

Т. АЗЛАРОВ, Ҳ. МАНСУРОВ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ

І ҚИСМ

ЎзССР Олий ва ўрта маҳсус таълим министрилги
университетларнинг ва педагогика институтларининг
студентлари учун ўқув қўлланма сифатида руҳсат
өтган

Тақризчилар: физика-математика фанлари доктори, профессор
Х. Р. Латипов, физика-математика фанлари доктори,
профессор А. С. Садулаев

Маҳсус мұхаррір: ТошДҮ профессори F. N. Насретдинов

Ушбу китоб университетлар ҳамда педагогика институтлари, шунингдек, олий техника ўқыу мөртласыннинг олий математика предмети чуқур программа асосида ўқыттыладынған факультетлари студентлари учун мұлжалланған. Уни ёзишда авторлар В.И.Ленин номидаги Тошкент Давлат университеттіннинг математика, ғылыми математика ва механика факультетларыда бир неча йиллар давомыда ўқытса лекцияларидан фойдаланғандар.

Китобны ёзишда, бир томондан математика фаныннинг тобора интенсив ривождан бориши, янги түшүнчалар, янги гоялар билан бойыб боришига эътибор қаратаилган бўлса, иккинчи томондан математиканинг фан ва техниканинг турли соҳаларига татбиқ доираси кенгайиб бориши ҳисобга олингандар.

Китоб анализ курсининг I қисми бўлиб, бир ўзгарувчили функциялар анализига бағишланған. Унда дифференциал ва интеграл ҳисоб курси ҳамда қаторлар назарияси батафсил баён этилган.

СҮЗ БОШИ

Математик анализ олий математиканинг дастлабки ва айни вақт да, асосий бўлими бўлиб, барча олий ўқув юртларида тегишли программага қараб у ёки бу ҳажмда ўқитилади. Илгарилар «Чексиз кичик миқдорлар ҳисоби», «Дифференциал ва интеграл ҳисоб» номлари билан аталиб келинган бу курс кейинги пайтларда деярли ҳамма ерда математик анализ деб юритила бошланди. Курснинг бундай аталиши унинг мазмуни ва мақсадини ҳақиқатан ҳам тўла акс эттиради ва, унинг вазифаси функцияларни анализ — таҳлил қилиш эканлигини англатади. Бунда анализга кириш — ҳақиқий сонлар назарияси, лимитлар назарияси, узлуксизлик; бир аргументли ва кўп аргументли функцияларнинг дифференциал ва интеграл ҳисоби; қаторлар назарияси, Фурье қаторлари назарияси кўзда тутилади. Шуни алоҳида таъкидлаш лозимки, анализ курси баён этиши тартибининг қатъийлиги билан характерлидир. Уидаги мавзулар деярли ҳамма вақт музайян кетма-кетликда бўлиши керак. Ана шундагина курснинг мантиций изчиллиги ва яхлитлиги кўринади. Аммо, бу кетма-кетликни сақлаган ҳолда математик анализ курсини турлича қуриш ҳам мумкин. Бундай қуришлар аввало қабул қилинган математик қатъиятлик даражаси билан, баённинг тўлалик миқдори билан фарқланадилар. Турли олий ўқув юртлари (техник, педагогик, университетларнинг ҳар хил факультетлари) учун ёзилган дарслекларда ва қўлланмаларда бу вазиятини яққол кузатиш мумкин.

Табиийки, бевосита математика мутахассислиги бўйича таълим оладиган студентларга мўлжалланган анализ курси ўзининг юқори даражадаги математик қатъияти ва изчиллиги билан фарқ қилмоги керак.

Ушбу китобни ёзишда муаллифлар ана шу мураккаб вазифани бажаришга интилдилар. Китоб, ассосан, университетлар ва педагогика институтлари математика, амалий математика ва физика-математика факультетлари математик анализ курси программаларига мувофиқ ёзилган. В. И. Ленин номли Тошкент Давлат университетида кўп йиллар мобайнода мазкур курс бўйича ўқиган лекцияларимиз китобни ёзиш жараёнида катта ёрдам берди. Шу билан бирга, китоб қўллэзмаси тайёр бўлгач, у лекцияларимизда «синов» дан ўтказилди.

Китоб ёзилиши жараёнида биз математик қатъият ва изчилликни таъминлашга интилиш билан бирга яна қўйидагиларга амал қилдик.

Биринчидан. Маълумки, студентлар юқори курсларда математик анализнинг узвий давоми сифатида функционал анализ курси билан танишадилар. Ундаги асосий тушунчалар (функционал, оператор, метрик фазо ва ҳ.к.) абстракция даражаси нуқтаи назаридан анализнинг тушунчаларидан «бир погона» юқори ҳисобланади, шунинг учун уларни анализ курси давомида студентлар онгига сингдира борищ, уларни «бир қадам» илгарини кўришга ўргата бориши, фикримизча, иккала фанни эгаллаш учун ҳам фойда келтиради. Айни пайтда, студентлар математиканинг моҳиятлари билан танишиш имкониятига эга бўладилар. Бу эса бўлажак мутахассиснинг математик жиҳатдан шаклланишида маълум методологик аҳамиятга эга.

Иккинчидан. Математик анализнинг турли соҳаларга татбиқ доираси ниҳоятда кенг. Аммо шулардан энг муҳими, фикримизча, унинг ҳар хил математик обьектларни (иррационал сонларни, функцияларни, хос ва хосмас интегралларни) тақрибий ҳисоблашга қўлланишидадир. Сирасини айтганда, анализнинг барпо бўлишидаги асосий манбалардан бири ҳам шудир. Бундай масалалар ҳозирга қадар ҳам анализнинг тараққиёти учун хизмат қилиб келяпти. Шу мулоҳазага таянган ҳолда анализнинг тақрибий ҳисоблашларга қўлланишига асосий эътибор берилган. Бу ўринда муаллифлар ўз илмий изланишларидан ҳам фойдаланганлар.

Учинчидан. Асосий тушунчаларни киритиш, асосий фактларни шарҳлашда мумкин қадар соддароқ, тушунарлироқ фикр юритишга ва муайян тасаввур ҳосил қилингандан кейингина уларни математик қатъият ва изчилик билан баён этишга ҳаракат қилинди. Бу ҳамма дарслик ва қўлланмалар учун ҳам фойдадан ҳоли бўлмаган ўзига хос методик ёндашиб бўлиб, китобдан техник олий ўқув юртларининг студентлари ва ўқитувчилари фойдалана олишлари учун имкон яратади.

Китоб қўллёзмасининг дастлабки вариантини синчиклаб ўқиб чиқиб, уни илмий ва методик жиҳатдан яхшиланишига ўз ҳиссаларини қўшганлари учун доцентлар Э.Х. Якубов ва Б. Наимжоновларга авторлар ташаккур изҳор қиласидилар. Фикр-мулоҳазалари билан китобни янада яхшиланишига муносиб ҳиссаларини қўшганликлари учун профессорлар Л.И. Волковиский, А.С. Садуллаев, Х.Р. Латипов, доцентлар А.Ворисов, Р.Ганихўжаевларга ҳамда маҳсус мұҳаррирлик вазифасини маъсулият билан бажарғанлиги учун ТошДУ профессори Ф.Н. Насритдиновга авторлар самимий миннатдорчиллик билдирадилар. Қўлланмадаги камчиликларни бартараф этишга ва унинг сифатини яхшилашга қаратилган фикр ва мулоҳазаларини билдирган ўртоқларга авторлар аввалдан ўз миннатдорчилликларини билдирадилар.

I-бөб

ДАСТЛАБҚИ ТУШУНЧАЛАР

Ушбу бобда математика фаннинг барча тармоқларида құлланиладиган әнд мұхым тушунчалар ҳақида баъзи маълумотлар берилади. Бундай тушунчалардан түплам ва акслантириш тушунчаларини көлтириш мүмкін. Улардан математик анализ курси давомида муттасил фойдаланиб борилади.

1-§. Түплам. Түпламлар ўстида амаллар

1. Түплам тушунчаси. Ҳар бир фанни ўргаши аввало унинг асосий тушунчалари билан танишишдан бошланади. Түплам тушунчаси математиканың бошланғыч тушунчаларидан бири бўлиб, уни мисоллар ёрдамида тушунтирилади. Масалан, шкафдаги китоблар, барча тўғри касрлар, Қуёш системасидаги планеталар, берилган нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар түплами ҳақида гапириш мүмкін.

Түпламни ташкил этган нарсалар (предметлар) унинг *элементлари* деб аталади.

Одатда түпламлар латин ёки грек алфавитининг бош ҳарфлари билан, унинг элементлари эса кичик ҳарфлари билан белгиланади. Масалан, A, B, \dots, E, F, \dots лар билан түпламни, a, b, c, \dots лар билан түпламнинг элементини белгилаймиз.

Агар A түпламнинг элементи a бўлса, $a \in A$ ёки $A \ni a$ каби ёзилади ва « a элемент A түпламга тегишили» деб ўқилади. Акс ҳолда $a \notin A$ ёки $a \notin A$ деб ёзилади ва « a элемент A түпламга тегишили эмас» деб ўқилади. Масалан, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ бўлса, у ҳолда $6 \in A$, $7 \notin A$ бўлади.

Чекли сондаги элементлардан ташкил топган түплам *чекли түплам* деб аталади. Масалан, юқорида көлтирилган түпламлардан шкафдаги китоблар чекли түпламни ташкил этади.

Математикада күпинча чекли бўлмаган түпламларни — *чексиз түпламларни* қарашга тўғри келади. Масалан, барча тўғри касрлар, барча натурал сонлар, берилган нуқтадан ўтувчи барча тўғри чизиқлар түплами чексиз түпламларга мисол бўла олади.

Барча натурал сонлардан иборат түпламни N ҳарфи билан белгиланади ва

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\} \quad \text{ёки} \quad N = \{n : n = 1, 2, 3, \dots\}$$

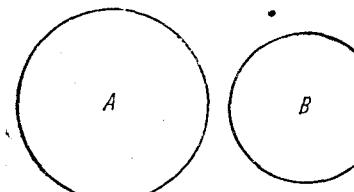
каби ёзилади. Яна бир мисол сифатида $B = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}$

тўпламни келтирайлик. Бу тўплам $x^2 - 5x + 6 = 0$ тенглама илдизларидан ташкил топган.

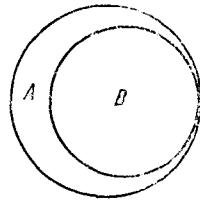
Юқорида биз тўплам унинг барча элементлари учун характерли бўлган хусусиятни, қоидани келтириш билан берилишини, шунингдек, унинг барча элементларини бевосита кўрсатиш билан берилишини кўрдик. Айрим вақтларда тўплам қандай характерли хусусиятга эга бўлган элементлардан ташкил топганлиги маълум бўлса ҳам, бундай хусусиятли элементлар мавжуд бўлмаслиги мумкин. Масалан, A тўплам $x^2 + x + 1 = 0$ квадрат тенгламанинг ҳақиқий илдизларидан ташкил топган дейилса, бу тўпламнинг битта ҳам элементи йўқлиги маълум бўлади. Бунга сабаб, берилган квадрат тенглама ҳақиқий илдизларга эга эмаслигидир. Бундан кўринадики, элементга эга бўлмаган тўпламларни ҳам кўришга тўғри келади.

Битта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам $b \neq A$ тўплам дейилади ва \emptyset каби белгиланади.

Шуни таъкидлаш лозимки, тўпламни аниқлашда уни ташкил этган элементлар орасида айнан бир - бирiga тенг бўлган элементлар тўпламнинг элементи сифатида фақат бир мартағина олинади. Масалан, B тўплам $x^3 - 3x + 2 = 0$ тенгламанинг илдизларидан иборат бўлсин. Бу тенгламанинг илдизлари $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$ бўлиб, улардан тузилган B тўплам деганда биз 1 ва -2 элементлардан тузилган $B = \{1, -2\}$ тўпламни тушунамиз.



1- чизма



2- чизма

Кўпинча тўпламларни, улар чекли ёки чексиз бўлишидан қагъий назар, символик равища бирор шакл масалан, доирачалар билан тасвирланади. Бу эса тўпламлар устида бажарилган амалларни тасвур қилишда, улар орасидаги муносабатларни ўрганишда анча қулайлик туғдиради (1- чизма).

Агар B тўпламнинг ҳар бир элементи A тўпламнинг ҳам элементи бўлса, B тўплам A тўпламнинг қисми ёки қисмий тўплами (*тўплам ости*) деб аталади ва $B \subset A$ каби белгиланади (2- чизма). Масалан, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ бўлсин. Бунда $B \subset A$ эканлигини кўриш қийин эмас.

Бўш тўплам \emptyset ҳар қандай A тўпламнинг қисми (қисмий тўплами) деб ҳисобланади.

Бирор A тўплам берилган бўлсин. Бу тўпламнинг барча қисмий тўпламларидан иборат тўпламни $P(A)$ каби белгилаймиз. Равшанки, $\emptyset \in P(A)$, $A \in P(A)$. Масалан, $A = \{1, 2, 3\}$ тўплам учун

$$P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \emptyset\}$$

бўлади. $P(A)$ тўплам элементларининг ўзи тўпламдир.

1.1-таъриф. Агар A тўплам B тўпламнинг қисми, B тўплам A тўпламнинг қисми, яъни $A \subset B$ ва $B \subset A$ бўлса, у ҳолда A ва B тўпламлар бир-бираiga тенг тўпламлар деб аталади ва $A = B$ каби ёзилади. Масалан, A тўплам $k\pi$ кўринишдаги сонлардан иборат бўлсин, бунда $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, яъни $A = \{a : a = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. B тўплам эса $\sin x = 0$ тенгламанинг ечимларидан иборат бўлсин, яъни $B = \{x : \sin x = 0\}$. Агар $\sin x = 0$ тенгламанинг барча ечимлари $x = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ формула билан ёзилишини ҳисобга олсан, $A = B$ бўлишини кўрамиз.

2. Тўпламлар устида амаллар. Биз қўйида тўпламлар устида бажариладиган амалларни келтирамиз.

1.2-таъриф. A ва B тўпламларнинг барча элементларидан ташкил топган C тўплам A ва B тўпламларнинг йигиндиси деб аталади ва

$$C = A \cup B$$

каби белгиланади (3-чиизма). Масалан, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$, $D = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ бўлса, унда уларнинг йигиндилари қўйидаги тўпламлардан иборат бўлади: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, $E \cup D = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = N$, $A \cup E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$.

Юқорида келтирилган 1.2-таърифдан:

$$A \cup A = A, \quad A \cup B = B \cup A$$

келиб чиқади, шунингдек, агар $A \subset B$ бўлса, унда $A \cup B = B$ бўлади.

1.3-таъриф. A ва B тўпламларнинг умумий элементларидан ташкил топган D тўплам A ва B тўпламларнинг кўпайтмаси дейилади ва

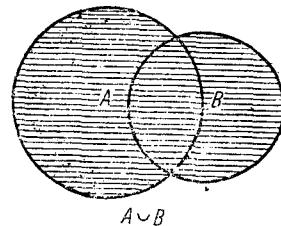
$$D = A \cap B$$

каби белгиланади (4-чиизма). Масалан, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ бўлса, уларнинг кўпайтмаси $A \cap B = \{2, 4\}$ тўплам бўлади. Тўпламлар кўпайтмасининг 1.3-таърифида бевосита

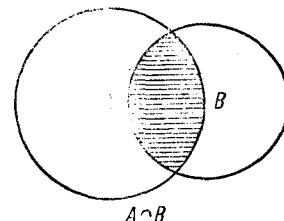
$$A \cap A = A, \quad A \cap B = B \cap A$$

келиб чиқади, шунингдек, агар $A \subset B$ бўлса, унда $A \cap B = A$ бўлади.

Икки тўплам кўпайтмаси бўш тўплам, яъни $A \cap B = \emptyset$ бўлса, у ҳолда A ва B тўпламлар кесишмайдиган тўпламлар дейилади. Масалан $E = \{2, 4, 6, \dots\}$, $F = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ тўпламлар кесишмайдиган тўпламлар бўлади, чунки $E \cap F = \emptyset$.



3-чиизма



4-чиизма

Биз тўпламларнинг йифиндиси ҳамда кўпайтмаси таърифларини икки тўпламга нисбатан келтирдик. Агар A_1, A_2, \dots, A_n тўпламлар берилган бўлса, уларнинг йифиндиси

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

ҳамда кўпайтмаси

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

юқоридагига ўхшаш таърифланади.

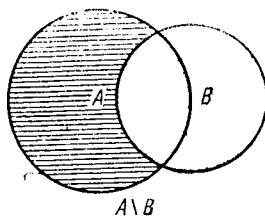
1.4- таъриф. A тўпламнинг B тўпламга тегишли бўлмаган элеменларидан тузилган E тўплам A тўпламдан B тўпламнинг айрмаси деб аталади ва

$$E = A \setminus B$$

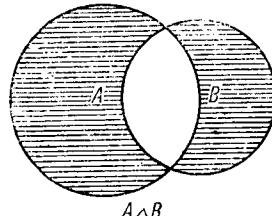
каби белгиланади (5- чизма). Масалан, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$ бўлса, $A \setminus B = \{1, 2, 4, 5\}$ ва $B \setminus A = \{6, 9, 12\}$ бўлади.

Агар A тўплам S тўпламнинг қисми (яъни $A \subset S$) бўлса, ушбу $S \setminus A$ айрма A тўпламни S тўпламга тўлдирувчи тўплам деб аталади ва $C_s A$ каби ёзилади. Шу таърифга кўра

$$C_s A = S \setminus A.$$



5- чизма



6- чизма

1.5- таъриф. A тўпламнинг B тўпламга тегишли бўлмаган элеменларидан ва B тўпламнинг A тўпламга тегишли бўлмаган элеменларидан тузилган тўплам A ва B тўпламларнинг симметрик айрмаси деб аталади ва $A \Delta B$ каби белгиланади (6- чизма). Таърифга кўра

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Масалан, агар $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ бўлса, у ҳолда бу тўпламларнинг симметрик айрмаси

$$A \Delta B = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$$

бўлади.

Икки A ва B тўплам берилган бўлсин. Биринчи элементи A тўпламга, иккинчи элементи B тўпламга тегишли бўлган тартибланган (a, b) жуфтликларни қарайлик:

$$a \in A, \quad b \in B.$$

1.6- таъриф. Барча (a, b) кўринишдаги жуфтликлардан тузилган

тўплам A ва B тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси ёки тўғри кўпайтмаси деб аталади ва $A \times B$ каби белгиланади.

Одатда $A \times A$ тўпламни A^2 деб белгиланади, яъни

$$A \times A = A^2.$$

Масалан, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ бўлсин. Бу тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси қўйидаги

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$$

тўплам бўлади. Умуман айтганда, $A \times B \neq B \times A$.

Юқорида тўпламларни ва улар устида бажарилган амалларни тасвирлаш учун ишлатилган шакллар Эйлер — Виен диаграммалари деб аталади (1 — 6-чиzmалар).

2- §. Тўпламларни таққослаш

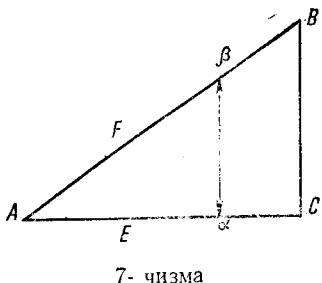
Агар A ва B лар чекли тўпламлар бўлса, у ҳолда уларнинг элементларини бевосита санаш билан элеменлар сони бир-бирига тенглигини ёки A тўпламнинг элеменлари сони B тўпламнинг элеменлари сонидан кўп ёки кам эканини аниқлаш мумкин. Бу ҳолни A ва B тўпламлар элеменларини бир-бирига мос қўйиш йўли билан ҳам текшириш мумкин. Масалан, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$ тўпламларни кўрайлик. Унда A тўпламнинг ҳар бир n ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) элементига B тўпламнинг n^2 элементини мос келтириб (яъни $n \rightarrow n^2 : 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 9, 4 \rightarrow 16, 5 \rightarrow 25$) B тўплам элеменлари сони A тўплам элеменлари сонидан кўп эканини аниқлаш мумкин.

Агар A ва B тўпламлар чексиз тўпламлар бўлса, унда бу тўпламларнинг элеменларини, равшанки, санаш йўли билан таққослаб бўлмайди. Аммо бу тўпламларни уларнинг элеменларини бир-бирига мос қўйиш йўли билан таққослаш мумкин. Масалан,

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}, \quad N' = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$$

тўпламлар берилган бўлсин. N тўпламнинг элементи бўлган ҳар бир n сонга ($n = 1, 2, 3, \dots$) N' тўпламнинг элементи бўлган $\frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) сонни мос қўйиш билан (яъни $n \rightarrow \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$) N ва N' тўпламларни таққослаб улар элеменларининг сони жиҳатидан «тeng» деган хулосага келамиз. Аммо чексиз тўпламларни бу мисолдаги каби осонликча таққослаш мумкин бўлавермайди. Тўпламларни таққослаш қўйидаги муҳим тушунчага олиб келади.

1.7- таъриф. Агар икки A ва B тўплам берилган бўлиб, A тўпламнинг ҳар бир a элементига B тўпламнинг битта b элементи шундай мос қўйилган бўлсаки, бунда B тўпламнинг ҳар бир элементи учун A тўпламда унга мос келадиган биттагина элемент бор бўлса, у ҳолда A ва B тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилган деб аталади.



Масалан, тўғри бурчакли ABC учбурчак ($\triangle ABC$) берилган бўлсин (7-чизма). Бу учбурчакнинг гипотенузаси AB нинг нуқталаридан иборат тўпламни F деб, AC катетни ташкил этган нуқталар тўпламини эса E деб олайлик. Бу E ва F тўпламларнинг элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослих ўрнатиш мумкин. F тўпламда олинган ҳар бир β нуқтага шу нуқтадан AC га тушシリлган перпендикулярнинг асоси α ни мос қўймиз ва аксинча. Бу эса E ва F тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослих мавжуд эканлигини кўрсатади.

1.8-таъриф. Агар A ва B тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослих ўрнатиш мумкин бўлса, улар бир-бирига эквивалент тўпламлар деб аталади ва

$$A \sim B$$

каби белгиланади.

Масалан,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}, N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\};$$

$N' = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ тўпламлар берилган бўлса, унда $A \sim B$ ва $N \sim N'$ эканини кўрамиз. Эквивалентлик тушунчаси тўпламларни синфларга ажратиш имконини беради.

Масалан, бизга қўйидаги тўпламлар берилган бўлсин:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}, B = \{1, 2\}, C = \{10, 11\}, D = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}, E = \{1\}$. Бу тўпламлар орасида A ва D тўпламлар, B ва C тўпламлар эквивалент: $A \sim D, B \sim C$. Бунда A ва D тўпламлар битта 6 элементли тўпламлар синфига кирса, B ва C тўпламлар эса бошقا 2 элементли тўпламлар синфига киради. Аммо E тўплам A, B, C, D тўпламларнинг биронтасига ҳам эквивалент эмас. У бир элементили тўпламни ташкил этади.

Натурал сонлар тўплами N берилган бўлсин. Бу тўпламга эквивалент бўлган тўпламларга мисоллар келтирийлик:

$$N' = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}, \quad n \leftrightarrow \frac{1}{n};$$

$$N'' = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots\}, \quad n \leftrightarrow 2n;$$

$$N''' = \{1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1, \dots\}, \quad n \leftrightarrow 2n - 1$$

ва ҳ.к.

1.9-таъриф. Натурал сонлар тўплами N га эквивалент бўлган ҳар қандай тўплам саноқли тўплам деб аталади.

Натурал сонлар тўплами N га эквивалент бўлган барча тўпламлар саноқли тўпламлар синфини ташкил этади.

Кўйидаги иккى тўплам

$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, $N'' = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ берилган бўлсин. Бунда $N'' \subset N$ эканлиги равшан. Аммо юқорида $N \sim N''$ эканлигини таъкидлаган эдик. Демак, $N'' \subset N$, $N'' \sim N$.

Тўпламнинг қисми ўзига эквивалент бўлиши фақат чексиз тўпламларгагина хосдир.

Биз юқорида мисол тариқасида келтирган тўпламларимиз асосан чекли тўпламлар ёки саноқли тўпламлар эди. Табиийки, чексиз, аммо саноқли бўлмаган тўпламлар борми? — деган савол туғилади. Бундай тўпламлар мавжуд. Улар билан кейинроқ танишамиз (З-боб, 8- § нинг З-punktiga қаранг).

Эквивалент тўпламлар синфининг миқдорий характеристикаси сифатида тўпламнинг қуввати тушунчаси киритилади. Чекли тўпламлар учун қувват тўплам элементларининг сонидан иборатдир.

3- §. Акслантиришлар

1. Акслантириш тушунчаси. Акслантириш тушунчаси ма-тематиканинг асосий тушунчаларидан бири. Акслантиришлар назариясида бир тўпламнинг элементларини иккинчи тўпламнинг элементларига мос келтириш қонуниятлари ўрганилади.

Икки E ва F тўплам берилган бўлсин.

1.10- таъриф. Агар E тўпламдан олинган ҳар бир x элементга ($x \in E$) бирор қоида ёки қонунга кўра F тўпламда битта y элемент ($y \in F$) мос қўйилган бўлса, у ҳолда E тўпламни F тўпламга *акслантириш* берилган деб аталади. Акслантиришлар кўпинча f ҳарфи орқали белгиланиб, қуйидагида ёзилади:

$$f : E \rightarrow F \text{ ёки } x \xrightarrow{f} y.$$

E тўплам f акслантиришнинг *аниқланиши соҳаси* деб аталади.

Мисоллар.

1. $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ ва $N' = \left\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ тўпламлар берилган бўлсин. Агар ҳар бир натурал сон n га $\frac{1}{n}$ сонни мос қўйисак, биз $f : N \rightarrow N'$ акслантиришга эга бўламиз. Баъзан бу мусабатни $f(n) = \frac{1}{n}$ каби ҳам ёзилади.

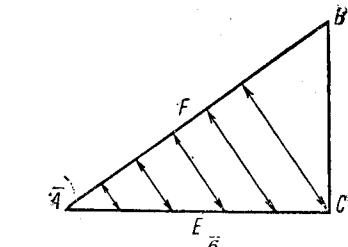
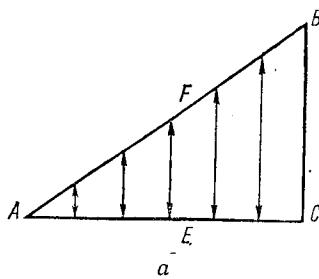
2. N ва N' тўпламлар берилган бўлиб, ҳар бир $n \in N$ сонга $\frac{1}{n^2} \in N'$ сонни мос қўйисак, яъни $n \rightarrow \frac{1}{n^2}$, унда ушбу $g : N \rightarrow N'$ яъни $g(n) = \frac{1}{n^2}$ акслантириш ҳосил бўлади.

3. Ҳар бир $n \in N$ сонга N' тўпламнинг 1 сонини мос қўйиб,

$$W : N \rightarrow N', \text{ яъни } W(n) = 1$$

акслантиришга келамиз.

4. Тўғри бурчакли ABC учбурчак берилган бўлсин, E тўплам AC катетининг нуқталаридан, F тўплам эса гипотенузининг нуқталади.



8- чизма

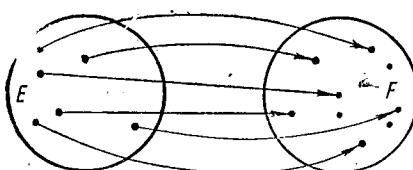
ридан иборат бўлсин. 8- а чизмада кўрсатилганидек E тўпламнинг x элементига F тўпламнинг y элементини мос қўйиб $f: E \rightarrow F$ акслантиришга, бу тўпламларнинг элементлари орасида 8- б чизмада кўрсатилганидек мослик ўрнатиб бошқа $g: E \rightarrow F$ акслантиришга эга бўламиз.

Келтирилган мисоллардан бир тўплам элементларини иккинчи тўплам элементларига акслантиришлар ($E \rightarrow F$) турлича бўлиши мумкин эканлигини кўрамиз.

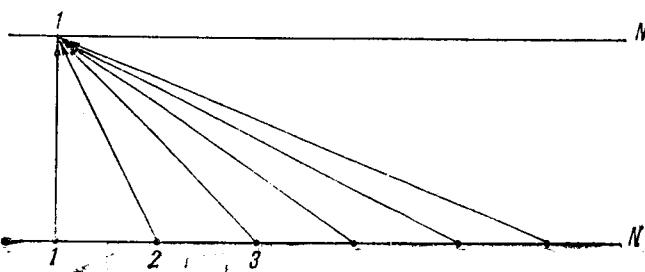
E ва F тўпламларининг элементларини нуқталар деб тасаввур қилиб, $f: E \rightarrow F$ акслантиришни 9- чизмада кўрсатилганидек геометрик ифодалаш мумкин. Масалан, 11- бетдаги 3- мисолдаги $W(n)=1$ акслантириш 10- чизмадагидек тасвирланади.

Ушбу $f: E \rightarrow F$ акслантириш берилган бўлсин. f акслантириш ёрдамида E тўпламнинг x элементига мос келган F тўпламнинг y элементини x элементнинг *акси (образи)* деб аталади ва уни $y = f(x)$ каби белгиланади. Энди F тўпламда ихтиёрий y элемент олайлик. E тўпламнинг шундай x элементларини қарайликки, уларнинг акслари қаралаётган y га тенг бўлсин. Бундай $x \in E$ элементлар y нинг *асли (прообрази)* деб аталади ва $f^{-1}(y) = \{x : x \in E, f(x) = y\}$.

Агар $A \subset E$ бўлса, A тўплам элементларининг акслари



9- чизма



10- чизма

дан иборат $\{f(x) : x \in A\}$ тўплам A тўпламнинг F даги акси деб аталади ва уни $f(A)$ каби белгиланади. Агар $B \subset F$ бўлса, B тўплам элементларининг аслларидан иборат $\{x; f(x) \in B\}$ тўплам B тўпламнинг акси деб аталади ва уни $f^{-1}(B)$ каби белгиланади.

Мисол. $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, $M = \{-1, +1\}$ тўпламлар ва $f(n) = (-1)^n$ акслантириш берилган бўлсин. Бунда, масалан, $5 \in N$ нинг акси $f(5) = -1$ бўлиб, M тўпламда олинган 1 нинг если эса $f^{-1}(1) = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ — жуфт сонлар тўпламидан иборатdir. N тўпламнинг қисми бўлган $A = \{3, 4\} (A \subset N)$ тўпламнинг акси $f(A) = \{-1, +1\} = M$ бўлади. M тўпламнинг қисми бўлган $B = \{-1\} (B \subset M)$ тўпламнинг если эса $f^{-1}(B) = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ бўлади.

1.1-теорема. F нинг қисмлари бўлган A ва B тўпламлар кўпайтмасининг если бы тўпламлар аслларининг кўпайтмасига тенг:

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \quad (1.1)$$

Исбот. (1.1) тенгликнинг тўғрилигини кўрсатиш учун ушбу $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ ва $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$,

муносабатларни исботлаш етарлидир.

Фараз қулайлик, x элемент $f^{-1}(A \cap B)$ тўпламнинг ихтиёрий элементи бўлсин: $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Бундан $f(x) \in A \cap B$ келиб чиқади. Демак, $f(x) \in A$ ва $f(x) \in B$ бўлади. Энди $f(x) \in A$ дан, $x \in f^{-1}(A)$, шунингдек $f(x) \in B$ дан $x \in f^{-1}(B)$ га эгамиз. Шундай қилиб, $x \in f^{-1}(A)$, $x \in f^{-1}(B)$, демак, $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Биз $f^{-1}(A \cap B)$ тўпламдан олинган ҳар бир x элемент $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ тўпламнинг ҳам элементи эканлигини кўрсатдик. Демак,

$$f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \quad (1.2)$$

Энди x элемент $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ тўпламнинг ихтиёрий элементи бўлсин: $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. У ҳолда $x \in f^{-1}(A)$ ва $x \in f^{-1}(B)$ бўлади. Бундан эса, $f(x) \in A$, $f(x) \in B$ га эга бўламиз. Демак, $f(x) \in A \cap B$ бўлиб, натижада $x \in f^{-1}(A \cap B)$ эканлигини аниқлаймиз. Шундай қилиб, $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ тўпламнинг ихтиёрий x элементи $f^{-1}(A \cap B)$ тўпламнинг ҳам элементи бўлади. Бу эса

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B) \quad (1.3)$$

еканини англатади. (1.2) ва (1.3) муносабатлардан (1.1) тенглик келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

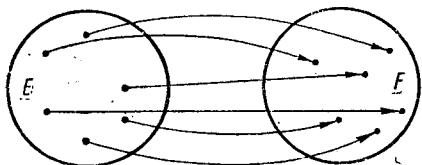
Куйидаги теоремалар худди шунга ўхшаш исбот қилинади.

1.2-теорема. F нинг қисмлари бўлган A ва B тўпламлар йигиндисининг если бы тўпламлар аслларининг йигиндисига тенг:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \quad (1.4)$$

1.3-теорема. E нинг қисмлари бўлган A ва B тўпламлар йигиндисининг акси если бы тўпламлар акслари йигиндисига тенг:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B). \quad (1.5)$$



11- чизма

2. Акслантиришнинг турлари. Ушбу

$$f : E \rightarrow F$$

акслантириш берилган бўлиб, $f(E)$ эса E тўпламнинг акси бўлсин:

$$f(E) = \{f(x) : x \in E\}.$$

Равшанки ҳар қандай акслантириш учун $f(E) \subset F$ муносабат ўринли.

1.11- таъриф. Агар $f : E \rightarrow F$ акслантиришда $f(E) \neq F$ бўлса, бундай акслантириш E тўпламни F нинг ичига акслантириши деб аталади.

Мисол. $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, $N' = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ тўплам-

лар берилган бўлиб, $f : N \rightarrow N'$ акслантириш эса $n \rightarrow \frac{1}{3n}$ (ёки $f(n) = \frac{1}{3n}$) кўринишда берилган бўлсин. Бу акслантиришда N тўплам-

нинг акси $f(N) = \left\{\frac{1}{3n}; n = 1, 2, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \dots\right\}$ тўпламдан иборат бўлиб, $f(N) \neq N'$ бўлади. Демак f акслантириш ичига акслантиришидир. 1- пунктда келтирилган 2, 3- мисоллардаги ва 8- б чизмадаги акслантиришлар ҳам ичига акслантиришлар бўлади.

Ичига акслантиришни 11- чизмадаги каби геометрик тасвираш мумкин.

1.12- таъриф. Агар $f : E \rightarrow F$ акслантиришда $f(E) = F$ бўлса, бундай акслантириш E тўпламни F нинг устига акслантириши ёки сюръектив акслантириши деб аталади.

Мисол. E тўплам текислиқдаги (a, b) , $a = 0, \pm 1; b = 0, \pm 1$ нуқталардан иборат: $E = \{(a, b) : a = 0, \pm 1; b = 0, \pm 1\}$, F тўплам эса $0, 1, 2$ сонлардан иборат: $F = \{0, 1, 2\}$. E тўпламнинг ҳар бир (a, b) элементини ушбу

$$(a, b) \xrightarrow{f} a^2 + b^2$$

қоидага кўра F тўпламнинг элементларига акс эттирувчи f акслантиришни қарайлик. Бу акслантириш сюръектив акслантириш бўлади. Чунки $f(E) = \{0, 1, 2\} = F$. Шунингдек аввалги пунктда келтирилган 1- мисолдаги ва 8- а чизмадаги акслантиришлар устига акслантиришга мисол бўлади.

1.13- таъриф. Агар $f : E \rightarrow F$ акслантириш E тўпламнинг турли элементларини F тўпламнинг турли элементларига акс эттиrsa, яъни $x_1, x_2 \in E$ ва $x_1 \neq x_2$ бўлганда $f(x_1) \neq f(x_2)$ бўлса, f инъектив акслантириши деб аталади.

Юқорида 1- пунктда келтирилган 1 ва 2- мисолларда қаралган $f(n) = \frac{1}{n}$ ва $g(n) = \frac{1}{n^2}$ акслантиришлар инъектив акслантириш бўлиб, 11- бетдаги 3- мисолда $W(n) = 1$ акслантириш эса инъектив бўлмайди.

1.14- таъриф. Агар $f : E \rightarrow F$ акслантириш устига акслантириш бўлса ва ихтиёрий $y \in F$ элемент E тўпламдаги ягона элементнинг акси бўлса, f акслантириш ўзаро бир қийматли акслантириш ёки биектив акслантириш деб аталади.

Мисол. Радиуслари r_1 ва r_2 ($r_1 < r_2$) бўлган концентрик айланалар берилган. E тўплам r_1 радиусли айланани нуқталаридан, F тўплам эса r_2 радиусли айланани нуқталаридан иборат бўлсин. Марказдан чиқсан ҳар бир нур r_1 радиусли айланани x нуқтада, r_2 радиусли айланани y нуқтада кесиб ўтати. Ҳар бир $x \in E$ га $y \in F$ ни мос қўямиз. Натижада E тўпламнинг элементларини F тўпламнинг элементларига акс эттирувчи f акслантиришини ҳосил қиласиз. Бу акслантириш, равшанки, биектив акслантириш бўлади (12- чизма).

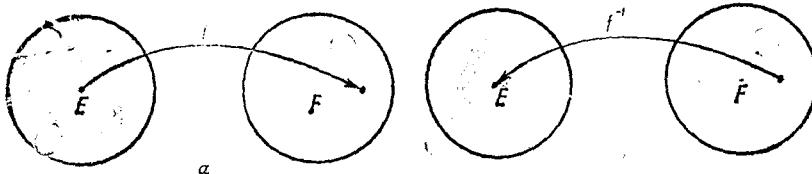
1- пунктдаги 1- мисолда берилган $f(n) = \frac{1}{n}$, $n \in N$ акслантириш ҳам биектив акслантиришdir.

3. Тескари акслантириш. Биз юқорида $f : E \rightarrow F$ акслантириш ва унинг турларини қараб ўтдик. Маълумки, $f : E \rightarrow F$ акслантиришда E тўпламнинг ҳар бир x элементига бирор қоидага кўра F тўпламнинг битта y элементи мос қўйилар эди. Энди $f : E \rightarrow F$ акслантириш берилган ҳолда F тўпламнинг ҳар бир элементини E тўпламнинг битта элементига акс эттирувчи акслантиришни қараймиз. $f : E \rightarrow F$ акслантириш биектив, яъни ўзаро бир қийматли акслантириш бўлсин.

1.15- таъриф. F тўпламнинг ҳар бир y элементини E тўпламнинг битта x элементига мос қўядиган ва

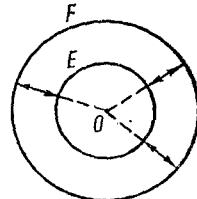
$$g(y) = g(f(x)) = x$$

муносабат билан аниқланадиган $g : F \rightarrow E$ акслантириш $f : E \rightarrow F$ акслантиришга нисбатан *тескари акслантириш* деб аталаади ва уни f^{-1} каби белгиланади (13- a, b чизма).



13-чизма

Мисол. $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, $N_1 = \{1, -2, 3, -4, \dots, (-1)^{n+1}n, \dots\}$ тўпламлар берилган бўлиб, $f : N \rightarrow N_1$ акслантириш $n \rightarrow (-1)^{n+1}n$ кўринишда бўлсин. Бу акслантириш биектив акслантиришdir. Унга тескари бўлган $f^{-1} : N_1 \rightarrow N$ акслантириш ушбу



12- чизма

$(-1)^{n+1} n \rightarrow n$ күринишида бўлади. Шунингдек 1-punktning 1- мисолидаги акслантириш тескари акслантиришга эга бўлиб, у $\frac{1}{n} \rightarrow n$ күринишида бўлади. Шундай қилиб, $f: E \rightarrow F$ акслантиришга нисбатан тескари акслантириш мавжуд бўлиши учун:

- 1) $f: E \rightarrow F$ акслантириш суръектив акслантириш бўлиши;
- 2) F тўпламидан олинган ҳар бир y элементнинг E тўпламидаги асли $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$ ягона бўлиши керак.

4- §. Математик белгилар

Тўплам түщунчаси билан танишиша биз баъзи бир математик белгиларни ишлатдик. Масалан, « A тўпламнинг элементи a » ёки « a элемент A тўпламга тегишли» дейилганда $a \in A$ деб тегишилилек белгиси « \in » ни ишлатдик. Шунингдек, « \subset » ёки « \supset » белги бир тўплам иккинчи тўпламнинг қисми бўлганида қўлланилган эди.

Математикада баъзи ҳолларда ёзувни қисқартириш мақсадида тез-тез учрайдиган сўз ва сўз биримлари ўрнига маҳсус белгилар ишлатилади.

«Агар ... бўлса, у ҳолда ... бўлади» ибораси \Leftrightarrow — импликация белгиси орқали ёзилади.

Масалан, A , B ва C тўпламлар берилган бўлсин. «Агар $A \subset B$, $B \subset C$ бўлса, у ҳолда $A \subset C$ бўлади» иборасини қўйидагича

$$A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

ифодалаш мумкин.

Икки эквивалент фактларнинг эквивалентлик белгиси \Leftrightarrow орқали ёзилади. Масалан,

$$A \subset B, B \subset A \Leftrightarrow A = B.$$

«Ҳар қандай», «иҳтиёрий», «барчаси учун» сўзлари ўрнига « \forall » умумийлик квантори белгисидан фойдаланилади.

«Мавжудки», «топиладики» сўзлари ўрнига « \exists » мавжудлик квантори белгиси ишлатилади. Масалан:

1) «Иҳтиёрий n ҳамда m натуранлар сонлар йигиндиси яна натуранлар сон бўлади» иборани

$$\forall n \in N, \forall m \in N \Rightarrow (n + m) \in N$$

каби ёзиш мумкин.

2) «Икки A ва B тўпламлар кўпайтмаси бўш эмас» деган иборани

$$A \cap B \neq \emptyset \text{ ёки } \exists a : a \in A, a \in B$$

каби ифодалаш мумкин.

Шундай қилиб, \in , ∞ , \subset , \Rightarrow , \Leftarrow , \forall , \exists математик белгиларни кўриб ўтдик. Биз улардан қулай келганда, фойдаланиб борамиз.

Математик белгиларнинг ишлатилиш мазмунини қулайлик учун қўйидаги жадвалда ифодалаймиз:

№	Математик белгилар	Математик белгиларнинг ишлатилиц мазмуни
1	\in	тегишилийк белгиси. a элемент A тўпламнинг элементи бўлса, $a \in A$ каби ёзилади.
2	\notin	тегиши эмаслик белгиси. b элемент B тўпламнинг элементи бўлмаса, $b \notin B$ каби ифодаланади.
3	\subset	қисм белгиси. A тўплам B тўпламнинг қисми бўлса, уни $A \subset B$ каби ёзилади.
4	\forall	умумийлик квантори белгиси. «Хар қандай», «иҳтиёрий», «барчаси учун» сўзлари ва сўз биринчмалари ўрнида ишлатилади.
5	\exists	мавжудлик квантори белгиси. «Мавжудки», «топиладики», ўрнида ишлатилади.
6	\Rightarrow	импликация бўлгиси.... бўлса,... бўлади», «..., келиб чиқади» маъносида ишлатилади.
7	\Leftrightarrow	эквивалентлик белгиси.

2- бөб

ХАҚИҚИЙ СОНЛАР

Сон түшүнчеси узоқ ўтмишдан маълум. Одамлар санаш тақозоси билан 1, 2, 3, ... — натурал сонларни қўлланганлар. Да стлаб манғий сон, рационал сон ва ниҳоят ҳақиқий сон түшүнчалари киритилган ва ўрганилган. Албатта, бу түшүнчалар китобхон а ўрта мактаб математика курсидан маълум. Шунинг учун ҳам қўйида (шу бобнинг 1- §, 2- § лари) натурал сонлар, бутун сонлар, рационал сонлар тўпламларининг энг муҳим хоссалари қисқагина баён этилган. Ҳақиқий сон түшүнчасига келганда шуни айтиш керакки, унинг киритилиши математик анализ учун қаноатланарли дараражада әмас. Шу сабабга кўра қўйида (шу бобнинг 3- §, 4- §, 5- § лари) ҳақиқий сон түшүнчасини Дедекинд бўйича киритамиз ва ҳақиқий сонлар тўпламининг хоссаларини батафсил ўрганамиз.

1- §. Натурал сонлар. Бутун сонлар

1. Натурал сонлар. Маълумки, $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ — барча натурал сонлар тўпламини ифодалайди. Бу тўпламдан олинган ихтиёрий натурал n, m ва p сонлар учун қўйидаги икки тасдиқнинг ўринли экани равшан:

1) $n = m$, $n > m$, $n < m$ муносабатлардан биттаси ва фақат биттаси ўринли,

2) $n < m$, $m < p$ тенгсизликлардан $n < p$ тенгсизликнинг ўринли экани келиб чиқади.

Агар бирор E тўпламнинг элементлари орасида юқорида келтирилган 1) ва 2) муносабатлар (тасдиқлар) ўринли бўлса, E тўплам *тартибланган тўплам* дейилади. Натурал сонлар тўплами тартибланган тўпламга дастлабки мисол бўла олади.

Натурал сонлар тўплами элементларини ўзаро таққослаб, бу тўплам элементлари орасида энг кичик элемент мавжудлигини ва у 1 сони эканлигини топамиз. Аммо N тўплам элементлари орасида энг катта элемент йўқ. Ҳақиқатан, ҳар бир $n \in N$ учун яна N га тегишли $n + 1$ сон топилади.

Маълумки, икки натурал n, m сонлар йиғиндиси $n + m$ ҳамда кўпайтмаси $n \cdot m$ яна натурал сон бўлиб, қўшиш ва кўпайтириш амаллари эса қўйидаги хоссаларга эга.

1°. Коммутативлик: $n + m = m + n$, $n \cdot m = m \cdot n$.

2°. Ассоциативлик: $(n + m) + p = n + (m + p)$, $(n \cdot m) p = n(m \cdot p)$.

3°. Диистрибутивлик: $(n + m) \cdot p = n \cdot p + m \cdot p$.

4°. N түпламда шундай k элемент борки, $k \cdot n = n \cdot k = n$ бўлади. Бу элемент $k = 1$ дир.

N түпламида $n + p = n$ тенгликини қаноатлантирадиган натурал p сон мавжуд эмас.

Агар $m \in N$, $n \in N$ бўлса, $m + x = n$ тенглами натурал сонлар түпламида доим ечимга эга бўлавермайди. У фақат $n > m$ бўлган дагина ечимга эга. Агар $n \leq m$ бўлса, шу тенглами ечими N түпламда мавжуд эмас. Бу натурал сонлар түпламини кенгайтириш зарурлигини англатади.

2. Бутун сонлар. Ишораси натурал сонларга тескари бўлган сонларни манфий натурал сонлар дейилади. Барча манфий натурал сонлар, ноль сони ва барча натурал сонлардан иборат түплам бутун сонлар түпламини ташкил этади ва у одатда Z ҳарфи билан белгиланади:

$$Z = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Равишанки, $N \subset Z$.

Бутун сонлар түплами натурал сонлар түплами каби тартибланган түплам бўлади.

Ихтиёрий икки p ва q бутун сонлар йигиндиси $p + q$, айрмаси $p - q$, кўпайтмаси $p \cdot q$ яна бутун сон бўлиб, қўшиш, айриш, кўпайтириш амалларига нисбатан 1-punktдаги 1° , 2° , 3° , 4° хоссалар билан бирга яна кўйидаги хоссалар ҳам ўринилади:

5°. $\forall q \in Z$ элемент учун Z түпламда шундай элемент — $-q$ мавжудки, $q + (-q) = 0$ бўлади.

6°. $\forall q \in Z$ элемент учун $q + 0 = 0 + q = q$ бўлади.

7°. $\forall q \in Z$ элемент учун $q \cdot 0 = 0 \cdot q = 0$ бўлади.

Демак, бир томондан, Z түплам ўз ичига N түпламнинг барча элементларини олса, иккинчи томондан эса Z түплам элементлари учун қўшиш ва кўпайтириш амаллари N түпламдаги қўшиш ҳамда кўпайтириш амаллари билан бир хил бўлади.

Бутун сонлар түпламида $m + x = n$, $m \in Z$, $n \in Z$ тенглами доим ечимга эга. Аммо шу түпламда $m \neq 0$ тенглами доим ечимга эга бўлавермайди. Масалан, $2x = -4$ тенглами Z түпламда $x = -2$ ечимга эга, $2x = -5$ тенглами эса Z да ечимга эга эмас. Бундан бутун сонлар түпламини кенгайтириш зарурлиги келиб чиқади.

2- §. Рационал сонлар

Ушбу қисқармайдиган $r = \frac{p}{n}$, $p \in Z$, $n \in N$ каср кўринишида тасвирланадиган ҳар бир сон *рационал сон* дейилади. Барча рационал сонлар түпламини Q деб белгилаймиз.

Юқоридаги p ва n сонларнинг 1 дан бошқа умумий бўлувчилари йўқлигини $(p, n) = 1$ белги билан ифодалаймиз. Шундай қилиб,

$$Q = \left\{ r : r = \frac{p}{n}, (p, n) = 1, p \in Z, n \in N \right\}.$$

Рационал сонларнинг юқорида келтирилган таърифи қуйидаги таърифга эквивалент: чексиз даврий ўнли каср кўринишида тасвирила-надиган ҳар бир сон *рационал сон* дейилади.

Равшанки,

$$N \subset Z \subset Q.$$

Шуни таъкидлаш лозимки, тўпламдаги бир хил элементлар унинг битта элементи сифатида олинганидек, Q тўпламда ҳам бир-бирига тенг бўлган рационал сонлар битта элемент деб қаралади. Масалан, $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}, \frac{16}{24}$ рационал сонлари битта $\frac{2}{3}$ га тенг бўлган рационал сон деб олинади.

Рационал сонлар тўплами Q аввалги параграфларда қаралган натуран ва бутун сонлар тўплами каби тартибланган.

1. Рационал сонлар устида арифметик амаллар. Рационал сонлар тўпламида қўшиш, кўпайтириш ва айриш амаллари билан бирга бўлиш амали ҳам киритилади.

Икки рационал сон йигиндиси, айрмаси, кўпайтмаси ва нисбати яна рационал сон бўлишини кўрсатайлик.

Фараз қиласлик, $r, t \in Q$ ва $r = \frac{p}{n}, t = \frac{q}{m}$ бўлсин, унда $p, q \in Z, n, m \in N$. Энди ушбу $r + t = \frac{p}{n} + \frac{q}{m} = \frac{p \cdot m + q \cdot n}{n \cdot m}$ сон рационал сон эканини кўрсатамиз. Равшанки, $n \in N, m \in N$ дан $n \cdot m \in N$ ва $p \in Z, q \in Z, N \subset Z$ дан $(mp + nq) \in Z$ экани келиб чиқади. Бу эса, $r + t$ сон рационал сон эканини англалади.

Худди шунингдек $r = \frac{p}{n} \in Q, t = \frac{q}{m} \in Q$ бўлганда бу сонларнинг кўпайтмаси $r \cdot t = \frac{p \cdot q}{n \cdot m}$ ва айрмаси $r - t = \frac{mp - nq}{n \cdot m}$ ҳам рационал сон эканини исботлаш мумкин. Икки тенг рационал сон учун $r \cdot r = r^2$ деб олинади.

Энди $r = \frac{p}{n}$ ва $t = \frac{q}{m}$ рационал сонларнинг нисбатини қараймиз, Бунда $t = \frac{q}{m} \neq 0$, яъни $q \neq 0$ деб олинади. Ушбу

$$\frac{r}{t} = \frac{p \cdot m}{q \cdot n} \text{ соннинг рационал сон эканини исботлаймиз.}$$

Агар $q \in N$ бўлса, унда $nq \in N$ ва демак, $r : t = \frac{p \cdot m}{q \cdot n} \in Q$. Агар q — бутун манғий сон бўлса, у ҳолда $-q \in N$ бўлиб, $\frac{r}{t} = \frac{p \cdot m}{q \cdot n} = \frac{p \cdot (-m)}{(-q) \cdot n} \in Q$ бўлади, чунки $n \cdot (-q) \in N, p \cdot (-m) \in Z$.

Шундай қилиб, рационал сонлар тўплами Q да юқорида келтирилган тўрт арифметик амални қўлланиш натижасида яна рационал сон ҳосил бўлишини кўрдик.

Рационал сонлар тўпламида бажарилган қўшиш, кўпайтириш, айриш ва бўлиш амалларига нисбатан ушбу хоссалар ўринлидир (бу хоссаларда r , t ва s лар ихтиёрий рационал сонлар):

- 1°. Коммутативлик: $r + t = t + r$, $rt = tr$.
- 2°. Ассоциативлик: $(r + t) + s = r + (t + s)$, $(r \cdot t)s = r(t \cdot s)$.
- 3°. Дистрибутивлик: $(r + t)s = r \cdot s + t \cdot s$.
- 4°. Ноль сонининг хусусияти: $r + 0 = r$, $r \cdot 0 = 0$.
- 5°. Бир сонининг хусусияти: $r \cdot 1 = r$.
- 6°. Қарама-қарши элементнинг мавжудлиги: $\forall r \in Q$ учун шундай $-r \in Q$ сон мавжудки, $r + (-r) = 0$ бўлади.
- 7°. Тескари элементнинг мавжудлиги: $\forall r \in Q$ ($r \neq 0$) учун шундай $r^{-1} \in Q$ сон мавжудки, $r \cdot r^{-1} = 1$ бўлади.
- 8°. $\forall r \in Q$, $\forall t \in Q$, $\forall s \in Q$ сонлар учун $r > t$ бўлганда $r + s > t + s$ бўлади.
- 9°. $\forall r \in Q$, $\forall t \in Q$, $\forall s \in Q$ ($s > 0$) сонлар учун $r > t$ бўлганда $r \cdot s > t \cdot s$ бўлади.
- 10°. Ихтиёрий икки мусбат r ва t рационал сонлар учун шундай натуран сон n мавжудки, $n \cdot r > t$ бўлади. Бу хосса одатда *Архимед аксиомаси* деб ҳам юритилади.

2. Рационал сонлар тўпламиниң зичлиги. Бу пунктда рационал сонлар тўплами Q нинг тартибланганлик хоссаси билан боғлиқ бўлган яна бир хоссасини қараймиз.

Фараз қиласайлик, $r \in Q$, $t \in Q$ ва $r < t$ бўлсин. У ҳолда $\frac{r+t}{2} \in Q$ ва $r < \frac{r+t}{2} < t$. Бу эса ихтиёрий r ва t рационал сонлар орасида $\frac{r+t}{2}$ рационал сон бор эканлигини кўрсатади. $\frac{r+t}{2}$ сонни s билан белгилаб, r ва s сонлар орасида жойлашган $\frac{r+s}{2}$ ҳамда s ва t орасида жоёлашган $\frac{s+t}{2}$ рационал сонлар борлигини кўрамиз:

$$r < \frac{r+s}{2} < \frac{r+t}{2} < \frac{s+t}{2} < t.$$

Бу жараённи исталганча давом эттириш йўли билан ихтиёрий r ва t рационал сонлар орасида чексиз кўп рационал сонлар борлиги аниқланади. Мана шу хосса рационал сонлар тўплами Q нинг зичлик хоссаси дейилади.

3. Тўғри чизиқнинг хоссалари. Сонлар ўқи. Биз ушбу пунктда тўғри чизиқнинг хоссаларини келтирамиз. l — тўғри чизиқ, M эса шу тўғри чизиқдаги нуқта бўлсин.

1°. Тартибланганлик хоссаси. Икки турли M ва P ($M \in l$, $P \in l$) нуқталардан бири иккинчисига нисбатан чапда жойлашган.

2°. Чега расизлик хоссаси. Ҳар қандай $M \in l$ нуқта учун l тўғри чизиқда шундай P ва S нуқталар топиладики, булардан бири M нуқтадан чапда, иккинчиси эта M нуқтадан ўнгда жойлашган бўлади.

3. Зичлик хоссаси. Ҳар қандай икки турли M ва P ($M \in l$, $P \in l$) нүкталар учун камида шундай битта S нүқта ($S \in l$) топилады, бу нүқта M ва P нүкталар орасида жойлашган бўлади.

Тўғри чизиқнинг кейинги хоссасини ифодалашдан аввал тўғри чизиқ нүкталари тўпламида бажарилган кесимни таърифлаймиз.

2.1-та ёриф. Гўғри чизиқнинг барча нүкталари тўплами L ни шундай иккита \mathcal{M} ва \mathcal{P} тўпламларга ажратилсан, бунда қўйидаги

$$1) \mathcal{M} \neq \emptyset, \mathcal{P} \neq \emptyset,$$

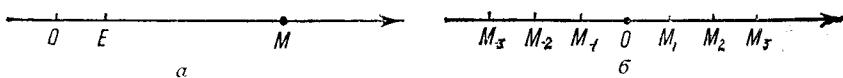
$$2) \mathcal{M} \cup \mathcal{P} = L,$$

3) $\forall M \in \mathcal{M}, \forall P \in \mathcal{P}$ (M нүқта P нүқтадан чапда жойланган) шартлар бажарилса, у ҳолда \mathcal{M} ва \mathcal{P} тўпламлар L тўпламда кесим бажаради дейилади ва $(\mathcal{M}, \mathcal{P})$ каби белгиланади.

4°. Узлуқизлик хоссаси. Тўғри чизиқ нүкталари тўплами L да бажарилган ҳар қандай $(\mathcal{M}, \mathcal{P})$ кесим ягона M нүқтани аниқлаб, бу нүқта ёки \mathcal{M} тўпламнинг энг ўнг нүқтаси ёки \mathcal{P} тўпламнинг энг чап нүқтаси бўлади.

Тўғри чизиқдаги ихтиёрий икки M ва P нүкталарни олайлик. M нүқта P нүқтадан чапда ётсан. Тўғри чизиқнинг M ва P ҳамда улар орасидаги барча нүкталаридан иборат тўплам кесма деб аталади ва MP каби белгиланади. Бунда M нүқта MP кесманинг чап учи, P нүқта эса шу кесманинг ўнг учи дейилади.

Тўғри чизиқда икки MP ва $M'P'$ кесма берилган бўлсин. Агар MP кесмани тўғри чизиқ бўйлаб сурисида M нүқта M' нүқта, P нүқта P' нүқта устига тушса (бунда M билан P орасидаги нүкталар M' билан P' орасидаги нүкталар устига тушади), у ҳолда MP кесма $M'P'$ кесмага тенг дейилади.



14-чизма

l тўғри чизиқ ва бу тўғри чизиқда ихтиёрий нүқта олайлик (14-а чизма). Бу нүқтани O ҳарфи билан белгилаймиз. O нүқта (бошланғич нүқта) тўғри чизиқни икки қисмга — икки нурга ажратади. Бу нурлардан бирининг йўналишини мусбат, иккинчисиникини эса манфий деб келишиб оламиз. Одатда O нүқтадан ўнг томондаги нурни мусбат йўналишида, чап томондаги нурни эса манфий йўналишида олинади. Шунингдек, масштаб кесмаси OE ни (бу кесманинг узуилиги 1 га теиг) тайинлаймиз. Бундай тўғри чизиқ сонлар ўқи деб аталади.

Равшанини, сонлар ўқидаги ҳар бир M нүқта шу ўқда OM (ёки MO) кесмани ҳосил қиласди.

4. Рационал сонларни геометрик тасвирлаш. а) Бутун сонларни геометрик тасвирлаш. Сонлар ўқини олайлик. Бу ўқнинг бошланғич O нүқтасини ноль сонининг геометрик тасвири деб атаемиз.

Масштаб кесмаси (масштаб бирлиги) OE ни O нүқтадан бошлаб ўнг ва чап томонларга қўямиз. Бу бирлик кесманинг бир учи O нүқтада бўлиб, иккинчи учи эса ўнг томондаги нурда M_1 , чап томондаги нурда эса M_{-1} нүқталарни белгилайди. Шу усулда масштаб бирлигини кетма-кет O нүқтадан ўнг ва чап томонида жойлашган нурларга қўйиб, M_2, M_3, M_4, \dots ва $M_{-2}, M_{-3}, M_{-4}, \dots$ нүқталарни топамиз. Бунда $1, -1$ бутун сонларга M_1, M_{-1} нүқталарни, $2, -2$ сонларга M_2, M_{-2} нүқталарни ва ҳ. к. мос қўйиб, натижада, $1, 2, 3, \dots$ сонларга тўғри чизиқда M_1, M_2, M_3, \dots нүқталар, $-1, -2, -3, \dots$ сонларга эса $M_{-1}, M_{-2}, M_{-3}, \dots$ нүқталар мос келишини кўрамиз. l тўғри чизиқдаги M_1, M_2, M_3, \dots ва $M_{-1}, M_{-2}, M_{-3}, \dots$ нүқталар $1, 2, 3, \dots$, ҳамда $-1, -2, -3, \dots$ бутун сонларнинг геометрик тасвири бўлади (14-б чизма).

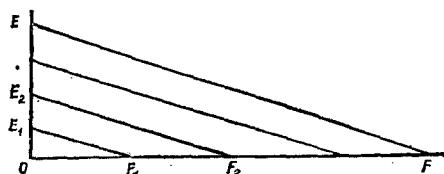
б) Ихтиёрий рационал сонларни геометрик тасвирилаш.

Ихтиёрий рационал сонни геометрик тасвирилашдан аввал бирлик кесма (масштаб бирлиги) нинг $\frac{1}{n}$ ($n \in N$) қисмини топишни айтиб ўтамиз.

Бир катети бирлик кесма OE , иккинчи катети бирлик кесмани n марта қўйишдан ҳосил бўлган OF кесмадан иборат OFE тўғри бурчакли учбуручакни қарайлик (15-чизма). Бу $\triangle OFE$ нинг OF томонидаги $1, 2, 3, \dots, n-1$ сонларни тасвириловчи нүқталар F_1, F_2, \dots, F_{n-1} бўлсин. Натижада OF катетда бир-бирига тенг бўлган n та $OF_1, F_1F_2, \dots, F_{n-1}F$ кесмалар ҳосил бўлади.

Энди OF катетдаги F_1, F_2, \dots, F_{n-1} нүқталардан FE гипотенузага параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бу тўғри чизиқларнинг OE катет билан кесишган нүқталари E_1, E_2, \dots, E_{n-1} бўлсин. Равшанки бу нүқталар OE да $OE_1, E_1E_2, \dots, E_{n-1}E$ кесмаларни ҳосил қиласди. Демак, OE бирлик кесма n та $OE_1, E_1E_2, \dots, E_{n-1}E$ кесмаларга ажралди. Фалес теоремасига кўра бу кесмалар бир-бирига тенг бўлади. Демак, OE_1 кесма OE кесманинг $\frac{1}{n}$ қисмига тенг.

Масштаб кесмаси OE нинг $\frac{1}{n}$ қисми бўлган OE_1 кесмани O нүқтадан бошлаб ўнг ва чап томонларга қўямиз. Бу кесманинг бир учи O нүқтада бўлиб, иккинчи учи эса ўнг томондаги нурда M_1 , чап томондаги нурда эса $M_{-\frac{1}{n}}$ нүқталарни белгилайди. Энди $\frac{1}{n}$ ва $-\frac{1}{n}$



15-чизма

сонларга $M_{\frac{1}{n}}$ ва $M_{-\frac{1}{n}}$ нүқталарни мос қўямиз. OE_1 кесмани O нүқтадан унинг ўнг ва чап томонларидағи нурга кетма-кет m марта қўйиш натижасида $\frac{m}{n}$ ҳамда $-\frac{m}{n}$ рационал сонларни геометрик тасвирловчи $M_{\frac{m}{n}}$ ва $M_{-\frac{m}{n}}$ нүқталарни топамиз. Шу йўл билан l тўғри чизиқда $r = \frac{m}{n} \in Q$ сонни геометрик тасвирловчи нүқта топилади.

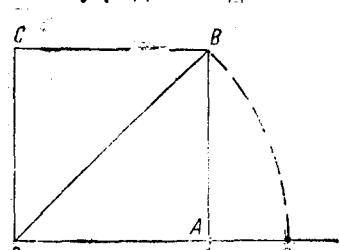
Масалан, ушбу $\frac{5}{4} \in Q$ сонни тасвирловчи нүқтани топиш учун аввал масштаб бирлигини O нүқтадан ўнг томонга бир марта жойлаштириб M_1 нүқта топилади. Сўнgra бу M_1 нүқтадан бошлаб масштаб бирлигининг $\frac{1}{4}$ қисмини қўйиб, $\frac{5}{4}$ сонни геометрик ифодаловчи $M_{\frac{5}{4}}$ нүқтани топамиз.

Шундай қилиб, рационал сонлар тўпламидан олинган ихтиёрий $r = \frac{m}{n}$ ($m \in Z$, $n \in N$) сонга тўғри чизиқда битта M_r нүқта мос келади. Бунда $\frac{m}{n}$ сонга $M_{\frac{m}{n}}$ нүқта, $\frac{m_1}{n_1}$ ($m_1 \in Z$, $n_1 \in N$) сонга $M_{\frac{m_1}{n_1}}$ нүқта мос келиб, $\frac{m}{n} < \frac{m_1}{n_1}$ бўлса, $M_{\frac{m_1}{n_1}}$ нүқта $M_{\frac{m}{n}}$ нүқтадан ўнгда ётади.

Бундан кейин қулайлик учун $r \in Q$ сонга тўғри чизиқда мос келадиган нүқтани M_r , каби белгиламасдан r нүқта деб олаверамиз. Рационал сонга мос келадиган тўғри чизиқдаги нүқта *рационал нүқта* ҳам деб аталади.

5. Рационал сонлар тўпламини кенгайтириш зарур ияти. Биз аввалги пунктда ҳар бир рационал сонга тўғри чизиқда битта нүқта (рационал нүқта) мос қўйилишини кўриб ўтдик. Аммо тўғри чизиқда шундай нүқталар борки, улар бирорта ҳам рационал сонга мос қўйилган бўлмайди. Шуни кўрсатайлик.

Томони бир бирликка тенг бўлган $OABC$ квадратни қарайлик (16-чизма). Бу квадратнинг диагонали OB нинг узунлиги $\sqrt{2}$ га тенг. Циркулнинг учини O нүктага қўйиб, радиуси OB га тенг бўлган айланга чизайлик. Бу айланга OA томон жойлашган тўғри чизиқни D нүқтада кесади. $OA < OB$ бўлгани учун D нүқта A нүқтадан ўнгда жойлашган бўлади. Равшанки, $OB = OD = \sqrt{2}$ демак, D нүктага $\sqrt{2}$ сон мос келади. $\sqrt{2}$ эса рационал сон эмас. Буни қўйидаги теоремада исботланади.



16. чизма

2.1-теорема. *Рационал сонлар тўплами Q да квадрати 2 га тенг бўлган рационал сон мавжуд эмас.*

Исбот. Тескарисини фараз қиласлик, яъни Q тўпламда шундай қисқар-

майдиган $\frac{p}{n}$ ($p \in Z$, $n \in N$) каср күринишда ёзиладиган рационал сон борки, бу сон учун

$$\left(\frac{p}{n}\right)^2 = 2 \quad (2.1)$$

тенглик ўринли бўлсин. (2.1) тенгликни

$$p^2 = 2n^2 \quad (2.2)$$

каби ёзиб оламиз. Бундан p жуфт сон эканлиги кўринади. Демак, $p = 2m$ ($m \in Z$), p инг қийматини (2.2) га қўйиб $n^2 = 2m^2$ тенгликни ҳосил қиласмиз. Бу эса n соннинг ҳам жуфт сон эканлигини кўрсатади. Демак, юқоридаги фараздан p ва n сонлар жуфт сонлнги келиб чиқади. Бинобарин, улар учун 2 умумий кўпайтувчи. Бу эса $\frac{p}{n}$ соннинг қисқармайдиган каср эканига зид. Бу эса теоремани исботлайди.

Шундай қилиб, тўғри чизиқда олинган ҳар бир нуқтага Q тўпламда унга мос келадиган рационал сон мавжуд бўлавермас экан.

Агар тўғри чизиқни чизиб, унда рационал сонларга мос нуқталарни бирор рангга (масалан, қизил рангга) бўясак, шу тўғри чизиқда бўялмай қолган нуқталарни (жумладан $\sqrt{2}$ сонга мос нуқтани) ҳам кўрамиз.

Равшанки, рационал сонлар тўпламида $m + x = n$, $m \in Q$, $n \in Q$ ва $px = q$, $0 \neq p \in Q$, $q \in Q$ тенгламалар доим ечимга эга, аммо $x^2 - a = 0$, $a \in Q$ тенглама Q тўпламда доим ечимга эга бўлавермайди.

Масалан, $a = 4$ бўлганда $x^2 - 4 = 0$ тенглама $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ ечимларга эга, $a = 2$ бўлганда эса 2.1- теоремага кўра $x^2 - 2 = 0$ тенглама Q тўпламда ечимга эга эмас. Бундан рационал сонлар тўпламини кенгайтириш зарурити келиб чиқади. Демак, рационал сонлар тўпламига янги типдаги сонларни қўшиб, уни шундай кенгайтириш керакки, бир томондан, сонларнинг бу кенгайтирилган тўпламида квадрат диагоналини ҳисоблаш, $x^2 - 2 = 0$ тенгламани ечиш ва шу каби кўпгина масалаларни ҳал қилиш мумкин бўлсин, иккинчи томондан эса, рационал сонлар тўпламининг барча хоссалари сонларнинг кенгайтирилган тўпламида ҳам ўринли бўлсин.

Рационал сонлар тўпламини кенгайтиришда бир-бирига эквивалент бўлган бир нечта усууллар мавжуд (Коши усули, Кантор усули, Вейерштрасс усули ҳамда Дедекинд усули). Биз қўйида Дедекинд усулини келтирамиз.

3-§. Рационал сонлар тўпламида кесим

1. Кесим. Иррационал сон таърифи. Q — барча рационал сонлар тўплами бўлсин. Бу тўпламда бажарилган кесим тушунчаси билан ташнишайлик.

2. 2-таъриф. Рационал сонлар тўплами Q шундай A ва A' тўпламларга ажратилсан, бунда

- 1) $A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset,$
- 2) $A \cup A' = Q,$
- 3) $\forall a \in A, \forall a' \in A' \Rightarrow a < a'$

шартлар қаноатлантирилса, A ва A' тўпламлар Q тўпламда кесим бажаради деб айтлади.

Кесим таърифидаги биринчи шарт A ва A' тўпламларининг бўш эмаслигини, иккинчи шарт ҳар бир рационал сон ёки A тўпламга ёки A' тўпламга тегишли бўлишини ва учинчи шарт эса A тўпламга тегишли бўлган ҳар бир рационал a сон A' тўпламга тегишли бўлган ҳар қандай a' рационал сондан кичик эканлигини англатади.

Одатда, кесим (A, A') каби белгиланиб, A тўплам кесимнинг қуийи синфи, A' тўплам эса кесимнинг юқори синфи деб аталади.

Кесим таърифидан бевосита қуийдаги хулосалар келиб чиқади:

1°. (A, A') кесим Q тўпламда бажарилган кесим бўлиб, $a \in A$ бўлса, $a_1 < a$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий a_1 рационал сон ҳам кесимнинг қуийи синфи A га тегишли бўлади.

2°. (A, A') кесим Q тўпламда бажарилган кесим бўлиб, $a' \in A'$ бўлса, $a'_1 > a'$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий a'_1 рационал сон ҳам кесимнинг юқори синфи A' га тегишли бўлади.

Энди Q тўпламда бажарилган кесимларга мисоллар келтирайлик.

Мисоллар

1. 5 ва ундан кичик бўлган барча рационал сонлардан иборат тўплам A , 5 дан катта бўлган барча рационал сонлар тўплами A' бўлсин: $A = \{r: r \in Q, r \leq 5\}$, $A' = \{r: r \in Q, r > 5\}$. Бу A ва A' тўпламлар учун 2. 1-таърифдаги учала шартнинг бажарилашини кўриш қийин эмас. Демак, бундай тузилган A ва A' тўпламлар Q да кесим бажаради.

2. A тўплам деб 1 ва 2 рационал сонлар орасидаги барча рационал сонлардан иборат бўлган $A = \{r: r \in Q, 1 < r < 2\}$ тўпламни, A' тўплам деб 1 ва ундан кичик бўлган барча рационал сонлар ҳамда 2 ва ундан катта бўлган барча рационал сонлардан иборат бўлган

$$A' = \{r: r \in Q: r \leq 1\} \cup \{r: r \in Q: r \geq 2\}$$

тўпламни олайлик. Равишанки, $A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset$ ҳамда $A \cup A' = Q$. Аммо A тўпламдан олинган ҳар бир рационал сон A' тўпламдан олинган исталган рационал сондан ҳар доим кичик бўлмаганлиги сабабли бундай тузилган A ва A' тўпламлар Q тўпламда кесим бажармайди (кесим таърифидаги учинчи шарт бажарилмайди).

3. Ушбу $A = \{r: r \in Q, r \leq 1\}$, $A' = \{r: r \in Q, 1 < r \leq 5\}$ тўпламларни олайлик. Бунда $A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset$ бўлиб, A тўпламнинг ҳар бир элементи A' тўпламнинг исталган элементидан кичикдир. Аммо $A \cup A' \neq Q$ бўлгани учун бу A ва A' тўпламлар Q да кесим бажармайди (кесим таърифидаги иккинчи шарт бажарилмайди).

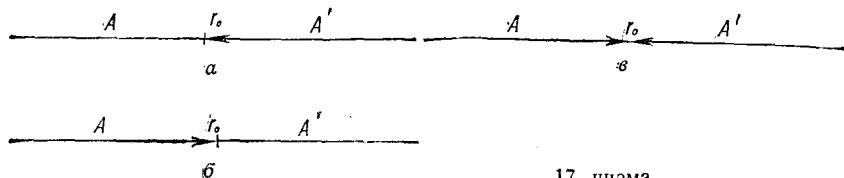
4. Бирор $r_0 \in Q$ сонни олайлик. r_0 ва ундан кичик барча рационал сонлардан иборат бўлган $A = \{r: r \in Q, r \leq r_0\}$ ва r_0 сондан катта барча рационал сонлардан иборат $A' = \{r: r \in Q, r > r_0\}$ тўпламларни кўрайлик. Бу тўпламлар Q да кесим бажёришини кўрсатамиз. Олинган $r_0 \in Q$ сон A тўпламга тегишли эди. Демак, $A \neq \emptyset$. Энди

$$r_0 \in Q, r_0 + 1 \in Q \text{ ва } r_0 + 1 > r_0$$

бўлишидан $r_0 + 1 \in A'$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $A' \neq \emptyset$. Равшанки, $A \cup A' = \{r: r \in Q, r \leq r_0\} \cup \{r: r \in Q, r > r_0\} = \{r: r \in Q\} = Q$. Бу кесим таърифининг иккинчи шарти бажарилишини кўрсатади. Агар $\forall a \in A, \forall a' \in A'$ бўлса, ундан $a \leq r_0, a' > r_0$, яъни $a \leq r_0 < a'$ экани келиб чиқади. Демак, $a < a'$ ва кесим таърифининг 3-шарти ҳам бажарилади. Шундай қилиб, A ва A' тўпламлар Q да кесим бажаради. Одатда бу кесимни

$$r_0 = (A, A')$$

каби ҳам белгиланади. Бу кесимнинг қўйи синфи A тўпламда (унинг элементлари орасида) энг катта элемент мавжуд бўлиб, у r_0 эканлиги равшандир. Аммо кесимнинг юқори синфи A' тўпламда эса (унинг элементлари орасида) энг кичик элемент мавжуд эмас. Бу ҳолни исботлаш учун тескарисини, яъни юқоридаги $r_0 = (A, A')$ кесимнинг юқори синфи A' элементлари орасида энг кичиги мавжуд бўлсин деб фараз қиласиз. Уни r^* деб белгилайлик; $r^* \in A'$. Кесим таърифига кўра $r_0 < r^*$ бўлади. Рационал сонлар тўплами зич тўплам бўлгани учун шундай t рационал сон мавжудки, $r_0 < t < r^*$ бўлади. A' нинг тузилишига биноан топилган t учун $t \in A'$ бўлиши керак. Демак, A' да r^* дан кичик бўлган t сон мавжуд. Ваҳоланки, биз r^* ни A' нинг энг кичик элементи деб олган эдик. Бу зиддият A' тўплам элементлари орасида энг кичиги мавжуд эмаслигини исботлайди. Бундай кесимларни қўйи синфи ёпиқ, юқори синфи очиқ кесимлар ва r_0 сонни эса A тўпламни ёпувчи элемент деб аталади. (17-а чизма).



17- чизма

5. r_0 рационал сондан кичик барча рационал сонлардан иборат $A = \{r: r \in Q, r < r_0\}$ ва r_0 ва ундан катта барча рационал сонлардан иборат $A' = \{r: r \in Q, r \geq r_0\}$ тўпламларни кўрайлик.

Юқоридә келтирилган 4- мисолдагидең күрсатыш мүмкінки, Q да бу A ва A' түпламалар (A, A') кесим бажаради. Бу ҳолда (A, A') кесимнинг қуйи синфи A түпламда (унинг элементлари орасида) энг катта элемент мавжуд эмес, кесимнинг юқори синфи A' түпламнинг элементлари орасида энг кичик элемент мавжуд. Қуйи синф A очиқ, юқори синф A' эса ёпиқ бўлиб, r_0 рацонал сон эса түпламни ёпувчи элемент бўлади (17-б чизма).

6. Барча манфий рацонал сонлар, ноль сони ва квадрати 2 дан кичик бўлган мусбат рацонал сонлардан иборат түплам A , квадрати 2 дан катта бўлган барча мусбат рацонал сонлардан иборат түплам A' бўлсин:

$$A = \{r: r \in Q, r \leq 0\} \cup \{r: r \in Q, r > 0, r^2 < 2\}, \\ A' = \{r: r \in Q, r > 0, r^2 > 2\}.$$

Бу A ва A' түпламларнинг туэилишларидан 2.2-таърифнинг барча шартлари қаноатлантирилади. Демак, A ва A' түпламлар Q да (A, A') кесим бажаради. Энди шу кесимнинг қуйи синфи A түпламнинг элементлари орасида энг катта элемент, шунингдек юқори синф A' түпламнинг элементлари орасида энг кичик элемент мавжуд эмаслигини кўрсатайлик. $r_1 > 1$ ва $r_1 \in A$ бўлсин. Унда шу r_1 учун $r_1^2 < 2$ бўлиши равшан. r_1 рацонал сон билан бирга ушбу $r_2 = \left(r_1 + \frac{2 - r_1^2}{2r_1 + 1}\right)$ рацонал сонни ҳам қарайлик, бунда $0 < \frac{2 - r_1^2}{2r_1 + 1} < 1$. Шунинг учун $r_2 > r_1$. Содда ҳисоблашлар кўрсатадики, $r_2^2 < 2$.

Ҳақиқатан ҳам,

$$r_2^2 = \left(r_1 + \frac{2 - r_1^2}{2r_1 + 1}\right)^2 = r_1^2 + 2r_1 \cdot \frac{2 - r_1^2}{2r_1 + 1} + \left(\frac{2 - r_1^2}{2r_1 + 1}\right)^2 < r_1^2 + 2r_1 \cdot \frac{2 - r_1^2}{2r_1 + 1} + \\ + \frac{2 - r_1^2}{2r_1 + 1} = r_1^2 + \frac{2 - r_1^2}{2r_1 + 1}(2r_1 + 1) = r_1^2 + 2 - r_1^2 = 2.$$

Демак, $r_1 < r_2 \in A$, яъни $r_1 \in A$ сондан катта бўлган r_2 рацонал сон ҳам A түпламга тегишли бўлади.

Шундай қилиб, иктиёрий $r_1 \in A$ рацонал сон берилганда ҳам, камида битта, шундай r_2 рацонал сон топилар эканки, у $r_2 > r_1$ ва $r_2 \in A$ бўлади.

Бу эса A түпламнинг элементлари орасида энг каттаси мавжуд эмаслигини кўрсатади.

Энди (A, A') кесимнинг юқори синфи A' түпламнинг элементлари орасида энг кичини мавжуд эмаслигини исботгтаймиз. $r'_1 \in A'$ бўлсин. Демак, $r'_1 > 0$ ва $r'^2_1 > 2$. Ушбу $r'_2 = r'_1 - \frac{r'_1 - 2}{2r'^2_1}$ рацонал сонни қарайлик. Бунда $\frac{r'^2_1 - 2}{2r'_1} > 0$, шунинг учун

$$r'_2 = r'_1 - \frac{r'^2_1 - 2}{2r'_1} = \frac{r'^2_1 - 2}{2r'_1} < r'_1$$

яъни $r'_2 < r'_1$. Шу r'_2 сон учун $r'^2_2 > 2$ тенгсизлик ўринли. Ҳақиқатан,

$$r'^2_2 = \left(r'_1 - \frac{r'^2_1 - 2}{2r'_1} \right)^2 = r'^2_1 - 2r'_1 \cdot \frac{r'^2_1 - 2}{2r'_1} + \left(\frac{r'^2_1 - 2}{2r'_1} \right)^2 = r'^2_1 - \\ - \left(r'^2_1 - 2 \right) + \left(\frac{r'^2_1 - 2}{2r'_1} \right)^2 > r'^2_1 - \left(r'^2_1 - 2 \right) = 2.$$

Демак, $r'_1 > r'_2 \in A'$. Шундай қилиб, $r'_1 \in A'$ сондан қичик бўлган r'_2 рационал сон ҳам A' тўпламга тегишли бўлади.

Шундай қилиб, ихтиёрий $r'_1 \in A'$ рационал сон берилганда ҳам, камида битта, шундай r'_2 рационал сон топилар эканки, у $r'_2 < r'_1$ ва $r'_2 \in A'$ бўлади.

Бу эса, A' тўпламнинг элементлари орасида энг кичиги мавжуд эмаслигини англатади.

Шундай қилиб, кўрилаётган мисолда (A, A') кесим учун қўйи синф A ҳам, юқори синф A' ҳам очиқ бўлиб, A ва A' тўпламларнинг ёпувчи элементлари мавжуд эмас (17-в чизма).

Рационал сонлар тўплами Q да қўйи синф — A тўпламнинг элементлари орасида энг каттаси, юқори синф — A' тўпламнинг элементлари орасида энг кичиги мавжуд бўлган (A, A') кесим мавжуд эмас. Бу таъдиқни исботлашмиз.

Фараз қиласлик, Q тўпламда шундай (A, A') кесим мавжуд бўлсинки, a_0 сони A тўпламнинг энг катта элементи, a'_0 эса A' тўпламнинг энг кичик элементи бўлсин. У ҳолда кесим таърифига кўра $a_0 < a'_0$ тенгсизлик ўринли бўлади. Рационал сонлар тўпламида ушбу

$$a_0 < \frac{a_0 + a'_0}{2} < a'_0$$

тенгсизликлар ўринли. Бунда $\frac{a_0 + a'_0}{2}$ рационал сон A тўпламга тегишли эмас, чунки a'_0 сон A' тўпламнинг энг катта элементи ва $a_0 < \frac{a_0 + a'_0}{2}$. Шунингдек, $\frac{a_0 + a'_0}{2}$ рационал сон A' тўпламига ҳам тегишли эмас, чунки a'_0 сон A' тўпламнинг энг кичик элементи ва $\frac{a_0 + a'_0}{2} < a'_0$. Демак, $\frac{a_0 + a'_0}{2}$ рационал сон A тўпламга ҳам, A' тўпламга ҳам тегишли бўлмайди. Бу эса кесим таърифига зиддир. Шундай қилиб, бир вақтда қўйи синфида энг катта элемент, юқори синфида эса энг кичик элемент мавжуд бўлган кесим мавжуд эмас.

Рационал сонлар тўплами Q да бажарилган кесим таърифи ва

кесимга келтирилган мисоллардан қуйидаги холосани көдтириб чиқарып мүмкін. Q түпламда бажарилған (A, A') кесим фақат уч турли бўлиши мүмкін:

1) Кесимнинг қуи синфи A да энг катта элемент (r_0 рационал сон) мавжуд, кесимнинг юқори синфи A' да эса энг кичик элемент мавжуд эмас. Бунда r_0 рационал сон қуи синф A нинг ёпувчи элементи бўлади;

2) Кесимнинг қуи синфи A да энг катта элемент мавжуд эмас, кесимнинг юқори синфи A' да эса энг кичик элемент (r'_0 рационал сон) мавжуд. Бунда r_0 рационал сон юқори синф A' нинг ёпувчи элементи бўлади;

3) Кесимнинг қуи синфи A да энг катта элемент мавжуд эмас, кесимнинг юқори синфи A' да энг кичик элемент мавжуд эмас. Бунда қуи синф A да, юқори синф A' да ёпувчи элементлар мавжуд эмас.

Биринчи ва иккинчи тур кесимларда уларнинг қуи юқори синфлари ёпиқ бўлиб, ёпувчи элементларни бир синфдан иккинчи синфга ўтказиб, ҳар доим бир турдаги кесимга — битта синфи очиқ, иккинчи синфи эса ёпиқ бўлган кесимга келтириш мүмкін. Биз бундан буён биринчи ва иккинчи тур кесимлар ўрнига бир тур кесимни, унда қуи синфда энг катта элемент мавжуд бўлмаган (очиқ синф), юқори синфда эса энг кичик элемент мавжуд бўлган (ёпиқ синф) кесимни қараймиз. Бундай кесимларни биринчи тур кесим ёки рационал кесим деб атаемиз.

Ихтиёрий $r \in Q$ рационал сон учун Q түпламда ҳар доим (A, A') кесим бажарилиши мүмкінки, бу кесим биринчи тур (рационал) кесим бўлади, бунда A түплам очиқ синф, A' түплам ёпиқ синф ёпувчи элемент r соннинг ўзи бўлади. Демак, Q түпламда олинган ҳар бир рационал сонга Q да бажарилған биринчи тур кесим мос келади.

Аксинча, Q түпламда (A, A') кесим бажарилған бўлиб, кесимнинг қуи синфи A очиқ, юқори синфи A' ёпиқ ҳамда ёпувчи элемент r бўлса, бу кесим r рационал сонни ифодалайди.

Демак, Q да бажарилған ҳар бир рационал кесим битта рационал сонни аниқлайди.

Шундай қилиб, Q түплам элементлари билан Q түпламда бажарилған рационал кесимлар түпламининг элементлари ўзаро бир қийматли мослиқда бўлади.

Рационал сонлар түплами Q да бажарилған учинчи хил кесим — қуи синф ҳам, юқори синф ҳам очиқ бўлган кесим иккинчи тур кесим ёки иррационал кесим дейилади.

2. З-таъриф. Рационал сонлар түплами Q да бажарилған иккинчи тур кесим иррационал сонни аниқлайди дейилади. *

Иррационал сонлар түпламини U ҳарфи билан белгилайлик.

* Ҳар бир иррационал сон чексиз даврий бўлмаган ўнли каср кўринишида ёзилишини мазкур бобнинг 9-§ ида исботлаймиз.

4-§. Ҳақиқий сонлар. Ҳақиқий сонлар түпламининг хоссалари

Рационал сонлар түплами Q да бажарилган кесим фақат икки тур — рационал ёки иррационал бўлиб, рационал кесим рационал сонни, иррационал кесим эса иррационал сонни аниқлашини биз юқорида кўрдик.

2. 4-тада ҳарфи. Рационал ҳамда иррационал сонлар битта умумий ном билан ҳақиқий сонлар деб аталади.

Барча ҳақиқий сонлар түпламини R ҳарфи билан белгиланади. Таърифга кўра $R = Q \cup U$.

Шундай қилиб, рационал сонлар түплами Q ни ҳақиқий сонлар түплами R гача кенгайтилди. Ҳақиқий сонлар түплами R нинг хоссаларини қараймиз.

1. Ҳақиқий сонлар түпламининг тартибланганлиги. Аввал ҳақиқий сонлар түпламида тенглик, катта ва кичик тушунчаларини киритамиз. Айтийлик x ва y ҳақиқий сонлар берилган бўлсин: $x \in R$, $y \in R$. Маълумки, x р бир ҳақиқий сон рационал сонлар түплами Q да бажарилган кесим билан аниқланади. Бинобарин, x ва y ларни аниқловчи (A, A') ва (B, B') кесимлар берилган:

$$x = (A, A'), y = (B, B').$$

Бу кесимларнинг қуёйи синфлари A , B лар учун ёки $A = B$ (бу ҳолда, албатта, $A' = B'$ бўлади) ёки $A \neq B$ (бу ҳолда $A' \neq B'$) муносабатлардан бирни ўринли бўлади.

Агар $A = B$ бўлса, (A, A') ва (B, B') кесимлар бир-бирига тенг дейилади: $(A, A') = (B, B')$. Бу ҳолда улар аниқлаган x ва y ҳақиқий сонлар ҳам бир-бирига тенг дейилади: $x = y$. (A, A') ва (B, B') кесимларда $A \neq B$ бўлса, $A \subset B$ (бунда $A' \supset B'$ бўлади) ёки $A \supset B$ (бунда $A' \subset B'$ бўлади) бўлади.

Агар $A \subset B$ бўлса, (A, A') кесим (B, B') кесимдан кичик дейилади. Ўлар аниқлаган ҳақиқий сон x ҳам ҳақиқий сон y дан кичик деб аталади.

Агар $A \supset B$ бўлса (A, A') кесим (B, B') кесимдан катта дейилади. Бу ҳолда бу кесимлар аниқлаган x ҳақиқий сон ҳам y ҳақиқий сондан катта дейилади: $x > y$.

Шундай қилиб, ихтиёрий икки x ва y ҳақиқий сон берилган бўлса, унда

$$x = y, x < y, x > y$$

муносабатлардан биттаси ва фақат биттаси ўринли бўлади.

Энди $x \in R$, $y \in R$, $z \in R$ сонлар учун ушбу $x < y$, $y < z$ тенгизликлардан $x < z$ тенгизлилик келиб чиқишни исботлаймиз. $x \in R$, $y \in R$, $z \in R$ сонларни аниқловчи кесимлар

$$x = (A, A'), \quad y = (B, B'), \quad z = (C, C')$$

бўлсин. Таърифга асосан

$$x < y \Leftrightarrow A \subset B, y < z \Leftrightarrow B \subset C.$$

Аммо A , B ва C түпламлар орасидаги $A \subset B$, $B \subset C$ муносабатлардан $A \subset C$ келиб чиқади. Бу эса $x < z$ эканлигини билдиради. Демак, ҳақиқий сонлар түплами R тартибланган түплам.

Икки $x \in R$, $y \in R$ ҳақиқий сон орасидаги тенг, катта ва кичик тушунчалари, хусусан, бу сонлар рационал бўлган ҳолда, рационал сонлар орасида, тенг, катта ва кичик тушунчалари билан бир хил бўлади. Масалан, $x, y \in Q$ сонлар Q да бажарилган рационал кесим сифатида $x = (A, A')$, $y = (B, B')$ каби аниқланган бўлиб, улар орасидаги $x < y$ муносабат юқоридагидек кесимлар орасидаги муносабат ёрдамида таърифланган бўлсин, яъни $x < y \Leftrightarrow A \subset B$. Демак, шундай рационал сон r мавжудки, $r \notin A, r \in B$. У ҳолда $r \in A'$. Шунинг учун $x \leqslant r$ бўлади. Шунингдек, $r \in B, y = (B, B')$ бўлганидан эса $r < y$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $x \leqslant r$ ва $r < y$ тенгсизликлар ўринли бўлади.

2. Ҳақиқий сонлар тўпламининг зичлиги. Фараз қилайлик, $x \in R; y \in R$ ва $x < y$ бўлсин. У ҳолда шундай r рационал сон мавжудки, шу сон учун ушбу $x < r < y$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Шуни исботлайлик. Q тўпламда бажарилган (A, A') , (B, B') кесимлар x ва y сонларни аниқласин: $x = (A, A')$, $y = (B, B')$. У ҳолда $x < y$ дан $A \subset B$ келиб чиқади. Демак, B тўпламда шундай рационал сон $r_0 \in B$ мавжудки, $r_0 \notin A$ бўлади: $r_0 \in B$. Унда $r_0 \in A'$ бўлади ва демак, $x \leqslant r_0 < y$ тенгсизлик ўринли бўлади. Иккинчи томондан, $y = (B, B')$, $r_0 \in B$ ва B тўпламнинг элементлари орасида энг каттаси мавжуд эмаслиги сабабли, шундай рационал сон $r \in B$ мавжудки, $r_0 < r$ ва $r < y$ бўлади. Натижада $x \leqslant r_0 < r < y$ тенгсизликларга эга бўламиз. Бундан эса $x < r < y$ эканлигини кўрамиз. Шу усул билан $x \in R, y \in R$ ва $x > y$ бўлганда ҳам $x > r > y$ муносабатларни қаноатлантирувчи рационал сон r мавжуд эканлиги кўрсатилади. Шундай қилиб, ихтиёрий иккита бир- бирiga тенг бўлмаган ҳақиқий сонлар орасида камида битта ҳақиқий сон мавжуд. Бундан эса улар орасида чексиз кўп ҳақиқий сон мавжудлиги келиб чиқади. Демак, R — зич тўплам.

5-§. Ҳақиқий сонлар тўпламининг тўлиқлиги, Дедекинд теоремаси

Агар ҳақиқий сонлар тўплами R да бажарилган кесим тушунчалиси киритилса, рационал сонлар тўплами Q да содир бўлганидек R ни ҳам кенгайтириш зарурияти содир бўладими ёки йўқми деган табиий савол туғилади. Қуйида биз бундай ҳолат бўлмаслигини, яъни R да бажарилган ҳар қандай кесим фақат биринчи тур кесим бўлишини кўрсатамиз. Одатда бу хосса ҳақиқий сонлар тўплами R нинг тўлиқлик хоссаси дейилади. Даставвал R да бажарилган кесим тушунчалиси билан танишайлик.

2. 5-таъриф. Ҳақиқий сонлар тўплами R шундай E ва E' тўпламларга ажратилсанки, унда

- 1) $E \neq \emptyset, E' \neq \emptyset,$
- 2) $E \cup E' = R,$
- 3) $\forall x \in E, \forall x' \in E' \Rightarrow x < x'$

шартлар бажарылса, E ва E' түпламлар R түпламда кесим бажаради дейилади ва (E, E') каби белгиланади (2. 1-таърифга қаранды).

Анвалгидек E түплам кесимнинг қуийи синфи, E' түплам эса кесимнинг юқори синфи дейилади.

Мисоллар

1. Ушбу $x_0 \in R$ сонни олиб, x_0 сон ва ундан кичик бўлган барча ҳақиқий сонлар түпламини E : $E = \{x: x \in R, x \leq x_0\}$, x_0 сондан катта бўлган барча ҳақиқий сонлар түпламини $E': E' = \{x: x \in R, x > x_0\}$ деб олайлик. Натижада R түплами E ва E' түпламларга ажралади. E ва E' түпламларнинг тузилишидан улар учун 2. 5-таъриф шартларининг бажарилишини кўриш қийин эмас. Демак, E ва E' түпламлар R түпламда кесим бажаради. Бу (E, E') кесимда унинг қуийи синфи — E түплам элементлари орасида энг катта элемент мавжуд бўлиб, у x_0 га тенгдир. Аммо бу ҳолда кесимнинг юқори синфи E' элементлари орасида энг кичик элемент мавжуд эмас. (Бу тасдиқни 3-§ нинг 4-мисолидаги каби исботлаш мумкин.) Одатда бундай кесимда E түплам ёпиқ синф, ундаги энг катта элемент ёпувчи элемент, E' түпламни эса очиқ синф дейилади.

2. Ушбу $x_0 \in R$ сондан кичик бўлган барча ҳақиқий сонлар түплами E : $E = \{x: x \in R, x < x_0\}$, x_0 сон ва ундан катта бўлган барча ҳақиқий сонлар түплами $E': E' = \{x: x \in R, x \geq x_0\}$ бўлсин. Бу E ва E' түпламлар R да (E, E') кесим бажариши равшандир. E ва E' түпламларнинг тузилишидан қуийи синф E элементлари орасида энг катта элемент мавжуд эмас, юқори синф E' элементлари орасида эса энг кичик элемент мавжуд (у x_0 га тенг) бўлиши кўринади. Бу ҳолда E түплам очиқ синф, E' түплам эса ёпиқ синф, ундаги энг кичик элемент ёпувчи элемент дейилади.

3. Ҳақиқий сонлар түплами R да қуийи синф — E түпламнинг элементлари орасида энг катта, юқори синф — E' түпламнинг элементлари орасида энг кичик элемент бор бўлган (E, E') кесим мавжуд эмас. Буни исботлайлик.

(E, E') кесим R да бажарилган кесим бўлиб, унда E нинг энг катта элементи x_0 ва E' нинг энг кичик элементи y_0 бўлсин. Кесим таърифига кўра $x_0 < y_0$ бўлиб, R түпламнинг зичлик хоссасидан $x_0 < r_0 < y_0$, $r_0 \in R$ экани келиб чиқади. Кейинги тенгизликлардан кўринадики, r_0 сон E га тегишли эмас, чунки $x_0 < r_0$ ва x_0 сон E да энг каттә элемент. Шунингдек, $r_0 < y_0$ ва y_0 сон E' түпламнинг энг кичик элементи эканидан r_0 соннинг E' га тегишли эмаслиги келиб чиқади. Шундай қилиб, $r_0 \in R$ сон E ва E' түпламларнинг бирортасига ҳам тегишли бўлмайди. Бундан E ва E' түпламлар R да кесим бажармаслиги келиб чиқади. Бу эса юқоридаги фаразга зид. Тасдиқ исботланди.

Демак, R түпламда бир вақтда қуийи ҳамда юқори синфлари ёпиқ бўлган кесим мавжуд эмас.

Юқорида келтирилган мисоллар R түпламда (E, E') кесим бажарилганда қуийидаги икки ҳолдан бири бўлиши мумкин эканини кўрсатади:

1) (E, E') кесимнинг қуий синфи — E да энг катта сон мавжуд, юқори синфи — E' да эса энг кичик сон мавжуд эмас.

2) (E, E') кесимнинг қуий синфи — E да энг катта сон мавжуд эмас, юқори синфи — E' да эса энг кичик сон мавжуд.

2.2-төрөм (Дедекинд теоремаси). Ҳақиқий сонлар түплами R да бажарилган ҳар қандай (E, E') кесим учун фатшат қуийидаги икки ҳолдан бирни бўлиши мумкин:

а) кесимнинг қуий синфи — E да энг катта элемент мавжуд, юқори синфи — E' да эса энг кичик элемент мавжуд эмас;

б) кесимнинг қуий синфи — E да энг катта элемент мавжуд эмас, юқори синфи — E' да эса энг кичик элемент мавжуд.

Исбот. Фараз қиласайлик, R да бирор (E, E') кесим бажарилган бўлсин. Демак, E ва E' түпламлар учун 2.5-таърифнинг шартлари бажарилади.

E түпламдан барча рационал сонларни олиб, улардан A түплами, E' түпламдан барча рационал сонларни олиб, улардан A' түплами тузамиз. Равшанки, $A \subset E$, $A' \subset E'$. Бу тузилган A ва A' түпламлар рационал сонлар түплами Q да (A, A') кесим бажарилшини кўрсатамиз. Аввало A ва A' түпламларнинг бўш эмаслигини исботлайлик. $E \neq \emptyset$ бўлгани учун $\exists x_0 \in R$, $x_0 \in E$. Агар x_0 рационал сон бўлса, $x_0 \in A$ бўлиб, $A \neq \emptyset$ бўлади. Агар x_0 иррационал сон бўлса, таърифига кўра у Q түпламдаги иккинчи тур кесим билан аниқланади. Демак, $x_0 = (A_0, B_0)$. Бунда $A_0 \neq \emptyset$ бўлгани сабабли $\exists r_0 \in Q$, $r_0 \in A_0$ бўлади. Аммо $r_0 < x_0$ ва $x_0 \in E$ бўлганидан эса, $r_0 \in A$ экани келиб чиқади. Демак, $A \neq \emptyset$. Худди шунингдек $A' \neq \emptyset$ экани ҳам кўрсатилади. $R = E \cup E'$ дан ва A, A' түпламларнинг тузилишига кўра $A \cup A' = Q$ бўлади.

(E, E') кесим R да бажарилган кесимлигидан ва $A \subset E$, $A' \subset E'$ дан мос равишда A ва A' түпламларга тегишли a ва a' элементлар учун $a < a'$ тенгсизлик ўринли. Шундай қилиб, Q түпламда (A, A') кесим бажарилганлиги кўрсатилди. Бу кесим бирор ҳақиқий α сонни (рационал ёки иррационал сонни) аниқлайди: $\alpha = (A, A')$. Демак, $\alpha \in R$. Қесимнинг 2) шартига кўра α сон ёки E түпламга ёки E' түпламга тегишли бўлади. $\alpha \in E$ бўлсин. Энди α сон E түплам элементлари орасида энг каттаси эканини исботлаймиз. Тескарисини фараз қиласайлик, яъни α сон E түплам элементлари орасида энг каттаси бўлмасин. Унда $\exists x \in E$, $\alpha < x$ бўлади. Ҳақиқий сонлар түплами зичлигига кўра шундай r рационал сон мавжудки, $\alpha < r < x$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Ушбу $x \in E$ ва $r < x$ муносабатлардан $r \in E$ ва демак, $r \in A$ келиб чиқади. Аммо $\alpha = (A, A')$ кесимнинг қуий синфи — A түпламдаги r сон бу (A, A') кесим аниқлаган α сондан катта бўлиши мумкин эмас. Бу зиддиятлик. Демак, α сон E түплам элементлари орасида энг каттаси бўлади.

Шу мулоҳаза билан $\alpha \in E'$ бўлганда α сон E' түплам элементлари орасида энг кичиги экани кўрсатилади. Теорема исбот бўлди.

Дедекинд теоремасига кўра ҳақиқий сонлар түплами R да бажарилган ҳар қандай (E, E') кесим учун икки ҳол бўлади. Бунда E ёки E' синфларнинг ёпувчи элементларини биридан иккинчисига ўтказиши йўли билан битта ҳолга, кесимни бир тур кесимга келти-

риш мумкин. Биз R да бажарилган ҳар қандай кесим (E, E') да кесимнинг қуи синфи — E да энг катта элемент йўқ, юқори синф E' да эса энг кичик элемент бор бўлган кесим деб қ’раймиз. Одатда бундай кесимни *биринчи тур кесим* деб аталади. Бу эса Дедекинд теоремасини қуидагида ҳам ифодалаш мумкинлигини кўрсатади.

2.3-теорема. R да бажарилган ҳар қандай (E, E') кесим ягона ҳақиқий сонни аниқлайди.

$\forall \alpha \in R$ сон ёрдамида ҳар доим R да $\alpha = (E, E')$ кесим бажариш мумкинки, бунда ҳақиқий сон α кесимнинг юқори синфи E' га тегишили бўлиб, унинг энг кичик элементи бўлади. Аксинча, (E, E') кесим R да бажарилган бўлсин. 2.3-теоремага кўра бу кесимнинг юқори синфи E' да энг кичик элемент мавжуд бўлиб, кесим шу сонни ифодалайди. Демак, ҳақиқий сонлар тўплами R шу тўпламда бажарилган кесимлар тўплами билан ўзаро бир қийматли мосликда бўлади.

6- §. Сонли тўпламларнинг чегаралари

1. Сонли тўпламлар. Биз аввалги параграфларда ҳақиқий сонлар тўплами R ни ва унинг хоссаларини ўргандик. Математик анализ курсида асосан сонли тўпламлар қаралади. Одатда элементлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган тўплам *сонли тўплам* дейилади ва уни кўпинча $E = \{x\}$ каби белгиланади. Курс давомида ҳар доим учраб турадиган сонли тўпламларни келтирамиз.

Икки $a \in R$, $b \in R$ сон берилган бўлиб, $a < b$ бўлсин. Ушбу

$$\{x : x \in R, a \leq x \leq b\}$$

тўплам *сегмент* деб аталади ва уни $[a, b]$ каби белгиланади:

$$[a, b] = \{x : x \in R, a \leq x \leq b\}.$$

Бунда a ва b сонлар $[a, b]$ сегментнинг *чегаравий нуқталари ёки чегаралари* дейилади.

Ушбу

$$\{x : x \in R, a < x < b\}$$

тўплам *интервал* дейилади ва уни (a, b) каби белгиланади:

$$(a, b) = \{x : x \in R, a < x < b\}.$$

Куидаги

$$\{x : x \in R, a \leq x < b\}, \quad \{x : x \in R, a < x \leq b\}$$

тўпламлар *ярим сегмент* дейилади ва улар мос равища $[a, b)$ ва $(a, b]$ каби белгиланади:

$$[a, b) = \{x : x \in R, a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x : x \in R, a < x \leq b\}.$$

Кейинги мулоҳазаларда асосан сонли тўпламлар билан иш кўрнади. Шунинг учун бундан кейин «сонли тўплам» дэйиш ўрнига қисқача «тўплам» сўзини ишлатамиз.

2. Тўпламнинг аниқ юқори ва аниқ қуи чегаралари. Бирор E тўплам берилган бўлсин.

2. 6-тәріф. Агар шундай M сон мавжуд бўлсаки, $\forall x \in E$ учун $x \leq M$ тенгсизлик бажарилса, E тўплам юқоридан чегараланган дейилади, M сон эса E ни юқоридан чегараловчи сон дейилади.

1. Мисоллар. $E = \left\{ \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ тўплам юқоридан чегараланган, чунки бу тўпламнинг ҳар бир элементи 1 дан катта эмас.

2. $N = \{n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ тўплам юқоридан чегараланмаган.

3. E_1 — барча тўғри касрлар ва 2, 4, 6 сонлардан иборат тўплам бўлсин. Бу тўплам юқоридан чегараланган, чунки унинг ҳар бир элементи 6 дан катта эмас.

2.7-тәріф. Агар шундай m сон мавжуд бўлсаки, $\forall x \in E$ учун $x \geq m$ тенгсизлик бажарилса, E тўплам қўйидан чегараланган деб аталади, m сон эса E ни қўйидан чегараловчи сон дейилади.

4. $N = \{n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ тўплам қўйидан 1 билан чегараланган, чунки $\forall n \in N$ учун $n \geq 1$ тенгсизлик бажарилади.

5. $E_2 = \{x : x < 0\}$ тўплам қўйидан чегараланмаган.

2.8-тәріф. Агар E тўплам ҳам қўйидан, ҳам юқоридан чегараланган бўлса, яъни шундай m ва M сонлар мавжуд бўлсаки, $\forall x \in E$ учун $m \leq x \leq M$ тенгсизликлар бажарилса, E тўплам чегараланган дейилади.

6. Ушбу $E_3 = \{x : x \in R, 2 < x < 4\}$ тўплам чегараланган тўпламдир.

Юқорида келтирилган таъриф ва миссоллардан кўринадики, агар E тўплам юқоридан чегараланган бўлса, уни юқоридан чегараловчи сонлар чексиз кўп бўлади. Бу тасдиқ M сондан катта бўлган ҳар қандай ҳақиқий сон E тўпламни юқоридан чегараловчи сон бўла олишидан келиб чиқади.

Шунингдек, агар E тўплам қўйидан чегараланган бўлса, уни қўйидан чегараловчи сонлар ҳам чексиз кўп бўлади. Бу эса m сондан кичик бўлган ҳар қандай ҳақиқий сон E тўпламни қўйидан чегараловчи сон бўла олишидан келиб чиқади.

Юқоридан чегараланган тўплам учун уни юқоридан чегараловчи сонлар орасида энг кичигини, шунингдек, қўйидан чегараланган тўплам учун, уни қўйидан чегараловчи сонлар орасида энг каттасини топиш муҳимдир.

2. З-теорема. Ҳар қандай юқоридан чегараланган тўплам учун уни юқоридан чегараловчи сонлар орасида энг кичиги мавжуд.

Исбот. E тўплам юқоридан чегараланган бўлсин, яъни шундай ҳақиқий M сон мавжудки, $\forall x \in E$ учун $x \leq M$ тенгсизлик ўринли дейлик.

E нинг элементлари орасида энг каттаси мавжуд бўлсин. Уни x_0 деб олайлик. Демак, $\forall x \in E$ учун $x \leq x_0$ бўлиб, бу эса x_0 сон E ни юқоридан чегараловчи сонлар қаторида бўлишини кўрсатади. Аммо E тўпламни юқоридан чегараловчи ҳар қандай M сон x_0 сондан кичик бўлмайди, яъни $x_0 \leq M$, чунки $x_0 \in E$. Бу эса x_0 сон E ни юқоридан чегараловчи сонлар орасида энг кичиги эканлигини билдиради. Бу ҳолда теорема исбот бўлди.

Энди E түпламни ташкил этган элементлар орасида энг каттаси мавжуд бўлмаган ҳолни қараймиз. E ни юқоридан чегараловчи сонлардан иборат түплам F' бўлсин. Бу F' түпламга тегишили бўлмаган барча ҳақиқий сонлардан иборат түпламни F дейлик. Равшанки, $E \subset F$ ва $R = F \cup F'$. F ва F' түпламлар R да (F, F') кесим бажаради: $E \subset F$ ва E — юқоридан чегараланганидигидан $F \neq \emptyset$, $F' \neq \emptyset$ экани келиб чиқади, шунингдек, F ва F' ларнинг тузилишидан эса $F \cup F' = R$ ва $\forall x \in F, \forall x' \in F' \Rightarrow x < x'$ бўлади. Дедекинд теоремасига кўра бу (F, F') кесим бирор α ҳақиқий сонни аниқлайди: $\alpha = (F, F')$. Бу α сон табиийки, F түпламни ва демак, $E \subset F$ бўлганидан E түпламни ҳам юқоридан чегараловчи сондир, яъни $\alpha \in F'$. Шу билан бирга у F' түпламнинг элементлари орасида энг кичиги. Теорема тўлиқ исбот бўлди.

2. 9-таъриф. Юқоридан чегараланган E түплам учун уни юқоридан чегараловчи сонларнинг энг кичиги (бундай сон 2. 3-теоремага асосан мавжуд) E нинг аниқ юқори чегараси деб аталади ва уни $\sup E$ каби белгиланади.

Бу латинча supremum — «энг юқори» деган маънони англатувчи сўздан олингандир.

2. 4-теорема. Ҳар қандай қўйидан чегараланган түплам учун уни қўйидан чегараловчи сонлар орасида энг каттаси мавжуд.

Бу теорема юқоридаги 2. 3-теорема каби исботланади. Унинг исботини ўқувчига ҳавола қиласиз.

2. 10-таъриф. Қўйидан чегараланган E түплам учун уни қўйидан чегараловчи сонларнинг энг каттасига (бундай сон 2. 4-теоремага кўра мавжуд) E нинг аниқ қўйи чегараси деб аталади ва уни $\inf E$ каби белгиланади.

Бу infimum сўзи ҳам латинча сўз бўлиб, «энг қўйи» деган маънони билдиради.

Мисоллар. Юқорида келтирилган мисолларда ифодаланган түпламларнинг аниқ юқори ҳамда аниқ қўйи чегараларини аниқлайдиз.

1. $\sup E = 1, \inf E = 0,$
2. $\inf N = 1,$
3. $\sup E_1 = 6, \inf E_1 = 0,$
4. $\sup E_2 = 0,$
5. $\sup E_3 = 4, \inf E_3 = 2.$

Юқоридаги түпламлар учун $\sup N, \inf E_2$ ларни кейинроқ келтирамиз.

Келтирилган мисоллардан түпламнинг аниқ юқори ҳамда аниқ қўйи чегаралари түпламга тегишили бўлиши ҳам, тегишили бўлма лиги ҳам мумкин эканлиги кўринади.

Түпламнинг аниқ юқори ҳамда қўйи чегараларини қўйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

2. 9-таъриф. Агар $\forall x \in E$ учун $x \leq a$ тенгсизлик ўринли бўлиб, $\forall \epsilon > 0$ олинганде ҳам, E түпламда шундай x' элемент тоғисаси, $x' > a - \epsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, унда a сон E нинг

аник юқори чегараси дейилади ва $a = \sup E$ каби белгиланади.

2. 10-тағы иф. Агар $\forall x \in E$ учун $x \geq b$ тенгсизлик ўринли бўлиб, $\forall \epsilon > 0$ олинганда ҳам E тўпламда шундай x' элемент топилясаки, $x' < b + \epsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, унда b сон E нинг аниқ қуий чегараси дейилади ва $b = \inf E$ каби белгиланади.

Шундай қилиб, биз тўпламнинг аниқ юқори ҳамда аниқ қуий чегараларининг икки турли таърифини келтирдик. Бу таърифлар эквивалент таърифлардир.

3. Тўпламнинг аниқ юқори ва аниқ қуий чегараларининг хоссалари. 1°. Агар E тўплам юқоридан чегараланган бўлиб, $E_1 \subset E$ бўлса, унда $\sup E_1 \leq \sup E$ бўлади.

Исбот. 3-теоремага кўра E нинг аниқ юқори чегараси мавжуд: $\sup E = \alpha$. $E_1 \subset E$ бўлишидан E_1 тўпламнинг ҳам юқоридан чегараланганлиги келиб чиқади. $\sup E_1 = \alpha_1$ бўлсин. Энди $\alpha_1 \leq \alpha$ бўлишини исботлаймиз. Тескарисини фараз қилайлик, яъни $\alpha_1 > \alpha$ бўлсин. У ҳолда ҳар доим $\alpha_1 > a > \alpha$ тенгсизликни қаноатлантирувчи a рационал сонни топиш мумкин. $\alpha_1 = \sup E_1$ бўлгани учун аниқ юқори чегаранинг таърифига кўра шундай $\alpha_1^* \in E_1$ мавжудки, $\alpha_1^* > a$, демак, $\alpha_1^* > \alpha$. Аммо $E_1 \subset E$ ва $\alpha = \sup E$ бўлгани учун $\alpha_1^* \leq \alpha$. Шундай қилиб, биз $a < \alpha_1^* \leq \alpha$ тенгсизликларга эга бўлдик, бу эса $a > \alpha$ тенгсизликка зид. Демак, $\alpha_1 \leq \alpha$, яъни

$$\sup E_1 \leq \sup E$$

бўлади.

2°. Агар E тўплам қуидан чегараланган бўлиб, $E_1 \subset E$ бўлса, $\inf E_1 \geq \inf E$

бўлади. Бу хосса 1° хосса каби исботланади.

3°. Агар E тўплам чегараланган бўлиб, $E_1 \subset E$ бўлса, у ҳолда

$$\inf E \leq \inf E_1 \leq \sup E_1 \leq \sup E$$

бўлади.

Исбот. 1° ва 2° хоссаларга асосан $\sup E_1 \leq \sup E$ ва $\inf E_1 \geq \inf E$ бўлиб, $\inf E_1 \leq \sup E_1$ бўлгани учун изланган

$$\inf E \leq \inf E_1 \leq \sup E_1 \leq \sup E$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

4°. Агар $\forall x \in E$ учун $x \leq \alpha$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $\sup E \leq \alpha$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. E тўпламнинг барча элементлари ва α сондан E^* тўпламни тузамиз: $E^* = E \cup \{\alpha\}$.

Бундан $E \subset E^*$ ва демак, 1° хоссага кўра $\sup E \leq \sup E^*$ тенгсизлик ўринли. Ундан $\sup E^* = \alpha$ бўлганидан $\sup E \leq \alpha$ тенгсизлик келиб чиқади.

5°. Агар $\forall x \in E$ учун $x \geq \beta$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $\inf E \geq \beta$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Бу хосса юқоридаги 4° хосса каби исботланади.

Ҳақиқий сонлар тўплами R таркибига $-\infty$ ва $+\infty$ символларни $\forall x \in R$ учун $x > -\infty$ ва $x < +\infty$ хусусият билан қўшиб, \overline{R} тўп-

ламни ҳосил қиласиз:

$$\overline{R} = R \cup \{ +\infty \} \cup \{ -\infty \}.$$

Бу символларнинг киритилиши чегараланмаган тўпламларнинг аниқ юқори ва аниқ қўйи чегараларини киритиш имконини беради.

Агар E юқоридан чегараланмаган бўлса, $\sup E = +\infty$, қўйидан чегараланмаган бўлса, $\inf E = -\infty$ деб олинади. Демак, шу келишувимизга кўра N ва E_2 тўпламлар учун аниқ чегаралар $\sup N = +\infty$, $\inf E_2 = -\infty$ бўлади.

7-§. Ҳақиқий сонлар устида арифметик амаллар

1. Ҳақиқий сонлар йигиндиси ва унинг хоссалари. Икки α ва β ҳақиқий сонлар берилган бўлсин. Бу сонлар рационал сонлар тўплами Q да бажарилган ушбу $\alpha = (A, A')$, $\beta = (B, B')$ кесимлар билан аниқлансан. Кесимларнинг қўйи синфлари A ва B тўпламлардан мос равища a ва b сонларни олиб, уларнинг йигиндиси $c = a + b$ ни тузамиз. Бундай йигиндилардан иборат тўпламни C билан: $C = \{c : c = a + b, a \in A, b \in B\}$, сўнг $Q \setminus C$ тўпламни эса C' билан ($C' = Q \setminus C$) белгилаймиз. Тузилишига кўра $Q = C \cup C'$.

Энди C ва C' тўпламлар Q да (C, C') кесим бажаришини кўрсатамиз. $\alpha = (A, A')$, $\beta = (B, B')$ лар Q да бажарилган кесимлар бўлгани учун

$$A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset, A \cup A' = Q; a \in A, a' \in A' \Rightarrow a < a'$$

шунингдек,

$$B \neq \emptyset, B' \neq \emptyset, B \cup B' = Q; b \in B, b' \in B' \Rightarrow b < b'$$

бўлиб, ундан аввало $C \neq \emptyset$ экани келиб чиқади. Сўнгра ҳар доим $a + b < a' + b'$ бўлгани учун C тўплам юқоридан чегараланган бўлиб, $\sup C = \gamma$ мавжудdir. Аммо A ва B тўплам элементлари орасида энг каттаси мавжуд бўлмагани учун $a + b < \gamma$ ($a \in A, b \in B$) бўлади. Унда $a' + b' \geq \gamma$ ($a' \in A', b' \in B'$) бўлиб, $a' + b' \notin C$. Бундан $a' + b' \in Q \setminus C = C'$. Демак, $C' \neq \emptyset$. Шунингдек, $c = a + b \in C$ ва $c < c' = a' + b' \in Q \setminus C$ эканига ишонч ҳосил қиласиз.

Шундай қилиб, C ва C' тўпламлар Q да (C, C') кесим бажаради.

2. 11-таъриф. (C, C') кесим билан аниқланадиган γ ҳақиқий сон α ва β ҳақиқий сонларнинг йигиндиси деб аталади ва $\alpha + \beta$ каби белгиланади: $\gamma = \alpha + \beta$.

Энди ҳақиқий сонлар йигиндисининг хоссаларини келтирамиз. Фарз қилайлик, $\alpha \in R$, $\beta \in R$, $\gamma \in R$ бўлсин.

$$1^{\circ}. \alpha + \beta = \beta + \alpha;$$

$$2^{\circ}. (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma);$$

$$3^{\circ} \text{ Ноъ сони учун}$$

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha.$$

Бу хоссалар осон исботланади. Биз улардан бирининг, масалан, 3° нинг исботини келтирамиз.

Маълумки, 0 сони Q тўпламда (Q_-, Q_+) кесим билан аниқланади:

$$Q_- = \{r : r \in Q, r < 0\}, \quad Q_+ = \{r : r \in Q, r \geq 0\}, \\ 0 = (Q_-, Q_+).$$

$\alpha \in R$ сон эса $\alpha = (A, A')$ кесим билан аниқлансан. Таърифга кўра $\alpha + 0 = (C, C')$ бўлиб, бунда

$$C = \{a + r : a \in A, r \in Q_-\}.$$

Аммо $a \in A, r \in Q_-$ бўлганда $a + r < a$ муносабат ўринли. Шунинг учун $C \subset A$ бўлади. Бундан

$$\alpha + 0 \leq \alpha \quad (2.3)$$

экани келиб чиқади.

A тўпламдан ихтиёрий a сонни оламиз. A да энг катта элемент мавжуд бўлмагани учун $a < a_1$ тенгсизликни қаноатлантирадиган $a_1 \in A$ сон мавжуд. Унда $a = a_1 + (a - a_1)$ тенгликдан $r = a - a_1 < 0$ бўлишишни ҳисобга олиб, A тўпламнинг ҳар бир элементини $a + r$ ($a \in A, r \in Q_-$) кўринишда ёзиш мумкинлигини аниқлаймиз. Бу эса

$$A \subset \{a + r : a \in A, r \in Q_-\} = C,$$

яъни $A \subset C$ эканини кўрсатади. Демак,

$$\alpha \leq \alpha + 0. \quad (2.4)$$

Энди (2.3) ва (2.4) муносабатлардан $\alpha + 0 = \alpha$ тенгликка эга бўламиз, 3° хосса исбот бўлди.

Йиғиндининг кейинги хоссасини келтиришдан аввал $\alpha \in R$ сонга қарама-қарши бўлган сонни аниқлаймиз.

$\alpha \in R$ сони Q тўпламда (A, A') кесим билан аниқлансан: $\alpha = (A, A')$. Рационал сонларнинг қўйидаги

$$-A' = \{-a' : a' \in A'\}, \quad -A = \{-a : a \in A\}$$

тўпламларини қараймиз. Равшанки $-A'$ ва $-A$ тўпламлар Q тўпламда $(-A', -A)$ кесим бажаради.

2. 12-таъриф. $(-A', -A)$ кесим билан аниқланадиган ҳақиқий сон α ҳақиқий сонга қарама-қарши сон деб аталади ва уни $-\alpha$ каби белгиланади:

$$-\alpha = (-A', -A).$$

4°. $\forall \alpha \in R$ учун $\alpha + (-\alpha) = 0$ тенглик ўринли.

И сбот. $\alpha = (A, A')$ бўлсин. Унда $-\alpha$ сон $(-A', -A)$ кесим билан аниқланади. Йиғинди таърифига кўра $\alpha + (-\alpha) = (C, C')$ бунда

$$C = \{c = a + (-a') : a \in A, -a' \in -A'\}, \quad C' = Q \setminus C.$$

Аммо $a < a'$ тенгсизлик ўринли бўлгани сабабли $c = a + (-a') = a - a' < 0$ бўлиб, C тўпламни ташкил этган рационал сонлар манфий рационал сонлардан иборат эканини аниқлаймиз. Демак, $C \subset Q_-$. Бундан эса

$$\alpha + (-\alpha) \leq 0 \quad (2.5)$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Энди $c \in Q_-$ сонни олайлик. Унда, равшанки, $-c > 0$ бўлади. Биз уни r билан белгилайлик: $r = -c$.

(A, A') кесимнинг қуиий ва юқори синфларидан олинган $a \in A$, $a' \in A'$ сонлар учун $a' - a = r$, яъни

$$c = a + (-a') \quad (2.6)$$

тengлилк ўринли бўлишини кўрсатамиз. $a_0 \in A$, $a'_0 \in A'$ учун $a'_0 - a_0 > 0$ бўлади. Архимед аксиомасига кўра шундай нату́рал $n \in N$ сон мавжудки, бу сон учун $n \cdot r > a'_0 - a_0$ тенгсизлик ўринли бўлади. Аммо $a_0 + n \cdot r > a'_0$ тенгсизликка кўра $a_0 + n \cdot r \in A'$ эканини топамиз. Модомики, $a_0 \in A$, $a_0 + n \cdot r \in A'$ экан, унда нату́рал сон n ни шундай олиш мумкинки,

$$a_0 + (n - 1) \cdot r \in A, a_0 + n \cdot r \in A'$$

бўлади. Агар

$$a = a_0 + (n - 1) \cdot r, a' = a_0 + n \cdot r$$

деб олсак, унда, $a' - a = r$, яъни $c = a + (-a')$ экани келиб чиқади.

Демак, Q_- тўпламнинг ҳар бир элементи (2.6) кўринишда ифодаланади. Бу эса $Q_- \subset C$ эканини англатади. Бундан

$$0 \leqslant \alpha + (-\alpha) \quad (2.7)$$

екани келиб чиқади. Ниҳоят (2.5) ва (2.7) муносабатлардан $\alpha + + (-\alpha) = 0$ тенгликнинг ўринли эканига ишонч ҳосил қиласмиш. 4° хосса исбот бўлди.

5°. Агар $\alpha \in R$, $\beta \in R$ бўлиб, $\alpha > \beta$ тенгсизлик ўринли бўлса, унда $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

Бу хоссанинг исботини ўқувчига ҳавола қиласмиш.

Берилган ҳақиқий сонга қарама-қарши соннинг аниқланиши икки ҳақиқий сон айрмаси тушунчалини киритиш имконини беради.

2. 13-таъриф. Икки α ва β ҳақиқий сон *айрмаси* деб $\alpha + (-\beta)$ сонга айтилади ва уни $\alpha - \beta$ каби белгиланади:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$$

2. Ҳақиқий сонлар кўпайтмаси ва унинг хоссалари. Икки $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ ҳақиқий сон Q тўпламда бажарилган (A, A') ва (B, B') кесимлар ёрдамида аниқланган бўлсин: $\alpha = (A, A')$, $\beta = (B, B')$. A ва B тўпламларнинг манфий бўлмаган $a \in A$, $a \geqslant 0$ ва $b \in B$, $b \geqslant 0$ элементларидан ушбу

$$\{a \cdot b : a \in A, a \geqslant 0, b \in B, b \geqslant 0\}$$

тўпламни тузамиш. Сўнгра рационал сонларнинг қуийдаги

$$C = Q_- \cup \{a \cdot b : a \in A, a \geqslant 0, b \in B, b \geqslant 0\}, \quad (2.8)$$

$$C' = Q \setminus C \quad (2.9)$$

тўпламларини қараймиз. Бу C ва C' тўпламлар Q да (C, C') кесим бажарашни аввалги пунктларда кўрсатилгаандек исботлаш мумкин,

2. 14-тәриф. Агар C ва C' түпламлар (2.8) ҳамда (2.9) формулалар билан ифодаланған бўлса, (C, C') кесим билан аниқланадиган сон α ва β ҳақиқий сонлар кўпайтмаси дейилади ва $\alpha \cdot \beta$ каби белгиланади: $\alpha \cdot \beta = (C, C')$.

Агар α ва β ҳақиқий сонлар турли ишорали бўлса, бу сонлар кўпайтмаси қўйидагича таъриғланади ($|\alpha|$ таърифини 8-§ дан қаранг).

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} -(|\alpha| \cdot |\beta|), & \text{агар } \alpha \text{ ва } \beta \text{ турли ишорали бўлса,} \\ |\alpha| \cdot |\beta|, & \text{агар } \alpha \text{ ва } \beta \text{ бир хил ишорали бўлса.} \end{cases}$$

Энди ҳақиқий сонлар кўпайтмасининг хоссаларини келтирамиз. Фарз қиласайлик, $\alpha \in R$, $\beta \in R$, $\gamma \in R$ бўлсин.

$$1^{\circ}. \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha;$$

$$2^{\circ}. (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma);$$

$$3^{\circ}. \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

Бу хоссаларнинг исботи қийин эмас. Биз уларнинг бирортасини, масалан, 3° хоссани исботлаймиз. $\alpha \in R$ сон Q түпламда бажарилган $\alpha = (A, A')$ кесим, 1 сон эса (B, B') кесим билан аниқланадиган бўлсин. Таърифга асосан $\alpha \cdot 1 = (C, C')$ бўлиб, бунда $C = \{c \cdot c = a \cdot b, a \in A, b \in B\}$. Аммо $b < 1$ бўлгани учун $a \cdot b < a$ бўлиб ундан $c = a \cdot b \in A$ эканини топамиз. Демак, $\forall c \in C \Rightarrow c \in A$. Бу эса $C \subset A$ эканини кўрсатади. Демак,

$$\alpha \cdot 1 \leqslant \alpha. \quad (2.10)$$

Энди $a \in A$ бўлсин. A түпламда энг катта элемент мавжуд бўлмагани сабабли унда $a < a_1$ тенгсизликни қаноатлантирадиган a_1 элемент мавжуд. Агар $a = a_1 \cdot \frac{a}{a_1}$ деб қарасак, $a_1 \in A$, $\frac{a}{a_1} \in B$ (чунки $\frac{a}{a_1} < 1$) эканини топамиз. Демак, $A \subset C$. Бундан

$$\alpha \leqslant \alpha \cdot 1 \quad (2.11)$$

тенгсизликнинг ўринли экани келиб чиқади. (2.10) ва (2.11) муносабатлардан $\alpha \cdot 1 = \alpha$ тенгликтининг ўринли эканига ишонч ҳосил қиласаз.

Ҳақиқий сонлар кўпайтмасининг кейинги хоссасини келтиришдан аввал $\alpha \in R$ сонга тескари бўлган сонни аниқлаймиз.

$0 < \alpha \in R$ сон Q түпламда бажарилган (A, A') кесим билан аниқланадиган бўлсин. Рационал сонларнинг қўйидаги

$$C = Q_- \cup \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{a'} : a' \in A' \right\}, \quad (2.12)$$

$$C' = Q \setminus C \quad (2.13)$$

түпламларини қарайлик. Бу C ва C' түпламлар Q да (C, C') кесим бажаради. (Буни исботлаш ўқувчига тавсия қилинади).

2.15-тәриф. Агар C ва C' түпламлар (2.12) ва (2.13) формулалар билан ифодаланған бўлса, (C, C') кесим билан аниқланадиган сон $\alpha = (A, A')$ ҳақиқий сонга нисбатан *тескари сон* деб аталади ва уни $\frac{1}{\alpha}$ ($\frac{1}{\alpha} = (C, C')$) каби белгиланади.

Агар $\alpha < 0$ бўлса, у ҳолда бу сонга тескари бўлган $\frac{1}{\alpha}$ сон қуидагича

$$\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{|\alpha|}$$

таърифланади.

4°. Нолдан фарқли $\forall \alpha \in R$ сон учун унга тескари сон $\frac{1}{\alpha}$ мавжуд ва $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$ тенглик ўринли.

α сон (A, A') , $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}$ сон (C, C') ҳамда 1 сон (B, B') кесим билан аниқланган бўлсин ((2.12), (2.13) ларга қаранг):

$$\alpha = (A, A') \quad \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = (C, C'), \quad 1 = (B, B').$$

Фараз қилайлик, $c \in C$ бўлсин. У ҳолда $c = a \cdot \frac{1}{a'} < 1$ ($a \in A$, $a' \in A'$) бўлиб, бундан $c \in B$ экани келиб чиқади. Демак, $C \subset B$, бинобарин,

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \leqslant 1 \tag{2.14}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Энди B тўпламдан мусбат b сонни олайлик: $b \in B$, $b > 0$. Агар $\varepsilon = \frac{1}{b} - 1$ деб қарайдиган бўлсак, ундан $0 < b < 1$ тенгсизликка кўра $\varepsilon > 0$ эканини топамиз.

$A \neq \emptyset$, $A' \neq \emptyset$ бўлгани учун ушбу $a_0 \in A$, $a'_0 \in A'$ сонлар мавжуддир. Бунда $a_0 < a'_0$. Энди қуйидаги $a_0, a_0(1 + \varepsilon), a_0(1 + \varepsilon)^2, \dots, a_0(1 + \varepsilon)^{n-1}, a_0(1 + \varepsilon)^n, \dots$ геометрик прогрессияни кўрамиз. Унда шундай иккита $a = a_0(1 + \varepsilon)^n, a' = a_0(1 + \varepsilon)^{n+1}$ ҳади топиладики, $a = a_0(1 + \varepsilon)^n \in A, a' = a_0(1 + \varepsilon)^{n+1} \in A'$ бўлади. У ҳолда $\frac{a'}{a} = 1 + \varepsilon = \frac{1}{b}$, яъни $b = \frac{a}{a'} = a \cdot \frac{1}{a'}$ бўлади. Демак, $b \in C$. Шундай қилиб, $B \subset C$. Бундан

$$1 \leqslant \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \tag{2.15}$$

тенгсизлик келиб чиқади. (2.14) ва (2.15) муносабатлардан изланган $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$ тенгликка эга бўлмази.

2.5-теорема. Агар икки $\alpha \in R$, $\beta \in R$ ҳақиқий сон берилган бўлиб, $\alpha \neq 0$ бўлса у ҳолда

$$\alpha \cdot x = \beta \tag{2.16}$$

тенгламани қаноатлантирувчи ягона ҳақиқий сон x мавжуд.

Исбот. $\alpha \neq 0$ бўлгани учун ҳар дозм унга тескари бўлган

$\frac{1}{\alpha}$ ҳақиқий сон мавжуд бўлади. Бу $\frac{1}{\alpha}$ ва β сонларнинг кўпайтмасидан тузилган $\beta \cdot \frac{1}{\alpha}$ сонни қараймиз. Унда

$$\alpha \cdot \left(\beta \cdot \frac{1}{\alpha} \right) = \beta \cdot \left(\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \right) = \beta \cdot 1 = \beta$$

алмаштиришларга кўра $\beta \cdot \frac{1}{\alpha}$ сон (2.16) тенгламани қаноатлантиришига ишонч ҳосил қиласми. Демак, $x = \beta \cdot \frac{1}{\alpha}$, Энди (2.16) тенгламани қаноатлантирувчи бундай соннинг ягоналигини кўрсатамиз. Тескарисини фараз қиласми, яъни (2.16) тенгламани қаноатлантирадиган сон иккита: x ва y бўлсин: $\alpha \cdot x = \beta$, $\alpha \cdot y = \beta$. У ҳолда $\alpha \cdot x - \alpha \cdot y = 0$ ёки $(x - y) = 0$ бўлиб, $\alpha \neq 0$ бўлгани учун $x - y = 0$ бўлади. Демак, $x = y$. Теорема исбог бўлди.

2.15-таъриф. Берилган α ва β ҳақиқий сонлар нисбати деб, $\beta \frac{1}{\alpha}$ сонга айтилади ва уни $\frac{\beta}{\alpha}$ каби белгиланади.

5°. $\alpha \in R$, $\beta \in R$, $\gamma \in R$ сонлар учун ҳар доим

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$$

тенглик ўринли.

6°. Агар $\alpha \in R$, $\beta \in R$, $\gamma \in R$ сонлар берилган бўлиб, $\gamma > 0$ ва $\alpha > \beta$ тенгсизлик ўринли бўлса, унда $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

3. Ҳақиқий соннинг даражалари. Аввало қўйидаги иккита леммани келтирамиз.

2.1-лемма. $\forall \epsilon > 0$ рационал сон берилганда ҳам, Q тўпламда бажарилган ҳар қандай (A, A') кесим учун шундай $a \in A$, $a' \in A'$ рационал сонлар мавжудки, бу сонлар ушбу $a' - a < \epsilon$ тенгсизликни қаноатлантиради.

Исбот. A ва A' тўпламлар Q да (A, A') кесим бажарсин. Демак, $A \neq \emptyset$. A тўпламда бирор a_0 рационал сонни олиб, сўнгра қўйидаги

$$a_0, a_0 + \epsilon, a_0 + 2\epsilon, \dots, a_0 + n\epsilon, \dots, n \in N,$$

арифметик прогрессияни қараймиз. Шундай $n \in N$ натурал сон топиладики, $a_0 + n\epsilon \in A$, $a_0 + (n+1)\epsilon \in A'$ бўлади. Агар A тўпламнинг $a_0 + n\epsilon$ дан катта бўлган элементини a ва $a_0 + (n+1)\epsilon = a'$ деб олсан,

$$a' - a < a_0 + (n+1)\epsilon - (a_0 + n\epsilon) = \epsilon$$

бўлишини топамиз. Демак, $a' - a < \epsilon$, $a \in A$, $a' \in A'$

Лемма исбот бўлди.

2.2-лемма. Агар иккита $\alpha \in R$, $\beta \in R$ ҳақиқий сон берилган бўлиб, $\forall \epsilon > 0$ рационал сон берилганда ҳам шундай $a \in Q$, $a' \in Q$, $a < a'$ сонлар топилсанги, улар учун ушбу

$$a \leqslant \alpha \leqslant a',$$

$$a \leqslant \beta \leqslant a',$$

$$a' - a < \epsilon$$

(2.17)

тengsizliklар ўринли бўлса, у ҳолда $\alpha = \beta$ бўлади.

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик, яъни (2.17) tengsizliklar ўринли бўлса ҳам $\alpha \neq \beta$ бўлсин. Масалан, $\alpha > \beta$ дейлик. У ҳолда шундай $r \in Q$, $r' \in Q$ сонлар мавжуд бўладики, улар учун $\alpha > r > r' > \beta$ tengsizliklar ўринли бўлади. Натижада қўйидаги $a' > r' > r > \beta$ tengsizliklарга келамиз. Бундан $a' - a > r' - r > 0$ tengsizlik келиб чиқади. Бу (2.17) munosabatlararga zid. Agar $\alpha < \beta$ бўлса ҳам шунга ўхшаш мулоҳазалар ёрдамида зиддиятликка келинади. Lemma исбот бўлди.

a) Ҳақиқий sonning butun daражаси. Bиз аввалги punktda ikki α va β ҳақиқий son kўpaitmasining tаъrifini keltiridik. n ta $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ ҳақиқий sonlar kўpaitmasi $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n$ ҳам xuddi ўsha йўл bilan tаъriflanadi. Agar $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$ бўлса, у ҳолда $\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_{n \text{ ta}}$ son α sonning n -daражаси deb ataladi va α^n kabi belgilanadi:

$$\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_{n \text{ ta}} = \alpha^n.$$

Bу keltirilgan tаъrifdan ҳамда ҳақиқий sonlar yustida amallarning xossalariidan қўйidagilar keliib chiqadi. $\alpha \in R$, $\beta \in R$ bўlib, n va m lar naturlar son bўlsin.

1) Қўйidagi tengliklар ўrinli:

$$\begin{aligned} \alpha^n \cdot \alpha^m &= \alpha^{n+m}, \\ \alpha^n \cdot \beta^n &= (\alpha \cdot \beta)^n, \\ (\alpha^n)^m &= \alpha^{n m}, \\ \frac{\alpha^n}{\alpha^m} &= \alpha^{n-m} \quad (n > m); \end{aligned}$$

2) $n > m$ va $\alpha > 1$ bўlganda $\alpha^n > \alpha^m$ bўlib, $0 < \alpha < 1$ bўlganda esa $\alpha^n < \alpha^m$ bўлади.

3) agar $\alpha > \beta > 0$ bўlsa, у ҳолда $\alpha^n > \beta^n$ bўлади. Maъlumki, $\forall \alpha \in R$ ($\alpha \neq 0$) учун ҳар доим ungta teskari bўlgan $\frac{1}{\alpha}$ ҳақиқий son mavjud. Ushbu $\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \dots \frac{1}{\alpha}$ son $\frac{1}{\alpha}$ sonning — n -daражаси deb ataladi va uni α^{-n} kabi belgilanadi:

$$\alpha^{-n} = \left(\frac{1}{\alpha} \right)^n = \frac{1}{\alpha^n}.$$

Ҳар қандай $\alpha \neq 0$ ҳақиқий sonning nolinchи daражаси 1 ga teng deb olinadi: $\alpha^0 = 1$.

б) Ҳақиқий sondan olinigan ildiz. Bизга $0 < \alpha \in R$ va tayinlanangan $n \in N$ sonlar berilgan bўlsin.

2.17- таъrif. Ushbu

$$\xi^n = \alpha \tag{2.18}$$

тenglikni қanoatlantiradigan musbat ξ son α sondan olingan n -daражали илдиз деб аталади ва уни $\sqrt[n]{\alpha}$ каби белгиланади. Энди (2.18) tenglikni қanoatlantiradigan ξ son mawjudligini ҳамда ягоалигини күрсатамиз.

Бунинг учун Q тўпламни қўйидаги

$$A_n = Q - \{0\} \cup \{r : r \in Q, r > 0, r^n < \alpha\}$$

$$A'_n = \{r' : r' \in Q, r' > 0, r'^n > 0, r'_n > \alpha\}$$

тўпламлар ёрдамида ($Q = A_n \cup A'_n$) ёзмиз. Бундай тузилган A_n ва A'_n тўпламлар Q да (A_n, A'_n) кесим бажариши равшандир. Бу кесим аниқлаган сонни ξ деб олайлик: $\xi = (A_n, A'_n)$. Шунга кўра A_n ва A'_n тўпламларда мос равища шундай мусбат r ва r' рационал сонлар мавжудки, улар учун $0 < r < \xi < r'$ tengsizliklar ўринли бўлади. Бундан эса $r^n < \xi^n < r'^n$ tengsizliklarning ўринли экани келиб чиқади.

Энди (A_n, A'_n) кесим учун қўйи ва юқори синфларнинг тузилишига асосан $r^n < \alpha < r'^n$ tengsizliklar ўринли бўлади. Демак,

$$\left. \begin{array}{l} r^n < \xi < r'^n, \\ r^n < \alpha < r'^n \end{array} \right\} \quad (2.19)$$

tengsizliklar ўринли.

Энди $r'^n - r^n$ айирмани қараймиз. Бу айирмани қўйидагича

$$r'^n - r^n = (r' - r)(r'^{n-1} + r \cdot r'^{n-2} + \dots + r' r^{n-2} + r^{n-1})$$

ифодалаш мумкин. Юқорида келтирилган 2.1-леммага мувофиқ $r \in A_n$ ва $r' \in A'_n$ сонларни $r' - r < \varepsilon$ tengsizlikni қanoatlantiradigan қилиб олиш мумкин. (Бунда ε ихтиёрий рационал мусбат сон.) Сўнгра A'_n тўпламда r' дан катта бўлган тайин r'_0 рационал сонни (бундай сон ҳар доим топилади) олсан, натижада

$$\begin{aligned} r'^n - r^n &< (r' - r)(r'^{n-1} + r'_0 \cdot r'^{n-2} + \dots + r'^{n-2} \cdot r'_0 + r'^{n-1}) = \\ &= (r' - r) \cdot n \cdot r'^{n-1} < \varepsilon n r'^{n-1} \end{aligned}$$

tengsizlikni ҳосил қиласиз. Бундан $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{n \cdot r'^{n-1}}$ бўлганда $r'^n - r^n < \varepsilon'$ келиб чиқади. Энди (2.19) tengsizliklararga ҳамда 2.2-леммага асосан $\xi^n = \alpha$ га эга бўламиз. Шундай қилиб, (A_n, A'_n) кесим билан аниқланган ξ сон (2.18) tenglikni қanoatlantiradi. (2.18) tenglikni қanoatlantiruvchi ξ сон ягона бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар ξ_1 ва ξ_2 сонлар (2.18) tenglikni қanoatlantir'a, яъни

$$\xi_1^n = \alpha, \quad \xi_2^n = \alpha$$

tengliklar ўринли бўлса, унда ушбу

$$\xi^n - \xi_2^n = (\xi_1 - \xi_2)(\xi_1^{n-1} + \xi_2 \cdot \xi_1^{n-2} + \dots + \xi_2^{n-2} \cdot \xi_1 + \xi_2^{n-1}) = 0$$

муносабатдан $\xi_1 - \xi_2 = 0$, яъни $\xi_1 = \xi_2$ экани келиб чиқади.

в) Ҳақиқий соннинг рационал даражаси. Биз аввалингда пункктларда $\alpha \in R$ соннинг бутун даражаси, шунингдек $\alpha > 0$ сондан олинган n -даражали илдиз таърифларини келтирдик. Энди $\alpha > 0$ соннинг рационал даражаси тушунчасини келтирамиз. Маълумки, ҳар қандай рационал сон қисқармайдиган $r = \frac{m}{n}$ ($m \in Z$, $n \in N$) каср кўринишида ифодаланади. $\alpha \in R$ ҳақиқий соннинг r -даражаси α^r қўйидагича аниқланади:

$$\alpha^r = \left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^m = \alpha^{\frac{m}{n}}.$$

Фараз қилайлик, $\alpha \in R$, $\beta \in R$, $r_1 \in Q$, $r_2 \in Q$ бўлсин. Қўйидаги содда хоссалар ўринлидир:

$$1) \alpha^{r_1} \cdot \alpha^{r_2} = \alpha^{r_1 + r_2};$$

$$2) (\alpha^{r_1})^{r_2} = \alpha^{r_1 \cdot r_2};$$

$$3) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r = \frac{\alpha^r}{\beta^r}; \quad (r \in Q)$$

$$4) \alpha^{r_1} : \alpha^{r_2} = \alpha^{r_1 - r_2};$$

$$5) (\alpha \cdot \beta)^r = \alpha^r \cdot \beta^r;$$

$$6) \alpha > 1 \text{ бўлганда } r_1 < r_2 \Rightarrow \alpha^{r_1} < \alpha^{r_2}.$$

г) Ҳақиқий соннинг ҳақиқий даражаси. Бирдан катта ($\alpha > 1$) $\alpha \in R$ сонни олайлик. $\beta \in R$ сон эса Q тўпламда бажарилган (B, B') кесим билан аниқланган мусбат сон бўлсин:

$$\beta = (B, B'), \quad \beta > 0.$$

Барча манфий ҳақиқий сонлар, ноль ҳамда α^b , $b \in B$ кўринишдаги, мусбат ҳақиқий сонлардан иборат тўпламни E билан, $R \setminus E$ тўпламни E' ($E' = R \setminus E$) билан белгилайлик. Натижада R тўплам $R = E \cup E'$ кўринишда ёзилиши мумкин.

Юқорида киритилган E ва E' тўпламлар R тўпламда (E, E') кесим бажаришини кўрсатиш қўйин эмас. E тўпламнинг тузилишидан унинг бўш эмаслиги кўринади: $E \neq \emptyset$. Сўнгра ҳар доим $\alpha^b < \alpha^{b'} (b \in B, b' \in B')$ бўлгани E тўпламнинг юқоридан чегараланганлигини билдиради. Демак, sup $E = \gamma$ мавжуд. B тўплам элементлари орасида энг каттаси мавжуд бўлмаганлиги учун $\alpha^b < \gamma$ бўлади. У холда $\gamma \leq \alpha^{b'}$ ва $\alpha^{b'} \notin E$ бўлади. Бундан $\alpha^{b'} \in E'$. Демак, $E' \neq \emptyset$. E ва E' тўпламларнинг тузилишидан E нинг ҳар бир элементи E' нинг исталган элементидан кичик бўлиши равшандир. Шундай қилиб, E ва E' тўпламлар R да (E, E') кесим бажаради. Қўйидаги таърифда E ва E' тўпламлар юқоридагича тузилган деб қаралади.

2.18-та ўриф. (E, E') кесим билан аниқланадиган сон α соннинг β -даражаси деб аталади ва α^β каби белгиланади:

$$\alpha^\beta = (E, E').$$

Агар β манфий сон бўлса, унда α^β ни $\alpha^\beta = \frac{1}{\alpha^{-\beta}}$ деб қарасак, $\alpha^{-\beta}$ сон α соннинг мусбат даражаси бўлиб, у юқоридагидек таърифланади.

Агар $0 < \alpha < 1$ бўлса, унда $\alpha^\beta = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-\beta}$ деб олиниши натижасида ина биз юқоридаги ҳолга келамиз. Ҳақиқий соннинг ҳақиқий дараси тушунчасидан фойдаланиб, қўйидаги теоремани келтирамиз.

2.6- таъриф. Ҳар қандай α ва γ мусбат ҳақиқий сонлар учун

$$\alpha^\beta = \gamma$$

тенгламани қаноатлантирадиган ягона β ҳақиқий сон мавжуд.

Бу теореманинг исботи (2.18) тенглама ечимининг мавжудлиги ҳамда ягоналигини исботлашга ўхшаш.

2.19- таъриф. Берилган α ва γ мусбат ҳақиқий сонлар учун ушбу

$$\alpha^\beta = \gamma$$

тенгламани қаноатлантирувчи β сонга γ соннинг α асосга кўра (α асосли) логарифми деб аталади ва уни $\log_\alpha \gamma$ каби белгиланади:

$$\beta = \log_\alpha \gamma$$

8- §. Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати ва унинг хоссалари

Бирор $x \in \mathbb{R} (x \neq 0)$ сонни олайлик. Бунда $x, -x$ сонлардан бири албатта мусбат бўлади. Бу мусбат сон x соннинг абсолют қиймати деб аталади ва уни $|x|$ каби белгиланади. Ноль соннинг абсолют қиймати деб ноль сонининг ўзи олинади: $|0| = 0$.

Демак,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ -x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases} \quad (2.20)$$

Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати бир неча хоссаларга эга:

1°. $x \in \mathbb{R}$ сон учун

$$|x| \geq 0, |x| = |-x|, x \leq |x|, -x \leq |x|$$

муносабатлар ўринли. Бу муносабатлар соннинг абсолют қиймати таърифидан келиб чиқади.

2°. Агар $0 < a \in \mathbb{R}$ сон берилганда $x \in \mathbb{R}$ сонлар

$$|x| < a \quad (2.21)$$

тengsизликни қаноатлантираса, бундай x сонлар

$$-a < x < a \quad (2.22)$$

тengsизликларни ҳам қаноатлантиради ва аксинча. Бошқача қилиб айтганда (2.21) ва (2.22) tengsизликлар эквивалент tengsизликлардир:

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$$

Исбот. (2.21) tengsизлик ўринли бўлсин: $x \in \mathbb{R}, |x| < a$.

1° хоссага кўра $-|x| \leq x \leq |x|$ бўлишидан ҳамда $-a < -|x|$ tengsизликдан топамиз: $-a < -|x| \leq x \leq |x| < a$. Бундан эса $-a < x < a$ эканин келиб чиқади.

Энди (2.22) tengsизликлар ўринли бўлсин: $x \in \mathbb{R}, -a < x < a$.

Агар $x \geq 0$ бўлса, $|x| = x$ бўлиб, $|x| < a$ бўлади. Агар $x < 0$ бўлса, $|x| = -x$ бўлиб, $-x < a$ бўлганидан эса $|x| < a$ эканини топамиз. Демак, $-a < x < a$ бўлганда ҳар доим $|x| < a$ бўлади.

Бу хосса қүйидаги $\{x : x \in R, |x| < a\}$ ва $\{x : x \in R, -a < x < a\}$ ҳақиқий сонлар тұпламларыннан бир-бірига тенглигини ифодалайды.

3°. Агар $0 < a \in R$ сон берилганды $x \in R$ сонлар $|x| \leq a$ тенгсизликни қаноатлантира, бундай x сонлар $-a \leq x \leq a$ тенгсизликтерни ҳам қаноатлантиради ва аксинча, яғни

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

Бу хосса 2° хосса каби исбогланади.

4°. Икки $x \in R$ ва $y \in R$ ҳақиқий сон йиғиндинсисининг абсолюттің қийматы бу сонлар абсолюттің қиймәтларыннан үлкен болады, яғни

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Исбот. Агар $x + y \geq 0$ бўлса, $x + y = |x + y|$ бўлиб, $x \leq |x|$, $y \leq |y|$ тенгсизликтерни ҳисобга олган ҳолда

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$$

бўлишини топамиз. Агар $x + y < 0$ бўлса, унда $|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) \leq |x| + |y|$ бўлади. Демак, ҳар доим $|x + y| \leq |x| + |y|$ тенгсизлик ўринли.

Бу муносабат қўшилувчилар сони иккидан катта бўлган ҳолда ҳам ўринли бўлади:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

5°. $x \in R$, $y \in R$ сонлар учун

$$|x - y| \geq |x| - |y|$$

тенгсизлик ўринли.

Исбот. Равшанки, $x = (x - y) + y$. Унда 4° хоссага биноан $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$ бўлиб, бу тенгсизликдан $|x - y| \geq |x| - |y|$ бўлиши келиб чиқади.

6°. $x \in R$, $y \in R$ сонлар учун

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

тенглик ўринли. Бу тенглик соннинг абсолюттің қийматы аърифидан келиб чиқади.

7°. $x \in R$, $y \neq 0$ сонлар учун

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

тенглик ўринли.

Исбот. $\frac{x}{y} = z$ деб олайлик. Равшанки, $z \in R$ бўлади. Бундан $x = z \cdot y$ бўлишини топамиз. Аммо 6° хоссага кўра $|x| = |z \cdot y| = |z| \cdot |y|$ ва бундан $|z| = \frac{|x|}{|y|}$ тенглик келиб чиқади. Шунинг учун $|z| = \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Барча манғий бўлмаган ҳақиқий сонлар тўпламины R_+ билан белгилайлик. Равшанки, $R_+ \subset R$. Энди R тўпламдан олинган ҳар бир x ҳақиқий сонга унинг абсолюттің қиймати $|x|$ ни мөс қўйайлик. Натижада биз

$f : R \rightarrow R_+$ ёки $f : x \rightarrow |x|$
акслантиришга эга бўламиз.

Демак, ҳақиқий соннинг абсолют қийматини R тўпламни R_+ тўп-
ламга (2.20) қонда бўйича акслантириш деб қараш мумкин.

**9- §. Иррационал сонни тақрибий ҳисоблаш. Иррационал сон-
ни даврий ўнли каср орқали ифодалаш**

1. Иррационал сонни тақрибий ҳисоблаш. Бирор α иррационал сон берилган бўлиб, у Q тўпламда бажарилган (A, A') кесим билан аниқланган бўлсин: $\alpha = (A, A')$. Бутун сонлар тўплами Z рационал сонлар тўпламининг қисми (яъни $Z \subset Q$) бўлганинидан кетма-кет келган a_0 ва $a_0 + 1$ бутун сонлар топиладики, ушбу $a_0 < \alpha < a_0 + 1$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Бу ҳолда $r_0 = a_0$ сон α иррационал сонни «ками» билан, $r'_0 = a_0 + 1$ эса «ортиғи» билан тақрибий ифодалайди.

Энди

$$a_0, a_0 + \frac{1}{10}, a_0 + \frac{2}{10}, \dots, a_0 + \frac{9}{10}, a_0 + 1$$

сонларни оламиз. $a_0 < \alpha < a_0 + 1$ бўлгани учун бу сонлар ораси-
да кетма-кет келган шундай иккита

$$a_0 + \frac{a_1}{10}, \quad a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}$$

сон топиладики, ушбу

$$a_0 + \frac{a_1}{10} < \alpha < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10} \dots$$

тенгсизликлар ўринли бўлади, бунда a_1 сон $0, 1, 2, \dots, 9$ сонлардан
биридир. Қўйидаги

$$r_1 = a_0 + \frac{a_1}{10} = a_0, a_1;$$

$$r'_1 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10} = a_0, a_1 + \frac{1}{10}$$

сонлар α сонни мос равишда «ками» ҳамда «ортиғи» билан $\frac{1}{10} = 0, 1$
аниқликда тақрибий ифодалайди.

Сўнгра $a_0 + \frac{a_1}{10}, a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10^2}, a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{2}{10^2}, \dots,$

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{9}{10^2}, \quad a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$$

сонларни оламиз. Агар ушбу

$$a_0 + \frac{a_1}{10} < \alpha < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$$

тенгсизликлар ўринли эканини эътиборга олсак, у ҳолда юқоридаги
сонлар орасида шундай кетма-кет келган иккита

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}, \quad a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{10^2}$$

сон топиладики, улар учун ушбу

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} < \alpha < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_1 + 1}{10^2}$$

тengsизликлар ўринли бўлади, бунда a_2 сон 0, 1, 3, ..., 9 сонлардан биридир. Куйидаги

$$r_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} = a_0, a_1 a_2;$$

$$r'_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2} = a_0, a_1 a_2 + \frac{1}{10^2}$$

сонлар α сонни мос равища «ками» ҳамда «ортиғи» билан $\frac{1}{10^2} = 0,01$ аниқликда тақрибий ифодалайди.

Бу жараённи давом эттира бориб, n та қадамдан кейин шунда иккита

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n};$$

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_{n+1}}{10^n}$$

сон топиладики, улар учун ушбу

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} &< \alpha < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \\ &+ \frac{a_n + 1}{10^n} \end{aligned} \quad (2.23)$$

тengsизликлар ўринли бўлади, бунда a_1, a_2, \dots, a_n сонларнинг ҳар бири 0, 1, 2, ..., 9 сонлардан бирига tengdir.

Куйидаги

$$r_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n; \quad (2.24)$$

$$r'_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n} \quad (2.25)$$

сонларнинг ҳар бири α иррационал сонни $\frac{1}{10^n}$ аниқликда тақрибий ифодалайди.

Шундай қилиб, (2.23) муносабатдан кўринадики, n ни етарлича катта қилиб олиш ҳисобига α сонни исталганча аниқликда r_n ва r'_n рационал сонлар (ўнли касрлар) ёрдамида тақрибий ҳисоблаш мумкин: $\alpha \approx r_n$, $\alpha \approx r'_n$. Юқоридаги r_n ва r'_n рационал сонларни мос равища «ками» ҳамда «ортиғи» билан α соннинг ўнли яқинлашувчилари деб аталади.

2. Иррационал сонни даврий каср орқали ифодалаш. Маълумки, ҳар қандай рационал сон чекли ўнли каср ёки чексиз даврий ўнли каср кўринишида ифодаланади ва аксинча, юқорида айтилган касрлар рационал сонни ифодалайди. Шу сабаб

иррационал сон α учун $\alpha \neq a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ тенгсизлик ўринли ва бу иррационал сон чексиз, даврий бўлмаган ўнли каср кўринишида ифодаланади. Албатта, бу айтилган тасдиқ математик жиҳатдан жиддий асосланиши лозим. Биз қўйида тегишли тасдиқнинг асосланиши билан шуғулланамиз.

α — иррационал сон бўлсин. Бу сон юқоридаги 1-пунктда кўрсатилганидек «ками» билан $a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ кўринишдаги ўнли каср, «ортиғи» билан $a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}$ кўринишдаги ўнли каср орқали ифодаланади. Бу ўнли касрлар айирмаси n ўсганда камаяди.

Иррационал сон α ни тақрибий ифодалаш жараёнини чексиз давом эттириш натижасида ушбу

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \quad (2.26)$$

чексиз ўнли касрни ҳосил қиласиз. Бу (2.26) сонни иррационал сон α нинг ўнли каср кўринишдаги ифодаси деб қараймиз. Унда (2.23) тенгсизликлардан $a_0, a_1 a_2 \dots a_n, \dots$ чексиз ўнли каср даврий ўнли каср эмаслиги келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам,agar (2.26) чексиз даврий ўнли каср, яъни рационал r сон бўлса, унда $\forall n \in N$ учун

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} < r < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \\ & + \frac{a_n + 1}{10^n} \end{aligned}$$

тенгсизлик ўнли бўлиб, бу ва (2.23) тенгсизликлардан

$$|\alpha - r| < \frac{1}{10^n} \quad (\forall n \in N) \quad (2.27)$$

тенгсизлик келиб чиқади. У ҳолда 2.2-леммага кўра $\alpha = r$ бўлиб, бу α иррационал сон деб олинишига зид.

Демак, иррационал сон α ни ифодаловчи (2.26) сон чексиз, даврий бўлмаган ўнли касрдан иборат.

Энди бирор чексиз, даврий бўлмаган ўнли каср $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ берилган бўлсин. Ҳар бир натурал сон n учун ушбу

$$p_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n;$$

$$q_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}$$

чекли ўнли касрларни — рационал сонларни олиб, сўнгра қўйидаги

$$A = \{r : r \in Q, \forall n \text{ учун } r < q_n\},$$

$$A' = \{r : r \in Q, \forall n \text{ учун } p_n < r\}$$

тўпламларни тузамиз. A ва A' тўпламлар Q да (A, A') кесим бажаради. Бу ке им эса бирор α ҳақиқий сонни аниқлайди. Келтирилган (A, A') кесимнинг тузилишидан ва $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$

чексиз ўнли каср даврий эмаслигидан ихтиёрий натурал n сон учун

$$p_n < \alpha < q_n \quad (2.28)$$

тengsizliklар ўринли эканлиги келиб чиқади. (2.28) tengsizliklардан ҳамда (2.27) tengsizlikkни келтириб чиқаришдаги мұлоғазаниң қайтаришдан $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ чексиз, даврий бўлмаган ўнли каср α сонни ифодалаши ва иррационал сон эканлиги келиб чиқади.

Демак, ҳар қандай иррационал сон α га чексиз, даврий бўлмаган ўнли каср $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ ва аксинча ҳар қандай чексиз даврий бўлмаган ўнли касрга иррационал сон мос келиши кўрсатилди.

Энди чексиз даврий бўлмаган ўнли касрлар тўпламида касрларнинг tenglik тушунчасини киритиб, юқоридаги мосликни ўзаро бир қийматли эканлигини кўрсатамиз.

Икки

$$\begin{aligned} a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \\ b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots \end{aligned}$$

ўнли каср берилган бўлсин.

Агар $a_0 = b_0$ ва барча натурал n сонлар учун $a_n = b_n$ бўлса, у ҳолда, бу касрлар teng дейилади ва

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

каби белгиланади.

Фараз қилайлик, α ва β — иррационал сонлар учун

$$\left. \begin{aligned} \alpha \rightarrow a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \\ \beta \rightarrow b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

мослик ўринли бўлиб, $\alpha \neq \beta$ бўлсин. У ҳолда

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \neq b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

бўлса, $a_0 = b_0$ ва $\forall n \in N$ учун $a_n = b_n$ бўлиб, $\forall n \in N$ учун ушбу

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n < \alpha < a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}$$

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n < \beta < a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}$$

tengsizliklар ҳосил бўлади. Натижада $\forall n \in N$ лар учун

$$|\alpha - \beta| < \frac{1}{10^n}$$

tengsizlikка келамиз. Бундан 2.2-леммага кўра $\alpha = \beta$ келиб чиқади. Бу эса $\alpha \neq \beta$ га зид. Шундай қилиб, (2.29) мосликлардан ва $\alpha \neq \beta$ бўлишидан

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \neq b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

екани келиб чиқади.

Шунингдек, агар α сонга иккита $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ ҳамда $b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$ чексиз даврий бўлмаган ўнли касрлар мос қўйилса, у ҳолда

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

тenglik ўринли бўлишини кўрсатамиш.

Тескарисини фараз қиласлик, яъни (2.29) мослик ўринли бўлиб, $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \neq b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$ бўлсанн. У ҳолда шундай $n (n \in N)$ топладики,

$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}$ бўлиб, $a_n \neq b_n$ бўлади. Айтайлик, $a_n < b_n$ бўлсанн. Унда

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n + \frac{1}{10^n} \leq a_0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} b_n \quad (2.30)$$

бўлади. Аммо (2.29) муносабатга кўра

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} b_n < \alpha < a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n},$$

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n + \frac{1}{10^n} < \alpha < a_0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} b_n + \frac{1}{10^n}$$

бўлиб, ундан α сон, бир томондан, $a_0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} b_n$ дан катта, иккинчи томондан, $a_0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n + \frac{1}{10^n}$ дан кичик бўлишини топамиш. Бу эса (2.30) муносабатга зид.

Шундай қилиб, (2.29) мосликдан $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$ tenglik келиб чиқади. Демак,

$$\alpha \rightarrow a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

мослик ўзаро бир қийматли мосли бўлади. Бу эса

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

деб олинишини асослайди.

10-§. Ҳақиқий сонларни геометрик тасвирлаш

Биз 2-§ да ҳар бир рационал сонга тўғри чизиқда битта нуқта (рационал нуқта) мос келишини кўрсатган эдик. Шу билан бирга тўғри чизиқда рационал бўлмаган нуқталар ҳам (масалац $\sqrt{2}$ сонга мос келадиган нуқта) борлиги аниқланди.

Энди ҳар бир ҳақиқий сонга ҳам тўғри чизиқда битта нуқта мос келишини кўрсатамиш. Бунинг учун ҳар бир иррационал сонга тўғри чизиқда битта нуқта мос келишини кўрсатиш етарлидир.

Бирор иррационал сон α берилган бўлиб, бу сон Q тўпламда бажарилган (A, A') кесим билан аниқланган бўлсан: $\alpha = (A, A')$. Бунда A тўпламда энг катта, A' тўпламда эса энг кичик элемент йўқ. l тўғри чизиқ ва бу тўғри чизиқдаги A ва A' тўпламларни ташкил этган рационал нуқталарни олайлик. Бу рационал нуқта-

лардан тузилган тўпламларни мос равишида \dot{A} ва \dot{A}' каби белгилайлик.

Равшанки, бу ҳолда \dot{A} тўпламнинг нуқталари орасида энг ўнг нуқта йўқ. Шунингдек \dot{A}' тўпламнинг нуқталари орасида энг чап нуқта йўқ. l тўғри чизиқнинг шундай P нуқталарини қараймизки, бу нуқталардан ўнгда \dot{A} тўпламнинг камидаги битта нуқтаси бўлсин. Бундай P нуқталардан иборат тўпламни C билан белгилайлик. Тўғри чизиқнинг C тўпламга тегишли бўлмаган нуқталар тўпламини C' билан белгилаймиз. Демак, $C' = l \setminus C$. Бу C ва C' нуқталар тўпламлари l да кесим бажаришини кўрсатамиз.

Аввало $A \neq \emptyset$ бўлгани учун $a \in A$ рационал сон бор. Бу соннинг геометрик тасвири бўлган P_a нуқта \dot{A} тўпламга тегишли бўлади. Демак, $P_a \in C$. Бу эса $C \neq \emptyset$ эканини билдиради. Худди шунга ўхаш $C' \neq \emptyset$ экани кўрсатилади.

C ва C' тўпламларнинг тузилишидан $C \cup C' = l$ ва C тўпламдаги ҳар бир нуқта C' тўпламдаги исталган нуқтадан чапда жойлашганилиги келиб чиқади. Демак, C ва C' тўпламлар l да (C, C') кесим бажаради. Ушбу бобнинг 2-§ да келтирилган тўғри чизиқнинг 4° хоссасига кўра (C, C') кесим ягона нуқтани аниқлайди. Бу нуқтани P_α каби белгилаймиз. \dot{A} тўпламда энг ўнг нуқта бўлмагани учун $P_\alpha \notin \dot{A}$, шунингдек \dot{A}' тўпламда энг чап нуқта бўлмагани учун $P_\alpha \notin \dot{A}'$ бўлади. Демак, $P_\alpha \notin \dot{A} \cup \dot{A}'$ бўлиб, бу нуқта рационал нуқта бўлмайди. Иррационал сон α га худди шу P_α нуқтани мос қўймиз.

Шундай қилиб, ҳар бир $\alpha \in R$ сонга l тўғри чизиқда P_α нуқтаси мос қўйилиши кўрсатилди. Энди аксинча, l тўғри чизиқдаги ҳар бир нуқтага битта ҳақиқий сон мос келишини кўрсатамиз.

Сонлар ўқида бирор P нуқта олайлик. Бу нуқта, айтайлик O нуқтадан ўнгда ётсин. Равшанки, P нуқта сонлар ўқида OP кесмани ҳосил қиласди. Масштаб кесмаси OE ни OP кесма бўйлаб жойлаштирамиз. Бунда қўйидаги икки ҳол юз беради:

1.) OP кесмада OE кесма бутун сон a_0 марта тўлиқ жойлашади. Бу ҳолда OP кесманинг ўнг учини ифодаловчи P нуқтага худди шу a_0 сон мос қўйилади. a_0 сон P нуқтанинг координатаси (абсцисаси) деб ҳам аталади. Демак, бу ҳолда P нуқтага a_0 рационал сон мос келади.

2.) OP кесмада OE кесма бутун сон a_0 марта жойлашиб OP кесмадан SP кесма ортиб қолиши ёки OP кесмада OE кесма $a_0 + 1$ марта жойлашганда OP кесмага PQ кесма етмасдан қолиши мумкин. Бу ҳолда OP кесманинг ўнг учини ифодаловчи P нуқтага a_0 сонни «ками» билан, $a_0 + 1$ сонни эса «ортиғи» билан мос қўйиш мумкин. Бу ҳолда P нуқтага мос келадиган ҳақиқий сонни топиш мақсадида масштаб кесмаси OE нинг $\frac{1}{10}$ қисмини олиб, уни SP

кесма бўйлаб жойлаштирамиз. Бунда яна қўйидаги икки ҳол юз беради:

1₂) SP кесмада OE кесманинг $\frac{1}{10}$ қисми бутун сон a_1 марта тўлиқ жойлашади. Бунда a_1 сон 1, 2, ..., 9 сонларнинг биридир. Бу ҳолда P нуқтага $a_0 + \frac{a_1}{10}$ сон мос қўйилади.

2₂) SP кесмада OE кесманинг $\frac{1}{10}$ қисми бутун сон a_1 марта жойлашиб, SP кесмадан S_1P кесма ортиб қолиши, ёки PA кесмада OE кесманинг $\frac{1}{10}$ қисми $a_1 + 1$ марта жойлашганда PA кесмага AQ_1 кесма етмасдан қолиши мумкин. Бу ҳолда P нуқтага $a_0, a_1 = a_0 + \frac{a_1}{10}$ сонни «ками» билан, $a_0, a_1 + \frac{1}{10} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$ сонни эса «ортиғи» билан мос қўйиш мумкин.

2₂) ҳолда P нуқтага мос келадиган ҳақиқий сонни топиш жараёни давом эттирилади. Бу жараённи n -марта тақрорлагандага яна икки ҳол юз беради:

1_n) OP кесмада масштаб кесмаси OE бутун сон a_0 марта, масштаб кесманинг $\frac{1}{10}$ қисми a_1 марта, масштаб кесмасининг $\frac{1}{10^2}$ қисми a_2 марта ва ҳ. к., масштаб кесмасининг $\frac{1}{10^n}$ қисми эса a_n марта тўлиқ жойлашади. Бу ҳолда P нуқтага

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$$

сон мос қўйилади.

2_n) P нуқтага мос келадиган сонни топиш жараёни якунланмайди. Бу ҳолда P нуқтага

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \quad (*)$$

сонни «ками» билан,

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n} = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n+1}{10^n} \quad (**)$$

сонни «ортиғи» билан мос қўйиш мумкин.

Жараён чексиз дазом этсин. Бу ҳолда P нуқтага мос келадиган ҳақиқий сонни топиш учун юқоридаги (*) ва (**) сонлардан ушбу ($\forall n \in N$ учун)

$$C = \left\{ r : r \in Q, r < a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \dots + \frac{a_n+1}{10^n} \right\}$$

$$C' = \left\{ r : r \in Q, r > a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \right\}$$

тўпламларни тузамиз. Бу C ва C' тўпламлар Q да (C, C') кесим бажаради ва у бирор α ҳақиқий (иррационал) сонни аниқлай-

ди. P нуқтага худди шу α сонни мос құйымиз. Юқоридагидек түғри чизиқда P нуқта O нуқтадан өзінше жойлашғанда ҳам унга мос келады. Бу сон манфий бўлади.

Шундай қилиб, түғри чизиқда олинган ҳар бир нуқтага битта ҳақиқий сон мос қўйилиши кўрсатилди.

Демак, түғри чизиқда олинган ҳар бир нуқтага битта ҳақиқий сон, аксинча, ҳар бир ҳақиқий сонга түғри чизиқда битта нуқта мос келади, яъни $P_\alpha \rightarrow \alpha$, $\alpha \rightarrow P_\alpha$ ($\alpha \in R$, $P_\alpha \in l$).

Энди турли ҳақиқий сонларга түғри чизиқда турли нуқгалар мос келишини, яъни

$$\alpha \rightarrow P_\alpha, \beta \rightarrow P_\beta$$

бўлиб, $\alpha \neq \beta$ бўлганда P_α ва P_β нуқталар ҳам турлича бўлишини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $\alpha \in R$, $\beta \in R$ бўлиб, $\alpha \neq \beta$ бўлсин. Аниқлик учун $\alpha < \beta$ деб олайлик. Учта ҳол бўлиши мумкин:

- а) α ва β — рационал сонлар,
- б) α ва β — сонларнинг бирни рационал, иккинчиси иррационал,
- в) α ва β — иррационал сонлар.

а) ҳолни қарайлик, яъни $\alpha \in Q$, $\beta \in Q$ бўлсин. Унда $\alpha = (A, A')$, $\beta = (B, B')$ бўлиб, α сон A тўпламнинг энг катта, β сон B тўпламнинг энг катта элементи бўлади.

$\alpha < \beta$ бўлганидан $\alpha \in B$ бўлади.

P_β нуқта B тўпламнинг барча нуқталаридан ўнгда, демак, P_α нуқтадан ҳам ўнгда жойлашган. Бу эса P_α ва P_β нуқталарнинг турли эканлигини билдиради.

б) ҳол ҳам юқоридаги а) ҳол каъи исботланади.

Энди в) ҳолни қарайлик: $\alpha \in R \setminus Q$, $\beta \in R \setminus Q$ бўлсин. Унда $\alpha = (A, A')$, $\beta = (B, B')$ бўлиб, $\alpha < \beta$ бўлгани учун $A \subset B$ бўлади. Демак, шундай рационал сон r топилади, $r \in B$, $r \notin A$. Унда $r \in A'$ бўлади. Бу рационал сонга P_r , рационал нуқта мос келади.

P_α нуқта A' тўпламнинг барча нуқталаридан өзінше жойлашган, P_r нуқтадан ҳам өзінше жойлашган.

P_β нуқта B тўпламнинг барча нуқталаридан ўнгда жойлашганидан бу нуқта P_r нуқтадан ҳам ўнгда бўлади. Демак, P_β нуқта P_α нуқтадан ўнгда жойлашган.

Шундай қилиб, ҳақиқий сонлар тўплами R билан түғри чизиқ нуқталари тўплами l орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилди. Шуни эътиборга олиб, биз ҳақиқий сон билан унга мос келувчи түғри чизиқ нуқтасини бир-биридан фарқ қилмаймиз, яъни ҳақиқий сон деганда нуқтани, нуқта деганда ҳақиқий сонни тушунаверамиз.

Масофа тушунчаси математикада муҳим тушунчалардандир. Уни киритишдан аввал оралиқнинг узунлигини тушунтирайлик. Ҳар бир $[a, b]$, (a, b) , (a, b) кўринишдаги оралиқнинг узунлиги деб $b - a$ миқдорга айтилади. Энди масофа тушунчасини киритамиз. $x \in R$, $y \in R$ бўлсин.

2.20- таъриф. Үшбу $|x - y|$ миқдор x ва y нүқталар орасыдағы масофа дейилади ва $\rho(x, y)$ каби белгіләнади: $\rho(x, y) = |x - y|$.
Масофа қуйидаги хоссаларга әга:

1°. $\rho(x, y) \geq 0$ бўлиб, $\rho(x, y) = 0$ тенглик фақат ва фақат $x = y$ бўлганда ўринли бўлади. Бу хосса масофа таърифидан бевосита келиб чиқади.

2°. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (масофанинг симметриклиги).

Хақиқатан ҳам,

$$\rho(x, y) = |x - y| = |(-1)(y - x)| = |y - x| = \rho(y, x).$$

3°. Ихтиёрий $x \in R$, $y \in R$ $z \in R$ нүқталар учун $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (учбурчак тенгсизлиги) тенгсизлик ўринли.

Хақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = \\ &= \rho(x, z) + \rho(z, y). \end{aligned}$$

3- бөб

СОНЛАР ҚЕТМА-ҚЕТЛИГИ ҮЧУН ЛИМИТЛАР НАЗАРИЯСИ

1- §. Ўзгарувчи ва ўзгармас миқдорлар

Биз табиатни күзатиш ва ўрганиш жараённанда узунлик, юз, ҳажм, вақт, температура, масса каби түрли миқдорларга дуч келамиз. Конкрет шароитда бу миқдорлар баъзан түрли қийматларни қабул қиласа, баъзан бир хил қийматга тенг бўлади. Масалан, агар аудиториядаги студентларга айланана чизиш таклиф этилса, унда исталган студент ҳар хил катталик радиус билан айланана чизганини кўрамиз. Бунда айланана радиуси түрли қийматларни қабул қилгани учун ўзгарувчи миқдор бўлади.

Маълумки, ҳар қандай айланана узунлиги s нинг унинг диаметри $2r$ га нисбати $\frac{s}{2r}$ ҳар доим ўзгармас сон $\pi = 3,14\dots$ га тенгdir.

Шундай қилиб, икки хил — ўзгарувчи ҳамда ўзгармас миқдорлар бўлади. Одатда ўзгарувчи ва ўзгармас миқдорларни x, y, r, a, b, c ва ҳ. к. ҳарфлар орқали белгиланади. Ўзгарувчи миқдор түрли қийматларни қабул қилиши мумкин. Масалан, айланана радиусининг ўзгарувчи миқдор сифатида қабул қиласидан қийматларидан иборат тўплам

$$A = \{r : r \in R, 0 \leq r < \infty\}$$

бўлади.

Агар ўзгарувчи қабул қиласидан қийматларидан тузилган тўплам маълум бўлса, ўзгарувчи берилган деб аталади. Ўзгармас миқдорни ҳам ўзгарувчи деб қараш мумкин. Бунда ўзгарувчининг қабул қиласидан қийматларидан ташкил топган тўплам биттагина элементдан иборат бўлади.

Математикада битта ўзгарувчи миқдордан ташқари, бир нечта ўзгарувчи миқдорлар ҳамда бу ўзгарувчи миқдорлар орасидаги боғланишлар ҳам ўрганилади. Айланана радиуси r ҳам, айланана узунлиги s ҳам ўзгарувчи миқдор бўлиб, $s = 2\pi r$ муносабат бу ўзгарувчилар орасидаги боғланишни ифодалайди. Бу ерда, r — эркли ($r \in A$) равишда ўзгарадиган ўзгарувчи бўлиб, s эса унга боғлиқ, эрксиз ўзгарувчидир. Айланана радиуси $A = \{r \in R : 0 \leq r < \infty\}$ тўпламдаги қийматларни қабул қиласа, айланана узунлиги s нинг қийматлари, r га боғлиқ бўлган ҳолда $R_+ = \{s \in R : 0 \leq s < \infty\}$ тўпламни ташкил этади.

Шундай қилиб икки хил — эркли ҳамда эрксиз ўзгарувчилар бўлар экан.

2- §. Соңлар кетма-кетлигининг лимити

1. Соңлар кетма-кетлиги. N ва R түпламлар берилган бўлиб, f — ҳар бир натурал n ($n \in N$) соңга бирор ҳақиқий x_n ($x_n \in R$) соңни мос қўювчи акслантириш бўлсин:

$$f : N \rightarrow R \text{ ёки } n \rightarrow x_n.$$

Бу ҳолда у $x_n = f(n)$ каби ҳам ёзилади.

Демак, f акслантиришни қўйидагича

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \end{array}$$

тасвирилаш мумкин.

$f(n)$ ўзгарувчининг қийматларидан тузилган

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (3.1)$$

түплам соңлар кетма-кетлиги деб аталади. Бу кетма-кетликни ташкил этган x_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) миқдорлар унинг ҳадлари (элементлари) деб аталади. Одатда (3.1) соңлар кетма-кетлиги унинг умумий ҳади орқали $\{x_n\}$ каби белгиланади. Соңлар кетма-кетлигига мисоллар келтирийлик.

- 1) $x_n = \frac{1}{n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots,$
- 2) $x_n = (-1)^n : -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n \dots$
- 3) $x_n = n! : 1!, 2!, 3!, \dots, n!, \dots$
- 4) $x_n = \sin n^\circ : \sin 1^\circ, \sin 2^\circ, \sin 3^\circ, \dots, \sin n^\circ, \dots$
- 5) $x_n = n^{(-1)^n} : 1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \dots, n^{(-1)^n}, \dots$
- 6) $x_n = 1 : 1, 1, 1, \dots, 1, \dots$
- 7) $0,3; 0,33; 0, \underbrace{333 \dots}_{n \text{ та}} 3 \dots$
- 8) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, баъзи кетма-кетликларнинг умумий ҳадлари формулалар орқали ифодаланиб, уларнинг барча ҳадларини шу формулалар ёрдамида топилса, баъзи кетма-кетликлар ҳадларини маълум қоидалар ёрдамида топиш мумкин бўлар экан. Масалан, 8- мисолда келтирилган кетма-кетликтининг ҳадлари ушбу

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_n = x_{n-2} + x_{n-1}, n \geqslant 3 \quad (3.2)$$

қонда билан топилади.

Кетма-кетликнинг дастлабки ҳадлари берилган ҳолда кейинги ҳадларини олдинги ҳадлари орқали топишни ифодалайдиган қонда рекуррент қонда деб аталади. (3.2) формулалар шундай қоидани

иғодалайди. Бу (3.2) қоида билан топилган 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... сонлар *Фибоначчи сонлари* дейилади.

Шуны таъкидлаш лозимки, $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлигининг ($n = 1, 2, 3, \dots$) ҳадлари сони чексиз бўлган ҳолда бу кетма-кетликнинг барча ҳадларидан тузилган тўплам чексиз ёки чекли тўплам бўлиши мумкин. Масалан, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ кетма-кетлик ҳадларидан тузилган $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ тўплам чексиз, $1, -1, 1, -1, \dots$ кетма-кетликнинг ҳадларидан тузилган $\{-1, 1\}$ тўплам эса чекли тўпламдир.

Энди сонлар кетма-кетлигининг чегараланганилиги тушунчалари билан танишамиз.

Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

3.1- таъриф. Агар шундай ўзгармас M сон мавжуд бўлсаки, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади шу сондан катта бўлмаса, яъни $\forall n \in N$ учун $x_n \leq M$ тенгсизлик ўринли бўлса, бу кетма-кетлик юқоридан чегараланган деб аталади. Акс ҳолда эса кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган деб аталади. Масалан,

$$\begin{aligned} & \sin 1^\circ, \sin 2^\circ, \sin 3^\circ, \dots, \sin n^\circ, \dots, \\ & 0, -1, -2, -3, \dots, -n, \dots \end{aligned}$$

кетма-кетликлар юқоридан чегараланган, чунки биринчи кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади 1 дан, иккинчи кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади эса 0 дан катта эмас.

3.2- таъриф. Агар шундай ўзгармас m сон мавжуд бўлсаки, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади шу сондан кичик бўлмаса, яъни $\forall n \in N$ учун $x_n \geq m$ тенгсизлик ўринли бўлса, бу кетма-кетлик қўйидан чегараланган деб аталади. Акс ҳолда кетма-кетлик қўйидан чегараланмаган деб аталади. Масалан,

$$\begin{aligned} & 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots, \\ & 1!, 2!, 3!, \dots, n!, \dots \end{aligned}$$

кетма-кетликлар қўйидан чегараланган, чунки $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$ кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади 0 дан, $\{n!\}$ кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади эса 1 дан кичик эмас.

Ушбу

$$\begin{aligned} & 1, 2, 3, \dots, n, \dots, \\ & -1, -2, -3, \dots, -n, \dots \end{aligned}$$

кетма-кетликлардан биринчиси юқоридан, иккинчиси қўйидан чегараланмаган.

3.3- таъриф. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳам қўйидан, ҳам юқоридан чегараланган бўлса, у чегараланган деб аталади.

Масалан,

$$\begin{aligned} \sin 1^\circ, \sin 2^\circ, \dots, \sin n^\circ, \dots, \\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^{n-2}}, \dots \end{aligned}$$

кетма-кетликлар чегараланган кетма-кетликлардир.

$\{x_n\}$ кетма-кетликтининг чегараланганлигини қуйидаги таърифлаш ҳам мумкин:

3.4-таъриф. Агар шундай мусбат ρ сон мавжуд бўлсаки, $\{x_n\}$ кетма-кетликтининг ҳар бир ҳади абсолют қўймати бўйича шу сондан катта бўлмаса, яъни $\forall n \in N$ учун $|x_n| \leq \rho$ тенгсизлик ўринли бўлса, унда кетма-кетлик чегараланган деб аталади.

$\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳадларидан тузилган тўпламнинг аниқ юқори чегараси $\{x_n\}$ кетма-кетликтининг аниқ юқори чегараси деб аталади ва уни $\sup \{x_n\}$ каби белгиланади.

Шунингдек, $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳадларидан тузилган тўпламнинг аниқ қуий чегараси $\{x_n\}$ кетма-кетликтининг аниқ қуий чегараси деб аталади ва уни $\inf \{x_n\}$ каби белгиланади.

Масалан, ушбу

$$\left\{3 - \frac{1}{n}\right\}, \{2n + 2\}$$

кетма-кетликларнинг аниқ юқори ва қуий чегараларини ёзамиш:

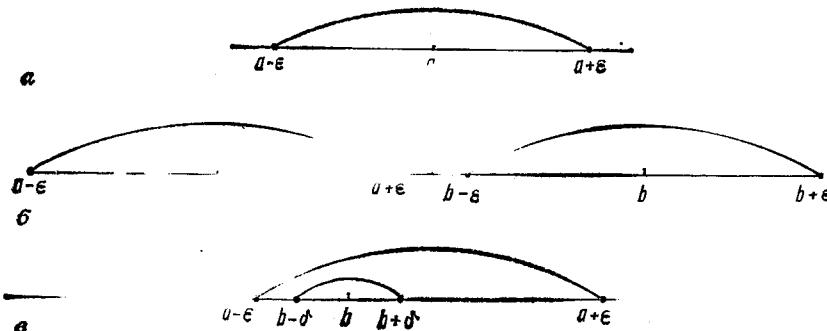
$$\begin{aligned} \sup \left\{3 - \frac{1}{n}\right\} = 3, & \quad \inf \left\{3 - \frac{1}{n}\right\} = 2, \\ \sup \{2n + 2\} = +\infty, & \quad \inf \{2n + 2\} = 4. \end{aligned}$$

2. Нуқтанинг атрофи тушуничи. Бизга $a \in R$ сон ҳамда ихтиёрий мусбат ε сон берилган бўлсин.

3.5-таъриф. Қуйидаги

$$U_\varepsilon(a) = \{x : x \in R, |a - x| < \varepsilon\}$$

тўплам a нуқтанинг атрофи (a -атрофи) деб аталади, ε сон эса атрофнинг радиуси дейилади.



18- чизма

Таърифга кўра a нуқтанинг ε -атрофи a нуқтани ўз ичига олган $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ интервалдан иборат (18-а чизма). Кўринадики, нуқтанинг атрофи маълум нуқталар тўпламидан иборат. Келажакда «нуқтанинг етарли кичик атрофи» дейилганда нуқтанинг маълум радиусли атрофи тушунилади. Нуқтанинг атрофи қўйидаги асосий хоссаларга эга:

1°. Агар a нуқтанинг $U_\sigma(a)$ ва $U_\delta(a)$ атрофлари берилган бўлса, бу атрофларнинг ҳар бири учун қисм бўлган $U_\varepsilon(a)$ атроф ҳам мавжуд бўлади.

Исбот. $U_\sigma(a)$ ва $U_\delta(a)$ интерваллар a нуқтанинг атрофлари бўлсин:

$$U_\sigma(a) = \{x : x \in R, a - \sigma < x < a + \sigma\},$$

$$U_\delta(a) = \{x : x \in R, a - \delta < x < a + \delta\}.$$

Агәр σ ва δ мусбат сонлардан кичик бўлган ε сонни олиб, a нуқтанинг ушбу

$$U_\varepsilon(a) = \{x : x \in R, a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

атрофини қарасак, унда

$$U_\varepsilon(a) \subset U_\sigma(a), U_\varepsilon(a) \subset U_\delta(a)$$

муносабатлар бажарилишини кўрамиз.

2°. Агар $a \in R, b \in R$ ва $a \neq b$ бўлса, a ва b нуқталарнинг шундай $U_\varepsilon(a)$, $U_\varepsilon(b)$ атрофлари мавжудки, улар умумий нуқтага эга бўлмайди, яъни $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ (18- б чизма).

3°. Агар b нуқта a нуқтанинг $U_\varepsilon(a)$ атрофида ётса, (яъни $b \in U_\varepsilon(a)$) у ҳолда b нинг шундай δ -атрофи $U_\delta(b)$ мавжудки, $U_\delta(b) \subset U_\varepsilon(a)$ бўлади (18- в чизма).

2° ва 3° хоссалар 1° хоссага ўхшаш исботланади.

Маълумки, ҳақиқий сонлар тўплами R таркибига $+\infty$ ва $-\infty$ символларни қўшиб, кенгайтирилган сонлар тўплами \bar{R} ни ҳосил қилинган эди. \bar{R} да $+\infty$ ва $-\infty$ «нуқта»ларнинг атрофи тушунчаси қўйидагида киритилади:

$$U(+\infty) = \{x : x \in R, c \in R, c < x < +\infty\},$$

$$U(-\infty) = \{x : x \in R, c_1 \in R, -\infty < x < c_1\}.$$

3. Сонлар кетма-кетлигининг лимити. Математик анализ курсида қараладиган муҳим амаллардан бири лимитга ўтиш амалидир. Биз қўйида сонлар кетма-кетлигининг лимитини қараб ўтамиз.

Бирор $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ кетма-кетлик ҳамда a сон берилган бўлсин.

3.6- таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганида ҳам шундай натурал сон $n_0 \in N$ мавжуд бўлсанки, $n > n_0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча натурал сонлар учун

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{3.3}$$

тенгсизлик бажарилса, a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади. Лимит учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ ёки } \lim x_n = a, \text{ ёки } x_n \rightarrow a$$

белгилашлардан фойдаланилади.

Маълумки, $|x_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ тенгсизликларга эквивалентdir. Агар $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ интервал a нуқтанинг ε -атрофи, яъни $U_\varepsilon(a)$ тўпламдан иборат эканлигини эътиборга олсак, унда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимитига юқорида келтирилган таърифга эквивалент бўлган қўйидагича таъриф бериш ҳам мумкин:

3.6'-таъриф. Агар a нуқтанинг ихтиёрий $U_\varepsilon(a)$ -атрофи олинганида ҳам $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб, кейинги барча ҳадлари шу атрофда ётса, a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади.

Агар таърифдаги шартни қаноатлантирувчи a сон мавжуд бўлмаса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас дейилади.

Шуни таъкидлаш лозимки, кетма-кетлик лимити таърифидаги ε ихтиёрий мусбат сон бўлиб, натурал сон n_0 эса шу ε га ва қарала-ётган кетма-кетликка боғлиқ равища топилади.

Мисоллар

1. $x_n = \frac{1}{n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ кетма-кетликнинг лимити 0 га тенг бўлишини кўрсатинг.

Ихтиёрий мусбат ε сонни олайлик. Шу ε га кўра $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$ ни топамиз. У ҳолда барча $n > n_0$ сонлар учун

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1} < \varepsilon$$

муносабат ўринли. Демак, таърифга кўра, $\lim \frac{1}{n} = 0$. Бу мисолда $\varepsilon = 0,01$ деб олайлик. Унда $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 = 101$ экани кўринади. Агар $\varepsilon = 0,001$ бўлса, $n_0 = 1001$, шунингдек, $\varepsilon = 0,015$ бўлса, $n_0 = 67$ эканига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

2. Ушбу $x_n = \sqrt[n]{a}$ ($a > 1$):

$$a, \sqrt[n]{a}, \sqrt[3]{a}, \dots, \sqrt[n]{a}, \dots$$

кетма-кетликнинг лимити 1 а тенг бўлишини кўрсатинг.

Ихтиёрий мусбат ε сонни оламиз. Олинган ε сонга кўра натурал n_0 сонни

$$n_0 = \left[\frac{\lg a}{\lg(1 + \varepsilon)} \right]$$

бўлсин деб қарайлик. Бу ҳолда $n > n_0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча натурал n сонлар учун

$$|x_n - 1| = |\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < a^{\frac{1}{n_0}} - 1 < a^{\frac{\lg(1+\varepsilon)}{\lg a}} - 1 < \varepsilon$$

муносабатлар ўринли бўлади. Бу эса берилган кетма-кетликнинг лимити 1 га тенг бўлишини кўрсатади.

$$3. x_n = (-1)^n: -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$$

кетма-кетликнинг лимити мавжуд эмаслигини кўрсатинг. Тескарисини фараз қиласлик, яъни берилган кетма-кетлик лимитга эга ва унинг лимити a га тенг бўлсин. Унда таърифга кўра ихтиёрий мусбат ε сон учун шундай натурал сон n_0 мавжудки, $n > n_0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча натурал сонлар учун $|(-1)^n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бунда n жуфт бўлганда $|1 - a| < \varepsilon$, n тоқ бўлганда эса $|(-1) - a| < \varepsilon$ ёки $|1 + a| < \varepsilon$ тенгсизликка эга бўламиз. Шу тенгсизликларга кўра

$$2 = |(1 - a) + (1 + a)| \leq |1 - a| + |1 + a| < 2\varepsilon,$$

яъни $2 < 2\varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади. Аммо бу тенгсизлик $\varepsilon > 1$ бўлгандагина ўринли. Бу натижা $\varepsilon > 0$ соннинг ихтиёрийлигига зид. Демак, берилган кетма-кетлик лимитга эга эмас.

4. Ушбу

$$0, \overset{n \text{ ta}}{0,33}; 0,333; \dots, \underset{n \text{ ta}}{0,33 \dots 3}, \dots$$

кетма-кетликнинг лимити $\frac{1}{3}$ га тенг бўлишини кўрсатинг.

$\forall \varepsilon > 0$ сон олиб, $\left| \underset{n \text{ ta}}{0,33 \dots 3} - \frac{1}{3} \right|$ ни қараймиз. Равшанки

$$\begin{aligned} 0, \underset{n \text{ ta}}{0,33 \dots 3} - \frac{1}{3} &= \frac{\underset{n \text{ ta}}{33 \dots 3}}{\underset{n \text{ ta}}{100 \dots 0}} - \frac{1}{3} = \frac{\underset{n \text{ ta}}{99 \dots 9} - 10^n}{3 \cdot 10^n} = \\ &= \frac{-1}{3 \cdot 10^n}; \left| \underset{n \text{ ta}}{0,33 \dots 3} - \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3 \cdot 10^n}. \end{aligned}$$

Энди $\varepsilon > 0$ га кўра шундай $n_0 \in N$ сон топиш керакки, натижада $n > n_0$ лар учун $\frac{1}{3 \cdot 10^n} < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлсин. Кейинги тенгсизлик $n > -\lg 3\varepsilon$ бўлганда ўринли бўлиши равшан. Демак, биз n_0 сифатида $[-\lg 3\varepsilon]$ сонни олишимиз етарли. Бу эса қаралаётган кетма-кетлик лимитининг $\frac{1}{3}$ га тенг бўлишини кўрсатади.

3.7- таъриф. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити нолга тенг, яъни $\lim x_n = 0$ ўринли бўлса, x_n ўзгарувчи чексиз кичик

миқдор деб аталади, тегишли $\{x_n\}$ эса чексиз кичик кетма-кетлик дейилади.

Кетма-кетлик лимити таърифида $a = 0$ деб олинадиган бўлса, унда барча натурал $n > n_0$ сонлар учун (3.3) тенгсизлик $|x_n - a| = |x_n| < \varepsilon$ тенгсизликка келади. Демак, чексиз кичик миқдор ўзгарувчи миқдор бўлиб, у ўзгариш жараёнида абсолют қиймати бўйича аввалдан берилган ҳар қандай кичик мусбат ε сондан ҳам кичик бўла олади.

Мисоллар

1. $x_n = \frac{1}{n}$ ўзгарувчи чексиз кичик миқдордир, чунки $\lim x_n = \lim \frac{1}{n} = 0$.

2. Ўшбу $x_n = q^n$ ($|q| < 1$) ўзгарувчи ҳам чексиз кичик миқдор.

Буни кўрсатиш учун $\lim q^n = 0$ ($q \neq 0, |q| < 1$) лимитнинг ўринли бўлишини кўрсатамиз.

Аввал, $|q| < 1$ тенгсизликдан $\frac{1}{|q|} > 1$ тенгсизлик келиб чиқади.

Уни $\frac{1}{|q|} = 1 + \alpha$ ($\alpha > 0$) деб га демак, $\frac{1}{|q|^n} = (1 + \alpha)^n, n \in N$ деб қарааш мумкин. Қуйидаги

$$(1 + \alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha, \forall n \in N$$

Бернулли тенгсизлигидан* фойдаланиб, $\alpha > 0$ бўлган ҳолда топамиз:

$$|q|^n \leqslant \frac{1}{1 + n\alpha}.$$

Энди ихтиёрий мусбат ε сонни олиб, унга боғлиқ n_0 натурал сон

$$n_0 = \left[\frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\alpha} \right] + 1$$

* Ихтиёрий $n \in N$ ҳамда $\alpha > -1$ ($\alpha \in R, \alpha \neq 0$) сонлар учун ушбу $(1 + \alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$ (*)

тенгсизлик ўрнили. Буни математик индукция методи билан осон исботлаш мумкин. Ҳақиқатан, $n = 2$ да

$$(1 + \alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2 \geqslant 1 + 2\alpha \text{ бўлиб, (*)}$$

бажарилади. У ҳолда (*) n ($n > 2$) учун тўғри, яъни $(1 + \alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$ деб, $n + 1$ учун тўғрилигини кўрсатамиз:

$$(1 + \alpha)^{n+1} = (1 + \alpha)^n (1 + \alpha) \geqslant (1 + n\alpha) (1 + \alpha) = 1 + n\alpha + \alpha + n\alpha^2 \geqslant 1 + (n + 1)\alpha.$$

Одатда (*) Бернулли тенгсизлиги дейилади.

бўлсин деб қарайлик. У ҳолда $n > n_0$ тенгсизликини қансатлантирувчи барча натурал n сонлар учун

$$\begin{aligned} ||q|^n - 0| = |q|^n \leqslant \frac{1}{1+n\alpha} < \frac{1}{1+n_0\alpha} = \frac{1}{1+\left(\left[\frac{1}{\frac{\epsilon}{\alpha}}-1\right]+1\right)\alpha} < \\ < \frac{1}{1+\frac{\frac{1}{\epsilon}-1}{\alpha}\alpha} = \epsilon, \end{aligned}$$

яъни $|q|^n < \epsilon$ тенгсизлик ўринли. Демак, $\lim q^n = 0$ ($q \neq 0$, $|q| < 1$) лимит ўринли. Бу эса, $x_n = q^n$ ўзгарувчи чексиз кичик миқдор эканини англатади.

Агар $x_n = q^n$ ўзгарувчи учун $q = 0$ бўлса, $\forall n \in N$ да $x_n = 0$ бўлади. Бу эса, яна $x_n = 0$ ўзгарувчининг чексиз кичик миқдор эканини кўрсатади.

Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлиб, унинг лимити a бўлсин: $\lim x_n = a$. Лимит таърифига кўра, $\forall \epsilon > 0$ учун шундай $n_0 \in N$ топиш мумкинки, $n > n_0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча натурал сонлар учун $|x_n - a| < \epsilon$ тенгсизлик бажарилади. Агар $x_n - a = \alpha_n$ деб олинса, $|\alpha_n| < \epsilon$ бўлиб, бу α_n ўзгарувчининг чексиз кичик миқдор эканлигини билдиради. Шундай қилиб, $\lim x_n = a$ бўлса, $\alpha_n = x_n - a$ ўзгарувчи чексиз кичик миқдор бўлади.

Энди $\{x_n\}$ кетма-кетлик, a сон берилган бўлиб, $\alpha_n = x_n - a$ ўзгарувчи чексиз кичик миқдор бўлсин. Унда $|x_n - a| = |\alpha_n| < \epsilon$ бўлиб, $\lim x_n = a$ бўлади. Натижада қўйидаги содда теоремага келамиз.

3.1- таъриф. $\{x_n\}$ кетма-кетлик чекли a лимитга эга бўлиши учун $\alpha_n = x_n - a$ ўзгарувчи чексиз кичик миқдор бўлиши зарур ва етари.

3.8- таъриф. Чекли лимитга эга бўлган кетма-кетлик яқинлашувчи кетма-кетлик деб аталади. Агар кетма-кетликнинг лимити чекли бўлмаса ёки кетма-кетлик лимитга эга бўлмаса, уни узоқлашувчи кетма-кетлик дейилади.

3- §. Яқинлашувчи кетма-кетликларнинг хоссалари

Яқинлашувчи кетма-кетликлар қатор хоссаларга эга.

1°. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи ва $\lim x_n = a$ бўлиб, $a > p$ ($a < q$) бўлса, у ҳолда кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлиб кейинги барча ҳадлари ҳам p сондан катта (q сондан кичик) бўлади.

Исбот. $x_n \rightarrow a$ бўлиб, $a > p$ ($a - p > 0$) бўлсин. $\epsilon > 0$ сонни. $\epsilon < a - p$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қилиб олайлик.

Кетма-кетликнинг чекли a лимитга эга бўлишидан фойдаланиб, $\forall \epsilon > 0$ сон учун, жумладан $0 < \epsilon < a - p$ учун шундай $n_0 \in N$ сон

топиш мүмкінки, $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ бўла-ди. Натижада $n > n_0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча натурал сонлар учун $-\varepsilon < x_n - a$ ва $\varepsilon < a - p$ ($-a + p < -\varepsilon$) тенгсизлик-лардан $x_n > p$ бўлиши келиб чиқади. ($a < q$ ҳол учун ҳам хосса худди юқоридагидек исбот этилади.)

Бу хоссадан қуйидаги натижада келиб чиқади.

3.1-натижада. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи ва $\lim x_n = a$ бўлиб, $a > 0$ ($a < 0$) бўлса, у ҳолда кетма-кетликнинг бирор ҳади-дан бошлаб кейинги барча ҳадлари мусбат (манфий) бўлади.

2°. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у чегаралан-ган бўлади.

Исбот. $\lim x_n = a$ бўлсин. Таърифга кўра $\forall \varepsilon > 0$ берилганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, $n > n_0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча натурал сонлар учун $|x_n - a| < \varepsilon$ бўлади, яъни $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг $(n_0 + 1)$ -ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари учун $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ тенгсизликлар бажарилади. Демак, $\{x_n\}$ кет-ма-кетликнинг ошиб борса x_1, x_2, \dots, x_{n_0} ҳадлари $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ тенгсизликларни қаноатлантирумаслиги мумкин. Агар

$$|a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0}|$$

сонларнинг энг каттасини M деб олсак, у ҳолда берилган кетма-кетликнинг барча ҳадлари

$$|x_n| \leq M, / n = 1, 2, 3, \dots$$

тенгсизликни қаноатлантиради. Бу эса $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чега-раланганилигини билдиради.

3.1-эслатма. Сонлар кетма-кетлигининг чегараланганилигидан унинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, $x_n = (-1)^n : -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$ кетма-кетлик че-гараланганд, чунки $\forall n \in N$ учун $|x_n| = |(-1)^n| = 1$. Айни вақтда унинг лимити мавжуд эмаслиги юқорида кўрсатилган эди.

4°. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, унинг лимити ягонадир.

Исбот. Тескарисини фараз қиласайлик, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити камидан иккита бўлсин. Уларни a ва b дейлик, яъни

$$\lim x_n = a, \lim x_n = b, a \neq b.$$

Модомики, $a \neq b$ экан, унда a ва b нуқталарнинг мос равиша-да шундай

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(a) &= \{x : x \in R, a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}, \\ U_\varepsilon(b) &= \{x : x \in R, b - \varepsilon < x < b + \varepsilon\} \end{aligned}$$

атрофлари мавжудки, ул р умумий нуқтага эга бўлмайди: $U_\varepsilon(a) \cap \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$. Энди $\lim x_n = a$ эканлигидан, $\forall \varepsilon > 0$ берилганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, $n > n_0$ тенгсизликни қаноатлантирув-

чи барча натурагал сонлар учун $|x_n - a| < \varepsilon$ ёки $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Худди шунингдек, $\lim x_n = b$ бўлганлигидан, $\forall \varepsilon > 0$ берилганида ҳам шундай $n'_0 \in N$ сон топиладики, $n > n'_0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча натурагал сонлар учун $|x_n - b| < \varepsilon$ ёки $b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Энди n_0 ва n'_0 натурагал сонлардан каттасини \bar{n}_0 деб олсак, $n > \bar{n}_0$ бўлганда бир вақтда

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ ва } |x_n - b| < \varepsilon$$

тенгсизликлар бажарилади. Натижада $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг x_n , $n > \bar{n}_0$, ҳадлари бир вақтда $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ва $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ интервалларга тегишли бўлади. Бундай ҳол $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ муносабатга зиддир. Хосса исбот бўлди.

4-§. Яқинлашувчи кетма-кетликлар устида арифметик амаллар

1. Сонлар кетма-кетликлари устида амаллар $\{x_n\} : x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ҳамда $\{y_n\} : y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ кетма-кетликлар берилган бўлсин. Қуйидаги

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots,$$

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n, \dots,$$

$$x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \dots, x_n \cdot y_n, \dots,$$

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots \quad (y_k \neq 0, k = 1, 2, \dots)$$

кетма-кетликлар мос равишда $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг йигиндиси, айримаси, кўпайтмаси ва нисбати деб аталади ва улар $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ каби белгиланади. Бу таърифга

кўра

$$\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\},$$

$$\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\},$$

$$\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}.$$

Айтайлик $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{n-1}{n}$ бўлса,

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} + \left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \{1\}, \quad \left\{\frac{1}{n}\right\} - \left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{\frac{2}{n} - 1\right\},$$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} \cdot \left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{\frac{n-1}{n^2}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{n}\right\} : \left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{\frac{1}{n-1}\right\} \quad (n \neq 1)$$

бўлади. Агар икки кетма-кетлик кўпайтмаси таърифида $y_n = C = \text{const}$ бўлса, $C \cdot \{x_n\} = \{Cx_n\}$ экани келиб чиқади.

2. Чексиз кичик миқдорлар ҳақида леммалар. Чексиз кичик миқдорлар ҳақида қуйидаги икки леммадан биз келгуси баёнимизда фойдаланиб борамиз.

3.1- лемма. Чекли сондаги чексиз кичик миқдорлар йигиндиси чексиз кичик миқдор бўлади.

Исбот. α_n ва β_n чексиз кичик миқдорлар бўлсин:

$\lim \alpha_n = 0, \lim \beta_n = 0$. Лимит таърифига биноан $\forall \varepsilon > 0$ берилганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ сонга кўра шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0$ лар учун $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Шунингдек, $\frac{\varepsilon}{2}$ сонга кўра шундай $n'_0 \in N$ сон топиладики, барча $n > n'_0$ лар учун $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Энди n_0 ва n'_0 натуран сонлардан каттасини \bar{n}_0 деб олсак, унда барча $n > \bar{n}_0$ лар учун бир вақтда $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}, |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Шунинг учун $n > \bar{n}_0$ бўлганда $|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ бўлиб, ундан $\lim(\alpha_n + \beta_n) = 0$ келиб чиқади. Энди α_n, β_n ва γ_n лар чексиз кичик миқдорлар бўлсин. Юқорида исбот этилганига кўра $\alpha_n + \beta_n$ чексиз кичик миқдор бўлади. Худди шунингдек $(\alpha_n + \beta_n) + \gamma_n$ ҳам чексиз кичик миқдорлар йигиндиси сифатида яна чексиз кичик миқдор бўлади. Демак, $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n$ — чексиз кичик миқдор. Мана шу усул билан чекли сондаги чексиз кичик миқдорлар йигиндиси чексиз кичик миқдор бўлиши кўрсатилади. 3.1- лемма исбот бўлди.

3.2- лемма. Чегараланган кетма-кетлик билан чексиз кичик миқдор кўпайтмаси чексиз кичик миқдор бўлади.

Исбот. $\{x_n\}$ — чегараланган кетма-кетлик бўлсин. Шунга кўра шундай ўзгармас сон $M > 0$ мавжудки, $\forall n \in N$ лар учун $|x_n| \leq M$ бўлади. Энди α_n — чексиз кичик миқдор бўлсин. Таърифга асосан $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $\frac{\varepsilon}{M}$ га кўра шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0$ лар учун $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ бўлади. Натижада барча $n > n_0$ лар учун

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ ўзгарувчининг чексиз кичик миқдор эканлигини кўрсатади. 3.2- лемма исбот бўлди.

3.2- натижада. Икки чексиз кичик миқдор кўпайтмаси яна чексиз кичик миқдор бўлади.

3. Яқинлашувчи кетма-кетликлар устида арифметик амаллар.

3.2- теорема. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, $\{x_n \pm y_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва

$$\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ бўлсин. 3-1- теоремага мувофиқ $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$ бўлади, бунда α_n , β_n лар чексиз кичик миқдорлар. У ҳолда $x_n \pm y_n$ учун қўйидаги

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n) = a \pm b + \gamma_n$$

тенгликка келамиз, бунда $\gamma_n = \alpha_n \pm \beta_n$ — чексиз кичик миқдор. Бундан эса, яна ўша 3.1- теоремага мувофиқ

$$\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b = \lim x_n \pm \lim y_n$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Бу теорема икки яқинлашувчи кетма-кетлик йигиндисининг ли-мити бу кетма-кетликлар лимитларининг йигиндисига тенг деган қо-идани ифодалайди.

Исбот этилган теорема қўшилувчиларнинг сони иккитадан ор-тиқ (чекли) бўлган ҳолда ҳам ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин.

3.3- теорема. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашув-чи бўлса, $\{x_n \cdot y_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва

$$\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ бўлсин. У ҳолда $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, α_n ва β_n лар чексиз кичик миқдорлар. Унда

$$x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = a \cdot b + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n).$$

Чексиз кичик миқдорлар ҳақидаги 3.1- ва 3.2- леммаларга асосан $\delta_n = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$ ўзгарувчи чексиз кичик миқдор бўлади.

Демак,

$$x_n y_n = a \cdot b + \delta_n$$

бўлиб, бундан

$$\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b = \lim x_n \cdot \lim y_n$$

экани келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Бу теорема иккита яқинлашувчи кетма-кетлик кўпайтмасининг лимити бу кетма-кетликла, лимитларининг кўпайтмасига тенг бўли-шини ифодалайди.

3.3- натижажа. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, унда $C = \text{const}$ учун $\{Cx_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва $\lim(Cx_n) = C \lim x_n$ формула ўринли бўлади.

Бу натижанинг исботи 3.3- теоремадан бевосита келиб чиқади

3.4- теорема. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинла-шувчи бўлиб, $\forall n \in N$ учун $y_n \neq 0$ ва $\lim y_n \neq 0$ бўлса, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ҳамда

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, $b \neq 0$ бўлсин. У ҳолда $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, бунда α_n, β_n чексиз кичик миқдорлар. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b + \beta_n)} \cdot (b\alpha_n - a\beta_n).$$

Чексиз кичик миқдорлар ҳақидаги 3.1- ва 3.2- леммаларга асосан $b\alpha_n - a\beta_n$ чексиз кичик миқдор бўлиб, $\frac{1}{b(b + \beta_n)}$ эса чегараланган (чунки b — чекли, $\beta_n \rightarrow 0$) миқдор бўлгани учун $\gamma_n = \frac{1}{b(b + \beta_n)}(b\alpha_n - a\beta_n)$ чексиз кичик миқдор бўлади. Демак,

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \gamma_n.$$

Бундан

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$$

муносабатлар ўринли экани келиб чиқади.

Шундай қилиб, яқинлашувчи кетма-кетликларининг лимити уларнинг лимитларига тенг (бунда маҳраж нолдан фарқли бўлиши лозим).

3.2- эслатма. Икки $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликнинг йифиндиси, айрмаси, қўпайтмаси ва нисбатидан иборат бўлган кетма-кетликнинг яқинлашувчи бўлишидан бу $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи, чунки $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = \lim \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = 0$, аммо $\{\sqrt{n+1}\}$ ва $\{\sqrt{n-1}\}$ кетма-кетликлар узоқлашувчи экани равshan. Шунга ўхашаш $\left\{ \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}} \right\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи, аммо у узоқлашувчи кетма-кетликларидан тузилган. Шунингдек, $\left\{ \frac{1}{n} \cdot n \right\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи (у 1 га яқинлашади), аммо $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи ҳамда $\{n\}$ кетма-кетлик узоқлашувчидир.

4. Яқинлашувчи кетма-кетликлар фазоси. 3.9- таъриф. Барча яқинлашувчи кетма-кетликлардан тузилган тўплам яқинлашувчи кетма-кетликлар фазоси деб аталади ва уни c орқали белгиланади.

Юқоридаги мулоҳазалардан $\{x_n\} \in c$, $\{y_n\} \in c$ бўлганда $\{x_n \pm y_n\} \in c$, $\{x_n \cdot y_n\} \in c$, $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} \in c$ ($\forall n \in N$ учун $y_n \neq 0$ ва $\lim y_n \neq 0$ бўлганда)

муносабатларнинг ўринли бўлиши келиб чиқади. Демак, c тўпламда ҳам ҳақиқий сонлар тўплами R даги каби қўшиш, айриш, кўпайтириш ҳамда бўлиш амалларини бажариш мумкин.

Маълумки, (2- бобнинг 10- § ига қаранг) R тўпламда унинг исталган икки x ва y элементи орасидаги масофа $d(x, y) = |x - y|$ каби аниқланиб, унинг бир қанча хоссалари келтирилган эди. c фазода ҳам унинг исталган икки элементи орасида «масофа» тушунчасини киритиш мумкин.

Фараз қиласайлик, $\{x_n\} \in c$, $\{y_n\} \in c$ бўлсин. Бу элементлар орасидаги «масофа» деб қўйидаги

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup_n |x_n - y_n| = \\ = \sup \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|, \dots\}$$

миқдорга айтамиз.

Энди киритилган «масофа» хоссаларини ўрганайлик.

Аввало $d(\{x_n\}, \{y_n\}) \geq 0$ бўлиши равшандир. Агар $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup_n |x_n - y_n| = 0$ бўлса, ундан $\forall n \in N$ учун $x_n = y_n$ келиб чиқади. Аксинча, агар $\forall n \in N$ учун $x_n = y_n$ бўлса, ундан $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup_n |x_n - y_n| = 0$ экани келиб чиқади. Демак,

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in N \text{ учун } x_n = y_n.$$

Иккинчидан, $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = d(\{y_n\}, \{x_n\})$, чунки

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup_n |x_n - y_n| = \sup_n |y_n - x_n| = d(\{y_n\}, \{x_n\}).$$

Энди $\{x_n\} \in c$, $\{y_n\} \in c$ ва $\{z_n\} \in c$ бўлсин. Абсолют қиймат хосасига кўра ушбу

$$|x_n - z_n| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n|$$

тengsизлик ўринли бўлиши равшан. Бундан эса

$$|x_n - z_n| \leq \sup_n |x_n - y_n| + \sup_n |y_n - z_n|$$

еканлиги келиб чиқади. Аниқ юқори чегара хосасига кўра

$$\sup_n |x_n - z_n| \leq \sup_n |x_n - y_n| + \sup_n |y_n - z_n|.$$

Демак,

$$d(\{x_n\}, \{z_n\}) \leq d(\{x_n\}, \{y_n\}) + d(\{y_n\}, \{z_n\}).$$

5. Тенглик ҳамда tengsizlikларда лимитга ўтиши. Кетма-кетликлар лимитининг мавжудлигини кўрсатиш ва лимитларни топиш каби масалаларни ҳал қилишда тенглик ҳамда tengsizlikларда лимитга ўтиши қондаси тез-тез кўлланиб туради. Биз уларни келтирамиз.

1°. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб,

$\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ бўлсин. Агар $\forall n \in N$ учун $x_n = y_n$ бўлса, у ҳолда $a = b$ бўлади.

Бу қоида яқинлашувчи кетма-кетлик лимитининг ягоналигидан келиб чиқади.

2°. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ бўлсин. Агар $\forall n \in N$ учун $x_n \leq y_n$ ($x_n \geq y_n$) бўлса, у ҳолда $a \leq b$ ($a \geq b$) бўлади.

Исбот. Тескарисини фараз қиласлик, яъни келтирилган шартлар бажарилса ҳам $a > b$ бўлсин. Маълумки, $a > c > b$ тигисизликларни қаноатлантирувчи ҳақиқий c сон мавжуд. Демак, $\lim x_n = a$ ва $a > c$. Яқинлашувчи кетма-кетликларнинг 1° хоссасига (шу бобнинг 3- § ига қаранг) кўра шундай $n_0 \in N$ мавжудки, барча $n > n_0$ лар учун $x_n > c$ бўлади. Шунингдек, $\lim y_n = b$, $b < c$. Яна ўша хоссага мувофиқ шундай $n'_0 \in N$ мавжудки, барча $n > n'_0$ лар учун $y_n < c$ бўлади. Агар $\overline{n_0}$ деб, n_0 ва n'_0 натурал сонларнинг каттаси олинса, барча $n > \overline{n_0}$ лар учун бир вақтда $x_n > c$ ҳамда $c > y_n$ тигисизликлар ўринли бўлиб, ундан $x_n > y_n$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса $x_n \leq y_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ тигисизликка зиддир. Демак, $a \leq b$ бўлади.

Худди шунга ўхшаш, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ ҳамда $\forall n \in N$ учун $x_n \geq y_n$ бўлишидан $a \geq b$ тигисизлик келиб чиқиши кўрсатилади.

3.3- эслатма. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ бўлсин.

Барча $n = 1, 2, 3, \dots$ лар учун $x_n < y_n$ тигисизликнинг бажарилишидан $a < b$ тигисизлик ҳамма вақт келиб чиқавермайди.

Масалан, $\left\{-\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{n}\right\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи. Бу кетма-кетликларда $\forall n \in N$ учун $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ бўлса ҳам $\lim\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim \frac{1}{n} = 0$ бўлади.

3.4- натижада. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, $\forall n \in N$ учун $x_n \geq c$ ($x_n \leq c$) бўлса, у ҳолда $\lim x_n \geq c$ ($\lim x_n \leq c$) бўлади (бунда c — ўзгармас сон).

Бу натижанинг исботи юқоридаги 2° хоссада $y_n = c$, $n = 1, 2, \dots$ деб олинишидан келиб чиқади.

3°. $\{x_n\}$ ва $\{z_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, $\lim x_n = \lim z_n = a$ бўлсин. Агар $\forall n \in N$ учун $x_n \leq y_n \leq z_n$ бўлса, у ҳолда $\{y_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва $\lim y_n = a$ бўлади.

Исбот. Кетма-кетликнинг лимити таърифига асосан $\forall \varepsilon > 0$ берилганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ лар учун $|x_n - a| < \varepsilon$ ёки $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ тигисизликлар ўринли бўлади. Шунингдек, ўша $\varepsilon > 0$ олинганида ҳам шундай $n'_0 \in N$ топиладики,

барча $n > n_0'$ лар учун $|z_n - a| < \varepsilon$ ёки $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Энди n_0 ва n_0' натурал сонларнинг каттасини $\overline{n_0}$ деб олайлик. Унда $n > \overline{n_0}$ бўлганда бир вақтда $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Аммо шартга кўра $\forall n \in N$ учун $x_n \leq y_n \leq z_n$ тенгсизликлар ўринли. Шунинг учун $n > \overline{n_0}$ бўлганда $a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$, яъни $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\{y_n\}$ кетма-кетликнинг яқинлашувчилигини ва $\lim y_n = a$ эканлигини кўрсатади.

Мисол. Ушбу $\{x_n\} = \{\sqrt[n]{n}\} : 1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$ кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Равшанки, барча $n \geq 2$ да

$$\sqrt[2n]{n} > 1$$

бўлади.

Энди $\alpha_n = \sqrt[2n]{n} - 1$ деб олиб, сўнг Бернулли тенгсизлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\sqrt[2n]{n} = (1 + \alpha_n)^{2n} > 1 + n \cdot \alpha_n > n \cdot \alpha_n,$$

бундан $\alpha_n < \frac{1}{\sqrt[2n]{n}}$ ва $n \geq 2$ бўлганда $1 < \sqrt[2n]{n} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt[2n]{n}}\right)^2$ тенгсизликлар келиб чиқади. Агар

$$\lim \left(1 + \frac{1}{\sqrt[2n]{n}}\right)^2 = 1$$

эканини ҳисобга олсак, у ҳолда кейинги тенгсизликда лимитга ўтиб (3°-қоидага асосланган ҳолда) изланган лимитни топамиз: $\lim \sqrt[2n]{n} = 1$.

Изоҳ. Юқорида биз тенглик ҳамда тенгсизликларда лимитга ўтиш қоидаларини кўрдик. Бу қоидалар $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ва $\{z_n\}$ кетма-кетликларнинг ҳадлари орасидаги муносабатлар бирор тайин m -ҳаддан бишлаб ўринли бўлганида ҳам тўғри бўлади.

5-§. Чексиз катта миқдорлар. Чексиз кичик ҳамда чексиз катта миқдорлар орасида боғланиш

Математик анализ курсида чексиз кичик миқдорлар билан бир қаторда чексиз катта миқдорлар ҳам қаралади.

Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

2.10-таъриф. Агар ҳар қандай мусбат M сон берилганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон топилсанки, барча $n > n_0$ лар учун

$$|x_n| > M$$

тенгсизлик ўринли бўлса, x_n ўзгарувчи чексиз катта миқдор деб аталади, тегишли $\{x_n\}$ эса чексиз катта кетма-кетлик дейилади.

Демак, чексиз катта миқдор ўзгарувчи миқдор бўлиб, у ўзгариш жараённда абсолют қиймати бўйича аввалдан берилган ҳар қандай мусбат сондан катта бўла олади.

Равшанки, чексиз катта миқдорлар чекли лимитга эга эмас.

Қулайлик нуқтai назаридан чексиз катта миқдорларнинг лимити чексиз ёки чексиз катта миқдорлар чексизга интилади деб олинади ва

$$\lim x_n = \infty \text{ ёки } x_n \rightarrow \infty$$

каби ёзилади.

Агар $\forall M > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон топчилсаки, барча $n > n_0$ лар учун $x_n > M$ ($x_n < -M$) бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити $+\infty$ ($-\infty$) деб олинади ва $\lim x_n = +\infty$ ($\lim x_n = -\infty$) каби ёзилади.

Мисоллар

1. Ушбу $\{(-1)^n \cdot n\} : -1, 2, -3, 4, \dots, (-1)^n \cdot n, \dots$ кетма-кетлик чексиз катта бўлади. Ҳақиқатан, $|(-1)^n \cdot n| = n$ бўлиб, ҳар қандай мусбат M сон олинганда ҳам $n \in N$ сонни шундай танлаб олиш мумкинки, $|(-1)^n \cdot n| = n > M$ бўлади.

2. Ушбу $\{-n\}, \{n\}$ кетма-кетликларнинг чексиз катта бўлиши равшан. Уларнинг лимити мос равиша $-\infty$ ва $+\infty$ бўлади.

3.4-эслатма. Ҳар қандай чексиз катта кетма-кетлик чегараланмаган кетма-кетликдир. Аммо ҳар қандай чегараланмаган кетма-кетлик чексиз катта бўлиши шарт эмас. Мазалан,

$$1, 1^2, 1, 2^2, 1, 3^2, \dots, 1, n^2, 1, \dots$$

кетма-кетлик чегараланмаган бўлиб, у чексиз катта эмас.

Энди чексиз катта ҳамда чексиз кичик миқдорлар орасидаги боғланишни ифодалайдиган содда теоремаларни келтирамиз.

3.5-төрима. Агар $\forall n \in N$ учун $x_n \neq 0$ бўлиб, $\{x_n\}$ кетма-кетлик чексиз катта бўлса, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ кетма-кетлик чексиз кичик бўлади.

Исбот. Ихтиёрий $\epsilon > 0$ сонни олайлик. $\{x_n\}$ кетма-кетлик чексиз катта бўлгани учун $M = \frac{1}{\epsilon}$ деб олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон мавжудки, барча $n > n_0$ лар учун $|x_n| > M$ бўлади. Демак, барча $n > n_0$ лар учун $|x_n| > \frac{1}{\epsilon}$, бўлиб, ундан $\left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{|x_n|} < \epsilon$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ кетма-кетликнинг чексиз кичик эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Худди шунга ўхшаш қўйидаги теорема ҳам исботланади.

3.6-төрима. Агар $\forall n \in N$ учун $x_n \neq 0$ бўлиб, $\{x_n\}$ кетма-кетлик чексиз кичик бўлса, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ кетма-кетлик чексиз катта бўлади.

6- §. Аниқмас ифодалар

$\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлсин. Бу кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлган ҳолда $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, ($y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim y_n \neq 0$) кетма-кетликларнинг яқинлашувчи бўлишини шу бобнинг 4-§ ида батафсил қараб ўтдик. Бунда $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг лимитларига нисбатан қўйидаги икки шарт бажарилган деб қаралган эди:

- 1) $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг лимитлари чекли;
- 2) $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ($y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$) кетма-кетликнинг лимитига оид муроҳазада $\lim y_n \neq 0$.

Энди бу шартлардан бирор таси бажарилмаган ҳолда $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\{x_n \pm y_n\}$ кетма-кетликларнинг характеристики ўрганамиз.

1°. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик. $\lim x_n = 0$, $\lim y_n = 0$ бўлсин. $\lim y_n = 0$ бўлгани учун $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ нинг лимитига, яъни $\lim \frac{x_n}{y_n}$ лимитга 3.4-теоремани татбиқ қилиб бўлмайди.

$\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларидан тузилган $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ кетма-кетликларнинг характеристи $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бирининг нолга қандай интилишига қараб турлича бўлиши мумкин. Буни қўйидаги мисолларда кўрайлилек.

1) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ ва $\{y_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ кетма-кетликларнинг лимитлари нолга тенг экани равшан. Энди $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ кетма-кетликни тузайлик: $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \{n\}$. Демак, $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

2) $\{x_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ ва $\{y_n\} = \left\{\frac{2}{n}\right\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бирининг лимити нолга тенг. Бу кетма-кетликларидан тузилган $\left\{\frac{(-1)^n}{2}\right\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас.

3) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ ва $\{y_n\} = \left\{\frac{5}{n^2}\right\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бирининг лимити нолга тенг бўлиб, бу кетма-кетликларидан тузилган $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{\frac{1}{5}\right\}$ кетма-кетлик учун $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{5}$ бўлади.

Юқорида келтирилган мисоллардан күрінадыки, $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$ бўлишинигина билган ҳолда, бу кетма-кетликларидан тузилган $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ кетма-кетликнинг лимити тўғрисида тайин хulosага келиб бўлмайди. Шунинг учун $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$ бўлганда $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ кетма-кетлик $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди дейилади.

$x_n \rightarrow 0$ ва $y_n \rightarrow 0$ да $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ кетма-кетликнинг характеристини аниқлаш аниқмасликни очши дейилади. Биз юқорида кўрган мисолларда аслида тегишли аниқмасликларни очиб бердик.

2°. $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмаслик. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликнинг ҳар бирининг лимитлари чексиз бўлсан: $\lim x_n = \infty$, $\lim y_n = \infty$. Бу ҳолда ҳам $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ кетма-кетликнинг характеристи қандай бўлишини юқоридагидек олдиндан айтиб бўлмайди. Мисоллар қарайлик.

1) $\{x_n\} = \{n^2\}$, $\{y_n\} = \{n\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бирининг лимити чексиз бўлади:

$$\lim n^2 = +\infty, \lim n = +\infty.$$

Бу кетма-кетликлардан тузилган $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} = \{n\}$ кетма-кетликнинг лимити ҳам чексиздир: $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

2) $\{x_n\} = \{n^2 + n + 1\}$ ва $\{y_n\} = \{n^2 + 1\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бирининг лимити чексиз. Бу кетма-кетликлардан тузилган кетма-кетлик лимити

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1$$

3) $\{x_n\} = \{(-1)^n \cdot n\}$ ва $\{y_n\} = \{n\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бирининг лимити чексиз бўлиб, бу кетма-кетликлардан тузилган $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} = \{(-1)^n\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Бу мисоллардан кўринадыки, $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бирининг лимити чексиз бўлган ҳолда, бу кетма-кетликлар нисбатидан тузилган $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ кетма-кетликнинг лимити тўғрисида тайин хulosага келиб бўлмайди. Шунинг учун $x_n \rightarrow \infty$, $y_n \rightarrow \infty$ да $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$

кетма-кетлик $\frac{\infty}{\infty}$ күрнешдеги аниқмасликни ифодалайды.

Бу ҳолда ҳам $x_n \rightarrow \infty$, $y_n \rightarrow \infty$ да $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ нинг характеристини аниқлаш аниқмасликни очиш дейилади. Күрилган мисолларда төглиши аниқмасликлар очиб берилди.

3°. $0 \cdot \infty$ күрнешдеги аниқмаслик. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлиб, $\lim x_n = 0$, $\lim y_n = \infty$ бўлсин. Бу ҳолда ҳам $\{x_n \cdot y_n\}$ кетма-кетликнинг лимитини характеристлайдиган мисоллар кўрайлик.

1) $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$, $\{y_n\} = \{n^2\}$ кетма-кетликларнинг лимити мос равища 0 ва ∞ дир. Бу кетма-кетликлар кўпайтмасидан тузилган $\{x_n \cdot y_n\} = \{n\}$ кетма-кетликнинг лимити ∞ бўлади.

2) $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$, $\{y_n\} = \{n^2 + n + 1\}$ кетма-кетликларнинг лимити мос равища 0 ва ∞ бўлгани ҳолда, $\{x_n \cdot y_n\} = \left\{ 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right\}$ кетма-кетликнинг лимити 1 га teng.

3) $\{x_n\} = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$, $\{y_n\} = \{n\}$ бўлсин. Уларнинг лимити мос равища 0 ва ∞ . Бу қетма-кетликлар кўпайтмасидан тузилган $\{x_n \cdot y_n\} = \{(-1)^n\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Демак $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow \infty$ бўлган ҳолда $\{x_n \cdot y_n\}$ кетма-кетликнинг характеристи турлича бўлади. Шунинг учун $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow -\infty$ бўлишинигина билган ҳолда $\{x_n \cdot y_n\}$ нинг лимити ҳақида аниқ хуносага келиб бўлмайди. Шу сабабдан $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow \infty$ да $\{x_n \cdot y_n\}$ кетма-кетлик $0 \cdot \infty$ күрнешдаги аниқмасликни ифодалайди дейилади.

4°. $-\infty - \infty$ күрнешдеги аниқмаслик. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлиб, улар турли ишорали чексизга интилсин, маъалан, $\lim x_n = +\infty$, $\lim y_n = -\infty$ дейлик. Бу кетма-кетликлар йигиндисидан тузилган $\{x_n + y_n\}$ кетма-кетликнинг характеристи ҳам турлича бўлиши мумкин. Мисоллар кўрайлик.

1) $\{x_n\} = \{2n\}$, $\{y_n\} = \{-n\}$ кетма-кетликлар учун $x_n \rightarrow +\infty$, $y_n \rightarrow -\infty$ бўлиб, $x_n + y_n = n \rightarrow +\infty$ бўлади.

2) $\{x_n\} = \left\{ n + \frac{1}{n} \right\}$, $\{y_n\} = \{-n\}$ бўлсин.

Уларнинг лимити

$$\lim x_n = +\infty, \lim y_n = -\infty$$

бўлган ҳолда, $\{x_n + y_n\}$ кетма-кетликнинг лимити нолга teng бўлади $\left(x_n + y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \right)$.

3) $\{x_n\} = \{n + (-1)^{n+1}\}$ ва $y_n = \{-n\}$ кетма-кетликлар учун $x_n \rightarrow +\infty$ ва $y_n \rightarrow -\infty$ бўлиб, бу қетма-кетликлар йигиндисидан тузил-

ған $\{x_n + y_n\} = \{(-1)^{n+1}\}$ кетма-кетлик лимитга эга әмас. Юқоридаги каби, бу ҳолда ҳам $x_n \rightarrow +\infty$, $y_n \rightarrow -\infty$ да $\{x_n + y_n\}$ кетма-кетлик аниқмасликни ифодалайды. Бу аниқмаслик $+\infty - \infty$ күринишидаги аниқмаслик дейилади.

Шундай қилиб, $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty$ ва $\infty - \infty$ күринишидаги аниқмасликтарни күриб ўтдик. Қайд қилиб ўтамизки, $0^0, \infty^0; 1^\infty$ күринишидаги аниқмасликлар ҳам мавжуд.

Шуни ҳам таъкидлаш лозимки, аниқмасликтарни очиш, умуман айтганда, енгил масала бўлмасдан, у берилган $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг қанчалик содда ёки мураккаблигига боғлиқ ва ўқувчидан маълум кўникма ва маҳорат талаб қиласди.

Мисоллар

1. Ушбу $\{x_n\} = \{n - \sqrt[3]{n^3 - n^2}\}$ кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Биз $+\infty - \infty$ күринишидаги аниқмасликка эгамиз.

Берилган кетма-кетликнинг умумий ҳади x_n ни қўйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} x_n &= n - \sqrt[3]{n^3 - n^2} = \frac{(n - \sqrt[3]{n^3 - n^2})(n^2 + n \sqrt[3]{n^3 - n^2} + \sqrt[3]{(n^3 - n^2)^2})}{n^2 + n \sqrt[3]{n^3 - n^2} + \sqrt[3]{(n^3 - n^2)^2}} \\ &= \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} + \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Бундан эса

$$\lim x_n = \lim \left(n - \sqrt[3]{n^3 - n^2}\right) = \lim \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} + \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}} = \frac{1}{3}$$

келиб чиқади.

2. Қўйидаги

$$\lim \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$$

лимитни ҳисобланг.

Бунда $\frac{\infty}{\infty}$ күринишидаги аниқмасликка эгамиз.

Арифметик прогрессия ҳадлари йиғиндиси формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2, 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

у ҳолда

$$\lim \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = \lim \frac{n^2}{\frac{n(n + 1)}{2}} = 2.$$

7-§. Монотон кетма-кетликлар ва уларнинг лимитлари

1. Монотон кетма-кетликлар. Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

3.11-таъриф. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳадлари ушбу

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$$

тengsизликларни қаноатлантируса, яъни $\forall n \in N$ сон учун $x_n \leq x_{n+1}$ тengsизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсуви (камаймайдиган) кетма-кетлик деб аталади.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳадлари ушбу

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots$$

тengsизликларни қаноатлантируса, яъни $\forall n \in N$ сон учун $x_n < x_{n+1}$ тengsизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик қатъий ўсуви кетма-кетлик деб аталади.

Масалан, 1, 2, 2, 3, 3, \dots , $\underbrace{n, n, \dots, n}_{n \text{ та}}$, \dots кетма-кетлик

ўсуви, $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots$ кетма-кетлик эса қатъий ўсуви кетма-кетликдир.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсуви бўлса, у қуйидан чегаралангани бўлади. Ҳақиқатан, бу ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг исталган x_n ҳади учун $x_1 \leq x_n$ тengsизлик ўринли. Бу эса $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қуйидан x_1 сон билан чегараланганини билдиради.

3.12-таъриф. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳадлари ушбу

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$$

тengsизликларни қаноатлантируса, яъни $\forall n \in N$ сон учун $x_n \geq x_{n+1}$ тengsизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик камаювчи (ўсмайдиган) кетма-кетлик деб аталади.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳадлари ушбу

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > \dots$$

тengsизликларни қаноатлантируса, яъни $\forall n \in N$ сон учун $x_n > x_{n+1}$ тengsизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик қатъий камаювчи кетма-кетлик дейилади.

Масалан, 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots, \underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{n \text{ та}}, \dots$ кетма-кетлик камаювчи. Ушбу

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$$

кетма-кетлик әса қатъий камаювчи кетма-кетлик. Ҳақиқатан, $\forall n \in N$ учун

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0.$$

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик камаювчи бўлса, у юқоридан чегараланган бўлади. Ҳақиқатан, бу ҳолда $\forall n \in N$ учун $x_1 \geq x_n$ тенгсизлик ўринли. Бу эса кетма-кетликнинг юқоридан чегараланганинги кўрсатади.

3.13-таъриф. Ўсуви ва камаювчи кетма-кетликлар монотон кетма-кетликлар деб аталади.

Монотон кетма-кетликларнинг чегараланганинги текшириш учун уларнинг бир томондан чегараланганини текшириш етарли. Бунда ўсуви кетма-кетликларнинг юқоридан, камаювчи кетма-кетликларнинг эса қўйидан чегараланганини текшириш лозим.

2. Монотон кетма-кетликнинг лимити ҳақида теоремалар.

3.7-теорема. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсуви бўлиб, юқоридан чегараланган бўлса, у чекли лимитга эга; агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити $+\infty$ бўлади.

Исбот. Аввало, $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсуви ва юқоридан чегаралган ҳолни қараймиз. Кетма-кетлик юқоридан чегараланганинги учун шундай ўзгармас M сон мавжудки, $\forall n \in N$ сон учун $x_n < M$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса кетма-кетликнинг барча ҳадларидан тузилган $\{x_n\}$ тўпламнинг юқоридан чегараланганинги ифодалайди. Унда тўпламнинг аниқ юқори чегараси ҳақидаги 2.3-теоремага асосан бу тўплам учун $\sup\{x_n\}$ мавжуд бўлади. Биз уни a билан белгилайлик: $\sup\{x_n\} = a$. Энди a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити бўлишини кўрсатамиз.

Аниқ юқори чегаранинг хоссасига кўра, биринчидан, $\{x_n\}$ тўпламнинг ҳар бир элементи учун $x_n \leq a$ тенгсизлик ўринли бўлса, иккинчидан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам кетма-кетликнинг шундай x_n ҳади топиладики, бу ҳад учун $x_{n_0} > a - \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак,

$$\sup\{x_n\} = a \Rightarrow \begin{cases} a - x_n \geq 0, & \forall n \in N \\ a - x_{n_0} < \varepsilon. \end{cases}$$

Қаралаётган $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсуви бўлгани учун $n > n_0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча натурал сонлар учун $x_n \geq x_{n_0}$ тенгсизлик ўринли. Шу сабабли $n > n_0$ бўлганда $0 \leq a - x_n \leq a - x_{n_0} < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Шундай қилиб, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, $n > n_0$ бўлганда $|a - x_n| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Бу эса a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити эканини кўрсатади. Шундай қилиб, $\lim x_n = a$.

Энди $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи бўлиб, юқоридан чегараланмаган бўлсин. Унда ҳар қандай катта мусбат A сон олинганда ҳам $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг шундай x_{n_0} ҳади топиладики, бу ҳад учун $x_{n_0} > A$ тенгсизлик ўринли бўлади. Аммо барча $n > n_0$ лар учун $x_n > x_{n_0}$ тенгсизлик ўринли бўлгани сабабли $x_n > A$ тенгсизлик ҳам бажарила-ди. Бу эса $\lim x_n = +\infty$ бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Қўйидаги теорема ҳам худди юқоридаги теоремага ўхшаш исботланади.

3.8-теорема. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик камаювчи бўлиб, қўйи-дан чегараланган бўлса, у чекли лимитга эга; агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик қўйидан чегараланмаган бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити $-\infty$ бўлади.

Исбот этилган теоремалардан қўйидаги натижалар келиб чиқади.

3.5-натижা. Ўсувчи кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши учун унинг юқоридан чегараланган бўлиши зарур ва етарли.

Ҳақиқатан, агар ўсувчи кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, яқинлашувчи кетма-кетликларнинг чегараланган бўлишидан, унинг юқоридан чегараланганини келиб чиқади. Агар ўсувчи кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлса, у исбот этилган 3.7-теоремага асосан яқинлашувчи бўлади.

3.6-натижা. Камаювчи кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши учун унинг қўйидан чегараланган бўлиши зарур ва етарли.

Мисоллар

1. Ушбу $\{x_n\} = \left\{ \frac{n!}{n^n} \right\}$ кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Аввало бу кетма-кетлик лимитининг мавжудлигини кўрсатамиз. Равшанки,

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = x_n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

Бундан барча $n \geq 1$ лар учун $x_{n+1} < x_n$ тенгсизликнинг ўринли эканини келиб чиқади. Бу эса берилган кетма-кетлик камаювчи эканини кўрсатади. Кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади мусбат, $x_n > 0, n = 1, 2, \dots$.

Демак, у қўйидан чегараланган. Шундай қилиб, $\{x_n\} = \left\{ \frac{n!}{n^n} \right\}$ кетма-кетлик камаювчи ва қўйидан чегараланган. 3.8-теоремага кўра бу кетма-кетлик чекли лимитга эга. Биз уни a билан белгилайлик:

$$\lim \frac{n!}{n^n} = a.$$

Равшанки, $a \geq 0$. Ушбу $(1+\alpha)^n \geq 1 + \alpha n$ ($\alpha > -1$) Бернулли тенгсизлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2.$$

Бундан эса $(n+1)^n \geq 2 \cdot n^n$ келиб чиқади. У ҳолда

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= x_n - x_n \frac{n^n}{(n+1)^n} = x_n \left[\frac{(n+1)^n - n^n}{(n+1)^n} \right] \geq \\ &\geq x_n \frac{2 \cdot n^n - n^n}{(n+1)^n} = \frac{x_n \cdot n^n}{(n+1)^n} = x_{n+1} \end{aligned}$$

бўлиб, натижада қўйидаги $x_n \geq 2x_{n+1}$ тенгсизликка келамиз. Бу тенгсизликда лимитга ўтамиш: $\lim x_n \geq 2 \lim x_{n+1}$. Ундан $a \geq 2a$ ва $a \geq 0$ ни ҳисобга олсак, $a = 0$ экани келиб чиқади. Демак,

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0.$$

2. Қўйидаги

$$\begin{aligned} &\sqrt{a}, \sqrt{a + \sqrt{a}}, \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \dots \\ &\dots, \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}}, \dots}_{n \text{ та илдиз}} \end{aligned}$$

$(a > 0)$ кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Аввало бу кетма-кетлик лимитининг мавжудлигини кўрсатамиз. Берилган кетма-кетлик ўсуви, яъни $\forall n \in N$ сонлар учун $x_n < x_{n+1}$ тенгсизлик ўринли. Ҳақиқатан, $a > 0$ бўлганидан:

$$x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}} > \sqrt{a} = x_1, \text{ яъни } x_2 > x_1.$$

Энди бирор k номер учун $x_{k-1} < x_k$ тенгсизлик ба жарисин деб $x_k < x_{k+1}$ тенгсизликнинг бажарилишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан,

$$x_k = \sqrt{a + x_{k-1}} < \sqrt{a + x_k} = x_{k+1}.$$

Шундай қилиб, $\forall n \in N$ лар учун изланган $x_n < x_{n+1}$ тенгсизлик ба жарилади. Бу эса берилган кетма-кетликнинг ўсувилигини кўрсатади.

Энди кетма-кетликнинг юқоридан чегараланганлигини кўрсатамиз. Берилган кетма-кетликнинг ёнма-ён турган иккита ҳади ушбу

$$x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$$

муносабат билан боғланган. Бу рекуррент формуладир. Ундан

$$x_n^2 = a + x_{n-1}$$

формула келиб чиқади. Бу формуланинг икки томонини $x_n \neq 0$ га ҳадлаб бўлиб, топамиш:

$$x_n = \frac{a}{x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n}.$$

Натижада $\frac{x_{n-1}}{x_n} < 1$ ҳамда $x_n > x_1 = \sqrt{a}$ бўлгани учун

$$x_n < \frac{a}{\sqrt{a}} + 1 = \sqrt{a} + 1.$$

Демак, ихтиёрий $n > 1$ да

$$x_n < \sqrt{a} + 1,$$

яъни $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланганд. Монотон кетма-кетликнинг лимити ҳақидаги 3.7- теоремага кўра берилган кетма-кетлик чекли лимитга эга. Биз уни y билан белгилайлик: $\lim x_n = y$. Сўнгра $x_n^2 = a + x_{n-1}$ тенгликда ҳадлаб лимитга ўтиш амалини бажариб топамиз: $\lim x_n^2 = \lim a + \lim x_{n-1}$ ёки $y^2 = a + y$. Натижада y ни топиш учун ушбу $y^2 - y - a = 0$ квадрат тенгламага келамиз. Бу квадрат тенгламанинг илдизларини ёзамиз:

$$y_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, \quad y_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

Кетма-кетликнинг ҳадлари мусбат бўлгани учун $y_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ сон кетма-кетликнинг лимити бўлади. Демак,

$$\lim x_n = \lim \left(\underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}}_n \right) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

Хусусан, ушбу

$\sqrt{3}, \sqrt{3 + \sqrt{3}}, \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}}, \dots, \sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{3}}}, \dots$ кетма-кетлик яқинлашувчи ва унинг лимити $\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ га тенг.

Монотон кетма-кетликлар ёрдамида баъзи миқдорларни тақрибий (берилган аниқликда) ҳисоблаш мумкин. Биз қўйида \sqrt{a} ($a > 0$) сонни тақрибий ҳисоблаш билан шуғулланамиз.

Аввал ихтиёрий мусбат x_0 сон оламиз ва ушбу

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad a > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

реккуррент формула билан аниқланадиган $\{x_n\}$ кетма-кетликни кўрамиз. Бунда a — квадрат илдизи ҳисоблананиши лозим бўлган сон. (3.4) кетма-кетлик ҳадлари $n = 1, 2, \dots$ бўлганда

$$x_n \geq \sqrt{a} \quad (3.5)$$

тенгсизликни қаноатлантиради. Ҳақиқатан, $n = 1, 2, \dots$ бўлганда

$$x_n = \sqrt{a} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{x_{n-1}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_{n-1}} \right) = \sqrt{a} \cdot \frac{1}{2} \left(y_{n-1} + \frac{1}{y_{n-1}} \right),$$

бунда $y_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{\sqrt{a}}$. Ушбу $\frac{1}{2} \left(y_{n-1} + \frac{1}{y_{n-1}} \right)$ ифода $\forall n \in N$ лар

учун мусбат ва бирдан кичик эмас. Бундан (3.5) келиб чиқади.

(3.4) кетма-кетлик ҳадлари ўсмайди, яъни $n = 1, 2, \dots$ бўлганда

$$x_{n+1} \leq x_n \quad (3.6)$$

тengsизлик бажарилади. (3.5) га кўра $\frac{a}{x_n^2} \leq 1$. Энди (3.4) ни x_n та бўлиб, бу tengsизликдан фойдалансак,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{x_n^2} \right) \leq 1$$

tengsizlikка эга бўламиз. Бу эса (3.6) нинг ўринли эканини англатади.

Шундай қилиб, (3.4) билан аниқланадиган $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсмайди ва қўйидан \sqrt{a} сон билан чегараланганд. Демак, 3.8-теоремага асосан $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга, лимитни c дейлик, яъни $\lim x_n = c$. Энди (3.4) да лимитга ўтамиз: $c = \frac{1}{2} \left(c + \frac{a}{c} \right)$ ёки $c = \sqrt{a}$. Шундай қилиб, бошланғич яқинлашиш сифатида ихтиёрий мусбат x_0 таъласасак ҳам $n \rightarrow \infty$ да (3.4) формула билан аниқланадиган $\{x_n\}$ кетма-кетлик \sqrt{a} сонга яқинлашади, яъни

$$\lim x_n = \sqrt{a}.$$

Бу лимитга кўра аввалдан берилган $\epsilon > 0$ сон учун шундай номер N топладики, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг x_N ва ундан кейинги ҳадлари $0 \leq x_N - \sqrt{a} < \epsilon$ ёки $\sqrt{a} \leq x_N < \sqrt{a} + \epsilon$ tengsizliklarни қаноатлантиради. Бундан x_N сон $c = \sqrt{a}$ ни $\epsilon > 0$ хатолик билан аниқлаши келиб чиқади.

n -қадамдаги аниқлик қўйидаги tengsizlik билан ифодаланади:

$$x_n - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 - a}{x_n + \sqrt{a}} < \frac{x_n^2 - a}{2c_0}, \quad 0 < c_0 \leq c = \sqrt{a}.$$

8-§. Монотон кетма-кетликнинг лимити ҳақидаги теоремаларнинг татбиқлари

Ушбу параграфда биз монотон кетма-кетликнинг лимити ҳақидаги теоремаларнинг математик анализ курсида қараладиган баъзи масалаларга татбиқ этилишини қараб ўгамиш.

1. ϵ сони.

а) ϵ сонининг таърифи.

Кўйидаги $\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$:

$$\left(1 + \frac{1}{1} \right)^1, \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2, \dots, \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, \dots \quad (3.7)$$

кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу кетма-кетлик лимитининг мавжудлигини кўрсатамиз. Берилган (3.7) кетма-кетлик билан бирга ушбу

$$\{y_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\}$$

кетма-кетликни ҳам қараймиз. Бу кетма-кетлик камаювчи. Ҳақиқатан,

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right]^{n+2} \frac{n}{n+1} = \left[1 + \frac{1}{n(n+2)} \right]^{\frac{n}{n+1}}.$$

Бернулли тенгсизлигига асосан

$$\left[1 + \frac{1}{n(n+2)} \right]^{\frac{n}{n+1}} \geq 1 + (n+2) \cdot \frac{1}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n}$$

бўлишини ҳисобга олсак, натижада

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n+1} = 1, \text{ яъни } y_n \geq y_{n+1} \quad (\forall n \in N)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу $\{y_n\}$ кетма-кетликнинг камаювчи эканини англаади. Иккинчи томондан, $\{y_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\}$ кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади мусбат бўлгани учун у қўйидан чегараландандир. Шундай қилиб $\{y_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ кетма-кетлик камаювчи ва қўйидан чегараландандир. 3.8-теоремага кўра бу $\{y_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга.

АММО

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = x_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

тengликтан $x_n = y_n \frac{n}{n+1}$ келиб чиқади. Шунга кўра $\lim \frac{n}{n+1} = 1$

эканини эътиборга олсак, $\lim x_n = \lim y_n$ га эга бўламиз. Бу эса (3.7) кетма-кетлик лимитининг мавжудлигини кўрсатади.

3.14-таъриф. Берилган $\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ кетма-кетликнинг лимити (юқорида исбот этилганига кўра бу кетма-кетликнинг лимити мавжуд) е сони деб аталади. Демак,

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

б) е сонини тақрибий ҳисоблаш. е сонини тақрибий ҳисоблаш мақсадида $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ифодани Ньютон биноми формуласидан фойдаланиб қўйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n-1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \\
&+ \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \cdot \frac{1}{n^{k-1}} + \dots + \frac{1}{n^n} = 2 + \\
&+ \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots k} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \\
&\times \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \\
&\dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Агар

$$\begin{aligned}
S_1 &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \\
&+ \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \quad 1 < k < n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{(k+1)!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k}{n}\right) + \dots + \\
&+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

деб олсақ:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = S_1 + S_2.$$

$\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ кетма-кетлик учун $x_1 = 2$. Қолаверса,

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ нинг ёйилмасидан, $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, $k \in N$ тенгсизликка кўра,

$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$. Шунга асосан e со-ни $2 < e \leq 3$ тенгсизлики қаноатлантиради. Бу сонни янада аниқроқ ҳисоблаш учун қўйидаги мулоҳазаларни юритамиз.

Юқоридаги S_2 йигиндини қўйидагича ёзib оламиз:

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left[\frac{1}{k+1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) + \right. \\
&+ \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) + \dots + \\
&\left. + \frac{1}{(k+1)(k+2) \dots n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \right].
\end{aligned}$$

Бу тенгликкнинг ўнг томонида турган йигиндининг ҳар бир ҳа-дида қатнашган $\left(1 - \frac{i}{n}\right)$, $i = k, k+1, \dots, n-1$ кўринишдаги кўпайтuvчиларни ундан катта бўлган 1 билан ва

$$\frac{1}{(k+1)(k+2) \dots (k+j)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n-k$$

кўринишдаги кўпайтuvчиларни эса ундан катта бўлган $\frac{1}{(k+1)^j}$ би-

лан алмаштириб, S_2 йиғинди учун ушбу

$$S_2 < \frac{1}{k!} \left[\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \dots + \frac{1}{(k+1)^{n-k}} \right]$$

тенгсизликка келамиз. Чексиз камайиб борувчи геометрик прогрессия барча ҳадлари йиғиндиси формуласидан фойдаланиб (бунда биринчи ҳад $\frac{1}{k+1}$, мақражи ҳам $\frac{1}{k+1}$ бўлади) топамиз:

$$S_2 < \frac{1}{k!} \frac{1}{(k+1) \left(1 - \frac{1}{k+1} \right)} = \frac{1}{k!k}.$$

Шундай қилиб,

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = S_1 + S_2 < 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n} \right) + \frac{1}{k!k}$$

ва ундан

$$0 < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - \left[2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \times \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n} \right) \right] < \frac{1}{k!k}$$

тенгсизликларга эга бўламиз, $n \rightarrow \infty$ да бу тенгсизликларда лимитга ўтиб, топамиз:

$$0 \leq e - \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} \right) \leq \frac{1}{k!k}. \quad (3.8)$$

Бу муносабат e сонини тақрибий ҳисоблаш имконини беради. Демак,

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!}$$

бўлиб, бу тақрибий формуланинг хатоси $\frac{1}{k!k}$ дан ошмайди. Масалан, $k = 10$ да

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{10!} \approx 2,718281$$

бўлиб, хатолик эса

$$\frac{1}{10!10} < 0,000\,0001$$

бўлади. e сонининг янада аниқроқ қиймати: $e = 2,7182818459045\dots$
в) e сонининг иррационаллиги. 3.9-төрима. e иррационал сондир.

Исбот. Тескарисини фараз қиласылған: e сони рационал сон бўлсин, яъни у қисқармайдиган

$$e = \frac{p}{q}, \quad p \in N, \quad q \in N, \quad q > 1$$

каср кўрнишида ёзилсин дейлик.

Юқорида исбот этилган (3.8) тенгсизликларда $k = q$ деб олайлик. Натижада

$$0 \leq e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \right) \leq \frac{1}{q!q}$$

ёки

$$q \left[eq! - q! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \right) \right] \leq 1 \quad (3.9)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Равшанки, $eq! = \frac{p}{q}q! = p(q-1)!$ сон бутун мусбат, шунингдек,

$$q! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \right)$$

сон ҳам бутун мусбат. Шуни ҳисобга олсак, (3.9) тенгсизликнинг чап томонидаги ифода бутун мусбат сон бўлишини топамиз. Аммо бу сон $q > 1$ тенгсизликка кўра 1 дан катта бўлади. Зиддиятлик ҳосил бўлди. Демак, e сони иррационалдир. Теорема исбот бўлди.

2. Ичма-ич жойлашган сегментлар принципи. Монотон кетма-кетликнинг лимити ҳақидаги теоремалардан фойдаланиб, қўйидаги муҳим теоремани исботлаймиз.

3.10-теорема. Иккита $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Агар

- 1) $\{x_n\}$ ўсувчи, $\{y_n\}$ камаювчи кетма-кетлик,
- 2) $\forall n \in N$ лар учун $x_n < y_n$,
- 3) $\lim (y_n - x_n) = 0$ бўлса, $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи ва $\lim x_n = \lim y_n$ тенглик ўринли бўлади.

Исбот. $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи, $\{y_n\}$ кетма-кетлик эса камаювчи ҳамда ҳар бир $n \in N$ учун $x_n < y_n$ тенгсизлик ўришли бўлганидан, $\forall n \in N$ учун $x_n \leq y_1, y_n \geq x_1$ тенгсизликлар бажарилади. Бу эса $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқоридан, $\{y_n\}$ кетма-кетлик эса қўйидан чегараланганигини билдиради. Монотон кетма-кетликнинг лимити ҳақидаги теоремаларга асосан $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлади. Демак, $\lim x_n$ ва $\lim y_n$ лар мавжуд. Шунинг учун

$$\lim (y_n - x_n) = \lim y_n - \lim x_n$$

бўлиб, теореманинг учинчи шартидан эса

$$\lim y_n - \lim x_n = 0, \text{ яъни } \lim y_n = \lim x$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Исбот этилган теоремадан мұхим натижка келиб чиқади. Бу натижани келтиришдан аввал ичма-ич жойлашған сегментлар кетмекетлиги тущунчаси билан танишамыз.

Мағлұмки, $\{x : x \in R, a \leq x \leq b\}$ түплем $[a, b]$ сегмент деб аталар эди. Агар $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ бўлса, $[a_1, b_1]$ сегмент $[a_1, b]$ сегментнинг ичига жойлашған дейилади.

Агар $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ сегментлар кетмекетлиги қўйидаги

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

муносабатда бўлса, бу сегментлар ичма-ич жойлашған сегментлар кетмекетлиги дейилади.

3.6-натижা. Агар ичма-ич жойлашған

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

сегментлар кетмекетлиги учун $n \rightarrow \infty$ да $b_n - a_n$ айирма нолга интилса, яъни $\lim(b_n - a_n) = 0$ лимит ўринли бўлса, у ҳолда $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетмекетликлар битта c лимитга эга ҳамда бу c лимит барча сегментларга тегишли бўлган ягона нуқта бўлади.

Исбот. $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ ичма-ич жойлашған сегментлар кетмекетлиги бўлиб,

$$\lim(b_n - a_n) = 0$$

бўлсин. Бунда $\{a_n\}$ кетмекетлик ўсувчи, $\{b_n\}$ эса камаювчи кетмекетликлардир ва барча $n \in N$ лар учун $a_n < b_n$ бўлади. Демак, $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетмекетликлар 3.10-теореманинг барча шартларини қаноатлантиради, бу теоремага кўра $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетмекетликлар яқинлашувчи ва

$$\lim a_n = \lim b_n$$

бўлади.

Энди $\lim a_n = \lim b_n = c$ деб белгилаб, c нуқта барча $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$ сегментларга тегишли бўлган ягона нуқта эканини кўрсатамиз. $\{a_n\}$ кетмекетлик ўсувчи ва $\lim a_n = c$ бўлганидан $a_n \leq c$, $n = 1, 2, \dots$ шунингдек $\{b_n\}$ кетмекетлик камаювчи ва $\lim b_n = c$, бўлганидан эса $b_n \geq c$, $n = 1, 2, \dots$ бўлиши келиб чиқади. Демак, $a_n \leq c \leq b_n$, $n = 1, 2, \dots$ бўлиб, c нуқта барча сегментларга тегишли: $c \in [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$. Агар шу c нуқтадан фарқли ва сегментларнинг барчасига тегишли c' , $c' \in [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$ нуқта ҳам мавжуд деб қараладиган бўлса, унда

$$b_n - a_n \geq |c - c'| > 0$$

бўлиб, бу муносабат $\lim(b_n - a_n) = 0$ шартга зиддир. Демак, $c = c'$.

Келтирилган натижага ичма-ич жойлашған сегментлар принцини деб юритилади.

Эслатма. Агар ичма-ич жойлашган интерваллар ёки ярим интерваллар кетма-кетлиги олинса, келтирилган натижа ўринли бўлмасдан қолниши мумкин. Масалан, ушбу

$$(0, 1), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{3}\right), \dots, \left(0, \frac{1}{n}\right), \dots$$

интерваллар кетма-кетлигини қарайлик. Бу интерваллар кетма-кетлиги ичма-ич жойлашган интерваллар (улар ҳам юқоридагидек таърифланади) бўлиб, $n \rightarrow \infty$ да бу интерваллар узунлиги нолга интилса ҳам барча интерваллар учун умумий бўлган ягона нуқта мавжуд эмас (бундай ягона умумий нуқта 0 бўлиши мумкин эди, аммо 0 нуқта бу интервалларга тегишли эмас).

3. Саноқли бўлмаган чексиз тўпламнинг мавжудлиги. Маълумки, натурал сонлар тўпламига эквивалент бўлган ҳар қандай тўплам саноқли тўплам деб аталар эди. Равшанки, саноқли тўпламлар чексиз тўпламлардир. Энди саноқли бўлмаган чексиз тўпламларнинг мавжудлигини ўрсатамиз. Бунинг учун аввало саноқли тўпламлар билан кетма-кетликлар орасида боғланиш борлигини ўрсатамиз.

Агар бирор $E (E \subset R)$ тўпламнинг барча элементларини

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

кетма-кетлик юрнишида ифодалаш мумкин бўлса, E саноқли тўплам бўлади. Ҳақиқатан, бунда ҳар бир x_n га унинг индекси n ни мос қўйиб ($x_n \rightarrow n$), E тўпламнинг элементлари билан N тўпламнинг элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин.

Аксинча, агар $E (E \subset R)$ саноқли тўплам бўлса, унда $n (n \in N)$ номерга мос келадиган E тўпламнинг элементини x_n билан белгилаб, E нинг элементлари

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

кетма-кетлик юрнишида бўлишини аниқлаймиз.

Шундай қилиб, $E (E \subset R)$ тўплам саноқли тўплам бўлиши учун уни ташкил этган элементлар

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

кетма-кетлик ҳосил қилиши зарур ва етарли эканини қайд қилиб ўтамиз.

3.11-теорема. *Уибу $E = \{x: x \in R, 0 \leq x \leq 1\}$ тўплам саноқли бўлмаган (саноқсиз) чексиз тўпламдир.*

Исбот. Бу E тўплам саноқли тўплам бўлсин деб фараз қиласлик. Унда E нинг элементлари юқоридаги мулоҳазага кўра

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

кетма-кетлик ташкил этади. Демак, E тўпламнинг ҳар бир элементи $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг тегишли ҳадидан иборат.

Энди $E = [0, 1]$ сегментни $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ нуқталар ёрдамида учта $\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ сегментчага ажратамиз. $x_1 \in E = [0, 1]$ ни олайлик. Бу x_1 юқоридаги учта сегментчанинг ҳеч бўлмагандан

биттасига тегишли бўлмайди. Биз бу сегментчани E_1 орқали белгилайлик (бу E_1 тўплами ё $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, ёкі $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ ёки $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ бўлиши мумкин). Агар борди-ю $x_1, \left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ сегментчалардан иккитасига тегишли бўлмаса, (унда x_1 албатта учинчисига тегишли бўлади), унда E_1 деб улардан бирини, масалан чап томонда турганини оламиз. Равшанки, $E_1 \subset E$ ва E_1 сегментнинг узунлиги $\frac{1}{3}$ га тенг бўлади.

Энди E_1 ни ҳам учта тенг сегментгача ажратамиз ва юқоридагига ўхшаш $x_2 \in E$ элемент тегишли бўлмаган сегментчани E_2 билан белгилаймиз. Бунда $E_2 \subset E_1$ ва E_2 сегментнинг узунлиги $\frac{1}{3^2}$ га тенг бўлади. Сўнг E_2 сегментчани ҳам учта тенг сегментчага ажратиб, улар ичida $x_3 \in E$ элемент тегишли бўлмаганини E_3 орқали белгилаймиз. Бу жараённи давом эттириб натижада ушбу

$$E_1, E_2, E_3, \dots, E_n, \dots$$

сегментлар кетма-кетлигини ҳосил қиласиз. Бунда барча n лар учун $x_n \notin E_n$ бўлиб, E_n сегментнинг узунлиги $\frac{1}{3^n}$ га тенг бўлади. Бу сегментлар кетма-кетлиги учун

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots \supset E_n \supset \dots$$

муносабатлар ўринли бўлиб, ушбу $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0$ лимитга эгамиз. У ҳолда ичма-ич жойлашган сегментлар принципига асосан барча сегментларга тегишли бўлган ягона a нуқта мавжуд: $a \in E_n, n = 1, 2, 3, \dots$. Аммо $x_n \notin E_n$ бўлгани сабабли $a \neq x_n$. Бу ҳол a нинг $E = [0, 1]$ сегментга тегишли бўла туриб, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг бирорта ҳадига тенг бўлмаслигини кўрсатади. Бунга сабаб, E нинг саноқли деб олин ишидир. Демак, $E = [0, 1]$ саноқли тўплам бўла олмайди. Теорема исбот бўлди.

3. 15-таъриф. Ушбу

$$E = \{x : x \in R, 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$$

тўпламга эквивалент бўлган ҳар қандай тўплам континуум қувватли тўплам деб аталади.

Кўйндаги

$$A = \{x : x \in R, a \leq x \leq b\} = [a, b] \quad (a < b)$$

тўплам континуум қувватли тўпламдир.

Дарҳақиқаг, ушбу

$$y = a + (b - a) \cdot x \quad (x \in E, y \in A)$$

муносабат E ва A тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатади. Демак, бу тўпламлар эквивалент тўпламлар бўлиб, A — континуум қувватли тўпламдир.

9-§. Қисмий кетма-кетликлар. Больцано—Вейерштрасс леммаси

Ушбу $\{x_n\}$: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу кетма-кетликнинг бирор n_1 номерли x_{n_1} ҳадини оламиз. Сўнгра номери n_1 дан катта бўлган n_2 номерли x_{n_2} ҳадини оламиз. Шу усул билан x_{n_3}, x_{n_4} ва ҳ. к. ҳадларни олиш мумкин. Натижада номерлари $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган ҳадлар танланган бўлади. Бу ҳадлар ушбу

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots (n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots) \quad (3.10)$$

кетма-кетликни ташкил этади.

Одатда (3.10) кетма-кетлик $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги деб аталади ва $\{x_{n_k}\}$ каби белгиланади. Баъзида $\{x_n\}$ кетма-кетликдан $\{x_{n_k}\}$ кетма-кетлик ажратилган ёки $\{x_n\}$ кетма-кетликдан $\{x_{n_k}\}$ кетма-кетликни ажратиш мумкин деб юритилади.

Мисоллар

1. Қўйидаги

$$1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1, \dots$$

$$2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$$

$$2, 4, 16, \dots, n^2, \dots$$

кетма-кетликлар натурал сонлар кетма-кетлиги $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ нинг қисмий кетма-кетликлари бўлади.

2. Ушбу

$$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$$

кетма-кетлик

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлигидир.

3. Қўйидаги

$$1, -1, +1, -1, \dots, (-1)^{n+1},$$

кетма-кетликдан, масалан, ушбу

$$\begin{array}{cccc} 1, & 1, & 1, \dots & 1, \dots \\ -1, & -1, & -1, \dots & -1, \dots \end{array}$$

қисмий кетма-кетликларни ажратиш мумкин.

Келтирилган тушунча ва мисоллардан битта кетма-кетликдан турли қисмий кетма-кетликлар ажратиш мумкинилиги кўринади.

Кетма-кетлик лимити билан унинг қисмий кетма-кетликлари лимити орасидаги муносабатни қўйидаги теорема ифодалайди.

3.12-теорема. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимитга (чекли ёки $\pm \infty$) эга бўлса, унинг ҳар қандай қисмий кетма-кетлиги ҳам шу лимитга эга бўлади.

Исбот. $\lim x_n = a$ бўлсин. $\{x_n\}$ кетма-кетликниң бирор

$$\{x_{n_k}\}: x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_k}, \dots$$

қисмий кетма-кетлигини олайлик.

Лимит таърифига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганида ҳам, шундай $n_0 \in N$ сон мавжудки, барча $n > n_0$ лар учун $|x_n - a| < \varepsilon$ бўлади. $k \rightarrow \infty$ да $n_k \rightarrow \infty$ бўлишидан шундай $m \in N$ сон топиладики, $n_m > n_0$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, барча $n_k > n_m$ лар учун $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Бу эса $\lim x_{n_k} = a$ лимитниң ўринли эсанини ифодалайди. Худди шунингдек, $\lim x_n = \pm \infty$ бўлганида ҳам $\{x_n\}$ кетма-кетликниң ҳар қандай қисмий кетма-кетлиги $\pm \infty$ га интилиши кўрсатилади. Теорема исбот бўлди.

Эслатма. Кетма-кетлик қисмий кетма-кетликларининг лимити мавжуд бўлишидан берилган кетма-кетликниң лимити мавжуд бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди. Масалан,

$$1, -1, +1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$$

кетма-кетликниң ушбу

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 1, & 1, & \dots, & 1, & \dots \\ -1, & -1, & -1, & \dots, & -1, & \dots \end{array}$$

қисмий кетма-кетликлари лимитга эга (улар мос равишда 1 ва -1 ларга teng). Аммо берилган $\{(-1)^{n+1}\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Демак, берилган кетма-кетлик лимитга эга бўлмаса ҳам унинг қисмий кетма-кетликлари лимитга эга бўлиши мумкин экан.

3.16-таъриф. $\{x_n\}$ кетма-кетликниң қисмий лимити деб аталади. лимити берилган кетма-кетликниң қисмий лимити деб аталади.

3.3-лемма (Больцано—Вейерштрасс). Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлса, у ҳолда бу кетма-кетликтан яқинлашувчи бўлган қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин.

Исбот. $\{x_n\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлсин. Демак, кетма-кетликниң барча ҳадлари бирор $[a, b]$ сегментда ётади. $[a, b]$ сегментни тенг икки қисмга ажратиб, $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ва $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ сегментларни ҳосил қиласиз. Берилган кетма-кетликниң барча ҳадлари $[a, b]$ да бўлгани сабабли, унинг чексиз кўп сондаги ҳадлари $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ва $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ сегментлашниң камидаги биттасида жойлашган бўлади. Энди $\{x_n\}$ кетма-кетликниң чексиз кўп сондаги ҳадлари бўлган сегментни, яъни $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ёки $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ ни (агар ик-

каласида ҳам кетма-кетликнинг чексиз кўп сондаги ҳадлари бўлса, улардан бирини $[a_1, b_1]$ деб белгилаймиз. Равшанки, $[a_1, b_1]$ нинг узунлиги $\frac{b-a}{2}$ бўлади. Юқоридагига ўхшаш, $[a_1, b_1]$ сегментни тенг икки қисмга ажратиб, $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ ва $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ сегментларни ҳосил қиласиз ва бу сегментлардан $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чексиз сондаги ҳадлари бўлганини $[a_2, b_2]$ деб оламиз. Равшанки, $[a_2, b_2]$ сегментнинг узунлиги $\frac{b-a}{2^2}$ бўлади. Бу жараённи давом эттириш на-тижасида ушбу

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_k, b_k], \dots$$

сегментлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. Тузилишига кўра ҳар бир $[a_k, b_k]$, $k=1, 2, 3, \dots$ сегментда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чексиз кўп сондаги ҳадлари бўлади.

Равшанки,

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_k, b_k] \supset \dots$$

$[a_k, b_k]$ сегментнинг узунлиги $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$ бўлиб, $k \rightarrow \infty$ да нолга интилади. Ичма-ич жойлашган сегментлар принципига кўра $\{a_k\}$ ва $\{b_k\}$ кетма-кетликлар умумий (битта) чекли лимитга эга: $\lim a_k = \lim b_k = c$.

Энди $[a_1, b_1]$ даги $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳадларидан бирини олиб, уни x_{n_1} деб қараймиз. Сўнгра $[a_2, b_2]$ сегментдаги $\{x_n\}$ нинг элементларидан x_{n_1} элементдан кейин келадиганларидан бирини олиб, уни x_{n_2} , $n_1 < n_2$ деб қараймиз. Бунда $[a_2, b_2]$ сегментда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чексиз кўп ҳадлари бўлиши x_{n_2} элементни x_{n_1} элементдан кейин келадиган қилиб олиш имконини беради. Худди шунингдек, $[a_3, b_3]$ сегментдаги $\{x_n\}$ нинг x_{n_1}, x_{n_2} элементлардан кейин келадиганларидан бирини олиб, уни x_{n_3} деб қараймиз (бунда $n_1 < n_2 < n_3$). Бу жараённи давом эттириб k -қадамда, $[a_k, b_k]$ сегментдаги $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}$ лардан кейин келадиган ҳадларидан бирини x_{n_k} деб оламиз ва ҳ.к. Натижада $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳадларидан ташкил топ ан ушбу

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots (n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots)$$

қисмий кетма-кетликка келамиз.

Қисмий $\{x_{n_k}\}$ кетма-кетликнинг ҳадлари учун $a_k \leq x_{n_k} \leq b_{n_k}$, $k = 1, 2, \dots$ тенгсизликлар ўринли бўлиб, ундан $k \rightarrow \infty$ да

$$\lim x_{n_k} = c$$

бўлиши келиб чиқади. Лемма исбот бўлди.

3.5-эслатма. Көлтирилган леммада кетма-кетликнинг чегара·ланган бўлиши муҳим шартдир. Бу шарт бажарилмаса, лемманинг хulosаси ўринли бўлмасдан қолиши мумкин. Масалан, чегараланмаган ушбу

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

натурал сонлар кетма-кетлигининг ҳар қандай қисмий кетма-кетлиги ҳам $+\infty$ га итилади.

10-§. Коши теоремаси (яқинлашиш принципи)

Биз яқинлашувчи кетма-кетликларнинг қатор хоссаларини кўриб ўтдик. Бу хоссалар кетма-кетликнинг чекли лимитга эга бўлиши билан боғлиқдир. Қетма-кетликнинг қачон чекли лимитга эга бўлиши ҳақидаги масала лимитлар назариясининг муҳим масалаларидан бири. Бу масала 7-§ да монотон кетма-кетликлар учун ҳал қилинган. Табиийки, ихтиёрий кетма-кетлик қандай шартда яқинлашувчи бўлади деган савол туғилади. Бу саволга жавоб беришдан аввал фундаментал кетма-кетлик тушунчаси билан танишамиз.

Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

3.17-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сонмавжуд бўлсаки, барча $n > n_0$, барча $m > n_0$ лар учун

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad (3.11)$$

тengsизлик бажарилса, $\{x_n\}$ фундаментал кетма-кетлик деб аталади.

Биз ушбу параграфда кетма-кетликнинг фундаментал бўлиши билан унинг яқинлашувчи бўлиши эквивалент эканлигини кўрсатамиз. Аввало фундаментал бўлган ҳамда фундаментал бўлмаган кетма-кетликларга мисоллар келтирайлик.

Мисоллар

Кўйидаги кетма-кетликлар фундаментал эканлигини кўрсатинг.

1. $\{x_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$. Бу кетма-кетлик учун (3.11) шартнинг бажарилишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан,

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1} \right| < \frac{n+m}{nm} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Агар $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра натурал n_0 сонни

$$n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$$

деб олсак, у ҳолда барча $n > n_0$ ва барча $m > n_0$ лар учун

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Демак, берилган кетма-кетлик фундаменталдир.

2. $\{x_n\} = \left\{ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right\}$.

Бу ҳолда ($n > m$ да)

$$|x_n - x_m| = \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

бўлиб, бу тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчига ушбу

$$\frac{1}{p^2} < \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$$

тенгсизликни қўлланиб топамиз:

$$|x_n - x_m| < \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}.$$

Агар $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ деб олинса, унда $n > m > n_0$ бўлганда

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

бўлади. Бу берилган кетма-кетликнинг фундаментал эканини билдиради.

3. Энди фундаментал бўлмаган кетма-кетликка мисол келтирамиз. Қўйидаги

$$\{x_n\} = \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right\}:$$

$$; 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots$$

кетма-кетликни қарайлик. Бу кетма-кетлик учун, масалан $n > m$ да

$$|x_n - x_m| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{n-m}{n}$$

бўлиб, $n = 2m$ бўлганда эса

$$|x_n - x_m| > \frac{1}{2}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу ҳол берилган кетма-кетликнинг фундаментал эмаслигини кўрсатади.

3.13-теорема. (Қоши теоремаси.) *Кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши учун у фундаментал бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. Зарурлиги. $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, $\lim x_n = a$ бўлсин. Лимит таърифига мувофиқ, $\forall \varepsilon > 0$ берилганда ҳам $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0$ сонлар учун $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, ихтиёрий $n > n_0$ ва $m > n_0$ сонлар учун

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon.$$

Бу эса $\{x_n\}$ фундаментал кетма-кетлик эканини кўрсатади.

Етарлилиги. $\{x_n\}$ — фундаментал кетма-кетлик бўлсин. Демак,

$\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, $n > n_0$, $m > n_0$ лар учун $|x_n - x_m| < \varepsilon$ тенгсизик ўринли. Бу тенгсизликда n сон n_0 дан катта ихтиёрий бўлишини қолдириб, m натурал сонни n_0 дан катта бирор тайин қийматини олиб, юқоридаги тенгсизликни қўйндаги

$$x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$$

кўринишида ёзib оламиз. Демак, $n > n_0$ да $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг x_n ҳадлари $(x_m - \varepsilon, x_m + \varepsilon)$ интервалда жойлашган бўлиб, ундан кетма-кетликнинг чегараланганилиги келиб чиқади. Больцано — Вейерштрасс леммасига кўра $\{x_n\}$ кетма-кетликдан чекли сонга интигувчи $\{x_{n_k}\}$ қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин. Бу қисмий кетма-кетлик лимитини a билан белгилайлик: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$. Энди a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити эканини кўрсатамиз. Дарҳақиқат, бир томондан $x_{n_k} \rightarrow a$ бўлгани учун $\forall \varepsilon > 0$ га кўра шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, $n_k > n_0$ лар учун $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади.

Иккничи томондан, $m = n_k$ бўлганда $|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$ тенгсизлик ҳам бажарилади. Юқоридаги тенгсизликларга кўра

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < 2\varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\lim x_n = a$ эканини кўрсатади. Теорема исбот бўлди.

Исбот этилган теорема Коши теоремаси ёки яқинлашиш принципи деб юритилади. Бу теорема муҳим назарий аҳамиятга эга.

11- §. Кетма-кетликнинг юқори ва қуий лимитлари

Бизга $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлиб, $\{x_{n_k}\}$ эса унинг бирор қисмий кетма-кетлиги бўлсин.

Маълумки, кетма-кетлик лимитга эга бўлмаган ҳолда ҳам у қисмий лимитларга эга бўлиши мумкин. Бу қисмий лимитларнинг энг каттаси ҳамда энг кичигининг мавжудлиги масаласини қараймиз.

3.18- таъриф. $\{x_n\}$ кетма-кетлик қисмий лимитларининг энг каттаси (энг кичиги) берилган кетма-кетликнинг **юқори (қуий) лимити** деб аталади ва

$$\overline{\lim} x_n \quad (\underline{\lim} x_n)$$

каби белгиланади.

Масалан, $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$ кетма-кетликнинг юқори лимити

$$\overline{\lim} (-1)^{n+1} = 1,$$

қўйи лимити эса

$$\lim (-1)^{n+1} = -1$$

бўлади.

3.6-эслатма. Агар $\{x_n\}$ яқинлашувчи кетма-кетлик бўлиб, $\lim x_n = c$ бўлса, бу кетма-кетликнинг қўйи ҳамда юқори лимитлари мавжуд ва

$$\lim x_n = \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = c$$

тengликлар ўринли. Бунинг исботи 3.12-теоремадан келиб чиқади.

Ҳар қандай кетма-кетлик юқори ва қўйи лимитларга эга бўлишини исботлаймиз.

Аввало юқоридан чегараланмаги ҳамда юқоридан чегараланган кетма-кетликлар учун ҳар доим юқори лимитнинг мавжуд бўлишини кўрсатайлик.

1. $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган. Ўсувчи ҳамда $+\infty$ га интилувчи

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$$

кетма-кетликни олайлик ($a_1 < a_2 < \dots < a_k < \dots, a_k \rightarrow +\infty$). Модомики, $\{x_n\}$ юқоридан чегараланмаган экан, унда бу кетма-кетликнинг шундай x_{n_1} ҳади топиладики, $x_{n_1} > a_1$ tengsizlik ўринли бўлади.

Худди шунга ўхшаш кетма-кетликнинг x_{n_1} ҳадидан кейин келадиган x_{n_2} ҳади ($n_1 < n_2$) топиладики, $x_{n_2} > a_2$ tengsizlik ҳам ўринли бўлади. Бу жараённи давом эттириб, k -қадамда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}$ ҳадларидан кейин келадиган шундай x_{n_k} ҳадини топамизки, бу ҳад учун

$$x_{n_k} > a_k \quad (n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1} < n_k)$$

tengsizlik ўринли бўлади ва ҳ.к.

Натижада $\{x_n\}$ кетма-кетликдан ушбу

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$$

қисмий кетма-кетлик ажратилиб, бунда барча $k \in N$ лар учун $x_{n_k} > a_k$ tengsizlik ўринли бўлади. Шартга кўра $\lim a_k = +\infty$. Бундан юқоридаги tengsizlikка кўра $\lim x_{n_k} = +\infty$ га эга бўламиз.

2. $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган. Бу ҳолда шундай ўзгармас M сон мавжуд бўладики, барча $n \in N$ лар учун $x_n \leq M$ бўлади.

$\{x_n\}$ нинг ҳадлари ёрдамида қўйидаги кетма-кетликларни тузамиз:

$$\{x_n\}_1 : x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \{x_n\}_2 & : & x_3, & x_4, & \dots, & x_n, & \dots \\ & \cdot \\ \{x_n\}_k & : & x_{k+1}, & x_{k+2}, & \dots \\ & \cdot \end{array}$$

Бунда $\{x_n\}_k$, $k = 1, 2, 3, \dots$ лар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетликлариdir. Агар $\{x_n\}_k$ белгининг ўзи билан $\{x_n\}_k$ кетма-кетлик ҳадларидан тузилган тўпламни белгиласак, унда бир томондан, $\{x_n\}_1, \{x_n\}_2, \dots$ тўпламларнинг юқоридан чегараланганлиги, иккинчи томондан эса, бу тўпламлар орасида

$$\{x_n\}_1 \supset \{x_n\}_2 \supset \dots \supset \{x_n\}_k \supset \dots$$

муносабатлар борлигини кўрамиз. Бу тўпламларнинг аниқ юқори чегаралари мавжуд. Биз уларни мос разишда $M_1, M_2, \dots, M_k, \dots$ орқали белгилаймиз:

$$\begin{aligned} \sup_{n>1} \{x_n\}_1 &= \sup \{x_n\} = M_1, \\ \sup_{n>2} \{x_n\}_2 &= \sup \{x_n\} = M_2, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \sup_{n>k} \{x_n\}_k &= \sup \{x_n\} = M_k. \end{aligned}$$

Аниқ юқори чегаранинг хоссасига асосан

$$M_{k+1} \leq M_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

бўлади. Демак, $\{M_k\}$ — камаювчи кетма-кетлик. У ҳолда

$$\lim M_k = \lim \sup_{n>k} \{x_n\}$$

лимит мавжуд ва у чекли ёки $-\infty$ бўлади.

Фараз қўйлайлик, $\lim M_k = -\infty$ бўлсин. У ҳолда ҳар қандай мусбат A сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, $M_{n_0} < -A$ бўлади. Аммо $n > n_0$ лар учун

$$x_n \leq M_{n_0} = \sup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$$

бўлиб, ундан эса

$$x_n < -A$$

тengsizlik келиб чиқади. Бу эса $\lim x_n = -\infty$ эканини кўрсатади. $\{M_k\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлсин. Биз уни M_0 билан белгилайлик: $\lim M_k = M_0$.

Нолга интилувчи $\left\{\frac{1}{k}\right\}$ кетма-кетликни оламиз. Модомики,

$$M_k = \sup_{n>k} \{x_n\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

екан, унда аниқ юқори чегаранинг хоссасига кўра, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг шундай x_{n_k} , $k = 1, 2, 3, \dots$ ҳадлари мавжудки,

$$M_k - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq M_k$$

тengsизликлар ўринли бўлади. Кейинги tengsизликларда $k \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = M_0$$

бўлишини топамиз. Демак, M_0 берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қисмий лимити. Энди M_0 ни $\{x_n\}$ кетма-кетлик қисмий лимитларининг энг каттаси эканини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, лимит таърифига асосан $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, барча $k > n_0$ ($k \in N$) лар учун $M_0 - \varepsilon < M_k < M_0 + \varepsilon$

tengsизликлар ўринли бўлади. Яна $M_k = \sup_{n>k} \{x_n\}$ ни эътиборга олиб барча $n > n_0$ лар учун $x_n < M_0 + \varepsilon$ эканини топамиз. Бундан эса $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳар қандай қисмий лимити $M_0 + \varepsilon$ дан катта бўла олмаслиги кўринади. Олинган ε соннинг ихтиёрийлигидан эса $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қисмий лимити M_0 дан катта бўла олмаслиги келиб чиқади. Демак, M_0 сон $\{x_n\}$ кетма-кетлик қисмий лимитларининг энг каттасидир, яъни

$$\overline{\lim} x_n = M_0.$$

Худди шунга ўхшаш қўйидан чегараланмаган ҳамда қўйидан чегаралangan кетма-кетликлар учун ҳар доим уларнинг қўйи лимитлари мавжуд бўлиши кўрсатилиди. Кетма-кетлик қўйидан чегараланган ҳолда, унинг қўйи лимити

$$\underline{\lim} x_n = \lim m_k \quad \text{бўлиб, бунда } m_k = \inf_{n>k} \{x_n\}.$$

Шундай қилиб қўйидаги теоремага келамиз.

3.14- теорема. *Ҳар қандай кетма-кетлик қўйи ҳамда юқори лимитларга эга.*

3.7-натижা. Агар кетма-кетлик чегараланган бўлса, унинг қўйи ҳамда юқори лимитлари чекли бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{ (-1)^n \frac{n+1}{n} \right\}$$

кетма-кетликнинг қўйи ҳамда юқори лимитларини топинг.

Бу кетма-кетлик учун

$$M_1 = \sup_{n>1} \{x_n\} = \frac{3}{2}, \quad m_1 = \inf_{n>1} \{x_n\} = -\frac{4}{3},$$

$$M_2 = \sup_{n>2} \{x_n\} = \frac{5}{4}, \quad m_2 = \inf_{n>2} \{x_n\} = -\frac{6}{5},$$

• • • • • • • • • •

$$M_k = \sup_{n>k} \{x_n\} = \frac{2k-1}{2k}, \quad m_k = \inf_{n>k} \{x_n\} = -\frac{2k+2}{2k+1}.$$

бўлади. У ҳолда

$$\lim M_k = \lim \frac{2k-1}{2k} = 1, \quad \lim m_k = \lim \left(-\frac{2k+2}{2k+1} \right) = -1.$$

Демак,

$$\overline{\lim} \left\{ (-1)^n \frac{n+1}{n} \right\} = 1, \quad \underline{\lim} \left\{ (-1)^n \frac{n+1}{n} \right\} = -1.$$

Энди юқори ва қуи лимитларнинг хоссаларини келтирамиз.
Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун

$$\overline{\lim} x_n = a$$

бўлсин. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ сон олингандада ҳам:

1°. Шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0$ лар учун

$$x_n < a + \varepsilon,$$

2°. $\forall n_1 \in N$ сон учун ε ва n_1 ларга боғлиқ шундай натурал сон n' топиладики, $n' > n_1$ бўлганда

$$x_{n'} > a - \varepsilon$$

бўлади.

Юқори лимитнинг бу хоссалари қуийдаги маънони англатади:
 $\forall \varepsilon > 0$ сон тайин олингандада, биринчи хосса $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг фақат чекли сондаги ҳадларигина

$$x_n > a + \varepsilon$$

тengsizlikni қаноатлантиришини, иккинчи хосса эса бу кетма-кетликнинг

$$x_n > a - \varepsilon$$

tengsizlikни қаноатлантирадиган ҳадлари сони чексиз кўп бўлишини ифодалайди.

Ҳақиқатан, агар $\{x_n\}$ нинг чексиз кўп сондаги ҳадлари $a + \varepsilon$ дан катта бўлса, у ҳолда $a + \varepsilon$ сондан кичик бўлмаган b ($b \geq a + \varepsilon$) га интилувчи $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги мавжуд, бу $a = \overline{\lim} x_n$ га зид бўлади. Демак, $a + \varepsilon$ дан ўнгда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг кўпи билан чекли сондаги ҳадлари ётади. Бу 1° хоссани исботлайди.

Модомики, $\overline{\lim} x_n = a$ экан, унда $\{x_n\}$ нинг қисмий лимитларидан бири a га teng: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$. Лимит таърифидан эса бу $\{x_{n_k}\}$ кетма-кетликнинг, демак $\{x_n\}$ нинг ҳам, чексиз кўп сондаги ҳадлари $a - \varepsilon$ дан катта бўлади. Демак, 2° хосса ҳам исбот бўлди. Аксинча, бирор a сон юқоридаги икки шартни қаноатлантира, у $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг юқори лимити бўлади.

Равшанки, 1° ва 2° шартларни қаноатлантирувчи a сон учун

$$a = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{n > k} \{x_n\}$$

бўлиб, бундай ифодаланган a $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг юқори лимити бўлади. Демак, $a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Фараз қиласлий, бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун

$$b = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

бўлсин. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам:

1°. шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0$ лар учун

$$x_n > b - \varepsilon,$$

2°. $\forall n_1 \in N$ сон учун ε ва n_1 ларга боғлиқ натурал сон n' топиладики, $n' > n_1$ бўлганда

$$x_{n'} < b + \varepsilon$$

бўлади.

Кетма-кетлик қуий лимитининг бу хоссалари юқоридагидек исботланади.

3. 15-теорема. $\{x_n\}$ кетма-кетлик с лимитга эга бўлиши учун

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = c \quad (3.12)$$

тengliklarning ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ бўлсин. Кетма-кетлик лимитга эга бўлган ҳолда унинг ҳар қандай қисмий кетма-кетлиги ҳам шу лимитга эга бўлишидан (3.12) tengliklarning ўринли бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. $\{x_n\}$ кетма-кетлиги учун (3.12) tengliklar ўринли бўлсин. Қуий лимит хоссасига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, $n > n_0$ лар учун $x_n > c - \varepsilon$ бўлади. Шунингдек, юқори лимит хоссасига асосан, ўша $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_1 \in N$ сон топиладики, барча $n > n_1$ лар учун $x_n < c + \varepsilon$ бўлади.

Энди n_0 ва n_1 сонларнинг каттасини \bar{n} деб олсак, унда $n > \bar{n}$ лар учун

$$c - \varepsilon < x_n < c + \varepsilon$$

tengsizliklar ўринли бўлади. Бу эса $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

4- боб

ФУНКЦИЯ ВА УНИНГ ЛИМИТИ

1- §. Функция тушунчаси

Биз 1- § бобда ихтиёрий E ва F тўпламлар берилган ҳолда E нинг элементларини F тўпламнинг элементларига ўтказувчи

$$f : E \rightarrow F$$

f акслантиришларни қараб ўтган эдик.

Хусусан, $E = N$, $F = R$ бўлганда натурал сонлар тўплами N нинг элементларини ҳақиқий сонлар тўплами R нинг элементларига ўтказувчи

$$f : N \rightarrow R \quad (f : n \rightarrow x_n)$$

акслантиришлар сонлар кетма-кетлиги тушунчасига олиб келди ва улар 3- бобда батафсил ўрганилди.

Энди $E = R$, $F = R$ бўлганда $x (x \in R)$ ўзгарувчи билан $y (y \in R)$ ўзгарувчи орасидаги боғланишини, яъни

$$f : R \rightarrow R \quad (f : x \rightarrow y)$$

акслантиришни ўрганамиз. Бу бизни функция тушунчасига олиб келади.

X ва Y лар ҳақиқий сонларнинг бирор тўпламлари ($X \subset R$, $Y \subset R$) бўлиб, x ва y ўзгарувчилар мос равишда шу тўпламларда ўзгарсин: $x \in X$, $y \in Y$. Бундан кейин биз ҳақиқий сонларнинг берилган тўплами X сифатида сегмент, интервал, ярим интервал, шунингдек, чексиз оралиқларни оламиз.

4.1- та ўриф. Агар X тўпламдаги ҳар бир x сонга бирор қоида ёки қоиунга кўра Y тўпламдан битта y сон мос қўйилган бўлса, X тўпламда функция берилган (аниқланган) деб аталади ва у

$$f : x \rightarrow y \quad \text{ёки} \quad y = f(x)$$

каби белгиланади. Бунда X функцияниш аниқланниш тўплами (соҳаси) Y эса функцияниш ўзгариши тўплами (соҳаси) деб аталади. x эркли ўзгарувчи ёки функцияниш аргументи, y эрксиз ўзгарувчи ёки x ўзгарувчининг функцияси дейилади.

Мисоллар. 1. f - ҳар бир ҳақиқий x сонга унинг бутун қисми $[x]$ ни мос қўювчи қоида бўлсин. Демак,

$$f : x \rightarrow [x] \quad \text{ёки} \quad y = [x]$$

функцияга эга бўламиз. Бу функцияниш аниқланниш тўплами $X = R$, ўзгариш тўплами эса $Y = Z = R$ бўлади.

2. Ҳар- бир рационал сонга 1 ни, ҳар бир иррационал сонга 0 ни мос қўйиш натижасида функция ҳосил бўлади. Бу функцияни Дирихле функцияси деб аталади ва уни $D(x)$ каби белгиланади:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

Дирихле функциясининг аниқлананиш тўплами $X = R$ бўлиб, ўзгариш тўплами $Y = \{0, +1\}$ бўлади.

Юқорида келтирилган функция таърифида, биринчидан, функцияниг аниқлананиш тўплами кўрсатилиши (кўпинча бундай тўплам функционал боғланишининг характеристига кўра топилиши лозим бўлади), иккинчидан эса, x ўзгарувчининг ҳар бир қийматига y ўзгарувчининг битта қийматини мос қўядиган қоида ёки қонуннинг берилиши муҳимdir.

Бирор X тўпламда $y = f(x)$ функция аниқланган бўлсин. $x_0 \in X$ га мос келувчи y_0 миқдор $y = f(x)$ функцияининг $x = x_0$ нуқтадаги *хусусий қиймати* деб аталади ва уни $f(x_0) = y_0$ каби белгиланади.

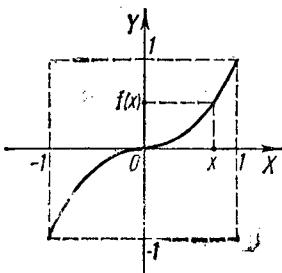
Текисликда Декарт координаталар системасини оламиз. Текисликнинг $(x, f(x))$ каби аниқланадиган нуқталаридан иборат ушбу

$$\{(x, f(x))\} = \{(x, f(x)) : x \in X, f(x) \in Y\}$$

тўплам $y = f(x)$ функцияининг графиги деб аталади. Равshanки, $\{(x, f(x))\} \subset X \times Y$ бўлади. Масалан, $y = x^3$ функцияни $X = [-1, 1]$ тўпламда қарайлик. Бу функцияининг графиги кубик параболани (19-чизма) ифодалайди. Бунда $X \times Y$ тўплам штрихлар билан кўрсатилган квадратни билдиради.

Функция таърифидаги ҳар бир x га битта y ни мос қўядиган қоида ёки қонун турли усулда берилиши мумкин. Биз уларни қисқа-ча қараб ўтамиз.

Кўпинча x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш [формулалар ёрдамида ифодаланиади. Бунда аргумент x нинг ҳар бир қийматига мос келадиган y функцияининг қийматини x устида аналитик амаллар—қўшиш, айриш, кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш, илдиз чиқариш, логарифмлаш ва ҳ. к. амалларни бажариш натижасида топилади. Одатда бундай усул функцияининг *аналитик усулда берилиши* дейилади.



19- чизма

Мисоллар. 1. x ва y ўзгарувчилар ушбу

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

формула ёрдамида боғланган бўлсин. Бу функцияининг аниқлананиш соҳаси $X = \{x : x \in R, -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$ тўпламдан иборат. Бунда ҳар бир x га мос келадиган y нинг қиймати аввало x ни квадратга кўтариш, сўнгра уни 1 дан айриш ва бу айримдан квадрат илдиз чиқариш каби амалларни бажариш натижасида топилади.

2. x ва y ўзгарувчилар орасидаги бөлганиш қўйидаги формулалар ёрдамида берилган бўлсин:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x > 0, \\ -1, & \text{агар } x < 0. \end{cases}$$

Бу функцияниш соҳаси $X = R \setminus \{0\}$ бўлиб, унинг ўзгариш соҳаси $Y = \{-1, 1\}$ тўпламдан иборат. Одатда бу функцияни

$$y = \operatorname{sign} x$$

каби белгиланади. Бунда sign — лотинча signum сўзидан олинган бўлиб, «белги», «ишора» деган маънони англатади.

Бу $y = \operatorname{sign} x$ функцияништаги $x = 0$ нуқтадаги қиймати нолга тенг деб қабул қиласак, у R тўпламда аниқланган бўлади (20- чизма).

Баъзи ҳолларда $x(x \in X)$ ва $y(y \in Y)$ ўзгарувчилар орасидаги бөлганиш формулалар ёрдамида берилмасдан жадвал усулида берилган бўлиши мумкин. Масалан, кун давомида ҳаво ҳароратини кутагнимизда t_1 вақтда ҳаво ҳарорати T_1 , t_2 вақтда ҳаво ҳарорати T_2 ва ҳ. к. бўлсин. Натижада қўйидаги жадвалга келамиз:

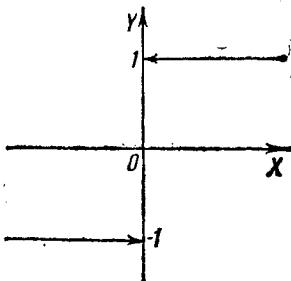
вақт, t	t_1	t_2	t_3	...	t_k
ҳарорат, T	T_1	T_2	T_3	...	T_k

Бунда t вақт билан ҳаво ҳарорати T орасидаги боғланиш функционал боғланишни иғодалайди, бунда. t — аргумент, T эса функция бўлади. Боғланишинг бундай берилиши, функцияништаги жадвал усулида берилиши деб аталади.

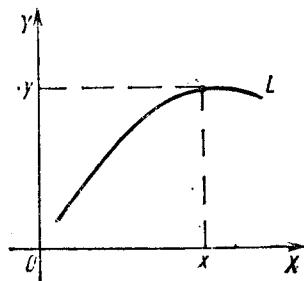
XOY текислигида шундай L чизиқ берилган бўлсинки, OX ўқида жойлашган нуқталардан шу ўққа ўтказилган перпендикуляр бу L чизиқни фақат битта нуқтада кесиб ўтсин.

OX ўқидаги бундай нуқталардан иборат тўпламни X орқали белгилайлик. X тўпламдан ихтиёрий x ни олиб, бу нуқтадан OX ўқига перпендикуляр ўтказамиш. Бу перпендикулярништаги L чизиқ билан кесишган нуқтасининг ординатасини y билан белгилаймиз ва олинган x га бу y ни мос қўйамиз. Натижада X тўпламдан олинган ҳар бир x га юқорида кўрсатилган қондага кўра битта y мос қўйилиб, функция ҳосил бўлади. Бунда x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш L чизиқ ёрдамида берилган бўлади (21- чизма). Одатда f нинг бундай берилиши унинг график усульда берилиши деб аталади.

Шундай қилиб, биз функцияништаги аналитик, жадвал, график усулларда бери-



20- чизма



21- чизма

лишини кўриб ўтдик. x ва y ўзгарувчилар орасидаги функционал боғланиш юқоридаги учта усул билангина берилиб қолмасдан, бошқача ҳам берилиши мумкин. Масалан, ҳар бир натурал n сонга унинг бўлувчилари сонини мос қўйялик. Бу мосликни ф орқали белгилаймиз. Хусусан,
 $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 2, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 3, \varphi(5) = 2, \dots \varphi(12) = 6, \dots$

Одатда бу функцияни Эйлер функцияси дейилади.

Математик анализ курсида асосан аналитик усулда берилган функциялар ўрганилади.

X тўпламда $y = f(x)$ функция аниқланган бўлсин. Агар бу функция қийматларидан тузилган

$$Y = \{f(x) : x \in X\}$$

тўплам юқоридан (қўйидан) чегараланган бўлса, яъни шундай ўзгармас M (ўзгармас m) сон топилсанки, $\forall x \in X$ учун

$$f(x) \leq M \quad (f(x) \geq m)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция X тўпламда юқоридан (қўйидан) чегараланган деб аталади, акс ҳолда эса функция юқоридан (қўйидан) чегараланмаган дейилади. Агар $f(x)$ функция X тўпламда ҳам юқоридан, ҳам қўйидан чегараланган бўлса, функция шу тўпламда чегараланган дейилади.

Масалан, ушбу

$$y = \frac{1}{x}$$

функция $X = (0, 1)$ тўпламда қўйидан чегараланган, аммо юқоридан чегараланмаган.

X тўпламда аниқланган икки $f(x)$ ҳамда $\varphi(x)$ функцияларни қарайлик. Агар $\forall x \in X$ да $f(x) = \varphi(x)$ бўлса, бу функциялар X тўпламда бир-бира га тенг функциялар дейилади.

X тўпламда аниқланган $F(x) = f(x) + \varphi(x)$ функция $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларнинг йиғиндисидан иборат. Икки функция айримаси, кўпайтмаси ва нисбати ҳам шунга ўхшашиб таърифланади.

Жуфт ҳамда тоқ функциялар билан танишишдан аввал, O нуқтага нисбатан симметрик бўлган сонлар тўпламини та рифлаймиз.

Агар $\forall x \in X$ учун $-x \in X$ бўлса, X тўплам O нуқтага нисбатан симметрик тўплам дейилади.

Энди O нуқтага нисбатан симметрик бўлган X тўпламда $y = f(x)$ функция аниқланган бўлсин. Агар $\forall x \in X$ учун

$$f(-x) = f(x)$$

бўлса, $f(x)$ — жуфт,

$$f(-x) = -f(x)$$

бўлса, $f(x)$ — тоқ функция деб аталади. Масалан,

$$y = \cos x, \quad y = |x|$$

функциялар учун

$$\cos(-x) = \cos x, | -x | = | x |$$

Бұлгани сабабли улар жуфт функциялардир.

Ушбу

$$y = \sin x, y = x^3$$

функциялар учун

$$\sin(-x) = -\sin x, (-x)^3 = -x^3$$

бұлгани сабабли улар тоқ функциялардир. Икки жуфт (тоқ) функция йигиндиси, айрмаси, яна жуфт (тоқ) функциялар бўлиши равшандир.

Шуни таъкидлаш лозимки, функция ҳар доим жуфт ёки тоқ функция бўлавермайди. Бундай функцияларга $f(x) = x^2 - x$, $\varphi(x) = -\sin x - \cos x$ лар мисол бўла олади. Бу функциялар жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. Бироқ қуидаги теорема ўринлидири.

4.1-теорема. О нүктага нисбатан симметрик бўлган X тўпламда аниқланган ҳар қандай $f(x)$ функция жуфт ва тоқ функциялар йигиндиси кўринишида ифодаланаади.

Исбот. Берилган $f(x)$ функция ёрдамида қуидаги

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

$$\psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

функцияларни тузамиз. Бу функциялар учун

$$\varphi(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \varphi(x),$$

$$\psi(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -\psi(x)$$

бўлиб, ундан $\varphi(x)$ жуфт, $\psi(x)$ эса тоқ функция эканлиги кўринади. Шу билан бирга ушбу

$$\varphi(x) + \psi(x) = f(x)$$

тенглик ҳам ўринли экани равшан. Бу эса теоремани исботлайди.

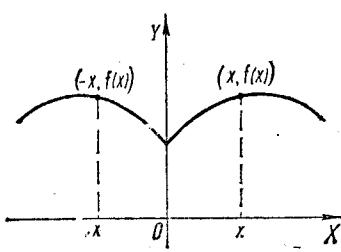
Жуфт функцияning графиги ордината ўқига нисбатан симметрик жойлашгандир. Ҳақиқатан, бундай функциялар учун $(x, f(x))$ нуқта функция графигида ётган бўлса, $(-x, f(x))$ нуқта ҳам шу графикда жойлашган бўлади (22-чизма).

Тоқ функцияning графиги координата бошига нисбатан симметрик жойлашади. Ҳақиқатан, бу функция графигида $(x; f(x))$ нуқта билан бирга ҳар доим $(-x, -f(x))$ нуқта ҳам ётади (23-чизма).

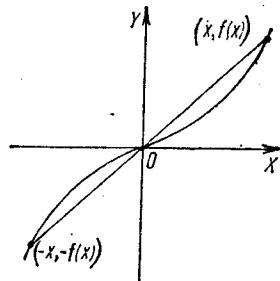
Энди даврий функция тушунчасини киритайлик. X тўпламда $f(x)$ функция берилган бўлсин.

Агар шундай ўзгармас T ($T > 0$) сон мавжуд бўлсанки, ҳар бир $x \in X$ ва $x + T \in X$ лар учун

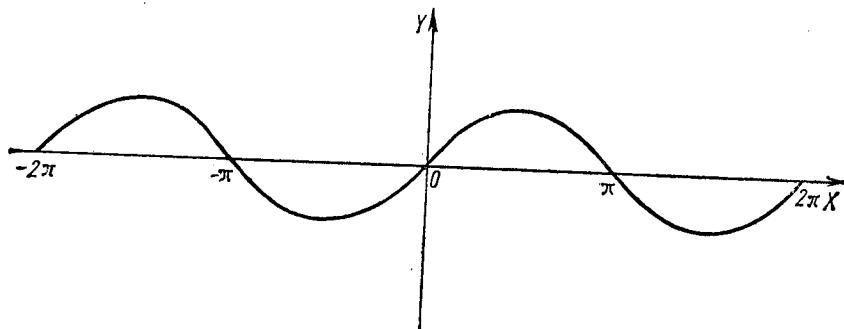
$$f(x + T) = f(x)$$



22- чизма



23- чизма



24- чизма

тенгликтің үринли бўлса, $f(x)$ функция X тўпламда даврий функция дейилади, T сон эса функцияниң даври деб аталади.

Агар $f(x)$ даврий функция бўлиб, унинг энг кичик мусбат даври T бўлса, kT ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) ҳам функцияниң даври бўлади. Даврий $f(x)$ функцияниң графиги узунлиги энг кичик даври T га тенг бўлган $[a, a + T]$ ($a \in X$) оралиқдаги шу функция графигини $[a + kT, a + (k + 1)T]$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) оралиғига бир хил такрорлаш натижасида ҳосил қилинади. Масалан, $f(x) = \sin x$ функция $X = (-\infty, +\infty)$ интервалда аниқланган 2π даврли функциядир. Унинг графиги 24- чизмада кўрсатилган синусоидани ифодалайди.

Математик анализ курсида ўрганиладиган функциялар орасида монотон функциялар диққатга сазовордир. Биз бундай функциялар билан танишамиз.

4 . 2 - таъриф. Агар аргумент x нинг X тўпламдан олинган ихтиёрий x_1 ва x_2 қийматлари учун $x_1 < x_2$ бўлишидан $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$) тенгсизлик келиб чиқса, $f(x)$ функция X тўпламда ўсуви (қатъий ўсуви) деб аталади.

4 . 3 - таъриф. Агар аргумент x нинг X тўпламдаги ихтиёрий x_1 ва x_2 қийматлари учун $x_1 < x_2$ бўлишидан $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) тенгсизлик келиб чиқса, $f(x)$ функция X тўпламда камаючи (қатъий камаючи) деб аталади.

4. 4- таъриф. Ўсувчи ҳамда камаючы функциялар **монотон функциялар** деб аталади.

Мисол. $f(x) = x^3$ функция $X = R$ да қатъий ўсувчи. Дарҳақи-
кат, $\forall x_1 \in R$, $\forall x_2 \in R$ нүқталар олиб, $x_1 < x_2$ бўлсин деб қарай-
лик. У ҳолда

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) = \\ &= (x_2 - x_1) \left[\left(x_2 + \frac{1}{2} x_1 \right)^2 + \frac{3}{4} x_1^2 \right] > 0. \end{aligned}$$

Демак, $x_1 < x_2$ тенгсизлик бажарилганда $f(x_1) < f(x_2)$ тенгсизлик
ҳам бажарилади.

1- бобда акслантириш ва унга тескари бўлган акслантириш билан танишган эдик. Функция ҳам акслантириш эканлигини билса-
да, курс давоминда ўқувчи бевосита функциялар билан шуғуланишини эътиборга олган ҳолда, биз бу ерда тескари функция тушун-
часини келтиришни лозим топдик.

X тўпламда $y = f(x)$ функция аниқланган бўлиб, Y эса функция
қийматларидан иборат тўплам бўлсин, яъни $Y = \{f(x) : x \in X\}$. Энди Y
тўпламдан олинган ҳар бир y га X тўпламда фақат битта x мос
келсин дейлик.

Бу ҳолда Y тўпламдан олинган ҳар бир y га X тўпламда битта
 x мос қўйилишини ифодалайдиган функцияга келамиз. Одагда бу
функция $y = f(x)$ га нисбатан *тескари функция* дейилади ва $y = f^{-1}(y)$
каби белгиланади.

Агар $x = f^{-1}(y)$ функция $y = f(x)$ га нисбатан тескари функция
бўлса, $y = f(x)$ функция $x = f^{-1}(y)$ га нисбатан тескари бўлади.
Шунинг учун ҳам $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$ функцияларга *ўзаро теска-
ри функциялар* дейилади.

Равшанки, қўйидаги

$$f(f^{-1}(y)) = y, f^{-1}(f(x)) = x$$

хоссалар ўринили.

Мисол. $y = f(x) = 2x + 1$ функцияни $[0, 1]$ оралиқда қарайлик.
Бу функцияning қийматлари $[1, 3]$ оралиқни ташкил этади. $[1, 3]$
оралиқда аниқланган $x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$ функция берилган $y = 2x + 1$
функцияга нисбатан тескари функция бўлади.

Энди мураккаб функция тушунчаси билэн танишамиз.

$y = f(x)$ функция X соҳада аниқланган бўлиб, Y эса функция
қийматларидан иборат тўплам бўлсин, яъни $Y = \{f(x) : x \in X\}$. Сўнг-
ра Y тўпламда ўз навбатида бирор $z = \varphi(y)$ функция берилган бўл-
син. Натижада X тўпламдан олинган ҳар бир x га Y тўпламда битта
 $y (f : x \rightarrow y)$ сонни ва Y тўпламдан олинган бундай y сонга битта
 $z (\varphi : y \rightarrow z)$ сонни мос қўйилади.

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\varphi} z.$$

Демак, X тўпламдан олинган ҳар бир x га битта z сон мос қўйи-
лади.

Одатда бундай ҳолда f ва φ функцияларнинг мураккаб функцияси берилган дейилади ва у $z = \varphi(f(x))$ каби белгиланади.

Масалан, $z = \sqrt{x+1}$ функцияни қарайллик. Бу функция $z = \sqrt{y}$, $y = x + 1$ функциялар ёрдамида ҳосил бўлган. $y = x + 1$ функция $R = (-\infty, +\infty)$ да аниқланган бўлиб, $z = \sqrt{y}$ функция эса $y \geq 0$, яъни $x + 1 \geq 0$ да мавжуд бўлади. Демак, $z = \sqrt{x+1}$ мураккаб функция ушбу ($X = \{x : x \in R; x \geq -1\}$) тўпламда аниқланган.

2-§. Элементар функциялар

Маълумки, ўрта мактаб математика курсида элементар функциялар ва уларнинг баъзи бир хоссалари ўрганилади.

Функция — математик анализ курсида ўрганиладиган асосий объект бўлгани учун биз ушбу параграфда элементар функцияларга тўхталамиз.

Элементар функциялар синфи асосан эркли ўзгарувчи $x (x \in R)$ ҳамда ўзгармас сонлар устида қўшиш, айриш, кўпайтириш, бўлиш, дара-кага кўтариш ҳамда логарифмлаш амалларини бажариш натижасида ҳосил бўлади. Бу ҳосил бўлган ифодаларнинг мавжудлиги 2-бўзда батафсил қараб ўтилган ҳақиқий сонларнинг йиғиндиси, айримаси, кўпайтмаси, нисбати, шунингдек, ҳақиқий соннинг ҳақиқий даражаси, ҳақиқий сон логарифмининг мавжудлигидан келиб чиқади.

1°. Бутун ва каср рационал функциялар. Ушбу

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

кўринишдаги функция (бунда $n \in N$ ва $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ — ўзгармас сонлар) бутун рационал функция деб аталади. Бутун рационал функцияни кўпхад деб ҳам юритилади. Бутун рационал функция $R = (-\infty, +\infty)$ да аниқланган. Ҳусусан, $y = ax + b$ — чизиқли функция еа $y = ax^2 + bx + c$ — квадрат учҳадлар бутун рационал функциялардир. Маълумки, чизиқли функциянинг графиги текисликда тўғри чизиқни, квадрат учҳаднинг графиги эса парabolasi ифодалайди. Квадрат учҳад гравигининг ҳолати a коэффициент ҳамда дискриминант $d = b^2 - 4ac$ нинг ишораларига боғлиқ бўлади. 25- чизмада параболанинг текисликда турлича жойланиш ҳолатлари кўрсатилган.

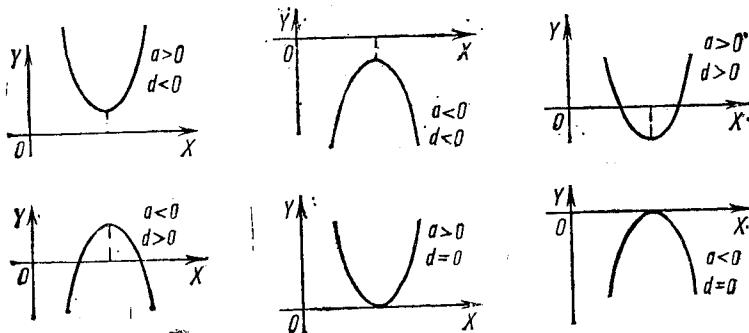
Икки бутун рационал функциянинг нисбагидан тузилган

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}$$

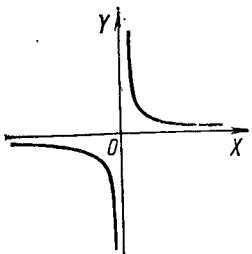
функция каср рационал функция деб аталади. Каср рационал функция

$$X = R \setminus \{x : x \in R, b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m = 0\}$$

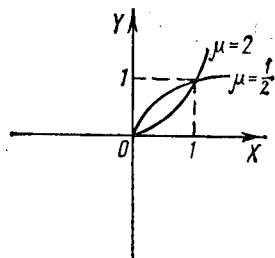
тўпламда, яъни маҳражни нолга айлантирувчи нуқталардан фарқли бўлган барча ҳақиқий сонлардан иборат тўпламда аниқланган.



25- чизма



26- чизма



27- чизма

Хусусан, $y = \frac{1}{x}$ ва $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ лар каср рационал функциялар бўлади.

Маълумки, $y = \frac{1}{x}$ функция графиги тенг ёнли гиперболадан иборат (26- чизма). Бу графикни билган ҳолда $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ функция графикини ясаш мумкин.

2°. Даражали функция. Ушбу

$$y = x^\mu$$

кўринишдаги функция даражали функция деб аталади, бунда μ , ихтиёрий ўзгармас ҳақиқий сон. Даражали функциянинг аниқланиш соҳаси μ га боғлиқ. μ бутун сон бўлганда рационал функцияга эга бўламиз. Агар μ рационал, масалан $\mu = \frac{1}{m} > 0$ бўлса, m жуфт бўлганда $x^\mu = x^{\frac{1}{m}}$ функциянинг аниқланиш соҳаси $x = [0, +\infty)$, m тоқ бўлганда эса функциянинг аниқланиш соҳаси $R = (-\infty, +\infty)$ оралиқдан иборат бўлади. μ иррационал бўлганда $x > 0$ деб олина-

гаралиқдан иборат бўлади.

ди. Даражали функциянынг графиги $\mu > 0$ бўлганда ҳар доим текисликнинг $(0, 0)$ ҳамда $(1, 1)$ нуқталаридан ўтади (27- чизма).

Даражали функция $y = x^\mu$ ушбу $(0, \infty)$ оралиқда $\mu > 0$ бўлганда ўсуви, $\mu < 0$ бўлганда эса камаючи бўлади.

3°. Кўрсаткичли функция. Ушбу

$$y = a^x$$

кўринишдаги функция кўрсаткичли функция деб аталади, бунда a ҳақиқий сон, $a > 0$ ва $a \neq 1$. Кўрсаткичли функциянынг аниқланиш соҳаси R тўпламдан иборат бўлиб, функция қийматлари эса ҳар доим мусбат бўлади. Бу функциянынг графиги OY ўқидан юқорида жойлашган ва доим текисликнинг $(0, 1)$ нуқтасидан ўтади (28- чизма).

4°. Логарифмик функция. Ушбу

$$y = \log_a x$$

кўринишдаги функция логарифмик функция деб аталади, бунда $a > 0$ ва $a \neq 1$. Логарифмик функция $X = (0, +\infty)$ интервалда аниқланган. Бу функциянынг графиги OY ўқнинг ўнг томонида жойлашган ва доим текисликнинг $(1, 0)$ нуқтасидан ўтади (29- чизма).

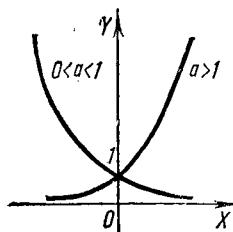
5°. Тригонометрик функциялар. *тоу* текислиқда, маркази координаталар бошида, радиуси 1 га teng бўлган $t^2 + y^2 = 1$ айланани олайлик (30- чизма). Бу айлананинг $C(1, 0)$ нуқтасидан унга CP уринма ўтказамиз. Координата бошидан чиқсан ва Ot ўқ билан x бурчак ташкил этган Ot нур айланани A нуқтада, CP уринманни B нуқтада кесади. Бу A ва B нуқталарнинг координаталари мос равишда (t, y_1) , $(1, y_2)$ бўлсин. Равшанки, A ва B нуқталарнинг ўрни x бурчакка бўғлиқ. Демак, ҳар бир $x \in R$ сон учун Ot

ўқ билан x бурчак ташкил этадиган Ot нур ўтказилса, бу нурнинг айланана ва уринмалар билан кесишган нуқталарининг координаталари t, y_1, y_2 лар x га бўғлиқ бўлиб, ҳар бир x га шу координаталарни мос қўяйлик:

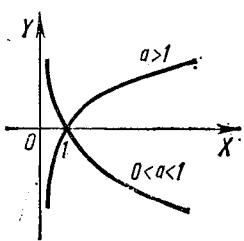
$$f: x \rightarrow t,$$

$$\varphi: x \rightarrow y_1,$$

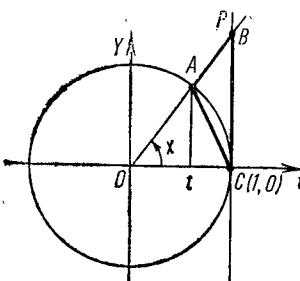
$$\psi: x \rightarrow y_2.$$



28- чизма



29- чизма



30- чизма

Одатда $\varphi: x \rightarrow y_1$ га $\sin x$, $f: x \rightarrow t$ га $\cos x$, $\psi: x \rightarrow y_2$ га $\operatorname{tg} x$ функция деб аталади:

$$y_1 = \sin x, \quad y_2 = \operatorname{tg} x, \quad t = \cos x.$$

Бунда $y_1 = \sin x$, $t = \cos x$ функциялар R да аниқланган 2π даврли функциялар бўлиб, улар учун $\forall x \in R$ да

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

тengsизликлар ўринли бўлади.

$y_2 = \operatorname{tg} x$ функция $X = R \setminus \left\{ x : x \in R; x = (2k+1)\frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \dots \right\}$ тўпламда аниқланган.

$\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ функциялар $\sin x$, $\cos x$ ва $\operatorname{tg} x$ функциялар орқали қўйидагича аниқланади:

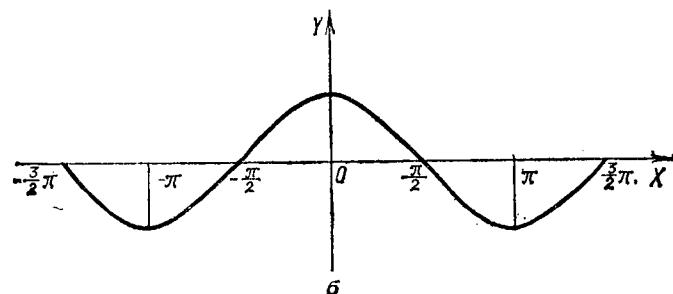
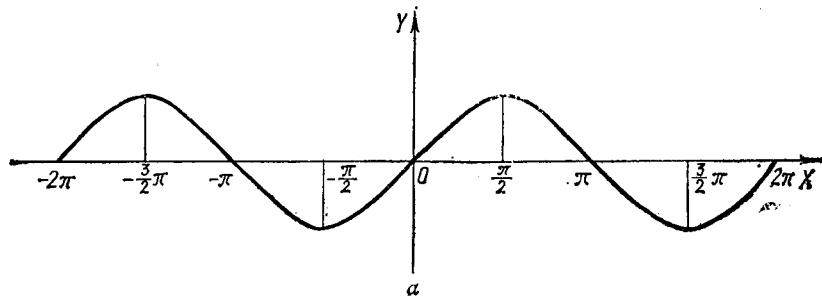
$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

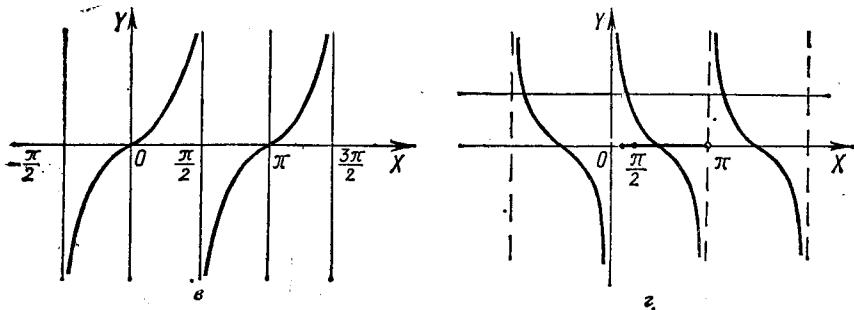
Ушбу $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ ва $\operatorname{ctg} x$ функцияларнинг графилари 31-*a*, *b*, *c* чизмаларда тасвирланган.

6°. Гиперболик функциялар. Ушбу $y = e^x$ кўрсаткичли функция ёрдамида тузилган қўйидаги

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

функциялар гиперболик (мос равища гиперболик синус, гипербо-





31- чизма

лик косинус, гиперболик тангенс, гиперболик котангенс) функциялар деб аталади ва улар $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ каби белгиланади:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

$\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ функциялар R да, $\operatorname{cth} x$ функция эса $x = R \setminus \{0\}$ тўпламда аниқланган.

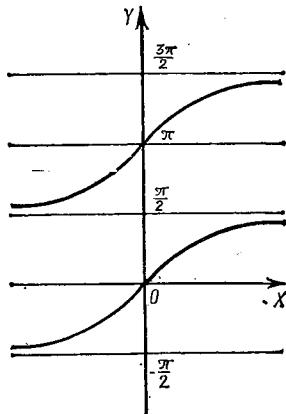
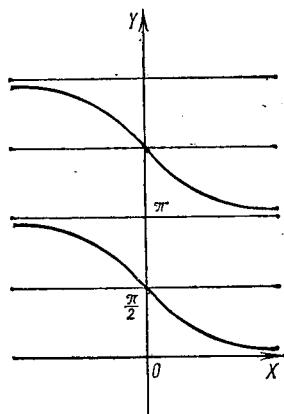
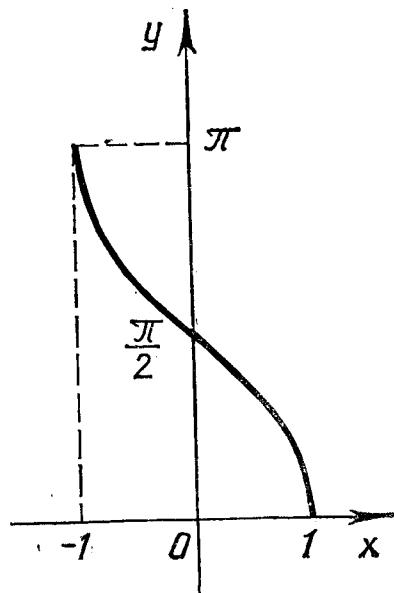
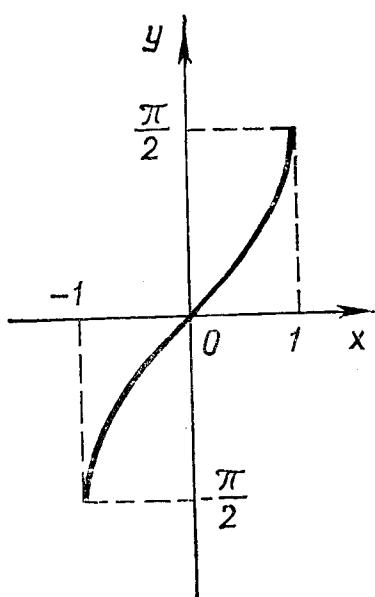
Гиперболик функциялар орасида ҳам тригонометрик функциялар орасидаги боғланишига ўхшаш муносабатлар мавжуд. Масалан,

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x.$$

7°. Тескари тригонометрик функциялар. Маълумки, $y = \sin x$ функция R да аниқланғандублиб, унинг қийматлари $\{y \in R : -1 \leq y \leq 1\}$ тўпламни ташкил этади. Агар биз аргумент x нинг $x \in X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ сегментдаги қийматларини қарасак, $y = -\sin x$ функцияning қийматлари ҳам $Y = [-1, +1]$ сегментда ўзгариб, бунда $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ тўпламнинг элементлари $Y = [-1, +1]$ тўпламнинг элементлари билан ўзаро бир қийматли мослиқда бўлади. Бу ҳол $y = \sin x$ функцияга нисбатан тескари функцияни қараш имконини беради. $y = \sin x$ функцияга тескари функция $y = \arcsin x$ каби белгиланади. Демак, $y = \arcsin x$ функция $X = [-1, +1]$ тўпламда аниқланган бўлиб, ўзгариш соҳаси $Y = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ тўпламни ташкил этади.

Худди шунга ўхшаш, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ функцияларга нисбатан тескари бўлган функциялар ҳам тескари тригонометрик функциялар дейилиб, уларни мос равища $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = \operatorname{arccctg} x$ каби белгиланади.

$y = \arccos x$ функция $X = [-1, +1]$ да аниқланган бўлиб, унинг қийматлари $Y = [0, \pi]$ тўпламдан иборат. $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = \operatorname{arccctg} x$ функциялар R да аниқланган. Бу функцияларнинг ўзга-



32- а, б, в, г чизма

риш соҳалари мос равиша $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ва $(0, \pi)$ тўпламлардан иборат.

32- а, б, в, г чизмаларда тескари тригонометрик функцияларнинг графиклари тасвирланган.

3- §. Функция лимити

Биз 3- бобда натурал аргументли функция — сонлар кетма-кетлиги ва унинг лимитини ўргандик. Энди аргументи ҳақиқий сон бўлган функция лимитини қараймиз. Аввало сонлар тўпламининг лимит нуқтаси тушунчаси билан танишамиз.

1. Тўпламниңг лимит нуқтаси. Маълумки,

$$U_\varepsilon(a) = \{x : x \in R, a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

тўплам a нуқтанинг атрофи (ε - атрофи) деб аталар эди. Шунга ўхшаш, ушбу

$$U_\varepsilon^+(a) = \{x : x \in R, a < x < a + \varepsilon\} \quad (4.1)$$

тўплам a нуқтанинг ўнг атрофи,

$$U_\varepsilon^-(a) = \{x : x \in R, a - \varepsilon < x < a\} \quad (4.2)$$

тўплам a нуқтанинг чап атрофи,

$$U_c(\infty) = \{x : x \in R; |x| > c\}, \quad (4.3)$$

$$U_c(+\infty) = \{x : x \in R, x > c\}, \quad (4.4)$$

$$U_c(-\infty) = \{x : x \in R, x < -c\} \quad (4.5)$$

тўпламлар эса мос равишда ∞ , $+\infty$ ва $-\infty$ «нуқта» ларнинг *атрофи* деб аталади (4.1) — (4.5) ларда ε ва c лар ихтиёрий мусбат ҳақиқий сонлар.

X — бирор ҳақиқий сонлар тўплами, a — бирор нуқта бўлсин.

4.5- таъриф. Агар a нуқтанинг ҳар бир атрофида X тўпламниңг a дан фарқли камидагитта нуқтаси бўлса, a нуқта X тўпламниңг лимит нуқтаси (қуюқлаши нуқтаси) деб аталади.

Демак, a нуқта X тўпламниңг лимит нуқтаси бўлса, $\forall \varepsilon > 0$ сон учун

$$\{U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}\} \cap X \neq \emptyset$$

муносабат ўринли бўлади.

Мисоллар:

1. Ушбу $[0, 1] = \{x : x \in R, 0 \leq x \leq 1\}$ тўпламниңг ҳар бир нуқтаси шу тўпламниңг лимит нуқтаси бўлади.

2. Ушбу $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ тўплам лимит нуқтага эга эмас.

3. Ушбу $(0, 1) = \{x : x \in R, 0 < x < 1\}$ тўпламниңг ҳар бир нуқтаси шу тўпламниңг лимит нуқтаси бўлади ва яна $x = 0, x = 1$ нуқталар ҳам $(0, 1)$ учун лимит нуқталардир.

4. $F = [0, 1]$ сегмент ҳамда 2 сонидан иборат тўплам бўлсин, яъни $F = [0, 1] \cup \{2\}$. Бу тўплам учун $x = 2$ нуқта лимит нуқта эмас. (Одатда тўпламниңг бундай нуқтаси унинг яккаланган нуқтаси деййилади).

Юқорида келтирилган таъриф ва мисоллардан қўйиңдаги натижалар келиб чиқади:

1°. X тўпламнинг лимит нуқтаси шу тўпламга тегишли бўлиши ҳам, тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин.

2°. Агар a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, a нуқтанинг ҳар бир атрофида X тўпламнинг чексиз кўп нуқталари бўлади. Буни исботлайлик. Тескарисини фараз қиләмиз. a нуқтанинг бирор $U_\sigma(a)$ атрофида X тўпламнинг чекли сондаги $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ нуқталари тегишли бўлсин. У ҳолда $|a - \alpha_1|, |a - \alpha_2|, \dots, |a - \alpha_k|$ ва σ сонларнинг энг кичигини δ деб олинса, a нуқтанинг $U_\delta(a)$ атрофида X тўпламнинг a дан фарқли битта ҳам нуқтаси бўлмайди. Бу эса a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси эканига зиддир.

3°. Агар a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, X тўплам нуқталаридан a га интилувчи $\{x_n\}$, ($x_n \in X, x_n \neq a, n = 1, 2, 3, \dots$) кетма-кетлик тузиш мумкин.

Нолга интилувчи мусбат сонлар кетма-кетлиги $\{\delta_n\}$ ни олиб, a нуқтанинг

$$U_{\delta_n}(a) = \{x : x \in R, a - \delta_n < x < a + \delta_n\} (n = 1, 2, \dots)$$

атрофларини қарайлик. a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси эканидан ҳар бир $U_{\delta_n}(a)$ ($n = 1, 2, \dots$) атрофда X тўпламнинг a дан фарқли x_n нуқтаси топилади: $x_n \in U_{\delta_n}(a)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). У ҳолда $|x_n - a| < \delta_n$ тенгсизлик ўрини бўлиб, $\delta_n \rightarrow 0$ дан $\lim x_n = a$ келиб чиқади. Бу келтирилган мулоҳазадан кўринадики, a га интилувчи $\{x_n\}$ кетма-кетликларни кўплаб тузиш мумкин.

4.6- таъриф. Агар a нуқтанинг ҳар бир ўнг (чап) атрофида X тўпламнинг a дан фарқли камида битта нуқтаси бўлса, a нуқта X нинг ўнг (чап) лимит нуқтаси деб аталади.

4.7- таъриф. Агар $U_c(\infty), U_c(+\infty), U_c(-\infty)$ атрофларда X тўпламнинг нуқталари бўлса, мос равнишда $\infty, +\infty, -\infty$ лар X тўпламнинг лимит «нуқта»лари дейилади.

Масалан, $+\infty$ «нуқта» $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлади.

2. Функция лимитининг таърифлари. $X = \{x\}$ ҳақиқий сонлар тўплами берилган бўлиб, a нуқта унинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $f(x)$ функция аниқланган дейлик. Модомики, a нуқта X нинг лимит нуқтаси экан, X тўпламнинг нуқталаридан a га интилувчи турли $\{x_n\}, x_n \neq a, n = 1, 2, 3 \dots$ кетма-кетликлар тузиш мумкин: $\lim x_n = a$. Равшанки, $x_n \in X, (n = 1, 2, 3 \dots)$. Шунинг учун бу нуқталарда ҳам $f(x)$ функция аниқланган. Натижада $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик билан бирга $\{f(x_n)\}$:

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$$

сонлар кетма-кетлигига ҳам эга бўламиз.

4.8- таъриф. Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган, a га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}, (x_n \neq a, n = 1, 2, \dots)$ кетма-кетлик олганимизда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b (чекли ёки чексиз) лимитга интилса, шу b га $f(x)$ функциянинг a нуқ-

тадаги (ёки $x \rightarrow a$ даги) лимити деб аталади ва уни $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ёки $x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow b$ каби белгиланади.

Функция лимитига берилган бу таъриф Гейне таърифи деб аталади.

Келтирилган таърифнинг ушбу муҳим томонига ўқувчининг эътиборини жалб қиласлик: ҳар қандай $\{x_n\}$; ($x_n \neq a$, $n = 1, 2, \dots$) кетма-кетлик учун $x_n \rightarrow a$ да $\{f(x_n)\}$ кетма-кетликнинг лимити олинган $\{x_n\}$ кетма-кетликка боғлиқ бўлмаслиги керак.

Мисоллар:

1. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

функциянинг $x \rightarrow 0$ даги лимити 1 га тенг эканлиги кўрсатилсин.

Ҳар бир ҳади нольдан фарқли бўлган ва нолга интигуви ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетлик олайлик: $\lim x_n = 0$ ($x_n \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$)

У ҳолда ушбу

$$\{f(x_n)\} = \left\{ \frac{1}{1+x_n^2} \right\}$$

кетма-кетликни ҳосил қиласмиз. Равшанки $x_n \rightarrow 0$ да

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{1}{1+x_n^2} = 1.$$

Демак, таърифга кўра

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1.$$

2. Қуйидаги

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

функциянинг $x \rightarrow 0$ даги лимити мавжуд эмас. Ҳакиқатан, нолга интигуви иккита турли $\{x'_n\} = \left\{ \frac{2}{(4n-1)\pi} \right\}$, $\{x''_n\} = \left\{ \frac{2}{(4n+1)\pi} \right\}$ кетма-кетликни олайлик. Бунда

$$f(x'_n) = \sin \frac{4n-1}{2}\pi = -1, \quad f(x''_n) = \sin \frac{4n+1}{2}\pi = 1$$

бўлиб,

$$\lim f(x'_n) = -1, \quad \lim f(x''_n) = 1.$$

Бу эса $\sin \frac{1}{x}$ функциянинг $x \rightarrow 0$ да лимити мавжуд эмаслигини кўрсатади.

Энди функция лимити таърифидаги X тўпламнинг нуқталаридан тузиљган, a га интилувчи $\{x_n\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бир ҳади $x_n (n = 1, 2, \dots)$ ни a га тенг бўлмасин, деб айтилган шартга изоҳ берамиз. Агар таърифдаги бу шарт олиб ташланса, у ҳолда лимитга эга бўлган функциялар синфи бирмунча «тораяди». Хусусан, биз юқорида келтирган 1- мисолдаги функция ҳам лимитга эга бўлмай қолади. Ҳақиқатан, нолга интилувчи кетма-кетлик сифатида

$$\{x'_n\}: 0, 0, 0, \dots, 0, \dots$$

кетма-кетлик олинса, $f(x)$ нинг қийматларидан ташкил топган мос $\{f(x'_n)\}$ кетма-кетликнинг лимити нолга тенг бўлиб, истижада

$$x_n \rightarrow 0 \quad (x_n \neq 0, n = 1, 2, \dots) \text{ да } f(x_n) \rightarrow 1,$$

$$x'_n \rightarrow 0 \quad (x'_n = 0, n = 1, 2, \dots) \text{ да } f(x'_n) \rightarrow 0$$

муносабатларга эга бўламиз. Бу эса $x \rightarrow 0$ да $f(x)$ функция лимитга эга эмаслигини билдиради.

Функция лимитини бошқача ҳам таърифлаш мумкин.

4.9- таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон то-пилсаки, аргумент x нинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функцияянинг a нуқтадаги ($x \rightarrow a$ даги) лимити деб аталади.

4.10- таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон то-пилсаки, аргумент x нинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $|f(x)| > \varepsilon$, $(f(x) > \varepsilon, f(x) < -\varepsilon)$, бўлса, $f(x)$ функцияянинг a нуқтадаги ($x \rightarrow a$ даги) лимити $\infty (+\infty; -\infty)$ дейилади.

Функция лимитига берилган бу таъриф Коши таърифи деб аталади.

Мисоллар

1. Ушбу $f(x) = \frac{x-5}{x^2-25}$ функцияянинг $x \rightarrow 5$ даги лимити $\frac{1}{10}$ бўлишини исбот этинг.

$\forall \varepsilon > 0$ сон олайлик. Бу ε га кўра δ ни $\delta = \frac{10\varepsilon}{1+\varepsilon}$ деб олсак, у ҳолда $0 < |x - 5| < \delta$ бўлганда

$$\left| \frac{x-5}{x^2-25} - \frac{1}{10} \right| = \frac{1}{10} \left| \frac{x-5}{x+5} \right| \leqslant \frac{|x-5|}{10(10-|x-5|)} = \frac{\delta}{10(10-\delta)} < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бунда таърифга кўра

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \frac{1}{10}$$

келиб чиқади.

2. Қўйидаги $f(x) = \frac{1}{x-1}$ функция учун $x \rightarrow 1$ да $f(x) \rightarrow \infty$ бўлиши кўрсатилсин.

$\forall \varepsilon > 0$ сон учун $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ деб олинса, у ҳолда $0 < |x - 1| < \delta$ тенгсизликнинг бажарилишидан

$$|f(x)| = \left| \frac{1}{x-1} \right| > \varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади. Демак, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.

Функция лимити таърифидаги $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизлик $a - \delta < x < a + \delta$, $x \neq a$ тенгсизликларга эквивалент бўлиб, функция аргументининг бу тенгсизликларни қаноатлантириши уларнинг a нуқтанинг $\dot{U}_\delta(a)$ атрофиға тегишли бўлишини ифодалайди. Бунда

$$\dot{U}_\delta(a) = \{x : x \in R; a - \delta < x < a + \delta; x \neq a\}.$$

Шунга ўхшаш $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизликнинг бажарилиши $x \in \dot{U}_\delta(a)$ да $f(x)$ функцияининг қийматлари b нуқтанинг $U_\varepsilon(b)$ атрофида бўлишини билдиради.

Шундай қилиб, функция лимитининг икки хил — Гейне ҳамда Коши таърифлари келтирилди. Энди бу таърифларнинг эквивалентлигини кўрсатамиз,

а) $f(x)$ функция $x = a$ нуқтада Коши таърифига кўра лимитга эга бўлсин, яъни $\forall \varepsilon > 0$ сон учун, шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизлик бажарилганда $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

Х тўпламнинг нуқталаридан тузилган, ҳар бир ҳади a дан фарқли бўлган ва a га интилувчи иктиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетлик олайлик:

$$\lim x_n = a \quad (x_n \neq a, n = 1, 2, 3, \dots).$$

Сонлар кетма-кетлиги лимитининг таърифига кўра, юқоридаги $\delta > 0$ учун шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0$ лар учун $|x_n - a| < \delta$ тенгсизлик ўринли бўлади. Натижада $x_n \neq a, n = 1, 2, \dots$ муносабатга кўра $0 < |x_n - a| < \delta$ тенгсизликлар келиб чиқади. Бу тенгсизликнинг ўринли бўлишидан

$$|f(x_n) - b| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади. Демак, $x_n \rightarrow a$ да $f(x_n) \rightarrow b$ бўлади.

б) $f(x)$ функция $x = a$ нуқтада Гейне таърифига кўра лимитга эга бўлсин, яъни X тўпламнинг нуқталаридан тузилган, a га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ ($x_n \neq a, n = 1, 2, 3, \dots$) кетма-кетлик олганимизда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b лимитга интилсин.

Биз b сон $f(x)$ функцияининг $x = a$ нуқтада Коши таърифига кўра ҳам лимити бўлишини кўрсатишмиз керак.

Тескарисини фараз қиласлик, яъни $f(x)$ функция $x = a$ нуқтада Гейне таърифига кўра b лимитга эга бўлса ҳам, функция шу нуқтада Коши таърифига асосан b лимитга эга бўлмасин. Унда бирор $\varepsilon_0 > 0$ сон учун иктиёрий кичик мусбат δ сон олинганида ҳам аргу-

мент x нинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи бирор x' қийматида

$$|f(x') - b| \geq \varepsilon_0$$

бўлади.

Нолга интилувчи мусбат сонлар кетма-кетлиги $\{\delta_n\}$ ни олайлик. У ҳолда юқоридагига кўра ҳар бир $\delta_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) учун аргумент x шинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи шундай $x = x_n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) қиймати топиладики, $0 < |x_n - a| < \delta_n$ ва $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon_0$ бўлади. Аммо $\delta_n \rightarrow 0$ дан $x_n \rightarrow a$. Бу ҳолда Гейне таърифига асосан $f(x_n) \rightarrow b$ бўлиши лозим. Юқоридаги муносабат эса бунга зиддир. Демак, $f(x)$ функция $x = a$ нуқтада Гейне таърифига кўра b лимитга эга бўлишидан унинг шу нуқтада Коши таърифига кўра b лимитга эга бўлиши келиб чиқади.

X бирор ҳақиқий сонлар тўплами бўлиб, a унинг ўнг (чап) лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $y = f(x)$ функция аниқланган дейлник.

4.11-таъриф (Гейне). Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган ва ҳар бир ҳади a дан катта (кичин) бўлиб a га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик олганимизда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b га интилса, шу b ни $f(x)$ функцияниг a нуқтадаги ўнг (чап) лимити деб аталади.

4.12-таъриф (Коши). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон тописаки, аргумент x нинг $a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a$) тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча қийматларида $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функцияниг a нуқтадаги ўнг (чап) лимити деб аталади.

Функцияниг ўнг (чап) лимити қўйидагича белгиланади:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b \text{ ёки } f(a+0) = b \quad (\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b \text{ ёки } f(a-0) = b).$$

Агар $a = 0$ бўлса, $x \rightarrow 0+0$ ($x \rightarrow 0-0$) ўрнига $x \rightarrow +0$ ($x \rightarrow -0$) деб ёзилади.

Функцияниг ўнг ва чап лимитлари, унинг бир томонли лимитлари дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \quad (x \neq 0)$$

функцияни қарайлик.

Ҳар биро нолга интилувчи иккита

$$\{x'_n : x'_n \rightarrow 0 \quad (x'_n > 0, n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\{x''_n : x''_n \rightarrow 0 \quad (x''_n < 0, n = 1, 2, 3, \dots)\}.$$

кетма-кетликни олайлик. Бу кетма-кетликлар учун

$$f(x'_n) = \frac{x'_n}{x'_n} = 1 \rightarrow 1, \quad f(x''_n) = \frac{x''_n}{-x''_n} = -1 \rightarrow -1$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{|x|} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x}{|x|} = -1.$$

4.1-эслатма. Функцияниг бирор нуқтада бир томонли лимитлари мавжуд бўлишидан унинг шу нуқтада лимитга эга бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Бироқ қўйидаги содда теорема ўринлидир. а нуқта бир вақтнинг ўзида X тўплам учун ўнг ва чап лимит нуқта бўлиб, бу тўпламда $y = f(x)$ функция аниқланган бўлсин.

4.2-теорема. $f(x)$ функция а нуқтада б лимитга эга бўлиши учун унинг шу нуқтада ўнг ва чап лимитлари ма жуд бўлиб,

$$f(a+0) = f(a-0) = b$$

тенгликлар ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Бу теореманинг исботи юқорида келтирилган таърифлардан осонгина келиб чиқади.

Энди $x \rightarrow \infty$ да функция лимити тушунчасини келтирамиз.

X тўплам берилган бўлиб, $\infty (+\infty; -\infty)$ унинг лимит «нуқта» си бўлсин. Бу тўпламда $y = f(x)$ функция аниқланган дейлик.

4.13-таъриф. (Гейне). Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган ҳар қандай чексиз катта (мусбат чексиз катта; манфий чексиз катта) $\{x_n^*\}$ кетма-кеглик олганимизда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b га интилса, шу b ни $f(x)$ функциянинг $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -\infty$) даги лимити деб аталади ва

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b)$$

каби белгиланади.

4.14-таъриф (Коши). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсанки, аргумент x нинг $|x| > \delta$ ($x > \delta$; $x < -\delta$) тенгизликини қаноатлантирувчи барча қийматларида $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функциянинг $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -\infty$) даги лимити деб аталади ва

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b)$$

каби белгиланади.

Ушбу параграфнинг охирида функция лимитининг умумий таърифини келтирамиз.

X бирор тўплам бўлиб, a (чекли ёки чексиз) унинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $y = f(x)$ функция аниқланган.

4.15-таъриф. Агар b (чекли ёки чексиз) нинг ҳар қандай $U(b)$ атрофи олинганда ҳам a нинг шундай $U(a)$ атрофи мавжуд бўлсанки, $\forall x \in U(a)$ учун $f(x) \in U(b)$ бўлса, b ни $f(x)$ функциянинг $x \rightarrow a$ даги лимити деб аталади.

Мисоллар

1. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (4.1)$$

лимитни исботланг.

Аввало $0 < x < \frac{\pi}{2}$ интервалдан олинган барча x лар учун

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad (4.2)$$

тengsизликлар ўринли. Бу мактаб математикасидан маълум. Бу tengsизликлар $0 < x < \frac{\pi}{2}$ да $\sin x > 0$ бўлгани учун ушбу

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

кўринишда ёзилиши мумкин. Ундан

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$$

tengsизликлар келиб чиқади. (4.2) tengsизликларнинг $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ интервалда ҳам ўринли бўлишини кўриш қийин эмас. Шу билан бирга $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ интервалда $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \leqslant 2 \frac{|x|}{2} = |x|$ tengsизликининг ўринли бўлишини эътиборга олсак, юқоридаги (4.2) tengsизликлар қўйидаги

$$0 < \left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < |x|$$

кўринишга келишини топамиз.

Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон берилганда ҳам $\delta > 0$ деб ε ва $\frac{\pi}{2}$ сонларнинг кичиги олинса, аргумент x нинг $0 < |x| < \delta$ tengsизликларни қаноатлантирувчи барча қўйматларида

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| = \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$$

tengsизлик ўринли бўлади. Бу эса функция лимитининг Коши таърифига кўра (4.1) лимитнинг тўғрилигини англатади.

2. Қўйидаги

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad (4.3)$$

лимитни исботланг (бунда $e = 2,71\dots$).

Бунинг учун $+\infty$ га интиливчи ихтиёрий $\{x_k\}$ кетма-кетликни олайлик. Бу ҳолда барча $k = 1, 2, 3, \dots$ лар учун $x_k > 1$ деб қараш мумкин. Ҳар бир x_k нинг бутун қисмини n_k орқали белгилаб, ушбу $[x_k] = n_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) $+\infty$ га интиливчи $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ натурал сонлар кетма-кетлигини ҳосил қиласиз.

Маълумки,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Бу муносабатдан

$$\lim_{n_k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$$

экани келиб чиқади.

Энди ушбу

$$\begin{aligned} [x_k] = n_k \Rightarrow n_k \leq x_k < n_k + 1 \Rightarrow \frac{1}{n_k + 1} < \frac{1}{x_k} \leq \frac{1}{n_k} \Rightarrow 1 + \\ + \frac{1}{n_k + 1} < 1 + \frac{1}{x_k} \leq 1 + \frac{1}{n_k} \end{aligned}$$

муносабатлар ўринли бўлишини эътиборга олиб, топамиз:

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} < \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1}. \quad (4.4)$$

Бироқ,

$$\begin{aligned} \lim_{n_k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} = \\ = \lim_{n_k \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1} \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{-1} \right] = e. \\ \lim_{n_k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1} = \lim_{n_k \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \left(1 + \frac{1}{n_k}\right) \right] = e \end{aligned}$$

лимитлар ўринли бўлгани учун (4.4) тенгсизликларда (бунда $x_k \rightarrow +\infty$) лимитга ўтсак, изланган (4.3) лимит ҳосил бўлади.

Энди $-\infty$ га интиувчи иктиёрий $\{x_k\}$ кетма-кетликни олайлик. Бунда $x_k < -1$ ($k = 1, 2, \dots$) деб қараш мумкин. Агар $y_k = -x_k$ деб белгиласак, унда $y_k \rightarrow +\infty$ ва $y_k > 1$ ($k = 1, 2, \dots$) бўлади. Равшанки,

$$\left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = \left(1 - \frac{1}{y_k}\right)^{-y_k} = \left(\frac{y_k}{y_k - 1}\right)^{y_k} = \left(1 + \frac{1}{y_k - 1}\right)^{y_k} = \left(1 + \frac{1}{y_k - 1}\right).$$

Ундан

$$\lim_{x_k \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = \lim_{y_k \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y_k - 1}\right)^{y_k - 1} \left(1 + \frac{1}{y_k - 1}\right) \right] = e.$$

Шундай қилиб, $-\infty$ га интиувчи ҳар қандай $\{x_k\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ функция қийматларидан тузилган

$$\{f(x_k)\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} \right\}$$

кетма-кетлик ҳамма вақт e лимитга эга экани исботланди. Функция лимитининг Гейне таърифига кўра

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

лимит ҳам ўринли бўлади.

4-§. Чекли лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссалари

Чекли лимитга эга бўлган функциялар қатор хоссаларга эга. Бу хоссаларни ўрганиш жараёнида функция лимити таърифидан ҳар доим фойдаланиб борилади.

Функция лимити (Гейне таърифи) сонлар кетма-кетлигининг лимити сифатида таърифланишини ва З-бобда ўрганилган чекли лимитга эга бўлган кетма-кетликларнинг хоссаларини эътиборга олиб, ушбу параграфда келтириладиган хоссаларнинг баъзиларинигина исботлаймиз. Қолган хоссаларни исботлаш ўқувчига тавсия этилади.

1. Тенгсизлик белгиси билан исботланадиган хоссалар.

Х тўплам берилган бўлиб, a эса унинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $f(x)$ функция аниқланган.

1°. Агар ушбу $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ лимит мавжуд бўлиб, $b > p$ ($b < q$) бўлса, a нинг етарли кичик атрофидан олинган x ($x \neq a$) нинг қийматларида $f(x) > p$ ($f(x) < q$) бўлади.

2°. Агар ушбу $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ лимит мавжуд бўлиб, $b > 0$ ($b < 0$) бўлса, a нинг ($x \neq a$) етарли кичик атрофидан олинган x нинг қийматларида $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) бўлади.

3°. Агар ушбу $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ лимит мавжуд бўлса, a нинг ($x \neq a$) етарли кичик атрофидан олинган x нинг қийматларида $f(x)$ функция чегараланган бўлади.

Исбот. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ бўлсин. Функция лимити таърифига кўра $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики,

$$x \in U_\delta(a) \text{ учун } f(x) \in U_\varepsilon(b)$$

бўлади. Демак, аргумент x нинг барча $x \in U_\delta(a)$ қийматларида функцияning мос қийматлари ($b - \varepsilon, b + \varepsilon$) оралиқда бўлади. Бу эса $f(x)$ функцияning a нуқтанинг $U_\delta(a)$ атрофида чегараланганлигини кўрсатади.

4. 2 - эслатма. Функция чегараланганлигидан унинг чекли лимитга эга бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди. Масалан, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ функция чегараланган, аммо $x \rightarrow 0$ да бу функция лимитга эга эмас.

X тўпламда $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар аниқланган бўлиб, а эса X нинг лимит нуқтаси бўлсин.

4°. Агар ушбу

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b_2$$

лимитлар мавжуд бўлиб, аргумент x нинг a нуқтанинг $\dot{U}_\delta(a)$ атрофидан олинган барча қийматларида $f_1(x) \leq f_2(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $b_1 \leq b_2$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

5°. Агар a нуқтанинг $\dot{U}_\delta(a)$ атрофидан олинган x нинг қийматларида

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$$

тенгсизликлар ўринли бўлиб, $x \rightarrow a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар лимитга эга ҳамда

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b$$

тенгсизликлар ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (4.6)$$

бўлади.

5° нинг исботи. Шартга кўра $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b_1$ лимит мавжуд.

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ сон учун a нуқтанинг шундай $\dot{U}_{\delta_1}(a)$ атрофи мавжудки, x нинг барча $x \in \dot{U}_{\delta_1}(a)$ қийматларида $f_1(x) \in U_\varepsilon(b)$ бўлади. Шунга ўхшашиб, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b$ лимит мавжуд бўлгани учун ўша $\forall \varepsilon > 0$ сон учун a нуқтанинг шундай $\dot{U}_{\delta_2}(a)$ атрофи мавжудки, x нинг барча $x \in \dot{U}_{\delta_2}(a)$ қийматларида $f_2(x) \in U_\varepsilon(b)$ бўлади.

. Агар $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ сонларнинг кичигини δ деб, a нуқтанинг $\dot{U}_\delta(a)$ атрофи олинса, унда

$$\dot{U}_\delta(a) \subset \dot{U}_{\delta_1}(a), \quad \dot{U}_\delta(a) \subset \dot{U}_{\delta_2}(a)$$

муносабатлар ўринли бўлади. Натижада ҳар бир $x \in \dot{U}_\delta(a)$ учун бир вақтда

$$f_1(x) \in U_\varepsilon(b), \quad f_2(x) \in U_\varepsilon(b)$$

бўлиб, (4.5) муносабатга биноан $f(x) \in U_\varepsilon(b)$ ҳам келиб чиқади.

Демак, ҳар бир $x \in \dot{U}_\delta(a)$ учун $f(x) \in U_\varepsilon(b)$ ўринли. Бу эса $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция лимитга эга ва $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ бўлишини кўрсатади. Шундай қильб, (4.6) исботланди.

Мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

лимитни топинг.

Равшанки, бир томондан $x \cdot \cos \frac{1}{x}$ функция учун $-|x| \leq x$ •
 $\cdot \cos \frac{1}{x} \leq |x|$ тенгсизликлар бажарилади, иккинчи томондан,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

Демак, юқоридаги 5° хоссага күра $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x} = 0$.

2. Чекли лимитга әга бўлган функциялар устида арифметик амаллар. X тўплам берилган бўлиб, a унинг лимит нуқтаси бўлсан. Бу тўпламда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар аниқланган.

1°. Агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар лимитга әга бўлса, $f(x) \pm g(x)$ функция ҳам лимитга әга ва

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

тенглик ўринли.

2°. Агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар лимитга әга бўлса, $f(x) \cdot g(x)$ функция ҳам лимитга әга ва

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

тенглик ўринли.

4.1-натижা. Агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция лимитга әга бўлса, унда $k \cdot f(x)$ ($k = \text{const}$) функция ҳам лимитга әга ва

$$\lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

тенглик ўринли.

3°. Агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар лимитга әга бўлиб, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ бўлса, $\frac{f(x)}{g(x)}$ функция ҳам лимитга әга ва

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

тенглик ўринли.

4.3-эслатма. 1) Юқорида келтирилган 1° ва 2° хоссалар қўшилувчилар, кўпайтувчилар сони ихтиёрий чекли бўлган ҳолда ҳам ўринли.

2) $x \rightarrow a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг йифиндиси, кўпайтмаси ва нисбатидан иборат бўлган функцияларнинг лимитга әга бўлишидан бу функцияларнинг ҳар бирининг лимитга әга бўлиши доим келиб чиқавермайди. Масалан, $f(x) = 1 - \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ функциялар йифиндиси $f(x) + g(x) = 1$ бўлиб, $x \rightarrow 0$ да $f(x) + g(x) \rightarrow 1$ бўлади. Аммо $x \rightarrow 0$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири лимитга әга эмас.

3. Мураккаб функцияниң лимити. Күпчилик ҳолларда мураккаб функцияның лимитини ҳисоблашга түғри келади. Шуннинг учун биз қойида мураккаб функция лимитини ҳисоблаш имконини берадиган теоремани көлтирамиз.

Фараз қиласылар, бирор X түпламда $t = \varphi(x)$ функция аниқланған ва бу функция қийматларидан иборат T түпламда $y = f(t)$ функция аниқланған бўлиб, улар ёрдамида мураккаб функция $y = f(\varphi(x))$ ҳосил қилинган бўлсин. Бу мураккаб функция X түпламда аниқланған. Шу билан бирга a сон X түпламынг лимит нуқтаси бўлсан.

4.3 - теорема. Агар 1) $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = c$ лимит ўринли бўлиб, а нуқтаниң шундай $\dot{U}_\delta(a)$ атрофи мавжуд бўлсаки, барча $x \in \dot{U}_\delta(a)$ лар учун $\varphi(x) \neq c$ бўлса, 2) c нуқта T түпламининг лимит нуқтаси бўлиб, $\lim_{t \rightarrow c} f(t) = b$ лимит мавжуд бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a$ да мураккаб функция $y = f(\varphi(x))$ ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = b$$

бўлади.

Исбот. Шартга кўра $\lim_{t \rightarrow c} f(t) = b$ мавжуд. Лимит таърифига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон учун, шундай $\sigma > 0$ сон топиладики, барча $t \in \dot{U}_\sigma(c)$ лар учун $f(t) \in U_\varepsilon(b)$ бўлади.

Энди шартга кўра $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = c$ лимит ўринли, шу билан бирга a нуқтаниң шундай $\dot{U}_\delta(a)$ атрофи мавжудки, барча $x \in \dot{U}_\delta(a)$ лар учун $\varphi(x) \neq c$ тенгсизлик ўринли. У ҳолда яна лимит таърифига кўра, юқоридаги $\sigma > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики, барча $x \in \dot{U}_\delta(a)$ лар учун $\varphi(x) \in \dot{U}_\sigma(c)$ бўлади. Шундай қилиб, $\forall \varepsilon > 0$ сон учун, шундай сон топилади,

$$x \in U_\delta(a) \Rightarrow t = \varphi(x) \in \dot{U}_\sigma(c) \Rightarrow f(t) \in U_\varepsilon(b)$$

муносабатлар ўринли бўлади. Бу эса

$$\lim_{t \rightarrow c} f(t) = \lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = b$$

бўлишини ифодалайди. Теорема исбот бўлди.

4.4-э слатма. Теоремадаги a нуқтаниң $\dot{U}_\delta(a)$ атрофида $\varphi(x) \neq c$ бўлсин деган шартни $f(t)$ функция $t = c$ нуқтада аниқланған ва

$$\lim_{t \rightarrow c} f(t) = f(c) = b$$

тенгликлар ўринли бўлсин деган шарт билан алмаштириш мумкин. Дарҳақиқат, агар $x \in \dot{U}_\delta(a)$ лар учун $\varphi(x) \neq c$ бўлса, теореманинг исботи равшан: агар $\varphi(x) = c$ бўлса, у ҳолда $f(\varphi(x)) = f(c) = b$ бўлиб, $|f(\varphi(x)) - b| = 0$ бўлади. Шундай қилиб, барча $x \in \dot{U}_\delta(a)$ лар учун $f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(b)$ бўлади. Худди шунга ўхшаш a , с ҳамда

b ларнинг бири чекли иккинчиси чексиз ёки барчаси чексиз бўлганда ҳам теореманинг ўринли бўлиши исботланади.

Мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}.$$

Лимитни ҳисобланг.

Бу ҳолда $y = \frac{\sin t}{t}$, $t = \varphi(x) = \sin x$. Шунинг учун

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \text{ ва } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Лимитлардан теоремага асосан

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} = 1$$

келиб чиқади.

4. Аниқ масифодалар. Биз юқорида чекли лимитга эга бўлган функциялар устида арифметик амалларни кўриб ўтдик. Агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бирининг лимити чексиз ёки $\frac{f(x)}{g(x)}$ функция лимити қаралганда $g(x) \rightarrow 0$ бўлиб қолса, бу ҳолда З-бобнинг 6- § ида бат фсил ўрганилган аниқмасликлар каби турли аниқмасифодаларга келамиз.

Х тўплам берилган бўлиб, a унинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар аниқланган. Агар $x \rightarrow a$, да

1) $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow 0$ бўлса, уларнинг $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбати $\frac{0}{0}$ кўришишдаги аниқмасликни ифодалайди;

2) $f(x) \rightarrow \infty$, $g(x) \rightarrow \infty$ бўлса, уларнинг $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбати $\frac{\infty}{\infty}$ кўришишдаги аниқмаслик бўлади; 3) $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow \infty$ бўлса, уларнинг $f(x) \cdot g(x)$ кўпайтмаси $0 \cdot \infty$ кўришишдаги аниқмасликни ифодалайди; 4) $f(x) \rightarrow +\infty$ ($-\infty$), $g(x) \rightarrow -\infty$ ($+\infty$) бўлса, яъни $f(x)$ ҳамда $g(x)$ функциялар турли ишорали чексизга интилса, $f(x) + g(x)$ ифода $+\infty$ ($-\infty$) кўришишдаги аниқмаслик бўлади.

Бу ҳолларда $x \rightarrow a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ўз лимитларига интилиш хусусиятига қараб, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (1, 2- ҳолларда), $f(x) \cdot g(x)$ (3- ҳолда), $f(x) + g(x)$ (4- ҳолда) ифодаларнинг характеристини аниқлаш аниқмасликни очиш деб юритилади.

Мисоллар

1. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \cdot \sin 2x)}{x^2}$$

Лимитни ҳисобланг. Равшанки, бу ифода $\frac{0}{0}$ кўришишдаги аниқмас-

лиқидир. $x \rightarrow 0$ да $x \cdot \sin 2x \rightarrow 0$ ни ҳисобға олиб топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \cdot \sin 2x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \cdot \sin 2x) \cdot \sin 2x \cdot 2}{x \cdot \sin 2x \cdot 2x} = \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \cdot \sin 2x)}{x \cdot \sin 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2. \end{aligned}$$

2. Құйындары

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$$

лимитни ҳисобланғ.

Бу қолда $x \rightarrow 1$ да $\frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$ ифода $\frac{0}{0}$ күринишдаги аниқмасликдир. Содда алмаштиришлар ёрдамида топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) + (x^2 - 1) + \dots + (x^n - 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)[1 + (x + 1) + (x^2 + x + 1) + \dots + (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)]}{x - 1} = \\ &= 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Демек,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

5-§. Монотон функцияның лимити

Биз чекли лимитта әга бўлган функцияларнинг хоссаларини ўргандик. Энди функция лимитининг мавжудлиги масаласи билан шуғулланамиз. Дастрраб бу масалани хусусий ҳолда — монотон функцияларга нисбатан ҳал қиласиз.

X тўплам берилган бўлиб, a (чекли ёки $+\infty$) эса шу тўпламнинг лимит нуқтаси ва барча $x \in X$ лар учун $x \leq a$ бўлсин. X тўпламда $f(x)$ функция аниқланган.

4.4-теорема. Агар $f(x)$ функция X тўпламда ўсувчи бўлиб, юқоридан чегараланган бўлса, $f(x)$ функция a нуқтада чекли лимитта әга, агар $f(x)$ функция юқоридан чегараланмаган бўлса, унинг лимити $+\infty$ бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция X тўпламда ўсувчи ва юқоридан чегараланган бўлсин. Бу ҳолда $\{f(x)\} = \{f(x) : x \in X\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси мавжуд бўлади. Биз буни b билан белгилайлик: $\sup \{f(x)\} = b$. Аниқ юқори чегаранинг хосасига кўра $\forall x \in X$ учун $f(x) \leq b$ бўлиб, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $x' \in X$ топиладики, $f(x') > b - \varepsilon$ бўлади. Қаралаётган функция ўсувчи бўлганидан $x > x'$ тенгсизлик бажарилганда $f(x) \geq f(x')$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Демак, барча $x > x'$ ($x \in X$) лар учун $f(x) > b - \varepsilon$. Натижада ушбу $b - \varepsilon < f(x) \leq b < b + \varepsilon$ тенгсизликларга келамиз. Бу эса b сон $f(x)$ функцияның лимити эканини ифодалайди. Юқо-

ридаги исбот жараёнида a чекли бўлганда $x' = a - \delta$ ($\delta = a - x'$), а чексиз бўлганда эса $x' > P > 0$ деб олинини лозим.

Энди $f(x)$ функция X да ўсувчи бўлиб, юқоридан чегараланмаган бўлсин. Демак, ҳар қандай $P > 0$ сон олингандан ҳам, шундай $x' \in X$ сон топиладики, $f(x') > P$ бўлади. Энди $x \in X$ ва $x > x'$ тенгсизлик бажарилганда $f(x) \geq f(x')$ тенгсизлик ўринли бўлганидан барча $x > x'$ ($x \in X$) лар учун $f(x) > P$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса $x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow +\infty$ эканини билдиради. Теорема тўлиқ исбот бўлди.

X тўплам берилган бўлиб, a (чекли ёки $-\infty$) эса шу тўпламнинг лимит нуқтаси ва барча $x \in X$ лар учун $x \leq a$ бўлсин. X тўпламда $f(x)$ функция аниқланган.

4.5-төрим. Агар $f(x)$ функция X тўпламда камаючи бўлиб, у қўйидан чегараланган бўлса, $f(x)$ функция a нуқтада чекли лимитга эга, $f(x)$ функция қўйидан чегараланмаган бўлса, унинг лимити $-\infty$ бўлади.

Бу теорема юқоридаги теорема каби исботланади.

6-§. Коши теоремаси

Энди функция лимитининг мавжудлиги ҳақидаги умумий теоремани келтирамиз.

X тўплам берилган бўлиб, a унинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $f(x)$ функция берилган.

4.16-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсанки, аргумент x нинг $0 < |x - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва x'' ($x' \in X$, $x'' \in X$) қийматларида

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция учун a нуқтада Коши шартни бажарилади дейилади.

Мисоллар

1. Ушбу $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ функция учун $x = 0$ нуқтада Коши шартининг бажарилишини кўрсатинг. Ҳақиқатан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олиб, δ ни $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ деб қаралса, у ҳолда x нинг $0 < |x - 0| = |x'| < \frac{\varepsilon}{2}$, $0 < |x'' - 0| = |x''| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x', x'' қийматлари учун қуйидагига эга бўламиш: $|f(x'') - f(x')| = |x'' \cdot \sin \frac{1}{x''} - x' \cdot \sin \frac{1}{x'}| \leq |x'' \cdot \sin \frac{1}{x''}| + |x' \cdot \sin \frac{1}{x'}| \leq |x''| + |x'| < \varepsilon$.

Бу берилган функция учун $x = 0$ нуқтада Коши шарти бажарилишини кўрсатади.

2. Коши шарти бажарилмайды

$$f(x) = \cos \frac{1}{x}$$

функция учун $x = 0$ нүктада Коши шарти бажарилмайды. Ҳақиқатан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам (уну 2 дан кичик қилиб олиш мүмкін), $x = 0$ нүкта атрофида шундай $x' = \frac{1}{2k\pi}$, $x'' = \frac{1}{(2k+1)\pi}$ нүкталар борки,

$$|f(x'') - f(x')| = |\cos (2k+1)\pi - \cos 2k\pi| = 2 > \varepsilon$$

бўлади. Демак, $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ функция учун $x = 0$ нүкта Коши шарти бажарилмайды.

Бу мисолдан барча функциялар учун Коши шарти бажарилавер-маслиги кўринади.

4.6-теорема (Коши). $f(x)$ функция a нүктада чекли лимитга эга бўлиши учун бу функция учун a нүкта Коши шарти бажарилшиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция чекли лимитга эга бўлиб, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ бўлсин. Функция лимити таърифига кў-

ра, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ га асосан шундай $\delta > 0$ сон то-пиладики, аргумент x нинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгизликларни қано-атлантирувчи қийматларida

$$|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгизлик ўринли бўлади. Хусусан, ушбу

$$0 < |x' - a| < \delta \Rightarrow |f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$0 < |x'' - a| < \delta \Rightarrow |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

муносабатлар ўринли. Бундан

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \varepsilon$$

тенгизликнинг ўринли бўлиши келиб чиқади. Бу эса $f(x)$ функция учун a нүкта Коши шарти бажарилишини кўрсатади.

Етарлилиги. $f(x)$ функция учун a нүкта Коши шарти ба-жарилсан, яъни $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон то-пиладики, x нинг $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ тенгизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' , x'' қийматларида $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ тенгизлик ўринли. Бу ҳолда $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да чекли лимитга эга бўлишини кўрсатамиз:

a нүкта X тўпламнинг лимит нүктаси. Шунинг учун X тўпламнинг нүкталаридан $\{x_n\}$ ($x_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$) кетма-кетлик тузиш мумкинки, $\lim x_n = a$ бўлади. Кетма-кетлик лимити таърифига кў-

ра, юқорида олинган $\delta > 0$ сон учун шундай $n_0 \in N$ сон топилади-
ки, барча $n > n_0$ лар учун $0 < |x_n - a| < \delta$ ва $0 < |x_{n+m} - a| < \delta$
($m = 1, 2, \dots$) тенгсизликлар үринли бўлади. Бу тенгсизликлар-
нинг бажарилишидан эса, шартга кўра

$$|f(x_{n+m}) - f(x_n)| < \varepsilon$$

бўлади. Демак, $\{f(x_n)\}$ — фундаментал кетма-кетлик. У яқинлашув-
чи. Биз $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик лимитини b билан белгилайлик, яъни
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$. Энди X тўпламнинг нуқталаридан тузилган ва a га ин-
тилевчи ихтиёрий $\{x'_n\}$ кетма-кетлик $x'_n \rightarrow a$, $x'_n \neq a$, ($n = 1, 2, \dots$)
олинганда ҳам $f(x)$ функция қийматларидан тузилган мос $\{f(x'_n)\}$ кет-
ма-кетлик ҳам ўша b га интилишини кўрсатамиз.

Фараз қиласлий, $x'_n \rightarrow a$ ($x'_n \neq a$, $n = 1, 2, 3, \dots$) да $f(x'_n) \rightarrow$
 $\rightarrow b'$ бўлсанн. $\{x_n\}$ ва $\{x'_n\}$ кетма-кетлик ҳадларидан ушбу

$$x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n, \dots$$

кетма-кетликни тузайлик. Равшанки, бу кетма-кетлик a га интила-
ди. У ҳолда

$$f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \dots, f(x_n), f(x'_n), \dots,$$

кетма-кетлик фундаментал бўлиб, чекли лимитга эга. Бу лимитни
 b^* билан белгилайлик. Агар $\{f(x_n)\}$ ва $\{f(x'_n)\}$ кетма-кетликларнинг
ҳар бири (4.7) кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетликлари эканини
эътиборга олсак, у ҳолда $f(x'_n) \rightarrow b^*$, $f(x'_n) \rightarrow b^*$ бўлишини топамиз.

Демак,

$$b^* = b = b'.$$

Шундай қилиб, $f(x)$ функция учун a нуқтада Коши шарти бажа-
рилишидан X тўплам нуқталаридан тузилган ва a га интилевчи ҳар
қандай $\{x_n\}$ ($x_n \neq a$, $n = 1, 2, 3, \dots$) кетма-кетлик олинганда ҳам
мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик битта соига интилишини топдик. Бу эса
функция лимитининг Гейне таърифига кўра $f(x)$ функция a нуқтада
чекли лимитга эга бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Эслатма. Коши шарти ва Коши теоремаси $x \rightarrow a + 0$, $x \rightarrow a -$
 $- 0$; $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ бўлган ҳолларда ҳам юқоридаги-
га ўхшаш ифодаланади ва исбот этилади.

7- §. Чексиз катта ва чексиз кичик функциялар

Бизга X тўплам берилган бўлиб, a унинг лимит нуқтаси бўлсанн.
Бу тўпламда $\alpha(x)$, $\beta(x)$ функциялар аниқланган.

4.17-таъриф Агар $x \rightarrow a$ да $\alpha(x)$ функцияининг лимити нолга
тeng, яъни

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$$

бўлса, $\alpha(x)$ функция a нуқтада (ёки $x \rightarrow a$ да) чексиз кичик функция деб аталади.

Мисол. $f(x) = \sin x$ функция $x \rightarrow 0$ да чексиз кичик, чунки $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

Агар X тўпламда аниқланган $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да чекли b лимитга эга бўлса (яъни $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$), у ҳолда $\alpha(x) = f(x) - b$ функция $x \rightarrow a$ да чексиз кичик функция бўлади. Ҳақиқатан,

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - b] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - b = 0.$$

Демак, бу ҳолда $f(x)$ функцияни $x \rightarrow a$ да чексиз кичик бўлган $\alpha(x)$ ёрдамида қўйидаги

$$f(x) = b + \alpha(x)$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

4.18- таъриф. Агар $x \rightarrow a$ да $\beta(x)$ функцияниг лимити, ∞ , яъни

$$\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = \infty$$

бўлса, $\beta(x)$ функция $x \rightarrow a$ да чексиз катта функция деб аталади.

Мисол. $f(x) = \frac{1}{x}$ функция $x \rightarrow 0$ да чексиз катта функция бўлади.

Чексиз кичик ҳамда чексиз катта функциялар ҳам З-бобда ўрганилган чексиз кичик ва чексиз катта кетма-кетликларнинг хоссаларига ўхшаши хоссаларга эга. Қўйида биз шу хоссаларни келтирамиз.

1°. Чекли сондаги чексиз кичик функциялар иғиндиси ва кўпайтмаси яна чексиз кичик функция бўлади.

2°. Чегараланган функцияниг чексиз кичик функция билан кўпайтмаси чексиз кичик функция бўлади.

3°. Агар $\alpha(x)$ ($\alpha(x) \neq 0$) чексиз кичик функция бўлса, $\frac{1}{\alpha(x)}$ чексиз катта функция бўлади.

4°. Агар $\beta(x)$ чексиз катта функция бўлса, $\frac{1}{\beta(x)}$ чексиз кичик функция бўлади.

Бу хоссаларнинг исботи бевосита 3- бобнинг 4- ва 5- § ларидағи хоссалардан ҳамда функция лимитининг таърифларидан келиб чиқади.

8- §. Функцияларни таққослаш

X тўпламда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар аниқланган бўлсин. Бирор a нуқтанинг $U_\delta(a) \subset X$ атрофида $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларни таққослаш масаласини қараймиз.

1. «О», «о», «~» белгилар.

4.19- таъриф. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун шундай ўзгармас $\delta > 0$ ва $C > 0$ сонлар топилсанки, барча $x \in U_\delta(a)$ лар учун

$$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)| \quad (4.8)$$

тенгсизлик бажарылса, у ҳолда $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция $g(x)$ функцияга нисбатан чегараланған дейилади ва $f(x) = O(g(x))$ каби белгиланади ($f(x) = O(g(x))$) ни $f(x)$ функция баробар катта $O(g(x))$ функциядан деб ўқилади.

Шуни таъкидлаш лозимки, бу таърифдаги $x \rightarrow a$ белги қарала ётган (4.8) муносабатнинг a нүктасининг бирор атрофида ўринли бўлишини ифодалаб, $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг $x \rightarrow a$ даги лимитининг мавжуд бўлиши ёки бўлмаслигига боғлиқ эмас.

Масалан, $x \rightarrow 0$ да $x^2 = O(x)$ бўлади. Ҳакиқатан, ихтиёрий $x \in U_1(0)$ лар учун, яъни $x \in (-1, +1)$ лар учун, $|x^2| \leq |x|$ тенгсизлик бажарилади.

Агар $f(x)$ функция a нүктасининг бирор атрофида чегараланган бўлса, уни $x \rightarrow a$ да $f(x) = O(1)$ каби ёзилади. Масалан, $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{x}}$ функция $x = 0$ нүкта атрофида чегараланган (чунки $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{x}} = e$). Шунинг учун $(1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{x}} = O(1)$ деб ёзиш мумкин.

4.20- таъриф. Агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун $f(x) = O(g(x))$ ва $g(x) = O(f(x))$ муносабатлар ўринли бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар бир хил тартибли функциялар деб аталади.

Масалан, $f(x) = x$, $g(x) = 2x + x \sin x$ бўлсин. Равшанки, $x \rightarrow 0$ да $|x| \leq |2x + x \cdot \sin x| \leq 3|x|$

тенгсизликлар ўринли. Бу эса

$$x = O(2x + x \cdot \sin x), \quad 2x + x \cdot \sin x = O(x)$$

бўлишини билдиради. Демак, $x \rightarrow 0$ да $f(x) = x$, $g(x) = 2x + x \sin x$ функциялар бир хил тартибли функциялар бўлади.

Юқорида келтирилган таърифлардан, $x \rightarrow a$ да

$$O(O(f(x))) = O(f(x)),$$

$$O(f(x)) \cdot O(g(x)) = O(f(x) \cdot g(x))$$

каби муносабатларнинг ўринли бўлишини кўрсатиш қийин эмас.

4.7- теорема. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ ($x \neq a$ да $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$) функциялар учун ушибу

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

лимит мавжуд ва $0 < c < \infty$ бўлса, $x \rightarrow a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ бир хил тартибли функциялар бўлади.

Исбот. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

лимит мавжуд ва $0 < c < \infty$ бўлсин. У ҳолда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = c + \gamma_1(x), \quad \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{c} + \gamma_2(x)$$

бўлиб, бунда $\gamma_1(x)$ ва $\gamma_2(x)$ функциялар чексиз кичик функциялар.

ни ифодалайди. $\lim_{x \rightarrow a} v_1(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} v_2(x) = 0$, демак, a нүктанинг етарли кичик атрофи $U_\delta(a)$ да $v_1(x)$ ва $v_2(x)$ функциялар чегараланган бўлади. У ҳолда барча $x \in U_\delta(a)$ лар учун

$$|v_1(x)| < k, |v_2(x)| < k \quad (k = \text{const})$$

тенгсизликлар ўринли бўлиб, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ва $\frac{g(x)}{f(x)}$ функциялар учун

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leqslant |c| + k, \quad \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| \leqslant \frac{1}{|c|} + k$$

тенгсизликларга келамиз. Демак,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqslant (|c| + k) \cdot |g(x)|, \\ |g(x)| &\leqslant \left(\frac{1}{|c|} + k \right) \cdot |f(x)|. \end{aligned}$$

Бу эса

$$f(x) = O(g(x)); \quad g(x) = O(f(x))$$

эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

4.21- таъриф. Агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар ($x \neq a$ да $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$) учун

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

ески, бари бир

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \Big)$$

бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ лар эквивалент функциялар деб аталади ва

$$f(x) \sim g(x)$$

кабин белгиланади.

Масалан $x \rightarrow a$ да $f(x) = x, g(x) = \sin x$ функциялар эквивалент функциялар: $x \sim \sin x$.

Агар $x \rightarrow a$ да $f(x) \sim g(x), g(x) \sim s(x)$ бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a$ да $f(x) \sim s(x)$ бўлади. Дарҳақиқат, $x \rightarrow a$ да $f(x) \sim g(x)$, бундан $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, $x \rightarrow a$ да $g(x) \sim s(x)$, бундан $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{s(x)} = 1$ келиб чиқади, улардан

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{s(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{s(x)} = 1$$

лимитга эга бўламиз. Демак, $f(x) \sim s(x)$.

4. 22- таъриф. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$$

тенглик ўринли бўлиб, бунда $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a$ да

- $f(x)$ функция $g(x)$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик функция деб аталади ва

$$f(x) = o(g(x))$$

каби белгиланади.

Агар $f(x)$ функция a нуқтанинг бирор атрофида чексиз кичик функция (яъни $x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow 0$) бўлса, уни $f(x) = o(1)$ каби ёзилади.

Равшанки, агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун $f(x) = o(g(x))$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бу функциялар учун $f(x) = O(g(x))$ тенглик ҳам ўринли бўлади.

Юқорида келтирилган таърифлардан фойдаланиб «катта 0» ва «кичик 0» орасидаги боғланышларни ифодалайдиган қўйидаги муносабатларни келтириб чиқариш мумкин:

$$O(o(f(x))) = o(O(f(x))) = o(f(x)),$$

$$O(f(x)) \cdot o(g(x)) = o((f(x) \cdot g(x))),$$

$$O(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x)).$$

«Катта 0» ва «кичик 0» иштирок этган тенгликларнинг оддий маънодаги тенгликлар эмаслигини таъкидлаймиз.

Масалан, $x \rightarrow a$ да $f_1(x) = o(g(x))$, $f_2(x) = o(g(x))$ муносабатлардан $f_1(x) = f_2(x)$ деб хulosha чиқариш хото бўлади.

Энди «кичик 0» ва эквивалентлик \sim белгилари билан боғланган функциялар орасидаги муносабатларни ифодалайдиган теоремани келтирамиз.

4.8- теорема. $x \rightarrow a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар ($x \neq a$ да $f(x) \neq 0$; $g(x) \neq 0$) эквивалент ($f(x) \sim g(x)$) бўлиши учун

$$g(x) - f(x) = o(g(x))$$

ёки

$$g(x) - f(x) = o(f(x))$$

тенгликтининг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $x \rightarrow a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар эквивалент бўлсин: $f(x) \sim g(x)$. У ҳолда таърифга $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ бўлиб, ундан

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(1 - \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - f(x)}{g(x)} = 0$$

келиб чиқади. Демак, $g(x) - f(x) = o(g(x))$.

Етарлилиги. $x \rightarrow a$ да $g(x) - f(x) = o(g(x))$ бўлсин. У ҳолда $x \rightarrow a$ да

$$1 - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) - f(x)}{g(x)} = \frac{o(g(x))}{g(x)}$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(1 - \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0$$

келиб чиқади. Бу эса $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, яғни $f(x) \sim g(x)$ эканини күрсатади. Теорема исбот бўлди.

4.2-н атижа. Агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = c \neq 0, c = \text{const}$$

бўлса, у ҳолда ушбу

$$g(x) \sim c \cdot f(x)$$

ва

$$g(x) = c \cdot f(x) + o(f(x))$$

муносабатлар ўринли бўлади.

Исбот. Шартга кўра

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = c \neq 0, c = \text{const},$$

бундан

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{c \cdot f(x)} = 1$$

келиб чиқади. Демак, $g(x) \sim c \cdot f(x)$.

Юқорида исбот этилган 4.8-теоремага асосан куйидагича

$$c \cdot f(x) - g(x) = o(c \cdot f(x)) = o(f(x))$$

ёзиш мумкин, ундан

$$g(x) = c \cdot f(x) + o(f(x))$$

екани келиб чиқади.

Энди функцияларнинг эквивалентлигига асосланган ҳамда функцияларнинг лимитини ҳисоблашда тез-тез фойдаланиб туриладиган теоремани келтирамиз.

4.9-теорема. Агар $x \rightarrow a$ да $f(x) \sim f_1(x)$ ва $g(x) \sim g_1(x)$ бўлиб, ушбу

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

лимит маъжуд бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ лимит ҳам маъжуд ва

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Шартга кўра $x \rightarrow a$ да $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$. У ҳолда ушбу

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + o(f_1(x)), \\ g(x) &= g_1(x) + o(g_1(x)) \end{aligned}$$

тенгликлар ўринли бўлади. Натижада

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{g_1(x) + o(g_1(x))} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \left[1 + \frac{o(f_1(x))}{f_1(x)} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{1 + \frac{o(f_1(x))}{f_1(x)}}{1 + \frac{o(g_1(x))}{g_1(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Функцияларни уларга эквивалент функциялар билан алмаштириш натижасида кўпгина функцияларнинг лимитлари содда ҳисобланади.

Мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\arcsin 2x - \sin^2 x}{x^2 + \ln(1 + 3x)}$$

лимитни ҳисобланг. Бунинг учун $x \rightarrow 0$ да қуйидаги

$$\arcsin 2x = 2x + o(2x) = 2x + o(x),$$

$$\sin^2 x = x^2 + o(x^2) = x^2 + o(x),$$

$$x^2 = o(x)$$

$$\ln(1 + 3x) = 3x + o(x)$$

муносабатларни эътиборга олиб топамиз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - \sin^2 x}{x^2 + \ln(1 + 3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - x^2 + o(x)}{3x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + x}{3} = \frac{2}{3}.$$

4.5-эслатма. Биз 1-пунктда «О», «о» ва «~» белгилар билан боғлашган функцияларни ўргандик. Бунда a чекли деб қаралди. $a = \infty$ бўлган ҳолда ҳам, юқоридагидек тушунча ва теоремалар таърифланади ва ўрганилади.

2. Чексиз кичик ҳамда чексиз катта функцияларни таққослаш. Биз ушбу пунктда юқорида келтирилган функциялар орасидаги тартиб ва эквивалентлик масалаларини хусусий ҳолда — чексиз кичик ҳамда чексиз катта функцияларга нисбатан қараб ўтамиш.

X тўплам берилган бўлиб, a унинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $\alpha(x)$ ҳамда $\beta(x)$ функциялар аниқланган ва улар чексиз кичик функциялар бўлсин:

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0.$$

Агар $x \rightarrow a$ да

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \text{ ва } \beta(x) = o(\alpha(x))$$

бўлса, $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ функциялар бир хил тартибли чексиз кичик функциялар дейилади.

Масалан, $x \rightarrow 0$ да $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = \sin x$ чексиз кичик функциялар бир хил тартиблидир.

Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$$

тенглик ўринли бўлиб, бунда

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция чексиз кичик $g(x)$ функцияга нисбатан юқори тартибли чексиз кичик функция деб аталади. Бу ҳолда ҳам $f(x) = o(g(x))$ каби белгиланади.

Масалан, $x \rightarrow 0$ да $1 - \cos x = o(x)$ бўлади, чунки

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2}}{x} = 0.$$

Агар $x \rightarrow a$ да $\alpha(x)$ ни ушбу

$$\alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x))$$

кўринишда ифодалани мумкин бўлса, у ҳолда $\beta(x)$. функция чексиз кичик $\alpha(x)$ функцияниң бош қисми деб ата лади.

Масалан, 1) $x \rightarrow 0$ да чексиз кичик $\alpha(x) = \sin x$ функцияниң бош қисми $\beta(x) = x$ бўлади, чунки $x \rightarrow 0$ да $\sin x = x + o(x)$.

2) $x \rightarrow 0$ да чексиз кичик $\alpha(x) = x + o(x)$ функция

$$\alpha(x) = x + o(x), \alpha(x) = x + x^2 + o((x + x^2))$$

кўринишларда ифодаланиб, биринчи ҳолда $\alpha(x)$ нинг бош қисми $\beta(x) = x$, иккинчи ҳолда эса $\alpha(x)$ нинг бош қисми $\beta(x) = x + x^2$ бўлишини топамиз.

Одатда, чексиз кичик $\alpha(x)$ функцияниң бош қисми $\beta(x)$ сифатида $\alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x))$ ($x \rightarrow a$) муносабатни тъминловчи чексиз кичик $\beta(x)$ функцияларни г энг соддаси олинади.

Ушбу пунктда келтирилган тушунчалар чексиз катта функцияларга нисбатан ҳам юқоридагидек таърифланади.

5-бөб

ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

Функциянинг узлуксизлиги математик анализ курсининг муҳим тушунчаларидан бўлиб, у функция лимити тушунчаси билан бевосита боғланган.

$X \subset R$ тўпламда $f(x)$ функция аниқланган, $a \in X$ эса X тўпламнинг лимити нуқтаси бўлсин. $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функциянинг лимити тўғрисида қўйидагиларни айтиш мумкин:

1º. $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функциянинг лимити мавжуд, чекли ва

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a);$$

2º. $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функциянинг лимити мавжуд, чекли ва

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq f(a);$$

3º. $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функциянинг лимити мавжуд ва

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty;$$

4º. $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функциянинг лимити мавжуд эмас. Агар бирор $f(x)$ функция учун 1º ҳол ўринли бўлса, бу функция муҳим функциялардан ҳисобланади ва қатор хоссаларга эга бўлади. Қўйида бундай функциялар узлуксиз функция деб аталган.

Биз ушбу бобда асосан узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссаларини ўрганимиз.

1-§. Функция узлуксизлиги таърифлари

$X \subset R$ тўпламда $f(x)$ аниқланган бўлиб, $a \in X$ эса X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

5.1- таъриф. Агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция лимити мавжуд ва у $f(a)$ га тенг, яъни

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \tag{5.1}$$

бўлса, $f(x)$ функция a нуқтада узлуксиз деб аталади.

Мисоллар

1. $f(x) = x^2 + x + 1$ функция $\forall a \in R$ нуқтада узлуксиз, чунки $x \rightarrow a$ да

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + x + 1) = a^2 + a + 1 = f(a).$$

2. $f(x) = (\operatorname{sign} x)^2$ функцияни қарайлил. Равшанки, бу функция

$$f(x) = (\operatorname{sign} x)^2 = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \neq 0, \\ 0, & \text{агар } x = 0 \end{cases}$$

күринишида бўлиб, $\forall a \in R$ учун

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$$

бўлади. Аммо $f(0) = 0$ бўлгани учун

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0).$$

Демак, $f(x) = (\operatorname{sign} x)^2$ функция $a = 0$ нуқтада узлуксиз эмас, бошқа ҳамма $a \neq 0$ нуқталарда эса узлуксиздир.

Биз 4-бобда функция лимитининг бир-бираига эквивалент бўлган Гейне ва Коши таърифларини келтирган эдик. Бу таърифлардан фойдаланиб, функциянинг a нуқтада узлуксизлигини қўйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

5.2-таъриф (Гейнене). Агар $X = \{x\}$ тўпламнинг элементларидан тузилган ва a га интиувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам функция қийматларидан тузилган мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт $f(a)$ га интилса, $f(x)$ функция a нуқтада узлуксиз деб аталади.

5.3-таъриф (Коши). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсанки, функция аргументи x нинг $|x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция a нуқтада узлуксиз деб аталади.

Мисол. Ушбу $f(x) = \sqrt{x+4}$ функциянинг $x = 5$ нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатинг.

$\forall \varepsilon > 0$ сон олиб, бу ε сонга кўра $\delta > 0$ сонни $\delta = 3\varepsilon$ бўлсин деб қаралса, у ҳолда $|x - 5| < \delta$ бўлганда

$$|f(x) - f(5)| = |\sqrt{x+4} - 3| = \frac{|x - 5|}{\sqrt{x+4} + 3} < \frac{|x - 5|}{3} < \frac{\delta}{3} = \varepsilon$$

бўлади. Бу эса юқоридаги таърифга кўра, $f(x) = \sqrt{x+4}$ функциянинг $x = 5$ нуқтада узлуксиз бўлишини билдиради.

Коши таърифидаги $|x - a| < \delta$ ва $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ тенгсизликлар мос равища

$$x \in U_\delta(a) \text{ ва } f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$$

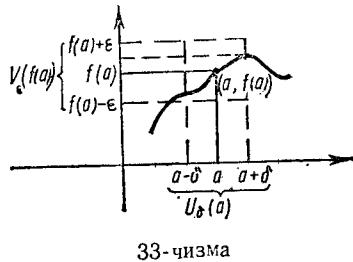
кўринишида ҳам ёзилиши мумкин эканлигини ҳисобга олсан, атроф тушунчаси ёрдамида функцияниг узлуксизлигини қўйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

5.4-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсанки, аргумент x нинг барча $x \in U_\delta(a)$ қийматларида $f(x)$ функцияни

циянинг мос қийматлари учун $f(x) \in U_\epsilon(f(a))$ бўлса, $f(x)$ функция a нуқтада узлуксиз деб аталади (33-чи ма).

Мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ -x, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса} \end{cases}$$



33-чи ма

функция $x = 0$ нуқтада узлуксиз. Xақиқатан, $\forall \epsilon > 0$ сон учун $\delta > 0$ сонни $\delta = \epsilon$ деб олинса, у ҳолда $\forall x \in U_\delta(0)$ лар учун $f(x) \in U_\epsilon(0)$ келиб чиқади.

Равшанки, (5.1) ўринли бўлса, ушбу $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$ ли-
мит ҳам ўринли бўлади. Одатда $x - a$ айрма аргумент орттири-
маси, $f(x) - f(a)$ айрма эса функцияниң a нуқтадаги орттири-
маси дейилади. Улар мос равища Δx ва Δy (ёки Δf) каби белгиланади:

$$\Delta x = x - a, \quad \Delta y = \Delta f = f(x) - f(a).$$

Бу тенгликлардан фойдаланиб ёзамиш:

$$x = a + \Delta x, \quad \Delta y = \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Натижада (5.1) муносабат

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

кўринишга эга бўлади. Демак, $f(x)$ функцияниң a нуқтада узлук-
сизлиги, бу нуқтада аргументнинг чексиз кичик орттириласига функ-
цияниң ҳам чексиз кичик орттиримаси мос келиши сифатида ҳам
таърифланиши мумкин.

Мисол! $y = \sin x$ ва $y = \cos x$ функцияларнинг $\forall a \in R$ нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатамиз. $\forall a \in R$ нуқта олиб, унга Δx орттирима берайлик. Натижада $y = \sin x$ функция ҳам ушбу

$$\Delta y = \sin(a + \Delta x) - \sin a$$

орттиримага эга бўлиб, $-\pi < \Delta x < \pi$ бўлганда

$$|\Delta y| = |\sin(a + \Delta x) - \sin a| = \left| 2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(a + \frac{\Delta x}{2}\right) \right| \leqslant 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|$$

тенгсизликка эга бўламиш. Бундан $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ бўлиши келиб чиқади. Демак, $y = \sin x$ функция $a \in R$ нуқтада узлуксиз. Худди шунга ўхшаш $y = \cos x$ функцияниң ҳам $\forall a \in R$ да узлуксиз бўлиши кўрсатилади.

Энди функцияниң a нуқтада бир томондан (ўнгдан ёки чапдан) узлуксиз бўлиши таърифларини келтирамиз.

$X \subset R$ тўпламда $f(x)$ функция аниқланган бўлиб, $a \in X$ эса X тўпламнинг ўнг (чап) лимит нуқтаси бўлсин.

5.5-тәъриф. Агар $x \rightarrow a + 0$ ($x \rightarrow a - 0$) да $f(x)$ функцияниң ўнг (чап) лимити мавжуд вай $f(a)$ га тенг, яъни

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a) \quad (\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)) \quad (5.2)$$

бўлса, $f(x)$ функция a нуқтада ўнгдан (чапдан) узлуксиз дейлади.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + a^{\frac{1}{x}}}, & \text{агар } x \neq 0, \\ 0, & \text{агар } x = 0 \end{cases} \quad (a > 1)$$

функцияни қарайлик. Бу функция учун

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + a^{\frac{1}{x}}} = 0 = f(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1 + a^{\frac{1}{x}}} = 1$$

бўлганлиги сабабли, берилган функция $x = 0$ нуқтада ўнгдан узлуксиз бўлиб, чапдан эса узлуксиз эмас. Функцияниң ўнг (чап) лимитларининг Гейне ва Коши таърифларидан (4-боб, 3-§) фойдаланиб, унинг a нуқтада ўнгдан (чапдан) узлуксизлигининг Гейне ва Коши таърифларини келтириш қийин эмас. Биз ўқувчига, машқ тақиасида, бундай таърифларни баён этишини тавсия этамиз.

Юқорида келтирилган таърифлардан кўринадики, агар $f(x)$ функция a нуқтада ҳам ўнгдан, ҳам чапдан бир вақтда узлуксиз бўлса, функция шу нуқтада узлуксиз бўлади.

5.6-тәъриф. Агар $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, функция X тўпламда узлуксиз деб аталади.

Масалан, $f(x)$ функция (a, b) интервалнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, функция шу интервалда узлуксиз деб аталади.

$f(x)$ функция (a, b) интервалнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлиб, a нуқтада ўнгдан, b нуқтада эса чапдан узлуксиз бўлса, функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлади деб келишиб оламиз.

Мисол. Ушбу $f(x) = \sqrt[3]{x}$ функцияниң R тўпламда узлуксиз бўлишини кўрсатинг.

Аввал нолдан фарқли $\forall a \in R$ нуқтада берилган функцияниң узлуксизлигини кўрсатамиз. $\forall \epsilon > 0$ сон олиб, бу сонга кўра $\delta > 0$ сонни $\delta = \frac{3}{4} \sqrt[3]{a^2} \cdot \epsilon$ деб қарайлик. Натижада $|x - a| < \delta$ бўлганда

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}| = \frac{|x - a|}{|\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}|} = \\ &= \frac{|x - a|}{\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{a}\right)^2 + \frac{3}{4} \sqrt[3]{a^2}} \leqslant \frac{|x - a|}{\frac{3}{4} \sqrt[3]{a^2}} < \epsilon \end{aligned}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Демак, функция $\forall a \in R$ ($a \neq 0$) нүктада узлуксиз.

Энди $a = 0$ бўлган ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ сонга $\delta > 0$ сонни $\delta = \varepsilon^3$ деб олиб, $|x - a| = |x| < \delta$ бўлганда

$$|f(x) - f(0)| = |\sqrt[3]{x}| < \sqrt[3]{\delta} = \varepsilon$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу эса берилган функцияниң $a = 0$ нүктада узлуксиз бўлишини ифодалайди. Демак, берилган функция R тўпламда узлуксиз.

2- §. Функцияниң узилиши. Узилишнинг турлари

Мазкур бобнинг бошида $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функцияниң лимити учун 4 ҳол юз беришини таъкидлаб, 1-§ да 1° ҳолни ўргандик. Бунда биз узлуксиз функцияларга эга бўлдик. Энди $2^\circ - 4^\circ$ ҳолларни ҳам ўрганамиз.

$f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда аниқланган бўлиб, $a \in X$ нүкта X тўпламнинг лимит нүктаси бўлсан.

5.7-тадариф. Агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функцияниң лимити мавжуд, чекли бўлиб, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq f(a)$ (2° ҳол) ёки $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (3° ҳол) бўлса ёки функцияниң лимити мавжуд бўлмаса (4° ҳол), унда $f(x)$ функция a нүктада узилишига эга дейилади.

Функцияниң a нүктада узилишга эга бўладиган ҳодларини алоҳида қараб ўтамиз.

1° . $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функцияниң лимити мавжуд, чекли бўлиб, у $f(a)$ га тенг бўлмасин: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq f(a)$ (b — чекли сон). Равшанки, бу ҳолда функцияниң a нүктарадаги ўнг лимити $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ ва чап лимити $f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ лар мавжуд бўлиб,

$$f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$$

муносабат ўринли бўлади.

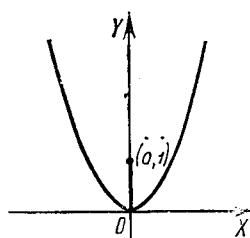
Одатда функцияниң a нүктарадаги бундай узилиши **бартараф қилиши мумкин бўлган узилиши** дейилади.

Бу ҳолда $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция лимитини функцияниң $x = a$ нүктарадаги қиймати деб олиш билан $f(x)$ функцияниң a нүктарадаги узилиши бартараф қилинади.

Масалан, ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция учун $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(0)$ муносабат ўринли. Демак, бу функция $x = 0$ нүктада бартараф қилиш мумкин бўлган узилишга эга (34-чизма).



34- чизма

Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция учун $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$. Агар бу функциянинг $x = 0$ нуқтадаги қийматини $f(0) = 0$ деб олинса, функция бу нуқтада узлуксиз бўлиб қолади.

2°. Энди $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функцияниң лимити мавжуд эмас дейлик. Бунда функцияниң a нуқтадаги бир томонли лимитлариға нисбатан учта ҳол бўлади:

а) $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функцияниң ўнг ва чап лимитлари мавжуд ва чекли бўлиб, улар бир-бирига тенг эмас:

$$f(a - 0) \neq f(a + 0).$$

Функцияниң a нуқтадаги бундай узилиши *биринчи тур узилиши* ва $f(a + 0) - f(a - 0)$ айрма унинг a нуқтадаги *сакраши* дейилади.

Масалан, 1) ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция учун

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 1.$$

Демак, берилган функция $x = 0$ нуқтада биринчи тур узилишга эга. Унинг 0 нуқтадаги сакраши 1 га тенг (35- чизма).

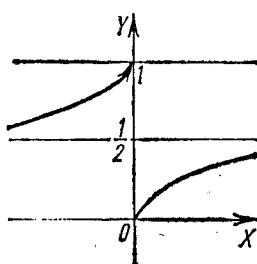
2) қўйидаги

$$f(x) = [x]$$

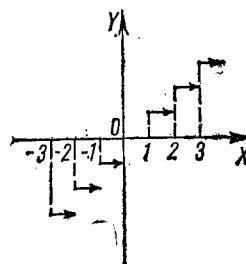
функция $x = p$ (p — бутун сон) нуқтада биринчи тур узилишга эга, чунки (36- чизма):

$$\lim_{x \rightarrow p-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow p-0} [x] = p - 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow p+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow p+0} [x] = p.$$



35- чизма



36- чизма

б) $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функцияниң ўнг ва чап лимитларидан ҳеч бўлмаганда бири мавжуд эмас.

Функцияниң a нуқтадаги бундай узилиши иккинчи тур узилиши дейилади.

Масалан, 1) ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x > 0, \\ -x, & \text{агар } x \leq 0 \end{cases}$$

функция $x = 0$ нуқтада иккинчи тур узилишга эга, чунки $x \rightarrow +0$ да $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ функцияниң лимити мавжуд эмас.

2) Дирихлъ функцияси

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ — рационал бўлса} \end{cases}$$

R тўнламининг ҳар бир a нуқтасида иккинчи тур узилишга эга, чунки $x \rightarrow a$ да $\chi(x)$ функцияниң ўнг лимити ҳам, чап лимити ҳам мавжуд эмас.

в) $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функцияниң ўнг ва чап лимитларидан бири чексиз ёки ўнг ва чап лимитлар турли ишорали чексиз.

Функцияниң a нуқтадаги бундай узилиши ҳам иккинчи тур узилиши дейилади.

Масалан, 1) ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{агар } x > 0, \text{ бўлса,} \\ x, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция учун

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0$$

бўлиб, бу функция $x = 0$ нуқтада иккинчи тур узилишга эга бўлади (37-чизма).

2) Ушбу $f(x) = \operatorname{tg} x$ функцияниң $x = \frac{\pi}{2}$ нуқтадаги ўнг ва чап лимитлари

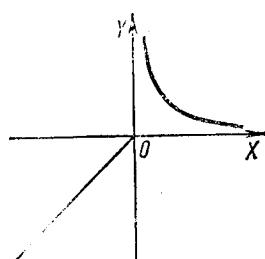
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} \operatorname{tg} x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \operatorname{tg} x = +\infty$$

бўлгди. Демак, $f(x) = \operatorname{tg} x$ функция $x = \frac{\pi}{2}$

нуқтада иккинчи тур узилишга эга.

3°. Энди $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функцияниң лимити чексиз бўлсан. Бу ҳолда функцияниң a нуқтадаги ўнг ва чап лимитлари ҳам чексиз бўлади.

Функцияниң a нуқтадаги бундай узилиши ҳам иккинчи тур узилиши дейилади.



37- чизма

Масалан, ушбу

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0$$

Функцияниң $x \rightarrow 0$ даги лимити $+\infty$ дир (бу ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Демак, берилген функция $x = 0$ нүктада иккинчи тур узилишга эга. 5.1-әслатма. Агар $a \in X$ нүкта X түпламнинг бир томонли (яғни ўнг ёки чап) лимит нүктаси бўлса, юқоридагидек функцияниң бу нүктада узилиши (ўнгдан ёки чапдан узилиши) таърифи келтирилади.

5.2-әслатма. $f(x)$ функция X түпламда аниқланган, узлуксиз бўлиб, $a \in X$ нүкта X түпламнинг лимит нүктаси бўлсин. Бу ҳолда функцияниң a нүктадаги қиймати аниқланмаган бўлса ҳам $x \rightarrow a$ да $f(x)$ нинг лимити мавжуд ва чекли, яъни

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (b — чекли сон)$$

бўлиши мумкин. Бу лимит муносабатдан фойдаланиб $X \cup \{a\}$ түпламда узлуксиз бўлган функция тушиб мумкин. Ҳақиқатан, агар

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{агар } x \in X \text{ бўлса,} \\ b, & \text{агар } x = a \text{ бўлса} \end{cases}$$

деб олинса, натижада $X \cup \{a\}$ түпламда узлуксиз $f^*(x)$ функция ҳосил бўлади.

Масалан $y = \frac{\sin x}{x}$ функция $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ да аниқланган ва узлуксиз. Маълумки,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Бу муносабатдан фойдаланиб тузилган ушбу

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{агар } x \neq 0, \\ 1, & \text{агар } x = 0 \end{cases}$$

функция R да узлуксиз бўлади.

3-§. Узлуксиз функциялар устида арифметик амаллар

Энди узлуксиз функцияларнинг йигиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбатини узлуксизликка текширамиз.

5.1-теорема. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $X \subset R$ түпламда аниқланган бўлиб, уларнинг ҳар бири $a \in X$ нүктада узлуксиз бўлса,

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0, \quad \forall x \in X)$$

функциялар ҳам шу нүктада узлуксиз бўлади.

Исбот. Бу теореманинг исботи лимитга эга бўлган функциялар устида əрифметик амаллар ҳақидаги теоремалардан бевосита келиб чиқади. Масалан, иккита узлуксиз функция кўпайтмаси яна узлуксиз функция бўлишини кўрсатайлик. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар a нуқтада узлуксиз бўлсин:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

У ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) \cdot g(a)$$

бўлиб, ундан $f(x) \cdot g(x)$ функциянинг a нуқтада узлуксиз бўлиши келиб чиқади.

5.3-эслатма. Иккита функция йигиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбати узлуксиз бўлишидан бу функцияларниң ҳар бирининг узлуксиз бўлиши келиб чиқавермайди.

Мисол. Қўйидаги $f(x) = x$ ва

$$g(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциялар кўпайтмасидан тузилган $\varphi(x) = x \cdot \cos \frac{1}{x}$ функция R да узлуксиз бўлган ҳолда $g(x)$ функция $x = 0$ нуқтада узилишга эга.

Юқорида келтирилган теорема қўшилувчилар ҳамда ғўяловчиликони ихтиёрий чекли бўлган ҳолда ҳам ўринли бўлишини кўрсатиш қийин эмас.

Энди теореманинг қўлланилишига мисоллар келтирайлик.

Мисоллар

1. $y = ax^n$, $a = \text{const}$, $n \in N$ функция R да узлуксиз.

Равшанки, $f(x) = x$ функция R да узлуксиз. Агар берилган функцияни

$$y = a \cdot x^n = a \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ та}}$$

кўринишда ифодалаш мумкинлигини эътиборга олсак, 5.1-теоремага кўра $y = ax^n$ функциянинг R да узлуксизлиги келиб чиқади.

Келтирилган мисол ва 5.1-теоремадан бутун ва каср рационал функциялар

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

$$Q(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}$$

($a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ — ўзгармас сонлар, $n \in N, m \in N$) ўз аниқланиш тўпламларида узлуксиз бўлиши келиб чиқади.

2. $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \operatorname{sec} x$, $y = \operatorname{cosec} x$ функциялар ўз аниқланыш соҳаларида узлуксиз. Ҳақиқатан, бу функциялар узлуксиз функцияларнинг нисбати орқали ифодаланади.

4- §. Мураккаб функциянинг узлуксизлиги

$y = f(x)$ функция X тўпламда, $z = \varphi(y)$ функция эса Y тўпламда аниқланган бўлиб, улар ёрдамида $z = \varphi(f(x))$ мураккаб функция тузилган бўлсин (4-бобнииг 1-§ ига қараинг).

5.2-төрима. Агар $y = f(x)$ функция $a \in X$ нуқтада, $z = \varphi(y)$ функция эса a нуқтага мос келган $y_a = f(a)$ нуқтада узлуксиз бўлса, $z = \varphi(f(x))$ мураккаб функция a нуқтада узлуксиз бўлади.

Исбот. $y = f(x)$ функция $a \in X$ нуқтада, $z = \varphi(y)$ функция эс мос $y_a = f(a)$ нуқтада узлуксиз бўлсин. Функция узлуксизлиги таърифига кўра $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\sigma > 0$ сон топиладики, $|y - y_a| < \sigma$ тенгсизлик бажарилса, $|\varphi(y) - \varphi(y_a)| < \varepsilon$ тенгсизлик ҳам бажарилади. Шунингдек, олинган $\sigma > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $|x - a| < \delta$ тенгсизлик бажарилганда $|\varphi(f(x)) - \varphi(f(a))| < \varepsilon$ тенгсизлик ҳам бажарилади.

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $|x - a| < \delta$ тенгсизлик бажарилганда

$$|\varphi(f(x)) - \varphi(f(a))| < \varepsilon$$

тенгсизлик ҳам бажарилади. Бу эса $z = \varphi(f(x))$ функциянинг a нуқтада узлуксиз бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

5- §. Монотон функцияларнинг узлуксизлиги ва узилиши

Аввало монотон функциянинг узилиши ҳақида содда теоремани жеттирамиз.

$f(x)$ функция X оралиқда аниқланган бўлсин.

5.3-төрима. Агар $f(x)$ функция X оралиқда ўсувиши (камаювчи) бўлса, у фақат биринчи тур узилишга эга бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция X оралиқда ўсувиши бўлсин. X да шундай a нуқта олайликки,

$$X \cap (a - \delta, a) \neq \emptyset \quad (\delta > 0)$$

бўлсин. У ҳолда $\forall x \in X \cap (a - \delta, a)$ нуқтада $f(x) \leq f(a)$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, $f(x)$ функция $X \cap (a - \delta, a)$ тўпламда юқоридан чегараланган. Монентон функциянинг лимити ҳақидаги 4.4-теоремага асоссан, $f(a - 0) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ лимит мавжуд бўлиб, $f(a - 0) \leq f(a)$ тенгсизлик ўринли бўлади. Агар $f(a - 0) = f(a)$ бўлса, функция a нуқтада узлуксиз, $f(a - 0) < f(a)$ бўлса, функция шу нуқтада биринчи тур узилишга эга бўлади.

Худди шунга ўхшаш $f(x)$ функция X оралиқда камаювчи бўлган ҳолда ҳам теорема исботланади.

5.4-эслатма. Агар $f(x)$ функция X оралиқда монотон бўлса, у шу тўпламда оциб борса саноқли сондаги нуқталарда узилишга эга бўлиши мумкин.

Энди монотон функцияларнинг узлуксиз бўлиши ҳақидаги теоремани келтирамиз.

5.4-теорема. Агар $f(x)$ функция X оралиқда ўсуви (кама-ювчи) бўлиб, унинг қийматлари Y оралиқни туташ тўлдирса (яъни ҳар бир $y \in Y$ қийматни функция ҳеч бўлмагандан бир марта қабул этса), у ҳолда бу функция X да узлуксиз бўлади.

Исбот. Тескарисини фараз қиласайлик, яъни $f(x)$ функция теореманинг шартларини қаноатлантируса ҳам у бирор $a \in X$ нуқтада узилишга, масалан, чандан узилишга эга бўлсин. Равшанки, бу узилиш биринчи тур бўлади. Демак,

$$f(a - 0) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) < f(a).$$

Натижада

$$\begin{aligned} x < a \text{ бўлса, } f(x) &\leq f(a - 0), \\ x > a \text{ бўлса, } f(x) &\geq f(a) \end{aligned}$$

бўлиб, $f(x)$ функция $f(a - 0)$ ва $f(a)$ сонлар орасидаги қийматларни қабул қила олмайди. Бу эса $f(x)$ функциянинг қийматлари Y оралиқни туташ (бутунлай) тўлдириши шартига зиддир. Демак, функция a нуқтада узилишга эга бўла олмайди. Теорема исбот бўлди.

Энди бу теоремадан фойдаланиб баъзи бир функцияларнинг узлуксизлигини кўрсатамиз.

Мисоллар

1. $y = a^x$ ($a > 1$) R тўпламда ўсуви функция. Ҳар бир $y > 0$ да $x = \log_a y$ нинг мавжуд бўлишидан берилган функциянинг қийматлари $y = \{a^x : x \in R\} = (0, +\infty)$ оралиқни тўлдириши келиб чиқади. Демак, $y = a^x$ функция R да узлуксиз.

2. $y = \log_a x$ ($a > 1$). Бу функция $X = (0, +\infty)$ оралиқда ўсуви. Унинг қийматлари $Y = \{\log_a x : x \in (0, +\infty)\} = R$ ни тўлдиради, чунки ҳар бир $y \in R$ учун $x = a^y$ мавжуд. Демак, $y = \log_a x$ ($a > 1$) функция $(0, +\infty)$ да узлуксиз.

3. $y = x^\mu$ ($x > 0$) даражали функцияни қарайлик. Бу функцияни

$$y = x^\mu = a^\mu \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Агар $\mu \log_a x$ функция $(0, +\infty)$ да, a^μ функция эса R да узлуксиз эканини эътиборга олсак, у ҳолда мураккаб функциянинг узлуксизлиги ҳақидаги теоремага асосланиб $y = x^\mu$ функциянинг $(0, +\infty)$ оралиқда узлуксиз бўлишини топамиз.

6-§. Лимитларни ҳисоблашда функцияниң узлуксизлигидан фойдаланиш

Маълумки, функцияларниң лимитларини ҳисоблаш муҳим, шу билан бирга анчагина машаққатли ишдир.

Функцияларниң узлуксиз бўлиши эса, уларниң лимитини топишда қўйл келади.

$f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда аниқланган бўлиб, a нуқта X ниң лимит нуқтаси бўлсин, $z = \varphi(y)$ функция эса $Y \subset R$ тўпламда аниқланган. Бу функциялар ёрдамида $z = \varphi(f(x))$ мураккаб функция тузилган бўлсин.

Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y_a$ лимит мавжуд бўлиб, $z = \varphi(y)$ функция y_a нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x))$ лимит мавжуд ва

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x)) = \varphi(y_a)$$

тенглик ўринли бўлади.

Ҳақиқатан, $x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow y_a$ ва $\varphi(y)$ функция y_a нуқтада узлуксиз, яъни $y \rightarrow y_a$ да $\varphi(y) \rightarrow \varphi(y_a)$. У ҳолда мураккаб функцияниң лимити ҳақидаги теоремага асосан $x \rightarrow a$ да $\varphi(f(x))$ функция лимитга эга ва

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_a} \varphi(y) = \varphi(y_a)$$

тенгликлар ўринли. Бу тенгликлардан узлуксиз функциялар учун функция ишораси остида лимитга ўтиш қоидаси келиб чиқади:

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x)) = \varphi(\lim_{x \rightarrow a} f(x)).$$

Хусусан, $f(x) = x$ бўлса,

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \varphi(\lim_{x \rightarrow a} x) = \varphi(a),$$

Мисоллар

1. Қуйидаги

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \mu x)^{\frac{1}{x}}, \quad 0 \neq \mu \in R$$

лимитни ҳисобланг. Биз буни $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \mu x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \mu x)^{\frac{1}{\mu x}} \right]^{\mu}$

кўринишда ёзиб оламиз. Равшанки, $x \rightarrow 0$ да $y = \mu x \rightarrow 0$ бўлади.

Бундан қуйидагили топамиз: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \mu x)^{\frac{1}{\mu x}} \right] = \left[\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} \right]^{\mu} = e^{\mu}$.

Шу мисолдан фойдаланиб $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ лимитни ҳам ҳисоблаш

мумкин. Унда $0 \neq x \in R$. Равшанки, $\frac{x}{n} \in R$ да ва $n \rightarrow \infty$ да $\frac{x}{n} = y \rightarrow 0$.

Шунинг учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^x = \left[\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^x = e^x.$$

2. Қўйидаги ажойиб лимитларни ҳисобланг.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ (биринчи муҳим лимит);

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ (иккинчи муҳим лимит);

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ (учинчи муҳим лимит).

Бу муносабатларни исботлашда логарифмик, кўрсаткичли ва даражали функцияларнинг узлуксизлигидан фойдаланамиз. Дарҳақиқат,

а) ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \log_a e;$$

б) ҳолда эса $a^x - 1 = t$ деб, $x \rightarrow 0$ да $t \rightarrow 0$ бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\log_a \left[\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right]} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a;$$

Ниҳоят, в) ҳолда $(1+x)^\alpha - 1 = t$ деб, сўнгра $\alpha = \frac{\ln(1+t)}{\ln(1+x)}$ ва $x \rightarrow 0$ да $t \rightarrow 0$ бўлишини ҳисобга олсак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{t}{\ln(1+t)} \cdot \frac{\ln(1+t)}{\ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \right] = \alpha$$

келиб циқади.

3. Иккита $f(x)$ ва $g(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда аниқланган. a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

Агар

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (b > 0), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$$

лимитлар ўринли бўлса, ушбу

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = b^c$$

лимит ҳам ўринли бўлади.

Ҳақиқатан $[f(x)]^{g(x)}$ функцияни

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

күринишида ифодалаб, сүнгра күрсаткичли ҳамда логарифмик функцияларнинг узлуксизлигидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} [g(x) \cdot \ln f(x)]} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \ln b} = e^{\ln b^c} = b^c.$$

Одатда $[f(x)]^{g(x)}$ функция даражали-күрсаткичли функция деб атади.

Даражали-күрсаткичли $[f(x)]^{g(x)}$ функция қуийидаги

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty;$
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0;$
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

ҳолларда аввал қараб ўтганимизга ўхшаш, аниқмасликларни ифодайди. $x \rightarrow a$ да $[f(x)]^{g(x)}$ функция 1) ҳолда 1^∞ , 2) ҳолда 0^0 , 3) ∞^0 күринишидаги аниқмасликлар дейилади.

Мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{ax + bx}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0)$$

лимитни ҳисобланг.

$\left(\frac{ax + bx}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ ифода $x \rightarrow 0$ да 1^∞ күринишидаги аниқмасликдан иборат. Уни очиш учун лимит ишораси остидаги функцияни қулай күринишида ёзиб олиб кейин лимитга ўтамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{ax + bx}{2} \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(ax - 1) + (bx - 1)}{2} + 1 \right]^{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left[1 + \frac{(ax - 1) + (bx - 1)}{2} \right] \frac{2}{(ax - 1) + (bx - 1)} \frac{ax - 1 + bx - 1}{2x} \right\}^{\frac{1}{x}} = \\ &= \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{(ax - 1) + (bx - 1)}{2} \right]^{\frac{2}{ax - 1 + bx - 1}} \right\}^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - 1 + bx - 1}{2x}} = \\ &= e^{\frac{1}{2} (\ln a + \ln b)} = \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

Демак, $x \rightarrow 0$ да берилган функциянынг лимити \sqrt{ab} га teng.

7- §. Узлуксиз функцияларнинг хоссалари

Биз ушбу параграфда нүктада ҳамда оралиқда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссаларини ўрганимиз.

1. Нуқтада узлуксиз бўлган функциянинг хоссалари (локал хоссалар). $f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлсин. X дан бирор x_0 нуқта олиб, бу нуқтанинг шу тўпламга тегишли бўлган етарли кичик атрофини қарайлик.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция қаралаётган x_0 нуқтада узлуксиз бўлсин. Таърифга кўра $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ лимит ўринли бўлиб, бу ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада чекли лимитга эга бўлади. Чекли лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссаларидан (3-бобининг 4-§ ига қаралсин) фойдаланиб, x_0 нуқтада узлуксиз бўлган функцияларнинг ҳам хоссаларини келтирамиз.

1°. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда x_0 нуқтанинг етарли кичик атрофида функция чегараланган бўлади.

2°. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлиб, $f(x) \neq 0$ бўлса, x_0 нуқтанинг етарли кичик атрофидан олинган x нуқталарда $f(x_0) > 0$ бўлганда $f(x) > 0$ ҳамда $f(x_0) < 0$ бўлганда эса, $f(x) < 0$ бўлади. Демак, $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, x_0 нуқтанинг етарли кичик атрофидан олинган x нуқталарда функция қийматларининг ишораси $f(x_0)$ нинг ишораси билан бир хил бўлади.

5. 1-натижә. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлиб, бу нуқтанинг етарли кичик атрофидан олинган x нуқталарда унинг қийматлари мусбат ҳам манғий ишорали бўлаверса, функциянинг x_0 нуқтадаги қиймати нолга teng бўлади.

3°. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, x_0 нуқтанинг етарли кичик атрофидан олинган x' ва x'' нуқталар учун $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади, бунда $\forall \varepsilon > 0$ сон.

Ҳақиқатан $f(x)$ функция x_0 нуқтадан узлуксиз бўлганлигидан $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $|x - x_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча x лар учун $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлик ҳам бажарилади. x_0 нуқтанинг етарли кичик атрофидан олинган x' , x'' нуқталар учун ҳам

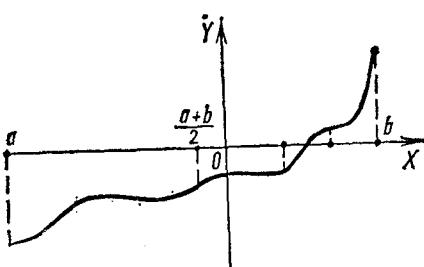
$$|f(x') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, |f(x'') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликлар ўринли бўлиб, ундан $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади.

Функциянинг нуқта атрофидаги хусусиятларига унинг локал хусусиятлари дейилади.

2. Сегментда узлуксиз бўлган функциияларнинг хоссалари (глобал хоссалари). Энди X тўплам сифатида $[a, b]$ сегментни (оралиқни), яъни

$$X = \{x : x \in R, a \leq x \leq b\} = [a, b]$$



38- чизма

са, у ҳолда шундай с ($a < c < b$) нүқтада топилади, у нүқтада функция нолга айланади: $f(c) = 0$ ($a < c < b$).

Бу теорема геометрик нүқтай назардан, узлуксиз эгри чизик OX ўқининг бир томонидан иккинчи томонига ўтишда уни албатта кесиб ўтишини ифодалайди (38- чизма).

Исбот. $f(x)$ функция ёпиқ $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлиб, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ бўлсин ($f(a) > 0$, $f(b) < 0$ бўлган ҳол ҳам шунга ўхшаш қаралиши мумкин). $[a, b]$ сегментниң $\frac{a+b}{2}$ нүқтасини олиб, бу нүқтада $f(x)$ функцияниң қийматини қараймиз. Агар $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ бўлса, $c = \frac{a+b}{2}$ деб олиниб, унда $f(c) = 0$ ва демак, теорема исбот этилган бўлади. Агар $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$ бўлса, $\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ сегментлардан четки нүқталарида $f(x)$ функция турли ишорали қийматга эга бўладиганини олиб, уни $[a_1, b_1]$ орқали белгилаймиз. Демак, $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$ бўлиб, $[a_1, b_1]$ сегментниң узунлиги эса $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ бўлади. Сўнг $[a_1, b_1]$ сегментниң $\frac{a_1+b_1}{2}$ нүқтасини олиб, бу нүқтада $f(x)$ нинг қийматини қараймиз. Агар $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$ бўлса, $c = \frac{a_1+b_1}{2}$ деб олиниб, унда $f(c) = 0$ ва бу ҳолда теорема исбот бўлади. Агар $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \neq 0$ бўлса, $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ сегментлардан четки нүқталарида $f(x)$ функция турли ишорали қийматга эга бўладиганини олиб, уни $[a_2, b_2]$ деймиз. Бу ҳолда $f(a_2) < 0$; $f(b_2) > 0$ ва $[a_2, b_2]$ сегментниң узунлиги $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$ бўлади. Бу жараённи давом эттираверамиз. Натижада ё чекли сондаги қадамдан кейин сегментларниң ўрталарини ифодаловчи нүқта сифатида шундай с нүқтага келамизки, у нүқтада функция нолга айланади, демак теорема исбот бўлади, ёки жараён чексиз давом этиб, ичма-ич жойлашган $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$

тўпламни олиб бу тўпламда аниқланган ва узлуксиз бўлган функцияларниг хоссаларини ўрганамиз.

5.5-теорема. Больцано-Кошининг биринчи теоремаси. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб сегментниң четки нүқталарида ҳар хил ишорали қийматларга эга бўл-

сегментлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. Бу кетма-кетликнинг умумий ҳади $[a_n, b_n]$ да $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ бўлиб, $[a_n, b_n]$ нинг узунлиги $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$ да).

Ичма-ич жойлашган сегментлар принципига асосан шундай с нуқта мавжудки (3- боб, 8- §):

$$\lim a_n = \lim b_n = c \quad (c \in (a, b)).$$

$f(x)$ функцияниң $[a, b]$ да узлуксиз бўлишидан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} a_n \rightarrow c \Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(c) \text{ ва } f(a_n) < 0 \Rightarrow f(c) \leqslant 0, \\ b_n \rightarrow c \Rightarrow f(b_n) \rightarrow f(c) \text{ ва } f(b_n) > 0 \Rightarrow f(c) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Кейинги тенгизликлардан эса $f(c) = 0$ бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Исбот этилган теорема кўпгина татбиқларга эга, жумладан у айрим функционал тенгламалар ечимининг мавжудлигини кўрсатиш ва уларни тақрибий чиш имконини беради. Масалан,

$$\sin x - x + 1 = 0 \quad (5.3)$$

тенгламани қарайлик. Равшанки, $f(x) = \sin x - x + 1$ R да узлуксиз. Жумладан, бу функция $[0, \pi]$ сегментда ҳам узлуксиз бўлиб, сегментнинг четки нуқталарида: $f(0) = 1 > 0$, $f(\pi) = -\pi + 1 < 0$.

5.5- теоремага асосан $f(x)$ функция $[0, \pi]$ оралиқнинг ҳеч бўлмаганда битта нуқтасида нолга айланади, яъни берилган (5.3) тенгламанинг $[0, \pi]$ оралиқда ечими мавжуд. $[0, \frac{\pi}{2}]$ сегментни $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ва $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ сегментларга ажратиб, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ нинг четки нуқталарида $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2} > 0$, $f(\pi) < 0$ бўлишини топамиз. Демак, (5.3) тенгламанинг ечими $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ оралиқда ётади. Бу жараённи давом эттира вериш истижасида $\sin x - x + 1 = 0$ тенгламанинг тақрибий ечими керакли аниқлика топилиши мумкин.

5.6-теорема (Больцано — Кошининг иккинчи теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, унинг четки нуқталарида $f(a) = A$, $f(b) = B$ қийматларга эга ва $A \neq B$ бўлса, А ва B орасида ҳар қандай С сон олингандан ҳам а билан b орасида шундай с нуқта топилади,

$$f(c) = C$$

бўлади.

Исбот. Аниқлик учун $A < B$ бўлсин, ихтиёрий C , $A < C < B$ олайлик. Ёрдамчи $\varphi(x) = y(x) - C$ функция тузамиз. Равшанки, бу функция сегментда узлуксиз ва бу сегментнинг четки нуқталарида $\varphi(a) = A - C < 0$, $\varphi(b) = B - C > 0$, қийматларни қабул қиласди. У ҳолда Больцано — Кошининг биринчи теоремасига кўра a си-

лан b орасида шундай c нүкта топиладики, $\varphi(c) = 0$, яъни $f(c) = C$ бўлади. Бу эса теоремани исботлайди.

5.2-натижада. Агар $f(x)$ функция бирор X оралиқда (ёпиқ ёки очиқ, чекли ёки чексиз) аниқланган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда функциянинг барча қийматлари бирор Y оралиқни туташ тўлдиради.

Исбот. $Y = \{f(x) : x \in X\}$ тўпламнинг аниқ қуйи чегараси m , аниқ юқори чегараси M бўлсин:

$$m = \inf_{x \in X} Y, M = \sup_{x \in X} Y.$$

Бунда m ва M лар чекли сон ёки ∞ бўлиши мумкин. Аниқ чегараларнинг таърифига биноан, $\forall x \in X$ учун $m \leq f(x) \leq M$ бўлади. Энди $f(x)$ функция қийматлари ($x \in X$ да) (m, M) интервални туаш тўлдиришини кўрсатамиз. Бу интервалда ихтиёрий C сонни олайлик: $m < C < M$. У ҳолда шундай A ва B сонлар топиладики,

$$m \leq A < C < B \leq M$$

бўлади. Бу A ва B сонларни $A = f(a)$, $B = f(b)$ деб қараш мумкин ($a \in X$, $b \in X$). Исботланган теоремага асосан a билан b орасида шундай c сон мавжудки, $f(c) = C$ бўлади. Олинган C сон (m, M) интервалдаги ихтиёрий сон бўлганидан, бу интервалдаги барча қийматларни $f(x)$ функция қабул қилиши келиб чиқади.

5.7-еорема (Вейерштрасснинг биринчи теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, функция шу сегментда чегараланган бўлади.

Исбот. Тескарисини фараз қиласайлик, яъни $[a, b]$ да узлуксиз бўлган $f(x)$ функция унда чегараланмаган бўлсин. У ҳолда $[a, b]$ да шундай x_n нүкта топиладики, шу нүкта учун $|f(x_n)| > n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) тенгсизлик ўринли бўлади. $\{x_n\}$ кетма-кетликдан Больцано-Вейерштрасс леммасига (3.3-леммасига қаранг) асосан яқинлашувчи қисмий $\{x_{n_k}\}$ кетма-кетлик ажратиш мумкин: $x_{n_k} \rightarrow x_0$; $x_0 \in [a, b]$. Энди $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз бўлганидан $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$ бўлади. Бу эса $|f(x_n)| > n$, яъни $f(x_n) \rightarrow \infty$ деб қилинган фаразимизга зиддир. Демак, функция $[a, b]$ да чегараланган. Теорема исбот бўлди.

5.5-эслатма. 1) Келтирилган теорема шартидаги оралиқнинг сегмент бўлиши муҳимdir. Бу шарт бажарилмаса, теорема ўринли бўлмасдан қолиши мумкин. Масалан, $f(x) = \frac{1}{x}$ функция $(0, 1]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлса ҳам, у шу оралиқда чегараланмаган.

2) Функциянинг бирор оралиқда чегараланган бўлишидан, унинг шу оралиқда узлуксиз бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқаврмайди. Масалан, Дирихле функцияси $\chi(x)$ чегараланган бўлса ҳам у узлуксиз эмас.

5.8-теорема (Вейерштрасснинг иккинчи теоремаси.) Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, функция шу сегментда ўзининг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи че-

чегараларига эришиади, яғни $[a, b]$ да шундай x_1 ва x_2 нүқталар төс-пиладики,

$$f(x_1) = \sup_{x \in [a, b]} \{f(x)\}, \quad f(x_2) = \inf_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Исбот. Вейерштрасснинг биринчи теоремасига кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ да чегараланган. Модомики, $\{f(x) : x \in [a, b]\}$ тўплам чегараланган экан, унда бу тўпламнинг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегаралари мавжуд. Биз уларни

$$\sup_{x \in [a, b]} \{f(x)\} = M \quad \inf_{x \in [a, b]} \{f(x)\} = m$$

орқали белгилайлик.

Энди $[a, b]$ сегментнинг нүқталаридаги $f(x)$ функция M ва m га тенг бўладиган қийматларни қабул қилишини кўрсатамиз. Тескарисини фараз қилайлик, яъни $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ўзининг аниқ юқори чегараси M га эришмасин. У ҳолда $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) < M$ тенгсизлик ўринли бўлади. Кўйидаги

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

функцияни қарайлик. Равшанки, бу функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз. Вейерштрасснинг биринчи теоремасига кўра $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да чегараланган. Демак, $\forall x \in [a, b]$ лар учун ушбу

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq \alpha \quad (\alpha = \text{const}, \alpha > 0)$$

тенгсизлик ўринли. Бундан

$$f(x) \leq M - \frac{1}{\alpha}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $M = \sup \{f(x)\}$ эканига зид. Демак, $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ўзининг аниқ юқори чегарасига эришади, яъни $[a, b]$ да шундай x_1 нүқта мавжудки,

$$f(x_1) = \sup_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$$

бўлади. Худди шунга ўхшаш $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ўзининг аниқ қуйи чегарасига эришиши кўрсатилади. Теорема исбот бўлди.

5.6-эслатма. Агар $f(x)$ функция очиқ (a, b) оралиқда (интервалда) аниқланган ва узлуксиз бўлса, функция шу оралиқда ўзининг аниқ чегараларига эришмаслиги мумкин. Масалан, $f(x) = x^2$ функция $(0, 1)$ интервалда узлуксиз. Бу функция учун $\sup x^2 = 1$, $\inf x^2 = 0$ бўлади. Аммо функция ўзининг \sup ва \inf қийматларига $(0, 1)$ интервалда эришмайди.

Одатда функциянинг бирор оралиқдаги хусусиятларига унинг глобал хусусиятлари деб аталади. Узлуксиз функциянинг юқоридаги теоремалар орқали ифодаланган хусусиятлари функциянинг глобал хусусиятлариdir.

5.9-төрөм (тескари функциянинг маҗудлиги). Агар $f(x)$ функция X оралиқда аниқланган, узлуксиз ва ўсуви (камаювчи) бўлса, бу функция қийматларидан иборат $Y = \{f(x) : x \in X\}$ оралиқда тескари $f^{-1}(y)$ функция мавжуд бўлиб, у узлуксиз ва ўсуви (камаювчи) бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция X оралиқда узлуксиз бўлгани учун унинг қийматлари Y оралиқни туташ тўлдиради. Демак, ҳар бир $y_0 \in Y$ учун X да шундай x_0 топиладики, $f(x_0) = y_0$ бўлади. Бундай $y_0 \in Y$ га мос келадиган x_0 нуқта X да ягона бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар x оралиқда x_0 дан катта ёки кичик бўлган x' нуқта олинадиган бўлса, $f(x)$ функция ўсуви бўлгани учун $f(x') = y'$ ҳам y_0 дан катта ёки кичик бўлади. Шундай қилиб, Y оралиқдан олинган ҳар бир y га X да унга мос келадиган ягона шундай x топиладики, $f(x) = y$ бўлади. Демак, Y оралиқда тескари $x = f^{-1}(y)$ функция мавжуд. Энди $x = f^{-1}(y)$ функциянинг Y да ўсуви бўлишини, яъни $y_1 \in Y$, $y_2 \in Y$, $y_1 < y_2$ бўлганда $x_1 < x_2$ тенгсизлик ўринли ($x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$) бўлишини кўрсатамиз. Тескарисини фараз қиласайлик: $y_1 < y_2$ бўлганда $x_1 > x_2$ бўлсин. У ҳолда $y = f(x)$ функция X да ўсувилигидан $f(x_1) > f(x_2)$, яъни $y_1 > y_2$ бўлади. Бу эса $y_1 < y_2$ деб олинишга зиддир. Демак, $x = f^{-1}(y)$ функция Y да ўсуви.

Ниҳоят, монотон функциянинг узлуксизлиги ҳақидаги теоремага кўра, $x = f^{-1}(y)$ функция Y оралиқда узлуксиз бўлади.

$y = f(x)$ функция X да камаювчи бўлганда ҳам теорема юқоридагидек исботланади. Теорема исбот бўлди.

8-§. Функциянинг текис узлуксизлиги. Қантор теоремаси

$y = f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлиб, $x_0 \in X$ нуқтада узлуксиз бўлсин. Функция узлуксизлиги таърифига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta_0 > 0$ сон топиладики, $|x - x_0| < \delta_0$ тенгсизлик ўринли бўлишдан $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ тенгсизликнинг ҳам ўринли бўлиши келиб чиқади. Бу таърифдаги $\delta_0 > 0$ сон аввал таъкидлаб ўтганимиздек ε га боғлиқ: $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$. Энди $f(x)$ функция X нинг x_1 ($x_1 \neq x_0$) нуқтасида ҳам узлуксиз бўлсин. Яна таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta_1 > 0$ сон топиладики, $|x - x_1| < \delta_1$ дан $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$ келиб чиқади.

$f(x)$ функциянинг $x = x_0$, $x = x_1$ нуқталарда узлуксизлиги таърифидаги $\varepsilon > 0$ сон бир хил бўлган ҳолда ҳам унга мос келадиган δ_0 ва δ_1 сонлар, умуман, турлича бўлади, яъни функция бир нечта нуқталарда узлуксиз бўлганда, узлуксизлик таърифидаги $\delta > 0$ сон фақат $\varepsilon > 0$ гагина боғлиқ бўлмастан, қаралаётган нуқтага ҳам боғлиқ бўлади. Шуни ҳам айтиш керакки, агар $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$ деб олинса, бу $\delta > 0$ сон x_0 ва x_1 нуқталарга баравар ярайверади, чунки $|x - x_0| < \delta$ дан $|x - x_0| < \delta_0$ ва $|x - x_1| < \delta$ дан $|x - x_1| < \delta_1$ келиб чиқади. Мисоллар қарайлик:

1) $f(x) = x^2$ функция $[0, 1]$ сегменттада узлуксиз, жумладан $a \in [0, 1]$ нүктада узлуксизdir. Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон учун $\delta = \sqrt{a^2 + \varepsilon} - a$ деб олинса, $|x - a| < \delta$ бўлганда

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &= |x^2 - a^2| = |x - a||x + a| < \delta (\delta + 2a) = \\&= (\sqrt{a^2 + \varepsilon} - a)^2 + (\sqrt{a^2 + \varepsilon} - a) \cdot 2a = \varepsilon\end{aligned}$$

бўлади. Демак, $\delta = \sqrt{a^2 + \varepsilon} - a$ бўлиб, у $\varepsilon > 0$ билан бирга қаралаётган $a \in [0, 1]$ нүктага ҳам боғлиқ экан. Бироқ,

$$\bar{\delta} = \min_{a \in [0, 1]} \delta = \min_{a \in [0, 1]} (\sqrt{a^2 + \varepsilon} - a) = \min_{a \in [0, 1]} \frac{\varepsilon}{\sqrt{a^2 + \varepsilon} + a} = \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon}}$$

деб олинса, $|x - a| < \bar{\delta}$ дан $|x - a| < \delta$ келиб чиқади. Шу сабабли бу $\bar{\delta} > 0$ сон $[0, 1]$ сегментнинг барча нүқталарига тўғри келади.

Шундай қилиб, $f(x) = x^2$ функция $[0, 1]$ сегментнинг нүқталарида узлуксиз бўлиши таърифидаги $\delta > 0$ сон $\varepsilon > 0$ сон билан бирга қаралаётган нүқталарга боғлиқ бўлса ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, у $[0, 1]$ сегментнинг барча нүқталарига ярайди, бошқача қилиб айтганда, шу $\bar{\delta} > 0$ сон фақат ε гагина боғлиқ бўлиб, қаралаётган нүқталарга боғлиқ эмас.

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ функция $(0, 1]$ оралиқда узлуксиз, жумладан $a \in (0, 1]$ нүктада узлуксизdir. Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон учун $\delta = \frac{\varepsilon a^2}{1+ae}$ деб олинса, $|x - a| < \delta$ бўлганда

$$|f(x) - f(a)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|x - a|}{ax} < \frac{1}{a} \cdot \frac{\varepsilon a^2}{1+ae} \cdot \frac{1}{a - \frac{\varepsilon a^2}{1+ae}} = \varepsilon$$

бўлади. Демак, $\delta \varepsilon > 0$ билан бирга $a \in (0, 1]$ нүктага боғлиқ. Бироқ, бу ҳолда δ нинг $a \in (0, 1]$ бўйича минимуми мавжуд эмас. Бу эса $f(x) = \frac{1}{x}$ функция $(0, 1]$ оралиқнинг нүқталарида узлуксиз бўлиши таърифидаги $\delta > 0$ сон $\varepsilon > 0$ сон билан бирга қаралаётган нүқталарга боғлиқ ва $(0, 1]$ оралиқнинг барча нүқталарига ярайдиган $\delta > 0$ сон мавжуд эмаслигини кўрсатади.

5·8-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсанки, X тўпламнинг $|x' - x''| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва x'' ($x' \in X$, $x'' \in X$) нүқталарида

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция X тўпламда текис узлуксиз деб аталади.

5.7-эслатма. 1) $f(x)$ функциянинг текис узлуксизлик таърифидаги $\delta > 0$ сон $\varepsilon > 0$ сонгагина боғлиқ бўлиб, қаралаётган нүқталарга боғлиқ эмас.

2) $f(x)$ функция X тўпламда текис узлуксиз бўлса, у шу тўпламда узлуксиз бўлади.

Мисоллар

1, Ушбу

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

функцияниң $x = [1, 2]$ сегментда текис узлуксизли ини күрсатинг.
 $\forall \varepsilon > 0$ учун $\delta > 0$ сонни $\delta = 3\varepsilon$ деб олсак, у ҳолда $\forall x' \in [1, 2]$,
 $\forall x'' \in [1, 2]$ лар учун $|x'' - x'| < \delta$ тенгсизлик бажарилганда

$$|\sqrt[3]{x''} - \sqrt[3]{x'}| = \frac{|x'' - x'|}{\sqrt[3]{x''^2} + \sqrt[3]{x''x'} + \sqrt[3]{x'^2}} \leq \frac{|x'' - x'|}{3} < \frac{\delta}{3} = \varepsilon$$

бўлади. Демак, $y = \sqrt[3]{x}$ функция $[1, 2]$ оралиқда текис узлуксиз.

2, Қуйидаги

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

функция $X = (0, 1)$ интервалда текис узлуксиз эмас. Ҳақиқатан ҳам, $\varepsilon > 0$ сонни масалан, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ деб олиб, $x', x'' \in (0, 1)$ нуқталар сифатида

$$x' = \frac{1}{n\pi}, x'' = \frac{2}{(2n+1)\pi} (n \in N) \text{ лар}$$

қаралса, у ҳолда $|x'' - x'|$ айрма учун

$$|x'' - x'| = \frac{1}{n\pi(2n+1)}$$

ни топамиз. Энди δ ни ҳар қанча кичик қилиб олиш мумкин бўлса ҳам

$$|f(x'') - f(x')| = \left| \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} - \sin n\pi \right| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$$

бўлади. Демак берилган функция $(0, 1)$ оралиқда текис узлуксиз эмас.

Бу мисолдан функцияниң бирор оралиқда узлуксиз бўлишидан унинг шу оралиқда текис узлуксиз бўлиши келиб чиқавермаслиги кўринади. Аммо қуйидаги теорема ўринли.

5.10- теорема (Канттор теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, функция шу сегментда текис узлуксиз бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлсин. Тескарисини фараз қиласлик, яъни функция шу сегментда текис узлуксиз бўлмасин. Демак, бу ҳолда бирор $\varepsilon > 0$ сон ва ихтиёрий кичик $\delta > 0$ сон учун $[a, b]$ сегментда шундай x' ва x'' нуқталар топилади, $|x'' - x'| < \delta$ тенгсизлик бажарилса ҳам

$$|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Нолга интилувчи мусбат сонлар кетма-кетлигини $\{\delta_n\}$: $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ олайлик ($\delta_n \rightarrow 0, \delta_n > 0, n = 1, 2, 3, \dots$). Фаразимиз-

га кўра, юқоридаги $\varepsilon > 0$ сон ва ихтиёрий $\delta_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) сон учун $[a, b]$ сегментда шундай x_n'' ва x_n' ($n = 1, 2, 3, \dots$) ишқалар топиладики, улар учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$\begin{aligned} |x_1'' - x_1'| &< \delta_1 \Rightarrow |f(x_1'') - f(x_1')| \geq \varepsilon, \\ |x_2'' - x_2'| &< \delta_2 \Rightarrow |f(x_2'') - f(x_2')| \geq \varepsilon, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ |x_n'' - x_n'| &< \delta_n \Rightarrow |f(x_n'') - f(x_n')| \geq \varepsilon, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$\{x_n''\}$ кетма-кетлик чегараланган. Бу кетма-кетликтан Больцано—Вейерштрасс леммасига кўра (3.3- леммага қаранг) чекли сонга интилувчи қисмий $\{x_{n_k}'\}$ кетма-кетлик ажратиш мумкин:

$$x_{n_k}' \rightarrow x_0 \text{ ва } x_0 \in [a, b].$$

У ҳолда

$$|x_n'' - x_n'| < \delta_n \text{ ва } \delta_n \rightarrow 0$$

бўлганидан $\{x_{n_k}'\}$ кетма-кетлик ҳам x_0 га интилади: $x_{n_k}' \rightarrow x_0$. $f(x)$ функцияянинг $[a, b]$ да узлуксиз бўлишидан:

$$\begin{aligned} f(x_{n_k}'') &\rightarrow f(x_0), \\ f(x_{n_k}') &\rightarrow f(x_0). \end{aligned}$$

Улардан эса

$$f(x_{n_k}'') - f(x_{n_k}') \rightarrow 0$$

келиб чиқади. Бу эса

$$|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon$$

деб қилинган фаразга зид. Теорема исбот бўлди.

$f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлсин.

5.9- таъриф. Қуйидаги

$$\sup_{x \in X} \{f(x)\} - \inf_{x \in X} \{f(x)\}$$

айирма $f(x)$ функцияянинг X тўпламдаги тебраниши деб айтилади ва ω орқали белгиланади:

$$\omega = \omega(f; X) = \sup_{x \in X} \{f(x)\} - \inf_{x \in X} \{f(x)\}.$$

$f(x)$ функцияянинг X тўпламдаги тебраниши қуйидагича

$$\omega = \sup_{x', x'' \in X} \{|f(x'') - f(x')|\}$$

ҳам таърифланиши мумкин.

Кантор теоремасидан битта муҳим натижка келиб чиқади.

5.3- натижа. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[a, b]$ сегментни узунликлари δ дан кичик бўлакларга ажратилганда, ҳар бир бўлакдаги функцияянинг тебраниши ε дан кичик бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлсин. Кантор теоремасига кўра бу функция $[a, b]$ да текис узлуксиз бўлади. Энди $[a, b]$ сегментни узунликлари $\delta > 0$ дан кичик $[x_k, x_{k+1}]$ бўлакчаларга ажратамиз ($x_{k+1} - x_k < \delta$). Равшанки, $\forall x' \in [x_k, x_{k+1}]$, $\forall x'' \in [x_k, x_{k+1}]$ нуқталар учун $|x'' - x'| < \delta$ тенгсизлик ўринли. У ҳолда $f(x)$ функцияниң текис узлуксизлигидан

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

тенгсизлик ҳам бажарилади. Натижада $\sup_{x', x'' \in [a, b]} \{|f(x'') - f(x')|\} < \varepsilon$ бўлиб, ундан $\omega < \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади.

9- §. Функцияниң узлуксизлик модули

Биз ушбу параграфда функцияниң текис узлуксизлиги билан боғлиқ бўлган, шунингдек, функцияларни синфлаш имконини берадиган тушунча — функцияниң узлуксизлик модули тушунчаси билан танишамиз.

$f(x)$ функция X тўпламда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. $\forall \delta > 0$ сон олиб, X тўпламнинг $|x'' - x'| \leq \delta$ тенгсизлики қаноатлантирувчи x' ва x'' нуқталарида ушбу

$$|f(x'') - f(x')| \quad (5.4)$$

айрмани қарайлик.

5.10- таъриф. (5.4) айрманинг аниқ юқори чегараси

$$\sup \{|f(x'') - f(x')|\}, \text{ (бунда } x' \in X, x'' \in X, |x'' - x'| \leq \delta)$$

функцияниң X тўпламдаги узлуксизлик модули деб аталади ва $\omega(f)$ ёки $\omega(f; \delta)$ каби белгиланади:

$$\omega(\delta) = \omega(f; \delta) = \sup_{|x'' - x'| \leq \delta} \{|f(x'') - f(x')|\}, x' \in X, x'' \in X.$$

Бу таърифдан функцияниң $\omega(\delta)$ узлуксизлик модули $\delta (\delta > 0)$ нинг манфий бўлмаган функцияси экани кўринади.

Энди узлуксизлик модулининг баъзи бир хоссаларини келтирамиз.

1°. Функцияниң узлуксизлик модули $\omega(\delta)$ ўзгарувчи δ нинг ўсуви чи функцияси бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ ва $\delta_1 > \delta_2$ бўлсин. У ҳолда ушбу

$$A_1 = \{x' \in X, x'' \in X : |x'' - x'| \leq \delta_1\},$$

$$A_2 = \{x' \in X, x'' \in X : |x'' - x'| \leq \delta_2\}$$

тўпламлар учун $A_2 \subset A_1$ бўлиб, ундан

$\sup_{A_2} \{|f(x'') - f(x')|\} \leq \sup_{A_1} \{|f(x'') - f(x')|\}$ бўлади, демак,

$$\omega(\delta_2) \leq \omega(\delta_1).$$

Шундай қилиб, $\delta_1 > \delta_2$ тенгсизлик бажарилганда $\omega(\delta_1) \geq \omega(\delta_2)$ тенгсизлик ҳам бажарилади. Демак, $\omega(\delta)$ ўсуви функция.

2°. Функцияниң узлуксизлик модули учун ушбу

$$\omega(\lambda \delta) \leq (1 + \lambda) \omega(\delta) \quad (5.5)$$

муносабат ўринли, бунда λ — мусбат сон.

$$a) \lambda = n, n \in N \text{ бўлсин. Бу ҳолда (5.5) тенгсизлик ушбу} \\ \omega(n\delta) \leq n\omega(\delta) \quad (5.6)$$

кўринишга эга бўлишини кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, бирор $[x, y]$ сегмент берилган бўлиб, $|x - y| \leq n\delta$ бўлсин. Бу сегментни $\alpha_i = x + \frac{i}{n}(y - x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) нуқтадар ёрдамида n та тенг қисмга ажратамиз. У ҳолда бу $[x, y]$ сегментда аниқланган $f(x)$ функция учун

$$f(y) - f(x) = [f(\alpha_1) - f(\alpha_0)] + [f(\alpha_2) - f(\alpha_1)] + \dots + [f(\alpha_n) - f(\alpha_{n-1})] \quad (\alpha_0 = x, \alpha_n = y)$$

бўлади.

$$\text{Иккинчи томондан } |\alpha_{i+1} - \alpha_i| \leq \delta \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \text{ бўлиб,} \\ |f(\alpha_{i+1}) - f(\alpha_i)| \leq \omega(\delta)$$

ва

$$|f(y) - f(x)| \leq n \cdot \omega(\delta)$$

бўлади. Демак, $\sup |f(y) - f(x)| \leq n \omega(\delta)$ бўлиб, ундан

$$\omega(n \cdot \delta) \leq n \cdot \omega(\delta)$$

бўлиши келиб чиқади.

б) λ — ихтиёрий мусбат сон бўлсин. Бу ҳолда (5.5) тенгсизликни исботлаймиз.

λ сонниег бутун қисмини n орқали белгиласак, λ учун $n \leq \lambda < n + 1$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Узлуксизлик модули $\omega(\delta)$ ўсувчи функция бўлганидан ҳамда а) ҳолни эътиборга олиб, қўйидаги

$$\omega(\lambda\delta) \leq \omega[(n+1) \cdot \delta] \leq (n+1)\omega(\delta) \leq (1+\lambda)\omega(\delta)$$

тенгсизликларни ёзишимиз мумкин. Бу (5.5) тенгсизликни исботлайди.

Мисоллар

1. Ушбу $f(x) = ax + b$ ($a, b = \text{const}$) функцияниң $X = [\alpha, \beta]$ сегментдаги узлуксизлик модулини топинг.

Узлуксизлик модули таърифига кўра $x' \in X, x'' \in X$ ва $|x' - x''| \leq \delta$ бўлганда топамиз:

$$\omega(\delta) = \sup_{|x'-x''| \leq \delta} |(ax' + b) - (ax'' + b)| = \sup_{|x'-x''| \leq \delta} |a(x' - x'')| = |a| \cdot \delta.$$

Демак, $f(x) = ax + b$ функцияниң $X = [\alpha, \beta]$ сегментдаги узлуксизлик модули $\omega(\delta) = |a| \cdot \delta$ бўлади.

2. $f(x) = x^2 + 1$ функцияниң $X = [0, 1]$ сегментдаги узлуксизлик модулини топинг.

$X = [0, 1]$ тўпламда ихтиёрий x' нуқта олиб, x'' нуқтани эса $x'' = x' - \delta$ деб қарайлик ($0 < \delta < 1$). У ҳолда $2\delta - \delta^2 > 0$ эканни эътиборга олиб ёзамиш:

$$|f(x') - f(x'')| = |(x'^2 + 1) - (x''^2 + 1)| = |2x' \delta - \delta^2| \leq 2\delta - \delta^2.$$

Шунинг учун

$$\omega(\delta) = \sup_{|x'-x''| \leq \delta} |f(x') - f(x'')| \leq 2\delta - \delta^2$$

бўлади.

Аммо $x' = 1, x'' = 1 - \delta$ нуқталар учун $|x' - x''| = \delta$ ва

$$|f(x') - f(x'')| = |(x'^2 + 1) - (x''^2 + 1)| = |2\delta - \delta^2| = 2\delta - \delta^2$$

бўлгани сабабли $\omega(\delta) = 2\delta - \delta^2$ бўлади.

Энди $f(x)$ функцияниң текис узлуксизлиги билан унинг узлуксизлик модули орасидаги боғланишни ифодалайдиган теоремани келтирамиз.

5.11- теорема. $f(x)$ функция X тўпламда текис узлуксиз бўлиши учун $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(\delta) = 0$ лимит ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $f(x)$ функция X тўпламда текис узлуксиз бўлсин. Таърифга кўра $\forall \varepsilon' > 0$ олинганда ҳам $\frac{\varepsilon}{2}$ сон учун шундай $\delta_\varepsilon > 0$ сон топиладики, $\forall x' \in X, \forall x'' \in X$ нуқталарда

$$|x' - x''| < \delta_\varepsilon \text{ дан } |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

келиб чиқади. У ҳолда $0 < \delta < \delta_\varepsilon$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий δ учун

$$\sup_{|x'-x''| < \delta} \{|f(x') - f(x'')|\} \leq \sup_{|x'-x''| < \delta_\varepsilon} \{|f(x') - f(x'')|\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

бўлиб, ундан $\omega(\delta) < \varepsilon$, яъни $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(\delta) = 0$ келиб чиқади.

Етарлилиги. Ушбу $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(\delta) = 0$ лимит ўринли бўлсин. Демак, $\delta \rightarrow +0$ да

$$\omega(\delta) = \sup_{|x'-x''| < \delta} \{|f(x') - f(x'')|\} \rightarrow 0.$$

У ҳолда $\forall x' \in X, \forall x'' \in X$ лар учун

$$|x' - x''| \leq \delta < \delta_\varepsilon \text{ дан } |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

келиб чиқади. Бу эса $f(x)$ функция X тўпламда текис узлуксиз бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Функцияларнинг узлуксизлик модулларига қараб уларни синфларга ажратиш мумкин.

1) Узлуксизлик модули ушбу

$$\omega(\delta) \leq M \delta^\alpha$$

(бунда $M = \text{const}, 0 < \alpha < 1$) муносабатни қаноатлантирувчи функциялар тўплами α тартибли Липшиц синфи деб аталади ва Lip_M^α каби белгиланади.

2) Узлуксизлик модули қўйидаги

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(\delta) \cdot \ln \frac{1}{\delta} = 0$$

муносабатни қаноатлантирувчи узлуксиз функциялар түплами *Дини* — *Липшиц синфи* деб аталади.

Агар $f(x) \in \text{Lip}_M^\alpha$ бўлса, у ҳолда бу функция Дини — Липшиц синфига ҳам тегишли бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $f(x) \in \text{lip}_M^\alpha$ дан $\omega(\delta) \leq M \cdot \delta^\alpha$, ($0 < \alpha < 1$) келиб чиқади ва $\lim_{\delta \rightarrow +0} M \delta^\alpha \cdot \ln \frac{1}{\delta} = 0$ ли-мит ўринли бўлганидан, ушбу $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(\delta) \cdot \ln \frac{1}{\delta} = 0$ тенгликнинг ўринли бўлиши келиб чиқади.

10- §. Компакт түпламда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссалари

Биз мазкур бобнинг 7- § ида $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссаларини, жумладан, функциянинг чегараланган бўлиши (Вейерштасснинг сиринчи теоремаси), функциянинг аниқ чегараларга эришиши (Вейерштасснинг иккинчи теоремаси) ва функциянинг текис узлуксиз бўлиши (Кантор теоремаси) каби хоссаларни қараб ўтдик. Бу хоссаларни ўрганишда функция узлуксиз бўлган оралиқ $[a, b]$ сегментдан иборат бўлиши муҳим эканлигини кўрдик ва хоссаларни исботлаш жараёнида эса Больцано — Вейерштасс леммасидан бевосита фойдалана бордик.

1. Очиқ ва ёпиқ түпламлар. $X \subset R$ түплам берилган бўлиб, $a \in X$ бўлсин.

5.11- таъриф. Агар $a \in X$ нуқтанинг шундай

$$U_\delta(a) = \{x: x \in R, a - \delta < x < a + \delta\} \quad (\delta > 0)$$

атрофи мавжуд бўлсанки, $U_\delta(a) \subset X$ бўлса, a нуқта X түпламнинг ички нуқтаси дейилади.

Масалан $x = \frac{1}{2}$ нуқта $X = [0, 1]$ түпламнинг ички нуқтаси, $x = 0, x = 1$ нуқталар $X = [0, 1]$ түпламнинг ички нуқталари эмас.

5.12- таъриф. Агар X түпламнинг ҳар бир нуқтаси унинг ички нуқтаси бўлса, X түплам очиқ түплам деб аталади.

Масалан, 1) $X = (0, 1)$ интервал очиқ түплам.

2) $X = (0, 1) \cup (2, 4) \cup (6, 8)$ түплам ҳам очиқ түпламдир.

5.13- таъриф. Агар X түпламнинг барча лимит нуқталари ўзи-га тегишли бўлса, X түплам ёпиқ түплам деб аталади.

Масалан, 1) $X = [0, 1]$ сегмент ёпиқ түплам бўлади.

5.8- эслатма. Лимит нуқтага эга бўлмаган түпламни ёпиқ түплам деб қаралади.

Масалан, чекли түплам ёпиқ түплам деб олинади.

2. Компакт түплам. X — ҳақиқий сонларнинг бирор түплами бўлсин: $X \subset R$.

5.14- таъриф. Агар X түпламнинг нуқталаридан тузилган ҳар қандай $\{x_n\}$ ($x_n \in X; n = 1, 2, \dots$) кетма-кетликдан шу түпламнинг нуқтасига яқинлашувчи $\{x_{n_k}\}$ қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин бўлса, X түплам компакт түплам деб аталади,

Мисоллар

1. $X = [a, b]$ сегментнинг компакт тўплам бўлиши Больцано-Вейерштрасс леммасидан келиб чиқади.

2. $X = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \dots \cup [a_n, b_n]$ — тўплам компакт тўплам бўлади.

3. $X = (0, 1)$ интервал компакт тўплам бўлмайди, чунки $x_n = \frac{1}{n+1} \in (0, 1) (n = 1, 2, 3, \dots)$ кетма-кетликтининг лимити 0 га тенг, яъни $\lim x_n = \lim \frac{1}{n+1} = 0$. Аммо 0 сон $(0, 1)$ тўпламга тегишли эмас.

Энди тўпламнинг компакт бўлиши шартини ифодаловчи теоремани келтирамиз.

5.12- теорема. X компакт тўплам бўлиши учун унинг чегараланган ва ёпиқ тўплам бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. X — компакт тўплам бўлсин. Аввало бу тўпламнинг чегараланганилигини кўрсатамиз. Тескарисини фараз қиласлик, яъни X — компакт тўплам бўлса ҳам у чегараланмаган бўлсин. У ҳолда шундай $x_1 \in X$ нуқта мавжудки $|x_1| > 1$, шундай $x_2 \in X$ нуқта мавжудки $|x_2| > 2$ ва ҳ. к. Натижада $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳосил бўлиб, $|x_n| > n (x_n \in X, n = 1, 2, \dots)$ бўлади. Бу $\{x_n\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиб бўлмайди. Бу эса X нинг компакт тўпламлигига зид. Демак, X — чегараланган тўплам.

Энди X нинг ёпиқ тўплам бўлишини кўрсатамиз. Фараз қиласлик, a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. У ҳолда X да a га интигувчи $\{x_n\}$ кетма-кетлик топилади. Равшанки, бу $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳар қандай $\{x_{n_k}\}$ қисмий кетма-кетлиги учун $\lim x_{n_k} = a$ лимит ўринли бўлади. X компакт тўплам бўлгани сабабли $a \in X$ бўлади. Демак, X тўпламнинг лимит нуқтаси ўзига тегишли бўлади. Бу эса X нинг ёпиқ тўплам эканини билдиради.

Етарлилиги. X — чегараланган ва ёпиқ тўплам бўлсин. Бу ҳолда Больцано — Вейерштрасс леммасига кўра ҳар қандай $\{x_n\} (\{x_n \in X, n = 1, 2, \dots\})$ кетма-кетликдан a га яқинлашувчи $\{x_{n_k}\}$ қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин: $x_{n_k} \rightarrow a$. Равшанки, бу a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлади. X ёпиқ тўплам бўлгани учун $a \in X$ бўлади. Демак, X компакт тўплам. Теорема исбот бўлди.

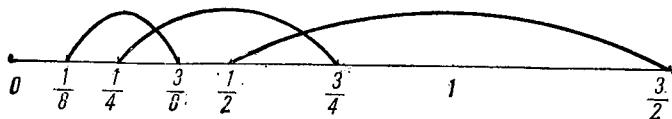
Энди компакт тўпламнинг муҳим хоссасини келтирамиз.

$X \subset R$ — бирор тўплам бўлсин. Ҳар бир элементи интервалдан ибрарат $S = \{\sigma\}$ интерваллар системасини олайлик.

5.15- таъриф. Агар X тўпламнинг ҳар бир a нуқтаси учун $S = \{\sigma\}$ система шу нуқтани ўз ичига оладиган σ интервал топилса, $S = \{\sigma\}$ система X тўпламни ёпади (қоплайди) дейилади.

Масалан $X = (0, 1)$ бўлсин. Қўйидаги

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \dots, \left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right), \dots$$



39- чизма

интерваллар системасин олайлиқ. Равшанки, $X = (0, 1)$ түплемнинг ҳар бир нүктаси бу интерваллар системасининг камида битта интервалида жойлашган бўлади. Демак, $S = \left\{ \left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n} \right), n = 1, 2, \dots \right\}$ система $X = (0, 1)$ түплемни ёпди (39- чизма).

Шуни ҳам айтиш керакки, агар бу $S = \left\{ \left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n} \right), n = 1, 2, \dots \right\}$ системадан бирорта $\left(\frac{1}{2^{n_0}}, \frac{3}{2^{n_0}} \right)$ интервални чиқариб ташланса, қолган интерваллардан иборэт

$$S_0 = S \setminus \left\{ \left(\frac{1}{2^{n_0}}, \frac{3}{2^{n_0}} \right) \right\}$$

система $X = (0, 1)$ түплемни ёпа олмайди.

Энди компакт түплемда узлуксиз бўлган функцияларнинг баъзи бир хоссаларини келтирамиз.

1°. Агар $f(x)$ функция X компакт түплемда узлуксиз бўлса, у чегараланган бўлади.

2°. Агар $f(x)$ функция X компакт түплемда узлуксуз бўлса, функция шу түплемда ўзининг аниқ чегараларига эришади, яъни шундай $x_0 \in X$, $x_1 \in X$ нүкталар мавжудки,

$$f(x_0) = \sup_{x \in X} \{f(x)\}, f(x_1) = \inf_{x \in X} \{f(x)\}$$

бўлади.

3°. Агар $f(x)$ функция X компакт түплемда узлуксиз бўлса, функция X да текис узлуксиз бўлади.

Биз бу хоссаларнинг бирини, масалан 1° ни исботлаймиз.

1° хоссанинг исботи. X — компакт түплем бўлиб, бу түплемда $f(x)$ функция узлуксиз бўлсин. Нуқтада узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссасига кўра (7- §) $\forall x \in X$ нинг шундай етарли кичик атрофи $U(x)$ мавжудки, бу атрофда $f(x)$ функция чегараланган бўлэди. Бундай нүкта атрофлари $U(x)$ интерваллардан ($x \in X$) S система тузамаз: $S = \{U(x) : x \in X\}$. Равшанки, S система X түплемни ёпади. X компакт түплем бўлгани сабабли, Гейне-Борель* леммасига асосан бу системадан X түплемни ёпувчи чекли $S^* = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ системани ажратиш мумкин. Ҳар бир U_k ($k = 1, 2, \dots, n$) атрофда

* Гейне-Борель леммаси. Агар чегараланган ёлик X түплем чексиз интерваллар системаси $\{\sigma\}$ билан ёпишган бўлса, у ҳолда $\{\sigma\}$ системадан X түплемни ёпувчи чекли $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ система ажратиш мумкин.

$f(x)$ функция чегараланган, яъни шундай m_k , M_k ($m_k, M_k = \text{const}$, $k = 1, 2, \dots, n$) сонлар топиладики: $\forall x \in U_k$ лар учун $m_k < f(x) < M_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Агар m_1, m_2, \dots, m_n — сонларнинг энг кичигини m деб M_1, M_2, \dots, M_n сонларнинг эса энг каттасини M деб олсак, у ҳолда $\forall x \in X$ лар учун $m < f(x) < M$ бўлади. Бу эса $f(x)$ функцияйнинг X тўпламда чегараланганилигини билдиради. 1° хосса исбот бўлди.

11- §. Узлуксиз функциялар фазоси

5.16- таъриф. X тўпламда узлуксиз бўлган функциялардан иборат тўплам *узлуксиз функциялар фазоси* деб аталади ва уни $C(\bar{X})$ орқали белгиланади.

Биз X тўпламда узлуксиз бўлган $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар йиғиндиси, айримаси, кўпайтмаси ва нисбати яна узлуксиз функция, яъни $f(x) \in C(X)$, $g(x) \in C(X)$ дан

$$f(x) \pm g(x) \in C(X),$$

$$f(x) \cdot g(x) \in C(X);$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in C(X) \quad (\text{бунда } g(x) \neq 0, x \in X)$$

келиб чиқишини кўриб ўтдик.

Демак, $C(X)$ тўпламда ҳақиқий сонлар тўплами R , яқинлашувчи кетма-кетликлар тўплами c даги сингари қўшиш, айриш, кўпайтириш ва бўлиш амалларини бажариш мумкин.

$X \subset R$ компакт тўплам бўлиб, $C(\bar{X})$ эса шу тўпламда узлуксиз функциялар фазоси бўлсин. $C(X)$ фазода унинг исталган икки элементи орасидаги «масофа» тушунчасини киритиш мумкин.

Фараз қилайлик, $f(x) \in C(X)$, $g(x) \in C(X)$ бўлсин. Бу элементлар функциялар) орасидаги «масофа» деб қуайдаги

$$\rho(f(x), g(x)) = \rho(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

сонга айтамиз.

5.13- теорема. $\forall f(x) \in C(X)$, $\forall g(x) \in C(X)$ функциялар учун шундай $x_0 \in \bar{X}$ нуқта топиладики,

$$\rho(f, g) = |f(x_0) - g(x_0)|$$

бўлади.

Исбот. Модомики, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X да узлуксиз экан, унда $f(x) - g(x)$ функция ҳам X тўпламда узлуксиз бўлади. Муракаб функцияйнинг узлуксизлиги ҳақидаги теоремага кўра $\varphi(x) = |f(x) - g(x)|$ функция ҳам X тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлади. Узлуксиз функцияйнинг хоссасига асосан (7- §) шундай $x_0 \in \bar{X}$ нуқта топиладики, $\varphi(x_0) = \sup_{x \in X} \varphi(x)$ бўлади. Демак,

$$\rho(f, g) = |f(x_0) - g(x_0)|.$$

Энди $\rho(f, g)$ нинг хоссаларини келтирамиз.

1°. $\forall f(x) \in C(X), \forall g(x) \in C(X)$ учун $\rho(f, g) \geq 0$ ва $\rho(f, g) = 0$ дан $f(x) \equiv g(x)$ келиб чиқади ва аксинча.

Исбот. $\rho(f, g)$ нинг таърифидан бевосита унинг манфий эмаслиги ($\rho(f, g) \geq 0$) кўринади. $\rho(f, g) = 0$ бўлса, бундан $f(x) \equiv g(x)$ бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, агар бирор $x_1 \in X$ нуқтада $f(x_1) \neq g(x_1)$ бўлса, унда $|f(x_1) - g(x_1)| > 0$ бўлиб,

$\sup |f(x) - g(x)| \geq |f(x_1) - g(x_1)| > 0$, яъни $\rho(f, g) > 0$ бўлади. Демак, $\rho(f, g) = 0$ дан $f(x) = g(x)$ келиб чиқади.

Равшанки, агар $f(x) = g(x)$ бўлса, ўнда $\rho(f, g) = 0$ бўлади.

2°. $\forall f(x) \in C(X), \forall g(x) \in C(X)$ учун

$$\rho(f, g) = \rho(g, f)$$

бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $\forall f(x) \in C(X), \forall g(x) \in C(X)$ функциялар учун

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)| = \rho(g, f)$$

бўлади.

3°. $\forall f(x) \in C(X), \forall g(x) \in C(X)$ ва $\forall h(x) \in C(X)$ функциялар учун

$$\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g) \quad (5.7)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. Ушбу

$$|f(x) - g(x)| = |[f(x) - h(x)] + [h(x) - g(x)]|$$

тенгликтан

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$

тенгсизликнинг ўринли эканини, унга кўра ушбу

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| &\leq \sup_{x \in X} \{ |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \} \leq \\ &\leq \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in X} |h(x) - g(x)| \end{aligned}$$

тенгсизликнинг ўринли эканини топамиз. Демак, (5.7) тенгсизлик исбот этилди.

Бу (5.7) тенгсизлик одатда *учбуручак тенгсизлиги* деб юритилади.

6- бөб

ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕҢЦИАЛИ

Функцияниң ҳосиласи ва дифференциали түшүнчалари математик анализ курсининг фундаментал түшүнчаларидандир.

Биз ушбу бобда функция ҳосиласи ва дифференциали түшүнчалари билан танишамиз, функцияларниң ҳосиласи ва дифференциалини ҳисоблашни, шунингдек дифференциал ҳисобнинг асосий теоремаларини ўрганамиз.

1- §. Функцияниң ҳосиласи

1. Функция ҳосиласининг таърифлари. $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлсин. Бу интервалда x_0 нуқта олиб, унга шундай Δx ($\Delta x \leq 0$) орттирма берайликки, $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ бўлсин. Натижада $f(x)$ функция ҳам x_0 нуқтада

$$\Delta y = f(x_0) - f(x_0 + \Delta x)$$

орттирмага эга бўлади.

Ушбу

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

($\Delta x \neq 0$) нисбатни қараймиз. Равшанки, бу нисбат Δx нинг функцияси бўлиб, у Δx нинг нолдан фарқли қийматларида, жумладан, ноль нуқтанинг етарли кичик

$$U_\delta(0) = \{\Delta x \in R : -\delta < \Delta x < \delta, \Delta x \neq 0\}$$

($\delta > 0$) атрофида аниқланган. $\Delta x = 0$ нуқта $U_\delta(0)$ тўпламининг лимит нуқтаси. Энди $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг лимитини қараймиз, бу лимит функцияниң ҳосиласи түшунчасига олиб келади.

6.1- таъриф. Агар $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг лимити

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $f(x)$ функцияниң x_0 нуқтадаги ҳосиласи деб аталади ва

$$f'(x_0), \text{ ёки } y'_{x=x_0}, \text{ ёки } \left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$

белгилар ёрдамида ёзилади.

Демак,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (6.1)$$

Бунда $x_0 + \Delta x = x$ деб олайлик. Унда $\Delta x = x - x_0$ ва $\Delta x \rightarrow 0$ да $x \rightarrow x_0$ бўлиб, натижада

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

бўлади. Демак, $f(x)$ функцияниң x_0 нуқтадаги ҳосиласи $x \rightarrow x_0$ да

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

нисбатнинг лимити сифатида ҳам таърифланиши мумкин:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (6.1')$$

Агар $f(x)$ функция (a, b) интервалнинг ҳар бир x нуқтасида ҳосила-га эга бўлса, бу ҳосила x ўзгарувчининг функцияси бўлади.

Мисоллар

1. $f(x) = C = \text{const}$ бўлсин. Равшанки, бу функцияниң $x \in R$ нуқтадаги орттирамаси

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$$

бўлиб, ундан

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

келиб чиқади. Демак, ўзгармас соннинг ҳосиласи нолга тенг.

2. $y = f(x) = x$ бўлсин. Бу функция учун

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = 1$$

бўлиб, ундаи $f'(x) = x$ функцияниң ихтиёрий x нуқтадаги ҳосиласи $y' = 1$ бўлишини топамиз.

3. $f(x) = |x|$ бўлсин. Бу функцияниң $x = 0$ нуқтадаги ортти-рамаси $\Delta y = |\Delta x|$ бўлади, аммо $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нинг лимити мавжуд бўл-

майди, чунки $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$. Демак, $f(x) = |x|$ функция $x = 0$ нуқтада ҳосилага эга эмас.

4. $f(x) = e^x$ функцияниң $x = 1$ нуқтадаги ҳосиласини топинг. Функция ҳосиласининг (6.1') таърифидан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} y'|_{x=1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t+1} - e}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e(e^t - 1)}{t} = e \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = \\ &= e \cdot \ln e = e. \end{aligned}$$

Демак, $(e^x)'|_{x=1} = e$.

5. $f(x) = \ln x$ ($x > 0$) функциянынг ихтиёрий $x > 0$ нүктадаги ҳосиласи ҳисоблансан. Берилган функциянынг $x > 0$ нүктадаги ортигаси

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

бўлади. Агар ушбу

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = 1$$

маълум лимитни эътиборга олсак, унда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}$ лимит ўринли

бўлади. Демак, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$,

6. $f(x) = \cos x$ функциянынг ихтиёрий $x \in R$ нүктадаги ҳосиласини ҳисобланг. Бу функция учун

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}$$

бўлиб,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x$$

бўлади. Демак, $(\cos x)' = -\sin x$, $\forall x \in R$.

5. $f(x) = 1/\sqrt{x}$ ($x > 0$) функциянынг $\forall x \in (0, +\infty)$ нүктадаги ҳосиласини топинг. Бу функциянынг ҳосиласи x ўзгарувчининг ушбу

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

функцияси бўлади.

6.2- таъриф. Агар $\Delta x \rightarrow +0$ ($\Delta x \rightarrow -0$) да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг лимити

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\left(\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $f'(x)$ функциянынг x_0 нүктадаги ўнг (чап) ҳосиласи деб аталади ва уни $f'(x_0 + 0)$ ($f'(x_0 - 0)$) каби белгиланади.

Одатда функцияниң үнг ва чап ҳосилалари бир томонли ҳосилалар деб аталади.

Мисол. $f(x) = |x|$ ни қарайлик. Бу функцияни мазкур пункттинг 3- мисолида күрганмиз. Маълумки, $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$. Демак, $f(x) = |x|$ функцияниң $x = 0$ нуқтадаги үнг ҳосиласи 1 га, чап ҳосиласи -1 га тенг.

Функция ҳосиласи ҳақидаги 6.1 ва 6.2- таърифлардан ҳамда функция лимити ҳақидаги (4- боб, 3- § га қаранг) теоремалардан қийидагилар келиб чиқади:

а) агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, функция шу нуқтада бир томонли $f'(x_0 + 0)$, $f'(x_0 - 0)$ ҳосилаларга ҳам эга бўлиб,

$$f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0)$$

тенгликлар ўринли бўлади.

б) агар бирор $U(x_0)$ атрофда узлуксиз $f(x)$ функция x_0 нуқтада бир томонли $f'(x_0 + 0)$ ва $f'(x_0 - 0)$ ҳосилаларга эга бўлиб,

$$f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0)$$

тенгликлар ўринли бўлса, функция шу нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга ва

$$f'(x_0) = f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0)$$

тенгликлар ҳам ўринли бўлади.

6.1- эслатма. Агар $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбаттинг лимити аниқ ишорали чексиз, яъни

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \pm \infty$$

бўлса, уни ҳам $f(x)$ функцияниң x_0 нуқтадаги ҳосиласи деб юритилади. Бундай ҳосила чексиз ҳосила деб аталади.

2. Ҳосиланинг геометрик ва механик маънолари.

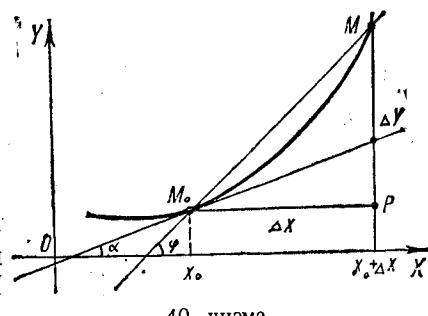
а) Ҳосиланинг геометрик маъноси. $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. Ҳосила таърифига кўра $(x_0 + \Delta x \in (a, b))$,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

бўлади. $f(x)$ функцияниң графиги бирор Γ чизиқни ифодаласин дейлик (40- чизма).

Энди Γ чизиқка унинг $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқтасида урнимга ўтказиш масаласин қарайлик.

Г чизиқда M_0 нуқтадан фарқли $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ нуқтани олиб, бу нуқталар орқали $M_0 M$ кесувчи ўтказамиз. $M_0 M$ кесувчи Ox ўқи билан ташкил эт-



40- чизма

тган бурчакни φ билан белгилайлык. Равшанки, φ бурчак Δx га бөллиқ бўлади: $\varphi = \varphi(\Delta x)$.

6.3- таъриф. Агар $M_0 M$ кесувчининг M нуқта Γ чизиқ бўйлаб M_0 га интилгандағи (яъни $\Delta x \rightarrow 0$ даги) лимит ҳолати мавжуд бўлса, кесувчининг бу лимит ҳолати Γ чизиқка M_0 нуқтада ўтказилган уринма деб аталади.

Уринма—тўғри чизиқдан иборат. Маълумки, M_0 нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ M_0 нуқтанинг координаталари ҳамда бу тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти орқали тўлиқ аниқланади.

Демак, $f(x)$ функция графигига M_0 нуқтада ўтказилган уринманинг мавжуд бўлиши учун

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \alpha$$

лимитнинг мавжудлигини кўрсатиш етарли, бунда α — уринманинг Ox ўқ билан ташкил этган бурчаги.

Ҳақиқатан ҳам, $\Delta MM_0 P$ дан:

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

ундан эса

$$\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

бўлишини топамиз. $u = \operatorname{arctg} t$ функциянинг узлуксизлигидан фойда-лансанак,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{arctg} \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right] = \\ &= \operatorname{arctg} f'(x_0) \end{aligned}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x)$ мавжуд ва

$$\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} f'(x_0).$$

Кейинги тенгликдан

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

бўлишини топамиз. Шундай қилиб, $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, бу функция графигига $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринма мавжуд. Функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи $f'(x_0)$ эса бу уринманинг бурчак коэффициентини ифодалайди. Уринманинг тенгламаси эса ушбу

$$z = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

кўринишида бўлади.

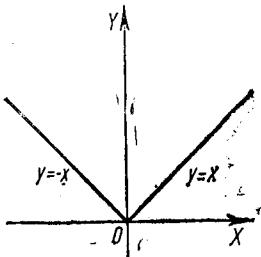
Масалан, $y = x^2$ параболанинг $x = 1$ нуқтадаги уринмаси ($y'_{x=1} = 2$) $z = 1 + 2(x - 1)$, яъни

$$z = 2x - 1$$

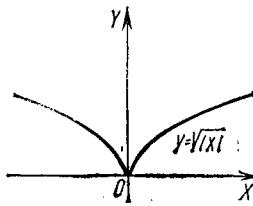
тенглама билан ифодаланади.

Агар $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нүктада бир-бирига тенг бўлмаган $f'(x_0 + 0), f'(x_0 - 0)$ бир томонли ҳосилаларга эга бўлса, шу $f(x)$ функция графигига $M_o(x_0, f(x_0))$ нүктада бир томонли уринмалар ўтказиш мумкин ва бу уринмалар устма-уст тушмайди. Бу ҳолда $f(x)$ функция графиги $(x_0, f(x_0))$ нүктада «синади» дейиш мумкин.

Масалан, маълумки, $f(x) = |x|$ функцияниң $x = 0$ нүктадаги бир томонли ҳосилалари $f'(+0) = 1, f'(-0) = -1$ бўлади. Бу функция графигига $(0, 0)$ нүктада ўтказилган бир томонли уринмалар $y = x$ ва $y = -x$ бўлиб, функция графиги $x = 0$ нүктада «синади» (41- чизма).



41- чизма



42- чизма

Фараз қиласайлик, $f(x)$ функцияниң x_0 нүктадаги ҳосиласи $+\infty$, яни $f'(x_0) = +\infty$ бўлсин. Энди

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

эканини эътиборга олиб, топамиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg} (f'(x_0)) = \operatorname{arctg} (+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Бу эса $f(x)$ функция графигига $(x_0, f(x_0))$ нүктада ўтказилган уринма Ox ўқи билан $\frac{\pi}{2}$ га тенг бурчак ташкил этишини кўрсатади.

Демак, $f'(x_0) = +\infty$ бўлганда $f(x)$ функция графигига $(x_0, f(x_0))$ нүктада ўтказилган уринма Ox ўқига перпендикуляр бўлади.

Худди шунингдек, $f'(x_0) = -\infty$ бўлганда $f(x)$ функция графигига $(x_0, f(x_0))$ нүктада ўтказилган уринма ҳам Ox ўқига перпендикуляр бўлади.

Масалан, $f(x) = \sqrt{|x|}$ функцияниң $x = 0$ нүктадаги ўнг ҳосиласи

$$f'(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{|x|} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty,$$

шунга ўхшаш, $x = 0$ нүктадаги чап ҳосила учун $f'(-0) = -\infty$ га эгамиш. Демак, берилган функция графигига $(0, 0)$ нүктада ўтказилган бир томонли уринмалар Oy ўқидан иборатdir (42- чизма).

б) ҳосиланинг механик маъноси. Моддий нүктанинг тўғри чизикли ҳаракати $s = f(t)$ тенглама билан ифодаланган бўлсин, бунда t

вақт, s шу вақт ичидә ўтилған йўл (масофа). Бу қонун бўйича ҳаракат қилаётган нуқтанинг t_0 моментдаги оний тезлигини топиш масаласини қарайлик. t вақтнинг t_0 қиймати билан бирга $t_0 + \Delta t$ ($\Delta t > 0$) қийматини ҳам олиб, бу нуқталарда $s = f(t)$ нинг қийматларини топамиз. Моддий нуқта Δt вақт ичидә

$$\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$$

масофани ўтади ва унинг $[t_0, t_0 + \Delta t]$ сегментдаги ўртача тезлиги

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

бўлади. $\Delta t \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ нисбатнинг лимити моддий нуқтанинг t_0 моментдаги оний тезлиги v ни ифодалайди:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Ҳосила таърифига кўра

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = f'(t_0).$$

Демак, $s = f(t)$ функциянинг t_0 нуқтадаги ҳосиласи $s = f(t)$ қонун билан ҳаракат қилаётган моддий нуқтанинг t_0 моментдаги оний тезлигини билдиради.

3. Функциянинг узлуксиз бўлиши билан унинг ҳосилага эга бўлиши орасидаги боғланиш. $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. Ҳосила таърифига кўра,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

яъни $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0)$.

Энди

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \tag{6.2}$$

деб белгилаймиз. Равшанки, α ўзгарувчи миқдор бўлиб, у Δx га боғлиқ ва $\Delta x \rightarrow 0$ да нолга интилади.

(6.2) тенглиқдан топамиз:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x. \tag{6.3}$$

Одатда (6.3) формула функция орттириласининг формуласи деб атади. Шу формулага кўра

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x] = 0$$

келиб чиқади. Бу $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз эканини билдиради.

Шундай қилиб, қуйидаги теоремага келамиз:

6.1-теорема. Агар $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нүктада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, функция шу нүктада узлуксиз бўлади.

6.2-эслатма. Функцияниң бирор нүктада узлуксизлигидан унинг шу нүктада чекли ҳосилага эга бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Масалан, $y = |x|$ функция $x = 0$ нүктада узлуксиз бўлса ҳам, у шу нүктада ҳосилага эга эмас.

2-§. Тескари функцияниң ҳосиласи. Мураккаб функцияниң ҳосиласи

1. Тескари функцияниң ҳосиласи. $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, бу функция тескари функцияниң мавжудлиги ҳақидаги 5.9-теореманинг барча шартларини қаноатлантириши.

6.2-теорема. Агар $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нүктада $f'(x_0) \neq 0$ ҳосилага эга бўлса, бу функцияга тескари $x = f^{-1}(y)$ функция x_0 нүктага мос бўлган y_0 ($y_0 = f(x_0)$) нүктада ҳосилага эга ва

$$\left[f^{-1}(y) \right]'_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

тенглик ўринли.

Исбот. $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нүктада $f'(x_0) \neq 0$ ҳосилага эга бўлсин. (6.3) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$f(t) - f(x_0) = f'(x_0)(t - x_0) + \alpha(t - x_0), \quad t \in (a, b), \quad (6.4)$$

бунда $t \rightarrow x_0$ да $\alpha \rightarrow 0$ ($\alpha = \alpha(t)$, $\lim_{t \rightarrow x_0} \alpha(t) = 0$). Энди $f(x)$ функцияниң t нүктадаги қийматини $f(t) = z$ деб белгилаймиз. Унда $t = f^{-1}(z)$, шунисдек $x_0 = f^{-1}(y_0)$ бўлади. Натижада (6.4) тенглик ушбу

$$\begin{aligned} z - y_0 &= f'(x_0) [f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)] + \alpha(f^{-1}(z)) [f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)] = \\ &= [f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)] [f'(x_0) + \alpha(f^{-1}(z))] \end{aligned}$$

кўринишга келади. Кейинги тенгликтан эса

$$\frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)}{z - y_0} = \frac{1}{f'(x_0) + \alpha(f^{-1}(z))}$$

келиб чиқади. $z \rightarrow y_0$ да лимитга ўтиб қўйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)}{z - y_0} &= \lim_{z \rightarrow y_0} \frac{1}{f'(x_0) + \alpha(f^{-1}(z))} = \\ &= \frac{1}{f'(x_0) + \lim_{z \rightarrow y_0} \alpha(f^{-1}(z))} = \frac{1}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

Демак,

$$\lim_{z \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)}{z - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Хосила таърифига кўра

$$\lim_{z \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)}{z - y_0} = [f^{-1}(y)]'_{y=y_0}$$

бўлиб, бундан

$$[f^{-1}(y)]'_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

тенгликинг ўринли экани келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

2. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. $u = f(x)$ функция (a, b) интервалда, $y = F(u)$ функция эса (c, d) интервалда аниқланган бўлиб бу функциялар ёрдамида $y = F(f(x)) = \Phi(x)$ мураккаб функция тузилган бўлсин (бунда, албатта, $x \in (a, b)$ да $u = f(x) \in (c, d)$ бўлиши талаб қилинади).

6.3-теорема. Агар $u = f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлиб, $y = F(u)$ функция эса x_0 нуқтага мос u_0 ($u_0 = f(x_0)$) нуқтада $F'(u_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда мураккаб функция $\Phi(x) = F(f(x))$ ҳам x_0 нуқтада ҳосилага эга ва

$$\Phi'(x_0) = [F(f(x))]'_{x=x_0} = F'(u_0) \cdot f'(x_0) \quad (6.5)$$

формула ўринли.

Исбот. $u = f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада, $y = F(u)$ функция эса мос u_0 ($u_0 = f(x_0)$) нуқтада ҳосилага эга бўлсин. (6.3) формуладан фойдаланиб топамиш:

$$f(t) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (t - x_0) + \alpha(t) \cdot (t - x_0), \quad (6.6)$$

$$F(s) - F(u_0) = F'(u_0) \cdot (s - u_0) + \beta(s) \cdot (s - u_0) \quad (6.7)$$

бунда

$$\lim_{t \rightarrow x_0} \alpha(t) = 0, \lim_{s \rightarrow u_0} \beta(s) = 0.$$

Мураккаб функция $\Phi(x) = F(f(x))$ нинг x_0 нуқтадаги ортигаси $\Phi(t) - \Phi(x_0)$ ни юқоридаги (6.6) ва (6.7) муносабатлардан фойдаланиб қўйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} \Phi(t) - \Phi(x_0) &= F(f(x)) - F(f(x_0)) = F'(u_0) \cdot [f'(x_0) \cdot (t - x_0) + \\ &+ \alpha(t) \cdot (t - x_0)] + \beta(f(t)) \cdot [f(t) - f(x_0)] = F'(u_0) \cdot f'(x_0) \cdot (t - x_0) + \\ &+ F'(u_0) \alpha(t) (t - x_0) + \beta(f(t)) \cdot [f(t) - f(x_0)]. \end{aligned}$$

Энди бу тенгликинг ҳар икки томонини $t - x_0$ га бўлиб, сўнгра $t \rightarrow x_0$ да лимитга ўтамиш:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{\Phi(t) - \Phi(x_0)}{t - x_0} &= F'(u_0) \cdot f'(x_0) + F'(u_0) \cdot \lim_{t \rightarrow x_0} \alpha(t) + \\ &+ \lim_{t \rightarrow x_0} \beta(f(t)) \cdot \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}. \end{aligned}$$

Бундан $t \rightarrow x_0$ да $\alpha(t) \rightarrow 0$, $\beta(f(t)) \rightarrow 0$ эканини эътиборга олсак, (6.5) формула келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

3-§. Ҳосила ҳисоблашнинг содда қоидалари.

Элементар функцияларнинг ҳосилалари

Биз ушбу параграфда икки функция йигиндиси, айрмаси, кўпайтмаси ва нисбатининг ҳосилаларини топиш қоидаларини келтирамиз. Сўнгра элементар функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) интервалда аниқланган бўлсин.

1. Икки функция йигиндиси ҳамда айрмасининг ҳосиласи. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири $x \in (a, b)$ нуқтада $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда $f(x) \pm g(x)$ функция ҳам x нуқтада ҳосилага эга ва

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x) \quad (6.8)$$

формула ўринли.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x \in (a, b)$ нуқтада $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Таърифга кўра ($t \in (a, b)$, $t \neq x$):

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Энди $F(x) = f(x) \pm g(x)$ деб белгилаб, қўйидагини топамиз:

$$\frac{F(t) - F(x)}{t - x} = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \pm \frac{g(t) - g(x)}{t - x}.$$

Бу тенглиқда $t \rightarrow x$ да лимитга ўтсак, қўйидагига эга бўламиз:

$$F'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{F(t) - F(x)}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \pm \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} = \\ = f'(x) \pm g'(x).$$

2. Икки функция кўпайтмасининг ҳосиласи. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири $x \in (a, b)$ нуқтада $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда $f(x) \cdot g(x)$ функция ҳам x нуқтада ҳосилага эга ва

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (6.9)$$

формула ўринли.

$\Phi(x) = f(x) \cdot g(x)$ деб белгилаб, $\frac{\Phi(t) - \Phi(x)}{t - x}$ нисбатни қўйидаги-

$$\frac{\Phi(t) - \Phi(x)}{t - x} = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \cdot g(x) + \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \cdot f(t)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу тенглиқда $t \rightarrow x$ да лимитга ўтиб қўйидагини топамиз:

$$\Phi'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\Phi(t) - \Phi(x)}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \left[\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \cdot g(x) + \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \cdot f(t) \right] = \\ = g(x) \cdot \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} + \lim_{t \rightarrow x} f(t) \cdot \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} = \\ = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Бу эса (6.9) формулани исботлайди.

3. Иккии функция нисбатининг ҳосиласи. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бирни $x \in (a, b)$ нуқтада $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, $g(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{f(x)}{g(x)}$ функция ҳам x нуқтада ҳосилага эга ва

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad (6.10)$$

формула ўринли.

(6.10) формулани исботлашдан аввал функция ҳосиласи таърифидан фойдаланиб $\frac{1}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) функциянинг $x \in (a, b)$ нуқтадаги ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{g(x)} \right]' &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{\frac{1}{g(t)} - \frac{1}{g(x)}}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\frac{g(x) - g(t)}{g(t) \cdot g(x)}}{t - x} = \\ &= \frac{-1}{g(x)} \cdot \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \cdot \lim_{t \rightarrow x} \frac{1}{g(t)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}. \end{aligned}$$

Демак,

$$\left[\frac{1}{g(x)} \right]' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0). \quad (6.11)$$

Энди (6.9) ва (6.11) формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' &= \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right]' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left[\frac{1}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)}{g(x)} - \\ &- \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}. \end{aligned}$$

Бу (6.10) формуланинг ўринли эканини исботлайди.

6.1-натижада 1) Юқорида келтирилган (6.8) ва (6.9) формуласлар ёрдамида қўшилувчилар ҳамда кўпаювчилар сони ихтиёрий чекли бўлган ҳолда ҳам тегишли формулаларни исботлаш мумкин.

2) (6.9) формуладан $g(x) = c$, $c = \text{const}$ бўлганда

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$$

формула келиб чиқади. Бундан ўзгармас сонни ҳосила ишорасидан ташқариға чиқариш мумкинлиги келиб чиқади.

4. Элементар функцияларнинг ҳосилалари. Функция ҳосиласи таърифидан фойдаланиб, элементар функцияларнинг ҳосилаларини топамиз.

1°. $y = x^\mu$ ($x > 0$) даражали функциянинг ҳосиласи. Бу функция учун қўйидагига эгамиз:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^\mu - x^\mu = x^\mu \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^\mu - 1 \right]$$

ва

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^\mu \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^\mu - 1 \right]}{\Delta x} = x^{\mu-1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Үндән учинчи муҳим лимитдан (5-боб, 6-§) фойдаланиб топамиз:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x^{\mu-1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\mu-1} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \mu \cdot x^{\mu-1}.$$

Демак, $(x^\mu)' = \mu \cdot x^{\mu-1}$.

Хусусан $\mu = -1$ бўлганда

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

формула ўринли.

2°. $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) кўрсаткичли функциянинг ҳосилиаси. Бу функция учун қуидагига эгамиз:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)$$

ва

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.$$

Иккинчи муҳим лимитдан (5-бобнинг 6-§) фойдаланиб топамиз:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Демак,

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

3°. $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1, x > 0$) логарифмик функциянинг ҳосилиаси. Бу функция учун қуидагига эгамиз:

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

ва

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right].$$

Энди биринчи муҳим лимитдан (5-бобнинг 6-§) фойдаланиб топамиз:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] = \frac{1}{x} \cdot \log_a e.$$

Демак,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e.$$

4°. Тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари.
Ушбу $y = \sin x$ функция учун қўйидагига эгамиз:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

ва

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Охирги тенглиқда $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

Демак,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Шунга ўхшаш (6-бобнинг 1-§ га қаранг) $(\cos x)' = -\sin x$ формула ҳам исботланади.

Энди $y = \operatorname{tg} x$ функциясини $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ нисбатининг ҳосиласи формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Демак,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Худди шунга ўхшаш қўйидаги формулалар ҳам исботланади:

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad (\sec x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad (\csc x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

5°. Тескари тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари. Тескари функциясини топиш қоидасидан фойдаланиб, тескари тригонометрик функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз. Ушбу $y = \arcsin x$ функцияни олайлик. Бу функция $x = \sin y$ функцияга тескари бўлиб, уни $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда қарасак,

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

келиб чиқади. Демак,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1),$$

Худди шунга ўхшаш қўйидаги формулалар ҳам исботланади:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1),$$

$$(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

6°. Гиперболик функцияларнинг ҳосилалари. Энди гиперболик функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаيمиз. Бунда ҳосила ҳисоблашдаги содда қоидалардан ва кўрсаткичли функция ҳосиласи формуласидан фойдаланамиз. Содда ҳисоблашлар ёрдамида $y = \operatorname{sh} x$ учун топамиз:

$$y' = (\operatorname{sh} x)' = \left[\frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \right]' = \frac{1}{2} \left(e^x - \frac{1}{e^x} \right)' = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x.$$

Шунга ўхшаш қуийдаги формулалар ҳам исботланади:

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} (x \neq 0).$$

4. Ҳосилалар жадвали. Биз ушбу пунктда элементар функциялар ҳосилалари учун топилган формулаларни жамлаб, уларни жадвал сифатида келтирамиз:

$$1^\circ. (x^\mu)' = \mu \cdot x^{\mu-1} \quad (x > 0);$$

$$2^\circ. (a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$3^\circ. (\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1);$$

$$\text{Хусусан, } (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0);$$

$$4^\circ. (\sin x)' = \cos x;$$

$$5^\circ. (\cos x)' = -\sin x;$$

$$6^\circ. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k = 0, \pm 1, \dots);$$

$$7^\circ. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \dots);$$

$$8^\circ. (\operatorname{arc} \sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1);$$

$$9^\circ. (\operatorname{arc} \cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1);$$

$$10^\circ. (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$11^\circ. (\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$12^\circ. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$13^\circ. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$14^{\circ}. \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$15^{\circ}. \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (x \neq 0).$$

5. Мисоллар

Қуийидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

1) $y = \ln \sin x$, $x \in (0, \pi)$ бўлсин. Бу функцияни $y = \ln u$, $u = \sin x$ деб қараш мумкин. (6.5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$y' = (\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

2) $y = [u(x)]^{v(x)}$ ($u(x) > 0$) бўлиб, $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар $u'(x)$ ва $v'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Бу ифодани логарифмлаб топамиз:

$$\ln y = v(x) \cdot \ln u(x).$$

Энди мураккаб функциянинг ҳосиласи ((6.5) формулага қаранг) ва кўпайтманинг ҳосиласи ((6.9) формулага қаранг) учун тегишли формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x).$$

Бундан

$$\begin{aligned} y' &= y [v'(x) \cdot \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x)] = \left[u(x) \right]^{v(x)} \cdot \left[v'(x) \cdot \ln u(x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x) \right] \end{aligned}$$

келиб чиқади. Демак,

$$\left(\left[u(x) \right]^{v(x)} \right)' = \left[u(x) \right]^{v(x)} \cdot \left[v'(x) \cdot \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x) \right].$$

Берилган функцияни $e^{v(x) \ln u(x)}$ кўринишда ёзиб олиб, сўнгра унинг ҳосиласини (6.5) ва (6.9) формулалардан фойдаланиб ҳисоблаш мумкин.

4-§. Функциянинг дифференциали

1. Функциянинг дифференциалланувчи бўлиши тушунчаси. $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлсин. $x \in (a, b)$ нуқтани олиб, унга шундай Δx ($\Delta x \leq 0$) ортирма берайликки, $(x_0 + \Delta x) \in (a, b)$ бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функция ҳам x_0 нуқтада $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ортиргмага эга бўлади. Равшанки, Δy ортирма Δx га боғлиқ бўлиб, кўпчилик ҳолларда Δx билан Δy орасидаги боғланиш мураккаб бўлади. Табиийки, бунда Δx га кўра

Δy ни аниқ-жеки тақрибий ҳисоблаш қийинлашади. Натижада орттирмаси Δx орттирма билан соддароқ боғланишда бўлган функцияларни ўрганиш масаласи юзага келади.

6.4-таъриф. Агар $f(x)$ функцияниң $x_0 \in (a, b)$ нуқтадаги орттирмаси Δy ни

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \quad (6.12)$$

кўринишида ифодалаш мумкин бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи деб аталади, бунда $A = \Delta x$ га боғлиқ бўлмаган ўзгармас, α эса Δx га боғлиқ ва $\Delta x \rightarrow 0$ да $\alpha = \alpha(\Delta x) \rightarrow 0$. Агар

$$\alpha \cdot \Delta x = \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = 0 \quad (\Delta x)$$

эканини эътиборга олсак, у ҳолда юқоридаги (6.12) ифода ушбу

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + O(\Delta x) \quad (6.13)$$

кўринишини олади. Функция орттирмаси учун (6.3) формулада $A \cdot \Delta x$ ифода орттирманинг чизиқли бош қисми деб юритилади.

Функцияниң бирор нуқтада дифференциалланувчи бўлиши билан унинг шу нуқтада чекли ҳосилага эга бўлиши орасидаги боғланишини қўйидаги теорема кўрсатади.

6.4-төрима. $f(x)$ функцияниң $x \in (a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиши учун унинг шу нуқтада чекли ҳосилага эга бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Таърифга кўра, $f(x)$ функцияниң $x \in (a, b)$ нуқтадаги орттирмасини (6.13) кўринишда ёзиш мумкин. Шу (6.13) дан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{O(\Delta x)}{\Delta x}$$

тенгликни ёзиш мумкин. Ундан эса

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[A + \frac{O(\Delta x)}{\Delta x} \right] = A,$$

яъни $x \in (a, b)$ нуқтада ҳосиланинг мавжудлиги ва

$$f'(x) = A$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нуқтада чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Ҳосила таърифига кўра

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

бўлади. Агар

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \alpha$$

деб олсақ, ундан

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$$

эканини топамиз. Бу тенгликтеги α миқдор Δx га бөрлиқ вә $\Delta x \rightarrow 0$ да $\alpha \rightarrow 0$. Демак, $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нүктада дифференциалланувчи бўлиб, $A = f'(x)$ бўлади. Теорема исбот бўлди.

Исбот этилган теорема $f(x)$ функцияниң $x \in (a, b)$ нүктада чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиши билан унинг шу нүктада дифференциалланувчи бўлиши эквивалент эканини кўрсатади.

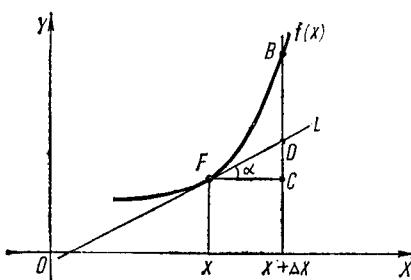
2. Функция дифференциали ва унинг геометрик маъноси. $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, $x \in (a, b)$ нүктада дифференциалланувчи бўлсин. Демак, функцияниң x нүктадаги орттирмаси

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + O(\Delta x)$$

кўринишда ёзилиши мумкин, бунда $A = f'(x)$ бўлади. Бу тенглиқда функция орттирмаси Δy икки қўшилувчи: аргумент орттирмаси Δx га нисбатан чизиқли $A \cdot \Delta x$ ҳамда Δx га нисбатан юқори тартибли ($\Delta x \rightarrow 0$ да) чексиз кичик миқдор $O(\Delta x)$ лар йигиндисидан иборат экани кўринади.

6.5-таъриф. $f(x)$ функция орттирмаси Δy нинг Δx га нисбатан чизиқли бош қисми $A \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x$ берилган $f(x)$ функцияниң x нүктадаги дифференциали деб аталади ва dy ёки $df(x)$ каби белгиланади:

$$dy = df(x) = A \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x.$$



43- чизма

Таърифга кўра $f(x)$ функцияниң x нүктадаги дифференциали Δx нинг чизиқли функцияси бўлиб, у функция орттирмаси Δy дан $O(\Delta x)$ га фарқ қиласди.

Энди $x \in (a, b)$ нүктада дифференциалланувчи бўлган $f(x)$ функцияниң графиги 43-чизмада кўрсатилган чизиқни ифодаласин, дейлик. Бу чизиқни $(x, f(x))$, $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ нүқталарини мос равища F ва B билан белгилайлик. Унда $FC = \Delta x$, $BC = \Delta y$

бўлади. $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нүктада дифференциалланувчи бўлгани учун у x нүктада чекли $f'(x)$ ҳосилага эга. Демак, $f'(x)$ функция графигига унинг $F(x, f(x))$ нүктасида ўтказилган FL уринма мавжуд ва бу уринманинг бурчак коэффициенти $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$. Шу FL уринманинг BC билан кесишган нүктасини D билан белгилайлик. Равшанки, ΔFDC дан $\frac{DC}{CF} = \operatorname{tg} \alpha$ ва ундан $DC = \operatorname{tg} \alpha \cdot FC = = f'(x) \cdot \Delta x$ экани келиб чиқади.

Демак, $f(x)$ функцияниң x нүктадаги дифференциали $dy = f'(x) \times \Delta x$ функция графигига $F(x, f(x))$ нүктада ўтказилган уринма орт-

тирмаси DC ни ($DC = dy$) ифодалайди. Хусусан, $f(x) = x$ бўлганда бу функцияниң дифференциали

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = \Delta x$$

бўлиб,

$$dy = dx = \Delta x$$

бўлади. Бу ҳол эркли ўзгарувчи x нинг эркли орттирмаси Δx ни унинг дифференциали dx билан алмаштирилиши мумкинлигини кўрсатади. Бу $f(x)$ функцияниң x нуқтадаги дифференциалини қўйида-гича

$$dy = f'(x) \cdot dx = y' dx \quad (6.14)$$

ифодалаш мумкин эканини англатади.

6.3-эслатма. Биз $f(x)$ функцияниң x нуқтадаги ҳосиласини $\frac{dy}{dx}$ символ тариқасида белгилаган эдик. (6.14) муносабатдан эса $\frac{dy}{dx}$ функция дифференциали dy иш, аргумент дифференциали dx га нисбатидан иборат экани кўринади. Шуни таъкидлаш лозимки, дифференциалланувчи функциялар учун dy билан dx лар пропорционал ўзгариб, $f'(x)$ пропорционаллик коэффициентини ифодалайди.

Энди функция дифференциалиниң (6.14) ифодасидан фойдала-ниб, элементар функцияларниң дифференциаллари жадвалини келтирамиз:

$$1^{\circ}. d(x^u) = u x^{u-1} \cdot dx \quad (x > 0);$$

$$2^{\circ}. d(a^x) = a^x \cdot \ln a \cdot dx \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$3^{\circ}. d(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_e a \cdot dx \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1); \quad d(\ln x) = \frac{dx}{x};$$

$$4^{\circ}. d(\sin x) = \cos x \cdot dx;$$

$$5^{\circ}. d(\cos x) = -\sin x \cdot dx;$$

$$6^{\circ}. d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k = 0, \pm 1, \dots);$$

$$7^{\circ}. d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx \quad (x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \dots);$$

$$8^{\circ}. d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx \quad (-1 < x < 1);$$

$$9^{\circ}. d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx \quad (-1 < x < 1);$$

$$10^{\circ}. d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot dx;$$

$$11^{\circ}. d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2} \cdot dx;$$

$$12^{\circ}. d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x \cdot dx;$$

$$13^{\circ}. d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x \cdot dx;$$

$$14^\circ. \quad d(\operatorname{th} x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \cdot dx;$$

$$15^\circ. \quad d(\operatorname{cth} x) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \cdot dx \quad (x \neq 0).$$

3. Дифференциаллашнинг содда қоидалари. Мураккаб функцияниң дифференциали. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, $x \in (a, b)$ нуқтада уларниң дифференциаллари $df(x)$, $dg(x)$ мавжуд бўлсин. У ҳолда $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ ва $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) функциялариниң ҳам шу $x \in (a, b)$ нуқтада дифференциаллари мавжуд ва улар учун қўйидаги

$$d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x),$$

$$d[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot dg(x) + g(x) \cdot df(x),$$

$$d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x) \cdot df(x) - f(x) \cdot dg(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

формулалар ўринли.

Ҳақиқатан ҳам, функция дифференциалининг (6. 14) кўринишда ифодаланишидан ва функцияниң ҳосилаларини топиш қоидаларидан фойдаланиб топамиз:

$$d[f(x) \pm g(x)] = (f(x) \pm g(x))' \cdot dx = f'(x)dx \pm g'(x)dx = df(x) \pm dg(x),$$

$$d[f(x) \cdot g(x)] = (f(x) \cdot g(x))' dx = g(x) \cdot f'(x) dx + f(x) \cdot g'(x) dx = g(x) \cdot df(x) + f(x) \cdot dg(x),$$

$$\begin{aligned} d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] &= \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' dx = \frac{g(x) \cdot f'(x) dx - f(x) \cdot g'(x) dx}{g^2(x)} = \\ &= \frac{g(x) \cdot df(x) - f(x) \cdot dg(x)}{g^2(x)}. \end{aligned}$$

Хусусан, $d(c \cdot f(x)) = c \cdot df(x)$ ($c = \text{const}$).

6. 2 - натижада. Юқорида келтирилган формулалардан фойдаланиб, қўшилувчилар ҳамда кўпаювчилар сони ихтиёрий чекли бўлган ҳолда ҳам тегишли формулалар ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин.

Энди мураккаб функцияниң дифференциалини топамиз.

Фараз қиласайлик, $u = f(x)$ функция (a, b) интервалда, $y = F(u)$ функция эса (c, d) интервалда аниқланган бўлиб, бу функциялар ёрдамида $y = F(f(x)) = \Phi(x)$ мураккаб функция тузилган бўлсин.

Мураккаб функцияниң ҳосиласи учун топилган (6. 5) формуладан фойдаланиб, шу мураккаб функцияниң дифференциалини топамиз:

$$d\Phi(x) = d[F(f(x))] = [F(f(x))]' dx = F'(u) \cdot f'(x) dx = F'(u) du.$$

Шуни таъкидлаш лозимки, бу ҳолда du миқдор аргумент u нинг эркли орттирмаси эмас, у x ўзгарувчининг функциясидир.

4. Функция дифференциали ва тақрибий формулалар. Назарий ва айниқса амалий масалаларни ечишда тегишли функцияларниң нуқтадаги қийматларини ҳисоблаш зарурияти туғилади. Кўпинча, бундай функциялар мураккаб бўлиб, уларниң нуқ-

тадаги қийматларини топиш анча қийин бўлади. Бу ҳол функцияниг нуқтадаги қийматини тақрибий ҳисоблаш (уларни ҳисоблаш учун тақрибий формулалар топиш) масаласини юзага келтиради. Функцияниг дифференциали эса тақрибий формулаларни топиш имконини беради.

$f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ нуқтада чекли $f'(x_0) \neq 0$ ҳосилага эга бўлсин. Бу ҳолда функция орттирмасининг формуласини (6.3) ва (6.13) формулаларга қаранг)

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + O(\Delta x)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу формулани ҳамда функция дифференциали учун $dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$ формулани эътиборга олиб топамиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0) \cdot \Delta x + O(\Delta x)}{f'(x_0) \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{1}{f'(x_0)} \cdot \frac{O(\Delta x)}{\Delta x} \right] = 1.$$

Шундай қилиб, $\Delta y \sim dy$. Натижада қуйидаги

$$dy \approx \Delta y,$$

яъни

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (6.16)$$

тақрибий тенгликка келамиз. Равшанки, $\Delta y - dy = O(\Delta x)$. Шунинг учун $\Delta x \rightarrow 0$ да (6.16) тақрибий тенгликнинг нисбий хатоси нолга иштилади, яъни $\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} \rightarrow 0$.

(6.16) формула $x_0 \in (a, b)$ нуқтадаги дифференциалланувчи $f(x)$ функцияниг x_0 нуқтадаги орттирмаси Δy ни унинг шу нуқтадаги дифференциали dy билан алмаштириш мумкинлигини кўрсатади. Бу алмаштиришнинг қуалайлиги шундаки, функция орттирмаси Δy аргумент орттирмаси Δx нинг, умуман айтганда, мураккаб функцияси бўлган ҳолда, функция дифференциали dy эса Δx нинг чизикли функцияси бўлишидадир. Агар $\Delta x = x - x_0$ эканини эътиборга олсак, унда $x_0 + \Delta x = x$ бўлиб, (6.16) формула қуйидаги

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (6.17)$$

кўринишга келади. Бунда $x_0 \in (a, b)$ нуқта $x \in (a, b)$ нуқтадан катта фарқ қилмайдиган, аммо $f(x_0)$ қулайроқ ҳисобланадиган нуқтадир.

Масалан, $f(x) = \sin x$ бўлиб, $\sin 29^\circ$ ни ҳисоблаш талааб этилган бўлсин. Бу ҳолда $x_0 = 30^\circ$ дейиш қулай. (6.17) формулага кўра

$$\sin 29^\circ \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot (29^\circ - 30^\circ) \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} = 0,5 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} \approx$$

$\approx 0,4848$. Бунда 1° нинг радиан ўлчовини ёзиш зарур, чунки бошқа ҳадлар радианларда берилган. Демак, $\sin 29^\circ = 0,4848 (10^{-4}$ аниқликда).

Юқоридаги (6.17) формула $x_0 = 0$ бўлганда ушбу

$$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x \quad (6.18)$$

кўринишни олади.

Маълумки, $x_0 \in (a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи $f(x)$ функция графигига $(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламаси қўйидаги

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

кўринишда ёзилади. Бундан кўринадики, (6. 17) тақрибий формула геометрик нуқтаи назардан, $f(x)$ функция ифодалаган эгри чизиқни x_0 нуқтанинг етарли кичик атрофида шу функция графигига $(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринма билан алмаштирилишини билдиради.

Мисоллар

$f(x)$ функция сифатида $(1+x)^\mu$, $\sqrt{1+x}$, e^x , $\ln(1+x)$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ функцияларни олиб, уларга (6. 18) формулани қўлланиш натижасида қўйидаги тақрибий формулаларни топамиз:

$$(1+x)^\mu \approx 1 + \mu x,$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2} x,$$

$$e^x \approx 1 + x,$$

$$\ln(1+x) \approx x,$$

$$\sin x \approx x,$$

$$\operatorname{tg} x \approx x.$$

5-§. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар

1. Функциянинг юқори тартибли ҳосилалари. $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, унинг ҳар бир x нуқтасида $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Равшанки, $f'(x)$ ҳосила x ўзгарувчининг функцияси бўлади. Бу $f'(x)$ ҳосила ҳам ўз навбатида бирор $x_0 \in (a, b)$ да ҳосилага эга бўлиши мумкин.

6. 6-таъриф. Агар $f(x)$ функция (a, b) интервалнинг ҳар бир $x \in (a, b)$ нуқтасида $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, бу $f'(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада ҳосилага эга бўлса, уни $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги иккинчи тартибли ҳосиласи деб аталади ва $y''|_{x=x_0}$, $f''(x_0)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)|_{x=x_0}$ белгиларнинг бири орқали ёзилади. $f(x)$ функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳ. к. тартибдаги ҳосилалари худди шунга ўхшаш таърифланади.

Умуман, $f(x)$ функция (a, b) интервалнинг ҳар бир $x \in (a, b)$ нуқтасида $(n-1)$ -тартибли $f^{(n-1)}(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу $f^{(n-1)}(x)$ функциянинг $x_0 \in (a, b)$ нуқтадаги ҳосиласи (агар у мавжуд бўлса) $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги n -тартибли ҳосиласи деб аталади ва $y^{(n)}|_{x=x_0}$, $f^{(n)}(x_0)$, $\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)|_{x=x_0}$ ларнинг бири орқали белгиланади. Одатда $f(x)$ функциянинг $f''(x)$, $f'''(x)$, ... ҳосилалари унинг юқори тартибли ҳосилалари дейиллади.

6.4-эслатма. $f(x)$ функцияниң бирор $x \in (a, b)$ нүктөда $f'(x)$ ҳосиасининг мавжудлигидан унинг шу нүктада юқори тартибли ҳосилаларга әга бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Масалан, $f(x) = \sqrt{x^3}$ функция $x \geq 0$ да, жумладан, $x = 0$ нүкта а $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ ҳосилаг эга бўлса ҳам, бу функция $x = 0$ нүкта тада чекли иккинчи тартибли ҳосилага әга эмас.

Мисол. $y = \ln \sin x$ ($\sin x > 0$) бўлсин.

$$y' = \operatorname{ctg} x, \quad y'' = (y')' = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Функцияниң юқори тартибли, масалан, n -тартибли ($n > 2$) ҳосилаларини топиш учун, умуман айтганда, унинг ҳамма олдинги тартибли ҳосилаларини ҳисоблаш керак. Айрим функцияларнинг юқори тартибли ҳосилаларини бир йўла топиш мумкин. Мисол тариқасида баъзи бир элементар функцияларнинг n -тартибли ҳосилаларини топамиз.

1) $y = x^\mu$ бўлсин ($x > 0$ ва $\mu \in R$). Бу функцияниң ҳосилаларини кетма-кет ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} y' &= \mu x^{\mu-1}, \\ y'' &= (y')' = (\mu x^{\mu-1})' = \mu(\mu-1) \cdot x^{\mu-2}, \\ y''' &= (y'')' = [\mu(\mu-1)x^{\mu-2}]' = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}. \end{aligned}$$

Берилган функцияниң n -тартибли ҳосиласи учун ушбу

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)x^{\mu-n} \quad (6.19)$$

формуланинг ўрини бўлишини математик индукция методи ёрдамида кўрсатиш қўйин эмас. Маълумки, $n = 1$ да

$$y' = \mu \cdot x^{\mu-1}$$

бўлади. Энди (6.19) формула $n = k$ да ўринли, яъни

$$y^{(k)} = \mu(\mu-1)\dots(\mu-k+1)x^{\mu-k}$$

бўлсин деб, унинг $n = k + 1$ да ўринли бўлишини кўрсатамиз. Таърифга кўра $y^{(k+1)} = (y^{(k)})'$. Шунинг учун

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= (y^{(k)})' = (\mu \cdot (\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-k+1) \cdot x^{\mu-k})' = \\ &= \mu(\mu-1)\dots(\mu-k+1) \cdot (\mu-k) \cdot x^{\mu-k-1} \end{aligned}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса (6.19) формуланинг $n = k + 1$ да ҳам ўринли бўлишини билдиради. Демак, (6.19) формула ихтиёрий $n \in N$ учун ўринли.

(6.19) да $\mu = -1$ ихтиёрий ҳақиқий сон. Хусусан, $\mu = -1$ бўлсин.

Унда $y = \frac{1}{x}$ функцияниң n -тартибли ҳосиласи

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1) \cdot (-2) \dots (-n) x^{-1-n} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}} \quad (6.20)$$

бўлади.

2) $y = \ln x$ ($x > 0$) функцияниң n -тартибли ҳосиласини топамиз. Бу функцияниң биринчи ҳосиласи $y' = \frac{1}{x}$ бўлишидан ҳамда (6.20) формуладан фойдалансак,

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$$

формула келиб чиқади. Демак,

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}, \quad x > 0. \quad (6.21)$$

3) $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) бўлсин. Бу функцияниң ҳосилаларини кетма-кет ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} y' &= a^x \cdot \ln a, \\ y'' &= (a^x \cdot \ln a)' = a^x \ln^2 a, \\ y''' &= (a^x \cdot \ln^2 a)' = a^x \cdot \ln^3 a. \end{aligned}$$

Бу муносабатларга қараб $y = a^x$ функцияниң n -тартибли ҳосиласи учун ушбу

$$y^{(n)} = a^x \ln^n x$$

формулани ёзамиз. Унинг тўғрилиги яна математик индукция методи ёрдамида осонгина исботланади. Демак,

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a.$$

Хусусан, $(e^x)^{(n)} = e^x$.

4) $y = \sin x$ бўлсин. Маълумки, бу функция учун $y' = \cos x$. Биз уни қўйидагича

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

ёзиб оламиз. Сўнгра $y = \sin x$ функцияниң кейинги тартибли ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} y'' &= (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \\ y''' &= (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \\ y^{(IV)} &= (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Бу ифодалардан эса $y = \sin x$ функцияниң n -тартибли ҳосиласи учун

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

формула келиб чиқади. Унинг тўғрилиги яна математик индукция методи билан исботланади. Демак,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right). \quad (6.22)$$

Худди шунга ўхшаш

$$(\cos x)^{(n)} = \cos \left(x + n \frac{\pi}{2} \right). \quad (6.23)$$

5) $y = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in R$ бўлсин. Бу функцияниң ҳосилаларини кетма-кет ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} y' &= \alpha (1+x)^{\alpha-1} \\ y'' &= \alpha (\alpha-1) (1+x)^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Берилган функцияниң n -тарибли ҳосиласи учун

$$y^{(n)} = \alpha (\alpha-1) (\alpha-2) \dots (\alpha-n+1) (1+x)^{\alpha-n}$$

формуланинг ўринли бўлишини математик индукция методи билан исботлаш қийин эмас. Демак,

$$[(1+x)^\alpha]^{(n)} = \alpha (\alpha-1) (\alpha-2) \dots (\alpha-n+1) (1+x)^{\alpha-n}.$$

2. Содда қоидалар. Лейбниц формуласи.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, улар $x \in (a, b)$ нуқтада n -тарибли $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Буни қуйидагича тушуниш лозим: $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар x нуқтани ўз ичига олган $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ интервалда f' , f'' , ..., $f^{(n-1)}$ ҳамда g' , g'' , ..., $g^{(n-1)}$ ҳосилаларга эга бўлиб, x нуқтада эса $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга. У ҳолда

$$1) [c \cdot f(x)]^{(n)} = c \cdot f^{(n)}(x), \quad c = \text{const}; \quad (6.24)$$

$$2) [f(x) \pm g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x); \quad (6.25)$$

$$3) [f(x) \cdot g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) \cdot g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x) \cdot g'(x) + \\ + C_n^2 f^{(n-2)}(x) \cdot g''(x) + \dots + C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) + \dots + f(x) g^{(n)}(x), \quad (6.26)$$

бунда

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Юқёрида келтирилган (6.24), (6.25) формулалар содда исботланади. Биз (6.26) формуланинг ўринли эканини исботлаймиз.

Мэлумки (6.9) формулага қаранг:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Бу эса $n = 1$ бўлганда (6.26) формуланинг тўғрилигини кўрсатади. Энди (6.26) формула $n = k$ учун тўғри, яъни

$$[f(x) \cdot g(x)]^{(k)} = f^{(k)}(x) \cdot g(x) + C_k^1 f^{(k-1)}(x) \cdot g'(x) + C_k^2 f^{(k-2)}(x) \cdot g''(x) + \\ + \dots + f(x) \cdot g^{(k)}(x)$$

формула ўринли деб, унинг $n = k + 1$ учун тўғрилигини кўрсатмиз. Ҳақиқатан ҳам, таъриғга кўра

$$[f(x) \cdot g(x)]^{(k+1)} = ([f(x) \cdot g(x)]^{(k)})'$$

бўлиб, ундан

$$\begin{aligned} [f(x) \cdot g(x)]^{(k+1)} &= [f^{(k)}(x) \cdot g(x) + C_k^1 f^{(k-1)}(x) \cdot g'(x) + C_k^2 f^{(k-2)}(x) \cdot \\ &\quad \cdot g''(x) + \dots + C_k^i f^{(k-i)}(x) g^{(i)}(x) + \dots + f(x) \cdot g^{(k)}(x)]' = \\ &= f^{(k+1)}(x) \cdot g(x) + f^{(k)}(x) \cdot g'(x) + C_k^1 \cdot f^{(k)}(x) \cdot g'(x) + C_k^2 f^{(k-1)}(x) \cdot \\ &\quad \cdot g''(x) + \dots + C_k^i f^{(k-i+1)}(x) \cdot g^{(i)}(x) + C_k^i f^{(k-i)}(x) g^{(i+1)}(x) + \dots + \\ &\quad + f'(x) \cdot g^{(k)}(x) + f(x) g^{(k+1)}(x) = f^{(k+1)}(x) \cdot g(x) + (C_k^0 + C_k^1) f^{(k)}(x) \cdot \\ &\quad \cdot g'(x) + \dots + (C_k^i + C_k^{i-1}) \cdot f^{(k-i+1)}(x) \cdot g^{(i)}(x) + \dots + f(x) \cdot g^{(k+1)}(x) \end{aligned}$$

бўлиши келиб чиқади ($C_k^0 = 1$).

$$\begin{aligned} \text{Агар } C_k^i + C_k^{i-1} &= \frac{k(k-1) \dots (k-i+1)}{i!} + \frac{k(k-1) \dots (k-i+2)}{(i-1)!} = \\ &= \frac{k(k-1) \dots (k-i+2)(k-i+1) + k(k-1) \dots (k-i+2)i}{i!} = \\ &= \frac{k(k-1) \dots (k-i+2)[(k-i+1)-i]}{i!} = \frac{(k+1)k(k-1) \dots (k-i+2)}{i!} = \\ &= C_{k+1}^i \end{aligned}$$

тенгликни эътиборга олсак, у ҳолда ушбу

$$\begin{aligned} [f(x) \cdot g(x)]^{(k+1)} &= f^{(k+1)}(x) \cdot g(x) + C_{k+1}^1 f^{(k)}(x) \cdot g'(x) + \dots + \\ &\quad + C_{k+1}^i f^{(k-i+1)}(x) \cdot g^{(i)}(x) + \dots + f(x) \cdot g^{(k+1)}(x) \end{aligned}$$

формулага эга бўламиз. Бу эса (6.26) формула $n = k + 1$ бўлгандага тўғри эканини кўрсатади.

Шундай қилиб, (6.26) формула барча n -лар учун тўғридири. Испот этилган (6.26) формула Лейбниц формуласи деб аталади.

Мисол. $y = e^x \cdot \sin x$ функциянинг 100-тағибли ҳосилласини ҳисобланг.

Лейбниц формуласидан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} y^{(100)} &= (e^x \sin x)^{(100)} = e^x \sin x + C_{100}^1 e^x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \\ &\quad + C_{100}^2 e^x \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \dots + C_{100}^{100} e^x \sin\left(x + 100 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= e^x [\sin x + C_{100}^1 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + C_{100}^2 \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \dots + \\ &\quad + C_{100}^{100} \sin\left(x + 100 \cdot \frac{\pi}{2}\right)]. \end{aligned}$$

3. Мураккаб функциянинг юқори тартибли ҳосилласари. $u = f(x)$ функция (a, b) интервалда, $y = F(u)$ функция эса (c, d) интервалда аниқланган бўлиб, улар ёрдамида $y = F(f(x))$; мураккаб функция тузилган бўлсин.

$u = f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нүктада иккинчи тартибли $f''(x)$, $y = F(u)$ функция эса мөс u ($u = f(x)$) нүктада иккинчи тартибли $F''(u)$ ҳосилага эга бўлсин. Иккинчи тартибли ҳосила таърифига кўра

$$y'' = [F(f(x))]'' = [(F(f(x))')']'$$

бўлади. Кўпайтманинг ҳосиласини ҳисоблаш формуласидан ((6.9) га қаранг) ҳамда мураккаб функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш формуласидан ((6.5) га қаранг) фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} [(F(f(x))')]' &= [F'(f(x)) \cdot f'(x)]' = [F'(f(x))]' \cdot f'(x) + F'(f(x)) \cdot \\ &\cdot (f'(x))' = F''(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f'(x) + F'(f(x)) \cdot f''(x) = F''(x) \cdot f'^2(x) + \\ &+ F'(f(x)) \cdot f''(x). \end{aligned}$$

Демак,

$$y'' = [F(f(x))]'' = F''(f(x)) \cdot f'^2(x) + F'(f(x)) \cdot f''(x).$$

Худди шунга ўхшаш $u = f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нүктада $f'''(x)$ ва $y = F(u)$ функция эсг мөс u ($u = f(x)$) нүктада, $F'''(u)$ ҳосилага эга бўлса, мураккаб $y = F(f(x))$ функция ҳам $x \in (a, b)$ нүктада 3- тартибли ҳосилага эга бўлади. Бу ҳосила қўйидагича ҳисобланади:

$$\begin{aligned} y''' &= [F(f(x))]''' = [(F(f(x))'')]' = [F''(f(x)) \cdot f'^2(x) + F'(f(x)) \cdot \\ &\cdot f'(x)]' = F'''(f(x)) \cdot f'^3(x) + F''(f(x)) \cdot 2 \cdot f'(x) \cdot f''(x) + F''(f(x)) \cdot \\ &\cdot f'(x) \cdot f''(x) + F'(f(x)) \cdot f'''(x) = F'''(f(x)) \cdot f'^3(x) + 3F''(f(x)) \cdot f'(x) \cdot \\ &\cdot f''(x) + F'(f(x)) \cdot f'''(x). \end{aligned}$$

Шу йўл билан мураккаб функция $y = F(f(x))$ нинг исталган тартибли ҳосилалари ҳам ҳисобланиси мумкин.

4. Функцияни нг юқори тартибли дифференциаллари. $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нүктада чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, функцияни дифференциали ушбу, $dy = f'(x)dx$ формула билан ҳисобланисини кўрдик ((6.14) га қаранг). Демак, функцияни дифференциали x ва dx ларга боғлиқdir.

Шуни таъкидлаймизки, dx миқдор $f(x)$ функция аргументи x нинг ихтиёрий орттирмаси Δx ни ифодалаб, dy миқдорни x ўзгарувчи бўйича дифференциаллаш жараёнида уни ўзгармас кўпайтувчи сифатида қаралади.

Фараз қиласлик, юқорида қаралаётган $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нүктада иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

6. 7- таъриф. $f(x)$ функция дифференциали dy нинг $x \in (a, b)$ нүктадаги дифференциали функцияни нг иккинчи тартибли дифференциали деб аталади ва уни $d^2f(x)$ ёки d^2y каби белгиланади, яъни

$$d^2y = d(dy) \text{ ёки } d^2f(x) = d(df(x)).$$

Энди дифференциаллаш қондасидан фойдаланиб топамиз:

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = dx \cdot d(y') = dx(y')'dx = y''(dx)^2.$$

Шундай қилиб, функцияни нг иккинчи тартибли дифференциали унинг иккинчи тартибли ҳосиласи орқали қўйидагича ёзилади:

$$d^2y = y'' \cdot dx^2 \quad (6.27)$$

бунда ушбу

$$dx^2 = dx \cdot dx = (dx)^2$$

белгилашни келишиб оламиз.

$f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нүктада 3- тартибли $f'''(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

Худди юқоридагига ўхшаёт, $x \in (a, b)$ нүктада функциянинг 3-тартибли дифференциали таърифланади: $d^3y = d(d^2y)$. Шунга кўра $f(x)$ функциянинг 3-тартибли дифференциали учун ушбу

$$d^3y = d(d^2y) = d(y''dx^2) = dx^2d(y'') = dx^2(y'')' \cdot dx = y''' \cdot dx^3$$

формула келиб чиқади, бунда $dx^3 = (dx)^3$.

Шу йўл билан функциянинг юқори тартибли дифференциаллари таърифланади. Умумий ҳолни қарайлик. $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нүктада n -тартибли $f^{(n)}(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Функциянинг $(n - 1)$ -тартибли дифференциали $d^{(n-1)}y$ дан олинган дифференциал $f(x)$ функциянинг $x \in (a, b)$ нүктадаги n -тартибли дифференциали деб атлади ва уни $d^n y$ ёки $d^n f(x)$ каби белгиланади, яъни

$$d^n y = d(d^{n-1}y) \text{ ёки } d^n f(x) = d(d^{n-1}f(x)).$$

Бу ҳолда ҳам функциянинг n -тартибли дифференциали унинг n -тартибли ҳосиласи орқали қўйидагича

$$d^n y = y^{(n)} \cdot dx^n \quad (6.28)$$

ифодаланади. Унинг тўғрилигини математик индукция методи ёрдамида исботлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $n = 1$ ва $n = 2$ бўлганда (6.28) формуланинг тўғрилиги юқорида кўрсатилди. Бу (6.28) формула $n = k$ да ўринли, яъни $d^k y = y^k dx^k$ бўлсин деб, унинг $n = k + 1$ да тўғрилигини исботлаймиз. Функциянинг n -тартибли дифференциали таърифига кўра $d^{(k+1)}y = d(d^k y)$ бўлиб, ундан

$$\begin{aligned} d^{k+1}y &= d(d^k y) = d(y^k \cdot dx^k) = dx^k \cdot d(y^{(k)}) = dx^k(y^{(k)})' \cdot dx = \\ &= y^{(k+1)} \cdot dx^{k+1} \end{aligned}$$

экани келиб чиқади, яъни ушбу

$$d^{k+1}y = y^{k+1} \cdot dx^{k+1}$$

формула ўринли. Демак, (6.28) формула ихтиёрий $n \in N$ учун тўғри.

Маълумки, n -тартибли ҳосила (5- § нинг 1-п га қаранг) ушбу $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ белгилаш ёрдамида киритилган эди. (6.28) белгилаш эса,

функциянинг n -тартибли ҳосиласини $\frac{d^n y}{dx^n}$ деб белгиланган символни каср сифатида қараш мумкинligини билдиради.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) интервалда аниқләнган бўлиб, улар $x \in (a, b)$ нүктада n -тартибли дифференциалга эга бўлсин. У ҳолда ушбу

- 1) $d^n [c \cdot f(x)] = c \cdot d^n f(x), \quad c = \text{const};$
- 2) $d^n [f(x) \pm g(x)] = d^n f(x) \pm d^n g(x);$
- 3) $d^n [f(x) \cdot g(x)] = d^n f(x) \cdot g(x) + C_n^1 d^{n-1} f(x) \cdot d g(x) + \dots + C_n^k d^{n-k} f(x) \cdot d^k g(x) + \dots + f(x) d^n g(x)$

формулалар ўришли бўлади. Юқори тартибли дифференциалларнинг бу қоидалари (6.24) — (6.26) формулалар билан ифодаланган содда қоидалар ҳамда (6.28) формуладан бевосита келиб чиқади.

Энди мураккаб функцияниң юқори тартибли дифференциаллари ни қараймиз.

$u = f(x)$ функция (a, b) интервалда, $y = F(u)$ функция эса (c, d) интервалда аниқланган бўлиб, улар ёрдамида $y = F(f(x))$ мураккаб функция тузилган бўлсин. Сўнгра $u = f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нуқтада $f'(x)$, $F(u)$ функция эса мос u ($u = f(x)$) нуқтада $F'(u)$ ҳосилаларга эга деб, $y = F(f(x))$ функцияниң дифференциалини ҳисоблаймиз.

Маълумки, ушбу $y = F(f(x)) = \Phi(x)$ муракказ функцияниң дифференциали ((6.15) га қаранг) қўйидаги

$$dy = \Phi'(x) dx = [F(f(x))]' dx$$

ва

$$[F(f(x))]' = F'(f(x)) \cdot f'(x)$$

формулаларни эътиборга олинса

$$dy = d[F(f(x))] = F'(f(x)) \cdot f'(x) dx = F'(f(x)) \cdot df(x) \quad (6.29)$$

кўринишга эга бўлишини топамиз.

Демак, функция мураккаб бўлган ҳолда ҳам функция дифференциали функция ҳосиласи $F'(f(x))$ билан (бу ҳолда аргумент $f(x)$ бўлади) аргумент $f(x)$ нинг дифференциали $df(x)$ кўпайтмасидан иборат эканлигини кўрамиз.

Шундай қилиб, қаралётган функциялар $f(x)$ (x — эркли ўзгарувчи) кўринишда бўлганда ҳам, мураккаб $y = F(f(x))$ кўринишда бўлганда ҳам, бу функцияларнинг дифференциаллари бир хил формага эга бўлади (яъни дифференциал формаси сақланади). Одатда бу хоссани дифференциал формасининг инвариантлиги дейилади. Бунда (6.14) формуладаги dx аргумент x нинг ихтиёрий орттирмаси Δx ни ($dx = \Delta x$) билдиради, (6.29) формуладаги $df(x)$ эса, x ўзгарувчига боғлиқ бўлади.

Энди $y = F(f(x))$ мураккаб функцияниң иккинчи тартибли дифференциалини ҳисоблаймиз. Таърифга кўра

$$d^2y = d^2[F(f(x))] = d[d(F(f(x)))]$$

бўлади. Дифференциаллаш қоидасидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} d^2y &= d^2[F(f(x))] = d[F'(f(x)) \cdot df(x)] = d[F'(f(x))] \cdot df(x) + \\ &\quad + F'(f(x)) \cdot d[df(x)] = F''(f(x)) \cdot df^2(x) + F'(f(x)) \cdot d^2f(x) \\ (\text{бунда } df^2(x) &= d[f(x) \cdot df(x)] = (df(x))^2). \end{aligned}$$

Демак,

$$d^2y = d^2[F(f(x))] = F''(f(x)) \cdot df^2(x) + F'(f(x)) \cdot d^2f(x) \quad (6.30)$$

6.5- эслатма. Бу (6.30) формула билан (6.27) формулалы тақ-қослаб, иккинчи тартибли дифференциаллар дифференциал формаси-нинг инвариантлиги хоссасига эга эмаслигини күрамиз.

$y = F(f(x))$ функциянынг учинчи ва юқори тартибли дифферен-циаллари юқоридагидек бирин-кетин ҳисобланади.

6- §. Дифференциал ҳисобниң асосий теоремалари

Ушбу параграфда дифференциал ҳисобниң асосий теоремаларини көлтирамиз. Бу теоремалар келгусида, айниңа функцияларни текши-ришда, муҳим роль ййнайди.

6.5-теорема (Ферма теоремаси). $f(x)$ функция бирор X оралықда аниқланған ва бу оралықнинг ички с нүктасида үзининг эң катта (энг кичик) қыйматыга эршисин. Агар бу нүктада функция чекли $f'(c)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$f'(c) = 0$$

бўлади.

Исбот. Шартга кўра $f(x)$ функция с нүктада эңг катта қыйматга эга, яъни $\forall x \in X$ да $f(x) \leq f(c)$ тенгсизлик ўринли, шу билан бирга бу с нүктада чекли $f'(c)$ ҳосила мавжуд. Равшанки,

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Аммо $x > c$ бўлганда

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

ва $x < c$ бўлганда

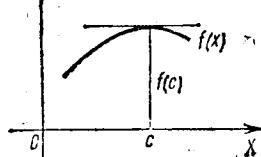
$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

бўлишидан

$$f'(c) = 0$$

екани келиб чиқади.

Шунга ўхшаш, функция c нүктада эңг кичик қыйматга ва бу нүктада чекли $f'(c)$ ҳосилага эга бўлганда ҳам $f'(c) = 0$ бўлиши кўрсатилади. Теоре-ма исбот бўлди.



44- чизма

Ферма теоремаси содда геометрик маъ-нога эга. У $f(x)$ функция графигига $(c, f(c))$ нүктада ўтказилган уринманинг Ox ўқига параллел бўлишини ифодалайди (44- чизма).

6.6- эслатма. $f(x)$ функция $[a, b]$ сег-ментда аниқланған бўлиб, бу сегментнинг четки $x = a$ ва $x = b$ нүқталарида үзининг

энг катта ёки энг кичик қийматларига эришсін дейлік. Бу нүкталарда функция ҳосилага (равшанки, бу ҳолда бир томонлама $f'(a+0)$, $f'(b-0)$ ҳосилалар тушунилади) әга бўлса, функцияның ҳосиласи $x = a$, $x = b$ нүкталарда нолга тенг бўлмасдан қолиши мумкин. Масалан, $f(x) = x$ функция $[0, 1]$ сегментининг $x = 0$, $x = 1$ нүкталарида ўзининг энг кичик ҳамда энг катта қийматларига эришса ҳам унинг бу нүкталардаги ҳосиласи 1 га тенг.

6.6- теорема (Ролль теоремаси). $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланған ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функция $[a, b]$ сегментининг барча ички нүкталарида (яъчи (a, b) интэрвалда) чекли $f'(x)$ ҳосилага әга бўлиб, $f(a) = f(b)$ бўлса, у ҳолда шундай $c (a < c < b)$ нүқта топиладики,

$$f'(c) = 0$$

бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз. Демак, Вейерштрасснинг биринчи теоремасига (5- боб, 7- §) кўра бу оралиқда функция ўзининг энг катта қиймати M ва энг кичик қиймати m га эришади.

1) $m = M$ бўлсин. Бунда $f(x) = \text{const}$, $x \in [a, b]$ бўлади. Равшанки, бу ҳолда $\forall c \in (a, b)$ учун $f'(c) = 0$ бўлади.

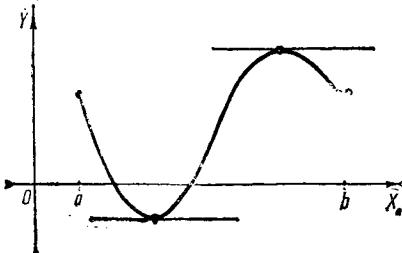
2) $m \neq M$ бўлсин. Бу ҳолда $f(a) = f(b)$ бўлғани учун $f(x)$ функция ўзининг энг катта қиймати M , энг кичик қиймати m ларнинг камиди биттасига $[a, b]$ сегментининг ички $c (a < c < b)$ нүқтасида эришади. Ферма теоремасига асосан бу нүқтада

$$f'(c) = 0$$

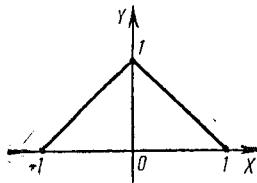
бўлади. Теорема исбот бўлди.

$f(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаоатлантирасин. У ҳолда бу функция тасвирлаган эгри чизиқда шундай $(c, f(c))$ нүқта топиладики, эгри чизиққа унинг бу нүқтасида ўтказилган уринма Ox ўқига параллел бўлади (45- чизма).

6.7- эслатма. Ролль теоремасининг барча шартлари мұхим. Агар көлтирилгэн шартларнинг бироргаси бажарылтмаса, теореманинг хulosаси ўринли бўлмасдан қолиши мумкин. Масалан, 1) $f(x) = 1 - |x|$ функция $[-1, +1]$ сегментда узлуксиз бўлиб, бу функция учун $f(-1) = f(+1) = 0$ бўлади. Аммо бу функцияның ҳосиласи $(-1, +1)$ интэрвалнинг бирорта нүқтасида ҳам нолга айланмайди. Бунга сабаб



45- чизма



46- чизма

қаралаётган функцияниңг ($-1, +1$) интервалнинг ҳамма нүқталарида ҳам ҳосилага эга эмаслигидир. Аниқроғи, $f(x) = 1 - |x|$ функция $x = 0$ нүқтада ҳосилага эга эмас (46- чизма).

2) $f(x) = x$ функция $[0, 1]$ сегментда узлуксиз бўлиб, $(0, 1)$ интервалда чекли ҳосилага эга ва у $(0, 1)$ интервалнинг барча нүқталарида $f'(x) = 1$. Бу функция учун Ролль теоремаси холосасининг ўринли бўлмаслиги $f(x) = x$ функция учун $f(a) = f(b)$ шартнинг бажарилмаслигидир.

6.7- теорема (Лагранж теоремаси). $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шундай с $(a < c < b)$ нүқта топиладики, бу нүқтада ҳосила

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (6.31)$$

бўлади.

Исбот. Шартга кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиб, унинг ички нүқталарида чекли $f'(x)$ ҳосилага эга. Бу функция ёрдамида қўйидаги

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

функцияни тузайлик. Равшанки, бу $F(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, (a, b) интервалда эса

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ҳосилага эга. $F(x)$ функцияниң $x = a$ ва $x = b$ нүқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз: $F(a) = F(b) = 0$. Демак, $F(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. У ҳолда a ва b оравида шундай c ($a < c < b$) нүқта топиладики, $F'(c) = 0$ бўлади. Шундай қилиб,

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ва бундан (6.31) формула келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Энди Лагранж теоремасининг геометрик маъносига тўхтalamиз. $f(x)$ функция Лагранж теоремасининг шартларини қаноатлантирасин дейлик (47- чизма). Функция графигининг $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ нүқталарини тўғри чизиқ билан бирлаштирамиз. Унда AB кесувчи нинг бурчак коэффициенти

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{BC}{AC} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

бўлади.

Маълумки, $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ — бу $f(x)$ функция графигига унинг $(x, f(x))$ нүқтасида ўтказилган уримманинг бурчак коэффициенти: $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$.

47- чизма

Шундай қилиб, Лагранж теоремаси (a, b) интервалда шундай c ($a < c < b$) нүкта мавжудлигини күрсатады (бундай нүкталар бир неча бўлиши ҳам мумкин), $f(x)$ функция графигига $(c, f(c))$ нүкта да ўтказилган уринма AB тўғри чизиқقا параллел бўлади.

Юқорида келтирилган (6.31) формулани бошқача ҳам ёзиш мумкин. Бунинг учун $a < c < b$ тенгизликларни эътиборга олиб,

$$\frac{c-a}{b-a} = \theta \quad (0 < \theta < 1)$$

деб белгиласак, унда

$$c = a + (b - a)\theta \quad (0 < \theta < 1)$$

бўлади. Натижада (6.31) формула ушбу

$$f(b) - f(a) = f' [a + (b - a)\theta] \cdot (b - a) \quad (6.32)$$

кўринишга келади. Кейинги формулада $\Delta x > 0$ да $a = x$, $b = x + \Delta x$, $\Delta x < 0$ да эса $a = x + \Delta x$, $b = x$ деб, топамиз

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x \quad (6.33)$$

Бу (6.33) формула чекли ортирималар формуласи деб аталади.

6.8- эслатма. 1) агар (6.31) формулада $f(a) = f(b)$ деб олинса, у ҳолда $f'(c) = 0$ ($a < c < b$) бўлиб, Лагранж теоремасидан Ролль теоремасининг келиб чиқшини кўрәмиз.

6.8-теорема (Коши теоремаси). $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функциялар (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, $\forall x \in (a, b)$ учун $g'(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда шундай c ($a < c < b$) нүкта топилади,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (6.34)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. (6.34) тенглик маънога эга бўлиши учун $g(b) \neq g(a)$ бўлиши керак. Бу эса теоремадаги $g'(x) \neq 0$ ($x \in (a, b)$) шартдан келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, агар $g(b) = g(a)$ бўлиб қоладиган бўлса, у ҳолда $g(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантириб, бирор $c \in (a, b)$ нүкта (бундай нүкта Ролль теоремасига кўра топилади) $g'(c) = 0$ бўлиб қолади. Бу эса $\forall x \in (a, b)$ да $g'(x) \neq 0$ шартга зиддир. Демак, $g(b) \neq g(a)$.

Энди $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар ёрдамида қўйидаги

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot [g(x) - g(a)]$$

функцияни тузайлик. Бу функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, (a, b) интервалда

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$$

ҳосилага эга. Сўнгра $F(x)$ функциянинг $x = a$, $x = b$ нүкталардаги қийматларини ҳисоблаймиз: $F(a) = F(b) = 0$. Демак, $F(x)$ функция

$[a, b]$ сегментда Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Шунинг учун a ва b лар орасида шундай c ($a < c < b$) топилади, $F'(c) = 0$ бўлади. Шундай қилиб,

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c)$$

ва ундан (6.34) тенгликкниң ўринли экани келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Хусусан, $g(x) = x$ бўлганда Коши теоремасидан Лагранж теоремаси келиб чиқади.

7- §. Тейлор формуласи

1. Функцияни яқинлаштириш ҳақида.

Маълумки, функция математик анализ курсида ўрганиладиган асосий обьект. Кўпгина масалалар эса функцияни ҳисоблаш (берилган нуқтада қийматини топиш) билан боғлиқ. Функцияниң мураккаб бўлиши бундай ҳисоблашларда катта қийинчиликлар туғдиради. Натижада ноқулай ва мураккаб функцияни ўзига қараганда содда ва ҳисоблашга қулай бўлган функция билан яқинлаштириш (алмаштириш) — тақрибий ифодалаш масаласи юзага келади.

Берилган $f(x)$ функцияни бирор $g(x)$ функция билан яқинлаштиришда қўйидаги икки момент мухимdir:

1) $f(x)$ функцияга яқинлашадиган $g(x)$ функцияниң танлаб олиниши ва унинг тузилиши (соддалиги ва ҳисоблаш учун қулайлиги).

2) $f(x)$ функцияга $g(x)$ функцияниң яқинлашишидаги хатоликни аниқташ ва уни баҳолаш.

Одатда яқинлашадиган функция сифатида бутун рационал функция — кўпхад олинади:

$$g(x) = P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n \quad (6.35)$$

бунда $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ва x_0 лар ўзгармас ҳақиқий сонлар, $n \in N$.

Равшанки, кўпхад содда ва ҳисоблаш учун қулай функция.

1885 йилда машҳур немис математиги К. Вейерштрасс томонидан $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлган $f(x)$ функцияни $P_n(x)$ кўпхад билан яқинлаштириш мумкинлиги, бошқача айтганда $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $P_n(x)$ кўпхад мавжудки, унда $\forall x \in [a, b]$ лар учун

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлиши кўрсатилди. Биз Вейерштрасс теоремаси ҳақида математик анализ курсининг «Функционал кетма-кетлик ва қаторлар» бобида батафсил гапирамиз.

Гарчи Вейерштрасс теоремаси $f(x)$ функцияни $P_n(x)$ кўпхад билан яқинлаштириш мумкинлигини ифодала ҳам яқинлашиш хатолигини, яъни ушбу

$$R_n(f) = f(x) - P_n(x)$$

айирмани бақолаш имконини ва унинг нолга интилиш тартибини аниқлаб бермайди. Кейинги ўрганишлар $R_n(f)$ нинг нолга интилиш тартиби яқинлаштириладиган $f(x)$ функцияниң ҳосилаларга эга бўлишига боғлиқ эканлигини кўрсатади. Одатда ҳосилаларга эга бўлган функция силлиқ функция деб аталади.

Модомики, силлиқ функцияларни кўпхад билан қулай яқинлаштириш мумкин экан, бирор x_0 нуқтанинг атрофида $f(x)$ функцияниң қатор юқори тартибли ҳосилалари мавжуд бўлган ҳолда бу ҳосилалардан фойдаланиб, аввало $P_n(x)$ кўпхадни тузиш ва $f(x)$ функцияни бу кўпхад билан яқинлаштириш масаласини қараш мумкин. Бу масалани ҳал қилишда Тейлор формуласидан фойдаланилади.

Шуни айтиш керакки, хусусий ҳолда бундай масала билан функция орттирмаси Δy ни унинг дифференциали dy билан тақрибий ифодалаш ($\Delta y \approx dy$) жараёнида танишган эдик ((6.17) га қаранг). Маълумки, $f(x)$ функция $x_0 \in (a,b)$ да дифференциалланувчи бўлса, уни қўйидаги

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o((x - x_0))$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу эса x_0 нуқтанинг етарли кичик атрофида-ги x нуқталарда $f(x)$ функция ушбу

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

чизиқли функция (сиринчи даражали кўпхад) билан тақрибий ифодаланишини кўрсатади.

2. Кўпхад учун Тейлор формуласи. Ушбу

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n \quad (6.35)$$

(бунда $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ва x_0 ўзгармас ҳақиқий сонлар, $n \in N$) кўпхадни қарайли к. Бу кўпхадни кетма-кет n марта дифференциаллаб топамиз:

$$P'_n(x) = a_1 + 2 \cdot a_2(x - x_0) + 3 \cdot a_3(x - x_0)^2 + \dots + n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$P''_n(x) = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3(x - x_0) + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2},$$

$$P'''_n(x) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_n \cdot (x - x_0)^{n-3},$$

...

$$P^{(n)}_n(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot a_n. \quad (6.36)$$

Бу (6.35) ва (6.36) тенгликларда $x = x_0$ деб олинса, унда берилган $P_n(x)$ кўпхад ва унинг ҳосилалари $P_n^{(k)}(x)$ ($k=1, 2, \dots, n$) нинг x_0 нуқтаги қийматлари топилади:

$$P_n(x_0) = a_0,$$

$$P'_n(x_0) = 1! a_1,$$

$$P''_n(x_0) = 2! a_2,$$

$$P^{(n)}_n(x_0) = n! a_n.$$

...

Үлардан

$$\begin{aligned} a_0 &= P_n(x_0), \\ a_1 &= \frac{P'_n(x_0)}{1!}, \\ a_2 &= \frac{P''_n(x_0)}{2!} \\ &\dots \\ a_n &= \frac{P^{(n)}_n(x_0)}{n!} \end{aligned} \quad (6.37)$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб, $P_n(x)$ күпхаднинг коэффициентлари күпхад ва унинг ҳосилаларининг x_0 нуқтадаги қийматлари орқали ифодаланди. Коэффициентларнинг бу қийматларини (6.35) га қўйсак, унда

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P'_n(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{P^{(n)}_n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (6.38)$$

бўлади. Бу кўпхад (6.35) кўпхаддан коэффициентларининг ёзилиши билангина фарқ қиласди.

(6.38) формула *кўпхад учун Тейлор формуласи* деб аталади.

3. Ихтиёрий функция учун Тейлор формуласи. $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, у $x_0 \in (a, b)$ нуқтада $f', f'', \dots, f^{(n)}$ ҳосилаларга эга бўлсин. Функциянинг нуқтадаги ҳосилаларидан фойдаланиб, қуидаги

$$P_n(f; x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

кўпхадни тузайлик.

Агар қаралётган $f(x)$ функция n -даражали кўпхад бўлса, унда юқорида (2-punktda) айтилганга кўра

$$f(x) = P_n(f; x),$$

яъни

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

бўлади.

Агар $f(x)$ функция кўпхад бўлмаса, равшанки,

$$f(x) \neq P_n(f; x)$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, улар орасида фарқ юзага келади. Биз уни $R_n(x)$ орқали белгилайлик:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(f; x). \quad (6.39)$$

Натижада ушбу

$$f(x) = P_n(f; x) \neq R_n(x),$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_n(x) \quad (6.40)$$

формулага келамиз. Бу (6.40) формула $f(x)$ функция учун Тейлор формуласи деб аталади, $R_n(x)$ эса Тейлор формуласининг қолдук ҳади дейилади.

Қолдиқ ҳад $R_n(x)$ ни (6.39) формула орқали ифодаланишини билиш $P_n(x)$ нинг $f(x)$ га яқинлашиши ҳақида хулоса чиқаришга имкон бермайди. Агар $R_n(x)$ ни n ва x ларнинг қийматлари бўйича баҳолай олсак ва унинг нолга интилишини кўреатса олсак, у ҳолда $f(x)$ функцияни $P_n(f; x)$ кўпхад билан алмаштириш мумкин эканлигини асослаган бўламиз. Демак, масала $R_n(x)$ ни баҳолашдан иборат. Бу масалани ҳал қишлиш учун $f(x)$ функцияга «оғирроқ» шарт қўйишга тўғри келади.

$f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, у шу интервалда узлуксиз $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Ундан ташқари, (a, b) интервалда бу функцияниң $(n+1)$ -тартибли $f^{(n+1)}(x)$ ҳосиласи ҳам мавжуд бўлсин. (a, b) интервалда аргумент x нинг ихтиёрий қийматини тайинлаб, қуйидаги

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!} (x - t) - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x - t)^n \quad (6.41)$$

ёрдамчи функцияни тузамиз ва уни $[x_0, x] \subset (a, b)$ (ёки $[x, x_0] \subset (a, b)$) сегментда қараймиз. $F(t)$ функцияниң (6.41) ифодасидан унинг $[x_0, x]$ сегментда узлуксиз бўлишини кўриш қийин эмас. Бу функция (x_0, x) интервалда ҳосилага ҳам эга. Ҳақиқатан ҳам

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) - \left[\frac{f''(t)}{1!} (x - t) - f'(t) \right] - \left[\frac{f'''(t)}{2!} (x - t)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{f''(t)}{1!} (x - t) \right] - \dots - \left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n - \right. \\ &\quad \left. - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (x - t)^{n-1} \right] = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n. \end{aligned}$$

Демак,

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n. \quad (6.42)$$

Энди $[x_0, x]$ сегментда узлуксиз ва (x_0, x) интервалда чекли ҳосилага (нолга тенг бўлмаган) эга бўлган бирор $\Phi(t)$ функцияни олайлик. $F(t)$ ва $\Phi(t)$ функцияларга $[x_0, x]$ сегментда Коши теоремасини қўлланиб топамиз:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\Phi(x) - \Phi(x_0)} = \frac{F'(c)}{\Phi'(c)}, \quad (6.43)$$

Бунда

$$x_0 < c < x \quad (c = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1).$$

Юқоридаги (6.41) функция учун

$$F(x) = 0, \quad F(x_0) = R_n(x)$$

тengликларга әгамиз. Энди (6. 42) tengликтан $t = c$ да

$$F'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - c)^n$$

бўлишини эътиборга олсак, унда (6.43) tengликтан

$$R_n(x) = \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{\Phi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - c)^n \quad (6.44)$$

($c = x_0 + \theta(x - x_0)$) формула келиб чиқади.

Шундай қилиб, Тейлор формуласининг қолдиқ ҳади учун (6.44) формула топилди. Бу ҳолда $f(x)$ функцияниң Тейлор формуласи қўйидаги

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{\Phi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - x_0)^n \quad (6.45) \\ &(c = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

кўринишда ёзилади.

Тейлор формуласидан кенгроқ фойдаланиш мақсадида, унинг қолдиқ ҳадининг турли кўринишларини келтирамиз.

1°. Коши кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи. Юқорида қаралган $\Phi(t)$ функция сифатида $\Phi(t) = x - t$ функцияни олайлик. Равшанки, бу функция $[x_0, x] \subset (a, b)$ сегментда узлуксиз, (x_0, x) интервалда эса чекли $\Phi'(t) = -1$ ҳосилага эга. Бу функция учун $\Phi(x) = 0$, $\Phi(x_0) = x - x_0$ бўлади. Натижада (6.44) формула қўйидаги

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - c)^n (x - x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} [x - x_0 - \\ &- \theta(x - x_0)]^n (x - x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^n \\ &(0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

кўринишни олади. Қолдиқ ҳаднинг бу ифодасини (6.45) га қўйиб топамиз:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - x_0)^{n+1} \cdot (1 - \theta)^n. \quad (6.46) \end{aligned}$$

Бу (6.46) формула $f(x)$ функцияниң Коши кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи деб аталади.

2°. Лагранж күренишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи. Энди $\Phi(t)$ сифатида $\Phi(t) = (x - t)^{n+1}$ функцияни олайлик. Бу функция ҳам $[x_0, x] \subset (a, b)$ сегментта узлуксиз, (x_0, x) интервалада эса чекли $\Phi'(t) = -(n+1)$. $(x - t)^n$ ҳосилага эга. Бу функция учун

$$\Phi(x) = 0, \quad \Phi(x_0) = (x - x_0)^{n+1},$$

$$\Phi'(c) = -(n+1)(x - c)^n \quad (c = x_0 + \theta(x - x_0); \quad 0 < \theta < 1)$$

бўлади. У ҳолда юқоридаги (6.44) формула ушбу

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - c)^n - \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)(x - c)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

күренишни оләди. Қолдиқ ҳаднинг бу ифодасини (6.45) га қўйиб топамиз:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \times$$

$$\times (x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (6.47)$$

Бу формула $f(x)$ функциянинг Лагранж күренишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи деб аталади.

Тейлор формуласи қолдиқ ҳаднинг бу күрениши содда бўлиб, у (6.47) формуладаги назбатда келадиган ҳадни эслатади. Факат бунда функциянинг $(n+1)$ -тартибли ҳосиласининг x_0 нуқтадаги қиймати ўринига бу ҳосиланинг $c(c = x_0 + \theta(x - x_0))$ нуқтадаги қиймати олинади.

3°. Пеано күренишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи. $f(x)$ функция Тейлор формуласининг Пеано күренишидаги қолдиқ ҳадини чиқариша $f(x)$ функцияга нисбатан қўйилган шартни «енгиллаштириш» мумкин.

$f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтанинг бирор $U_\delta(x_0) \subset (a, b)$ атрофида $f'(x)$, $f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, $f^{(n)}(x)$ ҳосила эса x_0 нуқтада узлуксиз бўлсин. Бу функция учун $x \in U_\delta(x_0)$ да ушбу

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n \quad (6.48)$$

(бунда c сон x_0 билан x орасида) формула ўринли.

Ҳақиқатан ҳам, юқоридаги (6.47) формулада n ни $n-1$ га алмаштирсан, у ҳолда (6.47) формуладан (6.48) келиб чиқади.

Равшанки, $x \rightarrow x_0$ да $c \rightarrow x_0$ бўлади. $f^{(n)}(x)$ эса x_0 нуқтада узлуксиз. Демак,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^{(n)}(c) = \lim_{c \rightarrow x_0} f^{(n)}(c) = f^{(n)}(x_0).$$

Ү ҳолда

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)$$

тенглик ўринли бўлиб, $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ бўлади.

Агар $x \rightarrow x_0$ да $\alpha(x) \cdot (x - x_0)^n = o((x - x_0)^n)$ бўлишини эътиборга олсак, натижада (6. 48) формуланинг қолдиқ ҳади учун ушбу

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \quad (6.49)$$

формулани топамиз. Энди (6.48) ва (6.49) формулалардан

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \quad (6.50)$$

формула келиб чиқади. Бу формула $f(x)$ функциянинг Пеано кўришишдаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи деб аталади.

Демак, $x \rightarrow x_0$ да (6. 50) формуланинг қолдиқ ҳади нолга интилиб, у (6. 50) формулада ўзидан олдин келадиган ҳар бир ҳадга қараганда юқори тартибли чексиз кичик миқдор бўлади.

Шундай қилиб, биз юқорида $f(x)$ функция Тейлор формуласи қолдиқ ҳадининг турли кўришишларини қелтирдик. Ечилаётган масаланинг талабига қараб у ёки бу кўришишдаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласидан фойдаланилади. Масалан, бирор x_0 нуқта атрофидаги $x(x \neq x_0)$ нуқталарда $f(x)$ функциянинг қийматларини тақрибий ҳисоблаш керак бўлса, Коши ёки Лагранж кўришишдаги қолдиқ ҳадли Тейлор формулаларидан фойдаланган матьқул, $x \rightarrow x_0$ да қолдиқ ҳади нолга интилиш тартибинигина билиш лозим бўлса ёки x_0 нуқта атрофидаги функциянинг бош қисмини ажратиш керак бўлса, у ҳолда Пеано кўришишдаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласидан фойдаланиши мақсадга мувофиқ бўлади.

4°. Тейлор формуласининг бошқача ёзишлилари. $f(x)$ функциянинг Тейлор формуласини орттирмалар ҳамда дифференциаллар формасида ҳам ёзиш мумкин. 3°-пунктда келтирилган (6. 46) (6.47) ва (6.50) Тейлор формулаларида $x - x_0 = \Delta x$ деб (бу ҳолда $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ бўлади), $f(x)$ функция Тейлор формулаларини орттирмалар формасидаги кўришишларини топамиз:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!} \Delta x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \Delta x^n + R_n(x). \quad (6.51)$$

Бунда қолдик ҳад $R_n(x)$ қүйидагиша

$$\text{а) Коши күринишида } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \Delta x^{n+1} (1-\theta)^n,$$

$$\text{б) Лагранж күринишида } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \Delta x^{n+1},$$

$$\text{в) Пеано күринишида } R_n(x) = o(\Delta x^n)$$

$(0 < \theta < 1, c = x_0 + \theta \cdot \Delta x)$ ёзилиши мумкин. (6.51) формулада қолдик ҳадни Лагранж күринишида олиб, сүнгра $n=0$ дейилса, у ҳолда

$$\Delta f(x_0) = f'(c) \cdot \Delta x$$

формулага эга бўламиз. Бу эса чекли оргтирмалар формуласидир. (6.33) га қаранг. Матъумки,

$$f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0)dx = df(x_0),$$

$$f''(x_0) \cdot (\Delta x)^2 = f''(x_0)dx^2 = d^2f(x_0),$$

.....

$$f^{(n)}(x_0) \cdot (\Delta x)^n = f^{(n)}(x_0)dx^n = d^n f(x_0).$$

Буларни эътиборга олсак, $f(x)$ функцияининг (6.46), (6.47), (6.50) Тейлор формулаларини қўйидагича, дифференциаллар формасида ҳам ифодалаш мумкин бўлади:

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0) + \dots + \frac{1}{n}d^n f(x_0) + R_n(x). \quad (6.52)$$

Еунда қолдик ҳад $R_n(x)$ эса қўйидагиша

$$\text{а) Коши күринишида } R_n(x) = \frac{1}{n!} d^{n+1} f(c) \cdot (1-\theta)^n,$$

$$\text{б) Лагранж күринишида } R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(c),$$

$$\text{в) Пеано күринишида } R_n(x) = o(dx^n)$$

$(0 < \theta < 1, c = x_0 + \theta \Delta x)$ ёзилиши мумкин.

5. Маклорен формуласи. $f(x)$ функцияининг (6.40) Тейлор формуласида $x_0 = 0$ деб олинса, ушбу

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x) \quad (6.53)$$

формула ҳосил бўлади. Бу ҳолда қолдик ҳад $r_n(x)$ қўйидагиша

$$\text{а) Коши күринишида } r_n(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x),$$

$$\text{б) Лагранж күринишида } r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

в) Пеано күренишида $r_n(x) = o(x^n)$

($0 < \theta < 1$) ёзилиши мумкин.

Юқоридаги (6. 53) формула $f(x)$ функцияның *Маклорен формуласы* деб аталади.

Ушбу

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (6.54)$$

($0 < \theta < 1$) Лагранж күренишидеги қолдақ ҳадли Маклорен формуласини қарайлай. Бу формуласын қолдик ҳадини бағолаймиз.

Фараз қылайлык, шундай ўзгармас M сон мавжуд бўлсинки, аргумент x нинг $x_0 = 0$ нуқта атрофидаги қийматларида ҳамда $n \in N$ нинг барча қийматларида

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad (6.55)$$

тengsizlik bajarilsin. Y ҳolda ushu

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x) \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

tengsizlikka ega bolamiz. x nинг ҳар бир тайин қийматида

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

лимит ўринли бўлишини эътиборга олсак, у ҳoldа n nинг етарли катта қийматларида $r_n(x)$ етарли кичик бўлишини кўрамиз. Демак, $x_0 = 0$ нуқта атрофида $f(x)$ функцияни

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

кўпхад билан алмаштириш мумкин. Натижада ushu

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (6.56)$$

тақрибий формула келиб чиқади.

6. Элементар функциялар учун Маклорен формуласи. 1° $f(x) = e^x$ бўлсин. Бу функция учун $f^{(n)}(x) = e^x$ ва $f(0) = 1$, $f^{(n)}(0) = 1$ ($n = 1, 2, \dots$). У ҳoldа

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x)$$

бўлиб, унинг қолдиқ ҳади эса Лагранж күренишида қуйидагича

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1)$$

ёзилади. Ҳар бир $x \in [-a, a]$ ($a > 0$) да $|e^{0x}| < e^a$ бўлишини эътиборга олсак, унда

$$|r_n(x)| < \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a$$

тенгизлиқ келиб чиқади ва $n \rightarrow \infty$ да $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a$ ифода ва демак, $r_n(x)$ ҳам нолга интилади. Натижада $f(x) = e^x$ функция учун қуийдаги

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

тақрибий формулага эга бўламиз. Бу формуладан, хусусан, $x = 1$ бўлганда, сонини тақрибий ҳисоблаш ўмконини берадиган ушбу

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

формула ҳосил бўлади. Бу ҳолда $|r_n(1)| \leq \frac{1}{(n+1)!}$.

2°. $f(x) = \sin x$ бўлсин. Маълумки, бу функцияниң n -тартибли ҳосиласи учун $f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ формула ўринли ((6.22) га қаранг). Равшанки, $f(0) = 0$ ва

$$f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{агар } n - \text{жуфт бўлса,} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{агар } n - \text{тоқ бўлса.} \end{cases}$$

$f(x) = \sin x$ функцияниң Маклорен формуласи n — тоқ сон бўлганда

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} + r_n(x)$$

кўринишида ёзилади. Бу формуланинг қолдиқ ҳади Лагранж кўринишида қўйидагича

$$r_n(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \sin\left(\theta x + n \cdot \frac{\pi}{2} + \pi\right) \quad (0 < \theta < 1)$$

ёзилади.

Равшанки, $\forall x \in [-a, a]$ ($a > 0$) да

$$|r_n(x)| \leq \frac{a^{n+2}}{(n+2)!}$$

бўлиб, $n \rightarrow \infty$ да $\frac{a^{n+2}}{n+2}$ ифода ва демак, $r_n(x)$ ҳам нолга интилади. Шундай қилиб, n — тоқ сон бўлганда ушбу

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

тақрибий ҳисоблаш формуласига эгамиз.

3°. $f(x) = \cos x$ бүлсін. Бұу функцияның n -тартыбы ҳосиля-
си учун $f^{(n)}(x) = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ формулаға әлемиз, ((6.23)
га қаранг). Равшанки, $f(0) = 1$ ва

$$f^{(n)}(0) = \cos \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{агар } n - \text{тоқ сон бүлса,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{агар } n - \text{жүфт сон бүлса} \end{cases}$$

$f(x) = \cos x$ функцияның Маклорен формуласи қойылады.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{x^n}{n!} + r_n(x)$$

ёзилади (бунда n — жүфт сон), унинг қолдиқ ҳади Лагранж күри-
нишида қойылады.

$$r_n(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \cos\left(0x + n \cdot \frac{\pi}{2} + \pi\right) \quad (0 < \theta < 1)$$

ёзилади. Равшанки, $\forall x \in [-a, a]$ ($a > 0$) да

$$|r_n(x)| \leq \frac{a^{n+2}}{(n+2)!}$$

бүләди. Демак,

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{x^n}{n!}.$$

4°. $f(x) = \ln(1+x)$ бүлсін. Маълумки, бұу функцияның n -
тартыбы ҳосилясі учун ушбу ((6.21) га қаранг).

$$f^{(n)}(x) = [\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

формула ўринли. Равшанки, $f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$
Шуни эътиборға олиб, берилған функцияның Маклорен формуласи-
ни ёзамиз:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + r_n(x). \quad (6.57)$$

Бұу формуланың қолдиқ ҳади $r_n(x)$ ни баҳолашда унинг Лагранж
хамда Коши күринишларидан фойдаланамыз.

а) $0 \leq x \leq 1$ бүлсін. Бұу ҳолда (6.57) формуланың Лагранж кү-
ринишидаги

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1)$$

қолдиқ ҳадини олиб, унинг учун қойылады

$$|r_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

баҳога эга бүләмиз.

6) $-a \leq x \leq 0$ ($0 < a < 1$) бүлсін. Бу ҳолда (6.57) формулалынг Коши күренишидаги

$$r_n(x) = (-1)^n \cdot x^{n+1} \cdot \frac{(1-\theta_1)^n}{(1+\theta_1 x)^{n+1}} \quad (0 < \theta_1 < 1) \quad (6.58)$$

қолдиқ ҳадини оламиз. (6.58) тенгликни қойыдагича

$$r_n(x) = (-1)^n \cdot \left(\frac{1-\theta_1}{1+\theta_1 x}\right)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{1+\theta_1 x}$$

әзамиз. Ызгарувчи x нинг $-a \leq x \leq 0$ ($0 < a < 1$) қийматларыда

$$\frac{1-\theta_1}{1+\theta_1 x} < 1$$

тенгсизлик ўринын бўлишини ҳисобга олиб, топамиз:

$$|r_n(x)| = \left| (-1)^n \cdot \left(\frac{1-\theta_1 x}{1+\theta_1 x}\right)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{1+\theta_1 x} \right| < \left| \frac{x^{n+1}}{1+\theta_1 x} \right| < \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Демак, $\ln(1+x)$ функция учун қойыдаги

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

тақрибий ҳисоблаш формуласи ҳосил бўлади.

5°. $f(x) = (1+x)^\alpha$ бўлси н, бунда $\alpha \in R$. Бу функцияning n -тартибли ҳосиласи учун $f^{(n)}(x) = [(1+x)^\alpha]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \times (1+x)^{\alpha-n}$ формулага әгамиз (б-бобнинг 5-§ га қаранг). Равшанки, $f(0) = 1$, $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$. $f(x) = (1+x)^\alpha$ функцияning Маклорен формуласи қойыдагича

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + r_n(x)$$

ёзилади, қолдиқ ҳад $r_n(x)$ эса ушбу

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} (1+\theta_1 x)^{\alpha-n-1} \cdot (1-0)^n x^{n+1}$$

Коши кўринишида ёзилади. Энди $|x| < 1$ бўлганда

$$|r_n(x)| = \left| \alpha \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{1}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \cdot (1+\theta_1 x)^{\alpha-1} \cdot \left|\frac{1-\theta_1}{1+\theta_1 x}\right|^n \right| \times |x|^{n+1} \leqslant \left| \alpha \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{1}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \right| (1+\theta_1 x)^{\alpha-1} |x|^{n+1}$$

бўлиб, $n \rightarrow \infty$ да нолга интилади.

Хусусан, $\alpha = n$ бўлса, у ҳолда $r_n(x) = 0$ бўлиб, ушбу

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!} x + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots + x^n$$

Ньютон биноми формуласига келамиз.

Шундай қилиб, бу ҳолда ушбу

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \frac{\alpha}{1} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

тақрибий формулага әгамиз.

Биз юқорида элементар функцияларнинг Маклорен формулалари ни көлтиридик. Бу формулаларнинг қолдиқ ҳадларини асосан Лагранж кўринишида ёзиб, сўнгра уларни баҳоладик. Элементар функцияларнинг Маклорен формулаларида уларнинг қолдиқ ҳадларини бошқа кўринишларда ҳам ёзиш мумкин. Масалән, элементар функцияларнинг Пеано кўринишидаги қолдиқ ҳадли Маклорен формулалари қўйидагича ёзилади:

$$1) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

(бунда n — тоқ сон),

$$3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

(бунда n — жуфт сон),

$$4) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$5) (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

7- б о б -

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБНИНГ БАЪЗИ БИР ТАТБИҚЛАРИ

Ушбу бобда функцияниң ҳосилалари ёрдамида унинг ўзгариши характери (оралиқда ўзгармас қийматни сақлаши, ўсуви ёки камаючи бўлиши, максимум ва минимум қийматлари), шунингдек функция графигини текшириш (функция графигининг қавариқ ёки ботиқлиги, бурилиш нуқталарини аниқлаш) каби масалалар ўрганилади.

1- §. Функцияниң ўзгағиб бориши

1. Функцияниң ўзгармас қийматни сақлаши. $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлсин.

7.1-теорема. $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу функция (a, b) интервалда ўзгармас бўлишии учун шу интервалда

$$f'(x) = 0$$

бўлишии зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. Шартга кўра $f(x)$ функция (a, b) интервалда ўзгармас, яъни $f(x) \equiv C$, $C = \text{const}$. Равшанки, бў ҳолда (a, b) интервалда $f'(x) \equiv 0$ бўлади.

Етарилиги. Шартга кўра $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга ва $f'(x) = 0$. Энди (a, b) интервалда исталган x ва тайинланган x_0 нуқталарни олиб, $[x_0, x]$ ёки $[x, x_0]$ сегментни қарайлик. Бу сегментлар (a, b) интервалда бутунлай жойлашган, яъни $[x_0, x] \subset (a, b)$, $[x, x_0] \subset (a, b)$. Демак, $f(x)$ функция $[x_0, x]$ сегментда узлуксиз (функцияниң узлуксиз бўлиши, унинг (a, b) да чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлишидан келиб чиқади) ҳамда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга. Лагранж теоремасига (6.7-теоремага қаранг) кўра x_0 билан x нуқталар орасида шундай c ($c \in (x_0, x)$) нуқта мавжудки,

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \quad (7.1)$$

тенглик ўринли бўлади. (a, b) да $f'(x) \equiv 0$ бўлганидан $f'(c) = 0$ бўлиб, (7.1) тенгликдан эса $f(x) = f(x_0)$ тенглик келиб чиқади. Агар c нуқта (x, x_0) интервалдан олинган бўлса ҳам $f'(c) = 0$ дан $f(x) = f(x_0)$ келиб чиқади. Энди $C = f(x_0)$ десак, (a, b) интервалда $f(x)$ функцияни учун $f(x) = C'$, $C' = \text{const}$ муносабатга эгамиз. Бу $f(x)$ функцияниң (a, b) интервалда ўзгармас эканини англагади. Теорема исбот бўлди.

7.1-нәтижә. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, шу интервалда

$$f'(x) \equiv g'(x)$$

тengлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ билан $g(x)$ функциялар (a, b) интервалда бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қиласди:

$$f(x) \equiv g(x) + C, C = \text{const.}$$

Хақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - g(x) \\ \text{деб, } (a, b) \text{ да} \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) \equiv 0$$

бўлишини топамиз. Испот этилган теоремага кўра $F(x) \equiv C, C = \text{const}$ бўлади. (7.2) муносабатдан $f(x) \equiv g(x) + C$ экани келиб чиқади.

2. Функцияни нг монотон бўлиши.

Биз 4-бобда функцияни нг монотонлиги, яъни ўсувчи (қатъий ўсувчи), камаючи (қатъий камаючи) бўлиши таърифларини келтирган эдик. Энди функция ҳосиласи ёрдамида функцияни нг монотонлигини аниқлаш мумкинлигини кўрсатамиз.

$f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлсин.

7.2-теорема. $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу функция шу интервалда ўсувчи (камаючи) бўлиши учун (a, b) интервалда

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0)$$

тенгсизлик ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Испот. Зарурлиги. Шартга кўра $f(x)$ функция (a, b) да чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, у (a, b) интервалда ўсувчи (камаючи). $\forall x \in (a, b)$ нуқтани олиб, у билан бирга $x + \Delta x \in (a, b)$ нуқталарни ҳам қараймиз. У ҳолда

$$\Delta x > 0 \text{ да } f(x) \leq f(x + \Delta x) \quad (f(x) \geq f(x + \Delta x)),$$

$$\Delta x < 0 \text{ да эса } f(x) \geq f(x + \Delta x) \quad (f(x) \leq f(x + \Delta x))$$

муносабатлар ўринли бўлади ва бу муносабатлардан ҳар доим

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \quad \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \leq 0 \right) \quad (7.3)$$

тенгсизлик келиб чиқади. $f(x)$ функция (a, b) да чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлгани учун ушбу

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

лимит мавжуд ва чекли бўлиб,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \quad (7.4)$$

ўринли. (7.3) ва (7.4) муносабатлардан (4-бобнинг 4-§ га қаранг) (a, b) интервални нг барча нуқтларида

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0)$$

тengsизлик ўринли бўлишини топамиз.

Е тарлилиги. Шартга кўра $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, шу интервалда $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) тengsизлик ўринли.

Энди (a, b) интервалда ихтиёрий $x (x \in (a, b))$ ва $x + \Delta x ((x + \Delta x) \in (a, b); \Delta x > 0)$ нуқталарни олайлик. Равшанки, бу ҳолда $[x, x + \Delta x] \subset (a, b)$ бўлиб, $[x, x + \Delta x]$ сегментда $f(x)$ функция Лагранж теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Лагранж теоремасига (6.7- теоремага қаранг) мувофиқ x ва $x + \Delta x$ нуқталар орасида шундай $c (x < c < x + \Delta x)$ нуқта мавжудки, ушбу

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c) \cdot \Delta x \quad (7.5)$$

тенглик ўринли бўлади. (7.5) тенгликдан $\Delta x > 0$ ва $\forall x \in (a, b)$ да $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) бўлганни учун

$$f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0 \quad (f(x + \Delta x) - f(x) \leq 0)$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$x < x + \Delta x$ бўлганда $f(x) \leq f(x + \Delta x) (x < x + \Delta x \Rightarrow f(x) \geq f(x + \Delta x))$ тengsизлик ҳам ўринли. Бу $f(x)$ функцияning (a, b) интервалда ўсуви (камаювчи) бўлишини ифодалайди. Теорема исбот бўлди.

7.2- натижади. Агар $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, шу интервалда $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) тengsизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция (a, b) интервалда қатъий ўсуви (қатъий камаювчи) бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, (7.5) тенгликдан $\Delta x > 0$ ва $\forall x \in (a, b)$ да $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) бўлишини эътиборга олиб, қуйидагини топамиз:

$$f(x + \Delta x) - f(x) > 0 \quad (f(x + \Delta x) - f(x) < 0).$$

Демак, бу ҳолда $x < x + \Delta x$ бўлганда $f(x) < f(x + \Delta x) (x < x + \Delta x \Rightarrow f(x) > f(x + \Delta x))$ тengsизлик ҳам ўринли. Бу $f(x)$ функцияning (a, b) интервалда қатъий ўсуви (қатъий камаювчи) эканини кўрсатади.

7.1- эслатма. $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, бу функцияning (a, b) да қатъий ўсуви (қатъий камаювчи) бўлишидан, $f'(x)$ нинг $\forall x \in (a, b)$ да мусбат (манфий) бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, $f(x) = x^3$ функцияни қарайдик. Бу функцияning R да ўсуви бўлишини 4- бобнинг 1- § да кўрсатилган эди. Бу функция учун $f'(x) = 3x^2$ бўлиб, $x = 0$ нуқтада $f'(0) = 0$.

Мисол. $f(x) = x^3 - 3x + 2$ бўлсин. Бу функция учун $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$ бўлади. Равшанки, $|x| < 1$ бўлганда $f'(x) < 0$, $|x| > 1$ бўлганда $f'(x) > 0$.

Демак, берилган $f(x)$ функция $(-\infty, -1)$ интервалда қатъий ўсуви, $(-1; +1)$ интервалда қатъий камаювчи ва ниҳоят, $(1, +\infty)$ интервалда қатъий ўсуви бўлади.

Шундай қилиб, (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳоссилага эга бўлган $f(x)$ функцияниг (a, b) интервалда монотон бўлиши билан шу интервалда функция ҳосиласи $f'(x)$ нинг ишораси орасида қуидагича боғланishi мавжуд: (a, b) интервалда

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \text{ функция ўсувчи} \Rightarrow f'(x) \geq 0,$$

$$f'(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) \text{ функция камаювчи} \Rightarrow f'(x) \leq 0,$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ функция қатъий ўсувчи} \Rightarrow f'(x) \geq 0,$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ функция қатъий камаювчи} \Rightarrow f'(x) \leq 0.$$

2- §. Функцияниг экстремум қийматлари

$f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ бўлсин.

7.1- таъриф. Агар $x_0 \in (a, b)$ нуқтанинг шундай атрофи

$U_\delta(x_0) \{x: x \in \mathbb{R}, x_0 - \delta < x < x_0 + \delta; \delta > 0\} \subset (a, b)$ мавжуд бўлсанки, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ учун

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

тенгизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада **максимумга** (**минимумга**) эга дейилади, $f(x_0)$ қиймат $f(x)$ функцияниг $U_\delta(x_0)$ даги **максимум** (**минимум**) қиймати ёки **максимуми** (**минимуми**) дейилади.

7.2- таъриф. Агар $x_0 \in (a, b)$ нуқтанинг шундай атрофи $U_\delta(x_0) \subset (a, b)$ мавжуд бўлсанки, $\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = \dot{U}_\delta(x_0)$ учун

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0))$$

тенгизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқта қатъий максимумга (**қатъий минимумга**) эга дейилади, $f(x_0)$ қиймат $f(x)$ функцияниг $U_\delta(x_0)$ даги қатъий максимум (**қатъий минимум**) қиймати ёки қатъий максимуми (**минимуми**) дейилади.

Юқоридаги таърифлардаги x_0 нуқта $f(x)$ функцияга мос равишда максимум (**минимум**), қатъий максимум (**қатъий минимум**) қиймат берадиган нуқта деб аталади.

Функцияниг $U_\delta(x_0)$ даги максимум (**минимум**), қийматларини

$$f(x_0) = \max_{x \in U_\delta(x_0)} \{f(x)\} \quad (f(x_0) = \min_{x \in U_\delta(x_0)} \{f(x)\})$$

каби белгиланади. Бунда \max (\min) лотинча maximum , (minimum) сўзидан олинган бўлиб, энг катта (энг кичик) деган маънони англатади.

Функцияниг максимум ва минимуми умумий ном билан унинг экстремуми деб аталади.

Мисол. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ бўлсин. Бу функция $x = 0$ нуқтада максимумга эришади. Ҳақиқатан ҳам, $\forall x \in U_\delta(0) \subset [-1, +1] (\delta > 0)$ учун $f(x) < f(0)$, яъни

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} < f(0) = 1$$

бўлади.

7.2- эслатма. Юқоридаги таърифларда $f(x)$ функцияниңг $x_0 \in (a, b)$ даги $f(x_0)$ қиймати унинг шу нуқта $U_\delta(x_0)$ атрофидан олинган нуқталардаги қийматлари билангира таққосланди. Шунинг учун функцияниң экстремумини (максимум ёки минимумини) ло-кал экстремум (локал максимум ёки локал минимум) деб юритилади.

7.3- эслатма. $f(x)$ функция (a, b) интервалда бир қанча максимум ва минимумларга эга бўлиши мумкин. Бунда функцияниң максимум ва минимумлари навбатма-навбат келади.

Масалан, $f(x) = \sin x$ функцияни $(0, 4\pi)$ интервалда қарайлик. Бу функция $x = \frac{\pi}{2}$ нуқтада максимум, $x = \frac{3}{2}\pi$ нуқтада минимум, $\frac{5}{2}\pi$ нуқтада максимум, $\frac{7}{2}\pi$ нуқтада минимумга эга эканини аниқ-лаш қийин эмас. Демак, бу функция $(0, 4\pi)$ интервалда иккита максимум, иккита минимумга эга бўлиб, максимум ва минимумлар нав-батма-навбат келади.

Функция ҳосилалари ёрдамида унинг экстремумлари ҳамда функцияга экстремум қиймат берадиган нуқталар топилади.

1. Экстремумниң зарурый шарти. $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, у шу интервалда чекли $f'(x)$ ҳоси-лага эга бўлсин. Бу функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада максимум (минимум)га эришсиз. Демак, таърифга кўра x_0 нуқтаниң шундай $U_\delta(x_0) \subset (a, b)$ атрофи мавжудки, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ да $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$) тенгисзлик ўринили бўлади. Бу ҳолда Ферма теоремасига (6.5- теоремага қаранг) кўра $f'(x_0) = 0$ бўлади. Натижада қўйидаги муҳим теоремага келамиз.

7.3- теорема. Агар $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, бу нуқтада $f(x)$ функция экстремумга эриши-са, у ҳолда

$$f'(x_0) = 0$$

бўлади.

Бироқ $f(x)$ функция учун бирор $x^* \in (a, b)$ нуқтада чекли ҳосила мавжуд ва $f'(x^*) = 0$ бўлишидан унинг x^* нуқтада экстремумга эга бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, $f(x) = x^3$ функция учун $f'(x) = 3x^2$ ва $x = 0$ нуқтада $f'(0) = 0$ бўлса ҳам у $x = 0$ нуқтада экстремумга эга эмас (бу функция қатъий ўсувчи эканлиги бизга маълум).

Демак, юқоридаги теорема функция экстремумга эришишининг зарурый шартини ифодалайди.

Одатда функция ҳосиласини нолга айлантирадиган нуқталар функцияниң стационар (тургун, критик) нуқталари деб ҳам аталади.

Биз $f(x) = |x|$ функцияниң $x = 0$ нуқтада (б- боб, 1- §) ҳосиляси мавжуд эмаслигини кўрган эдик. Бу функция $x = 0$ нуқтада минимумга эга бўлиши равшандир (41- чизмага қаранг). Демак, функцияниң

ция ҳосилага эга бўлмаган нуқталарда ҳам экстремум мавжуд бўлиши мумкин.

Маълумки, $f(x) = x^{2/3}$ функцияниг $x = 0$ нуқтадаги ҳосиласи чексиз. Унинг графиги 42-чиzmada келтирилган $f(x) = \sqrt{|x|}$ функция гравигига ўхшаш. Бундан қаралётган функция $x = 0$ нуқтада минимумга эга экани кўринади. Демак, функция ҳосиласи чексизга айланадиган нуқталарда ҳам экстремум мавжуд бўлиши мумкин.

Шундай қилиб, $f(x)$ функцияга экстремум қиймат берадиган нуқталарни:

функцияниг стационар нуқталари;

функцияниг ҳосиласи мавжуд бўлмаган нуқталари;

функцияниг ҳосиласи чексизга айланадиган нуқталари орасидан излаш керак экан. Одатда бундай нуқта функция экстремумга синаладиган нуқта деб аталади.

2. Экстремумниг етарли шартлари. Энди функцияниг экстремумга эга бўлишининг етарли шартларини қараймиз. Аввалдагидек қўйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\dot{U}_\delta^-(x_0) = \{x : x \in R, x_0 - \delta < x < x_0\} \quad (\delta > 0),$$

$$\dot{U}_\delta^+(x_0) = \{x : x \in R, x_0 < x < x_0 + \delta\} \quad (\delta > 0).$$

$f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлиб, унинг

$$\dot{U}_\delta(x_0) = \{x : x \in R, x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} \quad (x \neq x_0)$$

атрофида чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

a) Агар

$$\forall x \in \dot{U}_\delta^-(x_0) \text{ учун } f'(x) > 0,$$

$$\forall x \in \dot{U}_\delta^+(x_0) \text{ учун } f'(x) < 0$$

тенгисизликлар ўринли бўлса, яъни $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтадан ўтишда ўз ишорасини «+»дан «—»га ўзгартирига, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эга бўлади.

Ҳақиқатан ҳам $\forall x \in \dot{U}_\delta^-(x_0)$ учун $f'(x) > 0$ бўлишидан $f(x)$ функцияниг $\dot{U}_\delta^-(x_0)$ да қатъий ўсувлариги келиб чиқади. Сўнгра $f(x)$ функцияниг x_0 нуқтада узлуксиз бўлишидан $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ($x \in \dot{U}_\delta^-(x_0)$) тенглик келиб чиқади. Демак, $\forall x \in \dot{U}_\delta^-(x_0)$ учун

$$f(x) < f(x_0) \tag{7.6}$$

тенгисизлик ўринли бўлади. Энди $\forall x \in \dot{U}_\delta^+(x_0)$ учун $f'(x) < 0$ бўлишидан $f(x)$ функцияниг $\dot{U}_\delta^+(x_0)$ да қатъий камаювчилари келиб чиқади. $f(x)$ функцияниг x_0 нуқтада узлуксизлигидан $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ тенглик келиб чиқади.

Демак, $\forall x \in \dot{U}_\delta^+(x_0)$ учун яна (7.6) тенгсизлик бажарилади. Бундан $\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ учун $f'(x) < f'(x_0)$ бўлиб, у $f'(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эга бўлишини билдиради.

б) Агар

$$\forall x \in \dot{U}_\delta^-(x_0) \text{ учун } f'(x) < 0,$$

$$\forall x \in \dot{U}_\delta^+(x_0) \text{ учун } f'(x) > 0$$

тенгсизликлар ўринли бўлса, яъни $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтани ўтишда ўз ишорасини «—» дан «+» га ўзгартирса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эга бўлади.

Ҳақиқатан, $\forall x \in \dot{U}_\delta^-(x_0)$ учун $f'(x) < 0$ бўлишидан $f(x)$ функциянинг $\dot{U}_\delta^-(x_0)$ да қатъий камаювчилиги, $\forall x \in \dot{U}_\delta^+(x_0)$ учун $f'(x) > 0$ бўлишидан эса $f(x)$ функциянинг $\dot{U}_\delta^+(x_0)$ да қатъий ўсувилиги келиб чиқади. Сўнgra $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз эканлигини эътиборга олиб, $\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ учун $f(x) > f(x_0)$ тенгсизликка эга бўламиз. Бу эса $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эга бўлишини билдиради.

в) Агар

$$\forall x \in \dot{U}_\delta^-(x_0) \text{ учун } f'(x) > 0,$$

$$\forall x \in \dot{U}_\delta^+(x_0) \text{ учун } f'(x) > 0$$

ёки

$$\forall x \in \dot{U}_\delta^-(x_0) \text{ учун } f'(x) < 0,$$

$$\forall x \in \dot{U}_\delta^+(x_0) \text{ учун } f'(x) < 0$$

тенгсизликлар ўринли бўлса, яъни $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтани ўтишда ўз ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эга бўлмайди, $f(x)$ функция x_0 нуқтанинг $\dot{U}_\delta(x_0)$ атрофида қатъий ўсуви чиқади. Бунга сабаб, функциянинг $x = 0$ нуқтада узлуксиз бўлиши муҳим. Масалан, ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \neq 0 \\ 1, & \text{агар } x = 0 \end{cases} \text{ бўлса,}$$

функцияни қарайлик. Бу функция учун $f'(x) = 2x$ бўлиб, ҳосила $x = 0$ нуқтани ўтишда ўз ишорасини «—» дан «+» га ўзгартирса ҳам, берилган функция $x = 0$ нуқтада экстремумга (минимумга) эга эмас. Бунга сабаб, функциянинг $x = 0$ нуқтада узлуксиз эмаслигидир.

Мисол. $f(x) = (x + 3)^2 \sqrt[3]{(x - 1)^2}$ бўлсин. Бу функциянинг экстремумини топинг.

Берилган функциянынг ҳосиласин топамиз:

$$f'(x) = \frac{8x(x+3)}{3\sqrt[3]{x-1}}. \quad (7.7)$$

Равшанки, ҳосиля $x = 0$, $x = -3$ нүкталарда нолга айланади. $x = 1$ нүктада эса чекли ҳосиля мавжуд эмас. Демак, функцияга экстремум берадиган нүкталарни $x = 0$, $x = -3$, $x = 1$ нүкталар орасидан излаш керак.

Аввал $x = 0$ нүктани олайлик. Бу нүктанинг $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ атрофии олиб, ҳосиля учун (7.7) ифодани эътиборга олсак,

$$\forall x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \text{ учун } f'(x) > 0,$$

$$\forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ учун } f'(x) < 0$$

бўлишини топамиз. Демак, $f'(x)$ ҳосиля $x = 0$ нүктани ўтишда ўз ишорасини «+» дан «—» га ўзгартиради. Равшанки, берилган функция $x = 0$ нүктада узлуксиз. Демак, берилган функция $x = 0$ нүктада максимумга эга ва унинг максимум қиймати $f(0) = 9$.

Энди $x = -3$ нүктани қарайлик. Бу нүктанинг $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ атрофини олиб, (7.7) дан фойдалансак,

$$\forall x \in \left(-\frac{7}{2}, -3\right) \text{ учун } f'(x) < 0,$$

$$\forall x \in \left(-3, -\frac{5}{2}\right) \text{ учун } f'(x) > 0$$

бўлишини топамиз. Демак, $f'(x)$ ҳосиля $x = -3$ нүктани ўтишда ўз ишорасини «—» дан «+» га ўзгартиради. Берилган функция $x = -3$ нүктада узлуксиз, демак, у $x = -3$ нүктада минимумга эга ва унинг минимум қиймати $f(-3) = 0$. Ниҳоят, $x = 1$ нүктада берилган функция минимумга эга бўлишини юқоридагидек кўрсатилади.

3. Функция экстремумини топишда унинг юқори тартибли ҳосилаларидан фойдаланиш. Юқорида келтирилган экстремумнинг етарли шарти синалаётган нүктанинг ўнг ва чап томонидаги нүкталарда функция ҳосиласи $f'(x)$ нинг ишорасини аниқлаш билан ифодаланади. Кўпинча, x_0 нүктанинг атрофига $f'(x)$ нинг ишорасини аниқлаш қийин бўлади. Қаралаётган $f(x)$ функция x_0 нүктада юқори тартибли ҳосилаларга эга бўлса, ҳосилаларнинг x_0 нүкталиги қийматларининг ишорасига қараб функциянынг экстремумини текшириш мумкин.

$f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нүктада $f', f'', \dots, f^{(n)}$ ҳосилаларга эга бўлиб, бирор $n \geq 2$ сон учун

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0 \quad (7.8)$$

бўлсин.

а) Агар n - жуфт сон, яъни $n = 2m$ ($m \in N$) бўлиб,

$$f^{(n)}(x_0) = f^{(2m)}(x_0) < 0$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга,

$$f^{(n)}(x_0) = f^{(2m)}(x_0) > 0$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эга бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ функцияниң x_0 нуқта атрофида ушбу

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Тейлор формуласидан юқоридаги (7.8) шартларни эътиборга олиб топамиз:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n,$$

бунда $x \rightarrow x_0$ да $\alpha(x) \rightarrow 0$. Қеънниги тенгликини қўйидагигча

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n, \quad (7.9)$$

ёзib оламиз. Энди $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ ва $x \rightarrow x_0$ да $\alpha(x) \rightarrow 0$ бўлгани сабабли x нинг x_0 га етарли яқин қийматларида ($x \in U_\delta(x_0)$ лар учун) $f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)$ нинг ишораси $f^{(n)}(x_0)$ нинг ишораси каби бўлади.

Равшанки, $n = 2m$ бўлганда $(x - x_0)^n = (x - x_0)^{2m} > 0$ бўлиб, $x \in U_\delta(x_0)$ да $f(x) - f(x_0)$ айрманинг ишораси $f^{(n)}(x_0)$ нинг ишораси билан бир хил бўлади. Демак, $f^{(n)}(x_0) < 0$ бўлганда $\forall x \in U_\delta(x_0)$ учун $f(x) - f(x_0) < 0$, яъни $f(x) < f(x_0)$ бўлиб, $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эга бўлади. $f^{(n)}(x_0) > 0$ бўлганда эса $\forall x \in U_\delta(x_0)$ учун $f(x) - f(x_0) > 0$, яъни $f(x) > f(x_0)$ бўлиб, $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эга бўлади.

б) Агар n — тоқ сон, яъни $n = 2m + 1$ ($m \in N$) бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эга бўлмайди. Ҳақиқатан, $(x - x_0)^n = (x - x_0)^{2m+1}$ ифода

$$\forall x \in U_\delta^+(x_0) \text{ учун } (x - x_0)^n > 0,$$

$$\forall x \in U_\delta^-(x_0) \text{ учун } (x - x_0)^n < 0$$

тенгсизликлар ўринли бўлиб, x_0 нуқтанинг $U_\delta(x_0)$ атрофида ишора сақланмайди. Бу ҳолда (7.9) дан кўринадики, $f^{(n)}(x_0)$ нинг ишораси ҳар қандай бўлганда ҳам $f(x) - f(x_0)$ айрманинг ишораси ўзгаради. Бу эса x_0 нуқтада экстремум йўқлигини англаради.

Мисол. $f(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x$ функцияни экстремумга текширилиг.

Бу функция учун $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2 \sin x$ бўлиб, у $x = 0$ нуқтада нолга айланади. Демак, $x = 0$ стационар нуқта. Берилган функцияning юқори тартибли ҳосилаларини топиб, уларнинг $x = 0$ нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x + e^{-x} - 2 \cos x, \quad f''(0) = 0, \\ f'''(x) &= e^x - e^{-x} + 2 \sin x, \quad f'''(0) = 0, \\ f^{(IV)}(x) &= e^x + e^{-x} + 2 \cos x, \quad f^{(IV)}(0) = 4. \end{aligned}$$

Жуфт тартибли ҳосила $x = 0$ нуқтада нолдан фарқли бўлиб, у мусбат бўлгани учун берилган функция $x = 0$ нуқтада минимумга эга бўлади. Шу нуқтада функция қийматини ҳисоблаймиз: $f(0) = 4$.

Юқорида келтирилган қойдадан, хусусан, $n = 2$ бўлганда қийидаги натижка келиб чиқади.

7.3- иатижади. Агар x_0 нуқта $f(x)$ функцияning стационар нуқтаси бўлиб, $f(x)$ функция x_0 нуқтада чекли $f''(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, $f''(x_0) < 0$ бўлганда $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга, $f''(x_0) > 0$ бўлганда $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эга бўлади.

4. Функцияning энг катта ва энг кичик қийматлари. Биз аввалги пунктларда функцияning экстремумларини ўргандик ва функция бирор оралиқда бир нечта максимум ва минимумларга эга бўлиши мумкинлигини айтиб ўтдик.

Энди функцияning энг катта ва энг кичик қийматларини топиш масаласини қараймиз.

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Вейерштрасснинг иккинчи теоремасига кўра (5.8- теоремага қаранг) функцияning $[a, b]$ да энг катта ҳамда энг кичик қийматлари мавжуд бўлади ва бу қийматларга $[a, b]$ сегментнинг нуқталарида эришилади. Функцияning энг катта қиймати қуидагича топилади:

1) $f(x)$ функцияning (a, b) интервалдаги максимум қийматлари топилади. Функцияning ҳамма максимум қийматларидан иборат тўплам $\{\max f(x)\}$ бўлсин.

2) Функцияning $[a, b]$ сегментнинг чегараларидаги, яъни $x = a$, $x = b$ нуқталардаги $f(a)$ ва $f(b)$ қийматлари ҳисобланади. Сўнгра $\{\max f(x)\}$ тўпламнинг барча элементлари билан $f(a)$ ва $f(b)$ лар таққосланади. Бу қийматлар ичида энг каттаси $f(x)$ функцияning $[a, b]$ сегментдаги энг катта қиймати бўлади.

Шунга ўхшаш функцияning энг кичик қиймати топилади:

1') $f(x)$ функцияning (a, b) интервалдаги барча минимум қийматлари топилиб, улардан $\{\min f(x)\}$ тўплам тузилади.

2') $[a, b]$ сегментнинг чегаралари $x = a$, $x = b$ нуқталарда $f(x)$ функцияning $f(a)$, $f(b)$ қийматлари ҳисобланади.

$\{\min f(x)\}$ тўпламнинг барча элементлари ҳамда $f(a)$, $f(b)$ қийматлар ичида энг кичиги, $f(x)$ функцияning $[a, b]$ сегментдаги энг кичик қиймати бўлади.

Мисол. Ушбу $f(x) = \sin(x^2)$ функцияning $[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{5\pi}{2}}]$ сегментда энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Функция ҳосиласини нолга тенглаб, яъни

$$f'(x) = 2x \cos(x^2) = 0$$

тенгламани қараб, ундан $x = 0$, $x = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ лар стационар нуқта эканини топамиз. Энди берилган функцияниң иккинчи тартибли ҳосиласини ёзамиз:

$$f''(x) = 2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2).$$

Бу ҳосиланинг стационар нуқталардаги қийматларини топамиз:

$$f''(0) = 2 > 0, f''\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = -2\pi < 0,$$

$$f''\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = -2\pi < 0.$$

Бундан $f(x) = \sin(x^2)$ функция $x = 0$ нуқтада минимумга, $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

ва $x = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ нуқталарда эса максимумга эришиши келиб чиқади.

Функцияниң стационар нуқталардаги қийматлари

$$f(0) = 0, f\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 1, f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 1$$

бўлиб, унинг $\left[-\sqrt{\pi}, \frac{1}{2}\sqrt{5\pi}\right]$ сегментининг чегараларидаги қийматлари

$$f(-\sqrt{\pi}) = 0, f\left(\frac{1}{2}\sqrt{5\pi}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

бўлади. Бу қийматларни таққослаб, $f(x) = \sin(x^2)$ функцияниң $\left[-\sqrt{\pi}, \frac{1}{2}\sqrt{5\pi}\right]$ сегментдаги энг катта қиймати 1 га, энг кичик қиймати эса $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ га тенг бўлишини топамиз.

3- §. Функцияниң қавариқлиги ва ботиқлиги

$f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, бу интервалдан олинган $x_1 \in (a, b)$, $x_2 \in (a, b)$ нуқталар учун $x_1 < x_2$ бўлсин. Равшанки, $(x_1, x_2) \subset (a, b)$.

Энди $f(x)$ функция графигида $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ нуқталарни олайлик. Маълумки, бу $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси қўйидаги

$$\frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

кўринишга эга бўлади. Уни

$$y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

каби ёзиб олиб, қулайлик учун бу тенгламанинг ўнг томонини $l(x)$ орқали белгилайлик:

$$l(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2). \quad (7.10)$$

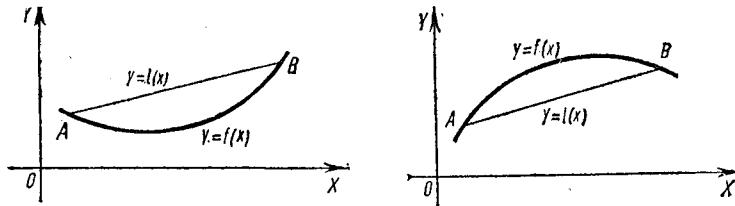
Шу белгилашга кўра $y = l(x)$ тенглами $A(x_1, f(x_1))$ ва $B(x_2, f(x_2))$ нуқтатардан ўтувчи тўери чизиқни ифодалайди. (7.10) муносабатдан $l(x_1) = f(x_1)$, $l(x_2) = f(x_2)$ тенгликлар келиб чиқади.

7.2- таъриф. Агар $\forall x \in (x_1, x_2)$ учун

$$f(x) \leqslant l(x) \quad (f(x) < l(x)) \quad (7.11)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция (a, b) интервалда қавариқ (қатъий қавариқ) функция деб аталади.

Қавариқ функция графиги (48- а чизма) A ва B нуқталардан ўтувчи $l(x)$ ватардан пастда жойлашган бўлади.



48- а, б чизма

7.3- таъриф. Агар $\forall x \in (x_1, x_2)$ учун

$$f(x) \geqslant l(x) \quad (f(x) > l(x)) \quad (7.12)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция (a, b) интервалда ботиқ (қатъий ботиқ) функция деб аталади.

Ботиқ функция графиги (48- б чизма) A ва B нуқталардан ўтувчи $l(x)$ ватардан юқорида жойлашган бўлади.

Агар

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (\alpha_1 \geqslant 0, \alpha_2 \geqslant 0)$$

деб белгиласак, унда

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 1, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 &= x \end{aligned}$$

тенгликлар ўринли бўлиб, (7.10) тенглик қуйидагича

$$l(x) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

ифодаланади. Натижада (7.11) ва (7.12) муносабатлар ушбу

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \quad (f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)) \quad (7.13)$$

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \quad (f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) > \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)) \quad (7.14)$$

күринишиларга келади. Демак, функциянынг қавариқлиги (қатъий қавариқлиги) (7.13) тенгсизлик билан ҳамда ботиқлиги (қатъий ботиқлиги) эса (7.14) тенгсизлик билан таърифланиши мумкин.

7.5-эслатма. Функциянынг қавариқлиги ва ботиқлиги күпинча мос равище қавариқлиги билан пастга йўналган ва қавариқлиги билан юқорига йўналган деб ҳам юритилади.

Функциянынг ҳосиласи ёрдамида унинг қавариқлиги ҳамда ботиқлигини текшириш мумкин.

$f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, бу интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

7.4-теорема. $f(x)$ функция (a, b) интервалда қавариқ (қатъий қавариқ) бўлиши учун унинг $f'(x)$ ҳосиласининг (a, b) да ўсувиши (қатъий ўсувиши) бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $f(x)$ функция (a, b) да қавариқ бўлсин. Демак, $\forall x_1 \in (a, b)$, $\forall x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ бўлганда $\forall x \in (x_1, x_2)$ дар учун

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

бўлади. Бундан

$$(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geqslant 0$$

бўлиши келиб чиқади. Кейинги тенгсизлиқда $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$ деб, қуидагини топамиз:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \quad (7.15)$$

Шу (7.15) тенгсизлиқда аввал $x \rightarrow x_1$ да, сўнг $x \rightarrow x_2$ да лимитга ўтсак, у ҳолда

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$f'(x_2) = \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \geqslant \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

бўлиб, натижада қуидаги

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2)$$

тенгсизликлар келиб чиқади. Демак, $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$. Шундай қилиб, $x_1 < x_2$ бўлганда $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$ бўлади. Бу эса (a, b) интервалда $f'(x)$ нинг ўсувиши эканини билдиради. Энди $f(x)$ функция (a, b) интервалда қатъий қавариқ бўлсин. Бу ҳолда (7.15) тенгсизлик ушбу

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad (7.16)$$

кўринишда бўлади.

Лагранж теоремасига (6.7-теоремага қаранг) кўра

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \quad x_1 < \xi_1 < x$$

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2), \quad x < \xi_2 < x_2$$

бўлади. Сўнгра

$$\begin{aligned} x_1 &< \xi_1 \text{ бўлганда } f'(x_1) \leq f'(\xi_1), \\ \xi_2 &< x_2 \text{ бўлганда } f'(\xi_2) \leq f'(x_2) \end{aligned}$$

тенгсизлик ўринли бўлишини ҳамда (7.16) тенгсизликни эътиборга олиб, топамиз:

$$f'(x_2) \geq f'(\xi_2) \geq f'(\xi_1) \geq f'(x_1).$$

Демак, $f'(x_1) < f'(x_2)$. Шундай қилиб, $x_1 < x_2$ бўлганда $f'(x_1) < f'(x_2)$ бўлади. Бу $f(x)$ функциянинг қатъий ўсувларигини англатади.

Етарл илиги. $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, у ўсуви (қатъий ўсуви) бўлсин. Демак, $\forall x_1 \in (a, b)$, $\forall x_2 \in (a, b)$ учун $x_1 < x_2$ бўлганда $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ ($f'(x_1) < f'(x_2)$) тенгсизлик ўринли. Яна Лагранж теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \quad (x_1 < \xi_1 < x), \quad (7.17)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2) \quad (x < \xi_2 < x_2), \quad (7.18)$$

бунда

$$x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2. \quad (7.19)$$

Демак, $\xi_1 < \xi_2$ бўлганда $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ ($f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$) тенгсизлик ўринли бўлади. У ҳолда (7.17) ва (7.18) муносабатлардан

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad \left(\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \right)$$

бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб, $\forall x_1 \in (a, b)$, $\forall x_2 \in (a, b)$ ва $x_1 < x_2$ бўлганда (бу ҳолда (7.19) га кўра $\xi_1 < \xi_2$ бўлади)

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad (x_1 < x < x_2),$$

$$\left(\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \right) \quad (x_1 < x < x_2)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Натижада (7.10), (7.11) ва (7.15) муносабатларни эътиборга олиб, $f(x)$ функциянинг (a, b) интервалда қавариқ (қатъий қавариқ) эканига ишонч ҳосил қиласиз.

Теорема исбот бўлди.

Худди шунга ўхшашиб қўйилаги теорема ҳам исботланади.

7.5-теорема. $f(x)$ функция (a, b) интервалда ботиқ (қатъий ботиқ) бўлиши учун унинг $f'(x)$ ҳосиласининг (a, b) да камаючи (қатъий камаючи) бўлиши зарур ва етарли.

Функциянинг қавариқлиги ҳамда ботиқлигини унинг иккинчи тартибли ҳосиласидан (агар у мавжуд бўлса) фойдаланиб текширишумумкин.

$f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, шу интервалда у иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бундан ташқари, (a, b) интервалнинг ҳар қандай (α, β) ($(\alpha, \beta) \subset (a, b), \alpha \neq \beta$) қисмida $f''(x)$ айнан нолга тенг бўлmasin.

7.6-төрима. $f(x)$ функция (a, b) интервалда қавариқ (ботик) бўлиши учун шу интервалда

$$f'(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0)$$

тенгсизлик ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $f(x)$ функция (a, b) интервалда қавариқ (ботик) бўлсин. У ҳолда юқорида келтирилган т. оремаларга кўра, функцияning $f'(x)$ ҳосиласи (a, b) интервалда ўсувчи (камаювчи) бўлади. Функцияning монотон бўлиши ҳақидаги 7.2- төримага кўра $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) бўлишини топамиз.

Етарлиги. Энди (a, b) интервалда функцияning иккинчи тартибли ҳосиласи учун ушбу $f'(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) тенгсизлик ўринли бўлсин. У ҳолда яна функцияning монотонлиги ҳақидаги 7.2- төримага кўра $f'(x)$ ҳосила (a, b) интервалда ўсувчи (камаювчи) бўлади. Бундан 7.4- төримага (7.5- төримага) асосан $f(x)$ функцияning (a, b) интервалда қавариқ (ботик) бўлиши келиб чиқади. Төрима исбот бўлди.

Мисол. $f(x) = \ln x$ ($x > 0$) бўлсин. Бу функция учун $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ бўлиб, $f''(x) < 0$ бўлади. Демак, $f(x) = \ln x$ функция $(0, +\infty)$ интервалда қатъий ботикдир. Шунга ўхшаш, $f(x) = -\ln x$, $x > 0$ функция $(0, +\infty)$ интервалда қавариқ бўлади. Ушбу $f(x) := \ln x$ функцияning ботиклигидан битта тенгсизликни келтириб чиқарамиз. Функцияning ботиклиги таърифларидан $x_1 \in (0, +\infty)$, $x_2 \in (0, +\infty)$ лар учун $x_1 < x_2$ ва $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ бўлганда қўйидаги

$$\alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 \leq \ln (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Кейинги тенгсизликни қўйидаги

$$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

кўринишда ёзиш мумкин. Хусусий ҳолда, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ бўлса, бундан бизга маълум бўлган

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

тенгсизлик келиб чиқади.

2. Функцияning эгилиши уқталари. Функция ҳосиласи ёрдамида унинг эгилиши нуқталарини топиш мумкин. $f(x)$ функция x_0 нуқтанинг $U_\delta(x_0)$ атрофида аниқланган бўлсин.

7.4-тадориф. Агар $f(x)$ функция $U_\delta^-(x_0)$ оралиқда қавариқ (ботик) бўлиб, $U_\delta^+(x_0)$ оралиқда эса ботик (қавариқ) бўлса, у ҳолда x_0 нуқта функцияning (функция графигининг) эгилиши нуқтаси деб аталади.

$f(x)$ функция $U_\delta(x_0)$ да иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Агар

$$\forall x \in U_\delta^-(x_0) \text{ учун } f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0),$$

$$\forall x \in U_\delta^+(x_0) \text{ учун } f''(x) \leq 0 \quad (f''(x) \geq 0),$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $U_\delta^-(x_0)$ да $f'(x)$ ўсувчи (камаювчи), $U_\delta^+(x_0)$ да $f'(x)$ камаювчи (ўсувчи) бўлиб, $f'(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришади. У ҳолда x_0 нуқтада $f''(x_0) = 0$ бўлади.

Демак, $f(x)$ функцияниңг эгилиш нуқтасида иккинчи тартибли ҳосила $f''(x)$ нолга тенг бўлади.

Мисол. $f(x) = e^{-x^2}$ бўлсин. Бу функцияниңг иккинчи тартибли ҳосиласи

$$f''(x) = 2e^{-x^2} (2x^2 + 1)$$

бўлиб, у фақат $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ нуқталарда нолга айланади:

$$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \quad f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

Равшанки, бу функцияниңг иккинчи тартибли ҳосиласи $f''(x)$ $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ва $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ интервалларда $f''(x) > 0$;
 $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ сегментда эса $f''(x) \leq 0$.

Демак, $f(x) = e^{-x^2}$ функция $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ интервалда қавариқ,

$[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ сегментда ботиқ ва $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ интервалда яна қавариқ бўлади. Функция графигининг $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ нуқталари унинг эгилиш нуқталариdir.

3. Функция графикининг асимптоталари. $f(x)$ функция $a \in R$ нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлсин.

7.5-таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

лимитлардан бири ёки иккалasi чексиз бўлса, у ҳолда $x = a$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графикининг вертикаль асимптотаси деб аталади.

Масалан, $\frac{1}{x}$ функция графикиги учун $x = 0$ тўғри чизиқ вертикаль асимптота бўлади.

Энди $y = f(x)$ функция (a, ∞) ($(-\infty, a)$) оралиқда аниқланган бўлсин.

7.6-таъриф. Агар шундай ўзгармас k ва b сонлар мавжуд бўлса-ки, $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) да $f(x)$ функция ушбу

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

кўринишда ифодаланса (бунда $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha(x) = 0$), у ҳолда $y = kx + b$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг оғма асимптотаси деб аталади.

Масалан,

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$$

бўлсин. Бу функцияни

$$f(x) = x - 4 + \frac{2}{x + 1}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Демак, $x \rightarrow \pm\infty$ да $\alpha(x) = \frac{2}{x+1} \rightarrow 0$ бў-либ, берилган функция $f(x) = x - 4 + \alpha(x)$ кўринишда ифодаланади. Бундан эса $y = x - 4$ тўғри чизиқ функция графигининг оғма асимп-тотаси экани келиб чиқади.

7.7-теорема. $f(x)$ функция графиги $y = kx + b$ оғма асимп-тотага эга бўлиши учун

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b$$

лимитларнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $f(x)$ функция графиги $y = kx + b$ оғ-ма асимптоматага эга бўлсин. Оғма асимптота таърифига кўра

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

бўлиб, бунда $x \rightarrow +\infty$ да $\alpha(x) \rightarrow 0$ бўлади. У ҳолда қўйидагиларга эгамиш:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right] = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [b + \alpha(x)] = b.$$

Етарлилиги. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b$$

лимитлар ўринли бўлсин. У ҳолда.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b \text{ дан } f(x) - kx - b = \alpha(x) \rightarrow 0$$

келиб чиқади. Демак, $x \rightarrow +\infty$ да

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

бўлиб, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$ бўлади. Бу эса $y = kx + b$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг асимптотаси эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

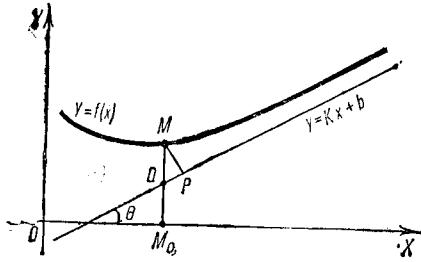
Мисол. Ушбу $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ функция берилган бўлсин. Бу функция учун

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = 1, \text{ демак, } k = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right] = 2, \text{ демак, } b = 2.$$

Шундай қилиб, берилган функция графигининг асимптотаси $y = x + 2$ тўғри чизиқдан иборат.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция графиги 49-чизмада тасвирланган ёғри чизиқ бўлиб, $M(x, f(x))$ ёғри чизиқдаги бирор нуқта бўлсин.



49-чизма

Бу нуқтанинг Ox ўқига проекциясини M_0 билан белгилайлик. $y = kx + b$ эса $f(x)$ функция графигининг асимптотаси бўлиб, бу асимптота Ox ўқи билан ташкил этган бурчак θ ($\theta \neq \frac{\pi}{2}$) бўлсин. $MP - M$ нуқтадан асимптотага туширилган перпендикуляр кесмаси, $Q - MM_0$ тўғри чизиқ кесмасини асимптота билан кесишган нуқтаси. Равшанки,

$$\begin{aligned} MM_0 &= f(x), \\ QM_0 &= kx + b, \\ MQ &= f(x) - (kx + b), \\ MP &= MQ \cdot \cos \theta. \end{aligned}$$

Ушбу $y = kx + b$ чизиқ функция графигининг асимптотаси бўлгани учун $x \rightarrow +\infty$ да $MQ = f(x) - (kx + b) = \alpha(x)$ функция нолга интилади. У ҳолда $x \rightarrow +\infty$ да MP ҳам нолга интилади.

Демак, функция графигидан $y = kx + b$ тўғри чизиқкача бўлган MP масофа $M(x, f(x))$ нуқта график бўйича «чексиз интилганда» ($x \rightarrow +\infty$ да) нолгача камаяди. (Буни функция графигининг асимптотаси таърифи сифатида ҳам олиш мумкин.)

4-§. Функцияларни текшириш. Графикларни ясаш

Биз ушбу бобнинг ўтган параграфларида функцияларнинг ўзгариш характерини ҳосилалар ёрдамида ўргандик. Бу ҳол функцияларни яққол тасаввур этишда, шунингдек функция графигини аниқроқ ясашда қўл келади.

Функцияларни текшириш ва уларнинг графикларини ясашни қўйдаги схема бўйича олиб бориш мақсадга мувофиқдир:

1°. Функциянинг аниқланиш тўпламини топиш;

2°. Функцияни узлуксизликка текшириш ва узилиш нүкталарини топиш;

3°. Функцияниң жуфт, тоқ ҳамда даврийлигини аниқлаш;

4°. Функцияни монотонликка текшириш;

5°. Функцияни экстремумга текшириш;

6°. Функция графигининг қавариқ ҳамда ботиқлигини аниқлаш, эгилиш нүкталарини топиш;

7°. Функция графигининг асимптоталарини топиш;

8°. Функцияниң ҳақиқий илдизларини (агар улар мавжуд бўлса, шунингдек аргумент x нинг бир нечта характерли қийматларида функцияниң қийматларини ясаш.

Мисол. Ўшбу

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

функцияни текширинг ва графигини ясанг.

Берилган функция $R = (-\infty, +\infty)$ интервалда аниқланған ва узлуксиз. Бу функция учун $f(-x) = f(x)$ тенглик ўринли. Демак, $f(x)$ жуфт функция (унинг графиги Oy ўқига нисбатан симметрик бўлади), уни $[0, +\infty)$ оралиқда текшириш етарли.

Функцияниң биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}, \quad f''(x) = \frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

Функцияниң биринчи тартибли ҳосиласи $[0, +\infty)$ оралиқда мавжуд ва $x = 0$ нүктада нолга айланади. Шу $x = 0$ нүктада иккинчи тартибли ҳосилани ҳисоблаймиз, $f''(0) = 4 > 0$. Бундан берилган $f(x)$ функция $x = 0$ да минимумга эга ва $[0, +\infty)$ да $\min f(x) = -1$ бўлади. Энди $x > 0$ да $f'(x) > 0$ бўлганидан берилган функцияниң $[0, +\infty)$ оралиқда ўсувлитигини топамиз. Сўнгра ушбу

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{1}{x} = 0,$$

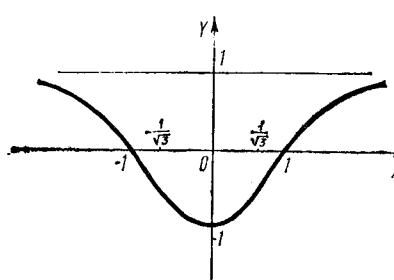
$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - 1 = 1$$

лимитларга кўра $y = 1$ горизонтал тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг асимптотаси эканига ва

$$f(x) - 1 = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - 1 = \frac{-2}{x^2 + 1} < 0$$

тengsизликка кўра функция графиги асимптотадан пастда жойлашган бўлишига ишонч ҳосил қиласми.

Функцияниң иккинчи тартибли ҳосиласи $[0, +\infty)$ оралиқнинг $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ нүктасида нолга айланади. Равшанки, $0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ да



50- чизма

$f''(x) > 0$, $\frac{1}{\sqrt{3}} < x < +\infty$ да
 $f''(x) < 0$. Демак, $f(x)$ функция
 $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ интервалда қаварып,
 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$ интервалда ботиқ бў-
лади. $x = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ нуқта функция
графигининг эгилиш нуқтасидан
иборат. Берилган функциянинг гра-
фиғи 50- чизмада тасвирланган,

5- §. Аниқмасликларни очиш. Лопиталь қоидалари

Биз функцияларнинг лимитини ўрганиш жараёнида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ кўринишдаги аниқмасликларни очиш билан шуғулланган эдик. Тегишли функцияларнинг ҳосилалари мавжуд бўлганда, берилган аниқмасликларни очиш масаласи енгиллашади. Одатда ҳосилалардан фойдаланиб аниқмасликларни очиш *Лопиталь қоидалари* деб аталади. Биз қўйида Лопиталь қоидаларининг муфассал баёни билан шуғулланамиз.

1°. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик. Маълумки, $x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow 0$ бўлса, $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбат $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди. Кўпинча $x \rightarrow a$ да $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбатнинг лимитини то-
пишга қараганда $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ нисбатнинг лимитини топиш озон бўлади. Бу
нисбатлар лимитларининг тенглигиги қўйидаги теорема кўрсатади.

7.8-төрима. (a, b) интервалда аниқланган, узлуксиз $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун ушибу шартлар бажарилган бўлсин:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0;$$

2) (a, b) да чекли $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилалар мавжуд ва $g'(x) \neq 0$;

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k \quad (k \text{ — чекли ёки чексиз}).$$

У холда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ ҳамда $g(x)$ функцияларнинг $x = a$ нуқтада қийматлари нолга тенг, яъни

$$f(a) = 0, g(a) = 0 \quad (7.20)$$

деб олсак, натижада

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 = g(a)$$

тенгликлар ўринли бўлиб, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлади. $\forall x \in (a, b)$ нуқта олиб, $[a, x]$ сегментда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларни қараймиз. Бу сегментда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар Коши теоремасининг (6.8-теоремага қаранг) шартларини қаноатлантиради. У ҳолда Коши теоремасига кўра a билан x орасида шундай c ($a < c < x$) нуқта топиладики, ушбу

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенгликтан эса (7.20) га кўра

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

бўлиши келиб чиқади. Равшанки, $x \rightarrow a$ да $c \rightarrow a$. Демак,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = k.$$

Мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \ln(x+e)}{\arcsin x}$$

лимитни ҳисобланг.

Бу ҳолда

$$f(x) = e^{2x} - \ln(x+e), \quad g(x) = \arcsin x$$

бўлиб, улар учун 7.8-теореманинг барча шартлари бажарилади. Ҳақиқатан ҳам,

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - \ln(x+e)) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x = 0;$$

$$2) f'(x) = e^{2x} \cdot 2 - \frac{1}{x+e}, \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1,$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - \frac{1}{x+e}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 2 - \frac{1}{e}$$

бўлади. У ҳолда 7.8-теоремага кўра

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \ln(x+e)}{\arcsin x} = 2 - \frac{1}{e}.$$

Шу 7.8-теоремадан, яъни Лопиталь қоидасидан фойдаланиб, 125-бетдаги муҳим (4.1) лимитни осонлик билан исботлаш мумкин. Ҳақиқатан,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

7.6-эслатма. Юқорида келтирилган 7.8-теореманинг З-шарти бажарилмаганда, яъни $x \rightarrow a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳосилалари мавжуд бўлиб, $x \rightarrow a$ да $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ нисбатнинг лимити мавжуд бўлмаганда ҳам

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

мавжуд бўлиши мумкин. Масалан, $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, $g(x) = \ln(1+x)$ бўлсин. Бу функциялар учун

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, \quad g'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ бўлиб, } x \rightarrow 0 \text{ да } \frac{f'(x)}{g'(x)} = \\ &= \frac{2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}} \end{aligned}$$

нисбат лимитга эга эмас. Бироқ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos \frac{1}{x}}{\ln(1+x)^{1/x}} = 0$$

бўлади.

7.9-теорема ($c, +\infty$) интервалда аниқланган $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун ушбу шартлар бажарилган бўлсин:

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$;
- 2) ($c, +\infty$) да чекли $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилалар мавжуд ва $g'(x) \neq 0$:

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k \quad (k - \text{чекли ёки чексиз}).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Умумийликни сақлаган ҳолда, теоремадаги сонни мусбат деб олиш мумкин. x ўзгарувчини ушбу $x = \frac{1}{t}$ формула ёрдамида t ўзгарувчига алмаштирамиз. У ҳолда $x \rightarrow +\infty$ да $t \rightarrow +0$. Натижада $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар t ўзгарувчининг $f\left(\frac{1}{t}\right)$ ва $g\left(\frac{1}{t}\right)$

функциялари бўлиб, улар $\left(0, \frac{1}{c}\right)$ интервалда аниқланган.

Теореманинг 1) шарти қўйидаги

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +0} f\left(\frac{1}{t}\right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{t \rightarrow +0} g\left(\frac{1}{t}\right) = 0$$

кўринишни олади.

$\left(0, \frac{1}{c}\right)$ интервалда $f\left(\frac{1}{t}\right), g\left(\frac{1}{t}\right)$ функциялар ҳосилаларга әга. Ҳақиқатан ҳам, мураккаб функция ҳосиласи ҳақидаги 6.3- теоремага күра ((6.5) формулаға қаранг) топамиз:

$$\begin{aligned} \left[f\left(\frac{1}{t}\right) \right]'_t &= \left[f\left(\frac{1}{t}\right) \right]_x' \cdot x'_t = -f'_x\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2}, \\ \left[g\left(\frac{1}{t}\right) \right]'_t &= \left[g\left(\frac{1}{t}\right) \right]_x' \cdot x'_t = -g'_x\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2}. \end{aligned}$$

Бу муносабатлардан $f'_t\left(\frac{1}{t}\right), g'_t\left(\frac{1}{t}\right)$ ҳосилаларнинг мавжудлиги көлиб чиқади.

Сұнгра

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'_t\left(\frac{1}{t}\right)}{g'_t\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-f'_x\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2}}{-g'_x\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'_x(x)}{g'_x(x)} = k$$

бўлишидан эса $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'_t\left(\frac{1}{t}\right)}{g'_t\left(\frac{1}{t}\right)}$ нинг мавжудлиги ва $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'_t\left(\frac{1}{t}\right)}{g'_t\left(\frac{1}{t}\right)} = k$

эканини топамиз.

Шундай қилиб, $\left(0, \frac{1}{c}\right)$ интегралда аниқланган $f\left(\frac{1}{t}\right), g\left(\frac{1}{t}\right)$ функциялар учун қуйидагига әгамиз:

- 1) $\lim_{t \rightarrow +0} f\left(\frac{1}{t}\right) = 0, \lim_{t \rightarrow +0} g\left(\frac{1}{t}\right) = 0;$
- 2) $\left(0, \frac{1}{c}\right)$ интервалда $f'_t\left(\frac{1}{t}\right), g'_t\left(\frac{1}{t}\right)$ ҳосилалар мавжуд ва $g'_t\left(\frac{1}{t}\right) \neq 0;$
- 3) $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'_t\left(\frac{1}{t}\right)}{g'_t\left(\frac{1}{t}\right)} = k.$

У ҳолда юқорида исбот этилган 7.8- теоремага кўра

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = k$$

бўлади. Кейинги тенгликтан эса

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} - 1}{2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi}$$

Лимитни ҳисобланг.

Бу ҳолда $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - 1$, $g(x) = 2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi$ бўлиб, улар учун 7.9-теореманинг барча шартлари бажарилади, жумладан

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}, \quad g'(x) = \frac{4x}{1+x^4}$$

бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x^3} \right) e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1+x^4}{4x} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^4}{2x^4} = -\frac{1}{2}$$

бўлади. 7.9-теоремага кўра

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi} = -\frac{1}{2}.$$

2º. $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмаслик. Маълумки, $x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow \infty$, $g(x) \rightarrow \infty$ бўлса, $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбат $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди. Бундай аниқмасликни очища ҳам $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳосилаларидан фойдаланиш мумкин.

7.10-теорема. (a, b) интервалда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун ушбу шартлар бажарилган бўлсин:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$;
- 2) (a, b) интервалда чекли $f'(x)$, $g'(x)$ ҳосилалар мавжуд ва $g'(x) \neq 0$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$ (k — чекли ёки чексиз). У ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. k нинг чекли ҳамда чексиз бўлган ҳолларини алоҳида алоҳида қараб ўтамиш.

$$\text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$$

бўлиб, k — чекли бўлсан. Лимит таърифига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $a < x < a + \delta$ тенгсизликлар бажарилганда

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - k \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad (7.21)$$

тengsизлик ҳам бажарилади. Ушбу $a < x < x_0 < a + \delta$ tengsизлик ларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x ва тайинланган x_0 нүкталарни олиб, $[x, x_0]$ сегментда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларга Коши теоремасини (6.8-теоремага қаранг) қўлланамиз. Ў ҳолда

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (7.22)$$

тengлик ўринли бўлиб, бунда $x < c < x_0$ бўлади. Равшанки, бу a нүкта x га боғлиқдир.

Теореманинг $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ бўлиши шартига асосланиб $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, $\frac{f(x_0)}{f(x)} \neq 1$ деб олсак бўлади.

Энди (7.22) tenglikning чап томонида турган

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

нисбатни қўйидагича ёзиб оламиз.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x) \left[1 - \frac{f(x_0)}{f(x)} \right]}{g(x) \left[1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} \right]} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}.$$

У ҳолда (7.22) муносабат ушбу

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ яъни } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \quad (7.23)$$

$(x < c < x_0)$ кўринишга келади.

(7.23) tenglikning ўнг томонидэги $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ нисбат $x_0 \rightarrow a$ ($a < x < c < x_0 < a + \delta$) да k га интилади:

$$\text{Энди } \lim_{x_0 \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = k. \quad (7.24)$$

$$\alpha = \frac{f'(c)}{g'(c)} - k \quad (7.25)$$

деб белгилайлик. Равшанки, α миқдор c га ва у орқали x га x_0 нүкталарга боғлиқ бўлиб, $a < x < x_0 < c < a + \delta$ бўлгачда (7.21) муносабатга кўра

$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{2} \quad (7.26)$$

tengsizlikни қаноатлантиради.

(7.23) тенгликтеги

$$\left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right) : \left(1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}\right)$$

нисбат, x_0 нүкта тайинланган ҳолда, $x \rightarrow a$ да 1 га интилади, яъни

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} = 1.$$

Энди

$$\beta = \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} - 1 \quad (7.27)$$

деб белгиласак, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} \beta = 0$$

бўлади. Демак, ўша $\forall \varepsilon > 0$ олингандага ҳам $\frac{\varepsilon}{2(|k| + \varepsilon)}$ га кўра шундай $\delta_1 > 0$ сон топиладики, $a < x < a + \delta_1$ бўлганда

$$|\beta| < \frac{\varepsilon}{2(|k| + \varepsilon)} \quad (7.28)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Энди (7.23), (7.25), (7.27) муносабатлардан топамиз:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (k + \alpha)(1 + \beta) = k + [\alpha + (k + \alpha) \cdot \beta].$$

Агар $\delta > 0$ ва $\delta_1 > 0$ сонларнинг кичигини δ^* деб олсак, унда $a < x < a + \delta^*$ учун (7.26) ва (7.28) тенгсизликлар бир вақтда ўринли бўлиб,

$$\begin{aligned} |\alpha + (k + \alpha) \beta| &\leq |\alpha| + (|k| + |\alpha|) \cdot |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + (|k| + \frac{\varepsilon}{2}) \cdot \frac{\varepsilon}{2(|k| + \varepsilon)} = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

тенгсизлик бажарилади.

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олингандага ҳам шундай $\delta^* > 0$ сон топиладики, $a < x < a + \delta^*$ бўлганда

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$$

бўлишини билдиради.

$$б) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$$

бўлсин. Функция лимити таърифига кўра $\forall M > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $a < x < a + \delta$ бўлганда

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| > M \quad (7.29)$$

бўлади.

Юқоридаги а) ҳолидагидек $a < x < x_0 < a + \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x ва тайин x_0 нуқталарни олиб, $[x, x_0]$ сегментда (7.22) тенгликка эга бўламиз. Бунда $a < x < c < x_0 < a + \delta$ ва демак, $a < c < a + \delta$ тенгсизликларга кўра (7.22) тенгсизликдан

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| > M \quad (7.30)$$

тенгсизлик келиб чиқади.

$$\text{Иккинчи томондан, } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} = 1$$

бўлганидан $\forall \varepsilon > 0$, жумладан, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ учун шундай $\delta_1 > 0$ сон топиладики, $a < x < a + \delta_1$ бўлганда

$$\left| 1 - \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \right| < \frac{1}{2}$$

бўлади. Кейинги тенгсизликдан эса

$$\left| \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \right| > \frac{1}{2} \quad (7.31)$$

бўлиши келиб чиқади.

(7.22) тенгликдан топамиз:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Энди $\delta^* = \min \{\delta, \delta_1\}$ деб олсак, у ҳолда $a < x < a + \delta^*$ бўлганда (7.30) ва (7.31) тенгсизликлар бараварига ўринли бўлади. Натижада $a < x < a + \delta^*$ бўлганда

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \left| \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \right| \cdot \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| > \frac{1}{2} M$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

7.11-төрима. $(c, +\infty)$ интервалда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун ушибу шартлар бажарилган бўлсин:

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$;
- 2) $(c, +\infty)$ интервалда чекли $f'(x)$, $g'(x)$ ҳосилалар мавжуд ва $g'(x) \neq 0$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$ (k — чекли ёки чексиз).

У ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$$

бўлади.

Бу теорема юқорида келтирилган теоремага ўхшаш исботланади.
3°. Бошқа кўринишдаги аниқмасликлар. Майлумки,
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ бўлганда $f(x) \cdot g(x)$ ифода $0 \cdot \infty$ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, уни қўйидагича

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{f(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

ёзиш орқали $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликка келтириш мумкин.

Шунингдек, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ бўлганда $f(x) - g(x)$ ифода $+\infty - \infty$ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, уни ҳам қўйидагича

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}}$$

ўзгартириш натижасида $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка келтириш мумкин.

Шундай қилиб, функция ҳосилалари ёрдамида $0 \cdot \infty$ ҳамда $+\infty - \infty$ кўринишдаги аниқмасликларни очишида, уларни $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликка келтирилиб, сўнг юқоридаги теоремалар қўлланади.

Майлумки, $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция $1,0$ ва ∞ га, $g(x)$ функция эса мос равишда ∞ , 0 ва 0 га интилганда

$$[f(x)]^{g(x)}$$

даражали-күрсаткичли ифода 1^∞ , 0^0 , ∞^0 күринишдаги аниқмасликлар әди. Бу күринишдаги аниқмасликларни очиш учун аввал $y = [f(x)]^{g(x)}$ ни логарифмланади: $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$. $x \rightarrow a$ да $g(x) \times \ln f(x)$ ифода $0 \cdot \infty$ күринишдаги аниқмасликни иғодалайды.

Фараз қиласыл, $x \rightarrow a$ да $g(x) \ln f(x)$ аниқмас ифоданы ўзгартириб, юқоридаги теоремалардан бирини (Лопиталь қоидасини) құллаңыб

$$\lim_{x \rightarrow a} [g(x) \cdot \ln f(x)] = b$$

(b — чекли ёки чексиз) бўлишини топдик, дейлик. Унда

$$\lim_{x \rightarrow a} y = \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = e^b$$

бўлади.

7.7-эслатма. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосиллари ҳам $f(x)$ ва $g(x)$ лар сингари юқорида келтирилган теоремаларнинг барча шартларини қаноатлантирса, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

тengликлар ўринли бўлади, яъни бу ҳолда Лопиталь қоидасини тақор қўлланиш мумкин бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right]^{\frac{1}{x^2}}$$

лимитни ҳисобланг. Разшаки, $x \rightarrow 0$ да, $y = \left[\frac{\sin x}{x} \right]^{\frac{1}{x^2}}$ иғода 1^∞ күринишдаги аниқмаслик. Содда ҳисоблашлар ёрдамида топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\ln \frac{\sin x}{x} \right)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{2x} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \sin x)'}{(x^3)'} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = - \\ &= -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right]^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

8 -бөб

АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

Маълумки, ҳаракатдаги нуқтанинг тезлигини топиш, шунингдек эгри чизиқча уринма ўтказиш каби масалалар (6 - бобнинг 1- § ига қаранг) функцияларни дифференциаллаш тушунчасига олиб келган эди.

Нуқтанинг ҳар бир вақт моментидаги тезлиги маълум бўлганда унинг ҳаракат қонунини топиш, эгри чизиқни унинг ҳар бир нуқтадаридаги уринмаларига кўра аниқлаш каби масалалар кўп учрайди. Бундай масалалар юқорида эслатиб ўтилган масалаларга тескари бўлиб, улар функцияларни интеграллаш тушунчасига олиб келади.

1-§. Аниқмас интеграл тушунчаси

1. Аниқмас интеграл таърифи. $f(x)$ функция бирор (a, b) (чекли ёки чексиз) интервалда аниқланган бўлсин.

8.1- таъриф. Агар (a, b) интервалда $f(x)$ функция шу интервалда дифференциалланувчи $F(x)$ функциянинг ҳосиласига тенг бўлса, яъни ушбу

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in (a, b))$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция (a, b) интервалда $f(x)$ функциянинг бошлангич функцияси дейилади.

Бу таърифни функция дифференциали орқали ҳам айтиш мумкин.

8.2- таъриф. Агар (a, b) интервалда $f(x)dx$ ифода шу интервалда дифференциалланувчи $F(x)$ функциянинг дифференциалига тенг бўлса, яъни ушбу

$$\int_a^b f(x) dx$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция (a, b) интервалда $f(x)$ функциянинг бошлангич функцияси деб аталади.

Энди $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда берилган бўлсин.

8.3- таъриф. Агар (a, b) интервалда $f(x)$ функция шу оралиқда дифференциалланувчи $F(x)$ функциянинг ҳосиласига тенг, яъни

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in (a, b))$$

бўлиб, a ва b нуқталарда эса

$$F'(a + 0) = f(a), F'(b - 0) = f(b)$$

тенгликлар ўринли бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция $[a, b]$ сегментда $f(x)$ функциянинг бошлангич функцияси деб аталади.

Мисоллар

1. $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ бўлсин. Бу функциянинг $(-1, 1)$ интервалда бошланғич функцияси $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ бўлади, чунки $(-1, 1)$ да

$$F'(x) = (\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = f(x).$$

2. $f(x) = x^2$ функциянинг $(-\infty, +\infty)$ интервалда бошланғич функцияси $F(x) = \frac{x^3}{3}$ бўлиши равshan.

Шуни таъкидлаб ўтамизки, (a, b) интервалда узлуксиз бўлган ҳар қандай функция шу интервалда бошланғич функцияга эга бўлади. Бунинг исботи 9-бобда келтирилади.

$F(x)$ ва $\Phi(x)$ функцияларнинг ҳар бири (a, b) интервалда битта $f(x)$ функция учун бошланғич функция бўлса, бу $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функциялар (a, b) интервалда бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қиласди. Ҳақиқатан ҳам, бошланғич функция таърифига кўра (a, b) да

$$F'(x) = f(x), \quad \Phi'(x) = f(x)$$

бўлади. Демак, $F'(x) = \Phi'(x)$ Бундан 7.1-натижага кўра

$$F(x) = \Phi(x) + C \quad (C = \text{const})$$

тengлик келиб чиқади.

8.1-эслатма. Функцияниш аниқланиш соҳаси оралиқ бўлиши муҳим. Агар функцияниш аниқланиш соҳаси оралиқ бўлмаса, унинг бошланғич функциялари фарқи ўзгармас бўлмасдан қолиши мумкин. Масалан, $f(x) = x$ функцияни $E = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ тўпламда қарайлик. Бу функция учун

ва

$$F(x) = \frac{x^3}{2} \quad (x \in E)$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{2}, & \text{агар } x \in (1, +\infty) \\ \frac{x^3}{2} + 1, & \text{агар } x \in (-\infty, -1) \end{cases}$$

функцияларнинг ҳар бири бошланғич функция бўлиши равshan. Ушбу $\Phi(x) - F(x)$ айрма учун қуйидагига эгамиз:

$$\Phi(x) - F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \in (1, +\infty), \\ 1, & \text{агар } x \in (-\infty, -1). \end{cases}$$

Шундай қилиб, бу айрма E тўпламда константа эмас.

Модомики, (a, b) интервалда берилган $f(x)$ функцияниш барча бошланғич функциялари бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қиласди, бу функцияниш шу интервалда бирор бошланғич функцияси $F(x)$ ёрдамида унинг исталган бошланғич функцияси ушбу

$$F(x) + C \ (C = \text{const})$$

күринишда ифодаләнади.

8.4-тә ғары ф. (a, b) интервалда берилгандың $f(x)$ функция башланғыч функцияларининг умумий ифодасы $F(x) + C$, $C = \text{const}$ шу $f(x)$ функцияның аниқмас интегралы деб аталади ва

$$\int f(x) dx$$

каби белгиләнади. Бунда \int — интеграл белгиси, $f(x) dx$ интеграл остидаги функция, $f(x) dx$ эса интеграл остидаги ифода дейиләди. Демак,

$$\int f(x) dx = F(x) + C \ (C = \text{const}) \quad (8.1)$$

Мисол. Ушбу

$$\int 2^x dx$$

аниқмас интеграл (қисқача, интеграл) ни топинг. Таърифга күра $\int 2^x dx$ интеграл шундай функцияки, унинг ҳосиләси 2^x (дифференциали $2^x dx$) га тенг. Қуйндагы

$$F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$$

функция учун

$$F'(x) = \left(\frac{2^x}{\ln 2} \right)' = 2^x$$

бүләди. Демак,

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

8.2-эслатма. $F(x)$ функция $f(x)$ нинг башланғыч функцияяси бүләдиган оралиқ күрсатылмаган ҳолда бүләдай оралиқ сифатидә $f(x)$ функцияның аниқланиш оралиги тушунилади.

2. Аниқмас интегралның содда хоссалари. Аниқмас интегралның таърифидан бевосита унинг қуйидаги содда хоссалари келиб чиқади.

1°. $f(x)$ функция аниқмас интегралы $\int f(x) dx$ нинг дифференциали $f(x) dx$ га тенг, яъни

$$d \left[\int f(x) dx \right] = f(x) dx \quad (8.2)$$

Хақиқатан ҳам, $F(x)$ функция $f(x)$ нинг башланғыч функцияяси бүләсін: $F'(x) = f(x)$. У ҳолда

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

бүләди. Қейинги төңглийдан топамиэ:

$$d \left[\int f(x) dx \right] = d[F(x) + C] = dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx.$$

Бү хосса аввал дифференциал белгиси d , сүнгра интеграл белгиси \int келиб, улар ёнма-ён турганда ўзаро бир-бирини йўқотишини кўрсатади.

2°. Функция дифференциалининг аниқмас интеграли шу функция билан ўзгармас сон йиғиндисига тенг, яъни

$$\int dF(x) = F(x) + C \quad (C = \text{const}). \quad (8.3)$$

$F(x)$ функция $f(x)$ нинг бирор бошланғич функцияси бўлсин:
 $F'(x) = f(x)$. У ҳолда

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

тенглик ўринли бўлади. Иккинчи томондан,

$$\int f(x) dx = \int F'(x) dx = \int dF(x).$$

Охирги икки тенглик 2° хоссани исбот этади.

Шундай қилиб, (8.2) ва (8.3) формуласалар, дифференциаллаш амали аниқмас интегрални топиш амалига нисбатан ўзгармас қўшилувчи аниқлигига ўзаро тескари эканлигини кўрсатади.

3. Интеграллашнинг содда қоидалари. 1°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар бошланғич функцияларга эга бўлса, у ҳолда $f(x) + g(x)$ ҳам бошланғич функцияга эга ва

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \quad (8.4)$$

формула ўринли

Исбот. $f(x)$ функцияининг бошланғич функцияси $F(x)$, $g(x)$ функцияининг бошланғич функцияси $\Phi(x)$ бўлсин. У ҳолда таърифга кўра

$$F'(x) = f(x), \quad \Phi'(x) = g(x)$$

бўлиб,

$$\int f(x) dx = F(x) + C_1 \quad (C_1 = \text{const}),$$

$$\int g(x) dx = \Phi(x) + C_2 \quad (C_2 = \text{const})$$

бўлади ва демак,

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + \Phi(x) + C_1 + C_2. \quad (8.5)$$

Агар $\Psi(x) = F(x) + \Phi(x)$ деб олсак, унда

$$\Psi'(x) = F'(x) + \Phi'(x) = f(x) + g(x)$$

бўлади. Бу эса, $\Psi(x)$ функция $f(x) + g(x)$ функцияининг бошланғич функцияси эканлигини билдиради. Демак,

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \Psi(x) + C = F(x) + \Phi(x) + C. \quad (8.6)$$

Энди (8.5) ва (8.6) муносабатлардан $\int f(x) dx + \int g(x) dx$ интеграл $F(x) + \Phi(x) + C_1 + C_2$ кўринишида, $\int [f(x) + g(x)] dx$ интеграл эса $F(x) + \Phi(x) + C$ кўринишида ёзилиши мумкин эканини кўрамиз. Бу муносабатлардаги C, C_1 ва C_2 ўзгармас сонларнинг ихтиёрийлигидан эса $F(x) + \Phi(x) + C$ ҳамда $F(x) + \Phi(x) + C_1 + C_2$ ифодаларнинг бир-бира га тенг бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб, (8.4) формула исботланди. Одатда интегралнинг бу (8.4) формула билан ифодаланган хоссаси унинг аддитивлик хоссаси деб аталади.

2°. Агар $f(x)$ функция бошланғич функцияга эга бўлса, у ҳолда $k \cdot f(x)$ (k — ўзгармас сон) ҳам бошланғич функцияга эга ва $k \neq 0$ да

$$\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (8.7)$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси $F(x)$ бўлсин. У ҳолда $F'(x) = f(x)$ ва $\int f(x) dx = F(x) + C$ бўлиб,

$$k \int f(x) dx = k [F(x) + C] = k F(x) + k \cdot C \quad (8.8)$$

бўлади, бунда C — ихтиёрий ўзгармас сон. Ушбу

$$[k \cdot F(x)]' = k F'(x) = k f(x)$$

тенглик ўринли бўлишидан $k f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси $k F(x)$ эканини топамиз. Демак,

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot F(x) + C_1 \quad (8.9)$$

бунда C_1 — ихтиёрий ўзгармас сон. Энди (8.8) ва (8.9) муносабатлардан C ва C_1 ўзгармас сонларнинг ихтиёрийлиги ҳамда $k \neq 0$ бўлишидан (8.7) форуланинг ўринли экани келиб чиқади.

8.3-эслатма. Юқорида келтирилган (8.4) ва (8.7) тенгликларни ҳамда келгусида учрайдиган шунга ўхшаш тенгликларни ўнга чаپ томонларидаги ифодалар орасидаги айрма ўзгармас сонга баробарлиги маъносида (ўзгармас сон аниқлигига) тенгликлар деб қаралади.

4. Элементар функциялариниң аниқ масинтеграллари. Бошланғич функция таърифидан ҳамда элементар функциялар ҳосилалари жадвалидан (6-бобнинг 3-§ига қаранг) фойдаланиб элементар функциялар аниқ масинтеграллари жадвалини келтирамиз (ҳар бир формула интеграл остидаги функциянинг аниқланиш соҳасида қаралади):

$$1^{\circ}. \int 0 \cdot dx = C, \quad C = \text{const};$$

$$2^{\circ}. \int 1 \cdot dx = \int dx = x + C;$$

$$3^{\circ}. \int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1);$$

- 4°. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ ($x \neq 0$);
- 5°. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$;
- 6°. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;
- 7°. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- 8°. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
- 9°. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
- 10°. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
- 11°. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
- 12°. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$;
- 13°. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$;
- 14°. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$;
- 15°. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$;

Бу 1° — 15° интегралларни қисқача жадвал интеграллари деб ҳам айтилади.

Юқоридаги 4°-формулаланиң тұғрилигини текширишда $x > 0$ ва $x < 0$ бүлгандың қолларни алоқида-алоқида күриш лозим. $x > 0$ бүлганданда $\ln|x| = \ln x$ бўлиб, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ бўлади. $x < 0$ бўлганданда $\ln|x| = \ln(-x)$ бўлиб, $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$ бўлади. 4°-формула эса бу икки ҳолни бирлаштиради.

Келтирилган жадвал ва (8.4), (8.7) формулалар билан ифодаланған қоидалар турли функцияларни интеграллаш имконини беради.

Мисол. Ушбу $\int (1 + \sqrt{x})^2 dx$ интегрални ҳисобланг.

Бу интегрални ҳисоблаш учун аввал (8.4), (8.7) формулаларни, сўнгра интеграллар жадвалини қўлланамиз;

$$\begin{aligned} \int (1 + \sqrt{x})^2 dx &= \int (1 + 2\sqrt{x} + x) dx = \int 1 dx + \\ &+ 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x dx = x + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

Интегралларни ҳисоблаш учун (8.4) ва (8.7) формулалар билан ифодаланған қоидаларнинг ўзи етарли эмас. Биз келгусида баъзи интеграллаш усуллари билан танишамиз.

2- §. Интеграллаш усуллари

Ушбу параграфда ўзгарувчиларни алмаштириб интеграллаш ва бўлаклаб интеграллаш усуллари билан танишамиз.

1. Ўзгарувчиларни алмаштириб интеграллаш усули. Функцияларнинг интегралларини ҳисоблашда ўзгарувчиларни алмаштириб интеграллаш усули кенг қўлланилади.

Ушбу $\int f(x) dx$ аниқмас интегрални ҳисоблаш талаб этилган бўлсин. Бунда $f(x)$ функция бирор $X = (a, b)$ интервалда аниқланган ва

$$f(x) = \varphi(g(x))g'(x) \quad (8.10)$$

кўринишда ёэилиши мумкин дейлик.

Агар $\varphi(t)$ функция $T = (t_1, t_2)$ интервалда бошланғич функция $\Phi(t)$ га эга бўлиб, $g(x)$ функция $X = (a, b)$ интервалда (бунда $g(x) \subset T$) дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда

$$\int f(x) dx = \int \varphi(g(x)) g'(x) dx = \Phi(g(x)) + C \quad (8.11)$$

формула ўринли.

Бу тасдиқни исботлаш учун $\Phi(g(x))$ функция $\varphi(g(x))g'(x)$ функция учун бошланғич эканини кўрсатиш етарли. Ҳақиқатан, $\Phi(g(x))' = \Phi'(g(x))g'(x) = \varphi(g(x))g'(x)$. Тасдиқ исбот бўлди. Бу тасдиқдан кўринадиги, $\int f(x) dx$ ни ҳисоблаш $t = g(x)$ алмаштириш ёрдамида $\int \varphi(t) dt$ ни ҳисоблашга келтирилади.

Одатда интегрални бундай усул билан ҳисоблаш ўзгарувчини алмаштириш усули билан интеграллаш деб аталади.

Ўзгарувчиларни алмаштириш усулининг муҳим томони ўзгарувчиларни жуда кўп усул билан алмаштириш имконияти бўлган ҳолда улар ичидан интегрални содда ва ҳисоблаш учун қулай ҳолга келтирадиганини танлаб олишдан иборат.

Мисоллар

1. $\int \frac{x dx}{x^2 + a^2}$ ($a = \text{const}$) ни ҳисобланг. Берилган интегралда ўзгарувчи x ни қўйидагicha $x^2 + a^2 = t$ алмаштирамиз. Бунда $2x dx = dt$ бўлиб ((8.10) ва (8.11) ларга қаранг),

$$\int \frac{x dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C \text{ бўлади.}$$

2. $\int e^{\cos x} \cdot \sin x dx$ ни ҳисобланг. Бу интегралда $\cos x = t$ алмаштириш бажарамиз. Натижада $-\sin x dx = dt$ бўлиб,

$$\int e^{\cos x} \cdot \sin x dx = - \int e^t dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C \text{ бўлади.}$$

2. Бүлаклаб интеграллаш усули. Икки $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ функциялар (a, b) интервалда узлуксиз $u'(x)$ ва $v'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Матъумки, (6- бобнинг 4- § га қаранг.)

$$d[u(x) \cdot v(x)] = u(x) dv(x) + v(x) \cdot du(x).$$

Бу тенгликдан

$$u(x) dv(x) = d[u(x) \cdot v(x)] - v(x) \cdot du(x). \quad (8.12)$$

Энди (8.12) тенгликни интеграллаб топамиз:

$$\int u(x) dv(x) = \int [d(u(x) \cdot v(x)) - v(x) \cdot du(x)] = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) du(x).$$

Шундай қилиб, қўйидаги

$$\int u(x) dv = u(x) v(x) - \int v(x) du \quad (8.13)$$

формулага келамиз. Бу (8.13) формула бўлаклаб интеграллаш формуласи дейилади. У $u(x)dv$ ни интеграллашни $v(x)du$ ни интеграллашга олиб келади.

Бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиш учун интеграл остидаги ифодани $u(x)$ ҳамда dv лар кўпайтмаси кўринишида ёзиб олинади, бунда албатта dv ҳамда $v(x)du$ ифодаларнинг интегралларини осон ҳисоблана олиниши лозимлигини эътиборда тутиш керак.

Мисоллар

1. $\int xe^x dx$ ни ҳисобланг.

Бу интегралда $u = x$, $dv = e^x dx$ деб оламиз. У ҳолда $du = dx$,

$$v = \int e^x dx = e^x \text{ бўлиб, (8.13) формула мувофиқ}$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx.$$

Демак,

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C.$$

2. $\int \ln x dx$ ни ҳисобланг.

Интеграл остидаги $\ln x dx$ ифодани $u = \ln x$, $dv = dx$ лар кўпайтмаси деб оламиз. У ҳолда $du = \frac{1}{x} dx$, $v = x$ бўлади. Бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C = x \ln \frac{x}{e} + C.$$

3. Ушбу

$$I = \int e^{ax} \cos bx dx$$

интегрални қарайлик, бунда a, b лар ўзгартылған сонлар ва $a^2 + b^2 \neq 0$.

Бу интегралда $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx dx$ деб олсак, унда

$$du = ae^{ax} dx, v = \int \cos bx dx = \frac{\sin bx}{b}$$

бұлади ва бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдалансак,

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx \quad (8.14)$$

екани келиб чиқади. Бу тенгликтин үнг томонидаги интегрални яна бўлаклаб интеграллаймиз: $u = e^{ax}$, $dv = \sin bx dx$ деб олсак, у ҳолда $du = ae^{ax} dx$, $v = -\frac{1}{b} \cos bx$ бўлади. (8.13) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int e^{ax} \cdot \sin bx \cdot dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cdot \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx \quad (8.15)$$

(8.14) ва (8.15) тенгликлардан

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \cdot \sin bx + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{b} e^{ax} \cdot \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cdot \cos bx dx$$

бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, берилган $I = \int e^{ax} \cdot \cos bx dx$ ни топиш учун қўйи-даги

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \cdot \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cdot \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I + C'$$

тенгламага келамиз. Бу тенгламадан эса

$$I = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax} + C, \quad C = \frac{b^2}{a^2 + b^2} C'$$

бўлади. Демак,

$$\int e^{ax} \cdot \cos bx dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax} + C.$$

$$4. \quad I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad (n = 1, 2, \dots, a = \text{const}) \text{ ни ҳисобланг.}$$

Бу интегралда $u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}$, $dv = dx$ деб олсак, унда

$$du = -\frac{2nx dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}, \quad v = x$$

бўлади. (8.13) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx. \quad (8.16)$$

Бу тенгликтинг ўнг томонидаги $\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx$ ни қуийдагида

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} - a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}$$

ўзгартириб ёсак, унда (8.16) муносабат ушбу

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \cdot I_n - 2n \cdot a^2 \cdot I_{n+1}$$

кўринишни олади. Кейинги тенгликтан эса қуийдаги

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot I_n \quad (8.17)$$

рекуррент формула келиб чиқади.

Равшанки, $n = 1$ бўлганда

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C$$

бўлади.

$n \geq 2$ бўлганда мос I_n интеграллар (8.17) рекуррент формула ёрдамида топилади. Масалан:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^2} I_1 = \\ &= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \arctg \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

3- §. Рационал функцияларни интеграллаш

Ушбу параграфда рационал функцияларни интеграллаш билан шуғулланамиз. Бунинг учун аввал алгебра курсидан биз учун зарур бўлган маълумотларни келтирамиз.

1. Кўпҳад ва унинг илдизлари ҳақида. Бирор

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (8.18)$$

кўпҳад берилган бўлсин, бунда $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ — ўзгармас ҳақиқий сонлар, $a_n \neq 0$, $n \in N$ эса кўпҳаднинг даражаси.

Маълумки, бирор $\alpha \in R$ сон учун $P(\alpha) = 0$ бўлеа, α сон $P(x)$ кўпҳаднинг илдизи деб аталади. У ҳолда Безу теоремасига кўра $P(x)$ кўпҳад $x - \alpha$ га қолдиқсиз бўлинниб, у қуийдаги

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x)$$

кўринишда ифодаланади, бунда $Q(x) = (n-1)$ -даражали кўпҳад.

Агар (8.18) кўпҳад $(x - \alpha)^k$ ($k \in N$) га қолдиқсиз бўлинса, α сон (8.18) кўпҳаднинг k каррали илдизи бўлади. Бу ҳолда $P(x)$ кўпҳадни ушбу

$$P(x) = (x - \alpha)^k R(x)$$

күринишида ифодалаш мумкин, бунда $R(x) = (n - k)$ - даражали күпхад.

Агар $h = \alpha + i\beta$ комплекс сон $P(x)$ күпхаднинг илдизи бўлса, у ҳолда $\bar{h} = \alpha - i\beta$ комплекс сон ҳам бу күпхаднинг илдизи бўлади. Шунингдек, $h = \alpha + i\beta$ сон $P(x)$ нинг k каррали илдизи бўлса, $\bar{h} = \alpha - i\beta$ сон ҳам бу күпхаднинг k каррали илдизи бўлади.

Демак, $P(x)$ күпхад $h = \alpha + i\beta$ комплекс илдизга эга бўлганда унинг ифодасида $(x - h)$ кўпайтувчи билан бирга $x - \bar{h}$ кўпайтувчи ҳам қатнашади. Бундай ҳолда $P(x)$ күпхаднинг ифодасида қўйидаги квадрат учҳад

$$(x - h)(x - \bar{h}) = [x - (\alpha + i\beta)][x - (\alpha - i\beta)] = \\ = x^2 - 2ax + a^2 + \beta^2 = x^2 + px + q \quad (p = -2\alpha, q = a^2 + \beta^2)$$

кўпайтувчи бўлиб қолади.

Фараз қиласлини,

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

кўпхад берилган бўлиб, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ лар унинг мос равишида $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ каррали ҳақиқий илдизлари, h_1, h_2, \dots, h_s ($h_j = \delta_j + i\tau_j, j = 1, 2, \dots, s$) лар эса кўпхаднинг мос равишида $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ каррали комплекс илдизлари бўлсин. Бу кўпхадни унинг илдизларига кўра кўпайтувчиларга ажратиш ҳақида ишбу теоремани исботсиз келтирамиз.

8.1- теорема. *Ҳар қандай n -даражали*

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

кўпхад $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ — ўзгармас ҳақиқий сонлар, $a_n \neq 0$) ушбу

$$P(x) = (x - \alpha_1)^{\lambda_1} \cdot (x - \alpha_2)^{\lambda_2} \cdots (x - \alpha_k)^{\lambda_k} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{\gamma_1} \times \\ \times (x^2 + p_2x + q_2)^{\gamma_2} \cdots (x^2 + p_sx + q_s)^{\gamma_s}$$

кўринишида ифодаланади, бунда

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k + 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_s) = n$$

бўлиб, $x^2 + p_jx + q_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$) тенгламалар ҳақиқий илдизга эга эмас.

2. Содда касрлар. Тўғри касрларни содда касрлар орқали ифодалаш. Ушбу

$$\frac{A}{(x - a)^m}, \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (8.19)$$

кўринишидаги касрлар содда касрлар деб аталади, бунда A, B, C ҳамда a, p, q лар ўзгармас сонлар, $x^2 + px + q$ квадрат учҳад эса ҳақиқий илдизга эга эмас.

Маълумки, қўйидаги

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_v x^v$$

күпхад ($a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, b_2, \dots, b_v$ — ўзгармас сонлар, $n \in N$, $v \in N$) нисбати

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_v x^v}$$

каср рационал функция дейилади, $n < v$ бўлганда эса уни тўғри каср деб аталади.

Ҳар қандай тўғри каср (8.19) содда касрлар орқали ифодаланади. Буни исботлашдан аввал иккита леммани келтирамиз.

8.1-лемма. Агар $\frac{P(x)}{Q(x)}$ тўғри каср маҳражидаги $Q(x)$ кўпхад ушбу

$$Q(x) = (x - \alpha)^m \cdot Q_1(x) \quad (m \in N)$$

кўринишда бўлиб, $Q_1(x)$ кўпхад эса $x - \alpha$ га бўлинмаса, у ҳолда берилган тўғри каср қўйидаги

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_m}{(x - \alpha)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x - \alpha)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

кўринишда ифодаланиши мумкин, сунда A_1, A_2, \dots, A_m — ўзгармас ҳақиқий сонлар, $P_1(x)$ — кўпхад.

Исбот. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ тўғри касрни қўйидаги кўринишда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - \alpha)^m Q_1(x)} = \frac{A_m}{(x - \alpha)^m} + \frac{P(x) - A_m \cdot Q_1(x)}{(x - \alpha)^m \cdot Q_1(x)} \quad (8.20)$$

ёзиг оламиз. Равшаники, (8.20) муносабатдаги $P(x) - A_m \cdot Q_1(x)$ айрима A_m сонга боғлиқ. Бу сонни шундай танлаб оламизки, натижада $P(x) - A_m \cdot Q_1(x)$ кўпхад $x - \alpha$ га бўлинсин. Бунинг учун

$$P(\alpha) - A_m \cdot Q_1(\alpha) = 0$$

тengлини ўринли ўлиши керак. Демак,

$$A_m = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$$

деб олинса, у ҳолда $P(x) - A_m \cdot Q_1(x)$ кўпхад $x - \alpha$ га бўлинади. Шундай қилиб,

$$P(x) - A_m \cdot Q_1(x) = (x - \alpha) \cdot P_m(x) \quad (8.21)$$

бўлади, бунда $P_m(x)$ — кўпхад.

Натижада (8.20) муносабат қўйидаги

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_m}{(x - \alpha)^m} + \frac{P_m(x)}{(x - \alpha)^{m-1} \cdot Q_1(x)} \quad (8.22)$$

кўринишга келади, бунда A_m сон юқоридагидек аниқланган.

Энди

$$\frac{P_m(x)}{(x - \alpha)^{m-1} Q_1(x)} = \frac{A_{m-1}}{(x - \alpha)^{m-1}} + \frac{P_m(x) - A_{m-1} \cdot Q_1(x)}{(x - \alpha)^{m-1} \cdot Q_1(x)}$$

тенгликтининг ўнг томонидаги A_{m-1} сонни шундай танлаб оламизкий, $P_m(x) - A_{m-1} \cdot Q_1(x)$ кўпҳад $x = \alpha$ га бўлинсин. Бунинг учун

$$P_m(\alpha) - A_{m-1} \cdot Q_1(\alpha) = 0$$

тенглик ёринли бўлиши керак. Демак,

$$A_{m-1} = \frac{P_m(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$$

деб олисса, у ҳолда $P_m(x) - A_{m-1} \cdot Q_1(x)$ кўпҳад $x = \alpha$ га бўлинади. Шундай қилиб,

$$P_m(x) - A_{m-1} \cdot Q_1(x) = (x - \alpha) P_{m-1}(x) \quad (8.23)$$

бўлади, бунда $P_{m-1}(x)$ — кўпҳад.

(8.22) ва (8.23) муносабатлардан топамиз:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_m}{(x - \alpha)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x - \alpha)^{m-1}} + \frac{P_{m-1}(x)}{(x - \alpha)^{m-2} \cdot Q_1(x)}. \quad (8.24)$$

Худди шунга ўхшаш ҳар гал $\frac{P(x)}{Q(x)}$ касрни ифодаловчи тенгликтининг ўнг томонидаги охирги ҳадидан, юқоридагидек $\frac{A_l}{(x - \alpha)^l}$ қисмини ажратиб топамиз:

$$\frac{P_{m-1}(x)}{(x - \alpha)^{m-2} \cdot Q_1(x)} = \frac{A_{m-2}}{(x - \alpha)^{m-2}} + \frac{P_{m-2}(x)}{(x - \alpha)^{m-3} \cdot Q_1(x)} \quad (8.25)$$

ва ҳ.к.

$$\frac{P_2(x)}{(x - \alpha) \cdot Q_1(x)} = \frac{A_1}{(x - \alpha)} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}. \quad (8.26)$$

(8.24), (8.25), (8.26) тенгликлардан

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_m}{(x - \alpha)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x - \alpha)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

бўлиши келиб чиқади. 8.1-лемма исбот бўлди.

8.2-лемма. Агар $\frac{P(x)}{Q(x)}$ тўғри каср маҳражидаги $Q(x)$ кўпҳад

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^n \cdot Q_1(x)$$

кўринишга эга бўлиб $(x^2 + px + q)$ квадрат учҳад ҳақиқий илдизга эга эмас, $Q_1(x)$ кўпҳад $x^2 + px + q$ га бўлинмаса, у ҳолда берилган тўғри каср қуйнадиги

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{B_{n-1} x + C_{n-1}}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

кўринишда ифодаланиши мумкин, бунда $B_1, B_2, \dots, B_n, C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ — ўзгармас сонлар, $P_1(x)$ — кўпҳад.

Исбот. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ тўғри касрни қуйнадагича

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^n Q_1(x)} = \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{P(x) - (B_n x + C_n) \cdot Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^n Q_1(x)}$$

ёзиб оламиз. Бу тенгликтаги

$$P(x) - (B_n x + C_n) \cdot Q_1(x) \quad (8.27)$$

күпхад B_n ва C_n сонларга боғлиқ. Энди B_n ва C_n сонларни шундай танлаб олиш мумкинлигини кўрсатамизки, натижада (8.27) кўпхад $x^2 + px + q$ га бўлинсин.

Аввало $P(x)$ ва $Q_1(x)$ кўпхадларнинг ҳар бирини $x^2 + px + q$ квадрат учҳадга бўлиб оламиз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P(x)}{x^2 + px + q} &= R(x) + \frac{a_1 x + b_1}{x^2 + px + q}, \\ \frac{Q_1(x)}{x^2 + px + q} &= S(x) + \frac{a_2 x + b_2}{x^2 + px + q}, \end{aligned} \right\} \quad (8.28)$$

бунда $R(x)$ ва $S(x)$ кўпхадлар.

У ҳолда

$$\begin{aligned} \frac{P(x) - (B_n x + C_n) Q_1(x)}{x^2 + px + q} &= \frac{P(x)}{x^2 + px + q} - (B_n x + C_n) \cdot \frac{Q_1(x)}{x^2 + px + q} = \\ &= R(x) - (B_n x + C_n) S(x) + \frac{a_1 x + b_1 - (B_n x + C_n)(a_2 x + b_2)}{x^2 + px + q} = R(x) - \\ &\quad - (B_n x + C_n) S(x) + B_n \cdot a_2 + \\ &\quad + \frac{(a_1 + B_n p a_2 - C_n a_2 - B_n b_2) x + B_n \cdot q \cdot a_2 + b_1 - C_n b_2}{x^2 + px + q} \end{aligned}$$

бўлади. Бу тенгликдан кўринадики, $P(x) - (B_n x + C_n) \cdot Q_1(x)$ кўпхад $x^2 + px + q$ га бўлинниши учун x нинг барча қийматларида

$$(a_1 + B_n p \cdot a_2 - C_n a_2 - B_n b_2) x + B_n \cdot q \cdot a_2 + b_1 - C_n b_2 = 0,$$

яъни

$$\begin{cases} B_n \cdot (a_2 p - b_2) - C_n a_2 + a_1 = 0, \\ B_n \cdot q a_2 - C_n b_2 + b_1 = 0 \end{cases} \quad (8.29)$$

бўлиши керак.

B_n ва C_n ларга нисбатан (8.29) системанинг детерминанти

$$D = \begin{vmatrix} a_2 p - b_2 & -a_2 \\ a_2 q & -b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлади. Буни исботлаймиз. Тескарисини фараз қилайлиқ, яъни,

$$D = -b_2(a_2 p - b_2) + a_2^2 \cdot q = 0 \quad (8.30)$$

бўлсин. Агар $a_2 = 0$ бўлса, унда $b_2 = 0$ бўлиб, натижада (8.28) даň $Q_1(x)$ кўпхад $x^2 + px + q$ га бўлинниши келиб чиқади. Бу эса $Q_1(x)$ кўпхад $x^2 + px + q$ га бўлинмайди деб олинишига зиддир. Демак, $a_2 \neq 0$. Бу ҳолда (8.30) тенглама ушбу

$$\left(-\frac{b_2}{a_2} \right)^2 + p \cdot \left(-\frac{b_2}{a_2} \right) + q = 0$$

кўринишга эга бўлиб, $-\frac{b_2}{a_2}$ ҳақиқий сон $x^2 + px + q = 0$ тенгламанинг илдизи бўлишини кўрамиз. Бу эса $x^2 + px + q$ квадрат учҳад

хақиқий илдизга эга бўлмасин деб олинишига зиддир. Демак, (8.29) системанинг детерминанти нолдан фарқли.

Модомики, (8.29) системанинг детерминанти нолдан фарқли экан, у ҳолда бу системадан ягона B_n ва C_n сонлар топилади. Бу сонларни (8.27) га қўйсак, натижада $P(x) = (B_n x + C_n) Q_1(x)$ кўпхад $x^2 + px + q$ га бўлиниб, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ каср эса ушбу

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^n Q_1(x)} = \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + px + q)^n} + \\ &+ \frac{P_n(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1} \cdot Q_1(x)} \end{aligned} \quad (8.31)$$

кўришишга келади, бунда $P_n(x)$ — кўпхад.

Худди шу йўл билан

$$\frac{P_n(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1} \cdot Q_1(x)} = \frac{B_{n-1} x + C_{n-1}}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \frac{P_{n-1}(x)}{(x^2 + px + q)^{n-2} \cdot Q_1(x)}, \quad (8.32)$$

$$\frac{P_{n-1}(x)}{(x^2 + px + q)^{n-2} \cdot Q_1(x)} = \frac{B_{n-2} x + C_{n-2}}{(x^2 + px + q)^{n-2}} + \frac{P_{n-2}(x)}{(x^2 + px + q)^{n-3} \cdot Q_1(x)} \quad (8.33)$$

ва ҳ.к.

$$\frac{P_2(x)}{(x^2 + px + q) Q_1(x)} = \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \quad (8.34)$$

бўлиши топилади.

(8.31), (8.32), (8.33), (8.34) тенгликлардан эса

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{B_{n-1} x + C_{n-1}}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q} + \\ &+ \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \end{aligned}$$

бўлиши келиб чиқади. 8. 2-лемма исбот бўлди.

8. 2-теорема. Ҳар қандай тўғри каср содда касрлар йигиндиси орқали ифодаланади.

Исбот. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ тўғри каср бўлсин. $Q(x)$ эса n -даражали кўпхад бўлиб,

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x - \alpha_1)^{n_1} \cdot (x - \alpha_2)^{n_2} \cdots (x - \alpha_k)^{n_k} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \times \\ &\times (x^2 + p_2 x + q_2)^{m_2} \cdots (x^2 + p_l x + q_l)^{m_l} \end{aligned}$$

бўлсин, бунда

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k + 2(m_1 + m_2 + \dots + m_l) = n$$

бўлаб, $x^2 + p_j x + q_j$ ($j = 1, 2, \dots, l$) квадрат учҳадлар ҳақиқий илдизга эга эмас.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ тўғри касрни қўйидагича

$$= \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\frac{P(x)}{Q(x)}}{\frac{Q(x)}{Q(x)}} = \frac{(x - \alpha_1)^{n_1} \cdot (x - \alpha_2)^{n_2} \cdots (x - \alpha_k)^{n_k} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdots (x^2 + p_i x + q_i)^{m_i}}{(x - \alpha_1)^{n_1} \cdot (x - \alpha_2)^{n_2} \cdots (x - \alpha_k)^{n_k} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdots (x^2 + p_i x + q_i)^{m_i}}$$

ёзиб, бу тенгликтининг ўнг томонига 8.1-леммани бир неча марта $(n_1 + n_2 + \dots + n_k)$ марта қўлланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{n_1}^{(1)}}{(x - \alpha_1)^{n_1}} + \frac{A_{n_1-1}^{(1)}}{(x - \alpha_1)^{n_1-1}} + \dots + \frac{A_1^{(1)}}{x - \alpha_1} + \\ &+ \frac{A_{n_2}^{(2)}}{(x - \alpha_2)^{n_2}} + \frac{A_{n_2-1}^{(2)}}{(x - \alpha_2)^{n_2-1}} + \dots + \frac{A_1^{(2)}}{x - \alpha_2} + \dots + \\ &+ \frac{A_{n_k}^{(k)}}{(x - \alpha_k)^{n_k}} + \frac{A_{n_k-1}^{(k)}}{(x - \alpha_k)^{n_k-1}} + \dots + \frac{A_1^{(k)}}{x - \alpha_k} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \end{aligned} \quad (8.35)$$

бунда

$$Q_1(x) = (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{m_2} \cdots (x^2 + p_i x + q_i)^{m_i}.$$

Бу муносабатдаги ўзгармас $A_1^{(1)} \dots A_{n_k}^{(k)}$ сонлар 8.1-леммани исботлаш жараённида унда қатнашган ўзгармасларни ҳисоблаганимиздек топилади.

Энди $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ касрга 8.2-леммани бир неча марта қўлланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} &= \frac{\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}}{\frac{Q_1(x)}{Q_1(x)}} = \frac{\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}}{\frac{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{m_2} \cdots (x^2 + p_i x + q_i)^{m_i}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1}}} = \\ &= \frac{B_{m_1}^{(1)}x + C_{m_1}^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1}} + \frac{B_{m_1-1}^{(1)}x + C_{m_1-1}^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1-1}} + \dots + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2 + p_1x + q_1} + \\ &+ \frac{B_{m_2}^{(2)}x + C_{m_2}^{(2)}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{m_2}} + \frac{B_{m_2-1}^{(2)}x + C_{m_2-1}^{(2)}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{m_2-1}} + \dots + \frac{B_1^{(2)}x + C_1^{(2)}}{x^2 + p_2x + q_2} + \\ &+ \dots + \frac{B_{m_i}^{(i)}x + C_{m_i}^{(i)}}{(x^2 + p_i x + q_i)^{m_i}} + \frac{B_{m_i-1}^{(i)}x + C_{m_i-1}^{(i)}}{(x^2 + p_i x + q_i)^{m_i-1}} + \dots + \\ &+ \frac{B_1^{(i)}x + C_1^{(i)}}{x^2 + p_i x + q_i}. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Бу тенгликтаги ўзгармас $B_1^{(1)}, C_1^{(1)}, \dots B_{m_i}^{(i)}, C_{m_i}^{(i)}$ сонлар 8.2-леммани исботлаш жараённида ўзгармасларни ҳисоблаганимиздек топилади.

(8. 35) ва (8. 36) муносабатлардан теореманинг исботи келиб чиқади.

Юқорида исботланган теоремадаги ўзгармас сонларни бошқача — номаълум коэффициентлар усули деб аталган усул билан ҳам топиш мумкин. Бунда $\frac{P(x)}{Q(x)}$ тўғри каср номаълум коэффициентлари

бўлган содда касрларга ёйилиб, сўнг тенгликнинг ўнг томонидаги содда касрлар йиғиндиси умумий маҳражга келтирилади.

Натижада

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{Q(x)}$$

тенглик ҳосил бўлади ва ундан барча x лар учун ўринли бўлган

$$P(x) = R(x)$$

тенглик келиб чиқади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонидаги x нинг бир хил даражалари олдида турган коэффициентларни тенглаштириб, номаълум коэффициентларни топиш учун тенгламалар системаси ҳосил қилинади.

Мисол

$\frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6}$ тўғри касрни содда касрларга ажратинг.

Бу касрнинг маҳражи $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$ бўлгани учун теоремага кўра

$$\frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2}$$

бўлади. Уни қўйидагича

$$\frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A(x - 2) + B(x - 3)}{(x - 3)(x - 2)}$$

ёзиб, ушбу

$$2x - 1 = A(x - 2) + B(x - 3) \text{ ёки } 2x - 1 = (A + B)x - (2A + 3B)$$

тенгликка келамиз. Икки кўпҳаднинг тенглигидан фойдаланиб, A ва B ларга нисбатан ушбу

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ 2A + 3B = 1 \end{cases} \quad (8.37)$$

системага келамиз. (8.37) дан $A = 5$, $B = -3$ бўлади. Шундай қилиб, берилган тўғри каср содда касрлар орқали қўйидагича

$$\frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{5}{x - 3} + \frac{-3}{x - 2}$$

ифодаланади.

3. Содда касрларни интеграллаш. Содда касрларнинг аниқмас интегралларини ҳисоблаймиз.

1°. $\frac{A}{x - a}$ содда касрнинг аниқмас интеграли:

$$\int \frac{A}{x - a} dx = A \int \frac{d(x - a)}{x - a} = A \ln|x - a| + C;$$

2°. $\frac{A}{(x-a)^m}$ ($m > 1$) содда касрнинг аниқмас интеграли ҳам тез ҳисобланади:

$$\int \frac{A}{(x-a)^m} dx = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = A \int (x-a)^{-m} d(x-a) = \frac{A}{1-m} \times \\ \times \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C.$$

3°. $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ содда касрнинг интеграли $I = \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx$ ни ҳисоблаш учун аввал касрнинг маҳражида турган x^2+px+q квадрат учҳадни ушбу

$$x^2+px+q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

кўринишда ёзиб оламиз. У ҳолда

$$I = \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Bx+C}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} dx$$

бўлади, бунда $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$. Бу интегралда $x + \frac{p}{2} = t$ алмаштириш бажарамиз:

$$I = B \int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{B}{2} \int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \\ + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \cdot \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2} = \frac{B}{2} \ln \left[t^2+a^2\right] + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \times \\ \times \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C_* = \frac{B}{2} \ln [x^2+px+q] +$$

$$+ \frac{2C-Bp}{2 \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C_*.$$

Демак,

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = \frac{B}{2} \ln \left[x^2+px+q\right] + \\ + \frac{2(2C-Bp)}{4q-p^2} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C_*$$

бунда C_* — ихтиёрий ўзгармас.

4°. $\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m}$ ($m > 1$) содда касрнинг интеграли $I_m := \int \frac{(Bx + C)dx}{(x^2 + px + q)^m}$ ни ҳисоблаш учун 3° ҳолдагидек ўзгарувчини алмаштирамиз:

$x + \frac{p}{2} = t$. Натижада қойындағига әга бўламиз:

$$\begin{aligned} I_m &= \int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} dx = \int \frac{Bx + C}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right]^m} dx = \\ &= \int \frac{Bt + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)}{(t^2 + a^2)^m} dt = \frac{B}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^m} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \cdot \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} = \\ &= \frac{B}{2} \cdot \frac{1}{1-m} \cdot \frac{1}{(t^2 + a^2)^{m-1}} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}. \end{aligned}$$

Бу муносабатдаги $\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}$ интеграл ушбу бобнинг 2-§ да келтирилган интеграл бўлиб, у рекуррент формула орқали ҳисобланади.

4. Рационал функцияларни интеграллаш. $f(x)$ рационал функция бўлиб, унинг интегралини ҳисоблаш талаб этилсин.

Маълумки, рационал функция иккита $P(x)$ ва $Q(x)$ — бутун рационал функциялар нисбатидан иборат, яъни

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Агар $\frac{P(x)}{Q(x)}$ нотўғри каср (суратидаги кўпхаднинг даражаси маҳраждаги кўпхаднинг даражасидан катта) бўлса, унинг бутун қисми-ни ажратиб, бутун рационал функция ҳамда тўғри каср йиғиндиси кўринишида қойыдагича

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

ифодалаб олиниади. У ҳолда

$$\int f(x)dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int R(x) dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)} dx \quad (8. 38)$$

бўлади.

(8. 38) муносабатдаги $\int R(x)dx$ интеграл бутун рационал функция (кўпхад) нинг интегралли бўлиб, у осон ҳисобланади.

Демак, нотўғри касрни интеграллаш тўғри касрни интеграллашга келади. Тўғри касрни интеграллаш учун аввал бу касрни юқорида исбот этилган теоремадан фойдаланиб, содда касрлар орқали ифодалаб олиниади, сўнгра уларни 3-punktda кўрсатилганидек интегралланади.

Мисол. $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$ ни ҳисобланг.

Интеграл остидаги $\frac{1}{x^4 - 1}$ касрни содда касрларга ажратамиз:

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Бу тенгликкни қуидагича

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 - 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}$$

әзіб оламиз. Ү ҳолда

$$1 = A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 - 1),$$

яғни

$$1 = (A + B + C)x^3 + (A - B + D)x^2 + (A + B - C)x + (A - B - D)$$

бүлади. Натижада A, B, C, D ларни топиш учун

$$\begin{cases} A + B + C = 0, \\ A - B + D = 0, \\ A + B - C = 0, \\ A - B - D = 0 \end{cases}$$

системага келамиз. Бу системани ечиб,

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{2}$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{бўлиб, } \int \frac{dx}{x^4 - 1} &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x + 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

4-§. Баъзи иррационал функцияларни интеграллаш

Ушбу параграфда баъзи бир иррационал функцияларни интеграллаш билан шуғулланамиз. Аввало икки ўзгарувчининг рационал функцияси тушунчаси билан танишамиз.

Икки u ва v ўзгарувчи берилган бўлиб, бу ўзгарувчилар ёрдамида

$$u^i v^j \quad (i = 0, 1, 2, \dots; j = 0, 1, 2, \dots)$$

куйпайтмалари тузамиз. Бу куйпайтмалардан тузилган ушбу

$$\begin{aligned} P(u, v) &= a_{00} + a_{10} u + a_{01} v + a_{20} u^2 + a_{11} uv + a_{02} v^2 + \dots + \\ &\quad + a_{n0} u^n + a_{(n-1)1} u^{n-1} \cdot v + \dots + a_{1(n-1)} uv^{n-1} + a_{0n} v^n \end{aligned}$$

функция u ва v ўзгарувчиларнинг куйпхади деб аталади, бунда a_{00} ,

$a_{10}, a_{01}, \dots, a_{n0}, \dots, a_{0n}$ — ўзгармас ҳақиқий сонлар (коэффициентлар).

$P(u, v)$ ҳамда $Q(u, v)$ лар u ва v ўзгарувчиларнинг кўпхадлари бўлсин. Ушбу $\frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$ ($Q(u, v) \neq 0$) нисбат u ва v ўзгарувчиларнинг рационал функцияси деб аталади ва уни $R(u, v)$ орқали белгиланади:

$$R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}, \quad Q(u, v) \neq 0.$$

Энди u ва v ўзгарувчиларнинг ҳар бири ўз навбатида битта x ўзгарувчининг

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x), \\ v &= \psi(x) \end{aligned}$$

функциялари бўлсин. У ҳолда $R(u, v)$ функция $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функцияларнинг рационал функцияси бўлади. Масалан, ушбу

$$f(x) = \frac{x - 2\sqrt[3]{x^2 - 1} + 1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

функция $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ лэрнинг рационал функциясидир, чунки

$$R(u, v) = \frac{u^2 - 2v + 1}{u + v}.$$

Хусусан, $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ ларнинг ҳар бири x ўзгарувчининг рационал функциялари бўлса, у ҳолда ушбу

$$R(u, v) = R(\varphi(x), \psi(x)) = \tilde{R}(x)$$

функция шу x ўзгарувчининг рационал функцияси бўлади. Ҳақиқатан, x ўзгарувчининг рационал функцияларидан иборат $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ лар устида қўшиш, айриш, кўпайтириш ҳамда бўлиш амаллари бажарилса, натижада x нинг яна рационал функцияси ҳосил бўлади.

1. $R(x, y(x))$ кўриниши даги функцияларни интеграллаш. Ушбу

$$\int R(x, y(x)) dx \tag{8. 39}$$

интегрални қарайлик, бунда $R(x, y(x))$ функция x ва $y(x)$ ларнинг рационал функциясидир.

Агар $y(x)$ функция x нинг рационал функцияси бўлса, у ҳолда $R(x, y(x))$ ҳам x ўзгарувчининг рационал функцияси бўлади ва ушбу

$$\int R(x, y(x)) dx$$

интеграл рационал функциянинг интеграли бўлади. Бундай интеграллар З-§ да батағсил ўрганилди.

Агар $y(x)$ функция x ўзгарувчининг рационал функцияси бўлмаса, у ҳолда разшанки, $R(x, y(x))$ ҳам x ўзг рувчининг рационал функцияси бўлмайди. Бу ҳолда x ўзгарувчины алмаштириш ёрдамида $R(x, y(x))$ ни рационал функцияга келтириш масаласи келиб чиқади. Агар биз шундай $x = \varphi(t)$ алмаштириш топсакки, натижада $x = \varphi(t)$, $y(x) = y(\varphi(t))$ лар t нинг рационал функциялари бўлса (бунда $x' = \varphi'(t)$ ҳам рационал функция бўлади), у ҳолда

$$\int R(x, y(x)) dx = \int R(\varphi(t), y(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

бўлиб, $\int R(x, y(x)) dx$ интегрални ҳисоблаш ушбу

$$\int R(\varphi(t), y(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

ратионал функциянинг интегралини ҳисоблашга келтирилади.

Энди $y(x)$ функциянинг баъзи бир конкрет кўринишга эга бўлган ҳолларини қараймиз:

1°. (8.39) инте радда

$$y(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

бўлсин, бунда a, b, c, d — ўзгармас сонлар, $n \in N$. Бу ҳолда (8.39) интеграл қўйидаги

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \quad (8.40)$$

кўринишни олади. Энди a, b, c, d сонлардан тузилган детерминант нолдан фарқли, яъни

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

деб қараймиз. Агар

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

бўлса, a ва b сонлар c, d сонларга пропорционал бўлиб, $\frac{ax+b}{cx+d}$ нисбат x га боғлиқ бўлмайди ва $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ функция x ўзгарувчининг рационал функцияси бўлиб қолади. Бу ҳолда (8.40) интеграл 3-§ да ўрганилган интегралга келади. Шундай қилиб, кейинги мулоҳазаларда $\Delta \neq 0$ деймиз.

(8.40) интегралда

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

алмаштириш бажарамиз. Натижада

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}, x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n} = \varphi(t)$$

$$dx = \varphi'(t) dt = \frac{(ad - bc) \cdot n \cdot t^{n-1}}{(a - ct^n)^2} dt$$

бўлиб, (8. 40) интеграл ушбу

$$\begin{aligned} \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx &= \int R(\varphi(t), t) \cdot \varphi'(t) dt = \\ &= \int R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right) \cdot \frac{(ad - bc) nt^{n-1}}{(a - ct^n)^2} dt \end{aligned}$$

кўринишни олади.

Демак, қараластган

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

интегрални ҳисоблаш ушбу $R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right) \cdot \frac{(ad - bc) nt^{n-1}}{(a - ct^n)^2}$ ра-
ционал функциянинг интегралини ҳисоблашга келади.

Мисол. Ушбу

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x}$$

интегрални қарайлик. Бу интегрални ҳисоблаш учун

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

деб оламиз. У ҳолда

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{4tdt}{(t^2 + 1)^2}$$

бўлиб,

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2 + 1}$$

бўлади. Натижада берилган интеграл учун топамиз:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x} &= 2 \int \frac{t^2}{t^2 + 1} dt = 2t - 2 \operatorname{arctg} t + C = \\ &= 2 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C. \end{aligned}$$

8. 4-эслатма. u_1, u_2, \dots, u_n ўзгарувчилар берилган бўлсин.
Юқоридагига ўхшаш бу ўзгарувчиларнинг рационал функцияси
 $R(u_1, u_2, \dots, u_n)$ тушунчаси киритилади. Фараз қиласайлик,

$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)$ функция

$x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}$

ларнинг рационал функцияси бўлсин, бунда r_1, r_2, \dots, r_n рационал сонлар бўлиб, a, b, c, d — ўзгармас сонлар ва $ad - cb \neq 0$. Қуийдаги

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx \quad (8.41)$$

интегрални қарайлик. Агар r_1, r_2, \dots, r_n — рационал сонларни умумий t махражга келтириб, (8.41) интегралда

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

алмаштириш бажарилса, натижада (8.41) интегрални ҳисоблаш рационал функцияни интеграллашга келади.

Мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

интегрални ҳисобланг. Бу интегралда $t = \sqrt[6]{x}$ алмаштириш бажарамиз. Натижада

$$x = t^6, \quad dx = 6t^5 dt$$

Бўлиб, берилган интеграл учун топамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= 6 \int \frac{t^5 dt}{t+1} = 6 \int \left[(t^2 - t + 1) - \frac{1}{t+1} \right] dt = \\ &= 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln |t+1| \right) + C = 6 \left(\frac{\sqrt[6]{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt[6]{x} - \ln |\sqrt[6]{x} + 1| \right) + C = 2\sqrt[6]{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \\ &\quad - 6 \ln |\sqrt[6]{x} + 1| + C. \end{aligned}$$

2°. (8.39) интегралда $y = y(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ бўлсин, бунда a, b, c — ўзгармас сонлар бўлиб, $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳад тенг илдизларга эга эмас. (8.39) интеграл қуийдаги

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \quad (a \neq 0) \quad (8.42)$$

кўринишни олади.

Қуийда келтириладиган учта алмаштириш ёрдамида (8.42) интеграл рационал функция интегралига келтирилади.

а) $a > 0$ бўлсин. Бу ҳолда (8.42) интегралда

$$t = \sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad (8.43)$$

$$(ёки t = -\sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 + bx + c})$$

алмаштириш бажарамиз. (8.43) тенгликни квадратга кўтарсак,

$$ax^2 + bx + c = t^2 - 2\sqrt{ax}xt + ax^2$$

бўлиб, ундан

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}, \quad dx = \frac{2(\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}t + b)^2} dt$$

бўлади. Агар

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b}$$

эканини ўтиборга олсак, у ҳолда (8.42) интеграл ушбу

$$\begin{aligned} & \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \\ &= \int R\left(\frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}, \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b}\right) \frac{2(\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}t + b)^2} dt \end{aligned}$$

кўринишни олади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл остида турган функция t ўзгарувчининг рационал функцияси экани равшандир.

Шундай қилиб (8.42) интегрални ҳисоблаш $a > 0$ бўлганда (8.43) алмаштириш ёрдамида рационал функцияни интеграллашга келтириллади.

б) $c > 0$ бўлсин. Бу ҳолда (8.42) интегралда

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{x} \left[\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c} \right] \\ (\text{ёки } t &= \frac{1}{x} \left[\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{c} \right]) \end{aligned} \quad (8.44)$$

алмаштириш бажарамиз. (8.44) тенгликни квадратга кўтариб,

$$ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c,$$

ундан

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \quad dx = \frac{2(\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}a)}{(a - t^2)^2} dt,$$

ни топамиз, шунингдек

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2}.$$

Натижада (8.42) интеграл қўйидагича ёзилади:

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx &= \int R\left(\frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2}\right) \times \\ &\times \frac{2(\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}a)}{(a - t^2)^2} dt. \end{aligned}$$

Равшанки,

$$R\left(\frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2}\right) \cdot \frac{2(\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}a)}{(a - t^2)^2}$$

функция t ўзгарувчининг рационал функциясидир. Демак, бу ҳолда ҳам

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

интегрални ҳисоблаш (8.44) алмаштириш натижасида рационал функцияни интеграллашга келтирилади.

8.5-эслатма. Юқорида қаралган а) ва б) ҳоллар $x = \frac{1}{z}$ алмаштириш билан бири иккинчисига келади. Ҳақиқатан ҳам, $a > 0$, $c > 0$ бўлганда (8.43) алмаштириш формуласида $x = \frac{1}{z}$ деб олсак, унда

$$\sqrt{a \frac{1}{z^2} + b \frac{1}{z} + c} = t - \sqrt{a} \cdot \frac{1}{z}$$

бўлиб, кейинги тенглиқдан

$$\sqrt{cz^2 + bz + a} = tz - \sqrt{a}$$

(8.44) алмаштириш формуласи келиб чиқади.

в) $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳад ҳар хил x_1 ва x_2 ҳақиқий илдизларга эга бўлсин. Маълумки, x_1 ва x_2 илдизлар орқали $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳадни

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Бу ҳолда (8. 42) интегралда ушбу

$$t = \frac{1}{x - x_1} \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad (8.45)$$

алмаштириш бажарамиз. Натижада $\sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = t(x - x_1)$ ва уни квадратга ошириб $a(x - x_1)(x - x_2) = t^2(x - x_1)^2$ бўлишини топамиз. Демак,

$$x = \frac{-ax_2 + x_1 t^2}{t^2 - a}, \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(x_1 - x_2)}{t^2 - a} t,$$

$$dx = \frac{2a(x_1 - x_2) t}{(t^2 - a)^2} dt$$

бўлади. У ҳолда (8. 42) интеграл ушбу

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx =$$

$$\int R\left(\frac{-ax_2 + x_1 t^2}{t^2 - a}, \frac{a(x_1 - x_2)}{t^2 - a} t\right) \cdot \frac{2a(x_1 - x_2) t}{(t^2 - a)^2} dt$$

кўринишга келади. Бу тенглиқнинг ўнг томонидаги интеграл остидаги функция t ўзгарувчининг рационал функциясиdir.

Шундай қилиб, бу ҳолда (8.45) алмаштириш натижасида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ интегрални ҳисоблаш рационал функцияни интегралини ҳисоблашга келади.

Одатда (8.43), (8.44) ва (8.45) алмаштиришлар Эйлер алмаштиришлари деб аталади.

Мисол. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$ интегрални ҳисобланг.

Бу интеграл учун ($a = 1$) Эйлернинг биринчи алмаштиришини (8.43) га қаранг) бажарамиз:

$$t = x + \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

У ҳолда

$$x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t}, \quad \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{t^2 + t + 1}{1 + 2t}, \quad dx = 2 \frac{t^2 + t + 1}{(1 + 2t)^2} dt$$

бўлиб, берилган интеграл учун

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = 2 \int \frac{t^2 + t + 1}{t(1 + 2t)^2} dt$$

бўлади. Энди

$$2 \frac{t^2 + t + 1}{t(1 + 2t)^2} = \frac{2}{t} - \frac{3}{1 + 2t} - \frac{3}{(1 + 2t)^2}$$

бўлишини эътиборга олиб, топамиз

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} &= 2 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |1 + 2t| + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + 2t} + C = \\ &= 2 \ln |x + \sqrt{x^2 + x + 1}| - \frac{3}{2} \ln |1 + 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}| + \\ &\quad + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}} + C. \end{aligned}$$

2. Биномиал дифференциалларни интеграллаш.
Ушбу

$$x^m (a + bx^n)^p dx$$

дифференциал ифода **биномиал дифференциал** деб аталади, бунда a, b — ўзгармас сонлар, m, n, p — рационал сонлар.

Биномиал дифференциалларнинг

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx \tag{8.46}$$

интегралини қараймиз.

Равшанки, бу интегрални ҳисоблаш m, n, p — рационал сонларга боғлиқ. Машхур рус математиги П. Л. Чебишев кўрсатганки, (8.46) интеграл қўйидаги учта

- 1) p — бутун сон,
- 2) $\frac{m+1}{n}$ — бутун сон,
- 3) $\frac{m+1}{n} + p$ — бутун сон

ҳолдагина рационал функцияларнинг интегрални орқали ифодаланади.

1) p — бутун сон бўлсин. Бу ҳолда m ва n рационал сонлар (яъни касрлар) маҳражининг энг кичик умумий бўлувчисини σ орқали белгилаб (8.46) интегралда

$$x = t^{\frac{1}{n}}$$

алмаштириш бажарылса, интеграл остидаги функция рационал функцияга айланиб, (8.46) интеграл рационал функциянынг интегралига келтирилади.

2) $\frac{m+1}{n}$ — бутун сон бўлсин. Аввал (8.46) интегралда

$$x = t^{\frac{1}{n}}$$

алмаштириш бажарамиз. Натижада (8.46) интеграл қўйидаги

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{1}{n} \int (a + bt)^p t^{-\frac{m+1}{n}-1} dt \quad (8.47)$$

кўриниши олади. Қисқалик учун

$$q = \frac{m+1}{n} - 1$$

деб белгилаймиз. Бу ҳолда p — каср соннинг маҳражини s билан белгилаб, (8.47) интегралда

$$z = (a + bt)^{\frac{1}{s}} = (a + bx^n)^{\frac{1}{s}}$$

алмаштириш бажарилеа, натижада интеграл остидаги ифода рационал функцияга айланиб, яна (8.46) интеграл рационал функция интегралини ҳисоблашга келтирилади.

3) $p + q$ — бутун сон бўлсин. Юқоридаги (8.47) интегрални қўйидагича

$$\int (a + bt)^p t^q dt = \int \left(\frac{a + bt}{t} \right)^p \cdot t^{p+q} dt$$

ёзиг оламиз. Агар кейинги интегралда

$$z = \left(\frac{a + bt}{t} \right)^{\frac{1}{s}}$$

алмаштириш бажарылса, (8.46) интеграл рационал функциянынг интегралига келади.

Мисоллар

1. Ушбу

$$\int \frac{\sqrt[n]{x}}{(1 + \sqrt[n]{x})^2} dx$$

интегрални қарайлик. Бу интегрални (8.46) интеграл билан таққослаб. $p = -2$ (бутун сон) эканлигини аниқлаймиз. Юқорида қаралган 1) ҳолга кўра $x = t^6$ ($t = \sqrt[6]{x}$) алмаштириш бажариб толамиш:

$$\int \frac{\sqrt[n]{x}}{(1 + \sqrt[n]{x})^2} dx = 6 \int \frac{t^8}{(1 + t^2)^2} dt.$$

Бу тенгликтининг ўнг томонидаги интеграл остидаги функцияни

$$\frac{t^8}{(1+t^2)^3} = t^4 - 2t^2 + 3 - 4 \cdot \frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{(t^2+1)^2}$$

кўринишда ёзиш мумкин эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2} dt = \frac{t^5}{5} - 2 \frac{t^3}{3} + 3t - 4 \operatorname{arctg} t + \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$$

бўлади. Охирги интеграл шу бобнинг 2-§ да келтирилган (8.17) ректурент муносабат ёрдамида осонгина ҳисобланади:

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C.$$

Натижада қўйидагига эга бўламиз:

$$\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + 3t - \frac{7}{2} \operatorname{arctg} t + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{t^2+1} + C.$$

Демак, $t = \sqrt[6]{x}$ эканини эътиборга олиб узил-кесим ёзамиш:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[6]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2} dx &= \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} - 4 \sqrt[6]{x} + 18 \sqrt[6]{x} - 21 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + \\ &\quad + 3 \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}+1} + C. \end{aligned}$$

2. $\int \frac{x dx}{\sqrt[6]{1+\sqrt[6]{x^2}}}$ интегрални ҳисобланг.

$$\text{Бу интегрални } \int \frac{x dx}{\sqrt[6]{1+\sqrt[6]{x^2}}} = \int x \left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

кўринишда ёзаб, $m = 1$, $n = \frac{2}{3}$, $p = -\frac{1}{2}$ бўлишини топамиш.

Бу ҳолда $\frac{m+1}{n} = 3$ бўлиб,

$$t = \left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

алмаштириш бажарамиз. Унда

$$1+x^{\frac{2}{3}} = t^2, \quad x = \left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}} \text{ ва } dx = \frac{3}{2} \left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2t dt$$

бўлиб, берилган интеграл учун ушбу

$$\begin{aligned} \int x \left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} dx &= 3 \int (t^2-1)^{\frac{3}{2}} t^2 dt = 3 \frac{t^7}{7} - 6 \cdot \frac{t^5}{5} + \\ &\quad + t^3 + C, \quad t = \sqrt[6]{1+x^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

ифода топилиади.

5- §. Тригонометрик функцияларни интеграллаш

Ушбу параграфда тригонометрик функцияларни интеграллаш билан шугууланамиз.

Юқоридагидек, $R(\sin x, \cos x)$ орқали $\sin x$ ва $\cos x$ ларнинг рационал функциясини белгилайлик. Бундай ифоданинг

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \quad (8.48)$$

интегралини қарайлик.

Агар (8.48) интегралда

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi) \quad (8.49)$$

алмаштириш бажарилса, у ҳолда (8.48) интеграл остидаги $R(\sin x, \cos x) dx$ ифода t ўзгарувчининг рационал функциясига айланиб, (8.48) интегрални ҳисоблаш рационал функция интегралини ҳисоблашга келади.

Дарҳақиқат, қўйидаги

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}$$

муносабатларни эътиборга олсак, у ҳолда (8.48) интеграл қўйидагиз

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \cdot \frac{2 dt}{1 + t^2}$$

кўринишга келади. Равшанки,

$$R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \cdot \frac{2}{1 + t^2}$$

функция t ўзгарувчининг рационал функцияси. Демак, (8.48) интегрални ҳисоблаш рационал функция интегралини ҳисоблашга келади.

Мисол. $\int \frac{dx}{3 + \sin x}$ интегралини ҳисобланг.

Бу интегралда $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ алмаштириш бажарамиз. Натижада топамиз:

$$\int \frac{dx}{3 + \sin x} = \int \frac{1}{3 + \frac{2t}{1 + t^2}} \cdot \frac{2 dt}{1 + t^2} = 2 \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 3},$$

$$2 \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 1} = \frac{2}{3} \int \frac{d\left(t + \frac{1}{3}\right)}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}} = \frac{2}{3} \int \frac{d\left(t + \frac{1}{3}\right)}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} 3 \cdot \frac{t + \frac{1}{3}}{2\sqrt{2}} + C.$$

Демак,

$$\int \frac{dx}{3 + \sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2\sqrt{2}} + C.$$

Шуни таъкидлаш лозимки, $\int R(\cos x, \sin x) dx$ интегралда $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ алмаштириш универсал алмаштириш бўлиб, у (8.48) интегрални ҳар доим рационал функция интегралига келтирса-да, кўпинча бу алмаштириш мураккаб ҳисоблашларга олиб келади.

Айрим ҳолларда тригонометрик функцияларни интеграллашда $t = \operatorname{tg} x$, $t = \sin x$, $t = \cos x$ алмаштиришлар қулай бўлади.

Мисоллар

1. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ интегрални қарайлик. Агар бу интегралда $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ универсал алмаштириш бажарилса, у ҳолда

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = 2 \int \frac{(1 + t^2)^3}{(1 - t^2)^4} dt$$

бўлади. Бироқ қаралаётган интегралда $t = \operatorname{tg} x$ алмаштириш сажарилса, у ҳолда

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot d(\operatorname{tg} x) = \int (1 + t^2) dt$$

бўлиб, ундан

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = t + \frac{t^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$$

Бўлишини топамиз.

2. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^5 x}$ интегралда $t = \sin x$ алмаштириш бажариб топамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^5 x} &= \int \frac{(1 - \sin^2 x) d \sin x}{\sin^5 x} = \int \frac{(1 - t^2)}{t^5} dt = \\ &= \frac{t^{-4}}{-4} - \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} + C. \end{aligned}$$

9- бөб

АНИҚ ИНТЕГРАЛ

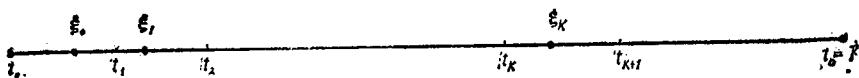
1- §. Масалалар

Ушбу параграфда аниқ интеграл тушунчасига олиб келадиган масалалардан баъзи бирларини келтирамиз.

1. Ўтилган йўл ҳақидаги масала. Бирор моддий нуқта тўғри чизиқ бўйича $[t_0, T]$ вақт оралиғида $v = v(t)$ тезлик билан ($t \in [t_0, T]$) ҳаракат қилаётган бўлса, унинг босиб ўтган йўли s нитопиши талаб этилсин. Равшанки, агар нуқта тезлиги ўзгармас (текис ҳаракат) бўлса, яъни $v(t) = v_0 = \text{const}$, у ҳолда $s = v_0 \cdot (T - t_0)$ бўлади. Энди $v(t)$ — ихтиёрий функция бўлсин. Бу ҳолда масалани ҳал этиш учун $[t_0, T]$ вақт оралиғини

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = T \quad (t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n)$$

нуқталар ёрдамида n та бўлакка бўламиш ва ҳар бир $[t_k, t_{k+1}]$ бўлакда (сегментда) ихтиёрий ξ_k ($\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$) нуқта оламиш (51- чизма).



51- чизма

Агар ҳар бир $[t_k, t_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) сегментда нуқтанинг тезлиги $v = v(t)$ ўзгармас ва $v(\xi_k)$ га тенг деб олинса, у ҳолда нуқтанинг $[t_k, t_{k+1}]$ вақт оралиғида босиб ўтган йўли тахминан ушбу

$$v(\xi_k) \cdot (t_{k+1} - t_k)$$

миқдор билан, унинг $[t_0, T]$ вақт оралиғида босиб ўтган йўли s эса тахминан

$$s \approx v(\xi_0)(t_1 - t_0) + v(\xi_1)(t_2 - t_1) + \dots + v(\xi_k)(t_{k+1} - t_k) + \dots + v(\xi_{n-1})(t_n - t_{n-1}) \quad (9.1)$$

миқдор билан аниқланади. Бунда $t_{k+1} - t_k = \Delta t_k$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) деб белгиласак, юқоридаги (9.1) ифодани қисқача, йиғинди белгиси Σ (сумма) ёрдамида қуйидагича

$$s \approx \sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k) \cdot \Delta t_k \quad (9.1')$$

ёзиш мүмкін.

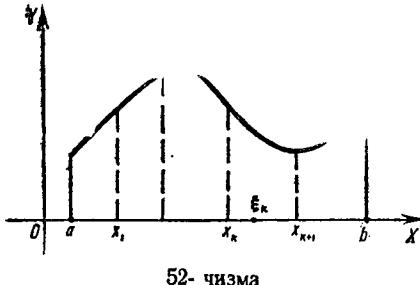
Нұқтанинг $[t_0, T]$ да босиб ўтган йўлини ифодаловчи (9.1') формула тақрибийдір. Ҳақиқатан биз нұқтанинг тезлиги $v = v(t)$ вактнинг функцияси бўлса ҳам, уни ҳар бир $[t_k, t_{k+1}]$ вакт оралиғида ўзгармас $v(\xi_k)$ деб ҳисобладик.

Энди $[t_0, T]$ оралиқнинг бўлаклари сонини шундай орттира борайликки, бунда ҳар бир оралиқ узунлиги Δt_k нолга интила борсин у ҳолда

$$\sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k) \cdot \Delta t_k$$

миқдор биз излаётган йўл миқдорини тобора аниқроқ ифодалай боради, деб ҳисоблаш табиийдир.

2. Эгри чизиқлар трапециянинг юзи. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ҳамда $\forall x \in [a, b]$ да $f(x) \geq 0$ бўлсин.



Юқоридан $f(x)$ функция графиги, ён томонлардан $x = a$, $x = b$ вертикаль чизиқлар ҳамда пастдан Ox — абсцисса ўқи билан чегаралган шаклни қарайлик (52-чизма).

Одатда бундай шаклни эгри чизиқлар трапеция деб аталади. $aAbb$ — эгри чизиқлар трапециянинг юзини топиш талаб этилсин.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ўзгармас, яъни

$$f(x) = C = \text{const}$$

бўлса, у ҳолда $aAbb$ шакл тўғри тўртбурчак бўлиб, унинг юзи

$$S = C \cdot (b - a)$$

формула билан аниқланади.

Агар $f(x)$ функция учун $[a, b]$ сегментда $f(x) \neq C = \text{const}$ бўлиб, у x нинг ихтиёрий узлуксиз функцияси бўлса, у ҳолда $aAbb$ шаклнинг юзини топиш учун $[a, b]$ сегментни

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b \quad (x_0 < x_1 < \dots < x_n)$$

нуқталар билан n та бўлакка бўламиз ва ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) сегментда ихтиёрий ξ_k ($\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$) нуқта оламиз. Ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) сегментда $f(x)$ функцияни ўзгармас ва уни $f(\xi_k)$ га teng қилиб олсак, у ҳолда $x_k A_k B_k x_{k+1}$ эгри чизиқлар трапециянинг юзи таҳминан

$$f(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

га тенг бўлиб, aAb шаклнинг юзи эса тахминан

$$\begin{aligned} S &\approx f(\xi_0) \cdot (x_1 - x_0) + f(\xi_1) \cdot (x_2 - x_1) + \cdots + \\ &+ f(\xi_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) + \cdots + f(\xi_{n-1}) \cdot (x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

миқдор билан аниқланади. Демак,

$$S \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k, \quad (9.2)$$

бунда $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Кўриниб турибдики, aAb эгри чизиқли трапециянинг юзини ифодаловчи (9.2) формула тақрибий ормуладир. Энди $[a,b]$ сегментнинг бўлаклари сонини шундай орттира боралилки, бунда ҳар бир сегмент узунлиги Δx_k нолга интила борсин.

У ҳолда $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ йиғиндининг миқдори ҳам ўзгара боради. Равшанки, бу миқдорлар борган сари aAb эгри чизиқли трапециянинг юзини аниқроқ ифодалай боради.

Юқорида келтирилган икки маъдани ҳал қилишда ундаги $v(t)$ ҳамда $f(x)$ функциялар устида бир хил тадбирлар амалга оширилди, яъни

- функция аниқланиш соҳасини (тўпламини) бўлакларга бўлиш;
- ҳар бир бўлакда ихтиёрий ξ_k нуқтани олиб, бу нуқтада функциянинг қийматини ҳисоблаш;
- функциянинг ξ_k нуқтадаги қийматини, мос оралиқнинг узунлигига кўпайтириб, улардан йиғинди тузиш ишлари баъзирилди.

Сўнг оралиқнинг бўлаклари сонини шундай орттира боријиди, бунда ҳар бир оралиқча узунлиги нолга интила борди.

Натижада тузилган йиғиндиларнинг миқдорлари мөравища ўтилган йўл ҳамда эгри чизиқли трапеция юзини тобора аниқроқ ифодалай бориши топилди. Умуман, жуда кўп масалаларнинг ечими юқоридагига ўхаша йиғиндиларнинг лимитини (йиғиндининг лимити кейинги параграфда аниқ таърифланади) топиш билан ал қилинади. Бундай йиғиндиларнинг лимити математик анализнинг асосий тушунчаларидан бири—аниқ интеграл тушунчасига олиб келади.

2- §. Аниқ интеграл таърифи

Функциянинг аниқ интегралини таърифлашдан аввал баъзи бир тушунчалар, жумладан, $[a,b]$ сегментнинг бўлиниши, функциянинг интеграл йиғиндиси тушунчалари билан танишамиз.

1. $[a,b]$ сегментнинг бўлиниши. Бирор $[a,b] \subset \mathbb{R}$ сегмент берилган бўлсин.

9.1- таъриф. $[a,b]$ сегментнинг ушбу

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

муносабатда бўлган ихтиёрий чекли сондаги $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ нуқталари системасига $[a,b]$ сегментнинг бўлиниши деб аталади ва уни

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

каби белгиланади.

Ҳар бир x_k ($k=0, 1, \dots, n$) нуқта P бўлинишнинг бўлувчи нуқтаси, $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) сегмент эса P бўлинишнинг оралиғи дейилади.

P бўлиниш оралиқлари узунлиги $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ($k = 0, \dots, n-1$) нинг энг каттаси, яъни ушбу

$\lambda_P = \max \{\Delta x_k\} = \max \{\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_k, \dots, \Delta x_{n-1}\}$ миқдор P бўлинишнинг диаметри деб аталади.

Мисо . $[a,b] = [0,1]$ бўлсин. Нуқталарнинг қўйидаги

$$0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}, \frac{10}{10} = 1;$$

$$0, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10}, \frac{10}{10} = 1;$$

$$0, \frac{1}{10}, \frac{9}{10}, \frac{10}{10} = 1;$$

$$0, \frac{1}{20}, \frac{2}{20}, \dots, \frac{19}{20}, \frac{20}{20} = 1$$

системалари $[0,1]$ сегментнинг

$$P_1 = \left\{ 0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}, 1 \right\};$$

$$P_2 = \left\{ 0, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, 1 \right\};$$

$$P_3 = \left\{ 0, \frac{1}{10}, \frac{9}{10}, 1 \right\};$$

$$P_4 = \left\{ 0, \frac{1}{20}, \frac{2}{20}, \dots, \frac{19}{20}, 1 \right\}$$

бўлинишлари бўлиб, уларнинг диаметрлари мос равища

$$\lambda_{P_1} = \frac{1}{10}, \lambda_{P_2} = \frac{1}{5}, \lambda_{P_3} = \frac{4}{5}, \lambda_{P_4} = \frac{1}{20}$$

бўлади.

Юқорида келтирилган таъриф ва мисоллардан кўринадики, $[a,b]$ сегмент берилган ҳолда турли усуллар билан бу сегментнинг исталған сонда бўлинишларини тузиш мумкин экан. Бу бўлинишлардан иборат тўпламни \mathcal{P} билан белгилаймиз: $\mathcal{P} = \{P\}$.

2. Интеграл йиғинди. $[a,b]$ сегментда $f(x)$ функция аниқланган бўлсин, $[a,b]$ сегментнинг

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}$$

бўлиншишини ва бу бўлинишнинг ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) оралиқда ихтиёрий ξ_k ($\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$) нуқта оламиз. Берилган функциянинг ξ_k нуқтадаги қиймати $\xi(\xi_k)$ ни $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ га қўпайтириб, қўйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = f(\xi_0) \cdot \Delta x_0 + f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + \dots + f(\xi_k) \cdot \Delta x_k + \dots + \\ + f(\xi_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

9.2- таъриф. Ушбу

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \quad (9.3)$$

Йиғинди $f(x)$ функциянынг интеграл йиғиндиси ёки Риман йиғиндиси деб аталади.

Масалан, 1) $f(x) = x$ функциянынг $[a,b]$ сегментдаги интеграл йиғиндиси

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \cdot \Delta x_k$$

Бўлади, бунда

$$x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

2) Дирихле функцияси

$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \in [a,b] \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \in [a,b] \text{ — иррационал сон бўлса} \end{cases}$
нинг интеграл йиғиндиси қўйидаги

$$\sum_{k=0}^{n-1} D(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \begin{cases} b - a, & \text{агар барча } \xi_k \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар барча } \xi_k \text{ — иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

жўринишга эга бўлади.

Равшанки, $f(x)$ функциянынг интеграл йиғиндиси σ $f(x)$ функцияга, $[a,b]$ сегментнинг бўлиниш усулларига ҳамда ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ сегментдан олинган ξ_k нуқталарга боғлиқ бўлади.

3. Аниқ интеграл таърифи. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган бўлсин. $[a, b]$ сегментнинг шундай

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_m, \dots \quad (9.4)$$

($P_m \in \mathcal{P}, m = 1, 2, \dots$) бўлинишларини қараймизки, уларнинг мос диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \lambda_{P_3}, \dots, \lambda_{P_m}, \dots$$

кетма - кетлик нолга интилсин: $\lambda_{P_m} \rightarrow 0$.

Бундай P_m ($m = 1, 2, \dots$) бўлинишларга нисбатан $f(x)$ функциянынг интеграл йиғиндиларини тузамиз. Натижада $[a, b]$ сегментнинг (9.4) бўлинишларига мос $f(x)$ функциянынг интеграл йиғиндилари қийматларидан иборат қўйидаги

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_m, \dots \quad (9.5)$$

кетма- кетлик ҳосил бўлади. Равшанки, бу кетма - кетликнинг ҳар бир ҳади ξ_k нуқталарга боғлиқдир.

9.3- таъриф. Агар $[a, b]$ сегментнинг ҳар қандай (9.4) бўлинишлари кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам унга мос интеграл йиғинди қийматларидан иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик ξ_k нуқталарни танлаб олиннишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу I сон σ йиғиндининг лимити деб аталади ва

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = I \quad (*)$$

каби белгиланади.

(9.3) йиғинди лимитини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

9.3- таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, $[a, b]$ сегментнинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиниш учун тузилган σ йиғинди ихтиёрий ξ_k нуқталарда

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

тенгисизликни қаноатлантируса, у ҳолда I сон σ йиғиндининг $\lambda_P \rightarrow 0$ даги лимити деб аталади ва у юқоридагидек ((*) га қаранг) белгиланади. (9.3) йиғинди лимитининг бу таърифлари эквивалент таърифлардир.

9.4-таъриф. Агар $\lambda_P \rightarrow 0$ да $f(x)$ функциянинг интеграл йиғинди (9.3) чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи (Риман маъносида интегралланувчи) дейлади, σ —йиғиндининг чекли лимити, I эса — $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги аниқ интеграли ёки Риман интеграли деб аталади ва у

$$\int_a^b f(x) dx$$

каби белгиләнади.

Демак,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

Бунда a сон интегралнинг қўйи чегараси, b сон эса интегралниң юқори чегараси, $[a, b]$ сегмент интеграллаши оралиғи деб аталади.

$1-\$$ да келтирилган масалаларнинг биринчисида s йўл $v(t)$ тезликнинг $[t_0, T]$ сегментдаги аниқ интеграли:

$$s = \int_{t_0}^T v(t) dt,$$

иккинчисида эса $aABb$ эгри чизиқли трапециянинг S юзи $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги аниқ интеграли

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

дан иборат.

Агар $\lambda_P \rightarrow 0$ да ой ифидининг лимити мавжуд бўлмаса ёки унинг лимити чексиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланмайди (Риман маъносига интегралланмайди) дейилади.

Мисоллар

1. $f(x) = C = \text{const}$ функцияниң $[a, b]$ сегментдаги интегралини ҳисоблаймиз. $[a, b]$ сегментниң ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

бўлинишини олиб, $f(x) = C$ функцияниң интеграл йифидисини топамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} C \cdot \Delta x_k = C \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = C \cdot [(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})] = C \cdot (x_n - x_0) = C \cdot (b - a).$$

Равшанки,

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} C \cdot (b - a) = C \cdot (b - a).$$

Демак,

$$\int_a^b C \cdot dx = C \cdot (b - a).$$

Хусусан, $f(x) = 1$ бўлганда қуийдагига эгамиз:

$$\int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a.$$

2. Ушбу $f(x) = x$ функцияниң $[a, b]$ сегментдаги интегралини ҳисоблайлик.

Маълумки, $[a, b]$ сегментда $f(x) = x$ функцияниң интеграл йифидиси

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \cdot \Delta x_k$$

бўлиб, бунда $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ва

$$x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}. \quad (9.6)$$

Бу (9.6) тенгсизликни $\Delta x_k > 0$ га кўпайтириб топамиз:

$$x_k \cdot \Delta x_k \leq \xi_k \cdot \Delta x_k \leq x_{k+1} \cdot \Delta x_k (k = 0, 1, \dots, n - 1).$$

Кейинги тенгсизликлардан эса

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \cdot \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \Delta x_k$$

тенгсизликлар келиб чиқади.

$$\text{Демак, } \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k \leq \sigma \leq \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \Delta x_k. \quad (9.7)$$

Энди $\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k$ ва $\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \Delta x_k$ йиғиндиларни құйидагыча үз-
гартириб ёзіб оламиз:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k &= \sum_{k=0}^{n-1} x_k (x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)^2 = \frac{1}{2} (x_n^2 - x_0^2) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 = \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2.\end{aligned}$$

Агар $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \Delta x_k &= \sum_{k=0}^{n-1} (x_k + \Delta x_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 = \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2.\end{aligned}$$

Демак,

$$\frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \leq \sigma \leq \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2.$$

Бу муносабатдан

$$\left| \sigma - \frac{b^2 - a^2}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$$

тengсизлик келиб чиқади. Сүнгра $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$ учун

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \leq \lambda_p \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \frac{b - a}{2} \cdot \lambda_p$$

(бунда $\lambda_p = \max_k \{\Delta x_k\}$) бўлишидан $\lambda_p \rightarrow 0$ да

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \rightarrow 0$$

бўлишини топамиз.

Демак,

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Бу эса таърифга кўра

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

еканлигини билдиради.

3. $[a, b]$ сегментда Дирихле функцияси учун аниқ интеграл мавжуд эмаслигини күрсатамыз.

Дирихле функцияси $D(x)$ учун интеграл йиғинди қуидагиша
 $\sigma = \begin{cases} b - a, & \text{агар барча } \xi_k \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар барча } \xi_k \text{ — иррационал сон бўлса} \end{cases}$
 бўлишини кўрган эдик. Равшанки, $\lambda_p \rightarrow 0$ да σ йиғинди лимитга эга бўлмайди, чунки $[a, b]$ сегмент учун ихтиёрий бўлиниш олингандан ҳам ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ сегментда ξ_k нуқтани рационал қилиб олинса, интеграл йиғинди $b - a$ га, ξ_k нуқтани иррационал қилиб олинса, ўша интеграл йиғинди нолга тенг бўлади. Демак, Дирихле функцияси $[a, b]$ сегментда интегралланмайди.

9.1-э слатма. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда чегараланмаган бўлса, у шу сегментда интегралланмайди.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда юқоридан чегараланмаган бўлсин. У ҳолда $\forall P \in \mathcal{P}$ бўлиниш олингандан ҳам бу бўлинишнинг бирорта, масалан, $[x_k, x_{k+1}]$ сегментида $f(x)$ функция юқоридан чегараланмаган бўлади. Демак, $\forall M > 0$ сон олингандан ҳам шундай $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ нуқта мавжудки,

$$f(\xi_k) > \frac{M}{\Delta x_k}, \text{ яъни } f(\xi_k) \cdot \Delta x_k > M$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Энди ξ_k нуқтани юқоридагидек олиб, $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{n-1}$ нуқталарни эса мос равишда $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{k-1}, x_k], [x_{k+1}, x_{k+2}], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ сегментларда тайинлаб, $f(x)$ функцияни интеграл йиғиндини тузсак, бу интеграл йиғиндининг қиймати ҳар қанча катта бўлишини билиш қийин эмас. Равшанки, бу ҳолда интеграл йиғинди чекли лимитга эга бўлмайди. Демак, $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланмайди.

Шундай қилиб, $[a, b]$ сегментда интегралланувчи функция шу оралиқда чегараланган бўлиши зарур.

Кейинги мулоҳазаларда $[a, b]$ сегментни $[a, b]$ ёпиқ оралиқ, қисқача $[a, b]$ оралиқ деб ҳам атайдиз.

3-§. Дарбу йиғиндилари. Аниқ интегралнинг бошқача таърифи

1. Дарбу йиғиндилари. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган бўлиб, у шу оралиқда чегараланган бўлсин. Демак, шундай ўзгармас m ва M сонлар мавжудки, $\forall x \in [a, b]$ лар учун

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \tag{9.8}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Энди $[a, b]$ оралиқнинг бирор

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}$$

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$) бўлинишини олайлик. Модомики, $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда чегараланган экан, унда функция ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n - 1$) оралиқда ҳам чегараланган бўлиб, бу функциянинг аниқ чегаралари

$$\begin{aligned} m_k &= \inf \{f(x)\}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \\ M_k &= \sup \{f(x)\}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}] \end{aligned} \quad (9.9)$$

мавжуд бўлади (2-боб, 6-§).

Равшанки, ихтиёрий $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ учун

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k \quad (9.10)$$

тengsизликлар ҳам ўринли бўлади. Энди m_k ва M_k сонларни $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқнинг узунлиги: $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k > 0$ ($k = 0, 1, \dots, n - 1$) га кўпайтириб қўйидаги

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k = m_0 \cdot \Delta x_0 + m_1 \cdot \Delta x_1 + \dots + m_k \cdot \Delta x_k + \dots + m_{n-1} \cdot \Delta x_{n-1},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k = M_0 \cdot \Delta x_0 + M_1 \cdot \Delta x_1 + \dots + M_k \cdot \Delta x_k + \dots + M_{n-1} \cdot \Delta x_{n-1}$$

йигиндиларни тузамиз.

9.5-таъриф. Ушбу

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k, \quad S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k \quad (9.11)$$

йигиндилар мос равишда *Дарбунинг қўши ҳамда юқори йигиндилари* деб аталади. Бу таърифдаги m_k ва M_k сонлар учун $m_k \leq M_k$ ($k = 0, 1, \dots, n - 1$) tengsizlik ўринли бўлганидан

$$s \leq S \quad (9.12)$$

tengsizlik ҳам ўринли бўлиши келиб чиқади.

Равшанки, (9.11) йигиндилар $f(x)$ функцияга боғлиқ бўлиши билан бирга $[a, b]$ оралиқнинг бўлиниши P га ҳам боғлиқ бўлади, яъни

$$s := s_p(f), \quad S := S_p(f).$$

(9.10) tengsizlikларни $\Delta x_k > 0$ га кўпайтириб топамиз:

$$m_k \cdot \Delta x_k \leq f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \leq M_k \cdot \Delta x_k \quad (k = 0, 1, \dots, n - 1).$$

Кейинги tengsizlikлардан эса

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k$$

тенгсизликлар келиб чиқади. Демак,

$$s_p(f) \leq \sigma \leq S_p(f). \quad (9.13)$$

Шундай қилиб, $f(x)$ функциянынг интеграл йиғиндиши ҳар доим унинг Дарбу йиғиндилиари орасыда бўлар экан.

(9.10) муносабатдан яна биттә хулоса чиқариш мумкин: ξ_k нуқтани танлаб олиш ҳисобига $f(\xi_k)$ ни m_k , шунингдек M_k қийматларга ҳар қанча яқин келтириш мумкин. Бундан эса Дарбунинг қуи ҳамда юқори йиғиндилиари берилган бўлиннишда интеграл йиғинди учун мос равиша аниқ қуи ҳамда аниқ юқори чегаралар бўлиши келиб чиқади, яъни

$$s = \inf_{\xi_k} \{\sigma\}, \quad S = \sup_{\xi_k} \{\sigma\}. \quad (9.14)$$

Энди (9.8) ва (9.9) муносабатларга кўра (функциянынг аниқ чегаралари хоссаларидан фойдаланамиз, 2-бобнинг 6-§ га қаранг):

$$m \leq m_k, \quad M_k \leq M \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

тенгсизликлар ўринли. Шунинг учун ушбу

$$\begin{aligned} s_p(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k \geq m \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = m \cdot (b - a) \\ S_p(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = M \cdot (b - a) \end{aligned}$$

тенгсизликлар ҳам ўринли. Равшанки,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a.$$

Демак, $\forall P \in \mathcal{P}$ учун қуийдаги

$$m \cdot (b - a) \leq s_p(f) \leq S_p(f) \leq M \cdot (b - a) \quad (9.15)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Бу эса Дарбу йиғиндилиарининг чегараланганлигини билдиради.

2. Аниқ интегралнинг бошқача таърифи. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган бўлиб, у шу оралиқда чегараланган бўлсин. $[a, b]$ оралиқнинг бўлиннишлари тўплами $\mathcal{P} = \{P\}$ нинг ҳар бир $P \in \mathcal{P}$ бўлиннишига нисбатан $f(x)$ функциянынг Дарбу йиғиндилиари $s_p(f)$, $S_p(f)$ ни тузиб,

$$\{s_p(f)\}, \quad \{S_p(f)\}$$

тўпламларни қараймиз. Бу тўпламлар (9.15) га кўра чегараланган бўлади.

9.6-таъриф. $\{s_p(f)\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси $f(x)$ функциянынг $[a, b]$ оралиқдаги қуий интегралли (қуий Риман интегралли) деб аталади ва уни

$$\underline{I} = \int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади.

$\{S_p(f)\}$ тўпламининг аниқ қуий чегараси $f(x)$ фу

$[a, b]$ оралиқдаги юқори интегралы (юқори Риман интегралы) деб аталади ва у

$$\bar{I} = \int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади. Демек,

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sup \{s_p(f)\},$$

$$\underline{I} = \int_a^b f(x) dx = \inf \{S_p(f)\}.$$

9.7-таъриф. Агар $f(x)$ функцияның $[a, b]$ оралиқдаги қуий ҳамда юқори интеграллари бир-бирига тенг бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи дейилади, уларнинг умумий қиймати

$$I = \int_a^b f(x) dx = \underline{\bar{I}} = \int_a^b f(x) dx$$

$f(x)$ функцияның $[a, b]$ оралиқдаги аниқ интегралы (Риман интегралы) дейилади ва у

$$\int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \bar{I} = \int_a^b f(x) dx.$$

Агар

$$\int_a^b f(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланмайди дейилади.

Мисоллар

1. $f(x) = x$ функцияни $[a, b]$ оралиқда қарайлик. Бу $[a, b]$ оралиқнинг ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

бўлинишини оламиз. Ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n - 1$) оралиқда

$$m_k = \inf \{f(x)\} = \inf \{x\} = x_k,$$

$$M_k = \sup \{f(x)\} = \sup \{x\} = x_{k+1}.$$

Шу сабабли бу функцияның Дарбу йиғиндилари учун

$$s_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k = \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$$

$$S_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \Delta x_k = \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$$

иғодаларни топамиз. Бундан эса қуйидагига әгамиз:

$$\sup \{s_p(f)\} = \sup \left\{ \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \right\} = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

$$\inf \{S_p(f)\} = \inf \left\{ \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \right\} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Шундай қилиб,

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}, \quad \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

ва

$$\int_a^b x dx = \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Демак, $f(x) = x$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи ва

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

2. $[a, b]$ оралиқда Дирихле функциясы $D(x)$ ни қарайлык. $[a, b]$ оралиқнинг ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

бўлинишини олиб, унга нисбатан Дарбу йигиндилигини ёзамиш:

$$s_p(D) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = 0,$$

$$S_p(D) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a.$$

Бундан

$$\sup \{s_p(D)\} = 0, \quad \inf \{S_p(D)\} = b - a$$

эканни келиб чиқади. Демак,

$$\int_a^b D(x) dx = 0, \quad \int_a^b D(x) dx = b - a.$$

Дирихле функциясининг $[a, b]$ оралиқда қуий ҳамда юқори интеграллари мавжуд бўлса-да,

$$\int_a^b D(x) dx \neq \int_a^b D(x) dx$$

бўлгани сабабли бу функция $[a, b]$ оралиқда интегралланмайди.

4- §. Аниқ интеграл таърифларининг эквивалентлиги

Биз 3- § да $f(x)$ функцияниңг $[a, b]$ оралиқдаги аниқ интегралига икки хил таъриф бердик. Ушбу параграфда эса улар ўзаро эквивалент таърифлар эканлигини исботлаймиз. Бунинг учун аввал $[a, b]$ оралиқ бўлинишларининг ҳамда Дарбу йигиндилиарининг хоссаларини келтирамиз.

1. $[a, b]$ оралиқ бўлинишларининг хоссалари. $\mathcal{P} = \{P\}$ тўплам $[a, b]$ оралиқнинг барча бўлинишларидан иборат тўплам бўлиб, $P_1 \in \mathcal{P}, P_2 \in \mathcal{P}$ бўлсин.

Агар P_1 бўлинишнинг ҳар бир бўлувчи нуқтаси P_2 бўлинишнинг ҳам бўлувчи нуқтаси бўлса, P_2 бўлиниш P_1 ви эргаштиради деб аталади ва $P_1 \subset P_2$ каби белгиланади. Масалан, $[a, b] = [0, 1]$ бўлсин.

Ушбу

$$P_1 = \left\{ 0, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10}, \frac{10}{10} = 1 \right\},$$

$$P_2 = \left\{ 0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}, \frac{10}{10} = 1 \right\}$$

бўлинишлар учун $P_1 \subset P_2$ бўлади.

1°. Агар $P_1 \in \mathcal{P}, P_2 \in \mathcal{P}, P_3 \in \mathcal{P}$ бўлинишлар учун $P_1 \subset P_2, P_2 \subset P_3$ бўлса, у ҳолда $P_1 \subset P_3$ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $P_1 \subset P_2$ бўлишидан P_1 бўлинишнинг бўлувчи нуқталари P_2 нинг ҳам бўлувчи нуқталари, $P_2 \subset P_3$ бўлишидан эса ўша бўлувчи нуқталар P_3 бўлинишнинг ҳам бўлувчи нуқталари эканлиги келиб чиқади. Демак, $P_1 \subset P_3$.

2°. $\forall P_1 \in \mathcal{P}, \forall P_2 \in \mathcal{P}$ бўлинишлар учун шундай $P \in \mathcal{P}$ бўлиниш мавжудки, $P_1 \subset P, P_2 \subset P$ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$P_1 = \{x'_0, x'_1, \dots, x'_n\} \in \mathcal{P},$$

$$P_2 = \{x''_0, x''_1, \dots, x''_m\} \in \mathcal{P}$$

бўлсин. Бу бўлинишларнинг x'_k ($k = 0, 1, \dots, n$) ҳамда x''_i ($i = 0, 1, \dots, m$) бўлувчи нуқталари ёрдамида $[a, b]$ оралиқнинг

$$P = \{y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+m+1}\}$$

бўлинишини тузамиз. Равшанки,

$$P_1 \subset P, P_2 \subset P.$$

2. Дарбу йигиндилиарининг хоссалари. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва чегараланган бўлсин. $P_1 \in \mathcal{P}, P_2 \in \mathcal{P}$ бўлинишларга нисбатан Дарбу йигиндилиарини тузамиз. Улар мос равища

$$S_{P_1}(f), S_{P_2}(f)$$

ва

$$s_{P_1}(f), S_{P_2}(f)$$

бўлсин. Дарбу йигиндилари қўйидаги хоссаларга эга:

1º. Агар $P_1 < P_2$ бўлса, у ҳолда

$$\begin{aligned} s_{p_1}(f) &\leq s_{p_2}(f), \\ S_{p_1}(f) &\geq S_{p_2}(f) \end{aligned}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Ие бот. $[a, b]$ оралиқнинг P_1 бўлиниши қўйидагича

$$P_1 = \{x'_0, x'_1, \dots, x'_k, \dots, x'_n\} \quad (a = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_k < \dots < x'_n = b)$$

бўлиб, P_2 бўлиниш эса $P_1 < P_2$ бўлсин. Соддалик учун, P_2 бўлинишининг бўлувчи нуқталари P_1 нинг барча x'_0, x'_1, \dots, x'_n бўлувчи нуқталари ҳамда қўшимча битта $x^* \in [a, b]$ нуқтадан иборат бўлсин. Бу x^* нуқта x'_k ҳамда x'_{k+1} нуқталар орасида жойлашсин:

$$x'_k < x^* < x'_{k+1}.$$

Демак,

$$P_2 = \{x'_0, x'_1, \dots, x'_k, x^*, x'_{k+1}, \dots, x'_n\}.$$

P_1 ва P_2 бўлинишларга нисбатан Дарбунинг юқори йигиндилари қўйидагича

$$\begin{aligned} S_{p_1}(f) &= M_0 \cdot \Delta x'_0 + M_1 \cdot \Delta x'_1 + \dots + M_k \cdot \Delta x'_k + \dots + \\ &+ M_{n-1} \cdot \Delta x'_{n-1}, \end{aligned} \quad (9.16)$$

$$S_{p_2}(f) = M_0 \cdot \Delta x'_0 + \dots + (M'_k \cdot \Delta \bar{x}'_k + M''_k \cdot \Delta x''_k) + \dots + M_{n-1} \cdot \Delta x_{n-1}$$

ёзилади, бунда

$$\begin{aligned} M'_k &= \sup \{f(x), x \in [x'_k, x^*]\}, \\ M''_k &= \sup \{f(x), x \in [x^*, x'_{k+1}]\} \end{aligned}$$

ва

$$\Delta \bar{x}'_k = x^* - x'_k, \quad \Delta x''_k = x'_{k+1} - x^*$$

(9.16) муносабатлардан кўринадики, $S_{p_1}(f)$ ва $S_{p_2}(f)$ йигиндиларнинг бир-биридан фарқи қўйидагича: $S_{p_1}(f)$ йигиндида $M_k \cdot \Delta x'_k$ қўшилувчи бўлган ҳолда $S_{p_2}(f)$ йигиндининг унга мос қўшилувчисида $M'_k \cdot \Delta \bar{x}'_k + M''_k \cdot \Delta x''_k$ ифода бўлади.

Равшанки, $[x'_k, x^*] \subset [x'_k, x'_{k+1}], [x^*, x'_{k+1}] \subset [x'_k, x'_{k+1}]$. Аниқ чегаранинг хоссасига кўра

$$M'_k \leq M_k, \quad M''_k \leq M_k$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$M'_k \cdot \Delta \bar{x}'_k + M''_k \cdot \Delta x''_k = M'_k (x^* - x'_k) + M''_k (x'_{k+1} - x^*) \leq M_k [(x^* - x'_k) + (x'_{k+1} - x^*)] = M_k \cdot \Delta x'_k$$

бўлиб, натижада $S_{p_1}(f)$ ва $S_{p_2}(f)$ йигиндиларнинг бир-биридан фарқ қилувчи ҳади учун ушбу

$$M'_k \cdot \Delta \bar{x}'_k + M''_k \cdot \Delta x'_k \leq M_k \cdot \Delta x'_k$$

тенгсизликка келамиз. Демак, $S_{p_1}(f) \geq S_{p_2}(f)$. Худди шунга ўхшаш

$$s_{p_1}(f) \leq s_{p_2}(f)$$

бўлиши исботланади.

Шундай қилиб, $[a, b]$ оралиқда бўлувчи нуқталар сони ошириб борилганда уларга мос бўлган Дарабунинг юқори йигиндилари ошмайди, қўйи йигиндилари эса камаймайди.

2º. $\forall P_1 \in \mathcal{P}$, $\forall P_2 \in \mathcal{P}$ бўлинишларга нисбатан Дарабу йигиндилари учун

$$s_{p_2}(f) \leq S_{p_1}(f)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. 1-пунктда келтирилган бўлинишнинг 2º-хоссасига кўра, шундай бўлиниш $P \in \mathcal{P}$ мавжудки $P_1 \subset P$, $P_2 \subset P$ бўлади. Бу P бўлинишга нисбатан Дарабу йигиндилари $s_p(f)$ ва $S_p(f)$ бўлсин. У ҳолда 1º-хоссага кўра

$$P_1 \subset P \text{ дан } s_{p_1}(f) \leq s_p(f), S_{p_1}(f) \geq S_p(f),$$

$$P_2 \subset P \text{ дан } s_{p_2}(f) \leq s_p(f), S_{p_2}(f) \geq S_p(f)$$

тенгсизликлар келиб чиқади. Бу тенгсизликлардан ҳамда ҳар доим ўринли бўладиган $s_p(f) \leq S_p(f)$ тенгсизликдан

$$s_{p_2}(f) \leq s_p(f) \leq S_p(f) \leq S_{p_1}(f)$$

екани келиб чиқади, Демак, $s_{p_2}(f) \leq S_{p_1}(f)$.

Бу хосса $[a, b]$ оралиқнинг бўлинишларига нисбатан тузилган қўйи йигиндилар тўплами $\{s_p(f)\}$ нинг ҳар бир элементи юқори йигиндилар тўплами $\{S_p(f)\}$ нинг исталган элементидан катта эмаслигини билдиради.

Дарабу йигиндиларнинг бу хоссаларидан фойдаланиб $f(x)$ функцияning қўйи ҳамда юқори

$$\underline{I} = \int_a^b f(x) dx, \quad \bar{I} = \int_a^b f(x) dx$$

интеграллари ҳақидаги иккита леммани исботлаймиз.

9.1-лемма. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва чегараланган бўлса, у ҳолда

$$\underline{I} \leq \bar{I} \tag{9.17}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда чегараланган бўлсин.

Равшанки, бу ҳолда

$$\underline{I} = \sup \{s_p(f)\}, \quad \bar{I} = \inf \{S_p(f)\}$$

миқдорлар мавжуд бўлади.

Дарбу йигиндиларининг 2*-хоссаси ҳамда аниқ чегараларнинг хоссаларидан (2-боб, 6-§) фойдаланиб

$$\underline{I} \leq S_p(f),$$

ундан эса

$$\underline{I} \leq \inf \{S_p(f)\}$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\underline{I} \leq \bar{I}$$

бўлади. 1-лемма исбот бўлади.

9.2-лемма. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва чегараланган бўлса, у ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ олингандан ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, диаметрлари $\lambda_p < \delta$ бўлган $[a, b]$ оралиқнинг барча P бўлинишлари учун

$$\begin{aligned} S_p(f) &< \bar{I} + \varepsilon. \quad (0 \leq S_p(f) - \bar{I} < \varepsilon), \\ s_p(f) &> \underline{I} - \varepsilon. \quad (0 \leq \underline{I} - s_p(f) < \varepsilon) \end{aligned}$$

тengsизликлар ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқда $f(x) \geq 0$ ва ихтиёрий бўлган ҳолларни алоҳида қараймиз. $f(x) \geq 0$ бўлсин. Бу функция $[a, b]$ оралиқда чегараланганилиги сабабли

$$\bar{I} = \inf \{S_p(f)\}$$

мавжуд бўлади. Аниқ қўйи чегаранинг хоссасига кўра $[a, b]$ оралиқнинг шундай

$$P_0 = \{x_0^0, x_1^0, \dots, x_n^0\}$$

$(a = x_0^0 < x_1^0 < \dots < x_n^0 = b)$ бўлиниши мавжуд бўладики,

$$S_{p_0}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k^0 \Delta x_k^0 < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади, бунда

$$M_k^0 = \sup \{f(x)\}, \quad x \in [x_k^0, x_{k+1}^0]$$

ва $\Delta x_k^0 = x_{k+1}^0 - x_k^0$. Энди $\forall \varepsilon > 0$ сонга $\delta > 0$ сонни $\delta = \frac{\varepsilon}{4mM}$ деб олайлик, бунда ($m \in N$)

$$M = \sup \{f(x)\}, \quad x \in [a, b].$$

Сўнгра $[a, b]$ оралиқнинг диаметри δ дан кичик бўлган бўлинишлар тўпламиини олиб, уни \mathcal{P}_δ каби белгилайлик. Демак,

$$\forall P \in \mathcal{P}_\delta \text{ учун } \lambda_p < \delta \text{ бўлади.}$$

Фараз қиласылар, $\forall P \in \mathcal{P}_\delta$ бүлиниш қуидагича

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_m\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b)$$

бүлсін. Бу P бүлиниш ўзининг x_k ($k = 0, 1, \dots, m - 1$) нүкталары билан $[a, b]$ оралиқни $[x_k, x_{k+1}]$ бүлактарга ажратади.

Әнді үоқоридаги P_0 бүлинишининг x_k^o ($k = 1, 2, \dots, n - 1$) бүлувчи нүкталарини (ички бүлувчи нүкталар) ўз ичига олган ушбу

$$[x_k^o - \delta, x_k^o + \delta] \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1)$$

оралиқтарни тузамиз. Бу оралиқтар билан $P \in \mathcal{P}_\delta$ бүлинишининг $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқлари орасыда қуидаги икки ҳол іоз беріши мүмкін:

а) $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқ бутунлай $[x_k^o - \delta, x_k^o + \delta]$ оралиқда жойлашған;

б) $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқ $[x_k^o - \delta, x_k^o + \delta]$ оралиқда қисман жойлашған ёки улар битта ҳам умумий нүктага әга әмас.

У ҳолда $P \in \mathcal{P}_\delta$ бүлинишга нисбатан $f(x)$ функцияның Дарбу йиғинди

$$S_p(f) = \sum_{k=0}^{m-1} M_k \cdot \Delta x_k$$

ҳам мос равища икки қисмга ажралади:

$$S_p(f) = S'_p(f) + S''_p(f) = \sum' M_k \cdot \Delta x_k + \sum'' M_k \cdot \Delta x_k. \quad (9.18)$$

Әнді $S'_p(f)$ йиғиндида $[x_k, x_{k+1}] \subset [x_k^o - \delta, x_k^o + \delta]$ бүлгандылығы сабабли

$$\begin{aligned} S'_p(f) &= \sum' M_k \cdot \Delta x_k \leq M \sum' \Delta x_k < \\ &< M \cdot 2 \delta m < 2 M \cdot m \cdot \frac{\epsilon}{4mM} = \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \quad (9.19)$$

бүлади.

$S''_p(f)$ йиғиндининг ҳар бир құшилувчисида

$$M_k \leq M_k^o, \quad \Delta x_k \leq \Delta x_k^o$$

бүлганидан

$$\begin{aligned} S''_p(f) &= \sum'' M_k \cdot \Delta x_k \leq \sum'' M_k^o \cdot \Delta x_k^o \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k^o \cdot \Delta x_k^o = S_{p_0}(f) < \bar{I} + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \quad (9.20)$$

әкани келиб чиқади. (9.18), (9.19) ва (9.20) муносабатлардан

$$S_p(f) < \bar{I} + \frac{\epsilon}{2}$$

бүлишини топамиз.

Агар $[a,b]$ оралиқда $f(x)$ ихтиёрий бўлса, у ҳолда ҳар доим шундай ўзгармас мусбат A сон топиладики, $f(x) + A > 0$ бўлади. Бу функцияга нисбатан юқоридаги исбот қайтариладиган бўлса, у ҳолда Дарбу йигиндиси ва юқори интегралларнинг ҳар бири $A \cdot (b - a)$ сонга ортади ва $f(x)$ функция учун ҳам лемманинг тасдиғи ўринли бўлади. Худди шунга ўхшаш

$$s_p(f) > I - \varepsilon$$

бўлиши ҳам исботланади. 9.2 лемма исбот бўлди.

Бу лемма $f(x)$ функциянинг юқори ҳамда қуий интеграллари $\lambda_p \rightarrow 0$ да мос рәвишда Дарбунинг юқори ҳамда қуий йигиндилари-нинг лимити эканини кўрсатади:

$$\bar{I} = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} S_p(f),$$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} s_p(f).$$

3. Аниқ интеграл таърифларининг эквивалентлиги. Аниқ интеграл 9.4 ва 9.7-таърифларининг эквивалентлигини кўрсатамиз.

а) $[a,b]$ оралиқда $f(x)$ функциянинг σ интеграл йигиндиси $\lambda_p \rightarrow 0$ да чекли лимитга эга бўлиб,

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx = I$$

бўлсин. Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[a,b]$ оралиқнинг диаметрлари $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишига нисбатан

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

яъни

$$I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. У ҳолда (9.14) муносабатдан фойдаланиб, Дарбу йигиндилари $s_p(f)$ ҳамда $S_p(f)$ учун

$$I - \varepsilon \leq s_p(f) \leq S_p(f) \leq I + \varepsilon$$

тенгсизликларнинг ўринли бўлишини топамиз. Иккинчи томондан,

$$\bar{I} = \inf \{s_p(f)\} \leq S_p(f), \quad I = \sup \{s_p(f)\} \geq s_p(f)$$

ва 9.1-леммага кўра $I \leq \bar{I}$ бўлгани учун

$$I - \varepsilon \leq I \leq \bar{I} \leq I + \varepsilon$$

тенгсизликлар ҳам ўринли бўлади, $\varepsilon > 0$ соннинг ихтиёрийлигидан

$$I = I = \bar{I}$$

тенглик келиб чиқади. Демак, $[a,b]$ оралиқда $f(x)$ функцияныңг юқори ҳамда қуи интеграллари бир-бирига тенг. Бу 9.7-тағыраға құра $f(x)$ функция $[a,b]$ да интегралланувчи бўлишини қўрсатади.

б) $[a,b]$ оралиқда $f(x)$ функцияныңг юқори ҳамда қуи интеграллари тенг бўлиб,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (\underline{I} = \bar{I} = I)$$

бўлсин. (9.13) муносабатга кўра

$$s_p(f) \leq \sigma \leq S_p(f)$$

бўлади. Иккинчи томондан, 9.2-леммага асосан

$$\underline{I} - \varepsilon < \sigma < \bar{I} + \varepsilon$$

бўлиб, $\underline{I} = \bar{I} = I$ тенгликка кўра

$$I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади. Демак, $|\sigma - I| < \varepsilon$. Бу эса 9.4-тағыраға кўра $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда интегралланувчи эканлиги ни қўрсатади.

Демак, аниқ интегралнинг 9.4- ва 9.7-тағыриларни ўзаро эквивалент.

5. Аниқ интегралнинг мавжудлиги

Энди функция аниқ интегрални мавжуд бўлишининг зарур ва етарли шартини топиш масаласи билан шуғулланамиз.

Аслида функцияныңг интегралланувчи бўлиши ёки бўлмаслигини тағыриф бўйича текшириш мумкин. Бироқ кўпчилик ҳолларда интеграл йигиндининг чекли лимитга эга бўлишини қўрсатиш, шунингдек, юқори ҳамда қуи интегралларни топиш жуда қийин бўлади.

Шуни айтиш керакки, аниқ интегралнинг биринчи тағырифидаги (9.4-тағыраға қаранг) лимит тушунчаси (интеграл йигиндининг лимити тушунчаси) янги тушунчадир. У ўтган бобларда ўрганилган кетма-кетликнинг лимити, функцияныңг лимити тушунчаларининг айнан ўзи бўлмай, балки ўзига хсс, мураккаб характеристика гэга бўлган тушунча.

Аниқ интегралнинг иккинчи тағырифи эса (9.7-тағыраға қаранг) интеграл йигиндига қараганда бирмунчада соддароқ бўлган Дарбу йигиндиларига асосланади.

Демак, интегралнинг мавжудлиги критерийсини иккинчи тағыриф асосида келтириш мақсадга мувофиқ.

$f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда аниқланган ва чегараланган бўлсин.

9.1. - теорема. $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилиб, $[a,b]$ оралиқнинг диаметрлари $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиншишига нисбатан Дарбу йигиндилари

$$S_p(f) - s_p(f) < \varepsilon \quad (9.21)$$

тенгсизликни қаноатлантириши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. Таърифга кўра $I = \bar{I} = \underline{I}$ бўлади, бунда

$$\underline{I} = \sup \{s_p(f)\}, \quad \bar{I} = \inf \{S_p(f)\},$$

$\forall \varepsilon > 0$ олганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[a,b]$ оралиқнинг диаметрлари $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишга нисбатан Дарбу йигиндилари учун 9.2-леммага кўра

$S_p(f) - \bar{I} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \underline{I} - s_p(f) < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизликлар ўринли бўлиб, ундан $S_p(f) - s_p(f) < \varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади.

Етарлиги. $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилиб, $[a,b]$ оралиқнинг диаметрлари $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишга нисбатан Дарбу йигиндилари учун

$$S_p(f) - s_p(f) < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлсин. $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда чегараланганилиги учун унинг қуий ҳамда юқори интеграллари

$$\underline{I} = \sup \{s_p(f)\}, \quad \bar{I} = \inf \{S_p(f)\}$$

мавжуд ва 9.1-леммага кўра $\underline{I} \leq \bar{I}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Равшанки,

$$s_p(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_p(f).$$

Бу муносабатдан

$$0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq S_p(f) - s_p(f)$$

бўлишини топамиз. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ сон учун $0 \leq \bar{I} - \underline{I} < \varepsilon$ бўлиб, ундан $\bar{I} = \underline{I}$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ оралиқда интегралланувчи эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Агар аввалгидек $f(x)$ функциянинг $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) оралиқдаги тебранишини ω_k орқали белтиласак, у ҳолда

$$S_p(f) - s_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k$$

бўлиб, юқорида келтирилган теорема қўйидагича ифодаланади.

9.2-теорема $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилиб, $[a,b]$ оралиқнинг диаметрлари $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишида

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k < \varepsilon \tag{9.21'}$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Равшанки, (9.21') муносабатни қүйидаги

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k = 0 \quad (9.21'')$$

хам ёзиш мүмкін. Күпчілік ҳолларда, теореманинг (9.21'') күриниши даги шарти ишлатылади.

6 -§ . Интегралланувчи функциялар синфи

Ушбу параграфда аниқ интегралнинг мавжудліги ҳақидағи теоремадан фойдаланыб, баъзи функцияларнинг интегралланувчи бўлишини кўрсатамиз.

$f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда аниқланган бўлсин.

9.3-теорема. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у шу оралиқда интегралланувчи бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлсин. Вейерштрасснинг биринчи теоремасига (5.7-теоремага қаранг) кўра функция $[a,b]$ да чегараланган. Иккинчи томондан, Кантор теоремасининг (5.10-теоремага қаранг) 5.3-натижасига кўра $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[a,b]$ оралиқни узунликлари δ дан кичик бўлган бўлакларга ажратилганда функциянинг ҳар бир бўлақдаги тебраниши учун $\omega_k < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, $[a,b]$ оралиқнинг диаметрлари $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишида

$$S_p(f) - s_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon \cdot (b - a)$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k = 0$$

келиб чиқади. Демак, (9.21'') га кўра $f(x)$ функция $[a,b]$ да интегралланувчи. Теорема исбот бўлди.

9.4-теорема. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда чегараланган ва монотон бўлса, функция шу оралиқда интегралланувчи бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция $[a,b]$ да чегараланган ва шу оралиқда, айтайлик, ўсуви бўлсин. $\forall \varepsilon > 0$ сонни олиб, унга $\delta > 0$ сонни қўйидагича танлайлик:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} > 0.$$

Сўнгра $[a,b]$ оралиқнинг диаметрлари $\lambda_p < \delta$ бўлган P бўлинишлари. га нисбатан Дарбу йиғиндилари $S_p(f)$ ва $s_p(f)$ ни тузамиз. У ҳолда

$$\begin{aligned} S_p(f) - s_p(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] \Delta x_k \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} [f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - \\ &- f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})] = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} [f(x_n) - f(x_0)] = \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} [f(b) - f(a)] = \varepsilon. \end{aligned}$$

Демак,

$$S_p(f) - s_p(f) < \varepsilon.$$

Бу эса (9.21) га кўра $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ оралиқда интегралланувчи эканлигини билдиради.

Чегараланган ҳамда камаювчи функциянинг интегралланувчи бўлиши ҳам худди шунга ўхшаш исботланади. Теорема исбот бўлди.

9.5- теорема. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда чегараланган ва бу оралиқнинг чекли сонидаги нуқталарида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарида узлуксиз бўлса, функция шу оралиқда интегралланувчи бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция $[a,b]$ да чегараланган бўлиб, шу оралиқнинг фақат битта $x^* (x^* \in (a,b))$ нуқтасида узилишга эга, қолган барча нуқталарида узлуксиз бўлсин.

$\forall \varepsilon > 0$ сон олиб, x^* нуқтанинг

$$U_\varepsilon(x^*) = \{x : x \in R, x^* - \varepsilon < x < x^* + \varepsilon\}$$

атрофини тузамиз. Бу атроф $[a,b]$ оралиқни

$$U_\varepsilon(x^*), [a,b] \setminus U_\varepsilon(x^*) = [a, x^* - \varepsilon] \cup [x^* + \varepsilon, b]$$

қисмларга ажратади.

Шартга кўра, $f(x)$ функция $[a, x^* - \varepsilon]$ ва $[x^* + \varepsilon, b]$ оралиқларнинг ҳар бирида узлуксиз. Бу оралиқларнинг ҳар бирига алоҳида Қантор теоремасининг (5.3 - натижани қаранг) қўлланамиз. У ҳояда олинган $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta_1 > 0$ ва $\delta_2 > 0$ сонлар топиладики,

$$[a, x^* - \varepsilon] \text{ да } \Delta x_k < \delta_1 \text{ дан } \omega_k < \varepsilon,$$

$$[x^* + \varepsilon, b] \text{ да } \Delta x_k < \delta_2 \text{ дан } \omega_k < \varepsilon$$

тенгсизликлар ўринли экани келиб чиқади. Агар $\min\{\delta_1, \delta_2\} = \delta$ деб олсак, у ҳолда иккала оралиқ учун бир вақтда

$$\Delta x_k < \delta \text{ дан } \omega_k < \varepsilon \quad (9.22)$$

тенгсизликнинг ўринли экани келиб чиқади.

Энди юқоридаги $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра $\delta > 0$ сонни $\delta < \varepsilon$ деб олайлик.

$[a,b]$ оралиқнинг диаметрлари $\lambda_p < \delta$ бўлган бўлиннишларига нисбатан $f(x)$ функциянинг Дарбу йиғиндиларини тузиб, қўйидаги

$$S_p(f) - s_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k \quad (9.23)$$

айирмани қараймиз. (9.23) йиғиндининг ҳар бир ҳадида $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) оралиқнинг узунлиги Δx_k қатнашади. Бу $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқларнинг x^* нуқтанинг $U_\varepsilon(x^*)$ атрофидан ташқарида жойлашганига, яъни $[x_k, x_{k+1}] \cap U_\varepsilon(x^*) = \emptyset$ муносабат ўринли сўладиганига мос келадиган (9.23) йиғиндининг ҳадларидан тузилган ёкинди

$$\sum_k' \omega_k \cdot \Delta x_k$$

бўлсин. (9.23) йигиндининг қолган барча ҳадларидан ташкил топган йигинди

$$\sum_k'' \omega_k \cdot \Delta x_k$$

бўлсин, бунда $[x_k, x_{k+1}] \subset U_\varepsilon(x^*)$ ёки $[x_k, x_{k+1}] \cap \{x^* - \varepsilon\} \neq \emptyset$ ёки $[x_k, x_{k+1}] \cap \{x^* + \varepsilon\} \neq \emptyset$ бўлади.

Натижада (9.23) йигинди икки қисмга ажралади:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = \sum_k' \omega_k \Delta x_k + \sum_k'' \omega_k \cdot \Delta x_k \quad (9.24)$$

Энди бу йигиндиларни баҳолаймиз. Юқоридаги (9.22) муносабатдан фойдаланиб топамиз:

$$\sum_k' \omega_k \Delta x_k < \sum_k' \varepsilon \Delta x_k \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon(b - a). \quad (9.25)$$

Иккинчи йигинди учун

$$\sum_k'' \omega_k \Delta x_k \leq \sum_k'' \Omega \Delta x_k = \Omega \cdot \sum_k'' \Delta x_k$$

бўлишини топамиз, бунда $\Omega = f(x)$ функцияning $[a, b]$ оралиқдаги төбражаниши.

Агар $U_\varepsilon(x^*)$ атрофда бутунлай жойлашган $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқлар узунликларининг йигиндиси 2 ε дан кичиклигини ҳамда $x^* - \varepsilon$ ва $x^* + \varepsilon$ нуқталарни ўз ичига олган $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқлар иккита бўлиб, уларнинг узунликлари йигиндиси ҳам 2 ε (чунки $\delta < \varepsilon$) дан кичик бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\sum_k'' \Delta x_k < 4\varepsilon \quad (9.26)$$

бўлади. Натижада (9.24), (9.25) ва (9.26) муносабатлардан

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k < \varepsilon(b - a) + 4\varepsilon\Omega = \varepsilon[(b - a) + 4\Omega]$$

эканни келиб чиқади. Демак,

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k = 0$$

Бу эса (9.21'') га кўра $f(x)$ функцияning $[a, b]$ да интегралланувчи бўлишини билдиради.

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқнинг чекли сондаги нуқталарида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарида узлуксиз бўлса, унинг $[a, b]$ да интегралланувчи бўлжими юқоридагидек исбот этилади. Теорема исбот бўлди.

Мисол. $f(x) = \sin x$ функция $(-\infty, +\infty)$ интервалда узлуксиз. Демак, юқоридаги 9.3 - теоремага күра бу функция иктиёрий $[a, b]$ да интегралланувчи бўлади. $\int_a^b \sin x dx$ интегрални ҳисоблайлик.

Модомики, $f(x) = \sin x$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи экан, бу функцияниң $[a, b]$ оралиқ бўйича интегралини таърифга кўра ҳисоблашда, $[a, b]$ оралиқнинг бўлинишини ҳамда ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ бўлакда ξ_k нуқталарни интеграл йигинди ва унинг лимитини ҳисоблашга қулай қилиб олиш имкониятига эга бўламиз. Шуни эътиборга олиб, $[a, b]$ оралиқни ушбу

$$a, a + \alpha_n, a + 2\alpha_n, \dots, a + k \cdot \alpha_n, \dots, a + n \cdot \alpha_n = b$$

нуқталар ёрдамида (бунда $\alpha_n = \frac{b-a}{n}$) n та тенг бўлакка бўлиб, ҳар бир $[a + k \alpha_n, a + (k+1) \alpha_n]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) бўлакда ξ_k нуқтани қўйидагича

$$\xi_k = a + (k+1)\alpha_n \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

танлаймиз. У ҳолда функцияниң интеграл йигиндиси қўйидаги

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \sin [a + (k+1)\alpha_n] \cdot \alpha_n = \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \sin [a + (k+1)\alpha_n]$$

кўринишида бўлади. Ушбу

$$\begin{aligned} \sin [a + (k+1)\alpha_n] &= \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha_n}{2}} 2 \sin \frac{\alpha_n}{2} \cdot \sin [a + (k+1)\alpha_n] = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha_n}{2}} \left\{ \cos \left[a + \left(k + \frac{1}{2} \right) \alpha_n \right] - \cos \left[a + \left(k + \frac{3}{2} \right) \alpha_n \right] \right\} \end{aligned}$$

тенгликдан фойдаланиб, σ учун

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\alpha_n}{2 \sin \frac{\alpha_n}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \cos \left[a + \left(k + \frac{1}{2} \right) \alpha_n \right] - \cos \left[a + \left(k + \frac{3}{2} \right) \alpha_n \right] \right\} = \\ &= \frac{\frac{\alpha_n}{2}}{\sin \frac{\alpha_n}{2}} \left[\cos \left(a + \frac{1}{2} \alpha_n \right) - \cos \left(b + \frac{1}{2} \alpha_n \right) \right] \end{aligned}$$

формулани топамиз. Натижада $\Delta x_k = \alpha_n \rightarrow 0$ да

$$\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \frac{\frac{\alpha_n}{2}}{\sin \frac{\alpha_n}{2}} \left[\cos \left(a + \frac{1}{2} \alpha_n \right) - \cos \left(b + \frac{1}{2} \alpha_n \right) \right] = \\ = \cos a - \cos b$$

бўлади. Демак,

$$\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b.$$

Хусусан

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1, \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx = 0.$$

9.2- эслятма. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. Биз

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

ҳамда

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

тенгликлар ўринли деб келишиб оламиз.

7-§. Аниқ интегралнинг хоссалари

Энди $f(x)$ функция аниқ интегралининг хоссаларини ўрганамиз.

1º. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у исталган $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ оралиқда ҳам интегралланувчи бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ да интегралланувчи бўлсин.

У ҳолда 9.1- теоремага кўра $\forall \epsilon > 0$ олингандан ҳам шундай $\delta > 0$ соң топиладики, $[a, b]$ оралиқнинг диаметрлари $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ бўлиниши учун

$$S_p(f) - s_p(f) < \epsilon \quad (9.21)$$

тенгсизлик бажарилади.

P бўлинишнинг бўлувчи нуқталари x_0, x_1, \dots, x_n қаторига α ҳамда β нуқталарни қўшиб, $[a, b]$ оралиқнинг янги P_1 бўлинишини ҳосил қиласмиз. Равшаники, $P \prec P_1$ бўлади. У ҳолда Дарбу йигинди ларининг хосасига кўра (ушбу бобининг 4- §, 2- пунктга қаранг)

$$s_p(f) \leq s_{p_1}(f), \quad S_{p_1}(f) \leq S_p(f) \quad (9.27)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. (9.21) ва (9.27) муносабатлардан

$$S_{p_1}(f) - s_{p_1}(f) < \epsilon \quad (9.28)$$

бўлини келиб чиқади.

$[\alpha, \beta]$ оралиқдаги P_1 бўлинишнинг бўлувчи нуқталарини $[\alpha, \beta]$ оралиқнинг бирор P_2 бўлинишининг бўлувчи нуқталари сифатида қараемиз. Бу P_2 бўлинишига нисбатан $f(x)$ функцияининг Дарбу йигиндилиари $s_{p_2}(f), S_{p_2}(f)$ бўлсин, у ҳолда

$$S_{p_1}(f) - s_{p_1}(f) = \sum_{[a, b]} (M_k - m_k) \Delta x_k,$$

$$S_{p_2}(f) - s_{p_2}(f) = \sum_{[\alpha, \beta]} (M_k - m_k) \cdot \Delta x_k$$

йиғиндиларни таққослаб,

$$S_{p_2}(f) - s_{p_2}(f) \leq S_{p_1}(f) - s_{p_1}(f)$$

бўлишини топамиз. Натижада (9.28) муносабатни эътиборга олсак,

$$S_{p_2}(f) - s_{p_2}(f) < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Бундан 9.1- теоремага кўра $f(x)$ функцияниг $[\alpha, \beta]$ оралиқда интегралланувчи экани келиб чиқади.

2°. Агар $f(x)$ функция $[a, c]$ ҳамда $[c, b]$ оралиқларда интегралланувчи бўлса, у ҳолда функция $[a, b]$ оралиқда ҳам интегралланувчи бўлади ва ушбу

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. Аввал $a < c < b$ бўлиб, $f(x)$ функция $[a, c]$ ҳамда $[c, b]$ оралиқларда интегралланувчи бўлсин.

У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $\frac{\varepsilon}{2}$ сонга кўра шундай $\delta_1 > 0$ сон топиладики, $[a, c]$ оралиқнинг диаметрлари $\lambda_{p_1} < \delta_1$ бўлган ҳар қандай P_1 бўлинишига нисбатан Дарбу йиғиндилари учун

$$S_{p_1}(f) - s_{p_1}(f) < \varepsilon \quad (9.29)$$

тengsизлик ўринли бўлади. Шунингдек, ўша $\frac{\varepsilon}{2}$ сонга кўра шундай $\delta_2 > 0$ сон топиладики, $[c, b]$ оралиқнинг диаметрлари $\lambda_{p_2} < \delta_2$ бўлган ҳар қандай P_2 бўлинишига нисбатан Дарбу йиғиндилари учун

$$S_{p_2}(f) - s_{p_2}(f) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (9.30)$$

тengsизлик ўринли бўлади. Энди $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ деб, $[a, b]$ оралиқнинг диаметрлари $\lambda_{p_3} < \delta$ бўлган ихтиёрий P_3 бўлинишини олайлик. Бу P_3 бўлинишининг бўлувчи нуқталари қаторига $c (a < c < b)$ нуқтани ҳам кўшиб, $[a, b]$ оралиқнинг янги P бўлинишини ҳосил қиласиз. Бу бўлинишига нисбатан Дарбу йиғиндилари $S_{p_1}(f), s_{p_1}(f)$ бўлсин. $[a, c]$ оралиқдаги P бўлинишининг бўлувчи нуқталарини шу $[a, c]$ оралиқнинг бирор P'_1 бўлинишининг бўлувчи нуқталари ҳамда $[c, b]$ оралиқдаги P бўлинишининг бўлувчи нуқталарини $[c, b]$ оралиқнинг бирор P'_2 бўлинишининг бўлувчи нуқталари сифатида қараймиз. Бу бўлинишларга нисбатан Дарбу йиғиндиларини тузамиз:

$$S'_{p_1}(f), s'_{p_1}(f); \quad S'_{p_2}(f), s'_{p_2}(f)$$

Равшанки, бу йиғиндилар учун мое равишда юқоридаги (9.29), (9.30) tengsizliklar ўринли бўлади:

$$S'_{p_1}(f) - s'_{p_1}(f) \ll \frac{\varepsilon}{2},$$

$$S_{p_s'}(f) - s_{p_s'}(f) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Иккинчи томондан,

$$\begin{aligned} S_p(f) &= S_{p_1}(f) + S_{p_2}(f), \\ s_p(f) &= s_{p_1}(f) + s_{p_2}(f) \end{aligned}$$

бўлиб, натижада

$$S_p(f) - s_p(f) = [S_{p_1}(f) - s_{p_1}(f)] + [S_{p_2}(f) - s_{p_2}(f)] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олингандан ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[a, b]$ оралиқнинг диаметрлари $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўйнишига нисбатан Дарбу йиғиндилари учун

$$S_p(f) - s_p(f) < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса 9. 1- теоремага кўра $f(x)$ функцияни $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи эканини кўрсатади.

Юқоридаги P бўйнишига нисбатан $f(x)$ функциянинг $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$ оралиқдаги интеграл йиғиндиларини тузиб, уларни мос равишда қуийдагича

$$\sum_{[a, b]} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k, \quad \sum_{[a, c]} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k, \quad \sum_{[c, b]} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

белгиласак, у ҳолда

$$\sum_{[a, b]} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{[a, c]} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k + \sum_{[c, b]} f(\xi_k) \Delta x_k \quad (9.31)$$

бўлади. $f(x)$ функция $[a, c]$, $[c, b]$ ҳамда $[a, b]$ оралиқларда интегралланувчи бўлгани учун

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{[a, c]} f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^c f(x) dx,$$

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{[c, b]} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_c^b f(x) dx,$$

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{[a, b]} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

тенгликларга әгамиз. [9. 31] тенгликтан $\lambda_p \rightarrow 0$ да изланган формула келиб чиқади. Шундай қилиб, 2º-хосса $a < c < b$ бўлган ҳол учун исботланди.

Энди c нуқта $[a, b]$ оралиқдан ташқарида ётсин, яъни c нуқта $c < a < b$ ёки $a < b < c$ тенгсизликни қаноатлантирусин. Агар $c < a < b$ бўлса, у ҳолда $[a, b] \subset [c, b]$ бўлгани учун 1º- хоссага кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ да интегралланувчи бўлиб, юқорида исбот этилганига асосан

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx$$

формула ўринли бўлади. Бундан эса, 9.2- эслатмадан фойдаланиб.

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_a^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx = \int_a^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx$$

Бўлишини топамиз.

Худди шунга ўхшаш, $a < b < c$ бўлганда ҳам $f(x)$ функция $[a, b]$ да интегралланувчи бўлиши ва тегишли формуланинг ўринли экани кўрсатилиади.

3°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $c \cdot f(x)$ ($c = \text{const}$) ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади ва ушбу

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсии. Демак,

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx.$$

Энди $c \cdot f(x)$ функцияни интеграл йигиндисини ёзамиз:

$$\sigma_1 = \sum_{k=0}^{n-1} c \cdot f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

У ҳолда

$$\sigma_1 = \sum_{k=0}^{n-1} c \cdot f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = c \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = c \cdot \sigma.$$

Бундан $\lambda_p \rightarrow 0$ да қуйидаги

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma_1 = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} c \cdot \sigma = c \cdot \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

тengлик келиб чиқади. Бу изланган формуланинг ўринли эканини англатади.

4°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x) \pm g(x)$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади ва ушбу

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. Демак,

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma_1 = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx,$$

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma_2 = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b g(x) dx.$$

Энди $f(x) \pm g(x)$ функцияниң $[a, b]$ оралиқдаги мос интеграл үйіндинесини ёзамиш:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{k=0}^{n-1} [f(\xi_k) \pm g(\xi_k)] \Delta x_k = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \pm \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sigma_1 \pm \sigma_2\end{aligned}$$

Бундан $\lambda_p \rightarrow 0$ да қүйидагига әлемиз:

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma_1 \pm \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma_2 = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

Бу изланған формулалың $\ddot{\text{у}}\text{рины}$ эканини англаады.

9. 1-натижада. Агар $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ функцияларның ҳар бири $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда ушбу

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) \quad (c_i = \text{const}, i = 1, 2, \dots, n)$$

функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади ва

$$\begin{aligned}\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)] dx &= \\ &= c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx + \dots + c_n \int_a^b f_n(x) dx\end{aligned}$$

формула $\ddot{\text{у}}\text{рины}$ бўлади.

Бу натижаниң исботи юқоридаги 3⁰ ва 4⁰-хоссалардан келиб чиқади.

5⁰. Агар $f(x)$ да $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x) \cdot g(x)$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади.

Исбот. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. У ҳолда интегралның мавжудлиги ҳақидаги теоремага кўра

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} [S_p(f) - s_p(f)] = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k = 0. \quad (9.32)$$

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} [S_p(g) - s_p(g)] = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (M'_k - m'_k) \Delta x_k = 0. \quad (9.33)$$

Аввал барча $x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ деб қарайлик. У ҳолда $\forall x \in [x_k, x_{k+1}]$ учун

$$0 \leq m_k \leq f(x) \leq M_k,$$

$$0 \leq m'_k \leq g(x) \leq M'_k$$

тенгсизликлар $\ddot{\text{у}}\text{рины}$ бўлиб, ундан қўйидаги

$$0 \leq m_k \cdot m'_k \leq f(x) \cdot g(x) \leq M_k \cdot M'_k$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Равшанки, $[x_k, x_{k+1}]$, ($k = 0, 1, \dots, n - 1$) оралиқда $f(x)g(x)$ функцияның қуидаги аниқ чегаралари:

$$m_k^0 = \inf \{f(x) \cdot g(x)\},$$

$$M_k^0 = \sup \{f(x) \cdot g(x)\}$$

мавжуд бўлиб, улар учун

$$m_k m'_k \leq m_k^0 \leq M_k^0 \leq M_k M'_k$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. У ҳолда қуидаги

$$M_k^0 - m_k^0 \leq M_k M'_k - m_k m'_k = M'_k(M_k - m_k) + m_k(M'_k - m'_k),$$

$$M'_k = \sup_{a < x < b} \{f(x)\} \geq M_k, \quad M' = \sup_{a < x < b} \{g(x)\} \geq M'_k$$

тенгсизликларни эътиборга олиб $\{f(x)\}$ ва $\{g(x)\}$ функциялар $[a, b]$ да, чегараланганилиги учун $M < \infty$, $M' < \infty$ бўлади), топамиз:

$$\begin{aligned} S_p(f \cdot g) - s_p(f \cdot g) &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k^0 - m_k^0) \Delta x_k \leq \\ &\leq M' \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k + M \sum_{k=0}^{n-1} (M'_k - m'_k) \Delta x_k. \end{aligned}$$

Энди (9.32) ва (9.33) муносабатлардан фойдалансак, у ҳолда қуидаги

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} [S_p(f \cdot g) - s_p(f \cdot g)] = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (M_k^0 - m_k^0) \Delta x_k = 0$$

тенглик келиб чиқади. Демак, $f(x) \cdot g(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи.

Энди $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар ихтиёрий интегралланувчи функциялар бўлсин. Бир томондан $\forall x \in [a, b]$ лар учун

$$\begin{aligned} f(x) - \inf \{f(x)\} &= f(x) - m \geq 0, \\ g(x) - \inf \{g(x)\} &= g(x) - m' \geq 0. \end{aligned}$$

тенгсизликлар ўринли. Иккинчи томондан,

$$f(x) \cdot g(x) = [f(x) - m][g(x) - m'] + mg(x) + m'f(x) - mm'$$

деб ёза оламиз. Юқорида исбот этилганига ҳамда 4°-хоссанинг на-тижасига (9. 1-нтижага қаранг) кўра, $f(x)g(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлади.

9. 2-нтижага. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, $\forall n \in N$ учун $\{f(x)\}^n$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади.

6°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \geq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (a < b)$$

бўлади.

Исбот. Таърифга кўра ушбу

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

лимит мавжуд. Модомики, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \geq 0$ экан, унда

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \geq 0$$

ва

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \geq 0$$

бўлади. Демак,

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

9. З-натижада. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \leq g(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ да интегралланувчи бўлганидан $g(x) - f(x) \geq 0$ функциянинг интегралланувчилиги 4°-хоссадан келиб чиқади. 6°-хоссага кўра бу ҳолда

$$\int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бундан изланган тенгсизликка эга бўламиш.

9. 4-натижада (Коши-Буняковский тенгсизлиги). Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда (юқоридаги хоссаларга кўра) ушбу $f(x) - \alpha g(x)$ (α — ихтиёрий ўзгармас) функция ҳам $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлади ва

$$\int_a^b [f(x) - \alpha g(x)]^2 dx \geq 0$$

тенгсизлик ўринли.

Демак, ихтиёрий ўзгармас α сон учун

$$\alpha^2 \int_a^b g^2(x) dx - 2\alpha \int_a^b f(x) g(x) dx + \int_a^b f^2(x) dx \geq 0$$

тенгсизлик ўринли. Бу тенгсизликнинг чап томонидаги ифода α га нисбатан квадрат учҳад бўлиб, у α нинг барча ҳақиқий қийматларида манфий эмас. Демак, бу квадрат учҳаднинг дискриминанти мусбат эмас, яъни

$$\left[\int_a^b f(x) g(x) dx \right]^2 - \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx \leq 0.$$

Натижада қуийдаги

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx} \quad (9.34)$$

тengsизлика келамиз. Бу тengsизлик Коши – Буняковский тengsизлиги деб аталады.

7°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $|f(x)|$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади ва

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

тengsизлик ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. У ҳолда $\forall \epsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\sigma > 0$ сон топиладики, $[a, b]$ оралиқнинг диаметрлари $\lambda_p < \sigma$ бўлган ҳар қандай $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ бўлинишига нисбатан

$$S_p(f) - s_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \epsilon$$

бўлади, бунда $\omega_k = f(x)$ функцияниң $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқдаги тебра- ниши.

Равшанки, $\forall x' \in [a, b], \forall x'' \in [a, b]$ лар учун қуийдаги

$$||f(x')| - |f(x'')|| \leq |f(x') - f(x'')|$$

тengsизлик ўринли бўлиб, ундан

$$\sup ||f(x')| - |f(x'')|| \leq \sup |f(x') - f(x'')|$$

тengsизлик келиб чиқади. Демак, $\bar{\omega}_k \leq \omega_k$, бунда $\bar{\omega}_k = |f(x)|$ функцияниң $[x_k, x_{k+1}]$ даги тебраниши. Натижада

$$S_p(|f|) - s_p(|f|) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\omega}_k \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \epsilon$$

бўлади. Бундан $|f(x)|$ функцияниң $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиши келиб чиқади.

$f(x)$ ҳамда $|f(x)|$ функцияларниң $[a, b]$ оралиқдаги интеграл йигиндиларини ёзамиш:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k,$$

$$\sigma_1 = \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)| \cdot \Delta x_k.$$

У ҳолда

$$|\sigma| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)| \Delta x_k = \sigma_1$$

бўлади ва $\lambda_p \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб изланган тенгсизликнинг ўринли эканига ишонч ҳосил қиласиз.

8-§. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремалар

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва чегараланган бўлсин. У ҳолда $[a, b]$ оралиқда

$$m = \inf \{f(x)\}, M = \sup \{f(x)\}$$

мавжуд ва $\forall x \in [a, b]$ лар учун

$$m \leq f(x) \leq M \quad (9.35)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

9.6-теорема. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас μ ($m \leq \mu \leq M$) сон мавжудки, ушибу

$$\int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b - a)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. (9.35) тенгсизликлардан 9.3-натижага кўра топамиз:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx.$$

Бундан

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M (b - a).$$

Бу тенгсизликларни $b - a > 0$ сонга бўламиш:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \leq M.$$

Агар

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$$

деб олсан, у ҳолда изланган тенглик келиб чиқади.

9.5-натижага. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу оралиқда шундай c ($c \in [a, b]$) нуқта топиладики,

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a) \quad (9. 36)$$

төңглилүүрүнүүлүк бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи. Демак, 9.6-теоремага кўра $\int_a^b f(x) dx = \mu(b - a)$ төңглилүүрүнүүлүк бўлади (бунда $m \leq \mu \leq M$).

Больцано- Кошиининг иккінчі теоремасига (5. 6-теоремага қаранг) асосан $[a, b]$ да шундай с нүкта топиладики,

$$f(c) = \mu$$

бўлади. Бундан (9. 36) төңглилүүрүнүүлүк экани келиб чиқади. (9. 36) төңглилүүрүнүүлүк $[a, b]$ оралиқда $f(x) \geq 0$ бўлган ҳолда содда геометрик маънога эга. Маълумки, ушбу $\int_a^b f(x) dx$ аниқ интеграл эгри чи- зиқли трапециянинг юзини ифодалайди (53-чизмадаги $aA'B'b$ трапецияга қаранг). Энди $f(x) \geq 0$ бўлганда шу эгри чи- зиқли трапециянинг юзи асоси $b - a$ га, баландлиги $f(c)$ га тенг бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзига тенг (53-чизмада $aA'B'b$ тўғри тўртбурчакка қаранг).

9.7-төрима. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиб, $g(x)$ функция шу оралиқда ўз ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда шундай ўзгармас $\mu(m \leq \mu \leq M)$ сон мавжудки,

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx \quad (9. 37)$$

төңглилүүрүнүүлүк бўлади.

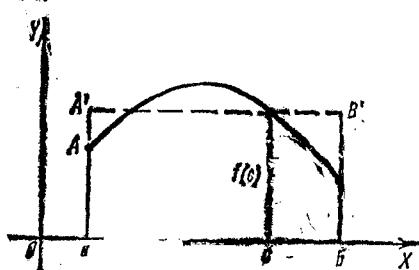
Исбот. Аниқ интегралнинг 5°-хоссасига асосан $f(x) g(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлади. Энди $g(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда манфиий бўлмасин, яъни $\forall x \in [a, b]$ лар учун $g(x) \geq 0$ бўлсин, дейлик. У ҳолда $m \leq f(x) \leq M$ төңгизликларни $g(x)$ га кўпайтириб, сўнгра ҳосил бўлган ушбу

$$m \cdot g(x) \leq f(x) g(x) \leq M \cdot g(x)$$

төңгизликларни $[a, b]$ оралиқда интеграллаб топамиз:

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx. \quad (9. 38)$$

Икки ҳолни қарайлилек:



53- чизма

a) $\int_a^b g(x) dx = 0$ бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0.$$

бўлиб, бунда $m \leq \mu \leq M$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий сонни олиш мумкин.

b) $\int_a^b g(x) dx > 0$ бўлсин. Бу ҳолда (9.38) тенгсизликлардан

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M$$

бўлиши келиб чиқади. Агар

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$$

деб олсак, унда

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx$$

бўлади.

$[a, b]$ оралиқда $g(x) \leq 0$ бўлганда (9.37) формула худди шунга ўхшаш исботланади. Теорема исбот бўлди.

9. 5-натижада $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда $[a, b]$ оралиқда шундай c ($c \in [a, b]$) нуқта топиладики,

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

тенглик ўринли бўлади.

Бу натижанинг исботи (9.37) тенгликка асосланади.

9-§. Чегаралари ўзгарувчи бўлган аниқ интеграллар

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. У ҳолда аниқ интегралнинг 1°-хоссасига кўра $f(x)$ функция исталган $[a, x] \subset [a, b]$ ($a \leq x \leq b$) оралиқда ҳам интегралланувчи бўлади. Равшанини,

$$\int_a^x f(t) dt$$

интеграл x га бөглиқ. Уни $F(x)$ деб белгилаймиз:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Энди $f(x)$ функцияга күра $F(x)$ функциянынг хоссаларини (узлуксизлиги, дифференциалланувчи бўлишини) ўрганамиз.

9 . 8 - теорема. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, $F(x)$ функция шу оралиқда узлуксиз бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция интегралланувчи бўлгани учун $\sup |f(x)| = M < \infty$ бўлади. $\forall x \in [a, b]$ нуқта олиб, унга шундай $\Delta x > 0$ ортирима берайликки, $x + \Delta x \in [a, b]$ бўлсин. У ҳолда $F(x)$ функциянынг ортиримаси учун қўйидагига эга бўламиш:

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x + \Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt.$$

Аниқ интегралнинг 7°-хоссасидан фойдаланиб топамиш:

$$|\Delta F(x)| = \left| \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt \right| \leq \int_x^{x + \Delta x} |f(t)| dt \leq M \int_x^{x + \Delta x} dt = M \Delta x.$$

Демак,

$$|\Delta F(x)| \leq M \cdot \Delta x.$$

Бундан эса

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta F(x) = 0$$

лимит келиб чиқади. $\Delta x < 0$ бўлганда ҳам худди юқоридагига ўхашаш $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta F(x) = 0$ бўлиши кўрсатилади. Бу эса $F(x)$ функциянинг $x \in [a, b]$ нуқтада узлуксизлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

9 . 9 - теорема. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлади ва

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Исбот. $F(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ортиримасини:

$$\Delta F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt \quad (\Delta x > 0)$$

олиб, қўйидаги

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)$$

айирмани қараймиз. Аниқ интегралнинг хоссаларидан фойдаланиб топамиш:

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt - f(x_0) \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} dt \right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} [f(t) - f(x_0)] dt.$$

Бу муносабатдан

$$\left| \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |f(t) - f(x_0)| dt \quad (9.39)$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Шартта күра $f(x)$ функция x_0 нүктада узлуксиз. Таърифга асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $|x - x_0| < \delta$ бўлганда $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ бўлади. Агар $\Delta x < \delta$ деб олсак, у ҳолда $\forall t \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ лар учун

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

бўлади. Натижада (9. 39) тенгсизлик қўйидаги

$$\left| \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} dt = \varepsilon$$

кўринишга келади. Демак,

$$\left| \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Бундан

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$$

яъни

$$F'(x_0 + 0) = f(x_0)$$

тенглик келиб чиқади. Юқоридагидек, $\Delta x < 0$ бўлганда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0).$$

Яъни

$$F'(x_0 - 0) = f(x_0)$$

тенглик ҳам ўринли бўлиши кўрсатилади. Теорема исбот бўлди.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиб, $x = a$ ва $x = b$ нүқталарда узлуксиз (бунда функциянинг $x = a$ да ўнгдан, $x = b$ да эса чапдан узлуксизлиги тушунилади) бўлса, у ҳолда

$$F'(a + 0) = f(a + 0), \quad F'(b - 0) = f(b - 0)$$

бўлиши юқоридагига ўхшаш кўрсатилади.

9.6-натижада. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда $\forall x \in [a, b]$ лар учун

$$F'(x) = f(x)$$

бўлади.

Энди қуий чегараси ўзгарувчи бўлган аниқ интегрални қараемиз. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. У ҳолда бу функция $[x, b] \subset [a, b]$ ($a \leq x \leq b$) оралиқда ҳам интегралланувчи ва бу интеграл x га боғлиқ бўлади. Уни

$$\Phi(x) = \int_x^b f(t) dt$$

деб белгилаймиз. Аниқ интеграл хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt = F(x) + \Phi(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

Бундан эса

$$\Phi(x) = \int_a^b f(t) dt - F(x)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенглик, $\Phi(x)$ функцияниг хоссаларини $f(x)$ ҳамда $F(x)$ функцияларнинг хоссалари орқали ўрганиш мумкинлигини кўрсатади. Жумладан, агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\Phi'(x) = -f(x)$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда $\int_a^b f(t) dt$ мавжуд ва у чекли сон, $F(x)$ функция эса юқорида келтирилган теоремага кўра $[a, b]$ да $F'(x)$ ҳосилага эга бўлиб,

$$\Phi'(x) = \left(\int_x^b f(t) dt \right)' = \left(\int_a^b f(t) dt - F(x) \right)' = -F'(x) = -f(x)$$

бўлади.

9.7-натижада. $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлган ҳар қандай $f(x)$ функция шу оралиқда бошланғич функцияга эга.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, 9.9-теоремага кўра

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

функцияниг $[a, b]$ даги ҳосиласи учун $F'(x) = f(x)$ тенглик ўринили бўлади. Демак, $F(x)$ функция $f(x)$ нинг $[a, b]$ оралиқдаги бошланғич функцияси.

10-§. Аниқ интегралларни ҳисоблаш

Интеграл мавзусининг асосий масалаларидан бири функция интегралининг мавжудлиги бўлса, иккинчisi—функция интегралини ҳисоблашдир.

Биз $f(x)$ функциянынг $[a,b]$ оралиқдаги аниқ интегралини интеграл йиғиндининг чекли лимити сифатида таърифләган эдик. Юқорида айтиб ўтганимиздек интеграл йиғиндининг лимити тушунчаси мураккаб характеристика эга бўлиб, уни ҳисоблаш, ҳатто еодда ҳолларда [шу бобнинг 2-ғ да келтирилган мисолга қаранг] ҳам анча қийин бўлади.

Тўғри, $f(x)$ функциянынг интегралланувчилиги маълум бўлса, унда интеграл йиғиндининг лимити $[a,b]$ оралиқнинг бўлиниши усулига ҳам ҳар бир бўлакда олинган ξ нуқтәларга ҳам боғлиқ бўлмай, $\lambda_p \rightarrow 0$ да ягона I ($I = \int_a^b f(x) dx$) сонга интилади. Бу ҳол $[a,b]$ оралиқнинг

бўлинишини ҳамда ξ_k нуқталарни интеграл йиғинди ва унинг лимитини ҳисоблашга қулай қилиб олиш имконини беради. Натижада функция интегралини топиш учун бирорта бўлинишга нисбатан интеграл йиғиндининг лимитини ҳисоблаш етарли бўлади.

Масалан, $\int_a^b x dx$ интегрални ҳисблайлик. Бунда $f(x) = x$ бўлиб, у $[a,b]$ оралиқда узлуксиз. Демак, бу функция $[a,b]$ да интегралланувчи. $[a,b]$ оралиқнинг ушбу

$P = \{a, a + \alpha_n, a + 2\alpha_n, \dots, a + k \cdot \alpha_n, \dots, a + n \cdot \alpha_n = b\}$ бўлинишини олиб, ҳар бир $[a + k \cdot \alpha_n, a + (k+1) \cdot \alpha_n]$ бўлакда $\xi_k = a + k \cdot \alpha_n$ деб қараймиз, бунда $\alpha_n = \frac{b-a}{n}$. У ҳолда

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a + k \cdot \alpha_n) \alpha_n = \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} (a + k \cdot \alpha_n) = \alpha_n [na + \alpha_n (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1))] = \alpha_n [na + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{(n-1)n}{2}] = \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{b-a}{2} \alpha_n.$$

Бундан

$$\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \left[\frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{b-a}{2} \alpha_n \right] = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Демак,

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Умуман, кўп ҳолларда функцияларнинг интегралини таърифга кўра ҳисоблаш қийин бўлади. Шунинг учун интегралларни ҳисоблашнинг амалий жиҳатдан қулай бўлган йўлларини топиш заруриятни туғилади.

1. Ньютон—Лейбниц формуласи. Ушбу пунктда, функцияларнинг аниқ интегралларини ҳисоблашда кенг қўлланадиган формулани келтирамиз.

Маълумки, $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

функция шу оралиқда $f(x)$ функцияниң бошланғич функцияси бўлади. Бу бир томондан.

Иккинчи томондан, $f(x)$ функцияниң ихтиёрий бошланғич функцияси $\Phi(x)$ берилган бошланғич функция $F(x)$ дан ихтиёрий ўзгармас қўшилувчига фарқ қиласди, яъни

$$\Phi(x) = F(x) + C \quad (C = \text{const})$$

бўлади. Демак,

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt + C.$$

Бу тенгликтан, аввал $x = a$ деб,

$$\Phi(a) = C \quad (9.40)$$

сўнгра $x = b$ деб,

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t) dt + C \quad (9.41)$$

тенгликларни топамиз. (9.40) ва (9.41) тенгликлардан ихтиёрий бошланғич функция $\Phi(x)$ учун ушбу

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (9.42)$$

формула келиб чиқади. Бу (9.42) формула Ньютон—Лейбниц формуласи деб аталади.

Одатда (9.42) тенгликтининг ўнг томонидаги $\Phi(b) - \Phi(a)$ айрмани $\Phi(x) \Big|_a^b$ каби ёзилади:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x) \Big|_a^b.$$

Демак,

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(x) \Big|_a^b.$$

Мисоллар

$$1. \int_a^b x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

$$2. \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, \ b > 0).$$

2. Аниқ интегралларни ҳисоблаш усуллари.

1°. Ўзгарувчиларни алмаштириши үсүли. $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Бу ҳолда $f(x)$ функцияниң аниқ интеграли $\int_a^b f(x) dx$ мавжуд бўлади. Қўпинча интеграл остидаги ўзгарувчини алмаштириши натижасида берилган интеграл ундан содароқ интегралга келтирилади.

Фараз қиласайлик, аниқ интегралда ўзгарувчи x ушбу $x = \varphi(t)$ формула билан алмаштирилган бўлиб, бунда қўйидаги шартлар бажарилган бўлсин:

а) $\varphi(t)$ функция бирор $[\alpha, \beta]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз, ўзгарувчи $[\alpha, \beta]$ оралиқда ўзгаргандა $\varphi'(t)$ функцияниң қийматлари $[\alpha, \beta]$ оралиқдан чиқмайди;

$$\text{б)} \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b;$$

$$\text{в)} \varphi(t)$$
 функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз $\varphi'(t)$ ҳосилага эга.

У ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \quad (9.43)$$

тенглик ўринли бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун шу оралиқда бошлангич функция $\Phi(x)$ га эга бўлиб, (9.42) формула ўринли.

$[\alpha, \beta]$ оралиқда $\Phi(\varphi(t))$ функцияни қарайлик. Бу функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз бўлиб, унинг ҳосиласи (6.5) формулага кўра қўйидагича

$$[\Phi'(\varphi(t))]' = \Phi'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

ёзилади. Кейинги тенгликтан $\Phi'(x) = f(x)$ эканини эътиборга олиб топамиз:

$$[\Phi(\varphi(t))]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Бу эса $\Phi(\varphi(t))$ функция $[\alpha, \beta]$ да $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ функцияниң бошлангич функцияси бўлишини билдиради. Ньютон—Лейбниц формуласига кўра

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)).$$

Буни б) шартдан фойдаланиб ушбу

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (9.44)$$

күринишда ёзиш мумкин.

Шундай қилиб, (9.42) ва (9.44) муносабатлардан (9.43) тенглик келиб чиқади.

(9.43) формула интегрални ўзгарувчини алмаштириб интеграллаш формуласы деб аталади.

Мисол. Қуйидаги

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

интегрални ўзгарувчини алмаштириш усули билан ҳисобланғ. Бу интегралда $x = \sin t$ алмаштириш бажарамиз. Ү ҳолда (9.44) формулаға күра топамиз:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right] dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2^c. Бұлаклаб интеграллаш усули. $u(x)$ ва $v(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[a,b]$ оралықда үзлуксиз $u'(x)$ ва $v'(x)$ ҳосиаларга әга бўлсин. Ү ҳолда

$$\int_a^b u(x) dv(x) = (u(x) \cdot v(x)) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x) \quad (9.45)$$

формула ўринли.

Ҳақиқатан ҳам (6.9) формулага қўра

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Демак, $u(x) \cdot v(x)$ функция $[a,b]$ оралықда $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ функцияянинг бошлангич функцияси бўлиб, Ньютон—Лейбниц формуласига кўра

$$\int_a^b [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)] dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b$$

бўлади. Аниқ интеграл хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_a^b v(x) \cdot u'(x) dx + \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b.$$

Бу тенгликтан эса (9.45) формула келиб чиқади.

(9.45) формула аниқ интегрални бўлаклаб интеграллаш формула-

си деб аталади. (9.45) формула $\int_a^b u(x) dv(x)$ интегрални ҳисоблашни $\int_a^b v(x) du(x)$ интегрални ҳисоблашга олиб келади. Бунда $u(x)$ ҳамда $dv(x)$ ларни шундай танлаш лозимки, $\int_a^b v(x) du(x)$ интеграл имконият борича содда ҳисобланисин.

Мисоллар

$$1. \int_1^2 \ln x dx \text{ интегрални ҳисобланг.}$$

Агар $u(x) = \ln x$, $dv(x) = dx$ деб олинса, у ҳолда

$$du = \frac{1}{x} dx, v(x) = x$$

бўлиб, (9.45) формулага кўра топамиз.

$$\int_1^2 \ln x dx = x \cdot \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x \Big|_1^2 - x \Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1.$$

$$2. I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \text{ интегрални ҳисобланг, бунда } n = 0, 1, 2, \dots$$

Бу интеграл, хусусан $n = 0, n = 1$ бўлганда осонгина ҳисобланади:

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

$n \geq 2$ бўлганда берилган интегрални қўйнадагича

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x)$$

ёзиб, унга бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаймиз. Натижада

$$\begin{aligned} I_n &= (-\sin^{n-1} x \cdot \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \\ &\quad - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

бўлиб, ундан ушбу

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (9.46)$$

рекуррент формула келиб чиқади. Бу формула ёрдамида берилган интегрални $n = 2, 3, \dots$ бўлганда кетма-кет ҳисоблаш мумкин. Биз қўйида n — жуфт ва тоқ бўлганда берилган интегралнинг қийматини келтирамиз:

$n = 2m$ — жуфт сон бўлганда

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-1} \cdots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2}, \quad (9.47)$$

$n = 2m+1$ — тоқ сон бўлганда

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}. \quad (9.48)$$

Бунда $m!!$ символ m дан катта бўлмаган ва у билан бир хил жуфтликка эга бўлган натурал сонларнинг кўпайтмасини билдиради.

З. Валлис формуласи. Юқорида келтирилган 2- мисолдан фойдаланиб, ясонини ифодаловчи формулани келтирамиз. Равшанки, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ бўлганда

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \quad (n = 1, 2, \dots)$$

тенгсизликлар ўринли. Бу тенгликларни $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ оралиқда интеграллаб

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx$$

сўнгра (9.47), (9.48) формулалардан фойдаланиб, топамиз:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Бундан

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n}$$

тенгсизликлар келиб чиқади. Аммо бу тенгсизликларнинг чеккаларида турган ифодалар айрмаси

$$\begin{aligned} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n} - \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} &< \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} \cdot \\ &\cdot \frac{1}{2n} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

бўлиб, $n \rightarrow \infty$ да нолга интилгани учун ушбу

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1}$$

формула ўринли бўлади. Демак,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}. \quad (9.49)$$

Бу (9.49) формула Валлис формуласи дейилади.

11 - §. Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш

Биз юқорида интеграл остидаги функцияның бошланғыч функциясы маълум бўлса, аниқ интегрални Ньютон—Лейбниц формуласи ёрдамида ҳисоблаш мумкинлигини кўрдик. Аммо бошланғыч функцияни топиш масаласи доим осонгина ҳал бўлавермайди. Агар интеграл остидаги функция мураккаб бўлса, тегишли аниқ интегрални ҳисоблашнинг тақрибий усувларини қўлланиш лозим. Бу усувлар интеграл остидаги $f(x)$ функцияни уни тақрибий ифодаловчи кўпхад билан алмаштиришга ($f(x) \approx P_n(x)$) асосланади. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. 6- бобнинг 7-§ ида эслатиб ўтилган функцияни кўпхад билан яқинлаштириш ҳақидаги Вейерштрасс теоремасига асоссан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олингандан ҳам $\frac{\varepsilon}{b-a}$ сонга кўра шундай $P_n(x)$ кўпхад топиладики, $\forall x \in [a, b]$ лар учун

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан $\int_a^b P_n(x) dx$ интегралнинг $\int_a^b f(x) dx$ интегралга яқинлашиши келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, аниқ интегралнинг хоссаларидан фойдаланиб топамиз:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b P_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b [f(x) - P_n(x)] dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - P_n(x)| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

Шундай қилиб, қўйидаги

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_n(x) dx \quad (9.50)$$

тақрибий формулага келамиз.

Масалан, $[0, 1]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлган $f(x)$ функцияниң $\int_0^1 f(x) dx$ интегралини тақрибий ифодаловчи формула топиш талаб этилсан.

Ушбу

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

кўпхадни қарайлик. Одатда бу кўпхади *Бернштейн кўпхади* деб аталади. Ушбу курснинг «Функционал кетма-кетликлар ва қаторлар» бобида $n \rightarrow \infty$ да Бернштейн кўпхадининг $[0, 1]$ оралиқда $f(x)$ функцияга текис яқинлашиши, яъни $\forall \varepsilon > 0$ олингандан ҳам $\forall x \in [0, 1]$ лар учун

$$|f(x) - B_n(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлиши исботланади.

$$(9.50) \text{ формуладан фойдаланиб топамиз: } \int_0^1 f(x) dx \approx \int_0^1 B_n(x) dx = \\ = \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right] dx = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx.$$

Охирги интегрални I_n деб, уни ҳисоблаймиз. Агар унда $u = x^k$, $dv = (1-x)^{n-k} dx$ десак, бўлаклаб интеграллаш натижасида $kI_{k-1} - (n-k+1)I_k = 0$ рекуррент формулага эга бўламиз. Ундан $k=1$ бўлганда $I_1 = \int_0^1 x(1-x)^{n-1} dx = x \left[-\frac{(1-x)^n}{n} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n} dx = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n(n+1)} \Big|_0^1 = \frac{1}{n(n+1)}$

эканини ҳисобга олсак, I_2, I_3, \dots ларни топиш мумкин бўлади. Масалан, $I_2 = \frac{2}{(n-1)n(n+1)}$. Шунинг учун ушбу

$$C_n^k \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx = \frac{1}{n+1}$$

формуланинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Буни эътиборга олсак, берилган аниқ интегрални тақрибий ифодаловчи қўйнадиги

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

формула ҳосил бўлади.

$\int_a^b f(x) dx$ интегрални тақрибий ҳисоблаш йўлларидан яна бири интеграллаш оралиғи $[a,b]$ ни n та бўлакка бўлиш ва ҳар бир бўлакда $f(x)$ функцияни

- 1) $C = \text{const}$;
- 2) $Ax + B$ (A, B — ўзгармас);
- 3) $Ax^2 + Bx + C$ (A, B, C — ўзгармас)

куринишдаги, яъни нолинчи, биринчи ва иккинчи даражали кўпҳадлардан бири билан алмаштиришга асосланган. Биз бу ҳолларни алоҳида қараб, $\int_a^b f(x) dx$ интегрални тақрибий ифодаловчи тўғри тўртбурчаклар, трапеция ва параболалар (Симпсон) формулаларига келамиз.

1. Тўғри тўртбурчаклар формуласи. $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, унинг

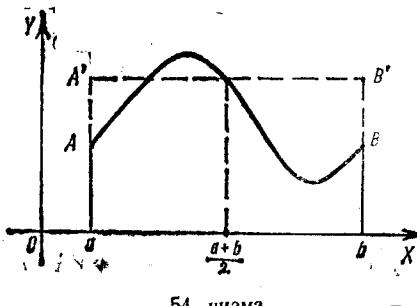
$$\int_a^b f(x) dx$$

интегралини тақрибий ҳисоблаш талаб этилсін. Авшало $\forall x \in [a, b]$ лар учун

$$f(x) \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \text{const}$$

деб олиб, қойыдаги

$$\int_a^b f(x) dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \quad (9.51)$$



54- чизма

формуланы ҳосил қиласыз. Бұ тақрибий формула (54-чизма) $f(x) \geq 0$ бўлганда $aA'b$ әгри чизиқли трапециянинг юзини $aA'b$ түғри тўртбурчак юзи билан алмаштирилишини кўрсатади. (9.51) формуланинг аниқлигини ошириш мақсадида $[a, b]$ оралиқни $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ нуқталар ёрдамида n та тенг бўлакка бўлиб, ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ бўлакда (9.51) формула қўлланилади. У ҳолда

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)(x_{k+1} - x_k) = \frac{b-a}{n} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)$$

бўлади, бунда

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}, \quad x_{k+\frac{1}{2}} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n},$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Натижада қойыдагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx + \dots + \\ &+ \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} f\left(x_{\frac{1}{2}}\right) + \frac{b-a}{n} f\left(x_{\frac{3}{2}}\right) + \dots + \frac{b-a}{n} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + \\ &+ \dots + \frac{b-a}{n} f\left(x_{n-\frac{1}{2}}\right) = \frac{b-a}{n} \left[f\left(x_{\frac{1}{2}}\right) + f\left(x_{\frac{3}{2}}\right) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + f\left(x_{n-\frac{1}{2}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, $\int_a^b f(x) dx$ интегрални тақрибий ҳисоблаш учун қойидаги

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left[f\left(x_{\frac{1}{2}}\right) + f\left(x_{\frac{3}{2}}\right) + \dots + f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + \dots + f\left(x_{n-\frac{1}{2}}\right) \right] = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) \quad (9.52)$$

формулага келамиз.

(9.52) формула түғри түртбұрчаклар формуласи деб аталади.

Одатда ҳар бир тақрибий формула ундағы хатоликни баҳолаш билан бирга қаралади. Бунинг натижасыда тақрибий формулалар ўзаро таққосланади. (9.52) формулалардың хатолиги ушбу

$$R_n = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) \quad (9.53)$$

айрма билан ифодаланади. Уни баҳолаймиз. Бунинг учун $f(x)$ функция $[a, b]$ оралықда үзлуксиз $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин деб қараймиз.

Аниқ интегралнинг хоссаларидан фойдаланиб R_n ни қўйидаги

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)] dx -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)] dx$$

кўринишда ёзиш мумкин. Тейлор формуласидан фойдаланиб,

$$f(x) - f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) = f'\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) \left(x - x_{k+\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2} f''(\xi_k) \left(x - x_{k+\frac{1}{2}}\right)^2$$

бўлишини топамиз, бунда ξ_k сон x ва $x_{k+\frac{1}{2}}$ сонлари орасида бўлади. Натижада

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[f'\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) \left(x - x_{k+\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2} f''(\xi_k) \left(x - x_{k+\frac{1}{2}}\right)^2 \right] dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left[f'\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(x - x_{k+\frac{1}{2}}\right) dx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k) \left(x - x_{k+\frac{1}{2}}\right)^2 dx \right] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k) \left(x - x_{k+\frac{1}{2}}\right)^2 dx$$

бўлади.

Ўрта қиймат ҳақидаги теоремага (9.6-теореманинг 9.5-натижасига қаранг) кўра

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k) \left(x - x_{k+\frac{1}{2}} \right)^2 dx = f''(\xi_k^*) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(x - x_{k+\frac{1}{2}} \right)^2 dx =$$

$$= \frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{12} f''(\xi_k^*) = \frac{(b-a)^3}{12 n^3} f''(\xi_k^*) \quad (\xi_k^* \in [x_k, x_{k+1}])$$

бўлади. Шундай қилиб, R_n учун қўйидаги

$$R_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^3}{12 n^3} f''(\xi_k^*) = \frac{(b-a)^3}{24 n^2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*)$$

ифодага келамиз. Равшанки, ушбу

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*) = \frac{f''(\xi_0^*) + f''(\xi_1^*) + \dots + f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$$

$\xi_0^* \in [a, b]$, $\xi_1^* \in [a, b]$, ..., $\xi_{n-1}^* \in [a, b]$) миқдор $f''(x)$ нинг $[a, b]$ оралиқдаги энг кичик m'' ҳамда энг катта M'' қийматлари орасида бўлади, яъни

$$m'' \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*) \leq M''.$$

$f''(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз. Больцано—Кошининг иккинчи теоремасига кўра (5.6-теоремага қаранг), (a, b) интервалда шундай ξ нуқта топилади,

$$f''(\zeta) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*) \quad (\zeta \in (a, b))$$

бўлади. Натижада R_n ушбу

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24 n^2} f''(\zeta) \quad (\zeta \in (a, b))$$

кўринишни олади. Демак,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + \frac{(b-a)^3}{24 n^2} f''(\zeta). \quad (9.54)$$

Шундай қилиб, $[a, b]$ оралиқда узлуксиз иккинчи тартибли ҳосила-га эга бўлган $f(x)$ функциянинг $\int_a^b f(x) dx$ интегралини (9.52) тўғри тўртбурчаклар формуласи ёрдамида тақрибий ҳисобланса, бу тақрибий ҳисоблаш ҳатолиги қўйидаги

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24 n^2} f''(\zeta), \quad \zeta \in (a, b)$$

формула билан ифодаланади.

2. Трапециялар формуласи. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралықда аниқланған ва узлуксиз бўлсин. $\forall x \in [a, b]$ лар учун

$$f(x) \approx \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \quad (9.55)$$

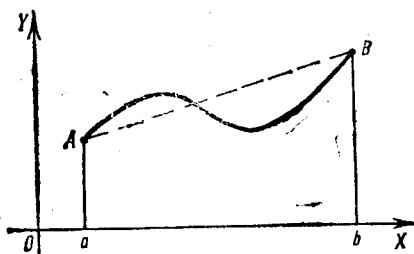
деб олиб, $\int_a^b f(x) dx$ интегрални тақрибий ифодаловчи ушбу

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \right] dx = \\ &= \frac{f(a) + f(b)}{2} (b - a) \end{aligned} \quad (9.56)$$

формулани ҳосил қиласмиз, (9.55) муносабатдаги

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

ифода $(a, f(a)), (b, f(b))$ нүкталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг ординатасини ифодалайди. (9.56) тақрибий формула $f(x) \geq 0 (\forall x \in [a, b])$ бўлганда (55-чиизма), $aABb$ эгри чизиқли трапециянинг юзини $aABb$ трапеция юзи билан алмаштирилишини ифодалайди. Энди (9.56) формууланинг аниқлигини ошириш мақсадида $[a, b]$ оралықни $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$



55- чизма

нуқталар ёрдамида n та teng бўйлакка бўлиб, ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ бўйлакда $f(x)$ функциянинг

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$$
 интегралига нисбатан (9.56) формуулани қўлланамиз.

У ҳолда

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} (x_{k+1} - x_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n - 1)$$

бўлиб, иттижада ушбу

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx \approx \\ &\approx \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} (x_1 - x_0) + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} (x_2 - x_1) + \dots + \\ &+ \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} (x_n - x_{n-1}) = \frac{b - a}{n} \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + \right. \\ &\quad \left. + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right] \end{aligned}$$

формулага келамиз. Демак,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right] \quad (9.57)$$

Бу (9.57) формула трапециялар формуласи деб аталади.

Энди (9.57) трапециялар формуласининг хатолигини, яъни ушбу

$$R_n = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right]$$

айирмани баҳолаймиз. Бунинг учун $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин деб қараймиз.

Аввало юқорида $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқ учун келтирилган тақрибий формуланинг хатолигини, яъни

$$r_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} (x_{k+1} - x_k)$$

айирмани баҳолаймиз. Агар $x_{k+1} = x_k + t$ деб олсақ, у ҳолда

$$r_k = r_k(t) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot t \quad (9.58)$$

бўлади. Бу функциянинг t бўйича биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} r'_k(t) &= \left(\int_{x_k}^{x_k+t} f(x) dx \right)' - \left(\frac{f(x_k) + f(x_k+t)}{2} \cdot t \right)' = f(x_k+t) - \\ &- \frac{1}{2} [f(x_k) + f(x_k+t)] - \frac{t}{2} f'(x_k+t) = \frac{1}{2} [f(x_k+t) - f(x_k)] - \\ &- \frac{t}{2} f'(x_k+t), \\ r''_k(t) &= \frac{1}{2} f'(x_k+t) - \frac{1}{2} f'(x_k+t) - \frac{t}{2} f''(x_k+t) = \\ &= -\frac{t}{2} f''(x_k+t). \end{aligned}$$

Равшанини, $t = 0$ да

$$r_k(0) = 0, r'_k(0) = 0.$$

Энди

$$r_k''(t) = -\frac{t}{2} f''(x_k + t)$$

тenglikni $[0, t]$ oraliqda integrallaymiz:

$$\int_0^t r_k''(t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^t t f''(x_k + t) dt. \quad (9.59)$$

Bir tomondan

$$\int_0^t r_k''(t) dt = r_k'(t) \Big|_0^t = r_k'(t),$$

ikkinchi tomondan esa, yrtta qyymat xaqidagi teoremadan foida-lani, b

$$\int_0^t t \cdot f''(x_k + t) dt = f''(\xi_k) \int_0^t t dt = \frac{t^2}{2} f''(\xi_k)$$

bölliшини топамиз.

Natiжada (9.59) tenglik қyидаги

$$r_k'(t) = -\frac{t^2}{4} f''(\xi_k) \quad (\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]) \quad (9.60)$$

küriنىши олади.

Ушбу

$$r_k'(t) = -\frac{t^2}{4} f''(\xi_k)$$

tenglikni $[0, t]$ oraliqda integrallab

$$\int_0^t r_k'(t) dt = -\frac{1}{4} \int_0^t t^2 f''(\xi_k) dt \quad (9.61)$$

топамиз:

$$\int_0^t r_k'(t) dt = r_k(t) \Big|_0^t = r_k(t),$$

$$\int_0^t t^2 f''(\xi_k) dt = f''(\xi_k^*) \int_0^t t^2 dt = \frac{t^3}{3} f''(\xi_k^*).$$

Natiжada (9.61) tenglik қyидаги

$$r_k(t) = -\frac{1}{12} t^3 f''(\xi_k^*) \quad (\xi_k^* \in [x_k, x_{k+1}])$$

küriنىшига келади. У ҳолда, юқоридаги (9.58) муносабатдан $t = \frac{b-a}{n} = x_{k+1} - x_k$ эканлигини эътиборга олиб,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \right] - \frac{(b-a)^3}{12 n^3} f''(\xi_k^*)$$

формулани ҳосил қиласыз. Натижада қүйидагига әга бўламиз:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx = \\ &= \frac{b-a}{2n} \left[f(x_0) + f(x_1) \right] - \frac{(b-a)^3}{12 n^3} f''(\xi_0^*) + \frac{b-a}{2n} \left[f(x_1) + f(x_2) \right] - \\ &- \frac{(b-a)^3}{12 n^3} f''(\xi_1^*) + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \\ &+ \frac{b-a}{2n} \left[f(x_{n-1}) + f(x_n) \right] - \frac{(b-a)^3}{12 n^3} f''(\xi_{n-1}^*) = \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \right. \\ &\quad \left. + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right] - \frac{(b-a)^3}{12 n^2} \times \\ &\quad \times \frac{f''(\xi_0^*) + f''(\xi_1^*) + \dots + f''(\xi_{n-1}^*)}{n}. \end{aligned}$$

Аввал қараганимиздек

$$\frac{f''(\xi_0^*) + f''(\xi_1^*) + \dots + f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$$

миқдор $f''(x)$ функцияниң $[a, b]$ оралиқдаги энг кичик ҳамда энг катта қийматлари орасида бўлиб, $f''(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлганидан эса, шундай $\zeta \in (a, b)$ нуқта топиладики,

$$f''(\zeta) = \frac{f''(\xi_0^*) + f''(\xi_1^*) + \dots + f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$$

бўлади. Демак,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + f(x_{n-1}) \right] - \frac{(b-a)^3}{12 n^2} f''(\zeta) \quad (\zeta \in (a, b)). \end{aligned} \quad (9.62)$$

Шундай қилиб, $\int_a^b f(x) dx$ интегрални тақрибий ифодаловчи (9.57) трапециялар формуласининг хатолиги учун

$$\overline{R}_n = - \frac{(b-a)^3}{12 n^2} f''(\zeta)$$

формула билан ҳисобланади.

3. Парabolалар (Симпсон) формуласи. Бу ҳолда $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз $f(x)$ функцияниң $\int_a^b f(x) dx$ интегралини тақрибий ҳисоблаш учун $f(x)$ функцияни $(a, f(a))$,

$\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ ҳамда $(b, f(b))$ нуқталардан ўтувчи $y = Ax^2 + Bx + C$ параболанинг ординатаси билан алмаштирамиз. Берилган $(a, f(a))$, $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ ва $(b, f(b))$ нуқталар орқали парабола ўтказиш мумкин. Бундай парабола ягона бўлади. Ҳақиқатан ҳам $y = Ax^2 + Bx + C$ парабола юқорида айтилган нуқталар орқали ўтгани учун ушбу

$$\left. \begin{array}{l} Aa^2 + Ba + C = f(a), \\ A \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + B \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) + C = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \\ Ab^2 + Bb + C = f(b) \end{array} \right\} \quad (9.63)$$

тенгликлар ўринли бўлади. Бу системанинг коэффициентларидан тузилган

$$\left| \begin{array}{ccc} a^2, & a, & 1 \\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, & \frac{a+b}{2}, & 1 \\ b^2, & b, & 1 \end{array} \right| = \frac{(a-b)^3}{4}$$

детерминант ҳар доим нолдан фарқли (чунки $a \neq b$). Демак, (9.63) система ягона ечимга эга. Бу ҳол $(a, f(a))$, $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ ҳамда $(b, f(b))$ нуқталардан ягона $y = Ax^2 + Bx + C$ парабола ўтишини билдиради.

Энди $\int_a^b (Ax^2 + Bx + C) dx$ интегрални берилган $\int_a^b f(x) dx$ интегралнинг тақрибий қиймати деб қўйидаги

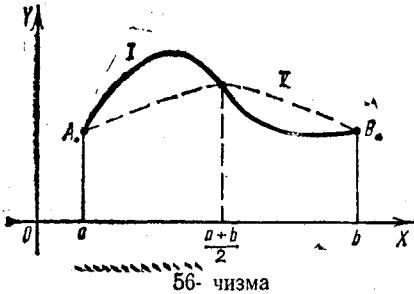
$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b (Ax^2 + Bx + C) dx$$

формулани ҳосил қиласиз. Бу тақрибий формуладаги $\int_a^b (Ax^2 + Bx + C) dx$ интегрални ҳисоблаймиз.

$$\begin{aligned} \int_a^b (Ax^2 + Bx + C) dx &= A \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b + B \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b + Cx \Big|_a^b = A \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} + \\ &+ B \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} + C(b - a) = \frac{b-a}{6} \left[2A(b^2 + ba + a^2) + 3B(b - a) + \right. \\ &\left. + 6C \right] = \frac{b-a}{6} \left\{ (Aa^2 + Ba + C) + 4 \left[A \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + B \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) + C \right] + \right. \\ &\left. + (Ab^2 + Bb + C) \right\} = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, $\int_a^b f(x) dx$ интегрални тақрибий ҳисоблаш учун ушбу

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (9.64)$$



формулага келамиз.

Бу (9.64) формула $f(x) \geq 0$ бўлганда 56-чизмада кўрсатилган $aAIb$ эгри чизиқли трапеция юзини $aAIb$ эгри чизиқли трапеция юзи билан алмаштирилишини ифодалайди.

(9.64) формуланинг аниқлигини ошириш учун $[a, b]$ оралиқни

$$a_0 = x_0, x_1, \dots, x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+2}, \dots, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n} = b \\ (x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2k} < x_{2k+1} < x_{2k+2} < \dots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n})$$

нуқталар ёрдамида $2n$ та тенг бўлакка бўлиб, ҳар бир $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) оралиқ бўйича олинган интегралга (9.64) формулани қўлланамиз. Ўз ҳолда $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ оралиқ учун

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x) dx \approx \frac{x_{2k+2} - x_{2k}}{6} \left[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2}) \right] = \\ = \frac{b-a}{6n} \left[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2}) \right] \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (9.65)$$

формулага эгамиз.

Натижада аниқ интегралнинг хоссасидан фойдаланиб, қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx \approx \\ \approx \frac{b-a}{6n} \left[(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) + \dots + \right. \\ \left. + (f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})) \right] = \frac{b-a}{6n} \left[(f(x_0) + f(x_{2n})) + \right. \\ \left. + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + \right. \\ \left. + f(x_{2n-2})) \right].$$

Шундай қилиб, $f(x)$ функцияининг аниқ интегралини тақрибий ифодалайдиган қуйидаги

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \left[(f(x_0) + f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2})) \right] \quad (9.66)$$

формулага келамиз. Бу формула *параболалар* ёки *Симпсон формуласы* деб аталади.

Параболалар формуласининг хатолигини топиш учун $f(x)$ функцияга қўшимча шарт қўйилади.

Фараз қиласайлик, $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз $f^{(IV)}(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

Аввало (9.65) тақрибий формуланинг хатолиги ушбу

$$r_k = \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x) dx - \frac{b-a}{6n} \left[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2}) \right] \quad (9.67)$$

айирма билан ифодаланади. Уни баҳолайлик.

Қуйидаги

$$F(t) = r_k(t) - \frac{t^5}{h^5} r_k(h) \quad (9.68)$$

ёрдамчи функцияни қараймиз, бунда

$$r_k(t) = \int_{x_{2k+1}-t}^{x_{2k+1}+t} f(x) dx - \frac{t}{3} \left[f(x_{2k+1}-t) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+1}+t) \right]$$

ва

$$h = \frac{b-a}{2n}.$$

Из (9.68) функцияни кетма-кет уч марта дифференциаллаб, топамиз:

$$\begin{aligned} F'(t) &= f(x_{2k+1}+t) + f(x_{2k+1}-t) - \frac{1}{3} \left[f(x_{2k+1}-t) + 4f(x_{2k+1}) + \right. \\ &\quad \left. + f(x_{2k+1}+t) \right] - \frac{t}{3} \left[f'(x_{2k+1}+t) - f'(x_{2k+1}-t) \right] - \\ &- \frac{5t^4}{h^5} r_k(h) = \frac{2}{3} \left[f(x_{2k+1}+t) + f(x_{2k+1}-t) - 2f(x_{2k+1}) \right] - \\ &\quad - \frac{t}{3} \left[f'(x_{2k+1}+t) - f'(x_{2k+1}-t) \right] - \frac{5t^4}{h^5} r_k(h); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F''(t) &= \frac{1}{3} \left[f'(x_{2k+1}+t) - f'(x_{2k+1}-t) \right] - \frac{t}{3} \left[f''(x_{2k+1}+t) + \right. \\ &\quad \left. + f''(x_{2k+1}-t) \right] - \frac{20t^3}{h^5} r_k(h); \end{aligned}$$

$$F'''(t) = -\frac{t}{3} \left[f'''(x_{2k+1}+t) - f'''(x_{2k+1}-t) \right] - \frac{60t^2}{h^5} r_k(h),$$

Бунда $\int_{x_{2k+1}-t}^{x_{2k+1}+t} f(x) dx$ интегралнинг t бўйича ҳосиласини ҳисоблашда

9.6-нтижадан фойдаландик. Энди Лагранж теоремасига кўра

$$f'''(x_{2k+1}+t) - f'''(x_{2k+1}-t) = f^{(IV)}(\xi_k) \cdot 2t$$

($\xi_k \in (x_{2k+1}-t, x_{2k+1}+t)$) бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда $F'''(t)$ нинг ифодаси қўйидаги

$$F'''(t) = -\frac{2}{3} t^2 \left[f^{(IV)}(\xi_k) + \frac{90}{h^5} r_k(h) \right]$$

кўринишга эга бўлади.

Агар $F(0) = 0$, $F(h) = 0$ бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда Ролль теоремасига кўра шундай t_1 ($0 < t_1 < h$) нуқта топиладики, $F'(t_1) = 0$ ($0 < t_1 < h$) тенглик ўринли бўлади. $F'(0) = 0$, $F'(t_1) = 0$ тенгликларга кўра яна Ролль теоремасига асосан, шундай t_2 ($0 < t_2 < t_1$) нуқта топиладики, $F''(t_2) = 0$ ($0 < t_2 < t_1$) тенглик ўринли бўлади. Шунга ўхшаш, ушбу $F''(0) = 0$, $F''(t_2) = 0$ тенгликларга кўра юқоридагидек шундай t_3 ($0 < t_3 < t_2$) нуқта топиладики, $F'''(t_3) = 0$ ($0 < t_3 < t_2$) тенглик ўринли бўлади. Нтижада $F'''(t)$ функция учун $t = t_3$ бўлганда қўйидагига эга бўламиш:

$$0 = F'''(t_3) = -\frac{2}{3} t_3 \left[f^{(IV)}(\xi_k) + \frac{90}{h^5} r_k(h) \right]$$

Еки

$$r_k(h) = -\frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\xi_k).$$

Энди (9.67) ва (9.68) муносабатларни эътиборга олиб, юқорида-ги (9.65) формулани қўйидагича ёзамиш:

$$\begin{aligned} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x) dx &= \frac{b-a}{6n} \left[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2}) \right] - \\ &\quad - \frac{(b-a)^5}{2880 h^5} f^{(IV)}(\xi_k) \\ &(k=0, 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Бу тенглиқдан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx = \\ &= \frac{b-a}{6n} \left[(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + (f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})) \right] - \frac{(b-a)^5}{2880 h^5} \left[f^{(IV)}(\xi_0) + f^{(IV)}(\xi_1) + \right. \\ &\quad \left. + \dots + f^{(IV)}(\xi_{n-1}) \right]. \end{aligned}$$

Демак,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6n} \left[(f(x_0) + f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2})) \right] - \frac{(b-a)^5 f^{(IV)}(\xi)}{2880 n^4}, \quad (9.68)$$

бунда

$$f^{(IV)}(\xi) = \frac{f^{(IV)}(\xi_0) + f^{(IV)}(\xi_1) + \dots + f^{(IV)}(\xi_{n-1})}{n}. \quad (\xi \in (a, b)).$$

Шундай қилиб, $\int_a^b f(x) dx$ интегрални тақрибий ифодаловчи (9.66).

Симпсон формуласининг хатолиги

$$-\frac{(b-a)^5}{2880 n^4} f^{(IV)}(\xi) \quad (\xi \in (a, b))$$

ифода билан аниқланади.

Биз юқорида $\int_a^b f(x) dx$ интегрални тақрибий ҳисоблаш учун түғ-

ри түртбұрчаклар, трапециялар ҳамда Симпсон формуулаларини келтирдик. Бу тақрибий формулаларнинг хатоликларини таққослад, Симпсон формуласининг аниқлик даражаси түғри түртбұрчаклар ҳамда трапециялар формулаларининг аниқлигига қараганда юқори әкәнлигини күрамиз.

Мисол. Үшбұ

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

интегрални түғри түртбұрчаклар, трапециялар ва Симпсон формуулалари ёрдамида тақрибий ҳисоблаймиз.

[0, 1] оралиқни 5 та тенг бүлакка бүләмиз. Бүлиніш нүкталари

$$x_0 = 0, x_1 = 0,2, x_2 = 0,4, x_3 = 0,6, x_4 = 0,8, x_5 = 1,0$$

бўлиб, бу нүкталарда e^{-x^2} функциянынг қийматлари қўйидагича:

$$f(x_0) = 1,00000,$$

$$f(x_1) = 0,96079,$$

$$f(x_2) = 0,85214,$$

$$f(x_3) = 0,69768,$$

$$f(x_4) = 0,52729,$$

$$f(x_5) = 0,36788.$$

Ҳар бир бүлакнинг ўртасини ифодаловчи нүктанинг координаталари

$x_{\frac{1}{2}} = 0,1$, $x_{\frac{3}{2}} = 0,3$, $x_{\frac{5}{2}} = 0,5$, $x_{\frac{7}{2}} = 0,7$, $x_{\frac{9}{2}} = 0,9$ бўлиб, бу нуқтадардаги функциянинг қийматлари қўйидагича:

$$f(x_{\frac{1}{2}}) = 0,99005,$$

$$f(x_{\frac{3}{2}}) = 0,91393,$$

$$f(x_{\frac{5}{2}}) = 0,77680,$$

$$f(x_{\frac{7}{2}}) = 0,61263,$$

$$f(x_{\frac{9}{2}}) = 0,44486.$$

а) тўғри тўртбурчаклар формуласи ((9.52) ва (9.54) ларга қаранг) бўйича $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{5} (0,99005 + 0,91393 + 0,77680 + 0,61263 + 0,44486) = \frac{1}{5} 3,74027 \approx 0,74805$,

$$|R_n| \leq \frac{1}{12 \cdot 25} = \frac{1}{300} \approx 0,003.$$

б) трапециялар формуласи ((9.57) ва (9.62) ларга қаранг) бўйича

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{5} \left(\frac{1,00000 + 0,36788}{2} + ,96079 + 0,85214 + 0,69768 + 0,52729 \right) = \frac{1}{5} (0,68394 + 3,03790) = \frac{1}{5} \cdot 3,72184 \approx 0,74437,$$

$$|\bar{R}_n| \leq \frac{1}{6 \cdot 25} = \frac{1}{150} \approx 0,006.$$

в) Симпсон формуласи ((9.66) ва (9.68) ларга қаранг) бўйича $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{30} \left[(1,00000 + 0,36788) + 4(0,99005 + 0,91393 + 0,77680 + 0,61263 + 0,44486) + 2(0,96079 + 0,85214 + 0,69768 + 0,52729) \right] = \frac{1}{30} (1,36788 + 4 \cdot 3,74027 + 2 \cdot 3,03790) = \frac{1}{30} (1,36788 + 6,07580 + 14,96108) \approx 0,74682,$

$$|\bar{R}_n| \leq \frac{12}{2880 \cdot 5^4} = 0,7 \cdot 10^{-6}.$$

Тақрибий формулалар ёрдамида ҳисоблаб топилган $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ интегралнинг қийматини, унинг

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0,74685\dots$$

қиймати билан таққослаб, Симпсон формуласи ёрдамида топилган интегралнинг тақрибий қиймати аниқроқ әканлигини кўрамиз.

12- §. Функционал ҳақида тушунча

Биз 1-бобда ихтиёрий E ва F тўпламлар берилган ҳолда E тўпламнинг элементларини F тўпламнинг элементларига ўтказувчи f акслантиришни, яъни ушбу $f : E \rightarrow F$ акслантиришни таърифлаган эдик. Хусусан, $E = N$, $F = R$ бўлганда

$$f : N \rightarrow R \quad (f : n \rightarrow x_n)$$

акслантириш сонлар кетма-кетлиги тушунчасига, $E = R$, $F = R$ бўлганда $f : R \rightarrow R$ ($f : x \rightarrow y$) акслантириш функция тушунчасига олиб келди ва улар 3- ва 4- бобларда батафсил ўрганилди. $[a, b]$ оралиқда аниқланган функциялар тўпламини M дейлик. Энди $E = M$, $F = R$ бўлганда $\varphi : M \rightarrow R$ акслантиришни қараймиз. Бу акслантириш функционал тушунчасига олиб келади.

9. 8-таъриф. Агар M тўпламдаги ҳар бир $f(x)$ функцияга бирор қоида ёки қонунга кўра битта ҳақиқий сон y мос қўйилган бўлса, M тўпламда функционал берилган (аниқланган) дейилади ва уни

$$\Phi : f(x) \rightarrow y \quad \text{ёки} \quad y = \Phi(f)$$

каби белгиланади. Бунда M функционалнинг аниқлаши тўплами дейилади.

Мисоллар.

1. Φ — $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлган ҳар бир $f(x)$ функцияга унинг шу оралиқдаги максимум қийматини мос қўювчи қоида бўлсин. Демак, бу ҳолда ушбу

$$\Phi : f(x) \rightarrow \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\} \quad \text{ёки} \quad y = \Phi(f) = \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$$

функционалга эга бўламиз. Бу функционалнинг аниқланши тўплами $M = C[a, b]$ бўлади.

2. $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи ҳар бир $f(x)$ функцияга унинг аниқ интеграли $\int_a^b f(x) dx$ ни мос қўйиш натижасида қўйидаги

$$\Phi : f(x) \rightarrow \int_a^b f(x) dx \quad \text{ёки} \quad \Phi(f) = \int_a^b f(x) dx$$

функционал ҳосил бўлади. Бу функционалнинг аниқланиш тўплами $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи барча функциялардан иборат тўплам бўлади (одатда бундай тўпламни L каби белгиланади).

Энди $M - [a, b]$ оралиқда аниқланган функциялардан иборат тўплам бўлиб, $\forall f(x) \in M, \forall \varphi(x) \in M$ учун

$$k \cdot f(x) + l \cdot \varphi(x) \in M$$

муносабат ўринли бўлсин (бунда k, l — ўзгармас сонлар).

Бу M тўпламда $\Phi(f)$ функционал аниқланган дейлик.

9.9-таъриф. Агар $\forall f(x) \in M, \forall \varphi(x) \in M$ лар учун функционал ушбу

$$\Phi(kf + l\varphi) = k\Phi(f) + l\Phi(\varphi)$$

тenglikni қаноатлантируса (бунда k ва l ихтиёрий ўзгармас сон), у ҳолда Φ чизиқли функционал деб аталади.

Юқорида келтирилган

$$\Phi(f) = \int_a^b f(x) dx$$

функционал чизиқли функционал бўлади. Ҳақиқатан ҳам, буни кўрсатиш учун аниқ интегралнинг хоссаларидан фойдаланиш етарли:

$$\begin{aligned} \Phi(kf + l\varphi) &= \int_a^b [k \cdot f(x) + l \cdot \varphi(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx + l \int_a^b \varphi(x) dx = \\ &= k\Phi(f) + l\Phi(\varphi). \end{aligned}$$

Функционаллар ва уларнинг хоссалари математиканинг функционал анализ бўлимида ўрганилади.

АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ БАЪЗИ БИР ТАТБИҚЛАРИ

Математика, физика, механика ҳамда фан ва техниканинг бошқа соҳаларида учрайдиган кўғина массалаларни ечиш маълум функцияларнинг интегралларини ҳисоблашга келтирилади.

Ушбу бобда эгри чизик ёйининг узунлиги, эгри чизиқли трапециянинг юзи, ўзгарувчи кучнинг бажарган иши ҳамда массага эга бўлган эгри чизиқнинг инерция моменти аниқ интеграллар орқали ҳисобланishi кўрсатилади.

1- §. Ёй узунлиги ва уни аниқ интеграл орқали ифодаланиши

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган бўлсин. Бу функциянинг графиги қўйидаги

$$\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$$

нуқталар тўпламидан иборат. Шу графикдаги $(a, f(a))$ ва $(b, f(b))$ нуқталар орасидаги эгри чизик ёйи узунлигининг аниқ интеграл орқали ифодаланишини кўрсатамиз.

Маълумки, агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда ўзгармас, яъни $f(x) = c$, $c = const$ бўлса, бу функциянинг графиги текисликда (a, c) , (b, c) нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизик кесмаси бўлиб, унинг узунлиги

$$l_1 = b - a \quad (10. 1)$$

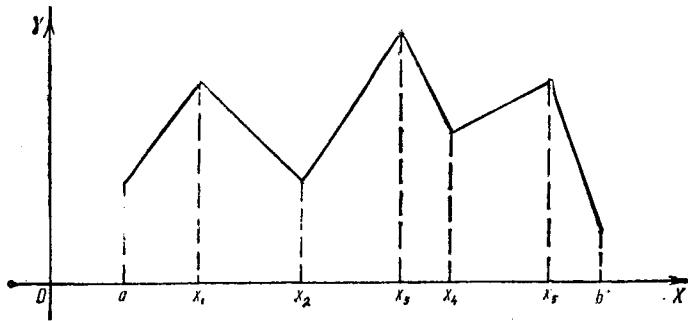
бўлади.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда чизиқли функция, яъни $f(x) = \alpha x + \beta$ (α, β — ўзгармас сонлар) бўлса, у ҳолда бу функциянинг графиги $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизик кесмаси бўлиб, унинг узунлиги

$$l_2 = \sqrt{(b-a)^2 + [f(b) - f(a)]^2} = (b-a)\sqrt{1+\alpha^2} \quad (10. 2)$$

бўлади.

Энди $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган бўлиб, унинг графиги 57- чизмада кўрсатилган чизиқни тасвирласин. Бу чизиқ—чекли сондаги (6 та) тўғри чизик кесмаларининг бирин-кетин бирлаштирилишидан иборат. Одатда бундай чизиқни *синиқ* чизиқ деб аталади.



57- чизма

Равшанки, бу ҳолда синиқ чизиқ узунлиги (периметри) уни ташкил этган түғри чизиқ кесмалари узунлуклари йиғиндисига тенг бўлади:

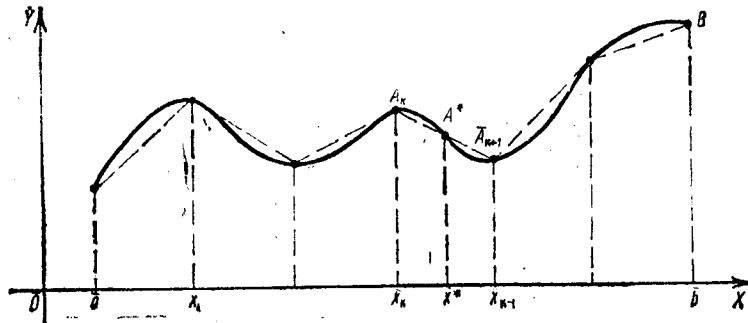
$$l_3 = \sqrt{(x_1 - a)^2 + [f(x_1) - f(a)]^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [f(x_2) - f(x_1)]^2} + \dots + \sqrt{(b - x_5)^2 + [f(b) - f(x_5)]^2} = \\ = \sum_{k=0}^5 \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2} \quad (x_0 = a, x_6 = b).$$

Умуман, $[a, b]$ оралиқда аниқланган $f(x)$ функция графиги n та $A_0(x_0, f(x_0)), A_1(x_1, f(x_1)), \dots, A_n(x_n, f(x_n))$ нуқтани ($a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$) ўзаро түғри чизиқ кесмаси ёрдамида бирин-кетин бирлаштиришдан ҳосил бўлган синиқ чизиқдан иборат бўлса, бу синиқ чизиқнинг периметри ушбу

$$l_4 = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2} \quad (10.3)$$

формула билан ҳисобланади ($x_0 = a, x_n = b$).

Энди $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ихтиёрий узлуксиз функция бўлсин. Бу функция графиги $[a, b]$ оралиқда 58- чизма



58- чизма

мада кўрсатилган эгри чизиқ ёйини тасвирласин. Уни \overline{AB} деб белгилаймиз. $[a, b]$ оралиқнинг ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

бўлининини олиб, бўлувчи x_k ($k = 0, 1, \dots, n$) нуқталар орқали Oy ўқига параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бу тўғри чизиқларнинг \overline{AB} ёй билан кесишган нуқталари $A_k(x_k, f(x_k))$ ($k = 0, 1, \dots, n$, $A_0 = A, A_n = B$) бўлади. \overline{AB} ёйдаги бу нуқталарни бир- бири билан тўғри чизиқ кесмалари ёрдамида бирлаштириб \overline{L} синиқ чизиқни ҳосил қиласмиз. \overline{L} синиқ чизиқ \overline{AB} ёйга чизилган синиқ чизиқ деб аталади. Бу синиқ чизиқ периметрини L деб белгилайлик.

Равшанки, синиқ чизиқ периметри L қаралаётган $f(x)$ функцияга боғлиқ бўлиши билан бирга $[a, b]$ оралиқнинг бўлининига ҳам боғлиқ бўлади, яъни $L = L_P(f)$.

Агар P_1 ва P_2 лар $[a, b]$ оралиқнинг иккита бўлинини бўлиб, $P_1 \prec P_2$ бўлса, у ҳолда бу бўлининшларга мос \overline{AB} ёйга чизилган синиқ чизиқлар периметрлари учун

$$L_{P_1}(f) \leq L_{P_2}(f)$$

тengsизлик ўринли бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $[a, b]$ оралиқнинг P_1 бўлинини қўйидагича

$$P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b)$$

бўлиб, P_2 эса P_1 бўлинининг барча бўлувчи нуқталари ҳамда қўшимча битта $x^* \in [a, b]$ нуқтани қўшиш натижасида ҳосил бўлган бўлининш бўлсин. Бу x^* нуқта x_k ҳамда x_{k+1} нуқталар орасида жойлашсан: $x_k < x^* < x_{k+1}$. Демак,

$$P_2 = \{x_0, x_1, \dots, x_k, x^*, x_{k+1}, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < \dots < x_k < x^* < x_{k+1} < \dots < x_n = b).$$

Равшанки, $P_1 \prec P_2$.

\overline{AB} ёйга чизилган P_1 бўлининшга мос синиқ чизиқ $\overline{L}_{P_1}(f)$ шу ёйга чизилган P_2 бўлининшга мос синиқ чизиқ $\overline{L}_{P_2}(f)$ дан фақатгина битта бўлаги билангина фарқ қиласди: $\overline{L}_{P_1}(f)$ да $A_k A_{k+1}$ бўлак бўлган ҳолда, $\overline{L}_{P_2}(f)$ да эса иккита $A_k A^*$ ҳамда $A^* A_{k+1}$ бўлаклар бор (58-чизмага қаранг). Аммо $A_k A_{k+1}$ тўғри чизиқ кесмасининг узунлиги, $A_k A^*$ ҳамда $A^* A_{k+1}$ кесмалар узунликларининг йиғиндисидан ҳар доим катта бўлмагани учун (учбурчакнинг бир томонининг узунлиги, қолган икки томон узунликларининг йиғиндисидан катта эмас) ушбу $L_{P_1}(f) \leq L_{P_2}(f)$ tengsизлик ўринли бўлади.

Демак, P бўлинишнинг бўлувчи нуқталар сонини орттириб борилса, \widetilde{AB} ёйга чизилган уларга мос синиқ чизиқлар периметрлари ҳам ортиб боради.

P бўлинишнинг диаметри λ_P нолга интила борганда \widetilde{AB} ёйига чизилган бу бўлинишга мос синиқ чизиқ шу \widetilde{AB} ёйга борган сари яқинлаша боради, синиқ чизиқ периметри эса \widetilde{AB} ёйининг узунлигини борган сари аниқроқ ифодалай боради, деб қараш табинидир.

10.1-таъриф. Агар \widetilde{AB} ёйига чизилган синиқ чизиқ $[a, b]$ оралиқнинг (ҳар қандай P бўлинишига мос) периметри

$$L_P(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

$\lambda_P \rightarrow 0$ да чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда \widetilde{AB} ёй узунликка эга деб аталади ва ушбу

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} L_P(f) = L$$

лимит \widetilde{AB} ёйининг узунлиги дейилади.

Хусусан, \widetilde{AB} ёй $f(x) = C$, $C = \text{const}$ каби бўлса,

$$L_P(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (C - C)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = b - a$$

$$L = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} L_P(f) = b - a$$

Бўлиб, (10.1) формулагага келамиз. Агар \widetilde{AB} ёй $f(x) = \alpha x + \beta$ каби бўлса,

$$\begin{aligned} L_P(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + \alpha^2 (x_{k+1} - x_k)^2} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \alpha^2} (x_{k+1} - x_k) = \sqrt{1 + \alpha^2} \cdot (b - a) \end{aligned}$$

ва

$$L = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} L_P(f) = \sqrt{1 + \alpha^2} \cdot (b - a)$$

бўлиб, натижада (10.2) формула ҳосил бўлади.

Энди ёй узунлигининг аниқ интеграл орқали қандай ифодаланишини кўрсатамиз.

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган, узлуксиз ҳамда узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу функцияning $[a, b]$ оралиқдаги трафиги \widetilde{AB} ёйни тасвирласин, дейлик. $[a, b]$ оралиқнинг ихтиёрий P :

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

бўлинишини олиб $A\bar{B}$ ёйига чизилган унга мос синиқ чизикни ҳосил қиласиз. Бу синиқ чизиқнинг периметрини ёзамиш:

$$L_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}.$$

Ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқда $f(x)$ функцияга Лагранж теоремасини қўлланамиз. У ҳолда шундай τ_k ($\tau_k \in [x_k, x_{k+1}]$) нуқта топиладики,

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\tau_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) \quad (x_k \leq \tau_k \leq x_{k+1})$$

бўлади. Демак,

$$L_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\tau_k)} \cdot (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\tau_k)} \Delta x_k,$$

бунда $x_k \leq \tau_k \leq x_{k+1}$. Кейинги тенгликнинг ўнг томонидаги йигинди $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ функциянинг интеграл йифиндисини эслатади. Унинг интеграл йифиндидан фарқи шуки, интеграл йифиндида $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ нуқта ихтиёрий бўлган ҳолда, юқоридаги йифиндида эса τ_k нуқта $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқдаги тайин нуқтадир.

$\lambda_p \rightarrow 0$ да $L_p(f)$ нинг лимитини топиш мақсадида $L_p(f)$ нинг ифодасини ўзгартариб ёзамиш:

$$\begin{aligned} L_p(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sqrt{1 + f'^2(\tau_k)} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \right] \Delta x_k, \end{aligned} \quad (10.4)$$

бунда ξ_k нуқта $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқда ихтиёрий. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи қўшилувчини баҳолаймиз.

Аввало ихтиёрий a, b, c сонлар учун ушбу

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \leq |b - c| \quad (10.5)$$

тенгсизлик ўринли бўлишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} |\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| &= \frac{|b^2 - c^2|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2}} = \\ &= \frac{|b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2}} |b - c| \leq \frac{|b| + |c|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2}} |b - c| \leq \\ &\leq |b - c|. \end{aligned}$$

Иди (10.5) тенгсизлиқдан фойдаланиб топамиш:

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sqrt{1 + f'^2(\tau_k)} - \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \right] \Delta x_k \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \sqrt{1+f'^2(\tau_k)} - \sqrt{1+f'^2(\xi_k)} \right| \Delta x_k \leq \\ \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| f'(\tau_k) - f'(\xi_k) \right| \Delta x_k.$$

Шартта кўра $f'(x)$ ҳосила $[a, b]$ оралиқда узлуксиз. Кантор теоремасининг натижасига мувофиқ (5.3- натижага қаранг) $\forall \varepsilon > 0$ сон олингандан ҳам $\frac{\varepsilon}{b-a}$ сонга кўра шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[a, b]$ оралиқнинг диаметрлари $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлениши учун

$$|f'(\tau_k) - f'(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (\tau_k, \xi_k \in [x_k, x_{k+1}])$$

тенгсизлик ўринли бўлади. У ҳолда

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sqrt{1+f'^2(\tau_k)} - \sqrt{1+f'^2(\xi_k)} \right] \Delta x_k \right| < \\ < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sqrt{1+f'^2(\tau_k)} - \sqrt{1+f'^2(\xi_k)} \right] \Delta x_k = 0 \quad (10.6)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу (10.6) муносабатни эътиборга олиб, юқоридаги (10.4) тенгликда $\lambda_p \rightarrow 0$ да лимитга ўтсан, у ҳолда қўйида-гига эга бўламиз:

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} L_p(f) = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+f'^2(\xi_k)} \Delta x_k. \quad (10.7)$$

Шартта кўра $f'(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун $\sqrt{1+f'^2(x)}$ функция ҳам $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлади. Шуннинг учун 9.3- теоремага кўра бу функция $[a, b]$ оралиқда интегрияланувчи бўлади. У ҳолда $\lambda_p \rightarrow 0$ да $\sqrt{1+f'^2(x)}$ функциянинг интеграл йигиндиси

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+f'(\xi_k)} \Delta x_k$$

чекли лимитга эга бўлиб, у $\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dx$ интегралга тенг. Демак,

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+f'^2(\xi_k)} \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dx. \quad (10.8)$$

(10.7) ва (10.8) муносабатлардан ушбу

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} L_p(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

тенглик келиб чиқади. Бу эса \widetilde{AB} ёйга чизилган синиқ чизик периметри $\lambda_p \rightarrow 0$ да чекли лимитта эга бўлишини ва у лимит $\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$ интегралга тенг эканини билдиради. Демак, \widetilde{AB} ёй узунликка эга ва бу ёй узунлиги қўйидаги

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (10.9)$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

Мисол. $[-a, a]$ ($a > 0$) оралиқда ушбу

$$f(x) = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$$

занжир чизик ёйининг узунлигини топинг. Аввал $f(x)$ функцияниң ҳосиласини ҳисоблаб, $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ ни топамиз:

$$f'(x) = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}),$$

$$1 + f'^2(x) = 1 + \frac{1}{4} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})^2 = \frac{1}{4} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})^2,$$

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}).$$

Энди (10.9) формулага кўра занжир чизиги ёйининг $[-a, a]$ оралиқдаги ёйи узунлигини ҳисоблаймиз:

$$L = \int_{-a}^a \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) dx = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}) \Big|_{-a}^a = a (e - \frac{1}{e})$$

Қўйидаги

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (10.10)$$

тенгламалар системаси орқали ифодаланган эгри чизиқни қараймиз (бу ҳолда эгри чизиқ параметрик ҳолда берилган дейилиб, (10.10) система эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари дейилади). Бунда $\varphi(t)$, $\psi(t)$ лар $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз функциялар бўлиб, t ўзгарувчи — параметрнинг $[\alpha, \beta]$ оралиқдаги ихтиёрий иккита турли t_1 ва t_2 ($t_1 \neq t_2$) қўйматига мос келадиган (10.10) чизиқдаги $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ нуқталар ($x_1 = \varphi(t_1)$, $y_1 = \psi(t_1)$; $x_2 = \varphi(t_2)$, $y_2 = \psi(t_2)$, ҳам турлича бўлсин. Бундай ташқари, параметр t нинг t_1 ва t_2 қий-

матларига мос келадиган (10.10) чизиқдаги $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ нүкталарни $t_1 < t_2$ бўлганда A_2 нүкта A_1 нүктадан кейин келади деб қаралади. Шу билан эгри, чизиқда йўналиш ўрнатилади.

Фараз қиласайлик, $t = \alpha$, $t = \beta$ қийматларга (10.10) чизиқда A ва B нүкталар мос келсин. Бу чизиқнинг \bar{AB} ёйи узунлиги аниқ интеграл орқали қандай ифодаланишини кўрсатамиз.

Аввал юқоридагидек \bar{AB} ёйининг узунлигини аниқлаймиз. $[\alpha, \beta]$ оралиқнинг ихтиёрий

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \quad (\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta)$$

бўлинишини олиб, бу бўлинишнинг бўлувчи t_k ($k = 0, 1, \dots, n$) нүкталарига мос келган \bar{AB} ёйдаги $A_k = A_k(x_k, y_k)$ ($x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$) нүкталарни бир-бири билан тўгри чизиқ кесмалари ёрдамида бирлаштириб, \bar{AB} ёйга чизилган синиқ чизиқни топамиз. Бу синиқ чизиқнинг периметри қўйидаги

$$L = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2} \quad (10.11)$$

формула билан ифодаланади. Равшанки, $L = \varphi(t)$, $\psi(t)$ функцияларга ҳамда $[\alpha, \beta]$ оралиқнинг бўлинишига боғлиқ, яъни $L = L_p(\varphi, \psi)$. Юқоридагидек, $\lambda_p \rightarrow 0$ да синиқ чизиқ периметри $L_p(\varphi, \psi)$ чекли лимитга эга, яъни

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} L_p(\varphi, \psi) = l$$

бўлса, \bar{AB} ёй узунликка эга дейилади, бу лимит l эса \bar{AB} ёйининг узунлиги дейилади.

Энди \bar{AB} ёйининг узунликка эга бўлиши ҳамда ёй узунлигини аниқ интеграл орқали ифодаланишини кўрсатиш мақсадида $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ функцияларни $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз $\varphi'(t)$ ва $\psi'(t)$ ҳосилаларга эга деб қараемиз. Ҳар бир $[t_k, t_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n - 1$) оралиқда $\varphi(t)$ ҳамда $\psi(t)$ функциялар Лагранж теоремасининг шартларини қаноатлантиради. У ҳолда Лагранж теоремасига кўра (t_k, t_{k+1}) интервалда шундай τ_k нүкта топиладики, ушбу

$$\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(\tau_k) \cdot (t_{k+1} - t_k) \quad (10.12)$$

тенглик, шунингдек, шу (t_k, t_{k+1}) интервалда шундай θ_k нүкта топиладики,

$$\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k) = \psi'(\theta_k) (t_{k+1} - t_k) \quad (10.13)$$

тенглик ўринли бўлади.

Бу (10.12), (10.13) муносабатлардан фойдаланиб, (10.11) синиқ чизиқ периметрини қўйидагича

$$L_p(\varphi, \psi) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(\tau_k)(t_{k+1}-t_k)^2 + \psi'^2(\theta_k) \cdot (t_{k+1}-t_k)^2} = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\theta_k)} \cdot \Delta t_k \quad (\Delta t_k = t_{k+1}-t_k)$$

ёзамиз, бунда $\tau_k \in (t_k, t_{k+1})$, $\theta_k \in (t_k, t_{k+1})$.

Сүнгра $L_p(\varphi, \psi)$ ни ушбу

$$L_p(\varphi, \psi) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)} \cdot \Delta t_k + \\ + \sum_{k=0}^{n-1} [\sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\theta_k)} - \sqrt{\varphi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)}] \Delta t_k \quad (10.14)$$

($\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$ оралықдаги ихтиёрий нұқта) күринишда ёзиб, бу тенгликтің үнд томонидаги

$$\sum_{k=0}^{n-1} [\sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\theta_k)} - \sqrt{\varphi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)}] \Delta t_k$$

йиғиндини бақолаймиз.

Аввал эслатиб ўтамизки, ихтиёрий a, b, c, d сонлар учун

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2}| \leq |a - c| + |b - d| \quad (10.15)$$

тенгсизлик үрнелі. Ҳақиқатан ҳам,

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2}| = \left| \frac{(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2)}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}} \right| = \\ = \left| \frac{(a^2 - c^2) + (b^2 - d^2)}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}} \right| \leq |a - c| \cdot \frac{|a + c|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}} + \\ + |b - d| \cdot \frac{|b + d|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}} \leq |a - c| + |b - d|,$$

чүнки

$$\frac{|a + c|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}} \leq 1, \quad \frac{|b + d|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}} \leq 1.$$

Агар (10.15) тенгсизлиқдан фойдалансак, юқоридаги йиғинди учун ушбу

$$|\sum_{k=0}^{n-1} [\sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\theta_k)} - \sqrt{\varphi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)}] \Delta t_k| \leq \\ \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\theta_k)} - \sqrt{\varphi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)}| \cdot \Delta t_k \leq \\ \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi'(\tau_k) - \varphi'(\xi_k)| \Delta t_k + \sum_{k=0}^{n-1} |\psi'(\theta_k) - \psi'(\xi_k)| \Delta t_k$$

тengsизликка келамиз.

Шартга кўра $\phi'(t)$ ҳамда $\psi'(t)$ ҳосилалар $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз. Кантор теоремасининг натижасига мувофиқ, $\forall \varepsilon > 0$ олингандага ҳам $\frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}$ сонга кўра шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[\alpha, \beta]$ оралиқнинг диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай бўлнишида

$$|\phi'(\tau_k) - \phi'(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}$$

тengsизлик, шунингдек,

$$|\psi'(\theta_k) - \phi'(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}$$

тengsизлик ҳам ўринли бўлади. У ҳолда қуийдагига эгамиз:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^{n-1} [\sqrt{\phi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\theta_k)} - \sqrt{\phi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)}] \Delta t_k \right| < \\ & < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \Delta t_k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \Delta t_k =: \\ & = \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} 2 \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k = \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} (\beta - \alpha) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Демак,

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} [\sqrt{\phi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\theta_k)} - \sqrt{\phi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)}] \Delta t_k = 0 \quad (10.16)$$

(10.14) тенглиқда $\lambda_p \rightarrow 0$ да лимитга ўтамиз. (10.16) муносабатни эътиборга олиб топамиз:

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} L_p(\phi, \psi) = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\phi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)} \Delta t_k. \quad (10.17)$$

$\phi'(t)$ ҳамда $\psi'(t)$ ҳосилаларнинг $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксизлигига кўра $\sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ функция ҳам $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз бўлади. Демак, у шу оралиқда интегралланувчи. У ҳолда $\sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ функциянинг интеграл йиғиндиси

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\phi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)} \Delta t_k$$

$\lambda_p \rightarrow 0$ да чекли лимитга эга ва бу лимит

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

интегралга тенг бўлади. Демак,

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\phi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)} \Delta t_k = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (10.18)$$

Энди (10.17) ва (10.18) тенгликлардан ушбу

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} L_p (\varphi, \psi) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

формула келиб чиқади. Бу эса \bar{AB} ёйнинг узунликка эга бўлишини ва унинг узунлиги учун

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (10.19)$$

формула ўринли эканини билдиради.

Хусусан, агар (10.10) система ушбу

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = t, & (a \leq t \leq b) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

кўринишда бўлса, бу система $y = \psi(x)$ ($a \leq x \leq b$) кўринишни олади. \bar{AB} ёйнинг узунлиги учун

$$l = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt = \int_a^b \sqrt{1 + \psi'^2(x)} dx$$

формулага эга бўламиз. Бу (10.9) формуланинг ўзидир.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t \end{cases} \quad (0 \leq \alpha \leq t \leq \beta \leq 2\pi) \quad (10.20)$$

чизиқнинг узунлигини топинг.

$[\alpha, \beta]$ оралиқда $x = \varphi(t) = r \cos t$, $y = \psi(t) = r \cdot \sin t$ ($r > 0$) функциялар узлусиз ҳосилаларга эга. (10.20) система маркази координата бошида, радиуси r га teng бўлган айланани ифодалайди. Унинг ёй узунлигини (10.19) формула ёрдамида топамиз:

$$\begin{aligned} l &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r \cdot \cos t)'^2 + (r \cdot \sin t)'^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \\ &= r \int_{\alpha}^{\beta} dt = r(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Юқоридаги (10.10) система билан иғодаланган \bar{AB} ёйни қарайлик. Бу ёйда параметрнинг t ($\alpha \leq t \leq \beta$) қийматига мос келадиган нуқтани C дейлик. Равшанки, \bar{AC} ёйнинг узунлиги t га боғлиқ бўлиб, у (10.19) формулага кўра $[\alpha, t]$ оралиқда

$$S = S(t) = \bar{AC} = \int_{\alpha}^t \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt = \int_{\alpha}^t \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt$$

кўринишда ифодаланади. Бу юқори чегараси ўзгарувчи бўлган аниқ интегралдир. Унинг ҳосиласи (9-бобнинг 9-§ га қаранг):

$$S'(t) = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}.$$

Кейинги тенгликни квадратта күтариб, сўнгра ҳар икки томонини dt^2 га кўпайтирасак, натижада

$$S'^2(t) dt^2 = x_t'^2 dt^2 + y_t'^2 dt^2$$

яъни

$$dS^2 := dx^2 + dy^2 \quad (10.21)$$

муносабат ҳосил бўлади. Бу муносабат ёй дифференциалининг квадратини ифодалайди.

Энди текисликда қутб координаталарда берилган эгри чизик ёйи узунлигининг ҳам аниқ интеграл орқали ифодасини кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, эгри чизик қутб координата системасида қўйидаги

$$r = \rho(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta), \quad (10.22)$$

функция билан берилган бўлсин, бунда $\rho(\theta)$ функция $[\alpha, \beta]$ орлиқда узлуксиз $\rho'(\theta)$ ҳосилага эга бўлсин дейлик. Биз (10.22) кўринишда берилган эгри чизик тенгламасини қўйидагича

$$\begin{aligned} x &= \rho(\theta) \cdot \cos \theta, \\ y &= \rho(\theta) \cdot \sin \theta, \end{aligned} \quad \alpha \leq \theta \leq \beta,$$

параметрик кўринишда ифодалаб, (10.19) формуладан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} l &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\rho(\theta) \cdot \cos \theta]^2 + [\rho(\theta) \cdot \sin \theta]^2} d\theta = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta]^2 + [\rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta]^2} d\theta = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Демак,

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)} d\theta. \quad (10.23)$$

Мисол. Ушбу

$$r = a \cdot \theta \quad (a = \text{const}, 0 \leq \theta \leq \alpha)$$

эгри чизик (Архимед спирали) ёйининг узунлигини топамиз. Юқоридаги (10.23) формуласига кўра ҳисоблаймиз:

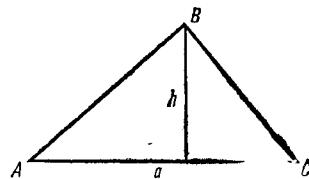
$$\begin{aligned} l &= \int_{0}^{\alpha} \sqrt{(a \cdot \theta)^2 + (a \cdot \theta)^2} d\theta = a \int_{0}^{\alpha} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = \\ &= a \left[\frac{\theta}{2} \sqrt{1 + \theta^2} + \frac{1}{2} \ln |\theta + \sqrt{1 + \theta^2}| \right]_0^{\alpha} = \\ &= \frac{a}{2} [\alpha \sqrt{1 + \alpha^2} + \ln (\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2})]. \end{aligned}$$

2- §. Текис шаклнинг юзи ва унинг аниқ интеграл орқали ифодаланиши

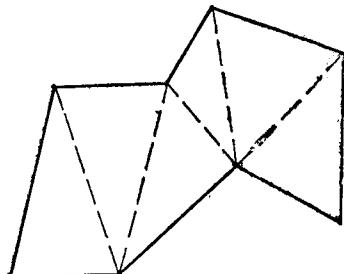
Биз ушбу параграфда текис шаклнинг юзини топишда аниқ интегралнинг қўлланишини кўрсатамиз.

Маълумки, текислиқда берилган ABC учбурчак юзага эга ва унинг юзи учбурчак асоси a билан баландлиги h кўпайтмасининг ярмига тенг (59- чизма): $S = \frac{1}{2} ah$. Агар текис шакл кўпбурчак, яъни ёпиқ синиқ чизиқ билан чегараланган шакл бўлса, у ҳолда бу кўпбурчак учбурчакларга ажратилиб, кўпбурчакнинг юзи учбурчаклар юзларининг йиғиндиси сифатида топилади (60- чизма).

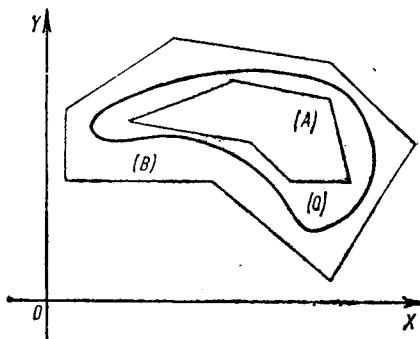
Энди текислиқда бирор чегараланган (Q) шаклни қарайлик (61-чизма). Бу (Q) шаклнинг ичига (A) кўпбурчаклар, сўнгра (Q) шаклни ўз ичига олган (B) кўпбурчакларни чизамиз. (A) кўпбурчакларнинг юзини S_A билан (B) кўпбурчакларнинг юзини S_B билан белгилайлик. Натижада (Q) шаклга ички чизилган кўпбурчак юзалари



59- чизма



60- чизма



61- чизма

дан иборат $\{S_A\}$ тўплам, (Q) шаклни ўз ичига олган кўпбурчак юзларидан иборат $\{S_B\}$ тўпламлар ҳосил бўлади.

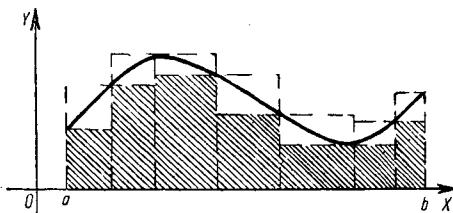
$\{S_A\}$ тўплам юқоридан, $\{S_B\}$ тўплам қўйидан чегараланганилиги сабабли $\{S_A\}$ тўплам аниқ юқори чегарага, $\{S_B\}$ тўплам эса аниқ қўйи чегарага эга бўлади:

$$\sup \{S_A\} = \underline{Q}, \quad \inf \{S_B\} = \overline{Q}.$$

Равшанки,

$$\underline{Q} \leq \overline{Q}.$$

10.2- таъриф. Агар $\underline{Q} = \bar{Q}$, яъни $\sup\{S_A\} = \inf\{S_B\}$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда (Q) шакл юзага эга дейилади ва $Q = \underline{Q} = \bar{Q}$ миқдор (Q) шаклнинг юзи дейилади. Демак, $Q = \sup\{S_A\} = \inf\{S_B\}$. Энди (Q) шакл сифатида $aABb$ эгри чизиқли трапецияни оламиз. Бу



62- чизма

эгри чизиқли трапециянинг юзага эга эканини ва юзанинг аниқ интеграл орқали ифодаланишини кўрсатамиз. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралықда аниқланган, узлуксиз бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \geqslant 0$ бўлсин.

Юқоридан $f(x)$ функция графиги, ён томонлардан

$x = a$, $x = b$ вертикал чизиқлар ҳамда пастдан Ox — абсцисса ўқи билан чегараланган шаклни, яъни $aABb$ эгри чизиқли трапецияни қарайлик (62-чизма).

Энди $[a, b]$ оралықнинг ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

бўлинишини оламиз. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралықда узлуксиз бўлгани сабабли, бу функция P бўлинишининг ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n - 1$) оралигида ҳам узлуксиз бўлиб, унда $\inf\{f(x)\} = m_k$, $\sup\{f(x)\} = M_k$ ($x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$) $m_k = \text{const}$, $M_k = \text{const}$).

Қуйидаги

$$S_A = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad S_B = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

йиғиндиларни тузамиз. Бу йиғиндиларнинг биринчиси $aABb$ эгри чизиқли трапециянинг ичига чизилган кўпбурчакнинг юзини (62-чизмада бу юза штрихланган), иккинчиси эса $aABb$ эгри чизиқли трапецияни ўз ичига олган кўпбурчакнинг юзини ифодалайди.

Равшанки, бу кўпбурчаклар, демак, уларнинг юзлари ҳам $f(x)$ функцияга ҳамда $[a, b]$ оралықнинг бўлинишига боғлиқ бўлади:

$$S_A = S_A^P(f), \quad S_B = S_B^P(f).$$

$[a, b]$ оралықнинг турли бўлинишлари олинса, уларга нисбатан $aABb$ эгри чизиқли трапециянииг ичига чизилган ҳамда бу эгри чизиқли трапецияни ўз ичига олган турли кўпбурчаклар ясалади. Натижада бу кўпбурчак юзаларидан иборат қуйидаги

$$\{S_A^P(f)\}, \quad \{S_B^P(f)\}$$

тўпламлар ҳосил бўлади. Бунда $\{S_A^P(f)\}$ тўплам юқоридан, $\{S_B^P(f)\}$ тўплам эса қуйидан чегараланган бўлади. Демак, бу тўпламларнинг

$$\sup \{ S_A^p(f) \}, \inf \{ S_A^p(f) \}$$

аник чегаралари мавжуд.

Шартга кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз. У ҳолда Кантор теоремасининг натижасига асосан (5.3- натижага қаранг), $\forall \varepsilon > 0$ сон олингандা $\frac{\varepsilon}{b-a}$ сонга кўра шундай $\delta > 0$ сон топилади, $[a, b]$ оралиқнинг диаметрлари $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай бўлиниши P учун ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқда функциянинг тебраниши

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

бўлади. Унда

$$\begin{aligned} \inf \{ S_B^p(f) \} - \sup \{ S_A^p(f) \} &\leq S_B^p(f) - S_A^p(f) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k < \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Демак, $[a, b]$ оралиқнинг диаметри $\lambda_p \rightarrow \delta$ бўлган ҳар қандай бўлиниши олинганда ҳам бу бўлинишга мос $aAbb$ эгри чизиқли трапециянинг ичига чизилган ҳамда бу трапецияни ўз ичига олган кўпбурчак юзлари учун ҳар доим

$$0 \leq \inf \{ S_B^p(f) \} - \sup \{ S_A^p(f) \} < \varepsilon$$

тengsizlik ўринли бўлади. Бундан эса

$$\inf \{ S_B^p(f) \} = \sup \{ S_A^p(f) \} \quad (10.24)$$

тengлик келиб чиқади.

(10.24) tenglik $aAbb$ эгри чизиқли трапециянинг юзага эга бўлишини билдиради.

Энди юқорида ўрганилган $S_A^p(f)$, $S_B^p(f)$ йигиндиларни Дарбу йигиндилари (9.5- таърифга қаранг) билан таққослаб, $S_A^p(f)$ ҳамда $S_B^p(f)$ йигиндилар $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқда мос равишда Дарбунинг кўйи ҳамда юқори йигиндилари эканини топамиз. Шунинг учун (9.6- таърифга асосан) ушбу

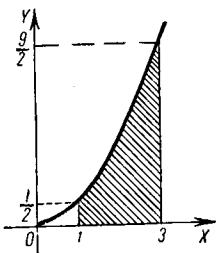
$$\sup \{ S_A^p(f) \}, \inf \{ S_B^p(f) \}$$

миқдорлар $f(x)$ функциянинг қўйи ҳамда юқори интеграллари бўлади, яъни

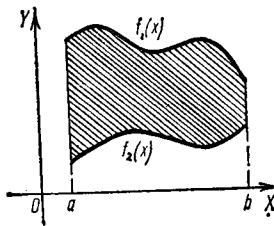
$$\sup \{ S_A^p(f) \} = \int_a^b f(x) dx, \inf \{ S_B^p(f) \} = \int_a^b f(x) dx. \quad (10.25)$$

Юқорида исботланган (10.24) муносабатга кўра

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$



63- чизма



64- чизма

тенглик ўринли экани кўринади. Демак,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Шундай қилиб бир томондан, $aAbb$ эгри чизиқли трапеция юзага эга экани, иккинчи томондан, унинг юзи $f(x)$ функцияниңг $[a, b]$ оралиқдаги аниқ интегралига тенг экани исбот этилди. Демак, $aAbb$ эгри чизиқли трапецияниңг юзи учун ушбу

$$Q = \int_a^b f(x) dx \quad (10.26)$$

формула ўринли.

Мисол. Қуйидаги

$$y = 0, \quad y = \frac{1}{2}x^2, \quad x = 1, \quad x = 3$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини топинг (63- чизма). (10.26) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$Q = \int_1^3 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{6}x^3 \Big|_1^3 = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} = \frac{13}{3} \text{ (кв. бирлик).}$$

Агар текисликда (Q) шакл қўйидаги

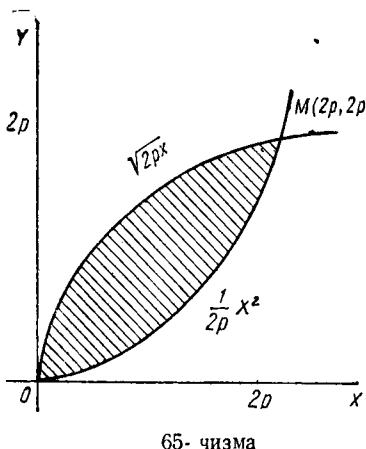
$$y = f_1(x); \quad y = f_2(x), \quad x = a, \quad x = b$$

чизиқлар билан чегараланган шаклни ифодаласа (бунда $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлиб, бу оралиқда $f_1(x) \geq 0$, $f_2(x) \geq 0$, $f_1(x) \geq f_2(x)$) у ҳолда бу шаклнинг юзи учун ушбу

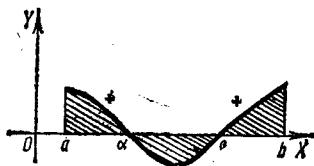
$$Q = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx \quad (10.27)$$

формула ўринли бўлади (64-чизма).

Мисол. Ушбу $f_1(x) = \sqrt{2px}$, $f_2(x) = \frac{1}{2p}x^2$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини топинг (65- чизма).



65- чизма



66- чизма

Изланган юза $y = \sqrt{2px}$ ва $y = \frac{1}{2p}x^2$, $p > 0$ параболалар билан чегараланган. Шу параболалар $(0, 0)$ ва $(2p, 2p)$ нүкталарда кесишиди. Демак, изланган юза $x = 0$, $x = 2p$ чиқалар билан чегараланган. Шунинг учун (10.27) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$Q = \int_0^{2p} \left[\sqrt{2px} - \frac{1}{2p}x^2 \right] dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{2p} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6p} \right]_0^{2p} = \frac{4}{3}p^3.$$

10.1- эслатма. Юқоридаги (10.26) формула, $[a, b]$ оралиқда $f(x) \geq 0$ бўлганда $aABb$ эгри чиқиқли трапециянинг юзини ифодалашини кўрдик. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлиб, унда ишора сақламаса, (10.26) формуладаги интеграл эгри чиқиқли трапециялар юзаларининг йиғиндинисидан иборат бўлади. Бунда Ox ўқининг юқорисидаги юза мусбат ишора билан, Ox ўқининг пастидаги юза эса манфий ишора билан олинади.

Масалан, агар $a < \alpha < \beta < b$ бўлиб, $\forall x \in [a, \alpha]$ лар учун $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$ лар учун $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [\beta, b]$ лар учун $f(x) \geq 0$ бўлса, у ҳолда $[a, b]$ оралиқда $f(x)$ функция графиги билан чегараланган шаклнинг юзи $Q = \int_a^\alpha f(x) dx - \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^b f(x) dx$ кўринишда ёзилади (66- чизма).

Масалан, Ox ўқи ҳамда синусонданинг $0 \leq x \leq 2\pi$ оралиқдаги қисми билан чегараланган шаклнинг юзини топайлик. $0 \leq x \leq \pi$ оралиқда $\sin x \geq 0$, $\pi \leq x \leq 2\pi$ оралиқда эса $\sin x \leq 0$ эканини эътиборга олиб изланётган шаклнинг юзини топамиз:

$$Q = \int_0^\pi \sin x dx + \left(- \int_\pi^{2\pi} \sin x dx \right) = (-\cos x) \Big|_0^\pi - (-\cos x) \Big|_\pi^{2\pi} = 4$$

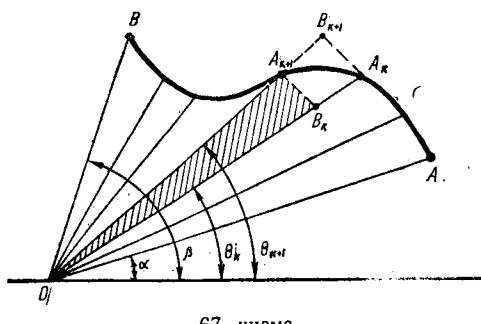
(кв. бирлик).

10.2- эслатма. Текис шаклнинг юзини қўйидагича ҳам таърифлашумкин.

Текисликда (Q) шакл берилган (61- чизмага қаранг). $\{A_n\}$ шу шакл ичига қизилган кўпбурчаклар кетма-кетлигидек, $\{B_n\}$ эса (Q) шакл-

ни ўз ичига олган күпбұрчаклар кетма-кетлиги бўлсин. A_n ҳамда B_n күпбұрчаклар юзалари мос равишида S_{A_n} ва S_{B_n} бўлиб, улардан тузылған кетма-кетликлар эса $\{S_{A_n}\}$ ҳамда $\{S_{B_n}\}$ бўлсин. Агар $n \rightarrow \infty$ да $\{S_{A_n}\}$ ҳамда $\{S_{B_n}\}$ кетма-кетликлар чекли лимитга эга бўлиб, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{B_n}$ тенглик ўринли бўлса, (Q) шакл юзага эга дейлади ҳамда бу юза учун ушбу

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{B_n}$$



67- чизма

формула ўринли бўлади. Бунда Q шаклнинг юзи деб аталади.

Қутб координата системасида ушбу $\rho = \rho(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$) функция тасвирлаган \bar{AB} ёй ҳамда OA ва OB — радиус-векторлар билан чөгараланган шакл — эгри чизиқли секторни қарайлик (67- чизма). Бунда $\rho(\theta)$ функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз ҳамда $\forall \theta \in [\alpha, \beta]$ лар учун $\rho(\theta) \geq 0$. Энди $[\alpha, \beta]$ оралиқнинг ихтиёрий

$$P = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n\} \quad (\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \beta)$$

бўлинишини оламиз. O нуқтадан ҳар бир қутб бурчаги θ_k га мос OA_k радиус-вектор ўтказамиз. Натижада OAB — эгри чизиқли сектор $OA_k A_{k+1}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$; $A_0 = A$, $A_n = B$) эгри чизиқли секторчаларга ажралади.

$\rho = \rho(\theta)$ функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун бу оралиқнинг ҳар бир $[\theta_k, \theta_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) қисмida

$$m_k = \inf \{\rho(\theta)\} \quad (\theta_k \leq \theta \leq \theta_{k+1}),$$

$$M_k = \sup \{\rho(\theta)\} \quad (\theta_k \leq \theta \leq \theta_{k+1})$$

мавжуд.

Энди $OA_k A_{k+1}$ эгри чизиқли сектор ичига ён томони m_k га тенг бўлган тенг ёнли $OA_{k+1} B_k$ учбурчакни, $OA_k A_{k+1}$ ни ўз ичига олган ён томони M_k га тенг бўлган $OB_{k+1} A_k$ учбурчакни чизамиз. Бу учбурчакларнинг юзи мос равишида

$$\frac{1}{2} m_k^2 \sin \Delta \theta_k, \quad \frac{1}{2} M_k^2 \cdot \sin \Delta \theta_k \quad (\Delta \theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k)$$

формулалар билан аниқланади. Қуйидаги

$$S_{A_n} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \sin \Delta \theta_k, \quad S_{B_n} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \sin \Delta \theta_k \quad (10.28)$$

йиғиндилар эса, мос равища OAB әгри чизиқли сектор ичига чизилған күпбурчак юзини ҳамда OAB ни ўз ичига олған күпбурчак юзини ифодалайды. Бу S_{A_n} ва S_{B_n} лар $\rho = \rho(\theta)$ функцияга ҳамда $[\alpha, \beta]$ оралиқнинг бўлинишларига боғлиқ:

$$S_{A_n} = S_{A_n}^{\rho} (\rho), \quad S_{B_n} = S_{B_n}^{\rho} (\rho).$$

Юқоридаги (10.28) йиғиндиларни қўйидагича

$$\begin{aligned} S_{A_n} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \cdot \Delta \theta_k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \Delta \theta_k \left(\frac{\sin \Delta \theta_k}{\Delta \theta_k} - 1 \right), \\ S_{B_n} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \Delta \theta_k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \Delta \theta_k \left(\frac{\sin \Delta \theta_k}{\Delta \theta_k} - 1 \right) \end{aligned} \quad (10.29)$$

ёзиб оламиз. Бу тенгликларнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчилар $\frac{1}{2} \rho^2 (\theta)$ функциянинг $[\alpha, \beta]$ оралиқдаги Дарбу йиғиндилариdir. 9.2-леммага кўра $\lambda_p \rightarrow 0$ да бу йиғиндилар қўйи ҳамда юқори интегралларга интилади:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \cdot \Delta \theta_k &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 (\theta) d\theta, \\ \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \Delta \theta_k &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 (\theta) d\theta. \end{aligned}$$

(10.29) тенгликларнинг ўнг томонидаги иккинчи қўшилувчилар учун

$$\lambda_p \rightarrow 0 \text{ да } \frac{\sin \Delta \theta_k}{\Delta \theta_k} - 1 \rightarrow 0,$$

яъни

$$\left| \frac{\sin \Delta \theta_k}{\Delta \theta_k} - 1 \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда қўйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \Delta \theta_k \left(\frac{\sin \Delta \theta_k}{\Delta \theta_k} - 1 \right) \right| &< \varepsilon \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \cdot \Delta \theta_k \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2} \varepsilon \cdot M^2 (\beta - \alpha) \quad (M = \sup \rho (\theta); \quad \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta). \end{aligned}$$

Бундан

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \cdot \Delta \theta_k \left(\frac{\sin \Delta \theta_k}{\Delta \theta_k} - 1 \right) = 0 \quad (10.30)$$

бўлиши келиб чиқади. Худди шунга ўхшаш

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \cdot \Delta \theta_k \left(\frac{\sin \Delta \theta_k}{\Delta \theta_k} - 1 \right) = 0 \quad (10.31)$$

бўлади.

Энди $\lambda_p \rightarrow 0$ да (10.29) тенгликларда лимитга ўтсак, у ҳолда (10.29) ва (10.30), (10.31) муносабатларга кўра ушбу

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} S_{A_n} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta, \quad \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} S_{B_n} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta \quad (10.32)$$

тенгликлар ҳосил бўлади.

$\rho = \rho(\theta)$ фуникция $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$ фуникция ҳам шу оралиқда узлуксиз, бинобарин $[\alpha, \beta]$ оралиқда интегралланувчи бўлади. Демак,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta.$$

Натижада (10.32) га кўра

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} S_{A_n} = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} S_{B_n} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса OAB секторнинг юзага эга экани ва унинг юзи учун ушбу

$$Q = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$$

формула ўринли бўлишини билдиради.

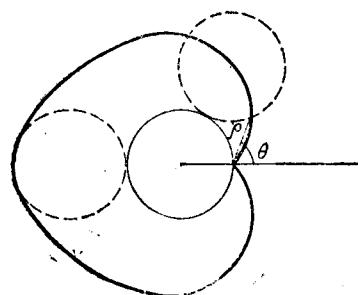
Мисол. Ушбу

$$\rho = \rho(\theta) = a(1 - \cos \theta) \quad (a = \text{const})$$

фуникция графиги билан чегараланган шаклнинг юзини топинг. Бу фуникция графиги кардиоидани ифодалайди. Маълумки, кардиоида —

— радиуси a га тенг бўлган айлананинг шу радиусли иккинчи қўзғалмас айлана бўйлаб ҳаракати (сирғанимасдан думалаши) натижасида биринчи айлана ихтиёрий нуқтасининг чизгани чизиридир (68-чизма). Қардиоида қутб ўқига нисбатан симметрик ўлгани сабабли юқори ярим текисликдаги шаклнинг юзини топиб, сўнgra уни 2 га кўпайтирасак, изданаётган юза келиб чиқади.

θ ўзгарувчи $[0, \pi]$ оралиқда ўзгаргандаги ρ радиус-вектор кардиоиданинг



68- чизма

юқори ярим текисликдаги қисмини чизади. Шунинг учун

$$Q = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \rho^2(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} a^2 (1 - \cos \theta)^2 d\theta = a^2 \int_0^{\pi} \left[\frac{3}{2} - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right] d\theta = a^2 \left[\frac{3}{2} \theta - 2 \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi} = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

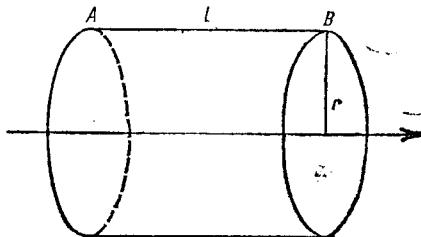
Демак,

$$Q = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

3- §. Айланма сирт юзаси ва унинг аниқ интеграл орқали ифодаланиши

Маълумки, l узунликка эга бўлган AB кесмани унга параллел ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт *цилиндрик сирт* деб аталади (69-чизма). Бу сиртнинг юзаси (цилиндрнинг ён сирти) $S = 2\pi r l$ формула билан ҳисобланади. Бунда r — цилиндр асосининг радиуси.

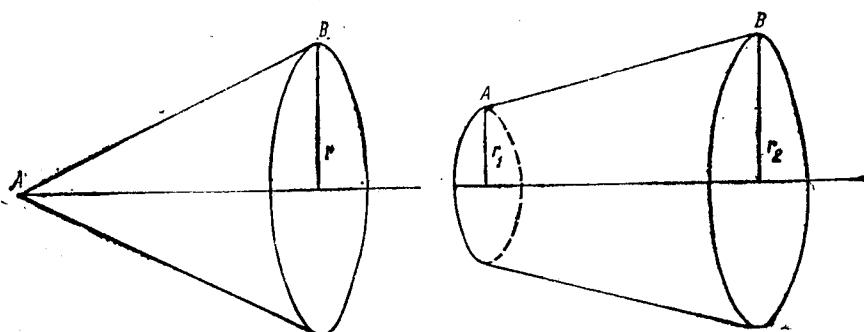
Ўққа параллел бўлмаган AB кесмани шу ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт *конус* (*кесик конус*) *сирт* деб аталади (70-чизма, а) конус сирт, б) кесик конус сирт). Бу конус (*кесик конус*) сиртининг юзаси (ён сирти)



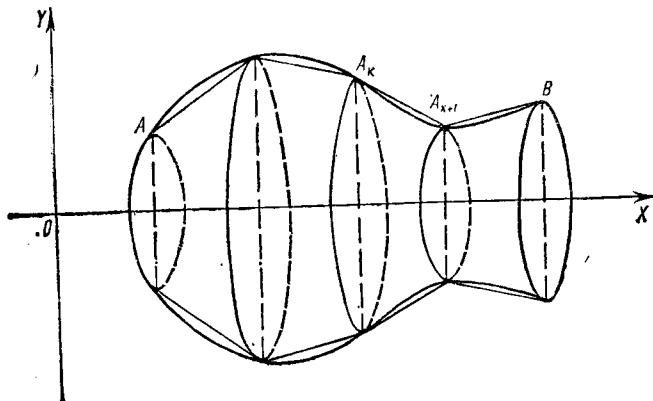
69- чизма

$$S = \pi r l \quad (S = 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} l)$$

формула билан ҳисобланади. Бунда r — конус асосининг радиуси (r_1 , r_2 кесик конус асосларининг радиуси).



70- чизма



71- чизма

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланған ва узлуксиз бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \geq 0$ бўлсин. Шу функция графигининг $(a, f(a))$ ва $(b, f(b))$ нуқталар орасидаги бўлагини \overline{AB} ёй деб юритамиз. Шу \overline{AB} ёйни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт *айланма сирт* деб аталади (71- чизма). Бу сиртнинг юзасини аниқлаб, унинг аниқ интеграл орқали ифодаланишини кўрсатамиз. $[a, b]$ оралиқнинг ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

бўлинишини олайлик. P бўлинишнинг ҳар бир x_k ($k = 0, 1, \dots, n$) бўлувчи нуқталари орқали Oy ўқига параллел тўғри чизиқлар ўтказиб, уларнинг \overline{AB} ёйи билан кесишган нуқталарини $A_k(x_k, f(x_k))$ билан белгилайлик. Бу $A_k(x_k, f(x_k))$ ($k = 0, 1, \dots, n$), $A_0 = A$, $A_n = B$ нуқталарни ўзаро тўғри чизиқ кесмалари билан бирлаштириб, \overline{AB} ёйига \bar{L} синиқ чизиқ чизамиз.

\overline{AB} ёйни Ox ўқи атрофида айлантириш билан бирга синиқ чизиқни ҳам шу ўқ атрофида айлантирамиз. Натижада кесик конус сиртларидан ташкил топган сирт ҳосил бўлади. Бу сиртнинг юзаси ушбу

$$\begin{aligned} q &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\pi f(x_k) + 2\pi f(x_{k+1})}{2} \sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2 + [f(x_{k+1})-f(x_k)]^2} = \\ &= 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2 + [f(x_{k+1})-f(x_k)]^2} \end{aligned} \quad (10.33)$$

формула билан ифодаланади.

P бўлинишнинг диаметри $\lambda_p \rightarrow 0$ да \overline{AB} ёйига чизилган \bar{L} синиқ чизиқ периметри L (шу бобнинг 1- § да кўрсатилганига кўра) \overline{AB} ёйи узунлигига интилади. Буни эътиборга олиб, $\lambda_p \rightarrow 0$ да \bar{L} синиқ чизиқни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган (кесик

конус сиртларидан ташкил топган) сиртнинг юзаси— q нинг лимитини, биз излаётган айланма сиртнинг юзаси деб қараш табиий. Энди айланма сирт юзасини аниқ интеграл орқали ифодалаш мақсадида қаралаётган $f(x)$ функцияни $[a, b]$ оралиқда узлуксиз $f'(x)$ ҳосила-га эга бўлсин деб қараймиз. Аввал $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлганни учун $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқда ҳам узлуксиз бўлиб, унда шундай ξ_k нуқта топиладики,

$$\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} = f(\xi_k) \quad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

тенглик ўринли бўлади. Бу бир томондан. Иккинчи томондан, Лагранж теоремасига кўра $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқда шундай τ_k нуқта топиладики,

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\tau_k)(x_{k+1} - x_k) \quad \tau_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

тенглик ҳам ўринли бўлади. Натижада (10.33) муносабат ушбу

$$\begin{aligned} q &= 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + f'^2(\tau_k)(x_{k+1} - x_k)^2} = \\ &= 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\tau_k)} \cdot \Delta x_k \quad (\Delta x_k = x_{k+1} - x_k) \end{aligned}$$

кўринишни олади. Кейинги тенгликни қўйидагича

$$\begin{aligned} q &= 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k + \\ &+ 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \left[\sqrt{1 + f'^2(\tau_k)} - \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \right] \Delta x_k \end{aligned}$$

ёзib оламиз ва (10.5) тенгсизликдан фойдаланиб унинг иккинчи ҳадини баҳолаймиз:

$$\begin{aligned} \left| 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \left[\sqrt{1 + f'^2(\tau_k)} - \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \right] \Delta x_k \right| &\leqslant 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)| \times \\ &\times \left| \sqrt{1 + f'^2(\tau_k)} - \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \right| \Delta x_k \leqslant 2\pi M \sum_{k=0}^{n-1} |f'(\tau_k) - f'(\xi_k)| \cdot \Delta x_k, \end{aligned}$$

бунда $M = \max |f(x)| \quad (a \leq x \leq b)$.

Шартга кўра $f'(x)$ ҳосила $[a, b]$ оралиқда узлуксиз. У ҳолда Кантор теоремасининг натижасига асосан, $\forall \epsilon > 0$ олингандা ҳам $\frac{\epsilon}{2\pi M(b-a)}$ сонга кўра шундай $\delta > 0$ сон топиладики, диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай бўлиниш учун ушбу

$$|f'(\tau_k) - f'(\xi_k)| < \frac{\epsilon}{2\pi M(b-a)}$$

төңгизлилік ўринли бўлади. У ҳолда юқоридаги төңгизлилік қўйида-
гича ёзилади:

$$\left| 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) [\sqrt{1+f'^2(\tau_k)} - \sqrt{1+f'^2(\xi_k)}] \Delta x_k \right| < \\ < 2\pi M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\epsilon}{2\pi M(b-a)} \Delta x_k = \epsilon.$$

Бундан

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) [\sqrt{1+f'^2(\tau_k)} - \sqrt{1+f'^2(\xi_k)}] \Delta x_k = 0$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди $\lambda_p \rightarrow 0$ да (10.33) тенгликда лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} q = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \sqrt{1+f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k.$$

Демак, айланма сиртнинг юзаси учун ушбу

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+f'^2(x)} dx \quad (10.34)$$

формула ўринли.

Мисол. $[0, a]$ ($a > 0$) оралиқда

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \quad (10.35)$$

занжир чизиқни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма сиртнинг юзасини топинг.

Аввало (10.35) функцияниң ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

Сўнгра (10.34) формуладан фойдаланиб, изланётган айланма сиртнинг юзасини топамиз:

$$Q = 2\pi \int_0^a \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)^2} dx = \frac{\pi a}{2} \int_0^a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2 dx = \\ = \frac{\pi a}{2} \int_0^a \left[e^{2\frac{x}{a}} + 2 + e^{-2\frac{x}{a}} \right] dx = \frac{\pi a}{2} \left[\frac{a}{2} e^{2\frac{x}{a}} + 2x - \frac{a}{2} e^{-2\frac{x}{a}} \right]_0^a = \\ = \frac{\pi a^2}{4} (e^2 - e^{-2} + 4).$$

4- §. Ўзгарувчи кучнинг бажарган иши ва унинг аниқ интеграл орқали ифодаланиши

Фараз қиласилик, бирор жисм Ox ўқи бўйлаб, F куч таъсири остида ҳаракат қилаётган бўлсин. Бунда F куч жисмнинг Ox ўқидаги ҳолатига боғлиқ. Шу куч учун $F = F(x)$ ва унинг йўналиши ҳаракат йўналиши билан устма-уст тушсин, дейлик. Бу куч таъсирида жисмни a нуқтадан b нуқтага ўтказишда бажарилган ишни топиш масаласи юзага келади. Маълумки, $F = F(x)$ куч $[a, b]$ оралиқда $F(x) = C$, $C = \text{const}$ бўлса, жисмни a нуқтадан b нуқтага ўтказишда бажарилган иш $A = C \cdot (b - a)$ формула билан ифодаланади.

$F = F(x)$ куч $[a, b]$ оралиқда x ўзгарувчининг ихтиёрий узлуксиз функцияси бўлсин. У ҳолда $[a, b]$ оралиқнинг ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

бўлинишини олиб, бу бўлинишнинг ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n - 1$) оралиғида ихтиёрий ξ_k ($\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$) нуқта оламиш.

Агар ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n - 1$) оралиқда жисмга таъсири этаётган $F(x)$ кучни ўзгармас ва $F(\xi_k)$ га тенг деб олсак, у ҳолда $[x_k, x_{k+1}]$ оралиғида бажарилган иш тахминан $F(\xi_k) \times (x_{k+1} - x_k)$ формула билан, $[a, b]$ оралиқда бажарилган иш эса, тахминан

$$A \approx \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \cdot \Delta x_k \quad (10.36)$$

формула билан ифодаланади.

$F = F(x)$ куч таъсирида жисмни a нуқтадан b нуқтага ўтказишда бажарилган ишни ифодаловчи (10.36) формула тақрибийдир.

$$\text{Равшанки, } \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

йигинди $F = F(x)$ функцияга боғлиқ бўлиши билан бирга у $[a, b]$ оралиқнинг бўлинишига ҳамда ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқда олинган ξ_k нуқталарга боғлиқ.

Энди P бўлинишнинг диаметри λ_p нолга интила борсин. У ҳолда юқоридаги йигиндининг қиймати биз излаётган иш миқдорини тобора аниқроқ ифодалайди. Демак, $\lambda_p \rightarrow 0$ да юқоридаги йигиндининг чекли лимитини *бажарилган иш* деб айтиш табиийдир.

Агар $\lambda_p \rightarrow 0$ да (10.36) йигинди $[a, b]$ оралиқнинг бўлиниш услуга ҳамда ξ_k , нуқтани танлаб олишга боғлиқ бўлмаган ҳолда чекли A сонга интилса, бу A сон ўзгарувчи $F(x)$ кучнинг $[a, b]$ оралиқдаги бажарган иши деб аталади. Демак,

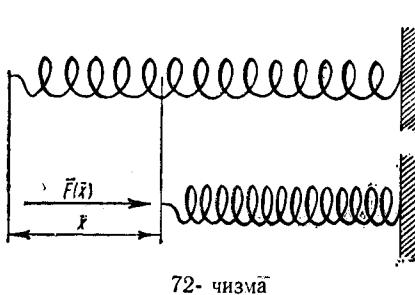
$$A := \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

Юқоридаги (10.36) йиғинди $F(x)$ функциянынг $[a, b]$ оралиқдаги интеграл йиғиндиси эканини пайқаш қийин әмас. Қаралаёттан $F(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун у шу оралиқда интегралланувчи бўлади. Демак,

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b F(x) dx.$$

Шундай қилиб, ўзгарувчи $F(x)$ кучнинг $[a, b]$ оралиқдаги бажартан иши

$$A = \int_a^b F(x) dx \quad (10.37)$$



формула билан ифодаланади.

Мисол. Винтсимон пружинанинг бир учи мустаҳкамланган, иккинчи учига эса $F = F(x)$ куч таъсир этиб, пружина қисилган дейлик (72-чизма). Агар пружинанинг қисилиши унга таъсир этайдан $F(x)$ кучга пропорционал бўлса, пружинани a бирликка қисиши учун $F(x)$ кучнинг бажарган ишини топинг.

Агар $F(x)$ куч таъсирида пружинанинг қисилиши миқдорини x орқали белгиласак, у ҳолда

$$F(x) = kx$$

бўлади, бунда k — пропорционаллик коэффициенти (қисилиш коэффициенти). Юқоридаги формуладан фойдаланиб бажарилган ишни ҳисоблаймиз:

$$A = \int_0^a kx dx = k \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = \frac{ka^2}{2}.$$

5- §. Инерция моменти

Механикада инерция моменти тушунчаси муҳим бўлиб, у масалаларни ечишда кўп қўлланилади.

Текисликда m массага эга бўлган A моддий нуқта берилган бўлиб, бу нуқтадан бирор l ўққача (ёки O нуқтагача) бўлган масофа r га teng бўлсин.

Маълумки, ушбу $I = mr^2$ миқдор A моддий нуқтанинг l ўққа (O нуқтага) нисбатан *инерция моменти* деб аталади.

Масалан, текисликдаги m массага эга бўлган $A = A(x, y)$ моддий нуқтанинг координата ўқларига ҳамда координата бошига нисбатан *инерция моментлари* мос равишда

$$I'_x = mx^2, \quad I'_y = my^2, \quad I'_0 = m(x^2 + y^2)$$

формулалар билан ифодаланади.

Энди текисликда ҳар бирі мос равишда m_0, m_1, \dots, m_{n-1} массага әга бўлган A_0, A_1, \dots, A_{n-1} моддий нуқталар системаси берилган бўлсин. Бу системанинг бирор l ўққа (O нуқтага) нисбатан инерция моменти ҳар бир нуқтанинг шу l ўққа (O нуқтага) нисбатан инерция моментлари йиғиндиси: $I_n = \sum_{k=0}^{n-1} m_k r_k^2$ сифатида таърифланади, бунда r_k миқдор A_k нуқтадан l ўққача (O нуқтагача) бўлган масофа.

Масалан, текисликда ҳар бирі мос равишда m_0, m_1, \dots, m_{n-1} массага әга бўлган $A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), \dots, A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ моддий нуқталар системасининг координата ўқларига ҳамда координата бошига нисбатан инерция моментлари мос равишда

$$\begin{aligned} I_x^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot x_k^2, & I_y^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot y_k^2, \\ I_0^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{aligned}$$

формулалар билан ифодаланади.

Бирор $y = f(x)$ әгри чизиқ ёйи бўйича масса тарқатилган бўлсин. Бу массали әгри чизиқ ёйининг координата ўқлари ҳамда координата бошига нисбатан инерция моментини аниқлаймиз.

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган, узлуксиз ҳамда узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага әга бўлсин. Бу функция графиги \overline{AB} ёйини тасвирласин, дейлик. \overline{AB} ёйи бўйича зичлиги ўзгармас ва 1 га teng бўлган масса тарқатилган. Равшанки, бу ҳолда масса ёй узунлигига teng ва (10. 9) формулага кўра

$$m = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (10.38)$$

бўлади.

$[a, b]$ оралиқнинг ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

бўлинишини олайлик. Бу бўлиниш \overline{AB} ёйни $A_k(x_k, f(x_k))$ ($k=0, 1, \dots, n-1$, $A_0 = A_1, A_{n-1} = B$) нуқталар билан n та $\overbrace{A_k A_{k+1}}$ бўлакка ажратади. Бунда $\overbrace{A_k A_{k+1}}$ бўлакнинг массаси (10. 38) формулага кўра топилади:

$$m_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Үрта қиймат ҳақидаги теоремага ассоан шундай ξ_k ($\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$) нүқта топиладыки,

$$m_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k \quad (10.39)$$

бұлади, бунда $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

Юқоридаги мұносабаттарға мұвоғиқ $(\xi_k, f(\xi_k))$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) моддий нүктанинг координата ўқларига ҳамда координата бошига нисбатан инерция моментлари мос равища

$$\begin{aligned} I'_{xk} &= \xi_k^2 \cdot m_k = \xi_k^2 \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k \\ I'_{yk} &= f^2(\xi_k) \cdot m_k = f^2(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k \\ I'_0 &= (\xi_k^2 + f^2(\xi_k)) m_k = (\xi_k^2 + f^2(\xi_k)) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k \end{aligned}$$

формулалар билан $(\xi_0, f(\xi_0)), (\xi_1, f(\xi_1)), \dots, (\xi_{n-1}, f(\xi_{n-1}))$ моддий нүқталар системасининг инерция моментлари әзә мос равища

$$\begin{aligned} I_x^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2 \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k, \\ I_y^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k, \\ I_0^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n-1} (\xi_k^2 + f^2(\xi_k)) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k \end{aligned} \quad (10.40)$$

формулалар билан ифодаланади.

Энди P бўлинишнинг диаметри λ_p нолга интила борсин. Унда ҳар бир $\overline{A_k A_{k+1}}$ ёйнинг узунлиги ҳам нолга интила бориб, $\overline{A_k A_{k+1}}$ ёйи әзә нүқта га айлана боради. Бу ҳол табиий равища $\lambda_p \rightarrow 0$ да (10.40) формулалар билан ифодаланган $I_x^{(n)}, I_y^{(n)}, I_0^{(n)}$ йигиндилярнинг лимитини массага әга бўлган моддий эгри чизиқ ёйининг координата ўқлари ҳамда координата бошига нисбатан инерция моменти деб қарашга олиб келади. $\lambda_p \rightarrow 0$ да $I_x^{(n)}, I_y^{(n)}, I_0^{(n)}$ йигиндилярнинг лимити моддий эгри чизиқ ёйининг координата ўқларига ҳамда координата бошига нисбатан инерция моменти деб аталади ва улар мос равища I_x, I_y, I_0 каби белгиланаади.

Демак,

$$I_x = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} I_x^{(n)} = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2 \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k,$$

$$I_y = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} I_y^{(n)} = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k,$$

$$I_0 = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} I_0^{(n)} = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} [\xi_k^2 + f^2(\xi_k)] \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k.$$

(10.40) муносабадаги йиғиндилярни $[a, b]$ оралиқда мос равища қуядында

$$x^2 \sqrt{1 + f'^2(x)}, \quad f^2(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}, \quad [x^2 + f^2(x)] \sqrt{1 + f'^2(x)}$$

функцияларнинг интеграл йиғиндилари эканлигини пайқаш қийин әмас.

Шартта күра $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз ҳамда узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага әга. Шунинг учун юқоридаги функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлади. Демак,

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2 \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k = \int_a^b f^2(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} [\xi_k^2 + f^2(\xi_k)] \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k = \int_a^b [x^2 + f^2(x)] \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Натижада ушбу

$$I_x = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$

$$I_y = \int_a^b f^2(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$

$$I_0 = \int_a^b [x^2 + f^2(x)] \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

формулаларга әга бўламиш.

СОНЛИ ҚАТОРЛАР

Маълумки, прогрессиялар математикада алоҳида ўрин тутади. Айниқса, прогрессия ҳадларининг йиғиндиси билан боғлиқ масалалар кўп учрайди.

Одатда, ушбу

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots \quad (11.1)$$

кетма-кетлик $a \neq 0$, $q \neq 0$ бўлганда геометрик прогрессия деб аталади (a — прогрессиянинг биринчи ҳади, q — прогрессия маҳражи, aq^{n-1} — прогрессиянинг умумий ҳади). (11.1) прогрессиянинг биринчи n та ҳадининг йиғиндиси қўйидаги

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \begin{cases} \frac{a - aq^n}{1 - q}, & \text{агар } q \neq 1, \\ na & \text{агар } q = 1 \end{cases}$$

формула билан ифодаланади. Бу S_n йиғиндига (11.1) прогрессиянинг n -ҳадидан кейинги ҳадларини бирин-кетин қўша борсак, ҳосил бўлган

$$S_{n+1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n,$$

$$S_{n+2} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n + aq^{n+1}$$

• • • • • • • • • • • • • • • • • • •

йиғиндилар берилган чексиз прогрессиянинг барча ҳадларининг йиғиндисини тобора яқин (аниқ) ифодалай боради дейиш табиийдир. Демак, $n \rightarrow \infty$ да S_n нинг лимитини чексиз прогрессиянинг барча ҳадлари йиғиндиси деб киритиш мумкин. Шундай қилиб, ушбу

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

«чексиз йиғинди» ни ўрганиш масаласи юзага келади. Бундай «чексиз йиғинди» қатор тушунчасига олиб келади.

Биз мазкур бобда, сонли қаторларни аниқроғи, уларнинг яқинлашиши, узоқлашиши, яқинлашиши аломатлари ҳамда яқинлашувчи қаторларнинг хоссаларини ўрганамиз.

1-§. Ассоций түшүнчалар

Ушбу

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (11.2)$$

хәқиций сонлар кетма-кетлиги берилган бўлсин.

11.1-таъриф. Қўйидаги

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (11.3)$$

ифода қатор (сонли қатор) деб аталади. (11.3) қаторни қисқача

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ каби белгиланади:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Юқоридаги (11.2) кетма-кетликнинг $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ элементлари қаторнинг ҳадлари дейилади, a_n эса қаторнинг умумий ҳади дейилади. (11.3) қаторнинг ҳадларидан қўйидаги

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1, \\ A_2 &= a_1 + a_2, \\ A_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\dots \dots \dots \dots \\ A_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

йигиндиларни тузамиз. Бу йигиндилар қаторнинг қисмий йигиндилари дейилади.

Демак, (11.3) қатор берилган ҳолда ҳар доим бу қаторнинг қисмий йигиндиларидан иборат ушбу

$$\{A_n\} : A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$$

сонлар кетма-кетлигини ҳосил қилиш мумкин.

11.2-таъриф. Агар $n \rightarrow \infty$ да (11.3) қаторнинг қисмий йигиндиларидан иборат $\{A_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

бўлса, у ҳолда қатор яқинлашувчи дейилади. Бу лимитнинг қиймати A сон (11.3) қаторнинг йигиндиси дейилади ва қўйидагича ёзилади:

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

11.3-таъриф. Агар $n \rightarrow \infty$ да (11.3) қаторнинг қисмий йигиндиларидан иборат $\{A_n\}$ кетма-кетликнинг лимити чексиз бўлса, ёки бу лимит мавжуд бўлмаса, у ҳолда (11.3) қатор узоқлашувчи дейилади.

Мисоллар.

1. Үшбу

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \dots$$

қаторни қарайлек. Бу қаторнинг қисмий йигиндисини ҳисоблаб, унинг лимитини топамиз:

$$\begin{aligned} A_n &= 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \\ &+ \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 2. \end{aligned}$$

Демак, бөрилган қатор яқинлашувчи ва унинг йигиндиси 2 га тең:

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \dots = 2.$$

2. Қўйидаги

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

қатор узоқлашувчи, чунки бу қаторнинг қисмий йигиндиси

$$A_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty.$$

3. Қўйидаги

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

қатор ҳам узоқлашувчи, чунки бу қаторнинг қисмий йигиндиси

$$A_n = 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} = \begin{cases} 0, \text{ агар } n - \text{жуфт сон бўлса,} \\ 1, \text{ агар } n - \text{тоқ сон бўлса,} \end{cases}$$

бўлиб, $\{A_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас.

4. Геометрик прогрессия $a, aq, \dots, aq^{n-1}, \dots$, ҳадларидан тузиленган

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

қаторни қарайлек. Одатда бу қатор геометрик қатор дейилади. Бу қаторнинг қисмий йигиндисини ёзамиш:

$$A_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Агар $|q| < 1$ бўлса,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{a}{1 - q}$$

бўлади. Демак, бу ҳолда геометрик қатор яқинлашувчи ва унинг йигиндиси $\frac{a}{1 - q}$ сонга теңг.

Агар $q > 1$ бўлса, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty$ бўлиб, қатор узоқлашувчи бўлади.

Агар $q = 1$ бўлса, $A_n = na \rightarrow \infty$ бўлиб, қатор узоқлашувчи, $q \leq -1$ бўлганда эса $\{A_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас. Демак, бу ҳолда ҳам қатор узоқлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, геометрик қатор $|q| < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $|q| > 1$ ва $q = \pm 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

5. Қўйидаги

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (11.4)$$

қаторни қарайлик. Бу қаторни гармоник қатор деб аталади. (Маълумки, агар $0 \neq a \in \mathbb{R}$ ва $0 \neq b \in \mathbb{R}$ сонлар учун

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

тenglik ўринли бўлса, сон a ва b сонларнинг ўрта гармоник қиймати дейилади. Берилган (11.4) қаторнинг иккинчи ҳадидан бошлаб, ҳар бир ҳади ўзига бевосита қўшни бўлган икки ҳадининг ўрта гармоник қийматини ташкил этади. (11.4) қаторнинг гармоник деб аталиши ҳам шундан келиб чиққан. (11.4) қаторнинг биринчи 2^k та ($k \in \mathbb{N}$) ҳадидан тузилган

$$A_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k}$$

қисмий йифиндисини олиб, уни қўйидагича

$$A_{2^k} = \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k} \right)$$

ёзига оламиз. Энди ушбу

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} = 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2},$$

...

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k} > \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k} = 2^{k-1} \times$$

$$\times \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$$

тengsizliklарни эътиборга олсак, унда

$$A_{2^k} > 1 + k \cdot \frac{1}{2}$$

тенгсизлик ўринли бўлиши келиб чиқади. Равшанки, $\{A_{2k}\}$ кетма-кетлик ўсувчи. Демак, $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{2k} = \infty$. Шундай қилиб, гармоник қатор узоқлашувчи.

6. Ушбу

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots \quad (11.5)$$

қаторни қарайлик. Бу қаторнинг қисмий йифиндисини ёзамиш:

$$A_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Шу йифиндининг $n \rightarrow \infty$ да лимитини топиш учун (6.57) формулани желтирамиз ($x > -1$ да):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

Бунда $0 \leq x \leq 1$ учун

$$|r_n(x)| < \frac{1}{n+1}$$

тенгсизлик ўринли (6-боб, 7-§ ининг 6-п. га қаранг). Юқоридаги формулада $x = 1$ деб топамиз:

$$\ln 2 = A_n + r_n(1). \quad (1)$$

Натижада ушбу

$$|A_n - \ln 2| = |r_n(1)| < \frac{1}{n+r}$$

тенгсизликка қеламиз. Ундан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \ln 2$$

тенглик келиб чиқади. Демак, (11.5) қатор яқинлашувчи ва унинг йифиндиси $\ln 2$ га тенг.

Ушбу параграфнинг охирида қаторнинг қолдиги тушучасини желтирамиз. (11.3) қаторнинг биринчи m та ҳадини ташласак, унда

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \quad (11.6)$$

қатор ҳосил бўлади. (11.6) қатор (11.3) қаторнинг (m - ҳадидан кейинги) қолдиги дейилади.

2-§. Яқинлашувчи қаторлар ҳақида теоремалар

Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (11.3)$$

қатор берилган бўлсин.

11.1-теорема. Агар (11.3) қатор яқинлашувчи бўлса, унинг исталган (11.6) қолдиги ҳам яқинлашувчи бўлади ва аксинча, (11.6) қолдигининг яқинлашувчи бўлишидан берилган (11.3) қаторнинг яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.

Исбот. (11.3) қатор берилган бўлсин. Бирор m -натурал сонни тайинлаб, (11.6) қаторнинг қисмий йифиндисини \overline{A}_k билан белгилайлик:

$$\overline{A}_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k}.$$

Равшанки,

$$\overline{A}_k = A_{m+k} - A_m, \quad (11.7)$$

$$A_n = A_m + \overline{A}_{n-m} \quad (n > m) \quad (11.7')$$

бўлади, бунда A_m берилган (11.3) қаторнинг қисмий йифиндиси. (11.3) қатор яқинлашувчи бўлсин. Таърифга кўра

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_{m+k} = A \quad (A \text{ — чекли сон})$$

бўлади. $k \rightarrow \infty$ да (11.7) тенгликда лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{A}_k = A - A_m.$$

Бу эса (11.6) қаторнинг яқинлашувчи эканини билдиради.

Энди (11.6) қатор яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда таърифга кўра

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{A}_k = \overline{A} \quad (\overline{A} \text{ — чекли сон})$$

бўлади. (11.7') тенгликда $n \rightarrow \infty$ да лимитга ўтсак, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{A} + A_m$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса (11.3) қаторнинг яқинлашувчи эканини билдиради. Теорема исботланди.

Шундай қилиб, қаторнинг дастлабки чекли сондаги ҳадларини ташлаб юбориш ёки қаторнинг бощига чекли сондаги янги ҳадларни кўшиш унинг яқинлашувчилиги характеристига таъсир қилмайди.

11.1-натижা. Агар (11.3) қатор яқинлашувчи бўлса, унинг қолдиги

$$r_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k} + \dots$$

$m \rightarrow \infty$ да нолга интилади.

Ҳақиқатан ҳам, (11.3) қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йифиндиси A бўлсин, бу ҳолда

$$A = A_m + r_m, \quad r_m = A - A_m$$

бўлиб,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = A - A = 0$$

бўлади.

11.2-теорема. Агар (11.3) қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йигиндиси A га тенг бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \dots + c \cdot a_n + \dots \quad (11.8)$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йигиндиси cA га тенг бўлади ($c \neq 0$ — n га боғлиқ бўлмаган ўзгармас сон).

Исбот. (11.8) қаторнинг қисмий йигиндисини A'_n билан белгиласак, у ҳолда

$$A'_n = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \dots + c \cdot a_n = c(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = cA_n$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A'_n = cA$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса (11.8) қаторнинг яқинлашувчи бўлишини ва унинг йигиндиси cA га тенг эканини билдиради. Теорема ислобтланди.

Бу теорема яқинлашувчи қаторларда ушбу

$$c(a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots) = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \dots + c \cdot a_n + \dots$$

муносабатнинг ўринли бўлишини ифодалайди.

11.3-теорема. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

қаторлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг йигиндиси мос равишда A ва B га тенг бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots \quad (11.9)$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йигиндиси $A + B$ га тенг бўлади.

Исбот. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторлар яқинлашувчи. Демак, бу қаторларнинг қисмий йигиндилари (A_n ва B_n лар) учун $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$ тенгликлар ўринли бўлади. (11.9) қаторнинг қисмий йигиндисини C_n билан белгилаб топамиз:

$$C_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = A_n + B_n.$$

Бундан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = A + B.$$

Кейинги тенгликтан теореманинг исботи келиб чиқади.

11.2-натижә. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n + l \cdot b_n)$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n + l \cdot b_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n + l \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

тенглик ўринли бўлади (бунда c, l — н га боғлиқ бўлмаган ўзгармас сонлар).

11.4-теорема. Агар (11.3) қатор яқинлашувчи бўлса, бу қаторнинг умумий ҳади $a_n \rightarrow \infty$ да нолга интилади.

Исбот. (11.3) қатор яқинлашувчи бўлсин, яъни $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$

(A — чекли сон).

Агар

$$a_n = A_n - A_{n-1}$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - A_{n-1}) = A - A = 0$$

бўлишини топамиз. Теорема исботланди.

Теоремадаги таасиүтнинг акси, умуман айтганда, ўринли эмас. Бошқача айтганда бирор қаторнинг умумий ҳади $n \rightarrow \infty$ да нолга интилишидан унинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Масалан, (11.4) гармоник қатор $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ нинг умумий ҳади $a_n = \frac{1}{n}$ бўлиб, у $n \rightarrow \infty$ да нолга интилади, аммо бу қатор узоқлашувчи.

Шундай қилиб, юқорида келтирилган 11.4-теорема қатор яқинлашувчи бўлишининг зарурӣ шартини ифодалайди.

Қаторлар тузилишига кўра умуман қуйидагича бўлади:

1) барча ҳадларининг ишоралари манфий бўлмаган қаторлар;

2) бирор ҳадидан бошлаб, кейинги барча ҳадларининг ишоралари манфий бўлмаган қаторлар;

3) барча ҳадларининг ишоралари манфий ёки бирор ҳадидан бошлаб, кейинги барча ҳадларининг ишоралари манфий бўлган қаторлар;

4) чексиз кўп манфий ишорали ва чексиз кўп мусбат ишорали ҳадлари бўлган қаторлар.

2) ва 3) ҳоллардаги қаторларнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчилигини ўрганиш юқорида келтирилган 11.1-теорема ва 11.2-теоремаларга кўра 1) ҳолдаги қаторларни ўрганишга келади.

3-§. Мусбат қаторлар ва уларнинг яқинлашувчи бўлиши

Қаторлар назариясининг муҳим масалаларидан бири қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчилигини аниқлашдан иборат.

Аслида берилган қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчилигини таърифга кўра текшириш мумкин. Бироқ қўпчилик ҳолларда қаторнинг қисмий йифиндиси A_n нинг ифодаси мураккаб бўлиб, $n \rightarrow \infty$ да унинг лимитга эга бўлишини (ёки бўлмаслигини) кўрсатиш қийин бўлади.

Шуни ҳам айтиш керакки, қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканини аниқлашда қаторнинг қисмий йифиндисининг қийматини ҳатто қаторнинг йифиндисини топиш зарурияти бўлмайди.

Натижада ўундай усуllibарни (аломатларни) тогиши масаласи юзага келадики, бу усуllibар ёрдамида, қатор йифиндисини ҳисобламай туриб, унинг яқинлашувчилигини аниқлаш мумкин бўлсин.

Аввало ҳадларининг ишоралари манфий бўлмаган қаторларни қараймиз.

1. Мусбат қаторларнинг яқинлашувчи бўлиши шарти. Бирор (11. 3) қатор берилган бўлсин.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (11.3)$$

Агар $a_n \geq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) бўлса, у ҳолда (11. 3) қатор мусбат ҳадли қатор ёки қисқача, мусбат қатор деб аталади.

11.5-теорема. Ушбу $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мусбат қатор яқинлашувчи бўлиши учун унинг қисмий йифиндилари кетма-кетлиги юқоридан чегараланган бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлсин. Таърифга кўра, қаторнинг қисмий йифиндиларидан т. зилган $\{A_n\}$ кетма-кетлик $n \rightarrow \infty$ да A га интилади: $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ (A — чекли сон). У ҳолда $\{A_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи кетма-кетликларнинг 2º хосасига кўра чегараланган, жумладан, у юқоридан чегараланган бўлади.

Етарлиги. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг қисмий йифиндилари кетма-кетлиги $\{A_n\}$ юқоридан чегараланган бўлсин.

Шу қаторнинг ҳар бир ҳади манфий бўлмагани учун

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geq A_n$$

тengsизлик ўринли. Демак, $\{A_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи. Шунинг учун 3. 7-теоремага (3-боб, 7-§) кўра $\{A_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга: $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$. Бу эса $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи эканини билдиради. Теорема исботланди.

Мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots \quad (11.10)$$

қаторни қарайлар. Одатда (11.10) қаторни *умумлашган гармоник қатор* дейилади. Бу қатор $\alpha > 1$ бўлганда яқинлашувчи эканлиги-ни кўрсатайлик. Унинг

$$A_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$$

қисмий йигиндилиридан тузилган $\{A_n\}$ кетма-кетлик ўсуви эканни равшан. Демак, $A_n < A_{2n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$). Шу билан бирга қуйида гига эгамиз:

$$\begin{aligned} A_{2n+1} &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^\alpha} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \right) + \dots + \\ &\quad + \left(\frac{1}{(2n)^\alpha} + \frac{1}{(2n+1)^\alpha} \right) < 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2}{4^\alpha} + \dots + \frac{2}{(2n)^\alpha} = \\ &= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \right) = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} A_n. \end{aligned}$$

Охирги икки муносабатдан ушбу

$$A_n < 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} A_n$$

тенгиззлик келиб чиқади. Бундан $\alpha > 1$ бўлганда

$$A_n < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (11.11)$$

тенгиззлик ҳосил бўлади. Бу эса $\{A_n\}$ кетма-кетликнинг юқоридан чегараланганлигини билдиради. 11.5-теоремага кўра берилган қатор яқинлашувчидир. Демак, умумлашган гармоник қатор $\alpha > 1$ бўлганда яқинлашувчи бўлади.

11.3-натижада. Мусбат қаторнинг қисмий йигиндилиридан иборат кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган бўлса, қатор узоқлашувчи бўлади.

2. Мусбат қаторларни таққослаш ҳақида теоремалар. Мусбат қаторнинг яқинлашувчилиги ёки узоқлашувчилигини билган ҳолда, ҳадлари бу қатор ҳадлари билан маълум муносабатда бўлган (таққосланган) иккинчи мусбат қаторнинг яқинлашувчилиги ёки узоқлашувчилигини аниқлаш мумкин. Улар қуйидаги теоремалар орқали ифодаланади.

Иккита мусбат $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор берилган бўлсин.

11.6-теорема. Агар n ниңг бирор n_0 ($n_0 \geq 1$) қийматидан бошилаб барча $n \geq n_0$ лар учун

$$a_n \leq b_n \quad (11.7)$$

төңгизсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлиши ёки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлишидан $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор ҳам узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади.

Исбот. Ушбу бобнинг 2-§ ида айтиб ўтдикки, қаторнинг яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлишига унинг дастлабки (чекли сондаги) ҳадларининг таъсири бўлмайди. Шу сабабли (11.7) төңгизсизлик $n_0 = -1$ дан бошлаб ўринли бўлсин деб қараш мумкин. Демак, $a_n \leq b_n$ ($n = 1, 2, \dots$) төңгизсизлик ўринли. У ҳолда берилган қаторларнинг қисмий йиғиндилари

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

учун ушбу

$$A_n \leq B_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (11.8)$$

төңгизсизлик ҳам ўринли бўлади.

Аввал $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда 11.5-теоремага кўра, $\{B_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлади, яъни бирор M учун $B_n \leq M$, ($n = 1, 2, \dots$). Бундан (11.8) төңгизсизликка асосан $A_n \leq M$ ($n = 1, 2, \dots$) төңгизсизлик ҳам ўринли экани келиб чиқади. Демак, $\{A_n\}$ кетма-кетлик ҳам юқоридан чегараланган. Яна ўша 11.5-теоремага кўра $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.

Энди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлсин. У ҳолда $\{A_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган. (11.18) төңгизсизликка асосан $\{B_n\}$ кетма-кетлик ҳам юқоридан чегараланмаган бўлади. Бундан эса $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади. Теорема исботланди.

Одатда, бирор мусбат қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчилигини аниқлашда, бу қатор ҳадларини төңгизсизликлар ёрдамида аввалдан яқинлашувчи ёки узоқлашувчилиги маълум қаторнинг ҳадлари билан боғланади, сўнгра исбот этилган теоремадан фойдаланиб берилган қатор ҳақида хулоса чиқарилади.

Мисол. Қуйидаги

$$\sin \frac{1}{1^2} + \sin \frac{1}{2^2} + \sin \frac{1}{3^2} + \dots + \sin \frac{1}{n^2} + \dots$$

қатор яқинлашувчилигини текширинг. Бу қатор ҳадлари учун

$$0 < \sin \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

тengsizlik ўринли бўлишини кўрсатиш қийин эмас. Демак, берилган қаторнинг ҳар бир ҳади яқинлашувчи $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ қаторнинг мос ҳадидан кичик. 11.6- теоремага асосан берилган қатор яқинлашувчи.

11.7 - теорема. Агар $n \rightarrow \infty$ да $\frac{a_n}{b_n}$ нисбат ушибу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \quad (0 \leq k \leq \infty)$$

лимитга эга бўлса, а) $k < \infty$ бўлганда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан

ишувчи $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлиши;

б) $k > 0$ бўлганда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлишидан

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг ҳам узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади.

Исбот. а) $k < \infty$ бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашувчи бўлсин. Лимит таърифига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0$ лар учун

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - k \right| < \varepsilon,$$

яъни

$$(k - \varepsilon) b_n < a_n < (k + \varepsilon) b_n \quad (11.9)$$

тengsizliklar ўринли бўлади.

Шартга кўра $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашувчи ҳамда $k + \varepsilon = \text{const}$ сон n га боғлиқ эмас. Шунинг учун $\sum_{n=1}^{\infty} (k + \varepsilon) b_n$ қатор ҳам яқинлашувчи. У ҳолда (11.9) tengsizlikdan ва 11.6- теоремадан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.

б) $k > 0$ бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор узоқлашувчи бўлсин. Агар $0 < k_1 < k$ олсак, у ҳолда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ лимит ўринли эканидан ва $k >$

$a_n > k_1$ бўлишидан, шундай $n_0 \in N$ сон топилади, $n > n_0$ бўлганда $\frac{a_n}{b_n} > k_1$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, $n > n_0$ бўлганда $b_n < \frac{1}{k_1} a_n$ тенгсизлик бажарилади. Бундан (11.6) - теоремага асосан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади. Теорема исботланди.

Бу теоремадан қўйидаги натижка келиб чиқади.
11.4 - натижада. Агар ушбу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$$

лимит ўринли бўлиб, $0 < k < \infty$ бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторлар бир вақтда ёки яқинлашувчи, ёки узоқлашувчи бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

қаторнинг яқинлашувчилигини текширинг. Бу қаторни гармоник қатор $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ билан таққослаймиз. Бу икки қатор умумий ҳадлари нисбатининг лимитини топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Демак, 11.4 - натижага кўра берилган қатор узоқлашувчи бўлади.

11.8 - теорема. Агар $n \in N$ нинг бирор n_0 қийматидан бошлиб барча $n \geq n_0$ лар учун

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (11.10)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг ҳам яқинлашувчи бўлиши ёки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлишидан $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг ҳам узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади.

Исбот. Аввал айтганимиздек (11.10) тенгсизлик $n = 1, 2, \dots$ қийматларда бажарилади деб ҳисоблаш мүмкін. Шундай қилиб, ($n = 1, 2, \dots$)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

тенгсизлик ўринли деб қараймиз. Үндан қуйидаги

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdots \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бундан ушбу

$$a_n \leq \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n \quad (11.11)$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Агар $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашувчи бўлса, унда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади. Үнда (11.11) тенгсизлик ва 11.6- теоремага асосан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.

(11.10) тенгсизлик ўринли бўлганда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлишида $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг ҳам узоқлашувчилиги келиб чиқиши шунга ўхшаш исботланади. Теорема исбот бўлди.

3. Мусбат қаторлар учун яқинлашувчилик аломатлари. Биз юқорида мусбат қаторларни таққослаш теоремаларини келтирдик. Гарчи бу теоремалар ёрдамида текширилдиган қатор ҳадларини иккинч қатор ҳадлари билан таққослаб, қаралаётган қаторнинг яқинлашувчилиги ёки узоқлашувчилиги масаласи ҳал бўлса ҳам таққослаш теоремалари маълум ноқулайликларга эга. Буидай ноқулайликлардан бири берилган қатор билан таққосланадиган қаторни танлаб олишнинг умумий қоидаси йўқлигидир.

Берилган қаторни геометрик ҳамда умумлашган гармоник қаторлар билан таққослаб, қаторнинг яқинлашувчилиги ёки узоқлашувчилигини ифодалайдиган аломатларни келтирамиз:

а) Коши аломати. Мусбат қатор $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ берилган бўлсин. Агар $n \in N$ нинг бирор n_0 ($n_0 \geq 1$) қийматидан бошлаб барча $n \geq n_0$ қийматлари учун

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad (\sqrt[n]{a_n} \geq 1) \quad (11.12)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлади.

Исбот. Аввал $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор учун $n \geq n_0 \in N$ бўлганда $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ тенгсизлик ўринли бўлсин. Бу тенгсизлик ушбу $a_n \leq q^n$ тенгсизликка эквивалентdir. Демак, берилган қаторнинг ҳар бир ҳади ($n \geq n_0$ бўлганда) яқинлашувчи геометрик қаторнинг мос ҳадидан катта эмас. 11. 6-теоремага кўра $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади.

Агар барча $n \geq n_0$ лар учун $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, яъни $a_n \geq 1$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда берилган қаторнинг ҳар бир ҳади узоқлашувчи $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots$ қаторнинг мос ҳадидан кичик эмас.

Яна ўша 11. 6-теоремага кўра, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлади.

Амалий масалаларни ҳал қилишда кўпинча, Коши аломатиниг қўйидаги лимит кўринишидан фойдаланилади.

Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор учун ушбу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор $k < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $k > 1$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.

Исбот. Аввал $k < 1$ бўлсин. Шундай ҳақиқий сон q топиладики, $k < q < 1$ тенгсизлик ўринли бўлади. У ҳолда лимитларнинг тегишли хоссасига кўра (3-бобнинг 3-§ ига қаранг) шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ лар учун $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ тенгсизлик ўринли бўлади. Юқорида исбот этилган Коши аломатига кўра $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи.

Энди $k > 1$ бўлсин. У ҳолда шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ лар учун $\sqrt[n]{a_n} > 1$ бўлиб, ундан берилган қаторнинг узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади.

Мисол. Қўйидаги

$$1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n + \dots$$

қаторни қарайлик. Бу қатор учун топамиз:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n} = \frac{n+2}{2n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}.$$

Демак, Коши аломатига кўра берилган қатор яқинлашувчи.

11. 1-эслатма. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k = 1$$

лимит ўринли бўлса, қатор яқинлашувчи ҳам узоқлашувчи ҳам бўлиши мумкин.

Масалан, $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ қатор учун $k = 1$,

$$\text{яъни } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right) = 1.$$

Аммо берилган қатор яқинлашувчи, чунки у (11. 10) қаторнинг $\alpha = 2$ бўлгандаги хусусий ҳолидан иборат. (11. 10) қатор эса $\alpha > 1$ бўлгандаги яқинлашувчи эди.

Агар ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots$$

қаторни қарайдиган бўлсак, унинг учун ҳам $k = 1$, яъни $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1$ бўлишини кўрамиз. Аммо бу қатор узоқлашувчиdir.

Шундай қилиб, $k = 1$ бўлганда Коши аломати қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлишини аниқлаб бера олмайди.

б) Даламбер аломати. Агар $n \in N$ нинг бирор n_0 ($n_0 \geq 1$) қийматидан бошлиб барча $n \geq n_0$ қийматлари учун

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \quad \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \right) \quad (11.13)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлади.

Исбот. Берилган $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор билан бирга яқинлашувчи

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots \quad (0 < q < 1)$$

геометрик қаторни қарайдик. Аввал $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ тенгсизликни одамиз. Уни

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$$

кўринишда ёзиб, сўнgra таққослаш ҳақидаги 11.8-тесримани қўлланамиз. Шу теоремага кўра $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ қаторнинг яқинлашувчилигидан

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчилиги келиб чиқади.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ бўлганда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлиши равшан,

Даламбер аломати исбот бўлди.

Даламбер аломатини ҳам лимит кўринишда ифодалаш мумкин.

Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор учун ушбу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда $d < 1$ бўлганда қатор яқинлашувчи, $d > 1$ бўлганда эса қатор узоқлашувчи бўлади.

Бунинг исботи Коши аломатининг лимит кўринишининг исботига ўхшаш.

Мисол. Ушбу $1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots + \frac{n!}{n^n} + \dots$

қатор яқинлашувчилигини текширинг. Бу қатор учун қўйидагиларга эгамиз:

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \\ = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}.$$

Даламбер аломатига кўра берилган қатор яқинлашувчи.

11.2- эслатма. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d = 1$$

лимит ўринли бўлса, у ҳолда қатор яқинлашувчи бўлиши ҳам, узоқлашувчи бўлиши ҳам мумкин. Демак, бу ҳолда Даламбер аломати қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлишини аниқлаб бера олмайди.

Шундай қилиб, берилган мусбат қаторни геометрик қатор билан таққослаб Коши ва Даламбер аломатларини келтириб чиқардик. Геометрик қатор «тез» яқинлашувчи қаторлардан ҳисобланади. Агар текшириладиган қатор геометрик қатордан «секинроқ» яқинлашувчи бўлса, унда бу қатор тўғрисида Коши ва Даламбер аломатлари орқали бирор хulosага келиб бўлмайди. Бундай қаторларни геометрик қаторлардан «секинроқ» яқинлашувчи қаторлар билан таққослаш лозим бўлади. Шу муносабат билан мусбат қаторни умумлашган гармоник қатор билан таққослаб, қатор яқинлашувчилигининг яна битта аломатини топамиз.

в) Раабе аломати. Ушбу $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мұсбат қатор берилған бўлсан.

Агар $n \in N$ нинг бирор n_0 ($n_0 \geq 1$) қийматыдан бошлаб барча $n \geq n_0$ қийматлар учун

$$n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \geq r > 1 \quad \left(n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \leq 1 \right) \quad (11.14)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлади.

Исбот. Аввал $n \geq n_0$ лар учун $n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \geq r > 1$ тенгсизлик бажарилсин, дейлик. Бу тенгсизликни қўйидагича

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{r}{n} \quad (11.15)$$

ёзиб, сўнг $r > \alpha > 1$ тенгсизликни қаноатлантирадиган α сон оламиз. Муҳим лимитлардан бирини ушбу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\alpha} - 1}{-\frac{1}{n}} = \infty$$

кўрнишда ёзамиз (5-бобнинг 6-§ ига қаранг). Танланишига кўра $\alpha < r$ бўлгани учун шундай $n'_0 \in N$ сон топиладики, барча $n > n'_0$ лар учун

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\alpha} - 1}{-\frac{1}{n}} \leq r$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Ундан ушбу

$$\left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\alpha} \geq 1 - \frac{r}{n} \quad (11.16)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Энди $\max\{n_0, n'_0\} = \overline{n_0}$ деб олсак, барча $n > \overline{n_0}$ лар учун (11.15) ва (11.16) тенгсизликлардан

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\alpha} \quad (11.17)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Агар (11.17) тенгсизлекни ушбу

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{\frac{1}{n^{\alpha}}}{\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}}$$

күрнишда ёсак, унда берилган қатор ҳадлари билан $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ умум-

лашган гармоник қатор ҳадлари орасида (11.10) күрнишдаги муносабат борлигини пайқаймиз. Маълумки, $\alpha > 1$ да умумлашган гармоник қатор яқинлашувчи. Демак, 11.8-теоремага кўра берилган қатор яқинлашувчи бўлади.

Энди барча $n \geq n_0$ лар учун

$$n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \leq 1$$

тengsizlik ўринли бўлсин. Ундан

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$$

тengsizlik келиб чиқади. Шунинг учун 11.8-теоремага асосан $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ гармоник қаторнинг узоқлашувчи бўлишидан берилган қаторнинг узоқлашувчи экани келиб чиқади.

Раабе аломати исботланди.

Бу аломатни ҳам қўйидагича лимит кўрнишда ифодалаш мумкин.

Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \rho \quad (\rho - \text{const})$$

лимит ўринли бўлса, $\rho > 1$ бўлганда қатор яқинлашувчи, $\rho < 1$ бўлганда эса қатор узоқлашувчи бўлади.

11.3-эслатма. Ҳар бир мусбат қаторнинг яқинлашувчилигини таққослаш йўли билан ҳал қилиш (текшириш) учун яроқли бўлган универсал қатор мавжуд эмас.

Мисол. Қўйидаги

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \times \\ \times \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4} + \dots + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{n} + \dots \end{aligned}$$

қатор яқинлашувчилигини текширинг.

Бу қатор учун қўйидагиларга эгамиз:

$$n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = n \left[1 - \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{n}{1} \right] =$$

$$= n \left[1 - \frac{2n^2 + n}{2n^2 + 4n + 2} \right] = \frac{3n^2 + 2n}{2n^2 + 4n + 2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \frac{3}{2} > 1.$$

Демак, Раабе аломатига кўра берилган қатор яқинлашувчи.

г) Интеграл аломат (Кошининг интеграл аломати). Ушбу $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мусбат қатор берилган бўлсин. Фараз қиласйлик, $[1, +\infty)$ оралиқда аниқланган, узлуксиз, ўсмайдиган ҳамда манфий бўлмаган $f(x)$ функция учун $f(n) = a_n$ ($n = 1, 2, \dots$) бўлсин. У ҳолда берилган қатор қўйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

кўринишни олади. Равшанки, $n < x < n+1$, $n \in N$ бўлганда
 $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$,

яъни $a_n \geq f(x) \geq a_{n+1}$ тенгсизликлар ўринли. Қейинги тенгсизликни $[n, n+1]$ оралиқ бўйича интеграллаб топамиз:

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq a_n. \quad (11.18)$$

Энди берилган қатор билан бирга ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx \quad (11.19)$$

қаторни ҳам қарайлик. Бу қаторнинг қисмий йифиндисини ёзамиш:

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x) dx = \int_1^{n+1} f(x) dx. \quad (11.20)$$

Фараз қиласйлик, $f(x)$ функция $[1, +\infty)$ оралиқда $F(x)$ бошлиғич функцияга эга бўлсин ($F'(x) = f(x)$). $[1, +\infty)$ оралиқда $f(x) \geq 0$ бўлгани учун $F(x)$ функция шу оралиқда ўсувчи бўлади.

$F(x)$ функцияни юқори чегараси ўзгарувчи бўлган аниқ интеграл кўринишда ёзиш мумкин:

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt, F(1) = 0.$$

Натижада (11.20) тенглик ушбу

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x) dx = F(n+1)$$

кўринишга келади. Демак, (11.19) қаторнинг қисмий йифиндиси $F(n+1)$ га teng.

Агар $n \rightarrow \infty$ да $F(n+1)$ чекли сонга интилса, яъни (11.19) қаторнинг қисмий йигиндиси чекли лимитга эга бўлса, шу қатор яқинлашувчи бўлади. Унда (11.18) тенгсизлик ҳамда 11.8- теоремага кўра қаралаётган қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

$n \rightarrow \infty$ да $F(n+1) \rightarrow \infty$ бўлса, берилган қатор узоқлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, қўйидаги интеграл аломатга (Коши аломатига) келамиз:

Агар $f(x)$ функция $[1, +\infty)$ оралиқда аниқланган, узлуксиз ва ўсмайдиган бўлиб, $F(x)$ шу функция учун бошланғич функция ва $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор учун $f(n) = a_n$ бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = A$

лимит мавжуд ва чекли бўлганда берилган қатор яқинлашувчи, бу лимит мавжуд бўлмагандан ёки чексиз бўлганда берилган қатор узоқлашувчи бўлади.

Мисол. Қўйидаги $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ умумлашган гармоник қаторни қарайлик. $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$) деб олайлик. Равшанки, бу функция $[1, +\infty)$ да аниқланган, узлуксиз, камаювчи ҳамда шу оралиқда манфий эмас. Шу билан бирга $x = n$ бўлганда $f(n) = \frac{1}{n^\alpha}$. Энди $\alpha \neq 1$ бўлганда топамиз:

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right],$$

бундан қўйидаги натижа келиб чиқади:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right] = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{агар } \alpha > 1 \text{ бўлса,} \\ \infty, & \text{агар } \alpha < 1 \text{ бўлса.} \end{cases} \end{aligned}$$

Агар $\alpha = 1$ бўлса, $x \rightarrow \infty$ да

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x \rightarrow \infty$$

бўлади.

Демак, интеграл аломатга кўра берилган қатор $\alpha > 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \leq 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

4-§. Ихтиёрий ҳадли қаторлар ва уларнинг яқинлашувчилиги

Биз аввалги параграфда мусбат қаторлар ва уларнинг яқинлашувчилиги масаласи билан шуғулландик. Хусусан, мусбат қаторларни таққослаш теоремаларини келтириб, бу теоремаларга асосланган ҳолда яқинлашиш аломатларини ўргандик. Бу аломатлар ёрдамида мусбат қаторларнинг яқинлашувчилиги ёки узоқлашувчилигини аниқлаш кўпинча осонлик билан ҳам этилишини кўрдик. Энди ихтиёрий ҳадли қаторлар (қисқача ихтиёрий қаторлар) ва уларнинг яқинлашувчилигини ўрганамиз.

1. Ихтиёрий қаторнинг яқинлашувчилиги ҳақида теорема. Бирор ихтиёрий $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор берилган бўлсин.

11.9-теорема. Ихтиёрий $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ сон олингандай ҳам шундай $n_0 \in N$ сон мавжуд бўлиб, барча $n > n_0$ ва $m = 1, 2, \dots$ лар учун

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon \quad (11.21)$$

тengsizlikning бажарилиши зарур ва ётарли.

Исбот. Зарурлиги. Берилган қатор яқинлашувчи бўлсин. Таърифга кўра бу қаторнинг қисмий йиғиндиларидан (яъни $A_1 := a_1$, $A_2 := a_1 + a_2, \dots, A_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$ лардан) тузилган $\{A_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга. Бу ҳолда Коши теоремасига (3.13-теоремага қаранг) асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олингандай ҳам шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0$ ва $m = 1, 2, \dots$ лар учун

$$|A_{n+m} - A_n| < \varepsilon$$

тengsizlik ўринли бўлади. Бу tengsizlikdan

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon.$$

Ётарлилиги. Берилган қатор учун $\forall \varepsilon > 0$ сон олингандай ҳам шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0$ ва $m = 1, 2, \dots$ лар учун

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

тengsizlik ўринли. Ушбу

$$A_{n+m} - A_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}$$

тengsizlikка кўра

$$|A_{n+m} - A_n| < \varepsilon$$

тengsizlik ҳам ўринли бўлади. Бу эса яна Коши теоремасига кўра $\{A_n\}$ кетма-кетликнинг чекли лимитга эга бўлишини кўрсатади. Демак, қатор яқинлашувчи. Теорема исботланди.

Мисол. Ушбу

$$\frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n} + \dots$$

қаторни қарайлик. Бу қатор учун (11.21) шартнинг бажарилишини текширамиз. Аввало, равшанки,

$$\left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\sin(n+m)}{2^{n+m}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+m}} \leq \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}.$$

Энди $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра $n_0 = [-\log_2 \varepsilon] + 1$ деб олинса, у ҳолда барча $n > n_0$ ва $m = 1, 2, \dots$ лар учун

$$\left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\sin(n+m)}{2^{n+m}} \right| < \varepsilon$$

тengsизлик ўринли бўлади.

Демак, 11.9-теоремага асосан берилган қатор яқинлашувчи.

2. Қаторларнинг абсолют шартли яқинлашувчилиги. Ихтиёрий $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор берилган бўлсин. Бу қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан қўйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \quad (11.22)$$

қаторни тузамиз.

11.4-таъриф. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор билан бирга $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор абсолют яқинлашувчи дейилади.

11.5-таъриф. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор шартли яқинлашувчи дейилади.

11.10-төрима. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

Исбот. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг мусбат ишорали ва нолга teng бўлган

a_{j_1}, a_{j_2}, \dots ҳадларидан $\sum_{k=1}^8 a_{j_k}$ ҳамда манфий ишорали a_{s_1}, a_{s_2}, \dots ҳадларининг абсолют қийматларидан $\sum_{m=1}^{\infty} |a_{s_m}|$ қаторларни тузамиз. Қулайлик учун $a_{j_k} = b_k, a_{s_m} = c_m$ деб белгиласак, ушбу

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots, \quad (11.23)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m = c_1 + c_2 + \dots + c_m + \dots \quad (11.24)$$

қаторлар ҳосил бўлади. Шартга кўра $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор яқинлашувчи.

Демак, бу қаторнинг

$$A_n^* = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|, \quad n = 1, 2, \dots$$

қисмий йигиндиларидан тузилган $\{A_n^*\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланганд, яъни $\forall n \in N$ да

$$A_n^* \leq A^* \quad (A^* — ўзгармас сон) \quad (11.25)$$

тengsизлик ўринли. Энди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг қисмий йигиндисини A_n билан белгилаб топамиз:

$$A_n = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^k b_i - \sum_{i=1}^m c_i = B_k - C_m, \quad (11.26)$$

бунда $n = k + m$ бўлиб, $k - A_n$ қисмий йигиндида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг мусбат ишорали, m — эса унинг манғий ишорали ҳадларининг сони. Бу энг муҳим, $n \rightarrow \infty$ да $k \rightarrow \infty$ ва $m \rightarrow \infty$ ҳолни қараш билан чегараланамиз.

Равшанки,

$$B_k \leq A_n^*, \quad C_m \leq A_n^*. \quad (11.27)$$

(11.25) ва (11.27) munosabatlardan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k, \sum_{m=1}^{\infty} c_m$ қаторларнинг қисмий йигиндилари B_k ва C_m юқоридан чегараланганилиги келиб чиқади. 11.8- теоремага кўра $\sum_{k=1}^{\infty} b_k, \sum_{m=1}^{\infty} c_m$ қаторлар яқинлашувчи бўлади. Бу қаторларнинг йигиндиларини мос равишда B ва C билан белгилайлик: $\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = B$ (B — чекли сон), $\lim_{m \rightarrow \infty} C_m = C$ (C — чекли сон). Энди (11.26) tenglikda лимитга ўтсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (B_k - C_m) = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k - \lim_{m \rightarrow \infty} C_m = B - C.$$

Бу еса $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси A учун ушбу $A = B - C$ формула ўринли эканини аңглатади. Теорема исбот бўлди. Биз бу теоремада $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор яқинлашувчи бўлган ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг ҳам яқинлашувчи бўлишини кўрсатибгина қолмасдан, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ қатор ҳадлари орасидаги мусбат ишорали ҳадларидан тузилган $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ҳамда манфий ишорали ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ қаторларининг яқинлашишини ҳам исботладик.

Мисол. Ушбу

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \dots$$

қаторни қарайлик. Бу қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

қатор яқинлашувчи, чунки у умумлашган гармоник қатор бўлиб, $\alpha = 2$. Шунинг учун 11.10-теоремага кўра берилган қатор ҳам яқинлашувчи бўлади. Демак, берилган қатор абсолют яқинлашувчи.

11.4-эслатма. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қаторнинг узоқлашувчи бўлишидан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Масалан, ушбу

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

қаторни қарайлик (1-§ даги (11.5) қаторни қаранг). Унинг яқинлашувчилиги маълум. Бу қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

қатор гармоник қатор бўлиб, у узоқлашувчидир. Демак, берилган қатор шартли яқинлашувчи.

Бирор ихтиёрий $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор берилган бўлсин.

Қаралаётган қатор ҳадларининг абсолют қийматларини олиб, улардан $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қаторни тузамиз.

Шу $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қаторни мұсбат қаторлардек қаралишини эътиборга олиб, унинг абсолют яқинлашувчиликини ифодаловчи қуйидаги Даламбер аломатини көлтирамиз.

Даламбер аломати. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$$

лимит ўринли бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор $l < 1$ бўлганда абсолют яқинлашувчи ва $l > 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \quad (x \neq \pm 1)$$

қаторни қарайлик. Бу қатор учун қуйидагини топамиз:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left| \frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}} \right| : \left| \frac{x^n}{1-x^n} \right| \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x - x^{n+1}}{1 - x^{n+1}} \right| = \\ = \begin{cases} |x|, & \text{агар } |x| < 1 \text{ бўлса,} \\ 1 & \text{агар } |x| > 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Демак, $|x| < 1$ да берилган қатор абсолют яқинлашувчи бўлади. $|x| > 1$ бўлганда эса қаторнинг характеристи тўғрисида Даламбер аломати бирор хулоса бермайди. Аммо $|x| > 1$ бўлган ҳолда $n \rightarrow \infty$ да қаторнинг умумий ҳади нолга интилмаганлиги сабабли (унинг лимити 1 га тенг) қатор узоқлашувчидир.

3. Ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қаторлар. Лейбниц георемаси. Биз қуйида ихтиёрий қаторларнинг битта муҳим хусусий ҳолини қараймиз.

Ушбу

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + (-1)^{n-1} c_n + \dots \quad (11.28)$$

қаторни қарайлик, бунда $c_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$).

Одатда бундай қатор ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қатор деб аталади.

Қуйидаги

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots, \\ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} + \dots$$

қаторлар ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қаторлардир. (11.28) кўринишдаги қаторларнинг яқинлашишини ифодалайдиган қуйидаги Лейбниц теоремасини келтирамиз.

11.11-теорема (Лейбниц теоремаси). Агар (11.28) қаторда

$$c_{n+1} < c_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (11.29)$$

тенгсизликлар ўринли бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \quad (11.30)$$

бўлса, (11.28) қатор яқинлашуви бўлади.

Исбот. Берилган (11.28) қаторнинг $2m$ ($m \in N$) та ҳадидан иборат ушбу

$$A_{2m} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + c_{2m-1} - c_{2m}$$

қисмий йигиндисини олайлик. Равшанки,

$$A_{2(m+1)} = A_{2m} + (c_{2m+1} - c_{2m+2}).$$

Теореманинг шартига кўра $c_{2m+2} < c_{2m+1}$ бўлиб, натижада

$$A_{2(m+1)} > A_{2m}$$

тенгсизликка келамиз. Бу эса $\{A_{2m}\}$ кетма-кетликнинг ўсуви эканлигини билдиради.

Энди A_{2m} ни қуйидагича ёзамиз:

$$A_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - \dots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m}.$$

Энди (11.29) га кўра $c_2 - c_3 > 0, c_4 - c_5 > 0, \dots, c_{2m-2} - c_{2m-1} > 0$.

Шунинг учун $A_{2m} < c_1$ тенгсизлик ўринли. Демак, $\{A_{2m}\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган. Шундай қилиб, $\{A_{2m}\}$ кетма-кетлик ўсуви ва юқоридан чегараланган. Демак, бу кетма-кетлик чекли лимитга эга:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_{2m} =: A \quad (A — чекли сон). \quad (11.31)$$

Энди (11.28) қаторнинг $2m-1$ ($m \in N$) та тоқ сондаги ҳадидан иборат ушбу

$$A_{2m-1} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + c_{2m-1}$$

қисмий йигиндисини олайлик.

Равшанки,

$$A_{2m-1} = A_{2m} + c_{2m}.$$

Бундан (11.30) ва (11.31) ларга асосан топамиз:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_{2m-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} (A_{2m} + c_{2m}) = A.$$

Шундай қилиб, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг қисмий йигиндиларидан иборат кет-

ма-кетлик чекли лимитга эга эканини кўрсатдик. Демак, (11.28) қатор яқинлашувчи Теорема исботланди.

Мисол. Юқорида кўрилган ушбу

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

қаторни қарайлик. Бу қатор учун теореманинг барча шартларининг бажарилишини кўрсатиш қийин эмас. Лейбниц теоремасига кўра берилган қатор яқинлашувчи бўлади.

5- §. Яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари

Биз ушбу параграфда яқинлашувчи қаторларда ҳадларни груп-палаш, а б с о л ю т яқинлашувчи қаторларда эса ҳадларнинг ўрнини алмаштириш каби хоссаларга тўхтalamиз.

1. Группалаш хоссаси. Бирор $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор берилган бўл-син. Бу қатор ҳадларини групбалаб қўйидаги қаторни тузамиз:

$(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}) + \dots$ (11.32)
бунда n_1, n_2, \dots ($n_1 < n_2 < \dots$) лар натурал сонлар кетма-кетли-гининг бирор $\{n_k\}$ қисмий кетма-кетлиги бўлиб, $k \rightarrow \infty$ да

$$n_k \rightarrow \infty.$$

1º. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлиб, йигинди A сонга тенг бўлса, у ҳолда бу қаторнинг ҳадларини группалашдан ҳо-сили бўлган (11.32) қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йигиндиси ҳам A сонга тенг бўлади.

Исбот. Таърифга кўра берилган қаторнинг A_n қисмий йигиндиси учун $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ (A — чекли сон) лимит ўринли. Энди (11.32) қа-торнинг қисмий йигиндисини ёзамиш:

$$A_{n_k} = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}) + \dots + (a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \dots + a_{n_k}).$$

Бу қисмий йигиндилардан тузилган

$$A_{n_1}, A_{n_2}, A_{n_3}, \dots, A_{n_k}, \dots$$

кетма-кетликни қарайлик. Равшанки, бу $\{A_n\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлигидир. У ҳолда 3.12-теоремага кўра, $\{A_{n_k}\}$ кет-ма-кетлик яқинлашувчи ва унинг лимити ҳам A га тенг бўлади:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_{n_k} = A.$$

Бу эса (11.32) қаторнинг яқинлашувчи бўлишини ва унинг йиғиндиси A га тенг эканини билдиради.

Демак, яқинлашувчи қаторларда қатор ҳадларини группалаш натижасида унинг йиғиндиси ўзгармайди ва яқинлашувчилиги бузилмайди.

11.5-эслатма. Бу хоссанинг акси ҳар доим ўринли бўлавермайди, яъни ҳадлари группаланган қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан дастлабки қаторнинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, ушбу ҳадлари иккитадан группаланган

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

қаторни қарайлик. Равшанки, бу қатор яқинлашувчидир. Аммо

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

қатор узоқла цувчидир.

2. Ўрин алмаштириш хоссаси. Ихтиёрий $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор берилган бўлсин. Бу қатор ҳадларининг ўринларини алмаштириб қўйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n + \dots \quad (11.33)$$

қаторни ҳосил қиласмиш. Бу (11.13) қаторнинг ҳар бир a'_n ҳади $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг тайин бир a_{n_k} ҳадининг айнан ўзидир.

2º. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор абсолют яқинлашувчи бўлиб, йиғиндиси A сонга тенг бўлса, у ҳолда бу қатор ҳадларининг ўринларини ихтиёрий равишда алмаштиришдан ҳосил бўлган (11.33) қатор яқинлашувчи бўлади ва унинг йиғиндиси ҳам A сонга тенг бўлади.

Исбот. Бу хоссани $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор мусбат ҳамда ихтиёрий ҳадли бўлган ҳоллар учун алоҳида исботлаймиз.

1) Берилган қатор мусбат қатор бўлиб, у яқинлашувчи ва йиғиндиси A сонга тенг бўлсин. Таърифга кўра $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$. $\{A_n\}$ — ўсувчи кетма-кетлик бўлганидан $A_n \leq A$ тенгсизлик ўринли бўлади. Энди (11.33) қаторнинг

$$A'_k = a'_1 + a'_2 + \dots + a'_{n_k}$$

қисмий йиғиндисини қарайлик. Бунда $a'_1 = a_{n_1}$, $a'_2 = a_{n_2}$, \dots , $a'_{n_k} = a_{n_k}$. Равшанки, $\{A'_k\}$ — ўсувчи. Агар $n = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ деб олсак, у ҳолда $A'_k \leq A_n$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Шунинг учун $A'_k \leq A$ тенгсизлик ўринли. Шундай қилиб, $\{A'_k\}$ кетма-кетлик

ўсуви ва юқоридан чегараланган. Демак, у чекли лимитга эга:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A'_k = A' \quad (A \text{ --- чекли}) \text{ ва } A' \leq A.$$

Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторни (11.33) қатор ҳадларининг ўринларини алмаштиришдан ҳосил бўлган қатор деб қарайдиган бўлсак, унда юқорида келтирилган мулоҳазага асосланиб, (11.33) қаторнинг яқинлашувчи ва йиғиндиси A сонга тенг бўлишидан берилган қаторнинг ҳам яқинлашувчилиги ва унинг йиғиндиси A учун $A \leq A'$ тенгсизлик ўринли бўлишини топамиз. Юқорида $A' \leq A$ экани кўрсатилган эди. Шу икки тенгсизликдан $A = A'$ бўлиши келиб чиқади.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ихтиёрий ҳадли қатор бўлиб, у абсолют яқинлашувчи ва йиғиндиси A сонга тенг бўлсин. Шу қатор ҳадларининг ўринларини алмаштиришдан ҳосил бўлган $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ қаторни қарайлик.

Модомики, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор абсолют яқинлашувчи экан, унда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор яқинлашувчи бўлади. Бу мусбат қатор бўлганлиги сабабли 1) ҳолда исботланганига кўра $\sum_{n=1}^{\infty} |a'_n|$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади. Шунинг учун $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ қатор яқинлашувчиидир.

Энди $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ қатор йиғиндисининг ҳам A сонга тенг эканини кўрсатамиз.

11.10 теоремага асосан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг йиғиндисини $A = B - C$ кўринишда ёзиш мумкин, бунда B берилган қаторнинг мусбат ишорали ҳадларидан тузилган $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ қаторнинг, C эса шу қатор манфий ишорали ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ қаторнинг йиғиндиси. Берилган қатор ҳадларининг ўринлари алмаштирилганда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ва $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ қаторлар ҳадларининг ҳам ўринлари алмашади ва 1) ҳолга асосан бу қаторлар йиғиндилари мос равишида B ва C га тенг бўлиб қолаверади. Демак, $A = B - C$ тенгликка кўра $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ қаторнинг йиғиндиси ҳам A сонга тенг бўлади. Бу ҳолда ҳам хосса исбот бўлди (ўрин алмаштиришда ҳадлар ўз ишорала-

ри билан олинганилиги учун $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ нинг ҳамма ҳадлари яна $\sum b_{n_k}$ га, $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ нинг ҳамма ҳадлари яна $\sum c_{m_k}$ га киради).

Бу хоссанинг ўринли бўлишида қаторнинг абсолют яқинлашувчи бўлиши мухимдир. Агар қатор шартли яқинлашувчи бўлса, юқоридаги хосса ўринли бўлмай қолиши мумкин. Масалан, қўйидаги

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

қаторни қарайлик. Бу қаторнинг шартли яқинлашувчилигини ва йигиндиси $A = \ln 2$ га teng эканлигини (1-§ га қаранг) кўрсатган эдик. Демак, қаторнинг қисмий йигиндилари

$$A_{2n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right), \quad A_{2n+1} = A_{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

чекли A лимитга эга:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{2n+1} = A.$$

Энди берилган қаторнинг битта мусбат ишорали ҳадиден кейин иккитадан манфий ишорали ҳадини олиш усулида ҳадларини алмаштириб, ушбу

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \dots \quad (11.34)$$

қаторни ҳосил қиласайлик. Кейинги қаторнинг биринчи $3n$ та ҳадидан иборат қисмий йигиндисини ёзамиз:

$$\begin{aligned} A'_{3n} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right). \end{aligned}$$

Агар

$$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right)$$

бўлишини эътиборга олсан, унда A'_{3n} қисмий йигиндини қўйидагича ёзиш мумкин:

$$A'_{3n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} A_{2n}.$$

Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A'_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} A_{2n} = \frac{1}{2} A.$$

Шунингдек,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A'_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(A'_{3n} + \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} A,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A'_{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(A'_{3n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2} \right) = \frac{1}{2} A$$

бўлади.

Шундай қилиб, (11.34) қаторнинг қисмий йигиндисининг лимити $\frac{1}{2} A$ сонга teng. Демак, ҳадларининг ўринларини алмаштиришдан ҳосил бўлган (11.34) қатор йигиндиси $\frac{1}{2} A$ сонга teng. Бу эса берилган қатор ҳадларининг ўринларини алмаштириш натижасида унинг йигиндиси ўзгаришини кўрсатади.

Умуман, абсолют яқинлашувчи бўлмаган қаторлар ҳадларининг ўринларини алмаштиришдан ҳосил бўлган қаторлар ҳақида қуйидаги теорема ўринли. Биз бу теоремани исботсиз келтирамиз.

11.12-теорема (Риман теоремаси). Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор шартли яқинлашувчи бўлса, у ҳолда ҳар қандай A (чекли ёки чексиз) олинганда ҳам берилган қатор ҳадларининг ўринларини шундай алмаштириши мумкинки, ҳосил бўлган қаторнига йигиндиси худди шу A ga teng бўлади.

АДАБИЁТ

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II, III — М.: Наука, 1969. (Ўзбек тилига I — II томлари таржима қилинган.)
2. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т I, II, — М.: Наука, 1964. (Ўзбек тилига таржима қилинган.)
3. Ильин В. А. Позняк Э. Г. Основы математического анализа, ч. I, — М.: Наука, 1971. (Ўзбек тилига таржима қилинган.)
4. Ильин В. А. Позняк Э. Г. Основы математического анализа, ч. II, — М.: Наука, 1980.
5. Хинчин А. Я. Восемь лекций по математическому анализу, — М.: Наука, 1977.
6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, т. I, II, — М.: Высшая школа, 1981.
7. Никольский С. М. Курс математического анализа. т. I, II, — М.: Наука, 1973.
8. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ, — М.: Наука 1979.
9. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II. — М.: Наука. 1970.
10. Рудин У. Основы математического анализа, — М.: Мир, 1976.
11. Зорич В. А. Математический анализ, ч. I — М.: Наука, 1981.
12. Романовский В. И. Избранные труды, т. I (Введение в анализ), Изд. АН УзССР, Ташкент, 1959.

МУНДАРИЖА

Сүз боши	3
I бөб. Дастлабки түшүнчалар	5
1 - §. Түплам. Түпламлар устида амаллар	5
2 - §. Түпламларни таққослаш	9
3 - §. Акселантиришлар	11
4 - §. Математик белгилар	16
II бөб. Ҳақиқий сонлар	18
1 - §. Натуғал сонлар. Бутун сонлар	18
2 - §. Рационал сонлар	19
3 - §. Рационал сонлар түпламида кесим	25
4 - §. Ҳақиқий сонлар. Ҳақиқий сонлар түпламиның хоссалари	31
5 - §. Ҳақиқий сонлар түпламиның түлиқлиги. Дедекинд теоремаси	32
6 - §. Сонли түпламаларнинг чегаралари	35
7 - §. Ҳақиқий сонлар устида арифметик амаллар	39
8 - §. Ҳақиқий соннинг абсолют қыйматы ва унинг хоссалари	48
9 - §. Иррационал соннан тақрибий ҳисоблаш. Иррационал сонни даврай ўнлу каср орқали ифодалаш	50
10 - §. Ҳақиқий сонларни геометрик тасвирлаш	54
III бөб. Сонлар кетма-кетлиги учун лимитлар назарияси	59
1 - §. Ўзгарувчи ва ўзгармас миқдорлар	59
2 - §. Сонлар кетма-кетлигининг лимити	60
3 - §. Яқинлашувчи кетма-кетликларнинг хоссалари	67
4 - §. Яқинлашувчи кетма-кетликлар устида арифметик амаллар	69
5 - §. Чексиз катта миқдорлар. Чексиз кичик ҳамда чексиз катта миқдорлар орасыда боғланиш	75
6 - §. Аниқмас ифодалар	77
7 - §. Монотон кетма-кетликлар ва уларнинг лимити	81
8 - §. Монотон кетма-кетликсиз лимити ҳақидаги теоремаларнинг татбикалари	86
9 - §. Қисмий кетма-кетликлар. Больцано — Вейерштрасс леммаси	94
10 - §. Коши теоремаси (яқинлашыш принципи)	97
11 - §. Кетма-кетликсиз юғари ва күйи лимитлари	99
IV бөб. Функция ва унинг лимити	105
1 - §. Функция түшүнчеси	105
2 - §. Элементар функциялар	112
3 - §. Функция лимити	118
4 - §. Лимитта эга бўлган функцияларнинг хоссалари	127
5 - §. Монотон функциянынг лимити	132

6- §. Коши теоремаси	133
7- §. Чексиз катта ва чексиз кичик функциялар	135
8- §. Функцияларни таққослаш	136
V б о б. Функциянинг узлуксизлиги	143
1- §. Функция узлуксизлиги таърифлари	143
2- §. Функциянинг узилиши. Узилишнинг турлари	147
3- §. Узлуксиз функциялар устидаги арифметик амаллар	150
4- §. Мураккаб функциянинг узлуксизлиги	152
5- §. Монотон функциялар узлуксизлиги ва узилиши	152
6- §. Лимитларни ҳисоблашда функциянинг узлуксизлигидан фойдаланиш	154
7- §. Узлуксиз функцияларнинг хоссалари	157
8- §. Функциянинг текис узлуксизлиги. Кантор теоремаси	162
9- §. Функциянинг узлуксизлик модули	166
10- §. Компакт тўпламда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссалари	169
11- §. Узлуксиз функциялар фазоси	172
VI б о б. Функциянинг ҳосила ва дифференциали	174
1- §. Функциянинг ҳосиласи	174
2- §. Тескари функциянинг ҳосиласи. Мураккаб функциянинг ҳосиласи	181
3- §. Ҳосила ҳисоблашнинг содда қоидалари. Элементар функцияларнинг ҳосилалари	183
4- §. Функциянинг дифференциали	188
5- §. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар	194
6- §. Дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари	202
7- §. Тейлор формуласи	206
VII б о б. Дифференциал ҳисобнинг баъзи бир татбиқлари	219
1- §. Функциянинг ўзгариб бориши	219
2- §. Функциянинг экстремум қийматлари	222
3- §. Функциянинг қавариқлиги ва ботиқлиги	229
4- §. Функцияларни текшириш. Графикларини ясаш	236
5- §. Аниқмасликларни очиш. Лопиталь қоидалари	238
VIII б о б. Аниқмас интеграл	248
1- §. Аниқмас интеграл тушунчаси	248
2- §. Интеграллаш усууллари	254
3- §. Рационал функцияларни интеграллаш	257
4- §. Баъзи иррационал функцияларни интеграллаш	267
5- §. Тригонометрик функцияларни интеграллаш	277
IX б о б. Аниқ интеграл	279
1- §. Масалалар	279
2- §. Аниқ интеграл таърифи	281
3- §. Дарбур йигиндилари. Аниқ интегралнинг бошқача таърифи	287
4- §. Аниқ интеграл таърифларининг эквивалентлиги	292
5- §. Аниқ интегралшининг мавжудлиги	298
6- §. Интеграллашувчи функциялар синфи	300
7- §. Аниқ интегралнинг хоссалари	304
8- §. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремалар	312
9- §. Чегаралари ўзгарувчи бўлган аниқ интеграллар	314
10- §. Аниқ интегралларни ҳисоблаш	317
11- §. Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш	324
12- §. Функционал ҳақида тушунча	329
X б о б. Аниқ интегралларнинг баъзи бир татбиқлари	341
1- §. Ёй узунлиги ва унинг аниқ интеграл орқали ифодаланиши	341

2- §. Текис шаклнинг юзи ва уни аниқ интеграл орқали ифодаланиши	353
3- §. Айланма сирт юзаси ва уни аниқ интеграл орқали ифодаланиши	361
4- §. Ўзгарувчи кучнинг бажарган иши ва уни аниқ интеграл орқали ифодаланиши	365
5- §. Инерция моменти	366
XI боб. Соңли қаторлар	370
1- §. Асосий тушунчалар	371
2- §. Яқинлашувчи қаторлар ҳақида теоремалар	374
3- §. Мусбат қаторлар ва уларнинг яқинлашувчи бўлиши	378
4- §. Ихтиёрий ҳадли қаторлар ва уларнинг яқинлашувчилиги	391
5- §. Яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари	397
Адабиёт	402

На узбекском языке

**АЗЛАРОВ ТУРСУН АБДУРАХИМОВИЧ
МАНСУРОВ ХОДЖАКБАР**

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

I часть

*Учебное пособие для студентов
университетов и пединститутов*

Ташкент «Ўқитувчи» 1986

Редактор *P. Каримов*
Расмлар редактори *C. Соин*
Техредактор *T. Скиба*
Корректор *D. Алимова*

ИБ № 3792

Тернига берилди 6.12.85. Босишига рухсат этилди 10.09.86. Формати 60×90/16. Тип. қоғози №2. Көгли 10 шпонсиз. Литературная гарнитура. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 25,5. Шартли кр.- отт. 25,5. Нашр. л. 21,0. Тиражи 4000. Зак № 2054. Баҳоси 1 с. 10 т.
2860
«Ўқитувчи» нашриёти. 700129. Тошкент, Навонӣ кӯчаси, 30. Шартнома № 09 — 111 — 85.

ЎзССР нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Давлат комитети Тошкент «Матбуот» полиграфия ишлаб чиқариш бирлашмасининг Бош корхонасида Терилиб, 1- босмахонасида босилди. Тошкент, Ҳамза кӯчаси, 21. 1986.

Набрано на Головном предприятии, отпечатано в тип. №1 ТППО «Матбуот» Государственного комитета УзССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. Ташкент, ул. Хамзы, 21.

A 37

Азларов Т., Мансуров Х.

Математик анализ. Қисм 1.: Ун-т ва пед.
ин-т студ. учун ўқув қўлл. Махсус ред. F. Нас-
ритдинов.— Т.: Ўқитувчи, 1986.—408. б.

1. Автордош.

Азларов Т., Мансуров Х. Математический анализ.
Часть I. Учебное пособие для студ. ун-т и педин-т.

22.161я73