В. И. ДРОБЫШЕВИЧ, В. П. ДЫМНИКОВ, Г. С. РИВИН

# ЗАДАЧИ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Под редакцией Г. И. МАРЧУКА

*Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальности «Прикладная математика»*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1980

22.19
Д 75
УДК 519.6

Задачи по вычислительной математике. Дробышевич В. И., Дымников В. П., Ривин Г. С.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

Сборник задач по методам вычислительной математики ориентирован на курс лекций, читаемый в Новосибирском государственном университете по книге Г. И. Марчука «Методы вычислительной математики».

Сборник построен таким образом, что вначале изучаются основные понятия и идеи методов вычислительной математики, а затем на их основе рассматриваются современные методы решения практических задач. В первом параграфе каждой главы формулируются основные понятия теории, наиболее важные теоремы, необходимые для решения предлагаемых задач. Для ряда задач даны полные и подробные решения, для других только указания и ответы.

Задачник может быть использован при изучении методов вычислительной математики в высших учебных заведениях.

Валерий Игнатьевич Дробышевич
Валентин Павлович Дымников
Гдалий Симонович Ривин

Задачи по вычислительной математике

М., 1980 г., 144 стр. с илл.

Редакторы Н. В. Викторенкова, Е. Ю. Ходан
Техн. редактор Е. В. Морозова
Корректоры Г. В. Подвольская, Л. С. Сомова

ИБ № 11554

Сдано в набор 24.07.79. Подписано к печати 26.12.79. Бумага 84×108$^1/_{32}$ тип. № 3. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 7,56. Уч.-изд. л 7,85. Тираж 32000 экз. Заказ № 627. Цена книги 30 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука», 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25

Д $\frac{20204-008}{053(02)-80}$ 8-80. 1702070000

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Предлагаемый сборник задач по вычислительной математике является результатом обработки методических построений, выполненных доцентами Новосибирского государственного университета им. Ленинского комсомола В. И. Дробышевичем, В. П. Дымниковым и Г. С. Ривиным в процессе проведения практических занятий по курсу вычислительной математики, который читается для студентов третьего курса по книге редактора настоящего сборника.

Методы вычислительной математики в настоящее время являются важным средством практической реализации математических моделей, формулируемых обычно в терминах дифференциальных уравнений математической физики. Эффективность реализации таких моделей существенно связана с выбором того или иного алгоритма и способа программирования на электронных вычислительных машинах. Естественно, что каждый алгоритм имеет свою эффективную область применения. Поэтому чрезвычайно важно познакомить студентов с принципами, на основе которых осуществляется наиболее рациональная стратегия численного решения задач. Этому невозможно научиться, прочитав учебник или несколько специальных книг по вычислительной математике. Только прямое общение исследователя с конкретными задачами может дать общее представление и выработать необходимую интуицию для нахождения эффективных путей решения задач вычислительной математики. Поэтому предлагаемые вниманию читателей задачи являются, по нашему мнению, хорошим средством для практического закрепления знаний в области вычислительной математики и ориентирования в их использовании.

Поскольку акцент в книге «Методы вычислительной математики» сделан на решение больших задач, с которыми молодой исследователь встречается уже на первых шагах своей самостоятельной деятельности, то эта основная линия четко продолжается и в данном сборнике задач. Здесь наряду с набором наиболее эффективных и простых алгоритмов рассматриваются и задачи сложные, редуцируемые к простым алгоритмам. Особенно это относится к итерационным процессам решения задач линейной алгебры и методам расщепления.

Задачи, представленные в сборнике, в значительной части являются оригинальными и не повторяют обычно используемые примеры в литературе. Накопление таких задач велось авторами в течение многих лет с учетом собственных вкусов и личных научных интересов. Этим, в частности, определились широта и разнообразие в подборе задач.

Часть задач сама по себе представляет большой теоретический и практический интерес, поскольку оригинальные методы, используемые для их формулирования и решения, могли бы войти в теоретическую часть курса. Поэтому можно сказать, что задачник является в известном смысле дополнением к цитируемой выше книге. В этом смысле большое значение имеет раздел, посвященный разбору решений типичных задач.

В заключение следует отметить, что почти все разделы учебного пособия «Методы вычислительной математики» отражены в предлагаемом сборнике задач. Исключение составляет лишь глава «Постановка и численные методы решения некоторых обратных задач».

Нет сомнения, что предлагаемый сборник задач окажется полезным как для студентов, изучающих методы вычислительной математики в высших учебных заведениях, так и преподавателей, которые смогут получить необходимую ориентировку в подборе нужных и интересных задач для практических занятий.

*Г. И. Марчук*

## ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый сборник содержит задачи, подобранные в соответствии с курсом «Методы вычислений», читаемым на математическом факультете Новосибирского государственного университета. В основу этого курса положена монография Г. И. Марчука «Методы вычислительной математики» (в дальнейшем мы ее будем обозначать МВМ).

Основная идея курса — ознакомить студентов с современными подходами и методами решения сложных задач математической физики. Выбор и классификация задач в настоящем сборнике преследуют ту же цель.

Следуя этой цели, мы стремились построить сборник таким образом, чтобы продемонстрировать все этапы решения задачи (за исключением написания программы), начиная от конструирования разностной схемы, обладающей необходимыми свойствами (в некоторых задачах мы демонстрируем возможность построения схем с дополнительными свойствами, кроме обычных свойств аппроксимации и устойчивости). Иллюстрируются также различные подходы к исследованию сходимости решения разностной схемы к решению соответствующей дифференциальной задачи, построению алгоритмов решения разностной задачи с исследованием эффективности алгоритма и т. д.

Задачи тематически распределены в пяти главах. В первом параграфе каждой из этих глав формулируются основные понятия, наиболее важные на наш взгляд теоремы, необходимые для решения предлагаемых задач, даны ссылки на соответствующие разделы монографии Г. И. Марчука. После всех глав приведены решения некоторых задач, причем далеко не все задачи, для которых приводятся решения, являются наиболее сложными. Для части задач мы приводим очень подробные решения, чтобы на их примере продемонстрировать весь путь решения задач данного класса поэтапно.

Первая глава содержит задачи по линейной алгебре, освещающие круг понятий и теорем, необходимых для исследования вычислительных методов. Заметим, что используемое нами понятие положительной определенности матриц (следуя монографии Г. И. Марчука) является «неклассическим», т. е. не требует условия самосопряженности. Кроме того, предполагается, что все операторы (если специально не оговорено в условии задачи) действуют в вещественном векторном пространстве.

Во второй главе исследуются наиболее употребимые в настоящее время прямые методы решения разностных задач. Большое внимание уделено важному понятию обусловленности матриц. Включены задачи на построение точных решений разностных уравнений, которые позволяют в дальнейшем исследовать важные свойства разностных схем. В этой главе точные решения разностных уравнений используются для решения спектральных задач.

В третьей главе изучаются итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Особое внимание обращено на изучение поведения нормы вектора ошибки на первых итерациях и построение расчетных формул алгоритмов различных итерационных методов. Проиллюстрированы различные приемы доказательства сходимости, причем много задач посвящено методам расщепления. Решения спектральных задач второй главы используются для получения оценок ассимптотических скоростей сходимости различных итерационных методов, кроме того, эти же методы сравниваются по числу арифметических операций, необходимых для реализации одного шага итерации.

В четвертой главе на примере обыкновенных дифференциальных уравнений подробно рассмотрены основные понятия теории сходимости разностных схем и методы их построения. Выбор задач для этой главы был во многом определен тем влиянием, которое оказала на нас в свое время книга С. К. Годунова и В. С. Рябенького «Введение в теорию разностных схем». В задачах на исследование порядка аппроксимации и построение разностных схем основное внимание уделено схемам повышенного порядка аппроксимации. При этом мы стремились продемонстрировать как можно больше методов построения разностных схем, с тем чтобы при построении разностных схем для дифференциальных уравнений с частными производными иметь большую свободу выбора.

С помощью точных решений разностных уравнений, рассмотренных во второй главе, изучается сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи. Сравнение оценок сходимости, полученных с помощью точных решений и по теореме сходимости, позволяет сделать качественные выводы о различных свойствах разностных схем и точности оценок, получаемых с помощью теоремы сходимости. Построение точных решений разностных уравнений используется также при изучении скорости сходимости решения разностных схем, построенных с использованием экстраполяции по Ричардсону (МВМ, гл. 6).

Задачи подбирались, как правило, так, чтобы они не дублировали друг друга и чтобы каждая из них иллюстрировала какой-нибудь один из аспектов исследования или построения разностных схем.

Следует также отметить, что если специально не оговорено в условии задачи, то мы использовали следующие нормы и оператор проектирования:

$$\|\varphi^h\|_{\Phi_h} = \max_i |\varphi_i|,$$

$$\|f^h\|_{F_h} = \max_i |f_i|,$$

$$(u)_h|_i = u(x_i).$$

В пятой главе приводятся задачи на применение разностных методов для решения дифференциальных уравнений с частными производными; при этом особое внимание уделялось исследованию методов расщепления для решения нестационарных задач. В первых задачах этой главы на достаточно простых примерах требуется определить порядок аппроксимации разностной схемы. В последующих задачах требуется построить разностную схему заданного порядка аппроксимации; при этом, так же как и в четвертой главе, мы стремились использовать как можно больше методов построения разностных схем. Следует также отметить, что в ряде задач предлагается доказать, что построенные разностные схемы удовлетворяют некоторым дополнительным требованиям.

Достаточно трудными, требующими знания различных приемов и методов, являются задачи на доказательство устойчивости и исследование сходимости решения разностной схемы к решению дифференциальной задачи. Причем в задачах на исследование сходимости основное внимание, как уже отмечалось, было обращено на изучение схем расщепления.

Задачи, в которых требуется построить устойчивую разностную схему с заданным порядком аппроксимации, опираются в основном на опыт решения предшествующих задач, но требуют уже достаточно хорошего владения всем курсом вычислительной математики. Для того чтобы сделать изучение этого круга проблем законченным и подвести исследователя к последнему этапу решения задачи — ее программированию, мы поместили в этой главе ряд задач на построение и исследование конкретных алгоритмов и методов решения систем разностных уравнений.

Не оговаривая этого специально, мы в большинстве задач использовали следующие нормы и оператор проектирования:

$$\|\varphi^{h\tau}\|_{\Phi_{h\tau}} = \max_j \|\varphi^{h\tau}|^j\|_{U_h},$$

$$\|\varphi^{h\tau}|^j\|_{U_h} = \max_h |\varphi_h^j|,$$

$$(u)_{h\tau}|_h^j = u(t^j, x_h).$$

Как специально отмечается в первых параграфах четвертой и пятой глав, нормы в пространствах $\Phi$ и $\Phi_{h\tau}$ вводятся так, чтобы выполнялись условия согласования

$$\lim_{h,\tau\to 0} \|(u)_{h\tau}\|_{\Phi_{h\tau}} = \|u\|_{\Phi}.$$

При подготовке сборника нами были использованы следующие книги:

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1967.

2. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей.— М.: Наука, 1967.

3. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. Введение в теорию.— М.: Наука, 1977.

4. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре.— М.: Наука, 1975.

5. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики.— М.: Наука, 1977.

6. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М.: Наука, 1977.

7. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике.— М.: Наука, 1976.

8. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры.— М.—Л.: Физматгиз, 1963.

9. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений.— М.: Мир, 1969.

10. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.— Новосибирск: Наука, 1967.

11. Varga R. S. Matrix iterative analysis.— N.—Y.: Englewood Cllifs, Prentice-Hall, 1962.

Авторы выражают благодарность академику Г. И. Марчуку за постоянное внимание к их работе, чл.-корр. АН СССР С. К. Годунову, доценту Ю. И. Шокину, сделавшим ряд полезных замечаний после прочтения первого варианта рукописи, а также С. Г. Дробышевич, Е. Г. Климовой, О. А. Ободовской, А. В. Слуднову и З. К. Уразалиной за помощь при подготовке рукописи.

ГЛАВА 1

# НОРМЫ ВЕКТОРОВ И МАТРИЦ. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И ВЕКТОРЫ. ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ МАТРИЦ

## § 1. Определения. Теоремы

*Нормой вектора* $x$ называется функционал, обозначаемый $\|x\|$, удовлетворяющий следующим условиям:
1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\|x\| \geqslant 0$;
2) $\|ax\| = |a|\|x\|$, $a$ — произвольное число;
3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

*Нормой квадратной матрицы* $A$ называется функционал, обозначаемый $\|A\|$, удовлетворяющий условиям:
1) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$, $\|A\| \geqslant 0$;
2) $\|aA\| = |a|\|A\|$, $a$ — произвольное число;
3) $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$;
4) $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

Норма матрицы $\|A\|_м$ согласована с нормой вектора $\|x\|_в$, если для любых $x$ и $A$

$$\|Ax\|_в \leqslant \|A\|_м \|x\|_в.$$

Функционал $\sup\limits_{x\neq 0} \|Ax\|_B / \|x\|_B$ является нормой матрицы $A$ и называется *нормой матрицы $A$, подчиненной норме вектора* $\|x\|_B$.

Комплексное число $\lambda(A)$ и ненулевой вектор $x$ называются соответственно *собственным числом* и *собственным вектором* матрицы $A$, если $Ax = \lambda(A)x$.

Множество всех собственных чисел матрицы $A$ называется *спектром* матрицы $A$. *Спектральным радиусом* $\rho(A)$ матрицы $A$ называется максимум модулей собственных чисел этой матрицы.

Для оценки границ собственных чисел могут быть использованы следующие теоремы.

Первая теорема Гершгорина. *Все собственные числа комплексной матрицы $A$ принадлежат* *объединению кругов*

$$|z-a_{ii}|\leqslant\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\quad i=\overline{1,n}.$$

Вторая теорема Гершгорина. *Если указанное в первой теореме объединение кругов распадается на несколько связных частей, то каждая такая часть содержит столько собственных чисел, сколько кругов ее составляют.*

Матрица $A$ называется *разложимой*, если существует такая матрица перестановок $P$, что $P^TAP=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ B & A_2\end{bmatrix}$, где $A_1$, $A_2$ — квадратные матрицы, $P^T$ — транспонированная матрица $P$. В противном случае матрица $A$ называется *неразложимой* (матрица $P$ называется *матрицей перестановок*, если в каждой строке и в каждом столбце один элемент равен 1, а все остальные элементы равны 0).

Теорема Таусски. *Если матрица $A$ неразложима и собственное число $\lambda(A)$ принадлежит границе объединения кругов из первой теоремы Гершгорина, то все их окружности проходят через $\lambda(A)$.*

Матрица $A$ называется

1) *положительно полуопределенной* и обозначается $A\geqslant 0$, если для любого $x$ $(Ax, x)\geqslant 0$;

2) *положительно определенной* и обозначается $A>0$, если для любого $x\neq 0$ $(Ax, x)>0$.

Соответствующий материал приведен в МВМ, гл. 1, стр. 17—32.

## § 2. Задачи

**1.1.** Пусть $d_k>0$, $k=\overline{1,n}$. Доказать, что $\max\limits_{k=\overline{1,n}}(d_k|x_k|)$ есть норма вектора $x$.

**1.2.** Пусть $d_k>0$, $k=\overline{1,n}$. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n}d_k|x_k|$ есть норма вектора $x$.

**1.3.** Пусть $d_k>0$, $k=\overline{1,n}$. Доказать, что $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}d_k|x_k|^2}$ есть норма вектора $x$.

**1.4.** Доказать, что если $C$ — симметричная положительно определенная матрица, то $(Cx, x)^{1/2}$ есть норма вектора $x$.

**1.5.** Доказать, что $\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}|x_k|^2\right)^{1/2}$ есть норма вектора $x$.

**1.6.** Доказать, что $M(A)=n\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|$ является нормой матрицы $A$.

**1.7.** Доказать, что $\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|$ не является нормой матрицы $A$.

**1.8.** Доказать, что $N(A)=\left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$ является нормой матрицы $A$.

**1.9.** Показать, что $(1/\sqrt{n})N(A)$ не является нормой матрицы $A$.

**1.10.** Доказать, что всякая норма матрицы согласована с некоторой нормой вектора.

**1.11.** Доказать, что $M(A)$ согласована с нормами $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ вектора $x$.

**1.12.** Доказать, что $N(A)$ согласована с нормой $\|\cdot\|_2$ вектора $x$.

**1.13.** Доказать, что подчиненная норма удовлетворяет четырем требованиям нормы и условию согласованности норм.

**1.14.** Доказать, что норма $\|A\|_1=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$ подчинена норме $\|x\|_1$.

**1.15.** Доказать, что норма $\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^TA)}$ подчинена норме $\|x\|_2$.

**1.16.** Доказать, что норма $\|A\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ подчинена норме $\|x\|_\infty$.

**1.17.** Найти нормы матриц, подчиненные нормам векторов из задач 1.1, 1.2, 1.3.

**1.18.** Доказать, что $M(A)$ и $N(A)$ из задач 1.6, 1.8 не подчинены никакой норме вектора.

**1.19.** Доказать следующие неравенства для норм векторов:

а) $\|x\|_\infty\leqslant\|x\|_1\leqslant n\|x\|_\infty$,

б) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\|x\|_1$,

в) $\|x\|_\infty\leqslant\|x\|_2\leqslant\sqrt{n}\|x\|_\infty$.

**1.20.** Доказать следующие неравенства для норм матриц:

а) $\frac{1}{n} M(A) \leqslant \|A\|_\infty \leqslant M(A)$,

б) $\frac{1}{n} M(A) \leqslant \|A\|_1 \leqslant M(A)$,

в) $\frac{1}{n} M(A) \leqslant \|A\|_2 \leqslant M(A)$,

г) $\frac{1}{n} M(A) \leqslant N(A) \leqslant M(A)$,

д) $\frac{1}{n} N(A) \leqslant \|A\|_2 \leqslant N(A)$,

е) $\frac{1}{\sqrt{n}} N(A) \leqslant \|A\|_\infty \leqslant \sqrt{n} N(A)$,

ж) $\frac{1}{\sqrt{n}} N(A) \leqslant \|A\|_1 \leqslant \sqrt{n} N(A)$,

з) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_2 \leqslant \|A\|_\infty \leqslant \sqrt{n} \|A\|_2$,

и) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_2 \leqslant \|A\|_1 \leqslant \sqrt{n} \|A\|_2$,

к) $\frac{1}{n} \|A\|_\infty \leqslant \|A\|_1 \leqslant n \|A\|_\infty$.

**1.21.** Доказать неравенство $\|A\|_2^2 \leqslant \|A\|_1 \|A\|_\infty$.

**1.22.** Найти пространства с такими нормами, что четырехугольники из $E_2$ (рис. 1) перейдут в сферу радиуса 5.

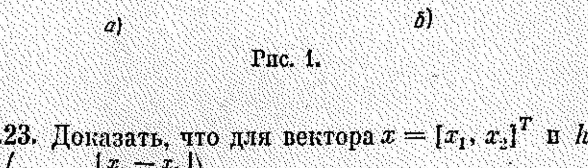


Рис. 1.

**1.23.** Доказать, что для вектора $x = [x_1, x_2]^T$ и $h > 0$ $\max\left(|x_1|, \frac{|x_2 - x_1|}{h}\right)$ является нормой. Найти норму матрицы, подчиненную этой норме.

**1.24.** Доказать, что $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\left(\left|\sum\limits_{k=1}^{i} x_k\right|\right)$ является нормой вектора $x$. Найти норму матрицы, подчиненную этой норме вектора.

**1.25.** Показать, что если $U$ — унитарная матрица, то $\|x\|_2 = \|Ux\|_2$ и $\|A\|_2 = \|UA\|_2 = \|AU\|_2$.

**1.26.** Показать, что для любого собственного значения $\lambda(A)$ невырожденной матрицы $A$ справедлива оценка $1/\|A^{-1}\| \leqslant |\lambda(A)| \leqslant \|A\|$.

**1.27.** Доказать, что для любого собственного значения $\lambda(A)$ матрицы $A$ справедливо неравенство $|\lambda(A)| \leqslant \inf \|A^k\|^{1/k}$, где $k$ — натуральное число.

**1.28.** Показать, что для экстремальных собственных значений симметричной матрицы $A$ справедливы оценки

$$\lambda_{\max}(A) \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_{ii}), \quad \lambda_{\min}(A) \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_{ii}).$$

**1.29.** Доказать неравенство

$$\|x\|_C^2 \leqslant \rho(C) \|x\|_2^2.$$

**1.30.** Доказать, что если матрица $A$ — нормальная, то $\|A\|_2 = \rho(A)$.

**1.31.** Доказать первую теорему Гершгорина.

**1.32.** Доказать вторую теорему Гершгорина.

**1.33.** Построить пример несимметричной вещественной матрицы $n$-го порядка, не имеющей ни одного нулевого элемента и имеющей вещественный спектр.

**1.34.** Доказать, что у матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 4 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 5 \end{bmatrix}$$

все собственные числа вещественны. Указать интервалы, которым принадлежат собственные числа.

**1.35.** Решить задачу 1.34 для матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 4 \end{bmatrix}.$$

**1.36.** Доказать, что у вещественной трехдиагональной матрицы

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

все собственные значения вещественны, если $a_{i+1}c_i > 0$, $i = \overline{1, n-1}$.

**1.37.** Доказать, что у матрицы

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

$|\lambda_k(A)| < 1$, $k = \overline{1, n}$, если $|a_i| + |b_i| + |c_i| \leqslant 1$, $i = \overline{1, n}$, $a_1 = c_n = 0$, причем хотя бы один раз имеет место строгое неравенство, и

$$a_{i+1}c_i \neq 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

**1.38.** Доказать, что если $(Ax, x) > 0$ для всех $x$, то существует постоянная $\delta > 0$, не зависящая от $x$ и такая, что $(Ax, x) \geqslant \delta(x, x)$ для всех $x$.

**1.39.** Привести пример такой положительно определенной в $E_n$ матрицы, спектр которой не является вещественным.

**1.40.** Доказать, что если матрица $K$ вещественна и кососимметрична, то матрица $T = (E - K)(E + K)^{-1}$ ортогональна.

**1.41.** Доказать, что у вещественной ортогональной матрицы $A$ все собственные числа по модулю равны 1.

**1.42.** Доказать, что для произвольных матриц $A$, $B$ спектры матриц $AB$ и $BA$ совпадают.

**1.43.** Доказать, что если матрицы $A_1$ и $A_2$ коммутируют, то существует $\lambda(A_1A_2)$, равное $\lambda(A_1)\lambda(A_2)$.

**1.44.** Доказать, что если $A$ — симметричная положительно определенная матрица, а $B$ — симметричная матрица, то все собственные числа матрицы $AB$ вещественны.

**1.45.** Доказать, что для симметричных положительно определенных матриц $A$, $B$ $\lambda(AB) > 0$.

**1.46.** Пусть $A$ — симметризуемая матрица, т. е. существует невырожденная матрица $T$ такая, что $TAT^{-1} = S$, где $S$ — симметричная матрица. Доказать, что система собственных векторов матрицы $A$ полна.

**1.47.** Пусть $A$ — симметричная положительно определенная матрица, а $B$ — симметричная матрица. Доказать, что система собственных векторов матрицы $AB$ полна.

**1.48.** Доказать положительную определенность матрицы

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2{,}5 & 3 & 3 & \ldots & 3 \\ 1 & 3 & 4{,}5 & 5 & \ldots & 5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \ldots & \frac{4k-3}{2} \end{bmatrix}$$

**1.49.** Доказать, что если $A$, $B$ — перестановочные симметричные положительно определенные матрицы, то матрица $BA$ также положительно определена.

**1.50.** Доказать, что определитель кососимметричной матрицы ($A = -A^{\mathrm{T}}$) нечетного порядка равен нулю.

**1.51.** Пусть для матриц $A$, $B$, $C$ выполнены равенства $AB = BA$, $BC = CB$. Следует ли отсюда, что $AC = CA$?

**1.52.** Пусть матрица $A$ размера $n \times n$ имеет $n$ различных собственных значений. Показать, что если $AB = BA$, то $B$ — матрица простой структуры.

**1.53.** Показать, что в симметричной положительно определенной матрице максимальный по модулю элемент стоит на главной диагонали.

**1.54.** Показать положительную определенность для

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1/2 & -1/3 \\ -1 & 3 & -1 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 4 & 2 \\ -1/3 & -1/2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

**1.55.** Доказать положительную определенность для

$$\begin{bmatrix} 12 & -6 & 3 & -2 \\ -6 & 18 & -6 & 6 \\ 3 & -6 & 24 & 15 \\ -2 & 6 & 15 & 30 \end{bmatrix}.$$

**1.56.** Доказать, что если $A$, $B$ — симметричные матрицы, то необходимым и достаточным условием равенства $AB = BA$ является существование базиса, составленного из общих собственных векторов матриц $A$ и $B$.

**1.57.** Пусть $A$ — матрица размера $n \times n$ такая, что $a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ и $a_{ij} < 0$ для $i \neq j$. Доказать, что матрица $A^{-1}$ имеет только положительные элементы.

**1.58.** Пусть $A$ — матрица из задачи 1.57, а $C = A + \alpha E$, где $\alpha > 0$. Доказать, что $(A^{-1})_{ij} > (C^{-1})_{ij}$.

ГЛАВА 2

# ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

## § 1. Определения. Теоремы

Пусть дана система уравнений $A\varphi = f$ с невырожденной матрицей $A$ размера $n \times n$. *Числом обусловленности* $\operatorname{cond}_M(A)$ матрицы $A$ называется произведение $\|A^{-1}\|_M \|A\|_M$.

Нахождение решения систем линейных уравнений с трехдиагональной матрицей

$$a_i\varphi_{i+1} - b_i\varphi_i + c_i\varphi_{i-1} = f_i, \quad i = \overline{1,\ n-1}, \quad a_i \neq 0, \quad c_i \neq 0,$$

$$\varphi_0 = a_0\varphi_1 + f_0,$$

$$\varphi_n = c_n\varphi_{n-1} + f_n,$$

по формулам

$$K_0 = a_0, \quad L_0 = f_0,$$

$$K_i = \frac{a_i}{b_i - K_{i-1}c_i}, \quad L_i = \frac{c_i L_{i-1} - f_i}{b_i - K_{i-1}c_i}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\varphi_n = \frac{f_n + c_n L_{n-1}}{1 - c_n K_{n-1}}, \quad \varphi_i = K_i\varphi_{i+1} + L_i, \quad i = \overline{n-1, 0},$$

называется *методом правой прогонки*. Если решение искать в виде $\varphi_i = K_i\varphi_{i-1} + L_i$, то рекуррентные соотношения называются *формулами левой прогонки*.

Нахождение решения системы уравнений

$$a_1\varphi_2 - b_1\varphi_1 + c_1\varphi_n = f_1,$$

$$a_i\varphi_{i+1} - b_i\varphi_i + c_i\varphi_{i-1} = f_i \quad i = \overline{2, n-1},$$

$$a_n\varphi_1 - b_n\varphi_n + c_n\varphi_{n-1} = f_n,$$

по формулам

$$K_1=\frac{a_1}{b_1},\quad L_1=-\frac{f_1}{b_1},\quad M_1=\frac{c_1}{b_1},$$

$$K_i=\frac{a_i}{b_i-K_{i-1}c_i},\quad L_i=\frac{c_iL_{i-1}-f_i}{b_i-K_{i-1}c_i},$$

$$M_i=\frac{c_iM_{i-1}}{b_i-K_{i-1}c_i},\qquad i=\overline{2,n},$$

$$p_{n-1}=L_{n-1},\quad q_{n-1}=K_{n-1}+M_{n-1},$$

$$p_i=K_ip_{i+1}+L_i,\quad q_i=K_iq_{i+1}+M_i,\qquad i=\overline{n-2,1},$$

$$\varphi_n=\frac{L_n+K_np_1}{1-K_nq_1-M_n},\quad \varphi_i=p_i+\varphi_nq_i,\quad i=\overline{1,n-1}$$

называется *циклической прогонкой.*

Система уравнений

$$a_{i+k}\varphi_{i+k}+a_{i+k-1}\varphi_{i+k-1}+\ldots+a_{i+1}\varphi_{i+1}+a_i\varphi_i=f_i,$$

где $i=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ ($a_{i+k}\neq0$, $a_i\neq0$ хотя бы для одного $i$), называется *линейным разностным уравнением $k$-го порядка.* Это уравнение с $f_i=0$ для всех $i$ называется *линейным однородным разностным уравнением*, а в противном случае *линейным неоднородным разностным уравнением.*

Теорема 1. *Если $\varphi^{(1)},\ \varphi^{(2)},\ \ldots,\ \varphi^{(k)}$ — решения линейного однородного разностного уравнения, причем*

$$D\left[\varphi^{(1)},\varphi^{(2)},\ldots,\varphi^{(k)}\right]=\begin{vmatrix}\varphi_0^{(1)} & \varphi_1^{(1)} & \ldots & \varphi_{k-1}^{(1)}\\ \varphi_0^{(2)} & \varphi_1^{(2)} & \ldots & \varphi_{k-1}^{(2)}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \varphi_0^{(k)} & \varphi_1^{(k)} & \ldots & \varphi_{k-1}^{(k)}\end{vmatrix}$$

*отличен от нуля, то общее решение этого уравнения имеет вид $\varphi=\sum\limits_{l=1}^{k}C_l\varphi^{(l)}$, где $C_l$ — произвольные постоянные.*

Теорема 2. *Общее решение линейного неоднородного разностного уравнения представляется в виде суммы его частного решения и общего решения линейного однородного разностного уравнения, т. е. $\varphi=\varphi^*+\sum\limits_{l=1}^{k}C_l\varphi^{(l)}$, где $\varphi^*$ — частное решение неоднородного уравнения.*

Общее решение линейного однородного разностного уравнения $k$-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_k\varphi_{i+k}+a_{k-1}\varphi_{i+k-1}+\ldots+a_1\varphi_{i+1}+a_0\varphi_i=0,$$

где $i=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$, может быть выражено через корни характеристического уравнения

$$a_k\mu^k+a_{k-1}\mu^{k-1}+\ldots+a_1\mu+a_0=0.$$

Характеристическое уравнение получается, если искать решение разностного уравнения в виде

$$\varphi_i=\mu^i.$$

Если все корни характеристического уравнения простые, то общее решение имеет вид

$$\varphi_i=\sum_{l=1}^{k}C_l\mu_l^i.$$

В общем случае

$$\varphi_i=\sum_{l=1}^{k_1}\mu_l^i\sum_{m=1}^{s_l}C_m^l i^{m-1};$$

здесь $s_l$ — кратность $l$-го корня, $k_1$ — количество различных корней, $\sum_{l=1}^{k_1}s_l=k$.

Сведения, необходимые для решения задач данной главы, приведены в МВМ, гл. 1, стр. 31 — 36; гл. 4, стр. 223 — 242.

## § 2. Задачи

2.1. Показать, что число обусловленности $\operatorname{cond}(A)$ не меняется при умножении матрицы $A$ на ненулевое число.

2.2. Доказать, что $\operatorname{cond}_2(A)=1$, если $A$ — ортогональная матрица.

2.3. Доказать, что для матрицы $A$ размера $n\times n$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{n}\leqslant\frac{\operatorname{cond}_\infty(A)}{\operatorname{cond}_2(A)}\leqslant n.$$

2.4. Пусть

$$A=\begin{bmatrix}100 & 99\\ 99 & 98\end{bmatrix}.$$

Доказать, что данная матрица имеет наибольшее число обусловленности $\operatorname{cond}_2(A)$ из всех невырожденных матриц второго порядка, элементами которых являются положительные целые числа, меньшие или равные 100.

**2.5.** Пусть $A$ — симметричная положительно определенная матрица. Доказать, что $\operatorname{cond}_2(A+\alpha E)$ есть монотонно убывающая функция от $\alpha$ при $\alpha>0$ $(A\neq\beta E)$.

**2.6.** Пусть для некоторого $1>\alpha>0$ и матрицы $A$ размера $n\times n$

$$\alpha|a_{ii}|\geqslant\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\quad i=\overline{1,n}.$$

Оценить снизу и сверху $\operatorname{cond}_\infty(A)$ через диагональные элементы матрицы $A$.

**2.7.** Пусть $R$ — треугольная матрица размера $n\times n$, для которой 1) $|r_{ij}|\leqslant 1$ для всех $i$, $j$; 2) $r_{ii}=1$ для всех $i$. Найти максимально возможное значение числа обусловленности $\operatorname{cond}_\infty(R)$.

**2.8.** Найти выражение для числа обусловленности $\operatorname{cond}_\infty(A)$ невырожденной матрицы $A$ размера $n\times n$ через ее сингулярные числа $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\ldots\geqslant\alpha_n$.

**2.9.** Пусть даны система линейных алгебраических уравнений $A\varphi=f$ и возмущенные системы:

а) $A(\varphi+\delta\varphi)=f+\delta f$,

б) $(A+\delta A)(\varphi+\delta\varphi)=f$.

Показать, что для любой нормы справедливы неравенства:

а) $\dfrac{\|\delta\varphi\|}{\|\varphi\|}\leqslant\operatorname{cond}(A)\dfrac{\|\delta f\|}{\|f\|}$,

б) $\dfrac{\|\delta\varphi\|}{\|\varphi+\delta\varphi\|}\leqslant\operatorname{cond}(A)\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}$.

**2.10.** Пусть $\varphi_1$ — приближенное решение линейной системы $A\varphi=f$ при $f\neq 0$. Обозначим

$$e_1=\varphi_1-A^{-1}f,\ r_1=f-A\varphi_1,$$
$$\rho_r=\|r_1\|/\|f\|,\quad \rho_e=\|e_1\|/\|A^{-1}f\|.$$

Доказать, что

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(A)}\leqslant\frac{\rho_e}{\rho_r}\leqslant\operatorname{cond}(A).$$

**2.11.** Доказать неравенство

$$\frac{\|B^{-1}-A^{-1}\|}{\|B^{-1}\|}\leqslant\operatorname{cond}(A)\frac{\|A-B\|}{\|A\|}.$$

**2.12.** Пусть $A$ — квадратная невырожденная матрица, а приближенная обратная к ней матрица $B$ удовлетворяет оценкам

$$\|AB - E\| \leqslant 0{,}02, \quad \|B\| = 100.$$

Дать достаточно точную верхнюю оценку для нормы $\|B - A^{-1}\|$.

**2.13.** Пусть $A$ и $A^{-1}$ имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 13 & -17 \\ 13 & 29 & -38 \\ -17 & -38 & 50 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & -1 \\ -4 & 11 & 7 \\ -1 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Собственные числа $\lambda(A)$ приближенно равны:

$$\lambda_1 = 0{,}0588; \quad \lambda_2 = 0{,}2007; \quad \lambda_3 = 84{,}74.$$

а) Описать множество $S = \{Ax\colon \|x\| = 1\}$.

б) Найти $\|A\|_2$, $\|A^{-1}\|_2$, $\operatorname{cond}_2(A)$.

**2.14.** Пусть для матрицы $A$ из задачи 2.13 и векторов $\varphi$ и $f$ известно, что $\|A\varphi - f\|_2 \leqslant 0{,}01$, $\|f\|_2 = 1$.

а) Найти наименьшую верхнюю границу нормы $\|\varphi - A^{-1}f\|_2$.

б) Найти наименьшую верхнюю границу выражения

$$\|\varphi - A^{-1}f\|_2 / \|A^{-1}f\|_2.$$

**2.15.** Для задачи

$$a_i\varphi_{i+1} - b_i\varphi_i + c_i\varphi_{i-1} = f_i, \quad i = \overline{1, n-1},$$
$$|b_i| \geqslant |a_i| + |c_i|, \quad a_i \neq 0,\ c_i \neq 0,$$
$$\varphi_0 = a_0\varphi_1 + f_0, \quad 0 \leqslant a_0 < 1,$$
$$\varphi_n = c_n\varphi_{n-1} + f_n, \quad 0 \leqslant c_n < 1,$$

написать формулы правой и левой прогонки. Показать, что прогоночные коэффициенты, не содержащие правой части, меньше единицы.

**2.16.** Доказать, что для решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей из задачи 2.15 метод прогонки есть метод Гаусса.

**2.17.** Написать формулы циклической прогонки для решения системы

$$a_i\varphi_{i+1} - b_i\varphi_i + c_i\varphi_{i-1} = f_i, \quad i = \overline{0, n},$$
$$\varphi_{-1} = \varphi_n, \quad \varphi_{n+1} = \varphi_0,$$
$$|b_i| \geqslant |a_i| + |c_i|, \quad a_i \neq 0, \quad c_i \neq 0$$

(строгое неравенство имеет место хотя бы при одном $i$).

**2.18.** Пусть $A$ — матрица размера $n \times n$ имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & u \\ v & a_n \end{bmatrix},$$

где $u$ — вектор-столбец размерности $n-1$, $v$ — вектор-строка размерности $n-1$, и нам известны решения систем

$$A_{n-1}y = g, \quad A_{n-1}z = u.$$

Найти решение системы $A\varphi = f$, $f = [g^T, b]^T$.

**2.19.** Написать формулы матричной прогонки для решения системы уравнений

$$-\varphi_{k-1, l} - \varphi_{k, l-1} - \varphi_{k+1, l} - \varphi_{k, l+1} + 4\varphi_{k, l} = f_{k, l},$$

$$k = \overline{1, n-1}, \quad l = \overline{1, n-1},$$

$$\varphi_{i,0} = \varphi_{0,i} = \varphi_{n,i} = \varphi_{i,n} = 0, \ i = \overline{0, n}.$$

**2.20.** Доказать, что матрица $A$ размера $n \times n$, все главные миноры которой не равны нулю, может быть представлена в виде произведения левой ($L$) и правой ($R$) треугольных матриц: $A = LR$. Сформулировать метод решения системы $A\varphi = f$ с помощью такого разложения.

**2.21.** Доказать, что если все главные миноры матрицы $A$ не равны нулю, то имеется единственное разложение $A = LDU$, где $L$ — нижняя, $U$ — верхняя треугольные матрицы с единицами на диагонали, а $D$ — диагональная матрица, причем

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}.$$

**2.22.** Доказать теорему Фредгольма: для того чтобы неоднородная система линейных уравнений $A\varphi = f$ была совместна, необходимо и достаточно, чтобы вектор $f$ был ортогонален ко всем решениям сопряженной однородной системы $A^*\psi = 0$.

**2.23.** Доказать следующую альтернативу Фредгольма: или система уравнений $A\varphi = f$ совместна при любой правой части $f$, или сопряженная однородная система $A^*\psi = 0$ имеет ненулевые решения.

**2.24.** Доказать, что положительно определенную симметричную матрицу $A$ можно представить в виде произведения $A = SS^{\mathrm{T}}$, где $S$ — нижняя треугольная матрица.

**2.25.** Как связаны числа обусловленности $\mathrm{cond}_2(\cdot)$ матриц $A$ и $S$ из задачи 2.24?

**2.26.** Пусть $y$ и $z$ — два частных решения уравнения

$$a_i\varphi_{i+1} + b_i\varphi_i + c_i\varphi_{i-1} = 0, \quad a_i \neq 0, \quad c_i \neq 0.$$

Доказать, что определитель $\begin{vmatrix} y_i & y_{i+1} \\ z_i & z_{i+1} \end{vmatrix}$ либо равен нулю во всех точках $i$, либо не равен нулю во всех точках $i$.

**2.27.** Сформулировать и решить задачу, аналогичную 2.26, для разностного уравнения

$$a_{i+k}\varphi_{i+k} + a_{i+k-1}\varphi_{i+k-1} + \ldots + a_{i-k}\varphi_{i-k} = 0.$$

**2.28.** Найти общие решения следующих разностных уравнений:

а) $6\varphi_{i+1} - 5\varphi_i + \varphi_{i-1} = 0$,
б) $2\varphi_{i+1} - 5\varphi_i + 2\varphi_{i-1} = 0$,
в) $\varphi_{i+1} - 4\varphi_i + 4\varphi_{i-1} = 0$,
г) $9\varphi_{i+1} - 6\varphi_i + \varphi_{i-1} = 0$,
д) $\varphi_{i+1} - 4\varphi_i - 5\varphi_{i-1} = 0$,
е) $5\varphi_{i+1} - 6\varphi_i + 5\varphi_{i-1} = 0$.

**2.29.** Найти при $i \geqslant 0$ ограниченное решение разностного уравнения

$$\varphi_{i+1} - \frac{10}{3}\varphi_i + \varphi_{i-1} = 0$$

такое, что $\varphi_0 = 1$.

**2.30.** Найти миллионный член последовательности чисел Фибоначчи

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

**2.31.** Найти решение системы разностных уравнений

$$\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1} = 0, \quad i = \overline{1, n-1},$$
$$\varphi_0 = a, \quad \varphi_n = b.$$

**2.32.** Найти решение разностной системы

$$-\varphi_{i+1} + 2\varphi_i - \varphi_{i-1} = h^2 \sin(ih), \quad i = \overline{1, n-1},$$
$$\varphi_0 - \varphi_1 = -h, \quad \varphi_n = 1, \quad nh = \pi/2.$$

**2.33.** Найти общее решение разностного уравнения

$$\varphi_{2i+1} + \varphi_{2i} - \varphi_{2i-1} = 0,$$

$$\varphi_{2i+2} - \varphi_{2i+1} - \varphi_{2i} = 0.$$

**2.34.** Исследовать разрешимость разностной краевой задачи

$$\varphi_{2i+2} - \varphi_{2i+1} - \varphi_{2i} = f_{2i+1},$$

$$\varphi_{2i+1} + \varphi_{2i} - \varphi_{2i-1} = f_{2i},$$

$$\varphi_0 = a, \quad \varphi_n = b.$$

**2.35.** Решить спектральную задачу

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} = -\lambda\varphi_i, \qquad i = \overline{1, n-1},$$

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_n = 0.$$

**2.36.** Решить спектральную задачу

$$-\frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} = \lambda\varphi_i, \qquad i = \overline{1, n-1},$$

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_n = 0.$$

**2.37.** Решить спектральную задачу

$$-\frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} = \lambda\varphi_i, \qquad i = \overline{1, n-1},$$

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_n = \varphi_{n-1}.$$

**2.38.** Решить спектральную задачу

$$-\frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} = \lambda\varphi_i, \qquad i = \overline{1, n-1},$$

$$\varphi_0 = \varphi_1, \quad \varphi_n = \varphi_{n-1}.$$

**2.39.** Решить спектральную задачу

$$-\frac{\varphi_{i-1,k} + \varphi_{i+1,k} + \varphi_{i,k-1} + \varphi_{i,k+1} - 4\varphi_{i,k}}{h^2} = \lambda\varphi_{i,k},$$

$$i, k = \overline{1, n-1},$$

$$\varphi_{i,0} = \varphi_{0,i} = \varphi_{i,n} = \varphi_{n,i} = 0, \quad i = \overline{0, n}.$$

**2.40.** Решить спектральную задачу 2.39 при следующих граничных условиях:

$$\varphi_{i,0} = \varphi_{0,i} = \varphi_{n,i} = 0, \quad \varphi_{i,n} = \varphi_{i,n-1}, \quad i = \overline{0, n}.$$

**2.41.** Решить спектральную задачу 2.39 при следующих граничных условиях:

$$\varphi_{i,0} = \varphi_{i,n} = 0, \quad \varphi_{0,i} = \varphi_{1,i}, \quad \varphi_{n,i} = \varphi_{n-1,i}, \qquad i = \overline{0,\ n}.$$

**2.42.** Решить спектральную задачу 2.39 при следующих граничных условиях:

$$\varphi_{i,0} = \varphi_{0,i} = 0, \quad \varphi_{i,n} = \varphi_{i,n-1}, \quad \varphi_{n,i} = \varphi_{n-1,i}, \qquad i = \overline{0,\ n}.$$

**2.43.** Методом циклической редукции найти решение разностной задачи

$$-\varphi_{i+1} + 2\varphi_i - \varphi_{i-1} = -6i, \quad i = \overline{1,\ 7},$$
$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_8 = 272.$$

**2.44.** Выписать формулы быстрого преобразования Фурье для сеточной комплекснозначной функции $\varphi^h$, заданной на равномерной сетке $\{x_0, \ldots, x_{N-1}\}$, с шагом $h$, где $N = 3^m$, $m$ — натуральное число.

**2.45.** Выписать расчетные формулы быстрого преобразования Фурье для нахождения коэффициентов разложения вещественной сеточной функции в ряд по косинусам.

**2.46.** Решить задачу 2.45 для разложения в ряд по синусам и косинусам.

ГЛАВА 3

# ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

## § 1. Определения. Теоремы

Дана система линейных уравнений $A\varphi = f$ с невырожденной матрицей $A$ размера $n\times n$. Для решения этой системы рассмотрим итерационный процесс

$$\varphi^{j+1} = \varphi^j - H_j(A\varphi^j - f),$$

где $H_j$ — невырожденные матрицы. Запишем его в виде

$$\varphi^{j+1} = T_j\varphi^j + H_jf,$$

где $T_j = E - H_jA$ — оператор $j$-го шага итерационного процесса. Обозначим: $\psi^j$ — вектор ошибки ($\psi^j = \varphi^j - \varphi$), а $\zeta^j$ — вектор невязки ($\zeta^j = A\varphi^j - f$). Имеют место соотношения

$$A\psi^j = \zeta^j, \qquad \psi^j = A^{-1}\zeta^j,$$

$$\psi^{j+1} = T_j\psi^j, \qquad \zeta^{j+1} = AT_jA^{-1}\zeta^j.$$

Итерационный процесс называется *сходящимся*, если последовательность $\{\varphi^j\}$ сходится к $\varphi$ при любом $\varphi^0$. Итерационный процесс называется *стационарным*, если $T_j$ не зависит от номера шага $j$. В противном случае процесс называется *нестационарным*.

Для того чтобы итерационный процесс $\varphi^{j+1} = T_j\varphi^j + H_jf$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы

$$\left\| \prod_{j=0}^{l} T_j \right\| \underset{l\to\infty}{\to} 0.$$

Необходимым и достаточным условием сходимости стационарного итерационного процесса $\varphi^{j+1} = T\varphi^j + Hf$ является неравенство $\rho(T) < 1$. Достаточным условием сходимости стационарного итерационного процесса $\varphi^{j+1} = T\varphi^j + Hf$ является неравенство $\|T\| < 1$.

*Средней скоростью сходимости* итерационного процесса за $j$ итераций называется величина

$$R_j = -\frac{1}{j} \ln \left( \sup \frac{\|\psi^j\|}{\|\psi^0\|} \right), \quad \text{если } \|\psi^j\| < \|\psi^0\|, \ \|\psi^0\| \neq 0;$$

для стационарного процесса она равна

$$R_j = -\frac{1}{j} \ln \|T^j\|, \text{ если } \|T^j\| < 1.$$

*Асимптотической скоростью сходимости* итерационного процесса называется

$$R_{\text{ac}} = \lim_{j \to \infty} R\ ;$$

для стационарного процесса она равна

$$R_{\text{ac}} = -\ln \rho(T).$$

Приведем некоторые итерационные процессы для решения систем $A\varphi = f$, записанные в виде $\varphi^{j+1} = T_j\varphi^j + H_j f$.

1. *Метод последовательных приближений:*

$$T_j = E - A, \quad H_j = E.$$

2. *Метод простой итерации (метод Якоби):*

$$T_j = E - D^{-1}A, \quad H_j = D^{-1}, \quad D = \operatorname{diag}\{a_{ii}\}.$$

3. *Одношаговый циклический процесс (метод Зейделя):*

$$T_j = (E - M)^{-1}N, \quad H_j = (E - M)^{-1},$$

где $M + N = E - A$, $M$ — нижняя треугольная матрица с нулевыми диагональными элементами, $N$ — верхняя треугольная матрица.

4. *Метод Гаусса — Зейделя:*

$$T_j = -(D + L)^{-1}R, \quad H_j = (D + L)^{-1},$$

где $L + D + R = A$, $L$ — нижняя треугольная матрица с нулевыми диагональными элементами, $D$ — диагональная матрица, $R$ — верхняя треугольная матрица с нулевыми диагональными элементами.

5. *Метод последовательной релаксации:*

$$T_j = (D + \tau L)^{-1}((1 - \tau)D - \tau R),$$

$$H_j = \tau(D + \tau L)^{-1}, \ 0 < \tau < 2;$$

при $\tau > 1$ метод называется методом последовательной верхней релаксации, при $\tau < 1$ — методом последовательной нижней релаксации, при $\tau = 1$ он тождествен методу Гаусса — Зейделя.

6. *Чебышевский циклический итерационный метод:*

$$T_j = E - \tau_j A, \quad H_j = \tau_j E,$$

$$\tau_j = \frac{2}{\rho(A) - \alpha(A) - (\rho(A) - \alpha(A))\, x_j},$$

$$0 < \alpha(A) \leqslant \lambda_i(A) \leqslant \rho(A),$$

$$x_j = \cos\frac{2j-1}{2s}\pi, \quad j = \overline{1, s},$$

$s$ — длина цикла.

7. *Метод минимальных невязок:*

$$T_j = E - \tau_j A, \quad H_j = \tau_j E, \quad \tau_j = \frac{(A\zeta^j, \zeta^j)}{(A\zeta^j, A\zeta^j)}.$$

8. *Метод наискорейшего спуска:*

$$T_j = E - \tau_j A, \quad H_j = \tau_j E, \quad \tau_j = \frac{(\zeta^j, \zeta^j)}{(A\zeta^j, \zeta^j)}.$$

9. *Метод расщепления* ($A = A_1 + A_2$):

$$T_j = \left(E + \frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}\left(E + \frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1} \times \\ \times \left(E - \frac{\tau}{2}A_1\right)\left(E - \frac{\tau}{2}A_2\right),$$

$$H_j = \tau\left(E + \frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}\left(E + \frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}.$$

Сведения, необходимые для решения задач, приведены в МВМ, гл. 4, стр. 161—223.

## § 2. Задачи

**3.1.** Пусть дан итерационный процесс $\varphi^{j+1} = B\varphi^j + f$, где

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & 4 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Показать, что норма $\|\cdot\|_\infty$ ошибки в этом процессе начинает монотонно убывать лишь с некоторого номера итерации $J_0$ (определять $J_0$ при $\alpha$, достаточно близких к 1).

**3.2.** Доказать, что при достаточно большом $j$ для получения еще одного верного десятичного знака у $\varphi^j$ достаточно проделать $(\ln 10/R_{ac})$ итераций, где $R_{ac}$ — асимптотическая скорость сходимости.

**3.3.** Привести пример сходящегося итерационного процесса и такого $\psi^0$ ($\psi^j$ — вектор ошибки), что

$$\|\psi^4\|_2/\|\psi^0\|_2 \geqslant 100.$$

**3.4.** Привести пример расходящегося итерационного процесса и такого $\psi^0$, что

$$\|\psi^3\|_2/\|\psi^0\|_2 \leqslant 0{,}01.$$

**3.5.** Пусть дан итерационный процесс $\varphi^{j+1} = T\varphi^j + g$ ($\|T\| < 1$), сходящийся к решению системы уравнений $A\varphi = f$. Показать, что

$$\|\psi^j\| \leqslant \|(E-T)^{-1}\|\|\varphi^{j+1} - \varphi^j\|, \quad \psi^j = \varphi^j - \varphi.$$

**3.6.** В условиях задачи 3.5 доказать, что

$$\|\psi^j\| \leqslant \|T\|^j\|\psi^0\| + \frac{\|g\|\|T\|^j}{1-\|T\|}, \quad \psi^j = \varphi^j - \varphi.$$

**3.7.** Дан итерационный процесс $\varphi^{j+1} = C\varphi^j + g$. Доказать, что если $\lambda_i(C) = 0$ для всех $i$, то итерационный процесс сойдется не более чем за $n$ итераций.

**3.8.** Дана система линейных алгебраических уравнений $A\varphi = f$. Предположим, что известны все собственные числа матрицы $A$, причем $\lambda_i(A) > 0$, $i = \overline{1, n}$. Построить итерационный процесс вида $\varphi^{j+1} = (E - \tau_j A)\varphi^j + \tau_j f$, сходящийся к точному решению $A\varphi = f$ не более чем за $n$ итераций.

**3.9.** Пусть дана система уравнений $A\varphi = f$, где

$$A = E - C, \quad c_{ij} \geqslant 0, \quad f_i \geqslant 0.$$

Показать, что если решение системы $A\varphi = f$ неотрицательно, то процесс последовательных приближений $\varphi^{j+1} = C\varphi^j + f$, $\varphi^0 = 0$, сходится.

**3.10.** Пусть дан итерационный процесс вида $\varphi^{j+1} = B\varphi^j + f$, где $B$ — трехдиагональная неразложимая матрица, в которой суммы модулей элементов по строкам удовлетворяют условию $\sum\limits_{k=1}^{n} |b_{ik}| \leqslant 1$, $i = \overline{1, n}$, причем строгое неравенство выполняется хотя бы в одной строке. Показать, что данный итерационный процесс сходится.

**3.11.** Указать область значений $\tau$, при которых итерационный процесс $\varphi^{j+1} = (E - \tau A)\varphi^j + \tau f$ сходится, если $\operatorname{Re}\lambda(A) \geqslant \delta > 0$.

**3.12.** Показать, что итерационные процессы

$$\varphi^{j+1} = (E - \tau AB)\varphi^j + \tau f,$$

$$\varphi^{j+1} = (E - \tau BA)\varphi^j + \tau f$$

сходятся или расходятся одновременно.

**3.13.** Пусть $A$ — матрица размера $2 \times 2$, $a_{ii} \neq 0$. Доказать, что метод Якоби и метод Гаусса — Зейделя для системы $A\varphi = f$ сходятся или расходятся одновременно.

**3.14.** Показать, что существует система уравнений 3-го порядка, для которой метод Якоби сходится, а метод Гаусса — Зейделя расходится.

**3.15.** Показать, что существует система уравнений 3-го порядка, для которой метод Гаусса — Зейделя сходится, а метод Якоби расходится.

**3.16.** Пусть дан итерационный процесс вида $\varphi^{j+1} = B\varphi^j + f$, $B = M + N$, где $M$ — нижняя треугольная матрица с нулями на диагонали, $N$ — верхняя треугольная матрица. Показать, что если $\|B\|_\infty \leqslant \mu < 1$ (т. е. процесс сходится), то будет сходиться и итерационный процесс $\varphi^{j+1} = M\varphi^{j+1} + N\varphi^j + f$.

**3.17.** Дана система уравнений

$$-\frac{\varphi_{k,l+1} + \varphi_{k,l-1} + \varphi_{k+1,l} + \varphi_{k-1,l} - 4\varphi_{k,l}}{h^2} = f_{k,l},$$

$$k, l = \overline{1, n-1},$$

$$\varphi_{0,k} = \varphi_{n,k} = \varphi_{k,0} = \varphi_{k,n} = 0, \quad k = \overline{0, n}.$$

Написать расчетные формулы алгоритма метода Якоби для решения этой системы и найти его асимптотическую скорость сходимости.

**3.18.** Решить задачу 3.17 для метода чебышевского ускорения при $s = 1$.

**3.19.** Решить задачу 3.17 для метода Гаусса — Зейделя.

**3.20.** Решить задачу 3.17 для метода последовательной верхней релаксации при $\tau = \tau_{\text{опт}}$.

**3.21.** Решить задачу 3.17 для метода чебышевского ускорения при $s=8$.

**3.22.** Написать расчетные формулы алгоритма метода последовательной верхней релаксации для системы уравнений

$$\varphi_{k,l}=a_{k,l}\varphi_{k-1,l}+b_{k,l}\varphi_{k+1,l}+c_{k,l}\varphi_{k,l-1}+d_{k,l}\varphi_{k,l+1}+f_{k,l}, \quad k, l=\overline{1, n-1},$$

$$\varphi_{k,0}=\varphi_{k,n}=\varphi_{0,k}=\varphi_{n,k}=0, \quad k=\overline{0, n}.$$

**3.23.** Показать, что метод минимальных невязок для решения системы $A\varphi=f$ с симметричной положительно определенной матрицей $A$ является нижней релаксацией метода наискорейшего спуска.

**3.24.** Дана система уравнений $A\varphi=f$ с вещественной положительно определенной матрицей $A$. Доказать, что метод минимальных невязок для решения этой системы сходится, если $\varphi^0\in E_n$, $f\in E_n$.

**3.25.** В условиях задачи 3.24 доказать сходимость для метода наискорейшего спуска.

**3.26.** Матрица шага для метода верхней релаксации имеет вид $C=(E+\tau M)^{-1}((1-\tau)E-\tau N)$, где $M$, $N$ — соответственно нижняя и верхняя треугольные матрицы с нулевыми диагональными элементами. Доказать, что $\rho(C)\geqslant|\tau-1|$. При каких $\tau$ метод последовательной верхней релаксации расходится?

**3.27.** Дан итерационный процесс $\varphi^{j+1}=(E-\tau A)\varphi^j+\tau f$, где $A$ представима в виде произведения двух некоммутирующих симметричных положительно определенных матриц. Доказать, что итерационный процесс сходится при $0<\tau<2/\rho(A)$.

**3.28.** Дана система уравнений $A\varphi=f$, где

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,3 & -3 & 1,0 & -1,4 \\ 0,4 & 0,8 & 4 & 2,4 \\ -0,5 & 1,2 & -2,5 & -5 \end{bmatrix}.$$

Исследовать сходимость метода Якоби для решения этой системы.

**3.29.** Решить задачу 3.28 для матрицы

$$A=\begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

**3.30.** Показать, что для системы линейных уравнений $A\varphi = f$, где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 4{,}8 \end{bmatrix},$$

метод последовательных приближений $\varphi^{j+1} = (E - \tau A)\varphi^j + \tau f$ будет сходиться при $0 < \tau < 0{,}4$.

**3.31.** Определить область значений параметра $\tau$ для метода минимальных невязок при решении системы уравнений $A\varphi = f$ для $A = \alpha E + K$, где $K$ — кососимметричная матрица, а $\alpha > 0$.

**3.32.** Дана система уравнений

$$-\frac{\varphi_{k,l+1} + \varphi_{k,l-1} + \varphi_{k+1,l} + \varphi_{k-1,l} - 4\varphi_{k,l}}{h^2} = f_{k,l},$$

$$k = \overline{n-1, 1}, \quad l = \overline{1, n-1},$$

$$\varphi_{0,k} = \varphi_{n,k} = \varphi_{k,0} = \varphi_{k,n} = 0, \quad k = \overline{0, n}.$$

Найти асимптотическую скорость сходимости метода Якоби.

**3.33.** Дана система разностных уравнений

$$-\frac{\varphi_{k,l+1} + \varphi_{k,l-1} + \varphi_{k+1,l} + \varphi_{k-1,l} - 4\varphi_{k,l}}{h^2} = f_{k,l},$$

$$k = \overline{1, n-1}, \quad l = \overline{n-1, 1},$$

$$\varphi_{0,k} = \varphi_{n,k} = \varphi_{k,0} = \varphi_{k,n} = 0, \quad k = \overline{0, n}.$$

Найти асимптотическую скорость сходимости метода Гаусса — Зейделя.

**3.34.** Пусть для решения системы $A\varphi = f$ с матрицей $A$, имеющей вещественный спектр $\Delta \geqslant \lambda(A) \geqslant \delta > 0$, предложен итерационный процесс

$$\varphi^{j+1} = \varphi^j - \tau\left(A\,\frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} - f\right).$$

Доказать, что при $\tau > 0$ этот итерационный процесс сходится.

**3.35.** Для итерационного процесса из задачи 3.34 оценить асимптотическую скорость сходимости и определить $\tau$, при котором асимптотическая скорость сходимости максимальна.

**3.36.** Пусть для решения системы $A\varphi = f$ $(A = A_1 + A_2,\ A_1A_2 = A_2A_1)$ предложен итерационный процесс

$$\varphi^{k+1/2} = \varphi^k - \tau(A_1\varphi^{k+1/2} + A_2\varphi^k - f),$$

$$\varphi^{k+1} = \varphi^{k+1/2} - \tau(A_1\varphi^{k+1/2} + A_2\varphi^{k+1} - f).$$

Матрицы простой структуры $A_i$ имеют вещественный спектр, и выполняются неравенства $\Delta \geqslant \lambda(A_i) \geqslant \delta > 0$, $i = 1, 2$. Доказать, что итерационный процесс сходится.

**3.37.** Для итерационного процесса из задачи 3.36 оценить асимптотическую скорость сходимости и определить $\tau$, при котором асимптотическая скорость сходимости максимальна.

**3.38.** Пусть для решения системы $A\varphi = f$ $(A = A_1 + A_2,\ A_1A_2 = A_2A_1)$ предложен итерационный процесс

$$\varphi^{k+1/2} = \varphi^k - \tau(A_1\varphi^{k+1/2} + A_2\varphi^k - f),$$

$$\varphi^{k+1} = \varphi^{k+1/2} - \tau A_2(\varphi^{k+1} - \varphi^k).$$

Матрицы простой структуры $A_i$ имеют вещественный спектр, и выполняются неравенства $\Delta \geqslant \lambda(A_i) \geqslant \delta > 0$, $i = 1, 2$. Доказать, что итерационный процесс сходится.

**3.39.** Для итерационного процесса из задачи 3.38 определить асимптотическую скорость сходимости и определить $\tau$, при котором асимптотическая скорость сходимости максимальна.

**3.40.** Доказать сходимость итерационного процесса из задачи 3.36, если матрицы $A_i$ удовлетворяют условиям

$$A_1A_2 \neq A_2A_1, \quad (A_i\varphi, \varphi) > 0, \quad i = 1, 2.$$

**3.41.** Доказать сходимость итерационного процесса из задачи 3.38, если матрицы $A_i$ удовлетворяют условиям

$$A_1A_2 \neq A_2A_1, \quad (A_i\varphi, \varphi) > 0, \quad i = 1, 2.$$

**3.42.** Пусть для решения системы $A\varphi = f$ $(A = A_1 + A_2,\ A_1A_2 = A_2A_1)$ предложен итерационный процесс

$$\varphi^{k+1/2} = \varphi^k - \tau(A_1(\varphi^{k+1/2} + \varphi^k) - 2f_1),$$

$$\varphi^{k+1} = \varphi^{k+1/2} - \tau(A_2(\varphi^{k+1} + \varphi^{k+1/2}) - 2f_2),$$

$$f_1 + f_2 = f.$$

Доказать, что $\frac{1}{2}(\varphi^{k+1}+\varphi^{k+1/2})$ сходится к решению системы, если матрицы простой структуры $A_i$ имеют вещественный спектр и выполняются неравенства

$$\Delta \geqslant \lambda(A_i) \geqslant \delta > 0, \quad i = 1, 2.$$

**3.43.** Для итерационного процесса из задачи 3.42 определить асимптотическую скорость сходимости и определить $\tau$, при котором асимптотическая скорость сходимости максимальна.

**3.44.** Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 3 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & 5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Доказать, что итерационный процесс из задачи 3.36 для решения системы $A\varphi = f$ будет сходиться, если $A = A_1 + A_2$, $A_1 = A^T_2$, $A_1$ — верхняя треугольная матрица.

**3.45.** Решить задачу 3.44 для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2,5 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4,5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 6,5 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 8,5 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 10,5 \end{pmatrix}.$$

**3.46.** Написать формулы метода сопряженных градиентов (МВМ, стр. 192—198) для решения системы уравнений

$$A^T A\varphi = A^T f.$$

**3.47.** Решить задачу 3.46 для системы

$$AA^T\psi = f, \quad \varphi = A^T\psi.$$

**3.48.** Для системы уравнений

$$2\varphi_1 - \varphi_2 = 1,$$

$$-\varphi_{i+1} + 2\varphi_i - \varphi_{i-1} = i, \quad i = \overline{2, n-2},$$

$$-\varphi_{n-2} + 2\varphi_{n-1} = n - 1$$

а) написать расчетные формулы чебышевского итерационного метода с длиной цикла, равной четырем;

б) найти значения $\|E-\tau_j A\|_2$, $j=\overline{1, 4}$;

в) вычислить величину $\prod_{k=1}^{4}\|E-\tau_k A\|_2$ при $n=12$;

г) вычислить величину $\left\|\prod_{k=1}^{4}(E-\tau_k A)\right\|_2$ при $n=12$.

**3.49.** Дана система уравнений

$$-\frac{\varphi_{k,l+1}+\varphi_{k,l-1}+\varphi_{k+1,l}+\varphi_{k-1,l}-4\varphi_{k,l}}{h^2}=f_{k,l},$$

$$k, l=\overline{1, n-1},$$

$$\varphi_{0,k}=\varphi_{n,k}=\varphi_{k,0}=\varphi_{k,n}=0,\ k=\overline{0, n}.$$

Найти число арифметических операций, необходимых для выполнения одной итерации метода Якоби при решении этой системы.

**3.50.** Решить задачу 3.49 для метода Зейделя.

**3.51.** Решить задачу 3.49 для метода Гаусса — Зейделя.

**3.52.** Решить задачу 3.49 для метода последовательной верхней релаксации.

**3.53.** Решить задачу 3.49 для метода минимальных невязок.

**3.54.** Решить задачу 3.49 для метода расщепления.

**3.55.** Решить задачу 3.49 для метода сопряженных градиентов (МВМ, стр. 192—198).

**3.56.** Сколько требуется провести итераций метода Якоби для решения системы уравнений из задачи 3.49, чтобы норма $\|\psi^0\|_2$ ($\psi^j$ — вектор ошибки) уменьшилась в 1000 раз?

**3.57.** Решить задачу 3.56 для метода Гаусса — Зейделя.

**3.58.** Решить задачу 3.56 для метода последовательной верхней релаксации с оптимальным параметром релаксации.

ГЛАВА 4

# РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## § 1. Определения. Теоремы

*Сеткой* называется конечное множество точек на оси $x$. Составляющие ее точки называются *узлами сетки*. Расстояние между двумя ближайшими узлами называется *шагом сетки*. Если все шаги сетки равны друг другу, то такая сетка называется *равномерной*, в противном случае — *неравномерной*.

Функция, область определения которой есть некоторая сетка, называется *сеточной функцией*. Обозначим через $h$ максимальный шаг сетки.

Пусть $[a, b]$ — некоторый сегмент числовой прямой, а $\Phi$ — некоторое линейное нормированное пространство функций $u$ с областью определения $[a, b]$ и нормой $\|\cdot\|_\Phi$. Рассмотрим множество сеток $D_h$ из $[a, b]$ и множество пространств $\Phi_h$ сеточных функций $\varphi^h$ с областью определения $D_h$. Отобразим пространство $\Phi$ на каждое из пространств $\Phi_h$ с помощью некоторого линейного оператора $(\cdot)_h$. Введем в каждом из пространств $\Phi_h$ норму так, чтобы

$$\lim_{h\to\infty} \|(u)_h\|_{\Phi_h} = \|u\|_\Phi.$$

Рассмотрим некоторое множество сеточных функций $\varphi^h$, принадлежащих различным $\Phi_h$. Говорят, что сеточные функции $\varphi^h$ *сходятся к функции* $u$ *с порядком* $n$, если существуют такие положительные константы $\bar{h}$ и $C$, что для всех $h \leqslant \bar{h}$ имеет место неравенство

$$\|\varphi^h - (u)_h\|_{\Phi_h} \leqslant Ch^n.$$

Пусть $L$, $L_h$ — операторы, область определения которых принадлежит соответственно $\Phi$ и $\Phi_h$, область значений — $F$ и $F_h$. Оператор $L_h$ в дальнейшем будем называть *разностным оператором*. Говорят, что оператор $L_h$ *аппроксимирует* оператор $L$ на функции $u$ *с порядком* $n$, если существуют такие положительные константы $\tilde{h}$ и $C$, что для всех $h \leqslant \tilde{h}$ имеет место

$$\| L_h (u)_h - (Lu)_h \|_{F_h} \leqslant Ch^n.$$

Говорят, что оператор $L_h$ *локально аппроксимирует* в точке $x_i$ оператор $L$ на функции $u$ *с порядком* $n$, если существуют такие положительные константы $\tilde{h}$ и $C$, что для всех $h \leqslant \tilde{h}$ имеет место неравенство

$$\left| (L_h (u)_h - (Lu)_h)_{x=x_i} \right| \leqslant Ch^n.$$

Пусть дана задача

$$\begin{aligned} Lu = f, \quad & u \in \Phi, \quad f \in F, \\ lu = g, \quad & g \in G. \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим семейство разностных задач

$$\begin{aligned} L_h\varphi^h = f^h, \; & \varphi^h \in \Phi_h, \; f^h \in F_h, \\ l_h\varphi^h = g^h, \quad & g^h \in G_h. \end{aligned} \tag{2}$$

Множество этих задач в дальнейшем будем называть *разностной схемой*, а множество решений разностных задач — *решением разностной схемы*.

Говорят, что разностная схема (2) *аппроксимирует* исходную задачу (1) *с порядком* $n$ на решении $u$ этой исходной задачи, если существуют такие положительные константы $\tilde{h}$, $C_1$ и $C_2$, что для всех $h \leqslant \tilde{h}$ имеют место неравенства

$$\begin{gathered} \| L_h (u)_h - f^h \|_{F_h} \leqslant C_1 h^{n_1}, \\ \| l_h (u)_h - g^h \|_{G_h} \leqslant C_2 h^{n_2}, \\ n = \min (n_1, n_2). \end{gathered} \tag{3}$$

Разностная схема (2) называется *устойчивой*, если существуют такие положительные константы $\tilde{h}$, $C_3$, $C_4$, что для всех $h \leqslant \tilde{h}$ и любых $f^h$ и $g^h$ справедливы свойства:

1) существует, и притом единственное, решение разностных задач (2),

2) имеет место неравенство

$$\| \varphi^h \|_{\Phi_h} \leqslant C_3 \| f^h \|_{F_h} + C_4 \| g^h \|_{G_h}. \tag{4}$$

Теорема сходимости. *Если*

1) *существует решение и задачи* (1),

2) *операторы* $L_h$ *и* $l_h$ — *линейные,*

3) *разностная схема* (2) *аппроксимирует задачу* (1) *на решении и,*

4) *разностная схема* (2) *устойчива,*

*то решение разностной схемы* $\varphi^h$ *сходится к решению и исходной задачи.*

*Если при этом разностная схема* (2) *аппроксимирует задачу* (1) *на решении и с порядком n, то сходимость решения разностной схемы к решению исходной задачи имеет порядок n, причем имеет место неравенство*

$$\| u)_h - \varphi^h \|_{\Phi_h} \leqslant C_1 C_3 h^{n_1} + C_2 C_4 h^{n_2}.$$

Канонический вид разностной схемы с постоянными коэффициентами на равномерной сетке:

$$y_{i+1} = R_h y_i + h\rho_i, \qquad (5)$$
$$y_0 \text{ задано.}$$

Если существуют такие положительные константы $\tilde{h}$, $K_1$, $K_2$, $K_3$, что при всех $h \leqslant \tilde{h}$ канонический вид разностной схемы (2) удовлетворяет неравенствам

$$\|\varphi^h\|_{\Phi_h} \leqslant K_1 \max_i \|y_i\|,$$

$$\|\rho_i\| \leqslant K_2 \left(\|f^h\|_{F_h} + \|g^h\|_{G_h}\right),$$

$$\|y_0\| \leqslant K_3 \left(\|f^h\|_{F_h} + \|g^h\|_{G_h}\right),$$

то для устойчивости (2) достаточно, чтобы нормы степеней оператора $R_h$ были равномерно по $h$ ограничены, т. е. существовали такие положительные константы $\tilde{h}$ и $C$, что для всех $h \leqslant \tilde{h}$ имело место неравенство

$$\|R_h^i\| \leqslant C, \qquad i \leqslant (b-a)/h.$$

Для существования такой константы $C$ достаточно, чтобы существовали положительные константы $\tilde{h}$ и $C_1$ такие, что при всех $h \leqslant \tilde{h}$ имеет место неравенство

$$\|R_h\| \leqslant 1 + C_1 h.$$

Для ограниченности норм степеней $R_h$ необходимо, чтобы существовали такие положительные константы

$\tilde{h}$ и $C_2$, что при всех $h \leqslant \tilde{h}$ имеет место неравенство

$$\rho(R_h) \leqslant 1 + C_2 h.$$

**Методы построения разностных схем.** *Шаблоном* будем называть взаимное расположение узлов сетки, значения сеточных функций в которых входят в разностное уравнение для некоторого фиксированного узла.

1. Метод неопределенных коэффициентов. Проиллюстрируем его на трехточечном шаблоне (рис. 2).

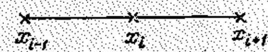

Рис. 2.

Требуется найти разностный оператор $L_h$, локально аппроксимирующий дифференциальный оператор $L$ на функции $u$ в точке $x_i$. Для нахождения коэффициентов $a_{-1}$, $a_0$, $a_1$ с помощью формулы Тейлора вначале находятся коэффициенты при $u(x)$, $u'(x)$, $u''(x)$ и т. д. в выражении

$$(L_h(u)_h - (Lu)_h)_{x=x_i} =$$
$$= a_{-1}u(x_{i-1}) + a_0 u(x_i) + a_1 u(x_{i+1}) - (Lu)_{x=x_i}.$$

Затем, приравнивая нулю коэффициенты последовательно при $u_i$, $u'_i$, $u''_i$ и т. д., приходим к системе линейных алгебраических уравнений, решая которую находим $a_{-1}$, $a_0$, $a_1$. Порядок аппроксимации определяется после подстановки найденных значений $a_{-1}$, $a_0$, $a_1$ в первый ненулевой коэффициент при производных.

2. Интегро-интерполяционный метод. Проиллюстрируем его на том же шаблоне для уравнения

$$\frac{du}{dx} + u = f(x).$$

Проинтегрируем уравнение от $x_{i-1}$ до $x_{i+1}$:

$$\frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) + \frac{1}{2h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u\,dx = \frac{1}{2h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,dx.$$

Заменяя интегралы по квадратурной формуле Симпсона, получим разностное уравнение

$$\frac{1}{2h}(\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1})+\frac{1}{6}(\varphi_{i+1}+4\varphi_i+\varphi_{i-1})=$$
$$=\frac{1}{6}(f_{i+1}+4f_i+f_{i-1}).$$

3. Интегральное тождество Марчука. Для задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+qu=f,\quad p(x)\geqslant\alpha>0,$$
$$u(0)=a,\ u(1)=b,\quad q=q(x)\geqslant 0,$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ имеют конечное число разрывов первого рода, построение разностной схемы основывается на интегральном тождестве Марчука, которому удовлетворяет решение исходной задачи

$$\frac{2}{(x_{i+1}-x_{i-1})}\left(-\frac{u_{i+1}-u_i}{\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{p}}+\frac{u_i-u_{i-1}}{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{p}}\right)+$$
$$+\frac{2}{(x_{i+1}-x_{i-1})}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}(qu-f)\,dx=\frac{2}{(x_{i+1}-x_{i-1})}\times$$
$$\times\left(-\frac{1}{\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{p}}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{p}\int\limits_{x_{i+1/2}}^{x}(qu-f)\,dy+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{p}}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{p}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x}(qu-f)\,dy\right),\quad u_i=u(x_i).$$

4. Метод Ритца. Если оператор $L$ — самосопряженный и положительно определенный, то равносильны две задачи:

а) нахождение решения задачи $Lu=f$ в гильбертовом пространстве $U$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$;

б) нахождение $\bar{u} \in U$, минимизирующего функционал
$$J(u) = (Lu, u) - 2(u, f).$$

Для нахождения $\bar{u}$ строится последовательность $\{U_h\}$ конечномерных подпространств пространства $U$ с известным базисом $\{\omega_i^h\}$. В каждом $U_h$ находится $\bar{u}^h$, минимизирующий $J(u)$ в $U_h$. Для этого достаточно найти коэффициенты $\alpha_i$ разложения $\bar{u}^h$ по $\{\omega_i^h\}$:
$$\bar{u}^h = \sum_i \alpha_i \omega_i^h$$

из системы линейных алгебраических уравнений $A\alpha = b$, где
$$a_{ij} = \left(L\omega_i^h, \omega_j^h\right), \quad b_i = \left(f, \omega_i^h\right), \quad i, j = \overline{1, N_h},$$

$N_h$ — размерность $U_h$. Если последовательность $\{U_h\}$ полна в $U$, то
$$\lim_{h \to 0} \bar{u}^h = \bar{u}.$$

5. Метод аппроксимации функционала. В этом методе минимизируемый функционал $J(u)$ заменяется приближенным функционалом $J_a(\varphi)$. Пусть на $[a, b]$ введена сетка $\{x_i, i = \overline{0, n}\}$. Производные в функционале заменяются конечными разностями, а интегралы — квадратурами. Например, $\int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$ заменяется на $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{h}\right)^2 h$, и мы, таким образом, приходим к задаче минимизации приближенного функционала $J_h(\varphi)$. Разностная схема получается приравниванием нулю $\partial J_h / \partial \varphi_i$, $i = \overline{0, n}$.

6. Метод Галеркина. В отличие от метода Ритца, метод Галеркина не требует самосопряженности и положительной определенности $L$ из $Lu = f$.

Для нахождения решения $\bar{u}$ задачи $Lu = f$ в каждом из конечномерных подпространств $U_h$ находится элемент $\bar{u}^h$ такой, что для любого $v^h \in U_h$ $(L\bar{u}^h - f, v^h) = 0$. Соответствующие коэффициенты $\alpha_i$ разложения $\bar{u}^h$ по базису подпространства $U_h$ определяются из системы уравнений, имеющих тот же вид, что и в методе Ритца, но $a_{ij} = (L\omega_j^h, \omega_i^h)$.

7. Метод сумматорного тождества. Так же как и в методе аппроксимации функционала, интегральное тождество $(Lu - f, v) = 0$ заменяется сумматорным тождеством $(L_h\varphi^h - f^h, \psi^h) = 0$ для любого $\psi^h$. Так как в конечномерном пространстве векторы $e_k$, $k = \overline{0, n}$, образуют базис, то разностная схема получается из системы уравнений

$$(L_h\varphi^h - f^h, e_k) = 0, \quad k = \overline{0, n},$$

$$e_k = [\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, 0, \ldots, 0]^T.$$

Сведения, необходимые для решения задач, приведены в МВМ, гл. 1, стр. 36—55; гл. 2, стр. 56—83; гл. 6, стр. 288—307; гл. 8, стр. 352—357.

## § 2. Задачи

**4.1.** Привести пример последовательности сеточных функций $\{\varphi^h\}$ из семейства пространств $\{\Phi_h\}$, которая сходилась бы к некоторой функции $u \in \Phi$, если в качестве нормы $\Phi_h$ взять $\left(h\sum_i (\varphi_i^h)^2\right)^{1/2}$, и расходилась, если в качестве нормы в $\Phi_h$ принять $\max_i |\varphi_i^h|$.

**4.2.** Сходится ли последовательность сеточных функций $\{\varphi^h\}$ к функции $u$ и с каким порядком, если

$$\varphi_i^h = \frac{1}{2}\left(u\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + u\left(x_i - \frac{h}{2}\right)\right), \quad \varphi_0^h = u(0), \quad \varphi_n^h = u(1),$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad h = 1/n,$$

а $u$ принадлежит пространствам $C$, $C^1$, $C^2$, $C^3$, $C^{100}$? В качестве $\|\cdot\|_{\Phi_h}$ взять $\|\cdot\|_\infty$. Существуют ли функции $u(x)$, к которым $\{\varphi^h\}$ сходится с бесконечным порядком?

**4.3.** Справедливы ли равенства

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{u(x+2h) + u(x)}{2} - 2u(x) + \dfrac{u(x) + u(x-2h)}{2}}{h^2},$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+2h)+u(x)}{2}-\dfrac{u(x)+u(x-2h)}{2}}{2h},$$

если $u(x)\in C^4$?

4.4. При каких $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ разностная схема

$$\frac{-\varphi_{i+1}+2\varphi_i-\varphi_{i-1}}{h^2}+(\alpha\varphi_{i+1}+\beta\varphi_i+\gamma\varphi_{i-1})=$$

$$=f(x_i)+\frac{h^2}{12}f''(x_i),$$

$$\varphi_0=0,\quad \varphi_n=0,\quad i=\overline{1,\,n-1},\quad x_i=ih,\quad h=1/n$$

аппроксимирует задачу

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+u=f(x),\qquad x\in[0,1],$$

$$u(0)=0,\quad u(1)=0$$

с четвертым порядком?

4.5 Оценить, с каким порядком дифференциальная задача

$$\frac{du}{dx}+2u\cos x=\cos x+\sin(2x),\qquad x\in[0,1],$$

$$u(0)=0$$

аппроксимируется разностной схемой

$$\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h}+a_i\frac{\varphi_{i+1}+\varphi_i}{2}=f_i,$$

$$\varphi_0=0,\quad i=\overline{0,\,n-1},\quad h=1/n,$$

где

$$a_i=\cos x_i+\cos x_{i+1},\ f_i=\frac{1}{2}a_i+\frac{1}{2}(\sin(2x_i)+\sin(2x_{i+1})),$$

взяв в качестве области определения $f^h$

$$Df^h=\{x_{i+1/2},\ i=\overline{0,\,n-1}\},$$

$$x_i=ih,\quad x_{i+1/2}=ih+h/2.$$

4.6. Решить задачу 4.5 для

$$Df^h=\{x_i,\ i=\overline{0,\,n-1}\},\qquad x_i=ih.$$

**4.7.** Решить задачу 4.5 для

$$a_i = 2\cos x_i, \quad f_i = \cos x_{i+1} + \sin(2x_{i+1}),$$

$$Df^h = \{x_{i+1/2},\ i = \overline{0,\ n-1}\},\ x_i = ih, \quad x_{i+1/2} = ih + h/2.$$

**4.8.** Решить задачу 4.5 для

$$a_i = 2\cos x_i, \quad f_i = \cos x_i + \sin(2x_i),$$

$$Df^h = \{x_i,\ i = \overline{0,\ n-1}\}, \quad x_i = ih.$$

**4.9.** Решить задачу 4.5 для

$$a_i = 2\cos x_{i+1/2}, \quad f_i = \cos x_{i+1/2} + \sin(2x_{i+1/2}),$$

$$Df^h = \{x_{i+1/2},\ i = \overline{0,\ n-1}\}, \quad x_i = ih, \quad x_{i+1/2} = ih + h/2.$$

**4.10.** Дана дифференциальная задача

$$\frac{du}{dx} + a(x)\,u(x) = f(x), \qquad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = c$$

и разностная схема

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h} + (\alpha_1 a(x_i) + \alpha_2 a(x_{i+1}))(\beta_1\varphi_i + \beta_2\varphi_{i+1}) =$$

$$= \gamma_1 f(x_i) + \gamma_2 f(x_{i+1}), \qquad i = \overline{0,\ n-1},$$

$$\varphi_0 = c, \quad h = 1/n, \quad x_i = ih.$$

Как следует выбрать $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, чтобы получить второй порядок аппроксимации?

**4.11.** Аппроксимирует ли разностная схема

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} + \varphi_i = ih + 1, \qquad i = \overline{1,\ n-1}, \quad h = \frac{1}{n},$$

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 0$$

дифференциальную задачу

$$\frac{du}{dx} + u = x + 1, \qquad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = 0$$

со вторым порядком по $h$? Если нет, то видоизменить разностную схему так, чтобы она имела второй порядок аппроксимации.

4.12. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+au=\cos x, \quad x\in[0,\pi], \quad a>0,$$

$$u(0)=0, \quad u(\pi)=1$$

на трехточечном шаблоне построить схему десятого порядка аппроксимации.

4.13. На нерегулярной сетке методом неопределенных коэффициентов построить разностные схемы пер-

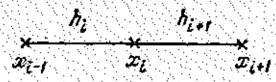

Рис. 3.

вого и второго порядка аппроксимации для задачи

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=f(x),$$

$$u(0)=a, \quad u(1)=b, \quad u\in C^4.$$

Использовать трехточечный шаблон (рис. 3).

4.14. Для задачи

$$\frac{du}{dx}+cu=f(x), \quad u(0)=a, \quad c=\text{const},$$

интегро-интерполяционным методом на трехточечном шаблоне с постоянным шагом построить схему четвертого порядка аппроксимации.

4.15. Решить задачу 4.14 для

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+cu=f(x), \quad c\geqslant 0, \quad x\in[0,1],$$

$$u(0)=a, \quad u(1)=b.$$

4.16. Построить разностную схему с помощью интегрального тождества Марчука для задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)=1, \quad x\in[0,1],$$

$$u(0)=u(1)=0, \quad k(x)=\begin{cases}1/2, & 0\leqslant x<\pi/4,\\ 1, & \pi/4\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

**4.17.** Дана дифференциальная задача

$$\frac{d^2u}{dx^2} + cu = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

При каких $c$ для решения этой задачи применим метод Ритца?

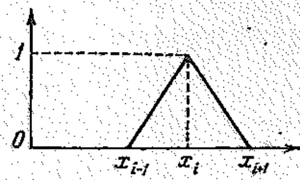


Рис. 4.

**4.18.** Построить разностную схему с помощью метода Ритца для задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = 1, \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad k(x) = \begin{cases} 3/2, & 0 \leqslant x < \pi/4, \\ 2, & \pi/4 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

взяв в качестве базисных функций функции $\omega_i^h(x)$ с графиком, изображенным на рис. 4.

**4.19.** Указать такую разностную схему, аппроксимирующую дифференциальную задачу

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

со вторым порядком, в которой каждая разностная задача приводит к системе алгебраических уравнений с положительно определенной матрицей.

**4.20.** Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad k(x) > 0, \quad q(x) > 0,$$

построить на равномерной сетке разностную схему методом аппроксимации функционала.

**4.21.** Построить разностную схему с помощью метода Галеркина для задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)=1, \quad x\in[0,1],$$

$$u(0)=u(1)=0, \quad k(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant \pi/5,\\ 1/3, & \pi/5<x\leqslant 1\end{cases}$$

(базисные функции взять из задачи 4.18).

**4.22.** Дана дифференциальная задача

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+a\frac{du}{dx}+cu=1, \quad c\geqslant 0, \quad x\in[0,1],$$

$$u(0)=u(1)=1.$$

Построить разностную схему с помощью метода Галеркина, используя базисные функции из задачи 4.18.

**4.23.** Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)+p(x)\frac{du}{dx}+q(x)u(x)=f(x), \quad x\in[0,1],$$

$$u(0)=u(1)=0, \quad k(x)>0, \quad q(x)>0,$$

построить на равномерной сетке разностную схему методом сумматорного тождества.

**4.24.** Функция $g(x)$ называется *линейным сплайном* относительно сетки $\{x_i\}$ для функции $f(x)$, если

а) $g(x)\in P_1, \quad x\in[x_{i-1}, x_i], \quad i=\overline{1, n};$

б) $g(x)\in C[a, b];$

в) $g(x_i)=f(x_i), \ i=\overline{0, n}.$

Найти явные выражения для коэффициентов многочленов.

**4.25.** Функция $g(x)$ называется *кубическим сплайном* относительно сетки $\{x_i\}$ для функции $f(x)$, если

а) $g(x)\in P_3, \quad x\in[x_{i-1}, x_i], \quad i=\overline{1, n};$

б) $g(x)\in C^2[a, b];$

в) $g(x_i)=f(x_i), \quad i=\overline{0, n};$

г) $g''(a)=\alpha, \quad g''(b)=\beta.$

Написать систему уравнений относительно $m_i=$ $=g''(x_i), \quad i=\overline{0, n}$, и доказать ее однозначную разрешимость.

**4.26.** Решить задачу 4.25 для сплайна, удовлетворяющего условиям а), б), в) из задачи 4.25 и условию

г) $g'(a)=\alpha, \quad g'(b)=\beta.$

4.27. Дана дифференциальная задача

$$Lu \equiv -\frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = a, \quad u(1) = b, \quad q(x) > 0.$$

На сетке $\{x_i\}$ найти приближенное решение задачи с помощью кубического сплайна, удовлетворяющего условиям:

а) $g(x) \in P_3, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n};$
б) $g(x) \in C^2[0, 1];$
в) $Lg(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n};$
г) $g(0) = a, \quad g(x_n) = b.$

4.28. Введем следующие обозначения:

$$(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i \psi_i, \quad (\varphi, \psi] = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \psi_i, \quad [\varphi, \psi) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i \psi_i,$$

$$(\Delta\varphi)_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i, \quad (\nabla\varphi)_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}.$$

Доказать, что

$$(\varphi, \Delta\nabla\psi) = -(\nabla\varphi, \nabla\psi) + \varphi_n(\nabla\psi)_n - \varphi_0(\nabla\psi)_1.$$

4.29. Используя обозначения из 4.28, показать, что

$$(\varphi, \Delta\nabla\psi) - (\Delta\nabla\varphi, \psi) = \varphi_{n-1}\psi_n - \varphi_n\psi_{n-1} + \varphi_1\psi_0 - \varphi_0\psi_1.$$

4.30. Используя обозначения из 4.28, показать, что

$$(\varphi, \Delta\psi) = -(\nabla\varphi, \psi] + \varphi_n\psi_n - \varphi_0\psi_1.$$

4.31. Исследовать устойчивость разностных схем

$$\theta\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h} + (1 - \theta)\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h} = f_i, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\varphi_0 = a, \quad \varphi_1 = b$$

при $\theta \in (0, 1)$.

4.32. Доказать устойчивость следующей разностной схемы:

$$-\frac{2}{(x_{i+1} - x_{i-1})}\left(\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{p(x)}} - \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p(x)}} - \right.$$

$$\left. - \varphi_i \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,dx\right) = \frac{2}{(x_{i+1} - x_{i-1})} \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\,dx,$$

$$p(x) > 0, \quad g(x) > 0, \quad i = \overline{1, n-1},$$
$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_n = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_n = 1, \quad x \in [0, 1].$$

**4.33.** Найти решения дифференциальной и разностной задач

$$\frac{du}{dx} + 2u = 0, \quad u(0) = 1, \quad x \in [0, 1];$$

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} + 2\varphi_i = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad h = \frac{1}{n},$$
$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = 1 - 2h$$

и оценить $\|(u)_h - \varphi^h\|_{\Phi_h}$ по этим решениям и теореме сходимости.

**4.34.** Решить задачу 4.33 для разностной схемы

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} + 2\varphi_i = 0, \quad i = \overline{1, n-1},$$
$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = 1.$$

**4.35.** Найти решения дифференциальной и разностной задач

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad u(0) = 1, \quad x \in [0, 1];$$

$$4\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} - 3\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad h = \frac{1}{n},$$

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = 1 + h^2$$

и оценить $\|(u)_h - \varphi^h\|_{\Phi_h}$.

**4.36.** Исследовать сходимость решения разностной схемы

$$\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h} + l\psi_{i-1} = 0, \quad \varphi_0 = a, \quad h = \frac{1}{n},$$

$$\frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{h} - l\varphi_{i-1} = 0, \quad \psi_0 = b, \quad i = \overline{1, n},$$

к решению дифференциальной задачи

$$\frac{du}{dx} + lv = 0, \quad u(0) = a,$$

$$\frac{dv}{dx} - lu = 0, \quad v(0) = b,$$

$$x \in [0, 1] \quad l = \mathrm{const},$$

используя решения обеих задач.

**4.37.** Решить задачу 4.36 для разностной схемы

$$\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h} + l\psi_i = 0, \quad \varphi_0 = a, \quad h = \frac{1}{n},$$

$$\frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{h} - l\varphi_i = 0, \quad \psi_0 = b, \quad i = \overline{1, n}.$$

**4.38.** Решить задачу 4.36 для разностной схемы

$$\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h} + l\frac{\psi_i + \psi_{i-1}}{2} = 0, \quad \varphi_0 = a, \quad h = \frac{1}{n},$$

$$\frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{h} - l\frac{\varphi_i + \varphi_{i-1}}{2} = 0, \quad \psi_0 = b, \quad i = \overline{1, n}.$$

**4.39.** Решить задачу 4.36 для разностной схемы

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} + l\psi_i = 0, \quad \varphi_0 = a, \quad \varphi_1 = a - lhb,$$

$$\frac{\psi_{i+1} - \psi_{i-1}}{2h} - l\varphi_i = 0, \quad \psi_0 = b, \quad \psi_1 = b + lha,$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad h = \frac{1}{n}.$$

**4.40.** Решить задачу 4.36 для разностной схемы

$$4\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} - 3\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h} + l\psi_i = 0, \quad h = \frac{1}{n},$$

$$4\frac{\psi_{i+1} - \psi_{i-1}}{2h} - 3\frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{h} - l\varphi_i = 0, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\varphi_0 = a, \quad \varphi_1 = a - lhb,$$

$$\psi_0 = b, \quad \psi_1 = b + lha.$$

**4.41.** Пусть даны дифференциальная задача

$$\frac{d(pu)}{dx} = 0, \quad u(0) = 1, \quad x \in [0, 1],$$

$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ 2, & \xi < x \leqslant 1 \end{cases} \quad (\xi \text{ — иррациональное число}),$$

и разностная схема

$$p(x_{i+1})\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h} + \varphi_i\frac{p(x_{i+1}) - p(x_i)}{h} = 0, \quad i = \overline{0, n-1},$$

$\varphi_0 = 1, \quad x_i = ih, \quad h = 1/n.$

Исследовать сходимость решения разностной схемы к решению дифференциальной задачи, используя решения обеих задач.

4.42. Решить задачу 4.41 для разностной схемы

$$p(x_i)\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h}+\varphi_i\frac{p(x_{i+1})-p(x_i)}{h}=0,\quad i=\overline{0,n-1},$$

$$\varphi_0=1,\quad x_i=ih,\quad h=\frac{1}{n}.$$

4.43. Решить задачу 4.41 для разностной схемы

$$p(x_i)\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1}}{2h}+\varphi_i\frac{p(x_{i+1})-p(x_{i-1})}{2h}=0,\quad i=\overline{1,n-1},$$

$$\varphi_0=1,\quad \varphi_1=1,\quad x_i=ih,\quad h=1/n.$$

4.44. Используя теорему сходимости, оценить порядок сходимости решения разностной схемы к решению исходной дифференциальной задачи

$$\frac{du}{dx}+5u=\cos x+5\sin x,\quad u(\pi)=0,\quad x\in[\pi,2\pi],$$

$$\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h}+5\varphi_i=\cos(ih)+5\sin(ih),\quad i=\overline{0,n-1},$$

$$\varphi_0=0,\ h=\pi/n.$$

4.45. Решить задачу 4.44 для уравнений

$$\frac{du}{dx}+2u=2(x+x^2),\quad u(4)=16,\quad x\in[4,7],$$

$$\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h}+\varphi_{i+1}+\varphi_i=2(4+ih+(4+ih)^2),\quad i=\overline{0,n-1},$$

$$\varphi_0=16,\quad h=3/n.$$

4.46. Решить задачу 4.44 для уравнений

$$\frac{du}{dx}+2u=2(x+x^2),\quad u(4)=16,\quad x\in[4,7],$$

$$\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h}+\varphi_{i+1}+\varphi_i=$$
$$=2(4+ih+(4+ih)^2)+h(1+2(4+ih)),\quad i=\overline{0,n-1},$$

$$\varphi_0=16,\ h=3/n.$$

4.47. Решить задачу 4.44 для уравнений

$$\frac{du}{dx}+u\sin x=\frac{\sin(2x)}{2}+\sin x,\quad x\in[0,1],$$

$$u(0)=1,$$

$$\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h}+\varphi_i\sin(ih)=\frac{\sin(2ih)}{2}+\sin(ih),\quad i=\overline{0,n-1},$$
$$\varphi_0=1,\quad h=1/n.$$

4.48. Исследовать сходимость решения разностной схемы

$$-\frac{\varphi_{i+1}-2\varphi_i+\varphi_{i-1}}{h^2}+(1+ih)\varphi_i=$$
$$=(ih)^3-ih-2,\quad i=\overline{1,n-1},$$
$$\varphi_0=\varphi_n=0,\quad h=1/n$$

к решению дифференциальной задачи

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+(1+x)u=x^3-x-2,\quad x\in[0,1],$$
$$u(0)=u(1)=0.$$

4.49. Исследовать сходимость решения разностной схемы

$$-\frac{\varphi_{i+1}-2\varphi_i+\varphi_{i-1}}{h^2}=-\frac{1}{(1+ih)^2},$$
$$i=\overline{1,n-1},\quad h=\frac{1}{n},$$
$$\frac{\varphi_1-\varphi_0}{h}=1,\quad \varphi_n=\ln 2$$

к решению дифференциальной задачи

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad x\in[0,1],$$
$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0}=1,\quad u(1)=\ln 2.$$

4.50. Для дифференциальной задачи

$$\frac{d^2u}{dx^2}-3\frac{du}{dx}-4u=0,\quad x\in[0,1],$$
$$u(0)=1,\quad \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0}=-1$$

предложена разностная схема

$$\frac{\varphi_{i+1}-2\varphi_i+\varphi_{i-1}}{h^2}-3\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1}}{2h}-4\varphi_i=0,\quad i=\overline{1,n-1},$$
$$\varphi_0=1,\quad \frac{\varphi_1-\varphi_0}{h}=-1,\quad h=\frac{1}{n}.$$

а) Определить порядок аппроксимации.

б) Как изменить аппроксимацию граничных условий, чтобы получить второй порядок аппроксимации?

в) Какое $h$ достаточно взять в обеих схемах, чтобы $u(1)$ и $\varphi_n$ имели одинаковые три первые значащие цифры?

**4.51.** Исследовать сходимость решения разностной схемы

$$\frac{-3\varphi_i + 4\varphi_{i+1} - \varphi_{i+2}}{2h} + a\varphi_i = f(x_i), \quad i = 0, 2, 4, \ldots, 2n-2,$$

$$\frac{-\varphi_{i-1} + \varphi_{i+1}}{2h} + a\varphi_i = f(x_i), \quad i = 1, 3, 5, \ldots, 2n-1,$$

$$\varphi_0 = b, \quad h = \frac{1}{n}, \quad x_i = ih$$

к решению дифференциальной задачи

$$\frac{du}{dx} + au = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = b.$$

**4.52.** Исследовать сходимость решения разностной схемы

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} + 2\varphi_i = -\frac{5}{2}(1 - ih)^{3/2} + 2(1 - ih)^{5/2}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = (1 - h)^{5/2}, \quad h = 1/n$$

к решению дифференциальной задачи

$$\frac{du}{dx} + 2u = -\frac{5}{2}(1 - x)^{3/2} + 2(1 - x)^{5/2}, \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = 1.$$

**4.53.** Исследовать сходимость решения разностной схемы

$$\frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} - 3\varphi_i = \frac{35}{4}(1 - ih)^{3/2} - 3(i - ih)^{7/2}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\varphi_0 = 1, \quad \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} = -\frac{7}{2} + \frac{35}{8}h, \quad h = \frac{1}{n}$$

к решению дифференциальной задачи

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 3u = \frac{35}{4}(1-x)^{3/2} - 3(1-x)^{7/2}, \quad x \in [0,1],$$

$$u(0) = 1, \ \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{7}{2}.$$

**4.54.** Исследовать, используя теорему сходимости, сходимость решения разностной схемы

$$\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h} + \psi_{i-1}\sin((i-1)h) = \cos x_{i-1} + \frac{1}{2}\sin(2x_{i-1}),$$

$$\frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{h} - \varphi_{i-1}\sin((i-1)h) = -(1+\sin x_{i-1})\sin x_{i-1},$$

$$i = \overline{1, n},$$

$$\varphi_0 = 0, \quad \psi_0 = 1, \quad h = 1/n, \quad x_i = ih$$

к решению дифференциальной задачи

$$\frac{du}{dx} + v\sin x = \cos x + \frac{1}{2}\sin(2x), \quad u(0) = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} - u\sin x = -(1+\sin x)\sin x, \quad v(0) = 1,$$

$$x \in [0,1].$$

**4.55.** Решить задачу 4.54 для разностной схемы

$$\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h} + \psi_i \sin x_i = \cos x_i + \frac{1}{2}\sin(2x_i),$$

$$\frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{h} - \varphi_i \sin x_i = -(1+\sin x_i)\sin x_i, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\varphi_0 = 0, \quad \psi_0 = 1, \quad h = 1/n, \ x_i = ih.$$

**4.56.** Решить задачу 4.54 для разностной схемы

$$\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h} + \frac{\psi_i + \psi_{i-1}}{2}\sin x_{i-1/2} =$$

$$= \cos x_{i-1/2} + \frac{1}{2}\sin(2x_{i-1/2}),$$

$$\frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{h} - \frac{\varphi_i + \varphi_{i-1}}{2}\sin x_{i-1/2} =$$

$$= -(1+\sin x_{i-1/2})\sin x_{i-1/2}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\varphi_0 = 0, \quad \psi_0 = 1, \quad h = 1/n, \quad x_{i-1/2} = ih - h/2.$$

**4.57.** Решить задачу 4.54 для разностной схемы

$$\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1}}{2h}+\psi_i\sin x_i=\cos x_i+\frac{1}{2}\sin(2x_i),$$

$$\frac{\psi_{i+1}-\psi_{i-1}}{2h}-\varphi_i\sin x_i=-(1+\sin x_i)\sin x_i,$$

$$i=\overline{1,\,n-1},$$

$$\varphi_0=0,\quad \varphi_1=h\left(\cos h+\frac{1}{2}\sin(2h)\right),\qquad h=\frac{1}{n},$$

$$\psi_0=1,\quad \psi_1=1-h(1+\sin h)\sin h,\qquad x_i=ih.$$

**4.58.** Решить задачу 4.54 для разностной схемы

$$4\,\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1}}{2h}-3\,\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h}+\psi_i\sin x_i=$$

$$=\cos x_i+\frac{1}{2}\sin(2x_i),$$

$$4\,\frac{\psi_{i+1}-\psi_{i-1}}{2h}-3\,\frac{\psi_{i+1}-\psi_i}{h}-\varphi_i\sin x_i=$$

$$=-(1+\sin x_i)\sin x_i,\qquad i=\overline{1,\,n-1},$$

$$\varphi_0=0,\quad \varphi_1=h\left(\cos h+\frac{1}{2}\sin(2h)\right),\qquad h=\frac{1}{n},$$

$$\psi_0=1,\quad \psi_1=1-h(1+\sin h)\sin h,\qquad x_i=ih.$$

**4.59.** Задача

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=f(x),\qquad f\in L_2(0,1),\qquad x\in[0,1],$$

$$u(0)=u(1)=0$$

решается методом Ритца с базисными функциями из задачи 4.18. Показать, что приближенное решение $u^h(x)$ сходится к точному решению при $h\to 0$ и имеет место оценка

$$\|u-u^h\|_{W_2^1}=O(h).$$

**4.60.** Даны дифференциальная задача

$$\frac{du}{dx}+au=0,\qquad x\in[0,1],\qquad a=\mathrm{const}>0,$$

$$u(0)=c,\quad c=\mathrm{const}>0$$

и разностная схема

$$\frac{\varphi_i-\varphi_{i-1}}{h}+a\varphi_{i-1}=0,\qquad i=\overline{1,\,n},\qquad h=\frac{1}{n},$$

$$\varphi_0=c.$$

Пусть $\varphi_i^{(1)}$ — решение разностной задачи при $h = h_1$, а $\varphi_i^{(2)}$ — решение разностной задачи при $h = h_1/2$, $ah_1 < 1$. Определим на сетке с шагом $h_1$ сеточную функцию $\psi^h$:

$$\psi_i = 2\varphi_{2i}^{(2)} - \varphi_i^{(1)}, \quad i = \overline{0, n_1}, \quad n_1 = 1/h_1.$$

Доказать, что 1) $\psi^h$ сходится к $u$ со вторым порядком по $h$; 2) выполняются неравенства

$$u(x_i) < u(x_{i-1}), \quad \varphi_i^{(1)} < \varphi_{i-1}^{(1)},$$

$$\varphi_i^{(2)} < \varphi_{i-1}^{(2)}, \quad \psi_i < \psi_{i-1}.$$

**4.61.** Найти решения дифференциальной и разностной задач

$$\frac{du}{dx} + u = 0, \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = 1;$$

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} + \varphi_i = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad h = \frac{1}{n},$$

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = e^{-h}.$$

Оценить $\|(u)_h - \psi^h\|_\infty$, если

$$\psi_i = \frac{4}{3}\varphi_{2i}^{(2)} - \frac{1}{3}\varphi_i^{(1)}, \quad i = \overline{0, n_1}, \quad n_1 = \frac{1}{h_1},$$

где $\varphi_i^{(1)}$ — решение разностной задачи при $h = h_1$, а $\varphi_{2i}^{(2)}$ — решение разностной задачи при $h = h_1/2$.

**4.62.** Найти решения дифференциальной и разностной задач

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0, \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = 1, \quad \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = -1;$$

$$-\frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} + \varphi_i = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad h = \frac{1}{n},$$

$$\varphi_0 = 1, \quad \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} = -1 + \frac{h}{2}.$$

Показать, что $\|(u)_h - \psi^h\|_\infty \leqslant Ch^4$, если

$$\psi_i = \frac{4}{3}\varphi_{2i}^{(2)} - \frac{1}{3}\varphi_i^{(1)}, \quad i = \overline{0, n_1}, \quad n_1 = \frac{1}{h_1},$$

где $\varphi_i^{(1)}$ — решение разностной задачи при $h = h_1$, а $\varphi_{2i}^{(2)}$ — решение разностной задачи при $h = h_1/2$.

ГЛАВА 5

# РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

## § 1. Определения. Теоремы

При исследовании уравнений с частными производными будем различать временную переменную $t$ и пространственные переменные $x$.

Пусть функция $u(t, x)$ с областью определения $[0, T]\times D$ принадлежит линейному нормированному пространству $\Phi$ с нормой $\|\ \|_\Phi$. Введенную в этой области сетку при заданном шаблоне $G$ будем характеризовать параметрами

$$h = \max_k \max_{l\in G} \| x_k - x_l \|, \quad \tau = \max_j | t^{j+1} - t^j |.$$

Будем рассматривать *сетки*, которые всегда являются *слоистыми по* $t$, т. е.

$$D_h = \{x_i | i = \overline{0, n}\}, \ D_{h\tau} = \{t^j | j = \overline{0, J}\} \times D_h.$$

Если *сетка слоистая по всем переменным*, то

$$D_h = \{x_i | i = \overline{0, I}\} \times \{y_k | k = \overline{0, K}\} \times \{z_l | l = \overline{0, L}\}.$$

Рассмотрим множество пространств $\Phi_{h\tau}$ сеточных функций $\varphi^{h\tau}$ с областью определения $D_{h\tau}$. Введем линейный оператор $(\cdot)_{h\tau}$, отображающий пространство $\Phi$ на пространство $\Phi_{h\tau}$. Норму в пространстве $\Phi_{h\tau}$ введем так, чтобы

$$\lim_{h, \tau\to 0} \| (u)_{h\tau} \|_{\Phi_{h\tau}} = \| u \|_\Phi$$

для любого $u \in \Phi$.

В задачах (если специально не оговорено) будем рассматривать слоистую по всем переменным сетку с постоянными шагами $h$ и $\tau$. Будем считать также, что

$$(u)_{h\tau} |_h^j = u(t^j, x_h), \quad \| u \|_\Phi = \max_t \| u(t, x) \|_U,$$

где $U$ — линейное нормированное пространство функций с областью определения $D$ (при фиксированном $t$).

В пространствах $\Phi_{h\tau}$ будем рассматривать нормы

$$\|\varphi^{h\tau}\|_{\Phi_{h\tau}} = \max_j \|\varphi^{h\tau}|^j\|_{U_h},$$

причем

$$\lim_{h\to 0} \|(u)_h\|_{U_h} = \|u\|_U.$$

Пусть дана задача

$$Lu = f, \quad u \in \Phi, \quad f \in F,$$
$$lu = g, \quad g \in G.$$

Рассмотрим разностную схему

$$L_{h\tau}\varphi^{h\tau} = f^{h\tau}, \quad \varphi^{h\tau} \in \Phi_{h\tau}, \quad f^{h\tau} \in F_{h\tau},$$
$$l_{h\tau}\varphi^{h\tau} = g^{h\tau}, \quad g^{h\tau} \in G_{h\tau}.$$

Определения сходимости, аппроксимации, устойчивости и теорема сходимости переносятся из гл. 4 с учетом вышеприведенных определений сеток и норм.

*Канонический вид* двухслойной по $t$ разностной схемы с постоянными коэффициентами:

$$\varphi^{j+1} = R_{h\tau}\varphi^j + \tau\rho^j,$$
$\varphi^0$ задано.

Теорема. *Если при приведении разностной схемы к каноническому виду соблюдены условия*

$$\|\rho^j\| \leqslant K_1 (\|f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}} + \|g^{h\tau}\|_{G_{h\tau}}),$$
$$\|\varphi^0\| \leqslant K_2 (\|f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}} + \|g^{h\tau}\|_{G_{h\tau}}),$$

*где $K_1, K_2$ — константы, не зависящие от $h, \tau, f^{h\tau}, g^{h\tau}$, то для устойчивости разностной схемы достаточно равномерной ограниченности норм степеней оператора $R_{h\tau}$, т. е. выполнения условия*

$$\|R^j_{h\tau}\| \leqslant K, \quad j = \overline{0, J},$$

*где $K$ — константа, не зависящая от $h$, $\tau$.*

Достаточным условием равномерной ограниченности норм степеней оператора $R_{h\tau}$ является неравенство

$$\|R_{h\tau}\| \leqslant 1 + C\tau,$$

где $C$ — константа, не зависящая от $h$, $\tau$.

Расположение собственных значений оператора $R_{h\tau}$ внутри круга $|\lambda| \leqslant 1 + C\tau$ на комплексной плоскости необходимо для равномерной ограниченности норм степеней оператора $R_{h\tau}$. Для самосопряженного оператора $R_{h\tau}$ это неравенство является и достаточным условием.

Сформулируем необходимое спектральное условие устойчивости для двухслойной разностной задачи Коши (а также задачи с периодическим решением). Будем искать решение разностной схемы в виде

$$\varphi_k^j = \lambda^j e^{\mathrm{i}k\alpha} \text{*)},$$

где $\lambda = \lambda(\alpha)$ определяется путем подстановки этого решения в однородное разностное уравнение задачи.

Для устойчивости разностной схемы необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$|\lambda(\alpha)| \leqslant 1 + C\tau$$

при любом $\alpha$, где $C$ — константа, не зависящая от $h$, $\tau$.

Сведения, необходимые для решения задач, приведены в МВМ, гл. 1, стр. 36—55; гл. 2, стр. 98—110; гл. 4 стр. 198—211; гл. 5, стр. 243—287; гл. 8, стр. 357—409.

## § 2. Задачи

**5.1.** Определить порядок локальной аппроксимации дифференциального оператора

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x}$$

разностным оператором

$$(L_{h\tau}\varphi^{h\tau})_i^j = \frac{\varphi_i^{j+1} - \dfrac{\varphi_{i+1}^j + \varphi_{i-1}^j}{2}}{\tau} + a\frac{\varphi_{i+1}^j - \varphi_{i-1}^j}{2h}.$$

**5.2.** Определить, какой дифференциальный оператор и с каким порядком локально аппроксимирует разностный оператор

$$(L_h\varphi^h)_{i,k} = \frac{\varphi_{i-1,k} + \varphi_{i,k-1} + \varphi_{i+1,k} + \varphi_{i,k+1} - 4\varphi_{i,k}}{h^2}.$$

**5.3.** Решить задачу 5.2 для разностного оператора

$$(L_h\varphi^h)_{i,k} = \frac{\varphi_{i-1,k+1} + \varphi_{i-1,k-1} + \varphi_{i+1,k+1} + \varphi_{i+1,k-1} - 4\varphi_{i,k}}{2h^2}.$$

---

*) Здесь i (прямым шрифтом) означает мнимую единицу.

**5.4.** Показать, что разностная схема

$$\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}=\frac{\varphi_{i-1}^j-2\varphi_i^j+\varphi_{i+1}^j}{h^2}$$

локально аппроксимирует дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

со вторым порядком по $\tau$ и четвертым по $h$, если $\tau/h^2=1/6$.

**5.5.** Пусть даны дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и разностная схема

$$\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}=\theta\,\frac{\varphi_{i+1}^{j+1}-2\varphi_i^{j+1}+\varphi_{i-1}^{j+1}}{h^2}+(1-\theta)\,\frac{\varphi_{i+1}^j-2\varphi_i^j+\varphi_{i-1}^j}{h^2}.$$

Найти, при каком $\theta$ локальный порядок аппроксимации будет вторым по $\tau$ и четвертым по $h$.

**5.6.** Определить порядок аппроксимации задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad t\in[0,\,T],\quad x\in[0,\,1],$$

$$u(0,\,x)=v(x),\quad u(t,\,0)=u(t,\,1)=0$$

следующей разностной схемой:

$$\frac{1}{12}\,\frac{\varphi_{i+1}^{j+1}-\varphi_{i+1}^j}{\tau}+\frac{5}{6}\,\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}+\frac{1}{12}\,\frac{\varphi_{i-1}^{j+1}-\varphi_{i-1}^j}{\tau}=$$

$$=\frac{1}{2h^2}\left(\left(\varphi_{i-1}^{j+1}-2\varphi_i^{j+1}+\varphi_{i+1}^{j+1}\right)+\left(\varphi_{i-1}^j+\varphi_{i+1}^j-2\varphi_i^j\right)\right),$$

$$j=\overline{0,\,m-1},\quad i=\overline{1,\,n-1},$$

$$\varphi_i^0=v(x_i),\quad i=\overline{0,\,n},\quad h=1/n,\quad x_i=ih,$$

$$\varphi_0^j=\varphi_n^j=0,\quad j=\overline{0,\,m},\quad \tau=T/m.$$

**5.7.** Для оператора $Lu=\dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}$ построить (если возможно) разностные операторы, локально апроксимирующие исходный с первым и вторым порядком, на шаблоне из рис. 5 при условии $\tau = rh$ ($r = \text{const}$).

5.8. Построить разностный оператор, локально аппроксимирующий со вторым порядком по $\tau$ и $h$ дифференциальный оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x},$$

на шаблоне из рис. 6.

5.9. Построить разностный оператор, локально ап-

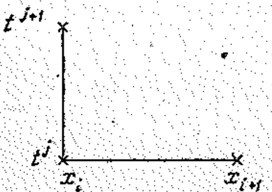


Рис. 5.

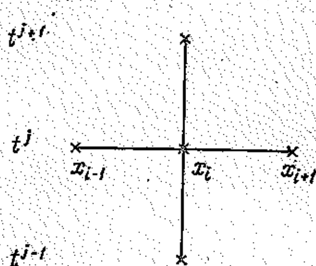


Рис. 6.

проксимирующий в точке $(t^j, x_i)$ со вторым порядком по $\tau$ и $h$ дифференциальный оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x},$$

на шаблоне из рис. 7.

5.10. Построить разностный оператор, локально аппроксимирующий в точке $(t^{j+1/2}, x_i)$ со вторым порядком по $\tau$ и четвертым по $h$ дифференциальный оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x},$$

на шаблоне из рис. 8.

5.11. Методом неопределенных коэффициентов построить разностную схему, локально аппроксимирующую с четвертым порядком дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

используя шаблон с постоянным шагом (рис. 9)

$$h = x_i - x_{i-1} = y_k - y_{k-1} = \text{const}.$$

5.12. Методом неопределенных коэффициентов построить разностную схему второго порядка аппрокси-

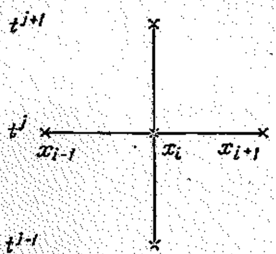


Рис. 7.

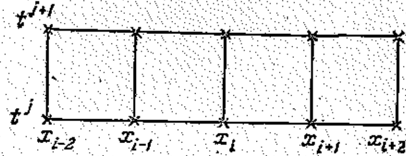


Рис. 8.

мации по $\tau$ и $h$ для дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x), \quad t \in [0, T],$$

$$u(0, x) = g(x), \quad u(t, x) = u(t, x+1),$$

используя шаблон из рис. 10.

5.13. Используя интегро-интерполяционный метод, построить разностную схему, аппроксимирующую со

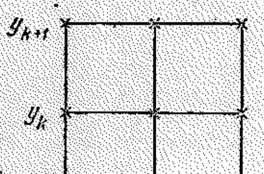


Рис. 9.


Рис. 10.

вторым порядком по $\tau$ и $h$ дифференциальную задачу ($a = \text{const}$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, T],$$

$$u(0, x) = g^0(x), \; u(t, 0) = g_0(t),$$

на шаблоне из рис. 11.

**5.14.** Решить задачу 5.13 на шаблоне из рис. 12 со вторым порядком по $\tau$ и четвертым по $h$.

**5.15.** Решить задачу 5.13 на шаблоне из рис. 13 со вторым порядком по $\tau$ и шестым по $h$.

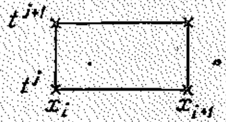


Рис. 11.

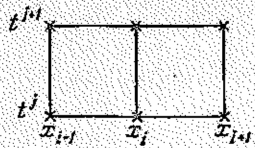


Рис. 12.

**5.16.** Предложить разностную схему, аппроксимирующую со вторым порядком по $\tau$ и $h$ дифференциальную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=f(x, y), \quad t\in[0, T],$$

$$u(0, x, y)=g(x, y),$$

$$u(t, x, y)=u(t, x+1, y), \quad u(t, x, y)=u(t, x, y+1).$$

**5.17.** Считая систему базисных функций $\omega_1, \omega_2, \ldots$ $\ldots, \omega_n$ заданной, выписать систему уравнений метода

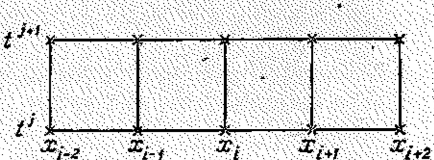


Рис. 13.

Ритца для задачи

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)=f(x, y),$$

$$u|_\Gamma=0.$$

**5.18.** На квадратной сетке (рис. 14) введем следующие базисные функции:

$$
\eta_{ij}(x, y) = \begin{cases} (x_{i+1} - x)/h, & (x, y) \in D_1, \\ (y_{j+1} - y)/h, & (x, y) \in D_2, \\ (x - x_i)/h + (y_{i+1} - y)/h, & (x, y) \in D_3, \\ (x - x_{i-1})/h, & (x, y) \in D_4, \\ (y - y_{j-1})/h, & (x, y) \in D_5, \\ (x_{i+1} - x)/h + (y - y_j)/h, & (x, y) \in D_6. \end{cases}
$$

Используя эти базисные функции, построить методом

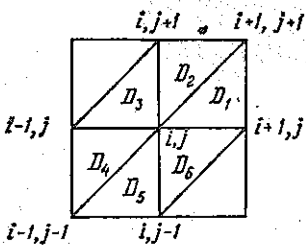


Рис. 14. Триангуляция области.

Ритца разностную схему для дифференциальной задачи

$$
-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5u(x, y) = 3, \quad (x, y) \in D \equiv [0, 1] \times [0, 1],
$$

$$
u|_{\partial D} = 0.
$$

5.19. Считая систему базисных функций $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ заданной, выписать систему уравнений метода Галеркина для задачи

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} - c^2(x, y)u = f(x, y)
$$

$$
u|_{\partial D} = 0.
$$

5.20. Используя базисные функции задачи 5.18, построить методом Галеркина разностную схему для дифференциальной задачи

$$
-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - 3\frac{\partial u}{\partial y} = 5, \ (x, y) \in D \equiv [0, 1] \times [0, 1],
$$

$$
u|_{\partial D} = 0.
$$

5.21. Пусть дана система уравнений

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}+J[u,\Omega]=0, \quad J[u,v]\equiv\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\Omega, \quad (x,y)\in D\equiv[0,1]\times[0,1], \quad t\in[0, T]$$

с периодическими граничными условиями. Используя базисные функции задачи 5.18, рассмотрим функции

$$u^h(t,x,y)=\sum_{i,j}\alpha_{ij}(t)\,\eta_{ij}(x,y),$$

$$\Omega^h(t,x,y)=\sum_{i,j}\beta_{ij}(t)\,\eta_{ij}(x,y),$$

где коэффициенты $\{\alpha_{ij}(t)\}$, $\{\beta_{ij}(t)\}$ определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial(\Omega^h,\eta_{ij})}{\partial t}+(J[u^h,\Omega^h],\eta_{ij})=0,$$

$$-\left(\frac{\partial u^h}{\partial x},\frac{\partial\eta_{ij}}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial u^h}{\partial y},\frac{\partial\eta_{ij}}{\partial x}\right)=(\Omega^h,\eta_{ij}),$$

а

$$(u,v)=\iint_D uv\,dD.$$

Доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Omega^h,1)=0.$$

5.22. Для задачи 5.21 доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Omega^h,\Omega^h)=0.$$

5.23. Для задачи 5.21 доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u^h}{\partial x},\frac{\partial u^h}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial u^h}{\partial y},\frac{\partial u^h}{\partial y}\right)\right]=0.$$

5.24. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}+a\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_{i-1}^{j+1}}{h}=0, \quad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{0,m-1},$$

$$\varphi_i^0=g_i, \quad i=\overline{0,n}, \quad nh=1,$$

$$\varphi_0^j=g^j, \quad j=\overline{0,m}, \quad m\tau=T, \quad a>0.$$

5.25. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}+a\frac{\varphi_{i+1}^j-\varphi_i^j}{h}=0,\ i=0,\pm1,\pm2,\ldots\ j=\overline{0,m-1},$$

$$\varphi_i^0=g_i,$$

$$j=\overline{0,m},\quad m\tau=T,\quad a>0.$$

5.26. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}+a\frac{\varphi_{i+1}^j-\varphi_{i-1}^j}{2h}=f_i^j,$$

$$i=\overline{0,n-1},\quad j=\overline{0,m-1},$$

$$\varphi_i^0=g_i,\quad i=\overline{0,n},\quad nh=1,$$

$$\varphi_0^j=\varphi_n^j,\quad \varphi_{-1}^j=\varphi_{n-1}^j,\quad j=\overline{0,m},\quad m\tau=T,\quad a>0.$$

5.27. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{\varphi_i^{j+1}-\dfrac{\varphi_{i+1}^j+\varphi_{i-1}^j}{2}}{\tau}-\frac{\varphi_{i+1}^j-\varphi_{i-1}^j}{2h}=f_i^j,$$

$$i=\overline{0,n-1},\quad j=\overline{0,m-1},$$

$$\varphi_i^0=g_i,\quad i=\overline{0,n},\quad nh=1,$$

$$\varphi_0^j=\varphi_n^j,\quad \varphi_{-1}^j=\varphi_{n-1}^j,\quad j=\overline{0,m},\quad m\tau=T.$$

5.28. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^{j-1}}{2\tau}=\frac{\varphi_{i-1}^j-2\varphi_i^j+\varphi_{i+1}^j}{h^2},$$

$$i=\overline{1,n-1},\quad j=\overline{1,m-1},$$

$$\varphi_i^0=g_i,\quad \varphi_i^1=g_i,\quad i=\overline{0,n},\quad nh=1,$$

$$\varphi_0^j=\varphi_n^j=0,\quad j=\overline{0,m},\quad m\tau=T.$$

5.29. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}=(1-\theta)\frac{\varphi_{i-1}^{j+1}-2\varphi_i^{j+1}+\varphi_{i+1}^{j+1}}{h^2}+$$

$$+\theta\frac{\varphi_{i-1}^j-2\varphi_i^j+\varphi_{i+1}^j}{h^2},\quad i=\overline{1,n-1},\quad j=\overline{0,m-1},$$

$$\varphi_i^0=g_i,\quad i=\overline{0,n},\quad nh=1,$$

$$\varphi_0^j=\varphi_n^j=0,\quad j=\overline{0,m},\quad m\tau=T.$$

5.30. Доказать, что разностная схема

$$\frac{\varphi_i^{j+1}-2\varphi_i^j+\varphi_i^{j-1}}{\tau^2}=\frac{\varphi_{i-1}^j-2\varphi_i^j+\varphi_{i+1}^j}{h^2},$$

$$i=\overline{1, n-1}, \quad j=\overline{1, m-1},$$

$$\varphi_i^0=g_i^{(0)}, \quad \frac{\varphi_i^1-\varphi_i^0}{\tau}=g_i^1, \quad i=\overline{0, n}, \quad nh=1,$$

$$\varphi_0^j=\varphi_n^j=0, \quad j=\overline{0, m}, \quad m\tau=T$$

при $\tau/h \to 1$ неустойчива.

5.31. Разностную схему назовем *монотонной*, если в разрешенном относительно $\varphi^{j+1}$ уравнении

$$\varphi_i^{j+1}=\sum_l a_{il}\varphi_l^j+q_i$$

все $a_{il} \geqslant 0$.

Доказать, что монотонна разностная схема

$$\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}=\frac{\varphi_{i-1}^{j+1}-2\varphi_i^{j+1}+\varphi_{i+1}^{j+1}}{h^2}, \quad i=\overline{1, n-1}, \quad nh=1,$$

$\varphi_0^j=1, \quad \varphi_n^j=1, \quad \varphi_i^0=g_i^0.$

5.32. Решить задачу 5.31 для разностных схем:

а) $\dfrac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}+k(x_i)\dfrac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_{i-1}^{j+1}}{h}=0, \quad k(x)>0;$

б) $\dfrac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}+k(x_i)\dfrac{\varphi_{i+1}^{j+1}-\varphi_i^{j+1}}{h}=0, \quad k(x)<0,$

с периодическими граничными условиями и $\varphi_i^0=g_i^0$.

5.33. Исследовать сходимость решения разностной схемы

$$\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}-\frac{\varphi_{i+1}^j-\varphi_{i-1}^j}{2h}-\frac{\tau}{2h^2}\left(\varphi_{i-1}^j-2\varphi_i^j+\varphi_{i+1}^j\right)=0,$$

$$i=\overline{1, n} \quad j=\overline{0, m-1},$$

$\varphi_i^0=g_i, \quad i=\overline{0, n}, \quad nh=1,$

$\varphi_{i+n}^j=\varphi_i^j, \quad j=\overline{0, m}, \quad m\tau=T$

к решению дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad t\in[0, T],$$

$$u(0, x)=g(x), \quad u(t, x)=u(t, x+1).$$

5.34. Исследовать сходимость к решению дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(0, x) = g(x)$$

с периодическими граничными условиями ($u(t, x) = u(t, x+1)$, $t \in [0, T]$) решения следующей разностной схемы:

$$\frac{\varphi_j^{j+1} - \varphi_i^j}{\tau} + \frac{4}{3}a\frac{\varphi_{i+1}^{j+1/2} - \varphi_{i-1}^{j+1/2}}{2h} - \frac{1}{3}a\frac{\varphi_{i+2}^{j+1/2} - \varphi_{i-2}^{j+1/2}}{4h} = 0,$$

$$\varphi_i^{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(\varphi_i^{j+1} + \varphi_i^j\right), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{0, m-1},$$

$$\varphi_i^0 = g_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad nh = 1,$$

$$\varphi_{i+n}^j = \varphi_i^j, \quad j = \overline{0, m}, \quad m\tau = T.$$

5.35. Исследовать сходимость решения разностной схемы

$$\frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^j}{\tau} + \frac{4}{3}\left(\theta_i\frac{\varphi_{i+1}^{j+1/2} - \varphi_{i-1}^{j+1/2}}{2h} + \frac{\theta_{i+1}\varphi_{i+1}^{j+1/2} - \theta_{i-1}\varphi_{i-1}^{j+1/2}}{2h}\right) -$$

$$- \frac{1}{3}\left(\theta_i\frac{\varphi_{i+2}^{j+1/2} - \varphi_{i-2}^{j+1/2}}{4h} + \frac{\theta_{i+2}\varphi_{i+2}^{j+1/2} - \theta_{i-2}\varphi_{i-2}^{j+1/2}}{4h}\right) = 0,$$

$$\varphi_i^{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(\varphi_i^{j+1} + \varphi_i^j\right), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{0, m-1},$$

$$\varphi_i^0 = g_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad nh = 1,$$

$$\varphi_{i+n}^j = \varphi_i^j, \quad j = \overline{0, m}, \quad m\tau = T$$

к решению дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \theta\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(\theta u)}{\partial x} = 0, \quad \theta = \theta(x), \quad t \in [0, T],$$

$$u(0, x) = g(x), \quad u(t, x) = u(t, x+1).$$

5.36. Исследовать сходимость решения разностной схемы

$$\frac{\varphi_{i,k}^{j+1/2} - \varphi_{i,k}^j}{\tau} = (1{,}5 + \sin^2(ih))\frac{\varphi_{i+1,k}^j - 2\varphi_{i,k}^j + \varphi_{i-1,k}^j}{h^2},$$

$$\frac{\varphi_{i,k}^{j+1} - \varphi_{i,k}^{j+1/2}}{\tau} = (2 + \sin^2(kh))\frac{\varphi_{i,k+1}^{j+1/2} - 2\varphi_{i,k}^{j+1/2} + \varphi_{i,k-1}^{j+1/2}}{h^2},$$

$$i, k = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{0, m-1},$$

$$\varphi^0_{i,k} = \sin(2\pi ih)\sin(2\pi kh), \quad i, k = \overline{0, n}, \qquad nh = 1,$$
$$\varphi^{j+1/2}_{0,i} = \varphi^{j+1/2}_{n,i} = \varphi^{j+1}_{i,0} = \varphi^{j+1}_{i,n} = 0,$$
$$j = \overline{0, m-1}, \quad m\tau = T$$

к решению дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1{,}5 + \sin^2 x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2 + \sin^2 y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$
$$(x, y) \in [0, 1]\times[0, 1], \quad t \in [0, T],$$
$$u(0, x, y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y),$$
$$u(t, 0, y) = u(t, 1, y) = u(t, x, 0) = u(t, x, 1) = 0.$$

**5.37.** Исследовать сходимость решения разностной схемы

$$\frac{\varphi^{j+1/2}_{i,k} - \varphi^j_{i,k}}{\tau} =$$
$$= \frac{\nu_{i+1/2}\varphi^{j+1/2}_{i+1,k} - (\nu_{i+1/2} + \nu_{i-1/2})\varphi^{j+1/2}_{i,k} + \nu_{i-1/2}\varphi^{j+1/2}_{i-1,k}}{h^2},$$
$$\frac{\varphi^{j+1}_{i,k} - \varphi^{j+1/2}_{i,k}}{\tau} = \mu_k\frac{\varphi^{j+1}_{i,k+1} - 2\varphi^{j+1}_{i,k} + \varphi^{j+1}_{i,k-1}}{h^2},$$
$$i, k = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{0, m-1},$$
$$\varphi^0_{i,k} = \sin(2\pi ih)\sin(2\pi kh), \quad i, k = \overline{0, n}, \quad nh = 1,$$
$$\varphi^{j+1/2}_{0,i} = \varphi^{j+1/2}_{n,i} = \varphi^{j+1}_{i,0} = \varphi^{j+1}_{i,n} = 0,$$
$$j = \overline{0, m-1}, \quad m\tau = T,$$
$$\nu_{i+1/2} = 1 + ih + h/2, \quad \mu_k = 1 + kh$$

к решению дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((1 + x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + (1 + y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (x, y) \in [0, 1]\times[0, 1],$$
$$u(0, x, y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y), \; t \in [0, T],$$
$$u(t, 0, y) = u(t, 1, y) = u(t, x, 0) = u(t, x, 1) = 0.$$

**5.38.** Исследовать сходимость решения разностной схемы

$$\frac{\varphi^{j+1/2}_{i,k} - \varphi^j_{i,k}}{\tau} + \frac{1}{2}a(y_k)\left(\frac{\varphi^{j+1/2}_{i+1,k} - \varphi^{j+1/2}_{i-1,k}}{2h} + \frac{\varphi^j_{i+1,k} - \varphi^j_{i-1,k}}{2h}\right) = 0,$$

$$\frac{\varphi_{i,k}^{j+1}-\varphi_{i,k}^{j+1/2}}{\tau}+\frac{1}{2}b(x_i)\left(\frac{\varphi_{i,k+1}^{j+1}-\varphi_{i,k-1}^{j+1}}{2h}+\frac{\varphi_{i,k+1}^{j+1/2}-\varphi_{i,k-1}^{j+1/2}}{2h}\right)=0,$$

$$i,k=\overline{0,n-1},\quad j=\overline{0,m-1},$$

$$\varphi_{i,k}^0=\sin(ih)\sin(kh),\quad i,k=\overline{0,n-1},\quad nh=2\pi,$$

$$\varphi_{i,k}^j=\varphi_{i,k+n}^j,\quad \varphi_{i,k}^j=\varphi_{i+n,k}^j,\quad j=\overline{0,m},$$

$$x_i=ih,\quad y_k=kh,\ m\tau=T$$

к решению дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a(y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x)\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

$$(x,y)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi],\ t\in[0,T],$$

$$u(0,x,y)=\sin x\sin y$$

с периодическими краевыми условиями.

**5.39.** Исследовать сходимость к решению задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a(y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x)\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad t\in[0,T],$$

$$u(0,x,y)=\sin x\sin y$$

($u$ — периодическая по пространственным переменным функция с периодом $2\pi$) решения разностной схемы

$$\frac{\varphi_{i,k}^{j+1/2}-\varphi_{i,k}^{j}}{\tau}+a(y_k)\frac{\varphi_{i+1,k}^{j+1/2}-\varphi_{i-1,k}^{j+1/2}}{2h}+b(x_i)\frac{\varphi_{i,k+1}^{j}-\varphi_{i,k-1}^{j}}{2h}=0,$$

$$\frac{\varphi_{i,k}^{j+1}-\varphi_{i,k}^{j+1/2}}{\tau}+a(y_k)\frac{\varphi_{i+1,k}^{j+1/2}-\varphi_{i-1,k}^{j+1/2}}{2h}+b(x_i)\frac{\varphi_{i,k+1}^{j+1}-\varphi_{i,k-1}^{j+1}}{2h}=0,$$

$$i,k=\overline{0,n-1},\quad j=\overline{0,m-1},$$

$$\varphi_{i,k}^0=\sin(ih)\sin(kh),\quad nh=1,\quad m\tau=T,$$

$$\varphi_{i,k}^j=\varphi_{i,k+n}^j,\quad \varphi_{i,k}^j=\varphi_{i+n,k}^j,\quad j=\overline{0,m},$$

$$x_i=ih,\quad y_k=kh.$$

**5.40.** Исследовать сходимость решения разностной схемы

$$\frac{\varphi_{i,k}^{j+1/4}-\varphi_{i,k}^{j}}{\tau/2}+a\frac{\varphi_{i+1,k}^{j+1/4}-\varphi_{i-1,k}^{j+1/4}}{2h}=0,$$

$$\frac{\varphi_{i,k}^{j+1/2}-\varphi_{i,k}^{j+1/4}}{\tau/2}+b\frac{\varphi_{i,k+1}^{j+1/2}-\varphi_{i,k-1}^{j+1/2}}{2h}=0,$$

$$\frac{\varphi_{i,k}^{j+1}-\varphi_{i,k}^{j}}{\tau}+a\frac{\varphi_{i+1,k}^{j+1/2}-\varphi_{i-1,k}^{j+1/2}}{2h}+b\frac{\varphi_{i,k+1}^{j+1/2}-\varphi_{i,k-1}^{j+1/2}}{2h}=0,$$

$$i,k=\overline{0,n-1},\quad j=\overline{0,m-1},$$

$$\varphi_{i,k}^{0}=\sin(2\pi ih)\sin(2\pi kh),\ i,k=\overline{0,n-1},\quad nh=1,$$

$$\varphi_{i,k}^{j}=\varphi_{i,k+n}^{j},\quad \varphi_{i,k}^{j}=\varphi_{i+n,k}^{j},\quad j=\overline{0,m},\quad m\tau=T$$

к решению дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad a,b=\mathrm{const},$$

$$(x,y)\in[0,1]\times[0,1],\ t\in[0,T],$$

$$u(0,x,y)=\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$$

с периодическими краевыми условиями.

5.41. Для дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\sin x+\frac{1}{2}u\cos x=$$

$$=\frac{1}{2}\sin(x-t)\cos x+\sin x\cos(x-t)-\cos(x-t),$$

$$u(0,x)=\sin x,\quad t\in[0,T],\quad u(t,x)=u(t,x+\pi)$$

построить устойчивую разностную схему второго порядка аппроксимации по $\tau$ и $h$.

5.42. Для дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}+k\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(ku)}{\partial x}=f(x,t),\quad k(t,x)=k(t,x+1),$$

$$u(0,x)=g(x),\quad u(t,x)=u(t,x+1),\quad t\in[0,T],$$

построить устойчивую разностную схему второго порядка аппроксимации по $\tau$ и $h$.

5.43. Для дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left((0{,}1+\cos^2 x)\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad x\in[0,1],\ t\in[0,T],$$

$$u(0,x)=1-x,\quad u(t,0)=\cos t,\quad u(t,1)=0$$

построить устойчивую разностную схему второго порядка аппроксимации по $\tau$ и $h$.

5.44. Для дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left((2+\sin^2 x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((0{,}5+\cos^2 y)\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$(x,y)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi],\quad t\in[0,T],$$

$$u(0,x,y)=1+\sin x\sin y,\quad u(t,x,y)|_{\Gamma}=1$$

построить устойчивую разностную схему первого порядка аппроксимации по $\tau$ и второго по $h$.

5.45. Для дифференциальной задачи

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1+yx^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((1+xy^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,$$

$$u(x, y)|_\Gamma = g(x, y), \quad (x, y)\in[0, 1]\times[0, 1],$$

построить устойчивую разностную схему второго порядка аппроксимации.

5.46. Для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}+3\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial v}{\partial x}=0, \quad u(t, x)=u(t, x+1),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}-2\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial v}{\partial x}=0, \quad v(t, x)=v(t, x+1),$$

$$u(0, x)=u_0(x), \quad v(0, x)=v_0(x), \quad t\in[0, T],$$

построить разностную схему, решение которой сходится к решению данной системы со вторым порядком по $\tau$ и $h$.

5.47. Для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad u(t, x)=u(t, x+1),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad v(t, x)=v(t, x+1),$$

$$u(0, x)=u_0(x), \quad v(0, x)=v_0(x), \quad t\in[0, T],$$

построить разностную схему, решение которой сходится к решению данной системы со вторым порядком по $\tau$ и $h$.

5.48. Пусть даны дифференциальная задача

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (x, y)\in[0, 1]\times[0, 1], \ t\in[0, T],$$

$$u(0, x, y)=\sin(2\pi x)\sin(2\pi y),$$
$$u(t, 0, y)=(1-e^{-t})\sin(2\pi y),$$
$$u(t, 1, y)=(1-e^{-t})\sin(2\pi y),$$
$$u(t, x, 0)=(1-e^{-t})\sin(2\pi x),$$
$$u(t, x, 1)=(1-e^{-t})\sin(2\pi x)$$

и разностная схема

$$\frac{\varphi^{j+1/2}-\varphi^{j}}{\tau}=\Lambda_1\varphi^{j+1/2}+\Lambda_2\varphi^{j},$$

$$\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^{j+1/2}}{\tau}=\Lambda_2(\varphi^{j+1}-\varphi^{j}),$$

$$(\Lambda_1\varphi)_{i,k}=\frac{\varphi_{i+1,k}-2\varphi_{i,k}+\varphi_{i-1,k}}{h^2},$$

$$(\Lambda_2\varphi)_{i,k}=\frac{\varphi_{i,k+1}-2\varphi_{i,k}+\varphi_{i,k-1}}{h^2},$$

$$i,k=\overline{1,n-1},\quad j=\overline{0,m-1},$$

$$\varphi^0_{i,k}=\sin(2\pi ih)\sin(2\pi kh),\ i,k=\overline{0,n},\ nh=1,\ m\tau=T.$$

Сформулировать граничные условия на слоях $j$, $j+1/2$ так, чтобы сохранился общий второй порядок аппроксимации по $\tau$ и $h$.

**5.49.** Решить задачу 5.48 для разностной схемы

$$\left(E-\frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)\varphi^{j+1/4}=(\Lambda_1+\Lambda_2)\varphi^{j},$$

$$\left(E-\frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)\varphi^{j+1/2}=\varphi^{j+1/4},$$

$$\varphi^{j+1}=\varphi^{j}+\tau\varphi^{j+1/2}.$$

**5.50.** Решить задачу 5.48 для разностной схемы

$$\frac{\varphi^{j+1/2}-\varphi^{j}}{\tau}=\sigma_1\Lambda_1\varphi^{j+1/2}+(1-\sigma_2)\Lambda_2\varphi^{j},$$

$$\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^{j+1/2}}{\tau}=\sigma_2\Lambda_2\varphi^{j+1}+(1-\sigma_1)\Lambda_1\varphi^{j+1/2}.$$

Показать, что при $\sigma_1=\sigma_2=1/2-h^2/12\tau$ схема аппроксимирует дифференциальную задачу со вторым порядком по $\tau$ и четвертым по $h$.

**5.51.** Построить разностную схему, аппроксимирующую со вторым порядком по $\tau$ и $h$ дифференциальную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x),\quad x\in[0,1],\ t\in[0,T],$$

$$u(0,x)=\psi_0(x),\quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=\psi_1(t),\quad u(t,1)=\psi_2(t),$$

и написать расчетные формулы алгоритма.

**5.52.** Для разностной схемы из задачи 5.25 написать расчетные формулы алгоритма.

**5.53.** Для разностной схемы из задачи 5.29 написать расчетные формулы алгоритма.

**5.54.** Для разностной схемы из задачи 5.6 написать расчетные формулы алгоритма.

**5.55.** Для разностной схемы из задачи 5.37 написать расчетные формулы алгоритма.

**5.56.** Для разностной схемы из задачи 5.40 написать расчетные формулы алгоритма.

**5.57.** Для разностной схемы из задачи 5.48 написать расчетные формулы алгоритма.

**5.58.** Записать разностную схему

$$\frac{\varphi_{i,k+1}+\varphi_{i,k-1}+\varphi_{i+1,k}+\varphi_{i-1,k}-4\varphi_{i,k}}{h^2}=f_{i,k},\quad i,k=\overline{1,5},$$

$$\varphi_{i,0}=\varphi_{i,6}=\varphi_{0,i}=\varphi_{6,i}=0,\ i=\overline{0,6},$$

в матричном виде $Ax=b$, используя различные способы упорядочивания при образовании вектора $x$ из значений сеточной функции $\varphi^h$. (Значения $\varphi^h$ на границе предварительно исключить.)

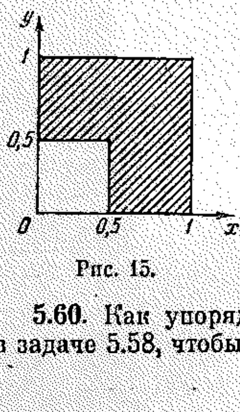

Рис. 15.

**5.59.** Как упорядочить значения сеточной функции в задаче 5.58, чтобы матрица $A$ имела блочно-трехдиагональный вид со скалярными матрицами на диагонали?

**5.60.** Как упорядочить значения сеточной функции в задаче 5.58, чтобы матрица $A$ имела вид

$$A=\begin{bmatrix} D_1 & B \\ C & D_2 \end{bmatrix},$$

где $D_1$, $D_2$ — скалярные матрицы?

**5.61.** Пусть $\partial D_h$ и $D_h$ — множества узлов равномерной сетки, лежащих соответственно на границе и внутри области, указанной на рис. 15.

Рассмотрим разностную задачу

$$-\frac{\varphi_{i+1,k}+\varphi_{i-1,k}+\varphi_{i,k+1}+\varphi_{i,k-1}-4\varphi_{i,k}}{h^2}=f_{i,k},$$

$$(x_i,\ y_k)\in D_h,$$

$$\varphi_{i,k}=0,\quad (x_i,\ y_k)\in\partial D_h.$$

Как упорядочить значения сеточной функции, чтобы при записи этой задачи в виде $Az=b$ матрица $A$ имела блочный трехдиагональный вид со скалярными матрицами на диагонали?

**5.62.** Для задачи 5.58 рассмотрим два способа перебора узлов, указанных на рис. 16. Обозначим через $x$, $y$ соответствующие векторы, элементы которых есть значения $\varphi^h$. Доказать, что при применении метода верхней релаксации с одним и тем же параметром релаксации для любого номера итераций $k$ $x^k = y^k$, если $x^{(0)} = y^{(0)}$.

**5.63.** Найти $\tau_{\text{опт}}$ метода верхней релаксации для разностной задачи из 5.58 и спектральный радиус со-

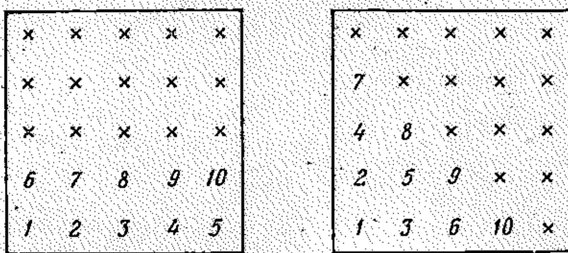


Рис. 16.

ответствующего оператора шага (матрицы перехода).

**5.64.** Для решения разностной задачи 5.35 на каждом шаге по времени предлагается следующий итерационный процесс:

$$\psi = \varphi^{j+1}, \quad \left(E + \frac{2}{3}\tau L_1\right)\psi^{k+1} = \frac{1}{6}\tau L_2 \psi^k + f, \quad \psi^0 = \varphi^j$$

где

$$(L_1\psi)_i = \theta_i \frac{\psi_{i+1} - \psi_{i-1}}{2h} + \frac{\theta_{i+1}\psi_{i+1} - \theta_{i-1}\psi_{i-1}}{2h},$$

$$(L_2\psi)_i = \theta_i \frac{\psi_{i+2} - \psi_{i-2}}{4h} + \frac{\theta_{i+2}\psi_{i+2} - \theta_{i-2}\psi_{i-2}}{4h},$$

$$f_i = \varphi_i^j - \frac{2}{3}\tau (L_1\varphi^j)_i + \frac{1}{6}\tau (L_2\varphi^j)_i.$$

Найти, при каких значениях $\tau/h$ итерационный процесс сходится.

**5.65.** Выписать расчетные формулы итерационного процесса задачи 5.64.

# РЕШЕНИЯ

## ГЛАВА 1

**1.7.** Функционал

$$\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}(|a_{ij}|)$$

не является нормой, так как он не удовлетворяет четвертому условию определения нормы матрицы.

В самом деле, пусть

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},$$

тогда

$$A^2=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}.$$

Но

$$2=\max_{1\leqslant i,\,j\leqslant n}(|(A^2)_{ij}|)>\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}(|a_{ij}|)\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}(|a_{ij}|)=1.$$

**1.10.** Пусть для матрицы $A$ введена некоторая ее норма $\|A\|_M$. Произвольному вектору $x$ поставим в соответствие функционал $\|x\|_B$ следующим образом:

$$\|x\|_B=\left\|\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & x_1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_n\end{pmatrix}\right\|_M.$$

Нетрудно убедиться, что этот функционал является нормой вектора $x$. Кроме того, введенная таким образом норма вектора согласована с исходной нормой матрицы.

В самом деле,

$$\|Ax\|_B\leqslant\|A\|_M\|x\|_B,$$

так как

$$\|Ax\|_B=\left\|A\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & x_1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_n\end{pmatrix}\right\|_M\leqslant\|A\|_M\left\|\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & x_1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_n\end{pmatrix}\right\|_M=$$

$$=\|A\|_M\|x\|_B.$$

**1.23.** Обозначим

$$\|x\|_h = \max\left(|x_1|, \frac{|x_2 - x_1|}{h}\right).$$

а) Выполнение условий из определения нормы вектора очевидно; следовательно, функционал $\|x\|_h$ является нормой.

б) Легко видеть, что

$$\|x\|_h = \|y\|_\infty,$$

где

$$y = Sx, \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/h & 1/h \end{bmatrix}.$$

Из определения нормы матрицы, подчиненной норме вектора, и очевидных преобразований следует

$$\|A\|_h = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_h}{\|x\|_h} = \sup_{x\neq 0}\frac{\|SAx\|_\infty}{\|Sx\|_\infty} =$$

$$= \sup_{y\neq 0}\frac{\|SAS^{-1}y\|_\infty}{\|y\|_\infty} = \|SAS^{-1}\|_\infty =$$

$$= \left\|\begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} & a_{12}h \\ \dfrac{a_{21} + a_{22} - a_{11} - a_{12}}{h} & a_{22} - a_{12} \end{bmatrix}\right\|_\infty =$$

$$= \max\Big(|a_{11} + a_{12}| + h|a_{12}|,\ |a_{22} - a_{12}| +$$

$$+ \frac{1}{h}|a_{21} + a_{22} - a_{11} - a_{12}|\Big)$$

**1.27.** Так как $\lambda(A)x = Ax$, то для любого натурального числа $k$

$$\lambda^k(A)x = A^k x.$$

Для любой нормы $\|\cdot\|_M$ матрицы существуют согласованная с ней норма $\|\cdot\|_B$ вектора (см. задачу 1.10); следовательно,

$$|\lambda^k(A)|\,\|x\|_B \leqslant \|A^k\|_M\|x\|_B;$$

отсюда для любого $k$

$$|\lambda(A)| \leqslant \sqrt[k]{\|A^k\|}.$$

**1.36.** Обозначим через $A$ трехдиагональную матрицу, указанную в условии задачи. Для доказательства вещественности собственных значений матрицы $A$ докажем, что она подобна симметричной вещественной матрице $B$.

В самом деле, непосредственные вычисления показывают, что

$$\hat{A} = DBD^{-1},$$

где $D$ — диагональная матрица с элементами

$$d_{11} = 1, \quad d_{ii} = \sqrt{\frac{a_2 a_3 \ldots a_i}{c_1 c_2 \ldots c_{i-1}}}, \qquad i = \overline{2, n},$$

а матрица $B$ — трехдиагональная вещественная матрица с элементами

$$b_{ii} = b_i, \qquad i = \overline{1, n},$$

$$b_{i,i+1} = b_{i+1,i} = \sqrt{a_{i+1} c_i}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

**1.37.** Доказательство неразложимости матрицы $A$ удобно проводить с помощью ориентированного графа матрицы $A$. Кратко изложим соответствующие определения и сформулируем необходимое и достаточное условие неразложимости матрицы (подробнее этот вопрос изложен в книге Р. Варги, § 1.4).

Возьмем на плоскости $n$ различных точек $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Если $a_{ij} \neq 0$, то $X_i$ соединяются направленной от $X_i$ к $X_j$ линией $\overrightarrow{X_i X_j}$. Совокупность этих линий будем называть *ориентированным графом* матрицы $A$. Граф называется *строго связным*, если для любых $X_i$ и $X_j$ существует ориентированная траектория

$$\overrightarrow{X_i X_{i_1}}, \overrightarrow{X_{i_1} X_{i_2}}, \ldots, \overrightarrow{X_{i_k} X_j},$$

соединяющая $X_i$ с $X_j$.

Имеет место следующая теорема: *для того чтобы $(n \times n)$-матрица $A$ была неразложимой, необходимо и достаточно, чтобы ее ориентированный граф был строго связным.*

Расположение точек $X_i$ на плоскости для каждой матрицы выбирается так, чтобы построенный граф был нагляден.

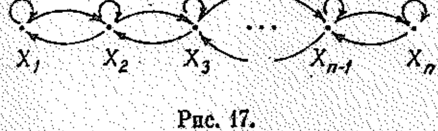


Рис. 17.

Для матрицы, указанной в условии задачи, ориентированный граф можно представить так, как на рис. 17. Из рисунка видно, что граф строго связный и, следовательно, матрица $A$ неразложима.

Из первой теоремы Гершгорина следует, что для собственных чисел матрицы $A$ имеет место неравенство

$$|\lambda(A)| \leqslant 1.$$

Предположим, что существует такое $\lambda(A)$, что $|\lambda(A)| = 1$. Так как по условию задачи

$$|a_i| + |b_i| + |c_i| \leqslant 1, \quad i = \overline{1, n},$$

то $\lambda(A)$ принадлежит границе объединения кругов из первой теоремы Гершгорина. Но тогда по теореме Таусски все эти окружности проходят через эту точку $\lambda(A)$, т. е.

$$|a_i| + |b_i| + |c_i| = 1, \quad i = \overline{1, n},$$

что противоречит условию задачи.

1.39. Пусть $K$ — кососимметричная матрица, $E$ — единичная матрица, $\alpha > 0$,

$$A = K + \alpha E;$$

тогда

$$\lambda(A) = \lambda(K) + \alpha.$$

Если порядок матрицы $K$ больше или равен 2, то среди $\lambda(K)$ существует чисто мнимое число, тогда соответствующее ему $\lambda(A)$ не является вещественным числом. В то же время для любого $x \neq 0$ имеем

$$(Ax, x) = (Kx, x) + \alpha(x, x) = \alpha(x, x) > 0.$$

Следовательно, $A$ — положительно определенная матрица, причем одно из $\lambda(A)$ не является вещественным числом.

1.42. Для доказательства совпадения спектров матриц $AB$ и $BA$ покажем, что соответствующие характеристические многочлены

$$\det(\lambda E - AB), \qquad \det(\lambda E - BA)$$

совпадают. Хотя для доказательства совпадения полиномов порядка $n$ достаточно показать равенство значений этих многочленов для $n + 1$ различных значений $\lambda$, покажем, что

$$\det(\lambda E - AB) = \det(\lambda E - BA)$$

при любом положительном $\lambda$.

С этой целью введем в рассмотрение три блочные матрицы:

$$C = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -B & \sqrt{\lambda}E \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda}E & -A \\ 0 & E \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda}E & A \\ B & \sqrt{\lambda}E \end{bmatrix},$$

где $\lambda$ — произвольное положительное число. Так как $\det(C) = \det(D) = (\sqrt{\lambda})^n$, то $\det(CM) = \det(DM)$. Но матрицы $CM$ и $DM$ таковы:

$$CM = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda}E & A \\ 0 & \lambda E - BA \end{bmatrix}, \quad DM = \begin{bmatrix} \lambda E - AB & 0 \\ B & \sqrt{\lambda}E \end{bmatrix};$$

следовательно, приравнивая определители, имеем

$$(\sqrt{\lambda})^n \det(\lambda E - BA) = (\sqrt{\lambda})^n \det(\lambda E - AB);$$

отсюда следует, что для любого $\lambda > 0$ имеет место равенство значений характеристических многочленов

$$\det(\lambda E - AB) = \det(\lambda E - BA).$$

Поскольку $\lambda$ является произвольным положительным числом, то характеристические многочлены матриц $AB$ и $BA$ совпадают.

**1.43.** Пусть

$$A_1 x = \lambda(A_1) x;$$

тогда для любого натурального числа $k$ имеем

$$A_2^k A_1 x = A_2^k \lambda(A_1) x = \lambda(A_1) A_2^k x.$$

Предположим, что $p$ векторов

$$x, A_2 x, \ldots, A_2^{p-1} x \tag{1}$$

линейно независимы, а вектор $A_2^p x$ может быть представлен как их линейная комбинация. Тогда подпространство $S$, натянутое на векторы (1), инвариантно относительно $A_2$ и, следовательно, в подпространстве $S$ существует вектор $y$ такой, что $A_2 y = \lambda(A_2) y$. С другой стороны, любой ненулевой элемент подпространства $S$ является собственным вектором $A_1$ и, следовательно, $A_1 y = \lambda(A_1) y$. В силу коммутативности $A_1$ и $A_2$ получаем, что

$$A_1 A_2 y = \lambda(A_1)\lambda(A_2) y,$$

т. е.

$$\lambda(A_1 A_2) = \lambda(A_1)\lambda(A_2).$$

**1.48.** Обозначим данную в условии задачи матрицу через $A_k$ и покажем, что все ее главные миноры положительны и, следовательно, выполнено необходимое и достаточное условие положительной определенности симметричной матрицы.

Легко видеть, что $A_1=1/2$, $A_2=1/4$. Кроме того,

$$\det(A_k)=\det\left[\begin{array}{c|cc} & 1 & 1\\ A_{k-2} & \vdots & \vdots\\ & 2k-7 & 2k-7\\ & 2k-5 & 2k-5\\ \hline 1\ldots 2k-5 & \dfrac{4k-7}{2} & 2k-3\\ 1\ldots 2k-5 & 2k-3 & \dfrac{4k-3}{2}\end{array}\right]=$$

$$=\det\left[\begin{array}{c|cc} & 1 & 0\\ A_{k-2} & \vdots & \vdots\\ & 2k-5 & 0\\ \hline 1\ldots 2k-5 & \dfrac{4k-7}{2} & \dfrac{1}{2}\\ 1\ldots 2k-5 & 2k-3 & \dfrac{3}{2}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{3}{2}\det(A_{k-1})-\frac{1}{2}\det\left|\begin{array}{c|c} & 1\\ A_{k-2} & \vdots\\ & 2k-5\\ \hline 1\ldots 2k-5 & 2k-3\end{array}\right|=$$

$$=\frac{3}{2}\det(A_{k-1})-\frac{1}{2}\left[\det(A_{k-1})+\frac{1}{2}\det(A_{k-2})\right]=$$

$$=\det(A_{k-1})-\frac{1}{4}\det(A_{k-2}).$$

По индукции легко показать, что

$$\det(A_k)=2^{-k}>0.$$

1.57. Представим матрицу $A$ в виде

$$A=D-B,$$

где $D$ — диагональная матрица с элементами

$$d_{ii}=a_{ii},\qquad i=\overline{1,n},$$

а $B$ — матрица с элементами на главной диагонали, равными нулю, и

$$b_{ij}=-a_{ij}>0,\qquad i\neq j.$$

Из условия задачи следует, что

$$\|D^{-1}B\|_\infty<1;$$

поэтому матрицу $A^{-1}$ можно представить в виде

$$A^{-1} = (E - D^{-1}B)^{-1}D^{-1} = [E + D^{-1}B + (D^{-1}B)^2 + \ldots]D^{-1}.$$

Так как элементы матриц $(D^{-1}B)^k$ при $k \geqslant 1$ положительны, то и элементы матрицы $A^{-1}$ положительны.

## ГЛАВА 2

2.5. Так как $\alpha > 0$, а матрица $A$ — положительно определенная симметричная матрица, то

$$\operatorname{cond}_2(A + \alpha E) = \frac{\lambda_{\max}(A) + \alpha}{\lambda_{\min}(A) + \alpha},$$

где $\lambda_{\max}(A)$ и $\lambda_{\min}(A)$ — соответственно наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы $A$. Тогда

$$\operatorname{cond}_2(A + \alpha E) = 1 + \frac{\lambda_{\max}(A) - \lambda_{\min}(A)}{\alpha + \lambda_{\min}(A)}.$$

По условию задачи

$$\lambda_{\max}(A + \alpha E) > \lambda_{\min}(A + \alpha E) > 0;$$

следовательно, из последнего выражения для $\operatorname{cond}_2(A)$ вытекает, что $\operatorname{cond}_2(A+\alpha E)$ есть монотонно убывающая функция $\alpha$.

2.9. а) Из соотношений

$$A\varphi = f, \quad A(\varphi + \delta\varphi) = f + \delta f$$

следует $A\delta\varphi = \delta f$. Отсюда

$$\|\delta\varphi\| \leqslant \|A^{-1}\|\|\delta f\|.$$

Так как $\|f\| \leqslant \|A\|\|\varphi\|$, то, перемножая левые и правые части двух последних неравенств, получаем

$$\|\delta\varphi\|\|f\| \leqslant \|A^{-1}\|\|\delta f\|\|A\|\|\varphi\|.$$

Разделив левую и правую части этого неравенства на $\|f\|\|\varphi\|$ и использовав обозначение $\operatorname{cond}(A) = \|A^{-1}\|\|A\|$, получаем требуемое неравенство

$$\frac{\|\delta\varphi\|}{\|\varphi\|} \leqslant \operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta f\|}{\|f\|}.$$

б) Из систем

$$(A + \delta A)(\varphi + \delta\varphi) = f,$$
$$A\varphi = f$$

следует, что

$$A\delta\varphi = -\delta A(\varphi + \delta\varphi).$$

Но тогда к требуемому неравенству приходим после следующей цепочки неравенств:

$$\frac{\|\delta\varphi\|}{\|\varphi+\delta\varphi\|}\leqslant\frac{\|A^{-1}\|\|A\delta\varphi\|}{\|\varphi+\delta\varphi\|}\leqslant\|A^{-1}\|\|\delta A\|\leqslant\operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

2.16. Обозначим $K_0=a_0$, $L_0=f_0$ и запишем систему в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} 1 & -K_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & -b_1 & a_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -b_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{n-1} & -b_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -c_n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Первый шаг метода Гаусса состоит в исключении $\varphi_0$ из всех уравнений, начиная со второго, с помощью первого уравнения. Трехдиагональность матрицы делает такое исключение необходимым лишь в одном втором уравнении. Итак, исключим из второго уравнения $\varphi_0$ и разделим полученное уравнение на $b_1-K_0c_1$. В результате приходим к уравнению

$$\varphi_1-K_1\varphi_2=L_1,$$

где

$$K_1=\frac{a_1}{b_1-K_0c_1},\quad L_1=\frac{c_1L_0-f_1}{b_1-K_0c_1}.$$

Продолжая этот процесс при $i=\overline{2,\ n-1}$, приходим к системе

$$\begin{bmatrix} 1 & -K_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -K_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -K_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -K_{n-1} \\ & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_{n-1} \\ L_n \end{bmatrix},$$

причем значения $K_i$ $(i=\overline{0,\ n-1})$ и $L_i$ $(i=\overline{0,\ n})$ совпадают со значениями прогоночных коэффициентов, приведенных в начале главы.

Обращение полученной верхней треугольной матрицы, проводимое при обратном ходе метода Гаусса, очевидно, равносильно выполнению рекуррентных соотношений

$$\varphi_n = L_n, \quad \varphi_i = K_i\varphi_{i+1} + L_i \quad (i = \overline{n-1, 0})$$

метода прогонки.

2.25. Доказательство следует из цепочки неравенств

$$\operatorname{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sup_{x\neq 0}\frac{(Ax, x)}{(x, x)} \sup_{x\neq 0}\frac{(A^{-1}x, x)}{(x, x)} =$$

$$= \sup_{x\neq 0}\frac{(SS^Tx, x)}{(x, x)} \sup_{x\neq 0}\frac{((S^T)^{-1}S^{-1}x, x)}{(x, x)} =$$

$$= \sup_{x\neq 0}\frac{(S^TSx, x)}{(x, x)} \sup_{x\neq 0}\frac{(S^{-1}x, S^{-1}x)}{(x, x)} =$$

$$= \|S\|_2^2 \|S^{-1}\|_2^2 = [\operatorname{cond}_2(S)]^2.$$

2.30. Числа Фибоначчи можно найти с помощью следующего рекуррентного выражения:

$$\varphi_0 = 0, \ \varphi_1 = 1, \varphi_{i+1} = \varphi_i + \varphi_{i-1}, \ i = 2, 3, \ldots$$

Эти рекуррентные соотношения можно рассматривать как однородное разностное уравнение

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i - \varphi_{i-1} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 1.$$

Соответствующий характеристический многочлен:

$$\mu^2 - \mu - 1 = 0.$$

Корни этого многочлена

$$\mu_{1,2} = \frac{(1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

различны, и, следовательно, общее решение однородного разностного уравнения имеет вид

$$\varphi_i = C_1\mu_1^i + C_2\mu_2^i.$$

Из условий $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_1 = 1$ приходим к системе уравнений для $C_1$ и $C_2$:

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1\mu_1 + C_2\mu_2 = 1.$$

Решение этой системы имеет вид

$$C_1 = 1/\sqrt{5}, \quad C_2 = -1/\sqrt{5}.$$

Отсюда

$$\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i\right);$$

следовательно, миллионный член последовательности Фибоначчи таков:

$$\varphi_{1\,000\,000} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1\,000\,000} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1\,000\,000}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1\,000\,000}.$$

2.32. Запишем систему линейных алгебраических уравнений в условии задачи в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 - \varphi_1 = -h,\\
&-\varphi_0 + 2\varphi_1 - \varphi_2 = h^2 \sin h,\\
&-\varphi_1 + 2\varphi_2 - \varphi_3 = h^2 \sin 2h,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-\varphi_{n-2} + 2\varphi_{n-1} - \varphi_n = h^2 \sin(n-1)h,\\
&\varphi_n = 1.
\end{aligned} \tag{1}$$

Систему (1) преобразуем к эквивалентной системе, $i$-е уравнение которой есть сумма $i$ первых уравнений системы (1):

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 - \varphi_1 = -h,\\
&\varphi_1 - \varphi_2 = -h + h^2 \sin h,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_i - \varphi_{i+1} = -h + h^2(\sin h + \ldots + \sin ih),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_{n-1} - \varphi_n = -h + h^2(\sin h + \ldots + \sin(n-1)h),\\
&\varphi_n = 1.
\end{aligned} \tag{2}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
&\varphi_n = 1,\\
&\varphi_{n-1} = 1 - h + h^2(\sin h + \ldots + \sin(n-1)h),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_i = 1 - h(n-i) +\\
&\qquad + h^2\left(\sum_{k=1}^{i} \sin kh + \sum_{k=1}^{i+1} \sin kh + \ldots + \sum_{k=1}^{n-1} \sin kh\right) =
\end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{2} + ih - \frac{h^2}{\sin\frac{h}{2}}\left(\sin\frac{ih}{2}\sin\frac{(i+1)h}{2} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \sin\frac{n-1}{2}h\sin\frac{nh}{2}\right),$$

$$i = \overline{0, n-1}.$$

**2.37.** Запишем спектральную задачу в виде

$$\varphi_0 = 0,$$

$$\varphi_{i+1} - (2 - \lambda h^2)\varphi_i + \varphi_{i-1} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{1}$$

$$\varphi_n = \varphi_{n-1}.$$

Решение системы (1) будем искать в виде $\mu^i$; тогда корни характеристического уравнения

$$\mu^2 - (2 - \lambda h^2)\mu + 1 = 0$$

таковы:

$$\mu_{1,2} = \left(1 - \lambda\frac{h^2}{2}\right) \pm \sqrt{\left(1 - \lambda\frac{h^2}{2}\right)^2 - 1}.$$

Из теоремы Таусски вытекает неравенство

$$\left|1 - \frac{\lambda h^2}{2}\right| < 1; \tag{2}$$

следовательно, корни характеристического уравнения являются комплексными числами вида

$$\cos\psi \pm \mathrm{i}\sin\psi\ ^{*)},$$

где

$$\cos\psi = 1 - \lambda\frac{h^2}{2}.$$

В этом случае общее решение имеет вид

$$\varphi_i = C_1\mu_1^i + C_2\mu_2^i =$$

$$= C_1(\cos i\psi + \mathrm{i}\sin i\psi) + C_2(\cos i\psi - \mathrm{i}\sin i\psi) =$$

$$= (C_1 + C_2)\cos i\psi + \mathrm{i}(C_1 - C_2)\sin i\psi = C_{\mathrm{I}}\cos i\psi + C_{\mathrm{II}}\sin i\psi,$$

где

$$C_{\mathrm{I}} = C_1 + C_2, \quad C_{\mathrm{II}} = \mathrm{i}(C_1 + C_2).$$

---

*) Во избежание путаницы здесь и далее мнимая единица обозначается i (прямым шрифтом).

Поскольку $\varphi_0 = 0$, то и $C_1 = 0$; следовательно,

$$\varphi_i = C \sin(i\psi). \tag{3}$$

Функция $\varphi_i$, указанная в (3), удовлетворяет первым уравнениям системы (1). Для того чтобы она удовлетворяла и последнему уравнению $\varphi_n = \varphi_{n-1}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$C(\sin(n\psi) - \sin((n-1)\psi)) = 0.$$

Так как нас интересуют только нетривиальные решения, то $C \neq 0$ и, следовательно, нетривиальные решения системы (1) существуют тогда и только тогда, когда

$$\sin(n\psi) - \sin(n-1)\psi = 0. \tag{4}$$

Найдем все значения $\psi$ (а с их помощью и соответствующие значения $\lambda$), являющиеся корнями уравнения (4). Из (4) следует, что

$$2\sin\frac{\psi}{2}\cos\left(\frac{2n-1}{2}\psi\right) = 0.$$

Если

$$\sin\frac{\psi}{2} = 0,$$

то

$$\cos\psi = \cos^2\frac{\psi}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2} = 1$$

и, следовательно, не выполняется неравенство (2). В этом случае $\lambda = 0$, а соответствующее решение (1):

$$\varphi_i = 0; \qquad i = \overline{0, n},$$

не является собственным вектором.

Если

$$\cos\frac{2n-1}{2}\psi = 0,$$

то корни этого уравнения

$$\psi_k = \frac{2}{2n-1}\,\frac{2k-1}{2}\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

дадут лишь $n-1$ различных значений $\cos\psi_k$. Поэтому из этого бесконечного множества значений $\psi_k$ достаточно взять

$$\psi_k = \frac{2k-1}{2n-1}\pi, \qquad k = \overline{1, n-1};$$

тогда получаем $n-1$ различных значений $\lambda$:

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{2k-1}{2n-1}\frac{\pi}{2}, \qquad k=\overline{1, n-1}.$$

Этим собственным числам соответствуют следующие собственные векторы:

$$x_i^k = C\sin\frac{2k-1}{2n-1}i\pi,$$

где константу $C$ обычно выбирают так, чтобы рассматриваемая в практической задаче норма вектора $x^{(k)}$ равнялась 1.

**2.46.** Вещественнозначную функцию $f(k)$ дискретного аргумента $k$ $(k=\overline{0, N-1})$ (пусть для определенности $N$ — четное натуральное число) можно представить в виде

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N/2}\left(a(n)\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + b(n)\sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)\right), \qquad (1)$$

где коэффициенты $a(n)$ и $b(n)$ этого конечного ряда Фурье имеют вид

$$a(0) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(k),$$

$$a(n) = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right), \qquad n=\overline{1, N/2-1},$$

$$a\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k f(k),$$

$$b(0)=0,$$

$$b(n) = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right), \qquad n=\overline{1, N/2-1},$$

$$b\left(\frac{N}{2}\right)=0.$$

Используя равенства

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = -i\,\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2},$$

преобразуем (1) к виду

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N/2}\left(\frac{a(n)+ib(n)}{2}e^{i\frac{2\pi}{N}kn} + \frac{a(n)-ib(n)}{2}e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}\right).$$

Обозначим

$$W = e^{i\frac{2\pi}{N}}.$$

Так как $W^{kN} = 1$, то последнее равенство можно представить в виде

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N/2} \left( \frac{a(n) + ib(n)}{2} W^{kn} + \frac{a(n) - ib(n)}{2} W^{k(N-n)} \right),$$

или

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} A(n) W^{kn}, \tag{2}$$

где

$$
\begin{aligned}
&A(0) = a(0),\\
&A(n) = \frac{a(n) + ib(n)}{2}, \qquad n = \overline{1,\ \frac{N}{2} - 1},\\
&A(n) = \frac{a(N-n) - ib(N-n)}{2}, \qquad n = \overline{\frac{N}{2} + 1,\ N - 1},\\
&A\left(\frac{N}{2}\right) = a\left(\frac{N}{2}\right).
\end{aligned} \tag{3}
$$

Из этих соотношений следует, что

$$A(n) = \overline{A}(N-n), \tag{4}$$

где черта сверху указывает на комплексное сопряжение.

Из равенства (2) следует, что

$$A(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W^{-kn}. \tag{5}$$

Расчетные формулы быстрого преобразования Фурье для ряда (5) для $N = N_1 N_2$ и $N = 2^m$, где $m$ — натуральное число, приведены в МВМ, стр. 224—225 (более точно, приведены формулы для ряда (2), но они имеют аналогичный вид). С помощью этих формул находим $A(n)$ для $n = \overline{0,\ N/2}$, а затем искомые коэффициенты $a(n)$ и $b(n)$ можно найти по формулам

$$a(n) = 2\,\mathrm{Re}(A(n)),$$

$$b(n) = 2\,\mathrm{Im}(A(n)),\ n = \overline{0,\ N/2}.$$

## ГЛАВА 3

**3.1.** Так как $\rho(B) = \alpha < 1$, то итерационный процесс

$$\varphi^{j+1} = B\varphi^j + f \tag{1}$$

сходится. Обозначим $\varphi = \lim_{j\to\infty} \varphi^j$, тогда имеет место соотношение

$$\varphi = B\varphi + f. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что вектор ошибки $\psi^j = \varphi^j - \varphi$ удовлетворяет соотношению $\psi^{j+1} = B\psi^j$.

Таким образом, $\psi^j = B^j\psi^0$ и, следовательно,

$$\|\psi^j\|_\infty \leqslant \|B^j\|_\infty \|\psi^0\|_\infty.$$

Исследуем поведение $\|B^j\|_\infty$ как функции $j$. Так как

$$B^j = \begin{bmatrix} \alpha^j & 4j\alpha^{j-1} \\ 0 & \alpha^j \end{bmatrix},$$

то $\|B^j\|_\infty = \alpha^j + 4j\alpha^{j-1}$.

При $\alpha > 0{,}5$ и $x \geqslant 1$ функция $f(x) = \alpha^x + 4x\alpha^{x-1}$ вначале возрастает, а затем начинает стремиться к нулю.

Так как

$$f'(x) = \alpha^x \ln\alpha + 4\alpha^{x-1} + 4x\alpha^{x-1}\ln\alpha,$$

$$f'(x) = \alpha^x \ln\alpha + 4\alpha^{x-1} + 4x\alpha^{x-1}\ln\alpha,$$

то стационарная точка

$$x = -\frac{1}{\ln\alpha} - \frac{\alpha}{4}$$

является точкой максимума функции $f(x)$, поскольку $f''(x) < 0$ при $x \geqslant 1$ и $0 < \alpha < 1$.

Если $\psi^0 = [1, 1]^T$, то поведение $\|\psi^j\|_\infty$ совпадает с поведением $\|B^j\|_\infty$. Следовательно, при таком начальном векторе ошибки норма вектора ошибки начнет убывать только с номера итерации $j_0$, равного

$$\operatorname{entier}\left(-\frac{1}{\ln\alpha} - \frac{\alpha}{4}\right).$$

Для других значений $\psi^0$ убывание, вообще говоря, может начаться и ранее.

Так как при $\alpha$, достаточно близких к 1, $-\dfrac{1}{\ln\alpha} \approx \dfrac{1}{1-\alpha}$, то при $\alpha = 0{,}99$ убывание нормы ошибки можно гарантировать только для $j > j_0 = 99$.

**3.2.** Из определения средней скорости сходимости $R_j$ для стационарного итерационного процесса имеем $\|T^j\| = e^{-jR_j}$, где $T$ — оператор шага итерационного процесса.

Так как $\|\psi^j\| \leqslant \|T^j\| \|\psi^0\|$, где $\psi^j$ — вектор ошибки $j$-й итерации, то

$$\frac{\|\psi^j\|}{\|\psi^0\|} \leqslant e^{-jR_j}.$$

Следовательно, $1/R_j$ указывает среднее число итераций, которое надо сделать в течение первых $j$ итераций, чтобы норма вектора ошибки уменьшилась в $e$ раз. Поскольку

$$R_{\text{ac}} = \lim_{j\to\infty} R_j,$$

то при достаточно большом $j$

$$R_{\text{ac}} \approx R_j;$$

поэтому при достаточно большом $j$ величина $1/R_{\text{ac}}$ показывает число итераций, которое надо сделать, чтобы норма вектора ошибки уменьшилась в $e$ раз. Таким образом, чтобы получить еще один верный десятичный знак у нормы $\|\varphi^j\|$, надо при достаточно большом $j$ сделать еще $(\ln 10)/R_{\text{ac}}$ итераций.

**3.7.** Поскольку все собственные значения матрицы $C$ равны нулю, то ее характеристический многочлен имеет вид $\lambda^n = 0$. Из теоремы Гамильтона — Кэли следует, что $C^n = 0$.

Так как для вектора ошибки $\psi^n$ имеет место равенство $\psi^n = C^n\psi^0$, то для любых $\psi^0$ вектор ошибки $\psi^n$ есть нуль-вектор.

**3.9.** По условию задачи решение $A\varphi = f$ существует, причем $\varphi_i \geqslant 0$.

Сходимость итераций докажем на основе цепочки неравенств, имеющих место для любого $i$

$$0 = \varphi_i^0 \leqslant \varphi_i^1 \leqslant \ldots \leqslant \varphi_i^j \leqslant \ldots \leqslant \varphi_i. \qquad (1)$$

Из (1) следует, что существует $\widetilde{\varphi}$ такое, что

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_i^j = \widetilde{\varphi}_i.$$

Но тогда $\widetilde{\varphi} = C\widetilde{\varphi} + f$. Следовательно, $A\widetilde{\varphi} = f$, т. е. итерационный процесс сходится к решению исходной системы.

Для доказательства (1) вначале с помощью метода математической индукции покажем, что для любого $j$ $\varphi_i^{j-1} \leqslant \varphi_i^j$.

В самом деле, $0 = \varphi_i^0 \leqslant f_i = \varphi_i^1$. Если же предположим, что для любого $i$ $\varphi_i^{j-2} \leqslant \varphi_i^{j-1}$, то, поскольку $c_{ik} \geqslant 0$, имеем

$$\varphi_i^{j-1} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\varphi_k^{j-2} + f_i \leqslant \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\varphi_k^{j-1} + f_i = \varphi_i^j.$$

Аналогично, с помощью метода математической индукции, можно показать, что для любых $i, j$ $\varphi_i^j \leqslant \varphi_i$, что и завершает доказательство цепочки неравенств (1).

**3.13.** Расчетные формулы метода Якоби решения системы $A\varphi = f$ с матрицей $A$ второго порядка имеют вид

$$\varphi_1^{j+1} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}\varphi_2^j + \frac{f_1}{a_{11}},$$

$$\varphi_2^{j+1} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}\varphi_1^j + \frac{f_2}{a_{22}};$$

следовательно, оператор $T_{Я}$ шага итерационного метода Якоби таков:

$$T_{Я} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_1(T_{Я}) = \sqrt{\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}}, \quad \lambda_2(T_{Я}) = -\sqrt{\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}}. \tag{1}$$

Расчетные формулы метода Гаусса — Зейделя имеют вид

$$\varphi_1^{j+1} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}\varphi_2^j + \frac{f_1}{a_{11}},$$

$$\varphi_2^{j+1} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}\varphi_1^{j+1} + \frac{f_2}{a_{22}},$$

т. е. оператор $T_{ГЗ}$ шага итерационного метода Гаусса — Зейделя таков:

$$T_{ГЗ} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \end{bmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$\lambda_1(T_{ГЗ}) = 0, \quad \lambda_2 = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $\rho^2(T_{Я}) = \rho(T_{ГЗ})$ и, следовательно, области сходимости методов Гаусса — Зейделя и Якоби совпадают.

**3.17.** Расчетные формулы метода Якоби для решения указанной в условии задачи системы уравнений имеют вид

$$\varphi^0_{k,l} \text{ задано } \left(\text{обычно } \varphi^0_{k,l}=0\right),$$

$$\varphi^j_{0,k}=\varphi^j_{n,k}=\varphi^j_{k,0}=\varphi^j_{k,n}=0, \qquad k=\overline{0, n}, \quad j=0, 1, 2, \ldots,$$

$$\varphi^{j+1}_{k,l}=\varphi^j_{k-1,l}+\varphi^j_{k+1,l}+\varphi^j_{k,l+1}+\varphi^j_{k,l-1}+\frac{h^2}{4}f_{k,l},$$

$$k, l=\overline{1, n-1}, \quad j=0, 1, 2, \ldots$$

Если указанную в условии систему уравнений записать в матричном виде $A\varphi=f$, исключив предварительно из уравнений $\varphi_{k,l}$ при $k=0$, $k=n$, $l=0$, $l=n$, получим оператор $T_{\text{Я}}$ шага итерационного метода Якоби:

$$T_{\text{Я}}=E-\frac{h^2}{4}A.$$

Следовательно,

$$\lambda_{m,p}(T_{\text{Я}})=1-\frac{h^2}{4}\lambda_{m,p}(A), \qquad m, p=\overline{1, n-1}.$$

Так как (см. МВМ, с. 33—36)

$$\lambda_{m,p}(A)=\frac{4}{h^2}\left(\sin^2\frac{m\pi}{2n}+\sin^2\frac{p\pi}{2n}\right),$$

то для спектрального радиуса матрицы $T_{\text{Я}}$ получаем

$$\rho(T_{\text{Я}})=1-\frac{h^2}{4}\,\frac{8}{h^2}\sin^2\frac{\pi}{2n}=\cos\frac{\pi}{n}.$$

Отсюда следует, что

$$R_{\text{ac}}=-\ln\cos\frac{\pi}{n}.$$

**3.20.** Расчетные формулы метода верхней релаксации следующие: $\varphi^0_{k,l}$ задано,

$$\varphi^j_{0,k}=\varphi^j_{n,k}=\varphi^j_{k,0}=\varphi^j_{k,n}=0, \qquad k=\overline{0, n}, \quad j=0, 1, 2, \ldots,$$

$$\varphi^{j+1}_{k,l}=\varphi^j_{k,l}-\tau_{\text{опт}}\Big(\varphi^j_{k,l}-\varphi^{j+1}_{k-1,l}-\varphi^{j+1}_{k,l-1}-\varphi^j_{k+1,l}-$$

$$-\varphi^j_{k,l+1}-\frac{h^2}{4}f_{k,l}\Big).$$

Если найдены все $\varphi^j_{k,l}$, то нахождение $\varphi^{j+1}_{k,l}$ идет следующим образом: вначале последовательно находятся

$$\varphi^{j+1}_{1,1}, \varphi^{j+1}_{2,1}, \ldots, \varphi^{j+1}_{k,1}, \ldots, \varphi^{j+1}_{n-1,1},$$

затем

$$\varphi_{1,2}^{j+1}, \varphi_{2,2}^{j+1}, \ldots, \varphi_{k,2}^{j+1}, \ldots, \varphi_{n-1,2}^{j+1}$$

и т. д. Такая последовательность вычисления значений $\varphi_{k,l}^{j+1}$ дает право найти значения $\tau_{\text{опт}}$ по формулам (МВМ, стр. 175, задача 5.45)

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(T_{\text{Я}})}},$$

где $\rho(T_{\text{Я}}) = \cos\frac{\pi}{n}$ — спектральный радиус оператора шага метода Якоби для этой системы (см. задачу 3.17). Следовательно,

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{2}{1+\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Так как для метода верхней релаксации при $\tau = \tau_{\text{опт}}$ имеет место соотношение (МВМ, стр. 175)

$$R_{\text{ac}}(T_{\tau_{\text{опт}}}) = -\ln(\tau_{\text{опт}} - 1),$$

то

$$R_{\text{ac}}(T_{\tau_{\text{опт}}}) = -\ln\frac{1-\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}},$$

где $T_\tau$ — оператор шага метода верхней релаксации.

3.26. Обозначим через $d(\lambda)$ характеристический многочлен матрицы $C$, т. е.

$$d(\lambda) = \det(C - \lambda E).$$

По теореме Виета имеет место равенство

$$(-1)^n d(0) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(C).$$

Так как $M$ и $N$ — соответственно нижняя и верхняя треугольные матрицы с нулевыми диагональными элементами, то

$$d(0) = \det(C) = (1-\tau)^n.$$

Следовательно,

$$\rho(C) \geqslant \sqrt[n]{\left|\prod_{i=1}^{n} \lambda_i(C)\right|} = |1-\tau|.$$

Отсюда следует расходимость метода последовательной верхней релаксации при $\tau \leqslant 0$ или $\tau \geqslant 2$.

3.42. Вначале докажем, что если предложенный итерационный процесс сходится, т. е. если

$$\lim_{k\to\infty} \varphi^k = \varphi^*,$$

то

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varphi^{k+1} + \varphi^{k+1/2}}{2} = \varphi,$$

где $\varphi$ — решение исходной системы $A\varphi = f$, а $\varphi^*$ — некоторый вектор.

С этой целью сложим оба уравнения, указанные в условии задачи итерационного процесса, и, объединяя члены с $\varphi^{k+1}$, $\varphi^k$ и $\varphi^{k+1/2}$, получим

$$(E + \tau A_2)\varphi^{k+1} - (E - \tau A_1)\varphi^k = 2\tau f - \tau(A_1 + A_2)\varphi^{k+1/2}.$$

Отсюда следует, что

$$A\frac{\varphi^{k+1/2} + \varphi^k}{2} = f - (E + \tau A_2)\frac{\varphi^{k+1} - \varphi^k}{2\tau}.$$

Таким образом,

$$A\lim_{k\to\infty} \frac{\varphi^{k+1/2} + \varphi^k}{2} = f.$$

Теперь докажем, что предложенный итерационный процесс сходится. С этой целью представим уравнения итерационного процесса в виде

$$(E + \tau A_1)\varphi^{k+1/2} = (E - \tau A_1)\varphi^k + 2\tau f_1,$$

$$(E + \tau A_2)\varphi^{k+1} = (E - \tau A_2)\varphi^{k+1/2} + 2\tau f_2.$$

Исключая из этих уравнений $\varphi^{k+1/2}$, получим

$$\varphi^{k+1} = (E + \tau A_2)^{-1}(E - \tau A_2)(E + \tau A_1)^{-1}(E - \tau A_1)\varphi^k + {}$$
$$+ 2\tau[f_2 + (E + \tau A_2)^{-1}(E - \tau A_2)(E + \tau A_1)^{-1}f_1].$$

Следовательно, оператор $T$ шага итерационного процесса равен $T = T_1T_2$, где

$$T_1 = (E + \tau A_1)^{-1}(E - \tau A_1),$$

$$T_2 = (E + \tau A_2)^{-1}(E - \tau A_2).$$

Собственные числа матриц $T_i$, $i = 1, 2$, равны

$$\lambda(T_i) = [1 - \tau\lambda(A_i)]/[1 + \tau\lambda(A_i)], \qquad i = 1, 2.$$

Так как $\lambda(A_i) > 0$, то $|\lambda(T_i)| < 1$, и поскольку $T_i$ — матрицы простой структуры и $T_1T_2 = T_2T_1$, то

$$|\lambda(T)| = |\lambda(T_1)|\,|\lambda(T_2)| < 1,$$

т. е. итерационный процесс сходится.

**3.43.** При доказательстве задачи 3.42 было показано, что для оператора $T$ шага итерационного процесса имеет место формула

$$\lambda(T) = \frac{1-\tau\lambda(A_1)}{1+\tau\lambda(A_1)}\,\frac{1-\tau\lambda(A_2)}{1+\tau\lambda(A_2)}.$$

Итак, требуется найти

$$R_{ac} = -\ln\rho(T).$$

Максимальной асимптотическая скорость будет при минимальном $\rho(T)$, т. е. необходимо найти такое $\tau_{опт}$, при котором достигается

$$\min_{\tau>0}\ \max_{0<\delta\leqslant\lambda\leqslant\Delta} \frac{|1-\tau\lambda|}{1+\tau\lambda}. \qquad (1)$$

Функция

$$f(\lambda) = \frac{1-\tau\lambda}{1+\tau\lambda}$$

при $\lambda \geqslant 0$ и фиксированном $\tau > 0$ является убывающей, так как

$$f'(\lambda) = -\frac{2\tau}{(1+\tau\lambda)^2} < 0.$$

Следовательно, максимальное значение на $[\delta, \Delta]$ функция $|f(\lambda)|$ принимает на границах этого сегмента при $\lambda = \delta$ или $\lambda = \Delta$. Таким образом, задача (1) сводится к задаче отыскания

$$\min_{\tau>0}\max\left(\frac{|1-\tau\delta|}{1+\tau\delta}, \frac{|1-\tau\Delta|}{1+\tau\Delta}\right). \qquad (2)$$

На рис. 18 приведены графики функций

$$\varphi_\delta(\tau) = \frac{|1-\tau\delta|}{1+\tau\delta},\ \varphi_\Delta(\tau) = \frac{|1-\tau\Delta|}{1+\tau\Delta}.$$

Из рис. 18 видно, что задача (2) имеет решение при $\tau$, удовлетворяющем соотношению $\varphi_\delta(\tau) = \varphi_\Delta(\tau)$. Отсюда получаем

$$\frac{1-\tau_{опт}\delta}{1+\tau_{опт}\delta} = \frac{\tau_{опт}\Delta-1}{1+\tau_{опт}\Delta},$$

следовательно,

$$\tau_{\text{опт}} = 1/\sqrt{\delta\Delta}.$$

Соответствующие спектральный радиус $T$ и асимптотическая

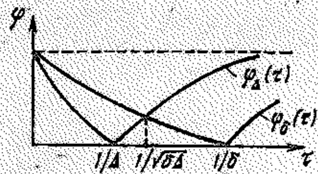


Рис. 18.

скорость сходимости даются формулами

$$\rho(T) = \left(\frac{\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta} + \sqrt{\delta}}\right)^2,$$

$$R_{\text{ac}} = -2\ln\frac{\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta} + \sqrt{\delta}}.$$

3.48. Для указанной в условии задачи системы линейных алгебраических уравнений

$$\lambda_i(A) = 4\sin^2\frac{i\pi}{2n}, \qquad i = \overline{1, n-1}$$

(см. МВМ, стр. 36); тогда

$$0 \leqslant \alpha(A) = 4\sin^2\frac{\pi}{2n} \leqslant \lambda_i(A) \leqslant 4\cos^2\frac{\pi}{2n} = \rho(A),$$

где $A$ — трехдиагональная матрица порядка $n-1$ с элементами

$$a_{ii} = 2, \qquad i = \overline{1, n-1},$$
$$a_{i,\,i+1} = -1, \qquad i = \overline{1, n-2},$$
$$a_{i-1,\,i} = -1, \qquad i = \overline{2, n-1}.$$

Следовательно,

$$\rho(A) + \alpha(A) = 4,$$
$$\rho(A) - \alpha(A) = 4\cos\frac{\pi}{n}.$$

а) При длине цикла $s = 4$ корни многочлена Чебышева $T_4(x)$ таковы:

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{8} > 0,$$

$$x_2 = \cos\frac{3\pi}{8} > 0,$$

$$x_3 = \cos\frac{5\pi}{8} = -\cos\frac{3\pi}{8} < 0,$$

$$x_4 = \cos\frac{7\pi}{8} = -\cos\frac{\pi}{8} < 0.$$

Соответствующие значения $\tau_k$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \frac{1}{2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{8}\right)},\\
\tau_2 &= \frac{1}{2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{3\pi}{8}\right)},\\
\tau_3 &= \frac{1}{2\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{3\pi}{8}\right)},\\
\tau_4 &= \frac{1}{2\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{8}\right)}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Таким образом, расчетные формулы чебышевского итерационного метода следующие:

$$\varphi^0 \text{ задано,}$$

$$\varphi_1^{4j+k} = \varphi_1^{4j+k-1} - \tau_k\left(2\varphi_1^{4j+k-1} - \varphi_2^{4j+k-1} - 1\right),$$

$$\varphi_i^{4j+k} = \varphi_i^{4j+k-1} - \tau_k\left(-\varphi_{i-1}^{4j+k-1} - 2\varphi_i^{4j+k-1} - \varphi_{i+1}^{4j+k-1} - i\right), \quad i=\overline{2, n-2},$$

$$\varphi_{n-1}^{4j+k} = \varphi_{n-1}^{4j+k-1} - \tau_k\left(-\varphi_{n-2}^{4j+k-1} + 2\varphi_{n-1}^{4j+k-1} - n + 1\right), \quad k=\overline{1,4}.$$

б) Матрица $A$ является симметричной, следовательно,

$$\|E - \tau_k A\|_2 = \rho(E - \tau_k A), \qquad k = \overline{1, 4}.$$

Так как

$$\lambda_i(E - \tau_k A) = 1 - \tau_k\lambda_i(A), \qquad \tau_k > 0,$$

то

$$1 - \frac{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}{1-\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)x_k} = 1 - \tau_k\alpha(A) \geqslant 1 - \tau_k\lambda_i(A) \geqslant 1 - \tau_k\rho(A) = 1 - \frac{2\cos^2\frac{\pi}{2n}}{1-\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)x_k}.$$

Но

$$1-\frac{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}{1-x_k\cos\frac{\pi}{n}}=\frac{1-x_k\cos\frac{\pi}{n}-2\sin^2\frac{\pi}{2n}}{1-x_k\cos\frac{\pi}{n}}=$$

$$=\cos\frac{\pi}{n}\,\frac{1-x_k}{1-x_k\cos\frac{\pi}{n}}.$$

Аналогично,

$$1-\frac{2\cos^2\frac{\pi}{2n}}{1-x_k\cos\frac{\pi}{n}}=\frac{-\cos\frac{\pi}{n}-x_k\cos\frac{\pi}{n}}{1-x_k\cos\frac{\pi}{n}}=-\cos\frac{\pi}{n}\,\frac{1+x_k}{1-x_k\cos\frac{\pi}{n}}.$$

Таким образом, имеют место неравенства

$$-\cos\frac{\pi}{n}\,\frac{1+x_k}{1-x_k\cos\frac{\pi}{n}}\leqslant 1-\tau_k\lambda_i(A)\leqslant\cos\frac{\pi}{n}\,\frac{1-x_k}{1-x_k\cos\frac{\pi}{n}}.\qquad(2)$$

Из этих неравенств следует, что

$$\|E-\tau_1A\|_2=\cos\frac{\pi}{n}\,\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{1-\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{8}}>1,$$

$$\|E-\tau_2A\|_2=\cos\frac{\pi}{n}\,\frac{1+\cos\frac{3\pi}{8}}{1-\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{3\pi}{8}}>1,$$

$$\|E-\tau_3A\|_2=\cos\frac{\pi}{n}\,\frac{1+\cos\frac{3\pi}{8}}{1+\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{3\pi}{8}}<1,$$

$$\|E-\tau_4A\|_2=\cos\frac{\pi}{n}\,\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{1+\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{8}}<1.$$

в) Так как

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\approx 0{,}9659,$$

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\approx 0{,}9239,$$

$$\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\approx 0{,}3827,$$

то при $n = 12$ получаем

$$\|E - \tau_1 A\|_2 \approx 17{,}27,$$
$$\|E - \tau_2 A\|_2 \approx 2{,}119,$$
$$\|E - \tau_3 A\|_2 \approx 0{,}9751,$$
$$\|E - \tau_4 A\|_2 \approx 0{,}9820.$$

Отсюда

$$\prod_{k=1}^{4} \|E - \tau_k A\|_2 \approx 35{,}04.$$

г) Матрица $A$ — симметричная, следовательно,

$$\left\|\prod_{k=1}^{4}(E - \tau_k A)\right\|_2 = \max_i \prod_{k=1}^{4} |1 - \tau_k \lambda_i(A)| =$$

$$= \max_i \frac{\left|\cos^2\frac{i\pi}{n} - \cos^2\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{\pi}{8}\right|}{1 - \cos^2\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{\pi}{8}} \frac{\left|\cos^2\frac{i\pi}{n} - \cos^2\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{3\pi}{8}\right|}{1 - \cos^2\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{3\pi}{8}} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{n} + \frac{1}{8}\cos^4\frac{\pi}{n}} \max_i \left|\cos^4\frac{i\pi}{n} - \cos^2\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{i\pi}{n} + \frac{1}{8}\cos^4\frac{\pi}{n}\right| =$$

$$= \frac{\max_i \left|\left(\cos^2\frac{i\pi}{n} - \frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{n}\right)^2 - \frac{1}{8}\cos^4\frac{\pi}{n}\right|}{\sin^2\frac{\pi}{n} + \frac{1}{8}\cos^4\frac{\pi}{n}},$$

$$0 \leqslant \cos^2\frac{i\pi}{n} \leqslant \cos^2\frac{\pi}{n}, \qquad i = \overline{1, n-1};$$

поэтому

В условии задачи $n$ — четное число, следовательно,

$$-\frac{1}{8}\cos^4\frac{\pi}{n} \leqslant \left(\cos^2\frac{i\pi}{n} - \frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{n}\right)^2 - \frac{1}{8}\cos^4\frac{\pi}{n} \leqslant \frac{1}{8}\cos^4\frac{\pi}{n}.$$

При $i = 1$ верхняя оценка достигается. Таким образом:

$$\left\|\prod_{k=1}^{4}(E - \tau_k A)\right\|_2 = \frac{\frac{1}{8}\cos^4\frac{\pi}{n}}{\sin^2\frac{\pi}{n} + \frac{1}{8}\cos^4\frac{\pi}{n}} < 1.$$

При $n = 12$ эта величина приближенно равна 0,6190. Такое значение будет получено при любом порядке перебора $\tau_k$, а вот поведение

$$\left\| \prod_{m=1}^{k} (E - \tau_m A) \right\|, \qquad k = \overline{1,3},$$

будет зависеть от порядка выбора параметров $\tau_k$. Так, практически более полезен перебор $\tau_k$ следующим образом: $\{\tau_3, \tau_2, \tau_4, \tau_1\}$.

3.52. Расчетные формулы метода верхней релаксации выписаны в решении задачи 3.20. Если до начала проведения итераций будет сосчитано вспомогательное поле $\frac{h^2}{4} f_{k,l}$, то для проведения одной итерации потребуется выполнить: операций умножения — $(n-1)^2$, операций типа сложения — $6(n-1)^2$.

Иногда метод верхней релаксации реализуют с помощью следующих расчетных формул:

$$\varphi_{k,l}^{j+1/2} = \varphi_{k-1,l}^{j+1} + \varphi_{k,l-1}^{j+1} + \varphi_{k+1,l}^{j} + \varphi_{k,l+1}^{j} + \frac{h^2}{4} f_{k,l},$$

$$\varphi_{k,l}^{j+1} = (1-\tau)\, \varphi_{k,l}^{j} + \tau \varphi_{k,l}^{j+1/2}, \qquad k, l = \overline{1, n-1}.$$

В этом случае заранее вычисляется также поле $\frac{h^2}{4} f_{k,l}$ и, кроме того, вычисляется константа $1-\tau$. Тогда для проведения одной итерации потребуется выполнить: операций умножения — $2(n-1)^2$, операций типа сложения — $5(n-1)^2$. Так как выполнение операции умножения на ЭВМ требует больше процессорного времени, чем выполнение операции типа сложения, то такая реализация менее экономична. Если же последнюю формулу представить в виде

$$\varphi_{k,l}^{j+1} = \varphi_{k,l}^{j} + \tau \left( \varphi_{k,l}^{j+1/2} - \varphi_{k,l}^{j} \right),$$

то в этом случае число арифметических операций совпадает с первоначальным вариантом.

Кроме того, два последних варианта требуют выполнения $(n-1)^2$ операций засылки промежуточных значений $\varphi_{k,l}^{j+1/2}$ в память ЭВМ, что потребует дополнительного процессорного времени. Таким образом, наиболее экономичны расчетные формулы, приведенные в решении задачи 3.20.

3.56. Оператор $T_Я$ шага итерационного метода Якоби является симметричным, и поскольку для вектора ошибки имеет место соотношение

$$\psi^j = T_Я \psi^{j-1},$$

$$\| T_Я \|_2 = \rho(T_Я) = \cos \frac{\pi}{n}$$

(см. решение задачи 3.17), то

$$\| \psi^j \|_2 \leqslant \left(\cos \frac{\pi}{n}\right)^j \| \psi^0 \|_2.$$

Следовательно, чтобы $\|\psi^0\|_2$ уменьшилась в 1000 раз, достаточно взять такое $j$, для которого имеет место неравенство

$$\left(\cos \frac{\pi}{n}\right)^j \leqslant 0{,}001.$$

Отсюда

$$jR_{\text{ac}} \geqslant 3 \ln 10.$$

Поскольку

$$R_{\text{ac}} = -\ln \cos \frac{\pi}{n} \approx \frac{\pi^2}{2n^2}, \qquad \ln 10 \approx 2{,}302,$$

то в качестве $j$ можно взять

$$\operatorname{entier}\left(13{,}81 \frac{n^2}{\pi^2} + 1\right).$$

## ГЛАВА 4.

4.14. Проинтегрировав левую и правую части дифференциального уравнения на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ и разделив результат на $2h$, получим

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} = \frac{1}{2h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (f(\xi) - cu(\xi))\, d\xi.$$

Обозначим

$$v(x) = f(x) - cu(x)$$

и найдем коэффициенты квадратурной формулы $a_{-1}$, $a_0$ и $a_1$ такие, что

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} v(\xi)\, d\xi - (a_{-1} v(x_{i-1}) + a_0 v(x_i) + a_1 v(x_{i+1})) = O(h^5).$$

Отсюда сразу следует, что имеет место соотношение

$$\varepsilon_i = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} - \frac{1}{2h} (a_{-1} v(x_{i-1}) + a_0 v(x_i) + a_1 v(x_{i+1})) = O(h^4).$$

С помощью формулы Тейлора получаем

$$\varepsilon_i=\left(u'(x_i)+\frac{h^2}{6}u'''(x_i)+\frac{h^4}{5!}u^{V}\left(x_{i+\theta_i^1}\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{2h}\Big((a_{-1}+a_0+a_1)v(x_i)+h(a_1-a_{-1})v'(x_i)+$$

$$+\frac{h^2}{2}(a_1+a_{-1})v''(x_i)+\frac{h^3}{6}(a_1-a_{-1})v'''(x_i)+$$

$$+\frac{h^4}{24}\left(a_1v^{IV}\left(x_{i+\theta_i^2}\right)+a_{-1}v^{IV}\left(x_{i-\theta_i^3}\right)\right)\Big)=\Big(u'(x_i)-\frac{1}{2h}(a_1+$$

$$+a_0+a_{-1})v(x_i)\Big)-\frac{1}{2}(a_1-a_{-1})v'(x_i)+\frac{h^2}{6}\Big(u'''(x_i)-$$

$$-\frac{3}{2h}(a_1+a_{-1})v''(x_i)\Big)-\frac{h^2}{12}(a_1-a_{-1})v'''(x_i)+$$

$$+\left(\frac{h^4}{120}u^{V}\left(x_{i+\theta_i^1}\right)-\frac{h^3}{24}\left(a_1v^{IV}\left(x_{i+\theta_i^2}\right)-a_{-1}v^{IV}\left(x_{i-\theta_i^3}\right)\right)\right).$$

Здесь

$$|\theta_i^1|\leqslant 1,\quad 0\leqslant\theta_i^2\leqslant 1,\quad 0\leqslant\theta_i^3\leqslant 1.$$

Поскольку

$$u'(x)=v(x),\quad u'''(x)=v''(x),$$

то для нахождения таких значений $a_1$, $a_0$, $a_{-1}$, что $\varepsilon_i=O(h^4)$, достаточно, чтобы они удовлетворяли следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2h}(a_1+a_0+a_{-1})=1,\\&a_1-a_{-1}=0,\\&\frac{3}{2h}(a_1+a_{-1})=1.\end{aligned}$$

Решение этой системы таково:

$$a_1=a_{-1}=\frac{1}{3}h,$$

$$a_0=\frac{4}{3}h,$$

Таким образом, мы получим формулу Симпсона:

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} v(\xi)\,d\xi = \frac{h}{3}\left(v_{i+1} + 4v_i + v_{i-1}\right) + \\ + \frac{h^5}{36} v^{\mathrm{IV}}\left(x_{i+\theta_i^4}\right), \qquad \left|\theta_i^4\right| \leqslant 1,$$

и следующий разностный аналог дифференциального уравнения:

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} + \frac{c}{6}\left(\varphi_{i+1} + 4\varphi_i + \varphi_{i-1}\right) = \\ = \frac{1}{6}\left(f(x_{i+1}) + 4f(x_i) + f(x_{i-1})\right), \\ i = \overline{1, n-1},$$

причем

$$e_i = \frac{h^4}{120} u^{\mathrm{V}}\left(x_{i+\theta_i^1}\right) - \frac{h^4}{36}\left(f^{\mathrm{IV}}\left(x_{i+\theta_i^5}\right) - cu^{\mathrm{IV}}\left(x_{i+\theta_i^5}\right)\right), \\ \left|\theta_i^5\right| \leqslant 1;$$

т. е. имеет место локальная аппроксимация четвертого порядка на решении дифференциального уравнения.

Если выбрать $\varphi_0 = a$, то $\delta_0 = 0$.

Для окончательного построения разностной схемы осталось задать $\varphi_1$ с четвертым порядком точности. Для нахождения такого значения $\varphi_1$ проинтегрируем левую и правые части дифференциального уравнения на сегменте $[0, h]$. Получим

$$u_1 - u_0 = \int\limits_0^h v(\xi)\,d\xi.$$

Но

$$v(\xi) = v(0) + \xi v'(0) + \frac{\xi^2}{2} v''(0) + \frac{\xi^3}{6} v'''(\theta_0),$$

где $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \xi$, следовательно,

$$u_1 = u_0 + hv(0) + \frac{h^2}{2} v'(0) + \frac{h^3}{6} v''(0) + \frac{h^4}{24} v'''(\theta_0).$$

Итак, если положить, что

$$\varphi_1 = \varphi_0 + hv(0) + \frac{h^2}{2} v'(0) + \frac{h^3}{6} v'''(0),$$

то

$$\delta_1 = \frac{h^4}{24}\left(f'''(\theta_0) - cu'''(\theta_0)\right).$$

Осталось выразить $v(0)$, $v'(0)$ и $v''(0)$ через начальные данные и правую часть:

$$v(0) = f(0) - cu(0) = f(0) - ca,$$

$$v'(0) = f'(0) - cu'(0) = f'(0) - cf(0) + c^2a,$$

$$v''(0) = f''(0) - cu''(0) = f''(0) - cf'(0) + c^2f(0) - c^3a.$$

Таким образом, приходим к разностной схеме

$$\varphi_0 = a,$$

$$\varphi_1 = a + h\,(f(0) - ca) + \frac{h^2}{2}\left(f'(0) - cf(0) + c^2a\right) + \frac{h^3}{6}\left(f''(0) - cf'(0) + c^2f(0) - c^3a\right),$$

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} + \frac{c}{6}\left(\varphi_{i+1} + 4\varphi_i + \varphi_{i-1}\right) = \frac{1}{6}\left(f(x_{i+1}) + 4f(x_i) + f(x_{i-1})\right), \quad i = \overline{1, n-1},$$

которая аппроксимирует исходную дифференциальную задачу на ее решении с четвертым порядком, причем

$$\|\varepsilon^h\|_{F_h} \leqslant h^4\left(\frac{1}{120}\|u^{\mathrm{V}}\|_C + \frac{|c|}{36}\|u^{\mathrm{IV}}\|_C + \frac{1}{36}\|f^{\mathrm{IV}}\|_C\right),$$

$$\|\delta^h\|_{G_h} \leqslant h^4\left(\frac{|c|}{24}\|u'''\|_C + \frac{1}{24}\|f'''\|_C\right).$$

В качестве норм в пространствах $F_h$ и $G_h$ взят максимум модулей соответствующих сеточных функций.

4.24. Общий вид линейного сплайна таков:

$$g_i(x) = a_1^{(i)} + a_2^{(i)}(x - x_{i-1}), \qquad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

Из условия в) следует, что коэффициенты $a_1^{(i)} = y_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$. Кроме того, $a_1^{(n)} + a_2^{(n)}h_n = y_n$, следовательно, $a_2^{(n)} = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n}$.

Из условия б) имеем еще $n-1$ уравнение

$$g_i(x_i) = g_{i+1}(x_i), \qquad i = \overline{1, n-1}.$$

Тогда имеем

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad y_{i-1} + a_2^{(i)} h_i = y_i, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$a_2^{(i)} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}.$$

Таким образом,

$$g_i(x) = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}), \quad i = \overline{1, n}.$$

4.33. а) Нетрудно убедиться, что решением дифференциальной задачи является функция

$$u(x) = e^{-2x}.$$

Разностную задачу запишем в виде

$$\begin{aligned} &\varphi_0 = 1, \\ &\varphi_1 = 1 - 2h, \\ -&\varphi_{i-1} + 4h\varphi_i + \varphi_{i+1} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Общее решение уравнения

$$-\varphi_{i-1} + 4h\varphi_i + \varphi_{i+1} = 0, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2}$$

будем, как обычно, искать с помощью подстановки $\varphi_i = \mu^i$. Корни соответствующего характеристического уравнения

$$\mu^2 + 4h\mu - 1 = 0$$

таковы:

$$\mu_{1,2} = -2h \pm \sqrt{1 + 4h^2}.$$

Отсюда

$$\mu_1 = 1 - 2h + 2h^2 + O(h^4) = e^{\ln(1 - 2h + 2h^2 + O(h^4))} = e^{-2h + \frac{4}{3}h^3 + O(h^4)},$$

$$\mu_2 = -(1 + 2h + 2h^2 + O(h^4)) = -e^{\ln(1 + 2h + 2h^2 + O(h^4))} = -e^{2h - \frac{4}{3}h^3 + O(h^4)}.$$

Итак, общее решение уравнения (2) можно представить в виде

$$\varphi_i = C_1 \mu_1^i + C_2 \mu_2^i.$$

Для нахождения решения разностной задачи (1) достаточно найти соответствующие значения $C_1$ и $C_2$ из системы

$$C_1 + C_2 = 1,$$

$$C_1\mu_1 + C_2\mu_2 = 1 - 2h,$$

к которой приходим после подстановки общего решения уравнения (2) в два первых уравнения системы (1).

Из этой системы двух уравнений с двумя неизвестными получаем

$$C_1 = \frac{1-2h-\mu_2}{\mu_1-\mu_2} = \frac{1+\sqrt{1+4h^2}}{2\sqrt{1+4h^2}},$$

$$C_2 = \frac{-1+2h+\mu_1}{\mu_1-\mu_2} = -\frac{1-\sqrt{1+4h^2}}{2\sqrt{1+4h^2}},$$

или $C_1 = 1-h^2+O(h^4)$, $C_2 = h^2+O(h^4)$.

Итак, решение разностной задачи (1) имеет вид

$$\varphi_i = (1-h^2+O(h^4))\, e^{-2ih+\frac{4}{3}ih^3+O(ih^4)} +$$

$$+ (h^2+O(h^4))(-1)^i e^{2ih-\frac{4}{3}ih^3+O(ih^4)}.$$

Таким образом, при $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеем

$$\|(u)_h - \varphi^h\|_{\Phi_h} = \max_{0\leqslant i\leqslant n} |u(x_i)-\varphi_i| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant i\leqslant n} \left| e^{-2ih} - (1-h^2)\, e^{-2ih+\frac{4}{3}ih^3} - h^2(-1)^i e^{2ih-\frac{4}{3}ih^3} + O(ih^4)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant i\leqslant n} \left| e^{-2ih} - e^{-2ih} + h^2\left(e^{-2ih}-(-1)^i e^{2ih}\right) + O(ih^4)\right| \leqslant$$

$$\leqslant (1+e^2)\, h^2. \qquad (3)$$

Последнее соотношение имеет место при достаточно малых $h$.

б) Для исследования сходимости решения разностной схемы к решению дифференциальной задачи с помощью теоремы сходимости достаточно оценить порядок аппроксимации и доказать устойчивость, а затем найти порядок сходимости.

I. Описание пространств.

$$\varphi^h \in \Phi_h \Leftrightarrow \begin{cases} D\varphi^h = \{x_i \mid i=\overline{0,\,n}\}, \\ \|\varphi^h\|_{\Phi_h} = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} |\varphi_i|; \end{cases}$$

$$f^h \in F_h \Leftrightarrow \begin{cases} Df^h = \{x_i \mid i=\overline{1,\,n-1}\}, \\ \|f^h\|_{F_h} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1} |f_i|; \end{cases}$$

$$g^h \in G_h \Leftrightarrow \begin{cases} Dg^h = \{x_0,\, x_1\}, \\ \|g^h\|_{G_h} = \max(|g_0|,\, |g_1|). \end{cases}$$

II. Исследование аппроксимации.

1) *Определение порядка локальной аппроксимации.* Обозначим

$$\varepsilon^h = L_h(u)_h - f^h,$$

$$\delta^h = l_h(u)_h - g^h$$

и положим $((u)_h)_i = u(x_i)$.

Так как решение дифференциальной задачи имеет производные любого порядка, имеем

$$\delta_0 = u_0 - g_0 = 0,$$

$$\delta_1 = u_1 - g_1 = u_1 - (1-2h) = u_0 + hu_0' + \frac{h^2}{2}u''_{\theta_0^1} - 1 + 2h =$$

$$= u_0 + h(-2u_0) + \frac{h^2}{2}u''_{\theta_0^1} - 1 + 2h = \frac{h^2}{2}u''_{\theta_0^1},$$

$$\varepsilon_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + 2u_i - 0 = \frac{1}{2h}\left(\left(u_i + hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' + \frac{h^3}{6}u''_{i+\theta_i^1}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(u_i - hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' - \frac{h^3}{6}u'''_{i-\theta_i^2}\right)\right) + 2u_i =$$

$$= u_i' + \frac{h^2}{12}\left(u'''_{i+\theta_i^1} + u'''_{i+\theta_i^2}\right) + 2u_i = \frac{h^2}{6}\, u'''_{i+\theta_i}, \qquad i = \overline{1, n-1}.$$

В этих соотношениях величины $\theta_i^1, \theta_i^2$ и $\theta_i$ могут принимать следующие значения:

$$0 \leqslant \theta_i^1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta_i^2 \leqslant 1, \quad |\theta_i| \leqslant 1.$$

2) *Определение порядка аппроксимации.* Используя найденные в предыдущем пункте значения сеточных функций $\varepsilon^h$ и $\delta^h$, получаем

$$\|\varepsilon^h\|_{F_h} \leqslant h^2 \frac{1}{6} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |u'''| = \frac{h^2}{6}\|u'''\|_C,$$
$$\|\delta^h\|_{G_h} \leqslant h^2 \frac{1}{2} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |u''| = \frac{h^2}{2}\|u''\|_C. \qquad (4)$$

Отметим, что при оценке сверху нормы сеточной функции $\delta^h$ максимум модуля $\delta^h$ можно взять не на всем $[0, 1]$, а на $[0, \widetilde{h}]$, где $\widetilde{h}$ меньше 1.

Вывод: Разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу со вторым порядком аппроксимации на решении этой дифференциальной задачи.

III. Доказательство устойчивости разностной схемы. Доказательство устойчивости согласно определению этого понятия необходимо проводить для произвольной правой части разностной задачи, которую в этом случае запишем в виде

$$\varphi_0 = g_0, \quad \varphi_1 = g_1,$$

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} + 2\varphi_i = f_i, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

1) *Доказательство существования и единственности решения разностной задачи при любых $f^h$ и $g^h$.* Легко видеть, что имеют место соотношения

$$\varphi_0 = g_0, \quad \varphi_1 = g_1,$$

$$\varphi_{i+1} = -4h\varphi_i + \varphi_{i-1} + 2hf_i, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

В силу возможности и однозначности всех действий, которые необходимо выполнить при нахождении $\varphi_i$ с помощью рекуррентного соотношения, сеточная функция $\varphi^h$ существует и единственна при любых $h$, $g^h$ и $f^h$.

2) *Доказательство неравенства из определения устойчивости.* Для упрощения выкладок трехслойную схему обычно сводят к двухслойной схеме относительно вспомогательного двумерного вектора $y_i$. Вид компонент вектора $y_i$ целесообразно определять из вида начальных условий. Если, как в данном случае,

$$l_h\varphi^h = \begin{bmatrix}\varphi_0\\ \varphi_1\end{bmatrix}, \text{ то } y_i = \begin{bmatrix}\varphi_i\\ \varphi_{i+1}\end{bmatrix}.$$

Используя очевидное тождество $\varphi_i = \varphi_i$, приходим к следующему каноническому виду:

$$y_i = R_h y_{i-1} + h\rho_{i-1}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$y_0 = \begin{bmatrix}g_0\\ g_1\end{bmatrix}, \tag{5}$$

где

$$\rho_{i-1} = \begin{bmatrix}0\\ 2f_i\end{bmatrix}, \quad R_h = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -4h\end{bmatrix}.$$

Из канонического вида (5) разностной схемы следует, что

$$y_i = R_h^i y_0 + h\left(\rho_{i-1} + R_h\rho_{i-2} + \ldots + R_h^{i-2}\rho_1 + R_h^{i-1}\rho_0\right).$$

Отсюда

$$\|y_i\|_\infty \leqslant \|R_h\|_\infty^i \|y_0\|_\infty + h\left(\|\rho_{i-1}\|_\infty + \ldots + \|R_h\|_\infty^{i-1}\|\rho_0\|_\infty\right).$$

Так как справедливы соотношения

$$\|y_0\|_\infty = \|g^h\|_{G_h},$$

$$\|\rho_{i-1}\|_\infty \leqslant 2\|f^h\|_{F_h},$$

$$\|R_h\|_\infty \leqslant 1 + 4h,$$

то приходим к следующему неравенству:

$$\|y_i\|_\infty \leqslant (1+4h)^i\|g^h\|_{G_h} + 2h\|f^h\|_{F_h}\frac{(1+4h)^i - 1}{4h}, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Но

$$(1+4h)^i \leqslant (1+4h)^{1/h} \leqslant e^4,$$

следовательно,

$$\|y_i\|_\infty \leqslant e^4\left(\frac{1}{2}\|f^h\|_{F_h} + \|g^h\|_{G_h}\right).$$

Поскольку

$$\|y_i\|_\infty = \max(|\varphi_i|, |\varphi_{i+1}|), \quad i = \overline{0, n-1},$$

то приходим к искомому неравенству

$$\|\varphi^h\|_{\Phi_h} \leqslant e^4\left(\frac{1}{2}\|f^h\|_{F_h} + \|g^h\|_{G_h}\right). \tag{6}$$

IV. Оценка порядка сходимости. Из неравенств (4), (6) и теоремы сходимости следует, что

$$\|(u)_h - \varphi^h\|_{\Phi_h} \leqslant e^4\left(\frac{1}{2}\|u''\|_C + \frac{1}{12}\|u'''\|_C\right)h^2. \tag{7}$$

Таким образом, имеет место сходимость решения разностной схемы со вторым порядком к решению дифференциальной задачи.

в) Из неравенств (3) и (7) следует, что теорема сходимости дала тот же порядок сходимости, что и сравнение решения дифференциальной задачи с точным решением разностной схемы.

Сравним теперь коэффициенты при $h^2$ в (3) и (7). Отметим, что $u'' = 4e^{-2x}$, $u''' = -8e^{-2x}$; отсюда $\|u''\|_C \leqslant 4$, $\|u'''\|_C \leqslant 8$. Следовательно, коэффициент при $h^2$ в (7) равен

$$e^4\left(2 + \frac{8}{12}\right) = \frac{8}{3}e^4.$$

Таким образом, коэффициент при $h^2$, найденный с помощью теоремы сходимости, больше коэффициента при $h^2$, найденного с помощью точного решения, примерно в 20 раз.

4.36. Нахождение решений дифференциальной и разностной задач произведем с помощью функций от матриц.

Запишем дифференциальную задачу в виде

$$\frac{dy}{dx} = -Ay, \qquad y(0) = d,$$

где

$$y = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & l \\ -l & 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$y = \exp(-Ax)\,d.$$

Так как

$$\lambda_{1,2}(A) = \pm li,$$

то, обозначив через $X$ матрицу, столбцами которой являются собственные векторы матрицы $A$, получаем

$$y = X \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 x} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 x} \end{bmatrix} X^{-1} d.$$

Для нахождения решения разностной задачи представим ее в виде

$$y_k^h = A_h y_{k-1}^h, \qquad k = \overline{1, n},$$
$$y_0^h = d,$$

где

$$y_k^h = \begin{bmatrix} \varphi_k \\ \psi_k \end{bmatrix}, \quad A_h = E - hA = \begin{bmatrix} 1 & -hl \\ hl & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как

$$y_k^h = A_h^k y_0^h,$$

то

$$y_k^h = X \begin{bmatrix} (1 - ilh)^k & 0 \\ 0 & (1 + ilh)^k \end{bmatrix} X^{-1} d.$$

При нахождении $A_h^k$ было использовано совпадение собственных векторов матриц $A_h$ и $A$ и связь между их собственными числами

$$\lambda(A_h) = 1 - h\lambda(A).$$

Легко показать, что $e^{\pm ilx_k} - (1 \pm ilh)^k = O(h)$, следовательно, $\left\| y(x_k) - y_k^h \right\|_\infty = O(h)$. Вводя в пространстве $Y_h$ норму

$$\| y^h \|_{Y_h} = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \left( \| y_k^h \|_\infty \right),$$

приходим к следующей оценке сходимости решения разностной схемы к решению дифференциальной задачи:

$$\| (y)_h - y^h \|_{Y_h} = O(h).$$

4.42. Решением дифференциальной задачи является функция

$$u(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ 1/2, & \xi < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Пусть

$$x_k < \xi < x_{k+1}$$

(так как $\xi$ — иррациональное число, то оно не совпадает ни с одним узлом); тогда

$$\frac{p(x_{i+1}) - p(x_i)}{h} = 0 \quad \text{при } i \neq k,$$

следовательно,

$$\varphi_i = \varphi_0 = 1 \quad \text{при} \quad i \leqslant k,$$

$$\varphi_i = \varphi_{i+1} \quad \text{при} \quad i > k + 1.$$

При $i = k$ имеем

$$1 \cdot \frac{\varphi_{k+1} - 1}{h} + 1 \cdot \frac{2 - 1}{h} = 0,$$

т. е. $\varphi_{k+1} = 0$.

Итак,

$$\varphi_i = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x_i < \xi, \\ 0, & \xi < x_i \leqslant 1. \end{cases}$$

Таким образом, решение разностной схемы не сходится к решению дифференциальной задачи.

4.50. Используемые при решении настоящей задачи пространства $\Phi_h$, $F_h$ и $G_h$ совпадают с описанными в задаче 4.33 соответствующими пространствами.

а) Порядок локальной аппроксимации следующий:

$$\varepsilon_i^h = \left( L_h (u)_h - f^h \right)_i =$$

$$= \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} - 3 \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} - 4u(x_i) =$$

$$= u''(x_i) + u^{IV}\left(x_{i+\theta_i^1}\right)\frac{h^2}{12} - 3u'(x_i) - u'''\left(x_{i+\theta_i^2}\right)\frac{h^2}{2} -$$

$$- 4u(x_i) = h^2\left(\frac{1}{12}u^{IV}\left(x_{i+\theta_i^1}\right) - \frac{1}{2}u'''\left(x_{i+\theta_i^2}\right)\right), \qquad i=\overline{1, n-1},$$

где

$$\left|\theta_i^1\right| \leqslant 1, \quad \left|\theta_i^2\right| \leqslant 1.$$

Кроме того,

$$\delta_0^h = \left(l_h u^h - g^h\right)_0 = u(x_0) - 1 = 0,$$

$$\delta_1^h = \frac{u(h) - u(0)}{h} + 1 = u'(0) + u''\left(\theta_0^1\right)\frac{h}{2} + 1 =$$

$$= h\frac{1}{2}u''\left(\theta_0^1\right), \qquad 0 \leqslant \theta_0^1 \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$\|\varepsilon^h\|_{F_h} \leqslant h^2\left(\frac{1}{12}\|u^{IV}\|_C + \frac{1}{2}\|u'''\|_C\right),$$

$$\|\delta^h\|_{G_h} \leqslant h\frac{1}{2}\|u''\|_C,$$

т. е. имеет место первый порядок аппроксимации.

б) Первый порядок аппроксимации получился за счет $\delta_1^h$. Если изменить правую часть $g_1^h$, то можно добиться более высокого порядка локальной аппроксимации, используя соотношение

$$u''(0) = 3u'(0) + 4u(0) = 1.$$

В самом деле,

$$\frac{u(h) - u(0)}{h} = u'(0) + u''(0)\frac{h}{2} + \frac{h^2}{6}u'''\left(\theta_0^2\right) =$$

$$= -1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6}u'''\left(\theta_0^2\right), \qquad 0 \leqslant \theta_0^2 \leqslant 1,$$

следовательно, полагая

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} = -1 + \frac{h}{2},$$

получаем второй порядок аппроксимации, так как теперь

$$\|\delta^h\|_{G_h} \leqslant h^2\frac{1}{6}\|u'''\|_C.$$

в) Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходимо найти оценку сверху для

$$\left\|(u)_h - \varphi^h\right\|_{\Phi_h}.$$

С этой целью докажем устойчивость разностной схемы

$$\frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} - 3\,\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} - 4\varphi_i = f_i, \qquad i = \overline{1, n-1},$$

$$\varphi_0 = g_0, \qquad \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} = g_1,$$

где $f^h$ и $g^h$ — произвольные сеточные функции.

Доказательство устойчивости этой разностной схемы проводится аналогично тому, как это проделывалось при решении задачи 4.33.

Основное отличие состоит в выборе компонент двумерного вектора $y_i$. Поскольку теперь

$$l_h\varphi_h = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \dfrac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} \end{bmatrix},$$

то полагаем

$$y_i = \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \dfrac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h} \end{bmatrix}.$$

Для получения канонического вида разностной схемы представим разностное уравнение в виде

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h} = \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h} + \frac{3}{2}h\left(\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h} - \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h}\right) + {}$$
$$+ 4h\left(h\,\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h} + \varphi_{i-1}\right) + hf_i.$$

Отсюда для $i = \overline{1, n-1}$ имеем

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h} =$$

$$= \frac{4h}{1 - \frac{3}{2}h}\,\varphi_{i-1} + \frac{1 - \frac{3}{2}h + 4h^2}{1 - \frac{3}{2}h}\,\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h} + \frac{h}{1 - \frac{3}{2}h}\,f_i.$$

Используя очевидное тождество

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} + h\,\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h}, \qquad i = \overline{1, n},$$

приходим к следующему каноническому виду:

$$y_i = R_h y_{i-1} + h\rho_{i-1}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

где

$$R_h = \begin{bmatrix} 1 & h \\ \dfrac{4h}{1-\dfrac{3}{2}h} & 1+\dfrac{4h^2}{1-\dfrac{3}{2}h} \end{bmatrix}, \quad \rho_{i-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{f_i}{1-\dfrac{3}{2}h} \end{bmatrix}.$$

Из канонического вида следует, что для

$$y_i = R_h^i y_0 + h\left(\rho_{i-1} + \ldots + R_h^{i-1}\rho_0\right)$$

имеем

$$\|y_i\|_\infty \leqslant \|R_h\|_\infty^i \|y_0\|_\infty + h\left(\|\rho_{i-1}\|_\infty + \ldots + \|R_h\|_\infty^{i-1}\|\rho_0\|_\infty\right).$$

Так как при $h < 0{,}01$ имеют место неравенства

$$\|R_h\|_\infty = 1 + 4h\frac{1+h}{1-\dfrac{3}{2}h} \leqslant 1 + 4{,}2h,$$

$$\|\rho_{i-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{1-\dfrac{3}{2}h}\|f^h\|_{F_h} \leqslant 1{,}02\|f^h\|_{F_h}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\|y_0\|_\infty \leqslant \|g^h\|_{G_h},$$

то получаем

$$\|y_i\|_\infty \leqslant (1+4{,}2h)^i\|g^h\|_{G_h} + h\|f^h\|_{F_h}\,1{,}02\frac{(1+4{,}2h)^i - 1}{4{,}2h} \leqslant$$
$$\leqslant \left(e^{4,2}\|g^h\|_{G_h} + \frac{e^{4,2}-1}{4{,}2}1{,}02\|f^h\|_{F_h}\right).$$

Так как

$$|\varphi_i| \leqslant \|y_i\|_\infty, \quad i = \overline{0, n-1},$$

то

$$\|\varphi^h\|_{\Phi_h} \leqslant \frac{e^{4,2}-1}{4{,}2}1{,}02\|f^h\|_{F_h} + e^{4,2}\|g^h\|_{G_h}.$$

Таким образом, при использовании в разностной схеме $g_1^h = -1$ приходим к следующему неравенству:

$$\left\|(u)_h - \varphi^h\right\|_{\Phi_h} \leqslant 20h^2\left(\frac{1}{12}\|u^{\mathrm{IV}}\|_C + \frac{1}{2}\|u'''\|_C\right) + 35h\|u''\|_C,$$

а при $g_1 = -1 + h/2$ приходим к неравенству

$$\|(u)_h - \varphi^h\|_{\Phi_h} \leqslant 20h^2\left(\frac{1}{12}\|u^{\mathrm{IV}}\|_C + \frac{1}{2}\|u'''\|_C\right) + 11\frac{2}{3}h^2\|u'''\|_C.$$

Так как $u(x) = e^x$, то $\|u''\|_C = \|u'''\|_C = \|u^{\mathrm{IV}}\|_C = e$.

Для того чтобы совпадали три значащие цифры у $\varphi_n$ и $u(1) = 2{,}7183$, достаточно, чтобы

$$\|(u)_h - \varphi^h\|_{\Phi_h} \leqslant 0{,}0016.$$

Для разностной схемы первого порядка

$$\|(u)_h - \varphi^h\|_{\Phi_h} \leqslant 11\frac{2}{3}h^2 e + 35he \approx 10h^2 + 91h.$$

Для разностной схемы второго порядка аппроксимации

$$\|(u)_h - \varphi^h\|_{\Phi_h} \leqslant h^2\left(11\frac{2}{3}e + 11\frac{2}{3}e\right) \approx 40h^2.$$

Из двух последних неравенств следует, что для совпадения трёх значащих цифр у $\varphi_n$ и $u(1)$ достаточно взять для схемы первого порядка аппроксимации $h < 0{,}000017$, а для схемы второго порядка аппроксимации $h < 0{,}006$.

В заключение отметим, что более точные оценки можно получить, если использовать точное решение разностной задачи.

4.52. Так как правая часть дифференциального уравнения на отрезке $[0, 1]$ принадлежит пространству $C^1$, но не принадлежит пространству $C^2$, то решение дифференциальной задачи в свою очередь принадлежит пространству $C^2$, но не принадлежит пространству $C^3$.

В этом случае, в отличие от задачи 4.33,

$$\varepsilon_i^h = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} + 2u(x_i) + \frac{5}{2}(1 - ih)^{3/2} - 2(1 - ih)^{5/2} =$$
$$= u'(x_i) + 2u(x_i) + \frac{h}{2}u''(x_{i+\theta_i}) + \frac{5}{2}(1 - ih)^{3/2} -$$
$$-2(1 - ih)^{5/2} = \frac{1}{2}hu''(x_{i+\theta_i}),$$
$$|\theta_i| \leqslant 1, \qquad i = \overline{1, n-1}.$$

В то же время

$$\xi_0^h = u(0) - 1 = 0,$$
$$\delta_1^h = u(h) - (1 - h)^{5/2} = u(0) + hu'(0) + \frac{h^2}{2}u''(\theta_0) - (1 - h)^{5/2} =$$
$$= 1 - \frac{5}{2}h + \frac{h^2}{2}u''(\theta_0) - \left(1 - \frac{5}{2}h + O(h^2)\right) = O(h^2).$$

Таким образом,

$$\|\varepsilon^h\|_{F_h} \leqslant \frac{1}{2} h \|u''\|_C,$$

$$\|\delta^h\|_{G_h} = O(h^2),$$

т. е. разностная схема аппроксимирует дифференциальное уравнение на решении $u(x)$ с первым порядком (ср. с решением задачи 4.33).

Доказательство устойчивости разностной схемы проведено при решении задачи 4.33.

Итак, порядок сходимости решения разностной схемы к решению дифференциальной задачи равен 1.

4.58. Определим норму решения разностной схемы следующим образом:

$$\|x\| = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\|, \text{ где } x_i = [\varphi_i, \psi_i]^T.$$

Добавим к разностной схеме два тождества

$$\varphi_i = \varphi_i, \quad \psi_i = \psi_i$$

и приведем ее к каноническому виду

$$y_{i+1} = R_{h(i)} y_i + h\rho_i, \qquad i = \overline{0, n-1}.$$

Здесь

$$y_i = [\varphi_i, \psi_i, \varphi_{i-1}, \psi_{i-1}]^T,$$

$$\rho_i = \left[\left(\cos x_i + \frac{1}{2}\sin 2x_i\right), -\sin x_i\,(1 + \sin x_i),\ 0, 0\right]^T,$$

$$R_{h(i)} = \begin{bmatrix} 3 & h\sin x_i & -2 & 0 \\ -h\sin x_i & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\max\limits_i \|y_i\|_\infty = \|x\|$, то устойчивость схемы будет следовать из ограниченности произведений $\left\|\prod\limits_{i=1}^{n} R_{h(i)}\right\|$, а неустойчивость — из условия

$$\left\|\prod_{i=1}^{n} R_{h(i)}\right\| \to \infty \quad \text{при } n \to \infty. \tag{1}$$

(Заметим, что операторы $R_{h(i)}$ и $R_{h(k)}$ не коммутируют друг с другом при $i \neq k$.) Покажем, что в нашем случае выполняется соотношение (1). Выбор нормы $\|R_{h(i)}\|$ несуществен, так как в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.

Доказательство следует из цепочки неравенств

$$\left\|\prod_{i=1}^{n} R_{h(i)}\right\| \geqslant \rho\left(\prod_{i=1}^{n} R_{h(i)}\right) \geqslant \left(\left|\det\left(\prod_{i=1}^{n} R_{h(i)}\right)\right|\right)^{1/4} \geqslant$$
$$\geqslant \left(\prod_{i=1}^{n}\left|\det\left(R_{h(i)}\right)\right|\right)^{1/4}.$$

Характеристический полином матрицы $R_{h(i)}$ имеет вид

$$(3-\lambda)^2\lambda^2 - 4\lambda(3-\lambda) + 4 + h^2\lambda^2\sin^2 x_i = 0.$$

Отсюда следует, что $\det(R_{h(i)}) = 4$ и, следовательно,

$$\left\|\prod_{i=1}^{n} R_{h(i)}\right\| \geqslant 4^{n/4} \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

4.61. Решение дифференциальной задачи есть

$$u(x) = e^x.$$

Решение разностной задачи:

$$\varphi_i = C_1 q_1^i + C_2 q_2^i, \text{ где } q_{1,2} = h \pm \sqrt{1+h^2}.$$

Используя начальные условия, получим

$$\varphi_i = -\frac{q_2 - e^{-h}}{q_1 - q_2} q_1^i + \frac{q_1 - e^{-h}}{q_1 - q_2} q_2^i.$$

Используя формулу Тейлора для $e^{-h}$, $q_{1,2}$, получим

$$C_1 = 1 - \frac{h^3}{12} + \frac{h^4}{12} + O(h^5), \quad C_2 = \frac{h^3}{12} - \frac{h^4}{12} + O(h^5).$$

Так как (см. задачу 4.33)

$$q_1^i = e^{-x_i}\left(1 + h^2\frac{x_i}{6} + O(h^4)\right), \quad q_2^i = (-1)^i e^{x_i}(1 + O(h^2)),$$

то

$$\varphi_i^{(1)} = \left(1 - \frac{h^3}{12} + \frac{h^4}{12}\right)\left(1 + h^2\frac{ih}{6}\right)e^{-ih} + \left(\frac{h^3}{12} - \frac{h^4}{12}\right)(-1)^i e^{ih},$$

$$\varphi_{2i}^{(2)} = \left(1 - \frac{h^3}{12\cdot 8} + \frac{h^4}{12\cdot 16}\right)\left(1 + \frac{h^2}{4}\frac{ih}{6}\right)e^{-ih} + \left(\frac{h^3}{12\cdot 8} - \frac{h^4}{12\cdot 16}\right)e^{ih},$$

$$\psi_i = \frac{4}{3}\varphi_{2i}^{(2)} - \frac{1}{3}\varphi_i^{(1)} = \left(1 + \frac{h^3}{72}\right)e^{-ih} + \alpha_i h^3 e^{ih},$$

где $\alpha_i = -1/72$ при $i$ четном, $\alpha_i = -1/24$ при $i$ нечетном, следовательно,

$$\left\|(u)_h - \psi^h\right\|_{\Phi_h} \leqslant Ch^3, \qquad C \leqslant \left|\frac{1}{72} - \frac{1}{24}e\right| \approx 0{,}11.$$

ГЛАВА 5

5.6. I. Описание пространств $F_{h\tau}$, $\Phi_{h\tau}$, $G_{h\tau}$.

а) $$\varphi^{h\tau} \in \Phi_{h\tau} \Leftrightarrow \begin{cases} D\varphi^{h\tau} = \left\{\left(x_i, t^j\right) \middle| i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}\right\}, \\ \left\|\varphi^{h\tau}\right\|_{\Phi_{h\tau}} = \max\limits_{i, j}\left|\varphi_i^j\right|. \end{cases}$$

б) $$f^{\tau h} \in F_{h\tau} \Leftrightarrow \begin{cases} Df^{h\tau} = \left\{\left(x_i, t^{j+1/2}\right) \middle| i = \overline{1, n-1}, j = \overline{0, m-1}\right\}, \\ \left\|f^{h\tau}\right\|_{F_{h\tau}} = \max\limits_{i, j}\left|f_i^{j+1/2}\right|, \end{cases}$$

где $t^{j+1/2} = t^j + \frac{1}{2}\tau$.

в) $$g^{h\tau} \in G_{h\tau} \Leftrightarrow \begin{cases} Dg^{h\tau} = \left\{\left(0, t^j\right), \left(1, t^j\right), \left(x_i, 0\right) \middle| i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}\right\}, \\ \left\|g^{h\tau}\right\|_{G_{h\tau}} = \max\limits_{(x_i, t^j) \in Dg^{h\tau}}\left|g_i^j\right|. \end{cases}$$

II. Определение локальной аппроксимации. Легко видеть, что для всех $(x_i, t^j) \in Dg^{h\tau}$

$$\delta_i^j = \left(l_{h\tau}(u)_{h\tau} - g^{h\tau}\right)_i^j = 0.$$

Обозначим $u\left(t^j, x_i\right) = u_i^j$, $u_t\left(t^j, x_i\right) = u_{t, i}^j$ и т. д., тогда согласно формуле Тейлора

$$u_i^{j+1} = u_i^{j+1/2} + \frac{\tau}{2}u_{t, i}^{j+1/2} + \frac{\tau^2}{4 \cdot 2!}u_{tt, i}^{j+1/2} + \frac{\tau^3}{2^3 \cdot 3!}u_{ttt, i}^{j+\theta},$$

$$u_{i\pm1}^j = u_i^j \pm hu_{x, i}^j + \frac{h^2}{2!}u_{xx, i}^j \pm \frac{h^3}{3!}u_{xxx, i}^j + \frac{h^4}{4!}u_{x^4, i}^j \pm \frac{h^5}{5!}u_{x^5, i+\theta}^j$$

(заметим, что в этих соотношениях $\theta$ зависит от $i$, $j$ и знака приращения аргумента, но для упрощения записи эту зависимость в дальнейшем указывать не будем, подчеркивая только лишь такой записью, что значение соответствующей производной выбирается в одной из внутренних точек соответствующего интервала).

Используя эти соотношения, получаем для $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{0, m-1}$:

$$\varepsilon_i^{j+1/2} = \left(L_{h\tau}(u)_{h\tau} - f^{h\tau}\right)_i^{j+1/2} = \frac{1}{12}\frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i+1}^j}{\tau} + \frac{5}{6}\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} +$$

$$+\frac{1}{12}\frac{u_{i-1}^{j+1}-u_{i-1}^{j}}{\tau}-\frac{1}{2h^2}\Big(\big(u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}\big)+$$
$$+\big(u_{i+1}^{j}-2u_i^{j}+u_{i-1}^{j}\big)\Big)=\frac{1}{12}u_{t,i+1}^{j+1/2}+\frac{5}{6}u_{t,i}^{j+1/2}+\frac{1}{12}u_{t,i-1}^{j+1/2}+$$
$$+\frac{\tau^2}{24}\left(\frac{1}{12}u_{t^3,i+1}^{j+\theta}+\frac{5}{6}u_{t^3,i}^{j+\theta}+\frac{1}{12}u_{t^3,i-1}^{j+\theta}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(u_{xx,i}^{j+1}+\frac{h^2}{12}u_{x^4,i}^{j+1}+u_{xx,i}^{j}+\frac{h^2}{12}u_{x^4,i}^{j}\right)-\frac{h^4}{720}\left(u_{x^6,i+\theta}^{j+1}+u_{x^6,i+\theta}^{j}\right).$$

Теперь заменим по формуле Тейлора значения $u_{t,i\pm1}^{j+1}$, $u_{xx,i}^{j+1}$, $u_{xx,i}^{j}$, $u_{x^4,i}^{j+1}, u_{x^4,i}^{j}$ через значения в точке $(x_i,\ t^{j+1/2})$; тогда

$$\varepsilon_i^{j+1/2}=\left(\underline{u_{t,i}^{j+1/2}}+\underline{\frac{h^2}{12}u_{txx,i}^{j+1/2}}+\frac{h^4}{12\cdot 4!}u_{tx^4,i+\theta}^{j+1/2}\right)+$$
$$+\frac{\tau^2}{24}\left(\frac{1}{12}u_{t^3,i+1}^{j+\theta}+\frac{5}{6}u_{t^3,i}^{j+\theta}+\frac{1}{12}u_{t^3,i-1}^{j+\theta}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(\underline{2u_{xx,i}^{j+1/2}}+\frac{\tau^2}{4}u_{x^2t^2,i}^{j+\theta}+\underline{\frac{h^2}{6}u_{x^4,i}^{j+1/2}}+\frac{h^2\tau^2}{24}u_{x^4t^2,i}^{j+\theta}\right)-$$
$$-\frac{h^4}{720}\left(u_{x^6,i+\theta}^{j+1}+u_{x^6,i+\theta}^{j}\right).$$

Таким образом, объединяя подчеркнутые члены, получаем

$$\varepsilon_i^{j+1/2}=(u_t-u_{xx})_i^{j+1/2}+\frac{h^2}{12}(u_t-u_{xx})_{xx,i}^{j+1/2}+O(\tau^2,\tau^2h^2,h^4)=$$
$$=O(\tau^2,\tau^2h^2,h^4).$$

III. Определение порядка аппроксимации. Так как

$$\|\delta^{h\tau}\|_{G_{h\tau}}=0,$$
$$\|\varepsilon^{h\tau}\|_{F_{h\tau}}\leqslant\tau^2\left(\frac{1}{24}\|u_{t^3}\|_C+\frac{1}{8}\|u_{tx^2}\|_C+\right.$$
$$\left.+\frac{h^2}{48}\|u_{t^2x^4}\|_C\right)+h^4\left(\frac{1}{288}\|u_{tx^4}\|_C+\frac{1}{360}\|u_{x^6}\|_C\right),$$

то на решениях, имеющих ограниченные производные вплоть до указанных в правой части последнего неравенства, имеет место аппроксимация второго порядка по $\tau$ и четвертого по $h$.

5.11. Будем искать разностную схему в виде

$$\sum_{m,\,n=-1}^{1}a_{m,\,n}\varphi_{l+m,\,k+n}=f_{l,\,k}^{h}. \qquad (*)$$

В этом случае неизвестные коэффициенты надо подобрать так, чтобы имело место соотношение

$$\varepsilon_{i,k} = \left(L_h (u)_h - f^h\right)_{i,k} = O(h^4).$$

Оценим вначале $\varepsilon_{i,k}$ для схемы (*), использовав формулу Тейлора для функции двух переменных:

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) = u(x, y) + (u_x \Delta x + u_y \Delta y) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(u_{xx}\Delta x^2 + 2u_{xy}\Delta x\Delta y + u_{yy}\Delta y^2\right) + \ldots + \frac{1}{5!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^5 u +$$

$$+ \frac{1}{6!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^6 u(x+\theta_1\Delta x, y+\theta_2\Delta y),$$

где

$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^p u = \Delta x^p u_{x^p} + p\Delta x^{p-1}\Delta y u_{x^{p-1}y} + \ldots +$$

$$+ p\Delta x \Delta y^{p-1} u_{xy^{p-1}} + \Delta y^p u_{y^p},$$

$$u_{x^p} = \frac{\partial^p u}{\partial x^p}, \quad 0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta_2 \leqslant 1.$$

Приводя подобные члены и используя обозначения

$$a_{\cdot,n} = a_{-1,n} + a_{0,n} + a_{1,n}, \qquad n = -1, 0, 1,$$

$$a_{m,\cdot} = a_{m,-1} + a_{m,0} + a_{m,1}, \qquad m = -1, 0, 1,$$

получаем

$$\varepsilon_{i,k} = -f_{i,k} + u_{i,k}(a_{\cdot,-1} + a_{\cdot,0} + a_{\cdot,1}) + h\left((u_x)_{i,k}(a_{1,\cdot} - a_{-1,\cdot}) +\right.$$

$$\left. + (u_y)_{i,k}(a_{\cdot,1} - a_{\cdot,-1})\right) + \frac{h^2}{2!}\left((u_{xx})_{i,k}(a_{1,\cdot} + a_{-1,\cdot}) +\right.$$

$$\left. + 2(u_{x,y})_{i,k}(a_{1,1} + a_{-1,-1} - a_{1,-1} - a_{-1,1}) + (u_{y,y})_{i,k}(a_{\cdot,1} + a_{\cdot,-1})\right) +$$

$$+ \frac{h^3}{3!}\left((u_{x^3})_{i,k}(a_{1,\cdot} - a_{-1,\cdot}) + 3(u_{x^2y})_{i,k}(a_{1,1} + a_{-1,1} -\right.$$

$$- a_{1,-1} - a_{-1,-1}) + 3(u_{xy^2})_{i,k}(a_{1,1} + a_{1,-1} - a_{-1,1} - a_{-1,-1}) +$$

$$\left. + (a_{\cdot,1} - a_{\cdot,-1})(u_{y^3})_{i,k}\right) + \frac{h^4}{4!}\left((u_{x^4})_{i,k}(a_{1,\cdot} + a_{-1,\cdot}) +\right.$$

$$+ 4(u_{x^3y})_{i,k}(a_{1,1} + a_{-1,-1} - a_{1,-1} - a_{-1,1}) +$$

$$+ 6(u_{x^2y^2})_{i,k}(a_{1,1} + a_{-1,1} + a_{1,-1} + a_{-1,-1}) +$$

$$+ 4(u_{xy^3})_{i,k}(a_{1,1} + a_{-1,-1} - a_{1,-1} - a_{-1,1}) +$$

$$\left. + (u_{y^4})_{i,k}(a_{\cdot,1} + a_{\cdot,-1})\right) + \frac{h^5}{5!}\left((u_{x^5})_{i,k}(a_{1,\cdot} - a_{-1,\cdot}) +\right.$$

$$+5\left(u_{x^4y}\right)_{i,k}\left(a_{1,1}+a_{-1,1}-a_{1,-1}-a_{-1,-1}\right)+$$
$$+10\left(u_{x^3y^2}\right)_{i,k}\left(a_{1,1}+a_{1,-1}-a_{-1,1}-a_{-1,-1}\right)+$$
$$+10\left(u_{x^2y^3}\right)_{i,k}\left(a_{1,1}+a_{-1,1}-a_{1,-1}-a_{-1,-1}\right)+$$
$$+5\left(u_{xy^4}\right)_{i,k}\left(a_{1,1}+a_{1,-1}-a_{-1,1}-a_{-1,-1}\right)+$$
$$+\left(u_{y^5}\right)_{i,k}\left(a_{1,\cdot}-a_{-1,\cdot}\right)\Big)+\frac{h^6}{6!}\sum_{m,n=-1}^{1}a_{m,n}\left(d^{\mathrm{VI}}u\right)_{i+\theta^1_{m,n},k+\theta^2_{m,n}},$$

где $\left|\theta^1_{m,n}\right|<1$, $\left|\theta^2_{m,n}\right|<1$. Для того чтобы имела место оценка $\varepsilon_{i,k}=O(h^4)$, достаточно потребовать, чтобы $f^h_{i,k}$ и неизвестные коэффициенты $a_{m,n}$ удовлетворяли следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n=-1}^{1}a_{m,n}=0,\\
&a_{1,\cdot}-a_{-1,\cdot}=0,\\
&a_{\cdot,1}-a_{\cdot,-1}=0,\\
&a_{1,1}+a_{-1,1}-a_{1,-1}-a_{-1,-1}=0,\\
&a_{1,1}+a_{1,-1}-a_{-1,1}-a_{-1,-1}=0,\\
&a_{1,1}+a_{-1,-1}-a_{-1,1}-a_{1,-1}=0,\\
&f^h_{i,k}=\frac{h^2}{2}\left(\left(u_{xx}\right)_{i,k}\left(a_{1,\cdot}+a_{-1,\cdot}\right)+\left(u_{yy}\right)_{i,k}\left(a_{\cdot,1}+a_{\cdot,-1}\right)\right)+\\
&\qquad+\frac{h^4}{24}\Big(\left(u_{x^4}\right)_{i,k}\left(a_{1,\cdot}+a_{-1,\cdot}\right)+6\left(u_{x^2y^2}\right)_{i,k}\left(a_{1,1}+a_{1,-1}+\right.\\
&\qquad\qquad\left.+a_{-1,1}+a_{-1,-1}\right)+\left(u_{y^4}\right)_{i,k}\left(a_{\cdot,1}+a_{\cdot,-1}\right)\Big).
\end{aligned}\tag{1}$$

Итак, мы получили семь уравнений с десятью неизвестными. Из последнего уравнения видно, что если добавить еще три уравнения:

$$\begin{aligned}
&a_{1,\cdot}+a_{-1,\cdot}=\frac{2}{h^2},\\
&a_{\cdot,1}+a_{\cdot,-1}=\frac{2}{h^2},\\
&a_{1,1}+a_{-1,1}+a_{1,-1}+a_{-1,-1}=\frac{2}{3h^2},
\end{aligned}\tag{2}$$

то

$$f^h_{i,k}=\left(u_{xx}+u_{yy}\right)_{i,k}+\frac{h^2}{12}\left(u_{x^4}+2u_{x^2y^2}+u_{y^4}\right)_{i,k}$$
$$=(\Delta u)_{i,k}+\frac{h^2}{12}(\Delta\Delta u)_{i,k}=f_{i,k}+\frac{h^2}{12}\left(f_{xx}+f_{yy}\right)_{i,k},\tag{3}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Теперь найдем неизвестные коэффициенты $a_{m,n}$. Вначале из подсистемы

$$a_{1,1} + a_{-1,1} - a_{1,-1} - a_{-1,-1} = 0,$$
$$a_{1,1} + a_{1,-1} - a_{-1,1} - a_{-1,-1} = 0,$$
$$a_{1,1} + a_{-1,-1} - a_{1,-1} - a_{-1,1} = 0,$$
$$a_{1,1} + a_{1,-1} + a_{-1,1} + a_{-1,-1} = \frac{2}{3h^2}$$

находим, сложив эти уравнения,

$$a_{1,1} = 1/(6h^2). \tag{4}$$

Сложив второе уравнение и четвертое и подставляя найденное значение $a_{1,1}$, получаем

$$a_{1,-1} = 1/(6h^2). \tag{5}$$

Складывая последовательно четвертое уравнение с первым и третьим уравнениями и используя найденные перед этим значения коэффициентов, получаем

$$a_{-1,1} = a_{-1,-1} = 1/(6h^2). \tag{6}$$

Из второго и третьего уравнений системы (1) и первого и второго уравнений системы (2) следует, что

$$a_{1,\cdot} = a_{-1,\cdot} = a_{\cdot,1} = a_{\cdot,-1} = 1/h^2. \tag{7}$$

Из (7) и (4)—(6) имеем

$$a_{0,1} = a_{1,0} = a_{0,-1} = a_{-1,0} = 2/(3h^2).$$

Наконец, из первого уравнения системы (1) находим

$$a_{0,0} = -10/(3h^2).$$

Поскольку при найденных значениях $a_{m,n}$ и $f_{i,k}^h$ имеет место соотношение

$$\varepsilon_{i,k} = O\left(a_{m,n}h^6\right) = O\left(h^4\right),$$

то построенная схема

$$\frac{2}{3h^2}(\varphi_{i+1,k} + \varphi_{i-1,k} + \varphi_{i,k+1} + \varphi_{i,k-1}) +$$
$$+ \frac{1}{6h^2}(\varphi_{i+1,k+1} + \varphi_{i-1,k+1} + \varphi_{i+1,k-1} + \varphi_{i-1,k-1}) - \frac{10}{3h^2}\varphi_{i,k} =$$
$$= f_{i,k} + \frac{h^2}{12}(f_{xx} + f_{yy})_{i,k}$$

имеет четвертый порядок аппроксимации на заданном шаблоне.

Нетрудно переписать эту схему в более привычном виде:

$$\frac{2}{3}\,\frac{\varphi_{i+1,k}+\varphi_{i-1,k}+\varphi_{i,k+1}+\varphi_{i,k-1}-4\varphi_{i,k}}{h^2}+$$
$$+\frac{1}{3}\,\frac{\varphi_{i+1,k+1}+\varphi_{i-1,k+1}+\varphi_{i+1,k-1}+\varphi_{i-1,k-1}-4\varphi_{i,k}}{(\sqrt{2}\,h)^2}=$$
$$=f_{i,k}+(f_{xx}+f_{yy})_{i,k}\frac{h^2}{12}. \qquad (8)$$

Так как

$$(f_{xx}+f_{yy})_{i,k}=\frac{f_{i+1,k}+f_{i-1,k}+f_{i,k+1}+f_{i,k-1}-4f_{i,k}}{h^2}+O(h^2),$$

то для практических расчетов можно рекомендовать следующую разностную схему:

$$\frac{2}{3}\,\frac{\varphi_{i+1,k}+\varphi_{i-1,k}+\varphi_{i,k+1}+\varphi_{i,k-1}-4\varphi_{i,k}}{h^2}+$$
$$+\frac{1}{3}\,\frac{\varphi_{i+1,k+1}+\varphi_{i-1,k+1}+\varphi_{i+1,k-1}+\varphi_{i-1,k-1}-4\varphi_{i,k}}{(\sqrt{2}\,h)^2}=$$
$$=\frac{2}{3}f_{i,k}+\frac{1}{12}\left(f_{i+1,k}+f_{i-1,k}+f_{i,k+1}+f_{i,k-1}\right), \qquad (9)$$

имеющую, так же как и (8), четвертый порядок аппроксимации. Если к правой части (8) добавить член

$$\frac{2h^4}{6!}\left(f_{x^4}+4f_{x^2y^2}+f_{y^4}\right)_{i,k},$$

то получим разностную схему, имеющую шестой порядок аппроксимации. Рекомендуем читателю убедиться в этом самостоятельно.

5.12. Будем искать разностную схему в виде

$$a^1\varphi_i^{j+1}+a_{-1}\varphi_{i-1}^j+a_0\varphi_i^j+a_1\varphi_{i+1}^j=$$
$$=b_0f_i^j+b_{-1}f_{i-1}^j+b_1f_{i+1}^j+b^1f_i^{j+1},$$
$$i=\overline{0,\,n-1},\quad j=\overline{0,\,m-1},$$

$$\varphi_{-1}^{j+1}=\varphi_{n-1}^{j+1},\quad \varphi_0^{j+1}=\varphi_n^{j+1},\quad \varphi_i^0=g(x_i),$$

где $f_i^j=f\left(t^j,x_i\right)$. Обозначим $h=1/n$, $\tau=T/m$. Неизвестные коэффициенты надо подобрать так, чтобы имело место соотношение

$$\varepsilon_i^j=\left(L_{h\tau}(u)_{h\tau}-f^{h\tau}\right)_i^j=O\left(\tau^2+h^2+\tau h\right).$$

Используя формулу Тейлора, получаем

$$\varepsilon_i^j = u_i^j\left(a^1 + a_{-1} + a_0 + a_1\right) + \tau (u_t)_i^j a^1 + \frac{\tau^2}{2}(u_{tt})_i^j a^1 +$$

$$+ \frac{\tau^3}{3!}(u_{t^3})_i^{j+\theta} a^1 + h(u_x)_i^j (a_1 - a_{-1}) + \frac{h^2}{2}(u_{xx})_i^j (a_1 + a_{-1}) +$$

$$+ \frac{h^3}{3!}\left(a_1 (u_{x^3})_{i+\theta}^j - a_{-1}(u_{x^3})_{i+\theta}^j\right) -$$

$$- f_i^j\left(b^1 + b_1 + b_0 + b_{-1}\right) - \tau (f_t)_i^j b^1 - \frac{\tau^2}{2}(f_{tt})_i^{j+\theta} b^1 -$$

$$- h(f_x)_i^j (b_1 - b_{-1}) - \frac{h^2}{2}\left(b_1 (f_{xx})_{i+\theta}^j + b_{-1}(f_{xx})_{i+\theta}^j\right).$$

Заменим производные по времени соответственно на

$$u_t = f - u_x,$$

$$u_{tt} = f_t - u_{xt} = f_t - f_x + u_{xx};$$

тогда получим

$$\varepsilon_i^j = u_i^j\left(a^1 + a_{-1} + a_0 + a_1\right) + (u_x)_i^j\left(h(a_1 - a_{-1}) - a^1\tau\right) +$$

$$+ (u_{xx})_i^j\left(\frac{h^2}{2}(a_1 + a_{-1}) + a^1\frac{\tau^2}{2}\right) - f_i^j\left(b^1 + b_{-1} + b_0 +\right.$$

$$\left. + b_1 - a^1\tau\right) - (f_t)_i^j\left(\tau b^1 - a^1\frac{\tau^2}{2}\right) - (f_x)_i^j\left(h(b_1 - b_{-1}) +\right.$$

$$\left. + a^1\frac{\tau^2}{2}\right) + O\left(\tau^3 a^1,\ h^3 a_1,\ h^3 a_{-1},\ \tau^2 b^1,\ h^2 b_1,\ h^2 b_{-1}\right).$$

Полагая

$$a^1 + a_{-1} + a_0 + a_1 = 0, \quad h(a_1 - a_{-1}) = a^1\tau,$$

$$\frac{h^2}{2}(a_1 + a_{-1}) + \frac{\tau^2}{2}a^1 = 0, \quad b^1 + b_{-1} + b_0 + b_1 = a^1\tau,$$

$$\tau b^1 = a^1\frac{\tau^2}{2}, \quad h(b_1 - b_{-1}) + a^1\frac{\tau^2}{2} = 0,$$

приходим к системе 6 уравнений с 8 неизвестными. Положим $a^1 = 1/\tau$; тогда из трех первых уравнений получим

$$a_{-1} + a_0 + a_1 = -\frac{1}{\tau},$$

$$a_1 - a_{-1} = \frac{1}{h},$$

$$a_1 + a_{-1} = \frac{\tau}{h^2}.$$

Следовательно, приходим к следующим значениям:

$$a^1=\frac{1}{\tau},\quad a_1=\frac{1}{2h}+\frac{\tau}{2h^2},$$

$$a_{-1}=-\frac{1}{2h}+\frac{\tau}{2h^2},\qquad a_0=-\frac{1}{\tau}-\frac{\tau}{h^2}.$$

Кроме того, последние три уравнения приводят к системе

$$b_1+b_0+b_{-1}+b^1=1,$$

$$b^1=\frac{1}{2},$$

$$b_1-b_{-1}=-\frac{\tau}{2h}.$$

Для определенности возьмем $b_0=1/2$; тогда

$$b_1=-\frac{\tau}{4h},\quad b_{-1}=\frac{\tau}{4h}.$$

В результате приходим к следующей разностной схеме:

$$\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}+\frac{\varphi_{i+1}^j-\varphi_{i-1}^j}{2h}+\frac{\tau}{2}\frac{\varphi_{i+1}^j-2\varphi_i^j+\varphi_{i-1}^j}{h^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(f_i^{j+1}+f_i^j\right)-\frac{\tau}{2}\frac{f_{i+1}^j-f_{i-1}^j}{2h},$$

$$\varphi_i^0=g(x_i).$$

После подстановки найденных значений коэффициентов в $\varepsilon_i^j$ получаем

$$\varepsilon_i^j=\frac{\tau^2}{2!}(f_{tt})_i^{j+\theta}+\frac{1}{2}(h^2+\tau h)(u_{x^3})_{i+\theta}^j-$$

$$-\frac{1}{2}(h^2-\tau h)(u_{x^3})_{i+\theta}^j-\frac{\tau^2}{4}(f_{tt})_i^{j+\theta}+$$

$$+\frac{\tau h}{4}\left((f_{xx})_{i+\theta}^j-(f_{xx})_{i-\theta}^j\right).$$

Следовательно, построенная разностная схема имеет второй порядок аппроксимации.

Читателю рекомендуется поискать и другие значения коэффициентов, приводящие к схеме второго порядка по $\tau$ и $h$.

5.13. Проинтегрируем левую и правую части дифференциального уравнения по прямоугольнику $[t^j,\ t^{j+1};\ x_i,\ x_{i+1}]$, тогда

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{u(t^{j+1},x)-u(t^j,x)}{\tau}\,dx+\frac{a}{\tau}\int\limits_{t^j}^{t^{j+1}}\frac{u(t,x_{i+1})-u(t,x_i)}{h}\,dt=$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int\limits_{t^j}^{t^{j+1}}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(t,x)\,dt\,dx. \qquad (1)$$

Согласно формуле трапеций

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta),$$

где $a<\eta<b$; тогда из (1) следует

$$\frac{\dfrac{u(t^{j+1},x_{i+1})+u(t^{j+1},x_i)}{2}-\dfrac{u(t^j,x_{i+1})+u(t^j,x_i)}{2}}{\tau}+$$

$$+a\frac{\dfrac{u(t^{j+1},x_{i+1})+u(t^j,x_{i+1})}{2}-\dfrac{u(t^{j+1},x_i)+u(t^j,x_i)}{2}}{h}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(f_{i+1}^{j+1}+f_i^{j+1}+f_{i+1}^j+f_i^j\right)+O(h^2,\tau^2,h^2\tau^2).$$

Отсюда следует, что разностная схема

$$\frac{\dfrac{\varphi_{i+1}^{j+1}+\varphi_i^{j+1}}{2}-\dfrac{\varphi_{i+1}^j+\varphi_i^j}{2}}{\tau}+a\frac{\dfrac{\varphi_{i+1}^{j+1}+\varphi_{i+1}^j}{2}-\dfrac{\varphi_i^{j+1}+\varphi_i^j}{2}}{h}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(f_{i+1}^{j+1}+f_i^{j+1}+f_{i+1}^j+f_i^j\right),\qquad i=\overline{0,n-1},\quad j=\overline{0,m-1},$$

$$\varphi_i^0=g^0(x_i),\qquad i=\overline{0,n},$$

$$\varphi_0^j=g_0(t^j),\qquad j=\overline{0,m},$$

имеет второй порядок аппроксимации.

5.19. В методе Галеркина для того, чтобы $u$ было решением задачи $Lu=f$, требуется выполнение интегрального тождества $(Lu-f,v)=0$ для любого $v\in H$.

Для нашего случая перепишем это тождество в виде

$$\int\limits_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}-a\frac{\partial u}{\partial x}v-b\frac{\partial u}{\partial y}v+c^2uv+fv\right)dx\,dy=0.$$

Решение этого тождества будем искать в подпространстве $H_n$ пространства $H$. Базис этого подпространства нам известен, следовательно, $u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \omega_i(x, y)$. При этом тождество должно удовлетворяться при любом $v_n \in H_n$. Это равнозначно выполнению $n$ уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left( \int_D \left( \frac{\partial \omega_j}{\partial x} \frac{\partial \omega_i}{\partial x} + \frac{\partial \omega_j}{\partial y} \frac{\partial \omega_i}{\partial y} - a \frac{\partial \omega_j}{\partial x} \omega_i - \right.\right.$$

$$\left.\left. - b \frac{\partial \omega_j}{\partial y} \omega_i + c^2 \omega_j \omega_i \right) dx\, dy \right) = - \int_D f \omega_i dx\, dy, \qquad i = \overline{1, n}.$$

То есть мы пришли к системе линейных алгебраических уравнений относительно $\alpha_j$:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \alpha_j = \beta_i, \qquad i = \overline{1, n}.$$

5.21. По условию задачи выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Omega^h, \eta_{ij}) + (J[\bar{u}^h, \Omega^h], \eta_{ij}) = 0. \qquad (1)$$

Базисные функции $\eta_{ij}(x)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{i,j} \eta_{ij}(x) = 1 \text{ для любого } x \in D.$$

Следовательно, суммируя равенство (1) по $i$, $j$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Omega^h, 1) + (J[u^h, \Omega^h], 1) = 0. \qquad (2)$$

Второе слагаемое в этом уравнении имеет вид

$$\iint_D \left( \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{\partial \Omega^h}{\partial y} - \frac{\partial u^h}{\partial y} \frac{\partial \Omega^h}{\partial x} \right) dD =$$

$$= \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( u^h \frac{\partial \Omega^h}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( u^h \frac{\partial \Omega^h}{\partial x} \right) - u^h \frac{\partial^2 \Omega^h}{\partial x\, \partial y} + u^h \frac{\partial^2 \Omega^h}{\partial y\, \partial x} \right) dD =$$

$$= \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( u^h \frac{\partial \Omega^h}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( u^h \frac{\partial \Omega^h}{\partial x} \right) \right) dD.$$

Эта цепочка равенств является следствием правила дифференцирования произведения функций. Последний интеграл равен нулю в силу периодичности краевых условий.

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt}(\Omega^h, 1) = 0.$$

5.25. Для устойчивости разностной схемы необходимо, чтобы было ограничено решение разностной схемы

$$\frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^j}{\tau} + a\,\frac{\varphi_{i+1}^j - \varphi_i^j}{h} = 0, \quad \varphi_i^0 = g_i, \tag{1}$$

$$i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad j = \overline{0, m-1}, \quad m = T/\tau.$$

Покажем, что эта разностная схема неустойчива. Пусть $g_i = (-1)^i \varepsilon$. Тогда $\varphi_i^{j+1} = (1+r)\,\varphi_i^j - r\varphi_{i+1}^j$, где $r = a\,\dfrac{\tau}{h} > 0$. При $j = 0, 1, \ldots$ получаем следующие равенства:

$$\varphi_i^1 = (1+r)(-1)^i\varepsilon - r(-1)^{i+1}\varepsilon = (1+2r)(-1)^i\varepsilon = (1+2r)\,\varphi_i^0,$$

$$\varphi_i^2 = (1+r)(1+2r)(-1)^i\varepsilon - r(1+2r)(-1)^{i+1}\varepsilon = (1+2r)^2\,\varphi_i^0,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\varphi_i^j = (1+2r)^j g_i.$$

Отсюда

$$\|\varphi^{h\tau}\|_{\Phi_{h\tau}} = \max\left|\varphi_i^j\right| = (1+2r)^{[T/\tau]}\max_i |g_i| = (1+2r)^{[T/\tau]}\|g^{h\tau}\|_{G_{h\tau}}.$$

При фиксированном $T$ и $h$, $\tau \to 0$ первоначальная ошибка в начальных данных $(-1)^i\varepsilon$ очень быстро растет и не ограничена никакой константой.

Следовательно, разностная схема (1) неустойчива.

5.30. Проверим устойчивость разностной схемы по начальным данным. Будем искать решение однородной разностной схемы, удовлетворяющей краевым условиям $\varphi_0^j = \varphi_n^j = 0$, в виде

$$\varphi_k^j = q^j\sqrt{2}\sin(\pi mkh)\ (\equiv q^j\psi^{(m)}).$$

Тогда для $q$ получим следующее уравнение:

$$\frac{q^2 - 2q + 1}{\tau^2} - \lambda_m q = 0, \qquad \lambda_m = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{m\pi h}{2}.$$

Учитывая, что $\tau/h=1$, имеем

$$q^2-2\left(1-2\sin^2\frac{m\pi h}{2}\right)q+1=0,$$

$$q^2-2\cos(m\pi h)q+1=0,$$

$$q_{1,2}=\cos(m\pi h)\pm i\sin(m\pi h).$$

Таким образом, существуют два линейно независимых решения:

$$\cos(mj\pi h)\psi^{(m)} \text{ и } \sin(mj\pi h)\psi^{(m)},$$

и общее решение есть

$$\varphi_h^j=\sum_{m=1}^{n-1}\left(a_m\cos(mj\pi h)+b_m\sin(mj\pi h)\right)\psi_h^{(m)}.$$

При $j=0$ и при $j=1$ получаем соответственно

$$g_h^{(0)}=\sum_{m=1}^{n-1}a_m\psi_h^{(m)},$$

$$g_h^{(1)}=\sum_{m=1}^{n-1}\frac{a_m\cos(m\pi h)+b_m\sin(m\pi h)-a_m}{\tau}\psi_h^{(m)}.$$

Если $\alpha_m$ и $\beta_m$ — коэффициенты разложения $g_h^{(0)}$ и $g_h^{(1)}$ по векторам $\psi^{(m)}$, то нетрудно получить, что

$$a_m=\alpha_m,$$

$$b_m=\alpha_m\frac{1-\cos(\pi mh)}{\sin(\pi mh)}+\beta_m\frac{\tau}{\sin(\pi mh)}.$$

Подставив $a_m$, $b_m$ в (1), после очевидных преобразований получим

$$\varphi_h^j=\sum_{m=1}^{n-1}\left(\frac{\cos((j-0,5)m\pi h)}{\cos\frac{m\pi h}{2}}\alpha_m+\frac{\tau\sin(jm\pi h)}{\sin(m\pi h)}\beta_m\right)\psi_h^{(m)},$$

Так как при $h\to 0$

$$\cos\frac{(n-1)\pi h}{2}=\sin\frac{\pi h}{2}\to 0,$$

то наша разностная схема неустойчива.

5.31. Для нахождения значений $\varphi_i^{j+1}$ на каждом шаге по времени приходится решать систему алгебраических уравнений

$$\varphi_0^{j+1}=\varphi_0^j=1,$$

$$-\frac{\tau}{h^2}\varphi_{i-1}^{j+1}+\left(1+\frac{2\tau}{h^2}\right)\varphi_i^{j+1}-\frac{\tau}{h^2}\varphi_{i+1}^{j+1}=\varphi_i^j,\qquad i=\overline{1,\,n-1},$$

$$\varphi_n^{j+1}=\varphi_n^j=1.$$

Матрица $A$ этой системы обладает следующим свойством:

$$\begin{aligned} &a_{k,k}>0, && k=\overline{1,\,n+1},\\ &a_{k,l}\leqslant 0, && k\neq l,\\ &a_{k,k}>-\sum_{l\neq k}a_{k,l}, && k=\overline{1,\,n+1}. \end{aligned}$$

Из первой теоремы Гершгорина следует, что $\lambda(A)\neq 0$. Поэтому существует $A^{-1}$ и $\varphi^{j+1}=A^{-1}\varphi^j$, где $\varphi^j=\left[\varphi_0^j,\ldots,\varphi_n^j\right]^T$. Элементы матрицы $A^{-1}$ неотрицательны (см. решение задачи 1.57); поэтому разностная схема монотонна.

5.42. Рассмотрим следующую разностную схему типа Кранка — Николсона, имеющую, как нетрудно убедиться, второй порядок аппроксимации по $\tau$ и $h$:

$$\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}+k_i^{j+1/2}\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_{i+1}^{j+1}-\varphi_{i-1}^{j+1}}{2h}+\frac{\varphi_{i+1}^{j}-\varphi_{i-1}^{j}}{2h}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{k_{i+1}^{j+1/2}\varphi_{i+1}^{j+1}-k_{i-1}^{j+1/2}\varphi_{i-1}^{j+1}}{2h}+\frac{k_{i+1}^{j+1/2}\varphi_{i+1}^{j}-k_{i-1}^{j+1/2}\varphi_{i-1}^{j}}{2h}\right)=$$
$$=f_i^{j+1/2},\quad i=\overline{0,\,n},\quad j=\overline{0,\,m-1},$$

$$\varphi_{-1}^{j+1}=\varphi_n^{j+1},\qquad \varphi_{n+1}^{j+1}=\varphi_0^{j+1},\qquad \varphi_i^0=g(x_i),$$

где $\quad k_i^{j+1/2}=k\left(t^{j+1/2},\,x_i\right),\quad f_i^{j+1/2}=f\left(t^{j+1/2},\,x_i\right).$

Обозначим

$$\varphi^j=\left[\varphi_0^j,\ldots,\varphi_n^j\right]^T,\qquad c_{i+1/2}^{j+1/2}=\frac{1}{4h}\left(k_i^{j+1/2}+k_{i+1}^{j+1/2}\right).$$

Для нахождения $\varphi^{j+1}$ по известному $\varphi^j$ требуется решить систему уравнений

$$\varphi_0^{j+1}+\tau c_{1/2}^{j+1/2}\varphi_1^{j+1}-\tau c_{n+1/2}^{j+1/2}\varphi_n^{j+1}=$$
$$=\varphi_0^j-\tau c_{1/2}^{j+1/2}\varphi_1^j+\tau c_{n+1/2}^{j+1/2}\varphi_n^j+\tau f_0^{j+1/2},$$

$$\varphi_i^{j+1}+\tau c_{i+1/2}^{j+1/2}\varphi_{i+1}^{j+1}-\tau c_{i-1/2}^{j+1/2}\varphi_{i-1}^{j+1}=$$
$$=\varphi_i^j-\tau c_{i+1/2}^{j+1/2}\varphi_{i+1}^j+\tau c_{i-1/2}^{j+1/2}\varphi_{i-1}^j+\tau f_i^{j+1/2},$$
$$i=\overline{1,\,n-1},$$

$$\varphi_n^{j+1} + \tau c_{n+1/2}^{j+1/2}\varphi_0^{j+1} - \tau c_{n-1/2}^{j+1/2}\varphi_{n-1}^{j+1} =$$
$$= \varphi_n^j - \tau c_{n+1/2}^{j+1/2}\varphi_0^j + \tau c_{n-1/2}^{j+1/2}\varphi_{n-1}^j + \tau f_n^{j+1/2}.$$

В матричном виде эту систему можно записать так:

$$(E+\tau A)\,\varphi^{j+1} = (E-\tau A)\,\varphi^j + \tau f^{j+1/2}, \tag{1}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c_{1/2}^{j+1/2} & 0 & \dots & 0 & -c_{n+1/2}^{j+1/2} \\ -c_{1/2}^{j+1/2} & 0 & c_{3/2}^{j+1/2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -c_{3/2}^{j+1/2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1/2}^{j+1/2} \\ c_{n+1/2}^{j+1/2} & 0 & 0 & \dots & -c_{n-1/2}^{j+1/2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\varphi^j = \begin{bmatrix} \varphi_0^j \\ \varphi_1^j \\ \varphi_2^j \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}^j \\ \varphi_n^j \end{bmatrix}, \quad f^{j+1/2} = \begin{bmatrix} f_0^{j+1/2} \\ f_1^{j+1/2} \\ f_2^{j+1/2} \\ \vdots \\ f_{n-1}^{j+1/2} \\ f_n^{j+1/2} \end{bmatrix}.$$

Введем пространство $\Phi_{h\tau}$:

$$\varphi^{h\tau} \in \Phi_{h\tau} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} D\varphi^{h\tau} = \left\{\left(t^j, x_i\right) \middle| j = \overline{0, m},\ i = \overline{0, n}\right\}, \\ \|\varphi^{h\tau}\|_{\Phi_{h\tau}} = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant m}\left(\sum\limits_{i=0}^n h\left(\varphi_i^j\right)^2\right)^{1/2} = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant m}\|\varphi^j\|_{\Phi_h}. \end{cases}$$

Здесь $\Phi_h$ — пространство сеточных функций с областью определения $\{x_i \mid i = \overline{0, n}\}$ и нормой, введенной выше при определении нормы в пространстве $\Phi_{h\tau}$. Аналогично введем пространство $F_{h\tau}$ и $G_{h\tau}$.

Из (1) следует, что

$$\|\varphi^{j+1}\|_2 \leqslant \|(E+\tau A)^{-1}(E-\tau A)\|_2\|\varphi^j\|_2 + \tau\|(E+\tau A)^{-1}\|_2\|f^{j+1/2}\|_2.$$

Так как $A$ — кососимметричная матрица, то $(A\varphi, \varphi) = 0$. Следовательно,

$$\|(E+\tau A)^{-1}\|_2 \leqslant 1, \quad \|(E+\tau A)^{-1}(E-\tau A)\|_2 = 1$$

(доказательство этих неравенств см. в МВМ, стр. 21, 22, 250).

Таким образом,

$$\|\varphi^{j+1}\|_2 \leqslant \|\varphi^j\|_2 + \tau\|f^{j+1/2}\|_2.$$

Умножив левую и правую части этого неравенства на $\sqrt{h}$, приходим к неравенству

$$\|\varphi^{j+1}\|_{\Phi_h} \leqslant \|\varphi^j\|_{\Phi_h} + \tau\|f^{j+1/2}\|_{F_h},$$

или, усиливая неравенство,

$$\|\varphi^{j+1}\|_{\Phi_h} \leqslant \|\varphi^j\|_{\Phi_h} + \tau\|f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}}.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\|\varphi^{j+1}\|_{\Phi_h} \leqslant \|\varphi_0\|_{\Phi_h} + \tau j\|f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}} \leqslant \|g^{h\tau}\|_{G_{h\tau}} + T\|f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}}.$$

Поскольку это неравенство имеет место для любого $j \leqslant T/\tau$ и любых $f^{h\tau}$ и $g^{h\tau}$, то

$$\|\varphi^{h\tau}\|_{\Phi_{h\tau}} \leqslant \|g^{h\tau}\|_{G_{h\tau}} + T\|f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}}$$

и, следовательно, разностная схема устойчива.

5.48. Пусть при $x = 0, 1$ $y = 0, 1$ заданы граничные условия

$$u(t, 0, y) = \eta_0(t, y), \quad u(t, 1, y) = \eta_1(t, y),$$

$$u(t, x, 0) = \psi_0(t, x), \quad u(t, x, 1) = \psi_1(t, x).$$

На $(j+1)$-м временном шаге имеем очевидные граничные условия

$$\varphi_{0,l}^{j+1} = \eta_0\left(t^{j+1}, y_l\right) = \eta_{0,l}^{j+1}, \quad \varphi_{n,l}^{j+1} = \eta_1\left(t^{j+1}, y_l\right) = \eta_{n,l}^{j+1},$$

$$\varphi_{k,0}^{j+1} = \psi_0\left(t^{j+1}, x_k\right), \quad \varphi_{k,n}^{j+1} = \psi_1\left(t^{j+1}, x_k\right).$$

Для того чтобы получить граничные условия на полушагах, выразим $\varphi^{j+1/2}$ из второго уравнения разностной схемы

$$\varphi^{j+1/2} = \varphi^{j+1} - \tau\Lambda_2\left(\varphi^{j+1} - \varphi^j\right). \tag{1}$$

Формула (1) должна выполняться при $x = 0$ и $x = 1$, иначе значение $(\Lambda_2\varphi^{j+1/2})_{k,l}$ не будет определено при $k = 1$ и $k = n - 1$.

Если граничные условия удовлетворяют (1), т. е.

$$\eta_0^{j+1/2} = \eta_0^{j+1} - \tau\Lambda_2\left(\eta_0^{j+1} - \eta_0^j\right),$$

$$\eta_n^{j+1/2} = \eta_n^{j+1} - \tau\Lambda_2\left(\eta_n^{j+1} - \eta_n^j\right),$$

то общий второй порядок аппроксимации по пространственным переменным не изменится.

5.62. Доказательство следует из непосредственного перебора значений $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$. В самом деле, $x_1^{(1)} = y_1^{(1)}$, так как в расчетные формулы входят одни и те же значения на границе и $x_2^0 = y_3^0$, $x_6^0 = y_2^0$. В свою очередь $x_2^{(1)} = y_3^{(1)}$, так как используется одно и тоже значение на границе и $x_3^0 = y_6^0$, $x_7^0 = y_5^0$, $x_1^{(1)} = y_1^{(1)}$.

Перебирая таким образом элементы векторов $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$, приходим к равенству $x^{(1)} = y^{(1)}$.

С помощью аналогичных рассуждений следует, что $x^{(2)} = y^{(2)}$ и т. д.

# ОТВЕТЫ. УКАЗАНИЯ

## ГЛАВА 1

1.7. Найти пример матрицы, противоречащий условию 4) определения нормы матрицы.

1.9. Проверить условие 4) определения нормы матрицы для $A = E$, $B = E$.

1.17. 1) $\|A\|_* = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| \dfrac{d_i}{d_j}$;

2) $\|A\|_* = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| \dfrac{d_i}{d_j}$;

3) $\|A\|_* = \sqrt{\rho(B)}, \qquad b_{ij} = \dfrac{1}{\sqrt{d_i d_j}} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki} d_k a_{kj}$.

1.18. Проверить условие $\|E\| = 1$.

1.23. $\|A\| = \|SAS^{-1}\|_\infty$, где $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/h & 1/h \end{bmatrix}$.

1.24. $\|A\| = \|RAR^{-1}\|_\infty, \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

1.27. Воспользоваться равенством

$$A^k x = \lambda^k(A) x.$$

1.33. Воспользоваться второй теоремой Гершгорина.

1.34. $1{,}6 \leqslant \lambda_1 \leqslant 2{,}4$, $3{,}5 \leqslant \lambda_2 \leqslant 4{,}6$, $4{,}8 \leqslant \lambda_3 \leqslant 5{,}2$.

1.35. $1{,}8 \leqslant \lambda_1 \leqslant 2{,}2$, $2{,}5 \leqslant \lambda_2 \leqslant 3{,}5$, $3{,}8 \leqslant \lambda_3 \leqslant 4{,}2$.

1.36. Показать, что матрица симметризуема преобразованием подобия.

1.37. Воспользоваться теоремой Таусски.

1.39. $A = (\alpha E + K)$, $\alpha > 0$, $K^T = -K$.

1.51. Нет.

1.54. Воспользоваться первой теоремой Гершгорина.

1.55. Воспользоваться теоремой Таусски.

2.6. $\frac{1}{1+\alpha}\frac{\min\limits_i |a_{ii}|}{\max\limits_i |a_{ii}|} \leqslant \operatorname{cond}_\infty(A) \leqslant \frac{\max\limits_i |a_{ii}|}{\min\limits_i |a_{ii}|}\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$.

2.7. $\operatorname{cond}_\infty(R) = n2^{n-1}$.

2.8. $\frac{1}{n}\frac{\alpha_1}{\alpha_n} \leqslant \operatorname{cond}_\infty(A) \leqslant n\frac{\alpha_1}{\alpha_n}$.

2.12. $\|B - A^{-1}\| \leqslant 2{,}05$.

2.13. а) Множество $S$ — эллипсоид с полуосями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; б) $\|A\|_2 = 84{,}74$; $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{0{,}0588}$; $\operatorname{cond}_2(A) = \frac{84{,}74}{0{,}0588}$.

2.14. а) $\|\varphi - A^{-1}f\|_2 \leqslant \frac{0{,}01}{0{,}0588}$;

б) $\frac{\|\varphi - A^{-1}f\|_2}{\|A^{-1}f\|_2} \leqslant \frac{0{,}8474}{0{,}0588}$.

2.18. $\varphi = [x^T, \beta]^T$, $\beta = \frac{b - vy}{a_n - vz}$, $x = y - \beta z$.

2.25. $\operatorname{cond}_2(A) = \operatorname{cond}_2^2(S)$.

2.28. а) $C_1\left(\frac{1}{3}\right)^i + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^i$;

б) $C_1 2^i + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^i$;

в) $C_1 2^i + C_2 i 2^i$;

г) $C_1\left(\frac{1}{3}\right)^i + C_2 i\left(\frac{1}{3}\right)^i$;

д) $C_1 5^i + C_2(-1)^i$;

е) $C_1\cos(i\varphi) + C_2\sin(i\varphi)$, $\cos\varphi = 0{,}6$.

2.29. $\varphi_i = \left(\frac{1}{3}\right)^i$.

2.30. $\varphi_{1\,000\,000} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1\,000\,000} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1\,000\,000}\right)$.

2.31. $\varphi_i = a + \frac{b-a}{h}i$.

2.32. $$\varphi_i = 1 - \frac{\pi}{2} + ih - \frac{h^2}{\sin\frac{h}{2}}\left(\sin\frac{ih}{2}\sin\frac{(i+1)h}{2} + \ldots + \sin\left(\frac{n-1}{2}h\right)\sin\frac{nh}{2}\right).$$

2.35. $\lambda_k = \frac{1}{h} i \cos \frac{k\pi}{n}, \quad \psi_m^{(k)} = C\, i \cos \frac{km\pi}{n}.$

2.36. $\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi}{2n}, \quad \psi_m^{(k)} = C \sin \frac{mk\pi}{n}.$

2.37. $\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{2k-1}{2n-1} \frac{\pi}{2}\right), \quad \psi_k^{(m)} = C \sin \left(\frac{m(2k-1)}{2n-1} \pi\right).$

2.38. $\lambda_k = \frac{4}{h^3} \sin^2 \left(\frac{k-1}{n-1} \frac{\pi}{2}\right), \quad \psi_k^{(m)} = C \cos \left(\frac{k-1}{n-1} \frac{2m-1}{2} \pi\right).$

2.39. $\lambda_{p,q} = \frac{4}{h^2} \left(\sin^2 \frac{p\pi}{2n} + \sin^2 \frac{q\pi}{2n}\right),$

$\psi_{i,k}^{(p,q)} = C \sin \frac{ip\pi}{n} \sin \frac{kq\pi}{n}.$

2.40. $\lambda_{p,q} = \frac{4}{h^2} \left(\sin^2 \frac{p\pi}{2n} + \sin^2 \left(\frac{2q-1}{2n-1} \frac{\pi}{2}\right)\right),$

$\psi_{i,k}^{(p,q)} = C \sin \frac{ip\pi}{n} \sin \left(\frac{k(2q-1)}{2n-1} \pi\right).$

2.41. $\lambda_{p,q} = \frac{4}{h^2} \left(\sin^2 \frac{p\pi}{2n} + \sin \left(\frac{q-1}{n-1} \frac{\pi}{2}\right)\right),$

$\psi_{i,k}^{(p,q)} = C \sin \frac{ip\pi}{n} \cos \left(\frac{q-1}{n-1} \frac{2k-1}{2} \pi\right).$

2.42. $\lambda_{p,q} = \frac{4}{h^2} \left(\sin^2 \left(\frac{2p-1}{2n-1} \frac{\pi}{2}\right) + \sin^2 \left(\frac{2q-1}{2n-1} \frac{\pi}{2}\right)\right),$

$\psi_{i,k}^{(p,q)} = C \sin \left(\frac{2p-1}{2n-1} i\pi\right) \sin \left(\frac{2q-1}{2n-1} k\pi\right).$

## ГЛАВА 3

3.1. $J_0 = -\frac{1}{\ln \alpha} - \frac{\alpha}{4}.$

3.3. $\psi^{j+1} = B\psi^j, \quad B = \begin{bmatrix} 0{,}99 & 100 \\ 0 & 0{,}99 \end{bmatrix}, \quad \psi^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

3.4. $\psi^{j+1} = B\psi^j, \quad B = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \psi^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

3.7. Воспользоваться теоремой Гамильтона — Кэли.

3.8. $\tau_j = \frac{1}{\lambda_j}, \quad j = \overline{1, n}.$

3.11. $\tau \leqslant 2\delta / \|A\|^2.$

3.12. Использовать результат 1.42.

3.17. $$\varphi_{k,l}^{j+1} = \frac{1}{4}\left(\varphi_{k,l+1}^{j} + \varphi_{k,l-1}^{j} + \varphi_{k+1,l}^{j} + \varphi_{k-1,l}^{j}\right) + \frac{h^2}{4} f_{k,l}, \quad k,\ l = \overline{1,\ n-1},$$

$$R_{\text{ac}} = -\ln(\cos \pi h).$$

3.18. Совпадает с 3.17.

3.19. $$\varphi_{k,l}^{j+1} = \frac{1}{4}\left(\varphi_{k,l+1}^{j} + \varphi_{k,l-1}^{j+1} + \varphi_{k+1,l}^{j} + \varphi_{k-1,l}^{j+1}\right) + \frac{h^2}{4} f_{k,l}, \quad k,\ l = \overline{1,\ n-1},$$

$$R_{\text{ac}} = -2\ln(\cos \pi h).$$

3.20. $$\varphi_{k,l}^{j+1} = (1-\tau)\,\varphi_{k,l}^{j} + \frac{\tau}{4}\left(\varphi_{k,l+1}^{j} + \varphi_{k,l-1}^{j+1} + \varphi_{k+1,l}^{j} + \varphi_{k-1,l}^{j+1}\right) + \frac{\tau h^2}{4} f_{k,l}, \quad k,\ l = \overline{1,\ n-1},$$

$$\tau = \frac{2}{1+\sin \pi h}, \quad R_{\text{ac}} = -\ln\left(\frac{1-\sin \pi h}{1+\sin \pi h}\right).$$

3.21. $$\varphi_{k,l}^{j+1} = \varphi_{k,l}^{j} - \tau_j\left(4\varphi_{k,l}^{j} - \varphi_{k+1,l}^{j} - \varphi_{k-1,l}^{j} - \varphi_{k,l+1}^{j} - \varphi_{k,l-1}^{j} - h^2 f_{k,l}\right), \quad k,\ l = \overline{1,\ n-1},$$

$$\tau_j = \frac{1}{2\left(1 - \cos \pi h \cos\left(\frac{2j-1}{16}\pi\right)\right)},$$

$$R_{\text{ac}} = -\frac{1}{8}\ln\frac{2\cos^8 \pi h}{(1+\sin \pi h)^8 - (1-\sin \pi h)^8}.$$

3.22. $$\varphi_{k,l}^{j+1} = (1-\tau)\,\varphi_{k,l}^{j} + \tau\left(a_{k,l}\varphi_{k-1,l}^{j+1} + b_{k,l}\varphi_{k+1,l}^{j} + c_{k,l}\varphi_{k,l-1}^{j+1} + d_{k,l}\varphi_{k,l+1}^{j} + f_{k,l}\right), \quad k,\ l = \overline{1,\ n-1}.$$

3.26. $\tau \geqslant 2$, $\tau \leqslant 0$.

3.28. Сходится.

3.29. Сходится. Воспользоваться теоремой Таусски.

3.31. $0 \leqslant \tau \leqslant 1/\alpha$.

3.32. Совпадает с $R_{\text{ac}}$ из задачи 3.17.

3.33. Совпадает с $R_{\text{ac}}$ из задачи 3.19.

3.35. $$\tau_{\text{опт}} = \frac{1}{\sqrt{\delta\Delta}}, \quad R_{\text{ac}} = -\ln\frac{\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}+\sqrt{\delta}}.$$

3.37. $\tau_{\text{опт}} = \dfrac{1}{\sqrt{\delta\Delta}}, \quad R_{\text{ас}} = -2\ln\dfrac{\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}+\sqrt{\delta}}.$

3.39. Использовать результат 3.37.

3.43. Использовать результат 3.37.

3.48. в) $\prod\limits_{k=1}^{4}\|E-\tau_k A\|_2 \cong 35{,}04;$

г) $\left\|\prod\limits_{k=1}^{4}(E-\tau_k A)\right\|_2 \cong 0{,}619.$

3.56. $N = \text{entier}\left(1+\dfrac{13{,}81}{\pi^2 h^2}\right).$

3.57. $N = \text{entier}\left(1+\dfrac{6{,}91}{\pi^2 h^2}\right).$

3.58. $N = \text{entier}\left(1+\dfrac{3{,}45}{\pi h}\right).$

## ГЛАВА 4

4.1. $u(x) = 1,\ \varphi_k^h = \begin{cases} 1, & k \neq 0, \\ 1+h^{-1/4}, & k = 0. \end{cases}$

4.2. Сходится с первым порядком при $u \in C^1$, со вторым порядком при $u \in C^k$, $k \geqslant 2$.

4.3. Нет; да.

4.4. $\alpha = \gamma = 1/12, \quad \beta = 5/6.$

4.5. $O(h^2)$.

4.6. $O(h^2)$.

4.7. $O(h)$.

4.8. $O(h)$.

4.9. $O(h^2)$.

4.10. $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 1/2, \qquad i = 1, 2.$

4.11. Нет; $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = h$.

4.17. $c \leqslant \pi^2 - \delta; \quad \delta > 0.$

4.24. $g_i(x) = y_{i-1} + \dfrac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}), \qquad i = \overline{1, n}.$

4.25. $m_0 = a_n,$

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} m_{i-1} + 2m_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} m_{i+1} =$$

$$= \frac{6}{x_{i+1} - x_{i-1}}\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right), \qquad i = \overline{1, n-1},$$

$$m_n = b_n.$$

4.26. $2m_0+m_1=\dfrac{6}{x_1-x_0}\left(\dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0}-a_n\right)$,

$$\frac{x_i-x_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-1}}m_{i-1}+2m_i+\frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}-x_{i-1}}m_{i+1}=$$

$$=\frac{6}{x_{i+1}-x_{i-1}}\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i}-\frac{f_i-f_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right),\qquad i=\overline{1,\,n-1},$$

$$m_{n-1}+2m_n=\frac{6}{x_n-x_{n-1}}\left(b_n-\frac{f_n-f_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}\right).$$

4.31. Устойчива при $\theta\geqslant 1/2$.

4.33. $\|(u)_h-\varphi^h\|_{\Phi_h}\leqslant Ch^2$.

4.34. $\|(u)_h-\varphi^h\|_{\Phi_h}\leqslant Ch$.

4.35. Разностная схема неустойчива, сходимости нет.

4.36. $\|(u)_h-\varphi^h\|_{\Phi_h}\leqslant Ch$.

4.37. $\|(u)_h-\varphi^h\|_{\Phi_h}\leqslant Ch$.

4.38. $\|(u)_h-\varphi^h\|_{\Phi_h}\leqslant Ch^2$.

4.39. $\|(u)_h-\varphi^h\|_{\Phi_h}\leqslant Ch^2$.

4.40. Разностная схема неустойчива, сходимости нет.

4.41. $\|(u)_h-\varphi^h\|_{\Phi_h}=0$.

4.42. $\|(u)_h-\varphi^h\|_{\Phi_h}=\mathrm{const}\neq 0$.

4.43. $\|(u)_h-\varphi^h\|_{\Phi_h}=\mathrm{const}\neq 0$.

4.44. $\|(u)_h-\varphi^h\|_{\Phi_h}\leqslant Ch$.

4.45. $\|(u)_h-\varphi^h\|_{\Phi_h}\leqslant Ch$.

4.46. $\|(u)_h-\varphi^h\|_{\Phi_h}\leqslant Ch^2$.

4.47. $\|(u)_h-\varphi^h\|_{\Phi_h}\leqslant Ch$.

4.48. $\|(u)_h-\varphi^h\|_{\Phi_h}\leqslant Ch^2$.

4.49. $\|(u)_h-\varphi^h\|_{\Phi_h}\leqslant Ch$.

4.50. а) $O(h)$, б) $(\varphi_1-\varphi_0)/h=-1+h/2$.
в) $h<0{,}000017$; $h<0{,}006$.

4.51. $\left\|(u)_h - \varphi^h\right\|_{\Phi_h} \leqslant Ch^2$.

4.52. $\left\|(u)_h - \varphi^h\right\|_{\Phi_h} \leqslant Ch$.

4.53. $\left\|(u)_h - \varphi^h\right\|_{\Phi_h} \leqslant Ch$.

4.54. $\left\|(u)_h - \varphi^h\right\|_{\Phi_h} \leqslant Ch$.

4.55. $\left\|(u)_h - \varphi^h\right\|_{\Phi_h} \leqslant Ch$.

4.56. $\left\|(u)_h - \varphi^h\right\|_{\Phi_h} \leqslant Ch^2$.

4.57. $\left\|(u)_h - \varphi^h\right\|_{\Phi_h} \leqslant Ch^2$.

4.58. Разностная схема неустойчива, сходимости нет.

4.61. $\left\|(u)_h - \varphi^h\right\|_{\Phi_h} \leqslant Ch^3$.

## ГЛАВА 5

5.1. $\left|\left(L_{h\tau}(u)_{h\tau} - (Lu)_{h\tau}\right)_{tj,x_i}\right| = O\left(\tau,\ h^2,\ \frac{h^2}{2\tau}\right)$.

5.2. $\left(L_h(u)_h\right)_{i,h} = (\Delta u)_{x_i y_h} + O\left(h^2\right)$.

5.3. $\left(L_h(u)_h\right)_{i,h} = (\Delta u)_{x_i y_h} + O\left(h^2\right)$.

5.5. $\theta = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$.

5.6. $\left\|L_{h\tau}(u)_{h\tau} - f^{h\tau}\right\|_{\Phi_{h\tau}} \leqslant C_1\tau^2 + C_2h^4$.

5.10. Использовать схему Кранка — Николсона.

5.16. Использовать схему Кранка — Николсона.

5.24. Устойчива при любых $\tau$ и $h$.

5.25. Неустойчива при любых $\tau$ и $h$.

5.26. Неустойчива при произвольных $\tau$ и $h$, при $\tau = rh^2$ ($r = \mathrm{const}$) устойчива.

5.27. Устойчива при $\tau/h \leqslant 1$.

5.28. Неустойчива при любых $\tau$ и $h$.

5.29. Для $0 \leqslant \theta \leqslant 1/2$ устойчива при любых $\tau$ и $h$, для $1/2 < \theta \leqslant 1$ устойчива при $\tau/h \leqslant 1/(4\theta - 2)$.

5.33. При $\tau/h \leqslant 1$

$$\left\|(u)_{h\tau} - \varphi^{h\tau}\right\|_{\Phi_{h\tau}} \leqslant C_1\tau^2 + C_2h^2.$$

5.34. $\|(u)_{h\tau} - \varphi^{h\tau}\|_{\Phi_{h\tau}} \leqslant C_1\tau^2 + C_2h^4$.

5.35. $\|(u)_{h\tau} - \varphi^{h\tau}\|_{\Phi_{h\tau}} \leqslant C_1\tau^2 + C_2h^4$.

5.36. При $\tau/h^2 \leqslant 1/6$

$$\|(u)_{h\tau} - \varphi^{h\tau}\|_{\Phi_{h\tau}} \leqslant C_1\tau + C_2h^2.$$

5.37. $\|(u)_{h\tau} - \varphi^{h\tau}\|_{\Phi_{h\tau}} \leqslant C_1\tau + C_2h^2$.

5.38. $\|(u)_{h\tau} - \varphi^{h\tau}\|_{\Phi_{h\tau}} \leqslant C_1\tau + C_2h^2$.

5.39. $\|(u)_{h\tau} - \varphi^{h\tau}\|_{\Phi_{h\tau}} \leqslant C_1\tau + C_2h^2$.

5.40. $\|(u)_{h\tau} - \varphi^{h\tau}\|_{\Phi_{h\tau}} \leqslant C_1\tau^2 + C_2h^2$.

5.41. Использовать результат задачи 5.13

5.42. Использовать результат задачи 5.35.

5.43. Использовать результат задачи 5.37.

5.46. Использовать схему Кранка — Николсона.

5.47. Использовать схему Кранка — Николсона.

5.63. $\tau_{\text{опт}} = 4/3, \qquad R_{\text{ac}} = -\ln\frac{1}{3} \approx 1{,}1$.

5.64. $\max\limits_i |\theta_i| \dfrac{\tau}{h} \leqslant 6$.

# ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$A, B, C, \dots$ — матрицы

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$

$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$

$\|x\|_C = (Cx, x)^{1/2}$, $C = C^*$, $C > 0$

$\lambda(A)$ — собственное число матрицы $A$

$\rho(A)$ — спектральный радиус матрицы $A$

$A^T$ — транспонированная матрица $A$

$A^*$ — матрица, сопряженная с $A$

$E$ — единичная матрица

$A \geqslant 0$ — положительно полуопределенная матрица

$A > 0$ — положительно определенная матрица

$a_{ij}$ — элемент матрицы $A$

$N(A) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$

$M(A) = n \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|$

$\|A\|_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$

$\|A\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

$(.,.)$ — скалярное произведение

$\operatorname{cond}_M(A) = \|A^{-1}\|_M \|A\|_M$

$T$ — оператор шага

$Df$ — область определения функции $f$

$\Gamma$, $\partial D$ — граница области $D$

$\mathrm{i}$ — мнимая единица

$\varphi, \psi, \varepsilon, \delta, \dots$ — сеточные функции

$u$, $v$ — решение дифференциальной задачи

$\|u\|_C = \max_{x \in Du} |u(x)|$

$P_k$ — пространство полиномов степени $k$

## ОГЛАВЛЕНИЕ