Т. Р. ТЎЛАГАНОВ

ЭЛЕМЕНТАР МАТЕМАТИКА

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА

Ўзбекистон Республикаси Халқ таълими вазирлиги педагогика институтлари ва университетлар учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1997

Тақризчилар:

педагогика фанлари номзоди *А. Акмалов*,
педагогика фанлари номзоди *М. Раемов.*

Ўқув қўлланма элементар математика курсининг асосий бўлимларини ўз ичига олган бўлиб, натурал сонлар ва улар устида амаллар, сонларнинг бўлиниши, бирлашмалар, ҳақиқий ва комплекс сонлар, улар устидаги амаллар, тенглама ва тенгсизликлар, функциялар мавзулари ёритилган. Ҳар бир мавзу бўйича намуна учун таҳлил этилган мисол ва масалалар, шунингдек мустақил ечиш учун мисол ва масалалар келтирилган.

Педагогика институтлари ва университетлар талабалари учун мўлжалланган.

Т 83

Тўлаганов Т. Р.

Элементар математика: Арифметика, алгебра: Пед. ин-тлари ва ун-тлар учун ўқув қўлланма.— Т.: Ўқитувчи, 1997.—272 б.

ББК 22.10

$\text{Т}\ \dfrac{4306010500-254}{353(04)-97}\ 161-96$

ISBN 5—645—02605—5

СЎЗ БОШИ

Педагогика институтлари ва университетларнинг математика, математика — физика, математика — информатика мутахассислиги бўлимларида ўқув режасига элементар математика курсининг киритилиши, ўзбек тилида бу мавзу бўйича дарсликнинг йўқлиги бу қўлланманинг яратилишига сабаб бўлди. Бу курснинг мазмуни арифметиканинг асосий тушунчаларини қарашдан бошланади. Энг олдин натурал сонлар ва улар устида арифметик амалларнинг бажарилиши кўрилиб, сонларнинг бўлиниши, ЭКУБ ва ЭКУКлар ҳақида маълумотлар берилади. Сўнгра каср сонлар тушунчаси киритилади, шу сонлар устида бажариладиган амаллар, муносабатлар ҳақида маълумотлар берилади. Бу тушунчалар пухта ўрганилганидан сўнг бирлашмалар (комбинаторика) ҳақида маълумот берилиб, такрорланадиган ва такрорланмайдиган бирлашмалар қаралади. Сўнгра шунга тааллуқли тенглама ва тенгсизликларнинг ечилишининг кўрсатилиши талабаларнинг олдинги боблардан олган билимларининг яна ҳам бойитилишига имкон беради. Бу курсга тақрибий ҳисоб, ҳақиқий сон, комплекс сон тушунчалари ва улар устида амалларнинг бажарилиш тартиби, айнан алмаштиришлар ҳам киритилган.

Тенглама ва тенгсизликларни иложи борича кенгроқ ўрганишга ҳаракат қилиниши талабаларнинг шу соҳага тааллуқли масалаларни тўғри ҳал қила олишларига шароит яратади. Сонли кетма-кетликлар ҳақида қисқача маълумот берилиши математик анализ (таҳлил) курсини ўрганишда талабаларга анча ёрдам беради ва мактаб математикасидаги маълумотлар умумлаштирилади. Бу курсни баён қилишда шу соҳанинг юқори малакали мутахассисларининг фикрлари ва илғор тажрибалари инобатга олинди. Бундан қўйилган асосий мақсад:

1) иложи борича мактаб математика курси маълумотларини илмий нуқтаи назардан тўлдириб, баён қилиш;

2) олий математиканинг айрим масалларини ҳал қилишга пропедевтика яратиш;

3) мактаб учун зарур, лекин олий математикада алоҳида атрофлича қаралмайдиган масалаларни муфассал ёритишдан иборат бўлди.

Қўлланмани тайёрлашда шу соҳада маълум бўлган адабиётлардан атрофлича фойдаланилди. Бунда қуйидаги белгилашлар ишлатилади:

1. $\boldsymbol{N}$ — натурал сонлар тўплами;
2. $\boldsymbol{Z}$ — бутун сонлар тўплами;
3. $\boldsymbol{Q}$ — рационал сонлар тўплами;
4. $\boldsymbol{R}$ — ҳақиқий сонлар тўплами;
5. $\boldsymbol{C}$ — комплекс сонлар тўплами;
6. $\{x \mid \cdots\}$ — хосса билан берилган x сонлар тўплами;
7. ∂f, T, H (∂f- 8, T_4, H_3 мос равишда 8- таърифга, 4- теоремага, 3- хоссага кўра);
8. $\wedge$ — коньюнкция белгиси (ва);
9. $\vee$ — дизьюнкция белгиси (ёки);
10. $\forall$ — умумийлик квантори («ихтиёрий»);
11. $\exists$ — мавжудлик квантори («мавжуд»);
12. $g(x) \mid \varphi(x)$ — $\varphi(x)$ кўпҳад $g(x)$ кўпҳадга қолдиқсиз бўлинади;
13. $a \vdots b$ — a сон b сонга қолдиқсиз бўлинади.

Муаллиф

I боб. **НАТУРАЛ СОНЛАР**

1-§. АРИФМЕТИКАНИНГ ФАН СИФАТИДА ҚАРАЛИШИ

Арифметикани ўрганиш математика фанини ўрганишнинг асосий босқичларидан биридир. Арифметикани атрофлича ва чуқур ўрганиш математикани ўрганишнинг муҳим калитидир. Арифметика деган ном грекча сон маъносини билдирадиган «аритмос» сўзидан олинган бўлиб, у сонлар ҳақидаги фандир. Арифметикада сонларнинг энг содда хоссалари ва ҳисоблаш қоидалари ўрганилади. Сонларнинг мураккаброқ хоссалари билан математиканинг «Сонлар назарияси» бўлими шуғулланади.

Шунга кўра, арифметикада натурал (N), бутун (Z), рационал (Q), ҳақиқий (R), комплекс (C) сонлар устида бажариладиган арифметик амал ва муносабатларни қараш билан бирга прогрессия ва бирлашмаларнинг киритилиши арифметика фани ўрганадиган объектнинг кенгайишига, чуқурлашишига катта ёрдам беради. Маълумки, ўрта мактаб математика курсида сонлар тушунчасини ўрганиш билан бирга сонли тўпламни ҳам ўрганамиз. Масалан, натурал сонлар тўпламини $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ кўринишда тасвирлаймиз, бу ерда n сони N тўплам элементи ёки n сони N тўпламга тегишли ($n \in N$) экани бизга маълум. Агар бизга $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_4\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ сонли тўпламлар берилган бўлса, у ҳолда A билан B нинг *бирлашмаси* ($A \cup B$) шу A ёки B тўплам элементларидан, A билан B нинг *кесишмаси* ($A \cap B$) A ва B тўплам элементларидан иборат тўплам бўлади. Масалан, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ берилган бўлса, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ёки $A \cap B = \{3, 4\}$ бўлади. Агар тўпламнинг элементлари бўлмаса, уни *бўш тўплам* ($\varnothing$) деб қаралади. Арифметикада асосан сонли тўпламлар устида қўшиш, айириш, бўлиш, даражага кўтариш, илдиз чиқариш, логарифмлаш амалларининг бажарилиши сабабли бу амалларнинг хоссаларини ўрганиш, уларнинг бажарилиш техникаси билан танишиш арифметикани ўрганишнинг асосий қисмини ташкил қилади. Биз ўрганадиган арифметика ўзининг тузилиши, ундаги математик маълумотларнинг мазмуни ва вазифаси жиҳатидан ўрта мактаб математикасининг қуйи синфларда ўрганилган арифметика маълумотларидан кескин фарқ қилиши билан бирга шу синфларда олинган математик маълумотларга ҳам таянади. Ўрта мактаб математикасида, умуман математикада ўрганиладиган математик қонун ва қоидалар тил нуқтаи назаридан дарак гаплар бўлиб, уларни мазмуни жиҳатидан шартли равишда — мулоҳазалар, мулоҳазавий формалар ва таърифлар тўпламларига ажратиш мумкин. Масалан, 30 сони 5 га қолдиқсиз бўлинади — бу рост мулоҳаза, Самарқанд Россиянинг пойтахти —бу ёлғон мулоҳаза. Агар $x \in \boldsymbol{R}$ бўлса, $x^2—5x+6=0$ бўлади—бу мулоҳазавий форма, чунки $x^2 - 5x + 6 = 0$ тенгламада $3 \in \boldsymbol{R}$ ёки $2 \in \boldsymbol{R}$ сонларини x нинг ўрнига қўйиб, тегишли амалларни бажарсак, у тўғри тенгликка айланади ва ҳ. к.

1-таъриф. *Рост ёки ёлғонлиги бир қийматли аниқланадиган дарак гап мулоҳаза дейилади.*

Мулоҳазалар ўзининг тузилишига кўра содда ва мураккаб бўлади. Масалан, 25 сони 5 нинг квадрати — бу содда мулоҳаза, агар берилган натурал сон 3 га ва 2 га қолдиқсиз бўлинса, у ҳолда у 6 га ҳам қолдиқсиз бўлинади — бу мураккаб мулоҳазадир.

Одатда, мураккаб мулоҳаза ёки мулоҳазавий формалар қуйидаги боғловчилар ёрдамида ҳосил қилиниши мумкин:

. . . эмас, . . . ёки . . . , . . . ва . . . , . . . бўлса, . . . у ҳолда . . . , . . . фақат ва фақат шунда . . . . Бу боғловчилар мулоҳаза ёки мулоҳазавий формаларни соддалаштиришда муҳим аҳамиятга эга. Агар олиб борилаётган бу фикрлашнинг мазмунига аҳамият берилса, барча мулоҳазаларни рост ёки ёлғонлиги жиҳатидан ушбу икки элементли тўпламга аксланишини кўриш мумкин: $\{\text{ёлғон, рост}\} = \{0, 1\}$,

Математикада мулоҳазалардан ташқари мулоҳазавий формалар ҳам қаралади. Мулоҳазавий формаларнинг таркибига номаълумлар ёки предмет ўзгарувчилар киради.

2-таъриф. *Мулоҳазавий форма деб таркибига бирор тўпламнинг предмет ўзгарувчилари кирган ва бу ўзгарувчиларни шу тўпламнинг аниқ элементлари билан алмаштирилганда мулоҳазага айланувчи дарак гапга айтилади.*

Масалан, P — «x туб сон» — деган шарт N да қаралаётган бўлса, у ҳолда $P(x)$ дарак гап мулоҳазавий шакл бўлади. Чунки $x=2$ бўлса, $P(2)\equiv 1$ рост, $x=4$ бўлса, $P(4)\equiv 0$ — ёлғон бўлади.

Тўплам ўзининг тузилишига ва элементларининг сонига кўра ҳар хил бўлиши мумкин. $A\{a_1, a_2, a_3\}$ ва $B=\{b_1, b_2\}$ тўпламлар берилган бўлсин. Бу тўпламларнинг *тўғри кўпайтмаси* ёки *Декарт кўпайтмаси*

$$A\times B=\{(a_1, b_1); (a_1, b_2); (a_2, b_1); (a_2, b_2); (a_3, b_1);$$

$$(a_3, b_2)\}=\{(a_i, b_j)\mid a_i\in A\wedge b_j\in B, i=\overline{1,3}, j=1,2\}$$

кўринишида бўлади. Бу ерда, агар $A=B$ бўлса, у ҳолда $A\times A=A^2$ бўлади. $\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{n}=A^n$ ни, одатда A тўпламнинг *n-даражали тўғри кўпайтмаси* дейилади ва

$$A^n=\{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\mid a_i\in A, i=\overline{1,n}\}$$

кўринишда ёзилади.

3-таъриф. A^n *тўпламнинг исталган P* қисм тўплами *A тўпламда аниқланган n-ар муносабат дейилади* ва *қуйидагича ёзилади*: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)\in P$.

A тўпламдан олинган $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ элементлар P муносабатда жойлашган деб қаралади.

4-таъриф. *A тўпламда аниқланган n-ар амал деб A^n тўпламни A тўпламга бир қийматли акслантирувчи α акслантиришга айтилади ва қуйидагича ифодаланади*:

$$\alpha: A^n\to A, \alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n)=a, a_i\in A, i=$$
$$=\overline{1,n}, a\in A.$$

Таърифдан келиб чиқиб, $n=1, 2, 3\ldots$ бўлган ҳолларда тегишли амаллар *унар, бинар, тернар*, ... дейилади. Демак, берилган бир неча (хусусий ҳолда иккита) сон бўйича маълум қоидага асосан янги бир сонни топиш *амал* деб аталади. Масалан, $f(5,3)=5+3=8$; $\varphi(81,4)=\sqrt[4]{81}=3$, $\psi(3,2)=3^2=9$ ва ҳоказо. Лекин бажарилаётган амалнинг характери у қайси сонли тўпламда бажарилишига боғлиқдир. Агар амалнинг бажарилиши натижасида биргина сон келиб чиқса, амал *бир қийматли*, агар бир неча сон келиб чиқса, амал *кўп қийматли* дейилади. Маълумки, арифметика ва содда алгебрада қуйидаги тўғри ва тескари амаллар қаралиб, уларни бажарилиш кетма-кетлигига қараб шартли равишда ушбу босқичларга ажратиш мумкин:

Босқич	Тўғри амаллар	Тескари амаллар
1-босқич	қўшиш	айириш
2-босқич	кўпайтириш	бўлиш
3-босқич	даражага кўтариш	илдиздан чиқариш.

Бундан кўриниб турибдики, тўғри амалларни сонларнинг исталган соҳасида бажариш мумкин, лекин тескари амаллар учун шундай сонлар соҳаси мавжудки, улар бу соҳада бирор шартлар асосида бажарилади. Лекин амаллар ўзининг тузилишига мос ҳолда айрим хоссаларнинг бажарилишини таъминлайди. Масалан, қўшиш ва кўпайтириш амаллари учун коммутативлик, ассоциативлик хоссалари ўринли бўлса, даражага кўтариш ва логарифмлаш амаллари учун бу хоссалар ўринли эмас, масалан, $l\,(2{,}8) = \log_2 8 = 3$ ва $l\,(8{,}2) = \log_8 2 = \frac{1}{3}$, бундан $l\,(2{,}8) \neq l\,(8{,}2)$ ёки $\psi\,(3{,}2) = 3^2 = 9$; $\psi\,(2{,}3) = 2^3 = 8$, демак, $\psi\,(3{,}2) \neq \psi\,(2{,}3)$.

Сон тушунчасини кенгайтиришда шу сонли тўпламда бажариладиган амаллар таърифланади ва уларнинг хоссалари кўрсатилади. Бу ўринда сонларнинг тор соҳалари учун аниқланган хоссалар уларнинг кенг соҳалари учун тўғри бўлмаслиги мумкин. Масалан, натурал сонлар соҳасида кўпайтириш амалини олайлик, яъни кўпайтувчида неча бирлик бўлса, кўпаювчи шунча марта қўшилувчи қилиб олинади, лекин буни иррационал сонлар учун қўллаб бўлмайди. Натурал сонлар кўпайтмаси исталган кўпайтувчидан кичик эмас, деган хоссани каср сонлар учун ҳар доим ҳам қўллаш мумкин эмас. Шунинг учун ҳам қайси сонли тўпламда қайси амал қараладиган бўлса, уни шу сонли тўпламдаги хоссаси учун изоҳловчи фикрнинг берилиши мақсадга мувофиқдир.

Математиканинг арифметика, алгебра, тригонометрия, геометрия каби бўлимларининг ҳар бирида асосий математик тушунчалар мавжуд бўлиб, улар *бошланғич тушунчалар* деб аталади. Арифметика бўлими учун бошланғич тушунчалар жумласига «катталик» (миқдор), «сон», «саноқ», «дарҳол кейин келади» каби тушунчаларни мисол қилиб келтириш мумкин.

Математиканинг қолган бўлимларида қараладиган математик назария ва қонуниятлар арифметикада ўрганилган, асосланган қонуниятларга таянади ва улардан фойдаланади. Арифметикада ўрганиладиган айрим қонуниятлар ва муносабатлар кишилик жамиятининг бутун ривожланиш жараёнида синовдан ўтган ва ўрганилганлиги сабабли уларни шундайлигича қабул қилинади. Шунинг учун ҳам ростлиги шубҳа туғдирмайдиган бундай математик фикр *аксиома* деб қабул қилинади. Агар бундай мулоҳазаларни исботлаш талаб қилинса, улар *теорема* сифатида қабул қилинади.

2-§. НАТУРАЛ СОН ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Натурал сон тушунчаси жуда қадимий тушунча бўлиб, ўзининг 2000 йилликдан ортиқ тарихига эга. Одатда натурал сонлар деганда саноқда ишлатиладиган сонлар тушунилади. Натурал сон тушунчасини киритиш учун асосий бошланғич тушунчалар сифатида *«тўплам», «натурал сон», «бир—натурал* сон» тушунчаларини қараймиз. Натурал сонлар орасида ўрнатиладиган асосий муносабат сифатида *«бевосита кейин келади»* деган тушунчани киритамиз. Натурал сонларни кичик лотин ҳарфлари $a, b, c, d, \ldots$ ёки a_1 $a_2, \ldots, a_n$ билан, бир сонини эса 1 орқали белгилаймиз.

$a = b$ битта ва фақат битта натурал соннинг ҳар хил ҳарфлар билан белгиланганлигини, $a \neq b$ эса a ва b натурал сонларнинг ҳар хил эканлигини билдиради. a натурал сондан бевосита кейин келувчи натурал сонни $a' = t(a) = a + 1$ кўринишда белгилаймиз.

5-таъриф. *Натурал сонлар деб, ихтиёрий a ва b элементлари орасида «b сон a дан бевосита кейин келади» муносабати ўрнатилган ва ушбу аксиомаларга бўйсунадиган бўш бўлмаган N сонли тўпламга айтилади:*

1. *1 сони ҳеч қандай сондан кейин келмайди.*

2. *Ҳар қандай a сон учун ундан бевосита кейин келадиган биргина a' сон мавжуд, яъни $a = b$ дан $a' = b'$ бўлади.*

3. *Ҳар қандай $a \neq 1$ сон фақат биттагина сондан бевосита кейин келади, яъни $a' = b'$ дан $a = b$ бўлади.*

4. *Агар A натурал сонлар тўплами учун $1 \in A$ бўлиб, $a \in A$ учун $a' \in A$ бўлса, у ҳолда $A = N$ бўлади* (индукция аксиомаси).

Натурал сонлар тўплами бундай белгиланади:

$$N = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots,\ \omega,\ \ldots,\ \omega^{\omega},\ \ldots\}.$$

Таърифга кўра 1 натурал сони ҳеч қандай натурал сондан кейин келмайди, яъни $1' \neq 1$, у ҳолда $1' = 1 + 1 = 2$ ва ҳоказо $2' = 2 + 1 = 3,\ \ldots,\ n' = n + 1,\ \ldots$ Шундай қилиб, натурал сонлар қатори

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots \quad (1)$$

ни ҳосил қилдик. Бу ўринда натурал сонларга нисбатан тенглик тушунчаси учун қуйидаги муносабатларни келтириш мумкин:

1. Рефлексивлик (қайтиш). Ҳар қандай натурал сон ўз- ўзига тенгдир, яъни $a = a$.

2. Симметриклик (тескариланувчанлик). Агар a натурал сон b натурал сонга тенг бўлса, у ҳолда $b = a$ бўлади, яъни

$$\forall\ a,\ b \in N : a = b \Leftrightarrow b = a.$$

3. Транзитивлик. Агар a натурал сон b натурал сонга, b эса c натурал сонга тенг бўлса, у ҳолда $a = c$ бўлади, яъни

$$\forall\ a,\ b,\ c \in N : a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c.$$

Маълумки, таърифдаги биринчи ва тўртинчи аксиомалардаги 1 сонини 0 (ноль) сони билан алмаштирилса, кенгайтирилган натурал сонлар тўплами

$$N = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots,\ \omega,\ \ldots,\ \omega^{\omega},\ \ldots,\ \omega^{\omega^{\omega}},\ \ldots\}$$

ҳосил бўлади. Энди ҳар қандай натурал сонни 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 рақамлари ёрдамида ёзиш мумкин, масалан, тўрт юз йигирма беш сонини 4, 2, 5 рақамлари ёрдамида 425 деб ёки $400+20+5=4\cdot 10^2+2\cdot 10+5$ кўринишида ёзиш мумкин. Умумий ҳолда ҳар қандай натурал сонни

$$a=\overline{b_n b_{n-1} \ldots b_2 b_1}=b_n\cdot 10^{n-1}+b_{n-1}\cdot 10^{n-2}+$$
$$+\ldots+b_2\cdot 10+b_1$$

кўринишда тасвирлаш мумкин, бунда $b_{n-1}, \ldots, b_1$ лар 0 дан 9 гача бўлган рақамлар ва $0<b_n\leqslant 9$. Бу ерда $\overline{b_n b_{n-1} \ldots b_2 b_1}$ натурал сонда b_1 бирликлар, b_2 ўнликлар, b_3 юзликлар, b_4 мингликлар ва ҳоказо хона рақамлари деб қаралади. Сўнгра ҳар уч хона бир синфни ташкил этади. Бунда 1-синф—бирлар, 2-синф—минглар, 3-синф—миллионлар, 4-синф — биллионлар, 5-синф — триллионлар, 6-синф—квадриллионлар, 7-синф — квинтиллионлар, 8-синф — секстиллионлар синфлари деб аталади, ва ҳоказо. Масалан, 365 445 653 783 634 сонида 5 та синф рақамлари мавжуд бўлиб, у 365 триллион 445 биллион 653 миллион 783 минг олти юз ўттиз тўрт деб ўқилади. Шунинг учун ҳам натурал сонларни ўқиш ва ёзишда синф хоналарига аҳамият берилса, келиб чиқадиган ҳар қандай хатоликнинг олдини олиш имкони туғилади. Сон рақамларининг ёзилиши ҳар бир жойнинг ўзига қараб ҳар хил бўлган ва ҳозирги кунда ҳам ўзгариш жуда камдир.

Натурал сонни юқорида келтирганимиздек, «дарҳол кейин келиш» муносабати асосида эмас, балки «дарҳол олдин келади» муносабати асосида ҳам ҳосил қилиш мумкин.

3-§. НАТУРАЛ СОНЛАРНИ ҚЎШИШ ВА КЎПАЙТИРИШ. БУ АМАЛЛАРНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ

Натурал сонларнинг киритилиши муносабати билан бу сонлар тўпламида энди бевосита қайси амалларни бажариш мумкинлиги ҳақидаги масала юзага келади.

6-таъриф. *Натурал сонлар тўпламида алгебраик амал аниқланган бўлиб, у* $a+1=a'$, $a+b'=(a+b')'$ *хоссаларга эга бўлса , бу амал натурал сонларни қўшиш амали дейилади.*

Масалан, $1+1=1'=2$, $2+3=2+2'=(2+2)'=$ $=4'=5$, $3+1=3'=4$. Демак, таърифга асосан $2+3=$ $=5$ ёки a ва b натурал сонлар учун шундай c натурал сон мавжудки, $a+b=c$ бўлади.

1-теорема. *Натурал сонлар тўпламида қўшиш амали мавжуд ва ягонадир.*

1-натижа. *Ихтиёрий a ва b натурал сонлар учун*

$$a+1=1+a \text{ ва } a+b'=(a+b)'=a'+b$$

ўринлидир.

2-теорема.

$$\forall\ a,\ b \in N: a+b=b+a.$$

Исботи. Исбот қилиш учун математик индукция усулидан фойдаланамиз.

1) $a=1$ бўлсин, у ҳолда $a+b=1+b \overset{\text{H}_1}{=\!=} b+1 \Rightarrow a+ +b=b+a$;

2) $b=1$ бўлса, $1+b=1+1=1+1$ бўлиб, $b=n$ бўлганда $1+n \overset{\text{H}_1}{=\!=} n+1$ бўлади, агар $b=n+1$ бўлса,

$$1+b=1+(n+1)=1+n' \overset{\text{H}_1}{=\!=} n'+1=b+1$$

бўлади, демак, $1+b=b+1$ бўлиши келиб чиқади.

3) Энди теорема $a=k$ учун ўринли бўлсин, яъни

$$a+b=k+b=b+k=b+a;$$

4) Теореманинг $a=k'=k+1$ учун тўғрилигини кўрсатамиз, яъни

$$k'+b=(k+b)'=(b+k)'=b+k' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k'+b=b+k'.$$

Демак, натурал сонларни қўшиш амали ўрин алмаштириш хоссасига эга экан.

3-теорема.

$$\forall\ a,\ b,\ c \in N: (a+b)+c=a+(b+c).$$

Исботи. Ихтиёрий a ва b натурал сонлар учун c га нисбатан индукция аксиомасини татбиқ қиламиз. Агар $c=1$ бўлса, у ҳолда $(a+b)+c=(a+b)+1=(a+b)'=a+ +b'=a+(b+1)$, демак, теорема $c=1$ да ўринли.
Энди $c\neq 1$ учун теорема шартини ўринли деб, $c+1$ учун ўринли эканини кўрсатамиз. Яъни: $(a+b)+c'=[(a+b)+ +c]'=[a+(b+c)]'=a+(b+c)'=a+(b+c')$, демак, теорема $c'=c+1$ учун ҳам ўринли экан. Бундан унинг ихтиёрий c учун ўринли эканлиги келиб чиқади.

$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ натурал сонлар берилган бўлсин.

7-таъриф. $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ *натурал сонларнинг йи-*

ғиндиси деб, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ *га айтилади.* $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ йиғиндидан $S_1 = a_1 = \sum_{i=1}^{1} a_i$ ҳамда $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i$ ларни ёзиш мумкин.

4-теорема. *Бир нечта натурал сонларнинг йиғиндиси ассоциативдир, яъни* $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{m} a_{n+i} = \sum_{i=1}^{n+m} a_i$.

Исботи. Бу теореманинг исботини индукция аксиомасига суянган ҳолда олиб борамиз. $m = 1$ бўлсин, у ҳолда $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{m} a_{n+i} = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i$.
Энди теорема $m = k$ учун ўринли, яъни

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{k} a_{n+i} = \sum_{i=1}^{n+k} a_i$$

деб, унинг $m = k + 1$ учун ўринли эканини кўрсатамиз, яъни:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{k+1} a_{n+i} = \sum_{i=1}^{n} + \left(\sum_{i=1}^{k} a_{n+i} + a_{n+k+1}\right) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{k} a_{n+i}\right) + a_{n+k+1} = \sum_{i=1}^{n+k} a_i +$$
$$+ a_{n+k+1} = \sum_{i=1}^{n+k} a_i + a_{n+k+1} = \sum_{i=1}^{n+k+1} a_i.$$

Демак, теорема $m = k + 1$ да ҳам ўринли. Шу билан теорема исбот бўлди.

5-теорема. *Бир нечта натурал сонларнинг йиғиндиси ўрин алмаштириш хоссасига эга.*

Исботи. $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ йиғинди берилган. Энди шу йиғиндида қатнашаётган қўшилувчиларнинг ўрнини мумкин бўлган қадар алмаштирамиз ва биринчи қўшилувчи ўрнидагисини a_{j_1}, иккинчисини a_{j_2} ва ҳоказо,

n- сини a_{j_n} орқали белгилаймиз, яъни $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_{j_1} + a_{j_2} + \ldots + a_{j_n} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{j_i}$ бўлади. Демак, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{j_i}$ тенгликнинг ўринли эканини кўрсатишимиз лозим. Бунинг учун индукция аксиомасини ҳар хил ҳоллар учун қўлласак, яъни $j_1 = 1$ бўлганда $\sum\limits_{i=1}^{1} a_{j_1} = a_1 = \sum\limits_{i=1}^{1} a_i$ ўринлилигини эътиборга олиб ва барча n дан кичик қийматлар учун теорема ўринли деб, уни $j_{m+1} = n$, $m < k$, $k = m + q$, $n = k + 1 = m + q + 1$ ҳоли учун ҳам худди 4-теоремадагидек текшириш ва исботлаш мумкин. $j_n = n$ бўлган ҳолда бундай ёза оламиз:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{j_i} = \sum_{i=1}^{k} a_{j_i} + a_n = \sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Демак, шу билан теорема исбот қилинди.

Юқоридаги мулоҳазалардан қуйидаги натижаларни келтириб чиқариш мумкин.

2-натижа. *Агар қўшилувчилардан бирини бирор сон қадар орттирилса, йиғинди ҳам шу сон қадар ортади.*

Исботи. $S = a + b$ йиғинди берилган бўлсин. Иккинчи қўшилувчини k сон қадар орттирамиз; $S_1 = a + (b + k)$ бўлиб, йиғиндини гуруҳлаш хоссасига кўра $S_1 = (a + b) + k = S + k$ бўлади. Демак, $S_1 = S + k$, шуни исботлаш керак эди.

3-натижа. *Агар бир қўшилувчини бирор сон қадар орттириб, иккинчи қўшилувчини шу сон қадар камайтирсак, йиғинди ўзгармайди.*

Натурал сонлар тўпламида бир қийматли бажариладиган амаллардан бири бу кўпайтириш амалидир. Маълумки, ўрта мактаб математикасида сонларни кўпайтириш амали қўшиш амали орқали киритилади. Чунончи $5 \cdot 4$ амали $5 \times 4 = \underbrace{5 + 5 + 5 + 5}_{4 \text{ та}} = 20$ орқали амалга оширилади. Бундан келиб чиқиб, a натурал сонни b натурал сонга кўпайтиришнинг $a\cdot b=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{b \text{ та}}$ тарзида амалга оширилишини кўрганимиздан сўнг, кўпайтиришнинг қўшиш орқали умумлашган қоидаси: $a\cdot b$ ни топиш учун a ўзгармас бўлганда ихтиёрий b учун қўллашни қараб чиқамиз. 1) $a\cdot 1=a$; 2) $a\cdot 2=a\cdot 1'=a+a=a\cdot 1+a$; 3) $a\cdot 3=a\cdot 2'=a+a+a=(a+a)+a=a\cdot 2+a \Rightarrow a\cdot 2'=a\cdot 2+a$ ва ҳоказо $a\cdot n'=a\cdot n+a$.

8-таъриф. *a ва b натурал сонларни кўпайтириш деб, шу сонли тўпламда аниқланган ва* 1) $a\cdot 1=a$, *ва* 2) $a\cdot n'=a\cdot n+a$ *хоссалар билан берилган алгебраик амалга айтилади ва $a\cdot b$ ёки $a\times b$ кўринишларда ёзилади.*

6-теорема. *Натурал сонлар тўпламида кўпайтириш амали мавжуд ва ягонадир.*

Бу теореманинг исботини ўқувчиларнинг ўзларига ҳавола қиламиз. Бу теоремадан қуйидаги натижани келтириб чиқариш мумкин.

4-натижа. *Ихтиёрий a ва b натурал сонлар учун* $1\cdot b=b\cdot 1$ *ва* $a'b=ab+b$ *муносабатлар ўринлидир.*

Натурал сонларни кўпайтириш амали қуйидаги хоссаларга эга.

7-теорема. $\forall m, n \in N: m\cdot n=n\cdot m$.

Исботи. Бу теоремани исботлаш учун индукция аксиомасидан фойдаланамиз.

$n=1$ бўлсин, у ҳолда $m\cdot n=m\cdot 1 \overset{\text{H}_4}{=\!=} 1\cdot m=n\cdot m$, яъни теорема $n=1$ учун ўринли.

Энди теорема $n=k$ учун ўринли, яъни $m\cdot k=k'\cdot m$ деб, унинг $n=k'=k+1$ учун ўринли эканини кўрсатамиз: $m\cdot k' \overset{\partial f\, 6}{=\!=} m\cdot k+m=k\cdot m+m \overset{\text{H}_4}{=\!=} k'm \Rightarrow mk'=k'm$, бундан $\forall n \in N, m\in N: m\cdot n=n\cdot m$. Шу билан теорема исбот қилинди. Демак, натурал сонларни кўпайтириш амали ўрин алмаштириш хоссасига эга экан.

8-теорема. $\forall m, n, k \in N: k(m-n)=km+kn \wedge \wedge mk+nk$.

Исботи. Бу теоремани исботлаш учун n га нисбатан индукция аксиомасини татбиқ қиламиз:

$n=1$ бўлсин, у ҳолда $k(m+n)=k(m+1) \overset{\partial f\, 8}{=\!=} km'=km+k \overset{\text{H}_4}{=\!=} km+k\cdot 1=km+kn$, бундан $n=1$ бўлганда теореманинг ўринли эканлиги келиб чиқади. Энди теорема $n=l$ учун ўринли, яъни $k(m+l)=km+kl$ деб, унинг $k=l+1=l'$ учун ўринли эканини кўрсатамиз: $k(m+l') \overset{\partial f\, 6}{=\!=}$

$\stackrel{\partial f6}{=} k(m+l)' \stackrel{\partial f8}{=} k(m+l)+k=(km+kl)+k \stackrel{T_3}{=} km+(kl+$ $+k) \stackrel{\partial f8}{=} km+kc'$. Демак, натурал сонларни кўпайтириш амали тарқатиш (дистрибутивлик) хоссасига эга экан.

9-теорема. $\forall m, n, k \in N: (m\cdot n)k=m\cdot(n\cdot k)$.

Исботи. Индукция аксиомасини k га нисбатан қўллаймиз.

$k=1$ бўлса, $(m\cdot n)k=(m\cdot n)\cdot 1 \stackrel{\partial f8}{=} m\cdot n=m\cdot(n\cdot 1)=$ $=m\cdot(n\cdot k)$, демак, теорема $k=1$ учун ўринли. Энди теорема ихтиёрий k учун ўринли, яъни $(m\cdot n)\cdot k=m(n\cdot k)$ деб, унинг $k'=k+1$ учун ўринли эканини кўрсатамиз: $(m\cdot n)k' \stackrel{\partial f8}{=} (m\times$ $\times n)\cdot k+mn=m(n\cdot k)+mn \stackrel{T_8}{=} m(nk+n) \stackrel{\partial f8}{=} m(n\cdot k')$; $(mn)k'=m(n\cdot k')$, бундан теореманинг $k'=k+1$ учун ўринли экани келиб чиқади. Демак, натурал сонларни кўпайтириш амали гуруҳлаш хоссасига эга экан. Шу билан теорема исбот бўлди.

9-таъриф. *Берилган* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *натурал сонларнинг кўпайтмаси деб* $P_n=a_1\cdot a_2\ldots a_n=\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$ *га айтилади.*

Таърифдан бевосита $P_1=a_1$; $P_2=a_1\cdot a_2$; . . ; $P_{n+1}=P_n\times$ $\times a_{n+1}=\prod\limits_{i=1}^{n} a_i\cdot a_{n+1}=\prod\limits_{i=1}^{n+1} a_i$ ларни ҳосил қилиш мумкин.

10-теорема. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ натурал сонларни кўпайтириш амали гуруҳлаш, ўрин алмаштириш ва тарқатиш хоссаларига эга.

Бу теореманинг исботи бевосита 4- ва 5-теоремаларнинг исботига ўхшаш бўлгани учун уни ўқувчиларнинг ўзларига мустақил бажаришни ҳавола қиламиз.

Юқорида келтирилган теоремалардан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

5-натижа. *Бир неча кўпайтувчининг кўпайтмасини бирор сонга кўпайтириш учун ўша сонни кўпайтувчиларнинг бирортасига кўпайтириш кифоядир:*

$$\forall a, b, c, d \in N: (abc)\cdot d=(a\cdot d)(b\cdot c).$$

6-натижа. *Берилган сонни бир неча соннинг кўпайтмасига кўпайтириш учун берилган сонни биринчи кўпайтувчига, ҳосил бўлган кўпайтмани иккинчи кўпайтувчига ва ҳоказо кўпайтириш кифоядир.*

7-натижа. *Бир неча кўпайтувчининг кўпайтмасини бошқа кўпайтмага кўпайтириш учун иккала кўпайтма-*

нинг кўпайтувчиларини кетма-кет кўпайтириш кифоядир.

8-натижа. *Икки йиғиндини бир-бирига кўпайтириш учун биринчи йиғиндининг ҳар бир қўшилувчисини иккинчи йиғиндининг ҳар бир қўшилувчисига ҳадма-ҳад кўпайтириб, натижаларни қўшиш кифоядир.*

9-натижа. *Ҳар қандай соннинг нолга кўпайтмаси нолдир:*

$$b\cdot 0=\underbrace{0+0+\ldots+0}_{b\ \text{та}}=0\Rightarrow b\cdot 0=0\cdot b=0.$$

10-натижа. *Агар икки сон кўпайтмаси ноль бўлса, у ҳолда кўпайтувчилардан* камида бири ноль сонидир.

Шундай қилиб, натурал сонларни қўшиш ва кўпайтириш амаллари киритилди. Бу амаллар натурал сонлар тўпламида бир қийматли бажариладиган амал бўлиши билан бирга улар учун ўрин алмаштириш, гуруҳлаш ва тарқатиш қонуниятлари ўринлидир.

4-§. СОНЛИ ТЕНГСИЗЛИКЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Натурал сонларнинг тенглиги рефлексивлик, симметриклик, транзитивлик шартларига бўйсунади. Тенгсизлик тушунчаси эса тенглик тушунчасига қарама-қарши тушунча бўлиб, $a\neq b$ муносабатни белгили ифодалаш орқали инсон онгига етказилади, яъни $a\neq b$ ифода ё $a>b$, ё $a<b$, ё $a\geqslant b$ ёки $a\leqslant b$ кўринишлар орқали белгиланади. Шунинг учун ҳам тенгсизлик ўзининг тузилишига кўра қатъий ёки ноқатъий бўлиши мумкин.

10-таъриф. *Агар берилган a, b, c натурал сонлар учун $a=b+c$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда a натурал сон b натурал сондан катта (b сон a сондан кичик) дейилади ва қуйидагича белгиланади:* $a>b\ (b<a)$.

Математикада «тенг», «катта» ва «кичик» тушунчалари бир-бирини ҳар доим тўлдириб, узвий боғланишда бўлади.

11-теорема. $\forall\, m,\ n\in N: m+n\neq n.$

Исботи. Бу теореманинг исботини индукция аксиомасига таяниб исботлаймиз.

$n=1$ бўлсин, у ҳолда $m+n=m+1=m'\neq 1\Rightarrow m+1\neq 1\Rightarrow m+n\neq n$, демак, теорема $n=1$ учун ўринли. Энди теорема ихтиёрий n учун ўринли, яъни $m+n\neq n$ деб, унинг $n+1$ учун ўринли эканини кўрсатамиз: $m+n+1=m+n'\overset{\text{эf } 6}{=\!=}(m+n)'\overset{\text{эf } 1}{\neq}n'$. Бундан теореманинг

$n' = n + 1$ учун ҳам ўринли экани келиб чиқади. Шу билан теорема исбот бўлди.

12-теорема. $\forall a, b, c \in N$: $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$ (транзитивлик).

Исботи. Бу теоремани 10-таърифга асосланиб исбот қиламиз, яъни $a > b$ учун шундай биргина $k \in N$ мавжудки, $a = b + k$ ва $b > c$ учун $\exists\ l \in N$ бўлиб, $b = c + l$ бўлади. Бундан $a = b + k = c + l + k \Rightarrow a = c + (l + k) \xRightarrow{\partial f 10} \Rightarrow a > c$. Шу билан теорема исбот қилинди.

13-теорема. $\forall a, b, c \in N$: 1) $a = b \Rightarrow a + c = b + c \wedge ac = bc$; 2) $a > b \Rightarrow a + c > b + c \wedge ac > bc$; 3) $a < b \Rightarrow a + c < b + c \wedge ac < bc$.

Исботи. Теореманинг шартига кўра a, b, c натурал сонлар бўлгани учун ҳамда 10-таърифга асосан: $a > b \Rightarrow a = b + k \Rightarrow a + c = b + k + c \xRightarrow{T3} a + c = (b + c) + k \Rightarrow \xRightarrow{\partial f\ 10} a + c > b + c$; $a = b + k \Rightarrow ac = (b + k)c \xRightarrow{T8} ac = bc + kc \xRightarrow{\partial f\ 10} ac > bc$.

1) ва 3) хоссалар ҳам шунга ўхшаш исбот қилинади. Тенгсизликнинг монотонлиги натурал сонлар тўпламида ўринли экан. Теорема исботланди.

14-теорема. $\forall a, b, c \in N$: 1) $a + c = b + c \wedge ac = bc \Rightarrow a = b$; 2) $a + c > b + c \wedge ac > bc \Rightarrow a > b$; 3) $a + c < b + c \wedge ac < bc \Rightarrow a < b$.
Бу теорема 13-теоремага тескари теорема бўлгани учун унинг исботи 13-теорема исботига ўхшашдир.

15-теорема. $\forall a, b, n, k \in N$: 1) $a = b \wedge k = n \Rightarrow a + k = b + n \wedge ak = bn$; 2) $a > b \wedge k = n \Rightarrow a + k > b + n \wedge ak > bn$; 3) $a > b \wedge k > n \Rightarrow a + k > b + n \wedge ak > bn$.

Исботи. Теоремани исботлашда 3) хоссани исбот қилиш билан чегараланамиз, чунки қолганларининг исботи шу 3) нинг исботидан келиб чиқади. Шу сабабли шартга асосан $a > b$ ва $k > n$ бўлгани учун:

$$\left.\begin{aligned} a > b \xRightarrow{\partial f\ 10} a = b + c \\ k > n \xRightarrow{\partial f\ 10} k = n + l \end{aligned}\right| \Rightarrow a + k = b + n + (c + l) \xRightarrow{\partial f\ 10} a + k > b + n$$

бўлади ёки

$ak = (b + c)(n + l) = b(n + l) + c(n + l) = bn + bl + c(n +$

$$+l) = bn + [bl + c(n+l)] \overset{\partial f\, 10}{\Longrightarrow} ak > bn.$$

Шу билан теорема исбот қилинди.

16-теорема. (Архимед аксиомаси). *Ихтиёрий a ва b натурал сонлар учун шундай n натурал сон мавжудки, $an > b$ бўлади.*

17-теорема. *a ва a' натурал сонлар қўшни натурал сонлардир.*

Бу теоремаларнинг исботи унча мураккаб бўлмагани учун уни ўқувчиларнинг ўзларига ҳавола қиламиз.

11-натижа. *Барча натурал сонлар ичида 1 сони энг кичик натурал сондир.*

5-§. НАТУРАЛ СОНЛАРНИ АЙИРИШ ВА БЎЛИШ

Юқорида кўриб ўтилган қўшиш амалида a ва b натурал сонларнинг йиғиндисини топиш масаласини ҳал қилган бўлсак, энди бевосита бунга қарама-қарши масалани, яъни йиғинди ва бир қўшилувчи маълум бўлганда иккинчи қўшилувчини топиш масаласини ҳал қиламиз, яъни $a = b + x$ дан x қўшилувчини топиш масаласи қўйилади.

11-таъриф. *Берилган a сондан берилган b сонни айириш деб, берилган b сон билан қўшилганда йиғиндиси a га тенг бўлган c сонни топишга айтилади ва қуйидагича ёзилади:*

$$a - b = c \Leftrightarrow a = b + c.$$

Бу айириш амали «—» ишора билан белгиланиб, a ва b сонларнинг айирмаси $a - b$ кўринишида ёзилади. Агар бу амал натурал сонлар тўпламида қараладиган бўлса, у ҳолда $a - b = c$ да $a \in N$, $b \in N$ ва $c \in N$ шартларга кўра $a > b$ бўлиши талаб қилинади. Лекин, $c = 0$ бўлиши бевосита $a = b$ бўлишини таъминлайди. Демак, юқоридаги мулоҳазадан келиб чиқадики, a камаювчи, b айирилувчи ва c айирма бўлиб, у кенгайтирилган натурал сонлар тўпламининг элементи бўлиши учун камаювчи айирилувчидан кичикмас бўлиши лозим экан.

18-теорема. *Натурал сонлар тўпламида $a - b$ мавжуд бўлиши учун $a \geqslant b$ бўлиши зарур ва етарлидир. Агар $a - b$ мавжуд бўлса, у ҳолда у ягонадир.*

Исботи. Теореманинг шартига кўра $a - b = n$, $n \in N$, бўлгани учун, бундан $a = b + n$ ни ёза оламиз ва 10-таърифга асосан $a \geqslant b$ бўлади. Энди $a - b$ нинг ягоналигини кўрсатамиз. Шартга кўра $a - b$ мавжуд, бундан $a - b = n$

бўлади. Энди $a - b$ айирманинг сон қийматини ифодаловчи n дан фарқли m сон ҳам мавжуд бўлсин дейлик; у ҳолда $m, n \in N$ бўлгани учун ҳар доим $n = m + c$ кўринишида ёзиш мумкин. 10- таърифга асосан $n > m$ бўлиб, $a = b + n$ ва $n = m + c$ га ҳамда $a = b + m$ эканлигига асосан $a = b + n \underset{\partial f_{10}}{=} b + m + c = a + c \Rightarrow a > a$ бўлади. Бу ҳолнинг эса бўлиши мумкин эмас. Шу билан теорема исбот қилинди.

12- натижа. *Агар натурал тенгликнинг иккала томонидан бир хил ифодани айирсак, тенглик ўзгармайди, яъни*

$$a = b \Leftrightarrow a - n = b - n.$$

Энди айириш амалининг баъзи хоссаларини келтирамиз.

1. *Агар икки соннинг айирмасига айирилувчи қўшилса, камаювчи ҳосил бўлади.*

Шартга асосан $a - b$ мавжуд, $a - b \overset{\partial f_{11}}{=} c \Rightarrow a = b + c$ ҳамда $a - b = c \Rightarrow (a - b) + b = c + b \overset{T_2}{=} b + c = a$. Демак, $(a - b) + b = a$.

2. *Берилган сонга икки сон айирмасини қўшиш учун камаювчини қўшиб, айирилувчини айириш керак:*

$$a + (b - c) = (a + b) - c.$$

Исботи. $a + (b - c) = x$ бўлсин дейлик, тенгликнинг иккала томонига c ни қўшсак, $a + (b - c) + c = x + c$ ва $(b - c) + c = b$ эканлигидан $a + b = x + c \overset{\partial f 11}{\Rightarrow} x = (a + b) - c$ бўлади. Демак, $a + (b - c) = (a + b) - c$.

3. *Берилган сондан йиғиндини айириш учун бу сондан қўшилувчиларни кетма-кет айириш лозим.*

4. *Берилган сондан айирмани айириш учун бу сондан камаювчини айириб, айирилувчини қўшиш лозим.*

5. *Агар камаювчини бирор k сон қадар камайтирилса (орттирилса), айирма шу сон қадар камаяди (ортади).*

6. *Агар камаювчи ва айирилувчини бир хил сон қадар орттирилса (камайтирилса), айирма ўзгармайди.*

Бу юқорида келтирилган хоссаларни текшириб кўришни ўқувчиларнинг ўзларига ҳавола қиламиз.

Юқорида айтиб ўтганимиздек, кўпайтириш амалига тескари амал бу бўлиш амалидир. Бўлиш амали ўзининг бажарилиш техник структурасига кўра бошқа арифметик амаллардан фарқ қилади ва бирмунча мураккаброқ бажарилади.

12-таъриф. *Икки кўпайтувчининг кўпайтмаси ва кўпайтувчилардан бири берилган бўлиб, иккинчи кўпайтувчини топиш амали сонларни бўлиш дейилади ва қуйидагича ёзилади:*

$$a : b \text{ ёки } \frac{a}{b}.$$

Демак, таърифга асосан $a \geqslant b$ бўлганда $a : b = c$ бўлса, у ҳолда $a = b \cdot c$ бўлади. Шунинг учун ҳам, $a \geqslant b$ бўлганда $a : b = c$ мавжуд бўлса, у ҳолда у ягона бўлади.

Юқоридаги таърифдан қуйидаги натижаларни ҳосил қилиш мумкин.

13-натижа. *1) Агар берилган натурал сонни олдин бирор нолдан фарқли сонга бўлиб, кейин шу сонга кўпайтирсак, соннинг ўзи ҳосил бўлади;*

2) *Берилган натурал тенгликнинг иккала томонини берилган натурал сонга бўлинса, тенглик ўзгармайди.*

Бу натижаларнинг исботи бевосита 12-таърифдан келиб чиқади.

Энди бўлиш амалининг хоссаларини кўриб чиқамиз.

19-теорема. *Кўпайтмани нолдан фарқли бирор сонга бўлиш учун кўпайтувчилардан бирини шу сонга бўлиш кифоядир:*

$$\forall a,\ b,\ c \in N : (ab) : c = (a : c) \cdot b.$$

Исботи. Теореманинг шартида берилгани бўйича $(ab) : c = t$ деб оламиз, у ҳолда 12-таърифга асосан $ab = ct$ бўлади. $(a:c) \cdot c = a$ га асосан $(a : c) \cdot cb = ct \Rightarrow (a : c) \cdot b = t = (ab) : c \Rightarrow (ab) : c = (a : c) \cdot b$. Шу билан теорема исботланди.

20-теорема. *Бирор сонни икки сон бўлинмасига кўпайтириш учун шу сонни бўлинувчига кўпайтириб, бўлувчига бўлиш лозим:*

$$\forall a,\ b,\ c \in N : a(b : c) = (ab) : c.$$

Исботи. Теореманинг шартида берилгани бўйича $a(b:c) = t$ деб оламиз, сўнгра унинг иккала томонини c га кўпайтирамиз:

$$a(b : c) \cdot c = ct \Rightarrow \begin{cases} (b : c) \cdot c = b \\ ab = ct \end{cases} \Leftrightarrow (ab) : c = t \Leftrightarrow a(b : c) = t = (ab) : c.$$

Демак, $a(b : c) = (ab) : c$. Шу билан теорема исботланди.

21-теорема. $\forall a,\ b,\ c \in N$: 1) $a : (bc) = (a : b) : c = (a : c) : b$;

2) $a : (b : c) = (ac) : b$.

Исботи. Теореманинг шартида берилган ифодани $a:$ $:(bc)=t$ деб белгилаймиз, у ҳолда $a:(bc)=t \overset{\text{df } 12}{\Leftrightarrow} a=bct \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a:b=ct, \\ a:c=bt \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (a:b):c=t, \\ (a:c):b=t \end{array}\right. \Leftrightarrow (a:(bc)=(a:c):b=(a:b):c.$$

Шу билан теореманинг биринчи қисми исботланди.

Энди теореманинг иккинчи қисмини исботлаймиз, шартга кўра $a:(b:c)=t \overset{\text{df } 12}{\Rightarrow} a=(b:c)\cdot t \Leftrightarrow ac=(b:c)ct \Leftrightarrow \begin{cases}(b:c)\cdot c=b \\ ac=bt\end{cases}$

$\Leftrightarrow (ac):b=t=a:(b:c)$. Демак, $a:(b:c)=(ac):b$. Шу билан теореманинг иккинчи қисми ҳам исбот қилинди.

22-теорема. $\forall m, n, k \in N$:

1) $(m+n):k=m:k+n:k$;
2) $(m-n):k=m:k-n:k$.

Исботи. Теореманинг шартига кўра $(m+n):k=t$ деб белгилаймиз:

$$(m+n):k=t \Leftrightarrow m+n=tk \Leftrightarrow \begin{cases} m=(m:k)\cdot k, \\ n=(n:k)\cdot k, \\ (m:k)\cdot k+(n:k)\cdot k=tk \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\overset{T_8}{\Leftrightarrow} [(m:k)+(n:k)]\,k=kt \Leftrightarrow t=m:k+n:k \Leftrightarrow (m+n):k= \\ =m:k+n:k.$$

Теореманинг иккинчи қисми ҳам худди шунга ўхшаш исбот қилинади.

23-теорема. 1) *Агар бўлинувчини k марта орттирилса (камайтирилса), бўлинма k марта ортади (камаяди);*

2) *Агар бўлувчини k марта орттирилса, бўлинма k марта камаяди;*

3) *Агар бўлинувчини ва бўлувчини n* марта орттирилса *(камайтирилса), бўлинма ўзгармайди.*

Бу теореманинг исботи юқорида келтирилган теорема исботларидан бевосита келиб чиқадиган бўлгани учун унинг исботига тўхталмаймиз.

Умуман, берилган сонлар ўзаро кетма-кет бўлиш амали билан ($a:b:c:d$ каби) боғланган бўлса, у ҳолда бу амал чапдан ўнгга қараб кетма-кет бажарилади, яъни $60:4:3:5=(60:$ $:4):3:5=[(60:4):3]:5=(15:3):5=5:5=1$.

Шунинг учун ҳам бўлиш амалини бажариш бошқа амалларни бажаришдан маълум томонлари бўйича мураккаброқ.

Агар берилган ифодада биринчи, иккинчи ва учинчи босқич амаллари қатнашса, аввал учинчи, сўнгра иккинчи, кейин биринчи босқич амаллари бажарилади. Агар қавс ишлатилган бўлса, аввал қавс ичидаги амаллар бажарилиб, сўнгра юқоридаги тартиб қоидага асосан бажарилади.

Мисол ва масалалар ечиш

1. Рақамларининг йиғиндиси рақамлар чала квадратига тенг бўлган икки хонали сон топинг.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра $10x+y=x^2+xy+y^2$ ни ёза оламиз. Бундан $10x+y+xy=(x+y)^2$, бу ерда $x \leqslant 9$ ва $y \leqslant 9$ эканини эътиборга олсак, $10x+y+xy \leqslant 180$; $(x+y)^2 \leqslant 180$; $x+y \leqslant 13$ бўлади. Агар $x+y=13$ бўлса, $10x+y+xy$ йиғинди $x=9$, $y=4$ бўлганда энг катта қийматга эга бўлади, бундан $10x+y+xy \leqslant 130$; $(x+y)^2 \leqslant 130$; $x+y \leqslant 11$.

Агар $x+y=11$ бўлса, $10x+y+xy \leqslant 110$ бўлиб, бундан $x+y=10$ ёки $x=9$, $y=1$ — масала шартини қаноатлантиради.

Худди шунга ўхшаш, $x+y=9$ ва $x+y=4$ бўлган ҳоллардан 6, 3 ҳамда 1, 3 қийматларни топиб, изланаётган икки хонали 91, 63, 13 сонларни ҳосил қиламиз.

2. Агар берилган $\overline{42x4y}$ беш хонали сон 72 га қолдиқсиз бўлиниши маълум бўлса, x ва y рақамларни топинг.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра $\overline{42x4y}$ сони 72 сонига қолдиқсиз бўлинади, яъни: $\overline{42x4y}=72\cdot 58+\overline{(x+2)\ 8y}$ бўлинмада биринчи рақам 5 бўлади, чунки $72\cdot 6=432>\overline{42x}$. Иккинчи рақам 8 ёки 9 бўлиши мумкин. Агар 8 бўлса, бўлинмада $\overline{(x+2)\,8y}$ уч хонали сон 72 га бўлиниши лозим. Бундай сонлардан фақат ўнлар хонасида 8 рақами қатнашадигани 288 бўлиб, $x+2=2$ ва $y=8$ бўлади. Агар иккинчи рақами 9 бўлса, у ҳолда $\overline{(x-5)\,6y}$ уч хонали сон 72 га каррали бўлишини, яъни $\overline{42x4y}=72\cdot 59+\overline{(x-5)6y}$ ни эътиборга олсак, ўнлар хонасида 6 сони қатнашгани эса 360 бўлади. Бундан $x-5=3$, $y=0$, яъни $x=8$, $y=0$ бўлади. Демак, изланаётган сон 42048 экан.

3. Рақамлари кўпайтмасининг иккиланганига тенг бўлган икки хонали сонни топинг.

Ечиш. Берилган икки хонали сонни $\overline{a_1\,a_0}=10x+y$ кўринишида излаймиз. Масаланинг шартига кўра $10x+y=$

$= 2xy$ бўлиб, бу ерда $0 < x \leqslant 9$ ва $0 \leqslant y \leqslant 9$ бўлиши мумкин. $10x + y = 2xy$, $y = 2xy - 10x$; $x = \frac{y}{2y - 10}$ бўлади; $\overline{a_1a_0} \in N$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда $2y - 10$ дан $5 < y \leqslant 9$ экани келиб чиқади. Демак, $y = 6$ ва $x = 3$ сонлари масала шартини қаноатлантиради. Изланаётган сон 36 экан.

4. $(360 + x)\,1002 = 731460$ тенгликдан x ни топинг.

Ечиш. 1) $731460 : 1002 = 730$;

$360 + x = 730$; $x = 730 - 360 = 370$. Демак, $x = 370$.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

Ҳисобланг:

1. $\{657720 : 105 - [942690 : 201 + (168 \times 28 - 4 \times 863)]\} \times 37$.

2. $202400 : \{1010100 - 41 \times [(45360 - 37260) \times 37 - 14 \times 20000]\}$.

3. $(28348 - 23115) \cdot 1134 - 3718008 : 34426 - [471006 - (264 \cdot 309 - 17856)] : 99$.

4. x ўзгарувчини топинг:

а) $501\,(x - 694) = 164829$;

б) $[(x + 2) \cdot 81 - 3530] \cdot 21 = 714$;

в) $[(5x + 178) \cdot 15 + 90] : 45 = 63$;

г) $\{[(8x - 98) : 2 + 56] \cdot 36 - 268\} : 500 = 4$;

д) $315 : \left[36 - \frac{115 + 29}{5x - 198} \cdot 3 + 15\right] = 21$;

е) $400 : \{2000 : [10002 - (x + 2926) - 966]\} = 8$.

5. Бирор соннинг квадрати бўлган шундай тўрт хонали сон топингки, унинг биринчи рақами иккинчи рақами билан, учинчи рақами эса тўртинчи рақами билан бир хил бўлсин.

6. Шундай икки хонали сон топингки, унинг рақамлари йиғиндисининг куби ўша соннинг квадратига тенг бўлсин.

7. Рақамлари $x + y + z = xy$, $x + z = y$ муносабатларни қаноатлантирадиган ва аниқ квадрат бўлган барча тўрт хонали сонларни топинг.

8. $\underbrace{4 \cdot 4 \ldots 4}_{2n \text{ та}} - \underbrace{8 \cdot 8 \ldots 8}_{n \text{ та}}$ айирма тўла квадрат эканини исботланг.

9. Ғалла тозалайдиган иккита машина режага кўра

24 кунда 7680 ц ғалла тозалаши керак эди, лекин улар режадан ташқари 1680 ц ортиқ ғалла тозалади. Биринчи машина иккинчи машинадан 480 ц ортиқ ғалла тозалади. Бу машиналарнинг ҳар бири ўрта ҳисобда бир кунда қанча ғалла тозалаган?

10. Автомобиль уч қатнашда 22 кг 750 г бензин сарф қилди. Учинчи қатнашда иккинчи қатнашдагидан 1 кг 625 г ортиқ бензин сарф қилди, иккинчи қатнашда эса биринчи қатнашдагидан 2 кг 875 г ортиқ бензин сарф қилди. Агар автомобиль учинчи қатнашда биринчи қатнашидан 36 км ортиқ йўл юрган бўлса, у иккинчи қатнашда неча километр йўл юрган?

11. Пойафзал дўкони бир кунда 88000 сўмлик аёллар ва болалар оёқ кийими сотди, бунда аёллар оёқ кийими болалар оёқ кийимидан 5200 сўмлик ортиқ сотилди. Бир жуфт болалар оёқ кийими 400 сўм, 7 жуфт болалар оёқ кийими қанча турса, икки жуфт аёллар оёқ кийими шунча туради. Ҳар қайси оёқ кийимидан қанчадан сотилган?

12. Икки киши 500 туп карам кўчати сотиб олишиб, баравардан пул тўлашди. Бир кишининг полизига иккинчиникидан 40 туп ортиқ кўчат кетди ва у иккинчи кишига 50 тийин пул берди. Ҳар қайси киши қанчадан кўчат эккан ва 10 дона кўчат қанча турар экан? (Текшириб кўринг.)

13. Ер юзида ҳам сувда, ҳам қуруқда яшовчилар, ўрмаловчилар ва балиқларнинг 17000 тури ҳисобланган. Агар ўрмаловчилар тури ҳам сувда, ҳам қуруқда яшовчилардан уч марта кўп, балиқлар тури эса 7000 та кўп бўлса, буларнинг ҳар қайси туридан айрим-айрим қанча?

14. Учта ер майдонидан 1396 т 5 ц буғдой йиғиб олинди. Биринчи майдондан иккинчига қараганда 35 т 7 ц ортиқ, учинчи майдондан эса иккинчидан 113 т 4 ц ортиқ ҳосил олинди. Агар ҳар бир майдоннинг бир гектаридан бир хил —21 ц дан ҳосил олинган бўлса, ҳар бир майдондан қанчадан ҳосил олинган ва ҳар бир майдоннинг юзи қанча?

15. Кутубхонада 65000 дона ўзбек, чет эл ва рус тиллардаги китоблар бор. Чет эл тилидаги китоблар ўзбекча китоблардан 25600 дона кам, рус тилидаги китоблар эса чет эл тилидаги китоблардан 2200 дона ортиқ. Кутубхонада нечта ўзбекча, чет эл тилида ва русча китоб бор?

16. Боғ тўғри тўртбурчак шаклида бўлиб, бўйи 280 м, эни 204 м. Боғ энига параллел қилиб, 3 бўлакка бўлинди. Бунда боғнинг бўйи бири иккинчисидан 31 м кам ва

учинчисидан 33 м ортиқ қилиб 3 бўлакка бўлинади. Катта майдондан кичик майдонга қараганда 195 ц 84 кг ортиқ мева йиғиб олинади. Боғдан йиғиб олинган ҳамма мева ҳосилини аниқланг.

17. 4 та аудиторияда ўтказилган дарсда 870 нафар талаба қатнашди, бунда биринчи аудиторияда иккинчидагидан 60 та ортиқ талаба қатнашди, иккинчи аудиторияда учинчидагидан 20 та кам, учинчи аудиторияда тўртинчидагидан 50 та кам талаба қатнашди. Ҳар қайси аудиторияда нечтадан талаба бўлган?

18. Пассажир поезди икки шаҳар орасидаги масофани 15 соатда босиб ўтади. Тезлиги ундан соатига 35 км ортиқ бўлган «стрела» поезди шу масофани 8 соатда босиб ўтади. Шаҳарлар орасидаги масофани топинг.

19. Тошкентдан Бухорогача темир йўл бўйлаб 596 км. Эрталаб соат 10 да Тошкентдан Бухорога қараб поезд йўлга чиқди, эрталаб соат 11- у 9 минутда Бухородан унга қараб соатига биринчи поезддан 2 км 500 м ортиқ йўл юрадиган бошқа поезд йўлга чиқди. Иккала поезд кеч соат 5- у 49 минутда учрашишди. Ҳар қайси поезднинг тезлигини ҳисобланг.

20. Соат 14- у 45 минутда Тошкентдан паррандачилик хўжалигига қараб автобус йўлга чиқди. Соат 15 да паррандачилик хўжалигидан бошқа автомобиль унга қарши йўлга чиқди. Автобуснинг тезлиги соатига 40 км, автомобилнинг тезлиги эса соатига 44 км. Хўжалик Тошкентдан 45 км масофада жойлашган. Автобус билан автомобилнинг учрашиш вақтини топинг.

21. *A* пристандан тезлиги соатига 10 км бўлган пароход йўлга чиқди. 9 соатдан кейин у *B* пристанга келди, у ерда 3 соат 40 минут туриб орқага қайтди. Пароход *B* пристандан чиққанидан қанча вақт кейин у билан бир вақтда *A* пристандан чиқиб, сув оқими билан келаётган сол билан учрашади? Сувнинг оқими тезлиги соатига 3 км.

22. Икки пароход пристандан бир томонга қараб йўлга чиқди. Биринчи пароходнинг тезлиги соатига 25 км, иккинчисининг тезлиги соатига 20 км. Биринчи пароход тайинланган пристанга иккинчисидан 4 соат олдин етиб келди. Шу пристанлар орасидаги масофани топинг.

23. Соат 9 да Тошкентдан Душанбага қараб соатига 40 км тезлик билан пассажир поезди йўлга чиқди, соат 11 да эса унинг кетидан соатига 58 км тезлик билан тезюрар поезд йўлга чиқди. Агар ҳаракатнинг хавфсиз-

лиги учун поездлар орасидаги масофа 8 км дан кам бўлмаслиги керак бўлса, тезюрар поездни ўтказиб юбориш учун пассажир поезди соат нечада тўхташи керак?

24. Тошкентдан Самарқандга бир вақтда икки машина йўлга чиқди: бири юк машинаси бўлиб, соатига 48 км дан, иккинчиси енгил машина бўлиб, соатига 82 км дан йўл юради. Енгил машина Самарқанддан 60 км масофада бўлганида юк машинаси Самарқанддан 232 км масофада эди. Самарқанддан Тошкентгача бўлган масофани аниқланг.

25. A станциядан соатига 40 км тезлик билан бир поезд йўлга чиқди. 2 соат 15 минутдан кейин *A* станциядан иккинчи поезд соатига 65 км тезлик билан йўлга чиқиб, биринчи поезддан 4 соат олдин *B* станцияга етиб келди. Станциялар масофасини топинг.

26. *A* пристандан кундуз соат 12 да сувнинг оқими билан сол оқизилди. Сувнинг тезлиги соатига 3 км. 10 соатдан кейин шу томонга қараб соатига 8 км тезлик билан юрадиган буксир пароходи йўлга чиқди. Буксир пароходи солга етиб олган пайтда уларга етиб олиши учун соатига 16 км юрадиган моторли катерни шу пристанга қачон жўнатиш керак?

II боб. **СОНЛАРНИНГ БЎЛИНИШИ ВА БЎЛИНИШ БЕЛГИЛАРИ**

1-§. ТУБ ВА МУРАККАБ СОНЛАР

Бирдан катта ҳар қандай натурал соннинг бўлувчилари ё иккита, ёки иккитадан ортиқ бўлиши мумкин. Масалан, 3 сонининг бўлувчилари бир ва ўзи, 6 сонининг бўлувчилари эса 1, 2, 3, 6 сонларидан иборат.

13-таъриф. *Фақат иккита бўлувчига (1 га ва ўзига) эга бўлган ва бирдан катта бўлган сон туб сон дейилади.* 2) *Иккитадан ортиқ бўлувчиларга эга бўлган сон мураккаб сон дейилади.*

Мисол: 1) 2, 3, 5, 7, 11, 17, 19, 23, ...— туб сонлардир, чунки бу сонлар фақат бирга ва ўзига бўлинади;

2) 4, 8, 9, 10, 12, ...— сонларининг бўлувчилари иккитадан ортиқ ва юқоридаги таърифга асосан мураккаб сонлардир.

Маълумки, бир сони 13-таърифга кирмайди, шунинг учун у на туб ва на мураккаб сон дейилади.

Биз келгусида туб сонларни *p* ҳарфи ёрдамида ёки лозим бўлганда индекс билан $p_1, p_2, \ldots, p_n$ кўринишларда ёзамиз.

24-теорема. *Бирдан фарқли ҳар қандай натурал сон камида битта туб бўлувчига эга.*

Исботи. Бирор m натурал сон берилган бўлсин. Агар $m = p$ бўлса, у ҳолда теорема исбот бўлган бўлади. Энди $m \neq p$ бўлсин дейлик, у ҳолда $1 < q \leqslant m$ сон мавжуд бўлиб, $m = qn$, $n < m$ бўлади. Бу ерда $q = p$ бўлса, у ҳолда теорема исботланади, $q \neq p$ бўлса, $q = lk$ бўлиб, бу ҳолда $m = lkn$ бўлади. Агар $l = p$ бўлса, у ҳолда теорема исботланади, агар $l \neq p$ бўлса, шу жараён давом этиб, чекли қадамда тўхтайди. Бундай сонлар қатори албатта туб сон билан тугалланади ва, демак, m сон албатта ҳеч бўлмаганда битта туб бўлувчига эга бўлади. Шу билан теорема исботланди.

25-теорема. *Ҳар қандай мураккаб сон бир ва фақат биргина усул билан туб сонлар кўпайтмаси шаклида тасвирланиши мумкин.*

Исботи. m берилган мураккаб сон бўлсин ва $p_1, p_2, \ldots p_n$ учун $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ шарти ўринли бўлсин дейлик. 23- теоремага асосан m нинг ҳеч бўлмаганда битта туб бўлувчиси бор, яъни $m = p_1 m_1$ бўлиб, бунда p_1 — туб сон, агар m_1 ҳам туб сон бўлса, у ҳолда теорема исбот бўлади. Агар $m_1 \neq p$ бўлса, юқоридаги усулни қўллаб, $m = p_1 \cdot p_2 m_2$ ни ҳосил қиламиз, агар m_2 туб сон бўлса, у ҳолда теорема исбот бўлади. Аксинча бўлса, у ҳолда $m = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot m_3$ ва ҳоказо, маълум n қадамдан сўнг $m = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots p_n$ ёки $p_i \wedge i = \overline{1, n}$ лар такрорланса, у ҳолда $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha n}$, $\alpha_i \in N$, $i = \overline{1, n}$ кўринишда ёзиш мумкин бўлади. Энди, m сон бир вақтда икки хил туб кўпайтувчиларга ажралсин дейлик, яъни

$$m = p_1 \cdot p_2 \ldots p_n \tag{1}$$

ва

$$m = q_1 \cdot q_2 \ldots, q_l, \tag{2}$$

бу ерда

$$m = q_1 q_2 \ldots q_n q_{n+1} \ldots q_l$$

бўлишини назарда тутамиз. Ҳосил қилинган (1) ва (2) дан бевосита

$$p_1 \cdot p_2 \ldots p_n = q_1 q_2 \ldots q_n \ldots q_l \tag{3}$$

бўлиб, бу (3) нинг иккала томонида ҳеч бўлмаганда камида биттадан туб сонлар топиладики, улар устма-уст тушади, яъни $p_1 = q_1$ бўлсин дейлик, у ҳолда жараённи давом эттирсак, n — 1-қадамдан сўнг $p_n = q_n$ бўлиб, (3) дан $1 = q_{n+1}\, q_l$ ҳосил бўлади, бундан $q_{n+1} = 1, \ldots, q_l = 1$ экани келиб чиқади. Шундай қилиб, ҳар бир мураккаб сонни биргина усул билан туб сонлар кўпайтмаси кўринишида ёзиш мумкин экан.

26-теорема. *m мураккаб соннинг энг кичик туб бўлувчиси $\sqrt{m}$ дан катта эмас.*

Исботи. Берилган m мураккаб соннинг энг кичик туб бўлувчиси p бўлсин, у ҳолда $m = pm_1$ бўлиб, $m_1 \geqslant p$ бўлади. Бундан $mm_1 \geqslant p^2 m_1$ га эга бўламиз ва натижада тенгсизликни m_1 га бўлиб, $m \geqslant p^2$ ёки $p \leqslant \sqrt{m}$ ни ҳосил қиламиз. Шу билан теорема исботланди.

Мисол. 919 сонининг энг кичик туб бўлувчисини топинг.

Ечиш. Бунинг учун $\sqrt{919}$ дан кичик бўлган туб сонлар 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 эканини аниқлаб, 919 ни шу сонларнинг ҳар бирига бўлиб чиқамиз, натижада 919 уларнинг ҳеч бирига бўлинмайди, бундан 919 нинг ўзи туб сон эканлиги келиб чиқади.

27-теорема. *Туб сонлар сони чексиздир.*

Бу теореманинг исботини ўқувчиларнинг ўзларига ҳавола қиламиз.

2-§. СОНЛАРНИНГ БЎЛИНИШИ

Юқорида ва 12-таърифда сонлар $a = bq$ муносабатда бўлса, у ҳолда a сон b сонга қолдиқсиз бўлинади деган тушунча келтирилган эди. Шунинг учун a нинг b га қолдиқсиз бўлиниши одатда $a \vdots b$ кўринишда ёзилади. Лекин амалиётда ҳар доим ҳам a сон b сонга қолдиқсиз бўлинавермайди, у қолдиқли, яъни $\widehat{a} = b \cdot q + r$, $0 \leqslant r < b$ бўлиши мумкин, бу ерда r *қолдиқ* дейилади.

28-теорема. *Агар берилган йиғиндида ҳар бир қўшилувчи берилган сонга бўлинса, у ҳолда йиғинди ҳам шу сонга бўлинади; бўлинмалар йиғиндиси йиғиндининг бўлинмасига тенгдир.*

Исботи. Теорема шартига кўра берилган $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сонлар бирор берилган q сонга бўлинади, яъни $a_i = qb_i \wedge$

$\wedge\ i=\overline{1,n}$ берилган бўлиб, $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \vdots q$ эканини кўрсатишимиз талаб қилинади. Демак, $a_i = q b_i \wedge i=\overline{1,n}$ га асосан $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = q\cdot \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$ ни ёза оламиз, бундан $S_n = q(b_1+b_2+\ \ldots\ +b_n)$ бўлади ва 12- таърифдаги $a=bq$ га асосан $S_n \vdots q$ бўлади. Бундан $S_n=q\cdot c$ бўлиб, $q\cdot c = q(b_1+b_2+\ \ldots\ +b_n)$ бўлади. Сўнгра тенгликнинг иккала томонини $q\neq 0$ га бўлсак, у ҳолда $c=b_1+b_2+\ \ldots\ +b_n$ бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.

29- теорема. *Агар берилган a ва b сонлар учун $a \vdots q$ ва $b\vdots q$ бўлса, у ҳолда $(a-b)\vdots q$ бўлади.*

Исботи. Теореманинг шартига кўра ва 12- таърифга асосан $a=qa_1$ ва $b=qb_1$ ни ёза оламиз. Бундан $a-b \underset{T_8}{=} qa_1-qb_1=q(a_1-b_1)$. Демак, $a-b=q(a_1-b_1)$ га асосан $(a-b)\vdots q$ бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.

14- натижа. *Агар икки соннинг йиғиндиси ва бир қўшилувчи берилган сонга бўлинса, у ҳолда иккинчи қўшилувчи ҳам шу сонга бўлинади.*

Исботи. Шартга кўра $m=n+k$ бўлиб, q берилган бўлувчи бўлсин. Теореманинг шартига кўра $m \vdots q$ ва $n\vdots q$, яъни $m=qm_1$ ва $n=qn_1$ бўлади. $k\vdots q$ эканини кўрсатамиз. Шартдан $m=n+k$ дан 11- таърифга асосан $m-n=k$ ни ёза оламиз, энди қийматларни ўрнига қўйсак $qm_1-qn_1 \underset{T_8}{=} k \Leftrightarrow q(m_1-n_1)=k$ бўлади. Шунга кўра, 12- таърифдан $k\vdots(m_1-n_1)$ бўлиб, $k\vdots q$ экани келиб чиқади. Шу билан натижа исботланди.

Бу натижага индукция аксиомасини татбиқ қилиб, у исталган чекли йиғинди учун ўринли эканини кўрсатиш мумкин.

30- теорема. $\forall a,\ b,\ c\in N: a\vdots b \wedge b\vdots c \Rightarrow a\vdots c$,

Исботи. Шартга кўра $a=b\cdot a_1$ ва $b=cb_1$ бўлгани учун $a=b\cdot a_1=cb_1\cdot a_1=c\cdot(a_1\cdot b_1)$; $a=c\cdot(a_1b_1)$ бўлади. Бундан $a\vdots c$ экани келиб чиқади. Шу билан теорема исботланди.

31- теорема. *Агар икки соннинг ҳар бирини учинчи сонга бўлишдан қолган қолдиқлар ўзаро тенг бўлса, у ҳолда бу сонларнинг айирмаси шу сонга қолдиқсиз бўлинади.*

Исботи. Теорема шартига кўра $a = qa_1 + r$ ва $b = qb_1 + r$, у ҳолда $a - b = qa_1 + r - (qb_1 + r) = qa_1 - qb_1 = q(a_1 - b_1)$ бўлади. Бундай ҳолда 28-таърифга асосан $a - b = q(a_1 - b_1)$ бўлиб, $(a - b) \vdots q$ бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.

Юқорида кўриб ўтилган 13-таъриф ва бошқа мулоҳазаларга асосан ҳар қандай мураккаб a сонни $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n} = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1} = a_n \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10 + a_1$ кўринишда ёзиш мумкин эканлигини биламиз. $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}, \ldots p_n^{\alpha_n}$ эса *а соннинг каноник ёйилмаси* ҳам деб айтилади. Шунинг учун ҳам a сон бўлинадиган сонларни $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ ларнинг ичидан излаш лозим бўлади. Агар сон $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$ кўринишда берилган бўлса ва унинг ихтиёрий бўлувчисини k десак, у ҳолда бу k бўлувчи $\beta_i \in \{0, 1, 2, \ldots, \alpha_i\} \wedge i = \overline{1, n}$ (λ) шарти билан аниқланган $k = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n}$($\delta$) дан иборат бўлиши амалдан бизга маълумдир. Масалан, 180 сонининг бўлувчиларини $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ дан изласак, улар 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180 дан иборат эканлигини кўриш мумкин, яъни $k = 36$ бўлиши учун $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ лар учун $\beta_1 = 2$; $\beta_2 = 2$; $\beta_3 = 0$ бўлиши ёки $k = 45$ бўлиши учун $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 2$; $\beta_3 = 1$ бўлиши лозимлиги талаб қилинади. Шунинг учун ҳам берилган соннинг бўлувчиларини топишни юқорида келтирилган шарт асосида танлаш ёрдамида ҳал қилиш мумкин.

32-теорема. *Агар берилган икки соннинг кўпайтмаси p туб сонга бўлинса, у ҳолда кўпайтувчилардан ҳеч бўлмаганда бири шу p га бўлинади.*

Исботи. Теорема шартига кўра a ва b сонларнинг ab кўпайтмаси p га бўлинади. a сон p га бўлинмасин дейлик, у ҳолда a ва p сонларни $au + pv = 1$ шарт бўйича боғловчи шундай u ва v сонларни топиш мумкинки, бундан $abu + pbv = b$ бўлиб, $ab \vdots p$ ва $p \cdot b \vdots p$ эканидан $b \vdots p$ бўлиши келиб чиқади. Шу билан теорема исбот қилинди.

33-теорема. *Агар бир нечта $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ сонларнинг кўпайтмаси берилган p туб сонга бўлинса, у ҳолда улар ичидан p сонга бўлинадиган камида битта кўпайтувчи топилади.*

Бу теореманинг исботи бевосита 32-теоремадан келиб чиқади.

Биз юқорида сонларнинг бўлинишига оид айрим фикр ва мулоҳазаларни кўриб чиқдик. Бу кўриб чиқилган мулоҳазалар бевосита, берилган сонлар мураккаб сон бўлса, уларнинг бўлувчилари нечта бўлиши мумкин ёки уларнинг бўлувчилари йиғиндисини топиш мумкинми каби саволларга олиб келиши табиийдир. Шунинг учун ҳам сон ўзининг каноник ёйилмаси $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ \dots \ p_n^{\alpha_n}$ билан берилган бўлса, у ҳолда юқоридаги каби саволларга жавоб беришга ҳаракат қиламиз.

34- теорема. *$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ натурал соннинг барча натурал бўлувчилар сони*

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1) \ \dots \ (\alpha_n + 1) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

бўлади.

Исботи. Юқорида келтирилган мулоҳазага асосан ҳар қандай a натурал соннинг натурал бўлувчиларини (λ) шартга асосан [δ] ёрдамида топиш мумкин. Шу сабабли a соннинг барча натурал бўлувчиларини топиш учун мумкин бўлган барча $<\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n>$ тўпламларни қараш лозим бўлади. Шунга асосан [λ] даги ҳар бир β_i мустақил равишда $\alpha_i + 1$ қийматни қабул қилиши мумкин, бундан β_1, β_2, $\beta_3, \dots, \beta_n$ ларни инобатга олсак, у ҳолда a соннинг барча натурал бўлувчилари сони $\tau(a) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$ дан иборат бўлади.

Мисол. $a = 60$ бўлсин, у ҳолда $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ бўлади. $\tau(a) = (2+1)(1+1)(1+1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ та. Ҳақиқатан ҳам 60 сонининг бўлувчилари 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 дан иборат. Шундай қилиб, берилган a натурал соннинг натурал бўлувчилари сонини кўрсатувчи формула юзага келди. Агар a сон бутун сон бўлса, у ҳолда унинг бўлувчилари сони натурал бўлувчилар сонидан икки марта кўп бўлади.

35-теорема. Агар *$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ берилган натурал соннинг каноник ёйилмаси бўлса, у ҳолда унинг натурал бўлувчилари йиғиндиси*

$$\delta(a) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \ \dots \ \frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1}$$

бўлади.

Исботи. Теореманинг шартига кўра $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$

берилган, юқоридаги (λ) шартга асосан (δ) ни ҳар доим аниқлаш мумкин эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\delta(A)=\sum p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ \ldots\ p_n^{\beta_n} \tag{1}$$

бўлади. Ҳосил қилинган (1) дан бевосита $(1+p_1+p_1^2+ + \ldots + p_1^{\alpha_1}) \ldots (1+p_n+p_n^2+ \ldots + p_n^{\alpha_n})$ ҳосил бўлади. Сўнгра ҳосил бўлган ҳар бир қавс ичидаги йиғинди геометрик прогрессия ташкил қилгани учун бундай прогрессия ҳадлари йиғиндиси формуласига асосан

$$(1+p_1+\ \ldots\ +p_1^{\alpha_1})\ \ldots\ (1+p_n+p_n^2+\ldots+p_n^{\alpha_n})=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$$

ни ҳосил қиламиз. Натижада (1) нинг стандарт кўринишдаги йиғиндиси

$$\sigma(a)=\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$$

дан иборат бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.

3-§. СОНЛАРНИНГ БУЛИНИШ БЕЛГИЛАРИ

Математикада сонларнинг бўлиниш белгилари тушунчаси жуда муҳим аҳамиятга эга бўлиб, бу тушунча асосида сонларнинг бўлувчиларини, бўлинувчиларини топиш, уларнинг хоссаларини ўрганиш мумкин бўлади. Мактаб математикасида сонларни бўлиниш белгиларининг содда ҳоллари билан чекланилганлиги сабабли биз бу тушунчани атрофлича ҳал қилишга ҳаракат қиламиз.

$$a=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ \ldots\ a_110+a_0 \quad (1)$$

натурал сон берилган бўлиб, шу a соннинг берилган b сонга бўлиниш ёки бўлинмаслигини аниқлаш талаб қилинаётган бўлсин. У ҳолда 28- теоремада берилган маълумотларга таяниб,

$$10=bq_1+r_1:10^2=bq_2+r_2;\ \ldots\ ;\ 10^n=bq_n+r_n$$

3—2823

ларни ҳосил қиламиз, сўнгра топилган бу натижаларни (1) га қўйиб,

$$a = a_n(bq_n + r_n) + a_{n-1}(bq_{n-1} + r_{n-1}) + \ldots + a_1(bq_1 + r_1) + a_0 \tag{2}$$

нинг қавсларини очиб ихчамлангандан кейин эса

$$a = b(a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + \ldots + a_1 q_1) + (a_0 + a_1 r_1 + \ldots + a_n r_n) \tag{3}$$

ни ҳосил қиламиз. Агар (3) да мос равишда

$$(a_n q_n + \ldots + a_1 q_1) b = Q$$

ва

$$(a_0 + a_1 r_1 + \ldots + a_n r_n) = I$$

деб белгиласак, у ҳолда $a = Q + I$ ҳосил бўлади. Ҳосил қилинган натижадан кўриниб турибдики, $Q \vdots b$, лекин $I \div b$ бўлгани учун $a \div b$ бўлади. Борди-ю, агар $a \vdots b$ ва $Q \vdots b$ бўлса, у ҳолда $I \vdots b$ бўлади.

Шунинг учун ҳам ҳосил қилинган $a = Q + I$ формулани a сон бўлинишининг умумий ҳоли деб қараш мумкин.

1) 2 га бўлиниш белгилари. Бу ҳол учун 10 ва унинг даражаларини 2 га бўлсак, қолдиқ ҳар доим нолга тенг бўлади ва (1) ҳамда (3) га асосан $I = a_0$ бўлиб, агар берилган a соннинг охирги рақами 2 га қолдиқсиз бўлинса, у ҳолда бу сон 2 га қолдиқсиз бўлинади деган хулосага келамиз.

2) 3 га ва 9 га бўлиниш белгиси. Бунинг учун (1) даги 10 нинг даражаларини $10^n = (9 + 1)^n = 9A_n + 1$ кўринишда ифодаласак, у ҳолда

$$a = a_n(9A_n + 1) + \ldots + a_1(9 + 1) + a_0 = 9(a_n A_n + \ldots + a_1) + (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$$

ҳосил бўлади. Бунда биринчи қўшилувчи 3 га ва 9 га қолдиқсиз бўлинади, энди иккинчи йиғиндининг 9 га ва 3 га бўлиниши зарурлиги келиб чиқади, яъни ушбу қоида ўринли: агар берилган a соннинг рақамлари йиғиндиси 9 га ва 3 га қолдиқсиз бўлинса, у ҳолда бу сон 9 га ва 3 га қолдиқсиз бўлинади.

3) 5 га бўлиниш белгиси. Бу ҳолда a сонда қатнашаётган 10 нинг даражалари 5 га қолдиқсиз бўлинади.

Шунинг учун $r_1 = r_2 = \ldots r_n = 0$ бўлиб, $l = a_1$ бўлади. Бундан бундай қоида келиб чиқади: охирги рақами 5 га қолдиқсиз бўлинадиган сонлар ва фақат шундай сонлар 5 га қолдиқсиз бўлинади.

4) 4 ва 25 га бўлиниш белгилари. Бу ҳолда 10 нинг даражаларини 4 га бўлишдан ҳосил бўлган қолдиқлар $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = \ldots = r_n = 0$ бўлиб, $l = a_0 + 2a_1$ бўлади, яъни соннинг 4 га бўлиниши учун, унинг бирлик рақами билан ўнлик рақами иккиланганининг йиғиндиси 4 га бўлиниши зарур ва етарлидир. $l = a_0 + 2a_1$ ни $l_1 = a_0 + 2a_1 + 8a_1 = l + 8a_1 = \overline{a_1 \, a_0}$ ҳосил бўлади. Бундан, охирги икки рақамидан тузилган сон 4 га бўлинадиган сонлар ва фақат шундай сон 4 га бўлиниши келиб чиқади.

Масалан, 364 сонида 64 сони 4 га бўлинади, демак, 364 сони ҳам 4 га бўлинади.

Худди шунга ўхшаш, охирги икки рақамидан тузилган сон 25 га бўлинадиган сонлар ва фақат шундай сонлар 25 га қолдиқсиз бўлинади.

Масалан, 1275 сонида охирги икки рақамидан иборат сон 75, бу 25 га қолдиқсиз бўлинади. Демак, 1275 ҳам 25 га қолдиқсиз бўлинади.

Шундай қилиб, 2^k ва 5^k га бўлинадиган сонлар учун: агар берилган соннинг охирги k та рақамидан тузилган сонлар 2^k ва 5^k га қолдиқсиз бўлинса, у ҳолда фақат шундай сонлар 2^k ва 5^k га бўлинади.

5) 7 га бўлиниш белгиси. Берилишига кўра $b = 7$ бўлгани учун

$$
\begin{aligned}
10 &= 7 + 3, \\
10^2 &= 7 \cdot 14 + 2, \\
10^3 &= 7 \cdot 142 + 6, \\
10^4 &= 7 \cdot 1428 + 4, \\
10^5 &= 7 \cdot 14285 + 5, \\
10^6 &= 7 \cdot 142857 + 1
\end{aligned}
$$

ларни ҳосил қиламиз, 10^7 да эса яна $r = 3$ қолдиқ такрорланганн учун уни давом эттирмаймиз. Топилган натижаларни (1) га қўйсак, у ҳолда $a = Q + l$ да $l = a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + a_6 + 3a_7 + 2a_8 + \ldots$ ҳосил бўлади. Энди бу қўшилувчилар коэффициентларини 7 га мослаштириб бир қисмини ажратиб оламиз, яъни $l = a_0 + 3a_1 + 2a_2 + (7a_3 - a_3) + (7a_4 - 3a_4) + (7a_5 - 2a_5) + \ldots =$

$$= 7(a_3 + a_4 + a_5 + a_9 + a_{10} + a_{11} + \ \ldots) +$$
$$+ (a_0 + 3a_1 + \underbrace{2a_2 + a_6 + 3a_7 + 2a_8 + \ \ldots}_{I_2}) -$$
$$- (a_3 + 3a_4 + 2a_5 + \underbrace{a_9 + 3a_{10} + 2a_{11}}_{I_1} + \ \ldots)$$ ни ҳосил қиламиз. Натижада, охирги $I_2 - I_1$ айирма 7 га қолдиқсиз бўлинса, у ҳолда берилган a сон ҳам 7 га қолдиқсиз бўлиниши келиб чиқади.

Мисол. 586067542 сонининг 7 га бўлинишини аниқланг.

5 4 2	0 6 7	5 8 6
2 3 1	2 3 1	2 3 1
$10+12+2=24$	$0+18+7=25$	$10+24+6=40$

$40+24-25=39$, 39 сони 7 га бўлинмайди.

Демак, берилган сон 7 га бўлинмайди.

6) 11 га бўлиниш белгиси. Берилган a сонда қатнашаётган 10 нинг даражаларини 11 га бўлишдаги қолдиқ ҳар доим 10 ёки 1 бўлади. Демак, берилган соннинг жуфт ўринда турган рақамлари йиғиндисидан тоқ ўринда турган рақамлари йиғиндисини айирилганда ҳосил бўлган айирма 11 га бўлинса, у ҳолда шундай сонлар ва фақат шундай сонлар 11 га қолдиқсиз бўлинади.

Мисол. 1) 5679 сонининг 11 га бўлинишини аниқланг.

$-(5+7)+(6+9)=-12+15=+3$. Демак, 3 сони 11 га бўлинмайди. Сон 11 га бўлинмайди.

2) 2079 нинг 11 га бўлинишини текширинг.

$(0+9)-(2+7)=0$. Демак, сон 11 га бўлинади. $2079:11=189$ ҳосил бўлади.

4-§. ИККИ ВА УНДАН ОРТИҚ СОНЛАРНИНГ УМУМИЙ БЎЛУВЧИСИ ВА БЎЛИНУВЧИСИ

a натурал сон берилган бўлиб, a мураккаб сон бўлсин дейлик, у ҳолда унинг 1 ва a дан бошқа бўлувчилари бир билан a соннинг орасидаги сонлар бўлиши керак. Бундан, берилган a соннинг бўлувчилари сони чекли эканлиги келиб чиқади. Масалан, $a=30$ сонининг бўлувчилари 1, 2, 3, 5, 6, 15, 30 сонлари. $a=75$ сонининг бўлувчилари эса 1, 3, 5, 15, 25, 75 сонлари бўлади. Агар бир вақтда 30 ва 75 сонларининг бўлувчилари бўлган сонларни топиш талаб қилинса, бу сонлар 1, 3, 5, 15 бўлади. Булар *умумий бўлувчилар* деб аталади. Лекин бу умумий бўлувчилар ичида 30 ва 75 сонларини бўладиган «энг катта умумий бўлувчи» (ЭКУБ) 15 сонидан иборат эканлигини кўрсатиш мумкиндир.

14-таъриф. *a ва b сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси деб шу сонлар умумий бўлувчиларининг энг каттасига айтилади ва қуйидагича белгиланади: $D\ (a,\ b) = d$.*

Бу таърифнинг мазмунига кўра $D(a, b) = D(b, a) = d$ ни ёзиш мумкин.

14- таърифдан бевосита қуйидаги масалани қўйиш мумкин: $d = 1$ бўлса- чи?

15- таъриф. *Агар a ва b сонлар учун $D(a, b) = d = 1$ бўлса, у ҳолда a ва b сонлар ўзаро туб сонлар дейилади ва қуйидагича белгиланади: $(a, b) = 1$.*

36- теорема. *a ва b сонлар учун $a \vdots b$ бўлса, у ҳолда a ва b сонларнинг умумий бўлувчилари b соннинг бўлувчилари билан бир хил бўлади ва $D\ (a,\ b) = b$ бўлади.*

Исботи. Теореманинг шартига асосан, шундай q сон мавжудки, $a = bq$ бўлади. $b \vdots t$ бўлсин, у ҳолда $bq \vdots t$ бўлиб, бундан $a \vdots t$ бўлади. Демак, a ва b сонларнинг умумий бўлувчилари b соннинг бўлувчиларидан иборат бўлади.

14-таърифга асосан $D\ (a,\ b) = b$ бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.

37- теорема. *Агар a ва b $(a > b)$ сонлар учун $a = bq + r$ бўлса, у ҳолда $D(a, b) = D(b, r)$ бўлади.*

Исботи. Шартга кўра $a = bq + r$, бунда $0 < r < b$. Агар $a \vdots t$ ва $b \vdots t$ бўлса, у ҳолда 28- теорема ва 14- хоссага асосан $r \vdots t$ бўлади. Бундан a ва b сонларнинг бўлувчилари r қолдиқнинг ҳам бўлувчилари бўлади. Шу билан бирга, 28- таърифга асосан b ва r нинг бўлувчилари a нинг ҳам бўлувчилари бўлади.

Энди $D(a, b) = D(b, r)$ эканини кўрсатамиз. Бунинг учун $D(a, b) = d$ ва $D(b, r) = d_1$ бўлиб, $d_1 > d > 0$ бўлсин, у ҳолда юқоридаги $r = a - bq$ га ва 29- теоремага асосан a ва b нинг барча мусбат бўлувчилари r нинг ҳам бўлувчилари бўлади, бундан $d_1 > d > 0$ ёки $d > d_1 > 0$ бўлиши мумкин эмас. Демак, $D(a, b) = D(b, r)$ бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.

38- теорема. *Агар a ва b сонлар учун $a \not\vdots b$ бўлиб, шундай $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ ва $r_1, r_2, \ldots, r_n$ сонлар мав-*

жудки, $a=bq_1+r_1$; $b=r_1q_2+r_2$; $r_1=r_2q_3+r_3$; $\ldots$; $r_{n-1}=$ $=r_nq_{n+1}$ бўлса, у ҳолда $D(a, b)=r_n\neq 0$ бўлади (Эвклид алгоритми).

Исботи. Бу теоремани исботлаш учун $r_{n-2}=r_{n-1}q_n+$ $+r_n$ ва $r_{n-1}=r_nq_{n+1}$ муносабатларидан $r_{n-1}\vdots r_n$ ва $r_{n-2}\vdots$ $\vdots r_n$ бўлиб, бу жараённи бошланғич қадамга қараб юритсак, $a\vdots r_n$ ва $b\vdots r_n$ эканига ишонч ҳосил қиламиз, у ҳолда 14-таъриф ва 37- теоремага асосан $D(a, b)=r_n$ экани келиб чиқади. Шу билан теорема исбот қилинди.

Юқорида келтирилган 14-таърифни $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сонлар учун татбиқ қилсак, у ҳолда бевосита $D(a_1, a_2, \ldots, a_n)=d$ ни ҳосил қиламиз, яъни берилган $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сонларининг бўлувчилари ичида энг каттасини d орқали белгилаган бўламиз.

39- теорема. *Агар* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *сонларнинг ихтиёрий жуфти учун* $D(a_i, a_j)=1 \wedge i\neq j \wedge i, \ j=1, n$ *бўлса, у ҳолда* $D(a_1, a_2, \ldots, a_n)=1$ бўлади.

40- теорема. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *сонлар учун* $D(a_1, a_2$ $a_3, \ldots, a_{n-1})=d_{n-1}$; $D(d_{n-1}, a_n)=d_n$ *бўлса, у ҳолда* $D(a_1, a_2, \ldots, a_n)=d_n$ бўлади.

Бу теоремаларнинг исботини ўқувчиларнинг ўзларига ҳавола қиламиз.

Мисол. 30, 45, 75 сонларининг энг катта умумий бўлувчисини топинг.

Ечиш. $D(30, 45, 75)=D[D(30, 45), 75]=D(15, 75)=$ $=15$.

Демак, $D(30, 46, 75)=15$.

41-теорема. *Агар* a *ва* b *сонлар учун* $D(a, b)=d$ *бўлса, у ҳолда* $D\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)=1$ *бўлади.*

Исботи. Теореманинг шартига кўра $D(a, b)=d$, у ҳолда шундай x, y сонлар мавжудки, $a=dx$, $b=dy$ бўлади. Энди $D(x, y)=1$ эканини кўрсатамиз. Бунинг учун тескарисини фараз қиламиз, яъни $D(x, y)=d_1>1$ бўлсин дейлик, у ҳолда шундай x_1 ва y_1 сонлар мавжудки, $x=d_1x_1$ ва $y=d_1y_1$ бўлади. Бундан $a=dd_1x_1$ ва $b=dd_1y_1$ ни ҳосил қиламиз: $D(a, b)=dd_1$ бўлиб, $dd_1>d$ бўлади. Бундан эса $D(x, y)=d_1>1$ деган фаразимиз нотўғри бўлиб, $d_1=1$ бўлади. Шу билан теорема исботланди.

42-т е о р е м а. *a ва b сонларнинг ҳар қандай умумий бўлувчиси уларнинг энг катта умумий бўлувчисининг ҳам бўлувчисидир.*

М и с о л. 30 ва 45 сонларининг умумий бўлувчилари уларнинг энг катта умумий бўлувчисининг бўлувчиси эканини кўрсатинг.

Е ч и ш. 30 нинг бўлувчилари 1, 2, 3, 5, 6, 10, 16, 30 бўлиб, 45 ники эса 1, 3, 5, 9, 15, 45. Лекин 30 ва 45 нинг умумий бўлувчилари 1, 3, 5, 15. Демак, $D(30, 45) = 15$ бўлгани учун 15 сони 1, 3, 5 га ҳам қолдиқсиз бўлинади.

43-т е о р е м а. *Агар a ва b сонлар учун $D(a, b) = d$ бўлса, у ҳолда $D(ak, bk) = dk$ бўлади.*

Бу юқорида келтирилган теоремаларнинг исботи исботланган теоремалар исботидан бевосита келиб чиқадиган бўлгани учун уларни келтирмадик.

Берилган a ва b сонларнинг умумий бўлувчиси тушунчаси билан биргаликда умумий бўлинувчиси ёки карралиси тушунчаси ҳам мавжуд бўлиб, бу тушунча математикада муҳим аҳамиятга эгадир.

15 ва 21 сонлари берилган бўлсин. 15 сонига бўлинадиган сонларнинг умумий кўриниши 15 k ва 21 сонига бўлинадиган сонларнинг умумий кўриниши 21 n $(k, n \in N)$ бўлиб, лекин бир вақтда 15 га ва 21 га қолдиқсиз бўлинадиган сонларнинг умумий кўринишини 105 m, $m \in N$ кўринишда ёзиш мумкин, яъни: 105, 210, 315, 420 , ... Лекин бу топилган умумий бўлинувчи сонларнинг ичида 15 ва 21 сонига энг кичик карралиси 105 сонидир. Бу 105 сонини топиш учун берилган сонларни юқорида кўриб ўтилган тушунчаларга бевосита суяниб, $15 = 3 \cdot 5$ ва $21 = 3 \cdot 7$ кўринишидаги туб кўпайтувчиларга ажратамиз, сўнгра 15 ва 21 сонларининг туб кўпайтувчиларида 3 қатнашаётгани учун 3 ни бир марта, 5 ва 7 бир мартадан қатнашаётгани учун уларнинг ўзларини олиб, $3 \cdot 5 \cdot 7$ кўпайтмани тузамиз ва 105 сонини ҳосил қиламиз.

16-т а ъ р и ф. *Берилган сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси деб, бу сонларнинг ҳар бирига бўлинадиган энг кичик сонга айтилади ва $K(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ кўринишида белгиланади.*

Агар $n = 2$ бўлса, $K(a_1, a_2)$ ни, $n = 3$ бўлса, $K(a_1, a_2, a_3) = K[K(a_1, a_2), a_3]$ ни ёзиш мумкин.

44-т е о р е м а. *a ва b сонларнинг умумий бўлинувчиси шу сонларнинг энг кичик карралисига бўлинади.*

Исботи. n сон берилган a ва b сонларнинг умумий бўлинувчиси бўлсин. $K(a, b) = t$ бўлсин дейлик ва n сон t га бўлинмайди деб фараз қилайлик. Теорема шартига асосан $n \vdots a$ ва $n \vdots t$ ҳамда $t \vdots a$ ва $t \vdots b$ экани маълум. 16-таъриф ҳамда қилинган фаразга асосан $n = tq + r$, $r < t$ бўлади. Бундан $r = n - tq$ бўлиб, 29-теоремага асосан бир вақтда $r \vdots a$ ва $r \vdots b$ бўлади ва $r < t$ бўлгани учун $K(a, b) = r < t$ бўлади, бу ҳолнинг бўлиши эса мумкин эмас. Демак, $n \vdots t$ бўлади. Шу билан теорема исбот бўлди.

45-теорема. *a ва b сонларнинг умумий бўлинувчиси $\frac{a \cdot b}{D(a, b)}$ га бўлинади.*

Исботи. 14-таърифга асосан $D(a, b) = d$ бўлиб, $a = dx$; $b = dy$ бўлади. n сон a ва b нинг умумий бўлинувчиси бўлсин, яъни $n = at$, бундан $n = dxt$ бўлиб, $\frac{n}{b} = \frac{dxt}{b} = \frac{dxt}{dy} = \frac{x}{y} \cdot t$. Бу ерда $\frac{x}{y} \cdot t \in N$ ва $D(x, y) = 1$ бўлгани учун $t \vdots y$ бўлиб, $t = y \cdot k$ бўлади. Натижада $n = dxt = dxyk$ га асосан ва $b = dy$ эканини эътиборга олиб, $x = \frac{a}{d} = \frac{a}{D(a, b)}$ ни ҳосил қиламиз ҳамда $y = \frac{b}{d}$ бўлади. Демак, $n = d \cdot \frac{a}{D(a, b)} \cdot \frac{b}{d} \cdot k = \frac{a \cdot b}{D(a, b)} \cdot k$; $k \in N$ ни ҳосил қиламиз. Шу билан теорема исбот қилинди.

Бу келтирилган исботдан берилган a ва b сонларнинг энг кичик карралиси $\frac{a \cdot b}{D(a, b)}$ бўлади деган хулосага келиш мумкин.

Мисол. $K(108, 45)$ ни топинг.

Ечиш. Бунинг учун $K(108, 45)$ ни топамиз:

$$\begin{array}{r|l} 108 & 45 \\ -90 & 2 \\ \hline 45 & 18 \\ -36 & 2 \\ \hline 18 & 9 \\ -18 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Демак, $D(108,45)=9$ бўлиб, $K(108,\ 45)=\frac{108\cdot 45}{9}=108\cdot 5=$ $=540$.

46-теорема. *a ва b сонларни бирор $t\neq 0$ сонга бўлинса, у ҳолда $K\left(\frac{a}{t},\ \frac{b}{t}\right)=K(a,\ b)\vdots t$ бўлади.*

Исботи. $K(a,\ b)$ берилган бўлсин, у ҳолда $K\left(\frac{a}{t},\ \frac{b}{t}\right)=\frac{\frac{a}{t}\cdot\frac{b}{t}}{D\left(\frac{a}{t},\ \frac{b}{t}\right)}$ бўлади. 42-теоремага асосан $D\left(\frac{a}{t},\ \frac{b}{t}\right)=\frac{D(a,\ b)}{t}$ бўлади. Демак, $K\left(\frac{a}{t},\ \frac{b}{t}\right)=\frac{\frac{a}{t}\cdot\frac{b}{t}}{D\left(\frac{a}{t},\ \frac{b}{t}\right)}=$ $=\frac{\frac{a}{t}\cdot\frac{b}{t}}{\frac{D(a,\ b)}{t}}=\frac{ab}{D(a,\ b)\,t}=\frac{K(a,\ b)}{t}$. Шу билан теорема исбот қилинди.

47-теорема. *a* ва *b сонлар учун шундай n сон мавжудки,* $K(an,\ bn)=K(a,\ b)\cdot n$ бўлади.

48-теорема. *$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ сонлар учун $K(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1})=S$* ва *$K(S,\ a_n)=H$ бўлса, у ҳолда $K(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)=H$ бўлади. Агар $a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n$ сонлар учун $D(a,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)=1$ бўлса, у ҳолда $K(a_1\ a_2,\ \ldots,\ a_n)=$ $=\prod_{i=1}^{n} a_i$ бўлади.*

Бу теоремаларнинг исботи анча осон бўлганлиги учун уларни ўқувчиларнинг ўзларига ҳавола қиламиз.

Мисол ва масалалар ечиш

1-мисол. 48 сонининг барча бўлувчиларини, бўлувчилари сонини ва уларнинг йиғиндисини топинг.

Ечиш. $48=2^4\cdot 3$ кўринишида тасвирлаш мумкин. 48 нинг бўлувчиларини топишда эса $48=2^4\cdot 3$ нинг ўзидан фойдаланилади, яъни $2^0\cdot 3^0$, $2^1\cdot 3^0$; $2^1\cdot 3^1$; $2^0\cdot 3^1$; $2^3\cdot 3^0$; $2^2\cdot 3$; $2^3\cdot 3$; $2^4\cdot 3^0$; $2^4\cdot 3$, бундан эса 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 ҳосил бўлади.

Агар $\tau(a)$ орқали a натурал соннинг барча турли натурал бўлувчилари сонини, $\sigma(a)$ орқали эса шу бўлувчилар йиғиндисини белгиласак, у ҳолда $\tau(48) = 10$, $\sigma(48) = 124$ бўлади.

2-мисол. 21 ва 56 сонлари орасидаги туб сонлар жадвалини тузинг.

Ечиш. Бунинг учун 21 дан 56 гача бўлган сонлар жадвалини тузиб оламиз. Сўнгра 2 га, 3 га, 5 га, 7 га, 11 га, 13 га, 17 га, 19 га, 23 туб сонларга каррали бўлган сонларнинг тагига чизамиз, яъни

$$\underline{21},\ \underline{22},\ 23,\ \underline{24},\ \underline{25},\ \underline{26},\ \underline{27},\ \underline{28},\ 29,\ \underline{30}\ 31,\ \underline{32}$$

$$\underline{33},\ \underline{34},\ \underline{35},\ \underline{36},\ 37,\ \underline{38},\ \underline{39},\ \underline{40},\ 41,\ \underline{42},\ 43,\ \underline{44}$$

$$\underline{45},\ \underline{46},\ 47,\ \underline{48},\ \underline{49},\ \underline{50},\ \underline{51},\ \underline{52},\ 53,\ \underline{54},\ \underline{55},\ \underline{56}$$

Натижада 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53 туб сонлар қолди.

3-мисол. 2346 ва 646 сонларининг ЭҚУБ ва ЭКУК ини топинг.

Ечиш. Бунинг учун Эвклид алгоритмини татбиқ қиламиз, яъни:

$$\begin{array}{r|l} 2346 & 646 \\ 1938 & \overline{3} \\ \hline 408 & \end{array} \qquad -\begin{array}{r|l} 646 & 408 \\ 408 & \overline{1} \\ \hline 238 & \end{array} \qquad -\begin{array}{r|l} 408 & 238 \\ 238 & \overline{1} \\ \hline 170 & \end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l} 238 & 170 \\ 170 & \overline{1} \\ \hline 68 & \end{array} \qquad -\begin{array}{r|l} 170 & 68 \\ 136 & \overline{2} \\ \hline 34 & \end{array} \qquad -\begin{array}{r|l} 68 & 34 \\ 68 & \overline{0} \\ \hline 0 & \end{array}$$

Демак, охирги нолдан фарқли қолдиқ 34 бўлиб, у берилган сонларнинг ЭҚУБидир, яъни:

$$D(2346,\ 646) = 34,$$

Энди, $K(2346,\ 646) = \dfrac{2346 \cdot 646}{34} = 44574$ бўлади,

Бу мисолни туб кўпайтирувчиларга ажратиш усули билан ҳам ечиш мумкин, яъни

$$2346 = 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 23$$
$$646 = 2 \cdot 17 \cdot 19$$
$$D(2346,\ 646) = 2 \cdot 17 = 34 \ \text{(ЭҚУБ)}$$

$K(2346, 646) = 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 = 44574$ (ЭКУК) ҳосил бўлади.

4-мисол. Барча натурал n лар учун $n(n^2+5)$ ифода 6 га каррали эканини исботланг.

Исботи. Индукция аксиомасидан фойдаланамиз:

1) $n=1$ ва $n(n^2+5) = 1 \cdot (1+5) = 6$ бўлиб, у 6 га карралидир;

2) $n=k$ да $n(n^2+5) = k(k^2+5)$ ни 6 га каррали деб, $n=k+1$ учун ўринли эканини кўрсатамиз, яъни $n(n^2+5) = (k+1)[(k+1)^2+5] = k(k^2+5) + 3k(k+1) + 6$ ҳосил бўлади. Бунда $k(k^2+5)+6$ ифода 6 га каррали, $3k(k+1)$ ифода 3 га ва $k(k+1)$ ифода 2 га каррали, демак, $k(k^2+5)+3(k+1)k+6$ ифода 6 га каррали эканидан $n(n^2+5)$ ифода ихтиёрий натурал n да 6 га каррали экани келиб чиқади.

5-мисол. Ихтиёрий натурал n да $n^4+6n^3+11n^2+6n$ ифода 24 га қолдиқсиз бўлинишини исботланг.

Исботи. $n=1$ да $n^4+6n^3+11n^2+6n = 1+6+11+6 = 24$ бўлиб, $24 \vdots 24$ бўлади. $n=k$ да $k^4+6k^3+11k^2+6k = (k-3)(k-2)(k-1)k : 24$ деб, $n=k+1$ да $(k+1)^4+6(k+1)^3+11(k+1)^2+6(k+1) = (k-2)(k-1)k(k+1)$ бўлиб, кетма-кет келган тўртта соннинг кўпайтмаси 24 га қолдиқсиз бўлинади. Демак, ихтиёрий натурал n да $n^4+6n^3+11n^2+6n$ ифода 24 га қолдиқсиз бўлинади,

6-мисол. Берилган $3^{2n+1}+40n-67$ ифода 64 га қолдиқсиз бўлинишини исботланг.

Исботи. $n=1$ да $3^{2n+1}+40n-67 = 3^3+40 \cdot 1 - 67 = 0 \vdots 64$ бўлади.

$n=k$ да $(3^{2n+1}+40k-67) \vdots 64$ деб $n=k+1$ да ўринли эканини кўрсатамиз. яъни: $3^{2k+3}+40(k+1)-67 = 9 \cdot 3^{2k+1}+40k-67+40 = 9(3^{2k+1}+40k-67) + 64(9-5k)$ бўлиб, натижа 64 га карралидир. Демак, $\forall n \in N: (3^{2n+1}+40n-67) \vdots 64$.

7-мисол. $\forall n \in N: (3^{3n+2}+2^{4n+1}) \vdots 11$ эканини исботланг.

Исботи. $n=1$ да $3^{3n+2}+2^{4n+1} = 3^5+3^5 = 275 = 11 \cdot 25 \vdots 11$ бўлади. $n=k$ да $(3^{3k+2}+2^{4k+1}) \vdots 11$ ўринли десак, $n=k+1$ да $3^{3k+5}+2^{4k+5} = 27 \cdot 3^{3k+2} + 16 \cdot 2^{4k+1} = 16(3^{3k+2}+2^{4n+1}) + 11 \cdot 3^{3k+2}$ бўлади.

Демак, $\forall n \in N: (3^{3n+2}+2^{4n+1}) \vdots 11$.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

1. 2320 ва 2350 сонлари орасида туб сон бор ёки йўқлигини аниқланг.

2. Қуйидаги сонларни туб кўпайтувчилар кўпайтмаси кўринишида тасвирланг: 420, 126, 525, 529, 1514, 1817, 67283, 1224433, 221703, 28303937, 3082607, 138364854, 16304642, 121844682.

3. $2^{18}+3^{18}$ ни туб кўпайтувчиларга ажратинг, унинг каноник ёйилмасини тузинг.

4. n нинг барча натурал қийматларида n^2+4 мураккаб сон эканини исботланг.

5. Агар $4p^2+1$ ва $6p^2+1$ туб сонлар бўлса, у ҳолда p туб сонни топинг.

6. $p>5$ туб соннинг квадратини 30 га бўлганда қолдиқда 1 ёки 19 ҳосил бўлишини кўрсатинг.

7. Агар p ва q туб сонлар бўлиб, улар 3 дан катта бўлса, у ҳолда p^2-q^2 сон 24 га каррали эканини кўрсатинг.

8. Агар берилган A сонни $A=a^2+b^2=c^2+d^2$ кўринишда тасвирлаш мумкин бўлса, у ҳолда A мураккаб сон эканини исботланг (a, b, c, d — бутун сонлар).

9. 235^2+972^2 ни кўпайтувчиларга ажратинг.

10. $3^{10}+3^5+1$ сонни кўпайтувчиларга ажратинг.

11. n натурал соннинг шундай қийматини топингки, $n+10$, $n+14$ ва $n+20$ туб сонлар бўлсин.

12. Қуйидаги сонлар бир вақтда туб сонлар бўла олмаслигини исботланг: 1) $p+5$ ва $p+10$; 2) p, $p+2$ ва $p+5$; 3) 2^n-1 ва 2^n+1 (бунда $n>2$).

14. Агар p ва $8p^2+1$ туб сонлар бўлса, у ҳолда $8p^2+2p+1$ ҳам туб сон эканини исботланг.

Қуйидаги сонларнинг ЭКУБ ва ЭКУҚ ини топинг:

1) 1403 ва 1053,
2) 36372 ва 147220,
3) 10140 ва 92274;
4) 35574 ва 192423;
5) 56595 ва 82467;
7) 24700, 33250.
8) 3640, 14300.
9) 41382, 103818.
10) 3327449 ва 6314153;
11) 179370199 ва 4345121.

15. 48 ва 129 сонларининг умумий бўлувчилари сони ва умумий бўлувчилари йиғиндисини топинг.

16. 54, 88, 144 ва 162 сонларининг умумий бўлувчиларини ва уларнинг йиғиндисини топинг,

17. 720 ва 1200 сонларининг бўлувчилари сонини топинг.

18. Берилган $m \in N$ сон учун m^{m+1} ва $(m+1)^m$ сонларни таққосланг.

19. $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ сонлар учун $2a_{n+1}a_n < a_{n+2}^2 < (a_{n+1} + a_n)^2 + a_0$ ўринли эканини исботланг.

20. Агар $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + n$; a_n, $n \in N$ бўлса, $n^2 + 2n < a_n + a_{n+1} < (n+2)^2$ эканини исботланг.

21. $\overline{1234\,xy}$ сони 8 ва 9 га қолдиқсиз бўлинса, y ҳолда x ва y рақамларни топинг ҳамда $\overline{1234\,xy}$ ва $\overline{y\,1234\,x}$ ни таққосланг.

22. Агар берилган $\overline{xyp\,138}$ сонни 7 га бўлганда, $\overline{138\,xyp}$ сонни 13 га бўлганда қолдиқда 6 сони ҳосил бўлса ва $\overline{x\,1\,yp\,8}$ сонни 11 га бўлганда қолдиқда 5 сони ҳосил бўлса, x, y ва p рақамларини топинг ва ҳосил бўлган сонларнинг энг каттасини ажратинг.

23. Берилган сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси (ЭКУБ) $D(a, b) = d$ ни топинг.

а) 1232, 1672; б) 135, 8211; в) 549, 387;
г) 12606, 6494; д) 29719, 76501; е) 459459, 519203;
ж) 738089; 3082607.

24. Қуйидагиларни топинг:

$D(n;\ 2n+1)$; $D(10n+9;\ n+1)$; $D(3n+1;\ 10n+3)$.

25. $D\left(\frac{x}{a};\ \frac{x}{b}\right) = 1$ фақат ва фақат $x = K(a, b)$ бўлган ҳолдагина бўлишини исботланг.

26. a, b ва c тоқ сонлар учун $D(a, b, c) = D\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$ бўлишини исботланг.

27. Қуйидаги системаларни натурал қийматларда ечинг:

$\begin{cases} x + y = 150, \\ D(x, y) = 30; \end{cases}$ $\begin{cases} D(x, y) = 45, \\ x:y = 11:7; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 8400, \\ D(x, y) = 20; \end{cases}$

$\begin{cases} x:y = 5:9, \\ D(x, y) = 28; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 20, \\ K(x, y) = 10. \end{cases}$

28. a, b, c мусбат бутун сонлар учун қуйидаги муносабатларни исботланг:

$$K(a, b, c) = \frac{abc\,D(a, b, c)}{D(a, b)\,D(a, c)\,D(b, c)} \quad \text{ва}$$

$$D(a, b)\,D(a, c)\,D(b, c)\,K(a, b)\,K(a, c)\,K(b, c) = a^2b^2c^2,$$

29. a ва b натурал сонлар учун $D(a,\ b)=D(5a+3b;\ 3a+8b)$ муносабат ўринли эканини исботланг.

30. Агар $D(a,\ b)=1$ бўлса, у ҳолда, $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}$ каср қисқармас эканини исботланг.

31. Қуйидаги талабнинг ўринли эканини исботланг.
а) $(6^{2n}-1)\vdots 35$; б) $(4^n+15n-1)\vdots 9$; в) $(2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2})\vdots 17$; г) $(6^{2n}+3^{n+2}+3^n)\vdots 11$; д) $(3^{2n+2}-8n-9)\vdots 64$; е) $(3^{3n+2}+5\cdot 2^{3n+1})\vdots 19$; ж) $(2^{n+5}\cdot 3^{4n}+5^{3n+1})\vdots 37$; з) $(7^{n+2}+8^{2n+1})\vdots 57$; и) $(11^{n+2}+12^{2n+1})\vdots 133$; к) $2^{n+2}\cdot 3^n+5n-4)\vdots 25$; л) $5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1})\vdots 23$; м) $(3^{2n+2}\cdot 5^{2n}-3^{3n+2}2^{2n})\vdots 1053$; н) $(4^n+15n-1)\vdots 9$; о) $19^{19}+69^{69}$ йиғинди 44 га бўлинади; п) $2^{6n+178}+2^{n+178}-2^{6n}-2^n$ ифода $n=2k$ бўлганда ва $3^{6n+178}-3^{n+178}-3^{6n}+3^n$ ифода $n=2k$ бўлганда 1969 га қолдиқсиз бўлинади.

III боб. КАСР СОНЛАР

1-§. КАСР СОНЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Натурал сонлар устида бажариладиган амаллардан қўшиш ва кўпайтириш амаллари шу сонли тўплам элементлари орасида бир қийматли бажарилиши, айириш ва бўлиш амаллари эса шартли равишда бажарилиши ҳақида маълумотларга эга бўлдик. Лекин натурал сонлар тўпламида $a+x=b$ кўринишдаги тенглама $b<a$ бўлган ҳолда ечимга эга эмас, шунинг учун натурал сонлар тўпламидан кенгроқ мазмунга эга бўлган тўплам бутун сонлар тўплами эканлиги мактаб математикасидан маълумдир. Маълумки, миқдорларни, кесмалар узунликлари, юзлар, ҳажмлар, жисм оғирликлари ва ҳоказоларни ҳамма вақт ҳам бутун сонлар ёрдамида ўлчашнинг имконияти бўлавермайди. Ҳақиқатан ҳам, бирор миқдорни маълум ўлчов бирлиги ёрдамида ўлчаш натижаси бутун сон бўлиши учун у ўлчов бирлиги ўлчанаётган миқдорда бутун сон марта бўлиши талаб қилинади, бу ҳол эса ҳар доим ҳам мумкин бўлавермайди.

AB кесмани ўлчаш талаб қилинаётган бўлсин дейлик. Бу кесманинг узунлигини $l(AB)$ орқали белгилаймиз. Бу кесмани ўлчаш учун узунлиги $l(CD)=1$ бўлган CD бирлик кесмани танлаб оламиз.

Маълумки, кесма узунлиги қуйидаги шартларга бўйсунади:

1) $l(AB)$ узунлик манфиймас: $l(AB) \geqslant 0$; агар $A = B$ бўлса, у ҳолда $l(AB) = 0$;

2) $l(AB) = l(BA)$ бўлади;

3) $l(AB) = l(AC) + l(CB)$, яъни кесма бўлаклари узунликларининг йиғиндиси шу кесманинг узунлигига тенгдир.

AB кесма узунлигини ўлчаш учун шу юқорида келтирилган шартларга таянган ҳолда қуйидаги ҳолларни кўриб чиқамиз.

1-ҳол. Агар AB кесманинг устига CD бирлик кесмани A учдан бошлаб кетма-кет қўйиб чиққанимизда CD кесма AB кесма устига бутун сон марта жойлашса, у ҳолда натурал сон ҳосил бўлади.

2-ҳол. Агар AB кесмага CD кесмани кетма-кет жойлаштириш натижасида AB кесмадан бирор EB кесма ортиб ёки етмай қолса, у ҳолда маълум бўладики, CD кесма AB га тўлиқ бутун сон марта жойлашмайди. Бундай ҳолда CD кесмани n та тенг бўлакка бўламиз, сўнгра $\frac{1}{n} l(CD)$ узунликдаги кесмани AB кесмага учидан бошлаб қўйганимизда $\frac{1}{n} l(CD)$ ўлчов бирлиги m марта тўлиқ жойлашса, у ҳолда $l(AB) = \frac{m}{n} \cdot l(CD)$ бўлади ва $l(CD) = 1$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда $l(AB) = \frac{m}{n}$ бўлади.

Одатда бундай ўлчашлар каср (рационал) сонларни келтириб чиқаради, бундай сонлар тўплами эса *рационал сонлар тўплами* деб қаралади.

Шундай қилиб, $\frac{m}{n}$ кўринишдаги каср сонни ҳосил қилдик, бу ерда *m касрнинг сурати, n махражи* дейилади.

17-таъриф. *Агар $\frac{p}{q}$ ва $\frac{m}{n}$ касрлар учун $pn = mq$ шарти бажарилса, у ҳолда бу касрлар тенг дейилади ва $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ кўринишда ёзилади.*

Изоҳ. «Тенг» дегани «худди шунинг ўзи» деган маънони билдирмайди. Масалан, $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, чунки $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. Бу ерда $\frac{3}{4}$ ва $\frac{6}{8}$ касрлар миқдор жиҳатидан тенг, лекин ўзлари турличадир.

Қасрлар учун қуйидаги хоссалар ўринлидир:

1. *Ҳар қандай каср ўзи-ўзига тенг:* $\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$ (рефлексивлик хоссаси), чунки $ab=ba$.

2. *Агар* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *бўлса, у ҳолда* $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ *бўлади* (симметриклик хоссаси).

Ҳақиқатан ҳам, $ad=bc$ дан $cb=da$ ни ёза оламиз.

3. *Агар* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *бўлиб,* $\frac{c}{d}=\frac{l}{n}$ бўлса, у ҳолда $\frac{a}{b}=\frac{l}{n}$ *бўлади* (транзитивлик хоссаси).

Ҳақиқатан ҳам:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc\\ \frac{c}{d}=\frac{l}{n}\Rightarrow nc=ld\end{array}\right|\begin{array}{l}\Rightarrow adnc=bcld\Rightarrow an=bl\Rightarrow\\ \quad\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{l}{n}.\end{array}$$

4. *Агар* $\frac{p}{q}$ *касрнинг сурат ва махражини нолдан фарқли* $m\neq 0$ *сонга кўпайтирсак ёки бўлсак, унинг қиймати ўзгармайди, яъни:* $\frac{p}{q}=\frac{p\cdot m}{q\cdot m}\Rightarrow p\,q\,m=qpm$ ёки $\frac{p}{q}=\frac{p:m}{q:m}$ *бўлади,*

Энди бир нечта касрларни умумий махражга келтириш масаласи билан шуғулланамиз.

18-таъриф. *Бир неча касрни умумий махражга келтириш деб, бу касрларнинг қийматларини ўзгартирмасдан уларни бир хил махражга олиб келувчи алмаштиришга айтилади.*

Мисол. $\frac{p}{q}$ ва $\frac{m}{n}$ касрларни умумий махражга келтиринг.

Ечиш. $\frac{p}{q}$ касрни $\frac{p\cdot n}{q\cdot n}$ ва $\frac{m}{n}=\frac{m\cdot q}{n\cdot q}$ кўринишда алмаштирамиз, натижада бир хил махражли $\frac{pn}{nq}$ ва $\frac{mq}{nq}$ касрлар ҳосил бўлади.

Касрларни умумий махражга келтириш учун махражларнинг ҳаммасига бўлинадиган ихтиёрий сонни танлаш ёки шу махражда қатнашаётган сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчисини топиш лозим. Касрларни умумий махражга келтиришдан олдин уни қисқартиришга аҳамият бериш керак. Қасрларни умумий махражга келтиришда қуйидаги хусусий ҳолларни қараш мумкин:

1. Бирорта ҳам махражлар жуфти умумий кўпайтувчига эга эмас. Бундай ҳолда махражлар ўзаро туб сонлар бўлиб, умумий махраж уларнинг кўпайтмаси бўлади.

2. Қисқармайдиган касрларнинг энг катта махражи қолган махражларнинг ҳар бирига бўлинади. У ҳолда катта махраж қолган барча махражларнинг энг кичик умумий бўлинувчисидан иборат бўлади.

Изоҳ. Ҳар қандай бутун соннинг махражи бирга тенг деб келишиб олинган.

49-теорема. *Агар иккита қисқармайдиган каср ўзаро тенг бўлса, у ҳолда уларнинг сурати суратига ва махражи махражига тенг бўлади.*

Исботи. Шартга кўра $\frac{p}{q}$ касрда $D(p, q) = 1$ ва $\frac{m}{n}$ да $D(m, n) = 1$ ҳамда $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ берилган. 18-таърифга асосан $\frac{p}{q} = \frac{pn}{qn}$ ва $\frac{m}{n} = \frac{mq}{nq}$ бўлиб, $\frac{pn}{nq} = \frac{mq}{nq}$ дан $pn = mq$ ни ёза оламиз. Бу тенгликнинг чап томони p га бўлинади, демак, ўнг томони ҳам p га бўлинади, $mq \vdots p$. Лекин $D(p, q) = 1$ бўлгани учун $m \vdots p$ бўлиб, $m = p \cdot k$ бўлади. Иккинчи томондан, чап томон ҳам m га бўлинади. Лекин $D(m, q) = 1$ бўлганидан $p \vdots m$ бўлиб, $p = mk_1$ бўлади. Бундан $mp = mpk_1k$ бўлиб ва $k, k_1 \in N$ эканини эътиборга олсак, $k_1k = 1$ дан $k_1 = 1$ ва $k = 1$ бўлади. Демак, $p = mk_1$ ва $m = pk$ лардан $p = m$ ва $pn = mq$ дан $q = n$ экани келиб чиқади. Шу билан теорема исботланди.

2-§. КАСР СОНЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

19-таъриф. $\frac{a}{b}$ *ва* $\frac{c}{d}$ *касрларнинг йиғиндиси деб* $\frac{ad + bc}{bd}$ *касрга айтилади ва қуйидагича белгиланади:*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Мисоллар. 1) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10 + 12}{15} = \frac{22}{15}$; 2) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5}$.

15-натижа. *Агар берилган йиғиндида қатнашаётган* *қўшилувчилардан бирини ёки иккаласини унга тенг бўлган каср билан алмаштирилса, ҳосил бўлган йиғиндининг қиймати ўзгармайди, яъни:*

1. $\left.\begin{array}{l}\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}\\ \frac{c}{d}=\frac{c}{d}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{c}{d}$; 2. $\left.\begin{array}{l}\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}\\ \frac{c}{d}=\frac{c_1}{d_1}\end{array}\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{c_1}{d_1}.$$

Натижани исботлашда биринчи ҳол билан чекланамиз:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}\\ \frac{c}{d}=\frac{c}{d}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}ab_1=a_1b\Rightarrow ab_1dd=a_1bdd\\ cd=cd\Rightarrow cdbb_1=cdbb_1\end{array}\right] \Rightarrow ab_1dd+cbb_1d=$$

$$=a_1bdd+cbb_1d\Rightarrow (ad+cb)\,b_1d=(a_1d+cb_1)\,bd\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{ad+bc}{bd}=\frac{a_1d+cb_1}{b_1d}.$$

Натижанинг иккинчи ҳоли ҳам шунга ўхшаш исботланади.

50-теорема. *Касрларни қўшиш амали ўрин алмаштириш ва гуруҳлаш хоссаларига эга.*

Исботи. $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ва $\frac{m}{n}$ касрлар берилган бўлсин.

12-таърифга асосан $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\overset{T_2}{=}\frac{bc+ad}{bd}=\frac{bc}{bd}+$

$+\frac{ad}{bd}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$ бўлади.

Теоремадаги иккинчи хоссани исботлашда касрларни умумий махражга келтириб, сўнгра гуруҳлаш хоссасининг ўринли эканига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

20-таъриф. $\frac{a}{b}$ *ва* $\frac{c}{d}$ *касрларнинг кўпайтмаси деб,* $\frac{ac}{bd}$ *касрга айтилади ва* $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ *кўринишда ёзилади.*

Мисоллар. 1) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{28}$; 2) $\frac{6}{11}\cdot\frac{3}{7}=\frac{18}{77}$.

16-натижа. *Агар берилган кўпайтмада қатнашаёт-*

ган кўпайтувчиларнинг бирини ёки иккаласини унга тенг каср билан алмаштирилса, кўпайтма ўзгармайди.

1) $\left.\begin{array}{l}\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}\\ \frac{c}{d}=\frac{c}{d}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}=\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a_1c}{b_1d}$;

2) $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$ ва $\frac{c}{d}=\frac{c_1}{d_1}$ бўлса,

$\frac{ac}{bd}=\frac{a_1c_1}{b_1d_1}$ бўлади.

Қасрларни кўпайтириш амали ўрин алмаштириш ва гуруҳлаш хоссаларига эга.

21-таъриф. $\frac{a}{b}$ *ва* $\frac{c}{d}$ *касрларнинг айирмаси деб,* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}+\frac{x}{y}$ *тенгликни ва бўлинмаси деб,* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\cdot\frac{x}{y}$ *тенгликни қаноатлантирадиган* $\frac{x}{y}$ *касрга айтилади.*

Айирма $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$, бўлинма $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ кўринишларда ёзилади.

Шундай қилиб, айириш амали қўшиш амалига, бўлиш амали кўпайтириш амалига тескари амал сифатида таърифланади.

Агар $\frac{a}{b}$ ва $\frac{c}{d}$ касрлар берилиб, $ad>bc$ шарти бажарилса, у ҳолда $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ деб қаралади.

Қаср сонлар устида амал бажариш асосан шу амалнинг берилишига қараб бажарилади. Қасрлар ўзининг тузилиши жиҳатидан икки турга — оддий ва ўнли касрларга бўлинади. Оддий касрлар ҳам икки турга, яъни тўғри ва нотўғри касрларга ажралади. Агар берилган $\frac{a}{b}$ каср учун $a<b$ шарти ўринли бўлса, у ҳолда бу каср *тўғри*, $a>b$ бўлса, *нотўғри каср* деб аталади. Тўғри ва нотўғри касрлар учун тўрт асосий арифметик амал юқорида келтирилган қоидалар асосида бажарилади.

22-таъриф. *Агар берилган касрнинг махражи ўн ва ўннинг даражалари орқали ифодаланган бўлса, у ҳолда бундай каср ўнли каср дейилади.*

Масалан, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{11}{100}$, $\frac{125}{1000}$ ва ҳоказо касрлар ўнли касрлардир. Бу касрларни махражсиз ҳам ёзиш мумкин, яъни 0,1; 0,2; 0,11; 0,125 ва ҳоказо.

Касрни махражсиз ўнли каср шаклида ёзиш учун суратини ёзиб, махражда қанча ноль бўлса, шунча рақамни ўнгдан чапга саналади, шундан кейин саналган рақамларни вергул билан ажратилади; агар суратдаги рақамлар санаш учун етмаса, бу ҳолда чап томонга қўшимча ноллар ёзилади. Натижада у бундай ўқилади: аввал вергулгача рақамлар билан ифодаланган сон айтилади, сўнгра «бутун» сўзи айтилади ва ундан кейин каср махражи қайд этилиб, сўнгра вергулдан кейинги рақамлар билан ифодаланган сон айтилади.

Мисол. $0{,}021 = \frac{21}{1000}$, $3{,}255 = 3\frac{255}{1000} = \frac{3255}{1000}$, $2 = 2{,}000$, $0 = 0{,}000$ ... ва ҳоказо.

23-таъриф. *Ўнли касрда вергулдан олдин ёзилган рақамлардан иборат сонни ўнли касрнинг характеристикаси, вергулдан кейин ёзилган рақамлардан иборат сонни унинг мантиссаси дейилади.*

Мисол. 34, 671 касрнинг характеристикаси 34, мантиссаси эса 671.

Ўнли касрни умумий ҳолда $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1, b_1 b_2 \ldots b_k}$ кўринишда ифодаланади, бу ерда $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}$ унинг характеристикаси, $\overline{b_1 b_2 \ldots b_k}$ эса мантиссасидир. Берилган ўнли касрни 10^k қадар камайтириш учун унинг вергулини ўнгдан чапга қараб k хона суриш, 10^k қадар орттириш учун вергулни чапдан ўнгга қараб k хона суриш кифоядир.

Ўнли касрлар устида қўшиш ва айириш амалларини бажариш худди натурал сонлар устидаги амаллар каби бажарилиб, вергулни у қўшилувчиларнинг ва айирилувчиларнинг қаерида бўлса, йиғинди ва айирмада шу жойига қўйиш керак.

Мисоллар. 1) $0{,}6273 + 3{,}004 + 12{,}17 = 15{,}8013$

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 0{,}6273 \\ 3{,}004 \\ 12{,}17 \end{array} \\ \hline 15{,}8013 \end{array}$$

2) $1{,}204 - 0{,}6308 = 0{,}5732$

$$
\begin{array}{r}
-\ \begin{array}{r}1{,}204\\ 0{,}6308\end{array}\\
\hline
0{,}5732
\end{array}
$$

Ўнли касрларни кўпайтириш худди натурал сонларни кўпайтириш каби бажарилиб, бунда кўпаювчи ва кўпайтувчида нечта ўнли хона рақамлар бўлса, кўпайтмада ҳам ўнгдан чапга қараб шунча рақамдан кейин вергул қўйилади:

$$
\times\begin{array}{r}3{,}25\\ 0{,}5\\ \hline 1{,}625\end{array}
\qquad
+\begin{array}{r}2\ \text{та}\\ 1\ \text{та}\\ \hline 3\ \text{та}\end{array}
$$

Ўнли касрларни бўлиш. Бизга $A=\frac{\overline{a_n\ldots a_1b_1\ldots b_k}}{10^k}$ ва $B=\frac{\overline{c_n\ldots c_1d_1\ldots d_m}}{10^m}$ ўнли касрлар берилган бўлсин. Бу касрларнинг бўлинмасини

$$
A:B=\frac{\overline{a_n\ldots a_1b_1\ldots b_k}}{10^k}:\frac{\overline{c_n\ldots c_1d_1\ldots d_m}}{10^m}=
$$

$$
=\frac{\overline{a_n\ldots a_1b_1\ldots b_k}}{c_n\ldots c_1d_1\ldots d_m}\cdot 10^{m-k}
$$

кўринишида ифодаланади. Бу ерда шуни қайд қилиш керакки, ўнли касрни ўнли касрга бўлишда ҳар доим ҳам чекли ўнли каср чиқавермайди, балки чексиз ўнли каср ҳосил бўлиши ҳам мумкин.

3-§. ОДДИЙ КАСРНИ ЎНЛИ КАСРГА ВА ЎНЛИ КАСРНИ ОДДИЙ КАСРГА АЙЛАНТИРИШ

Арифметикада берилган оддий касрни ўнли касрга айлантириш масаласи ўзига хос аҳамиятга эга. Берилган $\frac{a}{b}$ оддий каср учун $(a, b)=1$ шарти бажарилган бўлсин дейлик, у ҳолда b соннинг каноник ёйилмасига аҳамият берамиз. Бунда $\frac{a}{b}$ касрнинг махражи b учун ушбу ҳоллардан бири бўлиши мумкин:

1) $b=2^{\alpha}$; 5^{β}; $2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$ бўлади;
2) $b=2^{\beta}\cdot p_1^{t_1}\cdot p_2^{t_2}\ldots p_n^{t_n}$ ёки $b=5^{\alpha}\cdot p_1^{t_1}\ldots p_n^{t_n}$;

$b = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot p_1^{t_1} \ldots p_n^{t_n}$ бўлади;

3) $b = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \ldots p_n^{t_n}$; $p_i \neq 2$; $5 \wedge i = \overline{1, n}$ бўлади.

51-теорема. *Қисқармайдиган оддий каср чекли ўнли касрга айланиши учун махражининг каноник ёйилмасида 2 ва 5 дан бошқа туб кўпайтувчилар бўлмаслиги зарур ва етарлидир.*

Исботи. Қисқармайдиган $\frac{a}{b}$ каср берилган бўлиб, бунда $b = 2^{\alpha}$; 5^{β}; $2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$ бўлсин.

Бу ҳолда $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^{\alpha}} = \frac{a \cdot 5^{\alpha}}{10^{\alpha}}$ ёки $\frac{a}{b} = \frac{a}{5^{\beta}} = \frac{a\, 2^{\beta}}{10^{\beta}}$,

ёки $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}} = \frac{a \cdot 2^{\beta} \cdot 5^{\alpha}}{10^{\alpha+\beta}} = \frac{a \cdot 2^{\beta-\alpha}}{10^{\beta}}$; $\beta > \alpha$ учун ёки $\alpha > \beta$ учун $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 5^{\alpha-\beta}}{10^{\alpha}}$ бўлган чекли ўнли каср ҳосил бўлади.

$\frac{a}{b}$ учун $a < b$ бўлиб, $\frac{a}{b} = \overline{0,\ c_1 c_2 \ldots c_n} = \frac{\overline{c_1 c_2 \ldots c_n}}{10^n}$ бўлсин дейлик. Агар $\frac{a}{b}$ учун $(a, b) = 1$ бўлиб, $\frac{a}{b} = \frac{\overline{c_1 c_2 \ldots c_n}}{10^n}$ бўлса, $b = 10^n = 2^n \cdot 5^n$ бўлади. Бу ҳол учун теорема исбот бўлди.

$\frac{\overline{c_1 c_2 \ldots c_n}}{10^n}$ каср қисқарадиган каср бўлсин дейлик, у ҳолда $\overline{c_1 c_2 \ldots c_n} = dk$ ва $10^n = dl$ бўлиб, $\frac{a}{b} = \frac{k}{l}$ эканлигидан $b = l$ бўлади. Энди l нинг каноник ёйилмасида 2 ва 5 дан ташқари бирорта p туб сон бўлсин дейлик, у ҳолда $l = pl$ бўлиб, $ld = pld = 10^n$ бўлади. Бундан 10^n эса p га бўлинади, бунинг эса бўлиниши мумкин эмас, чунки 10^n фақат 2 ва 5 га ёки 2^n ва 5^n га бўлинади. Шу билан теорема бу ҳолда ҳам исбот қилинди.

$\frac{a}{b}$ қисқармас оддий тўғри касрнинг махражи b нинг каноник ёйилмасида 2 ва 5 туб сонлари қатнашмасин, яъни

$$b = p_1^{t_1} \ldots p_n^{t_n},\ p_i \neq 2;\ 5 \wedge i = \overline{1, n}. \qquad (1)$$

(1) га асосан a ни b га бўлганда ҳосил бўладиган қолдиқлар $r_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$ бўлади. Бунинг учун a ни 10 га кўпайтириб, b га бўламиз: $10a = bq_1 + r_1$, бунда $0 < r_1 < b$ бўлади, бундан $\frac{a}{b} = \frac{q_1}{10} + \frac{r_1}{10}$ бўлиб, $r_1 = 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{q_1}{10}$ ўнли каср бўлади, шартга асосан бунинг бўлиши мумкин эмас. Юқоридаги усулда бўлишни давом эттирамиз, яъни

$$\begin{aligned} 10a &= bq_1 + r_1, \\ 10r_1 &= bq_2 + r_2, \\ 10r_2 &= bq_3 + r_3 \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

ларни топамиз. Сўнгра $10a = bq_1 + r_1$ га $10r_1 = bq_2 + r_2$ дан r_1 ни топиб қўйсак, у ҳолда $\frac{a}{b} = \frac{10q_1 + q_2}{10^2} + \frac{r_2}{10^2 b}$ ҳосил бўлади. Худди шунга ўхшаш, маълум k-қадамдан кейин $\frac{a}{b} = \frac{10^{k-1}q_1 + 10^{k-2}q_2 + \ldots + 10q_{k-1} + q_k}{10^k} + \frac{r_k}{10^k b}$ ни ҳосил қиламиз. Бундан $\frac{a}{b} = \overline{0, q_1q_2 \ldots q_k} + \frac{r_k}{10^k b}$ ни ёзиш мумкин.

Энди бўлинма ва қолдиқнинг баъзи хоссаларини кўриб чиқамиз:

1°. r_i сонлар $0 < r_i < b$ бўлиб, нолга тенг бўла олмайди, чунки акс ҳолда берилган каср чекли ўнли касрга айланади, бу эса шартга зиддир.

2°. Барча q_i бўлинмалар 10 дан кичик сонлар бўлиб, уларнинг бутун сон эканлиги қолдиқли бўлиш хоссасидан келиб чиқади.

3°. Барча қолдиқлар ҳар хил бўла олмайди, чунки $r_i < b$ ва b чекли сон эканлигидан, турлича қолдиқлар $b - 1$ тадан кўп бўла олмайди.

4°. r_i ларнинг бирортаси ҳам ноль бўла олмаслигига асосан қолдиқлар ва бўлинмалар даврий равишда такрорланади: $r_1 = r_{\tau+1}$; $r_2 = r_{\tau+2}$; ... ва $q_1 = q_{\tau+1}$; $q_2 = q_{\tau+2}$, ...

Юқорида келтирилган маълумотга асосан барча қолдиқлар ҳар хил бўла олмасликлари маълум ва $r_k = r_l$ бўлсин деб фараз этамиз. У ҳолда $10r_k = bq_{k+1} + r_{k+1}$ ва $10r_l = bq_{l+1} + r_{l+1}$ бўлади. Бундан $10(r_k - r_l) = 0$ дан $(q_{k+1} -$

$-q_{l+1})b=r_{k+1}-r_{l+1}$ бўлади. Бу тенгликнинг чап қисми b га бўлинади, демак, ўнг қисми ҳам бўлиниши керак, лекин $r_{k+1}<b$ ва $r_{l+1}<b$ бўлгани учун $r_{k+1}-r_{l+1}=0$ бўлиши зарурдир. Бундан $(q_{k+1}-q_{l+1})b=0$ бўлиб, $b\neq 0$ эканидан $q_{k+1}=q_{l+1}$ экани келиб чиқади. Бу ҳосил қилинган натижаларга суянган ҳолда $r_{k+1}=r_{l+1}$; $r_{k+2}=r_{l+2}$; ... ва $q_{k+1}=q_{l+1}$; $q_{k+2}=q_{l+2}$; ... $q_{k+j}=q_{l+j}$, ... ларни ёзишимиз мумкин. Худди шунга ўхшаш, $r_{k-1}=r_{l-1}$ ва $q_{k-1}=$ $=q_{l-1}$ ва ҳоказодан охирида $r_1=r_{l-k+1}$ ва $q_1=q_{l-k+1}$ ларга эга бўламиз, бу ерда $l-k=\tau$ десак, $r_1=r_{\tau+1}$, $q_1=q_{\tau+1}$ ларни ҳосил қиламиз.

5°. Энди $a=r_\tau$ ва $q_1=q_{\tau+1}$ бўлишини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан ҳам, $10a=bq_1+r_1$, $10r_\tau=bq_{\tau+1}+r_{\tau+1}$ эканлигидан ва $r_1=r_{\tau+1}$ га асосан $10a-q_1b=10r_\tau-$ $-q_{\tau+1}b$ ёки $10(a-r_\tau)=(q_1-q_{\tau+1})b$ бўлади. Шартга кўра $(10, b)=1$ эканини эътиборга олсак, $a=r_\tau$ ва $q_1=q_{\tau+1}$ экани келиб чиқади.

6°. q_1, q_2 ... ва r_1, r_2, ... қаралаётган жараёнда ягонадир ва шу билан бирга $r_i=r_{\tau+i}$ ва $q_i=q_{\tau+i}$ бўлиб,

$$\frac{a}{b}=\overline{0, q_1q_2\ldots q_\tau}+\frac{r_\tau}{10^\tau b}$$ дан ва $a=r_\tau$ га асосан

$$\frac{a}{b}=\overline{0, q_1q_2\ldots q_\tau}+\frac{a}{10^\tau b}$$ экани келиб чиқади. Бу ерда τ — *давр узунлиги* дейилиб, $\frac{a}{b}=0,\overline{(q_1q_2\ldots q_\tau)}$ кўринишидаги *соф даврий ўнли каср* ҳосил бўлади, яъни:

$$\frac{a}{b}=\frac{\overline{q_1q_2\cdots q_\tau}}{10^\tau}+\frac{a}{10^\tau b}=\frac{\overline{q_1q_2\cdots q_\tau}}{10^\tau}+\frac{1}{10^\tau}\left(\frac{\overline{q_1q_2\cdots q_\tau}}{10^\tau}+\right.$$

$$\left.+\frac{a}{10^\tau b}\right)=\frac{\overline{q_1q_2\cdots q_\tau}}{10^\tau}+\frac{\overline{q_1q_2\cdots q_\tau}}{10^{2\tau}}+\ldots=0,\overline{(q_1q_2\ldots q_\tau)}$$

Агар уни оддий касрга айлантирсак, у ҳолда:

$$0,\overline{(q_1q_2\ldots q_\tau)}=\overline{q_1q_2\ldots q_\tau}\left(\frac{1}{10^\tau}+\frac{1}{10^{2\tau}}+\frac{1}{10^{3\tau}}+\ldots\right)=$$

$$=\overline{q_1q_2\ldots q_\tau}\,\frac{\frac{1}{10^\tau}}{1-\frac{1}{10^\tau}}=\frac{\overline{q_1q_2\cdots q_\tau}}{10^{\tau-1}}=\frac{\overline{q_1q_2\cdots q_\tau}}{\underbrace{99\ldots9}_{\tau}}$$

кўринишидаги оддий каср ҳосил бўлади.

Мисол. $\frac{2}{11}$ оддий касрни ўнли касрга айлантиринг.

Ечиш: $10\cdot 2 = 11\cdot 1 + 9;$ $10\cdot 9 = 11\cdot 8 + 2;$ $10\cdot 2 = 11\cdot 1 + 9;$ ..., демак, $\frac{2}{11} = 0,(18)$ бўлиб, $\tau = 2$, $r_1 = 9$; $r_2 = 2$; $r_3 = 9$; $r_4 = 2$ эканидан $r_1 = r_{2+1}$; $q_1 = q_{2+1}$ бўлади. Бу мисолдан кўриниб турибдики, $b = 11$ туб сон бўлганлиги сабабли $\frac{2}{11}$ каср соф 0, (18) даврий ўнли касрга айланади.

Мисол. 0, (36) ни оддий касрга айлантиринг.

Ечиш. $0,(36) = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$ ҳосил бўлади. Энди бизга $\frac{a}{b}$ касрнинг махражи $b = 2^{\alpha}\cdot p_1^{t_1} \dots p_n^{t_n}$ ёки $5^{\beta}\cdot p_1^{t_1} \dots p_n^{t_n}$ каби бўлсин дейлик, яъни:

$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot 5^{\alpha-\beta}}{10^{\alpha}\cdot p} = \frac{1}{10^{\alpha}}\cdot\frac{a\cdot 5^{\alpha-\beta}}{p}$ бўлсин, у ҳолда $\frac{a\cdot 5^{\alpha-\beta}}{p} = A, \overline{(q_1q_2 \dots q_\tau)}$ бўлиб, A даврий касрнинг характеристикасидир (A нолга тенг бўлиши ҳам мумкин).

Демак, $\frac{a}{b} = \frac{1}{10^{\alpha}}\cdot A, \overline{(q_1q_2 \dots q_\tau)} = \frac{1}{10^{\alpha}}\left[A + 0, \overline{(q_1q_2 \dots q_\tau)}\right] = \frac{A}{10^{\alpha}} + \frac{0,\overline{(q_1q_2 \dots q_\tau)}}{10^{\alpha}} = \frac{A}{10^{\alpha}} + 0,\underbrace{00\dots 0}_{\alpha \text{ та}}\overline{(q_1q_2 \dots q_\tau)} = B, \overline{c_1c_2 \dots c_\alpha} + \underbrace{0,00\dots 0}_{\alpha \text{ та}}\overline{(q_1q_2 \dots q_\tau)} = B,$

$$c_1c_2 \dots c_\alpha \overline{(q_1q_2 \dots q_\tau)}.$$

Бу $B, c_1c_2 \dots c_\alpha \overline{(q_1q_2 \dots q_\tau)}$ чексиз ўнли касрдир, бунда маълум гуруҳ рақамлар даврий равишда такрорланади, шу билан бирга давр дарҳол вергулдан кейин эмас, балки бирор жойдан бошланади. Бундай касрларни *аралаш даврий ўнли касрлар* деб аталади.

Мисол. $\frac{3}{22}$ касрни ўнли касрга айлантиринг.

Ечиш. $\frac{3}{22} = \frac{15}{110} = \frac{1}{10}\cdot\frac{15}{11} = \frac{1}{10}\cdot 1,(36) = 0,1(36)$

$$\begin{array}{r|l} -30 & 22 \\ \underline{22} & \overline{0,136} \\ -80 & \\ \underline{66} & \\ 140 & \\ \underline{132} & \\ 80 & \end{array}$$

$0,\overline{c_1c_2 \dots c_n(q_1q_2 \dots q_\tau)}$ касрни оддий касрга айлантириш талаб қилинган бўлсин. Бунинг учун $\frac{m}{n} = 0,\overline{c_1c_2 \dots c_n(q_1q_2 \dots q_\tau)}$ деб белгилайлик. $0,\overline{c_1c_2 \dots c_n(q_1q_2 \dots q_\tau)}$ ни 10^n га кўпайтириб бўламиз, натижада $\frac{m}{n} = \frac{1}{10^n}[\overline{c_1c_2 \dots c_n} +$

$$+ 0,\overline{(q_1q_2 \dots q_\tau)}] = \frac{\overline{c_1c_2 \dots c_n}}{10^n} + \frac{\overline{q_1q_2 \dots q_\tau}}{(10^\tau - 1)10^n} =$$

$$= \frac{\overline{c_1c_2 \dots c_n}(10^\tau - 1) + \overline{q_1q_2 \dots q_\tau}}{(10^\tau - 1)\cdot 10^n} =$$

$$= \frac{\overline{c_1c_2 \dots c_n}\,10^\tau - \overline{c_1c_2 \dots c_n} + \overline{q_1q_2 \dots q_\tau}}{(10^\tau - 1)\,10^n} =$$

$$= \frac{\overline{c_1c_2 \dots c_n q_1 q_2 \dots q_\tau} - \overline{c_1c_2 \dots c_n}}{\underbrace{99 \dots 9}_{\tau}\,\underbrace{00 \dots 0}_{n}}$$

ҳосил бўлади. Демак, ноль характеристикали аралаш даврий ўнли касрга тенг бўлган оддий касрнинг сурати иккинчи давргача бўлган мантисса рақамлари билан ифодаланган сондан биринчи давргача бўлган мантисса рақамлари билан ифодаланган соннинг айирмасига тенг бўлиб, махражи эса биринчи даврдаги рақамларни 9 рақами билан ва биринчи давргача мантисса рақамлари қанча бўлса, шунча ноллар билан алмаштиришдан ҳосил бўлади.

Мисол. 0,6 (41) касрни оддий касрга айлантиринг.

Ечиш. $0{,}6\,(41) = \frac{641 - 6}{990} = \frac{635}{990} = \frac{127}{198}$.

Барча кўринишдаги чексиз даврий ўнли каср сонлар рационал сонлар, бундай сонлар тўплами эса рационал сонлар тўплами дейилади.

4-§. ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШЛАР

А. Сонларнинг тақрибий қийматлари. Маълумки, кундалик ҳаётимизда айрим ҳоллардан ташқари ҳамма вақт аниқ сонлар билан эмас, балки тақрибий аниқланган сонлар билан иш кўришга тўғри келади. Тақрибий сонларнинг ҳосил бўлиш манбалари хилма-хил бўлиб, бу сонлар асосан:

— ўлчов асбобларининг аниқмаслиги,

— ўлчаш жараёнининг ҳар хиллиги ёки шароитнинг ўзгариши,

— кўриш ва сезиш органларимизнинг маълум даражада аниқсизлиги,

— айрим ҳолларда сонларни яхлитлашнинг зарурлиги каби шароитлар натижасида юзага келишини ҳисобга олишимиз зарурдир.

Шунинг учун ҳам айрим ҳолларда ўлчанадиган миқдорнинг аниқ қийматини топишдан воз кечиб, бири берилган миқдорнинг ҳақиқий қийматидан кичик, иккинчиси эса катта бўлган икки сонни топишга тўғри келади. Бундай ҳолда миқдорнинг қийматини тақрибий сонлар ёрдамида ифодалаш имкониятига эга бўламиз. Масалан, бирор моддани ўлчаганда у 8,864 г дан ортиқ, 9,128 г дан кам келди дейлик. Бундай ҳолда бу модданинг оғирлигини тахминан 9 г деб оламиз. Келтирилган мисолдан кўриниб турибдики, тақрибий сонларни ҳосил қилишнинг яна бир усули бу сонларни яхлитлашдир.

Шу билан бирга яхлитлашни кўп сонли нарсаларни ҳисоблаш натижасида аниқ натижа ҳосил қилиш амалий жиҳатдан мумкин бўлмаганда ҳам қўлланади. Масалан, шаҳар ёки қишлоқ аҳолисини ҳисобга олиш жараёнида яхлитлаб айтиш бунга мисол бўла олади.

Бундан ташқари, айрим сонларни, масалан $\sqrt{3}$, $\sin 37°$, $\lg 17$, π кабиларни ҳисоблаш натижасида тақрибий сон ҳосил бўлади, чунки бу сонларни аниқ ҳисоблаб, натижасини айтиш мумкин эмас.

Тақрибий сонлар билан ишлаш жараёнида, айрим ҳисобчилар тақрибий сонлар устида тегишли амалларни бажариш қоидасини етарлича билмасликлари натижасида нотўғри натижага эришадилар.

М и с о л. Тўғри тўртбурчак шаклидаги ер майдонининг бўйи $446{,}5$ м $< x < 447{,}5$ м ва эни $210{,}5$ м $< y < 211{,}5$ м бўлса, унинг юзини топинг.

Е ч и ш. Агар тўғри тўртбурчак ўлчамларининг ўрта арифметик қиймати билан чегараланиб, $y = 211$ м ва $x = 447$ м деб олсак, у ҳолда $S = xy = 94317$ кв. м бўлади. Агар берилган ўлчамларни $y = 211 \pm 0{,}5$ ва $x = 247 \pm 0{,}5$ кўринишида ифодалаб, унинг юзини сўнгра қўш тенгсизлик асосида ифодаласак, у ҳолда $93988{,}25$ кв.м $< S < 94946{,}25$ кв.м кўринишдаги натижа ҳосил бўлади. Ҳосил қилинган натижада ҳатто юзлик хона рақамига ҳам ишониш мумкин эмаслиги очиқ кўриниб турибди.

Худди шу каби, 1 рад $\approx \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3,14} \approx 57^\circ\, 19'\, 29''$ деб кўп ҳолларда ишлатамиз. Лекин $\pi \approx 3,14$ ҳам қўпол тақрибий қиймат бўлганлиги сабабли 1 рад $\approx 57^\circ$ деб ишлатиш мақсадга мувофиқлигини қайд қилиш мумкин.

Б. Абсолют ва нисбий хатоликлар ҳақида тушунча. Сонннинг аниқ ва шубҳали рақамлари. $A = 32{,}855$ сони берилган бўлсин. Бу сонни 0,01 гача аниқликда яхлитлаш натижасида $a = 32{,}86$ ҳосил бўлади. Одатда $a = 32{,}86$ сони $A = 32{,}855$ сонининг 0,01 аниқликдаги тақрибий қиймати бўлганлиги учун хатолик $a - A = 32{,}86 - 32{,}855 = 0{,}005$ ёки $A - a = -0{,}005$ дан иборат бўлиб, $|A - a| = 0{,}005$ бўлади. Шунинг учун аниқ A соннинг тақрибий қиймати бўлган a сон учун $a < A$ ёки $a > A$ экани маълум бўлса, у ҳолда a мос равишда *ками билан* ёки *ортиғи билан олинган тақрибий қиймат* деб қаралади.

24-таъриф. *Агар A соннинг тақрибий қиймати a сон бўлса, у ҳолда, $A - a$ айирманинг абсолют қиймати тақрибий қийматнинг ҳақиқий абсолют хатолиги дейилади ва $|A - a| = \alpha$ кўринишда белгиланади.*

24-таърифдан келиб чиқадики, агар $a < A$ бўлса, у ҳолда $A = a + \alpha$ ва $a > A$ бўлса, у ҳолда $A - a = -(a - A) = -\alpha \Rightarrow A = a - \alpha$ бўлади.

A сон номаълум бўлганда a тақрибий соннинг абсолют хатолиги ҳам номаълум бўлиши аёндир.

25-таъриф. *Агар a тақрибий соннинг ҳақиқий абсолют хатолиги учун $\alpha \leqslant \Delta a$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда Δa сон a нинг абсолют хатолиги чегараси дейилади.*

Бу таърифдан бевосита $|A - a| = \alpha \leqslant \Delta a \Leftrightarrow |A - a| \leqslant \Delta a \Leftrightarrow -\Delta a \leqslant A - a \leqslant \Delta a \Leftrightarrow a - \Delta a \leqslant A \leqslant a + \Delta a \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = a \pm \theta \Delta A$$

бўлади, бу ерда $0 < \theta < 1$. Агар $\theta = 1$ бўлса, у ҳолда $A = a \pm \Delta a$ деб қараш $|A - a| = \Delta a$ деб тушуниш билан умуман бир хилдир.

Мисол. $A = 17{,}7 \pm 0{,}1$ бўлса, у ҳолда $17{,}6 \leqslant A \leqslant 17{,}8$ бўлиб, $\Delta a = 0{,}1$ бўлади.

26-таъриф. *a тақрибий соннинг нисбий хатолиги деб, $\frac{\Delta a}{a} = \delta$ сонга айтилади.*

a тақрибий соннинг нисбий хатолиги сўзи ўрнига келгусида δa ёки $\delta(a)$ кўринишидаги белгилашларнинг бирини ишлатамиз.

1-мисол. $a = 2{,}8 \pm 0{,}007$ сонининг нисбий хатолигини топинг.

Ечиш. $\delta(a) = \frac{\Delta a}{a} = \frac{0{,}007}{2{,}8} = \frac{1}{400}$.

2-мисол. Агар $a = 210$ сони $\delta(a) = 0{,}3\%$ нисбий хатолик билан ўлчанган бўлса, унинг абсолют хатолигини топинг.

Ечиш. $\Delta a = 210 \cdot 0{,}003 = 0{,}63$.

Юқорида келтирилган фикрлардан кўриниб турибдики, тақрибий сонларнинг абсолют хатолиги охирги сақланган хона бирлигидан ошмаслиги, агар чексиз тўққизлар қатори ташланса, камайиши худди шу хонанинг бирлигига тенглиги равшандир.

Бирор A соннинг тақрибий қиймати a мавжуд бўлсин дейлик ва a сонда n та белги бор деб фараз этайлик. Агар a соннинг максимал абсолют хатолиги чапдан охирги n-хонанинг бирлигидан ошмаса, a сон n та *ишончли белги билан олинган тақрибий қиймат* ҳамда абсолют хатолик n-хона бирлигининг ярмидан ошмаса, у ҳолда мактаб математикасидаги қоидага асосан яхлитлашга (тўлдириш қоидаси) кўра n та ишончли белги бор тақрибий қиймат деймиз. Масалан, $A = 42{,}399812$ сонида 5 та ишончли рақамни ҳосил қилиш учун тўлдириш қоидаси бўйича 8, 1, 2 ни ташлаб юборсак, қолдириладиган 9 рақам бир бирликка ортиб, 42,400 сони ҳосил бўлади. Бунда абсолют хатолик 0,0005 дан кичик бўлади ва 42,400 сонининг учта охирги рақами A соннинг учта мос рақамларига тўғри келмаса ҳам бу сон бешта ишончли рақамга эга. Бу тушунчани умумлаштириш мақсадида қуйидаги жадвални келтирамиз:

Биринчи қийматли рақами	Нисбий хатолик							
	10 % гача	5 % гача	1 % гача	0,5% гача	0,01% гача	0,05% гача	0,001% гача	0,005% гача
1	1	2	2	3	3	4	4	5
2	1	2	2	3	3	4	4	5
3	1	1	2	2	3	3	4	4
4	1	1	2	2	3	3	4	4
5	1	1	2	2	3	3	4	4
6	1	1	2	2	3	3	4	4
7	1	1	2	2	3	3	4	4
8	1	1	2	2	3	3	4	4
9	1	1	2	2	3	3	4	4

Мисол. 84,42 сонининг нисбий хатолиги 1% га тенг бўлса, унда нечта ишончли рақам бор?

Ечиш. Бунинг учун 8-сатр ва 1% ли устуннинг кесишган жойидаги сон 2 ни топамиз. Демак, 84,42 сонида 2 та ишончли рақам бор.

В. Тақрибий сонлар устида бажариладиган амаллар натижаларининг хатоликларини топиш. $x \approx a \pm \Delta a$ ва $y \approx b \pm \Delta b$ сонлар берилган бўлсин, у ҳолда юқорида кўриб ўтилган шартларга асосан $a - \Delta a \leqslant \leqslant x \leqslant a + \Delta a$ ва $b - \Delta b \leqslant y \leqslant b + \Delta b$ эканини эътиборга олиб, $x + y \approx (a + b) \pm (\Delta a + \Delta b)$ ни ёзиш мумкин. Бундан $\Delta (a + b) = \Delta a + \Delta b$ бўлади. Демак, *йиғиндининг абсолют хатолиги қўшилувчилар абсолют хатоликларининг йиғиндисига тенг.*

Мисол. $x \approx 5{,}732 \pm 0{,}001$, $y \approx 7{,}111 \pm 0{,}002$ бўлса, у ҳолда $x + y \approx 12{,}843 \pm 0{,}003$ бўлади.

Йиғиндининг нисбий хатолиги юқоридаги мулоҳазага асосан $\delta\ (a + b) = \dfrac{\Delta\ (a + b)}{a + b} = \dfrac{\Delta a + \Delta b}{a + b}$ бўлади. Бундан $\delta\,(a + b) = \dfrac{\Delta a + \Delta b}{a + b} = \dfrac{\Delta a}{a + b} + \dfrac{\Delta b}{a + b} = \dfrac{a}{a + b} \cdot \dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{b}{a + b} \cdot \dfrac{\Delta b}{b}$.

Энди, масалан $\dfrac{\Delta a}{a} = \delta\ (a)$ ва $\dfrac{\Delta b}{b} = \delta\,(b)$ лар учун $\delta(a) < \delta\,(b)$ бўлса, у ҳолда $\delta\,(a + b) \leqslant \dfrac{a}{a + b}\ \delta\,(b) + \dfrac{b}{a + b}\ \delta\,(b) =$

$$= \frac{a + b}{a + b}\ \delta\ (b) \Leftrightarrow \delta\,(a + b) \leqslant \delta\,(b)$$

экани келиб чиқади. Демак, *йиғиндининг нисбий хатолиги қўшилувчилар нисбий хатоликларининг энг каттасидан ортмайди,*

Мисол. $x \approx 5{,}732 \pm 0{,}001$, $y \approx 7{,}111 \pm 0{,}002$ бўлса, у ҳолда $\delta\,(a + b) < \delta\,(b)$, чунки $\delta\,(a) = 0{,}00018$, $\delta\,(b) =$

$$= 0{,}00029 \text{ ва } \delta\,(a + b) = \frac{\Delta\,(a + b)}{a + b} = 0{,}00023.$$

Агар $x = a \pm \Delta a \Rightarrow a - \Delta a \leqslant x \leqslant a + \Delta a$, $y = b \pm \Delta b \Rightarrow \Rightarrow b - \Delta b \leqslant x \leqslant b + \Delta b$ га асосан қўш тенгсизликларни ҳадлаб айирсак,

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{l} a - \Delta a \leqslant x \leqslant a + \Delta a \\ b + \Delta b \geqslant y \geqslant b - \Delta b \end{array} \\ \hline a - b - (\Delta a + \Delta b) \leqslant x - y \leqslant a - b + (\Delta a + \Delta b) \end{array}$$

ҳосил бўлиб, бундан $x-y \approx a-b \pm (\Delta a+\Delta b)$ ни ёза оламиз.

Демак, *айирманинг абсолют хатолиги камаювчи ва айирилувчи абсолют хатоликларининг йиғиндисига тенг, унинг нисбий хатолиги эса* $\delta(a-b)=\frac{\Delta a+\Delta b}{a-b}$ *бўлади.*

Агар берилган $x \simeq a \pm \Delta a$ ва $y \simeq b \pm \Delta b$ ларни $a-\Delta a \leqslant \leqslant x \leqslant a+\Delta a$ ва $b-\Delta b \leqslant y \leqslant b+\Delta b$ кўринишда олиб, $(a-\Delta a)(b-\Delta b) \leqslant xy \leqslant (a+\Delta a)(b+\Delta b)$ эканини инобатга олсак, $xy \simeq ab \pm (b\Delta a+a\Delta b)$ ни ёза оламиз. Демак, $\Delta(ab)=b\Delta a+a\Delta b$ ва $\delta(ab)=\frac{\Delta ab}{ab}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$ бўлади.

Берилган $x \simeq a \pm \Delta a$ ва $y \simeq b \pm \Delta b$ сонлар бўлинмасининг хатолигини топишда $a \pm \Delta a > 0$ ва $b \pm \Delta b > 0$ шартларга асосан $\frac{a-\Delta a}{b+\Delta a} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \frac{a+\Delta a}{b-\Delta a}$ қўш тенгсизликнинг чап ва ўнг томонларидаги касрларнинг суратини махражига бўлиб, ихчамлангандан сўнг $\frac{a}{b}-\frac{b\Delta a-a\Delta b}{b^2} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \frac{a}{b}+ +\frac{b\Delta a+a\Delta b}{b^2}$ бўлиб, бундан $\frac{x}{y} \approx \frac{a}{b} \pm \frac{b\Delta a+a\Delta b}{b^2}$ бўлади. Бундан *нисбий хатолик* $\delta\left(\frac{a}{b}\right)=\delta(a)+\delta(b)$ *бўлиши келиб чиқади.* Бу хулосаларни мисолларда синаб кўришни ўқувчиларнинг ўзларига ҳавола қиламиз.

a тақрибий соннинг a^n даражасини қарайлик. $\Delta a^n = = \Delta(\underbrace{a \cdot a \ \ldots \ a}_{n})(z)=\underbrace{a \cdot a \ \ldots \ a}_{n-1}\Delta a+\underbrace{a \ \ldots \ a}_{n-1}\Delta a+ \ \ldots$

$$\ldots+\underbrace{a \cdot a \ \ldots \ a}_{n-1}\Delta a=n\underbrace{a \cdot a \ \ldots \ a}_{n-1}\Delta a=na^{n-1}\Delta a.$$

Демак, *даражанинг абсолют хатолиги* $\Delta a^n=na^{n-1}\Delta a$ *ва нисбий хатолиги* $\delta(a^n)=\frac{\Delta a^n}{a^n}=n\frac{\Delta a}{a}=n\,\delta(a) \Rightarrow \delta(a^n)=n\delta(a)$ *бўлади.*

Агар, бу ерда n ни $\frac{1}{n}$ билан алмаштирсак, у ҳолда *n-даражали илдизнинг абсолют хатолиги* $\Delta\sqrt[n]{a}=\frac{\Delta a}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$ *ва нисбий хатолиги* $\delta(\sqrt[n]{a})=\frac{1}{n}\delta(a)$ бўлади.

Мисол ва масалаларни хатоликларни ҳисобга олиб ечишда қуйидаги тартибга амал қилиш лозим:

— даставвал ҳарфий формула — моделни тузиш;

— ечилиш алгоритмини аниқлаш ва амалларни бажариш;

— топилган натижани яхлитлаш йўли билан тақрибий жавобни аниқлаш;

— ишончли рақамларни аниқлаб, натижанинг абсолют ва нисбий хатоликларини юқорида келтирилган қоида ва формулалар асосида топиш зарур.

Мисол ва масалалар ечиш

1-мисол. Касрларнинг йиғиндисини топинг: $\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+$ $+\frac{4}{9}+\frac{5}{9}$.

Ечиш. Берилган касрларнинг махражлари бир хил бўлгани учун уларнинг суратларини қўшиб, махражнинг ўзини қолдирамиз:

$$\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{4}{6}+\frac{5}{9}=\frac{1+2+4+5}{9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}=1\ \frac{1}{3}.$$

2-мисол. $\frac{3}{8}+\frac{7}{10}+\frac{5}{12}$ йиғиндини ҳисобланг.

Ҳисоблаш. Ҳар хил махражли касрларни қўшишда уларни энг кичик умумий махражга келтириб, сўнгра суратларини қўшиб, йиғинди остига умумий махражни ёзамиз:

$$\frac{3}{8}+\frac{7}{10}+\frac{5}{12}=\frac{45+84+50}{120}=\frac{179}{120}=1\ \frac{59}{120}.$$

3-мисол. Ҳисобланг: $10\frac{3}{4}-7\ \frac{2}{13}$; $32-6\ \frac{5}{24}$;

$$9\frac{2}{5}-4\frac{7}{10},\ 7\ \frac{1}{2}:3\frac{1}{3}.$$

Ечиш: $10\ \frac{3}{4}-7\ \frac{2}{4}=3\frac{9-8}{12}=3\frac{1}{13}$; $32-6\frac{5}{24}=$

$$=31\frac{24}{24}-6\ \frac{5}{24}=25\ \frac{19}{24};$$

$$9\ \frac{2}{5}-4\ \frac{7}{10}=9\ \frac{4}{10}-4\ \frac{7}{10}=8\ \frac{14}{10}-4\ \frac{7}{10}=4\ \frac{7}{10};$$

$$7\ \frac{1}{2}:3\ \frac{1}{3}=\frac{15}{2}:\frac{10}{3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{15}{10}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}=2\ \frac{1}{4}.$$

4-мисол. Ҳисобланг:

а) $\dfrac{\left(2\frac{1}{2}+0,75\right)\cdot\frac{4}{11}}{(45,5-44,3):0,2}$; б) $2\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{3}+0,5+0,25\right):\left(-\frac{2}{3}+\right.$
$\left.+\frac{5}{12}\right)+125:\left[(7,5-6,2)\cdot\frac{5}{13}+31:\frac{1}{2}\right]$.

Ҳисоблаш. а) $\dfrac{\left(2\frac{1}{2}+0,75\right)\cdot\frac{4}{11}}{(45,5-44,3):0,2}=\dfrac{3\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{11}}{1\frac{1}{5}:\frac{1}{5}}=$

$=\dfrac{13\cdot4\cdot5\cdot1}{4\cdot11\cdot6\cdot5}=\dfrac{13}{66}$;

б) ни қисмларга ажратиб ечамиз:

1) $2\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right):\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{12}\right)=2\frac{1}{4}-1=1\frac{1}{4}$;

2) $(7,5-6,2)\cdot\frac{5}{13}+31:\frac{1}{2}=\frac{1,3\cdot5}{13}+62=62,5$;

3) $125:62,5+1\frac{1}{4}=2+1\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$.

5-мисол. Айниятни исботланг: $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+$
$+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

Исботи. Индукция аксиомасидан фойдаланамиз $n=1$ да $\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{2}$ — айният тўғри. $n=k$ да $\frac{1}{1\cdot2}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=$
$=\frac{k}{k+1}$ айният ўринли деб, унинг $n=k+1$ учун тўғрилигини кўрсатамиз:

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+$$
$$+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+1+1)+1}{(+1)(+2)}=$$
$$=\frac{k(k+1)+k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Демак, айният $\forall n\in N$ да тўғри.

6-мисол. Айниятни исботланг:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right].$$

Исботи. $n=1$ да айният ўринли. $n=k$ да ўринли деб, унинг $n=k+1$ учун ўринли эканини кўрсатамиз:

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right]+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)}\right].$$

Демак, берилган ифода $\forall n\in N$ да ўринли экан.

7-мисол.

$$S_n=\frac{x+1}{2}+\frac{x+3}{4}+\frac{x+7}{8}+\ldots+\frac{x+2n-1}{2^n}=$$

$$=\frac{(x-1)(2^n-1)}{2}+n$$

тенгликнинг тўғрилигини кўрсатинг.

Исботи: $n=1$ да $\frac{x+1}{2}=\frac{(x-1)(2'-1)}{2}+1$ тенглик ўринли. Тенглик $n=k$ учун ўринли деб, унинг $n=k+1$ учун тўғрилигини кўрсатамиз:

$$S_{k+1}=S_k+\frac{x+2^{k+1}-1}{2}=\frac{(x-1)(2^n-1)}{2}+k+$$

$$+\frac{x+2^{k+1}-1}{2}=\frac{(x-1)(2^{k+1}-1)}{2}+(k+1).$$

Демак, тенглик $\forall n\in N$ учун тўғри экан.

8-масала. Агар ҳар бир ишчи соатига тахминан $3\frac{1}{3}$ кв.м деворни суваса, 6 ишчи кунига 7 соатдан ишлаб, узунлиги 128 м ва баландлиги 3,5 м бўлган деворни неча кунда суваб чиқади?

Ечиш. 1) $128\cdot3{,}5=448$ (кв. м); 2) $3\frac{1}{3}\cdot7\cdot6=$ $=140$(кв,м);

3) $448:140\approx3$ кунда суваб бўлар экан.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

1. $$\frac{0{,}4+8\left(5-0{,}8\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}}{1\frac{7}{8}\cdot8-\left(8{,}9-2{,}6:\frac{2}{8}\right)34\frac{2}{5}}\cdot 90.$$

2. $\dfrac{\left(5\dfrac{4}{45}-4\dfrac{1}{6}\right):5\dfrac{8}{15}}{\left(4\dfrac{2}{3}+0,75\right)\cdot 3\dfrac{9}{13}}\cdot 34\dfrac{2}{7}+\dfrac{0,3:0,001}{70}+\dfrac{2}{7}.$

3. $\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}+0,425-0,005\right):0,1}{30,5+\dfrac{1}{6}+3\dfrac{1}{3}}+\dfrac{6\dfrac{3}{4}+5\dfrac{1}{2}}{26:3\dfrac{5}{7}}-0,05.$

4. $\dfrac{3\dfrac{1}{3}\cdot 1,9+19,5:4\dfrac{1}{2}}{\dfrac{62}{75}-0,16}:\dfrac{3,5+4\dfrac{2}{3}+2\dfrac{2}{15}}{0,5\left(1\dfrac{1}{20}+4,1\right)}.$

5. $\dfrac{\left[1\dfrac{1}{5}:\left(-\dfrac{17}{40}+0,6-0,005\right)\right]\cdot 17}{\dfrac{5}{6}+1\dfrac{1}{3}-1\dfrac{23}{30}}+\dfrac{4,75+7\dfrac{1}{2}}{33:4\dfrac{5}{7}}:0,25.$

6. $\dfrac{\left(4,5\cdot 1\dfrac{2}{3}-6,75\right)\cdot 0,66\ldots}{\left[3,(3)\ 0,3+0,(2)+\dfrac{4}{9}\right]:2\dfrac{2}{3}}+\dfrac{1\dfrac{4}{11}\cdot 0,22:0,3-0,96}{\left(0,2-\dfrac{3}{40}\right)\cdot 1,6}.$

7. $\dfrac{\left(1,88+2\dfrac{3}{25}\right)\cdot\dfrac{3}{16}}{0,625-\dfrac{13}{18}:\dfrac{26}{9}}+\dfrac{\left(\dfrac{0,216}{0,15}+0,56\right):0,5}{\left(7,7:24\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{15}\right)\cdot 4,5}.$

8. $\left(16\dfrac{1}{2}-13\dfrac{7}{9}\right)\cdot\dfrac{18}{33}+2,2\cdot\left[0,(24)-0,(09)\right]+\dfrac{2}{11}.$

9. $\dfrac{0,128:3,2+0,86}{\dfrac{5}{6}\cdot 1,2+0,8}\cdot\dfrac{\left(1\dfrac{32}{63}-\dfrac{13}{21}\right)\cdot 3,6}{0,505\cdot\dfrac{2}{5}-0,002}.$

10. $\dfrac{3\dfrac{1}{3}:10+0,175:0,35}{175-1\dfrac{11}{17}\cdot\dfrac{51}{56}}-\dfrac{\left(\dfrac{11}{18}-\dfrac{1}{15}\right):1,4}{\left(0,5-\dfrac{1}{9}\right)\cdot 3}.$

11. $\dfrac{0,125:0,25+1\dfrac{9}{16}:2,5}{(10-22:2,3)\cdot 0,46+1,6}+\left(\dfrac{17}{20}+1,9\right)\cdot 0,5.$

12. $\dfrac{[(7-6{,}35):6{,}5+9{,}8999\ldots]\cdot\dfrac{1}{12{,}8}}{\left[(1{,}2:36)+1\dfrac{1}{5}:0{,}25-1{,}8(3)\right]\cdot 1\dfrac{1}{4}}:0{,}125.$

13. $\dfrac{\left(2\dfrac{38}{45}-\dfrac{1}{15}\right):13\dfrac{8}{9}+3\dfrac{3}{65}\cdot 0{,}(26)}{\left(18\dfrac{1}{2}-13{,}777\ldots\right)\cdot\dfrac{1}{85}}\cdot 0{,}5.$

14. $\dfrac{3{,}75:1\dfrac{1}{2}+\left(1{,}5:3\dfrac{3}{4}\right)\cdot 2\dfrac{1}{2}+\left(1\dfrac{1}{7}-\dfrac{23}{49}\right):\dfrac{22}{147}}{2:3\dfrac{1}{5}+\left(3\dfrac{1}{4}:13\right):\dfrac{2}{3}-\left(2\dfrac{5}{18}-\dfrac{17}{36}\right)\cdot\dfrac{18}{65}}.$

15. $\dfrac{\left[\left(4{,}625-\dfrac{13}{18}\cdot\dfrac{9}{26}\right):\dfrac{9}{4}+2{,}5:1{,}25:6{,}75\right]:1\dfrac{53}{68}}{\left(\dfrac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125+\left(\dfrac{5}{6}-\dfrac{7}{12}\right):(0{,}358-1{,}4796:13{,}7)}.$

16. $\dfrac{\left[\left(3\dfrac{7}{12}-2\dfrac{11}{18}+2\dfrac{1}{24}\right)\cdot 1\dfrac{5}{31}-\dfrac{3}{52}\cdot\left(3\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{6}\right)\right]1\dfrac{7}{13}}{\dfrac{19}{84}:\left(5\dfrac{13}{42}-2\dfrac{13}{28}+\dfrac{5}{24}\right)+1\dfrac{2}{27}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{9}}.$

17. $\left[\dfrac{(3{,}2-1{,}7):0{,}003}{\left(\dfrac{29}{35}-\dfrac{3}{7}\right)\cdot 4:0{,}2}-\dfrac{\left(1\dfrac{13}{20}-1{,}5\right)\cdot 1{,}5}{\left(2{,}44+1\dfrac{14}{25}\right)\cdot\dfrac{1}{8}}\right]:62+1{,}364:0{,}124.$

18. $5\dfrac{4}{7}:\left\{8{,}4\cdot\dfrac{6}{7}\cdot\left[-\dfrac{(2{,}3+5:6{,}25)\cdot 7}{80{,}0125+6{,}9}\right]-20{,}384:1{,}3\right\}.$

19. $\dfrac{\left[4-3{,}5\left(2\dfrac{1}{7}-1\dfrac{1}{5}\right)\right]:0{,}16}{x}=\dfrac{3\dfrac{2}{7}-\dfrac{3}{14}:\dfrac{1}{6}}{41\dfrac{23}{84}-40\dfrac{49}{60}}.$

20. $\dfrac{1{,}2:0{,}375-0{,}2}{6\dfrac{4}{25}:15\dfrac{2}{5}+0{,}8}=\dfrac{0{,}016:0{,}12+0{,}7}{x}.$

21. $\dfrac{0{,}125x}{\left(\dfrac{19}{24}-\dfrac{21}{40}\right)\cdot 8\dfrac{7}{16}}=\dfrac{\left(1\dfrac{28}{63}-\dfrac{17}{21}\right)\cdot 0{,}7}{0{,}675\cdot 2{,}4-0{,}02}.$

22. $\frac{x}{1,05:0,24-15,15:7,5}=\frac{9\left(1\frac{11}{20}-0,945:0,9\right)}{1\frac{3}{40}-4\frac{4}{8}:7}$.

23. $\frac{15,2\cdot 0,25-48,51:14,7}{x}=\frac{\left(\frac{13}{44}-\frac{2}{11}-\frac{5}{66}:2\frac{1}{2}\right)\cdot 1\frac{1}{5}}{3,2+0,8\cdot\left(5\frac{1}{2}-3,25\right)}$.

Индукция аксиомасидан фойдаланиб, қуйидагиларни исботланг:

24. $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$.

25. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=\frac{n+2}{2n+2}$.

26. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

27. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

28. $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=$
$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$.

29. $\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=$
$=\frac{n}{a(a+n)}$.

Қуйидаги масалаларни арифметик усуллар билан ечинг.

30. 1) Тақрибий сонда охирги рақам нимани кўрсатади?

2) Қайси ҳолларда тақрибий сонларнинг аниқлиги каср хонасининг рақамлари сони билан аниқланади? Қайси ҳолларда қийматли рақамлар сони билан аниқланади?

31. $2\frac{3}{7}$ сонининг қийматини 0,05 гача аниқликда тақрибий ҳисобланг. Ҳосил бўлган сон берилган сондан катта ёки кичик бўла оладими?

32. 9752 сўм 52 тийин 9800 сўмгача яхлитланди. Абсолют ва нисбий хатоликларни топинг.

33. 100 кг гача аниқликда олинган 567800 кг тақрибий соннинг нисбий хатолигини топинг.

34. 4,666... сонини тўлдириш қоидасига асосан учта ишончли рақам билан ёзинг. Абсолют ва нисбий хатоликларни топинг.

35. Бир буюмнинг узунлигини ўлчаганда ками билан 5,82 мм, ортиғи билан 5,83 мм чиқди. Ўлчаш аниқлиги қанча?

36. Кўчанинг узунлиги ва Москвадан Санкт-Петербурггача бўлган масофа ўлчаб чиқилди. Биринчи ҳолда 1 м гача аниқликда 1 км чиқди; иккинчи ҳолда 1 км гача аниқликда 651 км чиқди. Қайси ўлчаш аниқроқ чиққан?

37. Нима учун берилган ўндан бирлар аниқлигидаги тақрибий соннинг ёнига ноль ёзиб ёки бор нолни ташлаб бўлмайди?

38. Бўйи 1,42 м ва эни 71 см бўлган тунука 4,5 кг келади. Шу тунуканинг 1 кв. дм бўлагининг оғирлиги қанча (1 г гача аниқликда)?

39. Алюминийнинг солиштирма оғирлиги 2,7 г/см^3. Ўқувчи бу оғирликни тажрибада топиб, 2,5 г/см^3 ни ҳосил қилди. Ўлчашнинг нисбий хатолигини топинг.

40. Масштаб чизғичи билан қаламнинг узунлигини, дафтар ёки китобнинг ўлчамларини ўлчанг, ҳосил бўлган миқдорларни ва уларнинг хатоликларини ёзинг.

41. $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{9}{13}$ касрларни вергулдан кейин тўртта каср хонаси билан ёзиладиган ўнли каср шаклида ёзинг ва ҳосил бўлган сонларнинг хатоликларини топинг.

42. Икки ишчи бирга ишлаб, бир ишни 6 кунда бажаради. Биринчи ишчи бу ишни ёлғиз ўзи 10 кунда бажаради. Биринчи ишчи бир неча кун ишлади, иккинчи ишчи ундан кейин ишлаб, қолган ишни тамомлади. Уларнинг иккаласи $12\frac{1}{2}$ иш куни сарф қилишди. Ҳар бир ишчи неча кун ишлаган?

43. Электр билан ишлайдиган иккита шамол машина бирин-кетин 7 соат ишлаб, биргаликда 3 киловатт-соат энергия сарф қилади. Иккинчиси $\frac{3}{8}$ киловатт-соат энергия сарф қилади. Ҳар бир шамол машинаси неча соат ишлаган?

44. Ернинг ўртача ярим диаметри $6{,}37128 \cdot 10^8$ см, Ойнинг диаметри Ер диаметрининг $\frac{3}{11}$ қисмини ташкил қилади. Ой диаметрини километрлар билан ифодаланг.

45. Бир стаканга тўлдириб чой қуйилди, сўнгра чойнинг 0, (3) қисмини тўкиб, унинг ўрнига сут қуйилди,

сўнгра яна 0,6 қисмини тўкиб, яна стаканнинг 0,75 қисмигача сут қуйилди. Стаканнинг қанча қисмига сут қуйилган? Қандай қисмига чой қуйилган?

46. Хўжалик ҳамма ерининг $\frac{3}{5}$ қисмига ғалла экилган, қолган ернинг $\frac{13}{36}$ қисми полиз ва ўтлоқ қилинган.

Хўжаликнинг қолган ери ўрмондан иборат. Хўжаликнинг экин майдони ўрмондан 217 га ортиқ; ғалла экилган ернинг 0, (3) қисмига жавдар, қолганига буғдой экилган. Неча гектар ерга жавдар ва неча гектар ерга буғдой экилган?

47. Цехда оғирлиги 3,2 кг дан бўлган 120 та самовар тайёрланган ва унга 20 та патнис ясалган. Сарф қилинган ҳамма материалнинг 0,96 қисми самоварга кетган. Ҳар бир патниснинг оғирлигини топинг.

48. Бир харидорга бир тўп газламанинг 0,2 қисми, иккинчисига қолган газламанинг $\frac{3}{4}$ қисми сотилди, шундан кейин тўпда 14,2 м газлама қолди. Тўпда неча метр газлама бўлган?

49. Хўжалик ўз аъзоларига биринчи куни 9,36 т жавдар, иккинчи куни биринчи кундагидан $1\frac{1}{2}$ марта кам, учинчи куни дастлабки икки кундагининг $\frac{2}{15}$ қисмича жавдар тарқатган. Берилган ҳамма жавдар олинган ҳамма ҳосилнинг $\frac{4}{25}$ қисмини ташкил қилади. Хўжаликда қанча жавдар йиғилган?

50. 480 га ер майдони уч бўлакка бўлинди. Иккинчи бўлакнинг юзи биринчи бўлак юзининг $\frac{2}{3}$ қисмини ташкил қилади, учинчи бўлак юзи иккинчи бўлакнинг ярмини ташкил қилади. Ҳар қайси бўлакнинг юзи қанча?

IV боб. КОМБИНАТОРИКА (БИРЛАШМАЛАР)

Комбинаторика — дискрет математиканинг бир бўлими бўлиб, асосан чекли тўпламлар билан иш кўради. Комбинаторика берилишига кўра такрорланадиган ва такрорланмайдиган: ўринлаштириш, ўрин алмаштириш, гуруҳлашларга бўлинади.

Чекли тўпламлар табиати жиҳатидан ўзига хос хусусиятга эга бўлиб, математиканинг кўпгина масалаларини ҳал қилишда қатнашади. A ва B сонли тўпламларнинг $A \cup B$ бирлашмаси A ва B тўпламлар элементларидан (бир хил элементлар бир марта қатнашади) иборат тўплам, уларнинг $A \cap B$ кесишмаси эса бу тўпламлар учун умумий бўлган элементлардан иборат тўплам бўлади.

Мисол. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ва $B = \{3, 4, 5\}$ тўпламларнинг бирлашмаси ва кесишмасини топинг.

Ечиш. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Шу A ва B сонли тўпламларнинг кесишмаси A ва B тўпламлар учун умумий бўлган элементлардан ташкил топган $A \cap B = \{3, 4\}$ тўпламдир.

Математикада берилган тўплам элементлари саноғини аниқлаш учун махсус белги ишлатилиши мумкин. Масалан, A тўплам элементлари саноғи $N(A) = 4$, B ники эса $N(B) = 3$ бўлади.

Масала. Барча тўрт хонали сонлар саноғини аниқланг.

Ечиш. Маълумки, барча тўрт хонали сонларнинг умумий кўриниши $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ бўлади. Бунда ҳар бир хона бирлигида турган рақамнинг қиймат қабул қилиш имконияти $0 < a_1 \leqslant 9$, $0 \leqslant a_2 \leqslant 9$, $0 \leqslant a_3 \leqslant 9$, $0 \leqslant a_4 \leqslant 9$ бўлганлиги сабабли, барча тўрт хонали сонларнинг саноғи 9000 та экан.

Агар бу масалани тўплам тушунчаси ёрдамида ҳал қиладиган бўлсак, $A_1 = \{1, 2, \ldots, 9\}$, $A_2 = A_3 = A_4 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ бўлгани учун $N(A_1) = 9$, $N(A_2) = N(A_3) = N(A_4) = 10$ бўлиб, $N(A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4) = 9000$ келиб чиқади. Бу масаланинг ечимидан бевосита $N(A) = 4$ бўлганда ва

$$A \times A \times A \times \ldots \times A = A^k \text{ дан } \underbrace{N(A \times \ldots \times A)}_{k} =$$

$$= \underbrace{N(A) \cdot N(A) \ldots N(A)} = (N(A))^k = 4^k$$ экани келиб чиқишини кўриш мумкин. Демак,

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$

бўлади.

Бу тушунчани n та тўплам бирлашмаси учун татбиқ қилсак, у ҳолда

$$N\left(\bigcup_{\alpha=1}^{n} A_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^{n} N(A_\alpha) - \sum_{\substack{i,\, j=1 \\ i \neq j}}^{n} N(A_i \cap A_j) + N(A_1 \cap$$

$$A_2 \cap A_3) + \ldots + (-1)^{k-1} N(\bigcap_{m=1}^{k} A_{i_m}) + \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-1} N(\bigcap_{\alpha=1}^{n} A_\alpha).$$

Бу формулада $A_1, A_2, \ldots, A_n$ тўпламларнинг ўзларидан ташқари улэрнинг мумкин бўлган барча кесишмалари ҳам қатнашади. Агар ўзаро кесишувчи тўпламларнинг сони тоқ бўлса, у ҳолда $(-1)^k = 1$ бўлиб, жуфт бўлса, $(-1)^k = -1$ бўлади. Бу юқорида келтирилган фикрлар қуйида кўриладиган мавзуларни ҳал қилишда фойдалидир.

1-§. ЎРИНЛАШТИРИШ

27-таъриф. *Берилган n та элементли тўплам элементларидан k тадан олиб тузилган ва элементлари ёки элементларининг тартиби билан фарқ қилувчи турли хил гуруҳлар ўринлаштириш дейилади.*

Ўринлаштиришлар берилишига кўра такрорланувчи ва такрорланмайдиган бўлади.

Такрорланувчи ўринлаштириш. $A = \{2, 3\}$ тўплам берилган бўлсин. Бу тўплам элементларидан аввал иккитадан, сўнгра учтадан такрорланувчи ўринлаштириш тузамиз, яъни: (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), бундай такрорланувчи ўринлаштиришлар сони $\bar{B}_2^2 = 2^2 = 4$ та; (2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 2), (2, 3, 3), (3, 3, 3), (3, 3, 2), (3, 2, 3), (3, 2, 2), бу ҳолда $\bar{B}_2^3 = 2^3 = 8$ та ёки $\bar{B}_2^3 = N(A^3) = (N(A))^3 = 8$.

28-таъриф. *Берилган n та элементдан k тадан олиб тузилган ўринлаштиришларда камида бир элемент бир ва ундан ортиқ, лекин k тадан ортиқ бўлмаган марта қатнашса, у ҳолда бундай ўринлаштириш такрорланувчи ўринлаштириш дейилади ва* $\bar{B}_n^k$ (бунда $n \leqq k$ бўлиши мумкин) *орқали белгиланади.*

Мисол. Берилган $\bar{B}_n^k = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ тўплам элементларидан учтадан олиб тузилган такрорланувчи ўринлаштиришлар сонини аниқланг.

Ечиш. $\bar{B}_4^3 = 4^3 = 64$ та.

52-теорема. *n та элементдан k тадан олиб тузилган барча такрорланувчи ўринлаштиришлар сони n^k га тенг.*

Исботи. k га нисбатан математик индукция усулини қўллаймиз. $k=1$ бўлганда $B_n^k = B_n^1 = n$ бўлади, чунки ҳар бир гуруҳда биттадан элемент бўлиб, тўплам n та элементли бўлгани учун ўринлаштиришлар сони n та бўлади. Теорема $k=p$ учун ўринли бўлсин, яъни $B_n^p = n^p$ бўлиб, бунда ҳар бир гуруҳ $(\underbrace{a_1, a \ldots, a_l}_{p \text{ та}})$ да p тадан элемент бўлиб, барча ўринлаштиришлар сони n^p та бўлади. Энди ҳар бир гуруҳдаги элементлар сонини биттага $(a_1, a, \ldots a_l, a_{l+1})$ орттирсак, у ҳолда бундай ўринлаштиришлар сони n марта ортади. Бундан $B_n^{p+1} = n \cdot B_n^p = n \cdot n^p = n^{p+1}$ бўлади. Демак, $k=p+1$ бўлганда, ўринлаштиришлар сони n^{p+1} та бўлар экан. Шу билан теорема исбот қилинди.

Мисол. $A=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ тўпламни $B=\{y_1, y_2, y_3\}$ тўпламга неча хил усул билан акслантириш мумкин?

Ечиш. Бунинг учун аввал $N(A)=4$ ва $N(B)=3$ эканини топамиз. Сўнгра $B_3^4=81$ эканига ишонч ҳосил қиламиз.

Математикада такрорланадиган ўринлаштиришлар билан бирга такрорланмайдиган ўринлаштиришлар ҳам қаралади. Масалан, $A=\{a, b, c, d\}$ тўплам элементларидан иккитадан қилиб такрорланмайдиган ўринлаштиришлар тузамиз:

$$(a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d),$$
$$(c, a), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c).$$

Ҳосил бўлган натижадан кўриниб турибдики, 4 та элементдан 2 тадан олиб тузилган такрорланмайдиган ўринлаштиришлар сони 12 та бўлар экан.

29-таъриф. *Берилган n та элементдан k тадан олиб тузилган ўринлаштиришларда ҳар бир элемент бир мартадан қатнашиб, гуруҳлар бир-биридан элементлари ёки элементларининг тартиби билан фарқ қилса, у ҳолда бундай ўринлаштиришлар такрорланмайдиган ўринлаштиришлар дейилади ва (Arangiment — ўринлаштириш) A_n^k орқали белгиланади.*

Мисол. $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ тўплам элементларидан иккитадан қилиб такрорланмайдиган ўринлаштиришлар тузинг.

Ечиш. $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ тўплам элементларидан A_n^2 ни тузамиз, яъни:

$$(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4), \ldots, (a_1, a_n) \ (n-1) \text{ та}$$
$$(a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_2, a_4), \ldots, (a_2, a_n) \ (n-1) \text{ та}$$

. . . .

$(a_n, a_1), (a_n, a_2), (a_n a_3), \ldots, (a_n, a_{n-1})\ (n-1)$ та

Демак, ҳар бир қаторда $(n-1)$ та гуруҳ бўлиб, n та қаторда $n(n-1)$ та гуруҳ бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда $A_n^2 = n(n-1)$ бўлар экан.

Бу мисолдан кўриниб турибдики, n та элементдан 3 тадан олиб тузилган барча такрорланмайдиган ўринлаштиришлар сони $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$ та бўлар экан.

53- теорема. *n та элементдан k тадан олиб тузилган барча такрорланмайдиган ўринлаштиришлар сони*

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ [n-(k-1)]$$

бўлади.

Исботи. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ тўпламнинг a_1 элементини биринчи элемент сифатида танлашда n та имконият мавжуд бўлганлиги учун уни $N(X_1) = n$ орқали белгилайлик, энди a_2 элемент учун $n-1$ та имконият қолади, уни $N(X_2) = n-1$ орқали белгилаймиз, a_3 учун $N(X_3) = n-2$ та ва ҳоказо a_k учун $N(X_k) = n-k+1$ та имконият қолади. Натижада юқорида кўриб ўтилган муносабатга асосан

$$A_n^k = N(X_1)N(X_2)N(X_3)\ \ldots\ N(X_k) = n(n-1)(n-2)\ \ldots$$
$$\ldots\ [n-(k-1)]$$

бўлади. Демак,

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-(k-1)).$$

Шу билан теорема исбот қилинди.

Мисол. 30 кишилик мажлис учун раис ва котибни неча хил усул билан сайлаш мумкин?

Ечиш. Мажлисда 30 киши бўлса, ундан икки кишини сайлаш керак. Улардан бири раис, иккинчиси котиб бўлади. Демак, уларни $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$ хил усул билан сайлаш мумкин экан.

Ҳосил қилинган $A_n^k = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)$ формуладан қуйидаги хусусий натижаларни олиш мумкин:

$$1)\ A_n^k = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1) =$$
$$= \frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1)(n-k)\ \ldots\ 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots (n-k)} = \frac{n!}{(n-k)!};$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!};$$

2) $A_n^k = nA_{n-1}^{k-1}$; 3) $A_n^k = n(n-1)A_{n-2}^{k-2}$;

4) $A_n^k = \frac{n}{n-k} A_{n-1}^k$;

5) $A_n^k = \frac{1}{n-k} A_n^{k+1}$.

2- §. ЎРИН АЛМАШТИРИШ

Математикада ўринлаштириш тушунчаси бевосита ўрин алмаштириш тушунчаси билан боғлиқдир.

30- таъриф. *Берилган n та элементли тўплам элементларидан n тадан олиб тузилган ва фақат элементларининг тартиби билан фарқ қиладиган ўринлаштиришлар ўрин алмаштиришлар дейилади ва* (Permutatsia — *ўрин алмаштириш) P_n орқали белгиланади.*

Мисол. $A = \{a, b, c\}$ тўплам элементларидан такрорланмайдиган ўрин алмаштиришлар тузинг.

Ечиш. A тўплам элементлар сони $N(A) = 3$ бўлгани учун барча ўрин алмаштиришлар (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (c, b, a), (b, c, a), (c, a, b) бўлиб, $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ та.

54- теорема. *n та элементдан n тадан олиб тузилган барча такрорланмайдиган ўрин алмаштиришлар сони $P_n = n!$ бўлади.*

Исботи. Бунинг учун 53- теоремани хулосасидан фойдаланамиз, яъни A_n^k даги k ни n билан алмаштирамиз, у ҳолда

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\ \dots\ 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!,\quad P_n = A_n^n = n!.$$

Шу билан теорема исбот бўлди.

Бу теоремадан қуйидаги хулосаларни келтириб чиқариш мумкин:

1) $P_n = n! = nP_{n-1} = n(n-1)P_{n-2} = n(n-1)(n-2)P_{n-3}$;

2) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ дан $P_n = A_n^k P_{n-k}$ ни ҳосил қиламиз;

3) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{P_n}{P_{n-k}}$, агар $k = 0$ бўлса,

$$A_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1$$

бўлади.

Мисол. $A_x^3 + 3A_x^2 = \frac{1}{2}$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\frac{A_x^3 + 3A_x^2}{P_{x+1}} = \frac{\frac{P_x}{P_{x-3}} + 3\frac{P_x}{P_{x-2}}}{(x+1)P_x} =$

$$= \frac{P_x(P_{x-2} + 3P_{x-3})}{(x+1)P_x \cdot P_{x-3} \cdot P_{x-2}} = \frac{(x-2)P_{x-3} + 3P_{x-3}}{(x+1)P_{x-3} \cdot P_{x-2}} =$$

$$= \frac{x-2+3}{(x+1)P_{x-2}} = \frac{1}{P_{x-2}} = \frac{1}{2}.$$

Бундан $P_{x-2} = 2$; $x - 2 = 2$; $x = 4$.

Демак, тенгламанинг ечими $x = 4$ экан.

Мисол. $\frac{P_{n+2}(n^2-9)}{P_{n+4}}$ ифодани соддалаштиринг.

Ечиш. $\frac{P_{n+2}(n^2-9)}{P_{n+4}} = \frac{P_{n+2}(n+3)(n-3)}{(n+4)(n+3)P_{n+2}} = \frac{n-3}{n+4}.$

3- §. ГУРУҲЛАШ

Гуруҳлашлар такрорланувчи ва такрорланмайдиган турларга ажратилади. Такрорланмайдиган гуруҳлашлар ўзининг табиати жиҳатидан ўрганишга анча қулайдир.

31- таъриф. *Берилган n та элементдан k тадан олиб тузилган ҳамда ўзининг тартиби ва элементлари билан бир- биридан фарқ қиладиган такрорланмайдиган ўринлаштиришлар гуруҳлаш дейилади ва (французча* Combinaision *— гуруҳлаш) C_n^k орқали белгиланади (бу ерда $n > k$).*

Мисол. $A = \{a, b, c\}$ дан иккитадан гуруҳлашларни тузинг.

Ечиш. $A = \{a, b, c\}$ тўплам элементларидан иккитадан ўринлаштиришлар 6 та бўлади: (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b). Энди бундан 31- таърифдаги шарт бўйича (a, b), (a, c), (b, c) жуфтликларни ажратамиз. Демак,

$$C_3^2 = 3 = \frac{A_3^2}{P_2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}$$

бўлади.

55- теорема. *m та элементдан n тадан олиб тузилган барча такрорланмайдиган гуруҳлашлар сони $C_m^n = A_m^n : P_n$ га тенг.*

Исботи. Математик индукция усулидан фойдаланамиз. $n=1$ бўлсин. $C_m^1 = A_m^1 : P_1 = m$ бўлиб, $n=1$ да тенглик ўринлидир. $n=k$ бўлганда $C_m^k = A_m^k : P_k$ ўринли деб, у $n = k+1$ учун ҳам ўринли эканини кўрсатамиз. Бунинг учун m та элементдан k тадан олиб тузилган гуруҳларга $k+1$ элементни қўшсак, натижада $(k+1)$ та элементли гуруҳлар ҳосил бўлади. Натижада $(k+1)$ элементли гуруҳлар сони k та элементли гуруҳлар сонидан $\frac{m-k}{k+1}$ марта ошади, яъни

$$C_m^{k+1} = \frac{m-k}{k+1} C_m^k$$

бўлади.

Демак,

$$C_m^{k+1} = \frac{m-k}{k+1} C_m^k = \frac{A_m^k (m-k)}{P_k (k+1)} = \frac{A_m^{k+1}}{P_{k+1}}$$

экани келиб чиқади. Шу билан теорема исбот қилинди.

1. Гуруҳлашлар

$$C_m^n = C_n^{m-n}$$

хоссага эга.

Исботи. $C_m^n = A_m^n : P_n = \frac{P_m}{P_{m-n} \cdot P_n} = \frac{P_m}{P_{m-(m-n)} P_{m-n}} = \frac{A_m^{m-n}}{P_{m-n}} = C_m^{m-n}$. Шу билан исбот қилинди.

2. $C_n^m + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$ бўлишини исботланг.

Исботи. Маълумки, $C_m^n = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}}$;

$$C_m^{n+1} = \frac{P_m}{P_{n+1} P_{m-n-1}}$$

эканидан

$$C_m^n + C_m^{n+1} = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}} + \frac{P_m}{P_{n+1} P_{m-n-1}} =$$

$$= \frac{P_m}{P_n}\left(\frac{1}{P_{m-n}} + \frac{1}{(n+1)\,P_{m-n-1}}\right) = \frac{(m+1)\,P_m}{(n+1)P_n\,P_{m-n}} =$$

$$= \frac{P_{m+1}}{P_{n+1}\,P_{(m+1)-(n+1)}} = C_{m+1}^{n+1}$$

ҳосил бўлади. Демак, берилган тенглик ўринли экан.

3. Ушбу айниятни исботланг:

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_n^k = C_{n+1}^{k+1},\ n \geqslant k,\ n,\ k \in N. \qquad (1)$$

Исботи. Бунинг учун математик индукция усулидан фойдаланамиз. $n = 1$ бўлсин, у ҳолда $C_1^1 = C_2^2$ бўлиб, (1) тенглик ўринлидир. $n = m$ учун $C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_m^k = C_{m+1}^{k+1}$ ўринли деб, (1) нинг $n = m+1$ учун ҳам тўғрилигини кўрсатамиз:

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_m^k + C_{m+1}^k = C_{m+1}^k + C_{m+1}^{k+1} = C_{m+2}^{k+1}.$$

Шу билан (1) исбот қилинди.

4-§. ТАКРОРЛАНУВЧИ ЎРИН АЛМАШТИРИШ

n та элементли A тўплам элементлари m та гуруҳга ажратилган бўлсин, яъни: $A = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{m} B_\alpha$ ва $B_i \cap B_j = \varnothing$ $i, j = \overline{1, m}$ шарти бажарилсин. Ҳар бир гуруҳга кирган элементлар сони мос равишда $k_1, k_2, \ldots, k_m$ бўлсин. A тўпламнинг элементлари сони $N(A) = n$ та, унинг қисм тўпламлари элементлари сони мос равишда $N(B_1) = k_1$, $N(B_2) = k_2$, $N(B_3) = k_3, \ldots, N(B_m) = k_m$ бўлганлиги учун, бундан $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$ эканлиги келиб чиқади. Натижада кўриниб турибдики, B_1 тўпламни A тўпламдан $C_n^{k_1}$ та усул билан ажратиш мумкин, у ҳолда қолган $n - k_1$ элементдан B_2 тўпламни $C_{n-k_1}^{k_2}$ та усул билан ажратиш мумкин ва ҳоказо. Демак, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ тўпламларни ажратиш ва кўпайтириш қоидасига асосан

$$N(k_1, k_2, \ldots, k_m) = C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot C_{n-k_1-k_2}^{k_3} \ldots C_{n-\sum\limits_{j=1}^{m-1} k_j}^{k_m} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,(n-k_1)!} \ldots \frac{\left(n - \sum\limits_{j=1}^{m-1} k_j\right)!}{k_m!\,(n - k_1 - k_2 - \ldots - k_{m-1})!} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\ k_2!\ \dots\ km!}$$

ҳосил бўлади. Шундай қилиб, n та элементдан тузилган такрорланувчи ўрин алмаштиришлар сони қуйидагига тенг:

$$N(k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_m) = \frac{n!}{k_1!\ k_2!\ \dots\ km!}.$$

Бу юқорида келтирилган маълумотлардан кўриниб турибдики, агар $k = n$ бўлса, такрорланмайдиган ўрин алмаштиришлар, агар $k < n$ бўлса, такрорланадиган ўрин алмаштиришлар ҳосил бўлади.

1- мисол. Шахмат тахтасининг биринчи чизиғига 2 та от, 2 та фил, 2 та рух, фарзин ва шоҳни неча хил усул билан жойлаштириш мумкин.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра $k_1 = 2$, $k_2 = 2$, $k_3 = 2$, $k_4 = 1$, $k_5 = 1$, $\sum k_i = 8$.

Демак,

$$N(2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1) = \frac{8!}{2!\ 2!\ 2!\ 1!\ 1!} = 5040 \text{ та усул.}$$

2- мисол. $A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2\}$ тўплам элементларидан тузилган такрорланувчи ўрин алмаштиришлар сонини топинг.

Ечиш. A тўплам элементларини ўзаро кесишмайдиган $B_1 = \{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, $B_2 = \{b_1,\ b_2\}$; $B_3 = \{c_1,\ c_2\}$ қисм тўпламларга ажратамиз. Натижада $N(B_1) = 3$, $N(B_2) = 2$, $N(B_3) = 2$ ҳосил бўлиб, $\sum k_i = 7$ бўлади. Ҳар бир гуруҳдаги ҳар хил ўрин алмаштиришлар сони мос равишда $3!\ 2!\ 2!$ бўлади. $N(A) = 7$ бўлганлиги сабабли А тўплам элементларидан тузилган ўрин алмаштиришлар сони $7!$ бўлади. Бундан мумкин бўлган барча такрорланувчи ўрин алмаштиришлар сони шу 7 та элементдан тузилган ўрин алмаштиришлар сонидан $3!\ 2!\ 2!$ марта кам бўлади, яъни

$$N(3,\ 2,\ 2) = \frac{7!}{3!\ 2!\ 2!} = 210 \text{ та.}$$

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар:

1. Ҳисобланг: A_{15}^4; A_5^3; B_4^5; B_6^4; P_7; C_5^2; C_4^3; C_{15}^3.
2. Тенгсизликларни текширинг:

а) $C_{13}^m < C_{13}^{m+2}$; б) $C_{18}^{m-2} > C_{18}^m$; в) $5C_m^3 < C_{n+2}^3$, $m,\ n \in N$;

г) $2C_m^5 > 11C_{m-2}^3$; д) $C_{n+1}^{n-2} - C_{n+1}^{n-1} \leqslant 10$; е) $A_{m+1}^4 : C_{m-1}^{m-3} >$
$> 14P_3$.

3. Қуйидагиларни исботланг:

а) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$;

б) $C_m^n + C_{m-1}^n + \ldots + C_{m-10}^n = C_{m+1}^{n+1} - C_{m-10}^{n+1}$;

в) $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$;

г) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

д) $C_n^0 + 2C_n^1 + \ldots + (n+1)C_n^n = (n+2)\,2^{n-1}$;

е) $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$;

ж) $C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{5}C_n^2 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n = \frac{P_n 2^n}{(2n+1)!!}$,

бу ерда $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1) = (2n+1)!!$;

з) $C_2^2 + C_3^2 + \ldots + C_n^2 = C_{n+1}^3$.

4. Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

а) $C_{2x}^{x+1} : C_{2x+1}^{x-1} = 2:3$; б) $A_{x-1}^2 - C_x^1 = 79$;

в) $3C_{x+1}^2 - 2A_x^2 = x$; г) $C_{x+1}^2 : C_x^3 = 4:5$;

д) $12C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162$; е) $A_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-1} = 14(x+1)$;

ж) $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$; з) $C_{x+1}^{x-4} = \frac{7}{15}A_{x+1}^3$;

и) $A_{x+3}^2 = C_{x+2}^3 + 20$; к) $C_x^3 + C_x^4 = 11 \cdot C_{x+1}^2$.

5. Тенгсизликни ечинг:

а) $C_{x-1}^4 - C_{x-1}^3 - \frac{5}{4}A_{x-2}^2 < 0$; б) $C_{x+1}^{x-1} > \frac{3}{2}$;

в) $C_{x+1}^{x-1} < 21$; г) $3C_{x+1}^2 + P_2 \cdot x \geqslant 4A_x^2$

6. Умумий ҳади $x_n = C_{n+5}^4 - \frac{143}{96} \cdot \frac{P_{n+5}}{P_{n+3}}$ бўлган (x_n) кетма-кетликда нечта манфий ҳад бор $(n \in N)$?

7. Умумий ҳади

$$x_n = \frac{195}{4P_n} - \frac{A_{n+3}^3}{P_{n+1}},\ n \in N$$

бўлган (x_n) кетма-кетликда нечта мусбат ҳад борлигини аниқланг.

8. Умумий ҳади

$$x_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n}, \quad n \in N$$

бўлган (x_n) кетма-кетликда манфий ҳадни топинг.

V БОБ. ҲАҚИҚИЙ СОНЛАР

1-§. ҲАҚИҚИЙ СОНЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

Мактаб математика курси ҳамда юқорида кўриб ўтилган мавзулардан маълумки, $N = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \omega, \ldots \omega^{\omega}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega}}, \ldots\}$ натурал сонлар тўплами, $Z = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ бутун сонлар тўплами, $Q = \left\{\frac{p}{q} \,\middle|\, q \in N \wedge p \in Z\right\}$ рационал сонлар тўплами устида бажариладиган амаллар ва муносабатларни мушоҳада қилиш натижасида айрим хулосаларни келтириб чиқардик. Шунингдек, ихтиёрий рационал $\frac{p}{q} = A, \overline{t_1, t_2 \ldots t_n}$ ёки $\frac{p}{q} = A, \overline{b_1 b_2 \ldots b_k (t_1 \ldots t_n)}$ ёки $\frac{p}{q} = A\overline{(t_1 \ldots t_n)}$ сонларнинг чексиз даврий ўнли каср шаклида тасвирланиши ҳақидаги маълумотлар билан танишдик. Лекин математикада $x^2 = 2$, $2x^2 - 3 = 0$, $x^2 - 3x + 1 = 0$ каби тенгламалар ҳам мавжудки, бу тенгламалар рационал сонлар тўпламида ечимга эга эмас. Шунинг учун бу тенгламаларни ечиш заруратн бевосита сон тушунчасини кенгайтириш лозим эканлигини тақозо қилади.

56-теорема. *Квадрати иккига тенг бўлган рационал сон мавжуд эмас.*

Исботи. Фараз қилайлик, квадрати 2 га тенг бўлган рационал сон мавжуд бўлсин, яъни $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, $(p, q) = 1$. Бундан $p^2 = 2q^2$ бўлади, бу тенгликнинг ўнг томони 2 га бўлинади, демак, p^2 — жуфт сон, у ҳолда p сони 2 га бўлинади. $p = 2k$ бўлса, $4k^2 = q^2 \cdot 2$, бундан $q^2 = 2k^2$ бўлиб, $q = 2m$ экани келиб чиқади. Демак, $\frac{p}{q}$ касрнинг сурат ва махражи 2 га қисқаради, бу эса қилинган фаразга зиддир. Шу билан теорема исбот бўлди. Демак, квадрати 2 га тенг рационал сон мавжуд эмас экан, чунки

$$\sqrt{2} = 1{,}414 \ldots$$

1	
24	100
4	96
281	400
1	281
282 4	11900
4	11296

қаралаётган бу ҳолда квадрат илдиз чиқариш жараёни ҳеч бир тугамайди. Акс ҳолда $\sqrt{2}$ бирор чекли ўнли касрга тенг бўлар эди ва шунинг учун у рационал сон бўлар эди. Бу эса юқорида исботланган жумлага зиддир. Шундай қилиб, 2 дан квадрат илдиз чиқарганда чексиз ўнли каср ҳосил бўлади. Бу каср даврий бўла олмайди, у чексиз даврий бўлмаган ўнли каср бўлади.

Даврий бўлмаган чексиз ўнли касрларга олиб келадиган яна бир масалани қарайлик. Маълумки, рационал сонлар узлуксиз миқдорларни ўлчаш учун етарли эмас. Бу масала кесмаларни ўлчаш, ўлчовдош ва ўлчовдош бўлмаган кесмалар ҳақида муҳокама юритишга олиб келади.

Берилган AB кесманинг узунлигини $l(AB)$ орқали ифодалайлик, у ҳолда қуйидаги фикрлар ўринли бўлади:

1) AB кесма учун $l(AB) \geqslant 0$ бўлиб, $A = B$ бўлса, у ҳолда $l(AB) = 0$ бўлади;

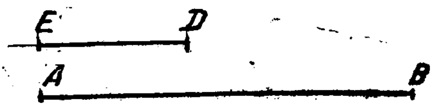
2) AB кесма учун ҳар доим $l(AB) = l(BA)$ ўринлидир;

3) Агар C нуқта A ва B нуқталар орасида жойлашган бўлса, у ҳолда $l(AB) = l(AC) + l(CB)$ бўлади;

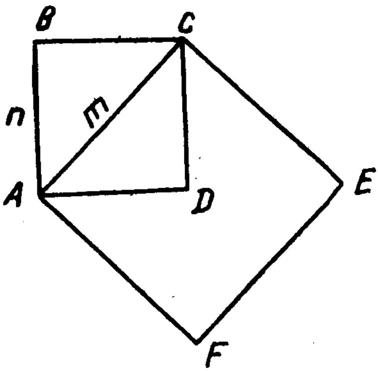
4) Агар ED кесма учун $l(ED) = 1$ бўлса, у ҳолда ED кесма бирлик кесма бўлади.

ED бирлик кесма ва AB кесма берилган бўлсин (1-чизма).

32- таъриф. *Агар ED кесмани шундай n та тенг бўлакка бўлиш мумкин бўлсаки, натижада ED нинг $\frac{1}{n}$ бўлаги берилган AB кесманинг ичида бирор m бутун сон марта жойлашса, у ҳолда AB кесма CD кесма билан умумий ўлчовдош дейилади.*



1- расм.



2- расм.

Бу юқоридаги таърифдан келиб чиқиб, ҳар қандай икки кесма ўлчовдош бўладими? — деган саволни қараб чиқайлик.

57- теорема. *Исталган квадратнинг диагонали унинг томонлари билан ўлчовдош эмас.*

Исботи. Тескарисини фараз қилиб исботлаймиз. Фараз қилайлик, $ABCD$ квадратнинг AC диагонали унинг AB томони билан ўлчовдош бўлсин. У ҳолда бу кесмаларнинг умумий ўлчови бўлади, яъни шундай кесма мавжудки, у AB кесмага роса n марта, AC кесмага роса m марта жойлашади, яъни $l(AB)=nl(NK)$, $l(AC)=ml(NK)$, $l(NK)=1$. Бундан $ACEF$ квадратнинг юзи $ABCD$ квадратнинг юзидан роса 2 марта катта эканини билган ҳолда $S_{ACEF}=2S_{ABCD}$ ёза оламиз. Энди қийматларни ўз ўрнига қўйсак, $m^2=2n^2$ бўлиб, $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$ ҳосил бўлади. Лекин олдинги теоремага асосан $\frac{m}{n}$ рационал сон бўла олмайди, демак, қилинган фараз нотўғри. Ҳар қандай квадратнинг диагонали унинг томони билан ўлчовдош эмас экан.

Бу юқорида келтирилган мулоҳазаларга таянган ҳолда қуйидаги хулосаларни келтириш мумкин:

1. *Агар AB кесма ED узунлик бирлиги билан ўлчовдош бўлса, у ҳолда унинг узунлиги рационал сон билан ифодаланади.*

2. *Агар AB кесма ED узунлик бирлиги билан ўлчовдош бўлмаса, унинг узунлиги ҳеч қандай рационал сон билан ифодаланмайди.*

Ҳақиқатан ҳам, AB кесмага ED ни икки марта қўйгандан кейин ED дан кичик CB кесма қолди дейлик. Бу ҳолда AB нинг узунлиги тақрибан 2 сони билан ифодаланиши табиий. Узунлик бирлиги ED нинг $\frac{1}{10}$ бўлагини C нуқтадан бошлаб CB га қўйиб чиқамиз, масалан, 5 марта қўйгандан кейин $C'B$ қолдиқ кесма ҳосил бўлди дейлик. Сўнгра ED нинг $\frac{1}{100}$ бўлагини $C'B$ га қўямиз, саккиз марта қўйилгандан сўнг $C''B$ кесма қолдиқ қолди дейлик. AB нинг узунлиги тақрибан 2,58 . . . га тенг бўлади. Бу жараённи кетма-кет давом эттирилса, AB кесманинг узунлиги даврий бўлмаган чексиз ўнли каср билан ифодаланади. Шундай қилиб, кесмаларни ўлчаш масаласи бизни рационал сонлар тўпламини бу тўпламга мусбат чексиз даврийmас ўнли касрларни қўшиш билан кенгайтириш зарурлигига олиб келди. Маълумки, алгебранинг эҳтиёжлари мусбат чексиз даврийmас ўнли касрлар билан бир қаторда манфий чексиз даврийmас ўнли касрларни ҳам бир вақтда қараш зарурлигини тақозо қилади.

Чексиз даврийmас ўнли касрлар билан тасвирланадиган сонлар *иррационал сонлар* деб аталади.

Мисол. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ ва 3,1415926536 . . . каби сонлар иррационал сонлардир.

33-таъриф. *Рационал ва иррационал сонлар биргаликда ҳақиқий сонлар деб аталади ва у* $\mathbf{R}$ *кўринишда белгиланади.*

Мисол. 5,634729 . . . ; 15,25; $3\frac{1}{4}$; 3(231); 181, 23372 кабилар ҳақиқий сонлардир.

Ҳақиқий сонларни $\alpha = A, p_1, p_2 \ldots p_n \ldots$;
$\beta = B, q_1 q_2 \ldots q_n \ldots$; $\gamma = C, l_1, l_2 \ldots l_n \ldots$ каби кўринишларда ёзамиз.

Агар берилган α ва β ҳақиқий сонларнинг бутун қисмлари ва мос ўнли хона рақамлари бир хил бўлса, у ҳолда $\alpha = \beta$ бўлади.

α ва β ўзаро тенг бўлмаган мусбат ҳақиқий сонлар бўлсин: агар бу сонларнинг бутун қисмлари ҳар хил бўлса, у ҳолда бутун қисми катта бўлгани катта ҳисобланади. Агар α ва β сонларнинг бутун қисмлари ўзаро тенг бўлиб, вергулдан кейинги мос ўнли хона рақамларини таққослаш натижасида бир хил ўнли рақамларидан каттаси аниқланса, шу ҳақиқий сон катта ҳисобланади. Масалан, 5,6348 . . . $>$ $>$ 3,9901 . . . ; 37,1269 . . . $>$ 37,0394 . . . $\sqrt{3} < \sqrt{5}$; 0,152131 . . . $>$ $-8,41321$ . . . ва ҳоказо.

Берилтан икки манфий ҳақиқий сондан қайси бирининг абсолют қиймати кичик бўлса, ўшаниси катта бўлади, масалан, $-37,1269\ldots < -37,0394\ldots$, чунки $37,1269\ldots > 37,0394\ldots$; $-0,3333\ldots < -0,3332\ldots$, чунки $0,3333\ldots > 0,3332\ldots$.

Ҳақиқий сонлар учун ушбу хоссалар ўриилидир:

1) $\alpha = \beta$ *бўлса, у ҳолда* $\beta = \alpha$ *бўлади;*

2) *Агар* $\alpha > \beta$ ва $\beta > \gamma$ *бўлса, у ҳолда* $\alpha > \gamma$ *бўлади;*

3) *Агар* $\alpha > \beta$ *бўлса, ихтиёрий* γ *сон учун* $\alpha \pm \gamma > \beta \pm \gamma$ *бўлади;*

4) *Агар* $\alpha > \beta$ *бўлиб,* $\gamma > 0$ *бўлса, у ҳолда* $\alpha\gamma > \beta\gamma$ *ва* $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$ *бўлади;*

5) *Агар* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *бўлиб,* $\alpha > \beta$ *бўлса, у ҳолда* $\frac{1}{\beta} > \frac{1}{\alpha}$ *бўлади.*

Булардан намуна сифатида 2° нинг исботини келтирамиз. Берилган α, β ва γ сонларни юқорида келтирилган фикрларга суянган ҳолда таққослаймиз. $\alpha > \beta$ ва $\beta > \gamma$ бўлгани учун $A > B$ ва $B > C$ бўлади. Бундан $A > C$ бўлиб, хоссанинг ўринли экани келиб чиқади. Агар $A = B = C$ бўлса, у ҳолда $p_1 > q_1$ ва $q_1 > l_1$ бўлиб, бундан $p_1 > l_1$ экани келиб чиқади. Агар $p_1 = q_1 = l_1$ бўлса, у ҳолда кейинги мос рақамларни қараймиз ва, ниҳоят, маълум мос ўнли рақамдан бошлаб α ва β, γ сонлари орасида $\alpha > \beta$ ва $\beta > \gamma$ бўлса, у ҳолда $\alpha > \gamma$ бўлишини таъминлайди. Шу билан 2° хоссанинг ўринли экани исботланди.

Қолган хоссаларни исботлашни ўқувчиларнинг ўзларига ҳавола этамиз.

$\alpha = p_0, p_1p_2 \ldots p_n \ldots$ берилган ҳақиқий мусбат сон бўлсин. Агар вергулдан сўнг турган ҳамма каср хоналари нолдан фарқли бўлса, у ҳолда $p_0 < \alpha$ ва $\alpha < p_0 + 1$ бўлиб, $p_0 < \alpha < p_0 + 1$ муносабат α ҳақиқий соннинг p_0 ва $p_0 + 1$ рационал сонлар орқали *баҳоланиши* деб қаралади. Бунда p_0 сон α соннинг *1 гача аниқликда ками билан олинган тақрибий қиймати,* $p_0 + 1$ *эса 1 гача аниқликда ортиғи билан олинган тақрибий қиймати дейилади.*

Шунингдек, агар

$$p_0 + \frac{p_1}{10} < \alpha < p_0 + \frac{p_1 + 1}{10}$$

бўлса, $p_0 + \frac{p_1}{10}$, $p_0 + \frac{p_1 + 1}{10}$ лар α соннинг 0,1 *гача аниқ-*

ликда ками ва ортиғи билан олинган тақрибий қийматлари дейилади.

Бу жараённи давом эттирсак, у ҳолда

$$p_0+\frac{p_1}{10}+\frac{p_2}{10^2}+\ldots+\frac{p_n}{10^n}$$

ва

$$p_0+\frac{p_1}{10}+\frac{p_2}{10^2}+\ldots+\frac{p_{n+1}}{10^n}$$

чекли касрлар α соннинг 10^{-n} *гача аниқликда ками ва ортиғи билан олинган тақрибий қийматлари деб қаралади.*

Демак, α *ҳақиқий соннинг* 10^{-n} *гача аниқликдаги ками билан олинган тақрибий қийматини топиш учун бу соннинг ўнли каср билан тасвиридаги олдинги n та ўнли хонасини сақлаб, кейинги ҳамма рақамларини ташлаб юбориш керак. Ками билан олинган тақрибий қийматнинг охирги ўнли хонасига 1 ни қўшсак,* 10^{-n} *гача аниқликдаги ортиғи билан олинган тақрибий қиймат ҳосил бўлади.*

58-теорема. *Ихтиёрий* $\varepsilon>0$ *сон берилган бўлсин, ихтиёрий* α *иррационал сон учун шундай* $\underline{r}$ *ва* $\overline{r}$ *рационал сонларни топиш мумкинки,* $\overline{r}-\underline{r}<\varepsilon$ *бўлиб,* $\underline{r}<\alpha<\overline{r}$ *бўлади.*

Исботи. $\alpha>0$ иррационал сон берилган бўлсин:

$$\alpha=p_0,\ p_1p_2p_3\ \ldots\ p_n\ \ldots\ .$$

$$\underline{r}=p_0+\frac{p_1}{10}+\ldots+\frac{p_n}{10^n};$$

$$\overline{r}=p_0+\frac{p_1}{10}+\ldots+\frac{p_n+1}{10^n}$$

бўлсин дейлик, у вақтда $\underline{r}<\alpha<\overline{r}$ бўлади. Етарлича катта n учун

$$\overline{r}-\underline{r}=\frac{1}{10^n}<\varepsilon$$

бўлишини ҳар доим таъминлаш мумкин эканини эътиборга олинса, у ҳолда теорема $\alpha>0$ учун исбот бўлади.

Худди шунга ўхшаш, $\alpha<0$ учун $\underline{r}'=-\overline{r}$ ва $\overline{r}'=\underline{r}$ алмаштиришини бажариб, юқоридаги шартларни ўринли эканини таъминлаш мумкин. Демак, теорема исбот бўлди.

Масалан, $\sqrt{2}$ сонини рационал сонлар орқали талаб қилинган аниқликда қуйидагича баҳолаш мумкин: $1 < \sqrt{2} < 2$; $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$; $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$; $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$; $1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$; $1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422$ ва ҳоказо яқинлашишларни ҳосил қиламиз. Бундан кўриниб турибдики, 1; 1,4; 1,41; 1,414; ... сонлар кетма-кетлиги $\sqrt{2}$ сонининг ками билан, 2; 1,5; 1,415; 1,4143; 1,41422; ... сонлар кетма-кетлиги ортиғи билан олинган тақрибий қийматларидир.

Бу сонлардан мос равишда

$$u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots \tag{1}$$

сонли кетма-кетликни ҳосил қилиш мумкин.

34-таъриф. *Агар берилган* $\varepsilon > 0$ *учун шундай* N_ε *мавжуд бўлсаки,* $N_\varepsilon < n$ *бўлган барча* u_n *ҳадлар ва* A *ўзгармас сон учун* $|u_n - A| < \varepsilon$ *бўлса, у ҳолда* A *сон* u_n *кетма-кетликнинг лимити дейилади ва* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$ *орқали белгиланади.*

59-теорема. α *ва* β, $\alpha < \beta$ *ҳақиқий сонлар учун шундай чексиз кўп* ξ *ҳақиқий сонлар мавжудки,* $\alpha < \xi < \beta$ *бўлади.*

Исботи. $\alpha = p_0, p_1 p_2 \ldots p_n \ldots$, $\beta = q_0, q_1 q_2 \ldots q_n = 0$ бўлсин (даври 9 дан иборат бўлган касрлар бўлмасин). Энди чекли ўнли касрларни солиштириб кўрамиз:

$$p_0;\ p_0, p_1;\ p_0, p_1p_2;\ \ldots,$$

$$q_0;\ q_0, q_1;\ q_0, q_1q_2;\ \ldots.$$

Шартга кўра $\alpha < \beta$ бўлгани учун юқоридаги кетма-кетликда тартиб билан борганда, пастдаги кетма-кетликка қараганда кичик бўлган $p_0, p_1 p_2 \ldots p_k$ сон топилиб, $p_0, p_1 p_2 \ldots p_{k-1} = q_0, q_1 q_2 \ldots q_{k-1}$, лекин $p_k < q_k$ (бунда $p_0 < q_0$ бўлиши ҳам мумкин) бўлади. Энди бу ўринда α нинг k та рақамини сақлаган ҳолда ξ нинг қиймати учун $\xi = p_0, p_1 p_2 \ldots p_k t_{k+1} t_{k+2} \ldots$ ўнли касрни тузамиз. Кейинги $t_{k+1} t_{k+2}$ хона рақамлари қандай бўлса ҳам $\xi < \beta$ бўлади. $p_{k+2} \neq 9$ ҳолда t_{k+1} сифатида p_{k+1} дан катта бўлган сонни оламиз, у ҳолда $\alpha < \xi$ бўлади. Бундан бевосита $\alpha < \xi < \beta$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Энди $t_{k+1} t_{k+2} \ldots$ рақамларини бironта хонадан бошлаб ихтиёрий равишда танлаб олиш мумкин бўлганидан α ва β орасида чексиз кўп ξ сонлар мавжуд эканлиги келиб чиқади. α ва β сонлар манфий бўлган ҳолда ҳам исбот шу услубда олиб борилади. Шу билан теорема исбот қилинди.

Биз ҳозиргача рационал сонларнигина бир-бири билан қўшишни биламиз, яъни

$$\frac{m}{n}+\frac{k}{p}=\frac{mp+kn}{np}.$$

Энди икки сондан бири ёки иккаласи иррационал бўлганда уларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмаси қандай аниқланишини кўриб чиқамиз. $\alpha=1{,}41421\ldots$ ҳақиқий сон берилган бўлсин, α нинг 1 гача, 0,1 гача, 0,01 гача, $\ldots$, 10^{-n} гача ва ҳоказо аниқликдаги ками билан олинган тақрибий қийматларини мос равишда $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n, \ldots$ орқали ва ортиғи билан олинган тақрибий қийматларини мос равишда $\overline{a}_0, \overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n, \ldots$ орқали белгиласак, у ҳолда

$$\underline{a}_0=1;\ \underline{a}_1=1{,}4;\ \underline{a}_2=1{,}41;\ \underline{a}_3=1{,}414;\ \underline{a}_4=1{,}4142;$$

$$\underline{a}_5=1{,}41421;\ \ldots \text{ ва } \overline{a}_0=2;\ \overline{a}_1=1{,}5;\ \overline{a}_2=1{,}42;$$

$$\overline{a}_3=1{,}415;\ \overline{a}_4=1{,}4143;\ \ldots$$

ларни ёза оламиз.

Қўшиш. α ва β мусбат ҳақиқий сонлар берилган бўлсин. Бу сонларнинг ками билан олинган мос тақрибий қийматларини қўшиб, $t_0=\underline{a}_0+\underline{b}_0$; $t_1=\underline{a}_1+\underline{b}_1$; $\ldots$; $t_n=\underline{a}_n+\underline{b}_n$; $\ldots$ ўсувчи кетма-кетликни, ортиғи билан олинган мос тақрибий қийматларини қўшиб, $T_0=\overline{a}_0+\overline{b}_0$; $T_1=\overline{a}_1+\overline{b}_1$; $T_2=\overline{a}_2+\overline{b}_2$; $\ldots$, $T_n=\overline{a}_n+\overline{b}_n$; $\ldots$ камаювчи кетма-кетликни ҳосил қиламиз. Натижада бевосита 3-теоремага асосан $\varepsilon>0$ учун шундай N_1 мавжудки, $N_1<n$ бўлганда $\overline{a}_n-\underline{a}_n<\frac{\varepsilon}{2}$ ва шундай N_2 мавжудки, $N_2<n$ бўлганда $\overline{b}_n-\underline{b}_n<\frac{\varepsilon}{2}$ бўлиб, энди $N_\varepsilon\geqslant max\,\{N_1, N_2\}$ деб олсак, $T_n-t_n=(\overline{a}_n+\overline{b}_n)-(\underline{a}_n+\underline{b}_n)=(\overline{a}_n-\underline{a}_n)+(\overline{b}_n-\underline{b}_n)<\varepsilon$ бўлади. Бундан шундай ҳақиқий γ сон мавжуд бўладики, $t_n\leqslant\gamma\leqslant T_n$ муносабат ўринли бўлади.

35-таъриф. *α ва β ҳақиқий сонларнинг йиғиндиси $\alpha+\beta$ деб, барча $\underline{a}+\underline{b}$ сонлар билан, барча $\overline{a}+\overline{b}$ сонлар орасида жойлашган γ ҳақиқий сонга айтилади:*

$$\underline{a}+\underline{b}\leqslant\gamma\leqslant\overline{a}+\overline{b}.$$

Юқорида келтирилган фикрлар, 3-теорема ва (1) муносабатдан $\alpha+\beta=\gamma$ шартини қаноатлантирувчи γ соннинг мавжудлиги ва ягоналиги келиб чиқади.

Ҳақиқий сонларни қўшиш: 1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$; 2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$; 3) $\alpha+0=\alpha$ хоссаларга эга эканлигини исботлашни ўқувчиларнинг ўзларига ҳавола қиламиз.

Юқорида келтирилган $\underline{a}<\alpha<\overline{a}$ муносабатдан $-\overline{a}<-\alpha<-\underline{a}$ бўлишини инобатга олсак, $\underline{a}-\overline{a}<0<\overline{a}-\underline{a}$ дан $\alpha+(-\alpha)=0$ муносабат ўринли бўлиши келиб чиқади.

Кўпайтириш. α ва β мусбат ҳақиқий сонлар ҳамда $\underline{a}<\alpha<\overline{a}$ ва $\underline{b}<\beta<\overline{b}$ муносабатлар берилган бўлсин.

36-таъриф. *Икки мусбат α ва β ҳақиқий соннинг кўпайтмаси деб, барча $\underline{a}\,\underline{b}$ ва $\overline{a}\,\overline{b}$ кўринишдаги кўпайтмалар орасидаги γ ҳақиқий сонга айтилади:*

$$\underline{a}\,\underline{b}<\gamma<\overline{a}\,\overline{b}.$$

60-теорема. ***R** сонли тўпламда кўпайтириш амали мавжуд ва ягонадир.*

Исботи. Берилган α ва β ($\underline{a}<\alpha<\overline{a}$ ва $\underline{b}<\beta<\overline{b}$) мусбат ҳақиқий сонлар учун мумкин бўлган барча $\underline{a}\,\underline{b}$ кўпайтмалар $\overline{a}\,\overline{b}$ кўринишидаги кўпайтмаларнинг исталгани билан юқоридан чегаралангандир, яъни $\underline{a}\,\underline{b}\leqslant\gamma$, лекин шу вақтнинг ўзида $\gamma\leqslant\overline{a}\,\overline{b}$ бўлади, $\underline{a}\,\underline{b}$ сонларни орттириш ва $\overline{a}$, $\overline{b}$ сонларни камайтириш мумкинлиги бу ерда тенглик белгисини ташлаб юборишга имкон беради, демак, γ сон кўпайтиришнинг таърифини қаноатлантиради.

Энди кўпайтма $\alpha\cdot\beta=\gamma$ нинг ягона эканини кўрсатамиз. $\varepsilon>0$ сон учун шундай N_1 номер топиладики, $N_1<n$ дан бошлаб $|\overline{a}_n-\underline{a}_n|<\frac{\varepsilon}{2b_n}$ ва шундай N_2 номер топиладики, $N_2<n$ дан бошлаб $|\overline{b}_n-\underline{b}_n|<\frac{\varepsilon}{2\overline{a}_n}$ бўлади, у ҳолда шундай $N_\varepsilon\geqslant max\,\{N_1, N_2\}$ мавжудки, $N_\varepsilon<n$ дан бошлаб

$$|\bar{a}_n \bar{b}_n - \underline{a}_n \underline{b}_n| = |\bar{a}_n \bar{b}_n - \bar{a}_n \underline{b}_n + \bar{a}_n \underline{b}_n - \underline{a}_n \underline{b}_n| \leqslant$$
$$\leqslant |\bar{a}_n| |\bar{b}_n - \underline{b}_n| + |\underline{b}_n| |\bar{a}_n - \underline{a}_n| < \varepsilon$$

бўлади, бундан

$$|\bar{a}_n \bar{b}_n - \underline{a}_n \underline{b}_n| < \varepsilon \text{ ва } \bar{a}_n \bar{b}_n > \underline{a}_n \underline{b}_n > 0$$

эканлигига асосан $\bar{a}_n \bar{b}_n - \underline{a}_n \underline{b}_n < \varepsilon$ бўлиб, 3-теоремага асосан $\alpha \cdot \beta = \gamma$ соннинг ягона эканлиги келиб чиқади.

Берилган R сонли тўплам ўзининг таркибига $Q \subset R$ рационал сонлар тўпламини олганлигини эътиборга олсак, у ҳолда Q да бажариладиган амаллар ва муносабатлар R да ҳам бажарилади, чунончи ушбу хоссалар ўринлидир:

1°. $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$. 2°. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$. 3°. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

4°. $\alpha \cdot 1 = \alpha$. 5°. $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \wedge \gamma\alpha + \gamma\beta$.

6°. $\forall \alpha \in R$, $\alpha \neq 0$ учун $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$.

Бу хоссаларни исботлашда қуйидагини эътиборга олиш лозим: агар иккала кўпайтувчи нолдан фарқли бўлса, у ҳолда

α ва β бир хил ишорали бўлганда $\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|$;

α ва β ҳар хил ишорали бўлганда $\alpha \cdot \beta = -|\alpha| \cdot |\beta|$.

37-таъриф. 1) *α ва β ҳақиқий сонларнинг айирмаси $\alpha - \beta$ деб, $\alpha = \beta + x$ шартини қаноатлантирувчи x ҳақиқий сонга айтилади.*

Таърифга кўра $x = \alpha - \beta$ бўлади.

2) *Агар $\beta \neq 0$ бўлиб, α ихтиёрий бўлса, α ва β сонларнинг $\frac{\alpha}{\beta}$ бўлинмаси деб, $\beta x = \alpha$ тенгламани қаноатлантирувчи x сонга айтилади.*

Таърифга кўра $x = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha : \beta$ бўлади.

Ҳақиқий сонлар тўпламида Архимед аксиомаси бажарилади: *ҳар қандай мусбат α ва β ҳақиқий сонлар учун шундай n натурал сон мавжудки, $n\alpha > \beta$ бўлади.*

Исботи. $A < \alpha$ ва $\beta < B$ шартларини қаноатлантирадиган иккита мусбат A ва B рационал сонларни оламиз. Рационал сонлар тўпламида шундай n натурал сон мавжудки, $nA > B$ бўлади. Танланишига кўра, $\alpha > A$ дан $n\alpha > nA$ (монотонлик шартига кўра) ни ёза оламиз. Бундан $n\alpha >$

$> nA > B > \beta$ бўлиб, $n\alpha > \beta$ экани келиб чиқади. Шундай қилиб, бу аксиоманинг ўринли эканлиги исботланди.

2-§. ҲАҚИҚИЙ СОННИНГ БУТУН ВА КАСР ҚИСМИ. ҲАҚИҚИЙ СОННИНГ МОДУЛИ

$\alpha = p_0, p_1p_2p_3 \ldots p_n \ldots$ ҳақиқий сон берилган бўлсин. Бу α ҳақиқий соннинг бутун қисми вергулдан чап томонда жойлашган сонлар, каср қисми вергулдан ўнг томонда жойлашган сонлар, яъни

$$\alpha = p_0, p_1p_2p_3 \ldots p_n \ldots = p_0 + $$
$$+ 0, p_1p_2p_3 \ldots p_n \ldots .$$

38-таъриф. *α ҳақиқий соннинг бутун қисми деб, α сондан катта бўлмаган энг катта бутун сонга айтилади ва $[\alpha]$ кўринишида белгиланади.*

Мисол. 3,7; 5,128; 8; —5,8 сонларининг бутун қисмини топинг.

Ечиш. Таърифга кўра $[\alpha] \leqslant \alpha$ эканидан $[3{,}7] = 3$, $[5{,}128] = 5$, $[8] = 8$, $[-5{,}8] = -6$ ни ҳосил қиламиз.

Ҳақиқий соннинг бутун қисми ўз навбатида $[\alpha] \leqslant \alpha < [\alpha] + 1$ муносабатга бўйсунади. Чунки таърифга кўра $[5{,}128] \leqslant 5{,}128$ бўлиб, бундан $5 \leqslant 5{,}128 < 6$ муносабат ўринли, у ҳолда $[5{,}128] \leqslant 5{,}128 < [5{,}128] + 1$ ни ёза оламиз.

Юқорида келтирилган маълумотлардан қуйидаги хоссалар келиб чиқади:

1) *Агар $a, b \in \boldsymbol{Z}$ бўлса, у ҳолда $[a + b] = [a] + [b]$ бўлади;*

2) *Агар $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ бўлса, у ҳолда $[\alpha + \beta] \geqslant [\alpha] + [\beta]$ бўлади.*

Мисол. $\alpha = 3{,}789$ ва $\beta = 4{,}842$ сонлари йиғиндисининг бутун қисмини уларнинг ҳар бирининг бутун қисмлари йиғиндиси орқали ифодаланг.

Ечиш. $\alpha + \beta = 3{,}789 + 4{,}842 = 8{,}631$, бундан $[8{,}631] = 8$;

$$[\alpha] = [3{,}789] = 3; \quad [\beta] = [4{,}842] = 4;$$

Демак, $[\alpha] + [\beta] = 3 + 4 = 7$ ва $[\alpha + \beta] = [8{,}631] = 8$ бўлиб, бундан $[\alpha + \beta] \geqslant [\alpha] + [\beta]$ бўлади.

39-таъриф. *α ҳақиқий соннинг $\{\alpha\}$ каср қисми деб бирдан кичик ва манфий бўлмаган $0 \leqslant \{\alpha\} < 1$ сонга айтилади.*

Соннинг бутун қисмида кўрилган $[\alpha] \leqslant \alpha < [\alpha] + 1$ қўш тенгсизликдан $0 \leqslant \alpha - [\alpha] < 1$ муносабатни ёза оламиз. Бунга ва $0 \leqslant \{\alpha\} < 1$ ға асосан $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ бўлишига ишонч ҳосил қилиш мумкин, яъни $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$ бўлади.

Мисол. 3,7; 5; $-1{,}7$ сонларининг каср қисмини топинг.

Ечиш. $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ га асосан:

$$\{3{,}7\} = 3{,}7 - [3{,}7] = 3{,}7 - 3 = 0{,}7;\ \{5\} = 5 - [5] = 5 - 5 = 0;\ \{-1{,}7\} = -1{,}7 - [-1{,}7] = -1{,}7 - (-2) = -1{,}7 + 2 = 0{,}3.$$

Математикада ҳақиқий соннинг бутун ва каср қисмлари билан бир қаторда унинг абсолют қиймати (модули) тушунчаси ҳам муҳим ўрин тутади.

40-таъриф. *α ва $-\alpha$ ҳақиқий сонларнинг манфий бўлмаган қиймати α соннинг абсолют қиймати (модули) дейилади ва $|\alpha|$ каби белгиланади.* Бу таърифга кўра

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{агар } \alpha \geqslant 0 \text{ бўлса,} \\ -\alpha, & \text{агар } \alpha < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Мисол. 3,125; $-6{,}45$ сонларининг модулини топинг.

Ечиш. Таърифга кўра $|3{,}125| = 3{,}125$; $|-6{,}45| = -(-6{,}45) = 6{,}45$.

Соннинг модули тушунчаси қуйидаги муносабатларни қаноатлантиради:

1°. $\forall -a,\ a \in \boldsymbol{R}: |a| = |-a|,\ |a| \geqslant 0,\ |a| \geqslant a.$

2°. $\forall x,\ b \in \boldsymbol{R}: |x| = b \wedge b > 0 \Leftrightarrow x = \pm b.$

3°. $\forall x,\ b \in \boldsymbol{R}: |x| = |b| \Leftrightarrow x = \pm b.$

4°. $\forall x,\ b \in \boldsymbol{R}: |x| < b \wedge b > 0 \Leftrightarrow -b < x < b \wedge b > 0.$

5°. $\forall x,\ b \in \boldsymbol{R}: |x| > b \wedge b > 0 \Leftrightarrow (x > b \wedge b > 0) \vee \vee (x < -b \wedge b > 0).$

6°. $\forall a,\ b \in \boldsymbol{R}: |a| - |b| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|.$

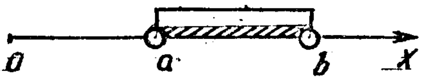
7°. $\forall a,\ b \in \boldsymbol{R}: |ab| = |a||b|;\ \left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a}{b}\right| \wedge b \neq 0;$ $|a|^2 = a^2.$

8°. $\forall a,\ b \in \boldsymbol{R}: |a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab > 0.$

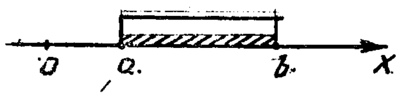
Масалан, x нинг $|2x + 11| = |x + 6| + |x + 5|$ тенгламани қаноатлантирадиган қийматлари тўпламини излаш $(x + 6)(x + 5) > 0$ тенгсизликнинг ечимлари тўпламини излаш билан тенг кучли эканлиги бевосита 8° дан келиб чиқади.

3-§. СОНЛИ ОРАЛИҚЛАР ВА ТЎҒРИ ЧИЗИҚДА КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ

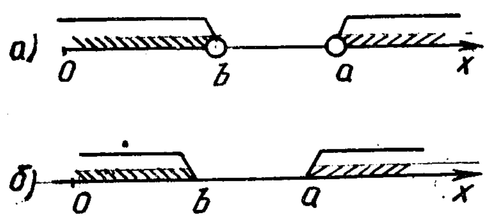
Мактаб математикасидан маълумки, Ox сон ўқидаги барча нуқталар билан R сонли тўплам элементлари орасида ҳар доим ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин. Бунда ҳар бир $x \in R$ га Ox ўқида $A(x)$ нуқта мос қўйилган бўлади.



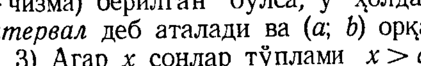
3- расм.



4- расм.



5- расм.



6- расм.

41- таъриф.

1) *Ҳақиқий сонлар тўпламида* $[a;\ b]$ *сегмент деб, a ва b сонлар орасидаги* $a \leqslant x \leqslant b$ *тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x ҳақиқий сонлар тўпламига айтилади.*

Бу тушунчанинг геометрик тасвири 3- чизмада келтирилган.

2) Агар x сонлар тўплами $a < x < b$ тенгсизлик билан (4- чизма) берилган бўлса, у ҳолда бундай сонли тўплам *интервал* деб аталади ва $(a;\ b)$ орқали белгиланади.

3) Агар x сонлар тўплами $x > a$ ёки $x < b$ тенгсизликлар, $x \geqslant a$ ёки $x \leqslant b$ тенгсизликлар орқали берилган бўлса, у ҳолда улар мос равишда $(a;\ +\infty)$ ёки $(-\infty;\ b)$ интерваллар, $[a;\ +\infty)$ ёки $(-\infty;\ b]$ ярим ёпиқ ва ярим очиқ интерваллар орқали белгиланади (5- *а*, *б* чизма).

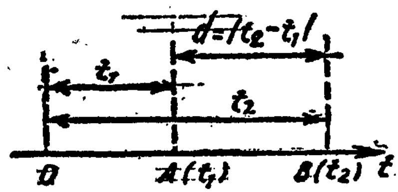
4) Барча ҳақиқий сонлар тўплами $R = (-\infty;\ +\infty)$ орқали белгиланади.

Ҳақиқий сонлар тўплами узлуксизлик хоссасига эга: агар ҳақиқий сонларнинг қуйидаги иккита

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n\ \ldots \text{ ва } \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n,\ \ldots \qquad (1)$$

кетма-кетлиги ичма-ич қўйилган ушбу

$$[\alpha_1;\ \beta_1],\ [\alpha_2;\ \beta_2],\ \ldots,\ [\alpha_n;\ \beta_n], \qquad (2)$$



7-расм.

сегментлар кетма-кетлигини аниқласа, у ҳолда ихтиёрий $n \in N$ учун (1) сегментларнинг ҳаммасига тегишли биргина ҳақиқий $\alpha_n \leqslant \xi \leqslant \beta_n$ сон мавжуд бўлади.

Ot сон ўқи ўзининг саноқ боши, ўлчов бирлиги ва йўналиши билан берилган бўлсин (6-чизма). Сон ўқидэ $t_1 > 0$ координатали $A(t_1)$ ва $t_2 > 0$ координатали $B(t_2)$ нуқталарни олайлик. Бунда $A(t_1)$ нуқта O нуқтадан t_1 масофа ўнгда, B нуқта эса t_2 масофа чапда жойлашган бўлади. Энди A ва B нуқталар орасидаги d масофани ҳисоблаймиз:

$$d = \rho(A, B) = AB = AO + OB = |t_1 - 0| + |0 - t_2| =$$
$$= |t_1 - t_2| = |t_2 - t_1|,$$

яъни

$$d = \rho(A, B) = |t_2 - t_1|.$$

61-теорема. *Координаталар ўқидаги ихтиёрий $A(t_1)$ ва $B(t_2)$ нуқталар орасидаги масофа шу нуқталар координаталари айирмасининг модулига тенг, яъни*

$$d = AB = |t_1 - t_2| = |t_2 - t_1|.$$

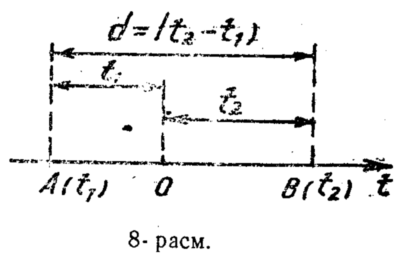
Исботи. 1. Агар берилган A ва B нуқталар устма-уст тушса, у ҳолда $A(t_1) = B(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$ бўлиб, $d = \rho(A, B) = 0$ бўлади.

Берилган A ва B нуқталар устма-уст тушмасин ва B нуқта A нуқтадан ўнгда жойлашган бўлсин:

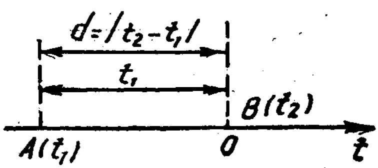
а) A ва B нуқталар O нуқтадан ўнг томонда жойлашган бўлсин (7-чизма), у ҳолда $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, $t_2 > t_1$ бўлиб, $AB = OB - OA = d = t_2 - t_1 = |t_2 - t_1|$; $t_2 - t_1 \geqslant 0$ бўлади. Агар $t_1 = 0$ бўлса, A нуқта O билан устма-уст тушиб, бу ҳолда

$$d = AB = t_2 = |t_2 - 0| = |t_2 - t_1|$$

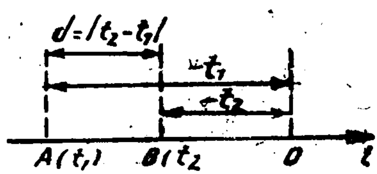
бўлади;



8-расм.



9- расм.



10- расм.

б) A ва B нуқталар O нуқтадан турли томонларда жойлашган бўлсин, яъни A нуқта O нуқтадан чапда, B нуқта ўнгда бўлсин дейлик (8- чизма). Бунда $d = AB = AO + OB$, яъни

$$d = t_2 + (-t_1) = t_2 - t_1 = |t_2 - t_1|;$$

в) A нуқта координата бошидан чапда жойлашган бўлиб, B нуқта O нуқта билан устма-уст тушсин дейлик (9- чизма), у ҳолда

$$d = -t_1 = |t_2 - t_1|.$$

г) A ва B нуқталар бир вақтда координаталар бошидан чап томонда жойлашган бўлса (10- чизма), у ҳолда

$$d = AB = (-t_1) - (-t_2) = t_2 - t_1 = |t_2 - t_1|.$$

Демак, координаталар ўқида ихтиёрий A ва B нуқталар орасидаги масофа $d = \rho(A; B) = AB = |t_2 - t_1|$ га тенг бўлар экан.

Мисол ва масалалар ечиш

1- мисол. $A(3)$ ва $B(-2)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.

Ечиш.

$$d = |3 - (-2)| = |3 + 2| = |5| = 5;$$

$$\text{ёки} \quad d = |-2 - 3| = |-5| = 5.$$

2- мисол. $A(-4)$ ва $B(-15)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.

Ечиш.

$$d = AB = |-15 - (-4)| = |-15 + 4| = |-11| = 11.$$

3- мисол. $|x| < 3$ тенгсизликни қаноатлантирувчи сонлар тўпламини топинг.

Ечиш.

$$|x| < 3 \overset{\partial f\, 9}{\Longleftrightarrow} -3 < x < 3 \Rightarrow x \in (-3;\ 3).$$

4-мисол. $|x-2| = 5$ тенгламани қаноатлантирадиган сонларни топинг.

Ечиш. 9-таърифга асосан: $x < 2$ бўлса, $-(x-2) = 5 \Leftrightarrow 2 - x = 5 \Leftrightarrow x = 3$; агар $x \geqslant 2$ бўлса, у ҳолда $x - 2 = 5 \Leftrightarrow x = 7$. Демак, бу сонлар $\{-3;\ 7\}$ бўлар экан. Агар геометрик нуқтаи назардан қарасак, координаталар ўқида жойлашган $A\,(2)$ нуқтадан 5 бирлик масофа нарида жойлашган нуқталарнинг координаталари мос равишда -3 ва 7 бўлар экан.

5-мисол. $|x+2| \leqslant 5$ тенгсизликни қаноатлантирадиган сонлар тўпламини топинг.

Ечиш. $|x+2| \leqslant 5 \overset{\partial f\, 9}{\Longleftrightarrow} -5 \leqslant x + 2 \leqslant 5 \Leftrightarrow -2 - 5 \leqslant x \leqslant 5 - 2 \Leftrightarrow -7 \leqslant x \leqslant 3 \Rightarrow x \in [-7;\ 3]$.

6-мисол. $|x-3| \geqslant 2$ тенгсизликни қаноатлантирадиган сонлар тўпламини топинг.

Ечиш. $|x-3| \geqslant 2 \overset{\partial f\, 9}{\Longleftrightarrow} (x - 3 \geqslant 2 \vee x - 3 \leqslant -2) \Leftrightarrow (x \geqslant 5 \vee x \leqslant 1) \Rightarrow x \in (-\infty;\ 1] \cup [5;\ +\infty)$.

VI боб. КОМПЛЕКС СОНЛАР

1-§. КОМПЛЕКС СОН ТУШУНЧАСИ ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

Математикада сонларни ўрганиш ўз навбатида $N \subset Z \subset Q \subset R$ кетма-кетликда (ўрта мактаб математикасида ўқувчиларнинг билиш имкониятларини ҳисобга олган ҳолда) амалга оширилиши сир эмас. Шунинг учун ҳам R ҳақиқий сонлар майдонида қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш, илдиз чиқариш ва логарифмлаш амалларининг ўринли бўлиши билан математиканинг ҳамма муаммолари ҳал бўлади деган фикрга келмаслик керак. Математикада $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + b^2 = 0$, $(x-a)^2 + b^2 = 0$ каби шундай тенгламалар мавжудки, бу тенгламалар R сонли тўпламда ечимга эга эмас. Математиканинг бу ички талаби R ҳақиқий сонлар тўпламини шундай тенгламалар ечимга эга бўладиган сонли тўпламгача кенгайтиришни тақозо қилади.

Бир сонли тўпламни иккинчи сонли тўпламгача кенгайтириш масаласи ўзига хос қатъийликка эга бўлиши талаб қилинади.

7—2823

Бирор B сонли тўплам A тўпламнинг энг кичик (минимал) кенгайтмаси бўлиши учун қуйидаги шартларнинг бажарилиши талаб қилинади.

1. Кенгаётган тўплам кенгайган тўпламнинг қисм тўплами бўлиши лозим.

2. Кенгаётган тўпламда бажариладиган амал ва муносабатлар кенгайган тўпламда бир қийматли бажарилиши лозим.

3. Кенгайган тўпламдаги амал ва муносабатлар кенгаётган тўпламда чекланмаган тартибда бажарилиши шарт эмас.

4. Кенгаётган ва кенгайган тўпламлар орасида оралиқ тўплам бўлмаслиги лозим.

Ана шу юқорида келтирилган тўртта шарт юзасидан R нинг C комплекс сонлар тўпламигача кенгайишини ўринли деб қараш мумкин. Математикада $\sqrt{-1} = i \Rightarrow i^2 = -1$ белгилаш киритилади ва *мавҳум бирлик* деб аталади. Агар барча ҳақиқий сонлар билан i ни биргаликда қарасак, у ҳолда янги сонли тўпламнинг юзага келишини кўриш мумкин.

42-таъриф. $z = a + bi = (a, b)$; $a, b \in R$ *кўринишидаги сонлар тўплами комплекс сонлар тўплами дейилади, бу ерда* $i^2 = -1$.

$z = a + bi = (a, b)$ комплекс сонда a комплекс соннинг *ҳақиқий қисми*, bi унинг *мавҳум қисми*, b эса *мавҳум қисмининг коэффициенти* дейилади.

43-таъриф. *Агар берилган* $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$ *комплекс сонлар учун* $a = c \wedge b = d$ *бўлса, у ҳолда* $z_1 = z_2$ *дейилади.*

44-таъриф. *Берилган* $z_1 = (a, b)$ *ва* $z_2 = (c, d)$ *комплекс сонларнинг йиғиндиси деб* $z = (a + c, b + d)$ *комплекс сонга айтилади.*

Мисол. $z_1 = (2, 7)$ ва $z_2 = (3, -4)$ нинг йиғиндисини топинг.

Ечиш. $z = z_1 + z_2 = (2, 7) + (3, -4) = (2 + 3, 7 - 4) = (5, 3)$.

$z = (0, 0)$ *ноль комплекс* сон дейилади.

45-таъриф. $z = (a, b)$ *комплекс сонга қарама-қарши комплекс сон деб* $-z = (-a, -b)$ *сонга айтилади.*

62-теорема. $\forall z_1, z_2 \in C : z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

Исботи. Берилган $z_1 = (a, b)$ ва $z_2 = (c, d)$ учун

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) =$$
$$= (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b) = z_2 + z_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

Шу билан теорема исботланди.

63-теорема. $\forall\ z_1, z_2, z_3 \in C: (z_1+z_2)+z_3 = z_1 + (z_2+z_3)$.

Исботи. $z_1 = a+bi$; $z_2 = c+di$; $z_3 = m+ni$ берилган, теорема шартига кўра $(z_1+z_2)+z_3 = [(a+bi)+(c+di)]+m+ni = [(a+c)+(b+d)i]+m+ni = [(a+c)+m]+[(b+d)+n]i = [a+(c+m)]+[b+(d+n)]i = (a+bi)+[(c+m)+(d+n)i] = z_1+(z_2+z_3)$. Демак, қўшиш амали учун гуруҳлаш хоссаси ўринли экан.

Ушбу $z+0=z$; $z+(-z)=0$ хоссалар ҳам юқоридаги хоссаларга ўхшаш исбот қилинади.

Бу ҳосил қилинган натижалардан $z_1 - z_2 = (a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)$ экани ҳам келиб чиқади.

46-таъриф. $z_1 = (a, b)$ ва $z_2 = (c, d)$ *комплекс сонларнинг кўпайтмаси* $z_1 \cdot z_2$ деб $(ac-bd,\ ad+bc)$ *комплекс сонга айтилади ва* $z = z_1 \cdot z_2 = (a, b)\cdot(c, d) = (ac-bd,\ ad+bc)$ *кўринишда ёзилади.*

Мисол. $z_1 = (2, 5)$; $z_2 = (3, 1)$ берилган. $z = z_1 \cdot z_2$ ни топинг.

Ечиш. $z = z_1 \cdot z_2 = (2, 5)\cdot(3, 1) = (2\cdot3 - 5\cdot1,\ 2\cdot1 + 5\cdot3) = (1, 17)$.

Алгебраик шаклда берилган $z_1 = a+bi$ ва $z_2 = c+di$ комплекс сонларнинг кўпайтмасини $z = z_1\cdot z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$ кўринишда ёзиш мумкин. Худди шунга ўхшаш, уларнинг алгебраик йиғиндисини бундай ёзиш мумкин:

$$z_1 \pm z_2 = (a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b + d)i.$$

64-теорема. $\forall\ z_1, z_2 \in C: z_1\cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Исботи. $z_1 = (a, b)$ ва $z_2 = (c, d)$ комплекс сонларнинг кўпайтмаси: $z = z_1\cdot z_2 = (a, b)\cdot(c, d) = (ac-bd,\ ad+bc) = (ca-db,\ da+cb) = (c, d)\cdot(a, b) = z_2\cdot z_1$.

Демак, кўпайтириш амали учун ўрин алмаштириш хоссаси ўринли.

65-теорема. $\forall\ z_1, z_2, z_3 \in C: (z_1\cdot z_2)\cdot z_3 = z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$.

Исботи. Бу теоремани исбот қилишда 63-теоремани ҳамда $i^3 = i^2\cdot i = -1\cdot i = -i$ эканлигини эътиборга оламиз, у ҳолда

$$\begin{aligned}(z_1\cdot z_2)\cdot z_3 &= [(a, b)\cdot(c, d)](m, n) = (ac-bd,\ ad+bc)(m, n) = \\ &= [(ac-bd)m-(ad+bc)n,\ (ac-bd)n+(ad+bc)m] = \\ &= [a(cm-dn)-b(cn+dm),\ b(cm-dn)+a(cn+dm)] = \\ &= (a, b)(cm-dn,\ cn+dm) = (a, b)[(c, d)(m, n)] = \\ &= z_1\cdot(z_2\cdot z_3).\end{aligned}$$

Демак, кўпайтириш амали учун гуруҳлаш хоссаси ўринли.

Кўпайтириш амали учун $z \cdot 1 = z$, $z \cdot 0 = 0$ хоссалар ҳам ўринли.

46-таъриф. а) $\bar{z} = (a, -b) = a - bi$ *комплекс сон берилган* $z = (a, b) = a + bi$ *комплекс сонга қўшма комплекс сон дейилади;*

б) $\sqrt{a^2+b^2}$ *ҳақиқий сон* $z = a + bi$ *комплекс соннинг модули дейилади ва* $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ *орқали белгиланади.*

46-таърифга асосан $z \cdot \bar{z} = (a, b) \cdot (a, -b) = (a^2 + b^2, ab - - ab) = (a^2 + b^2, 0)$, демак, $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

Бундан $|z|^2 = a^2 + b^2$ бўлиб, бундан $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ экани келиб чиқади.

Бу ҳосил қилинган натижага таянган ҳолда $|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)(\bar{z}_1\bar{z}_2) = (z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2) = |z_1|^2|z_2|^2$; $|z_1z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$ ни ҳосил қиламиз, бундан

$$|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Демак, *комплекс сонлар кўпайтмасининг модули уларнинг модуллари кўпайтмасига тенг.*

Бу ҳосил қилинган натижадан $z_1 = a_1 + b_1i$ *ва* $z_2 = a_2 + + b_2i$ сонлар учун

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2$$

айниятни келтириб чиқариш мумкин.

47-таъриф. z *комплекс соннинг* z_1 *комплекс сонга бўлинмаси деб* $(c, d)(x, y) = (a, b)$, $(c, d) \neq 0$ *тенгламани қаноатлантирадиган* $z_2 = (x, y)$; $x\ y \in \mathbf{R}$ *комплекс сонга айтилади ва бундай белгиланади:*

$$z_2 = z : z_1 = (a, b) : (c, d).$$

Демак, $z = (a, b) = z_1 \cdot z_2 = (c, d) \cdot (x, y)$ га асосан $(a, b) = = (cx - dy, cy + dx)$ бўлади, бундан

$$\begin{cases} cx - dy = a, \\ cy + dx = b \end{cases} \text{ бўлиб, } x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}; \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

ҳосил бўлади. Бундан эса

$$z_2 = (x, y) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}; \quad \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$$

келиб чиқади.

Мисол. $(2+3i)(x+yi)=5-2i$ тенгламани қаноатлантирадиган $z=x+yi$ комплекс сонни топинг.

Ечиш.

$$(2+3i)(x+yi)=5-2i \Leftrightarrow (2x-3y)+(3x+2y)\,i=5-2i$$

$$\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 3x+2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-9y=15, \\ 6x+4y=-4 \end{cases} \Rightarrow 13y=-20;\ y=-\frac{20}{13}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 4x-6y=10, \\ 9x+6y=-6 \end{cases} \Rightarrow 13x=4;\ x=\frac{4}{13}.$$

Демак, $x+yi=\frac{4}{13}-\frac{20}{13}\,i.$

$z_1, z_2, \ldots, z_n$ комплекс сонларнинг кўпайтмасини топиш учун аввал $z_1\cdot z_2$ ни, сўнгра $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3$ ни ва ҳоказо $(z_1\cdot z_2\ \ldots\ z_{n-1})\cdot z_n$ кўпайтмани топамиз.

Агар $z_1=z_2=\ldots=z_n$ бўлса, у ҳолда $z_1\cdot z_2\ldots z_n= = z_1^n=z_n^n$ бўлади. Бундан $z^n=(a+bi)^n$ ҳосил бўлади. Буни ҳисоблашда асосан қисқа кўпайтириш формулаларига суянган ҳолда аввал $(a+bi)^2$ ни, сўнгра $(a+bi)^3=(a+ +bi)^2(a+bi)$ ни ва ҳоказо услуб билан ҳисоблашни

$$i^n=\begin{cases} 1, \text{ агар } n=4k & \text{бўлса,} \\ i, \text{ агар } n=4k+1 & \text{бўлса,} \\ -1, \text{ агар } n=4k+2 & \text{бўлса,} \\ -i, \text{ агар } n=4k+3 & \text{бўлса,} \end{cases}$$

муносабатга таянган ҳолда амалга оширилади.

1-мисол. $z=(2+3i)^2$ ни ҳисобланг.

Ечиш. $z=(2+3i)^2=4+12i+9i^2=4-9+12i= =-5+12i.$

2-мисол. $z=(3+2i)^3$ ни ҳисобланг.

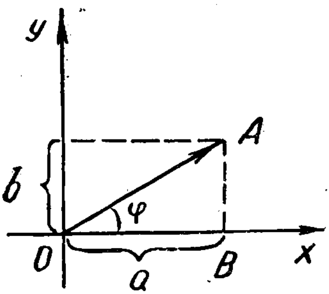
Ечиш. $z=(3+2i)^3=27+54i-36-8i=(5+ +12i)(3+2i)=-9+46i.$

3-мисол. $z^2=-5+12i$ тенгламани қаноатлантирувчи z комплекс сонни топинг.

Ечиш. z комплекс сонни $x+yi$ кўринишда излаймиз:

$$(x+yi)^2=-5+12i \Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=-5+12i,$$

бундан $\begin{cases} x^2-y^2=-5, \\ 2xy=12 \end{cases}$ бўлиб, $(x, y)=(2, 3)$; $(x, y)= =(-2, -3)$ ечимларни ҳосил қиламиз. Демак, изланган ечим $z_1=2+3i$; $z_2=-2-3i$.



11- расм.

2- §. КОМПЛЕКС СОННИНГ ТРИГОНОМЕТРИК ШАКЛИ

$z = a + bi$ комплекс сон берилган бўлсин. Уни xOy текисликда геометрик талқин этамиз (11- чизма). Бу ерда a ва b параметрларга боғлиқ равишда A нуқта I, II, III, IV чоракларда бўлишлиги $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ ни таъминлайди. Ҳосил бўлган AOB тўғри бурчакли учбурчакдан:

$$\rho = AO = \sqrt{a^2 + b^2},\ AB = \rho \sin \varphi,\ OB = \rho \cos \varphi,$$

$$AB : OB = \operatorname{tg} \varphi,\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

ёки $\arg z = \varphi$, у ҳолда $z = a + bi$ комплекс сонни

$$z = a + bi = \rho \cos \varphi + i \rho \sin \varphi = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

кўринишида ёзиш мумкин.

Ҳосил бўлган $z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ кўринишидаги комплекс сон *комплекс сонннг тригонометрик шакли* дейилади.

Мисол. Қуйидаги сонларни тригонометрик шаклда ифодаланг:

1) $z = \sqrt{3} + i$; 2) $z = -8$; 3) $z = 3i$; 4) $z = 2 - 2i$.

Ечиш. 1) $a = \sqrt{3}$; $b = 1$ бўлганлиги учун $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$. Демак, $z = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$.

2) $a = -8$, $b = 0$. Демак, $\rho = 8$, $\varphi = \operatorname{arctg} 0 = \pi$, яъни $z = -8 = 8 (\cos \pi + i \sin \pi)$.

3) $a = 0$; $b = 3$, у ҳолда $\rho = 3$ бўлиб, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ дан $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлади. Бундан $z = 3i = 3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$.

4) $a = 2$; $b = -2$ бўлиб, $\rho = 2\sqrt{2}$; $\varphi = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ эканидан $z = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)$.

$z_1 = a + bi$ ва $z_2 = c + di$ комплекс сонлар берилган бўлиб, уларнинг тригонометрик шакли мос равишда

$$z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ ва } z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

бўлса, у ҳолда $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \rho_1 \rho_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \rho_1\rho_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]$.

Агар $z_1, z_2, \ldots, z_n$ комплекс сонлар учун $z = \prod\limits_{i=1}^{n} z_i$ ни топиш талаб қилинса, у ҳолда юқоридаги мулоҳазадан бевосита қуйидаги натижани ёза оламиз:

$$z = \prod_{i=1}^{n} z_i = \prod_{i=1}^{n} \rho_i (\cos \sum_{i=1}^{n} \varphi_i + i \sin \sum_{i=1}^{n} \varphi_i).$$

Бу ерда қатнашаётган комплекс сонлар учун $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $z = z_i^n = \rho_i^n(\cos n\varphi_1 + i \sin n \varphi_1)$ бўлиб, бундан $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n \varphi$ натижани ёза оламиз. Ҳосил бўлган

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n \varphi + i \sin n \varphi$$

формула *Муавр формуласи* дейилади. Агар бу ерда n ни $\frac{1}{n}$ билан алмаштирсак ҳамда

$$\begin{cases} \cos n\varphi = \cos \alpha, \\ \sin n\varphi = \sin \alpha \end{cases} \text{ дан } n \varphi = \alpha + 2 k \pi, \ k \in Z$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k \pi}{n} \right), \ k \in Z$$

ни ҳосил қиламиз.

66-теорема. $\forall z_1, \ z_2 \in C$:

а) $|z_1 z_2| = |z_1| \, |z_2|$; б) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $z_2 \neq 0$;

в) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$; г) $|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;

д) $\big| |z_1| - |z_2| \big| \leqslant |z_1| + |z_2|$; е) $\big| |z_1| - |z_2| \big| \leqslant |z_1 - z_2|$.

Исботи. Юқоридаги 46-таърифга асосан а) ва б) шартлар ўринли экани ҳақида бевосита ижобий хулоса қилиш мумкин.

Энди в) шартнинг ўринли эканини кўрсатамиз:

$z_1+z_2=(\rho_1\cos\varphi_1+\rho_2\cos\varphi_2)+i(\rho_1\sin\varphi_1+\rho_2\sin\varphi_2)$ бўлиб, 46- таърифга асосан $|z_1+z_2|=(\rho_1^2\cos^2\varphi_1+2\rho_1\rho_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2+$ $+\rho_2^2\cos^2\varphi_2+\rho_1^2\sin^2\varphi_1+2\rho_1\rho_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2+\rho_2^2\sin^2\varphi_2)^{\frac{1}{2}}=$ $=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2+2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}$ бўлади. $\cos(\varphi_1-\varphi_2)\leqslant 1$ бўлгани учун:

$$|z_1+z_2|\leqslant\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2+2\rho_1\rho_2}=\rho_1+\rho_2=|z_1|+|z_2|.$$

Демак,

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \qquad (1)$$

ўринли бўлади. Агар (1) даги z_2 ни $-z_2$ билан алмаштирилса, $|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|-z_2|=|z_1|+|z_2|$ бўлиб, $|z_1-z_2|\leqslant$ $\leqslant|z_1|+|z_2|$ бўлади. Энди $|z_1|=|(z_1+z_2)-z_2|\leqslant|z_1+$ $+z_2|+|z_2|$ бўлади, бундан $|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1+z_2|$ экани келиб чиқади. Бу ҳосил қилинган натижалардан д) ва е) хоссалар бевосита келиб чиқади.

67- теорема. *$z=a+bi\neq 0$ комплекс сон ва $\forall n\in N$ учун шундай ҳар хил $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ комплекс сонлар мавжудки, $\alpha_i^n=z\wedge i=\overline{1, n}$ бўлади.*

Исботи. $n=1$ бўлганда теореманинг исботи равшан. Энди теоремани $n\geqslant 2$ учун исботлаймиз. Шартга асосан $z=$ $=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$; $z\neq 0$. $\alpha^n=z$ шартни қаноатлантирадиган α комплекс сонни $\alpha=\rho_1(\cos\psi+i\sin\psi)$ кўринишида излаймиз. Умуман $\alpha^n=z$ шартини қаноатлантирувчи сонлар жуда кўп, лекин уларнинг фақат n таси ҳар хил бўлиб, қолганлари такрорланиши мумкин. $z=\alpha^n=\rho_1^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$ формуладан фойдаланамиз. 46- таърифга асосан $|z|=\rho_1^n$, яъни $\rho=\rho_1^n$, бу ердан $\rho_1=\sqrt[n]{\rho}$, $\rho_1>0$, $\rho>0$. Сўнгра иккита комплекс соннинг тенглигидан $\cos n\psi=\cos\varphi\wedge\sin n\psi=\sin\varphi$ бўлиб, бундан $n\psi=\varphi+2k\pi$; $k\in Z$, $\psi=\frac{\varphi+2k\pi}{n}$, $k\in Z$, $n\in N$, $\alpha_k=$ $=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\cdot\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$ ҳосил бўлади. Бу ерда $k=0,1,\ \ldots, n-1$ қийматларни бериш натижасида n та ҳар хил илдизни топамиз, лекин $\alpha_{n+1}=\alpha_1$; $\alpha_n=\alpha_0\ \ldots,\ \alpha_{2n}=\alpha_0, \ldots$ устма-уст тушишини кўриш мумкин, яъни $\alpha_n=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi n}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi n}{n}\right)=$ $=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)=\alpha_0.$

Шу билан теорема исботланди.

1-мисол. $z=\sqrt{3}+i$ соннинг учинчи даражали илдизини топинг.

Ечиш. $\rho=\sqrt{a^2+b^2}=2;$ $\varphi=\frac{\pi}{6}$ бўлгани учун

$$\alpha_k=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{3}\right),$$

бу ерда $k=0,1,2\ldots$ қийматларни бериб, α_0, α_1, α_2 илдизларни топамиз: $\alpha_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right)$; $\alpha_1=$ $=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{18}+i\sin\frac{13\pi}{18}\right)$; $\alpha_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{18}+i\sin\frac{25\pi}{18}\right)$.

2-мисол. Бирнинг n-даражали илдизини топинг, яъни шундай α_k сонларни топингки, $\alpha_k^n=1$ бўлсин.

Ечиш. Бу ерда $\rho=1$ ва $\varphi=0$, у ҳолда $\alpha_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+$ $+i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $k=0,1,\ldots,n-1$.

Агар $n=2m$ бўлса, бу илдизларнинг ичида фақат иккитаси ҳақиқий илдиз бўлади: $\alpha_0=1$; $\alpha_m=-1$.

$n=2m+1$ бўлса, у ҳолда фақат битта $\alpha_0=1$ ҳақиқий илдиз бўлади.

Шу билан бирга қуйидаги хоссаларнинг ўринли бўлишини ҳам кўрсатиш мумкин:

$|\alpha_k|=1$; $\alpha_k\cdot\alpha_m=\alpha_{k+m}$; $\alpha_k:\alpha_m=\alpha_{k-m}$; $\alpha_k^m=\alpha_{km}$, $m\in Z$.

$z_1\cdot z_2$ нинг юқорида келтирилган тригонометрик шаклига асосан

$$\alpha_k\cdot\alpha_m=\cos\left(\frac{2\pi k}{n}+\frac{2\pi m}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}+\frac{2\pi m}{n}\right)=\alpha_{k+m},$$

$$\alpha_k^m=\cos\left(m\cdot\frac{2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(m\cdot\frac{2\pi k}{n}\right)=\alpha_{km}.$$

Қолган хоссаларни ҳам шу каби исботлаш мумкин. Демак, илдизлар $\alpha_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $k=0,1,2,\ldots,n-1$ бўлади.

3-§. $z=a+bi$ КОМПЛЕКС СОН УСТИДА БОШҚА АРИФМЕТИКАЛАР

Юқорида $z=a+bi$ кўринишидаги сонлар устида қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш ва даражага кўтариш амалларини ва уларнинг хоссаларини ўргандик. Ҳар бир сонли тўпламда айириш ва бўлиш амалларини қай даражада бажарилишини ўрганиш ҳар доим ҳам шу фан вакилларини қизиқтириб келганлиги маълум. Шунинг учун $z = a + bi$ кўринишидаги комплекс сонларга ўхшаш комплекс сонлар мавжудлиги ва улар устида бўлиш амали ҳар доим ҳам бажарилиши мумкинлигини ўрганиш ўзига хос аҳамиятга эгадир. Биз $z = a + bi$ кўринишидаги сонлар устида қўшиш ва кўпайтириш амалларининг бажарилишини кўрдик:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i; \tag{1}$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \tag{2}$$

Энди шундай масалани ўртага қўяйлик: (1) шартни сақлаб қолиб, (2) кўпайтириш қоидасини янги қоида билан алмаштириш натижасида янги сонли системага ўтиш мумкинми? Бунинг учун $i^2 = -1$ десак, яна $z = a + bi$ кўринишидаги сонли системага тушиб қоламиз. Шунинг учун бу янги изланаётган сонли системада $i^2 = i \cdot i$. Энди $i^2 = p + qi$ кўринишида бўлсин дейлик, у ҳолда

$$(a + bi)(c + di) = a(c + di) + bi(c + di) = ac + adi + bci + \\ + bdi^2 = (ac + bdp) + (ad + bc + bqd)i \tag{3}$$

ҳосил бўлади. Бу янги системада қуйидаги талабларнинг бажарилишини таъминлайлик:

1. $a (a = a + 0i)$ ҳақиқий сонни $z = b + ci$ комплекс сонга кўпайтирилганда натижа комплекс системадаги каби бўлсин, яъни

$$(a + 0i)(b + ci) = ab + aci,$$
$$(b + ci)(a + 0i) = ab + aci.$$

Агар $c = 0$ бўлса, у ҳолда $(b + 0i)(a + 0i) = ab + 0i$ ҳамда $(a + 0i) + (b + 0i) = (a + b) + 0i$.

2. z_1 ва z_2 ҳамда $a, b \in R$ учун $(az_1) \cdot (bz_2) = (ab)(z_1 z_2)$ шарт бажарилсин.

3. z_1, z_2, z_3 комплекс сонлар учун: $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ ёки $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ шартлар бажарилсин.

Юқоридаги (3) шартдан бевосита $z_1 z_2 = z_2 z_1$ ва $(z_1 \cdot z_2) z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ муносабатларнинг ўринли экани кўриниб турибди. Келишилган $i^2 = p + qi$ шартга асосан

$$i^2 - qi = p \Rightarrow \left(i - \frac{q}{2}\right)^2 = p + \frac{q^2}{4}$$

ни ёза оламиз. Бунда асосан ушбу учта ҳолни қараб чиқайлик.

I. $p+\frac{q^2}{4}=-k^2$ — манфий сон бўлсин, дейлик, у ҳолда $\left(-\frac{q}{2k}+\frac{1}{k}i\right)^2=-1$ бўлиб, $-\frac{q}{2k}+\frac{1}{k}i=I$ деб белгиласак, $i=\frac{q}{2}+kI$ ва $I^2=-1$ экани келиб чиқади. Бундан $a+bi=\left(a+\frac{b}{2}q\right)+bkI$ кўринишидаги комплекс сон ҳосил бўлиб, бу $z=a+bi$ кўринишдаги сонли система билан устма-уст тушади.

II. $p+\frac{q^2}{4}=k^2$ $(k\neq 0)$ бўлса, у ҳолда $\left(-\frac{q}{2k}+\frac{1}{k}i\right)^2=$ $=1$ ҳосил бўлади, $\left(-\frac{q}{2k}+\frac{1}{k}i\right)=E$ деб белгиласак, $E^2=$ $=1$ бўлиб, бундан $z=a'+b'E$ кўринишидаги сонлар ҳосил бўлади. Бу сонлар устида кўпайтириш амали

$$(a'+b'E)(c'+d'E)=(a'c'+b'd')+(a'd'+b'c')E$$

кўринишда бажарилади.

Одатда бундай сонларни иккилама (икки юзламачи) сонлар деб аталади.

III. $p+\frac{q^2}{4}=0$ бўлса, у ҳолда $\left(i-\frac{q}{2}\right)^2=0$; $i-\frac{q}{2}=$ $=L$ десак, $i=\frac{q}{2}+L$, $L^2=0$ бўлиб, $z=\bar{a}+\bar{b}L$ кўринишидаги *дуал сонлар* ҳосил бўлади. Агар улар устида кўпайтириш амалини бажарсак, у ҳолда

$$(\bar{a}+\bar{b}L)(\bar{c}+\bar{d}L)=\bar{a}\bar{c}+(\bar{a}\bar{d}+\bar{b}\bar{c})L$$

кўринишидаги сон ҳосил бўлади.

Масалан, $(1+E)x=1+0\cdot E$ тенгламани ечишни талаб қилинган бўлсин. Бунда $1+E$ соннинг қўшмаси $1-E$ сон эканини эътиборга олсак, у ҳолда $(1-E^2)\cdot x=1-E$ бўлиб, $0\cdot x=1-E$ ҳосил бўлади.

Худди шунга ўхшаш, $x=a+bL$ бўлса, бундан $x\cdot L=$ $=aL\neq 1$ эканини кўриш мумкин. Шунинг учун ҳосил қилинган иккилама ва дуал сонлар устида бўлиш амалини ҳамма вақт ҳам бажариш мумкин бўлавермас экан. Демак, биз учун энг қулай тўрт арифметик амал билан бирга даражага кўтариш, илдиз чиқариш ва логарифмлаш амалларини бажариш мумкин бўлган сонли система $z=a+bi$; $i^2=1$ кўринишидаги сонлар системаси экан.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

1. Ҳисобланг: а) i^{100}; б) i^{30}; в) $-i^5-2i^4+i+2$; г) $(3-2i)^2-(1+2i)^3+(1+i)(2+3i)$;
д) $(1+i)^5$; е) $\frac{6+7i}{2i}$, ж) $\frac{(7+2i)(1-i)}{-3+i}$.

2. x нинг қандай қийматларида: а) $2x-5ix-3-x^2i$ ифода ҳақиқий ёки соф мавҳум бўлади; б) $z_1=x^2-6+$ $+3xi^7$ ва $z_2=x_i^2-10i-x$ сонлар учун $z_1=z_2$ бўлади; в) $z_1=$ $=-4xi+3-11x$ ва $z_2=x^2i-21i+4x^2$ сонлар ўзаро қўшма сонлар бўлади; г) $x^2+i^5-i^6-x\cdot i^{11}=0$ бўлади.

3. Берилган сонларни қўшма комплекс сонлар кўпайтмаси $(z\bar{z})$ шаклида тасвирланг: а) $7+3i$; б) $12-7i$; в) $9a+7bi$.

4. Берилган x_1 ва x_2 илдизларига кўра ҳақиқий коэффициентли квадрат тенгламани тузинг:
а) $x_1=1+2i$; $x_2=1-2i$; б) $x_1=\frac{4-2i}{1-i}$; $x_2=\frac{4+2i}{1+i}$.

5. z комплекс сонни топинг:
а) $\sqrt{z}=2-3i$; б) $\sqrt[3]{z}=5+i$; в) $z^2=3+4i$; г) $z^2+z=$ $=-9+3i$.

6. Қуйидаги тенгламаларни комплекс сонлар соҳасида ечинг:
а) $x^2-x+1=0$; б) $x^2-8x+25=0$; в) $27x^3=8$;
г) $8x^3+1=0$; д) $16x^4=625$; е) $x^4+81=0$;
ж) $x^4+4x^2+3=0$.

7. Комплекс текисликда қуйидаги тенглик ва тенгсизликларни қаноатлантирадиган z нуқталар тўпламини топинг:
а) $|z|=1$; б) $|z|\leqslant 2$; в) $|z|>3$; г) $1<|z|<2$;
д) $|z-1|=2$; е) $|z+i|=3$; ж) $|z-2|>2$; з) $1<|z-2i|<2$.

8. Муавр формуласидан фойдаланиб, $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-$ $-3\cos\alpha$, $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ формулаларни исботланг.

9. Қуйидаги комплекс сонларнинг тригонометрик шаклини топинг:
а) $3+3i$; б) $-2+2\sqrt{3}i$; в) $5\sqrt{3}-5i$; г) $4i$; д) 6.

10. Комплекс соннинг алгебраик шаклини топинг:

а) $|z|=1$, $\arg z=\frac{\pi}{4}$; б) $|z|=2$, $\arg z=-\frac{\pi}{2}$;

в) $|z|=3$, $\arg z=\frac{5\pi}{6}$; г) $|z|=1$, $\arg z=-\frac{3\pi}{4}$.

VII БОБ. ФУНКЦИЯ

1- §. ФУНКЦИЯ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Математикада функция тушунчаси муҳим тушунчалардан биридир. Ўрта мактаб математикасидан маълумки, математикада, геометрик фигураларнинг тенглиги, ўхшашлиги, тўғри чизиқ ва текисликларнинг параллеллиги, перпендикулярлиги ва ҳоказо каби тушунчаларнинг ҳар бирини мушоҳада қилсак, улар бир нарса объектининг иккинчи нарса объекти билан бирор муносабатини ифодаловчи қонуният ёки қоиданинг берилиши асосида юзага келаётганини кўриш мумкин. Лекин қаралаётган муносабат ёки қоидаларнинг ҳар бири ўзининг аниқланаётган соҳасига қараб бажарадиган вазифаси турличадир. Масалан, текисликда учбурчаклар ва айланалар берилган бўлсин. Мавжуд барча учбурчакларни X тўпламга, айланаларни Y тўпламга киритайлик ва бу тўпламлар элементлари орасидаги боғланиш қонуниятини ҳар бир учбурчак учун унга ташқи чизилган айлана мавжуд деб аниқлайлик. У ҳолда ҳар бир учбурчакка битта ташқи чизилган айлана мос келади. Агар бу ерда эркин олинаётган учбурчакларни x, унга мос равишда топилаётган айланаларни y орқали белгиласак ҳамда улар орасидаги боғланиш қонуниятини f орқали ифодаласак, у ҳолда бу жараённи $y=f(x)$ ифода ёки формула орқали боғлаш мумкин. Математикада бундай боғланишни $y=f(x)$, ёки xfy, ёки $x\in X\xrightarrow{f}y\in Y$, ёки $(x, f(x))$ кўринишларда ифода қилинади.

48-таъриф. *Берилган X тўпламдан олинган ҳар бир x элементга Y тўпламнинг аниқ бир элементи мос қўйилган бўлса, у ҳолда бундай мослик функция дейилади ва қуйидагича белгиланади: $y=f(x)$, бу ерда x — эркли ўзгарувчи—аргумент, y эса мажбурий ўзгарувчи — функция деб аталади.*

Мисоллар. 1. $y=3^x$ да ҳар бир ҳақиқий x қиймат учун аниқ бир мусбат y қиймат мос қўйилган.

2. $f: x\in X\to x^2\in Y$ мослаштириш қонуниятини таҳлил қилсак, ҳар бир ҳақиқий x қиймат учун аниқ бир манфиймас ҳақиқий y қиймат мос қўйилган.

49- таъриф. а) *Берилган $f(x)$ функцияда x аргументнинг олиши мумкин бўлган қийматлари тўплами $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси дейилади ва $Dom\, f = D(f) = \{x / \exists y, (y = f(x))\}$ кўринишида белгиланади.*

б) *Берилган $f(x)$ функциянинг барча қийматлари тўплами унинг ўзгариш соҳаси дейилади ва $Im f = E(f) = \{y \mid \exists x (y = f(x))\}$ кўринишида белгиланади.*

Мисоллар. 1. $y = x^2$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(y) = \boldsymbol{R}$, ўзгариш соҳаси $E(y) = [0; +\infty)$.

2. $f(x) = \lg x$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f) = (0; +\infty)$, ўзгариш соҳаси $E(f) = (-\infty; +\infty) = \boldsymbol{R}$.

3. $f(x) = \sin x$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f) = \boldsymbol{R}$ ва ўзгариш соҳаси $E(f) = [-1; 1]$.

4. $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{1-x}$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f) = \varnothing$ бўш тўплам, ўзгариш соҳаси $E(f) = \varnothing$ дир.

5. $y = 5$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(y) = \boldsymbol{R}$ ва ўзгариш соҳаси $E(y) = \{5\}$.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар берилган бўлсин. Агар $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасидан олинган барча x лар учун $f(x) = g(x)$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $f = g$ дейилади, яъни: $\forall x \in D(f) : D(f) = D(g) \wedge f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

Маълумки, агар $f: X \to Y$ бўлса, у ҳолда f қонуният X тўплам элементларини Y тўпламга акслантирувчи қонуният бўлиб, у ўз навбатида сюръектив, инъектив ва биектив бўлиши мумкин.

Агар $X = D\; om\; f = D(f)$ ва $Im f = E(f) \subset Y$ ёки $f \subset X \times Y$ бўлса, у ҳолда f акслантириш *X тўплам элементларини Y тўпламга акслантиради*, агар $X = D(f)$ ва $E(f) = Y$ бўлса, у ҳолда f акслантириш *X тўплам элементларини Y тўплам устига акслантирилади* дейилади. Математикада $f \subseteq A \times B$ акслантиришни B^A кўринишида ҳам белгиланади.

Берилган f қоида асосида акслантиришдаги A тўпламнинг *образи* деб $f(A) = \{f(x) / x \in A\}$ га, *прообрази* деб $f^{-1}(A) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in A\}$ га айтилади.

50- таъриф. *$f: X \to Y$ акслантиришда:*

а) *Y тўпламнинг ҳар бир элементи ҳеч бўлмаганда X тўпламнинг бир элементининг образи бўлса, у ҳолда бундай акслантириш сюръектив ёки X ни Y нинг устига акслантириш дейилади, яъни*

$$f : (\forall y \in Y)(\exists x \in X)(y = f(x));$$

б) *Y тўпламнинг ҳар бир элементи X тўпламнинг биттадан ортиқ бўлмаган элементининг образи бўлса,* *бундай акслантириш X ни Y га инъектив акслантириш дейилади, яъни*

$$f:(\forall y\in Y)(\forall x_1, x_2\in X)(y=f(x_1)\wedge y=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2);$$

в) *Y тўпламнинг ҳар бир элементи X тўпламнинг аниқ бир элементининг образи бўлса, у ҳолда бундай акслантириш ўзаро бир қийматли ёки биектив акслантириш дейилади.*

Мисоллар: $f: x\in \boldsymbol{R}\to x^2\in \boldsymbol{R}_+$, бундан кўриниб турибдики, сюръекция бажарилаётибди.

2. $f=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2\mid y=x\}$ акслантириш инъективдир.

3. $f=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{R}_+\mid y=2^x\}$ кўринишидаги акслантириш биективдир.

Юқорида келтирилган мулоҳазалардан кўриниб турибдики, f функция кўпчилик ҳолларда ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган бўлиб, ўзининг геометрик мазмунига кўра

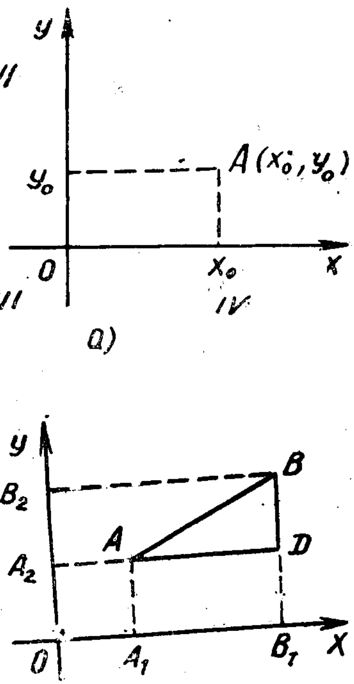
$$\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2\mid x\in \boldsymbol{R}\wedge y\in \boldsymbol{R}\wedge xfy\}=\Gamma_f$$

нуқталар тўпламини текшириш ёки аниқлашга мос келади. Юқорида $\boldsymbol{R}$ ҳақиқий сонлар тўплами билан Ox сон ўқидаги нуқталар тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин эканлиги ҳақида айтилган эди. Бундан келиб чиқиб, xOy тўғри бурчакли координаталар текислигидаги нуқталар тўплами билан $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд эканига ишонч ҳосил қилиш мумкин, xOy тўғри бурчакли Декарт координаталар текислигини шартли тарзда (12- *а* расм) тўртта чоракка (квадрантга) ажратилади. Декарт координаталар текислигида олинган ихтиёрий A нуқтани аввал Ox ўқига, сўнгра Oy ўқига проекциялаб ҳамда x_0 ва y_0 нуқталарни топиб, A нуқтанинг xOy текисликдаги координаталарини мос равишда (x_0, y_0) орқали ифодаланади ва уни $A(x_0\, y_0)$ кўринишида ёзилади. Шунинг учун: I чоракдаги $A(x_0, y_0)$ нуқтанинг x_0 ва y_0 координаталари ҳар доим мусбат бўлади: $x_0>0$, $y_0>0$. Шу каби II чорак учун $A(-x_0, y_0)$, III чорак учун $A(-x_0, -y_0)$, IV чорак учун $A(x_0, -y_0)$ бўлади.

Маълумки, Ox сон ўқида олинган $A(t_1)$ ва $B(t_2)$ нуқталар орасидаги $AB=d$ масофани $AB=|t_2-t_1|$ формула орқали ифодалаган эдик. Энди қуйида xOy Декарт координаталар системасида берилган икки нуқта орасидаги масофани аниқлаш формуласини ҳосил қиламиз.

68-теорема. *xOy текисликда берилган $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нуқталар орасидаги масофа*

$$d=AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$ бўлади.



12- расм.

Исботи. Берилган AB кесмани Ox ва Oy ўқларига проекциялаймиз: унинг Ox ўқидаги проекцияси $A_1B_1 = |x_2 - x_1|$, Oy ўқидаги проекцияси $A_2B_2 = |y_2 - y_1|$ бўлиб (12- *б* расм), ADB учбурчакдан Пифагор теоремасига асосан $d = AB = \sqrt{AD^2 + BD^2}$ бўлади. Бу ердан $AD = A_1B_1$ ва $BD = A_2B_2$ га асосан

$$d = AB = \sqrt{A_1B_1^2 + A_2B_2^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Мисоллар. 1. $A(2, -5)$ ва $B(-3, 7)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.

Ечиш. $d = \sqrt{(-3-2)^2 + (7+5)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{163} = 13$ узун. бирл.

2. $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2-4x+3}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси $x^2 - 4x + 3 \neq 0$ бўлган барча x лардан иборат бўлгани учун, бундан $x \neq 3$ ва $x \neq 1$ ни топамиз. Бундан $D(f) = (-\infty;\ 1) \cup (1;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$.

3. $f(x) = \sqrt{9-x} + \sqrt[4]{x-4} + \dfrac{1}{x-6}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Берилган функциядаги иррационалликнинг арифметиклик шарти ва каср махражининг нолдан фарқлилик шартига асосан:

$$\begin{cases} 9 - x \geqslant 0, \\ -4 + x \geqslant 0 \\ x - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 9, \\ x \geqslant 4, \\ x \neq 6 \end{cases}$$

ни ҳосил қиламиз, бундан $D(f) = [4;\ 6) \cup (6;\ 9]$.

4. $f(x) = \log_2(x-3) + \sin\sqrt{x-4} + \frac{1}{\sqrt{10-x}}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x-4 \geqslant 0, \\ 10-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ x \geqslant 4, \\ x<0 \end{cases}$$

га кўра $D(f) = [4;\ 10)$ бўлади.

5. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1}$ функциянинг ушбу қийматларини топинг: а) $f(2)$, б) $f(2a)$, в) $f(a+3)$, г) $f(-x)$, д) $f(|x|)$.

Ечиш. а) $f(2) = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2^2 - 1} = \frac{5}{3}$; б) $f(2a) = \frac{2 \cdot 2a + 1}{(2a)^2 - 1} = \frac{4a+1}{4a^2-1}$; в) $f(a+3) = \frac{2(a+3)+1}{(a+3)^2-1} = \frac{2a+7}{a^2+6a+8}$; г) $f(-x) = \frac{2 \cdot (-x) + 1}{(-x)^2 - 1} = \frac{1-2x}{x^2-1}$; д) $f(|x|) = \frac{2|x|+1}{|x^2|+1} = \frac{2|x|+1}{x^2-1}$.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

1. xOy текисликда қуйидаги нуқталарни ясанг: $A(2, 7)$; $B(3, 0)$; $C(1, -4)$; $D(0, 5)$; $E(-1, 2)$; $F(-4; -3)$ $G(-2, 0)$; $H(0, -3)$; $K\left(-3\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{2}\right)$; $L(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$.

2. Координаталари қуйидаги тенгламалар системасини қаноатлантирувчи нуқталарни ясанг:

а) $\begin{cases} 5x + 2y = -1, \\ 2x - y = 14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 7; \end{cases}$ с) $\begin{cases} y^2 - 4x = 0, \\ x^2 - 4y = 0. \end{cases}$

3. Абсциссалари -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ва 4 га тенг, ординаталари эса а) $y = 3x - 5$; б) $y = x^2$ тенглама билан аниқланувчи нуқталарни ясанг

4. (3, 2) нуқта берилган: унга абсциссалар ва ординаталар ўқларига нисбатан, координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган нуқталарни ясанг ва улар орасидаги масофани аниқланг.

5. Мунтазам олтибурчакнинг томони a га тенг. Координаталар боши олтибурчакнинг марказида, абсциссалар ўқи

унинг икки қарама-қарши учларидан ўтган деб, олтибурчак учларининг координаталарини топинг.

6. Учбурчакнинг учлари: $A(-2,1)$; $B(4, 8)$; $C(10,6)$. Бу учбурчакнинг ички бурчаклари орасида ўтмас бурчак борми?

7. Ox ўқда координаталар бошидан ва $A(9, -3)$ нуқтадан бир хил узоқликда турган нуқтани топинг.

8. Мунтазам олтибурчакнинг иккита қўшни учи $A(2, 0)$, $B(5, 3\sqrt{3})$ ни билган ҳолда унинг маркази $O(x, y)$ ни топинг.

9. $A(1,3)$ $B(4,7)$; $C(2, 8)$; $D(-1, 4)$ га кўра $ABCD$ параллелограмм эканлигини текширинг ва AB томонини асос деб, унинг баландлигини ҳисобланг.

10. Агар $\{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y \wedge xfy\} = \Gamma_f$ бўлса, у ҳолда $P_f = = \{(x, y) \in N^2 \mid y = x + 1\}$ ни топинг.

11. Қуйидаги функциялар қайси оралиқда айнан тенг бўлади:

а) $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 3$ ва $y = x - 2$; б) $y = 2^{\log_2(x+1)}$ ва $y = = x + 1$; в) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ ва $y = x - 2$;
г) $y = \sqrt{x - 1}\sqrt{2x + 1}$ ва $y = \sqrt{(x - 1)(2x + 1)}$.

12. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $y = \frac{\sqrt{x + 5}}{\lg(9 - x)}$; б) $y = \log_2 \frac{x - 2}{x + 2}$;

в) $y = \sqrt{x^2 + 4x - 5}\lg(x + 1)$;

г) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\lg(10x + 5)^2}$; д) $y = \log_4(2 - \sqrt[4]{x} - \frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}$;

е) $y = \sqrt[4]{\frac{1}{2}\log_4 16 - \log_8(x^2 - 4x + 3}$;

ж) $y = \sqrt{\log_{0,4} \frac{x - 1}{x + 5} \cdot \frac{1}{x^2 - 36}}$.

13. Функциянинг қийматлар соҳасини топинг:

а) $y = \sqrt{2 + x - x^2}$; б) $y = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$;

в) $y = \log_3(1 - 2\cos x)$; г) $y = \sin x + \sin|x|$;

д) $y = \frac{2x}{1 + x^2}$; е) $y = 2^{\cos x|}$;

ж) $y = \frac{2}{3 - \sin x}$; з) $y = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}}$;

и) $y = 2\sin 5x + 3\cos 5x$.

2- §. ФУНКЦИЯНИНГ БЕРИЛИШ УСУЛЛАРИ

Математикада функциянинг берилиш усулларидан жуда кўп учрайдиганлари аналитик, график ва жадвал ёрдамида берилиш усулларидир.

I. Аналитик (формула) усулда берилиши.

51-таъриф. *Агар функциянинг қийматини топиш учун аргументнинг устида бажарилиши лозим бўлган амалларни боғловчи ифода кўрсатилган бўлса, у ҳолда функция аналитик усул билан берилган дейилади.*

Мисоллар: 1) $y = x^2 - 5x + 1$, $D(x) = \mathbf{R}$, $E(y) =$

$$= \left[-\frac{21}{4};\ +\infty\right);$$

2) $y = x^2 - 5x + 1$, $x \in [1;\ 3]$;

3) $y = x^2 - 3x + 4$, $x \in (1;\ 5)$;

4) $y = \sqrt{1-x}$ функция аналитик усулда берилган, $D(y) = (-\infty;\ 1]$; $E(y) = [0;\ +\infty)$;

5) $y = \sqrt{\sin x - 3}$ функция аналитик усулда берилган, $D(y) = \varnothing$; $E(y) = \varnothing$;

6) а) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$ функция аналитик усулда берилган, $D(y) = \{1\}$ ва E ... $\{0\}$;

б) $y = \sqrt{\log_2 \sin x}$ фун... ...усулда берилган, $D(y) = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\right.$ ...

7) $y = \sqrt{1-x^2}$ функц...
$D(y) = [-1;\ 1]$ ва $E($...
13- расмда келтирилган...

8) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ф...
ция аналитик кўри...
берилган, $D(y) = (-$...
$E(y) = [1;\ +\infty)$.

Юқорида келт...
аналитик функция...
лан бир қаторда

функциялар ҳам борки, улар *қисман аналитик функциялар* деб аталади, чунончи

$$9)\ f(x) = \begin{cases} 1, \text{ агар } |x| > 1 \text{ бўлса}, \\ 0, \text{ агар } |x| = 1 \text{ бўлса}, \\ -1, \text{ агар } |x| < 1 \text{ бўлса}. \end{cases}$$

$$10)\ f(x) = \begin{cases} 1, \text{ агар } x \text{ — рационал сон бўлса}; \\ 0, \text{ агар } x \text{ — иррационал бўлса}. \end{cases}$$

Бу функция *Дирихле функцияси* дейилади.

$$11)\ f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, \text{ агар } x < 0 \text{ бўлса}, \\ 0, \text{ агар } x = 0 \text{ бўлса}, \\ 1, \text{ агар } x > 0 \text{ бўлса}, \end{cases}$$

бунда $D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = \{-1;\ 0;\ 1\}$;

12) $f(x) = [x]$ — «антье икс» — x нинг бутун қисми.

13) $f(x) = \{x\} = x - [x]$, x нинг каср қисми.

Аналитик усулда берилган функцияларнинг шундайлари ҳам учрайдики, унда қатнашаётган ўзгарувчилар бири иккинчисига нисбатан ошкора ифодаланмаган бўлади. Бундай функцияларни математикада *ошкормас функциялар деб аталади.*

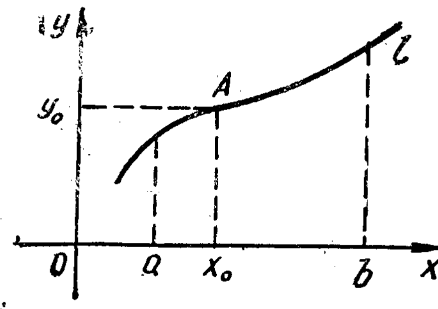
14) $xy - x + 1 = 0$; $x^2 + y^2 = 1$; $x^3y + 1 = 0$; $xy + xy^2 = 1$, $\sin x + \cos y = 1$; $\log_2 x + y \operatorname{tg} x = \sin x$ функциялар ошкормас функциялардир.

II. Функциянинг график усулда берилиши. xOy тўғри бурчакли Декарт координаталар текислигида $y = f(x)$ функцияни қарайлик. Эркли ўзгарувчи x га $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ қийматларни бериб, мос равишда $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ қийматларни ҳосил қиламиз. Сўнгра координаталар текислигида (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n), $\ldots$ координаталарга мос келувчи нуқталарни топамиз.

2-таъриф. *Берилган $y = f(x)$ функция учун коор- ...ар текислигида шундай нуқталар тўплами мав- ...ки, бу тўпламдан олинган ихтиёрий (x_0, y_0) нуқ- ... $f(x_0)$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда бу ...ми $y = f(x)$ нинг графиги дейилади.*

...(x) функциянинг графиги — бу текислик- ... тўпламики, ундаги нуқталарнинг ко- ...фақат $y = f(x)$ ни қаноатлантиради сақламайди.

xOy текисликда берилган l нуқталар тўпламининг координаталарини аниқлаш учун Oy ўқига параллел тўғри чизиқлар ўтказилса, ҳар бир тўғри чизиқ бу тўпламни биттадан ортиқ бўлмаган нуқтада кесиб ўтади (14- расм). Ox ўқида олинган $[a;\ b]$ кесмадан ихтиёрий x_0 нуқта олиниб, у орқали Oy ўқига параллел қилиб ўтказилган тўғри чизиқ l нуқталар тўпламини A нуқтада кесиб ўтади. Бу нуқтани Oy ўқига проекциялаcак, у ҳолда x_0 қийматга мос бўлган $y_0=f(x_0)$ қиймат аниқланади. Бундан $A(x_0,\ y_0)\in l$ нуқтанинг координаталари $(x_0,\ y_0)$ экани аниқланади.



14- расм.

Функция график усулда берилса, унинг ҳар доим ҳам аналитик ифодасини топиш мумкин бўлавермайди. Айрим ҳолларда олий математиканинг махсус услубларини татбиқ қилиш натижасида унинг аналитик ифодасини тақрибан топиш мумкин.

III. Функциянинг жадвал усули билан берилиши. Амалиётда жуда кўп ҳолларда бир ўзгарувчига турли қийматлар бериш асосида иккинчи ўзгарувчининг *қийматлар жадвали* тузилади. Ўрганилаётган ҳодисанинг текис содир бўлиши, сакраб содир бўлиши, узилиб-узилиб содир бўлиши каби масалаларни ҳал қилишда ҳамда айрим тиббий масалаларни ечишда, ер усти ва ички (геологик) ўзгаришларни, қазилма бойликларнинг ҳажмини топишда аввал жадвал усулига суянган ҳолда унинг аналитик усулига тақрибан ёки аниқ ўтишлар ҳосил қилинади. Амалиётда бу усул ўзининг тузилишига кўра анча қулайдир.

Мисоллар. 1.

—5	—3	0	3	8	5	15	40	1
—10	—6	0	6	16	10	30	80	2

Бу жадвалда устунларда жойлашган катаклардаги сонлар нисбати $\frac{-5}{-10}=\frac{3}{6}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}=\frac{40}{80}$ ни қарасак, уларнинг бир-бирига тенглиги $y = 2x$ муносабат мавжуд эканлигини кўрсатиб турибди.

2.

9	1	15	90	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30}$	9	12

Бу жадвалга синчиклаб қарасак, ҳар бир вертикал катаклардаги сонлар кўпайтмаси ўзгармас сон 3 эканлиги кўринади. Шу сабабли бундан $xy = 3$ ёки $y = \frac{3}{x}$ кўринишдаги аналитик ифода ҳосил бўлади.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

Функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f)$ ни топинг:

1. $f(x) = \sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$.
2. $f(x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2 - 2x}$.
3. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$.
4. $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$.
5. $f(x) = \sqrt[4]{\lg(3x - 27x^2)}$.
6. $f(x) = \log_2 \log_2 (x-3)$.
7. $f(x) = \lg \frac{x^2 - 9}{x^2 - 1}$.
8. $f(x) = \ln \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x-1}$.
9. $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2 - 9}{x+4}}$.
10. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

Функциянинг ўзгариш соҳаси $E(f)$ ни топинг:

11. $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$.
12. $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - x + 2}$.
13. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.
14. $f(x) = (-1)^x$.
15. $f(x) = \frac{x^2 - 5}{2x - 4}$.
16. $f(x) = \lg \frac{1}{x-1}$.
17. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$.
18. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$.
19. $f(x) = \sqrt{\lg (x+1)^2}$.
20. $f(x) = \lg(\sin x - 2)$.

3- §. ФУНКЦИЯНИНГ ЭНГ МУҲИМ ХОССАЛАРИ

Мактаб математикасида ўрганилган функциялар ўзининг тузилиши жиҳатидан содда кўринишдаги функциялар бўлиб, ҳар бир тур функциянинг характерини ўрганишнинг ўзига хос хусусияти мавжуддир. Шунинг учун ҳам мактаб математикасидами, олий математикадами, қайси босқичда ўрганилишидан қатъи назар, функциянинг умумий характерини ўрганишда қуйидаги тушунчалар муҳим аҳамиятга эга: аниқланиш ва ўзгариш соҳалари; чегараланганлиги, жуфт ва тоқлиги; даврийлиги; ўсиш ва камайиши; энг катта ва энг кичик қийматлари; узлуксизлиги; графиги. Юқоридаги мавзуларда функциянинг аниқланиш ва ўзгариш соҳаларини кўриб ўтдик, энди қолган хоссаларни ҳам кўриб чиқайлик.

I. Функциянинг чегараланганлиги. Қаралаётган функциянинг олиши мумкин бўлган қийматлари тўплами ўзининг тузилиши жиҳатидан ҳар хил бўлиши — қуйидан, юқоридан, қуйи ва юқоридан чегараланган бўлиши ёки чегараланган бўлмаслиги мумкин.

53-таъриф. *$f(x)$ функция аниқланган X сонли тўпламдан олинган ихтиёрий x учун шундай A сон мавжуд бўлсаки, $A \leqslant f(x)$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция қуйидан чегараланган дейилади.*

Қуйи чегараларнинг энг каттаси аниқ қуйи чегара дейилади.

Мисоллар. 1. $y = 2^x$ функциянинг қуйи чегарасини топинг.

Ечиш. $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = (0;\ +\infty)$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда исталган манфий ҳақиқий сон қуйи чегара бўлиши ва улар орасида энг каттаси ноль эканлиги равшан. Демак, берилган функция қуйидан чегараланган ва $A = 0$ аниқ қуйи чегарадир.

2. $f(x) = x^2 + 2$ функциянинг аниқ қуйи чегарасини топинг.

Ечиш. $D(f) = \boldsymbol{R}$ ва $E(f) = [2;\ +\infty)$ эканидан $f(x) \geqslant 2$. Демак, $A = 2$ бўлади.

3. $f(x) = \sin x - 3$ функциянинг қуйи чегарасини топинг.

Ечиш. $D(f) = \boldsymbol{R}$ ва $|\sin x| \leqslant 1$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда $E(f) = [-2;\ -4]$ эканлиги равшан. Бундан $A = -4$; $A = -10$; $A = -7$ сонлари қуйи чегара бўлиши билан бирга аниқ қуйи чегара $A = -4$ бўлади.

54-таъриф. *Берилган $f(x)$ функция аниқланган X сонли тўпламдан олинган ихтиёрий x учун шундай B сон мав-*

жуд бўлсаки, $f(x) \leqslant B$ бўлса; у ҳолда $f(x)$ функция юқоридан чегараланган дейилади.

Юқори чегараларнинг энг кичиги аниқ юқори чегара дейилади.

Мисоллар. 1. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ функциянинг аниқ юқори чегарасини топинг.

Ечиш. $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f)=[-1;\ 1]$, қийматлар соҳаси $E(f)=[0;\ 1]$. Демак, $B \geqslant 1$ шартни қаноатлантирувчи барча B лар унинг юқори чегараси, $B=1$ эса аниқ юқори чегарасидир.

2. $f(x)=-x^2-4x+1$ функциянинг аниқ юқори чегарасини топинг.

Ечиш. $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f)=\boldsymbol{R}$ бўлиб, $f(x)=-x^2-4x+1=-(x+2)^2+5$ га асосан $E(f)=(-\infty;\ 5]$ бўлади. Бундан $B \geqslant 5$ бўлиб, $B=5$ аниқ юқори чегара бўлади.

55-таъриф. *$f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасидан олинган ихтиёрий x учун шундай $A>0$ мавжуд бўлсаки, $|f(x)| \leqslant A$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция чегараланган дейилади.*

Бу таърифдан келиб чиқадики, $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасидан олинган ихтиёрий x учун шундай $-A$ ва A сонлар мавжудки, $-A \leqslant f(x) \leqslant A$ бўлади.

Мисол. $f(x)=\sin x$ функциянинг чегараланганлигини кўрсатинг.

Ечиш. $f(x)=\sin x$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f)=\boldsymbol{R}$, ўзгариш соҳаси $E(f)=[-1;\ 1]$, яъни, $|\sin x| \leqslant 1$ эканлигидан ихтиёрий $A \geqslant 1$ сон $f(x)=\sin x$ функциянинг чегараси бўлади.

Математикада шундай функциялар мавжудки, улар на юқоридан ва на қуйидан чегараланган; чунончи $f(x)=x^3+x^2$; $f(x)=\operatorname{tg} x$; $f(x)=\dfrac{x^5}{x^2+1}$ ва ҳоказо. Бундай функцияларни ҳам ўрганишнинг ўзига хос хусусиятлари мавжуддир.

II. Функциянинг жуфт ва тоқлиги. Берилган функцияни ўрганишнинг муҳим хусусиятларидан бири, бу унинг графигини xOy текисликда ординаталар ўқига ёки координаталар бошига нисбатан симметрик жойлашишини ўрганишдан иборатдир. Бу эса бевосита функциянинг жуфт ва тоқлиги тушунчасига олиб келади.

56-таъриф. 1 *Агар берилган X сонли тўплам учун $-x \in X$ ва $x \in X$ бўлса, у ҳолда X тўплам координаталар бошига нисбатан симметрик жойлашган дейилади.*

2. *Агар $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси X коор-*

а) $|z| = 1, \arg z = \frac{\pi}{4}$; б) $|z| = 2, \arg z = -\frac{\pi}{2}$;

в) $|z| = 3, \arg z = \frac{5\pi}{6}$; г) $|z| = 1, \arg z = -\frac{3\pi}{4}$.

VII БОБ. ФУНКЦИЯ

1- §. ФУНКЦИЯ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Математикада функция тушунчаси муҳим тушунчалардан биридир. Ўрта мактаб математикасидан маълумки, математикада, геометрик фигураларнинг тенглиги, ўхшашлиги, тўғри чизиқ ва текисликларнинг параллеллиги, перпендикулярлиги ва ҳоказо каби тушунчаларнинг ҳар бирини мушоҳада қилсак, улар бир нарса объектининг иккинчи нарса объекти билан бирор муносабатини ифодаловчи қонуният ёки қоиданинг берилиши асосида юзага келаётганини кўриш мумкин. Лекин қаралаётган муносабат ёки қоидаларнинг ҳар бири ўзининг аниқланаётган соҳасига қараб бажарадиган вазифаси турличадир. Масалан, текисликда учбурчаклар ва айланалар берилган бўлсин. Мавжуд барча учбурчакларни X тўпламга, айланаларни Y тўпламга киритайлик ва бу тўпламлар элементлари орасидаги боғланиш қонуниятини ҳар бир учбурчак учун унга ташқи чизилган айлана мавжуд деб аниқлайлик. У ҳолда ҳар бир учбурчакка битта ташқи чизилган айлана мос келади. Агар бу ерда эркин олинаётган учбурчакларни x, унга мос равишда топилаётган айланаларни y орқали белгиласак ҳамда улар орасидаги боғланиш қонуниятини f орқали ифодаласак, у ҳолда бу жараённи $y = f(x)$ ифода ёки формула орқали боғлаш мумкин. Математикада бундай боғланишни $y = f(x)$, ёки xfy, ёки $x \in X \xrightarrow{f} y \in Y$, ёки $(x, f(x))$ кўринишларда ифода қилинади.

48-таъриф. *Берилган X тўпламдан олинган ҳар бир x элементга Y тўпламнинг аниқ бир элементи мос қўйилган бўлса, у ҳолда бундай мослик функция дейилади ва қуйидагича белгиланади: $y = f(x)$, бу ерда x — эркли ўзгарувчи—аргумент, y эса мажбурий ўзгарувчи — функция деб аталади.*

Мисоллар. 1. $y = 3^x$ да ҳар бир ҳақиқий x қиймат учун аниқ бир мусбат y қиймат мос қўйилган.

2. $f: x \in X \to x^2 \in Y$ мослаштириш қонуниятини таҳлил қилсак, ҳар бир ҳақиқий x қиймат учун аниқ бир манфиймас ҳақиқий y қиймат мос қўйилган.

49-таъриф. а) *Берилган $f(x)$ функцияда x аргументнинг олиши мумкин бўлган қийматлари тўплами $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси дейилади ва $Dom\,f = D(f) = \{x / \exists y, (y = f(x))\}$ кўринишида белгиланади.*

б) *Берилган $f(x)$ функциянинг барча қийматлари тўплами унинг ўзгариш соҳаси дейилади ва $Im f = E(f) = \{y \mid \exists x\,(y = f(x))\}$ кўринишида белгиланади.*

Мисоллар. 1. $y = x^2$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(y) = \boldsymbol{R}$, ўзгариш соҳаси $E(y) = [0;\ +\infty)$.

2. $f(x) = \lg x$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f) = (0; +\infty)$, ўзгариш соҳаси $E(f) = (-\infty; +\infty) = \boldsymbol{R}$.

3. $f(x) = \sin x$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f) = \boldsymbol{R}$ ва ўзгариш соҳаси $E(f) = [-1;\ 1]$.

4. $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{1-x}$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f) = \varnothing$ бўш тўплам, ўзгариш соҳаси $E(f) = \varnothing$ дир.

5. $y = 5$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(y) = \boldsymbol{R}$ ва ўзгариш соҳаси $E(y) = \{5\}$.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар берилган бўлсин. Агар $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасидан олинган барча x лар учун $f(x) = g(x)$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $f = g$ дейилади, яъни: $\forall x \in D(f) : D(f) = D(g) \wedge f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

Маълумки, агар $f : X \to Y$ бўлса, у ҳолда f қонуният X тўплам элементларини Y тўпламга акслантирувчи қонуният бўлиб, у ўз навбатида сюръектив, инъектив ва биектив бўлиши мумкин.

Агар $X = D\,om\,f = D(f)$ ва $I\,mf = E(f) \subset Y$ ёки $f \subset X \times Y$ бўлса, у ҳолда f акслантириш *X тўплам элементларини Y тўпламга акслантиради*, агар $X = D(f)$ ва $E(f) = Y$ бўлса, у ҳолда f акслантириш *X тўплам элементларини Y тўплам устига акслантирилади* дейилади. Математикада $f \subset A \times B$ акслантиришни B^A кўринишида ҳам белгиланади.

Берилган f қоида асосида акслантиришдаги A тўпламнинг *образи* деб $f(A) = \{f(x) / x \in A\}$ га, *прообрази* деб $f^{-1}(A) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in A\}$ га айтилади.

50-таъриф. *$f : X \to Y$ акслантиришда:*

а) *Y тўпламнинг ҳар бир элементи ҳеч бўлмаганда X тўпламнинг бир элементининг образи бўлса, у ҳолда бундай акслантириш сюръектив ёки X ни Y нинг устига акслантириш дейилади, яъни*

$$f : (\forall\, y \in Y)(\exists x \in X)(y = f(x));$$

б) *Y тўпламнинг ҳар бир элементи X тўпламнинг биттадан ортиқ бўлмаган элементининг образи бўлса,* *бундай акслантириш X ни Y га инъектив акслантириш дейилади, яъни*

$$f:(\forall y\in Y)(\forall x_1, x_2\in X)(y=f(x_1)\wedge y=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2);$$

в) *Y тўпламнинг ҳар бир элементи X тўпламнинг аниқ бир элементининг образи бўлса, у ҳолда бундай акслантириш ўзаро бир қийматли ёки биектив акслантириш дейилади.*

Мисоллар: $f:x\in \boldsymbol{R}\to x^2\in \boldsymbol{R}_+$, бундан кўриниб турибдики, сюръекция бажарилаётибди.

2. $f=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid y=x\}$ акслантириш инъективдир.

3. $f=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{R}_+ \mid y=2^x\}$ кўринишидаги акслантириш биективдир.

Юқорида келтирилган мулоҳазалардан кўриниб турибдики, f функция кўпчилик ҳолларда ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган бўлиб, ўзининг геометрик мазмунига кўра

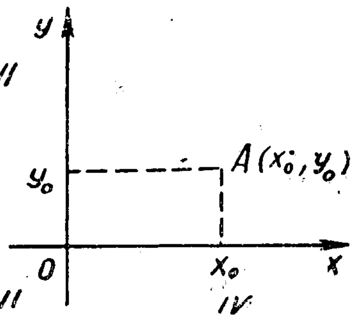
$$\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid x\in \boldsymbol{R}\wedge y\in \boldsymbol{R}\ \wedge x f y\}=\Gamma_f$$

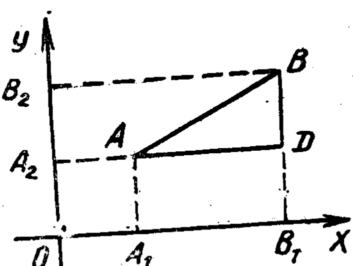
нуқталар тўпламини текшириш ёки аниқлашга мос келади. Юқорида $\boldsymbol{R}$ ҳақиқий сонлар тўплами билан Ox сон ўқидаги нуқталар тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин эканлиги ҳақида айтилган эди. Бундан келиб чиқиб, xOy тўғри бурчакли координаталар текислигидаги нуқталар тўплами билан $\boldsymbol{R}\times \boldsymbol{R}$ тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд эканига ишонч ҳосил қилиш мумкин, xOy тўғри бурчакли Декарт координаталар текислигини шартли тарзда (12- *а* расм) тўртта чоракка (квадрантга) ажратилади. Декарт координаталар текислигида олинган ихтиёрий A нуқтани аввал Ox ўқига, сўнгра Oy ўқига проекциялаб ҳамда x_0 ва y_0 нуқталарни топиб, A нуқтанинг xOy текисликдаги координаталарини мос равишда (x_0, y_0) орқали ифодаланади ва уни $A(x_0\ y_0)$ кўринишида ёзилади. Шунинг учун: I чоракдаги $A(x_0, y_0)$ нуқтанинг x_0 ва y_0 координаталари ҳар доим мусбат бўлади: $x_0>0$, $y_0>0$. Шу каби II чорак учун $A(-x_0, y_0)$, III чорак учун $A(-x_0, -y_0)$, IV чорак учун $A(x_0, -y_0)$ бўлади.

Маълумки, Ox сон ўқида олинган $A(t_1)$ ва $B(t_2)$ нуқталар орасидаги $AB=d$ масофани $AB=|t_2-t_1|$ формула орқали ифодалаган эдик. Энди қуйида xOy Декарт координаталар системасида берилган икки нуқта орасидаги масофани аниқлаш формуласини ҳосил қиламиз.

68-теорема. *xOy текисликда берилган $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нуқталар орасидаги масофа*

$$d=AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$ бўлади.





12- расм.

Исботи. Берилган AB кесмани Ox ва Oy ўқларига проекциялаймиз: унинг Ox ўқидаги проекцияси $A_1B_1 = |x_2 - x_1|$, Oy ўқидаги проекцияси $A_2B_2 = |y_2 - y_1|$ бўлиб (12- б расм), ADB учбурчакдан Пифагор теоремасига асосан $d = AB = \sqrt{AD^2 + BD^2}$ бўлади. Бу ердан $AD = A_1B_1$ ва $BD = A_2B_2$ га асосан

$$d = AB = \sqrt{A_1B_1^2 + A_2B_2^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Мисоллар. 1. $A(2, -5)$ ва $B(-3, 7)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.

Ечиш. $d = \sqrt{(-3-2)^2 + (7+5)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{163} = 13$ узун. бирл.

2. $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4x+3}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси $x^2 - 4x + 3 \neq 0$ бўлган барча x лардан иборат бўлгани учун, бундан $x \neq 3$ ва $x \neq 1$ ни топамиз. Бундан $D(f) = (-\infty;\ 1) \cup (1;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$.

3. $f(x) = \sqrt{9-x} + \sqrt[4]{x-4} + \frac{1}{x-6}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Берилган функциядаги иррационалликнинг арифметиклик шарти ва каср махражининг нолдан фарқлилик шартига асосан:

$$\begin{cases} 9 - x \geqslant 0, \\ -4 + x \geqslant 0 \\ x - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 9, \\ x \geqslant 4, \\ x \neq 6 \end{cases}$$

ни ҳосил қиламиз, бундан $D(f) = [4;\ 6) \cup (6;\ 9]$.

4. $f(x)=\log_2(x-3)+\sin\sqrt{x-4}+\frac{1}{\sqrt{10-x}}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x-4\geqslant 0, \\ 10-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ x\geqslant 4, \\ x<0 \end{cases}$$

га кўра $D(f)=[4;\ 10)$ бўлади.

5. $f(x)=\frac{2x+1}{x^2-1}$ функциянинг ушбу қийматларини топинг: а) $f(2)$, б) $f(2a)$, в) $f(a+3)$, г) $f(-x)$, д) $f(|x|)$.

Ечиш. а) $f(2)=\frac{2\cdot 2+1}{2^2-1}=\frac{5}{3}$; б) $f(2a)=\frac{2\cdot 2a+1}{(2a)^2-1}=$ $=\frac{4a+1}{4a^2-1}$; в) $f(a+3)=\frac{2(a+3)+1}{(a+3)^2-1}=\frac{2a+7}{a^2+6a+8}$; г) $f(-x)=\frac{2\cdot(-x)+1}{(-x)^2-1}=\frac{1-2x}{x^2-1}$; д) $f(|x|)=\frac{2|x|+1}{|x^2|+1}=$ $=\frac{2|x|+1}{x^2-1}$.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

1. xOy текисликда қуйидаги нуқталарни ясанг:

$A(2,7)$; $B(3,0)$; $C(1,-4)$; $D(0,5)$; $E(-1,\ 2)$; $F(-4;-3)$ $G(-2,0)$; $H(0,-3)$; $K\left(-3\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{2}\right)$; $L(\sqrt{2},-\sqrt{3})$.

2. Координаталари қуйидаги тенгламалар системасини қаноатлантирувчи нуқталарни ясанг:

а) $\begin{cases} 5x+2y=-1, \\ 2x-y=14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x+y=7; \end{cases}$ с) $\begin{cases} y^2-4x=0, \\ x^2-4y=0. \end{cases}$

3. Абсциссалари -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ва 4 га тенг, ординаталари эса а) $y=3x-5$; б) $y=x^2$ тенглама билан аниқланувчи нуқталарни ясанг.

4. (3, 2) нуқта берилган: унга абсциссалар ва ординаталар ўқларига нисбатан, координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган нуқталарни ясанг ва улар орасидаги масофани аниқланг.

5. Мунтазам олтибурчакнинг томони a га тенг. Координаталар боши олтибурчакнинг марказида, абсциссалар ўқи

унинг икки қарама-қарши учларидан ўтган деб, олтибурчак учларининг координаталарини топинг.

6. Учбурчакнинг учлари: $A(-2,1)$; $B(4, 8)$; $C(10,6)$. Бу учбурчакнинг ички бурчаклари орасида ўтмас бурчак борми?

7. Ox ўқда координаталар бошидан ва $A(9, -3)$ нуқтадан бир хил узоқликда турган нуқтани топинг.

8. Мунтазам олтибурчакнинг иккита қўшни учи $A(2, 0)$, $B(5,\ 3\sqrt{3})$ ни билган ҳолда унинг маркази $O(x, y)$ ни топинг.

9. $A(1,3)$ $B(4,7)$; $C(2, 8)$; $D(-1, 4)$ га кўра $ABCD$ параллелограмм эканлигини текширинг ва AB томонини асос деб, унинг баландлигини ҳисобланг.

10. Агар $\{(x, y)\,|\,x\in X\wedge y\in Y\wedge xfy\} = \Gamma_f$ бўлса, у ҳолда $P_f = = \{(x, y)\in N^2\,|\,y = x + 1\}$ ни топинг.

11. Қуйидаги функциялар қайси ораликда айнан тенг бўлади:

а) $y = \dfrac{x^2-1}{x-1} - 3$ ва $y = x - 2$; б) $y = 2^{\log_2(x+1)}$ ва $y = = x + 1$; в) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ ва $y = x - 2$;
г) $y = \sqrt{x-1}\sqrt{2x+1}$ ва $y = \sqrt{(x-1)(2x+1)}$.

12. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $y = \dfrac{\sqrt{x+5}}{\lg(9-x)}$; б) $y = \log_2 \dfrac{x-2}{x+2}$;

в) $y = \sqrt{x^2 + 4x - 5}\,\lg(x + 1)$;

г) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\lg(10x + 5)^2}$; д) $y = \log_4(2 - \sqrt[4]{x} - \dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$;

е) $y = \sqrt[4]{\dfrac{1}{2}\log_4 16 - \log_8(x^2 - 4x + 3}$;

ж) $y = \sqrt{\log_{0,4}\dfrac{x-1}{x+5}\cdot\dfrac{1}{x^2-36}}$.

13. Функциянинг қийматлар соҳасини топинг:

а) $y = \sqrt{2 + x - x^2}$; б) $y = \dfrac{x-1}{x^2+1}$;

в) $y = \log_3(1 - 2\cos x)$; г) $y = \sin x + \sin|x|$;

д) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$; е) $y = 2^{\cos\, x\,|}$;

ж) $y = \dfrac{2}{3 - \sin x}$;   з) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$;

и) $y = 2\sin 5x + 3\cos 5x$.

2- §. ФУНКЦИЯНИНГ БЕРИЛИШ УСУЛЛАРИ

Математикада функциянинг берилиш усулларидан жуда кўп учрайдиганлари аналитик, график ва жадвал ёрдамида берилиш усулларидир.

I. Аналитик (формула) усулда берилиши.

51-таъриф. *Агар функциянинг қийматини топиш учун аргументнинг устида бажарилиши лозим бўлган амалларни боғловчи ифода кўрсатилган бўлса, у ҳолда функция аналитик усул билан берилган дейилади.*

Мисоллар: 1) $y = x^2 - 5x + 1$, $D(x) = \boldsymbol{R}$, $E(y) =$

$$= \left[-\frac{21}{4};\ +\infty\right);$$

2) $y = x^2 - 5x + 1$, $x \in [1;\ 3]$;

3) $y = x^2 - 3x + 4$, $x \in (1;\ 5)$;

4) $y = \sqrt{1-x}$ функция аналитик усулда берилган, $D(y) = (-\infty;\ 1]$; $E(y) = [0;\ +\infty)$;

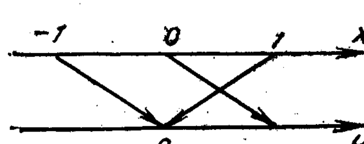
5) $y = \sqrt{\sin x - 3}$ функция аналитик усулда берилган, $D(y) = \varnothing$; $E(y) = \varnothing$;

6) а) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$ функция аналитик усулда берилган, $D(y) = \{1\}$ ва $E(y) = \{0\}$;

б) $y = \sqrt{\log_2 \sin x}$ функция ҳам аналитик усулда берилган, $D(y) = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}$ ва $E(y) = \{0\}$;

7) $y = \sqrt{1 - x^2}$ функция аналитик усулда берилган бўлиб, $D(y) = [-1;\ 1]$ ва $E(y) = [0;\ 1]$ ва бу ерда f қонуният 13- расмда келтирилгандек мосликни ифодалайди;

8) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ функция аналитик кўринишда берилган, $D(y) = (-1;\ 1)$, $E(y) = [1;\ +\infty)$.



13- расм.

Юқорида келтирилган аналитик функциялар билан бир қаторда шундай функциялар ҳам борки, улар *қисман аналитик функциялар* деб аталади, чунончи

$$9)\ f(x)=\begin{cases}1, \text{ агар } |x|>1 \text{ бўлса},\\ 0, \text{ агар } |x|=1 \text{ бўлса},\\ -1, \text{ агар } |x|<1 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

$$10)\ f(x)=\begin{cases}1, \text{ агар } x \text{ — рационал сон бўлса};\\ 0, \text{ агар } x \text{ — иррационал бўлса}.\end{cases}$$

Бу функция *Дирихле функцияси* дейилади.

$$11)\ f(x)=\operatorname{sign} x=\begin{cases}-1, \text{ агар } x<0 \text{ бўлса},\\ 0, \text{ агар } x=0 \text{ бўлса},\\ 1, \text{ агар } x>0 \text{ бўлса},\end{cases}$$

бунда $D(f)=\mathbf{R}$, $E(f)=\{-1;\ 0;\ 1\}$;

12) $f(x)=[x]$ — «антье икс» — x нинг бутун қисми.

13) $f(x)=\{x\}=x-[x]$, x нинг каср қисми.

Аналитик усулда берилган функцияларнинг шундайлари ҳам учрайдики, унда қатнашаётган ўзгарувчилар бири иккинчисига нисбатан ошкора ифодаланмаган бўлади. Бундай функцияларни математикада *ошкормас функциялар деб аталади.*

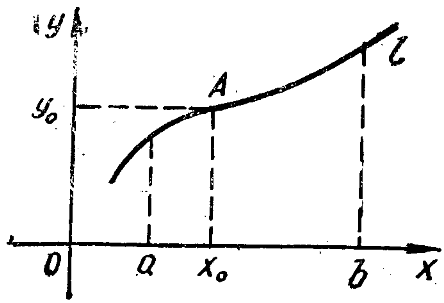
14) $xy-x+1=0$; $x^2+y^2=1$; $x^3y+1=0$; $xy+xy^2=1$, $\sin x+\cos y=1$; $\log_2 x+y\operatorname{tg} x=\sin x$ функциялар ошкормас функциялардир.

II. Функциянинг график усулда берилиши. xOy тўғри бурчакли Декарт координаталар текислигида $y=f(x)$ функцияни қарайлик. Эркли ўзгарувчи x га x_1, x_2, ..., x_n, ... қийматларни бериб, мос равишда $y_1, y_2, \ldots$ ... y_n, ... қийматларни ҳосил қиламиз. Сўнгра координаталар текислигида (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n), ... координаталарга мос келувчи нуқталарни топамиз.

52-таъриф. *Берилган $y=f(x)$ функция учун координаталар текислигида шундай нуқталар тўплами мавжуд бўлсаки, бу тўпламдан олинган ихтиёрий (x_0, y_0) нуқта учун $y_0=f(x_0)$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда бу нуқталар тўплами $y=f(x)$ нинг графиги дейилади.*

Берилган $y=f(x)$ функциянинг графиги — бу текисликнинг шундай нуқталар тўпламики, ундаги нуқталарнинг координаталари фақат ва фақат $y=f(x)$ ни қаноатлантиради ва ўзида бошқа нуқталарни сақламайди.

xOy текисликда берилган l нуқталар тўпламининг координаталарини аниқлаш учун Oy ўқига параллел тўғри чизиқлар ўтказилса, ҳар бир тўғри чизиқ бу тўпламни биттадан ортиқ бўлмаган нуқтада кесиб ўтади (14- расм). Ox ўқида олинган $[a; b]$ кесмадан ихтиёрий x_0 нуқта олиниб, у орқали Oy ўқига параллел қилиб ўтказилган тўғри чизиқ l нуқталар тўпламини A нуқтада кесиб ўтади. Бу нуқтани Oy ўқига проекцияласак, у ҳолда x_0 қийматга мос бўлган $y_0 = f(x_0)$ қиймат аниқланади. Бундан $A(x_0, y_0) \in l$ нуқтанинг координаталари (x_0, y_0) экани аниқланади.



14- расм.

Функция график усулда берилса, унинг ҳар доим ҳам аналитик ифодасини топиш мумкин бўлавермайди. Айрим ҳолларда олий математиканинг махсус услубларини татбиқ қилиш натижасида унинг аналитик ифодасини тақрибан топиш мумкин.

III. Функциянинг жадвал усули билан берилиши. Амалиётда жуда кўп ҳолларда бир ўзгарувчига турли қийматлар бериш асосида иккинчи ўзгарувчининг *қийматлар жадвали* тузилади. Ўрганилаётган ҳодисанинг текис содир бўлиши, сакраб содир бўлиши, узилиб-узилиб содир бўлиши каби масалаларни ҳал қилишда ҳамда айрим тиббий масалаларни ечишда, ер усти ва ички (геологик) ўзгаришларни, қазилма бойликларнинг ҳажмини топишда аввал жадвал усулига суянган ҳолда унинг аналитик усулига тақрибан ёки аниқ ўтишлар ҳосил қилинади. Амалиётда бу усул ўзининг тузилишига кўра анча қулайдир.

Мисоллар. 1.

—5	—3	0	3	8	5	15	40	1
—10	—6	0	6	16	10	30	80	2

Бу жадвалда устунларда жойлашган катаклардаги сонлар нисбати $\frac{-5}{-10} = \frac{3}{6} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = \frac{40}{80}$ ни қарасак, уларнинг бир-бирига тенглиги $y = 2x$ муносабат мавжуд эканлигини кўрсатиб турибди.

2.

9	1	15	90	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30}$	9	12

Бу жадвалга синчиклаб қарасак, ҳар бир вертикал катаклардаги сонлар кўпайтмаси ўзгармас сон 3 эканлиги кўринади. Шу сабабли бундан $xy = 3$ ёки $y = \frac{3}{x}$ кўринишдаги аналитик ифода ҳосил бўлади.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

Функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f)$ ни топинг:

1. $f(x) = \sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$.
2. $f[x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2 - 2x}$.
3. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$.
4. $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$.
5. $f(x) = \sqrt[4]{\lg(3x - 27x^2)}$.
6. $f(x) = \log_2 \log_2 (x-3)$.
7. $f(x) = \lg \frac{x^2-9}{x^2-1}$.
8. $f(x) = \ln \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x-1}$.
9. $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2-9}{x+4}}$.
10. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

Функциянинг ўзгариш соҳаси $E(f)$ ни топинг:

11. $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$.
12. $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x^2-x+2}$.
13. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.
14. $f(x) = (-1)^x$.
15. $f(x) = \frac{x^2-5}{2x-4}$.
16. $f(x) = \lg \frac{1}{x-1}$.
17. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$.
18. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$.
19. $f(x) = \sqrt{\lg (x+1)^2}$.
20. $f(x) = \lg(\sin x - 2)$.

3- §. ФУНКЦИЯНИНГ ЭНГ МУҲИМ ХОССАЛАРИ

Мактаб математикасида ўрганилган функциялар ўзининг тузилиши жиҳатидан содда кўринишдаги функциялар бўлиб, ҳар бир тур функциянинг характерини ўрганишнинг ўзига хос хусусияти мавжуддир. Шунинг учун ҳам мактаб математикасидами, олий математикадами, қайси босқичда ўрганилишидан қатъи назар, функциянинг умумий характерини ўрганишда қуйидаги тушунчалар муҳим аҳамиятга эга: аниқланиш ва ўзгариш соҳалари; чегараланганлиги, жуфт ва тоқлиги; даврийлиги; ўсиш ва камайиши; энг катта ва энг кичик қийматлари; узлуксизлиги; графиги. Юқоридаги мавзуларда функциянинг аниқланиш ва ўзгариш соҳаларини кўриб ўтдик, энди қолган хоссаларни ҳам кўриб чиқайлик.

I. Функциянинг чегараланганлиги. Қаралаётган функциянинг олиши мумкин бўлган қийматлари тўплами ўзининг тузилиши жиҳатидан ҳар хил бўлиши — қуйидан, юқоридан, қуйи ва юқоридан чегараланган бўлиши ёки чегараланган бўлмаслиги мумкин.

53-таъриф. *$f(x)$ функция аниқланган X сонли тўпламдан олинган ихтиёрий x учун шундай A сон мавжуд бўлсаки, $A \leqslant f(x)$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция қуйидан чегараланган дейилади.*

Қуйи чегараларнинг энг каттаси аниқ қуйи чегара дейилади.

Мисоллар. 1. $y = 2^x$ функциянинг қуйи чегарасини топинг.

Ечиш. $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = (0; +\infty)$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда исталган манфий ҳақиқий сон қуйи чегара бўлиши ва улар орасида энг каттаси ноль эканлиги равшан. Демак, берилган функция қуйидан чегараланган ва $A = 0$ аниқ қуйи чегарадир.

2. $f(x) = x^2 + 2$ функциянинг аниқ қуйи чегарасини топинг.

Ечиш. $D(f) = \boldsymbol{R}$ ва $E(f) = [2; +\infty)$ эканидан $f(x) \geqslant 2$. Демак, $A = 2$ бўлади.

3. $f(x) = \sin x - 3$ функциянинг қуйи чегарасини топинг.

Ечиш. $D(f) = \boldsymbol{R}$ ва $|\sin x| \leqslant 1$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда $E(f) = [-2; -4]$ эканлиги равшан. Бундан $A = -4$; $A = -10$; $A = -7$ сонлари қуйи чегара бўлиши билан бирга аниқ қуйи чегара $A = -4$ бўлади.

54-таъриф. *Берилган $f(x)$ функция аниқланган X сонли тўпламдан олинган ихтиёрий x учун шундай B сон мав-*

жуд бўлсаки, $f(x) \leqslant B$ бўлса; у ҳолда $f(x)$ функция юқоридан чегараланган дейилади.

Юқори чегараларнинг энг кичиги аниқ юқори чегара дейилади.

Мисоллар. 1. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ функциянинг аниқ юқори чегарасини топинг.

Ечиш. $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f) = [-1;\ 1]$, қийматлар соҳаси $E(f) = [0;\ 1]$. Демак, $B \geqslant 1$ шартни қаноатлантирувчи барча B лар унинг юқори чегараси, $B = 1$ эса аниқ юқори чегарасидир.

2. $f(x) = -x^2 - 4x + 1$ функциянинг аниқ юқори чегарасини топинг.

Ечиш. $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f) = \boldsymbol{R}$ бўлиб, $f(x) = -x^2 - 4x + 1 = -(x+2)^2 + 5$ га асосан $E(f) = (-\infty;\ 5]$ бўлади. Бундан $B \geqslant 5$ бўлиб, $B = 5$ аниқ юқори чегара бўлади.

55-таъриф. *$f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасидан олинган ихтиёрий x учун шундай $A > 0$ мавжуд бўлсаки, $|f(x)| \leqslant A$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция чегараланган дейилади.*

Бу таърифдан келиб чиқадики, $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасидан олинган ихтиёрий x учун шундай $-A$ ва A сонлар мавжудки, $-A \leqslant f(x) \leqslant A$ бўлади.

Мисол. $f(x) = \sin x$ функциянинг чегараланганлигини кўрсатинг.

Ечиш. $f(x) = \sin x$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f) = \boldsymbol{R}$, ўзгариш соҳаси $E(f) = [-1;\ 1]$, яъни, $|\sin x| \leqslant 1$ эканлигидан ихтиёрий $A \geqslant 1$ сон $f(x) = \sin x$ функциянинг чегараси бўлади.

Математикада шундай функциялар мавжудки, улар на юқоридан ва на қуйидан чегараланган; чунончи $f(x) = x^3 + x^2$; $f(x) = \operatorname{tg} x$; $f(x) = \dfrac{x^5}{x^2+1}$ ва ҳоказо. Бундай функцияларни ҳам ўрганишнинг ўзига хос хусусиятлари мавжуддир.

II. Функциянинг жуфт ва тоқлиги. Берилган функцияни ўрганишнинг муҳим хусусиятларидан бири, бу унинг графигини xOy текисликда ординаталар ўқига ёки координаталар бошига нисбатан симметрик жойлашишини ўрганишдан иборатдир. Бу эса бевосита функциянинг жуфт ва тоқлиги тушунчасига олиб келади.

56-таъриф. 1 *Агар берилган X сонли тўплам учун $-x \in X$ ва $x \in X$ бўлса, у ҳолда X тўплам координаталар бошига нисбатан симметрик жойлашган дейилади.*

2. *Агар $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси X коор-*

динаталар бошига нисбатан симметрик бўлиб, ихтиёрий $x \in X$ учун $f(x) = f(-x)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ жуфт функция дейилади.

Мисол. $f(x) = x^2$; $f(x) = \sqrt{1 - 2x^2}$; $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$; $f(x) = 2^{x^2}$ жуфт функциялар эканлигини кўрсатинг.

Ечиш. Маълумки, берилган функциялар учун $A(x, f(x))$ ва $B(-x, f(-x))$ нуқталарнинг координаталари уларни қаноатлантиради. Шу билан бирга

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x);\ f(-x) = \sqrt{1 - 2(-x)^2} = f(x);$$

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^4 + 4} = f(x);\ f(-x) = 2^{(-x)^2} = f(x).$$

Бундан бу .функцияларнинг жуфт эканлиги равшандир.

57-таъриф. *$f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси координаталар бошига нисбатан симметрик бўлиб, ихтиёрий $x \in X$ учун $f(-x) = -f(x)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ тоқ функция дейилади.*

Мисол. $f(x) = x$; $f(x) = x^3 + x$; $f(x) = \sin x$; $f(x) = \operatorname{arctg} x$ тоқ функциялар эканлигини кўрсатинг.

Ечиш. Берилган функцияларнинг аниқланиш соҳаси координаталар бошига нисбатан симметрик бўлиб, ихтиёрий x учун $A(x, f(x))$ ва $B(-x, -f(x))$ нуқталар координаталар бошига нисбатан симметрик жойлашиши ҳамда $f(-x) = -x = -f(x)$; $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -f(x)$; $f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x)$, $f(-x) = \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x = -f(x)$ эканлигидан бу функцияларнинг тоқ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Математикада $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(x) = x^3 + x^2$; $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1}$ каби жуда кўп функциялар мавжудки, бу функциялар на жуфт ва на тоқдир. Бундай функцияларнинг алоҳида олинган хусусиятлари ҳақида фикр юритишнинг ўзига хос аҳамияти бор.

69-теорема. *Аниқланиш соҳаси X координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган ҳар қандай функцияни ҳар бири шу соҳада аниқланган ва бири жуфт, иккинчиси эса тоқ функциялар йиғиндиси билан ифодалаш мумкин.*

Исботи. Теореманинг шартига кўра $y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси X координаталар бошига нисбатан симметрик. Шу X соҳада аниқланган шундай $y_1 = \varphi(x)$ ва $y_2 = \psi(x)$ функциялар мавжудки, $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ эканини кўрсатамиз. Бунинг учун $\varphi(x)$ ни $\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ кўринишда танлаймиз. Бу функция учун

$$\varphi(-x)=\frac{f(-x)+f(-(-x))}{2}=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=$$

$$=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\varphi(x),$$

яъни $\varphi(x)$ — жуфт функция. Энди $\psi(x)$ ни $\psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ кўринишда танласак, у ҳолда

$$\psi(-x)=\frac{f(-x)-f(-(-x))}{2}=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=$$

$$=\frac{-(f(x)-f(-x))}{2}=-\psi(x)$$

бўлиб, бундан $\psi(x)$ нинг тоқ функция эканлиги келиб чиқади. У ҳолда $\varphi(x)+\psi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}=$ $=f(x)$ бўлиб, шу билан теорема исбот бўлди.

Мисол. $y=2^x$ функцияни жуфт ва тоқ функциялар йиғиндиси кўринишида ифодаланг.

Ечиш. $y=2^x$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(y)=$ $=\boldsymbol{R}$ координаталар бошига нисбатан симметрик. $\varphi(x)=$ $=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$ ва $\psi(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2}$ ҳам шу $\boldsymbol{R}$ да аниқланган бўлиб, $y=2^x=\varphi(x)+\psi(x)$ бўлади.

Бу юқорида келтирилган тушунчани яна ҳам умумлаштириш мумкин, яъни: *агар берилган $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси $(x_0, 0)$ нуқтага нисбатан симметрик бўлиб, шу соҳадан олинган ҳар бир x учун $f(2x_0-x)=f(x)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ шу $(x_0, 0)$ нуқтадан Oy га параллел бўлиб ўтувчи тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлади.*

Мисол. $y=\sin x$ функция $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ нуқтадан ўтувчи ва Oy ўқига параллел тўғри чизиққа симметрик:

$$\sin\left[2\left(\frac{\pi}{2}\right)-x\right]=\sin x.$$

III. Функциянинг ўсиш ва камайиши. Математикада функциялар ўзининг аниқланиш соҳасида ёки унинг бўлагида ўсиши, камайиши ёки бир хил қийматга эришиши мумкин. Шунинг учун функциянинг ўзининг аниқланиш соҳасида ўсиши ва камайишини аниқлаш унинг табиатини ўрганишнинг муҳим томонларидан бири ҳисобланади.

57-таъриф. *Агар $f(x)$ аниқланган X соҳадан олинган ихтиёрий x_1, x_2 қийматлар учун $x_1 < x_2$ бўлганда $f(x_1) < f(x_2)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ шу соҳада ўсувчи дейилади.*

Мисоллар. 1. $y = x$ функциянинг аниқланиш соҳаси R бўлиб, ўсувчи бўлади.

2. $y = x^2$ функция R да аниқланган, лекин $x \in [0; +\infty)$ да монотон ўсувчи бўлади.

3. $y = \sin x$ функция $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ да -1 дан 1 гача ўсади.

58-таъриф. *Агар $f(x)$ аниқланган X соҳадан олинган ихтиёрий x_1, x_2 қийматлар учун $x_1 < x_2$ бўлганда $f(x_1) > f(x_2)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ шу соҳада камаювчи дейилади.*

Мисоллар. 1. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функция $(-\infty; +\infty)$ да камаювчи.

2. $y = \log_{0,5} x$ функция $x \in (0; +\infty)$ да монотон камаяди.

3. $y = \sin x$ функция $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ да 1 дан -1 гача монотон камаяди.

59-таъриф. *Агар $f(x)$ аниқланган X соҳадан олинган ихтиёрий x_1, x_2 қийматлар учун $x_1 < x_2$ бўлганда $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ бўлса, у ҳолда функция шу соҳада камаймайдиган функция, $x_1 < x_2$ бўлганда $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ бўлса, $f(x)$ шу соҳада ўсмайдиган функция дейилади,*

Мисоллар. 1. $y = \sqrt{x + |x|}$ функция $x \in (-\infty; +\infty)$ да камаймайдиган функциядир.

2. $$y = \begin{cases} x^2 \text{ агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x \geqslant 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

функция R да ўсмайдиган функциядир.

Умуман, математикада ўсувчи, камаювчи, ўсмайдиган, камаймайдиган функциялар бир сўз билан *монотон функциялар* дейилади.

IV. Даврий функциялар. Табиатда ва техникада шундай воқеа ва ҳодисалар учрайдики, улар ўзининг табиати жиҳатидан такрорланиб туради. Масалан, Ернинг Қуёш атрофида ёки Ернинг ўз ўқи атрофида доимо айланиб туриши ҳамда айрим технологик жараёнларнинг циклик такрорланиб туриши математикада даврий функцияларни ўрганиш зарур эканлигини кўрсатади.

60-таъриф. *Агар $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси X дан олинган ихтиёрий x учун шундай $T>0$ сон мавжуд ва $x \pm T \in X$ бўлиб, $f(x)=f(x+T)$* ёки *$f(x)=f(x-T)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция T даврли даврий функция дейилади.*

Мисоллар. 1. $f(x)=\sin x$ учун $T=2\pi$ сон мавжуд ва $\sin x=\sin(x+2\pi)$ ёки $\sin x=\sin(x-2\pi)$ бўлади. Демак, функция даврий.

2. $f(x)=x-[x]$ функция учун $T=1$ сон мавжуд ва ихтиёрий $x \in D(f)=\boldsymbol{R}$ да $x+1-[x+1]=x-[x]$ бўлади, бундан $f(x)=f(x+1)$. Демак, берилган функция даврийдир.

3. $f(x)=\begin{cases}1, & \text{агар } x \in Q \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x \in I \text{ бўлса,}\end{cases}$

функция учун ихтиёрий рационал сон давр бўлади.

4. $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ функцияда $f(x+2\pi)=$ $=\dfrac{\cos(x+2\pi)}{1+\sin(x+2\pi)}=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=f(x)$ бўлгани учун ҳам, бу функция даврий ва даври 2π дир.

Агар $f(x)$ даврий функция бўлса, у ҳолда даврларнинг ичида энг кичиги $f(x)$ нинг энг кичик даври дейилади.

70-теорема. *Агар $f(x)$ функция аниқланиш соҳасида $T(T>0)$ даврга эга бўлса, у ҳолда T га каррали kT, $k \in \boldsymbol{Z}$ сон ҳам унинг даври бўлади.*

Исботи. Аввал $f(x)$ нинг аниқланиш соҳасидан олинган ихтиёрий x ва $k \in \boldsymbol{N}$ учун $x+kT$ ва $x-kT$ лар унинг аниқланиш соҳасига тегишли эканини кўрсатамиз. Бунинг учун $k=n$ да бу шарт ўринли, яъни $(x+nT)$ ва $(x-nT)$ нуқталар T даврли $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлсин, дейлик. У ҳолда $f(x)$ функция T даврли бўлгани учун 60-таърифга асосан $f(x+nT)=f(x)$ бўлиб, $[(x+nT)+T]$ ва $[(x-nt)-T]$ лар ёки $[x+(n+1)T]$ ва $[x-(n+1)T]$ лар $f(x)$ нинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлади. Энди $f(x)=f(x+kT)$ ёки $f(x)=f(x-kT)$, $k \in \boldsymbol{Z}$ эканини кўрсатамиз.

Бунинг учун k бўйича индукцияни қўллаймиз. Агар $k=1$ бўлса, $f(x)=f(x+T)$ ва $f(x)=f(x-T)$ бўлиб, 60-таърифга асосан $f(x)$ даврий экани маълумдир. Теорема $k=n$ учун ўринли деб, $k=n+1$ учун ўринли эканини кўрсатамиз. $f(x+nT)+T)=f(x+nT)=f(x)$ ёки $f(x-(n+1)T)=f((x-nt)-T)=f(x-nT)=f(x)$ бўлади. Бундан $k=n+1$ учун ҳам ўринли экани келиб чиқади. Демак, $f(x)=f(x+kT)$, $k\in Z$ бўлиб, шу билан теорема исбот бўлди.

Мисол. $f(x)=\operatorname{tg} x$ функциянинг энг кичик даври π бўлса, $n\pi$ ҳам унинг даври эканини кўрсатинг.

Ечиш. Шартга асосан $T=\pi$ бўлиб, $f(x+T)=\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x=f(x)$. Бундан 60-таърифга асосан $f(x)=f(x+T)=f((x+T)+T)=f(((x+T)+T)+T)=\ldots=f((\ldots(x+T)+T)+\ldots+T)=f(x+nT)=f(x+n\pi)$.

V. Функциянинг узлуксизлиги. Берилган $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси X дан олинган қийматлар кетма-кетлиги $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ ни ва бирор a нуқтани қарайлик.

Маркази a нуқтада бўлган ихтиёрий $(a-\delta, a+\delta)$ очиқ оралиқ a нинг δ-*атрофи* дейилади. Агар a нуқтанинг δ-атрофида X нинг a дан фарқли x нуқталари мавжуд бўлса, a нуқта X нинг *қуюқлик нуқтаси* дейилади.

$f(x)$ функция X соҳада берилган ва a қуюқлик нуқтаси бўлсин.

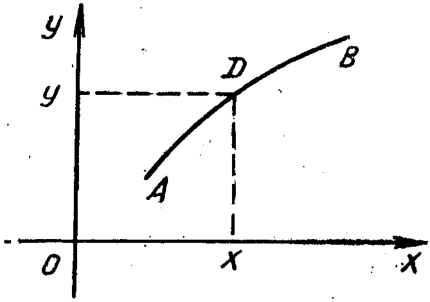
61-таъриф. *Агар* $\varepsilon>0$ *сон учун шундай* $\delta>0$ *сон топилсаки,* $|x-a|<\delta$ бўлганда $|f(x)-A|<\varepsilon$ бўлса, *у ҳолда* x аргумент a *га интилганда функция* A *сонга тенг лимитга эга дейилади ва* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ *билан белгиланади.*

Маълумки, a нуқта X нинг чап $(a-0)$ ёки ўнг $(a+0)$ қуюқлик нуқтаси бўлиши мумкин, у ҳолда 61-таърифни $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$ ёки $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$ орқали ифодалаб, мос равишда A сон $f(x)$ нинг *чап ёки ўнг лимити* деб айтилади.

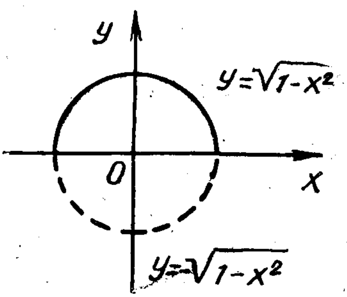
Функциянинг x аргумент x_0 га интилгандаги $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ лимити ҳақида сўз борганда x аргумент x_0 қийматни қабул қилмаслигини, ёки бу қиймат ҳатто функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлмаслигини ёки тегишли бўлса ҳам, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ни ҳосил қилишда $f(x_0)$ ни ҳисобга олмаслик мумкин эканлигини қайд қилиш жоиздир. Бу ерда айни шу $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ бўлган ҳол аҳамиятга эгадир.

Бирор x_0 қуюқлик нуқтасига эга бўлган X соҳадаги $f(x)$ функцияни қарайлик. Бу x_0 нуқтада функция тайин $f(x_0)$ қийматга эга бўлсин.

62-таъриф. 1. *Агар* $f(x)$ *функция* x_0 *қуюқлик нуқтасига эга бўлган* X *соҳада аниқланган бўлиб,* $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ *бўлса, у ҳолда* $f(x)$ *функция*



15- расм.



16- расм.

x_0 *нуқтада узлуксиз дейилади.*

2. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ нинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, у ҳолда у шу кесмада узлуксиз дейилади.*

Мисол. $f(x)=x^2$, $f(x)=\sin x$ функциялар ўзларининг аниқланиш соҳасида узлуксиздир.

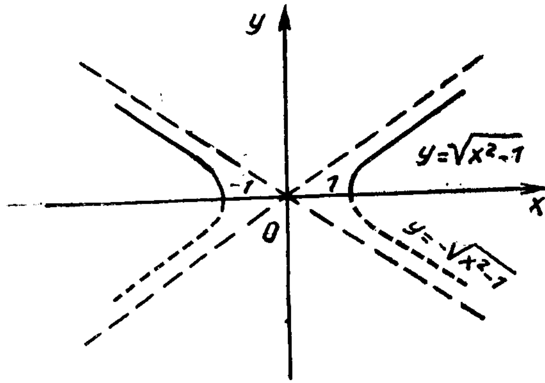
VI. Функциянинг графиги. Математикада кўп ҳолларда функцияни график ҳолатда берилмаса-да, лекин уни график тасвирлашга ҳар вақт интилинади. График жуда аён ва кўргазмали бўлгани учун функциянинг хоссаларини текширишда бебаҳо ёрдамчи қурол хизматини ўтайди. Бирор $y=f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси X сонли тўпламдан иборат бўлсин ҳамда xOy координата текислиги (15-расм) берилган бўлсин; x ва y нинг бир-бирига мос бир жуфт қийматини олайлик, бундай жуфтликнинг xOy текисликдаги образи $D(x, y)$ нуқтадир, x ўзгарувчи ўзининг оралиғида ўзгарганда бу D нуқта бирор AB чизиқни чизади. Бу чизиқ $f(x)$ функциянинг геометрик образи бўлиб, *функциянинг графиги* дейилади ва $y=f(x)$ ёки $F(x, y)=0$ тенглама *AB чизиқнинг тенгламаси* дейилади. Масалан, 16- ва 17-расмларда

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}\,,\quad |x|\leqslant 1$$

ва

$$y=\pm\sqrt{x^2-1}\quad |x|\geqslant 1$$

функцияларнинг графиклари тасвирланган.



17- расм.

Функциянинг графигини тақрибан ясаш учун x га турли қийматлар бериб, $y = f(x)$ формула ёрдамида y нинг мос қийматларини топамиз, яъни

$$\begin{array}{c|cccccc} x & x_0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ \hline y & y_0 & y_1 & y_2 & \ldots & y_n & \ldots \end{array}$$

ва чизмада (x_0, y_0), (x_1, y_1), . . . нуқталарни ясаймиз. Натижада бу нуқталарни силлиқ чизиқ билан туташтирсак, изланган чизиқнинг тақрибий графигини ҳосил қиламиз. График нақадар оҳисталиқ, эътибор билан чизилса ва ундаги нуқталар нақадар зичроқ олинган бўлса, чизилган чизиқ $f(x)$ функция графигининг шу қадар аниқ нусхасини беради. Маълумки, функциянинг геометрик образини ҳар вақт тасаввур этишимиз мумкин бўлса-да, лекин бу образ ҳар вақт ҳам бевосита билиш маъносида тушунилган чизиқдан иборат бўлавермайди.

Бу юқоридаги келтирилган тушунчаларга суянган ҳолда $y=f(x)$ функцияни содда текшириш мақсадида қуйидаги саволларга жавоб топиш унинг графигини чизишда муҳимдир:

а) аниқланиш соҳасини топиш;
б) ўзгариш соҳасини топиш;
в) чегараланганлигини аниқлаш;
г) даврий — давриймаслигини аниқлаш;
д) жуфт ва тоқлигини аниқлаш;
е) ўсиш ва камайиш оралиқларини аниқлаш;
ж) координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини аниқлаш;
з) графигини ясаш.

Функцияни содда текширишда шу саволларга жавоб топилса, у ҳолда унинг графигини xOy текисликдаги ҳолатини аниқ ва кўрсатмалик асосида геометрик тасвирини ясаш имкониятига эга бўламиз.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

1. $y = x^3 + 1$ функция учун $f(0)$, $f(0{,}2)$, $f(0{,}5)$, $f\left(-\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$, $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, $x \neq 1$; $f\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$, $x \neq 0$, $2f(x) - f(2x) + f\left(\frac{x}{3}\right)$ ни топинг.

2. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ функциядан фойдаланиб, $f(1-a) - f(a-1) = 0$ тенгламани ечинг.

3. $f(x) = x^2 - 3x$ функциядан фойдаланиб, $f(t-2) + f(3-t) \geqslant 0$ тенгсизликни ечинг.

4. Берилган:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{агар } x \geqslant 1 \text{ бўлса}, \\ 1, & \text{агар } x < 1 \text{ бўлса}, \end{cases}$$

$f(-8)$, $f(1)$, $f(4)$ ни топинг.

5. Қуйидаги функцияларнинг ўсувчи ва камаювчи эканини аниқланг: $f(x) = x + 1$, $f(x) = 4 - x$, $f(x) = 3x$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

6. Қуйидаги функцияларнинг жуфт ва тоқлиги ҳамда ўсиш ва камайиш оралиқларини аниқланг: $f(x) = 3x^2 - 1$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $f(x) = |x|$, $f(x) = |x - 1|$, $y = 2^{x^3}$, $y = 2^x - 1$.

7. $f(x) = x^2$ функциянинг даврий эмас эканини исботланг.

8. $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \cos x}$ функция даврий бўлса, унинг махражини нолга айлантирувчи нуқталар чексиз кўп эканлигини исботланг.

9. Агар функция $x^2 + y^2 = 25$ ошкормас ҳолда берилган бўлса, у ҳолда уни параллел кўчириш натижасида $(x-1)^2 + (y+3) = 25$ функция ҳосил бўлиши мумкин эканлигини исботланг.

10. $x^2 + y^2 - 5x + 3y + 7{,}5 = 0$ тенглама айлана тенгламаси эканини исботланг ва унинг геометрик тасвирини ясанг.

11. $y = f(x)$ функция графиги $-1 \leqslant x \leqslant 1$ да берилган бўлса, у ҳолда $T = 2$ давр бўйича уни давом эттиринг.

12. Агар $2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x-1}$; $x\neq 0$, $x\neq 1$ берилган бўлса, $f(x)$ ни топиш мумкинми (асосланг)?

4-§. ТЕСКАРИ ФУНКЦИЯ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Математикада берилган функцияга тескари функциянинг мавжудлик масаласи унинг бошқа масалалари қатори муҳим аҳамиятга эгадир. $y=f(x)$ функция бирор X соҳада берилган бўлсин ва x аргумент X соҳада ўзгарганда бу функция қабул қилган барча қийматлар тўпламини Y билан ифодаласак, у ҳолда Y соҳадаги $y=y_0$ учун X соҳада $x=x_0$ қиймат топиладики, бу қийматда $y=f(x)$ функция учун $f(x_0)=y_0$ бўлади. Шундай қилиб, y нинг Y соҳадан олинган ҳар бир қийматига x нинг битта ёки бир нечта қийматлари мос келади, шу билан Y соҳада бир қийматли ёки кўп қийматли $x=\varphi(y)$ функция аниқланиб, у $y=f(x)$ функцияга тескари деб қаралади.

Мисоллар. 1. $y=a^x$, $a>1$ функция $X=R$ да ўзгаради, унинг қийматлари соҳаси $Y=(0;\ +\infty)$ оралиқ бўлади, шу билан бирга бу оралиқдаги ҳар бир y га X дан биргина $x=\log_a y$ мос келади. Бу ҳолда тескари функция бир қийматлидир.

2. $y=x^2$ функция учун x аргумент $X=\boldsymbol{R}$ да ўзгарса, $y\in Y=[0;\ +\infty)$ да ўзгаради. Бунда Y соҳадан олинган ҳар бир y учун x нинг иккита қиймати мос қўйилади: $x=\pm\sqrt{y}$. Бунда тескари функция икки қийматлидир. Шунинг учун $y=x^2$ функцияга тескари функция изланаётганда аргументнинг шундай қийматлар соҳаси топилгани мақбулки, бунда x нинг ҳар бир қийматига y нинг аниқ биттадан ортиқ бўлмаган қиймати мос келсин, яъни: $\forall x_1, x_2\in X: x_1\neq x_2\Rightarrow f_1(x_1)\neq f(x_2)$ бўлсин, ана шу соҳага мос тескари функцияни излаш мақсадга мувофиқдир.

$f(x)=x^2$ функцияга $x\in(-\infty;\ 0]$ оралиқда тескари функция $x=-\sqrt{y}$, $x\in(0;\ +\infty)$ оралиқда эса тескари функция $x=\sqrt{y}$ бўлади.

63-таъриф. *Агар берилган $y=f(x)$ функция аниқланган соҳадан ихтиёрий иккита ҳар хил қийматга функциянинг ҳар хил қиймати мос келса, у ҳолда $f(x)$ функция тескариланувчи функция дейилади ва уни $x=g(y)=f^{-1}(y)$ орқали белгиланади.*

$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ ёки, жуфтлик тарзида ифодаласак, $(x,\ y)\in f\Leftrightarrow(y,\ x)\in f^{-1}$ бўлади.

Мисоллар. 1. $f = \{(x, y) \in \boldsymbol{R} \times R_+ \mid y = 2^x\}$ функцияга тескари функция $f^{-1} = \{(y, x) \in \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R} \mid x = \log_2 y\}$ бўлади.

2. $f = \{(x, y) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \times [-1; 1] \mid y = \sin x\}$ функцияга тескари функция $f^{-1} = \{(y, x) \in [-1; 1] \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \mid x = \arcsin y\}$ бўлади.

71-теорема. *Агар $y = f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада монотон ўсувчи ёки камаювчи бўлса, у шу соҳада тескариланувчидир.*

Исботи. $y = f(x)$ функция $[a, b]$ да ўсувчи бўлсин, у ҳолда ихтиёрий $x_1, x_2 \in [a, b]$ учун $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ бўлади. Демак, 63-таърифга асосан $f(x)$ тескариланувчидир. Теореманинг иккинчи қисми ҳам худди шундай исбот қилинади.

Мисол. $f(x) = 10^x$ функциянинг $[-3, 4]$ оралиқда тескариланувчи эканини кўрсатинг.

Ечиш. $f(x)$ функция аргументнинг $[-3, 4]$ соҳасида 10^{-3} дан 10^4 гача ўсади, яъни ихтиёрий $x_1, x_2 \in [-3, 4]$ қийматлар учун $x_1 < x_2$ бўлганда $10^{x_1} < 10^{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ бўлади. Демак, 63-таърифга асосан $f(x) = 10^x$ функцияга тескари функция $f(x) = \lg x$ бўлиб, у $[10^{-3}, 10^4]$ да аниқлангандир.

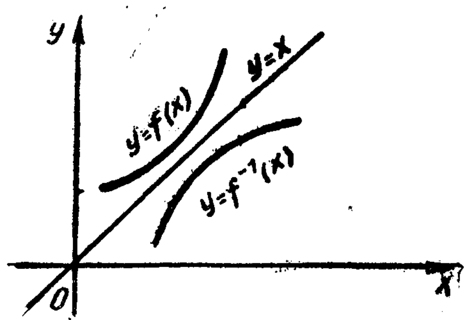
72-теорема. *Агар $y = f(x)$ функция ўзининг аниқланиш соҳасида фақат ўсувчи (камаювчи) бўлса, у ҳолда унга тескари функция ҳам ўсувчи (камаювчи) бўлади.*

Исботи. 71-теоремага асосан $y = f(x)$ аниқланган A соҳада $f(x)$ нинг $y_1 < y_2$ бўлган ихтиёрий икки қиймати бўлса, $f(x_1) < f(x_2)$ бўлиб, $x_1 < x_2$ бўлади. $y = f(x)$ функция инъектив эканлигидан ва 63-таърифга асосан $x = f^{-1}(y)$ мавжуд бўлиб, $y_1 < y_2 \Rightarrow x_1 < x_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ бўлади. Демак, $y = f(x)$ функцияга тескари функция ҳам ўсувчи (камаювчи) бўлади.

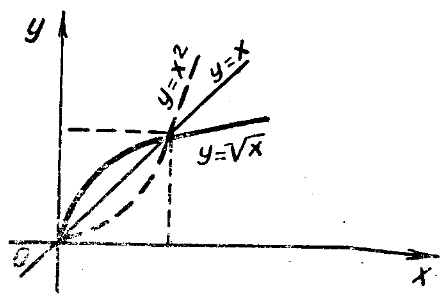
Амалиётда $y = f(x)$ функциянинг графиги бўйича унга тескари $x = f^{-1}(y)$ функциянинг бир қийматлими ёки йўқлигини тушуниш осондир. Чунончи Ox ўққа параллел бўлган тўғри чизиқ графикни фақат битта нуқтада кесса, у ҳолда тескари функция бир қийматли, акс ҳолда кўп қийматли бўлади.

Мисоллар. 1. $y = 3x - 2$ функцияга тескари функция мавжудлигини ва уни аналитик ифодасини кўрсатинг.

Ечиш. $y=3x-2$ чизиқли функция ва $D(y)=\boldsymbol{R}$ ва $E(y)=\boldsymbol{R}$ бўлиб, $\forall x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}: x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 - 2 < 3x_2 - 2 \Rightarrow y_1 < y_2$ эканидан функция $\boldsymbol{R}$ да ўсувчи. Энди бунга тескари функцияни излаш учун $y=3x-2$ тенгламани x га нисбатан ечамиз, яъни $x=\frac{1}{3}(y+2)$ ҳосил бўлади. Маълумки, $y=3x-2$ ва $x=\frac{1}{3}(y+2)$ функциялар xOy координаталар текислигида биргина нуқталар тўпламини ташкил қилади. Шунинг учун ҳам $y=f(x)$, $x \in X$ функциядан унга тескари $x=f^{-1}(y)$, $y \in Y$ функцияга ўтишда X ва Y тўпламларнинг ролларини ўзгартирамиз. Одатда $x=f^{-1}(y)$ нинг ўрнига $y=f^{-1}(x)=g(x)$ кўринишда ёзилади. Натижада $y=f(x)$ тенгликни (x_0, y_0) нуқта қаноатлантирса, у ҳолда $y=f^{-1}(x)$ тенгликни (x_0', y_0') жуфтлик қаноатлантиради. Демак, (x_0, y_0) ва (x_0', y_0') нуқталар xOy координаталар текислигида $y=x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик жойлашган нуқталардир. Бундан $y=f(x)$ ва $y=f^{-1}(x)$ функцияларнинг графиклари қаралаётган оралиқда $y=x$ функция графигига нисбатан симметрик жойлашган бўлар экан (18-чизма). Бу юқоридаги мулоҳазалардан кўриниб турибдики, масала Ox ва Oy ўқларнинг ролларини алмаштиришдан иборат бўлгани сабабли, буни бажариш учун xOy текисликни биринчи координат бурчаги биссектрисаси атрофида 180° га айлантириш кифоядир.



18- расм.



19- расм.

2. $y = x^2$ функцияга $x \in [0;\ +\infty)$ да тескари функцияни топинг ва графигини ясанг.

Ечиш. $y = x^2$ функция $x \in [0;\ +\infty)$ да монотон ўсувчи, яъни $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 < y_2$ бўлади. Бу оралиққа мос равишда $y \in [0;\ +\infty)$ да ўзгаради. Демак, $y = \sqrt{x}$ функция $y = x^2$ функцияга $x \in [0;\ +\infty)$ да тескари функция бўлади. Бундан $y = \sqrt{x}$ деб ёзиб, унинг графигини (19- чизма) $y = x^2$ нинг $x \in [0;\ +\infty)$ даги шохчасини $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик кўчириш натижасида ҳосил қиламиз.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

1. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:
а) $y = x^3 - x^2$; б) $y = \sqrt[3]{x-3}$; в) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$;
г) $y = \dfrac{1}{x^2+2}$; д) $y = \log_2(x^3 - 2x^2 + 1)$; е) $y = 2^{\sqrt{x-1}}$.

2. Қуйидаги функцияларнинг ўзгариш соҳасини топинг:
а) $y = x^2 - 1$; б) $y = \sqrt[3]{4-x}$; в) $y = \sqrt{x^2 - x}$;
г) $y = \lg(x-3$; д) $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$; е) $y = 2^{\log_2 x}$.

3. Қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг:
а) $y = x^2 + 1$; б) $y = \sqrt{x^2 - 1}$; в) $y = ||x| - 1|$;
г) $y = 2^{x-1}$; д) $y = \log_2(x^2 - 4x + 3)$; е) $|y| = |x| - 1$.

4. Қуйидаги функцияларга қаралаётган оралиқда тескари функция мавжудми? Бир қийматлими? Графигини ясанг:
а) $y = 2x^2 - 1$; $x \in [0;\ +\infty)$; б) $y = 3x^2 - 2$, $x \in [-3;\ 3]$;
в) $y = \sqrt{x^2 - 1}$, $x \in (-\infty;\ -1]$; г) $y = \sqrt{1 - x^2}$,
$x \in [-1;\ 0)$; д) $y = \log_2(x-1)$, $x \in (1;\ +\infty)$;
е) $y = 2^{x+1}$, $x \in (-10;\ 3)$.

5- §. ФУНКЦИЯЛАРНИНГ КОМПОЗИЦИЯСИ

Математикада функция тушунчасини ўрганиш бевосита функциялар композицияси тушунчасини ўрганишга олиб келади.

64-таъриф. *Агар $f: X \to Y$ ва $\varphi: Y \to Z$ бўлиб, $\psi: X \to Z$ бўлса, у ҳолда ψ функция φ ва f функцияларнинг композицияси дейилади ва $\psi = \varphi \circ f$ орқали белгиланади.*

Мисоллар. 1. $x \xrightarrow{f} (x+1) \xrightarrow{g} (x+1)^2 \Rightarrow (g \circ f)(x) = z = (x+1)^2$.

2. $x \xrightarrow{g} x^2 \xrightarrow{f} x^2 + 1 \Rightarrow (f \circ g)(x) = t = x^2 + 1$.

73-теорема. *f ва φ функцияларнинг композицияси*

1) $D(f\circ\varphi)=\{x\,|\,\varphi(x)\in D(f)\}$;

2) $\forall x\in D(f\circ\varphi)$ учун $(f\circ\varphi)(x)=f(\varphi(x))$;

3) $f\circ\varphi=\{(x,\ f(\varphi(x)))\,|\,\varphi(x)\in D(f)\}$

шартларни қаноатлантирувчи функция бўлади.

Исботи. Функциялар композицияси муносабатлар композицияси сифатида тушунилади. Шунинг учун $f\circ\varphi$ композиция бундай $(x,\ y)$ жуфтликларнинг шундай z учун бир вақтда $(x,\ z)\in\varphi$ ва $(z,\ y)\in f$ ларда бажарилишини таъминлайди, яъни

$$f\circ\varphi=\{(x,\ y)\,|\,\exists z((x,\ z)\in\varphi\wedge(z,\ y)\in f)\}.$$

Теореманинг шартига кўра φ функция $(x,\ z)\in\varphi$ га асосан $x\in D(\varphi)$ ва $z=\varphi(x)$ ҳамда f функция $(z,\ y)\in f$ эканлиги дан $z\in D(f)\Leftrightarrow\varphi(x)\in D(f)$ ва $y=f(z)=f(\varphi(x))$ бўлади. Бундан $D(f\circ\varphi)=\{x\,|\,\varphi(x)\in D(f)\}$ экани келиб чиқади. Шу билан бирга $(x,\ y)\in f\circ\varphi\Leftrightarrow y=f(\varphi)\wedge\varphi(x)\in D(f)$ эканлигидан бевосита $f\circ\varphi=\{(x,\ f(\varphi(x)))\,\varphi(x)\in D(f)\}$ бўлиши келиб чиқади. Демак, $f\circ\varphi$ композиция шу учта шартни қаноатлантирувчи $y=f(\varphi(x))$ функция бўлар экан.

Натижа. *Берилган f ва φ функциялар композицияси ўрин алмаштириш хоссасига эга эмас*, яъни $\forall f,\ \varphi\in\Phi$: $:f\circ\varphi\neq\varphi\circ f$.

Бу натижанинг исботи бевосита юқорида келтирилган мисолда $z\neq t\Leftrightarrow(x+1)^2\neq x^2+1$ эканлигидан келиб чиқади.

74-теорема. *Агар $f,\ \varphi,\ g\in\Phi$ бўлиб, $f:X\to Y,\ \varphi:Y\to$ $\to Z$ ва $g:Z\to T$ бўлса, у ҳолда* $[(g\circ\varphi)\circ f](x)=[g\circ(\varphi\circ$ $\circ f)](x)$ бўлади.

Исботи. Юқорида кўриб ўтилган $(x,\ y)\in f\circ\varphi\Leftrightarrow\exists z((x,$ $z)\in\varphi\wedge(z,\ y)\in f)\Leftrightarrow\exists z(x\varphi z\wedge zfy)$ хоссаларга асосан $x[(g\circ$ $\circ\varphi)\circ f]t\Leftrightarrow\exists y(xfy\wedge y(g\circ\varphi)t)\Leftrightarrow\exists y\exists z(xfy\wedge y\varphi z\wedge zgt)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\exists z\exists y((xfy\wedge y\varphi z)\wedge zgt)\Leftrightarrow\exists z(x(\varphi\circ f)z\wedge zgt)\Leftrightarrow x[g\circ(\varphi\circ f)]t$.

Демак, функциялар композицияси $[g\circ(\varphi\circ f)](x)=[(g\circ$ $\circ\varphi)\circ f](x)$ гуруҳлаш хоссасига эга экан.

Мисол. $x\xrightarrow{f}x^2\xrightarrow{\varphi}x^2+1\xrightarrow{g}\ln(x^2+1)\Rightarrow[g\circ\varphi\circ f](x)=$ $=\ln(x^2+1)$ бўлиб, $x\xrightarrow{f}x^2\xrightarrow{g\circ\varphi}\ln(x^2+1)$ ёки $x\xrightarrow{\varphi\circ f}x^2+1$ $\xrightarrow{g}\ln(x^2+1)$ эканидан $[(g\circ\varphi)\circ f](x)=[g\circ(\varphi\circ f)](x)=$ $=\ln(x^2+1)$ келиб чиқади.

Олдинги мавзуда берилган f функция инъектив бўлса, $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ бўлиши ҳақида маълумотга эга бўлган эдик.

75-теорема. *Агар f ва g инъектив функциялар бўлса, у ҳолда $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ бўлади.*

Исботи. Теореманинг шартига кўра f ва g инъектив функциялардир. Олдинги теоремада келтирилган маълумотларга асосан

$$x(g\circ f)^{-1}y \Leftrightarrow y(g\circ f)x \Leftrightarrow \exists z(yfz \wedge zgx) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists z(zf^{-1}y \wedge xg^{-1}z) \Leftrightarrow \exists z(xg^{-1}z \wedge zf^{-1}y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(f^{-1}\circ g^{-1})y$$

бўлади. Демак, $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$ бўлар экан.

$x\in X$ да аниқланган $y = f(x)$ инъектив функция берилган бўлсин дейлик. У ҳолда $y = f(x)$ учун $x\in X$ ва $y\in Y$ шартлар ўринли эканлигидан $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ муносабатларини ёза оламиз. Бундан $\forall x\in X$ учун $f^{-1}(f(x)) \equiv x$ бўлиб, $f^{-1}(f): X\to X$ ни бериши ёки $x = f^{-1}(y)$ дан $f(x) = = y = f(f^{-1}(y))$, $y\in Y$ бўлиб, $f(f^{-1}): Y\to Y$ эканини кўриш мумкин. Бу мулоҳазалардан келиб чиқиб, $y = f(x)$ инъектив функция учун $y = f^{-1}(x)$ функция тескари функция бўлса, у ҳолда $(f\circ f^{-1})(x) \equiv x \equiv (f^{-1}\circ f)(x)$ эканини кўриш мумкин. Масалан, $y = x+1$ ва $y = x-1$ функциялар $\boldsymbol{R}$ да ўзаро тескари, $y = 2^x$, $x\in \boldsymbol{R}$ ва $y = \log_2 x$ функциялар $x\in(0; +\infty)$ да ўзаро тескари функциялардир.

Мисол ва масалалар ечиш

1. Агар $f(t) = 2t^2$ ва $t = g(x) = \sin x$ бўлса, у ҳолда $D(f)$ ни топинг.

Ечиш. $f(t) = f(g(x)) = 2\sin^2 x$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда $D(f) = R$ бўлади. Юқорида келтирилган мисолдан кўриниб турибдики, функцияларнинг композицияси ўз навбатида мураккаб функцияни ҳосил қилар экан.

2. Агар $f(x+1) = x^2+2x+2$ ва $f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x\neq 0$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ ни топинг.

Ечиш. 1. $f(x+1) = x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1$, бундан $x+1$ ни x билан алмаштирамиз, у ҳолда $f(x) = x^2+1$.

2. $f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^2+\frac{1}{x^2}+2-2 = x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-2 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$, демак, бундан бевосита $f(x) = x^2-2$ экани келиб чиқади.

3. $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ шартни қаноатлантирувчи содда функцияларни топинг.

Ечиш. Изланаётган функцияни $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ кўринишда излаймиз, у ҳолда $f(x+y)=a^{x+y}=a^x\cdot a^y$ бўлади. $f(x)=a^x$; $f(y)=a^y$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда $f(x+y)=a^{x+y}=a^x a^y=f(x)\cdot f(y)$ бўлиб, берилган тенгликни қаноатлантиради. Демак, берилган тенгликни қаноатлантирувчи энг содда функция $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ бўлар экан.

4. Агар $f(x)$ функция $[0;\ 1]$ да берилган бўлиб, $f(0)=f(1)=0$ ва $\forall x_1, x_2\in[0;\ 1]$ учун $f\,\frac{(x_1+x_2)}{2}\leqslant f(x_1)+f(x_2)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[0;\ 1]$ да чексиз кўп ноль қийматларга эришишини исботланг.

Исботи $[0;\ 1]$ дан олинган x_1 ва x_2 учун $x_1=x_2$ бўлсин, у ҳолда $f(x_1)\leqslant 2f(x_1)$ бўлиб, $f(x_1)\geqslant 0$ бўлади. Агар $x_1=0$ ва $x_2=1$ бўлса, у ҳолда берилган шартга асосан $0\leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant f(0)+f(1)=0$ бўлиб, $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ бўлади. Ҳосил қилинган натижага индукция усулини татбиқ қилиб. $n=k$ да $f\left(\frac{1}{2^k}\right)=0$ бўлсин десак, у ҳолда у $n=k+1$ да ҳам бажарилишини кўрсатамиз, яъни: $0\leqslant f\left(\frac{1}{2^k+1}\right)=f\left(\frac{0+1}{2^{k+1}}\right)\leqslant f(0)+f\left(\frac{1}{2^k}\right)=0$, демак, $f\left(\frac{1}{2^k+1}\right)=0$ бўлади. Демак, $f\left(\frac{1}{2^k}\right)=0$ эканини ёза оламиз. Шу билан айтилган фикр исбот қилинди.

5. Агар $f\colon R\to R$ ва $x, y\in R$ учун $f(x)\leqslant x$ ва $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$ бўлса, у ҳолда $f(x)\equiv x$ бўлишини исботланг.

Исботи. Шартга кўра $f\colon R\to R$ эканидан $x=y=0$ бўлсин, у ҳолда $f(0)\leqslant 2f(0)$ бўлиб, бундан $f(0)\geqslant 0$ ва $f(0)\leqslant 0$ эканидан $f(0)\equiv 0$ бўлади. $\forall x\in R$ учун $y=-x$ бўлсин дейлик, у ҳолда $f(x)\geqslant f(x+(-x))-f(-x)\equiv -f(-x)\geqslant x$ бўлиб, $f(x)\geqslant x$ ва $f(x)\leqslant x$ эканидан $f(x)\equiv x$ экани келиб чиқади. Шу билан фикр исботланади.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

1. Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи содда функцияларни топинг:

а) $f(x+y)=f(x)+f(y)$; б) $f(xy)=f(x)f(y)$;
в) $f(xy)=f(x)+f(y)$.

2. Берилган функциялардан $f(x)$ ни топинг:

а) $f(x+1)+f(x+2)=2x+3$; б) $f(\sin x)+f(\cos x)=3$;

в) Агар $f(x)=\cos x,\ x\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ бўлса,

1) $f(2x)=2f^2(x)-1$; 2) $f\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+f(x)}{2}}$ ни исботланг;

г) $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x,\ x\in R\setminus\{0\}$;

д) $(x-1)f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x-1},\ x\in(0;\ 1)$;

е) $2f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2,\ x\in R\setminus\{0\}$;

ж) $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x,\ x\in(-1;\ 1)$.

3. Агар $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ функцияда $a\neq b\neq 0$ бўлиб, у $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ ҳақиқий қийматларда нолга айланса, у ҳолда $f(2)\geqslant 27$ бўлишини исботланг.

4. $f:R\to R$ бўлиб, $\forall x,\ y\in R$ учун $(f(x)-f(y))^2\leqslant|x-y|^3$ бажарилса, у ҳолда $f(x)\equiv C$ эканини исботланг.

5. Агар $f(x)$ ва $g(x$ узлуксиз функциялар бўлиб, $f(g(x))\equiv g(f(x))$ бўлса, у ҳолда $f(x)\neq g(x)\Leftrightarrow f(f(x))\neq g(g(x))$ эканини исботланг.

6. Берилган $f:R\to R$; $x,\ y\in R$ учун $xf(y)+yf(x)\equiv(x+y)f(x)f(y)$ шартини қаноатлантирувчи барча $f(x)$ ни топинг.

7 Берилган $f:Z^+\to R$ ва $m,\ n\in Z^+,\ n\geqslant m$ учун $f(n+m)+f(n-m)\equiv f(3n)$ шартни қаноатлантирувчи $f(x)$ ни топинг.

8. Берилган $f:Q\to Q$; $x,\ y\in Q$ учун $f(1)=2$ ва $f(xy)\equiv f(x)f(y)-f(x+y)+1$ шартларни қаноатлантирувчи $f(x)$ ни топинг.

6-§. АСОСИЙ СОДДА ФУНКЦИЯЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

I. Чизиқли функция ва унинг хоссалари.

65-таъриф. *$y=kx+b$ кўринишдаги функция чизиқли функция дейилади. Агар $k=0$ бўлса у ҳолда $y=b$ функция ўзгармас функция дейилади.*

Мисоллар. $y=2x+3$ функция чизиқли бўлиб, $k=2$, $b=3$; $y=-0{,}5x+4$ чизиқли функцияда $k=-0{,}5$; $b=4$ ва ҳоказо.

Агар $y=kx+b$ функцияда $b=0$ бўлса, у ҳолда бундай функция *тўғри пропорционал боғланиш* деб аталади ва у $y=kx$ кўринишда ифодаланади.

Чизиқли функциянинг айрим хоссалари билан танишамиз. Аниқланиш соҳаси R сонли тўпламдан иборат.

76-теорема. *Агар* $f(x) = kx + b$ *чизиқли функция учун:*

а) $k=0$ *бўлса,* $f(x)$ *функция жуфт;* б) $b=0$ *бўлса,* $f(x)$ *функция тоқ;* в) $k \neq 0$, $b \neq 0$ бўлса, $f(x)$ *функция на жуфт ва на тоқ бўлади.*

Исботи. а) $k=0$ бўлса, $f(x) = kx + b = b$, бундан $f(x) = b$ бўлиб, $f(-x) = b$ ва $f(x) = b$ бўлади. Бу тенгликлардан $f(x) = f(-x)$ ни ёза оламиз. Демак, $k = 0$ бўлганда $f(x)$ жуфт функция экан.

б) $b = 0$ бўлсин, у ҳолда $f(x) = kx + b = kx$ бўлади. Бундан $f(-x) = k(-x) = -kx = -f(x)$ бўлиб, демак, $b = 0$ бўлганда $f(x)$ тоқ функция экан.

в) $k \neq 0$ ва $b \neq 0$ бўлса, у ҳолда $f(-x) = k(-x) + b = -kx + b$ бўлиб, $kx + b \neq -kx + b \neq -kx - b$ эканлигидан $f(x) \neq f(-x) \neq -f(x)$ бўлади. Бундан $k \neq 0$; $b \neq 0$ да $f(x)$ функция на жуфт ва на тоқ экани келиб чиқади.

Агар бир вақтда $k = 0$, $b = 0$ бўлса, $f(x) = 0$ бўлади ва бу функцияни жуфт ёки тоқ деб ҳукм қилиш мумкин.

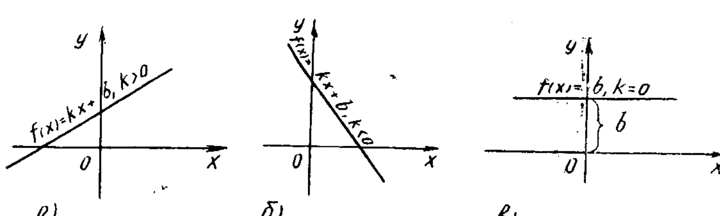
77-теорема. *Агар берилган* $f(x) = kx + b$ чизиқли *функция учун:*

а) $k > 0$ *бўлса,* $f(x)$ *ўсувчи;* б) $k < 0$ *бўлса,* $f(x)$ *камаювчи;* в) $k = 0$ *бўлса,* $f(x)$ *ўзгармас бўлади.*

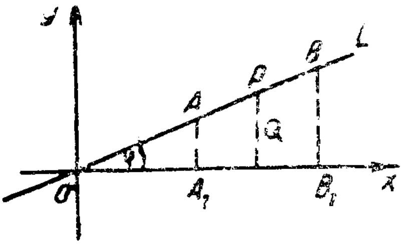
Исботи: $f(x) = kx + b$, $k \neq 0$, $b \neq 0$ берилган бўлсин. $\forall x_1 x_2 \in R$ учун $x_1 < x_2$ бўлсин, у ҳолда $f(x_1) = kx_1 + b$, $f(x_2) = kx_2 + b$ учун $f(x_2) - f(x_1) = k(x_2 - x_1)$ бўлиб, $k(x_2 - x_1)$ нинг ишораси k нинг ишорасига боғлиқ бўлиб қолади.

а) Агар $k > 0$ бўлса, $x_1 < x_2$ учун $k(x_2 - x_1) > 0$ бўлади, бундан $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ бўлади. Демак, $f(x)$ чизиқли функция учун $k > 0$ бўлса, у R да ўсувчи бўлади (20-*а* чизма);

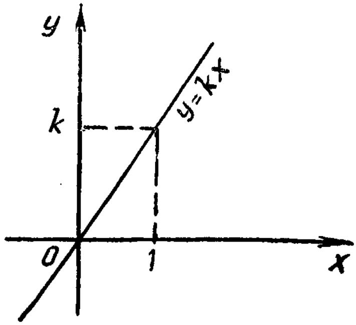
б) Агар $k < 0$ бўлса, $x_1 < x_2$ учун $k(x_2 - x_1) < 0$ эканидан $f(x_2) - f(x_1) < 0 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$ бўлади (20-*б* чизма).



20- расм.



б)



21- расм.

Демак, $f(x)$ чизиқли функция $k < 0$ да камаювчи бўлади;

в) Агар $k = 0$ бўлса, $f(x) = kx + b = b$ бўлиб $f(x) = b$ — ўзгармас бўлади (20- *в* чизма).

78-теорема. $y = kx$ *функциянинг графиги координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқ бўлади.*

Исботи. xOy текисликда координаталар бошидан ва $A(1; k)$ нуқтадан l тўғри чизиқни ўтказамиз. Бу l тўғри чизиқда ётувчи ҳар бир нуқтанинг координаталари $y = kx$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатамиз. Бунинг учун $k > 0$ бўлган ҳолни текшириш билан чегараланамиз. L тўғри чизиқда $B(x, y)$ нуқтани олиб, унинг Ox ўқдаги B_1 проекциясини ҳосил қиламиз. Энди $\triangle OAA_1$ ва $\triangle OBB_1$ учбурчакларнинг ўхшашлигидан $BB_1 : AA_1 = OB_1 : OA_1 \Rightarrow y : k = x : 1 \Rightarrow y = kx$ бўлади. Энди $Q(x', y')$ нуқта L да ётмайди ва унинг координаталари $y = kx$ тенгламани қаноатлантирмайди. Лекин P нуқта L да ётгани учун уннг координаталари $y = kx$ ни қаноатлантиради (21- *а* чизма). Агар берилган L тўғри чизиқ билан Ox ўқи орасидаги бурчакни φ орқали белгиласак, $\varphi = L \wedge Ox$, у ҳолда $AA_1 : OA_1 = \operatorname{tg}\varphi \Rightarrow k : 1 = \operatorname{tg}\varphi \Rightarrow k = \operatorname{tg}\varphi$ бўлиб, одатда, L нинг Ox ўқи билан ташкил этган бурчакни шу тўғри чизиқнинг тангенси деган ном билан ҳам юритилади. Шунинг учун ҳам φ бурчак $k > 0$ бўлганда $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ оралиқда, $k < 0$ бўлганда $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ оралиқда ўзгариши тушунарли бўлса керак. Демак, $y = kx$ функциянинг графиги координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқ бўлади. Бу юқорида келтирилган фикрларга суянган ҳолда $y_1 = k_1x + b_1$ ва

$y_2 = k_2x + b_2$ функцияларнинг графиклари ҳақида қуйидаги фикрларни айтиш мумкин:

1. Агар $k_1 = k_2$ ва $b_1 = b_2$ бўлса, $y_1 = y_2$ устма-уст тушади.

2. Агар $k_1 = k_2$ ва $b_1 \neq b_2$ бўлса, у ҳолда уларнинг графиклари $L_1 \parallel L_2$ бўлади.

3. Агар $k_1 \neq k_2$ бўлса, у ҳолда L_1 ва L_2 кесишади.

4. Агар $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ бўлса, у ҳолда $L_1 \perp L_2$ бўлади.

II. Даражали функциялар ва уларнинг хоссалари

Бу бандда кўриладиган даражали функцияларнинг кўрсаткичи ихтиёрий бутун сон эканлигини олдиндан келишиб оламиз.

66-таъриф. *Ушбу $y = x^\alpha$ кўринишдаги функция даражали функция дейилади.*

Мисоллар. $y = x$, $y = x^2$, $y = x^{10}$, $y = x^{-13}$ ва ҳоказо.

1) $y = x^{2m}$, $m \in N$ бўлсин, у ҳолда:

а) Аниқланиш соҳаси $D(y) = R$;

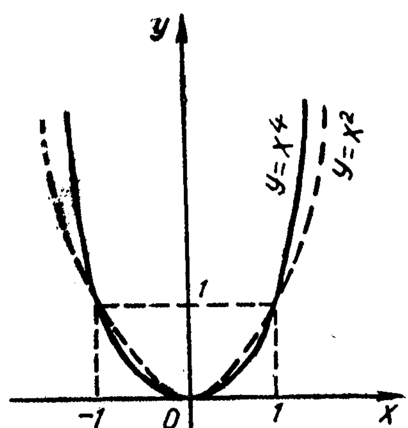
б) Ўзгариш соҳаси $E(y) = [0; +\infty)$;

в) $f(x) = x^{2m}$ учун $f(-x) = (-x)^{2m} = x^{2m} = f(x)$, демак, $f(-x) = f(x)$ жуфт функция;

г) Аргументнинг $(-\infty; 0]$ оралиқдан олинган ихтиёрий $-x_1$, $-x_2$ қийматлари учун $-x_1 < -x_2 \Rightarrow x_1^{2m} > x_2^{2m}$ бўлиб, $-x_1 < -x_2 \Rightarrow f(-x_1) > f(-x_2)$ бўлади. Бунда функция $+\infty$ дан 0 гача камаяди. Аргументнинг $[0; +\infty]$ да олинган ихтиёрий $x_1 < x_2$ қийматлари учун $f(x_1) < f(x_2)$ бўлиб, функция ўсади;

д) $f(x + T) = (x+T)^{2m} \neq x^{2m} = f(x)$ — функция даврий эмас;

е) Функциянинг гра-



22-расм.

фигини ясаш: юқорида келтирилган фактларга таяниб, $y = x^2$ (парабола), $y = x^4$ ва ҳоказо функциялар графигини ясаймиз (22-чизма).

79-теорема. *Жуфт функциянинг графиги ординаталар ўқига нисбатан симметрик бўлади.*

Исботи. Берилган $y = f(x)$ функция теорема шартига кўра жуфт, яъни $f(-x) = f(x)$; (x_0, y_0) нуқта $y = f(x)$ нинг графигида ётадиган ихтиёрий нуқта бўлсин, у ҳолда $y_0 = f(x_0) = f(-x_0)$ бўлиб, $(-x_0; y_0)$ нуқта ҳам $f(x)$ функция графигида ётади. Лекин x_0 ва $-x_0$ қийматлар Ox ўқида координаталар бошига нисбатан симметрик бўлганлиги ва бу қийматларга y_0 қийматнинг мос қўйилишидан (x_0, y_0) ва $(-x_0, y_0)$ нуқталарнинг ординаталар ўқига нисбатан симметриклиги келиб чиқади. Шу билан теорема исбот бўлди.

2) $y = x^{2m+1}$, $m \in N$ бўлса, у ҳолда:

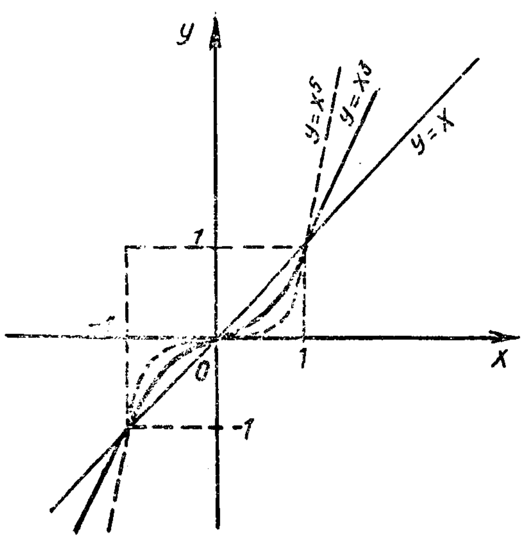
а) Аниқланиш соҳаси $D(y) = R$;

б) Ўзгариш соҳаси $E(y) = R$;

в) Берилган $f(x) = x^{2m+1}$ учун $f(-x) = (-x)^{2m+1} = -f(x)$ бўлади. Демак, функция тоқ;

г) $f(x) = x^{2m+1}$ учун $f(x+T) = (x+T)^{2m+1} \neq x^{2m+1} = f(x)$, демак, $f(x+T) \neq f(x)$ функция даврий эмас;

д) Функция ўзининг бутун аниқланиш соҳасида ўсади:



23- расм.

$$\forall x_1 x_2 \in R : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

е) Юқорида келтирилган маълумотларга таяниб, $y = x$; $y = x^3$; $y = x^5$ ва ҳоказо функциялар учун қийматлар жадвалини тузиб, сўнгра уларнинг графигини ясаймиз (23- чизма). $y = x^3$ нинг графиги *кубик парабола* дейилади.

80-теорема. *Тоқ функциянинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик бўлади.*

Исботи. Теорема шартига кўра $y = f(x)$ функция тоқ, яъни $f(x) = -f(x)$ бўлади. (x_0, y_0) нуқта $y = f(x)$ нинг графигида ётадиган ихтиёрий нуқта бўлсин, у ҳолда $y_0 = f(x_0)$ бўлади. Бунда x_0 ни $-x_0$ билан алмаштирамиз. Натижада $f(-x_0) = -f(x_0) = -y_0$ бўлиб, $(-x_0; -y_0)$ нуқта ҳам $y = f(x)$ функция графигида ётиши маълум бўлди. (x_0, y_0) ва $(-x_0, -y_0)$ нуқталар координаталар бошига нисбатан симметрик эканлигидан тоқ функциянинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик эканлиги келиб чиқади. Шу билан теорема исботланди.

3. $f(x) = x^{-n}$, $n \in N$ бўлса, у ҳолда иккита ҳол юз беради.

I. $f(x) = x^{-2m}$, $m \in N$ бўлсин, у ҳолда:

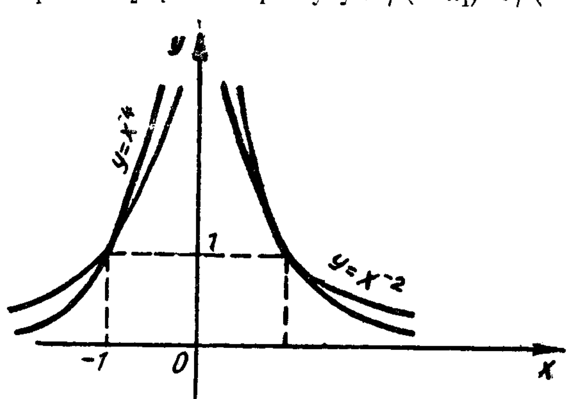
а) Аниқланиш соҳаси $D(f) = R \setminus \{0\}$ ёки

$$D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty);$$

б) Ўзгариш соҳаси $E(f) = (0;\ +\infty)$ бўлади;

в) $f(x) = x^{-2m}$, $m \in N$ учун: $f(-x) = (-x)^{-2m} = x^{-2m} = f(x)$, яъни функция жуфтдир;

г) Аргументнинг $(-\infty;\ 0)$ дан олинган ихтиёрий $-x_1$, $-x_2$, $-x_1 < -x_2$ қийматлари учун $f(-x_1) < f(-x_2)$ бў-



24- расм.

либ, функция ўсади, аргументнинг $(0;\ +\infty)$ оралиқдан олинган ихтиёрий x_1, x_2, $x_1 < x_2$ қийматлари учун $x_1 < x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1^{-1} > x_2^{-1} \Rightarrow x_1^{-2m} > x_2^{-2m} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда шу оралиқда функция камаювчидир;

д) $f(x) = x^{-2m}$ учун $f(x+T) = (x+T)^{-2m} \neq x^{-2m} = f(x)$, демак функция даврий эмас;

е) Бу юқорида келтирилган асосий маълумотларни эътиборга олиб, $y = x^{-2}$, $y = x^{-4}$ ва ҳоказо функциялар учун қийматлар жадвалини тузиб, графиги чизилади (24- чизма).

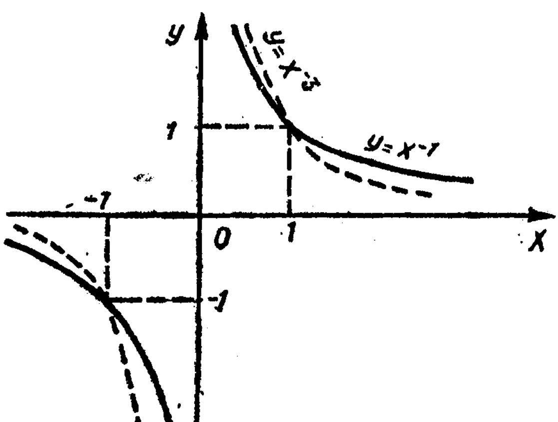
II. $f(x) = x^{-(2m+1)}$ бўлсин, у ҳолда

а) Аниқланиш соҳаси $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty) = R\setminus\{0\}$;

б) Ўзгариш соҳаси $E(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$;

в) Функция қуйидан ҳам, юқоридан ҳам чегараланмаган;

г) $f(x) = x^{-2m-1}$ учун $f(x+T) = (x+T)^{-(2m+1)} \neq$



25- расм.

$\neq x^{-2m-1} = f(x)$, яъни даврий эмас;

д) $f(x) = x^{-(2m+1)}$ учун $f(-x) = -f(x)$, яъни $f(x)$ — тоқ функция;

е) Юқорида келтирилган асосий маълумотларни эътиборга олиб, $y = x^{-1}$, $y = x^{-3}$, $y = x^{-5}$; . . . ; $y = x^{-(2m+1)}$ кўринишидаги функциялар учун қийматлар жадвалини тузиб, графиги (25- чизма) ясалади.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

1. $y = 2x^{-1}$, $y = \frac{1}{x-1}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{(x-1)^2}$, $y = x^2 + x$ функцияларни текширинг.

2. Қуйидаги ошкормас берилган функцияларнинг графикларини ясанг:

$$|x| + |y| = 1; \quad |x| + x^2 + y = 0; \quad |x - 1| + |y| = 1.$$

3. Қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирадиган жуфтликлар ташкил қилган нуқталар тўпламини топинг:

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ y + x < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y > -1; \\ y - 2x < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ y < 2, \\ y = x - 4; \end{cases} \quad \begin{cases} y + 7 > 0, \\ x - y + 1 = 0, \\ 2x - y + 4 < 0. \end{cases}$$

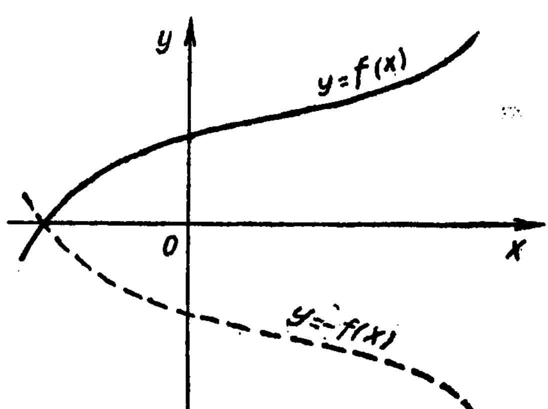
4. Қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг:

$$y = x^2 - x^3; \quad y = 2x^2 + x - 1; \quad y = x\,|x|;$$

$$y = \begin{cases} x^2 + x, & \text{агар } x \leqslant 1 \text{ бўлса,} \\ -x^2, & \text{агар } x > 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

7. §. ФУНКЦИЯ ГРАФИКЛАРИНИ АЛМАШТИРИШ

Математикада функцияларнинг графикларини чизиш учун ҳар доим ҳам жадвал тузиб ўтирмасдан, кўп ҳолларда берилган функциянинг графигини унинг содда кўринишига таянган (масалан, $y = (x + b)^2$ нинг графигини $y = x^2$ нинг графигига таяниб чизиш) ҳолда ясашга ҳаракат қилинади.



26- расм.

1. $y=f(x)$ функциянинг графигига таяниб $y=kf(x)$ нинг графигини ясаш. Бу масалани ҳал қилиш учун k параметрнинг олиши мумкин бўлган қийматлар соҳасини қуйидагича соҳаларга ажратамиз:

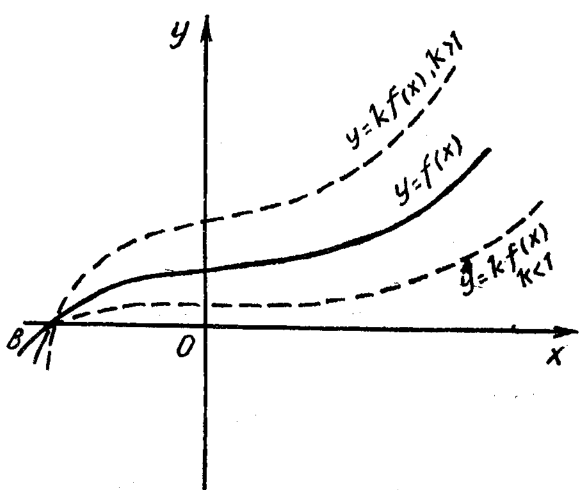
а) $k=1$ бўлганда $y=kf(x)$ функция $y=f(x)$ функция билан устма-уст тушади, бунда масала $y=f(x)$ функциянинг графигини ясаш билан алмаштирилади;

б) $k=-1$ бўлса, у ҳолда $y=kf(x)$ функция $y=-f(x)$ билан алмашади, натижада (x_0, y_0) нуқта $y=f(x)$ нинг графигида ётса, у ҳолда $(x, -y_0)$ нуқта эса $y=-f(x)$ функциянинг графигида ётади. Бундан, $y=f(x)$ функция графигини Ox ўқига нисбатан (26-чизма) симметрик кўчириш натижасида $y=-f(x)$ функция графиги ҳосил бўлади.

в) Агар $0<k<1$ бўлса, $y=kf(x)$ функция (27-чизма) Ox ўқини B нуқтада кесиб, Oy ўқини O ва A нуқталар орасидан кесиб ўтади, агар $-1<k<0$ бўлса, б) ҳолат рўй беради.

г) Агар $k>1$, бўлса, $y=kf(x)$ функциянинг (27-чизма) графиги Ox ўқини $y=f(x)$ каби B нуқтада кесиб, Oy ўқини эса OA нинг давомида, координаталар бошидан $k\cdot OA$ масофада кесиб ўтади, агар $k<-1$ бўлса, шу график Ox ўқига нисбатан симметрик кўчирилади.

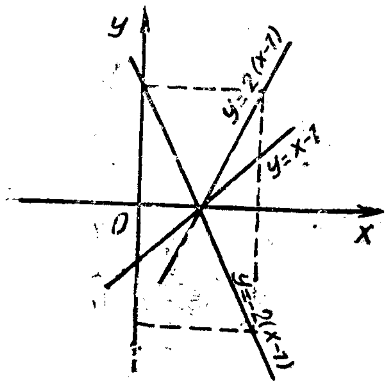
Мисол. $y=x-1$, $y=2(x-1)$, $y=-2(x-1)$,



27-расм.

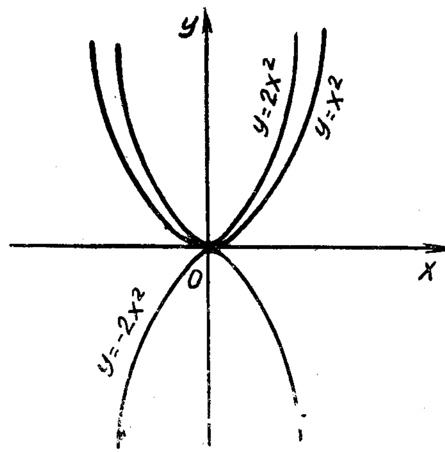
$y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = -2x^2$ функцияларнинг графикларини ясанг.

Ясаш. Берилган $y = x - 1$, $y = 2(x - 1)$, $y = -2(x - 1)$ функциялар учун бошланғич ҳолатни аниқловчи функция сифатида $y = x - 1$ ни қараймиз. $y = x - 1$ функциянинг графиги тўғри чизиқ экани ва у (28- чизма) (1; 0) ва (0; -1) нуқталардан ўтишини билган ҳолда (1, 0) ва (2,2) нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ $y = 2(x-1)$ нинг графиги, (1; 0) ва (2; -2) нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ $y = -2(x - 1)$ нинг графиги экани ойдинлашади.



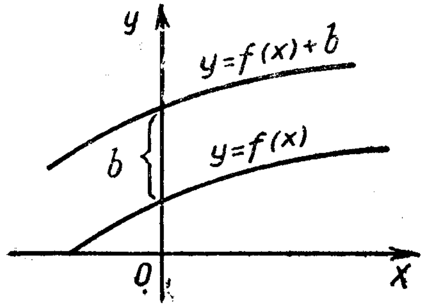
28- расм.

Худди шу услуб билан $y = x^2$ ни билган ҳолда $y = 2x^2$ ва $y = -2x^2$ функциялар графикларини (29- чизма) ясаймиз.



29- расм.

2. $y=f(x)$ функциянинг графигини билган ҳолда $y=f(x)+b$ нинг графигини ясаш. Берилган $y = f(x)$ функциянинг графиги бизга маълум деб қараб, $y = f(x) + b$ функциянинг графигини ясаш ўз навбатида берилган $y = f(x)$ функция графигини Oy ўқи бўйича b масофага параллел кўчириш, демакдир (30- чизма). Шунинг учун ҳам берилган (x_0, y_0) нуқта $y = f(x)$ функциянинг графигида ётса, у ҳолда $(x_0, y_0 + b)$ нуқта $y = f(x) + b$ функциянинг графигига тегишли бўлиши шубҳасиздир. Бу эса (x_0, y_0) нуқ-



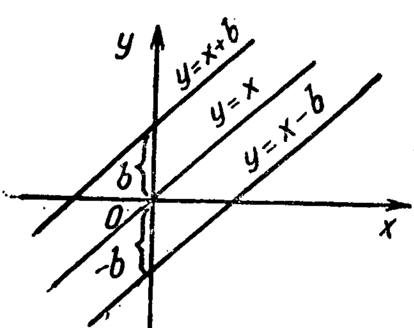
30- расм.

тани $(x_0,\ y_0+b)$ нуқтага ўтказиш берилган нуқтани Oy ўқи бўйича b масофага параллел кўчиришни билдиради. Масалан, $y=x$ нинг графигини 31-чизмада b бирликка параллел кўчирилиши, 32- чизмада $y=x^2$ функциянинг графигини b бирликка параллел кўчирилиши кўрсатилган.

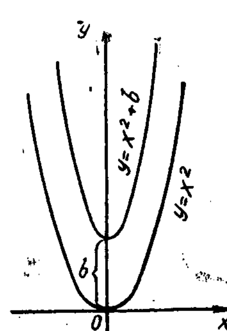
3. $y=f(x)$ функциянинг графигини билган ҳолда $y=f(-x)$ ва $y=f(x+a)$ нинг графигини ясаш. Берилган $y=f(x)$ функция графигида $(x_0,\ y_0)$ нуқта ётсин, яъни $y_0=f(x_0)$ бўлсин, у ҳолда $(-x_0,\ y_0)$ нуқтанинг координаталари $y=f(-x)$ функцияни қаноатлантиради: $y_0=$ $=f(-x_0))=y_0=f(x_0)$. Демак, $y=f(-x)$ функциянинг графигини ҳосил қилиш учун $y=f(x)$ нинг графигини Oy ўқига нисбатан симметрик кўчириш етарлидир.

Мисол. $y=2^x$ га таяниб (33- чизма), $y=2^{-x}$ функциянинг графигини, $y=\log_2 x$ нинг графигига таяниб (34-чизма), $y=\log_2(-x)$ нинг графигини ясаш Oy ўқига нисбатан симметрик кўчириш ёрдамида бажарилади.

Энди $y=f(x)$ функцияга таяниб $y=f(x+a)$ функциянинг графигини ясаш учун бевосита $y=f(x)$ функциянинг гра-



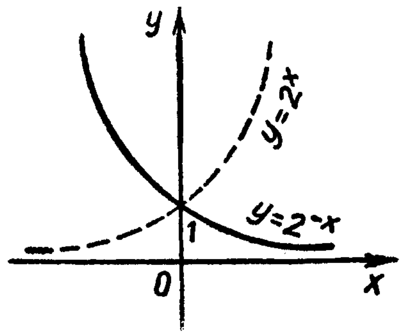
31- расм.



32- расм.

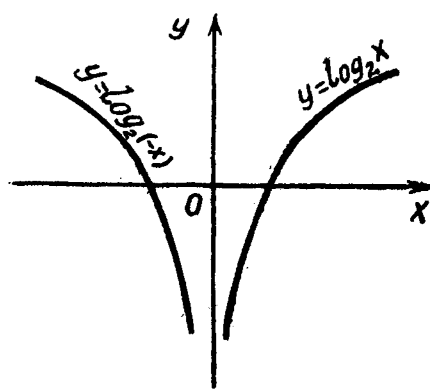
фигини (x_0, 0) нуқтадан $a>0$ бўлса, чапга, $a<0$ бўлса ўнгга суриш кифоядир.

Мисол. $y=x^2$ нинг графигини билган ҳолда $y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$ нинг графигини (35- чизма) ясаш $y=x^2$ нинг графигини $\frac{3}{2}$ бирликка ўнгга суриш билан амалга оширилди.



33- расм.

Берилган функциянинг графигини бундай кўчириш одатда Ox ўқи бўйича параллел кўчириш деб юритилади.



34- расм.

Шундай функциялар ҳам учрайдики, уларнинг графикларини ясашда ҳам ординаталар, ҳам абсциссалар ўқлари бўйича параллел кўчиришга тўғри келади.

4. $y=f(x+a)+b$ функциянинг графигини ясаш. $y=ax^2+bx+c$ квадрат учҳад берилган бўлсин. Бу функциянинг графигини ясаш учун аввал ундан тўлиқ квадрат ажратамиз, яъни $y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$

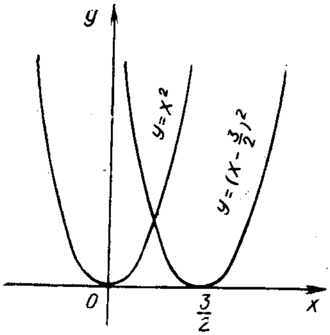
$$=a\left(x^2+\frac{2bx}{2a}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

1) Аниқланиш соҳаси $D(y)=\boldsymbol{R}$;

2) Ўзгариш соҳаси:

а) агар $a>0$ бўлса, $E(y)=\left[-\frac{b^2-4ac}{4a};+\infty\right)$;



35- расм.

б) агар $a<0$ бўлса, $E(y)=\left(-\infty;\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right];$

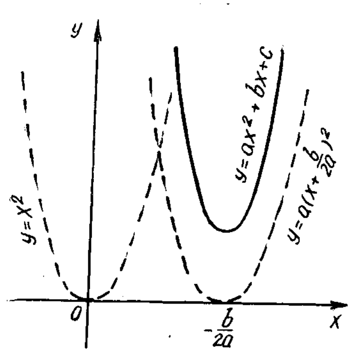
3) $y=ax^2+bx+c$ функция на тоқ ва на жуфт функциядир;

4) а) Агар $a>0$ бўлса, $x\in\left(-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right)$ оралиқда функция $+\infty$ дан $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ гача камаяди, $x\in\left[-\frac{b}{2a};\ +\infty\right]$ да эса функция $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ дан $+\infty$ гача ўсади;

б) Агар $a<0$ бўлса, $x\in(-\infty;\ -\frac{b}{2a}$ оралиқда функция $-\infty$ дан $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ гача ўсади, $x\in[-\frac{b}{2a},\ +\infty)$ да эса функция $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ дан $-\infty$ гача камаяди;

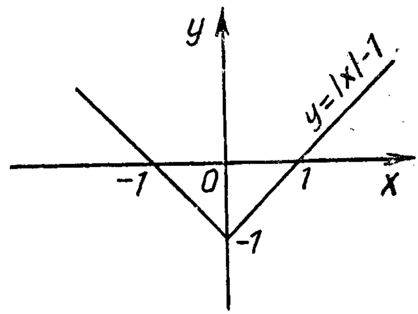
5) $y=ax^2+bx+c$ функция учун $a(x+T)^2+ b(x+T)+c\neq ax^2+bx+c$ бўлгани сабабли функция даврий эмас;

6) Функциянинг графигини $a>0$ учун чизиш билан чегараланамиз. Бунинг учун аввал $y=x^2$ функциянинг (36-чизма) графигини ясаймиз, сўнгра $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ нинг графигини чизиб олиб, уни ординаталар ўқи йўналиши бўйича $-\frac{b^2-4ac}{4a}>0$ масофага параллел кўчирамиз. Натижада ҳосил бўлган график $y=ax^2+bx+c$ функциянинг графиги бўлади. Шундай қилиб, $y=f(x+a)+b$ функциянинг графигини ясашда $y=f(x)$ нинг графигини



36- расм.

аввал Ox ўқи бўйича a бирлик масофага параллел кўчирилади. Натижада изланган график олинади.



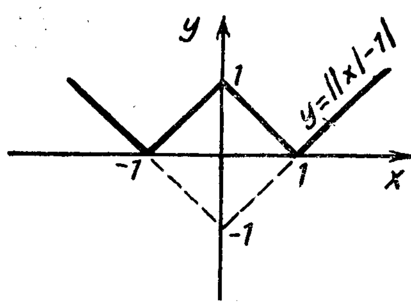
37- расм.

5. $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$ функцияларнинг графикларини ясаш. а) $y = f(|x|)$ функциянинг графигини ясаш учун шуни эътиборга олиш керакки, $x \geqslant 0$ бўлса, $|x| = x$ бўлиб, $y = f(|x|)$ функция $y = f(x)$ билан устма-уст тушади, агар $x < 0$ бўлса, $y = f(|x|) = f(-x)$ бўлиб, $|-x| = |x|$ эканидан $y = f(|x|)$ функция жуфт ва унинг графиги Oy ўқига нисбатан симметрик жойлашади.

Мисол. $y = |x| - 1$ функция графигини ясанг.

Ясаш. $x > 0$ бўлганда $y = |x| - 1$ функция $y = x - 1$ билан алмашинади, $x < 0$ да $y = |x| - 1$ функция $y = -(x+1)$ билан алмашинади. Демак, $y = x - 1$ функциянинг графигини $x \geqslant 0$ учун Oy ўқига нисбатан симметрик кўчириш натижасида (37-чизма) ҳосил бўлган график $y = |x| - 1$ функциянинг графиги бўлади.

б) $y = |f(x)|$ нинг графигини ясашда $f(x) \geqslant 0$ бўлса, $|f(x)| = f(x)$ ва $f(x) < 0$ бўлса, $|f(x)| = -f(x)$ эканидан фойдаланиб қарасак, у ҳолда $f(x) \geqslant 0$ бўлганда $y = |f(x)|$ нинг графиги $y = f(x)$ нинг графиги билан устма-уст тушади, $f(x) < 0$ бўлган оралиқда $y = f(x)$ функциянинг графигини Ox ўқига нисбатан симметрик акслантирсак, у ҳолда $y = |f(x)|$ функциянинг графигини ҳосил қиламиз. 38-чизмада $y = ||x| - 1|$ функция графиги келтирилган:



38- расм.

1. $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{1+x}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Функция иррационал бўлганлиги учун

$\begin{cases} 2-x \geqslant 0, \\ 1+x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 2, \\ x \geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow D(f) = [-1; 2]$

бўлади.

2. $f(x) = \log_2(x^2 - 4x + 3)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Берилган функциядаги ўзгарувчи логарифм ишораси остида бўлганлиги ва мусбат бўлиши шартига асосан: $x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1) > 0$ бўлиб, бундан $D(f) = (-\infty; 1) \cap (3; +\infty)$ келиб чиқади.

3. t нинг қандай қийматида $y = 2x^2 + 7x + t$ функциянинг графиги А $(-10;\ 150)$ нуқтадан ўтади.

Ечиш. A нуқта берилган функциянинг графигида ётиши учун унинг координаталари шу функцияни тўғри тенгликка айлантириши лозим, яъни $150 = 2(-10)^2 + +7(-10)+t \Leftrightarrow 150 = 200 - 70 + t \Leftrightarrow 150 = 130 + t \Leftrightarrow t = 20$. Бундан $t = 20$ бўлганда $y = 2x^2 + 7x + 20$ функциянинг графиги A нуқтадан ўтади.

4. $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x,\ x \neq 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламадан кўриниб турибдики, у $f(x)$ функцияни суперпозициялаш натижасида ҳосил қилинган. Буни ечиш учун x ни $\frac{1}{x}$ билан алмаштирамиз, $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{1}{x}$ ҳосил бўлади. Энди $\begin{cases} 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}, \\ f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x \end{cases}$

системани тузиб, сўнгра биринчи тенгламадан иккинчисини ҳадлаб айирсак, у ҳолда $3f(x) = \frac{2}{x} - x;\ f(x) = \frac{2-x^2}{3x}$ — изланган функция ҳосил бўлади.

Текшириш. $f(x) = \frac{2-x^2}{3x}$ функцияда x ни $\frac{1}{x}$ билан алмаштирамиз, яъни $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x^2-1}{3x}$ ҳосил бўлади, сўнгра топилган натижаларни берилган тенгламага қўйсак, $\frac{2-x^2}{3x} + 2\,\frac{2x^2-1}{3x} = x \Leftrightarrow \frac{2-x^2+4x^2-2}{3x} = x \Leftrightarrow \frac{3x^2}{3x} = x \Leftrightarrow x = x$ бўлади.

Демак, топилган $f(x) = \frac{2-x^2}{3x}$ ечим тенгламанинг илдизи экан.

5. $\begin{cases} f(2x+1)+2g(2x+1)=2x, \\ f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)+g\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=x, \quad x\neq 1 \end{cases}$ системани қаноатлантирувчи $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларни топинг.

Ечиш. Аввал системада қатнашаётган $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар аргументларининг бир хил бўлишига эришамиз. Бунинг учун биринчи тенгламада $2x+1=t \Rightarrow 2x=t-1$ алмаштиришни, иккинчи тенгламада эса $\dfrac{x}{x-1}=z$ алмаштиришни бажарсак,

$$\begin{aligned} &f(t)+2g(t)=t=1, \\ &f(z)+g(z)=\frac{z}{z-1}, \quad z\neq 1 \end{aligned}$$

тенгламалар ҳосил бўлиб, бунда берилган система

$$\begin{cases} f(x)+2g(x)=x-1, \\ f(x)+g(x)=\dfrac{x}{x-1} \end{cases}$$

системага тенг кучли бўлишини кўриш мумкин. Бундан $f(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{1-x}$, $x\neq 1$ ва $g(x)=\dfrac{x^2-3+1}{x}$, $x\neq 1$ ечимларни ҳосил қиламиз.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

1. Қуйидаги функцияларнинг хусусий қийматларини топинг:

а) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}$; $f(0)$, $f(1)$, $f(-3)$;

б) $f(x)=\sqrt{x^3-4x}$; $f(-1)$, $f(2)$, $f(3)$;

в) $f(x)=\dfrac{\sqrt{g-x^2}}{x+1}$; $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$·

г) $f(x)=\dfrac{x}{\cos \pi x}$; $f(0)$, $f(-1)$; $f(100)$.

2. Қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг:

а) $y=2x-1$; $y=x^2+2x-1$; $y=-\dfrac{3}{x+1}$; $y=\dfrac{x+3}{x+2}$, $y=x^3-5$; $y=(x-1)^3-8$; $y=\dfrac{1}{(x-4)^3}+5$; $y=$ $=\dfrac{1}{(x+1)^2}-4$.

б) $y = \begin{cases} 1, \text{ агар } x \leqslant 0 \text{ бўлса,} \\ (x-1)^2, \text{ агар } x > 0 \text{ бўлса;} \end{cases}$

$y = \begin{cases} |x|, \text{ агар } -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ бўлса,} \\ 2 - x^2, \text{ агар } |x| > 1 \text{ бўлса;} \end{cases}$

$y = \begin{cases} 1, \text{ агар } -2 \leqslant x \leqslant -1 \text{ бўлса,} \\ -x, \text{ агар } -1 \leqslant x \leqslant 0 \text{ бўлса;} \\ y = |x+1| - |x-1|; \\ 1, \text{ агар } 0 < x < 1 \text{ бўлса,} \end{cases}$

$y = |1 - |x|| - |x| + 1.$

в) Агар $f_1(x)$, $f_2(x)$ ва $f_3(x)$ функциялар $[a;\ b]$ да аниқланган ҳамда $f_1(x)$, $f_2(x)$ функциялар чегараланган бўлмаса, у ҳолда қуйидаги функцияларнинг чегараланганлиги ҳақида нима дейиш мумкин: $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) + f_3(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x)$ $f_2(x) \cdot f_3(x)$, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, $\frac{f_1(x)}{f_3(x)}$?

3. Қуйидаги функцияларнинг монотонлик оралиқларини топинг:

$$y = 1 - 2x,\ y = x^3,\ y = 3 - 2x - x^2,\ y = \frac{1}{x+1},$$
$$y = \frac{x}{1+x^2},\ y = \frac{x}{1+x+x^2}.$$

4. $y = (x-2)(x+4)$ функциянинг графигидан фойдаланиб, $(x-2)(x+4) > 0$, $(x-2)(x+4) < 0$ тенгсизликларни ечинг.

5. $y = x^2 - 7x - 31$ функциянинг графиги:

а) $A(3;\ -43)$, б) $B(-8;\ 89)$, в) $C(-5;\ -22)$ нуқталардан ўтадими?

6. b нинг қандай қийматида $y = x^2 + bx - 19$ функциянинг графиги $(-11,\ -30)$ нуқтадан ўтади?

7. Агар $y = ax^2 + bx - 48$ функциянинг графиги $(1;\ 2)$ ва $(2;\ 10)$ нуқталардан ўтиши маълум бўлса, a ва b ни топинг.

8. а) Агар $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ ва $\varphi(t) = \frac{2t^2 - 2t + 1}{(t-1)^2}$ бўлса, $f(\varphi(t))$ ни топинг.

б) Агар $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$ бўлса, $f(\sqrt[3]{x^2+1}$ ни топинг.

в) Агар $f\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) = \frac{x+1}{x-1}$; $x \neq 1$; $x \neq -2$ бўлса, $f(x)$ ни топинг.

г) Агар $f\left(1+\frac{1}{x}\right)=x^2-1$, $x\neq 0$ бўлса, $f(x)$ ни топинг.

д) $f(x)=ax^2+bx+c$ бўлса, $f(x-3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)=0$ эканини исботланг.

9. Қуйидаги функционал тенгламаларни ечинг:

а) $(x-1)f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x-1}$; б) $f(x)+xf\left(\frac{x}{2x-1}\right)=2$;

в) $2f\left(\frac{x}{x-1}\right)-3f\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right)=\frac{13x-4}{2x-3x^2}$.

10. Қуйидаги системаларни ечинг:

а) $\begin{cases} f(2x+1)+\varphi(x-1)=x, \\ f(2x+1)-2\varphi(x-1)=2x^2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} f(x+1)+x\varphi(x+1)=2x, \\ f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\varphi\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=x-1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} f(2x+2)+2\varphi(4x+7)=x-1, \\ f(x-1)+\varphi(2x+1)=2x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} f(4x+3)+x\varphi(6x+4)=2; \\ f(2x+1)+\varphi(3x+1)=x+1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} f(3x-1)+\varphi(6x-1)=3x, \\ f(x+1)+x^2\varphi(2x+3)=2x^2+x; \end{cases}$

е) $\begin{cases} f(2x-1)+\varphi(1-x)=x+1, \\ f\left(\frac{x}{x+1}\right)+2\varphi\left(\frac{1}{2x+2}\right)=3. \end{cases}$

11. xOy текисликда нуқталар тўпламини топинг:

1) $y=|3x-2|+2-3x$;
2) $y=|x-3|+|2x-1|$;
3) $y=||x+2|-|x-2||$;
4) $\min(x, y)=1$;
5) $\max(|x|, |y|)=1$;
6) $\max(x, y)=\min(|x|, |y|)$;
7) $|x|+|y|=1$;
8) $|x+y|=|y|+y$;
9) $y=|x+1|-2|x-2|+|x+2|-x$;
10) $x|x|+y|y|=x-y$;
11) $y=\frac{x^2-x-6}{x^2-3x+2}$;
12) $y=\frac{\ln x}{x^2}$,
13) $y=x\sin x$;
14) $y=\sqrt{3-x^2-2x}$.

VIII боб. ИФОДАЛАРНИ АЙНАН АЛМАШТИРИШ

1- §. КЎПХАД ТУШУНЧАСИ

Алгебра фанида бирҳад ва кўпҳад тушунчалари, шу жумладан, бутун рационал ифода тушунчаси муҳим аҳамиятга эгадир. Бу тушунчаларнинг асосий хоссалари билан танишиб чиқайлик.

67- таъриф. *Берилган номаълум ўзгарувчилар, сонлар ва уларнинг даражаларини кўпайтириш амали ёрдамида боғлайдиган ифода бирҳад дейилади.*

Мисол. $5a^2x$, $2b^3(-3)bc^2$, xy^3 ва бошқалар бирҳадга мисол бўла олади.

Агар берилган бирҳадни $2b^3(-3)bc^2 = 2(-3)b^4c^2 = -6b^4c^2$ кўринишида ёзилса, у ҳолда ҳосил қилинган ифода *бирҳаднинг каноник шакли* деб аталади. Бирҳаднинг каноник шаклининг сон кўпайтувчиси *бирҳаднинг коэффициенти* дейилади. Агар берилган бирҳад x, y, $\ldots$, z ўзгарувчилар ва A ҳақиқий сон ёрдамида

$$Ax^{k_1}y^{k_2}\ \ldots\ z^{k_n} \qquad (1)$$

кўринишида берилган бўлса, у ҳолда $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = m$ сон шу бирҳаднинг *даражаси* деб аталади.

68- таъриф. *Агар берилган нолдан фарқли бирҳадлар бир хил аргументларнинг бир хил даражаларидан иборат бўлса, у ҳолда бундай бирҳадларни ўхшаш бирҳадлар дейилади.*

Мисол. $2x^2y^3z$; $3x^2y^3z$ — ўхшаш бирҳадлардир.

69- таъриф. *Бир неча бирҳаднинг алгебраик йиғиндиси кўпҳад дейилади.*

Мисол. $(x-y)^2$, x^3-2x^2+5x+3; $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}$ ифодалар кўпҳад бўлиб, $\frac{x+y-1}{x}+x^2+y^2$; $\frac{x}{y}+x^3$ каби ифодалар эса кўпҳад эмас.

Кўпҳадлар ўзининг берилишига ҳамда ҳадларининг коэффициентларига қараб қайси сонли майдонга мансуб эканлигини аниқлаш мумкин. P сонли майдон берилган бўлсин. Агар a_0, a_1, $\ldots$, $a_n \in P$ бўлиб,

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,\ a_0 \neq 0 \qquad (2)$$

кўпҳад берилган бўлса ($n \in N$), у ҳолда у *P сонли майдонда берилган n- даражали* ($\deg f = n$) *кўпҳад* дейилади.

Мисоллар. а) $f(x)=3x^3-2x^2+6$ кўпҳад Q сонлар майдонида берилган учинчи даражали кўпҳаддир;

б) $f(x)=\sqrt{3}\,x^7-0{,}8x^4+\pi x^3+x$ ҳақиқий сонлар майдонида берилган кўпҳаддир;

в) $f(x)=x^{10}-(1-3i)\,x^5+ix^3+(1+i)\,x^2+\frac{1}{2}$ комплекс сонлар майдонида берилган кўпҳаддир;

г) $T_1(x)=2^x+2^{-x}+\log_2 x$ ва $T_2(x)=\sin x+3\cos x+$ $+5\,\mathrm{tg}\,x$ каби ифодалар x ўзгарувчига нисбатан трансцендент амалларни ўз ичига олгани учун кўпҳад эмас.

Маълумки, кўпҳадлар берилишига кўра бир ўзгарувчили ва кўп ўзгарувчили кўпҳадларга ажралади.

70-таъриф. 1) *Агар* (2) *нинг барча коэффициентлари ва* $a_n=0$ *бўлса, у ҳолда* $f(x)$ *ноль кўпҳад дейилади ва* $f(x)\equiv 0$ *кўринишида ёзилади. Агар* $f(x)$ *кўпҳад* x *нинг барча қийматларида* a га тенг бўлса, *у ҳолда* $f(x)=a$ *дейилади;*

2) *Агар* $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ ва $\varphi(x)=$ $=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n$ *кўпҳадлар учун* $a_0=b_0$, $a=b_1,\ \ldots,\ a_n=b_n$ *бўлса, у ҳолда* $f(x)$ ва $\varphi(x)$ *айнан тенг кўпҳадлар дейилади.*

3) *Агар* (2) *да* $a_0\neq 0$, $n=0$ *бўлиб,* $f(x)=a_0x^0=a_0$ *бўлса, у ҳолда* $f(x)$ *ни нолинчи даражали* ($\deg f=0$) *деб аталади.*

3′) P сонли майдонда $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+$ $+a_n$ (2) ва $\varphi(x)=b_0x^n+\ldots+b_n$ (3) кўпҳадлар берилган ва $\overline{f(x)}$ ва $\overline{\varphi(x)}$ бу кўпҳадларнинг функционал аниқламаси бўлсин дейлик.

81-теорема. *Берилган P да аниқланган* $f(x)$ ва $\varphi(x)$ *кўпҳадлар учун*

$$f(x)=\varphi(x)\Leftrightarrow \overline{f}(x)=\overline{\varphi}(x)$$

бўлади.

Исботи. Теорема шартига кўра $f(x)$ ва $\varphi(x)$ лар P да аниқланган кўпҳадлар бўлиб, $\overline{f(x)}$ ва $\overline{\varphi(x)}$ лар эса уларни аниқловчи функциялардир. Агар $\overline{f(x)}=\overline{\varphi(x)}$ бўлсин десак, у ҳолда (3′) га асосан ва $f(x)$ ва $\varphi(x)$ кўпҳад бўлганлиги учун $\overline{f(x)}=\overline{\varphi(x)}$ бўлади. $f(x)$ ва $\varphi(x)$ лар ноль бўлмаган

($\deg f = n$) даражалари кўпҳадлар бўлсин дейлик, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$; $\varphi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$ бўлсин, у ҳолда $f(x) = \varphi(x)$ эканидан $a_i = b_i \wedge i = \overline{1, n}$ (4) бўлиб, $\forall x_0 \in P$ учун $\overline{f(x_0)} = a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \ldots + a_n$; $\overline{\varphi(x_0)} = b_0x_0^n + b_1x_0^{n-1} + \ldots + b_n$ бўлиб, (4) га асосан $\overline{f(x)} = \overline{\varphi(x)}$ бўлади. Бундан $f = \varphi \Rightarrow \overline{f} = \overline{\varphi}$ экани келиб чиқади. $\overline{f} = \overline{\varphi}$ бўлсин дейлик, у ҳолда ихтиёрий $x_0 \in P$ учун $f(x_0) = a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \ldots + a_n$ ва $\varphi(x_0) = b_0x_0^n + b_1x_0^{n-1} + \ldots + b_n$, у ҳолда, (4) га асосан $f(x_0) = \varphi(x_0)$ ва $h(x_0) = f(x_0) - \varphi(x_0) = 0$ бўлиб, P да $h(x)$ кўпҳад ноль кўпҳадга айланади. Бундан $\overline{f} = \overline{\varphi} \Rightarrow f = \varphi$ экани келиб чиқади. Демак, $f = \varphi \Leftrightarrow \overline{f} = \overline{\varphi}$

Мисол. $f(x) = x^3 - 4x + 2x^2 + 1$ ва $\varphi(x) = -4x + 2x^2 + x^3 + 1$ кўпҳадлар ўзаро тенг кўпҳадлардир. $f(a, b) = (a^2 + 3ab)(2a^3 - 2a)$ кўпҳадли ифода берилган бўлсин дейлик ва $f(a, b)$ да тегишли амалларни кетма-кет бажариш натижасида $f(a, b) = 2a^5 + 6a^4b - 2a^3b - 6a^2b^2$ кўпҳадни ҳосил қиламиз.

Агар берилган ифодада қатнашаётган амалларни бажариш натижасида яна ҳам содда ифодага эга бўлинса, у ҳолда ҳосил бўлган натижа берилган ифоданинг айнан алмаштирилган натижаси дейилади.

71- таъриф. *Агар кўпҳад ўзаро ўхшаш бўлмаган бирҳадлар йиғиндиси ёрдамида берилган бўлса, у ҳолда у каноник кўринишда берилган кўпҳад дейилади.*

Кўпҳадлар берилиши жиҳатидан турли хил бўлиши мумкин. Агар кўпҳадда қатнашаётган ўзгарувчилар сони икки ва ундан ортиқ бўлса, у ҳолда бундай кўпҳадларнинг ичида симметрик кўпҳадларни ўрганишнинг ўзига хос муҳим томонлари мавжуд.

72- таъриф. *Агар $T(x, y, \ldots, z)$ кўпҳадда қатнашаётган $x, y, \ldots z$ ўзгарувчиларнинг ўринларини ихтиёрий тарзда алмаштирсак ҳам ўзгармаса, у ҳолда бундай кўпҳад симметрик кўпҳад дейилади.*

Мисол. $f(x, y) = 2x^4 + 7x^3y + 9x^2y^2 + 7xy^3 + 2y^4$ симметрик кўпҳаддир.

Ушбу

$$P(x,\ y,\ \ldots,\ z)=\sum_{i=1}^{n} A_i\ x^{k_i}\ y^{l_i}\ \ldots\ z^{q_i} \qquad (3)$$

кўпҳадда $k_i+l_i+\ \ldots\ q_i=n_i\ \wedge\ i=\overline{1,\ n}$ ларнинг ичида энг каттаси $P(x,\ y,\ \ldots,\ z)$ нинг даражаси дейилади, агар $k_i+l_i+\ \ldots\ +q_i=n_i \wedge i=\overline{1,\ n}$ бўлса, у ҳолда $P(x,\ y,\ldots,\ z)$ n- даражали бир жинсли кўпҳад дейилади.

Мисол. $P(x,\ y)=5x^3y^2+4xy^4-6x^2y^3+3x^4y$ кўпҳад 5- даражали бир жинсли кўпҳаддир.

82- теорема. *Агар даражаси k га тенг бўлган бир жинсли $f(x,\ y,\ \ldots,\ z)$ кўпҳаднинг $x,\ y,\ \ldots\ z$ ўзгарувчиларини $t_x,\ t_y,\ \ldots,\ t_z$ га алмаштирилса, бу кўпҳад t^k кўпайтувчиларга эга бўлади: $f(tx,\ ty,\ \ldots,\ tz)=t^kf(x,\ y,\ \ldots,\ z)$.*

Исботи. Берилган $f(x,\ y,\ \ldots,\ z)=\sum\limits_{i=1}^{n} A_ix^{k_i}\ y^{l_i}\ldots z^{q_i}$ кўпҳад бир жинсли бўлганлиги учун $k_i+l_i+\ \ldots\ +$ $+q_i=k\ \wedge\ i=\overline{1,\ n}$.

Энди кўпҳаднинг ушбу $A_1x^{k_1}\ y^{l_1}\ \ldots\ z^{q_1}$ айрим ҳадини олиб, ундаги $x,\ y,\ \ldots,\ z$ ни $tx,\ ty,\ \ldots,\ tz$ га алмаштирсак, у ҳолда

$$A_1(xt)^{k_1}\cdot(ty)^{l_1}\ \ldots\ (tz)^{q_1}=t^k\ A_1x^{k_1}\ y^{l_1}\ \ldots\ z^{q_1}$$

келиб чиқади, чунки $k_1+l_1+\ \ldots\ +q_1=k$. Бундан кўпҳаддаги ҳар бир ҳад t^k кўпайтувчига эга бўлади, демак, $f(x,\ y,\ \ldots,\ z)$ бир жинсли бўлгани учун t^k ҳамма ҳадларнинг умумий кўпайтувчиси бўлиб қолади. Шу билан теорема исбот қилинди.

Мисол. $f(x,\ y,\ z)=axy+byz+cxz$ бўлсин, у ҳолда $f(tx,\ ty,\ tz)=t^2(axy+byz+cxz)$ бўлади.

Кўпҳадларнинг берилиши ўзига хос аҳамиятга эга:

1. $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \ldots\ +a_{n-1}x+a_n$ кўпҳад x ўзгарувчи даражасининг пасайиб бориш тартибида берилган;

2. $\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ \ldots\ +a_nx^n$ кўпҳад x нинг даражаси ошиб бориш тартибида берилган;

3. $f(x, y, z) = ax^3 + dx^2y + fx + by^3 + cyz^2 + ky + cz^3 + l$ лексикографик ҳолатида берилган кўпҳад;

4. $P(x, y, \ldots, z) = P_n(y, \ldots, z)x^n + P_{n-1}(y, \ldots z)x^{n-1} + \ldots + P_0(y, \ldots, z)$ кўпҳад бир ўзгарувчининг даражаси пасайиб бориши тартибида ёзилган;

5. $P(x, y) = (a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2) + (a_1x + a_2y) + a_0$ кўпҳадда аргументлар бир жинсли тартибда жойлашган.

2-§. КЎПҲАДЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

P сонли майдонда аниқланган

$$f(x, y, \ldots, z) = \sum_{i=0}^{n} A_i x^{k_i} y^{l_i} \ldots z^{q_i}$$

ва

$$\varphi(x, y, \ldots, z) = \sum_{i=0}^{n} B_i x^{k_i} y^{l_i} \ldots z^{q_i}$$

кўпҳадлар берилган бўлсин.

73- таъриф. *P сонли майдонда аниқланган $f(x, y, \ldots, z)$ ва $\varphi(x, y, \ldots, z)$ кўпҳадларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси деб $f(x, y, \ldots, z) + \varphi(x, y, \ldots, z)$ ва $f(x, \ldots, z) \cdot \varphi(x, y, \ldots z)$ кўпҳадларга айтилади, бунда*

$$f(x, y, \ldots, z) + \varphi(x, y, \ldots, z) = \sum_{i=0}^{n} A_i x^{k_i} y^{l_i} \ldots z^{q_i} + \sum_{i=0}^{n} B_i x^{k'_i} y^{l'_i} \ldots z^{q'_i}$$

бўлиб, мос ҳадлар коэффициентларининг йиғиндиси олиниб, сўнгра уни каноник кўринишга келтирилади, кўпайтмасида $f \neq 0$, $\varphi \neq 0$ бўлса,

$$f \cdot \varphi = A_1 B_1 x^{k_1 + k'_1} y^{l_1 + l_1'} \ldots z^{q_1 + q_1'} + A_2 B_1 x^{k_2 + k'_1} y^{l_2 + l_1'} z^{q_2 + q'_1}$$

бўлади.

Бу юқоридаги маълумотлардан кўриниб турибдики, агар $\deg f > \deg \varphi$ бўлса, у ҳолда $\deg(\varphi + f) \leqslant \deg f$ ва $\deg(f \cdot \varphi) \leqslant \deg f + \deg \varphi$ бўлади.

74- таъриф. *Агар P сонли майдонда берилган*

$$P(x, y, \ldots, z) = \sum_{i=0}^{n} A_i x^{k_i} y^{l_i} \ldots z^{q_i}$$

кўпҳад учун

$$P(x, y, \ldots z) = \sum_{i=0}^{n} (-A_i x^{k_i} y^{l_i} \ldots z^{q_i})$$

кўпҳад мавжуд бўлса, у ҳолда $-P(x, y, \ldots, z)$ *кўпҳад* $P(x, y, \ldots, z)$ га қарама-қарши кўпҳад дейилади.

83-теорема. *Каноник кўринишдаги иккита нолдан фарқли кўпҳаднинг:*

1) *кўпайтмаси ҳам нолдан фарқли бўлади;*

2) *кўпайтувчилардан бири бирҳад бўлмаса, у ҳолда кўпайтма кўпҳадда ҳеч бўлмаганда иккита ҳад бўлади;*

3) *кўпайтма кўпҳаднинг даражаси кўпайтувчи кўпҳадлар даражаларининг йиғиндисига тенг бўлади.*

Исботи. Теореманинг шартига кўра

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

ва

$$\varphi(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$$

кўпҳадлар берилган ҳамда $b_0 \neq 0$, $a_0 \neq 0$ бўлсин, у ҳолда $f \cdot \varphi \neq 0$ бўлади. Бундан 1) нинг исботи келиб чиқади.

Кўпайтувчи кўпҳадлардан ҳеч бирининг бирҳад бўла олмаслиги кўпайтмада ҳеч бўлмаганда камида иккита ҳад бўлишини таъминлайди.

Шартга кўра $a_0 \neq 0$, $b \neq 0$ эканлигидан $f(x) \cdot \varphi(x) = a_0b_0x^{n+m} + \ldots + (a_n b_{m-1} + b_m a_{n-1})x + a_n b_m$ бўлиб, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ эканидан $a_0b_0 \neq 0$ бўлади, бундан $\deg(f\varphi) = m + n = \deg f + \deg \varphi$ бўлади. Шу билан теорема исботланади.

Кўпҳадни қўшиш ва кўпайтириш амаллари қуйидаги хоссаларга эга:

$$\forall R(x), T(x), Q(x), -R(x) \in P:$$

1°. $R + T \equiv T + R$.
2°. $(R + T) + Q \equiv R + (T + Q)$.
3°. $(-R) + R \equiv R + (-R) \equiv 0$.
4°. $R \cdot T \equiv T \cdot R$.
5°. $(R \cdot T) \cdot Q \equiv R \cdot (T \cdot Q)$.
6°. $(R + T) \cdot Q \equiv R \cdot Q + TQ \wedge QR + QT$.

Бу хоссаларни бевосита юқорида кўриб ўтилган маълумотларга таяниб исботлаш мумкин.

Кўпҳадларни кўпайтиришнинг ўзига хос томонлари мавжуд бўлиб, уни соддалаштириш мақсадида қуйидаги схематик кўринишни келтирамиз: $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ ни $\varphi(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$ га кўпайтириш схемаси:

	$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n$
b_0x^m	$a_0b_0x^{n+m} + a_1b_0x^{n+m-1} + \ldots + a_{n-1}b_0x^{m+1} + a_nb_0x^m$
b_1x^{m-1}	$a_0b_1x^{m+n-1} + \ldots + a_nb_1x^{m-1}$
$\ldots$	
$\ldots$	
b_m	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ a_{n-1}b_mx + a_nb_m$
$f\cdot\varphi$	$a_0b_0x^{n+m} + (a_1b_0 + (a_0b_1)x^{n+m-1} + \ldots +$ $+ (a_nb_{m-1} + a_{n-1} + b_m)x + a_nb_m$

Мисоллар. 1. $f(x, a) = 4x^3 - 4ax^2 - 5a^2x - 8a^3$ ва $\varphi(x, a) = -x^3 + 2x^2 + 2a^2x + 4a^3$, $\psi(x, a) = 5x^3 - 5ax^2 + 9a^3$ кўпҳадлар берилган. $T(x, a) = f(x, a) + \varphi(x, a) - \psi(x, a)$ кўпҳадни топинг.

Ечиш. Қуйидаги схематик қўшишга асосан:

$+$	$f(x, a)$	$4x^3$	$-4ax^2$	$-5a^2x$	$-8a^3$
	$\varphi(x, a)$	$-x^3$	$+2x^2$	$+2a^2x$	$+4a^3$
	$-\psi(x, a)$	$-5x^3$	$+5ax^2$		$-9a^3$
	$T(x, a)$	$= -2x^3$	$+(a+2)x^2$	$-3a^2x$	$-13a^3$

2. $f(x, a) = x^4 - 3a^2x^3 + 2xa^3 - a^4$ ва $\varphi(x, a) = 2x^3 + x^2a - 3a^3$ кўпҳадларнинг кўпайтмасини топинг.

Ечиш. $f(x, a)\cdot\varphi(x, a)$ ни топиш учун юқорида келтирилган кўпайтириш услубидан фойдаланамиз:

$\varphi(x, a)$	$f(x, a) = x^4 - 3x^3a^2 + 2xa^3 - a^4$
$2x^3$	$2x^7 - 6x^6a^2 + 4x^4a^3 - 2x^3a^4$
x^2a	$x^6a - 3x^5a^3 + 2x^3a^4 - x^2a^5$
$-3a^3$	$-3x^4a^3 + 9x^3a^5 - 6xa^6 + 3a^7$
$f \cdot \varphi =$	$2x^7 - (6a^2 - a)x^6 - 3x^5a^3 + x^4a^3 + 9x^3a^5 -$ $- x^2a^5 - 6xa^6 + 3a^7$

3- §. ҚИСҚА КЎПАЙТИРИШ ФОРМУЛАЛАРИ ВА НЬЮТОН БИНОМИ

Кўпҳадларни кўпайтириш ёки тенглама ва тенгсизликларни ечиш жараёнида тайёр формулалардан унумли фойдаланиш математикани ўрганишда алоҳида аҳамиятга эгадир. Бу формулалар математикада қисқа кўпайтириш формулалари номи билан машҳурдир:

1. $(x + y)(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
2. $(x - y)(x - y) = (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.
3. $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$.
4. $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.
5. $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.
6. $(x - y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 - y^3$.
7. $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$.
8. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.
9. $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc$.
10. $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)$.

$f(x, y) = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}$ ни $\varphi(x, y) = x - y$ га кўпайтириш талаб қилинаётган бўлсин, у ҳолда

	$x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}$
x	$x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y + \ldots + x^2y^{n-2} + xy^{n-1}$
$-y$	$-x^{n-1}y - x^{n-2}y^2 - \ldots - \ldots - xy^{n-1} - y^n$
	$x^n \qquad\qquad - y^n$

яъни $(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+xy^{n-2}+$
$+y^{n-1})=x^n-y^n$

Буни қисқача

$$(x-y)\sum_{i=1}^{n} x^{n-i}y^{i-1}=x^n-y^n$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Юқорида ҳосил қилинган натижаларга таянган ҳолда қуйидаги тайёр натижаларни ёзиш мумкин:

$$x^{2n}-y^{2n}=(x+y)(x^{2n-1}-x^{2n-2}y+x^{2n-3}y^2-\ldots-$$
$$-y^{2n-1}),$$
$$x^6-y^6=(x+y)(x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5),$$
$$x^{2n+1}+y^{2n+1}=(x+y)(x^{2n}-x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2-\ldots+$$
$$+y^{2n}),$$
$$x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4).$$

Ньютон биноми номи билан машҳур бўлган ушбу формула ўринлидир:

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+C_n^3a^{n-3}b^3+\ldots$$
$$+C_n^nb^n.$$

Исботи. Бу ёйилма ҳақиқатан ҳам икки ҳад йиғиндисининг n- даражаси $(a+b)^n$ ни беришини кўрсатамиз. Бунинг учун математик индукция усулидан фойдаланамиз.

$n=1$ бўлганда $(a+b)^n=(a+b)^1=a+b$ ўринли.

$n=k$ бўлганда $(a+b)^k=C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b+\ldots+$ $+C_k^kb^k$ ўринли деб, у $n=k+1$ учун ўринли эканини кўрсатамиз.

Бунда

$$(a+b)^n=(a+b)^k(a+b)=(a+b)\sum_{i=0}^{k}C_k^ia^{k-i}b^i$$

бўлиб,

$$\begin{array}{c|l}
 & C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b+\ldots+C_k^{k-1}ab^{k-1}+C_k^kb^k \\
\hline
a & C_k^0a^{k+1}+C_k^1a^kb+\ldots+C_k^{k-1}a^2b^{k-1}+C_k^kab^k \\
b & +C_k^0a^kb+\ldots+C_k^{k-1}ab^k+C_k^kb^{k+1}
\end{array}$$

$$\left| C_k^0 a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1) a^k b + \dots + (C_k^{k-1} + C_k^k) ab^k + \right.$$
$$+ C_k^k b^{k+1}$$

ҳосил бўлади ҳамда $C_k^{k-1} + C_k^k = C_{k+1}^k$; $C_k^0 = C_{k+1}^0$; $C_k^k = C_{k+1}^{k+1}$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + \dots + C_{k+1}^{k+1} b^{k-1}$$

ҳосил бўлиб, формула $n = k + 1$ учун ҳам ўринли экани келиб чиқади.

Демак,

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$$

кўринишидаги бином ёйилмаси тўғри экан.

Агар $a = b = 1$ бўлса, у ҳолда

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i,$$

яъни бином ёйилмаси коэффициентларининг йиғиндиси 2^n га тенг. Агар $n - i = \alpha$; $i = \beta$ деб ва $\alpha + \beta = n$ ни ҳисобга олиб, юқорида келтирилган формулага қўлласак, у ҳолда

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i = \sum_{\substack{\alpha,\ \beta = 0 \\ \alpha+\beta=n}} \frac{n!}{\alpha!\beta!} a^\alpha b^\beta$$

кўринишидаги формула ҳосил бўлиб, бу формула биномиал коэффициентларнинг такрорланувчи ўрин алмаштириш билан ифодаланган кўриниши бўлади.

Бу қоидани m та қўшилувчининг n- даражаси учун ҳам ёзиш мумкин:

$$\underbrace{(a+b+\dots+c)^n}_{m \text{ та}} = \sum_{\substack{\alpha,\ \beta,\ \dots,\ \gamma = 0 \\ \alpha+\beta+\dots+\gamma=n}} \frac{n!}{\alpha!\ \beta!\dots\gamma!}$$
$$a^\alpha b^\beta \dots C^\gamma.$$

Энди бином формуласининг айрим хоссаларини кўриб чиқайлик.

1) $(a+b)^n$ нинг ёйилмасида $(n+1)$ та ҳад бўлади;

2) Ёйилмада биринчи ҳаднинг даражалари юқоридан пастга камайиб борса, иккинчи ҳаднинг даражалари ортиб боради;

3) Бином ёйилмасидаги ҳадлар коэффициентларининг йиғиндиси 2^n га тенг;

4) Бином ёйилмасининг бошидан ва охиридан баробар узоқликда турган ҳадларининг коэффициентлари ўзаро тенг бўлади;

5) Агар бином даражаси тоқ бўлса, бином ёйилмасида иккита, агар жуфт бўлса, битта энг катта коэффициентли ҳад бўлади.

Бином ёйилмасида исталган ҳаднинг ишораси, коэффициенти ёки даражасини аниқлаш учун умумий ҳад формуласи деб аталадиган

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

формуладан фойдаланилади.

Мисол ва масалалар ечиш

Мисоллар. 1. $(x+2)^5$ ёйилманинг учинчи ҳадини топинг.

Ечиш. $T_{2+1} = C_5^2 x^3 2^2 = 10 \cdot 2^2 x^3 = 40x^3$.

Энди айнан алмаштиришларни кўриб ўтамиз.

2. $$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) - (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2$$

ни айнан алмаштиринг.

Ечиш. Бунда

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$$

кўпайтмада биринчи қавс ичидаги ҳар бир қўшилувчини иккинчи қавс ичидаги қўшилувчиларга бирма-бир кўпайтириб, натижаларни қўшсак, у ҳолда $a_i^2 x_j^2 \wedge i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$ кўринишидаги ҳадлар йиғиндиси ҳосил бўлади, $(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_n x_n)^2$ ни очиб чиқсак, $a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + \ldots + a_n^2 x_n^2$ билан $2(x_1x_2a_1a_2 + \ldots + a_1a_3x_1x_3 + \ldots + a_na_{n-1} x_{n-1} x_n)$ кўринишидаги ифода йиғиндиси ҳосил бўлади. Топилган натижаларни ўзининг ўрнига қўйиб, тегишли амалларни бажаргандан сўнг, натижани қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) - (a_1x_1 + \ldots + a_n x_n)^2 = (a_2x_1 - a_1x_2)^2 + (a_3x_1 - a_1x_3)^2 + \ldots + (a_n x_{n-1} - a_{n-1} x_n)^2.$$

Бу натижа *Лагранж айнияти* деб аталади.

3. $(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$ ни соддалаштиринг.

Ечиш. $(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) = [(a+b)+c][(a+b)-c][c+(a-b)][c-(a-b)] = [(a+b)^2 - c^2][c^2-(a-b)^2] = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$

4. $(ax+by+cz+dt)^2 + (bx-ay+dz-ct)^2 + (cx-dy-az+bt)^2 + (dx+cy-bz-at)^2$ ни соддалаштиринг.

Ечиш. $(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + d^2t^2 + 2abxy + 2acxz + 2adtx + 2bcyz + 2bdyt + 2cdzt) + (b^2x^2 + a^2y^2 + d^2z^2 + c^2t^2 - 2abxy + 2bdxz - 2bcxt - 2adyz + 2acyt - 2cdzt) + (c^2x^2 + d^2y^2 + a^2z^2 + b^2t^2 - 2cdxy - 2acxz + 2bcxt + 2adyz - 2bdyt - 2abzt) + (d^2x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 + a^2t^2 + 2cdxy - 2bdxz - 2adxt - 2bcyz - 2acyt + 2abzt)$.

Энди ўхшаш ҳадларни ихчамлаб, қолган ифодани гуруҳлаш усулидан фойдаланиб кўпайтувчиларга ажратсак, натижада берилган йиғинди $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)$ кўпайтмага тенг эканини кўриш мумкин. Бу тенглик *Эйлер айнияти* номи билан машҳурдир.

5. $P(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ ни тўла квадрат шаклида тасвирланг.

Ечиш. Берилган кўпайтмани иккитадан қилиб шундай гуруҳлаймизки, натижада ҳосил бўладиган квадрат учҳадлар кўпайтмасининг иккинчи ҳади $5x$ бўлсин, яъни:

$P(x) = [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]+1 = (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1 = (x^2+5x)^2 + 10(x^2+5x)+25 = (x^2+5x+5)^2.$

6. $T(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 15$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш: $T(x)$ ни кўпайтувчиларга ажратишда гуруҳлаш усули қулай:

$$T(x) = (x^3 - 3x^2) + (5x - 15) = x^2(x-3) + 5(x-3) = (x-3)(x^2+5).$$

7. $a^3+b^3+c^3-3abc$ ни кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш. Бунинг учун берилган ифодага $3ab(a+b)$ ни қўшиб, айирамиз:

$$a^3+b^3+c^3-3abc = a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3-3abc-3ab(a+$$
$$+b) = (a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c) = (a+b+c)\ [(a+$$
$$+b)^2 - c(a+b)^2 + c^2] - 3ab$$
$$(a+b+c) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$

8. $f(x, y, z) = xy^2 + xz^2 + yx^2 + yz^2 + zx^2 + zy^2$ симметрик кўпҳадни симметрик функция кўринишида тасвирланг.

Ечиш. $f(x, y, z) = xy^2 + xz^2 + yx^2 + yz^2 + zx^2 + zy^2$ ни $(x+y+z)(xy+xz+yz) = x^2y + x^2z + xyz + xy^2 + xyz + y^2z + xyz + xz^2 + yz^2$

ифода билан таққосласак, $3xyz$ ортиқча экани кўриниб турибди. Агар $t_1 = x+y+z$; $t_2 = xy+xz+yz$; $t_3 = xyz$ алмаштиришлар бажарсак, у ҳолда $f(x, y, z) = t_1t_2 - 3t_3$ кўринишидаги ифода ҳосил бўлади.

9. $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2$ кўпҳадни R да кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш. Бунинг учун номаълум коэффициентларни киритиш усулидан фойдаланамиз, яъни

$$f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

ни ёзиб икки кўпҳаднинг тенглик шартидан фойдаланамиз. Бунда қавсларни очиб, сўнгра коэффициентларни тенглаштирамиз:

$$\begin{cases} a + c = -1, \\ b + ac + d = -1, \\ ad + bc = 2, \\ bd = -2 \end{cases}$$

система ҳосил бўлиб, бундан $a = 0$; $b = -2$; $c = -1$; $d = 1$ ва $a = -1$; $c = 0$; $d = -2$ қийматларни аниқлаймиз. Демак, $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x^2-2)(x^2-x+1)$.

Мустақил ечиш учун масала ва мисоллар

Қуйидаги кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратинг.

1. $f(x) = x^4 - 1$.
2. $f(x) = x^3 + x - 2$.
3. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x + 15$.
4. $f(x) = (x-1)^3 + (2x+3)^3 - 27x^3 + 8$.
5. $f(x) = x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 24x - 24$.
6. $f(x) = x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 24x^2 - 27x - 108$.
7. $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) - 15$.

8. $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 3$.
9. $f(x) = (x-4{,}5)^4 + (x-5{,}5)^4 - 1$.
10. $f(x) = (x+3)^4 + (x+5)^4 - 16$.

4-§. КЎПҲАДЛАРНИНГ БЎЛИНИШИ

75- таъриф. *P сонли майдонда берилган $F(x, y, \dots z)$ ва $Q(x, y, \dots, z)$ кўпҳадлар учун*

$$F(x, y, \dots, z) = Q(x, y, \dots, z)\, T(x, y, \dots, z) \quad (1)$$

тенгликни қаноатлантирувчи $T(x, y, \dots, z)$ мавжуд бўлса, у ҳолда $T(x, y, \dots, z)$ ва $Q(x, y, \dots, z)$ кўпҳадлар $F(x, y, \dots, z)$ кўпҳаднинг бўлувчилари дейилади.

Агар берилган P майдондан олинган $F(x, y, \dots, z)$ кўпҳад учун $a \in P$, $a \neq 0$ мавжуд бўлиб, $F(x, y, \dots, z) = a\left[\frac{1}{a} F\left(x, y, \dots, z\right)\right]$ бўлса, у ҳолда a сон кўпҳаднинг бўлувчисидир. Коэффициентлари берилган кўпҳад коэффициентларидан нолга тенг бўлмаган кўпайтувчи билан фарқ қиладиган ҳар қандай кўпҳад берилган кўпҳаднинг *тривиал бўлувчилари, бошқа хил бўлувчилари тривиал бўлмаган бўлувчилар дейилади.*

Мисол. $f(x, y) = x^4 - y^4$ кўпҳаднинг тривиал бўлмаган бўлувчилари: $x - y$, $x^2 - y^2$, $x^2 + y^2$, $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$, $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$.

Ҳақиқатан ҳам, $x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)(x^2+y^2) = (x^2 - y^2)(x^2+y^2) = (x+y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) = (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$.

84- теорема. *Агар $F(x, y, \dots, z)$ кўпҳад $T(x, y \dots, z) \neq 0$ кўпҳадга бўлинса, у ҳолда битта ва фақат битта бўлинма кўпҳад мавжуд.*

Исботи. Теорема шартига кўра $F = T \cdot Q$ мавжуд, $Q(x, y, \dots, z)$ нинг ягона эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, бу ҳолда $Q(x, y, \dots, z)$ ва $Q_2(x, y, \dots, z)$ бўлинмалар мавжуд бўлиб, $Q_1 \neq Q_2$ бўлсин, у ҳолда теореманинг шартига кўра $F = Q_1T$; $F = Q_2T$ (1) бўлиб, бундан $TQ_1 = TQ_2$ эканидан $T(Q - Q_2) = 0$ (2) бўлади. Фаразга кўра $Q_1 \neq Q_2$ бўлгани учун (2) дан $T = 0$ экани келиб чиқади. Бу ҳолнинг бўлиши мумкин эмас, демак, теорема исбот бўлди.

Рационал коэффициентли кўпҳадларда бўлиш амали ҳар вақт ҳам бажарилавермайди. Масалан, F нинг даражаси

$\deg F < \deg Q$ бўлса, у вақтда $T \neq 0$ нинг ҳар қандай қийматида ҳам (1) айният ўринли бўлмайди, чунки $\deg(T \cdot Q) \geqslant \deg Q$, лекин $\deg(T \cdot Q) \neq \deg F$.

Маълумки, P да берилган бир кўпҳад иккинчи кўпҳадга ҳар доим ҳам қолдиқсиз бўлинавермайди. Амалиётда жуда кўп ҳолларда қолдиқ кўпҳад ҳосил бўлади.

85-теорема. *P майдонда берилган* $f(x)$ ва $\varphi(x) \neq 0$ *кўпҳадлар учун*

$$f(x) = \varphi(x) g(x) + r(x) \tag{3}$$

ни қаноатлантирувчи битта ва фақат битта $g(x)$ *ва* $r(x)$ *кўпҳадлар мавжуд бўлиб,* $\deg r < \deg \varphi$ *ёки* $r(x) \equiv 0$ *бўлади.*

Исботи. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ва $\varphi(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ кўпҳадлар берилган бўлсин: агар $m > n$ бўлса, у ҳолда $g(x) \equiv 0$ ва $r(x) \equiv f(x)$ бўлгандагина (3) айният ўринли бўлади. Агар $n \geqslant m$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ ни $\varphi(x)$ га бўлиш натижасида

$$f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \varphi(x) \equiv a'_{n-1} x^{n-1} + a'_{n-2} x^{n-2} + \\ + \ldots + a_n \tag{4}$$

ҳосил бўлади, бунда

$$a'_{n-1} = a_{n-1} - \frac{a_n}{b_m} b_{m-1}.$$

Бундан $f(x) = a_n b_m^{-1} x^{n-m} \varphi(x) + R(x)$ бўлиб, бу ерда $R(x) = a'_{n-1} x^{n-1} + a'_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a'_0$ бўлади. Бу ерда $\deg R = n_1$, $n_1 = n - 1$ ва $a'_{n_1} \neq 0$ бўлиб, $n_1 \geqslant m$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ билан қандай иш кўрган бўлсак, $R(x)$ билан ҳам шундай иш кўриб, $f(x) = [a_n b_m^{-1} x^{n-m} + a'_{n_1} b_m^{-1} x^{n_1-m}] \times \times \varphi(x) + R'(x)$ натижага эришамиз. Қолдиқда m дан паст даражали кўпҳад ҳосил бўлгунча бўлиш ишини давом эттирамиз. Бу жараён бевосита $f(x) = \varphi(x) g(x) + r(x)$ га келтиради.

Энди $g(x)$ ва $r(x)$ нинг ягоналигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $g(x)$ ва $r(x)$ дан бошқа $g(x) \neq g_1(x)$ ва $r(x) \neq \neq r_1(x)$ ҳам (3) ни қаноатлантирсин:

$$f(x) = \varphi(x) g(x) + r(x) \text{ ва } f(x) = \varphi(x) g_1(x) + r_1(x), \tag{5}$$

у ҳолда

$$\varphi(x)\,[g(x)-g_1(x)] = r(x) - r_1(x) \qquad (6)$$

бўлиб, $\deg(r-r_1) < \deg\varphi$ бўлгани учун $g(x) \equiv g_1(x)$ бўлиши ва $\varphi(x) \neq 0$ бўлганидан $r(x) \neq r_1(x)$ бўлиши керак, лекин бунинг бўлиши мумкин эмас, демак, қилинган фараз нотўғри. Бундан (3) ни қаноатлантирувчи $g(x)$ ва $r(x)$ нинг ягона эканлиги келиб чиқади.

Мисол. $f(x) = 8x^6 + 8x^5 - 20x^4 + 40x^3 - 50x^2 + 30x - 10$ кўпҳадни $\varphi(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 8$ кўпҳадга бўлгандаги бўлинма ва қолдиқни топинг.

Ечиш.

$$\begin{array}{r|l}
8x^6+8x^5-20x^4+40x^3-50x^2+30x-10 & 2x^4+3x^3-4x^2+6x-8 \\
\underline{-\;8x^6+12x^5-16x^4+24x^3-32x^2\qquad\qquad} & \overline{4x^2-2x+1} \\
-4x^5-4x^4+16x^3-18x^2+30x\quad\;\; & \\
\underline{-\;-4x^5-6x^4+8x^3-12x^2+16x\quad\;\;} & \\
2x^4+8x^3-6x^2+14x-10 & \\
\underline{-\;2x^4+3x^3-4x^2+6x-8} & \\
5x^3-2x^2+8x-2. &
\end{array}$$

Демак, $g(x) = 4x^2 - 2x + 1$ ва $r(x) = 5x^3 - 2x^2 + 8x - 2$.

Агар $f(x)$ кўпҳад $\varphi(x)$ кўпҳадга қолдиқсиз бўлинса, у ҳолда бу $\varphi(x) \mid f(x)$ кўринишда белгиланади.

Энди кўпҳадларнинг бўлиниши ҳақида қуйидаги хоссаларни келтирамиз.

1°. $\forall f(x),\ \varphi(x),\ t(x) \in P: \varphi(x) \mid f(x) \wedge t(x) \mid \varphi(x) \Rightarrow t(x) \mid f(x)$, яъни *$f(x)$ кўпҳад $\varphi(x)$ га, $\varphi(x)$ эса $t(x)$ га қолдиқсиз бўлинса, у ҳолда $f(x)$ кўпҳад $t(x)$ га қолдиқсиз бўлинади.*

Исботи. Шартга кўра $\varphi \mid f \Rightarrow f = \varphi g$ ва $t \mid \varphi = tg_1 \Rightarrow f = \varphi g = tg_1 g \Rightarrow t \mid f$.

2°. $\forall f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \varphi(x) \in P: \varphi(x) \mid f(x) \wedge t = \overline{1, n} \Rightarrow \varphi(x) \mid \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$,

яъни $f_i(x) \wedge i = \overline{1, n}$ *ларнинг ҳар бири $\varphi(x)$ га бўлинса, у ҳолда уларнинг йиғиндиси ҳам $\varphi(x)$ га бўлинади.*

Исботи. Шартга кўра $\varphi \mid f_i \wedge i = \overline{1, n} \Rightarrow f_i = \varphi g_i \wedge i = \overline{1, n} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} f_i = \varphi \sum\limits_{i=1}^{n} g_i \Rightarrow \varphi \mid \sum\limits_{i=1}^{n} f_i$.

3°. $\forall f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), t(x) \in P: \exists f_i(x)\,[t(x)\,]\,f_i(x)] \Rightarrow$

$\Rightarrow t(x) \mid \prod_{i=1}^{n} f_i(x)$, *яъни* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ *ларнинг камида бири* $t(x)$ *га қолдиқсиз бўлинса, у ҳолда уларнинг кўпайтмаси ҳам* $t(x)$ *га қолдиқсиз бўлинади.*

Бунинг исботи бевосита 2° дан келиб чиқади.

4° $\forall f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), t(x) \in P$ ва $\forall \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x) \in P$: $t(x) \mid f_i(x) \wedge i=\overline{1,n} \Rightarrow t(x) \mid \sum_{i=1}^{n} [f_i(x)\varphi_i(x)]$,

яъни $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ *лар* $t(x)$ *га қолдиқсиз бўлиниб,* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *ихтиёрий кўпҳадлар бўлса, у ҳолда* $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\varphi_i(x)$ *йиғинди* $t(x)$ *га қолдиқсиз бўлинади.*

Исботи. Шартга кўра $f_i = tg_i \wedge i = \overline{1, n}$ бўлгани учун $f_i\varphi_i = tg_i\varphi_i \wedge i = \overline{1, n} \Rightarrow t \mid \sum_{i=1}^{n} f_i\varphi_i$ бўлади.

5°. *Исталган* $f(x)$ *кўпҳад нолинчи даражали кўпҳадга бўлинади.*

6°. $\forall f(x), t(x) \in P: t(x) \mid f(x) \Rightarrow at(x) \mid f(x) \wedge a \neq 0$.

7°. *Агар* $f(x)$ *ва* $t(x)$ *кўпҳадлар бир-бирига қолдиқсиз бўлинса, у ҳолда улар бир-биридан* $a \neq 0$ *ўзгармас кўпайтувчи билан фарқ қилади.*

76-таъриф. 1) *Агар* $f(x)$ *ва* $\varphi(x)$ *кўпҳадларнинг умумий бўлувчиси* $d(x)$ *бу икки кўпҳаднинг ҳар бир умумий бўлувчисига бўлинса, у ҳолда* $d(x)$ *кўпҳад* $f(x)$ *ва* $\varphi(x)$ *кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчиси дейилади ва* $D(f, \varphi) = d(x)$ *кўринишида белгиланади;*

2) *Агар* $\deg d = 0$ *бўлса,* $f(x)$ *ва* $\varphi(x)$ *ўзаро туб дейилади;*

3) *Берилган* $f(x)$ *ва* $\varphi(x)$ *кўпҳадларнинг энг кичик умумий карралиси деб* $K\left[f(x), \varphi(x)\right] = \frac{f(x)\cdot\varphi(x)}{d(x)}$ *га айтилади.*

$f(x) \in P$ ва $a \in P$ берилган бўлсин.

86-теорема: *Берилган* $f(x)$ *кўпҳадни* $x - a$ *иккиҳадга бўлишдан ҳосил бўлган қолдиқ* $f(a)$ *га тенг бўлади.*

Исботи. Теорема шартидаги бўлувчи $x-a$ биринчи даражали бўлгани учун ҳосил бўладиган $r(x)$ қолдиқ ё нолинчи даражали кўпҳад ёки ноль бўлади. $f(x)=(x-a)g(x)+r(x)$ бўлиб, $x=a$ бўлса, $f(a)=(a-a)g(a)+r(a)$ дан $f(a)\equiv r(a)$ бўлади. Шу билан теорема исбот бўлди.

77-таъриф. *Берилган P майдонда аниқланган $F(x)$ кўпҳадни шу майдонда аниқланган $f(x)$ ва $\varphi(x)$ кўпҳадлар кўпайтмаси шаклида ифодалаш мумкин бўлса, у ҳолда $F(x)$ ни P да кўпайтувчиларга ажралувчи кўпҳад дейилади.*

Мисол. $f(x)=x^5+2x^3+x^2+x+1$ ни R да кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш. $f(x)=x^5+2x^3+x^2+x+1=x^5+x^3+x^2+$ $+x^3+x+1=x^2(x^3+x+1)+(x^3+x+1)=(x^3+x+$ $+1)(x^2+1)$.

87-теорема. *Берилган P майдонда аниқланган $f(x)$, $\deg f\geqslant 1$ кўпҳадни, шу майдонда тартиби, сон кўпайтувчиларгача бўлган аниқликда биргина усул билан аниқланган, келтирилмайдиган кўпҳадлар*

$f(x)=t_1(x),\ t_2(x)\ \dots\ t_k(x)$ (7) *кўпайтмаси шаклида ифодалаш мумкин.*

Исботи. $t_1(x), t_2(x), \dots, t_k(x)$ лар P да келтирилмайдиган кўпҳадлар. Агар $f(x)\equiv t_1(x)$ бўлса, теорема исбот бўлади. Энди $f(x)\not\equiv t_1(x)$ бўлсин дейлик, у ҳолда $f(x)$ нинг даражасига нисбатан индукцияни татбиқ этамиз. Агар $n=1$ бўлса, у ҳолда $ax+b$ кўпҳад P да келтирилмайдиган бўлгани учун (7) тўғри бўлади. Фараз қилайлик, даражалари n дан кичик бўлган кўпҳадлар учун теорема ўринли бўлсин. Энди n-даражали кўпҳадлар учун ҳам теореманинг тўғрилигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ келтириладиган бўлса, у ҳолда уни иккита тривиал бўлмаган бўлувчилар кўпайтмаси

$$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\ (\deg f_1<n \text{ ва } \deg f_2<n)$$

шаклида ёзиш мумкин.

Фаразга асосан

$$f_1(x)=t_1(x)\,t_2(x)\ \dots\ t_l(x)$$

ва

$$f_2(x)=t_{l+1}(x)\ \dots\ t_k(x)$$

шаклида ёзиш мумкин. Бундан

$$f(x)=f_1(x)\,f_2(x)=t_1(x)\ \dots\ t_k(x)$$

ёки

$$f(x) = t_1(x)\, t_2(x) \ldots t_k(x) \qquad (8)$$

ҳосил бўлади. Энди (8) нинг ягона эканини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $f(x)$ икки усул билан келтирилмайдиган кўпайтувчилар кўпайтмасига ажралган бўлсин:

$$f(x) = t_1(x),\ t_2(x) \ldots t_k(x) \equiv q_1(x) \ldots q_l(x), \qquad (9)$$

бундан кўриниб турибдики, $q_1(x) \ldots g_l(x)$ кўпайтма $t_1(x)$ га бўлинади. Шунинг учун кўпайтувчилардан камида бири $t_1(x)$ га бўлинади. Умумийлик учун $q_1(x)$ ни $t_1(x)$ га бўлинади десак, у ҳолда $t_1(x) = c_1q_1(x)$ бўлиб, сўнгра (9) $t_2(x) \ldots t_k(x) \equiv c_1q_2(x) \ldots q_l(x)$ бўлади. Шу жараённи маълум $q_2(x) \ldots q_l(x)$ кўпайтувчиларга татбиқ этиш орқа ли шуларнинг ҳар бирига чап томонда айнан тенг бўлган кўпҳад тўғри келишини аниқлаш мумкин. Шу билан теорема исбот бўлди.

Бу теоремадан келиб чиқиб, умумий ҳолда

$$f(x) = ct_1^{\alpha_1}(x)\, t_2^{\alpha_2}(x)\, t_3^{\alpha_3}(x) \ldots t_k^{\alpha_k}(x)$$

кўринишида ёзиш имкониятига эга бўламиз.

78- таъриф. *Агар $f(x)$ кўпҳад $T^{\alpha}(x)$ га бўлиниб, лекин $T^{\alpha+1}(x)$ га бўлинмаса, $T(x)$ кўпҳад $f(x)$ нинг α каррали кўпайтувчиси дейилади.*

Мисол. $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$ кўпҳад учун $T(x) = x^2 + x + 1$ кўпҳад икки каррали кўпайтувчидир, чунки $f(x) = (x^2 + x + 1)^2 (x - 1)$.

79- таъриф. *Агар x нинг a сон қийматида $F(x)$ кўпҳад нолга айланса, у ҳолда a сон $F(x)$ нинг илдизи дейилади.*

Мисол. $f(x) = x^2 - 5x + 6$ кўпҳад $x = 2$ ва $x = 3$ ларда $f(2) = 0$ ва $f(3) = 0$ бўлади. Демак, $f(x)$ нинг илдизлари $\{2; 3\}$ дан иборат экан.

88- теорема. *$x = a$ сон $F(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлиши учун $F(x)$ нинг $x - a$ га бўлиниши зарур ва етарлидир.*

Исботи. Зарурлиги. $x = a$ сон $F(x)$ нинг илдизи бўлсин, у ҳолда 79- таърифга асосан $F(a) = 0$ бўлиб, $F(x)$ ни $x - a$ га бўлишдан чиққан қолдиқ, 86- теоремага асосан $r = 0$ бўлади. Демак, $F(x)$ кўпҳад $x - a$ га қолдиқсиз бўлинади.

Етарлилиги. Энди $F(x)$ кўпҳад $x - a$ га қолдиқсиз бўлинсин, яъни $F(x) = (x - a) q(x)$, у ҳолда $r = 0$ бўлгани учун $F(a) \equiv r(a) \equiv 0$ бўлиб, $F(x)$ кўпҳад $x - a$ га бўлинади. Шу билан теорема исботланди.

89- теорема. *Агар $f(x)$, $(\deg f = n)$ кўпҳад P да k та турли $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ илдизларга эга бўлса, у ҳолда у $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_k)$ кўпайтмага бўлинади.*

Исбот. 88- теоремага асосан $f(x) = (x - \alpha_1) f_1(x)$ га эга бўламиз. Шартга кўра $f(x)$ нинг илдизи α_2 бўлгани учун $f(\alpha_2) \equiv 0$ эканидан $f(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1) f_1(\alpha_2) \equiv 0$ бўлиши келиб чиқади. Бунда $\alpha_2 \neq \alpha_1$ эканидан $f_1(\alpha_2) \equiv 0$ бўлади. Бундан $f_2(x) = (x - \alpha_2) f_2(x)$ бўлади. Демак, булардан $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) f_2(x)$ ҳосил бўлади. Бу жараённи давом эттириб, маълум k қадамдан сўнг $f(x)$ кўпҳадни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_k) f_k(x),$$

бунда $f_k(x)$ — даражаси $n - k$ бўлган кўпҳаддир. Шу билан теорема исбот қилинди.

Мисол ва масалалар ечиш

1. $f(x) = x^2 + 6x + 8$ ни кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш. $f(x) = x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x + 4x + 8 = (x^2 + 2x) + (4x + 8) = x(x+2) + 4(x+2) = (x+2)(x+4)$.

2. $P(x, y) = 2x^5 - 128x^2y^3$ ни кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш. $P(x, y) = 2x^5 - 128x^2y^3 = 2x^2(x^3 - 64y^3) = 2x^2(x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$.

3. $P(x, y) = (x+y)^5 - x^5 - y^5$ ни кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш. $P(x, y) = (x+y)^5 - x^5 - y^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3) = 5xy[(x^3 - y^3) + 2xy(x+y)] = 5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)$.

4. $f(a, b) = a^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 - b^6$ ни кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш. $f(a, b) = a^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 - b^6 = (a^6 - b^6) + (a^4 + a^2b^2 + b^4) = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) = (a^4 + a^2b^2 + b^4)(a^4 + a^2b^2 + b^4)(a^2 - b^2 + 1) = (a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2)(a^2 - b^2 + 1) = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)(a^2 - b^2 + 1)$.

5. $f(a) = a^3 + 9a^2 + 27a + 9$ ни кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш. $f(a) = a^3 + 9a^2 + 27a + 19 = a^3 + 9a^2 + 27a +$

$+27-8=(a+3)^3-2^3=(a+1)[(a+3)^2+(a+3)+4]=$
$=(a+1)(a^2+3a+19)$.

6. $f(a)=a^2(a^2+14)+49$ кўпҳадда a — тоқ сон бўлса, $f(a)\ \vdots\ 64$ эканлигини исботланг.

Ечиш. $f(a)=a^2(a^2+14)+49=a^4+14a^2+49=(a^2+7)^2$ бўлади. Шартга кўра $a=2n-1$, $n\in N$ — тоқ сон бўлгани учун $f(a)=f(2n-1)=[(2n-1)^2+7]^2=(4n^2-4n+b)^2=16(n^2-n+2)^2$.

Энди $(n^2-n+2)\ \vdots\ 2$ эканини кўрсатамиз:

1). Агар n жуфт сон бўлса, n^2 ҳам жуфт бўлади. Бундан n^2-n+2 ҳам жуфт бўлиб, $(n^2-n+2)\ \vdots\ 2$ бўлади;

2) Агар n тоқ сон бўлса, у ҳолда n^2 ҳам тоқ бўлиб, n^2-n жуфт сон бўлишидан $(n^2-n+2)\ \vdots\ 2$ экани келиб чиқади. Демак, $f(a)\ \vdots\ 64$ эканлиги равшандир.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

1. $P(x)=x^2-5x+2$; $Q(x)=x^2+3x+6$ кўпҳадлар берилган. Қуйидагиларни топинг:

а) $P(x)+Q(x)$; б) $2P(x)-4Q(x)$; в) $P(x)[3Q(x)]$; г) $[P(x)+Q(x)]^2$.

2. $f(x, y)=x^2-3x^2y+4xy^2+5y^3$ ни $x=1\frac{1}{3}$; $y=-\frac{1}{2}$ қийматларда ҳисобланг.

3. $f(a)=a(2a+1)-a^2(a+2)+(a^3-a+3)$ ифоданинг қиймати a га боғлиқ эмаслигини исботланг.

4. Кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $f(x)=x^4+x^2+1$; б) $f(x)=x^{16}-1$;
в) $f(x)=2x^4+x^3+4x^2+x+2$; д) $f(x)=3x^8-x^{16}+1$;
с) $f(x)=x^8+x^4+1$; н) $f(x)=x^4-12x^3+47x^2-60x$;
п) $f(x)=x^6+x^4+1$.

5. Симметрик кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратинг;

а) $6x^4-11x^3y-18x^2y^2-11xy^3+6y^4$;
б) $2x^4-x^3y+3x^2y^2-xy^3+2y^4$;
с) $2x^4+7x^3y+9x^2y^2+7xy^3+2y^4$;
д) $2x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+2y^4$;
е) $18a^4-21a^3b-94a^2b^2-21ab^2+18b^4$;
н) $3x^4-8x^3y+14x^2y^2-8xy^3+3y^4$;
п) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$;

o) $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$;

p) $(x+y)(x+z)(y+z)+xyz$.

6. Антисимметрик кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $y^2z^2(y^2-z^2)+x^2z^2(z^2-x^2)+x^2y^2(x^2-y^2)$;

б) $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$;

с) $(b-c)(b+c)^2+(c-a)(c+a)^2+(a-b)(a+b)^2$;

д) $a(b-c)^3+d(c-a)^3+c(a-b)^3$;

е) $x(y+z)(y^2-z^2)+y(z+x)(z^2-x^2)^2+z(y+x)(x^2-y^2)$;

н) $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$.

7. Агар $a+b+c=0$ бўлса, қуйидаги айниятларнинг ўринли эканини исботланг:

а) $a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+(a^2+b^2+c^2)(ab+ac+bc)=0$;

б) $a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)=0$;

с) $a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$;

d) $2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2$;

е) $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3+3abc=x^3$; $x=(a+b+c):2$;

п) $a(x-b)(x-c)+b(x-a)(x-c)+c(x-a)(x-b)+2(x-a)(x-b)(x-c)=abc$; $x=(a+b+c):2$.

14. Агар $f(x)$ бутун коэффициентли кўпҳад бўлса, $\forall a, b\in \mathbf{Z}$ учун $f(a+\sqrt{b})+f(a-\sqrt{b})$ бутун сон эканини исботланг.

15. $(1+2x-4x^2)^{248}\times(1-7x+5x^2)^{345}$ кўпҳаднинг коэффициентлари йиғиндисини топинг.

16. $f(x)=x^{100}-3x+2$ кўпҳадни $\varphi(x)=x^2-1$ га бўлгандаги қолдиқни топинг.

5-§. КАСР-РАЦИОНАЛ ИФОДАЛАРНИ АЙНАН АЛМАШТИРИШ

Математикада бутун рационал ифодалар билан бир қаторда каср-рационал ифодалар ҳам муҳим аҳамиятга эгадир.

80-таъриф. *Каср-рационал ифода* (алгебраик каср) *деб, рационал сонлар майдонида аниқланган* $f(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c)$ ва $\varphi(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c)$ *кўпҳадларнинг (нолга бўлишдан ташқари) бўлинмасига айтила-*

ди ва $F(x, y, \ldots, z, a, \ldots, c) =$

$$= \frac{f(x, y, \ldots, z, a, \ldots, c)}{\varphi(x, y, \ldots, z, a, \ldots, c)}, \ \varphi(x, y, \ldots, z, a, \ldots, c) \neq 0$$

кўринишида белгиланади.

Берилган каср-рационал ифодадаги ўзгарувчиларнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами *шу каср-рационал ифоданинг аниқланиш соҳаси дейилади.*

Каср-рационал, умуман, рационал ифодалар кўпинча Q ёки R сонли майдонларда қаралади. Умуман, рационал ифодаларни айнан алмаштириш ифоданинг аниқланиш соҳасини аниқлаб олингандан кейин амалга оширилади.

81-таъриф. *Берилган* $F(x, y, \ldots, z, a, \ldots, c)$ (1) *рационал ифода қаралаётган P соҳада* $\frac{f(x, y, \ldots, z, a, \ldots c)}{q(x, y, \ldots, z, a, \ldots c)}$ $\left[D(f, q) = 1, \ q \neq 0, \ F = \frac{f}{q}\right]$ (2) *қисқармас рационал касрга айнан тенг бўлса, (2) ифода (1) нинг айнан шакл алмаштирилган натижаси дейилади.*

Мисол. $\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{x^2-1}{x^2+x+1}$, $\frac{x^2+y^2+z^2}{1-x-y-z}$, $\frac{a^2+b^2}{a^3-b^3}$, $\frac{ax^2+bx+c}{(a+b)(bx^2+cx)}$ ва ҳоказо алгебраик касрлардир.

82-таъриф. *Агар* $\frac{P(x, y, \ldots, z, a, \ldots, c)}{T(x, y, \ldots, z, a, \ldots, c)}$ *ва* $\frac{P_1(x, y, \ldots, z, a, \ldots, c)}{T_1(x, y, \ldots, z, a, \ldots, c)}$ *алгебриик касрларда қатнашаётган ўзгарувчиларнинг олиши мумкин бўлган қийматлар соҳасидан олинган ҳар бир қиймат учун*

$$\frac{P(x, y, \ldots, z, a, \ldots, c)}{T(x, y, \ldots, z, a, \ldots, c)} = \frac{P_1(x, y, \ldots, z, a, \ldots, c)}{T_1(x, y, \ldots, z, a, \ldots, c)}$$

тенглик бажарилса, у ҳолда бу касрлар айнан тенг дейилади.

Мисоллар. 1) $\frac{x-y}{x^2-y^2}$ ва $\frac{1}{x+y}$ айнан тенг касрлардир.

2) $\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ айнан тенг касрлардир.

90-теорема.

$$\frac{P(x, y, \ldots, z, a, \ldots, c)}{T(x, y, \ldots, z, a, \ldots, c)} \ \text{ва} \ \frac{P_1(x, y, \ldots, z, a, \ldots, c)}{T_1(x, y, \ldots, z, a, \ldots, c)}, \quad (1)$$

$T_1 \neq 0$, $T \neq 0$ касрлар айнан тенг бўлиши учун

$$P(x, y, \ldots, z, a, \ldots, c)T_1(x, y, \ldots, z, a, \ldots, c) = $$
$$= P_1(x, y, \ldots, c)\ T(x, y, \ldots, c) \quad (2)$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Исботи. Етарлилиги. Теореманинг шартига кўра ўзгарувчиларнинг олиши мумкин бўлган қийматлар тўпламида (2) шарт ўринли ва шу билан бирга T ва T_1 кўпҳадларни нолга айлантирадиган илдизларнинг чекли тўплами уларнинг аниқланиш соҳасидан чиқарилганлиги маълум қилинган бўлганлигини эътиборга олсак, у ҳолда $P \cdot T_1 = = P_1T \Rightarrow \frac{P}{T} = \frac{P_1}{T_1}$ келиб чиқади.

Зарурийлиги. Шартга кўра $\frac{P}{T}$ ва $\frac{P_1}{T_1}$ касрлар учун $T \neq 0$, $T_1 \neq 0$, бўлиб, улар бу касрларнинг олиши мумкин бўлган қийматлар соҳасида аниқланган, 77-таърифга асосан $\frac{P}{T} \equiv \frac{P_1}{T_1}$ бўлсин дейлик, у ҳолда $PT_1 = P_1T$ ни ёза оламиз. Агар ҳосил қилинган натижани $k = T_1P - P_1T$ деб қарасак, у ҳолда $k \equiv 0$ бўлиб, $PT_1 - P_1T \equiv 0$, бундан $P_1T = = PT_1$ экани ҳосил бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.

Берилган $\frac{P(x, \ldots, z, a, \ldots, c)}{T(x, \ldots, z, a, \ldots, c)}$ қисқармас касрнинг сурати ва махражини $K(x, y, \ldots, z, a, \ldots, c) \neq 0$ кўпҳадга кўпайтирсак, касрнинг қиймати ўзгармайди.

$\frac{P(x)}{T(x)}$ ва $\frac{P_1(x)}{T_1(x)}$ рационал касрлар берилган бўлсин. Бу касрлар учун ушбу хоссалар ўринли:

1°. $\frac{P(x)}{T(x)} \equiv \frac{P(x)}{T(x)}$ — *рефлексивлик*;

2°. $\frac{P(x)}{T(x)} \equiv \frac{P_1(x)}{T_1(x)} \Rightarrow \frac{P_1(x)}{T_1(x)} \equiv \frac{P(x)}{T(x)}$ — *симметриклик*;

3°. Агар $\frac{P(x)}{T(x)} \equiv \frac{P_1(x)}{T_1(x)}$ ва $\frac{P_1(x)}{T_1(x)} \equiv \frac{P_2(x)}{T_2(x)}$ бўлса, у ҳолда $\frac{P(x)}{T(x)} \equiv \frac{P_2(x)}{T_2(x)}$ — *транзитивлик.*

Бу хоссаларнинг ҳақиқатан ҳам ўринли эканини текшириб кўришни ўқувчиларнинг ўзларига ҳавола қиламиз.

83-таъриф. $\frac{P}{T}$ ва $\frac{P_1}{T_1}$ *алгебраик касрларнинг алгебра-*

ик йиғиндиси деб $\frac{PT_1+P_1T}{TT_1}$ *касрни, кўпайтмаси деб* $\frac{PP_1}{TT_1}$ *касрни айтилади.*

91-теорема. *Агар* $\frac{P}{T}$ *ва* $\frac{P_1}{T_1}$ *алгебраик касрларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасида қатнашаётган компонентларнинг бирини ёки иккаласини унга айнан тенг бўлган алгебраик каср билан алмаштирилса, ҳосил бўлган йиғинди ва кўпайтма аввалгисига айнан тенг бўлади.*

Исботи. 90-теорема шартига кўра $\frac{P}{T}$ ва $\frac{P_1}{T_1}$ алгебраик касрлар учун $\frac{P}{T} \equiv \frac{P'}{T'}$ ва $\frac{P_1}{T_1} \equiv \frac{P_1'}{T_1'}$ берилган.

Бу тенгликларни мос равишда ҳадлаб қўшсак ва кўпайтирсак, $\frac{P}{T}+\frac{P_1}{T_1}=\frac{PT_1+TP_1}{TT_1} \equiv \frac{P'T_1'+T'P_1'}{T'T_1'}$ ва $\frac{PP_1}{TT_1} \equiv \frac{P'P_1'}{T'T_1'}$ ҳосил бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.

Алгебраик касрларни қўшиш ва кўпайтириш амаллари қуйидаги хоссаларга эга:

1) $\frac{P}{T}+\frac{P_1}{T_1}=\frac{P_1}{T_1}+\frac{P}{T}$; $\frac{P}{T}\cdot\frac{P_1}{T_1}=\frac{P_1}{T_1}\cdot\frac{P}{T}$ — *ўрин алмаштириш.*

2) $\left(\frac{P}{T}+\frac{P_1}{T_1}\right)+\frac{P_2}{T_2}=\frac{P}{T}+\left(\frac{P_1}{T_1}+\frac{P_2}{T_2}\right)$; $\left(\frac{PP_1}{TT_1}\right)\cdot\frac{P_2}{T_2}=\frac{P}{T}\left(\frac{P_1}{T_1}\cdot\frac{P_2}{T_2}\right)$ — *гуруҳлаш.*

3) $\left(\frac{P}{T}+\frac{P_1}{T_1}\right)\frac{P_2}{T_2}=\frac{P}{T}\cdot\frac{P_2}{T_2}+\frac{P_1}{P_1}\cdot\frac{P_2}{T_2}$ — *кўпайтиришнинг йиғиндига нисбатан тарқатиш хоссаси.*

Агар $\frac{P}{T}$ ва $\frac{P_1}{T_1}$ алгебраик касрлар берилган бўлиб, $\frac{P}{T}:\frac{P_1}{T_1}$ ни топиш талаб қилинса, у ҳолда $\frac{P}{T}:\frac{P_1}{T_1}=\frac{P}{T}\cdot\frac{T_1}{P_1}$ бўлади бундан $\frac{P}{T}:\frac{P_1}{T_1}=\frac{P}{T}\cdot\frac{T_1}{P_1}=\frac{PT_1}{TP_1}$; $\frac{P_1}{T_1}\neq 0$ экани келиб чиқади.

$\frac{P}{Q}$ алгебраик каср берилган бўлсин дейлик. Бу касрни

n-даражага оширсак, $\left(\frac{P}{Q}\right)^n = \underbrace{\frac{P}{Q} \cdot \frac{P}{Q} \cdots \frac{P}{Q}}_{n \text{ марта}} = \frac{\overbrace{P \ldots P}}{\underbrace{Q \ldots Q}_{n \text{ марта}}} =$

$= \frac{P^n}{Q^n}$ ҳосил бўлади.

Мисол. $\left(\frac{2x^3y}{3z}\right)^5 = \frac{32x^{15}y^5}{243z^5}$.

Мисол ва масалалар ечиш

1. $\frac{x^2 - 5xy + 6y^2}{9y^2 - x^2}$ касрни қисқартиринг.

Ечиш. Бу касрни қисқартириш учун аввал сурат ва махражидан умумий кўпайтувчини ажратиб оламиз. Бунинг учун касрнинг сурат ва махражини кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$x^2 - 5xy + 6y^2 = (x - 2y)(x - 3y); \; 9y^2 - x^2 = \\ = (3y - x)(3y + x),$$

натижада

$$\frac{x^2 - 5xy + 6y^2}{9y^2 - x^2} = \frac{(x - 2y)(x - 3y)}{-(x - 3y)(x + 3y)} = -\frac{x - 2y}{x + 3y}$$

ни ҳосил қиламиз. Демак, натижа $\frac{2y - x}{x + 3y}$ бўлади.

2. $\frac{a + 3}{6a - 3a^2}$ ва $\frac{a + 1}{4a^5 - 16a^3}$ касрларни умумий махражга келтиринг.

Ечиш. Берилган касрларнинг махражларини аввал кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$\frac{a + 3}{3a\,(2 - a)} \text{ ва } \frac{a + 1}{4a^3\,(a - 2)\,(a + 2)}.$$

Энди касрларнинг махражларини таққослаймиз ва унда қатнашаётган ифодаларнинг энг кичик умумий бўлинувчисини топамиз:

$$\frac{a + 3}{-3a\,(a - 2)} \text{ ва } \frac{a + 1}{4a^3\,(a - 2)\,(a + 2)} \Rightarrow \frac{4\,(a + 3)\,a^2\,(a + 2)}{-12a^3\,(a - 2)\,(a + 2)} \text{ ва } \\ \frac{3\,(a + 1)}{12a^3\,(a - 2)\,(a + 2)}$$

ларни ҳосил қиламиз. Демак, умумий махраж: $12a^3(a - 2)(a + 2)$.

3. Қасрларнинг кўпайтмасини топинг: $\dfrac{x^2+2x+1}{18x^3}\cdot\dfrac{9x^4}{x^2-1}$.

Ечиш. Қасрларнинг кўпайтмаси қоидасига асосан

$$\frac{x^2+2x+1}{18x^3}\cdot\frac{9x^4}{x^2-1}=\frac{(x+1)^2}{18x^3}\cdot\frac{9x}{(x+1)(x-1)}=\frac{x+1}{2(x-1)}.$$

4. Қасрларнинг бўлинмасини топинг: $\dfrac{a^3-2a^2}{3a+3}:\dfrac{a^2-4}{3a^2+6a+3}$.

Ечиш. Қасрларни бўлиш қоидасига асосан:

$$\frac{a^3-2a^2}{3a+3}:\frac{a^2-4}{3a^2+6a+3}=\frac{a^2(a-2)}{3(a+1)}\cdot\frac{3(a^2+2a+1)}{(a-2)(a+2)}=$$

$$=\frac{a^2(a+1)^2}{(a+1)(a+2)}=\frac{a^2(a+1)}{a+2}$$

бўлади.

5. $\dfrac{4b}{4b^2-1}+\dfrac{2b+1}{3-6b}-\dfrac{1-2b}{4b+2}$ йиғиндини ҳисобланг.

Ечиш.

$$\frac{4b}{(2b+1)(2b-1)}-\frac{2b+1}{3(2b-1)}+\frac{2b-1}{2(2b+1)}=$$

$$=\frac{24b-2(2b+1)^2+3(2b-1)^2}{6(2b-1)(2b+1)}=\frac{4b^2+4b+1}{6(2b-1)(2b+1)}=$$

$$=\frac{(2b+1)^2}{6(2b-1)(2b+1)}=\frac{2b+1}{6(2b-1)}.$$

6. $\dfrac{x^2+9x+2}{(x-1)(x+1)(x+1)}$ касрни содда касрлар йиғиндиси орқали ифодаланг.

Ечиш. $\dfrac{x^2+9x+2}{(x-1)(x+2)(x+2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x+2}$ деб, тенгликнинг чап томонини соддалаштирамиз:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}=$$

$$=\frac{Ax^2+3Ax+2A+Bx^2+Bx-2B+Cx^2-C}{(x-1)(x+1)(x+2)}=$$

$$=\frac{(A+B+C)x^2+(3A+B)x+2A-2B-C}{(x-1)(x+1)(x+2)}.$$

Энди икки кўпҳаднинг тенглик шартидан фойдаланиб,

$$\begin{cases}A+B+C=1,\\3A+B=9,\\2A-2B-C=2\end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системани алгебраик қўшиш усулидан фойдаланиб ечиб, $A=2, B=3, C=-4$ қийматларни ҳосил қиламиз, яъни берилган каср содда касрлар орқали бундай ифодаланади:

$$\frac{x^2+9x+2}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{4}{x+2}.$$

7. Ифодани соддалаштиринг: $f(x)=\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{1}{x-1}-\right.$ $\left.-\frac{1}{x-2}+1\right)$.

Ечиш.

$$f(x)=\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-2}{x}\cdot\dfrac{x-2-(x-1)+(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}\\ x(x-1)(x-2)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+1}{x(x-1)},\\ x(x-1)(x-2)\neq 0.\end{cases}$$

Демак,

$$f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x(x-1)}\wedge x(x-1)(x-2)\neq 0.$$

8. Ифодани соддалаштиринг:

$$f(a,\ b,\ c)=\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}.$$

Ечиш.

$$f(a,\ b,\ c)=\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{a-c}+\dfrac{1}{b-c}-\dfrac{1}{b-a}+\dfrac{1}{c-a}-\dfrac{1}{c-b},\\ \dfrac{b-c}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{a-c};\ a\neq b;\ a\neq c;\ b\neq c\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{1}{c-a}\\ a\neq b;\ a\neq c;\ b\neq c\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{a-b}+\dfrac{2}{b+c}+\dfrac{2}{c-a}, \\ a\neq b; \quad b\neq c; \quad a\neq c. \end{cases}$$

Демак,

$$f(a,\ b,\ c)=\begin{cases} \dfrac{2}{a-b}+\dfrac{2}{b-c}+\dfrac{2}{c-a}, \\ a\neq b; \ a\neq c,\ b\neq c \end{cases}$$

Умуман каср-рационал ифодаларни айнан алмаштириш жараёни шу ифодада берилган арифметик ёки алгебраик амалларни энг қисқа ва қулай усуллардан фойдаланиб бажариш натижасида янги ифодани ҳосил қилишдир. Бу жараёнда энг муҳими берилган ифоданинг аниқланиш соҳаси тораймаслиги ёки кенгаймаслигидир. Агар бунинг иложи бўлмаса, у ҳолда унинг аниқланиш соҳасини кенгайган соҳага нисбатан текшириб кўриш мақсадга мувофиқдир.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

1. Қасрнинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $\dfrac{x+1}{x-1}$; б) $\dfrac{x+3}{x^2-4}$; в) $\dfrac{x^2+5}{x^3+6}$; г) $\dfrac{x^4+x^2+3}{x^2-8x}$;

д) $\dfrac{x^3-4}{x^2-7x+10}$.

2. Қасрларнинг сон қийматини топинг:

а) $\dfrac{2x-3y}{1-xy}$; $x=0{,}5$, $y=0{,}2$; б) $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+5}{x^4-3x}$, $x=0{,}5$;

в) $\dfrac{x-y}{x^3+3y^2}$, $x=1\dfrac{1}{3}$, $y=2$; г) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-7x+6}$, $x=-\dfrac{1}{3}$.

3. Қасрларни қисқартиринг:

а) $\dfrac{63x^2y^2}{77y^4}$; б) $\dfrac{2x^3-8x^5}{12x^4}$; в) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5}$; г) $\dfrac{5a^2b^7-4ab^5}{10a^4b^6-8a^4b^4}$;

д) $\dfrac{a^2+5a+25}{2a^4-250a}$; е) $\dfrac{x^2+yz+xz-y^2}{x^2-yz-xz-y^2}$.

4. Ифодаларни соддалаштиринг:

а) $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)$; б) $\left(\frac{2m+1}{2m-1}-\frac{2m-1}{2m+1}\right):\frac{4m}{10m-5}$;

в) $\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$;

г) $\left(\frac{x}{x-a}-\frac{a}{x+a}\right):\left(\frac{x+a}{a}-\frac{x-a}{x}\right)$;

д) $\left(\frac{1}{a+1}-\frac{3}{a^3+1}+\frac{3}{a^2-a+1}\right)\left(a-\frac{2a-1}{a+1}\right)$;

е) $\left(\frac{2x^2+x}{x^3-1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}\right)\left(1+\frac{x+1}{x}-\frac{x^2+5x}{x^2+x}\right)$;

к) $\left(x-\frac{4xy}{x+y}+y\right):\left(\frac{x}{x+y}-\frac{y}{y-x}-\frac{2xy}{x^2-y^2}\right)$;

л) $\left(\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+2ab+b^2}\right):\frac{b^2+4ab-a^2}{a^2-b^2}$;

м) $\left(\frac{b^2}{a^3-ab^2}+\frac{1}{a+b}\right):\left(\frac{a-b}{a^2+ab}-\frac{a}{b^2+ab}\right)$;

н) $\left(\frac{2x^2+3x}{4x^2+12x+9}-\frac{3x+2}{2x+3}+\frac{4x-1}{2x+3}\right)\cdot\frac{2x+3}{2x-3}$;

о) $\left(\frac{3a+2}{3a^2+1}-\frac{18a^3-a-9}{9a^4-1}+\frac{3a-2}{3a^2-1}\right):\frac{a^2+10a+25}{9a^4-1}$;

п) $\frac{xy}{x+y}\cdot\left[\frac{x^2}{(x^2-y^2)(x+y)}-\frac{2xy^2}{x^4-2x^2y^2+y^4}+\frac{y^2}{(x-y)^2(x+y)}\right]$;

р) $\frac{a^2+b^2}{ab}\cdot\left(\frac{6a+b}{a^2-b^2}:\frac{6a^3+b^3+a^2b+6ab^2}{2ab^2-2a^2b}+\frac{a+b}{a^2+b^2}\right)$;

с) $\left(\frac{2x^2y+2xy}{7x^3+x^2y+7xy^2+y^3}\cdot\frac{7x+y}{x^2-y^2}+\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)\cdot(x^2-y^2)$;

т) $\frac{2-x}{5}+\left(\frac{1}{1-2x}\right)^2:\left(\frac{x+2}{4x^3-4x^2+x}-\frac{2-x}{1-8x^3}\cdot\frac{4x^2+2x+1}{2x^2+x}\right)$;

х) $\frac{1}{x(x-y)(x-z)(x-t)}+\frac{1}{y(y-x)(y-z)(y-t)}+$

$+\frac{1}{z(z-x)(z-y)(z-t)}+\frac{1}{t(t-x)(t-y)(t-z)}$.

6-§. ИРРАЦИОНАЛ ИФОДАЛАРНИ АЙНАН АЛМАШТИРИШ

84-таъриф. *Агар берилган алгебраик ифодаларда тўрт арифметик амал ва даражага ошириш амалидан ташқари илдиз чиқариш амали ҳам қатнашса, бундай ифодалар иррационал ифодалар деб аталади.*

Мисоллар. 1. $\sqrt{3a}\cdot b^2+\sqrt{2a^3b}\cdot x^3+\sqrt[3]{4a^2b}$ ифода иррационал ифодадир.

2. $\dfrac{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$ ифода ҳам иррационал ифодадир.

85-таъриф. *Манфиймас a соннинг n-даражали арифметик илдизи деб, n-даражаси a га тенг бўлган манфиймас x сонга айтилади ва $x^n=a$ ёки $x=\sqrt[n]{a}$ кўринишида белгиланади.*

Мисоллар. 1. $\sqrt{4}=2$, бу ерда арифметик илдиз 2.

2. $\sqrt[3]{-8}=-2$, бу ерда -2 арифметик илдиз бўла олмайди, чунки $a\geqslant 0$ шарт бузилади.

3. $\sqrt{x^2}=|x|$, бу ерда арифметик илдиз:

$$|x|=\begin{cases} x, \text{ агар } x\geqslant 0 \text{ бўлса;}\\ -x, \text{ агар } x<0 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

92-теорема. *Ҳар қандай манфиймас ҳақиқий a сон учун шундай биргина манфиймас ҳақиқий x сон мавжудки, унинг n-даражаси a га тенг бўлади.*

Исботи. Теореманинг исботини икки қисмга ажратамиз ва аввал шундай манфиймас x сон биттагина эканини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $x^n=a$ шартини қаноатлантирувчи манфиймас сонлар x_1 ва x_2 бўлиб, $x_1^n=a$ ва $x_2^n=a$ бажарилсин, у ҳолда $x_1^n=a=x_2^n\Rightarrow x_1^n=x_2^n\Rightarrow x_1=x_2$ экани келиб чиқади, чунки турли мусбат ҳақиқий сонларнинг даражалари турлидир.

Энди $x^n=a$ тенглик ўринли эканини кўрсатамиз. Маълумки, ўнли яқинлашиш шартига асосан ҳар доим $0<x_1<$ $<x<x_1'$ шартини қаноатлантирувчи x_1 ва x_1' ҳақиқий сонларни шундай танлаш мумкинки (V боб), $x_1^n<x^n<x_1'^n$ бўлади. Бу ерда x_1^n ва $x_1'^n$ лар учун $\varepsilon>0$ сонни шундай танлаш мумкинки, $N_\varepsilon<n$ дан бошлаб, $x_1'^n-x_1^n=(x_1'-x_1)\times$ $\times(x_1'^{n-1}+x_1\cdot x'^{n-2}+\ldots+x_1^{n-1})<\varepsilon nx_0^{n-1}$ бажарилади, яъни $x_1'^n\approx x_1^n$ бўлиши билан бирга $x_1^n<a<x_1'^n$ ва $x_1^n<x^n<x_1'^n$ лардан $x^n=a$ экани келиб чиқади. Шу билан теорема исботланди.

Натижа. *Агар $a\geqslant 0$ бўлса, у ҳолда $(\sqrt[n]{a})^n=a\geqslant 0$ бўлади.*

Демак. $(\sqrt[n]{a})=a\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\ldots\sqrt[n]{a}}_{n \text{ та}}=a$ ни ёза оламиз.

93-теорема. *Берилган $x \geqslant 0$ ва $y \geqslant 0$ сонлар учун $x > y$, $x < y$ ёки $x = y$ бўлса, у ҳолда мос равишда $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}$, $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$, $n \in N$ ёки $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y}$ бўлади.*

Исботи. 92-теореманинг шартига кўра $x \geqslant 0$ ва $y \geqslant 0$ бўлгани учун x ва y орасида ҳар доим $x > y$ ёки $x < y$, ёки $x = y$ муносабатлардан бири содир бўлиши ҳақиқий сонларни таққослашдан маълум.

$$x > y \overset{\text{H}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{\sqrt[n]{x} \ldots \sqrt[n]{x}}_{n \text{ та}} > \underbrace{\sqrt[n]{y} \ldots \sqrt[n]{y}}_{n \text{ та}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{x}\right)^n > \left(\sqrt[n]{y}\right)^n$$

бўлиб, $x, y \in R_+$ эканлигидан $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n > \left(\sqrt[n]{y}\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}$ экани келиб чиқади, ёки $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}$ ва $x, y \in R_+$ эканини эътиборга олиб ҳамда $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}$ ни ўзини- ўзига n марта кўпайтирсак, $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \Rightarrow \left(\sqrt[n]{x}\right)^n > \left(\sqrt[n]{y}\right)^n \Rightarrow x > y$ бўлади.

Қолган ҳолларни ҳам худди шу усул билан исботлаш мумкин. Шу билан теорема исбот қилинди.

Берилган манфиймас ҳақиқий сондан илдиз чиқариш амали қуйидаги хоссаларга эга:

1°. *Кўпайтманинг n-даражали илдизи ҳар бир кўпайтувчидан олинган ўша даражали илдизлар кўпайтмасига тенг бўлади:*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_k} = \sqrt[n]{a_1} \sqrt[n]{a_2} \ldots \sqrt[n]{a_k}.$$

Исботи. Юқорида келтирилган 79 — 80-таърифлар, 91 — 92-теоремалар ва натижага асосан

$$a_1 \cdot a_2 \ldots a_k = \left\{\begin{array}{c} a_1 \\ \ldots \\ a_k \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{c} \sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_1} \ldots \sqrt[n]{a_1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \sqrt[n]{a_k} \cdot \sqrt[n]{a_k} \ldots \sqrt[n]{a_k} \end{array}\right. =$$

$$= \left(\sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \ldots \sqrt[n]{a_k}\right)^n$$

бўлиб, 80-таърифга асосан $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_k} = \sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \ldots \sqrt[n]{a_k}$ бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.

2°. *Бўлинманинг n-даражали илдизи бўлинувчининг ўша даражали илдизини бўлувчининг шу даражали илдизига бўлинганига тенг:*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Исботи. 1-хоссага асосан

$$\frac{a}{b}=\frac{\overbrace{}^{}\sqrt[n]{a}\ldots\sqrt[n]{a}}{\underbrace{\sqrt[n]{b}\ldots\sqrt[n]{b}}_{n}}=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n\Rightarrow\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

3°. *n-даражали илдизни k-даражага ошириш учун илдиз остидаги ифодани k-даражага ошириш кифоядир:*

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}.$$

Исботи. 1° да $a_1=a_2=\ldots a_k$ десак, 3° хосса исбот бўлади.

4°. *Илдиз кўрсаткичи билан даража кўрсаткичини қисқартириш қоидаси* $\sqrt[nk]{a^k}=\sqrt[n]{a}.$

Исботи. Тенгликнинг иккала томонини nk-даражага кўтарамиз: $\left(\sqrt[nk]{a^k}\right)^{nk}=a^k$, тенгликнинг ўнг томонини шундай алмаштирсак

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{nk}=\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^k=a^k$$

натижага эга бўламиз. Демак, $a^k=a^k\Rightarrow a=a\Rightarrow\sqrt[nk]{a^k}=$ $=\sqrt[n]{a}.$

Мисол. $\sqrt[6]{2a^3}=\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[6]{a^3}=\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt{a}$; $\sqrt[8]{a^4}=\sqrt{a}$; $\sqrt{a^2}=|a|$.

5°. *Илдиздан илдиз чиқаришда илдиз кўрсаткичлари ўзаро кўпайтирилиб, илдиз остидаги ифода ўзгармайди:*

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}.$$

6. *Даражадан n-даражали илдиз чиқаришда асосдан шу даражали илдиз чиқариб, уни ўша даражага ошириллади:*

$$\sqrt[n]{a^k}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^k.$$

7°. *Кўпайтувчини илдиз ишораси остидан чиқариш ва илдиз остига киритиш мумкин:* $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ *учун*

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}; \quad a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}.$$

8°. *Илдиз кўрсаткичларини умумий кўрсаткичга келтириш.* $\sqrt[n_1]{a_1}, \sqrt[n_2]{a_2}, \ldots \sqrt[n_k]{a_k}$ ифодалар берилган бўлсин ва $n_1, n_2, \ldots, n_k$ лар учун $K(n_1, n_2, \ldots, n_k) = n$ бўлсин, у ҳолда $n = n_1 d_1$; $n = n_2 d_2, \ldots, n = n_k d_k$ бўлиб,

$$\sqrt[n_1]{a_1} = \sqrt[n]{a_1^{d_1}}; \ \sqrt[n_2]{a_2} = \sqrt[n]{a_2^{d_2}}, \ldots, \sqrt[n_k]{a_k} = \\ = \sqrt[n]{a_k^{d_k}}$$

ни ҳосил қиламиз, бундан

$$\sqrt[n_1]{a_1} \cdot \sqrt[n_2]{a_2} \ldots \sqrt[n_k]{a_k} = \sqrt{a_1^{d_1} \cdot a_2^{d_2} \ldots a_k^{d_k}}.$$

9°. *Агар илдиз кўрсаткичи тоқ сон бўлиб, илдиз остида манфий сон бўлса, у ҳолда*

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}.$$

10°. $\sqrt[m]{b}$ ва $\sqrt[n]{a}$ *илдизларни таққослаш учун аввал илдиз кўрсаткичларини умумий илдиз кўрсаткичига келтирилиб, илдиз остидаги сонлар ёки ифодалар ўзаро таққосланади:*

$$\sqrt[m]{b} \vee \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow \sqrt[mn]{b^n} \vee \sqrt[mn]{a^m} \Leftrightarrow a^m \vee b^n.$$

($\vee$ — белги бир йўла $>$, $<$, $=$ ларни англатади.)

Мактаб математикасидан маълумки, рационал ва иррационал ифодаларни айнан алмаштириш жараёнида даража тушунчаси муҳим аҳамиятга эгадир, яъни $a^n = \underbrace{a \cdot a \ \ldots \ a}_{n}$.

α ва β ҳақиқий сонлар берилган бўлсин. Агар a^α ва b^β ифодалар берилган бўлса, a^α — *даража*, a — *даража асоси*, α — *даража кўрсаткичи* дейилади. Агар $\alpha = \frac{p}{q}$ кўринишидаги рационал сон бўлса, у ҳолда $a^\alpha = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, $a \geqslant 0$ кўринишида, $\alpha = -\frac{p}{q}$ бўлса, $a^\alpha = a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$; $a > 0$ кўринишларда ифодаланади. Борди-ю $\alpha = \frac{p}{q}$, $\beta = \frac{k}{n}$ бўлиб, $\alpha = \beta \Leftrightarrow \frac{p}{q} = \frac{k}{n}$ бўлса, у ҳолда $a^{\alpha} = a^{\beta} \Leftrightarrow a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{k}{n}}$ бўлади. Даража қуйидаги хоссаларга эга.

1) $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$; 2) $a^{\alpha} : a^{\beta} = a^{\alpha-\beta}$; 3) $a^{-\beta} = \frac{1}{a^{\beta}}$, $a \neq 0$,

4) $(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$; 5) $(a \cdot b)^{\alpha} = a^{\alpha} \cdot b^{\alpha}$;

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$.

Мисол ва масалалар ечиш

1. $\sqrt[3]{375} = \sqrt[3]{3 \cdot 125} = \sqrt[3]{3 \cdot 5^3} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3}.$

2. $\sqrt[5]{2a^6} - \sqrt[5]{64a^6} = a\sqrt[5]{2a} - 2a\sqrt[5]{2a} = -a\sqrt[5]{2a}$, $a \geqslant 0$.

3. $\sqrt{3\sqrt[4]{3^3\sqrt[5]{3}}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{3^4 \cdot 3^3\sqrt[5]{3}}} = \sqrt[12]{\sqrt[5]{3^{20} \cdot 3^{15} \cdot 3}} = \sqrt[60]{3^{36}} = \sqrt[5]{27}.$

4. Касрларнинг махражларини иррационалликдан чиқаринг:

а) $\frac{2x}{\sqrt[6]{x^3y^2}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; в) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}-2}$; г) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{2x^3}+\sqrt[3]{4}}$.

Ечиш. Бу ерда $a - b = (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$; $a \pm b = (\sqrt[3]{a})^3 \pm (\sqrt[3]{b})^3 = (\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$ каби формулалардан ҳамда юқоридаги $1° - 10°$-хоссалардан фойдаланамиз:

а) $\frac{2x}{\sqrt[6]{x^3y^2}} = \frac{2x\sqrt[6]{x^3y^4}}{\sqrt[6]{x^6y^6}} = \frac{2x\sqrt{x}\,\sqrt[3]{y^2}}{xy} = \frac{2\sqrt{x}\,\sqrt[3]{y^2}}{y}$,

$x, y > 0$;

б) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3} = \sqrt{5}+\sqrt{2}$;

в) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}-2}=\dfrac{3(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{40}+4)}{(\sqrt[3]{5}-2)(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{40}+4)}=$

$=\dfrac{3(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{40}+4)}{5-8}=-(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{40}+4);$

г) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{4}}=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{4})}=$

$=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2}}{x^2+2}.$

5. Агар $A>0,\ B>0,\ A^2>B$ бўлса,

$$\sqrt{A\pm B}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\qquad(1)$$

эканини исботланг.

Исботи. $\sqrt{A+B}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=x$ деб олсак, $x^2=2A+2\sqrt{A^2-B}$ бўлиб, $x=\sqrt{2A-2\sqrt{A^2-B}}$ бўлади, бундан

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\qquad(2)$$

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}-\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\qquad(3)$$

ҳосил бўлади. (2) ва (3) ни ҳадлаб қўшиб айирсак, (1) ни ҳосил қиламиз. Шу билан (1) исбот қилинди.

6. $\left(\dfrac{\sqrt[-4]{x^2}-y}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}}-3\sqrt[12]{x^3y^4}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+y}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}-\sqrt[3]{y^2}\right)$

ифодани соддалаштиринг.

Ечиш. Ифода аниқланиш соҳаси билан берилган, деб уни соддалаштирамиз:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-y}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}}-3\sqrt[12]{x^3y^4}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{x^2}+y}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}-\sqrt[3]{y^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2})}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}}-\right.$$

$$\left.-3\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2})}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}-\right.$$

$$- \sqrt[3]{y^2}\Big) = \left[\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y}\right)^2\right] \cdot \sqrt[4]{x}\,(\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y}) =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{x}\,(\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y})}{\left[\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[4]{x}\,(\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y})}{|\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y}|} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt[4]{x}, \text{ агар } \sqrt[4]{x} > \sqrt[3]{y} \text{ бўлса;} \\ -\sqrt[4]{x}, \text{ агар } \sqrt[4]{x} < \sqrt[3]{y} \text{ бўлса.} \end{cases}$$

7. $\sqrt{138384}$ ни ҳисобланг.

Ҳисоблаш. Илдиз остидаги 138384 сонини устунларга (ҳар бир устунда иккитадан рақам бўлади) ажратамиз: $13'\ 83'\ 84'$. Сўнгра чапдан биринчи турган устундаги 13 сонига аҳамият бериб, квадрати 13 дан катта бўлмаган сонни топамиз. У 3 ($3^2 = 9 < 13$; $4^2 = 16 > 13$), сўнгра $13 - 3^2 = 4$ бўлиб, шу 3 ни 2 га кўпайтириб, 4 нинг чап томонида турган чизиқнинг чап томонига ёзамиз, кейин 4 нинг ўнг томонига иккинчи устундаги сон 83 ни ёзамиз, натижада 483 бўлади. Энди 6 нинг ўнг томонига $6a \times a = y \leqslant 483$ шартини қаноатлантирувчи рақам $a = 7$ ни топиб, сўнгра $483 - 469$ айирмани топамиз. Шу ўринда $67 + 7 = 74$ ни уларнинг тагига ёзамиз, яна юқоридаги жараённи бир карра такрорласак, 3, 7, 2 сонларини ҳосил қиламиз. Демак, $372^2 = 138384$ экани келиб чиқади.

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{13'83'84} = 372 \\ & 9 \\ \times\, 67 & \overline{483} \\ 7 & -469 \\ \hline \times\, 742 & 1484 \\ 2 & -1484 \\ \hline & 0 \end{array}$$

8. $\sqrt{5}$ сонидан 0,01 аниқликда илдиз чиқаринг.

Ечиш. $\sqrt{5,\ 00\ 00\ 00}\ \ldots = 2{,}236\ \ldots$

$$\begin{array}{r|r} & 4 \\ \hline \times\, 42 & -100 \\ 2 & 84 \\ \hline \times\, 443 & 1600 \\ 3 & 1329 \\ \hline \times\, 4466 & 27100 \\ 6 & 26796 \\ \hline & \ldots\ldots 304 \end{array}$$

Демак, $\sqrt{5}$ сонининг 0,01 аниқликдаги илдизи 2,24, яъни $\sqrt{5}\approx 2{,}24$ бўлади.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

1. $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}-\sqrt[6]{27}$ ни соддалаштиринг.

2. Агар $x\leqslant 5$ бўлса, $x+5-\sqrt{(x-5)^2}=2x$ эканини кўрсатинг.

3. $(4x\sqrt[3]{x^2}-5y\sqrt[3]{xy}+xy\sqrt[3]{y^2})\cdot 2xy\sqrt[3]{xy}$ ни соддалаштиринг.

4. Амалларни бажаринг: а) $\left(\frac{a}{b^2}\sqrt{ab}-6a^3b^2\sqrt[3]{a^2b}+\right.$

$\left.+\sqrt[8]{a^4b^3}\right):\frac{a^2}{b}\sqrt[6]{ab^2}$;

б) $\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{n}{m}}-\frac{ab}{n}\sqrt{mn}+\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{m}{n}}\right)\cdot a^2b^2\sqrt{\frac{n}{m}}$.

Ифодаларни соддалаштиринг:

5. $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$.

6. $\left(\frac{3}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}\right):\left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}}+1\right)$.

7. $\frac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}+x}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$.

8. $\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+\frac{\sqrt{a}+1}{1-\sqrt{a}}\right)$.

9. $\left[(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^{-2}+(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^{-2}\right]:\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$.

10. $\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

11. $a\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}$.

12. $\left(\frac{1}{a-\sqrt{2}}-\frac{a^2+4}{a^3-\sqrt{8}}\right):\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)$.

13. $\left(\frac{1}{m-\sqrt{mn}}+\frac{1}{m+\sqrt{mn}}\right)\cdot\frac{m^3-n^3}{m^2+mn+n^2}$.

14. $\left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}}+\frac{1}{2-2\sqrt{a}}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right)\left(1+\frac{1}{a}\right).$

15. $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2a}+2}+\frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}.$

16. $\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}+8}{\sqrt[4]{a}+2}-4\right):\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}+8}{\sqrt[4]{a}-2}-6\sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}}.$

17. $\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1}+\sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1}-\sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}}+1.$

18. $\left(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\right.$
$\left.+\frac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right).$

19. $\left[\frac{\sqrt[6]{a^2x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a}}+\sqrt[6]{x}\right]^3+(4x+1)+(\sqrt[3]{x\sqrt{x}}+1)^2.$

20. $\left[\frac{3x^{\frac{-1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}\right]^{-1}-\left(\frac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}$

21. $\sqrt[=\frac{1}{2}]{\sqrt{a}}\left(\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2.$

22. $\left[\frac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})^3+2x+a}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})^3-x-2a}\right]^3+$
$+\sqrt{(a^3+3a^3x+3ax^2+x^3)^{\frac{2}{3}}}:a.$

23. $\left[\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(2\sqrt{b})^2}{a-b}-(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+\right.$
$\left.+b^{\frac{1}{2}})^{-1}\right]:\frac{(4b)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}.$

24. $\left(\frac{a-4b}{a+\sqrt{ab}-6b}-\frac{a-9b}{a+6\sqrt{ab}+9b}\right)\cdot\frac{b^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-3b^{\frac{1}{2}}}.$

25. $$\frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{a}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}.$$

26. $$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a^2:\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}.$$

27. $$\left[\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right](ab)^{-\frac{1}{2}}.$$

28. $$\left[\frac{\frac{1}{2}-a}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\frac{1}{a}}+1\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\frac{1}{a}}-1\right)}+\right.$$
$$\left.+\sqrt[3]{a}\right]^{-3}.$$

29. $$\left[\frac{a\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{a+\sqrt[3]{a}}-\sqrt[3]{x}\right]\cdot[(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})^2+$$
$$+3(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x})^2].$$

7- §. ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИ ИСБОТЛАШ

Математикада тенгсизлик тушунчаси кўп учрайдиган тушунчалардан биридир. Тенгсизлик R сонли тўпламда қаралиб, шу тўпламдан олинган сонлар ёки алгебраик ифода ларни катта, кичик ва тенг тушунчалари ёрдамида боғлайди.

.86-таъриф. *Агар берилган ифода R сонли майдонда аниқланиб, шу майдонда катта ва кичик ишоралари билан боғланган бўлса, у ҳолда бундай ифода тенгсизлик дейилади.*

Мисол. а) $5>3$; б) $2x-6>7$; в) $a^2+3ab>b^2$ ва ҳоказо.

Сонли тенгсизликлар қуйидаги хоссаларга эга:

1. $\forall a, b, c, \in R: a>b \wedge b>c \Rightarrow a>c.$

2. $\forall a, b, m \in R: a>b \Leftrightarrow a+m>b+m \vee a-m>b-m.$

3. $\forall a, b, c, d \in R: a>b \wedge c>d \Leftrightarrow a+c>b+d.$

4. $\forall a, b, c, d \in R^-: a > b \wedge c < d \Leftrightarrow a - c > b - d$.

5. $\forall a, b, c \in R^-: a > b \wedge c > 0 \Leftrightarrow ac > bc$.

6. $\forall a, b, c \in R^- a > b \wedge c < 0 \Leftrightarrow ac < bc$.

7. $\forall a, b, c, d \in R^+: (a > b \wedge c > d) \Leftrightarrow ac > bd$.

8. $\forall a, b, c, d \in R^+: (a > b \wedge c < d) \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

Юқоридаги параграфларда бу хоссалар кўриб ўтилгани учун уларнинг исботига тўхтаб ўтирмаймиз.

94-теорема. *$a_1, a_2, \ldots, a_n$ манфиймас сонларнинг ўрта арифметик қиймати уларнинг ўрта геометрик қийматидан кичик эмас:*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

бунда тенглик $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ бўлганда содир бўлади.

Исботи. Математик индукцияни татбиқ қиламиз: $n = 2$ бўлсин, у ҳолда $\sqrt{a_1 a_2} \leqslant \frac{a_1 + a_2}{2}$ бўлади. Бу ерда $\sqrt{a_1} = x_1$, $\sqrt{a_2} = x_2$; $x_1 x_2 \leqslant \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$ бўлади. Шартга кўра $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ эканини эътиборга олиб, $x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 \geqslant 0$; $(x_1 - x_2)^2 \geqslant 0$ га бўламиз. Демак, x_1 ва x_2 лар учун $\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \geqslant x_1 x_2$ ўринли ва бундан $a_1 + a_2 \geqslant 2\sqrt{a_1 a_2}$ ўринли экани келиб чиқади. Энди $n = k$ учун $\sum_{i=1}^{k} a_i \geqslant k \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} a_i}$ ўринли деб, у $n = 2k$ учун ўринли эканини кўрсатамиз, яъни

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k}}{2n} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} + \ldots + \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{2}}{k} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[k]{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdots \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[k]{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_3 a_4} \ldots \sqrt{a_{2k-1} a_{2k}}} = \sqrt[2k]{a_1 a_2 \ldots a_{2k}}.$$

Демак,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots a_{2k}}{2k} \geqslant \sqrt[2k]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_{2k}}.$$

Бу исботимизда теореманинг $n = k$ учун ўринлилигидан унинг $n=2k$ учун ўринли эканини келтириб чиқардик. Лекин берилган сонларнинг сони k га каррали бўлмаган ҳоллар учун ҳозирча тенгсизлик исботлангани йўқ. Бунинг учун $n=k$ да ўринли ҳамда $a_{k+1}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}$ деб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sqrt[k+1]{a_1a_2\ldots a_{k+1}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}}{k+1}=$$

$$=\frac{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}\cdot k+a_{k+1}}{k+1}=\frac{ka_{k+1}+a_{k+1}}{k+1}=$$

$$=a_{k+1}\Rightarrow\sqrt[k+1]{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}}\leqslant a_{k+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1\cdot a_2\ldots a_k\cdot a_{k+1}\leqslant a_{k+1}^{k+1}\Rightarrow a_1a_2\ldots a_k\leqslant a_{k+1}^{k+1}\Rightarrow a_1a_2\ldots a_k\leqslant$$

$$\leqslant a_{k+1}^k\Rightarrow\sqrt[k]{a_1\cdot a_2\ldots a_k}\leqslant a_{k+1}.$$

Демак, $a_1+a_2+\ldots+a_k\geqslant k\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}$ ёки $\sum\limits_{i=1}^n a_i\geqslant n\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^n a_i}$ бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.

95-теорема. *$a_1, a_2, \ldots a_n$ мусбат сонларнинг ўрта гармоник қиймати шу сонларнинг ўрта геометрик қийматидан катта эмас:*

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ldots a_n}\geqslant\frac{n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\ldots+a_n^{-1}}.$$

Исботи бевосита 93-теоремадан келиб чиқади. Чунончи $\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\geqslant n\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^n a_i^{-1}}$ дан ва $\frac{-1}{A}>\frac{1}{B}\Rightarrow B>A$ муносабатлардан 94-теорема ҳосил қилинади.

96-*теорема. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сонларнинг ўрта квадратик қиймати шу сонларнинг ўрта арифметик қиймати модулидан кичик эмас:*

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^2}\geqslant\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{-n}a_i\right|.$$

Исботи. Бунинг учун $(a_1+a_2)^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2$ ҳамда $2a_1a_2 \leqslant a_1^2 + a_2^2$ ни эътиборга олсак, у ҳолда

$$(a_1+a_2)^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 \leqslant 2a_1^2 + 2a_2^2 = 2(a_1^2+a_2^2) \Leftrightarrow (a_1 + a_2)^2 \leqslant 2(a_1^2+a_2^2) \Leftrightarrow (a_1+a_2)^2 = 4\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{2}\right) \Leftrightarrow \left|\frac{a_1+a_2}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}}$$

бўлади. Энди $2 \leqslant n < n+1$ учун $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 \leqslant$

$$\leqslant n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2) \Leftrightarrow \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

эканини эътиборга олган ҳолда у $n+1$ учун ўринли эканини кўрсатамиз, яъни

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{n+1})^2 \leqslant (n+1)(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{n+1}^2) \Leftrightarrow (a_1+a_2+\ldots+a_{n+1})^2 \leqslant$$

$$\leqslant (n+1)^2\left(\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{n+1}^2}{n+1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}\left|\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2}$$

бўлади.

Шу билан теорема исбот қилинди.

97-теорема (Коши — Буняковский тенгсизлиги). *Берилган* a_i ва b_i, $i = \overline{1,n}$ *учун* $(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2)$ *бўлади.*

Тенглик эса фақат $a_i = kb_i \wedge i = \overline{1,n}$ *бўлгандагина бажарилади.*

Исботи. Бу тенгсизликни исботлаш учун $(a_1x+b_1)^2 + (a_2x+b_2)^2 + \ldots + (a_nx+b_n)^2 = ax^2+2bx+c$; $a>0$ муносабатдан фойдаланамиз. Маълумки, $ax^2+2bx+c$ ифода $\forall x \in \boldsymbol{R}$ да манфиймас бўлиши учун $b^2 - ac \leqslant 0$ бўлиши зарур ва етарлидир. Бундан $b = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$; $a = \sum_{i=1}^{a} a_i^2$; $c = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$ эканини эътиборга олсак, теорема исбот қилинди.

98-теорема. a_i *ва* $b_i \wedge i = \overline{1, n}$ *ҳақиқий сонлар* учун

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$ *бўлади. Тенглик фақат* $a_i = kb_i$, $i = \overline{1, n}$ *бўлганда содир бўлади.*

Исботи. $(a_i - b_i)^2 = a_i^2 - 2a_i b_i + b_i^2$ нинг ўнг томонини бироз кучайтирсак, у ҳолда

$$(a_i - b_i)^2 \leqslant a_i^2 + 2|a_i||b_i| + b_i^2 = \left(\sqrt{a_i^2}\right)^2 + 2\sqrt{a_i^2}\sqrt{b_i^2} + \left(\sqrt{b_i^2}\right)^2 = \left(\sqrt{a_i^2} + \sqrt{b_i^2}\right)^2$$

ҳосил бўлади. Бундан бевосита $\sqrt{\sum(a_i - b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{b_i^2}$ ёза оламиз. Шу билан теорема исбот қилинди.

99-теорема (Бернулли тенгсизлиги). *Берилган* $h > 0$, *ва ихтиёрий* $k > 1$, $k \in Q$ *учун* $(1+h)^k > 1 + kh$ *бўлади.*

100-теорема (Гёльдер тенгсизлиги). *Агар* $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x > 0$, $y > 0$ *бўлса, у ҳолда* $xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ *бўлади.*

Теоремаларни исботлашни ўқувчиларнинг ўзларига ҳавола қиламиз.

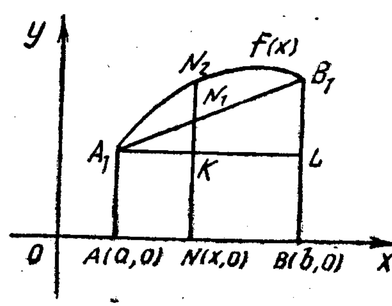
Мисол ва масалалар ечиш

1. Агар $f(x)$ функциянинг графиги қаралаётган оралиқда қавариқлиги билан юқорига қараган ва $\alpha_i \wedge i = \overline{1, n}$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$, $\alpha_i \in R$ бўлса, у ҳолда шу оралиқдан олинган $x_1, x_2, \ldots, x_n$ учун

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n) \quad (1)$$

бўлишини исботланг.

Исботи. Математик индукция усулидан фойдаланамиз. $n = 2$ бўлсин. Масала шартига кўра қаралаётган оралиқ (39-чизма) $a \leqslant x \leqslant b$ бўлсин, бунда AA_1BB_1 трапецияни қараймиз:



39-расм.

$f(a) = AA_1,\ f(b) = BB_1,$

$NN_1 = NK + KN_1 = f(a) + \dfrac{A_1K}{A_1L} B_1L = f(a) +$

$+ \dfrac{x-a}{b-a}\left[f(b) - f(a)\right] = \dfrac{b-x}{b-a} f(a) + \dfrac{x-a}{b-a} f(b),$

бундан $f x) \geqslant \dfrac{b-x}{b-a} f(a) + \dfrac{x-a}{b-a} f(b)$, бу ерда $\dfrac{x-a}{b-a} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} =$

$=\alpha_2, \dfrac{b-x}{b-a} = \dfrac{x_2-x}{x_2-x_1} = \alpha_1$ десак, $\alpha_1 \geqslant 0,\ \alpha_2 \geqslant 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$

бўлади; бундан $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + \dfrac{x - x_2}{x_2 - x_1} \cdot x_2 =$

$= x$ бўлиб,

$$f(x) = f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \qquad (2)$$

ҳосил бўлади, Демак, $n = 2$ да (1) тенгсизлик ўринли бўлади. Энди тенгсизлик $n = k$ учун ўринли деб, унинг $n = k + 1$ учун ўринли эканини кўрсатамиз, яъни: $x_1,\ x_2,$ $\ldots,\ x_k,\ x_{k+1};\ \alpha_i \geqslant 0 \wedge i = \overline{i,\ (n+1)}$ ва $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots +$

$+ \alpha_k + \alpha_{k+1} = 1$ бўлсин, у ҳолда $x_k' = \dfrac{\alpha_k}{\alpha_k + \alpha_{k+1}} x_k +$

$+ \dfrac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k + \alpha_{k+1}} x_{k+1}$ муносабати аниқланган бўлсин дейлик, у ҳолда $\alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} = (\alpha_k + \alpha_{k+1}) x_k' = \alpha_k' x_k'$ (бу ерда $\alpha_k' =$ $= \alpha_k + \alpha_{k+1}$ деб олинди). Энди $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots +$ $+ \alpha_{k+1} x_{k+1}) = f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{k-1} x_{k-1} + \alpha_k' x_k') \geqslant \alpha_1 f(x_1) +$ $+ \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_k' f(x_k') = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots +$

$+ (\alpha_k + a_{k+1}) f\left(\dfrac{\alpha_k}{\alpha_k + \alpha_{k+1}} x_k + \dfrac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k + \alpha_{k+1}} x_{k+1}\right) \geqslant$

$\geqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_k f(x_k) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1})$

бўлади. Демак, ихтиёрий n учун

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$$

ўринлидир.

Мисол ва масалалар ечиш

1. $y = \ln x$, $x > 0$ функция ўсувчи ва қавариқлиги билан юқорига қараган. $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ десак, у ҳолда $\ln\left[\frac{1}{n}(x_1 + x_2 \ldots + x_n)\right] \geqslant \frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + + \ldots + \ln x_n)$,

бундан $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$ экани келиб чиқади.

2. $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 > 2x + 12y + 6z$ ни исботланг

Исботи. Айирмани баҳолаш усулидан фойдаланамиз:

$$(x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14) - (2x + 12y + 6z) = (x^2 - 2x + 1) + (4y^2 - 12y + 9) + (3z^2 - 6z + 3) + 1 = (x-1)^2 + (2y-3)^2 + 3(z-1)^2 + 1.$$

Ҳосил қилинган охирги йиғинди ўзгарувчиларнинг ҳар қандай қийматида мусбат, демак, берилган тенгсизлик ўринлидир.

3. Агар $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ бўлса, $a + b + c + d \geqslant 4\sqrt[4]{abcd}$ ни исботланг.

Исботи (Дедуктив усул). 93- теоремага асосан

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}\right) \geqslant \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}} \geqslant \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$

4. $\forall n \in N : \lg(n+1) > \frac{3}{10n} + \lg n$ бўлишини исботланг.

Исботи (Аналитик усул). Тенгсизликнинг иккала томонини $10n$ га кўпайтирамиз: $\lg(n+1) > \frac{3}{10n} + \lg n \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 10n\lg(n+1) > 3 + 10n\lg n \Leftrightarrow \lg(n+1)^{10n} > 3 + \lg n^{10n} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lg(n+1)^{10n} > \lg 1000\, n^{10n} \Leftrightarrow \lg(n+1)^{10n} > \lg 2^{10} n^{10n} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (n+1)^n > 2n^n$ (98- теоремага асосан ўринли). Демак, $\forall n \in N : \lg(n+1) > \frac{3}{10n} + \lg n$ ўринлидир.

5. Агар $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $d \geqslant 0$ бўлса, $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$ бўлишини исботланг.

Исботи. Фараз қилайлик, $\sqrt{(a+c)(b+d)}<\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$ бўлсин, у ҳолда унинг иккала томонини квадратга кўтарсак, $ab+ad+bc+cd<ab+2\sqrt{abcd}+cd \Leftrightarrow ad+bc>$ $<2\sqrt{abcd}$.

93- теоремага асосан бу ҳолнинг бўлиши мумкин эмас. Демак, қилинган фараз нотўғри, шу билан тенгсизликнинг тўғрилиги исбот қилинди.

6. Агар $n \in N$, $n>1$ бўлганда $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+$ $+\frac{1}{n^2}<1$ бўлишини исботланг.

Исботи. Таққослаш усулидан фойдаланамиз:

$$\frac{1}{2^2}>\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3}, \ldots, \frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)\cdot n}.$$

Энди бу тенгсизликларни ҳадлаб қўшсак, у ҳолда

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}$$

бўлади ва $\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$ эканини эътиборга олсак, бундан $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}<1$ экани келиб чиқади. Шу билан тенгсизлик исбот қилинди.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

1. Тенгсизликларни исботланг:

а) Агар $n \geqslant 3$ бўлса, $2^n>2n+1$ бўлади;

б) Агар $n \geqslant 5$ бўлса, $2^n>n^2$ бўлади;

в) Агар $n \geqslant 10$ бўлса, $2^n>n^3$ бўлади.

2. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$, $n \in N$.

3. $1+n\cdot 2^{\frac{n-1}{n}}<2^n$, $n>1$, $n \in N$.

4. $n \in N$: $\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}\leqslant n$.

5. $n \in N$: а) $n!>\left(\frac{n}{3}\right)^n$; б) $n!>n^{\frac{n}{2}}$, $n>2$;

в) $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$; г) $n!>2^{n-1}$, $n \geqslant 3$; д) $(2n-1)!<$ $<n^{2n-1}$; $n>1$.

6. $2a^2+b^2+c^2 \geqslant 2a(b+c)$.

7. $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc;\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0$.

8. $a+b+c > \sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc},\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,$ $c \geqslant 0$.

9. $ab+ac+bc > \sqrt{abc}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}),\ a \geqslant 0,$ $b \geqslant 0,\ c \geqslant 0$.

10. $a(1+b)+b(1+c)+c(1+a) \geqslant b\sqrt{abc},\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,$ $c \geqslant 0$.

11. $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n \in N$.

12. $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{m} < \frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\ldots+$ $+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-2\sqrt{m-1}\ \ m<n,\ m,n \in N$.

13. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ \ldots\ \frac{99}{100} > \frac{1}{12}$.

14. Агар $x_1,\ x_2\ \ldots\ x_n \in R^+$ бўлса, у ҳолда $\frac{x_1}{x^2}+\frac{x_2}{x_3}+$ $+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1} > n$ бўлишини исботланг.

15. Агар $x > -1;\ 0 < \alpha < 1$ бўлса, $(1+x)^\alpha < 1+\alpha x$ бўлишини, агар $x > 1$ ва $\alpha < 0$ ёки $\alpha > 1$ бўлса, $(1+x)^\alpha >$ $> 1+\alpha x$ бўлишини исботланг.

16. Агар $a, b \in R^+$, $m \in Z$ (бутун сон) бўлса,

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^m+\left(1+\frac{b}{a}\right)^m > 2^{m+1}$$

эканини исботланг.

17. Томонлари мос равишда $a,\ b,\ c,\ d$ бўлган ихтиёрий тўртбурчакнинг юзи $S \leqslant \frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}$ бўлишини исботланг.

18. $a, b, c \in R$ ва $-1 \leqslant x \leqslant 1$ да $|ax^2+bx+c| \leqslant 1$ бўлса, у ҳолда $|x| \leqslant 1$ да $|cx^2+bx+a| \leqslant 2$ тенгсизликнинг ўринли эканини исботланг.

19. Агар $a_i > 0,\ i=\overline{1,n},\ a_1\cdot a_2\ \ldots\ a_n=1$ бўлса, $(1+$ $+a_1)(1+a_2)\ \ldots\ (1+a_n) \geqslant 2^n$ бўлади.

20. Агар $a_i > 0$, $a_2 > 0$ бўлса, $\frac{a_1^n + a_2^n}{2} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^n$ бўлади.

21. Агар $a_i > 0$, $i = \overline{1, n}$ бўлса, $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \times \times \left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$ бўлади.

IX боб. ТЕНГЛАМА ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

1-§. ТЕНГЛАМА ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИНГ ТЕНГ КУЧЛИЛИГИ

Тенглама ва тенгсизлик тушунчаси ўқувчига ўрта мактаб математикасидан маълум. $f(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c)$ ва $\varphi(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c)$ функциялар берилган ва уларнинг аниқланиш соҳалари мос равишда A ва B тўпламлар бўлиб, $A \cap B = C$ бўлсин.

87- таъриф. *Агар $f(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c)$ ва $\varphi(x, y, \ldots, z, a, b \ldots, c)$ функция учун*

$$f(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = \varphi(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) \quad (f \geqslant \varphi \land f \geqslant \varphi) \tag{1}$$

тенглик (тенгсизлик) бажарилса, у ҳолда (1) тенглама (тенгсизлик) дейилади.

(1) ни ҳар доим

$$F(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0 \, (F > 0, \ F \geqslant 0) \tag{2}$$

кўринишга келтириш мумкин.

Мисоллар. 1. $ax^2 + bx + c + 0$, $a \neq 0$ $(ax^2 + bx + c \lesseqgtr \lesseqgtr 0)$ бир номаълумли квадрат тенглама (тенгсизлик) дир.

2. $ax + by = c$ $(ax + by \lesseqgtr c)$ икки номаълум чизиқли тенглама (тенгсизлик) дир.

3. $ax^n + by^n + cz^n = d$ $(ax^n + by^n + cz^n \lesseqgtr d)$ уч номаълумли n- даражали тенглама (тенгсизлик) дир.

88- таъриф. *Агар $x = \alpha$, $y = \beta$, $\ldots$, $z = \gamma$ қийматларда $F(x, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0$ $(F \lesseqgtr 0)$ тенглама (тенгсизлик) тўғри тенгликка (тенгсизликка) айланса, у ҳолда $(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$ сонлар системаси (2) нинг ечими дейилади.*

Агар (2) ни қаралаётган сонли тўпламда $x, y, \ldots, z$ ўзгарувчиларнинг (2) ни тўғри тенгликка (тенгсизликка) айлантирувчи сон қийматлари мавжуд бўлмаса, у ҳолда (2) шу сонли тўпламда ечимга эга эмас дейилади.

Мисоллар. 1) $x^2 + 1 = 0$ тенглама $\boldsymbol{R}$ да ечимга эга эмас, C да ечимга эга: $x = \pm i$.

2) $2x^2+3x-5=0$ тенглама Q да $\left\{-\frac{5}{2};\ 1\right\}$ ечимга эга.

3) $2x^2+3x-3=0$ тенглама Q да ечимга эга эмас, R да ечимга эга.

Шунинг учун ҳам берилган тенгламани қайси сонли тўпламда ечиш талаб қилинса, ечими шу сонли тўпламда изланади.

Тенгламани ечиш деб, бу тенгламада қатнашаётган ўзгарувчиларнинг тенгламани тўғри тенгликка айлантирувчи қийматларини топишга айтилади. Тенгламаларни ечишда унинг аниқланиш соҳасини топиш ҳар доим ҳам муҳим тадбир ҳисобланавермайди. Шундай тенгламалар учраши мумкинки, уларнинг аниқланиш соҳасини топиш тенгламани ечишдан ҳам мураккаб бўлиши мумкин, бундай ҳолда топилган ечимларни текшириб кўриш мақсадга мувофиқдир. Тенгламани ечишда аниқланиш соҳасига эътибор берилса, у ҳолда тенгламада тегишли алмаштиришлар бажаришда аниқланиш соҳасининг торайиши ёки кенгайишига алоҳида аҳамият берилиши, сўнгра топилган ечимларни алоҳида шартлар билан олиниши лозимдир.

Мисол. $\sqrt{x^2-x-2}=x-3$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\sqrt{x^2-x-2}=x-3$ тенгламанинг чап томони $(-\infty;\ -1]$ ва $[2;\ +\infty)$ соҳаларда аниқланган ва $x^2-x-2\geqslant 0$ манфий эмас, лекин ўнг томони $x\geqslant 3$ да манфий эмас. Бундан кўриниб турибдики, тенгламани $[3;\ +\infty)$ да жуфт даражага ошириш мумкин, натижада $x=2{,}2$ ни ҳосил қиламиз. Топилган ечим $2<2{,}2<3$ бўлгани учун тенгликни тўғри тенгликка айлантира олмайди. Демак, у ечим эмас. Тенглама ечимга эга эмас.

Соддалик учун

$$F(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c)=0\ (F\lesseqgtr 0) \qquad (3)$$

ва

$$f(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c)=0\ (f\lesseqgtr 0) \qquad (4)$$

тенглама (тенгсизлик) лар берилган бўлсин.

89-таъриф. *Агар* (3) *тенгламанинг* (*тенгсизликнинг*) *ҳар қандай ечими тенгламанинг* (*тенгсизликнинг*) *ечими бўлса, у ҳолда* (4) *тенглама* (*тенгсизлик*) (3) *нинг натижаси дейилади.*

Мисоллар. 1. $2x-6=x$ тенгламанинг натижаси $(2x-6)^2=x^2$.

2. $x-2>1$ тенгсизликнинг натижаси $(x-2)(x^2+3)\geqslant x^2+3$.

(3) ва (4) тенглама (тенгсизлик) лар бирор B соҳада аниқланган бўлсин.

90- таъриф. *Агар B соҳада (3) тенглама (тенгсизлик) нинг ечимлар тўплами (4) тенглама (тенгсизлик) ни ечимлар тўплами ва аксинча, (4) тенглама (тенгсизлик) нинг ечимлар тўплами (3) тенглама (тенгсизлик) нинг ечимлар тўплами бўлса, у ҳолда (3) ва (4) тенглама (тенгсизлик) лар B соҳада тенг кучли (эквивалент) тенглама (тенгсизлик) лар дейилади.*

Мисол. $x^2+6=5x$ ва $x^2+6+\frac{1}{x^2+1}=\frac{5x(x^2+1)+1}{x^2+1}$ ($x^2+6\geqslant 5x$ ва $x^2+6+\sqrt{x^2+1}\geqslant 5x+\sqrt{x^2+1}$) тенгламалар (тенгсизликлар) $\mathbf{R}$ да тенг кучлидир, чунки 90- таърифни қаноатлантиради.

Берилган $f(x, a, b, \ldots, c)$ ва $\varphi(x, a, b, \ldots, c)$ ва $t(x, a, b, \ldots, c)$ ларнинг аниқланиш соҳалари мос равишда $D(f)$, $D(\varphi)$ ва $D(t)$ бўлсин.

101- теорема. *Агар $D(t)\supset D(f)\cap D(\varphi)$ бўлса, у ҳолда $f=\varphi(5)\Leftrightarrow f+t=\varphi+t(6)$ ($f>\varphi\Leftrightarrow f+t>\varphi+t$) бўлади.*

Исботи. Теореманинг шартига кўра (5) нинг ихтиёрий бир ечимини x_0 десак, у ҳолда $f(x_0, a, b, \ldots, c)=\varphi(x_0, a, b, \ldots, c)$ (5′) тўғри тенгликка айланади. $D(t)\supset D(f)\cap D(\varphi)$ га асосан $x_0\in D(t)$ бўлганлиги учун $f(x_0, a, \ldots, c)+t(x_0, a, \ldots, c)=\varphi(x_0, a, \ldots, c)+t(x_0, a, \ldots, c)$ (6′) тенглик тўғри тенгликдир. Агар (6′) нинг ҳар иккала томонига $-t(x_0, a, \ldots, c)$ ни қўшсак, у ҳолда (5′) ни ҳосил қиламиз, натижада 90- таърифга асосан (5) ва (6) тенглама (тенгсизлик) лар тенг кучли бўлади,

1- натижа. $D(f)\cap D(\varphi)$ *да* $f=\varphi\Leftrightarrow f-\varphi=0$ бўлади.

102- теорема. *Агар $D(t)\supset D(f)\cap D(\varphi)$ ва $t\neq 0$ бўлса, у ҳолда*

$$f=\varphi(5)\Leftrightarrow f\cdot t=\varphi\cdot t\,(7)$$
$$(t>0\wedge f>\varphi\Leftrightarrow ft>\varphi t)$$

бўлади.

Исботи. 101- теоремага асосан $f=\varphi$ (5) ечимлар тўпламида $D(t)\supset D(f)\cap D(\varphi)$ га асосан $t(x, a, b, \ldots, c)$ маънога эга ва $t(x, a, \ldots, c)\neq 0$ эканига асосан (7) нинг ҳам ечимлари бўлади ва- аксинча ҳам юз беради. Бундан 89 ва 90- таърифларга асосан (5) ва (7) лар ўзаро тенг кучлидир. Шу билан 102- теорема исбот бўлди.

103- теорема. *Агар B соҳада $f(x, a, b, \ldots, c)\geqslant 0$ ва $\varphi(x, a, \ldots, c)\geqslant 0$ бўлса, у ҳолда*

$$f=\varphi\,(5)\Leftrightarrow f^n=\varphi^n,\ n\in\mathbf{N}\ (8)$$

бўлади.

Исботи. 103-теореманинг шартига кўра $B=D(f)\cap D(\varphi)$ бўлиб, $f\geqslant 0$ ва $\varphi\geqslant 0$ маълумдир. Шундай $x_0\in B$ мавжудки, $f(x_0, a, b, \ldots, c)=\varphi(x_0, a, b, \ldots, c)$ бўлиб, x_0 (5) нинг илдизи бўлади. Энди B да (5) нинг иккала томонини n- даражага оширамиз, натижада

$$[f(x_0, a, b, \ldots, c)]^n=[\varphi(x_0, a \ldots, c)]^n \Leftrightarrow [f(x_0, a, \ldots, c)]^n-$$

$$-[\varphi(x_0, a, \ldots, c)]^n = [f(x_0, a, \ldots, c)-\varphi(x_0, a, \ldots, c)]\times$$

$$\times[f(x_0, a, b, \ldots, c)]^{n-1}+[f(x_0, a, \ldots, c]^{n-1}\varphi(x_0, a, \ldots, c)+$$

$$+\ldots+[\varphi(x_0, a, \ldots c)]^{n-1}=0$$

ҳосил бўлади. Бундан 89-таърифга асосан (5) нинг ечими (8) нинг ечими бўлади. 102- теоремага асосан (8) нинг ечими (5) нинг ечими эканини кўриш мумкин. Бундан 90-таърифга асосан (5) ва (8) тенг кучлидир. Шу билан теорема исбот қилинди

104-теорема. *Агар берилган* $a>0$, $a\neq 1$ *сонлар учун* B *соҳада* $f(x)$ ва $\varphi(x)$ *мусбат бўлса, у ҳолда* $f(x)=\varphi(x)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \log_a f(x)=\log_a \varphi(x)$ *бўлади.*

Бу теореманинг исботи бевосита 102 ва 103-теоремалардан келиб чиқади.

105-теорема. *Агар* $f(x)$ *функция* $D(f)$ *да монотон ўсувчи бўлса, у ҳолда* $f(x)=x$ (9) *ва* $f[f(x)]=x$ (10) *тенгламалар ўзаро тенг кучли бўлади.*

Исботи. Теореманинг шартига кўра $f(x)$ функция $D(f)$ да монотон ўсувчи ва шу билан бирга (10) тенглама (9) нинг натижасидир, чунки (9) нинг ҳар бир ечими (10) ни қаноатлантиради. Чунки x_0 (9) нинг ечими бўлса, у ҳолда $f(x_0)=$ $=x_0$ эканидан $f[f(x_0)]=f(x_0)=x_0$ бўлади.

Энди (10) нинг ҳар бир ечими (9) ни қаноатлантиришини кўрсатамиз, яъни $f[f(x_0)]=x_0$ бўлсин. Фараз қилайлик. $f(x_0)\neq x_0$ бўлсин, у ҳолда $f(x_0)>x_0$ ёки $f(x_0)<x_0$ бўлади. Бундан $f(x_0)>x_0$ бўлсин, у ҳолда $f[f(x_0)]>f(x_0)>x_0$ бўлиб, $f[f(x_0)]=x_0$ га зиддир. Демак, (9) ва (10) тенг кучлидир. Шу билан теорема исботланди.

Мисоллар. 1. $\sqrt{1+\sqrt{x}}=x-1$ тенглама $1+\sqrt{1+\sqrt{x}}=x$ тенгламага, бу эса $1+\sqrt{x}=x$ тенгламага тенг кучлидир.

2. $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$ тенгламанинг шаклини ўзгартирсак, $\dfrac{1+\left(\dfrac{x^3+1}{2}\right)^3}{2}=x \Leftrightarrow \dfrac{x^3+1}{2}=x$ эканини кўриш мумкин.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

Қуйидаги тенгламалар R да тенг кучлими?

1. $\dfrac{x^2-4}{x-2}=-4$ ва $x-2=-4$.
2. $\dfrac{x(x-2)}{x^2+1}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5x^2}{3x^2+3}$ ва $3(x^2-2x)+$ $+2(x^2+1)=5x^2$.
3. $x-2=7-2x$ ва $(x-2)^2=(7-2x)^2$.
4. $3x-1=4x-2$ ва $(3x-1)^4=(4x-2)^4$.
5. $f(x)=\varphi(x)$ ва $[f(x)]^2=[\varphi(x)]^2$.
6. $f(x)=\varphi(x)$ ва $[f(x)]^k=[\varphi(x)]^k$; $k\in N$.
7. $\sqrt[2k+1]{f(x)}=\varphi(x)$ ва $f(x)=[\varphi(x)]^{2k+1}$; $k\in N$.
8. $x^2-1=0$ ва $\sqrt{x^2-1}=0$.
9. $\sqrt{f(x)}\sqrt{\varphi(x)}=0$ ва $\sqrt{f(x)\cdot\varphi(x)}=0$.
10. $\dfrac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}=\dfrac{f_1(x)+f_2(x)}{\varphi_1(x)+\varphi_2(x)}$ ва $\dfrac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}=\dfrac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}$.

Қуйидаги тенгсизликлар R да тенг кучлими?

11. $x>1$ ва $x+\dfrac{1}{4-x}>1+\dfrac{1}{4-x}$.
12. $3x+1>1$ ва $(3x+1)+x-4>x-3$.
13. $x-3>2$ ва $(x-3)(x+1)^2>2(x+1)$.
14. $x-3>2$ ва $(x-3)(x-1)>2(x-1)$.
15. $-x^2-5x+6>0$ ва $x^2+5x-6>0$.
16. $x-1>0$ ва $(6x^2+3x+5)(1-x)<0$.
17. $2(x-x^2-3)(1-4x)>0$ ва $4x-1>0$.
18. $\dfrac{1}{x-3}>2$ ва $\dfrac{1-2(x-3)}{x-3}>0$. 19. $\dfrac{1}{x-3}>2$ ва $1>2(x-3)$. 20. $\dfrac{x-2}{5-x}>0$ ва $(x-2)(5-x)>0$.

21. $\dfrac{x-2}{x^2(5-x)}>0$ ва $(x-2)(5-x)>0$.

22. $\dfrac{1}{(x+5)^2}>\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ва $(x+5)^2<(x+1)^2$.

23. $\dfrac{x}{x^2-3x+1}>\dfrac{x}{x^2+3x+2}$ ва $x^2-3x+2>x^2-$
$-3x+1$.

24. $5-x>4$ ва $\dfrac{5-x}{x+1}>\dfrac{4}{x+1}$.

2- §. БИРИНЧИ ВА ИККИНЧИ ДАРАЖАЛИ ТЕНГЛАМА ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

91- таъриф. Ушбу

$$ax+by+\ldots+cz=d\,(ax+by+\ldots+cz\lesseqgtr d) \qquad (1)$$

кўринишдаги тенглама (тенгсизлик) биринчи даражали тенглама (тенгсизлик) дейилади

Мисоллар. 1. $ax=b$ — бир номаълумли чизиқли тенглама.

2. $ax+by=c$ — икки номаълумли чизиқли тенглама.

3. $ax+by+cz>d$ — уч номаълумли чизиқли тенгсизлик.

I. Бир номаълумли $ax=b$ чизиқли тенгламада:

а) Агар $a\neq 0$ ва $b\neq 0$ бўлса, у ҳолда $x=b:a$ бўлади;

б) агар $a\neq 0$ ва $b=0$ бўлса, у ҳолда $x=0$ бўлади;

в) агар $a=0$ ва $b\neq 0$ бўлса, тенглама ечимга эга эмас.

г) агар $a=0$ ва $b=0$ бўлса, тенглама чексиз кўп ечимга эга бўлади.

Мисоллар. 1. $2x+3=x+5$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $2x+3=x+5\Leftrightarrow 2x-x=5-3\Leftrightarrow x=2$.

2. $2x+3=3x-3$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $2x+3=2x-3\Rightarrow 3\neq-3$ тенглама ечимга эга эмас.

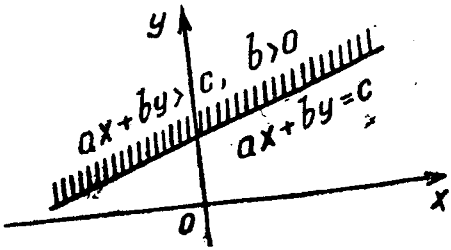
II. Бир номаълумли $ax>b$ чизиқли тенгсизликнинг ечими:

а) агар $a>0$ бўлса, $x>\dfrac{b}{a}$ бўлади;

б) агар $a=0$ бўлиб, $b<0$ бўлса, ихтиёрий ҳақиқий сон тенгсизликни қаноатлантиради;

в) агар $a<0$ бўлса, $x<-\dfrac{b}{a}$ бўлади.

III. Биринчи даражали икки номаълумли



40- расм.

$$ax + by = c \qquad (2)$$

тенгламанинг ечими (2) ни қаноатлантирувчи (x, y) жуфтликлар тўпламидан иборат бўлади.

Агар $ax + by > c$ (ёки $x + by < c$) тенгсизлик берилган бўлса, у ҳолда тенгсизликни қаноатлантирувчи ечимлар 40- чизмадаги штрихланган соҳадан иборат бўлади.

92- т а ъ р и ф. *Ушбу*

$$ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0 \qquad (3)$$

кўринишдаги тенглама квадрат тенглама дейилади. Бу ерда a, b, c лар параметрлар бўлиб, уларнинг турли қийматларида турли квадрат тенгламалар ҳосил бўлади.

Квадрат тенгламалар $ax^2 + c = 0$, $ax^2 = 0$, $ax^2 + bx = 0$ *чала квадрат тенгламалар* ва $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ *тўлиқ квадрат тенглама* ҳамда $x^2 + px + q = 0$ *келтирилган квадрат тенгламаларга* ажралади.

Бу тенгламаларнинг ечилиши мактаб математикасидан маълумдир. Мактаб математикасидан маълумки, $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ тенгламани ечиш учун аввал ундан тўлиқ квадрат ажратилади, сўнгра радикал ёрдамида унинг ечимлари топилади:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow \left|x + \frac{b}{2a}\right| =$$

$$= \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}};$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (A)$$

Агар бу ерда $D = b^2 - 4ac$ деб белгиласак, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ бўлади.

106- т е о р е м а. (3) *квадрат тенглама* **R** *да: ҳақиқий ҳар хил илдизга эга бўлиши учун* $D > 0$, *ҳақиқий бир хил* *илдизларга эга бўлиши учун $D = 0$; илдизга эга бўлмаслиги учун $D < 0$ бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исботи. Ҳақиқатан ҳам,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2} \tag{4}$$

да $D > 0$ бўлса, тенглик аниқланган бўлиб, бундан $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ ва $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ ҳақиқий ҳар хил илдизларни ҳосил қиламиз.

Агар $D = 0$ бўлса, у ҳолда $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2} = 0$ бўлиб, $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ бир хил илдизларга эга бўламиз. Агар $D < 0$ бўлса, (4) тенглик мавжуд бўлмайди, тенглама илдизга эга бўлмайди. Шу билан теорема исбот бўлди.

Агар (3) тенгламада $b = 2k$ бўлса, у ҳолда $ax^2 + 2kx + c = 0$, $a \neq 0$ тенгламанинг ечимини $x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$ формула орқали топилади.

(3) тенгламани $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ кўринишга келтириб ва $p = \frac{b}{a}$; $q = \frac{c}{a}$ орқали белгилаб,

$$x^2 + px + q = 0 \tag{5}$$

га келамиз. (5) келтирилган квадрат тенглама бўлади.

107-теорема (**Виет теоремаси**). *Агар x_1 ва x_2 сонлар (5) нинг илдизлари бўлса, у ҳолда $x_1 + x_2 = -p$ ва $x_1 \cdot x_2 = q$ бўлади.*

Исботи. Теореманинг шартига кўра x_1 ва x_2 тенгламанинг илдизлари. Сўнгра (А) га асосан $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ ва $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ бўлиб, $x_1 + x_2 = 2\left(-\frac{p}{2}\right) = -p$ бўлиши ҳамда

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) =$$

$$= \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q$$

экани келиб чиқади.

Шу билан теорема исбот қилинди.

Бу теоремадан бевосита $x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x +$

$+ x_1 \cdot x_2 = x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 = (x - x_1)(x - x_2)$ ёки $ax^2 +$ $+ bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ҳосил бўлади.

Квадрат тенгламаларни ечишда кўпайтувчиларга ажратиш усули ҳам ўзига хос муҳимдир. Агар b коэффициентни $b =$ $= b_1 + b_2$ кўринишида $a : b_1 = b_2 : c$ шарти бажариладиган қилиб ифодалаш мумкин бўлса, у ҳолда

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)\ (x - \beta)$$

га эга бўламиз.

Мисол. $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2x + 6 =$ $= (x-3)\ (x-2) = 0$ бўлиб, бундан$\{2; 3\}$ ечимларни ҳосил қиламиз.

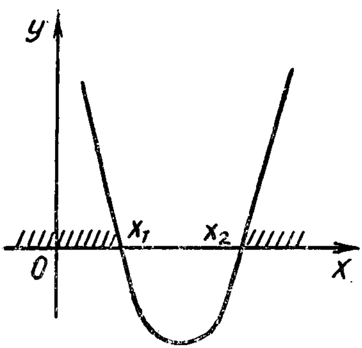
93-таъриф. *Ушбу*

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0,\ a \neq 0 \tag{6}$$

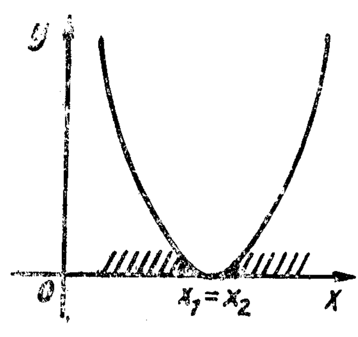
кўринишдаги тенгсизлик квадрат тенгсизлик дейилади.

Мисол. $2x^2 + 3x - 1 > 0,\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 0,$ $x^2 - x - 5 < 0,\ x^2 - 3x + 6 \leqslant 0$ квадрат тенгсизликлардир.

I. $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ тенгсизлик берилган бўлсин, у ҳолда, агар:



41-расм.



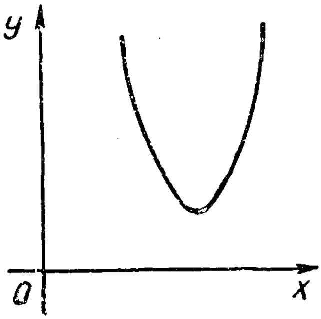
42-расм.

1) $a > 0$ ва $D > 0$ бўлса, $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$ бўлиб, $x_1 < x_2$ учун ечим $(-\infty;\ x_1] \cup [x_2;\ +\infty)$ бўлади (41-чизма);

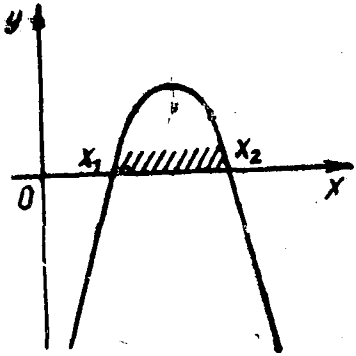
2) $a > 0$ ва $D = 0$ бўлса, $x_1 = x_2 \in \boldsymbol{R}$ бўлиб, ечим $x \in \boldsymbol{R}$ бўлади (42-чизма);

3) $a > 0$ ва $D < 0$ бўлса, $x_1,\ x_2 \notin \boldsymbol{R}$ бўлиб, ечим $x \in \boldsymbol{R}$ бўлади (43-чизма);

4) $a < 0$; $D > 0$ бўлса, $x_1,\ x_2 \in \boldsymbol{R}$ бўлиб, $x_1 < x_2$ учун ечим $[x_1;\ x_2]$ бўлади (44-чизма);



43- расм.



44- расм.

5) $a < 0$ ва $D = 0$ бўлса, $x_1 = x_2 \in \boldsymbol{R}$ бўлиб, $x = x_1$ ечим бўлади (45- чизма);

6) $a < 0$ ва $D < 0$ бўлса, $x_1, x_2 \notin \boldsymbol{R}$ бўлиб, ечим бўш тўплам бўлади (46- чизма).

Мисол. $x^2 - 5x + 6 > 0$ тенгсизликни ечинг.

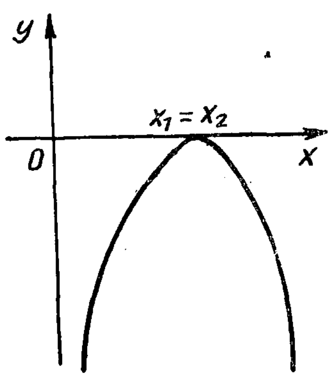
Ечиш. $a = 1$; $D = 1 > 0$. $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; ечим $(-\infty; 2) \cup \cup (3; +\infty)$ бўлади.

II. $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ тенгсизлик учун:

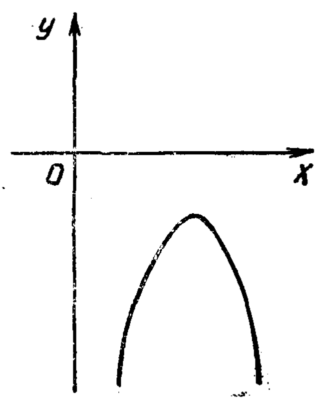
1) $a > 0$ ва $D > 0$ бўлганда (41- чизма) x_1, $x_2 \in \boldsymbol{R}$ бўлиб, $x_1 < x_2$ учун ечим $[x_1; x_2]$ бўлади;

2) $a > 0$ ва $D = 0$ бўлганда (42- чизма) $x_1 = x_2 \in \boldsymbol{R}$ бўлиб, ечим $x = x_1 = x_2$ бўлади;

3) $a > 0$ ва $D < 0$ бўлганда (43- чизма) $x_1, x_2 \notin \boldsymbol{R}$ бўлиб, тенгсизлик ечимга эга эмас;



45- расм.



46- расм.

4) $a<0$ ва $D>0$ бўлганда (44-чизма) x_1, $x_2 \in \boldsymbol{R}$ бўлиб, $x_1<x_2$ учун ечим $(-\infty;\ x_1]\cup[x_2;\ +\infty)$ бўлади;

5) $a<0$ ва $D=0$ бўлганда (45-чизма) $x_1=x_2\in\boldsymbol{R}$ бўлиб, ечим $x\in\boldsymbol{R}$ бўлади (қатъий тенгсизлик учун ечим $x\in\boldsymbol{R}\setminus\{x_1\}$ бўлади);

6) $a<0$ ва $D<0$ бўлганда (46-чизма) x_1, $x_2\notin\boldsymbol{R}$ бўлиб, ечим $x\in\boldsymbol{R}$ бўлади.

Мисол. $x^2-6x+8\quad 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $a=1>0$ ва $D=4$; $x_1=4$; $x_2=2$ бўлиб, ечим $(2;\ 4)$ оралиқ бўлади

Модуль қатнашган бир ўзгарувчили тенглама ва тенгсизликларни ечиш.

94-таъриф. *Агар*

$$f(x,\ y,\ \ldots,\ z,\ a,\ b,\ \ldots,\ c)=0;$$
$$[f(x,\ y,\ \ldots,\ z,\ a,\ \ldots,\ c)\gtrless 0] \qquad (1)$$

тенгламада (тенгсизликда) ўзгарувчилар модул белгиси остида қатнашса, у ҳолда бундай тенгламалар (тенгсизликлар) модулли тенгламалар (тенгсизликлар) дейилади.

Мисоллар. $|x-2|=3$; $|x^2+2x+4|=5$; $|2x+3|+|4x-1|>4$.

Модулли тенгламаларнинг қуйидаги турларини кўриб чиқайлик:

I. $\begin{cases}|f(x,\ y,\ \ldots,\ z,\ a,\ b,\ \ldots,\ c)|=k,\\ k\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x,\ y,\ \ldots,\ z,\ a,\ b,\ \ldots,\ c)=k,\\ k\geqslant 0\end{cases}\vee$

$\vee\begin{cases}f(x,\ y,\ \ldots,\ z,\ a,\ b,\ \ldots,\ c)=-k,\\ k\geqslant 0.\end{cases}$

Тенглама бир ўзгарувчили бўлган ҳолда:

$$\begin{cases}|f(x)|=k,\\ k\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow[f(x)=k\wedge k\geqslant 0)\vee(f(x)=-k\wedge k\geqslant 0)].$$

Мисол. $|x-2|=1$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $|x-2|=1\Leftrightarrow[(x-2=1\wedge x-2\geqslant 0)\vee(x-2=-1\wedge x-2<0)]\Leftrightarrow[(x=3\wedge x\geqslant 2)\vee(x=1\wedge x<2)]\Rightarrow A=\{x|x=1;\ x=3\}$.

II $f(|x,\ a,\ b,\ \ldots,\ c|)=k$.

Хусусий ҳолда қуйидаги кўринишдаги тенгламани қарайлик: $f(|ax+b|)=k\Leftrightarrow[f(-(ax+b))=k\wedge ax+b\leqslant 0\vee$
$\vee\ f(ax+b)=k\wedge ax+b>0]$.

Маълумки, функциянинг жуфтлик хоссасига асосан α сон $f(|x,\ a,\ b,\ \ldots,\ c|)=k$ тенгламанинг илдизи бўлса, у ҳолда $-\alpha$ ҳам шу тенгламанинг илдизи бўлади. Шунинг учун иккала системадан бирини ечиш етарлидир.

Мисол. $x^2-|x|=6$ тенгламани ечинг.

Ечиш. 1-усул. $x^2-|x|=6 \Leftrightarrow [(x^2-x-6=0 \wedge x \geqslant 0) \vee (x^2+x-6=0 \wedge x<0)] \Leftrightarrow [(x^2-x-6=0 \wedge x \geqslant 0 \Rightarrow (x=3 \wedge x \geqslant 0) \vee (x=-2 \wedge x \geqslant 0)) \vee (x^2+x-6=0 \wedge x<0 \Rightarrow (x=-3 \wedge x<0) \vee (x=2 \wedge x<0))] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [(x=3 \wedge x \geqslant 0) \vee (x=-3 \wedge x<0)] \Rightarrow A=\{x|x=3;\ x=-3\}=\{-3;3\}$.

2-усул. $x^2-|x|=6 \Leftrightarrow |x|^2-|x|=6 \Rightarrow (|x|=3 \vee |x| \neq -2) \Rightarrow |x|=3;\ A=\{-3;\ 3\}$.

III. $|f(x,\ a,\ b,\ \ldots,\ c)|=\varphi(x,\ a,\ b,\ \ldots\ c)$.

Бу ҳолда $|f(x,\ a,\ b,\ \ldots,\ c)|=\varphi(x,\ a,\ b\ \ldots\ c) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x,\ a,\ b,\ \ldots,\ c)=\varphi(x,\ a,\ \ldots\ c), \\ f(x,\ a,\ \ldots,\ c) \geqslant 0, \\ \varphi(x,\ a,\ \ldots,\ c) \geqslant 0. \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} f(x,\ a,\ b,\ \ldots,\ c)=-\varphi(x,\ a,\ \ldots,\ c), \\ f(x,\ a,\ \ldots,\ c) \leqslant 0, \\ \varphi(x,\ a,\ \ldots,\ c) \geqslant 0. \end{cases}$$

Мисоллар. 1. $|9-3x|=|4-5x|+|2x+5|$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $|a+b|=|a|+|b| \Leftrightarrow ab \geqslant 0$ га асосан

$$|9-3x|=|4-5x|+|2x+5| \Leftrightarrow (4-5x)(2x+5) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2{,}5 \leqslant x \leqslant 0{,}8.$$

Демак, ечимлар тўплами: $A=\{x|-2{,}5 \leqslant x \leqslant 0{,}8\}$.

2. $|9-3x|<|4-5x|+|2x+5|$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $9-3x=4-5x+2x+5$ бўлиб, $|a+b| \leqslant |a|+|b| \Leftrightarrow ab<0$ га асосан

$$(4-5x)(2x+5)<0 \Leftrightarrow (x<-2{,}5 \vee x>0{,}8).$$

Жавоби. $x \in (-\infty;\ -2{,}5) \cup (0{,}8;\ +\infty)$.

3. $|x+2a|+|x-a|<3x$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Агар $a>0$ бўлса, у ҳолда $-2a<a$ бўлади; агар $a<0$ бўлса, у ҳолда $a<-2a$ бўлади:
$|x+2a|+|x-a|<3x \Leftrightarrow [(x+2a \geqslant 0 \wedge x-a \geqslant 0 \wedge x+2a+x-a<3x) \vee (x+2a<0 \wedge x-a \geqslant 0 \wedge -x-2a+x-a<3x) \vee (x+2a \geqslant 0 \wedge x-a<0 \wedge x+2a-x+a<3x) \vee (x+2a<0 \wedge x-a<0 \wedge x+2a+x-a>3x)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [(x \geqslant -2a \wedge x \geqslant a \wedge x>a) \vee (x<-2a \wedge x \geqslant a \wedge x>$

$$> -a) \vee (x \geqslant -2a \wedge x < a \wedge x > a) \vee (x < -2a \wedge x <$$
$$< a \wedge x > -\frac{a}{5}\Big)\Big].$$

Жавоби. Агар $a < 0$ бўлса, у ҳолда $x \in [2a; +\infty)$; агар $a = 0$ бўлса, у ҳолда $x \in (0; +\infty)$; агар $a > 0$ бўлса, у ҳолда $x \in (a; +\infty)$.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

1. а) $x(x-15) = 3(108-5x)$;
   б) $(x-7)(x+3)+(x-1)(x+5) = 102$
   в) $(3x-8)^2-(4x-6)^2+(5x-2)(5x+2) = 96$;
   г) $\frac{3x^2-11}{8}+\frac{74-2x^2}{12} = 10$;
   д) $\frac{5x+7}{x-2}-\frac{2x+21}{x+2} = 8\frac{2}{3}$.

2. а) $x^2+12x = -35$; б) $x^2-7x+12 = 0$;
   в) $3x^2-5x-2 = 0$; г) $5x^2-8x+3 = 0$;
   д) $4x^2-17x-15 = 0$.

3. а) $\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1} = \frac{7+18x}{x^3-1}$;
   б) $\frac{2}{x^2-x+1} = \frac{1}{x+1}+\frac{2x-1}{x^3+1}$;
   в) $\frac{13}{x^3+1}-\frac{17x+10}{5x^2-5x+5} = -\frac{5}{x+1}$;
   г) $\frac{x+36}{x^3-1} = \frac{x+6}{x-1}-\frac{x^2-x+16}{x^2+x+1}$.

4. а) $\frac{1}{4x+8} = \frac{20x+1}{4x^2-16}-\frac{7-5x}{x^2-4x+4}$;
   б) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}+\frac{x-4}{x^2+2x} = 0$;
   в) $\frac{1}{x^3-x^2+x-1}-\frac{4}{x+1} = \frac{x^2+10x}{x^4-1}-\frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1}$;
   г) $\frac{5}{x^2-4}-\frac{8}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-3x+2}-\frac{20}{x^2+3x+2}$.

5. а) $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+20}=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+8}$;

б) $\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-7}$;

в) $\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-11}-\frac{1}{x-10}$;

г) $\frac{1}{x-9}+\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x+18}+\frac{1}{x-10}$.

Қуйидаги тенгсизликларни ечинг:

6. а) $x^2-x-90<0$; б) $6x^2-7x+2>0$;
в) $-x^2-2x+48<0$; г) $8x^2+10x-3>0$;
д) $25x^2-10x+1>0$; е) $49x^2-28x+4<0$;
ж) $-x^2-12x-100<0$; з) $4x^2-4x+15<0$.

7. а) $\frac{35x}{4+10x-6x^2}-\frac{x+2}{3x+1}+\frac{3x-1}{x-2}\geqslant 0$;

б) $\frac{25x-21}{2x^2+5x-12}+\frac{2x-3}{x+4}\geqslant\frac{x+4}{2x-3}$;

в) $\frac{13}{2y^2+y-21}+\frac{1}{2y+7}\leqslant\frac{6}{y^2-9}$;

г) $\frac{x+9}{x^2-3x-10}-\frac{x+15}{x^2-25}<\frac{1}{x+2}$.

8. Тенгламани ечинг:

$$(x^2+x+1)+(x^2+2x+3)+(x^2+3x+5)+\ldots+(x^2+20x+39)=4500.$$

9. a нинг қандай қийматида $9x^2-2x+a=6-ax$ тенгламанинг илдизлари тенг бўлади?

10. m нинг қандай қийматларида $x^2-x+m^2=0$ тенглама ҳақиқий ҳар хил, ҳақиқий бир хил илдизларга эга бўлади?

11. k нинг қандай қийматида $(k-12)x^2+2(k-12)x+2=0$ тенглама ҳақиқий илдизга эга бўлмайди?

12. Берилган $x_1=\frac{1}{10-\sqrt{72}}$ ва $x_2=\frac{1}{10+6\sqrt{2}}$ илдизларига кўра квадрат тенглама тузинг.

13. a нинг қандай қийматида $x^2+ax+a+2=0$ тенглама илдизларининг нисбати 2 га тенг бўлади?

14. a нинг қандай қийматларида $x^2-\frac{15}{4}x+a=0$

тенгламанинг илдизлари $x_1 = x_2^2$ муносабатни қаноатлантиради?

15. a нинг қандай қийматида $x^2 + ax + 1 = 0$ ва $x^2 + x + a = 0$ тенгламалар умумий ечимга эга бўлади?

16. $2x^2 - 3ax - 2 = 0$ тенгламанинг илдизлари x_1 ва x_2 бўлса, $x_1^{-3} + x_2^{-3}$ ни ҳисобланг.

17. m нинг қандай қийматларида $(m+4)x^2 + 2mx + 2m - 6 < 0$ тенгсизликнинг ечими R бўлади?

18. k га нисбатан қуйидаги тенгсизликларнинг ечими бўладиган ва бўлмайдиган оралиқларни ўрганинг.

а) $(k-1)x^2 - (k+1)x + k + 1 > 0$; б) $(k-2)x^2 + 8x + k + 4 < 0$;
в) $x^2 + kx + k > 0$; г) $kx^2 - 4x + 3k + 1 < 0$;
д) $x^2 - 6kx + 2 - 2k + 9k^2 < 0$; е) $(k-3)x^2 - 3x - k + 1 > 0$.

19. Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

а) $|x-2| + |x-3| + |2x-8| = 9$;
б) $|4x-1| - |2x-3| + |x-2| = 0$;
в) $|x-1| + |x+2| - |x-3| = 4$;
г) $|x-1| - |x+2| - |2x-5| + |3-x| = -3$;
д) $|||x|-2|-1|-2| = 2$.

20. Қуйидаги параметрли тенгламаларни ечинг:

а) $2|x+a| - |x-2a| = 3a$; б) $x = 2|x-a| - 2|x-2a|$;
в) $a - \dfrac{2a^2}{|x+a|} = 0$; г) $|x+3a| - |x-a| = 2a$;
д) $|x^2 - a^2| = (x+3a)^2$; е) $x + \dfrac{2|x+a|}{x} = \dfrac{a}{x}$.

Модулли тенгламаларни ечинг:

21. $|2x - x^2 - 1| = 2x - x^2 - 1$.

22. $|5x - x^2 - 6| = x^2 - 5x + 6$.

Қуйидаги тенгсизликларни аналитик усулда ечинг:

23. $|2x+7| - |3x+5| > 0$.

24. $|2x+5| - |3x-7| < 0$.

25. $|x-1| + |2x-6| < 3$.

26. $|x-1| + |x-3| > 2$.

27. $|x-1| + |x+2| - |x-3| > 4$.

28. $|x+2| + |x+1| + |x-4| > 9$.

29. $|x-1| - |x-2| + |x-3| - |x-4| + |x-5| \leqslant 3$.

30. $|x+2| - |x+1| + |x| - |x-1| + |x-2| > 2{,}5$.

31. $|x^2 - x - 6| > 3 + x$.

32. $|x^2 - 6x + 8| < 5x - x^2$.

33. $|5x-x^2-6|>x^2-5x+6$.
34. $|x^2-3x+2|>3x-x^2-2$.
35. $|x^2+6x+5|>x^2-8x+16$.

36. $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\leqslant 1$.

37. $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|\geqslant 1$.

38. $\frac{x^2-|x|-6}{x-2}\geqslant 2x$.

39. $\frac{4x-1}{|x-1|}\geqslant |x+1|$.

3- §. ЮҚОРИ ДАРАЖАЛИ ТЕНГЛАМА ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

95-таъриф. *Ушбу*

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0\ (\geqslant 0),\ a_0\neq 0 \quad (1)$$

тенглама (тенгсизлик) юқори даражали тенглама (тенгсизлик) дейилади.

Мисол. $2x^5+6x^4-3x^3+2x^2+7x+6=0$ бешинчи даражали тенгламадир.

Агар (1) да $a_0, a_1, \ldots, a_n\in Z$ бўлса, у ҳолда (1) ни *бутун коэффициентли юқори даражали тенглама* дейилади. Агар $a_0=1$ бўлса, у ҳолда (1) ни *келтирилган тенглама* дейилади.

108-теорема. *Агар*

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (2)$$

бутун коэффициентли тенглама бутун ечимга эга бўлса, у ҳолда бу ечим озод ҳаднинг бўлувчиси бўлади.

Исботи. Теореманинг шартига кўра (2) бутун коэффициентли бўлиб, бутун $x=k$ ечимга эга, яъни $k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0$ бўлиб, бундан $a_n=k(-k^{n-1}-a_1k^{n-2}-\ldots-a_{n-1})$ бўлади. Ҳосил қилинган натижанинг ўнг томони иккита бутун соннинг кўпайтмаси бўлганлиги учун $a_n\vdots k$ бўлади. Теорема исбот бўлди.

Кўпинча $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ кўпҳадни $x-\alpha$ икки ҳадга бўлишда бўлинма ва қолдиқнинг коэффициентларини қуйидагича топилади: изланаётган бўлинманинг бўлувчига кўпайтмаси билан $f(\alpha)$ нинг йиғиндиси $f(x)$ га тенг бўлиши керак, яъни $f(x)=(x-\alpha)g(x)+Қ$; $Қ=f(\alpha)$. Бундан $b_{n-1}=a_n$; $a_{n-1}=b_{n-2}-\alpha b_{n-1}, \ldots$ ёки $b_{n-1}=a_n$; $b_{n-2}=a_{n-1}+\alpha b_{n-1}$; $b_{n-3}=a_{n-2}+\alpha b_{n-2}; \ldots;$ $Қ=a_0+\alpha b_0$ бўлади. Бу натижани қуйидаги жадвал кўринишида ёзамиз.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_0
α	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1}$	$b_{n-3} = a_{n-2} + \alpha b_{n-2}$	...	$Қ = a_0 + \alpha b_0$

Бу схема *Горнер схемаси* дейилади.

109-теорема. *Агар бутун коэффициентли* (1) *тенглама* $\frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$, *рационал илдизга эга бўлса, у ҳолда* p *озод ҳаднинг бўлувчиси,* q *бош ҳад коэффициенти* a_0 *нинг бўлувчиси бўлади.*

Исботи. Теореманинг шартига кўра $\frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$, (1) нинг илдизи бўлгани учун

$$a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\cdot\frac{p}{q} + a_n = 0 \qquad (3)$$

бўлиб, бундан

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0 \qquad (3')$$

ҳосил бўлади. Бу (3′) дан

$$a_nq^n = p(-a_0p^{n-1} - a_1p^{n-2}q - a_2p^{n-3}q^2 - \\ - \ldots - a_{n-1}q^{n-1}) \qquad (4)$$

ҳосил бўлиб, бундан a_n нинг p га бўлиниши кўриниб турибди. Худди шунга ўхшаш, (3′) дан a_0 нинг q га бўлинишини кўрсатиш мумкин. Шу билан теорема исбот қилинди.

96-таъриф. *Ушбу*

$$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \ldots + a_nx^{n+1} + \lambda a_nx^n + \lambda^3a_{n-1}x^{n-1} + \\ + \ldots + a_0\lambda^{2n+1} = 0, \qquad (5)$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 = 0 \qquad (6)$$

кўринишидаги тенгламалар қайтма тенгламалар дейилади.

Мисол. $2x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 81x + 486 = 0$ $(\lambda = 3)$; $4x^6 + 5x^5 - 3x^4 + 11x^3 + 6x^2 + 20x - 32 = 0$ $(\lambda = -2)$ ва $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$ $(\lambda = 1)$ қайтма тенгламалардир.

110-теорема. *Тоқ даражали қайтма тенглама $x = -\lambda$ илдизга эга бўлади.*

Исботи. Теореманинг шартига кўра (5) ни оламиз ва уни қуйидагича алмаштирамиз:

$$a_0(x^{2n+1} + \lambda^{2n+1}) + a_1x(x^{2n-1} + \lambda^{2n-1}) + \ldots +$$
$$+ a_nx^n(x + \lambda) = 0. \qquad (7)$$

Натижада $x = -\lambda$ ни алмаштирсак, у ҳолда (7) нинг чап томони нолга тенг бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.

111-теорема. *Даражаси $2n$ бўлган қайтма тенглама C сонлар майдонида $y = x + \frac{\lambda}{x}$ алмаштириш орқали n-даражали тенгламага келтирилиб, n та квадрат тенглама ҳосил бўлади.*

Исботи. Теореманинг шартига кўра

$$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \ldots + a_nx^n + \lambda a_{n-1}x^{n-1} + \lambda^2a_{n-2}x^{n-2} +$$
$$+ \ldots + \lambda^n a_0 = 0 \qquad (8)$$

тенгламани $x^n \neq 0$ га бўламиз, натижада $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n + a_{n-1}\frac{\lambda}{x} + \ldots + a_1\frac{\lambda^{n-1}}{x^{n-1}} + a_0\frac{\lambda^n}{x^n} = 0$ ҳосил бўлади. Сўнгра, гуруҳлашдан сўнг

$$a_0\left(x^n + \frac{\lambda^n}{x^n}\right) + a_1\left(x^{n-1} + \frac{\lambda^{n-1}}{x^n}\right) + \ldots + a_n = 0$$

тенгламада $y = x + \frac{\lambda}{x}$ белгилашни киритамиз. Бу ерда $x^m + \frac{\lambda^m}{x^m}$, $m \in N$ йиғинди y га нисбатан $f_m(y)$ ни ҳосил қилиши маълумдир. Энди m га нисбатан математик индукция усулини татбиқ қиламиз: $m = 1$ бўлсин, у ҳолда $y = x + \frac{\lambda}{x}$ бўлиб, талаб бажарилади. $m = 2$ бўлганда $x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2} = y^2 - 2\lambda$ бўлади. $m = k + 1$ бўлганда $x^{k+1} + \frac{\lambda^{k+1}}{x^{k+1}} = f_{k+1}(y)$ бўлсин деб, $m = k + 2$ учун кўрсатамиз.

$$x^{k+2} + \frac{\lambda^{k+2}}{x^{k+2}} = \left(x^{k+1} + \frac{\lambda^{k+1}}{x^{k+1}}\right)\left(x + \frac{\lambda}{x}\right) - \lambda\left(x^k + \frac{\lambda^k}{x^k}\right)$$

эканидан

$$x^{k+2}+\frac{\lambda^{k+2}}{x^{k+2}}=yf_{k+1}(y)-\lambda f_k(y)=f_{k+2}(y)$$

ҳосил бўлиб, у y га нисбатан n-даражали тенглама бўлади. Бу тенглама C да n та ечимга эга эканлигидан уни $y_1, y_2, \ldots y_n$ орқали ифодаласак, $y_1=x+\frac{\lambda}{x}$; $y_2=x+\frac{\lambda}{x}$; ... ; $y_n=x+\frac{\lambda}{x}$ квадрат тенгламаларни ҳосил қиламиз. Бу тенгламаларнинг ечимлари (8) нинг ечимларидан иборат бўлади. Шу билан теорема исботланди.

Мисол. $x^7-2x^6+3x^5-x^4-x^3+3x^2-2x+1=0$ (9) тенгламани ечинг.

Ечиш. 110-теоремага асосан (9) $\Leftrightarrow (x+1)(x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1)=0$ бўлиб, бундан $x+1=0$ ёки $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x+\frac{1}{x}\right)-7=0$ ларни ҳосил қиламиз. $y=x+\frac{1}{x}$ белгиланишига кўра $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$ эканлиги $y^3-3y^2+3y-1=0$ ёки $(y-1)^3=0$ тенгламани беради. Бундан $x+\frac{1}{x}=1$ га кўра $x_1=-1$, $x_2=x_3=x_4=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_5=x_6=x_7=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ натижаларни оламиз. Демак, C да ечим $\left\{-1;\ \frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ бўлади.

Энди

$$x^n=b \tag{10}$$

кўринишидаги икки ҳадли тенгламани ечишни кўриб чиқайлик. Бунда ушбу ҳоллар бўлиши мумкин:

1) $n=2m-1$ бўлсин, у ҳолда $y=x^{2m-1}$ функция $x\in(-\infty;+\infty)$ да монотон ўсувчи бўлганлиги учун $x^{2m-1}=b$ тенгламанинг ечими: а) агар $b>0$ бўлса, $x=\sqrt[2m-1]{b}$;

б) агар $b=0$ бўлса, $x=0$;

в) агар $b<0$ бўлса, $x=-\sqrt[2n-1]{b}$ бўлади.

г) $n=2m$ бўлсин, у ҳолда $y=x^{2m}$ функция $A=(0;+\infty)$ да қатъий монотон ўсади, $B=(-\infty;0]$ да қатъий монотон камаяди. Шунинг учун $x^{2m}=b$ тенгламани A да ва B да алоҳида ечамиз. A оралиқда: агар $b>0$ бўлса, $x_1=\sqrt[2m]{b}$; $b=0$ бўлса, $x=0$; $b<0$ бўлса, ечимга эга эмас. B оралиқда эса: $b>0$ бўлса, $x_2=-\sqrt[2m]{b}$; $b<0$ бўлса, ечим йўқ. Демак, $x^n=b$ тенглама учун:

	$b>0$	$b=0$	$b<0$
$x^{2m-1}=b$	$x_1=\sqrt[2m-1]{b}$	$x_1=0$	$x_2=-\sqrt[2m-1]{b}$
$x^{2m}=b$	$x_1=\sqrt[2m]{b}$, $x_2=-\sqrt[2m]{b}$	$x=0$	ечим йўқ

$x^n=1$ кўринишдаги тенгламани C да ечиш учун соннинг тригонометрик шаклидан фойдаланамиз, яъни $1=\cos 2k\pi+ i\sin 2k\pi$ дан $x_k=\sqrt[n]{\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi}=\cos\frac{2k\pi}{n}+ i\sin\frac{2k\pi}{n}$ топилади. Бундан $\varepsilon_0=1$; $\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{n}+ i\sin\frac{2\pi}{n}$; ... $k=\overline{0,\ (n-1)}$; $\varepsilon_{n-1}=\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+ i\sin\frac{2(n-1)}{n}\pi$; $x_1=\varepsilon_0$; $x_2=\varepsilon_1$; ... $x_n=\varepsilon_{n-1}$.

Бу маълумотларга таянган ҳолда $ax^{2n}+bx^n+c=0$; $a\neq 0$, тенгламани ечиш мумкин.

Ҳақиқий сонли майдонда берилган $P(x)$ кўпҳад учун $P(x)>0$; $P(x)\geqslant 0$ кўринишдаги ҳамда $P(x)$ ва $Q(x)$ лар учун $\frac{P(x)}{Q(x)}>0 \Leftrightarrow P(x)\,Q(x)>0$ кўринишдаги тенгсизликлар берилган бўлсин. Бундай кўринишдаги тенгсизликларни ечиш учун $P(x)$ ёки $Q(x)$ ни кўпайтувчиларга ажратамиз, яъни $P(x)$ учун

$$P(x)=a(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\dots(x-x_k)^{\alpha_k}(x^2+p_1x+ q_1)^{\beta_1}\dots(x^2+p_mx+q_m)^{\beta_m}$$

ўринли бўлсин. Бу ерда $x^2+p_ix+q_i$; $i=\overline{1,\ m}$; $\forall x\in \mathbf{R}: x^2+p_ix+q_i>0$, $i=\overline{1,\ m}$ бўлса, у ҳолда,

$$P(x)>0 \Leftrightarrow a(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\dots(x-x_k)^{\alpha_k}>0 \qquad (1)$$

бўлади.

Фараз қилайлик, $P(x)$ кўпҳаднинг ҳақиқий илдизлари $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ тартибда жойлашган бўлсин. У ҳолда $P(x)$ нинг ишораси $(-\infty;\ x_1)$; $(x_1;\ x_2)$; $\ldots$; $(x_k;\ +\infty)$ ларнинг ҳар бирида кўпайтувчиларнинг ва a нинг ишорасига қараб аниқланади. Хусусий ҳолда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 1$ бўлганда (1) ни қаноатлантирадиган оралиқни қуйидаги жадвалда кўриш мумкин:

		$(-\infty;\ x_1)$	$(x_1;\ x_2)$	$(x_2;\ x_3)$	$\ldots$
	$x - x_1$	$-$	$+$	$+$	$\ldots$
	$x - x_2$	$-$	$-$	$+$	$\ldots$
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
	$x - x_k$	$-$	$-$	$-$	$\ldots$
$P(x)$	$a > 0$, $k = 2n$	$+$	$-$	$+$	$\ldots$
	$a > 0$, $k = 2n + 1$	$-$	$+$	$-$	$\ldots$
	$a < 0$ $k = 2n$	$-$	$+$	$-$	$\ldots$
	$a < 0$ $k = 2n + 1$	$+$	$-$	$+$	$\ldots$

Юқори даражали тенгсизликларни бу ечиш усули *интерваллар усули* деб аталиб, натижани тез аниқлаш учун қулайдир.

Мисол ва масалалар ечиш

1-мисол. 1. $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x + 1(x - 1)(x - 2) > 0$. $P(x) = 0$ бўладиган қийматлар тўплами: $\{-1;\ 1;\ 2\}$. Энди $P(x)$ нинг ишорасини мос оралиқларда аниқлаймиз:

	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; 2)$	$(2; +\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Демак, берилган тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлар тўплами: $A=(-1;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$.

2-мисол. $1+\frac{x-4}{x-3}>\frac{x-2}{x-1}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $1+\frac{x-4}{x-3}>\frac{x-2}{x-1}\Leftrightarrow 1+\frac{x-4}{x-3}-\frac{x-2}{x-1}>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{x^2-4x+1}{(x-1)(x-3)}>0\Leftrightarrow(x-1)(x-3)(x^2-4x+1)>0;$

$(x-1)(x-3)(x^2-4x+1)=0$ бўладиган қийматлар:

$$x_1=2-\sqrt{3};\ x_2=1;\ x_3=3;\ x_4=2+\sqrt{3}.$$

Энди $\frac{P(x)}{Q(x)}$ нинг ишорасини аниқлаймиз:

	$(-\infty; x_1)$	$(x_1; x_2)$	$(x_2; x_3)$	$(x_3; x_4)$	$(x_4; +\infty)$
$x-x_1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-x_2$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-x_3$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-x_4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{P(x)}{Q(x)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Демак, $\frac{x^2-4x+1}{(x-1)(x-3)}>0$ ни қаноатлантирадиган қийматлар тўплами:

$$A=(-\infty;\ 2-\sqrt{3})\cup(1;\ 3)\cup(2+\sqrt{3};\ +\infty).$$

3-мисол. Ушбу тенгламани ечинг:

$$x^4+2x^2+5x^2+4x-12=0.$$

Ечиш. Биринчи усул. Бу тенгламада $a_n=1$ ва $a_0=-12$ бўлгани учун a_0 нинг ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12 бўлувчиларини ёзиб оламиз, сўнгра Горнер схемаси бўйича тенгламанинг илдизлари тўпламини аниқлаймиз:

	1	2	5	4	−12
1	1	3	8	12	0
−2	1	1	6	0	

Демак, тенгламанинг илдизлар тўплами R да $\{1; -2\}$. Сўнгра

$$x^4+2x^3+5x^2+4x-12=(x-1)(x+2)(x^2+x+6)=0.$$

Бундан $\left[\begin{array}{l} x^2+x+6=0 \\ x-1=0 \\ x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1\pm i\sqrt{23}}{2} \\ x=1 \\ x=-2. \end{array}\right.$

Демак, тенгламанинг илдизлар тўплами C да

$$\left\{1;\ -2;\ \frac{-1\pm i\sqrt{23}}{2}\right\}.$$

Иккинчи усул (кўпайтувчиларга ажратиш усули):

$$x^4+2x^3+5x^2+4x-12=(x^4+2x^3)+$$
$$+(5x^2+10x)-(6x+12)=(x+2)(x^3+5x-6)=$$
$$=(x-1)(x+2(x^2+x+6)=0.$$

Бундан, тенгламанинг илдизлар тўплами $\left\{-2;\ 1;\ \dfrac{-1\pm i\sqrt{23}}{2}\right\}$.

Учинчи усул (номаълум коэффициентларни киритиш усули): берилган тенгламани $x^4+2x^3+5x^2+4x-12=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ кўринишида ёзиб олиб, қавсларни очиб чиқамиз, сўнгра кўпҳаднинг кўпҳадга тенглик шартини ҳисобга олган ҳолда $a=1$, $b=2$, $c=1$, $d=6$ ни аниқлаймиз.

4-мисол. $(x^2+x+1)^2-3x^2-3x-1=0$ тенгламани янги ўзгарувчи киритиш усули билан ечинг.

Ечиш. $(x^2+x+1)^2-3x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow (x^2+x+1)^2-3(x^2+x+1)+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-3t+2=0, \\ t=x^2+x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1, \\ t=x^2+x+1 \end{cases} \vee \begin{cases} t=2, \\ t=x^2+x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1=1 \\ x^2+x-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x=0 \\ x^2+x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \vee \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Тенгламанинг илдизлар тўплами: $\left\{0;\ -1;\ \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

5-мисол. $x\cdot\dfrac{19-x}{x+1}\left(x+\dfrac{19-x}{x+1}\right)=84$ тенгламани системага келтириш усули билан ечинг.

Ечиш. $x\cdot\dfrac{19-x}{x+1}\left(x+\dfrac{19-x}{x+1}\right)=84 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)=84, \\ y=\dfrac{19-x}{x+1}, \\ x+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)=84, \\ xy+(x+y)=19, \\ y=\dfrac{19-x}{x+1};\ x+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv=84,\ u=xy, \\ u+v=19,\ v=x+y, \\ y=\dfrac{19-x}{x+1},\ x+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=7\wedge v=12, \\ u=xy,\ v=x+y, \\ y=\dfrac{19-x}{x+1};\ x+1\neq 0 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} u=12\wedge v=7, \\ u=xy,\ v=x+y, \\ y=\dfrac{19-x}{x+1};\ x+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=12, \\ xy=7, \\ y=\dfrac{19-x}{x+1}, \\ x+1\neq 0 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} x+y=7, \\ xy=12, \\ y=\dfrac{19-x}{x+1}, \\ x+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=4 \\ x=6-\sqrt{29} \\ x=6+\sqrt{29}. \end{array}\right.$$

Демак, берилган тенгламанинг ечимлари тўплами:

$$\{3;\ 4;\ 6-\sqrt{29};\quad 6+\sqrt{29}\}.$$

6-мисол. Қуйидаги параметрли тенгламани ечинг:

$$\frac{x+a}{x-b}+\frac{x+b}{x-b}=2.$$

Ечиш. $\dfrac{x+a}{x-b}+\dfrac{x+b}{x-a}=2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - a^2 + x^2 - b^2 = 2(x-a)(x-b), \\ x \neq a, \ x \neq b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(a+b)x = (a+b)^2, \\ x \neq a, \ x \neq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \neq 0, \\ x = \dfrac{a+b}{2}, \\ x \neq a, \\ x \neq b \end{cases} \mathrm{V}$$

$$\mathrm{V} \begin{cases} a+b = 0, \\ 0 \cdot x = 0, \\ x \neq a, \\ x \neq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \neq 0, \\ x = (a+b):2, \\ (a+b):2 \neq a \\ (a+b):2 \neq b \end{cases} \mathrm{V} \begin{cases} a = -b, \\ 0 \cdot x = 0, \\ x \neq a, \\ x \neq b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \neq \pm a, \\ x = \dfrac{a+b}{2} \end{cases} \mathrm{V} \begin{cases} b = -a, \\ x \neq \pm a, \\ 0 \cdot x = 0. \end{cases}$$

Жавоб. 1) Агар $b \neq -a$ ва $b \neq a$ бўлса, $\left\{\dfrac{a+b}{2}\right\}$;
2) агар $b \neq -a$ ва $b = a$ бўлса, $\varnothing$;
3) агар $b = -a$ бўлса, $R \setminus \{-a;\ a\}$.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

Тенгламаларни ечинг.

1. $x^3 - 3x - 2 = 0$.
2. $x^3 - 19x - 30 = 0$.
3. $2x^3 - x^2 - 1 = 0$.
4. $x^3 + x - 2 = 0$.
5. $x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0$.
6. $6x^4 - 13x^3 - 27x^2 + 40x - 12 = 0$.
7. $9x^2 + 4x^3 = 1 + 12x^4$.
8. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.
9. $x^5 + x^3 + x = 0$.
10. $x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 8x = 0$.
11. $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$.
12. $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$.
13. $x^8 + 4x^6 - 10x^4 + 4x^2 + 1 = 0$.
14. $x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1 = 0$.
15. $(x^3 + x^2 + 1)^2 + (x^3 - x^2 + 1)^2 = 2x^4$.

Тенгсизликларни ечинг.

16. $2x^2 - x + 3 > 0$.
17. $4x^2 + 2x + 5 < 0$.
18. $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 3 > 0$.

19. $\frac{x^2}{m} - 2x - \frac{x}{m} + m + 1 > 0.$

20. $3(a+1)x^2 - 6(a^2+a+1)x + 7(a^3-1) < 0.$

21. $3(k-1)x^2 - 2(2k-1)x + 2k - 1 > 0.$

22. $x^2 + 2x + 1 > \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2}.$

Параметрларнинг қандай қийматларида қуйидаги тенгсизликларнинг ечими R тўплам бўлади?

23. $ax^2 + (a-1)x - 2 < 0.$

24. $(b^2-1)x^2 + 2(b-1)x + 1 < 0.$

25. $(m-2)x^2 - mx - 1 < 0.$

26. m нинг қандай қийматлари тўпламида $-2 \leqslant x \leqslant 1$ тенгсизлик $mx^2 - 2(m+3)x + m < 0$ нинг ечими бўлади?

Тенгсизликларни ечинг.

27. $(x+2)(x-1)(x-3) > 0.$

28. $(x+3)(x+2)(x-1)(x-3) > 0.$

29. $5(x+3)(x-2)(x-3) < 0.$

30. $(x+3)(x+2)(x+1)^2(x-2)(x^2+3x+5) > 0.$

31. $(x-7)(x+3)^5(x-2)x^6(x+5)^3 > 0.$

32. $(x-2)^3(x+1)^2(x+3)^4(x-4)^5(x-8) > 0.$

33. $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1) < 0.$

34. $(x+2)(x-1)^2(x-2)(x^2+3x+5) < 0.$

35. $(x^3-2x^2-5x+6)(x^2-x+1) > 0.$

36. $x^3 + 5x^2 + 3x - 9 > 0.$

37. $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x < 0.$

38. $x^4 - 3x^2 + 3x^2 - 3x + 2 < 0.$

39. $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} > 1.$

40. $\frac{x^2-3}{x^2+4x+3} \geqslant 0.$

41. $\frac{x^2-4x+3}{x^2-7x+10} > 0.$

42. $\frac{x^2-1}{3x-7-8x^2} > 0.$

43. $\frac{x^2-8x+7}{x^2-2x+3} > 0.$

44. $\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^3+1} > 0.$

45. $\frac{(x-1)(x^2-x+1)}{x^3-1} < 0.$

46. $\frac{x^2-2x+1}{3x-5-x^2} > 0.$

47. $\frac{4x^2-5x-1}{2x^2-5x-3} > 0.$

48. $\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(2x-1)(x+4)(3-x)} > 0.$

4-§. ИРРАЦИОНАЛ ТЕНГЛАМА ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

97-таъриф. *Агар* $f(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c)$ *ва* $\varphi(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c)$ *иррационал функциялар бўлса, у ҳолда*

$$f(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = \varphi(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) \quad (f \gtreqless \varphi) \qquad (1)$$

тенглама (тенгсизлик) иррационал тенглама (тенгсизлик) дейилади.

Мисол. $\sqrt{2x-3} = x-1$; $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[4]{x} = \sqrt[5]{x^2-1}$ лар иррационал тенгламалар, $\sqrt{x-1} > x-3$; $\sqrt[3]{x^2-2x-5} < x+6$ иррационал тенгсизликлардир.

112-теорема. *Комплекс сонлар майдонида иррационал тенгламаларнинг ечими рационал тенгламалар системасининг ечимига тенг кучлидир.*

Исботи. Ҳақиқатан ҳам, агар

$$f(x, y, \ldots, z, \sqrt[n]{R(x, y, \ldots, z)}) = 0 \qquad (2)$$

тенглама C да қаралаётган бўлса, у ҳолда

$$f(x, y, \ldots, z, \sqrt[n]{R(x, y, \ldots, z)}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y, \ldots, z, u) = 0, \\ u^n = R(x, y, \ldots, z) \end{cases} \qquad (3)$$

бўлади. Бундан кўриниб турибдики, (2) нинг ҳар қандай ечими C да (3) нинг ҳам ечими бўлади ва, аксинча, (3) нинг ечими (2) нинг ҳам ечими бўлади.

Иррационал тенгламаларни ечишни кўп ҳолларда сонли майдонда амалга оширишга ҳаракат қилинади. Шу боисдан, аввал уни қайси турга мансуб ва қандай услуб билан ечиш мумкин эканлигини аниқлаш муҳимдир. Масалани бир номаълумга нисбатан ҳал қилинса, уни n та номаълумли тенгламалар учун ҳам қўллаш мумкин.

I. Даражага кўтариш усули билан ечиладиган тенгламалар.

$$\sqrt[2k]{f(x, a b, \ldots, c)} = \varphi(x, a, b, \ldots, c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x, a, b, \ldots, c) = [\varphi(x, a, b, \ldots, c)]^{2k}, \ k \in N, \\ \varphi(x, a, b, \ldots, c) \geqslant 0, \\ f(x, a, b, \ldots, c) \geqslant 0. \end{cases}$$

Мисол. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{12x+13}$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{12x+13} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2\sqrt{2x+3\,(5x+1)}=5x+9 \wedge 2x+3 \geqslant 0 \wedge 5x+1 \geqslant 0 \wedge$
$\wedge\, 12x+13 \geqslant 0) \Leftrightarrow (4\,(2x+3)\,(5x+1)=25x^2+90x+81 \wedge$
$\wedge\, x \geqslant -\frac{3}{2} \wedge x \geqslant -\frac{1}{5} \wedge x \geqslant -\frac{13}{12}\Big) \Leftrightarrow \Big(15x^2-22x-69=$
$=0 \wedge x \geqslant -\frac{1}{5}\Big) \Leftrightarrow \Big[(x-3)\,(15x+23)=0 \wedge x \geqslant -\frac{1}{5}\Big].$

Демак, ечим $A=\{x|\,x=3\}$ бўлади.

Иррационал тенгламаларни ечишда ҳар доим ҳам аниқланиш соҳасини олдиндан топиб олиш шарт эмас, аввал тенгламани ечиб, сўнгра топилган ечимларни текшириш ва ҳақиқий ечимларни ажратиш мақсадга мувофиқдир.

Мисол. $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}=\sqrt[3]{2x-1}$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламанинг иккала томонини кубга кўтарамиз:

$$2x+1+3\sqrt[3]{(2x+1)^2\,(6x+1)}+3\sqrt[3]{(2x+1)\,(6x+1)^2}+$$
$$+\,6x+1=2x-1.$$

Энди ўхшаш ҳадларни ихчамлаб, соддалаштирсак,

$3\sqrt[3]{(2x+1)\,(6x+1)}\,(\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1})=-6x-3$ ёки $\sqrt[3]{(2x+1)\,(6x+1)\,(2x-1)}=-2x-1$, бундан $(2x+1)\times$ $\times(6x+1)\,(2x-1)=-(2x+1)^3$ бўлиб, $x_1=-0{,}5$; $x_{2,3}=0$ ни топамиз. Бу топилган натижаларни тенгламадаги x нинг ўрнига қўйсак, фақат $x=-0{,}5$ ечим уни тўғри тенгликка айлантиради. Демак, ечим $A=\{x\,|x=-0{,}5\}$ бўлади.

II. Янги ўзгарувчи киритиш усули билан ечиладиган тенгламалар. Масалан, $f\,(x, \sqrt[n]{\varphi\,(x)})=0$ тенгламани унга эквивалент бўлган ушбу системага қуйидагича келтириш мумкин:

$f\,(x, \sqrt[n]{\varphi\,(x)})=0 \Leftrightarrow [f\,(x, u)=0 \wedge u^n=\varphi\,(x)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \{[f\,(x,\ u)=0 \wedge u^{2k+1}=\varphi\,(x) \wedge n=2k+1) \wedge (f\,(x, u)=$
$=0 \wedge u^{2k}=\varphi\,(x) \wedge \varphi\,(x) \geqslant 0 \wedge n=2k)]|k \in N\}.$

1-мисол. $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}=a$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}=a \Leftrightarrow (\sqrt{3y^2-8}=a-y \wedge$

$$\wedge\, y=\sqrt{x+2} \wedge x \geqslant \frac{2}{3} \wedge a>0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2-8=(a-y)^2, \\ y=\sqrt{x+2},\ a-y \geqslant 0, \Leftrightarrow \\ a>0,\ x \geqslant \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2+2ay-8-a^2=0, \\ 0\leqslant y\leqslant a,\ a>0, \\ x\geqslant \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{2}\left(-a-\sqrt{3a^2+16}\right), \\ 0\leqslant y\leqslant a,\ a>0, \\ x\geqslant \dfrac{2}{3},\ 3a^2+16\geqslant 0, \\ y=\sqrt{x+2} \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} y=\dfrac{1}{2}\left(-a+\sqrt{3a^2+16}\right), \\ 0\leqslant y\leqslant a,\ a>0, \\ x\geqslant \dfrac{2}{3},\ y=\sqrt{x+2}, \\ 3a^2+16\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{2}\left(-a+\sqrt{3a^2+16}\right), \\ 0\leqslant\dfrac{1}{2}\left(-a+\sqrt{3a^2+16}\right)\leqslant a, \\ x\geqslant \dfrac{2}{3},\ y^2=x+2, \\ 3a^2+16\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2-2,\ y\geqslant 0, \\ a\geqslant \dfrac{2\sqrt{6}}{3},\ x\geqslant \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left(2a^2+4-a\sqrt{3a^2+16}\right), \\ a\geqslant \dfrac{2\sqrt{6}}{3}. \end{cases}$$

Жавоб. 1) $a<0$ бўлганда $x\in\varnothing$;

2) $0\leqslant a<\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ бўлганда $x\in\varnothing$;

3) $a\geqslant\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ бўлганда $A=\left\{x \mid x=\dfrac{1}{2}\left(2a^2+4-a\sqrt{3a^2+16}\right)\right\}$.

2-мисол. $x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=1{,}5\,(x+4)$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=1{,}5\,(x+4)\Leftrightarrow 2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+12\Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{2x^2-3x+2}, \\ y^2-2y-8=0,\ y\geqslant 0 \end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{2x^2-3x+2}, \\ \left[\begin{array}{l} y=4 \\ y=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2-3x+2}=4, \\ 2x^2-3x+2\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3{,}5 \\ x=-2, \end{array}\right. \\ 2x^2-3x+2\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow A=\{-2;\ 3{,}5\}$$

бўлади.

Бу усулни бир оз кучайтириб, иррационал тенгламаларни рационал тенгламалар системасига келтириб ечиш мумкин.

Мисол. $\sqrt[3]{9-x}+\sqrt[3]{7+x}=4$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\sqrt[3]{9-x}+\sqrt[3]{7+x}=4 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{9-x}=u, \\ \sqrt[3]{7+x}=v, \\ u+v=4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^3+v^3=16, \\ u+v=4, \\ u=\sqrt[3]{9-x}, \\ v=\sqrt[3]{7+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4, \\ uv=4, \\ u=\sqrt[3]{9-x}, \\ y=\sqrt[3]{7+x}, \end{cases} \Leftrightarrow u=v=2=\sqrt[3]{9-x} \Leftrightarrow x=1.$$

Демак, ечим $x=1$ бўлади.

III. Модуль қатнашган тенгламага келтириб ечиладиган тенгламалар.

Мисол. Қуйидаги тенгламани ечинг:

$$\sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{10+x-6\sqrt{x+1}}=1.$$

Ечиш. $\sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{10+x-6\sqrt{x+1}}=$

$$=1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(y-2)^2}+\sqrt{(y-3)^2}=1, \\ y=\sqrt{x+1},\ x+1\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y-2|+|y-3|=1, \\ y=\sqrt{x+1}, x+1\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\leqslant y\leqslant 2, \\ y-2+y-3=-1, \\ y=\sqrt{x+1}\geqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2<y\leqslant 3, \\ y-2-y+3=1, \\ y^2=x+1\geqslant 0 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} y>3, \\ y-2+y-3=1, \\ y^2=x+1\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 3, \\ \sqrt{x+1}=2 \end{cases} \vee \begin{cases} 2<y\leqslant 3, \\ 1=1, \\ 3<x\leqslant 8 \end{cases} \vee \begin{cases} y>3,\ x>8, \\ y=3, \\ y^2=x+1\geqslant 0. \end{cases}$$

Жавоб. $-1\leqslant x\leqslant 3$ оралиқда $A=\{x|x=3\}$; $3<x\leqslant 8$ оралиқда $x\in \boldsymbol{R}$; $x>8$ оралиқда $x\in\varnothing$.

IV. Иррационал тенгламаларни ечишда қуйидаги Л.Эйлер алмаштиришлари:

1. Агар $a>0$ бўлса, $\sqrt{ax^2+bx+c}=|z+x\sqrt{a}|$;

2. Агар $c>0$ бўлса, $\sqrt{ax^2+bx+c}=|xz+\sqrt{c}|$

билан бирга $x=\sin t$, $x=\operatorname{tg} t$ тригонометрик алмаштиришларни ҳам қўллаш мақсадга мувофиқдир.

Мисол. $\sqrt{1-x^2}+x=a$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\sqrt{1-x^2}+x=a \Leftrightarrow (\sqrt{1-x^2}=a-x \wedge |x|\leqslant 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin t, \ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \sin t + \cos t = a \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin t, -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{t}, \\ \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

1. Агар $|a| > \sqrt{2}$ бўлса, тенглама ечимга эга эмас.

2. Агар $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$ бўлса, у ҳолда: а) $-\frac{\pi}{2} \leqslant \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ бўлгани учун $-\frac{\pi}{4} \leqslant t + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{3\pi}{4}$ бўлиб, $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \leqslant \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$ бўлади. Бундан $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{a}{\sqrt{2}} \leqslant 1$ бўлиб, $-1 \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$ бўлади. Демак, $-\sqrt{2} \leqslant a < -1$ да тенглама ечимга эга эмас. Агар $-\frac{\pi}{4} \leqslant t + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$ ёки $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}$ бўлса, $-1 \leqslant a < 1$ бўлиб, тенглама $t + \frac{\pi}{4} = \arcsin\frac{a}{\sqrt{2}}$, $t = \arcsin\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}$ ёки $x = \sin t = \sin\left(\arcsin\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{1 - \frac{a^2}{2}} \times \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2}$ ечимга эга бўлади;

б) агар $\frac{\pi}{4} \leqslant t + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{3\pi}{4}$ ёки $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$ ёки $1 \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$ бўлса, у ҳолда тенглама:

1) $t + \frac{\pi}{4} = \arcsin\frac{a}{\sqrt{2}}$ ёки $x = \frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2}$ ечимга;

2) $t + \frac{\pi}{4} = \pi - \arcsin\frac{a}{\sqrt{2}}$ ёки $x = \frac{a + \sqrt{2 - a^2}}{2}$ ечимга эга бўлади.

Демак, берилган тенгламанинг ечими $\left\{\frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2}\right\}$.

Иррационал тенгламаларни ечишда айрим **сунъий алмаштиришлар** ҳам қўлланилади.

Мисол. $\sqrt{2x^2 + 3x + 5} + \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 3x$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламанинг ҳар иккала томонини $\sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$ га кўпайтирамиз, натижада тенгликнинг чап томони $6x$ ни, ўнг томони $3x\left(\sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5}\right)$ ни беради. Демак, берилган тенглама $x(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}-2=0$ кўринишни олади. Бундан $x_1=0$ ва $\sqrt{2x^2+3x+5}-$ $-\sqrt{2x^2-3x+5}=2$ ни ҳосил қиламиз. Сўнгра $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$ ва $\sqrt{2x^2+3x+5}-$ $-\sqrt{2x^2-3x+5}=2$ ни ҳадлаб қўшсак, у ҳолда $2\sqrt{2x^2+3x+5}=3x+2$ ёки $8x^2+12x+20=9x^2+$ $+12x+4$, ёки $x^2=16$ ҳосил бўлиб, бундан $x_2=4$, $x_3=$ $=-4$ бўлади. Топилган ечимларни тенгламадаги x нинг ўрнига қўйилса, текшириш натижасида ечим $\{4\}$ экани келиб чиқади.

Иррационал тенгсизликларни ечиш иррационал тенгламаларни ечишдан қисман фарқ қилади:

I. Даражага кўтариб ечиладиган тенгсизликлар:

а) $\sqrt[2k]{f\,(x, a, b, \ldots, c)} < \varphi\,(x, a, b, \ldots, c)$ тенгсизлик

$$\begin{cases} f\,(x, a, b, \ldots, c) < [\varphi\,(x, a, b, \ldots, c)]^{2k}, \; k\in N, \\ f\,(x, a, b, \ldots, c) \geqslant 0, \; \varphi\,(x, a, b, \ldots, c) > 0 \end{cases}$$

рационал тенгсизликлар системасига эквивалентдир;

б) $\sqrt[2k+1]{\varphi\,(x, a, b, \ldots, c)} < f\,(x, a, b, \ldots, c)$ ёки $\sqrt[2k+1]{\varphi\,(x, a, \ldots, c)} \geqslant f\,(x, a, \ldots, c)$ кўринишдаги тенгсизликлар мос равишда $\varphi\,(x, a, b, \ldots, c) < [f\,(x, a, b, \ldots, c)]^{2k+1}$ ёки $\varphi\,(x, a, \ldots, c) \geqslant [f\,(x, a, \ldots, c)]^{2k+1}, k\in N$ тенгсизликларга эквивалент бўлади.

1-мисол. $\sqrt{x+3} < x-3$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $\sqrt{x+3} < x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geqslant 0, \; x-3 > 0, \\ x+3 < x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -3, \\ x > 3, \\ x^2-7x+6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x > 6 \end{cases} \Rightarrow A = \{x \,|\, x > 6\}.$$

Демак, ечим $(6; +\infty)$ бўлади.

2-мисол. $\sqrt{x-5}+\sqrt{2x+1} > \sqrt{3x-4}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш.

$$\sqrt{x-5}+\sqrt{2x+1} > \sqrt{3x-4} \Leftrightarrow (2\sqrt{(x-5)(2x+1)} > 0 \wedge$$
$$\wedge\, x-5 \geqslant 0 \wedge 2x+1 \geqslant 0 \wedge 3x-4 \geqslant 0) \Leftrightarrow [(x-5)(2x+1) > 0 \wedge$$
$$\wedge\, x \geqslant 5 \wedge x \geqslant -0{,}5 \wedge x \geqslant \frac{4}{3}] \Leftrightarrow [(x-5)(2x+1) > 0 \wedge$$
$$\wedge\, x \geqslant 5] \Leftrightarrow x > 5.$$

Демак, берилган тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлар тўплами: $A = \{x \mid x > 5\}$.

3-мисол. $\sqrt{x+a} - \sqrt{\frac{a^2}{x+a}} < \sqrt{x+2a}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $\sqrt{x+a} - \sqrt{\frac{a^2}{x+a}} < \sqrt{x+2a} \Leftrightarrow (x+a>0 \wedge$
$\wedge\, x+2a \geqslant 0 \wedge x+a-|a| < \sqrt{(x+2a)(x+a)} \Leftrightarrow [(a<0 \wedge$
$\wedge\, x > -a \wedge x > -2a \wedge x+2a < \sqrt{(x+2a)(x+a)} \vee$
$\vee\, (a=0 \wedge x>0 \wedge x<\sqrt{x^2}) \vee (a>0 \wedge -a<x \wedge x>-2a \wedge$
$\wedge\, x<\sqrt{(x+2a)(x+a)})] \Leftrightarrow [(a<0 \wedge x>-2a \wedge a(x+2a)<$
$<0) \vee (a=0 \wedge x>0 \wedge x<x) \vee (a>0 \wedge x>-a \wedge x<0) \vee$
$\vee\, (a>0 \wedge x>-a \wedge x>0 \wedge x^2<x^2+3ax+2a^2)] \Leftrightarrow (a<0 \wedge$
$\wedge\, x>-2a) \vee (a>0 \wedge x>-\frac{2}{3}a)$.

Демак, берилган тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлар тўплами:

а) агар $a<0$ бўлса, у ҳолда $A=(-2a;\ +\infty)$;

б) агар $a=0$ бўлса, у ҳолда $A=\varnothing$;

в) агар $a>0$ бўлса, у ҳолда $A=(-\frac{2}{3}a;\ +\infty)$.

II. Рационал системалар дизюнъкциясига келтириб ечиладиган иррационал тенгсизлик. $\sqrt[2k]{f(x,a,b,\ldots,c)} > \varphi(x,a,\ldots,c)$ тенгсизлик

$$\begin{cases} f(x,a,b,\ldots,c)\geqslant 0, \\ \varphi(x,a,b,\ldots,c)<0 \end{cases} \vee$$
$$\vee \begin{cases} \varphi(x,a,b,\ldots,c)\geqslant 0, \\ f(x,a,b,\ldots,c) > [\varphi(x,a,\ldots,c)]^{2k},\ k\in N \end{cases}$$

рационал тенгсизликлар системаларининг дизюнъкциясига эквивалентдир.

Мисол. $\sqrt{x^2-3x+2}-x-3>0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $\sqrt{x^2-3x+2}-x-3>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2} >$
$> x+3 \Leftrightarrow (x^2-3x+2\geqslant 0 \wedge x+3<0) \vee (x^2-3x+2>$
$>(x+3)^2 \wedge x+3\geqslant 0) \Leftrightarrow ((x-1)(x-2)>0 \wedge x<-3) \vee$
$\vee\, (9x+7<0 \wedge x\geqslant -3) \Leftrightarrow [(x<-3) \vee (x\geqslant -3 \wedge x<$
$<-\frac{7}{9})] \Leftrightarrow (x<-3 \vee -3\leqslant x<-\frac{7}{9}$.

Демак, берилган тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлар тўплами: $A=\{x \mid x<-\frac{7}{9}\}$.

III. Рационал аралаш системага келтириб ечиладиган иррационал тенгсизлик.

$$f(x, \sqrt[n]{\varphi(x)}) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) > 0, \\ y^n = \varphi(x), \\ n \in N \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) > 0, \\ y^{2k} = \varphi(x),\ \varphi(x) \geqslant 0,\ k \in N \end{cases} \vee \begin{cases} f(x, y) > 0, \\ y^{2k+1} = \varphi(x),\ k \in N \end{cases}$$

аралаш системага эквивалентдир.

Мисол. $x - \sqrt{2-x} \geqslant 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $x - \sqrt{2-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \geqslant 0, \\ y^2 = 2 - x;\ 2 - x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - y^2 - y \geqslant 0, \\ y = \sqrt{2-x}, \\ x \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqslant y \leqslant 1, \\ y = \sqrt{2-x}, \\ x \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqslant \sqrt{2-x} \leqslant 1, \\ x \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \leqslant 1 \\ x \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leqslant x \leqslant 2.$$

Демак, тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлар тўплами: $A = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$.

IV. Мулоҳаза юритиш ёрдамида ечиладиган иррационал тенгсизликлар.

Мисол. $\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x} > \sqrt{x-1} - \sqrt{6-x}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Берилган тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси

$$\begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ 3 - x \geqslant 0, \\ x - 1 \geqslant 0, \\ 6 - x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 3, \\ x \geqslant 1, \\ x \leqslant 6 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant 3.$$

Аргументнинг $2 \leqslant x \leqslant 3$ оралиғида $\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x} > 0$ бўлиб, $2 \leqslant x \leqslant 3 \Rightarrow 1 < x - | \leqslant 2$; $3 \leqslant 6 - x \leqslant 4$ эканини кўриш мумкин. Бундан $\sqrt{x-1} - \sqrt{6-x} < 0$ бўлиб, x ўзгарувчининг $2 \leqslant x \leqslant 3$ оралиғида тенгсизлик ўринли эканини кўриш мумкин. Демак, тенгсизликнинг ечимлар тўплами $A = \{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$ бўлади.

Маълумки, иррационал тенглама ва тенгсизликларни ечишнинг геометрик усули ҳам кенг тарқалган бўлиб, у ўқувчиларга мактаб математикасидан маълумдир.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

Тенгламаларни ечинг:

1. $x-\sqrt{x-1}=7.$
2. $x^2+\sqrt{x^2+20}=22.$
3. $\frac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\frac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2.$
4. $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}}=2.$
5. $\sqrt{\frac{x}{x+1}}+2\sqrt{\frac{x+1}{x}}=3.$
6. $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}}+\sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}}=2{,}5.$
7. $\sqrt[6]{1{,}5}\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}=0.$
8. $\sqrt{x-a}=x^2+a.$

Қуйидаги тенгламаларни даражага кўтариш усули билан ечинг:

9. $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}.$
10. $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2.$
11. $\sqrt{10-x^2}+\sqrt{x^2+3}=5.$
12. $\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20+x}{x}}=\sqrt{6}.$
13. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7.$
14. $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{15x+4}.$
15. $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}=\sqrt{7}+5.$
16. $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=x.$
17. $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}.$
18. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+7}.$
19. $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$ (a — параметр).
20. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}$ (a, b— параметрлар).
21. $\sqrt{x-\sqrt{x-a}}=a$ (a — параметр).
22. $\sqrt{a-\sqrt{x+a}}+x$ (a — параметр).
23. $\sqrt{3x+5}-\sqrt{x-2}=a$ (a — параметр).

Қуйидаги тенгламаларни рационал системага ёки модуль қатнашган тенгламага келтириш усули билан ечинг:

24. $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2}=\sqrt{(x+2)^2}$.

25. $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{x^2-2x+1}$.

26. $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1$.

27. $\sqrt{5+x+4\sqrt{x+1}}=2+\sqrt{x+1}$.

28. $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2$.

29. $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-7}=8$.

30. $\sqrt{10-x^2}+\sqrt{x^2+3}=5$.

31. $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4$.

32. $\sqrt{2-x}+\sqrt{9-x}=5$.

33. $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$.

34. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$.

Тенгсизликларни ечинг.

35. $\sqrt{(x-3)(2-x)}<3+2x$.

36. $3\sqrt{6+x-x^2}+2>4x$.

37. $\sqrt{2x^2+5x-6}>2-x$.

38. $(1+x)\sqrt{x^2+1}>x^2-1$.

39. $(x-2)\sqrt{x^2+1}>x^2+2$.

40. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}<1$.

41. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+8}>3$.

42. $\sqrt{9-x^2}+\sqrt{6x-x^2}>3$.

43. $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1$.

44. $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$.

45. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-5}\leqslant\sqrt{5-x}$.

46. $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}>-\sqrt{x-5}$.

47. $\sqrt{7x-13}-\sqrt{3x-19}>\sqrt{5x-27}$.

48. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

49. $\dfrac{(8-x)\sqrt{8-x}+(5+x)\sqrt{5+x}}{(8-x)\sqrt{5+x}-(5+x)\sqrt{8-x}}<\dfrac{7}{6}$.

50. $\sqrt[3]{-9x^2+6x}<3x$.

51. $\sqrt[3]{x^2-x} > -x\sqrt[3]{2}$.

Қуйидаги тенгсизликларни график усулда ечинг:

52. $\sqrt{x-1} \geqslant 2$.

53. $\sqrt{x+2} > x^2$.

54. $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1}$.

55. $\frac{1}{x} > \sqrt{x}$.

Қуйидаги параметрли тенгсизликларни ечинг:

56. $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-1} < a$.

57. $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a$.

58. $\sqrt{2x+m} > x$.

5-§. КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ТЕНГЛАМА ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Кўрсаткичли ва логарифмик ифодалар. Кўрсаткичли ва логарифмик ифодалар ҳамда улар устида бажариладиган амалларни ўрганиш математикада алоҳида аҳамиятга эгадир.

98-таъриф. $y = a^x$, $a > 0$ *функция кўрсаткичли функция дейилади.*

Маълумки, кўрсаткичли функциялар тўпламига $y = x^x$; $y = (x-1)^{2x}$ кўринишидаги функцияларни ҳам киритиш мумкин, лекин бу функциялар элементар функциялар эмас. Биз қуйида фақат элементар функциялар ҳақида фикр юритамиз.

Мисол. $f(x) = 2^x$; $f(x) = 10^x$; $f(x) = 3^{2x+1}$; $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ элементар кўрсаткичли функциялардир.

$f(x) = a^x$, $a > 1$ функция қуйидаги хоссаларга эга:

1^0. *Ўзгариш соҳаси* $E(f) = (0;\ +\infty)$.

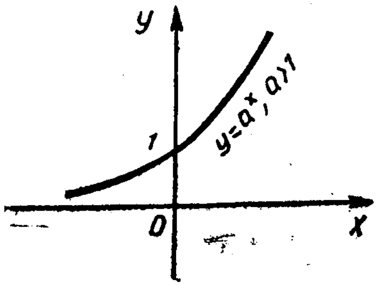
2^0. *Аниқланиш соҳаси* $D(f) = \boldsymbol{R}$ *ҳақиқий сонлар тўплами.*

3^0. *Функция ўсувчидир*: ҳақиқатан ҳам, $\forall x_1,\ x_2 \in \boldsymbol{R}$, $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ бўлади. Агар $a^{x_1} = a^{x_2}$ бўлса, *у ҳолда* $x_1 = x_2$ *бўлади.*

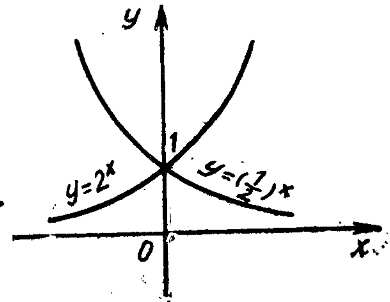
Демак, $a^{x_1} < a^{x_2} \wedge a > 1 \Rightarrow x_1 < x_2$ келиб чиқади.

4°. *Агар* $x \to +\infty$ *бўлса, у ҳолда* $a^x \to +\infty$ *бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, $\forall M \in \boldsymbol{R}$ учун $\exists p \in \boldsymbol{R} : x > p \Rightarrow a^x > M$



47- расм.



48- расм.

бўлади. Фараз қилайлик, $a = 1 + h$, $h > 0$ бўлсин, у ҳолда Бернулли тенгсизлигига асосан $(1 + h)^n > 1 + nh$ бўлади.

$n = p$ ни шундай танлаш мумкинки, $ph > M$ бажарилади. Бундан x нинг шундай катта қиймати $x > p$ мавжудки, $a^x > M$ бўлади. Бундан $x \to -\infty$ бўлса, у ҳолда $a^x \to 0$ бўлади.

5°. *$f(x) = a^x$, $a > 1$ функция **R** да узлуксиздир.*

6°. Функциянинг графиги 47- чизмада келтирилган.

Мисол. $f(x) = 2^x$ ва $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функцияларнинг графикларини ясанг.

Ечиш. Бу функцияларнинг графикларини ясаш учун қийматлар жадвалини тузамиз ва графиклар чизамиз (48-чизма).

x	-2	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

113-теорема. $a>0$ ва $a \neq 1$ бўлган *ҳар қандай a ва мусбат B сон учун биргина шундай ҳақиқий α сон мавжудки, a нинг α- даражаси B га* тенг бўлади.

Исботи. Аниқлик учун $a > 1$ бўлсин. $x \to +\infty \Rightarrow a^x \to +\infty$ ва $x \to -\infty \Rightarrow a^x \to 0$ ни эътиборга олиб, a нинг бутун даражаларини кўриб чиқайлик ... a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, ... Бу сонлар орасида шундай a^p, a^{p+1} сонлар мавжудки, $a^p \leqslant B < a^{p+1}$ бўлади. Энди $[p, p+1]$ ни тенг 10 та бўлакка бўлиб, $a^{p+\frac{q}{10}} \leqslant B < a^{p+\frac{q_1+1}{10}}$ шарт билан q_1 сонни танлаб оламиз. Сегментни тенг 10 бўлакка бўлишни чексиз давом эттирсак, $\underline{\alpha}_n < \alpha < \overline{\alpha}_n$ шартига бўйсунувчи $a^{\underline{\alpha}_n} \leqslant B < a^{\overline{\alpha}_n}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ками билан $a^{\underline{\alpha}_n}$ ва ортиғи билан $a^{\overline{\alpha}_n}$ аниқланган сонлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{\alpha}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{\alpha}_n = \alpha$ эканини эътиборга олинса, у ҳолда $a^\alpha \leqslant B < a^\alpha$ бўлиб, $a^\alpha = B$, $\alpha = p, q_1q_2q_3 \ldots$ ҳосил бўлади. Шу билан теорема исботланди.

Кўрсаткичли ифодалар қуйидаги хоссаларга эга:

1. *Агар* a^x, a^y, $x, y \in \boldsymbol{R}$, $a>0$ *бўлса,* $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ *бўлади.*
2. *Агар* a^x, a^y, $x, y \in \boldsymbol{R}$, $a>0$ *бўлса,* $a^x : a^y = a^{x-y}$ *бўлади.*
3. Агар a^x, $a>0$, $x \in \boldsymbol{R}$ *бўлса,* $\exists y \in \boldsymbol{R}$ *учун* $(a^x)^y = a^{xy}$ *бўлади.*
4. $\forall x \in \boldsymbol{R}$, a^x, b^x, $a>0$, $b>0$ *учун* $(ab)^x = a^x b^x$ *бўлади.*

99-таъриф. *b соннинг a асосга кўра логарифми деб, b сонни ҳосил қилиш учун a сонни кўтариш керак бўлган даража кўрсаткичига айтилади ва қуйидагича белгиланади:* $x = \log_a b$, бунда $a>0$, $b>0$, $a \neq 1$.

Логарифмик ифодалар қуйидаги хоссаларга эга:

1. 99-*таърифга кўра* $a^{\log_a b} = b$; $a>0$, $b>0$, a, b 1.
2. *Агар* $\log_a N = \log_a k$, $a, N, k > 0$ *бўлса, у ҳолда* $N = k$ *бўлади.*
3. *Агар* $x>0$, $y>0$; $a>0$, $a \neq 1$ *бўлса, у ҳолда* $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$ *бўлади.*

Исботи. Айтайлик, $x>0$, $y>0$ бўлсин, у ҳолда $x = a^{\log_a x}$, $y = a^{\log_a y}$ бўлади, бундан $xy = a^{\log_a x + \log_a y}$ бўлади. Логарифмнинг таърифига кўра $x \cdot y = a^{\log_a xy}$ бўлгани учун $x \cdot y = a^{\log_a (xy)} = a^{\log_a x + \log_a y}$ дан $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$ бўлади. Агар $x < 0$ ва $y < 0$ бўлса, $\log_a (x, y) = \log_a |x| + \log_a |y|$ бўлади.

4. *Агар* $x>0$, $y>0$, $a>0$, $a \neq 1$ *бўлса, у ҳолда* $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ *бўлади.*
5. *Агар* $x>0$, $y>0$, $y \neq 1$, $k, n \in \boldsymbol{R}$ *бўлса, у ҳолда* $\log_{y^k} x^n = \frac{n}{k} \log_k x = \log_{y^{1/n}} x^{1/k}$.

6. *Агар $a, b, c > 0$, $a, c \neq 1$ бўлса, у ҳолда* $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

7. *Агар $a, b > 0$, $a \neq 1$, $m, n, k \in \boldsymbol{R}$ бўлса, у ҳолда* $\log^k_{a^n} b^m = \left(\frac{m}{n}\right)^k \log^k_a b$.

8. *Агар $a, b > 0$, $a, b \neq 1$ бўлса, у ҳолда* $a^{\log_a b} = b^{\log_a b}$.

Бу хоссалар ёрдамида кўрсаткичли ва логарифмик ифодаларни айнан алмаштиришларга доир мисоллар келтирамиз.

1- мисол. $F = \dfrac{\log_a\sqrt{a^2-1} \cdot \log^2_{a-1}\sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}(a^2-1) \cdot \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[6]{a^2-1}}$ ифодани соддалаштиринг.

Ечиш. Берилган ифоданинг аниқланиш соҳаси: $A = \{a / a > 1\}$. $F = \dfrac{\log_a\sqrt{a^2-1} \cdot \log^2_{a-1}\sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}(a^2-1) \cdot \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[6]{a^2-1}} =$

$= \dfrac{\log_a\sqrt{a^2-1} \cdot \log^2_a\sqrt{a^2-1}}{\log_a\sqrt{a^2-1} \cdot \log_a\sqrt{a^2-1}} = \log_a \sqrt{a^2-1} = \frac{1}{2}\log_a(a^2-1)$.

Демак, $F = \frac{1}{2}\log_a(a^2-1)$.

2- мисол. Агар $M_1 = a^{k_1} \cdot b^{n_1}$, $N_1 = a^{p_1} \cdot b^{q_1}$ ва $\log_{N_1} M = \alpha$ берилган бўлса, $M_2 = a^{k_2} \cdot b^{n_2}$, $N_2 = a^{p_2} \cdot b^{q_2}$ сонларга кўра $\log_{N_2} M_2$ ни ҳисобланг.

Ечиш. $\log_{N_1} M_1 = \dfrac{\log_a M_1}{\log_a N_1} = \dfrac{k+n_1 \cdot \log_a b}{p_1 + q_1 \cdot \log_a b} = \alpha$ бўлгани учун $\log_a b = x$ десак, $\dfrac{k_1 + n_1 x}{p_1 + q_1 x} = \alpha$ бўлади, бундан: $x = \dfrac{k_1 - \alpha p_1}{n_1 - \alpha q_1} = l$. Бундан $\log_a b = l$ бўлгани учун $\log_{N_2} M_2 = \dfrac{k_2 + n_2 l}{p_2 + q_2 l} = \beta$ ҳосил бўлади.

3- мисол. $\log_{98} 56 = \alpha$ бўлса, $\log_7 14$ ни ҳисобланг.

Ечиш. $\log_{98} 56 = \dfrac{3 + \log_2 7}{1 + 2\log_2 7} = \alpha$; $\log_2 7 = x$; $x = \dfrac{\alpha - 3}{1 - 2\alpha}$;

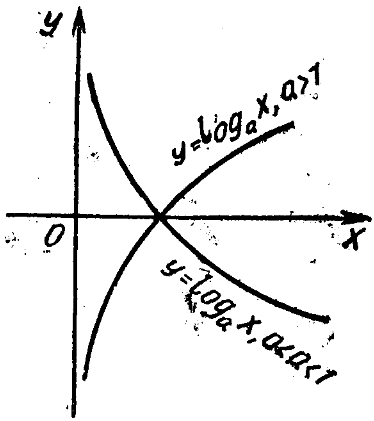
$\log_7 14 = \dfrac{1 + \log_2 7}{\log_2 7} = \dfrac{1 + x}{x} = -\dfrac{\alpha + 2}{\alpha - 3}$.

100- таъриф. *Ушбу*

$$f(x) = \log_a x, \ a > 0, \ a \neq 1$$

функция логарифмик функция дейилади.

$f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ функция қуйидаги хоссаларга эга:



49- расм.

1°. *Аниқланиш соҳаси* $D(f)=(0;\ +\infty)$ *бўлади.*

2°. *Ўзгариш соҳаси* $E(f)=\mathbf{R}$ *ҳақиқий сонлар тўплами.*

3°. $y=\log_a x$ — *монотон функция, агар* $a>1$ *бўлса, ўсувчи;* $0<a<1$ *бўлса, камаювчидир.*

4°. *Аргументнинг* $(0;\ +\infty)$ *оралиғида* $y=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$ *функция узлуксиздир.*

5°. Графиги 49- чизмада келтирилган.

Кўрсаткичли ва логарифмик тенгламаларнинг бир неча хусусий ҳолларини ва уларни ечиш усулларини келтирамиз.

I. $a^{f(x)}=1,\ a>0,\ a\neq 1$ кўринишдаги тенгламалар. Бу тенгламани ечишда $(a^{f(x)}=1,\ a>0,\ a\neq 1)\Leftrightarrow f(x)=0$ муносабатнинг ўринлилигидан фойдаланилади.

Мисол. $2^{x^2-5x+6}=1$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $2^{x^2-5x+6}=1\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=0,\\ x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=3.\end{array}\right.$$

Демак, ечимлар тўплами: $A=\{x/x=2,\ x=3\}$.

II. $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$ кўринишдаги тенгламалар. Бу тенгламаларни ечишда $(a^{f(x)}=a^{\varphi(x)},\ a>0,\ a\neq 1)\Leftrightarrow(f(x)-\varphi(x)=0)$ муносабатнинг ўринлилигидан фойдаланилади.

Мисол. $3^{x^2-\frac{5}{7}x}=\sqrt[7]{9}$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $3^{x^2-\frac{5}{7}x}=\sqrt[7]{9}\Leftrightarrow x^2-\frac{5}{7}x-\frac{2}{7}=0\Leftrightarrow 7x^2-$

$$-5x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7x+2=0,\\ x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{2}{7},\\ x=1.\end{array}\right.$$

$$A=\left\{x\,|\,x=-\frac{2}{7};\ x=1\right\}.$$

III. $a^{f(x)}=b,\ a>0,\ b>0,\ a\neq 1$ кўринишдаги тенгламалар. Бу тенглама берилган шартга кўра $f(x)=\log_a b$ тенгламага эквивалент бўлади.

IV. $A_0a^{nx+k_0}+A_1a^{nx+k_1}+\ldots+A_m\cdot a^{nx+km}=N$ кўринишдаги тенгламалар. $k_0<k_2<\ldots<km$ бўлганда, берилган тенглама $M\cdot a^{nx+k_0}=N$ кўринишидаги тенгламага эквивалент бўлади, бу ерда $M=A_0\cdot a^{k_0-k_0}+A_1\cdot a^{k_1-k_0}+\ldots+A_m\cdot a^{k_m-k_0}$.

Мисол. $5^{3x}-2\cdot5^{3x-1}-3\cdot5^{3x-2}=300$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $5^{3x}-2\cdot5^{3x-1}-3\cdot5^{3x-2}=300\Leftrightarrow5^{3x-2}(5^2-2\cdot5-3)=300\Leftrightarrow12\cdot5^{3x-2}=300\Leftrightarrow5^{3x-2}=5^2\Leftrightarrow3x-2=2\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}\Rightarrow A=\left\{x|x=\frac{4}{3}\right\}$.

V. $A_0\cdot a^{nf(x)}+A_1\cdot a^{(n-1)f(x)}+\ldots+A_n=0$ кўринишидаги тенгламалар. Бу тенгламани ечишда қуйидаги муносабатдан фойдаланилади:

$$A_0a^{nf(x)}+A_1a^{(n-1)f(x)}+\ldots+A_n=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A_0y^n+A_1y^{n-1}+\ldots+A_{n-1}y+A_n=0,\\ y=a^{f(x)},\ a>0,\ a\neq1.\end{cases}$$

Логарифмик тенгламалар ҳам берилишига қараб бир неча турга бўлинади:

I. Логарифмнинг $\log_a f(x)=k\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=a^k,\ a>0,\ a\neq1,\\ f(x)>0\end{cases}$

таърифи ва хоссаларидан фойдаланиб ечиладиган тенгламалар.

Мисол. $\log_{\sqrt{6}}(x^2-5x)=2$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\log_{\sqrt{6}}(x^2-5x)=2\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-5x=(\sqrt{6})^2,\\ x^2-5x>0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-5x-6=0,\\ x>5\end{cases}\vee\begin{cases}x^2-5x-6=0,\\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1,\\ x<0\end{cases}\vee\begin{cases}x=6,\\ x>5\end{cases}$$

$A=\{x|x=-1;\ x=6\}$.

II. $A_n\log_a^n f(x)+A_{n-1}\log_a^{n-1}f(x)+\ldots+A_1\log_a f(x)+A_0=0$ кўринишидаги тенгламалар. Бу тенглама

$$\begin{cases} A_n\, y^n + A_{n-1}\, y^{n-1} + \ldots + A_1 y + A_0 = 0, \\ y = \log_a f(x);\ a > 0,\ a \neq 1, \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

аралаш системага эквивалент бўлади.

3. Потенцирлаш усули билан ечиладиган тенгламалар.

Мисол. $\log_2(x-2) + \log_2(x-3) = 1$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\log_2(x-2) + \log_2(x-3) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2[(x-2)(x-3)] = 1, \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3) = 2, \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0, \\ x > 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 4 = 0, \\ x > 3 \end{cases}$$

$$A = \{x \mid x = 4\}.$$

Логарифмик тенгламаларни ечишнинг бошқа усуллари ҳам мавжуд бўлиб, улар айнан алмаштиришлар бажарилгандан кейин кўриб ўтилган усулларнинг бирортасига келтирилади.

Кўрсаткичли тенгламаларнинг турларидан яна бири

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = f(x),\ [f(x)]^{\varphi(x)} = [f(x)]^{g(x)}$$

кўринишидаги тенгламалардир. Бу кўринишдаги тенгламалар элементар кўрсаткичли тенгламалар эмас. Бу тенгламалар кўрсаткичли тенгламалар, кўрсаткичли функция ва логарифмларнинг хоссаларидан фойдаланиб ечилади.

Масалан, $[f(x)]^{\varphi(x)} = f(x)$ тенгламани ечишда унга эквивалент бўлган аралаш системалар тузилиб ечилади, яъни

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ \varphi(x) \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) = 1, \\ |\varphi(x)| \leqslant k, \\ k \in \mathbf{R} \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) = 1 \end{cases} \vee$$

$$\vee\ [f(x) = -1 \wedge \varphi(x) \text{ кўпҳад } f(x) = -1$$

нинг илдизлари тоқ сондан иборат.

Бу тенгламаларни логарифмлаш усули билан ҳам ечиш мумкин, яъни

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = f(x) \Leftrightarrow \lg|f(x)|^{\varphi(x)} = \lg|f(x)| \Leftrightarrow (\varphi(x) - 1)\lg|f(x)| =$$

$$= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) = 1, \\ \lg|f(x)| = 0. \end{cases}$$

Мисол. $x^x = x$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $x^x = x \Rightarrow x\lg|x| = \lg|x| \Leftrightarrow \begin{cases}\lg|x| = 0,\\ x = 1\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1, \\ x = 1. \end{cases}$ $A = \{x|x = 1;\ x = -1\}$.

$[f(x)]^{\varphi(x)} = [f(x)]^{g(x)}$ кўринишдаги тенглама ҳам худди шунга ўхшаш ечилади.

Кўрсаткичли ва логарифмик тенгсизликларни (ёки системани) ечишда тенгсизликларни ечишнинг умумий қоидаларига амал қилиш билан биргаликда кўрсаткичли ва логарифмик функцияларнинг монотонлик хоссаларига ҳам аҳамият берилади.

Кўрсаткичли ва логарифмик тенгсизликлар асосан қуйидаги кўринишларда бўлиши мумкин:

1) $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \varphi(x), \\ a > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < \varphi(x), \\ 0 < a < 1; \end{cases}$

2) $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \log_a b, \\ a > 1;\ b > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < \log_a b, \\ 0 < a < 1,\ b > 0; \end{cases}$

3) $A_k \cdot a^{kf(x)} + A_{k-1} a^{(k-1)f(x)} + \ldots + A_0 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A_k y^k + A_{k-1} y^{k-1} + \ldots + A_0 > 0, \\ x = a^{f(x)},\ a > 0,\ a \neq 1; \end{cases}$

4) $A_1 a^{nx+k_0} + A_1 a^{nx+k_1} + \ldots + A_m a^{nx+k_m} > N \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p \cdot a^{nx+k_i} > N;$

5) $[f(x)]^{\varphi(x)} > 1$ ёки $[f(x)]^{\varphi(x)} < 1;$

6) $\log_a f(x) > k \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a^k, \\ a > 1, \\ f(x) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < a^k, \\ 0 \leqslant a < 1, \\ f(x) > 0; \end{cases}$

7) $\log_a f_1(x) + \log_a f_2(x) + \ldots + \log_a f_n(x) > k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_a \prod\limits_{i=1}^{n} f_i(x) > k, \\ f_i(x) > 0, \\ a > 0,\ a \neq 1. \end{cases}$

1-мисол. $2^{x^2+6} > 2^{5x}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $2^{x^2+6} > 2^{5x} \Leftrightarrow x^2+6 > 5x \Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) > 0 \Leftrightarrow [(x-2)>0 \wedge (x-3)>0) \vee [(x-2) <$
$< 0 \wedge x-3 < 0)] \Leftrightarrow (x > 3 \vee x < 2);$

$$A = \{x|x < 2 \vee x > 3\}.$$

2- мисол. $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$ тенгсизликни ечинг.
Ечиш.

$(x-2)^{x^2-6x+8} > 1 \Leftrightarrow [(x-2 > 1 \wedge x^2-6x+8>0) \vee (0< x-$
$-2 < 1 \wedge x^2-6x+8 < 0)] \Leftrightarrow [(x > 3 \wedge x > 4) \vee (x > 3 \wedge x <$
$< 2) \vee (2 < x < 3 \wedge 2 < x < 4)] \Leftrightarrow (x > 4 \vee 2 < x < 3),$

$$A = \{x/2 < x < 3 \vee x > 4\}.$$

3- мисол. $\log_{x-1}(x^2-1) > 0$ тенгсизликни ечинг.
Ечиш.

$\log_{x-1}(x^2-1) > 0 \Leftrightarrow [(x-1) > 1 \wedge x^2-1 > 1) \vee (0 < x-1<$
$< 1 \wedge 0 < x^2-1 < 1] \Leftrightarrow [(x > 2 \wedge x^2 > 2) \vee (1 < x < 2 \wedge 1 <$
$< x^2 < 2)] \Leftrightarrow (1<x<\sqrt{2} \vee 2 < x);$

$$A = \{x/1 < x < \sqrt{2} \vee 2 < x < +\infty\}.$$

4- мисол. $\log_{a^2}(x^2+2x) < 1$ тенгсизликни ечинг.
Ечиш.

$$\log_{a^2}(x^2+2x) < 1 \Leftrightarrow \log_{a^2}(x^2+2x) < \log_{a^2} a^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{[(0 < a^2 < 1 \wedge x^2+2x > 0 \wedge x^2+2x > a^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (0 < a^2 < 1 \wedge x > 0 \wedge x^2+2x-a^2 > 0) \vee (0< a^2 < 1 \wedge x <$$
$$< -2 \wedge x^2+2x-a^2 > 0)] \vee [(a^2 > 1 \wedge x^2+2x > 0 \wedge x^2+2x <$$
$$< a^2) \Rightarrow (a^2 > 1 \wedge x > 0 \wedge x^2+2x-a^2 < 0) \vee$$
$$\vee (a^2 > 1 \wedge x < -2 \wedge x^2+2x-a^2 < 0)]\} \Leftrightarrow \{[(0 < a^2 < 1 \wedge$$
$$\wedge x > \sqrt{1+a^2}-1) \vee (0 < a^2 < 1 \wedge x < -(\sqrt{1+a^2}+$$
$$+1))] \vee [(a^2 > 1 \wedge -1-\sqrt{1+a^2} < x < -2) \vee (a^2 > 1 \wedge 0 <$$
$$< x < \sqrt{1+a^2}-1)]\}.$$

Демак, $0 < |a| < 1$ бўлганда тенгсизликнинг ечими

$$A = \{x| -\infty < x < -(1+\sqrt{1+a^2})\} \vee \{x|\sqrt{1+a^2}-1<x < +\infty\}$$

бўлади; $|a|>1$ бўлганда тенгсизликнинг ечими

$$A=\{x|-(1+\sqrt{1+a^2})<x<-2\}\cup\{x|0<x<$$
$$<\sqrt{1+a^2}-1\}$$

бўлади; $a=0$, $a=1$ бўлганда тенгсизлик маъносини йўқотади.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

Ифодаларни соддалаштиринг:

1. $F=\left(25^{\frac{1}{\log_a 5}}+45^{\log_8 7}\right)^{\frac{1}{2}}.$

2. $F=\sqrt[\log_b a]{a^2}-2\sqrt[\log_b a]{a}\sqrt[-\log_{ab}]{b}+\sqrt[\frac{1}{2}\log_a b]{b}.$

3. $m^2=a^2-b^2$ деб, $\log_{a+b}m+\log_{a-b}m-$
$-2\log_{a+b}m\log_{a-b}m.$

Ифодаларни соддалаштиринг:

4. $(\log_a b+\log_b a+1)(\log_a b-\log_{ab} b)\log_b a-1.$

5. $\left(\sqrt[\lg a]{b^{\log_{100} a}}\ \sqrt[\lg b]{a^{\log_{100} b}}\right)\cdot 2\log_{a-b}(a+b).$

6. $[(\log_b^4 a+\log_a^4 b+2)]^{\frac{1}{2}}-\log_b a-\log_a b.$

7. $\log_2 2x^2+\log_2 x\cdot x^{\log_x(\log^2 x+1)}+$
$+\frac{1}{2}\log_4^2 x^4+2^{3\log_{\frac{1}{2}}\log_2 x}.$

8. $\dfrac{\log_a b-\log_{b-3\sqrt{a}}\sqrt{b}}{\log_{\frac{a}{b^x}}b-\log_{\frac{a}{b^x}}b}:\log_{a^3}b^{-12}.$

9. $[6(\log_b a\cdot\log_{a^2}b+1)+\log_a b^{-6}+\log_n^2 b]^{\frac{1}{2}}-$
$-\log_a b,\ a>1.$

10. $\sqrt{\log_n p+\log_p n+2}\ (\log_n p-\log_{np}p)\cdot\sqrt{\log_n p}.$

11. $\left(\dfrac{\log_a^2 b+1}{2\log_a b}-1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{\log_a^2 b+1}{2\log_a b}+1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2}\log_a^{\frac{1}{2}} b,\ a>1.$

Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

12. $\sqrt[10]{2^{x^2-14,5x}} = \frac{1}{8}$.

13. $\frac{12^{x^2+4}}{142^{4x}} = \frac{1}{1728}$.

14. $3\cdot 16^{x^2-16x-15\frac{3}{4}} = 48+24+12+\ldots$.

15. $\left[\sqrt[3]{\left(5+3\frac{1}{3}+2\frac{2}{3}+\ldots\right)225}\right]^{x^3} = 15^{125}$.

16. $\sqrt[x^2-1]{32}\cdot\sqrt[x-1]{1} - \sqrt[x+1]{8} = 0$.

17. $\sqrt[x-65]{32^{2x-60}} - \sqrt[x-66]{4^{3x-40}} = 0$.

18. $5\cdot\sqrt[x+2]{3125^{x+1}} = \sqrt[x+3]{15625^{x+2}}$.

19. $\sqrt[0,(2)-x]{m^{0,(3)+x}} = \sqrt[0,(2)+x]{m^{0,(3)-x}}\,\sqrt[0,(2)^2-x^2]{m^2}$.

20. $2^{\sqrt{x+1}}\sqrt{2^{\sqrt{6}}} = 4^{\sqrt{x+1}}$.

21. $\sqrt[x]{\sqrt{2^{3x+1}}} - \sqrt[3x-7]{8^{x-3}} = 0$.

22. $27^x - 8\cdot[0,(3)]^{3x} - 6\cdot 3^x + 12\cdot 3^{-x} = \frac{343}{27}$.

23. $2^{2x}\cdot 9^x - 2\cdot 6^{3x-1} + 4^{2x-1}\cdot 3^{4x-2} = 0$.

24. $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$.

25. $3^{x-1} - \frac{15}{3^{x-1}} + 3^{x-2} - \frac{23}{3^{x-2}} = 0$.

26. $\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}} = 5$.

27. $\log_a x + \log_{a^2} x + \log_{a^3} x = 11$.

28. $6 - \log_7 x\left[1 + 4\cdot 9^{4-2\log_{\sqrt{3}}{}^{-3}}\right] = \log_x 7$.

29. $\log_{12}(4^{3x} + 3x - 9) = 3x - x\log_{12} 27$.

30. $x^2\log_x 27\cdot\log_9 x = x + 4$.

31. $\sqrt{\log_5^2 x + \log_x^2 5 + 2} = 2,5$.

32. $\log_x m \log_{\sqrt{m}} \frac{m}{\sqrt{2m-x}} = 1$.

33. $\log_2 3 + 2\log_4 x = {}^{\log_3}\sqrt[x]{x \log_9 16}.$

34. $\sqrt{3\log_2^2 x - 1 - 9\log_x^2 2} = 5.$

35. $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \ldots + \log_{\sqrt[10]{3}} x = 36.$

Қуйидаги тенгсизликларни ечинг:

36. $\left(\frac{1}{2}\right)^{(x^6-2x^3+1)^{0,5}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}.$

37. $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x} \cdot \left.\frac{147}{20}\right)^x < \left(\frac{81}{625}\right)^x.$

38. $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{7}\right)^x} > \sqrt[9]{\frac{1}{343}}.$

39. $3^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}+3} > 84.$

40. $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} < 315.$

41. $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} > 29.$

42. $\lg^2 x - 2\lg x - 8 \leqslant 0.$

43. $\frac{1}{12}\log_{10}^2 x > \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\log_{10} x.$

44. $\log_{x-1}(x+1) > 2.$

45. $\log_2(9^{x-1}+7) - 1 < \log_2(3^{x-1}+1).$

46. $\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 > \frac{1}{\log_2 x - 6}.$

47. $\log_{3x}\frac{3}{x} + \log_3^2 x < 1.$

48. $\log_2 \cdot \log_3 \frac{x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-1}.$

49. $\log_{\frac{1}{3}} \log_5(\sqrt{x^2+1} + x) < \log_3 \log_{\frac{1}{5}}(\sqrt{x^2+1} - x).$

50. $x^{2-2\log_2 x - \log_2^2 x} < \frac{1}{x}.$

51. $\log_{\frac{1}{2}} \cdot \log_8 \frac{x^2-1}{x-2} < 0.$

6- §. ТЕНГЛАМА ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР СИСТЕМАЛАРИ

101-таъриф. *Тенгламалар системаси деб*

$$\begin{cases} f_1(x, y, \ldots, z, a, b \ldots c) = 0, \\ f_2(x, y, \ldots z, a, b, \ldots, c) = 0, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ f_k(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_i(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0, \\ i = \overline{1, k} \end{cases}$$

кўринишдаги системага айтилади, бу ерда $x, y, \ldots z$ *лар ўзгарувчилар ёки номаълум миқдорлар,* $a, b, \ldots, c$ *лар параметрлар* деб аталади.

Системани ечиш деб номаълум миқдорларнинг шу системани қаноатлантирадиган қийматлар тўпламини топишга айтилади.

Берилган система ўзининг аниқланиш соҳасида ечимга эга бўлса, бу система *биргаликда бўлган,* ечимга эга бўлмаса, *биргаликда бўлмаган система* дейилади.

Агар система чекли сондаги ечимга эга бўлса, *аниқ* система, чексиз кўп ечимга эга бўлса, *аниқмас система* дейилади.

102-таъриф. *Агар*

$$f_i(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0 \wedge i = \overline{1, k}$$

системанинг ҳар бир ечими

$$\varphi_i(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0 \wedge i = \overline{1, k}$$

системанинг ечими, ва аксинча, бўлса, у ҳолда

$$\begin{cases} f_i(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0, \\ i = \overline{1, k} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_i(x, y, \ldots z, a, b, \ldots, c) = 0 \\ i = \overline{1, k} \end{cases}$$

дейилади.

Тенгламалар системасининг эквивалентлигини аниқловчи қуйидаги теоремаларни келтирамиз.

114-теорема. *Агар* $f_i(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0 \wedge i = \overline{1, k}$ *системанинг ихтиёрий тенгламасида бир ўзгарувчини бошқа ўзгарувчилар орқали ифодалаб, қолган тенгламаларга қўйилса, ҳосил бўлган система аввалги системага эквивалент бўлади, яъни*

$$\begin{cases} f_i(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0, \\ i = \overline{1,k} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_i(\varphi(y, \ldots, z, a, b, \ldots, c), y, \ldots z, a, \ldots, c) = 0, \\ x = \varphi(y, \ldots, z, a, \ldots, c), \\ i = \overline{1,k} \end{cases}$$

бўлади.

115- теорема. *Агар* $\{f_i(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0$ дан $f_i(x, y. \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0 \wedge i = \overline{1,k} \wedge k < n \Leftrightarrow \varphi_j(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0 \wedge j = \overline{1,k}$

бўлса, у ҳолда

$$f_i(x, y, \ldots, z, a, b, c) = 0 \wedge i = \overline{1,n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_j(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0 \wedge j = \overline{1,k}, \\ f_i(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0 \wedge i = \overline{(k+1),n} \end{cases}$$

бўлади.

116- теорема. *Агар* $f_i(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0 \wedge i = \overline{1,k}$ *системанинг ихтиёрий тенгламасига унинг аниқланиш соҳасида аниқланган* $\varphi(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots c)$ *функцияни қўшсак ёки айирсак, ҳосил бўлган система* $f_i(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0 \wedge i = \overline{1,k}$ *системага эквивалент бўлади.*

Алгебра курсида тенгламалар системаси қуйидаги турларга бўлинади: 1) чизиқли тенгламалар системаси; 2) рационал тенгламалар системаси; 3) иррационал тенгламалар системаси; 4) кўрсаткичли тенгламалар системаси; 5) логарифмик тенгламалар системаси.

Биз қуйида ҳар бир тур тенгламалар системасини ечишни мисоллар орқали тушунтирамиз.

1. Ўрнига қўйиш усули.

1- мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0, \\ x + y = 4. \end{cases} \quad (1)$$

Ечиш. $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x(4-x) + (4-x)^2 + 2x - 2(4-x) - 3 = 0, \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 8x + 5 = 0, \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3}, \\ y = 4 - x \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1, \\ y = 4 - x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \left\{ \left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3} \right); \quad (1, 3) \right\}.$$

2- мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2. \end{cases} \qquad (2)$$

Ечиш. $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4, \\ y^2 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y^2 = 4, \\ x^2 = 1. \end{cases}$$

Демак, $x = \pm 2$; $y = \pm 1$; $y = \pm 2$; $x = \pm 1$.

II. Алгебраик қўшиш усули.

1- мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18, \\ x^2 - y^2 + x - y = 6. \end{cases} \qquad (3)$$

Ечиш. Бу системани ечиш учун алгебраик қўшиш усулидан фойдаланамиз, яъни $2x^2 + 2x = 24$ ёки $x^2 + x - 12 = 0$, бундан $x_1 = 3$, $x_2 = -4$ ҳосил бўлади, $x_1 = 3$ ни биринчи $x^2 + y^2 + x + y = 18$ тенгламадаги x ўзгарувчининг ўрнига қўйсак, $y^2 + y - 6 = 0$ тенглама ҳосил бўлади, бундан: $y_1 = 2$, $y_2 = -3$.

Демак, 1) $x = 3 \wedge y = 2$; 2) $x = 3 \wedge y = -3$; $x = -4$ учун шу жараённи такрорласак: 3) $x = -4 \wedge y = 2$; 4) $x = -4 \wedge y = -3$.

Демак, $A = \{(3; 2); (3; -3); (-4, 2); (-4, -3)\}$.

2- мисол. Системани ечинг: $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 5, \\ 2x^2 + xy - 10y^2 = 11. \end{cases}$ (4)

Ечиш.

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} 11x^2 - 11xy - 11y^2 = 55, \\ -10x^2 - 5xy + 50y^2 = -55. \end{cases}$$

Бу системадаги тенгламаларни ҳадлаб қўшсак, $x^2 - 16xy + 39y^2 = 0$ ҳосил бўлади. $y \neq 0$ деб, $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 16\left(\frac{x}{y}\right) + 39 = 0$ кўринишдаги тенгламага эга бўламиз. Бундан $x = 13y$ ва $x = 3y$ ҳосил бўлади. Сўнгра (4) нинг биринчи тенгламасига $x = 13y$ ни x ўзгарувчининг ўрнига қўйиб, ҳосил бўлган тенгламани ечсак:

$y_1 = \frac{1}{\sqrt{31}}$; $\quad y_2 = -\frac{1}{\sqrt{31}}$. Бундан:

$$\begin{cases} x = \dfrac{13}{\sqrt{31}}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{31}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{13}{\sqrt{31}}, \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{31}}. \end{cases}$$

Шу жараённи $x = 3y$ учун ҳам қўлласак,

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3, \\ y = -1 \end{cases}$$

ни топамиз. Натижада (4) ни қаноатлантирадиган жуфтликлар тўплами $\left\{\left(\dfrac{13}{\sqrt{31}}, \dfrac{1}{\sqrt{31}}\right); \left(-\dfrac{13}{\sqrt{31}}, -\dfrac{1}{\sqrt{31}}\right); (3, 1); (-3, -1)\right\}$ бўлади.

Изоҳ. Чизиқли тенгламалар системаси «Алгебра ва сонлар назарияси» курсида ўрганилганлигини назарда тутиб, унга тўхталиб ўтирмаймиз.

III. Тенгламаларнинг $\underbrace{f(f(\ldots f}_{k}(x)\ldots) = x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x) = x$ эквивалентлигидан фойдаланиб ечиладиган системалар

Мисол. Системани ечинг

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 + 2x = y, \\ y^3 + 2y^2 + 2y = z, \\ z^3 + 2z^2 + 2z = x. \end{cases} \tag{5}$$

Ечиш. Бунинг учун $f(t) = t^3 + 2t^2 + 2t$ функцияни қараймиз. $f'(t) = 3t^2 + 4t + 2$ ҳосила $t \in R$ да $f'(t) > 0$ бўлгани учун бу функция ўсувчидир. Шу билан бирга (5) $\Leftrightarrow y = f(x) \wedge x = f(z) \wedge z = f(y) \Leftrightarrow x = f(f(f(x)))$ эканлигидан ва тенгламаларнинг тенг кучлилиги ҳақидаги теоремага асосан (5) $\Leftrightarrow f(x) = x$ бўлади. Бундан $x^3 + 2x^2 + 2x = x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)^2 = 0$.

Демак, ечим $\{(0, 0, 0); (-1, -1, -1)\}$ бўлади.

IV. Симметрик тенгламалар системаси:

а) $\begin{cases} x^n + y^n = A, \\ x + y = B, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^n + y^n = A, \\ xy = B. \end{cases}$

1- мисол. Системани ечинг: $\begin{cases} x^3 + y^3 = A, \\ x + y = B. \end{cases}$ (6)

Ечиш. Бунинг учун $x+y=B$ нинг иккала томонини кубга оширамиз, натижада $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$ ҳосил бўлади. Бундан $B^3=A+3Bxy$ ёки $xy=\frac{B^3-A}{3B}=C$ ни ёза оламиз. Демак, $(6)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=B,\\ xy=C\end{cases}$ бўлади.

$x+y=B\wedge xy=C\Leftrightarrow t^2-Bt+C=0$ ва $D=B^2-4C\geqslant 0$ га асосан (t_1, t_2); (t_2, t_1) ечимларни топа оламиз.

2- мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases}\sqrt{a-x}-\sqrt{y-x}=\sqrt{y},\\ \sqrt{b-x}+\sqrt{y-x}=\sqrt{y}.\end{cases}\qquad(7)$$

Ечиш. Тенгламалар системасининг аниқланиш соҳасини топамиз:

$$(a-x\geqslant 0\ \wedge\ b-x\geqslant 0\wedge y-x\geqslant 0\wedge y\geqslant 0)\Rightarrow$$
$$\Leftrightarrow(a\geqslant b\geqslant x\wedge a\geqslant y\geqslant 0\wedge y\geqslant x).$$

(7) ни ҳадлаб қўшсак ва ҳадлаб айирсак, (7) га тенг кучли қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases}\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=2\sqrt{y},\\ \sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}=2\sqrt{y-x}\end{cases}.\qquad(8)$$

(8) нинг иккала томонини квадратга оширсак,

$$\begin{cases}a+b-2x+2\sqrt{(a-x)(b-x)}=4y,\\ a+b-2x-2\sqrt{(a-x)(b-x)}=4y-4x\end{cases}\qquad(9)$$

система ҳосил бўлади. Сўнгра (9) ни ҳадлаб қўшиб ва ҳадлаб айирсак, қуйидаги тенг кучли

$$\begin{cases}8y=2(a+b),\\ x=\sqrt{(a-x)(b-x)}\end{cases}\ (10)\text{ ёки }\begin{cases}y=\frac{a+b}{4},\\ x=\sqrt{(a-x)(b-x)}\end{cases}\ (11)$$

система ҳосил бўлади.

(11) системанинг иккинчи тенгламасидан $x\geqslant 0$ бўлиб, $(a+b)x=ab$ экани келиб чиқади. Маълумки, $x\geqslant 0$ ва $a\geqslant b\geqslant x$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ ва $a\geqslant b$ бўлишидан қуйидаги икки ҳол юз беради:

1) $a=b=0$ бўлса, $a\geqslant y\geqslant 0$ дан $x=y=0$ бўлади;

2) $a>0$, $b>0$ бўлса, у ҳолда $x=\frac{ab}{a+b}$, $y=\frac{a+b}{4}$ илдизлар ҳосил бўлади. $a<0$, $b<0$ бўлса, система ҳақиқий ечимга эга бўлмайди.

3- мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} 2^{x}\cdot 3^{y} = 24, \\ 2^{y}\cdot 3^{x} = 54. \end{cases} \tag{12}$$

Ечиш. Биринчи усул.

$$\begin{cases} 2^{x}\cdot 3^{y} = 2^3\cdot 3, \\ 2^{y}\cdot 3^{x} = 2\cdot 3^3 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳадлаб кўпайтирсак ва ҳадлаб бўлсак,

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бундан $x = 3$, $y = 1$ бўлади.

Иккинчи усул. Агар системадаги ҳар бир тенгламани логарифмласак, у ҳолда

$$\begin{array}{l|r|r} x\lg 2 + y\lg 3 = 3\lg 2 + \lg 3 & \lg 2 & \lg 3 \\ x\lg 3 + y\lg 2 = \lg 2 + 3\lg 3 & -\lg 3 & -\lg 2 \end{array}$$

а) $x(\lg^2 2 - \lg^2 3) = 3(\lg^2 2 - \lg^2 3) \Rightarrow x = 3$;

б) $y(\lg^2 3 - \lg^2 2) = \lg^2 3 - \lg^2 2 \Rightarrow y = 1$.

Демак, $x = 3$, $y = 1$.

Маълумки, тенгсизликлар системаси дейилганда бир неча ўзгарувчили тенгсизликлардан бир нечтасининг биргаликда қаралиши тушунилади. Масалан,

$$f(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) \gtreqless 0 \tag{13}$$

кўринишдаги тенгсизлик *бир неча ўзгарувчили тенгсизлик* деб қаралади.

103- таъриф. *Бир неча ўзгарувчили тенгсизликлар системаси деб*

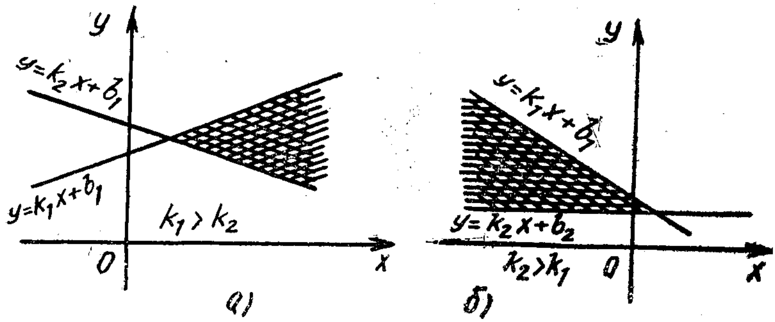
$$\begin{cases} f_1(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) \gtreqless 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) \gtreqless 0 \end{cases} \tag{14}$$

системага айтилади.

Хусусий ҳолда

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 > 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 > 0 \end{cases} \tag{15}$$

системани кўриб чиқайлик. Геометриядан маълумки, системада қатнашаётган ҳар бир тенгсизлик $A_ix + B_iy + C_i = 0$, $i = \overline{1, 2}$ тўғри чизиқ билан чегараланган текисликни аниқлайди. Энди (15) тенгсизликлар системасининг ечимлари тўпламини топайлик.



50- расм.

1. $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ тўғри чизиқлар параллел бўлмасин, у ҳолда (15) учун $y < k_1x + b_1 \wedge y > k_2x + b_2 \wedge k_1 \neq k_2$ ҳоли ўринли бўлсин дейлик, бундан

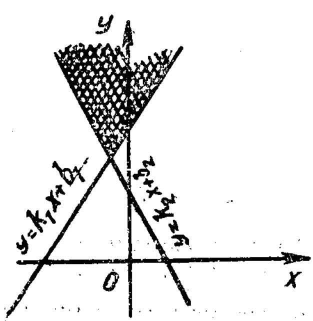
$$\begin{cases} k_1x + b_1 > k_2x + b_2, \\ k_1 \neq k_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 - b_2 > (k_2 - k_1)\, x, \\ k_1 \neq k_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{b_1 - b_2}{k_2 - k_1} \\ k_1 > k_2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < \dfrac{b_1 - b_2}{k_2 - k_1}, \\ k_2 > k_1 \end{cases}$$

бўлиб, умумий ечим,

$$\begin{cases} x > \dfrac{b_1 - b_2}{k_2 - k_1}, \ k_1 > k_2, \\ k_2x + b_2 < y < k_1x + b_1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < \dfrac{b_1 - b_2}{k_2 - k_1}, \ k_2 > k_1, \\ k_2x + b_2 < y < k_1x + b_1 \end{cases}$$

бўлади (50- *а*, *б* чизма).



51- расм.

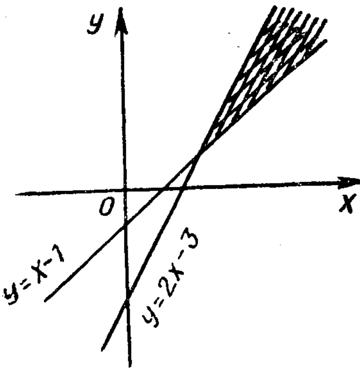
Агар (15) учун $B_1 > 0$, $B_2 > 0$ шарт бажарилса, у ҳолда (15) система $\begin{cases} y > k_1x + b_1 \\ y > k_2x + b_2 \end{cases}$ системага тенг кучли бўлишини кўриш мумкин, бундан умумий ечим (51- чизма)

$$y > \begin{cases} k_1x + b_1, \text{ агар } x > \dfrac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2} \\ k_2x + b_2, \text{ агар } x < \dfrac{b_2 - b_1}{k_1 - k_1}, \\ k_1 \neq k_2 \end{cases}$$

бўлса.

2. $A_1x + B_1y + C_1 = 0$
ва $A_2x + B_2y + C_2 = 0$,

тўғри чизиқлар параллел ва устма-уст тушганда (15) системадаги ҳар иккала тенгсизликни бир вақтда қаноатлантирадиган ечимнинг умумий қисми мавжуд бўлса, у ҳолда ўша соҳа системанинг ечимлар тўпламини аниқлайди, акс ҳолда (15) системанинг ечимлар тўплами бўш бўлади.



52- расм.

1- мисол. Ушбу системани ечинг ва графигини чизинг:

$$\begin{cases} y - x + 1 > 0, \\ 2x - y - 3 > 0. \end{cases}$$

Ечиш. $\begin{cases} y - x + 1 > 0, \\ 2x - y - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > x - 1, \\ y < 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 < y < 2x - 3, \\ x > 2 \end{cases}$ (52- чизма).

2- мисол. Ушбу системани ечинг ва графигини чизинг:

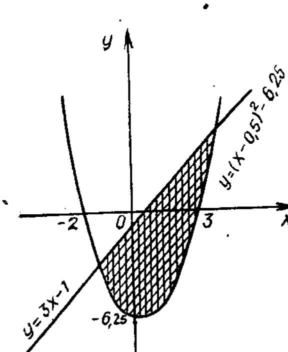
$$\begin{cases} y > x^2 - x - 6, \\ y < 3x - 1. \end{cases}$$

Ечиш.

$\begin{cases} y > x^2 - x - 6, \\ y < 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$y > x^2 - x - 6,$
$3x - 1,$ $\Leftrightarrow$
$-6 < 3x - 1$
$x - 6,$
$1,$ $\Leftrightarrow$
< 5
$-6,25,$

(53- чизма).



53- расм.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

Тенгламалар системасини ечинг:

1. $\begin{cases} y^2 - xy = -12, \\ x^2 - xy = 28. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + \dfrac{x}{y} = 9, \\ \dfrac{(x+y)\,x}{y} = 20. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2y^3 + x^3y^2 = 12, \\ x^2y^3 - x^3y^2 = 4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 82, \\ xy = 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} u^2 + uv = 15, \\ v^2 + uv = 10. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ cx + ay + bz = 0, \\ (x+b)^2 + (y+c)^2 + (z+a)^2 = a^2 + b^2 + c^2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \dfrac{2y}{x} = 1, \\ x^2 + y^2 + \dfrac{4x}{y} = 22. \end{cases}$

9. $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 3a^3, \\ (x+y)(x^2+y^2) = 15a^2; \end{cases}$ R да ечинг.

10. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ x^2y + xy^2 = -6; \end{cases}$ R да ечинг.

11. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 91, \\ x + \sqrt{xy} + y = 13. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \sqrt[4]{u+v} - \sqrt[4]{u-v} = 2, \\ \sqrt{u+v} - \sqrt{u-v} = 8. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt[6]{(x+y)^3\,(x-y)^2} = 8; \end{cases}$ $\sqrt{x+y} = u$; $\sqrt[3]{x-y} = v$ деб белгиланг.

14. $\begin{cases} \sqrt{2x - y + 11} - \sqrt{3x + y - 9} = 3, \\ \sqrt[4]{2x - y + 11} + \sqrt[4]{3x + y - 9} = 3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y}{x}} - 2\sqrt{\dfrac{x}{y}} = 1, \\ \sqrt{5x + y} + \sqrt{5x - y} = 4. \end{cases}$

16. $\begin{cases}\sqrt{(x+y)^2}=3,\\ \sqrt{(x-y)^2}=1.\end{cases}$

17. $\begin{cases}u^2+v^2=uv+13,\\ u+v=\sqrt{uv}+3.\end{cases}$

18. $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{4}{3},\\ xy=9.\end{cases}$

19. $\begin{cases}3(2-\sqrt{x-y})^{-1}+10(2+\sqrt{x+y})^{-1}=5,\\ 4(2-\sqrt{x-y})^{-1}-5(2+\sqrt{x+y})^{-1}=3.\end{cases}$

20. $\begin{cases}2(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{xy},\\ x+y=5.\end{cases}$

21. $\begin{cases}x-y=8a^2,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4a.\end{cases}$

22. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=10,\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=4.\end{cases}$

23. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{3}}=14,\\ \sqrt{\dfrac{x+y}{8}}-\sqrt{\dfrac{x-y}{12}}=3.\end{cases}$

24. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3,\\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3.\end{cases}$

25. $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{\dfrac{xy}{4}},\\ x+y=5.\end{cases}$

Қуйидаги тенгламалар системасини ечинг:

26. $\begin{cases}x^{2y^2-1}=5,\\ x^{y^2+2}=125.\end{cases}$

27. $\begin{cases}8(\sqrt{2})^{x-y}=0{,}5^{y-3},\\ \log_3(x-2y)+\log_3(3x+2y)=3.\end{cases}$

28. $\begin{cases}2^{\frac{x-y}{2}}+2^{\frac{y-x}{2}}=2{,}5,\\ \lg(2x-y)+1=\lg(y+2x)-\lg 6.\end{cases}$

29. $\begin{cases}2^{\frac{x+y}{3}}+2^{\frac{x+y}{6}}=6,\\ x^2+5y^2=6xy.\end{cases}$

30. $\begin{cases}2^x\cdot 3^y=61,\\ 3^x\cdot 4^y=12.\end{cases}$

31. $\begin{cases}(x+y)\cdot 2^{y-2x}=6{,}25,\\ \sqrt[2x-3]{x+y}=5.\end{cases}$

Системаларни аналитик ва график усулларда ечинг:

32. $\begin{cases} 2x - y \leqslant 1, \\ 4x + y \geqslant 1, \\ 4x - y \geqslant 1, \\ y \leqslant 3. \end{cases}$ 33. $\begin{cases} x + y > 0, \\ x - y > 0, \\ x - y \geqslant x + y. \end{cases}$

34. $\begin{cases} y > x^2 - 1, \\ y < 1 - x^2. \end{cases}$ 35. $\begin{cases} 0 < x^2 + y^2 < 1, \\ x + y > 0, \\ x + y > x^2 + y^2. \end{cases}$

X боб. СОНЛИ КЕТМА-КЕТЛИКЛАР

1- §. СОНЛИ КЕТМА- КЕТЛИКЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

$a, b, c, \ldots$ элементлардан ташкил топган A (чекли ёки чексиз) тўплам ва $1, 2, 3, \ldots n, \ldots$ натурал сонлар берилган бўлсин. Агар натурал сонлар қаторининг ҳар бир сонига A тўпламнинг бирор элементи мос қўйилган бўлса, у ҳолда шу тўплам элементларидан тузилган *кетма-кетлик* берилган дейилади.

Бу мослик ўз навбатида функция бўлиб, унинг аниқланиш соҳаси натурал сонлар, ўзгариш соҳаси A тўплам элементларидан иборат бўлади.

104- таъриф. *Аниқланиш соҳаси натурал сонлар тўпламидан ёки биринчи n та натурал сонлар тўпламидан иборат бўлган функция кетма-кетлик дейилади. Агар кетма-кетлик ҳадлари сонлардан иборат бўлса, сонли кетма-кетлик* дейилади.

Одатда, кетма- кетлик — бу натурал аргументли функциялардир деб қаралади. Бу функциянинг қиймати *кетма-кетликнинг ҳади* дейилади, яъни: $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2, \ldots$ $f(n) = u_n, \ldots$, бу ерда u_1 — кетма- кетликнинг биринчи ҳади, u_2 — иккинчи ҳади, u_3 — учинчи ҳади, u_n эса n ҳади дейилади ва ҳоказо.

Шундай қилиб, $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, яъни $\{u_n\}$ кетма- кетлик ҳосил бўлади.

Мисол. $f(1) = \frac{1}{2}$; $f(2) = \frac{1}{3}$; $f(3) = \frac{1}{4}, \ldots,$ $f(100) = \frac{1}{101}, \ldots, f(n) = \frac{1}{n+1}, \ldots$ кетма- кетликни $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n+1}, \ldots$ кўринишда тасвирлаш қулайдир.

Сонли кетма-кетликлар ўсувчи, ўсмайдиган, камаювчи, камаймайдиган турларга ажралади. Агар берилган кетма-кетликнинг ҳадлари иккинчи ёки бирор ҳаддан бошлаб ортиб борса, у ҳолда бундай кетма-кетлик ўсувчи, агар иккинчи ёки бирор ҳаддан бошлаб камайса, камаювчи деб аталади.

Агар берилган $\{u_n\}$ кетма-кетликда элементлар сони чекли бўлса, *чекли кетма-кетлик*, элементлар сони чексиз бўлса, *чексиз кетма-кетлик* дейилади.

Мисоллар. 1) 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95 — чекли кетма-кетлик.

2) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots$ — чексиз кетма-кетликдир.

Сонли кетма-кетликлар кўп ҳолларда формула ёрдамида берилиши мумкин, чунончи:

1) $u_n = n^2$; 2) $u_n = \frac{P_n}{A_n^5}\cos nz$;

3) $u_n = \frac{(-1)^n \sin x}{(n+1)\,C_n^{n-1}}$; 4) $u_n = \frac{1}{n^2}$.

Сонли кетма-кетликларни формула ёрдамида берилиши ичида рекуррент формула асосида берилиши муҳим ўрин тутади.

105-таъриф. *Агар берилган формула кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб, олдинги ҳадлари орқали кейинги ҳадларини келтириб чиқарса, у ҳолда у рекуррент формула дейилади.*

Мисоллар. 1) $a_0 = a_1 = 1$; $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ рекуррент формула Фибоначчи сонли кетма-кетлиги 1; 1; 2; 3; 5; 8; ... ни ҳосил қилади.

2) $a_1 = 1$; $a_{n+1} = (n+1)\,a_n$ рекуррент формула 1; 2; 6; ... сонли кетма-кетликни ҳосил қилади.

3) $a_1 = 0$; $a_2 = 1$; $(n+2)(n+1)\,a_{n+2} - n^2 a_n = 0$ рекуррент формуладир.

Демак, рекуррент формулани умумий кўринишда $u_n = f(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ каби ифодалаш ҳам мумкин.

Умуман, математикада сонли кетма-кетликларни формула ёрдамида берилиши бу кетма-кетликларнинг характерини атрофлича ўрганиш учун шароит яратади.

2-§. АРИФМЕТИК ПРОГРЕССИЯ

Қуйидаги сонли кетма-кетликлар берилган бўлсин:

1) 1; 2; 15; 25; 35; 18; 47; 84; 95; 108; . . .

2) 1; 2; 3; 4; . . . , n; . .

3) 2; 5; 3,4; 8,5; 8,54; 15,6; . . .

4) 2; 7; 12; 17; 22; . . .

Бу сонли кетма-кетликларни таҳлил қилсак, у ҳолда 2) ва 4) кетма-кетликларнинг n-ҳадини мос равишда биринчи ҳади ва бирор ўзгармас сон орқали ифодалаш мумкинлигини кўрамиз, чунончи: $a_n = 1 + (n-1)d$ ёки $a_n = 2 + (n-1)d$.

Бу боғланишлардан бевосита $a_{n+1} = a_n + d$ муносабатни ёзиш мумкин.

106-таъриф. *$u_{n+1} = u_n + d$ рекуррент формула билан берилган (u_n) кетма-кетлик арифметик прогрессия дейилади, бу ерда d — прогрессия айирмаси дейилади.*

Мисол. $\div 3; 5; 7; 9; \ldots (1)$ ($\div$—арифметик прогрессия белгиси) кетма-кетликда $u_1 = 3$; $u_2 = 5 = 3 + 2 = u_1 + 2$; $u_2 = u_1 + 2$; $u_3 = 7 = u_2 + 2$; . . . ; $u_n = u_{n-1} + 2$; . . . Демак, $u_{n+1} = u_{n+2} = u_n + d$; $u_{n+1} = u_n + d$ $(d = 2)$ кўринишида ёзиш мумкин, бундан (1) нинг арифметик прогрессия эканлиги кўриниб турибди.

117-теорема. *Арифметик прогрессиянинг умумий ҳади $u_n = u_1 + (n-1)d$ бўлади.*

Исботи. Индукция аксиомасига кўра: $n = 1$ да $u_n = u_1 = u_1 + (1-1)d = u_1$ жумла ўринли, энди n учун ўринли деб $n + 1$ учун ўринли эканини кўрсатамиз, яъни $u_{n+1} = u_n + d = u_1 + (n-1)d + d = u_1 + (n - 1 + 1)d = u_1 + nd$; $u_{n+1} = u_1 + nd$ бўлиб, формула $(n + 1)$ учун ҳам ўринли экани келиб чиқади.

Демак, $u_n = u_1 + (n-1)d$ формула арифметик прогрессиянинг исталган ҳадини топишга имкон берадиган умумий ҳади формуласи экан.

118-теорема. *Арифметик прогрессияда $\forall p, q\ (p + k), (q - k) \in N$: $u_p + u_q = u_{p+k} + u_{q-k}$.*

Исботи. 117-теоремага асосан $u_{p+k} = u_0 + (p + k)d$; $u_{q-k} = u_0 + (q-k)d$ ларни ёза оламиз бундан $u_{q+k} + u_{q-k} = u_0 + (p + k)d + u_0 + (q-k)d = u_0 + pd + u_0 + qd = u_p + u_q$ бўлади.

Демак, $u_p + u_q = u_{p+k} + u_{q-k}$ ўринли экан.

119-теорема. *Берилган*

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \qquad (1)$$

арифметик прогрессия учун $2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$ *ўринлидир.*

Исботи. 106-таърифга асосан $u_{n+1} = u_n + d$ бўлгани учун $u_{n+1} - u_n = d$ эканидан $u_n - u_{n-1} = d$; $u_{n-1} - u_{n-2} = d, \ldots u_2 - u_1 = d$ ларни ёзиш мумкин. Бундан $d = d$ эканидан $u_{n+1} - u_n = d = u_n - u_{n-1}$ бўлиб, $u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$ бўлади. Бундан $2u_n = u_{n+1} + u_{n-1}$ экани келиб чиқади. Демак, *арифметик прогрессиянинг иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳади қўшни ҳадлар йиғиндисининг ўрта арифметик қийматига тенг экан.*

$\div u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ (1) арифметик прогрессия берилган бўлсин. Бу арифметик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha$ ни қараймиз.

120-теорема. (1) *арифметик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси*

$$s_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n$$

га тенг.

Исботи. Теореманинг шартига кўра

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \qquad (2)$$

берилган, бу йиғиндини қўшилувчиларнинг ўрнини мос равишда алмаштириб,

$$s_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots + u_2 + u_1 \qquad (3)$$

кўринишда ёза оламиз. Сўнгра (2) ва (3) ни ҳадлаб қўшсак, $2s_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + \ldots + (u_n + u_1)$ ҳосил бўлади, бу ерда $u_1 + u_n = u_2 + u_{n-1} = \ldots = u_n + u_1$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда $2s_n = (u_n + u_1) \cdot n = (u_1 + u_n) \cdot n$ бўлади. Бу ердан $s_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n$ экани келиб чиқади, яъни $s_n = \frac{u_1 + u_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2u_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$ ҳосил бўлади. Шу билан теорема исбот бўлди.

Мисол. $\div 1; 3{,}5; 6; 8{,}5; \ldots$ арифметик прогрессиянинг дастлабки 20 та ҳадининг йиғиндисини топинг.

Ечиш. Берилишига кўра $u_1 = 1$, $d = u_2 - u_1 = 2{,}5$. Бундан $u_{20} = u_1 + (20 - 1)d = 1 + 19\cdot 2{,}5 = 48{,}5$ га тенг экани келиб чиқади. Бундан $s_{20} = \frac{(1 + 48{,}5)}{2}\cdot 20 = 49{,}5\cdot 10 = 495$ бўлади. Демак, $s_{20} = 495$ экан.

3-§. ГЕОМЕТРИК ПРОГРЕССИЯ

Ушбу сонли кетма-кетликлар берилган бўлсин:

1) 1; 2; 5; 7; 16; 84; 145; . . .
2) 3; 5; 7; 9; 11; 13; . . .
3) 2; 4; 8; 16; 32; 64; . . .
4) 3; 4; 7; 11; 18; 29; 47; . . .

Бу кетма-кетликларнинг биринчисининг тузилишида ҳеч қандай қонуният пайқалмайди, иккинчиси арифметик прогрессия ташкил қилади, учинчисида эса иккинчи ҳаддан бошлаб ҳар бир ҳад 2 ўзгармас сонига кўпайтириш натижасида кейинги ҳадни ҳосил қилмоқда, тўртинчисида эса учинчи ҳаддан бошлаб ҳар бир кейинги ҳад олдинги икки ҳаднинг йиғиндисидан иборатлигини кўриш мумкин.

107-таъриф. Ушбу

$$u_n = u_{n-1}\cdot q,\ q \neq 0,\ u_0 \neq 0 \tag{4}$$

рекуррент формула билан берилган (u_n) *кетма-кетлик геометрик прогрессия дейилади, бу ерда* q — *прогрессия махражи дейилади.*

Мисол. $\div\!\div$ 1; 2; 4; 8; 16; 32; . . . ($\div\!\div$ геометрик прогрессия белгиси) прогрессияда $u_n = 2^{n-1}$, $q = 2$.

121-теорема. *Геометрик прогрессиянинг умумий ҳади*

$$u_n = u_1\cdot q^{n-1} \tag{5}$$

бўлади.

Исботи. Индукция усулига кўра, $n = 1$ да $u_1 = u_1$ бўлиб, теорема ўринли, энди теорема n учун ўринли деб, унинг $n + 1$ учун ўринли эканини кўрсатамиз, яъни $u_{n+1} = u_n\cdot q$ га асосан $u_{n+1} = u_n\cdot q = u_1\cdot q^{n-1}\cdot q = u_1\cdot q^n$ бўлиб, бундан теореманинг $n + 1$ учун ҳам ўринлилиги келиб чиқади. Демак, (5) формула исталган $n \in N$ учун ўринлидир. Шу билан теорема исбот бўлди.

Мисол. $\div\div (u_n)$ да $u_1 = 0{,}25$; $q = \frac{1}{2}$ бўлса, u_n ни топинг.

Ечиш. $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 0{,}25 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$; $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ бўлади.

122-теорема. *Геометрик прогрессияда ихтиёрий бутун сон k учун $u_p \cdot u_q = u_{p+k} \cdot u_{q-k}$ бўлади.*

Исботи. 107-таърифга асосан $u_n = u_0 \cdot q^n$ эканидан $u_{p+k} = u_0 \cdot q^{p+k}$ ва $u_{q-k} = u_0 \cdot q^{q-k}$ бўлиб, бундан $u_{p+k} \times \times u_{q-k} = u_0 \cdot q^{p+k} \cdot u_0 \cdot q^{q-k} = u_0 \cdot q^p \cdot u_0 \cdot q^q$ экани келиб чиқади. Демак, ихтиёрий бутун k учун $u_p \cdot u_q = {}_{p+k} \cdot u_{p-k}$ ўринли экан.

123-теорема. *Ҳар қандай мусбат ҳадли геометрик прогрессияда $u_n = \sqrt{u_{n-1} \cdot u_{n+1}}$ ўринлидир.*

Исботи. Теореманинг шартига кўра (u_n) учун $u_i \geqslant 0$; $i = \overline{1, \infty}$ бўлгани сабабли $\sqrt{u_{n-1} \cdot u_{n+1}} = \sqrt{u_0 \cdot q^{n-1} \cdot u_0 \cdot q^{n+1}} = \sqrt{(u_0 \cdot q^n)^2} = u_0 q^n = u_n$ эканини кўриш мумкин. Демак, геометрик прогрессияда $u_n : u_{n-1} = \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \Rightarrow u_n^2 = u_{n-1} \times \times u_{n+1}$ бўлар экан.

124-теорема. *(u_n) геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси*

$$s_n = \frac{u_n q - u_1}{q - 1}$$

бўлади.

Исботи. 124-теореманинг шартига кўра (u_n) нинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \tag{6}$$

дан иборат. Энди (6) нинг ҳар иккала томонини q га кўпайтирамиз:

$$q \cdot s_n = u_1 q + u_2 q + u_3 q + \ldots + u_n q = u_2 + u_3 + + u_4 + \ldots + u_n + u_n q. \tag{7}$$

Сўнгра (7) дан (6) ни ҳадлаб айирсак, $q s_n' - s_n = u_n q - u_1$

бўлади. Бундан $s_n = \frac{u_n q - u_1}{q-1} = \frac{u_1 \cdot q^n - n_1}{q-1}$ ҳосил бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.

Маълумки, агар $|q| > 1$ бўлса, $s_n = \frac{u_1 \cdot q^n - u_1}{q-1}$ формуладан; агар $|q| < 1$ бўлса, $s_n = \frac{u_1 - u_1 \cdot q^n}{1-q}$ формуладан фойдаланилади.

Мисол ва масалалар ечиш.

1-мисол. $\div\div (u_n): 1;\ 2;\ 4;\ 8;\ \ldots$ геометрик прогрессиянинг дастлабки 10 та ҳадининг йиғиндисини топинг.

Ечиш. $u_1 = 1;\ u_2 = u_1 q = 2;\ q = 2$ эканидан $u_{10} = 1 \cdot 2^{10-1} = 2^9$ бўлиб, $s_{10} = \frac{2^9 \cdot 2 - 1}{2-1} = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$ бўлади.

2-мисол. Учта ҳар хил сон бир вақтда ҳам арифметик, ҳам геометрик прогрессия ташкил қила олмаслигини кўрсатинг.

Ечиш. Фараз қилайлик, берилган u_1, u_2, u_3 сонлар бир вақтда $\div u_1;\ u_2;\ u_3$ ва $\div\div u_1;\ u_2;\ u_3$ бўлсин. Маълумки, 122-теоремага асосан $2u_2 = u_1 + u_3$ ва 123-теоремага асосан $u_2^2 = u_1 \cdot u_3$ бўлиши лозим, яъни $\frac{1}{2}(u_1 + u_3) = \sqrt{u_1 \cdot u_3}$ бўлади. Бундан $(u_1 - u_3)^2 = 0$ бўлиб, $u_1 = u_2 = u_3$ шартига олиб келади. Бу қарама-қаршилик мисолдаги фикрнинг ўринли эканини кўрсатади.

3-мисол. Берилган 1; 5; 13; 25; ... кетма-кетликнинг ёнма-ён турган ҳадларининг айирмаси арифметик прогрессия ташкил қилса, у ҳолда унинг биринчи n та ҳадининг йиғиндисини топинг.

Ечиш. Шартга кўра $a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n$ кетма-кетлик қуйидаги

$$a_2 - a_1 = d;\ a_3 - a_2 = 2d;\ \ldots;\ a_n - a_{n-1} = (n-1)d$$

хоссаси билан берилган, бу натижаларни ҳадлаб қўшсак, у ҳолда $a_n = a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ ҳосил бўлади. $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ га асосан ва $a_1 = a_1;\ a_2 = a_1 + d;\ a_3 = a_1 + \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot d;\ a_4 = a_1 + \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot d;\ \ldots;\ a_n = a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$s_n = na_1 + \left[\frac{1\cdot 2}{2} + \frac{2\cdot 3}{2} + \ldots + \frac{(n-1)\cdot n}{2}\right]\cdot d =$$

$$= na_1 + \frac{d}{2}\left[1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + (n-1)\cdot n\right]$$

бўлади. Сўнгра $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + (n-1)\cdot n =$

$$= (2^2 - 2) + (3^2 - 3) + \ldots + (n^2 - n) =$$

$$= 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 - (2 + 3 + 4 + \ldots + n) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n^2-1)}{3}$$

эканини ҳисобга олсак, бундан $s_n = na_1 + \frac{n(n^2-1)d}{6}$ бўлиб, $a_1 = 1$; $d = 4$ га асосан $s_n = \frac{1}{3}\cdot n(2n^2+1)$ ҳосил бўлади.

4-мисол. Агар $\div (a_n)$ бўлса, у ҳолда

$$s = \frac{1}{a_1\cdot a_2\ldots a_k} + \frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots a_{k+1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}\ldots a_{n+k-1}}$$

ни ҳисобланг.

Ҳисоблаш. Бунинг учун $f(n) = \frac{1}{a_n a_{n+1}\ldots a_{n+k-2}}$ деб белгилаб оламиз, у ҳолда

$$f(n) - f(n+1) = \frac{1}{a_n a_{n+1}\ldots a_{n+k+2}} -$$

$$- \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{n+k-1}} = \frac{a_{n+k-1} - a_n}{a_n a_{n+1}\ldots a_{n+k-1}} =$$

$$= \frac{(k-1)d}{a_n a_{n+1}\ldots a_{n+k-1}}$$

бўлади. Бундан

$$S = \frac{1}{(k-1)d}\{[f(1) - f(2)] + [f(2) - f(3)] + \ldots +$$

$$+ [f(n) - f(n+1)]\} = \frac{f(1) - f(n+1)}{(k-1)d}.$$

ҳосил бўлади. Демак,

$$S = \frac{1}{(k-1)\,d}\left(\frac{1}{a_1 \cdot a_2 \ldots a_{k-1}} - \frac{1}{a_{n+1}\, a_{n+2} \ldots a_{n+k-1}}\right)$$

йиғинди ҳосил бўлади. Агар $a = 1$; $d = 1$; $k = 3$ бўлса,

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)\,(n+2)}\right)$$

бўлади.

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

1. 7 билан 35 орасига шу сонлар билан бирга арифметик прогрессия ҳосил қиладиган 6 та сон жойлаштиринг.

2. 1 билан 25 орасига жойлаштирилганда арифметик прогрессия ҳосил бўладиган 5 та сон топинг.

3. 2, 14, 26 қаторнинг кетма-кет келган ҳар икки ҳади орасига 5 тадан ўрта арифметик сон жойлаштиринг. Бу қаторни тузинг.

4. a ва b сонларнинг орасига шулар билан арифметик прогрессия ҳосил қиладиган m та сон жойлаштиринг. Шу прогрессиянинг дастлабки учта ҳадини топинг.

5. Арифметик прогрессиянинг айирмасини ва ҳадлари йиғиндисини топинг:

1) $a_1 = 5$, $\quad a_n = 105$, $\quad n = 26$;

2) $a_1 = -10$, $\quad a_n = -20$, $\quad n = 6$;

3) $a_1 = \frac{3}{4}$, $\quad a_n = 3\frac{7}{8}$, $\quad n = 26$;

4) $a_1 = a$, $\quad a_n = 9a + 8b$, $\quad n = 9$.

6. Геометрик прогрессиянинг биринчи ва охирги ҳадини топинг:

1) $n = 8$, $\quad q = 2$, $\quad S_8 = 765$;

2) $n = 5$, $\quad q = \frac{1}{2}$, $\quad S_5 = 3\frac{7}{8}$;

3) $n = 4$, $\quad q = \frac{2}{3}$; $\quad S_4 = 65$;

4) $n = 12$, $\quad q = 2$, $\quad S_{12} = 4095$.

7. Арифметик прогрессиянинг биринчи ҳадини ва айирмасини топинг:

1) $a_2 + a_5 - a_3 = 10,$
$a_1 + a_6 = 17;$

2) $S_2 - S_4 + a_2 = 14,$
$S_3 + a_3 = 17;$

3) $5a_1 + 10a_5 = 0,$
$S_4 = 14.$

8. Арифметик прогрессиянинг биринчи ҳадини ва айирмасини топинг:

1) $a_7 - a_3 = 8,$
$a_2 \cdot a_7 = 75;$

2) $a_4 : a_6 = -1,$
$a_2 \cdot a_8 = -1;$

3) $a_4^2 + a_{12}^2 = 1170,$
$a_7 + a_{15} = 60.$

9. Геометрик прогрессиянинг биринчи ҳадини, махражини ва ҳадлари сонини топинг:

1) $a_7 - a_5 = 48;$
$a_6 + a_5 = 48;$
$S_n = 1023.$

2) $a_6 - a_4 = 216;$
$a_3 - a_1 = 8;$
$S_n = 40.$

10. Велосипедли киши A қишлоқдан жўнаб, биринчи соатда 10 км, ундан кейинги ҳар бир соатда шундан олдинги соатдагига қараганда 1 км ортиқ юрди. У билан бир вақтда A дан 7,5 км узоқликда бўлган B қишлоқдан унинг кетидан иккинчи велосипедли киши жўнади. Иккинчи киши биринчи соатда 12 км, ундан кейинги ҳар соатда шундан олдинги соатдагидан 1.5 км ортиқ юрди. Иккинчи велосипедли киши биринчи кишига неча соатдан кейин етиб олади?

11. Бир-биридан 153 м масофада бўлган икки жисм бир-бирига қараб ҳаракат қила бошлади. Биринчи жисм секундига 10 м юради, иккинчи жисм биринчи секундда 3 м, ундан кейинги ҳар бир секундда шундан олдинги секунддагига қараганда 5 м ортиқ юради. Бу жисмлар неча секунддан кейин учрашади?

12. Кўпбурчакнинг периметри 158 см, томонларининг узунликлари эса айирмаси 3 см бўлган арифметик прогрессия ҳосил қилади. Кўпбурчакнинг энг катта томони 44 см. Кўпбурчакнинг неча томони бор?

13. Тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари арифметик прогрессия ҳосил қилиши мумкинми?

14. Учбурчакнинг томонлари билан периметри арифметик прогрессия ҳосил қила оладими?

15. Тўртта соннинг олдинги учтаси арифметик прогрессия, кейинги учтаси геометрик прогрессия ҳосил қилади. Иккита четки соннинг йиғиндиси 37, иккита ўртадаги сонларнинг йиғиндиси 36. Шу сонларни топинг.

16. Тўртта сон арифметик прогрессия ҳосил қилади. Агар уларнинг биринчисидан 2 ни, иккинчисидан 6 ни, учинчисидан 7 ни, тўртинчисидан 2 ни айирилса, ҳосил бўлган сонлар геометрик прогрессия ҳосил қилади. Шу сонларни топинг.

17. Тўртта сон геометрик прогрессия ҳосил қилади. Агар уларнинг биринчисидан 2 ни, иккинчисидан 1 ни, учинчисидан 7 ни, тўртинчисидан 27 ни олинса, ҳосил бўлган сонлар арифметик прогрессия ҳосил қилади. Шу сонларни топинг.

18. Арифметик прогрессия билан геометрик прогрессиянинг биринчи ҳадлари тенг бўлиб, 5 га баравар; арифметик прогрессиянинг иккинчи ҳади геометрик прогрессиянинг иккинчи ҳадидан 10 та ортиқ. Шу прогрессияларни топинг.

19. Бир киши янги бир хабарни икки танишига айтди, уларнинг ҳар бири ҳам бу хабарни икки танишига айтди ва ҳ. к. Хабарни бировга етказиш учун ярим соат вақт кетади ва ҳар гал шу хабарни эшитмаган одамларга айтилади деб ҳисоблаб, 2 миллион аҳолиси бўлган шаҳарда бу хабарни ҳамма эшитиши учун қанча вақт кетишини топинг.

(Жавобни 1 соатгача аниқлик билан беринг.)

20. Ҳаво тортувчи насос поршенининг ҳар бир ҳаракатида идишдаги ҳавонинг $\frac{1}{8}$ бўлаги чиқиб кетади. Агар дастлабки босим 760 мм сим. уст. бўлса, поршень йигирма марта ҳаракат қилгандан кейин идишдаги ҳавонинг босими қанча бўлади?

(Жавобни 1 мм сим. уст. гача аниқлик билан беринг.)

МУНДАРИЖА

Турғун Рихсиевич Тўлаганов

ЭЛЕМЕНТАР МАТЕМАТИКА

Арифметика, алгебра

Педагогика институтлари ва университетлар учун ўқув қўлланма

Тошкент «Ўқитувчи» 1997

Таҳририят мудири *М. Пўлатов*
Муҳаррир *Ў. Ҳусанов*
Бадиий муҳаррир *Т. Қаноатов*
Тех. муҳаррир *Т. Скиба, Э. Вильданова*
Мусаҳҳиҳ *С. Абдусаматова*

ИБ № 6777

Теришга берилди 9.11.95. Босишга рухсат этилди 25.12.96. Формати $84\times108^1/_{32}$. Тип. қоғози. Кегли 10 шпонсиз. Литературная гарнитураси. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 14,28. Шартли кр.-отт. 14,91. Нашр. л. 10,58. Тиражи 3000. Буюртма № 2823.

«Ўқитувчи» нашриёти. 700129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 09 — 30 — 95.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг Тошполиграфкомбинати. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. 1997.