq \frac{1}{\sin^2 \delta}$$

бўлади. Натижада $I_2(n, \delta)$ учун ушбу $|I_2(n, \delta)| \leq \frac{1}{n\pi} \cdot \frac{4M}{\sin^2 \delta} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2M}{n \sin^2 \delta}$ баҳога эга бўламиз. Агар натурал n сонини $n > n_0 = \left[\frac{4M}{\epsilon \sin^2 \delta} \right]$ қилиб олинса, унда $\frac{2M}{n \sin^2 \delta} < \frac{\epsilon}{2}$ ва, демак, $|I_2(n, \delta)| < \frac{\epsilon}{2}$ бўлади.

Шундай қилиб, $\forall \epsilon > 0$ олингандага ҳам шундай $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ топиладики, $\forall n \in N$ учун $|I_1(n, \delta)| < \frac{\epsilon}{2}$ бўлди. Ва шу $\epsilon > 0$ ва $\delta = \delta(\epsilon)$ ларга кўра шундай n_0 топилдики, $\forall n > n_0$ учун $|I_2(n, \delta)| < \frac{\epsilon}{2}$ бўлди. Бу тасдиқларни бирлаштирасак, $\forall \epsilon > 0$ учун шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0, \forall x \in [-\pi, \pi]$ учун $|\sigma_n(f; x) - f(x)| < \epsilon$ бўлади.

Демак, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\pi < x < \pi} |\sigma_n(f; x) - f(x)| = 0$. Теорема исбот бўлди.

Натижада, функцияни тригонометрик кўпхад билан яқинлаштириш ҳақидаги қўйидаги теоремага келамиз.

21.6-теорема (Вейерштрасс теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган, узлуксиз ва $f(-\pi) = f(\pi)$ бўлса, у ҳолда шундай $\mathcal{P}_n(x)$ тригонометрик кўпхад топиладики,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\pi < x < \pi} |\mathcal{P}_n(x) - f(x)| = 0$$

бўлади.

8-§. Ўртача яқинлашиш. Фурье қаторининг ўртача яқинлашиши

Функционал кетма-кетлик ва қаторларда текис яқинлашиш тушунчалиги билан бир қаторда, ундан умумийроқ—ўртача яқинлашиш тушунчалиги ҳам киритилади.

1. Ўртача яқинлашиш. $[a, b]$ оралиқда бирор $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (21.56)$$

функционал кетма-кетлик ва $f(x)$ функция берилган бўлиб, $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳамда $f(x)$ лар шу оралиқда квадрати билан интегралланувчи бўлсин.

21.3-таъриф. Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0$$

бўлса, у ҳолда (21.56) функционал кетма-кетлик $f(x)$ функцияга $[a, b]$ да ўртача яқинлашади деб аталади.*

Мисоллар. 1. Ушбу $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$:

$$x, x^2, \dots, x^n, \dots (x \in [0, 1])$$

функционал кетма-кетлик

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \in [0, 1) \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияга $[0, 1]$ да ўртача яқинлашади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2 dx = \int_0^1 (x^n - 0)^2 dx = \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1}$$

ва, демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 [x^n - 0]^2 dx = 0.$$

* Аниқроқ айғандада, киритилган яқинлашишни, одатда ўрія квадратик яқинлашиши деб аталади.

2. Құйидаги $\{f_n(x)\} = \{\sqrt{2^n} x e^{-\frac{1}{2} nx^2}\}$:

$$\sqrt{2x} e^{-\frac{1}{2} x^2}, \sqrt{4x} e^{-\frac{1}{2} 2x^2}, \dots, \sqrt{2nx} e^{-\frac{1}{2} nx^2}, \dots (x \in [0, 1])$$

функционал кетма-кетлик $f(x) = 0$ функцияға $[0, 1]$ да ўртата яқинлашмайды, чүнки

$$\int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2 dx = \int_0^1 [\sqrt{2nx} e^{-\frac{1}{2} nx^2} - 0]^2 dx =$$

$$= \int_0^1 2nx e^{-nx^2} dx = \int_0^1 e^{-nx^2} d(nx^2) = (1 - e^{-n}),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 [\sqrt{2nx} e^{-\frac{1}{2} nx^2} - 0]^2 dx = 1 \neq 0.$$

21.7-теорема. Агар (21.56) функционал кетма-кетлик $f(x)$ га $[a, b]$ да текис яқинлашса, шу (21.56) кетма-кетлик $f(x)$ га $[a, b]$ да ўртата яқинлашади.

Исбот. (21.56) кетма-кетлик $f(x)$ га текис яқинлашсиян.

Таърифга биноан, $\forall \epsilon > 0$ олинганды ҳам шундай $n_0 \in N$ топилады, $\forall n > n_0$ ва $\forall x \in [a, b]$ учун бир йўла

$$|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\epsilon}{b-a}}$$

бўлади. Демак, $\forall n > n_0$ учун

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx < \\ &< \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} dx = \epsilon \end{aligned}$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0$$

эканини билдиради. Демак, $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик $f(x)$ функцияға $[a, b]$ да ўртата яқинлашади. Теорема исбот бўлди.

21.2-эслатма. Функционал кетма-кетликтининг $[a, b]$ да ўртата яқинлашишидан, унинг шу оралиқда текис яқинлашиши ҳар доим келиб чиқавермайды. Масалан, юқорида кўрдикки $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$ кетма-кетлик

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \in [0, 1] \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияга $[0, 1]$ да ўртача яқинлашади. Бироқ бу функционал кетма-кетлик шу $f(x)$ функцияга $[0, 1]$ да текис яқинлашмайды (қаралсın, 14-боб, 2-§).

Юқорида келтирилген теорема ва эслатма функционал кетма-кетлик ларда ўртача яқинлашиш текис яқинлашиш түшунчасига қараганда кенгрөк түшүнчә эканини күрсатади.

21.3-эслатма. Функционал кетма-кетлик $[a, b]$ да яқинлашишидан ($[a, b]$ нинг ҳар бир нүктасида яқинлашишидан) унинг шу оралиқда ўртача яқинлашиши келиб чиқавермайды. Шунингдек, функционал кетма-кетликнинг $[a, b]$ да ўртача яқинлашишидан, унинг шу оралиқда яқинлашиши ($[a, b]$ нинг ҳар бир нүктасида яқинлашиши) ҳам келиб чиқавермайды.

$$-\frac{1}{2} nx^2$$

Мисол. $\{f_n(x)\} = \{\sqrt{2n}x e^{-\frac{1}{2}nx^2}\}$ функционал кетма-кетлик $f(x) = 0$ функцияга $[0, 1]$ да яқинлашади ($[0, 1]$ оралиқнинг ҳар бир нүктасида яқинлашади):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n}x e^{-\frac{1}{2}nx^2} = 0 = f(x).$$

Бу кетма-кетликнинг $f(x) = 0$ функцияга $[0, 1]$ да ўртача яқинлашмаслиги күрсатылған жағдай.

Энди бирор оралиқда ўртача яқинлашадиган, бироқ шу оралиқда яқинлашмайдын функционал кетма-кетликка мисол келтирамиз.

$[0, 1]$ оралиқни n таңг бўлакка ажратамиз:

$$[0, 1] = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Delta_n(k),$$

бунда

$$\Delta_n(k) = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Қуйидаги

$$\varphi_n(k, x) = 1, \text{ агар } x \in \Delta_n(k),$$

$$\varphi_n(k, x) = 0, \text{ агар } x \in [0, 1] \setminus \Delta_n(k)$$

($k=0, 1, 2, \dots, n-1$) функциялар ёрдамида ушбу функционал кетма-кетликни тузамиз:

$$f_1(x) = \varphi_1(0, x),$$

$$f_2(x) = \varphi_2(0, x), f_3(x) = \varphi_2(1, x),$$

$$f_4(x) = \varphi_3(0, x), f_5(x) = \varphi_3(1, x), f_6(x) = \varphi_3(2, x),$$

.....

$\{f_m(x)\}$ функционал кетма-кетлик $f(x) = 0$ функцияга $[0, 1]$ оралиқда ўртача яқинлашади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_m(x) - f(x)|^2 dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 f_m^2(x) dx =$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 |\varphi_m(k, x)|^2 dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{k/n}^{\frac{k+1}{n}} 1 dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

$\{f_m(x)\}$ функционал кетма-кетлик ҳадларининг тузилиши қоидасига кўра $f_m(x) = \varphi_n(k, x)$ бўлиб, $m \rightarrow \infty$ да $n \rightarrow \infty$ бўлади.)

Бу $\{f_m(x)\}$ функционал кетма-кетлик $f(x) = 0$ функцияга $[0, 1]$ оралиқнинг ҳар бир нуқтасида яқинлашмайди. Ҳақиқатан ҳам, $\forall x \in [0, 1]$ нуқта учун m нинг чексиз кўп қийматлари топиладики, $f_m(x) = 1$ бўлади, m нинг чексиз кўп қийматлари топиладики, $f_m(x) = 0$ бўлади.

Функционал қаторларда ҳам ўртача яқинлашиш тушунчаси шунга ўхшашиб киритилади.

$[a, b]$ оралиқда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_k(x) + \dots \quad (21.57)$$

функционал қатор берилган бўлсин. Бу қатор қисмий йиғиндилари

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

дан иборат $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетликни қарайлик.

21.4-таъриф. Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [S_n(x) - S(x)]^2 dx = 0$$

бўлса, у ҳолда (21.57) функционал қатор $S(x)$ функцияга $[a, b]$ да ўртача яқинлашади деб аталади.

2. Фурье қаторининг ўртача яқинлашиши. $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган, $T(f; x)$ эса унинг Фурье қатори

$$T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

бўлсин.

21.8-теорема. Агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ оралиқда узлуксиз ва $f(-\pi) = f(\pi)$ бўлса, унинг Фурье қатори $[-\pi, \pi]$ да $f(x)$ га ўртача яқинлашади.

Исбот. Шартга кўра $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да узлуксиз ва $f(-\pi) = f(\pi)$. У ҳолда ушбу бобнинг 7-§ ида келтирилган Вейерштрасс теоремасига асоссан, $\forall \varepsilon > 0$ олингандан ҳам, шундай тригонометрик кўпҳад $\mathcal{P}_n(x)$ топиладики, $\forall x \in [-\pi, \pi]$ учун

$$|f(x) - \mathcal{P}_n(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}}$$

бўлади. Бу тенгсизликдан [фойдаланиб

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \mathcal{P}_n(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \varepsilon \quad (21.58)$$

бўлишини топамиз.

Маълумки, $f(x)$ функция Фурье қаторининг қисмий йиғиндиси $F_n(f; x)$ учун

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F_n(f; x)]^2 dx = \min_{T_n(x)} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx \quad (21.59)$$

бўлади (қаралсин, 5-§). Демак, (21.58) ва (21.59) муносабатларга кўра

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F_n(f; x)]^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx < \epsilon \\ (\forall x \in [-\pi, \pi])$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F_n(f; x)]^2 dx = 0,$$

яъни $f(x)$ функция Фурье қатори $[-\pi, \pi]$ да ўртача яқинлашишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Биз ўтган параграфда $[-\pi, \pi]$ оралиқда квадрати билан интегралланувчи $f(x)$ функция учун ушбу

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F_n(f; x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

тенгликни келтириб чиқарган эдик. Бу тенгликдан кўринадики, агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right] \right\} = 0,$$

яъни

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad (21.60)$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F_n(f; x)]^2 dx = 0$$

бўлади ва, демак, $f(x)$ функциянинг Фурье қатори $[-\pi, \pi]$ да ўртача яқинлашади.

Шундай қилиб, $f(x)$ функция Фурье қаторининг $[-\pi, \pi]$ да ўртача яқинлашишини кўрсатиш учун (21.60) тенгликнинг ўринли бўлишини кўрсатиш зарур ва етарли бўлади. Одатда (21.60) *Парсеваль тенглиги* деб аталади.

9•§. Функцияларнинг ортогонал системаси.

Умумлашган Фурье қатори

1. Функцияларнинг ортогонал системаси. $\phi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар $[a, b]$ да берилган ва улар шу оралиқда интегралланувчи бўлсин.

21.5-таъриф. Агар

$$\int_a^b \phi(x) \cdot \psi(x) dx = 0$$

бўлса, у ҳолда $\phi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар $[a, b]$ да ортогонал деб аталади.

Мисол. $\varphi(x) = \sin x$, $\psi(x) = \cos x$ функциялар $[-\pi, \pi]$ да ортогонал бўлади, чунки

$$\int_a^b \varphi(x) \cdot \psi(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot \cos x dx = 0$$

бўлади,

$\varphi(x) = x$, $\psi(x) = \frac{3}{2} x^2 - 1$ функциялар $[-1, 1]$ да ортогонал бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\int_a^b \varphi(x) \cdot \psi(x) dx = \int_{-1}^1 x \left(\frac{3}{2} x^2 - 1 \right) dx = 0.$$

Энди

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (21.61)$$

функцияларнинг ҳар бири $[a, b]$ да берилган ва шу оралиқда интегралланувчи бўлсин. Бу (21.61) функциялар системасини $\{\varphi_n(x)\}$ каби белгилаймиз.

21.6-таъриф. Агар $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар системасининг исталган иккита $\varphi_k(x)$ ва $\varphi_m(x)$ ($k \neq m$) функциялари учун

$$\int_a^b \varphi_k(x) \cdot \varphi_m(x) dx = 0 \quad (k \neq m)$$

бўлса, у ҳолда $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар системаси $[a, b]$ да ортогонал деб аталади.

Одатда, $k = m$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) бўлганда]

$$\int_a^b \varphi_k^2(x) dx > 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

деб қаралади. Бу интегрални λ_k каби белгилайлик:

$$\lambda_k = \int_a^b \varphi_k^2(x) dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Агар (21.61) система учун

$$\lambda_k = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

бўлса, $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар системаси нормал деб аталади.

Агар (21.61) система учун

$$\int_a^b \varphi_k(x) \cdot \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{агар } k \neq m \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } k = m \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлса, $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар системаси ортонормал деб аталади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

система (тригонометрик система) $[-\pi, \pi]$ да ортогонал бўлади, чунки $k \neq m$ бўлганда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos mx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin mx \, dx = 0$$

бўлиб, иктиёрий $k, m = 0, 1, 2, \dots$ бўлганда $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \sin mx \, dx = 0$ бўлади (а-
ралсин, ушбу бобнинг 1- §).

2. Қуидаги

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \dots, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \dots$$

функциялар системаси $[-\pi, \pi]$ да ортонормал бўлади. Бу системанинг $[-\pi, \pi]$ да ортогонал бўлиши равшандир. Унинг шу $[-\pi, \pi]$ да нормал бўлиши эса

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \right)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \right)^2 dx = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

бўлишидан келиб чиқади.

3. Ушбу $\{P_n(x)\}$:

$$P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots \quad (21.62)$$

функциялар системасини қарайлик, бунда

$$P_n(x) = \frac{1}{[n]! 2^n} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Бу система $[-1, 1]$ да ортогонал бўлади. Шуни исботлайлик. Бўлаклаб интеграл \int лаш усулидан фойдаланиб қўйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_k(x) P_m(x) \, dx &= \frac{1}{k! m! 2^{k+m}} \int_{-1}^1 \frac{d^k (x^2 - 1)^k}{dx^k} \cdot d \left[\frac{d^{m-1} (x^2 - 1)^m}{dx^{m-1}} \right] = \\ &= \frac{1}{k! m! 2^{k+m}} \left[\frac{d^k (x^2 - 1)^k}{dx^k} \cdot \frac{d^{m-1} (x^2 - 1)^m}{dx^{m-1}} \Big|_{-1}^1 - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-1}^1 \frac{d^{k+1} (x^2 - 1)^k}{dx^{k+1}} \cdot \frac{d^{m-2} (x^2 - 1)^m}{dx^{m-2}} \, dx \right]. \end{aligned}$$

Агар $x = \pm 1$ да

$$\frac{d^{m-1} (x^2 - 1)^m}{dx^{m-1}} = 0$$

бўлишини эътиборга олсақ, у ҳолда

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_m(x) \, dx = \frac{1}{k! m! 2^{k+m}} \int_{-1}^1 \frac{d^{k+1} (x^2 - 1)^k}{dx^{k+1}} \cdot d \left[\frac{d^{m-2} (x^2 - 1)^m}{dx^{m-2}} \right]$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални яна бўлаклаб интеграллаб, сўнг $x = \pm 1$ да

$$\frac{d^{m-2} (x^2 - 1)^m}{dx^{m-2}} = 0$$

бўлишини ҳисобга олиб қўйидагини топамиз:

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_m(x) dx = \frac{1}{k! m! 2^{k+m}} \int_{-1}^1 \frac{d^{k+2} (x^2 - 1)^k}{dx^{k+2}} \cdot d \left[\frac{d^{m-3} (x^2 - 1)^m}{dx^{m-3}} \right].$$

Шу жараённи давом эттира бориб, m қадамдан кейин қўйидаги тенгликка келамиз:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_k(x) P_m(x) dx &= \frac{(-1)^{m-1}}{k! m! 2^{k+m}} \left[\frac{d^{k+m-1} (x^2 - 1)^k}{dx^{k+m-1}} \cdot (x^2 - 1) \right]_{-1}^1 - \\ &- \int_{-1}^1 (x^2 - 1) \frac{d^{k+m} (x^2 - 1)^k}{dx^{k+m}} dx. \end{aligned}$$

$x = \pm 1$ да $x^2 - 1 = 0$ ва $m > k$ учун $\frac{d^{k+m+1} (x^2 - 1)^k}{dx^{k+m+1}} = 0$ бўлишини ҳисобга олиб

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_m(x) dx = 0 \quad (21.63)$$

еканлигини топамиз. Демак, $m > k$ бўлганда (21.63) муносабат ўриниладир.

Худди юқоридагидек, $m < k$ бўлганда ҳам (21.63) уносабатнинг ўринли бўлиши кўрсатилиади.

Шундай кўнсиги $k \neq m$ учун $\int_{-1}^1 P_k(x) P_m(x) dx = 0$ бўлади. Бу эса (21.62)

системанинг $[-1; 1]$ да ортогонал эканлигини билдиради.

Одатда $P_n(x)$ — Лежандр кўпхади деб аталади. Бу кўпхад, хусусан $n = 0, 1, 2, 3$ бўлганда

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - 1, P_3(x) = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x$$

бўлади.

(21.61) система берилган бўлсин. Унинг ёрдамида тузилган ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) + \dots \quad (21.64)$$

функционал қатор $\{\varphi_n(x)\}$ система бўйича қатор дейилади, $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ ўзгармас сонлар эса қаторнинг коэффициентлари дейилади.

Хусусан, $\varphi_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ бўлганда (21.64) қатор тригонометрик қаторга айланади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда берилган ва шу оралиқда интегралланувчи бўлсин. Равшанки, $\int_a^b f(x) \cdot \varphi_n(x) dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) функция ҳам $[a, b]$ да интегралланувчи бўлади. Бу функцияларнинг интегралларини ҳисоблаб, уни қўйидагича белгилаймиз:

$$\alpha_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b f(x) \cdot \varphi_n(x) dx. \quad (21.65)$$

Бу сонлардан фойдаланиб ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(x) = \alpha_0 \varphi_0(x) + \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) + \dots \quad (21.66)$$

қаторни тузамиз.

21.7-тәъриф. $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ коэффициентлари (21.65) формула билан аниқланган (21.66) қатор $f(x)$ функциянинг $\{\varphi_n(x)\}$ система бўйича умумлашган Фурье қатори деб аталади. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ сонлар эса умумлашган Фурье коэффициентлари дейилади.

Одатда, $f(x)$ функция билан унга мос умумлашган Фурье қатори «~» белги орқали қўйидагича ёзилади:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(x) = \alpha_0 \varphi_0(x) + \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) + \dots$$

АДАБИЁТ

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II, III, — М., Наука, 1969. (Ўзбек тилига I, II томлари таржима қилинган.)
2. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т. I, II. — М., Наука, 1964. (Ўзбек тилига таржима қилинган.)
3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, т. I. — М., Наука, 1971. (Ўзбек тилига таржима қилинган.)
4. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, т. II, — М., Наука, 1980.
5. Хинчин А. Я. Восемь лекций по математическому анализу, — М., Наука, 1977.
6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, т. I, II, — М., Высшая школа, 1981.
7. Никольский С. М. Курс математического анализа, т. I, II, — М., Наука, 1973.
8. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сенцов Бл. Х. Математический анализ. — М., Наука, 1979.
9. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II, — М., Наука, 1970.
10. Рудин У. Основы математического анализа, — М., Мир, 1976.
11. Зорич В. А. Математический анализ, ч. I, II, — М., Наука, 1981.
12. Романовский И. В. Избранные труды, т. I (Введение в анализ). Изд. АН УзССР, Ташкент, 1959.
13. Азларов Т. А., Мансуров Ҳ. Математик анализ, 1- қисм, — Т., «Ўқитувчи», 1986.

МУНДАРИЖА

Сўз боши	3
12- б о б. Кўп ўзгарувчили функциялар, уларнинг лимити, узлуксизлиги	4
1- §. R''' фазо ва унинг муҳим тўпламлари	4
2- §. R''' фазода кетма-кетлик ва унинг лимити	17
3- §. Кўп ўзгарувчили функция ва унинг лимити	31
4- §. Кўп ўзгарувчили функциянинг узлуксизлиги	46
5- §. Узлуксиз функцияларнинг хоссалари	54
6- §. Кўп ўзгарувчили функциянинг текис узлуксизлиги. Кантор теоремаси	58
13- б о б. Кўп ўзгарувчили функциянинг ҳосилла ва дифференциаллари	62
1- §. Кўп ўзгарувчили функциянинг ҳусусий ҳосилалари	62
2- §. Кўп ўзгарувчили функцияларнинг дифференциалланувчилиги	66
3- §. Йўналиш бўйича ҳосила	72
4- §. Кўп ўзгарувчили мураккаб функцияларнинг дифференциалланувчилиги. Мураккаб функциянинг ҳосиласи	75
5- §. Кўп ўзгарувчили функциянинг дифференциали	78
6- §. Кўп ўзгарувчили функциянинг юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллари	87
7- §. Ўрта қиймат ҳақида теорема	94
8- §. Кўп ўзгарувчили функциянинг Тейлор формуласи	96
9- §. Кўп ўзгарувчили функциянинг экстремум қийматлари. Экстремумнинг зарурий шарти	99
10- §. Функция экстремумининг етарли шарти	101
11- §. Ошкормас функциялар	111
14- б о б. Функционал кетма-кетлик ва қаторлар	129
1- §. Функционал кетма-кетлик ва қаторлар, уларнинг яқинлашувчилиги	129
2- §. Функционал кетма-кетлик ва қаторларнинг текис яқинлашувчилиги	136
3- §. Функционал қатор йиғиндисининг ҳамда функционал кетма-кетлик лимит функциясининг узлуксизлиги	146
4- §. Функционал қаторларда ҳамда функционал кетма-кетликларда ҳадлаб лимитга ўтиш	148
5- §. Функционал қаторларни ҳамда функционал кетма-кетликларни ҳадлаб интеграллаш	151
6- §. Функционал қаторларни ҳамда функционал кетма-кетликларни ҳадлаб дифференциаллаш	154
7- §. Даражали қаторлар	156
8- §. Даражали қаторларнинг хоссалари	165
9- §. Тейлор қатори	171
10- §. Функцияни кўпҳад билан яқинлаштириш	178
15- б о б. Метрик фазолар	186
1- §. Метрик фазо	187
2- §. Метрик фазода кетма-кетлик ва унинг лимити	192
3- §. Коши теоремаси. Тўлиқ метрик фазо	193
4- §. Больцано — Вейерштрасс теоремаси. Компакт метрик фазолар	196
16- б о б. Хосмас интеграллар	197
1- §. Чегаралари чексиз хосмас интеграллар	197
2- §. Чегаралари чексиз хосмас интегралларнинг яқинлашувчилиги	205
3- §. Чегараси чексиз хосмас интегралларни ҳисоблаш	218

4- §. Чегараланмаган функцияning хосмас интеграллари	222
5- §. Чегараланмаган функция хосмас интегралининг яқинлашувчилиги	229
6- §. Чегараланмаган функция хосмас интегралини ҳисоблаш	235
7- §. Умумий ҳол	240
17- б о б. Параметрга боғлиқ интеграллар	243
1- §. Лимит функция. Текис яқинлашиш. Лимит функцияниң узлуксизлиги	244
2- §. Параметрга боғлиқ интеграллар	248
3- §. Параметрга боғлиқ интеграллар (умумий ҳол)	255
4- §. Параметрга боғлиқ хосмас интеграллар. Интегралнинг текис яқинлашиши	258
5- §. Параметрга боғлиқ хосмас интегралларда интеграл белгиси остида ли- митга ўтиш	267
6- §. Параметрга боғлиқ хосмас интегралларнинг параметр бўйича узлуксиз- лиги	269
7- §. Параметрга боғлиқ хосмас интегралларни параметр бўйича дифферен- циаллаш	270
8- §. Параметрга боғлиқ хосмас интегралларни параметр бўйича интеграл- лаш	273
9- §. Бета функция (I тур Эйлер интеграли) ва унинг хоссалари	279
10- §. Гамма функция (II тур Эйлер интеграли) ва унинг хоссалари	282
11- §. Бета ва гамма функциялар орасидаги боғланиш	287
18- б о б.] Карралы интеграллар	291
1- §. Икки карралы интеграл таърифи	291
2- §. Дарбу йигиндилари. Икки карралы интегралнинг бошқача таърифи	295
3- §. Икки карралы интегралнинг мавжудлиги	297
4- §. Интегралланувчи функциялар синфи	300
5- §. Икки карралы интегралнинг хоссалари	303
6- §. Икки карралы интеграл ҳисоблаш	306
7- §. Икки карралы интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш	316
8- §. Икки карралы интегрални тақрибий ҳисоблаш	322
9- §. Икки карралы интегралнинг баъзи бир татбиқлари	324
10- §. Уч карралы интеграл	330
19- б о б. [Эгри] чизиқли интеграллар	335
1- §. Биринчи тур [эгри] чизиқли интеграллар	335
2- §. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар	344
3- §. Грин формуласи ва унинг татбиқлари	354
4- §. Биринчи ва иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар орасидаги боғланиш	363
20- б о б. Сирт интеграллари]	364
1- §. Биринчи тур сирт интеграллари	364
2- §. Иккинчи тур сирт интеграллари	371
3- §. Стокс формуласи	378
4- §. Остроградский формуласи	380
21- б о б. Фурье қаторлари	382
1- §. Баъзи муҳим тушунчалар	383
2- §. Фурье қаторининг таърифи	396
3- §. Леммалар. Дирихле интеграли	404
4- §. Фурье қаторининг яқинлашувчилиги	410
5- §. Қисмий йигиндиларнинг бир экстремал хоссаси. Бессель тенгсизлиги	417
6- §. Яқинлашувчи Фурье қатори йигиндисининг функционал хоссалари	421
7- §. Функцияларни тригонометрик кўпҳад билан яқинлаштириш	424
8- §. Ўртacha яқинлашиш. Фурье қаторининг ўртacha яқинлашиши	429
9- §. Функцияларнинг ортогонал системаси. Умумлашган Фурье қатори	433
	439

На узбекском языке

АЗЛАРОВ ТУРСУН АБДУРАХИМОВИЧ
МАНСУРОВ ХОДЖАКБАР

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

II часть

Учебное пособие для студентов
университетов и пединститутов

Ташкент «Ўқитувчи» 1989

Редактор *H. Fouipov*

Расмлар редактори *C. Соин*

Техредактор *T. Золотилова*

Корректор *H. Абдуллаева*

ИБ №4703

Теряшга берилди 20.09.88. Босишга рухсат этилди 25.04.89. Формати 60x90/16. Тип. қоғози №2.
Литературная гарнитура. Кегли 10 шпонсиз. Юкори босма усулида босилди. Шартли б.л. 27,5.
Шартли кр.-отт. 27,5. Нашр л. 22,51. Тиражи 7000. Зак. № 2149. Баҳоси 1 с. 10 т.

«Ўқитувчи» нашриёти 700129. Тошкент, Навоий кӯчаси, 30. Шартнома 09—127—88,

Ўзбекистон ССР нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоши ишлари Давлат комитети Тошкент
«Матбуот» полиграфия ишлаб чиқариш бирлашмасининг Бош корхонаси. Тошкент, Навоий
кӯчаси, 30. 1989.

Головное предприятие ТППО «Матбуот» Государственного комитета УзССР по делам издательства,
полиграфии и книжной торговли. Ташкент, ул. Навои, 30.