

**Математика в техническом
университете**

Комплекс учебников из 20 выпусков

под редакцией В. С. Зарубина и А. П. Крищенко

- I. Введение в анализ
- II. Дифференциальное исчисление функций одного переменного
- III. Аналитическая геометрия
- IV. Линейная алгебра
- V. Дифференциальное исчисление функций многих переменных
- VI. Интегральное исчисление функций одного переменного
- VII. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля
- VIII. Дифференциальные уравнения
- IX. Ряды
- X. Теория функций комплексного переменного
- XI. Интегральные преобразования и операционное исчисление
- XII. Дифференциальные уравнения математической физики
- XIII. Приближенные методы математической физики
- XIV. Методы оптимизации
- XV. Вариационное исчисление и оптимальное управление
- XVI. Теория вероятностей
- XVII. Математическая статистика
- XVIII. Случайные процессы
- XIX. Дискретная математика
- XX. Исследование операций

И.К. Волков, А.Н. Канатников

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
И
ОПЕРАЦИОННОЕ
ИСЧИСЛЕНИЕ**

ВЫПУСК XI

*Рекомендовано Министерством общего
и профессионального образования
Российской Федерации в качестве
учебника для студентов высших
технических учебных заведений*

Москва
Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
1996

ББК 22.161.1

Б67

УДК 517.3

Рецензенты: А.А. Алексашенко, Э.М. Карташов

В67 **Волков И.К., Канатников А.Н.** Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учебник для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. –228 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XI).

ISBN 5-7038-1273-9 (Вып. XI)

ISBN 5-7038-1270-4

Изложены элементы теории интегральных преобразований. Рассмотрены основные классы интегральных преобразований, играющие важную роль в решении задач математической физики, электротехники, радиотехники. Теоретический материал проиллюстрирован большим числом примеров. Отдельный раздел посвящен операционному исчислению, имеющему важное прикладное значение.

Учебник прошел успешную апробацию в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов технических университетов и вузов, аспирантов и научных сотрудников, использующих аналитические методы в исследовании математических моделей.

Ил.16. Табл.3. Библиогр. 25 наэв.

Выпуск книги финансировал
Московский государственный технический
университет им. Н.Э. Баумана

В 1602070000-12
095(2)-96 Без объявл.

ББК 22.161.1

ISBN 5-7038-1273-9 (Вып. XI)
ISBN 5-7038-1270-4

- © И.К. Волков, А.Н. Канатников, 1996
- © Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 1996
- © Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996

ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание выпуска относится к одному из специальных разделов высшей математики и требует хорошего знания базового курса. Мы предполагаем, что читатель умеет оперировать основными понятиями линейной алгебры, теории дифференциальных уравнений, особенно теории линейных дифференциальных уравнений, интегрального исчисления, теории рядов, в частности, теории рядов Фурье, теории функций комплексного переменного.

Основной теоретический материал по собственным функциям и интегральным преобразованиям уходит глубоко в дебри функционального анализа. Ориентируясь на студентов и специалистов технических специальностей, мы старались вести изложение на достаточно простом уровне, отступая иногда от строгого математического стиля, если смысл происходящего интуитивно ясен. Хотя речь идет в основном о пространстве L^2 функций, интегрируемых с квадратом, мы опустили такие вопросы, как, например, вопросы полноты пространства, и опирались на интеграл Римана или Римана — Стильтьеса. Точно так же в книге ничего нет о таких вещах, как, скажем, дефекты симметрических операторов. Основная спектральная теорема в главе 3 изложена в простой формулировке с использованием интеграла Римана — Стильтьеса.

Надеемся, что книга будет полезной для студентов, аспирантов и других специалистов технических специальностей.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $f(x) \equiv g(x)$ — значения функций $f(x)$ и $g(x)$ совпадают при любом значении аргумента x ;
- $\|f\|$ — норма вектора f в нормированном пространстве;
- \bar{a} — число, комплексно сопряженное числу a ;
- A^T — матрица, транспонированная к матрице A ;
- $A \setminus B$ — разность множеств A и B ;
- $a \perp b$ — a ортогонально b в смысле некоторого скалярного произведения;
- $\langle a, b \rangle$ — скалярное произведение двух векторов a и b в евклидовом пространстве;
- $f \doteq F$ — функция-оригинал f преобразования Лапласа и его изображение F ;
- $f * g$ — свертка двух функций-оригиналов преобразования Лапласа;
- $f(\cdot, y)$ — функция нескольких переменных, рассматриваемая при фиксированном значении аргумента y (в общем случае векторного). Например, запись $f(\cdot, y) \in L^2[a, b]$ означает, что при любом фиксированном y функция $\varphi(x) \equiv f(x, y)$ принадлежит функциональному пространству $L^2[a, b]$;
- \mathbb{C} — комплексная плоскость (множество комплексных чисел);
- $\eta(t)$ — функция Хевисайда;
- $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера;

$H_\nu^{(1)}(z)$	— цилиндрическая функция III рода (функция Ганкеля I рода);
$H_\nu^{(2)}(z)$	— цилиндрическая функция III рода (функция Ганкеля II рода);
$I_\nu(z)$	— модифицированная функция Бесселя I рода;
$J_\nu(z)$	— цилиндрическая функция I рода (функция Бесселя);
$K_\nu(z)$	— модифицированная функция Бесселя II рода (функция Макдональда);
$L[f]$	— образ функции f относительно оператора L ;
$L[f](x)$	— значение функции $L[f]$ в точке x ;
$L^2[a, b]$	— линейное пространство функций, интегрируемых на отрезке $[a, b]$ с квадратом;
$L_\rho^2[a, b]$	— линейное пространство функций, интегрируемых на отрезке $[a, b]$ с квадратом и весовой функцией ρ ;
Q	— пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям III рода;
\mathbb{R}	— действительная ось (множество действительных чисел);
$\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$	— действительная и мнимая части комплексного числа z ;
$W[y_1; y_2]$	— определитель Вронского функций y_1 и y_2 , значение этого определителя в конкретной точке x обозначается $W[y_1; y_2](x)$;
$Y_\nu(z)$	— цилиндрическая функция II рода (функция Неймана).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ*

1. Что такое фундаментальная система решений (ФСР) для линейной системы алгебраических уравнений ?—Найдите ФСР для уравнения $2x + 3y - z = 0$. (III)
2. Как может быть записано общее решение линейного дифференциального уравнения n -го порядка ? Найдите общее решение для уравнения $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$. (VIII)
3. Что такое определитель Вронского ? Выясните, являются ли линейно независимыми функции: а) e^x , $\sin x$ и $\cos x$; б) e^x и e^{-x} . (VIII)
4. При каких условиях функциональный ряд можно: а) дифференцировать, б) интегрировать почленно ? (IX)
5. Какой может быть область сходимости степенного ряда ? Найдите область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

(IX)

6. Что такое скалярное произведение ? Какими свойствами оно обладает ? Какие векторы называют ортогональными ? (IV)
7. Напишите: а) неравенство Коши — Буняковского; б) неравенство Минковского. (IV)

* Римскими цифрами обозначен выпуск серии, в котором изложен соответствующий материал.

8. Сформулируйте теорему единственности для аналитической функции. Существует ли непостоянная аналитическая функция, имеющая значение 1 в точках $z_n = 1/n$? (X)

9. Перечислите виды особых изолированных точек однозначной аналитической функции. К какому виду относятся особые точки функции $w = \operatorname{tg} z$? (X)

10. Найдите вычет функции $w = \operatorname{tg} z$ в точке $z = \pi/2$. (X)

11. Что такое линейный оператор? самосопряженный линейный оператор? ортогональный линейный оператор? В пространстве \mathbb{R}^3 рассмотрим отображение L , которое вектору $a = (x, y, z)$ ставит в соответствие вектор $La = (x, y, 0)$. Является ли это отображение: а) линейным оператором; б) ортогональным оператором; в) самосопряженным оператором? (IV)

12. Найдите собственные числа и собственныe векторы оператора, определенного в вопросе 11. (IV)

13. Какая система функций называется: а) ортогональной; б) полной? Приведите примеры. Как получить разложение произвольной функции по данной ортогональной системе функций? (IX)

14. Напишите: а) неравенство Бесселя; б) равенство Парсеваля. При каких условиях неравенство Бесселя превращается в равенство Парсеваля? (IX)

15. Как ставится краевая задача для уравнения в частных производных 2-го порядка? Какие типы граничных условий могут использоваться в краевой задаче? Что такое смешанная задача? (XII)

ВВЕДЕНИЕ

Математическая модель — это абстрактное средство приближенного отображения реального процесса, являющееся математическим описанием его причинно-следственных связей. Один и тот же процесс может описываться разными математическими моделями, которые отличаются друг от друга, с одной стороны, точностью или адекватностью по отношению к реальному природному процессу, а с другой — сложностью, определяющей трудоемкость математических вычислений. Конкретный выбор математической модели диктуется целью практического исследования и сводится к некоторому оптимальному сочетанию адекватности модели и ее сложности.

Основу математических моделей физических процессов во многих случаях составляют дифференциальные уравнения. Можно выделить два основных класса таких моделей. Первый класс — это класс моделей с сосредоточенными параметрами, сводящихся к решению той или иной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (задача Коши, краевая задача и т.п.). Второй класс — это класс моделей с распределенными параметрами, сводящихся к задачам для уравнений с частными производными.

С математической точки зрения систему дифференциальных уравнений можно рассматривать как некоторое операторное уравнение, определяемое оператором, действующим в некотором функциональном пространстве. Элементами функци-

онального пространства являются функции, удовлетворяющие некоторым ограничениям типа непрерывности, дифференцируемости, степени роста и т.п. Во многих случаях такой оператор является линейным, т.е. при преобразовании сохраняет сумму функций и произведение функции на число.

Решение операторного уравнения в конечном счете означает построение оператора, обратного данному. Для обращения оператора возможны два подхода. Первый состоит в том, чтобы попытаться найти базис в функциональном пространстве (в некотором смысле), в котором оператор описывается наиболее просто. Этот подход приводит к так называемой спектральной теории линейных операторов, которая решает задачу описания спектра линейного оператора, аналогичную задаче поиска собственных чисел и собственных векторов оператора в конечномерном пространстве. Второй подход состоит в том, чтобы найти новое функциональное пространство, изоморфное исходному, в котором аналог изучаемого оператора имеет простой вид. Оказывается, что в ряде случаев в результате такого изоморфного преобразования линейное дифференциальное уравнение может быть превращено в алгебраическое, которое легче поддается решению.

Эффективность второго подхода отражает общую концепцию, согласно которой линейные операторы можно рассматривать как элементы некоторой алгебраической структуры, в которой действуют различные операции: сложение, умножение и др. Наличие простых свойств этих операций типа коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности позволяет рассматривать действие оператора как умножение. А тогда операторное (в частности, дифференциальное) уравнение представляет собой нечто близкое к обычному алгебраическому уравнению. Характерно, что операционный метод, которому в книге уделено много внимания, развивался именно в русле этой концепции. Соответствующее изоморфное преобразование — преобразование Лапласа, придающее технике операционного метода простой и наглядный смысл, было найдено позднее.

При внимательном рассмотрении указанных подходов становится ясно, что они представляют собой две стороны одного и того же процесса. Построение базиса в функциональном пространстве — это выбор счетной системы линейно независимых функций, через которую выражаются все функции рассматриваемого функционального пространства. Такой выбор фактически означает построение изоморфизма в пространство числовых последовательностей подобно тому, как выбор базиса в конечномерном пространстве определяет изоморфизм его в арифметическое пространство соответствующей размерности.

Основная идея изоморфного преобразования заключается в переходе из исходного пространства, пространства оригиналов, в новое — пространство изображений. Задача решается в пространстве изображений, а затем по найденному изображению ищется решение исходной задачи в пространстве оригиналов. Как правило, такие изоморфные преобразования функциональных пространств выражаются при помощи специального вида интегралов и потому называются интегральными преобразованиями.

Предлагаемый учебник содержит систематическое изложение этих двух подходов для решения различных задач, связанных с дифференциальными уравнениями.

1. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1.1. Уравнение Бесселя

Линейное дифференциальное уравнение

$$z^2 y''(z) + zy'(z) + (z^2 - \nu^2)y(z) = 0 \quad (1.1)$$

называют *уравнением Бесселя*. Мы полагаем, что параметр ν может принимать любые комплексные значения, $\nu \in \mathbb{C}$, а $y(z)$ — аналитическая функция в некоторой области в \mathbb{C} . Отметим, что значениям параметра ν и $-\nu$ соответствует одно и то же уравнение. Это уравнение является линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка, и его общее решение может быть задано в виде линейной комбинации двух линейно независимых решений $y_1(z)$ и $y_2(z)$:

$$y(z) = C_1 y_1(z) + C_2 y_2(z),$$

где C_1 и C_2 могут принимать произвольные комплексные значения.

Если $y_1(z)$ и $y_2(z)$ — два частных решения уравнения Бесселя, то их определитель Вронского равен

$$W[y_1; y_2](z) = \begin{vmatrix} y_1(z) & y_2(z) \\ y'_1(z) & y'_2(z) \end{vmatrix} = \frac{C}{z}, \quad (1.2)$$

где C — некоторая постоянная. Действительно, из уравнения (1.1) получаем

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(z \frac{dy_1(z)}{dz} \right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) y_1(z) = 0,$$

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(z \frac{dy_2(z)}{dz} \right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) y_2(z) = 0.$$

Умножая первое уравнение на $y_2(z)$, второе — на $y_1(z)$, а затем вычитая из первого второе, получаем

$$y_1(z) \frac{d}{dz} \left(z \frac{dy_2(z)}{dz} \right) - y_2(z) \frac{d}{dz} \left(z \frac{dy_1(z)}{dz} \right) = 0$$

или

$$\frac{d}{dz} \left[z(y_1(z)y'_2(z) - y_2(z)y'_1(z)) \right] = 0,$$

откуда вытекает (1.2).

Уравнение Бесселя имеет частное решение, представимое в виде ряда

$$y(z) = z^s \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^{n+s}, \quad (1.3)$$

где $\alpha_0 \neq 0$. Действительно, ряд (1.3) фактически является степенным, и его можно дифференцировать почленно любое число раз в его круге сходимости. С учетом этого имеем

$$\begin{aligned} z^2 y''(z) &= z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) \alpha_n z^{n+s-2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) \alpha_n z^{n+s}, \\ zy'(z) &= z \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) \alpha_n z^{n+s-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) \alpha_n z^{n+s}, \\ (z^2 - \nu^2) y(z) &= (z^2 - \nu^2) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^{n+s} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^{n+s+2} - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^{n+s} = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_{n-2} z^{n+s} - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^{n+s}. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в уравнение Бесселя, получим тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+s)(n+s-1) + (n+s) - \nu^2] \alpha_n z^{n+s} + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_{n-2} z^{n+s} \equiv 0.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях z :

$$(s^2 - \nu^2) \alpha_0 = 0,$$

$$[(1+s)^2 - \nu^2] \alpha_1 = 0,$$

$$[(n+s)^2 - \nu^2] \alpha_n + \alpha_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

Из полученных уравнений вытекает, что $s = \pm\nu$ (так как $\alpha_0 \neq 0$), $\alpha_1 = 0$ (так как равенство $s = \pm\nu$ означает, что $(1+s)^2 - \nu^2 \neq 0$) и

$$\alpha_n = -\frac{\alpha_{n-2}}{(n+s)^2 - s^2} = -\frac{\alpha_{n-2}}{n(n+2s)}, \quad n = 2, 3, \dots$$

В частности,

$$\alpha_{2k+1} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\alpha_{2k} = -\frac{\alpha_{2k-2}}{2^2 k(k+s)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Итак, мы получили два решения. При $s = \nu$ ряд

$$y_\nu(z) = z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_0 \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! (1+\nu) \dots (k+\nu)} \quad (1.4)$$

сходится всюду в комплексной плоскости, т.е. все выкладки для этого ряда законны. Случай $s = -\nu$ приводит к функции $y_{-\nu}(z)$, получающейся заменой в (1.4) ν на $-\nu$. Обе функции являются решениями уравнения (1.1) в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Замечание 1.1. Можно показать, что ряд (1.4) можно дифференцировать почленно по параметру ν . Это значит, что функция $y_\nu(z)$ является аналитической и по аргументу ν .

Замечание 1.2. Точка $z = 0$, вообще говоря, является изолированной особой точкой функции $y_\nu(z)$. Более точно:

- если ν — целое неотрицательное, то $z = 0$ — устранимая особая точка;
- если ν — целое отрицательное, то $z = 0$ — полюс;
- если ν — нецелое, то $z = 0$ — точка ветвления.

1.2. Цилиндрические функции I рода (функции Бесселя)

Положив в формуле (1.4)

$$\alpha_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1 + \nu)},$$

получим с учетом свойств гамма-функции Эйлера (см. приложение 1) функцию

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu},$$

которую называют *цилиндрической функцией I рода* или *функцией Бесселя*. Отметим, что функция $1/\Gamma(z)$ является целой аналитической функцией, значит, это определение корректно. Рассмотрим основные свойства функций Бесселя.

Для любого натурального n

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z).$$

Действительно, $\Gamma(z)$ имеет полюсы в точках $z = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому $1/\Gamma(-n) = 0$ и

$$\begin{aligned} J_{-n}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + 1 - n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + 1 - n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!\Gamma(k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} = \\
 &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+n+1)k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} = (-1)^n J_n(z).
 \end{aligned}$$

Если ν не является целым числом, то функции $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ линейно независимы и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений *уравнения Бесселя* порядка ν .

Действительно, из определения функций Бесселя получаем формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(1+\nu)} (1 + O(z^2)), \quad J'_\nu(z) = \frac{(z/2)^{\nu-1}}{2\Gamma(\nu)} (1 + O(z^2)).$$

Прямой подсчет при помощи этих формул с учетом свойств гамма-функции дает

$$\begin{aligned}
 zW[J_\nu; J_{-\nu}](z) &= \frac{1}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(-\nu)} - \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} + O(z) = \\
 &= -\frac{2\sin(\pi\nu)}{\pi} + O(z).
 \end{aligned}$$

Однако согласно равенству (1.2) эта величина является постоянной. Поэтому окончательно получаем

$$W[J_\nu; J_{-\nu}](z) = -\frac{2\sin(\pi\nu)}{\pi z}.$$

Для функций Бесселя верны следующие формулы дифференцирования:

$$\frac{d}{dz} [z^{-\nu} J_\nu(z)] = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z), \quad (1.5)$$

$$\frac{d}{dz} [z^\nu J_\nu(z)] = z^\nu J_{\nu-1}(z). \quad (1.6)$$

Действительно, согласно определению

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz} [z^{-\nu} J_\nu(z)] &= \frac{d}{dz} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} \right] = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k-1}}{2^{2k+\nu-1} (k-1)! \Gamma(k+\nu+1)} = \\
 &= z^{-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+(\nu-1)}}{2^{2k+(\nu-1)} (k-1)! \Gamma(k+\nu+1)} = \\
 &= z^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^{2k+\nu+1}}{2^{2k+\nu+1} k! \Gamma(k+(\nu+1)+1)} = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z).
 \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz} [z^\nu J_\nu(z)] &= \frac{d}{dz} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} \right] = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu-1} k! \Gamma(k+\nu)} = \\
 &= z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+\nu-1}}{k! \Gamma(k+(\nu-1)+1)} = z^\nu J_{\nu-1}(z).
 \end{aligned}$$

Из формул (1.5), (1.6) вытекает другой вариант формул дифференцирования:

$$J'_\nu(z) = -J_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} J_\nu(z), \quad (1.7)$$

$$J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} J_\nu(z), \quad (1.8)$$

которые, в свою очередь, приводят к рекуррентным формулам

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z),$$

$$J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_\nu(z).$$

Действительно, согласно (1.5)

$$\frac{d}{dz} [z^{-\nu} J_\nu(z)] = -\nu z^{-\nu-1} J_\nu(z) + z^{-\nu} J'_\nu(z) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z),$$

откуда, умножая на z^ν , получаем (1.7). Формула (1.8) вытекает совершенно аналогично из (1.6).

Для полуцелых значений порядка $\nu = n + 1/2$ функция Бесселя $J_{n+1/2}(z)$ выражается через элементарные функции. Действительно, по определению

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(k + 1 + \frac{1}{2})} = \\ &= \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! (k + \frac{1}{2})(k - \frac{1}{2}) \dots \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})} = \\ &= \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)! \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z. \end{aligned}$$

Поскольку все функции $J_{n+1/2}(z)$, $n \in \mathbb{Z}$, получаются многократным дифференцированием $J_{1/2}(z)$, приходим к требуемому утверждению. Более того, из формул (1.5), (1.6) заключаем, что для $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} J_{n+\frac{1}{2}}(z) &= (-1)^n \sqrt{z} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{J_{\frac{1}{2}}(z)}{\sqrt{z}}\right) = \\ &= (-1)^n \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{\sin z}{z}\right), \\ J_{-n-\frac{1}{2}}(z) &= \frac{1}{\sqrt{z}} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^{n+1} \left(\sqrt{z} J_{\frac{1}{2}}(z)\right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^{n+1} \sin z = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{\cos z}{z}\right). \end{aligned}$$

Применение этих формул приводит к представлению функций Бесселя полуцелого порядка в виде

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[P_n \left(\frac{1}{z} \right) \sin \left(z - \frac{n\pi}{2} \right) + Q_{n-1} \left(\frac{1}{z} \right) \cos \left(z - \frac{n\pi}{2} \right) \right],$$

где $P_n(z)$ и $Q_{n-1}(z)$ — полиномы с действительными коэффициентами степеней n и $n - 1$ соответственно, причем $P_n(0) = 1$, $Q_{n-1}(0) = 0$. В частности, для действительного аргумента x получаем асимптотическое разложение при $x \rightarrow +\infty$

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos \left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\frac{1}{x} \right) \right], \quad (1.9)$$

$$\nu = n + \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

которое на самом деле верно для любого $\nu \in \mathbb{C}$.

Из формулы (1.9) следует, например, что для любого действительного ν функция $J_\nu(z)$ имеет бесконечно много действительных нулей (на каждом полупериоде функции $\cos(z - \pi\nu/2 - \pi/4)$ при достаточно больших z).

Если μ_1 и μ_2 — нули функции $J_\nu(z)$, где ν — действительное, большее -1 , то для любого $l > 0$

$$\int_0^l x J_\nu \left(\frac{\mu_1 x}{l} \right) J_\nu \left(\frac{\mu_2 x}{l} \right) dx = 0. \quad (1.10)$$

Если на линейном пространстве функций, интегрируемых на отрезке $[0, l]$, ввести скалярное произведение

$$(f, g) = \int_0^l x f(x) g(x) dx, \quad (1.11)$$

то (1.10) будет означать, что функции $J_\nu(\frac{\mu_1}{l}x)$ и $J_\nu(\frac{\mu_2}{l}x)$ ортогональны относительно этого скалярного произведения.

Чтобы доказать (1.10), рассмотрим функцию $J_\nu(\lambda x)$, являющуюся решением дифференциального уравнения

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (\lambda^2 x^2 - \nu^2)y(x) = 0,$$

которое получается, если в уравнении (1.1) заменить независимую переменную: $z = \lambda x$. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$\begin{aligned} 0 &= J_\nu(\lambda_2 x) \left[\frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} J_\nu(\lambda_1 x) \right) + \left(\lambda_1^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(\lambda_1 x) \right] - \\ &\quad - J_\nu(\lambda_1 x) \left[\frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} J_\nu(\lambda_2 x) \right) + \left(\lambda_2^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(\lambda_2 x) \right] = \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ x \left[J_\nu(\lambda_2 x) \frac{d}{dx} J_\nu(\lambda_1 x) - J_\nu(\lambda_1 x) \frac{d}{dx} J_\nu(\lambda_2 x) \right] \right\} + \\ &\quad + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)x J_\nu(\lambda_1 x) J_\nu(\lambda_2 x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)x J_\nu(\lambda_1 x) J_\nu(\lambda_2 x) &= \\ = \frac{d}{dx} \left\{ x \left[J_\nu(\lambda_2 x) \frac{d}{dx} J_\nu(\lambda_1 x) - J_\nu(\lambda_1 x) \frac{d}{dx} J_\nu(\lambda_2 x) \right] \right\}. & \quad (1.12) \end{aligned}$$

Отметим, что согласно определению $J_\nu(x)$ минимальная степень в разложении правой части (1.12) будет $2(\nu + 1)$, т.е. это выражение равно 0 при $x = 0$. Интегрируя (1.12) для $\lambda_1 = \mu_1/l$, $\lambda_2 = \mu_2/l$, получаем

$$\begin{aligned} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \int_0^l x J_\nu(\lambda_1 x) J_\nu(\lambda_2 x) dx &= \\ = l [J_\nu(\lambda_2 l) \lambda_1 J'_\nu(\lambda_1 l) - J_\nu(\lambda_1 l) \lambda_2 J'_\nu(\lambda_2 l)] &= 0, \end{aligned}$$

так как $J_\nu(\lambda_1 l) = J_\nu(\mu_1) = 0$ и $J_\nu(\lambda_2 l) = J_\nu(\mu_2) = 0$.

Если μ — нуль функции $J_\nu(z)$, то

$$\int_0^l x J_\nu^2 \left(\frac{\mu}{l} x \right) dx = \frac{l^2}{2} \left(J_{\nu+1}(\mu) \right)^2, \quad (1.13)$$

т.е. в линейном пространстве функций со скалярным произведением (1.11)

$$\left\| J_\nu \left(\frac{\mu}{l} x \right) \right\| = \frac{l}{\sqrt{2}} J_{\nu+1}(\mu)$$

(где $\|\cdot\|$ — норма, определяемая указанным скалярным произведением).

Действительно, пусть $\lambda_1 = \mu_1/l$. Тогда, интегрируя (1.12), получаем

$$\int_0^l x J_\nu(\lambda_2 x) J_\nu(\lambda_1 x) dx = \frac{l J_\nu(\lambda_2 l) \lambda_1 J'_\nu(\lambda_1 l)}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}.$$

Переходя к пределу при $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \int_0^l x J_\nu^2(\lambda x) dx &= \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{l J_\nu(\lambda_2 l) \lambda_1 J'_\nu(\lambda_1 l)}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} = \\ &= \lambda_1 l J'_\nu(\lambda_1 l) \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{J_\nu(\lambda_2 l)}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} = \\ &= \lambda_1 l J'_\nu(\lambda_1 l) \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{\frac{d}{d\lambda_2} J_\nu(\lambda_2 l)}{\frac{d}{d\lambda_2} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} = \\ &= \lambda_1 l J'_\nu(\lambda_1 l) \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{l J'_\nu(\lambda_2 l)}{2\lambda_2} = \frac{l^2}{2} \left(J'_\nu(\mu) \right)^2. \end{aligned}$$

Согласно равенству (1.7), учитывая, что μ — нуль функции $J_\nu(z)$, заключаем, что $J'_\nu(\mu) = -J_{\nu+1}(\mu)$, а это и приводит к равенству (1.13).

Если ν — действительное, $\nu > -1$, то все нули функции $J_\nu(z)$ действительные, их множество счетно и не имеет в \mathbb{C} предельных точек. В самом деле, уже упоминалось, что $J_\nu(z)$ имеет счетное множество действительных нулей. Отметим, что нули $J_\nu(z)$ — это также нули целой функции

$$z^{-\nu} J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)},$$

которые не могут иметь предельных точек в \mathbb{C} в силу теоремы единственности для аналитических функций. Нам остается показать, что $J_\nu(z)$ не имеет комплексных нулей.

Так как $J_\nu(z)$ представляется рядом с действительными коэффициентами, выполняется равенство $\overline{J_\nu(z)} = J_\nu(\bar{z})$. Поэтому если μ — нуль $J_\nu(z)$, то число $\bar{\mu}$, комплексно сопряженное к μ , тоже будет нулем $J_\nu(z)$. Положив в (1.12) $\lambda_1 = \mu$, $\lambda_2 = \bar{\mu}$ и проинтегрировав в пределах от 0 до 1, получим

$$(\mu^2 - \bar{\mu}^2) \int_0^1 x J_\nu(\mu x) J_\nu(\bar{\mu} x) dx = 0.$$

Но

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_\nu(\mu x) J_\nu(\bar{\mu} x) dx &= \int_0^1 x J_\nu(\mu x) \overline{J_\nu(\mu x)} dx = \\ &= \int_0^1 x |J_\nu(\mu x)|^2 dx > 0. \end{aligned}$$

Поэтому должно выполняться равенство $\mu^2 = \bar{\mu}^2$, что возможно лишь, если μ либо действительное, либо мнимое. Прямой проверкой убеждаемся, что

$$\begin{aligned} J_\nu(iy) &= (iy)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^{2k} (y/2)^{2k}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} = \\ &= (iy)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y/2)^{2k}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \neq 0, \end{aligned}$$

так как ряд состоит из действительных положительных чисел.

Графики функций Бесселя для действительного аргумента изображены на рис. 1.1.

1.3. Цилиндрические функции II рода

Как следует из вышеизложенного (см. 1.2), функции $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ в некоторых случаях не образуют фундаментальную систему решений *уравнения Бесселя* и не определяют всех его ре-

шений. Естественно задаться целью построить дополнительное решение уравнения Бесселя, которое с $J_\nu(z)$ (или с $J_{-\nu}(z)$) всегда образует фундаментальную систему. Разумеется, если ν — дробное, то искомая функция должна выражаться через $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$, а для целых ν она должна восстанавливаться предельным переходом по ν (чтобы быть гладкой функцией от параметра ν).

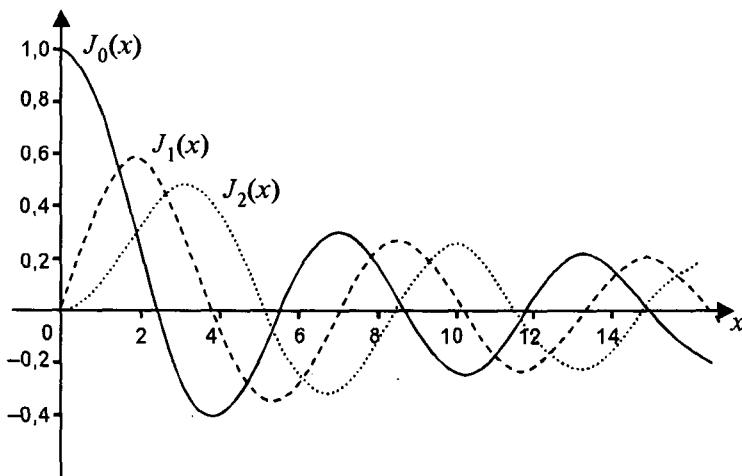


Рис. 1.1

Для значения ν , не являющегося целым, определим функцию

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)}. \quad (1.14)$$

Функция $Y_\nu(z)$, будучи линейной комбинацией двух частных решений $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ уравнения Бесселя, сама является решением этого уравнения. Эту функцию называют **цилиндрической функцией II рода** (или функцией Бесселя II рода, функцией Неймана).

Если ν — целое, то формула (1.14) становится некорректной. При $\nu \rightarrow n$, n — целое, возникает неопределенность типа

$\frac{0}{0}$. Согласно правилу Лопитала существует предел

$$\begin{aligned}
 Y_n(z) &= \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(z) \cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)} = \\
 &= \frac{(-1)^n}{\pi} \lim_{\nu \rightarrow n} \left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} \cos(\pi\nu) - \pi J_\nu(z) \sin(\pi\nu) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right] = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left. \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} \right|_{\nu=n} - \frac{(-1)^n}{\pi} \left. \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right|_{\nu=n},
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

который определяет цилиндрическую функцию II рода целого порядка n .

Цилиндрические функции II рода, являясь, вообще говоря, линейными комбинациями цилиндрических функций I рода, сохраняют многие свойства этих функций. В частности, остаются в силе формулы дифференцирования (1.5), (1.6) и вытекающие из них (1.7), (1.8). В то же время цилиндрические функции II рода приобретают и новые свойства.

Так как в случае нецелого ν функции $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя, то и пара функций $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ образует фундаментальную систему решений этого уравнения. Более того,

$$\begin{aligned}
 W[J_\nu; Y_\nu](z) &= W \left[J_\nu; \frac{J_\nu \cos(\pi\nu) - J_{-\nu}}{\sin(\pi\nu)} \right] (z) = \\
 &= \frac{1}{\sin(\pi\nu)} W[J_\nu; -J_{-\nu}](z) = \frac{1}{\sin(\pi\nu)} \left[\frac{2 \sin(\pi\nu)}{\pi z} \right] = \frac{2}{\pi z}.
 \end{aligned}$$

Поэтому в процессе предельного перехода $\nu \rightarrow n$, n — целое, в силу непрерывности определителя Вронского заключаем, что $J_n(z)$ и $Y_n(z)$ остаются линейно независимыми и образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя.

Для целого неотрицательного n удается получить разложение функции $Y_n(z)$ в ряд

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \left(\ln \frac{z}{2} \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k+n} (\psi(k+1) + \psi(n+k+1)). \quad (1.16)$$

Здесь $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ и, в частности,

$$\psi(1) = -\gamma, \quad \psi(k) = \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m} - \gamma, \quad k = 2, 3, \dots,$$

где γ — постоянная Эйлера.

В самом деле, согласно (1.15) функция $Y_n(z)$ выражается через производную функции $J_\nu(z)$ по порядку ν . Используя представление функции $J_\nu(z)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=n} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+1+\nu)} \left[\ln \frac{z}{2} - \frac{\Gamma'(k+\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+1)} \right] \Big|_{\nu=n} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+n}}{k!(k+n)!} \left[\ln \frac{z}{2} - \psi(k+n+1) \right] = \\ &= J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+n}}{k!(k+n)!} \psi(k+n+1). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=n} &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k-\nu}}{k! \Gamma(k+1-\nu)} \left[-\ln \frac{z}{2} + \frac{\Gamma'(k+1-\nu)}{\Gamma(k+1-\nu)} \right] \Big|_{\nu=n} = \\ &= - \left(\ln \frac{z}{2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k-n}}{k! \Gamma(k+1-n)} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k-\nu} \Gamma'(k+1-\nu)}{k! \Gamma(k+1-\nu)^2} \Big|_{\nu=n} = \\ = S_1 + S_2 + S_3,$$

где

$$S_1 = - \left(\ln \frac{z}{2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k-n}}{k! \Gamma(k+1-n)} = \\ = - \left(\ln \frac{z}{2} \right) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k-n}}{k! \Gamma(k+1-n)},$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k-\nu} \Gamma'(k+1-\nu)}{k! \Gamma(k+1-\nu)^2} \Big|_{\nu=n},$$

$$S_3 = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k-n} \Gamma'(k+1-n)}{k! \Gamma(k+1-n)^2}.$$

Функция $\Gamma(z)$ имеет в точках $0, -1, -2, \dots$ полюсы первого порядка с вычетами $\text{res}\{\Gamma(z), z = -n\} = (-1)^n / n!$. Значит, функция $\Gamma'(z)/\Gamma(z)^2$ имеет в этих точках устранимые особенности со значениями $(-1)^{n+1} n!$, т.е.

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\Gamma'(k+1-\nu)}{\Gamma(k+1-\nu)^2} = (-1)^{n-k} (n-k-1)!, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Поэтому

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^n (z/2)^{2k-n}}{k!} (n-k-1)!.$$

Заменой индекса суммирования $k-n = l$ получаем

$$S_1 = - \left(\ln \frac{z}{2} \right) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+n} (z/2)^{2l+n}}{(l+n)! \Gamma(l+1)} = (-1)^{n+1} J_n(z) \left(\ln \frac{z}{2} \right)$$

и

$$S_3 = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+n} (z/2)^{2l+n}}{(l+n)! \Gamma(l+1)} \psi(l+1) =$$

$$= (-1)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (z/2)^{2l+n}}{l! \Gamma(l+n+1)} \psi(l+1).$$

Суммируя полученные результаты, получаем формулу (1.16).

Графики цилиндрических функций II рода для действительного аргумента изображены на рис. 1.2.

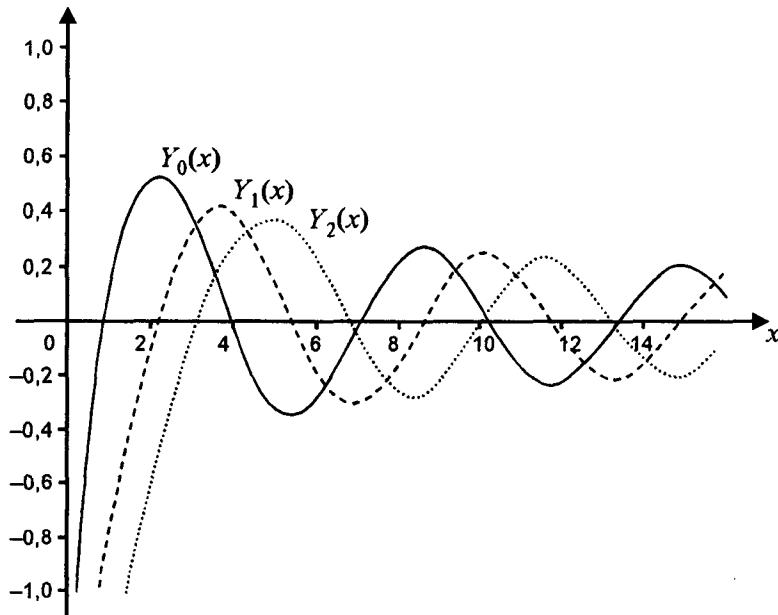


Рис. 1.2

1.4. Цилиндрические функции III рода

Цилиндрические функции во многом схожи с тригонометрическими функциями $\sin z$ и $\cos z$ (расположение нулей, колебательный характер функции и т.п.). Появляются и те, и другие функции в задачах математической физики, связанных с волновыми процессами. Для комплексного аргумента функции $\sin z$ и $\cos z$ при помощи формул Эйлера сводятся к показательной функции $\exp z$. Для функций Бесселя имеются аналогичные зависимости.

Функции комплексного переменного

$$\begin{aligned} H_{\nu}^{(1)}(z) &= J_{\nu}(z) + iY_{\nu}(z), \\ H_{\nu}^{(2)}(z) &= J_{\nu}(z) - iY_{\nu}(z) \end{aligned} \quad , \quad (1.17)$$

называют *цилиндрическими функциями III рода* или соответственно *функциями Ганкеля I и II рода*. Будучи линейными комбинациями решений $J_{\nu}(z)$ и $Y_{\nu}(z)$ *уравнения Бесселя*, функции Ганкеля также являются решениями этого уравнения.

Формулы (1.17) аналогичны зависимостям между функциями $\exp z$, $\sin z$ и $\cos z$. Отметим, что для функций Ганкеля сохраняются свойства, общие для решений уравнения Бесселя, в частности, остаются в силе формулы дифференцирования (1.5) и (1.6), а также вытекающие из них формулы (1.7) и (1.8).

Функции $H_{\nu}^{(1)}(z)$ и $H_{\nu}^{(2)}(z)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя. Действительно, непосредственный подсчет определителя Вронского дает

$$\begin{aligned} W[H_{\nu}^{(1)}; H_{\nu}^{(2)}](z) &= W[J_{\nu} + iY_{\nu}; J_{\nu} - iY_{\nu}](z) = \\ &= -2iW[J_{\nu}; Y_{\nu}](z) = -\frac{4i}{\pi z}. \end{aligned}$$

Формулы (1.17) позволяют через функции Ганкеля вычислить функции Бесселя I и II рода

$$J_{\nu}(z) = \frac{H_{\nu}^{(1)}(z) + H_{\nu}^{(2)}(z)}{2}, \quad Y_{\nu}(z) = \frac{H_{\nu}^{(1)}(z) - H_{\nu}^{(2)}(z)}{2i}$$

подобно тому, как функции $\cos z$ и $\sin z$ по формулам Эйлера выражаются через $\exp z$.

С другой стороны, если ν не является целым, то согласно (1.14) и (1.17)

$$\begin{aligned} H_{\nu}^{(1)}(z) &= \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-i\pi\nu}J_{\nu}(z)}{i \sin(\pi\nu)}, \\ H_{\nu}^{(2)}(z) &= \frac{-J_{-\nu}(z) + e^{i\pi\nu}J_{\nu}(z)}{i \sin(\pi\nu)}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Если $\nu = n$ — целое, то, переходя к пределу при $\nu \rightarrow n$ в (1.18), получим соотношения, аналогичные (1.15):

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(z) &= J_n(z) + \frac{i}{\pi} \left(\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=n} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=n} \right), \\ H_n^{(2)}(z) &= J_n(z) - \frac{i}{\pi} \left(\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=n} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=n} \right). \end{aligned}$$

Наконец, из соотношений (1.18) вытекают формулы

$$\begin{aligned} H_{-\nu}^{(1)}(z) &= e^{i\pi\nu} H_\nu^{(1)}(z), \\ H_{-\nu}^{(2)}(z) &= e^{-i\pi\nu} H_\nu^{(2)}(z), \end{aligned}$$

верные также в силу непрерывности по ν и для целых значений индекса ν .

1.5. Модифицированные цилиндрические функции

Дифференциальное уравнение

$$z^2 y''(z) + zy'(z) - (z^2 + \nu^2)y(z) = 0 \quad (1.19)$$

называют **модифицированным уравнением Бесселя**. Учитывая, что $z \in \mathbb{C}$ — комплексное, выполним замену $z = iw$. В результате получим уравнение Бесселя (1.1). Это значит, что свойства решений уравнения (1.19) могут быть получены из соответствующих свойств решений уравнения (1.1) подобно тому, как гиперболические функции, являющиеся решением уравнения

$$z'' - \nu^2 z = 0,$$

сводятся той же заменой к тригонометрическим функциям, являющимся решением уравнения

$$z'' + \nu^2 z = 0.$$

Так, функция

$$J_\nu(iz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (iz/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+1+\nu)} = i^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+1+\nu)}$$

является решением уравнения (1.19). Функция

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz) = \exp\left(\frac{-i\pi\nu}{2}\right) J_\nu(iz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+1+\nu)}$$

также является решением уравнения (1.19), но при этом принимает действительные значения при действительном аргументе. Она называется **модифицированной функцией Бесселя I рода**.

Из свойств функций Бесселя следует, что если ν не является целым, то функции $I_\nu(z)$ и $I_{-\nu}(z)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.19). Для целых функций это уже не так. Подобно функциям Неймана для уравнения (1.19) определяются модифицированные функции Бесселя II рода, или **функции Макдональда** $K_\nu(z)$, которые для дробного индекса ν выражаются формулой

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\pi\nu)} \quad (1.20)$$

или могут быть выражены через одну из **функций Ганкеля**:

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi\nu i}{2}} H_\nu^{(1)}(iz) = -\frac{\pi i}{2} e^{-\frac{\pi\nu i}{2}} H_\nu^{(2)}(-iz).$$

Из этих представлений непосредственно следует, что для любого индекса ν

$$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z).$$

Если в формуле (1.20) перейти к пределу при $\nu \rightarrow n$, n — целое, то получим

$$K_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(z) = \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial I_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=n} - \frac{\partial I_\nu(z)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=n} \right].$$

Функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.19), так как для дробных значений параметра ν

$$\begin{aligned} W[I_\nu; K_\nu](z) &= \frac{\pi}{2 \sin(\pi\nu)} W[I_\nu; I_{-\nu} - I_\nu](z) = \\ &= \frac{\pi}{2 \sin(\pi\nu)} W[I_\nu; I_{-\nu}](z) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2 \sin(\pi\nu)} W[i^{-\nu} J_\nu; i^\nu I_{-\nu}](iz) = \frac{i}{z}.$$

На рис. 1.3 представлены функции $I_n(z)$ и $K_n(z)$ для действительного значения аргумента при $n = 0, 1$.

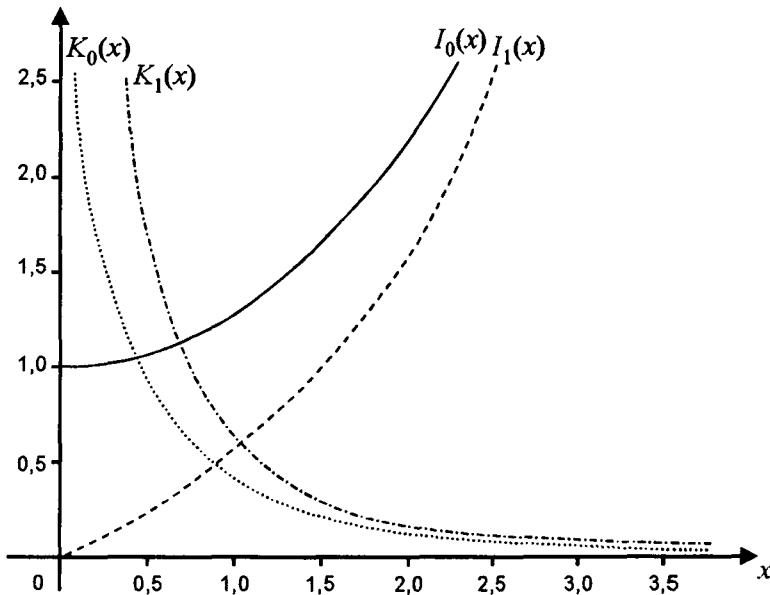


Рис. 1.3

Наконец, приведем без доказательства асимптотические формулы для модифицированных функций при $x \rightarrow +\infty$:

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right],$$

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right].$$

1.6. Контрольные вопросы и упражнения

1.1. Напишите:

- уравнение Бесселя;
- модифицированное уравнение Бесселя.

Чем они различаются?

1.2. Докажите, что если ν не является натуральным, то общее решение уравнения

$$t^2 u''(t) + (2\alpha + 1)t u(t) + (\alpha^2 - \nu^2 \beta^2 + \beta^2 \gamma^2 t^{2\beta}) u(t) = 0$$

имеет вид

$$u(t) = C_1 t^{-\alpha} J_\nu(\gamma t^\beta) + C_2 t^{-\alpha} J_{-\nu}(\gamma t^\beta).$$

1.3. Найдите общее решение уравнения

$$x^2 y''(x) + ax y'(x) + (b + ct^m) y(x) = 0.$$

1.4. Найдите общее решение уравнения

$$xy''(x) + \lambda y'(x) + xy(x) = 0.$$

1.5. Докажите, что ряд (1.4) сходится всюду в комплексной плоскости.

1.6. Дайте определение:

- цилиндрической функции I рода;
- цилиндрической функции II рода;
- цилиндрической функции III рода;
- функции Бесселя.

1.7.. Выведите формулы (1.5) – (1.8) для функций $Y_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$.

1.8. Дайте определение:

- модифицированной функции Бесселя I рода;
- модифицированной функции Бесселя II рода;
- функции Макдональда.

1.9. Докажите, что

$$\begin{aligned} I'_\nu(z) &= \frac{1}{2}[I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z)], \\ K'_\nu(z) &= -\frac{1}{2}[K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z)], \\ I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z}I_\nu(z), \\ K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) &= -\frac{2\nu}{z}K_\nu(z). \end{aligned}$$

1.10. Выразите через элементарные функции следующие цилиндрические функции: $Y_{1/2}(z)$, $Y_{3/2}(z)$, $H_{1/2}^{(1)}(z)$, $H_{1/2}^{(2)}(z)$, $I_{-1/2}(z)$, $K_{1/2}(z)$.

1.11. Получите асимптотические оценки для функций Ганкеля при $z \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[i \left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left[1 + O \left(\frac{1}{z} \right) \right], \\ H_\nu^{(2)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[-i \left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left[1 + O \left(\frac{1}{z} \right) \right]. \end{aligned}$$

1.12. Докажите, что для любого целого неотрицательного числа n

$$\begin{aligned} K_n(z) &= (-1)^{n+1} I_n(z) \ln \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-n} + \\ &+ \frac{(-1)^n}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!} [\psi(n+k+1) + \psi(k+1)]. \end{aligned}$$

1.13. В чем состоит свойство ортогональности функций Бесселя I рода?

1.14. Обладают ли свойством ортогональности цилиндрические функции II рода, III рода?

2. ЗАДАЧА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

2.1. Постановка задачи

Пусть даны функции $p \in C^{(1)}[a, b]$, $q \in C[a, b]$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ на конечном отрезке $[a, b]$ и неотрицательные числа $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$, причем $\alpha_1 + \beta_1 > 0$, $\alpha_2 + \beta_2 > 0$. Задача

$$\begin{cases} -[p(x)u'(x)]' + q(x)u(x) = \lambda u(x), & a < x < b, \\ \alpha_1 u'(a) - \beta_1 u(a) = 0, \\ \alpha_2 u'(b) + \beta_2 u(b) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

в теории уравнений математической физики называется **задачей Штурма — Лиувилля**.

Каждое из уравнений системы (2.1) является операторным. Действительно, выражение

$$L[y] = -[py']' + qy \quad (2.2)$$

определяет в $C^{(2)}[a, b]$ линейный оператор, значениями которого будут функции из пространства $C[a, b]$. Этот оператор называют **оператором Штурма — Лиувилля**. Выражения

$$\begin{aligned} B_1[y] &= \alpha_1 y'(a) - \beta_1 y(a), \\ B_2[y] &= \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) \end{aligned} \quad (2.3)$$

также являются линейными операторами в $C^{(2)}[a, b]$, но со значениями в \mathbb{R}^1 (такие операторы в функциональном анализе называются линейными формами или функционалами). Множе-

ство функций в $C^{(2)}[a, b]$, для которых функционалы (2.3) обращаются в 0, образуют линейное подпространство, которое мы обозначим Q .

С учетом этих замечаний задача (2.1) может интерпретироваться как задача на поиск *собственных функций* оператора Штурма — Лиувилля, действующего в пространстве Q . Напомним, что ненулевой вектор x линейного пространства Q называется *собственным* для оператора L , действующего в Q , если вектор Lx коллинеарен x : $Lx = \lambda x$. При этом число λ называется *собственным значением* оператора L .

Отметим, что постановка (2.1) задачи Штурма — Лиувилля является общей и в частных случаях приводит к задачам с однородными граничными условиями I рода (при $\alpha_1, \alpha_2 = 0$), II рода (при $\beta_1, \beta_2 = 0$) или III рода (при $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \neq 0$), которые известны из курса математической физики.

Несколько нижеприведенных утверждений из курса линейной алгебры, относящихся к понятиям „*собственное значение*“ и „*собственный вектор*“ оператора, играют для нас важную роль:

- 1) множество собственных векторов, отвечающих одному собственному значению, с добавленным к нему нулевым вектором есть линейное подпространство (произведение собственного вектора на число, сумма собственных векторов с одинаковым собственным значением снова является собственным вектором с тем же собственным значением);
- 2) собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы;
- 3) если линейное пространство евклидово, т.е. в нем определено скалярное произведение, а оператор самосопряженный, то собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Эти факты, доказываемые в курсе линейной алгебры для случая конечномерных пространств, на самом деле с конечномерностью не связаны и верны для произвольных линейных пространств. Отметим, что введенное нами пространство Q является бесконечномерным, так как, например, содержит бесконечное множество линейно независимых функций вида

$x^n y(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $y(x)$ — некоторая фиксированная функция из Q .

В нашем пространстве Q определим скалярное произведение

$$\langle u(x), v(x) \rangle = \int_a^b u(x)v(x)dx \quad (2.4)$$

и норму, соответствующую этому скалярному произведению:

$$\|u(x)\| = \sqrt{\langle u(x), v(x) \rangle}.$$

Отметим, что для любых функций $y_1, y_2 \in C^{(2)}[a, b]$

$$\begin{aligned} y_2 L[y_1] - y_1 L[y_2] &= -y_2(p y'_1)' + y_1(p y'_2)' + q y_1 y_2 - q y_1 y_2 = \\ &= y_1(p y'_2)' - y_2(p y'_1)' = y_1(p y'_2)' + y'_1 p y'_2 - y'_2 p y'_1 - y_2(p y'_1)' = \\ &= (y_1 p y'_2)' - (y_2 p y'_1)' = [p(y_1 y'_2 - y_2 y'_1)]' = [pW[y_1; y_2]]', \end{aligned}$$

где $W[y_1; y_2]$ — определитель Вронского двух функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Тождество

$$y_2(x)L[y_1](x) - y_1(x)L[y_2](x) = [p(x)W[y_1; y_2](x)]'$$

называют *тождеством Лагранжа*.

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ — собственные функции оператора L , отвечающие одному собственному значению λ , то

$$uL[v] - vL[u] = \lambda uv - \lambda uv = 0.$$

Поэтому

$$W[u; v](x) = \frac{C}{p(x)},$$

где C — постоянная.

Если $u, v \in Q$, то векторы $(u(a), u'(a))^\top$, $(v(a), v'(a))^\top$, $(\alpha_1, \beta_1)^\top$ коллинеарны в силу граничных условий. Поэтому $W[u; v](a) = 0$. Аналогично $W[u; v](b) = 0$. Следовательно, интегрируя тождество Лагранжа на отрезке $[a, b]$, получаем

$$\int_a^b (u(x)L[v](x) - v(x)L[u](x))dx = 0$$

или

$$\langle u, L[v] \rangle = \langle L[u], v \rangle. \quad (2.5)$$

Таким образом, оператор L , рассматриваемый на пространстве Q , является *самосопряженным*.

Замечание 2.1. Так как образ оператора L не совпадает с его областью определения, то использование термина „самосопряженный“ в данном случае, вообще говоря, не совсем корректно. Однако отметим, что Q является подпространством более широкого пространства функций $L^2[a, b]$, а введенное нами скалярное произведение распространяется на это более широкое пространство. Таким образом, тождество (2.5) имеет смысл, что позволяет в данном контексте говорить об операторе L как о самосопряженном.

2.2. Линейные дифференциальные операторы 2-го порядка

Оператор Штурма — Лиувилля является частным случаем линейного дифференциального оператора 2-го порядка, имеющего вид

$$\Lambda[y](x) = p_0(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x), \quad y \in Q.$$

Такой оператор, вообще говоря, не является самосопряженным относительно скалярного произведения (2.4). Действительно,

$$\begin{aligned} \langle \Lambda[u], v \rangle &= \int_a^b u''vp_0 dx + \int_a^b u'vp_1 dx + \int_a^b uv p_2 dx = \\ &= u'vp_0|_a^b - u(p_0v)'|_a^b + \int_a^b u(p_0v)''dx + uv p_1|_a^b - \\ &\quad - \int_a^b u(p_1v)'dx + \int_a^b uv p_2 dx = \\ &= [p_0u'v - u(p_0v)' + p_1uv]|_a^b + \int_a^b [(p_0v)'' - (p_1v)' + p_2v]udx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [p_0 u'v - u(p_0 v)' + p_1 uv] \Big|_a^b + \int_a^b (p_0 v'' + p_1 v' + p_2 v) u dx + \\
&\quad + 2 \int_a^b (p_0' - p_1) v' u dx = \\
&= \langle u, \Lambda[v] \rangle - (p_0' - p_1) uv \Big|_a^b + 2 \int_a^b (p_0' - p_1) v' u dx,
\end{aligned}$$

и мы видим, что оператор может быть самосопряжен, только если $p_0' = p_1$.

Ситуация может быть скорректирована, если в Q ввести скалярное произведение более общего вида

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)v(x)\rho(x)dx, \quad (2.6)$$

т.е. с некоторым весом $\rho(x)$. Тогда, учитывая граничные условия и используя интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned}
\langle Lu, v \rangle - \langle u, Lv \rangle &= uv[p_1\rho - (p_0\rho)'] \Big|_a^b + \\
&\quad + \int_a^b \{2uv'[(p_0\rho)' - p_1\rho] + uv[(p_0\rho)' - p_1\rho]'\} dx,
\end{aligned}$$

откуда видим, что L будет самосопряженным, если $\rho(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(p_0\rho)' - p_1\rho = 0.$$

Решая дифференциальное уравнение, находим

$$\rho(x) = \frac{1}{p_0(x)} \exp \left(\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx \right).$$

Следует заметить, что задача на собственные значения

$$\begin{cases} p_0 y'' + p_1 y' + p_2 y = \lambda y, \\ (\alpha_1 y' - \beta_1 y) \Big|_{x=a} = 0, \\ (\alpha_2 y' + \beta_2 y) \Big|_{x=b} = 0 \end{cases}$$

попросту сводится к задаче Штурма — Лиувилля, если выполнить замену $y(x) = \omega(x)/\sqrt{\rho(x)}$. В этом случае граничные условия останутся теми же, так как $\rho(x) > 0$ на $[a, b]$, а дифференциальное уравнение сведется к уравнению

$$-(p_0\omega')' + q\omega = -\lambda\omega,$$

где

$$q(x) = - \left[p_2 - p_1 \frac{\rho'}{2\rho} + \frac{3}{4} p_0 \frac{\rho'^2}{\rho^2} - p_0 \frac{\rho''}{2\rho} \right].$$

2.3. Обращение оператора Штурма — Лиувилля

Число $\lambda = 0$ может быть собственным значением оператора L (2.2). В этом случае ядро оператора L не пусто и, следовательно, он не имеет обратного. Однако всегда можно найти число λ_0 , не являющееся собственным для L . Но тогда для оператора $\tilde{L}[y] = -(py')' + (q - \lambda_0)y$ число 0 не является собственным. Поэтому в дальнейшем, имея в виду эту редукцию (смещение собственных чисел), мы будем предполагать, что значение $\lambda = 0$ не является собственным для оператора L . Тогда этот оператор является взаимно однозначным, и потому для него существует обратный оператор. Во многих отношениях этот обратный оператор имеет лучшие свойства, чем исходный (в силу общего положения, по которому дифференцирование ухудшает свойства функций, а интегрирование — улучшает, „сглаживая все углы“).

Обратимся к построению обратного оператора. Дело сводится к тому, чтобы найти решение дифференциального уравнения

$$-(py')' + qy = f(x) \quad (2.7)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} \alpha_1 y'(a) - \beta_1 y(a) &= 0, \\ \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) &= 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

т.е. к решению краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Вопрос существования решения у краевой задачи (2.7), (2.8) решается при помощи теоремы суще-

ствования и единственности решения задачи Коши для того же дифференциального уравнения.

Рассмотрим задачи Коши

$$\begin{cases} L[y] = 0, \\ y'(a) = \beta_1, \\ y(a) = \alpha_1, \end{cases} \quad \begin{cases} L[y] = 0, \\ y'(b) = \beta_2, \\ y(b) = -\alpha_2, \end{cases}$$

которые по теореме существования и единственности имеют решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$. При этом по формуле Грина

$$W[y_1; y_2](x) = \frac{\varkappa}{p(x)},$$

где \varkappa — постоянная, не зависящая от x . Эта постоянная может равняться 0, только если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы, т.е. отличаются числовым множителем. Но тогда каждая из них является решением дифференциального уравнения $L[y] = 0$ при краевых условиях (2.8); следовательно, оператор L имеет собственную функцию с собственным значением 0. По предположению, таких функций нет, так что $\varkappa \neq 0$.

Рассмотрим функцию

$$g(x, \xi) = \frac{1}{\varkappa} \begin{cases} y_1(x)y_2(\xi), & x \leq \xi, \\ y_1(\xi)y_2(x), & x > \xi. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна по совокупности переменных, удовлетворяет граничным условиям (2.8) по переменной x (а в силу симметрии — и по переменной ξ). При $x \neq \xi$ она как функция от x удовлетворяет уравнению (2.7), а при $x = \xi$ ее производная имеет разрыв I рода со скачком

$$g'_x(\xi + 0, \xi) - g'_x(\xi - 0, \xi) = \varkappa^{-1}[y_1(\xi)y'_2(\xi)] - y'_1(\xi)y_2(\xi)] = p(\xi)^{-1}.$$

Если $f \in C[a, b]$, то функция

$$u(x) = \int_a^b g(x, \xi)f(\xi)d\xi \tag{2.9}$$

является решением уравнения (2.7). Чтобы проверить это, заметим, что

$$\begin{aligned}
 u'(x) &= \frac{1}{\kappa} \frac{d}{dx} \left[\int_a^x y_1(\xi) y_2(x) f(\xi) d\xi + \int_x^b y_1(x) y_2(\xi) f(\xi) d\xi \right] = \\
 &= \frac{1}{\kappa} \left[y'_2(x) \int_a^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi + y_2(x) y_1(x) f(x) + \right. \\
 &\quad \left. + y'_1(x) \int_x^b y_2(\xi) f(\xi) d\xi - y_1(x) y_2(x) f(x) \right] = \\
 &= \frac{1}{\kappa} \left[y'_2(x) \int_a^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi + y'_1(x) \int_x^b y_2(\xi) f(\xi) d\xi \right].
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 [p(x) u'(x)]' &= \frac{1}{\kappa} [p(x) y'_2(x)]' \int_a^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi + \\
 &\quad + \frac{p(x)}{\kappa} y'_2(x) y_1(x) f(x) + \\
 &\quad + \frac{1}{\kappa} [p(x) y'_1(x)]' \int_x^b y_2(\xi) f(\xi) d\xi - \\
 &\quad - \frac{p(x)}{\kappa} y'_1(x) y_2(x) f(x) = \\
 &= \frac{1}{\kappa} q(x) y_2(x) \int_a^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi + \\
 &\quad + \frac{1}{\kappa} q(x) y_1(x) \int_x^b y_2(\xi) f(\xi) d\xi - \\
 &\quad - \frac{p(x)}{\kappa} [y'_1(x) y_2(x) - y_1(x) y'_2(x)] f(x) = \\
 &= q(x) \int_a^b g(x, \xi) d\xi - \frac{1}{\kappa} [p(x) W[y_1; y_2](x)] f(x) = \\
 &= q(x) u(x) - f(x).
 \end{aligned}$$

Так же убеждаемся, что условия (2.8) выполнены:

$$\begin{aligned} \alpha_1 u'(a) - \beta_1 u(a) &= \frac{\alpha_1}{\kappa} y_1'(a) \int_a^b y_2(\xi) f(\xi) d\xi - \\ &- \frac{\beta_1}{\kappa} y_1(a) \int_a^b y_2(\xi) f(\xi) d\xi = \\ &= [\alpha_1 y_1'(a) - \beta_1 y_1(a)] \frac{1}{\kappa} \int_a^b y_2(\xi) f(\xi) d\xi = 0, \\ \alpha_2 u'(b) + \beta_2 u(b) &= \frac{\alpha_2}{\kappa} y_2'(b) \int_a^b y_1(\xi) f(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{\beta_2}{\kappa} y_2(b) \int_a^b y_1(\xi) f(\xi) d\xi = \\ &= [\alpha_2 y_2'(b) + \beta_2 y_2(b)] \frac{1}{\kappa} \int_a^b y_1(\xi) f(\xi) d\xi = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что уравнение (2.7) с граничными условиями (2.8) имеет решение для любой функции $f(x) \in C[a, b]$ и решение это определяется по формуле (2.9). Значит, формула (2.9) описывает оператор, обратный оператору L . Обозначим этот оператор через $G[f]$. Он является самосопряженным, так как L самосопряжен. Функция $g(x, \xi)$, определяющая оператор G , называется *функцией Грина* задачи (2.7), (2.8).

Замечание 2.2. Из общей теории линейных операторов следует, что оператор G , определяемый непрерывной функцией $g(x, \xi)$, является компактным. Если $g(x, \xi)$ — симметричная функция, т.е. $g(x, \xi) = g(\xi, x)$, то этот оператор самосопряжен. По теореме Гильберта — Шмидта спектр этого оператора является дискретным и представляет собой последовательность действительных чисел, сходящуюся к 0. При этом существует полная ортогональная система, составленная из собственных функций этого оператора (с учетом того, что ядро оператора G тривиально). Далее мы, по существу, будем доказывать эти выводы. #

Рассмотрим квадратичный функционал

$$\langle G[f], f \rangle = \int_a^b dx \int_a^b g(x, \xi) f(x) f(\xi) d\xi.$$

На множестве $U = \{f \in C[a, b] : \|f\| = 1\}$ этот функционал ограничен:

$$|\langle G[f], f \rangle| \leq \|G[f]\| \|f\| \leq \|G\| \|f\|^2 = \|G\|,$$

где

$$\|G\| = \sup\{\|G[f]\|, \|f\| = 1\} \leq \sqrt{\int_a^b (\max_{\xi} |g(x, \xi)|)^2 dx}.$$

Он достигает максимального по модулю значения на некоторой функции $v_0(x)$. Эта функция должна быть собственной для G . Однако сначала отметим, что если функция φ такова, что $\langle v_0, \varphi \rangle = 0$, то и $\langle G[v_0], \varphi \rangle = 0$. В самом деле, рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha) &= \left\langle G \left[\frac{v_0 + \alpha \varphi}{\|v_0 + \alpha \varphi\|} \right], \frac{v_0 + \alpha \varphi}{\|v_0 + \alpha \varphi\|} \right\rangle = \\ &= \frac{\langle G[v_0], v_0 \rangle + 2\alpha \langle G[v_0], \varphi \rangle + \alpha^2 \langle G[\varphi], \varphi \rangle}{\|v_0\|^2 + 2\alpha \langle v_0, \varphi \rangle + \|\varphi\|^2} = \\ &= \frac{\langle G[v_0], v_0 \rangle + 2\alpha \langle G[v_0], \varphi \rangle + \alpha^2 \langle G[\varphi], \varphi \rangle}{1 + \|\varphi\|^2}, \end{aligned}$$

которая дифференцируема в окрестности $\alpha = 0$ и при $\alpha = 0$ имеет локальный экстремум. Поэтому

$$\gamma'(0) = 2\langle G[v_0], \varphi \rangle = 0.$$

В частности, взяв $\varphi = G[v_0] - \langle G[v_0], v_0 \rangle v_0$, получим

$$\langle v_0, \varphi \rangle = \langle v_0, G[v_0] \rangle - \langle v_0, G[v_0] \rangle \|v_0\|^2 = 0.$$

Поэтому $\langle G[v_0], \varphi \rangle = 0$ и

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^2 &= \langle G[v_0] - \langle G[v_0], v_0 \rangle v_0, \varphi \rangle = \\ &= \langle G[v_0], \varphi \rangle - \langle v_0, G[v_0] \rangle \langle v_0, \varphi \rangle = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $G[v_0] = \mu_0 v_0$, где $\mu_0 = \langle G[v_0], v_0 \rangle$.

Собственная функция v_0 имеет максимальное по модулю собственное значение μ_0 оператора G . Действительно, для любой собственной функции v с собственным значением μ , для которой $\|v\| = 1$, имеем

$$|\mu| = |\langle \mu v, v \rangle| = |\langle G[v], v \rangle| \leq |\langle G[v_0], v_0 \rangle| = |\mu_0|.$$

Собственному значению μ_0 оператора G соответствуют собственное значение $\lambda_0 = \mu_0^{-1}$ и собственная функция v_0 оператора L . При этом λ_0 — минимальное по модулю собственное значение для L .

Рассмотрим функцию

$$g_1(x, \xi) = g(x, \xi) - \mu_0 v_0(x) v_0(\xi)$$

и соответствующий ей оператор

$$G_1[f](x) = \int_a^b g_1(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Этот оператор выражается через оператор G :

$$\begin{aligned} G_1[f](x) &= \int_a^b [g(x, \xi) - \mu_0 v_0(x) v_0(\xi)] f(\xi) d\xi = \\ &= G[f] - \mu_0 \langle v_0, f \rangle v_0 = G[f - \langle v_0, f \rangle v_0]. \end{aligned}$$

Для оператора G_1 рассмотрим функционал $\langle G_1[f], f \rangle$ на множестве U , который тоже ограничен и достигает максимального по модулю значения μ_1 на некоторой функции v_1 . Отметим, что для любой (непрерывной) функции f функция $f - \langle v_0, f \rangle v_0$ ортогональна v_0 . Поэтому $G_1[f] = G[f - \langle v_0, f \rangle v_0] \perp \perp v_0$. Следовательно, $G_1[v_1] \perp v_0$, $\mu_1 v_1 \perp v_0$ и $v_1 \perp v_0$. Это значит, что $G_1[v_1] = G[v_1]$ и что μ_1 — собственное значение оператора G с соответствующей ему собственной функцией v_1 .

Повторим описанную процедуру и рассмотрим оператор

$$G_2[f](x) = \int_a^b g_2(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

порожденный функцией $g_2(x, \xi) = g(x, \xi) - \mu_0 v_0(x) v_0(\xi) - \mu_1 v_1(x) v_1(\xi)$. Функционал $\langle G_2[f], f \rangle$ на U ограничен и достигает наибольшего по модулю значения μ_2 на некоторой функции v_2 , которая является собственной и для G_1 , и для G . При этом $|\mu_2| \leq |\mu_1| \leq |\mu_0|$.

Описанный итерационный процесс не может оборваться за конечное число шагов, так как в противном случае на некотором n -м шаге $G_n \equiv 0$, и потому $g_n(x, \xi) \equiv 0$. Но тогда

$$g(x, \xi) = \sum_{k=0}^n \mu_k v_k(x) v_k(\xi)$$

и, следовательно,

$$G[f] = \sum_{k=0}^n \mu_k v_k(x) \int_a^b v_k(\xi) f(\xi) d\xi = \sum_{k=0}^n \mu_k \langle v_k, f \rangle v_k.$$

Оператор такого вида не может быть взаимно однозначным, так как его образ — конечномерное пространство. Противоречие показывает, что мы имеем бесконечную последовательность v_0, v_1, \dots попарно ортогональных функций, являющихся собственными для оператора G с собственными значениями μ_0, μ_1, \dots , причем $|\mu_0| \geq |\mu_1| \geq \dots$

Отметим, что система функций $w_k(x, \xi) = v_k(x) v_k(\xi)$, $k = 0, 1, \dots$, является ортонормированной на пространстве функций двух переменных, определенных в прямоугольнике $a \leq x \leq b$, $a \leq \xi \leq b$, если под скалярным произведением понимать

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \int_a^b f(x, y) g(x, y) dx dy.$$

При этом

$$\begin{aligned} \langle g(x, \xi), v_k(x) v_k(\xi) \rangle &= \int_a^b dx \int_a^b g(x, \xi) v_k(x) v_k(\xi) dx dy = \\ &= \langle v_k(x), G[v_k](x) \rangle = \mu_k \|v_k\|^2 = \mu_k. \end{aligned}$$

Согласно неравенству Бесселя

$$\|g\|^2 = \int_a^b \int_a^b [g(x, \xi)]^2 dx d\xi \geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k^2.$$

Это значит, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k v_k(x) v_k(\xi)$$

сходится в среднем квадратичном к некоторой функции. Поэтому определена функция

$$\tilde{g}(x, \xi) = g(x, \xi) - \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k v_k(x) v_k(\xi).$$

Если $\tilde{g}(x, \xi) \neq 0$, то оператор

$$\tilde{G}[f](x) = \int_a^b \tilde{g}(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

имеет собственную функцию с ненулевым собственным значением, являющимся экстремальным значением соответствующего функционала. Как и выше, можно показать, что эта собственная функция является собственной также и для G и что полученное собственное значение не превосходит $|\mu_k|$ для любого k . Но, как мы доказали, ряд с общим членом μ_k^2 сходится, т.е. $\mu_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому на самом деле $\tilde{g} \equiv 0$ и

$$g(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k v_k(x) v_k(\xi). \quad (2.10)$$

Из равенства (2.10), в частности, следует, что система $\{v_k(x)\}$ замкнута в $L^2[a, b]$, а значит, и полна в этом пространстве.

стве. Действительно, если для функции $f \in L^2[a, b]$ выполняются соотношения $f \perp v_k, k = 0, 1, \dots$, то

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x, \xi) f(\xi) d\xi &= \int_a^b \left[g(x, \xi) - \sum_{k=0}^N \mu_k v_k(x) v_k(\xi) \right] f(\xi) d\xi + \\ &\quad + \int_a^b \sum_{k=0}^N \mu_k v_k(x) v_k(\xi) f(\xi) d\xi = \\ &= \int_a^b \left[g(x, \xi) - \sum_{k=0}^N \mu_k v_k(x) v_k(\xi) \right] f(\xi) d\xi + \mu_k \langle f, v_k \rangle v_k = \\ &= \int_a^b \left[g(x, \xi) - \sum_{k=0}^N \mu_k v_k(x) v_k(\xi) \right] f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| \int_a^b g(x, \xi) f(\xi) d\xi \right| dx &\leq \\ &\leq \int_a^b \int_a^b \left| g(x, \xi) - \sum_{k=0}^N \mu_k v_k(x) v_k(\xi) \right| |f(\xi)| d\xi dx \leq \\ &\leq \left\| g(x, \xi) - \sum_{k=0}^N \mu_k v_k(x) v_k(\xi) \right\|^2 (b-a) \|f(\xi)\|^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\int_a^b \left| \int_a^b g(x, \xi) f(\xi) d\xi \right| dx = 0$$

и

$$G[f] = \int_a^b g(x, \xi) f(\xi) d\xi \equiv 0.$$

Последнее возможно только если $f(x) \equiv 0$ (так как оператор G обратим).

Полнота системы $\{v_k(x)\}$ означает, что любая непрерывная функция $f(x)$ (вообще говоря, любая функция из $L^2[a, b]$) может быть разложена по этой системе в ряд, который сходится к $f(x)$ по норме пространства $L^2[a, b]$, т.е. в среднем квадратичном.

2.4. Контрольные вопросы и упражнения

2.1. Сформулируйте задачу Штурма — Лиувилля. Что такое оператор Штурма — Лиувилля? В каком функциональном пространстве он действует?

2.2. Запишите:

- тождество Лагранжа;
- формулу Грина.

2.3. Что такое самосопряженный оператор? Является ли самосопряженным оператор Штурма — Лиувилля? Обоснуйте ответ.

2.4. Приведите к самосопряженному виду задачу

$$\begin{aligned} y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) + \lambda y(x) &= 0, \quad x \in (0, 1), \\ y(0) = 0, \quad y'(1) &= 1. \end{aligned}$$

Найдите ее собственные значения и соответствующие им нормированные собственные функции.

2.5. Напишите функцию Грина для оператора Штурма — Лиувилля. Каково ее основное свойство? Выведите функцию Грина при помощи метода вариации постоянной.

2.6. Пусть $G(x, \xi)$ — функция Грина задачи Штурма — Лиувилля (2.1). Докажите, что интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi$$

эквивалентно задаче Штурма — Лиувилля.

2.7. Пусть L — оператор Штурма — Лиувилля, $C_N[a, b]$ — множество всех функций из $C[a, b]$ единичной нормы. Докажите:

- для любой функции $f \in C_N[a, b]$ функция $L^{-1}[f]$ ограничена и на $[a, b]$;

б) существует такая числовая константа B , что для любой функции $f \in C_N[a, b]$ в любой точке выполняется неравенство $|L^{-1}[f](x)| \leq B$;

в) семейство $L^{-1}[C_N[a, b]]$ равностепенно непрерывно, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in C_N[a, b]: |x_1 - x_2| < \delta \implies |L^{-1}[f](x_1) - L^{-1}[f](x_2)| < \varepsilon$;

г) выполняется равенство $\sup\{\|u\|, L^{-1}[u] \in C_N[a, b]\} = \sup\{|\langle u, f \rangle|, L^{-1}[u], f \in C_N[a, b]\} = \mu_0 < +\infty$.

2.8. Для задачи

$$\begin{aligned} -v''(x) &= \lambda v(x), \quad 0 < x < 2\pi, \\ v(0) &= v(2\pi), \quad v'(0) = v'(2\pi) \end{aligned}$$

найдите собственные значения и собственные функции. В чем главное отличие поставленной задачи от задачи Штурма — Лиувилля?

2.9. Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ — ортонормированная система функций в $L^2[a, b]$. Докажите, что если для функции $f \in L^2[a, b]$ имеет место равенство Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle^2,$$

то справедливо следующее представление:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x),$$

в котором сходимость суммы рассматривается по норме пространства $L^2[a, b]$.

3. СИНГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

3.1. О постановке задачи

Мы рассмотрели задачу Штурма — Лиувилля в предположении, что коэффициенты уравнения $p(x)$ и $q(x)$ являются непрерывными функциями на конечном отрезке. Однако представляет интерес и вариант задачи, когда указанные функции рассматриваются на интервале или полуинтервале, причем либо они имеют на одном или обоих концах интервала особенности, либо интервал является бесконечным. Если интервал (a, b) конечен, а функции $p(x)$ и $q(x)$, возможно, имеют на его концах особенности, но при этом интегралы

$$\int_a^b \left| \frac{p'(x)}{p(x)} \right| dx, \quad \int_a^b \left| \frac{q(x)}{p(x)} \right| dx, \quad \int_a^b \frac{dx}{|p(x)|} \quad (3.1)$$

сходятся, то любое решение уравнения

$$-(py')' + qy = \lambda y \quad (3.2)$$

будет иметь в точках a и b конечные пределы. Тогда можно корректно поставить задачу Штурма — Лиувилля, для которой останутся в силе все результаты из гл. 2. В этом случае задачу Штурма — Лиувилля называют *регулярной*. Если же хотя бы один из указанных интегралов расходится, то возникает вопрос, что понимать под граничными условиями в особой точке. Аналогична ситуация, если рассматриваемый промежуток является неограниченным. В таком случае задачу

Штурма — Лиувилля называют *сингулярной*. Корректная постановка такой задачи будет сделана ниже.

Варианты сингулярной задачи для конечного и бесконечного промежутков имеют несущественные различия — те же, что и различия между несобственными интегралами в аналогичных ситуациях. Однако важно, является ли особым только один конец промежутка или оба. Учитывая это, мы рассмотрим два варианта задачи: для полубесконечного промежутка $[a, +\infty)$ и для всей оси $(-\infty, +\infty)$.

Один из способов изучения сингулярной задачи связан с предельным переходом от регулярной задачи на внутреннем промежутке подобно тому, как несобственные интегралы получаются предельным переходом от обычных интегралов Римана.

С позиции функционального анализа дальнейшие наши действия состоят в анализе спектра линейного оператора и получении его спектрального разложения. В регулярном случае оператор имеет дискретный спектр, и его спектральное разложение сводится к ряду, который дает разложение по собственным функциям в виде абстрактного ряда Фурье по ортонормальной системе функций. В сингулярном же случае спектр оператора имеет более сложную структуру. Спектральное разложение будет не рядом, а, вообще говоря, интегралом или даже комбинацией того и другого.

Для описания соответствующих представлений мы воспользуемся интегралом Римана — Стильеса, который позволяет с единой позиции манипулировать как рядами, так и интегралами или комбинациями рядов и интегралов. Основные сведения об интеграле Римана — Стильеса приведены в приложении 2. Подробное изложение спектральной теории операторов типа оператора Штурма — Лиувилля читатель найдет в дополнительной литературе, указанной в конце книги.

Несмотря на очень тесную связь изучаемой теории с функциональным анализом, мы старались использовать из этой области минимальные сведения, опираясь в основном на элемен-

тарные методы. Тем не менее в этой главе нам придется выйти за рамки вещественных функциональных пространств, с которыми мы имели дело в гл. 2. Это значит, что элементами функционального пространства будут функции, которые могут принимать любые комплексные значения и которые как элементы линейного пространства могут умножаться на любое комплексное число. При таком расширении понятия функционального пространства необходимо уточнить определение скалярного произведения и вместо (2.4) использовать формулу

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx,$$

где \bar{a} — число, комплексно сопряженное к a . Определение *самосопряженного оператора* остается без изменения, при этом собственными значениями самосопряженного оператора могут быть только действительные числа.

3.2. Собственные функции сингулярной задачи

Изучение сингулярной задачи на полубесконечном промежутке начнем с изучения собственных функций *оператора Штурма — Лиувилля*. Рассмотрим оператор

$$L[v](x) = [-p(x)v'(x)]' + q(x)v(x), \quad (3.3)$$

на множестве функций $v \in C^{(2)}[a, +\infty)$, где $p \in C^{(1)}[a, +\infty)$, $q \in C[a, +\infty)$, $p(x) > 0$ при $x \in [a, +\infty)$. Уравнение

$$L[v] = \lambda v \quad (3.4)$$

является линейным однородным дифференциальным уравнением 2-го порядка. Поэтому все его решения описываются в виде линейной комбинации каких-либо двух его линейно независимых частных решений, которые тем самым образуют фундаментальную систему решений. Отметим, что любое решение

$v(x)$ уравнения (3.2) однозначно определяется своими значениями $v(a)$ и $v'(a)$ согласно теореме существования и единственности для задачи Коши.

Рассмотрим некоторое комплексное число λ , не являющееся действительным, и зафиксируем его. Функции $\chi(x)$ и $\psi(x)$, удовлетворяющие уравнению (3.4) и начальным условиям

$$\begin{aligned}\chi(a) &= \beta_1, & \psi(a) &= \alpha_1, \\ \chi'(a) &= -\alpha_1, & \psi'(a) &= \beta_1,\end{aligned}\tag{3.5}$$

где $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ и $\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$, линейно независимы, так как их определитель Вронского в точке a равен

$$W[\chi; \psi](a) = \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0,$$

а потому отличен от 0 на всем промежутке $[a, +\infty)$. Значит, любое решение уравнения (3.4) является линейной комбинацией функций $\chi(x)$ и $\psi(x)$ и, следовательно, лишь числовым множителем отличается от функции

$$v_m(x) = \chi(x) + m\psi(x)\tag{3.6}$$

для некоторого комплексного m (если, конечно, это решение не является пропорциональным функции $\psi(x)$, когда можно формально считать $m = \infty$). Отметим, что функция $\psi(x)$ удовлетворяет граничному условию

$$\alpha_1\psi'(a) - \beta_1\psi(a) = 0,$$

при этом любое решение $v(x)$ уравнения (3.4), удовлетворяющее условию

$$\alpha_1v'(a) - \beta_1v(a) = 0,\tag{3.7}$$

отличается от $\psi(x)$ лишь числовым множителем. Соответственно ни одна из функций $v_m(x)$ вида (3.6) не подчиняется граничному условию (3.7).

Выберем точку $b > a$ и пару действительных чисел α_2 и β_2 , одновременно не равных 0. Тогда среди функций $v_m(x)$ вида (3.6) только одна функция удовлетворяет в точке b граничному условию

$$\alpha_2 v'_m(b) + \beta_2 v_m(b) = 0. \quad (3.8)$$

Положим $\zeta = \alpha_2/\beta_2$. Тогда каждому ζ однозначно соответствует параметр $m = m(b, \zeta)$, для которого функция $v_m(x)$ удовлетворяет граничному условию (3.8). Подставляя представление (3.6) в условие (3.8), получаем соотношение

$$m = -\frac{\chi'(b)\alpha_2 + \chi(b)\beta_2}{\psi'(b)\alpha_2 + \psi(b)\beta_2} = -\frac{\chi'(b)\zeta + \chi(b)}{\psi'(b)\zeta + \psi(b)}, \quad (3.9)$$

т.е. m является дробно-линейной функцией параметра ζ . Значение $\zeta = \infty$ расширенной комплексной плоскости соответствует случаю $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$, т.е. граничному условию II рода.

По нашему предположению, ζ является действительным, причем при варьировании параметров α_2 и β_2 величина ζ пробегает всю действительную ось. Следовательно, множество значений m , для которых $v_m(x)$ при определенных действительных α_2 и β_2 удовлетворяет (3.8), составляет образ действительной прямой при дробно-линейном преобразовании (3.9), т.е. окружность или прямую в \mathbb{C} . Окончательно приходим к следующей теореме.

Теорема 3.1. Множество значений $m(b, \zeta)$, $b > a$ заполняет окружность $C(b)$ в \mathbb{C} с центром

$$M(b) = -\frac{W[\bar{\psi}; \chi](b)}{W[\bar{\psi}; \psi](b)}$$

и радиусом

$$R(b) = \left| \frac{W[\bar{\psi}; \chi](b)}{W[\bar{\psi}; \psi](b)} \right|.$$

Замечание 3.1. Так как $W[\bar{\psi}; \psi](a) = 0$, то по формуле Грина

$$p(b)W[\bar{\psi}; \psi](b) = (\bar{\lambda} - \lambda) \int_a^b |\psi(x)|^2 dx,$$

откуда

$$|W[\bar{\psi}; \psi](b)| = \frac{2 \operatorname{Im} \lambda}{p(b)} \int_a^b |\psi(x)|^2 dx = \frac{2 \operatorname{Im} \lambda}{p(b)} \|\psi\|_b^2.$$

Аналогично по той же формуле

$$p(b)W[\chi; \psi](b) = p(a)W[\chi; \psi](a) = p(a)(\alpha_1^2 + \beta_1^2)$$

и

$$W[\chi; \psi](b) = \frac{p(a)(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{p(b)}.$$

В результате получаем другую формулу для радиуса окружности $C(b)$:

$$R(b) = \frac{p(a)(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{2 \operatorname{Im} \lambda \|\psi\|_b^2}.$$

◀ Разрешая равенство (3.9) относительно ζ , находим

$$\zeta = -\frac{\chi(b) + m\psi(b)}{\chi'(b) + m\psi'(b)} = -\frac{v_m(b)}{v'_m(b)}.$$

Значит, условие $\zeta \in \mathbb{R}$ эквивалентно тому, что отношение $v_m(b)/v'_m(b)$ действительно. Последнее, как легко убедиться, означает, что $W[\bar{v}_m; v_m](b) = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} 0 &= W[\bar{v}_m; v_m](b) = W[\bar{\chi} + \bar{m}\bar{\psi}; \chi + m\psi] = \\ &= W[\bar{\chi}; \chi] + \bar{m}W[\bar{\psi}; \chi] + mW[\bar{\chi}; \psi] + |m|^2W[\bar{\psi}; \psi] \end{aligned}$$

или

$$|m|^2 + \bar{m} \frac{W[\bar{\psi}; \chi]}{W[\bar{\psi}; \psi]} + m \frac{W[\bar{\chi}; \psi]}{W[\bar{\psi}; \psi]} + \frac{W[\bar{\chi}; \chi]}{W[\bar{\psi}; \psi]} = 0, \quad (3.10)$$

где все определители Вронского вычисляются в точке b . Уравнение (3.10) есть уравнение окружности с центром в точке

$$M(b) = -\frac{W[\bar{\psi}; \chi]}{W[\bar{\psi}; \psi]}$$

и квадратом радиуса, равным

$$\begin{aligned} [R(b)]^2 &= \frac{W[\bar{\psi}; \chi]W[\bar{\chi}; \psi]}{W[\bar{\psi}; \psi]^2} - \frac{W[\bar{\chi}; \chi]}{W[\bar{\psi}; \psi]} = \\ &= \frac{(\bar{\psi}\chi' - \bar{\psi}'\chi)(\bar{\chi}\psi' - \bar{\chi}'\psi) - (\bar{\chi}\chi' - \bar{\chi}'\chi)(\bar{\psi}\psi' - \bar{\psi}'\psi)}{W[\bar{\psi}; \psi]^2} = \\ &= \frac{\bar{\chi}'\chi\bar{\psi}\psi' - \bar{\psi}'\chi\bar{\chi}\psi' - \bar{\psi}\chi'\bar{\chi}'\psi + \bar{\chi}\chi'\bar{\psi}'\psi}{W[\bar{\psi}; \psi]^2} = \\ &= \frac{(\chi\psi' - \chi'\psi)(\bar{\psi}\bar{\chi}' - \bar{\psi}'\bar{\chi})}{W[\bar{\psi}; \psi]^2} = \\ &= \frac{W[\chi; \psi]W[\bar{\psi}; \bar{\chi}]}{W[\bar{\psi}; \psi]^2} = \left| \frac{W[\bar{\psi}; \chi]}{W[\bar{\psi}; \psi]} \right|^2, \end{aligned}$$

где опять-таки все значения функций χ, ψ и соответствующих определителей Вронского берутся в точке b . ►

Теорема 3.2. Если $a < r < b$, то окружность $C(b)$ содержится внутри окружности $C(r)$.

◀ Точка $m \in \mathbb{C}$ будет лежать внутри окружности $C(r)$, если левая часть соотношения (3.10) в точке r будет отрицательной. Поэтому для соответствующей такому значению m функции $v_m(x)$ вида (3.6) будет выполняться неравенство

$$\frac{W[\bar{v}_m; v_m](r)}{W[\bar{\psi}; \psi](r)} < 0. \quad (3.11)$$

В качестве m возьмем то значение, для которого $v_m(x)$ удовлетворяет условию (3.8), где α_2 и β_2 — произвольные действительные. Тогда

$$\frac{W[\bar{v}_m; v_m](b)}{W[\bar{\psi}; \psi](b)} = 0. \quad (3.12)$$

Согласно формуле Грина

$$p(x)W[\bar{v}_m; v_m](x) = p(a)W[\bar{v}_m; v_m](a) + (\bar{\lambda} - \lambda) \int_a^x |v_m(x)|^2 dx.$$

При этом

$$\begin{aligned} W[\bar{v}_m; v_m](a) &= W[\bar{\chi} + \bar{m}\bar{\psi}; \chi + m\psi](a) = \\ &= \bar{m}W[\bar{\psi}; \chi](a) + mW[\bar{\chi}; \psi](a) = 2i \operatorname{Im} m (\alpha_1^2 + \beta_1^2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} W[\bar{v}_m; v_m](x) &= i \left[2 \frac{p(a)}{p(x)} \operatorname{Im} m (\alpha_1^2 + \beta_1^2) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\operatorname{Im} \lambda}{p(x)} \int_a^x |v_m(x)|^2 dx \right]. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$W[\bar{\psi}; \psi](x) = - \frac{2i \operatorname{Im} \lambda}{p(x)} \int_a^x |\psi(x)|^2 dx.$$

Таким образом, в произвольной точке $x > a$

$$\frac{W[\bar{v}_m; v_m](x)}{W[\bar{\psi}; \psi](x)} = \frac{\|v_m\|_x^2 - p(a)(\alpha_1^2 + \beta_1^2) \frac{\operatorname{Im} m}{\operatorname{Im} \lambda}}{\|\psi\|_x^2},$$

где

$$\|f\|_x^2 = \int_a^x |f(x)|^2 dx.$$

Согласно выбору значения m выполняется равенство (3.12), т.е.

$$\int_a^b |v_m(x)|^2 dx = p(a)(\alpha_1^2 + \beta_1^2) \frac{\operatorname{Im} m}{\operatorname{Im} \lambda}.$$

Но тогда при $r < b$

$$\int_a^r |v_m(x)|^2 dx < \int_a^b |v_m(x)|^2 dx = p(a)(\alpha_1^2 + \beta_1^2) \frac{\operatorname{Im} m}{\operatorname{Im} \lambda},$$

что равносильно неравенству (3.11), т.е. выбранное значение m попадает в круг $C(r)$. ►

Из доказанных теорем вытекает несколько важных следствий.

1. Семейство окружностей $C(b)$ является вложенным. Соответствующее семейство замкнутых кругов $D(b)$ с границами $C(b)$ имеет непустое пересечение, которое является либо точкой, либо замкнутым кругом, ограниченным предельной окружностью. Предельную точку или окружность обозначим C_∞ . Случай предельной точки реализуется, если функция $R(b)$ сходится к 0 при $b \rightarrow +\infty$. Как следует из замечания 3.1, этот случай имеет место, когда

$$\int_a^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx$$

расходится, т.е. $\psi \notin L^2[a, +\infty)$. Если же $\psi \in L^2[a, +\infty)$, то C_∞ — это предельная окружность, радиус которой

$$R_\infty = \frac{p(a)(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{2 \operatorname{Im} \lambda} \left(\int_a^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx \right)^{-1}.$$

2. Уравнение (3.4) всегда имеет хотя бы одно решение $v(x) \in L^2[a, +\infty)$. В самом деле, достаточно выбрать значение m , лежащее на C_∞ или внутри, если это окружность. Тогда m попадает внутрь любой окружности $C(b)$ и, как следует из доказательства теоремы 3.2, для любого $b > a$ выполняется неравенство

$$\int_a^b |v_m(x)|^2 dx < p(a)(\alpha_1^2 + \beta_1^2) \frac{\operatorname{Im} m}{\operatorname{Im} \lambda}.$$

Это значит, что для выбранного m функция v_m принадлежит $L^2[a, +\infty)$. Указанное решение уравнения (3.4) называют **решением Вейля**.

3. Если C_∞ — это предельная точка, то все решения (3.4), попадающие в $L^2[a, +\infty)$, пропорциональны $v_m(x)$, где $m = C_\infty$. Действительно, наличие двух линейно независимых решений

из $L^2[a, +\infty)$ означает, что все решения принадлежат этому пространству. Однако $\psi \notin L^2[a, +\infty)$, и поэтому любые два решения из $L^2[a, +\infty)$ линейно зависимы.

4. Если C_∞ — это окружность, то все решения (3.4) принадлежат $L^2[a, +\infty)$, так как функции v_m и ψ принадлежат $L^2[a, +\infty)$ и являются линейно независимыми.

Резюме этих следствий состоит в том, что вариант задачи (случай предельной точки или предельной окружности) определяется количеством независимых решений уравнения (3.4), принадлежащих $L^2[a, +\infty)$ (1 или 2). Оказывается, что этот вариант не зависит и от выбора параметра λ , т.е. связан лишь со свойствами оператора Штурма — Лиувилля (3.3).

Теорема 3.3. Если для некоторого комплексного числа λ , не являющегося действительным, все решения уравнения (3.4) принадлежат $L^2[a, +\infty)$, то это верно и для любого другого комплексного числа.

◀ Пусть все решения уравнения $L[v] = \lambda_0 v$, $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, принадлежат $L^2[a, +\infty)$. Выберем два из них — v_1 и v_2 , которые образуют фундаментальную систему решений. Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Тогда уравнение $L[v] = \lambda v$ можно представить в виде

$$L[v] - \lambda_0 v = (\lambda - \lambda_0)v.$$

Пусть v — некоторое решение этого уравнения. Тогда v является одним из решений неоднородного уравнения

$$L[y] - \lambda_0 y = (\lambda - \lambda_0)y. \quad (3.13)$$

Общее решение уравнения (3.13) может быть представлено как некоторое частное решение плюс общее решение соответствующего однородного уравнения. Частным решением уравнения (3.13) является функция

$$y_0 = (\lambda - \lambda_0) \int_c^x [v_1(\xi) v_2(x) - v_2(\xi) v_1(x)] v(\xi) d\xi$$

(это частное решение может быть получено применением метода вариации постоянных; можно также выполнить непосредственную проверку этого решения подстановкой в уравнение подобно тому, как это было сделано с *функцией Грина* для регулярной задачи). Параметр c может быть выбран произвольно, так как для любых c и d

$$\int_c^d [v_1(x)v_2(\xi) - v_2(x)v_1(\xi)]v(\xi)d\xi = \\ = \left(\int_c^d v_2(\xi)v(\xi)d\xi \right) v_1(x) + \left(\int_c^d v_1(\xi)v(\xi)d\xi \right) v_2(x)$$

— есть решение однородного уравнения $L[y] - \lambda y = 0$. Это значит, что имеет место представление

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) + \\ + (\lambda - \lambda_0) \int_c^x [v_1(x)v_2(\xi) - v_2(x)v_1(\xi)]v(\xi)d\xi,$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные.

Так как $v_1, v_2 \in L^2[a, +\infty)$, то, выбирая достаточно большое значение параметра c , мы можем сделать сколь угодно малой величину $M = \max\{\|v_1\|_{c,\infty}, \|v_2\|_{c,\infty}\}$, где

$$\|v_i\|_{c,\infty}^2 = \int_c^\infty |v_i(x)|^2 dx, \quad i = 1, 2.$$

Согласно неравенству Коши — Буняковского

$$\left| (\lambda - \lambda_0) \int_c^x [v_1(x)v_2(\xi) - v_2(x)v_1(\xi)]v(\xi)d\xi \right| \leq \\ \leq |\lambda - \lambda_0| \left(|v_1(x)| \int_c^x |v_2(\xi)v(\xi)| d\xi + |v_2(x)| \int_c^x |v_1(\xi)v(\xi)| d\xi \right) \leq \\ \leq |\lambda - \lambda_0| (|v_1(x)| \|v_2\|_{c,x} \|v\|_{c,x} + |v_2(x)| \|v_1\|_{c,x} \|v\|_{c,x}) \leq \\ \leq |\lambda - \lambda_0| M \|v\|_{c,x} (|v_1(x)| + |v_2(x)|).$$

Применяя неравенство треугольника, получаем

$$\begin{aligned}\|v\|_{c,x} &= \|C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) + y_0\| \leq \\ &\leq |C_1| \|v_1\|_{c,x} + |C_2| \|v_2\|_{c,x} + \|y_0\|_{c,x} \leq \\ &\leq M(|C_1| + |C_2|) + M|\lambda - \lambda_0| \|v\|_{c,x} (\|v_1\|_{c,x} + \|v_2\|_{c,x}) \leq \\ &\leq M(|C_1| + |C_2|) + 2M^2 |\lambda - \lambda_0| \|v\|_{c,x}.\end{aligned}$$

Теперь, если параметр c выбрать так, что $2M^2|\lambda - \lambda_0| < 1/2$, то получим неравенство

$$\|v\|_{c,x} \leq \frac{|C_1| + |C_2|}{2\sqrt{|\lambda - \lambda_0|}} + \frac{1}{2} \|v\|_{c,x},$$

откуда заключаем, что $\|v\|_{c,x}$ равномерно ограничены по x . Это равносильно тому, что $v \in L^2[c, +\infty)$ или в силу непрерывности v , что $v \in L^2[a, +\infty)$. ►

3.3. Разложение по собственным функциям

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}L[v] &= \lambda v, \\ \alpha_1 v'(a) - \beta_1 v(a) &= 0\end{aligned}\tag{3.14}$$

на полубесконечном промежутке $[a, +\infty)$. Она имеет решения для любого числа λ , отличающиеся лишь числовым множителем от функции $\psi(x) = \psi(x, \lambda)$, рассмотренной в 3.1.

Добавив к задаче (3.14) в некоторой точке $b > a$ дополнительное условие

$$\alpha_2 v'(b) + \beta_2 v(b) = 0,$$

мы получим *регулярную задачу Штурма — Лиувилля* на отрезке $[a, b]$, которая имеет решения только для некоторой последовательности чисел $\{\lambda_k(b)\}$ (собственных значений *оператора Штурма — Лиувилля*). Из этих решений можно образовать полную ортонормированную систему функций $\{v_k(x, b)\}$

в пространстве $L^2[a, b]$, причем каждая функция $v_k(x, b)$ пропорциональна функции $\psi(x, \lambda_k(b))$. Любая функция $f \in L^2[a, b]$ может быть разложена по системе $\{v_k(x, b)\}$ в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, v_k \rangle v_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle f, \psi(\cdot, \lambda_k(b)) \rangle}{\|\psi(\cdot, \lambda_k(b))\|^2} \psi(x, \lambda_k(b)), \quad (3.15)$$

который сходится к $f(x)$ по норме пространства $L^2[a, b]$, т.е. в среднеквадратичном смысле. Положим

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) \psi(x, \lambda) dx = \langle f, \psi(\cdot, \lambda) \rangle.$$

Тогда ряд (3.15) преобразуется к виду

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F(\lambda_k(b)) \frac{\psi(x, \lambda_k(b))}{\|\psi(\cdot, \lambda_k(b))\|^2}. \quad (3.16)$$

Если ввести специальную функцию скачков

$$\sigma_b(\lambda) = \begin{cases} \sum_{0 \leq \lambda_k \leq \lambda} \|\psi(\cdot, \lambda_k(b))\|^{-2}, & \lambda \geq 0, \\ -\sum_{-\lambda \leq \lambda_k \leq 0} \|\psi(\cdot, \lambda_k(b))\|^{-2}, & \lambda < 0, \end{cases}$$

то ряд (3.16) может быть представлен в виде *интеграла Римана — Стильтьеса*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \psi(x, \lambda) d\sigma_b(\lambda). \quad (3.17)$$

Естественно ожидать, что при $b \rightarrow +\infty$ интеграл (3.17) перейдет в аналогичное представление для сингулярной задачи (3.14). Однако при $b \rightarrow +\infty$ функция $\sigma_b(\lambda)$, вообще говоря, не стремится к какому-либо пределу.

Теорема 3.4. Для любого фиксированного λ функция $\sigma_b(\lambda)$ от параметра b ограничена.

◀ Для разложения (3.15) функции $f(x)$ по ортогональной системе функций напишем неравенство Бесселя

$$\|f\|^2 \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\langle f, \psi(\cdot, \lambda_k(b)) \rangle|^2}{\|\psi(\cdot, \lambda_k(b))\|^2} \geq \sum_{|\lambda_k(b)| \leq \lambda} \frac{|\langle f, \psi(\cdot, \lambda_k(b)) \rangle|^2}{\|\psi(\cdot, \lambda_k(b))\|^2}. \quad (3.18)$$

Нам нужно так подобрать функцию $f \in L^2[a, b]$, чтобы в последней сумме в (3.18) избавиться от числителя.

Отметим, что функция $\psi(x, \lambda)$ непрерывна по совокупности переменных x и λ вместе со своей производной ψ'_x (в силу теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных условий). Согласно граничным условиям либо $\psi(a, \lambda) = \alpha_1 \neq 0$, либо $\psi'_x(a, \lambda) = \beta_1 \neq 0$. Поэтому для любого λ найдется такое $h = h(\lambda)$, что в прямоугольнике $|t| \leq \lambda$, $a \leq x \leq a + h$ функция $\psi(x, t)$ знакопостоянна и $|\psi(x, t)| \geq C(x - a)$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq a + h, \\ 0, & a + h < x. \end{cases}$$

Тогда неравенство (3.18) дает

$$\begin{aligned} h = \|f\|^2 &\geq \sum_{|\lambda_k(b)| \leq \lambda} \left| \int_a^{a+h} \overline{\psi(x, \lambda_k(b))} dx \right| \|\psi(\cdot, \lambda_k(b))\|^{-2} \geq \\ &\geq \frac{C^2 h^2}{2} \sum_{|\lambda_k(b)| \leq \lambda} \|\psi(\cdot, \lambda_k(b))\|^{-2} \geq \frac{C^2 h^2}{2} |\sigma_b(\lambda)|, \end{aligned}$$

откуда

$$|\sigma_b(\lambda)| \leq \frac{2}{C^2 h}. \quad \blacktriangleright$$

Доказанная теорема позволяет утверждать, что для любой последовательности $b_k \rightarrow +\infty$ при любых значениях параметров $\alpha_2^{(k)}$ и $\beta_2^{(k)}$, определяющих граничное условие в точках b_k , последовательность $\sigma_k(\lambda) \equiv \sigma_{b_k}(\lambda)$ содержит сходящуюся подпоследовательность.

Замечание 3.2. Это утверждение вытекает из следующих соображений. Используя теорему и известное в теории функций диагональное построение, можно из последовательности $\sigma_k(\lambda)$ выделить подпоследовательность, которая сходится в каждой точке некоторого счетного всюду плотного подмножества $D \subset \mathbb{R}$. Построенная таким образом функция на множестве D будет монотонной и может быть доопределена до монотонной функции $\sigma(\lambda)$ на всей оси. При этом последовательность $\sigma_k(\lambda)$ будет сходиться к функции $\sigma(\lambda)$ в каждой точке ее непрерывности. #

Полученная таким образом монотонная функция $\sigma(\lambda)$ называется *спектральной функцией* оператора Штурма — Лиувилля в сингулярном случае. Аналогично введенная нами функция скачков $\sigma_b(\lambda)$ называется спектральной функцией оператора Штурма — Лиувилля в регулярном случае, действующего на отрезке $[a, b]$. Из вышеизложенного не ясно, является ли спектральная функция $\sigma(\lambda)$ однозначно определенной. Позже мы увидим, что она определяется неоднозначно и что это впрямую связано с типом сингулярной задачи.

Функция $\sigma(\lambda)$ оказывается тесно связанной с обратимостью оператора $L[v] - \lambda v$. Если для некоторого λ этот оператор имеет непрерывный обратный, то в некоторой окрестности точки λ функция $\sigma(\lambda)$ постоянна (локально постоянна в точке λ). Точки разрыва спектральной функции соответствуют собственным значениям оператора Штурма — Лиувилля, т.е. ситуации, когда уравнение (3.4) имеет нетривиальные решения в классе $L^2[a, +\infty)$. Множество собственных значений оператора называют его *точечным спектром*. Точки же, в которых $\sigma(\lambda)$ непрерывна, но не является локально постоянной,

образуют *непрерывный спектр* оператора L .

Наличие непрерывного спектра — главное отличие сингулярной задачи от регулярной. Для точки λ непрерывного спектра оператор $L[v] - \lambda v$ имеет обратный в соответствующем пространстве функций, но этот оператор не является непрерывным. Иначе говоря, решение уравнения $L[v] - \lambda v = 0$ не является устойчивым относительно нормы функционального пространства.

Для спектральной функции в сингулярном случае сохраняется разложение вида (3.17). В регулярном случае спектральная функция — это функция скачков, и разложение (3.17) сводится к ряду, в сингулярном же из-за наличия непрерывного спектра это разложение выражается интегралом. Сформулируем точный результат без доказательства.

Теорема 3.5. Пусть $f \in L^2[a, +\infty)$ непрерывна и

$$F(\lambda) = \int_a^{+\infty} f(x) \overline{\psi(x, \lambda)} dx. \quad (3.19)$$

Тогда

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \psi(x, \lambda) d\sigma(\lambda), \quad (3.20)$$

если интеграл в правой части сходится абсолютно и в каждом конечном интервале равномерно по x .

Замечание 3.3. Условие абсолютной и равномерной сходимости позволяет утверждать, что (3.20) выполняется для любого $x \in [a, +\infty)$. Это условие можно опустить, но в таком случае равенство (3.20) нужно понимать как равенство элементов функционального пространства, т.е. как равенство функций почти всюду на $[a, +\infty)$ относительно меры $d\sigma(\lambda)$. #

Если λ — комплексное, не являющееся действительным, то оператор $L[v] - \lambda v$ обратим, и обратный оператор может быть представлен в виде интегрального оператора

$$(L - \lambda E)^{-1}[f](x) = \int_a^{+\infty} g(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi.$$

Функция $g(x, \xi, \lambda)$, определяющая этот оператор, называется **резольвентой** оператора L . При $\lambda = 0$, если это значение не принадлежит точечному или непрерывному спектру, мы получаем функцию Грина для задачи. В регулярном случае мы видели, что функция Грина $g_b(x, \xi, 0)$ для отрезка $[a, b]$ представляется в виде

$$g_b(x, \xi, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k^b(x) v_k^b(\xi),$$

где $\{v_k^b\}$ — ортормированная система собственных функций.

Можно показать, что для произвольного комплексного λ резольвента задачи на $[a, b]$ имеет вид

$$g_b(x, \xi, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k^b(x) \overline{v_k^b(\xi)}}{\lambda_k(b) - \lambda}$$

или, если использовать спектральную функцию $\sigma_b(\lambda)$,

$$g_b(x, \xi, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(x, \zeta) \overline{\psi(\xi, \zeta)}}{\zeta - \lambda} d\sigma_b(\zeta).$$

Переходя к пределу при $b \rightarrow +\infty$ (когда $\sigma_b(\lambda) \rightarrow \sigma(\lambda)$), мы получим резольвенту для сингулярной задачи

$$g(x, \xi, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(x, \zeta) \overline{\psi(\xi, \zeta)}}{\zeta - \lambda} d\sigma(\zeta). \quad (3.21)$$

Теперь воспользуемся результатами из 3.1. В каждой точке b_k последовательности $\{b_k\} \rightarrow +\infty$ зададим граничные условия с помощью параметров $\alpha_2^{(k)}$ и $\beta_2^{(k)}$ (возможно, не меняющихся по k). Мы получим последовательность функций

$$v_k(x, \lambda) = \chi(x, \lambda) + m(b_k, \lambda) \psi(x, \lambda), \quad k = 1, 2, \dots,$$

удовлетворяющих в точках b_k граничным условиям

$$\alpha_2^{(k)}(v_k)'_x(b_k, \lambda) + \beta_2^{(k)} v_k(b_k, \lambda) = 0.$$

Функции $m(b_k, \lambda)$ являются аналитическими по λ в верхней и нижней полуплоскостях в \mathbb{C} (в силу формулы (3.9) и аналитичности по λ функций ψ и χ). При этом они ограничены в совокупности на каждом замкнутом ограниченном множестве. Из теории функций комплексного переменного следует, что последовательность $m(b_k, \lambda)$ содержит некоторую подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $m(\lambda)$. При этом для каждого λ значение $m(\lambda)$ лежит на предельной окружности (точке) $C_\infty(\lambda)$. Следовательно, функция

$$v(x, \lambda) = \chi(x, \lambda) + m(\lambda)\psi(x, \lambda)$$

принадлежит $L^2[a, +\infty)$ для каждого комплексного λ . Эта функция позволяет непосредственно построить резольвенту оператора L :

$$g(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{\gamma} \begin{cases} v(x, \lambda) \psi(\xi, \lambda), & \xi \leq x, \\ \psi(x, \lambda) v(\xi, \lambda), & a \leq x < \xi, \end{cases} \quad (3.22)$$

где $\gamma = p(a)(\alpha_1^2 + \beta_1^2)$. Так как $v(\cdot, \lambda) \in L^2[a, +\infty)$ для любого λ , то и $g(\cdot, \xi, \lambda) \in L^2[a, +\infty)$ для любых ξ и λ . Аналогично регулярному случаю можно проверить, что для любой функции $f \in L^2[a, +\infty)$

$$u(x) = \int_a^{+\infty} g(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi$$

есть решение уравнения $L[u] - \lambda u = 0$, удовлетворяющее граничному условию $\alpha_1 u'(a) - \beta_1 u(a) = 0$.

Ясно, что предельный переход $b \rightarrow +\infty$ можно выполнить так, что и последовательность $\sigma_{b_k}(\lambda)$ будет сходиться к $\sigma(\lambda)$, и последовательность $m(b_k, \lambda)$ будет сходиться к $m(\lambda)$. Но тогда

формулы (3.21) и (3.22) дают одну и ту же функцию. Полагая $x = \xi = a$, получаем

$$v(a, \lambda)\psi(a, \lambda) = \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(a, \zeta)\overline{\psi(a, \zeta)}}{\zeta - \lambda} d\sigma(\zeta) = \alpha_1^2 \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(\zeta)}{\zeta - \lambda}$$

или

$$(\beta_1 + m(\lambda)\alpha_1)\alpha_1 = \alpha_1^2 \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(\zeta)}{\zeta - \lambda}.$$

Теорема 3.6. Если $\alpha_1 \neq 0$, то для любого комплексного недействительного числа λ

$$m(\lambda) = -\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(\zeta)}{\zeta - \lambda}, \quad \gamma = p(a)(\alpha_1^2 + \beta_1^2).$$

Полученная формула связи может быть обращена.

Теорема 3.7. Если функция $\sigma(\lambda)$ непрерывна в точках λ_1 и λ_2 , то

$$\sigma(\lambda_2) - \sigma(\lambda_1) = \frac{1}{\pi\gamma} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \operatorname{Im} m(\eta + i\epsilon) d\eta,$$

где $\gamma = p(a)(\alpha_1^2 + \beta_1^2)$.

Замечание 3.4. Теорема 3.7 верна и в частном случае, когда $\alpha_1 = 0$ и утверждение теоремы 3.6 некорректно. #

Последние две теоремы показывают, что спектральная функция $\sigma(\lambda)$ и предельная функция $m(\lambda)$ (называемая также *функцией Вейля — Титчмарша*) тесно связаны: по одной из них может быть получена другая.

Отметим, что функция $\sigma(\lambda)$ является чисто действительной. Можно показать, что функция $m(\lambda)$ аналитична всюду в \mathbb{C} , кроме некоторого множества изолированных особых точек на действительной оси, являющихся простыми полюсами. При этом каждый полюс функции $m(\lambda)$ является точкой разрыва спектральной функции $\sigma(\lambda)$ и величина скачка $\sigma(\lambda)$ в точке разрыва равна вычету $m(\lambda)$ в той же точке, взятому с обратным знаком и деленному на γ .

3.4. Граничные условия для сингулярного конца

Если сингулярная задача Штурма — Лиувилля имеет тип предельной окружности, т.е. все решения уравнения $L[v] = \lambda v$ принадлежат $L^2[a, +\infty)$, то спектральная функция $\sigma(\lambda)$ и связанная с ней функция Вейля — Титчмарша $m(\lambda)$ определяются неоднозначно (достаточно выбором параметров α_2 и β_2 в точке b добиться, чтобы $m(\lambda)$ в заданной точке λ_0 имела заданное значение на $C_\infty(\lambda_0)$). Для обеспечения единственности необходимо в сингулярном конце поставить граничное условие, которое в силу сингулярности будет слабее обычного регулярного условия.

Пусть выбрана функция $m(\lambda)$. Рассмотрим функцию

$$v(x, \lambda) = \chi(x, \lambda) + m(\lambda)\psi(x, \lambda).$$

Отметим, что эта функция при любом комплексном λ принадлежит $L^2[a, +\infty)$.

Теорема 3.8. Если λ_1 и λ_2 — произвольные комплексные числа, то

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} p(b)W[v(\cdot, \lambda_1); v(\cdot, \lambda_2)](b) = 0. \quad (3.23)$$

◀ В силу формулы Грина

$$\begin{aligned} pW[v(\cdot, \lambda_1); v(\cdot, \lambda_2)]|_a^b &= \\ &= \int_a^b [L[v(\cdot, \lambda_1)](x)v(x, \lambda_2) - L[v(\cdot, \lambda_2)](x)v(x, \lambda_1)]dx = \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b v(x, \lambda_1)v(x, \lambda_2)dx, \end{aligned}$$

и так как $v(\cdot, \lambda) \in L^2[a, +\infty)$ для любого λ , то предел в (3.23) существует. Поэтому равенство (3.23) можно установить, рассмотрев лишь некоторую последовательность $b_k \rightarrow +\infty$.

Функция $m(\lambda)$ может быть получена как предел последовательности функций $m_k(\lambda)$, определяемых тем, что функции

$$v_k(x, \lambda) = \chi(x, \lambda) + m_k(\lambda)\psi(x, \lambda)$$

в точках b_k удовлетворяют условием

$$\alpha_k v'_k(b_k, \lambda) + \beta_k v_k(b_k, \lambda) = 0.$$

Воспользуемся линейностью определителя Вронского:

$$\begin{aligned} W[v(\cdot, \lambda_1); v(\cdot, \lambda_2)](b_k) &= \\ &= W[v_k(\cdot, \lambda_1) + (m(\lambda_1) - m_k(\lambda_1))\psi(\cdot, \lambda_1); \\ &\quad v_k(\cdot, \lambda_2) + (m(\lambda_2) - m_k(\lambda_2))\psi(\cdot, \lambda_2)] = \\ &= W[v_k(\cdot, \lambda_1); v_k(\cdot, \lambda_2)](b_k) + \tag{3.24} \\ &+ (m(\lambda_1) - m_k(\lambda_1))W[\psi(\cdot, \lambda_1); v_k(\cdot, \lambda_2)](b_k) + \\ &+ (m(\lambda_2) - m_k(\lambda_2))W[v_k(\cdot, \lambda_1); \psi(\cdot, \lambda_2)](b_k) + \\ &+ (m(\lambda_1) - m_k(\lambda_1))(m(\lambda_2) - m_k(\lambda_2)) \times \\ &\times W[\psi(\cdot, \lambda_1); \psi(\cdot, \lambda_2)](b_k). \end{aligned}$$

В силу выбора функций $v_k(x, \lambda)$

$$W[v_k(\cdot, \lambda_1); v_k(\cdot, \lambda_2)](b_k) = 0,$$

и нам остается показать, что оставшиеся три слагаемых в (3.24) стремятся к 0 при $k \rightarrow \infty$.

По формуле Грина

$$\begin{aligned} p(b_k)W[v_k(\cdot, \lambda_1); \psi(\cdot, \lambda_2)](b_k) &= p(a)W[v_k(\cdot, \lambda_1); \psi(\cdot, \lambda_2)](a) + \\ &+ (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b v_k(x, \lambda_1)\psi(x, \lambda_2)dx. \end{aligned}$$

Согласно неравенству Коши — Буняковского

$$\left| \int_a^b v_k(x, \lambda_1)\psi(x, \lambda_2)dx \right| \leq \|v_k(\cdot, \lambda_1)\|_{a,b} \|\psi(\cdot, \lambda_2)\|_{a,b},$$

так что

$$\begin{aligned} |p(b_k)W[v_k(\cdot, \lambda_1); \psi(\cdot, \lambda_2)](b_k)| &\leq \\ &\leq C_1 \|v_k(\cdot, \lambda_1)\|_{a,b} \|\psi(\cdot, \lambda_2)\|_{a,b} + C_2. \end{aligned}$$

В случае предельной точки

$$|m(\lambda_2) - m_k(\lambda_2)| \leq R(b_k, \lambda_2) = \frac{1}{2 \operatorname{Im} \lambda_2 \|\psi(\cdot, \lambda_2)\|_{a,b}^2},$$

откуда заключаем, что

$$p(b_k)(m(\lambda_2) - m_k(\lambda_2))W[v_k(\cdot, \lambda_1); \psi(\cdot, \lambda_2)](b_k) \rightarrow 0 \quad (3.25).$$

при $k \rightarrow \infty$, так как $\|\psi(\cdot, \lambda_2)\|_{a,b} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

В случае предельной окружности $\|\psi(\cdot, \lambda_2)\|_{a,b}$ ограничена при $b \rightarrow +\infty$, но $|m(\lambda_2) - m_k(\lambda_2)| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому (3.25) остается верным.

Меняя местами λ_1 и λ_2 , получаем симметричное соотношение

$$p(b_k)(m(\lambda_1) - m_k(\lambda_1))W[\psi(\cdot, \lambda_1); v_k(\cdot, \lambda_2)](b_k) \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$.

Наконец,

$$\begin{aligned} &|p(b_k)W[\psi(\cdot, \lambda_1); \psi(\cdot, \lambda_2)](b_k)| = \\ &= |(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b \psi(x, \lambda_1) \psi(x, \lambda_2) dx| \leq \\ &\leq |\lambda_1 - \lambda_2| \|\psi(\cdot, \lambda_1)\|_{a,b} \|\psi(\cdot, \lambda_2)\|_{a,b}, \end{aligned}$$

и, рассуждая аналогично, заключаем, что и третье слагаемое в (3.24) стремится к 0 при $k \rightarrow \infty$. ►

Теорема 3.8 позволяет поставить граничное условие в ∞ для задачи типа предельной окружности. Для такой задачи для любых собственных функций u_1 и u_2 , $L[u_1] = \lambda_1 u_1$, $L[u_2] = \lambda_2 u_2$, существует

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} p(b)W[u_1; u_2](b) &= \\ &= p(a)W[u_1; u_2](a) + (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^{+\infty} u_1(x)u_2(x)dx \end{aligned}$$

согласно формуле Грина.

Пусть комплексное число λ_0 фиксировано. Выберем на окружности $C_\infty(\lambda_0)$ число $m(\lambda_0)$ и определим функцию

$$v(x, \lambda_0) = \chi(x, \lambda_0) + m(\lambda_0)\psi(x, \lambda_0).$$

Существует функция Вейля — Титчмарша $m(\lambda)$, имеющая в точке λ_0 значение $m(\lambda_0)$. Такая функция может быть получена в результате предельного перехода $b_k \rightarrow +\infty$ по точкам b_k , граничные условия в которых подобраны так, что $m(b_k, \lambda_0, \zeta_k) \rightarrow m(\lambda_0)$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда по теореме 3.8 для каждого λ функция

$$v(x, \lambda) = \chi(x, \lambda) + m(\lambda)\psi(x, \lambda)$$

находится среди множества решений уравнения $L[u] = \lambda u$, попадающих в $L^2[a, +\infty)$ и удовлетворяющих условию

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} p(b)W[u; v(\cdot, \lambda_0)](b) = 0.$$

3.5. Двусторонняя сингулярная задача

Сингулярная задача Штурма — Лиувилля на $(-\infty, +\infty)$ может быть получена из *регулярной задачи* на отрезке $[b_1, b_2]$ с действительными граничными условиями

$$\begin{aligned} \alpha_1 v'(b_1) - \beta_1 v(b_1) &= 0, \\ \alpha_2 v'(b_2) + \beta_2 v(b_2) &= 0 \end{aligned} \tag{3.26}$$

в результате предельного перехода $b_1 \rightarrow -\infty$, $b_2 \rightarrow +\infty$. Собственные функции указанной регулярной задачи — это решения уравнения (3.4), зависящие от b_1 и b_2 как параметров в силу того, что должны выполняться условия (3.26). При выполнении предельного перехода параметры α_i и β_i могут быть постоянными или изменяться вместе с изменением b_i (конкретная ситуация не является существенной). Предельные переходы по параметрам b_1 и b_2 независимы, так же как и в случае несобственного интеграла с двумя особыми концами. И так же как двусторонний несобственный интеграл сводится к рассмотрению двух односторонних интегралов (для левого и правого концов), двусторонняя сингулярная задача сводится к двум односторонним сингулярным задачам.

Выберем точку $a \in (b_1, b_2)$ и рассмотрим два частных решения $\psi_1(x, \lambda)$, $\psi_2(x, \lambda)$ уравнения (3.4), удовлетворяющие граничным условиям

$$\begin{aligned}\psi_1(a, \lambda) &= \beta, & \psi_2(a, \lambda) &= \alpha, \\ \psi'_1(a, \lambda) &= -\alpha, & \psi'_2(a, \lambda) &= \beta,\end{aligned}$$

где $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. По теореме существования и единственности для задачи Коши эти решения существуют. Они независимы, так как их определитель Вронского в точке a не равен 0.

Эти функции образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.4) на $(-\infty, +\infty)$. В частности, собственные функции $v_k(x)$ задачи Штурма — Лиувилля на $[b_1, b_2]$ с граничными условиями (3.26) представимы в виде

$$v_k(x) = c_{1k} \psi_1(x, \lambda_k) + c_{2k} \psi_2(x, \lambda_k), \quad k = 1, 2,$$

где λ_k — соответствующие собственные значения.

Для произвольной функции $f \in L^2(-\infty, +\infty)$ введем две функции

$$F_i^b(\lambda) = \int_{b_1}^{b_2} f(x) \overline{\psi_i(x, \lambda)} dx, \quad i = 1, 2.$$

Тогда ряд Фурье для f по собственным функциям v_k преобразуется к виду

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, v_k \rangle v_k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, c_{1k} \psi_1(\cdot, \lambda_k) + c_{2k} \psi_2(\cdot, \lambda_k) \rangle \times \\ &\quad \times [c_{1k} \psi_1(x, \lambda_k) + c_{2k} \psi_2(x, \lambda_k)] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 c_{jk} \overline{c_{ik}} \langle f, \psi_i(\cdot, \lambda_k) \rangle \psi_j(x, \lambda_k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 c_{jk} \overline{c_{ik}} F_i^b(\lambda_k) \psi_j(x, \lambda_k). \end{aligned}$$

Рассмотрим четыре функции скачков $\sigma_{ij}^b(\lambda)$, имеющих в точках λ_k скачки: σ_{11}^b величиной $c_{1k} \overline{c_{1k}} = |c_{1k}|^2$, σ_{12}^b и σ_{21}^b величиной 0, $5(c_{1k} \overline{c_{2k}} + c_{2k} \overline{c_{1k}}) = \operatorname{Re}(c_{1k} \overline{c_{2k}})$, σ_{22}^b величиной $c_{2k} \overline{c_{2k}} = |c_{2k}|^2$. Тогда получим

$$f(x) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} F_i^b(\lambda) \psi_j(\lambda) d\sigma_{ij}^b(\lambda), \quad x \in [b_1, b_2].$$

В пределе, когда $b_1 \rightarrow -\infty$, $b_2 \rightarrow +\infty$ по некоторым последовательностям, функции $\sigma_{ij}^b(\lambda)$ сходятся к некоторым монотонным функциям $\sigma_{ij}(\lambda)$, функции $F_i^b(\lambda)$ сходятся к функциям

$$F_i(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\psi_i(x, \lambda)} dx = \langle f, \psi_i(\cdot, \lambda) \rangle, \quad i = 1, 2. \quad (3.27)$$

Теорема 3.9. Если $f \in L^2(-\infty, +\infty)$, то

$$f(x) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(\lambda) \psi_j(\lambda) d\sigma_{ij}(\lambda), \quad (3.28)$$

где функции $F_i(\lambda)$ определяются по формулам (3.27) при условии, что интегралы в (3.28) справа сходятся абсолютно и равномерно. #

Для построения функции Грина и резольвенты для регулярной задачи на отрезке $[b_1, b_2]$ мы использовали функции $v_1(x, \lambda)$ и $v_2(x, \lambda)$, первая из которых удовлетворяет граничному условию в точке b_1 , а вторая — в точке b_2 . Их можно представить в виде

$$\begin{aligned} v_1(x, \lambda) &= \psi_1(x, \lambda) + m_1(b_1, \lambda)\psi_2(x, \lambda), \\ v_2(x, \lambda) &= \psi_1(x, \lambda) - m_2(b_2, \lambda)\psi_2(x, \lambda). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем функции $m_1(b_1, \lambda)$ и $m_2(b_2, \lambda)$ со значениями на окружностях $C_1(\lambda)$ и $C_2(\lambda)$. При $b_1 \rightarrow -\infty$ функция $m_1(b_1, \lambda)$ дает предельную функцию $m_{-\infty}(\lambda)$, при $b_2 \rightarrow +\infty$ функция $m_2(b_2, \lambda)$ переходит в функцию $m_\infty(\lambda)$. Обе эти предельные функции являются функциями Вейля — Титчмарша соответствующей односторонней сингулярной задачи. Множества $C_{-\infty}(\lambda)$ и $C_\infty(\lambda)$, на которых лежат значения предельных функций, могут быть либо точкой, либо окружностью и определяют тип сингулярного конца. Рассмотрим четыре функции

$$\begin{aligned} m_{11}(\lambda) &= -\frac{1}{m_\infty(\lambda) + m_{-\infty}(\lambda)}, \\ m_{12}(\lambda) &= m_{21}(\lambda) = -0,5 \frac{m_\infty(\lambda) - m_{-\infty}(\lambda)}{m_\infty(\lambda) + m_{-\infty}(\lambda)}, \\ m_{22}(\lambda) &= \frac{m_{-\infty}(\lambda)m_\infty(\lambda)}{m_\infty(\lambda) + m_{-\infty}(\lambda)}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Опять, как и в случае односторонней задачи, сравнивая два представления резольвенты (первое — через спектральные функции, аналогичное (3.21), и второе — через решения Вейля при помощи функций $m_{-\infty}(\lambda)$ и $m_\infty(\lambda)$), можно получить формулы связи спектральных функций с функциями Вейля — Титчмарша.

Теорема 3.10. Если функция $\sigma_{ij}(\lambda)$ непрерывна в точках λ_1 и λ_2 , то

$$\sigma_{ij}(\lambda_2) - \sigma_{ij}(\lambda_1) = \frac{1}{\pi\gamma} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \operatorname{Im} m_{ij}(\eta + i\epsilon) d\eta,$$

где $\gamma = p(a)(\alpha^2 + \beta^2)$.

3.6. Контрольные вопросы и упражнения

3.1. Что такое сингулярная задача Штурма — Лиувилля ?

Приведите примеры.

3.2. В чем различие между односторонней и двусторонней сингулярными задачами Штурма — Лиувилля ?

3.3. Что такое предельная окружность (точка) в сингулярной задаче ? Что называется: а) функцией Вейля — Титчмарша; б) решением Вейля ?

3.4. Докажите, что в следующих случаях сингулярная задача Штурма — Лиувилля имеет тип предельной точки:

а) $q(x) > -k$, $x \in [a, +\infty)$, где $k > 0$, интеграл

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$$

расходится;

б) $p(x) \equiv 0$, а $q(x) > -kx^2$, $x \in [a, +\infty)$, где $k > 0$;

в) $p(x) \equiv 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = \infty$.

3.5. В случае сингулярной задачи на промежутке $(-\infty, a]$ определим функцию $v_m(x, \lambda)$ вида

$$v_m(x, \lambda) = \chi(x, \lambda) - m(b, \zeta, \lambda)\psi(x, \lambda)$$

так, чтобы она удовлетворяла в точке $b < a$ граничному условию (3.8) (здесь χ и ψ — функции, введенные в 3.2).

а) Убедитесь, что для функции $m(b, \zeta, \lambda)$ остаются в силе утверждения теорем 3.1 и 3.2;

б) пусть $m(\lambda)$ — предельная функция для $m(b, \zeta, \lambda)$ при $b \rightarrow -\infty$; убедитесь, что для этой функции остаются в силе утверждения теорем 3.6 и 3.7.

3.6. Найдите разложение по собственным функциям для сингулярной задачи

$$\begin{aligned} -v''(x) &= \lambda v(x), \quad x \in [0, +\infty), \\ \alpha v'(0) - \beta v(0) &= 0 \end{aligned}$$

(рассмотрите частные случаи: 1) $\alpha = 0, \beta = 1$; 2) $\alpha = 1, \beta = 0$;
3) $\alpha, \beta > 0$; 4) $\alpha > 0, \beta < 0$).

4. РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ФУНКЦИЯМ БЕССЕЛЯ

Цилиндрические функции дают хорошую иллюстрацию для теоретических результатов (см. гл. 2 и 3). Эти функции тесно связаны с задачей на собственные значения для оператора Лапласа в областях со сферической или круговой симметрией.

Уравнение

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (s^2 x^2 - \nu^2)y(x) = 0 \quad (4.1)$$

в результате замены независимой переменной $sx = z$ сводится к *уравнению Бесселя* (1.1). Это значит, что функции $J_\nu(sx)$ и $Y_\nu(sx)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (4.1). С другой стороны, это уравнение можно интерпретировать как уравнение на собственные функции:

$$-y''(x) - \frac{1}{x}y'(x) + \frac{\nu^2}{x^2}y(x) = \lambda y(x), \quad (4.2)$$

где $\lambda = s^2$. Заменой зависимой переменной $u(x) = \sqrt{x}y(x)$ дифференциальный оператор в левой части (4.2) приводится к самосопряженному виду

$$-u''(x) + \left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{x^2}u(x) = \lambda u(x) \quad (4.3)$$

или

$$-(pu')' + qu = \lambda u,$$

где $p \equiv 1$, $q = (\nu^2 - 0, 25)x^{-2}$. Фундаментальную систему решений уравнения (4.3) образуют, например, функции $\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda}x)$ и $\sqrt{x}Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)$.

Единственной особой точкой уравнения (4.3) является $x = 0$, причем эта особая точка является сингулярной. В зависимости от выбора интервала для этого уравнения мы можем получить регулярную задачу (отрезок $[a, b]$, $0 < a < b < +\infty$), одностороннюю сингулярную задачу (промежутки $(0, a]$ и $[a, +\infty)$), двустороннюю сингулярную задачу (интервал $(0, +\infty)$). Не останавливаясь на регулярном случае (он достаточно прост), рассмотрим различные варианты сингулярной задачи.

4.1. Разложение на промежутке $[a, +\infty)$

Для упрощения результатов ограничимся случаем, когда граничное условие в регулярном конце является условием I рода: $u(a) = 0$, т.е. $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$. Тогда рассмотренные функции $\chi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ (см. 3.1) должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned}\chi(a, \lambda) &= 1, & \psi(a, \lambda) &= 0, \\ \chi'_x(a, \lambda) &= 0, & \psi'_x(a, \lambda) &= 1.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Пользуясь этими условиями, мы можем выразить функции χ и ψ через функции Бесселя:

$$\begin{aligned}\psi(x, \lambda) &= \frac{\pi}{2}\sqrt{ax}[J_\nu(sa)Y_\nu(sx) - Y_\nu(sa)J_\nu(sx)], \\ \chi(x, \lambda) &= \frac{\pi s}{2}\sqrt{ax}[Y'_\nu(sa)J_\nu(sx) - J'_\nu(sa)Y_\nu(sx)] - \frac{\psi(x, \lambda)}{2a},\end{aligned}\tag{4.5}$$

где s — одно из значений $\sqrt{\lambda}$ (в дальнейшем под s мы будем подразумевать то значение, для которого $-\pi/2 < \arg s < \pi/2$).

Из асимптотических представлений для функций Ганкеля (см. упр. 1.11) следует, что при $\operatorname{Im} \lambda > 0$

$$\begin{aligned}\sqrt{x}H_\nu^{(1)}(sx) &\in L^2[a, +\infty), \\ \sqrt{x}H_\nu^{(2)}(sx) &\notin L^2[a, +\infty).\end{aligned}$$

Поэтому рассматриваемая задача относится к типу предельной точки, а *решением Вейля* для нее будет

$$v(x, \lambda) = \sqrt{\frac{x}{a}} \frac{H_\nu^{(1)}(sx)}{H_\nu^{(1)}(sa)}$$

(с учетом того, что коэффициент при функции χ в представлении для v должен равняться 1, это равносильно условию $v(a, \lambda) = 1$). Используя формулы (4.5), находим *функцию Вейля — Титмарша*:

$$m(\lambda) = W[\chi(\cdot, \lambda); v(\cdot, \lambda)](a) = s \frac{(H_\nu^{(1)})'(sa)}{H_\nu^{(1)}(sa)} + \frac{1}{2a}.$$

Если λ — действительное положительное, то, имея в виду, что функции Бесселя I и II рода принимают действительные значения при действительном аргументе, находим

$$m(\lambda) = s \frac{J'_\nu J_\nu + Y'_\nu Y_\nu}{J_\nu^2 + Y_\nu^2} + is \frac{W[J_\nu; Y_\nu]}{J_\nu^2 + Y_\nu^2},$$

где все значения берутся в точке sa . Отсюда, в частности, следует, что $m(\lambda)$ не имеет особых точек на положительной части действительной оси. При этом

$$\operatorname{Im} m(\lambda) = \frac{2}{\pi a (J_\nu^2(sa) + Y_\nu^2(sa))},$$

так как $W[J_\nu; Y_\nu](z) = 2/(\pi z)$. По теореме 3.7 заключаем, что спектральная функция $\sigma(\lambda)$ дифференцируема и

$$d\sigma(\lambda) = \frac{2}{\pi^2 a} \frac{d\lambda}{J_\nu^2(sa) + Y_\nu^2(sa)}, \quad s \geq 0, \quad \lambda = s^2.$$

При $\lambda < 0$ величина s является чисто мнимой, $s = i\omega$. Поэтому

$$m(\lambda) = i\omega \frac{(H_\nu^{(1)})'(i\omega a)}{H_\nu^{(1)}(i\omega a)} + \frac{1}{2a} = \omega \frac{K'_\nu(\omega a)}{K_\nu(\omega a)} + \frac{1}{2a},$$

т.е. функция $m(\lambda)$ имеет при $\lambda < 0$ действительные значения. При этом она не имеет полюсов, так как функция $K_\nu(\omega a)$ не обращается в 0. Значит, при $\lambda < 0$ имеем $d\sigma(\lambda) \equiv 0$.

Используя полученную спектральную функцию, приходим к представлению произвольной функции $f \in L^2[a, +\infty)$ в виде

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} \int_0^{+\infty} F(\lambda) \frac{J_\nu(a\sqrt{\lambda})Y_\nu(x\sqrt{\lambda}) - Y_\nu(a\sqrt{\lambda})J_\nu(x\sqrt{\lambda})}{J_\nu^2(a\sqrt{\lambda}) + Y_\nu^2(a\sqrt{\lambda})} d\lambda,$$

где

$$F(\lambda) = \int_a^{+\infty} [J_\nu(a\sqrt{\lambda})Y_\nu(\xi\sqrt{\lambda}) - Y_\nu(a\sqrt{\lambda})J_\nu(\xi\sqrt{\lambda})] f(\xi) \sqrt{\xi} d\xi.$$

4.2. Разложение на промежутке $(0, a]$

Снова остановимся на частном случае $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1$. Тогда функции $\chi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ определяются теми же граничными условиями (4.4) и выражаются через функции Бесселя I и II рода по формулам (4.5). Рассмотрим три случая.

Случай $\nu > 1$. Согласно определению функций Бесселя имеем

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &\sim \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}, \\ Y_\nu(z) &\sim -\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \end{aligned} \tag{4.6}$$

при $z \rightarrow 0$. Поэтому $\sqrt{x}J_\nu(sx) \in L^2(0, a]$, $\sqrt{x}Y_\nu(sx) \notin L^2(0, a]$, и мы опять получаем сингулярную задачу типа предельной точки. Функция Вейля — Титчмарша определяется через функцию Бесселя I рода:

$$m(\lambda) = -s \frac{J'_\nu(sa)}{J_\nu(sa)} - \frac{1}{2a}. \tag{4.7}$$

Если λ — действительное положительное число, то и $s > 0$. Поэтому в этом случае $\operatorname{Im} m(\lambda) = 0$, так как $J_\nu(z)$ и $J'_\nu(z)$

принимают действительные значения при действительном аргументе. Если $\lambda < 0$, то s — чисто мнимое, $s = i\omega$. Но тогда

$$\frac{J'_\nu(sa)}{J_\nu(sa)} = i \frac{I'_\nu(\omega a)}{I_\nu(\omega a)},$$

и снова $\operatorname{Im} m(\lambda) = 0$ при $\lambda < 0$. Остается посмотреть особые точки функции Вейля — Титчмарша. Из представления (4.7) видим, что особые точки $m(\lambda)$ — это простые полюсы, совпадающие с нулями функции $J_\nu(sa)$. Так как нули функции $J_\nu(z)$ простые, находим вычеты

$$\operatorname{res}\{m(\lambda), \lambda = \lambda_k\} = -s_k \frac{J'_\nu(s_k a)}{J'_\nu(s_k a)} \frac{2s_k}{a} = \frac{2\lambda_k}{a}.$$

Таким образом, функция $\sigma(\lambda)$ — это функция скачков, которая в точках $\lambda_k = (j_{\nu,k}/a)^2$ ($j_{\nu,k}$ — нули функции $J_\nu(z)$) имеет скачок, равный $-\operatorname{res}\{m(\lambda), \lambda = \lambda_k\} = 2\lambda_k/a$. Соответственно интеграл Римана — Стильтьеса, определяемый функцией $\sigma(\lambda)$, превращается в ряд. В этот ряд войдут значения функции $\psi(x, \lambda)$ лишь при $\lambda = \lambda_k$. Но в этих точках $J_\nu(s_k a) = 0$, так что

$$\psi(x, \lambda_k) = -\frac{\pi\sqrt{ax}}{2} Y_\nu(s_k a) J_\nu(s_k a)$$

или с учетом, что в точках $s_k a = a\sqrt{\lambda_k}$ определитель Вронского функций J_ν и Y_ν дает

$$W[J_\nu, Y_\nu](s_k a) = -J'_\nu(s_k a) Y_\nu(s_k a) = \frac{2}{\pi s_k a}$$

(см. 1.3), приходим к формуле

$$\psi(x, \lambda_k) = \sqrt{\frac{x}{a\lambda_k}} \frac{J_\nu(s_k x)}{J'_\nu(s_k a)}.$$

Таким образом, для любой функции $f \in L^2(0, a]$ получаем

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{a\sqrt{a}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_k} F(\lambda_k)}{J'_\nu(a\sqrt{\lambda_k})} J_\nu(x\sqrt{\lambda_k}),$$

где

$$F(\lambda_k) = \frac{1}{\sqrt{a\lambda_k} J'_\nu(a\sqrt{\lambda_k})} \int_0^a \sqrt{x} J_\nu(x\sqrt{\lambda_k}) f(x) dx.$$

В результате мы получили ряд по полной ортогональной системе функций $\{J_\nu(x\sqrt{\lambda_k})\}$ относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \int_0^a f(x)g(x)\sqrt{x} dx.$$

Случай $0 < \nu < 1$. В этом случае из соотношений (4.6) следует, что функции $\sqrt{x}J_\nu(x\sqrt{\lambda})$, $\sqrt{x}Y_\nu(x\sqrt{\lambda})$, а вместе с ними и любое решение уравнения (4.3) принадлежат $L^2(0, a]$. Значит, мы имеем дело с сингулярной задачей типа предельной окружности.

Так как ν не является целым, фундаментальную систему решений (4.3) удобно определить через функции Бесселя I рода порядков ν и $-\nu$. При этом соотношения (4.5) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \psi(x, \lambda) &= \frac{\pi\sqrt{ax}}{2\sin(\pi\nu)} [J_\nu(sx)J_{-\nu}(sa) - J_{-\nu}(sx)J_\nu(sa)], \\ \chi(x, \lambda) &= -\frac{\pi s\sqrt{ax}}{2\sin(\pi\nu)} [J_\nu(sx)J'_{-\nu}(sa) - J_{-\nu}(sx)J'_\nu(sa)] - \quad (4.8) \\ &\quad - \frac{\psi(x, \lambda)}{2a}, \end{aligned}$$

где, как и выше, s — значение $\sqrt{\lambda}$, взятое в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq 0$.

Чтобы идентифицировать одну из возможных функций Вейля — Титчмарша, достаточно задать ее значение в некоторой

точке. Возможные варианты мы получим при помощи предельного перехода $b \rightarrow 0$. Пусть $0 < b < a$ и в точке b задано условие

$$\alpha v'(b) - \beta v(b) = 0. \quad (4.9)$$

Функция $m(b, \lambda)$, которая определяет функцию

$$v_m(b, \lambda) = \chi(b, \lambda) - m(b, \lambda)\psi(b, \lambda),$$

удовлетворяющую условию (4.9) в точке b , может быть определена по формуле

$$m(b, \lambda) = -\frac{\chi'(b, \lambda)\zeta + \chi(b, \lambda)}{\psi'(b, \lambda)\zeta + \psi(b, \lambda)},$$

аналогичной (3.8). Оценим величины $\chi'(b, \lambda)\zeta + \chi(b, \lambda)$ и $\psi'(b, \lambda)\zeta + \psi(b, \lambda)$. Исходя из определения для функций Бесселя I рода и представлений (4.8), получаем

$$\begin{aligned} \psi(x, \lambda) &= \frac{\pi\sqrt{ax}}{2\sin(\pi\nu)} \left[\frac{s^\nu J_{-\nu}(sa)}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} x^\nu - \frac{s^{-\nu} J_\nu(sa)}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)} x^{-\nu} \right] + \\ &\quad + O(|x|^{-\nu+2,5}), \\ \psi'_x(x, \lambda) &= \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{x}\sin(\pi\nu)} \left[\left(\nu + \frac{1}{2} \right) \frac{s^\nu J_{-\nu}(sa)}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} x^\nu - \right. \\ &\quad \left. - \left(-\nu + \frac{1}{2} \right) \frac{s^{-\nu} J_\nu(sa)}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)} x^{-\nu} \right] + \\ &\quad + O(|x|^{-\nu+1,5}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \psi'_x(b, \lambda)\zeta + \psi(b, \lambda) &= \\ &= \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sin(\pi\nu)} \left[\frac{s^\nu J_{-\nu}(sa)}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} ((\nu+0,5)\zeta + b)b^{\nu-0,5} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{s^{-\nu} J_\nu(sa)}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)} ((-\nu+0,5)\zeta + b)b^{-\nu-0,5} \right] + O(b^{-\nu+1,5}). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\chi'_x(b, \lambda)\zeta + \chi(b, \lambda) = \\ = -\frac{\pi\sqrt{as}}{2\sin(\pi\nu)} \left[\frac{s^\nu J'_{-\nu}(sa)}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)} ((\nu+0,5)\zeta + b)b^{\nu-0,5} - \right. \\ \left. - \frac{s^{-\nu}J'_\nu(sa)}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)} ((-\nu+0,5)\zeta + b)b^{-\nu-0,5} \right] + \\ + O(b^{-\nu+1,5}) - \frac{1}{2a} (\psi'_x(b, \lambda)\zeta + \psi(b, \lambda)).\end{aligned}$$

Тем самым получаем оценку для $m(b, \lambda)$

$$\begin{aligned}m(b, \lambda) = \\ = -s \frac{\left[(-\nu + \frac{1}{2})\zeta + b \right] \left[J'_{-\nu}(sa) \frac{s^{2\nu}}{C(\zeta)} - J'_\nu(sa) \right] + O(b^2)}{\left[(-\nu + \frac{1}{2})\zeta + b \right] \left[J_{-\nu}(sa) \frac{s^{2\nu}}{C(\zeta)} - J_\nu(sa) \right] + O(b^2)} - \frac{1}{2a},\end{aligned}$$

где

$$C(\zeta) = \frac{2^{2\nu}\Gamma(\nu+1) \left[(-\nu + \frac{1}{2})\zeta + b \right]}{b^{2\nu}\Gamma(-\nu+1) \left[(\nu + \frac{1}{2})\zeta + b \right]}.$$

Функция $C(\zeta)$ взаимно однозначно отображает действительную ось на себя, и мы можем взять $C(\zeta)$ в качестве нового параметра взамен ζ . Тогда, переходя к пределу при $b \rightarrow 0$, получаем

$$m(\lambda, C) = -s \frac{s^{2\nu} J'_{-\nu}(sa) - CJ'_\nu(sa)}{s^{2\nu} J_{-\nu}(sa) - CJ_\nu(sa)} - \frac{1}{2a}.$$

Полученная функция $m(\lambda, C)$ принимает действительные значения при действительных λ и C . Поэтому $\operatorname{Im} m(\lambda, C) = 0$ на \mathbb{R} и спектральная функция $\sigma(\lambda)$, соответствующая выбранной функции $m(\lambda, C)$, является функцией скачков. Она имеет скачки в нулях λ_k уравнения

$$\lambda^\nu J_{-\nu}(a\sqrt{\lambda}) - CJ_\nu(a\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Величина скачка в точке λ_k равна

$$c_k = -\operatorname{res}\{m(\lambda, C), \lambda = \lambda_k\} =$$

$$= \frac{2\lambda_k}{a} \left[1 + \frac{2\nu\lambda_k^{\nu-0,5}}{a} \frac{J_{-\nu}(a\sqrt{\lambda_k})}{\lambda_k^\nu J'_{-\nu}(a\sqrt{\lambda_k}) - CJ'_\nu(a\sqrt{\lambda_k})} \right]^{-1}. \quad (4.10)$$

Таким образом, любая функция $f \in L^2(0, a]$ представима в виде

$$f(x) = \frac{\pi\sqrt{ax}}{2\sin(\pi\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} c_k F(\lambda_k) [J_\nu(x\sqrt{\lambda_k}) J_{-\nu}(a\sqrt{\lambda_k}) - \\ - J_{-\nu}(x\sqrt{\lambda_k}) J_\nu(a\sqrt{\lambda_k})],$$

где

$$F(\lambda_k) = \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sin(\pi\nu)} \int_0^a [J_\nu(x\sqrt{\lambda_k}) J_{-\nu}(a\sqrt{\lambda_k}) - \\ - J_{-\nu}(x\sqrt{\lambda_k}) J_\nu(a\sqrt{\lambda_k})] f(x)\sqrt{x} dx,$$

а коэффициенты c_k вычисляются по формуле (4.10). Отметим, что при $C = 0$ полученное нами разложение есть разложение в ряд Фурье по функциям Бесселя порядка $-\nu$, а при $C = \infty$ — по функциям порядка ν .

Случай $\nu = 0$. Этот случай близок к предыдущему. Опять мы имеем задачу типа предельной окружности. Фундаментальная система решений образуется функциями $\sqrt{x}J_0(x\sqrt{\lambda})$ и $\sqrt{x}Y_0(x\sqrt{\lambda})$. Для функции $Y_0(z)$, исходя из (1.16), имеем представление

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} J_0(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \psi(k+1),$$

которое приводит к следующим оценкам для $Y_0(z)$ и $Y'_0(z)$ при малых значениях аргумента:

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma \right) (1 + O(z^2)),$$

$$Y'_0(z) = \frac{2}{\pi z} + O(z).$$

Из представлений (4.5) получаем

$$\psi(x, \lambda) = -\frac{\pi\sqrt{ax}}{2} \left[Y_0(sa) - J_0(sa) \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{sx}{2} + \gamma \right) \right] + O(x^{2,5}),$$

$$\psi'_x(x, \lambda) = -\frac{\pi\sqrt{a}}{4\sqrt{x}} \left[Y_0(sa) - J_0(sa) \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{sx}{2} + \gamma + 2 \right) \right] + O(x^{1,5}),$$

откуда

$$\begin{aligned} \psi'_x(b, \lambda)\zeta + \psi(b, \lambda) &= \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2} J_0(sa) \left[\frac{\zeta}{\sqrt{b}} \left(\ln \frac{b}{2} + \gamma + 2 \right) + 2\sqrt{b} \left(\ln \frac{b}{2} + \gamma \right) \right] - \\ &- \frac{\pi\sqrt{a}}{2} Y_0(sa) \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{b}} + \sqrt{b} \right) + \\ &+ \sqrt{a} J_0(sa) \ln s \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{b}} + \sqrt{b} \right) + O(b^{1,5}) = \\ &= -\frac{\pi\sqrt{a}}{2} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{b}} + \sqrt{b} \right) \left[Y_0(sa) - C(\zeta) J_0(sa) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 \ln s}{\pi} J_0(sa) \right] + O(b^{1,5}), \end{aligned}$$

где

$$C(\zeta) = \frac{2}{\pi} \frac{\zeta (\ln \frac{b}{2} + \gamma + 2) + 2b (\ln \frac{b}{2} + \gamma)}{\zeta + 2b}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \chi'_x(b, \lambda)\zeta + \chi(b, \lambda) &= \\ &= -\frac{s\sqrt{a}}{2} J'_0(sa) \left[\frac{\zeta}{\sqrt{b}} \left(\ln \frac{b}{2} + \gamma + 2 \right) + 2\sqrt{b} \left(\ln \frac{b}{2} + \gamma \right) \right] + \\ &+ \frac{\pi s\sqrt{a}}{2} Y'_0(sa) \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{b}} + \sqrt{b} \right) - s\sqrt{a} J'_0(sa) \ln s \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{b}} + \sqrt{b} \right) + \\ &+ O(b^{1,5}) - \frac{1}{2a} [\psi'_x(b, \lambda)\zeta + \psi(b, \lambda)] = \\ &= \frac{\pi s\sqrt{a}}{2} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{b}} + \sqrt{b} \right) \left[Y'_0(sa) - C(\zeta) J'_0(sa) - \frac{2 \ln s}{\pi} J'_0(sa) \right] + \\ &+ O(b^{1,5}). \end{aligned}$$

Величина $C(\zeta)$, как и в предыдущем случае, может быть взята в качестве нового параметра. В результате при $b \rightarrow 0$ получаем функцию Вейля — Титчмарша

$$m(\lambda, C) = -s \frac{Y'_0(sa) - J'_0(sa)(2\pi^{-1} \ln s + C)}{Y_0(sa) - J_0(sa)(2\pi^{-1} \ln s + C)} - \frac{1}{2a}.$$

Как и в предыдущем случае, $m(\lambda, C)$ является действительной для действительного λ . Следовательно, спектральная функция есть функция скачков, а разложение превращается в ряд Фурье. Полюсами функции $m(\lambda, C)$ являются корни уравнения

$$Y_0(a\sqrt{\lambda}) - J_0(a\sqrt{\lambda})(\pi^{-1} \ln \lambda + C) = 0$$

с вычетами

$$\begin{aligned} \text{res}\{m(\lambda, C), \lambda = \lambda_k\} &= -\frac{2\lambda_k}{a} \times \\ &\times \left[1 - \frac{2}{\pi a \sqrt{\lambda_k}} \frac{J_0(a\sqrt{\lambda_k})}{Y'_0(a\sqrt{\lambda_k}) - J'_0(a\sqrt{\lambda_k})(\pi^{-1} \ln \lambda_k + C)} \right]^{-1} = \\ &= -c_k. \end{aligned}$$

Любая функция $f \in L^2(0, a]$ разлагается в ряд

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi\sqrt{ax}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k F(\lambda_k) \left[Y_0(x\sqrt{\lambda_k}) J_0(a\sqrt{\lambda_k}) - \right. \\ &\quad \left. - J_0(x\sqrt{\lambda_k}) Y_0(a\sqrt{\lambda_k}) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F(\lambda_k) &= \frac{\pi\sqrt{a}}{2} \int_0^a \left[Y_0(x\sqrt{\lambda_k}) J_0(a\sqrt{\lambda_k}) - \right. \\ &\quad \left. - J_0(x\sqrt{\lambda_k}) Y_0(a\sqrt{\lambda_k}) \right] f(x) \sqrt{x} dx. \end{aligned}$$

4.3. Разложение на промежутке $(0, +\infty)$

Это — двусторонняя сингулярная задача. Так же как и ранее (см. 3.4), выберем точку $a \in (0, +\infty)$ и построим две функции $\psi_1(x, \lambda)$ и $\psi_2(x, \lambda)$, удовлетворяющие уравнению (4.3) и граничным условиям

$$\begin{aligned}\psi_1(a, \lambda) &= 1, & \psi_2(a, \lambda) &= 0, \\ (\psi_1)'_x(a, \lambda) &= 0, & (\psi_2)'_x(a, \lambda) &= 1.\end{aligned}$$

Поставленные граничные условия позволяют воспользоваться результатами 4.1, 4.2, так как функция ψ_1 — это, по существу, функция $\chi(x, \lambda)$, а ψ_2 — это функция $\chi(x, \lambda)$, рассмотренные в односторонней сингулярной задаче. В точке ∞ характер сингулярной задачи не зависит от порядка ν и имеет тип предельной точки. В точке 0 (см. 4.2) выделяются три случая. Рассмотрим их.

С л у ч а й $\nu \geq 1$. В этом случае оба конца двусторонней задачи имеют тип предельной точки. Функции $m_0(\lambda)$ для точки 0, $m_\infty(\lambda)$ для точки ∞ и матрица спектральных функций $\sigma_{ij}(\lambda)$ определены однозначно. Согласно результатам 4.1, 4.2 имеем

$$\begin{aligned}m_0(\lambda) &= -s \frac{J'_\nu(sa)}{J_\nu(sa)} - \frac{1}{2a}, \\ m_\infty(\lambda) &= s \frac{(H_\nu^{(1)})'(sa)}{H_\nu^{(1)}(sa)} + \frac{1}{2a}.\end{aligned}$$

Так как $W[J_\nu; H_\nu^{(1)}](z) = 2i/(\pi z)$, то

$$m_0(\lambda) + m_\infty(\lambda) = \frac{2i}{\pi a J_\nu(a\sqrt{\lambda}) H_\nu^{(1)}(a\sqrt{\lambda})}. \quad (4.11)$$

Отметим, что функция $m_0(\lambda)$ принимает действительные значения при действительном аргументе. Поэтому

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} \left(\frac{1}{m_0(\lambda) + m_\infty(\lambda)} \right) &= \frac{\operatorname{Im}(m_0(\lambda) + \overline{m_\infty(\lambda)})}{|m_0(\lambda) + m_\infty(\lambda)|^2} = \\ &= \frac{-\operatorname{Im} m_\infty(\lambda)}{|m_0(\lambda) + m_\infty(\lambda)|^2}.\end{aligned} \quad (4.12)$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} \left(\frac{m_0(\lambda) - m_\infty(\lambda)}{m_0(\lambda) + m_\infty(\lambda)} \right) &= \frac{-2m_0(\lambda) \operatorname{Im} m_\infty(\lambda)}{|m_0(\lambda) + m_\infty(\lambda)|^2}, \\ \operatorname{Im} \left(\frac{m_0(\lambda)m_\infty(\lambda)}{m_0(\lambda) + m_\infty(\lambda)} \right) &= \frac{m_0(\lambda)^2 \operatorname{Im} m_\infty(\lambda)}{|m_0(\lambda) + m_\infty(\lambda)|^2}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

С другой стороны, из (4.11) заключаем, что при $\lambda < 0$ функция $m_0(\lambda) + m_\infty(\lambda)$ принимает действительные значения, так как тогда s — чисто мнимое, $s = i\omega$, и

$$J_\nu(i\omega a) H_\nu^{(1)}(i\omega a) = -\frac{2i}{\pi} I_\nu(\omega a) K_\nu(\omega a),$$

т.е.

$$m_0(\lambda) + m_\infty(\lambda) = -\frac{1}{aI_\nu(\omega a)K_\nu(\omega a)}, \quad \lambda = -\omega^2.$$

При $\lambda > 0$ находим

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} \left(\frac{1}{m_0(\lambda) + m_\infty(\lambda)} \right) &= \\ &= \frac{\pi a}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{J_\nu(sa)(J_\nu(sa) + iY_\nu(sa))}{i} \right) = \\ &= -\frac{\pi a}{2} J_\nu^2(sa).\end{aligned}$$

Согласно теореме 3.10, заключаем, что

$$d\sigma_{11}(\lambda) = \begin{cases} \frac{a}{2} J_\nu^2(a\sqrt{\lambda}) d\lambda, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

Согласно (4.12)

$$d\sigma_{11}(\lambda) = \frac{\operatorname{Im} m_\infty(\lambda)}{|m_0(\lambda) + m_\infty(\lambda)|^2} d\lambda,$$

поэтому из соотношений (4.13) получаем

$$\begin{aligned} d\sigma_{12}(\lambda) &= d\sigma_{21}(\lambda) = -m_0(\lambda)d\sigma_{11}(\lambda), \\ d\sigma_{22}(\lambda) &= m_0(\lambda)^2d\sigma_{11}(\lambda). \end{aligned}$$

По теореме 3.9 для любой функции $f \in L^2(0, +\infty)$ получаем представление

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(\lambda) \psi_i(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma_{11}(\lambda) \int_0^{+\infty} [\chi(x, \lambda)\chi(\xi, \lambda) - \\ &\quad - \chi(x, \lambda)\psi(\xi, \lambda)m_0(\lambda) - \chi(\xi, \lambda)\psi(x, \lambda)m_0(\lambda) + \\ &\quad + \psi(x, \lambda)\psi(\xi, \lambda)m_0(\lambda)^2] f(\xi) d\xi = \tag{4.14} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma_{11}(\lambda) \int_0^{+\infty} [\chi(x, \lambda) - m_0(\lambda)\psi(x, \lambda)] \times \\ &\quad \times [\chi(\xi, \lambda) - m_0(\lambda)\psi(\xi, \lambda)] f(\xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, \lambda) d\sigma_{11}(\lambda) \int_0^{+\infty} v(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где $v(x, \lambda) = \chi(x, \lambda) - m_0(\lambda)\psi(x, \lambda)$ — *решение Вейля*. Зная вид функций $\chi(x, \lambda)$, $m_0(\lambda)$, $\psi(x, \lambda)$, вычисляем

$$v(x, \lambda) = \sqrt{\frac{x}{a}} \frac{J_\nu(x\sqrt{\lambda})}{J_\nu(a\sqrt{\lambda})}.$$

Окончательно получаем следующее представление:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} \int_0^{+\infty} J_\nu(x\sqrt{\lambda}) d\lambda \int_0^{+\infty} J_\nu(\xi\sqrt{\lambda}) f(\xi) \sqrt{\xi} d\xi,$$

известное как *формула Ганкеля* (равенство при этом понимается как равенство элементов пространства $L^2(0, +\infty)$, т.е. почти всюду).

С л у ч а й $0 < \nu < 1$. Согласно 4.1, 4.2 находим, что

$$\begin{aligned} m_0(\lambda) + m_\infty(\lambda) &= s \left[\frac{(H_\nu^{(1)})'(sa)}{H_\nu^{(1)}(sa)} - \frac{s^{2\nu} J'_{-\nu}(sa) - CJ'_\nu(sa)}{s^{2\nu} J_{-\nu}(sa) - CJ_\nu(sa)} \right] = \\ &= \frac{2i}{\pi a} \frac{i^{-2\nu} s^{2\nu} - C}{H_\nu^{(1)}(sa) [s^{2\nu} J_{-\nu}(sa) - CJ_\nu(sa)]}, \end{aligned}$$

где $s^2 = \lambda$.

Так как функция $m_0(\lambda)$ принимает действительные значения при действительном аргументе, мы, повторяя рассуждения предыдущего случая, находим, что верно представление (4.14). Нам остается выяснить вид функции $\sigma_{11}(\lambda)$.

Если $\lambda > 0$, то

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[m_0(\lambda) + m_\infty(\lambda)]^{-1} &= \\ &= -\frac{\pi a}{2} [s^{2\nu} J_{-\nu}(sa) - CJ_\nu(sa)] \operatorname{Re} \left[\frac{H_\nu^{(1)}(sa)}{i^{-2\nu} s^{2\nu} - C} \right] = \\ &= -\frac{\pi a}{2} [s^{2\nu} J_{-\nu}(sa) - CJ_\nu(sa)] \times \\ &\quad \times \frac{J_\nu(sa)(\lambda^\nu \cos(\pi\nu) - C) - Y_\nu(sa)\lambda^\nu \sin \pi\nu}{\lambda^{2\nu} - 2C\lambda^\nu \cos(\pi\nu) + C^2} = \\ &= -\frac{\pi a}{2} \frac{[\lambda^\nu J_{-\nu}(sa) - CJ_\nu(sa)]^2}{\lambda^{2\nu} - 2C\lambda^\nu \cos(\pi\nu) + C^2}. \end{aligned}$$

Полученная функция непрерывна по параметру C на интервале $(-\infty, +\infty)$, т.е. при $\lambda > 0$ функция $m_{11}(\lambda)$ не имеет полюсов, а $\sigma_{11}(\lambda)$ соответственно не имеет скачков.

Если $\lambda < 0$, то

$$\begin{aligned} m_{11}(\lambda) &= [m_0(\lambda) + m_\infty(\lambda)]^{-1} = \\ &= -a K_\nu(\omega a) \frac{\omega^{2\nu} I_{-\nu}(\omega a) - CI_\nu(\omega a)}{\omega^{2\nu} - C}, \end{aligned}$$

где $\omega = \sqrt{|\lambda|}$, и мы видим, что в отрицательной части $\operatorname{Im} m_{11}(\lambda) = 0$. Возможны два случая.

При $C < 0$ функция $m_{11}(\lambda)$ ограничена и полюсов не имеет. Из представлений для функций $\chi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ находим решение Вейля

$$v(x, \lambda) = \chi(x, \lambda) - m_0(\lambda)\psi(x, \lambda) = \sqrt{\frac{x}{a}} \frac{s^{2\nu} J_{-\nu}(sx) - CJ_\nu(sx)}{s^{2\nu} J_{-\nu}(sa) - CJ_\nu(sa)}.$$

Для $\sigma_{11}(\lambda)$ имеем представление

$$d\sigma_{11}(\lambda) = \begin{cases} \frac{a}{2} \frac{(\lambda^\nu J_{-\nu}(a\sqrt{\lambda}) - CJ_\nu(a\sqrt{\lambda}))^2}{\lambda^{2\nu} - 2C\lambda^\nu \cos \pi\nu + C^2} d\lambda, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

В результате для любой функции $f \in L^2(0, +\infty)$ имеем представление

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\nu J_{-\nu}(x\sqrt{\lambda}) - CJ_\nu(x\sqrt{\lambda})}{\lambda^{2\nu} - 2C\lambda^\nu \cos(\pi\nu) + C^2} F(\lambda) d\lambda,$$

где

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} [\lambda^\nu J_{-\nu}(\xi\sqrt{\lambda}) - CJ_\nu(\xi\sqrt{\lambda})] f(\xi) \sqrt{\xi} d\xi. \quad (4.15)$$

При $C \rightarrow \infty$ это представление переходит в разложение Ганкеля.

Если $C > 0$, то $m_{11}(\lambda)$ имеет в точке $C^{1/\nu}$ полюс. Так как при $\lambda = -C^{1/\nu}$

$$\begin{aligned} \omega^{2\nu} I_{-\nu}(\omega a) - CI_\nu(\omega a) &= C[I_{-\nu}(\omega a) - I_\nu(\omega a)] = \\ &= \frac{2C}{\pi} \sin(\pi\nu) K_\nu(\omega a), \end{aligned}$$

где $\omega = \sqrt{|\lambda|}$, находим вычет в этой точке

$$\text{res}\{m_{11}(\lambda), \lambda = -C^{1/\nu}\} = \frac{2aC^{1/\nu}}{\pi\nu} \sin(\pi\nu) K_\nu^2(C^{1/(2\nu)}a).$$

Этот единственный полюс дает поправку к разложению (4.15), и в результате мы получим разложение в $L^2(0, +\infty)$

$$\begin{aligned} f(x) = & \sqrt{x} 2C^{1/\nu} \frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu} K_\nu(C^{1/(2\nu)}x) \times \\ & \times \int_0^{+\infty} K_\nu(C^{1/(2\nu)}\xi) f(\xi) \sqrt{\xi} d\xi + \\ & + \sqrt{x} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\nu J_{-\nu}(a\sqrt{\lambda}) - CJ_\nu(a\sqrt{\lambda})}{\lambda^{2\nu} - 2C\lambda^\nu \cos \pi \nu + C^2} F(\lambda) d\lambda, \end{aligned}$$

где

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} [\lambda_\nu J_{-\nu}(\xi\sqrt{\lambda}) - CJ_\nu(\xi\sqrt{\lambda})] f(\xi) \sqrt{\xi} d\xi.$$

При $C \rightarrow +\infty$ это разложение также переходит в разложение Ганкеля.

Случай $\nu = 0$. Действуем по той же схеме, что и в предыдущих случаях. Отмечаем, что $m_0(\lambda)$ принимает действительные значения для действительного λ . Поэтому разложение имеет вид (4.14). Для определения $\sigma_{11}(\lambda)$ находим, используя выражения для соответствующих определителей Вронского,

$$\begin{aligned} m_0(\lambda) + m_\infty(\lambda) = & \\ = s & \left[\frac{(H_0^{(1)})'(sa)}{H_0^{(1)}(sa)} - \frac{Y_0'(sa) - (2\pi^{-1} \ln s + C)J_0'(sa)}{Y_0(sa) - (2\pi^{-1} \ln s + C)J_0(sa)} \right] = \\ = -\frac{2}{\pi a} & \frac{1 + i(2\pi^{-1} \ln s + C)}{H_0^{(1)}(sa) [Y_0(sa) - (2\pi^{-1} \ln s + C)J_0(sa)]}. \end{aligned}$$

Опять отдельно рассматриваем случаи $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$.

При $\lambda > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} m_{11}(\lambda) = -\operatorname{Im} [m_0(\lambda) + m_\infty(\lambda)]^{-1} = & \\ = \frac{\pi a}{2} & \frac{[Y_0(sa) - (2\pi^{-1} \ln s + C)J_0(sa)]^2}{1 + (2\pi^{-1} \ln s + C)^2}, \end{aligned}$$

т.е. получили непрерывную функцию от λ , из чего следует, что при $\lambda > 0$

$$d\sigma_{11}(\lambda) = \frac{a}{2} \frac{[Y_0(sa) - (2\pi^{-1} \ln s + C)J_0(sa)]^2}{1 + (2\pi^{-1} \ln s + C)^2} d\lambda.$$

При $\lambda < 0$

$$\begin{aligned} m_{11}(\lambda) &= -\frac{\pi a}{2} H_0^{(1)}(i\omega a) [(\pi^{-1} \ln \omega + i + C)J_0(i\omega a) - \\ &\quad - iJ_0(i\omega a) + iH_0^{(1)}(i\omega a)] [1 + i(\pi^{-1} \ln \omega + i + C)]^{-1} = \\ &= -\frac{\pi a}{2} \cdot \frac{2}{\pi i} \cdot \frac{K_0(\omega a) [(\pi^{-1} \ln \omega + C)I_0(\omega a) + 2\pi^{-1} K_0(\omega a)]}{i(\pi^{-1} \ln \omega + C)} = \\ &= aK_0(\omega a)I_0(\omega a) + \frac{2aK_0(\omega a)^2}{2 \ln \omega + \pi C}, \end{aligned}$$

т.е. функция $m_{11}(\lambda)$ является действительно-значной. При этом точка $\lambda = -e^{-\pi C}$ является полюсом $m_{11}(\lambda)$ с вычетом

$$\text{res}\{m_{11}(\lambda), \lambda = -e^{-\pi C}\} = -2aK_0(\omega a)^2 e^{-\pi C}.$$

Таким образом, приходим к разложению

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sqrt{x}e^{-\pi C} K_0(xe^{-\frac{\pi C}{2}})F(-e^{-\pi C}) + \\ &\quad + \frac{\sqrt{x}}{2} \int_0^{+\infty} \left[Y_0(x\sqrt{\lambda}) - \left(\frac{1}{\pi} \ln \lambda + C \right) J_0(x\sqrt{\lambda}) \right] \times \\ &\quad \times F(\lambda) \frac{d\lambda}{1 + (\frac{1}{\pi} \ln \lambda + C)^2}, \end{aligned}$$

где

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} \sqrt{\xi} \left[Y_0(\xi\sqrt{\lambda}) - \left(\frac{1}{\pi} \ln \lambda + C \right) J_0(\xi\sqrt{\lambda}) \right] f(\xi) d\xi.$$

Значение $F(-e^{-\pi C})$ в полюсе спектральной функции может быть найдено по упрощенной формуле

$$F(-e^{-\pi C}) = \int_0^{+\infty} \sqrt{\xi} K_0(\xi e^{-\frac{\pi C}{2}}) f(\xi) d\xi.$$

5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

5.1. Общие положения

Пусть функция $K(x, p)$ определена на множестве $(a, b) \times P$, где (a, b) — интервал действительной оси, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, а P — некоторое множество изменения параметра, в общем случае подмножество поля \mathbb{C} комплексных чисел. Интеграл

$$B[u](p) = \int_a^b K(x, p) u(x) dx \quad (5.1)$$

определяет линейное преобразование, которое отображает функцию $u(x)$, определенную на интервале (a, b) , в некоторую функцию $U(p) = B[u](p)$, определенную на множестве P . Такое преобразование называется **интегральным**, функция $K(x, p)$ называется **ядром** интегрального преобразования. Множество функций $u(x)$, для которых интеграл (5.1) определен для каждого $p \in P$, образует линейное пространство, называемое **пространством оригиналов**, а соответствующее ему линейное пространство образов $B[u]$ называется **пространством изображений**.

Сформулированное нами понятие интегрального преобразования без труда переносится на случай многих переменных, но мы для простоты не будем этот случай обсуждать. Функции многих переменных могут быть объектом одномерного интегрального преобразования. Пусть функция $u(x_1, \dots, x_n)$

определенена в области n -мерного пространства, причем пределы изменения переменной x_k не зависят от остальных переменных и представляют собой интервал (a, b) . Тогда все переменные, кроме x_k , можно рассматривать как параметры, и мы, применив формулу (5.1), получим в качестве изображения функцию $U(x_1, \dots, x_{k-1}, p, x_{k+1}, \dots, x_n)$, у которой переменная x_k заменена на новую переменную p . В данном случае говорят об интегральном преобразовании функции многих переменных по переменной x_k . Еще раз повторим, что необходимым условием применения интегрального преобразования по одной переменной к функции многих переменных является независимость области изменения указанной переменной от остальных.

Главная идея метода интегральных преобразований состоит в следующем. При помощи интегрального преобразования дифференциальный или интегральный оператор преобразуется в оператор в пространстве изображений. Поставленная задача решается в пространстве изображений и тем самым находится изображение искомого решения. Решение восстанавливается по найденному изображению.

Реализация изложенной идеи требует, во-первых, чтобы оператор в пространстве изображений имел простой вид, позволяющий решить задачу в изображениях. Во-вторых, интегральное преобразование на пространстве оригиналов должно быть обратимым, т.е. разным оригиналам должны соответствовать и разные изображения. При этом для практических целей необходимо также, чтобы обратное преобразование, по изображению восстанавливающее оригинал, было в каком-то смысле непрерывным, т.е. незначительное изменение изображения не должно приводить к радикальному изменению оригинала.

Пример 5.1. Рассмотрим пространство $L^2[a, b]$ и полную ортонормированную систему функций $K_n(x)$ в нем. Эта система может трактоваться как функция двух переменных, $K_n(x) \equiv K(x, n)$, определенная на $[a, b] \times \mathbb{N}$. Преобразование

$$U(n) = \int_a^b K(x, n) u(x) dx \quad (5.2)$$

приводит к функции $U(n)$ натурального аргумента, т.е. к последовательности, являющейся последовательностью коэффициентов Фурье для разложения $u(x)$ по системе $\{K_n(x)\}$. Если $\{K_n(x)\}$ — это ортонормированная система собственных функций *оператора Штурма — Лиувилля* L с собственными значениями λ_n , то преобразование (5.2) переводит оператор L , действующий в пространстве оригиналов, в оператор \tilde{L} в пространстве изображений. Оператор \tilde{L} имеет простой вид: $\tilde{L}[U(n)] = \lambda_n U(n)$, т.е. сводится к умножению изображения на известную функцию. #

Этот пример показывает, что разложение функций по собственным функциям в *регулярной задаче Штурма — Лиувилля* можно интерпретировать как специальный вид интегрального преобразования. *Сингулярная задача Штурма — Лиувилля* имеет аналогичную интерпретацию.

Для каждого линейного оператора, действующего на функциональном пространстве, необходимо свое упрощающее интегральное преобразование. Поиск такого интегрального преобразования может быть задачей не менее сложной, чем исходная. Однако в некоторых случаях метод интегрального преобразования оказывается весьма эффективным. Мы рассмотрим частный случай применения этого метода, играющий важную роль в уравнениях математической физики.

5.2. Интегральное преобразование для линейного дифференциального оператора 2-го порядка

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение в частных производных 2-го порядка

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x), \quad (5.3)$$

определенное в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in G$. Предположим, что выполнены следующие условия:

- 1) для некоторого фиксированного индекса k переменная x_k может меняться в интервале (a, b) независимо от значений других переменных, т.е. область G имеет вид $G = (a, b) \times G_0^*$;
- 2) $a_{kj}(x) \equiv a_{jk}(x) \equiv 0$ при $j \neq k$ всюду в G ;
- 3) коэффициенты $a_{ij}(x)$ при $i, j \neq k$ и коэффициенты $b_i(x)$ при $i \neq k$ не зависят от x_k ;
- 4) $a_{kk}(x)$ и $b_k(x)$ зависят только от переменной x_k ;
- 5) функция $c(x)$ представима в виде $c(x) = c_0(x) + c_k(x_k)$, причем $c_0(x)$ не зависит от x_k .

Если выполнены все эти условия, мы будем говорить, что переменные $y = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ и x_k разделились. Обозначив оператор в левой части (5.3) через $L[u]$, получим

$$L[u] = L_0[u] + L_k[u], \quad (5.3a)$$

где

$$\begin{aligned} L_k[u] &= a_{kk}(x_k) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + b_k(x_k) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c_k(x_k)u, \\ L_0[u] &= \sum_{j \neq k} \sum_{i \neq k} a_{ij}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i \neq k} b_i(y) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c_0(y)u. \end{aligned}$$

Оператор L_0 действует в области $G_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$, причем x_k выступает как параметр, от которого не зависят ни коэффициенты оператора L_0 , ни область определения функций, к которым применяется этот оператор. Аналогично оператор L_k действует на интервале (a, b) , его коэффициенты не зависят от блока переменных y , которые можно рассматривать как параметры.

В дальнейшем для упрощения выкладок мы будем считать, что $k = 1$ и, соответственно, $y = (x_2, \dots, x_n)$, что, впрочем, не

*Формально такая запись верна лишь при $k = n$, но для нас в данном случае порядок переменных не является существенным.

ограничивает общности рассуждений. Интегральное преобразование, упрощающее оператор L , будем искать в виде

$$U(p, y) = B[u](p, y) = \int_a^b u(x_1, y) K(x_1, p) \rho(x_1) dx_1, \quad (5.4)$$

где $K(x_1, p)$ и $\rho(x_1)$ — неизвестные пока функции, для которых интегралы

$$\int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, y) K(x_1, p) \rho(x_1) dx_1, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$\int_a^b \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, y) K(x_1, p) \rho(x_1) dx_1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.5)$$

$$\int_a^b u(x_1, y) K(x_1, p) \rho(x_1) dx_1$$

сходятся равномерно, а их подынтегральные выражения являются непрерывными функциями. Уравнение (5.3) может быть записано в виде

$$L_0[u](x) + L_k[u](x) = f(x), \quad x \in G. \quad (5.6)$$

Применим к уравнению (5.6) оператор B , определяемый равенством (5.4). В силу линейности B получаем

$$BL_0[u] + BL_1[u] = B[f].$$

Введем обозначения $B[u] = U$, $B[f] = F$ для изображений функций $u(x_1, y)$ и $f(x_1, y)$, определенных в $G \subset \mathbb{R}^n$. Исходя из определения операторов L_0 и L_1 , получаем

$$BL_0[u] = B \left(\sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n a_{ij}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=2}^n b_i(y) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c_0(y) u \right) =$$

$$= \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n a_{ij}(y) B \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right] + \sum_{i=2}^n b_i(y) B \left[\frac{\partial u}{\partial x_i} \right] + c_0(y) B[u].$$

Так как применение оператора B связано с интегрированием по переменной x_1 , в то время как частные производные берутся по другим переменным, заключаем согласно предложению о равномерной сходимости интегралов (5.5), что

$$\begin{aligned} B \left[\frac{\partial u}{\partial x_i} \right] (p, y) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^b u(x_1, y) K(x_1, p) \rho(x_1) dx_1 = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} B[u] = \frac{\partial}{\partial x_i} U, \\ B \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right] &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} B[u] = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$BL_0[u] = L_0 B[u] = L_0[U].$$

Оператор L_1 (5.3а) представляет собой линейный дифференциальный оператор 2-го порядка по переменной x_1 (см. 2.2), в то же время оператор интегрального преобразования B можно определить при помощи скалярного произведения с весом ρ вида (2.6):

$$B[u] = \langle u, K(\cdot, p) \rangle.$$

Если вес ρ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(a_{11}\rho)' - b_1\rho = 0$$

и, следовательно, имеет вид

$$\rho(x_1) = \exp \left[- \int \frac{a'_{11}(x_1) - b_1(x_1)}{a_{11}(x_1)} dx_1 \right],$$

то оператор L_1 относительно указанного скалярного произведения будет самосопряженным в пространстве Q (см. 2.2). В этом случае

$$BL_1[u] = \langle L_1[u], K(\cdot, p) \rangle = \langle u, L_1 K(\cdot, p) \rangle - p(x_1) W[u; K(\cdot, p)]|_a^b,$$

где $p(x_1) = a_{11}(x_1)\rho(x_1)$. Дополнительное слагаемое

$$N(b) - N(a) = p(b)W[u(\cdot, y); K(\cdot, p)](b) - p(a)W[u(\cdot, y); K(\cdot, p)](a)$$

в полученной формуле появилось потому, что функции $u(\cdot, y)$ и $K(\cdot, p)$ могут не попадать в пространство Q , т.е. удовлетворять однородным граничным условиям по переменной x_1 .

Потребуем, чтобы ядро $K(x_1, p)$ интегрального преобразования B удовлетворяло уравнению $L_1[K(\cdot, p)] = -p^2 K(\cdot, p)$ или

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \left[p(x_1) \frac{\partial K(x_1, p)}{\partial x_1} \right] + q(x_1)K(x_1, p) = p^2 \rho(x_1)K(x_1, p), \quad (5.7)$$

где $q(x_1) = -c_1(x_1)\rho(x_1)$. Тогда исходное уравнение сведется к следующему:

$$L_0[U(p, y)] - p^2 U(p, y) = F(p, y) + [N(b) - N(a)]. \quad (5.8)$$

Если теперь мы сумеем определить каким-либо образом последнее слагаемое в правой части (5.8), то получим уравнение относительно $U(p, y)$ по переменной p алгебраическое, а не дифференциальное. Таким образом, размерность исходного уравнения оказалась пониженней на 1. Указанное слагаемое можно определить, исходя из граничных условий, которыми должно быть дополнено уравнение (5.3) для корректной постановки математической задачи. Но чтобы это стало возможным, требуется выполнение двух условий:

1) граничные (начальные) условия распадаются на две группы, первая из которых не содержит производных по x_1 и зависящих от x_1 коэффициентов, а вторая не содержит производных по переменным x_j , $j \geq 2$, и представляет собой условия на концах интервала (a, b) ;

2) если граничные условия первой группы содержат операторы дифференцирования по переменным x_j , $j \geq 2$, то порядок применения этих операторов и оператора интегрирования по x_1 может быть изменен.

Если выполнены сформулированные условия, то граничные условия первой группы могут быть перенесены на изображение неизвестной функции u , а условия второй группы учитываются в преобразованном уравнении (5.8). Например, если граничное условие имеет вид

$$\left(\alpha(y) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \beta(y) u \right) \Big|_{x_j=a_j} = \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n),$$

то его можно преобразовать в граничное условие для изображения U :

$$\left(\alpha(y) \frac{\partial U}{\partial x_j} + \beta(y) U \right) \Big|_{x_j=a_j} = B[\varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)].$$

5.3. Интегральное преобразование на отрезке

Если оператор L_1 является регулярным, т.е. его коэффициенты $a_{11}(x_1)$, $b_1(x_1)$, $c_1(x_1)$ не имеют особенностей в концах отрезка $[a, b]$, то граничные условия по переменной x_1 могут быть поставлены так же, как и в *регулярной задаче Штурма — Лиувилля*¹:

$$\begin{aligned} \left(\alpha_a \frac{\partial u}{\partial x_1} - \beta_a u \right) \Big|_{x_1=a} &= \varphi_a(y), \\ \left(\alpha_b \frac{\partial u}{\partial x_1} + \beta_b u \right) \Big|_{x_1=b} &= \varphi_b(y). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Поставим задачу Штурма — Лиувилля, дополнив уравнение (5.7) однородными граничными условиями:

¹Разумеется, это не единственный способ задания граничных условий, но, упрощая задачу, мы оставляем без рассмотрения другие способы.

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_1} \left[p(x_1) \frac{\partial K(x_1, p)}{\partial x_1} \right] + q(x_1) K(x_1, p) = p^2 \rho(x_1) K(x_1, p), \\ \left(\alpha_a \frac{\partial K(x_1, p)}{\partial x_1} - \beta_a K(x_1, p) \right) \Big|_{x_1=a} = 0, \\ \left(\alpha_b \frac{\partial K(x_1, p)}{\partial x_1} + \beta_b K(x_1, p) \right) \Big|_{x_1=b} = 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

Из полученных результатов (см. 2) следует:

1) задача (5.10) имеет нетривиальное решение лишь при определенных действительных значениях параметра p , квадраты которых образуют бесконечную возрастающую последовательность $\{p_n^2\}$ — спектр собственных значений задачи;

2) каждому собственному значению соответствует единственная, с точностью до числового множителя, собственная функция; через $K(x_1, p_n)$ обозначим ту собственную функцию, отвечающую собственному значению p_n^2 , которая имеет норму 1 относительно скалярного произведения с весом $\rho(x_1)$;

3) последовательность $\{K(x_1, p_n)\}$ является полной ортонормированной системой функций в пространстве $L_p^2[a, b]$ функций f , для которых

$$\|f\|_p^2 = \int_a^b [f(x)]^2 \rho(x) dx < +\infty;$$

4) если функция $u(x) = u(x_1, y)$, определенная в G , принадлежит пространству $L_p^2[a, b]$, то она может быть представлена в виде

$$u(x_1, y) = \sum_{n=1}^{\infty} U(y, p_n) K(x_1, p_n), \quad (5.11)$$

где

$$U(y, p_n) = \int_a^b u(x_1, y) K(x_1, p_n) \rho(x_1) dx_1. \quad (5.12)$$

Замечание. Эти свойства вытекают из вышеприведенных результатов (см. 2), если мы в задаче (5.10) сделаем замену переменной $u = v/\sqrt{\rho}$. Тогда эта задача преобразуется в регулярную задачу Штурма — Лиувилля (см. 2.2). #

Нетрудно видеть, что выражение (5.12) определяет интегральное преобразование для всякой функции $u(x_1, y)$, для которой $u(\cdot, y) \in L^2_\rho[a, b]$ для любого $y \in G_0$. С другой стороны, $U(y, p_n)$ — это коэффициенты Фурье функции $u(\cdot, y)$, и этими коэффициентами функция определяется однозначно. Равенство (5.11), которое понимается в рамках пространства $L^2_\rho[a, b]$, позволяет восстановить функцию $u(\cdot, y)$ по ее коэффициентам Фурье или, другими словами, восстановить функцию-оригинал по ее изображению. Таким образом, формула (5.12) задает интегральное преобразование функций из $L^2_\rho[a, b]$ в пространство изображений, определенных на множестве $P = \{p_n\}$, причем это преобразование взаимно однозначно.

Из граничного условия, поставленного в задаче (5.10) в точке a , следует, что столбцы $(K(a, p), K'_{x_1}(a, p))^\top$ и $(\alpha_a, \beta_a)^\top$ пропорциональны. Поэтому

$$\begin{aligned} N(a) &= p(a) \begin{vmatrix} u(a, y) & K(a, p) \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(a, y) & \frac{\partial K}{\partial x_1}(a, p) \end{vmatrix} = \\ &= \lambda_a p(a) \begin{vmatrix} u(a, y) & \alpha_a \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(a, y) & \beta_a \end{vmatrix} = -\lambda_a p(a) \varphi_a(y), \end{aligned}$$

где λ_a может быть определено по одной из формул:

$$\lambda_a = \begin{cases} \frac{K(a, p)}{\alpha_a}, & \text{если } \alpha_a \neq 0, \\ \frac{\frac{\partial K}{\partial x_1}(a, p)}{\beta_a}, & \text{если } \beta_a \neq 0. \end{cases}$$

Аналогично

$$N(b) = -\lambda_b p(b) \varphi_b(y),$$

где

$$\lambda_b = \begin{cases} \frac{K(b, p)}{\alpha_b}, & \text{если } \alpha_b \neq 0, \\ -\frac{\frac{\partial K}{\partial x_1}(b, p)}{\beta_b}, & \text{если } \beta_b \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, выражение $N(b) - N(a)$, входящее в правую часть уравнения (5.8), выражается через правые части граничных условий, а само уравнение содержит лишь одну неизвестную функцию $U(y, p)$, определенную на множестве $G_0 \times P$.

Пример 5.2. Круглый однородный стержень длиной L с теплоизолированной боковой поверхностью имеет постоянную вдоль длины начальную температуру T_n . На концах стержня поддерживается постоянная температура T_0 и T_L соответственно. Требуется найти температуру стержня в зависимости от времени t , $t \geq 0$, и координаты стержня x , $0 \leq x \leq L$.

Данная физическая постановка приводит к одномерной математической модели:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & t > 0, \quad 0 < x < L, \\ u(x, 0) = T_n, \\ u(0, t) = T_0, \\ u(L, t) = T_L. \end{cases}$$

Уравнение теплопроводности, входящее в эту задачу, подчиняется условиям 1)–4) по переменной x (см. 5.2). При этом

$$\begin{aligned} L_0[u] &= \frac{\partial u}{\partial t}, & L_1[u] &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ a &= 0, & b &= L, \\ \alpha_0 &= 0, & \beta_0 &= -1, & \varphi_0 &= T_0, \\ \alpha_L &= 0, & \beta_L &= 1, & \varphi_L &= T_L. \end{aligned}$$

Отсюда, имея в виду, что $a_{11} = a^2$, $b_1 = c_1 = 0$, находим весовую функцию

$$\rho(x) = \exp \left[- \int \frac{a'_{11}(x_1) - b_1(x_1)}{a_{11}(x_1)} dx_1 \right] \equiv 1$$

и получаем $p(x) = a_{11}\rho(x) = a^2$ и $q(x) = -c_1\rho(x) \equiv 0$.

Задача Штурма — Лиувилля (5.10) для ядра интегрального преобразования сводится к следующей:

$$\begin{cases} -a^2 \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = p^2 K, & 0 < x < L, \\ K(0, p) = 0, \\ K(L, p) = 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

Общее решение для дифференциального уравнения, входящего в задачу (5.13), имеет вид

$$K(x, p) = C_1(p) \cos \left(\frac{p}{a} x \right) + C_2(p) \sin \left(\frac{p}{a} x \right),$$

и мы, используя граничные условия, находим

$$p_n = \frac{n\pi a}{L},$$

$$K(x, p_n) = C(p_n) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Функция $C(p_n)$ определяется из условия нормировки

$$C^2(p_n) \left\| \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right\|^2 = 1$$

и равна $C(p_n) = \sqrt{2/L}$. Окончательно получаем

$$K(x, p_n) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Изображение неизвестной функции $u(x, t)$ ищется по формуле

$$U(t, p_n) = \int_0^L u(x, t) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

уравнение (5.8) принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + p_n^2 U = a^2 \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{2}{L}} [T_0 - (-1)^n T_L], \quad t > 0,$$

что вместе с начальным условием

$$U(0, p_n) = T_h \frac{\sqrt{2L}}{n\pi} [1 - (-1)^n],$$

полученным из исходного начального условия в результате интегрального преобразования, приводит к задаче Коши для функции U относительно переменной t .

Решение полученной задачи Коши дает решение исходной задачи в изображениях

$$U(t, p_n) = \frac{a}{p_n} \sqrt{\frac{2}{L}} \left\{ [T_h - T_0 - (-1)^n (T_h - T_L)] e^{-(\frac{n\pi a}{L})^2 t} + [T_0 - (-1)^n T_L] \right\}, \quad t \geq 0.$$

Формула обращения (5.11) в нашем случае приводит к окончательному ответу

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ [T_h - T_0 - (-1)^n (T_h - T_L)] e^{-(\frac{n\pi a}{L})^2 t} + [T_0 - (-1)^n T_L] \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad t \geq 0, \quad 0 < x < L.$$

Полученная формула при $t \rightarrow +\infty$ приводит к установившемуся распределению температур

$$u_{\infty}(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[T_0 - (-1)^n T_L \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (5.14)$$

Это распределение на самом деле имеет линейную зависимость

$$u_\infty(x) = T_0 + (T_L - T_0) \frac{x}{L},$$

а формула (5.14) представляет собой разложение этой линейной функции в ряд Фурье на отрезке $[0, L]$ по синусам кратных углов. #

В связи с рассмотренным примером отметим два момента. Во-первых, использованный метод решения — это новая интерпретация известного метода разделения переменных для уравнения теплопроводности. Во-вторых, полученное решение представлено в виде ряда, сходящегося относительно нормы пространства $L^2[0, L]$. При этом равномерной сходимости на отрезке $[0, L]$ нет, так как полученный ряд сходится в точках 0 и L к 0, а не к значениям T_0 и T_L , как следовало бы. Это значит, что сумма полученного ряда в указанных точках разрывна, чего при равномерной сходимости не могло бы быть. Эта неприятность объясняется тем, что начальные и граничные условия не согласованы, и функция $u(x, t)$ при поставленных условиях не может быть непрерывной по совокупности переменных в точках $(0, 0)$ и $(L, 0)$.

5.4. Интегральное преобразование на полуограниченном или неограниченном интервале

Если интервал (a, b) изменения переменной x_1 является неограниченным либо слева ($a = -\infty$), либо справа ($b = +\infty$), либо с обеих сторон, то стандартные граничные условия III рода на обоих концах интервала поставить уже нельзя. Та же ситуация наблюдается, если интервал (a, b) ограничен, но на одном или обоих концах коэффициенты a_{11} , b_1 , c_1 оператора L_1 имеют особенности.

В описанной ситуации поставленная нами задача Штурма — Лиувилля для ядра $K(x_1, p)$ интегрального преобразования

трансформируется в свой сингулярный вариант, а вопрос существования интегрального преобразования решается на основе полученных результатов (см. 3).

Сначала рассмотрим случай полубесконечного интервала $[a, +\infty)$. Предположим, что по переменной x_1 в точке a поставлено условие III рода (5.9). Тогда, предполагая, что ядро интегрального преобразования $K(x_1, p)$ удовлетворяет в точке a соответствующему однородному условию, мы можем, как и в регулярном случае, определить $N(a)$. Поэтому, чтобы уравнение (5.8) не зависело напрямую от функции u , достаточно выполнения условия

$$\begin{aligned} N(+\infty) &= \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} N(x_1) = \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} p(x_1) W[u(\cdot, y); K(\cdot, p)](x_1) = 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Это требование необременительно, так как оно выполняется, например, если $u(x_1, y) \rightarrow 0$ при $x_1 \rightarrow +\infty$, а ядро $K(x_1, p)$ ограничено. Мы будем рассматривать решения $u(x_1, y)$, для которых $u(\cdot, y) \in L^2[a, +\infty)$, но тогда функция $u(x_1, y)$, как правило, является бесконечно малой в $+\infty$.

Поставим задачу Штурма — Лиувилля для ядра $K(x_1, p)$ интегрального преобразования

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial x_1} \left[p(x_1) \frac{\partial K(x_1, p)}{\partial x_1} \right] + q(x_1) K(x_1, p) = \lambda \rho(x_1) K(x_1, p), \\ \left. \left(\alpha_a \frac{\partial K(x_1, p)}{\partial x_1} - \beta_a K(x_1, p) \right) \right|_{x_1=a} = 0, \end{array} \right. \quad (5.16)$$

где $\lambda = p^2$ (в дальнейшем для удобства мы будем использовать вместо p параметр λ и писать $K(x_1, \lambda)$). Для использования известных результатов (см. 3) модифицируем задачу (5.16) при помощи замены

$$v(x_1, \lambda) = K(x_1, \lambda) \sqrt{\rho(x_1)}.$$

Тогда поставленная задача преобразуется к виду

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\hat{p} \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) + \hat{q}v = \lambda v, \quad (5.17)$$

$$\left. \left(\hat{\alpha}_a \frac{\partial v}{\partial x_1} - \hat{\beta}_a v \right) \right|_{x_1=a} = 0, \quad (5.18)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{p}(x_1) &= \frac{p(x_1)}{\rho(x_1)}, \\ \hat{q}(x_1) &= \frac{q(x_1)}{\rho(x_1)} - \frac{1}{\sqrt{\rho(x_1)}} \left[p(x_1) \left(\frac{1}{\sqrt{\rho(x_1)}} \right)' \right]', \\ \hat{\alpha}_a &= \alpha_a \sqrt{\rho(a)}, \\ \hat{\beta}_a &= \left(\beta_a + \frac{\rho'(a)}{2\rho(a)} \alpha_a \right) \sqrt{\rho(a)}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили задачу на собственные значения (5.17), (5.18), которая рассматривалась ранее (см. 3). Ее решение определяется с точностью до функции, зависящей от λ . В качестве решения можно взять функцию $\psi(x_1, \lambda)$, которая уже была введена (см. 3) и которая определяется условиями

$$\begin{cases} \psi(a, \lambda) = \hat{\alpha}_a, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(a, \lambda) = \hat{\beta}_a. \end{cases} \quad (5.19)$$

В соответствии с теоремой 3.5 заключаем, что если $f(x) \in L^2_\rho[a, +\infty)$, то $f(x)\sqrt{\rho(x)} \in L^2[a, +\infty)$, и последняя функция может быть представлена в виде

$$f(x)\sqrt{\rho(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \psi(x, \lambda) d\sigma(\lambda),$$

где

$$F(\lambda) = \int_a^{+\infty} f(x) \sqrt{\rho(x)} \cdot \overline{\psi(x, \lambda)} dx = \int_a^{+\infty} f(x) \overline{K(x, \lambda)} \rho(x) dx$$

есть интегральное преобразование функции $f(x)$ с ядром $K(x, \lambda)$ и весом $\rho(x)$, а $\sigma(\lambda)$ — это спектральная функция задачи (5.17), (5.18).

Условия (5.19) равносильны условиям

$$\begin{cases} K(a, \lambda) = \alpha_a, \\ \frac{\partial K}{\partial x_1}(a, \lambda) = \beta_a, \end{cases} \quad (5.20)$$

и мы получаем окончательный результат.

Теорема 5.1. Пусть $a_{11}, b_1, c_1 \in C^{(1)}[a, +\infty)$, $a_{11}(x) > 0$ при $x \in [a, +\infty)$. Если $K(x, \lambda)$ — решение задачи (5.17), (5.20), то для любой функции $f(x) \in L^2_\rho[a, +\infty)$ определено изображение

$$F(\lambda) = \int_a^{+\infty} f(x) \overline{K(x, \lambda)} \rho(x) dx$$

интегрального преобразования с ядром K и весом ρ . При этом имеет место формула обращения

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) K(x, \lambda) d\sigma(\lambda),$$

где $\sigma(\lambda)$ — спектральная функция задачи (5.16). #

Напомним, что спектральная функция определяется однозначно, только если дифференциальное уравнение в задаче (5.16) имеет решения, не принадлежащие $L^2_\rho[a, +\infty)$. В противном случае определено однопараметрическое семейство спектральных функций.

Пример 5.3. Найдем интегральное преобразование, ядро которого определяется задачей

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + \lambda K = 0, & x > 0, \\ \left(\frac{\partial K}{\partial x} - HK \right) \Big|_{x=0} = 0. \end{cases}$$

Для этой задачи $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, $a = 0$, $\alpha_a = 1$, $\beta_a = H$, $\rho(x) \equiv 1$. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$K(x, \lambda) = A(\lambda) \cos(x\sqrt{\lambda}) + B(\lambda) \sin(x\sqrt{\lambda}),$$

и с учетом условий (5.20) получаем

$$K(x, \lambda) = \cos(px) + \frac{H}{p} \sin(px),$$

где $p = \sqrt{\lambda}$ — значение в верхней полуплоскости \mathbb{C} .

Для вычисления функции Вейля — Титчмарша найдем также функцию

$$\chi(x, \lambda) = H \cos(px) - \frac{1}{p} \sin(px).$$

Решение Вейля, принадлежащее $L^2[0, +\infty)$, с точностью до множителя, зависящего от λ , имеет вид

$$v(x, \lambda) = \chi(x, \lambda) + m(\lambda)K(x, \lambda)$$

или после преобразования по формулам Эйлера

$$\begin{aligned} v(x, \lambda) = & \frac{1}{2} \left[\left(H + \frac{i}{p} \right) + m(\lambda) \left(1 - \frac{iH}{p} \right) \right] e^{ipx} + \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(H - \frac{i}{p} \right) + m(\lambda) \left(1 + \frac{iH}{p} \right) \right] e^{-ipx}. \end{aligned}$$

Так как $e^{ipx} \in L^2[0, +\infty)$, в то время как $e^{-ipx} \notin L^2[0, +\infty)$, заключаем, что

$$\left(H - \frac{i}{p} \right) + m(\lambda) \left(1 + \frac{iH}{p} \right) = 0,$$

откуда

$$m(\lambda) = \frac{1 + ipH}{H - pi}, \quad p = \sqrt{\lambda}.$$

Через функцию Вейля — Титчмарша по теореме 3.7 находим спектральную функцию, имеющую различный вид в зависимости от знака H . Если $H > 0$, то

$$d\sigma(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(H^2 + \lambda)} d\lambda, & \lambda \geq 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

Прямое интегральное преобразование имеет вид

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(x) \left[\cos(x\sqrt{\lambda}) + \frac{H}{\sqrt{\lambda}} \sin(x\sqrt{\lambda}) \right] dx, \quad (5.21)$$

обратное —

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} F(\lambda) \left[\cos(x\sqrt{\lambda}) + \frac{H}{\sqrt{\lambda}} \sin(x\sqrt{\lambda}) \right] \frac{\sqrt{\lambda}}{H^2 + \lambda} d\lambda.$$

Переходя от параметра λ к $p = \sqrt{\lambda}$, получаем смешанное преобразование Фурье и соответствующее ему обратное преобразование:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(x) \left[\cos(px) + \frac{H}{p} \sin(px) \right] dx, \quad (5.22)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F(p) \left[\cos(px) + \frac{H}{p} \sin(px) \right] \frac{p^2}{p^2 + H} dp. \quad (5.23)$$

Если $H < 0$, то функция $m(\lambda)$ имеет в точке $\lambda = -H^2$ полюс с вычетом, равным $2H(1+H^2)$. Формула прямого преобразования (5.21) сохраняется. В точке $\lambda = -H^2$ получаем

$$\begin{aligned} F(-H^2) &= \int_0^{+\infty} f(x)[\cos(iHx) - i \sin(iHx)]dx = \\ &= \int_0^{+\infty} f(x)e^{Hx}dx. \end{aligned}$$

Обратное преобразование имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} F(\lambda) \left[\cos(x\sqrt{\lambda}) + \frac{H}{\sqrt{\lambda}} \sin(x\sqrt{\lambda}) \right] \frac{\sqrt{\lambda}}{H^2 + \lambda} d\lambda - \\ &\quad - 2F(-H^2)He^{Hx}. \end{aligned}$$

Переходя от λ к p , получаем формулу (5.22) для прямого преобразования и формулу для обратного преобразования:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F(p) \left[\cos(px) + \frac{H}{p} \sin(px) \right] \frac{p^2 dp}{p^2 + H} - \quad (5.23a) \\ &\quad - 2HF(-iH)e^{Hx}. \quad \# \end{aligned}$$

Для построения интегрального преобразования на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$, как и на полубесконечном $(a, +\infty)$ с особой точкой a или на конечном (a, b) с двумя особыми точками a и b оператора L_1 , используется двусторонняя задача Штурма — Лиувилля. Интегральное преобразование приводит к двум изображениям, определенным в верхней полуплоскости \mathbb{C} (которые можно рассматривать как единичное изображение, заданное и в верхней полуплоскости, и в нижней). Эти два изображения определяются двумя ядрами $K_1(x, \lambda)$ и $K_2(x, \lambda)$. Обратное преобразование задается матрицей из четырех спектральных функций двусторонней задачи Штурма — Лиувилля. Опуская детали по интерпретации результатов (см. 3.4), сформулируем окончательный результат.

Теорема 5.2. Пусть $a_{11}, b_1, c_1 \in C^{(1)}(-\infty, +\infty)$, причем $a_{11}(x) > 0$ при $x \in (-\infty, +\infty)$. Если $K_1(x, \lambda)$ и $K_1(x, \lambda)$ — решения дифференциального уравнения

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial K}{\partial x} \right) + qK = \lambda \rho K, \quad (5.24)$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$\begin{cases} K_1(a, \lambda) = 1, \\ \frac{\partial K_1}{\partial x}(a, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

и

$$\begin{cases} K_2(a, \lambda) = 0, \\ \frac{\partial K_2}{\partial x}(a, \lambda) = 1, \end{cases} \quad (5.26)$$

то для любой функции $f(x) \in L^2_\rho(-\infty, +\infty)$ определены изображения

$$F_i(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{K_i(x, \lambda)} \rho(x) dx$$

интегральных преобразований с ядрами K_1, K_2 и весом ρ . При этом имеет место формула обращения

$$f(x) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(\lambda) K_j(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda),$$

где $\{\sigma_{ij}(\lambda)\}$ — это матрица спектральных функций соответствующей задачи Штурма — Лиувилля. #

Отметим, что матрица спектральных функций определена однозначно, если дифференциальное уравнение (5.24) имеет на интервалах $(-\infty, a]$ и $[a, +\infty)$ решения, не принадлежащие $L^2_\rho(-\infty, a]$ и $L^2_\rho[a, +\infty)$ соответственно. В противном случае образуется одно- или двухпараметрическое семейство таких матриц.

Пример 5.4. Найдем интегральное преобразование, ядро которого удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + \lambda K = 0.$$

Выберем $a = 0$ и тогда в соответствии с граничными условиями (5.25) и (5.26) получим

$$K_1(x, \lambda) = \cos(x\sqrt{\lambda}), \quad K_2(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(x\sqrt{\lambda}),$$

где $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$, а величина $p = \sqrt{\lambda}$ берется с неотрицательной мнимой частью. Решения Вейля имеют вид

$$\begin{aligned} v_{-\infty}(x, \lambda) &= K_1(x, \lambda) - m_{-\infty}(\lambda) K_2(x, \lambda) = \\ &= \cos(px) - \frac{m_{-\infty}}{p} \sin(px) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{im_{-\infty}}{p} \right) e^{ipx} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{im_{-\infty}}{p} \right) e^{-ipx}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_\infty(x, \lambda) &= K_1(x, \lambda) + m_\infty(\lambda) K_2(x, \lambda) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{im_{-\infty}}{p} \right) e^{ipx} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{im_{-\infty}}{p} \right) e^{-ipx}, \end{aligned}$$

$p = \sqrt{\lambda}$. Так как $e^{ipx} \notin L^2(-\infty, 0)$, $e^{-ipx} \in L^2(-\infty, 0)$, то $1 + im_{-\infty}/p = 0$, откуда $m_{-\infty} = ip$. Аналогично $m_\infty = m_{-\infty} = ip$. По формулам (3.29) получаем:

$$\begin{aligned} m_{11}(\lambda) &= -\frac{1}{2ip} = \frac{i}{2p}, \\ m_{12}(\lambda) &= m_{21}(\lambda) = 0, \\ m_{22}(\lambda) &= -\frac{p^2}{2ip} = \frac{pi}{2}, \end{aligned}$$

а из этих функций получаем спектральные функции:

$$d\sigma_{11}(\lambda) = \begin{cases} \frac{d\lambda}{2\pi\sqrt{\lambda}}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0, \end{cases}$$

$$d\sigma_{12}(\lambda) = d\sigma_{21}(\lambda) = 0,$$

$$d\sigma_{22}(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda}d\lambda}{2\pi}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

Таким образом, получаем (с $\rho \equiv 1$) прямое интегральное преобразование для $f \in L^2(-\infty, +\infty)$

$$\begin{aligned} F_1(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(x\sqrt{\lambda}) dx, \\ F_2(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} dx \end{aligned}$$

и обратное

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} F_1(\lambda) \frac{\cos(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} F_2(\lambda) \sin(x\sqrt{\lambda}) d\lambda.$$

Переходя к параметру $p = \sqrt{\lambda}$, получим формулы

$$F_1(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(px) dx,$$

$$F_2(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin(px)}{p} dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} F_1(p) \cos(px) dp + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} F_2(p) p \sin(px) dp.$$

Подставляя вместо $F_1(p)$ и $F_2(p)$ их представления, мы можем получить разложение

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cos[p(y-x)] dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cos[p(y-x)] dy, \end{aligned}$$

называемое интегралом Фурье. Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \sin[p(y-x)] dy \equiv 0$$

(как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку¹), интеграл Фурье можно преобразовать к форме

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} dp \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ipy} dy,$$

называемой экспоненциальной (или комплексной) формой интеграла Фурье. В интеграле Фурье совмещены два преобразования. Прямое преобразование Фурье

$$F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ipy} dy \quad (5.27)$$

и обратное

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(p) e^{ipx} dp. \quad (5.28)$$

¹Этот интеграл сходится, вообще говоря, только в смысле главного значения, т.е. существует

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T dp \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \sin[p(y-x)] dy.$$

Именно с этой точки зрения и надо понимать последнее равенство.

5.5. Основные интегральные преобразования на неограниченных интервалах

Рассмотрим основные интегральные преобразования на полубесконечных и бесконечном интервалах, играющие большую роль в решении разнообразных прикладных задач. Мы сочли необходимым рассмотреть отдельно преобразование Лапласа, так как, с одной стороны, основанный на нем операционный метод имеет обширные приложения, а с другой, богатая теория, построенная для этого преобразования, имеет некоторые специфические особенности.

Все наши построения теории интегральных преобразований основывались на рассмотрении пространства L^2 функций, суммируемых с квадратом. В этом пространстве считаются равными функции, различающиеся лишь на множестве меры 0. Если такие функции используются в подынтегральных выражениях, то результат будет один и тот же. Однако если с чисто теоретической точки зрения результаты „с точностью до множества меры 0“ вполне приемлемы, на практике это не всегда удобно. Для обеспечения равенств в каждой точке на функции-оригиналы накладывают дополнительные ограничения. Это приводит к более сильным утверждениям типа теоремы Дирихле для рядов Фурье.

Экспоненциальное преобразование Фурье

Прямое и обратное преобразования Фурье, задаваемые формулами (5.27), (5.28), схожи, и их можно поменять местами. И то, и другое являются упрощающими для дифференциального оператора

$$L_1[u] = \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

действующего на всей числовой оси. Обычно под оригиналом преобразования Фурье понимают любую функцию, определенную и абсолютно интегрируемую на $(-\infty, +\infty)$, удовлетворяющую *условиям Дирихле*:

а) она *кусочно непрерывна*, т.е. на каждом конечном ин-

тервале она может иметь лишь конечное число точек разрыва, причем все точки разрыва I рода;

б) она **кусочно монотонна**, т.е. любой конечный интервал содержит лишь конечное число точек локального экстремума и потому разделяется на конечное число подинтервалов, на каждом из которых функция монотонна.

При этих дополнительных требованиях представления (5.27) и (5.28) верны в каждой точке числовой оси.

Использование преобразования Фурье рассмотрим на следующем примере.

Пример 5.5. Найдем решение задачи Коши

$$\begin{cases} u''_{tt} = a^2 u''_{xx}, \quad u = u(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u'_t(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Такая задача возникает, например, при моделировании малых колебаний неограниченной струны или малых одномерных колебаний газа.

Предполагая, что функции $f(x)$, $\varphi(x)$ и $u(x, t)$ при каждом значении t являются оригиналами экспоненциального преобразования Фурье, переходим к их изображениям $F(p)$, $\Phi(p)$ и $V(t, p)$ соответственно. Получаем задачу

$$\begin{cases} V''_{tt}(t, p) = -a^2 p^2 V(t, p), \quad t > 0, \\ V(0, p) = F(p), \\ V'_t(0, p) = \Phi(p) \end{cases}$$

и находим решение в изображениях

$$V(t, p) = F(p) \cos(apt) + \frac{\Phi(p)}{ap} \sin(apt).$$

Переходим к оригиналу, применяя обратное преобразование Фурье:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[F(p) \cos(apt) + \frac{\Phi(p)}{ap} \sin(apt) \right] e^{ipx} dp.$$

Полученное решение может быть преобразовано к более удобному виду. Для этого воспользуемся формулами Эйлера для функций $\cos(apt)$ и $\sin(apt)$. Получим

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(p) e^{ip(x-at)} dp + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(p) e^{ip(x+at)} dp \right] + \\ & + \frac{i}{2a} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(p)}{p} e^{ip(x-at)} dp - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(p)}{p} e^{ip(x+at)} dp \right]. \end{aligned}$$

Интегралы в первых квадратных скобках представляют собой функции-оригиналы $f(x - at)$ и $f(x + at)$. Во вторых квадратных скобках стоят значения первообразной функции φ в точках $x - at$ и $x + at$ соответственно, так как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(p)}{p} e^{ipz} dp \right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(p)}{p} \frac{\partial}{\partial z} (e^{ipz}) dp = \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(p) e^{ipz} dp = \varphi(z). \end{aligned}$$

С учетом этого получаем формулу Даламбера для уравнения колебания

$$u(x, t) = \frac{f(x + at) + f(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(z) dz.$$

Смешанное интегральное преобразование Фурье

Оригиналом смешанного интегрального преобразования Фурье называют функцию, определенную и абсолютно интегрируемую на полубесконечном интервале $[0, +\infty)$, удовлетворяющую условиям Дирихле. Для функции-оригинала $f(x)$ изображением $\Phi_{\text{см}}[f(x)]$ является

$$F(p) = \Phi_{\text{см}}[f(x)](p) = \int_0^{+\infty} f(x) \left[\cos(px) + \frac{H}{p} \sin(px) \right] dx.$$

Как показывает пример 5.2, обратное преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} f(x) &= \Phi_{\text{см}}^{-1}[F(p)](x) = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F(p) \left[\cos(px) + \frac{H}{p} \sin(px) \right] \frac{p^2}{H^2 + p^2} dp, \end{aligned}$$

если $H \geq 0$, и

$$\begin{aligned} f(x) &= \Phi_{\text{см}}^{-1}[F(p)](x) = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F(p) \left[\cos(px) + \frac{H}{p} \sin(px) \right] \frac{p^2}{H^2 + p^2} dp - \\ &\quad - 2HF(\sqrt{-iH})e^{Hx}, \end{aligned}$$

если $H < 0$.

Смешанное интегральное преобразование Фурье является упрощающим для дифференциального оператора $\partial^2/\partial x^2$:

$$\Phi_{\text{см}}[f''(x)](p) = -p^2 F(p) - [f'(+0) - Hf(+0)].$$

Пример 5.6. Пусть в полупространстве $x > 0$ известно начальное распределение температуры $f(x)$, а вне этого полупространства температура окружающей среды T_c начинает с начального момента $t_0 = 0$ постоянна, причем в каждой точке полупространства $f(x) < T_c$. Требуется найти закон изменения температуры в полупространстве, если известны коэффициент температуропроводности в полупространстве $a = \text{const}$, коэффициент теплопроводности $\lambda = \text{const}$ и коэффициент теплообмена $\alpha = \text{const}$.

Требуемый закон описывается функцией $u(x, t)$ — температурой в точке x в момент времени t . Математическая постановка для данной задачи представляет собой смешанную задачу вида

$$\begin{cases} u'_t(x, t) = au''_{xx}(x, t), & x > 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x > 0, \\ u'_x(x, 0) - Hu(x, 0) = -HT_c, & H = \alpha/\lambda. \end{cases}$$

Применим в исходной краевой задаче смешанное интегральное преобразование Фурье по переменной x . Если $U(t, p)$ — это изображение искомой функции $u(x, t)$, $F(p)$ — изображение функции $f(x)$, то мы получим задачу Коши

$$\begin{cases} U'_t(t, p) = -ap^2 U(t, p) + HT_c, & t > 0, \\ U(0, p) = F(p). \end{cases}$$

Ее решение

$$U(t, p) = F(p)e^{-ap^2 t} + \frac{HT_c}{ap^2} \left(1 - e^{-ap^2 t} \right).$$

Для получения окончательного ответа достаточно воспользоваться формулой обращения для смешанного преобразования Фурье

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ e^{-ap^2 t} \int_0^{+\infty} f(\xi) \left[\cos(p\xi) + \frac{H}{p} \sin(p\xi) \right] d\xi + \right. \\ & \left. + \frac{HT_c}{ap^2} \left(1 - e^{-ap^2 t} \right) \right\} \left[\cos(px) + \frac{H}{p} \sin(px) \right] \frac{p^2 dp}{H^2 + p^2}. \end{aligned}$$

Интегральное косинус-преобразование Фурье

Пространства оригиналов косинус-преобразования и смешанного преобразования совпадают. Оператор интегрального косинус-преобразования Фурье имеет вид

$$F(p) = \Phi_k[f(x)](p) = \int_0^{+\infty} f(x) \cos(px) dx,$$

и его формула обращения

$$f(x) = \Phi_{\kappa}^{-1}[F(p)](x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(px) dx.$$

Интегральное косинус-преобразование Фурье может быть получено либо из экспоненциального преобразования Фурье, если предполагать, что оригинал — четная функция, либо как частный случай смешанного интегрального преобразования Фурье, когда поставлены граничные условия II рода (т.е. $H = 0$). Действие этого варианта преобразования Фурье на оператор двукратного дифференцирования следующее:

$$\Phi_{\kappa}[f''(x)](p) = -p^2 F(p) - f'(0).$$

Интегральное синус-преобразование Фурье

Это преобразование по сути близко к интегральному косинус-преобразованию Фурье. Его пространство оригиналов совпадает с пространством оригиналов смешанного преобразования. Оператор интегрального синус-преобразования Фурье имеет вид

$$F(p) = \Phi_c[f(x)](p) = \int_0^{+\infty} f(x) \sin(px) dx,$$

и его формула обращения

$$f(x) = \Phi_c^{-1}[F(p)](x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(px) dx.$$

Интегральное синус-преобразование Фурье может быть получено либо из экспоненциального преобразования Фурье, если предполагать, что оригинал — нечетная функция, либо как частный случай смешанного интегрального преобразования Фурье, когда поставлены граничные условия I рода (т.е. в пределе при $H \rightarrow \infty$). Действие этого варианта преобразования Фурье на оператор двукратного дифференцирования следующее:

$$\Phi_c[f''(x)](p) = -p^2 F(p) + pf(0).$$

Пример 5.7. Найти стационарное распределение температуры в квадранте (рис. 5.1), если одна его грань ($y = 0$) имеет нулевую температуру, а другая теплоизолирована, за исключением ближайшего к вершине участка длиной b , $0 < y < b$, через который поступает тепловой поток постоянной плотности $q = \text{const}$.

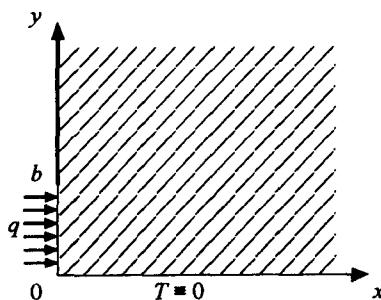


Рис. 5.1

Постановка приводит к следующей краевой задаче для стационарного уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) = 0, & x > 0, \quad y > 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u'_x(0, y) = T_0(y), \end{cases}$$

где

$$T_0(y) = \begin{cases} 0, & y > b, \\ -q/\lambda, & 0 < y < b. \end{cases}$$

Здесь $u(x, y)$ — температура в точке с координатами (x, y) . Возможны два варианта решения этой краевой задачи.

Вариант 1. Применим по переменной y интегральное синус-преобразование Фурье. Если $U(x, p) = \Phi_c[u]$ — изображение искомой функции $u(x, y)$, то для этого изображения получаем задачу

$$\begin{cases} U''_{xx}(x, p) - p^2 U(x, p) = 0, & x > 0, \\ U'_x(0, p) = \Phi_c[T_0](p) = \frac{q[\cos(pb) - 1]}{\lambda p}. \end{cases} \quad (5.29)$$

Эта задача имеет единственное решение, принадлежащее пространству $L^2[0, +\infty)$:

$$U(x, p) = \frac{q}{\lambda} \frac{1 - \cos(pb)}{p^2} e^{-px}.$$

Для получения окончательного ответа нужно воспользоваться формулой обращения

$$u(x, y) = \frac{2q}{\pi\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(pb)}{p^2} e^{-px} \sin(py) dp. \quad (5.30)$$

Вариант 2. По переменной x применим интегральное косинус-преобразование Фурье, которое для изображения $V(y, s)$ искомой функции дает следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} -s^2 V(y, s) - T_0(y) + V''_{yy}(y, s) = 0, & y > 0, \\ V(0, s) = 0. \end{cases} \quad (5.31)$$

Задача (5.31) для обыкновенного дифференциального уравнения является более сложной по сравнению с задачей (5.29). Для ее решения можно опять использовать технику интегральных преобразований. Применим интегральное синус-преобразование Фурье. Тогда для изображения $W(p, s)$ функции $U(y, s)$ получим алгебраическое уравнение

$$-s^2 W(p, s) + \frac{q}{p\lambda} [1 - \cos(pb)] - p^2 W(p, s) = 0,$$

из которого находим

$$W(p, s) = \frac{q[1 - \cos(pb)]}{\lambda p(s^2 + p^2)}.$$

Таким образом, применяя последовательно формулы обращения двух преобразований, получаем ответ:

$$u(x, y) = \frac{4q}{\pi^2 \lambda} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(pb)}{p(s^2 + p^2)} \cos(sx) \sin(py) ds dp. \quad (5.32)$$

Отметим, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(sx)}{s^2 + p^2} ds = \frac{\pi}{2p} e^{-px}.$$

Поэтому формулы (5.30) и (5.32) дают одну и ту же функцию. #

Рассмотренный пример подводит нас к выводу о том, что трудоемкость решения той или иной задачи может зависеть от выбора переменных для применения интегральных преобразований. В нашем случае применение синус-преобразования по переменной y оказалось предпочтительнее. Оно привело к однородному дифференциальному уравнению по x , в то время как косинус-преобразование по переменной x приводит к неоднородному уравнению по y , которое решается труднее. Кроме того, формула (5.32) менее удобна практически, чем (5.30).

Интегральное преобразование Ганкеля

Это преобразование полезно при рассмотрении плоских задач в полярной системе координат. Если функция $f(r)$ определена на $[0, +\infty)$, абсолютно интегрируема с весовой функцией $\rho(r) = \sqrt{r}$ и удовлетворяет условиям Дирихле, то ее называют оригиналом преобразования Ганкеля. Само преобразование задается формулой

$$F(p) = H[f(r)](p) = \int_0^{+\infty} f(r) J_\nu(pr) r dr,$$

где $\nu > -1/2$. Формула обращения для этого преобразования имеет вид

$$f(r) = H^{-1}[F(p)](r) = \int_0^{+\infty} F(p) J_\nu(pr) p dp$$

(см. формулу Ганкеля, 4.3). Преобразование Ганкеля можно использовать для исключения оператора

$$L_1[u] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\nu^2}{r^2} u \quad (5.33)$$

согласно формуле

$$H[L_1[u]] = -p^2 H[u].$$

Пример 5.8. Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r,t)}{\partial r} \right), & t > 0, \quad r > 0, \\ u(r,0) = f(r), \\ u'_t(r,0) = \psi(r). \end{cases}$$

Данная задача возникает, например, при изучении малых поперечных колебаний бесконечной однородной мембраны, если начальные условия обладают осевой симметрией.

Предполагая, что $u(r,t)$, $f(r)$, $\psi(r)$ являются оригиналами преобразования Ганкеля порядка $\nu = 0$, применим его. Тогда получим задачу Коши

$$\begin{cases} U''_{tt}(t,p) + a^2 p^2 U(t,p) = 0, & t > 0, \\ U(0,p) = F(p), \\ U'_t(0,p) = \Psi(p), \end{cases}$$

где $U(t,p)$, $F(p)$, $\Psi(p)$ — изображения соответствующих функций. Решение полученной задачи имеет вид

$$U(t,p) = F(p) \cos(apt) + \frac{\Psi(p)}{ap} \sin(apt).$$

Окончательный ответ получаем, применяя обратное преобразование Ганкеля:

$$u(r,t) = \int_0^{+\infty} \left[F(p) \cos(apt) + \frac{\Psi(p)}{ap} \sin(apt) \right] J_0(pr) pdp.$$

Интегральное преобразование Вебера

Если функция $f(r)$ определена на $[r_0, +\infty)$, абсолютно интегрируема с весовой функцией $\rho(r) = \sqrt{r}$ и удовлетворяет условиям Дирихле, то ее называют оригиналом преобразования Вебера. Это преобразование задается формулой

$$F(p) = V[f(r)](p) = \int_{r_0}^{+\infty} [J_\nu(pr_0)Y_\nu(pr) - J_\nu(pr)Y_\nu(pr_0)]f(r)rdr,$$

где $\nu > -1/2$. Обратное преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} f(r) &= V^{-1}[F(p)](r) = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{J_\nu(pr_0)Y_\nu(pr) - J_\nu(pr)Y_\nu(pr_0)}{J_\nu^2(pr_0) + Y_\nu^2(pr_0)} F(p)p dp. \end{aligned}$$

(см. 4.1). Преобразование Вебера, как и преобразование Ганкеля, может быть использовано для исключения оператора (5.33), но при дополнительном условии, что соответствующая задача имеет граничное условие I рода в точке r_0 . В этом случае можно воспользоваться формулой

$$V[L_1[u]](p) = \frac{2}{\pi} u(r_0) - p^2 U[u].$$

Пример 5.9. Найти температуру тела с цилиндрической полостью радиусом r_0 , если эта полость поддерживается при постоянной температуре T_0 , а начальная температура тела равнялась 0.

Математическая модель для этой физической задачи имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} = a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right), & t > 0, \quad r > r_0, \\ u(r, 0) = 0, \\ u(r_0, t) = T_0. \end{cases}$$

Применяем преобразование Вебера с параметром $\nu = 0$ по переменной r . Для изображения искомой функции $U(t, p)$ получаем задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial U(t, p)}{\partial t} + a^2 p^2 U(t, p) = \frac{2T_0}{\pi}, & t > 0, \\ U(0, p) = 0. \end{cases}$$

Ее решение

$$U(t, p) = \frac{2T_0}{\pi a^2 p^2} \left(1 - e^{-a^2 p^2 t} \right).$$

Окончательный ответ находим при помощи обратного преобразования:

$$u(r, t) = \frac{2T_0}{\pi a^2} \int_0^{+\infty} \frac{J_0(pr_0)Y_0(pr) - J_0(pr)Y_0(pr_0)}{p[J_0^2(pr_0) + Y_0^2(pr_0)]} \times \\ \times \left(1 - e^{-a^2 p^2 t} \right) dp.$$

Интегральное преобразование Меллина

Оригиналом интегрального преобразования Меллина называется функция $f(r)$, определенная на $(0, +\infty)$, удовлетворяющая условиям Дирихле и следующему условию: существуют такие положительные σ_1 и σ_2 , $\sigma_1 < \sigma_2$, что сходятся интегралы

$$\int_0^1 r^{\sigma_1-1} |f(r)| dr, \quad \int_1^{+\infty} r^{\sigma_2-1} |f(r)| dr. \quad (5.34)$$

Это — еще одно интегральное преобразование для полярных координат. Преобразование Меллина задается формулой

$$F(p) = M[f(r)](p) = \int_0^{+\infty} f(r) r^{p-1} dr,$$

интеграл в которой сходится для любого $p \in \mathbb{C}$, для которого $\operatorname{Re} p \in (\sigma_1, \sigma_2)$. Обратное преобразование Меллина имеет вид

$$f(r) = M^{-1}[F(p)](r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) r^{-p} dp,$$

где комплексный интеграл берется вдоль вертикальной прямой $\operatorname{Re} p = \sigma$, $\sigma \in (\sigma_1, \sigma_2)$. Эти формулы могут быть получены при помощи экспоненциального преобразования Фурье (сравните с преобразованием Лапласа, см. 6).

Интегральное преобразование Меллина можно использовать для исключения оператора

$$L_1[u] = r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

согласно формуле

$$M[L_1[u]] = p^2 M[u].$$

Пример 5.10. Найти стационарное распределение температуры внутри двугранного угла $0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0 < \pi$, одна грань которого $\varphi = 0$ имеет нулевую температуру, а на другой поддерживается заданный температурный режим

$$T(r) = \begin{cases} T_0, & 0 < r < R, \\ 0, & r > R, \end{cases}$$

где T_0 и R — заданные числовые параметры.

Математическая постановка данной задачи имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, & r > 0, \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \\ u(r, 0) = 0, \\ u(r, \varphi_0) = T(r). \end{cases}$$

Преобразуем дифференциальное уравнение, умножив его на r^2 , и применим преобразование Меллина по переменной r . Тогда в изображениях задача запишется в виде

$$\begin{cases} U''_{\varphi\varphi}(\varphi, p) + p^2 U(\varphi, p) = 0, & 0 < \varphi < \varphi_0, \\ U(0, p) = 0, \\ U(\varphi_0, p) = T_0 R^p p^{-1}, \end{cases}$$

где $U(\varphi, p)$ — изображение неизвестной функции, а $T_0 R^p p^{-1}$ — изображение функции $T(r)$:

$$M[T(r)](p) = \int_0^R T_0 r^{p-1} dr = T_0 R^p p^{-1}.$$

Решая полученную краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения, находим

$$U(\varphi, p) = \frac{T_0 R^p \sin(p\varphi)}{p \sin(p\varphi_0)}.$$

Отметим, что функция $T_0 R^p p^{-1}$, полученная нами как изображение $T(r)$, аналитична всюду в \mathbb{C} , кроме точки $p = 0$, в которой она имеет полюс первого порядка. Однако как изображение $T(r)$ она должна рассматриваться только в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$, что определяется возможным выбором параметров σ_1 и σ_2 , при которых интегралы (5.34) для $T(r)$ сходятся. В свою очередь $U(\varphi, p)$ аналитична по p всюду в \mathbb{C} , кроме точек $p = k\pi/\varphi_0$, в которых она имеет полюсы. В качестве интервала (σ_1, σ_2) можно взять любой вида $(k\pi/\varphi_0, (k+1)\pi/\varphi_0)$, $k = 1, 2, \dots$. Рассмотрим интервал $(0, \pi/\varphi_0)$.

По изображению при помощи обратного преобразования находим

$$u(r, \varphi) = \frac{T_0}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\sin(p\varphi)}{\sin(p\varphi_0)} \left(\frac{R}{r}\right)^p \frac{dp}{p}.$$

Несобственный комплексный интеграл в полученном ответе может быть вычислен методами теории вычетов. Для этого следует использовать один из контуров, изображенных на рис. 5.2, и перейти к пределу при $\rho \rightarrow +\infty$. Учитывая, что подынтегральная функция имеет бесконечное число полюсов в точках $p = \pi k/\varphi_0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ответ получаем в виде ряда:

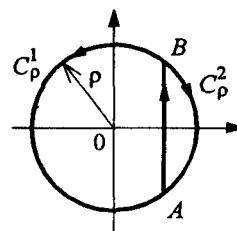


Рис. 5.2

$$u(r, \varphi) = \begin{cases} \frac{T_0\varphi}{\varphi_0} - \frac{T_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{r}{R}\right)^{\pi k / \varphi_0} \sin\left(\frac{\pi k \varphi}{\varphi_0}\right), & 0 < r < R, \\ \frac{T_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{R}{r}\right)^{\pi k / \varphi_0} \sin\left(\frac{\pi k \varphi}{\varphi_0}\right), & r > R. \end{cases}$$

Если использовать разложение

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha \sin(t)}{1 + \alpha \cos(t)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \alpha^k \sin(kt), \quad |\alpha| < 1,$$

то ряд в представлении функции u можно свернуть, и тогда полученный результат может быть записан более компактно:

$$u(r, \varphi) = \frac{T_0}{\pi} \operatorname{arcctg}\left(\frac{1 + \left(\frac{R}{r}\right)^{\pi/\varphi_0} \cos\left(\frac{\pi\varphi}{\varphi_0}\right)}{\left(\frac{R}{r}\right)^{\pi/\varphi_0} \sin\left(\frac{\pi\varphi}{\varphi_0}\right)}\right), \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq \varphi_0 \\ 0 \leq r < +\infty \end{array} \right\}.$$

5.6. Применение интегральных преобразований на примере некоторых задач математической физики

Использование интегральных преобразований для решения различных прикладных задач продемонстрируем на нескольких примерах.

Продольные колебания составного стержня

Найти закон продольных колебаний стержня с закрепленными концами, состоящего из двух жестко соединенных между собой частей с различными геометрическими размерами и упругими свойствами.

Считаем, что плотность каждой из частей постоянна, а упругие свойства описываются модулем Юнга, также постоянным для каждой из частей. Пусть E_i — модуль Юнга i -й части, ρ_i — плотность материала i -й части, S_i — площадь сечения i -й части, a_i — длина i -й части вдоль оси, $i = 1, 2$. Предполагаем, что начальное состояние составного стержня задано в виде функции $f(x)$, указывающей смещение точки с координатой x , а начальные скорости — нулевые. Считая, что точкастыковки частей соответствует началу координат, получаем следующую смешанную задачу для смещения сечения стержня $u(x, t)$ с абсциссой x в момент времени t :

$$\begin{cases} u''_{tt} = v^2(x)u''_{xx}, & t > 0, \quad -a_1 < x < a_2, \\ u(x, 0) = f(x), & u'_t(x, 0) = 0, \\ u(-a_1, t) = 0, & u(a_2, t) = 0, \end{cases}$$

где

$$v^2(x) = \frac{E(x)}{\rho(x)} = \begin{cases} v_1^2 = E_1 \rho_1^{-1}, & -a_1 < x < 0, \\ v_2^2 = E_2 \rho_2^{-1}, & 0 < x < a_2. \end{cases}$$

Жесткая связь частей стержня описывается уравнениями

$$\begin{aligned} u(0-0, t) &= u(0+0, t), \\ E_1 S_1 u'_x(0-0, t) &= E_2 S_2 u'_x(0+0, t). \end{aligned}$$

Для решения этой задачи ставим вспомогательную задачу Штурма — Лиувилля для нахождения ядра интегрального преобразования:

$$\begin{cases} v^2 K''_{xx} + p^2 K = 0, & -a_1 < x < a_2, \\ K(-a_1, p) = 0, \quad K(a_2, p) = 0, \end{cases} \quad (5.35)$$

решение которой будем искать при дополнительных условиях сопряжения в точкестыковки:

$$K(0-0, p) = K(0+0, p), \quad E_1 S_1 K'_x(0-0, p) = E_2 S_2 K'_x(0+0, p).$$

Решение задачи (5.35) имеет вид

$$K(x, p) = \begin{cases} C_1(p) \sin\left(\frac{p(x + a_1)}{v_1}\right), & -a_1 < x < 0, \\ C_2(p) \sin\left(\frac{p(a_2 - x)}{v_2}\right), & 0 < x < a_2. \end{cases}$$

Коэффициенты $C_i(p)$ находятся из условий сопряжения, приводящих к однородной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1(p) \sin\left(\frac{pa_1}{v_1}\right) - C_2(p) \sin\left(\frac{pa_2}{v_2}\right) = 0, \\ C_1(p) \frac{E_1 S_1}{v_1} \cos\left(\frac{pa_1}{v_1}\right) + C_2(p) \frac{E_2 S_2}{v_2} \cos\left(\frac{pa_2}{v_2}\right) = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет нетривиальное решение, если ее определитель обращается в 0:

$$S_2 \sqrt{E_2 \rho_2} \operatorname{tg}\left(\frac{pa_1}{v_1}\right) + S_1 \sqrt{E_1 \rho_1} \operatorname{tg}\left(\frac{pa_2}{v_2}\right) = 0. \quad (5.36)$$

Полученное характеристическое уравнение имеет бесконечное количество решений, причем все они действительны. В силу нечетности функции $\operatorname{tg}(x)$ все эти решения расположены симметрично относительно точки 0. Так как $K(x, p)$ нечетна по p , $K(x, -p) \equiv -K(x, p)$, то получаемые изображения также будут нечетными функциями.

Следовательно, мы, не теряя взаимно однозначного соответствия между оригиналами и изображениями, можем остановиться только на положительных корнях уравнения (5.36), которые запишем в виде монотонно возрастающей последовательности $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда ядро интегрального преобразования может быть представлено в виде

$$K(x, p_n) = K_n(x) =$$

$$= \begin{cases} C_n \sin\left(\frac{p_n a_2}{v_2}\right) \sin\left(\frac{p_n(x + a_1)}{v_1}\right), & -a_1 < x < 0, \\ C_n \sin\left(\frac{p_n a_1}{v_1}\right) \sin\left(\frac{p_n(a_2 - x)}{v_2}\right), & 0 < x < a_2, \end{cases}$$

где последовательность множителей $\{C_n\}$ находится из условия нормировки ядра. Для их вычисления требуется знание весовой функции, которую, напомним, ищем исходя из требования, чтобы интегральный оператор задачи (5.35) был самосопряженным. Весовая функция может быть найдена ранее описанным способом, но это приводит к дифференциальному уравнению с разрывными коэффициентами.

Имеется другой способ определения весовой функции, в основе которого лежит требование, чтобы система функций $\{K_n(x)\}$ была ортогональной (это требование равносильно самосопряженности оператора задачи (5.35)). Пусть $m \neq n$. Выпишем два тождества:

$$\begin{aligned} v^2(x) K_n''(x) &= -p_n^2 K_n(x), \\ v^2(x) K_m''(x) &= -p_m^2 K_m(x). \end{aligned}$$

Умножим первое тождество на $\rho(x)K_m(x)$ ($\rho(x)$ — неизвестная весовая функция), второе — на $\rho(x)K_n(x)$ и вычтем из первого второе. Полученное равенство проинтегрируем

$$\begin{aligned} \int_{-a_1}^{a_2} v^2(x) [K_n''(x)K_m(x) - K_m''(x)K_n(x)] \rho(x) dx &= \\ &= (p_m^2 - p_n^2) \int_{-a_1}^{a_2} K_m(x)K_n(x) \rho(x) dx = \\ &= (p_m^2 - p_n^2) \langle K_n(x); K_m(x) \rangle = 0. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Полагая, что неизвестная функция $\rho(x)$ постоянна на интервалах $(-a_1, 0)$ и $(0, a_2)$, можем проинтегрировать левую часть (5.37) на каждом из указанных интервалов по частям. Используя граничные условия, получаем новое равенство

$$\begin{aligned} &[K'_n(-0)K_m(-0) - K_n(-0)K'_m(-0)]\rho(-0)v^2(-0) + \\ &+ [K'_n(+0)K_m(+0) - K_n(+0)K'_m(+0)]\rho(+0)v^2(+0) = 0, \end{aligned}$$

которое выполняется, если

$$\rho(x) = \begin{cases} S_1\rho_1, & -a_1 < x < 0, \\ S_2\rho_2, & 0 < x < a_2 \end{cases}$$

(здесь, напомним, ρ_i — плотности частей стержня). Полученная функция $\rho(x)$ может быть взята в качестве веса скалярного произведения. Тогда условие нормировки для ядра дает

$$1 = \int_{-a_1}^{a_2} K_n^2(x) \rho(x) dx = C_n^2(A + B),$$

где

$$\begin{aligned} A &= \int_{-a_1}^0 S_1 \rho_1 \sin^2 \left(\frac{p_n a_1}{v_1} \right) \sin^2 \left(\frac{p_n (x + a_1)}{v_2} \right) dx, \\ B &= \int_0^{a_2} S_2 \rho_2 \sin^2 \left(\frac{p_n a_2}{v_2} \right) \sin^2 \left(\frac{p_n (a_2 - x)}{v_1} \right) dx. \end{aligned}$$

Вычисляя интегралы, находим

$$\begin{aligned} C_n &= \left\{ \left[a_1 - \frac{v_1}{2p_n} \sin \left(\frac{2p_n a_1}{v_1} \right) \right] \frac{S_1 \rho_1}{2} \sin^2 \left(\frac{p_n a_2}{v_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left[a_2 + \frac{v_2}{2p_n} \sin \left(\frac{2p_n a_2}{v_2} \right) \right] \frac{S_2 \rho_2}{2} \sin^2 \left(\frac{p_n a_1}{v_1} \right) \right\}^{-1/2} \end{aligned}$$

Из характеристического уравнения следует, что

$$\begin{aligned} S_1 \rho_1 v_1 \sin \left(\frac{2p_n a_1}{v_1} \right) \sin^2 \left(\frac{p_n a_2}{v_2} \right) &= \\ &= S_2 \rho_2 v_2 \sin \left(\frac{2p_n a_2}{v_2} \right) \sin^2 \left(\frac{p_n a_1}{v_1} \right). \end{aligned}$$

Поэтому формула упрощается:

$$C_n = \left[\frac{S_1 \rho_1 a_1}{2} \sin^2 \left(\frac{p_n a_2}{v_2} \right) + \frac{S_2 \rho_2 a_2}{2} \sin^2 \left(\frac{p_n a_1}{v_1} \right) \right]^{-1/2}.$$

Если $U(t, p_n) = U_n(t)$ — изображение искомой функции $u(x, t)$ относительно построенного интегрального преобразования, F_n — изображение функции $f(x)$, то исходная задача в изображениях имеет вид

$$\begin{cases} U_n''(t) + p_n^2 U_n(t) = 0, & t > 0, \\ U_n(0) = F_n, \quad U_n'(0) = 0. \end{cases}$$

Ее решение:

$$U_n(t) = F_n \cos(p_n t),$$

и для получения окончательного результата нужно воспользоваться обращением интегрального преобразования, т.е. в нашем случае выписать ряд по ортонормированной системе:

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n F_n K_n(x) \cos(p_n t).$$

Учитывая вышеизложенное, получаем окончательно ответ

$$u(x, t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(p_n t) \sin\left(\frac{p_n a_2}{v_2}\right) \sin\left(\frac{p_n(x+a_1)}{v_1}\right), & -a_1 < x < 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(p_n t) \sin\left(\frac{p_n a_1}{v_1}\right) \sin\left(\frac{p_n(a_2-x)}{v_2}\right). & 0 < x < a_2, \end{cases}$$

где α_n вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 2C_n^2 F_n = \\ &= \left[\frac{S_1 \rho_1 a_1}{2} \sin^2\left(\frac{p_n a_2}{v_2}\right) + \frac{S_2 \rho_2 a_2}{2} \sin^2\left(\frac{p_n a_1}{v_1}\right) \right]^{-1} \times \\ &\times \left[S_1 \rho_1 \sin\left(\frac{p_n a_2}{v_2}\right) \int_{-a_1}^0 f(x) \sin\left(\frac{p_n(x+a_1)}{v_1}\right) dx + \right. \\ &\left. + S_2 \rho_2 \sin\left(\frac{p_n a_1}{v_1}\right) \int_0^{a_2} f(x) \sin\left(\frac{p_n(a_2-x)}{v_2}\right) dx \right], \end{aligned}$$

а $\{p_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных решений уравнения (5.36).

Потенциал электростатического поля

Электронно-оптическое устройство представляет собой область пространства, ограниченную плоскостями $x = 0$, $y = -b$, $y = b$. Задано значение потенциала на границе области: $u = u_0$ при $x < a$, $y = \pm b$ и при $x = 0$, $u = 0$ — в противном случае. Требуется найти распределение потенциала электростатического поля в плоскости симметрии $y = 0$ устройства.

Так как граничные условия не зависят от переменной z , то и распределение потенциала u не зависит от z . Поэтому мы приходим к плоской задаче для уравнения Лапласа (рис. 5.3):

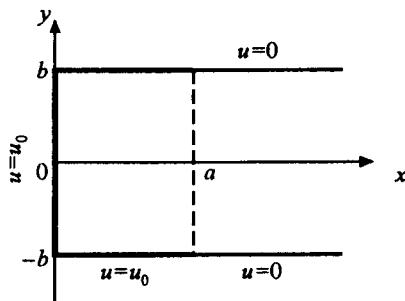


Рис. 5.3

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = 0, & |y| < b, \quad x > 0, \\ u(0, y) = u_0, \\ u(x, \pm b) = f(x), \end{cases}$$

где

$$f(x) = \begin{cases} u_0, & 0 \leq x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

Применим интегральное синус-преобразование по переменной x . Получим следующую задачу в изображениях:

$$\begin{cases} -p^2 U + p u_0 + U''_{yy} = 0, & |y| < b, \\ U(\pm b, p) = u_0 \frac{1 - \cos(pa)}{p}, \end{cases}$$

где $U(y, p)$ — изображение неизвестной функции $u(x, y)$;

$$F(p) = u_0 \frac{1 - \cos(pa)}{p} — изображение функции $f(x)$.$$

Полученная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения имеет решение

$$U(y, p) = \frac{u_0}{p} \left(1 - \frac{\operatorname{ch}(py)}{\operatorname{ch}(pb)} \cos(pa) \right),$$

и нам, чтобы прийти к окончательному решению, достаточно применить формулу обращения

$$u(x, y) = \frac{2u_0}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{p} \left(1 - \frac{\operatorname{ch}(py)}{\operatorname{ch}(pb)} \cos(pa) \right) \sin(px) dp.$$

Распределение тока на полусфере

Тонкая оболочка имеет форму полусферы и лежит на плоском основании, изготовленном из хорошего проводника (рис. 5.4). Найти стационарное распределение тока в оболочке, если ток к оболочке подводится через точечный контакт, присоединенный к полусфере в точке с угловыми координатами $\vartheta = \vartheta_0$, $\varphi = 0$, а отводится через проводящее основание.

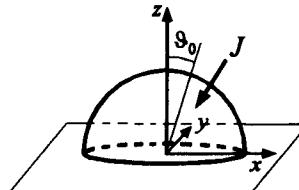


Рис. 5.4

Из физических соображений вытекает, что поле скоростей тока является безвихревым и потому может быть описано при помощи некоторой потенциальной функции $u(\vartheta, \varphi)$, зависящей от угловых сферических координат ϑ и φ . Для этой функции возникает краевая задача с точечной правой частью, описываемой при помощи двумерной δ -функции Дирака:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{a^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{-J}{\sigma h a^2 \sin \vartheta} \delta(\vartheta - \vartheta_0, \varphi), \\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ u\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ u(\vartheta, 0+0) = u(\vartheta, 2\pi-0), \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \\ u'_\varphi(\vartheta, 0+0) = u'_\varphi(\vartheta, 2\pi-0), \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

где σ — коэффициент проводимости материала; h — толщина сферической оболочки; J — плотность тока, подводимого к оболочке.

Мы не рассматривали отдельно задачи с граничными условиями типа периодичности, как в сформулированной задаче. Можно однако показать, что с такими условиями оператору $\partial^2/\partial\varphi^2$ соответствует интегральное преобразование с ядром

$$K_n(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & n = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\varphi), & n > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\varphi), & n < 0. \end{cases}$$

Весовая функция в данном случае является единичной.

Используя указанное интегральное преобразование, получаем задачу для изображения $U_n(\vartheta)$ искомой функции $u(\vartheta, \varphi)$. При $n = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial U_0}{\partial \vartheta} \right) = -\frac{J}{\sqrt{2\pi}\sigma h} \delta(\vartheta - \vartheta_0), \\ U_0(\pi/2) = 0. \end{cases} \quad (5.38)$$

При $n > 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial U_n}{\partial \vartheta} \right) - \frac{n^2}{\sin \vartheta} U_n = \frac{-J}{\sqrt{\pi} \sigma h} \delta(\vartheta - \vartheta_0), \\ U_n(\pi/2) = 0, \\ n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.39)$$

При $n < 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial U_n}{\partial \vartheta} \right) - \frac{n^2}{\sin \vartheta} U_n = 0, \\ U_n(\pi/2) = 0, \\ n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.40)$$

Задача (5.40) имеет очевидное нулевое решение. Решение задач (5.38), (5.39) должно быть ограниченным при $\vartheta \rightarrow 0$, так как ограниченной должна быть функция u . С учетом этого требования и свойств функции Дирака получаем решение задачи (5.38):

$$U_0(\vartheta) = \frac{J}{\sqrt{2\pi} \sigma h} \begin{cases} \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2}, & 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0, \\ \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}, & \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функции $\operatorname{tg}^n(\vartheta/2)$ и $\operatorname{tg}^{-n}(\vartheta/2)$ образуют фундаментальную систему решений однородного дифференциального уравнения, соответствующего задаче (5.39). Решение задачи (5.39) можно найти методом вариации произвольной постоянной. В итоге получим (опять с учетом ограниченности при $\vartheta = 0$)

$$U_n(\vartheta) = \frac{-J}{2\sqrt{\pi} \sigma h n} \begin{cases} \left(\operatorname{tg}^n \frac{\vartheta_0}{2} - \operatorname{tg}^{-n} \frac{\vartheta_0}{2} \right) \operatorname{tg}^n \left(\frac{\vartheta}{2} \right), & 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0, \\ \left(\operatorname{tg}^n \frac{\vartheta}{2} - \operatorname{tg}^{-n} \frac{\vartheta}{2} \right) \operatorname{tg}^n \left(\frac{\vartheta_0}{2} \right), & \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Окончательный ответ находим при помощи обратного преобразования. Искомая функция будет определяться формулой

$$u(\vartheta, \varphi) = \frac{J}{2\pi\sigma h} \left[\ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg}^{-n} \frac{\vartheta_0}{2} - \operatorname{tg}^n \frac{\vartheta_0}{2} \right) \operatorname{tg}^n \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \frac{\cos(n\varphi)}{n} \right]$$

при $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0$ и формулой

$$u(\vartheta, \varphi) = \frac{J}{2\pi\sigma h} \left[\ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg}^{-n} \frac{\vartheta}{2} - \operatorname{tg}^n \frac{\vartheta}{2} \right) \operatorname{tg}^n \left(\frac{\vartheta_0}{2} \right) \frac{\cos(n\varphi)}{n} \right]$$

при $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \pi/2$.

Если использовать соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n \cos(n\varphi)}{n} = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2\rho \cos \varphi + \rho^2), \quad |\rho| < 1,$$

то ответ можно записать в более компактной форме:

$$u(\vartheta, \varphi) = \frac{-J}{4\pi\sigma h} \ln \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\vartheta}{2} \right) - 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\vartheta_0}{2} \right) \cos \varphi + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\vartheta_0}{2} \right)}{1 - 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\vartheta_0}{2} \right) \cos \varphi + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\vartheta_0}{2} \right)} \right),$$

$$0 \leq \vartheta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Оптимальная толщина нагреваемой стенки

Бесконечная стенка постоянной толщины с одной стороны нагревается тепловым потоком, имеющим нормаль-

ное осесимметрическое распределение, а с противоположной — охлаждается внешней средой постоянной температуры, причем охлаждение идет с постоянным коэффициентом теплоотдачи. Требуется найти такую толщину стенки, при которой в самой нагретой точке установится минимальная температура.

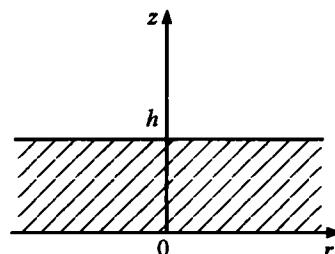


Рис. 5.5

Ось симметрии позволяет поставить плоскую (двумерную) задачу. В качестве переменных выберем z — расстояние вдоль оси, перпендикулярной к стенке, и r — расстояние от оси симметрии (рис. 5.5). Тогда функция теплового потока будет иметь вид

$$q(r) = q_0 e^{-k^2 r^2},$$

а математическая формулировка задачи для распределения температуры стенки $T(r, z)$ в точке с координатами r и z сводится к следующему:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, & r \geq 0, \quad 0 \leq z \leq h, \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(r, 0) = q_0 \exp(-k^2 r^2), \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial z}(r, h) = \alpha(T_c - T(r, h)), \end{cases}$$

где T_c — температура внешней среды; α — коэффициент теплоотдачи стенки в окружающую среду; λ — коэффициент теплопроводности материала стенки.

Из физических соображений мы можем считать, что $T_c = 0$ (т.е. фактически взять температуру окружающей среды за

точку отсчета при измерении). Применим к задаче преобразование Ганкеля индекса $\nu = 0$ по переменной r . Тогда для изображения $U(z, p)$ искомой функции $T(r, z)$ получим следующую задачу:

$$\begin{cases} U''_{zz} - p^2 U = 0, & 0 < z < h, \\ U'_z(0, p) = -\frac{q_0}{2\lambda k^2} \exp\left(-\frac{p^2}{4k^2}\right), \\ U'_z(h, p) + \frac{\alpha}{\lambda} U(h, p) = 0. \end{cases} \quad (5.41)$$

В правой части граничного условия при $z = 0$ стоит изображение функции $q(r)$, так как

$$\int_0^{+\infty} \exp(-k^2 r^2) J_0(pr) r dr = \frac{1}{2k^2} \exp\left(-\frac{p^2}{4k^2}\right). \quad (5.42)$$

Решением задачи (5.41) будет функция

$$U(z, p) = \frac{q_0}{2\lambda k^2 p} \frac{p \operatorname{ch}[p(h-z)] + \alpha \lambda^{-1} \operatorname{sh}[p(h-z)]}{p \operatorname{sh}(ph) + \alpha \lambda^{-1} \operatorname{ch}(ph)} \exp\left(-\frac{p^2}{4k^2}\right),$$

$$0 \leq z \leq h.$$

Для определения неизвестной функции $T(r, z)$ необходимо применить формулу обращения. Наиболее нагретой точкой поверхности будет начало выбранной системы координат $z = 0, r = 0$. Для этой точки находим:

$$\begin{aligned} T_0 &= T_0(h) = \\ &= \frac{q_0}{2\lambda k^2} \int_0^{+\infty} \frac{p \lambda \operatorname{ch}(ph) + \alpha \operatorname{sh}(ph)}{p \lambda \operatorname{sh}(ph) + \alpha \operatorname{ch}(ph)} \exp\left(-\frac{p^2}{4k^2}\right) dp. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Мы получили температуру в самой нагретой точке стенки как функцию ее толщины. Эта функция, вообще говоря, не

является монотонной и может иметь точки локального экстремума. Анализируя функцию на локальный экстремум стандартными методами, мы можем найти такое значение h_0 , при котором T_0 минимальна.

Дифференцируя интеграл в (5.43) по параметру, находим необходимое условие локального экстремума:

$$\frac{2\lambda k^2}{q_0} \frac{dT_0}{dh} = \int_0^{+\infty} \frac{(p^2 \lambda^2 - \alpha^2)p}{[p\lambda \operatorname{sh}(ph) + \alpha \operatorname{ch}(ph)]^2} \exp\left(-\frac{p^2}{4k^2}\right) dp = 0.$$

Так как

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} T'_0(h) = +0, \quad \lim_{h \rightarrow +0} T'_0(h) = \frac{q_0}{\lambda} \left(1 - \frac{4k^2 \lambda^2}{\alpha^2}\right),$$

заключаем, что функция $T_0(h)$ будет иметь минимум, если $\alpha < 2k\lambda$.

Полубесконечная упругая пластинка

Полубесконечная тонкая пластина $y > 0$, закрепленная по краю $y = 0$, нагружена сосредоточенной силой P в данной точке с координатами $(0, b)$ (рис. 5.6). Требуется найти распределение погонных изгибающего момента и перерезывающей силы вдоль линии закрепления пластины.

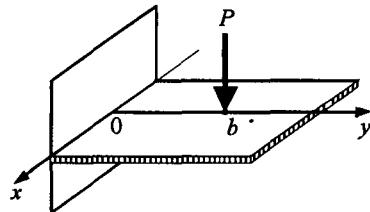


Рис. 5.6

Обозначим через $u(x, y)$ смещение точки плиты с координатами (x, y) под воздействием нагрузки. Тогда относительно функции $u(x, y)$ получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \delta(x, y - b), & -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \end{cases}$$

где D — цилиндрическая жесткость упругой пластиинки, $\delta(x, y)$ — двумерная δ -функция Дирака.

Будем искать решение, которое является бесконечно малой вместе со своими производными до 3-го порядка включительно, когда переменные x и y неограниченно возрастают.

Для решения поставленной задачи применим экспоненциальное преобразование Фурье по переменной x . Тогда для изображения $U(y, p)$ искомой функции $u(x, y)$ получим задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} - 2p^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + p^4 U = \frac{P}{D} \delta(y - b), & y > 0, \\ U(0, p) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y}(0, p) = 0. \end{cases}$$

Это задача для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Зная общее решение соответствующего однородного уравнения, мы можем решить задачу методом вариации постоянных. Отметим, что решение должно быть четной функцией по p (этот параметр входит в задачу как p^2). Учитывая граничные условия и требование ограниченности функции при $y \rightarrow +\infty$, находим, что при $0 \leq y \leq b$

$$U(y, p) = \frac{Pe^{-|p|b}}{2Dp^3} [(1 + b|p| + byp^2) \operatorname{sh}(py) - py(1 + b|p|) \operatorname{ch}(py)].$$

Для изображений \hat{M} и \hat{N} погонных изгибающего момента $M(x)$ и перерезывающей силы $N(x)$ на закрепленном крае получаем

$$\hat{M} = -D \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(0, p) = -Pbe^{-|p|b},$$

$$\hat{N} = -D \frac{\partial^3 U}{\partial y^3}(0, p) = P(1 + |p|b)e^{-|p|b}.$$

Для получения окончательного результата применяем обратное преобразование Фурье:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{M}(p) e^{ipx} dx = -\frac{P}{\pi} \frac{b^2}{b^2 + x^2},$$

$$N(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{N}(p) e^{ipx} dx = \frac{2P}{\pi} \frac{b^3}{(b^2 + x^2)^2}.$$

5.7. Контрольные вопросы и упражнения

5.1. Что такое интегральное преобразование ? В чем состоит основная идея метода интегральных преобразований ?

5.2. Объясните, что значит разделение переменных в дифференциальном уравнении.

5.3. Рассмотрим уравнение

$$u'_t(x, t) + L_0[u](x, t) = f(x, t), \quad t > 0,$$

где дифференциальный оператор L_0 не связан с дифференцированием по переменной t и результат его применения не зависит от t (например, он является линейным дифференциальным оператором с коэффициентами, не зависящими от t). Полагаем также, что область изменения набора переменных x не зависит от t .

Сформулируйте задачу для интегрального преобразования указанного уравнения по переменной t и найдите ее решение.

5.4. Процесс изменения поля температур в бесконечной двухслойной пластине с идеальным тепловым контактом между слоями описывается одномерной математической моделью

$$\begin{cases} u'_t(x, t) = a(x)u''_{xx}(x, t), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u'_x(0, t) = 0, \\ u(L, t) = \varphi(t), \end{cases}$$

где функция $a(x)$ описывает изменение коэффициента теплопроводности слоев:

$$a(x) = \begin{cases} a_1, & 0 < x < l, \\ a_2, & l < x < L, \end{cases}$$

$a_1, a_2 = \text{const}$, l — толщина одного из слоев, L — суммарная толщина пластины. Разрывный характер $a(x)$ требует дополнительных условий стыковки в точке $x = l$ (см. 5.5, задача о продольных колебаниях составного стержня):

$$u(l - 0, t) = u(l + 0, t), \quad \lambda_1 u'_x(l - 0, t) = \lambda_2 u'_x(l + 0, t).$$

Найдите решение поставленной задачи, применяя соответствующее интегральное преобразование по переменной x .

5.5. Докажите, что

$$\int_0^R r J_n^2(\lambda r) dr = \frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\lambda R),$$

если λ — это корень уравнения $J_n(\lambda R) = 0$.

5.6. Докажите тождество (5.42).

Указание. Продифференцируйте левую часть $I(p)$ тождества по параметру p и проинтегрируйте ее по частям. По результатам составьте дифференциальное уравнение для функции $I(p)$.

5.7. Можно ли как частный случай экспоненциального преобразования получить:

- а) интегральное синус-преобразование Фурье;
- б) интегральное косинус-преобразование Фурье;
- в) смешанное интегральное преобразование Фурье;
- г) интегральное преобразование Меллина ?

Дайте аргументированный ответ.

5.8. Для оператора

$$L[u](x) = a^2 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} - 2\nu \frac{\partial u(x)}{\partial x}$$

с граничным условием первого рода в точке $x = 0$ постройте упрощающее интегральное преобразование. Параметры $a \neq 0$ и $\nu > 0$ являются постоянными.

5.9. Преобразование Вебера (см. 5.4) используется, если в точке $r = r_0$ задано граничное условие I рода. Постройте преобразование, аналогичное преобразованию Вебера, но использующее граничное условие III рода:

$$\alpha u'_r(r_0, \varphi) - \beta u(r_0, \varphi) = \mu(\varphi),$$

где $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

5.10. В примере 5.10 получено одно из возможных решений. Найдите остальные. Есть ли среди полученных решений хотя бы одно, принадлежащее пространству $L^2(0, +\infty)$ по переменной r ?

5.11. Может ли интегральное преобразование Ганкеля быть получено как предельный, при $r_0 \rightarrow +0$, случай преобразования Вебера? Ответ аргументируйте.

6. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Операционное исчисление появилось в начале века как некоторый формальный метод интегрирования обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем. К таким уравнениям сводятся многие практические задачи электротехники, радиотехники, теории автоматического регулирования.

В соответствии с современными представлениями этот метод по существу сводится к преобразованию линейных дифференциальных выражений. Линейный дифференциальный оператор разлагается в произведение более простых, для которых известен обратный оператор.

Строгое математическое обоснование операционное исчисление получило в рамках теории интегральных преобразований. Интегральное преобразование Лапласа позволило интерпретировать формальные правила преобразования операторных выражений как преобразование выражений алгебраических, связывающих изображения функций.

Современное операционное исчисление строится по схеме, типичной для теории интегральных преобразований. По функциям-оригиналам, входящим в дифференциальные уравнения, строятся их изображения, при этом дифференциальные уравнения превращаются в алгебраические. Система алгебраических уравнений решается, и тем самым находятся изображения неизвестных функций. Неизвестные функции восстанавлива-

ются по найденным изображениям. Техника операционного исчисления базируется на таблице стандартных оригиналов и изображений, а также на ряде правил преобразования выражений при переходе от оригиналов к изображениям и обратно.

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и их системы хорошо изучены. Решение задач, приводящих к таким уравнениям, не связано с какими-либо теоретическими трудностями и может быть осуществлено различными методами. Ни один метод не имеет преимуществ перед другими, и выбирать тот или иной метод следует с учетом особенности конкретной задачи. Операционное исчисление наиболее эффективно, когда решаемая задача является задачей Коши; при этом правые части дифференциальных уравнений и начальных условий содержат составные функции, которые, возможно, являются гладкими, но описываются в разных частях области определения разными формулами. Например:

$$g(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ e^x, & x > 0. \end{cases}$$

6.1. Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа — это *интегральное преобразование*, которое определяется соотношением

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (6.1)$$

Интеграл в правой части (6.1) называется *интегралом Лапласа*. Изображение интегрального преобразования Лапласа называют также *изображением по Лапласу*. Взаимосвязь оригинала $f(t)$ и его изображения $F(p)$ записывают следующим образом:

$$F(p) = L[f(t)](p) \quad \text{или} \quad f(t) \doteq F(p).$$

Функцией-оригиналом интегрального преобразования *Лапласа* называют любую, в общем случае комплекснознач-

ную функцию, удовлетворяющую условиям:

- 1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;
- 2) $f(t)$ *кусочно непрерывна* на действительной оси, т.е. она может иметь разрывы только I рода, причем каждый конечный интервал содержит лишь конечное число точек разрыва;
- 3) $f(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ имеет ограниченный показательный рост, т.е. существуют такие постоянные $M > 0$ и σ , что $|f(t)| \leq M e^{\sigma t}$ при $t > 0$.

Прокомментируем условия 1)–3), налагаемые на функцию-оригинал преобразования Лапласа. Поскольку основная цель операционного исчисления — решение обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и систем при заданных начальных условиях (задача Коши), а также смешанных задач математической физики, то поведение функций до начального момента (т.е. при $t < 0$) не является существенным, и самое простое — полагать, что до начального момента функция тождественно равна 0. Это аналогично началу работы радиотехнического устройства, когда в некоторый момент времени на его вход подается сигнал, а до этого момента сигнал отсутствует, т.е. равен 0. Эти соображения мотивируют введение условия 1).

Условие 2) достаточно естественно. Отметим, что в литературе оно может заменяться более легким (минимальное требование — интегрируемость на любом конечном интервале) либо более жестким, например условиями Дирихле (т.е. дополнительно функция должна быть кусочно монотонной). Конкретный выбор одного из таких условий не является существенным с практической точки зрения и связан прежде всего с нюансами построения математической теории.

Условие 3) также важно для математического обоснования исчисления, но не является обременительным практически, так как большинство функций, описывающих физические процессы, подчиняются ему. Более того, из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что если правые части системы линейных дифференциальных уравнений с посто-

янными коэффициентами имеют экспоненциальный рост, то и решения системы имеют такой же рост.

Пример 6.1. Функция

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

является оригиналом преобразования Лапласа. Она, очевидно, подчиняется условиям 1) и 2). Условие 3) также выполнено с $M = 1$ и $\sigma = 0$.

Функция $\eta(t)$ играет особую роль в пространстве оригиналов преобразования Лапласа, являясь в нем единичной функцией: если $f(t)$ — функция-оригинал, то $f(t)\eta(t) \equiv f(t)$. Называют эту функцию *функцией Хевисайда*.

Замечание 6.1. В дальнейшем мы будем считать условие 1) выполненным. Таким образом, если мы указываем, например, функцию $f(t) = \sin t$, то на самом деле имеем в виду функцию

$$f(t) = \sin(t)\eta(t) = \begin{cases} \sin t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad \#$$

Для любой функции-оригинала $f(t)$ параметр σ в условии 3) определяется неоднозначно. Число σ_0 , являющееся точной нижней гранью всех таких σ , называется *порядком роста* функции $f(t)$.

Если для функции $f(t)$ выполняется соотношение $|f(t)| \leq M e^{\sigma t}$, то

$$\frac{\ln |f(t)|}{t} \leq \sigma + \frac{\ln M}{t},$$

откуда следует, что порядок роста определяется формулой

$$\sigma_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(t)|}{t}.$$

Пример 6.2. Для многочлена

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

показатель роста равен

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \varlimsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n|}{t} = \\ &= \varlimsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{n \ln t + \ln \left| \frac{a_0}{t^n} + \cdots + a_n \right|}{t} = \\ &= \varlimsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{n \ln t}{t} = 0,\end{aligned}$$

что кратко можно выразить так: любая степенная функция растет медленнее показательной.

Пример 6.3. Функция $f(t) = e^{t^2}$ не является оригиналом, так как

$$\varlimsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^{t^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty.$$

В этом случае говорят, что $f(t)$ имеет **неограниченный рост**.

Пример 6.4. Функция $f(t) = \operatorname{tg} t$ также не является оригиналом, так как, во-первых, не выполняется условие 2) (функция имеет точки разрыва II рода), а во-вторых, не выполняется условие 3) (из него следует, что функция должна быть ограниченной на любом конечном промежутке, что неверно). #

Первые же вопросы, возникающие после введения преобразования Лапласа, — вопросы о сходимости интеграла и об области определения изображения по Лапласу.

Теорема 6.1. Если $f(t)$ — оригинал и имеет показатель роста σ_0 , то интеграл (6.1) сходится абсолютно всюду в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$. При этом сходимость равномерная в

любой области $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$. Функция $F(p)$, являющаяся изображением $f(t)$, аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.

◀ Выберем произвольные σ и σ_1 , $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma$. Существует такое значение M , что $|f(t)| \leq M e^{\sigma_1 t}$ при $t > 0$. Следовательно, функция $f(t)e^{-\sigma_1 t}$ ограничена на действительной оси. Поэтому для любого $p = \xi + i\eta$, $\xi \geq \sigma$, получаем

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-pt}| dt = \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-\xi t} dt \leq \int_0^{+\infty} M e^{-(\sigma-\sigma_1)t} dt, \quad (6.2)$$

т.е. подынтегральная функция имеет мажоранту — сходящийся интеграл, не зависящий от p . Это значит, что несобственный интеграл сходится всюду в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq \sigma$ абсолютно и равномерно. Можно показать, что допустимо дифференцирование интеграла (6.2) по параметру p . Значит, функция $F(p)$ является аналитической. ►

Рассмотрим основные свойства изображений по Лапласу.

1. Изображение $F(p)$ является функцией комплексного переменного, аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, где σ_0 — показатель роста оригинала.

Это следует из теоремы 6.1.

2. Существует предел

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} F(p) = 0.$$

Действительно, возвращаясь к доказательству теоремы 6.1, получаем при $\operatorname{Re} p > \sigma > \sigma_0$

$$|F(p)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-pt}| dt \leq \int_0^{+\infty} M e^{-(\operatorname{Re} p - \sigma)t} dt = \frac{M}{\operatorname{Re} p - \sigma},$$

откуда сразу следует нужное утверждение.

3. Если функция-оригинал $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то имеет место формула обращения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt} dp, \quad (6.3)$$

где по определению

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}dp = \lim_{w \rightarrow +\infty} \int_{\sigma-iw}^{\sigma+iw} F(p)e^{pt}dp,$$

а $\sigma > \sigma_0$ может быть выбрана произвольно. Равенство (6.3) выполняется в каждой точке t , в которой функция $f(t)$ непрерывна.

Формула (6.3) может быть получена при помощи интеграла Фурье. Если $f(t)$ — оригинал преобразования Лапласа, то функция $f(t)e^{-\xi t}$ при $\xi > \sigma_0$ является оригиналом экспоненциального преобразования Фурье (5.27). Соединяя прямое и обратное преобразования Фурье, получаем

$$f(t)e^{-\xi t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-\xi\tau} e^{-i\eta\tau} d\tau$$

или

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\xi+i\eta)t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-(\xi+i\eta)\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi+i\eta)e^{(\xi+i\eta)t} d\eta. \end{aligned}$$

Это равносильно нашему утверждению.

Замечание 6.2. Интеграл в правой части формулы обращения (6.3) называют *интегралом Меллина*, а саму формулу — *формулой Римана — Меллина*.

Замечание 6.3. Формула обращения (6.3) верна и в общем случае, если функции рассматривать как элементы пространства $L^2(-\infty, +\infty)$, т.е. если считать идентичными функции, отличающиеся лишь на множестве меры 0.

Замечание 6.4. Из формулы обращения с учетом замечания 6.3 заключаем, что каждая функция-оригинал однозначно восстанавливается по своему изображению с точностью до значений в точках разрыва. Действительно, две функции, различающиеся на множество меры 0, должны совпадать во всех точках непрерывности. #

Свойства 1 и 2 являются необходимыми для того, чтобы функция комплексного переменного $F(p)$, определенная в некоторой правой полуплоскости, являлась изображением по Лапласу. Однако эти свойства не являются достаточными. Следующая теорема дает достаточные условия для изображений по Лапласу, чуть более жесткие, чем 1 и 2.

Теорема 6.2. Пусть функция комплексного переменного $F(p)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $F(p)$ определена и аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$;
- 2) в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq \sigma$, $\sigma > \sigma_0$ существует предел

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0;$$

3) функция $F(p)$ абсолютно интегрируема вдоль всякой прямой $\operatorname{Re} p = \sigma$, $\sigma > \sigma_0$, т.е. функция $F(\xi + i\eta)$ абсолютно интегрируема по переменной η .

Тогда $F(p)$ является изображением некоторой функции-оригинала $f(t)$, имеющей показатель роста не более σ_0 , которая может быть найдена по формуле обращения (6.3).

◀ Нам надо показать, во-первых, что формула (6.3) корректно определяет некоторую функцию $f(t)$, во-вторых, что эта функция является оригиналом и, в-третьих, что изображением $f(t)$ является данная функция $F(p)$. Отметим, что, хотя в определение $f(t)$ входит свободный параметр σ , на самом деле $f(t)$ от него не зависит, например, вследствие единственности оригинала для данного изображения (см. замечание 6.4).

Интеграл

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + i\eta) e^{(\sigma+i\eta)t} d\eta \end{aligned} \quad (6.4)$$

сходится согласно условию 3 теоремы, так как подынтегральная функция имеет мажоранту:

$$|F(\sigma + i\eta) e^{(\sigma+i\eta)t}| = |F(\sigma + i\eta)| e^{\sigma t}.$$

Поэтому функция $f(t)$ определена корректно. Отметим, что интеграл (6.4) сходится равномерно по t на любом отрезке $[t_1, t_2]$ действительной оси. Поэтому функция $f(t)$, определяемая соотношением (6.4), непрерывна. Более того,

$$|f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\sigma + i\eta)| e^{\sigma t} d\eta = C e^{\sigma t},$$

так что $f(t)$ имеет ограниченный рост, и показатель роста не превосходит σ_0 (потому что $\sigma > \sigma_0$ может быть выбрана произвольно).

Чтобы убедиться, что функция $f(t)$ является оригиналом, нам осталось проверить условие $f(t) = 0$ при $t < 0$. Рассмотрим контур Γ_R , состоящий из отрезка вертикальной прямой $[\sigma - iw_R, \sigma + iw_R]$ и дуги C_R окружности $|z| = R$, расположенной в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq \sigma$ (рис. 6.1). Так как в области, ограниченной контуром Γ_R , функция $F(p)$ аналитична, то при $t < 0$

$$\oint_{\Gamma_R} F(p) e^{pt} dp = 0.$$

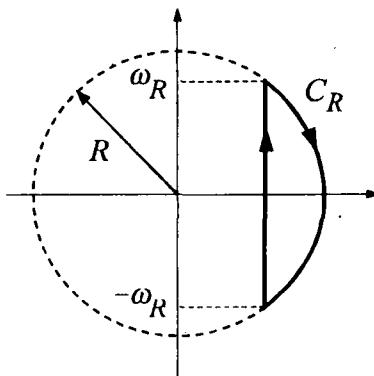


Рис. 6.1

С другой стороны, при $t < 0$ и $R \rightarrow +\infty$ интеграл

$$\int_{C_R} F(p) e^{pt} dp$$

стремится к 0 согласно **лемме Жордана**¹, так как по условию 2 теоремы $F(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$ в области $\operatorname{Re} p \geq \sigma$. Поэтому

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\sigma - iw_R}^{\sigma + iw_R} F(p) e^{pt} dp = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p) e^{pt} dp = 0,$$

Следовательно, функция $f(t)$ есть функция-оригинал.

Докажем, что изображением функции $f(t)$ является $F(p)$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} e^{-p_0 t} dt \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p) e^{pt} dp = F(p_0)$$

в каждой точке p_0 при $\operatorname{Re} p_0 > \sigma$. Отметим, что подынтегральная функция повторного интеграла имеет мажоранту

$$|F(p) e^{-(p_0 - p)t}| = |F(p)| e^{-(\operatorname{Re} p_0 - \sigma)t}.$$

Поэтому в интеграле

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} dt \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p) e^{-(p_0 - p)t} dp$$

¹ Согласно этой лемме, если существует последовательность радиусов R_n такая, что для аналитической функции $f(z)$ выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{|f(z)|, |z| = R_n\} = 0,$$

то при $\lambda > 0$

$$\int_{C_{R_n}} f(z) e^{-\lambda z} dz \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

можно поменять порядок интегрирования. Получим

$$\begin{aligned} F(p_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} e^{-p_0 t} dt \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} dt \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{-(p_0-p)t} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} dp \int_0^{+\infty} F(p) e^{-(p_0-p)t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(p)}{p - p_0} dp. \end{aligned}$$

Рассмотрим контур Γ_R , описанный выше. Так как

$$\left| \int_{C_R} \frac{F(p) dp}{p - p_0} \right| \leq \max_{|p|=R} |f(p)| \int_{C_R} \frac{|dp|}{|p| - |p_0|} \leq \max_{|p|=R} |f(p)| \frac{2\pi R}{R - |p_0|},$$

то согласно условию 2 теоремы интеграл по дуге C_R стремится к 0 при $R \rightarrow +\infty$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(p) dp}{p - p_0} = \operatorname{res} \left\{ \frac{F(p)}{p - p_0}, p = p_0 \right\} = F(p_0).$$

Мы тем самым доказали, что $F(p)$ является изображением функции $f(t)$. ►

Замечание 6.5. Условие 2 в теореме 6.2 можно ослабить, потребовав, чтобы существовала последовательность радиусов $R_n \rightarrow +\infty$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \{ |F(p)|, |p| = R_n, \operatorname{Re} p \geq \sigma \} = 0.$$

Пример 6.5. Рассмотрим функцию комплексного переменного

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-k\sqrt{p}}, \quad k > 0,$$

определенную в плоскости \mathbb{C} с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси. В этой области функция $w = \sqrt{p}$ имеет однозначную ветвь

$$\sqrt{p} = \sqrt{re^{i\varphi}} = \sqrt{r}e^{\frac{i\varphi}{2}},$$

которая определяет ветвь, вообще говоря, многозначной функции $F(p)$. Функция $F(p)$ удовлетворяет условиям теоремы 6.2 и потому является изображением. Действительно, выполнение первых двух условий очевидно, так как \sqrt{p} в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ не имеет ни особых точек, ни нулей, а функция $\exp(-k\sqrt{p})$ в этой полуплоскости ограничена. Далее, если $p = \sigma + i\eta$, $\sigma > 0$, то

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-k\sqrt{p}} \right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{\sigma^2 + \eta^2}} \exp \left[-\sqrt[4]{\sigma^2 + \eta^2} \cos \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\sigma} \right) \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\eta}} \exp \left(-\sqrt{\frac{\eta}{2}} \right), \end{aligned}$$

и функция $F(p)$ абсолютно интегрируема вдоль прямой $\operatorname{Re} p = \sigma > 0$.

Для вычисления интеграла Меллина рассмотрим контур Γ_R , изображенный на рис. 6.2. Он составлен из отрезка AB вертикальной прямой $\operatorname{Re} p = \sigma$, $\sigma > 0$, дуг BC и FA окружности $|p| = R$, $R > \sigma$, отрезков CD и EF на разных берегах разреза и окружности C_ρ : $|p| = \rho$, $\rho < \sigma$.

Так как внутри контура функция $F(p)$ особых точек не имеет, получаем

$$\oint_{\Gamma_R} F(p) e^{pt} dp = 0.$$

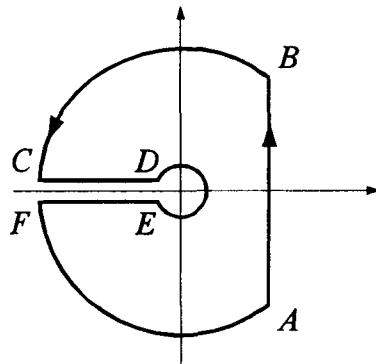


Рис. 6.2

Легко убедиться, что

$$\left| \int_{C_\rho} F(p) e^{pt} dp \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{t\rho} 2\pi \rho \rightarrow 0$$

при $\rho \rightarrow 0$. Так как $\operatorname{Re} \sqrt{p} > 0$ в рассматриваемой области, $|F(p)| \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$. По лемме Жордана

$$\int_{BC \cup FA} F(p) e^{pt} dp \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow +\infty$. Таким образом, переходя к пределу при $R \rightarrow +\infty$ и $\rho \rightarrow 0$, заключаем, что

$$\int_{AB} + \int_{CD} + \int_{EF} \rightarrow 0,$$

и интеграл Меллина равен разности между двумя интегралами, взятыми по отрицательной части действительной оси по разным берегам разреза. Интеграл по верхнему берегу разреза равен

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{1}{i\sqrt{x}} e^{-ki\sqrt{x}} e^{-xt} d(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-xt-ki\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

так как на этом берегу $\sqrt{p} = \sqrt{xe^{i\pi}} = i\sqrt{x}$, $x > 0$. Интеграл по нижнему берегу разреза равен

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{1}{-i\sqrt{x}} e^{ki\sqrt{x}} e^{-xt} d(-x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-xt+ki\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

так как на этом берегу $\sqrt{p} = \sqrt{xe^{-i\pi}} = -i\sqrt{x}$, $x > 0$. Разность между этими интегралами равна

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-xt} \left(e^{ki\sqrt{x}} + e^{-ki\sqrt{x}} \right) \frac{dx}{\sqrt{x}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-xt} 2 \cos k\sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t} \cos ku du. \end{aligned}$$

Учитывая, что подынтегральная функция четна, а

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 t} \sin ku du = 0$$

как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку, получаем

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t} \cos ku du &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 t} (\cos ku + i \sin ku) du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 t + ik u} du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(u - i \frac{k}{2t})^2 - \frac{k^2}{4t}} du = \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{k^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tu^2} du = \frac{1}{\pi \sqrt{t}} e^{-\frac{k^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{k^2}{4t}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-k\sqrt{p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{k^2}{4t}}.$$

Замечание 6.6. Рассмотренный пример показывает, что непосредственное использование формулы Римана — Меллина является делом сравнительно трудоемким, так как приводит к вычислению сложных интегралов.

6.2. Основные теоремы операционного исчисления

Линейность

Если $f_1(t), \dots, f_k(t)$ — функции-оригиналы, $f_i(t) \doteq F_i(p)$, $i = 1, \dots, k$, то для любых числовых коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ функция $\alpha_1 f_1(t) + \dots + \alpha_k f_k(t)$ есть функция-оригинал и

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(t) \doteq \sum_{i=1}^k \alpha_i F_i(p).$$

Это свойство есть констатация того, что *преобразование Лапласа* линейно (это верно для всех рассматриваемых нами интегральных преобразований, и мы не будем на этом останавливаться).

Теорема подобия

Если $f(t)$ — функция-оригинал, то для любого положительного числа α функция $f(\alpha t)$ — тоже оригинал, и если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

◀ Выполнив в интеграле замену переменной $\tau = \alpha t$, получим

$$\begin{aligned} L[f(\alpha t)](p) &= \int_0^{+\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-p\frac{\tau}{\alpha}} \frac{d\tau}{\alpha} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \quad ▶ \end{aligned}$$

Теорема смещения

Если $f(t)$ — функция-оригинал, $f(t) \doteq F(p)$, то для любого комплексного числа λ функция $e^{\lambda t} f(t)$ — тоже оригинал и

$$e^{\lambda t} f(t) \doteq F(p - \lambda).$$

◀ Утверждение теоремы вытекает из следующей выкладки:

$$\begin{aligned} L[e^{\lambda t} f(t)](p) &= \int_0^{+\infty} e^{\lambda t} f(t) e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-\lambda)t} dt = F(p - \lambda). \quad ▶ \end{aligned}$$

Теорема запаздывания

Если $f(t)$ — функция-оригинал, $f(t) \doteq F(p)$, то для любого положительного числа a функция $f(t - a)$ — тоже оригинал и

$$f(t - a) \doteq e^{-ap} F(p).$$

◀ Условия 1)–3) определения оригинала, очевидно, выполняются. Учитывая, что $f(t - a) = 0$ при $t < a$, при помощи замены переменной $\tau = t - a$ получаем

$$\begin{aligned} L[f(t - a)](p) &= \int_0^{+\infty} f(t - a)e^{-pt} dt = \\ &= \int_a^{+\infty} f(t - a)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p(\tau+a)} d\tau = \\ &= e^{-ap} \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau} d\tau = e^{-ap} F(p). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Замечание 6.7. Теоремы смещения и запаздывания являются двойственными. Однако если в теореме смещения параметр λ — любое комплексное число, то в теореме запаздывания параметр a должен быть действительным положительным.

Интегрирование оригинала

Если $f(t)$ — функция-оригинал, $f(t) \doteq F(p)$, то функция

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

является оригиналом и

$$g(t) \doteq \frac{1}{p} F(p).$$

◀ Действительно, первые два условия для функции-оригинала, очевидно, выполняются. Проверим условие 3). Имеем

$$\begin{aligned} |g(t)| &= \left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |f(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \int_0^t M e^{\sigma \tau} d\tau = \frac{M}{\sigma} (e^{\sigma t} - 1). \end{aligned}$$

Мы можем считать, что $\sigma > 0$. Тогда

$$|g(t)| \leq \frac{M'}{\sigma} e^{\sigma t}.$$

Отсюда, в частности, заключаем, что показатель роста функции g не превосходит $\max\{\sigma(f), 0\}$. Проверим формулу перехода к первообразной:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt \int_0^t f(\tau)d\tau = \\ &= \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\tau}^{+\infty} e^{-pt}f(\tau)dt = \int_0^{+\infty} f(\tau) \frac{e^{-p\tau}}{p}d\tau = \frac{1}{p}F(p). \end{aligned}$$

Порядок интегрирования можно изменить потому, что несобственный двойной интеграл от функции $f(\tau)e^{-pt}$ по угловой области $0 < t < \infty, 0 < \tau < t$ сходится абсолютно. ►

Дифференцирование оригинала

Пусть функция $f(t)$ непрерывна при $t > 0$, имеет производную всюду, кроме некоторого дискретного множества точек (т.е. множества, имеющего конечное число точек на любом конечном интервале). Если $f(t)$ и $f'(t)$ — функции-оригиналы, $f(t) = F(p)$, то

$$f'(t) = pF(p) - f(+0),$$

где $f(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$.

◀ Из поставленных условий вытекает равенство

$$f(t) = f(+0)\eta(t) + \int_0^t f'(\tau)d\tau.$$

Нам остается к функции $f'(t)$ применить теорему об интегрировании оригинала и воспользоваться соотношением $\eta(t) = p^{-1}$:

$$L[f(t)](p) = \frac{f(+0)}{p} + \frac{L[f'(t)](p)}{p},$$

что и приводит к нужному соотношению. ►

Отметим, что при дифференцировании оригинала главное, чтобы производная $f'(t)$ была оригиналом и чтобы для нее была верна формула Ньютона — Лейбница.

Пример 6.6. Функция $\sin(e^{x^2})$, будучи непрерывной и ограниченной, является оригиналом. Однако $f'(t) = 2xe^{x^2} \times \sin(e^{x^2})$ уже не будет оригиналом, так как имеет неограниченный рост. #

Дифференцирование оригинала может применяться много-кратно. Если функция $f(t)$ имеет $k - 1$ производную, непрерывную при $t > 0$, существует k -я производная всюду, кроме, быть может, некоторого дискретного множества, и если все эти производные являются оригиналами, то

$$f^{(k)}(t) \doteq p^k F(p) - p^{k-1} f(+0) - \cdots - f^{(k-1)}(+0),$$

где $f(t) \doteq F(p)$.

Интегрирование изображения

Если функция $f(t)$ — оригинал, $f(t) \doteq F(p)$, функция $f(t)/t$ ограничена в окрестности 0, то она является оригиналом и

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^{+\infty} F(p) dp.$$

◀ Функция $f(t)/t$ может не быть оригиналом только по одной причине: если она не ограничена при $t \rightarrow +0$. По условию

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = F(p).$$

Проинтегрируем написанное равенство по p от точки $p_0 =$

$= \xi + i\eta$ до ∞ по отрезку горизонтальной прямой:

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^{\infty} dp \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt &= \int_{\xi}^{+\infty} d\sigma \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(\sigma+i\eta)t} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} dt \int_{\xi}^{+\infty} f(t) e^{-(\sigma+i\eta)t} d\sigma = \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-i\eta t} dt \int_{\xi}^{+\infty} e^{-\sigma t} d\sigma = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-(\xi+i\eta)t} dt = \int_{p_0}^{\infty} F(p) dp. \end{aligned}$$

Изменение порядка интегрирования возможно, так как несобственный двойной интеграл сходится абсолютно. ►

Дифференцирование изображения

Если функция $f(t)$ — оригинал, $f(t) \doteq F(p)$, то функция $-tf(t)$ — тоже оригинал, причем

$$-tf(t) \doteq F'(p).$$

◀ Очевидно, что функция $tf(t)$ является оригиналом, причем с тем же порядком роста, что и $f(t)$. Применим теорему об интегрировании изображения к функции $\varphi(t) = tf(t)$. Если $\varphi(t) \doteq \Phi(p)$, то

$$f(t) = \frac{\varphi(t)}{t} \doteq \int_p^{\infty} \Phi(p) dp = F(p).$$

Дифференцируя по p , находим $F'(p) = -\Phi(p)$, что и доказывает это утверждение. ►

Свертка оригиналов

Сверткой двух функций-оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ называют функцию

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Свертка оригиналов f и g является оригиналом, причем показатель роста свертки не превосходит максимального из показателей для f и g . Если $f(t) = F(p)$, $g(t) = G(p)$, то

$$(f * g)(t) = F(p)G(p). \quad (6.5)$$

◀ Легко убедиться, что при $t < 0$ свертка обращается в 0. Докажем, что свертка кусочно непрерывных функций непрерывна. Рассмотрим приращение свертки в произвольной точке t :

$$\begin{aligned} (f * g)(t + h) - (f * g)(t) &= \\ &= \int_0^{t+h} f(\tau)g(t+h-\tau)d\tau - \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \\ &= \int_t^{t+h} f(\tau)g(t+h-\tau)d\tau + \\ &\quad + \int_0^t f(\tau)[g(t+h-\tau) - g(t-\tau)]d\tau. \end{aligned}$$

На любом отрезке $[0, T]$ функции $f(t)$ и $g(t)$ ограничены некоторым числом M . Поэтому при $t < T$, $|h| < T - t$ получаем

$$\begin{aligned} |(f * g)(t + h) - (f * g)(t)| &\leq \\ &\leq M^2 h + M \int_0^t |g(t+h-\tau) - g(t-\tau)|d\tau = \\ &= M^2 h + M \int_0^t |g(u+h) - g(u)|du. \end{aligned}$$

Непрерывность в точке t будет доказана, если мы докажем, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^t |g(u+h) - g(u)|du = 0. \quad (6.6)$$

Отметим, что это соотношение верно для непрерывно дифференцируемых функций, так как если $|g'(u)| \leq K$ на отрезке $[0, T]$, то по теореме Лагранжа о конечных приращениях

$$\int_0^t |g(u+h) - g(u)| du \leq \int_0^T K h du = KTh \rightarrow 0$$

при $h \rightarrow 0$. Для каждой интегрируемой функции $g(t)$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(t)$, что

$$\int_0^T |\varphi(t) - g(t)| dt \leq \varepsilon$$

(например, $\varphi(t)$ — это частная сумма ряда Фурье для $g(t)$). Но тогда

$$\begin{aligned} \int_0^t |g(u+h) - g(u)| du &\leq \int_0^t |\varphi(u+h) - \varphi(u)| du + \\ &+ \int_0^t |\varphi(u) - g(u)| du + \int_0^t |\varphi(u+h) - g(u+h)| du \leq \\ &\leq \int_0^t |\varphi(u+h) - \varphi(u)| du + 2 \int_0^T |\varphi(u) - g(u)| du \leq \\ &\leq \int_0^t |\varphi(u+h) - \varphi(u)| du + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Выбирая достаточно малое h и учитывая гладкость φ , получаем

$$\int_0^t |g(u+h) - g(u)| du \leq 3\varepsilon,$$

что и завершает доказательство соотношения (6.6).

Следующая оценка показывает, что свертка имеет ограниченный рост, причем не выше роста f и g :

$$\left| \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_0^t M_1 e^{\sigma_1 \tau} M_2 e^{\sigma_2(t-\tau)} d\tau \leq M_1 M_2 t e^{\sigma t},$$

где $\sigma_1 > \sigma(f)$, $\sigma_2 > \sigma(g)$, $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$.

Вычислим изображение для свертки

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \\
 &= \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\tau}^{+\infty} e^{-pt} f(\tau)g(t-\tau)dt = \\
 &= \int_0^{+\infty} f(\tau)d\tau \int_{\tau}^{+\infty} e^{-pt} g(t-\tau)dt = \\
 &= \int_0^{+\infty} f(\tau)d\tau \int_0^{+\infty} e^{-p(u+\tau)} g(u)du = \\
 &= \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau}d\tau \int_0^{+\infty} e^{-pu} g(u)du = F(p)G(p).
 \end{aligned}$$

Эти выкладки имеют смысл при $\operatorname{Re} p > \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$, так как тогда двойной несобственный интеграл от функции

$$e^{-pt}f(\tau)g(t-\tau) = [e^{-p\tau}f(\tau)][e^{-p(t-\tau)}g(t-\tau)]$$

в области $t > 0, 0 < \tau < t$ сходится абсолютно. ►

Замечание 6.8. Из соотношения (6.5) следует, что свертка коммутативна, $f * g = g * f$, так как и та, и другая функция имеют одно и то же изображение, равное произведению изображений f и g .

Замечание 6.9. Теорема о свертке показывает, что произведение изображений снова является изображением.

Замечание 6.10. Если $f(t) \doteq F(p)$, $g(t) \doteq G(p)$, то

$$\begin{aligned}
 pF(p)G(p) &= [pF(p) - f(+0)]G(p) + f(+0)G(p) \doteq \\
 &\doteq (f' * g)(t) + f(+0)g(t)
 \end{aligned}$$

(в предположении, что $f'(t)$ — оригинал). С учетом симметрии получаем две близкие формулы:

$$\begin{aligned}
 pF(p)G(p) &\doteq f(+0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau, \\
 pF(p)G(p) &\doteq g(+0)f(t) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau.
 \end{aligned}$$

Каждую из этих формул называют *интегралом Дюамеля*.

Пределевые значения оригинала и изображения

Для любой функции-оригинала $f(t)$ с изображением $F(p)$ выполняется равенство

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(+0), \quad (6.7)$$

где предельный переход $p \rightarrow 0$ осуществляется внутри угловой области $|\arg p| \leq \alpha < \pi/2$.

◀ Утверждение сводится к случаю $f(+0) = 0$, для чего вместо функции $f(t)$ достаточно рассмотреть функцию $f_0(t) = f(t) - f(+0)\eta(t)$, имеющую изображение $F_0(p) = F(p) - f(+0)/p$. При этом равенство (6.7) будет означать, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF_0(p) = 0.$$

Итак, пусть $f(+0) = 0$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем такое $\delta > 0$, что $|f(t)| < \varepsilon \cos \alpha$ при $0 < t < \delta$ (α — угол раствора области, $\alpha < \pi/2$). Тогда для $p = \sigma + i\eta$, $\sigma > \sigma_1 > \sigma(f)$ имеем

$$\begin{aligned} |pF(p)| &= |p| \left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \right| \leq \\ &\leq |p| \left| \int_0^{\delta} f(t)e^{-pt} dt \right| + |p| \left| \int_{\delta}^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \right| \leq \\ &\leq |p|\varepsilon \cos \alpha \int_0^{\delta} e^{-\sigma t} dt + |p| \int_{\delta}^{+\infty} M e^{\sigma_1 t} e^{-\sigma t} dt \leq \\ &\leq \frac{|p|\varepsilon \cos \alpha}{\sigma} + \frac{|p|M}{\sigma - \sigma_1} e^{-(\sigma - \sigma_1)\delta} \leq \\ &\leq \varepsilon + \frac{M\sigma}{(\sigma - \sigma_1) \cos \alpha} e^{-(\sigma - \sigma_1)\delta}. \end{aligned}$$

Видно, что число σ может быть выбрано настолько большим, что $|pF(p)| < 2\varepsilon$. Так как число ε выбиралось произвольно, то это значит, что $pF(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$ при условии, что $|\arg p| \leq \alpha$. ►

Если функция-оригинал $f(t)$ с изображением $F(p)$ имеет предел

$$f(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t),$$

то также существует

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = f(+\infty),$$

где предельный переход $p \rightarrow \infty$ осуществляется внутри угловой области $|\arg p| \leq \alpha < \pi/2$.

Доказательство этого соотношения проводится по той же схеме, что и для (6.7), а поэтому мы его опустим.

6.3. Изображения элементарных функций-оригиналов

Таблица стандартных оригиналов и изображений

При помощи установленных свойств преобразования Лапласа можно найти изображения для ряда элементарных функций-оригиналов. Как мы уже видели, $\eta(t) \doteq p^{-1}$. По теореме о дифференцировании изображения

$$t \doteq -\left(\frac{1}{p}\right)' = \frac{1}{p^2}, \quad t^2 \doteq -\left(\frac{1}{p^2}\right)' = \frac{2}{p^3},$$

а в общем случае

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}$$

(строго эту формулу можно доказать при помощи метода математической индукции). Та же формула для изображения степенной функции может быть получена при помощи теоремы об интегрировании оригинала:

$$1 \doteq \frac{1}{p},$$

$$t = \int_0^t 1 dt \doteq \frac{1}{p^2},$$

$$\begin{aligned} t^2 &= 2 \int_0^t t dt = \frac{2}{p^3}, \\ &\vdots \\ t^n &= n \int_0^t t^{n-1} dt = \frac{n!}{p^{n+1}}. \end{aligned}$$

По теореме смещения для любого комплексного числа λ

$$e^{\lambda t} = e^{\lambda t} \eta(t) = \frac{1}{p - \lambda}.$$

Вспомним, что

$$\operatorname{sh} \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}, \quad \operatorname{ch} \omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \omega t &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p - \omega} - \frac{1}{p + \omega} \right] = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \\ \operatorname{ch} \omega t &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p - \omega} + \frac{1}{p + \omega} \right] = \frac{p}{p^2 - \omega^2}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, \quad \cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2},$$

и мы приходим к формулам

$$\sin \omega t = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \cos \omega t = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

В результате этих рассуждений мы получаем таблицу простейших оригиналов и их изображений:

$$\begin{aligned}
 t^n &= \frac{n!}{p^{n+1}}, & \sin \omega t &= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \\
 e^{\lambda t} &= \frac{1}{p - \lambda}, & \cos \omega t &= \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \\
 t^n e^{\lambda t} &= \frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}, & e^{\lambda t} \sin \omega t &= \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}, \\
 \operatorname{sh} \omega t &= \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, & e^{\lambda t} \cos \omega t &= \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}. \\
 \operatorname{ch} \omega t &= \frac{p}{p^2 - \omega^2},
 \end{aligned}$$

Составные оригиналы

С помощью теоремы запаздывания и функции Хевисайда можно находить изображения **составных оригиналов**, часто встречающихся в задачах электротехники и радиотехники. Отметим, что функция $\eta(t-a) - \eta(t-b)$, $a < b$, имеет ступенчатый вид (рис. 6.3)

$$\eta(t-a) - \eta(t-b) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & a < t < b, \\ 0, & t > b. \end{cases}$$

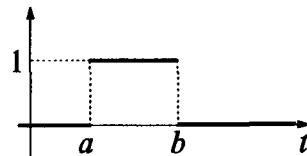


Рис. 6.3

Если функция $f(t)$ задана как составная в виде

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & a_1 < t < a_2, \\ f_2(t), & a_2 < t < a_3, \\ \vdots \\ f_{k-1}(t), & a_{k-1} < t < a_k, \\ f_k(t), & t > a_k, \end{cases}$$

то при помощи запаздывающих функций Хевисайда ее можно представить как сумму

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k-1} f_i(t) [\eta(t - a_i) - \eta(t - a_{i+1})] + f_k(t) \eta(t - a_k).$$

При таком представлении переход к изображениям делается легче. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 6.7. Рассмотрим функцию (рис. 6.4)

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 2 - t, & 1 < t < 2 \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

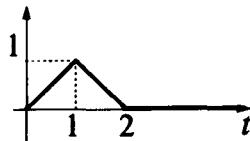


Рис. 6.4

Эту функцию можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(t) &= t[\eta(t) - \eta(t-1)] + (2-t)[\eta(t-1) - \eta(t-2)] = \\ &= t\eta(t) - (2t-2)\eta(t-1) + (t-2)\eta(t-2). \end{aligned}$$

По таблице оригиналов и изображений находим $t \doteq p^{-2}$, а по теореме запаздывания $(t-a)\eta(t-a) \doteq e^{-ap}p^{-2}$. Поэтому

$$f(t) \doteq \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p^2} = \frac{(1 - e^{-p})^2}{p^2}.$$

Пример 6.8. Рассмотрим функцию (рис. 6.5)

$$f(t) = \begin{cases} 2t - t^2, & 0 < t < 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

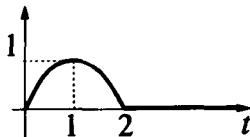


Рис. 6.5

Эту функцию можно представить в виде

$$f(t) = (2t - t^2) [\eta(t) - \eta(t-2)] = (2t - t^2)\eta(t) - (2t - t^2)\eta(t-2).$$

Первое слагаемое имеет изображение

$$2t - t^2 \doteq \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p^3}.$$

Найдем изображение второго слагаемого:

$$\begin{aligned} (2t - t^2)\eta(t-2) &= [2(u+2) - (u+2)^2]\eta(u)|_{u=t-2} = \\ &= -(2u + u^2)\eta(u)|_{u=t-2} \doteq -e^{-2p} \left(\frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} f(t) &\doteq \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p^3} + e^{-2p} \left(\frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3} \right) = \\ &= \frac{2}{p^2} (1 + e^{-2p}) - \frac{2}{p^3} (1 - e^{-2p}). \end{aligned}$$

Замечание 6.11.

$$t - 1 \doteq \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}, \quad \text{но} \quad (t-1)\eta(t-1) \doteq \frac{e^{-p}}{p^2}.$$

Периодические оригиналы

Пусть $f(t)$ — периодическая при $t > 0$ функция-оригинал, т.е. для некоторого $T > 0$ выполняется равенство $f(t+T) = f(t)$, $t > 0$. Обозначим через $f_0(t)$ функцию

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Тогда легко убедиться в равенстве

$$f(t) = f_0(t) + f(t-T). \tag{6.8}$$

Действительно, при $t < T$ имеем $f(t - T) = 0$, и равенство (6.8) по существу означает, что $f(t) = f_0(t)$. При $t > T$ имеем $f_0(t) = 0$, и тождество (6.8) сводится к условию периодичности.

В равенстве (6.8) перейдем к изображениям, полагая, что $f(t) \doteq F(p)$, а $f_0(t) \doteq F_0(p)$:

$$F(p) = F_0(p) + F(p)e^{-pT}.$$

В результате получаем

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}.$$

Пример 6.9. Рассмотрим функцию $f(t) = \{t\}$, которая ставит в соответствие каждому действительному числу $t > 0$ его дробную часть: $f(t) = t - k$, если $k \leq t < k + 1$, k — целое. Эта функция периодическая с периодом $T = 1$, причем

$$f_0(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Согласно сказанному выше находим

$$\begin{aligned} f_0(t) &= t[\eta(t) - \eta(t-1)], \\ F_0(p) &= \frac{1}{p^2} - \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} \right) e^{-p}, \\ F(p) &= \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p(1 - e^{-p})}. \end{aligned}$$

6.4. Теоремы разложения

При восстановлении функций-оригиналов по изображению обычно используют таблицу оригиналов и изображений. Использование формулы обращения — дело трудное. Однако с ее помощью можно получить несколько практических результатов, которые называют *теоремами разложения* и которые могут помочь в задаче восстановления оригиналов.

Теорема 6.3 (1-я теорема разложения). Если функция $F(p)$ аналитична в окрестности ∞ , имеет в ∞ нуль, то она является изображением. При этом, если

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n p^{-n}$$

— ее разложение Лорана в окрестности ∞ , то

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad (6.9)$$

т.е. оригинал для изображения $F(p)$ получается путем почлененного перехода к оригиналам в ряде Лорана.

◀ Нам требуется показать, что ряд

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

сходится для любого действительного числа t и представляет собой функцию-оригинал. И кроме того, надо показать, что изображением этого оригинала является $F(p)$.

Пусть $F(p)$ аналитична в области $|p| > R$. Выберем произвольное число $R_1 > R$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n R_1^{-n}$$

сходится (это — значение функции $F(p)$ в точке R_1) и потому последовательность $\{|a_n|R_1^{-n}\}$ ограничена, т.е. $|a_n| \leq MR_1^n$. Но тогда

$$|a_n| \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{MR_1(R_1 t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

где выражение справа — это общий член ряда, сходящегося при любом значении t . По признаку сравнения ряд (6.9) сходится абсолютно для всех значений t . Более того,

$$|f(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{MR_1(R_1 t)^{n-1}}{(n-1)!} = MR_1 e^{R_1 t},$$

т.е. функция $f(t)$ имеет ограниченный рост, а так как $R_1 > R$ выбиралось произвольно, то порядок роста $f(t)$ не превосходит R .

Функция $f(t)$, представимая степенным рядом, конечно, непрерывна. При $t < 0$ полагаем $f(t) = 0$. Найдем изображение этой функции. Для этого нам достаточно показать, что в равенстве

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \left(\sum_{k=1}^n a_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right) dt = \sum_{k=1}^n a_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{k-1} dt \quad (6.10)$$

можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ под знаком интеграла. Положим

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Тогда

$$|f_n(t)| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \leq MR_1 e^{R_1 t}$$

при $R_1 > R$. Следовательно, если $\operatorname{Re} p = \sigma \geq R_2$, где $R_2 > R_1$, то

$$\begin{aligned} \max_n \left| \int_T^{+\infty} e^{-pt} f_n(t) dt \right| &\leq \max_n \int_T^{+\infty} e^{-\sigma t} |f_n(t)| dt \leq \\ &\leq MR_1 \int_T^{+\infty} e^{(R_1 - \sigma)t} dt \leq MR_1 \int_T^{+\infty} e^{-(R_2 - R_1)t} dt = \\ &= MR_1 \frac{e^{-(R_2 - R_1)T}}{R_2 - R_1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $T \rightarrow \infty$. Значит, интеграл

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) e^{-pt} dt$$

сходится при $\operatorname{Re} p \geq R_1$ равномерно по n . Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) e^{-pt} dt,$$

и, переходя в равенстве (6.10) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем соотношение (6.9). ►

Пример 6.10. Функция $\sin(1/p)$ аналитична всюду в \mathbb{C} , за исключением точки $p = 0$, являющейся для этой функции особой. По теореме 6.3 функция является изображением. При этом

$$\sin \frac{1}{p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

Теорема 6.4 (2-я теорема разложения). Каждая рациональная функция $F(p)$, у которой степень числителя меньше степени знаменателя, является изображением, при этом

$$F(p) = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{j=1}^{\mu_k} A_{jk} \frac{t^{\mu_k-j}}{(\mu_k-j)!} \right) e^{p_k t}, \quad (6.11)$$

где p_1, \dots, p_r — полюсы функции $F(p)$ с кратностями μ_1, \dots, μ_r соответственно. Коэффициенты A_{jk} могут быть вычислены по формуле

$$A_{jk} = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}} [(p - p_k)^{\mu_k} F(p)].$$

◀ У рациональной функции $F(p)$ конечное число особых точек и все особые точки являются полюсами. Пусть главная часть лорановского разложения $F(p)$ в полюсе p_k имеет вид

$$\gamma_k(p) = \sum_{j=1}^{\mu_k} \frac{A_{jk}}{(p - p_k)^{\mu_k - j + 1}}$$

($j = 1$ соответствует наибольшей отрицательной степени, т.е. порядку полюса). Тогда функция

$$F_0(p) = F(p) - \sum_{k=1}^r \gamma_k(p)$$

является целой аналитической. При этом в ∞ все главные части $\gamma_k(p)$ обращаются в 0, функция $F(p)$ по условию также обращается в 0. Значит, $F_0(\infty) = 0$ и потому $F_0 \equiv 0$ как ограниченная целая функция. Таким образом, получаем представление

$$F(p) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{\mu_k} \frac{A_{jk}}{(p - p_k)^{\mu_k - j + 1}},$$

и нам остается в этом представлении в виде конечной суммы перейти к оригиналам почленно. Отметим, что для каждого $k = 1, \dots, r$ функция $(p - p_k)^{\mu_k} F(p)$ в окрестности точки p_k разлагается в ряд Тейлора

$$(p - p_k)^{\mu_k} F(p) = \sum_{j=1}^{\mu_k} A_{jk} (p - p_k)^{j-1} + \dots$$

Коэффициенты A_{jk} этого разложения могут быть найдены по стандартным формулам для коэффициентов Тейлора. ►

Следствие. Если $F(p)$ — рациональная функция с простыми полюсами p_1, \dots, p_r , обращающаяся в 0 в точке ∞ , $F(p) = A(p)/B(p)$ — несократимая дробь, то

$$F(p) \doteq \sum_{k=1}^r \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}.$$

◀ По условиям $\mu_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, r$, и мы получаем по теореме 6.4

$$F(p) \doteq \sum_{k=1}^r A_k e^{p_k t},$$

где

$$\begin{aligned} A_k &= \lim_{p \rightarrow p_k} (p - p_k) F(p) = \lim_{p \rightarrow p_k} A(p) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{(p - p_k)}{B(p)} = \\ &= A(p_k) \frac{1}{B'(p_k)}. \quad ▶ \end{aligned}$$

Теорема 6.5 (3-я теорема разложения). Пусть $F(p)$ — функция комплексного переменного, аналитическая в \mathbb{C} всюду, кроме некоторой конечной или счетной последовательности точек p_1, p_2, \dots , являющихся ее изолированными особыми точками, причем все эти точки расположены в некоторой левой полуплоскости $\operatorname{Re} p \leq \sigma_0$. Предположим:

1) существует такая последовательность радиусов $\{R_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{|F(p)|, |p| = R_n\} = 0;$$

2) функция $F(p)$ абсолютно интегрируема вдоль любой вертикальной прямой $\operatorname{Re} p = \sigma$, $\sigma > \sigma_0$.

Тогда $F(p)$ является изображением и

$$F(p) \doteq \sum_k \operatorname{res}\{F(p)e^{pt}, p = p_k\}. \quad (6.12)$$

◀ Условия теоремы позволяют применить теорему 6.2. Это значит, что $F(p)$ является изображением, оригинал для которого может быть получен по формуле обращения. Рассмотрим контур Γ_n , состоящий из отрезка прямой $\operatorname{Re} p = \sigma$ и дуги C_n окружности $|p| = R_n$, которая расположена слева от указанной прямой (рис. 6.6). Интеграл

$$\oint_{\Gamma_n} F(p) e^{pt} dp,$$

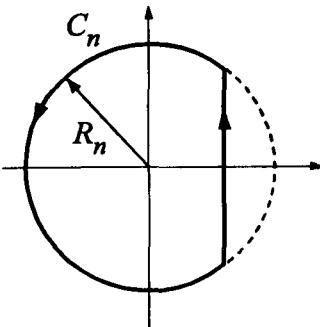


Рис. 6.6

взятый вдоль контура Γ_n против часовой стрелки, будет равен сумме вычетов функции по особым точкам p_k , попавшим внутрь контура. По лемме Жордана

$$\int_{C_n} F(p) e^{pt} dp \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \sum_k \operatorname{res}\{F(p)e^{pt}, p = p_k\},$$

что в силу теоремы 6.2 равносильно (6.12). ►

Замечание 6.12. Нетрудно убедиться, что справа в формуле (6.11) стоит сумма вычетов функции $F(p)e^{pt}$, так как

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \left\{ \frac{e^{pt}}{(p - p_k)^{\mu_k - j + 1}}, p = p_k \right\} &= \frac{1}{(\mu_k - j)!} \left. \frac{d^{\mu_k - j}}{dp^{\mu_k - j}} (e^{pt}) \right|_{p=p_k} = \\ &= \frac{t^{\mu_k - j}}{(\mu_k - j)!} e^{p_k t}. \end{aligned}$$

Поэтому 2-я теорема разложения может быть переформулирована в том же виде, что и 3-я. Однако эти теоремы различны, так как под условия 3-й теоремы разложения подпадают только те рациональные функции, у которых степень числителя меньше степени знаменателя минимум на 2. Например, для изображения r^{-1} функции Хевисайда применима 2-я теорема разложения, но не 3-я, так как в этой теореме нарушается условие 2 3-й теоремы. С другой стороны, 2-я теорема разложения неприменима, если функция имеет существенно особые точки, даже если общее число особых точек конечно.

Пример 6.11. Рациональная функция

$$F(p) = \frac{1}{(p-a)(p-b)^2}$$

является изображением, и соответствующий оригинал может быть получен на основании как теоремы 6.4, так и теоремы 6.5. Имеем

$$\begin{aligned} F(p) &= \text{res}\{F(p), p = a\} + \text{res}\{F(p), p = b\} = \\ &= \lim_{p \rightarrow a} [(p-a)F(p)e^{pt}] + \lim_{p \rightarrow b} \frac{d}{dp} [(p-b)^2 F(p)e^{pt}] = \\ &= \frac{e^{at}}{(a-b)^2} + \lim_{p \rightarrow b} \frac{d}{dp} \left(\frac{e^{pt}}{p-a} \right) = \\ &= \frac{e^{at}}{(a-b)^2} + \frac{te^{bt}}{b-a} - \frac{e^{bt}}{(b-a)^2}. \end{aligned}$$

6.5. Приложения операционного исчисления

Методы операционного исчисления могут быть использованы при интегрировании линейных дифференциальных уравнений и их систем. Применение основывается на теореме о дифференцировании оригинала. В случае уравнений в частных производных переход к изображениям осуществляется по

одной из переменных. Операционное исчисление может также применяться для решения некоторых типов интегральных уравнений.

*Линейные дифференциальные уравнения
с постоянными коэффициентами*

Для начала рассмотрим случай дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Обозначим через

$$D[x] = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x$$

произвольный линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, действующий в пространстве оригиналов. Наиболее просто решается задача Коши

$$\begin{cases} D[x](t) = f(t), \\ x^{(k)}(t_0) = x_0^k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (6.13)$$

Так как коэффициенты не зависят от времени, мы, не теряя общности, можем считать, что $t_0 = 0$. В противном случае можно от функции $x(t)$ перейти к функции $y(t) = x(t + t_0)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению с правой частью $f(t + t_0)$ и начальным условиям $y^{(k)}(0) = x_0^k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Предположим, что искомая функция $x(t)$ и ее производные до порядка n включительно, а также правая часть дифференциального уравнения $f(t)$ являются функциями-оригиналами. Тогда в дифференциальном уравнении можно перейти к изображениям. Если $x(t) = X(p)$, то по теореме о дифференцировании оригинала

$$\begin{aligned} x^{(k)}(t) &= p^k X(p) - p^{k-1} x_0^0 - \cdots - x_0^{k-1}, \\ k &= 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Поэтому в изображениях дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$\begin{aligned} &(p^n X - p^{n-1} x_0^0 - \cdots - x_0^{n-1}) + \\ &+ a_1(p^{n-1} X - p^{n-2} x_0^0 - \cdots - x_0^{n-2}) + \cdots + a_n X = F(p), \end{aligned}$$

где $f(t) = F(p)$. Перегруппируем левую часть:

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n)X - \\ - (p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \cdots + a_{n-1})x_0^0 - \cdots - x_0^{n-1} = F(p).$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} D(p) &= p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n, \\ \Delta_0 D(p) &= D(p), \\ \Delta_k D(p) &= \frac{\Delta_{k-1} D(p) - \Delta_{k-1} D(0)}{p}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$D(p)X - \Delta_1 D(p)x_0^0 - \cdots - \Delta_n D(p)x_0^{n-1} = F(p). \quad (6.14)$$

Мы получили в пространстве изображений линейное алгебраическое уравнение относительно неизвестного изображения X . Решая это уравнение, мы находим X , а по нему восстанавливаем искомую функцию $x(t)$.

Пример 6.12. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} x'' + x' = e^t, \\ x(1) = 1, \\ x'(1) = 2. \end{cases}$$

Так как начальные условия даны не при $t = 0$, ставим вспомогательную задачу для функции $y(t) = x(t+1)$:

$$\begin{cases} y'' + y' = e^{t+1}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2, \end{cases}$$

в которой левая часть дифференциального уравнения не изменяется, а правая часть и начальные условия корректируются преобразованием параллельного переноса.

Переходя к изображениям с учетом начальных условий, получаем

$$(p^2Y - p - 2) + (pY - 1) = \frac{e}{p-1},$$

где $y(t) \doteq Y(p)$, или

$$(p^2 + p)Y = \frac{e}{p-1} + p + 3.$$

Решая полученное уравнение, находим изображение искомой функции Y :

$$Y = \frac{e}{(p-1)(p^2+p)} + \frac{p+3}{p^2+p}.$$

По 2-й теореме разложения (случай простых полюсов) находим функцию $y(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(\frac{1}{2}e^{t+1} - e + \frac{1}{2}e^{-t+1} \right) + (3 - 2e^{-t}) = \\ &= \frac{1}{2}e^{t+1} + \left(\frac{e}{2} - 2 \right) e^{-t} + (3 - e). \end{aligned}$$

Наконец, сдвигом $y(t)$ находим решение исходной задачи:

$$x(t) = y(t-1) = \frac{1}{2}e^t + \left(\frac{e}{2} - 2 \right) e^{-t+1} + (3 - e).$$

Отметим, что все функции $\Delta_k D(p)$ являются многочленами, $\deg \Delta_k D(p) = n-k$. Многочлен $D(p)$ является характеристическим для дифференциального уравнения поставленной задачи. Деля соотношение (6.14) на $D(p)$, находим

$$X = \frac{F(p)}{D(p)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Delta_k D(p)}{D(p)} x_0^k. \quad (6.15)$$

Каждое слагаемое в сумме справа является рациональной функцией со степенью числителя, меньшей степени знаменателя. Такая рациональная функция является изображением. Если $f(t)$ — оригинал, то $F(p)$ — корректно определенное изображение, и первое слагаемое в (6.15) справа также является изображением как произведение двух изображений. Значит, уравнение в задаче (6.13) имеет решение в изображениях. Мы приходим к выводу, что если правая часть дифференциального уравнения в задаче Коши является функцией-оригиналом, то и ее решение также будет функцией-оригиналом.

Рассмотрим задачу Коши с чисто нулевыми начальными условиями:

$$\begin{cases} D[x](t) = f(t); \\ x^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1. \end{cases} \quad (6.16)$$

Тогда в правой части (6.15) останется только одно слагаемое:

$$X = \frac{F(p)}{D(p)}.$$

Для перехода к оригиналам мы можем использовать теорему о свертке:

$$x(t) = (f * \pi)(t) = \int_0^t \pi(\tau) f(t - \tau) d\tau,$$

где $\pi(t) := D(p)^{-1}$. Функцию $\pi(t)$ в приложениях операционного исчисления называют *передаточной функцией*. Передаточная функция — это ядро интегрального представления оператора $D^{-1}[x]$, действующего в пространстве функций с нулевыми начальными условиями и являющегося обратным к дифференциальному оператору $D[x]$.

Наряду с задачей (6.16) рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} D[x_1](t) = 1, \\ x_1^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1. \end{cases} \quad (6.17)$$

Для этой задачи находим решение в изображениях:

$$X_1(p) = \frac{1}{pD(p)}.$$

Это соотношение используем для представления изображения передаточной функции

$$\frac{1}{D(p)} = pX_1(p).$$

Решение задачи (6.16) может быть теперь записано в виде

$$X(p) = \frac{F(p)}{D(p)} = pF(p)X_1(p).$$

Для перехода к оригиналам в последнем соотношении используем интеграл Дюамеля:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)x'_1(t-\tau)d\tau \quad (6.18)$$

или

$$x(t) = \int_0^t f'(\tau)x_1(t-\tau)d\tau + f(+0)x_1(t). \quad (6.19)$$

Формулы (6.18) и (6.19), выражющие решение $x(t)$ задачи Коши (6.16) через решение вспомогательной задачи (6.17), называют **формулами Дюамеля**.

Если задача Коши сформулирована для однородного дифференциального уравнения ($f(t) = 0$) с ненулевыми начальными условиями, то ее решение в изображениях согласно (6.15) имеет вид

$$X = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Delta_k D(p)}{D(p)} x_0^k.$$

В общем случае можно использовать принцип суперпозиции и свести задачу (6.13) к двум вспомогательным задачам: первая — с нулевыми начальными условиями

$$\begin{cases} D[x_1](t) = f(t), \\ x_1^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1, \end{cases}$$

вторая — с однородным дифференциальным уравнением

$$\begin{cases} D[x_1](t) = 0, \\ x_1^{(k)}(0) = x_0^k, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1. \end{cases}$$

Сумма решений этих двух задач, как легко увидеть, будет решением (6.13).

Пример 6.13. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} x'' - x = \frac{1}{1 + e^t}, \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 2. \end{cases}$$

Особенностью этой задачи является трудность в определении изображения правой части. Однако можно по принципу суперпозиции разбить решение на сумму $x(t) = x_o(t) + x_n(t)$, где $x_o(t)$ — решение однородного уравнения с данными начальными условиями, $x_n(t)$ — решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями.

Функция $x_o(t)$ находится без затруднений как решение задачи Коши

$$\begin{cases} x'' - x = 0, \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 2. \end{cases}$$

Мы получаем $x_o(t) = \operatorname{ch} t + 2 \operatorname{sh} t$.

Функцию $x_n(t)$ можно выразить при помощи формулы Дюамеля

$$x_n(t) = \int_0^t f(\tau)x'_1(t-\tau)d\tau.$$

Функция $x_1(t)$ находится как решение задачи Коши

$$\begin{cases} x'' - x = 1, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Это решение имеет вид $x_1(t) = \operatorname{ch} t - 1$. Окончательно находим

$$x_n(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{sh}(t-\tau)}{1+e^\tau} d\tau = \frac{1}{2} \operatorname{ch} t \ln \frac{1+e^t}{2} + \frac{1}{2}(e^t - 1) - \frac{te^t}{2}.$$

Особенно эффективным операционное исчисление является тогда, когда правая часть дифференциального уравнения является составной функцией. Пусть $f(t)$ задана в виде

$$f(x) = \begin{cases} f_1(t), & 0 < t < a_2, \\ \vdots \\ f_{k-1}(t), & a_{k-1} < t < a_k, \\ f_k(t), & t > a_k. \end{cases}$$

При использовании традиционных методов мы должны были бы решить задачу на интервале $(0, a_2)$ с правой частью $f_1(t)$. Далее полученное решение нужно было бы использовать для постановки новых начальных условий задачи на интервале (a_2, a_3) и решать эту задачу с правой частью $f_2(t)$ и т.д.

С помощью запаздывающей функции Хевисайда мы можем представить составную функцию в виде суммы более простых оригиналов и воспользоваться свойством линейности преобразования Лапласа.

Пример 6.14. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} x'' + x = f(t), \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

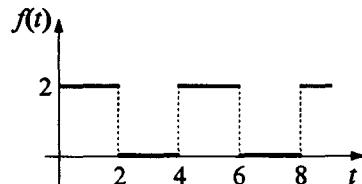


Рис. 6.7

с периодической правой частью $f(t)$, показанной на рис. 6.7.

Период правой части $T = 4$. Один „импульс“ описывается функцией $f_0(t) = 2[\eta(t) - \eta(t - 2)]$. Таким образом,

$$f(t) \doteq F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-4p}} = \frac{2}{1 - e^{-4p}} \left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-2p}}{p} \right) = \frac{2}{p(1 + e^{-2p})}.$$

Переходя к изображениям в дифференциальном уравнении, находим

$$(p^2 + 1)X = F(p) + p \iff X = \frac{F(p)}{p^2 + 1} + \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Оригинал для изображения $F(p)/(p^2 + 1)$ можно записать в виде ряда

$$\begin{aligned} \frac{F(p)}{p^2 + 1} &= \frac{2}{p(p^2 + 1)(1 + e^{-2p})} = \frac{2}{p(p^2 + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-2kp} = \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [1 - \cos(t - 2k)] \eta(t - 2k). \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$x(t) = \cos t + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [1 - \cos(t - 2k)] \eta(t - 2k).$$

Отметим, что сумма в представлении решения в каждой точке $t > 0$ имеет лишь конечное число ненулевых слагаемых и потому это представление корректно. Решение можно преобразовать в виде суммы периодической части с периодом 4, связанной с периодичностью правой части, и некоторой апериодической части. Такое представление, впрочем, не единственное. #

Общее решение линейного дифференциального уравнения может быть найдено как решение задачи Коши с произвольными начальными условиями.

Пример 6.15. Найдем общее решение уравнения $x'' + x = \sin t$. Для этого поставим задачу Коши

$$\begin{cases} x'' + x = \sin t, \\ x(0) = c_1, \\ x'(0) = c_2. \end{cases}$$

Переходя к изображениям, получаем

$$p^2 X - pc_1 - c_2 + X = \frac{1}{p^2 + 1} \iff (p^2 + 1)X = pc_1 + c_2 + \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Решая это уравнение, находим изображение искомой функции

$$X = \frac{p}{p^2 + 1}c_1 + \frac{c_2}{p^2 + 1} + \frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Переходя к оригиналам, получаем решение, зависящее от параметров c_1 и c_2 :

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t),$$

где

$$\frac{1}{2} (\sin t - t \cos t) = \frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Отметим, что общее решение неоднородного уравнения естественным образом распадается на сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями. #

Решение другого вида задач для обыкновенного дифференциального уравнения может быть получено на основе общего решения.

Пример 6.16. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} x'' + x = \sin t, & 0 < x < 1, \\ x(0) = 0, \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

На основе общего решения, полученного в предыдущем примере, получаем

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t).$$

Подставляя краевые условия, получаем систему алгебраических линейных уравнений относительно постоянных c_1 и c_2 :

$$x(0) = c_1 = 0,$$

$$x(1) = c_1 \cos 1 + c_2 \sin 1 + \frac{1}{2} (\sin 1 - \cos 1) = 1.$$

Решая эту систему, находим

$$c_2 = \frac{2 - \sin 1 + \cos 1}{2 \sin 1}.$$

Отметим, что левое краевое условие можно было учесть сразу, а взамен правого поставить дополнительное начальное с произвольным значением.

Системы дифференциальных уравнений

Интегрирование систем обыкновенных дифференциальных линейных уравнений проводится по той же схеме, что и одиночных уравнений. Если коэффициенты системы уравнений постоянны, то в изображениях мы получим систему линейных алгебраических уравнений. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 6.17. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} x'' + x' + y'' - y = e^t, \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t}, \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \\ x'(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Полагая $x(t) = X(p)$, $y(t) = Y(p)$, переходим к изображениям:

$$\begin{cases} (p^2 X - 1) + pX + p^2 Y - Y = \frac{1}{p-1}, \\ pX + 2X - pY + Y = \frac{1}{p+1} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (p^2 + p)X + (p^2 - 1)Y = \frac{1}{p-1} + 1, \\ (p+2)X - (p-1)Y = \frac{1}{p+1}. \end{cases}$$

Решение полученной системы не составляет особого труда: может быть использован любой из известных методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Получаем

$$\begin{cases} X = \frac{2p-1}{2(p-1)(p+1)^2}, \\ Y = \frac{3p}{2(p^2-1)^2}. \end{cases}$$

Переходя к оригиналам, например, при помощи 2-й теоремы

разложения, находим решение исходной задачи

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4} \operatorname{sh} t + \frac{3}{4} t e^{-t}, \\ y(t) = \frac{3}{4} t \operatorname{sh} t. \end{cases}$$

Отметим, что любая система дифференциальных уравнений может быть приведена к нормальному виду, т.е. преобразована в систему первого порядка по каждой неизвестной функции, разрешенную относительно производных. В нашем случае мы получаем систему, которая в векторной форме записывается в виде

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{(0)}, \end{cases}$$

где

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Переходя к изображениям, получаем

$$pX - \mathbf{x}^{(0)} = AX + \mathbf{F}$$

или

$$(pE - A)X = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{F},$$

где E — единичная матрица порядка n . Матрица $pE - A$ обратима для каждого значения p , для которого $\det(pE - A) \neq 0$, т.е. для всех значений p , кроме характеристических. Обратная матрица будет иметь своими элементами рациональные функции от p , являющиеся изображениями (особыми точками будут только характеристические числа, которых имеется конечное число). Поэтому получаем

$$X = (pE - a)^{-1} \mathbf{x}^{(0)} + (pE - a)^{-1} F.$$

Имея в виду, что матричные произведения справа — это суммы попарных произведений, переходим к оригиналам при помощи теоремы о свертке:

$$\mathbf{x}(t) = R(t) \mathbf{x}^{(0)} + \int_0^t R(t - \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau,$$

где $R(t)$ — оригинал для матрицы-изображения $(pE - A)^{-1}$. Матрица-оригинал $R(t)$ — это резольвента системы, или нормальная фундаментальная система решений соответствующей однородной системы: если мы положим $\mathbf{f} \equiv 0$ и $\mathbf{x}^{(0)} = (0, \dots, 1, \dots, 0)^\top$, где 1 стоит на k -м месте, то в качестве решения получим k -й столбец матрицы $R(t)$.

Пример 6.18. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} x' = x - y + \sin t, \\ y' = x + y + \cos t - \sin t - e^t, \\ x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Для этой задачи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t - e^t \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$(pE - A)^{-1} = \begin{pmatrix} p-1 & 1 \\ -1 & p-1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ = \frac{1}{(p-1)^2 + 1} \begin{pmatrix} p-1 & -1 \\ 1 & p-1 \end{pmatrix},$$

и резольвентой задачи является

$$R(t) = \begin{pmatrix} L^{-1}\left(\frac{p-1}{(p-1)^2+1}\right) & -L^{-1}\left(\frac{1}{(p-1)^2+1}\right) \\ L^{-1}\left(\frac{1}{(p-1)^2+1}\right) & L^{-1}\left(\frac{p-1}{(p-1)^2+1}\right) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} e^t \cos t & -e^t \sin t \\ e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Следовательно, решение имеет вид

$$x(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ + \int_0^t e^{t-\tau} \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & -\sin(t-\tau) \\ \sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t - e^t \end{pmatrix} dt = \\ = \begin{pmatrix} e^t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Отметим, что предложенное решение — не самое удачное, так как проще было бы непосредственно вычислить изображение $X(p)$ решения $x(t)$.

Дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

Операционное исчисление может быть полезно при интегрировании обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, если эти коэффициенты являются многочленами. При переходе к изображениям диф-

дифференцирование оригинала превращается в умножение на параметр p , а умножение оригинала на независимую переменную — в дифференцирование изображения. Поэтому при переходе к изображениям в дифференциальном уравнении с полиномиальными коэффициентами порядок уравнения и степень коэффициентов меняются местами, т.е. в изображениях мы получим уравнение, порядок которого будет равен максимальной степени коэффициентов, а степени коэффициентов будут не выше порядка исходного уравнения. Если максимальная степень коэффициентов меньше порядка исходного уравнения, мы получим в изображениях уравнение меньшего порядка, которое легче решить.

Пример 6.19. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Бесселя нулевого порядка

$$\begin{cases} tx'' + x' - \lambda^2 tx = 0, \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Полагая, что $x(t) = X(p)$, находим:

$$\begin{aligned} tx &= -X', \\ x' &= pX - 1, \\ x'' &= p^2 X - p, \\ tx'' &= -(p^2 X - p)' = 1 - p^2 X' - 2pX. \end{aligned}$$

В результате мы получаем в изображениях дифференциальное уравнение первого порядка

$$1 - p^2 x' - 2pX + pX - 1 + \lambda^2 X' = 0,$$

или

$$(\lambda^2 - p^2)X' - pX = 0,$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными. Решая его обычными методами, получаем

$$X(p) = \frac{C}{\sqrt{p^2 - \lambda^2}},$$

где выбирается ветвь корня, имеющая на действительной оси при $p > \lambda$ положительные значения.

Значение постоянной интегрирования C может быть найдено при помощи предельных значений для изображения

$$C = \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} pX(p) = \lim_{t \rightarrow +0} x(t) = 1.$$

Таким образом,

$$X(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 - \lambda^2}}.$$

Это изображение является аналитической функцией в окрестности ∞ . Поэтому оригинал может быть найден по 1-й теореме разложения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p^2 - \lambda^2}} &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{\lambda^2}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\lambda^{2n}}{p^{2n+1}} = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)! t^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} = I_0(\lambda t). \end{aligned}$$

Уравнения в частных производных

Операционный метод эффективно работает с линейными дифференциальными уравнениями в частных производных параболического и гиперболического типов. Преобразование проводится по переменной t , которая, как правило, предста-

вляет собой время (или может интерпретироваться как время). Такое преобразование позволяет понизить размерность задачи на 1.

Пример 6.20. Найдем распределение температуры в тонком полубесконечном стержне с изолированной боковой поверхностью, если его начальная температура равна 0 по всей длине, а на торце поддерживается постоянная температура u_0 .

Пусть $u(x, t)$ — температура стержня в точке с координатой x в момент времени t ($x = 0$ соответствует левому концу стержня, толщиной стержня пренебрегаем). Если коэффициент теплопроводности стержня постоянен по всей его длине и равен a , то процесс распределения теплоты по стержню приводит к следующей задаче для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u'_t = au''_{xx}, & t > 0, \quad x > 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0. \end{cases}$$

Рассматривая неизвестную функцию $u(x, t)$ как оригинал преобразования Лапласа по t , зависящий от параметра x , переходим к изображениям

$$\begin{cases} pU(x, p) = aU''_{xx}(x, p), & x > 0, \\ U(0, p) = \frac{1}{p}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} U(x, p) = 0. \end{cases}$$

Мы получили краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка. Решая эту задачу, находим

$$U(x, p) = \frac{1}{p} \exp\left(-\sqrt{p} \frac{x}{\sqrt{a}}\right).$$

По изображению восстанавливаем функцию-оригинал

$$u(x, t) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right),$$

где

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz.$$

Интегральные уравнения

Операционное исчисление может использоваться для решения *интегральных уравнений типа свертки*, имеющих вид

$$\int_0^t k(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t) \quad (6.20)$$

или

$$x(t) + \int_0^t k(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \quad (6.21)$$

Такого рода уравнения часто возникают в задачах математической физики. В уравнениях (6.20) и (6.21) $x(t)$ — неизвестная функция, $k(t)$ и $f(t)$ — некоторые заданные функции. В теории интегральных уравнений уравнение (6.20) называют *уравнением I рода*, а уравнение (6.21) — *уравнением II рода*.

Предполагая, что ядро $k(t)$ и правая часть $f(t)$ являются оригиналами преобразования Лапласа, можем перейти к изображениям. Сначала остановимся на уравнении I рода. В изображениях получим

$$K(p)X(p) = F(p),$$

где $k(t) \doteq K(p)$, $x(t) \doteq X(p)$, $f(t) \doteq F(p)$. Значит,

$$X(p) = \frac{F(p)}{K(p)}. \quad (6.22)$$

Правая часть соотношения (6.22) может не быть изображением. В этом случае интегральное уравнение I рода не имеет решений в классе функций-оригиналов преобразования Лапласа. Отметим, что уравнение I рода может не иметь решений и в более широких классах функций.

Уравнение II рода (6.21) в изображениях приводит к равенству

$$X(p) + K(p)X(p) = F(p),$$

из которого находим

$$X(p) = \frac{F(p)}{1 + K(p)} = F(p) - \frac{K(p)}{1 + K(p)}F(p).$$

Функция $K(p)/[1+K(p)]$ всегда является изображением. Если $q(t)$ — оригинал этого изображения, то решение уравнения (6.21) можно записать через свертку:

$$x(t) = f(t) - \int_0^t q(t-\tau)f(\tau) d\tau. \quad (6.23)$$

Пример 6.21. Найдем решение уравнения

$$\int_0^t (t-\tau)^{-\lambda} x(\tau) d\tau = f(t), \quad 0 < \lambda < 1,$$

предполагая, что функции $f(t)$ и $f'(t)$ являются оригиналами.

Ядро интегрального уравнения является функцией-ориги-

налом, причем

$$t^{-\lambda} \doteq \frac{\Gamma(1-\lambda)}{p^{1-\lambda}}.$$

Поэтому для изображения искомой функции (если, конечно, она является оригиналом, в чем мы убедимся далее) получаем

$$X(p) = \frac{F(p)}{K(p)} = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \frac{1}{p^\lambda} p F(p).$$

С помощью интеграла Диоамеля находим оригинал $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(\lambda)} \left[t^{\lambda-1} f(+0) + \int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1} f'(\tau) d\tau \right].$$

Пример 6.22. Найдем решение уравнения II рода с произвольной правой частью

$$x(t) + \int_0^t (t-\tau)x(\tau) d\tau = f(t).$$

Здесь ядром уравнения является функция $k(t) = t$, имеющая изображение $K(p) = p^{-2}$. Поэтому

$$\frac{K(p)}{1+K(p)} = \frac{1}{p^2+1},$$

следовательно, $q(t) = \sin t$. По формуле (6.23) находим решение уравнения в виде свертки с известным ядром:

$$x(t) = f(t) - \int_0^t \sin(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

6.6. Контрольные вопросы и упражнения

6.1. Является ли функция $f(t) = |t - 1|^{-1}\eta(t)$ оригиналом преобразования Лапласа?

6.2. Существуют ли функции-оригиналы преобразования Лапласа, не имеющие изображения?

6.3. Согласно линейности преобразования Лапласа получаем

$$L\left[\frac{1-e^t}{t}\right] = L\left[\frac{1}{t}\right] - L\left[\frac{e^t}{t}\right].$$

Верно ли такое утверждение?

6.4. Можно ли распространить каким-либо образом теорему подобия на случай $\alpha < 0$?

6.5. Докажите, что если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$e^{\beta t}f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p-\beta}{\alpha}\right).$$

6.6. Пусть $F(p)$ — изображение преобразования Лапласа. Является ли изображением функция $F^{(n)}(p)$?

6.7. Докажите, что если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$\frac{f(t)}{t^2} \doteq \int_p^\infty \int_s^\infty F(\rho)d\rho ds$$

(при условии, что $f(t)t^{-2}$ — оригинал).

6.8. Можно ли каким-либо образом распространить теорему запаздывания на случай отрицательного параметра?

6.9. Докажите, что для любого действительного числа λ

$$t^\lambda \doteq \frac{\Gamma(\lambda+1)}{p^{\lambda+1}}.$$

6.10. Докажите лемму Жордана.

6.11. Докажите следующую *теорему Эфроса*. Пусть $\varphi(t, \alpha)$ — функция, которая для каждого $\alpha > 0$ является оригиналом по переменной t , причем изображение ее можно представить в виде

$$\varphi(t, \alpha) = \Phi(p)e^{-\alpha\psi(p)},$$

где функция $\psi(p)$ отображает некоторую правую полуплоскость $\operatorname{Re} p > 0$ в себя. Тогда для любого оригинала $f(t)$, $f(t) = F(p)$ верно равенство

$$\int_0^{+\infty} f(\alpha)\varphi(t, \alpha)d\alpha = F(\psi(p))\Phi(p).$$

6.12. Пусть $f(t) = F(p)$. Докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} f(\tau) \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) d\tau = \frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}.$$

6.13. Выясните, является ли изображением функция

$$F(p) = \frac{1}{p(1+e^p)}.$$

Если да, найдите соответствующий ей оригинал.

Указание. Проанализируйте пример 6.14.

6.14. Докажите, что для любого изображения $K(p)$ функция $K(p)/[1 + K(p)]$ также является изображением.

6.15. Используя операционное исчисление, решите следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} u'_t = u''_{xx}, & x > 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u'_x(0, t) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0. \end{cases}$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Гамма-функция Эйлера

Интеграл

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx, \quad (\text{П1.1})$$

сходящийся для любого комплексного значения z в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, называется **эйлеровым интегралом II рода**. Функция $\Gamma(z)$, представленная этим интегралом, является аналитической в $\operatorname{Re} z > 0$. Эта функция называется **гамма-функцией Эйлера**.

Вычисляя интеграл (П1.1) по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx &= \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx^z = \\ &= (e^{-x} x^z) \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^z dx, \end{aligned}$$

получаем основное функциональное соотношение для гамма-функции

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (\text{П1.2})$$

Учитывая очевидное равенство $\Gamma(1) = 1$, при помощи соотношения (П1.2) получаем

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)\dots(z+1)\Gamma(z) \quad (\text{П1.3})$$

и

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

где n — натуральное число.

Соотношение (П1.3) позволяет построить аналитическое продолжение гамма-функции на всю плоскость. При этом продолженная функция будет в точках $0, -1, -2, \dots$ иметь полюсы. В самом деле,

$$\Gamma(z)(z+n) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n-1)\dots z}.$$

Но в правой части записана функция, аналитическая в некоторой окрестности точки $z = -n$. Поэтому при $z = -n$ гамма-функция имеет простой полюс с вычетом

$$\text{res}\{\Gamma(z), z = -n\} = \Gamma(z)(z+n)|_{z=-n} = \frac{\Gamma(1)}{(-1)\dots(-n)} = \frac{(-1)^n}{n!},$$

где $n = 0, 1, 2 \dots$

Имеется еще одно функциональное соотношение для гамма-функции:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad (\text{П1.4})$$

Из этого соотношения непосредственно вытекают формулы

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} (2n-1)!! , \quad n = 1, 2, \dots$$

Из соотношения (П1.4) также вытекает, что гамма-функция нигде в комплексной плоскости не обращается в 0. Это значит, что функция $1/\Gamma(z)$ является целой аналитической функцией с простыми нулями в точках $0, -1, -2, \dots$ Эта функция может быть представлена в виде бесконечного произведения

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{Cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{1}{k}}, \quad (\text{П1.5})$$

где $C = 0,5772157 \dots$ — *постоянная Эйлера*,

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

Логарифмируя соотношение (П1.5) и дифференцируя результат по z , можно получить формулу

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = -C - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} \right). \quad (\text{П1.6})$$

В частности,

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - C.$$

2. Интеграл Римана — Стильтьеса

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы ограниченная функция $f(x)$ и монотонно возрастающая функция $\sigma(x)$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на частичные интервалы точками x_i , где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, и составим следующую интегральную сумму:

$$S_n(f; \sigma) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta\sigma_i,$$

в которой точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ могут выбираться произвольно, а $\Delta\sigma_i = \sigma_i - \sigma_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Если составленная интегральная сумма имеет предел, когда $\max(x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$ и, следовательно, $n \rightarrow \infty$, причем этот предел не зависит от выбора точек ξ_i на интервалах разбиения, то он называется **интегралом Римана — Стильтьеса** функции f на отрезке $[a, b]$ относительно σ . Обозначается этот интеграл как

$$\int_a^b f d\sigma \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x) d\sigma(x).$$

Если $\sigma(x) \equiv x$, то интеграл Римана — Стильтьеса представляет собой не что иное, как обычный интеграл Римана. В общем случае функция $\sigma(x)$ может не быть даже непрерывной. Однако если $\sigma \in C^1[a, b]$, то интеграл Римана — Стильтьеса сводится к интегралу Римана $\int_a^b f(x)\sigma'(x) dx$.

Интеграл Римана — Стильтьеса существует, если:

- а) $f \in C[a, b]$;
- б) f монотонна на $[a, b]$, а $\sigma \in C[a, b]$.

Интеграл Римана — Стильтьеса, как и всякий другой тип интеграла, обладает свойствами:
линейностью

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) d\sigma = c_1 \int_a^b f_1 d\sigma + c_2 \int_a^b f_2 d\sigma,$$

$$\int_a^b f d(c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2) = c_1 \int_a^b f d\sigma_1 + c_2 \int_a^b f d\sigma_2;$$

сравнением

$$f_1(x) \leq f_2(x) \implies \int_a^b f_1 d\sigma \leq \int_a^b f_2 d\sigma;$$

аддитивностью

$$\int_a^b f d\sigma = \int_a^c f d\sigma + \int_c^b f d\sigma.$$

К этому можно добавить, что произведение интегрируемых относительно σ функций является интегрируемой относительно σ . Если f интегрируема относительно σ , то и $|f|$ интегрируема относительно σ , причем

$$\left| \int_a^b f d\sigma \right| \leq \int_a^b |f| d\sigma.$$

Определение интеграла Римана — Стильтьеса на самом деле не использует свойства монотонного возрастания функции σ , но от этого свойства зависит существование интеграла. Тем не менее все свойства интеграла легко переносятся на случай, когда функция σ является монотонно убывающей или, более общо, является разностью двух монотонно возрастающих функций (исключение составляют свойства, связанные с неравенствами, которые обобщаются с использованием понятия полной вариации функции).

Если в качестве функции σ рассмотреть „единичную ступенчатую“ функцию

$$\eta(x - x_0) = \begin{cases} 1, & x \geq x_0, \\ 0, & x < x_0, \end{cases}$$

то получим, что интеграл Римана — Стильтьеса сводится к значению подынтегральной функции в точке x_0 :

$$\int_a^b f(x) d\eta(x - x_0) = f(x_0), \quad x_0 \in (a, b).$$

Это обобщается на общий случай функции скачков, которая локально постоянна всюду, кроме некоторого набора точек, являющихся для нее точками разрыва I рода. Такая функция может быть записана в виде ряда при помощи единичных ступенчатых функций

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \eta(x - x_k),$$

в котором c_k — это величины скачков функции σ в точках $x_k \in (a, b)$. Количество скачков может быть конечно, тогда этот ряд превратится в конечную сумму.

Если функция σ представлена этим рядом, то соответствующий интеграл Римана — Стильтьеса сводится к ряду

$$\int_a^b f d\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f(x_k).$$

Любая кусочно непрерывная функция $\sigma(x)$ может быть разложена в сумму некоторой непрерывной функции $\sigma_c(x)$ и функции скачков $\sigma_s(x)$, причем такое разложение единствено. Если непрерывная часть этого разложения $\sigma_c(x)$ имеет кусочно непрерывную производную, то интеграл Римана — Стильтьеса от нее сводится к интегралу Римана.

Таким образом, интеграл Римана — Стильтьеса распадается в сумму некоторого ряда, соответствующего функции скачков, и обычного интеграла, соответствующего непрерывной составляющей. В частном случае получается просто ряд (для функции скачков) или просто интеграл (для непрерывной функции с кусочно непрерывной производной).

3. Основные правила операционного исчисления

Основные теоремы

Наименование	Формула
Преобразование Лапласа	$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$
Преобразование Меллина	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp$
Линейность	$\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(t) \doteq \sum_{i=1}^k \alpha_i F_i(p)$
Теорема подобия	$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0$
Теорема смещения	$e^{\alpha t} f(t) \doteq F(p - \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{C}$
Теорема запаздывания	$f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p), \quad \tau > 0$
Дифференцирование оригинала	$f'(t) \doteq pF(p) - f(+0)$
Интегрирование оригинала	$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{p} F(p)$

Наименование	Формула
Дифференцирование изображения	$-t f(t) \doteq F'(p)$
Интегрирование изображения	$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^{\infty} F(p) dp$
Теорема о свертке	$f(t) * g(t) \doteq F(p)G(p)$
Пределевые соотношения	$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(+0),$ $ \arg p \leq \alpha < \frac{\pi}{2},$ $\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = f(+\infty),$ $ \arg p \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$

Оригиналы и изображения

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad t^\nu \doteq \frac{\Gamma(\nu + 1)}{p^{\nu+1}} \quad (\nu \in \mathbb{R})$$

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \qquad \cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$\operatorname{sh} \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} \qquad \operatorname{ch} \omega t \doteq \frac{p}{p^2 - \omega^2}$$

$$e^{\lambda t} \doteq \frac{1}{p - \lambda} \qquad t^n e^{\lambda t} \doteq \frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}$$

$$e^{\lambda t} \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2} \qquad e^{\lambda t} \cos \omega t \doteq \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$$

$$t^n \sin \omega t \doteq \frac{n! \operatorname{Im}[(p + \omega i)^{n+1}]}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad t^n \cos \omega t \doteq \frac{n! \operatorname{Re}[(p + \omega i)^{n+1}]}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\sin \omega \sqrt{t} \doteq \frac{\omega \sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}} e^{-\frac{\omega^2}{4p}} \qquad \frac{\cos \omega \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \doteq \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\frac{\omega^2}{4p}}$$

$$\operatorname{sh} \omega \sqrt{t} \doteq \frac{\omega \sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}} e^{\frac{\omega^2}{4p}} \qquad \frac{\operatorname{ch} \omega \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \doteq \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{\frac{\omega^2}{4p}}$$

$$\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{\lambda^2}{4t}} \doteq e^{-\lambda \sqrt{p}} \quad (\lambda > 0) \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\lambda^2}{4t}} \doteq \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\lambda \sqrt{p}} \quad (\lambda > 0)$$

$$J_0(t) \doteq \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \qquad J_0(2\sqrt{\lambda t}) \doteq \frac{1}{p} e^{-\frac{\lambda}{p}}$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники и сборники задач

Волков И.К., Загоруйко Е.А., Фаликова И.Д. Задачи математической физики и их решение методом интегральных преобразований: Учебное пособие. – М.: Изд-во МГТУ, 1994. – 64 с.

Волков И.К., Загоруйко Е.А., Фаликова И.Д. Операционное исчисление: Учебное пособие. – М.: Изд-во МГТУ, 1993. – 58 с.

Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1966. – 406 с.

Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.

Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 708 с.

Краснов М.Л., Киселев Л.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Задачи и упражнения. – М.: Наука, 1981. – 215 с.

Лебедев Н.Н., Скальская И.П., Уфлянд Я.С. Сборник задач по математической физике. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 420 с.

Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с.

Смеддон И. Преобразования Фурье. – М.: ИЛ, 1955. – 668 с.

Шостак Р.Я. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1972. – 252 с.

Монографии

Джербашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 672 с.

Коренев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 290 с.

Коренев Б.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 460 с.

Кузнецов Д.С. Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1962. – 248 с.

Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма — Лиувилля и Дирака. – М.: Наука, 1988. – 432 с.

Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1968. – 402 с.

Штокало И.З. Операционное исчисление. – Киев: Наукова думка, 1972. – 304 с.

Справочники

Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1966. – 296 с.

Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. I. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – М.: Наука, 1969. – 344 с.

Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. II. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. – М.: Наука, 1970. – 328 с.

Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению.
— М.: Высшая школа, 1965. — 468 с.

Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна. — М.: Наука, 1972. — 544 с.

Периодическая литература

Зарубин В.С. Оптимальная толщина охлаждаемой стенки, подверженной
местному нагреву // Известия вузов. Машиностроение, 1970. — № 10,
— С. 18–21.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ¹

- Гамма-функция Эйлера 211
Задача Коши VIII
– Штурма — Лиувилля 35
– – регулярная 51
– – сингулярная 52
Изображение 97
– по Лапласу 154
Интеграл Диамеля 171
– Лапласа 154
– Меллина 159
– Римана — Стильтеса 214
– Эйлера II рода 211
Лемма Жордана 162
Оператор интегральный 97
– – , ядро 97
– линейный дифференциальный 38
– самосопряженный 38
– Штурма — Лиувилля 35
– – непрерывный спектр 65
– – собственные функции 36
– – , спектральная функция 65
– – точечный спектр 65
Оригинал 97
– по Лапласу 154
– – , свертка 171
– составной 178
Постоянная Эйлера 213
Преобразование интегральное 97
– – Вебера 130
– – Ганкеля 129
– – Лапласа 154
– – Меллина 132
– – на неограниченном промежутке 110
– – на ограниченном промежутке 104
– – Фурье косинус 125
– – – синус 126
– – – смешанное 123
– – – экспоненциальное 121
– – , ядро 97
Пространство изображений 97
– оригиналов 97

¹ По каждому термину приводится номер страницы книги, на которой термин определен (в этом месте он выделен полужирным курсивом), или номер выпуска, в котором дается объяснение термина.

- Разложение Ганкеля 92
- Резольвента 67
- Решение Вейля 59
- Система функций замкнутая IX
- полная IX Спектр непрерывный 66
 - точечный 65
- Спектральная функция 65
- Теорема Гильберта — Шмидта XV
- запаздывания 167
 - о дифференцировании изображения 171
 - о дифференцировании оригинала 169
 - об интегрировании изображения 170
 - об интегрировании оригинала 168
 - подобия 167
 - смещения 167
 - Эфроса 210
- Теоремы разложения 181
- Тождество Лагранжа 37
- Уравнение Бесселя 13
- модифицированное 30
 - интегральное типа свертки 206
 - I рода 206
- II рода 206
- Условия Дирихле 121
- Формула Ганкеля 92
- Грина 41
 - Дюамеля 193
 - Римана — Меллина 159
- Фундаментальная система решений III
- Функции Бесселя 16
- Ганкеля 29
 - Макдональда 31
 - цилиндрические I рода 16
 - II рода 24
 - III рода 29
 - модифицированные 31
- Функция абсолютно интегрируемая VI
- Вейля — Титчмарша 69
 - Грина 43
 - кусочно монотонная 122
 - кусочно непрерывная 121
 - , неограниченный рост 157
 - передаточная 192
 - , порядок роста 156
 - спектральная 65
 - Хевисайда 156

Латинский алфавит*

<i>A</i>	<i>a</i>	а	<i>J</i>	<i>j</i>	йот	<i>S</i>	<i>s</i>	эс
<i>B</i>	<i>b</i>	бэ	<i>K</i>	<i>k</i>	ка	<i>T</i>	<i>t</i>	тэ
<i>C</i>	<i>c</i>	цэ	<i>L</i>	<i>l</i>	эль	<i>U</i>	<i>u</i>	у
<i>D</i>	<i>d</i>	дэ	<i>M</i>	<i>m</i>	эм	<i>V</i>	<i>v</i>	вэ
<i>E</i>	<i>e</i>	е	<i>N</i>	<i>n</i>	эн	<i>W</i>	<i>w</i>	дубль-вэ
<i>F</i>	<i>f</i>	эф	<i>O</i>	<i>o</i>	о	<i>X</i>	<i>x</i>	икс
<i>G</i>	<i>g</i>	же	<i>P</i>	<i>p</i>	пэ	<i>Y</i>	<i>y</i>	игрек
<i>H</i>	<i>h</i>	аш	<i>Q</i>	<i>q</i>	ку	<i>Z</i>	<i>z</i>	зэт
<i>I</i>	<i>i</i>	и	<i>R</i>	<i>r</i>	эр			

* Представлен наиболее употребительный (но не единственный) вариант русского произношения латинских букв (в частности, вместо „йот“ иногда говорят „жи“).

Греческий алфавит*

<i>A</i>	α	альфа	<i>I</i>	ι	йота	<i>P</i>	ρ	ро
<i>B</i>	β	бета	<i>K</i>	κ	каппа	<i>S</i>	σ	сигма
<i>Г</i>	γ	гамма	<i>Л</i>	λ	ламбда	<i>T</i>	τ	тау
<i>Δ</i>	δ	дельта	<i>M</i>	μ	ми	<i>Υ</i>	υ	ипсилон
<i>Е</i>	ε	эпсилон	<i>N</i>	ν	ни	<i>Φ</i>	φ	фи
<i>Z</i>	ζ	дзета	<i>Ξ</i>	ξ	кси	<i>Х</i>	χ	хи
<i>Н</i>	η	эта	<i>Ο</i>	\circ	омикрон	<i>Ψ</i>	ψ	пси
<i>Θ</i>	ϑ	тэта	<i>Π</i>	π	пи	<i>Ω</i>	ω	омега

* Наряду с приведенным вариантом произношения также говорят „лямбда“, „мю“, „ню“.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Основные обозначения	6
Вопросы для самопроверки	8
Введение	10
1. Цилиндрические функции	13
1.1. Уравнение Бесселя	13
1.2. Цилиндрические функции I рода (функции Бесселя)	16
1.3. Цилиндрические функции II рода	23
1.4. Цилиндрические функции III рода	28
1.5. Модифицированные цилиндрические функции	30
1.6. Контрольные вопросы и упражнения	33
2. Задача Штурма — Лиувилля	35
2.1. Постановка задачи	35
2.2. Линейные дифференциальные операторы 2-го порядка	38
2.3. Обращение оператора Штурма — Лиувилля	40
2.4. Контрольные вопросы и упражнения	49
3. Сингулярная задача Штурма — Лиувилля	51
3.1. О постановке задачи	51
3.2. Собственные функции сингулярной задачи	53
3.3. Разложение по собственным функциям	62
3.4. Границные условия для сингулярного конца	70
3.5. Двусторонняя сингулярная задача	73
3.6. Контрольные вопросы и упражнения	77

4. Разложения по функциям Бесселя	79
4.1. Разложение на промежутке $[a, +\infty)$	80
4.2. Разложение на промежутке $(0, a]$	82
4.3. Разложение на промежутке $(0, +\infty)$	90
5. Интегральные преобразования	97
5.1. Общие положения	97
5.2. Интегральное преобразование для линейного дифференциального оператора 2-го порядка	99
5.3. Интегральное преобразование на отрезке	104
5.4. Интегральное преобразование на полуограниченном или неограниченном интервале	110
5.5. Основные интегральные преобразования на неограниченных интервалах	121
5.6. Применение интегральных преобразований на примере некоторых задач математической физики	135
5.7. Контрольные вопросы и упражнения	150
6. Операционное исчисление	153
6.1. Преобразование Лапласа	154
6.2. Основные теоремы операционного исчисления	166
6.3. Изображения элементарных функций-оригиналов	176
6.4. Теоремы разложения	181
6.5. Приложения операционного исчисления	188
6.6. Контрольные вопросы и упражнения	209
Приложения	211
1. Гамма-функция Эйлера	211
2. Интеграл Римана — Стильтеса	214
3. Основные правила операционного исчисления	217
Список рекомендуемой литературы	220
Предметный указатель	223
Латинский алфавит	225
Греческий алфавит	225

Учебное издание

**Волков Игорь Куприянович
Канатников Анатолий Николаевич**

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

Редактор *Л.М. Элькинд*
Художник *С.С. Водчиц*
Корректор *Л.И. Малютина*

ЛР № 020523 от 23.04.92

Сдано в набор 15.04.96. Подписано в печать 20.09.96.
Формат 60×88 1/16. Печать офсетная. Бумага офсетная № 1.
Усл. печ. л. 13,82. Уч.-изд. л. 13,14.
Тираж 2000 экз. Изд. № 121. Заказ № 3519

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана,
107005, г. Москва, 2-я Бауманская, 5.

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
140010, г. Люберцы, Октябрьский пр., 403