O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

NIZOMIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT
PEDAGOGIKA UNIVERSITETI

A. S. YUNUSOV

MATEMATIK MANTIQ VA ALGORITMLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI

Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan (5140100 – matematika-informatika) bakalavriyat ta’lim yo‘nalishi talabalari uchun matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari fanidan o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan

**Toshkent
«Yangi asr avlodi»
2006**

Ushbu o'quv qo'llanma pedagogika oliy o'quv yurtlarining matematika-informatika yo'nalishi bakalavr bo'limi o'quv rejasiga kiritilgan «Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari» fani davlat ta'lim standarti o'quv dasturlari asosida yozilgan bo'lib, u 6 bobdan iborat. Boblarni tashkil etuvchi paragraflar oxirida takrorlash uchun savollar va mashqlar keltirilgan.

Mazkur o'quv qo'llanma nafaqat pedagogika oliy o'quv yurtlari talablari, balki akademik litsey va kasb-hunar kollejlari o'qituvchilari, o'quvchilari uchun ham mo'ljallangan.

Taqrizchilar:
R.G'ULOMOV.
fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

H.JUMAYEV.
fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

ISBN 5-633-01934-2

SOZ BOSHI

«Matematik mantiq» fani matematika fanining muhim sohalaridan biri bo'ib, ham amaliy, ham nazariy ahamiyatga egadir. Matematik mantiq fanining hisoblash mashinalari, dasturlashtirish, kibernetika va matematikaning nazariy muammolarini hal etishda tadbiqlari ko'plab mavjud.

Matematik mantiq fani akademik litsey va kasb-hunar kollejlarida o'qitiladigan matematika, informatika va hisoblash texnikasi asoslari fanlarini o'qitishda ham muhim ahamiyatga ega.

O'zbekiston Respublikasining «Ta'lim to'g'risida»gi qonuni, «Kadrlar tayyorlash milliy dasturi», O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining «Uzluksiz ta'lim tizimi uchun davlat ta'lim standartlarini ishlab chiqish va joriy etish to'g'risida»gi qarori, akademik litsey va kasb-hunar kollejlarining namunaviy o'quv rejalariga asosan tuzilgan matematik fanlar o'quv dasturlariga matematik mantiq elementlari kiritilgan. Natijada, bu o'quv yurtlariga o'qituvchilar tayyorlaydigan pedagogika universitetida matematik mantiq fanini o'qitish yanada muhim ahamiyat kasb etdi.

O'quvchilarga havola etilayotgan ushbu o'quv qo'llanma Davlat ta'lim standarti talablari asosida tuzilgan amaldagi dasturga mos qilib yozildi.

Kitob olti bobdan iborat bo'lib, bu boblarda: mulohazalar algebrasining asosiy tushunchalari, ularning xossalari; mulohazalar hisobi alifbosi, aksiomalari, keltirib *chiqarish qoidalari, ularning asosiy xossalari; predikatlar algebrasi, uning formulalari va predikatlar algebrasida yechilish muammosi; predikatlar hisobi aksiomalari, keltirib chiqariluvchi formula, keltirib chiqarish qoidalari; matematik nazariyalar, aksiomatik nazariyalarni qurish sxemasi, interpretatsiya, model tushunchalari; algoritmlar nazariyasi, hisoblanuvchi, qisman rekursiv, umumrekursiv funksiyalar, Tyuring mashinalari haqida ma'lumotlar berilgan.*

Ushbu o'quv qo'llanma nafaqat oliy o'quv yurtlari o'qituvchilari, talabalari, balki, akademik litsey, kasb-hunar kollejlari o'qituvchilari va o'quvchilari uchun ham tushunarli sodda tilda bayon qilinganligi sababli, undan keng o'quvchilar ommasi foydalanishi mumkin.

Muallif o'quv qo'llanmani o'qib chiqib, kitob sifatini yaxshilash uchun o'z maslahatlarini ayamagan O'zMU algebra kafedrasining a'zolariga, xususan, dotsent R.G'ulomovga,TDIU oliy matematika kafedrasi dotsenti H.Jumaevga, TDPU matematika va uni o'qitish metodikasi kafedrasi a'zolariga,hamda dotsentlar D.Yunusova va N.Eshpo'latovlarga o'z minnatdorchiligini bildiradi.

I BOB

MULOHAZALAR ALGEBRASI

1-§. Mulohazalar ustida mantiq amallari

Rost yoki yolg'onligini bir qiymatli aniqlash mumkin bo'lgan darak gap *mulohaza* deb tushuniladi.

«Qayin – daraxt», «Negrlar – oq tanli odamlar», «5 > 2», «Bugun – 5-may» kabi gaplar mulohazalarga misol bo'la oladilar. Lekin har qanday gap ham mulohaza bo'la olmaydi, masalan, « Yashasin O'zbekiston yoshlari!», « Sen nechanchi kursda o'qiysan?» kabi gaplar mulohazalar emas, chunki ular darak gaplar emas.

Demak, biror-bir gap mulohaza bo'lishi uchun, u albatta darak gap bo'lishi va rost yoki yolg'onligi bir qiymatli aniqlanishi shart.

O'zbek tilidagi barcha mulohazalar to'plamini $\mathcal{M}$ orqali belgilaylik. $\mathcal{M}$ to'plamning elementlarini lotin alifbosining bosmacha, indeksli yoki indekssiz bosh harflari bilan belgilashga kelishib olamiz. Ya'ni $A, B, C, \ldots, A_1, A_2, \ldots, A_n$ — mulohazalardir. A mulohaza rost bo'lsa, unga 1 ni, yolg'on bo'lsa, 0 ni mos qo'yamiz, ya'ni $\mathcal{M}$ to'plamda quyidagi akslantirishni kiritamiz:

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, \text{ agar A rost bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar A yolg'on bo'lsa.} \end{cases}$$

$\mu(A)$ ga A mulohazaning *mantiqiy qiymati* deyiladi. Rostlik jadvallarini to'ldirganimizda yozuvni ixchamlashtirish maqsadida μ (A) o'rniga A ni yozishni kelishib olamiz.

1.1-*ta'rif.* *A va B mulohazalarning konyunksiyasi deb, A va B mulohazalar rost bo'lgandagina rost, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan* $A \wedge B$ *mulohazaga aytiladi.*

Mulohazalar konyunksiyasi mantiqiy ko'paytirish deb ham ataladi va $A \bullet B$ yoki $A \& B$ kabi belgilanishi mumkin.

1.2-*ta'rif.* *A va B mulohazalar dizyunksiyasi deb, A va B mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on bo'lgandagina yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan* $A \vee B$ *mulohazaga aytiladi.*

Mulohazalar dizyunksiyasi mantiqiy qo'shish deb ham yuritiladi va $A + B$ kabi belgilanishi ham mumkin.

1.3-*ta'rif.* *A mulohaza rost bo'lganda yolg'on, yolg'on bo'lganda rost bo'ladigan* $\rceil A$ *mulohaza A mulohazaning inkori deyiladi.*

A mulohazaning inkori $\bar{A}$ orqali belgilanishi ham mumkin.

Mulohazalar ustida bajariladigan amallar *rostlik jadvali* deb ataladigan jadvallar yordamida ham berilishi mumkin. Yuqorida ta'riflangan amallar rostlik jadvali quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\rceil A$
1	1	1	1	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Bundan tashqari yana bir qancha amallar, ya'ni:

$\Rightarrow$ – implikatsiya yoki mantiqiy xulosa,

$\Leftrightarrow$ yoki $\sim$ – ekvivalensiya yoki mantiqiy teng kuchlilik,

| – Shefer shtrixi,

↓ – Pirs strelkasi,

⊕ – qat'iy dizyunksiya, ya'ni 2 modul bo'yicha qo'shish amallari quyidagi jadval orqali beriladi:

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \mid B$	$A \downarrow B$	$A \oplus B$
1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday gaplar mulohaza bo'la oladi?
2. Mulohazalar inkori, konyunksiyasi, dizyunksiyasi, implikatsiyasi, ekvivalensiyasi ta'riflarini ayting.
3. Rostlik jadvali nima?
4. Biri ikkinchisining inkori bo'lgan mantiq amallarini keltiring.

Mashqlar

1. Quyidagi gaplar ichidan mulohazalarni ajrating va ularning rost yoki yolg'on ekanligini aniqlang:

1.1. Sirdaryo Orol dengiziga quyiladi.

1.2. Siz qaysi oliygohda o'qiysiz?

1.3. O'zbekiston Mustaqilligining 15 yilligi muborak bo'lsin!

1.4. Har qanday son musbat.

1.5. 0 har qanday haqiqiy songa bo'linadi.

1.6. 2, 3, 5 sonlari tub sonlar.

1.7. Barcha insonlar yoshi 20 da.

1.8. Galaktikamizda shunday sayyora bor-ki, unda hayot mavjud.

1.9. 5 soni 25 va 70 sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisi.

1.10. $3x^3 - 5y + 9$.

2. Quyidagi juftliklarining qaysisida mulohazalar bir-birining inkori?

2.1. $2 < 0$, $2 > 0$.

2.2. $6 < 9$, $6 \geq 9$.

2.3. «ABC to‘g‘riburchakli uchburchak», «ABC o‘tmas burchakli uchburchak».

2.4. « f funksiya – toq », « f funksiya – juft ».

2.5. «Barcha tub sonlar toq», «Shunday tub son mavjudki, u juft».

2.6. «Irrasional sonlar mavjud», «Barcha sonlar rasional».

3. Quyidagi mulohazalarning rostlik qiymatini aniqlang:

3.1. Agar 12 soni 6 ga bo‘linsa, u holda 12 soni 3 ga bo‘linadi.

3.2. Agar 11 soni 6 ga bo‘linsa, u holda 11 soni 3 ga bo‘linadi.

3.3. Agar 15 soni 6 ga bo‘linsa, u holda 15 soni 3 ga bo‘linadi.

3.4. Agar 15 soni 3 ga bo‘linsa, u holda 15 soni 6 ga bo‘linadi.

3.5. 12 soni 6 ga bo‘linadi, faqat va faqat shu holda-ki, agar 12 soni 3 ga bo‘linsa.

3.6. 15 soni 6 ga bo‘linadi, faqat va faqat shu holda-ki, agar 15 soni 3 ga bo‘linsa.

4. Agar A orqali « $9 \vdots 3$ », B orqali « $8 \vdots 3$ » degan mulohazalar belgilangan bo‘lsa, u holda quyidagi mulohazalarni so‘zlar orqali ifodalang va rostlik qiymatini aniqlang:

$A \Rightarrow B, B \Rightarrow A, \neg A \Rightarrow B, \neg B \Rightarrow A, \neg A \Rightarrow \neg B, \neg B \Rightarrow \neg A,$
$A \Rightarrow \neg B, B \Rightarrow \neg A, A \Leftrightarrow B, \neg A \Leftrightarrow \neg B, \neg A \Leftrightarrow B, A \Leftrightarrow \neg B.$

2-§. Mulohazalar algebrasi. Mulhazalar algebrasi alifbosi, formula tushunchasi

Mulohazalar algebrasi tushunchasini kiritish uchun avval algebra tushunchasini eslatib o'tamiz. $A \neq \varnothing$ to'plam va Ω – A to'plamda aniqlangan algebraik amallar to'plami berilgan bo'lsin. U holda (A, Ω)- juftlikni *algebra* deb ataymiz.

2.1-*ta'rif*. $< \mathcal{M}, \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} >$ - *algebra mulohazalar algebrasi deyiladi.*

Mulohazalar algebrasini qisqacha MA deb belgilaymiz.

MA ning alifbosi quyidagilardan iborat:

A, B, C,... – mulohazalarni belgilash uchun ishlatiladigan harflar;

$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ – mantiq amallarini belgilash uchun ishlatiladigan belgilar;

(,) – chap va o'ng qavslar.

Mulohazalar algebrasining asosiy tushunchalaridan biri formula tushunchasidir. Unga induktiv ta'rif beramiz.

2.2 - *ta'rif.* 1). *Har bir A, B, C,...harflar formuladir.*

2). Agar $\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ lar formulalar bo'lsa, u holda $(\neg \mathcal{A})$, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$ lar ham formulalardir.

3). 1) va 2) lar yordamida hosil qilingan ifodalargina formulalardir.

Masalan, *A, B, C* lar 1) ga asosan formulalar; $(\neg B)$, $(A \Rightarrow (\neg B))$, $(((A \Rightarrow (\neg B)) \Rightarrow A) \wedge C)$ lar 2) ga asosan formulalardir.

Formulalarning tarkibidagi qavslarni kamaytirish maqsadida mantiq amallarining bajarilish tartibini $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ deb belgilab olamiz. Demak, qavslar bo'lmaganda avval $\rceil$, keyin $\wedge$ va h.k. amallar bajariladi. Bundan tashqari, tashqi qavslarni ham ehtiyoj bo'lmaganda tashlab yuboramiz. Bunday o'zgartirishlardan keyin $((A \wedge B) \vee \vee ((\rceil A) \Rightarrow C))$ formulani $A \wedge B \vee (\rceil A \Rightarrow C)$ ko'rinishda yozishimiz mumkin bo'ladi.

2.3-*ta'rif. Formulada qatnashgan mantiq amallari soni formulaning rangi deyiladi.*

Yuqorida keltirilgan formulaning rangi 4 ga teng.

2.4-*ta'rif. 1. $\mathcal{A}$ formula A dan iborat bo'lsa, uning formulaosti faqat uning o'zidan iborat.*

2. Agar formulaning ko'rinishi $\mathcal{A} * \mathcal{B}$ dan iborat bo'lsa, u holda uning formulaostilari $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} * \mathcal{B}$ hamda $\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ larning barcha formulaostilaridan iborat bo'ladi. Bu yerda $*$ – $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ amallaridan biri.

3. Agar formulaning ko'rinishi $\rceil \mathcal{A}$ bo'lsa, uning formulaostilari $\mathcal{A}$ formula, $\mathcal{A}$ formulaning barcha formulaostilari, $\rceil \mathcal{A}$ ning o'zidan iborat.

4. Boshqa formulaostilari yo'q.

2.5-*misol.* $(A \wedge B) \Rightarrow \rceil A$ formulaning formulaostilari ta'rifga ko'ra quyidagilardan iborat:

$$A,\ B,\ \rceil A,\ A \wedge B,\ (A \wedge B) \Rightarrow \rceil A.$$

Agar $\mathcal{A}$ formula tarkibiga faqat $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulohazalar kirgan bo'lsa, bu mulohazalarni *propozitsional o'zgaruvchilar* deb ataymiz va formulani ehtiyoj bo'lganda $\mathcal{A}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ ko'rinishda yozamiz.

Koordinatalari 0 yoki 1 lardan iborat $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ vektor, bu yerda i_k lar 0 yoki 1 lardan iborat, *propozitsional o'zgaruvchilarning qiymatlari tizimi* deyiladi.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ propozitsional o'zgaruvchilarning barcha qiymatlari tizimi 2^n ta ekanligini ko'rish qiyin emas. Demak, agar mulohazalar algebrasining biror $\mathcal{A}$ formulasi tarkibiga n ta mulohaza kirgan bo'lsa, bu formulaning rostlik jadvalida 2^n ta qiymatlar tizimi qatnashar ekan.

2.6-*misol.* $A \wedge B \Rightarrow \rceil A \vee C$ formulaning rostlik jadvalini tuzing.

A	B	C	$\rceil A$	$A \wedge B$	$\rceil A \vee C$	$A \wedge B \Rightarrow \rceil A \vee C$
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1

Takrorlash uchun savollar

1. Mulohazalar algebrasi deb nimaga aytiladi?
2. Mulohazalar algebrasining alfavitini keltiring.
3. Mulohazalar algebrasining formulasi deb nimaga aytiladi?
4. Mantiq amallarining bajarilish tartibini ayting.
5. Formulaning rangi nima?
6. Formulaosti nima?
7. Formula uchun rostlik jadvali qanday tuziladi?

Mashqlar

1. Quyidagi ifodalardan qaysilari formula ekanligini aniqlang:

1) $A \vee B \wedge \rceil A \Leftrightarrow C \Rightarrow \rceil B$;

2) $A \Leftrightarrow B\ C\ \rceil A$;

3) $\rceil A \vee \rceil B \Leftrightarrow \rceil\rceil C$;

4) $(A \wedge B) \vee (\rceil A \wedge B \Leftrightarrow C) \wedge (\wedge B)$;

5) $((A \wedge B)\ C) \Rightarrow \rceil A$;

6) $((A \vee \rceil B) \Rightarrow (C \rceil A)$.

2. $A \vee B \wedge \rceil A \Leftrightarrow C$ formuladan qavslar yordamida hosil qilish mumkin bo'lgan barcha formulalarni toping.

3. Quyidagi formulalarning barcha formulaostilarini aniqlang:

1) $A \Leftrightarrow B \vee C \wedge \rceil A$;

2) $((A \Leftrightarrow B) \wedge \rceil C) \Rightarrow (((A \vee B) \Rightarrow A) \Rightarrow \rceil B)$;

3) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Leftrightarrow \rceil B) \Rightarrow (A \wedge B))$;

4) $A \Rightarrow \rceil B \vee C \Rightarrow \rceil A \Rightarrow \rceil C$.

4. Yuqoridagi misollarda keltirilgan formulalar ranglarini aniqlang.

5. Yuqoridagi misollarda keltirilgan formulalar uchun rostlik jadvallari tuzing.

3-§. Teng kuchli formulalar
Tavtologiya–mantiq qonuni

3.1-***ta'rif.*** *MA ning $\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ formulalari berilgan bo'lib, bu formulalar tarkibiga kirgan barcha mulohazalar $A_1,\dots, A_m$ lardan iborat bo'lsin. Agar $A_1,\dots, A_m$ mulohazalarning barcha qiymatlar tizim $(i_1,\dots, i_m)$ uchun $\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ formulalar bir xil qiymatlar qabul qilsa, u holda, bu formulalar teng kuchli formulalar deyiladi.*

$\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ formulalarning teng kuchliligi $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ ko'rinishda ifodalanadi.

3.2-***ta'rif.*** *Mulohazalar algebrasining $\mathcal{A}$ $(A_1,\dots, A_n)$ formulasi $A_1,\dots, A_n$ mulohazalarning barcha qiymatlari tizimi $(i_1,\dots, i_n)$ uchun 1 qiymat qabul qilsa, aynan rost formula yoki tavtologiya – mantiq qonuni deyiladi.*

Aynan rost formulani qisqacha AR deb belgilaymiz.

3.3-***ta'rif.*** *MA ning $\mathcal{A}$ $(A_1,\dots, A_n)$ formulasi $A_1,\dots, A_n$ mulohazalarning barcha qiymatlari tizimi $(i_1,\dots, i_n)$ uchun*

0 qiymat qabul qilsa, aynan yolg'on yoki ziddiyat deyiladi.

3.4-***ta'rif***. *Agar mulohazalar algebrasining $\mathcal{A}$ $(A_1,\ldots, A_n)$ formulasi $A_1,\ldots, A_n$ larning kamida bitta $(i_1,\ldots, i_n)$ qiymatlari tizimida 1 ga teng qiymat qabul qilsa, u holda bu formula bajariluvchi formula deyiladi.*

3.5-***teorema.*** *Mulohazalar algebrasining $\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ formulalari teng kuchli formulalar bo'lishi uchun, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ formula aynan rost formula bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. $\mathcal{A}\equiv\mathcal{B}$ bo'lsin. U holda $\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ formulalarga kirgan barcha propozitsional o'zgaruvchilarning barcha qiymatlari tizimlarida $\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ formulalar bir xil qiymatlar qabul qiladi. Ya'ni, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} \equiv 1$ bo'ladi.

Aksincha, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}\equiv 1$ bo'lsa, $\mathcal{A}\equiv 1$ bo'lganda $\mathcal{B}\equiv 1$ va $\mathcal{A}\equiv 0$ bo'lganda, $\mathcal{B}\equiv 0$ bo'ladi.

Shunday qilib, $\mathcal{A}\equiv\mathcal{B}$ bo'lishi uchun $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ mantiq qonuni bo'lishi zarur va yetarli.

3.6. ***Asosiy teng kuchli formulalar.***

1. $A \wedge A \equiv A$ (konyunksiyaning idempotentlik qonuni).
2. $A \vee A \equiv A$ (dizyunksiyaning idempotentlik qonuni).
3. $A \wedge 1 \equiv A$.
4. $A \vee 1 \equiv 1$.
5. $A \wedge 0 \equiv 0$.
6. $A \vee 0 \equiv A$.
7. $A \vee \neg A \equiv 1$ – uchinchisini inkor qilish qonuni.
8. $A \wedge \neg A \equiv 0$ – ziddiyatga keltirish qonuni.
9. $\neg(\neg A) \equiv A$ – qo'sh inkor qonuni.
10. $A \wedge (B \vee A) \equiv A$.
11. $A \vee (B \wedge A) \equiv A$.
12. $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.
13. $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$.
14. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$.
15. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$.

16. $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$.

17. $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$.

18. $A \wedge B \equiv B \wedge A$–konyunksiyaning kommutativlik qonuni.

19. $A \vee B \equiv B \vee A$– dizyunksiyaning kommutativlik qonuni.

20. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ – $\wedge$ ning $\vee$ ga nisbatan distributivlik qonuni.

21. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ – $\vee$ ning $\wedge$ ga nisbatan distributivlik qonuni.

22. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ – konyunksiyaning assotsiativlik qonuni.

23. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ – dizyunksiyaning assotsiativlik qonuni.

Bu tengkuchliliklar rostlik jadvallari yordamida isbotlanishi mumkin. Masalan, 20-tengkuchlilikning isboti uchun rostlik jadvali tuzamiz:

A	B	C	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Rostlik jadvalidagi oxirgi ikki ustunlar mos qatorlaridagi qiymatlar tengligidan ko‘rinadiki:

$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Takrorlash uchun savollar

1. Mulohazalar algebrasining teng kuchli formulalariga ta’rif bering.

2. Mantiq qonuni deb nimaga aytiladi?

3. Mulohazalar algebrasida ziddiyat deb nimaga aytiladi?

4. Bajariluvchi formula ta'rifini ayting.

5. Mulohazalar algebrasining formulalari teng kuchli bo'lishining zarur va yetarli shartini keltiring.

6. Uchinchisini inkor qilish, yutilish, qo'sh inkor va ziddiyatga keltirish qonunlarini ifodalang.

Mashqlar

1. Quyidagi formulalarning aynan rost ekanligini isbotlang:

1) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\urcorner A \Leftrightarrow \urcorner B)$;

2) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;

3) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B))$;

4) $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow (C \vee B))$.

2. Quyidagi formulalarning aynan yolg'on ekanligini isbotlang:

1) $A \wedge (B \wedge (\urcorner A \vee \urcorner B))$;

2) $\urcorner(\urcorner(A \vee B) \Rightarrow \urcorner(A \wedge B))$;

3) $\urcorner(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$;

4) $\urcorner(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$;

5) $\urcorner(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge A))$.

3. Quyidagi formulalarning qaysilari bajariluvchi ekanligini aniqlang:

1) $\urcorner(A \Rightarrow \urcorner A)$;

2) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;

3) $(B \Rightarrow (A \wedge C)) \wedge \urcorner((A \vee C) \Rightarrow B)$;

4) $\urcorner((A \Leftrightarrow \urcorner B) \vee C) \wedge B$;

5) $(A \wedge B) \Rightarrow ((C \vee B) \Rightarrow (B \wedge \urcorner B))$.

4. 3.6 da keltirilgan tengkuchliliklarni rostlik jadvallari yordamida isbotlang.

4-§. *Formulalarni teng kuchli almashtirish*

Agar $\mathcal{A}\equiv\mathcal{B}$ bo'lib, $\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ formulalar tarkibiga kirgan $\mathcal{C}$ qism formulani $\mathcal{C}$ ga teng kuchli bo'lgan $\mathcal{D}$ formula bilan almashtirsak, yana teng kuchli formulalar hosil bo'lishi ravshan. Buni qisqacha

$$\frac{\mathcal{A}(\mathcal{C})\equiv\mathcal{B}(\mathcal{C}),\ \mathcal{C}\equiv\mathcal{D}}{\mathcal{A}(\mathcal{D})\equiv\mathcal{B}(\mathcal{D})}$$

ko'rinishda yozishni kelishib olamiz.

4.1-*misol.* $A \Leftrightarrow B\equiv (\rceil A \wedge \rceil B) \vee (B \wedge A)$ tengkuchlilikni isbotlang.

3.6 da keltirilgan tengkuchliliklardan foydalanib, quyidagi teng kuchli formulalar ketma-ketligini hosil qilamiz:

$A \Leftrightarrow B\equiv(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\equiv(\rceil A \vee B) \wedge (\rceil B \vee A) \equiv$
$\equiv((\rceil A \vee B) \wedge \rceil B) \vee (\rceil A \vee B) \wedge A)\equiv(\rceil A \wedge \rceil B) \vee$
$\vee (B \wedge \rceil B) \vee (\rceil A \wedge A) \vee (B \wedge A)\equiv(\rceil A \wedge \rceil B) \vee 0 \vee$
$\vee 0 \vee (B \wedge A)\equiv (\rceil A \wedge \rceil B) \vee (B \wedge A).$

Takrorlash uchun savollar

1. Mulohazalar algebrasining formulasi, qism formulasi deb nimaga aytiladi?
2. Teng kuchli formulalar deb qanday formulalarga aytiladi?
3. Idempotentlik, kommutativlik, assotsiativlik, distributivlik qonunlarini ifodalang.
4. Formulalarni teng kuchli almashtirish deganda nimani tushunasiz?

Mashqlar

1. Teng kuchli almashtirishlar yordamida quyidagi formulalarni soddalashtiring:

1) $\neg(\neg A \vee B) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow A)$;

2) $\neg(\neg A \wedge \neg B) \vee ((A \Rightarrow B) \wedge A)$;

3) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \wedge (A \vee B)$;

4) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow \neg A) \wedge (C \Rightarrow A)$;

5) $(A \wedge C) \vee (A \wedge \neg C) \vee (B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$.

2. Teng kuchli almashtirishlar yordamida quyidagi formulalarni shunday almashtiringki, natijada hosil bo'lgan formulalarda faqat $\neg$ va $\wedge$ amallari qatnashsin:

1) $(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow C)$;

2) $(\neg A \Rightarrow B) \vee \neg(A \Rightarrow B)$;

3) $((A \vee B \vee C) \Rightarrow A) \vee C$;

4) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow \neg A$;

5) $(A \vee (B \Rightarrow C)) \Rightarrow A$.

3. Teng kuchli almashtirishlar yordamida quyidagi formulalarni shunday almashtiring-ki, natijada hosil bo'lgan formulalarda faqat $\neg$ va $\vee$ amallari qatnashsin:

1) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \wedge C)$;

2) $(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow (A \wedge B)$;

3) $((\neg A \wedge \neg B) \vee C) \Rightarrow (C \wedge \neg B)$;

4) $((A \Rightarrow (B \wedge C)) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow \neg B$;

5) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

4. Quyidagi formulalarning inkorini toping:

1) $(A \wedge (B \vee \neg C)) \vee (\neg A \wedge B)$;

2) $((\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee D) \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge \neg P$;

3) $(((\neg A \wedge (\neg B \vee C)) \vee D) \wedge \neg Q) \vee (\neg R \wedge (P \vee \neg F))$;

4) $((A \wedge (\neg B \vee (\neg C \wedge D))) \vee \neg Q) \wedge R$.

5. Teng kuchli almashtirishlar yordamida quyidagi formulalarning ziddiyat ekanligini isbotlang:

1) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \wedge ((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B))$;

2) $((A \wedge \neg B) \Rightarrow (\neg A \vee (A \wedge B))) \wedge ((\neg B \vee (A \wedge B)) \Rightarrow$
$\Rightarrow (A \wedge \neg B))$;

3) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow C)$;

4) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B) \wedge A$;

5) $(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C)) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))$.

5-§. Bul algebrasi. Ikki qiymatli funksiyalar

5.1-***ta'rif.*** *Bo'sh bo'lmagan $\mathcal{M}$ to'plam va unda aniqlangan « + » – qo'shish, « • » – ko'paytirish, « ‾ » – inkor amallariga nisbatan quyidagi shartlar bajarilgan bo'lsin:*

1. $x + y = y + x$ – qo'shishga nisbatan kommutativlik qonuni.

2. $x \bullet y = y \bullet x$ – ko'paytirishga nisbatan kommutativlik qonuni.

3. $(x + y) + z = x + (y + z)$ – qo'shishga nisbatan assotsiativlik qonuni..

4. $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$ – ko'paytirishga nisbatan assotsiativlik qonuni.

5. $x + x = x$ qo'shishga nisbatan idempotentlik qonuni.

6. $x \bullet x = x$ – ko'paytirishga nisbatan idempotentlik qonuni.

7. $\overline{\overline{x}} = x$ - *qo'sh inkor qonuni.*

$$\left.\begin{array}{l} 8.\ \overline{x+y}=\overline{x}\,g\,\overline{y} \\ 9.\ \overline{x\,g\,y}=\overline{x}+\overline{y} \end{array}\right\} \text{— } \textit{de - Morgan qonunlari}$$

$$\left.\begin{array}{l} 10.\ x+(y\,g\,x)=x \\ 11.\ x\,g\,(y+x)=x \end{array}\right\} \text{— yutilish qonunlari}$$

12. $(x + y) \bullet z = (x \bullet z) + (y \bullet z)$ – qo'shishning ko'paytirishga nisbatan distributivlik qonuni.

13. $(x \bullet y) + z = (x + z) \bullet (y + z)$ – ko'paytirishning qo'shishga nisbatan distributivlik qonuni u holda $< \mathcal{M};\ +, \bullet, ' >$ – algebra Bul algebrasi deyiladi.

5.2-***Misollar.*** 1.3.6 dagi tengkuchliliklardan ko'rinadiki, mulohazalar algebrasida konyunksiyani « • », dizyunksiyani « + » ga mos qo'ysak, mulohazalar algebrasi Bul algebrasiga misol bo'la oladi.

2. To'plamlar algebrasi, unda aniqlangan « $\cap$ » to'plamlar kesishmasi, « $\cup$ » – to'plamlar birlashmasi, « $'$ » – to'plam to'ldiruvchisi amallari 5.1 dagi xossalarga ega ekanligidan uning Bul algebrasini tashkil etishini ko'rish mumkin.

5.3-***ta'rif.*** *$X = \{0, 1\}$ –ikki elementli to'plam berilgan bo'lsin. U holda $f\colon X^n \to X$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ – funksiya n – o'zgaruvchili Bul funksiyasi yoki ikki qiymatli funksiya deyiladi.*

$n = 0$, bo'lganda, X to'plamning ajratilgan elementlarini, ya'ni 0 yoki 1 ni hosil qilamiz. Mulohazalar algebrasining ixtiyoriy formulasi ikki qiymatli funksiyaga misol bo'la oladi. Masalan, $A \vee B$ –formulani qaraylik.

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Demak, $f(x, y) = x \vee y$ – Bul funksiyasi ekan. Umuman, $\mathcal{A}(A_1, \ldots, A_n)$ – formula n o'zgaruvchili Bul funksiyasidir.

Endi teskari masalani ko'raylik. Ixtiyoriy $F(X_1, \ldots, X_n)$ – Bul funksiyasi berilgan bo'lsin. Bu funksiyani mulohazalar algebrasining formulasi orqali ifodalash mumkinligini ko'ramiz:

$\mathcal{A} \equiv F(1, 1, \ldots, 1) \wedge X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n \vee$

$\vee F(1,\dots,1,0)\wedge X_1\wedge\dots\wedge X_{n-1}\wedge\rceil X_n\vee\dots\vee$
$\vee F(0,0,\dots,0)\wedge\rceil X_1\wedge\dots\wedge\rceil X_n$ (1) –

formula mulohazalar algebrasining $F(X_1,\dots,X_n)$ – Bul funksiyasiga teng bo'lgan formuladir. Bu tasdiqni $(X_1,\dots,X_n)$ – propozitsional o'zgaruvchilar tizimiga (1,..., 1), (1,..., 1, 0),..., (0,..., 0) qiymatlar tizimini qo'yib, tekshirib chiqish mumkin. (1,..., 1, 0) qiymatlar tizimi uchun tenglikni tekshiraylik. 3.6 dagi tengkuchliliklarga asosan:

$$F(1,1,\dots,1)\wedge 1\wedge\dots\wedge 0\vee F(1,\dots,1,0)\wedge 1\wedge 1\wedge$$
$$\wedge\dots\wedge\rceil 0\vee\dots\vee F(0,\dots,0)\wedge\rceil 1\wedge\rceil 1\wedge\dots\wedge\rceil 0\equiv$$
$$\equiv F(1,\dots,1)\wedge 0\vee F(1,\dots,1,0)\wedge 1\wedge 1\wedge\dots\wedge 1\vee$$
$$\vee\dots\vee F(0,\dots,0)\wedge 0\equiv 0\vee F(1,\dots,1,0)\vee$$
$$\vee\dots\vee 0\equiv F(1,1,\dots,0).$$

Agar (1) formulada 0 ga teng bo'lgan qo'shiluvchilarni tashlab va 1 ga teng ko'paytuvchilarni $1\wedge A\equiv A$ tengkuchlilikdan foydalanib tashlab yozsak, (1) formulaning ko'rinishi ancha soddalashadi.

Shunday qilib, (1) ni faqat propozitsional o'zgaruvchilardan tuzilgan va quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan formula shaklida yozish mumkin:

1. Formuladagi har bir qo'shiluvchida $F(X_1,\dots,X_n)$ funksiyaga kirgan barcha $X_1,\dots,X_n$ o'zgaruvchilar qatnashadi.

2. Formulada bir xil qo'shiluvchilar yo'q.

3. Har bir qo'shiluvchida $X_1,\dots,X_n$ o'zgaruvchilar faqat bir martagina qatnashadi.

Agar $F(X_1,\dots,X_n)$ funksiyaning rostlik jadvali berilgan bo'lsa, uni mulohazalar algebrasining formulasi orqali ifoda qilish uchun $X_1,\dots,X_n$ o'zgaruvchilarning $F(X_1,\dots,X_n)$ funksiya 1 ga teng qiymat qabul qiladigan qiymatlari tizimlarinigina ajratib olamiz. Bunday qiymatlar tizimi uchun X_k o'zgaruvchi 1 ga teng qiymat qabul qilsa, X_k ni o'zini, aks holda, X_k ning inkorini olib $X_1,..., X_k$ o'zgaruvchilardan konyunksiyalar tuzib olamiz. Hosil bo'lgan barcha konyunksiyalarning yig'indisi $F(X_1,..., X_n)$ formulaning ifodasi bo'ladi.

5.4-***misol.*** $F(X_1, X_2, X_3)$ – ikki qiymatli funksiya faqatgina (1, 1, 0) va (0, 1, 1) qiymatlar tizimlaridagina 1 ga teng qiymat qabul qilsin. $F(X_1,..., X_n)$ ni mulohazalar algebrasining formulasi orqali ifodalaylik.

Yechim. X_1, X_2, X_3 – o'zgaruvchilarning (1, 1, 0) qiymatlari tizimiga $X_1 \wedge X_2 \wedge \urcorner X_3$ – konyunksiya, (0, 1, 1) ga esa $\urcorner X_1 \wedge \wedge X_2 \wedge X_3$ – konyunksiya mos keladi. U holda,

$F(X_1, X_2, X_3) \equiv X_1 \wedge X_2 \wedge \urcorner X_3 \vee \urcorner X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$.

5.5-***natija.*** *$F(X_1,...,X_n)$– ikki qiymatli funksiya berilgan bo'lsin. U holda,*

$$F(X_1,..., X_n) \equiv (F(1,..., 1) \vee$$
$$\vee \urcorner X_1 \vee,..., \vee \urcorner X_n) \wedge F(1,..., 1, 0) \vee \urcorner X_1 \vee,$$
$$,..., \vee X_{n-1} \wedge \urcorner X_{n)} \wedge ... \wedge (F(0, 0,..., 0) \vee$$
$$\vee X_1 \vee ... \vee X_n).$$

Isbot. Haqiqatan ham, yuqorida $F(X_1,..., X_n)$ funksiya uchun hosil qilingan ifodaga asosan:

$$\urcorner F(X_1,..., X_n) \equiv (\urcorner F(1,..., 1) \wedge X_1 \wedge ... \wedge X_n) \wedge$$
$$\wedge (\urcorner F(1,..., 1, 0) \wedge X_1 \wedge ... \wedge X_{n-1} \wedge \urcorner X_n) \wedge ... \wedge$$
$$\wedge (\urcorner F(0,..., 0) \wedge \urcorner X_1 \wedge ... \wedge \urcorner X_n).$$

Qo'sh inkor va de Morgan qonunlariga ko'ra

$$F(X_1,..., X_{n)} \equiv \urcorner (\urcorner F(X_1,...,X_n)) \equiv \urcorner (\urcorner F(1,...,1) \wedge$$
$$\wedge X_1 \wedge ... \wedge X_n) \vee (\urcorner F(1,..., 1, 0) \wedge X_1 \wedge ... \wedge X_{n-1} \wedge$$
$$\wedge \urcorner X_n) \vee ... \vee (F(0,..., 0) \wedge \urcorner X_1 \wedge ... \wedge \urcorner X_n) \equiv$$
$$\equiv (F(1,..., 1) \vee \urcorner X_1 \vee ... \vee \urcorner X_n) \wedge (F(1,...,1, 0) \vee$$
$$\vee \urcorner X_1 \vee ... \vee \urcorner X_{n-1} \vee X_n) \wedge ... \wedge (F(0,..., 0) \vee$$
$$\vee X_1 \vee ... \vee X_n).$$

Takrorlash uchun savollar

1. Algebra deb nimaga aytiladi?
2. Bul algebrasi ta'rifini keltiring va unga misollar keltiring.
3. 2 qiymatli funksiya nima?
4. 2 qiymatli funksiya orqali mulohazalar algebrasining formulasini ifodalash mumkinmi?

Mashqlar

1. Faqatgina quyidagi tizimlarda 1 qiymat qabul qiladigan $F(X_1,\ldots, X_n)$ ni mulohazalar algebrasining formulasi orqali ifodalang:

1) (0, 0);
2) (0, 1);
3) (1, 1);
4) (0, 1, 1);
5) (1, 0, 0);
6) (1, 0, 1, 1);
7) (0, 1, 1, 1).

2. Berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi formulalarni aniqlang:

1) $F(0, 0) = F(1, 1) = 1$;
2) $F(0, 1, 0) = F(1, 0, 1) = F(1, 1, 1) = 1$;
3) $F(0, 1, 1) = F(1, 0, 0) = 1$;
4) $F(0, 1, 0, 1) = F(1, 0, 1, 0) = F(1, 0, 0, 0) =$
$= F(1, 1, 1, 0) = F(1, 1, 1, 1) = 1$.

3. Faqatgina quyidagi tizimlarda 0 qiymat qabul qiladigan

$F(X_1,\ldots, X_n)$ ni mulohazalar algebrasining formulasi orqali ifodalang:

1) (0, 0);

2) (1, 0);
3) (1, 1);
4) (0, 1, 1);
5) (1, 0, 1);
6) (0, 0, 1);
7) (1, 0, 0, 1);
8) (0, 1, 0, 0).

4. Berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi formulalarni aniqlang:

1) $F(0, 1) = F(1, 1) = 0$;
2) $F(1, 0, 0) = F(1, 0, 1) = 0$;
3) $F(1, 1, 1) = F(0, 0, 1) = F(1, 1, 0) = F(1, 0, 0) = 0$;
4) $F(1, 1, 0, 1) = F(0, 0, 1, 0) = F(1, 0, 1, 0) =$
$= F(0, 0, 1, 1) = 0$.

6-§. Ikkilik qonuni

6.1-*ta'rif. Mulohazalar algebrasining $\mathcal{A}$ formulasida $\rceil$, $\wedge$, $\vee$ mantiq amallaridan boshqa mantiq amallari qatnasmasa va $\rceil$ amali qatnashsa, u faqat propozitsional o'zgaruvchilargagina tegishli bo'lsin, u holda $\mathcal{A}$ keltirilgan formula (forma) deyiladi.*

6.2-*lemma. Agar mulohazalar algebrasining $\mathcal{A}$ formulasi keltirilgan formula bo'lsa, u holda, mulohazalar algebrasining $\rceil\mathcal{A}$ formulaga teng kuchli keltirilgan formulasi mavjud.*

Isbot. Formula rangi bo'yicha matematik induksiya metodini qo'llaymiz. Formula rangi 0 ga teng bo'lsa, $\mathcal{A}$ formula propozitsional o'zgaruvchidan iborat bo'lib, isbot ravshan. Rangi k ($k \geq 1$) dan kichik formulalar uchun teorema tasdig'i to'g'ri bo'lsin, deb faraz qilamiz. $\mathcal{A}$ – rangi

k ga teng formula bo'lsin. Formula ta'rifiga ko'ra $\mathcal{A}$ – keltirilgan formula $B \wedge C$ yoki $B \vee C$ ko'rinishda bo'ladi. U holda, $\rceil\mathcal{A}$ formula $\rceil B \vee \rceil C$ yoki $\rceil B \wedge \rceil C$ formulalardan biriga teng kuchli bo'ladi. B va C formulalarning rangi k dan kichik bo'lganligi uchun, $\rceil B$ va $\rceil C$ larga mos ravishda teng kuchli bo'lgan keltirilgan B' va C' formulalar mavjud.

Demak, $\mathcal{A}$ formula $B' \vee C'$ yoki $B' \wedge C'$ keltirilgan formalardan biriga teng kuchli bo'ladi.

6.3-*teorema*. *Mulohazalar algebrasining ixtiyoriy $\mathcal{A}$ formulasiga teng kuchli keltirilgan formula mavjud.*

Isbot. Formula rangi bo'yicha matematik induksiya metodi bilan isbot qilinadi. Agar formulaning rangi 0 ga teng bo'lsa, u propozitsional o'zgaruvchi bo'lib, isbot ravshan.

Ixtiyoriy natural k uchun rangi k dan kichik formulaga teng kuchli keltirilgan formula mavjud bo'lsin. U holda, formula ta'rifiga ko'ra, $\mathcal{A}$ formula $\rceil B$, $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \Rightarrow C$, $B \Leftrightarrow C$ formulalardan biri ko'rinishida bo'ladi. $B \wedge C$, $B \vee C$ – keltirilgan formulalar, $\rceil B$ uchun esa 6.2 lemmaga asosan teng kuchli keltirilgan formula mavjud.

$B \Rightarrow C$ formulani $\rceil B \vee C$ formula bilan, $B \Leftrightarrow C$ formulani $(\rceil B \vee C) \wedge (B \vee \rceil C)$ formula bilan, bu formuladagi $\rceil B$, $\rceil C$ formulalarni 6.2. lemmaga asosan, teng kuchli keltirilgan formulalar bilan almashtiramiz. Natijada berilgan formulaga teng kuchli keltirilgan formula hosil bo'ladi. Shunday qilib, $\mathcal{A}$ formulaga teng kuchli keltirilgan formula mavjud.

$\mathcal{A}$ – keltirilgan formula, ya'ni $\mathcal{A}$ formulada $\rceil$, $\wedge$, $\vee$ – mantiq amallarigina qatnashib, $\rceil$ faqat propozitsional o'zgaruvchilargagina tegishli bo'lsin.

6.4-*ta'rif*. *Mulohazalar algebrasining $\mathcal{A}^*$ formulasi $\mathcal{A}$ formuladan konyunksiyani dizyunksiya bilan, dizyunksiyani esa* *konyunksiya bilan almashtirish natijasida hosil qilingan bo'lsa, u holda $\mathcal{A}^*$ va $\mathcal{A}$ formulalar o'zaro qo'shma formulalar deyiladi.*

6.5-***misol.*** $\mathcal{A} \equiv (X \vee Y) \wedge \neg X$ – formulaga $\mathcal{A}^* \equiv (X \wedge Y) \vee \vee \neg X$ formula qo'shma formula bo'ladi.

6.6-***teorema.*** *Agar $\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ formulalar teng kuchli formulalar bo'lsa, u holda $\mathcal{A}^*$ va $\mathcal{B}^*$ formulalar ham teng kuchli formulalar bo'ladi.*

Isbot. $\neg\mathcal{A}(X_1,..., X_n) \equiv \mathcal{A}^*(\neg X_1,..., \neg X_n)$ teng kuchlilikni formula rangi bo'yicha matematik induksiya usulini qo'llab, isbot qilish qiyin emas.

Faraz qilaylik, $\mathcal{A}(X_1,..., X_n) \equiv \mathcal{B}(X_1,..., X_n)$ bo'lsin.

U holda, $\mathcal{A}(\neg X_1,..., \neg X_n) \equiv \mathcal{B}(\neg X_1,..., \neg X_n)$ bo'lishi ravshan.

Demak, $\mathcal{A}^*(X_1,..., X_n) \equiv \neg\mathcal{A}(\neg X_1,..., \neg X_n) \equiv$
$\equiv \neg\mathcal{B}(\neg X_1,..., \neg X_n) \equiv \mathcal{B}^*(X_1,..., X_n)$.

Takrorlash uchun savollar

1. Mulohazalar algebrasining keltirilgan formulasi qanday formula?
2. Agar mulohazalar algebrasining F formulasi keltirilgan bo'lsa, u holda $\neg F$ haqidagi tasdiqni ayting.
3. Mulohazalar algebrasining ixtiyoriy formulasiga teng kuchli keltirilgan formula mavjudligi haqidagi teoremani isbotlang.
4. O'zaro qo'shma formulalar deb qanday formulalarga aytiladi?
5. Ikkilik qonunini ayting.

Mashqlar

1. Quyidagi formulalarga teng kuchli keltirilgan formulalarni hosil qiling:

1) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \vee B)$;
2) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow (C \Rightarrow A)$;

3) $((A \Leftrightarrow B) \wedge (\rceil A \Leftrightarrow \rceil B)) \Rightarrow ((A \vee B) \wedge (\rceil A \vee \rceil B))$;

4) $((A \Leftrightarrow \rceil B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow \rceil C)$;

5) $(A \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow C)$.

2. Quyidagi formulalarga qo'shma formulalarni aniqlang:

1) $\rceil(\rceil A \wedge B \wedge \rceil C)$;

2) $\rceil(\rceil A \wedge \rceil B)$;

3) $\rceil(\rceil A \wedge B \wedge \rceil C)$;

4) $\rceil(A\ 8\ \rceil B) \wedge \rceil(A \wedge C)$;

5) $\rceil(\rceil A\ 8\ \rceil B) \wedge \rceil(\rceil A \wedge C)$;

6) $\rceil(\rceil A \vee B) \vee \rceil(\rceil B \vee \rceil C)$;

7) $A \vee B \vee \rceil(\rceil A \vee \rceil B)$;

8) $\rceil(\rceil(A \vee B) \vee C) \vee \rceil(B \vee \rceil C)$;

9) $\rceil(\rceil(\rceil A \vee \rceil(\rceil B \vee \rceil C)) \vee (\rceil A \vee B)) \vee \rceil B$;

10) $\rceil(\rceil(\rceil A \vee B) \vee \rceil(\rceil B \vee B \vee C)) \vee (\rceil A \vee C)$.

3. 3.6 dagi asosiy tengkuchliliklarda qatnashgan formulalarga qo'shmalarini aniqlang va ular ham teng kuchli ekanligini isbotlang.

7-§. Normal formalar. Mukammal dizyunktiv normal forma (MDNF), mukammal konyunktiv normal forma (MKNF)

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ $(n \geq 1)$ mulohazalar algebrasining formulalari bo'lsin, u holda $(\ldots((\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2) \wedge \mathcal{A}_3)\ldots \mathcal{A}_n)$ formula $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ *formulalarning konyunksiyasi* deyiladi va $\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n$ orqali belgilanadi.

$(\ldots((\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \vee \mathcal{A}_3)\ldots \mathcal{A}_n)$ formula esa $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ *formulalarning dizyunksiyasi* deyiladi va $\mathcal{A}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{A}_n$ orqali belgilanadi.

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ formulalarning barchasi, konyunksiya va qavslar orqali hosil qilingan xar qanday formula $\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n$ formulaga teng kuchli. Xuddi shunday, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$

formulalarning barchasi, dizyunksiya va qavslar yordamida hosil qilingan xar qanday formula $\mathcal{A}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{A}_n$ formulaga teng kuchli bo'ladi (isbot qilib ko'ring).

7.1-***ta'rif.*** *Propozitsional o'zgaruvchilar yoki ularning inkorlaridan tuzilgan ixtiyoriy konyunksiya (dizyunksiya) elementar konyunksiya (dizyunksiya) deyiladi.*

7.2-***ta'rif.*** *Elementar konyunksiyalarning ixtiyoriy dizyunksiyasi – dizyunktiv normal forma (DNF), elementar dizyunksiyalarning ixtiyoriy konyunksiyasi – konyunktiv normal forma (KNF) deyiladi.*

7.3-***misol.*** X_1, X_2, X_3 – propozitsional o'zgaruvchilar berilgan bo'lsin, u holda $(X_1 \wedge X_2) \vee X_3$ – DNF ga, $(X_1 \vee X_2) \wedge \wedge (X_1 \vee X_3)$ – KNF ga misol bo'ladi.

7.4-***ta'rif.*** *$\mathcal{A}$ formula $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – propozitsional o'zgaruvchilardan tuzilgan elementar konyunksiya bo'lsin. Agar har bir propozitsional o'zgaruvchi, inkori ham hisoblanganda, $\mathcal{A}$ da bir martadan ortiq qatnashmasa, $\mathcal{A}$ – to'g'ri, kamida bir marta qatnashsa, $\mathcal{A}$ – to'liq, faqat bir marta qatnashsa, $\mathcal{A}$ – mukammal elementar konyunksiya deyiladi.*

To'g'ri va to'liq elementar konyunksiya mukammal elementar konyunksiya bo'lishi ravshan.

7.5-***misol.*** X_1, X_2, X_3 –propozitsional o'zgaruvchilar berilgan bo'lsin. U holda:

$\rceil X_1 \wedge X_2$ – to'g'ri;

$X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge \rceil X_1 \wedge \rceil X_2$ – to'liq;

$X_1 \wedge \rceil X_2 \wedge X_3$ – mukammal elementar konyunksiyalardir.

7.6-***ta'rif.*** *$\mathcal{A}$ formula $X_1, \ldots, X_n$ – o'zgaruvchilardan tuzilgan elementar dizyunksiya bo'lsin. Agar har bir propozitsional o'zgaruvchi, inkori ham hisoblanganda, $\mathcal{A}$ formulada bir martadan ortiq qatnashmasa, to'g'ri, kamida bir marta qatnashsa, to'liq, faqat bir marta qatnashsa, mukammal elementar dizyunksiya deyiladi.*

7.7-misol. X_1, X_2, X_3 – propozitsional o'zgaruvchilar berilgan bo'lsin. U holda

$X_1 \vee \rceil X_2$ – to'g'ri,

$\rceil X_1 \vee X_2 \vee \rceil X_3 \vee \rceil X_1$ – to'liq,

$X_1 \vee \rceil X_2 \vee X_3$ – mukammal elementar dizyunksiyalardir.

7.8-ta'rif. Turli mukammal elementar konyunksiya (dizyunksiya) lardan tuzilgan dizyunksiya (konyunksiya) mukammal diz'yunktiv (konyunktiv) normal forma MDNF (MKNF) deyiladi.

7.9-misol. X_1, X_2, X_3 – propozitsional o'zgaruvchilar berilgan bo'lsin. U holda

$(X_1 \wedge \rceil X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \rceil X_3) \vee (\rceil X_1 \wedge X_2 \wedge X_3)$ – MNDF;

$(X_1 \vee \rceil X_2 \vee X_3) \wedge (X_1 \vee X_2 \vee X_3)$ – MKNF bo'ladi.

7.10-ta'rif. Mulohazalar algebrasining $\mathcal{A}$ formulasiga teng kuchli DNF (KNF, MDNF, MKNF) $\mathcal{A}$ – formulaning DNF (KNF, MDNF, MKNF) si deyiladi.

7.11-teorema. Mulohazalar algebrasi ixtiyoriy formulasining DNF (KNF) si mavjud.

Isbot. Mulohazalar algebrasining ixtiyoriy $\mathcal{A}$ formulasi berilgan bo'lsin. Berilgan formulani keltirilgan formula deb qarashimiz mumkin. Isbotni matematik induksiya yordamida formula rangi bo'yicha olib boramiz. Agar $\mathcal{A}$ rangi 0 ga teng bo'lsa, $\mathcal{A}$ – propozitsional o'zgaruvchi bo'lib, isbot ravshan. Rangi n dan kichik bo'lgan barcha formulalar uchun teorema o'rinli deb faraz qilamiz. U holda $\mathcal{A}$ faqat $B \vee C$ yoki $B \wedge C$ ko'rinishda bo'lishi mumkin. Bu yerda B, C - formulalar induksiya faraziga ko'ra DNF dir. Demak, $B \vee C$ – DNF bo'ladi.

Agar $\mathcal{A}$ – formula $B \wedge C$ ko'rinishda bo'lsa, B – DNF bo'lganligidan $B = B_1 \vee B_2$ bo'ladi. U holda

$B \wedge C \equiv (B_1 \vee B_2) \wedge C \equiv (B_1 \wedge C) \vee (B_2 \wedge C)$.

$B_1 \wedge C$ va $B_2 \wedge C$ – formulalarning ranglari n dan kichik ekanligi ravshan. Demak ularning DNF si mavjud.

$B_1 \wedge C$ ning DNF sini B_3, $B_2 \wedge C$ ning DNF sini B_4 deb faraz qilsak, u holda $B \wedge C \equiv B_3 \vee B_4$ – DNF dir.

$\mathcal{A}$ formulaning KNF si mavjudligini yuqoridagidek isbotlash yoki ikkilik qonunidan foydalanib keltirib chiqarish mumkin.

7.12-***teorema.*** *Mulohazalar algebrasining ixtiyoriy* $\mathcal{A}$ *- aynan yolg'on bo'lmagan (aynan rost bo'lmagan) formulasining MDNF (MKNF)si mavjud.*

Isbot. 7.11 teoremaga asosan $\mathcal{A}$–DNF. Isbotni formulaning rangi bo'yicha matematik induksiya usuli bilan bajaramiz:

$\mathcal{A}$ ning rangi 0 ga teng bo'lsin. Aniqlik uchun $\mathcal{A}$ - X_1 dan iborat bo'lsin. U holda

$$X_1 \equiv X_1 \wedge 1 \equiv X_1 \wedge (X_2 \vee \neg X_2) \equiv (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge \neg X_2) \equiv$$
$$\equiv (X_1 \wedge X_2) \wedge 1 \vee (X_1 \wedge \neg X_2) \wedge 1 \equiv ((X_1 \wedge X_2) \wedge (X_3 \vee$$
$$\vee \neg X_3)) \vee ((X_1 \wedge \neg X_2) \wedge (X_3 \vee \neg X_3)) \equiv (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee$$
$$\vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge$$
$$\wedge \neg X_3) \equiv \ldots \equiv (X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n) \vee \ldots \vee$$
$$\vee (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \ldots \wedge \neg X_n) - \text{MDNF}.$$

Rangi n dan kichik barcha formulalar uchun teorema isbot qilingan, deb faraz qilamiz va rangi n ga teng formula uchun teoremani isbot qilamiz. $\mathcal{A}$ – rangi n ga teng formula bo'lsin. U holda $\mathcal{A}$ faqat $B \vee C$ ko'rinishda bo'lishi mumkin.

Ravshanki, B va C larning ranglari n dan kichik. Demak, B va C lar MDNF lardir. $X \vee X \equiv X$ tengkuchlilikka asosan $B \vee C$ formulada bir xil mukammal elementar konyunksiyalardan bittadan qoldirsak, $B \vee C$ – MDNF bo'ladi.

$\mathcal{A}$ formulaning MKNF i mavjudligi ikkilik qonunidan kelib chiqadi.

Haqiqatan ham, $\mathcal{A}^*$ formulaning MDNF si $\mathcal{B}$ formula bo'lsa, u holda $\mathcal{A} \equiv (\mathcal{A}^*)^* \equiv \mathcal{B}^*$ – MKNF dir.

7.13-*izoh*. Agar mulohazalar algebrasining $\mathcal{A}$ formulasini ikki qiymatli funksiya sifatida qarasak, u holda $\mathcal{A}$ formulaning MDNF sini (MKNF sini) I.5-§ dagi usuldan foydalanib topish mumkin.

7.14-*misol*. $X_1 \wedge (X_2 \vee X_3)$ formulaning MDNF sini toping. Avval $X_1 \wedge (X_2 \vee X_3)$ ning DNF sini topaylik.

3.6 dagi 20-tengkuchlilikka asosan:

$X_1 \wedge (X_2 \vee X_3) \equiv (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3)$.

$X_1 \wedge X_2$ va $X_1 \wedge X_3$ larning MDNF larini 3.6 da keltirilgan tengkuchliliklar yordamida topamiz:

$X_1 \wedge X_2 \equiv X_1 \wedge X_2 \wedge 1 \equiv X_1 \wedge X_2 \wedge (X_3 \vee \rceil X_3) \equiv$
$\equiv (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \rceil X_3)$.

$X_1 \wedge X_3 \equiv X_1 \wedge 1 \wedge X_3 \equiv X_1 \wedge (X_2 \vee \rceil X_2) \wedge X_3 \equiv$
$\equiv (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \rceil X_2 \wedge X_3)$.

Bundan,

$(X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3) \equiv (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge$
$\wedge X_2 \wedge \rceil X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \rceil X_2 \wedge X_3) \equiv$
$(X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \rceil X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \rceil X_3)$ – MDNF. Demak, $X_1 \wedge (X_2 \vee X_3)$ formulaning MDNFsi $(X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \rceil X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \rceil X_3)$ – formuladan iborat ekan.

7.15-*misol*. $X_1 \vee (\rceil X_2 \wedge X_3)$ formulaning MKNF sini toping.

3.6 dagi asosiy tengkuchliliklar yordamida teng kuchli almashtirishlar bajaramiz:

$X_1 \vee (\rceil X_2 \wedge X_3) \equiv (X_1 \vee \rceil X_2) \wedge (X_1 \vee X_3)$. Bu yerda
$X_1 \vee \rceil X_2 \equiv X_1 \vee \rceil X_2 \vee 0 \equiv X_1 \vee \rceil X_2 \vee (\rceil X_3 \wedge X_3) \equiv$
$\equiv (X_1 \vee \rceil X_2 \vee \rceil X_3) \wedge (X_1 \vee \rceil X_2 \vee X_3)$ va
$X_1 \vee X_3 \equiv X_1 \vee 0 \vee X_3 \equiv X_1 \vee (X_2 \wedge \rceil X_2) \vee X_3 \equiv$
$\equiv (X_1 \vee X_2 \vee X_3) \wedge (X_1 \vee \rceil X_2 \vee X_3)$. U holda

$X_1 \vee (\neg X_2 \wedge X_3) \equiv (X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3) \wedge (X_1 \vee \neg X_2 \vee$
$\vee X_3) \wedge (X_1 \vee X_2 \vee X_3)$ – MKNF.

Takrorlash uchun savollar

1. Mulohazalar algebrasi formulalarining inkori, konyunksiyasi, dizyunksiyasi deb nimaga aytiladi?
2. Elementar konyunksiya (dizyunksiya) nima?
3. DNF va KNF lar ta'rifini keltiring.
4. To'g'ri, to'liq, mukammal elementar konyunksiya (dizyunksiya) lar birining ikkinchisidan farqini tushuntiring.
5. MKNF va MDNF larga ta'rif bering.
6. Mulohazalar algebrasining DNF (KNF) si nima?
7. Mulohazalar algebrasi ixtiyoriy formulasining DNF (KNF) si mavjudligini isbotlang.
8. Mulohazalar algebrasi ixtiyoriy formulasining MDNF (MKNF) si mavjudligini isbotlang.

Mashqlar

1. Quyidagi formulalarni teng kuchli almashtirishlar yordamida DNF ga keltiring:
1) $\neg(A \vee C) \wedge (A \Rightarrow B)$;
2) $(A \Leftrightarrow B) \wedge \neg(C \Rightarrow R)$;
3) $(A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge (A \vee C)$;
4) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg C)$;
5) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg C) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B))$.
2. Yuqoridagi misolda keltirilgan formulalarni teng kuchli almashtirishlar yordamida KNF ga keltiring.
3. Quyidagi formulalarning MDNF (MKNF) sini teng kuchli almashtirishlar hamda rostlik jadvallari yordamida toping:
1) $A \wedge (A \Rightarrow B)$;
2) $(\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A) \wedge \neg(A \wedge B \Rightarrow \neg B)$;

3) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;
4) $(A \Rightarrow \neg C) \Rightarrow B \wedge C$;
5) $(A \vee \neg \Rightarrow A \wedge C) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg A) \vee B \wedge \neg C$;
6) $(A \wedge B \Rightarrow B \wedge C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow B))$;
7) $(\neg A \Rightarrow C) \Rightarrow \neg(\neg B \Rightarrow \neg A)$;
8) $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \wedge C \Rightarrow A \wedge C)$;
9) $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (\ldots \Rightarrow (A_{n-1} \Rightarrow A_n)\ldots))$;
10) $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \Rightarrow B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n$.

4. Mulohazalar algebrasining har qanday F formulasi inkori $\neg F$ faqat va faqat shu formula MDNF siga kirmaydigan mukammal konyunktiv formalar dizyunksiyasidan iborat ekanligini isbotlang.

5. Mulohazalar algebrasining har qanday F formulasi inkori $\neg F$ faqat va faqat shu formula MKNF siga kirmaydigan mukammal dizyunktiv formalar konyunksiyasidan iboratligini isbotlang.

6. Ikkilik prinsipi va 4, 5-mashqlardagi tasdiqlardan foydalanib quyidagi MDNF lardan MKNF larni hosil qiling:

1) $F = (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge$
$\wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$;
2) $F = (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$;
3) $F = (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$;
4) $F = (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge$
$\wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$;
5) $F = (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$;
6) $F = (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D) \vee$
$\vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge$
$\wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge D)$.

7. Ikkilik prinsipi va 4, 5-mashqlardagi tasdiqlardan foydalanib, quyidagi MKNF lardan MDNF larni hosil qiling:

1) $F = (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge$
$\wedge (A \vee B \vee C)$;

2) $F = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$;

3) $F = (\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B)$;

4) $F = (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee$
$\vee C) \wedge (A \vee B \vee C)$;

5) $F = (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C)$;

6) $F = (\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D) \wedge (\neg A \vee B \vee C \vee D) \wedge$
$\wedge (A \vee \neg B \vee C \vee D) \wedge (A \vee B \vee \neg C \vee D) \wedge (A \vee B \vee C \vee$
$\vee \neg D) \wedge (A \vee B \vee C \vee D)$.

8-§. Mulohazalar algebrasining qo'llanilishi

Hozirgi kunda xalq xo'jaligining, inson faoliyatining har qanday sohasini EHM siz tasavvur qilib bo'lmaydi. Ilmiy-texnika inqilobining yuz berishida matematik mantiqning katta hissasi bor. XX asrning boshlaridan boshlab tez rivojlana boshlagan matematik mantiqdan yangi mustaqil sohalar ajralib chiqdi: avtomatlar nazariyasi, rele-kontakt va elektron sxemalar sintezi, algoritmlar nazariyasi shular jumlasidandir. O'tgan asrning o'ttizinchi yillariga kelib EHM ning matematik ta'minoti ishlab chiqildi, qirqinchi yillarning borshlarida esa birinchi EHM lar ishga tushirildi. Avtomatik boshqarish qurilmalari va elektron hisoblash mashinalarida yuzlab va minglab rele-kontakt, elektron-lampa, yarimo'tkazgich va magnit elementlarini o'z ichiga olgan rele-kontakt va elektron-lampa sxemalar uchraydi. Bu sxemalar avtomatik boshqarish qurilmalari va EHM lari tarkibida benihoya katta tezlikda juda murakkab operatsiyalar bajarishda bevosita ishtirok etadi va avtomatlarning barcha ish faoliyatini boshqarib turadi. Rele-kontakt va elektron sxemalarni analiz va sintez qilishda mulohazalar algebrasi muhim ahamiyatga ega. Har qanday sxemaga mulohazalar algebrasining biror formulasini mos qo'yish mumkin. Va aksincha, mulohazalar algebrasining har bir formulasini rele – kontakt sxema (RKS) orqali ifoda qilish mumkin. RKS bilan mulohazalar algebrasining formulalari orasidagi bunday munosabat murakkab RKS larni mulohazalar algebrasining formulalari yordamida soddalashtirish imkoniyatini beradi. Quyida RKS larini mulohazalar algebrasining formulalari yordamida ifodalash masalasini ko'rib chiqamiz.

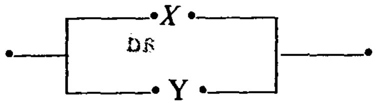
Kontaktni shartli ravishda

yoki ——•——, yoki —— ——, yoki ——• •——

ko'rinishda belgilaymiz. Kontakt yopiq (tok o'tkazadigan) yoki ochiq (tok o'tkazmaydigan) holatda bo'lishi mumkin. Kontaktning yopiq holatiga 1 ni, ochiq holatiga 0 ni mos qo'yamiz.

Barcha kontaktlar orasida doimo tok o'tkazadigan (doimo yopiq) hamda butunlay tok o'tkazmaydigan (doimo ochiq) kontaktlar mavjuddir. Ularni ham mos ravishda 1 va 0 bilan belgilaymiz va hamda ——•——, —— —— ko'rinishda ifodalaymiz.

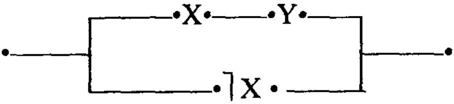
Shunday qilib, agar mulohazaning mazmunini e'tiborga olmasak, har bir mulohazaga ma'lum bir kontaktni mos qo'yishimiz mumkin ekan. Biz o'zgaruvchi kontaktlar bilan ish ko'rganimiz uchun ularni X, Y, Z,... harflar bilan belgilaymiz. U holda ikkita X va Y mulohazalarning konyunksiyasiga kontaktlarni ketma-ket ulash natijasida hosil bo'ladigan ——•X•——•Y•—— sxemani, X va Y mulohazalarning dizyunksiyasiga kontaktlarni parallel ulash natijasida hosil bo'ladigan quyidagi



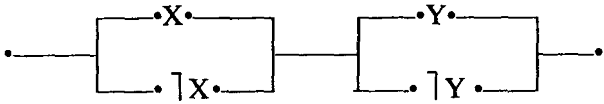
sxemani mos qo‘yamiz.

Ilgari isbot qilingan 6.3 teoremaga asosan mulohazalar algebrasining har qanday formulasini faqat $\rceil$, $\wedge$, $\vee$ amallar orqali ifodalash mumkin. Demak, mulohazalar algebrasining har bir formulasi RKS orqali ifoda qilinishi va aksincha, har qanday RKS ni mulohazalar algebrasining formulasi orqali ifodalash mumkin ekan.

8.2-*misol.* Mulohazalar algebrasining $(X \wedge Y) \vee \rceil X$ - formulasiga quyidagi rele-kontakt sxemasi mos keladi:



8.3-*misol.*



sxemaga $(X \vee \rceil X) \wedge (Y \vee \rceil Y)$ formula mos keladi.

8.4-*misol.* Ovoz berish schetchigi.

Uch kishidan iborat komissiya biror bir masalani hal qilish uchun ovoz berayotgan bo‘lsin. Masalaning biror yechimi uchun komissiya a’zolari oldilaridagi tugmachani bosadilar. Ikkita yo uchta tugmacha bosilsa, chiroq yonadi va shu yechim qabul qilinadi. Aks holda, chiroq yonmaydi va yechim qabul qilinmaydi.

Ovoz berish schetchigining RKS sini tuzamiz. Bu sxema uch o‘zgaruvchili bo‘lishi ravshan. Uch o‘zgaruvchili RKS mulohazalar algebrasining uch o‘zgaruvchili formulasi, bu formula esa o'z navbatida $F(X, Y, Z)$ – funksiyadan iborat bo'lib, uning qiymatlari quyidagi jadval orqali berilishi mumkin:

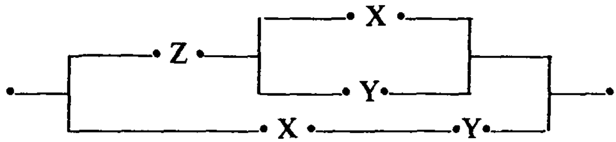
X	Y	Z	F
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Bu funksiyani mulohazalar algebrasining MDNF si orqali ifoda qilaylik:

$F(X, Y, Z) \equiv X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge \neg Y \wedge Z \vee \neg X \wedge Y \wedge Z \vee$ $\vee X \wedge Y \wedge \neg Z$. Teng kuchli almashtirishlar yordamida bu formulani soddalashtiramiz:

$F(X, Y, Z) \equiv X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge \neg Y \wedge Z \vee \neg X \wedge Y \wedge Z \vee \vee X \wedge Y \wedge \neg Z \equiv (X \wedge U \wedge Z \vee X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z \vee \neg X \vee \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge Y \wedge \neg Z) \equiv ((X \wedge Z) \wedge (Y \vee \neg Y)) \vee \vee (Y \wedge Z \wedge (X \vee \neg X)) \vee (X \wedge Y \wedge (Z \vee \neg Z)) \equiv X \wedge Z \vee Y \wedge Z \vee \vee X \wedge Y \equiv (Z \wedge (X \vee Y)) \vee X \wedge Y.$

Hosil qilingan formula uchun RKS ni tuzamiz:

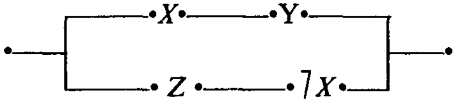


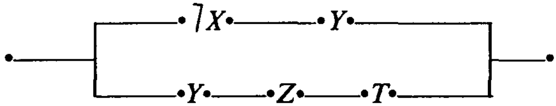
Takrorlash uchun savollar

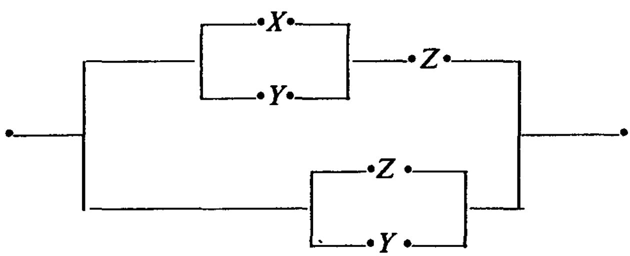
1. Mulohazalar algebrasining texnika, xalq xo'jaligidagi tadbiqiga misollar keltiring.
2. Rele–kontakt sxemasi qanday sxema?

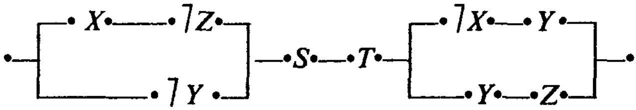
Mashqlar

1. Quyidagi rele-kontakt sxemalariga mos keluvchi mulohazalar algebrasining formulasini aniqlang:

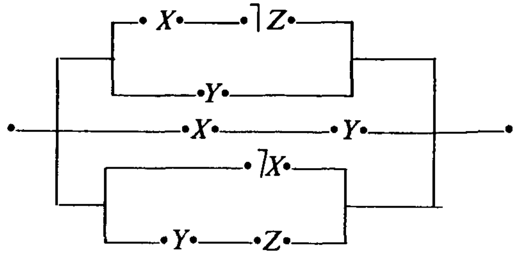
1)


2)


3)


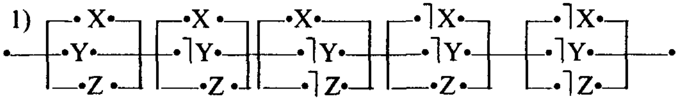
4)


5)

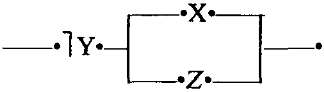


2. Quyidagi rele-kontakt sxemalarining ekvivalentligini isbotlang:

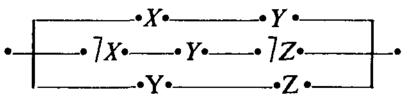
1)



va

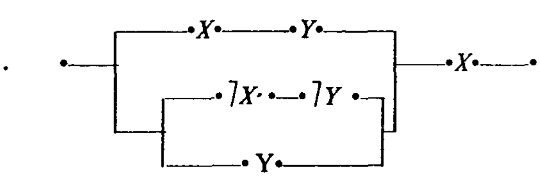


2)

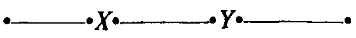


va

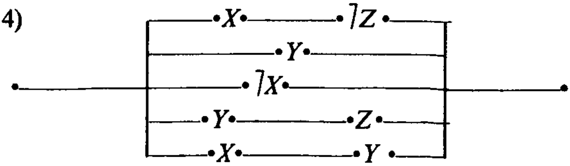
3)



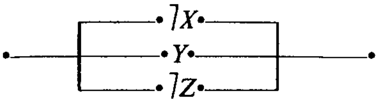
va



4)

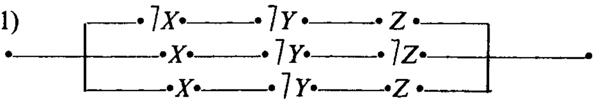


va

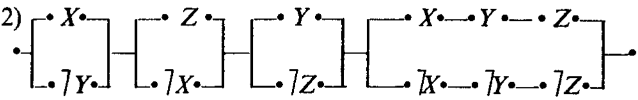


3. Quyidagi rele-kontakt sxemalarini soddalashtiring:

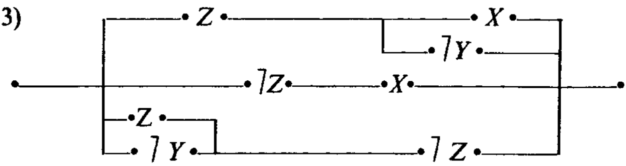
1)



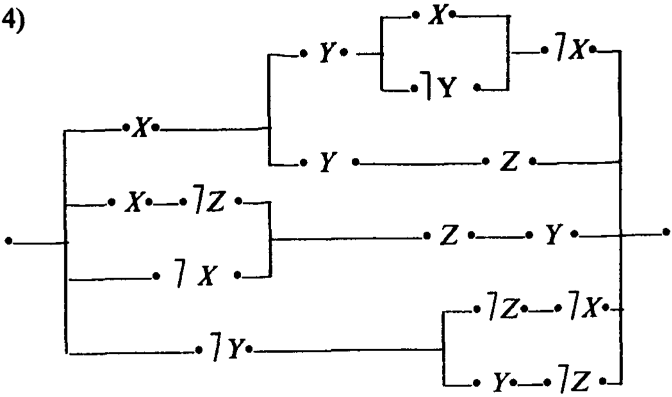
2)



3)



4)



II BOB

MULOHAZALAR HISOBI

Mulohazalar hisobi (MH) aksiomatik nazariya bo'lib, mulohaza tushunchasiga hech qanday mazmun berilmaydi. Mulohazalarni odatdagidek lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilaymiz. Mulohazalarga qo'yiladigan talab bitta, u ham bo'lsa, mulohazalar hisobining aksiomalarini qanoatlantirishi kerak. Mulohazalar algebrasini mulohazalar hisobining interpretatsiyalaridan biri sifatida qarash mumkin.

1-§. Mulohazalar hisobida formula tushunchasi

Mulohazalar hisobini qurish uchun avval uning alfaviti, ya'ni MH da ishlatiladigan belgilar sanab chiqiladi, so'ngra shu belgilarning ketma-ketligidan tuzilgan so'z – formula tushunchasi va nihoyat, keltirib chiqariluvchi formulalar ta'riflanadi.

MH ning alfaviti uchta tur belgilardan iborat:

1. $A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \ldots$ – o'zgaruvchi mulohazalar.
2. $\rceil, \&, \vee, \Rightarrow$ – mantiqiy bog'lovchilar.
3. (,) - chap va o'ng qavslar.

MH da boshqa belgilar yo'q.

1-*ta'rif*. 1. $A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \ldots$ *lar formuladir*.

2. Agar $\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ lar formulalar bo'lsa, u holda $(\rceil \mathcal{A})$, $(\mathcal{A} \& \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ – lar ham formuladir.

3. Boshqa usulda formula hosil qilib bo'lmaydi.

O'zgaruvchi mulohazalarni elementar formulalar deb ataymiz.

Mulohazalar hisobida formulaosti tushunchasi mulohazalar algebrasidagidek kiritiladi. Qavslarni tashlab yuborish tartibi ham mulohazalar algebrasidagidek. Shu sababli, bular ustida to'xtalib o'tmaymiz.

Takrorlash uchun savollar

1. Mulohazalar hisobi qanday matematik nazariya?
2. Mulohazalar hisobi alfaviti nimalardan iborat?
3. Mulohazalar hisobida formula tushunchasiga ta'rif bering.
4. Mulohazalar hisobida formulaosti tushunchasiga ta'rif bering.

2-§. Keltirib chiqariluvchi formulalar

Mulohazalar hisobini qurishning keyingi bosqichi isbotlanuvchi formulalarni ajratib olishdan iborat. Avval aksiomalarni bayon qilamiz, keyin aksiomalardan keltirib chiqariluvchi, ya'ni isbotlanuvchi formulalarni keltirib chiqarish qoidalarini beramiz.

2.1. *Mulohazalar hisobining aksiomalari*

Mulohazalar hisobining aksiomalari 4 ta guruhga bo'lingan ro'yxatdagi 11 aksiomadan iborat.

I ***guruh aksiomalari:***

I_1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

I_2. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

II ***guruh aksiomalari:***

II_1. $A \,\&\, B \Rightarrow A$.

II_2. $A \,\&\, B \Rightarrow B$.

II_3. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \,\&\, C))$.

III ***guruh aksiomalari:***

III_1. $A \Rightarrow A \vee B$.

III_2. $B \Rightarrow A \vee B$.

III_3. $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$.

IY ***guruh aksiomalari:***

IY_1. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\rceil B \Rightarrow \rceil A)$.

IY_2. $A \Rightarrow \rceil\rceil A$.

IY_3. $\rceil\rceil A \Rightarrow A$.

2.2. *Keltirib chiqarish qoidalari*

1. ***O'rniga qo'yish qoidasi.***

MH ning tarkibida A o'zgaruvchi mulohaza qatnashgan $\mathcal{A}(A)$ hamda ixtiyoriy B formulalari berilgan bo'lsin. Agar $\mathcal{A}(A)$ mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi (k.ch.) formulasi bo'lsa, u holda $\mathcal{A}(B)$ formula ham mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi bo'ladi.

Bu qoida qisqacha sxematik ravishda

$$\frac{\mathcal{A}(A)}{\mathcal{A}(B)}$$

ko'rinishda belgilanadi.

2. *Xulosa chiqarish (Modus ponens –MP) qoidasi.*

Agar $A \Rightarrow B$ va A formulalar MH ning keltirib chiqariluvchi formulalari bo'lsa, u holda B formula ham MH ning keltirib chiqariluvchi formulasidir. Bu qoida qisqacha quyidagi ko'rinishda belgilanadi:

$$\frac{A,\ A \Rightarrow B}{B}$$

2.3 - ***ta'rif.*** *1^0. Har bir aksioma mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasidir.*

2^0. Mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasiga o'rniga qo'yish qoidasini qo'llash natijasida hosil qilingan formula mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasidir.

3^0.Mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulalariga xulosa chiqarish qoidasini qo'llash natijasida hosil qilingan formula mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasidir.

4^0.Mulohazalar hisobining boshqa keltirib chiqariluvchi formulalari yo'q.

2.4-*ta'rif.* *Agar formulalarning chekli ketma-ketligi* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *da har bir* A_i $(i=\overline{1,n})$ *formula yo mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi, yo o'zidan oldingi formulalardan o'rniga qo'yish yoki xulosa chiqarish qoidalari yordamida hosil qilingan formulalar bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik oxirgi* A_n *formulaning formal isboti, n esa isbotning uzunligi deyiladi.*

Mulohazalar hisobining aksiomalari isbotining uzunligi 1 ga teng isbotlanuvchi formulalar sifatida qaralishi mumkin. Mulohazalar hisobining isbot uzunligi birdan katta bo'lgan isbotlanuvchi formulalarini *teoremalar* deb ataymiz.

«$\mathcal{A}$ formula mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi» degan jumlani qisqacha $\vdash \mathcal{A}$ belgi orqali ifodalaymiz.

2.5-*teorema.* $\vdash A \Rightarrow A$.

Isbot. Quyidagi ketma-ketlikni qaraylik:

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.
2. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$.
3. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$.
4. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$.
5. $A \Rightarrow A$.
6. $A \Rightarrow A$.

Bu ketma-ketlik $A \Rightarrow A$ formulaning formal isboti ekanligini ko'rish qiyin emas. Haqiqatan ham,

$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ formula I_1 aksioma;

$(A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$ formula I_2

aksiomadagi C ni A bilan almashtirish natijasida hosil qilingan;

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ formula 2-formulaga MP qoidasini qo'llash natijasida hosil qilingan;

$(A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ formula o'zidan oldingi formulada B ni $B \Rightarrow A$ formula bilan almashtirish natijasida hosil qilingan;

$A \Rightarrow A$ formula 4-formulaga MP qoidasini qo'llash natijasida hosil qilingan;

$A \Rightarrow A$ formula A ni A bilan almashtirish natijasida hosil qilingan.

Bundan keyin mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasini $\mathcal{R}$ xarfi, $\rceil\mathcal{R}$ ni $\mathcal{F}$ harfi bilan belgilab olamiz.

2.6-***teorema***. *$\mathcal{A}$ mulohazalar hisobining ixtiyoriy formulasi bo'lsin. U holda $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{R}$ mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi bo'ladi, ya'ni $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{R}$.*

Isbot. 1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

2. $\mathcal{R} \Rightarrow (B \Rightarrow \mathcal{R})$.

3. $B \Rightarrow \mathcal{R}$.

4. $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{R}$.

Bu ketma-ketlik teoremaning formal isbotidir. Haqiqatan ham, 1-formula I_1 aksioma. 2-formula 1-formuladan A ni $\mathcal{R}$ bilan almashtirish natijasida hosil qilingan. 3-formula 2-formuladan MP qoida yordamida hosil qilingan. 4-formula esa 3-formulada B ni $\mathcal{A}$ formula bilan almashtirish natijasida hosil qilingan.

2.7 - ***teorema***. $\vdash \mathcal{F} \Rightarrow \rceil\rceil A$.

Isbot. 1. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\rceil B \Rightarrow \rceil A)$.

2. $(\rceil A \Rightarrow B) \Rightarrow (\rceil B \Rightarrow \rceil\rceil A)$.

3. $(\rceil A \Rightarrow \mathcal{R}) \Rightarrow (\rceil\mathcal{R} \Rightarrow \rceil\rceil A)$.

4. $\rceil\mathcal{R} \Rightarrow \rceil\rceil A$.

5. $\mathcal{F} \Rightarrow \rceil\rceil A$.

Takrorlash uchun savollar

1. Mulohazalar hisobining aksiomalarini ayting.
2. Keltirib chiqarish qoidalarini keltiring.
3. Mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasiga ta'rif bering.
4. Formulaning formal isboti nima?
5. Isbotning uzunligi qanday aniqlanadi?

3-§. Gipotezalardan keltirib chiqarish Deduksiya teoremasi

$\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_n$ (1) formulalar ro'yxati berilgan bo'lsin. $\mathcal{B}$ formulaning yuqorida keltirilgan ro'yxatdan keltirib chiqarilishi tushunchasini kiritamiz. (1) ro'yxatni gipotezalar yoki farazlar ro'yxati deb ataymiz.

3.1- ***ta'rif.*** *$\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_n$ (1) gipotezalar berilgan bo'lsin.*

1. Har bir $\mathcal{A}_i$ $(i=\overline{1,n})$ formula (1) ro'yxatdan keltirib chiqariluvchi formuladir.

2. Mulohazalar hisobining har qanday keltirib chiqariluvchi formulasi (1) ro'yxatdan keltirib chiqariluvchi formuladir.

3. Agar $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$ formulalar (1) ro'yxatdan keltirib chiqariluvchi formulalar bo'lsa, $\mathcal{B}$ formula ham (1) ro'yxatdan keltirib chiqariluvchi formuladir.

Agar (1) ro'yxat mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulalaridan iborat bo'lsa, u holda, (1) ro'yxatdan keltirib chiqariluvchi formulalar sinfi mulohazalar hisobining keltirib chiqaruvchi formulalari sinfi bilan bir xil bo'ladi.

Agar (1) ro'yxatdan $\mathcal{B}$ formula keltirib chiqariluvchi formula bo'lsa, $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_n\ \vdash\mathcal{B}$ ko'rinishda yozamiz. (1)

ro‘yxat bo‘sh to‘plam bo‘lsa, $\vdash \mathcal{B}$ mulohazalar hisobiing keltirib chiqariluvchi formulasi hosil bo‘ladi.

3.2 - ***Deduksiya teoremasi.*** *Agar $\mathcal{A}_1,...,\mathcal{A}_n (1)$ ro‘yxatdan $\mathcal{B}$ formula keltirib chiqarilsa, u holda*

$$\mathcal{A}_1 \Rightarrow (\mathcal{A}_2 \Rightarrow (...(\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B})...))$$

formula mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasidir.

Avval $\mathcal{A}_1,...,\mathcal{A}_n \vdash \mathcal{B}$ bo‘lsa, $\mathcal{A}_1,...,\mathcal{A}_{n-1} \vdash \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}$ ekanligini isbot qilamiz.

Isbotni matematik induksiya usuli bilan olib boramiz.

Faraz qilaylik, $\mathcal{B}$ mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi bo‘lsin. U holda 2.6 teoremaga asosan ixtiyoriy $\mathcal{A}$ formula uchun $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ xususan, $\vdash \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}$. Demak, $\mathcal{A}_1,...,\mathcal{A}_{n-1} \vdash \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}$.

Endi, $\mathcal{B}$ formula $\mathcal{A}_1,...,\mathcal{A}_n$ formulalardan biri bo‘lsin. Aniqlik uchun $\mathcal{B}$ formula $\mathcal{A}_i$ $(i \in \{1,..., n\})$ formuladan iborat bo‘lsin. U holda, I_1 aksiomaga ko‘ra $\vdash \mathcal{A}_i \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}_i)$. $\mathcal{B}$ ni $\mathcal{A}_n$ bilan almashtirsak $\mathcal{A}_i \Rightarrow (\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A}_i)$.

Hosil bo‘lgan formula mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi bo‘lganligi sababli $\mathcal{A}_1,..., \mathcal{A}_n$ ro‘yxatdan keltirib chiqariluvchi formuladir. $\mathcal{A}_i$ formula esa ro‘yxatda bor, demak, u ham berilgan ro‘yxatdan keltirib chiqariluvchi formula bo‘ladi. Bundan, MP qoidaga ko‘ra $\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A}_i$ ham berilgan ro‘xhatdan keltirib chiqariluvchi formuladir, ya’ni $\mathcal{A}_1,...,\mathcal{A}_{n-1} \vdash \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A}_i$. Endi, faraz qilaylik, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ formulalar uchun tasdiq to‘g‘ri bo‘lsin, ya’ni $\mathcal{A}_1,...,\mathcal{A}_{n-1} \vdash \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A}$ va $\mathcal{A}_1,...,\mathcal{A}_{n-1} \vdash \mathcal{A}_n \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ bo‘lsin. U holda $\mathcal{A}_1,...,\mathcal{A}_{n-1} \vdash \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}$ bo‘lishini isbot qilamiz. I_2 aksiomada A ni $\mathcal{A}_n$ bilan, B ni $\mathcal{A}$ bilan, C ni $\mathcal{B}$ bilan almashtirsak,

$(\mathcal{A}_n \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})) \Rightarrow ((\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}))$ hosil bo‘ladi. MP qoidani ikki marta qo‘llasak, $\mathcal{A}_1,...,\mathcal{A}_{n-1} \vdash \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}$ ga ega bo'lamiz. Shunday qilib, $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_n \vdash \mathcal{B}$ bo'lsa, u holda $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_{n-1} \vdash \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}$ bo'lishini isbot qildik. Bu tasdiqni hosil bo'lgan ifodaga yana bir marta qo'llasak $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_{n-2} \vdash \mathcal{A}_{n-1} \Rightarrow (\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B})$ hosil bo'ladi. Chekli qadamdan so'ng $\vdash \mathcal{A}_1 \Rightarrow (\mathcal{A}_2 \Rightarrow (\dots (\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B})\dots)$ hosil bo'ladi.

3.3-***natija***. *$n = 1$ bo'lganda deduksiya teoremasidan, $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ bo'lsa, $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ekanligi kelib chiqadi.*

Takrorlash uchun savollar

1. Gipotezalar deb nimalarga aytiladi?
2. Gipotezalar ro'yxatidan keltirib chiqariluvchi formula deb nimaga aytiladi?
3. Deduksiya teoremasini isbotlang.
4. 3.3 natijani isbotlang.

4-§. Hosilaviy keltirib chiqarish qoidalari

1. Sillogizm qoidasi

Agar $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ va $\mathcal{B} \Rightarrow C$ formulalar keltirib chiqariluvchi formulalar bo'lsa, u holda $\mathcal{A} \Rightarrow C$ ham keltirib chiqariluvchi formuladir.

Bu qoida qisqacha $\dfrac{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B},\ \mathcal{B} \Rightarrow C}{\mathcal{A} \Rightarrow C}$ ko'rinishda yoziladi.

Isbot. $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \Rightarrow C$, $\mathcal{A}$ ro'yxatga MP qoidani ikki marta qo'llasak, C ro'yxatdan keltirib chiqariluvchi ekanligini ko'ramiz. Demak, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \Rightarrow C$, $\mathcal{A} \vdash C$. U holda deduksiya teoremasiga ko'ra:

$$\vdash (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow ((\mathcal{B} \Rightarrow C) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow C)).$$

Agar $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ va $\mathcal{B} \Rightarrow C$ formulalar, mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulalari bo'lsa, u holda ikki marta MP qoidani qo'llab, $\mathcal{A} \Rightarrow C$ ham mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi ekanligini hosil qilamiz.

2. Shartlarning o'rnini almashtirish qoidasi:

$$\frac{\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow C)}{\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow C)}$$

Isbot. $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow C)$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ ro'yxatni qaraylik. MP qoidasini ikki marta qo'llasak, C formula keltirilgan ro'yxatdan keltirib chiqariluvchi ekanligi kelib chiqadi. Ya'ni, $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow C), \mathcal{B}, \mathcal{A} \vdash C$.

U holda, deduksiya teoremasiga ko'ra

$\vdash (\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow C)) \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow C))$

hosil bo'ladi. Demak,

$$\frac{\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow C)}{\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow C)}$$

3. Qo'sh inkorni tashlash (yo'qotish) qoidasi

$$\frac{\mathcal{A} \Rightarrow \neg\neg\mathcal{B}}{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}, \qquad \frac{\neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}$$

Isbot. IY_2, IY_3 aksiomalarga asosan $\vdash \neg\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$ va $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \neg\neg\mathcal{A}$. Endi qoidalarni isbot qilish uchun sillogizm qoidasini qo'llash yetarli. Haqiqatan ham, $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \neg\neg\mathcal{B}$, $\vdash \neg\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$ bo'lsa, sillogizm qoidasiga ko'ra $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. Xuddi shunday, $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \neg\neg\mathcal{A}$ va $\vdash \neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ bo'lsa, u holda $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ bo'ladi.

4. Konyunksiyani kiritish qoidasi:

$$\frac{\mathcal{A}, \mathcal{B}}{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}$$

Isbot. II_3 aksiomaga ko'ra

$\vdash (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow ((\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}))$.

Bu yerda $\mathcal{R}$ – mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi. I_1 aksiomaga ko'ra,

$\vdash \mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{A})$ va $\vdash \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{B})$.

Demak, $B \Rightarrow \mathcal{A}$ formula B dan keltirib chiqariluvchi, $\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{B}$ esa $\mathcal{B}$ dan keltirib chiqariluvchi formulalardir. U holda,

$(\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow ((\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}), \mathcal{A}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$.

Deduksiya teoremasiga ko'ra,

$((\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow ((\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}))) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}))$ hosil bo'ladi. MP qoidasiga ko'ra $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$. Agar $\vdash \mathcal{A}$, $\vdash \mathcal{B}$ bo'lsa, u holda ikki marta MP qoidasini qo'llab, $\vdash \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ ni hosil qilamiz.

Natija. II_1 va II_2 aksiomalardan $\dfrac{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$

ni hosil qilamiz.

U holda, sillogizm qoidasiga ko'ra $\dfrac{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}{\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}}$

hosil bo'ladi.

5. *Shartlarni birlashtirish qoidasi:*

$$\frac{\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})}{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}}$$

Isbot. $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}), \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \vdash \mathcal{C}$ (1). Haqiqatan ham, II_1, II_2 aksiomalarga ko'ra $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \vdash \mathcal{C}$, $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \vdash \mathcal{B}$. U holda ikki marta MP qoidasini qo'llab, (1) ni hosil qilamiz.

6. *Shartlarni ajratish qoidasi:*

$$\frac{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}}{\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})}$$

Isbot. $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{C}$ ekanligi 4-qoidadan kelib chiqadi. Demak, $\vdash (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}))$. U holda

$$\frac{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}}{\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})}$$

7. *Absurdga keltirish qoidasi:*

$$\frac{\mathcal{A} \wedge \rceil \mathcal{A}}{\mathcal{F}}$$

Isbot. I_1 aksiomaga ko'ra $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{A})$, IY_1 aksiomaga asosan $\vdash (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow (\rceil \mathcal{A} \Rightarrow \rceil \mathcal{R})$. U holda sillogizm qoidasiga ko'ra $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow (\rceil \mathcal{A} \Rightarrow \rceil \mathcal{R})$. Shartlarni birlashtirish qoidasiga asosan $\mathcal{A} \wedge \rceil \mathcal{A} \Rightarrow \rceil \mathcal{R}$ hosil bo'ladi.

$\neg\mathcal{R}$ ning $\mathcal{F}$ ekanligini hisobga olsak, $\vdash \mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{F}$ hosil bo'ladi.

Demak, $\dfrac{\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}}{\mathcal{F}}$

8. $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{A}}$

Isbot. $\vdash \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{A}$ ekanligini ko'rsatamiz. IY_1 aksiomaga ko'ra $\vdash (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{R}) \Rightarrow (\neg\mathcal{R} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$. $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{R}$ – mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi ekanligini hisobga olsak, $\vdash \neg\mathcal{R} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ hosil bo'ladi. $\mathcal{A}$ ni $\neg\neg\mathcal{A}$ bilan, $\neg\mathcal{R}$ ni $\mathcal{F}$ bilan almashtirsak, $\vdash \mathcal{F} \Rightarrow \neg\neg\mathcal{A}$ hosil bo'ladi.

IY_2 aksiomaga ko'ra $\vdash \neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$. Endi sillogizm qoidasini qo'llasak, $\vdash \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{A}$ hosil bo'ladi. Bu qoidani shartli ravishda noto'g'ri tasdiqdan har qanday tasdiq kelib chiqishi qoidasi desak bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Sillogizm qoidasini ayting.
2. Shartlarning o'rnini almashtirish qoidasini isbotlang.
3. Qo'sh inkorni tashlash qoidalarini ayting.
4. Konyunksiyani kiritish qoidasi qanday qoida?
5. Shartlarni ajratish qoidasi haqida ma'lumot bering.
6. $\dfrac{\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}}{\mathcal{F}}$, $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{A}}$ qoidalarni isbotlang.

5-§. Formulalarning monotonligi

5.1-*ta'rif. Agar* $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ *bo'lsa, u holda* $\mathcal{A}$ *formula* $\mathcal{B}$ *formuladan kuchliroq,* $\mathcal{B}$ *formula esa* $\mathcal{A}$ *formuladan kuchsizroq deyiladi.*

5.2-*ta'rif. Mulohazalar hisobining B o'zgaruvchi mulohaza qatnashgan* $\mathcal{A}$ *formulasini* $\mathcal{A}$ *(B) orqali belgilab* *olamiz. Agar $B_1 \Rightarrow B_2$ formuladan $\mathcal{A}(B_1) \Rightarrow \mathcal{A}(B_2)$ formula kelib chiqsa, u holda $\mathcal{A}$ formula B o'zgaruvchi bo'yicha monoton o'suvchi, agar $\mathcal{A}(B_2) \Rightarrow \mathcal{A}(B_1)$ kelib chiqsa, $\mathcal{A}$ formula B o'zgaruvchi bo'yicha monoton kamayuvchi formula deyiladi.*

5.3-***teorema***. *$A \wedge B$ formula A va B o'zgaruvchilar bo'yicha monoton o'suvchidir.*

Isbot. $A \wedge B$ formula B o'zgaruvchi bo'yicha monoton o'suvchi bo'lishini isbot qilamiz.

$\vdash B_1 \Rightarrow B_2$ bo'lsin. II_2 aksiomaga ko'ra $\vdash A \wedge B_1 \Rightarrow B_1$. Hosil bo'lgan formulaga sillogizm qoidasini qo'llasak, $\vdash A \wedge B_1 \Rightarrow B_2$ kelib chiqadi. II_3 aksiomaga ko'ra $\vdash (A \wedge B_1 \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \wedge B_1 \Rightarrow B_2) \Rightarrow (A \wedge B_1 \Rightarrow A \wedge B_2))$.

Xulosa chiqarish qoidasini ikki marta qo'llasak, $\vdash A \wedge B_1 \Rightarrow A \wedge B_2$ hosil bo'ladi.

A $\wedge$ B formula A o'zgaruvchi bo'yicha monoton o'sishi shunga o'xshash isbot qilinadi.

5.4-***teorema***. *$A \vee B$ formula A va B o'zgaruvchilar bo'yicha monoton o'suvchi formuladir.*

Isbot. $A \vee B$ formulaning A o'zgaruvchi bo'yicha monoton o'suvchi bo'lishini isbot qilaylik.

$\vdash B_1 \Rightarrow B_2$ bo'lsin. III_1 aksiomaga asosan $\vdash B_2 \Rightarrow B_2 \vee B$. Sillogizm qoidasiga ko'ra $\vdash B_1 \Rightarrow B_2 \vee B$. II_2 aksiomaga ko'ra $\vdash B \Rightarrow B_2 \vee B$. U holda III_3 aksiomaga ko'ra $\vdash (B_1 \Rightarrow B_2 \vee B) \Rightarrow ((B \Rightarrow B_2 \vee B) \Rightarrow (B_1 \vee B \Rightarrow B_2 \vee B))$. Hosil bo'lgan formulaga MP qoidasini ikki marta qo'llasak, $\vdash B_1 \vee B \Rightarrow B_2 \vee B$ hosil bo'ladi.

$A \vee B$ formula B o'zgaruvchi bo'yicha monoton o'sishi shunga o'xshash isbot qilinadi.

5.5-***teorema***. *$\rceil A$ formula A o'zgaruvchi bo'yicha monoton kamayadi.*

Isbot. $\vdash \mathcal{B}_1 \Rightarrow \mathcal{B}_2$ bo'lsin. IY_1 aksiomaga ko'ra

$\vdash (\mathcal{B}_1 \Rightarrow \mathcal{B}_2) \Rightarrow (\rceil\mathcal{B}_2 \Rightarrow \rceil\mathcal{B}_1)$. U holda MP qoidasiga asosan $\rceil\mathcal{B}_2 \Rightarrow \rceil\mathcal{B}_1$

5.6-***teorema***. *$A \Rightarrow B$ formula B o'zgaruvchi bo'yicha monoton o'sadi, A o'zgaruvchi bo'yicha esa monoton kamayadi.*

Isbot. $\vdash \mathcal{B}_1 \Rightarrow \mathcal{B}_2$ bo'lsin. $\vdash A \Rightarrow A$ dan $\vdash (A \Rightarrow \mathcal{B}_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow (A \Rightarrow \mathcal{B}_1)$. Shartlarni birlashtirish qoidasiga asosan $\vdash (A \Rightarrow \mathcal{B}_1) \wedge A \Rightarrow \mathcal{B}_1$. $\vdash \mathcal{B}_1 \Rightarrow \mathcal{B}_2$ ni hisobga olib,sillogizm qoidasini qo'llasak, $\vdash (A \Rightarrow \mathcal{B}_1) \wedge A \Rightarrow \mathcal{B}_2$ bo'ladi. U holda shartlarni ajratish qoidasiga ko'ra, $\vdash (A \Rightarrow \mathcal{B}_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow (A \Rightarrow \mathcal{B}_2)$ hosil bo'ladi.

Endi $A \Rightarrow B$ formula A o'zgaruvchi bo'yicha monoton kamayishini isbot qilamiz.

$\vdash \mathcal{B}_1 \Rightarrow \mathcal{B}_2$ bo'lsin. U holda $\vdash A \Rightarrow A$ bo'lganligi sababli $\vdash (\mathcal{B}_2 \Rightarrow \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{B}_2 \Rightarrow \mathcal{B})$. Shartlarni birlashtirish qoidasiga ko'ra, $\vdash (\mathcal{B}_2 \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{B}_2 \Rightarrow \mathcal{B}$. 5.3 teoremaga asosan $\vdash (\mathcal{B}_2 \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{B}_1 \Rightarrow (\mathcal{B}_2 \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{B}_2$.

U holda, sillogizm qoidasiga ko'ra, $\vdash (\mathcal{B}_2 \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{B}_1 \Rightarrow \mathcal{B}$. Shartlarni ajratish qoidasiga ko'ra $\vdash (\mathcal{B}_2 \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{B}_1 \Rightarrow \mathcal{B})$.

Takrorlash uchun savollar

1. Kuchli va kuchsiz formulalarga ta'rif bering.
2. $A \wedge B$ formula A va B o'zgaruvchilarga nisbatan monoton o'suvchi ekanligini isbotlang.
3. $A \vee B$ formula A va B o'zgaruvchilarga nisbatan monotonligini isbotlang.
4. $\rceil A$ formula A o'zgaruvchi bo'yicha monoton bo'lishini ko'rsating.
5. $A \Rightarrow B$ formula monotonligi haqida nimalar deya olasiz?

6-§. Formulalarning ekvivalentligi

6.1-*ta'rif*. *Agar* $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ *va* $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$ *formulalar mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulalari bo'lsa, u holda* $\mathcal{A}$ *va* $\mathcal{B}$ *formulalar teng kuchli yoki ekvivalent formulalar deyiladi hamda* $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ *kabi belgilanadi.*

Shunday qilib, agar $\mathcal{A}$ formula $\mathcal{B}$ dan, $\mathcal{B}$ formula esa $\mathcal{A}$ dan kuchliroq bo'lsa, $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ ekan.

6.2-*teorema*. $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ *bo'lishi uchun* $\vdash (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$ *bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Isbot. $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ bo'lsin. U holda $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ va $\vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$. Konyunksiyalarni kiritish qoidasiga ko'ra,

$\vdash (\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$.

Aksincha, agar $\vdash (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$ bo'lsa, konyunksiyani yo'qotish qoidasiga ko'ra, $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ va $\vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ bo'ladi.

6.3-*teorema*. *Mulohazalar hisobining formulalari to'plamida* $\sim$ *munosabat refleksiv, simmetrik, tranzitiv munosabatdir, ya'ni ekvivalentlik munosabatidir.*

Isbot. 1. $\vdash \mathcal{A} \sim \mathcal{A}$. Haqiqatan ham, $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$.

2. $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ bo'lsa, $\mathcal{B} \sim \mathcal{A}$ bo'ladi. Haqiqatan ham $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ va $\vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ bo'lsa, $\vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ va $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ bo'ladi.

3. $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ va $\mathcal{B} \sim C$ bo'lsin, u holda $\mathcal{A} \sim C$ ekanligini ko'rsatamiz. $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ va $\mathcal{B} \sim C$ bo'lsa, u holda $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ va $\vdash \mathcal{B} \Rightarrow C$ hosil bo'ladi. Sillogizm qoidasiga ko'ra $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow C$.

Xuddi shunday $C \sim \mathcal{B}$ va $\mathcal{B} \sim \mathcal{A}$ bo'lsa, u holda $\vdash C \Rightarrow \mathcal{B}$ va $\vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ bo'ladi. Yana sillogizm qoidasiga ko'ra $\vdash C \Rightarrow \mathcal{A}$ ekanligini ko'rish mumkin. Demak, $\mathcal{A} \sim C$.

6.4-*teorema*. *(Formulalarni ekvivalent almashtirish).*

Mulohazalar hisobining $\mathcal{B}$ o'zgaruvchi mulohaza qatnashgan $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ formulasi berilgan bo'lsin. Agar $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ bo'lsa, u holda $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1) \sim \mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$ bo'ladi.

Isbot. Isbotni formulaning rangi, ya'ni formulada qatnashgan amallarning soni bo'yicha induksiya usulida olib boramiz.

Formulaning rangi 0 ga teng bo'lsin. U holda formula o'zgaruvchi mulohazadan iborat bo'lib, isbot ravshan.

Formulaning rangi noldan katta bo'lsin. U holda $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ formula $\mathcal{A}_1(\mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}_2(\mathcal{B})$, $\mathcal{A}_1(\mathcal{B}) \vee \mathcal{A}_2(\mathcal{B})$, $\mathcal{A}_1(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A}_2(\mathcal{B})$, $\rceil \mathcal{A}_1(\mathcal{B})$ formulalardan biri ko'rinishida bo'ladi.

Induksiya faraziga ko'ra $\mathcal{A}_1(\mathcal{B})$, $\mathcal{A}_2(\mathcal{B})$ formulalar uchun teorema to'g'ri deb hisoblaymiz.

Agar $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ bo'lsa, u holda $\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \wedge \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_1) \sim \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \wedge \wedge \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2)$ bo'lishini isbotlaymiz. Induksiya faraziga ko'ra $\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \sim \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2)$, u holda $\vdash \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2)$;

II_1 aksiomaga asosan $\vdash \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \wedge \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2) \Rightarrow \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1)$. Sillogizm qoidasiga ko'ra $\vdash \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \wedge \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2)$.

Shunga o'xshash $\vdash \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \wedge \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2)$ bo'lishi ko'rsatiladi. U holda shartlarni birlashtirish qoidasiga ko'ra

$\vdash \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \wedge \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \wedge \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2)$.

$\sim$ - munosabati simmetrik bo'lganligi uchun $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ bo'lsa, $\mathcal{B}_2 \sim \mathcal{B}_1$ bo'ladi. U holda

$$\vdash \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \wedge \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2) \Rightarrow \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \wedge \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_1)$$

bo'ladi. Demak, $\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \wedge \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_1) \sim \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \wedge \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2)$.

Endi $\mathcal{A}_1(\mathcal{B})$, $\mathcal{A}_2(\mathcal{B})$ formulalar uchun teorema to'g'riligidan $\mathcal{A}_1(\mathcal{B}) \vee \mathcal{A}_2(\mathcal{B})$ ko'rinishdagi formula uchun ham teorema to'g'ri bo'lishini isbotlaymiz.

Induksiya faraziga ko'ra $\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \sim \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2)$. Xususan, $\vdash \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2)$. III_1 aksiomaga ko'ra $\vdash \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \Rightarrow \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \vee \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2)$. Sillogizm qoidasiga ko'ra $\vdash \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \vee \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2)$.

Xuddi shunday $\vdash \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \vee \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2)$ ekanligi ko'rsatiladi. III_3 aksiomaga ko'ra $\vdash (\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \vee \vee \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2)) \Rightarrow ((\mathcal{A}_2(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \vee \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2)) \Rightarrow (\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \vee \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \Rightarrow \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_{2)} \vee \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2)))$.

Ikki marta MP qoidasini qo'llasak,

$\vdash \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \vee \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \vee \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2)$

hosil bo'ladi. $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ dan $\mathcal{B}_2 \sim \mathcal{B}_1$ kelib chiqqanligi sababli $\vdash \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \vee \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2) \Rightarrow \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \vee \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_1)$

bo'ladi. Demak, $\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \vee \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_1) \sim \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \vee \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2)$.

Formula $\mathcal{A}_1(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A}_2(\mathcal{B})$ ko'rinishda bo'lsin. U holda $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ ekanligidan, $(\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_1)) \sim (\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \Rightarrow \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2))$ kelib chiqishini ko'rsatamiz.

Induksiya faraziga ko'ra $\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \sim \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2)$ va $\mathcal{A}_2(\mathcal{B}_1) \sim \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2)$. $\vdash \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_1)$ bo'lsin, xususan, $\vdash \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2)$. U holda sillogizm qoidasiga ko'ra, $\vdash \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2)$. Yana induksiya faraziga ko'ra, $\vdash \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \Rightarrow \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1)$. Sillogizm qoidasini qo'llasak, $\vdash \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \Rightarrow \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2)$ hosil bo'ladi. Shunday qilib, $\vdash \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_1)$ bo'lsa, u holda $\vdash \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \Rightarrow \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2)$ bo'lishini ko'rsatdik. Demak, $\vdash (\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_1)) \Rightarrow (\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \Rightarrow \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2))$.

Agar $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ dan $\mathcal{B}_2 \sim \mathcal{B}_1$ bo'lishini e'tiborga olsak, u holda, $\vdash (\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \Rightarrow \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2)) \Rightarrow (\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_1))$ kelib chiqadi. Demak, $(\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_1)) \sim (\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \Rightarrow \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_2))$. Nihoyat, $\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \sim \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2)$ bo'lsa, u holda $\neg(\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \sim \neg(\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2)$ bo'lishini ko'rsatamiz.

IY_1 aksiomaga ko'ra

$\vdash (\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2)) \Rightarrow \neg\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \Rightarrow \neg\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1))$ va

$\vdash (\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \Rightarrow \mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1)) \Rightarrow (\neg\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \neg\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2))$.

U holda MP qoidasiga ko'ra

$\vdash \neg\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2) \Rightarrow \neg\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1)$ va $\vdash \neg\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \Rightarrow \neg\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2)$.

Demak, $\neg\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_1) \sim \neg\mathcal{A}_1(\mathcal{B}_2)$.

Shunday qilib, ekvivalentlik haqidagi teorema isbotlandi.

Takrorlash uchun savollar

1. Mulohazalar hisobining teng kuchli formulalari deb qanday formulalarga aytiladi?

2. ~ munosabatning ekvivalentlik munosabati ekanligini isbotlang.

3. Formulalarni ekvivalent almashtirishni tushuntiring.

Mashqlar

Quyidagilarni isbotlang:

1.1. $(((A \wedge B) \wedge C) \equiv (A \wedge (B \wedge C)))$.

1.2. $(((A \vee B) \vee C) \equiv A \vee (B \vee C)))$.

1.3. $((A \wedge (B \vee C)) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C))$.

1.4. $(A \vee (B \wedge C)) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C))$.

1.5. $((A \wedge B) \equiv \neg(\neg A \vee \neg B))$.

1.6. $((A \Rightarrow B) \equiv \neg(A \wedge \neg B))$.

1.7. $(\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B))$.

1.8. $(\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B))$.

7-§. Keltirib chiqariluvchi formulalarga na'munalar

7.1-*teorema*. $\vdash (A \sim \mathcal{R}) \sim A$.

Isbot. $\vdash (A \sim \mathcal{R}) \Rightarrow A$ bo'lishini isbotlaylik. *B* keltirib chiqariluvchi formula bo'lganligi uchun $\mathcal{R} \Rightarrow A \vdash A$. U holda, deduksiya teoremasiga ko'ra, $\vdash (\mathcal{R} \Rightarrow A) \Rightarrow A$.

Demak, $(\mathcal{R} \sim A) \Rightarrow A$.

Aksincha, $\vdash A \Rightarrow (A \sim \mathcal{R})$ bo'lishini ko'rsatamiz. $\vdash A \Rightarrow \mathcal{R}$ bo'lganligi uchun $\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow \mathcal{R})$, undan tashqari, I_1 aksiomaga asosan, $A \Rightarrow (\mathcal{R} \Rightarrow A)$.

Demak, $\vdash A \Rightarrow (A \sim \mathcal{R})$.

Shunday qilib, $(A \sim \mathcal{R}) \sim A$.

7.2-*teorema*. $\vdash (A \sim \mathcal{F}) \sim \neg A$.

Isbot. Avval $\vdash (A \sim \mathcal{F}) \Rightarrow \neg A$ ekanligini ko‘rsatamiz. IY_1 aksiomaga ko‘ra $\vdash (A \Rightarrow \mathcal{F}) \Rightarrow (\neg\mathcal{F} \Rightarrow \neg A)$, ya’ni, $\vdash (A \Rightarrow \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{R} \Rightarrow \neg A)$ (1), keltirib chiqariluvchi formula bo‘lganligi uchun, $\mathcal{R} \Rightarrow \neg A \vdash \neg A$. Deduksiya teoremasiga asosan, $\vdash (\mathcal{R} \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$ *(2)*. (1) va (2) formulalarga sillogizm qoidasini qo‘llasak, $\vdash (A \Rightarrow \mathcal{F}) \Rightarrow \neg A$ hosil bo‘ladi. U holda, $\vdash (A \sim \mathcal{F}) \Rightarrow \neg A$.

Endi, $\neg A \Rightarrow (A \sim \mathcal{F})$ bo‘lishini ko‘rsatamiz. I_1 aksiomaga asosan $\neg A \Rightarrow (\mathcal{R} \Rightarrow \neg A)$ *(3)*.

IY_1 aksiomaga asosan,

$\vdash (\mathcal{R} \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow \neg\mathcal{R})$

yoki $\vdash (\mathcal{R} \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \mathcal{F})$ (4).

(3) va (4) formulalarga sillogizm qoidasini qo‘llasak, $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \mathcal{F})$ hosil bo‘ladi. $\vdash \mathcal{F} \Rightarrow A$ bo‘lganligi uchun, $\vdash \neg A \Rightarrow (F \Rightarrow A)$ bo‘ladi. U holda

$$\vdash (\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \mathcal{F})) \wedge (\neg A \Rightarrow (\mathcal{F} \Rightarrow A)).$$

Demak, $\vdash \neg A \Rightarrow (A \sim \mathcal{F})$. Teorema isbot qilindi.

7.3-***teorema.*** $\vdash \mathcal{A}(\mathcal{R}) \wedge \mathcal{A}(\mathcal{F}) \Rightarrow ((A \sim \mathcal{R}) \Rightarrow \mathcal{A}(A)) \wedge$ $\wedge ((\mathcal{A} \sim \mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{A}(A))$.

Isbot. Ekvivalentlik haqidagi teoremaga asosan

$$\vdash (A \sim \mathcal{R}) \Rightarrow (\mathcal{A}(A) \sim \mathcal{A}(\mathcal{R})).$$

Xususan, $\vdash (A \sim \mathcal{R}) \Rightarrow (\mathcal{A}(\mathcal{R}) \Rightarrow \mathcal{A}(A))$. Shartlarni o‘rnini almashtirib, B ni $\mathcal{R}$ va $\mathcal{F}$ bilan ketma-ket almashtirsak,

$\vdash \mathcal{A}(\mathcal{R}) \Rightarrow ((A \sim \mathcal{R}) \Rightarrow \mathcal{A}(A))$ (5),

$\vdash \mathcal{A}(\mathcal{F}) \Rightarrow ((A \sim \mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{A}(A))$ (6)

hosil bo‘ladi. II_1, II_2 aksiomalarga asosan,

$\vdash \mathcal{A}(\mathcal{R}) \wedge \mathcal{A}(\mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{R})$ (7)

va $\vdash \mathcal{A}(\mathcal{R}) \wedge \mathcal{A}(\mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{F})$ (8).

(7), (5) va (8), (6) formulalarga sillogizm qoidasini qo‘llasak,

$\vdash \mathcal{A}(\mathcal{R}) \wedge \mathcal{A}(\mathcal{F}) \Rightarrow ((A \sim \mathcal{R}) \Rightarrow \mathcal{A}(A))$ va

$\vdash \mathcal{A}(\mathcal{R}) \wedge \mathcal{A}(\mathcal{F}) \Rightarrow ((A \sim \mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{A}(A))$

formulalar hosil bo'ladi.

Hosil bo'lgan formulalarga II_3 aksiomani qo'llab,

$\vdash \mathcal{A}(\mathcal{R}) \wedge \mathcal{A}(\mathcal{F}) \Rightarrow ((A \sim \mathcal{R}) \Rightarrow \mathcal{A}(A)) \wedge ((A \sim \mathcal{F}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{A}(A))$ ni hosil qilamiz.

7.4-*teorema*. $\vdash ((A \sim \mathcal{R}) \Rightarrow \mathcal{A}(A)) \wedge ((A \sim \mathcal{F}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{A}(A)) \Rightarrow ((A \sim \mathcal{R}) \vee (A \sim \mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{A}(A))$.

Isboti bevosita III_3 aksiomadan kelib chiqadi.

7.5-*teorema*. $\vdash A \vee \neg A$.

Isbot. III_1, III_2 aksiomalarga asosan, $\vdash A \Rightarrow A \vee \neg A$ va $\vdash \neg A \Rightarrow A \vee \neg A$. U holda, IY_1 aksiomaga asosan,

$\vdash \neg(A \vee \neg A) \Rightarrow \neg A$ (9)

va $\vdash \neg(A \vee \neg A) \Rightarrow \neg\neg A$. Qo'sh inkorni tashlash qoidasiga ko'ra

$\vdash \neg(A \vee \neg A) \Rightarrow A$ (10).

II_3 aksiomaga asosan,

$\vdash (\neg(A \vee \neg A) \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg(A \vee \neg A) \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg(A \vee \neg A) \Rightarrow A \wedge \neg A))$

(9) va (10) formulalarni hisobga olib, ikki marta sillogizm qoidasini qo'llasak,

$\vdash \neg(A \vee \neg A) \Rightarrow A \wedge \neg A$ (11)

hosil bo'ladi. Absurdga keltirish qoidasiga ko'ra

$\vdash A \wedge \neg A \Rightarrow \mathcal{F}$ (12)

bo'ladi. Endi (11) va (12) formulalarga sillogizm qoidasini qo'llasak,

$\vdash \neg(A \vee \neg A) \Rightarrow \mathcal{F}$ (13)

hosil bo'ladi. IY_1 aksiomaga asosan

$\vdash (\neg(A \vee \neg A) \Rightarrow \mathcal{F}) \Rightarrow (\neg\mathcal{F} \Rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A))$ (14).

(13) va (14) larga sillogizm qoidasini qo'llasak,

$\vdash \neg\mathcal{F} \Rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$, $\vdash \neg\mathcal{F}$ ni hisobga olsak, MP ga asosan $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$. Qo'sh inkorni tashlasak, $\vdash A \vee \neg A$.

7.6-*teorema*. $\vdash (A \sim \mathcal{R}) \vee (A \sim \mathcal{F})$.

Isboti 7.1, 7.2, 7.5 teoremalardan kelib chiqadi.

7.7-*teorema*. $\vdash \mathcal{A}(\mathcal{R}) \wedge \mathcal{A}(\mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{A}(A)$.

Isbot. 7.3, 7.4 teoremalarga sillogizm qoidasini qo'llasak,

$\vdash \mathcal{A}(\mathcal{R}) \wedge \mathcal{A}(\mathcal{F}) \Rightarrow ((\mathcal{A} \sim \mathcal{F}) \vee (\mathcal{A} \sim \mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{A}(A))$.

Shartlarni o'rnini almashtirsak,

$\vdash (\mathcal{A} \sim \mathcal{R}) \vee (\mathcal{A} \sim \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{A}(\mathcal{R}) \wedge \mathcal{A}(\mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{A}(A))$

hosil bo'ladi. 7.6-teoremani hisobga olib, MP qoidani qo'llasak, $\vdash \mathcal{A}(B) \wedge \mathcal{A}(\mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{A}(A)$ hosil bo'ladi.

7.8-*teorema*. $(A \wedge B) \wedge C \sim A \wedge (B \wedge C)$.

Isbot. $\vdash A \wedge B \Rightarrow A$. U holda $\vdash (A \wedge B) \wedge C \Rightarrow A$.

Xuddi shunday $\vdash (A \wedge B) \wedge C \Rightarrow B$, $\vdash (A \wedge B) \wedge C \Rightarrow C$ bo'ladi. II_3 aksiomaga ko'ra

$\vdash ((A \wedge B) \wedge C \Rightarrow B) \Rightarrow (((A \wedge B) \wedge C \Rightarrow C) \Rightarrow$

$\Rightarrow (A \wedge B) \wedge C \Rightarrow B \wedge C)$.

Ikki marta MP qoidani qo'llasak, $\vdash (A \wedge B) \wedge C \Rightarrow B \wedge C$ hosil bo'ladi. Yana II_3 aksiomaga asosan

$\vdash ((A \wedge B) \wedge C \Rightarrow A) \Rightarrow (((A \wedge B) \wedge C \Rightarrow B \wedge C) \Rightarrow$

$\Rightarrow ((A \wedge B) \wedge C) \Rightarrow A \wedge (B \wedge C))$.

Ikki marta MP qoidasini qo'llasak $\vdash (A \wedge B) \wedge C \Rightarrow A \wedge$ $\wedge (B \wedge C)$ hosil bo'ladi.

$\vdash A \wedge (B \wedge C) \Rightarrow (A \wedge B) \wedge C$ bo'lishi yuqoridagidek isbotlanadi.

7.9-*teorema*. *Konyunksiya amali uchun umumlashgan assotsiativlik qonuni o'rinli, ya'ni $A_1, \ldots, A_n$ mulohazalarning konyunksiyasi qavslarning qo'yilish taritibiga bog'liq emas.*

Isbot. Matematik induksiya usuli bilan isbot qilamiz.

$n = 3$ bo'lganda, $A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3) \sim (A_1 \wedge A_2) \wedge A_3$ (7.8-teorema).

n dan kichik k lar uchun teorema to'g'ri deb faraz qilib, n uchun teoremaning to'g'riligini isbot qilamiz. Quyidagi $(\ldots(A_1 \wedge A_2) \wedge \ldots \wedge A_k)$ konyunksiya chapdan normallangan konyunksiya deyiladi. Induksiya faraziga ko'ra, har qanday k ta mulohazaning konyunksiyasi chapdan normallangan konyunksiyaga teng kuchli deb faraz qilishimiz mumkin. Har qanday n ta mulohazaning konyunksiyasi ham chapdan normallangan konyunksiyaga teng kuchli bo'lishini isbot qilamiz.

$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_k) \wedge (A_{k+1} \wedge \ldots \wedge A_n) \sim (\ldots \wedge (A_1 \wedge$
$\wedge A_2) \wedge \ldots \wedge A_k) \wedge (A_{k+1} \wedge A_{k+2}) \wedge \ldots \wedge A_{n-1}) \wedge$
$\wedge A_n \sim ((\ldots \wedge (A_1 \wedge A_2) \wedge \ldots \wedge A_{n-2}) \wedge A_{n-1}) \wedge A_n$ – chapdan normallangan konyunksiya.

$A_1,\ldots,A_n$ o'zgaruvchi mulohazalardan tuzilgan $\mathcal{A}(A_1,\ldots,A_n)$ formula berilgan bo'lsin. $A_1,\ldots,A_n$ o'zgaruvchi mulohazalarni $\mathcal{R}$ va $\mathcal{F}$ lar bilan almashtirib, $\mathcal{A}(A_1,\ldots,A_n)$ formuladan hosil bo'lishi mumkin bo'lgan barcha har xil formulalarni tuzib chiqamiz. $\mathcal{A}(d_1,\ldots,d_n)$ – shunday formulalarning biri bo'lsin. U holda $d_i = \mathcal{R}$ yoki $d_i = \mathcal{F}$, $i = 1,\ldots,n$. Hosil bo'lgan barcha formulalarning konyunksiyasini $\bigwedge\limits_{d_1,\ldots,d_n = \mathcal{R},\mathcal{F}} \mathcal{A}(d_1,\ldots,d_n)$ orqali belgilaymiz. Yuqorida isbot qilingan teoremaga ko'ra, bu ko'paytmani bir qiymatli aniqlangan deb qarashimiz mumkin.

7.10-*teorema.* $\vdash \bigwedge\limits_{d_1,\ldots,d_n = \mathcal{R},\mu} \mathcal{A}(d_1,\ldots,d_n) \Rightarrow \mathcal{A}(A_1,\ldots,A_n)$.

Isbot. Matematik induksiya usulini qo'llaymiz.

$n = 3$ bo'lsa 7.8 teorema hosil bo'ladi.

n dan kichik natural sonlar uchun teorema isbot qilingan deb faraz qilamiz. U holda

$$\vdash \bigwedge\limits_{d_1,\ldots,d_{n-1} = \mathcal{R},\mu} \mathcal{A}(d_1,\ldots,d_{n-1},\mathcal{R}) \Rightarrow (A_1,\ldots,A_{n-1},\mathcal{R}) \text{ va}$$

$$\vdash \bigwedge\limits_{d_1,\ldots,d_{n-1} = \mathcal{R},\mu} \mathcal{A}(d_1,\ldots,d_{n-1},\mathcal{R}) \Rightarrow \mathcal{A}(A_1,\ldots,A_{n-1},\mathcal{R})$$

$$\bigwedge \mathcal{A}(d_1,\ldots,d_n) = (\bigwedge \mathcal{A}(A_1,\ldots,A_{n-1},\mathcal{R})) \wedge$$
$$d_1,\ldots,d_n = \mathcal{R},\mu \qquad d_1,\ldots,d_{n-1} = \mathcal{R},\mu$$
$\wedge \ (\bigwedge \mathcal{A}(A_1,\ldots,A_{n-1},\mathcal{R}))$ ni hisobga olsak,
$$d_1,\ldots,d_{n-1} = \mathcal{R},\mathcal{F}$$
7.8 teoremaga asosan $\vdash \bigwedge\limits_{d_1,\ldots,d_n = \mathcal{R},\mathcal{F}} \mathcal{A}(d_1,\ldots,d_n) \Rightarrow \mathcal{A}(A_1,\ldots,A_n)$

hosil bo'ladi.

Izoh. Biz yuqorida ba'zi teng kuchli formulalarning isbotini berdik. Mulohazalar algebrasining barcha teng kuchli formulalari mulohazalar hisobi uchun o'rinli bo'lishini III bobda ko'rib chiqamiz.

Takrorlash uchun savollar

1. Keltirib chiqariluvchi formula deb qanday formulaga aytiladi?
2. Keltirib chiqariluvchi formulalarga misollar keltiring.

8-§. Mulohazalar hisobi formulalari bilan mulohazalar algebrasi formulalari orasidagi bog'lanish

Mulohazalar hisobining formulalaridagi har bir o'zgaruvchi mulohazaga mazmun bersak, ya'ni o'zgaruvchi mulohaza yo 0, yo 1 qiymatni qabul qiladi deb qarasak, mulohazalar algebrasining formulasini hosil qilamiz.

8.1-*teorema. Mulohazalar hisobining har bir keltirib chiqariluvchi formulasi, agar mulohazalar algebrasining formulasi sifatida qaralsa, mulohazalar algebrasining aynan rost formulasi bo'ladi.*

Isbot. Haqiqatan ham, mulohazalar hisobining har bir aksiomasini mulohazalar algebrasining formulasi sifatida qarasak, u holda bu formula aynan rost formula bo'lishini ko‘rish qiyin emas. Buning uchun, har bir aksioma uchun rostlik jadvalini tuzish yetarli.

Masalan, I_1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ aksioma uchun rostlik jadvalini tuzaylik:

A	B	$B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

Shunday qilib, har bir aksiomani aynan rost formula deb hisoblaymiz.

Aynan rost formulalarga mulohazalar hisobining keltirib chiqarish qoidalarini qo‘llasak, yana aynan rost formulalar hosil bo‘ladi.

$\mathcal{A}$ (B) – aynan rost formula bo‘lsin, u holda B qanday qiymat qabul qilishidan qat’i nazar, $\mathcal{A}$ (B) = 1 bo‘ladi. Demak, $\mathcal{A}(B) = 1$.

$\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ formulalar aynan rost formulalar bo‘lsalar, implikatsiya amalining ta’rifidan $\mathcal{B}$ ham aynan rost formula ekanligi kelib chiqadi.

Takrorlash uchun savollar

1. Mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi mulohazalar algebrasida qanday formula bo‘ladi?

2. Mulohazalar hisobining aksiomalari mulohazalar algebrasida aynan rost formulalar bo‘lishini isbot qiling.

9-§. Mulohazalar hisobining zidsizligi

9.1-*ta'rif. Agar aksiomatik nazariyada $\mathcal{A}$ va $\neg\mathcal{A}$ formulalarning ko'pi bilan bittasi keltirib chiqariluvchi bo'lsa, bunday aksiomatik nazariya zidsiz deyiladi.*

9.2-*teorema. Mulohazalar hisobi zidsiz nazariyadir.*

Isbot. Haqiqatan ham, mulohazalar hisobida $\mathcal{A}$ va $\neg\mathcal{A}$ keltirib chiqariluvchi formulalar bo'lsalar, u holda $\mathcal{A}$ va $\neg\mathcal{A}$ formulalar 8.1-teoremaga asosan, mulohazalar algebrasining aynan rost formulalari bo'lar edilar. Buning bo'lishi mumkin emas.

Takrorlash uchun savollar

1.9. 1. Qanday matematik nazariya zidsiz matematik nazariya deyiladi?

1.10. 2. Mulohazalar hisobining zidsizligini isbotlang.

10-§. Mulohazalar hisobining to'liqligi

Mulohazalar algebrasining $\mathcal{A}\ (A_1,..., A_n)$ formulasida $A_1,..., A_n$ o'zgaruvchi mulohazalarni 0 va 1 qiymatlar qabul qiluvchi $i_1,..., i_n$ qiymatlar tizimi bilan almashtirib chiqamiz. Natijada $\mathcal{A}$ formula yo 0, yo 1 qiymat qabul qiladi. Agar A_i - o'zgaruvchi mulohazani 1 bilan almashtirgan bo'lsak, A_i o'rniga mulohazalar hisobining $\mathcal{R}$ formulasini, A_i ni 0 bilan almashtirgan bo'lsak, A_i o'rniga mulohazalar hisobining $\mathcal{F}$ formulasini qo'yib, mulohazalar algebrasining $\mathcal{A}$ formulasi qiymatiga mos keladigan mulohazalar hisobining $\mathcal{A}^*$ formulasini hosil qilamiz.

Agar $\mathcal{A}$ formula 1 ga teng qiymat qabul qilsa, u holda $\mathcal{A}^* \sim \mathcal{R}$, 0 ga teng qiymat qabul qilsa, $\mathcal{A}^* \sim \mathcal{F}$ bo'lishini ko'rsatamiz.

Isbotni matematik induksiya metodi bilan olib boramiz.

$\mathcal{A}$ formula o‘zgaruvchi mulohazadan iborat bo‘lsa, isbot ravshan.

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ formulalar uchun yuqoridagi tasdiq o‘rinli bo‘lsin. U holda $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\rceil \mathcal{A}$ formulalar uchun ham tasdiq o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz.

$\mathcal{A}^*$ orqali $\mathcal{A}$ ga mos, $\mathcal{B}^*$ orqali $\mathcal{B}$ ga mos mulohazalar hisobining formulalarini belgilab olamiz.

$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ uchun isbotni to‘liq keltiramiz:

$\mathcal{A} = 1$, $\mathcal{B} = 1$ bo‘lsin. U holda induksiya faraziga ko‘ra

$\mathcal{A}^* \sim \mathcal{R}$, $\mathcal{B}^* \sim \mathcal{R}$.

$\mathcal{A}^* \wedge \mathcal{B}^* \sim \mathcal{R}$ bo‘lishini ko‘rsatamiz. $\mathcal{A}^* \wedge \mathcal{B}^* \sim \mathcal{R} \wedge \mathcal{R}$.

$\vdash \mathcal{R} \wedge \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R}$; $\vdash \mathcal{R}$ bo‘lgani uchun, konyunksiyani kiritish qoidasiga ko‘ra $\vdash \mathcal{R} \wedge \mathcal{R}$, u holda, $\vdash \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R} \wedge \mathcal{B}$.

Demak, $\mathcal{R} \wedge \mathcal{R} \sim \mathcal{R}$.

$\mathcal{A} = 1$, $\mathcal{B} = 0$ bo‘lsin. U holda $\mathcal{A}^* \wedge \mathcal{B}^* \sim \mathcal{R} \wedge \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = \rceil \mathcal{R}$ bo‘lgani uchun $\mathcal{R} \wedge \mathcal{F} \sim \mathcal{R} \wedge \rceil \mathcal{R}$. Absurdga keltirish qoidasiga ko‘ra, $\mathcal{B} \wedge \rceil \mathcal{B} \sim \mathcal{F}$.

$\mathcal{A} = 0$, $\mathcal{B} = 1$ bo‘lgan hol yuqoridagidek isbot qilinadi.

$\mathcal{A} = 0$, $\mathcal{B} = 0$ bo‘lsa, $\mathcal{A}^* \wedge \mathcal{B}^* \sim \mathcal{F} \wedge \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \sim \rceil \mathcal{R} \wedge \rceil \mathcal{R}$.

$\rceil \mathcal{B} \wedge \rceil \mathcal{B} \sim \rceil \mathcal{B}$ bo‘lishini isbot qilaylik.

II_1 aksiomaga asosan $\mathcal{R}\ \rceil \mathcal{R} \wedge \rceil \mathcal{R} \Rightarrow \rceil \mathcal{R}$.

II_3 aksiomaga asosan

$\mathcal{R}\ (\rceil \mathcal{R} \Rightarrow \rceil \mathcal{R}) \Rightarrow ((\rceil \mathcal{R} \Rightarrow \rceil \mathcal{R}) \Rightarrow \rceil \mathcal{R} \Rightarrow \rceil \mathcal{R} \wedge \rceil \mathcal{R})$.

MP qoidasini ikki marta qo‘llasak, $\mathcal{R}\ \rceil \mathcal{R} \Rightarrow \rceil \mathcal{R} \wedge \rceil \mathcal{R}$ hosil bo‘ladi.

Qolgan $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\rceil \mathcal{A}$ formulalar uchun teorema isbotini o‘quvchilar mustaqil bajarishlari mumkin.

Biz oldingi paragraflarda mulohazalar hisobining har bir keltirib chiqariluvchi formulasi mulohazalar algebrasining aynan rost formulasi bo‘lishini ko‘rdik. Endi aksincha, mulohazalar algebrasining aynan rost formulasi mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi bo'ladimi, degan masalani qaraylik. Bu masala *keng ma'nodagi to'liqlik muammosi* deyiladi.

10.1-*teorema. Mulohazalar hisobi keng ma'noda to'liq aksiomatik nazariyadir. Ya'ni mulohazalar algebrasining har bir aynan rost formulasi, mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi bo'ladi.*

Isbot. $\mathcal{A}(A_1,\dots,A_n)$ mulohazalar algebrasining aynan rost formulasi bo'lsin, u holda yuqorida isbot qilganimizga ko'ra $A_1,\dots,A_n$ larni o'rniga $\mathcal{R}$ va $\mathcal{F}$ lardan iborat ixtiyoriy $d_1,\dots,d_n$ tizimni qo'ysak,

$\vdash \mathcal{A}(d_1,\dots,d_n)$ hosil bo'ladi. U holda

$\vdash \bigwedge\limits_{d_1,\dots,d_n=\mathcal{R},\mathcal{F}} \mathcal{A}(d_1,\dots,d_n)$. 7.10-teoremaga asosan

$\vdash \bigwedge\limits_{d_1,\dots,d_n=\mathcal{R},\mathcal{F}} \mathcal{A}(d_1,\dots,d_n) \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_n)$.

MP qoidasini qo'llasak $\vdash \mathcal{A}(A_1,\dots,A_n)$ bo'ladi.

10.2-*natija.* Mulohazalar algebrasining barcha teng kuchli formulalari mulohazalar hisobida ham teng kuchli formulalardir.

Masalan: $A \Rightarrow B \sim \neg B \Rightarrow \neg A$,

$A \Rightarrow B \sim \neg A \vee B$,

$\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$,

$\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$.

Biz ishlatgan keng ma'nodagi to'liqlik tushunchasidan tashqari, matematik mantiqda tor ma'nodagi to'liqlik tushunchasining kiritilishi tabiiy holdir. Haqiqatan ham, mulohazalar hisobining aksiomalari sistemasiga yana bitta mulohazalar hisobida keltirib chiqarilmaydigan formulani aksioma sifatida kiritsak, ziddiyat kelib chiqsa, u holda mulohazalar hisobi *tor ma'noda to'liq* deyiladi.

10.3-*teorema. Mulohazalar hisobi tor ma'noda to'liq aksiomatik nazariyadir.*

Isbot. $\mathcal{A}(A_1,\dots,A_n)$ formula mulohazalar hisobida keltirib chiqarilmaydigan formula bo'lsin. $\mathcal{A}(A_1,\dots,A_n)$ formulani mulohazalar hisobining aksiomalar ro'yxatiga kiritib, yangi aksiomalar sistemasini hosil qilamiz.

$\mathcal{A}(A_1,\dots,A_n)$ mulohazalar hisobida keltirib chiqarilmaydigan bo'lganligi uchun $A_1,\dots,A_n$ propozitsional o'zgaruvcxilarning $\mathcal{R}$ va $\mathcal{F}$ lardan iborat shunday qiymatlari tizimi $d_1,\dots,d_n$ mavjud bo'lib, $\mathcal{A}(d_1,\dots,d_n) \sim \mathcal{F}$ bo'ladi, u holda $\vdash \neg\mathcal{A}(d_1,\dots,d_n)$. Demak, yangi aksiomalar sistemasidan ham $\neg\mathcal{A}(d_1,\dots,d_n)$ keltirib chiqariluvchi formula bo'ladi. Lekin, $\mathcal{A}(A_1,\dots,A_n)$ aksioma bo'lganligi uchun, yangi aksiomalar sistemasida $\mathcal{A}(d_1,\dots,d_n)$ keltirib chiqariluvchi formuladir.

Takrorlash uchun savollar

1. Mulohazalar hisobi uchun to'liqlik muammosini tushuntiring.
2. Keng ma'noda to'liq nazariyaga misol keltiring.
3. Tor ma'noda to'liq nazariyaga ta'rif bering.

11-§. Mulohazalar hisobi aksiomalarining erkinligi

Agar $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_n$ – aksiomalar sistemasi berilgan bo'lib, $\mathcal{A}_1$ aksiomani $\mathcal{A}_2,\dots,\mathcal{A}_n$ aksiomalar sistemasidan keltirib chiqarib bo'lmasa, $\mathcal{A}_1$ aksioma qolganlaridan erkin deyiladi. Agar aksiomalar sistemasidagi har bir aksioma qolganlaridan erkin bo'lsa, u holda aksiomalar sistemasi erkin deyiladi.

11.1-*teorema. Mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasi erkindir.*

Isbot. $\mathcal{A}_i$ aksioma qolganlaridan erkin ekanligini isbot qilish uchun $\mathcal{A}_i$ bajarilmaydigan, qolgan barcha aksiomalar bajariladigan interpretatsiyani ko'rsatish yetarli. Haqiqatan ham, agar $\mathcal{A}_i$ qolgan aksiomalardan keltirib chiqarilganida edi, bunday interpretatsiya mavjud bo'lmas edi.

Interpretatsiya qurish uchun mulohazalar hisobining o'zgaruvchi mulohazalarini α, β - qiymatlarni qabul qiladigan o'zgaruvchilar deb qaraymiz, bu yerda α - rost, β - yolg'on mulohaza qiymatini bildiradi. $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\rceil$ amallarini quyidagi shartlar bajariladigan qilib aniqlaymiz:

1. $\mathcal{A}_i$ aksiomadan boshqa barcha aksiomalar α qiymatni qabul qilsin.

2. $\mathcal{A}_i$ dan tashqari barcha aksiomalar va keltirib chiqarish qoidalari yordamida isbot qilish mumkin bo'lgan har qanday formula ham α ga teng qiymat qabul qilsin.

3. $\mathcal{A}_i$ aksiomada qatnashgan propozitsional o'zgaruvchilarning kamida bitta qiymatlari tizimida, $\mathcal{A}_i$ ning qiymati β ga teng bo'lsin.

$\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ formulalar, formulalarga kirgan barcha propozitsional o'zgaruvcxilarning ixtiyoriy qiymatlari tizimida bir xil qiymat qabul qilsa, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ deb belgilashni kelishib olamiz.

Endi misol tariqasida II_1 aksioma erkinligining isbotini ko'rib chiqamiz.

Buning uchun mulohazalar hisobining quyidagicha interpretatsiyasini tuzamiz:

$\wedge$ amalini $A \wedge B = B$ ko'rinishda, qolgan amallarni esa mulohazalar algebrasida qanday aniqlagan bo'lsak, xuddi shunday aniqlaymiz:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$\rceil A$
α	α	α	α	α	β
α	β	β	α	β	β
β	α	α	α	α	α
β	β	β	β	α	α

I-III-IV guruh aksiomalarida $\wedge$ amali qatnashmaganligi hamda $\vee$, $\Rightarrow$, $\rceil$ amallari mulohazalar algebrasidagidek aniqlanganligi sababli, bu aksiomalarning rostlik qiymatlari faqat α ga teng bo'lishi ravshan.

Masalan, II_2. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ aksiomani (1) jadval yordamida tekshirib, faqat α ga teng bo'lishini ko'rish qiyin emas.

II_1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ aksioma $A = \alpha$, $B = \beta$ qiymatlar qabul qilganda β ga teng bo'ladi (jadvalga qarang). 8.1-teorema isbotida mulohazalar algebrasining aynan rost formulalariga keltirib chiqarish qoidalarini qo'llaganimizda yana aynan rost formula hosil bo'lishini ko'rsatganmiz.

Shunday qilib, II_1 aksioma uchun yuqorida ko'rsatilgan 1,2,3-shartlarni qanoatlantiradigan interpretatsiya qurildi. Demak, II_1 aksioma qolgan aksiomalardan erkli. Qolgan aksiomalarning erkinliligini o'quvchilar mustaqil isbot qilishlari, teoremaning to'liq isbotini esa [1] dan topishlari mumkin.

Takrorlash uchun savollar

1. Aksiomalar sistemasida erkin aksiomaga ta'rif bering.
2. Mulohazalar hisobi aksiomalar sistemasi erkinligini isbotlang.

Mashq

1. Aksiomalar sistemasidagi boshqa aksiomalarning aksiomalar sistemasida erkinligini isbotlang.

III BOB

PREDIKATLAR ALGEBRASI

1-§. Predikat tushunchasi. Predikatlar ustida amallar

Predikatlar algebrasi mulohazalar algebrasini kengaytirish natijasida hosil qilingan bo'lib, mulohazalar algebrasini o'z ichiga oladi. Predikatlar algebrasining asosiy tushunchasi – predikat tushunchasi bilan tanishib chiqaylik. Bizga birorta ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan predmetlar to'plami $\mathcal{M}$ berilgan bo'lsin. $\mathcal{M}$ to'plamning ixtiyoriy « *a* » elementi haqida aytilgan mulohazani $P(a)$, deb belgilasak $P(a)$ rost yoki yolg'on mulohaza bo'lishi mumkin. Masalan, $\mathcal{M}$ – natural sonlar to'plamidan iborat bo'lsin, $P(a)$ – « *a* – tub son » – degan darak gap bo'lsin. U holda P (1) – « 1 – tub son » – yolg'on mulohaza, P (2) – « 2 – tub son » – rost mulohaza, P (3) – « 3 – tub son » – rost mulohaza, P (4) – « 4 - tub son » – yolg'on mulohaza va h. k.

Ko'rinib turibdiki, P (a) - a ning o'rniga $\mathcal{M}$ to'plamning aniq elementlarini qo'yganimizda rost yoki yolg'on mulohazalarga aylanar ekan.

Xuddi shunday, $\mathcal{M}$ to'plamining ikkita elementi haqida aytidlgan mulohaza P (*a, b*) ko'rinishida belgilanishi mumkin va h.k.

1.1-*ta'rif. Bo'sh bo'lmagan* $\mathcal{M}$ *to'plam berilgan bo'lsin.* $P\colon \mathcal{M}^n \to \{0, 1\}$, $n = 0, 1, \ldots$ *ko'rinishdagi har qanday funksiya* n *o'rinli predikat deyiladi.*

n = 0 bo'lganda $\mathcal{M}^0 = \{\varnothing\}$ bo'lib, $P(\varnothing) = 0$ yoki $P(\varnothing) = 1$ ko'rinishdagi ajratilgan elementlar hosil bo'ladi. Bu ajratilgan elementlarni yolg'on yoki rost mulohaza deb tushunishimiz mumkin. Shunday qilib nol o'rinli predikat – mulohazadir.

Ikki o'rinli predikatga misol keltiraylik. Natural sonlar to'plami N da berilgan $P(a, b)$ – « a son b soniga qoldiqsiz bo'linadi » – degan predikatni ko'rib chiqaylik. Uning qiymatlari quyidagicha:

$P(1, 1) = 1,\ \ P(1, 2) = 0, \ldots, P(2, 1) = 1,$

$P(2, 2) = 1,\ \ P(2, 3) = 0, \ldots, P(3, 1) = 1$ va h.k.

Bir o'rinli predikatlar bilan to'liqroq tanishib chiqamiz.

Predikatlar ustida ham mulohazalar ustida bajarilgan amallarni kiritishimiz mumkin. $\urcorner, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ amallari bir o'rinli predikatlar uchun quyidagicha aniqlanadi:

$\mathcal{M}$ to'plamda aniqlangan P va Q predikatlar berilgan bo'lsin. U holda:

$(\urcorner P)$ – P ning inkori;

$(P \wedge Q)$ – P va Q ning konyunksiyasi;

$(P \vee Q)$ – P va Q ning dizyunksiyasi;

$(P \Rightarrow Q)$ – P va Q ning implikatsiyasi;

$(P \Leftrightarrow Q)$ – P va Q ning ekvivalensiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$(\urcorner P)(x) = \urcorner(P(x)),\ (P * Q)(a) = P(x) * Q(x),$

bu yerda $*$ – $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ amallardan biri.

1.2-*misol.* N – natural sonlar to'plamida berilgan P(x)– « x – tub son », Q (x) – « x – toq son » predikatlari berilgan bo'lsin. U holda $(\urcorner P)(x) = \urcorner(P(x))$ – « x – tub son emas», degan predikatdir. x ning bir nechta qiymatlarida $\urcorner P$ predikatning qiymatlarini topamiz:

$(\urcorner P)(3) = \urcorner(P(3)) = \urcorner 1 = 0,\ (\urcorner P)(4) = \urcorner(P(4)) = \urcorner 0 = 1$

$(Q \wedge P)(x)$ – « x – toq va tub son » - degan predikatning ham x ning bir nechta qiymatlarida rost yoki yolg'on bo'lishini ko'ramiz.

$(Q \wedge P)(1) = Q(1) \wedge P(1) = 1 \wedge 0 = 0,$

$(Q \wedge P)(2) = Q(2) \wedge P(2) = 0 \wedge 1 = 0,$

$(Q \wedge P)(3) = Q(3) \wedge P(3) = 1 \wedge 1 = 1.$

Shunga o'xshash, $P \vee Q$, $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$ predikatlarning mohiyatini tushunib olish qiyin emas.

1.3-*ta'rif*. *$\mathcal{M}$ to'plamda aniqlangan $P(x)$ predikat berilgan bo'lsin. U holda $P(x)$ ni rost mulohazaga aylantiradigan x ning $\mathcal{M}$ to'plamga tegishli barcha qiymatlarini E_p orqali belgilaymiz. E_p – $P(x)$ ning rostlik sohasi deyiladi.*

Rostlik sohasi isboti qiyin bo'lmagan quyidagi xossalarga ega:

1⁰. $E_{\rceil P} = \mathcal{M} \setminus E_P$.

2⁰. $E_{P \wedge Q} = E_P \bigcap E_Q$.

3⁰. $E_{P \vee Q} = E_P \bigcup E_Q$.

4⁰. $E_{P \Rightarrow Q} = E_{\rceil P} \bigcup E_Q$.

Uchinchi xossaning isbotini ko'rib chiqaylik.

Haqiqatan ham, agar $x \in E_{P \vee Q}$ bo'lsa, u holda $P(x) = 1$ yoki $Q(x) = 1$ bo'ladi. Birinchi holda $x \in E_P$, ikkinchi holda $x \in E_Q$ ekanligidan $x \in E_P \bigcup E_Q$ kelib chiqadi.

Aksincha, $x \in E_P \bigcup E_Q$ bo'lsin. U holda, birlashmaning ta'rifiga ko'ra, $x \in E_P$ yoki $x \in E_Q$ ekanligi, ya'ni $P(x) = 1$ yoki $Q(x) = 1$ kelib chiqadi. Demak, $P(x) \vee Q(x) = 1$ va $x \in E_P \bigcup E_Q$.

Predikatlar ustida bajariladigan yana ikkita amal kiritamiz.

I.4-*ta'rif. $\mathcal{M}$ to'plamda aniqlangan P (x) predikat berilgan bo'lsin. Agar x ning $\mathcal{M}$ to'plamdagi barcha qiymatlarida P (x) = 1 bo'lsa, u holda $\forall_x$ P (x) – ifoda rost mulohaza, aks holda, ya'ni $\mathcal{M}$ to'plamning kamida bitta x_0 elementi uchun P (x_0) = 0 bo'lsa, yolg'on mulohazadir.*

I.5-*ta'rif. $\exists x_P (x)$ – ifoda x ning $\mathcal{M}$ to'plamdagi kamida bitta x_0 elementi uchun P (x_0) = 1 bo'lganda rost, qolgan hollarda yolg'on mulohazadir.*

$\forall$ – belgi, umumiylik kvantorining belgisi,

$\exists$ – belgi, mavjudlik kvantorining belgisi.

$\forall$x P *(x)* – « barcha x lar uchun P *(x)* bo'ladi », $\exists$x P *(x)* – «shunday x topiladi-ki, P *(x)* bo'ladi » deb o'qiladi.

$\forall$x P *(x)* va $\exists$x P *(x)* ifodalardagi x o'zgaruvchi $\forall$ yoki $\exists$ kvantorlari orqali bog'langan, yo bo'lmasa, x o'zgaruvchiga $\forall$ yoki $\exists$ kvantori osilgan deyiladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Predikat deb nimaga aytiladi?
2. Predikatlar ustida mantiq amallari qanday bajariladi?
3. Predikatning rostlik sohasiga ta'rif bering.
4. Predikat rostlik sohasining hossalarini ayting.
5. Predikatlardan kvantorlar yordamida mulohaza hosil qilishni tushuntiring.
6. Mavjudlik va umumiylik kvantorlari yordamida hosil bo'lgan mulohazalarning rostlik qiymatlari qanday aniqlanadi?

Mashqlar

1. Quyidagi ifodalar ichidan predikatlarni ajrating:

1) *« x 5 ga bo'linadi » (x ∈ N);*

2) « $x^2 + 2x + 4$ » $(x \in R)$;

3) *« ctg $45^0 = 1$ »;*

4) « *x* va *y* lar *z* ning turli tomonlarida yotadi » (*x* va *y* lar tekislikdagi nuqtalar to'plamiga, z esa tekislikdagi to'g'ri chiziqlar to'plamiga tegishli).

2. Quyidagi mulohazalarni o'qing va ularning rostlik qiymatini aniqlang:

1) $\forall x \exists y (x + y = 7)$;

2) $\exists y \forall x (x + y = 7)$;

3) $\exists x \exists y (x + y = 7)$;

4) $\forall x \forall y (x + y = 7)$;

5) $\forall x\ ((x^2 > x) \Leftrightarrow ((x > 1) \vee (x < 0)))$;

6) $\exists a\ \forall b\ \exists x\ (x^2 + ax + b = 0)$.

3. Kvantorlar yordamida quyidagi predikatlardan hosil qilish mumkin bo'lgan barcha mulohazalarni quring va ularning rostlik qiymatini aniqlang:

1) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$.

2) $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$.

3) $\sin x = \sin y$.

4) $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (x > 0)$.

4. Quyidagi predikatlarning rostlik sohalarini aniqlang:

1) « $x^2 + 4 > 0$ », $\mathcal{M} = R$.

2) « $x_1 < x_2$ », $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = R$.

3) « $\mathrm{Sin}x > 1$ », $\mathcal{M} = R$.

4) « x 3 ga karrali », $\mathcal{M} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$.

5. Quyidagi predikatlar teng kuchli bo'ladigan to'plamni aniqlang:

1) « x 3 ga karrali », « x 7 ga karrali ».

2) « x – parallelogramm », « x to'rtburchakning diagonallari teng ».

3) « x – tub son », « x – juft son ».

4) « $x^2 - x - 2 = 0$ », « $x^3 + 1 = 0$ ».

2-§. *Predikatlar algebrasining formulalari*

Predikatlar uchun quyida kiritiladigan barcha tushunchalar ixtiyoriy $\mathcal{M}$ to'plam bilan bog'liq. Bu to'plamni predmetlar to'plami deb ataymiz. Lotin alifbosining oxirrog'idagi $x, y, z, u, v, x_1, x_2, \ldots$ - lar o'zgaruvchi predmetlarni, boshidagi $a, b, c, a_1, a_2, \ldots$ - harflarlar $\mathcal{M}$ to'plamning aniq elementlarini bildiradi. Lotin alifbosining bosh harflari $A, B, C, \ldots$ bilan o'zgaruvchi yoki o'zgarmas mulohazalar belgilanadi.

$F(x), G(x, y), P(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$ – ifodalar orqali predikatlarni belgilaymiz.

Agar a, b – doimiy predmetlar, G – ikki o'zgaruvchili predikat bo'lsa, $G(a, b)$ mulohaza bo'lishi ravshan.

$A, B, C, \ldots$ va $F(a), G(a, b), \ldots$ ko'rinishdagi mulohazalar *elementar mulohazalar* deyiladi.

Endi predikatlar algebrasining formulasi tushunchasini kiritamiz.

Predikatlar algebrasida quyidagi simvollar ishlatiladi:

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ – predmet o'zgaruvchilar.

$R_0^{n_0}, R_1^{n_1}, \ldots, R_i^{n_i}, \ldots$ – predikatlar $R_i^{n_i}$ (n_i – o'rinli predikat).

$\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ – mantiq amallari.

$\forall$, $\exists$ – kvantorlar.

(,) – qavslar.

2.1- *ta'rif. 1. Har qanday elementar mulohaza – formuladir.*

2. Agar $R_i^{n_i}$ - n_i – o'rinli predikat $x_1, x_2, ..., x_n$ – o'zgaruvchi predmetlar yoki doimiy predmetlar bo'lsin. U holda $R_i^{n_i}$ – formuladir.

Yuqoridagi 1, 2-punktlarda aniqlangan formulalar elementar formulalar deyiladi.

3. Predikatlar algebrasining birida bog'liq bo'lgan predmet o'zgaruvchi ikkinchisida erkin bo'lmaydigan $\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ formulalar berilgan bo'lsin. U holda $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$, $\rceil \mathcal{A}$ ifodalar ham predikatlar algebrasining formulalaridir.

4. Predikatlar algebrasining x erkin o'zgaruvchi qatnashgan A (x) formulasi berilgan bo'lsin, u holda $\forall$x A (x), $\exists$ x A (x) ifodalar ham predikatlar algebrasining formulasidir.

5. Predikatlar algebrasining 1–4-punktlarda sanab chiqilgan formulalardan boshqa formulalari yo'q.

2.2-***misol.*** $P_1^1(x), Q^2(x,y), R_0^3(x,y,z), \forall x Q_0^2(x,y), \exists x Q_0^1(x)$ – ifodalar predikatlar algebrasining formulalaridir.

Predikat simvolidagi indekslarni kerak bo'lmagan hollarda tashlab yozishni kelishib olamiz. Masalan, $P_1^3(x,y,z)$ o'rniga $P\ (x,\ y,\ z)$ yozish mumkin.

2.3-***misol.*** $\forall\ x\ Q\ (x,\ y) \vee P\ (x)$ ifoda formula bo'lmaydi, chunki, 2.1-ta'rifdagi 3-punkt shartlari bajarilmagan.

2.4-***misol.*** N_0 = { 0, 1, 2,... } to'plam va $N_0 \times N_0$ da aniqlangan $P(x,\ y) \Leftrightarrow$ « $x < y$ », $Q(x,\ y) \Leftrightarrow$ « $x^2 + y^2 = 5$ » predikatlar berilgan bo'lsin. $\exists x\ (P(x,\ y) \wedge Q(x,\ y))$ – predikatning qiymatlarini topaylik. Bu formula bir o‘zgaruvchili predikat bo‘lib, uning qiymatlari faqat y ga bog‘liq. Masalan, agar

$y = 0$ bo‘lsa, $\exists x\ ((«\ x < y\ ») \wedge («\ x^2 + 0^2 = 5\ »)) = 0;$

$y = 1$ bo‘lsa, $\exists x\ ((«\ x < 1\ ») \wedge («\ x^2 + 1^2 = 5\ »)) = 0;$

$y = 2$ bo‘lsa, $\exists x\ ((«\ x < 2\ ») \wedge («\ x^2 + 2^2 = 5\ »)) = 1$ va h.k.

(bu yerda «$\rightleftharpoons$» belgi « aynan shu » ma’nosini bildiradi).

Takrorlash uchun savollar

1. Predikatlar algebrasining simvollarini ayting.
2. Predikatlar algebrasining formulasiga ta’rif bering.
3. Predikatning predmetlar sohasi nima?

Mashqlar

1. Quyidagi formulalardagi erkli va bog‘liq o‘zgaruvchilarni aniqlang:

$\forall x\ A\ (x)$.

$A\ (y) \Rightarrow \exists x\ B\ (x)$.

$\exists x\ \forall y\ (A\ (x) \wedge B\ (y)) \Rightarrow \forall y\ C\ (t, y)$.

$\forall x\ (\exists y\ (A\ (x, y)) \Rightarrow B\ (t, t, z)$.

Quyidagi mulohazalarni predikatlar algebrasi tilida ifodalang:

« Barcha rasional sonlar haqiqiy ».

« Ayrim rasional sonlar haqiqiy emas ».

« 12 ga bo‘linuvchi har qanday natural son 2, 4 va 6 ga bo‘linadi ».

« Ayrim ilonlar zaharli ».

5) « Bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan 3 ta nuqta orqali yagona tekislik o‘tkazish mumkin ».

« Yagona x mavjudki, $P\ (x)$ ».

$A\ (x) \rightleftharpoons$ « x – tub son », $B\ (x) \rightleftharpoons$ « x – juft son »,

$C(x) \rightleftharpoons$ « x – toq son », $D(x) \rightleftharpoons$ « x y ni bo‘ladi » kabi xossalarni bildirsa quyidagilarni o‘qing:

$A(7)$.

$B(2) \wedge A(2)$.

$\forall x (B(x) \Rightarrow \forall y (D(x, y) \Rightarrow B(y))$.

$\forall x (C(x) \Rightarrow \forall y (A(y) \Rightarrow \rceil D(x, y)))$.

3-§. Predikatlar algebrasining teng kuchli formulalari

3.1-***ta’rif.*** *Predikatlar algebrasining $\mathcal{M}$ to‘plamida aniqlangan $\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ formulalari berilgan bo‘lsin. Agar $\mathcal{M}$ to‘plamning har bir elementi uchun $\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ lar bir xil qiymat qabul qilsa, u holda $\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ formulalar $\mathcal{M}$ to‘plamda teng kuchli formulalar deyiladi.*

3.2-***ta’rif.*** *Predikatlar algebrasining o‘zlari aniqlangan har qanday sohada teng kuchli bo‘lgan formulalari predikatlar algebrasining teng kuchli formulalari deyiladi.*

$\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ teng kuchli formulalar $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ ko‘rinishda belgilanadi.

Mulohazalar algebrasidagi barcha tengkuchliliklar predikatlar algebrasining tengkuchliliklari bo‘lishi ravshan. Faqat predikatlar algebrasiga xos teng kuchli formulalardan asosiylari quyidagilardir:

1^0. $\rceil(\forall x P(x)) \equiv \exists x \rceil P(x)$.

2^0. $\rceil(\exists x P(x)) \equiv \forall x \rceil P(x)$.

3^0. $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \equiv \forall x (P(x) \wedge Q(x))$.

4^0. $A \wedge \forall x P(x) \equiv \forall x (A \wedge P(x))$.

5^0. $B \vee \forall x P(x) \equiv \forall x (B \vee P(x))$.

6^0. $C \Rightarrow \forall x P(x) \equiv \forall x (C \Rightarrow P(x))$.

7^0. $\forall x\,(P(x) \Rightarrow C) \equiv \exists x\, P(x) \Rightarrow C$.
8^0. $\exists x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
9^0. $\exists x\,(A \vee P(x)) \equiv A \vee \exists x\, P(x)$.
10^0. $\exists x(A \wedge P(x)) \equiv A \wedge \exists x\, P(x)$.
11^0. $\exists x\, P(x) \wedge \exists y\, Q(y) \equiv \exists x\, \exists y\,(P(x) \wedge Q(y))$.
12^0. $\exists x\,(C \Rightarrow P(x)) \equiv C \Rightarrow \exists x\, P(x)$.
13^0. $\exists x\,(P(x) \Rightarrow C) \equiv \forall x\, P(x) \Rightarrow C$.

Tengkuchliliklarda *A, B, C* lar o'zgaruvchi mulohazalar; *P, Q* lar o'zgaruvchi predikat simvollaridir.

3^0- tengkuchlilikni isbotlaylik. Agar P (x) va Q (x) predikatlar bir vaqtda aynan rost bo'lsalar, u holda $P(x) \wedge Q(x)$ predikat ham aynan rost bo'ladi. Bundan esa

$\forall x\, P(x)$, $\forall x\, Q(x)$, $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$

mulohazalarning rost qiymat qabul qilishi kelib chiqadi. Ya'ni bu holda tengkuchlilikning ikkala tomoni «rost» qiymat qabul qiladi.

Faraz qilamiz berilgan P (x) va Q (x) predikatlarning kamida bittasi masalan, P (x) aynan rost bo'lmasin. U holda $P(x) \wedge Q(x)$ predikat ham aynan rost bo'lmaydi, bundan esa

$\forall x\, P(x)$, $\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$, $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$

mulohazalar yolg'on bo'ladi. Ya'ni bu holda ham tengkuchlilikning ikkala tomoni bir xil (yolg'on) qiymat qabul qiladi.

3^0 - tengkuchlilik isbotlandi.

6^0- tengkuchlilikni isbotlaylik.

C o'zgaruvchili mulohaza « yolg'on » qiymat qabul qilsin. U holda $C \Rightarrow P(x)$ predikat aynan rost bo'ladi va bundan

$C \Rightarrow \forall x\, P(x)$ va $\forall x\,(C \Rightarrow P(x))$

mulohazalarning rostligi kelib chiqadi. Ya'ni, bu holda tengkuchlilikning ikkala tomoni bir xil qiymat qabul qiladi.

Endi C o'zgaruvchili mulohaza « rost » qiymat qabul qilsin. Agar bunda o'zgaruvchili predikat $P(x)$ aynan rost bo'lsa, u holda $C \Rightarrow P(x)$ predikat ham aynan rost bo'ladi. Bundan esa

$$\forall x\, P(x), \quad C \Rightarrow \forall x\, P(x), \quad \forall x\, (C \Rightarrow P(x))$$

mulohazalarning rost ekanligi kelib chiqadi. Ya'ni, bu holatda ham 6^0- tengkuchlilikning ikkala tomoni bir xil qiymat qabul qiladi.

Va nihoyat, $P(x)$ predikat aynan rost bo'lmasa, u holda $C \Rightarrow P(x)$ predikat ham aynan rost bo'lmaydi. Bundan esa $\forall x\, P(x)$, $C \Rightarrow \forall x\, P(x)$, $\forall x\, (C \Rightarrow P(x))$ mulohazalarning yolg'onligi kelib chiqadi. Demak, bu yerda ham tengkuchlilikning ikkala qismi bir xil qiymat qabul qiladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Predikatlar algebrasining formulasi ta'rifini ayting.
2. Predikatlar algebrasining teng kuchli formulalari deb, qanday formulalarga aytiladi?
3. Predikatlar algebrasidagi tengkuchliliklar qanday isbotlanadi?

Mashqlar

1. Quyidagi predikatlar teng kuchli bo'ladigan to'plamni aniqlang:

1) « x 3 ga karrali », « x 7 ga karrali ».

2) « x – parallelogramm », « x to'rtburchakning diagonallari teng ».

3) « x – tub son », « x – juft son ».

4) « $x^2 - x - 2 = 0$ », « $x^3 + 1 = 0$ ».

2. Yuqorida keltirilgan tengkuchliliklarni isbotlang.

4-§. Keltirilgan normal forma

4.1-***ta'rif.*** *Predikatlar algebrasida inkor amali faqat elementar formulalar oldida kelib, konyunksiya, dizyunksiya, kvantor amallaridan boshqa hech qanday amal qatnashmagan formula normal forma (formula) deyiladi.*

4.2-***teorema.*** *Predikatlar algebrasining ixtiyoriy formulasi yo normal forma, yo unga teng kuchli normal forma mavjud.*

Isbot. Haqiqatan, agar formulada $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ amallari qatnashsa, ularda

$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \rceil \mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} \equiv (\rceil \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \rceil \mathcal{B})$$

tengkuchliliklardan foydalanib, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ amallarni $\rceil$, $\wedge$, $\vee$ amallari bilan almashtiramiz. Inkor amali faqat elementar formulalargagina tegishli bo'lishi uchun

$$\rceil(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \rceil \mathcal{A} \vee \rceil \mathcal{B}, \qquad \rceil(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \rceil \mathcal{A} \wedge \rceil \mathcal{B},$$

$$\rceil(|x\, P(x)) \equiv \exists x \rceil P(x), \qquad \rceil(\exists x\, P(x) \equiv |x \rceil P(x)$$

tengkuchliliklardan foydalanish yetarli.

4.3-***ta'rif.*** *Predikatlar algebrasining normal formasida kvantorlar qatnashmasa yoki hamma kvantorlar barcha amallardan avval kelsa, bunday forma keltirilgan normal forma yoki preniksli normal forma deyiladi.*

4.4-***teorema.*** *Predikatlar algebrasining ixtiyoriy formulasi uchun keltirilgan normal forma yo unga teng kuchli keltirilgan normal forma mavjud.*

Bu teoremaning isbotini 4.2-teoremadan va 3-§ da keltirilgan asosiy tengkuchliliklardan keltirib chiqarish mumkin.

Takrorlash uchun savollar

1. Predikatlar algebrasining normal formasi deb nimaga aytiladi?
2. Predikatlar algebrasining ixtiyoriy formulasiga teng kuchli normal forma mavjudligini isbotlang.
3. Keltirilgan normal forma ta'rifini ayting.
4. 4.4-teoremani isbotlang.

Mashqlar

1. Teng kuchli almashtirishlar yordamida quyidagi formulalarni keltirilgan normal formaga aylantiring:

$$\exists x\,(A(x) \Rightarrow \forall y\,(B(y))).$$

$$\urcorner(\forall x\,A(x) \Rightarrow \exists y\,B(y)).$$

$$\exists x\,(\forall y\,A(y) \Rightarrow B(x)) \wedge \urcorner(\forall y\,\exists x\,(B(x) \Rightarrow A(y))).$$

$$\urcorner(\forall x\,A(x) \vee \exists x(B(x) \Rightarrow C(x))).$$

2. Teng kuchli almashtirishlar yordamida quyidagi formulalarni preneksli normal formalarga aylantiring:

$$\forall y\,A(x, y) \Rightarrow B(x, x).$$

$$\forall y\,A(y, z) \Rightarrow \exists x\,B(x, t, z).$$

$$\exists x\,A(x, y, z) \Rightarrow \urcorner(\forall x\,B(x, y)).$$

$$\forall x\,(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (\exists x\,A(x) \Rightarrow \exists y\,B(y)).$$

5-§. Predikatlar algebrasida yechilish muammosi

5.1-***ta'rif.*** *Predikatlar algebrasining $\mathcal{A}$ formulasiga kirgan o'zgaruvchi predmetlar* $x_1, x_2, ..., x_n$ *larning to'plamidan olingan, hech bo'lmaganda bitta qiymatlari tizimi* $a_1, a_2, ..., a_n$ *lar uchun $\mathcal{A}$ formula rost qiymat qabul qilsa, u holda $\mathcal{A}$ formula $\mathcal{M}$ to'plamda bajariluvchi deyiladi.*

5.2-***ta'rif.*** *Predikatlar algebrasining kamida bitta to'plamida bajariluvchi formulasi predikatlar algebrasining bajariluvchi formulasi deyiladi.*

5.3-***ta'rif.*** *Agar predikatlar algebrasining $\mathcal{A}$ formulasi, formula tarkibiga kirgan barcha o'zgaruvchi predmetlarning $\mathcal{M}$ to'plamidagi ixtiyoriy qiymatlari uchun rost qiymat qabul qilsa, bunday formula $\mathcal{M}$ to'plamda aynan rost formula deyiladi.*

5.4-***ta'rif.*** *Har qanday to'plamda aynan rost bo'lgan formula umumqiymatli formula deyiladi.*

5.5-***ta'rif.*** *Umumqiymatli formula logik qonun deyiladi.*

5.6-***ta'rif.*** *Agar predikatlar algebrasining $\mathcal{A}$ formulasi, formula tarkibiga kirgan barcha o'zgaruvchi predmetlarning $\mathcal{M}$ to'plamidan olingan ixtiyoriy qiymatlari uchun yolg'on qiymat qabul qilsa. Bu formula $\mathcal{M}$ to'plamda aynan yolg'on formula deyiladi.*

5.7-***ta'rif.*** *Har qanday to'plamda aynan yolg'on bo'lgan formula aynan yolg'on formula deyiladi.*

5.8-***misol.*** $\exists x\, P(x, y)$ – formula bajariluvchi formuladir. Haqiqatan, $P(x, y)$ – natural sonlar to'plamida aniqlangan « $y \vdots x$ « predikat bo'lsin, u holda

$P(1, y) = 1$. Demak, $\exists x\, P(x, y) = 1$.

5.9-***misol.*** $\exists x\, \exists y\, P(x, y)$ – predikat bajariluvchi predikatdir. Haqiqatan, $P(x, y)$ – predikat natural sonlar to‘plamida aniqlangan «$x > y$» predikati bo‘lsin, u holda $P(5, 1) = 1$. Demak, $\exists x\, \exists y\, P(x, y) = 1$.

5.10-***misol.*** $P(x) \vee \neg P(x)$ – predikat umumqiymatli predikatdir.

5.11-***misol.*** $P(x) \wedge \neg P(x)$ – predikat aynan yolg‘on predikatdir.

Predikatlar algebrasining ixtiyoriy formulasi bajariluvchi yoki bajariluvchi emasligini aniqlab beradigan samarali usul mavjud bo‘lish yoki bo‘lmasligini aniqlash masalasi predikatlar algebrasi uchun *yechilish muammosi* deyiladi.

Formula bajariluvchiligi masalasini hal qilsak formula aynan rost yoki aynan yolg‘onligi ham hal qilinadi.

Haqiqatan, agar $\mathcal{A}$ formula aynan rost bo‘lsa, $\neg\mathcal{A}$ formula bajariluvchi bo‘la olmaydi. Demak, $\mathcal{A}$ va $\neg\mathcal{A}$ formulalarning bajariluvchi yo bajariluvchi emasligini aniqlash natijasida $\mathcal{A}$ ning aynan rost bo‘lish-bo‘lmasligi ma’lum bo‘ladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Predikatlar algebrasining biror bir to‘plamda bajariluvchi (aynan rost, aynan yolg‘on) formulasiga ta’rif bering.
2. Predikatlar algebrasining bajariluvchi (umumqiymatli, aynan yolg‘on) formulasi deb qanday formulaga aytiladi?

Mashqlar

Natural sonlar to‘plamida qaralayotgan quyidagi predikatli formulalarning qaysilari bajariluvchi (aynan rost, aynan yolg‘on) ekanligini aniqlang:

1) $\exists x\, \forall y\, (\neg(y > x) \Leftrightarrow \exists x\, (\neg \exists y\, (y > x))$;
2) $\exists x\, \forall y\, ((y > x) \vee \neg(y > 0)) \Leftrightarrow \exists x\, \forall y\, (y > 0 \Rightarrow y > x)$;
3) $\neg(\forall x\, \exists y\, \exists z\, (x < y \wedge z^2 > y) \Leftrightarrow \forall x\, \exists y\, (x < y \wedge \exists z\, (z^2 > y))$.

2. Quyidagi formulalarning bajariluvchi ekanligini isbotlang:

$\exists x \exists y\,(A\,(x) \wedge \rceil A\,(y))$;

$\exists x\,\forall y\,(B\,(x, y) \Rightarrow \forall z\,C\,(x, y, z))$;

$\mathcal{A}\,(x) \Rightarrow \forall y\,\mathcal{A}\,(y)$;

$\forall x\,(\mathcal{A}\,(x) \vee B\,(x)) \Rightarrow (\forall x\,\mathcal{A}\,(x) \vee \forall x\,B\,(x))$.

3. Quyidagi formulalarning umumqiymatli ekanligini isbotlang:

$\exists x\,\forall y\,B\,(x, y) \Rightarrow \forall y\,\exists x\,B\,(x, y)$;

$\forall x\,(A\,(x) \Rightarrow B\,(x)) \Rightarrow (\forall x\,A\,(x) \Rightarrow \forall x\,B\,(x))$;

$\forall x\,(A\,(x) \Rightarrow B\,(x)) \Rightarrow (\exists x\,A\,(x) \Rightarrow \exists x\,B\,(x))$;

$\exists x\,(A\,(x) \Rightarrow B\,(x)) \Leftrightarrow (\forall x\,A\,(x) \Rightarrow \forall x\,B\,(x))$.

6-§. Predikatlar algebrasi uchun yechilish muammosining umumiy holda ijobiy hal qilinmasligi

XX asrning 40-yillarida algoritm tushunchasiga aniq ta'rif berilganidan so'ng yechilish muammosini hal qilish imkoni hosil bo'ldi. 1936-yilda amerikalik matematik A.Chyorch predikatlar algebrasi uchun yechilish muammosi umumiy holda ijobiy hal qilinmasligini isbot qilgan.

Yechilish muammosi chekli sohalar uchun ijobiy hal qilinishi ravshan. Haqiqatan, agar $\mathcal{A}\,(x_1,..., x_n)$ formula $\mathcal{M}$ to'plamning elementlarini $x_1,..., x_n$ o'zgaruvchi predmetlar o'rniga qo'yib chiqib, $\mathcal{A}$ formulaning qiymatlarini tekshirib chiqamiz. Bu jarayon chekli qadamda yakunlanadi. Kvantor amallarini esa konyunksiya, dizyunksiya amallari bilan almashtirish mumkin.

6.1-*misol.* $\forall x\,\exists y\,(P\,(x, y, z) \vee Q\,(x))$ formula $\mathcal{M} = \{\,a, b\,\}$ to'plamda bajariluvchi bo'lish bo'lmasligini aniqlash uchun avval formula ko'rinishini asosiy tengkuchliliklar yordamida o'zgartiramiz:

$\forall x\, \exists y\, (P(x, y, z) \vee Q(x)) \equiv \forall x\, (P(x, a, z) \vee Q(x) \vee R(x, b, z)) \equiv$
$\equiv (P(a, a, z) \vee Q(a) \vee P(a, b, z)) \wedge (P(b, a, z) \vee Q(b) \vee$
$\vee P(b, b, z))$.

Hosil bo'lgan formulada z o'rniga a va b qiymatlarni ketma-ket qo'yib berilgan formulaning bajariluvchi bo'lish-bo'lmasligini aniqlash mumkin.

6.2-*ta'rif*. *Agar predikatlar algebrasining formulasida erkli o'zgaruvchilar qatnashmasa, bunday formula yopiq formula deyiladi.*

6.3-***misol***. $\forall x\, \forall y\, \exists z\, (P(x, y) \vee R(x, z))$ – formula yopiq formuladir.

6.4-*ta'rif*. *Agar predikatlar algebrasining* $\mathcal{A}(x_1,..., x_n)$ *formulasida* $x_1,...,x_n$ – *erkli predmet o'zgaruvchilar qatnashgan bo'lsa, u holda* $\forall x_1 \forall x_2 .. \forall x_n \mathcal{A}(x_1,...,x_n)$ – *formula* $\mathcal{A}(x_1,...,x_n)$ *formulaning umumiylik (kvantori orqali) yopig'i,* $\exists x_1 \exists x_2 .. \exists x_n \mathcal{A}(x_1,...,x_n)$ *esa berilgan formulaning mavjudlik (kvantori orqali) yopig'i, ikkala* $\exists$, " *kvantorlar yordamida hosil qilingan yopiq formula - berilgan formulaning aralash yopig'i deyiladi.*

6.5-***misol***. $\exists x\, P(x, y, z)$ formula berilgan bo'lsin. U holda $\forall y\, \forall z\, \exists x\, P(x, y, z)$ berilgan formulaning umumiylik yopig'i, $\exists y\, \exists z\, \exists x\, P(x, y, z)$ – mavjudlik yopig'i, $\forall y\, \exists z\, \exists x\, P(x, y, z)$ – aralash yopig'i bo'ladi.

6.6-***teorema***. *Predikatlar algebrasining yopiq, normal formasida faqat n ta mavjudlik kvantori qatnashib, umumiylik kvantorlari qatnashmagan bo'lsin. Agar bu formula ixtiyoriy bir elementli to'plamda rost qiymat qabul qilsa, u holda u umumqiymatli formuladir.*

Isbot. Teorema shartiga asosan olingan formula quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$\mathcal{B} = \exists x_1 ... \exists x_n\, \mathcal{A}(Y_1,...,Y_p;\, P_1,..., P_q; ...\, Q_1,..., Q_t) \quad (1).$$

$\mathcal{B}$ formulada $Y_1, Y_2,..., Y_p$ – o'zgaruvchi mulohazalar;

$P_1, P_2, \ldots, P_q$ – bir o'rinli predikatlar simvollari va h.k.

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ – m-o'rinli predikatlar simvollari;

$\mathcal{A}$ - teorema shartiga ko'ra kvantorsiz formuladir.

Teorema shartiga ko'ra $\mathcal{B}$ formula ixtiyoriy bir elementli $\mathcal{M} = \{ a \}$ to'plamda aynan rost. Ya'ni $\mathcal{A}(Y_1, \ldots, Y_p; P_1(a), \ldots, P_q(a); Q_1(a, \ldots, a), \ldots Q_t(a, \ldots, a)) = 1$.

Faraz qilaylik (1) formula umumqiymatli formula bo'lmasin. U holda shunday $\mathcal{M}_1$ soha, $Y_1^0, \ldots, Y_p^0$ – mulohazalar,

$P_1^0, \ldots, P_q^0; \ldots; Q_1^0, \ldots, Q_t^0$ - $\mathcal{M}_1$ sohada aniqlangan predikatlar mavjud bo'lib, (1) formula « yolg'on» qiymat qabul qilsin. Ya'ni:

$\exists x_1 \ldots \exists x_n (\mathcal{A}(Y_1^0, \ldots, Y_p^0; P_1^0, \ldots, P_q^0; \ldots Q_1^0, \ldots, Q_t^0)) = 0$ (3).

U holda $\rceil(\exists x_1 \ldots \exists x_n (\mathcal{A}(Y_1^0, \ldots, Y_p^0; P_1^0, \ldots, P_q^0; \ldots; Q_1^0, \ldots, Q_t^0)) = \forall x_1 \ldots \forall x_n (\rceil(\mathcal{A}(Y_1^0, \ldots, Y_p^0; P_1^0, \ldots, P_q^0; \ldots; Q_1^0, \ldots, Q_t^0))) = 1$.

Demak, $\rceil(\mathcal{A}(Y_1^0, \ldots, Y_p^0; P_1^0, \ldots, P_q^0; \ldots; Q_1^0, \ldots, Q_t^0))$ – formula o'zgaruvchi predikatlarning $\mathcal{M}_1$ to'plamdagi barcha qiymatlari uchun aynan rost bo'ladi.

Xususan, ixtiyoriy $\mathcal{M}_1 = \{ x_0 \}$ – bir elementli to'plam uchun $\mathcal{A}(Y_1^0, \ldots, Y_p^0; P_1^0, \ldots, P_q^0; \ldots; Q_1^0, \ldots, Q_t^0) = 0$.

Bu esa teorema shartiga zid.

6.7-*teorema. Predikatlar algebrasining yopiq, keltirilgan normal formulasida faqat n ta umumiylik kvantori qatnashib, mavjudlik kvantorlari qatnashmasin. Agar bu formula elementlari soni n tadan ko'p bo'lmagan har qanday to'plamda aynan rost formula bo'lsa, u holda u umumqiymatli formuladir.*

Isbot. Teorema shartini qanoatlantiradigan

$\mathcal{B} = \forall x_1 \ldots \forall x_n (\mathcal{A}(Y_1, \ldots, Y_p; P_1, \ldots, P_q; \ldots; Q_1, \ldots, Q_t))$ (1)

formula berilgan bo'lsin. Bu yerda:

$Y_1, \ldots, Y_p$ – o'zgaruvchi mulohazalar;

$P_1, \ldots, P_q$ – bir o'rinli predikatlar;... va h.k.

$Q_1, \ldots, Q_t$ – m – o'rinli predikatlardir.

$\mathcal{B}$ formula umumqiymatli emas deb faraz qilaylik. U holda:

shunday elementlari soni n dan ko'p bo'lgan $\mathcal{M}$ to'plam; $Y_1^0, \ldots, Y_p^0$ – mulohazalar;

M to'plamda aniqlangan $P_1^0, \ldots, P_q^0$ – bir o'rinli predikatlar;...

$Q_1^0, \ldots, Q_t^0$ – m o'rinli predikatlar mavjud bo'lib,

$\forall x_1 \ldots \forall x_n (\mathcal{A} (Y_1^0, \ldots, Y_p^0; P_1^0, \ldots, P_q^0; \ldots; Q_1^0, \ldots, Q_t^0)$ (2)

formula yolg'on qiymat qabul qiladi. U holda

$\exists x_1 \ldots \exists x_n (\rceil (\mathcal{A} (Y_1^0, \ldots, Y_p^0; P_1^0, \ldots, P_q^0; \ldots; Q_1^0, \ldots, Q_t^0)) = 1.$

Bundan esa $\rceil (\mathcal{A} (Y_1^0, \ldots, Y_p^0; P_1^0, \ldots, P_q^0; \ldots; Q_1^0, \ldots, Q_t^0) = 1$

yoki $\mathcal{A} (Y_1^0, \ldots, Y_p^0; P_1^0, \ldots, P_q^0; \ldots; Q_1^0, \ldots, Q_t^0) = 0$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\mathcal{M}$ to'plamning elementlari soni *n* tadan ko'p bo'lmagan $\mathcal{M}_1$ qism to'plami mavjud bo'lib, $\mathcal{M}_1$ to'plamda (1) formula « yolg'on » qiymat qabul qiladi. Hosil bo'lgan natija teorema shartiga zid.

Predikatlar algebrasidagi yechilish muammosi bilan chuqurroq tanishmoqchi bo'lgan o'quvchilarga P.S.Novikovning «Elementi matematicheskoy logiki» kitobini tavsiya etamiz.

Takrorlash uchun savollar

1. Predikatlar algebrasi uchun yechilish muammosini tushuntiring.
2. Predikatlar algebrasining yopiq formulasi ta'rifini bering.
3. Predikatlar algebrasi formulasining umumiylik hamda mavjudlik kvantorlari orqali yopig'iga ta'rif bering.

Mashqlar

Quyidagi formulalarning qaysilari umumqiymatli ekanligini aniqlang:

1) $\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$;
2) $\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$;
3) $\forall x\, (A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x)$;
4) $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Leftrightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$;
5) $\forall x\, (A \Rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (A \Rightarrow \forall x\, B(x))$;
6) $\forall x\, (A(x) \Rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (\forall x\, A(x) \Rightarrow \forall x\, B(x))$;
7) $\exists x\, A(x) \Rightarrow \forall x\, B(x)$;
8) $\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, B(x)$.

IV BOB

PREDIKATLAR HISOBI

1-§. Predikatlar hisobining formulalari, aksiomalari

Predikatlar hisobi predikatlar algebrasining aksiomatik bayonidir. Predikatlar hisobi formal aksiomatik nazariya bo'lib, o'zining simvollari, aksiomalari, keltirib chiqarish qoidalariga ega.

Predikatlar hisobining formulasi tushunchasi shaklan predikatlar algebrasidagidek kiritiladi. Shuning uchun formula ta'rifini takrorlab o'tirmaymiz.

Predikatlar hisobining aksiomalari sifatida mulohazalar hisobining barcha aksiomalarini, undan tashqari quyidagi aksiomalarni qabul qilamiz:

V_1. $\forall x\, F(x) \Rightarrow F(y)$;

V_2. $F(y) \Rightarrow \exists x\, F(x)$.

Shunday qilib, predikatlar hisobining aksiomalari quyidagilardan iborat:

I_1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

I_2. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

II_1. $A \wedge B \Rightarrow A$.

II_2. $A \wedge B \Rightarrow B$.

II_3. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \wedge C))$.

III_1. $A \Rightarrow A \vee B$.

III_2. $B \Rightarrow A \vee B$.

III_3. $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B) \Rightarrow C))$.

IV_1. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\rceil B \Rightarrow \rceil A)$.
IV_2. $A \Rightarrow \rceil\rceil A$.
IV_3. $\rceil\rceil A \Rightarrow A$.
V_1. $\forall x\, F(x) \Rightarrow F(y)$.
V_2. $F(y) \Rightarrow \exists x\, F(x)$.

Takrorlash uchun savollar

1. Predikatlar hisobi qanday matematik nazariya?
2. Predikatlar hisobi aksiomalarini ayting.
3. Mulohazalar hisobi aksiomalari va predikatlar hisobi aksiomalari sistemalarining o'xshash va farqli tomonlarini tushuntiring.

2-§. Predikatlar hisobining keltirib chiqarish qoidalari

2.1. ***Xulosa chiqarish qoidasi.***

Agar $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ formulalar keltirib chiqariluvchi formulalar bo'lsa, u holda $\mathcal{B}$ ham keltirib chiqariluvchi formuladir. Bu qoida mulohazalar hisobidagidek

$$\frac{\mathcal{A},\ \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{B}}$$ ko'rinishda belgilanadi.

2.2. ***O'zgaruvi mulohazani o'rniga qo'yish qoidasi.***

Predikatlar hisobining keltirib chiqariluvchi $\mathcal{A}$ (A) formulasida A o'zgaruvchi mulohaza qatnashsin.

$\mathcal{B}$ – predikatlar hisobining ixtiyoriy formulasi bo'lib, $\mathcal{B}$ ning erkin o'zgaruvcxilari $\mathcal{A}$ dagi bog'liq o'zgaruvchilardan farqli harflar bilan; $\mathcal{B}$ ning bog'liq o'zgaruvcxilari $\mathcal{A}$ ning erkin o'zgaruvcxilaridan farqli harflari bilan belgilangan bo'lsin. Undan tashqari A mulohaza birorta kvantorning ta'sir doirasida yotgan bo'lsa, bu kvantorlar bilan bog'langan harf $\mathcal{B}$ formulada qatnashmasin. Bu holda A o'zgaruvchi mulohaza $\mathcal{A}$ formulaning qayerida qatnashgan bo'lsa, o'sha joylarda A mulohazani $\mathcal{B}$ formula bilan almashtirsak, hosil bo'lgan ifoda predikatlar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi bo'ladi. Bu qoida qisqacha

$\dfrac{\mathcal{A}(A)}{\mathcal{A}(\mathcal{B})}$ ko'rinishda belgilanadi.

2.3-*misol.* $\mathcal{A}$ (A) formula

$\forall x\, \exists y\, (P(x, y, z) \vee A) \wedge \neg A$ ko'rinishda bo'lsin. U holda A o'rniga $\exists x\, B(x)$ yoki $\forall y\, B(y)$ formulalarni qo'yib bo'lmaydi, chunki A $\forall$, $\exists$ kvantorlarining ta'sir sohasida joylashgan. A o'rniga $\exists t\, B(t)$ formulani qo'yish mumkin, chunki hosil bo'lgan $\forall x\, \forall y\, (P(x, y, z) \vee \exists t\, B(t) \wedge \neg(\exists t\, B(t))$ ifoda yana formula bo'ladi.

2.4. ***O'zgaruvchi predikatni o'rniga qo'yish qoidasi.***

Bu almashtirish natijasida ham hosil bo'lgan ifoda formula bo'lishini ta'minlashimiz lozim.

Predikatlar hisobining keltirib chiqariluvchi $\mathcal{A}$ (F) formulasida *n* o'zgaruvchili F predikat qatnashsin.

$\mathcal{B}(t_1,.., t_n)$ – predikatlar hisobining n ta erkin $t_1.., t_n$ o'zgaruvchili formulasi bo'lsin. $\mathcal{B}$ ning bog'liq o'zgaruvcxilari $\mathcal{A}$ ning erkin o'zgaruvchilaridan, $\mathcal{B}$ ning erkin o'zgaruvcxilari $\mathcal{A}$ning bog'liq o'zgaruvchilaridan farqli harflar bilan belgilangan bo'lsin. Undan tashqari, agar F $\mathcal{A}$ dagi birorta harfni bog'lagan kvantorning ta'sir sohasida bo'lsa, o'sha harf $\mathcal{B}$ formulada qatnashmasin. U holda agar $\mathcal{A}$ (F) formulada barcha $F(x_1,..., x_n)$ qatnashgan joylarda $\mathcal{B}(t_1,..., t_n)$ formulaning $t_1.., t_n$ o'zgaruvchilarini mos ravishda $x_1,..., x_n$ larga almashtirib qo'yib chiqamiz. Natijada hosil bo'lgan ifoda predikatlar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi bo'ladi.

3-§. Predikatlar hisobida keltirib chiqariluvchi formula tushunchasi

3.1-*ta'rif. 1. Predikatlar hisobining har bir aksiomasi keltirib chiqariluvchi formuladir.*

2. Predikatlar hisobining keltirib chiqariluvchi formulalariga 2-§ da bayon qilingan keltirib chiqarish qoidalarini chekli marta qo'llash natijasida hosil qilingan formulalar ham predikatlar hisobining keltirib chiqariluvchi formulalari bo'ladi.

3. Boshqacha usulda keltirib chiqariluvchi formulalar hosil qilib bo'lmaydi.

Mulohazalar hisobining hamma aksiomalari va keltirib chiqarish qoidalari predikatlar hisobiga ham kirganligi sababli mulohazalar hisobining barcha keltirib chiqariluvchi formulalari predikatlar hisobida ham keltirib chiqariluvchi formula bo'ladi. Undan tashqari, predikatlar hisobining har bir keltirib chiqariluvchi formulasi predikatlar algebrasining formulasi sifatida qaralsa, aynan rost formula bo'lishini ko'rish qiyin emas. Bu tasdiqning isbotini o'quvchilarga mustaqil isbot qilish uchun qoldiramiz.

Predikatlar hisobi uchun ham mulohazalar hisobidagidek zidsizlik, to'liqlik, erklilik, echiluvchanlik muammolari qaraladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Predikatlar hisobida keltirib chiqariluvchi formula ta'rifini bering.
2. Nima uchun mulohazalar hisobining aksiomalari va keltirib chiqariluvchi formulalari predikatlar hisobida ham keltirib chiqariluvchi bo'ladi?
3. Predikatlar hisobining har bir keltirib chiqariluvchi formulasi predikatlar algebrasining aynan rost formulasi bo'lishini isbotlang.

hamma joylarda $\mathcal{A}$ dagi barcha erkin o'zgaruvchi predikatlardan farq qiladigan boshqa bog'liq o'zgaruvchi predmetlar bilan almashtirsak, hosil bo'lgan ifoda predikatlar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi bo'ladi.

2.11-*misol.* $(\forall x\, F(x) \Rightarrow \exists x\, G(x)) \Rightarrow G(y)$ formulada x ni t bilan almashtirib, $(\forall t\, F(t) \Rightarrow \exists t\, G(t)) \Rightarrow G(y)$ – formulani hosil qilishimiz mumkin. Biz almashtirishni to'g'ri bajardik. Haqiqatan ham, $z \neq y$ va $\forall$ kvantorining ta'sir sohasiga tegishli joylardagina x ni z bilan almashtirdik.

2.12. ***Kvantorlar bilan bog'lash qoidalari.***

Agar $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}(x)$ predikatlar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi bo'lib, x o'zgaruvchi $\mathcal{A}$ da qatnashmasa $\mathcal{A} \Rightarrow \forall x\, \mathcal{B}(x)$ predikatlar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi bo'ladi.

Agar $\mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}$ predikatlar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi bo'lib, x o'zgaruvchi $\mathcal{B}$ da qatnashmasin. U holda $\exists\, \mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}$ predikatlar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Mulohazalar hisobining keltirib chiqarish qoidalarini esga oling.
2. Predikatlar hisobining xulosa chiqarish va o'zgaruvchi mulohazani o'rniga qo'yish qoidalarini tushuntiring.
3. O'zgaruvchi predikatning o'rniga qo'yish va erkin predmet o'zgaruvchini almashtirish qoidalarini ayting.
4. Bog'liq predmet o'zgaruvchini almashtirish hamda kvantorlar bilan bog'lash qoidalari haqida ma'lumot bering.

3-§. Predikatlar hisobida keltirib chiqariluvchi formula tushunchasi

3.1-*ta'rif. 1. Predikatlar hisobining har bir aksiomasi keltirib chiqariluvchi formuladir.*

2. Predikatlar hisobining keltirib chiqariluvchi formulalariga 2-§ da bayon qilingan keltirib chiqarish qoidalarini chekli marta qo'llash natijasida hosil qilingan formulalar ham predikatlar hisobining keltirib chiqariluvchi formulalari bo'ladi.

3. Boshqacha usulda keltirib chiqariluvchi formulalar hosil qilib bo'lmaydi.

Mulohazalar hisobining hamma aksiomalari va keltirib chiqarish qoidalari predikatlar hisobiga ham kirganligi sababli mulohazalar hisobining barcha keltirib chiqariluvchi formulalari predikatlar hisobida ham keltirib chiqariluvchi formula bo'ladi. Undan tashqari, predikatlar hisobining har bir keltirib chiqariluvchi formulasi predikatlar algebrasining formulasi sifatida qaralsa, aynan rost formula bo'lishini ko'rish qiyin emas. Bu tasdiqning isbotini o'quvchilarga mustaqil isbot qilish uchun qoldiramiz.

Predikatlar hisobi uchun ham mulohazalar hisobidagidek zidsizlik, to'liqlik, erklilik, echiluvchanlik muammolari qaraladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Predikatlar hisobida keltirib chiqariluvchi formula ta'rifini bering.
2. Nima uchun mulohazalar hisobining aksiomalari va keltirib chiqariluvchi formulalari predikatlar hisobida ham keltirib chiqariluvchi bo'ladi?
3. Predikatlar hisobining har bir keltirib chiqariluvchi formulasi predikatlar algebrasining aynan rost formulasi bo'lishini isbotlang.

4-§. Predikatlar hisobining zidsizligi

Aksiomatik nazariyada birorta formula va uning inkori keltirib chiqariluvchi bo'lsa, bunday nazariya ziddiyatli nazariya, aks holda zidsiz nazariya deyilishi ma'lum.

4.1-*teorema. Predikatlar hisobi zidsiz nazariyadir.*

Bu tasdiqni isbot qilish sxemasini beramiz.

Predikatlar hisobining har bir formulasiga mulohazalar hisobining formulasini quyidagi usulda mos qo'yamiz:

Hamma formulalarni predikatlar algebrasining bir elementli $\{ a \}$ to'plamda aniqlangan formulasi deb faraz qilamiz. U holda har bir predikatga mulohaza mos keladi. Masalan, $F(x_1,...,x_n)$ predikatga $F(a,..., a)$ mulohaza mos keladi. $\forall x\, \mathcal{A}(x)$, $\exists x\, \mathcal{A}(x)$ formulalar o'rniga $\mathcal{A}(a)$ formula hosil bo'ladi. Predikatlar hisobining elementar formulalari mulohazalar algebrasining elementar formulalarida, predikatlar hisobining keltirib chiqarish qoidalari mulohazalar hisobining keltirib chiqarish qoidalariga aylanadi. Natijada predikatlar hisobining keltirib chqariluvchi formulalari mulohazalar algebrasining aynan rost formulalariga aylanadi. Shunday qilib, predikatlar hisobi ziddiyatga ega bo'lsa, u holda mulohazalar algebrasida bitta formulaning o'zi ham aynan rost, ham aynan yolg'on formula bo'lib qolar edi. Buning esa bo'lishi mumkin emas.

Takrorlash uchun savollar

1. Zidsiz matematik nazariya deb qanday nazariyaga aytiladi?
2. Predikatlar hisobining zidsizligini isbotlang.

5-§. *Predikatlar hisobining to'liqligi*

Predikatlar hisobi tor ma'noda to'liq emas. Ya'ni uning aksiomalar sistemasiga predikatlar hisobida keltirib chiqarilmaydigan $\exists x\, F(x) \Rightarrow \forall x\, F(x)$ formulani qo'shsak, hosil bo'lgan aksiomalar sistemasi zidsizligicha qoladi. Chunki, oldingi paragrafdagi isbot qilish sxemasini hosil qilingan aksiomalar sistemasiga qo'llasak, $F \Rightarrow F$ ko'rinishdagi aynan rost mulohaza hosil bo'ladi. Ya'ni, hosil bo'lgan aksiomalar sistemasi zidsizdir.

Bundan tashqari, predikatlar hisobi uchun keng ma'nodagi to'liqlik masalasi qaraladi.

Biz yuqoridagi paragraflarda predikatlar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi predikatlar algebrasining formulasi sifatida qaralsa, aynan rost formula bo'lishini ko'rgan edik. Predikatlar algebrasining aynan rost formulasi predikatlar hisobining formulasi sifatida qaralsa, keltirib chiqariluvchi bo'ladimi – degan savol tug'ilishi tabiiydir. Ya'ni, predikatlar hisobi predikatlar algebrasini ifodalash uchun to'liqmi- degan savol tug'iladi.

Bu savolga K. Gyodelning quyidagi teoremasi javob beradi.

5.1-***teorema.*** *Predikatlar algebrasining har qanday aynan rost formulasi, predikatlar hisobida keltirib chiqariluvchi formula bo'ladi.*

Bu teoremaning isboti juda uzun ekanligini hisobga olib, uni bu yerda keltirmadik. Teorema isboti bilan adabiyotlar ro'yxatidagi adabiyotlarda tanishish mumkin.

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday matematik nazariyalar tor ma'noda, keng ma'noda to'liq nazariyalar deyiladi?

2. Predikatlar hisobining tor ma'noda to'liq emasligini isbotlang.

3. Predikatlar hisobi keng ma'noda to'liqmi?

6-§. Predikatlar hisobining keltirib chiqariluvchi formulalari

Mulohazalar hisobining barcha aksiomalari va keltirib chiqarish qoidalari predikatlar hisobiga to'liqligicha kirganligi sababli, mulohazalar hisobining hamma keltirib chiqariluvchi formulalari predikatlar hisobining ham keltirib chiqariluvchi formulalari bo'ladi. Bundan tashqari mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulalariga predikatlar, hisobining o'rniga qo'yish va boshqa qoidalarini qo'llab, yana keltirib chiqariluvchi formulalar hosil qilishimiz mumkin.

Quyida predikatlar hisobining ba'zi keltirib chiqariluvchi formulalarini ko'rib chiqamiz. Mulohazalar hisobidagidek $\mathcal{A}$ keltirib chiqariluvchi formula bo'lsa, uni qisqacha $\vdash \mathcal{A}$ ko'rinishda belgilaymiz.

6.1-*teorema.* $\vdash F(x) \Rightarrow F(x) \vee \forall y\, G(y)$.

Isbot. Mulohazalar hisobida $\vdash A \Rightarrow A \vee B$ bo'lganligi uchun A ni F (x), B ni $\forall x\, G(y)$ bilan almashtirsak, u holda $\vdash F(x) \Rightarrow F(x) \vee \forall y\, G(y)$ hosil bo'ladi.

Quyidagi teoremalarning isboti mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulalarida o'rniga qo'yish qoidalarini qo'llash natijasida hosil bo'ladi.

6.2-*teorema.* $\vdash F(x) \vee \rceil F(x)$.

6.3-*teorema.* $\vdash A \Rightarrow (\exists x\, F(x) \wedge \forall y\, N(y) \Rightarrow \exists x\, F(x)) \wedge A$.

Mulohazalar hisobida isbot qilingan hosilaviy keltirib chiqarish qoidalari predikatlar hisobi uchun ham hosilaviy keltirib chiqarish qoidalari bo'lishi ravshan. Undan tashqari, predikatlar hisobi uchun mulohazalar hisobida bo'lmagan quyidagi keltirib chiqarish qoidasini kiritamiz.

6.4-*teorema.* *(Umumiylik kvantori bilan bog'lash qoidasi). Agar* $\mathcal{A}(x)$ *predikatlar hisobining* x *erkin o'zgaruvchi predmet qatnashgan keltirib chiqariluvchi formulasi bo'lsa, u holda* $\forall x\, \mathcal{A}(x)$ *ham predikatlar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi bo'ladi.*

Isbot. Bu qoidaning isboti quyidagi tizimdan iborat:

$\vdash A \Rightarrow \mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ - mulohazalar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi).

$\vdash A \Rightarrow \mathcal{A}(x)$.

$\vdash A \Rightarrow \forall x\, \mathcal{A}(x)$.

$\vdash \mathcal{R} \Rightarrow \forall x\, \mathcal{A}(x)$.

$\forall x\, \mathcal{A}(x)$.

Bu qoidani qisqacha $\dfrac{\mathcal{A}(x)}{\forall x\, \mathcal{A}(x)}$ ko'rinishda yozish mumkin.

6.5-*teorema.* $\vdash \forall x\, F(x) \Rightarrow \exists x\, F(x)$.

Isbot. V_1, V_2 aksiomalarga asosan $\vdash \forall x\, F(x) \Rightarrow F(y)$ va $\vdash F(y) \Rightarrow \exists x\, F(x)$. Bu formulalarga sillogizm qoidasini qo'llasak, $\vdash \forall x\, F(x) \Rightarrow \exists x\, F(x)$ hosil bo'ladi.

O'quvchilar mustaqil isbot qilishlari uchun predikatlar hisobining yana bir nechta keltirib chiqariluvchi formulalarini keltiramiz.

6.6-*teorema.*

$\vdash \forall x \forall y\, F(x, y) \sim \forall y \forall x\, F(x, y)$.

$\vdash \exists x \forall y\, F(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x\, F(x, y)$.

$\vdash \forall x\, (F(x) \Rightarrow G(x)) \Rightarrow (\forall x\, F(x) \Rightarrow \forall x\, G(x))$.

$\vdash \forall x\, (F(x) \Rightarrow G(x)) \Rightarrow \exists x\, F(x) \Rightarrow \exists x\, G(x))$.

$\vdash \forall x\, (F(x) \Rightarrow G(x)) \Rightarrow (\forall x\, F(x) \Rightarrow \forall x\, G(x))$.

$\vdash \forall x\, (F(x) \sim G(x)) \Rightarrow (\forall x\, F(x) \sim \forall x\, G(x))$.

$\vdash \exists x\, F(x) \sim \rceil(\forall x\, \rceil F(x))$.

$\vdash \exists x \neg F(x) \sim \neg(\forall x F(x))$.

$\vdash \neg(\exists x F(x)) \sim \forall x \neg F(x)$.

$\vdash \exists x \neg F(x) \sim \exists x F(x)$.

$\vdash (\mathcal{A} \Rightarrow \forall x F(x)) \sim \forall x (\mathcal{A} \Rightarrow F(x))$.

K. Gyodel teoremasiga asosan predikatlar algebrasining har qanday aynan rost formulasi predikatlar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi ekanligidan foydalanib ham yuqoridagi formulalarning keltirib chiqariluvchi formulalar ekanligini isbot qilish mumkin.

Masalan, $\vdash (A \Rightarrow \forall x F(x)) \sim \forall x (A \Rightarrow F(x))$ ning aynan rost formula bo‘lishini isbot qilaylik.

$A \Rightarrow \forall x F(x) = 1$ bo‘lsin. U holda $A = 0$ bo‘lsa, $A \Rightarrow F(x)$ har qanday $F(x)$ uchun, demak, har qanday x uchun rost bo‘ladi. U holda $\forall x (A \Rightarrow F(x)) = 1$ bo‘ladi.

$A = 1$ bo‘lsa, $A \Rightarrow \forall x F(x) = 1$ bo‘lganligidan $\forall x F(x) = 1$, ya’ni har qanday x uchun $F(x) = 1$, demak, $\forall x (A \Rightarrow F(x)) = 1$ bo‘ladi.

Xuddi shunday, $A \Rightarrow \forall x F(x) = 0$ bo‘lsa, $\forall x (A \Rightarrow F(x)) = 0$ bo‘lishi ko‘rsatiladi.

6.6-***Deduksiya teoremasi.*** *Agar* $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ *predikatlar hisobining formulasi bo‘lib,* $\mathcal{A}$ *formuladan* $\mathcal{B}$ *formula keltirib chiqariluvchi bo‘lsa, u holda* $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ *ham predikatlar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasidir.*

Teoremani isbot qilish sxemasini keltiramiz. Teorema isboti uchun quyidagilarni isbot qilish yetarli:

Predikatlar hisobining har bir keltirib chiqariluvchi $\mathcal{B}$ formulasi uchun teorema to‘g‘ri.

$\mathcal{B}$ formula $\mathcal{A}$ dan iborat bo‘lganda, teorema to‘g‘ri.

Agar teorema $\mathcal{B}_1 \Rightarrow \mathcal{B}_2(x)$ formula uchun to‘g‘ri bo‘lsa, u holda $B_1 \Rightarrow \forall x \mathcal{B}_2(x)$ uchun ham to‘g‘ri.

Agar teorema $B_1(x) \Rightarrow \mathcal{B}_2$ uchun to‘g‘ri bo‘lsa, u holda $\exists x B_1(x) \Rightarrow \mathcal{B}_2$ formula uchun ham to‘g‘ri.

Agar teorema C formula uchun to‘g‘ri bo‘lsa, u holda C formuladagi bog‘liq o‘zgaruvchilarni qayta nomlash, yoki erkin o‘zgaruvcxilarni qayta nomlash, yoki o‘zgaruvchi mulohazalarni o‘rniga qo‘yish, o‘zgaruvchi predmetlarni o‘rniga qo‘yish, qoidalarini qo‘llash natijasida hosil qilingan C formula uchun ham to‘g‘ri bo‘ladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Predikatlar hisobining keltirib chiqariluvchi formulasi deb qanday formulaga aytiladi?
2. Predikatlar hisobida keltirib chiqariluvchi formulalarga misollar keltiring.
3. Mulohazalar hisobining hosilaviy keltirib chiqarish qoidalarini ayting.
4. Umumiylik kvantori bilan bog‘lash qoidasini keltiring.
5. Deduksiya teoremasi isbotining sxemasini keltiring.

Izoh: Agar teorema $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ formulalar uchun to‘g‘ri bo‘lsa, u holda $\mathcal{B}$ formula uchun ham to‘g‘ri bo‘ladi.

Mashq

6.6 da keltirilgan formulalarning keltirib chiqariluvchi ekanligini isbotlang.

V BOB

MATEMATIK NAZARIYALAR

1-§. Matematik nazariyalar haqida tushuncha

Aksiomatik nazariyalarni yaratishda qo'llaniladigan aksiomatik metod – shu matematik nazariya obyektlari orasidagi eng sodda xossalarni ifoda qilishga asoslanganligi uchun matematik fanlarni aniq ifoda qilish imkonini beradi. Bu sodda xossalar aksiomalar deb atalib, ularga asoslanib teoremalar isbotlanadi.

Matematikada biror tushunchani ta'riflaganimizda boshqa soddaroq tushunchalardan foydalaniladi. Lekin o'sha sodda tushunchalarni ifodalash uchun yana boshqa bir tushunchalar ishlatilishi tabiiy va h.k. Shu nuqtai nazardan qarasak, biz ba'zi bir tushunchalarni ta'rifsiz qabul qilishga majbur bo'lamiz. Bu tushunchalarni aksiomatik nazariyaning asosiy tushunchalari deb ataymiz. Xuddi shunday, birorta matematik tasdiqni isbot qilganimizda boshqa isbot qilingan tasdiqlardan foydalanamiz, isbot qilingan tasdiqlar ham o'z navbatida boshqa tasdiqlarga asoslanib, isbotlanadi va h.k. Shuning uchun ba'zi to'g'riligi shubha tug'dirmaydigan tasdiqlarni isbotsiz qabul qilishga majburmiz. Bu tasdiqlarni aksiomalar deb ataymiz. Aksiomalarga asoslanib, teoremalar isbot qilinadi. Bu esa aksiomatik nazariyaning mazmunini tashkil etadi.

Aksiomatik nazariyalar formal va mazmunli (noformal) aksiomatik nazariyalar deb ataladigan ikki turga bo'linadi.

Mazmunli aksiomatik nazariyada keltirib chiqarish qoidalari aniq belgilab qo'yilmagan bo'lib, u ko'proq intuitsiyaga asoslangan nazariyadir. Ya'ni, bu nazariyada teoremalar intuitsiyaga asoslangan qoidalardan foydalanib isbotlanadi.

Mazmunli aksiomatik nazariyaga gruppalar nazariyasi, halqalar nazariyasi misol bo'la oladi.

Formal aksiomatik nazariya esa quyidagi sxema asosida quriladi:

Nazariya tili beriladi.

Formula tushunchasi aniqlanadi.

Aksiomalar deb ataladigan asosiy formulalar ro'yxati beriladi.

Keltirib chiqarish qoidalari sanab chiqiladi.

Biz asosan *birinchi tartibli matematik nazariya*lar deb ataladigan nazariyalar bilan shug'ullanamiz. Bu nazariya bizga ma'lum bo'lgan asosiy matematik nazariyalarni isbotlash uchun yetarlidir. Bunday nazariyalar ba'zan *elementar nazariya*lar deb ham ataladi. Birinchi tartibli tilda predikatning argumenti, predikat yoki funksiya bo'lgan predikatlar, kvantor bilan bog'langan predikat yoki funksiyalar qaralmaydi.

Takrorlash uchun savollar

1. Aksiomatik metod haqida tushuncha bering.
2. Aksioma bilan teoremaning farqini ayting.
3. Aksiomatik nazariyani qurish sxemasini keltiring.

2-§. Birinchi tartibli til

Ixtiyoriy tabiatli simvollarning chekli to'plami – W berilgan bo'lsin. Bu to'plamni birinchi tartibli tilning *alifbo*si deb ataymiz. W alifbodagi simvollarning chekli ketma-ketligini birinchi tartibli tilning *so'zlari* deymiz. Ikkita $a_1,..., a_n$ va $b_1,..., b_n$ so'zlarning mos harflari teng, ya'ni $a_1 = b_1,..., a_n = b_n$ bo'lsa, bu so'zlar teng deyiladi.

Faraz qilaylik, biror bir aksiomatik nazariya qaralayotgan bo'lsin. W shu nazariyaning alifbosi, U esa shu nazariyadagi so'zlar to'plami bo'lsin. U holda, (W, U) juftlik qaralayotgan nazariyaning tili deyiladi.

Birinchi tartibli til orqali birinchi tartibli nazariyalar ifodalanadi. Birinchi tartibli nazariyalar, umuman olganda, yuqorida aytganimizdek, predikatlar hisobini qamrab oladi. Ya'ni, predikatlar hisobining simvollari, aksiomalari, formulalari, keltirib chiqariluvchi formulalari birinchi tartibli nazariyaga kiradi. Undan tashqari, birinchi tartibli nazariyada $f_i^{n_i}$ $(i, n_i \in N)$ – n_i o'rinli funksiyaning simvollari qatnashishi mumkin. Shu munosabat bilan birinchi tartibli tilda formula tushunchasi biroz kengaytiriladi.

Birinchi tartibli nazariyalarda ikki xil ifodalar ishlatiladi. Bular term va formulalardir.

2.1-*ta'rif. 1. O'zgaruvchi predmetlar, doimiy predmetlar, ya'ni konstantalar termdir.*

2. Agar $t_1,..., t_n$ – lar termlar, A – n o'rinli algebraik amal bo'lsa, u holda A $(t_1,..., t_n)$ – termdir.

3. Boshqa termlar yo'q.

Ta'rifdan ko'rinadiki, algebraik amal bog'lovchilari vositasida termlarni bog'lab ham o'zgaruvchi predmetlar, konstantalardan farqli termlarni hosil qilishimiz mumkin ekan.

2.2-*ta'rif. (Birinchi tartibli nazariyada formula tushunchasi). $\mathcal{A}$ – n – o'rinli predikat, $t_1,..., t_n$ – termlar bo'lsin, u holda $\mathcal{A}$ $(t_1,..., t_n)$ – formuladir.*

Agar $\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ lar formulalar bo'lsa, u holda $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\rceil \mathcal{A}$ lar ham formulalardir.

Agar $\mathcal{A}$ formula, y – erkin o'zgaruvchi bo'lsa, u holda $\forall y \mathcal{A}$ va $\exists y \mathcal{A}$ ifodalar ham formulalardir.

1, 2, 3 bandlarda aniqlangan formulalardan tashqari boshqa formulalar yo'q.

Predikatlar hisobining barcha aksiomalari birinchi tartibli til uchun ham o'rinli bo'lib, bu aksiomalar birinchi tartibli tilning mantiqiy aksiomalari deyiladi. Bundan tashqari, birinchi tartibli til bilan ifoda qilinayotgan har bir nazariyaning o'ziga hos aksiomalari ham bo'ladi. Bu aksiomalar nazariyadan nazariyaga o'tganda o'zgarib turadi. Shuning uchun ularni maxsus aksiomalar deb ataymiz.

Birinchi tartibli til bilan ifoda qilinadigan deyarli barcha nazariyalarga tenglik aksiomalari kiritiladi. Ular quyidagilardan iborat:

V_1. $x = x$.

V_2. $x = y \Rightarrow (A(x) \Rightarrow A(y))$.

Birinchi tartibli tilda predikatlar hisobining keltirib chiqarish qoidalarining ba'zilariga o'zgartirishlar kiritiladi.

2.3 *(O'zgaruvchi predmetlarni almashtirish qoidasi).*

Agar $\mathcal{A}$ keltirib chiqariluvchi formula bo'lsa, u holda $\mathcal{A}$ dagi o'zgaruvchi predmetni $\mathcal{A}$ da bog'langan o'zgaruvchi predmetlar qatnashmagan term bilan almashtirsak, hosil bo'lgan ifoda yana keltirib chiqariluvchi formula bo'ladi.

2.4 *(O'zgaruvchi predikatni almashtirish qoidasi).*

$\mathcal{A}$ keltirib chiqariluvchi formuladagi n o'rinli $F(t_1,..., t_n)$ predikatni kolliziya holati yuz bermaydigan qilib $\mathcal{B}(\theta_1,..., \theta_n)$ formula bilan almashtirsak, hosil bo'lgan ifoda yana keltirib chiqariluvchi formula bo'ladi. Bu yerda $t_1,.., t_n$; $\theta_1,..., \theta_v$ lar birinchi tartibli nazariyadagi termlardir.

Boshqa keltirib chiqarish qoidalari o'zgarishsiz qoladi.

Birinchi tartibli til uchun gipotezalardan keltirib chiqariluvchi formulalar tushunchasi, deduksiya teoremasi predikatlar hisobidagidan shaklan farq qilmaydi. Shu sababli, ularni takroran keltirmaymiz. Lekin mazmunan keltirib chiqariluvchi formulalar haqida gapirganimizda, yuqorida keltirilgan keltirib chiqarish qoidalarini e'tiborga olishimiz zarur.

2.5. *Nazariya tilining interpretatsiyasi.*

Nazariya tilining interpretatsiyasi tushunchasi bilan tanishib chiqamiz.

Faraz qilaylik, W – to'plam nazariyaning alifbosi bo'lsin. W' esa boshqa birorta aksiomatik yoki intuitiv nazariyaning simvollari to'plami (alifbosi) bo'lsin. W to'plamning har bir elementiga W′ ning aniq bitta elementini shunday mos qo'yamiz – ki natijada, W dagi konstantaga W′ dagi konstanta, W da o'zgaruvchi predmetga W′ dagi o'zgaruvchi predmet yoki konstanta mos kelsin, W da aniqlangan har bir predikatga W′ da aniqlangan yagona predikat, W da aniqlangan har bir funksional simvolga W′ da aniqlangan aniq bitta funksional simvol mos kelsin. U holda birinchi nazariyada aniqlangan har bir ifodaga ikkinchi nazariyada aniqlangan aniq ifoda mos keladi. Aniqroq qilib aytadigan bo'lsak, birinchi nazariyadagi har bir termga ikkinchi nazariyadan aniq bitta term, birinchi nazariyadagi har bir formulaga ikkinchi nazariyadagi aniq bitta formula mos keladi. U holda ikkinchi nazariya birinchi nazariyaning ifodasi yoki interpretatsiyasi deyiladi.

Agar bir nazariyaning har bir keltirib chiqariluvchi formulasi shu nazariyaning interpretatsiyasida aynan rost formula yoki keltirib chiqariluvchi formula bo'lsa, u holda bunday interpretatsiya berilgan nazariyaning *modeli* deyiladi.

2.6-***ta'rif***. *Berilgan nazariyaning ikkita W_1, W_2 to'plamlarida aniqlangan ikkita interpretatsiyasi berilgan bo'lsin. W_1, W_2 to'plamlar orasida shunday o'zaro bir qiymatli moslik, ya'ni biektiv moslik o'rnatilgan bo'lsin. Natijada, birinchi interpretatsiyadagi har bir o'zgaruvchi predmetga ikkinchi interpretatsiyadagi o'zgaruvchi predmet, birinchi interpretatsiyadagi konstantaga ikkinchi interpretatsiyadagi konstanta, birinchi interpretatsiyadagi har bir n ($n \geq 0$) o'rinli funksional simvolga ikkinchi interpretatsiyadagi n – o'rinli funksional simvol, birinchi interpretatsiyadagi har bir n ($n \geq 0$) o'rinli predikat simvoliga ikkinchi interpretatsiyadagi n ($n \geq 0$) o'rinli predikat simvoli mos qo'yilgan bo'lib, natijada birinchi interpretatsiyadagi har bir keltirib chiqariluvchi (aynan rost) formulaga ikkinchi interpretatsiyaning keltirib chiqariluvchi (aynan rost) formulasi mos kelsa, u holda bunday ikkita interpretatsiya izomorf deyiladi.*

2.7-***ta'rif.*** *Agar matematik nazariyaning har qanday ikkita modeli izomorf bo'lsa, bunday matematik nazariya qat'iy nazariya deyiladi.*

Evklid geometriyasi, natural sonlar nazariyasi, butun sonlar nazariyasi, rasional sonlar nazariyasi, haqiqiy sonlar nazariyasi, kompleks sonlar nazariyasi qat'iy matematik nazariyalarga misol bo'la oladi.

Gruppalar nazariyasi esa noqat'iy aksiomatik nazariyaga misol bo'la oladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Matematik nazariya tili nima?
2. Birinchi tartibli til haqida tushuncha bering.
3. Birinchi tartibli nazariyada formula tushunchasi ta'rifini ayting.

4. Birinchi tartibli tilning mantiqiy aksiomalarini keltiring.

5. Birinchi tartibli tilning keltirib chiqarish qoidalarini ayting.

6. Interpretatsiya haqida tushuncha bering.

7. Matematik nazariyaning modeli nima?

3-§. Matematik nazariyalarning zidsizlik, to'liqlik, yechilish muammolari

3.1. ***Zidsizlik muammosi.***

Agar matematik nazariyada $\mathcal{A}$ va $\neg\mathcal{A}$ formulalar keltirib chiqariluvchi bo'lsa, bunday matematik nazariyalar, *ziddiyatli matematik nazariya*lar deyiladi. Ziddiyatli nazariyani ko'rishning ma'nosi yo'q, chunki bunday nazariyada har qanday formula keltirib chiqariluvchi formula bo'ladi.

Haqiqatan ham, $\vdash\mathcal{A}$ va $\vdash\neg\mathcal{A}$ bo'lsa, u holda $\vdash\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{A}$ bo'ladi. Bundan ixtiyoriy $\mathcal{B}$ formula uchun $\vdash\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$ ekanligi kelib chiqadi. Bu formulaga (MP) qoidani qo'llasak, $\vdash\mathcal{B}$ bo'ladi.

3.2-***ta'rif.*** *Matematik nazariyada* $\mathcal{A}$ *va* $\neg\mathcal{A}$ *formulalaridan kamida bittasi keltirib chiqarilmaydigan formula bo'lsa, bunday nazariya zidsiz nazariya deyiladi.*

Matematik nazariyaning zidsizligini ko'rsatish uchun, shu nazariyaning kamida bitta zidsizligi ma'lum bo'lgan modelini ko'rsatish yetarli.

Haqiqatan ham, berilgan nazariya ziddiyatli nazariya bo'lsa, u holda shunday $\mathcal{A}$ formula topilib, $\vdash\mathcal{A}$ va $\vdash\neg\mathcal{A}$ bo'lar edi. U holda $\mathcal{A}$ formulaga modelda mos kelgan $\mathcal{A}'$, $\neg\mathcal{A}$ ga modelda mos keladigan $\neg\mathcal{A}'$ formulalar ham keltirib chiqariluvchi formulalar bo'lib, model ziddiyatli bo'lar edi.

3.3-*misol.* Gruppalar nazariyasi zidsiz nazariyadir. Haqiqatan ham, masalan $G = \{ -1, 1 \}$ ikki elementli mul'tiplikativ gruppa gruppalar nazariyasi uchun zidsiz model bo'ladi.

3.4. ***Matematik nazariyaning keng ma'noda to'liqligi.***

Agar matematik nazariyadagi ixtiyoriy $\mathcal{A}$ formula uchun $\mathcal{A}$ yoki $\rceil\mathcal{A}$ formulalardan kamida bittasi keltirib chiqariluvchi formula bo'lsa, bunday aksiomatik nazariya *keng ma'noda to'liq* nazariya deyiladi.

Agar matematik nazariya keng ma'noda to'liq bo'lsa, bu nazariyaning ixtiyoriy $\mathcal{A}$ formulasi yoki bu formulaning inkori ixtiyoriy modelda keltirib chiqariluvchi formula bo'ladi.

3.5. ***Matematik nazariyaning tor ma'noda to'liqligi.***

Agar matematik nazariya aksiomalari sistemasiga shu nazariyaga isbot qilinmaydigan formulani aksioma sifatida qo'shib, keltirib chiqarish qoidalarini o'zgarishsiz qoldirsak, natijada, hosil bo'lgan nazariya ziddiyatli nazariya bo'lsa, u holda matematik nazariya *tor ma'noda to'liq* deyiladi.

3.6. ***Matematik nazariyada yechilish muammosi.***

Bu masala algoritmik masala bo'lib, u quyidagicha ifodalanadi.

Matematik nazariyaning ixtiyoriy $\mathcal{A}$ formulasi uchun $\mathcal{A}$ isbotlanuvchi (bajariluvchi) formulami, yoki yo'qmi ekanligini aniqlovchi algoritm bormi?

Bu masalani biz oldingi boblarda mulohazalar hisobi uchun ko'rib chiqdik.

Takrorlash uchun savollar

1. Matematik nazariyalarda zidsizlik muammosi.
2. Matematik nazariyalarning to'liqligi deganda nimani tushunasiz?
3. Matematik nazariyalarda yechilish muammosi haqida nimalarni bilasiz?

4-§. Matematik nazariyalarga na'munalar

4.1. ***Qisman tartiblanish nazariyasi.***

Bu nazariya ikki o'rinli P predikat qatnashgan P(x, y) – bunda, $x < y$ munosabatni bildiradi.

Bu nazariyaning maxsus aksiomalari:

I_1. $\forall x \rceil (x < x)$ – antirefleksivlik munosabati.

II. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((x_1 < x_2) \wedge (x_2 < x_3) \Rightarrow (x_1 < x_3))$ – tranzitivlik munosabati

Bu nazariyaning ixtiyoriy modeli qisman tartiblangan struktura deyiladi.

4.2. ***Gruppalar nazariyasi.***

Gruppalar nazariyasini ifodalash uchun bitta predikat simvoli F va bitta funksional simvol f va bitta a_1 – konstanta yetarli.

A (t, s), $t = s$ – predikatni;

f (t, s), $t + s$ – amalni;

a_1 – 0 ni bildirsin.

Gruppalar nazariyasining maxsus aksiomalari quyidagilardan iborat:

$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3)$ – assotsiativlik.

$\forall x_1 (0 + x_1 = x_1 = x_1 + 0)$ – 0 ning xossasi.

$\forall x_1 \exists x_2 (x_1 + x_2 = x_2 + x_1 = 0)$ – qarama-qarshi elementning mavjudligi.

Bu nazariyaning har qanday modeli gruppa deyiladi. Masalan, (Z, +, 0) – butun sonlar gruppasidir.

4.3. ***Natural sonlar nazariyasi.***

Natural sonlar nazariyasini ifoda qilish uchun konstanta 0; funksional simvollar: +, •, ′ (birni qo'shish); « = » predikat simvoli yetarli.

Bu nazariyaning maxsus aksiomalari quyidagilardan iborat:

1) $x_1 = x_2$

2) $x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1$
3) $x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 = x_3 \Rightarrow x_2 = x_3)$.
4) $x_1 = x_2 \Rightarrow x'_1 = x'_2$.
5) $0 \neq (x_1)'$.
6) $x_1' = x_2' \Rightarrow x_1 = x_2$.
7) $x_1 + 0 = x_1$.
8) $x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$.
9) $x_1 \cdot 0 = 0$.
10) $x_1 \cdot x_2' = x_1 \cdot x_2 + x_1$.
11) $A(0) \Rightarrow (\forall x (A(x) \Rightarrow A(x')) \Rightarrow \forall x A(x))$,

bunda A (x) – natural sonlar nazariyasining ixtiyoriy formulasidir.

11-aksioma o'zida cheksiz ko'p aksiomalarni mujassamlagan sxemadir. Uni odatda matematik induksiya prinsipi deb ataydilar.

4.4. *To'liqsizlik haqida Gyodel teoremasi.*

1931-yil K. Gyodel formal arifmetikaning to'liq emasligini ko'rsatib berdi. Ya'ni hech bo'lmaganda formal arifmetikani qamrab olgan har qanday formal nazariyada shunday yopiq $\mathcal{A}$ formula topilib, $\mathcal{A}$ ni ham $\neg\mathcal{A}$ ni ham bu nazariyada isbot qilib bo'lmasligini ko'rsatib berdi. Bundan tashqari, ba'zi shartlar bajarilganda $\mathcal{A}$ formula sifatida shu nazariya zidsiz, degan tasdiq olinishi mumkinligini isbot qilib berdi.

Takrorlash uchun savollar

1. Matematik nazariyalarga misollar keltiring.
2. Gyodel teoremasini tushuntiring.
3. Matematik nazariyalarning mantiqiy va maxsus aksiomalari orasidagi farqlarni ayting.

VI BOB

ALGORITMLAR

1-§. Algoritm haqida tushuncha

«Algoritm» so'zi o'zbekistonlik buyuk matematik va astronom Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy nomining, aniqrog'i al-Xorazmiy so'zining o'zgartirib olingandir. Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy o'zining « Al-jabr val-muqobala» nomli asarida kvadrat tenglamalarni yyechish algoritmini, ya'ni usullarini keltirgan.

Algoritmga arifmetik amallarni bajarish qoidalari: eng katta umumiy bo'luvchini topish; kvadrat tenglamaning ildizlarini topish; ko'phadning hosilasini topish qoidalari va hokazolar misol bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan misollardan ko'rinadi-ki, algoritm tushunchasi bir xil tipli masalalar to'plamiga qo'llaniladi. Bunday bir xil masalalar ommaviy muammo deyiladi. Masalan, $ax^2 + bx + c$ ko'rinishdagi kvadrat tenglamalarni yechish masalasi ommaviy muammodir. Chunki biz a, b, c larni o'zgartirib bir xil tipli masalalar sinfini hosil qilamiz. Algoritm tushunchasiga aniq matematik ta'rif berish ancha mushkul masala bo'lganligi sababli, hozircha uning xarakterli xususiyatlarini sanab chiqamiz.

Algoritmning diskretligi. Har bir algoritm qandaydir miqdorlarning boshlang'ich qiymatlarida ish boshlab, diskret rejimda ishlaydi. Ma'lum bir vaqt momentida miqdorlarning boshqa qiymatlariga o'tadi.

Masalan, a va b sonlarning eng katta umumiy bo‘luvchisini topaylik,

$$\begin{array}{ll}
a = b \cdot q_0 + r_1; & 0 \le r_1 < b; \\
b = r_1 \cdot q_1 + r_2; & 0 \le r_2 < r_1; \\
r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3; & 0 \le r_1 < b; \\
\ldots\ldots\ldots & \\
r_{n-3} = r_{n-2} \cdot q_{n-2} + r_{n-1}; & 0 \le r_{n-1} < r_{n-2}; \\
r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_n; & 0 \le r_n < r_{n-1}; \\
r_{n-1} = r_n \cdot q_n. & r_{n+1} = 0;
\end{array}$$

Bundan $(a, b) = r_n$. Ko‘rinib turibdi-ki, a va b sonlarning eng katta umumiy bo‘luvchisini topishda (a, b) miqdorlarning boshlang‘ich qiymati, keyingi qiymati (b, r_1) va h.k. $(r_n, 0)$ miqdorlarning oxirgi qiymati bo‘ladi.

Algoritmning to‘liq aniqlanganligi. Algoritmdagi kattaliklar sistemasining qiymatlari, o‘zidan oldingi qiymatlari orqali to‘liq aniqlanadi. Yuqoridagi misolda ko‘rganimizdek:

(b, r_1) qiymatlar (a, b) orqali to‘liq aniqlangan va h.k.

(r_{n-2}, r_{n-1}) esa (r_{n-3}, r_{n-2}) orqali;

(r_{n-1}, r_n) esa (r_{n-2}, r_{n-1}) orqali;

$(r_n, 0)$ esa (r_{n-1}, r_n) orqali to‘liq aniqlangan.

Algoritmning soddaligi. Algoritm o‘z tabiatiga ko‘ra ishlash jarayoni sodda qadamlardan iborat. Buni ham yuqoridagi va boshqa misollardan ko‘rish mumkin.

Algoritmning ommaviyligi. Bu haqda yuqorida aytganimizdek, har bir algoritm qandaydir masalalar sinfini yechishga mo‘ljallangandir.

Algoritmning natijaliligi. Miqdorlar qiymatlarini qurish jarayoni chekli qadamdan so‘ng natija berishi lozim. Masalan, $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tenglamani haqiqiy sonlar to‘plamida yechish algoritmini misol sifatida oladigan bo'lsak, $D = b^2 - 4ac \geq 0$, bo'lganda ikkita yechim hosil qilamiz. Bu yechimlar algoritmning natijasiga aylanadi. Agar $D < 0$, tenglamaning haqiqiy ildizlari yo'q bo'lib, algoritmning natijasi sifatida «tenglama haqiqiy ildizlarga ega emas», degan jumla olinadi.

Takrorlash uchun savollar

1. Algoritm tushunchasiga misollar keltiring.
2. Algoritmning xarakterli xususiyatlarini ayting.

*2-§. Yechiluvchi va hisoblanuvchi to'plamlar**

Birorta simvollar to'plami S berilgan bo'lsin. $\mathcal{M}$ orqali S alifbo elementlari orqali hosil qilingan so'zlar to'plamini belgilaymiz.

2.1-***ta'rif.*** *S alifbo yordamida hosil qilingan ixtiyoriy x so'z* $\mathcal{M}$ *to'plamga kirish yoki kirmaslik masalasini hal etuvchi algoritm mavjud bo'lsa, u holda* $\mathcal{M}$ *to'plam yechiluvchi to'plam deyiladi. Agar* $\mathcal{M}$ *to'plamning hamma elementlarini hisoblab chiqadigan algoritm mavjud bo'lsa* $\mathcal{M}$ *to'plami effektiv hisoblanuvchi to'plam deyiladi.*

2.2-***teorema.*** *Effektiv hisoblanuvchi to'plamlarning kesishmasi, birlashmasi ham effektiv hisoblanuvchi to'plam bo'ladi.*

Isbot. Bu to'plamlar elementlarini hisoblab chiqish uchun berilgan to'plamlar uchun effektiv hisoblovchi algoritmlarni birdaniga qo'llash yetarli.

2.3-***teorema.*** $\mathcal{M}$ *to'plam yechiluvchan bo'lishi uchun* $\mathcal{M}$ *va uning to'ldiruvchisi* $C\mathcal{M}$ *to'plamlar effektiv hisoblanuvchi bo'lishi zarur va yetarlidir.*

---

* 2-3-§ lar [16] dan foydalanib yozildi.

Isbot. x so'z $\mathcal{M}$ to'plamga tegishli yoki yo'qligini tekshirish talab qilingan bo'lsin. Teorema shartiga ko'ra $\mathcal{M}$ va $C\mathcal{M}$ ning elementlarini hisoblash algoritmi mavjud, x so'z esa yoki $\mathcal{M}$ ga yoki $C\mathcal{M}$ ga tegishli. Demak, teorema shartini qanoatlantiruvchi algoritm mavjud.

Faraz qilaylik, $\mathcal{M}$ yechiluvchan to'plam bo'lsin. U holda ixtiyoriy x so'z $\mathcal{M}$ to'plamga tegishli yoki yo'qligini aniqlaydigan algoritm mavjud. Shu algoritm yordamida $\mathcal{M}$ ga tegishli so'zlarni alohida, tegishli bo'lmaganlarini alohida hisoblaymiz. Demak, $\mathcal{M}$ va $C\mathcal{M}$ larning elementlarini hisoblaydigan algoritm mavjud ekan.

2.4-***misol.*** $\mathcal{M} = \{ 1, 8, 27, ..., n^3, ... \}$ to'plam hisoblanuvchi to'plamdir. Haqiqatan ham, bu to'plamning elementlarini hisoblash uchun natural sonlarni kubga oshirish yetarli. Undan tashqari, bu to'plam echiluvchandir.Ya'ni ixtiyoriy natural son $\mathcal{M}$ ga tegishli yoki yo'qligini tekshirish uchun uni tub ko'paytuvcxilarga ajratsak, berilgan son natural sonning kubi bo'lish bo'lmasligi, demak, $\mathcal{M}$ to'plamga tegishli yoki yo'qligi ma'lum bo'ladi.

2.5-***misol.*** $\mathcal{M}$ barcha natural sonlardan tuzilgan juftliklar to'plami bo'lsin. $\mathcal{M}$ hisoblanuvchi to'plam ekanligini isbot qiling. Bu misolning isbotini o'quvchilarga qoldiramiz.

2.6-***teorema.*** *Hisoblanuvchi, lekin echiluvchan bo'lmagan to'plam mavjud.*

Isbot. 2.3-teoremaga asosan, o'zi hisoblanuvchi hamda to'ldiruvchisi hisoblanuvchi bo'lmagan to'plamni topish yetarli.

$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 ..., \mathcal{M}_n, ...$ – natural sonlar to'plamining barcha hisoblanuvchi to'plamostilari bo'lsin.

(m, n) qadamda $\mathcal{M}_n$ to'plamning m elementini hisoblaydigan algoritm berilgan bo'lsin (teoremaga asosan bunday algoritm mavjud). Agar bu element n ga teng bo'lsa, bunday elementlar to'plamini $\mathcal{M}$ orqali belgilaymiz. $\mathcal{M}$ hisoblanuvchi to'plam ekanligi ayon. Lekin, $C\mathcal{M}$ hisoblanuvchi bo'la olmaydi, chunki $C\mathcal{M}$, yuqorida ko'rsatilgan $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_n, \ldots$ to'plamlarning birortasiga ham teng emas.

Takrorlash uchun savollar

1. Yechiluvchi to'plam deb nimaga aytiladi?
2. Hisoblanuvchi to'plam haqida nimalarni bilasiz?
3. To'plam yechiluvchi bo'lishining zaruriy va yetarli shartlarini ayting.
4. Hisoblanuvchi to'plamlarga misollar keltiring.
5. Hisoblanuvchi lekin yechiluvchi bo'lmagan to'plam mavjudmi?

3-§. Hisoblanuvchi funksiyalar. Qismiy va umum rekursiv funksiyalar

Agar birorta masalani yechish algoritmi topilgudek bo'lsa va topilgan algoritm algoritmning intuitiv tushunchasiga mos kelsa, u holda shu konkret masala uchun algoritmga ta'rif berishga ehtiyoj qolmaydi. Lekin birorta yechilish algoritmi mavjud bo'lmagan masalani qaraydigan bo'lsak, algoritmga ta'rif berish zarurati tug'iladi.

Algoritmga aniq ta'rif berish masalasi XX asrning 30-yillariga kelib hal etildi. Algoritm tushunchasiga ta'rif berishdagi urinishlarni asosan uchta yo'nalishga ajratish mumkin.

Birinchi yo'nalish namoyandalari A.Chyorch, K.Gyodel va boshqalar algoritmni qismiy rekursiv funksiya sifatida berishni taklif etib, qismiy rekursiv funksiyalarga aniq matematik ta'rif berdilar.

Ikkinchi yo'nalish namoyandalari A.Tyuring, E.Post va boshqalar algoritmni xayoliy hisoblovchi mashinalar sinfi sifatida berishni taklif etishdi.

Uchinchi yo'nalish rossiyalik matematik A. Markov tomonidan ishlab chiqilgan bo'lib, algoritmni normal algorifmlar sinfi sifatida aniqlashni taklif qilgan.

3.1-***ta'rif.*** *Agar $g = f(x_1,..., x_n)$ funksiya qiymatini hisoblovchi algoritm mavjud bo'lsa, u effektiv hisoblanuvchi funksiya deyiladi.*

Bu ta'rif algoritmning intuitiv tushunchasidan foydalanib ifodalangan bo'lganligi uchun intuitiv ta'rifdir.

K.Gyodel va A.Chyorchlar algoritmni hisoblanuvchi funksiyalar sinfi sifatida kiritishga muvaffaq bo'ldilar. Buning uchun quyidagi eng sodda funksiyalar tanlab olinadi:

$\lambda(x) = (x + 1)$ (siljitish operatori);

$O(x)=0$ (yo'qotish operatori);

$(x_1,..., x_n) = x_m$, $1 \leq m \leq n$ (proeksiyalash operatori).

Bu operatorlar hisoblanuvchi funksiyalar bo'lishi ravshan.

Endi funksiyalar ustida quyidagi amallarni aniqlaymiz:

3.2-***ta'rif (Funktsiyalar superpozitsiyasi).***

$f_1(x_1,..., x_n),..., f_m(x_1,..., x_n)$ va $\varphi(x_1,..., x_m)$ funksiyalar berilgan bo'lsin, u holda

$\psi(x_1,...,x_n) = \varphi(f_1(x_1,..., x_n),..., f_m(x_1,..., x_n))$

funksiya $f_1,..., f_m$ va φ funksiyalar superpozitsiyasi deyiladi.

Agar $f_1,..., f_m$ va φ hisoblanuvchi bo'lsa, u holda ψ ham hisoblanuvchi bo'lishi ravshan.

3.3-*ta'rif (Primitiv rekursiya sxemasi).*

$\varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $\psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ $(n > 1)$ funksiyalar berilgan bo'lsin.

$f(0, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ va

$f(y + 1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \psi(y, f(y, x_2, x_3, \ldots, x_n))$.

$x_2, x_3, \ldots, x_n$ *shartlarni qanoatlantiradigan yangi n+1 argumentli f funksiyani qaraylik. Bu funksiya* φ *va* ψ *funksiyalardan primitiv rekursiya sxemasi yordamida hosil qilingan deyiladi.*

Agar φ va ψ funksiyalar hisoblanuvchi funksiyalar bo'lsa, f ham hisoblanuvchi bo'lishi ravshan.

Primitiv rekursiya sxemasi bilan funksiya hosil qilishga quyidagi misollarni keltirish mumkin:

3.4-*misol.* $f(x, y)$ funksiya quyidagi tengliklar orqali berilgan bo'lsin:

$$f(0, x) = x,$$
$$f(y + 1, x) = f(y, x) + 1,$$

Bu yerda $\varphi(x) = x$; $\psi(x, y, z) = y + 1$.

$f(y, x)$ funksiyaning $y = 5$ va $x = 2$ lar uchun qiymatlarini hisoblaymiz. $f(0, 2) = \varphi(2) = 2$ bo'lganligi uchun ikkinchi tenglikdan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$f(1, 2) = \psi(0, 2, 2) = 2 + 1 = 3;$$
$$f(2, 2) = \psi(1, 3, 2) = 3 + 1 = 4;$$
$$f(3, 2) = \psi(2, 4, 2) = 4 + 1 = 5;$$
$$f(4, 2) = \psi(3, 5, 2) = 5 + 1 = 6;$$
$$f(5, 2) = \psi(4, 6, 2) = 6 + 1 = 7;$$

$f(x, y) = y + x$ ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

Haqiqatan ham, $f(y+z, x) = f(y, x) + z$. Bu tenglikka $y = 0$ qiymatni qo'yib, $f(z, x) + f(0, x) + z$ yoki $f(z, x) = x + z$ ni hosil qilamiz.

3.5-*misol.* $f(x, y)$ funksiya quyidagi tengliklar orqali berilgan bo'lsin:

$$f(0, x) = x,$$
$$f(y+1, x) = f(y, x) + x,$$

Bu yerda $\varphi(x) = 0$, $\psi(x, y, z) = y + z$.

$f(y, x)$ funksiyaning $y = 2$ va $x = 2$ lar uchun qiymatlarini hisoblaymiz. $f(0, x) = j(x) = 0$ ekanligidan $f(0, 2) = 0$ kelib chiqadi. $f(1, 2)$ va $f(2, 2)$ larning qiymatlarini aniqlaymiz:

$$f(1, 2) = \psi(1, 0, 2) = 0 + 2 = 2;$$
$$f(2, 2) = \psi(2, 2, 2) = 2 + 2 = 4;$$

Ushbu misolda $f(y, x) = x \bullet y$ ekanligini ko'rish mumkin. Haqiqatan ham, $f(y+z, x) = f(y, x) + z \bullet x$. Bu tenglikka $y = 0$ ni qo'yib, $f(z, x) = f(0, x) + z \bullet x$ yoki $f(z, x) = z \bullet x$ ni hosil qilamiz.

3.6. ***Minimizatsiya operatori (μ - operator).***

Berilgan $f(x, y)$ funksiya x ning fiksirlangan qiymatida nolga teng bo'lishi uchun y ning eng kichik qiymati qanday bo'lishi kerakligini aniqlash talab qilinsin.

Masalaning yechimi x ga bog'liq bo'lgani sababli quyidagi belgilashni kiritamiz:

$\varphi(x) = \mu y[\, f(x, y) = 0\,]$.

Bu belgilashni $f(x, y) = 0$ bo'ladigan eng kichik y deb o'qiymiz. Shunga o'xshash

$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \mu(y)[f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0]$

ifodani $f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ bo'ladigan eng kichik y deb o'qiymiz. $f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ funksiyadan $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ funksiyaga o'tishni $\mathcal{M}$ operatorni qo'llash deyiladi.

φ funksiyani quyidagi algoritm orqali hisoblash mumkin:

Agar $f(x_1, \ldots, x_n, 0) = 0$ bo'lsa, u holda $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ bo'ladi.

Agar $f(x_1, \ldots, x_n, 1) = 0$ bo'lsa, u holda $\varphi(x_1, \ldots, x_n, 0)=1$ bo'ladi va h.k.

Agar $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ funksiya hech bir y uchun nolga teng bo'lmasa, u holda $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ aniqlanmagan hisoblanadi.

3.7-***misol.*** $f(x, y) = x - y$ funksiya minimizatsiya operatori orqali hosil qilinishi mumkin.

$F(x + y) = \mu z[y + z = x] = \mu(z)$.

Masalan, $f(7, 2)$ ni hisoblaylik:

$2 + z = 7$ da z o'rniga qiymatlar berib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$2 + 0 = 2 \neq 7;$

$2 + 1 = 3 \neq 7;$

....

$2 + 5 = 7.$

Demak, $f(7, 2) = 5$.

3.8-***ta'rif.*** *$f(x_1, \ldots, x_n)$ funksiya superpozitsiya, primitiv rekursiya sxemasi va $\mathcal{M}$ operatorni eng sodda funksiyalarga chekli marta qo'llash natijasida hosil qilingan bo'lsa, bunday funksiya rekursiv funksiya deyiladi.*

3.9-***ta'rif.*** *Argumentning barcha qiymatlari uchun aniqlangan funksiya umum rekursiv funksiya deyiladi.*

Chyorch tezisi. *Qismiy rekursiv funksiyalar sinfi hisoblanuvchi funksiyalar sinfi bilan ustma-ust tushadi.*

Takrorlash uchun savollar

1. Eng sodda operatorlarni keltiring.
2. Minimizatsiya operatorini tushuntiring.
3. Minimizatsiya operatori yordamida hosil qilingan funksiyaga misol keltiring.

4-§. Tyuring mashinalari

Tyuring mashinasi intuitsiyaga to‘g‘ri keladigan barcha ko‘rinishdagi algoritmlarni hisoblash imkoniyatiga ega bo‘lgan hayoliy mashinadir.

Tyuring mashinasining asosiy qismlari tashqi va ichki alifbosi, ikkala tomonga ixtiyoriy davom ettirish mumkin bo‘lgan va teng katakcha (yacheyka)larga bo‘lingan tasmadan, tasma bo‘ylab diskret harakat qiladigan karetka (hisoblovchi qurilma) dan iborat.

$A = \{ a_1, \ldots, a_m \}$ $(m \geq 1)$ to‘plam Tyuring mashinasining tashqi alifbosi, A to‘plamning elementlari esa tashqi alifboning aktiv simvollari deyiladi;

$A' = \{ a_0, a_1, \ldots, a_m \}$ esa kengaytirilgan alifbosi, bu yerda a_0 – bo‘sh katakchani bildiradi;

$Q = \{ q_0, \ldots q_k \}$ to‘plam ichki alifbo va uning elementlari Tyuring mashinasining ichki holatlari deyiladi, bunda q_1 – Tyuring mashinasining boshlang‘ich, q_0 – oxirgi holati, ya’ni mashinaning ishdan to‘xtaganlik holati; $q_1, \ldots, q_k$ lar aktiv ichki holatlari deyiladi.

Ish jarayonida Tyuring mashinasi bir ichki holatdan boshqa ichki holatlarga o‘tishi hamda tasmaga A' alifbo elementlarini yozishi mumkin. Tyuring mashinasining har bir katakchasi chekli holatda bo'ladi, ya'ni katakcha yoki bo'sh (a_0) yoki a_i ($i = 1,m$) simvol yozilgan bo'lishi mumkin.

Tyuring mashinasi quyidagi ishlarni bajaradi:

Karetka tasma bo'ylab har bir vaqt momentida bitta katakcha chapga yoki bitta katakcha o'ngga siljishi yoki o'z o'rnida qolishi mumkin.

Karetka tasma ustidagi simvollarni o'zgartirishi mumkin, ya'ni tasmaga yozilgan simvolni o'chirishi, uning o'rniga boshqa simvolni yozishi, bo'sh katakka aktiv simvollardan birini yozishi mumkin.

Har bir Tyuring mashinasi o'z dasturiga ega bo'lib, u ana shu dastur asosida ishlaydi. Dastur quyidagi jadval ko'rinishida bo'ladi:

	a_0	a_1	. . .	a_j	. . .	a_m
q_1						
.						
.						
.						
q_i						
.						
.						
.						
q_k						

Jadvalni tashkil etgan katakchalarda ish davomida bajariladigan «komandalar» yozilgan bo'ladi. Har bir komanda $T(a_j, q_i)$ ko'rinishda bo'lib, T bilan O', CH, J (mos ravishda « o'ng », « chap » va « joyida ») so'zlarini belgilaymiz.

Tyuring mashinasi diskret rejimda «qadam-baqadam» ishlaydi: u vaqt momenti oralig'ida faqat bitta buyruqni bajaradi. Tyuring mashinasining har bir qadamda bajargan ishi *takt* deyiladi. Tyuring mashinasining har bir taktini $q_r\, a_t \to a_j\, T\, q_i$ ko'rinishida ifodalash mumkin. Bu ifodani quyidagicha o'qish kerak:

«Tyuring mashinasi q_r ichki holatda tasma ustidagi a_t simvolni «ko'rib» turib, uning o'rniga (a_t ni o'chirib) a_j simvolni yozadi, so'ngra T harakat qilib, o'z ichki holatini q_i ga o'zgartiradi».

$\mathcal{M}$ - simvollar to'plamidan iborat birorta bir alifbo bo'lsin. U holda $\mathcal{M}$ dagi simvollardan tuzilgan ixtiyoriy ketma-ketlik $\mathcal{M}$ dagi *so'z* deyiladi.

Tyuring mashinasida hamma kataklar simvollar bilan to'ldirilgan deb hisoblanadi. Bo'sh katakda a_0 yozilgan bo'ladi. Mashina q_1 holatda α so'zni o'ng tomondan hisoblaganda birinchi harfini ko'rib turgan bo'ladi va a so'zni β so'zga aylantirib berib, q_0 holatga o'tadi va ishdan to'xtaydi.

M alifboda chekli so'zlar to'plamini $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ orqali belgilaylik. $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ ni o'zini o'ziga akslantiradigan qismiy f funksiyani hisoblaydigan Tyuring mashinasi berilgan bo'lsin. U holda f funksiyaning aniqlanish sohasidagi barcha so'zlar orasida bir nechta (xususiy holda bitta bo'lishi ham mumkin) bo'sh kataklar tashlab tasmaga yozilgan deb hisoblaymiz. Tyuring mashinasi tasmadagi barcha so'zlarni boshqa so'zlarga almashtirib beradi.

Agar funksiyaning aniqlanish sohasi cheksiz bo'lsa, u holda Tyuring mashinasining ish jarayoni ham cheksiz bo'lishi ravshan.

Bunday funksiya *Tyuring usulida hisoblanuvchi funksiya* (qisqacha hisoblanuvchi funksiya) deyiladi.

4.1-***misol.*** $\varphi(n) = n + 1$ funksiyaning qiymatini hisoblovchi va tashqi alifbosi bo‘sh katakcha bilan birga a_0, 0, 1,..., 8, 9 simvollaridan tashkil topgan Tyuring mashinasi dasturini tuzing.

Quyidagi jadval Tyuring mashinasining talab etilgan dasturidir:

	a_0	0	1	...	9
q_1	$1Jq_0$	$1Jq_0$	$2Jq_0$	...	$0CHq_1$

4.2-***misol.*** Yuqorida berilgan funksiyaning qiymatini hisoblovchi, alifbosi a_0 va « | » («tayoqcha») simvollaridan tuzilgan Tyuring mashinasini quring.

Natural sonlar quyidagicha hisoblanadi:

0 - |

1 - | |

.....

$n - \underbrace{|\,|\,|\,...\,|\,|}_{n+1}$ (n + 1) ta tayoqcha.

Izlanayotgan Tyuring mashinasi dasturi quyidagichadir:

	a_0	|
q_1	| J q_2	| CH q_1
q_2	a_0CH q_1	| O‘ q_1

4.3-***misol.*** 1. $f(x_1,..., x_n) = 0, \quad f\ N^n \rightarrow N$ konstanta funksiyaning qiymatini hisoblovchi, alifbosi esa a_0, | simvollardan iborat bo‘lgan Tyuring mashinasini tuzing.

Bunda $x_1,..., x_n$ – lar natural sonlar bo‘lib, ulardan tuzilgan n likni tasmaga yozishda qo‘shni sonlar orasida bittadan bo‘sh katak tashlanadi.

Masalan, (2, 3, 1) uchlik berilgan bo‘lsa, u tasmaga quyidagicha yoziladi:

	a_0	a_0	|	|	|	a_0	|	|	|	|	a_0	|	|	a_0	a_0	

Izlanayotgan mashina boshlang‘ich vaziyatda tasmadagi barcha «tayoqcha»larni o‘chirib, so‘ngra tasmaga «tayoqcha» yozib, ishdan to‘xtashi kerak.
Bu mashina dasturi quyidagichadir:

	a_0	|
q_1	a_0 CH q_2	a_0 CH q_1
q_2	1 J q_0	a_0 CH q_1

Yuqoridagi funksiyaning qiymatini hisoblovchi va $x_1,..., x_n$ larni o‘chirmay, ishning oxirida tasmada $x_1,..., x_n$, a_0, y (bunda $y = f(x_1,..., x_n)$, ya’ni funksiyaning $(x_1,..., x_n)$ - n – likdagi qiymati) yozuvini qoldiradigan mashinani qurish mumkin. Uning dasturi quyidagichadir:

	a_0	1
q_1	a_0 O‘ q_2	1 O‘ q_1
q_2	1 J q_0	1 O‘ q_1

Chyorch tezizi. Qiymatlarni hisoblash algoritmi mavjud har qanday funksiya Tyuring mashinasida hisoblanuvchi funksiyadir.

Bu tezis algoritmlar nazariyasining asosiy tezisidir.

Algoritm tushunchasini Tyuring mashinasi orqali ifodalash ko'pgina ommaviy muammolarning algoritmik yechimi mavjud emasligini isbot qilish imkonini hosil qildi. Lekin birorta ommaviy muammo algebraik yechimga ega emas degani, muammo umumiy holdagina yechimga ega emasligini bildiradi, xolos. Har bir xususiy hol o'z yechimiga ega bo'lishi mumkin.

Takrorlash uchun savollar

1. Tyuring mashinasi haqida tushuncha bering.
2. Tyuring mashinasida realizatsiya qilinadigan algoritmlarga misollar keltiring.
3. Chyorch tezisi ma'nosini tushuntiring.
4. Tyuring usulida hisoblanuvchi funksiya haqida ma'lumot bering.

Mashqlar

1. Standart boshlang'ich vaziyatdagi $0\underbrace{1\ldots1}_{x}0$ so'zni o'z-o'ziga o'tkazuvchi Tyuring mashinasini shunday quringki, mashina to'xtaganda, karetka chetki chap katakchada bo'lsin.

Quyidagi funksiyalarni hisoblovchi Tyuring mashinalarini quring:

$f(x) = x + 1;$

$f(x_1, x_2, x_3) = x_2;$

$f(x, y) = x - y;$

$f(x) = x / 2;$

$f(x) = 2x + 1.$

5-§. Algoritmik yechimga ega bo'lmagan masalalar na'munalari

Algoritmga aniq ta'rif berilganidan so'ng berilgan ommaviy muammolar algoritmik yechimga ega bo'lish yoki bo'lmaslik masalasini hal etish imkoniyatlari paydo bo'ldi. Algoritmik yechimga ega bo'lmagan masalalar na'munalarini ko'rib chiqamiz.

1936-yili A.Chyorch tomonidan predikatlar hisobi uchun formulalarning umumqiymatli bo'lish yoki bo'lmasligini hal qiladigan algoritm mavjud emasligi isbotlandi.

4.1-*ta'rif. Biror bir alifboning so'zlar to'plami o'zining chekli sondagi o'rniga qo'yish qoidalari bilan birgalikda assotsiativ hisob deyiladi.*

Assotsiativ hisobning ixtiyoriy ikkita so'zi uchun bu ikkita so'zning teng kuchli bo'lish-bo'lmaslik masalasi assotsiativ hisobda so'zlarning *ekvivalentlik* muammosi deyiladi.

Bu masala 1911-yilda e'lon qilingan. 1946–47-yillarda rus matematigi A.A.Markov va amerikalik matematik E.Postlar ekvivalentlik muammosi algoritmik yechimga ega emasligini hal etganlar.

1955-yilda rus matematigi P.S.Novikov gruppalar nazariyasida so'zlar ekvivalentligi muammosi algoritmik yechimga ega emasligini isbotladi.

1900-yilda matematiklarning Parijda bo'lib o'tgan ikkinchi halqaro kongressida yechilishi qiyin bo'lgan 23 ta matematik muammolar e'lon qilindi. Shu muammolarning o'ninchisida har qanday butun koeffitsientli n ta o'zgaruvchili ko'phad butun ildizlarga ega bo'lish, bo'lmasligini aniqlaydigan algoritm bor yoki yo'qligini aniqlashdan iborat edi. Bunday ko'phadlarga quyidagilar misol bo'ladi:

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz,$

$f(x) = 5x^3 - x^2 + x + 15.$

Hususiy holda butun koeffitsientli bir noma'lumli

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0)$

ko'rinishdagi n darajali ko'phadning butun yechimlarini topish algoritmi mavjud ekanligi ma'lum.

1968-yili yuqorida keltirilgan masala umumiy holda algoritmik yechimga ega emasligi Yu.Matiyasevich tomonidan isbot qilindi.

To'plamlar nazariyasi va matematik mantiq elementlarini takrorlash uchun mashqlar

1. $A, B \subset M = \{1, ..., 20\}$ to'plamlar uchun quyidagilarni aniqlang:

$A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup B$, $A \cap B$, A', B':

1.1.	$A = \{1, 3, 5\}$,	$B = \{11, 13, 15\}$;
1.2.	$A = \{2, 4, 6\}$,	$B = \{12, 14, 16\}$;
1.3.	$A = \{7, 9, 11\}$,	$B = \{17, 19\}$;
1.4.	$A = \{2, 3, 5\}$,	$B = \{10, 13, 18\}$;
1.5.	$A = \{3, 5, 7\}$,	$B = \{1, 3, 5\}$;
1.6.	$A = \{1, 4, 5\}$,	$B = \{1, 4, 5\}$;
1.7.	$A = \{11, 13, 14\}$,	$B = \{11, 12, 13\}$;
1.8.	$A = \{5, 6, 7\}$,	$B = \{1, 11, 15\}$;
1.9.	$A = \{10, 13, 15\}$,	$B = \{1, 11, 15\}$;
1.10.	$A = \{4, 5\}$,	$B = \{17, 18, 19\}$;
1.11.	$A = \{3, 5, 7\}$,	$B = \{8,...,15\}$;
1.12.	$A = \{1,..., 5\}$,	$B = \{1,...,13\}$;
1.13.	$A = \{1,..., 10\}$,	$B = \{11,..., 15\}$;
1.14.	$A = \{5,..., 15\}$,	$B = \{10,...,19\}$;
1.15.	$A = \{1, 2, 3, 4\}$,	$B = \{11, 12, 13, 14\}$;

1.16. $A = \{1\}$, $B = \{10,...,15\}$;
1.17. $A = \{3,..., 15\}$, $B = \{12, 13, 15\}$;
1.18. $A = \{5\}$, $B = \{1,...,15\}$;
1.19. $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{12, 13, 15\}$;
1.20. $A = \{1,..., 18\}$, $B = \{1, 15\}$;
1.21. $A = \{7,..., 15\}$, $B = \{12,..., 15\}$;
1.22. $A = \{10,..., 15\}$, $B = \{11,..., 15\}$;
1.23. $A = \{3,..., 8\}$, $B = \{2,..., 10\}$;
1.24. $A = \{5,..., 12\}$, $B = \{12,..., 15\}$;
1.25. $A = \{1,..., 5\}$, $B = \{2,..., 7\}$;

2. Quyidagilarni isbotlang va Eyler – Venn diagrammalarini tuzing:

2.1. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.
2.2. $A \setminus (B \setminus C) \subset A$ И C.
2.3. $(A \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$.
2.4. $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.
2.5. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
2.6. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
2.7. $((A \cup B)' \cap (A' \cup B'))' = A \cup B$.
2.8. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
2.9. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
2.10. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.
2.11. $A \subset B \subset C \equiv A \cup B = B \cap C$.
2.12. $A \subset B \Rightarrow A \setminus C \subset B \setminus C$.
2.13. $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C$.
2.14. $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$.
2.15. $B \subset A \wedge C = A \setminus B \Rightarrow A = B \cup C$.
2.16. $A \not\subset B \wedge B \cap C = \varnothing \Rightarrow A \cup C \not\subset B \cup C$.
2.17. $C = A \setminus B \Rightarrow B \cap C = \varnothing$.
2.18. $B \cap C = \varnothing \wedge A \cap C \neq \varnothing \Rightarrow A \setminus B \neq \varnothing$.
2.19. $A \subset C \Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.
2.20. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus B)$.

3. R, S, T - binar munosabatlar uchun quyidagilarni isbotlang:

3.1. $(R \cap S)^{\smile} = R^{\smile} \cap S^{\smile}$.

3.2. $(R \cup S)^{\smile} = R^{\smile} \cup S^{\smile}$.

3.3. $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$.

3.4. $(R \circ S)^{\smile} = S^{\smile} \circ R^{\smile}$.

3.5. $(R \cup S) \circ T = R \circ T \cup S \circ T$.

3.6. $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$.

3.7. $(R \cap S) \circ T \subset R \circ T \cap S \circ T$.

3.8. $R \circ (S \cap T) \subset R \circ S \cap R \circ T$.

3.9. $\mathrm{Dom}\,(R^{\smile}) = \mathrm{Im}\, R$..

3.10. $\mathrm{Im}\,(R^{\smile}) = \mathrm{Dom}\, R$..

3.11. $\mathrm{Dom}\,(R \circ S) \subset \mathrm{Dom}\, S$.

3.12. $\mathrm{Im}\,(R \circ S) \subset \mathrm{Im}\, R$.

3.13. $(R \setminus S)^{\smile} = R^{\smile} \setminus S^{\smile}$.

3.14. R, S – tranzitiv $\Rightarrow$ $R \cup S, R \cap S, R^{\smile}, S^{\smile}$ – tranzitiv.

3.15. R, S – refleksiv $\Rightarrow$ $R \cup S, R \cap S, R^{\smile}, S^{\smile}$ – refleksiv.

3.16. R, S – simmetrik $\Rightarrow$ $R \cup S, R \cap S, R^{\smile}, S^{\smile}$ – simmetrik.

3.17. R, S – ekvivalent $\Rightarrow$ $R \cup S, R \cap S, R^{\smile}, S^{\smile}$ – ekvivalent.

3.18. R, S – qat'iy tartib $\Rightarrow$ $R \cup S, R \cap S, R^{\smile}, S^{\smile}$ – qat'iy tartib.

3.19. R, S – qisman tartib $\Rightarrow$ $R \cup S, R \cap S, R^{\smile}, S^{\smile}$ – qisman tartib.

3.20. R, S – chiziqli tartib $\Rightarrow$ $R \cup S, R \cap S, R^{\smile}, S^{\smile}$ – chiziqli tartib.

3.21. R, S – antirefleksiv $\Rightarrow$ $R \cup S, R \cap S, R^{\smile}, S^{\smile}$ – antirefleksiv.

3.22. R, S – antisimmetrik $\Rightarrow$ $R \cup S, R \cap S, R^{\smile}, S^{\smile}$ – antisimmetrik.

3.23. $A \subset B \Rightarrow A \times C \subset B \times C$.

3.24. $A \cup B \subset C \Rightarrow A \times B = (A \times B) \cap (C \times B)$.

3.25. $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C \Rightarrow A = B = C$.

4. $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ to'plamda berilgan quyidagi binar munosabatlarning xossalarini tekshiring va grafini chizing:

4.1. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x \leq y + 1 \}$.

4.2. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x^2 = y^2 \}$.

4.3. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge |x| = |y| \}$.

4.4. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x \,\vdots\, y \}$.

4.5. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x < y \}$.

4.6. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x \leq y \}$.

4.7. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x \neq y \}$.

4.8. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x^2 + x = y^2 + y \}$.

4.9. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x^2 + y^2 = 1 \}$.

4.10. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x \,\vdots\, y \vee x < y \}$.

4.11. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge (x - y) \,\vdots\, 2 \}$.

4.12. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x + y = 12 \}$.

4.13. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x + y \leq 7 \}$.

4.14. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x + y = 20 \}$.

4.15. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x + y \geq 20 \}$.

4.16. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge (x + y) \,\vdots\, 5 \}$.

4.17. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge (x > y \wedge x \,\vdots\, 3) \}$.

4.18. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x + y \geq 10 \}$.

4.19. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x - y \geq 5 \}$.

4.20. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x + y = 10 \}$.

4.21. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x + y = 21 \}$.

4.22. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x - y = 2 \}$.

4.23. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x - y = -2 \}$.

4.24. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x - y = 4 \}$.

4.25. $R = \{ \langle x, y\rangle \mid x,y \in M \wedge x - y = 6 \}$.

5. $R = A \times B$, $S = B \times A$ binar munosabatlar uchun $R \circ S$, $S \circ R$, R^2, S^2 larni aniqlang:

5.1. $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{11, 13, 15\}$;

5.2. $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{12, 14, 16\}$;

5.3.	A = {7, 9, 11},	B = {17, 19};
5.4.	A = {2, 3, 5},	B = {10, 13, 18};
5.5.	A = {3, 5, 7},	B = {1, 3, 5};
5.6.	A = {1, 4, 5},	B = {1, 4, 5};
5.7.	A = {11, 13, 14},	B = {11, 12, 13};
5.8.	A = {5, 6, 7},	B = {1, 11, 15};
5.9.	A = {10, 13, 15},	B = {1, 11, 15};
5.10.	A = {4, 5},	B = {17, 18, 19};
5.11.	A = {3, 5, 7},	B = {8,...,15};
5.12.	A = {1,2, 3, 4 },	B = {3,...,6};
5.13.	A = {3,...,6},	B = {4,..., 8};
5.14.	A = {5,...,9},	B = {8,...,12};
5.15.	A = {1, 2, 3, 4},	B = {11, 12, 13, 14};
5.16.	A = {1},	B = {10,...,15};
5.17.	A = {3,..., 10},	B = {12, 13, 15};
5.18.	A = {5},	B = {1,...,7};
5.19.	A = {4, 5, 6},	B = {12, 13, 15};
5.20.	A = {1,..., 9},	B = {1, 15};
5.21.	A = {4,..., 9},	B = {2, 3, 5};
5.22.	A = {7,..., 11},	B = {11,12, 13, 15};
5.23.	A = {6,..., 9},	B = {13, 14, 15};
5.24.	A = {11,...,15},	B = {11, 15};
5.25.	A = {8,...,14},	B = {11,...,15};

6. Berilgan $\mathcal{A}$ to‘plam va undagi S binar munosabat yordamida $\mathcal{A}$ / S faktor-to‘plamni aniqlang:

6.1. $\mathcal{A}$ –tekislikdagi to‘g‘ri chiziqlar to‘plami, S - parallellik munosabati.

6.2. $\mathcal{A}$ – tekislikdagi to‘g‘ri to‘rtburchaklar to‘plami, S - o‘xshashlik munosabati.

6.3. $\mathcal{A}$ – tekislikdagi to‘g‘ri burchakli uchburchaklar to‘plami, S – o‘xshashlik munosabati.

6.4. $\mathcal{A}$ – tekislikdagi romblar to'plami, S – o'xshashlik munosabati.

6.5. $\mathcal{A}$ – tekislikdagi to'rtburchaklar to'plami, S – o'xshashlik munosabati.

6.6. $\mathcal{A} = \{ ax + by + c = 0 \mid a, b, c \in R \}$, S – parallellik munosabati.

6.7. $\mathcal{A} = \{ ax + by + c = 0 \mid a, b, c \in R \}$, S – tenglik munosabati.

6.8. $\mathcal{A}$ – tekislikdagi uchburchaklar to'plami, S – o'xshashlik munosabati.

6.9. $\mathcal{A}$ – tekislikdagi muntazam ko'pburchaklar to'plami, S - o'xshashlik munosabati.

6.10. $\mathcal{A}$ – tekislikdagi to'rtburchaklar to'plami, S– «yuzalari teng» munosabati.

6.11. $\mathcal{A}$ – bir ko'chada joylashgan binolar to'plami, S – «qavatlar soni teng» munosabati.

6.12. $\mathcal{A}$ – bir k'chada joylashgan binolar to'plami, S – «xonalar soni teng» munosabati.

6.13. $\mathcal{A}$ – bir k'chada joylashgan binolar to'plami, S – «egallagan yer maydonlari teng» munosabati.

6.14. $\mathcal{A}$ – tekislikdagi aylanalar to'plami, S – «radiuslari teng» munosabati.

6.15. $\mathcal{A}$ – tekislikdagi doiralar to'plami, S – «yuzalari teng» munosabati.

6.16. $\mathcal{A}$ – maktabdagi sinflar to'plami, S – «o'quvchilar soni teng» munosabati.

6.17. $\mathcal{A}$ – maktabdagi sinflar to'plami, S – «qizlar soni teng» munosabati.

6.18. $\mathcal{A}$ – sinfdagi o'quvchilar to'plami, S – «ismlari bir xil harfdan boshlanadi» munosabati.

6.19. $\mathcal{A}$ – sinfdagi o'quvchilar to'plami, S – «ismlarda *a* harfi bir xil marta qatnashgan» munosabati.

6.20. $\mathcal{A} = \{ ax + by = 0 \mid a, b, c \quad R \}$, S – parallellik munosabati.

6.21. $\mathcal{A}$ – tekislikdagi kesmalar to‘plami, S – parallellik munosabati.

6.22. $\mathcal{A}$ – tekislikdagi kesmalar to‘plami, S – tenglik munosabati.

6.23. $\mathcal{A}$ – tekislikdagi vektorlar to‘plami, S – parallellik munosabati.

6.24. $\mathcal{A}$ – tekislikdagi vektorlar to‘plami, S – tenglik munosabati.

6.25. $\mathcal{A}$ = Z, S - «*p* tub songa bo‘lgandagi qoldiqlari teng» munosabati.

7. Mulohazaning rost yoki yolg‘onligini aniqlang:

7.1. $2 \in \{ x \mid 2x^3 - 3x^2+1=0, x \in R\}$.
7.2. $-3 \in \{ (x^3-1) / (x^2+2) x \mid, x \in R\}$.
7.3. $3 \in \{ n \mid (2n+1) / (3n-2), n \in N\}$.
7.4. $\{1; 1{,}2\} \subset \{ x \mid x^3 + x^2 - x - 1 = 0, x \in Z\}$.
7.5. $\{ x \mid x^3 + x^2 - x - 1 = 0, x \in Z\} \subset \{1; 1{,}2 \}$.
7.6. $\forall x \, (x < 0 \Rightarrow x > 0), x \in \{0,1,2\}$.
7.7. $2 \le 3$; $2 \ge 3$; $2 \bullet 2 \le 4$; $2 \bullet 2 \ge 4$.
7.8. $2 \bullet 2 = 4 \wedge 2 \bullet 2 \ge 5$.
7.9. $(x \in T)\ (a^2 + b^2 = c^2)$, T uchburchaklar to‘plami va *a*, *b*, *c* uchburchak tomonlari..
7.10. $A \wedge (x^2 > 0)$, A – rost mulohaza.
7.11. $(x,y \in N)\ (x / y \Rightarrow y / x)$.
7.12. $\{ x \mid (x^2 + 3x - 1 = 0) \wedge (x > 0)\} \subset \{0; 1\}$.
7.13. $(x \in R)\ (f(x) > 0)$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
7.14. $15: 5 \Leftrightarrow 15: 3$.
7.15. $15: 3 \Leftrightarrow 15: 6$.
7.16. $11: 6 \Rightarrow 11: 3$.

7.17. $12 \vdots 6 \Rightarrow 12 \vdots 3$.
7.18. $(x \in N)\ (x - 3 \geq 4)$.
7.19. $(x \in R)\ (((2x-5) / x) \in R)$.
7.20. $(x \in A)\ (x < 10)$, $A = \{1,..., 10\}$.
7.21. $(x \in A)\ (x + 5 \leq 15)$, $A = \{1,..., 10\}$.
7.22. $(x, y \in A)\ (x - y < 10)$, $A = \{1,..., 10\}$.
7.23. $(x, y \in A)\ ((x / y) \in A)$, $A = \{1,..., 10\}$.
7.24. $(x \in A) \mid (y \in B)\ (x < y)$, $A = \{1,..., 5\}$, $B = \{5,..., 10\}$.
7.25. $(x \in A) \mid (y \in B)\ (x \vdots y)$, $A = \{4k \mid k \in Z\}$, $B = \{1, 2, 4\}$.

8. Formulaning turini aniqlang:

8.1. $(\neg(X \vee Y) \Rightarrow \neg(X \wedge Y))$.
8.2. $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg X)$.
8.3. $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow X) \wedge Z$.
8.4. $X \Rightarrow (X \Rightarrow Y) \vee Z$.
8.5. $((X \wedge Y) \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (Z \Rightarrow Y)$.
8.6. $((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$.
8.7. $(X \Rightarrow Z) \Rightarrow ((Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (X \vee Y \Rightarrow Z))$.
8.8. $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \vee Z) \Rightarrow (Y \vee Z))$.
8.9. $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Z))$.
8.10. $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \wedge Z) \Rightarrow (Y \wedge Z))$.
8.11. $(X \wedge Y) \Rightarrow Z \Leftrightarrow X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)$.
8.12. $(X \wedge Y) \Rightarrow Z \Leftrightarrow (X \wedge \neg Z) \Rightarrow \neg Y$.
8.13. $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow X \wedge \neg Y$.
8.14. $(X \Rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow \neg X$.
8.15. $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \wedge Z \Rightarrow Y \wedge Z)$.
8.16. $(X \Rightarrow Y) \wedge (Z \Rightarrow T) \Rightarrow (X \wedge Z \Rightarrow Y \wedge T)$.
8.17. $(X \Rightarrow Y) \wedge (Z \Rightarrow T) \Rightarrow (X \vee Z \Rightarrow Y \vee T)$.
8.18. $(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg(X \Rightarrow Y) \vee \neg(Y \Rightarrow X))$.
8.19. $(X \wedge Y) \Rightarrow (Z \wedge \neg Z \Rightarrow X \vee Z)$.
8.20. $(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$.

8.21. $(X \Rightarrow Y) \wedge (Z \Rightarrow X) \vee Y \wedge \urcorner Z$.
8.22. $(\urcorner X \Leftrightarrow Z) \wedge Y) \vee (X \vee Z) \Leftrightarrow Z$.
8.23. $X \Leftrightarrow Z \Rightarrow Y \vee \urcorner X \wedge \urcorner Z$.
8.24. $Y \Rightarrow \urcorner Y \vee X \wedge Z \Leftrightarrow \urcorner X$.
8.25. $X \wedge Z \vee Y \wedge X \Leftrightarrow Y \Rightarrow \urcorner X$.

9. Berilgan formulalar teng kuchli ekanligini tekshiring:

9.1. $(X \vee Y) \wedge (X \vee \urcorner Y) \equiv X$.
9.2. $X \wedge Y \vee Z \wedge T \equiv (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) \wedge (X \vee T) \wedge (Y \vee T)$.
9.3. $(X \vee Y) \wedge (Z \vee T) \equiv X \wedge Z \vee Y \wedge Z \vee X \wedge T \vee Y \wedge T$.
9.4. $X \equiv (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \urcorner Z) \vee (X \wedge \urcorner Y \wedge Z) \vee$ $\vee (X \wedge \urcorner Y \wedge \urcorner Z)$.
9.5. $X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z) \equiv Z \wedge Y \Rightarrow Z$.
9.6. $X \Rightarrow \urcorner Y \equiv Y \Rightarrow \urcorner X$.
9.7. $X \wedge Y \vee \urcorner X \wedge Y \vee \urcorner X \wedge \urcorner Y \equiv X \Rightarrow Y$.
9.8. $X \Leftrightarrow Y \equiv \urcorner X \Leftrightarrow \urcorner Y$.
9.9. $X \vee (\urcorner X \wedge Y) \equiv X \vee Y$.
9.10. $X \Rightarrow (X \Rightarrow Y) \equiv \urcorner X \vee Y$.
9.11. $(\urcorner X \wedge \urcorner Y) \vee (X \Rightarrow Y) \wedge X \equiv X \vee Y$.
9.12. $(X \Leftrightarrow Y) \wedge (X \vee Y) \equiv X \wedge Y$.
9.13. $(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (Z \Rightarrow X) \equiv X \vee \urcorner Z$.
9.14. $(X \vee \urcorner Y \Rightarrow (Z \Rightarrow Y \vee \urcorner Y \vee X) \wedge (X \vee \urcorner (X \Rightarrow (X \Rightarrow X))) \Rightarrow$ $\Rightarrow Y \equiv X \Rightarrow Y$.
9.15. $X \wedge \urcorner (X \wedge \urcorner X \Rightarrow Y \wedge \urcorner Y) \Rightarrow Z) \vee X \vee (Y \wedge Z) \vee (Y \wedge$ $\wedge Z) \equiv 1$.
9.16. $(X \wedge (Y \vee Z \Rightarrow Y \vee Z)) \vee (Y \wedge X \wedge \urcorner Y) \vee X \vee (Y \wedge$ $\wedge \urcorner (X \wedge \urcorner X)) \equiv X \vee Y$.
9.17. $(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (X \Rightarrow Z) \equiv 1$.
9.18. $(X \wedge Z) \vee (X \wedge \urcorner Z) \vee (Y \wedge Z) \vee (\urcorner X \wedge Y \wedge Z) \equiv$ $\equiv X \vee Y \wedge Z$.
9.19. $(X \vee Y \Rightarrow \urcorner X \vee Y) \wedge Y \equiv Y$.

9.20. $X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$.

9.21. $(X \vee (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow X \equiv \neg(\neg X \wedge \neg Y) \wedge \neg(\neg X \wedge Z)$.

9.22. $X \vee Y \vee \neg(\neg X \vee \neg Y) \equiv (\neg X \wedge \neg Y) \Rightarrow (X \wedge Y)$.

9.23. $((X \vee Y \vee Z) \Rightarrow X) \vee Z \equiv \neg(\neg X \wedge Y \wedge \neg Z)$.

9.24. $(\neg X \vee (Y \wedge Z)) \wedge \neg Z \equiv \neg((X \wedge (\neg Y \vee \neg Z)) \vee Z)$.

9.25. $\neg X \vee Y \vee \neg Z \equiv \neg((X \wedge Y) \vee \neg Z) \Rightarrow \neg(X \wedge Z)$.

10. Dekart koordinatalar tekisligida predikatning rostlik sohasini tasvirlang:

10.1. $((x^2 + 3x + 2) / (x^4 + 4x + 3)) < 0$.

10.2. $(x^2-1)^{1/2} = -3$.

10.3. $2x^2 + x - 30 > 0$.

10.4. $((x^2 - 5x + 6) / (x^2 -2x - 3)) < 0$

10.5. $((x > 2) \wedge (y \geq 1)) \wedge ((x < -1) \wedge (y < -2))$.

10.6. $x + 3y = 3$.

10.7. $x - y \geq 0$.

10.8. $\sin x = \sin y$.

10.9. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$.

10.10. $\lg x = \lg y$.

10.11. $(x > 2) \wedge (y < 2)$.

10.12. $(x = y) \vee (|x| \leq 1)$.

10.13. $(x \geq 3) \Rightarrow (y < 5)$.

10.14. $x + y = 1$.

10.15. $((x > 2) \wedge (y \geq 1)) \wedge ((x < -1) \wedge (y < -2))$.

10.16. $(\sin x \geq 0)$.

10.17. $((x > -2) \wedge (y \geq 2)) \wedge ((x < 1) \wedge (y < 2))$.

10.18. $(|x + 2| < 0)$.

10.19. $(x - 1)^2 + y^2 = 4) \wedge (y = x)$.

10.20. $(2x^2 + x - 1 \leq 0)$.

10.21. $(x^2 + 2x + 1 = 0) \wedge (2x + 3 = 0)$.

10.22. $(x / (x-1)) < 0$.

10.23. $(3x - 5 = 0) \wedge (x^2 - 1 = 0)$.

10.24. $3x^2 - 2x + 4 > 0$.

10.25. $(x+1)^2+(y+2)^2=9) \wedge (3x-5=0)$.

11. $M = \{1, 2, \dots, 20\}$ to'plamda quyidagi predikatlar berilgan:

$A(x)$: « $\neg(x \vdots 5)$»; $B(x)$: « x – juft son »; $C(x)$: « x – tub son »; $D(x)$: « x 3 ga karrali». Quyidagi predikatlarning rostlik sohasini toping:

11.1. $A(x) \wedge D(x) \Rightarrow \neg C(x)$.

11.2. $A(x) \wedge C(x) \Rightarrow \neg D(x)$.

11.3. $A(x) \Rightarrow B(x) \wedge \neg C(x)$.

11.4. $D(x) \Rightarrow \neg C(x) \vee \neg A(x)$.

11.5. $C(x) \Rightarrow \neg(B(x) \vee D(x))$.

11.6. $A(x) \vee \neg B(x) \vee D(x)$.

11.7. $B(x) \vee \neg D(x) \wedge A(x)$.

11.8. $B(x) \vee D(x) \Leftrightarrow A(x) \wedge C(x)$.

11.9. $B(x) \vee D(x) \wedge \neg C(x)$.

11.10. $C(x) \vee D(x) \Rightarrow A(x) \wedge B(x)$.

11.11. $B(x) \vee C(x) \Rightarrow D(x)$.

11.12. $A(x) \vee B(x) \Leftrightarrow \neg C(x)$.

11.13. $A(x) \wedge B(x) \wedge D(x)$.

11.14. $B(x) \wedge \neg D(x) \vee A(x)$.

11.15. $A(x) \wedge B(x) \Rightarrow D(x)$.

11.16. $A(x) \wedge \neg C(x) \vee B(x)$.

11.17. $B(x) \wedge \neg C(x) \wedge D(x)$.

11.18. $A(x) \wedge B(x) \wedge \neg D(x)$.

11.19. $A(x) \vee B(x) \wedge \neg D(x)$.

11.20. $B(x) \wedge \neg C(x) \wedge D(x)$.

11.21. $A(x) \wedge C(x) \vee \neg D(x) \wedge \neg B(x)$.

11.22. $D(x) \Rightarrow B(x) \vee C(x) \wedge A(x)$.

11.23. $A(x) \Leftrightarrow \neg B(x) \wedge D(x) \vee C(x)$.

11.24. $C(x) \wedge \neg B(x) \Rightarrow A(x) \vee D(x)$.

11.25. $\neg(B(x) \Rightarrow C(x) \wedge A(x) \vee D(x))$.

12. Teng kuchli almashtirislar orqali quyidagi formulalarni MKNFga keltiring:

12.1. $(\neg X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$;

12.2. $(X \vee Y) \wedge Z$;

12.3. $(\neg X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$;

12.4. $(\neg X \wedge Y) \vee (Z \wedge T)$;

12.5. $(X \wedge Y \wedge Z) \vee T$;

12.6. $X \wedge Y \wedge Z$;

12.7. $(X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z) \vee (Z \wedge T)$;

12.9. $X \vee Y \vee (\neg Z \wedge T)$;

12.10. $(X \wedge Y) \vee Z$;

12.11. $X \wedge Y \wedge Z \wedge T$;

12.12. $(X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge \neg Z$.

13. Teng kuchli almashtirislar orqali quyidagi formulalarni MDNFga keltiring:

13.1. $\neg(X \vee Z) \wedge (X \Rightarrow Y)$;

13.2. $(X \Leftrightarrow Y) \wedge \neg (Z \Rightarrow T)$;

13.3. $(X \vee (Y \wedge \neg Z)) \wedge (X \vee Z)$;

13.4. $((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (Z \Rightarrow \neg X)) \Rightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg Z)$;

13.5. $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Z) \Rightarrow (X \Rightarrow \neg Y))$.

14. Mulohazalar hisobida quyidagi formulalar keltirib chiqariluvchi ekanligini isbotlang:

14.1. $A \Rightarrow A$;

14.2. $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$;

14.3. $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

15. Quyidagilarni isbot qiling:

15.1. $F, G, F \Rightarrow (G \Rightarrow H) \vdash H$;

15.2. $F \Rightarrow G, G \Rightarrow H \vdash F \Rightarrow H$;

15.3. $F \Rightarrow (G \Rightarrow H) \vdash G \Rightarrow (F \Rightarrow H)$;

15.4. $\neg G \Rightarrow \neg F \vdash F \Rightarrow G$.

ADABIYOTLAR

1. **Новиков Р.С.** Элементы математической логики. М.: «Наука», 1973.

2. **Мендельсон Е.** Введение в математическую логику. М.: «Наука», 1984

3. **Ершов Ю.Л., Палютин Е.А.** Математическая логика. М.: «Наука», 1979.

4. **Клини С.К.** Введение в математику. М.: ИЛ, 1957.

5. **Клини С.К.** Введение в математику. М.: ИЛ, 1973.

6. **Черч А.** Введение в математическую логику. М.: ИЛ, 1960.

7. **Столл Р.** Множество. Логика. Аксиоматические теории. М.: «Просвещение», 1968

8. **Гильберт Д, Аккерман В.** Основы теоритеческой логики М.: ИЛ,1947.

9. **Калужнинг А.А.** Что такое математическая логика? М.: «Наука», 1964.

10. **Эдельман С.Л.** Математическая логика. М.: «Высшая школа», 1975.

11. **Лавров Л.А, Максимова Л.Л.** Задачи по теории множеств, математической логике итеории алгоритмов. М.: «Наука», 1975.

12. **Гиндикин С.Г.** Алгебра логики в задачах. М.: «Наука»,1972.

13. **Малцев А.Л.** Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: «Наука», 1965.

14. **Шефильд Дж.** Математическая логика М.: «Наука», 1975.

15. **Yoqubov T., Kallibekov S.** Matematik mantiq elementlari. «O‘qituvchi»,1996.

16. **Л.М. Лихтарников, Г.Г. Сухачёва.** Математическая логика. Санкт-Питербург,1999.

MUNDARIJA

IV BOB
PREDIKATLAR HISOBI

V BOB
MATEMATIK NAZARIYALAR

VI BOB
ALGORITMLAR

O'quv-uslubiy nashr

A. S. YUNUSOV

**MATEMATIK MANTIQ
VA ALGORITMLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI**

(O'quv qo'llanma)

Muharrir ***N.G'oyipov***
Tex. muharrir ***Ye.Demchenko***
Musahhih ***A.Tojiyev***
Kompyuterda sahifalovchi ***R.Yesaulenko***

IB № 41132

Bosishga 12.07.2006-y.da ruxsat etildi.
Bichimi 84x108 1/32. Bosma tobog'i 4,5. Shartli bosma tobog'i 7.56.
Adadi 1000 nusxa.
Bahosi kelishilgan narxda. Buyurtma № 157.

«Yangi asr avlodi» nashriyot-matbaa markazida tayyorlandi.
«Yoshlar matbuoti» bosmaxonasida bosildi.
700113. Toshkent, Chilonzor-8, Qatortol ko'chasi, 60.