

И. И. НАРКЕВИН  
Э. И. ВОЛМЯНСКИЙ  
С. И. ЛОБКО

**ФИЗИКА  
для  
ВТУЗов**

**МЕХАНИКА  
МОЛЕКУЛЯРНАЯ  
ФИЗИКА**

Допущено Министерством образования  
Республики Беларусь  
в качестве учебного пособия  
для студентов инженерно-технических  
и технологических специальностей  
высших технических учебных заведений

МИНСК  
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»  
1992

ББК 22.3я73  
Н29  
УДК 53 (075.8)

Рецензенты: кафедра физики Белорусского института инженеров железнодорожного транспорта; д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой теоретической физики БГУ им. В. И. Ленина, проф. *Л. М. Барковский*

**Наркевич И. И. и др.**  
**H29** Физика для вузов. Механика. Молекулярная физика: Учеб. пособие /И. И. Наркевич, Э. И. Волмянский, С. И. Лобко.— Минск.: Выш. шк., 1992.— 432 с.: ил.  
ISBN 5-339-00693-X.

В пособии рассмотрены основы ньютоновской, релятивистской и квантовой механики. Введены исходные представления о корпускулярно-волновом дуализме, основах классической и квантовой статистики.

Пособие ориентировано на самостоятельную проработку определенной части материала, что нашло отражение в специально подобранных заданиях.

Предназначено для студентов инженерно-технических и технологических специальностей.

**H** 1604010000—031 23-92  
**M304(03)—92**

ББК 22.3я73

Учебное издание

**Наркевич Иван Иванович, Волмянский Эмануил Ильич,  
Лобко Сергей Ильич**

## **ФИЗИКА ДЛЯ ВУЗОВ. МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА**

Заведующий редакцией *Л. Д. Духвалов*. Редактор *Е. А. Пастушенко*. Художник обложки и художественный редактор *В. И. Шелк*. Технический редактор *И. П. Тихонова*. Корректоры *Г. В. Вагабова, Н. И. Бондаренко*

ИБ № 3261

Сдано в набор 18.07.91. Подписано в печать 24.03.92. Формат 84 × 108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Офсетная печать. Усл.-печ. л. 22,68. Усл.-кр. отт. 22,68. Уч.-изд. л. 23,52. Тираж 3900 экз. Зак. 1490. Цена 22 р. 90 к.

Издательство «Вышэйшая школа» Министерства информации Республики Беларусь. 220048, Минск, проспект Машерова, 11.

Минский ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат МППО им. Я. Коласа. 220005, Минск, ул. Красная, 23.

**ISBN 5-339-00693-X**

© Коллектив авторов, 1992

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Значимость курса современной физики в системе инженерных знаний определяется тем, что, с одной стороны, физика принадлежит к числу фундаментальных наук, без знания ее невозможна успешная инженерная деятельность ни в одной области современной техники и технологии, с другой стороны, изучение физики позволяет закладывать и формировать интеллектуальные качества, необходимые специалисту для самостоятельной творческой работы. Материал, изложенный в данном пособии,— первая часть курса общей физики, прочное знание которой необходимо специалисту инженерного профиля, что нашло отражение в содержании, структуре и методике изложения. Во-первых, мы стремились органически увязать классическую физику с элементами специальной теории относительности, квантовой механики и квантовой статистики, что привело к отступлению от традиционного порядка изложения материала. В частности, особое внимание уделено рассмотрению колебательных и волновых процессов, ознакомление с которыми начинается уже в разделе «Кинематика» и красной нитью проходит через весь курс. Основные представления о корпускулярно-волновом дуализме и волновой функции, а также простейшие примеры на применение уравнения Шрёдингера приведены в конце раздела «Механика». Элементы квантовой статистики и квантовой теории твердого тела рассматриваются в разделе «Молекулярная физика». Во-вторых, в целях активизации познавательной деятельности при работе с пособием в структуре каждой главы выделены:

информационная часть, представляющая логически последовательное изложение содержания темы, в которой даны подробные выкладки основных формул и математических соотношений, проанализирована их физическая сущность, приведен необходимый иллюстративный материал;

*примеры*, с помощью которых формируются навыки применения теоретического материала к решению задач прикладного характера;

*теоретические контрольные задания*, призванные способствовать организации самостоятельной работы студентов по усвоению и углублению знаний.

Кроме того, в конце пособия в виде приложений представлен необходимый справочный материал по математике (прил. II), таблицы значений ряда физических констант (прил. I), а также численных значений различных физических величин (прил. III).

Мы считаем, что структура данного пособия будет способствовать тому, чтобы обучающий и обучающийся в процессе передачи и поиска знаний в системе преподаватель — студент выступали как равноправные и взаимно заинтересованные в успехе субъекты.

Авторы весьма признательны коллективу кафедры физики БТИ им. С. М. Кирова за доброжелательное обсуждение, критические замечания и техническую помощь по оформлению рукописи пособия, а также ректору БТИ им. С. М. Кирова, профессору И. М. Жарскому.

Нам доставляет большое удовольствие выразить свою благодарность коллективу кафедры физики БелИИЖТа (зав. кафедрой доцент В. Я. Матюшенко) и профессору кафедры теоретической физики БГУ им. В. И. Ленина Л. М. Барковскому, взявшим на себя труд по рецензированию рукописи. Хорошо мотивированные замечания и пожелания, содержащиеся в рецензиях, а также письменные замечания профессора кафедры общей физики А. А. Спартакова (Санкт-Петербургский университет), доцентов М. В. Буя и Н. Е. Савченко, старшего преподавателя Б. П. Батаева (БелИИЖТ) способствовали улучшению качества пособия.

Авторы заранее благодарны за замечания и советы, направленные на улучшение данного пособия для вузов.

*Авторы*

Исканием тайн дух человека жил.

В. Я. Брюсов

## ВВЕДЕНИЕ

**Предмет физики.** Физика — это наука о природе и о наиболее общих формах движения материи. Современная физика изучает механическую, тепловую, электромагнитную, внутриатомную и внутриядерные формы этого движения, их взаимные превращения друг в друга, а также свойства вещества и поля. Границы, отделяющие физику от других наук, в значительной степени условны и меняются с течением времени. Физика — наука экспериментальная, ее законы базируются на фактах, установленных опытным путем. Законы физики представляют собой количественные соотношения и формулируются на математическом языке. В основе современной физики лежит относительно небольшое количество фундаментальных законов, охватывающих в значительной степени все многообразие экспериментальных данных.

Становление физики как науки относится к временам античности. В 6 в. до н. э.—2 в. н. э. зародились идеи атомарного строения вещества, были установлены простейшие законы статики, открыты закон прямолинейного распространения света и закон его отражения, сформулированы начала гидростатики — закон Архимеда, наблюдались простейшие проявления электричества и магнетизма. Однако развитие физики в современном смысле слова началось в 17 в. и было связано в первую очередь с именем Г. Галилея, который дал первую формулировку закона инерции, открыл принцип относительности движения, доказал независимость ускорения свободного падения тела от его массы и объема, получил значительные результаты в астрономии, изучении оптических, тепловых и других явлений. Галилей впервые использовал для описания физических явлений математический аппарат и тем самым превратил физику в точную науку.

Основное достижение физики 17 в.— создание классической механики И. Ньютона. К концу 18 в. благодаря трудам Д. Бернулли, Л. Эйлера, Ж. Лагранжа завер-

шается создание единой механической картины мира, согласно которой все многообразие явлений природы можно объяснить движением частиц — атомов, подчиняющихся законам Ньютона.

Со второй половины 17 в. и в 18 в. быстро развивается геометрическая оптика, закладываются основы волновой и корпускулярной оптики, происходит накопление опытных данных и устанавливаются простейшие экспериментальные законы в области электричества — закон сохранения электрического заряда и закон Кулона. Заметный прогресс наблюдается и в исследовании тепловых явлений. Трудами Р. Бойля, Р. Гука, М. В. Ломоносова, Д. Бернулли закладываются основы молекулярно-кинетической теории вещества.

Начало 19 в. знаменуется торжеством волновой теории света, чему в значительной степени способствовало успешное объяснение на основе волновой теории явлений интерференции и дифракции света. Открытие Х. Эрстедом в 1820 г. действия электрического тока на магнитную стрелку показало связь между электрическими и магнитными явлениями, что означало начало широчайшего применения достижений физики в технике. В 1831 г. М. Фарадей открыл явление электромагнитной индукции и это послужило основой для формирования современных представлений об электромагнитном поле. Важнейшее значение для физики и всего естествознания имело открытие закона сохранения энергии (Ю. Р. Майер, Г. Гельмгольц, Д. Джоуль). В 1850 г. немецким физиком Р. Клаузиусом был сформулирован фундаментальный закон теории теплоты — второе начало термодинамики. Он является обобщением экспериментальных данных и свидетельствует о необратимости процессов в природе, определяет направление возможных энергетических превращений. Во второй половине 19 в. Дж. Максвелл завершает создание классической электродинамики. Установленные им уравнения позволили с единой точки зрения объяснить все известные к тому времени процессы в области электричества и магнетизма, а также предсказать ряд новых явлений. Важнейшим результатом теории Максвella был вывод о конечности скорости распространения электромагнитных взаимодействий и о том, что свет имеет электромагнитную природу. К концу 19 в. благодаря работам Дж. Максвела, Л. Больцмана, Дж. У. Гиббса завершается разработка статистической механики, на основе которой уже в начале 20 в. А. Эйн-

штейном и М. Смолуховским была разработана количественная теория броуновского движения, подтвержденная опытами французского физика Ж. Б. Перрена.

Новый этап в развитии физики связан с открытием в 1897 г. английским физиком Дж. Томсоном электрона и определением его заряда в 1898 г. Это привело благодаря блестящим экспериментам Э. Резерфорда к созданию в 1911 г. планетарной модели атома.

Начало 20 в. ознаменовалось величайшей революцией в физике. В 1900 г. для объяснения распределения энергии в спектре абсолютно черного тела М. Планк ввел понятие кванта. В 1905 г. А. Эйнштейн на основе развития гипотезы Планка объяснил закономерности фотоэффекта, не укладывавшиеся в рамки классических представлений. В том же 1905 г. А. Эйнштейн разработал специальную теорию относительности — новое учение о пространстве и времени. 1916 г. знаменуется завершением создания А. Эйнштейном общей теории относительности — теории пространства, времени и тяготения. 30-е гг. отмечены окончанием формирования основ квантовой механики. Трудами Н. Бора, Э. Шрёдингера, В. Гейзенberга, П. Дирака, В. Паули создана квантовая теория движения микрочастиц, которая позволила понять основные закономерности микромира, а также объяснить ряд свойств макроскопических тел и происходящих в них явлений.

В конце 40-х и начале 50-х гг. происходит ряд революционных открытий в области физики атомного ядра. Открытие в конце 19 в. явления радиоактивности, опыты Резерфорда, в результате которых в 1919 г. впервые было осуществлено превращение химических элементов, открытие в 1932 г. Дж. Чедвиком нейтрона, а в 1934 г. И. и Ф. Жолио-Кюри искусственной радиоактивности привели к практическому овладению человеком тайн по использованию ядерной энергии. В 1954 г. в СССР впервые в мире была введена в эксплуатацию атомная электростанция.

Послевоенные годы ознаменовались революционными успехами в физике твердого тела. Замена электровакуумных приборов твердотельными не только повысила эксплуатационную надежность аппаратуры и сократила потребление энергии, но и позволила уменьшить ее габариты в тысячи раз. 50-е гг. характеризуются возникновением новой области радиофизики — квантовой электроники. В 60-х гг. создан квантовый генератор света —

лазер. Значительные успехи достигнуты в физике элементарных частиц, астрофизике, проблеме управляемого термоядерного синтеза, исследовании явления сверхпроводимости.

Открытия последнего десятилетия позволили приблизиться к пониманию таких сложных проблем, как эволюция звезд и образование химических элементов. Большое значение приобретает изучение физики полимеров, в частности биополимеров, что может значительно продвинуть исследователей в направлении понимания тайн живого организма. Интенсивно разрабатываются проблемы квантовой электроники, ведутся поисковые работы по созданию рентгеновского и гамма-лазеров, получены реальные результаты в области высокотемпературной сверхпроводимости.

Физика — живая, развивающаяся наука. И каждый ее успех — это не только шаг к пониманию законов природы, но и фундамент для развития новых технологий и совершенствования человеческой цивилизации при разумном использовании достижений науки и техники.

**Физические понятия и величины. Законы физики.** Физические явления и закономерности окружающего нас мира находят отражение в нашем сознании в виде физических понятий и законов. *Физическое понятие* — это обобщенное представление о сущности физического явления или процесса. Наличие многих и разнообразных представлений о том или другом явлении еще не означает, что имеется понятие о нем. Например, наличие представлений о том, что при определенных условиях скорость движущегося тела может меняться, еще не означает владения понятием «ускорение». Лишь после того как в качестве характеристики изменения скорости вводится ее изменение в единицу времени, возникает понятие ускорения, применимое для описания поведения скорости в любых ситуациях. Понятие ускорения возникло из обобщения результатов многократных наблюдений, связанных с изучением закономерностей движения тел при изменении их скорости.

Физическое понятие, как и всякое научное, основано на четком определении значения вводимого термина или на уточнении значения уже существующего слова. Если физическое понятие соотносится с численным значением, то оно называется *физическими величиной*. За основу определения физической величины берется математическое соотношение, описывающее рассматриваемое физи-

ческое явление. Например, ускорение  $a$  точки определяется соотношением:  $a = \Delta v / \Delta t$ .

Кроме специфических понятий, которым соответствуют физические величины, в физике используются те, которые имеют общий характер. Большинство из них не определяется или имеет только качественное определение. Примерами могут служить понятия материи, времени, пространства, энергии.

Физические законы, являясь обобщением наиболее существенных результатов большого числа наблюдений, позволяют не только понять и объяснить многие явления природы, но и обладают предсказательной силой, т. е. позволяют прогнозировать результаты планируемых экспериментов, а иногда и подсказывают содержание новых экспериментов, которые могут привести к открытию еще более общих законов.

Замечательной особенностью наиболее фундаментальных законов физики является их изящество и простота. В качестве примера достаточно сослаться на закон всемирного тяготения ( $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ ), на основании которого можно понять особенности движения не только планет солнечной системы и их естественных и искусственных спутников, но и звездных скоплений во Вселенной.

**Пространство и время.** Пространство и время являются основными понятиями всех разделов физики и имеют решающее значение для построения физической картины мира. *Пространство и время* — понятия, обозначающие основные формы существования материи. Пространство выражает порядок существования отдельных объектов, а время определяет порядок смены явлений. Свойства пространства и времени делят на *метрические* (протяженность, длительность) и *топологические* (размерность, непрерывность, порядок и направление времени). Историческое развитие представлений о пространстве и времени проходило по двум направлениям.

В основе одного из них лежали идеи Демокрита, приписывающего пустоте особый род бытия. Эти идеи нашли свое воплощение в ньютоновских (классических) понятиях абсолютного пространства и времени. Согласно Ньютону, пространство и время представляют собой самостоятельные сущности, которые не зависят ни друг от друга, ни от присутствующих материальных объектов и протекающих в них процессов.

Другое направление в развитии представлений о пространстве и времени восходит к Аристотелю. Согласно этой точке зрения, пространство и время не являются самостоятельными сущностями, а определяются свойствами находящихся в них объектов и ходом протекающих процессов. В начале 20 в. эта концепция получила ряд экспериментальных подтверждений и легла в основу современных представлений о пространстве и времени, разработанных Эйнштейном в специальной и общей теориях относительности. Специальная теория относительности выявила зависимость пространственных и временных характеристик объектов от скорости их движения относительно определенной инерциальной системы отсчета. Общая теория относительности вскрыла зависимость метрических свойств пространства от характера распределения гравитационных масс в этом пространстве.

Развитие квантовой физики потребовало дальнейшего углубления наших представлений о пространстве и времени. Достаточно сказать, что в рамках классических представлений о пространстве и времени неправомерно говорить о траектории микрочастицы и точных координатах ее локализации в пространстве. Ведущиеся в настоящее время исследования по построению единой теории фундаментальных взаимодействий дают веские основания для утверждения о том, что на расстояниях порядка  $10^{-35}$  м пространство перестает быть трехмерным и непрерывным.

Понятия пространства и времени относятся к числу наиболее универсальных понятий, и успехи в области физики микромира и космофизики неразрывно связаны с углублением и расширением представлений о них.

Важнейшими свойствами пространства и времени являются их однородность и изотропность. Однородность пространства означает эквивалентность всех точек пространства, т. е. отсутствие в нем выделенных точек или областей. Из однородности времени следует, что физические законы не меняются с течением времени. Изотропность пространства означает эквивалентность всех направлений в пространстве. Следствием однородности и изотропности пространства и времени являются законы сохранения импульса, момента импульса и энергии (см. § 10.1).

**Единицы физических величин.** Единицами физических величин называются конкретные физические величины, которым по определению присвоены численные значения,

равные единице. Единицы физических величин подразделяются на *системные*, т. е. входящие в какую-либо систему физических единиц (например, метр), и *внесистемные* (например, лошадиная сила). Системные единицы подразделяются на *основные*, выбираемые произвольно (метр, килограмм и т. д.), и *производные*, образуемые по уравнениям связи между физическими величинами. Например, единица скорости — метр в секунду или коротко:  $[v] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$  ( $[v]$  — символ единицы величины  $v$ ).

В нашей стране согласно стандарту, принятому Международная система единиц — Система Интернациональная (СИ), имеющая семь основных единиц — *метр, килограмм, секунда, ампер, кельвин, моль, кандела* и две дополнительные — *радиан и стерадиан*.

*Метр* (м) равен 1 650 763,73 длины волны в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями  $2p_{10}$  и  $5d_5$  атома криптона-86.

*Килограмм* (кг) равен массе международного прототипа килограмма платино-иридиевого цилиндра, хранящегося в Международном бюро мер и весов в Севре близ Парижа.

*Секунда* (с) равна 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

*Ампер* (А) равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н.

*Кельвин* (К) равен 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды.

*Моль* (моль) равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов (атомов, молекул, ионов), сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг.

*Кандела* (кд; от лат. *candela* — свеча) равна силе света в заданном направлении от источника, испускающего монохроматическое излучение частотой  $540 \cdot 10^{12}$  Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет  $1/683$  Вт/ср (ср — см. стерадиан).

*Радиан* (рад) равен углу между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

*Стерадиан* (ср; от греч. *stereós* — телесный, объемный

и радиан) равен телесному углу с вершиной в центре сферы, вырезающему на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равновеликой радиусу сферы (телесный угол сферы равен  $4\pi$  ср).

**Размерность физической величины.** Анализ размерностей. Как уже отмечалось, в системе физических единиц, кроме основных, используются производные единицы, которые образуются на основании уравнений связи между физическими величинами, определяющих математическую формулировку физических законов.

*Размерностью физической величины* называется ее выражение в основных единицах. В общем случае формула размерности некоторой физической величины  $B$  имеет вид:

$$\dim B = L^p M^q T^r \dots,$$

где  $\dim$  — символ размерности определяемой физической величины  $B$  (от англ. *dimension* — размер),  $L$ ,  $M$ ,  $T$ , ... — символы величин, принятых за основные, например, здесь  $L$ ,  $M$ ,  $T$  — символы длины, массы и времени, а величины  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , ... представляют собой любые вещественные числа, называемые *показателями размерности* производной величины  $B$ . Так, формула размерности для скорости  $v$ , определяемой как отношение пройденного пути к промежутку времени, за который этот путь пройден, имеет вид:  $\dim v = LT^{-1}$ ; для силы, определяемой на основании второго закона Ньютона,  $\dim F = = MLT^{-2}$ .

Анализ размерностей физических величин имеет важное значение для выявления полуколичественных соотношений, характеризующих тот или иной процесс. Его применяют в тех случаях, когда отсутствуют необходимые экспериментальные данные либо неизвестен точный вид физического закона. Сущность метода, связанного с анализом размерностей, в том, что в любых уравнениях, описывающих физические явления или процессы, размерности левой и правой части должны совпадать. Это требование во многих случаях позволяет с точностью до численного множителя установить правильный характер искомых математических зависимостей для изучаемых явлений.

В качестве примера использования такого метода приведем вывод формулы зависимости пути от ускорения и времени при равноускоренном движении. Для этого

запишем обобщенное соотношение зависимости пройденного пути от ускорения и времени:

$$s \sim a^p t^q,$$

где  $p$  и  $q$  — неизвестные показатели размерностей. Чтобы установить значение этих показателей, запишем это выражение через его размерности:

$$L = (LT^{-2})^p T^q = L^p T^{q-2p}.$$

Так как размерности левой и правой частей должны быть одинаковыми, то, приравнивая показатели степени при одинаковых размерностях, приходим к системе уравнений:  $1 = p$ ,  $0 = q - 2p$ . Решая эти уравнения, находим значения искомых показателей ( $p = 1$ ,  $q = 2$ ).

Подставляя полученные значения  $p$  и  $q$  в соотношение  $s \sim a^p t^q$ , приходим к зависимости

$$s \sim at^2.$$

Как известно, точная формула пути при равноускоренном движении имеет вид:  $s = 1/2at^2$ .

Таким образом, только на основе анализа размерностей получена (с точностью до численного множителя  $1/2$ ) правильная формула для пройденного пути при равноускоренном движении. Приведенный пример является простейшей иллюстрацией возможностей метода, основанного на анализе размерностей. Он имеет весьма широкое применение при исследовании сложных физических и других процессов.

**Место физики в системе общепрофессиональной подготовки.** Физика относится к числу фундаментальных дисциплин, которые закладывают основу для общенаучной и обще-технической подготовки будущего специалиста. Объединяя все достижения современной научно-технической мысли, физика служит базой для развития самых передовых технологий и производств. Ядерные технологии, микроэлектроника, лазерная техника, сверхпроводимость — все это вышло из недр физических лабораторий и на сегодняшний день определяет уровень человеческой цивилизации. Однако роль физики в формировании будущего специалиста определяется не только этим. Не менее важным для становления инженера является овладение навыками физического мышления, а также техникой физического эксперимента. Овладение физическими методами исследования и знание законов современной физики обеспечат создание теоретической базы для дальнейшей самостоятельной и плодотворной работы выпускников вузов в различных отраслях народного хозяйства.

Наука — это попытка привести хаотическое многообразие нашего чувственного опыта в соответствие с некоторой единой системой мышления.

А. Эйнштейн

## I. МЕХАНИКА КЛАССИЧЕСКАЯ, РЕЛЯТИВИСТСКАЯ И КВАНТОВАЯ

**Предмет механики.** *Механикой* называют науку, изучающую закономерности простейшей формы движения материи — *механического движения*, состоящего в изменении во времени взаимного расположения материальных объектов в пространстве.

Движение макроскопических тел со скоростями, значительно меньшими скорости света, изучается в *классической механике Ньютона* (см. гл. 1—10). Законы движения материальных объектов со скоростями, близкими к скорости света, рассматриваются в *релятивистской механике* (см. гл. 11). *Квантовая механика* (см. гл. 12) изучает поведение микрочастиц с учетом их волновых свойств.

В наши дни распространено странное мнение, что всему следует обучать на лекциях... Я не знаю ничего такого, что лучше всего усваивается на лекциях за исключением материала, который надо сопровождать показом опытов.

Д-р Сэмюэл Джонсон

### 1. КИНЕМАТИКА

**Основная задача кинематики.** *Кинематикой* (от гр. *kinēma* — движение) называется раздел механики, посвященный изучению движения материальных объектов без учета их масс и действующих на них сил. Следовательно, в этом разделе все внимание сосредоточивается на тех сторонах механического движения, которые определяются геометрическими особенностями движения материальных объектов в пространстве и во времени. Устанавливаемые здесь соотношения используются при кинематических исследованиях движений, в частности,

при расчете механических передач в различных технических устройствах, а также при решении задач динамики.

В зависимости от вида изучаемого объекта в кинематике выделяют кинематику материальной точки, кинематику твердого тела и кинематику непрерывной изменяющейся среды (деформируемого твердого тела, жидкости, газа). Для описания движения наблюдатель\* выбирает систему отсчета. Под *системой отсчета* понимают тело отсчета (реальное или воображаемое) и связанную с ним систему координат, а также определенный способ измерения времени. Это позволяет наблюдателю (рис. 1.1) установить в любой момент времени положе-

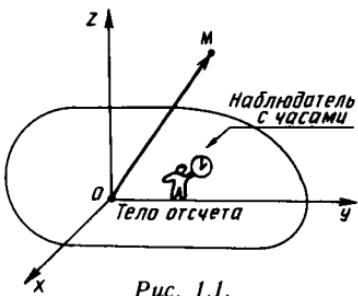


Рис. 1.1.

ние изучаемого объекта  $M$  по отношению к системе координат. Выбор системы координат в значительной мере произведен. Чаще всего используется прямоугольная декартова система  $xuyz$ . Однако в ряде задач, характеризуемых определенными элементами симметрии, удобно использовать соответствующие им координатные системы, в частности, полярную, цилиндрическую и сферическую. Такой предварительный учет симметрии приводит к максимально возможной математической простоте описываемых явлений. Основной задачей кинематики является расчет кинематических характеристик движущихся объектов, к которым, в частности, относятся скорость, ускорение и траектория.

## 1.1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

**Материальная точка и способы описания ее движения.** Описание физических явлений всегда связано с введением некоторых абстрактных понятий и моделей, которые

\* Под словом «наблюдатель» в дальнейшем будем понимать человека, изучающего движение того или другого объекта.

призваны отразить наиболее существенные стороны рассматриваемых процессов. При этом из всего многообразия физических свойств явления сохраняется наиболее явная и характерная черта, а все несущественное в первом приближении отбрасывается.

При построении моделей механических систем важнейшей абстракцией является понятие материальной точки. *Материальной точкой* называется физический объект, размерами которого по условиям рассматриваемой задачи можно пренебречь. Это имеет место в тех случаях, когда размеры и форма тела являются несущественными при описании движения, а важна только его масса. Такая абстракция позволяет отвлечься от физических размеров объекта и определять его положение в пространстве с помощью координат геометрической точки. Это во многих случаях значительно упрощает решение конкретных механических задач. Например, при решении задач, связанных с движением космических объектов, последние удобно рассматривать как материальные точки. Для описания движения материальной точки используются три способа задания движения — векторный, координатный и естественный (траекторный).

**Векторный способ описания движения точки.** При таком способе описания движения на теле отсчета выбирается точка  $O$  (начало отсчета), из которой в направлении движущейся точки  $M$  проводят радиус-вектор (рис. 1.2). При движении точки  $M$  значение и направление радиуса-вектора  $r$  изменяются, т. е. он является функцией времени. Если вид функции  $r = r(t)$  известен, то уравнение движения точки  $M$  задано в векторной форме. Конец радиуса-вектора  $r(t)$  описывает в пространстве кривую, которая называется *траекторией* движущейся точки. Таким образом, задание движения в векторной форме имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(t) \text{ или } \mathbf{r} = r(t)\mathbf{e}_r, \\ \mathbf{e}_r &= \mathbf{r}/r \text{ — единичный вектор в направлении} \\ &\quad \text{вектора } \mathbf{r}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Задание движения точки с помощью векторного способа является наиболее общим, так как векторное уравнение (1.1) можно представить в любой координатной системе и использовать ее при выполнении конкретных численных расчетов.

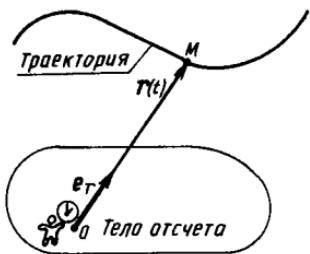


Рис. 1.2

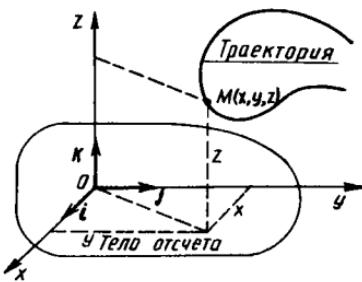


Рис. 1.3

**Координатный способ описания движения точки.** В этом случае с телом отсчета связывается система координат, которая позволяет каждой точке пространства сопоставить три числа, называемые *координатами точки* этого пространства. Наиболее распространенными системами являются прямоугольная декартова, цилиндрическая и сферическая системы координат. В данном пособии будем пользоваться в основном прямоугольной декартовой системой координат (рис. 1.3), в которой положение материальной точки  $M$  определяется тремя координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$ . При движении точки эти координаты изменяются во времени и, следовательно, ее движение описывается тремя уравнениями.

Координатная форма закона движения

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

(1.2)

В случае движения точки по заранее заданной поверхности достаточно двух уравнений движения, например  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$  при движении по плоскости, а при движении по заданной линии (прямой или кривой) — одного уравнения.

**Естественный (траекторный) способ задания движения точки.** Если точка  $M$  движется по некоторой заданной траектории, то для описания движения достаточно выбрать на траектории начало отсчета (точка  $O^*$  на рис. 1.4), положительное и отрицательное направления отсчета длины дуги  $O^*M$ , которую обозначают буквой  $s$  и называют *дуговой координатой*. Зависимость  $s(t)$  (вместе с уравнением траектории) задает движение точки в естественном способе описания движения.

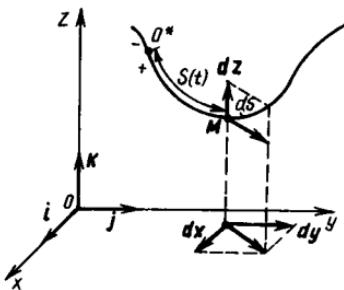


Рис. 1.4

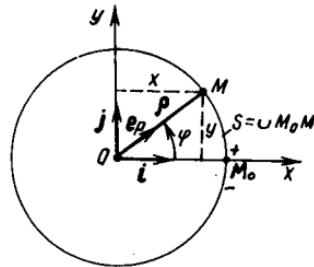


Рис. 1.5

Уравнение траектории

$$y = y(x); \quad z = z(x).$$

Закон движения

$$s = s(t).$$

(1.3)

Все три способа задания движения совершенно равноправны и могут быть использованы для описания движения материальной точки, так как их можно связать следующими соотношениями (см. рис. 1.3 и 1.4):

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad (1.4)$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}. \quad (1.5)$$

Из уравнения (1.5) вытекает, что между дуговой координатой  $s$  и координатами  $x, y, z$  имеется интегральная связь вида

$$s = \pm \int_{x_0}^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx. \quad (1.6)$$

**Пример 1.1.** В качестве простого примера, иллюстрирующего взаимосвязь трех способов задания движения, рассмотрим движение материальной точки по окружности радиуса  $R$  (рис. 1.5) с центром в точке  $O$ . Пусть, например, при движении точки  $M$  угол  $\varphi$  изменяется со временем по закону  $\varphi = \pi t^2$ .

**Решение.** Здесь для задания движения фактически используется полярная система координат, в которой положение точки  $M$  задается угловой координатой  $\varphi$  и радиальной координатой  $\rho = OM = R = \text{const}$ . В данном случае  $\rho = OM = R = \text{const}$ .

а) **Векторный способ.** В направлении  $OM$  выбираем единичный вектор  $\mathbf{e}_\rho$ . Используя декартову систему  $XOY$ , можем записать, что

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi. \quad (1.7)$$

Подставим (1.7) в (1.1) и учтем, что здесь  $r(t) = R$ . Тогда

$$\mathbf{r}(t) = R \cos(\pi t^2) \mathbf{i} + R \sin(\pi t^2) \mathbf{j}. \quad (1.8)$$

б) Координатный способ. Из сопоставления (1.8) с (1.4) следуют уравнения движения в координатной форме:

$$x = R \cos \pi t^2, \quad y = R \sin \pi t^2, \quad z = 0. \quad (1.9)$$

в) Естественный способ. Начало отсчета дуги  $s$  выберем в точке  $M_0$ , соответствующей положению движущейся точки  $M$  в начальный момент ( $t = 0$ ), и воспользуемся уравнением окружности  $x^2 + y^2 = R^2$ .

Тогда  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ . Вычислим производную от  $y$  по  $x$ :  $dy/dx = -x/\sqrt{R^2 - x^2}$  и подставим ее в выражение (1.6) для дуговой координаты  $s$  ( $dz/dx = 0$ , так как  $z \equiv 0$ ). Тогда

$$s = - \int_R^x \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = - \int_R^x \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

При вычислении интеграла по  $x$  используем связь между  $x$  и  $\varphi$ :

$$x = R \cos \varphi \Rightarrow dx = -R \sin \varphi d\varphi.$$

В результате интегрирования получим закон движения точки в естественном виде

$$s = \int_0^\varphi \frac{R^2 \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 \varphi}} = \int_0^\varphi R d\varphi = R\varphi = \pi R t^2. \quad (1.10)$$

В данном простом примере результат (1.10) для дуговой координаты  $s$ , как впрочем и для декартовых координат  $x, y$  (см. (1.9)), является очевидным и вытекает непосредственно из геометрических построений, выполненных на рис. 1.5. Однако в более сложных ситуациях получить выражение для  $s$  без привлечения соотношения (1.6) невозможно.

## 1.2. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОЧКИ

**Число степеней свободы. Средняя скорость точки.** Направляющие косинусы углов  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  для единичного вектора  $\mathbf{e}$ , (рис. 1.6), используемого для определения закона движения в векторной форме (см. (1.1)), удовлетворяют соотношению.

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (1.11)$$

Поэтому уравнение движения в виде  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  предполагает задание трех функций (например,  $r(t), \alpha(t), \beta(t)$ ), поскольку, согласно равенству (1.11), угол  $\gamma = f(\alpha, \beta)$ . Таким образом, в векторном (1.1), координатном (1.2) и естественном (1.3) способах описания движения точки необходимо задать три уравнения. Это является следствием того, что положение точки в пространстве можно

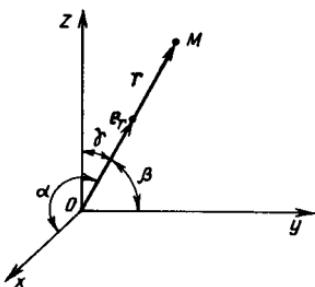


Рис. 1.6

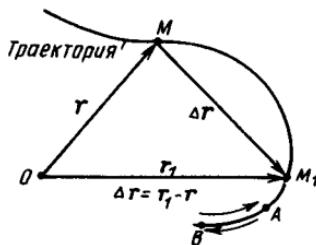


Рис. 1.7

определить любым набором из трех независимых геометрических параметров — тремя координатами. Эту особенность геометрического описания движения точки в физике характеризуют понятием «число степеней свободы». Число независимых геометрических параметров, которые определяют положение материальной точки в пространстве, называется *числом степеней свободы* и обозначается буквой  $i$ . Итак, для точки в пространстве  $i = 3$ . В случае движения по заданным поверхности или кривой число степеней свободы соответственно равно 2 и 1.

Основными величинами, характеризующими движение материальной точки, являются вектор перемещения, скорость и ускорение.

*Вектором перемещения* называется вектор  $\Delta r$ , соединяющий положения движущейся точки в начале и в конце некоторого промежутка времени  $\Delta t$  (рис. 1.7).

Численное значение вектора перемещения ( $\Delta r = MM_1$ ) равно кратчайшему расстоянию между начальным и конечным положениями точки за рассматриваемый промежуток времени  $\Delta t$  ( $\Delta r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|$ ). Не следует смешивать понятие перемещения точки с пройденным ею путем. Перемещение — вектор, а пройденный путь — скаляр. Кроме того, они не совпадают численно (даже в случае прямолинейного движения). Если точка, двигаясь по кривой, переместилась из положения  $A$  в положение  $B$ , а затем вернулась обратно в  $A$ , то вектор перемещения  $\Delta r = 0$ , а пройденный путь  $l = 2AB$ .

*Средней скоростью* на некотором участке пути называется величина, равная отношению пройденного пути  $\Delta l$  к промежутку времени  $\Delta t$ , за который этот путь пройден. Эту скорость в дальнейшем будем называть средней арифметической скоростью:

$$v_{cp}^ap = \Delta l / \Delta t. \quad (1.12)$$

Скорость, введенная согласно формуле (1.12), характеризует быстроту движения материальной точки в среднем за промежуток времени  $\Delta t$ . Естественно, что значение этой скорости зависит как от значения временного промежутка  $\Delta t$ , так и от характера движения материальной точки на этом участке траектории. Понятно, что средняя арифметическая скорость не может характеризовать направление движения точки. Поэтому для более детального описания движения точки вводят вектор средней скорости за время  $\Delta t$ :

$$\mathbf{v}_{cp} = \Delta \mathbf{r} / \Delta t. \quad (1.13)$$

Направление вектора  $\mathbf{v}_{cp}$  совпадает с направлением вектора перемещения  $\Delta \mathbf{r}$  и тем самым несет определенную информацию о направлении движения точки  $M$  на участке  $MM_1$  (рис. 1.8). Однако вектор средней скорости,

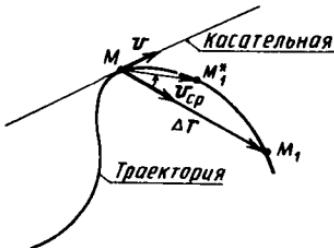


Рис. 1.8

определенный формулой (1.13), имеет один существенный недостаток. Если за время  $\Delta t$  материальная точка переместилась вдоль траектории в некоторую точку, а затем вернулась в первоначальное положение, то вектор перемещения  $\Delta \mathbf{r}$  будет равен нулю. Вектор средней скорости также обратится в нуль. Это означает, что вектор  $\mathbf{v}_{cp}$  не содержит информации о движении точки на отдельных малых участках траектории между точками  $M$  и  $M_1$ . Поясним эту ситуацию на примере.

**Пример 1.2.** Определить среднюю векторную и среднюю арифметическую скорости автомобиля, если из пункта  $A$  в пункт  $B$  он движется с постоянной скоростью  $v_1 = 54$  км/ч, а обратно из пункта  $B$  в пункт  $A$  с постоянной скоростью  $v_2 = 72$  км/ч.

**Решение.** Так как по окончании движения автомобиль вернулся в исходный пункт, то вектор перемещения  $\Delta \mathbf{r}$  равен нулю. Поэтому вектор средней скорости также равен нулю ( $\mathbf{v}_{cp} = 0$ ) (см. (1.13)). Среднюю арифметическую скорость рассчитаем по формуле (1.12). Если обозначить расстояние от  $A$  до  $B$  через  $l_0$ , то полный путь  $l = 2l_0$ . Общее время движения  $t = t_1 + t_2$ , где  $t_1$  — время движения из  $A$  в  $B$

( $t_1 = l_0/v_1$ ), а  $t_2$  — время движения из  $B$  в  $A$  ( $t_2 = l_0/v_2$ ). Подставляя полученные значения  $t$  и  $l$  в (1.12), будем иметь

$$v_{cp} = \frac{2l_0}{t_1 + t_2} = \frac{2l_0}{l_0/v_1 + l_0/v_2} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}.$$

В Международной системе единиц (СИ) скорость  $v_1 = 54 \times 10^3 / 3600 = 15 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ , а  $v_2 = 20 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ . Тогда

$$v_{cp} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 15 \cdot 20}{15 + 20} = 17,14 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Достаточно часто при решении таких задач встречается ошибка, когда среднюю скорость находят как среднее арифметическое значение скоростей  $v_1$  и  $v_2$  ( $v_{cp}^* = (v_1 + v_2)/2$ ). В ответе игнорируется тот факт, что автомобиль движется со скоростью, равной  $v_1$  или  $v_2$ , разные промежутки времени ( $t_1 = l_0/v_1$ ,  $t_2 = l_0/v_2$ ,  $t_1 > t_2$ ). Если учесть ту долю времени, которую составляют промежутки  $t_1$  и  $t_2$  от общего времени  $t$ , то тогда следует записать, что

$$v_{cp} = v_1 \cdot \frac{t_1}{t} + v_2 \cdot \frac{t_2}{t} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t} = \frac{2l_0}{t}.$$

Из последней формулы видно, что среднее арифметическое от  $v_1$  и  $v_2$  будет определять среднюю арифметическую скорость только в том случае, когда  $t_1 = t_2$ .

**Вектор мгновенной скорости.** Из приведенного примера следует, что вектор средней скорости  $\mathbf{v}_{cp}$  не может характеризовать быстроту и направление движения точки в подобных ситуациях (так как  $\mathbf{v}_{cp} = 0$ ). Для детального кинематического описания движения точки во времени вводится вектор *мгновенной скорости*  $\mathbf{v}$  как предел, к которому стремится вектор средней скорости  $\mathbf{v}_{cp}$  при стремлении временного промежутка  $\Delta t$  к нулю, т. е.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{r} / \Delta t.$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  точка  $M_1$  на рис. 1.8 стремится к точке  $M$ , а вектор  $\mathbf{v}_{cp} = \Delta \mathbf{r} / \Delta t$  поворачивается и в пределе совпадает с направлением касательной к траектории в точке  $M$ . Следовательно,

$\mathbf{v} = d\mathbf{r} / dt$  — вектор мгновенной скорости точки. (1.14)

Согласно (1.14), вектор  $\mathbf{v}$  характеризует быстроту и направление движения точки в момент времени  $t$ .

При координатном способе задания движения вектор скорости  $\mathbf{v}$  находят по его проекциям на оси соответствующей системы координат. Так, в частности, если уравнения движения заданы в декартовых коор-

динатах (1.2), то для нахождения проекций скорости на оси  $x, y, z$  представим радиус-вектор  $\mathbf{r}$  и вектор  $\mathbf{v}$  соответственно в виде  $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ . Подставив эти выражения в (1.14), получим  $v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$ . Приравняв коэффициенты при  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$ , получим следующие соотношения:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt} \text{ — проекции скорости.} \quad (1.15)$$

Таким образом, проекции скорости  $\mathbf{v}$  на декартовы оси равны первым производным от соответствующих координат по времени. Модуль скорости точки (см. рис. 1.9)

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}, \quad (1.16)$$

а направление вектора  $\mathbf{v}$  определяется с помощью направляющих косинусов углов  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , которые составляет вектор  $\mathbf{v}$  с осями  $x, y, z$ :

$$\cos \alpha_1 = v_x/v, \cos \beta_1 = v_y/v, \cos \gamma_1 = v_z/v. \quad (1.17)$$

Для определения скорости в естественном способе задания движения (рис. 1.10,  $s = s(t)$ ) будем рассматривать  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  как сложную функцию времени:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ , а  $s = s(t)$ . В связи с этим домножим и разделим правую часть (1.14) на  $ds$ . Тогда получим

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{ds}{ds} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau}, \quad \vec{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds},$$

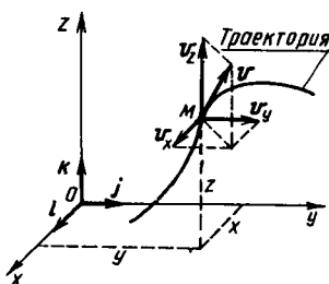


Рис. 1.9

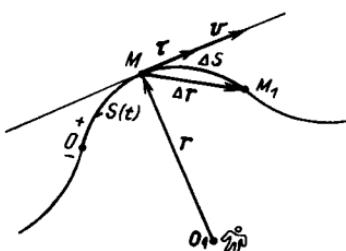


Рис. 1.10

где  $\vec{\tau}$  — единичный вектор касательной, а  $ds/dt$  — проекция  $v_\tau$  скорости  $v$  на касательную  $\vec{\tau}$ :

$$v_\tau = ds/dt \text{ — скорость в естественном способе.} \quad (1.18)$$

**Ускорение точки.** В общем случае вектор скорости точки изменяется по величине и направлению, т. е.  $v = v(t)$ . Изменение скорости во времени характеризуется ускорением  $a$ . Вектор *среднего ускорения* равен отношению изменения вектора скорости к тому промежутку времени, в течение которого это изменение произошло, т. е.  $\mathbf{a}_{cp} = \Delta \mathbf{v} / \Delta t$ . Повторяя рассуждения, которые привели к формуле (1.14) для скорости, получаем, что вектор *мгновенного ускорения* равен первой производной от вектора скорости по времени или второй производной от  $\mathbf{r}(t)$  по времени:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \text{ — вектор ускорения точки.} \quad (1.19)$$

Если уравнения движения заданы в координатной форме, то ускорение  $a$  находят по его проекциям на оси координат. В частности, для уравнений движения (1.2), т. е. в случае прямоугольной декартовой системы координат, с учетом (1.15) и (1.19) получаем

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \\ &= \frac{d^2z}{dt^2} \text{ — проекции ускорения на оси } x, y, z. \end{aligned} \quad (1.20)$$

В этом случае ускорение

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}, \quad (1.21)$$

а направление вектора  $a$  относительно системы  $xyz$  определяется, как и в случае скорости  $v$  (см. рис. 1.9), посредством направляющих косинусов углов между вектором  $a$  и ортами осей  $i, j, k$  декартовой системы (см. также рис. 1.6, на котором изображены углы  $\alpha, \beta, \gamma$  для радиуса-вектора  $r$  или  $e_r$ ):

$$\cos \alpha_2 = a_x/a, \cos \beta_2 = a_y/a, \cos \gamma_2 = a_z/a. \quad (1.22)$$

При естественном способе описания движения точки, в случае криволинейного движения, ускорение а точки разлагается на две составляющие: касательное  $a_t$  (тангенциальное) и нормальное  $a_n$  (центростремительное), т. е.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n, \quad a^2 = a_t^2 + a_n^2. \quad (1.23)$$

Пусть при перемещении точки из положения  $M$  в положение  $M_1$  скорость изменилась от  $\mathbf{v}$  до  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$  (рис. 1.11). Разложим  $\Delta\mathbf{v}$  на два слагаемых:  $\Delta\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v}_t + \Delta\mathbf{v}_n$ . Тогда по определению

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{v}_t}{\Delta t} \vec{\tau} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{v}_n}{\Delta t} \vec{n}.$$

Определим проекцию ускорения на касательную (коэффициент при единичном векторе  $\vec{\tau}$ )

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_t}{\Delta t} = \frac{dv_t}{dt} — \text{касательное ускорение.} \quad (1.24)$$

*Касательное ускорение*  $a_t$  равно первой производной от проекции скорости  $v_t$  по времени  $t$  (формула (1.24)).

Преобразуем далее выражение для проекции ускорения на нормаль  $n$  (при  $\Delta t \rightarrow 0, v_1 \rightarrow v, \sin \Delta\alpha \sim \Delta\alpha$ )

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \sin \Delta\alpha}{\Delta t} = v \frac{d\alpha}{dt} \frac{ds}{ds} = v \frac{ds}{dt} \frac{d\alpha}{ds}.$$

Поскольку  $ds = \rho \cdot d\alpha$ , а  $ds/dt = v_t$ , то для  $a_n$  получается следующее выражение:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} > 0 — \text{нормальное ускорение,} \\ \rho = \frac{ds}{d\alpha} — \text{радиус кривизны траектории.} \quad (1.25)$$

Согласно выражению (1.25), *нормальное ускорение* равно отношению квадрата скорости точки к радиусу кривизны ее траектории (формула (1.25)).

Из определения (1.24) и с учетом  $v = |v_t|$  следует, что касательное ускорение характеризует изменение скорости по величине. Полное ускорение  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$  опре-

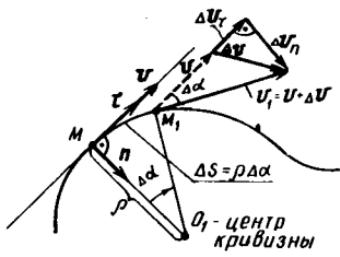


Рис. 1.11

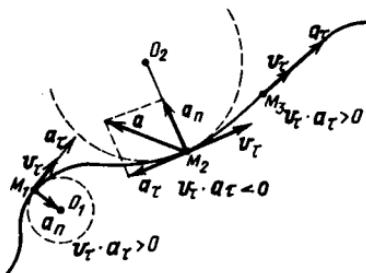


Рис. 1.12

деляет изменение вектора  $v$  по величине и по направлению (см. (1.19)). В результате можно сделать вывод, что нормальное ускорение должно характеризовать изменение вектора  $a$  по направлению. Проекция  $a_n = v^2/\rho$  положительна, поэтому нормальное ускорение  $a_n$  всегда направлено по нормали к центру кривизны. Согласно выражению (1.24), касательное ускорение  $a_t$  может быть как положительным, так и отрицательным. При этом (рис. 1.12) движение точки  $M_1$  — ускоренное, а точки  $M_2$  — замедленное. Очевидно, что при движении на прямолинейном участке пути  $a_n = 0$  ( $\rho = \infty$ ). Это означает, что вектор скорости  $v$  не изменяет свое направление (не поворачивается) и точка  $M_3$  будет иметь только касательное ускорение ( $a_t = a$ ).

### 1.3. КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

**Виды и характер движения точки.** Классификацию возможных частных случаев движения удобно выполнить с помощью естественного способа задания движения точки. Для этого проанализируем временное поведение кинематических характеристик точки: скорости  $v$ , касательного  $a_t$ , нормального  $a_n$  ускорений и связанного с ними геометрического параметра  $\rho$ , определяющего вид траектории — радиуса кривизны  $\rho = v^2/a_n$ . По отношению к виду траектории возможны три ситуации:  $\rho \neq \text{const}$  (криволинейное движение),  $\rho = \text{const}$  (движение по окружности радиуса  $R = \rho$ ) и  $\rho = \infty$  (прямолинейное движение). В каждом из этих трех случаев точка может двигаться *равномерно* ( $a_t = \frac{dv_t}{dt} = 0$ ), *равнопеременно* (равноускоренно —  $v_t a_t < 0$ , равнозамедленно —  $v_t a_t > 0$ ), а в общем случае *неравномерно с переменным*

во времени касательным ускорением ( $a_t = f(t)$ ). По известному касательному ускорению можно найти модуль скорости  $v$  и путь  $l$ , пройденный точкой за время  $t$ , т. е. решить *обратную задачу кинематики*:

$$\frac{dv}{dt} = a_t \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_t(t) dt \Rightarrow v(t) = v_0 + \int_0^t a_t(t) dt -- \text{модуль скорости;} \quad (1.26)$$

$$\frac{dl}{dt} = v \Rightarrow \int_0^l dl = \int_0^t v(t) dt \Rightarrow l(t) = \int_0^t v(t) dt -- \text{пройденный точкой путь.} \quad (1.27)$$

Результаты, которые следуют из (1.26) и (1.27) для всех частных случаев движения точки, сведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1.

Вид движения точки	Характер и законы движения точки при		
	равномерном движении: $a_t = 0$ , $v = v_0 = \text{const}$ , $l = v_0 t$	равнопеременном движении: $a_t = \text{const}$ , $v = v_0 + a_t t$ , $l = v_0 t + a_t t^2 / 2$	переменном движении: $a_t = a_t(t)$ , $v = v_0 + \int_0^t a_t(t) dt$ , $l = \int_0^t v(t) dt$
Криволинейное движение: $\rho \neq \text{const}$	$a_n = \frac{v_0^2}{\rho(t)} \neq \text{const}$	$a_n = \frac{(v_0 + a_t t)^2}{\rho(t)}$	$a_n = \frac{v^2(t)}{\rho(t)}$
Движение по окружности: $\rho = R = \text{const}$	$a_n = \frac{v_0^2}{R} = \text{const}$	$a_n = \frac{(v_0 + a_t t)^2}{R}$	$a_n = \frac{v^2(t)}{R}$
Прямолинейное: $\rho = \infty$	Нормальное ускорение $a_n = v^2/\rho = 0$ , т. е. вектор скорости не имеет направления		

Из уравнений равнопеременного движения получается полезное для расчетов соотношение (для этого нужно исключить время  $t$  из этих уравнений)  $v^2 - v_0^2 = 2a_t l$ .

Далее рассмотрим пример 1.3, с помощью которого наглядно продемонстрируем предсказательную силу законов кинематики по отношению к изучению механического движения. Эти законы совместно с результатами

ми эксперимента позволяют рассчитать, например, ускорение свободного падения. Для этого достаточно воспользоваться данными опыта, который могут провести три любознательных школьника под руководством своего учителя (при наличии двух секундомеров, линейки, теннисного мяча и высотного здания (рис. 1.13)). Заметим сразу, что аналогичный опыт реализуется в лабораторных условиях с помощью специальных приспособлений, причем можно учесть влияние сопротивления среды на движение шарика (см. пример 2.2).

В главе «Виды и законы силовых взаимодействий» (см. § 3.3) будет рассмотрен другой пример использования кинематических соотношений, который позволил Ньютону сформулировать знаменитый закон всемирного тяготения.

**Пример 1.3.** По команде учителя школьник, находящийся на этаже с номером  $N$ , бросает мяч без начальной скорости (см. рис. 1.13), два других мальчика одновременно включают секундомеры и выключают их в тот момент, когда мимо их окна пролетает мяч. Определить ускорение  $g$  и номер этажа  $N$ , из окна которого выпал мяч, если высота одного этажа  $h = 3,5$  м, а показания секундомеров  $t_1 = 3,1$  с и  $t_2 = 4,2$  с.

**Решение.** Мяч, выпавший из окна, находится в свободном падении. Поэтому ускорение  $a$ , с которым он движется, равно  $g$ . По закону равноускоренного движения запишем систему уравнений:

$$\begin{aligned} l_1 &= gt_1^2/2, \quad l_1 = (N - 11)h, \\ l_2 &= gt_2^2/2, \quad l_2 = (N - 1)h. \end{aligned}$$

Из этих уравнений следует, что ускорение

$$g = \frac{2(l_2 - l_1)}{t_2^2 - t_1^2} = \frac{20h}{t_2^2 - t_1^2} = \frac{20 \cdot 3,5}{4,2^2 - 3,1^2} = 8,72 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2},$$

а номер этажа, с которого выпал мяч,

$$N = \frac{l_1 + 11h}{h} = 11 + \frac{gt_1^2}{2h} = 11 + \frac{8,75 \cdot 3,1^2}{2 \cdot 3,5} \approx 23.$$

Участники эксперимента имеют возможность сравнить полученное значение  $N = 23$  с тем, что было в действительности на опыте, а значение  $g^{\text{эксп}} = 8,72 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$  можно сопоставить со справочным значением ( $g = 9,81 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ ). Имеющие место отклонения следует отнести на погрешности, которые допущены в данном эксперименте при определении значений  $t_1$ ,  $t_2$  и  $h$ . Очевидно, что заниженное значение  $g^{\text{эксп}}$  можно отнести на влияние сопротивления воздуха. Приведенный пример показывает, что использование в расчетах приближенных экспериментальных данных требует серьезного отношения к методике проведения опытов и статистической обработки результатов наблюдений с целью учета различного рода допускаемых в эксперименте погрешностей (систематические, случайные и промахи).

**Пример 1.4.** Закон движения управляемого реактивного снаряда на начальном участке траектории в координатном способе задания

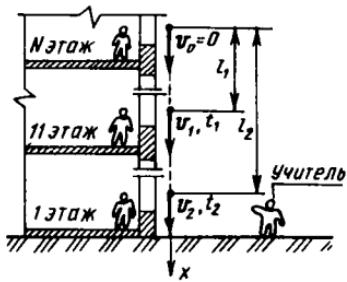


Рис. 1.13

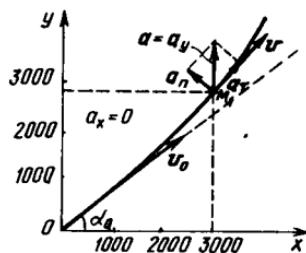


Рис. 1.14

движения определяется уравнениями  $x = At$ ,  $y = Bt + Ct^2$ , где  $A = 1000 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $B = 800 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $C = 50 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ . Определить радиус кривизны траектории  $\rho$ , скорость  $v$ , нормальное  $a_n$ , тангенциальное  $a_t$  и полное  $a$  ускорения через  $t = 3$  с после запуска реактивного снаряда (в точке  $M_1$  на рис. 1.14).

**Решение.** Из дифференциальной геометрии известно, что радиус кривизны плоской кривой можно вычислить по формуле (см. задание 1.4)

$$\rho = \frac{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}{x'y'' - x''y'}. \quad (1.28)$$

Здесь штрихом обозначается дифференцирование по параметру, определяющему параметрическое уравнение траектории (в данном примере таким параметром является время  $t$ ).

Для выполнения вычислений предварительно находим все производные, которые входят в выражение для  $\rho$ :  $x' = A$ ,  $x'' = 0$ ,  $y' = B + 2Ct$ ,  $y'' = 2C$ . Скорость снаряда

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{A^2 + (B + 2Ct)^2} / t = 3 \text{ с} = \sqrt{10^6 + (800 + 2 \cdot 50 \cdot 3)^2} = \\ = 1490 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Подстановка полученных при  $t = 3$  с значений производных в формулу для радиуса кривизны дает

$$\rho = \frac{v^3}{v_x a_y - v_y a_x} \approx \frac{1490^3}{1000 \cdot 2 \cdot 50} \approx 3,3 \cdot 10^4 \text{ м} = 33 \text{ км}.$$

Нормальное ускорение находим по формуле

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{1490^2}{3,3 \cdot 10^4} = 67,3 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Тангенциальное ускорение  $a_t = dv/dt$ . Взяв производную от модуля скорости  $v(t)$  по времени  $t$ , получим

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{2v_x a_x + 2v_y a_y}{2\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \frac{(B + 2Ct)2C}{v} = \frac{1,1 \cdot 10^5}{1,49 \cdot 10^3} = 73,8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Положительный знак тангенциального ускорения ( $a_t = dv/dt$ ) означает, что модуль скорости увеличивается (т. е. движение ускоренное). Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{67,3^2 + 73,8^2} \approx 99,9 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Правильность расчетов проконтролируем с помощью формулы  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ , которая определяет ускорение в координатном способе задания движения. Поскольку  $a_x = 0$ , а проекция  $a_y = 2C$ , то точное значение ускорения  $a = 100 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ , что составляет  $\sim 10g$  ( $g$  — ускорение свободного падения).

**Задание 1.1. Сложение взаимно-перпендикулярных колебаний.** Движение точки задано координатным способом:  $x = A_1 \cos \omega t$ ,  $y = -A_2 \cos(\omega t + \varphi_0)$ ,  $z = 0$  ( $\varphi_1 = \omega t$  и  $\varphi_2 = \omega t + \varphi_0$  — фазы колебаний относительно осей  $x$  и  $y$ ). Исключите время  $t$  из уравнений движения точки в плоскости  $XOY$  и получите уравнение траектории. Постройте графики траекторий точки для трех значений сдвига фаз  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_0$ : 1)  $\varphi_0 = 0$ , 2)  $\varphi_0 = \pm\pi$ , 3)  $\varphi_0 = \pm\pi/2$ .

**Указание.** Разложите  $\cos(\omega t + \varphi_0)$  по формуле для косинуса суммы двух углов  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ , а затем исключите  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$  с помощью выражения  $x = A_1 \cos \omega t$ .

**Ответ.** Уравнение траектории:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \varphi_0 = \sin^2 \varphi_0. \quad (1.29)$$

Запомните это уравнение, мы еще не один раз встретимся с ним (см. § 7.2, а также соответствующие разделы по электрическим колебаниям и электромагнитным волнам (в частности, световым) во второй части данного пособия).

**Задание 1.2. Движение точки в полярной системе координат.** Материальная точка движется по спирали Архимеда по закону  $\rho = bt$ ,  $\varphi = \omega t$  (полярная система координат). Постройте траекторию точки при  $b = 0,1 \text{ м}$ ,  $\omega = \pi/3 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$ , получите закон движения в естественном виде ( $s = s(t)$ ) и рассчитайте скорость и касательное ускорение точки в момент времени  $t = 3 \text{ с}$ .

**Указание.** Используя построения на рис. 1.15, запишите выражение для  $ds$  и, используя заданный закон движения, найдите  $v = ds/dt$ .

**Ответ.** Скорость  $v = b\sqrt{1 + \omega^2 t^2}$ , а касательное ускорение  $a_t = b\omega^2 t / \sqrt{1 + \omega^2 t^2}$ .

**Задание 1.3. Движение точки по окружности.** При описании движения точки по окружности радиуса  $R$  удобно использовать естественный способ задания движения, т. е. определять ее положение с помощью дуговой координаты  $s = OM$  (рис. 1.16).

С другой стороны, положение точки  $M$  можно определить с помощью угла  $\varphi$ , характеризующего положение радиуса-вектора  $OM$  ( $\varphi$  — угол-

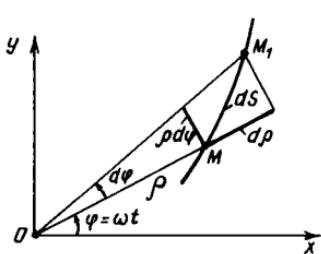


Рис. 1.15

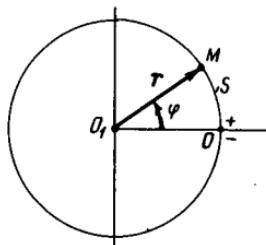


Рис. 1.16

вая координата). Считая, что зависимость  $\varphi$  от времени  $t$  задана ( $\varphi = \varphi(t)$  — закон изменения угловой координаты), введите понятия угловой скорости  $\omega$  и углового ускорения  $\varepsilon$ . Затем определите скорость  $v$ , касательное  $a_t$ , нормальное  $a_n$  и полное  $a$  ускорения точки  $M$ , выразив их через  $\omega$  и  $\varepsilon$ .

**Указание.** Выразите дуговую координату  $s$  через заданный угол  $\varphi = \varphi(t)$  и, воспользовавшись формулами (1.18), (1.24), (1.25) и (1.23), установите связь между линейными ( $v$ ,  $a_t$ ,  $a_n$ ,  $a$ ) и угловыми ( $\omega$ ,  $\varepsilon$ ) кинематическими характеристиками.

**Ответ.**

$$v_t = \omega R, \quad a_t = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R, \quad a = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

**Задание 1.4.** Выполните кинематический вывод выражения (1.28) для радиуса кривизны плоской кривой как траектории некоторой точки, заданной параметрическими уравнениями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ .

**Указание.** Получите в общем виде (через производные  $x'$ ,  $y'$ ,  $x''$  и  $y''$ ) выражения для  $v$ ,  $a_t$ ,  $a$ ,  $a_n$  и  $\rho$ , применив последовательно формулы (1.16), (1.24), (1.21), (1.23) и (1.25).

$$\text{Ответ. } v = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}, \quad a_t = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} = \frac{x' x'' + y' y''}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \quad a_n = \frac{a_x v_y - a_y v_x}{v} = \frac{x'' y' - y'' x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \quad \rho = \frac{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}{x' y'' - y' x''}.$$

#### 1.4. КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Простейшие виды движения тела.** Реальные тела в большей или меньшей мере изменяют свои размеры и форму в результате силового взаимодействия с другими телами.

Однако иногда при изучении движения твердых тел можно пренебречь изменением их размеров и форм. В этом случае считают тела *абсолютно твердыми*, т. е. такими, расстояния между любыми точками которых остаются постоянными. Абсолютно твердое тело — это полезная абстракция. Простейшими движениями твердого тела являются поступательные и вращательные.

*Поступательным движением* твердого тела называется такое его движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, движется параллельно самой себе. Например, движение поршня паровой машины, движение кабины «колеса обозрения» и т. д. Все точки твердого тела при поступательном движении описывают одинаковые траектории, лишь сдвинутые друг относительно друга, а также имеют одинаковые скорости и ускорения (см. задание 1.5). Поэтому при изучении поступательного движения твердого тела достаточно изучить движение одной какой-либо его точки. Из соображений удобства

решения задач динамики в качестве такой точки чаще всего выбирают центр масс (см. (2.41) — (2.43)). Это понятие совпадает с понятием центра тяжести тела, если оно движется вблизи или по поверхности Земли.

*Вращением* твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором все точки тела, расположенные на одной прямой, называемой *осью вращения* (ось  $z$  на рис. 1.17), остаются неподвижными.

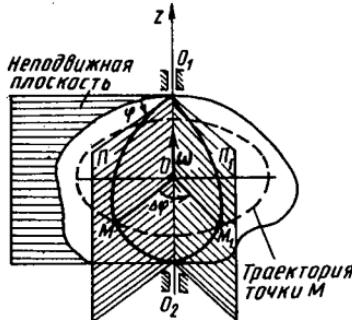


Рис. 1.17

Остальные точки тела описывают концентрические окружности с центрами на оси вращения. Эти окружности расположены в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения. Для описания вращения твердого тела вводят величины, относящиеся ко всему телу в целом, а не к отдельным его точкам: угол поворота тела, угловые скорость и ускорение тела. При вращении тела угол поворота изменяется со временем, т. е.  $\varphi = \varphi(t)$ . Зависимость  $\varphi = \varphi(t)$  называется *кинематическим уравнением вращения тела*.

$$\varphi = \varphi(t) \text{ — закон вращательного движения.} \quad (1.30)$$

Рассмотрим какую-либо плоскость  $P$  сечения тела, проходящую через ось вращения  $O_1O_2$  (см. рис. 1.17). Пусть за время  $\Delta t$  твердое тело, а следовательно, и выбранная плоскость  $P$  повернулись на некоторый угол  $\Delta\varphi$ . Этот двугранный угол образован новым  $P_1$  и старым  $P$  положениями сечения тела. Тогда средняя угловая скорость вращения тела  $\omega_{cp} = \Delta\varphi/\Delta t$ . Мгновенную угловую скорость  $\omega$  получаем, переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \text{ — угловая скорость тела.} \quad (1.31)$$

Следовательно, угловая скорость равна первой производной от угла поворота по времени. Оказывается возможным и удобным приписать угловой скорости тела векторные свойства. По определению вектор  $\vec{\omega}$  направлен по оси вращения, причем так, чтобы вращение, рассматриваемое с конца вектора  $\vec{\omega}$ , происходило против хода часовой стрелки (рис. 1.18). В отличие от векторов линейной скорости  $\vec{v}$ , ускорения  $\vec{a}$  и силы  $\vec{F}$ , направления которых определяются свойствами физических объектов (такие векторы называются *истинными*), векторы скорости  $\vec{\omega}$  и ускорения  $\vec{\epsilon}$ , направление которых мы оговариваем специальным правилом (правилом буравчика на рис. 1.18, *в*), называются *псевдовекторами*.

Угловая скорость в общем случае зависит от времени ( $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ ). Для характеристики изменения  $\vec{\omega}$  с течением времени введем вектор углового ускорения  $\vec{\epsilon}$ , равный первой производной от вектора скорости  $\vec{\omega}$  по времени  $t$ :

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \text{ — вектор углового ускорения.} \quad (1.32)$$

Вектор углового ускорения  $\vec{\epsilon}$  направлен по оси вращения в направлении  $\vec{\omega}$ , если угловая скорость  $\omega$  возрастает (ускоренное вращение, рис. 1.18, *а*), и противоположно  $\vec{\omega}$ , если  $\omega$  уменьшается (замедленное вращение, рис. 1.18, *б*).

**Связь линейных и угловых характеристик.** Линейные скорости и ускорения точек твердого тела связаны с угло-



Рис. 1.18

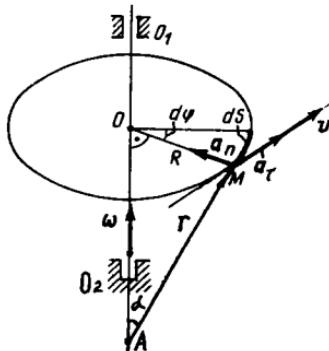


Рис. 1.19

выми скоростью  $\omega$  и ускорением  $\epsilon$  этого тела. Поскольку (рис. 1.19) за время  $dt$  отрезок  $OM$  повернется на угол  $d\phi$ , то точка  $M$  опишет дугу  $ds = R d\phi$ . Тогда мгновенная скорость  $v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\phi}{dt} = \omega R$ , касательное ускорение  $a_t = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = \epsilon R$ , а нормальное ускорение  $a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$  ( $R = R$ ). Таким образом, при вращательном движении тела справедливы следующие алгебраические соотношения:

$$\boxed{\begin{aligned} v &= \omega R \text{ — линейная скорость точки,} \\ a_t &= \epsilon R \text{ — касательное ускорение точки,} \\ a_n &= \omega^2 R \text{ — нормальное ускорение точки,} \\ a &= R \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4} \text{ — полное ускорение точки.} \end{aligned}} \quad (1.33)$$

Преобразуем соотношения (1.33) к векторному виду. Для этого выберем на оси вращения  $O_1O_2$  (см. рис. 1.19) любую точку  $A$  и проведем из нее радиус-вектор  $\mathbf{r}$  в точку  $M$ . Векторное выражение  $\vec{\omega} \times \mathbf{r}$  по величине и направлению совпадает с вектором скорости  $\mathbf{v}$  точки  $M$  (см. прил. I.4 для скалярного и векторного произведений векторов):

$$|\vec{\omega} \times \mathbf{r}| = \omega r \sin(\vec{\omega}, \mathbf{r}) = \omega R, \quad \mathbf{v} \perp \vec{\omega} \text{ и } \mathbf{r}.$$

Следовательно, можно записать, что  $\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}$ . Вектор ускорения точки

$$\mathbf{a} = \frac{d(\vec{\omega} \times \mathbf{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n.$$

Анализируя последнее выражение, находим вектор касательного и нормального ускорений:  $\mathbf{a}_t = \vec{\epsilon} \times \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{a}_n = \vec{\omega} \times \mathbf{v}$ .

Связь линейных и угловых величин в векторной форме:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{v} &= \vec{\omega} \times \mathbf{r} \Rightarrow v = \omega R, \quad R = r \sin(\vec{\omega}, \mathbf{r}) \\ \mathbf{a}_t &= \vec{\epsilon} \times \mathbf{r} \Rightarrow a_t = \epsilon R, \\ \mathbf{a}_n &= \vec{\omega} \times \mathbf{v} \Rightarrow a_n = \omega^2 R. \end{aligned}} \quad (1.34)$$

**Рассмотрим частные случаи вращения тела.** 1. Пусть  $\varepsilon = 0$ , тогда  $\omega = \text{const}$ ,  $\varphi = \omega t$ . Вращение будет *равномерным*. В этом случае можно ввести понятие периода вращения  $T$ . *Периодом вращения*  $T$  называется время, в течение которого тело совершают один оборот, т. е. поворачивается на угол  $\varphi = 2\pi$ . Тогда  $\omega = 2\pi/T$ . Если число оборотов в секунду  $n$ , а полное число оборотов  $N$ , то  $T = 1/n$ ,  $\omega = 2\pi n$ ,  $\varphi = 2\pi N$  (1 оборот =  $2\pi$  рад). Следовательно,

$$\varepsilon = 0, \omega = \text{const}, \varphi = \omega t, N = nt — \text{равномерное вращение.} \quad (1.35)$$

2. Если  $\varepsilon = \text{const}$ , то вращение будет *равнопеременным*. В этом случае, проинтегрировав (1.32) по времени и положив в начальный момент времени  $t = 0$ ,  $\omega = \omega_0$ ,  $\varphi = \varphi_0 = 0$ , получим следующие выражения:

$$\varepsilon = \text{const}, \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2/2 — \text{равнопеременное вращение.} \quad (1.36)$$

Исключив из выражений (1.36) время  $t$ , получим соотношение

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi. \quad (1.37)$$

3. В случае, когда  $\varepsilon \neq \text{const}$ , вращение называется *переменным*, а скорость и закон вращательного движения определяются путем интегрирования уравнений  $d\omega/dt = \varepsilon(t)$ ,  $d\varphi/dt = \omega(t)$ :

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \int_0^t \varepsilon(t) dt, \\ \varphi &= \int_0^t \omega(t) dt — \text{переменное вращение.} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Сопоставление формул, описывающих движение точки в естественном способе (см. табл. 1.1 в § 1.3), с аналогичными формулами вращательного движения показывает, что они переходят друг в друга при замене дуговой координаты  $s$  углом поворота  $\varphi$ , линейной скорости  $v$  точки на угловую скорость  $\omega$  и касательного ускорения  $a_t$  на угловое ускорение  $\varepsilon$ :

$s \rightarrow \varphi, v \rightarrow \omega, a_t \rightarrow \epsilon$   
 (схема замены кинематических переменных при сопоставлении уравнений движения точки и вращения тела). (1.39)

**Пример 1.5.** Пусть твердое тело вращается равноускоренно. Необходимо найти угол  $\alpha$  между вектором ускорения  $a$  точки  $M$  тела и радиусом окружности через два оборота после начала движения ( $N = 2$ ).

**Решение.** Как видно из рис. 1.20, угол  $\alpha$  между вектором полного ускорения  $a$  и радиусом  $OM$  определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = a_t / a_n. \quad (1.40)$$

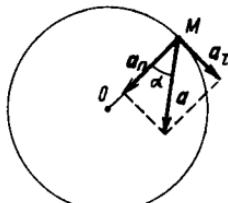


Рис. 1.20

Подставляя в формулу (1.40) значения  $a_t$  и  $a_n$  из соотношений (1.33), получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \epsilon R / \omega^2 R = \epsilon / \omega^2. \quad (1.41)$$

Квадрат угловой скорости связан с углом поворота  $\varphi$  соотношением (1.37). С учетом уравнения (1.37), а также условия  $\omega_0 = 0$  из (1.41) получим  $\operatorname{tg} \alpha = \epsilon / (2\epsilon\varphi) = 1/(2\varphi)$ . Поскольку  $\varphi = 2\pi N$ , то подстановка численных данных дает  $\operatorname{tg} \alpha = 0,0398$ ,  $\alpha \approx 2,3^\circ$ . Интересно, что значение угла  $\alpha$  не зависит явно от  $\epsilon$  и времени  $t$  и определяется только углом поворота  $\varphi$ .

## 1.5. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

**Сложное движение.** Во многих практических приложениях законов кинематики приходится движение рассматривать одновременно по отношению к двум или более взаимно перемещающимся системам отсчета. При этом одну из систем отсчета рассматривают как *условно неподвижную*, а другую, перемещающуюся по отношению к ней, называют *подвижной*. Например, при наблюдении за траекторией полета ракеты с кораблем за неподвижную систему отсчета удобно принять Землю (т. е. наблюдательный пункт на земле), а систему отсчета, связанную с движущимся кораблем, считать подвижной. Поскольку выбор неподвижной системы отсчета определяется соображениями прикладного характера, то можно выбрать

систему отсчета даже так, чтобы рассматриваемая материальная точка или тело в ней покоялись. Таким образом, механическое движение всегда носит относительный характер. Движение, которое удобно рассматривать по отношению к подвижной и неподвижной системам координат, принято называть *сложным движением*, так как его можно представить как результат сложения двух или нескольких движений (см. задание 1.1, выполненное ранее).

Движение по отношению к неподвижной системе отсчета условно принято называть *абсолютным*, а по отношению к подвижной системе отсчета — *относительным*. В приведенном выше примере движение ракеты по отношению к Земле будет абсолютным, а по отношению к кораблю относительным.

Движение самой подвижной системы отсчета по отношению к неподвижной системе называется *переносным движением*.

Связь между кинематическими характеристиками абсолютного, относительного и переносного движений точки задается следующими равенствами (вывод в соответствующем разделе рекомендованной литературы, см. [1, 5]):

$$\mathbf{r}_{\text{абс}} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_{\text{отн}} \Rightarrow \mathbf{v}_{\text{абс}} = \mathbf{v}_{\text{отн}} + \mathbf{v}_{\text{пер}} \quad (1.42)$$

(теорема сложения скоростей),

$$\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{отн}} + \mathbf{a}_{\text{пер}} + \mathbf{a}_{\text{кор}} \quad (1.43)$$

(теорема сложения ускорений).

Для слагаемого  $\mathbf{a}_{\text{кор}}$  (кориолисово ускорение) получается следующее выражение:

$$\mathbf{a}_{\text{кор}} = \vec{\omega}_{\text{пер}} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}, \quad (1.44)$$

где  $\vec{\omega}_{\text{пер}}$  — угловая скорость вращения подвижной системы, а  $\mathbf{v}_{\text{отн}}$  — скорость точки относительно подвижной системы.

**Пример 1.6.** Под каким углом к течению реки необходимо направить лодку (рис. 1.21), чтобы переправиться из пункта *A* в пункт *B*, лежащий на противоположном берегу на кратчайшем расстоянии от пункта *A*. Скорость течения реки  $v_1 = 3 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ , собственная скорость лодки  $v_2 = 7 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ .

**Решение.** Поскольку нас интересует перемещение и соответственно скорость лодки по отношению к берегу, т. е. к неподвижной системе отсчета, то для решения задачи мы можем воспользоваться соотношением (1.42)

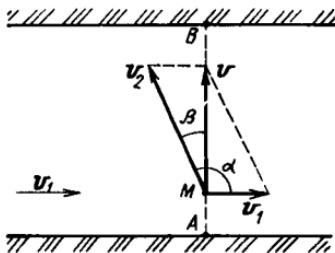


Рис. 1.21

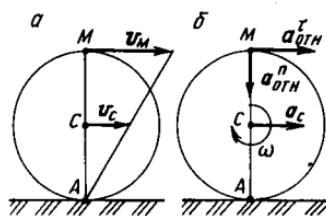


Рис. 1.22

$$v = v_{\text{неп}} + v_{\text{отн}} = v_1 + v_2,$$

где  $v_{\text{абс}} = v$  — скорость лодки по отношению к берегу,  $v_{\text{отн}} = v_2$  — скорость лодки по отношению к воде,  $v_{\text{неп}} = v_1$  — скорость течения реки, которая в данном случае является скоростью подвижной системы отсчета (переносная скорость), связанной с потоком движущейся воды.

Из рис. 1.21 видно, что  $\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta$ , а  $\sin \beta = v_1/v_2$ . Подставляя численные значения, находим, что  $\sin \beta = 0,43$ ,  $\beta = 25,4^\circ$ ,  $\alpha = 115,4^\circ$ . Таким образом, чтобы переправиться по кратчайшему расстоянию на противоположный берег, нужно лодку направить под углом  $115,4^\circ$  к направлению течения реки.

**Пример 1.7.** Определить скорость и ускорение точки  $M$  на ободе колеса, которое катится на прямолинейном участке дороги. Движение происходит без проскальзывания ( $v_A = 0$ ), скорость  $v_C$  и ускорение  $a_C$  считать заданными.

**Решение.** Качение колеса можно рассматривать как вращение по отношению к мгновенной оси (рис. 1.22, а), проходящей через точку  $A$  перпендикулярно к плоскости рисунка ( $v_A = 0$ ). Тогда угловая скорость  $\omega = v_C/R$ , а скорость точки  $M$  найдем по формуле  $v_M = \omega \cdot AM = 2v_C$ . Угловое ускорение колеса

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(v_C/R)}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dv_C}{dt} = \frac{a_C}{R}.$$

При определении ускорения точки  $M$  будем рассматривать движение колеса как сложное (рис. 1.22, б), состоящее из поступательного движения со скоростью и ускорением центра колеса (переносное движение) и вращательного движения относительно центра  $C$  (относительное движение). Абсолютное ускорение точки  $M$  найдем по формуле (1.43). При этом учтем, что  $a_{\text{неп}} = a_C$ ,  $a_{\text{отн}}^t = \epsilon R$ ,  $a_{\text{отн}}^n = \omega^2 R = v_C^2/R$ , а ускорение Кориолиса равно нулю, поскольку переносное движение поступательно, т. е.  $\omega_{\text{неп}} = 0$ . В результате получим численное значение ускорения:

$$a_M = a_C + a_{\text{отн}}^t + a_{\text{отн}}^n,$$

$$a_M = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(a_C + a_{\text{отн}}^t)^2 + (a_{\text{отн}}^n)^2} = \sqrt{4a_C^2 + v_C^4/R^2}.$$

**Задание 1.5. Поступательное движение тела.** Примените векторный способ задания движения и определите скорость  $v_B$  и ускорение  $a_B$  точки  $B$  (рис. 1.23), если точка  $C$  поступательно движущегося тела  $AB$  имеет заданную скорость  $v_C$  и ускорение  $a_C$ . Постройте траекторию точки  $B$ .

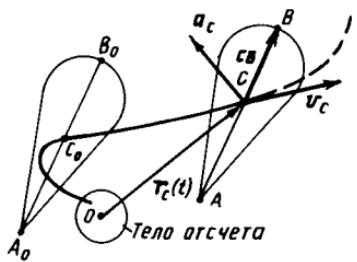


Рис. 1.23

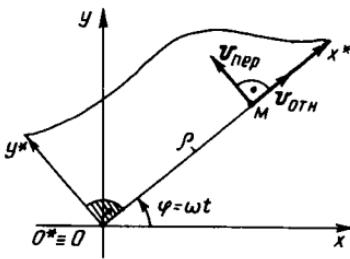


Рис. 1.24

**Указание.** Запишите выражение для радиуса-вектора точки  $B$  ( $t_c$  и  $\mathbf{cB}$  заданы), а затем воспользуйтесь формулами (1.14), (1.19) и выполните дифференцирование с учетом определения поступательного движения твердого тела (см. § 1.4).

**Ответ.** Скорость  $v_B = v_c$ , ускорение  $a_B = a_c$ . Следовательно, в поступательном движении тела все его точки движутся с одинаковыми скоростями и ускорениями, а траектории их одинаковы, но сдвинуты в результате параллельного перемещения траектории точки  $C$ .

**Задание 1.6. Кинематика точки в полярной системе.** Определите скорость и ускорение точки  $M$  в полярной системе координат (см. задание 1.2), если ее движение задано уравнениями  $\rho = bt$  и  $\varphi = \omega t$ . Для  $b = 0,1$  м и  $\omega = \pi/3$  рад  $\cdot$  с $^{-1}$  получите численные результаты, а все векторы изобразите на рис. 1.24.

**Указание.** Движение точки  $M$  рассмотрите как сложное, состоящее из переносного вращательного движения ( $\varphi = \omega t$ ) и относительного прямолинейного движения ( $x^* \equiv \rho = bt$ ).

**Ответ.** Проекции абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки  $M$  на оси подвижной системы  $x'y'$  определяются следующими выражениями:  $v_x = b$ ,  $v_y = \omega bt$ ,  $a_x = -\omega^2 \rho = -\omega^2 bt$ ,  $a_y = 2\omega b$ ,  $a_M = \omega b \sqrt{4 + \omega^2 t^2}$ .

**Задание 1.7. Сложное движение точки.** Определите орбитальное и суточное ускорения точек на экваторе Земли по отношению к системе координат, связанной с центром Солнца (радиус Земли  $R = 6370$  км, радиус орбиты Земли по отношению к центру Солнца примерно равен 150 млн км). Вектора ускорений изобразите схематично на рисунке.

**Ответ.** Ускорение орбитального движения  $a_{\text{орб}} = 0,0059 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ , ускорение суточного вращения  $a_{\text{сут}} = 0,0336 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ .

**Задание 1.8. Сложение двух гармонических колебаний с близкими частотами.** Точка  $M$  участвует в двух движениях. Она перемещается по закону  $x_1 = A \cos \omega_1 t$  относительно декартовой системы  $x'O'y'$ , которая в свою очередь перемещается поступательно вдоль оси  $x$  по закону  $x_2 = A \cos \omega_2 t$  (рис. 1.25). Определите закон результирующего движения точки  $M$  ( $x = x(l)$ ) относительно системы  $xOy$ , если частота  $\omega_2$  мало отличается от  $\omega_1$  ( $\omega_1 = \omega$ ,  $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$ ). Постройте зависимость координаты  $x$  от времени при  $\omega = \pi/3$  рад/с и  $\Delta\omega = \omega/4 = \pi/12$  рад/с. Вычислите значения скорости и ускорения точки при  $t = 4$  с.

**Указание.** Рассмотрите движение точки как сложное (см. § 1.5), а при определении закона движения воспользуйтесь тригонометрической формулой для суммы косинусов:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

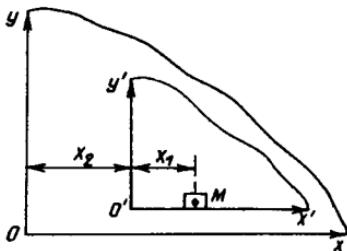


Рис. 1.25

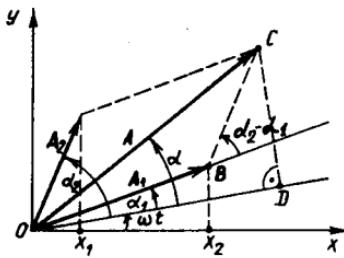


Рис. 1.26

**Ответ.** Результирующее движение представляет собой колебание с частотой  $\omega$  и пульсирующей амплитудой. Такое движение называется **биением**:  $x = A(t) \cos \omega t$ ,  $A(t) = 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$ .

**Задание 1.9. Сложение колебаний с одинаковыми частотами.** Покажите, что движение, полученное как результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты, одинакового направления и разных амплитуд ( $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$ ,  $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$ ), является также гармоническим колебанием той же частоты, однако имеет другую амплитуду  $A$  и начальную фазу  $\alpha$ .

**Указание.** Осуществите переход от сложения координат  $x_1$  и  $x_2$  к сложению векторов  $A_1$  и  $A_2$ , проекции которых на ось  $x$  равны координатам  $x_1$  и  $x_2$  складываемых колебаний. Для этого векторы  $A_1$  и  $A_2$  нужно расположить так, чтобы они образовали с осью  $x$  соответственно углы  $\varphi_1 = \omega t + \alpha_1$  и  $\varphi_2 = \omega t + \alpha_2$ . Тогда амплитуда  $A = OC$  находится по теореме косинусов из  $\Delta OBC$ , а  $\operatorname{tg} \alpha = CD/OD$  ( $\alpha$  — начальная фаза результирующего движения).

**Ответ.** Если  $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$ , а  $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$ , то  $x = A \cos(\omega t + \alpha)$ ,  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$ : (1.45)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} = \text{const.} \quad (1.46)$$

На рис. 1.26 изображена совокупность трех векторов ( $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A$ ), которые вращаются как целое с угловой скоростью, равной циклической частоте колебаний. Такое графическое представление складываемых гармонических колебаний называется **векторной диаграммой**.

Я всегда ценил Кеплера за свободный и острый ум.

Г. Галилей

Если я видел дальше других, то потому, что стоял на плечах гигантов.

И. Ньютон

## 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

**Основная задача динамики.** *Динамикой* (от гр. *dýnamis* — сила) называется раздел механики, в котором

изучается движение материальных тел под действием приложенных к ним сил.

Основоположником динамики как науки является итальянский ученый Г. Галилей (1564—1642), который впервые установил закон движения тела под действием постоянной силы (закон равнousкоренного падения). Он открыл закон инерции и сформулировал механический принцип относительности. Основные законы динамики были сформулированы И. Ньютона (1643—1727) и опубликованы в 1687 г. в работе «Математические начала натуральной философии». Они получили в дальнейшем название трех законов Ньютона, а построенная на их основе механика — *классической механики Галилея — Ньютона*.

*Основная задача динамики* точки состоит в том, чтобы определить кинематические уравнения движения материальной точки (см. (1.1) — (1.3)), если известны все силы, действующие на эту точку со стороны окружающих ее тел. Для решения этого класса задач необходимо знать начальные условия, т. е. положение и скорость точки в некоторый момент времени, принимаемый за начальный. Примером такой задачи является задача на определение дальности полета снаряда по заданной начальной скорости и действующим на снаряд силам сопротивления воздуха и силе тяжести.

Кроме того, в динамике рассматривается и *обратная задача* — определение законов взаимодействия точки с окружающими телами, если известен кинематический закон ее движения. Классическим примером решения такой задачи является открытие И. Ньютона закона всемирного тяготения. Зная кинематические законы движения планет вокруг Солнца, полученные И. Кеплером (1571—1630) в результате обобщения огромного числа наблюдений, Ньютон пришел к выводу, что каждая из планет должна притягиваться к Солнцу с силой, которая прямо пропорциональна ее массе, массе Солнца и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

Решение как прямой (основной), так и обратной задач динамики точки основано на использовании трех законов Ньютона. Поскольку законы Ньютона являются обобщением опытных данных, то критерием их справедливости является совпадение следствий из этих законов с данными экспериментов. Оказывается, что во всех случаях, когда скорость движения изучаемых объектов много меньше скорости света, а их масса намного превышает массу

отдельной молекулы, такое совпадение имеет место с большой степенью точности.

Формулирование трех основных законов динамики требует предварительного определения таких важнейших динамических понятий, как инертность, масса, импульс точки и сила. Мы не будем следовать системе изложения Ньютона и введем эти понятия в том виде, в каком они используются в современной физике.

## 2.1. ВАЖНЕЙШИЕ ПОНЯТИЯ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

**Инертность. Масса. Импульс. Сила.** Опыт показывает, что всякое материальное тело «противится» попыткам изменить его состояние (покоя или движения). Это свойство определяется как инертность. *Инертностью* (инерцией) называют свойство тел, проявляющееся в том, что тела стремятся сохранить неизменным состояние своего движения или покоя по отношению к так называемой инерциальной системе отсчета (см. § 2.2). Инертность как неотъемлемое свойство движущегося материального объекта приводит к тому, что изменение его состояния движения (изменение значения и направления скорости  $v$ ) или покоя всегда происходит постепенно (а не мгновенно) в результате внешних воздействий.

*Массой*  $m$  называется физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи и определяющая ее инерционные и гравитационные свойства. Понятие массы впервые было введено в механику Ньютоном, определившим массу как меру, «устанавливаемую пропорционально плотности и объему». Однако, поскольку Ньютоном не было дано независимого определения плотности вещества, данное определение нельзя считать достаточно корректным.

Масса как мера инертности тела проявляется при попытках изменить вектор его скорости по значению или направлению. Как известно, во всех случаях тело оказывает «сопротивление» любой попытке изменить скорость. Масса тела как раз и является количественной мерой этой «сопротивляемости». В этом качестве она присутствует во втором законе динамики Ньютона ( $m_{ин}$  — *инертная масса тела*).

В теории гравитации Ньютона (см. § 4.4) масса тела, с одной стороны, является мерой интенсивности гравитационного поля, создаваемого этим телом, а с другой стороны — мерой воздействия грави-

тационного поля на тело, помещенное в это поле. Масса тела, проявляющаяся как мера интенсивности гравитационного взаимодействия, называется *гравитационной массой* ( $m_{\text{гр}}$ ).

Способность тела создавать гравитационное поле и его способность «сопротивляться» изменению скорости являются независимыми проявлениями различных физических сущностей и поэтому массы  $m_{\text{гр}}$  и  $m_{\text{ин}}$  не обязаны быть связанными друг с другом. Однако эксперимент показывает, что инертная и гравитационная массы с большой степенью точности пропорциональны друг другу, а при обычном выборе единиц эти понятия совпадают. Этот фундаментальный закон природы называется *принципом эквивалентности*. В настоящее время принцип эквивалентности подтверждается в эксперименте с относительной точностью до  $10^{-12}$  ( $(m_{\text{ин}} - m_{\text{гр}})/m_{\text{ин}} \approx 10^{-12}$ ).

В ньютоновской (классической) механике масса рассматривается как аддитивная и неизменная характеристика тела. *Аддитивность* массы означает, что масса сложного объекта равна сумме масс составляющих его частей. Например, масса какого-либо тела равна сумме масс составляющих его атомов или молекул. *Неизменность* массы предполагает, что масса тела не зависит от скорости его движения. Позднейшие исследования показали (см. главу 11), что ньютоновские постулаты об аддитивности и неизменности массы выполняются лишь приближенно и только при определенных условиях. В частности, постулат о неизменности массы выполняется при скоростях, много меньших скорости света ( $v \ll c$ ), а постулат об аддитивности массы для системы из  $N$  объектов выполняется лишь тогда, когда энергия взаимодействий между объектами много меньше некоторой характерной энергии, называемой *энергией покоя*.

*Импульсом (количеством движения)* материальной точки называется физическая величина, равная произведению ее массы на скорость

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} — \text{импульс точки.} \quad (2.1)$$

Импульс  $\mathbf{p}$  является векторной мерой механического движения материальной точки и, как будет показано ниже, может меняться под действием приложенной силы как по величине, так и по направлению. При скоростях, много меньших скорости света, импульс является фак-

тически вспомогательной величиной, так как основными измеряемыми параметрами являются масса и скорость.

**Сила**  $F$  в механике определяется как мера механического воздействия на данное тело со стороны другого тела. Это действие может проявляться как в изменении скорости тела, так и в его деформации. Силы подразделяются на контактные и полевые. **Контактными** называются силы, возникающие при непосредственном контакте прижатых друг к другу тел. Примером контактных сил являются силы упругости, трения, реакции опор (см. гл. 3). **Полевыми** называются такие силы, когда действие одного тела на другое передается посредством создаваемых этими телами полей (силы тяготения, электромагнитные силы).

Понятие силы является основным понятием динамики, которое позволило Ньютону сформулировать три закона механики. Поэтому при выборе единицы силы и определении понятия силы как физической величины необходимо использовать метод, независимый от законов Ньютона. Таким методом является *статический способ измерения сил*, когда численному значению силы ставится в соответствие конкретное значение величины удлинения пружины. Статический метод определения единицы силы позволил также установить, что сила является *величиной векторной*, т. е. характеризуется *численным значением, направлением и точкой приложения*. Единицы импульса и силы в СИ являются производными от основных единиц (см. введение) и выражаются соответственно с помощью формулы (2.1) и второго закона Ньютона (*динамический способ измерения силы*, см. § 2.2).

## 2.2. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА. ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ И НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

**Первый закон Ньютона.** В качестве первого закона движения Ньютон принял закон инерции, установленный Галилеем. **Первый закон Ньютона гласит:** всякое тело (материальная точка) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока силовое воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.

Математически это утверждение можно записать в виде

$$\vec{a} = 0, \text{ если } \sum_{k=1}^N F_k = 0 \text{ — первый закон Ньютона.} \quad (2.2)$$

Движение тела, не испытывающего действия со стороны других тел, называется *свободным движением* или *движением по инерции*. Поскольку всякое движение имеет смысл только по отношению к определенной системе отсчета и одно и то же движение выглядит в различных системах отсчета по-разному (например, прямолинейное и равномерное движение относительно поверхности Земли будет выглядеть криволинейным, если его наблюдать со спутника, движущегося вокруг Земли), то в самом содержании первого закона Ньютона заключено утверждение о наличии определенного класса систем отсчета, в которых первый закон Ньютона выполняется. Таким образом, в классической механике постулируется, что существуют системы отсчета, в которых выполняется первый закон Ньютона, т. е. такие, в которых всякое предоставленное само себе тело сохраняет состояние покоя или прямолинейного и равномерного движения. Они называются *инерциальными*. Системы отсчета, в которых не выполняется первый закон Ньютона, называются *неинерциальными*. Оказалось (см. § 2.3), что все инерциальные системы движутся поступательно относительно друг друга с постоянной скоростью (без ускорения). Опыт показывает, что с большой степенью точности можно считать инерциальной такую систему отсчета, начало координат которой совмещено с центром Солнца, а оси проведены в направлении трех удаленных, а поэтому практически неподвижных звезд. Эта система отсчета называется *гелиоцентрической* (от гр. helios — Солнце). Тогда система отсчета, жестко связанная с Землей (*геоцентрическая система* — от гр. ge — Земля), неинерциальна главным образом из-за суточного вращения Земли (точки этой системы имеют ускорение относительно гелиоцентрической системы — см. задание (1.7)). Тем не менее для большинства практических приложений эффекты, обусловленные неинерциальностью геоцентрической системы, пренебрежимо малы (см. пример 2.1) и эту систему отсчета приближенно можно считать инерциальной.

**Пример 2.1.** Оценить степень неинерциальности системы отсчета, связанной с Землей, которая обусловлена ее вращением вокруг оси Земли и орбитальным движением центра Земли вокруг Солнца.

**Решение.** Неинерциальность геоцентрической системы связана с ее вращением вокруг оси Земли и орбитальным движением вокруг Солнца. Степень неинерциальности определяется значением нормального (центростремительного) ускорения  $a_n^{(1)} = \omega^2 R = 4\pi^2 R_1/T_1^2$ , которое максимально на экваторе. В этой формуле  $T_1$  — период вращения, равный одним суткам,  $R_1$  — радиус Земли. Подстановка численных значений дает  $a_n^{(1)} = 0,0336 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ . Центростремительное ускорение, обусловленное орбитальным движением центра Земли вокруг Солнца, определяется по формуле  $a_n^{(2)} = v^2/\rho = 4\pi^2 R_2/T_2^2$ , где  $T_2$  — период обращения Земли вокруг Солнца ( $T_2 = 1$  год),  $R_2$  — расстояние от Земли до Солнца. После подстановки численных значений получаем  $a_n^{(2)} = 0,0059 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ . Полученные значения ускорений значительно меньше тех абсолютных погрешностей, с которыми практически приходится иметь дело в опытах по изучению реальных механических процессов на Земле. Именно поэтому в большинстве случаев можно пренебречь неинерциальностью системы отсчета, связанной с Землей.

**Второй закон Ньютона.** Второй закон Ньютона является обобщением большого числа экспериментальных данных и устанавливает связь между изменением импульса тела и действующими на него силами. *Второй закон Ньютона гласит:* в инерциальной системе изменение импульса материальной точки пропорционально приложенной силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует:

$$\frac{dp}{dt} = F \quad \text{второй закон Ньютона.} \quad (2.3)$$

В случае, если на точку действует несколько сил, то под приложенной силой понимается их равнодействующая

$$F = \sum_{k=1}^N F_k \quad (k = 1, 2, \dots, N \text{ — номера сил}).$$

Используя определение (2.1) для импульса  $p$  и постулат о неизменности массы, представим (2.3) в виде

$$m \frac{dv}{dt} = F \Rightarrow a \equiv \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}. \quad (2.4)$$

Таким образом, получается еще одна формулировка второго закона Ньютона в классической механике: в инерциальной системе отсчета ускорение материальной точки прямо пропорционально приложенной силе и обратно пропорционально массе.

Выражение (2.4) для второго закона Ньютона устанавливает связь между кинематической характеристикой движения — ускорением  $a$  и такими понятиями, как сила  $F$

и масса  $m$ . В связи с этим второй закон Ньютона является тем фундаментальным соотношением, которое позволяет решать основную задачу механики — задачу нахождения кинематического закона движения по заданным силам и начальным условиям (см. пример 2.2).

Следует еще раз подчеркнуть, что основной физический смысл второго закона Ньютона состоит в том, что он связывает между собой три независимые физические величины ( $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{F}$  и  $m$ ), т. е. является законом природы, а не определением силы (если его переписать в виде  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ). Вместе с тем соотношение  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  используется в расчетах для нахождения неизвестной силы (решение обратной задачи динамики) и при выборе единицы силы (например, в Международной системе единиц (СИ)). В СИ сила измеряется в ньютонах. Один ньютон ( $1 \text{ Н}$ ) равен силе, под действием которой точка массой  $m = 1 \text{ кг}$  получает ускорение  $a = 1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$  ( $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$ ).

**Третий закон Ньютона.** Третий закон Ньютона гласит: силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки:

$$\overset{\circ}{m_1} \xrightarrow{\mathbf{F}_1} \overset{\circ}{m_2} \quad \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \text{ — третий закон Ньютона.} \quad (2.5)$$

Одну из сил, например  $\mathbf{F}_1$ , согласно Ньютону, принято называть *действием*, а другую  $\mathbf{F}_2$  — *противодействием*. В качестве иллюстрации третьего закона Ньютона можно рассмотреть опыт по взаимодействию двух тележек, прикрепленных к динамометрам, на одной из которых находится кусок железа, а на другой постоянный магнит (рис. 2.1). Оказывается, что показания обоих динамометров всегда одинаковы ( $F_1 = F_2$ ) независимо от расстояния между тележками, используемого магнита, массы и формы куска железа (при отсутствии трения). Вместе с тем следует отметить, что третий закон Ньютона, обобщающий большое число экспериментальных данных, справедлив не всегда. Он выполняется точно при всех видах контактных взаимодействий, а также при полевых взаимодействиях между покоящимися телами. Однако, как это будет показано на примере сил Лоренца, третий закон Ньютона не выполняется в случае магнитных

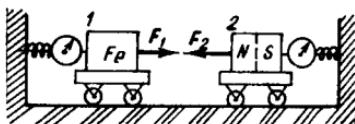


Рис. 2.1

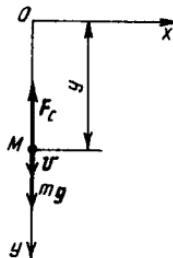


Рис. 2.2

взаимодействий между движущимися зарядами (см. задание 3.5).

**Пример 2.2.** Парашютист массой 70 кг совершает затяжной прыжок с начальной вертикальной скоростью  $v_0 = 0$ . Найти зависимость скорости падения парашютиста от времени (до момента раскрытия парашюта), если сила сопротивления воздуха  $F_c = \mu v$  (закон Стокса, см. формулу (8.44)), где  $\mu = 12,5 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-1}$ .

**Решение.** Парашютиста примем за материальную точку  $M$  и изобразим на рис. 2.2 все силы, действующие на парашютиста при падении. Согласно второму закону Ньютона (2.4), векторная сумма этих сил равна произведению массы парашютиста на его ускорение:

$$ma = mg + F_c. \quad (2.6)$$

Начало координат поместим в точку  $O$ , из которой начинается падение парашютиста. Ось  $y$  направим вертикально вниз, выбрав ее положительное направление по направлению движения. Спроецировав векторное уравнение (2.6) на ось  $y$ , получим:

$$ma_y = mg - F_c \Rightarrow m \frac{dv_y}{dt} = mg - \mu v_y.$$

После разделения переменных будем иметь

$$\frac{dv_y}{g - \frac{\mu}{m} v_y} = dt \text{ или } \frac{d\left(g - \frac{\mu}{m} v_y\right)}{g - \frac{\mu}{m} v_y} = - \frac{\mu}{m} dt.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим:

$$\ln \left| g - \frac{\mu}{m} v_y \right| = - \frac{\mu}{m} t + C_1. \quad (2.7)$$

Так как при  $t_0 = 0$ ,  $v_y = v_{0y} = 0$ , то  $C_1 = \ln g$ . Подставим полученное выражение для  $C_1$  в (2.7)

$$\ln \left( g - \frac{\mu}{m} v_y \right) = - \frac{\mu}{m} t + \ln g \Rightarrow \ln \left( 1 - \frac{\mu v_y}{mg} \right) = - \frac{\mu}{m} t.$$

Произведя потенцирование (от нем. potenz — степень) и выразив проекцию  $v_y$ , находим времененную зависимость скорости падения парашютиста:

$$v_y = \frac{mg}{\mu} (1 - e^{-\mu t/m}). \quad (2.8)$$

Из (2.8) видно, что при  $t \rightarrow \infty$  скорость стремится к предельному значению  $v_{\max} = mg/\mu = 56 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ . Интуитивно ясно, что такое значение скорости достигается парашютистом достаточно быстро и при затяжном прыжке парашютист движется практически с постоянной скоростью.

Проведем анализ выражения (2.8) для проекции скорости  $v_y$  с целью определения промежутка времени, соответствующего переходу к установившемуся движению с практически постоянной скоростью. Для этого изобразим на рис. 2.3 зависимость отклонения  $\Delta v_y = v_{\max} - v_y$  от времени  $t$ . Величину  $m/\mu$ , имеющую размерность времени, обозначим через  $\tau$  ( $\tau = m/\mu$ ). Рассчитаем с помощью (2.8)

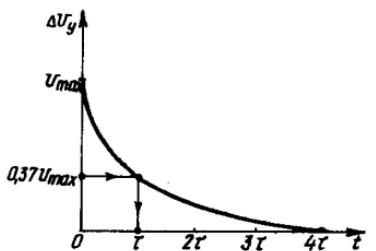


Рис. 2.3

значение отклонения  $\Delta v_y$  в момент времени  $t = \tau$ . Получим  $\Delta v_y(\tau) = v_{\max}/e$ . Это значит, что за время  $\tau = m/\mu$  величина  $\Delta v_y$  уменьшилась в  $e$  раз ( $e \approx 2,72$ ), а скорость  $v_y(\tau)$  достигла  $\sim 60\%$  от скорости установившегося движения ( $v_y(\tau) = v_{\max}(1 - e^{-1}) \approx 0,63v_{\max}$ ). Процесс перехода к установившемуся (стационарному) движению (или равновесию) называется *релаксацией*, а промежуток  $\tau$  — временем *релаксации*. В данном примере  $\tau = m/\mu = 70/12,5 = 5,6$  с и при  $t > 3\tau$  движение уже практически равномерное ( $\Delta v_y \approx 0$ ).

### 2.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ И МЕХАНИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

**Преобразования Галилея.** Как уже отмечалось, первый и второй законы Ньютона выполняются лишь в инерциальных системах отсчета. Покажем, что если имеется некоторая инерциальная система отсчета, то любая другая система, движущаяся относительно указанной равномерно и прямолинейно (поступательно), также будет инерциальной. Для этого рассмотрим две инерциальные системы  $xug$  и  $x'uz'$  (рис. 2.4), первая из которых будет условно неподвижной, а вторая движется вдоль положительного направления оси  $x$  с постоянной скоростью  $V$ . Пусть координаты некоторой движущейся точки  $M$  в обеих

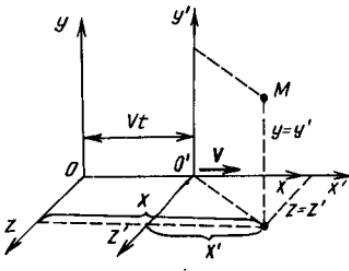


Рис. 2.4

системах соответственно  $x, y, z$  и  $x', y', z'$ . Между этими координатами Галилеем установлена связь

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (2.9)$$

К преобразованиям координат в классической механике добавляется условие *одинаковости хода времени* в обеих системах, т. е.  $t = t'$ :

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \quad \text{—} \quad (2.10)$$

преобразования Галилея.

**Механический принцип относительности.** Из преобразований Галилея вытекает частный случай ( $V = \text{const}$ ) классического способа сложения скоростей (см. (1.42)). В самом деле, продифференцировав (2.10) по времени, получим  $dx/dt = dx'/dt + V$ . Тогда

$$v_x = v'_x + V, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \quad (2.11)$$

Скорость точки  $M$  относительно неподвижной системы координат (абсолютная) равна векторной сумме ее скорости относительно подвижной системы (относительная) и скорости подвижной системы относительно неподвижной (переносная).

Продифференцировав выражение (2.11) по времени  $t$ , получим ( $\mathbf{V} = \text{const}$ )

$$a_x = a'_x, \quad a_y = a'_y, \quad a_z = a'_z. \quad (2.12)$$

Поскольку составляющие ускорений точки  $M$  в обеих инерциальных системах координат одинаковы, то одинаковы и векторы этих ускорений ( $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ ). Масса в классической механике от скорости не зависит и, следовательно, произведения массы  $m$  на векторы ускорения  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}'$  в обеих инерциальных системах отсчета также будут одинаковы. Это означает, что вид второго закона Ньютона ( $ma = \mathbf{F}$ ), описывающего движение точки под действием

силы  $\mathbf{F}$ , будет одним и тем же во всех инерциальных системах отсчета. Неизменность вида второго закона Ньютона отражает тот факт, что все механические явления во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково при одинаковых начальных условиях. Другими словами, никакими механическими опытами нельзя установить абсолютное движение инерциальных систем отсчета. Все инерциальные системы отсчета эквивалентны между собой. Это утверждение называется *принципом относительности Галилея*.

**Инварианты.** Используя преобразования Галилея, легко показать, что отрезки длин (масштабы) и интервалы времени одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. В самом деле, пусть имеем отрезок, расположенный вдоль оси  $x$ , длина которого в системе  $xyz$  равна  $l$ , тогда  $l = x_2 - x_1$ . Используя преобразования (2.10), найдем координаты его концов в системе  $x'y'z'$ :  $x'_1 = x_1 - Vt$ ,  $x_2 = x_2 - Vt$ . С их помощью вычислим длину  $l'$  отрезка в подвижной системе:

$$l' = x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1 \Rightarrow l' = l. \quad (2.13)$$

Из условия  $t' = t$  сразу следует, что интервал времени  $\Delta t$  в обеих системах отсчета равен:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = t_2 - t_1 \Rightarrow \Delta t' = \Delta t. \quad (2.14)$$

Физические величины, не зависящие от какого-то преобразования координат, называют *инвариантами этого преобразования*. Следовательно, отрезки длин  $l$  и интервалы времени  $\Delta t$  инвариантны относительно преобразований Галилея, они являются *инвариантами ньютоновской классической механики* (от лат. *invarians* — неизменный).

Следует отметить, что преобразования Галилея и классический принцип сложения скоростей справедливы лишь в ньютоновской механике, т. е. для скоростей, которые малы по сравнению со скоростью света. Принцип же эквивалентности инерциальных систем отсчета справедлив не только для механических, но и для любых физических явлений (см. главу 11). Он лежит в основе релятивистской механики, область применения которой определяется условием  $v \ll c$ .

**Задание 2.1.** Используя определение проекции скорости ( $v_y = dy/dt$ ), получите с помощью формулы (2.8) дифференциальное уравнение для  $y$  и решите его (начальная координата  $y_0 = 0$ ).

**Ответ.** Закон движения парашютиста при падении имеет следующий вид:

$$y = gt(t - \tau(1 - e^{-t/\tau})). \quad (2.15)$$

**Задание 2.2.** Используя результаты (2.8) и (2.15), получите закон падения парашютиста в сильно разреженной среде (без учета сил сопротивления).

**Указание.** В окончательных выражениях (2.8) и (2.15) выполните предельный переход  $\mu \rightarrow 0$  ( $\tau = m/\mu \rightarrow \infty$ ). Для этого нужно раскрыть неопределенность с помощью правила Лопитала или воспользоваться тремя первыми членами разложения показательной функции в ряд Тейлора ( $e^x \approx 1 + x + x^2/2$ ).

**Ответ.**  $v_y = gt$ ,  $y = gt^2/2$  (закон равноускоренного падения).

**Задание 2.3.** Установите условие, которое нужно наложить на приложенные к точке силы, чтобы ее импульс  $p$  или его проекции  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  не изменялись во времени (закон сохранения импульса).

#### 2.4. МЕРЫ ДЕЙСТВИЯ СИЛЫ И ДИНАМИЧЕСКИЕ МЕРЫ МЕХАНИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

**Момент силы. Работа и мощность силы.** Мерами действия силы называются величины, определяющие результат действия силы на тело или материальную точку. Мерами действия силы являются импульс силы  $F \cdot \Delta t$ , момент силы и работа силы. Определим физический смысл и способ расчета этих величин.

Опыт показывает, что одна и та же сила  $F$ , будучи приложена к телу в разных его точках, приводит к совершенно различным результатам (рис. 2.5). В первом случае (рис. 2.5, а) приложенная в точке  $A$  сила  $F$  не может вызвать движение диска, закрепленного на оси  $O$ . Во втором случае (рис. 2.5, б) точно такая же сила  $F$ , приложенная в точке  $B$  ( $F \perp OB$ ), вызывает вращение диска относительно оси  $O$ . Мерой действия силы в таких случаях является момент силы.

Моментом силы  $F$ , действующей на материальную точку, относительно центра  $O$  (рис. 2.6) называется вектор  $M_O$ , определяемый соотношением\*

$$M_O = r \times F \text{ — момент силы относительно центра } O, \quad (2.16)$$

где  $r$  — радиус-вектор, соединяющий центр  $O$  с рассматриваемой материальной точкой. Направление вектора момента силы определяется по правилу векторного произведения, т. е. вектор  $M_O$  перпендикулярен к плоскости,

\* Вектор  $M_O$ , так же как векторы  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{e}$  и другие, обладающие аналогичными свойствами, является псевдовектором (см. § 1.4).

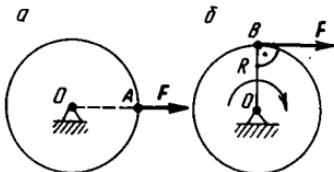


Рис. 2.5

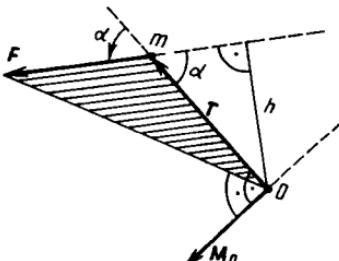


Рис. 2.6

проводенной через векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{F}$ , и образует с ними правую тройку векторов. Это значит, что при наблюдении из конца вектора  $\mathbf{M}_O$  видно, что вращение по кратчайшему направлению от  $\mathbf{r}$  к  $\mathbf{F}$  происходит против хода часовой стрелки (правило правой руки). Из формулы (2.16) следует, что модуль момента силы  $M_O = Fr \sin(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{F}) = Fh$  ( $h = r \sin \alpha$  — плечо силы), и, следовательно, определение (2.16) является векторной записью знаменитого правила рычага в механике. Момент  $\mathbf{M}_O$  характеризует способность силы вызвать вращение тела вокруг центра  $O$ . В рассмотренном примере (см. рис. 2.5) момент силы в случае «а» равен нулю (сила  $\mathbf{F}$  не способна повернуть диск), а в случае «б» он равен  $FR \neq 0$  (сила  $\mathbf{F}$  способна повернуть диск).

Мерой действия силы при превращении механического движения в другую форму движения является работа силы.

*Работой постоянной силы* на прямолинейном участке пути (рис. 2.7, а) называется физическая величина, зависящая от численного значения силы, ее направления и от перемещения точки приложения силы ( $A = F_s \cos(\hat{\mathbf{F}}, \mathbf{v}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ ). В случае переменной силы вводится понятие *элементарной работы*  $\delta A^*$ , определяемой скалярным произведением силы  $\mathbf{F}$  и вектора перемещения  $d\mathbf{r}$  (рис. 2.7, б):

$$\boxed{\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F ds \cos(\hat{\mathbf{F}}, d\mathbf{r}) = F_r ds \text{ — элементарная работа,}} \quad (2.17)$$

$F_r = F \cos \alpha$  — проекция на касательную,

\* Символ « $\delta$ » в обозначении элементарной работы  $\delta A$  используется для того, чтобы явно отметить возможную зависимость работы силы от формы траектории, по которой перемещается точка приложения силы и, следовательно,  $\delta A$  в общем случае не является полным дифференциалом некоторой функции  $f(x, y, z)$ , т. е.  $\delta A \neq dA$  (см. § 4.3).

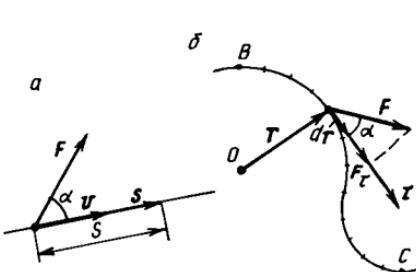


Рис. 2.7

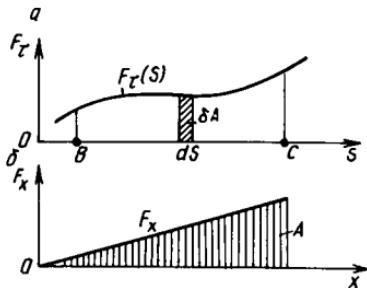


Рис. 2.8

где  $ds$  — элементарное перемещение,  $\delta A$  — элементарная работа, выполненная силой  $F$ ,  $\alpha$  — угол между направлением силы  $F$  и касательной к траектории (рис. 2.7).

Работа, совершаемая силой  $F$  на конечном участке пути  $BC$ , очевидно, равна сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках криволинейного пути и определяется криволинейным интегралом, вычисленным вдоль криволинейного участка траектории  $BC$ :

$$A_{BC} = \int_B^C F \cos \alpha ds \text{ — работа на конечном участке пути.} \quad (2.18)$$

Если угол  $\alpha < 90^\circ$ , то работа силы  $F$  положительна, так как составляющая силы  $F_t = F \cos \alpha$  совпадает по направлению с вектором перемещения  $dr$ . В этом случае силу  $F$  называют *движущей*. Если  $\alpha > 90^\circ$ , то работа силы  $F$  отрицательна и сила  $F$  называется *силой сопротивления*.

Если построить графики зависимости  $F_t$  от длины дуги  $s$  кривой, которую описывает точка приложения силы, то геометрически элементарная работа  $\delta A$  изобразится заштрихованной площадкой (рис. 2.8, а). Работа  $A$  на конечном перемещении будет численно равна площади, ограниченной кривой  $F_t(s)$ , осью абсцисс и ординатами начала  $B$  и конца  $C$  пути. Так, например, работа силы  $F$ , растягивающей пружину с коэффициентом жесткости  $k$  на длину  $x_1$ , будет изображаться площадью заштрихованного треугольника (рис. 2.8, б,  $F_x = F_{\text{упр}} = kx$ ). Аналитически эту работу можно подсчитать по формуле (2.18):

$$A = \int_0^{x_1} F_x dx = \int_0^{x_1} kx dx = k \frac{x_1^2}{2}. \quad (2.19)$$

В соответствии с формулой (2.17) за единицу работы в СИ принимается  $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}$ .

Работа силы, определяемая соотношением (2.18), вообще говоря, зависит от траектории, которую описывает точка приложения силы. Однако существует класс сил (силы тяготения, тяжести, электростатические силы и др.), работа которых не зависит ни от формы траектории, ни от закона движения точки по траектории (см. задание 2.8). Она зависит лишь от начального  $B$  и конечного  $C$  положения точки (рис. 2.9), т. е.

$$A_{B \rightarrow C} = A_{B \rightarrow C}. \quad (2.20)$$

Такие силы называются *консервативными*.

Мощность  $N$  силы определяется работой силы в единицу времени

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{Fds \cos \alpha}{dt} = Fv \cos \alpha = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.21)$$

**Момент импульса. Кинетическая энергия. Динамическими мерами движения называются величины, зависящие от скорости, радиуса-вектора  $r$  и массы точки: импульс, момент импульса и кинетическая энергия.**

*Моментом импульса*  $\mathbf{L}_o$  материальной точки называется псевдовектор, определяемый соотношением (см. определение момента силы)

$$\boxed{\mathbf{L}_o = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \text{ — момент импульса}, \quad (2.22)}$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор материальной точки относительно центра  $O$ ,  $m\mathbf{v} = \mathbf{p}$  — импульс материальной точки (рис. 2.10).

*Кинетической энергией* материальной точки называется энергия, зависящая от скорости точки и определяемая соотношением

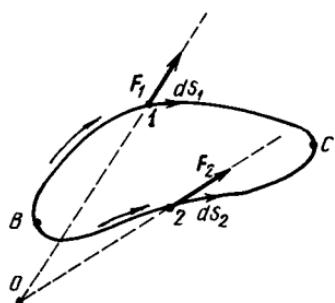


Рис. 2.9

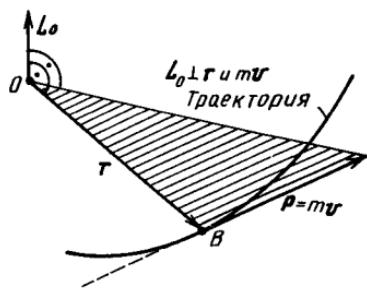


Рис. 2.10

$$K = \frac{mv^2}{2} — \text{кинетическая энергия точки.} \quad (2.23)$$

**Пример 2.3. Работа момента силы при вращении.** Вычислить работу силы  $\mathbf{F}$ , приложенной к рукоятке  $O_1B$  барабана (рис. 2.11).

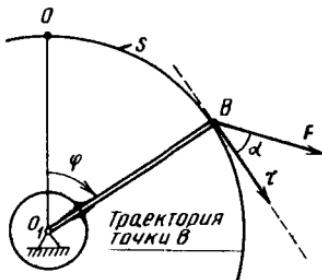


Рис. 2.11

**Решение.** Работа силы  $\mathbf{F}$  на элементарном перемещении  $ds$  определяется по формуле

$$\delta A_F = F ds \cos \alpha.$$

Поскольку  $s = O_1B\varphi$ , то  $ds = O_1Bd\varphi$ . В результате получим, что  $\delta A_F = F O_1B \cos \alpha d\varphi = M_{O_1}(F)d\varphi$ . Это означает, что работа силы  $F$  в этом случае может вычисляться как работа ее момента:

$$\delta A_F = \delta A_M = M_{O_1}d\varphi. \quad (2.24)$$

Если момент силы  $\mathbf{F}$  зависит от угла  $\varphi$ , то работа на конечном повороте будет вычисляться с помощью определенного интеграла

$$A_M = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_{O_1}(\varphi) d\varphi. \quad (2.25)$$

## 2.5. ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА И КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ТОЧКИ

**Уравнение моментов.** Оно устанавливает связь между изменением момента импульса точки и моментом силы, действующей на эту материальную точку. Уравнение моментов не является независимым законом природы, а следует из второго закона Ньютона. Для его получения продифференцируем момент импульса  $\mathbf{L}_o$  по времени  $t$ :

$$\frac{d\mathbf{L}_o}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} \times m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (2.26)$$

Так как вектор  $d\mathbf{r}/dt$  по направлению совпадает с импульсом  $m\mathbf{v}$ , то первое слагаемое в (2.26) равно нулю. Второе слагаемое (с учетом второго закона  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ )

можно заменить моментом силы  $\mathbf{F}$ , действующей на материальную точку. Таким образом, (2.26) принимает вид:

$$\frac{d\mathbf{L}_o}{dt} = \mathbf{M}_o(\mathbf{F}) — \text{уравнение моментов для точки.} \quad (2.27)$$

Рассмотрим частный случай, когда сумма моментов сил, действующих на точку, равна нулю. Тогда из (2.27) следует, что  $d\mathbf{L}_o/dt = 0$ , а значит, момент импульса точки как динамическая мера механического движения остается постоянной во времени величиной. Это утверждение носит название *закона сохранения момента импульса точки*.

В частности, если к точке приложены центральные силы, то момент сил относительно их центра  $O$  будет все время равен нулю (рис. 2.12). Центральными называются силы, линии действия которых проходят через одну и ту же точку  $O$ , называемую *центром сил*, а значения сил зависят от расстояния до этого центра ( $F = F(r)$ ). Примером центральных сил могут служить силы притяжения планет к Солнцу; центр сил совпадает с центром Солнца. В случае центральных сил момент импульса сохраняется, т. е.

$$\mathbf{L}_o = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{const.} \quad (2.28)$$

**Связь между изменением кинетической энергии материальной точки и работой сил.** Рассмотрим перемещение материальной точки  $M$  по криволинейной траектории из положения  $B$  в  $C$ , которое происходит под действием силы  $\mathbf{F}$  (рис. 2.13). Согласно второму закону Ньютона ( $m = \text{const}$ ),

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (2.29)$$

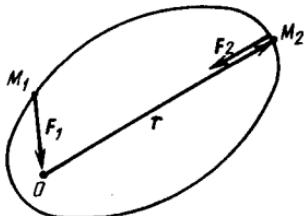


Рис. 2.12

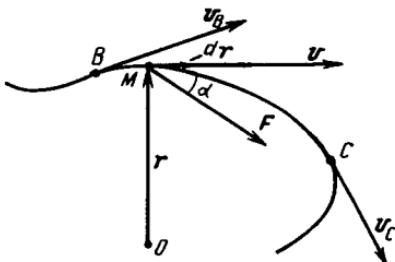


Рис. 2.13

Умножая обе части этого уравнения скалярно на скорость  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ , будем иметь  $m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt$ . Учитывая, что  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/2) = d(v^2/2)$  и сокращая на  $dt$ , получаем:

$$d(mv^2/2) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.30)$$

где  $d(mv^2/2)$  — изменение кинетической энергии материальной точки под действием силы  $\mathbf{F}$  на элементарном участке перемещения  $d\mathbf{r}$ . Интегрируя обе части уравнения (2.30) вдоль траектории движения между произвольными точками  $B$  и  $C$ , окончательно получаем:

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = \int_B^C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ — закон изменения кинетической энергии точки.} \quad (2.31)$$

Изменение кинетической энергии материальной точки при ее перемещении на некотором участке траектории равно работе сил, приложенных к точке на этом участке пути.

Очевидно, что кинетическая энергия точки сохраняется на тех участках траектории, на которых суммарная работа всех сил равна нулю.

**Пример 2.4. Первый и второй законы Кеплера.** Космическая станция массой  $m = 5000$  кг движется вокруг Земли по эллиптической орбите с минимальным расстоянием от поверхности Земли в перигее 200 км и максимальным в апогее 1200 км. Скорость станции в апогее  $v_a = 6,988 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}$ . Определить скорость  $v_n$  станции в перигее и работу сил тяготения при перемещении из апогея в перигей (рис. 2.14).

**Решение.** Для определения скорости космической станции в перигее воспользуемся уравнением моментов (2.27) относительно центра Земли (точка  $O$ )

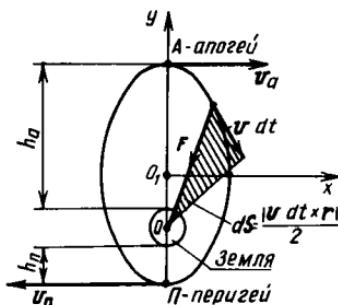


Рис. 2.14

$$d\mathbf{L}_0/dt = \mathbf{M}_0(\mathbf{F}).$$

Момент силы  $\mathbf{F}$  относительно силового центра  $O$  равен нулю, и, следовательно, имеет место закон сохранения момента импульса. Это значит, что моменты импульса в апогее и перигее будут равны:

$$mv_a(R + h_a) = mv_n(R + h_n). \quad (2.32)$$

Тогда

$$v_n = \frac{v_a(R + h_a)}{R + h_n} = \frac{6,988 \cdot 7570}{6570} = 8,051 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Работу сил притяжения найдем с помощью закона изменения кинетической энергии станции при ее перемещении из апогея в перигей (см. (2.31)):

$$A = \frac{mv_n^2}{2} - \frac{mv_a^2}{2} = \frac{5000 \cdot (8,051^2 - 6,988^2) \cdot 10^6}{2} = 4 \cdot 10^{10} \text{ Дж.}$$

В заключение отметим, что сохранение вектора момента импульса точки в поле сил всемирного тяготения (центральное поле Земли) приводит к тому, что орбиты спутников (планет) являются плоскими кривыми ( $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v} \perp \mathbf{L}_0 = \text{const}$ ), а площадь  $dS = |\mathbf{r} \times \mathbf{v} dt|/2$ , описываемая радиусом-вектором в единицу времени, остается постоянной, т. е.

$$dS/dt = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| dt/(2dt) = L_0/(2m) = \text{const} — \text{секториальная скорость.} \quad (2.33)$$

Эти утверждения составляют содержание *первого и второго законов Кеплера*, которые подготовили открытие Ньютона закона всемирного тяготения (третий закон Кеплера будет обсуждаться в задаче 3.7).

## 2.6. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

**Импульс, момент импульса и кинетическая энергия системы.** Совокупность конечного числа взаимодействующих материальных точек или тел называется *механической системой*. Примерами такой системы являются молекулы газа в некотором объеме  $V$ , Земля и Луна вместе с искусственными спутниками и космическими станциями и т. д. Всякая выделенная для изучения механическая система испытывает воздействие со стороны окружающих тел, которые не входят в эту систему. В связи с этим на каждую точку рассматриваемой системы (рис. 2.15) действуют силы, источник которых находится вне системы (*внешние силы*), и силы взаимодействия с материальными точками внутри системы (*внутренние силы*). Внутренние силы обозначаются символом  $\mathbf{F}^i$ , а внешние — символом

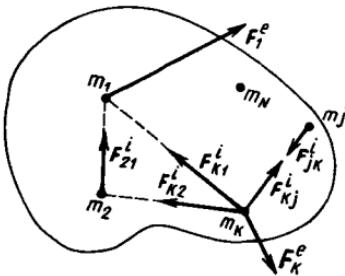


Рис. 2.15

$\mathbf{F}^e$  (верхние индексы  $e$  и  $i$  от начальных букв французских слов *exterieur* — внешний и *interieur* — внутренний\*). Механическая система называется замкнутой, если на точки этой системы не действуют внешние силы, т. е.

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^e = 0 \text{ — замкнутая система.} \quad (2.34)$$

Другими словами можно сказать, что механическая система в этом случае не подвержена внешним силовым воздействиям (она изолирована в механическом смысле).

Импульсом системы  $N$  материальных точек называется векторная сумма импульсов отдельных материальных точек, образующих данную систему:

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k \text{ — импульс системы — аддитивная характеристика.} \quad (2.35)$$

Моментом импульса системы  $N$  материальных точек относительно некоторого центра  $O$  называется векторная сумма моментов импульсов точек системы, вычисленных относительно того же центра:

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^N \mathbf{L}_{ok} = \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k \text{ — момент импульса системы — аддитивная характеристика.} \quad (2.36)$$

\* Такие же индексы получаются и от первых букв соответствующих английских слов (*external* — внешний, *internal* — внутренний).

**Кинетическая энергия системы**  $N$  материальных точек равна сумме кинетических энергий отдельных точек системы:

$$K = \sum_{k=1}^N \frac{m_k v_k^2}{2} \quad \text{— кинетическая энергия системы — аддитивная характеристика.} \quad (2.37)$$

**Закон изменения импульса системы. Центр масс.** При движении системы из  $N$  точек их импульсы  $p_k = m_k v_k$  изменяются под действием внешних и внутренних сил в соответствии со вторым законом Ньютона (2.3):

$$\frac{dp_k}{dt} = F_k^e + \sum_{j \neq k}^N F_{kj}. \quad (2.38)$$

При суммировании внутренних сил  $F_{kj}$  по индексу  $j$  следует учесть, что частица с номером  $k$  не может действовать сама на себя и, следовательно, индекс  $j$  принимает все значения от 1 до  $N$ , кроме  $j = k$ .

Изменение во времени всех импульсов  $p_k$  приведет в общем случае к изменению импульса  $P$  системы, определенного выражением (2.35). Дифференцируя равенство (2.35) по времени  $t$  и используя формулу (2.38), получаем

$$\frac{dP}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{dp_k}{dt} = \sum_{k=1}^N F_k^e + \sum_{k=1}^N \sum_{j \neq k}^N F_{kj}. \quad (2.39)$$

Поскольку внутренние силы входят парами (см. рис. 2.15) и удовлетворяют третьему закону Ньютона ( $F_{kj} = -F_{jk}$ ), то сумма всех внутренних сил системы (вторая — двойная сумма в (2.39))  $N$  точек всегда равна нулю. В результате получим

$$\frac{dP}{dt} = \sum_{k=1}^N F_k^e \quad \text{— закон изменения импульса} \quad (2.40)$$

системы точек или тел.

Согласно закону (2.40), изменение импульса  $P$  системы определяется только внешними силами, тогда как изменение импульса каждой точки системы происходит под действием как внешних, так и внутренних сил, приложенных к этой точке. Влияние внутренних сил на изменение импульса  $P$  может оказаться косвенно, если

внутренние силы способны изменить внешние силы. Такая возможность реализуется парашютистом, когда он за счет мускульной (внутренней) силы с помощью строп изменяет форму и положение купола парашюта, т. е. изменяет внешнюю силу — силу сопротивления.

При описании движения системы удобно использовать понятие *центра масс* (или центра инерции), сходное с понятием центра тяжести тела или системы тел. *Радиус-вектор*  $\mathbf{r}_C$  центра масс определяется следующим образом

$$\left( m = \sum_{k=1}^N m_k \right):$$

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}_k}{m} \quad \text{определение радиуса-вектора центра масс.} \quad (2.41)$$

Выполнив дифференцирование равенства (2.41) по времени, запишем выражение для скорости центра масс

$$\mathbf{v}_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k d\mathbf{r}_k/dt}{m} = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k}{m} = \frac{\mathbf{P}}{m} \Rightarrow \mathbf{P} = m \mathbf{v}_C. \quad (2.42)$$

Из формулы (2.40) с учетом выражения (2.42) следует уравнение движения для центра масс

$$m \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \quad \text{закон движения центра масс системы.} \quad (2.43)$$

Уравнения (2.40) и (2.43) для системы по внешнему виду совпадают с уравнениями (2.3) и (2.4), выражающими в математическом виде физическую сущность второго закона Ньютона для материальной точки. Вместе с тем следует обратить внимание на тот факт, что силы в правых частях (2.40) и (2.43) распределены по материальным точкам системы, а центр масс как геометрическая точка в пространстве не обладает собственной массой (в уравнение (2.43) входит общая масса системы). С учетом сказанного, из (2.43) следует, что *центр масс (точка C) системы движется так, как двигалась бы материальная точка, имеющая массу, равную массе системы*,

если бы на нее действовала сила, равная сумме всех внешних сил, приложенных к точкам этой системы.

Уравнение (2.43) определяет движение только центра масс системы и не содержит никакой информации о движении отдельных ее материальных точек. Например, движение колеса по дороге (см. пример 1.6) происходит под действием силы  $F$  (рис. 2.16), приложенной со стороны

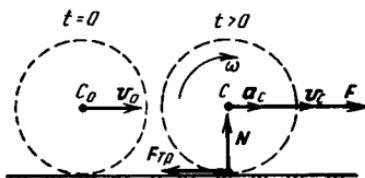


Рис. 2.16

оси (ведомое, как правило, переднее колесо), силы реакции дороги, состоящей из нормальной реакции  $N$  и силы трения  $F_{tp}$ . Предположим, что силой трения можно пренебречь (идеально гладкая поверхность). Тогда из формулы (2.43) следует дифференциальное уравнение

$$mdv_{Cx}/dt = F. \quad (2.44)$$

Решив уравнение (2.44) при  $F = \text{const}$ , получим закон равноускоренного движения центра колеса ( $v_0$  — начальная скорость, а  $x_0$  — начальная координата центра колеса):

$$v_{Cx} = v_0 + \frac{F}{m}t, \quad x_C = x_0 + v_0t + \frac{F}{m}\frac{t^2}{2}. \quad (2.45)$$

Вместе с тем понятно, что колесо может вращаться. При этом его точки движутся относительно центра  $C$ , однако из уравнения (2.44) нельзя извлечь какую-либо информацию о вращательном движении колеса (ее там просто нет — эта информация исчезла в результате суммирования уравнений (2.38) для отдельных точек). В связи с этим можно утверждать, что закон движения центра масс описывает только поступательное движение системы как целого.

Для того чтобы появилась возможность динамического описания вращательного движения твердого тела, нужно получить уравнение, которое бы определяло изменение момента импульса системы.

**Закон изменения момента импульса системы.** Момент импульса системы  $N$  точек, определяемый согласно (2.36),

изменяется во времени в процессе движения отдельных точек системы. Для каждой точки справедливо уравнение моментов (2.27), которое для точки с номером  $k$  при наличии внешних и внутренних сил будет иметь следующий вид ( $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ):

$$\frac{d\mathbf{L}_{0k}}{dt} = \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^c + \sum_{j \neq k}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{kj}^i. \quad (2.46)$$

Поскольку  $\mathbf{L} = \sum_{k=1}^N \mathbf{L}_{0k}$ , а производная

$$d\mathbf{L}/dt = \sum_{k=1}^N d\mathbf{L}_{0k}/dt,$$

то после суммирования (2.46) по всем точкам системы ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) получим

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^c + \sum_{k=1}^N \sum_{j \neq k}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{kj}^i. \quad (2.47)$$

В силу закона действия и противодействия (третий закон Ньютона)  $\mathbf{F}_{kj}^i = -\mathbf{F}_{jk}^i$ . Из рис. 2.17 следует, что моменты сил  $\mathbf{F}_{kj}^i$  и  $\mathbf{F}_{jk}^i$  равны по величине (одно и то же плечо  $h$ ) и противоположны по направлению ( $\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{kj}^i = -\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{jk}^i$ ). Тогда сумма моментов всех внутренних сил будет равна нулю ( $\sum_{k=1}^N \sum_{j \neq k}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{kj}^i = 0$ ). В результате уравнение (2.47) упростится

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^e \text{ — закон изменения момента импульса}$$

$$\mathbf{M}^e = \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{kj}^i \text{ — сумма моментов всех внешних сил.}$$

(2.48)

**Закон изменения кинетической энергии системы.** Запишем закон изменения кинетической энергии для точки с номером  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), на которую действуют внешние и внутренние силы (см. (2.31),  $v_{0k}$  и  $v_k$  — скорости этой точки в начальном и конечном положениях изучаемой системы):

$$\frac{mv_k^2}{2} - \frac{mv_{0k}^2}{2} = A_k^c + A_k^i. \quad (2.49)$$

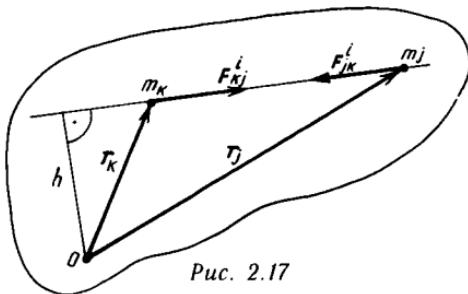


Рис. 2.17

По определению (2.37) кинетическая энергия системы равна сумме энергий отдельных точек. Поэтому, выполнив суммирование (2.49) по индексу  $k$  от 1 до  $N$ , получим

$$K - K_0 = \sum_{k=1}^N A_k^e + \sum_{k=1}^N A_k^i \text{ — закон изменения кинетической энергии системы точек.} \quad (2.50)$$

Согласно закону (2.50), изменение кинетической энергии системы происходит за счет работы, которую выполняют внешние и внутренние силы, действующие на точки механической системы. Причем сумма работ внутренних сил в общем случае не равна нулю (см. пример 2.5), тогда как векторные суммы внутренних сил и их моментов тождественно равны нулю.

**Пример 2.5.** Определить изменение импульса, момента импульса и кинетической энергии системы, представляющей собой два одинаковых шара массой  $m$ , соединенных между собой с помощью пружины жесткостью  $k$ . Силами трения и массой стержня пренебречь. Начальные скорости шаров равны и противоположно направлены, причем пружина в этом состоянии недеформирована ( $2l_0$  — естественная длина пружины).

**Решение.** 1) По закону (2.40) запишем уравнение  $d\mathbf{P}/dt = 0$   $\left( \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^e = 0 \text{ — замкнутая система} \right)$ . Следовательно,  $\mathbf{P} = \text{const}$ . В начальный момент времени импульс  $\mathbf{P}_0 = 0$  (см. рис. 2.18). Поэтому в любой последующий момент времени  $t$

$$\mathbf{P} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m^* \mathbf{v}_C = 0. \quad (2.51)$$

Здесь  $m^* = 2m$  — масса системы,  $\mathbf{v}_C$  — скорость центра масс. Согласно (2.51),  $\mathbf{v}_C = 0$ : центр масс (точка  $C$ ) не перемещается по отношению к системе координат, связанной с неподвижной идеально гладкой плоскостью ( $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$ ).

2) Скорости  $\mathbf{v}$  и  $-\mathbf{v}$  шаров в произвольном положении  $\varphi$  системы разложим на две составляющие: перпендикулярную и параллельную

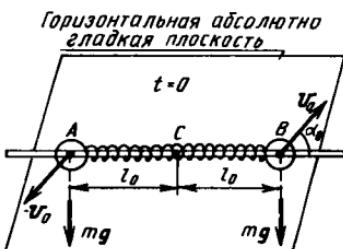


Рис. 2.18

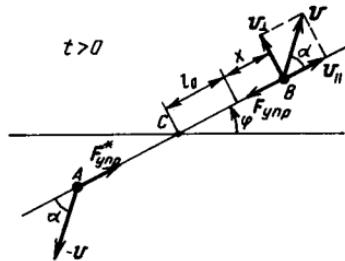


Рис. 2.19

стержню (рис. 2.19). Согласно закону изменения момента импульса (формула (2.48) при  $\sum_{k=1}^N \mathbf{M}_C(\mathbf{F}_k^e) = 0$ ),

$$d\mathbf{L}_C/dt = 0, \quad \mathbf{L}_C = \text{const.}$$

Из условия сохранения момента импульса для начального ( $\varphi = 0$ ) и произвольного ( $\varphi > 0$ ) положений систем из двух связанных шаров запишем уравнение:

$$2mv_0l_0 \sin \alpha_0 = 2mv(l_0 + x) \sin \alpha.$$

Это уравнение устанавливает связь между тремя переменными кинематическими величинами  $x$ ,  $v$ ,  $\alpha$ , определяющими движение системы:

$$v \sin \alpha(l_0 + x) = l_0 v_0 \sin \alpha_0 = \text{const.} \quad (2.52)$$

3) Дополнительную информацию о поведении системы двух шаров на гладкой плоскости можно получить с помощью закона изменения кинетической энергии системы (см. (2.50)). В данном случае работу выполняют только внутренние силы упругой деформации соединительной пружины:

$$\Sigma A^i = 2 \int_0^x F_x dx = -kx^2.$$

Тогда

$$2 \frac{mv^2}{2} - 2 \frac{mv_0^2}{2} = -kx^2 \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m} x^2}. \quad (2.53)$$

С учетом (2.52) запишем ( $v_\perp = v \sin \alpha$ ):

$$v_\perp = \frac{v_0 l_0 \sin \alpha_0}{l_0 + x}, \quad v_\parallel = \sqrt{v^2 - v_\perp^2} = \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m} x^2 - l_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha_0 / (l_0 + x)^2}. \quad (2.54)$$

Таким образом, совместное применение трех законов механики позволило установить зависимость кинематических величин от величины  $x$  упругой деформации пружины. Из (2.54) следует, что при некотором значении  $x = x_{\max}$  параллельная составляющая скорости обратится в нуль. При этом силы упругости будут максимальными и, следовательно, шары начнут сближаться — в системе возникает колебательное движение (см. задание 2.7). Детальное описание поведения такой системы во времени будет рассмотрено в гл. 7 (Механические колебания). Пример 7.4). Здесь обратим внимание только на тот факт, что

перпендикулярная составляющая скорости все время больше нуля, а это значит, что стержень вместе с шарами будет вращаться в одном направлении с переменной угловой скоростью

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{v_0 l_0 \sin \alpha_0}{(l_0 + x)^2} = f(x). \quad (2.55)$$

Из последней формулы хорошо видно, что колебательные и вращательные степени свободы системы двух взаимодействующих тел (шаров) связаны между собой с помощью динамических уравнений (в кинематическом смысле линейная координата  $x$  и угловая координата  $\phi$  не связаны между собой). В заключение отметим, что в рассмотренном примере фактически промоделировано движение свободной двухатомной молекулы. Причем для упрощения изучалось движение в плоскости и, следовательно, двухатомная молекула  $AB$  имела в этом случае четыре степени свободы (две поступательные, одна колебательная и одна вращательная). Такая молекула в трехмерном пространстве будет иметь уже шесть степеней свободы.

**Задание 2.4.** На примере трех материальных точек покажите, что векторная сумма внутренних сил и векторная сумма моментов внутренних сил равны нулю.

**Указание.** Изобразите все внутренние силы для случая трех точек и проведите расчеты по формулам:

$$\mathbf{F}^i = \sum_{k=1}^3 \sum_{j \neq k}^3 \mathbf{F}_{kj}^i — \text{главный вектор внутренних сил}, \quad (2.56)$$

$$\mathbf{M}^i = \sum_{k=1}^3 \sum_{j \neq k}^3 \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{kj}^i — \text{главный момент внутренних сил}. \quad (2.57)$$

Моменты сил записывайте относительно любого центра 0, а расчеты проводите в общем виде (без численных значений для всех величин).

**Ответ.**  $\mathbf{F}^i = 0, \mathbf{M}^i = 0$  — для любой механической системы материальных точек.

**Задание 2.5.** Изучите динамическое поведение замкнутой механической системы и получите кинематический закон движения центра масс этой системы.

**Указание.** Воспользуйтесь определением замкнутой системы (см. (2.34)) и законами (2.40) и (2.43) для механической системы.

**Ответ.**  $\mathbf{P} = \text{const}$  — это один из самых универсальных законов сохранения в физике.

$$\mathbf{v}_C = \text{const}, \mathbf{r}_C = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_C t — \text{замкнутая система}. \quad (2.59)$$

**Задание 2.6.** Изучите поведение момента импульса механической системы при наличии одного силового центра.

**Указание.** Воспользуйтесь определением центральных сил и силового центра (см. рис. 2.12) и законом (2.48), определяющим изменение момента импульса во времени.

**Ответ.**

$$\mathbf{L} = \sum_N \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k = \text{const} — \text{закон сохранения момента импульса для центральных сил}.$$

**Задание 2.7.** Используя результаты, полученные в примере 2.5, составьте дифференциальное уравнение продольных колебаний шаров и решите его для случая, когда  $x \ll l_0$  (малые колебания вдоль линии  $AB$ ).

**Указание.** По своему смыслу составляющая  $v_{\parallel}$  определяет изменение взаимного расстояния между каждым шаром и центром масс, т. е.  $v_{\parallel} = dx/dt$ . Это позволяет переписать (2.54) в виде дифференциального уравнения. Для его решения при  $x \ll l_0$  можно выразить  $1/(l_0 + x)^2$  разложить в ряд по  $x$  и ограничиться квадратичными членами  $\left(\frac{1}{(l_0 + x)^2} \approx \frac{1}{l_0^2} - \frac{2}{l_0^3}x + \frac{3}{l_0^4}x^2\right)$ . Далее следует разделить переменные и привести полученный интеграл вида  $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$  к табличному (для этого нужно под корнем выделить полный квадрат). Проанализируйте решение с учетом знака коэффициента  $c$  и дискриминанта  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

**Задание 2.8.** Закон движения тела переменной массы — уравнение Мещерского. Составьте уравнение движения ракеты (рис. 2.20)

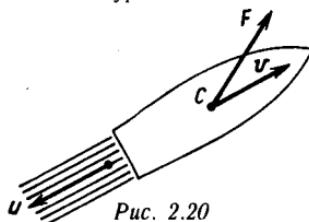


Рис. 2.20

и определите с его помощью скорость  $v$  ракеты в зависимости от ее массы в момент времени  $t$  ( $m = m(t)$ ,  $m_0 = m(0)$  — начальная масса ракеты, т. е. стартовая масса,  $u$  — относительная скорость истечения газов из сопла).

**Указание.** Предположите, что на ракету действует сила  $F$ , которая является равнодействующей всех внешних сил. Примените закон изменения импульса к системе, состоящей из ракеты и газов, которые образуются при горении топлива. Для этого запишите выражение для импульса ракеты в момент времени  $t$ , когда ее масса  $m$ , а скорость  $v$ . Затем определите для момента времени  $t + dt$  импульс системы ракета — газы, которые образовались за время  $dt$  ( $m + dm$  — масса ракеты в этот момент,  $v + dv$  — ее скорость,  $|dm| = -dm$  — масса газов,  $v_{газ} = v + u$  — скорость газов). После очевидных преобразований получите дифференциальное уравнение (уравнение Мещерского), решив которое при  $F = 0$  найдете скорость ракеты.

**Ответ.** Уравнение Мещерского ( $m = m(t)$ )

$$m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} + F \text{ — уравнение движения тела переменной массы.} \quad (2.60)$$

Скорость ракеты определяется выражением

$$v = u \ln \frac{m_0}{m}, \quad (2.61)$$

которое может быть записано в следующем виде:

$$\frac{m_0}{m} = e^{v/u} \text{ — формула Циолковского.} \quad (2.62)$$

Физика — прежде всего живое творение рук и мозга, которое передается более примером, чем зубрежкой. Оно воплощает искусство решать проблемы материального мира. И поэтому физике надо учиться, но учиться как искусству.  
А. Б. Пиппарт. Традиция Кавендиша

### 3. ВИДЫ И ЗАКОНЫ СИЛОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

**Фундаментальные взаимодействия.** Сила как мера механического взаимодействия является понятием, которое широко используется при описании разнообразных явлений микро- и макромира. Тем самым перекрываются все пространственные размеры от внутриатомных до размеров Вселенной. На разных масштабах действуют различные типы сил (ядерные, атомные, молекулярные, упругие силы, силы трения и т. д.), однако все они в конечном счете сводятся к так называемым четырем фундаментальным взаимодействиям — *сильному, электромагнитному, слабому и гравитационному*. Они определяют характер взаимодействия между различными элементарными частицами — основными кирпичиками мироздания. Области действия упомянутых выше фундаментальных сил схематично представлены на рис. 3.1 (с использованием логарифмического масштаба для характерных размеров микро- и макрообъектов).

Таким образом, прежде чем приступить к описанию частных и наиболее распространенных в механике законов взаимодействия, следует остановиться на краткой характеристике четырех фундаментальных взаимодействий.

*Сильное взаимодействие* является наиболее интенсивным из четырех перечисленных взаимодействий. В обыч-



Рис. 3.1

ном стабильном веществе сильное взаимодействие при не слишком высокой температуре не вызывает никаких процессов и его роль сводится к созданию прочной связи между нуклонами (протонами, нейtronами) в атомных ядрах. Это обусловлено тем, что радиус сильного взаимодействия составляет  $10^{-15}$  м. Однако при достаточно больших температурах (высоких энергиях) сильное взаимодействие приводит к многочисленным ядерным реакциям, среди которых особо важную роль играет реакция термоядерного синтеза, в результате которой четыре нуклона объединяются в ядро атома гелия. Эта реакция, осуществляющаяся при участии слабого взаимодействия, является основным источником энергии Солнца и звезд и, следовательно, основным источником энергии на Земле. Будущие проблемы развития энергетики человечество связывает с возможностью овладения процессом управляемого термоядерного синтеза.

*Электромагнитное взаимодействие* является дальнодействующим и может приводить как к притяжению, так и к отталкиванию между телами, что обусловлено существованием двух типов электрических зарядов — положительных и отрицательных. Свободных магнитных зарядов в природе не обнаружено. С помощью электромагнитного взаимодействия осуществляется взаимодействие положительно заряженных ядер и отрицательно заряженных электронов в атомах и молекулах вещества. Таким образом, электромагнитное взаимодействие определяет возможность устойчивого существования различных химических элементов и различных веществ. К электромагнитному взаимодействию сводятся силы упругости, силы трения, силы поверхностного натяжения в жидкостях и т. д.

*Слабое взаимодействие* обладает настолько малым радиусом действия, что он до сих пор не измерен. Его ожидаемая величина порядка  $10^{-18}$  м. Поэтому в молекулах, где атомы находятся друг от друга на расстояниях порядка  $10^{-10}$  м, слабое взаимодействие не проявляется. Тем не менее роль слабого взаимодействия в природе чрезвычайно велика, так как слабое взаимодействие обуславливает ряд чрезвычайно важных процессов в физике элементарных частиц. Достаточно сказать, что, если бы удалось как-то «выключить» слабое взаимодействие, то прекратился бы процесс термоядерного синтеза в недрах Солнца и звезд и они бы погасли.

Особая роль в физике принадлежит *гравитационному*

**взаимодействию.** Интенсивность гравитационного взаимодействия в  $10^{33}$  раз меньше интенсивности слабого взаимодействия. Однако гравитационное взаимодействие обладает бесконечным радиусом действия и именно поэтому его эффекты столь значительны. На каждое тело, находящееся вблизи поверхности Земли, действуют одновременно все атомы Земли, что и обуславливает закон всемирного тяготения, проявляющийся через действие гравитационных сил.

### **3.1. СИЛЫ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ, КАЧЕНИЯ И ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ**

**Внешнее и внутреннее трение.** Явление трения имеет место на границе между разными соприкасающимися телами (в твердом, жидком или газообразном состоянии) или отдельными частицами (слоями) одного и того же тела в жидком или газообразном состоянии. Оно связано с появлением сил взаимодействия на поверхности контакта тел или их частей, называемых *силами трения* и являющихся примером сил контактного (см. § 2.1) взаимодействия. Силы трения характеризуются тем, что они возникают только при попытке сместить одно тело по отношению к другому (статическое трение — трение покоя) или при относительном движении этих тел относительно друг друга (динамическое трение скольжения, трение качения и вязкое трение). Механизм возникновения сил трения представляет собой очень сложную физико-механическую проблему, рассмотрение которой показывает, что силы трения имеют электромагнитную природу и определяются характером взаимодействия атомов и молекул в соприкасающихся слоях.

Различают трения двух видов: внешнее или сухое трение и внутреннее или жидкое (вязкое) трение.

**Внешним трением** называется явление возникновения сил трения между соприкасающимися твердыми телами при отсутствии смазочного материала между ними.

**Внутренним трением** называется явление возникновения сил трения между отдельными слоями жидкостей или газов при их относительном движении относительно друг друга.

**Трение покоя и трение скольжения.** Сухое трение при покое или скольжении (поступательном движении) возникает в плоскости контакта прижатых друг к другу шероховатых тел. В этом случае касание происходит

не по всей плоскости соприкосновения тел, а в местах, расположенных на выступах — так называемых «пятнах». В «пятнах» касания тел и возникают силы трения, определяемые взаимодействием атомов и молекул на поверхности выступов, которые при скольжении тел разрушаются и возникают вновь. Суммарная площадь «пятен» остается приблизительно постоянной величиной, которая на 2—3 порядка (в 100—1000 раз) меньше реальной (геометрической) площади контакта тел.

Впервые явление трения исследовал Леонардо да Винчи (1452—1519), а основные эмпирические законы сухого трения получили французские физики Амонтон (1663—1705) и Ш. Кулон (1736—1806). Было установлено, что предельная сила трения покоя, которая возникает между телами *A* и *B* при отсутствии относительного скольжения, пропорциональна силе нормального давления (нормальной реакции *N*)

$$F_{\text{тр}}^{\max} = f_0 N \quad \text{максимальная сила трения покоя,}$$
$$f_0 \quad \text{коэффициент трения покоя.}$$
(3.1)

При этом ясно, что до возникновения скольжения (при относительном равновесии) модуль и направление силы трения покоя определяются действующими на тело *A* внешними силами (на рис. 3.2 это сила *F*), причем ее значение удовлетворяет следующему неравенству:

$$F_{\text{тр}}^{\text{пок}} \leq f_0 N \quad \text{сила трения покоя.}$$
(3.2)

Если к телу будет приложена сила *F*, превышающая значение максимально возможной силы (3.1), то тело *A* начнет смещаться относительно тела *B*. Возникает сила трения скольжения, которая несколько меньше силы  $F_{\text{тр}}^{\max}$  и также пропорциональна нормальной реакции *N*:

$$F_{\text{тр}}^{\text{ск}} = f N \quad \text{сила трения скольжения,}$$
$$f \quad \text{коэффициент трения скольжения.}$$
(3.3)

На рис. 3.3 представлена схематично экспериментальная зависимость силы трения покоя и скольжения от

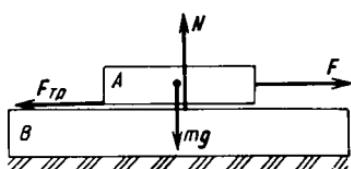


Рис. 3.2

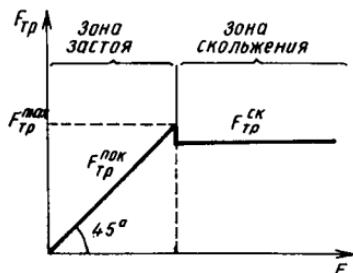


Рис. 3.3

приложенной горизонтальной силы  $F$  (при фиксированном значении  $N$  и малых скоростях скольжения). Опыт показывает, что коэффициенты  $f_0$  и  $f$  зависят от состояния поверхности соприкасающихся тел, их химической природы и практически не зависят от площади контакта тел, а коэффициент  $f$  при малых скоростях не зависит и от численного значения скорости относительного движения.

При увеличении скорости относительного движения коэффициент  $f$  сначала уменьшается, а затем начинает возрастать. Этот факт можно связать с тем обстоятельством, что вначале при увеличении скорости выступы шероховатых тел все меньше западают в углубления (трение уменьшается), а затем при больших скоростях разрушаются и измельчаются (трение увеличивается).

Значения коэффициента  $f$  определяются на опыте и лежат, как правило, между нулем и единицей. Например, дерево по дереву —  $f = 0,4 - 0,7$ ; металл по металлу —  $f = 0,15 - 0,25$ ; сталь по льду —  $f = 0,027$ .

**Пример 3.1.** На шероховатой наклонной плоскости лежит тело массой  $m$ , на которое действует сила  $Q$ , численно равная  $mg$ . Определить значение и направление силы трения, а также угол  $\alpha$ , при котором тело начнет скользить (принять, что коэффициенты  $f_0$  и  $f$  одинаковы и равны 0,2).

**Решение.** В состоянии равновесия сила трения покоя удовлетворяет условию (3.2), а ее значение определяется из уравнений равновесия. В проекции на оси  $x$  и  $y$  (рис. 3.4) эти уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha - F_{tr}^{pok} - Q \sin 30^\circ &= 0, \\ N - mg \cos \alpha - Q \cos 30^\circ &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из системы (3.4) следует, что

$$\begin{aligned} F_{tr}^{pok} &= mg(\sin \alpha - \sin 30^\circ), \\ N &= mg(\cos \alpha + \cos 30^\circ). \end{aligned} \quad (3.5)$$

При  $\alpha = 30^\circ$  сила трения равна нулю, при  $\alpha > 30^\circ$  она имеет положительное значение и, следовательно, направлена так, как на

рис. 3.4. Если же  $\alpha < 30^\circ$ , то сила трения принимает отрицательное значение. Это означает, что сила трения изменяет направление на противоположное. На рис. 3.5 представлена зависимость модуля силы трения покоя от угла  $\alpha$  (кривая 1). Для определения значений углов  $\alpha$ , соответствующих равновесию или скольжению груза, воспользуемся условием (3.2). Получим неравенство

$$|F_{tp}^{\text{пок}}| \leq fmg(\cos \alpha + \sqrt{3}/2). \quad (3.6)$$

Из рисунка видно, что неравенство (3.6) удовлетворяется в области значений угла  $\alpha$ , определяемой точками пересечения кривых 1 и 2. При  $\alpha > \alpha_2$  груз начнет скользить вниз, а при  $\alpha < \alpha_1$  он будет подниматься вверх по плоскости, поскольку действие силы  $Q$  будет преобладать над действием силы  $mg$ .

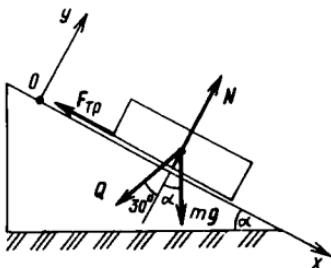


Рис. 3.4

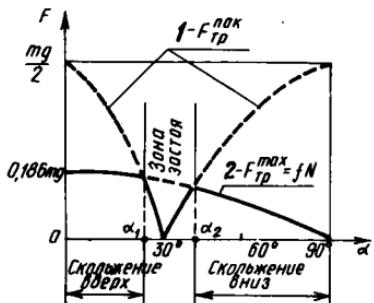


Рис. 3.5

**Трение качения.** Трение качения связано с возникновением сил, которые препятствуют качению одного тела по поверхности другого. Для выяснения причины появления такого сопротивления рассмотрим абсолютно твердое тело цилиндрической формы, которое лежит на горизонтальной плоскости (рис. 3.6). В этом случае имеет место контакт между телами по образующей цилиндра в точке  $A$  (точечный контакт в сечении, перпендикулярном к оси цилиндра). В центре колеса приложим силу  $F$ , которая меньше максимальной силы трения покоя:  $F < fN$ . Следовательно, колесо не сможет проскальзывать в точке  $A$ . В отсутствие скольжения возникает сила трения покоя, равная силе  $F$ . Определим момент всех сил относительно точки  $A$ . Силы  $mg$ ,  $N$  и  $F_{tp}$  проходят через точку  $A$  и не создают момента, а момент силы  $F$  отличен от нуля ( $M_F = FR \neq 0$ ). Это означает, что под действием сколь угодно малой силы  $F$  цилиндр должен катиться по плоскости. Однако из опыта известно, что качение тела начинается только при достижении силой  $F$  определенного значения, которое достаточно для преодоления действия сил, препятствующих качению. Причиной такого сопротивления при качении реальных твердых тел может

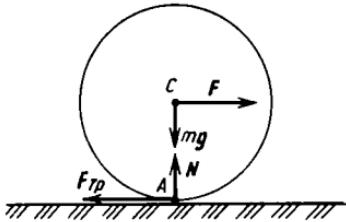


Рис. 3.6

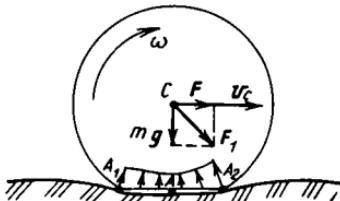


Рис. 3.7

быть только их способность деформироваться под действием внешних сил. В результате в окрестности точки  $A$  возникает площадка, по которой распределены контактные силы взаимодействия тел (силы давления и силы реакции). При попытке повернуть тело происходит как бы вкатывание колеса на горку (рис. 3.7), образованную деформированной плоскостью (окрестность точки  $A_2$ ). В результате действия сил  $mg$  и  $F$  более нагруженной будет передняя часть площадки (участок  $AA_2$ ). Точка приложения равнодействующей распределенных по площадке  $A_1A_2$  сил реакции окажется смещенной от точки  $A$  в направлении движения колеса. Разложим ее на нормальную  $N$  и касательную  $F_{tp}$  составляющие (рис. 3.8). Сила  $N$ , приложенная в точке  $B$ , препятствует качению колеса и тем самым определяет явление трения качения.

Таким образом, сопротивление качению возникает благодаря деформации тел в месте их соприкосновения, тогда как сопротивление скольжению всецело определяется их шероховатостью.

Проведем мысленный опыт, который состоит в медленном увеличении силы  $F$ , приложенной к первоначально покоящемуся колесу. С увеличением силы  $F$  будет увеличиваться смещение точки  $B$  до некоторого предельного положения, определяющегося отрезком  $AB = f_k$  и соответствующего состоянию предельного равновесия. Из условия равновесия моментов сил  $F^{\text{пред}}$  и  $N$  следует, что

$$F^{\text{пред}}R = f_kN \Rightarrow F^{\text{пред}} = \frac{f_k}{R}N. \quad (3.7)$$

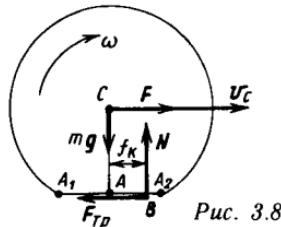


Рис. 3.8

При  $F < F^{\text{пред}}$  колесо находится в покое (нет качания), а при  $F > F^{\text{пред}}$  начинается качение без скольжения, если выполняется условие (3.6). Величина  $f_k$  в формуле (3.7) называется коэффициентом трения качения, который имеет размерность длины (смещения). Значение  $f_k$ , определяемое на опыте, оказывается различным для разных материалов: дерево по дереву —  $f_k = 5 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-4}$  м; сталь по стали (колесо по рельсу) —  $f_k = 5 \cdot 10^{-5}$  м; сталь закаленная по стали (шариковый подшипник)  $f_k = 1 \cdot 10^{-5}$  м.

В большинстве практических важных случаев отношение  $f_k/R$  значительно меньше, чем коэффициент трения скольжения из равенства (3.3). Именно поэтому в технике стремятся заменить трение скольжения тел трением качения (колеса, катки, подшипники).

Итак, в заключение отметим, что при качении тела по шероховатой поверхности возникает не только сила трения, определяемая соотношениями (3.2) или (3.3), но и момент сил трения качения (момент силы  $N$ )

$$M_{\text{тр}}^{\text{кач}} \leq f_k N \quad \text{— момент трения качения,} \\ f_k \quad \text{— коэффициент трения качения.} \quad (3.8)$$

**Вязкое трение.** Механизм возникновения вязкого трения будет кратко рассмотрен в разделе «Гидродинамика» (см. § 8.3). Здесь же приведем только окончательные выражения для сил сопротивления, которые возникают при движении тел в жидкой или газообразной среде. Оказывается, что при малых скоростях (меньше некоторой критической скорости) сила сопротивления пропорциональна скорости  $v$ :

$$\mathbf{F}_{\text{сокр}} = -\mu v \quad \text{— малые скорости.} \quad (3.9)$$

При больших скоростях сила сопротивления пропорциональна квадрату (и даже кубу) скорости  $v$ :

$$\mathbf{F}_{\text{сопр}} = -\mu^* v^2 \mathbf{v} \quad \text{— большие скорости.} \quad (3.10)$$

Коэффициенты  $\mu$  и  $\mu^*$  зависят от формы и размеров тела, состояния его поверхности, свойств окружающей среды и определяются, как правило, на опыте.

### 3.2. СИЛА УПРУГОСТИ. ЗАКОН ГУКА

**Виды деформации тела.** В предыдущем параграфе мы уже встретились с одним из проявлений деформируемости реальных твердых тел, которое состоит в возникновении явления трения качения. Сейчас приступим к рассмотрению основных видов деформации и соответствующих им законов взаимодействия. Известно, что изменение формы и размеров тел (деформация) возникает в результате действия на тело внешних сил, которые порождают внутренние силы. Количественные характеристики деформации используются при расчете на прочность конструкций и сооружений, при обработке материалов резанием, давлением и т. д.

При деформации твердого тела под действием внешних сил его атомы и молекулы смещаются из первоначальных положений равновесия в новые. Этому перемещению частицы препятствуют силы ее взаимодействия с окружающими соседними атомами и молекулами. Если смещения всех частиц были не слишком большими, то после прекращения действия внешних сил атомы и молекулы возвращаются в исходные равновесные положения. В результате форма и размеры тела самопроизвольно восстанавливаются — под действием внутренних сил. Такая деформация называется *упругой*.

Если же смещения атомов и молекул так велики, что происходит их взаимная перестройка, которая, естественно, не способствует их возвращению в исходные положения после снятия нагрузки, то такая деформация называется *пластической*.

Простейшими видами деформации являются деформация растяжения — сжатия и сдвига. Все остальные реально осуществимые на практике деформации, например кручение и изгиб, сводятся к этим простейшим деформациям, которые и рассмотрим в первую очередь.

**Деформация растяжения — сжатия** представлена на рис. 3.9. К концу закрепленного однородного стержня длиной  $l_0$  приложена сила  $F_n$ , расположенная перпендикулярно площади поперечного сечения стержня (рис. 3.9, а). В результате длина стержня увеличивается на величину  $\Delta l = l - l_0$  (рис. 3.9, б), называемую *абсолютной деформацией* ( $\Delta l > 0$  — растяжение,  $\Delta l < 0$  — сжатие). Силы упругости, уравновешивающие внешнюю нормальную силу  $F_n$ , распределены по поверхности поперечного сечения стержня (рис. 3.9, в). Равнодействующая

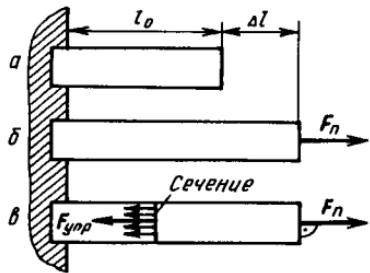


Рис. 3.9

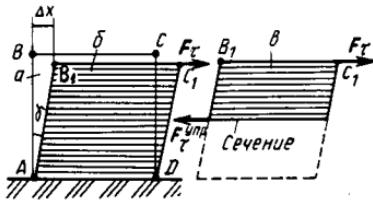


Рис. 3.10

этих сил численно равна внешней силе ( $F_{упр} = -F_n$  — третий закон Ньютона). Английский ученый Р. Гук (1635—1703) обнаружил в 1660 г., что в области упругой деформации между силой упругости и абсолютной деформацией  $\Delta l$  существует прямо пропорциональная связь:

$$F_h^{упр} = k \Delta l \text{ — закон Гука для растяжения — сжатия,}$$

$k$  — коэффициент жесткости стержня.

(3.11)

*Деформация сдвига* имеет место в том случае, когда плоские слои тела, параллельные некоторой плоскости, называемой *плоскостью сдвига*, смещаются относительно друг друга, не искривляясь и не изменяясь в размерах. Для иллюстрации деформации сдвига рассмотрим куб из однородного материала (рис. 3.10, а) с закрепленной нижней гранью. Если к верхней грани  $BC$  приложить касательную силу  $F_T$ , то куб деформируется в равновесий параллелепипед  $AB_1C_1D$  (рис. 3.10, б). Горизонтальные слои куба смещаются в одном направлении (вправо) — имеет место *сдвиговая деформация*. На выделенную верхнюю часть куба (рис. 3.10, в) со стороны нижней его части действуют силы упругости, распределенные по касательной к сечению куба. Опыт показывает, что в области упругости равнодействующая сил упругости пропорциональна углу  $\gamma$ , т. е.

$$F_T^{упр} = k_{сд} \gamma \text{ — закон Гука для сдвига,}$$

$k_{сд}$  — коэффициент сдвиговой жесткости.

(3.12)

Деформация изгиба реализуется в случае, когда к стержню или балке приложена сила  $F$ , перпендикулярная к его осевой линии (рис. 3.11, а). Очевидно, что

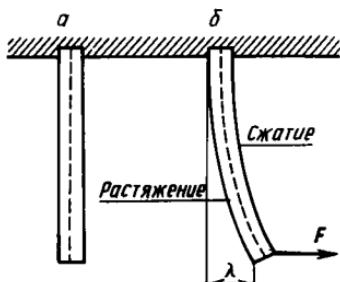


Рис. 3.11

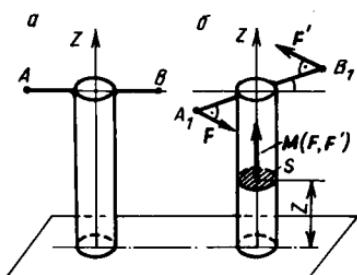


Рис. 3.12

вблизи выпуклой поверхности деформированной балки слои растянуты, а возле вогнутой — сжаты. Таким образом, деформация изгиба сводится к деформациям растяжения и сжатия (рис. 3.11, б). При этом между силой упругости и стрелой изгиба  $\lambda$  (максимальный изгиб балки) существует линейная связь:

$$F_{из}^{упр} = k_{из} \lambda \quad \text{закон Гука для изгиба,}$$

$$k_{из} \quad \text{коэффициент изгибной жесткости.}$$
(3.13)

Деформация кручения наблюдается, если один конец образца (проволоки или стержня) закреплен (рис. 3.12, а), а к другому концу приложена пара сил с вращательным моментом  $M = F \cdot AB$ , направленным вдоль длинной оси образца (рис. 3.12, б). Под действием момента  $M$  сечения стержня поворачиваются на некоторый угол  $\phi$ , который зависит от положения сечения, задаваемого координатой  $z$  ( $\phi = \phi(z)$ ). Отдельные слои, заключенные между соседними сечениями стержня, разворачиваются относительно друг друга. При этом реализуется неоднородный сдвиг, когда отдельные участки слоев, находящиеся на разных расстояниях от оси  $z$ , сдвигаются на неодинаковые расстояния. Между моментом  $M$  и максимальным углом  $\phi$  поворота (закрутки) крайнего сечения (здесь верхнего конца стержня) наблюдается пропорциональная зависимость

$$M_{kp}^{upr} = f_{kp}\varphi^* \text{ — закон Гука для кручения,}$$

$$k_{kp} \text{ — коэффициент крутильной жесткости.}$$
(3.14)

В заключение отметим, что коэффициенты жесткости для различных деформаций зависят от вида материала, геометрических размеров образцов и определяются, как правило, на опыте.

### 3.3. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ. ОПЫТ КАВЕНДИША

**Закон гравитации.** Взаимодействие тел, проявляющееся через силы гравитации, является одним из четырех фундаментальных взаимодействий. Универсальность и фундаментальность этих сил состоит в том, что они определяются только массами тел и не зависят от их природы. В своих рассуждениях Ньютона сравнил ускорение Луны и падающего на Землю яблока (рис. 3.13). Для этого он использовал опытные значения кинематических и геометрических характеристик (расстояние до Луны  $r_L = 3,86 \cdot 10^8$  км, период ее обращения  $T_L = 27,3$  суток) и ускорение свободного падения, которые позволяют определить отношение ускорения Луны

$$a_n^L = v_L^2 / r_L. \quad (3.15)$$

к ускорению яблока в свободном падении

$$\frac{a_n^L}{g} = \frac{v_L^2}{gr_L} = \frac{4\pi^2 r_L}{T_L^2 g} = \frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 3,86 \cdot 10^8}{(27,3 \cdot 24 \cdot 3600)^2 9,81} \simeq \frac{1}{60^2}. \quad (3.16)$$

Это отношение, пропорциональное отношению гравитационных сил  $F_L/F_a$ , оказалось в пределах ошибок измерений равным отношению квадратов расстояний от яблока и Луны до центра Земли:

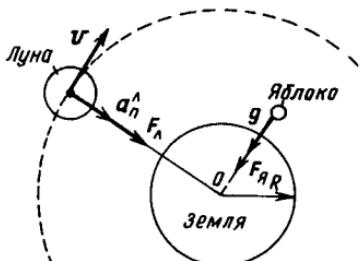


Рис. 3.13

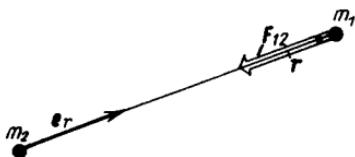


Рис. 3.14

$$\frac{R_3^2}{r_h^2} = \left( \frac{6,370 \cdot 10^6}{3,86 \cdot 10^8} \right) \simeq \frac{1}{60^2}. \quad (3.17)$$

В результате такие размышления позволили Ньютону сформулировать фундаментальный закон тяготения точечных масс:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ — закон всемирного тяготения,}$$

$$\gamma = 6,6745 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2} \text{ —}$$

$$\text{гравитационная постоянная.}$$

(3.18)

С помощью закона (3.18) можно записать векторное выражение (рис. 3.14) для силы  $\mathbf{F}_{12}$ , действующей на  $m_1$  со стороны  $m_2$  ( $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$  — единичный вектор):

$$\mathbf{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r,$$

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}.$$

(3.19)

**Опыт Кавендиша.** В 1798 г. английский физик и химик Г. Кавендиш (1731—1810) предложил и осуществил оригинальный способ непосредственного измерения в земных условиях гравитационной постоянной  $\gamma$  всемирного тяготения. Для этого он откалибровал кварцевую нить, а затем подвесил к ней два небольших свинцовых шарика массой  $m$ , укрепленных на концах легкого стрежня длиной  $l$  (на рис. 3.15 изображена схема крутильных весов). Поместив затем вблизи шариков два крупных свинцовых шара массой  $M$ , он измерил угловое отклонение  $\alpha$  стержня и расстояния  $x$  между центрами большого и малого шаров. В состоянии равновесия момент сил гравитационного взаимодействия малых шаров с боль-

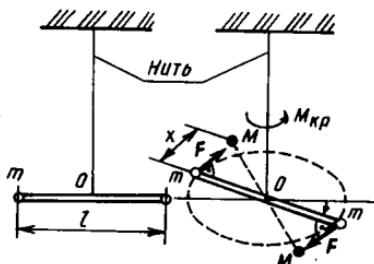


Рис. 3.15

шими уравновешивается моментом сил упругости со стороны закрученной нити:

$$f_{kp} \cdot \varphi = 2\gamma \frac{mM}{x^2} \frac{l}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{f_{kp}\varphi x^2}{mMl}. \quad (3.20)$$

Тщательное измерение всех величин из (3.20) позволило определить значение  $\gamma$  с точностью до трех значащих цифр ( $\gamma \simeq 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ ).

### 3.4. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАРЯДОВ

**Закон Кулона.** Если рассматривать взаимодействие двух неподвижных зарядов, то помимо гравитационного взаимодействия их масс между зарядами действуют силы электростатического взаимодействия. Выражение для силы электростатического взаимодействия двух зарядов

$$F = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} — \text{закон Кулона в вакууме} \quad (3.21)$$

было получено Ш. Кулоном в 1785 г. в опытах с заряженными шариками, закрепленными на крутильных весах. В Международной системе (СИ) коэффициент  $k_0$  для удобства выражают с помощью соотношения

$$k_0 = 1/(4\pi\epsilon_0) \quad (3.22)$$

через новую постоянную  $\epsilon_0$ . Поскольку единица заряда в СИ (кулон) определяется независимым образом, то значение  $k_0$ , а значит и  $\epsilon_0$ , можно найти точно тем же способом, каким было найдено значение гравитационной постоянной  $\gamma$  (опыт Кавендиша). Постоянная  $\epsilon_0$  имеет размерность электрической емкости, деленной на длину (фарад/метр). Векторное выражение для силы взаимодействия (3.21) имеет следующий вид:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_r — \text{закон Кулона в вакууме} \quad (\text{СИ}),$$
$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 0,885 \cdot 10^{-11} \Phi \cdot \text{м}^{-1} —$$

электрическая постоянная.

$$(3.23)$$

Следует обратить внимание на совпадение функционального вида законов гравитационного (3.18) и электростатического (3.23) взаимодействий.

### 3.5. МАГНИТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ

**Сила Лоренца.** Опыты по изучению взаимодействия проводников с токами (закон Ампера) показали, что помимо гравитационных и электрических сил между движущимися точечными зарядами действуют магнитные силы (силы Лоренца). Полученный экспериментально закон Ампера и выражение для силы Лоренца позволяют записать закон взаимодействия зарядов посредством магнитной силы, обусловленной движением зарядов  $q_1$  и  $q_2$  со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  соответственно. Такой переход будет подробно и строго обсуждаться в разделе «Электричество и магнетизм». Частично этот вопрос рассмотрим в главе 11 «Элементы релятивистской механики» и покажем (в простейшем частном случае), что магнитные силы являются следствием преобразования закона Кулона при переходе от инерциальной системы, в которой заряды покоятся, к инерциальной, в которой они движутся (см. § 11.3). Здесь же для предварительного знакомства с упомянутыми магнитными силами поступим достаточно формально при преобразовании выражения (3.23) для закона Кулона. Для этого запишем выражение для электрической (кулоновской) и магнитной (лоренцевой) сил, действующих на заряд  $q$ , движущийся в электромагнитном поле (полевому подходу в описании силовых взаимодействий посвящена следующая четвертая глава):

$$\mathbf{F}_k = q\mathbf{E} \quad \text{— электрическая сила,} \\ \mathbf{E} \quad \text{— напряженность электрического поля;} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{F}_l = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \text{— магнитная сила,} \\ \mathbf{B} \quad \text{— индукция магнитного поля.} \quad (3.25)$$

Из сопоставления этих формул следует, что выражение (3.25) можно получить из формулы (3.24), если выполнить формальное преобразование согласно следующей схеме ( $c$  — скорость света):

$$\boxed{\mathbf{F}_K \rightarrow \mathbf{F}_L, q \rightarrow q \frac{\mathbf{v}}{c} \times, \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}c.} \quad (3.26)$$

Применим это преобразование к закону Кулона (3.23), имея в виду ситуацию, когда заряды  $q_1$  и  $q_2$  движутся со скоростями  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  соответственно (рис. 3.16). В результате для магнитной силы, действующей на заряд  $q_1$  со стороны  $q_2$ , получим выражение

$$\mathbf{F}_{12}^M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q_1 \mathbf{v}_1 \times [q_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (3.27)$$

которое содержит двойное векторное произведение. Если учесть, что скорость света  $c$ , электрическая постоянная  $\epsilon_0$  и магнитная постоянная  $\mu_0$  связаны соотношением (оно будет получено в разделе «Волновая оптика»)

$$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}, \quad (3.28)$$

то для силы Лоренца, действующей на заряд  $q_1$  со стороны заряда  $q_2$ , можно записать окончательное выражение ( $v \ll c$ )

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{F}_{12}^M &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{v}_1 \times [\mathbf{v}_2 \times \mathbf{r}] — \text{сила Лоренца для} \\ &\quad \text{взаимодействия} \\ &\quad \text{зарядов в ва-} \\ &\quad \text{кууме (СИ),} \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1} — \text{магнитная посто-} \\ &\quad \text{янная.} \end{aligned}} \quad (3.29)$$

В заключение отметим, что использованный здесь прием записи выражения (3.29) можно рассматривать как удобное *мнемоническое правило*, которое способствует запоминанию достаточно громоздкой формулы (3.29) путем «реконструкции» закона Кулона с помощью простого преобразования (3.26). Это позволит уже в разделе «Механика» обратить особое внимание на те общие черты, которые присущи гравитационным, электрическим и магнитным взаимодействиям, описываемым законами (3.19), (3.23) и (3.29). Вместе с тем сила Лоренца обладает особыми свойствами, которые будут рассматриваться по мере изложения нового материала. Здесь отметим только, что сила Лоренца не подчиняется закону действия и противодействия (см. задание 3.5).

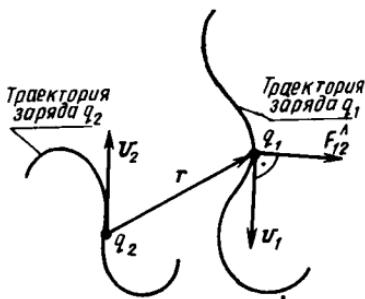


Рис. 3.16

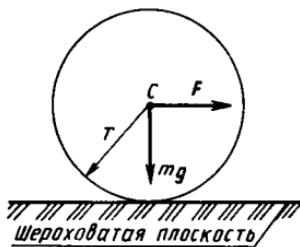


Рис. 3.17

**Задание 3.1.** Металлический (стальной) цилиндр радиуса  $r$  находится на горизонтальной шероховатой стальной плоскости (рис. 3.17). Запишите условия, при выполнении которых цилиндр будет участвовать в чистом качении (без скольжения) и чистом скольжении (без качения). Найдите то предельное значение радиуса  $r$ , при котором происходит переход от чистого качения к чистому скольжению. Сравните эти значения по порядку величины с размерами используемых в технике подшипников.

**Ответ.**  $r_{\text{пр}} = f_k / f$ .

**Задание 3.2.** Основываясь на опытных значениях гравитационной постоянной  $\gamma$ , ускорения  $g$  и радиуса  $R$  Земли (см. опыт Кавендиша), определите массу Земли, т. е. выполните косвенное «взвешивание» Земли. Определив далее значение средней плотности Земли, найдите относительную ошибку для плотности, которую допустил Ньютона в оценочных расчетах величины  $\gamma$ , когда принял, что средняя плотность Земли  $\bar{\rho} = 5 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ .

**Указание.** Воспользуйтесь законом (3.18) и получите формулу для ускорения свободного падения  $g$  материальной точки, предположив, что Земля является инерциальной системой отсчета. Выполните расчеты и найдите значения массы Земли, ее средней плотности  $\bar{\rho}$  и относительной ошибки  $\Delta$  для плотности  $\rho$ .

**Ответ.**  $\Delta = \Delta \rho / \bar{\rho} \approx 0,1$  (10 % по отношению к найденному значению  $\bar{\rho}$ ).

**Задание 3.3.** Сравните численные значения гравитационного и

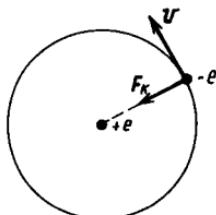


Рис. 3.18

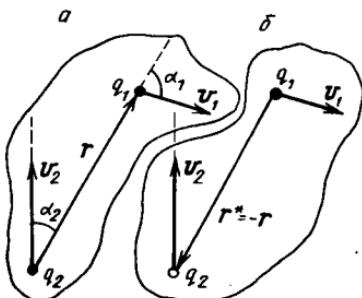


Рис. 3.19

электрического взаимодействий электрона с протоном в атоме водорода (рис. 3.18). Расчеты проведите для случая, когда электрон движется по первой боровской орбите радиуса  $a = 0,53\text{\AA}$  (1 ангстрем =  $= 10^{-10}$  м). Найдите его скорость.

Указание. Определите скорость  $v$  движения электрона по орбите как классической частицы, подчиняющейся второму закону Ньютона, приняв во внимание только кулоновскую силу взаимодействия. Далее прямыми расчетами покажите, что гравитационная сила много меньше кулоновской.

**Задание 3.4.** Получите формулу для первой космической скорости и определите ее значение для спутников Земли и Луны.

Указание. Первая космическая скорость — скорость полета спутника по круговой орбите радиуса  $r = R + h$  ( $R$  — радиус Земли либо Луны,  $h$  — высота полета спутника над поверхностью Земли или Луны,  $h \ll R$ ).

Ответ.  $v_1 = \sqrt{g(R+h)} \approx \sqrt{gR}$ ,  $g_3 = 9,81 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ ,  $g_L = 1,65 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ .

**Задание 3.5.** Рассмотрите частную ситуацию движения двух зарядов, когда векторы их скоростей  $v_1$  и  $v_2$  лежат в одной плоскости и расположены по отношению друг к другу так, как это изображено на рис. 3.19. Определите значения и направления сил Лоренца, действующих на эти заряды (значения всех величин, указанных на рисунке, заданы). Сравните эти силы. Подчиняются ли найденные силы Лоренца закону действия и противодействия.

Указание. Воспользуйтесь выражением (3.29) и определите значение и направление силы  $\mathbf{F}_{12}^L$  (рис. 3.19, а). Затем по аналогии с выражениями (3.29) запишите выражение для силы  $\mathbf{F}_{21}^L$  (рис. 3.19, б) и найдите ее направление и модуль (при определении направления сил Лоренца введите вспомогательные векторы  $b_1 = v_1 \times r$  и  $b_2 = v_2 \times r$  и воспользуйтесь правилом векторного произведения или правилом правой руки).

Ответ. Силы  $\mathbf{F}_{12}^L$  и  $\mathbf{F}_{21}^L$  не удовлетворяют закону действия и противодействия, поскольку их модули не равны, а направления не противоположны друг другу ( $\mathbf{F}_{12}^L \perp \mathbf{v}_1$ , а  $\mathbf{F}_{21}^L \perp \mathbf{v}_2$ ).

**Задание 3.6.** Используя условие примера 2.4, найдите скорость космической станции в апогее (точка А) и в точке В.

Указание. Определите численные значения полуосей эллипса. Для этого нужно воспользоваться построениями, которые выполнены на рис. 3.20, и вспомнить геометрическое определение эллипса:  $l = OM + MO_2 = \text{const}$ . С его помощью найдите  $l$  и  $a$ , поместив последовательно точку М в положения А и В. Затем запишите уравнение

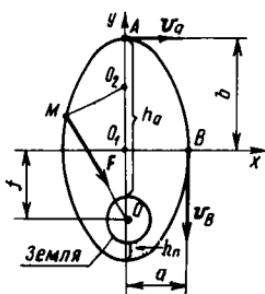


Рис. 3.20

эллипса в параметрической форме ( $x = a \cos \varphi$ ,  $y = b \sin \varphi$ ) и найдите радиус кривизны  $r_A$  траектории в точке  $A$  (см. формулу (1.28)). Дальше нужно решить основную задачу динамики точки, основываясь на втором законе Ньютона и законе всемирного тяготения (см. выражение (3.18)).

Ответ. Полуоси эллипса  $a = 7052$  км,  $b = 7070$  км,  $r_A = a^2/b$ ,  $v_A = 6,988$  км · с<sup>-1</sup>,  $v_B = 7,051$  км · с<sup>-1</sup>.

**Задание 3.7.** Покажите, что периоды обращения спутников Земли удовлетворяют третьему закону Кеплера. Расчеты проведите для частного случая круговых орбит радиуса  $R$ .

**Указание.** Третий закон Кеплера утверждает, что отношение кубов больших полуосей орбит к квадратам времен обращения для всех планет Солнечной системы одинаково (получен в результате обработки экспериментальных данных о движении планет).

С помощью второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения определите скорость  $v$  спутников Земли в зависимости от радиуса круговой орбиты  $R$ , а затем найдите их периоды  $T$  обращения по этим орбитам. В третьем законе Кеплера вместо больших полуосей следует взять радиусы орбит.

Ответ. Отношение  $R^3/T^2 = \gamma M = \text{const}$  ( $M$  — масса Земли).

**Задание 3.8. Примеры вычисления работы контактных и полевых сил.** Точка массой  $m$ , несущая заряд  $q$ , перемещается из положения  $B$  в положение  $C$  (рис. 3.21). Определите работу  $A_{BC}$  для следующих сил:

- силы упругости (рис. 3.21, а);
- силы всемирного тяготения (рис. 3.21, б);
- силы электростатического взаимодействия двух зарядов (рис. 3.21, в);
- силы Лоренца (рис. 3.21, г);
- силы трения скольжения тела по горизонтальной шероховатой плоскости при движении сначала по гипотенузе, а затем по двум катетам (рис. 3.21, д);

е) силы вязкого трения (закон Стокса) при движении в горизонтальной плоскости сначала по диаметру, а затем по полуокружности радиуса  $R$  (принять во внимание действие только сил сопротивления, силы тяжести и силы натяжения нити,  $v_0$  — начальная скорость точки (рис. 3.21, е).

Проанализируйте полученные результаты и установите, какие из рассмотренных сил являются консервативными (см. определение консервативных сил).

**Указание.** В случаях а, б, в, г и д воспользуйтесь выраже-

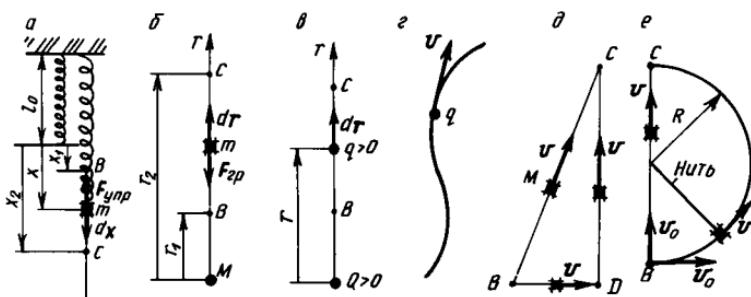


Рис. 3.21

ниями для соответствующих сил и определите их работу по формуле (2.12). В случае  $e$  нужно составить дифференциальное уравнение движения и, решив его, найти работу силы Стокса по формуле (2.12) либо с помощью закона изменения кинетической энергии точки (см. формулу (2.31)).

**Ответ.** Работа сил упругости, сил тяготения и электростатических сил зависит только от начального  $B$  и конечного  $C$  положений точки. Она не зависит от формы траектории движущейся точки. Работа силы Лоренца равна нулю, а работа сил трения и сил вязкого сопротивления зависит от вида траектории, по которой материальная точка перемещается из  $B$  в  $C$ .

**Задание 3.9. Вторая и третья космические скорости.** Получите выражение для второй и третьей космических скоростей.

**Указание.** Второй космической скоростью  $v_2$  называется та наименьшая скорость, которую нужно сообщить телу для того, чтобы оно преодолело притяжение Земли.

Третья космическая скорость  $v_3$  определяется как скорость, которую нужно сообщить телу на Земле, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы.

**Ответ.**  $v_2 = \sqrt{2gR} \approx 11,2 \text{ км} \cdot \text{s}^{-1}$ . Значение скорости  $v_3$  зависит от направления запуска корабля по отношению к направлению орбитального движения Земли. Рассмотрите запуск космического корабля в направлении внешней нормали к орбите Земли или в каком-либо другом направлении.

Закон сохранения энергии — это строжайший бухгалтер физики.

Л. Д. Ландау, А. И. Китайгородский

## 4. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ СИЛОВОЕ ПОЛЕ

**Энергия.** Понятие энергии как единой количественной меры различных форм движения и взаимодействия материи является фундаментальным понятием физики. В соответствии с различными формами движения и взаимодействия материи выделяют механическую (потенциальную и кинетическую), внутреннюю (тепловую), электромагнитную, ядерную и некоторые другие виды энергии.

### 4.1. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИЛ

**Потенциальная энергия и ее связь с работой консервативных сил.** Важнейшей составной частью механической энергии является потенциальная энергия, которая определяется как часть общей механической энергии системы, зависящая от взаимного расположения материаль-

ных точек системы (конфигурации системы) и от их положений (координат) во внешнем силовом поле. Из данного определения следует, что потенциальная энергия системы не должна зависеть от того, каким образом данная конфигурация частиц системы возникла, а это значит, что понятие потенциальной энергии имеет смысл лишь в том случае, когда на материальные точки системы действуют только консервативные силы, т. е. силы, работа которых не зависит от формы траекторий точек системы. Примером таких сил являются силы тяготения, силы упругости, силы электростатического взаимодействия (см. задание 3.8). Следовательно, изменение потенциальной энергии системы должно определяться только работой консервативных сил. Другими словами, работа консервативных сил при переходе из состояния 1 в состояние 2 равна убыли потенциальной энергии:

$$A_{12} = \Pi(1) - \Pi(2) = -\Delta\Pi \Rightarrow dA = -d\Pi. \quad (4.1)$$

Таким образом, поскольку реально измеряемой величиной является работа сил, то из (4.1) следует, что потенциальная энергия определена неоднозначно (сдвиг  $\Pi$  на постоянную величину не изменяет значения работы). Посредством определения работы сил в реальных процессах мы можем найти только разность потенциальных энергий.

Процедура придания потенциальной энергии как физической величине однозначности называется *нормировкой* и заключается в том, что, согласно (4.1), потенциальную энергию системы в некотором ее положении можно считать равной любому наперед заданному значению, например нулю. Это состояние системы соответствует так называемому *нулевому уровню* для потенциальной энергии системы ( $\Pi_0 = 0$ ). Условие нормировки обычно учитывает физические особенности каждой конкретной задачи. Например, при рассмотрении движения тела под действием силы тяжести целесообразно принять потенциальную энергию у поверхности Земли равной нулю ( $\Pi = mgh$ ). Если же рассматривается движение космического объекта под действием силы всемирного тяготения (3.18), то естественно предположить, что потенциальная энергия системы «Земля — космический объект» равна нулю на бесконечном расстоянии от Земли, т. е. там, где сила взаимодействия обращается в нуль ( $\Pi_0 = \Pi(\infty) = 0$ ).

Рассмотрим вопрос о знаке потенциальной энергии

системы для сил притяжения и сил отталкивания в том случае, когда потенциальная энергия системы, точки которой удалены на бесконечное расстояние, принята за нуль. Совершим переход из произвольного состояния 1 на нулевой уровень. Тогда с помощью (4.1) для потенциальной энергии  $\Pi(1)$  получим

$$\Pi(1) = A_{10} \text{ — определение потенциальной энергии.} \quad (4.2)$$

Потенциальная энергия, определяемая выражением (4.2), численно равна работе консервативных сил при переходе системы из заданного положения на нулевой уровень.

В случае сил притяжения работа

$$A_{10} = \int_1^{\infty} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^{\infty} F(r) \cos(\hat{\mathbf{F}}, d\mathbf{r}) dr < 0.$$

В этом легко убедиться при рассмотрении перемещения точки из данного положения  $M_1$  вдоль радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  (рис. 4.1, а). Тогда  $\cos(\hat{\mathbf{F}}, d\mathbf{r}) = -1$  и  $A_{10} < 0$ .

В случае сил отталкивания (рис. 4.1, б) работа  $A_{10} = \int_1^{\infty} \mathbf{F}(r) \cdot d\mathbf{r} > 0$ . Таким образом, потенциальная энергия системы, на точки которой действуют только силы притяжения, является величиной отрицательной. В случае же сил отталкивания энергия будет положительной. Рассмотрим несколько примеров по расчету потенциальной энергии.

**Пример 4.1.** Найдем выражение для потенциальной энергии точки в гравитационном поле Земли.

**Решение.** Потенциальная энергия тела в гравитационном поле Земли на высоте  $h$  от ее поверхности (рис. 4.2) по определению (4.2) равна работе сил притяжения по перемещению точки массой  $m$  с вы-

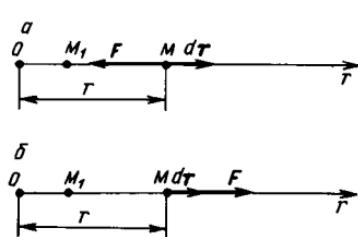


Рис. 4.1.

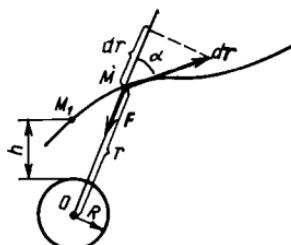


Рис. 4.2

соты  $h$  над поверхностью Земли в бесконечность ( $\Pi(\infty) = 0$ ). Поскольку элементарная работа

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -F(r)|dr| \cos \alpha = -F(r)dr,$$

то интегрирование вдоль произвольной траектории от  $M_1$  до бесконечно удаленной точки (нулевой уровень) означает интегрирование по модулю  $r$  от  $r_1 = R + h$  до  $r_2 = \infty$ . Тогда получим

$$\Pi = \int_1^{\infty} dA = - \int_{R+h}^{\infty} \gamma \frac{Mm}{r^2} dr = -\gamma \frac{Mm}{R+h}. \quad (4.3)$$

Здесь мы явно убеждаемся в том, что работа гравитационных сил не зависит от вида траектории. Из формулы (4.3) следует, что потенциальная энергия точечного тела у поверхности Земли ( $h = 0$ )

$$\Pi(h=0) = -\gamma \frac{Mm}{R}. \quad (4.4)$$

Найдем разность потенциальных энергий тела на высоте  $h$  и у поверхности Земли:

$$\Delta\Pi = \Pi(h) - \Pi(0) = -\gamma \frac{Mm}{R+h} + \gamma \frac{Mm}{R} = \frac{\gamma Mmh}{R^2 + hR}. \quad (4.5)$$

В случае, если  $h$  много меньше  $R$ , то  $hR$  пренебрежимо мало по сравнению с  $R^2$  и вторым слагаемым в знаменателе (4.5) можно пренебречь. Учитывая, что  $\gamma M/R^2 = g$  (сила тяжести (3.18) при  $r=R$  равна силе тяжести  $mg$ ), получаем приближенное выражение ( $h \ll R$ )

$$\Delta\Pi \approx \frac{\gamma Mmh}{R^2} = mgh,$$

которое определяет потенциальную энергию сил тяжести (нулевой уровень при  $h = 0$ ).

Полученные зависимости для потенциальных энергий

$$\Pi^{\text{тяж}} = mgh, \quad \Pi^{\text{тв}} = -\gamma \frac{Mm}{r} \quad (4.6)$$

представлены на рис. 4.3. Следует отметить, что выражение (3.18) определяет силы тяготения при взаимодействии материальных точек, т. е. при  $r \gg R$ . Однако выражение (3.18), а значит, и выра-

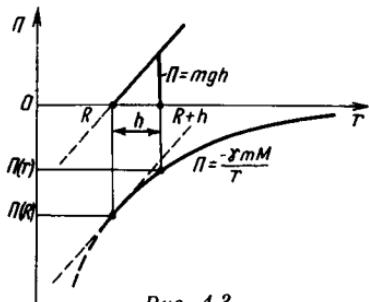


Рис. 4.3

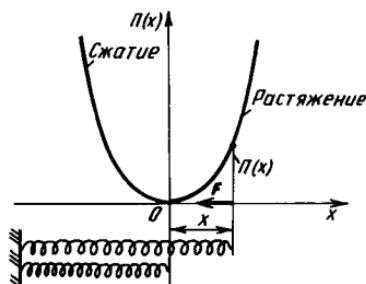


Рис. 4.4

жение (4.6) для  $P_{\text{тв}}$  оказывается справедливым и для взаимодействия точки с телом сферической формы (пример 4.7). Поэтому сплошная линия при  $r > R$  на рис. 4.3 переходит в пунктирную линию при  $r < R$ . Законы взаимодействия при  $r < R$ , когда точка  $m$  находится в глубокой шахте, нужно еще установить (задание 4.2).

**Пример 4.2.** Рассчитать энергию упругой деформации.

**Решение.** Потенциальной энергией может обладать не только система взаимодействующих тел, но и отдельно взятое упругое деформированное тело. В этом случае потенциальная энергия определяется взаимным расположением атомов в кристаллической решетке. Если в качестве условия нормировки принять, что потенциальная энергия недеформированного тела равна нулю (рис. 4.4), то потенциальная энергия упругой деформации при удлинении или сжатии пружины или стержня определяется соотношением (4.2):

$$\Pi = A_{10} = \int_0^x F_x dx = - \int_0^x k x dx = k \frac{x^2}{2},$$

где  $k$  — коэффициент жесткости пружины. На рис. 4.4 изображен график потенциальной энергии деформации при растяжении или сжатии тела (пружина, стержень), который представляет собой параболическую зависимость:

$$\Pi^{\text{упр}} = kx^2/2 — \text{энергия упругих сил.} \quad (4.7)$$

## 4.2. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В МЕХАНИКЕ

**Механическая энергия.** Закон сохранения энергии в механике, который впервые был установлен немецким ученым Г. Лейбницем (1646—1716), гласит: энергия замкнутой механической системы, в которой действуют только консервативные силы, всегда остается постоянной. Проиллюстрируем справедливость этого утверждения на примере замкнутой консервативной системы, состоящей из  $N$  частиц. В этом случае изменение кинетической энергии системы при переходе из состояния 1 в состояние 2 (рис. 4.5) определяется работой консер-

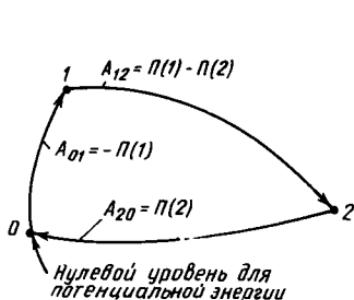


Рис. 4.5

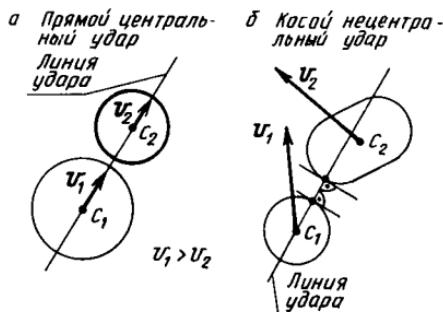


Рис. 4.6

вативных сил, которая равна убыли  $\Pi(1) - \Pi(2)$  потенциальной энергии системы (см. (2.50) и (4.1)):

$$K_2 - K_1 = \Pi_1 - \Pi_2. \quad (4.8)$$

Поскольку состояния 1 и 2 системы произвольны, то

$$K_1 + \Pi_1 = K_2 + \Pi_2 = \text{const}. \quad (4.9)$$

Таким образом, суммарная механическая энергия системы

$$E = K + \Pi \quad (4.10)$$

сохраняется, если на материальные точки этой системы действуют только консервативные силы:

$$E = \sum_{k=1}^N m_k v_k^2 / 2 + \Pi(r_1, r_2, \dots, r_N) = \text{const} \quad (4.11)$$

закон сохранения полной механической энергии системы.

В заключение вычислим работу консервативных сил по замкнутой траектории (см. рис. 4.5) при перемещении системы из состояния 1 в состояние 2, а затем через точку 0 (нулевой уровень) в исходное положение 1:

$$A_{1201} = A_{12} + A_{20} + A_{01} = (\Pi_1 - \Pi_2) + \Pi_2 + (-\Pi_1) = 0.$$

Полученный результат, с учетом определения (2.18) для работы силы как криволинейного интеграла, можно записать в следующем виде:

$$A = \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \text{ — циркуляция консервативной силы по замкнутому контуру } L. \quad (4.12)$$

**Пример 4.3. Применение законов сохранения к явлению удара твердых тел.** По заданным начальным (до удара) скоростям и массам соударяющихся тел определим скорости после удара, а также потерю кинетической энергии при ударе.

*Ударом* называется явление, при котором за весьма малый промежуток времени скорости сталкивающихся твердых тел изменяются на конечную величину. *Прямыми ударом* называется удар, при котором скорости тел до удара направлены параллельно общей нормали к поверхности соударяющихся тел в точке их соприкосновения (рис. 4.6, а), в противном случае удар называется *косым* (рис. 4.6, б). Общая нормаль называется *линией удара*. Если линия удара проходит через центры масс тел, то удар называется *центральным*. Процесс соударения состоит из двух фаз. В течение первой фазы тела деформируются до

тех пор, пока проекции их скоростей на линию удара не станут одинаковыми. При этом часть кинетической энергии тел переходит в потенциальную энергию упругих сил деформированных тел, а частично идет на нагревание тел. Во второй фазе удара тела частично восстанавливают форму. Из-за остаточных деформаций и нагревания тел их кинетическая энергия восстанавливается не полностью. Поэтому тела расходятся после удара с относительной скоростью  $u_{\text{отн}} = u_1 - u_2$ , модуль проекции которой на линию удара меньше, чем до удара. В связи с этим вводится коэффициент восстановления скорости  $k_b$  при ударе:

$$k_b = \frac{|u_{1n} - u_{2n}|}{|v_{1n} - v_{2n}|}. \quad (4.13)$$

Здесь индекс  $n$  означает проекцию скорости на нормаль, т. е. на линию удара.

Значения коэффициента  $k_b$  лежат в пределах от 0 до 1 и определяются на опыте. Например, коэффициент восстановления для стекла равен  $15/16$ , для слоновой кости —  $8/9$ , для стали —  $5/9$ , для дерева 0,6. В двух предельных идеализированных случаях удар называется *абсолютно неупругим* ( $k_b = 0$ ) и *абсолютно упругим* ( $k_b = 1$ ).

Решение. В процессе удара возникают ударные (мгновенные) силы, значения которых весьма значительны, поскольку время удара очень мало. Для системы соударяющихся тел ударные силы являются внутренними. Они во много раз превышают внешние силы, которые обычно имеют место при соударении тел. Поэтому действием внешних сил за время удара можно пренебречь и считать, что система соударяющихся тел является замкнутой. Это означает, что всегда при ударе можно применить закон сохранения импульса.

Абсолютно упругий центральный удар. В этом случае (рис. 4.7) выполняются законы сохранения импульса и энергии ( $k_b = 1$ , нет остаточных деформаций — силы упругости являются консервативными):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \quad (4.14)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (4.15)$$

Учитывая, что для любых векторов  $a$  и  $b$  справедливо тождество

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

преобразуем уравнение (4.15) к следующему виду ( $v^2 \equiv v^2$ ,  $u^2 \equiv u^2$ ):

$$m_1(v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = m_2(u_2 - v_2)(v_2 + u_2). \quad (4.16)$$

Перепишем уравнение (4.14)

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2) \quad (4.17)$$

и учтем его в уравнении (4.16). Получим

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2. \quad (4.18)$$

Система уравнений (4.17) и (4.18) легко решается. Векторы скоростей шаров после удара определяются следующими выражениями:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (4.19)$$

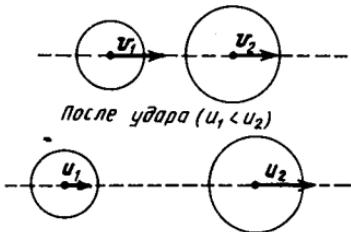
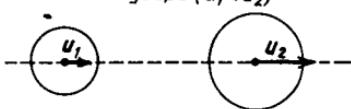
До удара ( $v_1 > v_2$ )После удара ( $u_1 < u_2$ )

Рис. 4.7

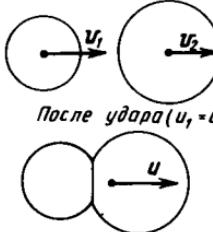
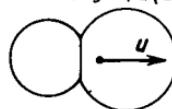
До удара ( $v_1 > v_2$ )После удара ( $u_1 = u_2 = u$ )

Рис. 4.8

При ударе возможны ситуации, когда скорости  $v_1$  и  $v_2$  параллельны (один шар догоняет второй) и антипараллельны (шары до удара движутся навстречу друг другу). Поэтому при численных расчетах нужно проецировать соотношения (4.19) на линию удара.

Рассмотрим далее удар по неподвижному шару ( $v_2 = 0$ ). Если  $m_1 = m_2$ , то скорость  $u_1 = 0$ , а  $u_2 = v_1$ . В этом случае имеет место обмен энергией между налетающим шаром и неподвижной до удара мишенью (второй шар). В случае, если  $m_2 \gg m_1$ , то  $u_1 \approx -v_1$ , а  $u_2 \approx \sqrt{2m_1 v_1^2 / m_2} \ll v_1$ . Происходит полное отражение (с той же скоростью) налетающей легкой частицы от массивной мишени. Такая ситуация реализуется, например, при упругом столкновении электрона с атомом мишени (если не изменяется внутреннее состояние этих атомов).

Абсолютно неупругий центральный удар. Поскольку  $k_b = 0$  (рис. 4.8), то энергия системы двух шаров не сохраняется и, следовательно, выполняется только закон сохранения импульса (причем при  $k_b = 0$  получим, что  $u_1 = u_2 = u$ ):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u. \quad (4.20)$$

Кинетическая энергия системы уменьшается на

$$\Delta K = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}. \quad (4.21)$$

Подставляя в (4.21) выражение для  $u$  из (4.20), получаем

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{2} m_1 (v_1 - u)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - u)^2 = \\ &= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 — \text{теорема Карно для} \\ &\quad \text{потерянной при ударе энергии.} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Согласно (4.22), при ударе теряется (переходит во внутреннюю энергию) та часть кинетической энергии, которая представляет собой энергию относительного движения соударяющихся тел. В самом деле, кинетическая энергия до удара может быть представлена в следующем виде (проверьте справедливость этого соотношения):

$$K = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} m_1 (v_1^{\text{отн}})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2^{\text{отн}})^2 = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \mu (v_1 - v_2)^2, \quad (4.23)$$

где  $M = m_1 + m_2$ ,  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  — приведенная масса,  $v_k^{\text{отн}} = v_k - v_c$  — скорость относительного движения точки  $m_k$  ( $k = 1, 2$ ) по отношению к центру масс.

Скорость движения центра масс для замкнутой системы не изменяется, поэтому значение первого слагаемого в (4.23) сохраняется при ударе. Оно учитывает ту неизменную часть кинетической энергии соударящихся тел, которая определяется поступательным движением шаров со скоростью, равной скорости центра масс. Второе слагаемое, учитывающее кинетическую энергию относительного движения сближающихся шаров, в точности совпадает с потерянной при абсолютно неупругом ударе кинетической энергией (4.22).

Рассчитаем далее долю потерянной энергии при абсолютно неупругом ударе двух одинаковых автомобилей в двух ситуациях: 1) удар по неподвижному автомобилю ( $v_1 \neq 0, v_2 = 0$ ); 2) удар автомобилей, движущихся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями,— лобовой удар.

В первом случае начальная кинетическая энергия равна  $mv^2/2$ . Потерянная энергия, согласно (4.22), составляет  $\Delta K = mv^2/4$ . Это означает, что потеряная энергия равна половине (50 %) начальной энергии автомобиля. Во втором случае начальная энергия равна  $mv^2$ . Потерянная энергия  $\Delta K$  также равна  $mv^2$ . Следовательно, вся энергия (100 %) соударящихся тел переходит во внутреннюю энергию, что делает такие столкновения особенно опасными. Этот эффект реализуется в ускорителях на встречных пучках электронов, что позволяет использовать большую долю энергии таких пучков.

**Задание 4.1.** Определите и изобразите на рисунке, какие и сколько частных ситуаций для центральных ударов (абсолютно упругих и неупругих) можно реализовать в зависимости от соотношения масс шаров и их начальных скоростей  $v_1$  и  $v_2$ .

#### 4.3. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ И ЕЕ СВЯЗЬ С СИЛОЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

**Сила — градиент потенциальной энергии.** Взаимодействие в консервативной системе может быть описано либо с помощью потенциальной энергии как функции координат взаимодействующих точек, либо с помощью сил. Поэтому между потенциальной энергией и силой, действующей на материальную точку, должна существовать определенная связь.

Потенциальная энергия системы  $N$  точек является функцией их координат:

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_N, y_N, z_N). \quad (4.24)$$

Пусть частица с номером  $i$  получила перемещение  $dr_i$ . Силы, действующие на эту материальную частицу, выполняют элементарную работу

$$dA_i = F_{ix}dx + F_{iy}dy + F_{iz}dz. \quad (4.25)$$

С другой стороны, эта работа равна убыли потенциальной энергии системы, которая обязана изменению коор-

динат  $x_i, y_i, z_i$  (остальные координаты фиксированы и их символы ниже опускаем):

$$dA_i = -d\Pi(x_i, y_i, z_i). \quad (4.26)$$

Тогда изменение потенциальной энергии как функции трех переменных  $x_i, y_i, z_i$  определяется ее полным дифференциалом

$$d\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial\Pi}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial\Pi}{\partial z_i} dz_i, \quad (4.27)$$

где  $\partial\Pi/\partial x, \partial\Pi/\partial y$  и  $\partial\Pi/\partial z$  называются *частными производными* от  $\Pi$  соответственно по  $x, y$  и  $z$ .

При вычислении частной производной от функции многих переменных — потенциальной энергии  $\Pi(x_i, y_i, z_i)$  — нужно выполнить дифференцирование по одной переменной в предположении, что остальные переменные являются постоянными. Для явного отражения этого условия частные производные обозначают символами  $\partial/\partial x, \partial/\partial y$  и  $\partial/\partial z$ , которые определяют производные, вычисленные при отмеченном выше ограничении на остальные переменные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Pi}{\partial x} &= \left. \frac{d\Pi}{dx} \right|_{y, z = \text{const}}, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial y} = \left. \frac{d\Pi}{dy} \right|_{x, z = \text{const}}, \\ \frac{\partial\Pi}{\partial z} &= \left. \frac{d\Pi}{dz} \right|_{x, y = \text{const}}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Из сопоставления (4.25) и (4.27) с учетом (4.26) следуют выражения для проекций силы, действующей на данную материальную точку консервативной системы:

$$F_{ix} = -\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial\Pi}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial\Pi}{\partial z_i}. \quad (4.29)$$

Для вектора силы  $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$  получим выражение

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\Pi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\Pi}{\partial z} \mathbf{k}\right) \equiv -\text{grad } \Pi,$$

$\text{grad } \Pi$  — градиент потенциальной энергии,

(4.30)

которое устанавливает дифференциальную связь между силой, действующей на точку, и потенциальной энергией системы.

**Пример 4.4.** Пользуясь определением силы в виде градиента от потенциальной энергии (4.30), получим выражение для силы всемир-

ного тяготения и установим направление этой силы по отношению к эквипотенциальной поверхности, т. е. поверхности, все точки которой имеют одинаковое значение потенциальной энергии.

**Решение.** Согласно (4.6), потенциальная энергия сил тяготения определяется выражением

$$\Pi = -\gamma \frac{Mm}{r} = -\gamma \frac{Mm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (4.31)$$

Следовательно, эквипотенциальная поверхность представляет собой сферу радиуса  $r$  (рис. 4.9). Вычислим частные производные от (4.31) по  $x$ ,  $y$  и  $z$ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -\gamma Mm \left( -\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{\gamma Mm}{r^3} x,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = \frac{\gamma Mm}{r^3} y, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{\gamma Mm}{r^3} z. \quad (4.32)$$

Подставим найденные выражения для частных производных в (4.30). Тогда получим ( $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$  — единичный вектор)

$$\mathbf{F} = -\frac{\gamma Mm}{r^3} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (4.33)$$

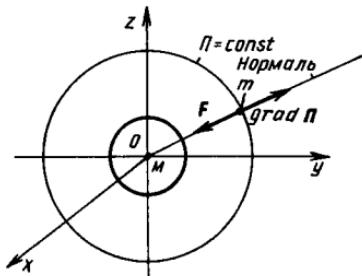


Рис. 4.9

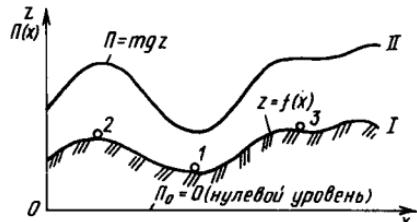


Рис. 4.10

Сила  $\mathbf{F}$ , а значит и  $\text{grad } \Pi$ , направлены по нормали к эквипотенциальной поверхности (см. рис. 4.9), причем вектор  $\text{grad } \Pi$  направлен в каждой точке в сторону возрастания потенциальной энергии (см. рис. 4.3). Это является общим свойством градиента от потенциальных функций многих переменных, которое используется, в частности, при численном способе отыскания минимума или максимума таких функций (метод «наибыстрейшего спуска», или градиентный метод).

**Пример 4.5.** Установим связь условий равновесия точек механической системы с ее потенциальной энергией.

**Решение.** Для равновесия механической системы необходимо, чтобы результирующая сила, действующая на каждую материальную точку системы, была равна нулю. Это означает, что в положениях равновесия должны обращаться в нуль первые производные от потенциальной энергии:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.34)$$

Соотношения (4.34) являются необходимым условием экстремума потенциальной энергии как функции многих переменных. При выполнении (4.34) потенциальная энергия имеет минимум, максимум либо остается постоянной величиной. На рис. 4.10 изображен рельеф поверхности Земли (кривая I) и соответствующая ему зависимость потенциальной энергии сил тяжести (кривая II). Очевидно, что в положении 1 шарик находится в устойчивом равновесии (энергия минимальна), положение 2 соответствует неустойчивому равновесию (энергия максимальна), а положение 3 характеризуется безразличным равновесием (энергия постоянна). Таким образом, для равновесия точки необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$\text{grad } \Pi = 0, d\Pi/dx = 0$	— необходимое условие равновесия,
$d^2\Pi/dx^2 > 0$	— устойчивое равновесие,
$d^2\Pi/dx^2 < 0$	— неустойчивое равновесие,
$\Pi = \text{const} \Rightarrow d^2\Pi/dx^2 = 0$	— безразличное равновесие.

(4.35)

**Понятия потенциальной ямы и потенциального барьера.** Потенциальной ямой называется ограниченная область пространства, в которой потенциальная энергия имеет минимум или характеризуется наличием минимального значения. Термин «потенциальная яма» происходит от вида графика (рис. 4.11), изображающего зависимость потенциальной энергии частицы от ее положения в пространстве (в случае одномерного движения от координаты  $x$ ). Такая зависимость ассоциируется с наличием «геометрической ямы» в случае сил тяжести (см. рис. 4.10).

В качестве параметров потенциальной ямы можно рассматривать ее характерную ширину  $d$  и глубину  $\Pi^*$ , равную разности потенциальных энергий на краю ямы и на дне, где потенциальная энергия минимальна. Типич-

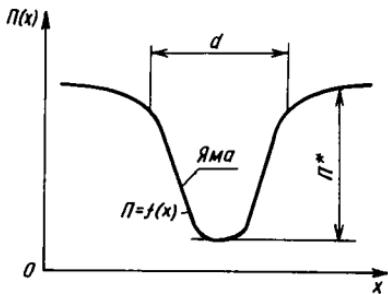


Рис. 4.11

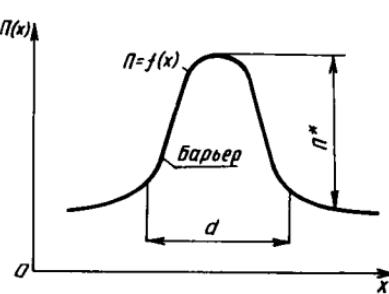


Рис. 4.12

ным примером потенциальной ямы является параболическая зависимость энергии для сил упругости (см. рис. 4.4).

*Потенциальным барьером* называется ограниченная в пространстве область потенциальной энергии частицы, по обе стороны которой потенциальная энергия резко спадает. Потенциальный барьер простой формы для случая одномерного движения частицы изображен на рис. 4.12.

Потенциальный барьер, как и потенциальная яма, характеризуется своей высотой  $\Pi^*$  и шириной  $d$ . В классической механике преодоление (прохождение) частицей потенциального барьера возможно только в том случае, если ее кинетическая энергия  $K$  больше или равна высоте  $\Pi^*$  барьера (см. пример 4.6).

Понятия потенциальной ямы и потенциального барьера широко используют в классической и квантовой механике, физике твердого тела и атомного ядра. На рис. 4.13 изображен график потенциальной энергии взаимодействия атомов в молекуле  $AB$  (или молекул  $A$  и  $B$ ), представляющий собой пример потенциальной кривой, которая на расстояниях, меньших  $a$ , характеризуется наличием потенциального барьера бесконечной высоты, а на расстояниях, больших  $a$ , — потенциальной ямы глубиной  $\Pi^*$ . Поскольку  $F_x = -d\Pi/dx$ , то на расстоянии  $r > r_0$  на атом в положении  $B_1$  действует сила притяжения, а при  $r < r_0$  между атомами  $A$  и  $B$  действуют силы отталкивания (положение  $B_2$ ).

**Пример 4.6.** Изучим движение частицы, полная энергия которой равна  $E_0$ , а зависимость потенциальной энергии от координаты имеет вид, представленный на рис. 4.14 (потенциальная яма и барьер).

**Решение.** Пусть частица находится в точке  $x$  и движется влево. В этом случае ее потенциальная энергия возрастает, а кинетическая в соответствии с законом сохранения убывает. Это означает, что на

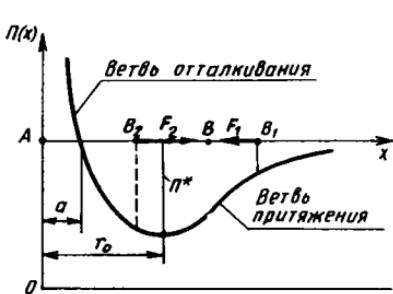


Рис. 4.13

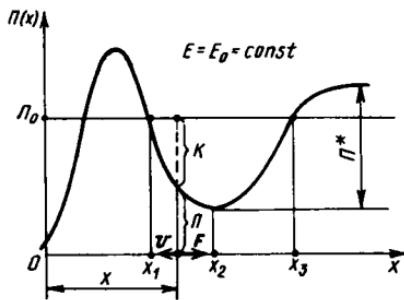


Рис. 4.14

частицу в точке  $x$  действует сила  $\mathbf{F}$ , которая направлена вправо (см. рис. 4.14). Аналогичный вывод следует также из формулы (4.30), выражающей силу через потенциальную энергию  $\Pi = \Pi(x)$ :

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} \Pi(x) = -\frac{d\Pi}{dx} \mathbf{i}.$$

Частица будет двигаться влево до тех пор, пока ее кинетическая энергия не уменьшится до нуля, это произойдет в точке  $x_1$ , в которой  $\Pi = E_0$ . Однако в этой точке частица после остановки не сможет оставаться в покое, поскольку на нее со стороны поля действует сила, направленная вправо. Под действием этой силы частица начнет двигаться вправо, причем ее скорость будет возрастать и достигнет максимального значения в точке  $x_2$ . В этой точке кинетическая энергия частицы станет максимальной, а потенциальная энергия будет минимальной. На отрезке  $x_2x_3$  на частицу будет действовать сила, направленная влево, которая вызовет постепенное уменьшение ее скорости. В точке  $x_3$  скорость станет равной нулю — частица остановится, а затем начнет двигаться влево, и весь цикл повторится. Движение будетносить колебательный характер.

Аналогом рассмотренного движения частицы в потенциальной яме являются механические процессы, происходящие при колебаниях различных видов маятников (см. гл. 7), а также колебания частиц сплошной упругой среды (см. гл. 9).

#### 4.4. ПОЛЕВОЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

**Потенциальное поле.** Физическое поле представляет собой особую форму существования материи, посредством которой осуществляются гравитационное, электромагнитное, ядерное и другие взаимодействия. Понятие поля было введено в физику в 30-х гг. 19 в. английским физиком М. Фарадеем (1791—1867). Согласно представлениям теории поля, частицы, участвующие во взаимодействии, создают в каждой точке пространства такое состояние материи (физическое поле), которое проявляется в силовом воздействии на другие частицы, помещенные в любую точку этого поля. Таким образом, согласно полевой концепции, взаимодействие между материальными частицами передается через посредника, роль которого играет физическое поле.

Концепция передачи взаимодействия посредством поля получила название *близкодействия*\*. Максимально возможная скорость передачи взаимодействия посредством поля равна скорости распространения света в вакууме и составляет  $3 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ .

Описание свойств поля производится с помощью

\* Проблема близко- и дальнодействия будет детально рассмотрена во второй части пособия в разделе «Электричество и магнетизм».

одной или нескольких функций, зависящих от координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  точки пространства, в которой изучается поле, и времени  $t$ . Если поле с течением времени не меняется, то такое поле называется *стационарным* и функции, описывающие это поле, не будут зависеть от времени.

Особый класс физических полей представляют потенциальные, которые определяют, в частности, гравитационное и электростатическое взаимодействия (посредством консервативных сил).

**Характеристики и свойства гравитационного поля.** С позиции полевого подхода силовое взаимодействие двух масс осуществляется посредством гравитационных полей, которые создают эти материальные тела.

На материальную точку массой  $m$ , помещенную в гравитационное поле тела массы  $M$ , действует сила (см. выражение (3.18) для силы всемирного тяготения — гравитации)

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}. \quad (4.36)$$

Эта точка обладает потенциальной энергией, определяемой формулой (4.6),

$$\Pi = -\gamma \frac{Mm}{r}. \quad (4.37)$$

В соответствии с выражениями (4.36) и (4.37) введем *силовую и энергетическую характеристики гравитационного поля*.

**Напряженность поля.** Сила (4.36) пропорциональна массе  $m$  пробной материальной точки, помещенной в гравитационное поле массы  $M$ . Очевидно, что для описания этого поля в точке  $\mathbf{r}$  можно ввести силовую характеристику — *вектор напряженности поля  $\mathbf{G}$* , который зависит только от массы  $M$ , создающей поле, и радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ . Для этого, очевидно, необходимо силу  $\mathbf{F}$  разделить на массу  $m$  пробной частицы:

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}/m — \text{напряженность гравитационного поля.} \quad (4.38)$$

Например, в случае поля точечной массы  $M$  вектор напряженности поля:

$$\mathbf{G} = -\gamma \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r — \text{напряженность поля точечной массы.} \quad (4.39)$$

Если точка  $m$  движется только под действием сил поля тяготения, то с учетом эквивалентности инертной и гравитационной масс ( $m_{\text{ин}} = m_{\text{гр}} = m$ , см. § 2.1) по второму закону Ньютона запишем

$$ma = m\mathbf{G}. \quad (4.40)$$

Это означает, что вектор напряженности поля  $\mathbf{G}$  совпадает с ускорением  $a$  точки  $m$  в этом поле. Гравитационное поле точечной массы является центральным, и вектора напряженности  $\mathbf{G}$  в разных точках направлены вдоль прямых, которые пересекаются в силовом центре (рис. 4.15).

Для графического изображения силовых полей используется понятие силовых линий (линий напряженности). Силовые линии определяются как линии, касательные к которым в каждой точке поля совпадают с вектором напряженности (рис. 4.16, *a*).

На рис. 4.16, *b* изображены силовые линии центрального гравитационного поля точечной массы, а на рис. 4.16, *c* — силовые линии однородного поля, в каждой точке которого напряженность одинакова ( $\mathbf{G} = \text{const}$ ).

**Принцип суперпозиции полей.** Если поле создается несколькими материальными точками или телами, то результирующая сила, действующая на помещенную в это поле массу  $m$ , равна векторной сумме всех сил:  $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$ .

Поскольку  $\mathbf{F} = m\mathbf{G}$ , а  $\mathbf{F}_i = m\mathbf{G}_i$ , то после их подстановки в последнее выражение и сокращения на  $m$  получим

$$\mathbf{G} = \sum_{k=1}^N \mathbf{G}_k \quad \text{— принцип суперпозиции для напряженности гравитационных полей нескольких тел.}$$

(4.41)

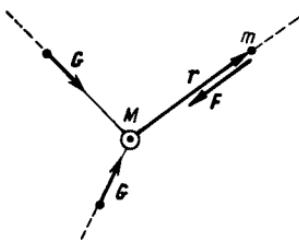


Рис. 4.15

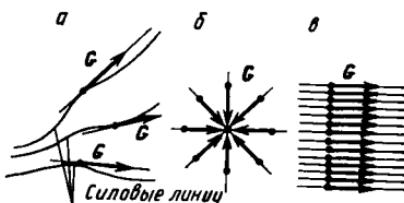


Рис. 4.16

**Потенциал поля.** Выражение (4.37) для потенциальной энергии точки в поле сил тяготения позволяет ввести энергетическую характеристику гравитационного поля. Потенциальная энергия сил тяготения, отнесенная к массе пробной частицы  $m$ , помещенной в данную точку поля, называется *потенциалом гравитационного поля*:

$$\varphi = \Pi/m — \text{потенциал гравитационного поля.} \quad (4.42)$$

Для точечной массы  $M$  с помощью (4.42) и (4.37) получим

$$\varphi = -\gamma M/r — \text{потенциал точечной массы.} \quad (4.43)$$

В соответствии с принципом суперпозиции полей потенциальная энергия результирующего поля  $\Pi = \sum_{i=1}^N \Pi_i$ .

Тогда для потенциала  $\varphi = \Pi/m$  запишем

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i — \text{принцип суперпозиции для потенциала.} \quad (4.44)$$

**Связь между напряженностью и потенциалом поля.** Согласно определению (4.30), запишем

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} \Pi. \quad (4.45)$$

Разделив равенство (4.45) на массу  $m$  пробной частицы, будем иметь

$$\mathbf{G} = -\operatorname{grad} \varphi — \text{уравнение связи между } \mathbf{G} \text{ и } \varphi. \quad (4.46)$$

Поскольку вектор  $\operatorname{grad} \varphi$  направлен в сторону наиболее быстрого возрастания потенциала  $\varphi$  поля, то вектор напряженности  $\mathbf{G}$  направлен в сторону наиболее быстрого убывания потенциала  $\varphi$  (рис. 4.17).

В заключение отметим, что, согласно выражению (4.12) для циркуляции консервативной силы и определению напряженности  $\mathbf{G}$  гравитационного поля, можно записать, что

$$\oint_L \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = 0 — \text{циркуляция вектора напряженности по замкнутому контуру } L. \quad (4.47)$$

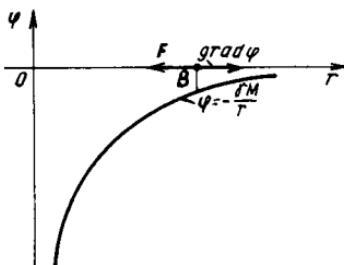


Рис. 4.17

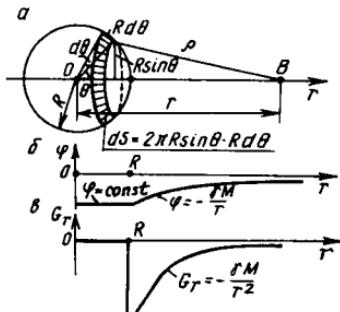


Рис. 4.18

**Пример 4.7.** Найти зависимость потенциала  $\phi$  и напряженности  $G$  гравитационного поля однородного сферического слоя (полой сферы) массы  $M$  и радиуса  $R$  от расстояния  $r$  до его центра  $O$ , т. е. в точке  $B$  на рис. 4.18.

**Решение.** Выделим на поверхности сферы  $S = 4\pi R^2$  элементарное кольцо площадью  $dS = 2\pi R \cdot R \sin \theta d\theta$ , которое заключено между радиусами  $R$  в положении  $\theta$  и  $\theta + d\theta$  (рис. 4.18, а). Применим принцип суперпозиции для потенциала  $\phi$  (см. (4.44)) и перейдем от суммирования по вкладам от отдельных колец к интегрированию по поверхности  $S$  сферического слоя:

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^N \Delta \varphi_k = \int_S d\varphi. \quad (4.48)$$

Все точки заштрихованного кольца находятся на одинаковом расстоянии  $\rho$  от точки  $B$ , в которой определяется потенциал поля. Поэтому потенциал массы  $dM$  этого кольца будет определяться формулой (4.43) для точечной массы:

$$d\varphi = -\gamma \frac{dM}{\rho} = -\gamma \frac{\frac{M}{4\pi R^2} dS}{\rho} = -\gamma \frac{M \cdot 2\pi R^2 \sin \theta d\theta}{4\pi R^2 \rho} = -\gamma \frac{M \sin \theta d\theta}{2\rho}, \quad (4.49)$$

где  $M/(4\pi R^2)$  — масса единичной поверхности сферического слоя. Переменные  $\rho$  и  $\theta$  связаны с помощью теоремы косинусов:

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta. \quad (4.50)$$

Поскольку  $R$  и  $r$  при интегрировании по  $S$  в (4.48) не изменяются, то дифференцирование (4.50) по  $\theta$  дает следующее соотношение:

$$2\rho \frac{d\rho}{d\theta} = -2Rr \sin \theta \Rightarrow \frac{\sin \theta d\theta}{\rho} = \frac{d\rho}{Rr}. \quad (4.51)$$

Подставим (4.49) с учетом (4.51) в выражение (4.48) для потенциала  $\varphi$

$$\varphi(r) = -\frac{\gamma M}{2Rr} \int_S d\rho = -\frac{\gamma M}{2Rr} \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho. \quad (4.52)$$

Здесь учтено, что при интегрировании по поверхности  $S$  сферы угол  $\theta$  изменяется от нуля до  $180^\circ$ , а величина  $\rho$ , согласно (4.50), принимает все значения от  $\rho_1 = r - R$  до  $\rho_2 = r + R$ . Выполнив интегрирование в (4.52) и подставив пределы, получим

$$\boxed{\varphi = -\gamma M/r \text{ — потенциал вне сферической оболочки} \quad (r > R).} \quad (4.53)$$

Если точка  $B$  окажется внутри сферического слоя, то  $\rho$  будет изменяться от  $\rho_1 = R - r$  до  $\rho_2 = R + r$ . Тогда

$$\boxed{\varphi = -\gamma M/R = \text{const} \text{ — потенциал внутри сферической оболочки} \quad (r < R).} \quad (4.54)$$

Полученная зависимость для потенциала  $\varphi$  от  $r$  изображена на рис. 4.18, б, а соответствующая зависимость для напряженности поля  $G$ , определяемая соотношением (4.46), представлена на рис. 4.18, в (см. пример 4.4):

$$\boxed{\begin{aligned} G_r &= -\gamma M/r^2 \text{ — проекция напряженности вне слоя} \\ &\quad (\text{при } r > R), \\ G_r &= 0 \text{ — проекция напряженности внутри слоя} \quad (\text{при } r < R). \end{aligned}} \quad (4.55)$$

**Задание 4.2.** Определите потенциал  $\varphi$  и напряженность  $G$  поля, создаваемого однородным шаром радиуса  $R^*$  и массы  $M^*$  (внутри и вне шара). Полученные зависимости изобразите графически.

**Указание.** В соответствии с принципом суперпозиции мысленно разделите шар радиуса  $R^*$  на бесконечно большое число тонких сферических слоев радиуса  $R$  толщиной  $dR$  и массой  $dM$ . Потенциал слоя массой  $dM$  определяется выражениями (4.53) и (4.54). При  $M = dM$  следует  $\varphi$  заменить на  $d\varphi$  и выполнить интегрирование по  $R$  от нуля до  $R^*$ .

**Ответ.**

$$\varphi = -\gamma \frac{M^*}{r}, \quad G_r = -\gamma \frac{M^*}{r^2} \text{ — потенциал и напряженность поля} \\ \text{вне однородного шара} \quad (r > R^*), \quad (4.56)$$

$$\varphi = -\gamma \frac{M^*}{2R^*} \left[ 3 - \left( \frac{r}{R^*} \right)^2 \right], \quad G_r = -\frac{\gamma M^*}{R^{*3}} r \text{ — потенциал и напряженность поля внутри} \\ \text{однородного шара} \quad (r < R^*). \quad (4.57)$$

**Задание 4.3.** Докажите, что наличие дифференциальной связи  $\mathbf{G} = -\operatorname{grad} \varphi$  эквивалентно условию потенциальности поля (независимость работы от формы пути).

**Указание.** В выражение для работы  $A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  подставьте  $\mathbf{F} = m\mathbf{G} = -m(\partial\varphi/\partial x\mathbf{i} + \partial\varphi/\partial y\mathbf{j} + \partial\varphi/\partial z\mathbf{k})$  и  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ . Выполнив все вычисления для скалярных произведений единичных векторов  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , получим

$$A_{12} = -m \int_1^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = -m \int_1^2 d\varphi.$$

**Ответ.** Если  $\mathbf{G} = -\operatorname{grad} \varphi$ , то работа  $A_{12} = -m(\varphi_2 - \varphi_1)$ . Это означает, что работа  $A_{12}$  не зависит от формы траектории точки и, следовательно, поле является потенциальным.

**Задание 4.4.** Определите поток вектора напряженности  $\mathbf{G}$  для поля точечной массы  $m$  через сферическую поверхность  $S$ . Рассмотрите случай, когда материальная точка  $m$  находится в центре этой сферы (рис. 4.19).

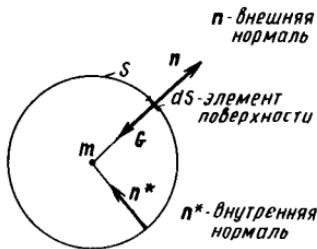


Рис. 4.19

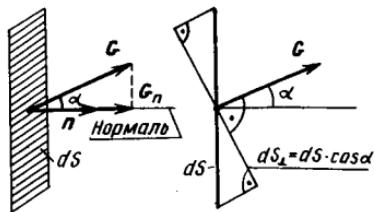


Рис. 4.20

**Указание.** Поток  $d\Phi_G$  вектора  $\mathbf{G}$  через участок поверхности  $dS$  численно равен нормальной составляющей  $G_n$  к площадке  $dS$ , умноженной на площадь этого участка (рис. 4.20):

$$d\Phi_G = G_n dS = G \cos \alpha dS = G dS_{\perp}. \quad (4.58)$$

Физический смысл понятия потока хорошо интерпретируется на примере потока вектора скорости  $v$  несжимаемой жидкости, движущейся по трубе с площадью поперечного сечения  $S_{\perp}$ . В этом случае поток  $\Phi_v = v \cdot S_{\perp}$  определяет объем жидкости, протекающей по трубе за единицу времени, т. е. *объемный расход жидкости*.

**Ответ.** Поток вектора  $\mathbf{G}$  через замкнутую сферическую поверхность  $S$  определяется по формуле

$$\Phi_G = \oint_S d\Phi_G = -4\pi \gamma m. \quad (4.59)$$

...Было, однако, в этом маятнике нечто, заставившее меня всмотреться в него повнимательнее.

Эдгар По. Колодец и маятник

## 5. ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

**Проблема описания движения в неинерциальной системе.** Рассмотренные выше законы механического движения и следствия из них описывают особенности движения материальных объектов в инерциальных системах отсчета. Естественно возникает вопрос о том, как быть в тех случаях, когда приходится использовать заведомо неинерциальные системы. Например, можно поставить задачу об оценке влияния движения Земли на динамическое поведение материальной точки (а затем и систем точек) в геоцентрической системе отсчета. Такое влияние обнаруживается на опыте и сказывается на работе технических приспособлений. Наиболее известный опыт — маятник Фуко (впервые опыт с таким маятником был проведен Ж. Фуко (1819—1868) в Парижской обсерватории в 1850 г. и повторен в 1851 г. в Пантеоне\*).

Для решения поставленной проблемы следует, опираясь на формулировку второго закона Ньютона (в инерциальной системе)

$$ma = F, \quad (5.1)$$

осуществить преобразование выражений для сил и ускорений при переходе от инерциальной к неинерциальной системе отсчета.

### 5.1. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

**Преобразование ускорения.** Особенности кинематического поведения материальной точки в произвольной подвижной системе отсчета рассмотрены в § 1.5, который посвящен кинематике сложного движения, состоящего из переносного и относительного. С помощью полученной там теоремы сложения ускорений можно решить вопрос преобразования ускорения в поставленной выше задаче. Для этого нужно движение в неинерциальной системе

\* Пантеон (лат. Pantheon, от гр. Pantheion — место, посвященное всем богам) — усыпальница выдающихся людей — имеется в Риме, Париже и Лондоне.

отсчета  $x_1y_1z_1$  считать относительным (рис. 5.1), а в инерциальной системе  $x_1y_1z_1$  рассматривать как абсолютное. Тогда для абсолютного ускорения (1.43), которое фигу-

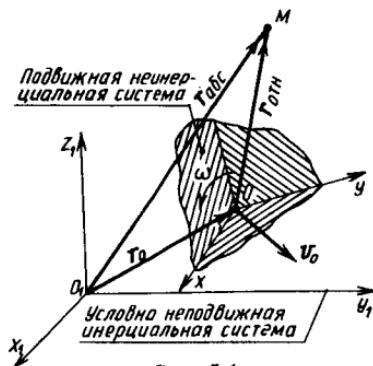


Рис. 5.1

рирует во втором законе Ньютона, можно записать следующее соотношение:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{отн}} + \mathbf{a}_{\text{пер}} + \mathbf{a}_{\text{кор}}. \quad (5.2)$$

Здесь  $\mathbf{a}_{\text{отн}}$  — ускорение в неинерциальной системе  $x_1y_1z_1$ ,  $\mathbf{a}_{\text{пер}}$  — ускорение в переносном движении (подвижной системы  $x_1y_1z_1$  относительно системы  $x_1y_1z_1$ ),  $\mathbf{a}_{\text{кор}}$  — ускорение Кориолиса, которое отражает эффект взаимного кинематического влияния относительного и переносного движений друг на друга. Согласно формуле (1.44),

$$\mathbf{a}_{\text{кор}} = 2\vec{\omega}_{\text{пер}} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}. \quad (5.3)$$

**Преобразование сил.** Переходя к преобразованию силы  $\mathbf{F}$  из уравнения (5.1), заметим, что все потенциальные силы взаимодействия материальных точек зависят от их взаимных расстояний  $r_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$  в инерциальной системе  $x_1y_1z_1$ . Таким образом, отметим, что

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(r_{ij}). \quad (5.4)$$

Согласно (1.42),

$$\mathbf{r}_{\text{абс}} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_{\text{отн}}. \quad (5.5)$$

Следовательно, вектор  $r_{ij}$  не изменяется при переходе от системы к системе. Это является прямым следствием того, что в классической механике Ньютона понятия пространства и времени являются абсолютными (см. § 2.3). Поэтому выражения (5.4) для сил взаимодействия в классической механике не изменяются при пере-

ходе от инерциальной к неинерциальной системе (сила — инвариант). В результате имеется возможность переписать второй закон Ньютона в следующем виде:

$$ma_{\text{отн}} + ma_{\text{пер}} + ma_{\text{кор}} = F. \quad (5.6)$$

**Силы инерции. Второй закон Ньютона в неинерциальной системе.** Для того чтобы сохранить общую структуру основного уравнения динамики (5.1) и в неинерциальной системе, перенесем в правую часть (5.6) слагаемые, содержащие  $a_{\text{пер}}$  и  $a_{\text{кор}}$ . Далее введем так называемые **силы инерции**:

$$F_{\text{пер}} = -ma_{\text{пер}} \text{ — переносная сила инерции,} \quad (5.7)$$

$$F_{\text{кор}} = -ma_{\text{кор}} \text{ — кориолисова сила инерции.} \quad (5.8)$$

Формальным основанием для этого названия является тот факт, что они имеют размерность силы и позволяют сохранить вид второго закона Ньютона (с учетом сил инерции):

$$ma_{\text{отн}} = F + F_{\text{пер}} + F_{\text{кор}} \text{ — уравнение динамики в неинерциальной системе.} \quad (5.9)$$

В отличие от реальных физических сил, описывающих взаимодействие тел (см. гл. 3), силы инерции (5.7) и (5.8) изменяются при переходе от одной системы к другой и не подчиняются закону равенства действия и противодействия (третий закон Ньютона). Последнее связано с тем обстоятельством, что если к какой-либо материальной точке в неинерциальной системе приложены силы инерции, то не существует противодействующей силы, приложенной к другой материальной точке или телу. Поэтому с позиций классической механики Ньютона силы инерции называются **фиктивными силами**, которые исчезают в инерциальных системах.

Использование термина «сила инерции» оказывается очень удобным при описании движения с позиции наблюдателя в неинерциальной системе отсчета. Он явно «чувствует» действие сил инерции (пассажир ускоряющегося поезда, взлетающего и приземляющегося самолета), которые отклоняют маятник в сторону, противоположную

ускорению движущегося тела (например, вперед — при торможении поезда и назад — при его разгоне). Поля сил инерции широко используются для интенсификации процессов фильтрации и осаждения, а также для создания «искусственной тяжести» в неинерциальных системах.

В заключение отметим, что в литературе имеются и другие точки зрения на силы инерции. Сформулированный в последующем принцип эквивалентности гравитационных сил и сил инерции создал предпосылки для построения *общей теории относительности*, обобщающей классическую теорию гравитации (см. гл. 4) с учетом специальной теории относительности — *релятивистской механики* (см. гл. 11).

**Силы инерции в поступательно движущейся неинерциальной системе.** Пусть для наглядности имеется плоская неинерциальная система отсчета  $xy$ , которая движется поступательно относительно инерциальной системы  $x_1y_1$ . При этом в общем случае точка  $O$  (начало координат) движется по некоторой криволинейной траектории. Ее движение зададим естественным способом (рис. 5.2,  $a$ )

$$s_0 = s_0(t), \quad v_0 = \frac{ds_0}{dt}, \quad a_0 = a_0^t + a_0^n. \quad (5.10)$$

Движение точки  $M$  в системе  $xy$  характеризуется относительной скоростью  $v_{\text{отн}}$  и относительным ускорением  $a_{\text{отн}}$ .

Определяя силы инерции (5.7) и (5.8), необходимо найти кориолисово ускорение и переносное ускорение точки  $M$  (при ее воображаемом движении вместе с подвижной системой  $xy$ ). Поскольку переносное движение системы  $xy$  является поступательным ( $\omega_{\text{пер}} = 0$  — система

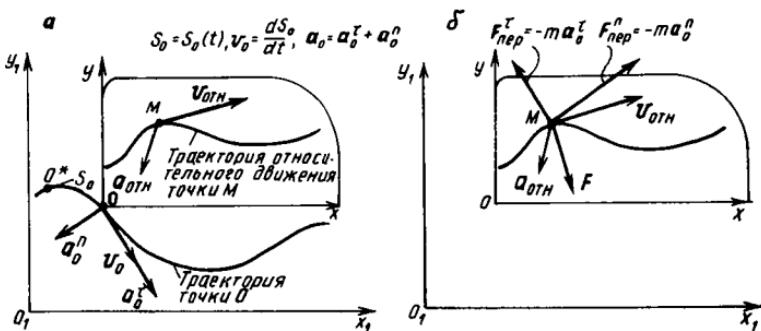


Рис. 5.2

$xy$  не вращается), то ускорение Кориолиса (5.3) равно нулю, а переносное ускорение точки  $M$  равно ускорению точки  $O$  (или любой другой точки системы  $xy$ , см. § 1.4):

$$\mathbf{a}_{\text{пер}} \equiv \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0^t + \mathbf{a}_0^n. \quad (5.11)$$

С учетом (5.10) запишем ( $\rho$  — радиус кривизны траектории точки  $O$ ):

$$a_{\text{пер}}^n \equiv a_0^n = v_{\text{пер}}^2 / \rho = \dot{s}_0^2 / \rho, \quad (5.12)$$

$$a_{\text{пер}}^t \equiv a_0^t = dv_0 / dt = \ddot{s}. \quad (5.13)$$

Следовательно, в случае поступательно движущейся неинерциальной системы отсчета силы инерции образуют поле нормальных (центробежных) и касательных сил инерции (рис. 5.2, б):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{пер}}^n &= -m\mathbf{a}_0^n \text{ — нормальная сила инерции,} \\ \mathbf{F}_{\text{пер}}^t &= -m\mathbf{a}_0^t \text{ — касательная сила инерции,} \\ \mathbf{F}_{\text{кор}} &= -2m(\overset{\rightarrow}{\omega}_{\text{пер}} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}) = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

(так как  $\overset{\rightarrow}{\omega}_{\text{пер}} = 0$ ).

**Пример 5.1.** На горизонтальном участке пути поезд движется с заданным постоянным ускорением  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 = \text{const}$ . Определить угол  $\alpha$  отклонения математического маятника от вертикали и силу натяжения  $T$  нити в состоянии относительного равновесия (рис. 5.3).

**Решение.** В неинерциальной системе  $xy$ , связанной с вагоном поезда, к точке  $M$  приложим переносную силу инерции, направленную противоположно ускорению  $\mathbf{a}_0$  и численно равную  $m\mathbf{a}_0$ . В состоянии относительного равновесия (по отношению к вагону) ускорение  $\mathbf{a}_{\text{отн}} = 0$ . Тогда динамическое уравнение (5.9) превратится в уравнение равновесия в неинерциальной системе

$$\mathbf{0} = mg + \mathbf{T} + \mathbf{F}_{\text{пер}}. \quad (5.15)$$

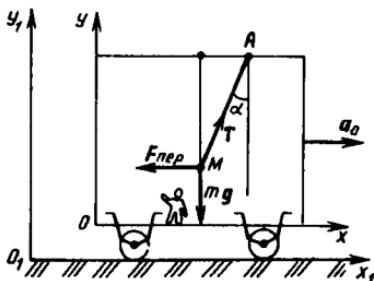


Рис. 5.3

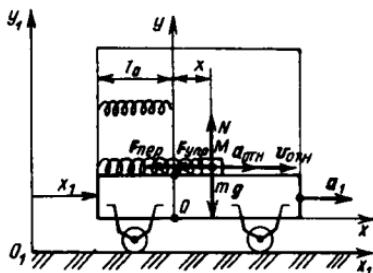


Рис. 5.4

В проекциях на оси  $x$  и  $y$  имеем:

$$\begin{aligned} T \sin \alpha - ma_0 &= 0, \\ T \cos \alpha - mg &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, определяем натяжение  $T$  и угол  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = a_0/g, \quad T = \frac{ma_0}{\sin \alpha} \text{ или } T = m\sqrt{a_0^2 + g^2}. \quad (5.16)$$

Из выражения (5.16) следует, что при увеличении значения  $a_0$  угол отклонения и сила натяжения увеличиваются (в математическом пределе  $a_0 \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \rightarrow \pi/2$ , а  $T \rightarrow \infty$ ).

Очевидно, что если вагон начнет двигаться с переменным ускорением, то точка  $M$  будет испытывать соответствующее переменное возмущающее «действие» силы инерции и математический маятник придет в движение (по отношению к вагону поезда). Эту ситуацию для разнообразия рассмотрим на примере пружинного маятника, установленного на движущейся тележке.

**Пример 5.2.** На поступательно перемещающейся тележке установлен пружинный маятник. Составить дифференциальное уравнение движения маятника внутри тележки (рис. 5.4), которая совершает гармонические колебания

$$x_1 = A_1 \cos pt. \quad (5.17)$$

Силами трения и сопротивления среды пренебречь.

**Решение.** Начало  $O$  неинерциальной системы  $xy$  совместим с положением равновесия груза  $M$  маятника ( $l_0$  — естественная длина пружины). Тогда деформация пружины  $\Delta l$  в произвольном положении маятника будет равна его координате  $x$  ( $\Delta l = x$ ), а сила упругости  $F_{\text{упр}} = k\Delta l = kx$ . Помимо реальных физических сил ( $mg$ ,  $N$  и  $F_{\text{упр}}$ ) приложим переносную силу инерции ( $F_{\text{пер}} = -ma_1$ ). Проекция этой силы на ось  $x$

$$F_x = -ma_{1x} = -m \frac{d^2x_1}{dt^2} = mA_1 p^2 \cos pt. \quad (5.18)$$

Согласно основному уравнению (5.9), для относительного движения маятника справедливо уравнение

$$ma_{\text{отн}} = mg + N + F_{\text{упр}} + F_{\text{пер}},$$

которое после проецирования всех векторов на ось  $x$  и подстановки (5.18) можно записать в виде неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$m\ddot{x} + kx = mA_1 p^2 \cos pt. \quad (5.19)$$

Выражение в правой части, определяемое переносной силой инерции (движением тележки), представляет собой гармоническую возмущающую силу, «действующую» на маятник в неинерциальной системе.

Решение и анализ вытекающих из (5.19) следствий будет проведено в гл. 7, посвященной наиболее важному разделу механики в курсе физики — колебательному движению точки, а также систем точек и упругих тел (см. гл. 9), представляющих собой сплошную (бесструктурную) среду.

**Силы инерции во вращающихся неинерциальных системах отсчета.** Рассмотрим далее ситуацию, которая возникает при анализе механического движения во вращающихся системах отсчета. Пусть система  $xyz$  вращается с угловой скоростью  $\omega$  и угловым ускорением  $\epsilon$  вокруг оси, совпадающей с осью  $z$ . На рис. 5.5 вектор относительной скорости точки для наглядности расположен в координатной плоскости  $xy$  для случая, когда относительное движение точки  $M$  происходит по траектории, лежащей в этой же плоскости. В переносном вращательном движении точки  $M$  имеет ускорение, состоящее из нормального и касательного ускорений:

$$\mathbf{a}_{\text{пер}}^n = \vec{\omega}_{\text{пер}} \times \mathbf{v}_{\text{пер}} \quad \mathbf{a}_{\text{пер}}^t = \vec{\epsilon}_{\text{пер}} \times \mathbf{r}. \quad (5.20)$$

Направление ускорения Кориолиса

$$\mathbf{a}_{\text{кор}} = 2\vec{\omega}_{\text{пер}} \times \mathbf{v}_{\text{отн}} \quad (5.21)$$

можно определить по правилу правой руки (правая тройка векторов).

Таким образом, при изучении движения во вращающихся системах отсчета нужно принимать во внимание поля переносных и кориолисовых сил инерции:

$$\mathbf{F}_{\text{пер}}^n = -m\vec{\omega}_{\text{пер}} \times \mathbf{v}_{\text{пер}} \text{ — центробежная сила инерции,}$$

$$\mathbf{F}_{\text{пер}}^t = -m\vec{\epsilon}_{\text{пер}} \times \mathbf{r} \text{ — касательная сила инерции,}$$

$$\mathbf{F}_{\text{кор}} = -2m\vec{\omega}_{\text{пер}} \times \mathbf{v}_{\text{отн}} \text{ — кориолисова сила инерции.}$$

(5.22)

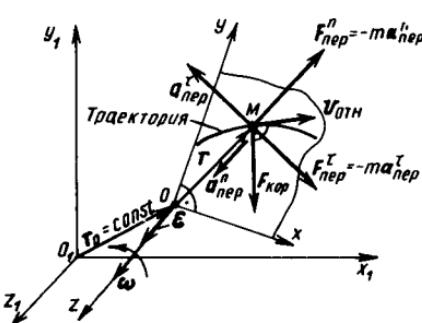


Рис. 5.5

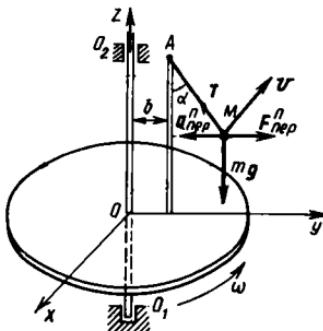


Рис. 5.6

**Пример 5.3.** На равномерно вращающейся платформе установлен математический маятник (рис. 5.6). Установить связь между угловой скоростью платформы  $\omega_0$  и углом  $\alpha$  отклонения маятника в состоянии его относительного равновесия ( $\omega_0 = \text{const}$ ,  $l = AM$ ).

**Решение.** В состоянии относительного равновесия в подвижной системе  $xuz$ , связанной с вращающейся платформой, к математическому маятнику приложены силы  $mg$ ,  $T$  и центробежная сила инерции  $F_{\text{пер}}^n = m\omega_0^2(b + l \sin \alpha)$ , направленная противоположно первоначальному ускорению ( $F_{\text{пер}}^r = 0$ ,  $F_{\text{кор}} = 0$ ).

Составим систему уравнений равновесия точки  $M$  во вращающейся системе отсчета  $xuz$ :

$$T \cos \alpha - mg = 0 \Rightarrow T = mg / \cos \alpha,$$

$$m\omega_0^2(b + l \sin \alpha) - T \sin \alpha = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{b + l \sin \alpha}}. \quad (5.23)$$

Решение (5.23) для  $\omega_0$  и выражение (5.16) для ускорения  $a_0$  в поступательном движении подвижной системы отсчета (поезда в примере 5.1) устанавливают способ измерения угловой скорости  $\omega_0$  и ускорения  $a_0$  по углу отклонения маятника от положения равновесия. По этому принципу действуют частотомеры и акселерометры.

**Пример 5.4.** Частица супензии массой  $m$  (точка  $M$  на рис. 5.7) движется в радиальном направлении в центрифуге, вращающейся с постоянной скоростью  $\omega_0$ . Супензия поступает по центральной трубе с отверстиями (перфорированная труба радиуса  $r$ ). Составить и решить дифференциальное уравнение относительного движения (осаждения) твердых частиц в среде с сопротивлением ( $F_c = \mu v$ ).

**Решение.** Подвижную систему (ось  $x$  на рис. 5.7) жестко связываем с корпусом центрифуги, ось вращения которой расположена вертикально и совпадает с осью  $z$ , которая перпендикулярна плоскости рисунка. В произвольном положении  $x$  на точку  $M$  действует сила тяжести  $mg \perp Ox$ , сила реакции  $N$  трубы  $OA$  ( $N \perp OA$ ) и сила сопротивления  $F_c$  среды. Приложим центробежную силу инерции ( $F_{\text{пер}} = m\omega_0^2 x$ ) и силу Кориолиса, которая перпендикулярна  $v_{\text{отн}}$  и, следовательно, не будет влиять на относительное движение частицы в рассматриваемой модельной задаче (движение в заданном направлении — вдоль трубы  $OA$ ).

Запишем уравнение (5.9) в проекции на ось  $x$ :

$$ma_x^{\text{отн}} = -\mu v_x^{\text{отн}} + m\omega_0^2 x. \quad (5.24)$$

Разделив последнее уравнение на массу  $m$ , перепишем его в стандартной форме как уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} - \omega_0^2 x = 0, \quad 2\beta = \mu/m. \quad (5.25)$$

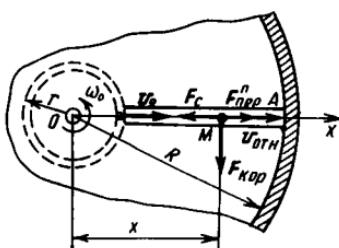


Рис. 5.7

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda - \omega_0^2 = 0 \quad (5.26)$$

имеет действительные различные корни:

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 + \omega_0^2}. \quad (5.27)$$

Тогда решение дифференциального уравнения (5.25) запишется в следующем виде:

$$x = C_1 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 + \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 + \omega_0^2})t}. \quad (5.28)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются с помощью начальных условий. Найдем эти постоянные для случая вращения с большими скоростями, когда  $\omega_0 \gg \beta$ . Это означает, что центробежная сила много больше силы сопротивления. Корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  становятся равными по значению и противоположными по знаку

$$\alpha_1 \approx +\omega_0, \alpha_2 \approx -\omega_0. \quad (5.29)$$

Тогда решение (5.28) упрощается. Выражения для координаты  $x$  и скорости осаждения твердых частиц становятся менее громоздкими:

$$x = C_1 e^{\omega_0 t} + C_2 e^{-\omega_0 t} \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} = C_1 \omega_0 e^{\omega_0 t} - C_2 \omega_0 e^{-\omega_0 t}. \quad (5.30)$$

Если в начальный момент  $t_0 = 0$  частица супензии попала в камеру центрифуги по центральной перфорированной трубе радиуса  $r$  ( $x_0 = r$ ) со скоростью  $v_0$ , то для определения  $C_1$  и  $C_2$  получим следующие начальные условия:

$$x = x_0 = r, v_x = v_0, t = t_0 = 0. \quad (5.31)$$

Подставив (5.31) в (5.30), получим систему двух уравнений относительно  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{cases} r = C_1 + C_2, \\ v_0 = C_1 \omega_0 - C_2 \omega_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = r/2 + v_0/(2\omega_0), \\ C_2 = -\frac{v_0 - \omega_0 r}{2\omega_0} = -\frac{v_0}{2\omega_0} + \frac{r}{2}. \end{cases} \quad (5.32)$$

Обычно линейная скорость  $v_0$  мала, а угловая скорость  $\omega_0$  велика, так что в решении для  $C_1$  и  $C_2$  можно пренебречь членами, содержащими  $v_0/\omega_0$  ( $v_0/\omega_0 \ll r$ ). Тогда закон осаждения в поле центробежных сил примет следующий вид:

$$x = \frac{r}{2}(e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}). \quad (5.33)$$

Это решение позволяет определить, например, время осаждения частиц и его зависимость от технологических параметров (скорости  $\omega_0$  и геометрических размеров центрифуги). Более строгое решение задачи (с учетом законов гидродинамики — см. гл. 8) лежит в основе подбора оптимальных параметров центрифуг при их конструировании.

## 5.2. ПОЛЕ СИЛ ТЯЖЕСТИ

**Сила тяжести.** В рассмотренных выше примерах технического характера считалось, что система отсчета  $x_1 y_1 z_1$ , связанная с Землей, является инерциальной.

Вместе с тем мы уже знаем, что это не совсем так: геоцентрическая система неинерциальна в основном за счет суточного вращения Земли (рис. 5.8). Неявно этот факт частично учитывается, поскольку при рассмотрении задач

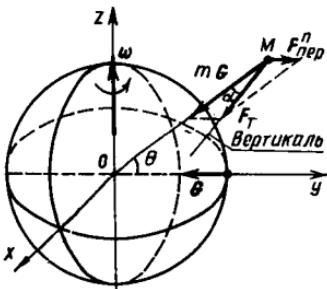


Рис. 5.8

о равновесии или движении в земных условиях использовалось понятие силы тяжести (а не силы гравитационного тяготения). В самом деле, всякая материальная точка или тело, находящиеся вблизи поверхности Земли, испытывают действие гравитационного притяжения и влияние поля центробежных сил инерции. Вблизи поверхности Земли  $h \ll R$  и сила тяготения  $\mathbf{F} = m\mathbf{G}$  (см. § 4.4) практически не зависит от высоты  $h$ , поскольку напряженность гравитационного поля

$$G = \gamma \frac{M}{(R+h)^2} \approx \gamma \frac{M}{R^2} = \text{const} (h \ll R). \quad (5.34)$$

Поле центробежных сил обусловлено суточным вращением Земли и определяется переносной силой инерции:

$$\mathbf{F}_{\text{пер}} = -m\mathbf{a}_{\text{пер}}^n = -m\vec{\omega}_{\text{пер}} \times \mathbf{v}_{\text{пер}}, \quad (5.35)$$

$$\mathbf{v}_{\text{пер}} = \vec{\omega}_{\text{пер}} \times \mathbf{OM} \Rightarrow v_{\text{пер}} = \omega(R+h) \cos \theta. \quad (5.36)$$

Результирующая сила

$$\mathbf{F}_r = m\mathbf{G} + (-m\vec{\omega}_{\text{пер}} \times \mathbf{v}_{\text{пер}}) \quad (5.37)$$

называется *силой тяжести*. Она определяет ускорение свободного падения

$$\mathbf{g} = \mathbf{F}_r/m = \mathbf{G} + \mathbf{v}_{\text{пер}} \times \vec{\omega}_{\text{пер}} \quad (5.38)$$

и направление вертикали (направление отвеса) в данной местности с географической широтой  $\theta$ . Таким образом, ускорение  $\mathbf{g}$  учитывает суммарный эффект от действия

реальной силы тяготения и наличия фиктивной центробежной силы, связанной с вращением Земли. Это значит, что в ньютоновском смысле сила тяжести не может быть отнесена ни к тому, ни к другому классу сил.

Величина  $g$  может быть экспериментально определена по свободному падению тел, а более точно с помощью оборотного маятника (гл. 7). Здесь же проведем расчеты с целью определения относительного вклада гравитационных и инерционных сил в значение силы тяжести, а следовательно, и в ускорение  $g$ . Поскольку сплюснутость Земли в направлении земной оси незначительна, то можно рассматривать ее в виде шара среднего радиуса  $R = 6370$  км со сферически симметричным распределением массы (см. задание 4.2). В этом случае вектор напряженности  $\mathbf{G}$  направлен к центру шара (эта ситуация и отражена на рис. 5.8), а его модуль вблизи поверхности Земли практически не изменяется (см. формулу (5.34)) и определяется по формуле ( $M = 5,96 \cdot 10^{24}$  кг — масса Земли)

$$G = \gamma \frac{M}{R^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,96 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6)^2} = 9,80 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Вклад в ускорение  $g$  от центробежных сил будет наибольшим на экваторе. Тогда

$$\begin{aligned} a_{\text{пер}}^n &= \omega v \sin 90^\circ = \omega^2 R = \frac{4 \cdot 3,14^2}{(24 \cdot 3600)^2} \cdot 6,37 \cdot 10^6 = \\ &= 0,034 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно (5.38), на экваторе ускорение  $g = 9,80 - 0,034 = 9,77 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ , что незначительно отличается от ускорения на полюсе, где  $g = 9,80 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ . Опыт дает следующие значения:  $g = 9,83 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$  — на полюсе,  $g = 9,78 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$  — на экваторе (различие обязано сплюснутости Земли). Поскольку  $a_{\text{пер}}^n = 0,034 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$  много меньше, чем  $G$ , то угол  $\alpha \approx 0$  и, следовательно, направление вертикали практически совпадает с направлением вектора напряженности гравитационного поля Земли. Аналогично определяется сила тяжести вблизи других планет.

В заключение отметим, что понятие силы тяжести определяется для тела, покоящегося относительно Земли. В случае движения тела в поле сил тяжести следует учитывать дополнительно вклад от кориолисовых сил инерции.

### 5.3. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ С УЧЕТОМ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ

**Вес и невесомость.** Понятие «вес тела» возникло в процессе взвешивания тел в земных условиях, т. е. в неинерциальной системе, связанной с Землей. По определению, вес тела равен силе, с которой покоящееся тело действует на подвес или опору (рис. 5.9, а). В этом случае сила веса

$$P = -T = mg. \quad (5.39)$$

В дальнейшем это определение силы веса сохранили и по отношению к любой другой неинерциальной системе отсчета, в которой осуществляется процесс взвешивания. Например, в ускоренно движущемся лифте (рис. 5.9, б) сила веса

$$P = mg - ma = m(g - a). \quad (5.40)$$

В случае свободно падающего лифта ускорение  $a = g$  и вес тела обращается в нуль. По отношению к лифту имеет место состояние *невесомости*, которое реализуется, в частности, и в кабине космического корабля при его движении по орбите. В этом состоянии в твердых телах исчезают внутренние напряжения (гл. 8), вызываемые действием сил тяжести. Соотношение (5.40) показывает, что понятие силы веса является относительным и, следовательно, можно создать условия, обеспечивающие искусственную тяжесть. Например, в случае полета космического корабля по орбите можно привести кабину корабля во вращательное движение и космонавт будет ощущать «действие сил тяжести».

Рассмотрим далее несколько примеров, которые демонстрируют влияние вращения Земли на относительное движение тел в геоцентрической системе отсчета. Свидетельствами неинерциальности этой системы являются

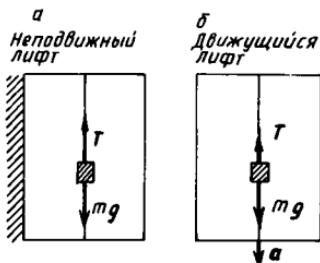


Рис. 5.9

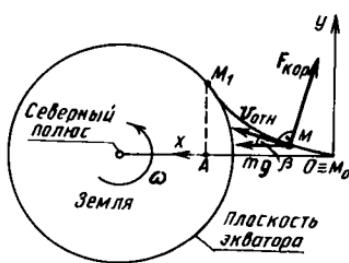


Рис. 5.10

свободное падение тела, подмывание правых берегов рек северного полушария и левых берегов рек южного полушария, колебания маятника Фуко.

**Пример 5.5. Свободное падение тел.** Рассмотрим для наглядности падение тела на экваторе. Пусть тело массой  $m$  в начальный момент находилось на высоте  $H$  (точка  $M_0$ ) и имело скорость, равную нулю (относительно Земли).

**Решение.** Систему  $xy$  жестко связем с Землей (начало координат совмещено с точкой  $M_0$ ). На рис. 5.10 помимо начального положения  $M_0$  изображено произвольное положение падающей точки  $M$ . При этом учтено, что, кроме силы тяжести  $mg$ , к точке  $M$  приложена сила Кориолиса

$$\mathbf{F}_{\text{кор}} = -2m\vec{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн.}} \quad (5.41)$$

Эта сила, направленная вправо по ходу движения, приводит к отклонению падающего тела от вертикали (ось  $x$ ) в положительном направлении оси  $y$ . Уравнение движения тела по отношению к Земле имеет следующий вид:

$$m\mathbf{a}_{\text{отн}} = mg - 2m(\vec{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}). \quad (5.42)$$

В проекции на оси  $x$  и  $y$  получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dv_x^{\text{отн}}}{dt} = g - 2\omega v_y^{\text{отн}} \\ \frac{dv_y^{\text{отн}}}{dt} = 2\omega v_x^{\text{отн}} \end{cases}, \quad v_y^{\text{отн}} = v_{\text{отн}} \sin \beta; \quad v_x^{\text{отн}} = v_{\text{отн}} \cos \beta. \quad (5.43)$$

Оценим максимальное значение силы Кориолиса при падении с высоты  $H = 2$  км. В этом случае у поверхности Земли скорость тела будет максимальной. Ее приближенное значение определим по формуле

$$v_{\text{отн}}^{\max} \simeq \sqrt{2gH} \simeq \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 2 \cdot 10^3} \simeq 200 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Максимальное значение силы Кориолиса ( $\vec{\omega} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\text{отн}} = 90^\circ$ )

$$F_{\text{кор}}^{\max} = 2m\omega v_{\text{отн}}^{\max} \sin (\vec{\omega} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\text{отн}}) \simeq 2 \cdot m \cdot 200 \cdot \frac{2 \cdot 3,14}{24 \cdot 3600} \simeq 0,03m \text{ Н.}$$

Поскольку  $F_{\text{кор}} \ll mg$ , то отклонение вектора относительной скорости (угол  $\beta$ ) будет малым и в правой части первого уравнения (5.43) с полным основанием можно пренебречь вторым слагаемым. Тогда система (5.43) упростится и примет вид двух дифференциальных уравнений, которые последовательно легко интегрируются:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = g, \\ \frac{dv_y}{dt} = 2\omega v_x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = gt, \\ v_y = \omega g t^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = gt^2/2, \\ y = \omega g t^3/3. \end{cases} \quad (5.44)$$

Уравнение траектории (по отношению к Земле)

$$y = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{g}} \omega x^{3/2} \quad (5.45)$$

позволяет определить смещение падающего груза от вертикали по направлению к востоку, т. е. вдоль оси  $y$ . При  $x = H = 2$  км получим

$$\Delta y = AM_1 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{9,81}} \cdot \frac{2 \cdot 3,14}{24 \cdot 3600} \cdot (2 \cdot 10^3)^{3/2} \approx 1,95 \text{ м.}$$

Если  $H = 100$  м, то смещение  $\Delta y = 1,2$  см. Несмотря на относительно малое смещение, его удалось наблюдать на опытах, проведенных в глубоких шахтах.

**Пример 5.6. Маятник Фуко.** Исследуем движение маятника Фуко, который представляет собой массивный шар, подвешенный на очень длинной нити (маятник в Исаакиевском соборе имеет  $l = 98$  м и амплитуду  $A_0 = 5$  м).

**Решение.** Отклоним маятник от вертикали и отпустим его без начальной скорости. Если бы Земля была инерциальной системой, то под действием силы тяжести  $mg$  и силы натяжения  $T$  движение маятника происходило бы в одной и той же вертикальной плоскости, проходящей через начальное положение шара и нити. Однако опыт с такими маятниками показывает, что плоскость их колебаний постепенно поворачивается вокруг вертикали в том же направлении, в котором перемещаются Солнце и звезды в суточном вращении.

Для объяснения этого эффекта изучим движение маятника Фуко, который для наглядности и простоты рассуждений разместим на северном полюсе (рис. 5.11). Рассмотрение проведем в геоцентрической системе  $xyz$ . Координатная плоскость  $xy$  совмещена с вертикальной плоскостью, которая проходит через начальное положение маятника — точку  $M_0$  и вертикаль  $Oz$ .

При малых отклонениях маятника, когда амплитуда  $A_0 \ll l$ , можно считать, что движение шара происходит в плоскости  $xy$ . На рис. 5.12 изображена горизонтальная проекция траектории маятника Фуко. К движущемуся шару приложим кориолисову силу инерции, которая направлена вправо по ходу движения маятника. Эта боковая сила будет отклонять шар от прямолинейного движения вдоль оси  $y$ . В результате шар остановится не в точке  $M_1'$ , а в точке  $M_1$ . Кривизна траектории (дуги  $M_0M_1$ ) очень мала, и наблюдатель, находящийся на Земле, заметит, что плоскость колебаний повернулась на угол  $\beta = \angle M_1M_0M_1'$ . Это вращение происходит в направлении, противоположном вращению Земли, т. е. совпадает с направлением движения Солнца и звезд относительно Земли. После остановки шара в точке  $M_1$  движение изменит направление на противоположное. Направление силы Кориолиса изменится и шар переместится в точку  $M_2$ .

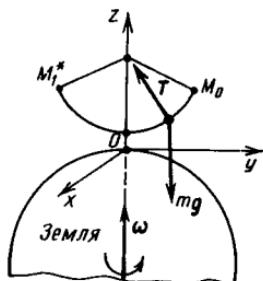


Рис. 5.11

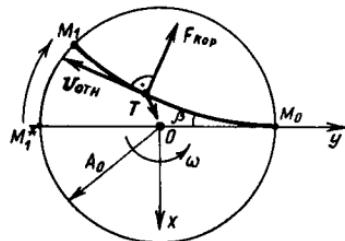


Рис. 5.12

и затем в точку  $M_3$  и т. д. (рис. 5.13). Таким образом, траектория представляет собой ломаную кривую, которая схематично изображена на рис. 5.13 (стрелками указано направление вращения плоскости колебаний маятника).

**Задание 5.1.** Воспользовавшись приближенным решением (5.44), найдите уточненное решение системы (5.43), определяющей динамику падения тела с учетом вращения Земли.

**Указание.** Найденное решение (5.44) для  $v_y$  подставьте в правую часть системы (5.43) и решите полученную систему дифференциальных уравнений (такой способ решения систем уравнений называется *методом последовательных приближений*).

Ответ.

$$\begin{aligned} v_x &= gt - 2\omega^2 gt^3/3, \\ v_y &= \omega gt^2 - \omega^3 gt^4/3, \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x = gt^2/2 - \omega^2 gt^4/6, \\ y = \omega gt^3/3 - \omega^3 gt^5/15. \end{cases}$$

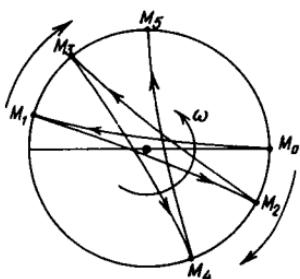


Рис. 5.13

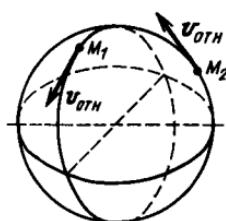


Рис. 5.14

**Задание 5.2.** Рассмотрите движение воды в реках северного и южного полушарий (рис. 5.14), которые текут с севера на юг или с юга на север, и покажите, что длительное и систематическое действие сил Кориолиса на частицы воды в реках является причиной разрушения правых берегов в северном полушарии и левых берегов в южном.

Говори, что знаешь; делай, что обязан;  
будь, чему быть.

Девиз С. В. Ковалевской

## 6. ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Твердое тело как совокупность материальных точек с наложенными жесткими связями.** Любое произвольное движение твердого тела можно рассматривать как сложное, состоящее из поступательного и вращательного движений. В связи с этим необходимо записать уравнения динамики для этих простейших видов движения твердого тела.

Во второй главе уже получены уравнения (законы) динамики для системы материальных точек. Поэтому при изучении движения твердого тела разделим его

мысленно на элементарные частицы массой  $\Delta m_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), к которым приложены как внешние, так и внутренние силы. Внутренние силы представляют собой силы взаимодействия жестко связанных между собой отдельных частиц твердого тела. В результате можно использовать уже полученные уравнения и законы динамики механической системы с соответствующей адаптацией (adaptatio — приспособление) их к описанию движения абсолютно твердого тела, т. е. системы с наложенными жесткими связями.

## 6.1. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ДЛЯ ПРОСТЕЙШИХ ВИДОВ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Динамика поступательного движения тела.** Известно, что в этом движении все точки тела движутся по одинаковым траекториям и имеют одинаковые скорости и ускорения (см. § 1.4). Поэтому достаточно изучить динамическое поведение какой-либо одной точки тела, например, его центра масс или, что то же самое, центра тяжести тела (см. задание 6.1), если оно движется вблизи или по поверхности Земли. Это означает, что динамика поступательного движения твердого тела массой  $m$  определяется законом изменения импульса тела (см. (2.40))

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^e, \quad \mathbf{P} = m\mathbf{v}_c \quad (6.1)$$

или законом движения его центра масс (см. (2.43))

$$m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^e. \quad (6.2)$$

Отсюда следует вывод о том, что при поступательном движении твердое тело движется как материальная точка с массой, равной массе тела, под действием силы, равной сумме всех внешних сил.

**Динамика вращательного движения тела вокруг неподвижной оси.** Поскольку мы рассматриваем твердое тело как совокупность материальных точек (частиц массой  $\Delta m_k$ ), то для описания вращательного движения можно воспользоваться законом об изменении момента импульса системы материальных точек (см. (2.48) и (2.36))

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^e. \quad (6.3)$$

Здесь  $\mathbf{L} = \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \Delta m_k \mathbf{v}_k$  — момент импульса тела относительно некоторого центра  $O$ , а  $\mathbf{M}^e = \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e$  — результирующий (главный) момент внешних сил, действующих на тело.

Спроектируем правую и левую части уравнения (6.3) на ось вращения (ось  $z$  на рис. 6.1,  $a$ ). Получим

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e. \quad (6.4)$$

Здесь проекция  $L_z$  момента импульса тела  $\mathbf{L}$  равна сумме проекций на ось  $z$  моментов импульсов отдельных частиц тела:

$$L_z = \sum_{k=1}^N (\mathbf{r}_k \times \Delta m_k \mathbf{v}_k)_z = \sum_{k=1}^N L_{kz}. \quad (6.5)$$

Вектор  $\mathbf{L}_k = \mathbf{r}_k \times \Delta m_k \mathbf{v}_k$  (рис. 6.1,  $b$ ) перпендикулярен к радиусу-вектору  $\mathbf{r}_k$  и образует с осью  $z$  угол  $\beta = 90^\circ - \alpha_k$ . Поэтому проекция  $L_{kz} = r_k \Delta m_k v_k \sin \alpha_k = \Delta m_k R_k v_k$ . Если учесть, что при вращательном движении абсолютно твердого тела скорость  $v_k = \omega R_k$ , то с учетом выражения (6.5) получим

$$L_z = \sum_{k=1}^N \Delta m_k R_k \omega R_k = \omega \sum_{k=1}^N \Delta m_k R_k^2, \quad L_z = I_z \omega. \quad (6.6)$$

Величина  $I_z = \sum_{k=1}^N \Delta m_k R_k^2$ , равная сумме произведений масс частиц тела на квадраты их расстояний до оси  $z$ , называется *моментом инерции твердого тела* относительно

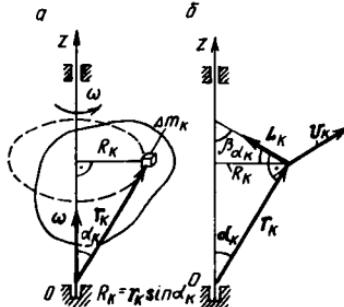


Рис. 6.1

этой оси или коротко — *осевым моментом инерции тела* ( $\Delta m_k R_k^2$  — момент инерции точки):

$$I_z = \sum_{k=1}^N \Delta m_k R_k^2 — осевой момент инерции. \quad (6.7)$$

Аналогично определяются осевые моменты инерции тела относительно осей  $x$  и  $y$ .

С учетом (6.7) уравнение вращения тела относительно оси (ось  $z$  в данном случае) примет вид

$$\frac{d(I_z \omega)}{dt} = M_z^e. \quad (6.8)$$

Согласно (6.8), производная по времени от момента импульса твердого тела относительно оси вращения равна результирующему моменту внешних сил относительно той же оси.

Поскольку для твердого тела момент инерции  $I_z$  не зависит от времени ( $I_z = \text{const}$ ), уравнение (6.8) можно переписать в виде

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e \Rightarrow \varepsilon = \frac{M_z^e}{I_z}. \quad (6.9)$$

Здесь  $\varepsilon = d\omega/dt$  — угловое ускорение тела. Последнее соотношение из уравнения (6.9) можно прочитать так: угловое ускорение при вращении твердого тела вокруг оси прямо пропорционально главному моменту внешних сил относительно этой оси и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно той же оси.

Уравнение (6.9) по физическому смыслу аналогично второму закону Ньютона для движения материальной точки или закону (2.43) о движении центра масс тела. Поэтому иногда его называют «вторым законом Ньютона для вращательного движения». При этом роль ускорения  $a$  играет угловое ускорение  $\varepsilon$ , роль силы  $F$  — момент силы  $M_z$  относительно оси вращения, а роль массы  $m$  — осевой момент инерции  $I_z$ . Это сопоставление позволяет сделать важный вывод: *осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращении вокруг этой оси*.

Из закона вращательного движения (6.8) вытекает, что если проекция  $M_z^e$  результирующего момента внешних сил на ось вращения равна нулю, то

$$L_z = I_z \omega = \text{const.} \quad (6.10)$$

Это утверждение называется законом сохранения проекции момента импульса тела (сравните с (2.28)). Если при вращении осевой момент инерции  $I_z$  остается постоянным, то, согласно (6.10), твердое тело будет вращаться с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Если же в процессе вращения деформируемого тела или системы твердых тел суммарный момент инерции изменяется от значения  $I_z^{(1)}$  до  $I_z^{(2)}$  (изменяющаяся во времени механическая система), то, согласно (6.10), угловая скорость тела также будет меняться, принимая соответственно значения  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , которые должны удовлетворять соотношению (6.10):

$$I_z^{(1)}\omega_1 = I_z^{(2)}\omega_2 = \text{const.}$$

Справедливость последнего утверждения можно наглядно продемонстрировать с помощью скамьи Жуковского, состоящей из основания и диска, который может вращаться вокруг вертикальной оси. Человек, находящийся на скамье Жуковского (рис. 6.2), представляет собой систему, на которую не действуют моменты внешних сил относительно оси вращения. Поэтому, если человек в исходном состоянии 1 вращается с угловой скоростью  $\omega_1$ , то в конечном состоянии 2 он уже будет вращаться со скоростью  $\omega_2 = \omega_1 I_1 / I_2 = \text{const}$  (при переходе из состояния 1 в состояние 2 момент инерции уменьшается:  $I_2 < < I_1$ ). Этот эффект с успехом используют фигуристы, выполняя пируэт (фр. *révolte* — полный оборот или несколько оборотов на одной ноге).

**Пример 6.1.** Применим уравнения динамики поступательного и вращательного движений тела для изучения динамического поведения маятника Максвелла, представляющего собой два соосных диска различных радиусов с общей массой  $m$  (рис. 6.3).

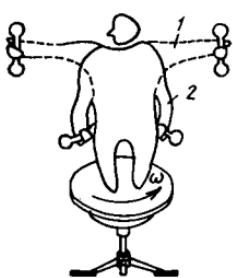


Рис. 6.2

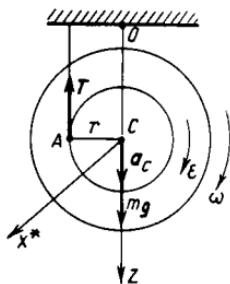


Рис. 6.3

**Решение.** Ускорение центра масс маятника определяем из уравнения (6.2), записав его в проекции на ось  $z$ :

$$ma_c = mg - T.$$

Ось  $x^*$  выберем так, чтобы она совпадала с центром масс дисков (точка  $C$ ). Тогда уравнение (6.9) для вращения относительно этой оси примет вид  $I_{C\theta} = Tr$ . Из кинематики известно (см. пример 1.7), что  $a_c = \epsilon r$ . В результате получаем систему двух уравнений движения:  $ma_c = mg - T$  и  $I_{C\theta}/r = Tr$ . Отсюда находим

$$a_c = \frac{mr^2}{I_c + mr^2} g, \quad T = \frac{I_c}{I_c + mr^2} mg. \quad (6.11)$$

Из формул (6.11) видно, что ускорение центра диска  $a_c$  тем меньше, а натяжение нити  $T$  тем больше, чем больше момент инерции маятника. При решении этого примера можно было бы за ось моментов принять ось  $x^*$ , которая проходит через точку  $A$ . Скорость  $v_A$  в каждый момент времени равна нулю, поэтому такую ось и называют *мгновенной осью*. В рассмотренном примере маятник Максвелла участвует в так называемом *плоском движении твердого тела*, т. е. таком движении, при котором все частицы тела движутся параллельно одной плоскости.

Таким образом, плоское движение удобно рассматривать как сложное, состоящее из двух движений: поступательного движения центра масс под действием равнодействующей всех внешних сил (см. (6.2)) и вращательного движения вокруг оси  $x$ , проходящей через центр масс перпендикулярно к плоскости, относительно которой движется тело. При этом оказывается, что для вращательного движения относительно оси  $x^*$ , которая в общем случае движется со скоростью  $v_C$  и ускорением  $a_c$ , справедливо уравнение (6.9), описывающее вращение относительно неподвижной оси. Именно этим обстоятельством мы и воспользовались при составлении уравнений движения маятника Максвелла.

**Пример 6.2. Проблема балансировки вращающихся тел.** Определить реакцию вертикальной оси  $O$  (рис. 6.4), которая возникает при равномерном вращении тела, состоящего из двух материальных точек массами  $m_1$  и  $m_2$ , закрепленных на невесомом стержне  $AB$  ( $b_1 > b_2$ ).

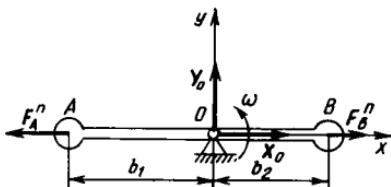


Рис. 6.4

**Решение.** Реакцию оси  $O$  можно найти с помощью уравнения (6.2), которое определяет движение центра масс. Однако в целях последующего использования результатов решения этого примера более удобно воспользоваться уравнениями динамики относительного движения в неинерциальной системе (см. (5.9)). Для этого подвижную систему  $xy$  свяжем со стержнем  $AB$ . В этой системе точки  $A$  и  $B$  неподвижны ( $v_A^{st} = v_B^{st} = 0$ ). Поэтому, согласно (5.21), их кориолисовы силы инерции равны нулю. Касательные составляющие переносных

сил инерции также обращаются в нуль в связи с равномерным вращением осей ( $\omega = \text{const}$ ,  $e = d\omega/dt = 0$ ). Нормальные составляющие переносных сил инерции (центробежные силы инерции) определяются по формулам:

$$F_A^a = m_1 \omega^2 b_1, \quad F_B^a = m_2 \omega^2 b_2. \quad (6.12)$$

Реакцию оси  $O$  разложим на две составляющие:  $R_0 = X_0 + Y_0$ . Поскольку отсутствует относительное движение ( $a_A^{\text{отн}} = a_B^{\text{отн}} = 0$ ), то уравнения динамики (5.9) превращаются в уравнения «динамического равновесия» — равновесия в подвижной вращающейся системе  $xy$ . Это означает, что сумма всех внешних сил и сил инерции равна нулю. В проекции на оси  $x$  и  $y$  получим:

$$X_0 + F_B^a - F_A^a = 0, \quad Y_0 = 0.$$

Для составляющей  $X_0$  с учетом (6.12) запишем окончательное выражение

$$X_0 = F_A^a - F_B^a = \omega^2(m_1 b_1 - m_2 b_2). \quad (6.13)$$

Отсюда видно, что центробежные силы инерции приводят к возникновению бокового давления на ось  $i$ , следовательно, ось должна быть хорошо закреплена с помощью подшипников. В данном примере при  $b_1 = b_2 = b = 0,1$  м,  $\Delta t = m_1 - m_2 = 0,2$  кг и частоте\*  $n = 36\,000$  об/мин ( $\omega = 2\pi n/60$ ) составляющая  $X_0 = \omega^2 \Delta t b = (2\pi \cdot 600)^2 \times 0,2 \cdot 0,1 = 28 \cdot 10^4$  Н.

Таким образом, неуравновешенность (дисбаланс) масс вращающегося тела вызвала бы при  $\Delta t = 200$  г давление на подшипники, равносильное действию массы в 28 т. В связи с этим возникает серьезная техническая проблема защиты подшипников от столь значительных силовых воздействий, которая решается с помощью балансировки быстро вращающихся тел (например, колес автомобилей, винтов самолетов и т. д.).

**Свободные оси вращения.** При рассмотрении вращения вокруг неподвижной оси предполагается, что неизменность направления оси в пространстве обеспечивается внешними условиями (например, подшипниками). Из примера 6.2 видно, что при вращении несимметричных тел относительно осей произвольного направления из-за центробежных сил инерции возникают силы бокового давления на подшипники. В случае вращения однородного симметричного тела относительно оси симметрии боковые силы давления не возникают (см. формулу (6.13)). Тогда при отсутствии внешних сил ось могла бы сохранять неизменным свое положение в пространстве и без крепления в подшипниках. Такие оси называются *свободными осями* тела.

Для тел произвольной формы и с произвольным распределением массы всегда существуют три взаимно пер-

\* Вращение со скоростями  $\sim 30\,000$  об/мин на практике реализуется в специальных центрифугах.

перпендикулярные свободные оси, проходящие через центр масс тела. Такие оси называются *главными центральными осями инерции тела*. В частности, для однородного параллелепипеда — это три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через геометрический центр симметрии перпендикулярно к граням. Если масса тела распределена симметрично относительно некоторой оси, то эта ось является осью материальной симметрии и одновременно одной из главных осей. Две другие взаимно перпендикулярные главные оси не фиксированы относительно тела, которое в этом случае называется *симметричным волчком* (рис. 6.5, а). Для шара, плотность  $\rho$  распределения массы которого зависит только от расстояния до

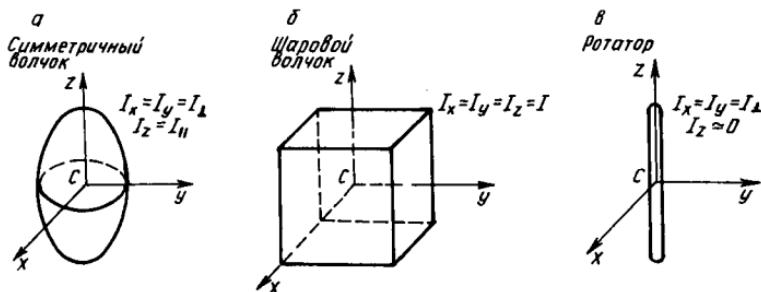


Рис. 6.5

его центра ( $\rho = \rho(r)$ ), любые три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр шара, будут главными осями инерции (*шаровой волчок*).

Моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерций* тела. В общем случае  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ . Для симметричного волчка, например однородного цилиндра,  $I_x = I_y = I_{\perp}$ ,  $I_z = I_{\parallel}$ . В случае шарового волчка (однородного шара или куба, рис. 6.5, б) все главные моменты инерции равны ( $I_x = I_y = I_z = I$ ) в связи с тем, что оси равноправны. Если окажется, что один из главных моментов инерции много меньше других ( $I_x = I_y = I_{\perp}$ ,  $I_z \approx 0$ ), то тело называется *ротатором* (рис. 6.5, в).

Можно показать, что вращение вокруг двух главных (свободных) осей, соответствующих большему и меньшему моментам инерции, является устойчивым, тогда как движение относительно оси со средним моментом инерции оказывается неустойчивым. На практике редко приходится иметь дело с вращением вокруг совершенно свободных осей инерции. Из-за трения, случайных толчков

и других помех всегда приходится к телу прикладывать моменты внешних сил. В таких реальных случаях движение будет устойчивым относительно главной оси, соответствующей наибольшему моменту инерции. Отметим, что знание свободных осей инерции тела имеет большое значение для практики. Например, быстро вращающимся отдельным частям машин и механизмов придают такую форму, чтобы вращение по возможности происходило вокруг их устойчивой главной оси, совпадающей, как правило, с геометрической осью симметрии этих частей машин. Если вращающаяся деталь несимметрична, то предварительно выполняют балансировку (в простейшем случае с помощью специального противовеса). Механический смысл балансировки обсуждается в следующем параграфе с использованием понятия тензора моментов инерции.

## 6.2. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ И МОМЕНТЫ ИМПУЛЬСА ТЕЛА

**Тензор моментов инерции.** Осевые моменты инерции (6.7) зависят от массы тела и от характера ее распределения относительно выбранной оси. Они определяют, как уже отмечалось, инерционные свойства тел, которые проявляются в динамике при вращательном движении вокруг этих осей.

В отличие от поступательного движения тел, инерционные свойства которых определяются только их массой, при вращательном движении существенным является также и распределение массы тела относительно оси вращения. Так, например, один и тот же цилиндр имеет различные моменты инерции и, следовательно, различные инерционные свойства относительно оси цилиндра (ось  $z$ ) и двух других координатных осей, перпендикулярных к этой оси.

Из определения осевого момента инерции следует, что он является аддитивной величиной. Тогда осевой момент инерции тела, состоящего из нескольких частей, равен сумме моментов инерции отдельных частей относительно той же оси.

При изучении вращательного движения тел в более сложных, чем рассмотренные выше, случаях приходится помимо осевых моментов инерции  $I_x$ ,  $I_y$  и  $I_z$  ввести и использовать центробежные моменты инерции  $I_{xy}$ ,  $I_{xz}$ ,  $I_{yz}$ , а также полярный момент инерции  $I_0$  (см. задания 6.4 и

6.5). Запишем выражения для осевых моментов инерции (6.7), приняв во внимание обозначения на рис. 6.6, а. Квадраты расстояний от точечной массы  $\Delta m_k$  до осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно равны  $y_k^2 + z_k^2$ ,  $x_k^2 + z_k^2$  и  $x_k^2 + y_k^2$ , поэтому

$$I_x \equiv I_{xx} = \sum_{k=1}^N \Delta m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad I_y \equiv I_{yy} = \sum_{k=1}^N \Delta m_k (x_k^2 + z_k^2), \\ I_z \equiv I_{zz} = \sum_{k=1}^N \Delta m_k (x_k^2 + y_k^2). \quad (6.14)$$

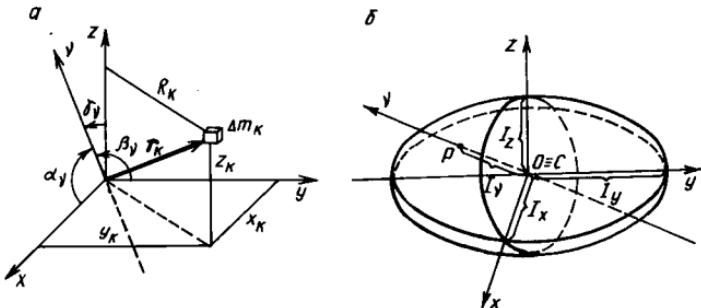


Рис. 6.6

### Центробежные моменты инерции

$$I_{xy} = I_{yx} = - \sum_{k=1}^N \Delta m_k x_k y_k, \quad I_{xz} = I_{zx} = - \sum_{k=1}^N \Delta m_k x_k z_k, \\ I_{yz} = I_{zy} = - \sum_{k=1}^N \Delta m_k y_k z_k \quad (6.15)$$

вместе с осевыми моментами инерции образуют набор из девяти величин, который определяет так называемый *тензор второго ранга*\*. Если, например, вектор имеет три компоненты (проекции), то тензор второго ранга имеет уже девять компонент, образующих таблицу в виде матрицы три на три:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \text{—тензор моментов инерции.} \quad (6.16)$$

\* Физическая величина, задаваемая в некоторой системе координат девятью числами (компонентами), называется *тензором второго ранга*, если эти компоненты при повороте системы координат преобразуются так же, как преобразуется набор из произведений любых двух координат точки пространства ( $x^2$ ,  $xy$ ,  $xz$ ,  $yx$ ,  $y^2$ ,  $yz$ ,  $zx$ ,  $zy$ ,  $z^2$ ). Определение  $\hat{I}$  формулами (6.14) и (6.15) удовлетворяет понятию тензора второго ранга.

В частности, для волчка (симметричного и шарового) и ротатора тензор моментов инерции имеет следующий вид (в силу симметрии центробежные моменты для этих тел равны нулю):

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad \hat{I} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad \hat{I} = \begin{pmatrix} I_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь использованы те же обозначения, что и на рис. 6.5. Из всего сказанного о центробежных моментах инерции и свободных осях можно сделать вывод о том, что если центробежные моменты инерции равны нулю, то центробежные силы инерции взаимно уравновешиваются, тогда оси являются главными и при вращении относительно этих осей не возникает боковое давление (свободные оси). Балансировка, которая выполняется путем присоединения в определенных местах дополнительных масс (или высверливанием отверстий) как раз и направлена на то, чтобы тензор моментов инерции тела стал диагональным. В этом случае отличные от нуля компоненты  $I_x, I_y, I_z$  расположены по главной диагонали тензора  $\hat{I}$ .

**Эллипсоид инерции.** Предположим, что мы рассчитали (см. задание 6.5) или экспериментально определили осевые моменты инерции относительно центральных осей  $v$ , положение (ориентация) которых по отношению к главным осям  $x, y$ , и  $z$  определяется углами  $\alpha_v, \beta_v$  и  $\gamma_v$  (см. рис. 6.6, а). Затем отложим их численные значения  $I_v$  в определенном масштабе  $\mu$  вдоль положительных направлений этих осей. На рис. 6.6, б точка  $P$  изображает значение момента  $I_v$  ( $I_v = \mu \cdot OP$ ). Геометрическое место всех точек  $P$  для разных осей  $v$  образует *эллипсоид инерции*, причем  $I_x, I_y$  и  $I_z$  являются полуосью этого эллипсоида. Инерционные свойства тела в виде симметричного волчка (рис. 6.5, а) будут характеризоваться эллипсоидом вращения, а для шарового волчка (рис. 6.5, б) эллипсоид инерции будет иметь вид сферы радиуса  $I$  ( $I_x = I_y = I_z = I$ ). В общем случае твердое тело обладает *анизотропией* по отношению к осевым моментам инерции (для разных ориентаций оси  $v$  инерционные свойства тела разные (см. задание 6.5)).

**Момент импульса вращающегося тела.** Поскольку масса  $m$ , скорость  $v_c$  центра масс и импульс  $P = mv_c$  являются характеристиками поступательного движения,

то тензор  $\hat{I}$ , угловая скорость  $\vec{\omega}$  и момент импульса  $\mathbf{L}$  являются соответствующими характеристиками при вращательном движении. По аналогии с импульсом  $\mathbf{P} = m\mathbf{v}_c$  можно предположить, что момент импульса  $\mathbf{L}$  равен произведению тензора  $\hat{I}$  на вектор  $\vec{\omega}$ . Здесь мы впервые встречаемся с новой математической операцией — *умножением тензора  $\hat{I}$  на вектор  $\vec{\omega}$* , которая выполняется по правилу умножения матриц\*:

$$\mathbf{L} = \hat{I} \vec{\omega}. \quad (6.17)$$

После освоения этой техники проверьте, а сейчас просто поверьте на слово, что, если вектор  $\vec{\omega}$  представить матрицей-столбцом

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix},$$

то после умножения  $\hat{I}$  на  $\vec{\omega}$  получим матрицу  $L$  с компонентами  $L_x$ ,  $L_y$  и  $L_z$ :

$$L = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Если индексы  $x$ ,  $y$ ,  $z$  заменить соответственно цифровыми индексами 1, 2, 3, то проекции  $\mathbf{L}$  на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} L_x \equiv L_1 &= \sum_{k=1}^3 I_{1k}\omega_k, & L_y \equiv L_2 &= \sum_{k=1}^3 I_{2k}\omega_k, \\ L_z \equiv L_3 &= \sum_{k=1}^3 I_{3k}\omega_k. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Все эти выражения можно записать в виде одной формулы:

$$L_l = \sum_{k=1}^3 I_{lk}\omega_k; \quad l = 1, 2, 3. \quad (6.20)$$

\* Для умножения матриц нужно перемножить все элементы одной строки первой матрицы и одного столбца второй матрицы, а результат сложить и записать на место элемента, положение которого в матрице определяется номерами перемножаемых строки и столбца.

Чтобы уже здесь почувствовалось, что матричное выражение (6.18) является правильным, применим его к частному случаю вращения тела относительно неподвижной оси  $z$  (см. рис. 6.1 и формулу (6.6)). В этом случае  $\omega_x = 0$ ,  $\omega_y = 0$ ,  $\omega_z = \omega$  и, следовательно,

$$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z = I_z\omega. \quad (6.21)$$

Например, при вращении симметричного волчка со скоростью  $\vec{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$  с помощью формулы (6.20) получим

$$L_x = I_{\perp}\omega_x, \quad L_y = I_{\perp}\omega_y, \quad L_z = I_{\parallel}\omega_z. \quad (6.22)$$

Пусть в некоторый момент времени проекция  $\omega_y = 0$ , а  $\omega_x = \omega_z$  (рис. 6.7). Тогда при  $I_{\parallel} < I_{\perp}$  получим, что  $L_x > L_z$ , и хотя вектор момента импульса  $\mathbf{L}$  будет также, как и  $\vec{\omega}$ , расположен в плоскости  $xz$ , однако он не будет совпадать с вектором  $\vec{\omega}$ . Таким образом, если импульс  $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$  всегда направлен вдоль вектора  $\mathbf{v}$ , то момент импульса  $\mathbf{L} = \hat{I}\vec{\omega}$  в общем случае не совпадает с вектором  $\vec{\omega}$ ! В этом состоит одно из особых свойств матричного умножения тензора  $\hat{I}$  на вектор  $\vec{\omega}$ , которое и учитывает эту физическую ситуацию.

**Примеры вычисления моментов инерции тел простейшей формы.** Из определения компонент тензора момента инерции (6.14) и (6.15) вытекает, что их можно найти путем суммирования моментов инерции отдельных элементов  $\Delta m_k$  (свойство аддитивности). Если тело является сплошным, то вводят понятие пространственной плотности массы, значение которой в каждой точке тела определяется с помощью соотношения

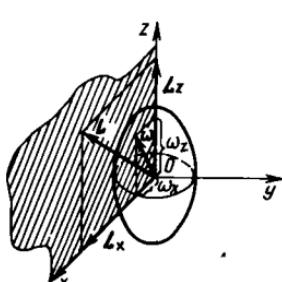


Рис. 6.7

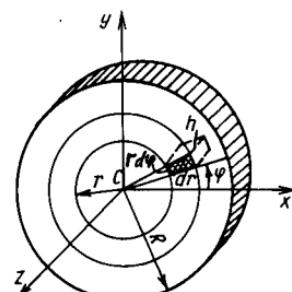


Рис. 6.8

$$\rho(x, y, z) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \Delta m / \Delta V. \quad (6.23)$$

Тогда  $\Delta m_k = \rho \Delta V_k$  и при  $\Delta V \rightarrow 0$  соответствующие суммы из (6.14) и (6.15) преобразуются в интегралы по объему  $V$  тела (индексы  $l$  и  $k$  принимают значения  $x, y$  и  $z$ )

$$I_{lk} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum \Delta I_{lk}^{\text{точки}} = \int_V dI_{lk}(x, y, z). \quad (6.24)$$

Следует заметить, что интеграл (6.24) удается достаточно просто вычислить лишь для тел, обладающих определенной симметрией и при задании функции  $\rho(x, y, z)$ . Чаще всего значения осевых моментов инерции определяют на опыте динамическим способом на основании уравнений вращательного движения (6.9).

**Пример 6.3.** Вычислить осевой момент инерции однородного ( $\rho = \text{const}$ ) диска радиуса  $R$  относительно оси  $z$ , проходящей через центр симметрии  $C$  перпендикулярно к его плоскости (рис. 6.8).

**Решение.** Для вычисления воспользуемся формулой (6.24) и определением (6.7) для  $I_z$ . С учетом того, что элементарный объем  $dV = r d\varphi \cdot dr \cdot h$ , где  $h$  — толщина диска, а плотность  $\rho = m/V$ , получим ( $V = \pi R^2 h$  — объем диска):

$$I_z = \int_V dm r^2 = \rho h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\varphi = \rho h \cdot 2\pi \cdot R^4 / 4.$$

Поскольку масса диска  $m = \rho \pi R^2 h$ , то окончательно запишем

$I_z = \frac{1}{2} m R^2$  — момент инерции диска или цилиндра. (6.25)

Аналогичные расчеты для тонкого стержня, цилиндра и шара приводят к значениям главных моментов инерции, которые представлены на рис. 6.9.

**Теорема Штейнера.** Если ось не является центральной, то для определения осевых моментов инерции используют *теорему Штейнера* (см. задание 6.2)

$$I_{z^*} = I_{Cz} + md^2, \quad (6.26)$$

которая читается следующим образом: момент инерции  $I_{z^*}$  относительно заданной произвольной оси  $z^*$  равен сумме момента инерции  $I_{Cz}$  относительно центральной оси, параллельной данной, и произведения массы тела на квадрат расстояния  $d$  между осями.

Применим эту теорему для определения момента

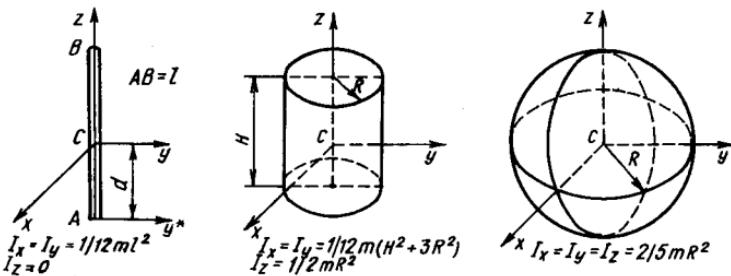


Рис. 6.9

инерции стержня относительно оси  $y^*$  (см. рис. 6.9), которая проходит через его конец. Получим

$$I_{y^*} = I_{Cy} + md^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{4} = \frac{1}{3}ml^2. \quad (6.27)$$

**Пример 6.4.** Вычислить центробежный момент инерции  $I_{xy}$  для однородного стержня, расположенного под углом  $\alpha$  к оси  $x$  (рис. 6.10).

**Решение.** Поскольку оси  $x$  и  $y$  не являются осями симметрии, то центробежный момент  $I_{xy}$  не будет равен нулю. Для его вычисления воспользуемся определением (6.15) и преобразованием (6.24). Тогда

$$I_{xy} = - \sum_{k=1}^N \Delta m_k x_k y_k = - \int_V xy dm. \quad (6.28)$$

Выберем элементарный участок стержня длиной  $d\xi$ , масса которого  $dm = d\xi \cdot \rho$  ( $\rho = m/l$  — плотность единицы длины стержня — линейная плотность). Его координаты выражим через  $\xi$ :

$$x = \xi \cos \alpha, \quad y = \xi \sin \alpha.$$

Подстановка выражений для  $x$ ,  $y$ ,  $dm$  в (6.28) позволяет выполнить интегрирование по  $\xi$  от  $-l/2$  до  $l/2$ :

$$I_{xy} = - \frac{m}{l} \cos \alpha \sin \alpha \int_{-l/2}^{l/2} \xi^2 d\xi = - \frac{m}{l} \cos \alpha \sin \alpha \frac{\xi^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} =$$

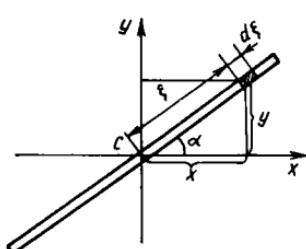


Рис. 6.10

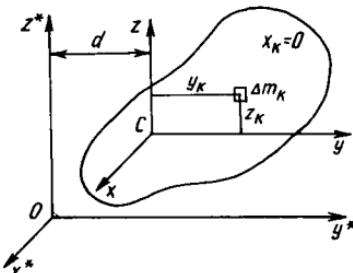


Рис. 6.11

$$= -\frac{1}{12} ml^2 \cos \alpha \sin \alpha. \quad (6.29)$$

Из выражения (6.29) следует, что оси  $x$  и  $y$  будут главными осями инерции при двух положениях стержня: при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 90^\circ$ , т. е. таких положений, когда оси  $x$  и  $y$  совпадают с осями симметрии.

**Задание 6.1.** Покажите, что центр масс тела (см. формулу (2.41)), которое находится в поле сил тяжести (вблизи поверхности Земли), совпадает с его центром тяжести, радиус-вектор которого определяется по формуле

$$\mathbf{r}_{цт} = \frac{\sum \mathbf{r}_k P_k}{\sum P_k}.$$

Здесь  $P_k$  — сила тяжести точки массой  $m_k$ .

**Указание.** Воспользуйтесь формулой (2.41) и определением силы тяжести.

**Задание 6.2. Теорема Штейнера.** Докажите теорему (6.26) для случая плоского тела (рис. 6.11), расположенного в плоскости  $yz$ .

**Указание.** Воспользуйтесь определением (6.7) для осевого момента инерции  $I_z$  и, найдя кратчайшее расстояние от элемента  $dm$  тела до оси  $Oz$ , преобразуйте полученное выражение так, чтобы в правой части появилась сумма, определяющая момент инерции относительно центральной оси  $Cz$  ( $I_{cz} = \sum \Delta m_k y_k^2$ ).

**Задание 6.3.** Тело массой  $m$  (рис. 6.12) представляет собой заштрихованную часть диска радиуса  $R$ , имеющего вырез в виде круга радиуса  $r = R/2$ . Найдите момент инерции этого тела относительно оси  $z$ , проходящей через точку  $O$  перпендикулярно к плоскости диска.

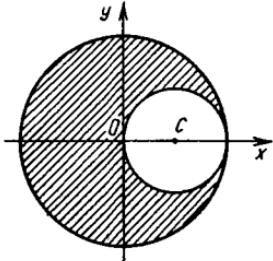


Рис. 6.12

**Указание.** Введите поверхностную плотность плоского тела и определите массы сплошного диска (без выреза) и вырезанного круга. С помощью формул (6.25) и (6.26) определите моменты инерции этих тел относительно оси  $z$ . Затем, привлекая принцип аддитивности для осевых моментов, найдите момент инерции заштрихованного тела.

**Ответ.**  $I_{Oz} = mR^2/8$ .

### 6.3. УРАВНЕНИЕ ВРАЩЕНИЯ ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОГО ЦЕНТРА $O$

**Закон об изменении момента импульса.** Уравнение (6.3) совместно с выражениями (6.19) или (6.20) для

проекций  $L_x$ ,  $L_y$  и  $L_z$  позволяет записать три уравнения в проекциях на неподвижные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^3 I_{lk} \omega_k \right) = M_l^e; l, k = 1, 2, 3 (1 \rightarrow x, 2 \rightarrow y, 3 \rightarrow z). \quad (6.30)$$

В развернутом виде эти уравнения образуют достаточно сложную систему трех уравнений

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z) = M_x^e, & I_{xx} \equiv I_x, \\ \frac{d}{dt} (I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z) = M_y^e, & I_{yy} \equiv I_y, \\ \frac{d}{dt} (I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z) = M_z^e, & I_{zz} \equiv I_z. \end{cases} \quad (6.31)$$

При вращении тела изменяется его ориентация относительно неподвижных осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и, следовательно, осевые и центробежные моменты инерции твердого тела будут изменяться во времени. Этим и определяется вся сложность системы (6.31) для ее решения в общем случае.

В настоящее время известны только три частных случая, для которых получены решения системы (6.31) в конечном виде. Они носят соответственно имена их авторов: Эйлера — Пуансо, Лагранжа — Пуассона и Ковалевской. Софья Васильевна Ковалевская (1850—1891) была первой в мире женщиной-профессором, членом-корреспондентом Петербургской академии наук, которая внесла, в частности, крупный вклад в решение задачи о движении твердого тела с одной закрепленной точкой.

Если уравнение (6.3) записать с использованием главных центральных осей тела (рис. 6.13), то вид уравнений движения сильно упрощается. Это происходит прежде всего за счет того, что центробежные моменты

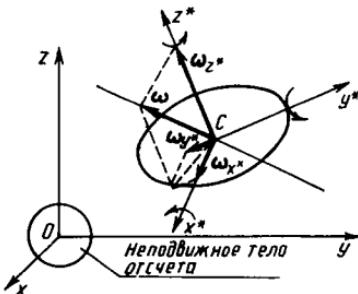


Рис. 6.13

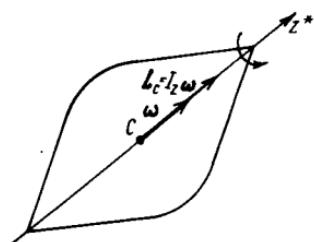


Рис. 6.14

для главных осей  $x^*, y^*, z^*$  равны нулю, а также в связи с тем, что осевые моменты относительно собственных осей материальной симметрии являются постоянными величинами.

С учетом сказанного и соотношения (6.17) для  $\mathbf{L} = \hat{\mathbf{I}}\vec{\omega}$  запишем уравнение движения тела в системе  $x^*, y^*, z^*$  ( $\vec{\omega} = \omega_x \mathbf{i}^* + \omega_y \mathbf{j}^* + \omega_z \mathbf{k}^*$ ):

$$\hat{\mathbf{I}} \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*=\text{const}} + \vec{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{M}^e, \quad \hat{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_{x^*} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y^*} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z^*} \end{pmatrix}. \quad (6.32)$$

Здесь  $\omega_x^*, \omega_y^*, \omega_z^*$  — проекции вектора  $\vec{\omega}$  на подвижные оси  $x^*, y^*, z^*$ , единичные векторы  $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*$  которых изменяются во времени за счет вращения системы координат, связанной с движущимся твердым телом (их изменение приводит к появлению второго слагаемого в левой части уравнения движения тела, которое равно векторному произведению  $\vec{\omega}$  на  $\mathbf{L}$  — см. пример 6.5).

**Гироскоп.** Быстро вращающееся вокруг собственной оси твердое тело, которое имеет одну неподвижную точку, называется *гироскопом* (рис. 6.14). Как правило, гироскопы имеют одну или несколько осей материальной симметрии, причем тело быстро вращается вокруг оси  $z^*$  с наибольшим моментом инерции  $I_{z^*}$ . Если неподвижная точка гироскопа совпадает с центром тяжести  $C$ , то момент силы тяжести относительно этой точки равен нулю и при отсутствии других внешних воздействий правая часть (6.32) обращается в нуль. Тогда уравнения движения гироскопа еще больше упрощаются и их удобно записать снова в векторной форме:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \text{const}. \quad (6.33)$$

Постоянство вектора  $\mathbf{L}$  означает, что ось вращения такого гироскопа способна сохранять свою ориентацию в пространстве. Это свойство гироскопа позволяет использовать его в качестве *гироскопического компаса*.

**Пример 6.5. Прецессия волчка в поле сил тяжести.** Рассмотрим движение симметричного волчка (рис. 6.15), который вращается вокруг собственной оси с большой угловой скоростью  $\vec{\omega}_0$  ( $\omega_0 = \text{const}$ ).

**Решение.** Собственный момент импульса симметричного волчка в этом движении направлен по угловой скорости  $\vec{\omega}_0$ :  $\mathbf{L}^{\text{соб}} = I_{z^*} \vec{\omega}_0$ . Если искомая дополнительная угловая скорость  $\Omega \ll \omega_0$ , то вектор

$\mathbf{L} \simeq I_z \cdot \vec{\omega}_0$  может изменять под действием сил только свое направление в пространстве. Это изменение определяется уравнением движения твердого тела (см. (6.3)):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}(mg) + \mathbf{M}(N). \quad (6.34)$$

Момент реакции  $\mathbf{N}$  относительно точки  $O$  равен нулю, а момент  $\mathbf{M}(mg) = \mathbf{r} \times mg$  все время направлен перпендикулярно к оси  $z^*$  и вектору  $\mathbf{L}$ .

Согласно (6.34),

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M}(mg)dt.$$

Это значит, что под действием сил тяжести момент импульса  $\mathbf{L}$  получит приращение  $d\mathbf{L}$ , направление которого соответствует повороту вектора  $\mathbf{L}$ , а следовательно, и оси  $z^*$  волчка вокруг вертикальной оси  $z$ . Вращение оси  $z^*$  волчка вокруг оси  $z$  называется *прецессионным движением*, а угловая скорость  $\vec{\Omega}$  — *скоростью прецессии*. Производная  $d\mathbf{L}/dt$  имеет смысл скорости конца вектора  $\mathbf{L}$  при его вращении вокруг оси  $z$ . Сравним это утверждение с определением скорости точки  $C$  при вращательном движении волчка:  $v_C = d\mathbf{r}/dt = \vec{\Omega} \times \mathbf{r}$ . Тогда\*

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \mathbf{L} \Rightarrow \left| \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right| = \Omega L \sin \alpha. \quad (6.35)$$

Запишем выражение для модуля момента силы  $mg$  относительно центра  $O$

$$|\mathbf{M}(mg)| = mgh = mgOC \sin \alpha. \quad (6.36)$$

Приравнивая выражения (6.35) и (6.36), получаем уравнение для определения скорости прецессии

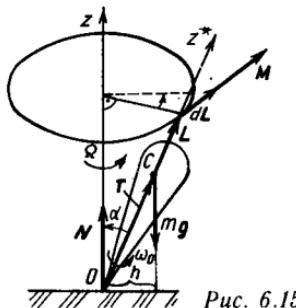


Рис. 6.15

\* Заметим, что выражение (6.35) для производной  $d\mathbf{L}/dt$  автоматически следует из левой части уравнения (6.32), если принять во внимание условие  $\Omega \ll \omega_0$ . Тогда при  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\Omega}$  ( $\omega_x = \omega_y \simeq 0$ ,  $\omega_z \simeq \omega_0 = \text{const}$ ),  $\vec{\omega} \times \mathbf{L} = \vec{\omega}_0 \times \mathbf{L} + \vec{\Omega} \times \mathbf{L} \simeq \vec{\Omega} \times \mathbf{L}$ , так как  $\vec{\omega} \times \mathbf{L} \simeq 0$  получим:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \hat{i} \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{i^*, j^*, k^*} + \vec{\omega} \times \mathbf{L} \simeq \vec{\Omega} \times \mathbf{L}.$$

$$\Omega L \sin \alpha = mgOC \sin \alpha \Rightarrow \Omega = \frac{mgOC}{I_z \omega_0}, \quad (6.37)$$

из которого следует, что угловая скорость прецессии не зависит от угла  $\alpha$  и уменьшается при увеличении угловой скорости собственного вращения волчка.

Здесь мы провели приближенный ( $\Omega \ll \omega_0$ ) анализ движения твердого тела для случая Лагранжа — Пуассона, когда центр тяжести тела не совпадает с неподвижной точкой  $O$ .

#### 6.4. ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Кинетическая энергия тела в поступательном движении.** При поступательном движении все точки твердого тела имеют одинаковые скорости. Поэтому, воспользовавшись определением (2.37) для кинетической энергии системы точек, получим

$$K^{\text{пост}} = \sum_{k=1}^N \frac{\Delta m_k v_k^2}{2} = \frac{v_c^2}{2} \sum_{k=1}^N \Delta m_k \Rightarrow K^{\text{пост}} = \frac{1}{2} m v_c^2. \quad (6.38)$$

Здесь учтено, что  $v_k = v_c$  ( $v_c$  — скорость центра масс тела).

**Кинетическая энергия при вращении тела.** Снова воспользуемся определением (2.37) и учтем, что при вращении тела вокруг неподвижной оси скорость любой точки с номером  $k$  выражается через угловую скорость и кратчайшее расстояние до оси ( $v_k = \omega R_k$ ). Тогда

$$K^{\text{вр}} = \sum_{k=1}^N \frac{\Delta m_k v_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{k=1}^N \Delta m_k R_k^2 \Rightarrow K^{\text{вр}} = \frac{1}{2} I_z \omega^2. \quad (6.39)$$

**Плоское движение тела.** В этом случае кинетическая энергия состоит из энергии поступательного движения со скоростью центра масс и энергии вращательного движения относительно центра масс:

$$K^{\text{пл.дв}} = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_{cz} \omega^2. \quad (6.40)$$

Поскольку твердое тело рассматривается как совокупность частиц массой  $\Delta m_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), то, согласно (2.50), приходим к закону изменения кинетической энергии твердого тела

$$K - K_0 = \sum_{k=1}^N A_k^e. \quad (6.41)$$

Здесь принято во внимание, что внутренние силы в случае абсолютно твердого тела не выполняют работу ( $\sum_{k=1}^N A_k^i = 0$ ). В начальном и конечном положениях кинетическая энергия  $K_0$  и  $K$  определяются по формулам (6.38) — (6.40), а работа внешних сил или их моментов вычисляется по формулам (2.18) или (2.25).

**Пример 6.6.** С наклонной плоскости высотой  $h$  скатываются без скольжения: а) обруч, б) сплошной цилиндр, в) шар (рис. 6.16, а — в). Найти скорости центров масс этих тел, которые они будут иметь, скатившись до конца плоскости, и сравнить их со скоростью, которую имело бы тело, соскальзывающее без трения по плоскости.

**Решение.** Применим закон изменения кинетической энергии. В начальном положении  $K_0 = 0$ , а в конечном положении она определяется по формуле (6.40). Учитывая, что  $\omega = v_c/R$ , получаем

$$K = m \frac{v_c^2}{2} + I_c \frac{\omega^2}{2} = m \frac{v_c^2}{2} + I_c \frac{v_c^2}{2R^2} = \left( m + \frac{I_c}{R^2} \right) \frac{v_c^2}{2}. \quad (6.42)$$

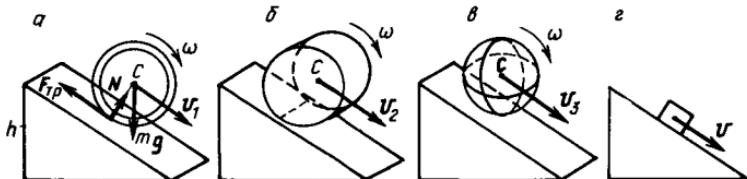


Рис. 6.16

Работа силы трения и реакции  $N$  равна нулю, так как эти силы приложены к неподвижной точке колеса (точка касания с шероховатой плоскостью). Работа силы  $mg$  равна  $mgh$ . Тогда закон (6.41) примет следующий вид

$$\left( m + \frac{I_c}{R^2} \right) \frac{v_c^2}{2} = mgh. \quad (6.43)$$

В результате находим скорость центра масс скатывающегося тела

$$v_c = \sqrt{\frac{2ghR^2}{I_c + mR^2}}.$$

Для обруча ( $I_c = mR^2$ ), цилиндра ( $I_c = mR^2/2$ ) и шара ( $I_c = 2mR^2/5$ ) получим соответственно

$$v_{c1} = \sqrt{gh}, \quad v_{c2} = 2\sqrt{gh/3}, \quad v_{c3} = \sqrt{10gh/7}.$$

Если тело соскальзывает по абсолютно гладкой поверхности (см. рис. 6.16, г), то в уравнении (6.43) нужно исключить слагаемое, которое учитывает кинетическую энергию вращательного движения. Тогда получим

$$m \frac{v^2}{2} = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}.$$

Найденные скорости удовлетворяют соотношению

$$\frac{v_1}{v} : \frac{v_2}{v} : \frac{v_3}{v} = 1,41 : 1,23 : 1,18.$$

**Задание 6.4.** Установите связь между полярным моментом инерции тела  $I_O = \sum_{k=1}^N \Delta m_k r_k^2$  ( $r_k$  — модуль радиуса-вектора материальной точки массой  $\Delta m_k$ ,  $O$  — начало координат) и осевыми моментами инерции  $I_x$ ,  $I_y$  и  $I_z$ .

**Указание.** Воспользуйтесь определением (6.7) и выразите расстояния от материальной точки массой  $\Delta m_k$  до осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и начала координат  $O$  через координаты  $x_k$ ,  $y_k$  и  $z_k$  (см. также (6.14)).

**Ответ.** Полярный момент инерции тела  $I_O = (I_x + I_y + I_z)/2$ .

**Задание 6.5.** Определите осевой момент инерции  $I_v$  выделенного элементарного объема  $\Delta V$  твердого тела, положение которого задано координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (точка  $M$  на рис. 6.17) и установите его связь с осевыми и центробежными моментами инерции (см. (6.14) и (6.15)).

**Указание.** Найдите проекцию вектора  $OM = OA + OB + OC$  на ось  $v$ , а затем определите кратчайшее расстояние от точки  $M$  до оси  $v$ :

$$h^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2.$$

Далее домножьте первое выражение в круглых скобках на величину  $(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$ , равную единице, и соберите коэффициенты при квадратах косинусов углов ( $\cos^2 \alpha$ ,  $\cos^2 \beta$ ,  $\cos^2 \gamma$ ) и при смешанных произведениях этих косинусов ( $\cos \alpha \cos \beta$ ,  $\cos \beta \cos \gamma$ ,  $\cos \gamma \cos \alpha$ ).

**Ответ.** Осевой момент относительно произвольной оси  $v$  вычисляется по формуле

$$I_v = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma + 2(I_{xy} \cos \alpha \cos \beta + I_{yz} \cos \beta \cos \gamma + I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha). \quad (6.44)$$

Если выразить направляющие косинусы углов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  через координаты точки  $P$  на оси  $v$  (см. рис. 6.6, б и рис. 6.18), то выражение (6.44) преобразуется к уравнению, определяющему эллипсоид инерции:

$$I_x X^2 + I_y Y^2 + I_z Z^2 - 2I_{xy}XY - 2I_{yz}YZ - 2I_{zx}ZX = 1. \quad (6.45)$$

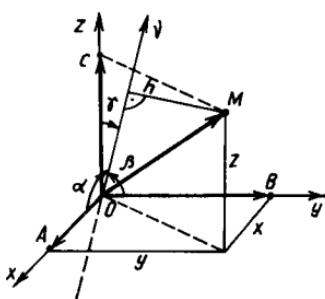


Рис. 6.17

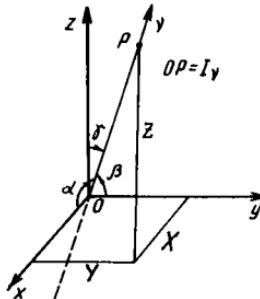


Рис. 6.18

Если оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  будут центральными и главными (см. рис. 6.6), то уравнение (6.45) для твердого тела упростится ( $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$ ):

$$I_x X^2 + I_y Y^2 + I_z Z^2 = 1$$

и будет определять эллипсоид инерции, который изображен на рис. 6.6.

Многие явления, относящиеся к теории звука и колебаний, столь примечательны и занятны, что труд их исследователя будет сторицей вознагражден тем удовлетворением, которое он при этом получит.

Томас Юнг

## 7. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

**Место колебательного движения в природе и технике.** Колебания точки, тела или механической системы являются частной ситуацией механического движения, в которой динамическое поведение объектов определяется конкретным видом силовых воздействий. Поэтому сразу же возникает вопрос, почему динамика колебательного движения не рассматривалась в соответствующих главах, посвященных динамике точки или системы (см. гл. 2) и твердого тела (см. гл. 6), и почему ей отводится отдельная глава?

Дело в том, что колебательные процессы очень широко распространены в природе и технике. Они буквально «окруждают» нас, присутствуют в микро- и макромире. Образно выражаясь, можно сказать, что все мы живем в море разнообразных колебательных и волновых процессов механической и другой природы. Поэтому перед инженерами самых разных областей современной техники возникают задачи по целенаправленному использованию таких процессов или по отысканию способов борьбы с возможными опасными последствиями воздействия их на человека, приборы, конструкции, машины и механизмы. Именно это и определяет то особое место, которое занимают теоретические и экспериментальные исследования колебательных и волновых процессов в курсе общей физики вузов. Они последовательно проходят красной нитью из раздела в раздел и образуют цепочку из механических, электромагнитных и световых (оптических) волновых процессов. Хотя механические и электромагнитные волновые процессы имеют разную физическую природу, однако общий математический аппарат, используемый при их описании, вскрывает их «внутреннее

математическое родство». В связи с этим изучение достаточно наглядных механических колебательных, а затем и волновых процессов в упругих средах приведет к приобретению знаний, позволяющих выявить ряд формальных аналогий, которые окажутся полезными при рассмотрении свойств электромагнитных волн и оптических явлений.

Приступая к исследованию механических колебаний, дадим краткую их классификацию. По определению, движение материального объекта, обладающее той или иной степенью повторяемости во времени, называется *колебательным движением* (или просто *колебаниями*). Если они совершаются в системе за счет первоначально сообщенной энергии и без внешних воздействий, то их называют *свободными*. При наличии сил вязкого сопротивления или трения колебания называются *затухающими*. Колебания, возникающие в результате действия внешних (возмущающих) переменных во времени сил, называются *вынужденными*. *Гармоническими колебаниями* называются колебания, при которых физические величины, их описывающие, изменяются по закону синуса или косинуса. В противном случае колебания называются *ангармоническими*, т. е. негармоническими.

## 7.1. СВОБОДНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

**Одномерный осциллятор.** В случае прямолинейных свободных гармонических колебаний точки ее координата  $x$  изменяется по закону (одна степень свободы):

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (7.1)$$

где  $A$  — амплитуда координаты,  $\omega_0$  — циклическая частота,  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  — период колебаний,  $\varphi_0$  — начальная фаза,  $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$  — фаза колебаний.

Проекции скорости и ускорения колеблющейся точки на ось  $x$  определяются соотношениями:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A_v \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2), \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) = \\ &= A_a \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi), \end{aligned}$$

где  $A_v = A\omega_0$  — амплитуда скорости,  $A_a = A\omega_0^2$  — амплитуда ускорения.

На рис. 7.1 представлены графики зависимости коор-

динаты  $x$ , скорости  $v_x$  и ускорения  $a_x$  точки, совершающей свободные гармонические колебания. Анализируя эти зависимости, отметим, что значения проекций скорости и ускорения точки также изменяются гармонически, причем фазы скорости и ускорения опережают фазу координаты соответственно на  $\pi/2$  и  $\pi$ . Это означает, что графики  $v_x$  и  $a_x$  сдвинуты в отрицательном направлении оси времени  $t$  на  $T_0/4$  и  $T_0/2$ . Поэтому, если координата  $x = 0$ , то  $v_x$  принимает максимальное по модулю значение, а  $a_x$  также равно нулю. Если же координата  $x$  максимальна, то  $v_x = 0$ , а проекция  $a_x$  минимальна и наоборот.

Проекция результирующей силы, действующей на колеблющуюся материальную точку массой  $m$ , определяется с помощью второго закона Ньютона:

$$F_x = ma_x = -m\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -m\omega_0^2 x. \quad (7.3)$$

Из уравнения (7.3) следует, что координата  $x = 0$  определяет положение равновесия точки ( $F_x = 0$ ), а при  $x \neq 0$  сила  $F$  пропорциональна смещению  $x$  из положения равновесия и направлена в сторону, противоположную этому смещению, т. е. к положению равновесия. Это значит, что такая сила все время стремится вернуть точку в положение равновесия:

$$F_x = -kx \text{ — возвращающая сила,}$$

$$k = m\omega_0^2 \text{ — коэффициенты пропорциональности.}$$

(7.4)

Точка, колеблющаяся под действием возвращающей силы (7.4), называется линейным осциллятором. Ее динамическое поведение описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$ma_x = F_x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \text{ — дифференциальное уравнение линейного осциллятора,}$$

$$\omega_0 = \sqrt{b/m} \text{ — циклическая частота осциллятора,}$$

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ — закон движения осциллятора.}$$

(7.5)

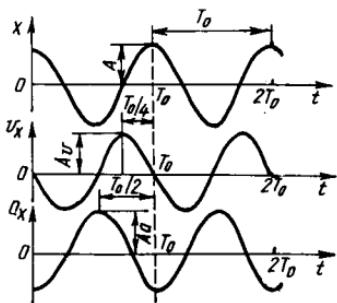


Рис. 7.1

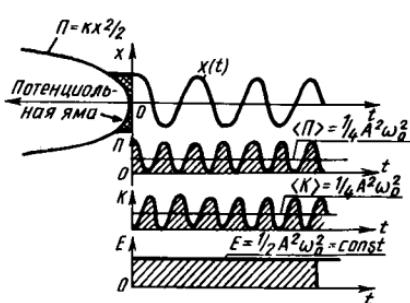


Рис. 7.2

### Кинетическая энергия линейного осциллятора

$$\begin{aligned} K &= m \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} mA^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= \frac{m}{4} A^2 \omega_0^2 [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Потенциальную энергию осциллятора наиболее удобно отсчитывать от положения равновесия (т. е. координата  $x = 0$  соответствует нулевому уровню для потенциальной энергии). Тогда для произвольного положения точки с координатой  $x$  по определению (4.2) получим (см. также (4.7))

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_x^0 F_x dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= \frac{m}{4} A^2 \omega_0^2 [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Полная механическая энергия осциллятора сохраняется, поскольку

$$E = K + \Pi = \frac{1}{2} mA^2 \omega_0^2 = \text{const.} \quad (7.8)$$

Зависимости  $x$ ,  $\Pi$ ,  $K$  и  $E$  от времени  $t$ , представленные на рис. 7.2, соответствуют случаю, когда начальная фаза  $\varphi_0 = 0$ . Согласно (7.6) и (7.7), средние значения кинетической и потенциальной энергий определяются соответственно средними значениями квадратов синуса  $\varphi$  и косинуса  $\varphi$  при изменении фазы  $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$  на  $2\pi$ . Поскольку  $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ ,

$$\langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{2}, \quad (7.9)$$

то для средних значений энергий К и П получим, что

$$\langle K \rangle = \langle P \rangle = \frac{1}{4} m A^2 \omega_0^2 = E/2.$$

Таким образом, из проведенного анализа следует, что К и П изменяются относительно своих средних значений по гармоническому закону с частотой  $2\omega_0$  и амплитудой, равной  $A^2\omega_0^2/4$ . В заключение отметим, что гармонические колебания осциллятора происходят в окрестности минимума параболической потенциальной ямы.

Рассмотрим далее несколько простейших систем с одной степенью свободы, совершающих свободные гармонические колебания и являющихся примерами одномерных осцилляторов.

**Пример 7.1.** Изучим движение пружинного маятника, представляющего собой материальную точку массой  $m$ , подвешенную на пружине жесткостью  $k$  (рис. 7.3).

**Решение.** В произвольном положении  $M$  на точку действует сила тяжести  $mg$  и сила упругости  $F_{упр} = k(\lambda_{ст} + x)$ , где  $\lambda_{ст}$  — статическая деформация в состоянии равновесия.

На основании второго закона Ньютона запишем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось  $x$  (начало координат совмещено с положением статического равновесия, в котором сила тяжести уравновешивается силой упругости, равной  $k\lambda_{ст}$ ):

$$ma_x = mg - k(\lambda_{ст} + x) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (7.10)$$

Из сравнения с уравнением (7.5) для гармонических колебаний следует, что колебания пружинного маятника происходят по закону  $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ , где частота  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , а амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varphi_0$  находятся с помощью начальных условий (по значениям координаты  $x_0$  и скорости  $v_0$  в начальный момент  $t = 0$ ).

**Пример 7.2.** Составим дифференциальное уравнение движения математического маятника, состоящего из материальной точки массой  $m$ , укрепленной на невесомой нити длиной  $l$  (рис. 7.4).

**Решение.** Второй закон Ньютона в проекции на касательную  $\tau$  имеет вид

$$ma_\tau = -mg \sin \alpha \Rightarrow \frac{dv_\tau}{dt} = -g \sin \alpha. \quad (7.11)$$

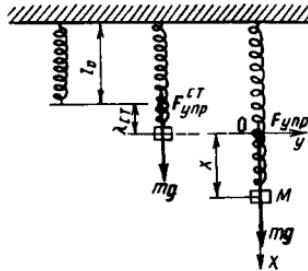


Рис. 7.3

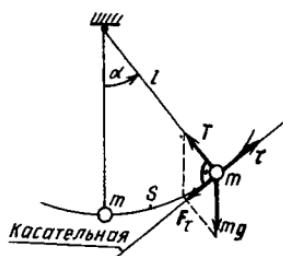


Рис. 7.4

В случае малых отклонений от положения равновесия, когда  $\sin \alpha \approx \alpha$ , получим дифференциальное уравнение осциллятора ( $v_r = ds/dt$ ,  $\alpha = s/l$ ):

$$\ddot{s} + \frac{g}{l}s = 0, \Rightarrow s = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad \omega_0 = \sqrt{g/l}, \quad T_0 = 2\pi/\omega_0. \quad (7.12)$$

Следует отметить, что в данном случае точка массой  $m$  движется по дуге окружности под действием касательной составляющей  $F_t = -mg \sin \alpha$ . В случае малых колебаний она оказывается пропорциональной дуговой координате  $s$  ( $F_t = -mg\alpha = -ks$ ,  $k = mg/l$ ), т. е. совпадает по виду с упругой силой  $F = kx$  в законе Гука и потому называется *квазиупругой силой*\*. Таким образом, причиной появления возвращающей силы в системе могут быть не только силы упругости, а и другие силы, например сила тяжести при наличии связи в виде нити длиной  $l$  в случае математического маятника.

**Пример 7.3.** Рассмотрим малые колебания физического маятника и найдем его приведенную длину  $L$ .

*Физическим маятником* называется твердое тело (рис. 7.5, a), имеющее неподвижную горизонтальную ось вращения, не проходящую через его центр тяжести, и находящееся под действием только силы тяжести (и реакции опоры — оси  $O$ ).

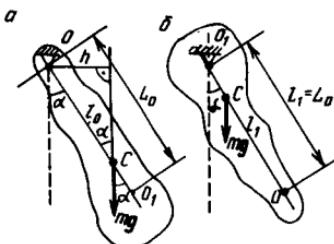


Рис. 7.5

**Решение.** Поскольку имеем дело с вращательным движением тела, то воспользуемся основным уравнением вращательного движения (см. (6.9)) или, что то же самое, законом изменения момента импульса тела (см. (2.48)) в проекции на горизонтальную ось вращения — ось  $x$  (ось  $x$  проходит через точку  $O$  перпендикулярно к плоскости рисунка):

$$I_x \frac{d\omega}{dt} = -mgl_0 \sin \alpha.$$

В случае малых колебаний ( $\sin \alpha \approx \alpha$ ) получим уравнение осциллятора для вращательного движения ( $d\omega/dt = \ddot{\alpha}$ ):

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl_0}{I_x} \alpha = 0. \quad (7.13)$$

Его решение имеет следующий вид:

$$\alpha = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad \omega_0 = \sqrt{mgl_0/I_x}. \quad (7.14)$$

\* От лат. quasi — якобы, как будто.

Из полученного решения следует, что при малых отклонениях от равновесия физический маятник совершает свободные гармонические колебания с циклической частотой  $\omega_0$  и периодом

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_x}{mg l_0}}. \quad (7.15)$$

Введем приведенную длину физического маятника, определив ее как длину  $L_0$  такого математического маятника, который совершает колебания с той же частотой, что и физический маятник. Приравнивая частоты  $\omega_0$  из (7.12) и (7.14), получаем

$$\frac{g}{L_0} = \frac{mgl_0}{I_x}$$

и, используя теорему Штейнера (см. 6.26)), находим приведенную длину  $L_0$  и период  $T_0$  для данного физического маятника:

$$L_0 = \frac{I_x}{ml_0} = \frac{I_{cx} + ml_0^2}{ml_0} = l_0 + \frac{I_{cx}}{ml_0}, \quad T_0 = 2\pi \sqrt{L_0/g}. \quad (7.16)$$

Отложим от точки  $O$  вдоль линии  $OC$  расстояние, равное приведенной длине  $L_0$  физического маятника. Получим точку  $O_1$ , которая лежит ниже центра масс ( $L_0 > l_0$ ) и называется центром качаний маятника. Перевернем маятник и закрепим его так, чтобы центр качаний  $O_1$  стал новой точкой подвеса (рис. 7.5, б). Найдем приведенную длину  $L_1$  для этого случая:

$$L_1 = \frac{I_{x1}}{ml_1} = \frac{I_{cx} + ml_1}{ml_1} = \frac{I_{cx} + m(L_0 - l_0)^2}{m(L_0 - l_0)}.$$

Поскольку в соответствии с (7.16)

$$L_0 - l_0 = I_{cx}/ml_0,$$

то для приведенной длины  $L_1$  получим выражение

$$L_1 = \frac{I_{cx} + m(I_{cx}/ml_0)^2}{mI_{cx}/ml_0} = \frac{I_{cx}}{ml_0} + l_0,$$

которое в точности совпадает с выражением (7.16) для  $L_0$ . Равенство приведенных длин ( $L_1 = L_0$ ) означает, что будут равными и периоды колебаний маятников (см. формулу (7.16) для  $T_0$ ) с точками подвеса в точке  $O$  и в соответствующем ей центре качаний  $O_1$  ( $T_1 = T_0$ ). Это свойство физического маятника демонстрируется с помощью так называемого *оборотного маятника*, который служит, в частности, для определения ускорения свободного падения в данной точке поверхности Земли. Для этого нужно на опыте измерить период  $T_0$ , приведенную длину  $L_0$  и воспользоваться формулой (7.16) для периода  $T_0$ . Тогда ускорение  $g$  найдем по формуле  $g = 4\pi^2 L_0/T_0^2$ .

**Пример 7.4.** Исследуем движение атомов в двухатомной молекуле разреженного газа при ее свободном движении между двумя последовательными соударениями с другими молекулами газа. Это частный случай «проблемы двух тел», под которой подразумевают задачу решения системы дифференциальных уравнений движения двух взаимодействующих точечных объектов\*.

\* Решение этой проблемы состоит в том, что задачу о движении двух взаимодействующих материальных точек удается в общем случае свести к задаче о движении одной точки во внешнем поле. Следует заметить, что проблема трех и более тел не имеет такого решения!

**Решение.** На рис. 7.6 изображено произвольное положение молекулы, состоящей из двух взаимодействующих атомов массами  $m_1$  и  $m_2$ . С помощью второго закона Ньютона запишем уравнения движения для каждого из атомов молекулы ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ):

$$\left. \begin{array}{l} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}) \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}) \end{array} \right\} \text{система связанных уравнений в проблеме двух тел.} \quad (7.17)$$

Поскольку  $\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r})$ , то после сложения этих уравнений и использования выражения для радиуса-вектора центра масс молекулы (см. (2.41))

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

получим дифференциальное уравнение

$$(m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{r}}_C = 0. \quad (7.18)$$

Его решение определяет равномерное и прямолинейное движение центра масс молекулы в пространстве (три степени свободы):

$$\ddot{\mathbf{r}}_C = 0, \mathbf{v}_C = \text{const}, \mathbf{r}_C = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_C t. \quad (7.19)$$

Далее разделим первое уравнение (7.17) на  $m_1$ , второе — на  $m_2$ , а затем из второго вычтем первое. Получим

$$\ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m_2} \mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}) - \frac{1}{m_1} \mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}) \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}). \quad (7.20)$$

Если ввести, как и ранее (см. формулу (4.23)), обозначение  $1/\mu$  для коэффициента в правой части (7.20), то приходим к уравнению движения атомов относительно друг друга ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ):

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ — приведенная масса.} \quad (7.21)$$

Из выражения (7.21) следует, что вектор  $\mathbf{r}$  взаимного расположения атомов изменяется так, как изменялся бы радиус-вектор точки с массой  $m = \mu$  под действием силы  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ , равной силе взаимодействия атомов в молекуле ( $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_{21}(\mathbf{r})$ ).

При решении уравнения (7.21) помимо инерциальной системы  $x_1y_1z_1$  удобно ввести подвижную систему  $xyz$ , одна из осей которой

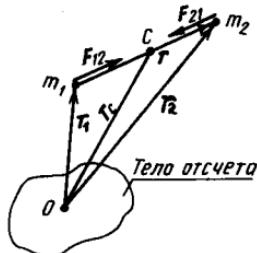


Рис. 7.6

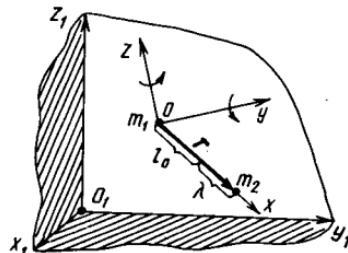


Рис. 7.7

(ось  $x$ ) совпадает с направлением вектора  $\mathbf{r}$  (рис. 7.7). Сейчас движение, описываемое уравнением (7.21), можно рассматривать как сложное, состоящее из относительного движения вдоль оси  $x$  (одна колебательная степень свободы при наличии квазиупругой связи между атомами) и переносного вращательного движения вокруг осей  $y$  и  $z$  (две вращательные степени свободы). Всего у двухатомной молекулы с деформируемой химической связью будет шесть степеней свободы.

Далее учтем, что потенциальная энергия двухатомной молекулы, например кислорода  $O_2$ , в линейном приближении аппроксимируется параболической зависимостью (см. § 14.3), т. е.  $\Pi = k\lambda^2/2$ , где  $\lambda = l - l_0$  — деформация химической связи. Проекция силы  $F_{21}$  на ось  $x$  определяется градиентом потенциальной энергии  $\Pi(\lambda)$ :

$$F_x = - \frac{\partial \Pi}{\partial x} = - \frac{d\Pi}{d\lambda} = -k\lambda. \quad (7.22)$$

Это означает, что в рассматриваемом линейном приближении атомы в молекуле взаимодействуют посредством квазиупругих возвращающих сил (см. (7.4)).

Спроектировав (7.21) на ось  $x$  и учитывая (7.22), получим дифференциальное уравнение осциллятора (координата  $x = l = l_0 + \lambda$ ,  $\ddot{x} = \ddot{\lambda}$ ):

$$\ddot{\lambda} + \frac{k}{\mu} \lambda = 0, \omega_0 = \sqrt{k/\mu}, T_0 = 2\pi\sqrt{\mu/k}. \quad (7.23)$$

**Задание 7.1.** Изучите движение тела с моментом инерции  $I_z$ , которое закреплено на двух упругих нитях с крутильной жесткостью  $k_{kp}$  (рис. 7.8).

**Указание.** Воспользуйтесь основным уравнением вращательного движения (см. (6.9)) и законом Гука для деформации кручения (см. гл. 3).

**Ответ.** Тело совершает крутильные (вращательные) колебания с собственной частотой  $\omega_0 = \sqrt{2k_{kp}/I_z}$ .

**Задание 7.2.** При преобразовании уравнения (7.21) к уравнению (7.23) сознательно допущена неточность принципиального характера, связанная с переходом от описания движения в инерциальной системе  $x_1y_1z_1$  к его описанию в неинерциальной системе  $x_2y_2z_2$ . После обнаружения этой ошибки составьте строгие уравнения колебательного и вращательного движения молекулы, которая в начальный момент времени (сразу после соударения) имела следующие начальные кинематические характеристики и начальную ориентацию в пространстве (рис. 7.9):

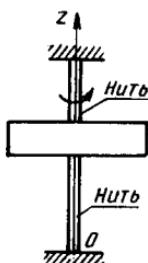


Рис. 7.8

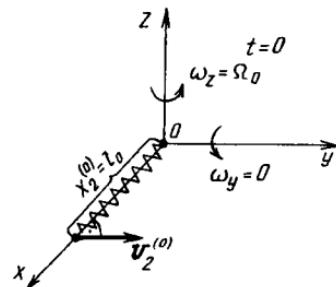


Рис. 7.9

$$x_2^{(0)} = l_0, \quad y_2^{(0)} = z_2^{(0)} = 0, \quad v_1^{(0)} = 0, \quad v_2^{(0)} = \Omega_0 l_0. \quad (7.24)$$

**Указание.** Найдите значения координат и скорости для точки  $M$  с приведенной массой  $\mu$  и радиусом-вектором  $r = r_2 - r_1$ . Затем изобразите ее на отдельном рисунке (рис. 7.10) в новом положении системы  $xyz$ . Эта воображаемая точка с массой  $\mu$  движется в неинерциальной (вращающейся) системе координат. Поэтому следует приложить силы инерции и принять во внимание сохранение момента импульса  $L_0$  (точка  $\mu$  движется в центральном силовом поле и, следовательно,  $L_0 = \text{const}$ ).

**Ответ.** Система уравнений движения точки с массой  $\mu$  имеет следующий вид ( $\omega_x = \omega_y = 0, x = l_0 + \lambda, \omega_z = \dot{\varphi}$ ):

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_0 l_0 = \omega_z x, \\ \mu \ddot{x} = -k(x - l_0) + \mu \omega_z^2 x \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} \omega_z &= \frac{\Omega_0 l_0}{l_0 + \lambda}, \\ \mu \ddot{\lambda} + k\lambda &= \frac{\mu \Omega_0^2 l_0^2}{l_0 + \lambda}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Поскольку  $\omega_z$  зависит от  $\lambda$ , то можно утверждать, что вращательное движение молекулы как целого оказывается на колебательном движении ее атомов. Эти колебания не являются чисто гармоническими в связи с присутствием в правой части слагаемого  $\mu \Omega_0^2 l_0^2 / (l_0 + \lambda)$ , соответствующего некоторому эффективному отталкиванию (см. ангармонические колебания, § 7.5).

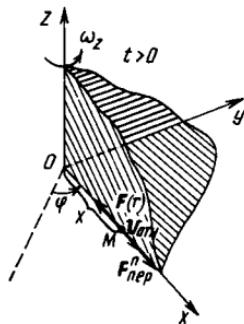


Рис. 7.10

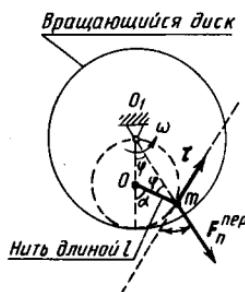


Рис. 7.11

**Задание 7.3.** Составьте уравнение движения и определите период малых колебаний математического маятника в поле центробежных сил, т. е. в системе, связанной с равномерно вращающимся диском радиуса  $R$ , к точке  $O$  которого с помощью нити длиной  $l = OO_1$  прикреплена материальная точка массой  $m$ . Диск расположен горизонтально (рис. 7.11). Трением пренебречите.

**Указание.** Запишите выражение для переносной силы инерции  $F_n^{\text{пер}}$  и, вычислив проекцию этой силы на касательную к траектории точки (ось  $t$ ), составьте уравнение относительного движения маятника. В расчетах следует учесть, что углы  $\alpha$  и  $\varphi$  малы (см. пример 7.2).

**Ответ.**  $\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0$  — уравнение движения маятника в поле центробежных сил,  $\omega_0 = \omega$  — частота колебаний,  $T_0 = 2\pi/\omega$  — период колебаний.

## 7.2. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ И ЧАСТОТНЫЙ СПЕКТР СЛОЖНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ

**Двумерный осциллятор.** Сложение колебаний представляет собой задачу по отысканию закона результирующего движения объекта, участвующего в нескольких колебательных движениях.

В задании 1.1 было рассмотрено сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковых частот ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ). Получено уравнение траектории результирующего движения (см. (1.29))

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \varphi_0 = \sin^2 \varphi_0, \quad \varphi_0 — \text{разность фаз}, \quad (7.26)$$

которая представляет собой в общем случае эллипс (рис. 7.12, а). Визуально траекторию (7.26) обычно наблюдают на экране осциллографа, электронный луч которого участвует одновременно в двух колебательных движениях (по осям  $x$  и  $y$ ):

$$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{— уравнения двумер-} \\ \text{ного осциллятора.} \end{array} \quad (7.27)$$

Уравнения (7.27) определяют так называемые **эллиптически поляризованные колебания** ( $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$ ), причем ориентация осей эллипса и его размеры зависят от соотношения амплитуд  $A_1$  и  $A_2$ , а также разности фаз  $\varphi_0$  (см. рис. 7.12, а).

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1. Пусть  $\varphi_0 = m\pi$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). В данном случае эллипс (7.26) вырождается в отрезок прямой  $y = \pm \frac{A_2}{A_1}x$ , где знак «плюс» соответствует четным, а знак «минус» — нечетным  $m$  (рис. 7.12, б). Точка в этом случае движется вдоль прямой, составляющей с осью  $x$  угол

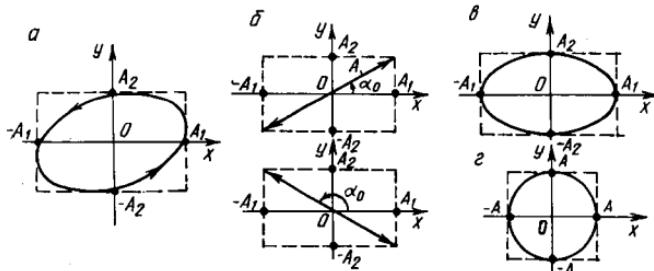


Рис. 7.12

$\alpha_0$ . Результирующее движение является линейным гармоническим колебанием с частотой  $\omega$  и амплитудой  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ . Такие колебания называются *линейно-поляризованными колебаниями* (линейный осциллятор).

2. В случае, если  $\varphi_0 = (2m+1)\frac{\pi}{2}$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), то уравнение (7.26) упрощается и приобретает следующий вид:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1. \quad (7.28)$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями системы координат (рис. 7.12, в), а полуоси равны соответствующим амплитудам. Если  $A_1 = A_2$ , то эллипс вырождается в окружность (рис. 7.12, г). Такие колебания называются колебаниями, *поляризованными по кругу*. Если частоты двух складываемых колебаний не одинаковы, но кратны друг другу, то траектория результирующего движения имеет в общем случае вид достаточно сложных замкнутых кривых, которые называются *фигурами Лиссажу* (рис. 7.13).

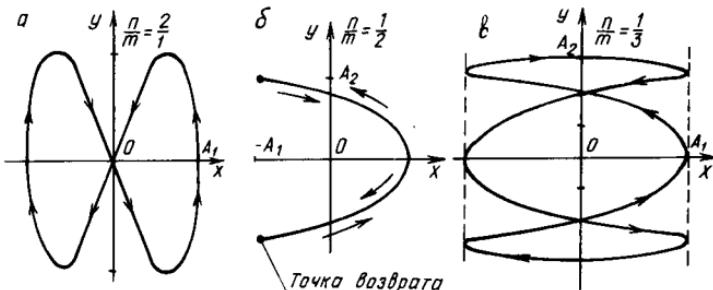


Рис. 7.13

**Задание 7.4.** Двумерный осциллятор определяется следующими уравнениями:

$$x = A_1 \cos m\omega t, \quad y = A_2 \cos (n\omega t + \varphi_0). \quad (7.29)$$

Постройте в масштабе фигуры Лиссажу для трех случаев, когда отношение  $n/m$  равно  $2:1, 1:2, 1:3$ , а разность фаз  $\varphi_0 = -\pi/2$ .

**Ответ.** На рис. 7.13 в качестве примера схематично изображена траектория (фигура Лиссажу) двумерного осциллятора для случая, когда  $n/m = 2/1$  (см. рис. 7.13, а),  $n/m = 1/2$  (см. рис. 7.13, б),  $n/m = 1/3$  (см. рис. 7.13, в).

**Сложение колебаний одинакового направления.** Сложение двух гармонических колебаний одинакового на-

правления с близкими частотами ( $\omega_1 = \omega$ ,  $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$ ,  $\Delta\omega \ll \omega$ ):

$$x_1 = A \cos \omega t, \quad x_2 = A \cos (\omega + \Delta\omega) t \quad (7.30)$$

приводит, как мы знаем, к явлению **биения** (см. задание 1.8), которое характеризуется периодической пульсацией амплитуды  $A(t)$  результирующего гармонического колебания частотой  $\omega$ :

$$x = x_1 + x_2 = A(t) \cos \omega t, \quad A(t) = 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t. \quad (7.31)$$

На рис. 7.14 изображено движение, которое получается при  $\omega = 4,5\Delta\omega$ . Поскольку  $\Delta\omega \ll \omega$ , то период биений амплитуды  $T_b = 4\pi/\Delta\omega$  много больше, чем период  $T = 2\pi/\omega$  гармонических колебаний (в данном случае в 9 раз —  $T_b = 9T$ ).

Сложение колебаний одинаковых направлений с равными частотами ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ) приведет к результирующему гармоническому колебанию той же частоты (см. задание 1.9), причем его амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\alpha$ , найденные с помощью векторной диаграммы, определяются выражениями (1.45) и (1.46). Отсюда можно сделать вывод о том, что сложение нескольких (трех, четырех и т. д.) гармонических колебаний одинаковой частоты вновь приводит к гармоническому колебанию той же частоты.

**Спектр частот колебательного движения.** На рис. 7.15, б представлено результирующее движение, полученное при сложении двух колебаний с разными частотами ( $\omega_1 = \omega$ ,  $\omega_2 = 4\omega$ , рис. 7.15, а). Оно представляет собой сложное периодическое движение с частотой, равной наименьшей из частот складываемых колебаний. В общем случае при сложении нескольких колебаний с кратными частотами ( $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$  и т. д.) получается достаточно сложное периодическое колебание с периодом  $T = 2\pi/\omega$ ,

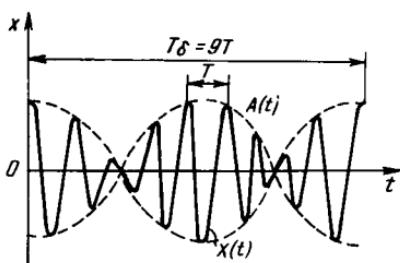


Рис. 7.14

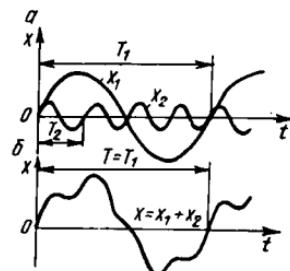


Рис. 7.15

который совпадает с периодом гармоники наименьшей частоты (наибольшего периода).

Справедливо и обратное утверждение. Любое сложное периодическое движение  $x(t) = x(t + T)$  с периодом  $T$  можно представить в виде суммы простых гармоник с частотами, кратными основной частоте  $\omega = 2\pi/T$ . Оказывается, что разложение  $x(t)$  по гармоникам имеет следующий вид:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \frac{a_0}{2} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \alpha_n). \quad (7.32)$$

Оно представляет ряд Фурье, который лежит в основе гармонического анализа периодических функций, в частности колебаний. Совокупность частот  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$  и т. д. образует спектр частот исследуемого сложного колебания. Заметим, что в случае сложных периодических движений спектр частот дискретный, а для непериодической функции получается непрерывный (сплошной) спектр частот. Тогда ряд Фурье превращается в интеграл Фурье по частотам этого спектра.

### 7.3. ЗАТУХАЮЩИЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

**Осциллятор с диссипацией энергии.** Затухающими механическими колебаниями называются колебания, амплитуда которых непрерывно уменьшается вследствие потерь механической энергии реальной колебательной системы. *Диссипация* (лат. dissipatio — рассеяние) энергии  $E = K + P$  обязана наличию сил сопротивления среды движению осциллятора. В случае малых отклонений от положения равновесия и малых скоростей движение осциллятора определяется возвращающей силой  $F_b = -kx$  и силой сопротивления Стокса  $F_c = -\mu v$ . В связи с этим дифференциальное уравнение движения будет иметь следующий вид:

$$ma_x = -kx - \mu v_x \Rightarrow \ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (7.33)$$

Здесь  $\beta = \mu/2m$  — коэффициент затухания, а  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  — частота свободных гармонических колебаний (без сопротивления). В случае малого сопротивления,

когда  $\beta < \omega_0$ , корни характеристического уравнения для (7.33) являются комплексными (см. задание 7.6). Тогда решение дифференциального уравнения (7.33) будет содержать показательную ( $e^{-\beta t}$ ) и гармоническую функцию частоты ( $\omega \neq \omega_0$ ):

$$x = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0) = A(t) \cos(\omega t + \alpha_0), \quad (7.34)$$

где  $A(t) = A e^{-\beta t}$  — амплитуда затухающих колебаний,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  — циклическая частота этих колебаний,  $A$  и  $\alpha_0$  — постоянные интегрирования, которые находятся с помощью начальных условий.

В том, что (7.34) является решением дифференциального уравнения (7.33), можно убедиться путем его подстановки в (7.33), что и следует сделать при выполнении задания 7.5.

На рис. 7.16 зависимость  $A(t) = A e^{-\beta t}$  представлена пунктирной, а  $x = A(t) \cos(\omega t + \alpha_0)$  — сплошной линиями.

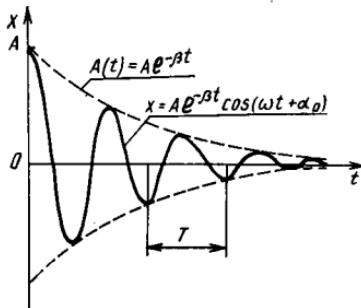


Рис. 7.16

**Период, декремент и добротность.** Затухающие колебания представляют собой, вообще говоря, непериодические колебания, так как в этом случае не повторяются максимальные значения смещения, скорости и ускорения осциллятора. Однако если затухание мало, то можно условно пользоваться понятием периода как промежутка времени между двумя последовательными максимумами (минимумами) колеблющейся физической величины. Тогда период затухающих колебаний определяется выражением

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (7.35)$$

Логарифм отношения амплитуд  $A(t_1)$  и  $A(t_1 + T)$  двух последовательных колебаний, отличающихся на период  $T$ ,

называются *логарифмическим декрементом затухания*:

$$\delta = \ln \frac{A(t_1)}{A(t_1 + T)} \ln \frac{A_1 e^{-\beta t_1}}{A_1 e^{-\beta(t_1 + T)}} = \beta T. \quad (7.36)$$

Промежуток времени  $\tau$ , в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз, называется *временем релаксации амплитуды* (понятие релаксации рассмотрено в примере 2.2). Тогда

$$e = \frac{A(t_1)}{A(t_1 + \tau)} = e^{\beta \tau} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}. \quad (7.37)$$

Найдем далее число полных  $N_\tau$  колебаний за время релаксации  $\tau$ :

$$N_\tau = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T}. \quad (7.38)$$

*Добротность*  $Q$  колебательной системы определяется следующим выражением:

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} = \pi N_\tau. \quad (7.39)$$

Согласно (7.39), добротность  $Q$  характеризует степень затухания колебаний при наличии сопротивления, а значит, и диссипацию энергии осциллятора во времени.

**Задание 7.5.** Путем прямой подстановки выражения (7.34) в дифференциальное уравнение (7.33) покажите, что оно является решением этого уравнения в том случае, если  $\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2$ .

**Указание.** Вычислите вначале первую и вторую производные от координаты  $x$ , а затем подставьте (7.34) и полученные выражения для  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$  в уравнение (7.33). Далее, после сокращений, соберите коэффициенты при  $\cos(\omega t + \alpha_0)$  и убедитесь, что новое уравнение выполняется тождественно, если  $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ .

**Задание 7.6.** Решите дифференциальное уравнение движения точки в среде с сопротивлением (см. (7.33)) для случая, когда  $\beta = \omega_0$  и  $\beta > \omega_0$  (большое сопротивление среды).

**Указание.** Составьте характеристическое уравнение и найдите его корни. Поскольку корни действительные, то решение для  $x$  в обоих случаях будет выражаться через показательные функции.

**Ответ.** В рассмотренных случаях точка участует в *апериодическом*, т. е. непериодическом, движении двух типов:

- $\beta = \omega_0$ ,  $x = (C_1 + C_2 t) e^{-\beta t}$ .
- $\beta > \omega_0$ ,  $x = C_1 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$ .

## 7.4. ВЫНУЖДЕННЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

**Вибратор.** *Вынужденными колебаниями* называется движение колебательной системы под действием внешней

периодической силы (см., например, (5.19)). Пусть на материальную точку в инерциальной системе действуют возвращающая сила  $F_b = -kx$ , сила сопротивления среды  $F_C = -\mu v$  и вынуждающая внешняя сила, которая изменяется во времени по гармоническому закону  $F_{\text{вын}} = F_0 \cos pt$ . Дифференциальное уравнение движения материальной точки

$$ma_x = -kx - \mu v_x + F_0 \cos pt \Rightarrow \ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos pt, \quad (7.40)$$

где  $f_0 = F_0/m$ .

Общее решение этого уравнения состоит из двух решений:

$$x = \bar{x} + x^* = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0) + A \cos(pt - \alpha) \quad (7.41)$$

Здесь  $\bar{x}$  — общее решение однородного дифференциального уравнения вида (7.33), а  $x^*$  — частное решение неоднородного дифференциального уравнения (7.40).

Первое слагаемое, т. е.  $\bar{x}$ , быстро затухает (его время релаксации  $\tau = 1/\beta$ ). Поэтому при  $t > \tau$  вклад в решение (7.41) дает только частное решение (второе слагаемое), представляющее собой вынужденные гармонические колебания осциллятора с частотой, равной частоте вынуждающей силы.

Такой осциллятор является простейшим *вibrатором* (лат. *vibro* — колеблюсь), т. е. системой, в которой можно возбудить колебания, в данном случае механические.

Выражения для амплитуды  $A$  и начальной фазы  $\alpha$  найдем, подставив в (7.40) частное решение  $x^* = A \cos(pt - \alpha)$  и его производные  $\dot{x}^* = -Ap \sin(pt - \alpha) = Ap \cos(pt - \alpha + \pi/2)$ ,  $\ddot{x}^* = -Ap^2 \sin(pt - \alpha + \pi/2) = Ap^2 \cos(pt - \alpha + \pi)$ . В результате получим тригонометрическое уравнение

$$Ap^2 \cos(pt - \alpha + \pi) + 2\beta Ap \cos\left(pt - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \omega_0^2 A \cos(pt - \alpha) = f_0 \cos pt. \quad (7.42)$$

Решим его с помощью векторной диаграммы (рис. 7.17), осуществив сложение трех гармонических функций в левой части (7.42). Из  $\Delta Oab$  следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\beta p}{\omega_0^2 - p^2}, \quad (7.43)$$

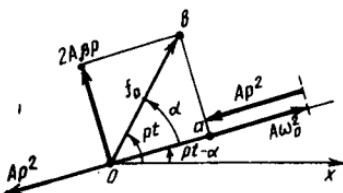


Рис. 7.17

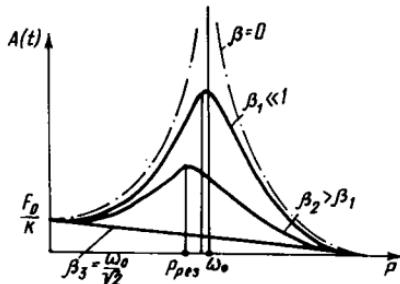


Рис. 7.18

$$f_0^2 = (2\beta p A)^2 + (\omega_0^2 A - p^2 A)^2 \Rightarrow A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}}. \quad (7.44)$$

Обратим внимание на тот интересный факт, что амплитуда и начальная фаза вынужденных колебаний вибратора определяются не начальными условиями, а значениями величины  $f_0 = F_0/m$  и частоты  $p$  вынуждающей силы, а также параметрами осциллятора ( $\omega_0$ ,  $\beta$ ).

**Явление резонанса.** Исследуем выражения (7.43), (7.44) как функции частоты  $p$  и построим их графики (рис. 7.18 и 7.19). Очевидно, что максимуму  $A$  соответ-

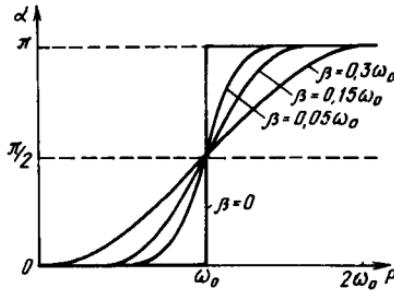


Рис. 7.19

ствует минимум знаменателя или подкоренного выражения. Тогда, продифференцировав подкоренное выражение по  $p$ , получим уравнение:

$$8\beta^2 p - 4(\omega_0^2 - p^2)p = 0. \quad (7.45)$$

Его решение имеет три корня:

$$p_1 = 0, p_{2,3} = \pm \sqrt{(\omega_0^2 - 2\beta^2)}. \quad (7.46)$$

Из двух корней  $p_2$  и  $p_3$  физический смысл имеет лишь положительный корень, определяющий **резонансную частоту** внешней периодической силы

$$p_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (7.47)$$

которой соответствует максимальное (резонансное) значение амплитуды вибратора:

$$\begin{aligned} A_{\text{рез}} &= \frac{f_0}{\sqrt{[\omega_0^2 - (\omega_0^2 - 2\beta^2)]^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{\frac{2\beta}{\omega_0^2 - \beta^2}}} \simeq \frac{f_0}{2\beta\omega_0}. \end{aligned} \quad (7.48)$$

При частоте  $p$ , стремящейся к нулю, амплитуда  $A$  вынужденных колебаний стремится к значению (см. рис. 7.18)

$$A(0) = \frac{f_0}{\omega_0} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}, \quad (7.49)$$

которое определяет смещение точки из положения равновесия при статическом действии силы, равной  $F_0$  (в этой ситуации возвращающая сила  $F_v = kA(0) = F_0$ ).

При частоте  $p$ , стремящейся к бесконечности ( $p \gg \omega_0$ ), амплитуда  $A$  стремится к нулю по закону  $A \simeq f_0/p^2$ .

Покажем, что отношение  $A_{\text{рез}}$  к  $A(0)$  совпадает с добротностью колебательной системы, описываемой дифференциальным уравнением (7.33):

$$\frac{A_{\text{рез}}}{A(0)} = \frac{f_0\omega_0^2}{2\beta\omega_0 f_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\beta T_0} = Q. \quad (7.50)$$

Зависимость сдвига фазы  $\varphi = pt - \alpha$  вынужденных колебаний по отношению к фазе  $pt$  возмущающей силы  $F = F_0 \cos pt$  приведена на рис. 7.19. Видно, что вынужденные колебания  $x^*$  отстают по фазе на величину  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) от вынуждающей силы. Численное значение  $\alpha$  меньше  $\pi/2$  при малых частотах ( $p < \omega_0$ ) и больше  $\pi/2$  ( $\pi/2 < \alpha < \pi$ ) при частотах, больших, чем собственная частота  $\omega_0$  осциллятора.

Резонансная частота всегда несколько меньше собственной частоты  $\omega_0$  ( $p_{\text{рез}} < \omega_0$ ), а значение  $\alpha$  при резонансе близко к  $\pi/2$ . В отсутствие сопротивления ( $\beta = 0$ ) сдвиг фаз  $\alpha$  скачком меняется от нуля при  $p < \omega_0$  до  $\pi$  при  $p > \omega_0$ .

**Задание 7.7.** Решите дифференциальное уравнение (5.19) для вынужденных колебаний пружинного маятника, установленного на тележке, совершающей гармонические колебания с частотой  $p$ . После определения амплитуды  $A$  вынужденных колебаний исследуйте ее зависимость от частоты  $p$  и постройте график  $A = A(p)$ .

**Указание.** Воспользуйтесь методом векторной диаграммы (см. решение уравнения (7.40)) или примените теорию решения неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и найдите частное решение уравнения (5.19).

**Ответ.**  $x = A \cos(pt - \alpha)$  — закон вынужденных колебаний при  $p \neq \omega_0$ ,  $A = A_1 p^2 / (\omega_0^2 - p^2)$  — амплитуда этих колебаний,  $\operatorname{tg} \alpha = 0$  при  $p < < \omega_0$  и, следовательно, сдвиг фазы вынужденных колебаний при отсутствии сопротивления равен нулю (при  $p > \omega_0$  получим  $\alpha = \pi$ ).

## 7.5. САМОВОЗБУЖДАЮЩИЕСЯ, ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

**Работа внешней периодической силы при вынужденных колебаниях.** В предыдущем параграфе мы обнаружили, что вынуждающая периодическая сила «навязывает» осциллятору свою частоту колебаний и определяет амплитуду  $A$  и сдвиг фаз. Это значит, что вынуждающая сила  $F_x = F_0 \cos pt$  и скорость  $v_x = dx/dt = -Ap \sin(pt - \alpha) = Ap \cos(pt - \alpha + \pi/2)$  колеблются со сдвигом фаз, равным  $\pi/2 - \alpha$ , который в области резонансных частот близок к нулю (в этой области  $\alpha \sim \pi/2$ , см. рис. 7.19). На рис. 7.20, *a* и 7.20, *б* эти зависимости изображены гра-

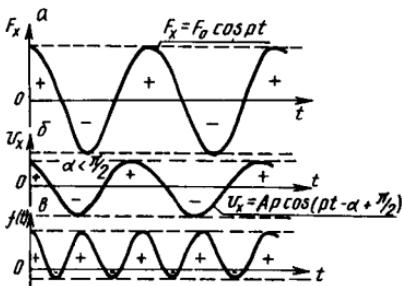


Рис. 7.20

физически и указаны области, в которых проекции  $F_x$  и  $v_x$  положительны либо отрицательны. Запишем выражение для работы внешней силы за время, равное периоду  $A_{12} = = \int F_x dx = \int F_x(t)v_x(t)dt = \int f(t)dt$ . Знакопеременная подынтегральная функция  $f(t) = F_x(t)v_x(t)$ , полученная в результате перемножения функций  $F_x$  и  $v_x$ , представлена схематично на рис. 7.20, *в*. Хорошо видно, что при малом сдвиге фаз суммарная работа внешней силы положительна, это означает, что колеблющаяся система получает от внешнего источника энергию, которая расходуется

на преодоление действия сил сопротивления среды. На начальном этапе в процессе выхода системы к установившимся вынужденным колебаниям энергия внешнего источника частично идет на «раскачивание» системы, т. е. увеличение ее амплитуды колебаний.

Рассмотрим несколько других возможностей реализации незатухающих колебаний в реальных диссипативных системах, испытывающих действие сил трения и вязкого сопротивления.

**Автоколебания.** Оказывается, что незатухающие колебания можно реализовать с помощью постоянной по значению и направлению внешней силы  $F$ , например силы тяжести. Для этого нужно, чтобы сама колеблющаяся система регулировала подачу энергии от внешнего источника, «включая» и «выключая» действие внешней силы в такт с колебаниями. Единственное условие самовозбуждения таких автоколебаний состоит в том, что работа внешней силы за одно полное колебание должна быть положительной. В случае постоянной силы достаточно, чтобы она выполняла работу при движении точки (тела) в направлении действия силы. Как только тело изменит направление движения, следует создать условия для автоматического «отключения» внешней силы.

Примерами таких систем являются часы с колеблющимся маятником, испытывающим в определенном положении действие внешней силы, источником которой является сжатая пружина или опускающаяся гиря. Причем конструкция механизма часов такова, что направление силы в этих положениях совпадает с направлением движения маятника, что обеспечивает выполнение внешней силой положительной работы, т. е. передачу очередной порции энергии от внешнего источника.

Рассмотрим принцип реализации самовозбуждения в электромеханической автоколебательной системе, изображенной на рис. 7.21. Свободный конец  $A$  пружины  $B$  опущен в сосуд с токопроводящей жидкостью, например электролитом или ртутью. К верхнему концу пружины и жидкости подключен источник электрической энергии  $D$ . При отсутствии тока в цепи конец  $A$  пружины слегка погружен в жидкость. Если замкнуть ключ  $K$ , то в цепи возникнет электрический ток. Поскольку проводники с токами одинакового направления притягиваются, то между витками пружины будут действовать силы притяжения и пружина начнет сжиматься. В результате нижний конец пружины выйдет из проводящей

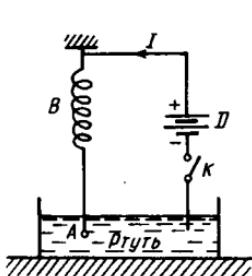


Рис. 7.21

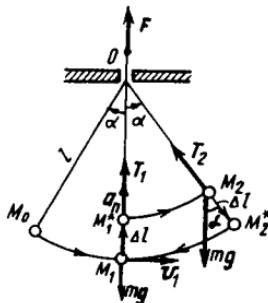


Рис. 7.22

жидкости, цепь разомкнется и, следовательно, исчезнут силы, сжимающие пружину. Под действием сил упругости и силы тяжести нижний конец пружины опять опустится и весь цикл будет автоматически повторяться с некоторой характерной для данной системы собственной частотой. Таким образом, в случае автоколебаний сама система «навязывает» свою частоту внешней вынуждающей силе. Причем при отсутствии колебаний отсутствует и возбуждение.

**Параметрические колебания.** На величину амплитуды колебаний можно воздействовать не только посредством внешней силы, но и косвенно, путем изменения тех параметров системы, которые определяют частоту собственных колебаний. Сюда относятся длина  $l$  маятника, коэффициенты  $k$  возвращающих сил и их моментов, а также коэффициенты  $f$  и  $\mu$  сил трения и вязкого сопротивления. Рассмотрим, например, математический маятник, длина  $l$  которого может изменяться в процессе колебаний под действием внешней силы  $F$ , приложенной к верхнему концу нити (рис. 7.22). Если при прохождении маятником нижнего положения  $M_1$  быстро уменьшить длину  $l$  нити на величину  $\Delta l$ , то внешняя сила  $F$ , равная натяжению  $T_1 = mg + mv_1^2/l$ , выполнит положительную работу

$$\Delta A_1 \approx (mg + mv_1^2/l)\Delta l.$$

Если обратное удлинение нити на  $\Delta l$  осуществить в крайнем положении  $M_2$ , где скорость маятника равна нулю, то внешняя сила  $F = T_2 = mg \cos \alpha$  выполнит отрицательную работу  $\Delta A_2 = -mg \cos \alpha \cdot \Delta l$ . Поскольку работа  $\Delta A_1 > |\Delta A_2|$ , то за одно колебание маятник получит от внешнего источника энергию  $\Delta E = 2(\Delta A_1 + \Delta A_2)$ . В результате амплитуда колебаний увеличится. Повторяя эту

процедуру воздействия на маятник, можно добиться значительного возрастания амплитуды. Это явление называется *параметрическим резонансом*.

Аналогичное нарастание амплитуды можно вызвать и с помощью внутренних сил, изменяющих какой-либо параметр системы. Например, в случае физического маятника для этого достаточно изменить расстояние  $l_0$  от точки подвеса  $O$  до центра тяжести  $C$  тела. Именно таким способом происходит раскачивание человеком качелей (*параметрическое самовозбуждение*).

**Ангармонические колебания.** Если в колебательной системе возвращающая сила и сила сопротивления являются линейными функциями координат и скорости, то ее движение описывается линейными дифференциальными уравнениями второго порядка (см. (7.10), (7.12), (7.13), (7.23), (7.33), (7.40)). Такие колебания называются *линейными*. Отметим наиболее фундаментальное и интересное свойство линейных колебательных систем: если на такую систему действует одновременно несколько внешних сил, то в связи с постоянством параметров системы (коэффициентов  $\beta$  и  $\omega_0$  в уравнении (7.33)) каждая из этих сил оказывает свое действие независимо от наличия или отсутствия других сил. Допустим, что первая сила при отсутствии других сил вызвала смещение  $s_1$ , другая —  $s_2$  и т. д., то при одновременном действии всех сил результирующее смещение  $s$  равно сумме отдельных смещений ( $s = s_1 + s_2$ ). Это свойство линейных систем называется *принципом суперпозиции*.

Если возвращающая сила является нелинейной функцией координаты, а сила сопротивления зависит не от первой, а от второй степени скорости (см. (3.10)), то движение будет описываться нелинейным дифференциальным уравнением. Колебания такой системы называются *нелинейными*. Для нелинейных колебаний не выполняется принцип суперпозиции, а гармоническая внешняя сила приводит к негармоническим, т. е. *ангармоническим колебаниям*.

**Пример 7.5. Ангармонические колебания двухатомной молекулы.** Найдем уравнение колебаний двухатомной молекулы газа или осциллятора, участвующего во вращательном движении.

**Решение.** В задании 7.2 было получено уравнение (7.25), которое определяет колебательное движение атомов молекулы с учетом ее вращательного движения. Это уравнение имеет следующий вид:

$$\mu \ddot{\lambda} + k\lambda = \mu \Omega_0^2 l_0^2 \left( \frac{1}{l_0 + \lambda} \right). \quad (7.51)$$

Здесь  $\mu$  — приведенная масса молекулы,  $F_x = -k\lambda$  — квазиупругая сила взаимодействия атомов, находящихся на расстоянии  $x$  друг от друга ( $x = l_0 + \lambda$ ),  $l_0$  — равновесное расстояние между атомами,  $\Omega_0$  — угловая скорость вращения молекулы сразу после очередного столкновения с другой молекулой.

Выражение в правой части уравнения (7.51) учитывает вклад вращательного движения молекулы, который определяется переносной силой инерции точки с массой  $\mu$  (см. рис. 7.10). Разложим это выражение в ряд по величине  $\lambda$ , которая является малой по сравнению с равновесным значением  $l_0$ . Ограничевшись квадратичными членами, запишем

$$\frac{1}{l_0 + \lambda} \approx \frac{1}{l_0} - \frac{1}{l_0^2} \lambda + \frac{1}{l_0^3} \lambda^2. \quad (7.52)$$

Подставим выражение (7.52) в уравнение (7.51) и, воспользовавшись определением частоты  $\omega_0$  для свободных гармонических колебаний ( $\omega_0 = k/\mu$ ), получим нелинейное дифференциальное уравнение ангармонических колебаний:

$$\ddot{\lambda} + \omega^2 \lambda = a + b\lambda^2, \quad (7.53)$$

где  $\omega^2 = \omega_0^2 + \Omega_0^2$ ,  $a = \Omega_0^2 l_0$ ,  $b = \Omega_0^2 / l_0$ .

Будем решать это уравнение по методу последовательных приближений (см. § 5.3). В первом приближении

$$\ddot{\lambda} + \omega^2 \lambda = 0$$

и, следовательно, его решение определяет гармонические колебания с частотой  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega_0^2}$ :

$$\lambda_1 = A_1 \cos \omega t. \quad (7.54)$$

Подставим (7.54) в правую часть уравнения (7.53):

$$\ddot{\lambda} + \omega^2 \lambda = a + \frac{1}{2} b A_1^2 (1 + \cos 2\omega t). \quad (7.55)$$

Будем искать частное решение уравнения (7.55) в соответствии с видом правой части, т. е.

$$\lambda_2 = A_0 + A_2 \cos 2\omega t \Rightarrow \ddot{\lambda}_2 = -4A_2 \omega^2 \cos 2\omega t. \quad (7.56)$$

После подстановки  $\lambda_2$  и  $\ddot{\lambda}_2$  в дифференциальное уравнение (7.55) получим

$$-4A_2 \omega^2 \cos 2\omega t + \omega^2 A_0 + \omega^2 A_2 \cos 2\omega t = a + \frac{b A_1^2}{2} + \frac{b A_1^2}{2} \cos 2\omega t.$$

Приравнивая свободные члены и коэффициенты при  $\cos 2\omega t$ , записываем систему двух уравнений:

$$\omega^2 A_0 = a + b A_1^2 / 2, \quad 3A_2 \omega^2 = -b A_1^2 / 2. \quad (7.57)$$

Из (7.57) находим  $A_0$  и  $A_2$ :

$$A_0 = \frac{a + b A_1^2 / 2}{\omega^2}, \quad A_2 = -\frac{b A_1^2}{6 \omega^2}. \quad (7.58)$$

Нелинейные колебания вращающейся молекулы, определяемые уравнением

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t, \quad (7.59)$$

представляют собой сложное периодическое движение, которое состоит из двух гармонических колебаний. Частота основной гармоники  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega_0^2}$  больше частоты свободных колебаний  $\omega_0$  на величину, определяемую угловой скоростью вращательного движения молекулы газа.

Частота  $\omega_1$  первого обертона равна удвоенной частоте  $\omega$  основной гармоники. Таким образом, вращение молекулы приводит к изменению частоты колебаний молекулы ( $\omega > \omega_0$ ) и возбуждению колебаний с частотой, равной частоте первого обертона ( $\omega_1 = 2\omega$ ).

Очевидно, что учет следующих членов разложения в (7.52) приведет к появлению новых решений, соответствующих возбуждению следующих обертонов. Частоты, представляющие некоторую комбинацию собственных частот, называются *комбинационными*. Это значит, что ангармонические колебания состоят из собственных и комбинационных колебаний.

Важнейшим началом является сохранение живых сил\*, или, как я выражаюсь, равенство между действительным опусканием и потенциальным подъемом.

*Д. Бернулли. Гидродинамика*

За это сочинение автор получил от издателя 100 талеров гонорара и 30 бесплатных экземпляров, а от человечества — бессмертную славу.

*A. T. Григорьян. Механика от античности до наших дней*

## 8. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

**Виды деформации сплошной среды.** В данной главе изучаются условия равновесия и уравнения движения жидкостей и газов, а в следующей — девятой главе рассматриваются волновые процессы, которые возникают в газах, жидкостях и твердых телах. При этом не будем вдаваться в их атомно-молекулярную структуру, т. е. будем рассматривать все тела как бесструктурные сплошные среды, заполняющие некоторую часть пространства объемом  $V$ . Это, в частности, означает, что в любом физически бесконечно малом объеме  $dV$  сплошной среды содержится еще достаточно большое число атомов, молекул или других структурных единиц этой среды. Газы, жидкости и твердые тела сильно отличаются друг от

\* Так в 19 в. называлось выражение  $mv^2$ , а затем по предложению Г. Кориолиса термин «живая сила» использовался для величины  $mv^2/2$ , т. е. кинетической энергии.

друга по механическим свойствам. Газы и жидкости легко изменяют свою форму под действием сколь угодно малых сил.\* Это значит, что в этих средах в отличие от твердых тел не возникают упругие силы при деформации сдвига (см. § 3.2). Но для изменения объема газа или жидкости, как и в случае твердых тел, требуются конечные внешние силы. Следовательно, газы и жидкости ведут себя как упругие тела только в отношении изменения занимаемого объема. Однако и здесь имеется существенное отличие газов и жидкостей от твердых тел. Мы уже знаем, что твердые тела можно подвергать растяжению и сжатию или сдвигу в любых направлениях. В жидкостях приходится иметь дело практически только со всесторонним сжатием, хотя в специальных условиях, например в капиллярах, жидкость может быть подвергнута деформации растяжения. При этом в жидкостях возникают упругие силы, удовлетворяющие закону Гука. Что касается газов, то для них в принципе может быть реализовано только всестороннее сжатие. При изучении механических свойств сплошной среды будем применять законы механики к отдельным физически малым элементам среды, рассматривая весь ее объем  $V$  как систему большего числа таких элементов

$$\left( V = \sum_{i=1}^N \Delta V_i \right).$$

## 8.1. ГИДРОАЭРОСТАТИКА

**Принцип отвердевания.** Опыт показывает, что при исследовании равновесия объемов жидкостей или газов можно применять ряд понятий и приемов, которые используются при рассмотрении равновесия твердых тел. Эта возможность в задачах статики сплошных сред формулируется в виде *принципа отвердевания* объема жидкости или газа, позволяющего автоматически применять уравнения статического равновесия твердых тел.

**Давление.** Отдельные части жидкости или газа действуют друг на друга с силами, значения которых зависят от степени сжатия среды. В объеме  $V^*$  среды выделим малый объем  $V$ , заключенный внутри замкнутой поверхности  $S$  (рис. 8.1). На выделенный объем со стороны оставшейся части среды действуют силы всестороннего

---

\* Здесь не рассматриваются высокочастотные силовые воздействия на жидкую среду, которые приводят к возникновению упругих деформаций сдвига и в жидкостях.

сжатия, которые распределены по поверхности  $S$ . Эти силы направлены перпендикулярно (нормально) к каждой элементарной площадке  $\Delta S$ , иначе их касательные составляющие привели бы к относительному смещению слоев среды. Мысленно уберем ту часть среды, которая окружает выделенный объем  $V$  и, применив к нему принцип отвердевания, введем понятие давления как силы, действующей на единичную площадку его поверхности:

$$p_{cp} = \frac{\Delta F_n}{\Delta S} — \text{среднее давление.} \quad (8.1)$$

Если силы давления в разных точках среды имеют разные значения, то в (8.1) следует совершить предельный переход  $\Delta S \rightarrow 0$ . Тогда давление будет функцией координат точки в среде

$$p(x, y, z) = \frac{dF_n}{dS} — \text{локальное давление.} \quad (8.2)$$

В СИ давление  $p$  измеряется в паскалях ( $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$ ).

**Закон Паскаля (1623—1662 гг.).** Согласно (8.1) и (8.2), давление в данной точке среды определяется по отношению к заранее выбранной элементарной площадке  $\Delta S$ , имеющей определенную ориентацию в пространстве. Возникает вопрос о том, влияет ли ориентация площадки на значение давления, определяемого по формуле (8.2). Закон Паскаля утверждает, что в состоянии равновесия среды давление  $p$  не зависит от ориентации площадки в жидкой или газообразной среде.

Покажем на примере, что этот закон справедлив и является следствием того, что объемные силы (силы

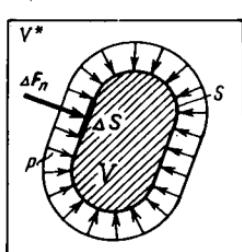


Рис. 8.1

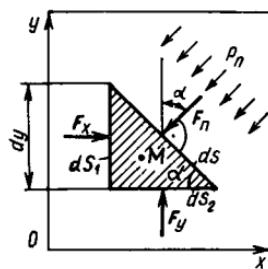


Рис. 8.2

тяжести) пропорциональны объему среды, а поверхностные силы давления пропорциональны площади поверхности этого объема.

**Пример 8.1.** По заданному давлению  $p_n$ , действующему на площадку  $dS$  (рис. 8.2) бесконечно малого объема  $dV$  в виде треугольной призмы высотой  $dz$ , определим давление на площадках  $dS_1$  и  $dS_2$ .

**Решение.** Применим принцип отвердевания к объему  $dV$  среды и запишем два уравнения равновесия в проекциях на оси  $x$  и  $y$ . Получим

$$F_x - F_n \sin \alpha = 0, \quad \left. \begin{array}{l} p_x dS_1 - p_n dS \sin \alpha = 0, \\ F_y - gdm - F_n \cos \alpha = 0, \end{array} \right\} \Rightarrow p_x dS_1 - p_n dS \sin \alpha = 0, \quad (8.3)$$

$$F_y - gdm - F_n \cos \alpha = 0, \quad \left. \begin{array}{l} p_y dS_2 - \rho g dV - p_n dS \cos \alpha = 0. \end{array} \right\} \Rightarrow p_y dS_2 - \rho g dV - p_n dS \cos \alpha = 0. \quad (8.4)$$

Поскольку  $dS_1 = dS \sin \alpha$ , то из (8.3) сразу следует, что  $p_x = p_n$ . Объем треугольной призмы  $dV = dS_2 \cdot dy/2$ , а  $dS_2 = dS \cos \alpha$ . Тогда из (8.4) получим (после сокращения на  $dS_2$ ), что  $p_y = p_n + \rho g dy/2$ . В пределе, когда линейные размеры призмы стремятся к нулю, а объем выделенного элемента среды стягивается в точку ( $dx, dy, dz, dV \rightarrow 0$ ), из последнего выражения следует, что  $p_y = p_n$ . Таким образом, давление в точке  $M(x, y, z)$  не зависит от ориентации площадок ( $p_x = p_y = p_n$ ). В общем случае, очевидно, будет справедливо соотношение

$$p_x = p_y = p_z = p_n — закон Паскаля. \quad (8.5)$$

**Сжимаемость среды.** Для характеристики механических свойств жидкостей и газов используется понятие сжимаемости среды, связанное с изменением объема  $dV$  при изменении давления на  $dp$ . Количественной мерой сжимаемости среды является величина

$$k = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} — коэффициент сжимаемости. \quad (8.6)$$

Здесь  $dV$  — абсолютное изменение объема, вызванное изменением давления  $dp$  и, следовательно,  $dV/V$  — относительная деформация объема при всестороннем сжатии среды.

Измерения показывают, что коэффициент  $k$  для жидкостей очень мал (для воды при  $p \sim 10$  Па,  $k \sim 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/Н) и в широких пределах слабо зависит от давления и температуры. Малая сжимаемость жидкостей позволяет ввести и широко использовать модель *несжимаемой жидкости*. В газообразном состоянии вещества применяют модель *идеального газа*, для которого справедливо уравнение

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \text{ — уравнение Клапейрона — Менделеева,} \quad (8.7)$$

где  $m$  — масса газа,  $\mu$  — молярная масса,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $T$  — абсолютная температура.

В изотермических условиях ( $T = \text{const}$ ) выполняется закон Бойля — Мариотта

$$pV = \text{const} \Rightarrow V = \frac{\text{const}}{p} \Rightarrow dV = - \frac{\text{const}}{p^2} dp. \quad (8.8)$$

Поэтому изотермическая сжимаемость

$$k_T = - \frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = - \frac{p}{\text{const}} \left( - \frac{\text{const}}{p^2} dp \right) \frac{1}{dp} = \frac{1}{p} \quad (8.9)$$

газов при обычных (нормальных) условиях во много раз больше ( $k_T \sim 10^{-5} \text{ м}^2/\text{Н}$ ), чем для жидкостей.

**Пример 8.2.** Получим закон распределения давления по высоте сосуда. Сосуд с жидкостью находится в поле сил тяжести. На ее открытую поверхность действует внешнее давление  $p_0$  (рис. 8.3).

**Решение.** Выделим в сосуде объем  $\Delta V$  в виде столба жидкости высотой  $h$  и площадью основания  $\Delta S$ . Из уравнения равновесия выделенного объема несжимаемой жидкости (в проекции на ось  $z$ )

$$p(h)\Delta S - p_0\Delta S - \rho gh\Delta S = 0 \quad (8.10)$$

находим давление на глубине  $h$  сосуда

$$p(h) = p_0 + \rho gh \text{ — закон распределения гидростатического давления при } \rho = \text{const.} \quad (8.11)$$

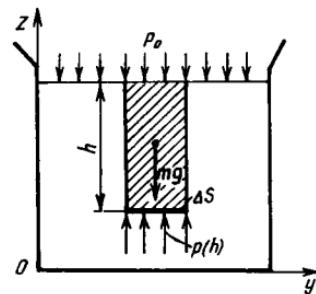


Рис. 8.3

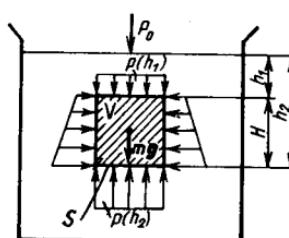


Рис. 8.4

**Пример 8.3.** Определим выталкивающую силу, которая действует со стороны среды на тело, погруженное в жидкость (закон Архимеда).

**Решение.** Для простоты рассмотрим тело, которое имеет форму прямоугольного параллелепипеда объемом  $V$  с площадью основания  $S$  (рис. 8.4). Выталкивающая сила равна вертикальной проекции сил давления, распределенных по поверхности параллелепипеда:

$$F_y = p(h_2) \cdot S - p(h_1)S = [p_0 + \rho_* g(h_1 + H)]S - [p_0 + \rho_* g h_1]S = \rho_* g HS. \quad (8.12)$$

Следовательно,

$$F_A = \rho_* g V — закон Архимеда. \quad (8.13)$$

Точка приложения силы Архимеда находится в центре тяжести объема вытесненной жидкости, а если плотность твердого тела во всех точках одинакова (однородное распределение массы тела), то точка приложения силы Архимеда совпадает с центром тяжести погруженного в жидкость тела.

**Задание 8.1.** Определите закон распределения плотности воздуха как идеального газа в зависимости от высоты  $h$  над поверхностью Земли в изотермических условиях, когда температура  $T$  считается постоянной по высоте  $h$  величиной.

**Указание.** Поскольку газ (воздух) имеет относительно большой коэффициент сжимаемости (много больше, чем у жидкостей), то плотность  $\rho$  газа нельзя считать постоянной по высоте  $h$  величиной (как это было в случае жидкости, см. пример 8.2). Поэтому нужно рассматривать равновесие элементарного столба газа высотой  $dy$  (рис. 8.5) и, записав уравнение его равновесия, выполнить интегри-

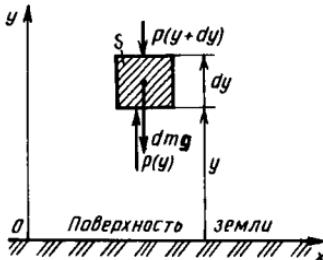


Рис. 8.5

рование по  $y$  от нуля до  $h$  (на поверхности Земли давление равно  $p_0$ , а плотность  $\rho_0$ ). После определения давления  $p(h)$  воспользуйтесь законом (8.7) и найдите плотность  $\rho(h)$ .

**Ответ.**  $p = p_0 e^{-\mu gh/RT}$  — барометрическая формула для давления, (8.14)

$\rho = \rho_0 e^{-\mu gh/RT}$  — распределение плотности газа по высоте ( $T = \text{const}$ ). (8.15)

## 8.2. ГИДРОДИНАМИКА НЕСЖИМАЕМОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

**Основные понятия кинематики несжимаемой жидкости.**

При движении жидкости или газа отдельные их элементарные объемы (частицы жидкости) могут двигаться с различными скоростями. Поэтому в реальных жидкостях и газах возникают силы вязкого трения (см. § 3.1). При изучении динамики текучих сред широко используются модели *идеальной* (невязкой) несжимаемой жидкости и *вязкой* несжимаемой жидкости (см. § 8.3). Прежде чем приступить к динамическому описанию свойств движущихся газов или жидкостей, следует кратко рассмотреть кинематику сплошных сред.

Описать движение жидкости можно двумя методами: а) проследить за траекторией и скоростью движения каждой частицы жидкости (*метод Лагранжа*), б) указать направления и значения скоростей  $\mathbf{v}$  частиц жидкости во всех точках пространства, где течет жидкость, т. е. задать поле скоростей (*метод Эйлера*). Если поле скоростей не изменяется с течением времени, т. е. скорость  $\mathbf{v}$  движения различных частиц жидкости в каждой точке любого сечения потока постоянна по значению и направлению, то течение называется *стационарным или установившимся*. Если поле скоростей меняется во времени, то течение называется *нестационарным*. При стационарном течении любая частица жидкости проходит данную точку пространства с одной и той же скоростью  $\mathbf{v}$ .

Для наглядной характеристики потока жидкости引进ится понятие линий тока. Под *линиями тока* понимают линии, проведенные в жидкости, касательные к которым в каждой их точке совпадают с направлением скорости  $\mathbf{v}$  частиц, проходящих через точку касания (рис. 8.6). При стационарном течении линии тока не изменяются с течением времени и совпадают с траекториями движения частиц жидкости.

Линии тока не могут пересекаться, так как в одной и той же точке в данный момент времени может находиться только одна частица жидкости с определенной скоростью  $\mathbf{v}$ . Условились проводить через единичную площадку, перпендикулярную к скорости  $\mathbf{v}$ , число линий тока, пропорциональное скорости частиц в данной точке. Тогда по густоте и направлению линий можно судить о направлении и значении скорости  $\mathbf{v}$  в разных точках потока.

Мысленно выделим в потоке струю жидкости с небольшим поперечным сечением  $S$ . Через точки контура этого сечения проведем линии тока. Они образуют так называемую *трубку тока*. При стационарном течении форма трубки тока не изменяется во времени. При течении жидкости ее частицы не могут пересекать боковую поверхность трубки тока, так как скорости частиц у этой поверхности направлены по касательной к ней. Поэтому трубка тока подобна жесткой непроницаемой трубке, вдоль которой течет жидкость.

**Уравнение неразрывности.** Возьмем трубку тока настолько малой площади сечения  $S$ , чтобы можно было считать, что скорость жидкости  $v$  одинакова во всех точках этого поперечного сечения и направлена вдоль оси трубы. При стационарном течении за одно и то же время  $dt$  через различные сечения трубки пройдет одинаковая масса  $dm$  жидкости, равная  $\rho v S dt$ , где  $\rho$  — плотность жидкости. Для двух сечений с площадями  $S_1$  и  $S_2$  (см. рис. 8.6) получим:

$$\rho_1 v_1 S_1 dt = \rho_2 v_2 S_2 dt \text{ или } \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2.$$

В случае несжимаемой жидкости плотность  $\rho$  одинакова во всех сечениях трубы тока, т. е.  $\rho_1 = \rho_2$ , тогда  $v_1 S_1 = v_2 S_2$ . Полученное соотношение называется *уравнением неразрывности*. Оно справедливо для любых сечений данной трубы тока:

$vS = \text{const}$  — уравнение неразрывности. (8.16)

Из уравнения (8.16) следует, что скорости течения жидкости вдоль трубы тока обратно пропорциональны площадям ее поперечного сечения. В сужающейся части трубы тока скорость течения жидкости возрастает, а в расширяющейся — уменьшается, т. е. жидкость на этих

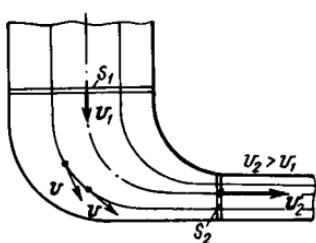


Рис. 8.6

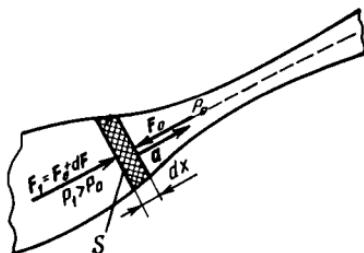


Рис. 8.7

участках движется с ускорением. Выделим в трубке тока тонкий слой жидкости толщиной  $dx$  (рис. 8.7). Поскольку движение выделенной массы  $dm$  жидкости (метод Лагранжа) является ускоренным, то сила давления  $F_1$ , действующая на поверхность этого слоя со стороны более широкого участка трубы тока, должна быть больше, чем сила давления  $F_0$ , действующая со стороны более узкой части. Их разность  $dF = F_1 - F_0$  является ускоряющей силой. Поэтому давление  $p_1 = F_1/S$  со стороны широкой части трубы тока больше, чем давление  $p_0$  со стороны узкой части трубы. При переходе жидкости из узкой в расширяющуюся часть трубы скорость движения ее частиц замедляется.

Таким образом, давление в широких участках трубы больше, чем в более узких. Экспериментально эти выводы можно проверить и измерить давление в движущейся жидкости с помощью неподвижной манометрической трубы (рис. 8.8). Для этого ее нижнее отверстие должно быть ориентировано параллельно направлению движения жидкости.

**Уравнение Бернуlli и его применение.** Выделим в стационарном потоке идеальной несжимаемой жидкости настолько узкую трубку тока, чтобы в любом из ее поперечных сечений  $S$  скорости  $v$  проходящих через сечения частиц среды можно было бы считать одинаковыми по значению и направленными перпендикулярно к этим сечениям. Рассмотрим в этой трубке тока часть жидкости, заключенную между сечениями  $S_1$  и  $S_2$ , в которых частицы среды имеют скорость  $v_1$  и  $v_2$  соответственно (рис. 8.9). Внешними силами, действующими на выделенный заштрихованный объем  $V$  жидкости, являются силы тяжести (потенциальные силы) и силы давления со стороны окружающей среды. Они распределены по поверхности выделенного объема жидкости и относятся к непотенциальным силам. Для изучения движения этой части

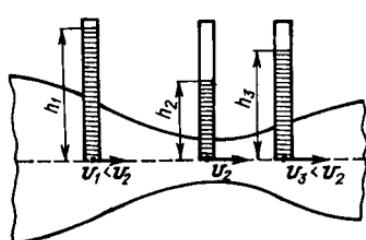


Рис. 8.8

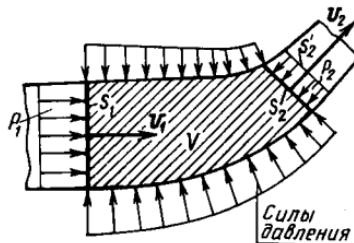


Рис. 8.9

жидкости применим закон изменения ее полной механической энергии. За время  $dt$  выделенная часть жидкости переместится в новое положение, в котором она будет уже ограничена сечениями  $S'_1$  и  $S'_2$  (на рис. 8.10 заштрихована линиями с другим наклоном). Объем  $V^*$  жидкости с двойной штриховкой обладает при стационарном течении постоянной энергией  $E^*$ , которая входит в выражения энергий  $E_1$  и  $E_2$  в первом и втором положениях выделенного объема жидкости соответственно:

$$V_1 = \Delta V_1 + V^*, E_1 = \Delta m_1 v_1^2/2 + \Delta m_1 g h_1 + E^*, \quad (8.17)$$

$$V_2 = V^* + \Delta V_2, E_2 = \Delta m_2 v_2^2/2 + \Delta m_2 g h_2 + E^*. \quad (8.18)$$

Здесь принято во внимание, что объемы  $\Delta V_1$  и  $\Delta V_2$  среды движутся поступательно и имеют кинетическую и потенциальную энергию.

Поскольку силы давления на боковую поверхность трубы тока не выполняют работы (они перпендикулярны к  $v$ ), то сумма работ внешних непотенциальных сил будет равна работе сил давления в сечениях трубы  $S_1$  и  $S_2$  при их перемещении на расстояния  $dl_1 = v_1 dt$  и  $dl_2 = v_2 dt$ :

$$\sum A_{12} = A_{\rho 1} + A_{\rho 2} = p_1 S_1 v_1 dt - p_2 S_2 v_2 dt. \quad (8.19)$$

Из закона изменения энергии системы

$$E_2 - E_1 = \sum A_{12} \quad (8.20)$$

следует уравнение

$$\begin{aligned} \Delta m_1 v_1^2/2 + \Delta m_1 g h_1 - \Delta m_2 v_2^2/2 - \Delta m_2 g h_2 = \\ = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Для несжимаемой жидкости плотность  $\rho$  в разных точках среды одинакова ( $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ). Поэтому

$$\Delta m_1 = \rho v_1 S_1 \Delta t, \Delta m_2 = \rho v_2 S_2 \Delta t. \quad (8.22)$$

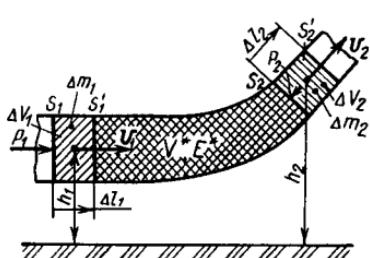


Рис. 8.10

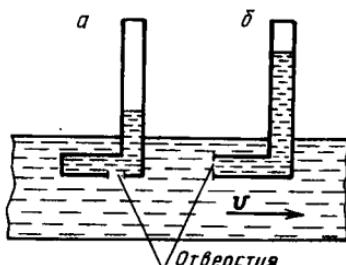


Рис. 8.11

С учетом уравнения неразрывности (8.16) и соотношений (8.22) из уравнения (8.21) получим, что

$$\rho v_1^2/2 + \rho gh_1 + p_1 = \rho v_2^2/2 + \rho gh_2 + p_2. \quad (8.23)$$

Сечения  $S_1$  и  $S_2$  совершенно произвольны и, следовательно, соотношение (8.23) будет справедливо для любого сечения трубы тока. Оно выведено в 1738 г. швейцарским ученым Даниилом Бернулли (1700—1782) и носит его имя

$$\rho v^2/2 + \rho gh + p = \text{const} — \text{уравнение Бернулли.} \quad (8.24)$$

В соответствии с приведенным выводом уравнение Бернулли выражает закон сохранения энергии при стационарном течении несжимаемой идеальной среды. С другой стороны, можно заметить, что каждое из слагаемых уравнения Бернулли имеет размерность давления:  $p$  — статическое давление,  $\rho gh$  — гидравлическое (весовое) давление,  $\rho v^2/2$  — динамическое давление. Поэтому, согласно (8.24), можно утверждать, что сумма динамического, гидравлического и статического давлений при стационарном течении среды есть величина постоянная для всех точек данной линии тока.

Статическое давление измеряют так, как это показано на рис. 8.8, либо с помощью зонда — изогнутой трубы (рис. 8.11, а), передняя часть которой запаяна, а в боковой стенке сделано небольшое отверстие.

Динамическое давление совместно со статическим измеряют с помощью изогнутой трубы с открытым входным отверстием, обращенным навстречу потоку (рис. 8.11, б). Разность давлений в двух таких трубках дает динамическую часть давления.

Для реальных жидкостей уравнение (8.24) выполняется лишь приблизительно, так как в таких жидкостях при течении возникают силы вязкого трения.

**Пример 8.4. Формула Торричелли.** Определить скорость истечения струи жидкости из малого отверстия, находящегося в нижней части сосуда, имеющего форму усеченного конуса (геометрические размеры указаны на рис. 8.12). Найти также время  $T$  полного опорожнения этой емкости. В начальный момент уровень жидкости был на высоте  $H$  от дна.

**Решение.** Жидкость вытекает из открытого сосуда, поэтому давления  $p_1$  и  $p_2$  в сечениях  $S_1$  и  $S_2$  ( $S_2$  — площадь отверстия)

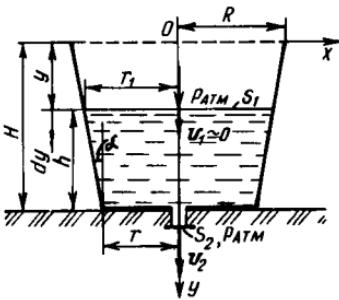


Рис. 8.12

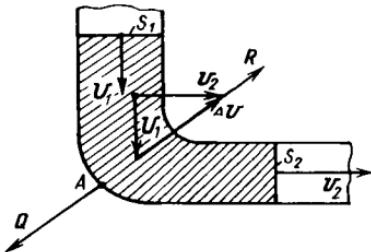


Рис. 8.13

одинаковы и равны атмосферному. Применим уравнение Бернулли (8.24) к этим двум сечениям

$$\rho v_1^2/2 + \rho gh + p_{\text{атм}} = \rho v_2^2/2 + p_{\text{атм}} \quad (8.25)$$

и запишем уравнение неразрывности

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \quad (8.26)$$

Поскольку  $S_1 \gg S_2$ , то при вычислении скорости  $v_2$  в уравнении (8.25) можно пренебречь слагаемым  $\rho v_1^2/2 (v_1 \ll v_2)$ . Тогда получим

$v_2 = \sqrt{2gh}$  — формула Торричелли. (8.27)

Согласно (8.27), скорость истечения жидкости равна скорости, которую получили бы частицы жидкости, падая свободно с высоты  $h$ , равной величине столба жидкости над отверстием.

По мере истечения жидкости уменьшается высота  $h$  и, следовательно, скорость  $v_2$  изменяется во времени. Процесс вытекания жидкости в этом случае не является стационарным. Вместе с тем, поскольку отверстие  $S_2$  мало, а объем резервуара велик, то уровень  $h$  жидкости будет опускаться медленно. Такой процесс называется *квазистационарным* (от лат. quasi — якобы, как будто). Это и обуславливает возможность применения уравнения Бернулли к решению данной задачи.

Для определения времени истечения жидкости из сосуда воспользуемся уравнением (8.26) и примем во внимание, что  $v_1 = dy/dt = -dh/dt$ , а площадь сечения  $S_1 = \pi r_1^2$  ( $r_1 = r + h \tan \alpha$ ). Тогда получим дифференциальное уравнение

$$-\frac{dh}{dt} \pi (r + h \tan \alpha)^2 = S_2 \sqrt{2gh}, \quad S_2 = \text{const.} \quad (8.28)$$

Разделим переменные  $h$  и  $t$ :

$$dt = -\frac{\pi}{S_2 \sqrt{2g}} \left( \frac{r^2}{\sqrt{h}} + 2 \tan \alpha \sqrt{h} + \tan^2 \alpha h^{3/2} \right) dh.$$

Выполним интегрирование левой части по  $t$  от нуля до  $T$ , а правой части по  $h$  от нуля до  $H$ . Получим

$$T = \frac{\pi}{S_2 \sqrt{2g}} \left( 2r^2 \sqrt{H} - \frac{4}{3} \tan \alpha H^{3/2} + \frac{2}{5} \tan^2 \alpha H^{5/2} \right). \quad (8.29)$$

Оценим скорость истечения при  $h = H = 4$  м и время опорожнения сосуда цилиндрической формы, когда  $r = R = 1$  м ( $\alpha = 0$ ),  $S_2 = 10^{-4}$  м<sup>2</sup> = 1 см<sup>2</sup>. После подстановки этих данных в (8.27) и (8.29) найдем, что

$$v_2 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 4} \approx 9 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}, T = \frac{2\pi r^2}{S_2} \sqrt{\frac{H}{2g}} = \\ = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1^2}{10^{-4}} \sqrt{\frac{4}{2 \cdot 9,81}} \approx 8 \text{ ч.}$$

**Пример 8.5.** Определить реакцию  $R$  стенок трубы на струю жидкости, текущей по изогнутой в месте сужения трубе (рис. 8.13).

**Решение.** Запишем выражение для изменения количества движения жидкости  $P$ , заключенной между сечениями  $S_1$  и  $S_2$ , за время  $\Delta t$  (для этого нужно поступить аналогично тому, как это было сделано при выводе уравнения Бернулли с использованием рис. 8.10). Получим

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \Delta P_2 - \Delta P_1 = \rho S_1 v_1 \Delta t (v_2 - v_1). \quad (8.30)$$

По закону изменения импульса механической системы (выделенного объема жидкости)

$$\Delta P = R \cdot \Delta t \Rightarrow R = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \rho v_1 S_1 (v_2 - v_1), \Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \quad (8.31)$$

Сила  $Q$  давления потока жидкости на колено трубы в точке  $A$  определяется третьим законом Ньютона

$$Q = -R = -\rho v_1 S_1 (v_2 - v_1), v_2 = v_1 S_1 / S_2. \quad (8.32)$$

Направление этих сил определяется углом  $\alpha$ , причем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}.$$

Для трубы постоянной площади сечения ( $S_1 = S_2 = 25$  см<sup>2</sup>) и скорости потока воды  $v = 10$  м/с получим значения угла  $\alpha$  и реакции  $R$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = 1, \alpha = 45^\circ, R = \sqrt{2\rho v^2 S} = \sqrt{2 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = \\ = 354 \text{ Н} \approx 35 \text{ кгс.}$$

**Задание 8.2.** Под действием давления  $p_1 = 1,2p_{\text{атм}}$  ( $p_{\text{атм}} = 10^5$  Па), создаваемого насосом, в трубопроводе на горизонтальном участке  $AB$  (рис. 8.14) течет вода плотностью  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, которая в сечении  $S_1$  имеет скорость  $v = 2$  м/с. Получите выражение для давления  $p_2$  в сечении  $S_2$  трубы после сужения и определите с его помощью то значение отношения  $S_1/S_2$ , при котором в узкой части трубопровода возникает вакуум  $0,6p_{\text{атм}}$ . Укажите также область возможного применения явления возникновения разрежения в узких частях сужающихся труб.

**Указание.** Воспользуйтесь уравнениями неразрывности (8.16) и Бернулли (8.24) (см. пример 8.3).

**Ответ.**  $S_1/S_2 = 6,4$ .

**Задание 8.3.** На упругой нити (проволока) висит сосуд цилиндрической формы (рис. 8.15), имеющий в нижней части две изогнутые под прямым углом трубки с площадью поперечного сечения  $S_2$ , закрытые пробками (сегнерово колесо). Емкость заполнена идеальной несжимаемой жидкостью до уровня  $H$ . Осевой момент инерции сосуда

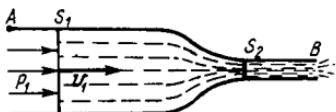


Рис. 8.14

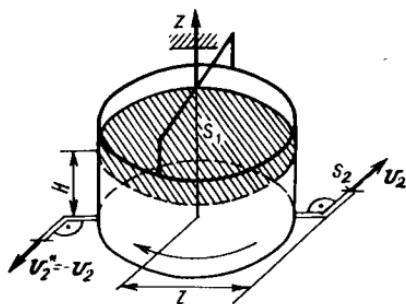


Рис. 8.15

$I_z$ , а коэффициент кручения проволоки равен  $f_{kp}$  (см. § 2.3). Определите угловое ускорение  $\varepsilon$  сосуда сразу после открытия трубок, а также максимальный угол ( $\varphi_{max}$ ) закручивания цилиндрической проволоки (изменением высоты уровня жидкости можно пренебречь).

Указание. Воспользуйтесь результатами решения примеров 8.4 и 8.5 и определите момент  $M_z$  сил давления вытекающей струи жидкости на стенки изогнутых трубок, а затем примените основное уравнение вращательного движения к сосуду и найдите с его помощью угловое ускорение  $\varepsilon$  и угол  $\varphi_{max}$ .

$$\text{Ответ. 1) } \varepsilon = 2l\rho S_2 v_2^2 / I_z, \quad v_2 = \sqrt{2gH}, \quad (8.33)$$

$$2) \quad \varphi_{max} = 2l\rho S_2 v_2^2 / f_{kp}.$$

### 8.3. ГИДРОДИНАМИКА НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

**Явление вязкого трения.** Идеальная жидкость, т. е. жидкость без трения, является абстракцией, представляющей собой первое приближение при рассмотрении механических свойств реальных жидкостей или газов. Силы внутреннего трения (см. § 3.1) возникают между слоями текучей среды, движущимися друг относительно друга с некоторыми скоростями. Проведем мысленно опыт с двумя плоскими параллельными пластинами в сосуде с жидкостью (рис. 8.16). Нижняя пластина (дно сосуда)

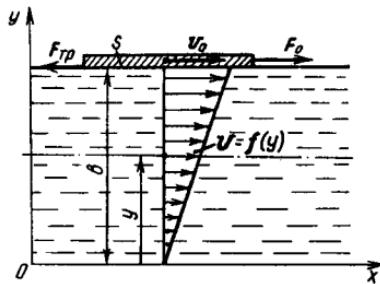


Рис. 8.16

неподвижна, а верхняя пластина площадью  $S$  движется под действием постоянной силы  $F_0$ . Из опыта следует, что после приложения силы  $F_0$  через некоторый промежуток времени  $\tau$  наступает состояние установившегося движения пластины, когда ее скорость достигает некоторого максимального значения  $v_0$ . Скорость слоев жидкости распределена по высоте сосуда по линейному закону. При этом сила трения между пластиной и поверхностью жидкости равна силе  $F_0$  ( $F_{\text{тр}} = -F_0$ ), которая оказывается пропорциональной скорости  $v_0$ , площади  $S$  и обратно пропорциональной расстоянию между пластинами:

$$F_{\text{тр}} = \eta v_0 S / b. \quad (8.34)$$

Поле скоростей в случае линейной зависимости от  $y$  имеет следующий вид:

$$v(y) = \frac{v_0}{b} y \Rightarrow \frac{dv}{dy} = \frac{v_0}{b}. \quad (8.35)$$

С учетом последнего выражения для отношения  $v_0/b$  из (8.34) следует закон Ньютона для внутреннего трения в случае одномерного течения среды (вдоль оси  $x$ , рис. 8.16)

$$F_{\text{тр}} = \eta S \frac{dv_x}{dy} — \text{закон Ньютона для вязкости,}$$

$$\eta — \text{коэффициент динамической вязкости.}$$

(8.36)

Производная  $dv_x/dy \equiv dv/dy$  ( $v_y = v_z = 0$ ), характеризующая быстроту изменения скорости слоев среды в направлении оси  $y$  (от слоя к слою), представляет в случае одномерного течения градиент скорости  $v$ :

$$\text{grad}\cdot v = \frac{\partial v}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z} \vec{k}, \quad v = v_x(y).$$

Коэффициент вязкости  $\eta$ , согласно (8.36), численно равен силе трения между слоями, если площадь их соприкосновения и градиент скорости равны единице. Единица  $\eta$  в СИ — паскаль-секунда ( $1 \text{ Па} \cdot \text{с} = 1 \text{ Н} \cdot \text{М}^{-2} \cdot \text{с}$ ).

С учетом касательного к площади поверхности  $S$  напряжения  $\sigma_{\tau} = F_{\text{тр}}/S$  закон (8.36) примет следующий вид ( $\sigma_{\tau} \equiv \sigma_{xy}$ ):

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{dv_x}{dy} — \text{закон Ньютона для касательных вязких напряжений.}$$

(8.37)

Рассмотренный здесь закон вязкого трения описывает одно из трех явлений переноса (см. раздел «Молекулярная физика», гл. 17), связанных с наличием неоднородностей плотности (диффузия), температуры (теплопроводность) и скорости течения среды (вязкость).

Коэффициент  $\eta$  из (8.36) и (8.37) обычно определяется экспериментально, а для газов может быть легко найден с помощью молекулярно-кинетической теории газов. Некоторые экспериментальные методы измерения вязкости будут рассмотрены в соответствующих местах изучаемого материала курса физики. Здесь же отметим, что, согласно данным, полученным в эксперименте, коэффициент  $\eta$  с повышением температуры у жидкостей уменьшается, а у газов возрастает (см. табл. III.1 и III.2 прил. III). Это является указанием на различный механизм возникновения вязкости в жидкостях и газах.

**Ламинарный и турбулентный режимы движения вязкой среды.** При небольшой скорости течения по трубе жидкость как бы разделяется на слои, которые скользят относительно друг друга. Если в такой поток внести подкрашенную струю, то она сохраняет свою форму и перемещается, не размываясь. Такое слоистое течение называется *ламинарным*. Оно является стационарным и характеризуется определенным распределением поля скоростей по сечению потока (см. пример 8.6).

При медленном увеличении скорости течения среды всегда наступает такой момент, когда происходит резкий переход от ламинарного течения к движению среды с энергичным перемешиванием, которое характерно для *турбулентного* (вихревого) режима движения. Разные частицы среды в заданном месте турбулентного потока движутся по различным траекториям, т. е. движение в определенном смысле носит случайный характер.

Английский ученый О. Рейнольдс (1842—1912) установил, что режим течения среды зависит от некоторой величины

$$Re = \rho v l / \eta — \text{число Рейнольдса,} \quad (8.38)$$

представляющей собой безразмерную комбинацию плотности  $\rho$  среды, средней скорости  $v$  потока по сечению трубопровода, характерного линейного размера  $l$  поперечного сечения и коэффициента динамической вязкости  $\eta$ . При малых значениях числа Рейнольдса (малые скорости

при заданных значениях  $\rho$ ,  $l$ ,  $\eta$ ) течение среды всегда ламинарно, а при больших — турбулентно. Интересно, что переход от ламинарного к турбулентному режиму происходит достаточно резко при некотором критическом значении числа  $Re$ .

Так, для течения в цилиндрических трубах  $Re^{kp} = 1000$ , если в качестве линейного размера  $l$  сечения взять его радиус  $R$  ( $l \equiv R$ ). Помимо числа Рейнольдса, широко используются и другие безразмерные комбинации физических величин, которые являются критериями, определяющими состояние движущихся сред или физических процессов в них.

Оказывается, что модель самолета или другого летательного аппарата ведет себя в аэродинамической трубе точно так же, как и реальный аппарат в реальных условиях, если для них совпадают числа Рейнольдса. Это утверждение является основным положением теории подобия для моделируемых и реальных физических явлений и процессов.

**Пример 8.6.** Получим закон распределения скорости ламинарного потока вязкой среды по сечению цилиндрической трубы радиуса  $R$ . С его помощью определим среднюю скорость потока и секундный расход жидкости или газа, т. е. получим формулу Ж. Пуазейля (1799—1869).

**Решение.** Мысленно выделим внутри потока среды некоторый объем в виде цилиндра радиуса  $r$  и длины  $l$  (рис. 8.17). При стационарном — установившемся течении жидкости или газа в трубе постоянного сечения скорости всех частиц среды остаются постоянными во времени. Следовательно, сумма всех внешних сил, приложенных к выделенному цилиндрическому объему, равна нулю. Это условие стационарности потока позволяет записать уравнение равновесия сил давления и сил вязкого трения (8.37), распределенных по боковой поверхности цилиндра радиуса  $r$ . Поскольку силы тяжести перпендикулярны к оси  $x$ , а градиент  $dv/dr < 0$ , то уравнение стационарности потока будет иметь следующий вид:

$$\sum_{k=0}^N F_{kx} = 0, p_1 S_{\text{осн}} - p_2 S_{\text{осн}} - \eta (-dv/dr) S_{\text{бок.нов}} = 0. \quad (8.39)$$

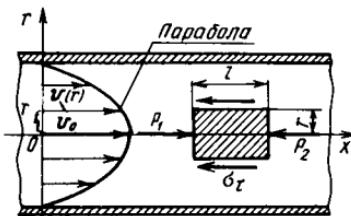


Рис. 8.17

После подстановки в (8.39) выражений для площадей основания и боковой поверхности цилиндра получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta} r. \quad (8.40)$$

Воспользуемся граничным условием  $v = 0$  при  $r = R$  (условие прилипания жидкости к поверхности трубы — нет проскальзывания) и выполним интегрирование. В результате получим поле скоростей, которое определяется параболической зависимостью от радиуса  $r$ :

$$v(r) = v_0(1 - r^2/R^2), \quad v_0 = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} R^2. \quad (8.41)$$

Здесь  $v_0$  — скорость среды в центре трубы, т. е. при  $r = 0$ . Среднее значение скорости по сечению трубы получим путем усреднения  $v(r)$  по площади  $S = \pi R^2$ :

$$v_{cp} = \frac{1}{S} \int_S v(r) dS = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr = \frac{v_0}{2}. \quad (8.42)$$

Секундный расход жидкости или газа через трубу радиуса  $R$  определим по формуле

$$V_{sek} = v_{cp} S = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8l\eta} R^4 — \text{формула Пуазейля.} \quad (8.43)$$

Формула Пуазейля используется при определении коэффициента  $\eta$  для вязких сред путем измерения объема  $V$  вытекшей жидкости за некоторое время  $t$  при заданном перепаде давлений  $\Delta p = p_1 - p_2$ . Приборы, служащие для определения вязкости по этому методу, называются *вискозиметрами*.

#### 8.4. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

**Закон Стокса.** Пусть тело движется относительно покоящейся жидкости или газа\* со скоростью  $v$ . Со стороны среды на тело будет действовать система распределенных по его поверхности сил давления и вязкого трения. Эти силы приводятся в общем случае к силе  $\mathbf{R}$  и моменту  $\mathbf{M}$ . По принципу относительности Галилея (см. § 2.3) эта система сил будет такой же, как и при обтекании неподвижного тела потоком среды, имеющим скорость  $v^* = -v$  (для этого следует перейти от лабораторной системы, в которой тело движется, к подвижной системе координат, связанной с этим телом).

\* Здесь газы рассматриваются как несжимаемая среда, что справедливо при скоростях  $v < 100 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$  (иначе следует учитывать зависимость плотности  $\rho$  от статического давления  $p$ ).

Суммарную силу  $\mathbf{R}$  (рис. 8.18), действующую на тело, разложим на две составляющие. Одна из них (сила  $\mathbf{F}_c$ ) направлена вдоль скорости  $v^*$  набегающего потока жидкости или газа и называется *лобовым сопротивлением*, а вторая (сила  $\mathbf{Q}$ ) — перпендикулярна к  $v^*$  и называется *подъемной силой*.

Лобовое сопротивление  $\mathbf{F}_c$  при малых числах Рейнольдса (ламинарный режим) оказывается линейным по скорости (см. формулу (3.9)), поскольку основной вклад дают силы вязкого трения. В частности, Дж. Стокс (1819—1903) теоретически показал, что коэффициент пропорциональности  $\mu$  для медленно движущегося небольшого шара равен  $6\pi\eta r$ . В этом случае имеет место формула

$$\mathbf{F}_c = -6\pi\eta r v \quad \text{закон Стокса (1851).} \quad (8.44)$$

Для плохо обтекаемого тела, а также при больших числах Рейнольдса лобовое сопротивление  $\mathbf{F}_c$  определяется преимущественно характером распределения давления в потоке текучей среды (газа или жидкости). В этом случае в хвостовой части тела возникает интенсивное вихреобразование (рис. 8.19), следствием которого как раз и является значительное понижение давления в хвостовой части по отношению к лобовой части тела. Поэтому сила сопротивления при турбулентном режиме оказывается пропорциональной скоростному напору  $\rho v^2/2$ , т. е. динамическому давлению (см. формулу (3.10)):

$$F_c = k\rho \frac{v^2}{2} S \Rightarrow F_c = -\mu^* v v. \quad (8.45)$$

Коэффициент  $\mu^* = k\rho S/2$  зависит от геометрических размеров (например, площади  $S$  поперечного сечения тела), плотности среды  $\rho$  и числа Рейнольдса.

При движении со сверхзвуковыми скоростями или

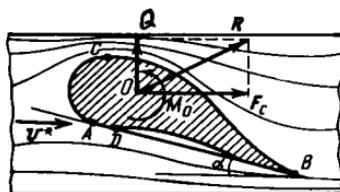


Рис. 8.18

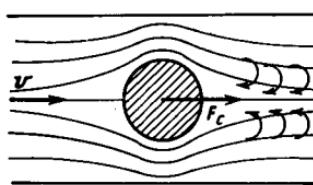


Рис. 8.19

близкими к скорости звука сила сопротивления пропорциональна кубу скорости.

Следует заметить, что для модели идеальной жидкости сила лобового сопротивления при любой скорости движения тела равна нулю. Это так называемый парадокс Д'Аламбера — Эйлера, который формально согласуется с законом Стокса (см. (8.44)) при  $\eta = 0$ . В случае реальных жидкостей и газов формула (8.44) для силы Стокса лежит в основе одного из лабораторных методов определения коэффициента вязкости  $\eta$  по экспериментальным данным, полученным при изучении падения маленьких шариков в вязкой среде (метод Стокса). Теоретическое рассмотрение динамики такой задачи было проведено на примере парашютиста, совершающего затяжной прыжок (пример 2.2).

Возникновение подъемной силы  $Q$  удобно объяснить, если под движущимся телом (см. рис. 8.18) понимать крыло самолета. При обтекании его потоком воздуха скорость под крылом больше, чем над ним. В результате в соответствии с уравнением Бернулли давление под крылом больше, чем над ним. Эта разность давлений и создает подъемную силу крыла, пропорциональную динамическому давлению  $\rho v^2/2$  и углу атаки  $\alpha$ , который определяет ориентацию крыла по отношению к скорости  $v$  полета (угол  $\alpha$  см. на рис. 8.18):

$$Q = k^* \rho \frac{v^2}{2} S. \quad (8.46)$$

В заключение отметим, что основы теории подъемной силы были разработаны Н. Е. Жуковским (1847—1921), который показал, что подъемная сила  $Q$  связана с циркуляцией вектора скорости потока вдоль контура  $L$  продольного сечения тела:

$$Q = k^{**} \rho v \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} — \text{формула Жуковского.} \quad (8.47)$$

**Задание 8.4.** Используя (8.46) и (8.47), получите выражение для циркуляции  $\Gamma$  вектора скорости  $v$  ( $\Gamma = \oint_L \mathbf{v} d\mathbf{r}$ ) и найдите ее значение для покоящегося тела.

**Ответ.** Циркуляция  $\Gamma = 0,5k^*vS/k^{**}$ , при  $v = 0$  циркуляция  $\Gamma = 0$ .

**Задание 8.5.** Если форма тела симметрична относительно направления его движения, то подъемная сила равна нулю. Поясните, почему возникает подъемная сила у летящего симметричного (рис. 8.20), но врачающегося тела (эффект Магнуса). Определите значение

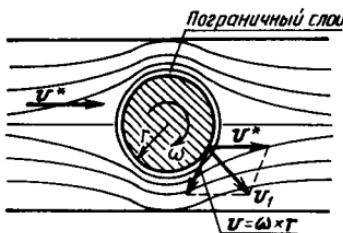


Рис. 8.20

этой силы в предположении, что пограничный слой среды полностью увлекается вращающимся телом (условие прилипания).

**Указание.** Воспользуйтесь формулой Жуковского и вычислите циркуляцию вектора скорости  $v_1 = v^* + \omega \cdot r$  по круговому контуру радиуса  $R$  (при заданном значении  $\omega$ ).

**Ответ.**  $Q = 2k^{**}\pi R^2 \rho \omega$ .

**Задание 8.6.** Получите уравнение Бернуlli для идеального газа, обладающего сжимаемостью, соответствующей уравнению Клапейрона — Менделеева (см. уравнение (8.7)).

**Указание.** Примените закон изменения энергии объема газа, заключенного между двумя бесконечно близкими сечениями  $S$  и  $S'$  трубы тока (см. § 8.2), и учтите зависимость плотности  $\rho$  от  $p$  и  $T$  для идеального газа. При интегрировании полученного уравнения

$$\rho v d\nu + \rho g dh + dP = 0 \quad (8.48)$$

можно считать, что при больших скоростях движения газа процесс его сжатия или расширения в трубке тока происходит без теплообмена (см. адиабатический процесс для идеального газа, гл. 13).

**Ответ.** Для случаев, когда потенциальной энергией газа можно пренебречь, из (8.48) следует уравнение

$$\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} = 0. \quad (8.49)$$

Поскольку для адиабатического процесса  $pV^\gamma = \text{const}$  ( $\gamma = C_p/C_V$  — адиабатическая постоянная), то  $\rho = \rho_1(p/p_1)^{1/\gamma}$ . В результате из (8.49) следует уравнение Бернуlli

$$\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[ \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} - 1 \right] = 0 \quad (8.50)$$

или

$$\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{\mu} (T_2 - T_1) = 0. \quad (8.51)$$

Здесь  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $T_1$ ,  $v_1$  и  $\rho_2$ ,  $T_2$ ,  $v_2$  — термодинамические характеристики состояния газовой среды в сечениях  $S_1$  и  $S_2$ , удаленных на конечное расстояние друг от друга.

...А скрипка цвета не имела,  
Она имела только звук.

*H. Панченко. Стихи о скрипке*

## 9. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

**Классификация волн.** Колебания, возбужденные в некоторой точке упругой среды, передаются соседним частицам среды, которые также начинают участвовать в колебательном процессе. Чем дальше расположена частица от источника колебаний, тем позднее она начинает совершать колебательное движение.

Процесс распространения колебаний частиц сплошной среды называется *упругой волной*. Направление распространения волны характеризуют с помощью понятия луча. *Лучом* называется линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением скорости  $\mathbf{v}$  распространения волны. Упругие волны могут быть продольными и поперечными.

*Продольными* называются волны, в которых частицы колеблются в направлении распространения волны, т. е. вдоль луча. При этом возникают деформации сжатия и растяжения, которые, как мы знаем (см. § 3.2), имеют место в твердых, жидких и газообразных средах (см. гл. 8).

Для описания упругих свойств деформированной среды воспользуемся законом Гука (см. (3.11)), применив его к малому элементу среды (рис. 9.1). Пусть при равновесии среды он находится в положении  $x$ , имеет длину  $l_0 = \Delta x$  и площадь поперечного сечения  $\Delta S^*$ . В результате распространения волны его левый и правый концы к некоторому моменту времени  $t$  сместятся вдоль оси  $x$  соответственно на расстояния  $s_1 = s(x, t)$  и  $s_2 = s(x + \Delta x, t)$ . Введем относительную деформацию среды в точке с координатой  $x$  как отношение абсолютной деформации  $\Delta s = s_2 - s_1$  к первоначальной длине  $\Delta x$ . В пределе при  $\Delta x \rightarrow 0$  получим ( $\varepsilon_x$  — относительная деформация в направлении оси  $x$ )

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{s(x + \Delta x, t) - s(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial s(x, t)}{\partial x}. \quad (9.1)$$

Таким образом, деформация  $\varepsilon_x$  равна частной произвольной по  $x$  от смещения  $s(x, t)$  частиц среды. К поперечному сечению  $\Delta S^*$  элемента среды в точке  $x$  приложена сила  $\Delta F(x, t)$ . По закону Гука (3.11)  $\Delta F = k \cdot \Delta s(x, t)$ ,

при этом коэффициент жесткости  $k$  зависит от длины и площади поперечного сечения. Разделим и умножим левую часть на площадь сечения  $\Delta S^*$ , а правую часть на  $\Delta x$ :

$$\frac{\Delta S}{\Delta S^*} \Delta S^* = k \cdot \Delta x \frac{\Delta s}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta F}{\Delta S^*} = E \frac{\Delta s}{\Delta x}. \quad (9.2)$$

Здесь величина  $E = k \cdot \Delta x / \Delta S^*$  называется *модулем Юнга*. Как показывает опыт, модуль Юнга не зависит от размеров деформируемого элемента и является упругой характеристикой материала. Например, для стали  $E = 2,0 \cdot 10^{11}$  Па.

В выражении (9.2), содержащем  $E$ , выполним предельный переход  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta S^* \rightarrow 0$ . Получим закон Гука для неоднородно деформированной среды

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial S^*} = E \frac{ds}{dx}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_x = E \varepsilon_x \text{ — закон Гука для растяжения.}} \quad (9.3)$$

Напряжение  $\sigma_x = \partial F / \partial S^*$  представляет собой силу, отнесенную к единичной площади поперечного сечения элемента среды. Из закона (9.3) следует, что модуль Юнга  $E$  численно равен нормальному напряжению  $\sigma_x (\sigma_x \perp \Delta S^*)$ , которое необходимо приложить, чтобы относительная деформация  $\varepsilon_x = \partial s / \partial x$  стала равной единице (при этом линейный размер образца увеличился бы в два раза).

*Поперечными* называются волны, в которых частицы среды колеблются в направлении, перпендикулярном

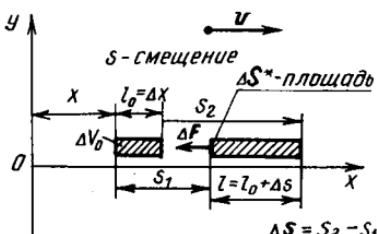


Рис. 9.1

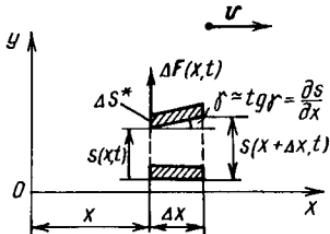


Рис. 9.2

к направлению распространения волны, т. е. перпендикулярно к лучу (рис. 9.2). В этом случае исходный прямоугольный элемент среды длиной  $\Delta x$  займет новое положение, причем его поперечные слои смеются относительно друг друга. Упругие силы при такой сдвиговой деформации возникают только в твердых телах. Они обусловливают распространение поперечных (сдвиговых) волн в твердой среде. Поскольку силы упругости при сдвиге расположены в плоскости поперечного сечения выделенного элемента (в касательной плоскости), то закон Гука (см. (3.12)) примет следующий вид:

$$\sigma_t = G \varepsilon_t \text{ — закон Гука для сдвиговой деформации.} \quad (9.4)$$

Здесь  $\sigma_t = \partial F_t / \partial S^*$  — касательное напряжение,  $\varepsilon_t = \gamma = (\partial S / \partial x)$  — относительная деформация сдвига, а  $G = k_{\text{сд}} \Delta x / \Delta S^*$  — модуль сдвига (для стали  $G = 8,1 \times 10^{10}$  Па,  $E > G$ , см. табл. III.3—III.5 прил. III).

Геометрическое место точек среды, до которых к некоторому времени  $t$  распространилось колебательное движение, называется *фронтом волны*.

Упругая волна называется гармонической, если соответствующие ей колебания частиц среды происходят по гармоническому закону

$$s = A \cos(\omega t + \alpha(x)). \quad (9.5)$$

Здесь  $\alpha(x)$  — начальная фаза частицы с координатой  $x$ , а  $\varphi = \omega t + \alpha(x)$  — фаза колебаний этой частицы.

Геометрическое место частиц среды, колеблющихся в одинаковой фазе, образует *волновую поверхность*. Геометрическая форма фронта волны определяет вид волн. Простейшими видами волн являются *плоская волна* (фронт волны — плоскость) и *сферическая волна* (фронт волны — сфера). Если среда анизотропна, то скорость  $v$  распространения волны зависит от направления. В результате фронт волны, возбужденной точечным источником, примет форму эллипсоида.

*Длиной волны*  $\lambda$  называется расстояние, на которое перемещается волновая поверхность за время, равное периоду  $T$  колебаний частиц среды. Очевидно, что

$$\lambda = vT \text{ или } \lambda = v/v, \quad (9.6)$$

где  $v$  — скорость волны, а  $v = 1/T$  — частота колебаний.

## 9.1. УРАВНЕНИЕ ВОЛНЫ И ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

**Уравнение плоской волны.** Пусть источник плоской волны находится в начале координат и совершает колебания по закону  $s = A \sin \omega t = A \cos (\omega t - \pi/2)$ . Частица среды, находящаяся на расстоянии  $x$  от источника, начнет колебаться по такому же синусоидальному закону через промежуток времени  $\tau = x/v$ , который определяет время прохождения фронтом волны расстояния  $x$ . Это значит, что колебания частиц среды будут отставать по фазе на величину  $\omega\tau$  от колебаний источника. Если энергия колебаний частиц не поглощается средой (нет диссипации энергии), то амплитуда колебаний частиц будет равна амплитуде источника. Это означает, что закон колебания частиц среды определяется уравнением

$$s(x, t) = A \sin(\omega t - \omega\tau) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Последнее уравнение показывает, что колебательный процесс в упругой среде является периодическим не только во времени ( $\omega = 2\pi/T$ ), но и в пространстве при изменении координаты  $x$  и фиксированном моменте времени  $t$  (рис. 9.3). Если для описания периодичности в пространстве ввести волновое число (по аналогии с частотой  $\omega = 2\pi/T$ )

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}, \quad (9.7)$$

то уравнение (9.7) преобразуется к следующему виду (начальную фазу колебаний  $\alpha = -\pi/2$  в дальнейшем будем опускать):

$$s = A \cos(\omega t - kx + \alpha) — \text{уравнение плоской волны.} \quad (9.8)$$

Поскольку гармоническая волна имеет определенную (одну) частоту, то она называется *монохроматической*.

Частицы *B* и *C* среды, расположенные на расстоянии  $\lambda$  одна от другой, различаются по фазе на  $2\pi$ , т. е. имеют одинаковые смещения в данный момент времени  $t$ . В связи с этим говорят, что они колеблются в одинаковой фазе.

Определим скорость, с которой перемещается волновая поверхность, частицы которой имеют заданную фазу

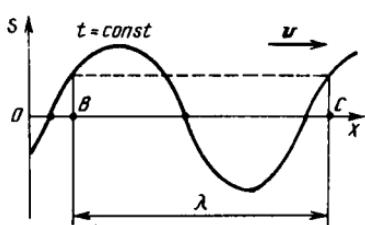


Рис. 9.3

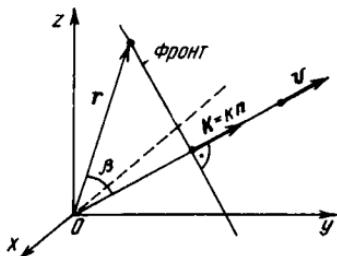


Рис. 9.4

$\varphi_1 = \omega t - kx = \text{const}$ . Положение этой плоскости определяется координатой  $x = (\omega t - \text{const})/k$ . Скорость ее перемещения  $dx/dt = \omega/k$  совпадает со скоростью  $v$  распространения колебаний в среде (см. выражение (9.7) для волнового числа  $k$ ). Таким образом, скорость  $v = \omega/k$  является скоростью фазовой поверхности и называется *фазовой скоростью*.

В случае распространения волны в отрицательном направлении оси  $x$  в уравнении (9.8) изменяется знак перед волновым числом  $k$ :

$$s = A \cos(\omega t + kx).$$

Если плоская волна распространяется не вдоль оси  $x$  (рис. 9.4), а в направлении, задаваемом вектором  $\mathbf{p}$  ( $\mathbf{p}$  — единичный вектор нормали к плоскому фронту), то уравнение волны будет иметь следующий вид (см. задание 9.1):

$$s(\mathbf{r}, t) = A \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (9.9)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор некоторой частицы среды,  $\mathbf{k} = k\mathbf{p}$  — волновой вектор,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z = kl$  — скалярное произведение векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{r}$ . Воспользуемся формулой Эйлера для комплексных чисел (см. прил. II, табл. II.1)

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi, \quad i = \sqrt{-1}$$

и перепишем уравнение волны в комплексной форме:

$$s(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} A e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = A e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (9.10)$$

Здесь символ  $\operatorname{Re}$  (обычно его опускают) означает, что в выражении (9.10) нужно принимать во внимание только действительную часть  $A \cos \varphi$ , которая и описывает волну (9.9). Комплексная форма записи волны удобна при

выполнении математических преобразований с выражением (9.9), например при дифференцировании (см. (9.12) и (9.13)).

**Уравнение сферической волны.** При распространении колебаний от точечного источника в изотропной среде без диссипации энергии уравнение волны имеет следующий вид (см. задание 9.2):

$$s(\mathbf{r}, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (9.11)$$

Множитель  $1/r$  учитывает тот факт, что суммарная энергия колебаний частиц, расположенных на сферической волновой поверхности, должна оставаться постоянной величиной при увеличении ее радиуса в процессе распространения волны.

**Волновое уравнение.** Выражение (9.10) для волны является решением некоторого дифференциального уравнения, точно так же, как уравнение гармонических колебаний является решением дифференциального уравнения линейного осциллятора (см. (7.5)). Чтобы получить это уравнение, найдем вторые частные производные от (9.10) по  $t$ ,  $x$ ,  $y$  и  $z$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial s}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [-Ai\omega e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}] = \\ &= Ai^2 \omega^2 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -\omega^2 s, \end{aligned} \quad (9.12)$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -k_x^2 s, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = -k_y^2 s, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = -k_z^2 s. \quad (9.13)$$

Если выражения (9.13) сложить и из правой части полученного соотношения исключить  $s$  с помощью (9.12), то получится дифференциальное уравнение в частных производных ( $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ ):

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - v^2 \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right) = 0 — \text{волновое уравнение.}$$

(9.14)

Если воспользоваться оператором Лапласа  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  ( $\nabla$  — набла), который действует на функцию  $s = s(x, y, z, t)$ , то запись волнового уравнения упрощается. Оно приобретает следующий компактный вид:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 s = 0. \quad (9.15)$$

Символическое умножение оператора  $\nabla^2$  на функцию  $s(x, y, z, t)$  означает, что при расчетах нужно вычислить вторые частные производные от функции  $s$  по  $x, y, z$  и их сложить, т. е. от уравнения (9.15) перейти к развернутому уравнению (9.14).

**Пример 9.1.** Найдем скорость  $v$  упругих волн в сплошной среде и установим ее связь с упругими характеристиками среды (модулем Юнга, модулем сдвига и модулем всестороннего сжатия среды  $K^* = 1/k$  (см. (8.6),  $k$  — коэффициент сжимаемости).

**Решение.** Найдем фазовую скорость для случая продольных волн, которые распространяются в твердом теле. Выделенный элемент среды массой  $m$  движется по закону  $s = s(x, t)$  и, следовательно, имеет скорость  $u_x = \partial s / \partial t$  и ускорение  $a_x = \partial^2 s / \partial t^2$  (координата  $x$  для данной частицы является величиной фиксированной). По второму закону Ньютона (см. рис. 9.5, а) запишем

$$m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \sigma(x + dx) \Delta S^* - \sigma(x) \cdot \Delta S^*. \quad (9.16)$$

Здесь  $\sigma$  — нормальное напряжение, а  $\Delta S^*$  — площадь поперечного сечения элемента. Поскольку его масса  $m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta S^*$ , то уравнение (9.16) преобразуется к следующему виду (согласно (9.3) напряжение  $\sigma = E \cdot \partial s / \partial x$ ):

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}.$$

Из сопоставления с волновым уравнением плоской волны (см. (9.14))

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 0$$

следует, что фазовая скорость продольных волн в твердых телах определяется модулем Юнга  $E$  и плотностью  $\rho$ :

$$v = \sqrt{E/\rho}. \quad (9.17)$$

Аналогичные расчеты для поперечных волн в твердых телах и продольных волн в жидкостях и газах приводят к следующему результату\*:

$$v = \sqrt{G/\rho}, \quad v = \sqrt{K^*/\rho}. \quad (9.18)$$

В выражения (9.18) входят модуль сдвига  $G$  для твердого тела и модуль всестороннего сжатия  $K^*$  жидкости или газа, который связан с коэффициентом сжимаемости  $k$  в формуле (8.6). Чтобы установить эту связь, запишем выражение (8.6) для изменения давления  $\Delta p = p - p_0$  в среде, вызванного изменения первоначального объема  $V_0 = \Delta x \cdot \Delta S^*$  на величину  $\Delta V = \Delta s \cdot \Delta S^*$  (см. рис. 9.5, б)

\* Справочные данные о скорости звуковых волн приведены в прил. III (табл. III.12—III.14).

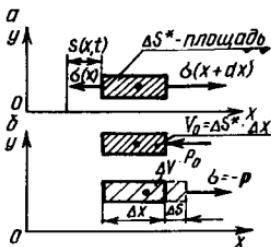


Рис. 9.5

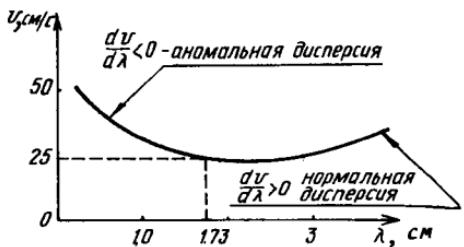


Рис. 9.6

$$p - p_0 = - \frac{1}{k} \frac{\Delta V}{V_0} = - \frac{1}{k} \frac{\Delta s \cdot \Delta S^*}{\Delta x \cdot \Delta S^*} = - \frac{1}{k} \frac{\Delta s}{\Delta x}. \quad (9.19)$$

Поскольку напряжение  $\sigma = -p$ , то выражение (9.19) для давления можно переписать в пределе  $\Delta x \rightarrow 0$  через напряжение  $\sigma$  и относительную деформацию  $\epsilon = \partial s / \partial x$ :

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{1}{k} \frac{\partial s}{\partial x}.$$

Здесь  $\sigma_0 = -p_0$  — напряжение в исходном состоянии среды объемом  $V_0$  и давлением  $p_0$ , а величина  $K^* = \frac{1}{k}$  при сопоставлении с законом Гука (см. (9.3) и (9.4)) приобретает смысл модуля всестороннего сжатия жидкости или газа.

**Дисперсия волн.** В сплошных средах скорость  $v$  распространения волны является величиной постоянной, характерной для данной среды, и не должна зависеть от частоты колебаний (если  $E$ ,  $G$  и  $K^*$  не зависят от частоты). В некоторых средах это выполняется, а в ряде сред из-за теплопроводности, вязкости и других факторов фазовая скорость гармонических волн зависит от частоты. Это явление называется *дисперсией волн*. Если фазовая скорость  $v$  растет с увеличением длины волны  $\lambda$  (уменьшением частоты), то дисперсия называется *нормальной*; если же она уменьшается с уменьшением частоты, то *аномальной*. На рис. 9.6 изображена кривая зависимости  $v = f(\lambda)$  для поверхностных волн на воде, которая имеет минимум при  $\lambda = 1,73$  см.

**Принцип суперпозиции упругих волн.** Принцип суперпозиции, с которым мы уже встречались при описании потенциальных силовых полей и использовали в главе «Механические колебания», является отражением линейности законов или уравнений, описывающих данное физическое явление. В отношении волновых процессов в упругих средах таким уравнением является волновое уравнение (9.14) — линейное дифференциальное урав-

нение в частных производных. Основная его особенность состоит в том, что, если две волны  $s_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x + \alpha_1)$  и  $s_2 = A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x + \alpha_2)$  являются решением волнового уравнения (это имеет место при  $\omega_1/k_1 = \omega_2/k_2 = v$ ), то  $s = s_1 + s_2$  также является решением этого уравнения (см. задание 9.3). Поэтому при распространении в среде нескольких таких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют. Результирующее смещение частиц в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы среды, участвуя в распространении каждой из слагаемых волн.

**Групповая скорость.** Реальные источники волн излучают не одну какую-либо монохроматическую волну, а совокупность волн, частоты которых лежат в пределах от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , а волновые числа изменяются от  $k$  до  $k + \Delta k$ . В случае наложения волн с дискретным набором частот  $\omega_n$  и волновых чисел  $k_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) результирующая волна в соответствии с принципом суперпозиции может быть записана в виде суммы:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t - k_n x + \alpha_n). \quad (9.20)$$

В качестве иллюстрации рассмотрим простейший случай сложения двух монохроматических волн с одинаковыми амплитудами, близкими частотами ( $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1$ ) и волновыми числами ( $k_2 - k_1 \ll k_1$ ). Так же, как и в случае сложения двух колебательных движений (см. явление биения — формула (7.31)), выполним преобразования с использованием тригонометрической формулы  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ . Получим

$$\begin{aligned} s &= A \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A \cos(\omega_2 t - k_2 x) = \\ &= 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}x\right) = \\ &= A(t, x) \cos(\omega t - kx), \end{aligned}$$

где  $A(t, x) = 2A \cos(\Delta\omega t - \Delta k x)$ ,  $\Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1)/2$ ,  $\Delta k = (k_2 - k_1)/2$ ,  $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ ,  $k = (k_1 + k_2)/2$ . Эта результирующая волна отличается от монохроматической волны тем, что ее амплитуда  $A(t, x)$  является медленно изменяющейся функцией времени и координаты ( $\Delta\omega \ll \omega$ ,  $\Delta k \ll k$ ). Это означает, что имеет место своеобразное «биение» не только во времени, но и по отношению к про-

странственной координате (рис. 9.7, а), что аналогично амплитудной модуляции несущих электромагнитных волн, используемых в радиопередаче. Периодические пульсации амплитуды, т. е. *модулирующей волны*

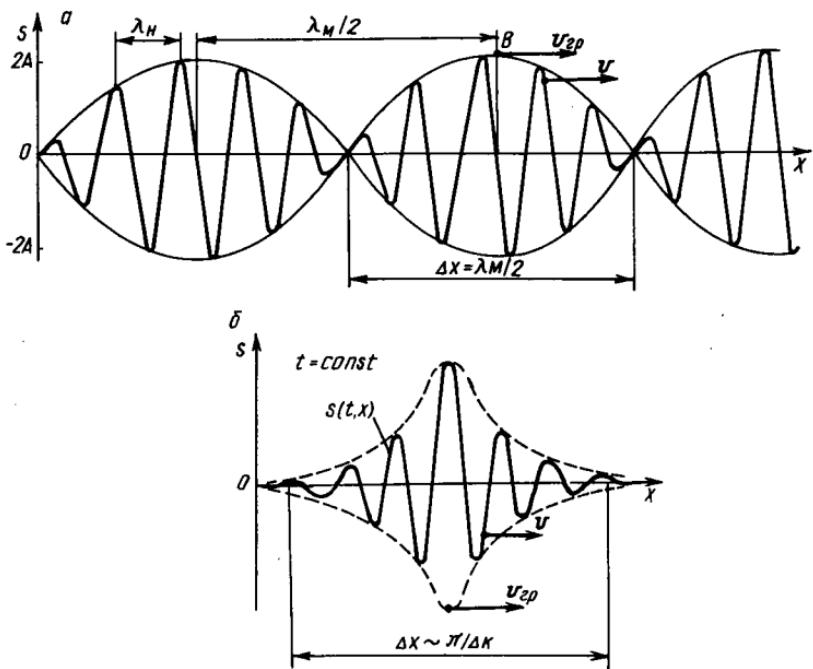


Рис. 9.7

$A(t, x) = 2A \cos(\Delta\omega t - \Delta k x)$ , определяются ее периодом  $T_m = 2\pi/\Delta\omega = 4\pi/(\omega_2 - \omega_1)$  и длиной волны  $\lambda_m = 2\pi/\Delta k = 4\pi/(k_2 - k_1)$ . Поскольку  $\Delta\omega \ll \omega$ , а  $\Delta k \ll k$ , то характеристики *несущей волны* ( $T_n = 2\pi/\omega$ ,  $\lambda_n = 2\pi/\lambda$ ) сильно отличаются от параметров модулирующей волны ( $T_n \ll T_m$ ,  $\lambda_n \ll \lambda_m$ ).

Определим скорость перемещения максимумов амплитуды  $A(t, x)$ , которая равна фазовой скорости модулирующей волны:

$$v_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}.$$

Поскольку плотность энергии двух складываемых бегущих волн (в общем случае группы монохроматических волн) определяется квадратом амплитуды результирующей волны (см. формулу (9.29)), то скорость перено-

са этой энергии будет равна скорости  $v_m$ , которую называют *групповой скоростью*:

$$v_{gp} = \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Установим связь между групповой скоростью и фазовой скоростью результирующей волны ( $v = \omega/k$ ). Поскольку  $\omega = kv$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ , а скорость  $v$  при наличии дисперсии зависит от  $\lambda$  ( $v = f(\lambda)$ ), то после перехода от дифференцирования по волновому числу  $k$  к дифференцированию по  $\lambda = 2\pi/k$  получим искомое соотношение:

$$v_{gp} = \frac{d(kv)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk},$$

$v_{gp} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$  — формула Релея. (9.21)

Из формулы (9.21) следует, что при нормальной дисперсии ( $dv/d\lambda > 0$ ) групповая скорость меньше фазовой, при аномальной ( $dv/d\lambda < 0$ ) — групповая скорость больше фазовой, а при отсутствии дисперсии эти скорости равны.

**Локализованный волновой пакет.** Результирующая волна, представленная на рис. 9.7, *a*, имеет целый ряд максимумов, в окрестности которых волновой процесс локализован в пространстве на расстояниях  $\Delta x \sim \lambda_m/2 = \pi/\Delta k$  (временной интервал биений  $\Delta t \sim T_m/2$  — см. рис. 7.14). Оказывается, что при наложении достаточно большого числа волн с близкими частотами и волновыми числами можно избавиться от всех максимумов, кроме одного. Для этого нужно специальным образом подобрать амплитуды волн, которые в соответствии с (9.20) определяют результирующее *волновое образование* с пространственной локализацией (рис. 9.7, *б*), называемое *волновым пакетом*. Скорость перемещения «центра тяжести» такого пакета определяется его групповой скоростью, а пространственная локализация  $\Delta x \sim \pi/\Delta k$  зависит от интервала волновых чисел  $\Delta k$  пакета или соответствующего ему интервала частот  $\Delta\omega$  ( $\Delta x \Delta k \sim \pi$ ). Чем меньше ширина пакета, тем больший интервал волновых чисел  $\Delta k$  требуется для его описания с помощью разложения (9.20).

## 9.2. ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ И ЕЕ ПЛОТНОСТЬ

**Кинетическая энергия волны.** При распространении волн частицы среды не перемещаются в пространстве вместе с волной, а только колеблются около своих положений равновесия. Объем среды, в котором распространяется волна, обладает кинетической энергией колебательного движения частиц. Подсчитаем эту энергию для частицы среды массой  $\Delta m$  и объемом  $\Delta V$ , которая участвует в колебательном движении (см. рис. 9.1). Обозначим скорость колебаний этой частицы через  $u$ . Тогда ее кинетическая энергия ( $\rho = \Delta m / \Delta V$  — плотность среды)

$$\Delta K = \frac{1}{2} \Delta m \cdot u^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta V u^2. \quad (9.22)$$

Используем уравнение волны  $s = A \cos(\omega t - kx)$ . Тогда скорость  $u = ds/dt = -A\omega \sin(\omega t - kx)$  и выражение (9.22) перепишется в виде:

$$\Delta K = \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx). \quad (9.23)$$

**Потенциальная энергия волны.** Для нахождения потенциальной энергии волны заметим, что энергия упруго деформированного элемента (см. рис. 9.1) может быть записана в виде (см. (4.7), здесь абсолютная деформация элемента длиной  $\Delta x$  равна  $\Delta s$ )

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= \frac{1}{2} k^* \cdot \Delta s^2 = \frac{k^*}{2} \left( \frac{\Delta s}{\Delta x} \right)^2 \Delta x^2 = \frac{k^* \cdot \Delta x}{2 \Delta s^*} \varepsilon^2 \Delta x \cdot \Delta s^* = \\ &= \frac{1}{2} E \Delta V \varepsilon^2, \end{aligned} \quad (9.24)$$

где  $E$  — модуль Юнга,  $\varepsilon = \Delta s / \Delta x$  — относительная деформация элемента  $\Delta x$ , которая при  $\Delta x \rightarrow 0$  в случае волны переходит в частную производную от  $s$  по  $x$  ( $\varepsilon = ds/dx$ , см. (9.1)):

$$\varepsilon = \frac{\partial s}{\partial x} = A \cdot k \sin(\omega t - kx). \quad (9.25)$$

Подставим (9.25) в (9.24) и учтем, что волновое число  $k = \omega/v$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= \frac{1}{2} E \Delta V A^2 k^2 \sin^2(\omega t - kx) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{E}{v^2} \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx). \end{aligned}$$

Поскольку, согласно (9.17), фазовая скорость волны  $v = \sqrt{E/\rho}$ , то окончательно для потенциальной энергии волны получим выражение

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2 \sin^2(\omega t - kx). \quad (9.26)$$

**Полная энергия волны.** Сравнивая (9.23) и (9.26), видим, что кинетическая и потенциальная энергия частиц волны меняются в одной фазе ( $\phi = \omega t - kx$ ) в отличие от энергии колебаний одной точки, для которой максимуму кинетической энергии соответствует минимум потенциальной, и наоборот (см. рис. 7.2). Причем полная энергия  $E$  осциллятора остается постоянной (см. формулы (7.6) — (7.8)). Полная энергия в объеме  $\Delta V$  волны, согласно (9.23) и (9.26), равна

$$\begin{aligned} \Delta W &= \Delta K + \Delta\Pi = \rho\Delta V A^2\omega^2 \sin^2(\omega t - kx) = \\ &= \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2[1 - \cos(2\omega t - 2kx)]. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Согласно (9.27), энергия волны распространяется с той же скоростью  $v$ , что и упругая волна, т. е. она не локализована в данном объеме, а передается посредством упругих сил от частицы к частице (эстафетный механизм распространения упругих волн). Такие волны называются *бегущими*.

**Плотность энергии и вектор Умова.** Из (9.27) видим, что энергия участка волны пропорциональна его объему  $\Delta V$ . Поэтому можно ввести понятие плотности энергии:

$$\begin{aligned} w &= \frac{\Delta W}{\Delta V} = \rho A^2\omega^2 \sin^2(\omega t - kx) = \\ &= \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2[1 - \cos(2\omega t - 2kx)]. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Поскольку величина  $w$  меняется с течением времени по гармоническому закону, то среднее значение плотности энергии за период определяется средним значением  $\cos(2\omega t - 2kt)$  или  $\sin^2(\omega t - kx)$ :

$$\begin{aligned} \langle w \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \rho A^2\omega^2 \sin^2(\omega t - kx) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho A^2\omega^2 \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Здесь учтено, что  $\langle \sin^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2}$  (см. (7.9)). Энергия волн переносится в направлении распространения волны и поэтому можно ввести понятие о потоке энергии, равном количеству энергии, проходящей в единицу времени через площадку  $\Delta S^*$ , перпендикулярную к скорости  $v$  распространения волны (рис. 9.8). За время  $\tau$  через заштрихованную площадку протечет энергия, сосредоточенная в объеме  $\Delta V$  параллелепипеда, равном  $l \cdot \Delta S^*$ , т. е. величина

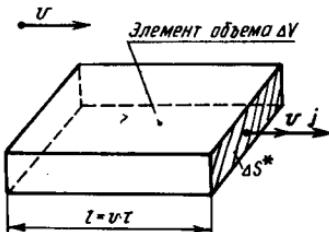


Рис. 9.8

хованную площадку протечет энергия, сосредоточенная в объеме  $\Delta V$  параллелепипеда, равном  $l \cdot \Delta S^*$ , т. е. величина

$$\langle \Delta W \rangle = \langle w \rangle v \tau \Delta S^*. \quad (9.30)$$

Тогда среднее значение потока энергии ( $\Delta\Phi$ ), согласно определению, равно

$$\Delta\Phi = \frac{\langle \Delta W \rangle}{\tau} = \langle w \rangle v \Delta S^*. \quad (9.31)$$

Из уравнения (9.31) видно, что среднее значение потока энергии пропорционально значению площади  $\Delta S^*$ . Поэтому вводят плотность  $\langle j \rangle$  среднего значения потока энергии или, коротко, интенсивность  $I$  волны, которая численно равна потоку энергии через единичную площадку, т. е.

$$I = \langle j \rangle = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S^*} = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v. \quad (9.32)$$

Согласно (9.32), среднее значение плотности потока энергии  $\langle j \rangle$  равно произведению средней плотности энергии  $\langle w \rangle$  на скорость волны  $v$ .

Поскольку скорость волны есть вектор, то плотность потока энергии следует также рассматривать как вектор, который направлен по скорости распространения волны, т. е.

$$\langle j \rangle = \langle w \rangle v. \quad (9.33)$$

Такой вектор был впервые введен профессором Москов-

ского университета Н. А. Умовым (1845—1915) и поэтому носит название *вектора Умова*.

**Задание 9.1.** Получите уравнение плоской волны, которая распространяется в пространстве в направлении, определяемом единичным вектором нормали  $\mathbf{n}$  к плоскому фронту волны (см. рис. 9.4).

**Указание.** Воспользуйтесь уравнением (9.8) для плоской волны, распространяющейся вдоль вспомогательной оси  $l$ , и запишите уравнение колебаний частиц среды (заменив в (9.8)  $x$  на  $l$ ). Затем выразите расстояние  $l$  через радиус-вектор  $\mathbf{r}$  произвольной частицы среды и единичный вектор нормали  $\mathbf{n}$ .

**Ответ.** Уравнение плоской волны

$$s(\mathbf{r}, t) = A \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}).$$

**Задание 9.2.** Получите выражение для амплитуды сферической волны, которая распространяется от точечного источника, расположенного в начале координат. Рассмотрите случай отсутствия диссипации энергии волны, т. е. ситуации, когда энергия волны сохраняется.

**Указание.** Воспользуйтесь определением (9.32) для интенсивности  $I$  волны и найдите поток  $\Phi$  энергии через сферическую поверхность радиусом  $r$ . Из условия сохранения потока энергии волны найдите амплитуду сферической волны.

**Ответ.** Амплитуда  $A = \text{const}/r = A_0/r$ .

**Задание 9.3.** Определите условие, при котором будет справедливым принцип суперпозиции для двух плоских волн ( $s_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x)$ ,  $s_2 = A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x)$ ), которые распространяются в упругой среде.

**Указание.** Если принцип суперпозиции выполняется, то результатирующая волна  $s = s_1 + s_2$  должна удовлетворять волновому уравнению (9.14). Поэтому подставьте уравнение волны  $s(x, t) = s_1 + s_2$  в (9.14) и определите условие, при котором  $s = s_1 + s_2$  является решением волнового уравнения.

**Ответ.**  $\omega_1/k_1 = \omega_2/k_2 = v$ .

### 9.3. ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

**Уравнение стоячей волны.** Если волна, распространяющаяся в упругой среде, достигает границы раздела с другой средой, то она, преломляясь, частично проходит через границу, а частично отражается (рис. 9.9). оказывается, что при отражении волны ни направление колебаний частиц среды, ни их частота не изменяются, а при полном отражении не меняется и амплитуда. При отражении от менее плотной среды фаза колебаний не изменяется (рис. 9.9, а), а при отражении от более плотной среды фаза скачком изменяется на противоположную, т. е. на  $\pi$ . Происходит потеря полуволны (рис. 9.9, б). Пусть направление распространения падающей волны перпендикулярно к границе раздела сред. Отраженная волна будет распространяться навстречу падающей и при-

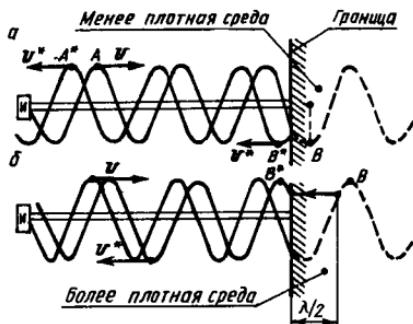


Рис. 9.9

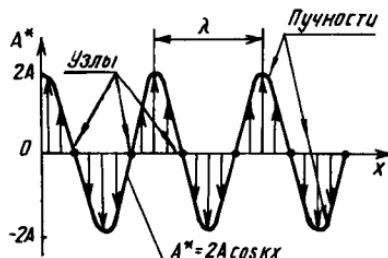


Рис. 9.10

полном отражении амплитуды их будут равны. Если уравнение падающей бегущей волны  $s_1 = A \cos(\omega t - kx)$ , то при отражении от менее плотной среды уравнение отраженной волны имеет вид  $s_2 = A \cos(\omega t + kx)$ . Результирующее смещение точки среды, участвующей в этих двух колебаниях, равно (см. задание 1.8)

$$s = s_1 + s_2 = A[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)] = 2A \cos kx \cos \omega t. \quad (9.34)$$

Уравнение (9.34) определяет результирующие колебания частиц среды и называется уравнением *стоячей волны*. Множитель  $\cos \omega t$  показывает, что во всех точках  $x$  результирующие колебания частиц совершаются с той же частотой  $\omega$  и по тому же гармоническому закону, который определяет уравнения волны и источника колебаний. Множитель  $A^* = 2A \cos kx$ , не зависящий от времени и поэтому постоянный для фиксированной точки  $x$ , называется *амплитудой стоячей волны*. Значит, в среде устанавливаются колебания частиц с амплитудой  $A^*$ , которая меняется от точки к точке, но для данной точки является постоянной. Зависимость амплитуды стоячей волны от координаты  $x$  приведена на рис. 9.10.

В тех точках, где  $\cos kx = 0$ , амплитуда стоячей волны равна нулю. Это имеет место при  $kx = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ , где  $k = 2\pi/\lambda$ , а  $n = 0, \pm 1, \pm 2\dots$  Это значит, что частицы среды с координатами  $x_n = \pm(2n+1)\lambda/4$  не участвуют в колебательном движении и образуют *узлы стоячей волны*. Встречные бегущие волны приходят в эти точки с противоположными фазами и взаимно гасятся.

В точках, для которых  $\cos kx = \pm 1$ , амплитуда стоячей волны максимальна и равна  $2A$ . Координаты этих

точек, называемых *пучностями*, удовлетворяют условию  $kx = \pm nl\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ ). Отсюда координаты пучностей  $x_n = \pm n\lambda/2$  определяют положения тех точек стоячей волны, в которые падающая и отраженная волны приходят в одинаковых фазах и тем самым усиливают друг друга.

Расстояние между соседними узлами или пучностями равно  $\lambda/2$  и называется *длиной стоячей волны*.

Из (9.34) с учетом проведенного анализа амплитуд точек стоячей волны следует, что все точки между соседними узлами колеблются в одинаковой фазе, а точки, расположенные по разные стороны от узла, колеблются в противофазе.

Стоячие волны энергии не переносят, так как количество энергии, перенесенной падающей волной в одном направлении, равно количеству энергии, перенесенной отраженной волной в противоположном направлении. В стоячей волне дважды за колебание происходит превращение энергии то полностью в кинетическую, сосредоточенную в основном в области пучностей (при прохождении частицами положений равновесия), то полностью в потенциальную, сосредоточенную в основном вблизи узлов, при достижении частицами среды максимальных отклонений от положения равновесия, где деформация среды имеет наибольшее значение.

**Колебания струны.** В струне происходят многократные отражения волн на ее концах. В этом случае стоячая волна с постоянной во времени формой может существовать только при определенных условиях. Если оба конца струны закреплены или оба не закреплены (рис. 9.11, *a*, *b*), то в ней могут образовываться только такие стоячие волны, чтобы на длине  $l$  струны укладывалось целое число полуволн или четное число четвертей длины бегу-

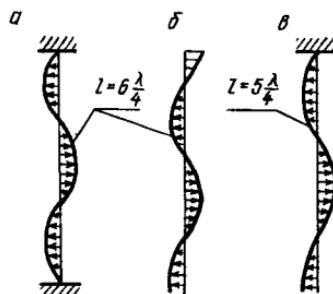


Рис. 9.11

щей волны, т. е.  $l = n\lambda/2$  ( $n = 1, 2, 3\dots$ ). Это вытекает из того факта, что в случае, изображенном на рис. 9.11, *a*, на концах струны должны быть узлы, а в случае, изображенном на рис. 9.11, *б* — пучности. Тогда длина волны  $\lambda = 2l/n$ .

Если же один конец струны закреплен, а другой свободен (рис. 9.11, *в*), то на длине  $l$  должно укладываться нечетное число четвертей длины волны, т. е.  $l = (2n - 1)\lambda/4$ . Отсюда следует, что длина волны  $\lambda = 4l/(2n - 1)$  ( $n = 1, 2, 3\dots$ ). Тогда на закрепленном конце струны будет находиться узел, а на свободном — пучность стоячей волны. Если скорость распространения волн в струне  $v$ , то возможным в ней стоячим волнам будет соответствовать ряд частот колебаний  $v_n = v/\lambda_n$ . Для первого случая частота  $v_n = nv/(2l)$ , для второго  $v_n^* = (2n - 1)v/(4l)$ . Частоты  $v_n$  называются *собственными частотами* колебаний струны. Если  $n = 1$ , то получим наименьшую возможную для данной струны частоту, равную  $v_1 = v/(2l)$  или  $v_1^* = v/(4l)$ . Она называется *основным тоном* или *первой гармоникой*. При всех остальных значениях  $n$  ( $n = 2, 3, 4\dots$ ) получим соответственно *второй, третий и т. д. обертоны, или высшие гармоники*.

При увеличении силы натяжения струны неизменной длины ( $l = \text{const}$ ) возрастает скорость распространяющихся вдоль нее волн. Это приводит к увеличению частоты основного тона и обертонов, т. е. увеличивается высота издаваемого ею звука (см. § 9.6).

Если возбуждаются вынужденные колебания струн или закрепленных стержней, то на собственных частотах возникает явление *резонанса*.

#### 9.4. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН

**Когерентные источники волн.** Волны от разных источников в некоторых точках среды могут накладываться. В местах наложения результирующее смещение частиц среды в любое мгновение является геометрической суммой смещений, вызванных каждой из накладывающихся волн в отдельности. Каждая из волн в соответствии с принципом суперпозиции ведет себя независимо от других волн и дальше распространяется в среде так, как будто бы их на своем пути не встречала.

Наибольший интерес представляет сложение волн одинаковой частоты, колеблющихся вдоль одного направления и имеющих в каждой точке пространства постоян-

ную во времени разность фаз ( $\Delta\phi = k_1 \cdot r_1 - k_2 \cdot r_2 = \text{const}$ ). Такие волны называются *когерентными*, т. е. согласованными, а их источники — когерентными источниками.

**Условия максимума и минимума для амплитуды волны.** Сложение когерентных волн приводит к явлению интерференции волн. Мы скоро убедимся в том, что при интерференции колебания в одних областях пространства усиливают друг друга, а в других областях ослабляют.

Пусть в некоторой точке  $M$  от источников  $B_1$  и  $B_2$  на-кладываются две когерентные волны (рис. 9.12), описы-

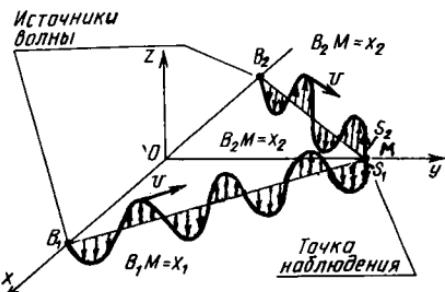


Рис. 9.12

ваемые уравнениями  $s_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$  и  $s_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$ . Здесь  $\alpha_1 = -kx_1$  — начальная фаза первого колебания в точке  $M$ , а  $\alpha_2 = -kx_2$  — начальная фаза второго колебания. Результирующее смещение  $s = s_1 + s_2 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$  будет представлять собой гармоническое колебание той же частоты, которое описывается уравнением:  $s = A \cos(\omega t + \alpha)$  (см. задание 1.6), где  $A$  — амплитуда результирующего колебания, определяемая из выражения  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$ . Амплитуда  $A$  результирующего колебания зависит от разности фаз  $\Delta\phi = \alpha_1 - \alpha_2$  между интерферирующими волнами.

Если  $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi n$ , где  $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ , то  $A = A_1 + A_2$ . Но поскольку  $\Delta\phi = \alpha_1 - \alpha_2 = k(x_2 - x_1)$ , то  $2\pi(x_2 - x_1)/\lambda = 2\pi n$  и разность хода

$$x_2 - x_1 = n\lambda \quad \text{— условие максимума для } A. \quad (9.35)$$

Это значит, что наибольшая амплитуда  $A$  результирующего колебания будет в тех точках, разность хода  $\Delta x$  до которых от источников  $B_1$  и  $B_2$  равна целому числу длин волн, а сдвиг фаз  $\Delta\phi$  кратен  $2\pi$  ( $\Delta\phi = 2\pi n$ ).

Если же разность фаз  $\alpha_1 - \alpha_2 = (2n + 1)\pi$ , а разность хода  $x_2 - x_1 = (2n + 1)\lambda/2$ , то волны максимально ослабляются, поскольку тогда  $A = A_1 - A_2$ . Если же амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  равны, то волны взаимно гасятся в тех точках пространства, где разность хода

$$x_2 - x_1 = (2n + 1)\lambda/2 \text{ — условие минимума для } A. \quad (9.36)$$

Согласно (9.27), энергия колебания пропорциональна квадрату амплитуды ( $I \sim A^2$ ). В случае равных амплитуд в области максимума энергия возрастает в четыре раза по сравнению с энергией колебаний, возбуждаемых одним источником. В области минимума она равна нулю. Таким образом, при интерференции происходит перераспределение энергии из областей минимума в области максимума.

## 9.5. ПОНЯТИЕ О ДИФРАКЦИИ ВОЛН

**Принцип Гюйгенса — Френеля.** Упругие колебания в среде передаются по эстафетному механизму от одной ее точки к соседним. Эта особенность распространения волн лежит в основе принципа, предложенного в 1690 г. Х. Гюйгенсом (1629—1695). Согласно этому принципу, каждая точка фронта волны в момент времени  $t$  рассматривается как самостоятельный источник элементарных сферических вторичных волн. Огибающая всех этих волн дает фронт волны в последующий момент времени  $t + \Delta t$  (рис. 9.13).

О. Ж. Френель (1788—1827) дополнил в 1815 г. принцип Гюйгенса положением, что вторичные волны коге-

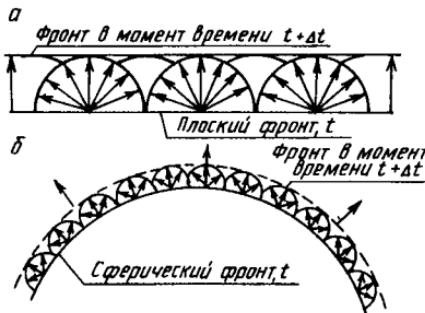


Рис. 9.13

рентны и излучаются в одинаковой фазе. Они интерферируют между собой, в результате чего вторичные волны взаимно гасятся во всех направлениях, кроме направления распространения исходного фронта, т. е. колебания сохраняются только в направлении внешней нормали огибающей вторичных волн. Принцип Гюйгенса — Френеля дает приближенный\* метод решения задач о распространении волн. В однородной изотропной среде волновой фронт плоской (рис. 9.13, а) или сферической (рис. 9.13, б) волн перемещается и всегда остается геометрически подобным себе (см. рис. 9.13).

Если на пути волны расположена экран (рис. 9.14, а), то вторичные волны, распространяющиеся от его краев, будут заходить (загибаться) за экран — в область геометрической тени. В результате и фронт волны у краев экрана загибается, лучи меняют свое первоначальное

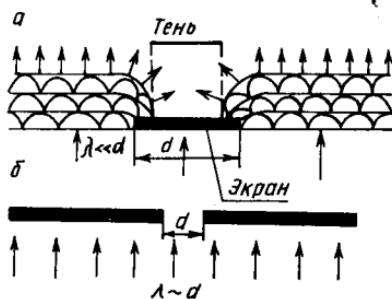


Рис. 9.14

направление. Это отклонение волн от прямолинейного направления и захождение их в область геометрической тени называется *дифракцией волн*. Дифракция существенно зависит от соотношения между размерами отверстий или экранов и длиной волны. Если размер экрана или отверстия в экране во много раз больше длины волны, то за экраном получится тень с ясно выраженными границами, так как интенсивность волн, отклонившихся в область тени, ничтожно мала по сравнению с интенсивностью неотклоненных волн (рис. 9.14, а). Дифракция в этом случае незаметна. Если же размер препятствия сравним с длиной волны, дифракция наблюдается наиболее отчетливо (рис. 9.14, б).

\* Строгое математическое обоснование принципа Гюйгенса-Френеля было дано Г. Кирхгофом (1824—1887) в 1882 г.

## 9.6. ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ

**Инфразвук, звук, ультразвук.** Механические колебания в определенном интервале частот, распространяющиеся в упругой среде, называются звуковыми или просто *звуками*, а учение о звуках — *акустикой* (от гр. *akustikós* — слуховой). Звуковые волны с частотой  $v$  от 16 до 20 000 Гц называются *собственно звуками*. Они воспринимаются органами слуха человека. Упругие волны с частотой больше 20 000 Гц называются *ультразвуками*, а с частотой ниже 16 Гц — *инфразвуками*. Они не вызывают у человека слуховых ощущений. К звуковым волнам применимы рассмотренные ранее общие закономерности колебательного и волнового механического движения в упругих средах. Если известны уравнения волн и их скорость, то можно определить смещения и характер колебаний всех точек среды, охваченных волновым движением. Область среды, находящейся в состоянии звукового движения, называется *звуковым полем*.

В жидкостях и газах звуковые волны являются продольными, а в твердых телах могут быть и продольными, и поперечными. Скорость их распространения в твердых, жидких и газообразных телах практически не зависит от частоты (или длины волн), т. е. для звуковых волн отсутствует явление дисперсии. Лишь для многоатомных газов и жидкостей дисперсия наблюдается в области ультразвуковых частот.

Скорость распространения звука в сплошной среде (твердой, жидкой и газообразной) определяется по формулам (9.17) и (9.18), которые в общем случае запишем в виде одной формулы

$$v = \sqrt{K^*/\rho}. \quad (9.37)$$

Здесь  $K^*$  — модуль упругости, соответствующий определенному типу деформации в рассматриваемой среде.

Распространение упругой (звуковой) волны в жидких и газообразных средах сопровождается периодически изменяющейся деформацией сжатия — растяжения. Процесс деформирования происходит достаточно быстро и можно считать, что соседние объемы среды не успевают при этом обмениваться энергией в виде теплоты. Такой процесс изменения объема называется *адиабатическим* (см. § 13.3). Оказывается (см. (8.6) и (13.28)), что для идеального газа *коэффициент адабатической сжимаемости*  $k_a = 1/(\gamma p)$ , т. е. он в  $\gamma$  раз меньше, чем коэффи-

циент изотермической сжимаемости ( $k_t = 1/P$  — см. формулу (8.9)). Показатель адиабаты  $\gamma = c_p/c_v > 1$  ( $c_p$  и  $c_v$  — теплоемкость среды при постоянном давлении  $p$  и объеме  $V$  соответственно). По определению модуль объемного сжатия  $K_a^*$  устанавливает связь между изменением давления  $\Delta p$  и относительным изменением объема. Поэтому воспользуемся формулой (9.19) для закона Гука при всестороннем сжатии среды:

$$\Delta p = - \frac{1}{k_a} \frac{\Delta s}{\Delta x} \Rightarrow \Delta p = - K_a^* \frac{ds}{dx}. \quad (9.38)$$

Отсюда следует, что модуль объемного адиабатического сжатия

$$K_a^* = \frac{1}{b} = \gamma p. \quad (9.39)$$

С учетом уравнения Клапейрона — Менделеева (см. (8.7)) и соотношения (9.37) получим окончательное выражение для скорости звука в газе

$$v = \sqrt{\gamma p / \rho} = \sqrt{\frac{\gamma m R T}{\mu V_p}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{\mu}}. \quad (9.40)$$

Для воздуха молярная масса  $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль, а  $\gamma \approx 1,40$ . Тогда при комнатной температуре ( $T = 290$  К) получим ( $R = 8,31$  Дж/(моль · К)):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,31 \cdot 290}{29 \cdot 10^{-3}}} \approx 340 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} = 1224 \text{ км/ч.}$$

В атмосфере на скорость звука оказывают влияние неоднородности атмосферы, ее влажность, а также направление и сила ветра.

Чисто гармонические звуковые волны называются *простыми или чистыми тонами*. Они звучат «бесцветно» и монотонно. Реальные источники звука излучают обычно совокупность нескольких гармонических волн с различными частотами и амплитудами. Для их наглядного представления на рис. 9.15 по оси абсцисс откладываем значение частот  $v$ , а по оси ординат амплитуду  $A$  или интенсивность  $I$  (см. (9.32)) волн с этими частотами. Эта совокупность частот колебаний, составляющих данный звук, называется его *акустическим спектром*. Звуки, акустический спектр которых состоит из отдельных линий (линейчатый спектр), называются *тональными или музыкальными*. Звуки, спектр которых состоит из почти

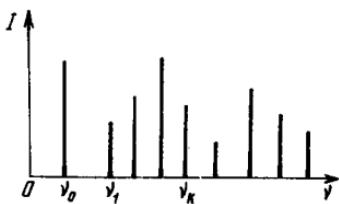


Рис. 9.15

непрерывного ряда линий (сплошной спектр), называются *шумами*.

В спектре музыкального звука выделяются колебания с наименьшей частотой  $\nu_0$  (основной тон). Они имеют наибольшую амплитуду и интенсивность по отношению к высшим гармоникам (обертонам).

**Характеристики звука.** При субъективном восприятии на слух звуки различают по высоте, тембру и громкости. *Высота звука* определяется частотой основного тона: чем больше его частота, тем выше звук. *Тембр звука* или его окраска определяется количеством обертонов и отношением их амплитуд к амплитуде основного тона. На тембр звука оказывает влияние и характер нарастания амплитуды на начальном участке звучания и характер ее спадания в конце звучания. Различие в начальных фазах обертонов резко изменяет график звуковых колебаний, но на тембр звука влияния не оказывает. Объясняется это тем, что сила возбуждения отдельных нервных волокон, обеспечивающих восприятие тонов, зависит только от амплитуды (интенсивности) обертонов и не зависит от фазы их колебаний. Чем сложнее спектр звука, чем больше в нем обертонов и чем ближе их амплитуда к амплитуде основного тона, тем богаче, красивее тембр звука в музыкальном отношении.

Распространяясь в пространстве, звуковые волны переносят энергию (см. § 9.2). Для звукового диапазона интенсивность волны (модуль вектора Умова (9.32)) называют также *силой звука* и обозначают той же буквой  $I$ .

Человеческое ухо воспринимает звуки, сила которых заключена в определенных пределах. Наименьшее значение силы воспринимаемых звуков называется порогом *слышимости*. Он зависит от частоты звука  $\nu$ . Наиболее чувствительно ухо человека к звукам с частотой от 1000 до 4000 Гц. Для частоты 3000 Гц порог слышимости примерно равен  $10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup>. Значение  $I_0 = 10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup>

принимается за уровень отсчета силы звука. Наибольшее значение силы  $I$  воспринимаемых звуков называется *порогом болевого ощущения*. Он также зависит от частоты  $v$  и для частоты 1000 Гц составляет примерно  $10^2 \text{ Вт}/\text{м}^2$ . Звук, сила которого больше порога болевого ощущения, воспринимается человеком как давление и боль в ухе. Отсюда следует, что звуки, воспринимаемые ухом, различаются по силе примерно в  $10^{14}$  раз. Поэтому для сравнения силы звуков пользуются не линейной, а логарифмической шкалой. Для этого вводится уровень громкости\* силы звука  $L$ :

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \quad (9.41)$$

Единица измерения громкости звука по логарифмической шкале называется *белом* (Б). На практике используется единица в 10 раз меньшая, она называется *декибелом* (дБ). Уровень громкости в децибалах определяется по формуле

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (9.42)$$

Весь диапазон воспринимаемых ухом звуков лежит по уровню громкости в пределах от 0 до 140 децибел.

**Пример 9.2.** Определить диапазон изменения амплитуды давления воздуха, который соответствует уровню громкости от 0 до 140 дБ (при нормальных условиях).

**Решение.** Воспользуемся выражениями (9.38) и (9.39) для избыточного (по отношению к равновесному) давления и уравнением звуковой волны  $s = A \cos(\omega t - kx)$ . Получим

$$\Delta p = -\gamma p \frac{\partial s}{\partial x} = -\gamma p A k \sin(\omega t - kx) = -\Delta p_m \sin(\omega t - kx).$$

Здесь  $\Delta p_m = \gamma p A \omega / v$  — амплитуда колебаний давления в газе. Тогда амплитуда колебаний частиц газа

$$A = \frac{\Delta p_m v}{\gamma p \omega}, \quad (9.43)$$

а интенсивность (сила звука, см. (9.32))

$$I = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v = \frac{1}{2} \rho \frac{\Delta p_m^2 v^2}{\gamma^2 p^2 \omega^2} \omega^2 v = \frac{\Delta p_m^2}{2 \gamma^2 \rho v} \left( \frac{\rho}{p} \right)^2 v^4.$$

Поскольку  $v^2 = \gamma RT/\mu$  (см. (9.40)), а  $p/\rho = RT/\mu$  (см. (8.7)), то

\* Для определения уровня громкости с учетом психофизиологического закона Вебера — Фехнера используется другая единица, называемая *фоном*.

$$I = \frac{\Delta p_m^2}{2\gamma^2 \rho v} \frac{\mu^2}{R^2 T^2} \frac{\gamma^2 R^2 T^2}{\mu^2} = \frac{\Delta p_m^2}{2\rho v}. \quad (9.44)$$

Силу звука  $I$  выразим через громкость  $L$  в децибелах ( $I = I_0 \cdot 10^{L/10}$ ) и подставим в (9.44). Тогда для амплитуды давления получим окончательное выражение

$$\Delta p_m = \sqrt{2\rho v I_0} \cdot 10^{L/20}. \quad (9.45)$$

При нормальных условиях ( $T_0 = 273$  К,  $\rho_0 = 1,01 \cdot 10^5$  Па) один моль газа занимает объем  $V_m = 22,4$  л. Тогда плотность воздуха  $\rho = 29 \cdot 10^{-3}/22,4 \cdot 10^{-3} = 1,29$  кг/м<sup>3</sup>, скорость  $v = 331$  м/с, а амплитуда давления  $\Delta p_m = 29,2 \cdot 10^{(L/20)^2}$  Па.

При изменении  $L$  от нуля до 140 дБ амплитуда давления изменяется от  $2,92 \cdot 10^{-5}$  Па до  $2,92 \cdot 10^2$  Па, что значительно меньше равновесного давления  $p_0 = 1,01 \cdot 10^5$  Па при нормальных условиях ( $\Delta p_m \ll p_0$ ).

Найдем также длины звуковых волн и их амплитуды, определяемые формулой (9.43). Поскольку  $\lambda = vT = v/v$ , то при изменении  $v$  от 16 до 20 000 Гц длина волны изменится от  $\lambda_{\max} = v/v_{\min} = 331/16 = 20,7$  м до  $\lambda_{\min} = v/v_{\max} = 331/20\,000 = 1,65 \cdot 10^{-2}$  м = 1,65 см.

Амплитуда колебаний частиц среды

$$A = \frac{\Delta p_m v}{\gamma \rho \omega} = \frac{\Delta p_m v}{2\pi \gamma \rho v}. \quad (9.46)$$

Поэтому  $A_{\min}$  будет соответствовать минимальной громкости ( $L = 0$ ,  $\Delta p_m = 2,92 \cdot 10^{-5}$  Па) и максимальной частоте  $v = 20\,000$  Гц:

$$A_{\min} = \frac{2,92 \cdot 10^{-5} \cdot 331}{2 \cdot 3,14 \cdot 1,4 \cdot 1,01 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^4} = 5,44 \cdot 10^{-13} \text{ м.}$$

Максимальная амплитуда звуковой волны ( $L = 140$  дБ,  $v = 16$  Гц)

$$A_{\max} = \frac{2,92 \cdot 10^2 \cdot 331}{2 \cdot 3,14 \cdot 1,4 \cdot 1,01 \cdot 10^5 \cdot 16} = 6,8 \text{ мм.}$$

**Источники звука.** Всякое тело, колеблющееся со звуковой частотой и находящееся в упругой среде, является источником звуковых волн. На практике очень часто источником звука служит телефон (динамик), в котором электрические колебания преобразуются в механические колебания тонких пластин. Эти пластины и являются собственно источниками звука.

Поместим перед трубкой с газом источник звука. От него в трубе будут распространяться звуковые волны, которые, дойдя до конца трубы, отразятся. Бегущая и отраженная волны будут интерферировать. При определенном соотношении частоты звука и длины трубы в последней устанавливаются стоячие звуковые волны.

Если труба закрыта или открыта с обеих сторон, что является аналогом закрепленной и незакрепленной струны, то устойчивые стоячие волны в трубе будут в том случае, когда на длине  $l$  трубы уложится целое число полуволн, т. е. при условии:  $l = n\lambda/2$ , откуда  $\lambda_n = 2l/n$  или  $v_n = nv/(2l)$ . Труба будет резонировать на те волны, частоты которых близки к этим собственным частотам.

В случае, если труба открыта с одного конца, а с другого закрыта (аналог струны с одним закрепленным концом), то стоячие волны и резонансное усиление будут иметь место, если на длине трубы  $l$  уложится нечетное число четвертей длины волны  $l = (2n - 1)\lambda/4$  или когда  $\lambda_n = 4l/(2n - 1)$ , а частота  $v_n = (2n - 1)v/(4l)$ .

Звуковые волны возбуждают механические колебания во всех системах с упругими элементами. Если частота звуковых волн приближается к собственной частоте колебаний системы, происходит резкое увеличение амплитуд колебаний ее упругих частей. Это явление называется *акустическим резонансом*. Поэтому при совпадении частоты падающей волны с некоторой собственной частотой упругой механической системы происходит значительное усиление звука. Резонаторами являются корпуса музыкальных приборов, ящики подставок, воздушные полости и т. д. Возьмем сосуд, сообщающийся с внешней средой через трубки или небольшое отверстие с площадью поперечного сечения  $S^*$  (рис. 9.16). Такие шаровые сосуды называются *резонаторами Гельмгольца*. Их резонаторная частота не зависит от формы сосуда и выражается формулой

$$v_{рез} = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\frac{S^*}{lV}}, \quad (9.47)$$

где  $l$  — длина трубки,  $V$  — объем сосуда.

Трубка с малым отверстием служит для вкладывания

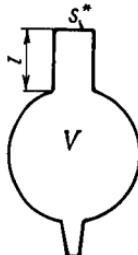


Рис. 9.16

в ухо и определения на слух интенсивности вынужденных колебаний воздуха в сосуде.

Если одна из частот спектра звуковой волны совпадает с  $v_{рез}$  резонатора Гельмгольца, то амплитуда колебаний воздуха в полости  $V$  становится столь большой, что громкость звука сильно возрастает. Приложив резонатор малым отверстием к уху, услышим громкий звук. Резонаторы Гельмгольца использовались для исследования спектров звука. В настоящее время для анализа звуков разработаны электроакустические методы, позволяющие быстро и точно определить частоты и амплитуды гармонических волн, составляющих сложную звуковую волну.

**Ультразвуки, их свойства и методы генерации.** Ультразвуки имеют частоту больше 20 000 Гц. Их верхняя граница по частоте  $v$  определяется из условия применимости термина «сплошная среда» к описанию свойств вещества (см. гл. 8). Это справедливо до тех пор, пока длина волны значительно больше среднего межмолекулярного расстояния между молекулами в газе, жидкости или твердом теле. Оценим максимально возможную частоту ультразвука для воздуха при нормальных условиях. В этом случае 1 моль занимает объем 22,4 л и содержит  $6,02 \cdot 10^{23}$  молекул газа. Молекулярный объем  $V_{\text{мол}} = 22,4 / 6,02 \cdot 10^{23} = 3,72 \cdot 10^{-26} \text{ м}^3/\text{молекулу}$ . Среднее расстояние между частицами газа будет равно  $\sqrt[3]{V_{\text{мол}}} = \sqrt[3]{3,72 \cdot 10^{-26}} \simeq 3,34 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 33,4 \text{ \AA}$  ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ ). Предельная частота  $v$  будет соответствовать минимально возможной длине волны ( $\lambda_{\min} \sim 3,34 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ ). Тогда

$$v_{\text{пред}} = \frac{v}{\lambda_{\min}} = \frac{331}{3,34 \cdot 10^{-9}} \simeq 10^{11} \text{ Гц.}$$

В жидкостях и твердых телах верхняя граница частоты ультразвука лежит в пределах  $10^{13}—10^{14}$  Гц. Ультразвуки с частотой выше  $10^9$  Гц называются *гиперзвуками*. Наибольшая частота ультразвуков, которые удалось возбудить и принять акустическими методами, в жидкости равна  $3 \cdot 10^9$  Гц, а в монокристаллах  $-8 \cdot 10^{10}$  Гц. В природе ультразвуки присутствуют в шуме ветра, водопадов, морского прибоя, реактивного двигателя и т. д. Излучаются и воспринимаются они и некоторыми животными, например летучими мышами и дельфинами. В практике ультразвуки получаются с помощью так называемых ультразвуковых излучателей или генератор-

ров ультразвука. Их можно разбить на две основные группы: механические и электромеханические.

В *механических генераторах* энергия потока жидкости или газа преобразуется в энергию ультразвуковых колебаний окружающей среды — воздуха. К ним относятся: воздушные свистки и сирены, жидкостные свистки. Ультразвуковые сирены развивают мощность до десятков кВт в диапазоне частот  $1 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^5$  Гц.

В *электромеханических генераторах* ультразвук образуется в результате возбуждения механических колебаний с помощью переменных электрических или магнитных полей. В основе их устройства лежат обратный пьезоэлектрический и магнитострикционный эффекты (см. раздел «Электричество и магнетизм»).

*Пьезоэлектрические генераторы* позволяют возбуждать ультразвуки интенсивностью до  $40-50$  Вт/см<sup>2</sup> в диапазоне частот от  $1 \cdot 10^5$  Гц до  $5 \cdot 10^7$  Гц. *Магнитострикционные генераторы* позволяют получать ультразвуки интенсивностью в несколько десятков ватт на квадратный сантиметр с частотой от  $1 \cdot 10^5$  до  $2 \cdot 10^5$  Гц.

Скорость распространения ультразвуковых волн сильно зависит от частоты, т. е. имеет место явление дисперсии, которое сопровождается поглощением энергии ультразвука. Характер распространения ультразвука в среде зависит от ее молекулярной структуры. Поэтому, изучая скорость поглощения ультразвука, можно судить о молекулярных свойствах вещества. Малая длина ультразвуковых волн позволяет излучать их в виде узких, направленных пучков, называемых *ультразвуковыми лучами*. Распространение их (отражение, преломление и т. д.) можно рассчитать, пользуясь методами геометрической оптики. Их можно и фокусировать. Эти свойства ультразвука используются при исследованиях макроскопических неоднородностей среды, в частности для *ультразвуковой дефектоскопии* (обнаружение раковин, трещин размером от 1 мм и выше на глубине от нескольких мм до 10 м и более от поверхности), а также в гидролокации (обнаружение подводных лодок, косяков рыб, измерение глубин моря, изучение рельефа дна и т. п.).

При распространении ультразвуковых волн амплитудные значения скорости и ускорения колебательного движения частиц среды, а также амплитуда звукового давления в среде во много раз больше, чем в случае звуковых волн. Поэтому ультразвуки высокой интенсивности ( $I \sim A^2\omega^2$ , см. (9.32)) способны вызвать необратимые

изменения в телах — фонтанирование жидкости, ее распыление, разрушение находящихся в жидкости твердых тел и даже достаточно «жестких» молекул. Ультразвук убивает микроорганизмы, живые клетки и умерщвляет мелких животных. Вследствие большой амплитуды звуко-вого давления в жидкости возникает явление *кавитации*. При этом непрерывно образуются и исчезают внутренние разрывы сплошной среды, а их захлопывание сопровождается кратковременным возрастанием давления до многих сотен атмосфер. В среде образуются ударные волны, вызывающие *кавитационную эрозию* (от лат. *erosio* — разъедание) поверхности твердых тел.

Уникальные свойства ультразвука позволяют использовать его в многочисленных областях науки и техники как в методах научных исследований, так и в способах воздействия на вещество. Перечислим лишь некоторые из областей применения ультразвука: ускорение различных технологических процессов, влияние на скорость протекания реакций, разрушение пленок оксидов (пайка алюминия), удаление нагара и накипи в котлах, обезжиривание поверхности деталей, обработка и резание твердых и хрупких материалов, влияние на качество отливок, для стерилизации жидкостей, в биологии, в медицине и т. д.

**Эффект Доплера для звуковой волны.** Если источник, излучающий звуковые волны с частотой  $v_0 = 1/T_0$ , и приемник звука (наблюдатель-слушатель) неподвижны относительно среды, в которой распространяются волны, то частота  $v$  колебаний, воспринимаемых приемником, будет равна частоте  $v_0$  колебаний источника ( $v = v_0$ ). На рис. 9.17, *a* схематично изображен процесс распространения сферической волны, создаваемой точечным источником, установленным на неподвижном автомобиле. Соответ-

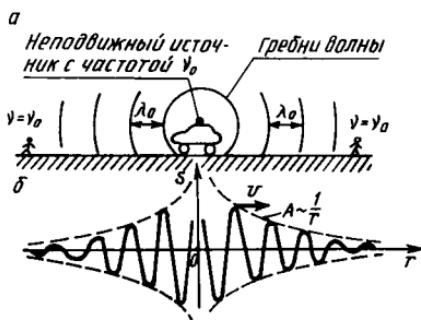


Рис. 9.17

вующий график зависимости смещения  $s$  частиц воздуха от расстояния  $r$  (см. формулу (9.11)) представлен на рис. 9.17, б.

Если источник или приемник звука перемещается относительно среды, то частота  $v$ , воспринимаемая приемником (наблюдателем), может отличаться от  $v_0$ . Это явление называют *эффектом Доплера*. Для уяснения этого явления предположим, что источник и приемник могут перемещаться вдоль прямой, соединяющей их.

Сначала рассмотрим случай, когда источник звука приближается со скоростью  $v_{ист}$  к неподвижному наблюдателю (автомобиль движется слева направо). Фазовая скорость звука  $v$  в среде полностью определяется ее упругими и инерционными свойствами (см. (9.37)) и не зависит от состояния движущегося или покоящегося источника. Поэтому относительно среды скорость волны всегда равна  $v$ . Пусть в момент времени  $t = t_0$  вблизи источника сформировался гребень сферической волны (рис. 9.18, а). За период  $T_0$  колебаний источника этот гребень распространился на расстояние  $\lambda_0 = vT_0$  (рис. 9.18, б), а сам источник приблизился за это же время к наблюдателю на расстояние  $d = v_{ист}T_0$  и создаст новый гребень вблизи своего нового положения. Поэтому длина  $\lambda'$  волны (рис. 9.18, в), распространяющейся в направлении источника (к правому наблюдателю), будет меньше, чем  $\lambda_0$  на величину  $d$ :

$$\lambda' = \lambda_0 - d = (v - v_{ист})T_0. \quad (9.48)$$

Длина волны  $\lambda''$  для левого наблюдателя (источник удаляется) будет больше, чем  $\lambda_0$ , на ту же величину  $d$ :

$$\lambda'' = \lambda_0 + d = (v + v_{ист})T_0. \quad (9.49)$$

Тогда частота воспринимаемого наблюдателями звука

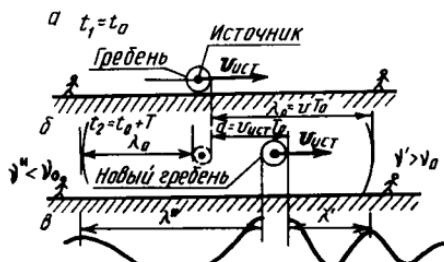


Рис. 9.18

$(v = v/\lambda)$  для обоих случаев может быть записана в виде одной формулы:

$$v = v_0 \frac{1}{1 \mp \frac{v_{\text{ист}}}{v}}. \quad (9.50)$$

Здесь знак «плюс» соответствует удалению, а знак «минус» — приближению источника к наблюдателю.

В случае, если приемник приближается к неподвижному источнику со скоростью  $v_{\text{пр}}$ , то скорость звука относительно приемника увеличится в соответствии с теоремой сложения скоростей и станет равной  $v + v_{\text{пр}}$ . Длина волны от неподвижного источника равна  $\lambda_0 = vT_0$  (см. рис. 9.17). Тогда

$$v = \frac{v + v_{\text{пр}}}{\lambda_0} = \frac{v + v_{\text{пр}}}{T_0 v} = v_0 \left(1 + \frac{v_{\text{пр}}}{v}\right). \quad (9.51)$$

При удалении приемника в формуле (9.51) вместо «плюса» появится знак «минус» и мы сможем записать, что

$$v = v_0 \left(1 \pm \frac{v_{\text{пр}}}{v}\right). \quad (9.52)$$

Если же источник и приемник перемещаются одновременно, то, объединив (9.50) и (9.52), получим общее выражение для частоты  $v$ , воспринимаемой приемником звука:

$$v = v_0 \frac{\left(1 \pm \frac{v_{\text{пр}}}{v}\right)}{\left(1 \mp \frac{v_{\text{ист}}}{v}\right)}. \quad (9.53)$$

Верхний знак перед скоростями  $v_{\text{пр}}$  и  $v_{\text{ист}}$  берется в том случае, когда вектор скорости приемника или источника направлен в сторону сближения. Если же вектор скорости  $v_{\text{пр}}$  и  $v_{\text{ист}}$  направлен в сторону удаления, то следует брать нижние знаки перед соответствующей скоростью в формуле (9.53).

## 9.7. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

**Механизм возникновения ударной волны.** Как мы уже знаем, скорость распространения волн звукового диапазона (см. 9.17) и (9.18)) не зависит от их амплитуды, которая для всех частот звуковых волн достаточно мала. Например, в случае идеального газа амплитуды про-

дольной волны равны  $5,44 \cdot 10^{-13}$  м при частоте  $v = 20$  кГц ( $L = 0$ ) и  $6,8 \cdot 10^{-3}$  м при  $L = 140$  дБ и  $v = 16$  Гц (см. пример 9.2). Если же амплитуда колебаний частиц велика, то скорость волны начинает зависеть и от амплитуды. Это связано с тем, что на участках сжатия газ нагревается и скорость волны возрастает. Поэтому каждая следующая волна сжатия движется быстрее предыдущей и нагоняет ее. В результате они образуют одну мощную результирующую волну сжатия газа, вызывающую мгновенное повышение давления газа на значительную величину. Действие этой волны на невозмущенный газ и объекты, расположенные на пути этой волны, подобно удару, поэтому и волна называется *ударной*. Это значит, что ударная волна представляет собой тонкий слой среды с повышенными значениями плотности и давления, который перемещается со сверхзвуковой скоростью по невозмущенному газу. Толщина ударной волны составляет величину порядка средней длины свободного пробега молекул газа между последовательными столкновениями друг с другом (см. § 14.1). Скорость движения ударной волны и температура газа за ней зависят от перепада давлений  $p - p_0$ , где  $p$  — давление в области волны,  $p_0$  — перед ней. Так, при перепаде давлений  $p - p_0 = 2$  атм скорость ударной волны  $452 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ; при  $p - p_0 = 100$  атм —  $3000 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ , а при  $p - p_0 = 1000$  атм —  $9310 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ . Резкое повышение давления в ударной волне, высокая температура и большая скорость движения частиц газа являются причиной значительных механических разрушений, вызываемых ею. В реальных условиях ударная волна образуется при взрывах (чем мощнее взрыв, тем сильнее ударная волна), при мощных электрических разрядах, при движении тел со скоростями, близкими к скорости звука ( $v_{\text{ист}} \geq v$ ).

При знакомстве с эффектом Доплера мы обнаружили, что при движении источника звука изменяется высота звука, т. е. частота  $v$ , воспринимаемая неподвижным наблюдателем (впереди — возрастает, а позади — уменьшается). При этом гребни волны перед источником сближаются (длина волны  $\lambda' < \lambda$ ), что и отражено на рис. 9.19, *a* для случая, когда  $v_{\text{ист}}$  меньше скорости звука в невозмущенной среде.

На этом рисунке указаны четыре положения источника волн (*0, 1, 2, 3*), которые он последовательно занимает через промежутки времени, равные периоду  $T_0$  колебаний источника звука. Там же изображены новые

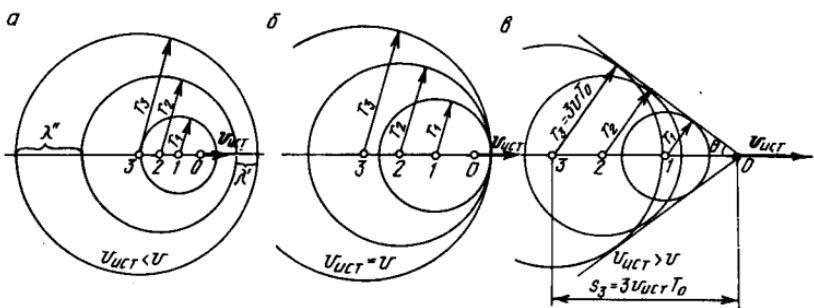


Рис. 9.19

положения гребней всех волн, которые были созданы в предыдущие моменты времени и распространяются из пронумерованных положений движущегося источника. При достаточно большой амплитуде (интенсивности) волны на переднем фронте может сформироваться ударная волна, если в результате нагревания среды последующие гребни будут способны догнать предыдущие и усилить друг друга.

**Ударная волна при движении со сверхзвуковыми скоростями.** Однако возможен и другой механизм образования ударной волны, который реализуется в процессе увеличения скорости движения источника звука, например самолета. Если  $v_{ист}$  увеличивается, то длина  $\lambda'$  волн впереди источника уменьшается и при  $v_{ист} = v$  обращается в нуль (см. формулу (9.48)), гребни излучаемых волн накладываются прямо перед движущимся телом (рис. 9.19, б). Самолет движется с той же скоростью, что и волны, которые он создает при движении в воздухе. Если же  $v_{ист} > v$ , то волны нагромождаются друг на друга внутри конуса, образующие которого являются огибающей фронтов всех ранее созданных гребней волн (рис. 9.19, в). Из рисунка следует, что  $\sin \theta = r_3/s_3 = v/v_{ист}$ . При движении у поверхности Земли со скоростью, близкой к космической, давление в области ударной волны приближается к 1000 атм, а температура превышает 10 000 °С. При этом форма ударной волны и ее расстояние от летящего тела зависят от формы носовой части и скорости полета объекта. Если тело имеет заостренную, хорошо обтекаемую форму, то ударная волна возникает в основном от передней части тела, «разрывающей» газ (рис. 9.20). Скорость ударной волны на переднем фронте относительно неподвижного газа

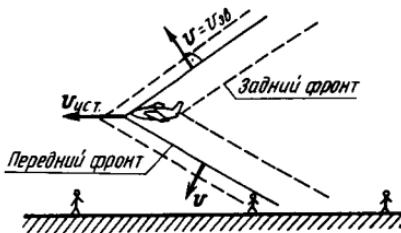


Рис. 9.20

равна скорости полета тела ( $v_{уд} = v_{ист}$ ), а вдали от тела в направлении, перпендикулярном к фронту волны, скорость ударной волны близка к скорости звука ( $v_{уд} = v$ ).

Фактически акустический удар, который воспринимает человек при прохождении ударной волны от сверхзвукового самолета, представляет собой двойной удар, поскольку ударная волна образуется как спереди, так и позади самолета. Наблюдатель справа уже слышал такой двойной удар, наблюдатель слева еще услышит его, а центральный наблюдатель только что услышал первый удар, за которым вот-вот последует второй удар от заднего фронта волны.

При движении тела со сверхзвуковой скоростью ( $v_{ист} > 1200 \text{ км/ч}$ ) значительная часть его кинетической энергии расходуется на возбуждение ударных и звуковых волн. Этот процесс сопровождается возникновением дополнительного сопротивления воздуха движению тела, называемого *волновым сопротивлением*. При сверхзвуковых скоростях сопротивление, связанное с вязкостью газа, имеет значительно меньшее значение, чем волновое сопротивление. Основной вклад в общее сопротивление вносит волновое сопротивление и в области предзвуковых скоростей. Так, при увеличении скорости самолета с 300 до 600 км/ч сопротивление воздуха увеличивается в 4 раза (пропорционально квадрату скорости), а при повышении скорости от 600 до 1200 км/ч возрастает в 32 раза (пропорционально пятой степени скорости). Для уменьшения волнового сопротивления сверхзвуковым самолетам придают веретенообразный фюзеляж с небольшими стреловидными крыльями, имеющими заостренную переднюю кромку.

В синеве, у преддверья бессмертья,  
Сторожат одиночество гор,  
Время — неутихающий ветер,  
Неусыпный отшельник — простор.

*Эпиграф к фантастической  
повести «Протей» Ю. Медведева*

## 10. ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ. ОГРАНИЧЕННОСТЬ КЛАССИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

**Свойство однородности и изотропности.** Пространство и время являются важнейшими категориями, обозначающими основные формы существования материи. Пространство выражает порядок сосуществования отдельных объектов, время — порядок следования. Пространство и время являются фундаментальными понятиями физики, так как содержание любых наблюдений и экспериментов состоит в фиксации пространственно-временных закономерностей. Исторически развитие представлений о свойствах пространства — времени проходило по двум направлениям. Согласно первому направлению, пространство и время представляют самостоятельные физические сущности, которые не зависят ни друг от друга, ни от находящихся в них материальных объектов или происходящих процессов. Именно на этих представлениях об абсолютном пространстве и времени основана механика Галилея — Ньютона. Согласно второму направлению, пространство и время рассматриваются не как самостоятельные и независимые физические сущности, а как взаимосвязанные понятия, свойства которых определяются материальными объектами и происходящими физическими процессами. Такие представления лежат в основе ньютоновской — релятивистской механики (см. гл. 11), рассматривающей явления, которые наблюдаются при движении материальных объектов со скоростями, близкими к скорости света.

Важнейшими качествами пространства — времени, имеющими решающее значение для построения физической картины мира как в ньютоновской, так и в релятивистской механике, являются: для пространства — однородность и изотропность, а для времени — однородность.

Под однородностью пространства понимается эквивалентность всех точек пространства. Это означает,

что если имеется некоторая изолированная физическая система, то протекание любых физических процессов в ней не зависит от того, в какой области пространства эта система локализована. Данное свойство эквивалентно утверждению, что если все материальные точки изолированной системы сместить на  $\delta g$ , то ни в ее внутренних движениях, ни в ее состоянии ничего не изменится и дальнейшие процессы будут идти точно так же, как они шли бы до перемещения на  $\delta g$ .

Под *изотропностью пространства* понимается эквивалентность различных направлений в пространстве. Из этого следует, что если системе сообщить угловое перемещение на  $\delta\phi$ , то это также не изменит характер протекания в этой системе различных физических процессов.

*Однородность времени* означает эквивалентность различных моментов времени между собой. Поэтому любой физический процесс протекает одинаково, независимо от того, в какой конкретный момент времени он начинает осуществляться. Следствием этого является отсутствие явной зависимости потенциальной энергии консервативной системы от времени ( $\partial P / \partial t = 0$ ).

#### 10.1. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА — ВРЕМЕНИ

**Законы сохранения как отражение свойств пространства и времени.** Метрические свойства пространства и времени — однородность и изотропность — обусловливают фундаментальнейшие законы природы, имеющие решающее значение для всех разделов физики, а именно, следствием однородности пространства является закон сохранения импульса, изотропности — закон сохранения момента импульса, а следствием однородности времени — закон сохранения энергии.

**Закон сохранения импульса.** Закон сохранения импульса для изолированной системы получается (см. задание 2.5) в предположении, что силы взаимодействия между отдельными точками системы равны по величине и противоположны по направлению, т. е. на основе третьего закона Ньютона. Покажем здесь, что третий закон Ньютона, полученный как обобщение большого числа экспериментальных данных и введенный Ньютоном в механику по существу как постулат, является следствием однородности пространства. С этой целью рассмотрим

изолированную систему, состоящую только из двух материальных точек (рис. 10.1). Силу, с которой вторая точка действует на первую, обозначим через  $\mathbf{F}_{12}^i$ , силу, с которой первая точка действует на вторую, —  $\mathbf{F}_{12}^i$ . Если рассматриваемую систему сместить как целое в пространстве на  $\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{r}_1 = \delta\mathbf{r}_2$ , то вследствие однородности пространства ни в состоянии системы, ни в ее внутренних движениях ничего не изменится, а это значит, что работа внутренних сил должна быть равна нулю:

$$\delta A^i = \mathbf{F}_{12}^i \cdot \delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{21}^i \cdot \delta\mathbf{r}^2 \Rightarrow (\mathbf{F}_{12}^i + \mathbf{F}_{21}^i) \cdot \delta\mathbf{r} = 0. \quad (10.1)$$

Из (10.1) вследствие произвольности  $\delta\mathbf{r}$  следует, что

$$\mathbf{F}_{12}^i + \mathbf{F}_{21}^i = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_{12}^i = -\mathbf{F}_{21}^i. \quad (10.2)$$

Таким образом, мы видим, что из однородности пространства следует равенство сил действия и противодействия, т. е. третий закон Ньютона.

Тем самым доказано, что закон сохранения импульса для замкнутой системы является следствием однородности пространства.

**Закон сохранения момента импульса.** При получении закона сохранения момента импульса изолированной системы (см. задания 2.4 и 2.6) предполагается, что сумма моментов всех внутренних сил равна нулю:

$$\mathbf{M}_0^i = \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^i = 0. \quad (10.3)$$

В этой формуле

$$\mathbf{F}_k^i = \sum_{j \neq k}^N \mathbf{F}_{kj}^i \quad (10.4)$$

представляет собой сумму сил, действующих на  $k$ -ю частицу со стороны всех других частиц ( $j \neq k$  означает, что частица с номером  $k$  не действует сама на себя).

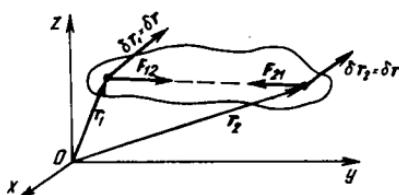


Рис. 10.1

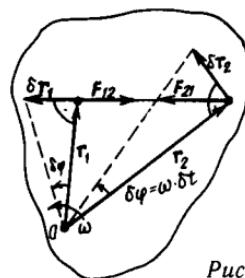


Рис. 10.2

В простейшем случае системы двух взаимодействующих точек из (10.3) и (10.4) следует уравнение

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12}^i + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21}^i = 0. \quad (10.5)$$

Теперь докажем, что (10.5) является следствием изотропности пространства (рис. 10.2). При повороте на  $\vec{\delta\phi} = \vec{\omega}\delta t$  радиус-вектор материальной точки изменяется на величину  $\delta\mathbf{r} = \mathbf{v}\delta t = (\vec{\omega} \times \mathbf{r})\delta t = \vec{\delta\phi} \times \mathbf{r}$ . Тогда

$$\delta\mathbf{r}_1 = \vec{\delta\phi} \times \mathbf{r}_1, \quad \delta\mathbf{r}_2 = \vec{\delta\phi} \times \mathbf{r}_2. \quad (10.6)$$

Вследствие изотропности пространства при повороте системы как целого на  $\vec{\delta\phi}$  работа внутренних сил должна быть равна нулю, т. е.

$$\delta A^i = \delta\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{F}_{12}^i + \delta\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{F}_{21}^i = 0. \quad (10.7)$$

Подставляя (10.6) в (10.7) и используя векторное равенство

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}), \quad (10.8)$$

получаем

$$\begin{aligned} & (\vec{\delta\phi} \times \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{F}_{12}^i + (\vec{\delta\phi} \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{F}_{21}^i = \\ & = \vec{\delta\phi} \cdot [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12}^i + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21}^i]. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Поскольку угловое перемещение  $\vec{\delta\phi}$  произвольно, то из (10.9) следует, что выражение в квадратных скобках должно быть тождественно равно нулю, что и следовало доказать (см. (10.5)).

Проведенный анализ позволяет утверждать, что закон сохранения момента импульса является следствием такого фундаментального свойства пространства, как его изотропность.

**Закон сохранения энергии в механике.** Покажем, что закон сохранения энергии является следствием однородности времени. Пусть имеется консервативная изолированная система из  $N$  материальных точек, декартовы координаты которых обозначим соответственно  $x_k, y_k, z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Если потенциальная энергия системы  $\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_k, y_k, z_k, \dots)$ , то равнодействующая внутренних сил, действующих на частицу с номером  $k$ , определяется по формуле (4.30):

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k}. \quad (10.10)$$

При перемещении системы внутренние силы выполняют работу, которая определяется криволинейным интегралом (см. (2.17), (2.18) и (4.25))

$$A^i = \int \sum_{k=1}^N \delta A_k^i = - \sum_{k=1}^N \int \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} dz_k \right). \quad (10.11)$$

Поскольку в силу однородности времени потенциальная энергия явно не зависит от времени ( $\partial \Pi / \partial t = 0$ ), то выражение под знаком интеграла в (10.11) является полным дифференциалом от потенциальной энергии (см. (4.27)). В связи с этим работа внутренних сил связана с изменением потенциальной энергии (см. также (4.1)):

$$A^i = -(\Pi - \Pi_0). \quad (10.12)$$

Для изолированной системы работа внешних сил равна нулю. Поэтому в соответствии с законом об изменении кинетической энергии (см. (2.50))

$$K - K_0 = -(\Pi - \Pi_0). \quad (10.13)$$

Отсюда следует закон сохранения полной энергии системы

$$K + \Pi = \text{const}, \quad (10.14)$$

который рассматривался ранее в четвертой главе (см. (4.11)). Здесь же мы обнаружили, что этот закон является следствием однородности времени.

## 10.2. ОГРАНИЧЕННОСТЬ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ НЬЮТОНА

**Основные положения классической механики Ньютона.** Возникновение механики Ньютона предопределило развитие физической науки в современном смысле этого слова. Но роль механики Ньютона не исчерпывалась тем, что в ней были сформулированы количественные закономерности механического движения. В созданной Ньютоном картине мира классическая механика устанавливает универсальный способ описания движений материальных точек, из которых, какказалось, можно построить все возможные материальные объекты, и, таким образом, дать теоретическое объяснение любых механических явлений, встречающихся в природе. В основе классической механики в явном или неявном виде лежат следующие постулаты.

1. Физическое пространство является евклидовым,

пространство и время существуют сами по себе и не зависят от материальных тел, которые находятся в пространстве. Евклидовость пространства означает, что пространство является однородным и изотропным, а из этого, как мы видели, следуют законы сохранения импульса и момента импульса (см. § 10.1). Независимость хода времени от материальных тел, находящихся в пространстве, ведет к однородности времени и соответственно к закону сохранения энергии.

2. Для инерциальных систем отсчета справедлив принцип относительности Галилея (§ 2.3), согласно которому все механические процессы протекают одинаково в любой инерциальной системе отсчета.

3. Взаимодействие между любыми физическими объектами, находящимися на произвольном расстоянии друг от друга, осуществляется мгновенно (т. е. силы взаимодействия зависят от положений точек в этот же момент времени). Это означает, что скорость передачи взаимодействия в механике Ньютона считается бесконечно большой.

4. Масса точки, фигурирующая в выражении для второго закона Ньютона, не зависит от скорости ее движения.

5. Все динамические переменные (координаты, проекции импульса, момента импульса и т. д.) могут быть измерены в принципе сколь угодно точно. Здесь важно подчеркнуть, что утверждается именно принципиальная возможность абсолютно точного измерения, а не практическая его реализация. Следствием этого является возможность характеризовать движение любой материальной частицы с помощью понятия траектории.

Однако постепенно выявилась ограниченность приведенных постулатов и соответственно всего здания классической механики. Важную роль в этом сыграло изучение электромагнитных явлений и разработка основ теории электромагнетизма в трудах М. Фарадея и Дж. Максвелла. Центральное понятие теории электромагнетизма — электромагнитное поле — представляет собой вид «немеханической» материи, не подчиняющейся законам Ньютона.

**Противоречия между некоторыми экспериментальными данными и выводами классической механики.** Точные измерения скорости света, выполненные на рубеже 19—20 вв., показали, что скорость света не зависит от выбора системы отсчета, т. е. является одинаковой для

всех инерциальных систем отсчета, движущихся относительно друг друга. Кроме того, анализ различных экспериментальных данных с необходимостью приводил к заключению, что скорость света является предельной скоростью передачи любых взаимодействий и сигналов из одной точки пространства в другую. Этот экспериментальный факт находится в резком противоречии с принципом относительности Галилея и вытекающими из него преобразованиями Галилея. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий мысленный опыт. Пусть в вагоне, движущемся со скоростью  $v$  относительно полотна железной дороги, посыпается световой сигнал в направлении движения. Пусть скорость этого сигнала для наблюдателя в вагоне равна  $c$ . В соответствии с классическим законом сложения скоростей (см. (2.11)), являющимся следствием преобразований Галилея, для наблюдателя, стоящего у полотна дороги, скорость светового сигнала  $v + c$ , что несовместимо с упомянутым выше экспериментом. Разрешение этого противоречия привело к созданию *релятивистской механики* (гл. 11).

Более того, оказалось, что реальное физическое пространство не является евклидовым, а обладает так называемой *кривизной*, определяемой расположением масс в пространстве. Впервые это было экспериментально установлено в 1919 г., когда во время солнечного затмения было отмечено отклонение световых лучей от прямолинейного распространения вблизи Солнца.

Выполненные в 1911 г. Э. Резерфордом опыты по изучению строения атома привели его к разработке планетарной модели атома. Согласно планетарной модели, электроны движутся вокруг атомного ядра подобно тому, как движутся планеты вокруг Солнца. Однако, согласно законам классической механики и электродинамики, электрон, движущийся по круговой орбите вокруг атомного ядра (двумерный осциллятор), должен был бы непрерывно излучать энергию и упасть на ядро в течение одной стомиллионной секунды. Этого в эксперименте, конечно, не наблюдается. Таким образом, начало 20 в. отмечено возникновением еще одной проблемы, не поддающейся описанию в рамках классической физики,— проблемы устойчивости атома.

Решение этой проблемы было найдено в первой четверти 20 в. в рамках так называемой *квантовой механики* (глава 12) — неклассической теории физики микромира. Критерием неприменимости классической механики для

описания физических явлений является численное значение динамической переменной с размерностью *действия*  $S$  ( $|S| = \text{Дж} \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1} \Rightarrow \dim S = \text{ML}^2\text{T}^{-1}$ ). Примером такой величины являются произведения энергии на время ( $E \cdot t$ ) и импульса на координату ( $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$ ). Если численное значение такой динамической переменной соизмеримо с постоянной Планка  $h = 6,626 \times 10^{-34}$  Дж · с или меньше ее, то для описания этого явления классическая механика неприменима и необходимо пользоваться квантовой механикой. В качестве примера оценим динамическую переменную с размерностью действия, возникающую при описании колебаний маятника карманных часов. Динамической переменной с размерностью действия будет произведение периода колебаний маятника  $T$  на максимальное значение его энергии  $E$ . Можно считать, что период кривых колебаний маятника имеет величину  $\sim 1$  с, а его кинетическая энергия  $E \sim 10^{-8}$  Дж, что соответствует массе  $m \sim 10^{-5}$  кг и радиусу  $r \sim 10^{-2}$  м. Тогда динамическая переменная с размерностью действия равна  $E \cdot T \simeq \sim 10^{-8}$  Дж · с, что в  $10^{26}$  раз больше постоянной Планка. Следовательно, для описания движения маятника можно и нужно пользоваться классической механикой. Если же подсчитать динамическую переменную с размерностью действия для электрона в атоме водорода, то окажется, что она соизмерима с постоянной Планка (см. задание 10.1). Поэтому для описания поведения электрона в атоме необходимо использовать не классическую, а квантовую механику.

**Границы применимости классической механики.** Таким образом, вырисовываются следующие границы применимости законов ньютоновской механики.

1. Классическая механика применима для описания механических систем, в которых скорость составляющих ее объектов много меньше скорости света ( $v \ll c$ ).

2. Классическая механика применима для описания только тех объектов, для которых динамические переменные с размерностью действия много больше постоянной Планка  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж · с.

**Задание 10.1.** Покажите, что момент импульса имеет размерность действия, а затем рассчитайте момент импульса электрона в атоме водорода, предполагая, что он движется по круговой орбите радиусом  $r = 0,53\text{\AA}$  (первая боровская орбита). Сопоставьте полученный результат с постоянной Планка.

**Указание.** С помощью второго закона Ньютона (в проекции

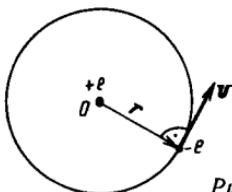


Рис. 10.3

на нормаль  $n$  к круговой траектории) и закона Кулона (3.21) рассчитайте скорость  $v$  электрона в атоме водорода, а затем определите момент импульса электрона относительно ядра ( $L_0 = mv \times r$ ).

**Ответ.**  $\dim L_0 = ML^2T^{-1}$ ,  $v \approx 2,185 \cdot 10^6 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} = 2185 \text{ км/с}$ ,  
 $L_0 = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \approx h/(2\pi)$ .

Был этот мир глубокой тьмой окутан,  
Да будет свет! И вот явился Ньютон!

Но сатана недолго ждал реванша,  
Пришел Эйнштейн — и стало все как  
раньше.

*A. Поп. А. Эддингтон  
(перевод С. Маршака)*

## 11. ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

**Постулаты Эйнштейна.** Релятивистская механика представляет собой раздел физики, в котором рассматриваются законы движения тел при скоростях их движения, сравнимых со скоростью света ( $v \lesssim c$ ). Математические основы релятивистской механики были заложены в трудах Ж. А. Пуанкаре (1854—1912) и Г. Лоренца (1853—1928). Однако релятивистская механика как наука сформировалась только после создания в 1905 г. А. Эйнштейном (1879—1955) специальной теории относительности (relative — относительный). Разработанная Эйнштейном *специальная теория относительности* (СТО) подтверждена к настоящему времени большим числом тонких и эффектных оптических экспериментов и опытов с быстрыми элементарными частицами. Она лежит в основе всех физических теорий, рассматривающих явления при скоростях, близких к скорости света, а при малых скоростях ( $v \ll c$ ) ее выводы совпадают с результатами механики Ньютона (гл. 1—7).

В основе СТО лежат *два постулата Эйнштейна*, являющихся обобщением многочисленных опытных данных.

1. Никакие опыты (механические, электрические, оптические и т. д.), проведенные внутри изолированной инер-

циальной системы отсчета, не позволяют обнаружить, покоятся эта система или движется равномерно и прямолинейно, т. е. все физические процессы протекают одинаково во всех инерциальных системах, а описывающие их математические соотношения инвариантны (не изменяют своего вида) при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Это означает, что первый постулат Эйнштейна является обобщением механического принципа относительности Галилея (§ 2.3), который справедлив только для механических явлений при скоростях, много меньших скорости света.

2. Скорость света в вакууме не зависит от скоростей движения источника света и регистрирующего устройства (наблюдателя), она одинакова во всех инерциальных системах отсчета ( $c = \text{inv}$ ).

Более того, все проведенные до настоящего времени эксперименты показывают, что скорость света в вакууме не только всегда является постоянной величиной, но представляет предельную скорость передачи любого взаимодействия (сигнала). Это поставило по-новому проблему определения понятия одновременности двух событий, т. е. синхронизации часов, находящихся в разных точках пространства. В механике Ньютона такая проблема не возникла, так как время считалось абсолютным и допускалась возможность передачи сигналов с бесконечно большой скоростью. Согласно определению Эйнштейна, двое часов в произвольных точках пространства  $A$  и  $B$  идут одинаково, т. е. *синхронно*, если световой сигнал, посланный из  $A$  в  $B$  в момент  $t_1$ , придет в  $B$  в момент  $t = (t_1 + t_2)/2$ , где  $t_2$  — время, показанное часами в точке  $A$  в момент возвращения сигнала в точку  $A$  после его отражения в  $B$ . Определение, данное Эйнштейном для понятия одновременности, дает однозначный и практически осуществимый способ синхронизации часов, т. е. конкретный способ хронометризации системы отсчета.

### 11.1. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ПОСТУЛАТОВ СТО

**Замедление времени и сокращение длин.** Постулаты специальной теории относительности и введенный Эйнштейном метод синхронизации часов приводят к таким следствиям, которые сколь интересны, столь и необычны по отношению к нашим привычным представлениям о свойствах пространства — времени в механике Галилея — Ньютона. Это требует коренного переосмысления

свойств пространства и времени в релятивистской механике. Чтобы познакомиться с этими парадоксальными явлениями в СТО проведем мысленный опыт со «световыми часами». Пусть с помощью лампы-вспышки (рис. 11.1) посыпается световой импульс (1-е событие), который, отразившись от зеркала, воспринимается фотозлементом (2-е событие). Точки  $A^*$  и  $C^*$ , в которых происходят соответственно 1-е и 2-е события, совпадают в инерциальной системе  $K^*$ , движущейся относительно инерциальной системы  $K$  с постоянной скоростью  $V$ . Наблюдатель  $D^*$  (Дима) в системе  $K^*$  с помощью своих часов зафиксирует промежуток времени между этими событиями, который определяется по формуле  $\Delta t^* = -2L^*/c$ . Наблюдатель  $E$  (Елена) в системе  $K$  заметит, что испускание света лампой и прием сигнала произойдут в разных точках  $A$  и  $C$  системы  $K$  (рис. 11.2), так как вся установка движется со скоростью  $V$  вместе с системой  $K^*$ . Обозначим промежуток времени между испусканием и приемом сигнала в системе  $K$  через  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Поскольку  $AB = BC = \sqrt{L^2 + (V \cdot \Delta T/2)^2}$ , то

$$\Delta t = \frac{AB + BC}{c} = \frac{2\sqrt{L^2 + v^2 \Delta t^2/4}}{c} \Rightarrow \Delta t = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

С учетом выражения  $\Delta t^* = 2L^*/c$  и равенства расстояний  $L$  и  $L^*$ , получим

$$\Delta t = \frac{\Delta t^*}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (11.1)$$

Из (11.1) следует, что интервал времени  $\Delta t^*$  между двумя событиями в одной и той же точке системы  $K^*$  отличается от интервала времени  $\Delta t$  в системе  $K$ .

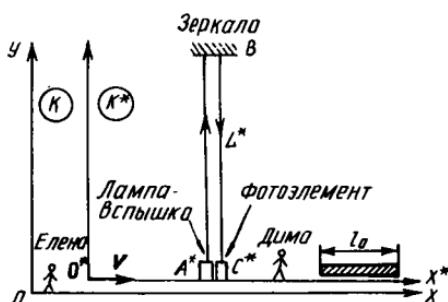


Рис. 11.1

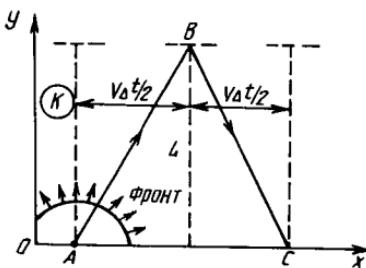


Рис. 11.2

чается от интервала времени  $\Delta t$  между теми же событиями в системе  $K$ , относительно которой движется система  $K^*$ . Это находится в явном противоречии с ньютоновским понятием абсолютного времени, следствием которого является инвариантность временных промежутков (см. (2.14)). В данном же случае  $\Delta t$  не является инвариантом, поскольку имеет место *замедление времени*, отсчитываемого по часам системы  $K^*$ , движущемся вместе с телом (с лампой-вспышкой, фотоэлементом и зеркалом, для которых система  $K^*$  является *собственной системой отсчета*):

$$\Delta t^* < \Delta t, \Delta t \neq \text{inv}. \quad (11.2)$$

Заметим, что неинвариантность временных интервалов в СТО является прямым следствием постулата о постоянстве скорости света и не связана с какими-либо таинственными процессами внутри атомов или в механизме часов. Интервал времени  $\Delta t$  в инерциальной системе  $K$  больше, поскольку больше путь, по которому распространяется свет из точки  $A$  в точку  $C$  в системе  $K$  (см. рис. 11.2).

С помощью близких по содержанию рассуждений можно показать, что из постоянства скорости света и определения одновременности двух событий, данного Эйнштейном, следует сокращение длины линейки, движущейся со скоростью  $v = V$  (см. рис. 11.1):

$$l = l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}, l < l_0 \neq \text{inv}, \quad (11.3)$$

где  $l_0$  — длина линейки, измеренная наблюдателем  $D^*$  (Дима) в собственной системе отсчета  $K^*$ ;  $l$  — длина линейки в системе отсчета  $K$ , т. е. с позиции наблюдателя  $E$  (Елена), относительно которого линейка движется (см. рис. 11.4).

Зависимость интервала времени  $\Delta t$  и длины  $l$  от ско-

рости движения объектов нашла многочисленные подтверждения в экспериментах, например в опыте Майкельсона (см. раздел «Оптика» во второй части пособия).

**Пример 11.1.** Оценим расстояние, которое проходит мюон в атмосфере Земли за время его жизни в системе отсчета, связанной с Землей (система  $K$ ). Среднее время жизни мюона в собственной системе  $K^*$ , в которой он покоятся, составляет порядка 2 мкс ( $\Delta t_0 = 2 \cdot 10^{-6}$  с). Предположим, что скорость  $v$  движения мюона близка к скорости света, например,  $v = V = 0,999$  с.

**Решение.** Следует напомнить, что *мюонами* называются элементарные частицы, которые образуются в верхних слоях атмосферы Земли примерно на высоте 30—40 км под воздействием космических лучей. За время жизни в собственной системе  $K^*$  мюон проходит расстояние

$$\Delta_0 = v \cdot \Delta t_0 = 0,999 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \simeq 600 \text{ м},$$

а это значит, что за время  $\Delta t_0$  мюоны не могут достигать поверхности Земли. Вместе с тем приборы их регистрируют. В чем дело?

Ответ состоит в том, что мы наблюдаем за мюонами в системе  $K$ , связанной с Землей, относительно которой мюоны движутся. Поэтому время их жизни  $\Delta t$  в этой лабораторной системе значительно больше, чем  $\Delta t_0$ , и определяется формулой (11.1):

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 - 0,999^2}} \simeq 4,4 \cdot 10^{-5} \text{ с} = 0,044 \text{ мс.}$$

За время  $\Delta t$  мюон проходит расстояние

$$\Delta = v \cdot \Delta t = 0,999 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 4,4 \cdot 10^{-5} \simeq 1,32 \cdot 10^4 = 13,2 \text{ км!}$$

Таким образом, достаточно быстрые мюоны вполне могут достигать поверхности Земли, что и подтверждается опытами. Следовательно, весь парадокс состоит в том, что мюоны живут всего лишь 2 мкс с их «собственной точки зрения», а с нашей — земной — жизненный путь очень быстрых мюонов достаточно долг (миллисекунды!), чтобы достичь Земли.

**Преобразования Лоренца в СТО.** Свойства пространства — времени в механике Ньютона находят отражение в преобразованиях Галилея (см. (2.10)), из которых следует абсолютный характер интервалов и расстояний между двумя любыми точками пространства (инвариантность интервалов времени и длины). Пересмотр свойств пространства — времени в рамках СТО предполагает замену преобразований Галилея другими, которые соглашаются с постулатами Эйнштейна, а в пределах малых скоростей переходят в преобразования Галилея. Такие преобразования называются *преобразованиями Лоренца*, по имени Х. Лоренца, впервые их получившего при анализе свойств уравнений Максвелла (раздел «Электричество и магнетизм»).

Для вывода преобразований Лоренца воспользуемся двумя следующими соображениями:

1. Координата  $x$  точки  $O$  в системе  $K$  равна нулю, а в другой инерциальной системе  $K'$  ее координата  $x' = -Vt'$  (рис. 11.3; в начальный момент времени система

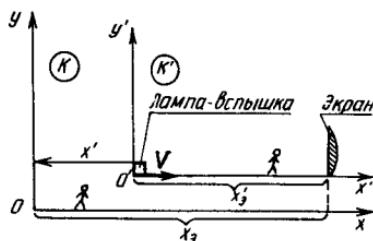


Рис. 11.3

мы  $K$  и  $K'$  совпадали). Таким образом, для координат точки  $O$  в двух системах отсчета выполняются четыре равенства:

$$x = 0, \quad x' + Vt' = 0, \quad y = y', \quad z = z'. \quad (11.4)$$

2. В силу однородности пространства и времени преобразования Лоренца должны быть линейными\*. При этом ни одна из инерциальных систем отсчета не будет выделяться по отношению к другим; формулы перехода от  $K$  к  $K'$  и от  $K'$  к  $K$  будут симметричными. Тогда с учетом (11.4) искомые преобразования Лоренца для произвольной точки пространства можно записать в виде:

$$\begin{aligned} x &= A(x' + Vt') \text{ — прямое преобразование,} \\ x' &= A(x - Vt') \text{ — обратное преобразование,} \end{aligned} \quad (11.5)$$

где  $A$  — неизвестный коэффициент, выражение для которого нужно определить.

Чтобы найти  $A$ , применим выражения (11.5) для описания распространения светового импульса. Пусть в начальный момент времени, когда системы  $K$  и  $K'$  совпадают ( $t_0 = t'_0 = 0$ ), посыпается световой импульс из начала координат (точка  $O = O'$ ) в направлении осей  $x$  и  $x'$ . Этот импульс производит вспышку на некотором экране (см. рис. 11.3) в точке  $x'_s$  в момент времени  $t'$

\* Предположим, что искомое преобразование нелинейно, а скорость материальной точки в системе  $K'$  задана. Тогда в системе  $K$  ее скорость (см. (11.21)) стала бы явно зависеть от координат точек пространства и времени, т. е. нарушилось бы фундаментальное свойство однородности пространства и времени.

в системе  $K'$  и в точке  $x$ , в момент времени  $t$  в системе  $K$ . В силу инвариантности скорости света запишем:

$$c = x_3/t, \quad c = x'_3/t' \quad (11.6)$$

Подставляя (11.6) в общие соотношения (11.5) и перемножая полученные уравнения, будем иметь:

$$\begin{cases} ct = A(ct' + Vt') \\ ct' = A(ct - Vt) \end{cases} \Rightarrow c^2tt' = A^2(c^2tt' - V^2tt').$$

Тогда

$$A^2 = \frac{c^2}{c^2 - V^2} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (11.7)$$

С учетом (11.7) из (11.5) следуют прямое и обратное преобразования Лоренца:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + x'V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad (11.8)$$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (11.9)$$

Они описывают в специальной теории относительности связь между координатами и временем в различных инерциальных системах отсчета.

**Задание 11.1.** Воспользуйтесь выражением (11.5) совместно с (11.7) и установите связь между временем  $t$  в системе  $K$  и временем  $t'$  и координатой  $x'$  в системе  $K'$  (прямое преобразование для времени).

**Указание.** Подставив выражение для  $A$  в (11.5), исключите координату  $x$  из полученных уравнений и найдите  $t = f(t', x')$ .

$$\text{Ответ. } t = \frac{t' + x'V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

**Задание 11.2.** Покажите, что при малых скоростях ( $V \ll c$ ) преобразования Лоренца в СТО переходят в преобразования Галилея в классической механике Ньютона.

**Указание.** В правых частях выражений (11.8) и (11.9) совершил предельный переход  $c \rightarrow \infty$ .

**Ответ.**  $x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'$  — преобразования Галилея ( $V \ll c$ ).

## 11.2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКИ

**Относительность одновременности.** По определению, два события, происходящие в разных точках  $x_1$  и  $x_2$  системы  $K$ , являются *одновременными*, если они происходят

в один и тот же момент времени  $t_1 = t_2 \equiv t_{12}$  по часам, расположенным в этих точках. При этом предполагается, что часы синхронизированы согласно определению Эйнштейна, изложенному во вступительном разделе данной главы. В системе  $K'$  эти же события произойдут в точках с координатами  $x'_1$  и  $x'_2$  в моменты времени  $t'_1$  и  $t'_2$ . Используя преобразования Лоренца, покажем, что события, одновременные в системе  $K$ , в системе  $K'$  будут происходить в разные моменты времени. Действительно, согласно обратному преобразованию Лоренца (см. (11.9)), при  $t_1 = t_2 = t_{12}$  получим

$$t'_1 = \frac{t_{12} - Vx_1/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad t'_2 = \frac{t_{12} - Vx_2/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Выражения для  $t'_1$  и  $t'_2$  определяют промежуток времени в системе  $K'$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{(x_2 - x_1)V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \neq 0, \quad \Delta t = 0. \quad (11.10)$$

Таким образом, понятие одновременности имеет смысл в релятивистской механике только тогда, когда указано, к какой системе координат это утверждение относится, т. е. *понятие одновременности является относительным*.

Покажем, что относительность понятия одновременности в релятивистской механике не нарушает причинно-следственных связей в том смысле, что физические следствия всегда имеют место после причины, их породившей. Пусть два события происходят в системе  $K$  в точках  $x_1$  и  $x_2$  в моменты времени соответственно  $t_1$  и  $t_2$ . При этом первое событие является «причиной», а второе — «следствием», т. е.  $t_2 > t_1$ . Тогда в соответствии с преобразованием Лоренца

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - (x_2 - x_1)V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (11.11)$$

Поскольку максимальная скорость передачи взаимодействия равна скорости света, то значение  $x_2 - x_1$  не может быть больше, чем путь, пройденный световым сигналом за время  $\Delta t = t_2 - t_1$ , т. е.

$$x_2 - x_1 \leq c(t_2 - t_1). \quad (11.12)$$

Подставляя (11.12) в (11.11), получаем

$$t'_2 - t'_1 \geq \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \left(1 - \frac{V}{c}\right) \Rightarrow t'_2 - t'_1 \geq 0. \quad (11.13)$$

Из (11.13) видно, что  $\Delta t'$  всегда больше или равно нулю, так как  $V \leq c$ , а  $t_2 - t_1 > 0$ . Это значит, что второе событие (следствие) происходит в системе  $K'$  после первого события (причины).

Итак, мы видим, что в релятивистской механике, как и в ньютоновской, *причинно-следственные связи носят абсолютный характер*, т. е. не зависят от используемых инерциальных систем координат.

**Длина движущегося тела.** Длиной  $l$  движущегося тела в некоторой системе отсчета, по определению, называется расстояние между двумя точками этой системы координат, с которыми совпадают начало и конец тела в один и тот же момент времени по часам, расположенным в этих же точках используемой системы (рис. 11.4). Это значит, что  $l = x_2 - x_1$ , если  $t_1 = t_2 \equiv t_{12}$  (рис. 11.4, а). В собственной же системе отсчета  $K^*$ , в которой движущийся объект покоятся, длина тела  $l_0 = x_2^* - x_1^*$  (рис. 11.4, б), причем здесь не играют роли моменты времени  $t_1^*$  и  $t_2^*$ , в которые определены координаты  $x_1^*$  и  $x_2^*$  (тело в этой системе не движется и, следовательно,  $x_1^* = x_2^* = \text{const}$ ).

Используя преобразования Лоренца, установим связь между длинами  $l$  и  $l_0$  в системах  $K$  и  $K^*$  ( $K' \equiv K^*$ ). Поскольку, согласно (11.9), при  $t_1 = t_2 \equiv t_{12}$  и  $V = v$

$$x_1^* = \frac{x_1 - vt_{12}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x_2^* = \frac{x_2 - vt_{12}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

то

$$x_2^* - x_1^* = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (11.14)$$

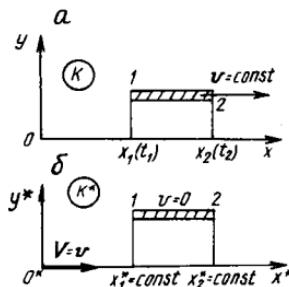


Рис. 11.4

Таким образом, длина  $l_0$  тела в собственной системе координат  $K^*$  больше длины  $l$  того же движущегося объекта в системе  $K$  (сравните этот результат с выражением (11.3), которое получено без использования преобразований Лоренца).

**Собственное время.** Собственным временем  $\tau$  называется интервал времени между двумя событиями, которые произошли в одной и той же точке собственной системы отсчета, связанной с движущимся объектом. Это значит, что в системе  $K^*$  время  $\tau = t_2^* - t_1^*$  определяется при условии, что  $x_1^* = x_2^*$ , т. е. в одной и той же точке системы  $K^*$ , которая движется равномерно и прямолинейно со скоростью  $\mathbf{V} = \mathbf{v}$ . С учетом сказанного, из преобразований Лоренца сразу следует, что

$$\Delta t = \frac{\Delta t^*}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (11.15)$$

где  $\Delta t$  — интервал времени в системе  $K$ , измеренный по часам, находящимся в разных точках пространства этой системы отсчета.

Из (11.15) видно, что собственное время  $\tau$  меньше соответствующего интервала времени в системе, относительно которой тело движется. Этот эффект релятивистской механики уже рассматривался в § 11.1 (см. формулу (11.1)).

**Преобразование скоростей.** Формула преобразования скоростей в СТО устанавливает связь между проекциями скорости точки в двух произвольных инерциальных системах отсчета. Пусть в системах отсчета  $K$  и  $K'$  движение материальной точки определяется координатным способом:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad \text{— система } K, \quad (11.16)$$

$$x' = x'(t'), \quad y' = y'(t'), \quad z' = z'(t') \quad \text{— система } K'. \quad (11.17)$$

Тогда компоненты скорости в этих системах будут определяться следующими соотношениями:

$$v_x = dx/dt, \quad v_y = dy/dt, \quad v_z = dz/dt, \quad (11.18)$$

$$v_{x'} = dx'/dt', \quad v_{y'} = dy'/dt', \quad v_{z'} = dz'/dt'. \quad (11.19)$$

Используя преобразования Лоренца (11.8), получим выражения, связывающие дифференциалы координат и времени в разных системах отсчета:

$$dx = \frac{dx' - V dt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt =$$

$$= \frac{dt' + Vdx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (11.20)$$

Подставляя далее (11.20) в (11.18) и используя выражения (11.19), получаем формулы для сложения скоростей при переходе из системы  $K'$  в систему  $K$ :

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{v_{x'} + V}{1 + Vv_{x'}/c^2}, \quad v_y = \frac{v_{y'} \sqrt{1 - v'^2/c^2}}{1 + Vv_{x'}/c^2}, \quad v_z = \\ &= \frac{v_{z'} \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + Vv_{x'}/c^2}. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Аналогичные выражения для перехода из  $K$  в  $K'$  следуют из (11.21) путем замены  $V$  на  $-V$  и соответственно  $v_{x'}, v_{y'}, v_{z'}$  на  $v_x, v_y, v_z$ :

$$\begin{aligned} v_{x'} &= \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2}, \quad v_{y'} = \frac{v_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - Vv_x/c^2}, \\ v_{z'} &= \frac{v_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - Vv_x/c^2}. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Покажем далее, что в результате сложения двух скоростей в СТО не может получиться скорость, большая, чем скорость света. Действительно, пусть, например, в системе  $K'$  объект перемещается со скоростью  $v'$  вдоль оси  $x'$  ( $v_{x'} = v', v_{y'} = 0, v_{z'} = 0$ ). Тогда на основании (11.21) скорость  $v$  объекта в системе  $K$  будет иметь следующие проекции (при любых значениях скоростей  $V$  и  $v'$ )

$$v_x = \frac{v' + V}{1 + Vv'/c^2} \leq c, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0. \quad (11.23)$$

В случае распространения света ( $v' = c$ ) из (11.23) следует, что  $v = c$ . Последний результат вполне закономерен, так как формулы (11.21) и (11.22) являются следствием преобразований Лоренца, в основе которых как раз и лежит условие равенства скорости света в разных инерциальных системах отсчета ( $c = \text{inv}$ ).

**Интервал — инвариант относительно преобразований Лоренца.** Как уже отмечалось ранее, инвариантами преобразований Галилея являются длина тела  $l$  и промежуток  $\Delta t$  между двумя событиями. Именно поэтому промежуток времени и длина играют первостепенную роль в механике Галилея — Ньютона. Однако ни длина тела, ни промежуток времени не являются инвариантами преобразований Лоренца (см. (11.14) и (11.15)).

Используя преобразования координат (11.8) и (11.9), можно показать (задание 11.5), что инвариантом этих преобразований является величина  $\Delta s$ , определяемая соотношением

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = \\ = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = \text{inv}. \quad (11.24)$$

В дифференциальной форме

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 \text{ — инвариант в СТО.} \quad (11.25)$$

Величина  $\Delta s$  называется *интервалом между двумя событиями* в четырехмерном пространстве координат и времени.

Если  $\Delta s^2 < 0$ , то из (11.24) следует, что  $\Delta l > c\Delta t$ . Это значит, что два события в точках  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  не могут быть связаны причинно-следственной связью, поскольку взаимодействие не может распространяться со скоростью, большей  $c$ . Интервалы, для которых  $\Delta s^2 < 0$ , получили название *пространственно-подобных*.

Интервалы, для которых  $\Delta s^2 > 0$  и, следовательно,  $\Delta l < c\Delta t$ , называются *времениподобными*. События, описываемые временеподобными интервалами, могут быть связаны причинно-следственной связью. В этом случае можно выбрать такую систему координат, в которой эти события будут происходить в одной той же точке пространства последовательно друг за другом.

Интервал, для которого  $\Delta s^2 = 0$ , называется *нулевым*. Такой интервал существует между событиями, связанными световым сигналом ( $\Delta l = c\Delta t$ ).

**Задание 11.3.** С помощью (11.21) и (11.22) получите классическую теорему сложения скоростей (см. (2.11)).

**Задание 11.4.** Получите формулы для преобразований проекций ускорения в СТО для двух произвольных инерциальных систем  $K$  и  $K'$ , а затем примените эти формулы для перехода от сопровождающей системы  $K'$  к произвольной системе  $K$ .

**Указание.** Действуйте точно так же, как при выводе формул (11.21) и (11.22), которые устанавливают связь между проекциями скоростей в системах  $K$  и  $K'$ . При переходе от  $K'$  к  $K$  следует учесть, что в системе  $K'$  скорость точки равна нулю ( $v_{x'} = v_{y'} = v_{z'} = 0$ ), а скорость  $V$  системы  $K'$  равна скорости  $v$  точки в системе  $K$  ( $V = v$ ).

**Ответ.** Проекции ускорения точки связаны следующими соотношениями:

$$a_x = \frac{(1 - V^2/c^2)}{1 - Vv_{x'}/c^2} a_{x'} \text{ и т. д. (переход от } K' \text{ к } K).$$

$a_x = (1 - v^2/c^2)^{3/2} a_{x*}$  и т. д. (переход от  $K^*$  к  $K$ ).

**Задание 11.5.** Подставьте выражения (11.8) для координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и времени  $t$  в правую часть формулы (11.24) и покажите, что  $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2$  является инвариантом СТО.

Ответ.  $c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta l'^2 = \text{inv.}$

### 11.3. ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

**Инвариантность законов СТО.** Принцип относительности СТО предполагает, что все уравнения релятивистской динамики должны быть инвариантными относительно преобразований Лоренца. Поэтому инвариантность формулируемых законов движения в СТО является определяющим критерием того, что они правильно отражают физическую реальность.

**Понятие импульса в релятивистской динамике.** В классической механике Ньютона импульс определяется соотношением

$$p = m_0 v, \quad (11.26)$$

где  $m_0 = \text{const}$  — масса частицы.

Рассмотрим, как преобразуются проекции импульса (11.26) при переходе от инерциальной системы  $K$  к системе  $K'$ , движущейся относительно  $K$  параллельно оси  $x$  со скоростью  $V = \text{const}$  (рис. 11.5). Проекции импульса в системах  $K$  и  $K'$  выразим через производные по времени от соответствующих координат:

$$p_x = m_0 \frac{dx}{dt}, \quad p_y = m_0 \frac{dy}{dt}, \quad p_z = m_0 \frac{dz}{dt}, \quad (11.27)$$

$$p_{x'} = m_0 \frac{dx'}{dt'}, \quad p_{y'} = m_0 \frac{dy'}{dt'}, \quad p_{z'} = m_0 \frac{dz'}{dt'}. \quad (11.28)$$

1. Если использовать преобразования Галилея, то  $v' = v - V$  и, следовательно,

$$p' = p - m_0 V \Rightarrow p_{x'} = p_x - m_0 V, \quad p_{y'} = p_y, \quad p_{z'} = p_z, \quad (11.29)$$

т. е. проекции импульса точки на оси  $y$  и  $z$  не зависят от скорости движения системы  $K'$  по оси  $x$ . Как следствие

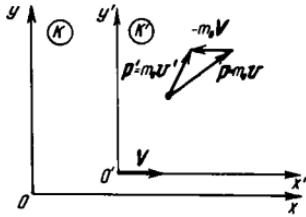


Рис. 11.5

этого, в механике Ньютона для (11.28) справедлив закон сохранения импульса для замкнутой механической системы.

2. Если же к ньютоновскому определению импульса в виде (11.28) применить преобразования Лоренца, то приходим к следующим преобразованиям проекций импульса  $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v}$ :

$$\begin{aligned} p_{x'} &= \frac{p_x - m_0 V}{1 - V v_x / c^2}, \quad p_y = \frac{p_y \sqrt{1 - V^2 / c^2}}{1 - V v_x / c^2}, \quad p_z = \\ &= \frac{p_z \sqrt{1 - V^2 / c^2}}{1 - V v_x / c^2}. \end{aligned} \quad (11.30)$$

В этом случае оказывается, что проекции импульса на оси  $y'$  и  $z'$  уже зависят от скорости  $V$  движения системы вдоль оси  $x$  (т. е.  $p_{y'} \neq p_y$ , а  $p_{z'} \neq p_z$ ). Это приводит к нарушению одного из самых фундаментальных законов природы — закона сохранения импульса.

Отсюда следует, что нужно либо отказаться от закона сохранения для импульса  $\mathbf{p}$ , определенного формулой (11.26), либо найти другое определение импульса, для которого закон сохранения импульса уже выполнялся бы для замкнутой системы во всех инерциальных системах отсчета. Для этого будем искать такое определение, чтобы, во-первых, составляющие импульса по осям  $y$  и  $z$  не зависели от скорости  $V$  движения системы отсчета по оси  $x$ , и, во-вторых, чтобы выражение для  $\mathbf{p}$  преобразовывалось в соответствии с преобразованием Лоренца.

Из преобразований Лоренца следует, что дифференциалы  $dy'$  и  $dz'$  (см. (11.20)) не зависят от скорости  $V$  движения системы  $K'$  по оси  $x$ . Кроме того, собственное время  $\tau$ , измеряемое по воображаемым часам, находящимся на движущейся частице, конечно же, не зависит от того, какие системы мы будем использовать. Поэтому отношения дифференциалов  $dy/d\tau = dy'/d\tau$  и  $dz/d\tau = dz'/d\tau$  также не зависят от используемых систем отсчета. Это дает нам основание определить проекции релятивистского импульса следующими соотношениями:

$$p_x = m_0 \frac{dx}{d\tau}, \quad p_y = m_0 \frac{dy}{d\tau}, \quad p_z = m_0 \frac{dz}{d\tau}. \quad (11.31)$$

Согласно (11.15),  $d\tau = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Поэтому (11.31) можно выразить только через координаты и время в одной и той же системе  $K$ :

$$p_x = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{dx}{dt}, \quad p_y = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{dy}{dt},$$

$$p_z = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{dz}{dt}. \quad (11.32)$$

Выражения (11.32) позволяют записать импульс  $\mathbf{p}$  в векторной форме:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \neq \text{inv} — \text{релятивистские импульс и масса.} \quad (11.33)$$

Величина  $m$ , определяемая соотношениями (11.33), называется *релятивистской массой* для движущейся точки ( $m = f(v)$ ).

Таким образом, мы приходим к важнейшему выводу: в релятивистской динамике масса частицы зависит от скорости ее движения. При  $v \ll c$ , что всегда выполняется в классической механике, получаем  $m \approx m_0 = \text{const}$ . Величина  $m_0$  в релятивистской механике называется *массой покоя*, т. е. является массой в собственной системе  $K^*$ , в которой частица поконится.

**Релятивистские законы Ньютона.** *Первый закон Ньютона*, являющийся выражением принципа относительности, в релятивистской динамике сохраняет свою классическую форму (см. § 2.2).

Выражение для *второго закона Ньютона* в релятивистской механике также сохраняет свою классическую форму (см. (2.3)), однако импульс  $\mathbf{p}$  определяется уже формулой (11.33):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} — \text{второй закон Ньютона в СТО.} \quad (11.34)$$

Как это и должно быть, релятивистское уравнение (11.34) инвариантно относительно преобразований Лоренца. При этом компоненты вектора силы  $\mathbf{F}$  преобразуются по довольно сложным законам (частный случай преобразования силы будет рассмотрен ниже).

*Третий закон Ньютона* в релятивистской динамике справедлив только для контактных сил. В механике

Ньютона для сил, действующих на расстоянии, предполагается мгновенная передача взаимодействия без материального посредника. Это несовместимо с релятивистским положением о том, что максимальная скорость передачи взаимодействия не может быть больше скорости света. Поэтому для сил с конечной скоростью распространения «силового сигнала» третий закон Ньютона в своей классической формулировке неприменим.

**Энергия в релятивистской механике.** Понятие энергии в релятивистской механике сохраняет тот же смысл, что и в механике Галилея — Ньютона. Однако требование инвариантности уравнений релятивистской механики относительно преобразований Лоренца приводит к установлению тесной взаимосвязи между энергией  $E$  и массой  $m$  тела, а также к изменению выражения для кинетической энергии  $K$ .

Релятивистское выражение для кинетической энергии получаем, используя релятивистскую форму второго закона Ньютона (см. (11.34) и (11.33)):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = F. \quad (11.35)$$

Умножая скалярно левую и правую части этого уравнения на  $dr = v dt$ , будем иметь

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right\} v dt = F dr. \quad (11.36)$$

Выражение  $F dr$  определяет элементарную работу  $\delta A$ , совершающую силой над частицей за время  $dt$ . Следовательно, левая часть уравнения (11.36) может рассматриваться как приращение  $dK$  кинетической энергии релятивистской частицы за это же время:

$$dK = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) v dt. \quad (11.37)$$

Учитывая, что  $v dv = d(v^2/2)$  и произведя некоторые тождественные преобразования, можно представить (11.37) в виде (см. задание 11.8)

$$dK = d \left( \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \quad (11.38)$$

Интегрирование этого уравнения приводит к следующему выражению:

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \text{const.} \quad (11.39)$$

Постоянная интегрирования оказывается равной  $m_0 c^2$ , поскольку при  $v = 0$  кинетическая энергия частицы должна быть равна нулю. Таким образом,

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 \quad \begin{array}{l} \text{релятивистское вы-} \\ \text{ражение для кине-} \\ \text{тической энергии.} \end{array} \quad (11.40)$$

Первый член в выражении (11.40) получил название *полной энергии свободной частицы* (при отсутствии внешних полей)

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv mc^2 \quad \begin{array}{l} \text{полная энергия} \\ \text{частицы.} \end{array} \quad (11.41)$$

Второй член в (11.40) называется *энергией покоя* (при  $v = 0$ , т. е. в собственной системе  $K^*$ ):

$$E_0 = m_0 c^2. \quad (11.42)$$

Таким образом, в релятивистской механике кинетическую энергию частицы можно представить как разность полной энергии и энергии покоя:

$$K = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2 = \Delta m c^2. \quad (11.43)$$

Из (11.43) следует, что значение кинетической энергии определят изменение релятивистской массы, вызванное движением этой точки:

$$\Delta m = \frac{K}{c^2}. \quad (11.44)$$

**Пример 11.2.** При взрыве атомной бомбы 0,1 % ее массы превращается в другие виды энергии — механическую энергию ударной волны, световую и тепловую энергию и т. д. Определить значение этой суммарной энергии, если масса бомбы составляет 10 кг.

**Решение.** Выделившаяся при взрыве энергия рассчитывается по формуле (11.43)

$$\Delta E = \Delta m c^2 = \frac{0,1 \cdot 10}{100} (3 \cdot 10^8)^2 = 9 \cdot 10^{14} \text{ Дж.}$$

Эта энергия эквивалентна энергии, вырабатываемой электростанцией мощностью 1 млн кВт в течение 10 дней.

**Взаимосвязь энергии и импульса.** Для установления этой связи возведем в квадрат выражение (11.33) для релятивистской массы. Тогда

$$m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2. \quad (11.45)$$

Умножим (11.45) на  $c^2$  и учтем, что полная энергия  $E = mc^2$ , энергия покоя  $E_0 = m_0c^2$ , а импульс  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . Получим

$$m^2c^4 - m^2v^2c^2 = m_0^2c^4 \Rightarrow E^2 = E_0^2 + p^2c^2. \quad (11.46)$$

Отсюда

$$E = \sqrt{E_0^2 + p^2c^2}, \quad E^2 - p^2c^2 = \text{inv}. \quad (11.47)$$

Из (11.33) и (11.41) следует важное соотношение  $\mathbf{p} = E\mathbf{v}/c^2$ . В случае фотона ( $v = c$ ,  $E = h\nu$ ) импульс  $p = h\nu/c$ , а энергия покоя фотона  $E_0 = 0$  (см. (11.46)). Это означает, что масса покоя фотона  $m_0 = E_0/c^2$  также равна нулю.

**Преобразование импульса и энергии.** Согласно (11.31), (11.41) и выражения  $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , запишем:

$$\begin{aligned} p_x &= m_0 \frac{dx}{d\tau}, \quad p_y = m_0 \frac{dy}{d\tau}, \quad p_z = m_0 \frac{dz}{d\tau}, \\ E/c^2 &= m_0 \frac{dt}{d\tau}. \end{aligned} \quad (11.48)$$

Поскольку масса покоя  $m_0$  и собственное время  $\tau$  не изменяются при преобразованиях Лоренца, то из (11.48) следует, что  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  и  $E/c^2$  будут преобразовываться совершенно также, как  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$ . Поэтому, используя формулы преобразования Лоренца (11.8), можно сразу же записать уравнения преобразования для проекций импульса  $\mathbf{p}$  и энергии  $E$  (заменив  $x \rightarrow p_x$ ,  $y \rightarrow p_y$ ,  $z \rightarrow p_z$ ,  $t \rightarrow E/c^2$ ):

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{p_{x'} + VE'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad p_y = p_{y'}, \quad p_z = p_{z'}, \quad \frac{E}{c^2} = \\ &= \frac{E'/c^2 + p_x V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (11.49)$$

**Преобразование силы, перпендикулярной к скорости.** Пусть две частицы неподвижны в некоторый момент времени  $t^*$  относительно системы отсчета  $K^*$  и взаимодействуют с силой  $\mathbf{F}^*$ , направленной перпендикулярно к оси абсцисс (рис. 11.6, а). В системе отсчета  $K$  (рис.

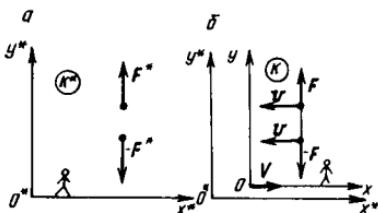


Рис. 11.6

11.6, б), движущейся вправо относительно  $K^*$  со скоростью  $V$ , эти частицы будут двигаться влево с такой же по модулю скоростью ( $v = V$ ,  $\mathbf{v} \perp \mathbf{F}$ ).

Поскольку система  $K^*$  является в данное мгновение собственной системой для рассматриваемых частиц (они неподвижны в этой системе), то  $dt^* = dt$ . Поэтому

$$F_{y^*}^* = \frac{dp_{y^*}}{dt^*} = \frac{dp_{y^*}}{dt}. \quad (11.50)$$

В системе  $K$  проекция силы  $F_y = dp_y/dt$  с учетом (11.49) ( $p_y = p_{y^*}$ ) и соотношения  $dt = d\tau/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  (см. (11.15)) может быть преобразована к следующему виду:

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{dp_y}{dt} = \frac{dp_{y^*}}{dt} = \frac{dp_{y^*}}{d\tau} \sqrt{1 - v^2/c^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow F_y = F_{y^*}^* \sqrt{1 - v^2/c^2}. \end{aligned} \quad (11.51)$$

В теории электромагнетизма будет показано, что если сила  $F^*$  является силой кулоновского взаимодействия покоящихся зарядов в системе  $K^*$ , то величина  $\Delta F = F_{y^*}^* - F_y = F_{y^*}^*(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2})$  определяет магнитное взаимодействие этих уже движущихся зарядов в системе  $K$ , т. е. представляет собой силу Лоренца. Таким образом, в релятивистской механике магнитные силы проявляются как релятивистский эффект, а не как самостоятельный вид фундаментальных взаимодействий (см. § 3.4).

**Задание 11.6.** Используя релятивистское выражение (11.40), получите классическое выражение для кинетической энергии ( $v \ll c$ ).

**Указание.** Разложите выражение  $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  в ряд по малому отношению  $v^2/c^2$  и ограничьтесь двумя первыми членами разложения.

**Ответ.**  $K = m_0 v^2/2$ .

**Задание 11.7.** Определите, как изменится сила  $F$  кулоновского взаимодействия двух электронов, если они из состояния покоя перейдут в состояние, в котором будут двигаться параллельно друг другу со скоростью  $v = 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$  ( $\mathbf{v} \perp \mathbf{F}$ ).

**Указание.** Воспользуйтесь формулой (11.51) для преобразования силы  $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$ .

**Задание 11.8.** Определите производную  $dK/dt$ , используя вначале выражение (11.37), а затем выражение (11.38) и сравните полученные результаты (тем самым вы убедитесь в справедливости перехода от (11.37) к (11.38)).

Опыт учит нас понимать, что невероятное не всегда ложно.

*Жан Франсуа де Рец*

Координата и импульс подобны фигурам мужчины и женщины в старинном барометре. Если появляется одна фируга, вторая исчезает.

*В. Гейзенберг*

## 12. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

**Квантовая механика — механика микромира.** Квантовая механика представляет собой физическую теорию, которая описывает явления атомного масштаба, т. е. явления, лежащие в основе свойств атомов, молекул, атомных ядер. Линейные размеры объектов, составляющих предмет рассмотрения в квантовой механике, имеют порядок  $10^{-8}$ — $10^{-15}$  м. Объекты такого масштаба почти полностью лежат за пределами чувственных восприятий человека. Поэтому в процессе развития и становления квантовой механики как науки пришлось ввести ряд понятий, лишенных той наглядности, которая присуща понятиям классической физики, и отказаться от ряда очевидных и, казалось бы, незыблемых представлений о свойствах материального мира.

Необходимость отказа от удобных и привычных понятий классической физики при исследовании свойств атомных объектов является объективным отражением свойств микромира. Новые физические понятия, вводимые в квантовой механике, их несоответствие нашим привычным представлениям, сложившимся в результате восприятия макрообъектов, в известной мере затрудняют ее восприятие. Однако без знания хотя бы основных идей квантовой механики невозможно ни оценить, ни использовать целый ряд самых современных технологий. Диапазон применения квантовой механики необычайно широк — от элементарных частиц — кирпичиков мироздания — до макроскопических объектов, свойства которых определяются поведением большой совокупности атомов, молекул, ионов.

## 12.1. КОРПУСКУЛЯРНО-ВОЛНОВОЙ ДУАЛИЗМ

**Квантовые и волновые свойства света.** Впервые представление о дискретном (квантовом) характере излучения было сформулировано Максом Планком (1858—1947) в 1900 г. и использовано для объяснения зависимости интенсивности излучения света от длины волны и температуры. Суть гипотезы, высказанной М. Планком, сводилась к следующему: излучение света может происходить только порциями (квантами), энергия которых пропорциональна частоте излучения

$$E = h\nu, \quad (12.1)$$

где  $\nu$  — частота света,  $h$  — постоянная Планка ( $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж·с).

Гипотеза Планка находилась в прямом противоречии с классическими представлениями о характере излучения света и положила начало становлению *квантовой теории*.

В 1905 г. А. Эйнштейн, опираясь на идеи М. Планка, предположил, что любой пучок монохроматического света состоит из квантов, энергия которых также равна  $h\nu$ . Таким образом, согласно Эйнштейну, свет представляет собой не монохроматическую волну, а поток корпускул, получивших название *фотонов*, вследствие чего передача энергии излучения веществу происходит не непрерывно, а порциями (квантами). Так как скорость фотонов всегда равна скорости света ( $v = c$ ), то, согласно специальной теории относительности (гл. 11), их масса покоя  $m_0$  должна быть равна нулю (в противном случае, как следует из формулы (11.41) для энергии  $E = m_0c^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , фотон обладал бы бесконечно большой энергией). Используя релятивистское соотношение между энергией и импульсом  $E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}$  (см. (11.47)) и подставляя в него значение  $m_0 = 0$ , получаем связь между импульсом и энергией безмассовой частицы:

$$p = E/c. \quad (12.2)$$

Подставляя в (12.2) значение  $E = h\nu$  и учитывая, что  $\lambda = c/\nu$ , получаем:

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p}. \quad (12.3)$$

Таким образом, в соответствии с гипотезами Планка и Эйнштейна имеется однозначная связь между волно-

вой характеристикой света — длиной волны  $\lambda$  и его квантовой характеристикой — импульсом фотона  $p$ .

*Корпускулярные, или квантовые, свойства света* нашли блестящее экспериментальное подтверждение в опытах по фотоэффекту (без предположения о корпускулярных свойствах света опыты по фотоэффекту объяснить невозможно), опытах по рассеянию света на электронах и т. д.

С другой стороны, известно, что в опытах по интерференции и дифракции света наглядно проявляются его волновые свойства (см. элементарный учебник по физике, а также аналогичные явления для упругих волн в § 9.4 и § 9.5).

Объяснение этой на первый взгляд парадоксальной ситуации можно найти, если принять, что свет имеет двойственную природу: в одних экспериментах (фотоэффект, давление света и его рассеяние на электронах) свет проявляет себя как поток корпускул (частиц); в других (интерференция, дифракция) — как типичный волновой процесс. Двойственная природа света, отражающая корпускулярно-волновой дуализм материи, нашла свое отражение в *принципе дополнительности*, сформулированном Н. Бором (1885—1962). Он является фундаментальным принципом, поскольку позволяет достичь понимания процессов в микромире. Согласно принципу дополнительности, для объяснения экспериментов со светом необходимо использовать либо корпускулярные, либо волновые представления, но нельзя использовать те и другие одновременно. Корпускулярные и волновые свойства света как бы дополняют друг друга и только вместе дают полное понимание того, что представляет собой свет. Двойственная природа света получила название *корпускулярно-волнового дуализма* и явила исходным пунктом для становления квантовой механики.

**Волновая природа вещества.** В 1924 г. молодой французский физик Луи де Бройль (1892—1987), опираясь на представления о симметрии свойств в природе, высказал гипотезу о том, что поскольку свет ведет себя в одних случаях как волна, а в других как фотон, то и материальные частицы должны обладать волновыми свойствами. Де Бройль предположил, что каждой частице, обладающей импульсом  $p = mv$ , должна соответствовать длина волны  $\lambda$ , связанная с импульсом  $p$  тем же соотношением (12.3), что и для фотона:

$$\lambda = \frac{h}{mv} — \text{дебройлевская длина волны частицы.} \quad (12.4)$$

Первоначальная реакция физиков на эту гипотезу отражена в следующей выдержке из письма А. Эйнштейна немецкому физику Максу Борну (1882—1970): «Прочтите ее (работу де Бройля). Хотя и кажется, что написал ее сумасшедший, написана она солидно».

Смелость мысли де Бройля заключалась не только в ее новизне и необычности, но и ее универсальности. Ведь, согласно де Бройлю, любой материальный объект (корпускула), имеющий импульс, обладает одновременно корпускулярными и волновыми свойствами, которые до этого считались прерогативой «лучистой энергии». Ненаблюдаемость волновых свойств у классических объектов обусловлена тем, что типичные волновые явления — интерференция и дифракция — проявляются только тогда, когда размеры этих объектов сопоставимы по величине с длиной волны де Бройля. Но даже для пылинки массой  $10^{-10}$  г длина волны де Бройля, рассчитанная по формуле (12.4), равна  $6,63 \cdot 10^{-17}$  м (при характерной средней скорости броуновского движения  $\sim 10^{-4}$  м/с). Но в материальном мире не существуют предметы или щели, размеры которых сопоставимы с такой длиной волны. Именно поэтому волновые свойства объектов, изучаемых в классической физике, не могут наблюдаться. Однако для электрона, ускоренного разностью потенциалов  $U = 100$  В (это значение даже меньше разности потенциалов, которой обычно ускоряются электроны в электронной лампе), расчет волны де Бройля дает значение  $\lambda = 1,2 \cdot 10^{-10}$  м, что уже сопоставимо с межатомными расстояниями в кристалле.

Действительно, в 1927 г. американские физики К. Дэвиссон и Л. Джермер установили, что при рассеянии электронов на кристаллической решетке никеля возникает дифракционная картина (рис. 12.1, а), объяснить которую можно, только предположив, что электроны обладают волновыми свойствами, а соответствующая им длина волны рассчитывается по формуле де Бройля. Для сравнения на рис. 12.1, б изображена дифракционная картина, полученная при рассеянии на кристалле рентгеновских лучей, представляющих собой электромагнитную волну.

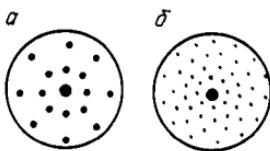


Рис. 12.1

В настоящее время дифракция электронов на кристаллической решетке является мощным инструментом изучения структуры твердого тела. Как показали более поздние эксперименты, волновыми свойствами (в согласии с гипотезой де Броиля) обладают протоны, нейтроны и другие элементарные частицы.

## 12.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

**Волновая функция и плотность вероятности квантового состояния.** Соотношение между импульсом  $p$  и длиной волны де Броиля  $\lambda$ , справедливость которого подтверждена экспериментально, наводит на мысль, что для описания состояния микрочастицы можно было бы воспользоваться волновым образованием, занимающим все пространство либо его небольшую часть в виде волнового пакета. Математический формализм квантовой механики ставит в соответствие такому волновому образованию функцию координат и времени, получившую название *волновой функции*  $\Psi$  ( $\Psi$  — греческая буква «пси»). Волновая функция  $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$  является в общем случае комплексной величиной, содержащей действительную и мнимую части. Она выступает в квантовой теории как основной носитель информации о корпускулярных и волновых свойствах микрочастицы. Поясним смысл волновой функции на примере интерпретации опыта по прохождению электронов через две щели.

Пусть на экран, в котором имеются две щели, расстояние между которыми сравнимо с дебройлевской длиной волны, направляется поток ускоренных электронов со строго фиксированным импульсом (рис. 12.2). Причем интенсивность потока настолько мала, что на экран в каждый относительно малый промежуток времени попадает только один электрон. Прошедшие через две щели электроны можно регистрировать различными методами, но во всех случаях каждый электрон регистрируется как частица и пространственное распределение

ние интенсивности  $I$  (например, степень почернения фотопластинки), пропорциональное количеству электронов, попавших на единичный участок фотопластинки будет иметь вид кривой, представленной на рис. 12.2, г. Если же оставить открытой только первую или только вторую щели, то распределение интенсивностей будет определяться кривыми, изображенными на рис. 12.2, а и 12.2, б. На рис. 12.2, в представлена зависимость, которая получена путем суммирования интенсивностей  $I_1$  и  $I_2$  ( $I^* = I_1 + I_2$ ). Сопоставление кривых распределения интенсивностей  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I^*$  и  $I$  показывает, что распределение интенсивности  $I$  (см. рис. 12.2, г) не является суммой интенсивностей  $I_1$  и  $I_2$  ( $I \neq I_1 + I_2$ ). В этом случае кривая распределения интенсивности от двух щелей имеет характер типичной интерференционной картины, при которой в одних точках экрана наблюдается усиление, а в других — ослабление интенсивности  $I$ . Объяснение наблюдаемого распределения интенсивности  $I$  электронов возможно только в рамках следующих двух предложений, не имеющих аналога в классической физике:

1. Электрон при прохождении через экран, в котором открыты обе щели, проявляет себя как волновой объект, одновременно проходящий через обе щели: волновая функция электрона, попадающего на экран, является суммой волновых функций  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ , каждая из которых описывает состояние электрона, когда открыта соответственно только первая и только вторая щели:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2. \quad (12.5)$$

Это утверждение совпадает с правилом сложения волн (см. § 9.1) и является частной реализацией одного из важнейших принципов квантовой механики — *принципа суперпозиции для волновых функций  $\Psi$* , который гласит: если для физической системы возможно состояние с волновой функцией  $\Psi_1$  и состояние с волновой функцией  $\Psi_2$ , то может реализоваться и смешанное состояние с волновой функцией

$$\Psi = a\Psi_1 + b\Psi_2$$
 — принцип суперпозиции для квантовых состояний,

(12.6)

где  $a$  и  $b$  — некоторые комплексные или действительные числа.

В рассмотренном эксперименте (см. рис. 12.2) волновая функция электрона в случае с обеими открытыми щелями является суперпозицией волновых функций электрона в опытах с поочередно открытыми первой или второй щелями. Справа от экрана со щелями эти волновые функции накладываются и дают типичную интерференционную картину. Тем самым объясняется прохождение электронами щелей. Однако до полного понимания наблюдавшегося явления нам еще очень далеко!

2. Квадрат модуля волновой функции  $\Psi(x, y, z, t)$  определяет плотность вероятности того, что в заданный момент времени  $t$  квантовая частица находится в точке пространства с координатами  $x, y, z$ :

$$|\Psi|^2 = f(x, y, z, t) — \text{плотность вероятности.} \quad (12.7)$$

Это важное и, как оказалось, правильное утверждение М. Борна (1926 г.) дает статистическую, т. е. вероятностную, интерпретацию квадрата волновой функции.

Заметим, что волновая функция в квантовой механике, и в частности волна де Бройля для свободной частицы, принципиально отличается от световых или упругих волн в сплошной среде (глава 9). Однако соотношение (12.7) в определенном смысле может быть интерпретировано с позиции понятия интенсивности волн. Мы знаем, что интенсивность упругих волн пропорциональна квадрату их амплитуды ( $I \sim A^2$ ), тогда в соответствии с (12.7) можно по аналогии утверждать, что интенсивность волн де Бройля пропорциональна  $|\Psi|^2$ , а значит, и плотности вероятности  $f(x, y, z, t)$ . Как известно, квадрат модуля комплексной волновой функции определяется соотношением

$$|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*, \quad (12.8)$$

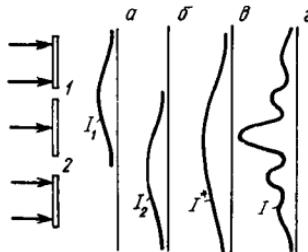


Рис. 12.2

где  $\Psi^*$  — функция, комплексно-сопряженная к функции  $\Psi$ . Например, если  $\Psi = f_1 + if_2$ , то  $\Psi^* = f_1 - if_2$ .

**Пример 12.1.** Рассчитаем плотности вероятности состояния свободной частицы и электронов в опыте со щелями.

**Решение.** Волна де Броиля как комплексная функция может быть записана в экспоненциальном виде  $\Psi = Ae^{-i\varphi}$  ( $\varphi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ , см. § 9.1). В соответствии с формулой Эйлера (см. табл. II.1 прил. II) волновая функция  $\Psi = A \cos \varphi - iA \sin \varphi$ . Тогда комплексно-сопряженная к ней функция  $\Psi^* = A \cos \varphi + iA \sin \varphi = Ae^{+i\varphi}$ , а ее квадрат модуля

$$|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^* = Ae^{-i\varphi}Ae^{+i\varphi} = A^2.$$

Отсюда следует важный вывод о том, что для волны де Броиля, определяющей состояние свободной квантовой частицы (см. задание 12.3), плотность вероятности

$$f(x, y, z, t) = |\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^* = A^2 = \text{const}. \quad (12.9)$$

В корпускулярном подходе этому соответствует равномерное движение свободной частицы в направлении распространения падающей волны де Броиля (вдоль направления волнового вектора  $\mathbf{k}$ ).

Определим далее плотности вероятности, т. е. фактически интенсивности состояний электрона в опытах со щелями (рис. 12.2). Согласно второму предположению (см. (12.8)), при одной открытой щели (первой либо второй) имеем:

$$I_1 \simeq |\Psi_1|^2, I_2 \sim |\Psi_2|^2. \quad (12.10)$$

Принимая во внимание предположение (12.5) о суперпозиции квантовых состояний, сразу получаем

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) &= |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = (\Psi_1 + \Psi_2)(\Psi_1^* + \Psi_2^*) = \\ &= \Psi_1\Psi_1^* + \Psi_1\Psi_2^* + \Psi_2\Psi_1^* + \Psi_2\Psi_2^*. \end{aligned}$$

Это значит, что при двух открытых щелях

$$I = I_1 + I_2 + \Delta I_{12}, \quad \Delta I_{12} \sim \Psi_1\Psi_2^* + \Psi_2\Psi_1^*, \quad (12.11)$$

т. е.  $I \neq I_1 + I_2$ , а это как раз и наблюдалось на опыте по интерференции электронов на щелях. Два дополнительных слагаемых в (12.11) учитывают перекрестное влияние состояний  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  и тем самым объясняют возникновение интерференционной картины на экране

$$\Delta = \Psi_1\Psi_2^* + \Psi_2\Psi_1^* — \text{интерференционный член.}$$

(12.12)

**Задание 12.1.** Определите плотность вероятности  $f$  для двух квантовых состояний, описываемых волнами де Броиля:

$$\Psi_1 = A_1 e^{-i\varphi_1}, \quad \varphi_1 = \omega t - k_1 x_1, \quad \Psi_2 = A_2 e^{-i\varphi_2}, \quad \varphi_2 = \omega t - k_2 x_2.$$

**Указание.** Примените принцип суперпозиции (см. (12.5)) и воспользуйтесь определением (12.7) для плотности вероятности, а результат сравните с правилами сложения амплитуд  $A$  при интерференции (см. § 9.4).

**Ответ.** Плотность вероятности состояния ( $\alpha_1 = -k_1 x_1$ ,  $\alpha_2 = -k_2 x_2$ )

$$f = A_1^2 + A_2^2 + A_1 e^{-i\varphi_1} A_2 e^{+i\varphi_2} + A_2 e^{-i\varphi_2} A_1 e^{+i\varphi_1} = \\ = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

**Условие нормировки.** Интерпретация квадрата модуля волновой функции как плотности вероятности  $f$  обнаружения частицы в рассматриваемой точке пространства в выбранный момент времени, а самой волновой функции  $\Psi$  как амплитуды этой вероятности принадлежит немецкому физику Максу Борну и была предложена им в 1926 г. Заметим, что такое толкование волновой функции исключает понимание волн де Броиля как классических волн материи (упругих или световых). Здесь имеется сходство только на математическом уровне, т. е. по звуанию используемых понятий.

Вероятность  $dp$  нахождения частицы в элементе объема  $dV$  равна плотности вероятности  $f$ , умноженной на объем  $dV$ . Тогда полная вероятность  $p$  нахождения частицы в конечном объеме  $V$  будет равна сумме элементарных вероятностей, т. е. интегралу от  $f$  по объему  $V$ :

$$p = \int dp = \int_V |\Psi|^2 dV.$$

Если частица находится в бесконечном пространстве ( $V = \infty$ ), то вероятность  $p$  равна 1, поскольку это есть достоверное событие (частица есть в объеме  $V = \infty$ !)

$$\int_{V=\infty} |\Psi|^2 dV = 1 \text{ — условие нормировки } \Psi. \quad (12.13)$$

Функция  $\Psi$ , удовлетворяющая условию (12.13), называется *нормированной*.

Очевидно, что для того, чтобы интеграл от  $|\Psi|^2$  по бесконечному объему был равен 1, нужно, чтобы функция  $\Psi$  принимала конечные значения в каждой точке объема  $V = \infty$ . В общем случае волновая функция и ее первые производные должны быть *конечными, непрерывными и однозначными функциями своих аргументов*.

**Принцип неопределенности в квантовой механике.** Открытие корпускулярно-волнового дуализма явилось важным шагом в понимании того, что присущее классической физике противопоставление частиц и волн не имеет места для объектов микромира. Электроны, фотоны, нейтроны и другие микрочастицы в одних случаях ведут себя как частицы, в других проявляют волновые характеристики. А это значит, что объекты микромира

не являются ни классическими частицами, ни классическими волнами и для изучения их свойств не применимы ни классические методы описания частиц, ни классические методы описания волн.

Действительно, если состояние микрочастицы описывается волной де Броиля в виде плоской монохроматичной волны (см. пример 12.1)

$$\Psi = A e^{-i(\omega t - kx)} = A \cos(\omega t - kx) - iA \sin(\omega t - kx), \quad (12.14)$$

то плотность вероятности обнаружить эту частицу в любой момент времени  $t$  и в любой точке оси  $x$  равна одной и той же величине ( $f = A^2 = \text{const}$ , см. формулу (12.9)). Это значит, что при строго определенном волновом числе  $k = 2\pi/\lambda$  и частоте  $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$  в соответствии с (12.1) и гипотезой де Броиля (12.4) микрообъект имеет фиксированные значения энергии  $E$  и импульса  $p$ :

$$E = h\nu = h\omega/2\pi = \hbar\omega,$$

$$p = h/\lambda = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k. \quad (12.15)$$

А поскольку вероятность обнаружить такую квантовую частицу в каждой точке бесконечного пространства одинакова, то мы фактически ничего не можем сказать о ее координате  $x$  в любой заданный момент времени  $t$ , т. е. при фиксированном значении импульса  $p$  координата  $x$  частицы не определена! Это еще один пример из серии «парадоксов квантовой механики» (в классической механике Ньютона каждому значению координаты  $x$  соответствует определенное значение импульса  $p$  движущейся частицы). Волновая функция  $\Psi$  в виде (12.14) занимает все бесконечное пространство!

Мы уже знаем, что для получения эффекта локализации волны во времени либо в пространстве (см. рис. 7.14 и рис. 9.7) нужно использовать набор волн с разными частотами  $\omega_n$  и разными волновыми числами  $k_n$ , что соответствует здесь разложению волновой функции  $\Psi$  в ряды Фурье (см., например, (7.32)). Такой простейший пространственно-временной пакет из двух волн имеет пространственную локализацию  $\Delta x$ , которая не больше, чем длина  $\lambda_m = 2\pi/\Delta k$  модулирующей волны (см. (9.20) и последующие соотношения), и временную локализацию  $\Delta t$ , которая не больше, чем период  $T_m = 2\pi/\Delta\omega$  этой волны:

$$\Delta x \sim 2\pi/\Delta k, \quad \Delta t \sim 2\pi/\Delta\omega. \quad (12.16)$$

Учитывая далее (12.15), запишем

$$\Delta E = \hbar \cdot \Delta \omega, \Delta p = \hbar \cdot \Delta k. \quad (12.17)$$

Тогда

$$\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar, \Delta t \cdot \Delta E \sim \hbar. \quad (12.18)$$

Это значит, что уединенный волновой пакет (рис. 12.3, а), задаваемый, например, в начальный момент времени  $t = 0$  с помощью волновой функции

$$\Psi = A \exp \left\{ -\frac{x^2}{(\Delta x)^2} \right\} e^{-ikx},$$

не имеет ни определенного значения координаты, ни определенного значения импульса, ни определенного значения энергии (на рис. 12.3, б изображена зависимость плотности  $f = |\Psi|^2$  от координаты  $x$ ). Можно лишь в общем случае утверждать, что  $x, y, z, p$  и  $E$  лежат в пределах соответствующих интервалов координат ( $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ), импульса ( $\Delta p$ ) и энергии ( $\Delta E$ ), которые связаны знаменитыми соотношениями неопределенности В. Гейзенберга (1901—1976):

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta p_x &\geq \hbar, \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar, \\ \Delta z \cdot \Delta p_z &\geq \hbar, \quad \Delta t \cdot \Delta E \geq \hbar. \end{aligned}} \quad (12.19)$$

В соответствии с (12.19) *принцип Гейзенberга* гласит: любая квантовая система не может находиться в состояниях, в которых координаты ее центра инерции (для частицы — координаты частицы) и импульс одновременно принимают вполне определенные значения.

Особый интерес представляет корпускулярная трактовка неравенств (12.19). Видно, что чем меньше неоп-

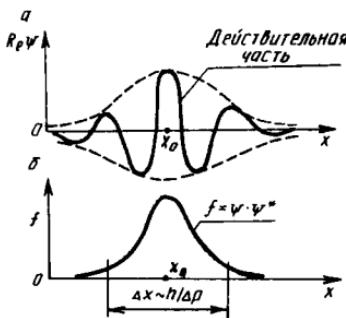


Рис. 12.3

ределенность  $\Delta x$ , тем больше неопределенность  $\Delta p_x = \hbar/\Delta x$ . Это значит, что для квантовой частицы нельзя одновременно указать значения координат и проекций импульса. Таким образом, в квантовой механике теряет смысл понятие траектории движения частицы, так как, если мы точно определим значения координат, то ничего не сможем сказать о направлении ее движения (т. е. импульсе), и наоборот.

Детальный анализ соотношений неопределенности с точки зрения теории измерений также показывает, что в принципе не существует возможности одновременно определить значения координат и импульсов с точностью, превышающей значения  $\Delta x$  и  $\Delta p$  в неравенстве (12.19).

Вообще говоря, принцип неопределенности справедлив как для макро-, так и для микрообъектов. Однако для макрообъектов значения неопределенностей, следующие из соотношений (12.19), оказываются пренебрежимо малыми по отношению к значениям самих этих величин, тогда как в микромире неопределенности оказываются уже существенными.

В качестве иллюстрации соотношений (12.19) оценим значения неопределенностей, которые характеризуют движение электрона в атоме водорода и состояние металлического шарика массой в одну тысячную грамма ( $m = 10^{-6}$  кг), находящегося в поле зрения микроскопа. Радиус атома водорода приблизительно равен  $0,5 \cdot 10^{-10}$  м ( $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10}$  — радиус первой боровской орбиты). Поэтому неопределенность положения  $\Delta r$  электрона в атоме составляет  $\sim 10^{-10}$  м. В соответствии с принципом неопределенности (12.19) находим, что

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta r} \Rightarrow \Delta v = \frac{\Delta p}{m} \geqslant \frac{\hbar}{2\pi m \Delta r} \simeq \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{2\pi \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-10}} \sim \\ \sim 10^6 \text{ м/с.}$$

Таким образом, говорить о скорости движения электрона в атоме можно лишь с точностью до  $\Delta v \simeq 10^6$  м/с, что сравнимо с классической оценкой абсолютного значения скорости электрона в атоме водорода (см. задание 10.1).

Для металлического шарика в поле микроскопа точность, с которой он может быть локализован, равна половине цены деления микроскопа. Мы будем считать, что она равна  $10^{-6}$  м (один микрон). Подстановка численных значений дает для неопределенности в скорости величину  $\Delta v \simeq 10^{-33}$  м/с, что значительно меньше воз-

можных погрешностей самых точных измерений. Такое различие в неопределенности скорости для электрона и шарика обусловлено тем, что масса металлического шарика в  $10^{24}$  раз больше массы электрона. Именно в разности масс объектов классической и квантовой механики лежит причина того, что в классической механике мы можем говорить о точной координате и точном значении скорости материальной точки в один и тот же момент времени (движение по определенной траектории), тогда как в квантовой механике соотношение неопределенностей исключает такую трактовку при описании движения микрообъекта. Это и обуславливает необходимость использования волновой функции  $\Psi$  для характеристики состояния квантовых объектов и систем.

**Принцип тождественности.** Одноковые частицы имеют одинаковые массы, заряды и другие внутренние характеристики. Например, одинаковыми являются все электроны, протоны, нейтроны и т. д.

В классической механике при описании системы из одинаковых частиц можно проследить за «судьбой» каждой отдельной частицы, движущейся по своей траектории. Это обусловлено тем, что, пронумеровав частицы в некоторый момент времени, в дальнейшем можно наблюдать за движением любой из них, т. е. *одинаковые классические частицы различимы*.

Принционально иное положение в квантовой механике. Как вытекает из соотношения неопределенности, понятие траектории неприменимо к микрочастицам. Поэтому в принципе нельзя проследить за движением каждой отдельной микрочастицы. Действительно, пусть координаты частиц в начальный момент времени фиксированы с большой точностью, так что состояние каждой частицы характеризуется достаточно четко локализованным в пространстве волновым пакетом. В этой ситуации частицы можно даже пронумеровать. Однако оказывается, что при дальнейшем движении частиц их волновые пакеты начинают расплываться (аналогично тому, как расплывается пакет упругих волн при наличии дисперсии) и через некоторое время перекроятся. В той области пространства, где волновые пакеты перекроятся, невозможно определить, каким номером была пронумерована каждая частица. Таким образом, в квантовой механике одинаковые частицы полностью теряют свою индивидуальность, т. е. становятся тождественными. Это приводит к специальному характеру поведения систем

из таких частиц, что находит отражение в *принципе тождественности*, который гласит: никакими экспериментами нельзя отличить состояния, получающиеся перестановкой тождественных частиц, и поэтому состояния, в которых эти частицы обмениваются своими положениями, должны рассматриваться как одно физическое состояние.

Принцип тождественности приводит к возникновению так называемого *обменного взаимодействия*, связанного с вкладом от взаимодействия частиц в области перекрытия волновых функций. Обменное взаимодействие не имеет аналога в классической физике и играет определяющую роль при образовании химической связи в молекулах.

**Спин — квантовая характеристика микрочастицы.** Понятие спин является одной из самых фундаментальных характеристик микрочастиц. Это обусловлено тем, что спин определяет своеобразное «взаимодействие» тождественных частиц системы даже в том случае, когда обычным силовым взаимодействием между ними можно пренебречь.

Спин как физическая величина представляет собой собственный момент количества движения микрочастицы, имеющий квантовую природу и не связанный с перемещением частицы как целого (см. задание 10.1).

Спин измеряется в единицах постоянной Планка  $\hbar$  и равен  $\sqrt{s(s+1)}\hbar$ , где  $s$  — характерное для каждого сорта микрочастиц целое (в том числе нулевое) или полуцелое положительное число, называемое *спиновым квантовым числом*. Обычно его называют просто спином или говорят о целом или полуцелом спине частицы. Например, спин у электронов, протонов, нейтронов равен  $1/2$ , а спин фотонов равен 1. Частицы с полуцелым значением спина получили название *фермионов*, а с целым значением — *бозонов*. Для системы тождественных фермионов имеет место принцип Паули, установленный в 1925 г. швейцарским физиком Вольфгангом Паули (1900—1958). Согласно *принципу Паули*, в системе фермионов две или более частицы не могут одновременно находиться в одном и том же квантовом состоянии. Эта особенность системы фермионов находит свое отражение в периодичности химических и физических свойств элементов в системе Д. И. Менделеева (1834—1907).

В системе бозонов число частиц в любом квантовом

состоянии может быть в принципе произвольным (оно определяется взаимодействием и статистическими свойствами системы бозонов, см. гл. 15).

**Уравнение Шрёдингера.** Построение строгого математического аппарата квантовой механики невозможно без уравнения, которое позволяло бы по заданным внешним полям и начальным условиям описать движение частицы в пространстве и во времени. Поскольку состояние квантовой частицы задается волновой функцией  $\Psi(x, y, z, t)$ , точнее величиной  $|\Psi(x, y, z, t)|^2$  (см. (12.7)), определяющей плотность вероятности нахождения частицы в момент времени  $t$  в точке с координатами  $x, y, z$ , то искомое уравнение должно быть уравнением относительно функции  $\Psi$ . Это уравнение обязано обладать некоторыми чертами волнового уравнения (см. (9.15)), поскольку призвано учитывать волновые свойства микрочастиц.

Уравнение, удовлетворяющее перечисленным требованиям, было установлено в 1926 г. немецким физиком Э. Шрёдингером (1887—1961)

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(\mathbf{r}, t) \Psi \quad \text{уравнение Шрёдингера,} \quad (12.20)$$

где  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица;  $m$  — масса частицы;  $\Delta = \nabla^2$  — оператор Лапласа, который в декартовой системе имеет вид (см. (9.14)):

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\Delta — \text{дельта, } \nabla — \text{набла});$$

$U(x, y, z, t)$  — энергия частицы во внешнем силовом поле.

Уравнение Шрёдингера, как и уравнение для второго закона Ньютона, не выводится, а постулируется. Критерием его справедливости является хорошее согласие результатов, полученных на основе (12.20), с экспериментальными данными в атомной и ядерной физике.

В тех случаях, когда энергия  $U$  не зависит от времени, а это имеет место во многих квантомеханических задачах, решение уравнения (12.20) можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от координат, а другая только от времени.

При этом зависимость  $\Psi$  от времени  $t$  выражается множителем  $e^{-i\omega t}$ , который определяет временное поведение монохроматической волны де Броиля (см. (12.14)).

С учетом сказанного и соотношения (12.15) для  $E = \hbar\omega$  запишем выражение для волновой функции  $\Psi$ :

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)e^{-i\omega t} = \psi(x, y, z)e^{-iEt/\hbar} \quad (12.21)$$

где  $E$  — полная энергия частицы, а функция  $\Psi(x, y, z)$  удовлетворяет уравнению, которое получается из (12.20) при условии, что  $U$  не зависит от времени (см. задание 12.2):

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U(x, y, z))\psi = 0 \text{ — стационарное}$$

уравнение  
Шрёдингера. (12.22)

Функции  $\psi(x, y, z)$ , являющиеся решениями (12.22), называются *собственными функциями*. В теории дифференциальных уравнений доказывается, что уравнения вида (12.22) в ряде случаев имеют решения не при всех значениях параметра  $E$ , входящего в это уравнение, а лишь при некоторых определенных его значениях. Значения энергии  $E$ , при которых имеет место решение уравнения Шрёдингера (12.22), называются *собственными значениями*. Собственные значения энергии  $E$  могут образовывать как непрерывный, так и дискретный ряд. В первом случае говорят о *непрерывном*, во втором о *дискретном спектре энергии*.

Уравнения Шрёдингера (12.20) и (12.22) являются сложными дифференциальными уравнениями в частных производных. Известны их аналитические решения только для очень простых зависимостей потенциальной энергии  $U = U(x, y, z)$ . Ниже рассмотрим примеры решения уравнения (12.22) для некоторых простейших модельных одномерных задач квантовой механики. Когда  $U = U(x)$ , то уравнение в частных производных превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение.

### 12.3. ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

**Частица в «потенциальной яме» с бесконечно высокими стенками. Потенциальной ямой** (см. § 4.3) с беско-

нечно высокими стенками называется область пространства, потенциальная энергия в которой определена соотношениями:

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq L, \\ \infty, & x > L, \end{cases} \quad (12.23)$$

где  $L$  — ширина ямы, а энергия  $U$  отсчитывается от дна ямы (рис. 12.4).

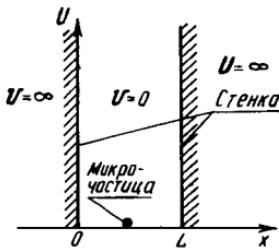


Рис. 12.4

В одномерном случае  $U = U(x)$  и  $\psi = \psi(x)$ . Тогда  $\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ , следовательно, уравнение Шрёдингера принимает вид уравнения второго порядка

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U(x))\psi(x) = 0. \quad (12.24)$$

Поскольку потенциальная энергия  $U$  за границами ямы бесконечно велика ( $U = \infty$ ), то вероятность нахождения частицы за пределами ямы равна нулю. Тогда значения функции  $\psi$  на границах ямы (т. е. в точках с координатами  $x = 0$  и  $x = L$ ) должны быть равны нулю:

$\psi(0) = 0, \psi(L) = 0$  — граничные условия. (12.25)

Внутри ямы  $U = 0$  и уравнение (12.24) еще более упрощается:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi(x) = 0, E = \text{const.} \quad (12.26)$$

С учетом обозначения  $2mE/\hbar^2 = k^2$  приходим к уравнению типа гармонического осциллятора (см. главу 7)

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0 \Rightarrow \psi'' + k^2\psi = 0. \quad (12.27)$$

Общее решение этого дифференциального уравнения представляет собой суперпозицию двух частных решений:

$$\psi(x) = A_1 \cos(kx + \beta) = A \sin kx + B \cos kx. \quad (12.28)$$

Подставим в (12.28) первое граничное условие из (12.25). Получим

$$\psi(0) = A \sin 0 + B \cos 0 = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Поэтому собственная функция (12.28) будет содержать только одну пространственную гармонику

$$\psi(x) = A \sin kx. \quad (12.29)$$

Второе граничное условие  $\psi(L) = 0$  для произвольного  $x = L$  может выполняться только в том случае, если  $kL = n\pi$ , где  $n$  — целое число ( $n = 1, 2, 3\dots$ ). Таким образом, волновой вектор  $k$  может принимать только значения, кратные  $n$ :  $k_n = n\pi/L$ . Поскольку  $k = 2\pi/\lambda$ , то соответствующие длины волн де Броиля должны удовлетворять условию

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad (12.30)$$

т. е. на ширине  $L$  потенциальной ямы должно укладываться целое число полуволн де Броиля.

Подставив в (12.30) значение  $k_n = n\pi/L$ , запишем выражение для собственной функции частицы в бесконечно глубокой яме:

$$\psi(x) = A \sin \frac{n\pi}{L} x. \quad (12.31)$$

Постоянную интегрирования  $A$  найдем из условия нормировки (см. (12.13))

$$A^2 \int_0^L \sin^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right) dx = 1. \quad (12.32)$$

Поскольку в соответствии с (7.9)

$$\langle \sin^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2},$$

то, используя в (12.32) подстановку  $\varphi = n\pi x/L$  ( $dx =$

$= L d\varphi / n\pi$ ), перейдем от интегрирования по  $x$  к интегрированию по  $\varphi$ :

$$A^2 \frac{L}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = 1 \Rightarrow A^2 \cdot \frac{L}{n\pi} \cdot \frac{n}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow A = -\sqrt{\frac{2}{L}}. \quad (12.33)$$

В результате получим набор собственных функций  $\psi_n(x)$  и собственных значений энергии  $E_n$ , а также волновых функций  $\Psi_n(x, t)$  (см. выражение (12.21))

$$\psi_n(x) = -\sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2, \quad \Psi_n(x, t) = \\ = -\sqrt{\frac{2}{L}} e^{-i\omega t} \sin \frac{n\pi}{L} x. \quad (12.34)$$

Прежде всего заметим, что решение (12.34) характеризуется наличием дискретного спектра разрешенных значений энергии квантовой частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме. Этот результат согласуется с гипотезой Планка о квантовании энергии и является общим свойством уравнения Шредингера. В частности, для электрона в яме шириной  $L = 10^{-10}$  м = 1 Å энергия

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2 = \frac{3,14^2 \cdot (1,05 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-20}} n^2 = \\ = 5,97 \cdot 10^{-18} n^2 \text{ Дж} = 37,3 n^2 \text{ эВ.}$$

Здесь использована специальная единица измерения энергии — электронвольт ( $1 \text{ эВ} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ).

Число  $n$ , определяющее допустимые значения энергии микрочастицы, называется *главным квантовым числом*. Квантовое стационарное состояние с заданным значением  $n$  имеет фиксированное значение энергии  $E_n$  ( $E_n = \text{const}$ ). Это соответствует в классическом случае движению частицы по некоторой орбите, параметры которой удовлетворяют закону сохранения энергии ( $E = K + \Pi = \text{const}$ ).

Для четырех первых квантовых состояний ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) уровни энергии (12.35) изображены на рис. 12.5, *a*, а соответствующие им собственные функции  $\psi_n(x)$  и плотности вероятности  $f_n = |\psi_n|^2$  представлены графически на рис. 12.5, *б* и 12.5, *в*. Видно, что собственные функции в каждом состоянии  $n$  имеют число полуволн, равное

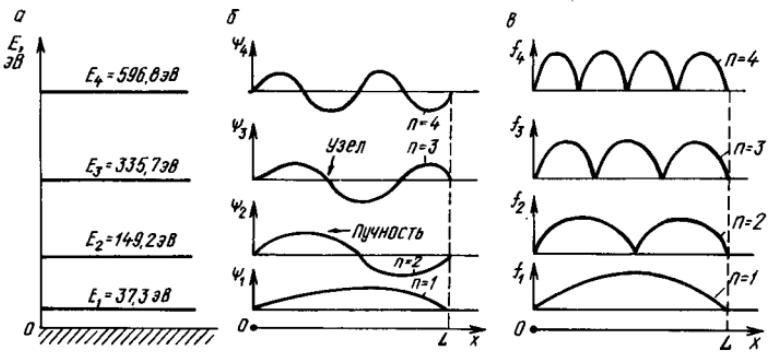


Рис. 12.5

номеру состояния  $n$ . Учитывая (12.34), заметим, что действительная и мнимая части волновых функций (см. формулу Эйлера в прил. II и § 9.1)

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} e^{-i\omega t} \sin \frac{n\pi}{L} x = -\sqrt{\frac{2}{L}} \left[ \cos \omega t \sin \frac{n\pi}{L} x - i \sin \omega t \sin \frac{n\pi}{L} x \right] \quad (12.35)$$

представляют собой стоячие волны, имеющие  $n$  пучностей и  $(n+1)$  узлов.

Следует обратить внимание на то, что *классическая частица* в потенциальной яме (12.23) имеет энергию  $E = mv^2/2 = p^2/2m = \text{const}$ , которая является непрерывной функцией скорости  $v$ . При  $v = 0$  энергия такой частицы равна нулю, что соответствует состоянию равновесия с минимальной энергией ( $E = 0$ ). *Квантовая частица* в принципе не может иметь нулевую энергию ( $n \neq 0$ ), поскольку в этом случае при  $n = 0$  плотность вероятности  $f_n = |\Psi_n|^2 = \frac{2}{L} \sin^2 \frac{n\pi}{L} x$  была бы равна нулю по всей ширине ямы ( $0 \leq x \leq L$ ), а это означало бы, что вероятность  $p$  обнаружить частицу в яме также была бы равна нулю (т. е. ее там при  $n = 0$  не может быть вовсе!).

Наименьшее значение энергии  $E = E_1$  называется *энергией основного состояния*, а остальные допустимые значения  $E_n$  определяют энергию *возбужденных состояний*.

**Гармонический осциллятор в квантовой механике.** В классической механике под гармоническим осциллятором понимается материальная точка (или система), которая совершает колебания под действием упругой или квазиупругой силы. В этом случае система или точка

движутся в параболической потенциальной яме, испытывая действие силы  $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} \Pi(x)$ :

$$\Pi(x) = k \frac{x^2}{2} \Rightarrow F_x = -\frac{d\Pi}{dx} = -kx. \quad (12.36)$$

Возвращающая сила  $F_x = -kx$  обуславливает колебательный — осциллирующий характер движения, определяемый вторым законом Ньютона:

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \left( \omega_0^2 = \frac{k}{m} \right) \Rightarrow x = A \cos(\omega t + \alpha). \quad (12.37)$$

При этом оказывается, что средние за период значения кинетической и потенциальной энергий равны между собой

$$\left\langle m \frac{\dot{x}^2}{2} \right\rangle = \left\langle k \frac{x^2}{2} \right\rangle = \frac{1}{4} kA^2,$$

а полная энергия  $E = mv^2/2 + kx^2/2$  для осциллятора сохраняется:

$$E = \frac{k}{2} A^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 = \text{const}. \quad (12.38)$$

Амплитуда  $A$  определяется начальными условиями, т. е. начальными значениями  $x_0$  и  $v_0$ , которые в классической механике имеют одновременно вполне определенные (задаваемые) значения ( $0 \leq v_0 < \infty$ ,  $-\infty < x_0 < \infty$ ). Поэтому энергия  $E = kA^2/2$  может принимать любые значения, лежащие между нулем и бесконечностью.

*Квантовый осциллятор* играет аналогичную роль во всех случаях, когда потенциальная яма имеет параболическую форму в некой окрестности дна ямы, а квантовые эффекты в силу принципа неопределенности (см. (12.19)) оказываются существенными. Достаточно отметить, что рассматриваемая модельная квантово-механическая задача позволяет не только объяснить, но и рассчитать в согласии с экспериментом низшие колебательные уровни энергии молекулы водорода, что в свою очередь позволит понять ряд особенностей в поведении, например, теплоемкости реальных газов и твердых тел.

Стационарное уравнение Шредингера (см. (12.22)) для одномерного квантового осциллятора с энергией  $U = kx^2/2$  имеет следующий вид ( $k = m\omega_0^2$ ):

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} \left[ E - \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right] \psi(x). \quad (12.39)$$

Мы рассмотрим здесь лишь контуры решения этого уравнения, которое относится к числу немногих задач, имеющих точное аналитическое решение. Покажем прямой подстановкой, что в основном состоянии собственная функция совпадает с функцией Гаусса:

$$\psi_0 = A_0 e^{-ax^2}, \quad (12.40)$$

где  $a$  — некоторая константа, значение которой нужно найти, подставив (12.40) в (12.39). Для этого определим предварительно вторую производную от  $\psi_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_0}{dx} &= A_0 e^{-ax^2} (-2ax), \quad \frac{d^2\psi_0}{dx^2} = -2aA_0 e^{-ax^2} + \\ &+ 4a^2 A_0 x^2 e^{-ax^2}. \end{aligned} \quad (12.41)$$

После подстановки (12.40) и (12.41) в (12.39) и сокращения общих сомножителей получим

$$-a + 2a^2 x^2 = -\frac{mE_0}{\hbar^2} + \frac{m^2}{2\hbar^2} \omega_0^2 x^2. \quad (12.42)$$

Это уравнение будет тождественно выполняться при любых  $x$ , если свободные члены и коэффициенты при  $x^2$  в левой и правой частях (12.42) будут равны. Приравнивая их, приходим к системе двух уравнений, определяющей параметр  $a$  и значение  $E_0$ :

$$\begin{cases} a = mE_0/\hbar^2, \\ 2a^2 = m^2\omega_0^2/(2\hbar^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = m\omega_0/(2\hbar), \\ E_0 = a\hbar^2/m = \hbar\omega_0/2. \end{cases} \quad (12.43)$$

Запишем окончательные выражения для собственной функции  $\psi_0$  и волновой функции  $\Psi_0$  основного состояния

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= A_0 e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2}, \quad \Psi_0(x, t) = A_0 e^{-\frac{E_0}{\hbar}t - \frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2}, \\ E_0 &= \frac{\hbar\omega_0}{2}. \end{aligned} \quad (12.44)$$

Аналогично определяются характеристики первого возбужденного состояния

$$\psi_1(x) = A_1 x e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2}, \quad E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega_0.$$

Детальный анализ решений уравнения (12.39) пока-

зывает, что спектр энергий имеет следующий вид ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 \text{ — спектр энергии квантового осциллятора.} \quad (12.45)$$

На рис. 12.6 представлены вид потенциальной ямы ( $U = -kx^2/2$ , рис. 12.6, а), спектр энергии (см. (12.46)) и рис. 12.6, б) и три первые собственные функции  $\psi_n(x)$  для квантового осциллятора при  $n = 0, 1, 2$  (рис. 12.6, в).

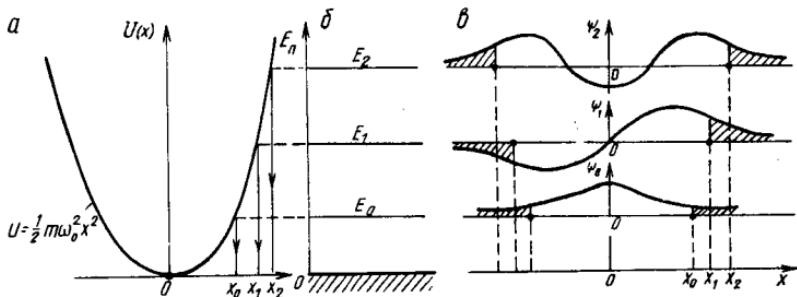


Рис. 12.6

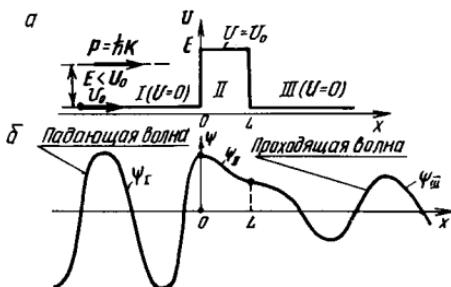
Следует снова обратить внимание на тот факт, что и квантовый осциллятор в основном, т. е. наименее по энергии, состоянии имеет отличную от нуля энергию  $E_0 = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0$  (минимальная энергия классического осциллятора равна нулю), которая соответствует так называемым *нулевым колебаниям квантового осциллятора*. Это означает, что квантовый объект (микро частица) в принципе не может находиться в состоянии, аналогичном состоянию равновесия классической частицы (т. е. на дне ямы), что является прямым следствием принципа неопределенности. Энергия  $E_0$  равна минимальному значению энергии, совместимому с этим принципом.

Из рассмотренных примеров следует, что квантование энергии является общим свойством квантовых объектов, тогда как структура спектров энергии  $E_n$  (см. (12.34) и (12.46)) существенно зависит от формы потенциальной ямы (в первом примере  $E_n \sim n^2$ , а для осциллятора  $E_n \sim n$ ). Из сопоставления графиков собственных функций следует, что в случае бесконечно глубокой ямы (см. рис.

12.5) значения функций  $\psi_n$  обращаются в нуль на ее границах тогда как собственные функции квантового осциллятора не обращаются в нуль в точках  $x_n$ , удовлетворяющих условию  $U(x_n) = E_n$  (см. рис. 12.6, в). Это означает, что квантовая частица с определенной вероятностью может находиться в той области пространства, где потенциальная энергия  $U(x)$  больше ее полной энергии  $E_n$ , т. е. в заштрихованных областях на рис. 12.6, в. Это особое свойство волновой природы микрообъектов не имеет аналога в классической механике и носит название *туннельного эффекта*.

**Прохождение микрочастиц сквозь потенциальный барьер.** Возможность прохождения микрочастицы сквозь потенциальный барьер (см. § 4.3), т. е. проникновение частицы через область пространства, в которой ее полная энергия  $E$  меньше потенциальной энергии  $U(x)$ , является чисто квантовым эффектом (туннельный эффект), в основе которого лежит волновая природа свойств вещества. Проиллюстрируем основные закономерности этого явления на примере преодоления микрочастицей с энергией  $E$  прямоугольного потенциального барьера (высотой  $U_0 > E$ ), определяемого следующими соотношениями (рис. 12.7, а)

$$U(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \quad (\text{I область}), \\ U_0, & 0 \leq x \leq L \quad (\text{II область}), \\ 0, & L < x < \infty \quad (\text{III область}). \end{cases} \quad (12.46)$$



Puc. 12.7

В соответствии с законами классической механики при  $E = mv_0^2/2 < U_0$  частица в области I движется вдоль оси  $x$  равномерно и прямолинейно, а затем, отразившись от барьера в точке  $x = 0$ , движется в обратном направлении с постоянной скоростью  $v = -v_0$ .

Поведение квантовой частицы будет подчиняться уравнению Шрёдингера, которое в силу (12.46) выглядит

по-разному в областях I и III, где  $U(x) = 0$ , и в области II, где  $U(x) = U_0 = \text{const}$ :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 \quad (\text{I и III области}), \quad (12.47)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - E) \psi = 0 \quad (\text{II область}). \quad (12.48)$$

Общее решение в области I, где  $k^2 = 2mE/\hbar^2 > 0$ , имеет вид суперпозиции падающей ( $e^{+ikx}$ ) и отраженной ( $e^{-ikx}$ ) плоских волн де Броиля ( $\mathbf{k}$  — волновой вектор)

$$\psi_I(x) = A_1 e^{-ikx} + B_1 e^{ikx} \quad (\text{область I}). \quad (12.49)$$

В области II корни характеристического уравнения для (12.48) действительные и равны  $\pm \kappa$  ( $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - E)/\hbar}$ ). Поэтому

$$\psi_{II}(x) = A_2 e^{-\kappa x} + B_2 e^{\kappa x} \quad (\text{область II}). \quad (12.50)$$

В области III решение будет иметь такой же вид, как и в области I,

$$\psi_{III}(x) = A_3 e^{-ik(x-L)} + B_3 e^{ik(x-L)} \quad (\text{область III}) \quad (12.51)$$

Постоянные интегрирования  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$  находятся из условия непрерывности волновой функции и ее первой производной на границах барьера ( $x = 0$ ,  $x = L$ ) и условия нормировки (см. (12.13) и последующий текст). Решение (12.49) — (12.51) схематично изображено на рис. 12.7, б. Из сопоставления решений для  $\psi_I, \psi_{II}$  и  $\psi_{III}$  следует, что импульс  $p = \hbar k$  для прошедшей через барьер волны совпадает с импульсом падающей волны ( $k_1 = k_{III} = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ ). Амплитуда  $B_3$  прошедшей волны меньше амплитуды  $B_1$  падающей волны, что указывает на частичное преодоление и частичное отражение от барьера. Вероятность прохождения микрочастицы через барьер определяется коэффициентом прозрачности  $D$ , который для прямоугольного барьера высотой  $U_0$  и шириной  $L$  вычисляется по следующей формуле:

$$D = \frac{|B_3|^2}{|B_1|^2} = e^{-\frac{2L}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}}. \quad (12.52)$$

Наличие в показателе экспоненты чрезвычайно малой величины  $\hbar$  ( $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж · с) приводит к тому, что коэффициент  $D$  очень мал для «классических» час-

тиц, т. е. частиц, движение которых определяется законами классической механики Ньютона.

Оценим значение величины  $D$  в задаче по преодолению электроном и протоном потенциального барьера высотой 2 эВ (при  $E = 1,8$  эВ) и шириной  $L \sim 1 \text{ \AA}$ :

$$D \text{ электрона} = \\ = \exp \left\{ - \frac{2 \cdot 10^{-10}}{1,05 \cdot 10^{-34}} \sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 0,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \right\} \approx 0,82,$$

$$D \text{ протона} = \\ = \exp \left\{ - \frac{2 \cdot 10^{-10}}{1,05 \cdot 10^{-34}} \sqrt{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 0,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \right\} \approx \\ \approx 2,8 \cdot 10^{-9}.$$

Таким образом, преодоление такого барьера электроном представляет собой практически достоверное событие ( $D = 0,82$ ), а протон с той же энергией уже не может его преодолеть (масса протона в 1836 раз больше массы электрона и коэффициент прозрачности практически равен нулю).

На значение коэффициента, помимо массы, сильно влияет ширина барьера  $L$ , также фигурирующая в показателе экспоненты (12.52). Поэтому увеличение ширины барьера в три раза приводит к уменьшению величины  $D$  приблизительно в 20 раз ( $e^3 \approx 20$ ). Рассмотренный здесь туннельный эффект объясняет такие явления, как ионизация атомов и вырывание электронов из металлов под действием электрического поля,  $\alpha$ -распад атомных ядер и многие другие явления.

**Задание 12.2.** Покажите, что в случае, когда энергия  $U$  зависит только от положения частицы ( $U = U(x, y, z)$ ), то уравнение Шредингера (см. (12.20)) для волновой функции  $\Psi(x, y, z, t)$  преобразуется к стационарному уравнению Шредингера (см. (12.22)) для собственной функции  $\psi(x, y, z)$ .

**Указание.** Воспользуйтесь выражением (12.21) для волновой функции  $\Psi(x, y, z, t)$  и, вычислив ее первую производную по времени  $t$  и вторые производные по координатам  $x, y, z$ , подставьте выражения для  $\Psi(x, y, z, t)$ , производной  $\partial\Psi/\partial t$  и  $\Delta\Psi$  в уравнение (12.20). После сокращений на общие множители получите уравнение (12.22).

**Задание 12.3.** Покажите, что решение трехмерного уравнения Шредингера для свободной квантовой частицы ( $U(x, y, z) = 0, E = mv^2/2$ ) имеет вид плоской волны де Броиля

$$\Psi(x, y, z, t) = Ae^{-i(\omega t - kr)}. \quad (12.53)$$

**Указание.** После подстановки (12.53) в уравнение (12.20) и упрощений получается уравнение  $\hbar\omega = \hbar^2 k^2/(2m)$ , которое с учетом (12.15) преобразуется к тождеству  $E = p^2/(2m)$ .

Теплота есть непрерывное  
движение частей тела...  
Нет такого тела, частички  
которого были бы в покое.

Роберт Гук. Микрография

Работа — это передача упорядоченного  
движения от одной системы к другой.

Дж. Максвелл

## II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

**Термодинамический и статистический методы.** *Молекулярная физика* изучает структуру и свойства вещества исходя из молекулярно-кинетических представлений о природе материальных тел. Согласно этим представлениям, любое тело (твердое, жидкое, газообразное) состоит из очень малых частиц: молекул, атомов, ионов. Эти микрообъекты находятся в беспрерывном хаотическом движении. Хаотичность движения означает, что все направления скоростей частицы в пространстве равноправны, равновероятны. Молекулярно-кинетический подход учитывает также, что все частицы, из которых состоит вещество, взаимодействуют между собой. Соотношение между средними значениями кинетической энергии  $E_k$  хаотического движения молекул и потенциальной энергией  $E_{\text{п}}$  их взаимодействия качественно характеризует агрегатное состояние вещества: твердое, жидкое или газообразное. Если  $E_k \gg |E_{\text{п}}|$ , то вещество находится в газообразном состоянии, при  $E_k \sim |E_{\text{п}}|$  — в жидком, а при  $E_k \ll |E_{\text{п}}|$  — в твердом. При изучении явлений в молекулярной физике используют два различных способа: молекулярно-кинетический и термодинамический.

**Молекулярно-кинетическая теория** ставит целью объяснить свойства тел, непосредственно наблюдаемые на опыте как суммарный эффект в системе из большого числа частиц. При этом она пользуется статистическим методом, интересуясь не движением каждой отдельной молекулы, а такими средними физическими величинами, которые характеризуют движение огромной совокупности частиц. Поэтому иначе эту теорию называют *статистической физикой*.

**Термодинамика** также изучает различные свойства тел (систем) и изменения агрегатного состояния вещества.

ства. Однако в отличие от молекулярно-кинетической теории она не рассматривает микроскопическое строение вещества, а изучает физические свойства систем на основе анализа процессов, связанных с законами превращения энергии системы. Термодинамика базируется на нескольких фундаментальных законах — *началах термодинамики*, установленных в результате обобщения большого числа опытных фактов. В силу этого выводы термодинамики имеют весьма общий характер и не зависят от конкретного вида взаимодействия частиц системы.

Подходя с различных точек зрения к изучению свойств физических систем и процессов, протекающих в них, термодинамика и статистическая физика взаимно дополняют друг друга, образуя *единую теорию вещества*.

**Единицы измерения массы.** В молекулярной физике принято характеризовать массы атомов и молекул не их абсолютными значениями, например в килограммах, а относительными безразмерными величинами — атомной  $A$ , и молекулярной  $M$ , массами. В качестве *атомной единицы массы* (а. е. м или  $m_u$ ) принимается  $1/12$  массы  $m_c$  изотопа углерода  $^{12}\text{C}$  ( $m_u = m_c/12 = 1,66 \cdot 10^{-27}$  кг). *Относительная молекулярная масса*  $M_r = m_{\text{мол}}/m_u$ , где  $m_{\text{мол}}$  — абсолютное значение массы молекулы. Аналогично определяется *относительная атомная масса*.

В молекулярной физике широко используется понятие *количество вещества*. В СИ количество вещества выражается в молях.

*Моль* равен такому количеству вещества, которое содержит столько же структурных элементов (атомов, молекул), сколько атомов содержится в  $0,012$  кг изотопа углерода  $^{12}\text{C}$ . Следовательно, моль любого вещества содержит, по определению, одинаковое число структурных элементов, которое называется *постоянной Авогадро*:

$$N_A = \frac{0,012}{12 \cdot m_u} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Например,  $N = 10^{25}$  молекул водорода и  $N = 10^{25}$  молекул кислорода являются одинаковыми количествами вещества, хотя они имеют различные массы  $M$ , равные соответственно  $3,34 \cdot 10^{-2}$  кг и  $5,31 \cdot 10^{-1}$  кг ( $M = M_r \cdot N \cdot m_u$ ).

В молекулярной физике пользуются также понятиями *молярной массы*  $\mu$ , которая определяется как масса одного моля вещества, т. е.  $\mu = m_{\text{мол}} \cdot N_A$ .

**Законы идеального газа.** В процессе становления и

развития молекулярной физики и термодинамики значительную роль сыграли *опытные законы идеального газа*. По определению, это газ, состоящий из точечных материальных частиц массой  $m$ , между которыми отсутствуют силы, действующие на расстоянии и сталкивающиеся между собой по законам соударения абсолютно упругих шаров.

Однако сами по себе частицы идеального газа могут быть сложными. Энергия сложной частицы состоит из кинетической энергии движения ее центра масс, кинетической энергии вращения и колебаний (см. далее § 14.3).

Модель идеального газа можно использовать при изучении реальных разреженных газов, так как в условиях, близких к нормальным ( $T_0 = 273$  К,  $p_0 = 1,01 \times 10^5$  Па), они по основным физическим свойствам близки к идеальному газу.

В состоянии *термодинамического равновесия*, т. е. в состоянии, когда температура  $T$ , давление  $p$  и объем  $V$  не изменяются во времени, для идеального газа выполняются следующие экспериментально установленные законы.

**Закон Бойля — Мариотта.** Для фиксированной массы газа при постоянной температуре произведение давления на объем газа есть величина постоянная ( $pV = \text{const}$  при фиксированных значениях массы  $m$  и температуры  $T$ ).

**Закон Гей-Люссака.** Для фиксированной массы газа при постоянном давлении объем газа прямо пропорционален его абсолютной температуре  $T$  ( $V = V_0 T / T_0 = V_0(1 + \alpha t)$  при фиксированных значениях массы  $m$  и давления  $p$ ).

**Закон Шарля.** Для фиксированной массы газа при постоянном объеме давление газа прямо пропорционально его абсолютной температуре  $T$  ( $p = p_0 T / T_0 = p_0(1 + \alpha t)$  при фиксированных значениях массы  $m$  и объема  $V$ ).

Два последних закона содержат значения  $T_0$ ,  $p_0$  и  $V_0$  при температуре  $t = 0$  °C, а также коэффициент объемного расширения газа  $\alpha = 1/T_0$  ( $T_0 = 273,15$  К).

В общем случае связь между величинами  $p$ ,  $V$  и  $T$  описывается уравнением Клапейрона — Менделеева (см. (8.7)).

**Закон Авогадро.** Моль любых газов при одинаковых температурах и давлениях занимает одинаковые объемы.

**Закон Дальтона.** Давление смеси  $n$  идеальных газов

равно сумме парциальных давлений входящих в нее газов:  $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ .

*Парциальным* называется такое давление  $p_i$ , которое оказала бы одна  $i$ -я компонента смеси, если бы она занимала весь объем  $V$  сосуда, заполненного смесью газов ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

**Стандартный газовый термометр.** Линейная зависимость объема (закон Гей-Люссака) и давления (закон Шарля) газа от температуры позволяет создать *стандартный газовый термометр*, который дает одинаковые показания независимо от того, каким газом он заполнен. В связи с этим появляется возможность сравнения показаний различных типов термометров.

Название термодинамика вводит в заблуждение, так как внушает представление о неравновесных состояниях вследствие применения слова динамический.

E. A. Гугенгейм

Теплота и движение превращаются друг в друга.

P. Майер

### 13. ТЕРМОДИНАМИКА

**Основные понятия термодинамики.** Термин «термодинамика» впервые ввел У. Томсон (1824—1907), который писал «термо-динамика», что в переводе означало «теплота — работа».

Как уже отмечалось во введении, термодинамика изучает процессы, связанные с превращением энергии из одного вида в другой, и характеризует эти превращения с количественной стороны с помощью понятий теплота и работа.

Совокупность тел, обменивающихся энергией как между собой, так и с внешними телами, называется *термодинамической системой*. Состояние такой системы определяется набором так называемых *термодинамических параметров*, которые характеризуют физические свойства системы. Сюда относятся давление, объем, температура, внутренняя энергия, теплоемкость и т. д.

*Стационарным* называется состояние, для которого значения всех термодинамических параметров постоянны во времени. Стационарное состояние называется *равновесным*, если его неизменность во времени не обуслов-

лена протеканием каких-либо процессов во внешних по отношению к данной термодинамической системе телах. Равновесное состояние однозначно определяется заданием значений ограниченного числа его термодинамических параметров, называемых *параметрами состояния*. В случае однокомпонентных систем такими параметрами являются  $p$ ,  $V$ ,  $T$ , которые связаны между собой *уравнением состояния*  $f(p, V, T) = 0$ . Например, для идеального газа неявная форма уравнения состояния  $pV - nRT = 0$ . Знание такого уравнения позволяет с помощью термодинамики изучать свойства веществ в различных агрегатных состояниях, а значит, и их изменение при фазовых переходах.

Для наглядного представления связи между параметрами состояния системы используются *термодинамические диаграммы*, на которых графически изображаются зависимости между соответствующими параметрами в координатах  $p - V$ ,  $p - T$  и  $V - T$ . Равновесное состояние на таких диаграммах изображается точкой, координаты которой определяются заданными значениями  $p$ ,  $V$ ,  $T$  (рис. 13.1).

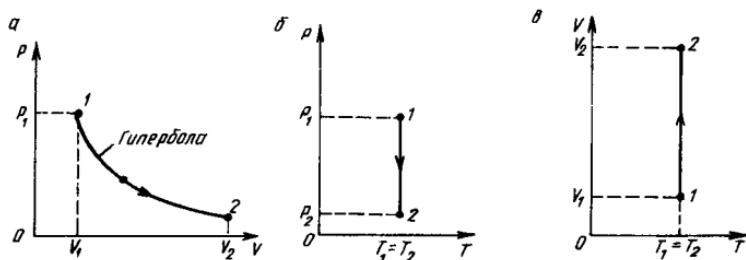


Рис. 13.1

Процесс изменения состояния термодинамической системы называется *термодинамическим процессом*. В случае равновесного (очень медленного — *квазистатического*<sup>\*</sup>) термодинамического процесса между параметрами состояния существует определенная связь и, следовательно, такой процесс будет изображаться на термодинамической диаграмме некоторой линией, соединяющей начальное и конечное состояния. В качестве примера на рис. 13.1 изображен процесс изотермического (от

\* В квазистатическом процессе равновесие в термодинамической системе устанавливается во много раз быстрее, чем происходит изменение параметров этой системы.

гр. *isos* — одинаковый) расширения газа, который протекает при постоянной температуре и соответствует закону Бойля — Мариотта (рис. 13.1, *a* —  $pV$ -диаграмма, рис. 13.1, *б* —  $pT$ -диаграмма, рис. 13.1, *в* —  $VT$ -диаграмма) для идеального газа.

### 13.1. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВНУТРЕННЕЙ ЭНЕРГИЕЙ, РАБОТОЙ И ТЕПЛОТОЙ

**Внутренняя энергия.** *Внутренней энергией*  $U$  системы называется сумма кинетической энергии хаотического движения частиц и потенциальной энергии их взаимодействия друг с другом. Внутренняя энергия системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, зависит от температуры и внешних параметров, определяющих геометрические размеры и состав системы. Например, внутренняя энергия однокомпонентной системы с фиксированной массой зависит только от температуры и объема системы:  $U = f(T, V)$ .

Внутренняя энергия, как и потенциальная энергия в механике, определяется только с точностью до постоянного слагаемого. Поэтому под внутренней энергией в термодинамике обычно понимают только те ее составляющие, которые изменяются в рассматриваемых термодинамических процессах. Например, в случае идеального газа мы считаем, что его внутренняя энергия равна сумме кинетических энергий теплового движения молекул, а энергию взаимодействия атомов в молекулах, энергию взаимодействия электронов между собой и с ядрами атомов, энергию движения и взаимодействия нуклонов в ядре атомов не учитываем, так как в тепловых процессах энергия упомянутых взаимодействий не изменяется.

При определении внутренней энергии не учитывается кинетическая энергия движения тела как целого и потенциальная энергия его во внешнем силовом поле. Внутренняя энергия системы тел равна сумме внутренних энергий каждого из тел в отдельности и энергии межмолекулярного взаимодействия в тонком слое на границе между телами. Последней из-за ее малости во многих случаях можно пренебречь и считать, что внутренняя энергия термодинамической системы равна сумме внутренних энергий, образующих эту систему тел,— свойство аддитивности энергии.

Внутренняя энергия является *функцией состояния системы*. Это означает, что всякий раз, когда система

оказывается в состоянии с заданными значениями  $T$  и  $V$ , ее внутренняя энергия принимает присущее этому состоянию значение, независимо от того, каким способом система приведена в это состояние.

**Работа и теплота.** Внутреннюю энергию системы, зависящую от ее объема  $V$  и температуры  $T$  ( $U = U(V, T)$ ), можно изменить двумя различными способами: путем совершения над термодинамической системой работы  $A'$  при постоянной температуре, что связано с изменением ее объема, и путем сообщения ей количества теплоты  $Q$  при фиксированном объеме, что приводит к изменению температуры этой системы.

Передача внешними телами энергии в форме работы  $A'$  сопровождается макроскопическим перемещением внешних тел. В результате изменяются средние взаимные расстояния между частицами системы, а значит, и их потенциальная энергия. В соответствии с третьим законом Ньютона система при этом совершает над внешними телами работу  $A = A'$ .

Сообщение системе теплоты  $Q$  не связано с макроскопическими перемещениями тел системы. Изменение внутренней энергии при теплопередаче состоит в том, что отдельные молекулы более нагретого тела в процессе неупругого столкновения передают часть своей кинетической энергии молекулам менее нагретого тела.

Количество энергии, передаваемой системе внешними телами в форме теплоты, называется *количеством теплоты или теплотой*  $Q$ , сообщаемой системе. Количество теплоты считается положительным, когда оно подводится к системе.

В отличие от энергии системы, являющейся однозначной функцией состояния системы, понятия теплоты и работы имеют смысл только в связи с процессом изменения состояния системы. Теплота и работа — *энергетические характеристики термодинамического процесса*, обуславливающего переход системы из одного состояния в другое.

**Первое начало термодинамики.** Допустим, что некоторая термодинамическая система (например, газ, находящийся в цилиндре под поршнем) имеет внутреннюю энергию  $U_1$ , а затем получает некоторое количество теплоты  $Q$  и совершает работу  $A$  против внешних сил. В результате система переходит в другое состояние, характеризующееся внутренней энергией  $U_2$ . В соответствии с законом сохранения энергии изменение внутрен-

ней энергии  $\Delta U = U_2 - U_1$  будет равно разности между количеством теплоты  $Q$ , полученным системой, и работой  $A$ , совершенной системой против внешних сил:  $\Delta U = Q - A$ . Это соотношение представляет собой математическую запись первого начала термодинамики, которое перепишем в следующем виде:

$$Q = \Delta U + A \text{ — первое начало термодинамики.} \quad (13.1)$$

Согласно (13.1), теплота, сообщаемая системе, расходуется на изменение внутренней энергии системы и на совершение работы против внешних сил. Для малого изменения состояния системы первое начало термодинамики можно представить в дифференциальном виде:

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (13.2)$$

В выражении (13.2), как и ранее в механике (см. (2.11)), элементарная работа, а сейчас и элементарное количество теплоты обозначены символами  $\delta A$  и  $\delta Q$ , чтобы подчеркнуть тем самым, что значения этих величин зависят от вида процесса. Они не являются полными дифференциалами, тогда как изменение  $dU$  внутренней энергии представляет собой полный дифференциал функции состояния  $U$ . Необходимо заметить, что в (13.1) каждая из величин может быть положительной, отрицательной либо равной нулю.

Если в результате термодинамического процесса система возвращается в исходное состояние, то изменение ее внутренней энергии  $\Delta U = 0$ . Тогда, согласно первому началу,  $A = Q$ . Из этого следует, что нельзя построить периодически действующий двигатель, который совершал бы работу, большую, чем количество сообщенной ему извне энергии. Данный вывод эквивалентен утверждению о невозможности построения *вечного двигателя первого рода*.

**Работа системы при изменении ее объема.** Рассмотрим газ, находящийся под поршнем в цилиндрическом сосуде (рис. 13.2). Если газ, расширяясь, передвигает поршень на бесконечно малое расстояние  $dl$ , то он производит над поршнем работу  $\delta A = Fdl = pSdl = pdV$ , где  $S$  — площадь поршня;  $Sdl = dV$  — изменение объема системы.

Таким образом, элементарная работа

$$\delta A = pdV. \quad (13.3)$$

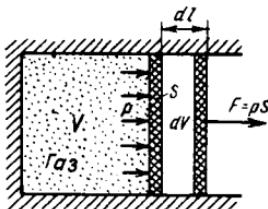


Рис. 13.2

Полную работу  $A_{12}$ , совершающую газом (системой) при изменении его объема от  $V_1$  до  $V_2$ , найдем путем интегрирования:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p(T, V) dV. \quad (13.4)$$

Это выражение, так же как и (13.3), справедливо при любых изменениях объема твердых, жидких и газообразных макроскопических тел.

**Задание 13.1.** Постройте термодинамические диаграммы изобарического (постоянное давление) и изохорического (постоянный объем) процессов для идеального газа (см. законы Гей-Люссака и Шарля), а затем определите работу газа в изопроцессах.

### 13.2. ТЕПЛОЕМКОСТЬ ТЕЛА И ВЕЩЕСТВА — ФУНКЦИИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

**Теплоемкость удельная и молярная.** *Теплоемкостью тела* называется отношение количества сообщаемой ему теплоты  $\delta Q$  к соответствующему изменению температуры тела  $dT$ :  $C_{\text{тела}} = \delta Q/dT$ . Согласно этому определению, теплоемкость тела зависит от химического состава, массы и температуры, а также от вида процесса, определяющего изменение состояния тела при сообщении ему теплоты  $\delta Q$ . Чтобы учесть зависимость теплоемкости тела от его массы, вводят и наиболее широко используют *удельную* и *молярную* теплоемкости вещества.

*Удельной теплоемкостью* вещества называют физическую величину  $c$ , численно равную количеству теплоты, которое нужно сообщить единичной массе вещества для изменения его температуры на один градус в рассматриваемом термодинамическом процессе:

$c = \frac{1}{m} \frac{\delta Q}{dT} \quad \text{для заданного процесса.} \quad (13.5)$

*Молярной теплоемкостью вещества* называют физическую величину  $C$  (в отличие от  $c$ ), численно равную количеству теплоты, которое нужно сообщить одному молю вещества для изменения его температуры на один градус в рассматриваемом термодинамическом процессе ( $v = m/\mu$  — число молей):

$$C = \frac{1}{v} \frac{\delta Q}{dT} \Rightarrow C = c\mu, \quad (13.6)$$

где  $\mu$  — молярная масса вещества.

В качестве примера наиболее важных термодинамических процессов рассмотрим изохорический и изобарический процессы, которые будем характеризовать соответственно молярными теплоемкостями  $C_V$  и  $C_p$  ( $v = 1$ ):

$$C_V = (\delta Q/dT)_{V=\text{const}} \text{ — молярная теплоемкость при } V=\text{const},$$

$$C_p = (\delta Q/dT)_{p=\text{const}} \text{ — молярная теплоемкость при } p=\text{const}.$$

(13.7)

**Уравнение Майера для идеального газа.** Применим первое начало термодинамики к одному молю газа и воспользуемся определением (13.3) для элементарной работы  $\delta A$ :

$$\delta Q = dU + pdV (v = 1). \quad (13.8)$$

Из (13.8) следует, что для изохорического процесса ( $V = \text{const}$ ) количество теплоты  $\delta Q = dU$ . Тогда в соответствии с определением молярной теплоемкости  $C_V$  (см. (13.7)) получим

$$C_V = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \frac{\partial U(T, V)}{\partial T} (v = 1). \quad (13.9)$$

Для изобарического процесса давление  $p = \text{const}$ , поэтому объем  $V$  является функцией температуры ( $V = f(T)$  — изобара). Учитывая эту зависимость в выражении, определяющем молярную теплоемкость  $C_p$  (см. (13.7)), запишем

$$C_p = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_p = \left( \frac{dU(T, V) + pdV}{dT} \right)_p = \frac{\partial U}{\partial T} + \\ + \left( \frac{\partial U}{\partial V} + p \right) \left( \frac{dV}{dT} \right)_p. \quad (13.10)$$

Из последнего выражения совместно с (13.9) вытекает важное соотношение ( $v = 1$ )

$$C_p = C_V + \left( p + \frac{\partial U}{\partial V} \right) \left( \frac{dV}{dT} \right)_p, \quad (13.11)$$

которое устанавливает термодинамическую связь между теплоемкостями  $C_p$  и  $C_V$ . Здесь будет уместно отметить, что термодинамический метод сам по себе не позволяет рассчитать ту или иную термодинамическую характеристику (например, теплоемкость), он устанавливает существующие фундаментальные связи между этими характеристиками, причем они универсальны по своей природе и, следовательно, справедливы для всех веществ независимо от их молекулярного строения и агрегатного состояния.

В частности, в случае одного моля идеального газа  $U = U(T)$ ,  $pV = RT$  и, следовательно,  $V = RT/p$ . Поэтому  $\partial U / \partial V = 0$ , а  $(dV/dT)_p = R/p$ . В результате из (13.11) следует уравнение Майера:

$$C_p = C_V + R \text{ — уравнение Майера для идеального газа.} \quad (13.12)$$

### 13.3. ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВОГО НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ К ИССЛЕДОВАНИЮ РАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ

**Равновесные изопроцессы.** Изопроцессы в однокомпонентных газах реализуются путем фиксирования одного из трех параметров состояния:  $p$ ,  $V$ ,  $T$ . При этом подразумевается, что масса газа остается постоянной во время проведения процесса. Поэтому возможны три изопроцесса, которые упоминались во введении.

При изохорическом процессе  $V = \text{const}$  ( $m = \text{const}$ ). Диаграмма этого процесса в переменных  $p$ ,  $V$  представлена на рис. 13.3. Переход из состояния 1 в состояние 2 представляет собой изохорическое нагревание, так как в этом случае давление растет, что при  $V = \text{const}$  соответствует повышению температуры газа (см. закон Шарля для идеального газа). По этой же причине в процессе 1—3 реализуется изохорическое охлаждение. В изохорических условиях элементарная работа  $dA = pdV = 0$  и из первого начала термодинамики следует, что  $dQ = dU$ . Согласно (13.6) и (13.7), для  $v = m/\mu$  молей вещества  $dQ = vC_VdT$ . Поэтому изменение

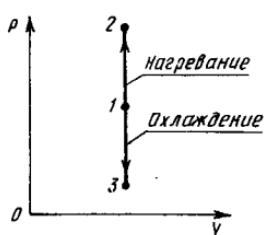


Рис. 13.3

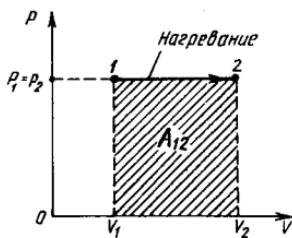


Рис. 13.4

внутренней энергии системы определяется следующими соотношениями ( $V = \text{const}$ ):

$$dU = vC_VdT \Rightarrow U(T, V) = v \int C_V(T, V)dT + B(V). \quad (13.13)$$

Здесь  $B(V)$  — постоянная интегрирования, зависящая от объема  $V$ .

В частности, когда теплоемкость  $C_V = \text{const}$  (это имеет место, например, для идеального газа, см. гл. 14), получим

$$U_2 - U_1 = vC_V(T_2 - T_1), \quad V = \text{const}. \quad (13.14)$$

Вновь отметим, что значения теплоемкости  $C_V$  и постоянной интегрирования  $B(V)$ , а значит, и внутренней энергии  $U$  в рамках термодинамики определить невозможно. Их расчет составляет основную задачу молекулярно-кинетической теории (статистической механики), которая будет рассматриваться в следующих главах пособия.

Таким образом, изохорический процесс можно реализовать в сосуде постоянного объема путем его нагревания (или охлаждения), что связано с увеличением (или уменьшением) внутренней энергии системы.

При изобарическом процессе  $p = \text{const}$  ( $m = \text{const}$ ). Его  $pV$ -диаграмма изображена на рис. 13.4. Процесс 1—2 определяет изобарическое нагревание, поскольку в этом случае увеличение объема от  $V_1$  до  $V_2$  сопровождается увеличением температуры газа (см. закон Гей-Люссака для идеального газа). Работа системы (газа) при изменении ее объема от  $V_1$  до  $V_2$  определяется с помощью (13.3):

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} pdV = p(V_2 - V_1). \quad (13.15)$$

Из (13.15) следует, что работа системы численно равна площади фигуры, ограниченной на  $pV$ -диаграмме началь-

ным  $V_1$ , конечным  $V_2$  значениями объема и кривой зависимости  $p$  от  $V$  (в данном случае это изобара —  $p = \text{const}$ ). Для идеального газа, когда  $pV = vRT$  (уравнение Клапейрона — Менделеева), разность объемов  $V_2 - V_1 = vR(T_2 - T_1)/p$ . Поэтому работа газа при изобарическом расширении может быть выражена через разность температур в конечном и исходном состояниях:

$$A_{12} = p(V_2 - V_1) = vR(T_2 - T_1) \Rightarrow \delta A = vRdT. \quad (13.16)$$

Количество теплоты, сообщенной идеальному газу, и соответствующее изменение внутренней энергии выражаются соотношениями ( $p = \text{const}$ ):

$$\begin{aligned} \delta Q &= vC_pdT = v(C_v + R)dT = vC_vdT + \delta A \Rightarrow \\ &\Rightarrow dU = vC_vdT. \end{aligned} \quad (13.17)$$

Здесь использовано уравнение Майера (см. (13.12)) и первое начало термодинамики.

При переходе от первого ко второму состоянию внутренняя энергия системы изменится на величину (см. (13.10))

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \int_{T_1}^{T_2} \left[ \frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial U}{\partial V} \left( \frac{dV}{dT} \right)_p \right] dT, \quad p = \text{const.}$$

Заметим, что в отличие от (13.13) (где  $V = \text{const}$ ) здесь в общем случае следует учитывать при интегрировании по температуре зависимость  $C_v = \frac{\partial U}{\partial T}$  от объема  $V$  ( $V = f(T)$  — изобара). Для идеального газа ( $C_v = \text{const}$ ,  $U = U(T)$ ):

$$U_2 - U_1 = vC_v(T_2 - T_1), \quad p = \text{const.} \quad (13.18)$$

Итак, изобарическое нагревание по сравнению с изохорическим требует большего количества теплоты, поскольку, согласно (13.17), помимо изменения внутренней энергии системы, совершается работа, определяемая формулой (13.16). При этом следует иметь в виду, что при изохорическом и изобарическом нагревании вещества на одну и ту же величину  $\Delta T$  система из состояния 1 переходит в совершенно разные состояния 2 и  $2^*$  (см. рис. 13.5).

При изотермическом процессе  $T = \text{const}$  ( $m = \text{const}$ ). Поэтому изотерма будет определять зависимость давления от объема ( $p = f(V)$ ), которая в случае

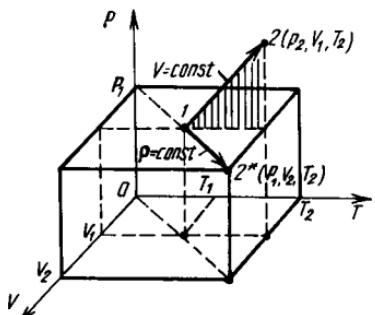


Рис. 13.5

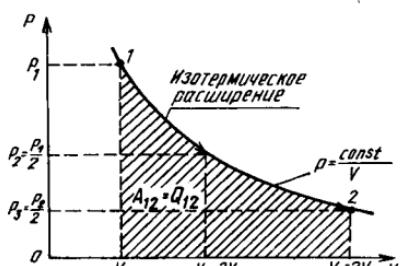


Рис. 13.6

идеального газа имеет вид гиперболы ( $pV = vRT = \text{const}$ , см. закон Бойля — Мариотта), изображенной на рис. 13.6.

Работа системы при переходе из состояния 1 в состояние 2 определяется в соответствии с (13.3), и для идеального газа получим ( $T = \text{const}$ )

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} pdV = vRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = vRT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (13.19)$$

Учитывая уравнение  $p = vRT/V$ , выразим  $A_{12}$  через давление в первом и втором состояниях:

$$A_{12} = vRT \ln \frac{V_2}{V_1} = vRT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (13.20)$$

При  $T = \text{const}$  изменение внутренней энергии системы  $dU = (\partial U / \partial T)dT + (\partial U / \partial V)dV = (\partial U / \partial V)dV$  и, следовательно,

$$\delta Q = \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right) dV + pdV \Rightarrow Q_{12} = (U_2 - U_1) + A_{12}. \quad (13.21)$$

В случае идеального газа ( $U = U(T)$ ) производная  $\partial U / \partial V = 0$  и соотношения (13.21) упрощаются

$$\begin{aligned} \delta Q = \delta A \Rightarrow Q_{12} &= A_{12} \equiv vRT \ln \frac{V_2}{V_1} \equiv \\ &\equiv vRT \ln \frac{p_1}{p_2}. \end{aligned} \quad (13.22)$$

При изотермическом расширении все количество теплоты, сообщенной газу, расходуется на совершение работы против внешних сил.

**Адиабата.** Адиабатическим (от гр. adiabatos — не-переходимый) называется процесс, при котором отсут-

ствует теплообмен между термодинамической системой и окружающей средой:

$$\delta Q = 0 \text{ — адиабатический процесс.} \quad (13.23)$$

Близкими к адиабатическому являются все достаточно быстро протекающие процессы, в которых, однако, не нарушаются условия квазистатичности. Сюда можно отнести процесс распространения звука в упругой среде (§ 9.6). В этом случае за время протекания процесса теплообмен практически не успевает произойти и  $\delta Q \approx 0$ . Для создания адиабатичности на больших промежутках времени обычно систему теплоизолируют от внешней среды, заключая ее в так называемую *адиабатную оболочку*.

Из первого начала термодинамики с учетом (13.23) следует, что  $\delta A = -dU$ , т. е. работа  $\delta A$  совершается за счет изменения внутренней энергии системы. В этом смысле адиабатический процесс противоположен изотермическому, в котором работа  $\delta A = \delta Q$ , т. е. работа выполняется за счет притока извне эквивалентного количества теплоты.

Получим уравнение адиабаты для идеального газа. Из соотношения  $\delta A = -dU$  следует, что

$$pdV = -vC_VdT. \quad (13.24)$$

Определим далее дифференциалы правой и левой частей уравнения Клапейрона — Менделеева:

$$pdV + Vdp = vRdT. \quad (13.25)$$

Разделим почленно уравнение (13.25) на (13.24). Получим

$$\frac{pdV + Vdp}{pdV} = -\frac{R}{C_V} \Rightarrow 1 + \frac{V}{p} \frac{dp}{dV} = -\frac{(R + C_V) - C_V}{C_V}.$$

Используя обозначение ( $R + C_V = C_p$ )

$$\gamma = C_p/C_V > 1 \text{ — адиабатическая постоянная,} \quad (13.26)$$

приходим к дифференциальному уравнению адиабаты:

$$\frac{V}{p} \frac{dp}{dV} = -\gamma \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}.$$

Выполняя интегрирование левой части в пределах от  $p_1$  до  $p_2$ , а правой части от  $V_1$  до  $V_2$ , получаем

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = -\gamma \ln \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{-\gamma} \Rightarrow p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma. \quad (13.27)$$

Так как состояния 1 и 2 (рис. 13.7) выбраны совершенно произвольно, то из (13.27) следует уравнение адиабаты в переменных  $p — V$ :

$pV^\gamma = \text{const}$  — уравнение Пуассона.

(13.28)

Из (13.28) следует, что в адиабатическом процессе

$$p = \frac{\text{const}}{V^\gamma} \quad \left( \gamma = \frac{C_p}{C_v} > 1 \right). \quad (13.29)$$

Поскольку  $\gamma > 1$ , то на  $pV$ -диаграмме адиабата идет круче (см. рис. 13.7), чем изотерма, представляющая собой гиперболу. Поэтому, если газ из состояния 1 расширяется адиабатически (процесс 1—2), то он будет охлаждаться ( $T_2 < T_{2^*} = T_1$ ). Если же система адиабатически сжимается (процесс 1—3), то газ нагревается ( $T_3 > T_{3^*} = T_1$ ). Отсюда следует вывод о том, что в адиабатическом процессе одновременно изменяются все три параметра ( $p$ ,  $V$  и  $T$ ), т. е. адиабата является пространственной кривой в координатах  $p$ ,  $V$ ,  $T$ , тогда как рассмотренные выше изопроцессы определяются плоскими кривыми, расположенными в плоскостях, параллельных координатным плоскостям  $p — V$  ( $T = \text{const}$ ),  $p — T$  ( $V = \text{const}$ ) и  $V — T$  ( $p = \text{const}$ ). Уравнение Пуассона (см. (13.28)) определяет проекцию адиабаты на плоскость

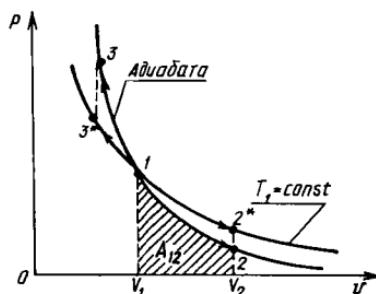


Рис. 13.7

$p = V$ . Уравнения двух других проекций адиабаты получаются из совместного рассмотрения уравнений Клапейрона — Менделеева и Пуассона (см. задание 13.3):

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{const} \quad \begin{array}{l} \text{проекции} \\ \text{адиабаты на} \\ \text{плоскости} \\ T - V \text{ и} \\ p - T. \end{array} \quad (13.30)$$

Так как в адиабатическом процессе  $\delta Q = 0$ , а  $\delta A = -dU$ , то работа расширения идеального газа может быть определена двумя способами:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} pdV = p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_1 V_1^\gamma}{(1-\gamma)} (V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}), \quad (13.31)$$

$$A_{12} = - \int_{T_1}^{T_2} dU = -vC_V \int_{T_1}^{T_2} dT = -vC_V(T_2 - T_1). \quad (13.32)$$

Из рис. 13.7 видно, что работа в адиабатическом процессе  $1-2$  меньше, чем работа в изотермическом процессе  $1-2^*$ . Поэтому при адиабатическом расширении газ охлаждается, тогда как при изотермическом расширении температура поддерживается постоянной за счет притока извне эквивалентного количества тепловой энергии.

**Политропы.** Выше уже отмечалось, что в случае идеального газа теплоемкости  $C_p$ ,  $C_V$  и  $c_p$ ,  $c_V$  оказываются постоянными величинами, которые не зависят ни от температуры, ни от объема газа заданной массы вещества.

Можно формально ввести теплоемкости для изотермического ( $dT = 0$ ) и адиабатического ( $\delta Q = 0$ ) процессов. Тогда, согласно определению (13.6), запишем ( $v = 1$ )

$$C_T = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_{T=\text{const}} = \infty, C_Q = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_{\delta Q=0} = 0. \quad (13.33)$$

Это значит, что теплоемкость  $C$  — неоднозначная функция параметров состояния, она является функцией процесса, т. е. его траектории в пространстве  $p$ ,  $V$ ,  $T$  (изохора, изобара, изотерма, адиабата). Процессы, протекающие при постоянной теплоемкости, называются *политропическими*. Поэтому изопроцессы, а также адиа-

батический процесс являются частными случаями политропического процесса.

Для получения уравнения политропы идеального газа запишем первое начало термодинамики в виде ( $v = 1$ ):

$$CdT = C_VdT + pdV, \delta Q = CdT, \quad (13.34)$$

где  $C$  — молярная теплоемкость некоторого политропического процесса ( $C = \text{const}$ ).

С помощью формулы Майера (см. (13.12)) перепишем уравнение Клапейрона — Менделеева в следующем виде:

$$p = \frac{RT}{V} = \frac{(C_p - C_v)T}{V}. \quad (13.35)$$

Подставим (13.35) в (13.34) и разделим переменные  $V$  и  $T$ :

$$\frac{dT}{T} = - \frac{C_p - C_v}{C_v - C} \cdot \frac{dV}{V}. \quad (13.36)$$

Введем обозначение  $n = 1 - (C_p - C_v)/(C_v - C)$  и выполним интегрирование (13.36). Получим

$$TV^{n-1} = \text{const} \quad \text{уравнение политропы для } T = V. \quad (13.37)$$

*Показатель политропы*

$$n = 1 + \frac{C_p - C_v}{C_v - C} = \frac{C - C_p}{C - C_v}.$$

Исключив из (13.36) с помощью уравнения  $pV = RT$  температуру  $T$  или объем  $V$ , получим уравнение политропы в переменных  $p$ ,  $V$  или  $p$ ,  $T$ :

$$pV^n = \text{const}, \quad T^n p^{1-n} = \text{const}. \quad (13.38)$$

Из (13.38) и (13.37) при  $C = C_p$  ( $n = 0$ ) следует уравнение изобары, при  $C = C_v$  ( $n = -\infty$ ) — уравнение изохоры, при  $C = \infty$  ( $n = 1$ ) — уравнение изотермы, при  $C = 0$  ( $n = \gamma$ ) — уравнение адиабаты. Политропические процессы с иными значениями показателя  $n$  используются в теплотехнике.

**Задание 13.2.** Получите выражение для работы газа, заключенного в сферическую оболочку при изменении ее радиуса  $r$  от  $R_1$  до  $R_2$  в изотермических условиях.

**Указание.** Воспользуйтесь определением работы (см. (13.4)), уравнением изотермы и выражениями для объема  $V$  сферы и объема  $dV$  сферического пояса толщиной  $dr$  (рис. 13.8).

**Ответ.**  $A_{12} = 3\pi RT \ln(R_2/R_1)$ ,  $v = m/\mu$ .

**Задание 13.3.** Получите уравнения для проекций адиабаты на плоскостях  $T - V$  и  $p - T$ .

**Указание.** Воспользуйтесь уравнением Пуассона (проекция адиабаты на плоскость  $p - V$ ) и уравнением состояния газа ( $pV = vRT$ ).

**Ответ.** Смотрите формулу (13.30).

**Задание 13.4.** Рассчитайте работу газа в адиабатическом процессе по переходу из состояния 1 ( $p_1, T_1, V_1$ ) в состояние 2 ( $p_2, T_2, V_2$ ) и преобразуйте полученное выражение к виду, которое содержит в первом случае только параметры  $T_1, V_1$  и  $V_2$ , а во втором только  $T_1$  и  $T_2$  (см. ответ).

**Указание.** В первом случае воспользуйтесь выражением (13.31) и исключите давление  $p_1$  с помощью выражения  $p_1V_1 = RT_1$ . Во втором случае из (13.32) исключите теплоемкость  $C_V$ , выразив ее через  $\gamma$  и  $R$  (см. (13.12) и (13.26)).

**Ответ.**  $A_{12} = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]$ ,  $A_{12} = \frac{R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}$ . ( $\gamma = 1$ ).

**Задание 13.5.** Газ из заданного состояния  $p_1, V_1, T_1$  расширяется по политропе с показателем  $n = 2$ . Постройте ее термодинамические  $pV$ -,  $pT$ - и  $VT$ -диаграммы и определите теплоемкость  $C$  (при  $n = 2$ ).

**Указание.** Воспользуйтесь уравнениями политропы и, выразив постоянные из (13.37) и (13.38) через параметры  $p_1, V_1, T_1$ , постройте проекции политропы (масштаб по осям в единицах значений  $p_1, V_1$  и  $T_1$ ). Для определения  $C$  можно воспользоваться соотношением (13.34) или выражением для показателя политропы.

**Ответ.**  $C_2 = C_V - R$ .

#### 13.4. ОБРАТИМЫЕ И НЕОБРАТИМЫЕ ПРОЦЕССЫ. ЦИКЛЫ

**Понятия обратимости и необратимости.** Термодинамический процесс называется *обратимым*, если он может быть проведен как в прямом, так и в обратном направлении через одни и те же состояния, причем в окружающих термодинамическую систему телах никаких изменений

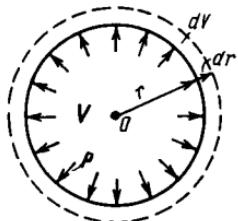


Рис. 13.8

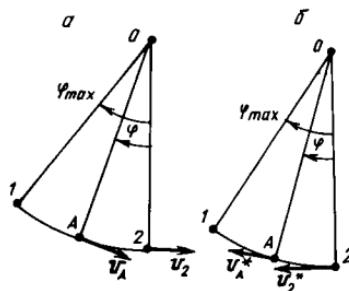


Рис. 13.9

не должно произойти. В противном случае процесс называется *необратимым*.

Поясним понятия обратимого и необратимого процессов на примере движения математического маятника. При отсутствии трения в подвесе и сопротивления среды колебательное движение маятника обратимо во времени. Это значит, что если маятник *A* (рис. 13.9, *a*) перемещается из состояния 1 ( $v_1 = 0, \varphi_1 = \varphi_{\max}$ ) в состояние 2 ( $v_2 = v_{\max}, \varphi_2 = 0$ ), то он может пройти все промежуточные состояния в обратном направлении (рис. 13.9, *б*). Для этого нужно в положении 2 изменить направление скорости  $v_2$  на противоположное ( $v_2^* = -v_2$ ). В результате маятник из состояния 2 вернется в состояние 1. Можно сказать, что наблюдаемая периодичность движения маятника является следствием обратимости чисто механического движения, описываемого уравнением гармонического осциллятора (см. (7.5))

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (13.39)$$

Изменим знак у времени  $t$  на противоположный ( $t \rightarrow -t$ ) и посмотрим, что произойдет с уравнением (13.39). В этом случае проекция скорости  $v_x = dx/dt$  также изменит знак ( $v_x \rightarrow -v_x$ ), а проекция ускорения сохраняет свой знак ( $a_x = dv_x/dt = d(-v_x)/d(-t) = dv_x/dt$ ). Поэтому уравнение (13.39) сохраняет свой вид при изменении хода времени на противоположное (от настоящего в прошлое). Отсюда следует вывод о том, что все обратимые процессы описываются уравнениями, которые не изменяются при изменении в них знака времени ( $t \rightarrow -t$ ).

Если же маятник испытывает действие сил сопротивления со стороны окружающего его воздуха (среды), то движение описывается уравнением (7.33):

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (13.40)$$

При изменении знака времени ( $t \rightarrow -t, v_x \rightarrow -v_x, a_x \rightarrow a_x$ ) оно преобразуется к следующему виду:

$$\ddot{x} - 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (13.41)$$

Новое уравнение (13.41) отличается от (13.40) знаком при втором члене, учитывающем влияние среды на движение маятника. Поэтому механические процессы при наличии сопротивления и трения необратимы, они связаны с необратимыми изменениями в окружающей среде. Например, когда пуля в результате трения о воздух

теряет скорость, т. е. происходит превращение механической энергии летящей пули в кинетическую энергию хаотического (теплового) движения молекул воздуха и пули, то процесс нельзя повернуть так, чтобы рассеянная тепловая энергия среды собралась и превратилась опять в механическую энергию пули.

Примерами необратимых процессов в молекулярной физике могут служить расширение газа в пустоту и переход теплоты от более нагреватого тела к менее нагретому. Если с помощью каких-то машин или механизмов провести эти процессы в обратном направлении и вернуть систему в исходное состояние, то в окружающих телах обязательно возникнут какие-то изменения, связанные с превращением некоторого количества механической энергии в тепловую.

Пусть, например, имеется идеальный газ в объеме  $V_1$  (рис. 13.10, а), отделенном перегородкой от объема  $V_2$ , в котором создан абсолютный вакуум. Если удалить перегородку, то газ, расширяясь без совершения работы, займет весь объем сосуда (рис. 13.10, б). Этот процесс происходит необратимо. Можно ждать сколь угодно долго, однако газ сам по себе не соберется вновь в объеме  $V_1$ . Вернуть его опять в состояние с объемом  $V$  можно, однако для этого нужно правую стенку передвинуть как поршень (см. рис. 13.10, в). При этом силы давления поршня совершают над газом некоторую работу  $\Delta A'$ . В результате газ нагреется. Следовательно, при проведении обратного процесса от сжимаемого газа нужно будет отвести количество теплоты  $\Delta Q = \Delta A'$ , которое увеличит энергию теплового движения молекул окружающих тел. Таким образом, при проведении обратного процесса во внешних телах произошли бы изменения (они нагрелись бы), и, следовательно, рассмотренный здесь процесс расширения газа в пустоту является необратимым. Аналогично рассуждая, можно убедиться, что процесс перехода теплоты от более нагреватого тела к более холодному также необратим. Все тепловые процессы, протекающие с конечной скоростью, необратимы. Однако бесконечно медленно проводимый процесс, состоящий из бесконечно большой последовательности промежуточных равновесных состояний (квазистатический процесс), является обратимым. Примером такого обратимого процесса может служить адиабатическое, или изотермическое, изменение объема идеального газа при его квазистатическом расширении или сжатии.

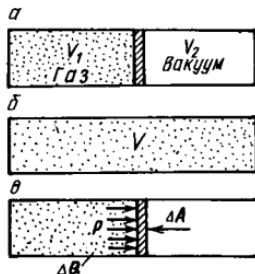


Рис. 13.10

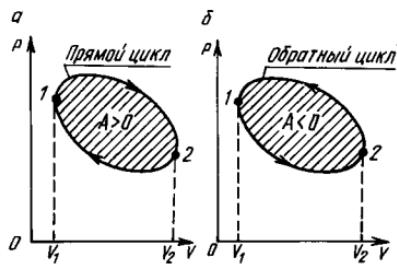


Рис. 13.11

**Цикл теплового двигателя и холодильной установки.** Круговым процессом или циклом называется процесс, при котором система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное.

На термодинамической диаграмме равновесный цикл изображается замкнутой кривой (рис. 13.11). Цикл, совершающийся системой, можно разбить с помощью точек 1 и 2 на процессы расширения 1—2 и сжатия 2—1. Работа расширения — положительна, а работа сжатия — отрицательна. Следовательно, суммарная работа, совершающаяся за цикл, определяется площадью, охватываемой кривой цикла в переменных  $p$ ,  $V$ . Если за цикл совершается положительная работа ( $A = \oint pdV > 0$ , цикл осуществляется по ходу часовой стрелки, см. рис. 13.11, а), то он называется *прямым*, а если же за цикл выполняется отрицательная работа ( $A = \oint pdV < 0$ , цикл протекает против хода часовой стрелки, см. рис. 13.11, б), то он называется *обратным*.

Прямой цикл реализуется в тепловом двигателе — периодически действующем устройстве, совершающем работу за счет полученной от нагревателя теплоты  $Q_1$  (рис. 13.12, а). Обратный цикл используется в холодильных установках — периодически действующих устройствах, в которых за счет работы  $A$  внешних сил теплота переносится от более холодного тела к телу с более высокой температурой (рис. 13.12, б).

В тепловом двигателе от нагревателя с температурой  $T_1$  за цикл отнимается количество теплоты  $Q_1$ , а холодильнику с более низкой температурой  $T_2$  за цикл передается количество теплоты  $Q_2$ . При этом совершается работа  $A$ . Поскольку термодинамическая система (тепловая машина) за цикл возвращается в исходное состоя-

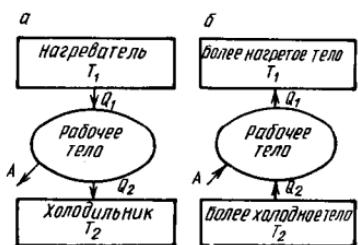


Рис. 13.12

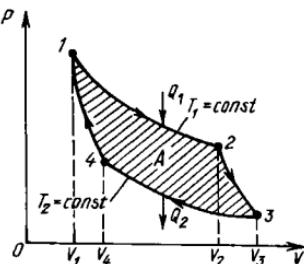


Рис. 13.13

ние (внутренняя энергия оказывается прежней), то на основании первого начала термодинамики получим значение работы машины за цикл:  $A = Q_1 - Q_2$ .

*Термический коэффициент полезного действия*  $\eta$  (КПД) определяется отношением  $A$  к  $Q_1$ :

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (13.42)$$

В холодильной установке за счет совершения внешними силами работы  $A$  от «холодильника» с температурой  $T_2$  ( $T_2 < T_1$ ) за цикл отнимается количество теплоты  $Q_2$  и отдается во внешнюю среду с температурой  $T_1$  количество теплоты, равное  $Q_1$ .

**Цикл Карно.** В изучении работы различных тепловых машин большую роль сыграл идеальный цикл, предложенный С. Карно (1796—1832) и детально рассмотренный им в 1824 г. в связи с определением КПД тепловых машин. *Циклом Карно* называют обратимый круговой процесс, состоящий из двух изотермических и двух адиабатических процессов для идеального газа.

На рис. 13.13 изображен *прямой цикл Карно*, состоящий из четырех последовательных процессов: 1—2 — изотермическое расширение при температуре  $T_1$ ; 2—3 — адиабатическое расширение ( $\delta Q = 0$ ); 3—4 — изотермическое сжатие при температуре  $T_2$ ; 4—1 — адиабатическое сжатие ( $\delta Q = 0$ ).

Найдем работу  $A$ , совершающую идеальным газом в прямом квазиравновесном цикле Карно. При изотермическом расширении на участке 1—2 внутренняя энергия  $U(T) = \text{const}$ , поэтому количество теплоты  $Q_1$ , полученной газом от нагревателя, равно работе расширения  $A_{12}$ , совершаемой газом при переходе из состояния 1 в состояние 2 (см. (13.22)):

$$Q_1 = A_{12} = vRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad v = \frac{m}{\mu}. \quad (13.43)$$

При адиабатическом расширении 2—3 теплообмен с окружающей средой отсутствует и работа расширения  $A_{23}$  совершается за счет изменения внутренней энергии (см. (13.32)):

$$A_{23} = -vC_V(T_2 - T_1). \quad (13.44)$$

При изотермическом сжатии на участке 3—4 теплота, отданная газом холодильнику, отрицательна и равна минус  $Q_2$ :

$$-Q_2 = A_{34} = -vRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}. \quad (13.45)$$

Работа адиабатического сжатия на участке 4—1 равна:

$$A_{41} = -vC_V(T_1 - T_2) = -A_{23}.$$

Работа, совершаемая в процессе реализации идеального цикла Карно, равна:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 - Q_2$$

и, как уже отмечалось выше, определяется площадью, ограниченной кривыми, описывающими процесс (см. рис. 13.13). Термический КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 \ln(V_2/V_1) - T_2 \ln(V_3/V_4)}{T_1 \ln(V_2/V_1)}. \quad (13.46)$$

Применив далее уравнение адиабаты  $TV^{\gamma-1} = \text{const}$  на участках 2—3 и 4—1 цикла, можно установить связь между параметрами состояний 2—3 и 4—1:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

С учетом последней формулы выражение (13.46) для КПД упрощается:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (13.47)$$

Таким образом, для цикла Карно КПД определяется только температурами нагревателя и холодильника.

Сравнение КПД различных обратимых и необратимых циклов с КПД идеального обратимого цикла Карно позволяет сделать следующий вывод: КПД любого реального обратимого или необратимого кругового процесса (тепловой машины) не может превышать КПД обра-

тимого идеального цикла Карно, реализуемого между теми же температурами  $T_1$  и  $T_2$ . Принимая во внимание (13.42) и (13.47), это утверждение можно записать в виде неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} &\leqslant \frac{T_1 - T_2}{T_1} \Rightarrow 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \leqslant 1 - \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{Q_2}{T_2} \geqslant \frac{Q_1}{T_1}. \end{aligned} \quad (13.48)$$

Здесь знак равенства относится к рассмотренному выше обратимому идеальному циклу Карно.

Из (13.47) следует *теорема Карно*: КПД цикла Карно не зависит от природы рабочего тела и от технических способов осуществления цикла. Единственные параметры, определяющие КПД цикла,— это температуры нагревателя и холодильника.

На основании теоремы Карно может быть построена термодинамическая абсолютная шкала температур. Поскольку для обратимого цикла Карно  $Q_1/T_1 = Q_2/T_2$  или  $T_1/T_2 = Q_1/Q_2$ , то для сравнения температур двух тел нужно реализовать обратимый цикл Карно, используя в нем эти тела в качестве нагревателя и холодильника. Тогда отношение температур тел будет равно отношению численных значений отденных или полученных ими в этом цикле количеств теплоты.

*Обратный цикл Карно* служит основой работы идеальной холодильной установки. Холодильная установка имеет своей целью поддержание в холодильной камере температуры, которая ниже температуры окружающей среды. Рабочим телом в холодильной установке служат обычно пары легко кипящих жидкостей — амиака, фреона и т. п. К машине подводится энергия от электрической сети. За счет этой энергии и совершаются процесс «перекачки теплоты» от холодильной камеры к более нагретой окружающей среде (рис. 13.12, б).

Для оценки эффективности работы холодильной установки найдем отношение количества теплоты  $Q_2$ , отнятого за цикл от холодильной камеры, к работе  $A$  внешних сил. Эта величина называется *показателем цикла*  $k$  или *холодильным коэффициентом*:

$$k = \frac{Q_2}{A} \leqslant \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (13.49)$$

В (13.49) знак равенства относится к идеальному обратимому циклу Карно. Из (13.49) видно, что чем меньше

разность между температурами окружающей среды  $T_1$  и холодильной камеры  $T_2$ , тем больше  $k$  и тем эффективнее работа холодильной установки. Заметим также, что  $k = T_2/(T_1 - T_2)$  может быть больше единицы и это не противоречит тому, что КПД теплового двигателя всегда много меньше 100 % ( $\eta < 1$ ).

### 13.5. ВТОРОЕ И ТРЕТЬЕ НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ

**Вечный двигатель второго рода.** Анализ различных термодинамических процессов показывает, что для их описания только первого закона термодинамики недостаточно. Выражая всеобщий закон сохранения и превращения энергии, первый закон термодинамики не указывает направление протекания термодинамического процесса. Действительно, самопроизвольный процесс передачи энергии от холодного тела к горячему не противоречит первому закону термодинамики, если только уменьшение внутренней энергии первого тела равно энергии, полученной вторым телом. Однако в природе такой процесс не реализуется. Основываясь на первом законе термодинамики, можно было бы попытаться построить периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет непрерывного охлаждения одного и того же источника теплоты, например за счет внутренней энергии океанов. Однако такой процесс, хотя и удовлетворяющий первому началу термодинамики, реализовать невозможно, что равноценно утверждению о невозможности построения так называемого *вечного двигателя второго рода*. Неоднократные попытки создания такого двигателя как раз и привели к открытию второго начала термодинамики.

**Второе начало термодинамики.** Содержание второго начала, являясь обобщением огромного экспериментального материала, указывает на возможную направленность самопроизвольного термодинамического процесса в замкнутой системе и на невозможность построения вечного двигателя второго рода. Имеется ряд эквивалентных формулировок второго начала термодинамики. Две из них приведены ниже.

1. Невозможен процесс, единственным результатом которого является передача энергии в форме теплоты от менее нагревого тела к более нагретому (*формулировка Клаузуса*).

2. Невозможен процесс, единственным результатом которого является превращение всей теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную работу (*формулировка Кельвина*).

Второй закон термодинамики указывает на неравнценность двух форм передачи энергии — работы и теплоты. Этот закон учитывает тот факт, что процесс перехода энергии упорядоченного движения тела как целого (механической энергии) в энергию неупорядоченного движения его частиц (тепловую энергию) необратим. Например, механическая энергия при трении переходит в теплоту без каких-либо дополнительных (компенсирующих) процессов. Переход же энергии неупорядоченного движения частиц (внутренней энергии) в работу возможен лишь при условии, что он сопровождается каким-либо дополнительным (компенсирующим) процессом. Так, тепловая машина, работающая по прямому циклу Карно, производит работу за счет подводимой от нагревателя теплоты, но при этом часть полученной теплоты передается холодильнику.

**Энтропия.** Кроме внутренней энергии  $U$ , которая является однозначной функцией параметров состояния системы ( $U = U(T, V)$ ), в термодинамике широко используются и другие функции состояния (свободная энергия, энталпия, энтропия и т. д.). Энтропия (от гр. *entropia* — поворот, превращение) как функция состояния выделена среди всех прочих термодинамических функций, каждая из которых имеет непосредственную связь с геометрическими, кинематическими, силовыми либо энергетическими характеристиками отдельных частиц системы. Например, внутренняя энергия прямо связана со скоростью частиц и потенциальной энергией их взаимодействия. Как будет видно из дальнейшего (гл. 15), энтропия является единственным исключением из этого ряда, поскольку имеет только *статистическую*, т. е. *вероятностную природу*.

В термодинамике понятие энтропия вводится через посредство приведенного количества теплоты  $Q^*$ . В изотермическом процессе

$$Q^* = \frac{Q}{T} \text{ — приведенная теплота.} \quad (13.50)$$

В случае произвольного процесса (в котором  $T \neq$

$\neq \text{const}$ ) следует, как это обычно делается, разбить процесс на бесконечно малые участки и ввести элементарное приведенное количество теплоты  $\delta Q^* = \delta Q/T$ . Приведенная теплота на конечном участке 1—2 процесса будет определяться интегралом от  $\delta Q^* = \delta Q/T$  в пределах от 1 до 2:

$$Q_{12}^* = \int_1^2 \delta Q/T. \quad (13.51)$$

Рассчитаем приведенную теплоту для идеального цикла Карно (см. рис. 13.13):

$$\begin{aligned} Q^* &= \int_1^2 \frac{\delta Q}{T_1} + \int_2^3 \frac{\delta Q}{T} + \int_3^4 \frac{\delta Q}{T_2} + \int_4^1 \frac{\delta Q}{T} = \\ &= \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что на изотермических участках 1—2 и 3—4 температура  $T$  постоянна и равна  $T_1$  и  $T_2$  соответственно, а в адиабатических процессах 2—3 и 4—1 величина  $\delta Q = 0$ . Поскольку, согласно (13.43) и (13.45),  $Q_1 = vRT_1 \ln(V_2/V_1)$ ,  $Q_2 = vRT_2 \ln(V_3/V_4)$ , а отношение объемов  $V_2/V_1 = V_3/V_4$ , то приведенное количество теплоты  $Q^*$  равно нулю. Оказывается, что этот результат является общим свойством приведенной теплоты для любого обратимого цикла:

$$\oint \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{обр}} = 0. \quad (13.52)$$

Отсюда следует, что подынтегральное выражение  $(\delta Q/T)_{\text{обр}}$  является полным дифференциалом некоторой функции  $S$ , которую и называют *энтропией*. Таким образом, для равновесного процесса

$$dS = \delta Q/T \Rightarrow \Delta S = \int_1^2 \delta Q/T — \text{изменение энтропии.} \quad (13.53)$$

Энтропия как функция состояния обладает **уникальным** свойством (см. § 15.2), а именно: энтропия замкнутой системы при любых происходящих в ней процессах не может убывать. Она остается постоянной в обратимых процессах и возрастает в необратимых. Следовательно,

$$\Delta S \geq 0 — \text{закон возрастания энтропии.} \quad (13.54)$$

Поскольку большинство явлений в природе сопровождается необратимыми процессами, то все самопропризвольные процессы имеют такую направленность, при которой энтропия замкнутой системы возрастает и стремится к своему максимально возможному значению, соответствующему, как будет показано в гл. 15, равновесному состоянию. Этот вывод согласуется со вторым началом термодинамики и позволяет из всех мыслимых процессов, удовлетворяющих первому началу термодинамики, выделить те процессы, которые действительно возможны в замкнутой системе.

**Третье начало термодинамики.** Третье начало термодинамики (или теорема Нернста\*) было открыто в 1906 г. В. Нернстом (1864—1941) в процессе термодинамического исследования изменения энтропии химических реакций. Оно тесно связано с поведением теплоемкости при абсолютном нуле температур (см. § 14.4). *Теорема Нернста утверждает*, что при приближении к абсолютному нулю энтропия системы также стремится к нулю независимо от того, какие значения принимают все остальные параметры состояния системы:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S(T, V) \rightarrow 0 — \text{третье начало термодинамики.} \quad (13.55)$$

Поскольку энтропия  $S = \int_0^T \delta Q/T = \int_0^T C_V dT/T$ , а температура  $T$  стремится к нулю, то теплоемкость вещества также должна стремиться к нулю, причем быстрее, чем  $T$ . Отсюда следует недостижимость абсолютного нуля температуры при конечной последовательности термодинамических процессов, т. е. конечного числа операций — циклов (вторая формулировка третьего начала термодинамики).

**Задание 13.6.** Найдите изменение энтропии в термодинамических равновесных процессах при переходе в молей идеального газа из состояния 1 в состояние 2.

\* Говорят, что Нернст начинал свои лекции по термодинамике с заявления: первое начало термодинамики покоятся на плечах многих, второе — на плечах немногих, третье начало на плечах одного — моих.

**Указание.** Воспользуйтесь определением энтропии (см. (13.53)) и первым началом термодинамики (см. (13.2)) совместно с выражениями (13.13) и (13.3) для  $dU$  и  $\delta A$ , а также уравнением Клапейрона — Менделеева.

$$\text{Ответ. } \Delta S_{12} = vC_V \ln \frac{T_2}{T_1} + vR \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (13.56)$$

**Задание 13.7.** Изобразите цикл Карно в переменных  $T, S$ .

### 13.6. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ

**Термодинамические потенциалы.** Равновесное состояние термодинамической системы, задаваемое параметрами состояния  $p, V, T$ , характеризуется определенными значениями внутренней энергии  $U$  и энтропии  $S$ . В данном параграфе введем еще несколько других термодинамических функций, зависящих от определенного числа независимых переменных. Эти функции совместно с внутренней энергией и энтропией образуют набор термодинамических потенциалов, которые всесторонне характеризуют равновесные свойства термодинамических систем.

**Химический потенциал системы.** В предыдущем изложении основ термодинамики мы везде считали, что число частиц в рассматриваемых термодинамических системах было фиксировано, т. е. имело постоянное значение (изолированные системы). Однако возможны процессы, в которых число частиц  $N$  изменяется, тогда система называется *открытой*, а число  $N$  становится дополнительным к  $p, V, T$  параметром системы. Запишем первое начало термодинамики (см. (13.2)) с учетом выражений (13.3) и (13.53) для  $\delta A = pdV$  и  $dS = \delta Q/T$ :

$$TdS = dU + pdV \text{ — закрытая система } (N = \text{const}). \quad (13.57)$$

Поскольку  $U$  и  $V$  аддитивные величины, то они пропорциональны числу  $N$  частиц в системе, а это означает, что и энтропия  $S$  также аддитивная характеристика системы. Поэтому для открытой системы ( $N \neq \text{const}$ ) к дифференциалам функций  $U$  и  $S$  нужно добавить слагаемое, пропорциональное  $dN$ . Например, для  $dU$  с учетом сказанного и (13.57) запишем:

$$dU = TdS - pdV + \mu dN \text{ — открытая система } (N \neq \text{const}). \quad (13.58)$$

Коэффициент  $\mu$  при  $dN$  называется *химическим потенциалом системы*. Из (13.58) при постоянных  $S$  и  $V$  следует, что  $dU = \mu dN$ . Тогда

$$\mu = (\partial U / \partial N)_{S, V} — \text{химический потенциал.} \quad (13.59)$$

Если рассматривать  $U$  как функцию  $S$ ,  $V$  и  $T$  ( $U = f(S, V, N)$ ), то, фиксируя в (13.58) поочередно определенную пару переменных из трех, получим еще два дифференциальных соотношения:

$$T = (\partial U / \partial S)_{V, N}, \quad p = -(\partial U / \partial V)_{S, N}. \quad (13.60)$$

Таким образом, химический потенциал  $\mu$ , температура  $T$  и давление  $p$  численно равны первым частным производным от внутренней энергии  $U$  по  $N$ ,  $S$  и  $V$  соответственно.

**Энталпия.** Введем новую термодинамическую функцию  $H$ , которая называется *энталпиеей* (от гр. enthálpo — нагреваю) или *теплосодержанием*. Для этого выполним тождественные преобразования соотношения (13.58), а именно: перенесем слагаемое  $-pdV$  в левую часть, а затем добавим и отнимем от левой части величину  $Vdp$ . Получим

$$dU + pdV + Vdp - Vdp = TdS + \mu dN. \quad (13.61)$$

Поскольку  $dU + pdV + Vdp = d(U + pV)$ , то можно ввести новую функцию

$$H = U + pV — \text{энталпия системы.} \quad (13.62)$$

С учетом (13.62) перепишем соотношение (13.61)

$$dH = TdS + Vdp + \mu dN \Rightarrow H = f(S, p, N). \quad (13.63)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} T &= (\partial H / \partial S)_{p, N}, \quad V = (\partial H / \partial p)_{S, N}, \quad \mu = \\ &= (\partial H / \partial N)_{S, p}. \end{aligned} \quad (13.64)$$

**Свободная энергия Гельмгольца.** Перенесем  $TdS$  из правой части (13.58) в левую, затем добавим и вычтем от левой части величину  $SdT$ . Это позволит ввести функцию

$$F = U - TS — \text{энергия Гельмгольца.} \quad (13.65)$$

В результате получим

$$dF = -SdT - pdV + \mu dN \Rightarrow F = f(T, V, N).$$

Это означает, что

$$\begin{aligned} S &= -(\partial F / \partial T)_{V, N}, \quad p = -(\partial F / \partial V), \quad \mu = \\ &= (\partial F / \partial N)_{T, V}. \end{aligned} \quad (13.66)$$

**Потенциал Гиббса.** Аналогичные преобразования уравнения (13.63) приводят к термодинамической функции (см. задание (13.9))

$$G = H - TS — \text{потенциал Гиббса.} \quad (13.67)$$

Из преобразований следует, что  $G = f(T, p, N)$ , причем

$$\begin{aligned} S &= -(\partial G / \partial T)_{p, N}, \quad V = (\partial G / \partial p)_{T, N}, \quad \mu = \\ &= (\partial G / \partial N)_{p, T}. \end{aligned} \quad (13.68)$$

Все рассмотренные здесь термодинамические функции: внутренняя энергия  $U = f(S, V, N)$ , энтальпия  $H = f(S, p, N)$ , энергия Гельмгольца  $F = f(T, V, N)$  являются однозначными функциями определенного набора из трех независимых переменных. Можно сказать, что однокомпонентная открытая система в термодинамическом смысле имеет *три степени свободы* ( $C = 3$ ). В случае изолированной системы ( $N = \text{const}$ ), находящейся при постоянной температуре и неизменном объеме, ее свободная энергия минимальна в состоянии равновесия ( $\delta F = 0$ ), т. е. система термодинамически устойчива:  $\partial^2 F / \partial V^2 = -\partial p / \partial V > 0$  (см. (4.35)). Поэтому энергия Гельмгольца  $F$  называется *изохорно-изотермическим потенциалом*. Аналогично потенциал Гиббса  $G$  является *изобарно-изотермическим потенциалом*.

**Задание 13.8.** Используя результат, полученный в задании 13.6, покажите, что энтропия  $S$  идеального газа является аддитивной величиной, и определите энтропию  $s$ , приходящуюся на одну частицу системы.

**Указание.** Покажите, что энтропия  $S$  газа пропорциональна числу частиц  $N$  ( $C_V$  — теплоемкость одного моля, а  $R = kN_A$ ,  $k$  — постоянная Больцмана,  $N_A$  — число Авогадро).

$$\text{Ответ. } S = sN, \quad s = \frac{C_V}{N_A} \ln T + k \ln V. \quad (13.69)$$

**Задание 13.9.** Преобразуйте уравнение (13.63) так, чтобы можно было перейти к уравнению для потенциала Гиббса  $G = H - TS$ .

**Указание.** Реализуйте преобразования, аналогичные тем,

которые были выполнены при переходе к энергии Гельмгольца  $F = U - TS$ .

Ответ. Смотрите формулы (13.67) и (13.68).

**Задание 13.10.** Покажите, что в изотермических условиях изменение свободной энергии изолированной системы равно работе системы при переходе ее из состояния 1 в состояние 2.

**Указание.** Воспользуйтесь выражением для дифференциала  $dF$  при  $T = \text{const}$  и  $N = \text{const}$ .

Ответ.  $\Delta F = A_{12}$ .

Хаос — предтеча творения чего-нибудь истинного, высокого и поэтического. Пусть только луч гения пронзит этот мрак!

*А. А. Бестужев (Марлинский).  
Ночь на корабле*

## 14. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

**Основные положения классической теории.** Молекулярно-кинетическая теория идеального газа позволяет выяснить «молекулярный» смысл всех термодинамических характеристик макроскопической системы, тем самым устанавливается связь между термодинамическими параметрами  $p$ ,  $V$ ,  $T$ ,  $U$  и т. д. и средними значениями различных механических характеристик движения большой совокупности частиц системы. Основы молекулярно-кинетической теории идеальных газов были разработаны во второй половине 19 в. в трудах Р. Клаузиуса (1822—1888), Д. Максвелла (1831—1879), Л. Больцмана (1844—1906). Они базируются на следующих четырех исходных положениях.

1. Атомы и молекулы можно рассматривать как материальные точки, находящиеся в непрерывном хаотическом движении.

2. Атомы и молекулы идеального газа взаимодействуют друг с другом только посредством упругих столкновений.

3. Все атомы и молекулы классической системы являются различимыми, т. е. предполагается, что имеется принципиальная возможность следить за движением каждой частицы системы.

4. Движение каждого атома или молекулы описывается законами классической механики Галилея — Ньютона.

Важнейшее значение для обоснования ряда положе-

ний молекулярно-кинетической теории имеет так называемая *эргодическая гипотеза*.

Для целей данной главы достаточно прояснить смысл этой гипотезы на примере определения среднего значения скорости частицы макроскопической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия.

Пусть некоторая избранная частица идеального газа за достаточно большой промежуток времени  $T$  испытывает  $n$  упругих столкновений с другими частицами системы. За время  $t_i$  между двумя последовательными столкновениями частица проходит расстояние  $\lambda_i$ , которое называется *длиной свободного пробега*. Тогда среднее значение скорости за время  $T = \sum_{i=1}^n t_i$  будет определяться по обычной формуле классической механики (см. (1.12)):

$$v_{cp} = \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i} \sum_{i=1}^n \lambda_i / t_i — \text{среднее по времени.}$$

Понятно, что воспользоваться этим выражением практически невозможно, так как для этого необходимо проследить за движением и столкновениями не только избранной частицы, но и всего «коллектива  $N$  частиц», который называют статистическим ансамблем частиц ( $N \sim N_A = 6,02 \cdot 10^{23}!$ ). Поэтому вводится понятие средней статистической скорости ансамбля частиц, которая численно равна средней арифметической скорости от модулей скоростей  $v_k(t)$  всех  $N$  частиц системы, определенных в некоторый момент времени  $t$ :

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v_k(t) — \text{среднее по ансамблю.}$$

Можно предположить, что в термодинамическом равновесии для большой системы ( $N \rightarrow \infty$ ) численное значение  $\bar{v}$  не будет зависеть от времени  $t$ . Поэтому в соответствии с эргодической гипотезой отождествляют среднее по времени со средним по ансамблю частиц:

$$v_{cp} \equiv \bar{v} — \text{эргодическая гипотеза для скорости.}$$

Определить среднюю скорость по ансамблю из  $N$  частиц в соответствии с приведенной формулой также не просто, однако существует мощный и хорошо разработанный формализм статистической механики (гл. 15), который базируется на методах теории вероятностей и позволяет рассчитать средние значения различных физических величин с помощью функций распределения частиц по скоростям и координатам (см. опыт Штерна в следующем параграфе, а распределения Максвелла и Больцмана в следующей главе).

#### 14.1. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОЛЕКУЛЯРНОГО ДВИЖЕНИЯ

**Скорости теплового движения. Опыт Штерна.** Хаотичность движения атомов или молекул предопределяет равновероятность всех направлений скоростей частиц в пространстве, но их численные значения при этом оказываются неодинаковыми. В газе могут встречаться медленные частицы, скорости которых близки к нулю, и очень быстрые — скорости которых во много раз пре-восходят среднюю скорость молекулярного движения в данных условиях. Прямое измерение разброса скоростей атомов, возникающего в результате теплового испарения, впервые было выполнено О. Штерном (1888—1969) в 1920 г. Схема опыта Штерна представлена на рис. 14.1. Платиновая нить  $A$ , покрытая тонким слоем серебра, располагалась вдоль оси коаксиальных цилиндров радиусами  $r$  и  $R$ . При пропускании электрического тока платиновая нить разогревалась до температуры выше точки плавления серебра. Серебро интенсивно испарялось и его атомы летели по всем радиальным направлениям (рис. 14.1,  $a$ ). Для того чтобы атомы

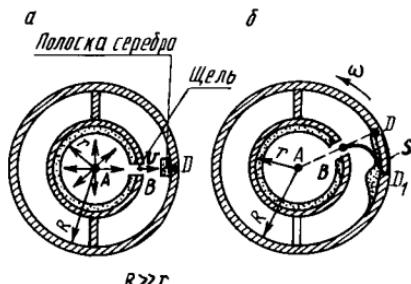


Рис. 14.1

серебра не отклонялись из-за столкновения с атомами воздуха, внутри цилиндра поддерживался вакуум. Все атомы серебра независимо от значения их скоростей достигали внутренней поверхности цилиндра радиуса  $r$  и ровным слоем ее покрывали. Этот факт как раз и указывает на изотропное распределение скоростей атомов серебра, т. е. равновероятность всех направлений для их скоростей. Продольная щель  $B$  формирует узкий пучок атомов серебра (молекулярный пучок), который содержит атомы, обладающие различными скоростями. Все атомы пучка, достигнув поверхности внешнего цилиндра радиуса  $R$ , оседали на ней в виде узкой полоски  $D$ , параллельной оси цилиндров.

Ситуация резко меняется, если оба соединенных друг с другом цилиндра привести во вращение (рис. 14.1, б) с угловой скоростью  $\omega$ , соответствующей частоте вращения  $n \sim 2600$  об/мин. В этом случае происходит как бы «сепарация» атомов в зависимости от значения их скорости  $v$ , что приводит к смещению и размыванию полоски на поверхности внешнего цилиндра. Только очень быстрые атомы осадят в окрестности точки  $D$ , тогда как более медленные будут осаждаться в окрестности некоторой точки  $D_1$ , положение которой определяется соотношением величин скоростей  $\omega$  и  $v$ . Смещение точек осаждения атомов от точки  $D$  во вращающейся системе координат, связанной с цилиндрами, объясняется тем, что относительная скорость атома отклонена от радиального направления  $BD$  в сторону, противоположную вращению. Поэтому за время движения атома от щели  $B$  до поверхности цилиндра радиуса  $R$  ( $t = (R - r)/v$ ) точки этой поверхности смеютсяся на расстояние  $s = DD_1 = \omega R t = \omega R(R - r)/v$ . Измеряя  $s$ , можно определить скорость  $v$  атомов, которые осели в данном месте поверхности цилиндра:

$$v = \omega R(R - r)/s = f(s). \quad (14.1)$$

Доля всех осажденных атомов, имевших скорость в интервале от  $v$  и до  $v + \Delta v$ , пропорциональна толщине слоя на расстоянии  $s$ , которое определяется по формуле (14.1), и значению дуги  $\Delta s$ , соответствующей интервалу  $\Delta v$  ( $s = \omega R(R - r)/v \Rightarrow \Delta s = [\omega R(R - r)/v^2] \Delta v$ ), т. е. площади выделенного на рис. 14.1, б участка размытой полоски осажденного серебра. В результате расчетов получены данные о распределении атомов серебра в молеку-

лярном пучке по скоростям при температуре платиновой нити, равной 1173 К, которые приведены в табл. 14.1.

Таблица 14.1

Интервалы скоростей, м/с	Доля молекул, % $\Delta N/N \cdot 100$	Интервалы скоростей, м/с	Доля молекул, % $\Delta N/N \cdot 100$
0—100	1,4	600—700	9,2
100—200	5,1	700—800	4,8
200—300	16,5	800—900	2,0
300—400	22,4	900—1000	0,6
400—500	21,6	более 1000	0,3
500—600	16,1		

Диаграмма распределения атомов серебра по скоростям, соответствующая данным табл. 14.1, изображена на рис. 14.2. Разброс скоростей атомов серебра в опыте Штерна, отражающий характерный разброс скоростей вследствие хаотического теплового движения, оказался весьма значительным (от 0 до  $\sim 1000$  м/с). Поэтому для количественной оценки скоростей частиц в молекулярной физике вводятся некоторые их средние величины, определяемые как средние по ансамблю частиц системы. Они в соответствии с эргодической гипотезой равны средним значениям этих величин по времени. Первой из таких величин является упомянутая выше *средняя арифметическая скорость*

$$v_{cp} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v_k. \quad (14.2)$$

Кроме средней арифметической скорости для характеристики теплового движения молекул вводится так называемая *средняя квадратичная скорость*  $v_{kv}$ . Средняя квадратичная скорость определяется аналогично (14.2):

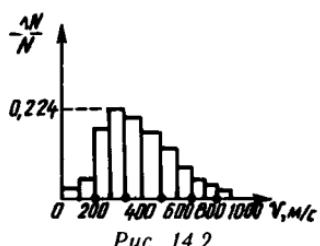


Рис. 14.2

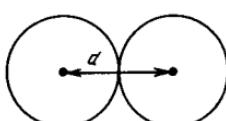


Рис. 14.3

$$v_{\text{KB}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v_k^2 \Rightarrow v_{\text{KB}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v_k^2}. \quad (14.3)$$

Ниже будет введена третья характерная скорость, которая является *наиболее вероятной скоростью* ( $v_{\text{н.в.}}$ ) частиц системы и соответствует максимуму на рис. 14.2. В заключение этого параграфа заметим, что среднеквадратичная скорость молекул определяет значение кинетической энергии системы из  $N$  одинаковых частиц:

$$E_{\text{k}} = \sum_{k=1}^N m \frac{v_k^2}{2} = N \frac{m}{2} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v_k^2 \right) = N \frac{mv_{\text{KB}}^2}{2}. \quad (14.4)$$

**Средняя длина свободного пробега и среднее число столкновений.** Важными кинематическими характеристиками молекулярного движения являются эффективный диаметр молекул, средняя длина свободного пробега и среднее число столкновений в единицу времени. *Эффективным диаметром*  $d$  молекулы называется минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул (рис. 14.3). Поэтому эффективный диаметр молекул газа зависит от среднеквадратичной скорости соударяющихся частиц термодинамической системы, находящейся при заданных значениях  $p$ ,  $V$ ,  $T$  (см. задание 17.1).

Поскольку путь, проходимый молекулой в единицу времени, численно равен ее средней скорости, то средняя длина свободного пробега молекулы определяется через среднее число столкновений за единицу времени:

$$\bar{\lambda} = \bar{v}/\bar{z}, \quad (14.5)$$

где  $\bar{v}$  — средняя скорость движения молекулы;  $\bar{\lambda}$  — средняя длина свободного пробега, а  $\bar{z}$  — среднее число столкновений за единицу времени (см. табл. III.15—III.17 прил. III).

При выводе формулы для среднего числа  $\bar{z}$  столкновений молекул будем предполагать, что все молекулы, кроме рассматриваемой, неподвижны, а выделенная молекула движется со скоростью, равной средней арифметической скорости их относительного движения. Пусть имеются две молекулы, абсолютные скорости которых соответственно  $v_1$  и  $v_2$  (рис. 14.4). Тогда их относитель-

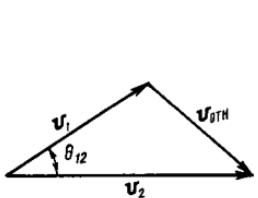


Рис. 14.4

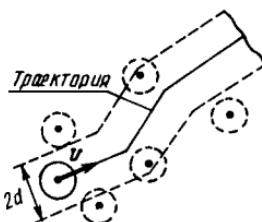


Рис. 14.5

ная скорость  $v_{\text{отн}} = v_2 - v_1$ , а квадрат их относительной скорости  $v_{\text{отн}}^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \theta_{12}$ .

Усредним последнее выражение. При этом учтем, что средние значения квадратов скоростей одинаковых молекул одинаковы, т. е.  $\bar{v}_1^2 = \bar{v}_2^2 = \bar{v}^2$ . Кроме того, в силу хаотичности движения направления скоростей сталкивающихся молекул могут быть самыми разнообразными и  $\cos \theta_{12}$  может принимать одинаково часто всевозможные значения от  $-1$  до  $+1$ . Так что среднее значение

$$\overline{\cos \theta} = \pi^{-1} \int_0^\pi \cos \theta d\theta = 0. \text{ Следовательно, } \bar{v}_{\text{отн}}^2 = \bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 -$$

$$- 2\bar{v}_1 \bar{v}_2 \cos \theta = 2\bar{v}^2 \text{ или } v_{\text{отн, кв}} = \sqrt{2}v_{\text{кв}}.$$

В следующей главе будет показано, что средняя квадратичная скорость пропорциональна средней арифметической (см. (15.56)). Поэтому  $\bar{v}_{\text{отн}} = \sqrt{2}\bar{v}$ . При движении по ломаной траектории (рис. 14.5) рассматриваемая молекула будет сталкиваться со всеми молекулами газа, центры которых находятся от ее траектории на расстояниях, меньших или равных диаметру молекулы. Поэтому за единицу времени выделенная молекула столкнется с теми частицами, центры которых лежат внутри ломаного цилиндра высотой  $h = \bar{v}_{\text{отн}}$ , радиусом основания  $r = d$  и объемом  $V_0 = \pi d^2 \bar{v}_{\text{отн}}$ . Если  $n_0$  — число молекул в единице объема, т. е. концентрация, то среднее число столкновений  $\bar{z}$  в единицу времени будет равно  $n_0 V_0$ . Тогда

$$\bar{z} = n_0 V_0 = n_0 \pi d^2 \bar{v}_{\text{отн}} = \sqrt{2} \pi d^2 n_0 \bar{v}. \quad (14.6)$$

Подстановка полученного значения в (14.5) дает:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n_0}. \quad (14.7)$$

Воспользовавшись уравнением Клапейрона — Менделеева ( $pV = nRT$ ) и преобразовав его к виду  $p = n_0 kT$

( $n_0 = N/V$ ,  $\mu = m_{\text{мол}} \cdot N_A$ ,  $k = R/N_A$  — постоянная Больцмана), из (14.7) следует выражение для средней длины свободного пробега  $\bar{\lambda}$  через давление  $p$  и температуру  $T$  (см. табл. III.15 прил. III):

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2\pi d^2 p}}. \quad (14.8)$$

Из (14.8) видно, что при заданной температуре с понижением  $p$  длина свободного пробега возрастает. Если окажется, что  $\lambda \gg l$ , где  $l$  — характерный линейный размер сосуда, содержащего газ, то в этом случае молекулы в основном будут сталкиваться со стенками сосуда, а не между собой. Такое состояние называется *вакуумом*. Из сказанного ясно, что понятие «вакуум» относительно, так как оно зависит не только от давления, но и от линейных размеров сосуда. Так, например, при  $p = 10^{-3}$  мм рт. ст. и  $l \approx 10$  см,  $\lambda \approx l$ , т. е. будем иметь вакуум, хотя в этом случае концентрация молекул  $n_0 \sim 10^{12}$  см<sup>-3</sup>.

**Пример 14.1.** Найдем среднюю длину свободного пробега  $\bar{\lambda}$  и среднее число столкновений  $\bar{z}^*$  между всеми молекулами водорода в объеме  $V^* = 1$  мм<sup>3</sup> при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекулы водорода  $d = 2,3 \cdot 10^{-10}$  м, средняя арифметическая скорость при нормальных условиях равна 1698 м/с.

**Решение.** Среднюю длину свободного пробега молекул водорода находим по формуле (14.8):

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2\pi d^2 p}} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{\sqrt{2 \cdot 3,14 \cdot 2,3^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^5}} = 1,6 \cdot 10^{-7} \text{ м.} \quad (14.9)$$

Число столкновений между молекулами водорода в заданном объеме в секунду равно числу столкновений, испытываемому каждой молекулой водорода в одну секунду  $\bar{z}$ , умноженному на число молекул в этом объеме и деленному на 2, так как в каждом акте соударения участвуют две молекулы:

$$\bar{z}^* = \bar{z} \cdot N^*/2 = \bar{z} n_0 V^*/2. \quad (14.10)$$

Подставляя (14.6) в (14.10) и учитывая, что концентрация  $n_0 = p/kT$ , получим

$$\begin{aligned} \bar{z}^* &= \frac{\sqrt{2\pi d^2 p^2 V^* \bar{v}}}{2k^2 T^2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3,14 \cdot 2,3^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{10} \cdot 10^{-9} \cdot 1698}}{2 \cdot 1,38^2 \cdot 10^{-46} \cdot 273^2} = \\ &= 1,6 \cdot 10^{26} \text{ с}^{-1}. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Сравним среднюю длину свободного пробега молекулы водорода с характерным средним расстоянием между молекулами газа. Для этого найдем вначале объем, приходящийся на одну молекулу водорода при нормальных условиях:

$$V = \frac{V^*}{N} = n_0^{-1} = \frac{kT}{p} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{10^5} = 0,376 \cdot 10^{-15} \text{ м}^3.$$

Поэтому среднее расстояние

$$L \sim \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{0,376 \cdot 10^{-15}} = 7,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

по порядку величины совпадает с величиной  $\bar{\lambda}$  из (14.9).

## 14.2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

**Вывод основного уравнения кинетической теории.** Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа устанавливает связь между давлением  $p$  (термодинамическим параметром) и средней кинетической энергией  $E_k$  теплового движения его молекул (механической характеристикой системы).

Давление газа на стенку сосуда является результатом многочисленных ударов молекул газа об эту стенку. При громадном числе молекул, находящихся в сосуде, одновременно будет производиться огромное число ударов о стенки. Поэтому достаточно малые и очень быстро меняющиеся силы, порождаемые отдельными ударами, будут складываться в практически постоянную силу давления, действующую на каждую единицу площади стенок сосуда. Рассчитаем давление  $p$ , оказываемое идеальным газом на стенки сосуда объемом  $V$ . Предположим, что газ заключен в сосуд кубической формы с ребром  $l$  (рис. 14.6). При рассмотрении идеального газа следует учесть, что, как показал Д. Максвелл, взаимные столкновения молекул не влияют на значение величины давления газа на стенки сосуда. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что молекулы не испытывают никаких столкновений друг с другом и изменяют скорость своего движения только при соударении со стенками сосуда. Обозначим через  $v_i$  вектор скорости произвольной молекулы газа, имеющей массу  $m_i$ . Разложим его

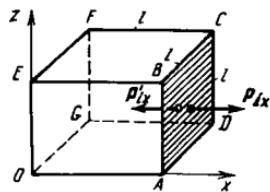


Рис. 14.6

на три составляющие вдоль координатных осей (три степени свободы):

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{ix} + \mathbf{v}_{iy} + \mathbf{v}_{iz}.$$

Импульс  $\mathbf{p}_i$  молекулы также можно представить в аналогичном виде

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{ix} + \mathbf{p}_{iy} + \mathbf{p}_{iz}. \quad (14.12)$$

При упругом ударе молекулы о правую грань  $ABCD$  куба происходит изменение только составляющей  $\mathbf{p}_{ix}$  импульса молекулы от значения  $\mathbf{p}_{ix}$  до значения  $\mathbf{p}'_{ix}$ . Так как удар упругий, то  $\mathbf{p}'_{ix} = -\mathbf{p}_{ix}$ . На основании второго и третьего законов Ньютона импульс силы  $f_i$ , с которым молекула действует за время удара о грань  $ABCD$ , равен  $f_i \delta t_i = 2p_{ix}$ , где  $\delta t_i$  — продолжительность удара, которая неизвестна. Поэтому заменим кратковременно действующую силу удара  $f_i$  эквивалентной ей средней силой  $F_i$ , определяемой из условия равенства их импульсов

$$F_i \Delta t_i = f_i \delta t_i \Rightarrow F_i \Delta t_i = 2m_i v_{ix}. \quad (14.13)$$

Составляющая скорости молекулы  $v_{ix}$  изменяет свое направление только при столкновениях со стенками  $ABCD$  и  $OEGF$ . Поэтому для промежутка времени  $\Delta t_i$  между двумя последовательными ударами одной и той же молекулы о правую грань справедливо соотношение  $\Delta t_i = 2l/v_{ix}$ . Тогда из (14.13) следует

$$F_{ix} = 2m_i v_{ix} / \Delta t_i = m_i v_{ix}^2 / l.$$

Средняя сила, действующая на грань куба  $ABCD$  со стороны всех  $N$  молекул газа, заключенных в сосуд, равна сумме сил  $F_{ix}$ :  $F_x = \sum F_{ix} = (\sum m_i v_{ix}^2) / l$ . Поэтому давление  $p_x$ , производимое газом на стенку  $ABCD$ , равно  $p_x = F_x / l^2 = l^{-3} \sum m_i v_{ix}^2$ . Аналогично  $p_y = l^{-3} \sum m_i v_{iy}^2$ ,  $p_z = l^{-3} \sum m_i v_{iz}^2$ .

Движение молекул газа в сосуде совершенно хаотично, т. е. ни одно из направлений их движения не является выделенным. Следовательно, давление газа  $p$  на все стенки сосуда одинаково:  $p = p_x = p_y = p_z$ . Из этого следует, что  $\sum m_i v_{ix}^2 = \sum m_i v_{iy}^2 = \sum m_i v_{iz}^2$ . С другой стороны,  $m_i(v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2) = m_i v_i^2$ . Отсюда следует, что  $\sum m_i v_{ix}^2 = 1/3 \sum m_i v_i^2$  и давление газа

$$p = \frac{1}{3l^3} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{2E_k}{3V}, \quad (14.14)$$

где  $V = l^3$  — объем сосуда;  $E_k = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$  — суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа, находящегося в сосуде..

Из (14.14) следует, что  $pV = 2E_k/3$ .

Полученное уравнение называется *основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеального газа*:

$$pV = \frac{2}{3} E_k \text{ — основное уравнение кинетической теории.} \quad (14.15)$$

**Молекулярно-кинетический смысл температуры.** Температура является количественной мерой «нагретости» тела. Основным свойством температуры является ее однократность для всех частей изолированной системы, находящейся в термодинамическом равновесии. Если изолированная система не находится в состоянии термодинамического равновесия, т. е. если в системе имеются более и менее нагретые тела, то с течением времени за счет перехода тепловой энергии от более нагретых тел к менее нагретым происходит выравнивание поля температуры. Для измерения температуры наиболее широкое распространение получили *эмпирическая шкала температур Цельсия*, в которой в качестве реперных, т. е. опорных, точек приняты температура таяния льда ( $t_1 = 0^\circ\text{C}$ ) и температура кипения воды ( $t_2 = 100^\circ\text{C}$ ) при нормальных условиях ( $p = 10^5$  Па) и *абсолютная термодинамическая шкала температур*, в которой в качестве реперной точки принята температура тройной точки воды ( $T = 273,15\text{ K}$ ), т. е. такого состояния, в котором одновременно существуют лед, вода и пар. Согласно такому определению реперных точек, единица температуры в шкале Цельсия (градус Цельсия) оказалась равной единице температуры в абсолютной термодинамической шкале (градус Кельвина), а связь между температурой  $t$  по шкале Цельсия и абсолютной термодинамической температурой  $T$  определяется соотношением

$$T = t + 273,15, \quad 1^\circ\text{C} \equiv 1\text{ K.} \quad (14.16)$$

Для выяснения молекулярно-кинетического смысла абсолютной термодинамической температуры  $T$  сопоставим основное уравнение молекулярно-кинетической теории (см. (14.15)) с уравнением Клапейрона — Менделеева:

$pV = vRT$ . Приравнивая правые части обоих уравнений, найдем среднее значение кинетической энергии поступательного движения одной молекулы ( $v = N/N_A$ ,  $k = R/N_A$  — постоянная Больцмана): .

$$\bar{\epsilon} = \frac{E_k}{N} = \frac{3}{2} \frac{vRT}{N} = \frac{3}{2} \frac{RT}{N_A} = \frac{3}{2} kT. \quad (14.17)$$

Отсюда следует важнейший вывод молекулярно-кинетической теории: *термодинамическая температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул*. Это означает, что процесс нагревания среды непосредственно связан с увеличением средней кинетической энергии частиц этой системы.

**Пример 14.2.** В помещении, содержащем пары ртути и имеющем объем  $60 \text{ м}^3$ , парциальное давление ртути при температуре  $27^\circ\text{C}$  равно  $0,8 \text{ Па}$ . Нужно определить массу, число атомов ртути, их среднеквадратичную скорость и суммарную кинетическую энергию. Молярная масса ртути  $\mu = 200,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ .

**Решение.** Используя уравнение Клапейрона — Менделеева ( $pV = vRT$ ), находим массу ртути в помещении:

$$m = v\mu = \frac{pV}{RT} \mu = \frac{0,8 \cdot 60 \cdot 200,5 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 300} = 3,86 \cdot 10^{-3} \text{ кг.}$$

Число атомов ртути находим из соотношения

$$N = \frac{m}{m_{\text{мол}}} = vN_A = \frac{m}{\mu} N_A = \frac{3,86 \cdot 10^{-3} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{200,5 \cdot 10^{-3}} = 1,16 \cdot 10^{22},$$

где  $m_{\text{мол}}$  — масса одного атома ртути.

Суммарную кинетическую энергию всех атомов ртути можно найти, используя основное уравнение кинетической теории идеального газа (см. (14.15)):

$$E_k = \frac{3}{2} pV = \frac{3}{2} \cdot 0,8 \cdot 60 = 72 \text{ Дж.}$$

Среднеквадратичную скорость найдем с помощью выражения (14.17), которое устанавливает связь между средней кинетической энергией поступательного движения  $\bar{\epsilon}$  и абсолютной температурой  $T$  ( $\bar{\epsilon} = 3kT/2$ ,  $\bar{\epsilon} \equiv m_{\text{мол}}v_{\text{кв}}^2/2$ ):

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_{\text{мол}}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{200,5 \cdot 10^{-3} / 6,02 \cdot 10^{23}}} = \\ = 196,8 \text{ м/с} \simeq 700 \text{ км/ч.}$$

### 14.3. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАВНОВЕСНЫХ СВОЙСТВ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

**Число степеней свободы молекул.** Мы уже знаем (§ 1.2), что число степеней свободы механической системы опре-

деляется числом независимых параметров, которые задают состояние этой системы. Например, для того чтобы однозначно указать положение материальной точки в пространстве в любой момент времени, необходимо задать три координаты. Таким образом, молекула однотипного газа имеет три степени свободы (рис. 14.7, а). Молекулу двухатомного газа в первом приближении можно рассматривать как совокупность двух материальных точек (атомов), жестко скрепленных недеформируемой химической связью (рис. 14.7, б). Эта система в виде длинной палочки, кроме трех степеней свободы поступательного движения, имеет еще две степени свободы вращательного движения (в случае, изображенном на рис. 14.7, б вокруг осей  $y$  и  $z$ ). «Жесткие» молекулы, состоящие из трех и более атомов, имеют, подобно абсолютно твердому телу, три степени поступательного и три степени вращательного движения (рис. 14.7, в). Однако поскольку в реальных молекулах жесткой связи не существует (атомы в молекуле могут смещаться относительно друг друга), то в рассмотрение вводятся еще и колебательные степени свободы молекул. Например, нежесткая деформируемая двухатомная молекула имеет одну колебательную степень свободы, которая связана с взаимным сближением и удалением атомов друг по отношению к другу. Реальная трехатомная молекула имеет уже три колебательные степени свободы.

Колебание в системе реализуется в том случае, когда движение осуществляется в окрестности потенциальной ямы (см. рис. 7.2), вид которой для двухатомной молекулы схематично представлен на рис. 14.8.

Приведем здесь в качестве примера конкретную потенциальную кривую внутриатомного взаимодействия в молекулах простых веществ ( $O_2$ ,  $H_2$ ,  $N_2$  и т. д.). Эта зависимость получила название *потенциала Морзе* и определяется следующим выражением:

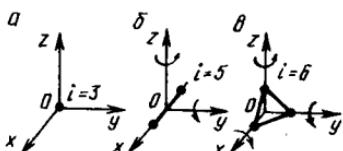


Рис. 14.7

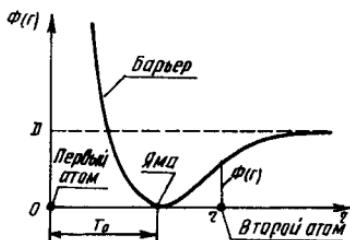


Рис. 14.8

$$\Phi(r) = D[1 - e^{-\beta(r - r_0)}]^2. \quad (14.18)$$

Здесь  $D$  — глубина потенциальной ямы;  $\beta$  — параметр «силовой связи» атомов, а величина  $r_0$  определяет положение ямы на оси  $r$ . Расстояние  $r_0$  соответствует длине недеформированной химической связи молекулы, т. е.  $r = r_0$  отвечает равновесному положению атомов в изолированной молекуле.

Следует отметить, что потенциал Морзе является модельным потенциалом, который достаточно хорошо описывает взаимодействия, обусловленные квантово-механическими обменными силами.

**Пример 14.3.** В соответствии с классической теорией оценим частоту собственных колебаний атомов в молекуле кислорода  $O_2$ .

**Решение.** Параметры потенциала Морзе возьмем из справочной литературы. Для кислорода  $D = 8,14 \cdot 10^{-19}$  Дж,  $\beta = 2,69 \text{ \AA}^{-1}$ ,  $r_0 = 1,21 \text{ \AA}$ . Выполним разложение потенциала (14.18) в ряд по деформации химической связи  $x = r - r_0$ . Для этого воспользуемся двумя первыми членами разложения показательной функции  $e^x$  в ряд по  $z$  ( $e^z \approx 1 + z$ ). Тогда получим

$$\Phi(r) \approx D\beta^2(r - r_0)^2 \Rightarrow \Phi(x) = k \frac{x^2}{2}, \quad k = 2\beta^2 D. \quad (14.19)$$

В случае параболической потенциальной ямы частота колебаний в молекуле определяется (см. пример 7.4) численным значением коэффициента жесткости связи  $k$  ( $k = 2\beta^2 D$ ) и приведенной массой двух атомов кислорода:  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) = m/2$  ( $m$  — масса атома кислорода,  $m = 16 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} = 2,66 \cdot 10^{-26}$  кг). Поэтому в соответствии с (7.23) получим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{4\beta^2 D}{m}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,69^2 \cdot 10^{20} \cdot 8,14 \cdot 10^{-19}}{2,66 \cdot 10^{-26}}} = \\ = 2,97 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}, \quad (14.20)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{2,97 \cdot 10^{14}} = 2,11 \cdot 10^{-14} \text{ с}. \quad (14.21)$$

Частота порядка  $10^{14}$  Гц является характерной частотой различных колебательных движений в молекулах простых веществ и их соединений. Как известно (см., например, (12.38)), она определяет значение энергии колебательного движения осциллятора  $(E = \langle E_k \rangle + \langle E_n \rangle = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2)$ , причем  $\langle E_k \rangle = \langle E_n \rangle$ , см. § 7.1.

**Закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы.** Обратим сейчас внимание на тот факт, что, согласно (14.17), средняя энергия поступательного движения одноатомной молекулы ( $i = 3$ ) равна утроен-

ному значению величины  $kT/2$ , которая является характерной «порцией» тепловой энергии хаотического движения. Поэтому можно предположить (и это доказывается в классической статистической физике), что на каждую степень свободы приходится энергия, равная  $kT/2$ . Это утверждение составляет содержание классического закона о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Поэтому с учетом всех видов степеней свободы молекул (поступательных, вращательных и колебательных) можно записать выражение

$$\bar{\varepsilon} = i \frac{kT}{2} — \text{закон о равномерном распределении энергии,} \quad (14.22)$$

где

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{кол.}} \quad (14.23)$$

Двойка перед  $i_{\text{кол}}$  учитывает одинаковый вклад от средних значений кинетической и потенциальной энергий осциллятора (§ 7.1).

**Внутренняя энергия идеального газа.** Внутренняя энергия идеального газа, содержащего  $N$  не взаимодействующих друг с другом молекул, определяется на основании классического закона о равномерном распределении энергии по степеням свободы его молекул. Идеальный газ имеет  $iN$  степеней свободы. Поэтому ( $R = kN_A$ )

$$U = iN \frac{kT}{2} = ivN_A \frac{kT}{2} = i \frac{m}{\mu} \frac{RT}{2}. \quad (14.24)$$

**Теплоемкость идеального газа.** Выражение для внутренней энергии  $U = ivRT/2 = U(T)$  позволяет определить классическое значение теплоемкостей вещества. Согласно (13.9), молярная теплоемкость при постоянном объеме ( $v = 1$ )

$$C_V = \frac{\partial U(T, V)}{\partial T} = \frac{dU(T)}{dT} = \frac{iR}{2}. \quad (14.25)$$

С учетом уравнения Майера (см. (13.12)) молярная теплоемкость при постоянном давлении

$$C_p = C_V + R = iR/2 + R = \frac{i+2}{2}R. \quad (14.26)$$

Рассматриваемая здесь классическая теория определяет численное значение адиабатической постоянной

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{(i+2)R \cdot 2}{2iR} = \frac{i+2}{i}. \quad (14.27)$$

Заметим, что в термодинамике  $\gamma = C_p/C_V$  является неизвестным параметром, который можно найти только путем обработки экспериментальных данных о зависимостях  $p = f_1(V)$ ,  $p = f_2(T)$  или  $V = f_3(T)$  в адиабатическом процессе (см. формулы (13.28) и (13.30)).

Из полученных соотношений для  $C_V$  и  $C_p$  следует, что теплоемкость газа определяется только числом степеней свободы и не зависит от температуры. Это является следствием закона о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул идеального газа. Этот результат классической теории хорошо согласуется с опытом для теплоемкости только одноатомных газов, причем данные теории и опыта совпадают в широком интервале температур (исключая область близи абсолютного нуля температур) от нескольких градусов Кельвина до тысяч градусов абсолютной шкалы температуры ( $C_V = 3R/2$ ,  $C_p = 5R/2$ ,  $\gamma = 5/3$ ).

#### 14.4. СОПОСТАВЛЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ ТЕОРИЙ ТЕПЛОЕМКОСТИ ГАЗОВ

**Сравнение классической теории с экспериментом.** Из полученных соотношений (14.25) и (14.26) следует, что теплоемкость многоатомного идеального газа определяется только числом степеней свободы молекул. Однако анализ экспериментальных данных показывает, что теплоемкость многоатомных газов является функцией температуры. На рис. 14.9 представлена зависимость молярной теплоемкости  $C_V$  молекулярного водорода (двуатомная молекула) от температуры. Аналогичная картина наблюдается и для других многоатомных газов.



Рис. 14.9

Из рис. 14.9 видно, что лишь при температуре порядка 6000 К теплоемкость молекулярного водорода приближается к теоретическому значению  $7R/2$  ( $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}} = 3 + 2 + 2 = 7$ ). При более низких температурах зависимость теплоемкости имеет характерный ступенчатый вид. Значение  $C_V$  при 300 К равно  $5R/2$  (двуатомные молекулы водорода ведут себя как жесткие ротаторы), а при температуре порядка 80 К теплоемкость  $C_V$  равна  $3R/2$  (молекулы  $\text{H}_2$  ведут себя как точечные частицы, имеющие только три поступательные степени свободы). Переход от одного характерного значения теплоемкости к другому происходит не при определенной температуре, а постепенно в некотором относительно узком интервале температур.

**Квантово-механический подход в теории теплоемкости.** Наблюдаемую в эксперименте температурную зависимость теплоемкости многоатомных газов невозможно объяснить в рамках классической теории, так как она обусловлена квантовыми закономерностями. Действительно, согласно квантовой теории, вращательная и колебательная энергия микрочастицы, а молекула многоатомного газа является таковой, может принимать только дискретные значения. Для двухатомной молекулы спектры энергий определяются формулами\* (см. гл. 12):

$$E_n^{\text{кол}} = \hbar\omega_0 \left( \frac{1}{2} + n \right), \quad E_J^{\text{вр}} = \frac{\hbar^2}{2I_0} J(J+1), \quad (14.28)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка;  $n$  — колебательное квантовое число осциллятора ( $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ );  $\omega_0$  — циклическая частота собственных колебаний атомов в молекуле (см. формулу (14.20));  $I_0$  — осевой момент инерции молекулы как ротатора;  $J$  — вращательное квантовое число, которое принимает целочисленные значения ( $J = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ).

Численные расчеты по формулам (14.28) показывают, что значения вращательной энергии молекулы водорода ( $\text{H}_2$ ) примерно в 100 раз меньше колебательной энергии ( $E_J^{\text{вр}} \ll E_n^{\text{кол}}$ ). При этом расстояния между соседними вращательными уровнями энергии значительно меньше, чем между колебательными, т. е. для квантов этих энергий справедливо следующее неравенство:

\* Формула для вращательного спектра энергии будет рассматриваться во второй части пособия («Физика атомов и молекул»).

$$\Delta E_{J,J+1}^{\text{вр}} \ll \Delta E_{n,n+1}^{\text{кол}}, \quad \Delta E_{J,J+1}^{\text{вр}} = E_{J+1}^{\text{вр}} - E_J^{\text{вр}},$$

$$\Delta E_{n,n+1}^{\text{кол}} = E_{n+1}^{\text{кол}} - E_n^{\text{кол}}. \quad (14.29)$$

Например, при переходе двухатомной молекулы из основного состояния ( $n = 0, J = 0$ ) в возбужденное ( $n = 1, J = 1$ ) кванты вращательной и колебательной энергий соответственно равны

$$\Delta E_{0,1}^{\text{вр}} = \frac{\hbar^2}{I_0}, \quad \Delta E_{0,1}^{\text{кол}} = \hbar\omega_0. \quad (14.30)$$

Поскольку обмен энергией между поступательными, вращательными и колебательными степенями свободы происходит при столкновении молекул между собой, то при малых температурах (когда  $3kT/2 < \hbar^2/I_0$ ) вращательные и тем более колебательные степени свободы «возбуждаться» не могут, поскольку полученная при столкновении энергия недостаточна для перехода молекулы в возбужденное состояние. Поэтому при низких температурах молекулы имеют минимально возможные энергии колебательного ( $E_0^{\text{кол}} = \hbar\omega_0/2$  — энергия нулевых колебаний) и вращательного ( $E_0^{\text{вр}} = 0$ ) движений. Это означает, что двухатомные молекулы ведут себя как точечные частицы без вращательных и внутренних колебательных степеней свободы. Теплоемкость  $C_V$  такого газа как раз и равна  $3R/2$ .

При повышении температуры, когда энергия поступательного хаотического движения молекул становится достаточной для возбуждения вращательных степеней свободы, двухатомные молекулы начинают вести себя как сложные частицы с пятью степенями свободы. Такие переходы оказываются возможными при условии, что тепловая энергия поступательного движения оказывается сопоставимой с квантом вращательной энергии ( $3kT/2 \sim \hbar^2/I_0$ ). Поэтому температура, при которой начинают интенсивно «включаться» вращательные степени свободы, определяется выражением:

$$T_{\text{вр}} \sim 2\hbar^2/(3kI_0). \quad (14.31)$$

При температурах больше  $T_{\text{вр}}$  теплоемкость  $C_V$  двухатомного газа равна  $5R/2$  вплоть до температуры, при которой энергия  $3kT/2$  сравнима с квантом колебательной энергии ( $3kT/2 \sim \hbar\omega_0$ ). Колебательная температура

$$T_{\text{кол}} \sim 2\hbar\omega_0/(3k) \quad (14.32)$$

определяет положение второй ступеньки на рис. 14.9, наличие которой указывает на «включение» колебательных степеней свободы. Теплоемкость  $C_V$  становится равной  $7R/2$ . Численные оценки для молекулярного водорода (см. задание 14.2) приводят к следующим значениям вращательной и колебательной температур:  $T_{\text{вр}} \simeq 116$  К,  $T_{\text{кол}} \simeq 4100$  К.

Таким образом, на основе квантовых представлений удается получить качественное объяснение температурной зависимости теплоемкости многоатомных газов, т. е. теплоемкость идеального газа молекул с внутренними степенями свободы при низких температурах обусловлена только поступательными степенями свободы; при комнатных — поступательными и вращательными степенями свободы (энергия кванта вращательного движения много меньше энергии кванта колебательного движения), а при высоких температурах вклад в теплоемкость дают поступательные, вращательные и колебательные степени свободы.

**Задание 14.1.** С помощью уравнения состояния идеального газа получите формулу для давления  $p$ , выразив его через концентрацию  $n_0$  молекул газа.

**Указание.** Воспользуйтесь уравнением Клапейрона — Менделеева и соотношениями:  $n_0 = N/V$ ,  $\mu = m^* N_A$  ( $m^*$  — масса молекулы),  $R = k N_A$ .

**Ответ.** Давление  $p = n_0 k T$ .

**Задание 14.2.** Найдите и сопоставьте значения температур, при которых кванты энергии вращательного и колебательного спектров молекул водорода сравнимы с порцией тепловой энергии  $\varepsilon$ , определяющей энергию поступательного движения молекул ( $\varepsilon = 3kT/2$ ).

**Указание.** 1. Энергетический спектр вращательного движения молекулы водорода определяется формулой (14.28):

$$E_J^{\text{вр}} = \frac{\hbar^2}{2I_0} J(J+1), \quad J = 0, 1, 2, \dots, \infty,$$

где  $I_0$  — момент инерции молекулы как жесткого ротора, т. е. при его расчетах молекулу водорода рассматривайте как жесткую систему двух атомов водорода, находящихся на расстоянии  $r_0$ , равном длине химической связи ( $r_0 = 0,74$  Å).

2. Энергетический спектр колебательного движения атомов в гармоническом приближении определяется по формуле (14.28), которая с учетом соотношения (14.20) преобразуется к следующему виду:

$$E_n^{\text{кол}} = \hbar \omega_0 \left( \frac{1}{2} + n \right) = \hbar \sqrt{\frac{k}{\mu}} \left( \frac{1}{2} + n \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty,$$

где  $k = 2\beta^2 D$  — коэффициент «жесткости» химической связи;  $\mu = m/2$  — приведенная масса двухатомной молекулы  $H_2$  ( $2m$  — масса молекулы), а  $\beta$  и  $D$  — параметры потенциала Морзе (см. формулу (14.18)).

3. Параметры потенциала Морзе для молекулы водорода:  $r_0 = 0,74 \text{ \AA}$ ,  $D = 7,17 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ,  $\beta = 1,94 \text{ \AA}^{-1}$ .  
Ответ.  $I_0 = mr_0^2/2 = 0,46 \cdot 10^{-47} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $T_{\text{вр}} \approx 116 \text{ К}$ ,  $T_{\text{кол}} \approx 4100 \text{ К}$ .

Самое главное то, чего глазами не увидишь.

Антуан де Сент-Экзюпери  
*Маленький принц*

## 15. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**Основная задача статистической физики.** Статистическая физика представляет собой раздел физики, в котором изучаются свойства макроскопических систем исходя из характеристик отдельных частиц и законов взаимодействия между ними. Для изучения физических свойств макроскопических тел, содержащих огромное количество частиц (например, газ объемом 1 см<sup>3</sup> содержит  $\sim 10^{20}$  частиц), необходимо сформулировать совершенно новые понятия и методы, отличные от тех, которые используются при динамическом описании в механике Ньютона.

Действительно, только для определения положений и скоростей  $10^{20}$  точечных частиц в один момент времени необходимо записать  $6 \cdot 10^{20}$  чисел, что само по себе является практически невыполнимой задачей. Если же по этим данным необходимо было бы вычислить по формуле (14.4) суммарную кинетическую энергию системы, то для ЭВМ, работающей со скоростью 1 млн операций в секунду, потребовалось бы порядка 20 миллионов лет! Поэтому понятия, используемые в статистической физике, относятся не к отдельным частицам, а к их большим совокупностям. Отражаемая в этих понятиях информация носит обобщенный характер о всем ансамбле частиц (см. гл. 14). Методы рассмотрения закономерностей для таких ансамблей частиц получили название *статистических*, а сами закономерности поведения больших систем частиц называются *статистическими закономерностями*.

Статистические методы, базирующиеся на фундаментальных законах природы, позволяют выявлять закономерности, действующие в макроскопических системах и предсказывать различные физические свойства таких систем.

Поскольку обобщенные характеристики больших сово-

кучностей частиц носят статистический характер, то математической основой статистической физики является теория вероятностей. Основная задача статистической физики состоит в том, чтобы в конечном счете рассчитать такие характеристики системы, как давление, внутренняя энергия, теплоемкость, энтропия, свободная энергия и многие другие термодинамические величины.

### 15.1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**Вероятность и частота случайного события.** Одним из основополагающих понятий теории вероятностей является понятие события или случая. Под *событием* в теории вероятностей понимается всякое явление, относительно которого имеет смысл ставить вопрос, может оно произойти или нет. Примером события могут быть: выпадение герба или решки при бросании монеты, попадание молекулы газа в определенный объем  $\Delta V$  пространства, т. е. наличие у нее значений координат, лежащих в пределах от  $x, y, z$  до  $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ .

Опыт, в результате которого появляется или не появляется то или иное событие, называется *испытанием*.

Событие называется *случайным*, если в результате испытания оно может либо произойти, либо не произойти. Два случайных события называются *равновероятными*, если при достаточно большом числе испытаний  $N$  каждое событие появляется одинаково часто. При бросании монеты появление герба или решки являются равновероятным событием, поскольку при испытаниях то и другое события происходят приблизительно одинаковое число раз. Например, возможен такой типичный исход: число испытаний  $N = 100$ , число появлений герба и решки соответственно равно 47 и 53 (или наоборот). Сильные отклонения возможны, однако при достаточно больших значениях  $N$  они реализуются редко. Это так называемые *флуктуации* (от лат. *fluctuatio* — отклонение от среднего), если говорить о статистических ансамблях частиц. Качественные характеристики флуктуаций будут определены ниже.

События, подобные опыту с монетой, называются *несовместимыми*, так как появление одного исключает появление другого.

*Суммой двух событий* является событие, состоящее в появлении одного события или другого или обоих

вместе. Сумма двух событий  $A$  и  $B$  символически обозначается как  $A + B$ .

*Произведением двух событий* называется событие, состоящее в появлении обоих событий. Произведение событий  $A$  и  $B$  обозначается в виде произведения символов этих событий ( $AB$ ).

*Вероятностью случайного события* называется количественная мера, равная частоте его появления при неограниченном числе испытаний  $N$ . Например, если при  $N$  испытаниях событие, имеющее признак  $A$ , появляется  $N_A$  раз, то вероятность этого события определяется соотношением

$$p(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N} — \text{вероятность события.} \quad (15.1)$$

Два события называются *независимыми*, если вероятность появления каждого из этих событий не зависит от того, произошло ли другое событие.

Приведем без доказательства только две теоремы из теории вероятностей, которые нужны для понимания дальнейшего материала.

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме их вероятностей:

$$p(A + B) = p(A) + p(B). \quad (15.2)$$

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$p(AB) = p(A)p(B). \quad (15.3)$$

**Среднее значение дискретной и непрерывной случайной величины.** Если в опыте возможна реализация только несовместимых событий, то сумма вероятностей всех  $n$  несовместимых событий равна единице:

$$\sum_{i=1}^n p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N} = 1. \quad (15.4)$$

Это соотношение называется условием *нормировки вероятностей*  $p_i$ , с которым на качественном уровне мы уже встречались в главе «Элементы квантовой механики».

Если значение случайной величины  $y_i$  принимает ряд из  $N$  различных значений  $y_1, y_2, \dots, y_N$ , то среднее значение  $\bar{y}$  определяется по формуле

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i. \quad (15.5)$$

Если, в частности, под  $y_i$  понимать скорости  $v_i$  теплового движения молекул газа с номерами  $i = 1, 2, \dots, N$  (или квадрат их скоростей  $v_i^2$ ), то в соответствии с (15.5) сразу получаются выражения (14.2) и (14.3). Часто встречается ситуация, когда в серии из  $N$  испытаний каждое возможное значение  $y_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) повторяется  $N_j$  раз.

Тогда  $N = \sum_{j=1}^n N_j$ , а среднее (15.5) преобразуется к следующему виду:

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n N_j y_j = \sum_{j=1}^n \frac{N_j}{N} y_j. \quad (15.6)$$

При  $N \rightarrow \infty$  отношение  $N_j/N$  определяет вероятность  $p_j$  (см. (15.1)). Тогда среднее значение

$$\bar{y} = \sum_{j=1}^n p_j y_j — математическое ожидание величины  $y_i$ . \quad (15.7)$$

Выше мы рассматривали случайную величину  $y$ , которая принимала дискретный ряд возможных значений  $y_j$ . Если же некоторая случайная величина  $y = y(x)$  может принимать непрерывный ряд значений в интервале  $x$  от  $a$  до  $b$  (рис. 15.1), то, разделив интервал  $b - a$  на  $M$  достаточно малых и равных участков  $\Delta x$  ( $M = (b - a)/\Delta x$ ), получим:

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M y_i = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^M y_i \Delta x. \quad (15.8)$$

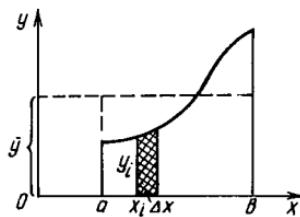


Рис. 15.1

Устремив далее  $\Delta x$  к нулю, а  $M$  к бесконечности, приходим к среднему  $\bar{y}$  в виде интеграла от  $y$  по  $x$ :

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b y(x) dx. \quad (15.9)$$

При определении математического ожидания непрерывной случайной величины  $y(x)$  вводится вероятность  $dp$  того, что численное значение случайной величины  $x$  заключено в пределах от  $x$  до  $x + dx$ . Эта вероятность, пропорциональная ширине бесконечно узкого интервала  $dx$ , может быть представлена в виде

$$dp = f(x)dx \Rightarrow f(x) = \frac{dp}{dx}. \quad (15.10)$$

Функция  $f(x)$  в выражении (15.10) называется *плотностью вероятности* случайной величины  $x$ . Нормировка вероятности (15.4) и математическое ожидание (15.7) будут вычисляться с помощью определенных интегралов

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \Delta p_j &= \int_a^b dp = \int_a^b f(x) dx = 1, \quad \bar{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n y_j \Delta p_j = \\ &= \int_a^b y(x) f(x) dx. \end{aligned} \quad (15.11)$$

Например, при  $y(x) = x$  и  $y(x) = x^2$  с помощью (15.11) находим среднее значение  $x$  и среднеквадратичное значение  $\bar{x}^2$  случайной величины  $x$ :

$$\bar{x} = \int_a^b x f(x) dx, \quad \bar{x}^2 = \int_a^b x^2 f(x) dx. \quad (15.12)$$

Интегрирование в этих выражениях можно выполнять от  $-\infty$  до  $+\infty$ , если считать, что вне области интегрирования плотность вероятности  $f(x)$  тождественно равна нулю.

**Дисперсия случайной величины.** Отклонение изучаемой случайной величины от ее среднего значения характеризуется величиной, которая называется *дисперсией*. Дисперсии дискретной  $x_j$  и непрерывной  $x$  случайных величин определяются следующими выражениями:

$$D = \overline{(x_i - \bar{x})^2} = \sum_{i=1}^n p_i(x_i - \bar{x})^2 \text{ — дисперсия дискретной величины } x_i,$$

$$D = \overline{(x - \bar{x})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx \text{ — дисперсия непрерывной величины } x.$$
(15.13)

Корень квадратный из дисперсии  $D$  называется *среднеквадратичным отклонением*  $\sigma$  случайной величины  $x$ :

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\overline{(x_i - \bar{x})^2}} = \sqrt{\overline{(x - \bar{x})^2}}. \quad (15.14)$$

Мерой флюктуаций, т. е. отклонений случайной величины  $x$  от ее среднего значения  $\bar{x}$ , как раз и является величина  $\sigma$  или относительное отклонение  $\sigma/\bar{x}$ .

**Функция распределения случайной величины.** С учетом определения (15.10) и теоремы (15.2) найдем вероятность того, что случайная величина  $x$  принимает значение, которое меньше заданной величины  $x^*$ :

$$p(x < x^*) = \sum_{x_i < x^*} \Delta p_i = \int_{-\infty}^{x^*} dp = \int_{-\infty}^{x^*} f(x) dx \equiv F(x^*). \quad (15.15)$$

Получаемая согласно (15.15) функция  $F(x^*)$  называется *интегральной функцией распределения* случайной величины  $x$ , а ее плотность вероятности  $f(x) = dp(x)/dx$  называется *дифференциальной функцией распределения* или просто *функцией распределения*.

В качестве примера приведем функцию распределения  $p(n)$ , определяющую вероятность того, что при  $N$  испытаниях событие  $A$  наступит ровно  $n$  раз ( $n = 1, 2, \dots, N$ ):

$$p(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \text{ — биномиальное распределение.} \quad (15.16)$$

Здесь  $p$  — вероятность появления события  $A$  в одиночном испытании, а  $q = 1 - p$  — вероятность того, что это событие не наступит при одиночном испытании.

Среднее значение  $\bar{n}$ , среднеквадратичное отклонение  $\sigma$  и относительное среднеквадратичное отклонение  $\sigma/\bar{n}$

определяются по формулам (15.7) и (15.14) (с учетом (15.16)):

$$\bar{n} = pN, \sigma = \sqrt{pqN}, \frac{\sigma}{\bar{n}} = \frac{\sqrt{pqN}}{pN} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{q}{p}}. \quad (15.17)$$

Приведенное здесь биномиальное распределение является одним из наиболее распространенных распределений для случайных величин, характеризующих те физические явления, в основе которых лежат некоторые статистические, т. е. вероятностные закономерности, реализуемые в природе.

Для создания « зрительного образа» о биномиальном распределении (15.16) на рис. 15.2, а представлена соответствующая зависимость для  $N = 20$  и  $p = q = 1/2$ . По оси ординат отложена вероятность  $p(n)$ , а по оси абсцисс — значения случайной величины  $n$ . Из рис. 15.2, а видно, что огибающая биномиального распределения имеет вид колоколообразной кривой, максимум которой совпадает со средним значением  $\bar{n} = pN = 20 \cdot 0,5 = 10$ .

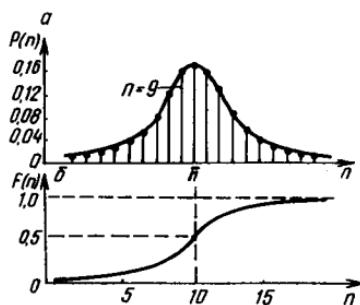


Рис. 15.2 .

При возрастании  $N$  функция распределения все более сильно локализуется вблизи среднего значения  $\bar{n}$  (задание 15.1), что количественно определяется относительным среднеквадратичным отклонением  $\sigma/\bar{n}$ . Интегральная функция распределения  $F(n^*) = \sum_{n=0}^{n^*} p(n)$  схематично представлена на рис. 15.2, б.

Кривые, приведенные на рис. 15.2, имеют вид типичных кривых распределения дискретных и непрерывных случайных величин. Все они для систем многих частиц имеют один или несколько

четко выраженных максимумов, однозначно связанных с равновесными, т. е. наиболее вероятными состояниями частиц макросистемы (см. пример 15.1).

## 15.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**Понятия микро- и макросостояния.** К числу исходных понятий, характеризующих совокупность большого числа частиц, относятся понятия микро- и макросостояний. *Макросостоянием* системы  $N$  частиц называется такое ее состояние, которому соответствуют определенные значения термодинамических параметров  $p, V, T, U$  и т. д. или некоторый набор усредненных значений параметров, задающих состояние системы в ее неполном равновесии (пример 15.1). В этом смысле равновесное состояние термодинамической системы является одним из возможных макросостояний в статистической физике. *Микросостоянием* системы называется такое состояние всех  $N$  частиц, для которого максимально возможным образом охарактеризовано состояние каждого элемента из всей совокупности выделенных по некоторому признаку элементов системы. Например, в классической механике таким элементом является одиночная частица, состояние которой определяется тремя координатами и тремя проекциями ее скоростей. Тогда микросостояние системы  $N$  частиц будет в полной мере охарактеризовано путем задания набора из  $6N$  чисел. Этот набор определяет наиболее детальное описание мгновенного состояния всей системы, т. е. соответствует динамическому способу описания в механике Ньютона. Как уже отмечалось во введении к данной главе, такая детальная информация является избыточной при рассмотрении равновесных свойств системы, представляющих собой средние значения соответствующих функций координат и скоростей частиц. Так, внутренняя энергия равна среднему значению кинетической и потенциальной энергий системы:  $U = \langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle$ . Именно поэтому в статистической физике вводится понятие макросостояния и соответствующая ему вероятность нахождения системы в данном макросостоянии.

**Статистический вес.** Каждое макросостояние системы с одним или несколькими заданными параметрами может быть реализовано некоторым числом микросостояний этой системы. *Статистический вес* данного макросостояния равен числу микросостояний  $\Gamma_n$ , которые реали-

зуются в системе с заданным значением параметра  $n$  макросостояния.

**Функция распределения для классических и квантовых систем.** Параметр, определяющий макросостояние системы, может принимать дискретный либо непрерывный ряд возможных значений. Поэтому статистические свойства макросистемы будут описываться функцией распределения для дискретной либо непрерывной случайной величины (или набора случайных величин). Если динамическое поведение системы определяется законами классической механики Ньютона, то статистические свойства такой системы из  $N$  различных частиц будут описываться *классической статистикой Максвелла — Больцмана*. Если же частица является квантовой и подчиняется уравнению Шредингера, то статистические свойства системы неразличимых бозонов и фермионов (гл. 12) будут определяться в рамках квантовых статистик Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака соответственно. Конкретный вид функций распределения Максвелла — Больцмана, Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака будет получен в последующих параграфах, а сейчас рассмотрим принцип формирования статистических микросостояний в классической и квантовой статистике.

**Пример 15.1.** В сосуде объемом  $V$  находится классический идеальный газ из  $N$  молекул. Определить вероятность того, что ровно  $n$  произвольных молекул находятся в левой половине сосуда  $V_1$  и соответственно остальные ( $N - n$ ) молекул находятся в правой половине сосуда  $V_2$ .

**Решение.** В данном примере при рассмотрении статистических свойств идеального газа предполагается макросостояние характеризовать с помощью числа  $n$ , которое определяет число молекул в левой половине сосуда объемом  $V$ . Это означает, что вместо того, чтобы рассчитывать координаты каждой молекулы в любой момент времени  $t$  (динамический метод Ньютона), предлагается в самом начале осуществить «огрубление» описания состояния системы, ограничившись знанием вероятности того, что значения координат  $n$  частиц принадлежат левой, а  $N - n$  частиц — правой половине сосуда  $V$ . Понятно, что при необходимости можно детализировать описание путем деления объема  $V$  на все более мелкие части объемом  $\Delta V_i$ .

$$\left( V = \sum_{i=1}^M \Delta V_i \right).$$

Для наглядности все рассуждения проведем для случая  $N = 4$ , а полученные результаты будем записывать для произвольного числа  $N$  частиц в объеме  $V$ .

При  $N = 4$  в системе могут быть реализованы пять макросостояний ( $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ). При  $n = 0$  все частицы находятся в правой половине сосуда (рис. 15.3, *a*), т. е. это макросостояние состоит из

$\alpha$	$n=0$
$V_1$	$V_2$ • 1 • 2 • 3 •
$\beta$	
$V_1$ 1 •	$V_2$ • 2 4 • 3 •
2 •	1 • 3 • 4 •
3 •	4 • 2 • 1 •
4 •	1 • 2 • 3 •

Рис. 15.3

одного микросостояния. Статистический вес  $\Gamma_0 = 1$ , а вероятность одновременного нахождения четырех частиц в объеме  $V_2$  будет равна произведению вероятностей независимых событий (см. выражение (15.3)), т. е.  $q_1 q_2 q_3 q_4 = q^4$ . Вероятность данного макросостояния  $p_0 = \Gamma_0 q^4 = q^4$ . Здесь под событием (см. § 15.1) понимается появление одиночной молекулы с номером  $i$  в левой половине сосуда. Каждая частица с равной вероятностью может быть в объемах  $V_1$  и  $V_2$  ( $V_1 = V_2$ ). Поэтому вероятности появления  $p_i$  и непоявления  $q_i$  этого события будут равны  $1/2$  ( $p = 1/2$ ,  $q = 1 - p = 1/2$ ).

Макросостояние с  $n = 1$  можно реализовать четырьмя различными микросостояниями (рис. 15.3, б), которые получаются при попадании в левую половину сосуда поочередно одной из четырех молекул ( $\Gamma_1 = 4$ ). При  $p_i = q_i = 1/2$  вероятности обнаружения каждого из четырех микросостояний одинаковы:

$$p_1 q_2 q_3 q_4 = p_2 q_1 q_3 q_4 = p_3 q_1 q_2 q_4 = p_4 q_1 q_2 q_3 = pq^3. \quad (15.18)$$

В соответствии с теоремой о сложении вероятностей несовместимых событий (см. (15.2)) получим вероятность реализации макросостояния с параметром  $n = 1$ :

$$p_1 = \Gamma_1 pq^3 = 4pq^3. \quad (15.19)$$

Результаты аналогичных рассуждений, представленные в табл. 15.1, позволяют записать вероятность состояния  $n$  для системы из  $N$  молекул в виде биномиального распределения (см. (15.16)) с одинаковыми параметрами  $p$  и  $q$  ( $p = q = 1/2$ )

$$p_n = \Gamma_n p^n q^{N-n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}. \quad (15.20)$$

Из полученного распределения (15.20) следует, что каждое макросостояние пропорционально его статистическому весу  $\Gamma_n$ . В данном примере статистический вес равен так называемому комбинаторному множителю, который определяет число способов реализации данного макросостояния с помощью отдельных микросостояний. Следует отметить, что, согласно (15.18), все микросостояния равновероятны. Это как раз и предполагается при формулировании эргодической гипотезы (гл. 14), когда среднее значение полагается равным среднеарифметическому значению случайной величины.

Если мы теперь обратимся к рассматриваемой выше системе из четырех частиц в объеме  $V$ , то увидим (см. табл. 15.1), что наиболее вероятным является макросостояние с  $n = 2$ . Его статистический вес

Таблица 15.1

Характеристика макросостояния (число $n$ молекул в левой половине)	Номера молекул в левой части	Номера молекул в правой части	Число физически различных микросостояний $\Gamma_n$ для данного макросостояния	Вероятность макросостояния
0	—	1, 2, 3, 4	1	0,0625
1	1	2, 3, 4	4	0,250
	2	1, 3, 4		
	3	1, 2, 4		
	4	1, 2, 3		
2	1, 2	3, 4	6	0,375
	1, 3	2, 4		
	1, 4	2, 3		
	2, 3	1, 4		
	2, 4	1, 3		
	3, 4	1, 2		
3	1, 2, 3	4	4	0,250
	1, 2, 4	3		
	3, 4	2		
	2, 3, 4	1		
4	1, 2, 3, 4	—	1	0,0625

наибольший ( $\Gamma_2 = 6$ ) и это соответствует равномерному распределению частиц по объему  $V$  сосуда (по две в каждой половине сосуда).

Из расчетов по формуле (15.20) следует, что при  $N = 4$  (малая система) имеется достаточно большая вероятность того, что все четыре молекулы окажутся в левой (либо в правой) половине сосуда ( $p_0 = p_4 = 1/16 = 0,0625$ ). Однако при возрастании  $N$  эта вероятность очень быстро падает. Например, при  $N = 10$  она равна  $9,9 \cdot 10^{-4}$ , а при  $N = 20$  — уже только  $9,9 \cdot 10^{-7}$ . Если же принять во внимание, что 1 см<sup>3</sup> воздуха при нормальных условиях содержит порядка  $10^{20}$  молекул, то вероятность того, что все молекулы соберутся в одной половине сосуда, окажется невообразимо малой ( $p_N \sim 10^{-3 \cdot 10^{-19}}$ !). Именно поэтому такие ситуации в больших (макроскопических) системах не реализуются и не наблюдаются на опыте. Наиболее часто реализуются состояния с  $n = N/2$ , что соответствует равномерному распределению частиц по объему в макроскопических замкнутых системах.

На рис. 15.4 приведена функция распределения  $f(x_n) = p_n/N$ , определяющая плотность вероятности того, что в левой половине сосуда находится  $n$  молекул ( $n = xN$ ,  $x$  — доля частиц, находящихся в левой половине сосуда). Из рисунка видно, что с увеличением числа частиц  $N$  функция распределения все более сильно локализуется вблизи среднего значения  $\bar{x} = \bar{n}/N = 0,5$ . Следовательно, при любых значениях  $N$  наиболее вероятным является состояние, когда в левой и правой половинах сосуда находится одинаковое число частиц. Именно поэтому в изолированной системе всегда устанавливается равновесное однородное распределение частиц по объему. Если же

в сосуде предварительно создано неравномерное распределение (см. рис. 13.10, а), то с течением времени оно станет равновесным, так как система стремится к наиболее вероятному макросостоянию, реализуемому наибольшим числом микросостояний (см. рис. 13.10, б).

Приведенные рассуждения позволяют сделать важнейшее заключение о направлении протекания необратимых (см. § 13.4) термодинамических процессов. При любом термодинамическом процессе система будет стремиться к макросостоянию, обладающему наибольшим статистическим весом, т. е. содержащему максимальное число микросостояний.

Рассчитаем относительное среднеквадратичное отклонение величины  $n$  по формуле (15.17). Поскольку  $p = q = 1/2$ , то  $\sigma/\bar{n} = \sqrt{1/N} = N^{-1/2}$ , и сразу видно, что с увеличением числа частиц в системе их флуктуации уменьшаются (функция распределения локализуется все более сильно). Если при  $N=4$  относительное отклонение  $\Delta n/\bar{n} = \sigma/\bar{n} = 4^{-1/2}=0,5$ , т. е. достигает 50% (флуктуации в малой системе велики), то при  $N=100$  величина  $\Delta n/\bar{n} = 0,1$  (10%), а для макроскопического объема  $V=1 \text{ см}^3$  газа ( $N \sim 10^{20}$ ) получаем  $\Delta n/\bar{n} = (10^{20})^{-1/2} = 10^{-10}$ , что указывает на исчезающие малые значения относительных отклонений числа частиц в той и другой частях объема от их среднего значения (хотя абсолютные флуктуации числа частиц  $\Delta n \equiv \sigma = \sqrt{pqN}$  возрастают, но менее быстро, чем число частиц!).

**Задание 15.1.** Постройте кривые биномиального распределения при  $N=10$  и  $N=20$  для случайной величины,  $x_n = n/N$  при  $p=q=1/2$ . Найдите численные значения  $\bar{n}$ ,  $\bar{x}_n$ ,  $\sigma_n$ ,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_n/\bar{n}$  и  $\sigma_x/\bar{x}$ .

**Указание.** Воспользуйтесь распределением (15.16) и формулами (15.17), которые определяют среднее значение случайной величины  $n$ , ее среднеквадратичное отклонение  $\sigma$ , т. е. дисперсию и относительное среднеквадратичное отклонение  $\sigma/\bar{n}$ .

**Ответ.** Смотри рис. 15.4 и расчеты, которые проведены в примере 15.1.

**Задание 15.2.** Проведите расчеты по формуле (15.20) при  $N=4$  и сравните полученные численные значения для статистического веса  $\Gamma_n$  и вероятности макросостояния  $p_n$  с данными табл. 15.1.

### Микро- и макросостояния в квантовой статистике. При решении модельных задач квантовой механики

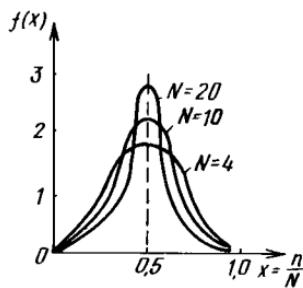


Рис. 15.4

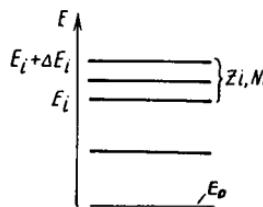


Рис. 15.5

(§ 12.3) мы обнаружили, что во всех случаях значения энергии микрочастицы квантуются, т. е. уравнение Шрёдингера в ряде случаев имеет решение только при определенных значениях полной энергии частицы. Аналогично, в случае макроскопической системы из  $N$  квантовых частиц допустимые значения энергии  $E_i$  этой системы образуют *энергетический спектр системы* (рис. 15.5), характеризуемый числом  $z_i$  уровней в интервале энергии от  $E_i$  до  $E_i + \Delta E_i$  ( $\rho_i = z_i/\Delta E_i$  — плотность числа уровней энергии). На рис. 15.6 в качестве примера представлены

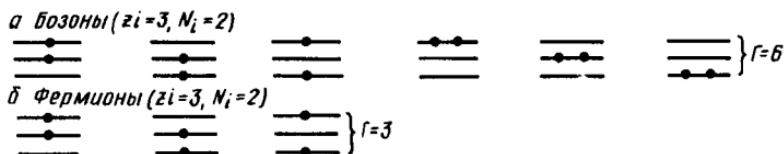


Рис. 15.6

все возможные квантовые микросостояния, относящиеся к макросостоянию из двух частиц ( $N_i = 2$ ), распределенных по трем уровням ( $z_i = 3$ ) энергетического спектра. В случае бозонов, которые характеризуются целочисленным значением спина, в каждом квантовом состоянии может быть любое число бозонов (рис. 15.6, а). Для фермионов, имеющих полуцелый спин, в силу принципа Паули в каждом квантовом состоянии может находиться не более одной частицы (рис. 15.6, б). Подсчет числа всех возможных микросостояний для  $N_i$  частиц (бозонов или фермионов), распределенных по  $z_i$  квантовым уровням энергии, дает следующие выражения для статистического веса:

$$\Gamma_i = \frac{(N_i + z_i - 1)!}{N_i!(z_i - 1)!} \text{ — для бозонов,}$$

$$\Gamma_i = \frac{z_i!}{N_i!(z_i - N_i)!} \text{ — для фермионов.}$$

(15.21)

Статистический вес  $\Gamma$  всей системы из  $N$  частиц ( $N = \sum_{i=1}^n N_i$ ) равен произведению статистических весов  $\Gamma_i$  отдельных подсистем (см. теорему (15.3) о вероятности независимых событий)

$$\Gamma = \prod_{i=1}^n \Gamma_i. \quad (15.22)$$

**Статистический смысл энтропии системы.** В 1872 г. Больцман дал статистическое обоснование для энтропии  $S$ , которая, согласно Больцману, пропорциональна логарифму статистического веса  $\Gamma_i$  макросостояния  $i$  ( $k$  — постоянная Больцмана)

$$S_i = k \ln \Gamma_i — \text{энтропия макросостояния.} \quad (15.23)$$

Если термодинамическая система состоит из нескольких подсистем, то, принимая во внимание (15.22), получаем

$$S = k \ln \Gamma = k \sum \ln \Gamma_i \Rightarrow S = \sum S_i. \quad (15.24)$$

Это означает, что энтропия  $S$  является аддитивной характеристикой термодинамической системы. Поскольку  $\Gamma$  есть число всевозможных микросостояний в системе, то можно утверждать, что энтропия является количественной мерой неупорядоченности (беспорядка) системы многих частиц.

В изолированной термодинамической системе все самопроизвольные необратимые процессы идут в направлении наиболее вероятного макросостояния (см. пример 15.1), т. е. система при этом приближается к равновесию, а ее энтропия  $S = k \ln \Gamma$  возрастает, как того и требует второе начало термодинамики (см. (13.54)). Это означает, что естественные процессы стремятся перевести систему в состояние с большим беспорядком.

Заметим, что в результате движения частиц в термодинамической системе возможны флуктуации, когда система на определенном отрезке времени движется в сторону менее вероятных макросостояний. Тогда энтропия убывает, а не возрастает.

Таким образом, второе начало термодинамики не устанавливает абсолютного запрета на убывание энтропии. Однако в силу быстрого уменьшения относительных флуктуаций при возрастании числа частиц  $N$  системы процессы, связанные с уменьшением энтропии, столь маловероятны, что практически никогда не наблюдаются на опыте в макроскопических системах.

Определение (15.23) для энтропии согласуется с третьим началом термодинамики (теоремой Нернста,

см. (13.55)), поскольку при абсолютном нуле любая часть тела должна находиться в одном — основном квантовом состоянии. Это значит, что все статистические веса  $\Gamma$  равны 1, а следовательно, и их произведение (15.22) также равно 1. Тогда энтропия  $S = k \ln \Gamma$  всего тела при  $T = 0$  будет равна нулю ( $S = 0$  при  $T = 0$ ).

### 15.3. КЛАССИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СТАТИСТИКЕ БОЛЬЦМАНА И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ

**Распределение Больцмана.** В классической статистике микросостояние системы  $N$  точечных частиц задается набором  $3N$  координат и  $3N$  проекций скоростей. Поэтому макросостояние такой системы будет характеризоваться набором чисел частиц  $N_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ), координаты и проекции скоростей которых лежат в заданных интервалах от  $r_j$  до  $r_j + \Delta r$  и от  $v_j$  до  $v_j + \Delta v$ . Каждая группа частиц  $N_j$  в случае идеального газа будет иметь определенное значение полной энергии  $E_j = \varepsilon_j N_j$ ,  $\varepsilon_j$  — энергия одной частицы из данной группы  $N_j$  частиц. Тогда энергия для всей системы в данном макросостоянии может быть записана в следующем виде:

$$U = \sum_{j=1}^M \varepsilon_j N_j, \quad N = \sum_{j=1}^M N_j. \quad (15.25)$$

Мы знаем (пример 15.1), что в состоянии равновесия число частиц  $N_j$  с заданным значением энергии  $\varepsilon_j$  будет соответствовать наиболее вероятному макросостоянию, т. е. максимуму энтропии  $S = k \ln \Gamma$  в изолированной системе ( $N = \text{const}$ ). Поэтому для получения функции распределения частиц системы по энергии следует вначале определить статистический вес  $\Gamma$  макросостояния из  $M$  групп частиц  $N_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ). Когда в примере 15.1  $N$  частиц газа было разделено на две группы частиц ( $N_1 = n$  частиц в левой половине и  $N_2 = N - n$  — в правой половине сосуда), то статистический вес макросостояния  $n$  определяется по следующей формуле (см. (15.20)):

$$\Gamma_n = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N!}{N_1! N_2!}. \quad (15.26)$$

Понятно, что статистический вес для системы, состоящей из  $M$  частей, можно записать по аналогии с (15.26):

$$\Gamma = \frac{N!}{N_1!N_2!\dots N_M!} = N! / \prod_{j=1}^M N_j!. \quad (15.27)$$

Энтропия макросостояния с некоторым набором чисел  $N_i$

$$S = k \ln \Gamma = k \left( \ln N! - \sum_{j=1}^M \ln N_j! \right). \quad (15.28)$$

В случае макроскопической системы, когда  $N \rightarrow \infty$ , то и все  $N_i$  также будут стремиться к бесконечности при заданном конечном числе  $M$  групп по  $N_i$  частиц. Поэтому с учетом формулы Стирлинга ( $n! \simeq \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$  при  $n \rightarrow \infty$ ) можно записать выражение (см. задание (15.3))

$$\ln n! = n \ln n, \quad (15.29)$$

которое справедливо в пределе  $n \rightarrow \infty$ .

С учетом (15.29) перепишем выражение (15.28) для энтропии  $S$ :

$$S = k \left( N \ln N - \sum_{j=1}^M N_j \ln N_j \right). \quad (15.30)$$

Для нахождения наиболее вероятного набора чисел  $N_i$  воспользуемся термодинамическим соотношением (13.58) для системы с фиксированным объемом ( $V = \text{const}$ ), находящейся при заданных значениях температуры  $T$  и химического потенциала  $\mu$ :

$$dU = TdS + \mu dN. \quad (15.31)$$

Найдем изменения энергии  $dU$ , числа частиц  $dN$  (см. (15.25)) и энтропии  $dS$  (см. (15.30)), которые связаны с изменением числа частиц  $dN_i$  в группе с номером  $j = i$ :

$$dU = \varepsilon_i dN_i, \quad dN = dN_i, \quad dS = k[(\ln N + 1)dN - (\ln N_i + 1)dN_i]. \quad (15.32)$$

Подставим (15.32) в (15.31) и сократим на  $dN_i \neq 0$ :

$$\varepsilon_i = kT(\ln N - \ln N_i) + \mu.$$

Из последнего уравнения следует, что

$$\ln \frac{N_i}{N} = \frac{\mu - \varepsilon_i}{kT} \Rightarrow \frac{N_i}{N} = e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT}}. \quad (15.33)$$

Введем нормировочную постоянную  $A = e^{\mu/kT}$  и величину  $p_i = \lim N_i/N$ , которая определяет вероятность того, что

произвольная частица имеет энергию, лежащую в интервале энергий от  $\varepsilon_i$  до  $\varepsilon_i + \Delta\varepsilon_i$ . Тогда последнее выражение из (15.33) примет вид функции распределения для энергии  $\varepsilon_i$  как случайной дискретной величины:

$$p_i = A \exp\{-\varepsilon_i/kT\} — \text{распределение}\\ \text{Больцмана} \\ (1877). \quad (15.34)$$

Выражение (15.34) определяет вероятность того, что молекула идеального газа имеет энергию  $\varepsilon_i$ , т. е. находится в  $i$ -м состоянии, поэтому среднее число  $N_i$  частиц в этом состоянии пропорционально  $\exp\{-\varepsilon_i/kT\}$

$$N_i = p_i N = a e^{-\varepsilon_i/kT}. \quad (15.35)$$

Нормировочная постоянная  $a = AN$  или химический потенциал  $\mu$  находятся из условия сохранения числа частиц  $N$  в объеме  $V$ :

$$\sum_{i=1}^M N_i = N \Rightarrow e^{\mu/kT} \sum_{i=1}^M e^{-\varepsilon_i/kT} = 1 \Rightarrow \frac{\mu}{kT} = \\ = -\ln \sum e^{-\varepsilon_i/kT}. \quad (15.36)$$

**Распределение Максвелла — Больцмана.** Для классического идеального газа, движение молекул которого подчиняется механике Ньютона, можно вместо дискретного распределения (15.34) ввести распределение частиц по скоростям и координатам. В этом случае следует учесть, что энергия  $\varepsilon_i$  состоит из кинетической энергии и потенциальной энергии во внешнем силовом поле:

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2} + \Pi(x, y, z), \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \quad (15.37)$$

Тогда в соответствии с (15.10) для  $f = f(v_x, v_y, v_z, x, y, z)$  запишем

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = B \exp \left\{ -\frac{1}{kT} \left[ \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \Pi(x, y, z) \right] \right\} — \text{функция распределения} \\ \text{Максвелла—Больцмана.} \quad (15.38)$$

**Распределение Максвелла по скоростям и распределение Больцмана по координатам.** Выражение (15.38) для плотности распределения молекул газа по скоростям

и координатам можно представить в виде произведения двух функций:

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = B \exp \left\{ -\frac{m}{2kT} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{kT} \Pi(x, y, z) \right\} = f_1(\mathbf{v}) \cdot f_2(\mathbf{r}).$$

В связи с этим можно независимо рассматривать распределение молекул по скоростям

$$f_1(\mathbf{v}) = B_1 e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} \text{ — функция Максвелла (1860)} \quad (15.39)$$

и распределение молекул по координатам

$$f_2(\mathbf{r}) = B_2 e^{-\frac{1}{kT}\Pi(x, y, z)} \text{ — функция Больцмана (1868—1871).} \quad (15.40)$$

Таким образом, распределения молекул классического идеального газа по скоростям и координатам однозначно связаны соответственно с их кинетической и потенциальной энергией. Если проследить за временем открытия того или другого распределения, то обнаружится следующая хронологическая последовательность: распределение Максвелла по скоростям (1860), распределение Больцмана по координатам (1868—1871), распределение Больцмана (15.34) по энергиям (1877).

**Пример 15.2.** Определим распределение плотности  $\rho$  идеального газа в поле сил тяжести при изотермических условиях.

**Решение.** Потенциальная энергия молекулы массой  $m$  в поле сил тяжести  $\Pi(x, y, z) = mgz$ . Поэтому в соответствии с функцией распределения Больцмана можно определить среднее число  $dN$  молекул, находящихся в объеме  $dV = dx dy dz$ :

$$dN = f_2(x, y, z) \cdot dx dy dz = B_2 e^{-\frac{mgz}{kT}} dV.$$

Плотность  $\rho = dM/dV = mdN/dV$ . Поэтому плотность  $\rho = mB_2 \exp \{-mgz/kT\}$ . Нормировочный множитель  $B_2$  выразим через плотность  $\rho_0$  на нулевом уровне для потенциальной энергии ( $z = 0$ ). Тогда  $\rho_0 = mB_2$ , а плотность

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} \quad (15.41)$$

определяет зависимость давления  $p = \nu RT/V$  от высоты  $h = z$  (см. (8.14))  $p(h) = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$  — барометрическая формула.

**Пример 15.3.** Найдем среднее значение потенциальной энергии молекулы газа в поле сил тяжести ( $\Pi = mgz$ ).

**Решение.** Для функции  $f_2$  (см. (15.40) и рис. 15.7, а) определим

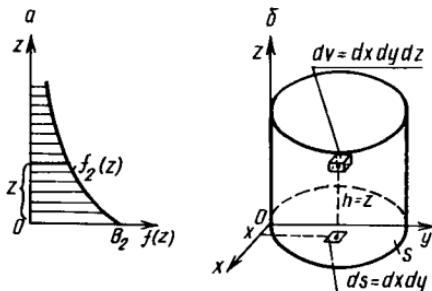


Рис. 15.7

вначале постоянную  $B_2$  из условия нормировки (15.11) для системы  $N$  частиц газа, находящихся в объеме  $V$  в виде бесконечно высокого столба газа с площадью основания  $S$  (рис. 15.7, б)

$$\int_V f_2(x, y, z) dx dy dz = 1 \Rightarrow B_2^{-1} = S \int_0^{\infty} e^{-\frac{mgz}{kT}} dz.$$

Для среднего значения (см. (15.12) энергии  $\Pi(z) = mgz$  получим

$$\begin{aligned} \langle \Pi \rangle &= \int_V \Pi(x, y, z) f_2(x, y, z) dV = \\ &= mg \frac{\int_0^{\infty} z \exp\{-mgz/(kT)\} dz}{\int_0^{\infty} \exp\{-mgz/(kT)\} dz} = kT. \end{aligned} \quad (15.42)$$

При вычислении интеграла в числителе (15.42) нужно выполнить интегрирование по частям с использованием формулы (см. задание 15.6)

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (15.43)$$

Таким образом, среднее значение потенциальной энергии частицы во внешнем поле, так же как и энергии хаотического (теплового) движения молекул идеального газа, выражается в единицах  $kT$  (см. 14.17).

**Задание 15.3.** Воспользуйтесь формулой Стирлинга ( $n! \simeq (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$  при  $n \rightarrow \infty$ ) и определите асимптотический предел  $\ln n!$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Ответ. Смотри формулу (15.29).

**Задание 15.4.** Постройте зависимость плотности  $\rho$  и давления  $p$  от высоты  $h$  для воздуха ( $\mu = 29$ ) в предположении, что на поверхности Земли реализованы нормальные условия ( $p = p_0$ ,  $T = T_0$ ), а затем определите численное значение высоты  $h_1$ , на которой давление  $p_1 = p_0/2$ .

$$\text{Ответ. } h_1 = \frac{kT_0}{mg} \ln 2.$$

**Задание 15.5.** Получите выражение для функции распределения концентрации  $n$  частиц пыли в зависимости от высоты  $h$  над поверхностью Земли. Используя полученную зависимость, найдите значения концентрации  $n$  на высоте  $h_1 = 10$  м и  $h_2 = 30$  м, если концентрация  $n_0$  (при  $h = 0$ ) составляет величину порядка  $10^{10}$  частиц в кубическом метре, а температура  $T \sim 300^\circ$ . В расчетах следует предположить, что частицы имеют массу  $m \sim 8 \cdot 10^{-22}$  кг и объем  $V \sim 5 \cdot 10^{-25}$  м<sup>3</sup>, т. е. плотность взвешенных твердых частичек пыли  $\rho_t = m/V = 1,6 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> ( $\rho_{\text{воздуха}} = 1,29$  кг/м<sup>3</sup>).

**Указание.** При выполнении задания нужно воспользоваться распределением (15.41) и учесть, что, помимо силы тяжести, на частичку пыли действует выталкивающая сила Архимеда (ее вес уменьшается по сравнению с  $mg$ ).

**Ответ.** При заданных численных характеристиках пылинок и воздушной среды концентрация частиц пыли  $n_1 = 41$  част/м<sup>3</sup> ( $h_1 = 10$  м), а  $n_2 = 7 \cdot 10^{-16}$  част/м<sup>3</sup> ( $h_2 = 30$  м). Видно, что  $n_1$  и  $n_2$  значительно меньше, чем концентрация  $n_0$  у поверхности Земли. Следует отметить, что справедливость распределения Больцмана для броуновских частиц подтверждается опытами Перрена (1909 г.), проведенными для эмульсии из практически одинаковых шариков гуммигута\*.

**Функция распределения Максвелла для модуля скорости.** При определении среднего арифметического значения скорости и ее среднеквадратичного значения (см. (15.12)) нужно знать функцию распределения для модуля скорости  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ . Искомая функция определяет вероятность  $dp$  того, что модуль скорости  $v$  лежит в интервале от  $v$  до  $v + dv$ , т. е. внутри сферической оболочки толщиной  $dv$  (рис. 15.8, а)

$$dp = f(v)dv. \quad (15.44)$$

Для нахождения вида функции  $f(v)$  запишем выражение для вероятности нахождения частицы со скоростью  $\mathbf{v}$  в объеме  $dv_x dv_y dv_z$  пространства скоростей (рис. 15.8, б):

$$dp_1 = f_1(\mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z = B_1 e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z. \quad (15.45)$$

Далее определим нормировочную постоянную  $B_1$ :

$$\begin{aligned} & \int_{v_x} \int_{v_y} \int_{v_z} f_1(\mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z = \\ & = B_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z = 1. \quad (15.46) \end{aligned}$$

\* Гуммигут — млечный сгущенный сок некоторых видов деревьев, растущих в Индии и на Цейлоне.

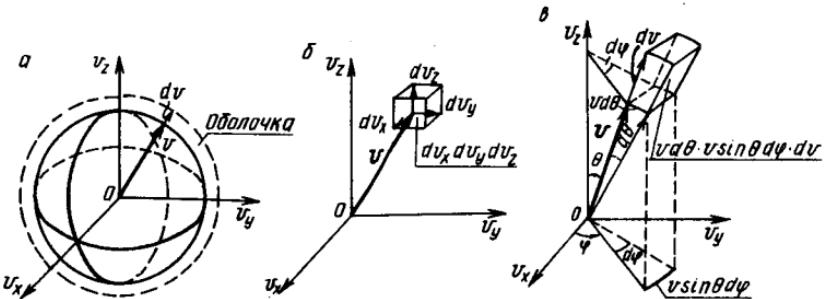


Рис. 15.8

Поскольку интеграл от  $e^{-\beta t^2}$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$  равен (см. табл. II.2 прил. II):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} dt = \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{1/2}, \quad (15.47)$$

то постоянная  $B_1$  из (15.46) выражается через параметр  $\beta = m/(2kT)$ :

$$B_1 = \frac{1}{(\pi/\beta)^{3/2}} = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}. \quad (15.48)$$

Подставим  $B_1$  в (15.45) и заменим элемент объема  $dv_x dv_y dv_z$  в декартовых координатах на элемент объема  $v^2 \sin \theta d\theta d\phi dv$  в сферических координатах  $v$ ,  $\theta$  и  $\phi$  (рис. 15.8, в):

$$dp_1 = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv \sin \theta d\theta d\phi. \quad (15.49)$$

Сейчас, чтобы получить вероятность  $dp$  попадания в сферический слой толщиной  $dv$ , нужно проинтегрировать (15.49) по  $\theta$  от 0 до  $\pi$ , а по  $\phi$  от 0 до  $2\pi$ . Интегрирование по  $\theta$  и  $\phi$  выполняется независимо:

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi, \quad \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = - \int_0^{\pi} d(\cos \theta) = 2.$$

С учетом сказанного получаем

$$dp = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} dp_1 = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv. \quad (15.50)$$

Из сопоставления (15.50) с (15.44) следует, что

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad \text{— функция для модуля скорости.} \quad (15.51)$$

**Пример 15.4.** Определим наиболее вероятную, среднюю и среднеквадратичную скорости теплового движения молекул.

**Решение.** Функция  $f(v)$  определяет относительное число молекул  $dN(v)/N$ , имеющих скорость, заключенную в интервале от  $v$  до  $v + dv$ , т. е.  $dp = dN(v)/N = f(v)dv$ , откуда  $f(v) = dN(v)/(Ndv)$ . Из выражения для  $f(v)$  видно, что конкретный вид функции зависит от рода газа (массы молекул) и температуры. На рис. 15.9 приведен график распределения  $f(v)$ . Относительное число молекул  $dN(v)/N$ , скорости которых лежат в интервале от  $v$  до  $v + dv$ , численно равно площади, заштрихованной на рисунке. Из приведенного графика видно, что функция распределения стремится к нулю при  $v \rightarrow 0$  и  $v \rightarrow \infty$  и проходит через максимум при некоторой скорости  $v_{\max}$ , называемой *наиболее вероятной скоростью*.

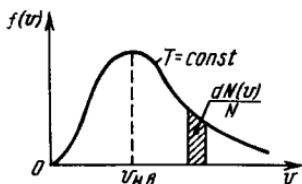


Рис. 15.9

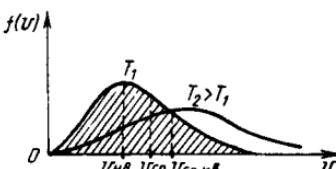


Рис. 15.10

Значение наиболее вероятной скорости можно найти из условия экстремума функции  $f(v)$ . Продифференцировав выражение для  $f(v)$  по аргументу  $v$  и приравняв полученное выражение к нулю, будем иметь (условие максимума  $f(v)$ ):

$$\frac{d}{dv} \left( v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \right) = \left( 2 - \frac{mv^2}{kT} \right) v e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = 0. \quad (15.52)$$

Откуда  $v_{\max} = \sqrt{2kT/m}$  или  $v_{\max} = \sqrt{2RT/\mu}$ .

Из выражения для наиболее вероятной скорости следует, что при повышении температуры максимум функции распределения молекул по скоростям смещается вправо, так как значение наиболее вероятной скорости пропорционально корню квадратному из температуры  $T$ . Однако вся площадь, ограниченная кривой  $f(v)$ , остается неизменной, так как общее число  $N$  молекул газа в изолированной системе остается постоянным. Поэтому при повышении температуры кривая распределения молекул по скоростям будет растягиваться и понижаться (рис. 15.10).

Функция распределения молекул по скоростям позволяет вычислить среднюю и среднеквадратичную скорости молекул газа при заданной температуре.

Средняя скорость молекул газа определяется соотношением (см. (15.12)):

$$v_{cp} = \int_0^{\infty} vf(v) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv. \quad (15.53)$$

Введем обозначение  $x = v^2$  и  $\beta = m/(2kT)$ . Поскольку  $dx = 2vdv$ , то

$$v_{cp} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \beta^{3/2} \int_0^{\infty} xe^{-\beta x} dx. \quad (15.54)$$

Интегрирование по частям с применением формулы (15.43) при  $U = x$  и  $dV = e^{-\beta x} dx$  приводит к следующему результату

$$\int_0^{\infty} xe^{-\beta x} dx = \beta^{-2}.$$

Тогда

$$v_{cp} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \beta^{3/2} \beta^{-2} = \sqrt{\frac{4}{\pi \beta}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}. \quad (15.55)$$

Аналогично вычисляется среднеквадратичная скорость по формуле  $v_{cp, kv} = \int v^2 f(v) dv$ . Подставив это выражение в функцию распределения  $f(v)$  и вычислив интеграл, получим

$$v_{cp, kv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3kT}{\mu}}. \quad (15.56)$$

Это же значение следует из определения  $v_{cp, kv}$  как скорости, задающей среднее значение кинетической энергии в поступательного движения молекулы (см. (14.17)),

$$\langle e \rangle = \frac{mv_{cp, kv}^2}{2} = 3 \frac{kT}{2} \Rightarrow v_{cp, kv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Из сопоставления (15.52), (15.54) и (15.56) следует, что отношения  $v_{cp}$  и  $v_{cp, kv}$  к наиболее вероятной скорости  $v_{n, b}$  удовлетворяют следующему выражению:

$$\frac{v_{cp}}{v_{n, b}} : \frac{v_{cp, kv}}{v_{n, b}} = \frac{\sqrt{8/\pi}}{\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \simeq 1,13 : 1,22.$$

Значения найденных трех характерных скоростей теплового движения молекул указаны схематично на рис. 15.10 (см. табл. III.17 прил. III).

**Закон распределения частиц по кинетической энергии.** Функцию распределения молекул по скоростям (см. (15.51)) можно преобразовать в функцию распределения молекул по энергии  $mv^2/2$ . Для этого в выражении (15.51)

введем новую переменную  $\varepsilon = mv^2/2$  ( $d\varepsilon = mvdu$ ) и воспользуемся условием

$$dp = f(v)dv \equiv f(\varepsilon)d\varepsilon.$$

Тогда получим

$$f(\varepsilon) = \frac{f(v)dv}{d\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\sqrt{\varepsilon}. \quad (15.57)$$

**Задание 15.6.** Вычислите интегралы в числителе и знаменателе выражения (15.42) и найдите среднее значение потенциальной энергии сил тяжести.

**Указание.** При вычислении интеграла в числителе (15.42) воспользуйтесь выражением (15.43) при  $dv = \exp(-mgz/(kT))dz$  и  $u = z$ .

**Ответ.**  $\langle E_n \rangle = kT$ .

**Задание 15.7.** Рассчитайте среднее значение кинетической энергии молекулы в ее поступательном движении.

**Указание.** Найдите среднее значение энергии по формуле (см. (15.12))

$$\langle e \rangle = \int_0^{\infty} e f(\varepsilon) d\varepsilon.$$

После подстановки (15.57) введите новую переменную  $t = \sqrt{\varepsilon}$  и воспользуйтесь выражением для интеграла (15.47) при  $\beta = (kT)^{-1}$ .

**Ответ.** Значение  $\langle e \rangle = 3/(2\beta) = 3kT/2$  совпадает с выражением (14.17), которое получено с помощью основного уравнения молекулярно-кинетической теории.

#### 15.4. КВАНТОВЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СТАТИСТИКЕ ФЕРМИ – ДИРАКА И БОЗЕ – ЭЙНШТЕЙНА

**Распределения частиц идеального газа бозонов и фермионов.** Рассмотрим макроскопическую систему, представляющую собой идеальный газ из  $N$  квантовых частиц (бозонов или фермионов). Как и в случае классического идеального газа, предполагается, что между квантовыми частицами отсутствует непосредственное силовое взаимодействие, т. е. частицы в среднем находятся на значительных расстояниях друг от друга. Квантовые свойства такого газа будут всецело определяться квантово-механическими «обменными взаимодействиями» частиц, находящихся в одном и том же квантовом состоянии одиночной частицы с энергией  $\varepsilon_i$  (примеры волновых функций одиночной микрочастицы и соответствующих им энергетических уровней  $E_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) рассмотрены в § 12.3)). Это специфическое взаимодействие частиц с полуцелым

спином (фермионы) и целочисленным спином (бозоны) приводят к тому, что в каждом квантовом состоянии не может быть одновременно более одного фермиона (принцип Паули), а число бозонов может быть произвольным. Эти особенности в распределении фермионов и бозонов учтены при подсчете числа квантовых микросостояний, определяющих статистический вес различных макросостояний (см. формулы (15.21)). Поэтому, повторяя все выкладки, которые привели к распределению Больцмана для классических частиц (§ 15.3), получаем законы распределения частиц идеального газа бозонов и фермионов по энергии  $\epsilon_i$  их квантовых состояний ( $n_i$  — числа заполнения, определяющие среднее число частиц в данном квантовом состоянии с энергией  $\epsilon_i$ , а  $\mu$  — химический потенциал всей системы из  $N$  частиц):

$$n_i = \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)/(kT)} + 1} \text{ — распределение Ферми — Дирака,}$$

$$n_i = \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)/(kT)} - 1} \text{ — распределение Бозе — Эйнштейна.} \quad (15.58)$$

Нулевой уровень для потенциальной энергии частицы выберем так, чтобы полная энергия наименее (основного) квантового состояния была равна нулю. Тогда зависимость чисел заполнения  $n_i$  от энергии  $\epsilon_i$  будет иметь вид кривых, которые изображены схематично на рис. 15.11, *a* для ферми-газа и на рис. 15.11, *б* для бозе-газа. Для сравнения на рис. 15.11, *в* представлена функция распределения Больцмана для классического

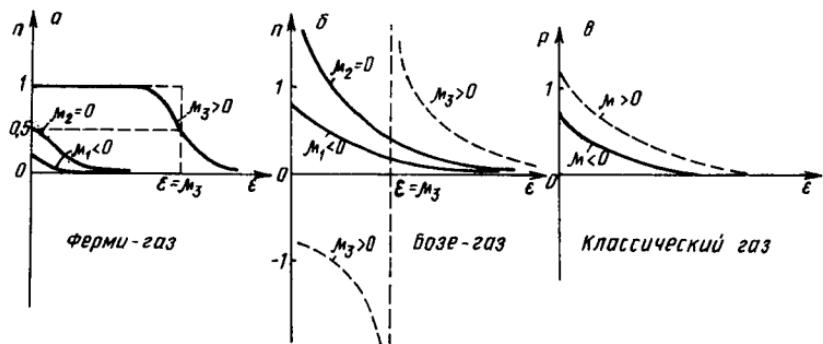


Рис. 15.11

газа (см. формулу (15.34)). При построении всех кривых химический потенциал рассматривается как параметр, значения которого лежат в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ .

Из формулы (15.36) следует, что химический потенциал  $\mu$  классического идеального газа может принимать только отрицательные значения, так как сумма под знаком логарифма всегда больше или в крайнем случае равна единице. Именно по этой причине на рис. 15.11, *в* кривая при  $\mu > 0$  изображена пунктирной линией. Отсюда следует, что в классическом газе вероятности  $n_i$  заполнения всех уровней энергии много меньше единицы, а химический потенциал  $\mu \leq 0$ .

В случае ферми-газа (см. рис. 15.11, *а*) числа заполнения всегда меньше или равны единице ( $n_i = 1$  — уровень занят,  $n_i = 0$  — уровень свободен), а химический потенциал  $\mu$  может быть как положительным, так и отрицательным. Поскольку число частиц в газе  $N = \sum n_i$ , то из рисунка видно, что при возрастании  $N$  будет увеличиваться и химический потенциал  $\mu$ , численно равный энергии  $\epsilon_F$ , соответствующей значению  $n = 1/2$ . Энергия  $\epsilon_F = \mu$  называется *энергией Ферми*.

Когда температура  $T$  стремится к нулю, то при  $\epsilon > \epsilon_F$  значения чисел заполнения  $n_i$  также стремятся к нулю, а при  $\epsilon < \epsilon_F$  они стремятся к единице. В связи с этим кривая распределения частиц ферми-газа принимает при  $T \rightarrow 0$  вид ступеньки высотой  $n = 1$  (рис. 15.12, *а*). Это

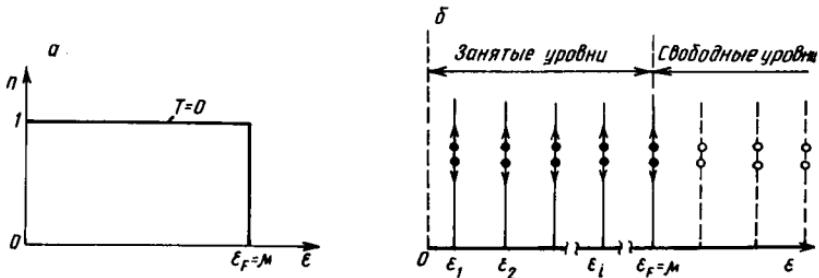


Рис. 15.12

означает, что каждое квантовое состояние с энергией  $\epsilon < \epsilon_F$  занято двумя ферми-частицами с противоположными спинами, условно направленными на рис. 15.12, *б* вверх ( $\uparrow$ ) и вниз ( $\downarrow$ ). Состояния с энергией  $\epsilon > \epsilon_F$  свободны при  $T = 0$ . При нагревании кривая распределение

ния «размывается» в окрестности энергии Ферми и приобретает вид кривой, изображенной на рис. 15.11, а для  $\mu_3 > 0$ .

В случае бозе-газа (рис. 15.11, б) химический потенциал  $\mu$  не может принимать положительные значения, иначе значения чисел заполнения  $n$  были бы отрицательными при  $\mu > 0$ .

Следует обратить внимание на предельное поведение квантовых распределений (15.58) при неограниченном возрастании температуры ( $T \rightarrow \infty$ ). В этом переходе происходит все более сильное размывание распределения конечного числа частиц по бесконечному набору уровней энергии  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \infty$ ) макроскопической системы, т. е. числа заполнения уровней стремятся к нулю ( $n_i \rightarrow 0$ ). Это означает, что в знаменателе формул (15.58) можно пренебречь единицей по сравнению с величиной  $e^{(\varepsilon - \mu)/(kT)}$ . В результате распределения Ферми — Дирака и Бозе — Эйнштейна при  $T \rightarrow \infty$  принимает вид распределения Больцмана для классического газа (см. формулу (15.33))

$$n_i = \frac{1}{e^{(\varepsilon_i - \mu)/(kT)} \pm 1} \rightarrow e^{(\mu - \varepsilon_i)/(kT)}.$$

В заключение этого параграфа заметим, что примером ферми-газа является электронный газ в металлах, а электромагнитное (тепловое) излучение, находящееся в равновесии с нагретым до температуры  $T$  телом, можно рассматривать как идеальный газ фотонов со спином, равным единице, т. е. бозе-газ. Описание равновесных свойств электронного и фотонного газов будет рассмотрено кратко в соответствующих разделах второй части данного пособия.

В ушате, корыте, лохани  
В реке, в ручейке, в океане  
И в ванне, и в бане,  
Всегда и везде —  
Вечная слава воде.

*К. Чуковский. Мойдодыр*

## 16. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ, ЖИДКОСТИ И ТВЕРДЫЕ ТЕЛА

**Роль взаимодействия в системе многих частиц.** В материале, который содержится в гл. 13—15, модель идеального газа использовалась столь широко, что может сло-

житься впечатление об универсальности уравнения Клапейрона — Менделеева как уравнения для любого состояния вещества. Не приуменьшая роль и значение этой модели в разработке теорий, описывающих разнообразные явления, следует отметить, что свойства вещества в реальных условиях существенно отличаются от свойств идеального газа. Достаточно сказать, что идеальный газ, частицы которого не взаимодействуют друг с другом, ни при каких условиях не может быть превращен в жидкое или твердое состояние. На это указывает монотонный (гиперболический) характер изотермы идеального газа (рис. 16.1). Поэтому эта модель не

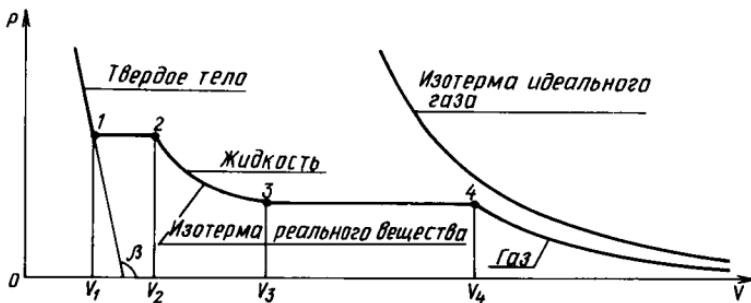


Рис. 16.1

может претендовать на описание фазовых переходов реального вещества, изотерма которого схематично изображена на том же рисунке (экспериментальное исследование изотерм углекислого газа выполнил в 1866 г. английский химик Т. Эндрюс (1813—1885)).

В расчетах с уверенностью можно использовать уравнение Клапейрона — Менделеева только при рассмотрении сильно разреженных реальных газов, т. е. при объеме  $V > V_4$ . Изломы на экспериментальных изотермах для разных веществ отражают те существенные изменения, которые проявляются при переходе от газообразного к жидкому состоянию и от жидкого к твердому. Понятно, что обсуждаемые здесь отличия между реальным веществом и моделью идеального газа, а также фазовые переходы вещества между различными агрегатными состояниями обусловлены взаимодействием частиц (атомов, молекул, ионов), образующих данную макроскопическую систему. Разнообразие силовых взаимодействий и их приближенный характер не позволяют получить универсальное уравнение состояния вещества. В каждом

конкретном случае приходится использовать различные эмпирические или приближенные теоретические зависимости, границы применимости которых всегда должны быть определены. Некоторые простейшие уравнения будут рассмотрены в следующих параграфах данной главы.

### 16.1. ФАЗОВЫЕ РАВНОВЕСИЯ И ПРЕВРАЩЕНИЯ

**Основные понятия.** В термодинамике вводится понятие *фазы* как совокупности однородных по своим свойствам частей макроскопической системы, находящихся в одинаковом агрегатном состоянии. Если при некоторой температуре  $T_1$  (рис. 16.2, *а*) в закрытом сосуде ( $V = \text{const}$ ) находится вода в равновесии с паром, т. е. *двуухфазная система*, то при квазистатическом понижении

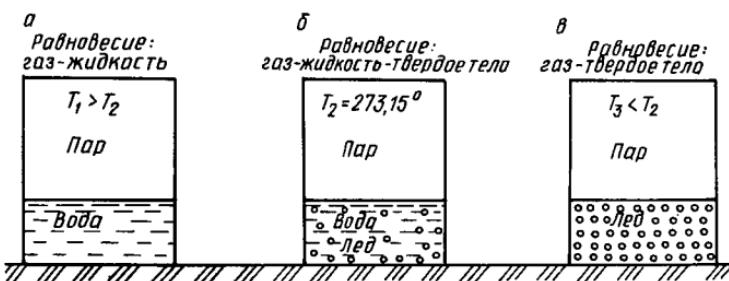


Рис. 16.2

температуры в некоторый момент времени в сосуде при  $T_2 = 273,15$  К ( $t = 0$  °C) появятся кристаллики льда и система станет *трехфазной* (рис. 16.2, *б*). Параметры состояния, в котором существуют в равновесии три фазы, определяют *тройную точку данного вещества*. При дальнейшем понижении температуры система вновь становится двухфазной (рис. 16.2, *в*), состоящей в нашем случае из льда (твердая фаза) и пара (газовая фаза). Кроме упомянутых равновесий, возможно еще равновесие между жидкостью и твердым телом, а в некоторых случаях и между различными модификациями кристаллов (полиморфные превращения).

Таким образом, в однокомпонентной системе ( $K = 1$ ), состояние которой характеризуется тремя параметрами ( $p, V, T$ ), могут быть реализованы три однофазных состояния ( $\Phi = 1$ , газ, жидкость, твердое тело), три двухфазных состояния ( $\Phi = 2$ , см. табл. 16.1) и одно трехфазное

Таблица 16.1

Вид равновесия	Характеристики состояния системы		
	$K=1$ — чистая система		
	$\Phi$	$C$	Независимо изменяемые параметры
Однофазное: газ жидкость твердое тело	1	2	$p, V \Rightarrow T = f(p, V);$ $V, T \Rightarrow p = f(V, T);$ $p, T \Rightarrow V = f(p, T)$
Двухфазное: газ-жидкость газ — твердое тело жидкость — твердое тело	2	1	$p \Rightarrow V = f_1(p), T = f_2(p);$ $V \Rightarrow p = f_1(V), T = f_2(V);$ $T \Rightarrow V = f_1(T), p = f_2(T)$
Трехфазное: газ — жидкость — твердое тело	3	0	—

( $\Phi = 3$ ) состояние. Гиббс установил, что число фаз  $\Phi$ , число компонентов смеси  $K$  и число  $C$  независимо изменяемых параметров системы ( $C$  — число термодинамических степеней свободы, см. § 13.6) удовлетворяют следующему соотношению:

$$C = K - \Phi + 2 — правило фаз Гиббса. \quad (16.1)$$

Число степеней свободы  $C$  не может быть отрицательным ( $C \geq 0$ ) и, следовательно, возможное число существующих фаз

$$\Phi \leq K + 2. \quad (16.2)$$

В однофазном состоянии системы, которое характеризуется тремя параметрами ( $p, V, T$ ), имеется возможность независимо изменять одновременно любые два ( $C = 2$ ) из трех параметров. На термодинамической  $pVT$ -диаграмме этому состоянию соответствует некоторая трехмерная область. Двухфазное состояние системы задается одной независимой переменной ( $C = 1$ ), поэтому двухфазному состоянию отвечает некоторая линия в пространстве  $p — V — T$ . Эта линия называется *кривой существования* того или иного двухфазного состояния.

При  $C = 0$  (трехфазное состояние) нет возможности изменять ни один параметр. Это означает, что такое

равновесие возможно только в некоторой точке (тройная точка), т. е. при определенных значениях температуры  $T_{tr}$ , объема  $V_{tr}$  и давления  $p_{tr}$ .

Диаграмма фазового состояния однокомпонентной системы в проекциях на плоскости  $p - V$  и  $p - T$  схематично изображена сплошной линией (рис. 16.3, а, б).

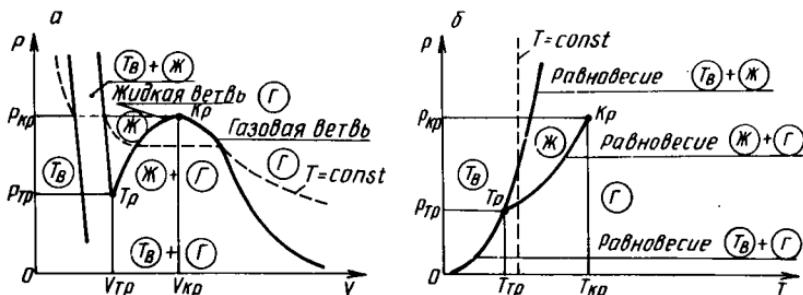


Рис. 16.3

Пунктирная линия определяет ход изотермы с заданной температурой  $T$ , большей температуры  $T_{tr}$  для тройной точки, но меньшей, чем температура  $T_{kr}$  (рис. 16.3, б), которая соответствует точке Кр диаграммы. В этой точке заканчивается кривая сосуществования для двухфазного равновесия жидкость — газ, которая на плоскости  $p - V$  (рис. 16.3, а) представляет собой кривую с максимумом при объеме  $V = V_{kr}$ . Точка Кр называется *критической точкой*, поскольку в данном состоянии ( $p_{kr}, V_{kr}, T_{kr}$ ) свойства сосуществующих жидкой и газообразной фаз совпадают. Эта точка делит кривую сосуществования равновесия жидкость — газ на жидкую (левую) и газовую (правую) пограничные ветви (см. также § 16.2).

При температуре  $T > T_{kr}$  возможно только равновесие твердое тело — жидкость, а при температуре  $T < T_{tr}$  реализуется только равновесие твердое тело — газ.

**Фазовые переходы 1-го и 2-го рода.** Наличие двух- и трехфазных равновесий в системе означает, что возможны превращения, в которых вещество из состояния 1, отвечающего одной сосуществующей фазе, переходит в состояние 2 с параметрами  $p, V, T$  другой фазы. При этом может выделяться либо поглощаться определенное количество теплоты  $\Delta Q$ , которая называется *теплотой фазового перехода*. Если в процессе превращения параметры состояния изменяются скачком на конечную величину ( $\Delta V = V_2 - V_1, \Delta Q$  и т. д.), то имеет место *фазовый*

*переход 1-го рода.* Фазовые переходы 2-го рода не сопровождаются выделением или поглощением теплоты ( $\Delta Q = 0$ ). Возможные виды фазовых переходов в простых веществах указаны в табл. 16.2 ( $\Delta Q > 0$  — соответствует поглощению, а  $\Delta Q < 0$  — выделению теплоты термодинамической системой).

Реализация фазовых переходов на опыте может осуществляться в изобарических или изотермических условиях. Примеры возможных процессов, которые сопровождаются фазовыми переходами вещества, удобно представить графически с использованием фазовой  $pT$ -диаграммы (рис. 16.4). На этой диаграмме в отличие от той, которая представлена на рис.

16.3, б, кривая существования кристалл — жидкость имеет другой наклон, а именно: производная  $dp/dT$  в данном случае меньше нуля ( $dp/dT < 0$ ), тогда как на рис. 16.3, б производная  $dp/dT > 0$ .

Из рис. 16.4 видно, что переход из состояния 1 в состояние 3 является изобарическим процессом (1—2—

нагревание твердого тела, 2 — плавание, 2—3 — нагревание жидкости), а изотермический переход 3—5 связан с расширением жидкости (3—4), кристаллизацией (точка 4) и последующим расширением вещества в твердом состоянии (4—5). Аналогично реализуются переходы 5—7, 7—9 и 9—14. Особо следует прокомментировать процесс 11—14, в котором осуществляется переход из газообразного состояния 11 в жидкое состояние 14 без фазового перехода. В этом термодинамическом процессе происходит переход системы через ряд последовательных состояний в области газа (11—12), где  $T_{11} < T < T_{kp}$ , а затем через ряд состояний с температурой  $T > T_{kp}$  (переход 12—13), которые относятся к надкритической области. Дальнейший переход из состояния 13 к состоянию 14 соответствует постепенному изменению свойств вещества в жидком состоянии.

В заключение отметим, что процесс 12— $K_p$ —13 реализуется вдоль критической изотермы ( $T = T_{kp}$ ), причем в критической точке имеет место фазовый переход 2-го рода (см. табл. 16.2).

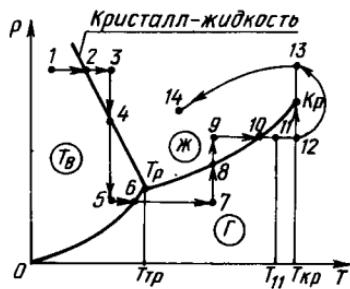


Таблица 16.2

Вид и название фазового перехода	Характеристики перехода	
	изменение объема	теплота перехода
Переходы 1-го рода:		
жидкость — газ (испарение)	$\Delta V > 0$	$\Delta Q > 0$
газ — жидкость (конденсация)	$\Delta V < 0$	$\Delta Q < 0$
кристалл — жидкость (плавление)	$\Delta V^* > 0$	$\Delta Q > 0$
жидкость — кристалл (кристаллизация)	$\Delta V^* < 0$	$\Delta Q < 0$
кристалл — газ (сублимация)	$\Delta V > 0$	$\Delta Q > 0$
газ — кристалл (конденсация)	$\Delta V < 0$	$\Delta Q < 0$
кристалл — кристалл (полиморфное превращение)	$\Delta V \neq 0$	$\Delta Q \neq 0$
Переходы 2-го рода:		
переход жидкость — газ в критической точке	$\Delta V = 0$	$\Delta Q = 0$
переход кристалл — кристалл (структурное превращение)	$\Delta V = 0$	$\Delta Q = 0$

\* В отдельных случаях, например для воды, возможен переход кристалл — жидкость с  $\Delta V < 0$ .

Поскольку при фазовых превращениях 1-го рода объем системы изменяется скачком ( $\Delta V \neq 0$ ) и выделяется или поглощается некоторое количество теплоты  $\Delta Q$ , то будут изменяться на конечную величину и другие термодинамические функции состояния (внутренняя энергия, энтропия, энタルпия и т. д.). Учитывая отсутствие универсального уравнения состояния для газов, жидкостей и твердых тел, приходится для исследования свойств вещества в различных агрегатных состояниях использовать разные и, как правило, приближенные уравнения состояния (см. § 16.2—16.4).

## 16.2. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ И СВОЙСТВА РЕАЛЬНОГО ГАЗА И ЖИДКОСТИ

**Взаимодействие атомов и молекул простых веществ.** Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что между атомами и молекулами вещества на малых расстояниях действуют силы отталкивания, а на больших — силы притяжения (см. рис. 4.13). Эти силы являются результатом квантово-механического взаимодействия элементарных частиц (электронов, протонов),

из которых состоят эти атомы или молекулы. В случае простых неполярных веществ ( $\text{Ar}$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{CCl}_4$ ) притяжение в основном обусловлено взаимодействием наведенных дипольных моментов молекул. Эти сравнительно слабые *ван-дер-ваальсовы силы* зависят от расстояния  $r$  между молекулами по степенному закону ( $F_{\text{прит}} \sim r^{-7}$ ) и, следовательно, носят короткодействующий характер. Область их действия порядка  $10^{-9}$  м, т. е. на расстояниях  $r$  больше  $10 \text{ \AA}$  эти силы практически равны нулю. Силы отталкивания проявляются как результат перекрывания волновых функций внешних электронных оболочек атомов или молекул. Это означает, что они в основном определяются «обменным квантово-механическим» взаимодействием, которое приводит к появлению очень больших сил отталкивания на малых расстояниях ( $F_{\text{от}} \sim r^{-n}$ ,  $n \geq 9$ ). Переход от отталкивания на малых расстояниях к притяжению на больших расстояниях приводит к появлению минимума на кривой зависимости потенциальной энергии взаимодействия двух частиц от расстояния  $r$  между ними ( $\Pi = f(r)$ ;  $F_r = -d\Pi/dr$ ). На расстоянии  $r = r_0$ , которое соответствует минимуму  $\Pi(r)$ , сила взаимодействия  $F_r = -d\Pi/dr$  обращается в нуль. Положение минимума определяет равновесное расстояние в случае системы из двух частиц.

В качестве примера приведем явный вид потенциальной энергии  $\Phi(r)$  взаимодействия двух молекул простых веществ (рис. 16.5):

$$\Phi(r) = 4\epsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] \quad \text{— потенциал Ленард-Джонса.} \quad (16.3)$$

Величины  $\epsilon$  и  $\sigma$ , которые являются параметрами этого потенциала, находятся в результате обработки экспериментальных данных о термодинамических свойствах каждого отдельного вещества и содержатся в различных справочниках (см., например, Справочник химика, т. 1). Из рис. 16.5 следует, что параметр  $\sigma$  определяет положение потенциальной ямы ( $r_0 = \sqrt[6]{2}\sigma$ ), а  $\epsilon$  — глубину этой ямы.

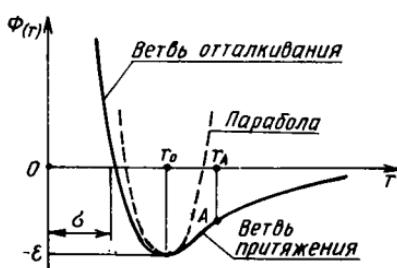


Рис. 16.5

**Задание 16.1.** Исследуйте функцию (16.3) и постройте ее график (в определенном масштабе) для молекул кислорода ( $\epsilon/k = 113$  К,  $\sigma = 3,433$  Å).

**Указание.** Определите значения функции  $\Phi(r)$  при  $r$ , стремящемся к нулю и бесконечности, а также положения минимума и точки перегиба (точка  $A$  на рис. 16.5).

Ответ.  $r_0 = \sigma \sqrt[6]{2}$ ,  $r_A = \sigma \sqrt[6]{26/7}$ .

**Задание 16.2.** Запишите выражение для средней потенциальной энергии молекулы кислорода во внешнем поле, создаваемом другой молекулой кислорода.

**Указание.** Воспользуйтесь распределением Больцмана (см. формулу (15.40)) и выражением для среднего значения функции, зависящей от координат ( $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ):

$$\langle \Phi(x, y, z) \rangle = \int_V \Phi(x, y, z) f_2(r) dx dy dz.$$

Ответ.

$$\langle \Phi(r) \rangle = \frac{\int_0^\infty \Phi(r) e^{-\Phi(r)/kT} r^2 dr}{\int_0^\infty e^{-\Phi(r)/kT} r^2 dr}. \quad (16.4)$$

**Задание 16.3.** По формуле (16.4) найдите значение средней потенциальной энергии молекулы кислорода, предположив, что она совершает гармонические колебания в окрестности потенциальной ямы (см. рис. 16.5).

**Указание.** Разложите потенциал Леннард-Джонса (см. (16.3)) в ряд Тейлора в окрестности точки  $r = r_0$  по степеням отклонения  $x = r - r_0$  и ограничьтесь тремя первыми членами ряда, т. е. воспользуйтесь приближенным соотношением

$$\Phi(r) \approx \Phi(r_0) + \Phi'(r_0)x + \frac{1}{2} \Phi''(r_0)x^2.$$

Значения интегралов вида  $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\beta x^2} dx$  найдите в прил. II.

**Уравнения Ван-дер-Ваальса.** Одно из наиболее известных приближенных уравнений состояния реального газа было предложено голландским физиком Ван-дер-Ваальсом (1837—1923). Это уравнение содержит два параметра ( $a$  и  $b$ ), с помощью которых учитывается вклад сил притяжения на больших расстояниях и сил отталкивания на малых расстояниях между молекулами реального газа (см. рис. 16.5).

Силы отталкивания противодействуют проникновению данной частицы в ту область объема сосуда, которая занята другими молекулами. Собственный объем  $V_0$ , занятый частицей (рис. 16.6), представляется как

объем сферы с некоторым эффективным диаметром  $d \sim \sigma$  ( $\sigma$  — параметр Леннард-Джонса). Поэтому «свободный объем»  $V^*$ , в котором могут свободно (как в идеальном газе) двигаться молекулы реального газа, будет на некоторую величину  $b$  меньше, чем объем  $V$ , занимаемый газообразной системой. В расчете на один моль вещества «свободный объем»  $V_m^* = V_m - b_m$  ( $V_m$  — молярный объем,  $b_m$  — поправочный коэффициент для одного моля газа).

Приближенные расчеты показывают, что объем, занятый молекулами (в расчете на одну частицу), равен учетверенному собственному объему  $V_0$  одной молекулы. Тогда поправка  $b_m = 4N_A V_0$  будет составлять только одну десятитысячную от молярного объема  $V_m$  при давлении  $p = 10^5$  Па (1 атм), а при давлении 5000 атм поправка  $b_m$  составляет уже почти 50 % от общего объема газа.

Наличие сил притяжения между молекулами приводит к дополнительному «внутреннему» давлению  $p^i$ , которое оказывается обратно пропорциональным квадрату молярного объема  $V_m$  ( $p^i = a_m/V_m^2$ ) ( $a_m$  — второй поправочный коэффициент). В результате внешнее давление  $p$ , которое необходимо приложить к реальному газу для удержания его в заданном объеме  $V$ , уменьшается по сравнению с давлением  $p^*$  в случае идеального газа (см. изотермы идеального и реального газа на рис. 16.1). Это значит, что давление  $p = p^* - a/V_m^2$ , причем свободный объем  $V^*$  и давление  $p^*$  связаны уравнением Клапейрона — Менделеева:  $p^*V_m = RT$ . Подставляя в это уравнение  $V_m^* = V_m - b_m$  и  $p^* = p + a_m/V_m^2$ , получаем приближенное уравнение состояния для одного моля реального газа ( $v = 1$ , индекс  $m$  в обозначениях молярного объема  $V_m$  и поправок  $a_m$  и  $b_m$  далее опускаем):

$$\left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT \quad \text{уравнение Ван-дер-Ваальса.} \quad (16.5)$$

Следует отметить, что уравнение Ван-дер-Ваальса оказывается в гораздо более лучшем согласии с опытными данными, чем уравнение Клапейрона — Менделеева, особенно при больших давлениях. Так, например,

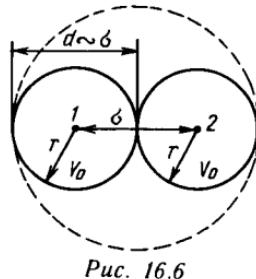


Рис. 16.6

для азота при давлении  $p = 1000$  атм отклонение опытных данных от значений, рассчитанных по уравнению (16.5), составляет около 2 %, а рассчитанных по уравнению Клапейрона — Менделеева — свыше 100 %.

**Экспериментальные изотермы реального газа и их сравнение с изотермами Ван-дер-Ваальса.** На рис. 16.7

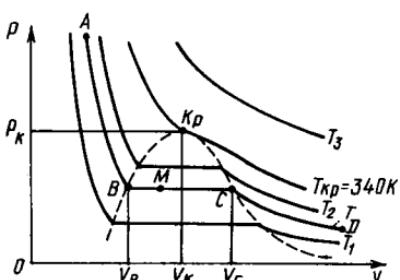


Рис. 16.7

приведено семейство экспериментальных изотерм, полученных для одного моля углекислого газа. Как видно из рисунка, для температур, меньших  $T_{kp} = 340$  К, на каждой изотерме имеется строго горизонтальный участок  $BC$ , вдоль которого оказывается постоянной не только температура  $T$ , но и давление  $p$ , а молярный объем

вещества изменяется в пределах от  $V_B$  до  $V_C$ . Длина участка  $BC$  тем меньше, чем выше температура газа. При критической температуре  $T_{kp} = 340$  К объемы  $V_B$  и  $V_C$  совпадают. Это означает, что критическая изотерма Ван-дер-Ваальса имеет точку перегиба, которая совпадает с критической точкой. Соответствующие критической точке  $K_p$  значения температуры  $T_{kp}$ , давления  $p_{kp}$  и объема  $V_{kp}$  называют *критическими*. Любую докритическую изотерму ( $T < T_{kp}$ ) можно разбить на три характерных участка  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ . На участках  $AB$  и  $CD$  давление монотонно падает при увеличении объема  $V$ . На участке  $BC$  сжатие или расширение не сопровождается изменением давления. Такая форма изотерм обусловлена тем, что на участке  $CD$  вещество находится в газообразном состоянии, на участке  $AB$  — в жидком, а на участке  $BC$  углекислота находится в двух агрегатных состояниях — частично в жидком и частично в газообразном, т. е. в двухфазном состоянии. Точка  $C$  соответствует началу процесса конденсации при изотермическом сжатии газа, а точка  $B$  — его концу. В обратном процессе изотермического расширения системы в точке  $B$  начинается процесс испарения жидкости, а в точке  $C$  он заканчивается.

Произвольная точка  $M$  в области двухфазного равновесия жидкость — газ определяет смесь, состоящую из жидкости в состоянии  $B$  и насыщенного пара в состоянии  $C$ .

Если нанести на  $pV$ -диаграмму точки  $B$  и  $C$  при различных температурах  $T$ , то получим две пограничные кривые  $B\text{Kr}$  и  $C\text{Kr}$ , смыкающиеся в критической точке  $\text{Kr}$  (рис. 16.8). Пограничная кривая  $B\text{Kr}$  отделяет однофазную область жидкого состояния вещества от двухфазной области жидкость — газ. Пограничная кривая  $C\text{Kr}$  отделяет двухфазную область от однофазной области газообразного состояния.

На фазовой диаграмме критическая точка выделена тем, что при приближении к ней стирается различие между жидким и газообразным состояниями вещества ( $V_B \rightarrow V_C$ ). В критическом состоянии обращаются в нуль скачок объема  $\Delta V = V_C - V_B$ , теплота парообразования  $\Delta Q$  и коэффициент поверхностного натяжения жидкости\*. Для изотерм, расположенных выше критической, горизон-

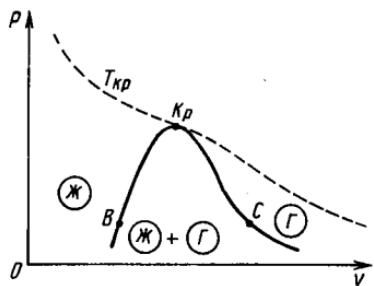


Рис. 16.8

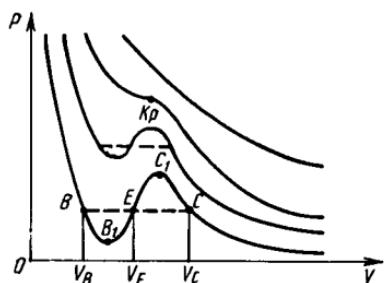


Рис. 16.9

тальный участок  $BC$  фазового перехода уже отсутствует. Отсюда следует, что газ, находящийся при температуре выше критической, нельзя изотермическим сжатием перевести в жидкое состояние.

Сопоставление экспериментальных изотерм (см. рис. 16.7) с изотермами Ван-дер-Ваальса (рис. 16.9) показывает, что превращению газа в жидкость на экспериментальных изотермах соответствуют горизонтальные участки, а на изотермах Ван-дер-Ваальса — волнообразные участки  $S$ -образной формы. Оказывается, что  $S$ -образный участок можно частично осуществить на опыте, если предпринять необходимые меры, чтобы в газе или паре не было так называемых центров конденсации. В этом случае удается газ изотермически сжать почти до состояния  $C_1$  без превращения его в жидкость (пере-

\* См. § 16.6.

охлажденный газ). Аналогично, если в сосуде отсутствуют условия для образования пузырьков пара в жидкости, то можно на опыте реализовать участок  $BB_1$  изотермы Ван-дер-Ваальса (перегретая жидкость). Состояния переохлажденного газа и перегретой жидкости являются неустойчивыми (метастабильными), именно поэтому в реальных условиях на опыте обычно наблюдаются горизонтальные участки, а не S-образные петли изотерм Ван-дер-Ваальса.

Участок  $B_1C_1$  на опыте не может быть осуществлен в принципе, поскольку на этом участке сжатие сопровождалось бы уменьшением давления ( $dp/dV > 0$ ). Это соответствует абсолютно неустойчивому состоянию системы (см. § 13.6).

Выразим значения критических параметров  $p_{kp}$ ,  $V_{kp}$  и  $T_{kp}$  через универсальную газовую постоянную  $R$  и поправки  $a$  и  $b$  из уравнения Ван-дер-Ваальса. Для этого преобразуем уравнение (16.5) к виду:

$$f(V) = V^3 - \left(\frac{RT}{p} + b\right)V^2 + \frac{a}{p}V - \frac{ab}{p} = 0. \quad (16.6)$$

Для изотерм при  $T < T_{kp}$  это кубическое относительно объема  $V$  уравнение при заданном давлении  $p$  имеет три корня ( $V_B$ ,  $V_E$ ,  $V_C$ ). Их значения при  $T = T_{kp}$  становятся одинаковыми ( $V_B = V_E = V_C = V_{kp}$ ). Для этого случая, т. е. при критической температуре, уравнение (16.6) можно записать в следующем виде:

$$(V - V_{kp})^3 = 0 \Rightarrow V^3 - 3V_{kp}V^2 + 3V_{kp}^2V - V_{kp}^3 = 0. \quad (16.7)$$

Сравнивая (16.6) с (16.7), получаем систему трех уравнений для определения  $p_{kp}$ ,  $V_{kp}$ ,  $T_{kp}$ :

$$\frac{RT_{kp}}{p_{kp}} + b = 3V_{kp}, \quad \frac{a}{p_{kp}} = 3V_{kp}^2, \quad \frac{ab}{p_{kp}} = V_{kp}^3. \quad (16.8)$$

Решая эту систему, находим выражения для критических параметров:

$$p_{kp} = \frac{a}{27b^2}, \quad V_{kp} = 3b, \quad T_{kp} = \frac{8a}{27bR}. \quad (16.9)$$

Последние соотношения позволяют по опытным данным для критических параметров  $p_{kp}$ ,  $V_{kp}$  и  $T_{kp}$  найти значения параметров  $a$ ,  $b$  и использовать их в расчетах, основанных на уравнении Ван-дер-Ваальса (см. табл. III.18 прил. III).

**Пример 16.1.** Найдем работу, совершающую молем реального газа при его изотермическом расширении, а также долю той работы, которую выполняют внутренние силы притяжения молекул ван-дер-ваальсова газа.

**Решение.** Состояние реального газа приближенно описывается уравнением Ван-дер-Ваальса:  $(p + a/V^2)(V - b) = RT$ . Поэтому давление  $p = RT/(V - b) - a/V^2$ , а работа в изотермическом процессе равна интегралу от  $p$  по объему  $V$ :

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V - b} dV - \int_{V_1}^{V_2} \frac{a}{V^2} dV = RT \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} + \\ + a \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right).$$

Второе слагаемое определяет работу  $A_{12}'$  внутренних сил притяжения между молекулами реального газа, которая определяется изменением потенциальной части внутренней энергии газа. При расширении работа  $A_{12}' = a(V_2^{-1} - V_1^{-1})$  отрицательна, тогда как первое слагаемое  $A_{12}'$ , связанное с изменением средней кинетической энергии газа (с поправкой  $b$  на отталкивание), положительно. Определим относительный вклад той и другой работы по отношению друг к другу

$$\eta = \frac{|A_{12}'|}{A_{12}'} = \frac{a(V_2 - V_1)}{RTV_1V_2 \ln [(V_2 - b)/(V_1 - b)]}, \quad V_2 > V_1. \quad (16.10)$$

**Внутренняя энергия реальных газов.** У идеального газа внутренняя энергия  $U$  равна средней энергии поступательного, вращательного и колебательного движений его молекул. Для одного моля внутренняя энергия  $U = (1/2)iRT = C_v T$ . В случае реальных газов нужно учесть еще и потенциальную энергию отталкивания\* и притяжения всех молекул друг с другом. Среднее значение энергии притяжения равно работе, которую нужно затратить, чтобы развести все молекулы на бесконечно большие расстояния ( $V \rightarrow \infty$ ). Внутреннее давление  $p' = -a/V^2$  в уравнении Ван-дер-Ваальса как раз и учитывает действие сил притяжения. Поэтому энергия взаимодействия

$$\langle E_n \rangle = - \int_V^\infty p' dV = \int_V^\infty \frac{a}{V^2} dV = -\frac{a}{V},$$

а полная внутренняя энергия

$$U = C_v T - \frac{a}{V} = f(T, V). \quad (16.11)$$

\* Вклад сил отталкивания в потенциальную энергию определяется поправкой  $b$ , которая не зависит от  $T$  и  $V$ . Поэтому этот вклад во внутреннюю энергию можно не учитывать.

Из (16.11) видно, что внутренняя энергия реального газа зависит не только от температуры, но и от объема. Поэтому для адиабатического процесса ( $\delta Q = 0$ ), когда  $dU = pdV$ , с учетом (16.11) получим

$$C_V dT + \frac{a}{V^2} dV = pdV. \quad (16.12)$$

Отсюда следует, что изменение температуры  $dT$  реального газа определяется не только работой сил давления газа при расширении (сжатии), но и за счет изменения потенциальной энергии взаимодействия молекул газа. Этот тепловой эффект проявляется при расширении газа в пустоту ( $\delta A = pdV = 0$ ), а также в опыте Джоуля — Томсона по продавливанию (дресселированию) газа через пористую перегородку.

**Эффект Джоуля — Томсона.** Сущность опыта Джоуля — Томсона состоит в следующем: в теплоизолированной трубке имеются два поршня (рис. 16.10), которые

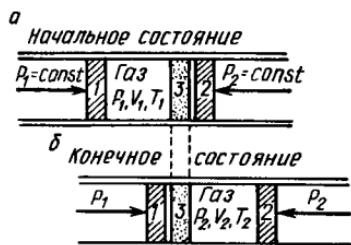


Рис. 16.10

могут перемещаться без трения. Газ, находившийся вначале слева от перегородки 3 и имевший параметры  $p_1, V_1, T_1$ , продавливается через пористую перегородку 3 с помощью поршня 1 в состояние с параметрами  $p_2, V_2, T_2$  ( $p_1 > p_2$ ). Применим к этому адиабатическому процессу первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A = 0 \Rightarrow U_2 - U_1 = -A. \quad (16.13)$$

Суммарная работа перехода системы из состояния 1 в состояние 2 складывается из работы  $A_1 = -p_1 V_1$ , связанной с изменением объема от  $V_1$  до нуля при постоянном давлении  $p_1$ , и работы  $A_2 = p_2 V_2$ , связанной с изменением объема от нуля до  $V_2$  при постоянном давлении  $p_2$ . После подстановки работы  $A = A_1 + A_2$  в (16.13) получим

$$U_2 - U_1 = p_1 V_1 - p_2 V_2. \quad (16.14)$$

Для уяснения возможных следствий, вытекающих из условия (16.14), рассмотрим два предельных случая.

а) Предположим, что газ находится в таком состоянии, когда вкладом от сил притяжения можно пренебречь

по сравнению с вкладом от сил отталкивания (параметр  $a = 0$ , а параметр  $b \neq 0$ ). Тогда уравнение Ван-дер-Ваальса упростится, причем внутренняя энергия будет содержать только кинетическую:

$$p(V - b) = RT \Rightarrow pV = RT + bp, \quad U = C_V T. \quad (16.15)$$

Подстановка (16.15) в (16.14) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} C_V(T_2 - T_1) &= R(T_1 - T_2) + b(p_1 - p_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta T &= \frac{b(p_1 - p_2)}{C_V + R}. \end{aligned} \quad (16.16)$$

Поскольку  $p_1 > p_2$ , то газ нагревается в процессе прохождения (дросселирования) через пористую перегородку ( $\Delta T > 0$  — *отрицательный эффект Джоуля — Томсона*).

б) Рассмотрим другую ситуацию, когда  $a \neq 0$ , а поправка  $b \approx 0$ . В этом случае

$$pV = RT - \frac{a}{V}, \quad U = C_V T - \frac{a}{V}$$

и, следовательно, из соотношения (16.14) получим:

$$\begin{aligned} C_V(T_2 - T_1) - \left( \frac{a}{V_2} - \frac{a}{V_1} \right) &= R(T_1 - T_2) - \left( \frac{a}{V_1} - \frac{a}{V_2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta T &= \frac{2a(V_1 - V_2)}{V_1 V_2 (C_V + R)}. \end{aligned} \quad (16.17)$$

Поскольку  $V_2 > V_1$ , то  $\Delta T < 0$  (газ охлаждается — *положительный эффект Джоуля — Томсона*).

В случае, когда нельзя пренебречь ни той, ни другой поправкой, то аналогичные преобразования приводят к следующей формуле ( $C_p = C_V + R$ ):

$$\Delta T \approx \frac{1}{C_p} \left( RT_1 \frac{b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} \right). \quad (16.18)$$

Здесь предполагается, что молярный объем  $V_2$  после дросселирования много больше, чем  $V_1$ , и поэтому поправками во втором состоянии можно пренебречь. Выражение в правой части (16.18), определяющее знак величины  $\Delta T$ , можно приравнять к нулю и получить уравнение

$$T_1 = \frac{2a}{bR} \frac{V_1 - b}{V_1}. \quad (16.19)$$

Кривая (рис. 16.11), построенная по уравнению (16.19),

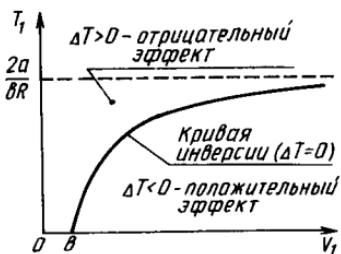


Рис. 16.11

эффекта Джоуля — Томсона, образует *кривую инверсии*. Положительный эффект ( $\Delta T < 0$ ) используется в машинах Дьюара — Линде для получения низких температур и сжижения газов (переход газ — жидкость). При этом удается получить температуры порядка 70 К для азота, 20 К для водорода и 1—4 К для гелия.

**Задание 16.4.** Рассчитайте потенциальную часть внутренней энергии для одного моля азота в газообразном состоянии при нормальных условиях, основываясь на уравнении Ван-дер-Ваальса. Определите также (см. (16.10)) относительный вклад внутренних сил притяжения в работу реального газа при изотермическом изменении молярного объема от  $V_0$  в нормальных условиях до  $V_2 = 2V_0$  (расширение) и  $V_2^* = V_0/2$  (сжатие).

**Указание.** Используйте выражение (16.11) для полной внутренней энергии и выражение (16.10) в примере 16.1. Параметры  $a$  и  $b$  приведены в прил. III, табл. III.18.

**Задание 16.5.** Покажите, что если начальная температура  $T_1 > 6,75 T_{kp}$ , то эффект Джоуля — Томсона всегда отрицателен при  $V_1 > > b$ .

**Указание.** Воспользуйтесь уравнением (16.18) для кривой инверсии и выражением (16.8) для критической температуры  $T_{kp}$ .

**Задание 16.6.** Докажите, что адиабатическое расширение любого идеального газа в пустоту всегда сопровождается положительным эффектом Джоуля — Томсона.

**Указание.** Воспользуйтесь соотношением (16.12).

**Ответ.**  $\Delta T < 0$ .

разделяет плоскость первоначальных состояний  $V_1, T_1$  на две области ( $\Delta T > 0$  и  $\Delta T < 0$ ), в пределах которых наблюдается при дросселировании либо положительный, либо отрицательный эффект Джоуля — Томсона. Совокупность параметров  $T_1$  и  $V_1$ , при которых имеет место изменение знака

### 16.3. СТРУКТУРА И МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

**Кристаллические и аморфные твердые тела.** Твердые тела разделяются на кристаллические и аморфные. Строго говоря, твердыми телами являются только кристаллические вещества, тогда как вещество в аморфном виде следует рассматривать как некое предельное состояние очень вязких жидкостей. Примером может слу-

жить стекло, которое обычно воспринимается как твердое тело. Однако в действительности стекло представляет собой бесконечно вязкую жидкость в метастабильном (неустойчивом) состоянии, которая очень медленно релаксирует к равновесному кристаллическому состоянию. При этом со временем стекло «мутнеет». Поэтому аморфные тела обладают основным свойством жидкостей — они изотропны, т. е. их различные механические и физические свойства одинаковы в различных направлениях. Свойства кристаллических тел характеризуются анизотропией, т. е. зависят от направления, что прямо связано со структурой монокристаллов. Они имеют правильное геометрическое строение в виде различных видов кристаллических решеток (см. табл. 16.3).

**Поликристаллы.** Крупные монокристаллы встречаются сравнительно редко. Большинство твердых тел состоит из множества мелких кристаллов, беспорядочно ориентированных по отношению друг к другу. Такие тела, называемые *поликристаллическими*, в силу хаотического расположения мелких кристалликов не обладают анизотропией. К ним, в частности, относятся металлы.

**Строение и симметрия кристаллов.** Кристаллическая решетка может быть образована различными частицами: ионами, атомами, молекулами. По этому признаку различают четыре вида решеток.

*Ионная решетка* образована положительными и отрицательными ионами (например, кристалл NaCl — поваренная соль). Связь между частицами в ионных решетках в основном обеспечивается кулоновским взаимодействием ионов, образующих решетку. Связь между ионами в такой решетке называют *гетерополярной* или *ионной*.

*Атомная решетка* образована находящимися в ее узлах нейтральными атомами. Каждые два соседних атома связаны друг с другом общими электронами внешних оболочек атомов, т. е. валентными электронами, которые у них обобществлены. Такую связь называют *гомополярной* или *ковалентной*. Атомную решетку имеет, в частности, алмаз.

*Молекулярная решетка* образована молекулами, которые взаимодействуют посредством ван-дер-ваальсовых сил (притяжение) и сил отталкивания (см., например, (16.3) для потенциала Леннард — Джонса). Действие этих сил значительно слабее, чем в ионных решетках

с гетерополярной связью. Например, оксид углерода ( $\text{CO}_2$ ) в твердом состоянии образует молекулярную решетку (сухой лед).

Металлическая решетка образована положительными ионами металла, окруженными так называемыми *свободными электронами*, которые представляют собой электронный газ (ферми-газ) коллективизированных валентных электронов всех атомов металлического образца. Взаимодействие катионов решетки с электронным газом приводит к эффективному притяжению между ионами одного знака, что и обеспечивает устойчивость решетки металла.

По отношению к геометрии кристаллических решеток различают семь типов кристаллических систем. Каждая из них имеет свою примитивную ячейку (параллелепипед Браве), обладающую теми же элементами симметрии, что и вся решетка в целом (табл. 16.3). Семь простых решеток для кристаллических систем различаются между собой соотношениями, которые существуют между длинами ребер  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ячеек и между углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  их граней.

Таблица 16.3

Типы решеток и соотношения для сторон и углов ячейки	Типы решеток			
	Простая	Объемно-центрированная	Гранецентрированная	Базоцентрированная
1	2	3	4	5
Кубическая: $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$				
Тетрагональная: $a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$				

1	2	3	4	5
Гексагональная: $a = b \neq c$ $\alpha = 120^\circ, \beta = \gamma = 90^\circ$				
Ромбоэдрическая: $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$				
Ромбическая: $a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$				
Моноклинная: $a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma \neq 90^\circ$				
Триклинная: $a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma$				

Дополнительное размещение частиц в центрах граней или в центре объема ячеек приводит к семи новым (сложным) решеткам. Таким образом, имеется 14 типов решеток Браве.

Исследуя элементы различных видов симметрии, русский кристаллограф А. В. Гадолин показал, что существуют 32 класса симметрии кристаллов. Совокупность всех элементов симметрии данной решетки называется ее *пространственной группой*. Б. С. Федоровым было показано, что в принципе может существовать

230 групп, которые называются *федоровскими группами*. Среди природных кристаллов обнаружены пока кристаллы для 177 федоровских групп.

**Дефекты кристаллических решеток.** Строгая периодичность расположения атомов, молекул или ионов по узлам решетки в реальных кристаллах по разным причинам нарушается. Это приводит к появлению макродефектов (трещины, поры, инородные включения) и микродефектов, которые бывают *точечными* (вакантные узлы; узлы, занятые частицами другого сорта, и внедренные атомы в междуузлия) и *линейными*. Линейные дефекты, называемые *дислокациями*, нарушают правильное чередование атомных плоскостей. Краевая дислокация связана с наличием лишней атомной полуплоскости в решетке (рис. 16.12, а), что приводит к нарушению периодичности в окрестности атомной линии, образованной крайними узлами полуплоскости. Винтовую дислокацию можно представить как результат мысленного «разреза» кристалла по атомной полуплоскости с последующим смещением на один период решетки двух атомных полуплоскостей, находящихся по разные стороны от этого разреза (рис. 16.12, б).

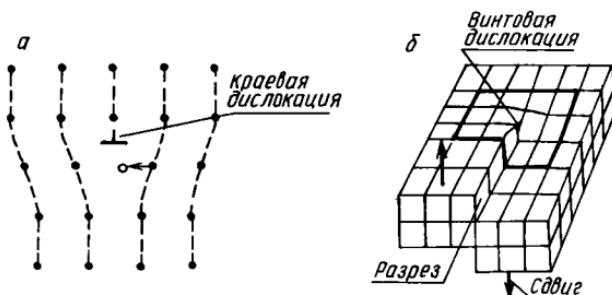


Рис. 16.12

Положение дислокаций в кристалле может меняться во времени, т. е. дислокации способны двигаться по кристаллу как некие нематериальные геометрические объекты. Для их перемещения не нужно смещаться одновременно всем атомам каких-либо частей кристалла, достаточно перестроиться атомам в непосредственной окрестности ядра дислокации. В случае краевой дислокации для ее перемещения вправо на один период решетки нужно атомам только одного ряда слегка сместиться в направлении стрелки в новое положение, отмеченное

светлым кружком на рис. 16.12, а. Такая перестройка не требует значительных энергетических затрат и это определяет большую подвижность дислокаций реальных кристаллов.

**Обобщенный закон Гука.** Упругие деформации растяжения (сжатия) и сдвига приводят к возникновению нормальных и касательных напряжений в кристаллическом твердом виде. Связь между относительными деформациями  $\epsilon$  и напряжениями  $\sigma$  определяется законом Гука (см. (9.3) и (9.4)). В общем случае деформация растяжения (сжатия) характеризуется тремя удлинениями образцов материала вдоль трех осей  $x, y, z$  ( $\epsilon_x = \epsilon_{xx}, \epsilon_y = \epsilon_{yy}, \epsilon_z = \epsilon_{zz}$ ), а деформация сдвига  $\epsilon_t$  может быть реализована в различных координатных плоскостях ( $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}, \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy}, \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx}$ ). Поэтому напряженное состояние выделенного объема  $\Delta V$  кристалла как сплошной среды будет характеризоваться **тензором деформаций**  $\hat{\epsilon}$  и **тензором напряжений**  $\hat{\sigma}$  ( $\sigma_x = \sigma_{xx}, \sigma_y = \sigma_{yy}, \sigma_z = \sigma_{zz}$ ):

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix}, \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (16.20)$$

Нормальные ( $\sigma_n = \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ) и касательные ( $\sigma_t = \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$ ) напряжения указаны на рис. 16.13 для трех граней прямоугольного элементарного параллелепипеда со

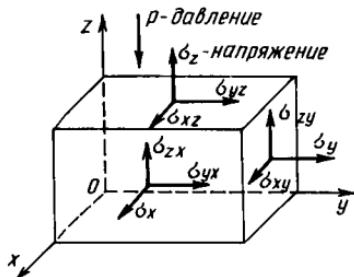


Рис. 16.13

сторонами  $\Delta x, \Delta y$  и  $\Delta z$  ( $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ ). Компоненты тензоров  $\hat{\epsilon}$  и  $\hat{\sigma}$  связаны **обобщенным законом Гука**:

$$\begin{aligned} \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) &= E\epsilon_x, \quad \sigma_{xy} = G\epsilon_{xy}, \\ \sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x) &= E\epsilon_y, \quad \sigma_{yz} = G\epsilon_{yz}, \\ \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) &= E\epsilon_z, \quad \sigma_{xz} = G\epsilon_{xz}. \end{aligned} \quad (16.21)$$

Здесь  $E$  — модуль Юнга,  $G$  — модуль сдвига, а  $\mu$  — коэффициент Пуассона, который определяется как отно-

шение относительного изменения поперечного размера стержня ( $\varepsilon_{\perp} = \Delta l_{\perp}/l_{\perp}$ ) к относительному изменению его длины ( $\epsilon = \Delta l/l$ ) при одностороннем растяжении или сжатии

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\epsilon} = \frac{\Delta l_{\perp}/l_{\perp}}{\Delta l/l} \text{ — коэффициент Пуассона.} \quad (16.22)$$

Если образец находится в состоянии всестороннего сжатия, то приложенное нормальное напряжение  $\sigma = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$  пропорционально относительному изменению его объема:

$$\sigma = K^* \frac{\Delta V}{V}, \quad K^* \text{ — модуль объемного сжатия.} \quad (16.23)$$

Поскольку модули Юнга, сдвига и всестороннего сжатия связаны двумя уравнениями (см. пример 16.2)

$$E = 3(1 - 2\mu)K^*, \quad E = 2G(1 + \mu), \quad (16.24)$$

то из четырех характеристик упругих (механических) свойств твердого тела ( $E, G, K^*, \mu$ ) независимыми являются только какие-либо две величины, определяемые обычно экспериментально (см. прил. III, табл. III.3—III.5).

**Пример 16.2.** Установим связь между относительным изменением объема  $V$  прямоугольного параллелепипеда ( $V = l_x l_y l_z$ ) и относительными изменениями его ребер при всестороннем сжатии, когда нормальное напряжение  $\sigma = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ .

**Решение.** Относительное изменение объема  $\Delta V/V$  равно изменению логарифма объема  $V$ :  $\Delta(\ln V) = \Delta V/V$ . С другой стороны, поскольку объем  $V = l_x l_y l_z$ , то

$$\frac{\Delta V}{V} = \Delta \ln V = \Delta(\ln l_x + \ln l_y + \ln l_z) = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z. \quad (16.25)$$

Таким образом, относительное изменение объема равно сумме линейных деформаций  $\epsilon_x, \epsilon_y$  и  $\epsilon_z$ . Подставим в (16.25) выражения для  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ , которые следуют из обобщенного закона Гука (см. (16.21)). При  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$  с учетом (16.23) получим связь между  $K^*$  и  $E$ :

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu) \Rightarrow K^* = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}. \quad (16.26)$$

Аналогичные расчеты для случая чистого сдвига ( $\Delta V = 0$ ) приводят к уравнению связи между  $E$  и  $G$  (см. (16.24)).

**Пластическая деформация, текучесть и предел прочности.** Упругая деформация кристаллов является обрати-

мой, поскольку после снятия напряжений размеры и форма тела полностью восстанавливаются. Максимальное напряжение  $\sigma_1$ , при котором деформации еще имеют упругий характер, называется *пределом упругости* (рис. 16.14).

При дальнейшем увеличении напряжения  $\sigma$  деформация  $\epsilon$  растет на участке  $AB$  более быстро, чем на линейном участке  $OA$ , соответствующем упругой деформации (закон Гука  $\sigma = E\epsilon$ ). Нелинейный закон деформации  $AB$  связан с *необратимой пластической деформацией тела*. При уменьшении нагрузки из состояния  $B$  процесс уменьшения деформации определяется линией  $BB'$  ( $OB'$  — остаточная деформация образца).

Участок  $BC$  определяет область *текучести* материала, когда при практически постоянном напряжении  $\sigma_2$ , называемом *пределом текучести*, размеры тела увеличиваются ( $\epsilon$  — возрастает).

После некоторой точки  $C$  (при наличии текучести) или после точки  $B$  (при отсутствии текучести) кривая деформации может иметь самый разнообразный вид, однако во всех случаях при определенном напряжении для каждого материала наступает его разрушение. Напряжение  $\sigma_{II}$ , соответствующее разрушению, называется *пределом прочности* (см. табл. III.6 прил. III).

Следует заметить, что материал, испытавший пластическую деформацию при повторном деформировании, снова подчиняется закону Гука на начальном этапе, причем предел упругости  $\sigma'_1$  становится больше, чем  $\sigma_1$ . Происходит механическое упрочнение материала. Для упрочнения широко используется также температурная закалка и создание сплавов путем внесения различных добавок — примесей.

**Молекулярный механизм прочности.** Сравнение экспериментальных данных с теоретическими оценками для идеальных кристаллов позволяет сделать вывод о том, что наличие дефектов уменьшает предел прочности. При этом решающую роль играет концентрация дислокаций и их способность двигаться по кристаллу. Различные воздействия на кристаллический образец, затрудняющие перемещение дислокаций по его объему, приводят к упроч-

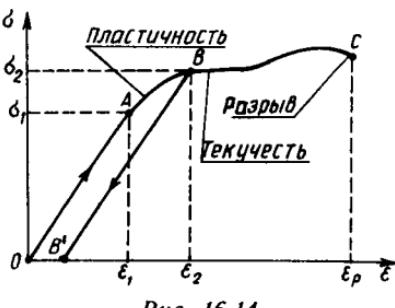


Рис. 16.14

нению материала. Для этого чаще всего вводят специальные примеси. С другой стороны, ясно, что уменьшение концентрации дефектов в решетке должно приводить к повышению прочности, так как в идеальном кристалле вообще нет условий для перестройки атомов по вакационному механизму (путем перескоков атомов в соседние вакантные узлы).

**Уравнение состояния твердого тела.** Уравнение (16.23) определяет избыточное напряжение  $\sigma$ , вызванное изменением объема  $V$  по отношению к некоторому исходному объему  $V_0$  при температуре  $T_0$ . Если учсть внешнее давление  $p_0$ , соответствующее температуре  $T_0$  и объему  $V_0$ , то для давления  $p = p_0 - \sigma$  можно записать приближенное уравнение

$$p = p_0 - K^* \frac{V - V_0}{V_0} \quad \text{изотерма} \quad T = T_0 = \text{const.} \quad (16.27)$$

Модуль  $K^*$  для изотермического всестороннего сжатия зависит, вообще говоря, от температуры. Однако при обычных условиях ( $T \sim 300$  К) величина  $K^*$  практически не изменяется и поэтому является характеристикой упругих свойств материала, значение которой находится из опыта.

Это означает, что изотерма твердого тела на  $pV$ -диаграмме (см. рис. 16.1) будет приближенно изображаться отрезком прямой, тангенс угла наклона которой связан с модулем  $K^*$  ( $\operatorname{tg} \beta = dp/dV = -K^*/V_0$ ).

Известно, что при нагревании тела в изобарических условиях его объем возрастает по линейному закону:

$$V = V_0[1 + \alpha_V(T - T_0)] \quad \text{изобара} \quad p = p_0 = \text{const.} \quad (16.28)$$

Коэффициент  $\alpha_V$  для объемного расширения тела связан с коэффициентом  $\alpha_l$  линейного расширения (для изотропного тела  $\alpha_V = 3\alpha_l$ , см. пример 16.2). Их значения для некоторых веществ представлены в табл. III.19—III.21 прил. III. Увеличение объема и размеров тела обязано ангармоническим колебаниям атомов в окрестности непарabolической потенциальной ямы (см. рис. 16.5), которые приводят к увеличению среднего расстояния между соседними атомами решетки при увеличении

амплитуды этих колебаний, т. е. при нагревании. Качественно это можно продемонстрировать на примере колебаний двух молекул с потенциалом взаимодействия Леннард — Джонса (см. (16.3) и рис. 16.5). На рис. 16.15 изображены средние положения молекул  $r_1^*$  и  $r_2^*$  для колебаний, которые происходят в пределах от  $A_1$  до  $B_1$  и  $A_2$  до  $B_2$  соответственно. Во втором случае амплитуда ангармонических колебаний больше (температура выше), чем в первом случае. В результате увеличивается среднее расстояние между молекулами ( $r_2^* > r_1^*$ ), т. е. происходит расширение кристаллической решетки при нагревании.

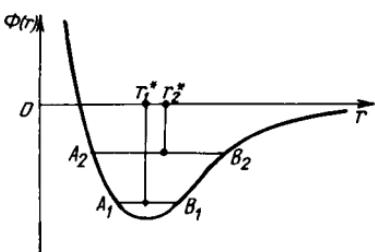


Рис. 16.15

#### 16.4. ТЕПЛОЕМКОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

**Классическая теория теплоемкости\***. В основу положены два основных предположения.

1. Атомы, колеблющиеся вблизи узлов атомной решетки, являются пространственными осцилляторами с тремя колебательными степенями свободы. Поэтому в соответствии с классическим законом о равномерном распределении энергии по степеням свободы (см. (14.22)) энергия одного такого осциллятора равна  $ikT$  ( $i = 3$ ).

2. Все колеблющиеся атомы решетки образуют систему из  $N$  независимых осцилляторов. В связи с этим для одного моля вещества в кристаллическом состоянии внутренняя энергия

$$U = N_A \cdot ikT = iRT = 3RT. \quad (16.29)$$

Поскольку  $U$  зависит только от температуры, то теплоемкости  $C_p$  и  $C_v$  будут совпадать ( $C_p = C_v \equiv C$ ):

$$C = \frac{dU}{dT} = 3R \simeq 25 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К}). \quad (16.30)$$

\* Экспериментальные данные для теплоемкости некоторых веществ в газообразном, жидким и твердом состояниях приведены в табл. III.22—III.28 прил. III.

Полученный результат находится в согласии с экспериментально установленным законом Дюлонга и Пти (1819 г.) для химически простых кристаллических тел. В дальнейшем оказалось, что этот закон справедлив только при обычных (комнатных) температурах, а при

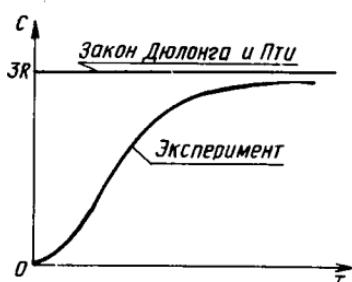


Рис. 16.16

штейном и Дебаем при формулировании квантовых моделей теплоемкости кристалла.

**Модель Эйнштейна.** При определении теплоемкости кристалла А. Эйнштейн сохранил без изменения второе положение классической механики (независимость осцилляторов), а в первое положение ввел гипотезу Планка (1900), согласно которой энергия осциллятора может принимать только вполне определенные значения  $\epsilon_n = nh\nu$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\nu$  — частота осциллятора).

Средняя энергия такого (квантового) осциллятора

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1} \quad (16.31)$$

была получена путем усреднения энергии  $\epsilon_n$  с помощью распределения Больцмана (см. (15.34)), т. е. по формуле

$$\langle \epsilon \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n A e^{-\epsilon_n/(kT)}.$$

Внутренняя энергия для  $N_A$  независимых трехмерных осцилляторов будет иметь следующий вид:

$$U = 3N_A \langle \epsilon \rangle = \frac{3N_A h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1}.$$

Рассмотрим два предельных случая, когда  $T \rightarrow 0$  и  $T \rightarrow \infty$ . При  $T \rightarrow 0$  в знаменателе можно пренебречь единицей. Тогда получим

$$U_0 \simeq 3N_A h\nu e^{-h\nu/(kT)} \Rightarrow C_0 = \frac{dU_0}{dT} = \frac{3R(h\nu)^2}{(kT)^2} e^{-h\nu/(kT)} \rightarrow 0.$$

при низких температурах (рис. 16.16) теплоемкость кристалла стремится к нулю, как того и требует третье начало термодинамики (см. § 13.5). Понятно, что причины несовпадения опытных данных и классического подхода к определению теплоемкости кристалла содержатся в двух исходных положениях теории. Они были уточнены Эйнштейном и Дебаем при формулировании квантовых моделей теплоемкости кристалла.

Если  $T \rightarrow \infty$ , то  $e^{hv/(kT)}$  можно разложить в ряд по  $x = hv/(kT)$  ( $e^x \approx 1 + x$ ). В этом случае получаем классический результат:

$$U_{\infty} \approx 3N_A h v \frac{kT}{hv} = 3RT \Rightarrow C_{\infty} = \frac{dU}{dT} = 3R.$$

Итак, полуквантовая модель Эйнштейна качественно правильно описывает экспериментальную кривую зависимости  $C$  от  $T$ , однако в количественном отношении имеются различия. Отметим, что в модели Эйнштейна теплоемкость  $C$  стремится к нулю по экспоненциальному закону, тогда как экспериментальная зависимость имеет степенной вид:  $C \sim T^3$  (см. рис. 16.16). Несоответствие теплоемкости  $C$  кристалла, рассчитанной по модели Эйнштейна, экспериментальным данным при  $T \rightarrow 0$  обусловлено тем, что в модели Эйнштейна кристалл рассматривается как совокупность независимых квантовых осцилляторов, колеблющихся с одинаковой частотой в окрестности узлов решетки. Но это положение справедливо лишь при достаточно высоких температурах, когда энергия теплового возбуждения атомов превышает значение кванта энергии колебательного движения ( $kT > \hbar\omega_0$ ).

**Модель Дебая.** В 1914 г. голландский физик П. Дебай (1884—1966) разработал последовательную квантовую теорию теплоемкости кристаллов, в которой учтено взаимодействие атомов или молекул, приводящее к их коллективному движению, представляющему собой упругие (поперечные и продольные стоячие волны). Механизм возбуждения коллективного движения эквивалентен механизму возникновения звука в твердом теле, когда смещение одной частицы из положения равновесия передается соседней, затем следующей и т. д. (см. гл. 9). Основные исходные положения модели Дебая сводятся к следующему:

1. Система атомов или молекул кристалла рассматривается как совокупность связанных квантовых осцилляторов, частота  $\omega_i$  колебаний которых меняется от нуля до некоторого максимально возможного значения  $\omega_{\max}$ , характерного для каждого кристалла ( $0 \leq \omega_i \leq \omega_{\max}$ ). Энергия таких колебаний связана с частотой  $\omega_i$  формулой, аналогичной формуле Планка:  $E_i = \hbar\omega_i$  (см. § 12.1 и § 14.4).

2. Упругие волны, возникающие в кристалле, представляют собой результат коллективного движения кван-

товых осцилляторов, описывающих колебательное движение атомов или молекул в окрестности узлов решетки.

Выполненные Дебаем расчеты показали, что внутренняя энергия одного моля кристалла определяется выражением

$$U = 9R \frac{\hbar}{k \omega_{\max}^3} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad (16.32)$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $k$  — постоянная Больцмана.

Для анализа выражения (16.32) удобно при интегрировании перейти к безразмерной переменной  $\xi = \hbar\omega/kT$  ( $\xi$  — кси) и ввести параметр модели  $\theta_D$  — температуру Дебая, определив его выражением  $k\theta_D = \hbar\omega_{\max}$ . Тогда формула (16.32) для внутренней энергии преобразуется к следующему виду:

$$U = 9RT \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1}. \quad (16.33)$$

При  $T \rightarrow 0$  отношение  $\theta_D/T \rightarrow \infty$ . Поэтому верхний предел интеграла (16.33) обращается в бесконечность и интеграл вычисляется в пределах от 0 до  $\infty$  (см. прил. II, табл. II.2)

$$\lim_{T \rightarrow 0} \int_0^{\theta_D/T} \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Таким образом, внутренняя энергия и теплоемкость атомного или молекулярного кристалла при  $T \rightarrow 0$  определяются по формулам:

$$U = \frac{3}{5} \pi^4 RT \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3, \quad C = \frac{dU}{dT} \sim T^3, \quad (16.34)$$

которые находятся в хорошем согласии с экспериментом для кристаллов при низких температурах.

При  $T \gg \theta_D$  верхний предел интегрирования в (16.33) близок к нулю и поэтому можно записать, что  $e^\xi \approx 1 + \xi$ . В результате интегрирования (см. выражение (16.33)) получим асимптотическую зависимость для высоких температур ( $T \gg \theta_D$ ):

$$U = 9RT \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \xi^2 d\xi = 3RT, \quad (16.35)$$

которая согласуется с классическим законом Дюлонга и Пти.

Итак, квантовая теория теплоемкости Дебая позволила описать экспериментальные данные во всем интервале температур (от нуля до бесконечности).

**Фононы.** При рассмотрении модели Дебая отмечалось, что взаимодействие атомов или молекул в узлах кристаллической решетки приводит к появлению в кристалле упругих стоячих волн. Такие волны в силу корпускулярно-волнового дуализма можно описать, введя понятие *кванта энергии упругой волны*, или *фонона*. Энергия  $\epsilon$  фона определяется в соответствии с формулой Планка для фотона ( $\epsilon = \hbar\omega$ ), а импульс  $p$  связан с волновым вектором  $k$  ( $k = 2\pi/\lambda$ ) соотношением  $p = \hbar k$ , которое аналогично формуле де Броиля (см. (12.3) и (15.15)) для свободной квантовой микрочастицы ( $\lambda = h/(mv)$ ,  $p = mv = h/\lambda = \hbar k$ ).

Поскольку фонон описывает корпускулярные свойства, то для него используют также термин «*квазичастица*». Возможность введения понятия фона на для учета коллективного движения атомов в кристалле обусловлена тем, что среднее значение колебательной энергии системы связанных атомов в кристалле приближенно равна сумме энергий таких фононов. А это значит, что совокупность фононов можно рассматривать как идеальный газ квазичастиц, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна (т. е. фононы являются бозонами, поскольку имеют целочисленный спин).

В качестве иллюстрации практического использования представления о фононах рассмотрим вывод формулы (16.32) для внутренней энергии кристалла. Это позволит также продемонстрировать применение методов статистической физики, рассмотренных в гл. 15.

В статистической физике среднее значение определяется формулой (15.12), которая для внутренней энергии идеального газа бозонов преобразуется к следующему выражению:

$$U = \int_0^{\infty} \epsilon f(\epsilon) d\epsilon = \int_0^{\epsilon_{\max}} \epsilon n(\epsilon) \rho(\epsilon) d\epsilon. \quad (16.36)$$

Здесь  $\epsilon$  — энергия микрочастицы;  $f(\epsilon)$  — функция распределения бозонов по энергии, выраженная через числа заполнения  $n(\epsilon)$  (см. формулу (15.58)) и плотность состояний  $\rho(\epsilon)$ , т. е. число квантовых микросостояний

системы бозонов, приходящихся на единичный интервал энергии  $\epsilon$ .

Интегрирование в (16.36) выполняется от нуля до некоторой максимальной энергии, которая характерна для каждого кристалла и выражается через температуру Дебая:  $\epsilon_{\max} = \hbar\omega_{\max} = k\theta_D$ .

Для идеального газа фононов в кристалле (бозе-газ) из (15.58) (при химическом потенциале фононов  $\mu$ , равном нулю) получаем

$$n(\epsilon) = \frac{1}{e^{\epsilon/kT} - 1}. \quad (16.37)$$

Подсчет числа микросостояний для одного моля фононов с энергией  $\epsilon$  приводит к функции плотности состояний

$$\rho(\epsilon) = 9N_A(k\theta_D)^{-3}\epsilon^2. \quad (16.38)$$

Подстановка выражений (16.37) и (16.38) в (16.36) и использование безразмерной переменной интегрирования  $\xi = \epsilon/kT = \hbar\omega/kT$  приводит к выражению

$$U = 9RT \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1},$$

которое в точности совпадает с формулой для внутренней энергии кристалла в модели Дебая (см. (16.33)).

## 16.5. СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА В ОБЛАСТИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

**Нормальные и аномальные вещества.** На рис. 16.17 представлена пространственная фазовая диаграмма нормального вещества, для которого производная  $dp/dT > 0$  (см. рис. 16.3). В этом случае фазовый переход кристалл — жидкость сопровождается увеличением молярного объема ( $V_\infty > V_\tau$ ). У аномальных веществ производная  $dp/dT < 0$  (см. рис. 16.4), поэтому при повышении давления понижается температура плавления, и такие вещества могут оставаться жидкими до очень низких температур. Если сопоставить плоские  $pV$ - и  $pT$ -диаграммы (см. рис. 16.3) с про-

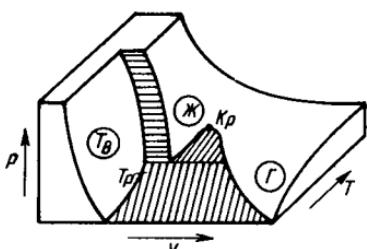


Рис. 16.17

некоторой температурой  $T_f$ . Кристаллы, имеющие отрицательную температуру плавления, называются аномальными. У аномальных веществ производная  $dp/dT < 0$  (см. рис. 16.4), поэтому при повышении давления понижается температура плавления, и такие вещества могут оставаться жидкими до очень низких температур. Если сопоставить плоские  $pV$ - и  $pT$ -диаграммы (см. рис. 16.3) с про-

странственной  $pVT$ -диаграммой, то сразу можно наглядно представить ход кривых существования всех фазовых переходов и их взаимное расположение.

**Теплоемкость в окрестности фазового перехода.** Результаты теоретических и экспериментальных исследований теплоемкости вещества, которые рассмотрены в гл. 13—16, относятся к устойчивым гомогенным газообразным и твердым фазам, находящимся вдали от точек фазовых переходов. Теплоемкость жидкостей определяется, как правило, только экспериментально, поскольку при теоретическом рассмотрении свойств реальных жидкостей встречается ряд труднопреодолимых в математическом отношении проблем. Это еще в большей мере относится к области фазовых переходов, где теплоемкость возрастает по обе стороны от точки фазового перехода, а в самой точке имеет место конечный либо даже бесконечный скачок.

Для примера на рис. 16.18 приведена зависимость теплоемкости  $C_V$  от температуры для аргона при объеме, равном критическому ( $V = V_{kp}$  — критическая изохора). В точке фазового перехода ферромагнетика (точка Кюри) аномальное возрастание теплоемкости маскируется сравнительно большой дебаевской теплоемкостью кристаллической решетки (рис. 16.19).

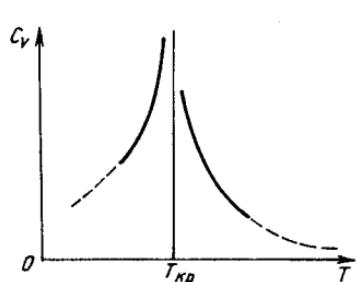


Рис. 16.18

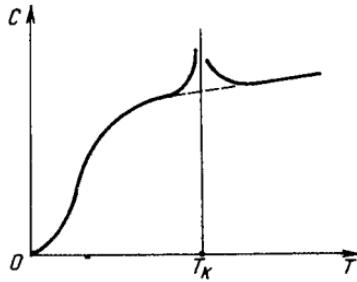


Рис. 16.19

Во всех случаях независимо от вида фазового перехода и химической природы вещества аномальное поведение теплоемкости обязано все возрастающей роли флуктуаций (см. гл. 15) в системе многих частиц, которые нарастают по мере приближения к линии фазового перехода.

**Фазовая диаграмма жидкого гелия.** Среди всех веществ гелий занимает особое место, поскольку при давлении ниже 3 МПа он остается в жидком состоянии при

сколь угодно низкой температуре. Диаграмма состояния гелия показана на рис. 16.20. При температуре ниже тройной точки ( $T_{Tp} \approx 2\text{K}$ ) не происходит переход гелия в твердое состояние, как это имеет место в обычных (нормальных и аномальных) веществах. Происходит переход из одного жидкого состояния (He-I) к другому жидкому состоянию (He-II). В окрестности линии фазового перехода  $AB$  теплоемкость  $C_V$  изображается линией (рис. 16.21), имеющей вид греческой буквы  $\lambda$  ( $\lambda$  — лямбда), поэтому переход известен как  $\lambda$ -переход.

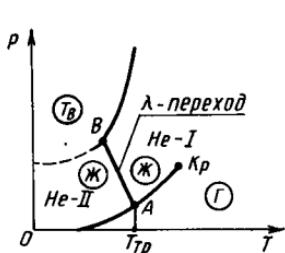


Рис. 16.20

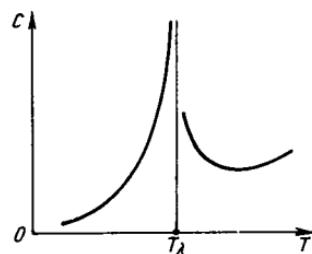


Рис. 16.21

Гелий в модификациях He-I и He-II представляет собой бесцветные жидкости, которые не отличаются по внешнему виду, однако их свойства сильно отличаются. Оказывается, что при реализации  $\lambda$ -перехода от гелия-I к гелию-II отсутствует теплота фазового перехода ( $\Delta Q = 0$ ) и, следовательно, это переход 2-го рода. He-II обладает уникальными свойствами — *сверхтекучестью и сверхтеплопроводностью*.

**Уравнения равновесия фаз и формула Клапейрона — Клаузиуса.** Изотермы ( $T = \text{const}$ ) реального вещества в точках фазового перехода имеют горизонтальные участки, соответствующие сохранению постоянного значения давления в гетерогенной области, т. е. в области фазового перехода. Поскольку состояние однокомпонентной системы задается двумя независимыми параметрами, например давлением  $p$  и температурой  $T$ , то все термодинамические величины можно рассматривать как функции от этих двух переменных. В данном случае химический потенциал  $\mu$  является функцией  $p$  и  $T$  ( $\mu = \mu(p, T)$ ). Постоянство  $p$  и  $T$  в точке перехода означает, что химический потенциал  $\mu$  также имеет определенное значение, поскольку  $\mu$  является однозначной функцией состояния системы. Таким образом в точке фазового перехода выполняются три условия:

$$\begin{aligned} T = \text{const} &— \text{термическое равновесие}, \\ p = \text{const} &— \text{механическое равновесие}, \\ \mu = \text{const} &— \text{химическое равновесие}. \end{aligned} \quad (16.39)$$

Для двух сосуществующих фаз химические потенциалы  $\mu_1$  и  $\mu_2$  равны. Поэтому, продифференцировав уравнение  $\mu_1(p, T) = \mu_2(p, T)$  по температуре  $T$ , получим дифференциальное соотношение вида:

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial T} + \frac{\partial \mu_1}{\partial p} \frac{dp}{dT} = \frac{\partial \mu_2}{\partial T} + \frac{\partial \mu_2}{\partial p} \frac{dp}{dT}. \quad (16.40)$$

Поскольку, согласно (13.68),  $\mu(p, T) = (\partial G / \partial N)_{p, T}$ , то  $dG = \mu dN$ , а потенциал Гиббса  $G = \mu N$ . Два других соотношения (13.68) определяют энтропию  $S$  и объем  $V$  системы  $N$  частиц:

$$\begin{aligned} S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p, N} &= -N\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_p, \quad V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T, N} = \\ &= N\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_T. \end{aligned} \quad (16.41)$$

С учетом (16.41) из соотношения (16.40) следует уравнение, которое устанавливает связь между производной  $dp/dT$  и значениями энтропии и объема двух сосуществующих фаз:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{S_2 - S_1}{V_2 - V_1}. \quad (16.42)$$

Выразив изменение энтропии  $\Delta S = S_2 - S_1$  через теплоту фазового перехода  $\Delta Q \equiv q$  ( $\Delta S = \Delta Q/T \equiv q/T$ ), получим уравнение Клапейрона — Клаузиуса

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T(V_2 - V_1)}. \quad (16.43)$$

Величина  $q$  является удельной либо молярной теплотой парообразования (переход жидкость — газ) или теплотой кристаллизации (переход жидкость — кристалл), а  $V_1$  и  $V_2$  соответственно удельные либо молярные объемы сосуществующих фаз (см. табл. III.29 и III.30.)

## 16.6. МОЛЕКУЛЯРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ФАЗ

**Общие сведения о свойствах реальных жидкостей.**  
По своей структуре и характеру движения молекул

жидкости занимают промежуточное положение между газами и твердыми кристаллическими телами. Газ характеризуется большой степенью разреженности и полным беспорядком в пространственном распределении частиц в объеме. Идеальный кристалл, наоборот, характеризуется более или менее плотной упаковкой частиц и полностью упорядоченным их расположением в некоторой пространственной решетке (имеет место  *дальний порядок*). Плотность жидкости по своей величине приблизительно на 10 % меньше плотности соответствующих твердых тел. Следовательно, частицы жидкости почти так же плотно расположены в пространстве, как и в твердых телах. Однако в жидкостях упорядоченность расположения частиц сохраняется только на расстояниях, равных нескольким молекулярным расстояниям, т. е. имеет место так называемый  *ближний порядок*.

В жидкостях среднее расстояние между молекулами того же порядка, что и их размеры. Поэтому перемещение частиц в объеме жидкости крайне затруднено. Согласно Я. И. Френкелю, молекула жидкости в течение некоторого времени колеблется относительно определенного положения равновесия, затем под воздействием окружающих частиц меняет место своего равновесия, перемещаясь на расстояние порядка размера молекулы. Таким образом, некоторая часть молекул жидкости ведет «кочующий» образ жизни. Доля таких молекул возрастает с ростом температуры. Среднее время  $\tau$  оседлой жизни молекул связано с периодом их колебаний  $\tau_0$  соотношением  $\tau = \tau_0 e^{E_a/(kT)}$ , где  $E_a$  — энергия активации частиц, т. е. та энергия, которую нужно сообщить частице для ее перехода через потенциальный барьер в соседнее положение равновесия.

В жидкостях молекулы находятся значительно ближе друг к другу, чем в газах. Поэтому ван-дер-ваальсовы силы межмолекулярного воздействия играют в жидкостях преобладающую роль. Оценка внутреннего молекулярного давления  $p' = a/V^2$  (см. уравнение Ван-дер-Ваальса) дает для воды огромную величину:  $\sim 17\,000$  атм. Столь большие значения молекулярного давления обусловливают слабое дополнительное изменение объема жидкостей при их всестороннем сжатии, т. е. жидкости обладают малой сжимаемостью (гл. 8). Коэффициент сжимаемости жидкости определяется из соотношения  $k = -V_0^{-1}dV/dp$ , где  $dV$  — уменьшение первоначального объема  $V_0$  при увеличении давления на  $dp$ . Коэффи-

циент сжимаемости  $k$  уменьшается с увеличением давления и сильно возрастает с увеличением температуры. Для большинства жидкостей  $k$  имеет порядок  $10^{-5}$ — $10^{-6}$  Па<sup>-1</sup>.

В отличие от газов жидкости обладают значительно большей вязкостью. При этом с увеличением температуры вязкость жидкости быстро уменьшается. Так, для воды при повышении температуры от 0 °C до 70 °C коэффициент вязкости уменьшается в 4,5 раза. Уменьшение вязкости с ростом температуры (а не увеличение, как у газов, см. гл. 17) объясняется иным характером процесса передачи импульса; он передается, главным образом, молекулами, совершающими перескок из одного равновесного состояния в другое, а эти перескоки с ростом температуры существенно учащаются (высота энергетического потенциального барьера уменьшается).

При увеличении давления происходит значительное увеличение вязкости жидкости. Нагревание или уменьшение плотности жидкости приводит к тому, что ее характеристики изменяются, как правило, в сторону сближения со свойствами газов. Вблизи температуры кристаллизации термодинамические свойства обычных жидкостей (плотность, сжимаемость, теплоемкость и др.) близки к аналогичным свойствам соответствующих твердых тел. Из этого можно сделать вывод, что вблизи температуры кристаллизации тепловое движение молекул жидкостей и твердых тел имеет приблизительно одинаковый характер.

**Поверхностное натяжение на границе жидкость — газ.** Силы взаимодействия между молекулами в молекулярных системах очень быстро убывают с увеличением расстояния между ними (см. потенциал Леннард-Джонса). Поэтому начиная с некоторого расстояния  $r^*$  силами притяжения между молекулами можно пренебречь. Это расстояние называется *радиусом молекулярного действия*, а сфера радиуса  $r^*$  называется *сферой молекулярного действия*. Радиус молекулярного действия имеет величину порядка нескольких диаметров молекулы ( $r^* \sim (3 - 4)d$ ).

Рассмотрим действие молекулярных сил на молекулу, находящуюся внутри жидкости и на ее поверхности (рис. 16.22). Равнодействующая всех сил притяжения, действующих со стороны молекул выделенной сферы на центральную молекулу, которая находится внутри жидкости, как видно из рисунка, равна нулю (в силу симметрии

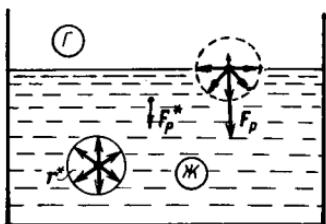


Рис. 16.22

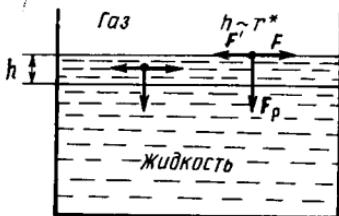


Рис. 16.23

и однородности жидкости). Иначе обстоит дело с молекулой, находящейся на поверхности жидкости с резкой границей раздела фаз между однородными жидкостью и газом. Так как плотность молекул над поверхностью жидкости, т. е. в газовой фазе, во много раз меньше их плотности в жидкости, то на каждую молекулу, находящуюся на поверхности, будет действовать результирующая сила  $F_p$ , направленная внутрь жидкости. Действие молекулярных сил притяжения на молекулы, находящиеся в поверхностном слое толщиной порядка нескольких радиусов молекулярного действия, схематично изображено на рис. 16.23. Кроме того, на каждую молекулу слоя со стороны соседних молекул действуют силы отталкивания, которые в состоянии термодинамического равновесия не позволяют им перемещаться внутрь жидкости. В результате формируется равновесный переходный слой между жидкостью и газом. Этот тонкий слой находится в таком состоянии, что поверхность жидкости стремится сократиться. В этом отношении поверхность жидкости можно сопоставить с тонкой резиновой пленкой, растянутой изотропно по всем направлениям в плоскости поверхности раздела фаз. Силы, действующие по касательной к поверхности жидкости, называются *силами поверхностного натяжения*. Наличие поверхностного натяжения очень эффективно демонстрируется с помощью

мыльных пленок. Например, на вынутой из мыльного раствора проволочной рамке образуется мыльная пленка (рис. 16.24). Если проволочная сторона  $MN$  рамки может скользить без трения вдоль проволок  $AC$  и  $BD$ , то силы поверхностного натяжения увлекают ее по направлению к стороне  $AB$ ,

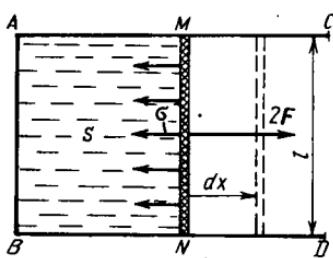


Рис. 16.24

и площадь  $S$  пленки сокращается. Для того чтобы квазистатически увеличить площадь мыльной пленки, необходимо к проволоке  $MN$  приложить силу, равную  $2F$  (мыльная пленка имеет две границы с воздухом). При смещении проволоки на  $dx$  эта сила совершает работу  $\delta A = 2Fdx$ , а площадь мыльной пленки увеличивается на  $dS = ldx$ .

Эта работа в изотермических условиях идет на увеличение свободной энергии  $F$  Гельмгольца (см. (13.65)), относящейся к поверхностному слою на границе между мыльной пленкой и воздухом. Учитывая наличие двух границ раздела, записываем, что

$$dF = \frac{\delta A}{2} = Fdx = \frac{F}{l} dS \equiv \sigma dS. \quad (16.44)$$

Величина  $\sigma$  называется *коэффициентом поверхностного натяжения* на границе жидкость — газ (воздух). Из (16.44) следует *энергетическое и силовое определение для  $\sigma$* :

$$\sigma = \frac{dF}{dS} \equiv \frac{\delta A}{dS} \equiv \frac{F}{l} \text{ — коэффициент поверхностного натяжения.} \quad (16.45)$$

Таким образом, коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  численно равен избыточной энергии, приходящейся на единицу площади поверхности жидкости. С другой стороны, можно также сказать, что коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  численно равен силе поверхностного натяжения, приложенной к единице длины контура на поверхности жидкости.

Избыточная энергия поверхностного слоя обусловлена тем, что частицы, находящиеся в этом слое, обладают большей потенциальной энергией, чем частицы, находящиеся внутри жидкости. Действительно, молекула, находящаяся в поверхностном слое, взаимодействует в среднем с меньшим количеством соседей, чем молекула, находящаяся внутри жидкости (см. рис. 16.22). Так как потенциальная энергия сил притяжения является величиной отрицательной, то молекулы в поверхностном слое обладают избытком энергии по отношению к молекулам, находящимся внутри жидкости.

Повышение температуры жидкости или растворение

в ней *поверхностно-активных веществ*\* приводит к уменьшению значения величины энергии поверхностного слоя жидкости, что ведет к уменьшению значения коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$ . При комнатной температуре у большинства жидкостей на границе раздела жидкость — газ коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma_{ж, г}$  имеет значение  $\sim 0,01—0,05 \text{ Н/м}$  ( $[\sigma] = \text{Н/м} = \text{Дж/м}^2$ , см. табл. III.31—III.33 прил. III).

Коэффициент поверхностного натяжения зависит от свойств другой фазы, с которой соприкасается жидкость или газ. Поэтому различают поверхностное натяжение  $\sigma_{ж, г}$  (жидкость — газ),  $\sigma_{ж, т}$  (жидкость — твердое тело),  $\sigma_{т, г}$  (газ — твердое тело) и т. д.

**Смачивающие и несмачивающие жидкости. Капиллярность.** Явление смачивания зависит от характера сил, действующих между молекулами поверхностных слоев соприкасающихся сред. Для смачивающей жидкости силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела в среднем больше, чем между молекулами самой жидкости. Поэтому они стремятся увеличить поверхность соприкосновения с твердым телом (рис. 16.25, а). Именно по этой причине жидкость

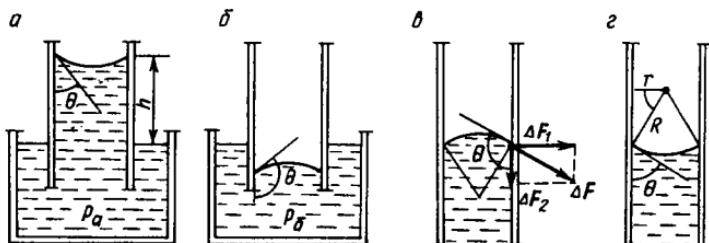


Рис. 16.25

втягивается в капилляры, которые представляют собой трубки с диаметром менее 1 мм. Для несмачивающей жидкости силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела меньше, чем между молекулами жидкости. Результирующая этих сил стремится уменьшить поверхность соприкосновения с твердым телом (рис. 16.25, б) и жидкость выталкивается из капилляра.

\* *Поверхностно-активным веществом* (ПАВ) называется вещество, способное накапливаться преимущественно в поверхностном слое при растворении его в жидкости и уменьшающее значение коэффициента поверхностного натяжения.

В зависимости от характера смачивания свободная поверхность жидкости на границе с твердым телом искривляется, образуя *мениск* той или иной формы. Смачивающие жидкости образуют вогнутый, а несмачивающие — выпуклый мениск. Угол  $\theta$  между поверхностью твердого тела и касательной к мениску в точке его пересечения с твердым телом называется *краевым углом*. Из рисунка видно, что для смачивающих жидкостей значения краевого угла  $\theta$  лежат в пределах  $0 < \theta \leq \pi/2$ , а при идеальном смачивании угол  $\theta = 0$ . Для несмачивающих жидкостей угол  $\theta$  лежит в пределах  $\pi/2 < \theta < \pi$ , а при идеальном несмачивании угол  $\theta = \pi$ .

Искривленная «натянутая» поверхность оказывает на объем жидкости добавочное давление. Рассмотрим элементарный участок  $\Delta l$  границы контакта несмачивающей жидкости с твердой стенкой (рис. 16.25, *в*). На этот участок действует элементарная сила поверхностного натяжения  $\Delta F = \sigma \cdot \Delta l$ . Она направлена по касательной к поверхности жидкости и нормально к отрезку  $\Delta l$ . Силу  $\Delta F$  можно разложить на две составляющие:  $\Delta F_1$ , направленную перпендикулярно к стенке, и  $\Delta F_2$ , направленную вдоль стенки внутрь жидкости. Компонента силы  $\Delta F_2$  создает в жидкости давление, избыточное по отношению к атмосферному давлению в открытых сосудах (см. рис. 16.25, *б*,  $p_b > p_{\text{атм}}$ ).

Аналогичными рассуждениями можно убедиться, что при контакте смачивающей жидкости с твердым телом составляющая  $\Delta F_2$  направлена в противоположную сторону и результирующее давление в жидкости будет меньше атмосферного (см. рис. 16.25, *а*,  $p_a < p_{\text{атм}}$ ).

В общем случае избыточное давление для произвольной поверхности жидкости определяется по формуле Лапласа:

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (16.46)$$

Здесь  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости. Радиус кривизны считается положительным, если центр кривизны соответствующего сечения находится внутри жидкости, и отрицательным, если центр кривизны находится вне жидкости.

Для сферической поверхности  $R_1 = R_2 = R$  и из (16.46) получаем выражение для избыточного давления в виде  $\Delta p = 2\sigma/R$ ; для цилиндрической поверхности  $R_1 = R$ ,

$R_2 = \infty$ ,  $\Delta p = \sigma/R$ ; для плоскости  $R_1 = R_2 = \infty$ ,  $\Delta p = 0$ . В последнем случае силы поверхностного натяжения не создают избыточного давления на жидкость.

Явление подъема смачивающей и опускания несмачивающей жидкости в капиллярах называется *капиллярностью* (см. рис. 16.25).

Жидкость в капилляре поднимается и опускается на такую высоту  $h$ , при которой гидростатическое давление  $\rho gh$  столба жидкости уравновешивается избыточным давлением  $\Delta p$ . Если радиус кривизны  $R$  мениска выразить через радиус  $r$  капилляра и краевой угол  $\theta$  (см. рис. 16.25, *г*,  $R = r/\cos \theta$ ), то с помощью формулы Лапласа  $\Delta p = 2\sigma/R$  для сферической поверхности получим выражение для высоты  $h$  подъема (опускания) жидкости в капилляре:

$$\rho gh = 2\sigma \cos \theta / r \Rightarrow h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho gr}. \quad (16.47)$$

При  $\theta < \pi/2$  получается положительное  $h$  (жидкость поднимается), а при  $\theta > \pi/2$  — отрицательное (жидкость опускается).

Капиллярные явления часто встречаются в природе и широко используются в технологии и технике. Капиллярностью объясняется гигроскопичность веществ. Влагообмен в почве и растениях в значительной степени осуществляется за счет явления капиллярности.

**Пример 16.3.** Найдем добавочное давление внутри мыльного пузыря диаметром  $d = 10$  см, а также работу, которую нужно совершить, чтобы выдуть этот пузырь. Коэффициент поверхностного натяжения мыльной воды на границе жидкость — газ равен  $4,3 \times 10^{-2}$  Н/м (процесс образования мыльного пузыря рассматривается как изотермический).

**Решение.** Пленка мыльного пузыря имеет две границы раздела фаз (внутреннюю и внешнюю). Эти две сферические поверхности раздела имеют почти одинаковые диаметры ( $d_1 \approx d_2 = d$  в связи с малой толщиной мыльной пленки). Поэтому добавочное давление внутри газового пузыря  $\Delta p = 2 \cdot 2\sigma/r = 8\sigma/d$ . Подставив численные данные, получим  $\Delta p = 8 \cdot 4,3 \cdot 10^{-2} / 0,1 = 3,44$  Па. Работу, которую нужно совершить при выдувании пузыря, находим по формуле  $A = \sigma \cdot \Delta S$  (см. (16.45)). Здесь  $\Delta S$  — площадь поверхности двух сфер, образующих мыльную пленку (частью плоской поверхности сечения тройки, с помощью которой выдувается пузырь, из-за ее малости пренебрегаем). Поэтому искомая работа  $A = \sigma \cdot 2\pi d^2 = 4,3 \times 10^{-2} \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 0,1^2 \approx 2,7$  мДж.

**Условие равновесия на границе жидкость — твердое тело.** Если на поверхность твердого тела поместить

каплю жидкости, то возможны две ситуации, отвечающие смачиванию и несмачиванию жидкостью этой поверхности твердого тела (рис. 16.26).

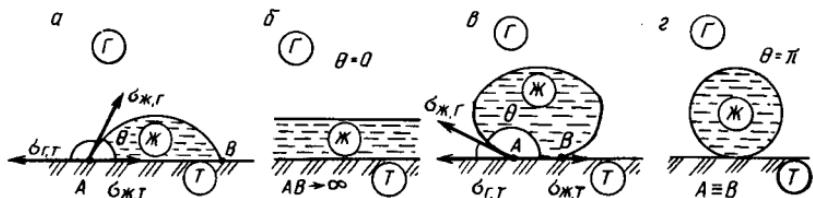


Рис. 16.26

Элемент длины контура  $dl$  на границе соприкосновения трех сред (жидкой, твердой и газовой) в точке  $A$  направлен перпендикулярно к плоскости рисунка. Силы поверхностного натяжения, действующие на этот элемент  $dl$ , равны  $\sigma_{k,r}dl$ ,  $\sigma_{r,t}dl$ ,  $\sigma_{k,t}dl$ , а их направление совпадает с направлением соответствующих стрелок на рисунке 16.26,  $a$ . Этот элемент (точка  $A$ ) будет в равновесии, если сумма проекций сил на линию  $AB$  будет равна нулю. С помощью схемы, представленной на рис. 16.26,  $a$ , запишем

$$\sigma_{k,t}dl - \sigma_{r,t}dl + \sigma_{k,r} \cos \theta \cdot dl = 0 \Rightarrow \sigma_{r,t} = \sigma_{k,t} + \sigma_{k,r} \cos \theta. \quad (16.48)$$

Из условия равновесия (16.48) следует выражение для значения краевого угла в состоянии равновесия:

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{r,t} - \sigma_{k,t}}{\sigma_{k,r}}. \quad (16.49)$$

Если  $\sigma_{r,t} - \sigma_{k,t} = \sigma_{k,r}$ , то  $\cos \theta = 1$ , а угол  $\theta = 0$ . Это соответствует полному смачиванию, при котором жидкость растекается по поверхности твердого тела тонким слоем (рис. 16.26,  $b$ ).

Если  $\sigma_{r,t} - \sigma_{k,t} = -\sigma_{r,j}$ , то  $\cos \theta = -1$ , а угол  $\theta = \pi$ . При этом имеет место полное несмачивание (рис. 16.26,  $c$ ), когда точки  $A$  и  $B$  сливаются в одну.

Частичное смачивание (рис. 16.26,  $a$ ) и частичное несмачивание (рис. 16.26,  $b$ ) наблюдается при значениях  $\cos \theta$ , лежащих в пределах от 0 до 1 и от 0 до  $-1$  соответственно.

**Задание 16.7.** Вычислите работу, совершающую силами поверхностного натяжения в процессе изотермического слияния двух одинаковых капель радиуса  $r$  в одну.

**Указание.** Воспользуйтесь определением (16.45).

**Ответ.**  $A = 4\pi r^2(2 - \sqrt[3]{4})\sigma$ .

**Задание 16.8.** Получите формулу для расчета коэффициента поверхностного натяжения при медленном вытекании по каплям жидкости из круглой трубы диаметром  $d_0$  (рис. 16.27).

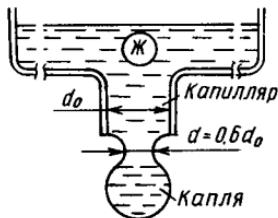


Рис. 16.27

**Ответ.**  $\sigma = \rho_* g V / (\pi d n)$ ,  $n$  — число капель, а  $V$  их общий объем, т. е. объем, вытекший из трубы жидкости за время опыта.

Простота — для гениев, большинство же из нас должны идти тяжелым путем.

*А. Б. Пиппард. Традиция Кавендиша*

## 17. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ, ЖИДКОСТЯХ И ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

**Виды процессов переноса.** В предыдущих главах раздела «Молекулярная физика» рассматривались исключительно равновесные свойства вещества либо термодинамические процессы, которые квазистатически переводят систему из одного равновесного состояния в какое-либо другое, но опять-таки равновесное состояние. При этом изменяются значения параметров системы, соответствующих, например, изопроцессам, адиабатическому процессу или их комбинациям в тех или других циклах. Сейчас как раз время отметить, что мы имели дело с традиционными вопросами, которые составляют предмет равновесной термодинамики и статистической физики. Вместе с тем следует заметить, что в рамках равновесной теории созданы предпосылки для последующего изучения неравновесных процессов, которые реализуются в макроскопических системах и развиваются во времени по вполне определенным законам. Они обусловлены теми молекулярными движениями в системе из огромного числа частиц (атомов, молекул, ионов), которые приводят к необратимо протекающим

процессам (см. § 13.4) в изолированных системах. В результате энтропия возрастает (см. 13.54)), а система переходит (релаксирует) к своему равновесному состоянию, т. е. наиболее вероятному макросостоянию, обладающему наибольшим значением статистического веса (см. § 15.4). Это означает, что исходное неравновесное распределение классических частиц по скоростям и координатам постепенно приближается к равновесному распределению Максвелла — Больцмана; квантовые системы частиц релаксируют к состоянию равновесия с распределениями Ферми — Дирака или Бозе — Эйнштейна. Понятно, что все термодинамические параметры системы, связанные в конечном счете с состоянием больших совокупностей частиц, будут также приближаться к своим равновесным значениям. Одни параметры релаксируют быстрее, другие медленнее. Количественно это описывается с помощью такой универсальной величины, как время релаксации (см. пример 2.2), которое имеет разные значения для разных параметров.

В изолированной макроскопической системе равновесное состояние характеризуется однородным распределением плотности (концентрации), температуры и отсутствием упорядоченного движения текучей среды (газа или жидкости). Поэтому система с неоднородным распределением полей плотности, температуры и проекций скорости упорядоченного движения будет стремиться к равновесию, т. е. к состоянию, в котором градиенты соответствующих полей равны нулю. Поскольку в неравновесном состоянии градиенты плотности, температуры и проекций скоростей не равны нулю, то можно интуитивно предположить, что скорость приближения системы к равновесию должна быть связана с градиентами соответствующих параметров состояния. Опыт подтверждает это положение и оно позволяет описать явление диффузии (выравнивание плотности или концентрации за счет переноса массы в объеме), явление теплопроводности (выравнивание температуры по объему в результате переноса тепловой энергии хаотического движения частиц системы) и явление вязкости (выравнивание скоростей движения различных слоев текучей среды в связи с переносом импульса частиц сплошной среды, см. § 8.3). Законы переноса массы, энергии и импульса лежат в основе теории неравновесных процессов или физической кинетики. Ниже для наглядности будут рассматриваться только такие системы, в которых неод-

нородное распределение плотности (концентрации), температуры и скорости упорядоченного движения наблюдается только вдоль одной оси (одномерная неоднородность).

### 17.1. ЗАКОНЫ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

**Теплопроводность.** Если в одной области среды средняя кинетическая энергия молекул больше, чем в другой (т. е.  $T_1 > T_2$ ), то с течением времени вследствие столкновений молекул имеет место процесс выравнивания

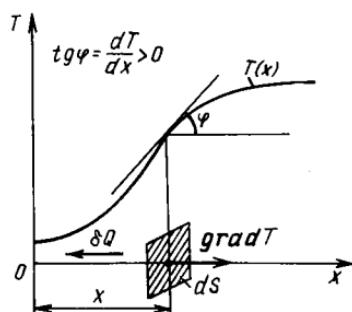


Рис. 17.1

средних кинетических энергий молекул, т. е. происходит выравнивание поля температуры по объему, в данном случае по направлению оси  $x$  (рис. 17.1).

В сечении с координатой  $x$  выделим в среде элементарную площадку  $dS$ , расположенную перпендикулярно к оси  $x$ . Опыт показывает, что количество теплоты  $\delta Q$ , переданной посредством тепло-

проводности через площадку  $dS$ , пропорционально площадке  $dS$ , времени  $dt$  и производной  $dT/dx$  в точке расположения площадки  $dS$ :

$$\delta Q = -\kappa \frac{dT}{dx} dS dt \text{ — закон Фурье.} \quad (17.1)$$

Здесь  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности среды, измеряемый в единицах  $\text{Дж} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{К}^{-1} \equiv \text{Вт} \cdot \text{м}^{-1} \times \text{К}^{-1}$ . Поскольку в одномерном случае ( $T = T(x)$ )  $\text{grad } T = (dT/dx)\mathbf{i}$ , то знак минус в (17.1) указывает на направление потока теплоты, которое противоположно  $\text{grad } T$  (см. рис. 17.1). Это означает, что тепловая энергия переносится в направлении убывания температуры. В результате происходит выравнивание поля температуры в процессе перехода изолированной системы к равновесному состоянию.

**Диффузия.** Явление диффузии заключается в том, что происходит самопроизвольное взаимное проникновение и перемешивание частиц двух или более различных сортов вещества в изолированной системе. В хими-

чески чистых газах имеет место самодиффузия, которая возникает вследствие неодинаковой плотности в различных частях объема газа. В случае смеси причиной, вызывающей диффузию, является различие в концентрациях отдельных компонентов смеси в разных частях объема. Диффузия приводит к перераспределению масс. Этот процесс возникает и продолжается до тех пор, пока существуют градиенты плотности (рис. 17.2) или концентрации в объеме изолированной системы. Экспериментально установлено, что масса вещества  $dM$ , переносимая при диффузии за время  $dt$  через малую площадку  $dS$ , расположенную перпендикулярно к оси, вдоль которой осуществляется перенос, прямо пропорциональна градиенту плотности  $d\rho/dx$  или градиентам концентрации разных сортов частиц, площадке  $dS$  и времени  $dt$  переноса:

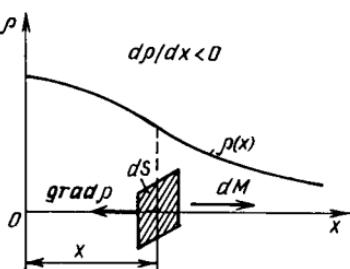


Рис. 17.2

$$dM_i = -D_i \frac{d\rho_i}{dx} dS dt \text{ — закон Фика.} \quad (17.2)$$

Здесь  $\rho_i$  — плотность частиц сорта  $i$ , а  $D_i$  — коэффициенты диффузии для частиц смеси либо коэффициент самодиффузии в чистом веществе. Согласно (17.2), коэффициент диффузии измеряется в  $\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ .

**Вязкость.** Явление вязкости (см. § 8.3) связано с возникновением сил трения между слоями газа или жидкости, перемещающимися параллельно друг другу с различными по модулю скоростями. Силы трения, которые при этом возникают, направлены по касательной к поверхности соприкасающихся слоев. Причиной внутреннего трения является наложение упорядоченного движения слоев среды с различными скоростями и хаотического теплового движения молекул, интенсивность которого зависит от температуры. Из-за хаотического теплового движения происходит обмен молекулами между соседними слоями, в результате чего импульс быстро движущегося слоя уменьшается, а медленного слоя увеличивается. Это приводит к ускорению медленно движущегося слоя и замедлению более быстрого. Согласно (8.36)

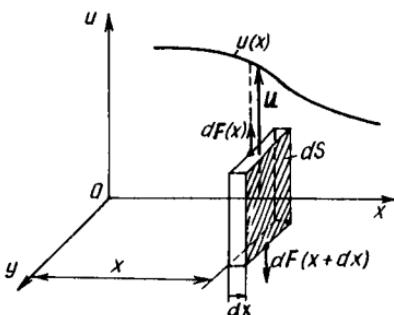


Рис. 17.3

и обозначениями на рис. 17.3, сила внутреннего трения между слоями текучей среды пропорциональна градиенту скорости  $du/dx$  упорядоченного движения среды и площади поверхности соприкасающихся слоев:

$$dF_t = \eta \frac{du}{dx} dS \text{ — закон Ньютона для вязкости,} \quad (17.3)$$

где коэффициент динамической вязкости  $\eta = \rho v$  ( $v$  — коэффициент кинематической вязкости).

На рис. 17.3 изображен элемент среды слоя толщиной  $dx$ , который движется со скоростью  $u(x)$  и испытывает действие сил вязкого трения с соседними слоями. Левый, более быстрый, слой среды действует на грань  $dS$  элемента с силой  $dF(x)$ , а правый слой среды действует с силой  $dF(x+dx)$ . Результирующая сила для каждого элемента определяет величину и направление его ускорения, что и приводит к выравниванию поля скоростей упорядоченного движения в замкнутой системе.

Экспериментально установленные законы переноса (17.1) — (17.3) применимы для описания неравновесных процессов в различных агрегатных состояниях вещества. Индивидуальные особенности веществ, их химический состав и физические свойства среды сказываются на значениях коэффициентов переноса ( $\kappa, D, \eta$ ) и их зависимости от термодинамических параметров среды в равновесном состоянии. Молекулярно-кинетический смысл коэффициентов  $\kappa, D, \eta$  поясним на примере среды в газообразном состоянии. В этом случае  $\kappa, D$ , и  $\eta$  достаточно просто связаны с такими молекулярными характеристиками, как средняя скорость хаотического движения  $v$  и средняя длина свободного пробега  $\bar{\lambda}$ .

## 17.2. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЯВЛЕНИЙ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ, ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ И ЖИДКОСТЯХ

**Коэффициент теплопроводности газа.** Пусть газ заключен между двумя параллельными стенками, имеющими различные температуры в точках  $x - \bar{\lambda}$  и  $x + \bar{\lambda}$ . Тогда температура газа в направлении оси  $x$ , перпендикулярной к стенкам, будет функцией от  $x$ , т. е. в газе имеется градиент температуры  $dT/dx$ . В этом случае молекулы в разных слоях будут иметь различную среднюю кинетическую энергию поступательного движения  $\bar{\epsilon} = ikT/2$  ( $i = 3$ ). В силу хаотичности движения молекулы будут переходить из слоя в слой, перенося при этом различные значения энергии, а именно те, которые присущи покидающему слою в положении  $x$  ( $\bar{\epsilon} = f(x)$ ).

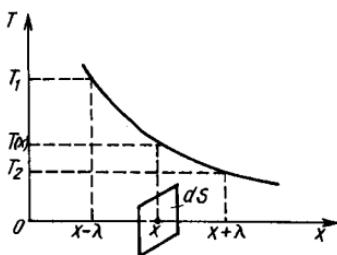


Рис. 17.4

Подсчитаем количество тепловой энергии  $\delta Q$ , переносимой молекулами в направлении убывания температуры  $T$  через элементарную площадку  $dS$  (на рис. 17.4 в положительном направлении оси  $x$ ). Обозначим через  $dN_+$  и  $dN_-$  число молекул, пролетающих через площадку  $dS$  за время  $dt$  соответственно слева направо ( $dN_+$ ) и справа налево ( $dN_-$ ). Будем считать, что средние значения энергий  $\bar{\epsilon}_1$  и  $\bar{\epsilon}_2$  молекул этих двух, пронизывающих площадку  $dS$ , потоков соответствуют температурам  $T_1$  и  $T_2$ , т. е. слоям газа, отстоящим на расстоянии  $\bar{\lambda}$  слева и справа от площадки  $dS$ . Поскольку  $\bar{\epsilon} = ikT/2$ , то

$$\delta Q = dN_+ \bar{\epsilon}_1 - dN_- \bar{\epsilon}_2 \simeq \frac{1}{6} n \bar{v} dt dS \frac{ik}{2} (T_1 - T_2). \quad (17.4)$$

Здесь учтено, что потоки числа частиц слева и справа приблизительно одинаковы, т. е. предполагается, что они слабо зависят от состояния среды по обе стороны от

площадки  $dS$

$$dN_+ \simeq dN_- = dN(x) = \frac{1}{6} n(x) dS dt \bar{v}, \quad (17.5)$$

где  $n(x)$  — концентрация частиц в окрестности точки  $x$ .

Формула (17.5) учитывает, что вдоль каждого из положительных и отрицательных направлений осей  $x, y, z$  движется в среднем одна шестая часть всех молекул, находящихся в объеме  $dV = dS \cdot dl$  ( $dl = \bar{v} dt$ ).

Для  $T_1 = T(x - \bar{\lambda})$  и  $T_2 = T(x + \lambda)$  можно воспользоваться приближенным соотношением

$$T(x \pm \bar{\lambda}) \simeq T(x) \pm \frac{dT}{dx} \bar{\lambda},$$

которое позволяет преобразовать (17.4) к уравнению вида (17.1):

$$\delta Q = - \frac{1}{6} n \bar{v} i k \bar{\lambda} \frac{dT}{dx} dS dt. \quad (17.6)$$

Из сравнения (17.6) с законом Фурье получим выражение для коэффициента теплопроводности газа ( $i = 3$  — число степеней свободы для поступательного движения)

$$\kappa = \frac{1}{6} n \bar{v} \bar{\lambda} i k = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} c_v, \quad (17.7)$$

где  $\rho = n \cdot m$  — плотность газа ( $m$  — масса молекулы), а  $c_v = C_v / \mu = 3R / (2mN_A) = 3k / (2m)$  — удельная теплоемкость газа.

**Коэффициент диффузии газа.** Пусть теперь в газе имеется градиент концентрации частиц  $dn/dx \neq 0$  (рис. 17.5). Тогда вследствие хаотичности движения молекул будет происходить выравнивание концентрации. Результирующий поток частиц в положительном направлении оси  $x$  через перпендикулярную потоку площадку  $dS$  за время  $dt$  будет равен

$$dN = \frac{1}{6} n_1 \bar{v} dS dt - \frac{1}{6} n_2 \bar{v} dS dt = \frac{1}{6} \bar{v} dS dt (n_1 - n_2).$$

Аналогично предыдущему  $n_1 \simeq n(x) - \bar{\lambda} dn/dx$ , а  $n_2 \simeq n(x) + \bar{\lambda} dn/dx$ . Тогда

$$dN = - \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \frac{dn}{dx} dS dt. \quad (17.8)$$

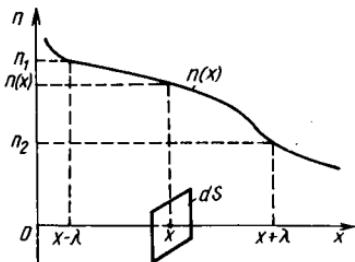


Рис. 17.5

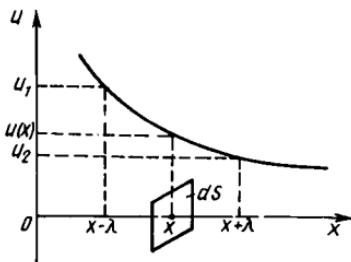


Рис. 17.6

Умножив (17.8) на массу молекулы  $m$  и учитя, что плотность  $\rho = mn$ , получим  $d(mN) = -\bar{v}\lambda(d\rho/dx)dSdt/3$ . Следовательно, переносимая через площадку  $dS$  за время  $dt$  масса  $dM = d(mN)$  будет определяться выражением вида (17.2):

$$dM = -\frac{1}{3}\bar{v}\lambda \frac{d\rho}{dt} dSdt. \quad (17.9)$$

Сравнивая (17.9) с законом Фика, для коэффициента диффузии  $D$  получаем следующее выражение:

$$D = \frac{1}{3}\bar{v}\lambda \quad (17.10)$$

**Коэффициент динамической вязкости газа.** Пусть теперь различные слои газа движутся с различной скоростью упорядоченного движения  $u = u(x)$  (рис. 17.6). В этом случае при переходе молекул из слоя в слой они будут переносить различные значения импульса  $mu$  направленного движения слоев газа. Результирующий импульс, переносимый молекулами в положительном направлении оси  $x$  за время  $dt$ , будет равен:

$$dp = dp_+ - dp_- = \frac{1}{6}n\bar{v}dSdt(mu_1 - mu_2). \quad (17.11)$$

Здесь  $u_1$  и  $u_2$  — значения скорости слоев газа, имеющих координаты  $x - \bar{\lambda}$  и  $x + \bar{\lambda}$  соответственно. В силу малости  $\bar{\lambda}$ , как и в случае диффузии, запишем

$$u_1 = u(x) - \frac{du}{dx}\bar{\lambda}, \quad u_2 = u(x) + \frac{du}{dx}\bar{\lambda}.$$

Подставив  $u_1$  и  $u_2$  в (17.11), получим

$$dp = -\frac{1}{3}nm\bar{v}\bar{\lambda} \frac{du}{dx} dSdt. \quad (17.12)$$

Согласно второму закону Ньютона, изменение импульса  $dp = F \cdot dt$  и, следовательно, сила вязкости

$$dF_t = -\frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} \frac{du}{dx} dS. \quad (17.13)$$

Сравнивая (17.13) с (17.3), для коэффициента вязкости  $\eta$  получаем формулу

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda}. \quad (17.14)$$

Коэффициенты  $\kappa$ ,  $D$  и  $\eta$ , задаваемые формулами (17.7), (17.10) и (17.14), связаны между собой соотношениями:

$$\eta = \rho D, \quad \kappa = \rho c_v D \Rightarrow \kappa = c_v \eta. \quad (17.15)$$

**Явления переноса в твердых телах.** Мы уже отмечали, что законы переноса (17.1) — (17.3) являются универсальными по отношению к агрегатному состоянию вещества\*, однако механизм реализации переноса вещества и энергии в кристаллическом состоянии кардинально отличается от того, что наблюдается в газах. В твердых телах, а также в жидкостях теряет смысл понятие длины свободного пробега молекул. Более того, существенными становятся эффекты, связанные с вкладами от взаимодействия атомов и молекул в жидких и твердых телах.

В отношении твердых кристаллических тел заметим, что перенос массы, а следовательно, и энергии осуществляется путем перескока атомов или молекул в соседние вакантные узлы. Причем очевидно, что вероятность перескока в направлении градиента концентрации будет меньше, чем в обратном направлении. Поэтому возникает результирующий диффузионный поток числа частиц, направленный так, что в результате происходит выравнивание концентраций занятых и свободных узлов (вакансационный механизм диффузии). Возможна также диффузия, обязанная движению частиц по междоузлиям.

Коэффициент диффузии в кристалле обратно пропорционален времени  $\tau$  «оседлой» жизни атомов в узле решетки. Величина  $\tau$  связана с высотой потенциального барьера, который нужно преодолеть атому, чтобы занять вакантный узел. Поэтому для коэффициента  $D$  получа-

---

\* Закон Ньютона для сил вязкого трения справедлив только для текучих сред, т. е. газов и жидкостей.

ется следующее выражение:

$$D = D_0 e^{-E_a/(kT)}, \quad (17.16)$$

$E_a$  — энергия активации диффузии в кристалле (см. табл. III.36 прил. III).

Коэффициент  $D$  для твердого тела значительно меньше, чем в газах (для золота  $D \sim 10^{-35} \text{ м}^2/\text{с}$ , а для кислорода  $D \sim 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ).

Теплопроводность\* в кристалле в основном определяется не перескоками атомов, которые происходят очень редко, а за счет непосредственного силового взаимодействия с соседними атомами, колеблющимися вблизи своих узлов. В результате амплитуды колебаний в области с меньшей температурой постепенно увеличиваются, а в области с большей — уменьшаются (поле температуры выравнивается).

**Явления переноса в жидкостях.** В соответствии с идеей Я. И. Френкеля (см. § 16.6) о «кочующем» образе жизни молекул жидкости можно предположить, что значение коэффициента диффузии в жидкости будет лежать между значениями коэффициентов диффузии в газах и твердых телах. Коэффициент  $D$  для жидкостей имеет значение порядка  $\sim 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$  (см. табл. III.37 прил. III). Аналогичная картина наблюдается и в случае теплопроводности в жидком состоянии вещества.

Динамическая вязкость жидкостей хорошо описывается экспериментальной зависимостью

$$\eta \sim e^{b/T}. \quad (17.17)$$

которая, вообще говоря, прямо не следует из представления о перескоках молекул из одного «соседнего» положения в другое. Теоретическое рассмотрение этого вопроса оказывается чрезвычайно сложным. Значения коэффициента вязкости для различных веществ изменяются в широких пределах (для воды при  $20^\circ\text{C}$   $\eta = 1 \times 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ , а для глицерина  $\eta = 1,48 \text{ Па} \cdot \text{с}$ , табл. III.2 прил. III).

**Пример 17.1.** Как пример применения законов переноса рассмотрим изотермический диффузионный процесс изменения концентрации частиц среды в объеме и получим второе уравнение Фика (первое уравнение Фика (см. (17.2)) устанавливает связь между потоком массы или числа частиц и градиентом концентрации).

---

\* См. табл. III.34 и III.35 прил. III.

**Решение.** Выделим элементарный объем  $\Delta V$  среды в виде цилиндра, ориентированного в направлении оси  $x$  (рис. 17.7). Определим изменение числа частиц  $\Delta N$  в выделенном объеме за время  $\Delta t$ . Количество частиц, которые вошли через левое основание цилиндра,

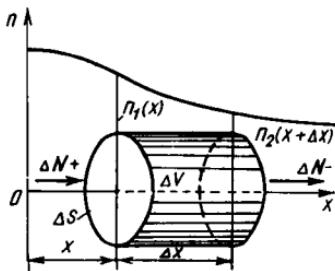


Рис. 17.7

определяется законом Фика (см. (17.2)),  $N = M/m$ ,  $n = \rho/m$ :

$$\Delta N_+ = -D \frac{dn(x)}{dx} \Delta S \cdot \Delta t. \quad (17.18)$$

Число частиц, покинувших объем  $\Delta V$  через правое основание, находится аналогично:

$$\Delta N_- = -D \frac{dn(x + \Delta x)}{dx} \Delta S \cdot \Delta t. \quad (17.19)$$

Результирующее изменение числа частиц

$$\Delta N = \Delta N_+ - \Delta N_- = D \cdot \Delta S \cdot \Delta t \left( \frac{dn(x + \Delta x)}{dx} - \frac{dn(x)}{dx} \right). \quad (17.20)$$

Разложим  $n(x + \Delta x)$  в ряд Тейлора и ограничимся двумя первыми членами:

$$n(x + \Delta x) \approx n(x) + \frac{dn(x)}{dx} \Delta x.$$

После подстановки последнего выражения в (17.20) и последующих сокращений получим выражение для изменения  $\Delta n$  концентрации частиц в элементарном объеме  $\Delta V$ :

$$\Delta n = \frac{\Delta N}{\Delta V} = D \cdot \Delta t \frac{d^2 n(x)}{dx^2} \Rightarrow \frac{\Delta n}{\Delta t} = D \frac{d^2 n}{dx^2}. \quad (17.21)$$

В пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  получим дифференциальное уравнение для поля концентрации  $n$ , которое изменяется во времени ( $n = n(x, t)$ ):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} — \text{второе уравнение Фика.} \quad (17.22)$$

**Пример 17.2.** Найдем время релаксации среднего значения температуры в объеме  $V$  к ее равновесному значению.

**Решение.** При отклонении температуры от ее равновесного значения в системе возникают тепловые процессы, в результате которых средняя температура  $T$  объема  $V$  приближается к своему равновесному значению  $T_0$ . Предположим, что быстрота изменения отклонения  $\Delta T = T - T_0$  во времени пропорциональна этому отклонению:

$$\frac{d(\Delta T)}{dt} = -\frac{1}{\tau_0} \cdot \Delta T. \quad (17.23)$$

Здесь  $1/\tau_0$  — коэффициент пропорциональности, а знак «минус» учитывает уменьшение отклонения со временем, т. е. релаксацию.

Решение (17.23) с начальным условием  $\Delta T(0) = \Delta T_0$  при  $t = 0$  имеет следующий вид:

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-t/\tau_0}. \quad (17.24)$$

Согласно (17.24), величина  $\tau_0$  является временем релаксации температуры к равновесному значению (за время  $t = \tau_0$  отклонение  $\Delta T_0$  уменьшается в  $e \approx 2,72$  раз, т. е. практически в три раза; см. пример 2.2).

**Задание 17.1.** Получите расчетную формулу для определения эффективного диаметра молекул химически чистого газа на основе опытных значений коэффициента теплопроводности либо коэффициента вязкости (при заданной температуре  $T$ ).

**Указание.** Воспользуйтесь выражением (17.7) либо (17.14) совместно с соотношениями, определяющими длину свободного пробега (гл. 14) и среднюю скорость молекул газа (гл. 15).

Ответ.

$$d = \sqrt{\frac{iR}{3\pi N_A \kappa}} \sqrt{\frac{RT}{\mu}}, \quad d = \sqrt{\frac{2}{3\pi N_A \eta}} \sqrt{\frac{RT\mu}{\pi}}.$$

# Приложение I

## ТАБЛИЦЫ ЗНАЧЕНИЙ РЯДА ФИЗИЧЕСКИХ КОНСТАНТ

### I.1. Множители и приставки СИ для образования кратных и дольных единиц

Множитель	Приставка	Обозначение
$10^{18}$	экса	Э
$10^{15}$	пета	П
$10^{12}$	тера	Т
$10^9$	гига	Г
$10^6$	мега	М
$10^3$	кило	к
$10^2$	гекто	г
10	дека	да
$10^{-1}$	деци	д
$10^{-2}$	санти	с
$10^{-3}$	милли	м
$10^{-6}$	микро	мк
$10^{-9}$	нано	н
$10^{-12}$	пико	п
$10^{-15}$	фемто	ф
$10^{-18}$	атто	а

### I.3. Математические знаки и обозначения

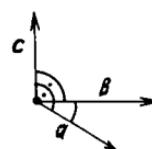
$<, =, >$	меньше, равно, больше
$\ll, \gg$	много меньше, много больше
$\leqslant, \geqslant$	меньше или равно, больше или равно
$\sim, \approx$	пропорционально, приближенно
$\neq, \Rightarrow$	не равно, следует
$\Sigma, \Pi$	сумма, произведение
$\langle x \rangle, \bar{x}$	среднее от $x$
$\Delta x$	приращение по $x$
$\Delta x \rightarrow 0$	стремится к нулю
$\lim$	предел последовательности (функции)
$n! = n(n - 1)(n - 2) \dots 1$	факториал
$i = \sqrt{-1}$	мнимая единица
$a + bi$	комплексное число
$\angle$	угол прямой
$\parallel, \perp$	параллельно, перпендикулярно

### I.2. Греческий алфавит

Буквы	Названия букв
Α α	альфа
Β β	бета
Γ γ	гамма
Δ δ	дельта
Ε ε	эпсилон
Ζ ζ	дзета
Η η	эта
Θ θ, υ	тхэта
Ι ι	йота
Κ κ	каппа
Λ λ	лямбда
Μ μ	мю
Ν ν	ню
Ξ ξ	кси
Ο ο	омикрон
Π π	пи
Ρ ρ	ро
Σ σ	сигма
Τ τ	тай
Υ υ	ипсилон
Φ φ	фи
Χ χ	хи
Ψ ψ	пси
Ω ω	омега

### I.4. Скалярное и векторное произведения векторов

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos(\hat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ .
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}; \quad \mathbf{c} = ab \sin(\hat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}).$
- $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$



## I.5. Фундаментальные физические постоянные

Постоянная	Обозначение	Числовое значение
Гравитационная постоянная	$\gamma$	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$
Скорость света в вакууме	$c$	$3,00 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$
Магнитная постоянная	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1} =$ $= 1,25 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$	$8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$
Постоянная Планка	$h = 2\pi\hbar$	$6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Атомная единица массы	a. е. м.	$1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Масса покоя электрона	$m_e$	$9,109 \cdot 10^{-31} \text{ кг} =$ $= 5,486 \cdot 10^{-4} \text{ а. е. м.}$
Энергия покоя электрона	$m_e c^2$	0,511 МэВ
Масса покоя протона	$m_p$	$1,673 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1,007 \text{ а. е. м.}$
Энергия покоя протона	$m_p c^2$	938,3 МэВ
Масса покоя нейтрона	$m_n$	$1,675 \cdot 10^{-27} \text{ кг} =$ $= 1,009 \text{ а. е. м.}$
Энергия покоя нейтрона	$m_n c^2$	939,6 МэВ
Отношение массы протона к массе электрона	$m_p/m_e$	1836,2
Заряд электрона (абсолют- ная величина)	$e$	$1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Отношение заряда электрона к его массе	$e/m_e$	$1,759 \cdot 10^{11} \text{ Кл} \cdot \text{кг}^{-1}$
Магнетон Бора	$\mu_B$	$9,274 \cdot 10^{-24} \text{ Дж} \cdot \text{Тл}^{-1}$
Ядерный магнетон	$\mu_n$	$5,051 \cdot 10^{-27} \text{ Дж} \cdot \text{Тл}^{-1}$
Магнитный момент нейтрона в ядерных магнетонах	$\mu_n/\mu_B$	1,913
Магнитный момент протона в ядерных магнетонах	$\mu_p/\mu_B$	2,793
Постоянная Авогадро	$N_A$	$6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Универсальная газовая по- стоянная	$R$	$8,314 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1}$
Объем моля идеального газа при нормальных условиях ( $p = 1 \text{ атм}, T_0 = 273,15 \text{ К}$ )	$V_m$	$22,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot \text{моль}^{-1}$
Постоянная Фарадея	$F = eN_A$	96484,56 Кл · моль <sup>-1</sup>
Радиус первой боровской орбиты	$a_0$	$0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Постоянная Ридберга	$R_\infty$	$10973731,77 \text{ м}^{-1}$
Постоянная Стефана — Больцмана	$\sigma$	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^4$
Энергетические эквиваленты:		
1 а. е. м.		931,5 МэВ
1 электронвольт		$1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$

## I.6. Некоторые астрономические величины

Наименование	Значение	Наименование	Значение
Радиус Земли	$6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$	Масса Луны	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ кг}$
Масса Земли	$5,96 \cdot 10^{24} \text{ кг}$	Расстояние от Зем- ли до Солнца	$1,49 \cdot 10^{11} \text{ м}$
Радиус Солнца	$6,95 \cdot 10^8 \text{ м}$	Расстояние от Зем- ли до Луны	$3,86 \cdot 10^8 \text{ м}$
Масса Солнца	$1,98 \cdot 10^{30} \text{ кг}$		
Радиус Луны	$1,74 \cdot 10^6 \text{ м}$		

## I.7. Некоторые значения

$e = 2,7182818$	$1 \text{ рад} = 57,29578^\circ$
$\pi = 3,1415927$	$\ln e = 1$
$\pi^2 = 9,869624$	$\lg e = 0,434294$
$\sqrt{\pi} = 1,772454$	$\ln 10 = 2,302585$
$\sqrt{2} = 1,4142136$	$\lg x = 0,4343 \ln x$
$\sqrt{3} = 1,7320508$	$\ln x = 2,3026 \lg x$

## I.8. Таблица важнейших физических величин и их единиц (в СИ)

Название и определяющее уравнение	Единица
Скорость $v = dr/dt$	$\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$
Ускорение $a = dv/dt$	$\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$
Угловая скорость $\omega = d\varphi/dt$	$\text{рад} \cdot \text{с}^{-1}$
Угловое ускорение $\epsilon = d\omega/dt$	$\text{рад} \cdot \text{с}^{-2}$
Частота $v = 1/T$ и циклическая частота $\omega = 2\pi/T$	$\text{с}^{-1}$
Плотность $\rho = m/V$	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$
Сила $F = ma$	$\text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$
Момент силы $M_0 = r \times F$	$\text{Н} \cdot \text{м} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$
Импульс силы $Fdt$	$\text{Н} \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$
Импульс точки (тела) $p = mv$	$\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$
Момент импульса $I_0 = r \times mv$	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$
Момент инерции $I_z = mh^2$	$\text{кг} \cdot \text{м}^2$
Работа $\delta A = F \cdot dr$	$\text{Дж} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$
Мощность $N = \delta A/dt$	$\text{Вт} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-3}}{\text{с}}$
Давление $p = F/S$	$\text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$
Коэффициент динамической вязкости $\eta = \sigma/(dv/dx)$	$\text{Па} \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \text{с}^{-1}$
Напряжение (механическое) $\sigma = F/S$	$\text{Н} \cdot \text{м}^{-2} = \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{м}^{-1}$
Модуль Юнга $E = \sigma/\epsilon$	$\text{Н} \cdot \text{м}^{-2} = \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{м}^{-1}$
Длина волны $\lambda = vT = v/\nu$	$\text{м}$
Волновое число $k = 2\pi/\lambda$	$\text{м}^{-1}$
Интенсивность звука $I = N/S$	$\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2}$
Количество теплоты $Q = A$	$\text{Дж}$
Удельная $c$ и молярная $C$ теплоемкости $c = \frac{1}{m}(\delta Q/dT), C = \mu c$	$\text{Дж} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{кг}^{-1}$ $\text{Дж} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
Универсальная газовая постоянная $R = pV\mu/(mT)$	$\text{Дж} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
Коэффициент теплопроводности $\kappa = \delta Q/[Sdt(dT/dx)]$	$\text{Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$
Энтропия $dS = \delta Q/T$	$\text{Дж} \cdot \text{К}^{-1}$
Коэффициент диффузии $D = dm/[S \cdot dt(d\rho/dx)]$	$\frac{\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}}$
Коэффициент кинематической вязкости $\nu = \eta/\rho$	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$
Коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = F/l$	$\text{Н} \cdot \text{м}^{-1} = \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$

**Приложение II.**  
**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ**

**Табл. III. Основные тригонометрические формулы**

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\sec \alpha = 1/\cos \alpha$ $\operatorname{cosec} \alpha = 1/\sin \alpha$ $\sec^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1$ $\operatorname{cosec}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1$	$\sin^2(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$
$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$ $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$ $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$	$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ $\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$
$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$	$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$ $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$
$\operatorname{sh} \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}, \quad \operatorname{ch} \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}, \quad \operatorname{th} \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}}, \quad \operatorname{cth} \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}}$	

Формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$$

Табл. II.2. Производные и интегралы

Функция	Производная	Функция	Производная	Функция	Производная
$x^n$	$nx^{n-1}$	$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\operatorname{tg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{ctg} x$		$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$e^x$	$e^x$	$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\operatorname{sh} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$e^{nx}$	$ne^{nx}$	$\ln u(x)$	$\frac{u'}{u}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$a^x$	$a^x \ln a$	$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{vu' - vu'}{v^2}$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$			$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

Формула интегрирования по частям:  $\int u dv = uv - \int v du$

$$\text{Интеграл Пуассона: } I_0 = \int_0^\infty e^{-\beta x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

$$I_1 = \int_0^\infty x e^{-\beta x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\beta t} dt = \frac{1}{2\beta}$$

$$I_2 = -\frac{dI_0}{d\beta} = \int_0^\infty x^2 e^{-\beta x^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}}$$

$$I_3 = -\frac{dI_1}{d\beta} = \int_0^\infty x^3 e^{-\beta x^2} dx = \frac{1}{2\beta^2}$$

$$I_4 = -\frac{dI_2}{d\beta} = \int_0^\infty x^4 e^{-\beta x^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^5}}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

Табл. II.3. Формулы разложения функции в ряд

Ряд	Разложение в ряд
Тейлора	$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$
Маклорена	$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$
Фурье	$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$ $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$

Табл. II.4. Разложение некоторых функций в степенные ряды

Функция	Разложение в ряд Маклорена	Область сходимости
$(1 \pm x)^n, n > 0$	$1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$	$ x  < 1$
$(1 \pm x)^{-n}, n > 0$	$1 \mp nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 \mp \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \dots$	$ x  < 1$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$	$ x  < \infty$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$	$ x  < \infty$
$e^x$	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$	$ x  < \infty$
$\ln(1 \pm x)$	$\pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\operatorname{sh} x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$	$ x  < \infty$
$\operatorname{ch} x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$ x  < \infty$

*Табл. II.5. Формулы для приближенных вычислений с помощью первых членов рядов Маклорена*

Формула приближенного расчета	Область значений $x$ , обеспечивающих точность 0,1 %
$(1 \pm x)^{-1} \approx 1 \mp x,$	$x < 0,031$
$\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2,$	$x < 0,093$
$\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2,$	$x < 0,085$
$e^{\pm x} \approx 1 \pm x,$	$x < 0,045$
$\ln(1 \pm x) \approx \pm x,$	$x < 0,045$
$\sin x \approx x,$	$x < 0,077 \text{ рад } (4,4^\circ)$
$\cos x \approx 1 - x^2/2.$	$x < 0,387 \text{ рад } (22,2^\circ)$

### Приложение III.

#### ТАБЛИЦЫ ЧИСЛЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

*Табл. III.1. Динамическая вязкость ( $\eta$ ) воздуха при нормальном давлении и различных температурах*

Temperatura, °C	-25	0	14	16	25	50	90	100
$\eta \cdot 10^8, \text{ Па} \cdot \text{с}$	1582	1720	1786	1795	1837	1955	2135	2180

*Табл. III.2. Динамическая вязкость ( $\eta$ ) некоторых жидкостей при нормальном давлении и различных температурах*

Temperatura, °C	$\eta \cdot 10^3, \text{ Па} \cdot \text{с}$			
	Вода	Ртуть	Этанол	Глицерин
-10	—	1,764	2,23	—
0	1,7921	1,685	1,773	12 100
10	—	1,615	1,466	3950
20	1,005	1,554	1,200	1480
30	—	1,499	1,003	600
40	—	1,450	0,834	330

Табл. III.3. Модули упругости ( $E$ ,  $G$ ) и коэффициент Пуассона ( $\mu$ ) поликристаллических материалов при нормальном давлении и температуре 20 °C

Материал	$E$ , ГПа	$G$ , ГПа	$\mu$
Вольфрам	342—400	88—215	—
Дюралюминий	70	26	0,31
Железо литое	100—130	35—53	0,23—0,31
Золото отожженное	79	29	0,42
Медь	82—127	39—48	0,31—0,34
Сталь углеродистая	195—205	81	0,24—0,26

Табл. III.4. Модули упругости ( $E$ ,  $G$ ) и коэффициент Пуассона ( $\mu$ ) некоторых материалов при нормальном давлении и температуре 20 °C

Материал	$E$ , ГПа	$G$ , ГПа	$\mu$
Бетон	15—40	7—17	0,32—0,36
Кварцевая нить	73	31	0,17
Плексиглас	5,25	1,48	0,35
Резина вулканизированная мягкая	0,0015—0,005	0,0005—0,0015	0,46—0,49
Стекло	49—78	17,5—29	0,2—0,3
Целлулоид	1,7—1,9	0,65	0,39

Табл. III.5. Модуль упругости ( $E$ ) и предел прочности ( $\sigma_n$ ) древесины при нормальном давлении и температуре 20 °C

Древесная порода	$E$ , ГПа		$\sigma_n$ , ГПа	
	Растяжение	Сжатие	Растяжение	Сжатие
Береза	18,1	15,8	161,0	46,5
Дуб	14,1	14,0	113,5	51,0
Ель	14,3	14,2	100,5	39,0
Ольха	11,9	12,8	96,5	36,6
Сосна	11,7	11,7	101,0	41,5
Ясень	14,0	15,0	139,0	50,0

Табл. III.6. Предел прочности ( $\sigma_n$ ) некоторых материалов при растяжении при температуре 20 °C

Материал	$\sigma_n$ , ГПа	Материал	$\sigma_n$ , ГПа
Алюминий	0,05—0,115	Полиэтилен	0,012—0,040
Дюралюминий	0,18—0,50	Серебро	0,14
Железо	0,17—0,21	Сталь	0,38—1,0
Золото	0,14	Стекло	0,06—0,12
Кирпич	0,007—0,030	Фторопласт-4	0,020—0,025
Лавсан	0,012—0,020	Чугун серый	0,65—1,30

Табл. III.7. Плотность ( $\rho$ ) газов и паров при нормальном давлении и температуре 0 °C

Вещество	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Вещество	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
Азот	1,2505	Оксид серы (IV)	2,9269
Аргон	1,7839	Оксид углерода (II)	1,2504
Водород	0,08988	Сероводород	1,5362
Воздух сухой	1,2928	Спирт метиловый	1,426
Кислород	1,42895	Хлороформ	5,639
Метан	0,7168	Этилен	1,2604

Табл. III.8. Плотность ( $\rho$ ) некоторых жидкостей при некоторых температурах

Жидкость	Темпера- тура, °C	$\rho \cdot 10^{-3}$ , кг/м <sup>3</sup>	Жидкость	Темпера- тура, °C	$\rho \cdot 10^{-3}$ , кг/м <sup>3</sup>
Ацетон	20	0,792	Ртуть	0	13,596
Вода	4	1,00	Спирты	20	0,78—0,81
Керосин	20	0,82	Сероуглерод	0	1,293
Кислота:					
азотная	20	1,502	Фторбензол	20	1,024
пальмитиновая	62	0,853	Эфир	0	0,736
уксусная	20	1,049	Этилацетат	20	0,901
Масло машинное	20	0,90—0,92			
Нефть	20	0,81—0,85			

Табл. III.9. Плотность ( $\rho$ ) воды при различных температурах и нормальном давлении

Темпера- тура, °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Темпера- тура, °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Темпера- тура, °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
0	999,841	7	999,902	70	977,78
1	999,900	10	999,700	80	971,80
2	999,941	20	998,203	90	965,31
3	999,965	30	995,646	100	958,35
4	999,973	40	992,21		
5	999,965	50	988,04		
6	999,941	60	983,21		

**Табл. III.10. Плотность ( $\rho$ ) некоторых чистых элементов при температуре 20 °C и нормальном давлении**

Элемент	$\rho \cdot 10^{-3}$ , кг/м <sup>3</sup>	Элемент	$\rho \cdot 10^{-3}$ , кг/м <sup>3</sup>
Алюминий	2,70	Медь	8,93
Висмут электролитический	9,747	Натрий	0,97
Вольфрам	18,6—19,1	Никель	8,6—8,9
Железо	7,87	Ртуть жидккая	13,546
Золото	19,3	Свинец	11,34
Кремний	2,42	Сера монокристаллическая	1,96

**Табл. III.11. Плотность ( $\rho$ ) некоторых видов древесины при нормальном давлении и температуре 20 °C**

Вещество	$\rho \cdot 10^{-3}$ , кг/м <sup>3</sup>	Вещество	$\rho \cdot 10^{-3}$ , кг/м <sup>3</sup>
Береза	0,51—0,77	Тополь	0,35—0,5
Дуб	0,60—0,90	Эбеновое	1,11—1,33
Сосна	0,37—0,60	Ясень	0,65—0,85

**Табл. III.12. Скорость звука ( $v_{3B}$ ) в газах и парах при температуре 0 °C**

Газ (или пар)	$v_{3B}$ , м/с	Газ (или пар)	$v_{3B}$ , м/с
Азот	333,6	Гелий	965
Аргон	319	Кислород	316
Бром	135	Оксид азота (IV)	324
Воздух	331,5	Этиловый эфир	176
Водяной пар	401	Этан	302

**Табл. III.13. Скорость звука ( $v_{3B}$ ) в жидкостях**

Жидкость	Темпера-тура, °C	$v_{3B}$ , м/с	Жидкость	Темпера-тура, °C	$v_{3B}$ , м/с
Азот	—203	929	Гелий	—269	180
Аргон	—186	837	Нефть	15	1470
Вода	20	1484	Свинец	327	1790

Табл. III.14. Скорость звука ( $v_{38}$ ) в твердых телах

Вещество	Temperatura, °C	$v_{38}$ , м/с		
		в стержне	продольная	поперечная
Алюминий	20	5080	6260	3080
	372	4342	—	—
Бериллий	27	—	12 550	8830
	20	5170	5850	3230
Железо	31,5	—	—	3770
	20	3710	4700	2260
Медь	20	1200	2160	700
	—	5370	5570	3515
Свинец	—	—	1479	—
Стекло кварцевое	—	—	—	—
Каучук	—	—	—	—

Табл. III.15. Длина ( $\bar{\lambda}$ , мкм) свободного пробега молекул газов в зависимости от температуры ( $t$ ) и давления ( $p$ )

Газ	$t = 0$ °C, $p = 0,1$ Па	$t = 0$ °C, $p = 133$ Па	$t = 25$ °C, $p = 133$ Па	$t = 0$ °C, $p = 101\ 325$ Па	$t = 25$ °C, $p = 101\ 325$ Па
Азот	6070	48,0	50,7	0,063	0,067
Водород	11 380	83,9	93,1	0,110	0,123
Воздух	6170	45,4	50,9	0,060	0,067
Гелий	18 200	133,2	147,4	0,175	0,194
Кислород	6560	48,1	54,0	0,063	0,071
Оксид углерода (IV)	...	29,5	33,4	0,039	0,044

Табл. III.16. Частота ( $z \cdot 10^{-7}$ , с<sup>-1</sup>) столкновений молекул газа между собой в 1 с при нормальном давлении

Газ	Temperatura, °C	
	0	25
Азот	721	708
Аргон	614	596
Водород	1533	1443
Воздух	747	698
Гелий	685	649

Табл. III.17. Скорость ( $v$ , м/с) движения молекул газов при нормальном давлении и температуре  $t = 20^\circ\text{C}$

Газ	$v_{\text{н.в.}}$ , м/с	$v_{\text{ср.}}$ , м/с	$v_{\text{ср. кв.}}$ , м/с
Аммиак	517	604	632
Водород	1487	1755	1838
Водяной пар	502	587	613
Гелий	1064	1252	1310
Оксид углерода (II)	402	471	492
Пары ртути	151	176	184

Табл. III.18. Критические параметры (давление, температура, плотность, объем) и коэффициенты Ван-дер-Ваальса ( $a$ ,  $b$ ) некоторых веществ в газообразном состоянии

Элемент	$p_{\text{кр.}}$ , МПа	$T_{\text{кр.}}$ , К	$\rho_{\text{кр.}}$ , кг/см <sup>3</sup>	$V_{\text{кр.}}$ , см <sup>3</sup> /моль	$a$ , м <sup>6</sup> ·Н/моль <sup>2</sup>	$b$ , см <sup>3</sup> /моль
Азот	3398	126,25	0,311	90,1	0,1350	38,620
Водород	1,30	33	0,032	61,8	0,0242	26,451
Гелий	0,229	5,20	0,0639	57,8	0,00338	23,606
Кислород	5,080	154,78	0,41	78	0,1358	31,671
Натрий	35,5	$2570 \pm 350$		116	—	—
Ртуть	$166,9 \pm 5,1$	$1460 \pm 20$	5(4,2)	48	—	—

Табл. III.19. Температурный коэффициент линейного расширения ( $\alpha_l \cdot 10^6$ ,  $^\circ\text{C}^{-1}$ ) металлов и сплавов

Металл (или сплав)	Температура, $^\circ\text{C}$		
	20	0...100	0—600
Алюминий	22,4	23,8	29
Вольфрам	4,5	4,5	4,7
Железо	11,7	12,2	14,5
Золото	14,2	14,3	15,5
Константан	14,4	15,2	
Сталь (0,05 % C)	11	12,0	14,2
Чугун		10,0	

Табл. III.20. Температурный коэффициент линейного расширения ( $\alpha_l$ ) некоторых твердых веществ

Вещество	Температура, °C	$\alpha_l \cdot 10^6, ^\circ\text{C}^{-1}$
Бетон	20	10—14
Гранит	20	6—9
Сосна (параллельно волокнам)	2—34	5,4
Сосна (перпендикулярно к волокнам)	2—34	34
Кирпич	20	3—9
Стекло кварцевое	20—200	0,56

Табл. III.21. Температурный коэффициент объемного расширения ( $\alpha_V$ ) некоторых жидкостей

Жидкость	$\alpha_V \cdot 10^6, ^\circ\text{C}^{-1}$	Жидкость	$\alpha_V \cdot 10^6, ^\circ\text{C}^{-1}$
Бензин	1100	Серная кислота (100 %-я)	570
Бензол	1237	Серауглерод	1210
Вода	208	Скипидар	973
Глицерин	505	Толуол	1099
Нефть (0—100 °C)	700—1000	Трансформаторное масло	600
Ртуть	181	Эфир этиловый	1650

Табл. III.22. Удельная теплоемкость ( $c$ ) газов при температуре 20 °C и нормальном давлении

Газ	$c_p, \text{кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	$c_V, \text{кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	$c_p/c_V$
Аммиак	2,244	1,675	1,31
Водород	14,269	10,132	1,41
Воздух	1,009	0,720	1,40
Гелий	5,296	3,182	1,66
Сероводород	1,026	0,804	1,34
Этилен	1,528	1,222	1,25

Табл. III.23. Удельная теплоемкость ( $c$ ) сжижения газов

Газ	Темпера- тура, К	$c, \text{кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	Газ	Темпера- тура, К	$c, \text{кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$
1	2	3	4	5	6
Азот	77,4*	2,001	Гелий	4,2*	4,270
Аммиак	233	4,413	Кислород	90,2*	1,700
Аммиак	239,8*	4,438	Метан	111,7*	3,454
Аргон	87,5*	1,011	Неон	27,10*	1,591

Окончание

1	2	3	4	5	6
Водород	20,28*	9,377	Оксид серы (IV)	253	1,310
Воздух	81	2,052	Оксид углеро- да (II)	81,4	2,373

\* Температура кипения.

Табл. III.24. Удельная теплоемкость (*c*) некоторых жидкостей

Жидкость	Температура, °С	<i>c</i> , кДж/(кг·К)
Ацетон	0	2,114
Бензин	50	2,09
Вода	20	4,182
Керосин	20—100	2,085
Масло трансформаторное	0—100	1,88
Глицерин	20	2,43
Ртуть	20	0,1390
Фреон-12	20	2,01

Табл. III.25. Удельная теплоемкость (*c*) металлов в жидком состоянии

Металл	Температура, °С	<i>c</i> , кДж/(кг·К)
Алюминий	660,4—1000	1,084
Золото	1065—1300	0,142
Литий	200—1000	4,19
Олово	250	0,243
Свинец	327,4	0,163
Серебро	961—1300	0,289

Табл. III.26. Удельная теплоемкость (*c*) газов в твердом состоянии

Газ	Темпера- тура, К	<i>c</i> , кДж/(кг·К)	Газ	Темпера- тура, К	<i>c</i> , кДж/(кг·К)
Азот	15,4	0,477	Метан	10,4	0,247
Азот	23,2	0,829	Метан	40,1	1,809
Азот	60,7	1,658	Метан	83,8	2,629
Водород	5,8	0,213	Оксид углеро- да II	17,6	0,394
Кислород	10,2	0,084	Оксид углеро- да II	57,2	2,039
Кислород	51,6	1,407	Оксид углеро- да II	65,1	1,805

Табл. III.27. Удельная теплоемкость (*c*) некоторых химических элементов

Элемент	Темпера- тура, °С	<i>c</i> , кДж/(кг · К)	Элемент	Темпера- тура, °С	<i>c</i> , кДж/(кг · К)
Алюминий	20	0,896	Платина	0	0,133
Вольфрам	20	0,134	Свинец	0	0,128
Железо	20	0,452	Серебро	0	0,233
Золото	20	0,129	Углерод (алмаз)	20	0,502
Медь	20	0,383	Углерод (графит)	0	0,641
Олово	0	0,225	Цинк	20	0,385

Табл. III.28. Удельная теплоемкость (*c*) некоторых твердых веществ при температуре 20 °С

Вещество	<i>c</i> , кДж/(кг · К)	Вещество	<i>c</i> , кДж/(кг · К)
Асфальт	0,92	Нихром	0,448
Бетон	0,88	Полиэтилен	2,30
Дуб, ель, сосна	2,3—2,7	Резина	2,09
Кирпич красный	0,88	Сталь (20—200 °С)	0,46
Константан	0,41	Текстолит	1,47
Бумага	1,51	Чугун (0—200 °С)	0,54

Табл. III.29. Температура (*t*) и скрытая теплота ( $\Delta Q$ ) фазовых переходов некоторых веществ при нормальном давлении

(Пл — плавление, Исп — испарение, Свп — сверхпроводящее, Субл — сублимация, Тв — между твердыми фазами, Фм — ферромагнитный переход)

Вещество	Пере- ход	<i>t</i> , °С	$\Delta Q$ , кДж/моль	Вещество	Пере- ход	<i>t</i> , °С	$\Delta Q$ , кДж/моль
Серебро	Пл	960,8	11,27	CO <sub>2</sub>	Пл	-56,6	7,95
	Исп	2212	254,0		Субл	-78,5	—
Аргон	Пл	-189,3	1,176	Ртуть	Свп	-269,0	0,00
	Исп	-185,9	6,519		Пл	-38,86	2,295
Золото	Пл	1063	12,77	Железо	Исп	356,73	59,11
	Исп	2700	324,4		Фм	760	0,00
HCl	Тв	-174,7	1,189	Алюминий	Тв	906	0,878
	Пл	-114,2	1,992		Свп	-272,0	0,00
	Исп	-85,02	16,15	Пл	660,1	10,7	
				Исп	2447	293,7	

Табл. III.30. Скачок молярной теплоемкости ( $\Delta C_p$ ) некоторых элементов при фазовом переходе I-го рода при нормальном давлении

Вещество	Переход	T, К	$\Delta C_p$ , Дж/(моль·К)	Вещество	Переход	T, К	$\Delta C_p$ , Дж/(моль·К)
Железо	Тв	1180,0	5,86	Медь	Пл	1356,2	2,09
	Тв	1673	4,19		Тв	626	-2,97
Золото	Пл	1808	-11,7	Никель	Пл	1728	0
	Пл	1336,16	-2,22		Пл	1234,0	2,93
Кислород	Тв	23,66	1,26				
	Тв	43,77	-0,586				
	Пл	54,4	7,29				
	Исп	90,19	-25,1				

Табл. III.31. Поверхностное натяжение ( $\sigma$ ) сжиженных газов

Газ	Температура, К	$\sigma$ , мН/м
Азот	70,1	10,53
Аммиак	273	26,55
Водород	15,1	2,83
Воздух	82,7	12,2
Гелий	1,3	0,12
Пропан	143	27,8

Табл. III.32. Поверхностное натяжение ( $\sigma$ ) некоторых элементов в жидком состоянии

Элемент	Газовая среда	Температура, °C	$\sigma$ , мН/м	Элемент	Газовая среда	Температура, °C	$\sigma$ , мН/м
Алюминий	—	660,1	914	Натрий	—	97,82	191
Вольфрам	—	3380	2300	Олово	Вакуум	100	222
Медь	—	1084,5	1351	Платина	—	231,968	554
Железо	—	1535	1840		Вакуум	247	539,8
	—	1550	1788		Вакуум	600	505,6
Золото	Воздух	1535	949,7		—	1769	1740
	—	1064,43	1134		—	1800	1699
Молибден	Воздух	700	1207		—	2000	1819
	—	2617	2050	Ртуть	—	-38,862	478
				Свинец	—	327,3	480
				Цинк	Вакуум	370	465,4
					Воздух	360	967,4

**Табл. III.33. Поверхностное натяжение ( $\sigma$ ) воды**

Температура, °C	$\sigma \cdot 10^3$ , Н/м	Температура, °C	$\sigma \cdot 10^3$ , Н/м
0	75,62	60	66,64
10	74,11	70	64,27
20	72,58	80	62,50
30	71,03	90	60,68
40	69,41	100	58,80
50	67,79		

**Табл. III.34. Теплопроводность ( $\kappa$ ) некоторых твердых веществ при температуре 20 °C**

Вещество	$\kappa$ , Вт/(м · К)
Алмаз	133,3
Бетон	0,11—2,33
Войлок шерстяной (40 °C)	0,062
Доски сухие (перпендикулярно к волокнам):	
дубовые	0,20—0,21
сосовые	0,14—0,16
Доски сухие (параллельно волокнам):	
дубовые	0,35—0,43
сосовые	0,35—0,37
Кирпичная кладка	0,67—0,87

**Табл. III.35. Теплопроводность ( $\kappa$ ) чистых металлов**

Металл	Темпера- тура, °C	Вт/(м · К)	Металл	Темпера- тура, °C	Вт/(м · К)
Алюминий	0	230	Олово	0	66,1
Висмут	0	8,4	Платина	27	71,2
Железо	20	73,3	Свинец	0	35,1
Золото	0	322	Серебро	27	423
Медь электротех- ническая	0	395,4	Ртуть	23	6,8
Никель	0	93	Титан (99,99 %)	20	20,0

Табл. III.36. Значения диффузионных констант для некоторых чистых материалов и сплавов

Материал	$D_0, \text{ м}^2/\text{с}$	$E_a, \text{ эВ}$	$E_a, \text{ кДж/моль}$
Zn в Ge	$4,0 \cdot 10^{-5}$	2,5	240,7
Cu в Al	$2,3 \cdot 10^{-4}$	1,45	140,3
Fe в Fe	$1,0 \cdot 10^{-2}$	3,0	288,9
Cu в Cu	$2,0 \cdot 10^{-5}$	2,05	194,7
Zn в Cu	$3,4 \cdot 10^{-5}$	1,98	190,9
Zn в латунь с 30 % Zn	$7,3 \cdot 10^{-5}$	1,77	170,4

Табл. III.37. Коэффициенты диффузии некоторых элементов и химических соединений в различных жидкостях

Диффундирующее вещество	Диффузионная среда	$t, ^\circ\text{C}$	$D, 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$
Mg	Al	700	7,5
Si	Fe	1480	2,4
AgNO <sub>3</sub>	KNO <sub>3</sub>	360	4,6
Метанол	Вода	18	1,4
Глюкоза	Вода	18	0,5
CO <sub>2</sub>	Вода	18	1,5

## ЛИТЕРАТУРА

- Детлаф А. А., Яворский Б. М., Милковская Л. Б. Курс физики: В 3 т. М.: Вышш. шк., 1977. Т. 1.
- Детлаф А. А., Яворский Б. М., Милковская Л. Б. Курс физики: В 3 т. М.: Вышш. шк., 1977. Т. 2.
- Детлаф А. А., Яворский Б. М. Курс физики: В 3 т. М.: Вышш. шк., 1979. Т. 3.
- Детлаф А. А., Яворский Б. М. Курс физики: М.: Вышш. шк., 1989.
- Джанколи Д. Физика: Пер. с англ.: В 2 т. М.: Мир, 1989. Т. 1—2.
- Дубровский И. М., Егоров Б. В., Рябошапка К. П. Справочник по физике. Киев: Наукова думка, 1986.
- Орир Дж. Физика: Пер. с англ.: В 2 т. М.: Мир, 1981. Т. 1—2.
- Савельев И. В. Курс физики: В 3 т. М.: Наука, 1989. Т. 1.
- Савельев И. В. Курс физики: В 3 т. М.: Наука, 1989. Т. 2.
- Савельев И. В. Курс физики: В 3 т. М.: Наука, 1989. Т. 2.
- Трофимова Т. И. Курс физики: М.: Вышш. шк., 1990.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ\*

- Автоколебания 164  
Аддитивная характеристика 60, 61  
Аддитивность массы 43  
Адиабата 290  
Адиабатическая постоянная 291  
Адиабатический процесс 210  
Акустика 210  
Акустический резонанс 215  
— спектр 211  
Ампер 11  
Атомная единица массы 278, 409
- Барьер потенциальный 100  
Бел 213  
Биномиальное распределение 333  
Близкодействие 101  
Бозоны 264
- Вакуум 316  
Вектор истинный 33  
— мгновенного ускорения 24  
— мгновенной скорости 22—23  
— перемещения 20  
— среднего ускорения 24  
— средней скорости 21  
— углового ускорения 33  
— угловой скорости 33  
— Умова 201—203  
Величина физическая 8  
Вероятность события 330  
Вес статистический 335, 340  
Взаимодействие обменное 264  
Взаимодействия фундаментальные 69—71  
Вибратор 159  
Волна бегущая 204  
— когерентная 207  
— модулирующая 198  
— монохроматическая 192  
— несущая 198  
— стоячая 203—205  
— сферическая 191  
— ударная 221—223  
— упругая 189  
Волновая функция 255  
Волновое сопротивление среды 223  
Волновой пакет 199  
Вращение 32  
— переменное 35  
— равномерное 35  
— равнопеременное 35  
Время 9—10  
— релаксации 49, 159  
— собственное 241  
Высота звука 212  
Вязкость 181—183, 399—400, 403, 405
- Гармоника первая 206  
Гармоники высшие 206  
Генераторы ультразвука 217  
— магнитострикционные 217  
— механические 217  
— пьезозаводнические 217  
— электромеханические 217
- Гиперзвук 216  
Гироскоп 139  
Гравитационная постоянная 409  
Градиент потенциальной энергии 97  
— потенциала 104  
— температуры 398  
— скорости 400  
— плотности, концентрации 399
- Давление 170, 410  
— локальное 170  
— парциальное 280  
Движение абсолютное 37  
— относительное 37  
— переносное 37  
— точки в полярной системе координат 30  
— сложное 37, 39  
Дебройлевская длина волны 254  
Декремент затухания 158, 159  
Дефектоскопия ультразвуковая 217  
Деформация 77—79  
— изгиба 79  
— кручения 79  
— сдвига 78  
Децибел 213  
Диаграмма векторная 40  
— термодинамическая 28  
Диаметр эффективный 314  
Динамика 40—42  
— обратная задача 41  
— основная задача 41  
Дислокация 374  
Дисперсия волн аномальная 196  
— нормальная 196  
Диссиляция энергии 157  
Дифракция волн 209  
Диффузия 398, 402—403  
Длина волны 191, 205, 240, 410  
Добротность 159  
Дуализм корпускулярно-волновой 252—253
- Единицы физических величин 10—11  
— внесистемные 11  
— основные 11  
— производные 11
- Жидкость несжимаемая вязкая 181  
— идеальная 174
- Закон Авогадро 279  
— Архимеда 173  
— Бойля-Марнотта 279  
— всемирного тяготения 80—81  
— Гей-Люссака 279  
— Гука 190, 191, 375  
— Дальтона 279  
— Джонсона и Пти 380  
— Кеплера первый и второй 58, 59  
— третий 87  
— Кулона 82—83  
— в вакууме 82  
— Ньютона второй 46—47, 48, 57, 110, 148

Составлен Е. А. Пастушенко.

- в СТО 246
- для вязкости 400
- первый 44–46
- третий 47–48, 246
- о равномерном распределении энергии 323
- Паскаля 170, 171
- сохранения импульса 225
- момента импульса точки 57, 226
- энергии 92–93, 227–228
- Стокса 186
- Фика 399
- Фурье 398
- Шарля 279
- замедление времени 235
- Звук 210
  
- Изотропность пространства** 10, 225
- Импульс материальной точки** 43
- релятивистский 244–246
- фотона 252–253
- сила 410
- системы 60
- Инвариант в СТО** 243
- Инварианты** 51
- Индукция магнитного поля** 83
- Инертность** 42
- Интенсивность звука** 410
- Интервал** 242–244
- времениподобный 243
- нулевой 243
- пространственноподобный 243
- Интерференция** 206
- Инфразвук** 210
  
- Кавитация** 218
- Кандела** 11
- Капиллярность** 394
- Квант вращательной энергии** 326
- колебательной энергии 326
- Кинематика** 14, 15
- обратная задача 27
- релятивистская, основные положения 238
- Кинетика физическая** 397–398
- Колебания** ангармонические 166
- вынужденные 159–161
- гармонические 145
- затухающие 145, 157–159
- линейно-поляризованные 155
- линейные 166
- нулевые квантового осциллятора 273
- параметрические 165–166
- поляризованные по кругу 155
- свободные 145
- струны 205
- эллиптически поляризованные 155
- Количество вещества** 278
- Количество теплоты** 283
- Компас гирокосмический** 139
- Кривая инверсии** 370
- Кривизна** 230
- Коэффициент адабатической сжимаемости** 210
- динамической вязкости 182, 410
- диффузии 410
- изгибной жесткости 79
- кинематической вязкости 400, 410
- крутильной жесткости 80
- поверхностного натяжения 391, 410
- Глассона 375–376, 415
- сдвиговой жесткости 78
- сжимаемости 171
  
- трения качения 76
- скольжения 72
- холодильный 301
  
- Линии тока** 174
- Луч** 189
- ультразвуковой 217
  
- Макросостояние системы** 335
- Масса** 42
- атомная относительная 278
- гравитационная 43
- молекулярная относительная 278
- молярная 278
- покоя 246, 409
- релятивистская 246
- Маятник** обратный 150
- физический 149
- Фуко 121
- Мениск** 393
- Метод Лагранжа** 174
- Эйлера 174
- Механика** 14
- квантовая 14, 230, 251
- классическая Ньютона 14
- релятивистская 14, 230, 232
- Микросостояние системы** 335
- Модель Дебая** 381
- Модуль объемного сжатия** 376
- Юнга 190, 410
- Моль** 11, 278
- Момент импульса** 55, 132–134
- системы 60
- инерции 124, 125, 134–135
- осевой 125
- твердого тела 124
- силы 52–53, 410
- Мощность** 410
- Мюоны** 236
  
- Напряжение** 410
- Напряженность гравитационного поля** 102
- поля 102–103
- точечной массы 102
- электрического 83
- Начало термодинамики** второе 302
- первое 283–284
- третье 305
- Неизменность массы** 43
  
- Однородность времени** 10, 225
- пространства 10, 224–225
- Оператор** Лапласа 194–195
- Опыт Штерна** 311
- Осциллятор гармонический** 270–271
- двумерный 154–155
- квантовый 271
- одномерный 145–148
- пространственный 379
- с диссилиацией энергии 157–158
- Ось вращения** 32
- свободная 128
  
- Парадокс Д'Аламбера** — Эйлера 187
- Период вращения** 35
- Плотность** 410, 416–417
- вероятности 257, 332
- энергии 201–202
- Поверхность волновая** 191

- Поле гравитационное 102  
   — звуковое 210  
   — потенциальное 101  
 Политропы 293  
 Порог болевого ощущения 213  
   — слышимости 212  
 Постоянная Авогадро 409  
   — Больцмана 409  
   — гравитационная 81, 409  
   — магнитная 84, 409  
   — Планка 409  
   — универсальная газовая 172, 409, 410  
   — электрическая 82, 409  
 Постулаты Эйнштейна 232—233  
 Потенциал Гиббса 308  
   — гравитационного поля 104  
   — изобарно-изотермический 308  
   — изохорно-изотермический 308  
   — Леннард-Джонса 361  
   — Морзе 321—322  
   — системы химический 307  
 Потенциальная яма 99  
 Потенциальное поле 101—102  
 Потенциальный барьер 100  
 Правило фаз Гиббса 357  
 Предел прочности 377  
   — текучести 377  
   — упругости 377  
 Преобразования Галилея 49, 50  
   — Лоренца 236, 238, 245  
 Принцип Гюйгенса — Френеля 208—209  
   — дополнительности 253  
   — отвердевания 169  
   — относительности Галилея 51  
   — Паули 264  
   — суперпозиции 103, 104, 166, 196  
   — для волновых функций 256  
     — — — квантовых состояний 256  
     — — — напряженности 103  
     — — — потенциала 104  
     — — — упругих волн 196  
   — тождественности 263—264  
   — эквивалентности 43  
 Пространство 9—10  
 Процесс адабиатический 290, 291  
   — изобарический 286, 288  
   — изотермический 289—290  
   — изохорический 286, 287  
   — политропический 293  
   — термодинамический 281  
 Псевдовекторы 33  
  
 Работа 283  
   — силы 53  
   — элементарная 53  
 Равновесие 99  
   — механическое 387  
   — термодинамическое 279  
   — термическое 387  
   — химическое 387  
 Радиус кривизны траектории 25  
   — молекулярного действия 389  
   — первой боровской орбиты 409  
 Размерность физической величины 12  
 Распределение биномиальное 333  
   — Бозе — Эйнштейна 352  
   — Больцмана 342, 344—345  
   — Максвелла 344—345, 347  
   — Максвелла — Больцмана 344—345  
   — Ферми — Дирака 352  
 Резонанс 161  
 Резонатор Гельмгольца 215  
 Релятивистские масса, импульс и энергия 246, 248  
 Решетка кристаллическая 371, 372—373  
  
 Самовозбуждение параметрическое 163  
 Сжимаемость среды 171  
 Сила 44, 96, 410  
   — звука 212  
   — инерции кориолисова 114  
   — — — переносная 114  
   — — — центробежная (нормальная) 112  
   — — — касательная 112  
   — — — квазиупругая 149  
   — — — консервативная 55  
   — — — контактная 44  
   — — — Лоренца 83—84  
   — — — полевая 44  
   — — — трения покоя 72  
   — — — скольжения 72  
   — — — тяжести 116—119  
   — — — центральная 57  
   — — — электрическая 83  
 Силы ван-дер-ваальсовы 361  
 Система двухфазная 356  
   — закрытая 306  
   — механическая 59  
   — отсчета 36, 45  
     — — — гелиоцентрическая 45  
     — — — геоцентрическая 45  
     — — — инерциальная 45  
     — — — неинерциальная 45  
     — — — термодинамическая 280  
   — трехфазная 410  
 Скорость звука групповая 197, 199  
   — фазовая 193, 195  
   — космическая вторая и третья 88  
   — наиболее вероятная 314  
   — света в вакууме 409  
   — средняя арифметическая 20, 313  
   — квадратичная 313  
   — угловая 32, 33  
 Сложение колебаний 39, 40  
 Событие 329  
 Соотношения неопределенности 261  
 Сопротивление волновое 223  
 Спектр системы энергетический 340  
   — энергии дискретный 266  
   — — — квантового осциллятора 273  
   — непрерывный 266  
 Спин 264  
 Спиновое квантовое число 264  
 Среднее по ансамблю 310  
   — — — времени 310  
 Статистика Бозе — Эйнштейна 336, 351  
   — Максвелла — Больцмана 336, 342  
   — Ферми — Дирака 336, 351  
 Стерadian 11—12  
  
 Тембр звука 212  
 Температура Дебая 382  
   — термодинамическая 320  
 Температурный коэффициент линейного расширения 419—420  
 Тензор деформаций 375  
   — моментов инерции 130—132  
   — напряжений 375  
 Теорема Карно 301  
   — — — для потерянной при ударе энергии 95  
   — Нернста 305  
   — Штейнера 135  
 Теория молекулярно-кинетическая 277  
   — относительности специальная 232  
 Теплоемкость вещества 286, 410  
 Теплопроводность 398, 401—402  
 Теплота 283  
   — приведенная 303  
   — фазового перехода 358  
 Термодинамика 277—278

- Термометр стандартный газовый 280  
 Течение ламинарное 183  
 — нестационарное 174  
 — стационарное 174  
 — турбулентное 183  
 Точка критическая 358  
 — тройная 356  
 Трение внешнее 71  
 — внутреннее 71  
 — вязкое 76  
 — качения 74  
 — покоя 71  
 — скольжения 71  
 Угол краевой 393  
 Удар 93—96  
 Ультразвук 210  
 Уравнение Бернулли 176—178, 188  
 — Ван-дер-Ваальса 362—363, 367  
 — волновое 194  
 — вращения тела кинематическое 32  
 — Клапейрона — Клаузуса 387  
 — Клапейрона — Менделеева 172, 291  
 — Майера для идеального газа 286, 287  
 — Мещерского 68  
 — неразрывности 175  
 — плоской волны 192, 203  
 — полиропы 294  
 — Пуассона 292  
 — стоячей волны 203—204  
 — сферической волны 194  
 — Фика второе 406  
 — Шредингера 265—266  
 Условие максимума 207  
 — минимума 208  
 — нормировки 259  
 Условия граничные 267  
 Фаза 356  
 Фазовый переход 358  
 Фермионы 264  
 Фигуры Лиссажу 155  
 Физика статистическая 277, 328  
 Фон 213  
 Фонон 383  
 Формула Жуковского 187  
 — Клапейрона — Клаузуса 386  
 — Пуазейля 185
- Релея 199  
 — Торричелли 178—179  
 — Циолковского 68  
 Формулы Эйлера 411  
 Фотоны 252  
 Фронт волны 191
- Центр масс 61, 62  
 — сил 57  
 Цикл Карно 299
- Шкала температур эмпирическая 319  
 — абсолютная термодинамическая 319  
 Шумы 212
- Частица квантовая 270  
 — классическая 270  
 Частота осциллятора циклическая 410  
 — резонансная 161  
 Число Авогадро 278  
 — квантовое 269  
 — Рейнольдса 183  
 — степеней свободы 20
- Электронвольт 409  
 Эллинсоид инерции 132  
 Энергетические эквиваленты 409  
 Энергия внутренняя 282  
 — Гельмгольца 307  
 — кинетическая 55, 56, 61, 141, 146, 200  
 — покоя 248  
 — потенциальная 88—92, 96, 146, 200  
 Энтропия 303, 304, 341—343, 410  
 Эрозия кавитационная 218  
 Эффект Доплера 218—220  
 — туннельный 274
- Явление биения 156  
 — вязкости 397  
 — диффузии 397  
 — теплопроводности 397  
 — резонанса 161  
 Яма потенциальная 99, 266—267

### Указатель заданий для самостоятельной проработки материала

- 1.1—1.4— с. 30—31. 1.5—1.9— с. 38—40. 2.1—2.3— с. 51—52. 2.4—  
 2.8— с. 67—68. 3.1—3.9— с. 85—88. 4.1— с. 96. 4.2—4.4— с. 106—107.  
 5.1—5.2— с. 122. 6.1—6.3— с. 137. 6.4—6.5— с. 143—144. 7.1—7.3—  
 с. 151—153. 7.4— с. 155. 7.5—7.6— с. 159. 7.7— с. 162—163. 8.1—  
 с. 173. 8.2—8.3— с. 180—181. 8.4—8.6— с. 187—188. 9.1—9.3— с. 203.  
 10.1— с. 231—232. 11.1—11.2— с. 238. 11.3—11.5— с. 243—244. 11.6—  
 11.8— с. 250—251. 12.1— с. 258. 12.2—12.3— с. 276. 13.1— с. 285. 13.2—  
 13.5— с. 294—295. 13.6—13.7— с. 305—306. 13.8—13.10— с. 308—309.  
 14.1—14.2— с. 327—328. 15.1—15.2— с. 336—339. 15.3—15.5— с. 346—  
 347. 15.6—15.7— с. 351. 16.1—16.3— с. 362. 16.4—16.6— с. 370. 16.7—  
 16.8— с. 395—396. 17.1— с. 407.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b>	3
<b>Введение</b>	5
<b>I. МЕХАНИКА КЛАССИЧЕСКАЯ, РЕЛЯТИВИСТСКАЯ И КВАНТОВАЯ</b>	14
<b>1. Кинематика</b>	14
1.1. Кинематика материальной точки	15
1.2. Кинематические характеристики точки	19
1.3. Классификация движений материальной точки	26
1.4. Кинематика абсолютно твердого тела	31
1.5. Относительность движения	36
<b>2. Динамика материальной точки и системы материальных точек</b>	40
2.1. Важнейшие понятия динамики точки	42
2.2. Законы Ньютона. Инерциальные и неинерциальные системы	44
2.3. Преобразования Галилея и механический принцип относительности	49
2.4. Меры действия силы и динамические меры механического движения	52
2.5. Законы изменения момента импульса и кинетической энергии точки	56
2.6. Основные понятия и уравнения динамики системы материальных точек	59
<b>3. Виды и законы силовых взаимодействий</b>	69
3.1. Силы трения скольжения, качения и вязкого сопротивления	71
3.2. Сила упругости. Закон Гука	77
3.3. Закон всемирного тяготения. Опыт Кавендиша	80
3.4. Электростатическое взаимодействие зарядов	82
3.5. Магнитное взаимодействие движущихся зарядов	83
<b>4. Потенциальная энергия и закон сохранения энергии. Потенциальное силовое поле</b>	88
4.1. Потенциальная энергия консервативных сил	88
4.2. Закон сохранения энергии в механике	92
4.3. Потенциальная энергия и ее связь с силой взаимодействия	96
4.4. Полевой подход к описанию взаимодействия	101
<b>5. Динамика относительного движения в неинерциальных системах</b>	108
5.1. Основное уравнение динамики в неинерциальных системах отсчета	108
5.2. Поле сил тяжести	116
5.3. Движение тел с учетом вращения Земли	119

<b>6. Динамика абсолютно твердого тела</b>	122
6.1. Уравнения динамики для простейших видов движения твердого тела	123
6.2. Моменты инерции и моменты импульса тела	130
6.3. Уравнение вращения тела относительно неподвижного центра $O$	137
6.4. Закон изменения кинетической энергии твердого тела	141
<b>7. Механические колебания</b>	144
7.1. Свободные гармонические колебания	145
7.2. Сложение гармонических колебаний и частотный спектр сложного периодического колебания	154
7.3. Затухающие механические колебания	157
7.4. Вынужденные механические колебания	159
7.5. Самовозбуждающиеся, параметрические и нелинейные колебания	163
<b>8. Элементы механики сплошной среды</b>	168
8.1. Гидроаэростатика	169
8.2. Гидродинамика несжимаемой идеальной жидкости	174
8.3. Гидродинамика несжимаемой вязкой жидкости	181
8.4. Движение тел в жидкостях и газах	185
<b>9. Волновые процессы в упругой среде</b>	189
9.1. Уравнение волны и волновое уравнение	192
9.2. Энергия упругой волны и ее плотность	200
9.3. Отражение волн. Стоячие волны	203
9.4. Интерференция упругих волн	206
9.5. Понятие о дифракции волн	208
9.6. Звуковые волны	210
9.7. Ударные волны	220
<b>10. Пространство и время в классической физике. Ограниченностъ классических представлений</b>	224
10.1. Законы сохранения и свойства пространства — времени	225
10.2. Ограниченностъ классической механики Ньютона	228
<b>11. Элементы релятивистской механики</b>	232
11.1. Следствия из постулатов СТО	233
11.2. Основные положения релятивистской кинематики	238
11.3. Элементы релятивистской динамики	244
<b>12. Элементы квантовой механики</b>	251
12.1. Корпускулярно-волновой дуализм	252
12.2. Математический формализм квантовой механики	255
12.3. Применение уравнения Шрёдингера к решению некоторых модельных задач квантовой механики	266
<b>II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА</b>	277
<b>13. Термодинамика</b>	280
13.1. Связь между внутренней энергией, работой и теплотой	282
13.2. Теплоемкость тела и вещества — функции термодинамического процесса	285
	431

13.3. Применение первого начала термодинамики к исследованию равновесных процессов	287
13.4. Обратимые и необратимые процессы. Циклы	295
13.5. Второе и третье начала термодинамики	302
13.6. Термодинамические функции равновесного состояния системы	306
<b>14. Молекулярно-кинетическая теория идеального газа</b>	<b>309</b>
14.1. Кинематические характеристики молекулярного движения	311
14.2. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории и его применение	317
14.3. Классическая теория равновесных свойств идеального газа	320
14.4. Сопоставление классической и квантовой теории теплоемкости газов	324
<b>15. Элементы статистической физики</b>	<b>328</b>
15.1. Некоторые сведения из теории вероятностей	329
15.2. Основные понятия статистической физики	335
15.3. Классическая функция распределения в статистике Больцмана и ее использование	342
15.4. Квантовые функции распределения в статистике Ферми — Дирака и Бозе — Эйнштейна	351
<b>16. Реальные газы, жидкости и твердые тела</b>	<b>354</b>
16.1. Фазовые равновесия и превращения	356
16.2. Уравнение состояния и свойства реального газа и жидкости	360
16.3. Структура и механические свойства твердых тел	370
16.4. Теплоемкость твердых тел	379
16.5. Свойства вещества в области фазовых переходов	384
16.6. Молекулярные явления на границе раздела фаз	387
<b>17. Явления переноса в газах, жидкостях и твердых телах</b>	<b>396</b>
17.1. Законы физической кинетики	398
17.2. Молекулярно-кинетическая теория явлений переноса в газах, твердых телах и жидкостях	401
Приложение I	
Таблицы значений ряда физических констант	408
Приложение II	
Математические формулы	411
Приложение III	
Таблицы численных значений различных физических величин	414
<b>Л и т е р а т у р а</b>	<b>425</b>
<b>П р е д м е т н ы й у к а з а т е л ь</b>	<b>426</b>
<b>Указатель заданий для самостоятельной проработки материала</b>	<b>429</b>