ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Я. С. БУГРОВ
С. М. НИКОЛЬСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования РФ в качестве учебного пособия для студентов инженерно-технических специальностей высших учебных заведений

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ. С ДОПОЛНЕНИЕМ *А. Д. КУТАСОВА*

Ростов-на-Дону
«Феникс»
1997

ББК 22.1
Б 90

В серию учебников по высшей математике авторов Я. С. Бугрова, С. М. Никольского вошли книги:

1. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного;
2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии;
3. Дифференциальное и интегральное исчисление;
4. Сборник задач по высшей математике.

Данная серия получила высокое признание в нашей стране и за рубежом, была удостоена государственной премии в 1987 году. Все книги серии переведены на английский, французский, испанский и португальский языки.

За короткий срок эти книги выдержали три издания и сегодня пользуются огромным спросом и популярностью у студентов вузов России.

Б 90 **Бугров Я. С., Никольский С. М.** Высшая математика. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для вузов. — 3-е изд., испр. и доп. С дополнением А. Д. Кутасова. — Ростов н/Д: изд-во «Феникс» 1997. — 352 с.

Задачник составлен применительно к учебникам тех же авторов “Дифференциальное и интегральное исчисление”, “Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии” и “Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного”.

Для студентов инженерно-технических специальностей вузов.

ISBN 5–222–00250–0

Предисловие к третьему изданию

В 1987 г. авторы данного комплекса учебников получили за него Государственную премию СССР.

С грустью отметим, что Я. С. Бугров теперь уже скончался.

Третье издание задачника существенно расширено. Добавлено почти 500 задач. Добавление принадлежит известному методисту по высшей математике А. Д. Кутасову. Задачи А. Д. Кутасова составляют отдельное приложение II.

Предисловие ко второму изданию

Второе издание отличается от первого рядом изменений.

Добавлено приложение, содержащее задачи повышенной трудности. Последовательность расположения задач в нем, как правило, иная, чем в основном тексте, поэтому читателю необходимо приложить некоторые усилия, чтобы распознать тип задачи и уяснить, какую теорию данной главы надо привлечь для успешного ее решения. Авторы считают, что задачи и примеры в приложении можно использовать для работы со студентами, успешно занимающимися высшей математикой.

Авторы выражают благодарность С. Г. Кальнею, Ю. П. Лисовцу и другим читателям за отмеченные опечатки и ценные конструктивные предложения, которые способствовали улучшению задачника.

Авторы выражают также глубокую благодарность рецензентам задачника профессору В. А. Ильину и руководимой им кафедре за тщательное рассмотрение пособия и ценные замечания.

В 1983 г. первое издание задачника удостоено Диплома почета ВДНХ СССР, а в 1984 г. комплекс учебников по высшей математике, состоящий из трех книг (учебников) и данного задачника, удостоен премии МВ и ССО СССР и ЦК профсоюзов работников просвещения, высшей школы и научных учреждений.

Предисловие к первому изданию

Задачник составлен применительно к нашим учебникам по высшей математике. При этом принято следующее обозначение учебников:

[1] — Я. С. Бугров, С. М. Никольский. «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление».

[2] — Я. С. Бугров, С. М. Никольский. «Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии».

[3] — Я. С. Бугров, С. М. Никольский. «Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного».

В начале каждого параграфа задачника указаны глава и параграф из названных учебников, где можно найти соответствующий теоретический материал.

Как правило, число задач по разделу минимально и соответствует числу учебных часов, отведенных на изучение данного материала. Можно рекомендовать задачи с нечетными номерами решать в аудитории, а задачи с четными номерами давать студентам для самостоятельного решения.

На практических занятиях можно также использовать задачи, вошедшие в учебники [1]—[3]. В задачник эти задачи не включены.

Глава 1

Введение в анализ

§ 1. Действительные числа. Множества

Применяя метод математической индукции, доказать следующие соотношения:

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$.

2. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$.

3. $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx,\ x > -1$.

4. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\ldots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Для решения нижеследующих задач необходимо изучить главу 1 из [1].

5. Пусть множество A состоит из юношей данной группы, а B — из девушек той же группы. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$. Рассмотреть также случаи, когда A или B — пустые множества.

6. Пусть $A = \{2n\}$, $B = \{2n + 1\}$. Найти $A + B$, AB, $A \setminus B$ (n — натуральное).

7. Какое число больше, a или b:

$$a = 1,(1234512),\quad b = 1,(12345);$$
$$a = 1,(12302),\quad b = 1,(123);$$
$$a = 1,(123412),\quad b = 1,(1234).$$

8. Выяснить, к какому числу a стабилизируется последовательность действительных чисел:

$a_1 = 0,1010101010...,$

$a_2 = 0,1100110011...,$

$a_3 = 0,111000111000...,$

$a_4 = 0,111100001111...,$

. . . .

$$a_n = 0,\underbrace{11\ ...\ 1}_{n\ \text{раз}}\underbrace{00\ ...\ 0}_{n\ \text{раз}}1\ ...\ 10\ ...\ 0\ ... .$$

. . . .

9. Найти сумму действительных чисел $a = 0,(12)$ и $b = 0,\ (13)$.

10. Даны множества $A = [2, 5]$, $B = (3, 6)$. Найти $A + B$, AB, $A \setminus B$.

11. Решить неравенства:

а) $|x + 3| < 0,1$; б) $|x - 3| \geqslant 10$

в) $|x| > |x + 3|$; г) $|3x - 1| < |x - 1|$;

д) $\left|\dfrac{x-2}{3x+1}\right| \leqslant 1$.

12. Какое из чисел больше: a или $(-a)$?

13. Пусть $a \geqslant 0$. Для каких чисел b имеют место соотношения:

а) $|a + b| = |a| + |b|$; б) $|a - b| = |a| + |b|$;

в) $|a + b| < |a| + |b|$; г) $|a - b| < |a| + |b|$.

14. Найти модуль числа: а) $\ln\ (1/e)$; б) $\sin\ (3\pi/2)$; в) $\cos\ (7\pi/4)$.

§ 2. Предел последовательности

(см.[1], глава 2)

15. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1,$$

и определить для каждого $\varepsilon > 0$ число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon, \qquad \text{если } n > n_0.$$

Заполнить таблицу:

ε	0,1	0,001	0,00001	...
n_0				

Найти пределы:

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^6 n}{n^2+1}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha \sin(n!)}{n+1}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\ldots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right)$.

20. Доказать, что переменная α_n есть бесконечно малая, если

$$\alpha_n = \frac{n}{n^3+1};\ \alpha_n = \frac{1}{n!};\ \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

21. Доказать, что переменная β_n является бесконечно большой, если

$$\beta_n = (-1)^n n^2;\ \beta_n = 2^{\sqrt{n}};\ \beta_n = \ln\ (n+1).$$

22. Будет ли последовательность

$$x_n = n^{(-1)^n/2}$$

бесконечно большой?

Доказать равенства:

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n+10}-\sqrt{3n}\right)=0$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5}{2n^2+3n+1}=\dfrac{3}{2}$.

Пользуясь теоремой существования предела монотонной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей:

25. $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

26. $x_n=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{7}\ldots\frac{n+1}{2n-1}$.

27. Найти наибольший элемент последовательностей:

$$x_n=\frac{n^2}{2^n};\ x_n=\frac{\sqrt{n+1}}{10+n}.$$

28. Найти наименьший элемент последовательностей:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n;\ x_n=n^2-9n-10.$$

29. Найти $\inf\ x_n$, $\sup\ x_n$ $(n\in\mathbf{N})$, $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$, если

$$x_n=1-\frac{1}{n};\ x_n=\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{2+(-1)^n}{3}\quad (n\in\mathbf{N}).$$

30. Какие числа являются частичными пределами последовательности

$$1,\ \frac{1}{2},\ -1,\ 1,\ \frac{1}{3},\ -1,\ 1,\ \frac{1}{4},\ -1,\ 1,\ \ldots .$$

Под *частичным пределом* произвольной ограниченной последовательности мы понимаем предел ее сходящейся подпоследовательности. Существование таких подпоследовательностей у ограниченной последовательности вытекает из теоремы Больцано—Вейерштрасса.

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательностей:

31. $x_n = \frac{\sin 1^2}{2} + \frac{\sin 2^2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n^2}{2^n} \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k^2}{2^k}$.

32. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. **33.** $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k!}{k(k+1)}$.

§ 3. Функция. Предел функции
(см. [1], глава 3)

Найти область E задания функции $y = f(x)$ и образ $E_1 = f(E)$ множества E при помощи функции f:

34. $y = \frac{1}{1+x^2}$, **35.** $y = \sqrt{2+3x-x^2}$.

36. Найти $f(0)$, $f(x+2)$, $f(1/x)$, $f(x)+1$, $1/f(x)$, если

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Построить графики функций:

37. $y = 8x - 2x^2$. **38.** $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

39. $y = -x^2 + 2x - 1$. **40.** $y = \frac{1-x}{1+x}$.

41. $y = \frac{3x+4}{4x-3}$.

42. Определить нижнюю и верхнюю грани множества значений функции $f(x)$, если

$f(x) = x^2$ на $[-2, 5]$; $\varphi(x) = x + \frac{1}{x}$ на $(0, 3]$.

Указание. На множестве $(0, 3]$ $\varphi(x) \geqslant 2$.

43. Построить графики функций:

$$f(x) = \sup_{0<t<x} \{\sin t\}; \qquad \varphi(x) = \inf_{0<t<x} \{\sin t\}.$$

Найти пределы функций:

44. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+3x^3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; е) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+3-1}{2x^2-x+4}\right)^x$;

ж) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-9}}$; з) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

и) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$; к) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right]$.

45. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{x}$.

46. $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}$.

47. а) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3x)^{1/x}$; в) $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

48. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+4x)}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{a^x-a^b}{x-b}$ $(a > 0)$.

Исследовать на непрерывность, изобразить графически функции и определить характер точек разрыва:

49. $f(x) = |x - 1|$.

50. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ A, & x = 1. \end{cases}$

51. $f(x) = \operatorname{sign}(x^2 - 2x - 3)$.

52. $y = \dfrac{1+x}{1+x^3}$.

53. $y = \dfrac{x}{1+x}$.

54. $y = \operatorname{sign}\ (\cos\ x)$.

55. $y = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2-x, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

56. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leqslant 0, \\ a+x, & x > 0. \end{cases}$

Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на $[a,\ b]$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ (\varepsilon) > 0$ (не зависящее от точек промежутка) такое, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

как только

$$|x_1 - x_2| < \delta.$$

Доказать, что функции $f(x)$ равномерно непрерывны на $[a, b]$:

57. $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 20-8x, & 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$

58. $f(x) = x^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2.$

59. Найти обратную функцию для функции

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0).$$

Пусть $x \to 0$. Выделить главный член вида Ax^m:

60. $f(x) = 3x + x^4$.

61. $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$.

§ 4. Производная

(см. [1], глава 4)

62. Найти $f'(0)$, $f'(2)$, если $f(x) = 2 - 2x + x^3$.

63. Найти $f'(0)$, $f'(1)$, если $f(x) = x \arcsin\dfrac{x}{x+1}$.

Найти производные функций:

64. $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$.

65. а) $y = x + \sqrt[3]{x}$; б) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

в) $y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$; г) $y = x\sqrt{1+x^2}$;

д) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; е) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

ж) $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$; з) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$;

и) $y = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$; к) $y = \frac{1}{\cos^n x}$;

л) $y = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$; м) $y = e^{e^x} + e^{e^{e^x}}$;

н) $y = x^{a^a} + a^{x^a}$ $(a > 0)$;

о) $y = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$; п) $y = \arccos\sqrt{1-x^2}$.

66. $y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$. **67.** $y = e^{-x^2}$.

68. *а*) $y = \sin\ x^2$; б) $y = \sin^2\ x$;
в) $y = \sin^3\ x^7$; г) $y = \cos\ (\sin\ x)$;
д) $y = \cos\ x^2$; е) $y = \cos^2 x^4$.

69. *а*) $y = \arcsin\ (x/a)$; б) $y = \operatorname{arctg}\ (x/a)$;

в) $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$; г) $y = \arcsin\ (\sin\ x)$;

д) $y = \arccos\ (x/a)$; е) $y = e^{x^3+x}$.

70. $y = \ln\ \operatorname{tg}\ (x/2)$.

71. *а*) $y = x\ \operatorname{arctg}\ x$; б) $y = \ln^3\ x^2$;

в) $y = \ln\ (\ln\ (\ln\ x))$; г) $y = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$;

д) $y = \sqrt{x+1} - \ln\left(1 + \sqrt{x+1}\right)$;

е) $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$;

ж) $y=\frac{1}{x}\left(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6\right)$;

з) $y=\frac{3}{2}\left(1-\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+3\ln\left(1+\sqrt[3]{1+x^2}\right)$;

и) $y=\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

к) $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$;

л) $y=\frac{1}{12}\ln\frac{x^4-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$;

м) $y=\frac{x^6}{1+x^{12}}+\operatorname{arctg}x^6$;

н) $y=\operatorname{arctg}\ (\operatorname{tg}^2 x)$;

о) $y=x\operatorname{arctg}\ x-0{,}5\ln\ (1+x^2)-0{,}5(\operatorname{arctg}\ x)^2$;

п) $y=\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

р) Имеет место формула

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1}(x) & \dots & a_{k-1,n}(x) \\ a'_{k1}(x) & \dots & a'_{kn}(x) \\ a_{k+1,1}(x) & \dots & a_{k+1,n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

где элементы определителя $a_{ij}(x)$ — дифференцируемые функции. Таким образом, производная определителя n-го порядка равна сумме n определителей n-го порядка, каждый из которых отличается от исходного определителя тем, что в нем соответствующая строка заменена строкой из производных элементов этой строки.

Доказать формулу дифференцирования для определителей второго и третьего порядков.

Найти производные и построить графики функций и их производных:

72. $y = \begin{cases} 1-x, & -2<x<1, \\ (1-x)(2-x), & 1\leqslant x\leqslant 2, \\ -(2-x), & 2<x<4. \end{cases}$

73. $y = \begin{cases} x, & x<0, \\ \ln(1+x), & x\geqslant 0. \end{cases}$

Найти логарифмические производные (т. е. y'/y) функций y:

74. $y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

75. $y = \operatorname{ch}^2 x$.

Найти производные от гиперболических функций:

76. а) $y = \operatorname{sh}(x^2+1)$; б) $y = \operatorname{sh}^3 x^6$.

77. $y = \operatorname{ch}^2(x^2+x+1)$.

78. а) $y = \operatorname{th}^2 x$; б) $y = \operatorname{th} x^2$.

79. а) $y = \operatorname{th}(\ln x + 1)$; б) $y = \operatorname{Arsh} x$;

в) $y = \operatorname{Arch}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; г) $y = \ln \operatorname{sh} x$;

д) $y = \operatorname{ch} \ln x$, е) $y = e^{\operatorname{th} x}$;

ж) $y = (\operatorname{sh} x)^{\operatorname{ch} x}$ $(x>0)$; з) $y = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^3 x}$;

и) $y = \operatorname{th}\dfrac{x}{2} - \operatorname{cth}\dfrac{x}{2}$.

80. Для функции $f(x) = x^2 + x + 1$ определить дифференциал и приращение в точке $x = 1$ для $\Delta x = 0{,}1$.

Найти дифференциалы функций:

81. $d(xe^x)$.

82. $d(\operatorname{sh} x)$.

83. $d(\operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x)$. **84.** $d(\ln(1 - x^2))$.

85. Найти производные второго порядка от следующих функций:

а) $y = e^{-x^2} \equiv \exp(-x^2)$; б) $y = x\sqrt{1+x^2}$.

86. Пусть дан определитель (Вронского)

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},$$

где функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ непрерывны на (a, b) вместе со своими производными до n-го порядка включительно.

Доказать, что

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

87. $y = x^5$, найти d^4y. **88.** $y = e^x \ln x$, найти d^3y.

Найти производные y'_x и y''_{x^2} от функций $y = y(x)$, заданных параметрически, если:

89. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

90. $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$.

91. $x = f'(t)$, $y = tf'(t) - f(t)$.

92. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

93. а) Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$y = 2 + x - x^3$$

в точке $A = (2, -4)$.

б) Выяснить, имеют ли общую касательную графики функций $y = \operatorname{sh} x$ и $y = \ln(1 + 2x)$ в точке (0, 0).

Углом между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в их точке пересечения с абсциссой $x = x_0$ называется угол φ между касательными к этим кривым в этой точке.

Поэтому

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)},$$

где φ_1, φ_2 — углы, образованные указанными касательными с осью x (рис. 1).

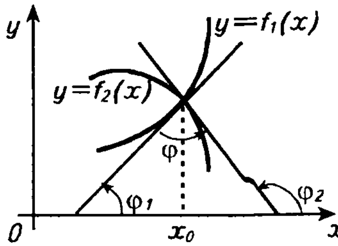


Рис. 1

94. Под каким углом пересекаются кривые $y = \sin x$ и $y = \cos x$ $(0 < x < \pi)$?

95. Под каким углом пересекаются кривые $y = x^{\alpha}$ и $y = x^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$ $(0 < \alpha < 1)$ в точке (1, 1)?

96. Под каким углом кривая $y = \ln\left(1 + \left(x/\sqrt{3}\right)\right)$ пересекает ось x?

97. а) Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = (x - 1)(x - 2)$ на [1, 2].

б) Многочлен $P_4(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$ имеет корень $x = 1$. Доказать, что многочлен $\frac{d}{dx} P_4(x)$ имеет действительный корень, принадлежащий интервалу (0, 1).

в) Доказать, что все корни многочлена $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(1 - x^2)^n$ действительны и принадлежат интервалу (–1, 1).

98. Проверить справедливость теоремы Лагранжа $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ для функций:

а) $y = 1 + x + x^3$;

б) $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, A, B, C — действительные числа;

в) $f(x) = Ax^3 + Bx + C$; на $[0, 1]$. Найти точку c.

99. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет ограниченную производную на (a, b) ($|f'(x)| \leqslant M$), то:

а) $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b).

б) Если a и b — конечные числа, то $f(x)$ ограничена на (a, b).

Указание. Пусть x — произвольная точка, а x_0 — фиксированная точка (a, b). Тогда

$|f(x)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \leqslant |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| = |f'(c)|\,|x - x_0| + |f(x_0)|$,

где c находится между точками x и x_0.

в) Если интервал (a, b) бесконечный, то функция $f(x)$ может быть неограниченной. Рассмотреть функцию $f(x) = \ln x$ на $(1, \infty)$.

100. Определить промежутки монотонности у функций:

а) $y = 3 + x - x^2$;   б) $y = 4x - x^4$.

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (отрицательную) производную на (a, b), то она возрастает (убывает) на $[a, b]$.

Этот факт можно использовать при доказательстве неравенств.

Например, функция $\varphi(x) = e^x - 1 - x$ непрерывна на $[0, \infty)$. Она возрастает на $[0, \infty)$, так как $\varphi'(x) = e^x - 1 > 0$ на $(0, \infty)$. Далее $\varphi(0) = 0$, поэтому $\forall\ x \in (0, \infty)$

$$e^x - 1 - x > 0.$$

На $(-\infty, 0)$ функция $\varphi(x)$ убывает, поэтому $e^x - 1 - x > \varphi(0) = 0$. Таким образом, $\forall\ x \neq 0$

$$e^x > 1 + x.$$

Доказать неравенства:

101. $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x \quad (x > 0)$.

102. $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ $(x > 0)$.

Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

103. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$.

104. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$.

105. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$.

106. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^3}$.

107. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2+2x}{4x^2+1}$.

108. $\lim\limits_{x\to +0} x^x$.

109. *а)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{1/x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} bx}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{th} 3x}{\operatorname{tg} x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{th} x - x}{x - \operatorname{sh} x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$;

з) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cth} x - \frac{1}{x}\right)$;

и) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

к) $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$;

л) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\operatorname{th} x)^x$;

м) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{1/x^2}$;

н) $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x - x^a}{x-a}$ $(a > 0)$;

о) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ (n — целое число);

п) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ (m, n — целые числа);

р) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$;

с) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$. Указание. Умножить и разделить на сопряженное выражение;

т) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; у) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

110. Выяснить возможность применения правила Лопиталя в примере

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}.$$

Написать разложения следующих функций по степеням x:

111. $f(x)=\operatorname{tg}\, x$ до члена x^5.

112. $f(x)=e^{2x-x^2}$ до члена x^3.

113. $y=\ln\cos x$ до члена x^4.

114. $y=\sin\,(\sin x)$ до члена x^3.

Найти пределы, применяя разложение по формуле Тейлора:

115. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\exp\left(-x^2/2\right)}{x^4}$. **116.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

117. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sh}x}{x^3}$. **118.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\operatorname{ch}x^2}{x^4}$.

119. С помощью формулы Тейлора вычислить:

а) число e с точностью до 10^{-6};

б) число $\sin\ 1°$ с точностью до 10^{-6};

в) число $\sqrt{5}$ с точностью до 10^{-3}

г) числа $\ln 2$ и $\ln 3$ с точностью до 10^{-5} (см. [1], § 9.14, (8)).

120. Исследовать на локальный экстремум функции:

а) $y=2-x-x^2$; б) $y=|x|$;

в) $y=2x^2-x^4$, г) $y=x+\dfrac{1}{x}$;

д) $y=e^x\sin x\quad(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$; е) $y=1/(4+x^2)$;

ж) $y=x/(1+4x^2)$; з) $y=x^3-6x^2+9x-4$;

и) $y=\cos x+0{,}5\cos 2x$; к) $y=\sin x+0{,}5\sin 2x$.

121. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = 2^x$ на $[0, 5]$; б) $y = x + \frac{1}{x}$ на $\left[\frac{1}{2}, 10\right]$.

122. Найти расстояние от кривой $y = x^2$ до прямой $y - x + 2 = 0$.

123. Найти sup и inf следующих функций:

а) $y = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 4 - 2x, & 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$;

б) $y = \frac{1 + x^2}{1 + x^4}$ на $(0, \infty)$.

124. Найти промежутки вогнутости и точки перегиба следующих функций:

а) $y = 3x^2 - x^3$; б) $y = \exp\ (- x^2)$.

125. Найти асимптоты графиков функций:

а) $y = x + \frac{1}{x}$; б) $y = e^{1/x}$;

в) $y = \exp\ (- x^2)$; г) $y = \ln\ (1 + e^x)$.

126. Построить графики функций, проведя полное исследование их поведения (экстремум, перегиб, нули функции, направление вогнутости, асимптоты):

а) $y = \frac{x - 3}{\sqrt{1 + x^2}}$; б) $y = \frac{e^x}{1 + x}$.

127. Построить графики функций, заданных в параметрическом виде (см. [1], § 4.22):

а) $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$;

б) $x = \frac{2 + t^2}{1 + t^2}$, $y = \frac{t^3}{1 + t^2}$.

128. а) В эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

вписать прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, наибольшей площади (рис. 2).

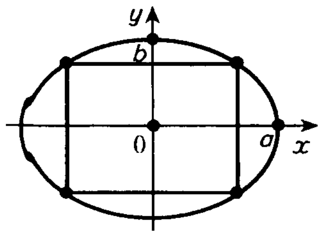


Рис. 2

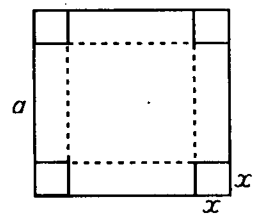


Рис. 3

б) Дан квадратный лист жести со стороной a. Из него в его углах вырезают одинаковые квадраты (рис. 3) со стороной x и, загибая лист по штриховым линиям, делают прямоугольную коробку. При каких размерах квадратов объем коробки будет наибольший?

в) Корабль K (рис. 4) стоит в 9 км от ближайшей точки B прямолинейного берега. С корабля нужно послать курьера в лагерь L, находящийся на берегу и расположенный в 15 км (считая по берегу) от точки B. В каком пункте P берега курьер должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время, если он идет пешком 5 км в час, а на веслах — 4 км в час?

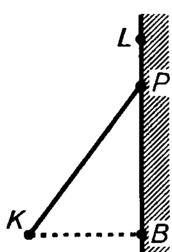


Рис. 4

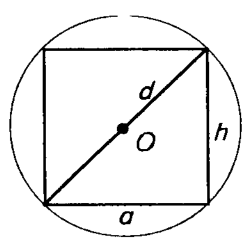


Рис. 5

г) Из круглого бревна диаметром d надо вырезать балку прямоугольного сечения с основанием a и высотой h (рис. 5). При каких значениях a и h прочность балки будет наибольшей, если известно, что прочность балки пропорциональна ah^2?

129. В параболу, заданную уравнением $y = 3 - x^2$, вписать прямоугольник наибольшей площади так, чтобы одна его сторона лежала на оси x, а две вершины на параболе (рис. 6).

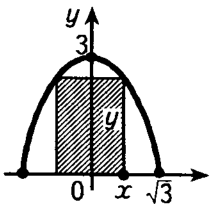


Рис. 6

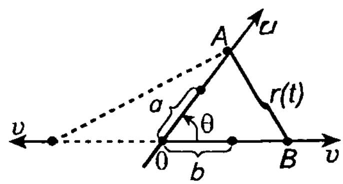


Рис. 7

130. Два корабля A и B плывут с постоянными скоростями u и v по прямым линиям, составляющим угол θ между собой. Определить наименьшее расстояние между кораблями, если в некоторый момент времени расстояния их от пересечения путей были соответственно равны a и b (рис. 7).

131. Определить радиус кривизны кривых:

а) $y^2 = 2px$,

б) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

в) $y = \dfrac{1}{2}(1 - \cos t)$, $x = \dfrac{1}{2}(1 - \sin t)$ (циклоида).

132. Составить уравнение эволюты циклоиды:

$x = a(t - \sin t)$,

$y = a(1 - \cos t)$.

Глава 2

Интегралы

§ 1. Неопределенный интеграл (см. [1], глава 5)

Применяя табличные интегралы, найти:

133. $\int x^2(5-x)^4\,dx.$

134. $\int (1-x^2)^2\,dx.$

135. $\int \frac{x^2dx}{1+x^2}.$

136. $\int (1+\sin x+\cos x)\,dx.$

137. $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx.$

138. $\int \mathrm{tg}^2\, x\,dx.$

139. $\int \mathrm{th}^2\, x\,dx.$

140. $\int \mathrm{cth}^2\, xdx.$

141. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx.$

142. $\int (2x-3)^{99}\,dx.$

143. а) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$, б) $\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\,dx;$

в) $\int \left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)dx;$ г) $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\,dx;$

д) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^3 dx;$ е) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}\,dx;$

ж) $\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$;

з) $\int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx$;

и) $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx$;

к) $\int (2^x+3^x)^2\,dx$;

л) $\int (a\,\mathrm{sh}x + b\,\mathrm{ch}x)\,dx$;

м) $\int (2x-9)^{10}\,dx$;

н) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$;

о) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x^2}}$;

п) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$;

р) $\int (e^{-2x}+e^{-3x})\,dx$.

Преобразовывая надлежащим образом подынтегральное выражение или применяя подходящие подстановки, найти:

144. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

145. $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$.

146. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$.

147. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}$.

148. $\int \mathrm{tg}\; x\,dx$.

149. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

150. $\int x\sqrt{2-5x}\,dx$.

151. $\int \frac{2^x 3^x dx}{9^x-4^x}$.

152. а) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}$;

б) $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$;

в) $\int \frac{x\,dx}{\left(1+x^2\right)^2}$;

г) $\int \frac{x^3\,dx}{x^8-2}$;

д) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;

ж) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$;

з) $\int \mathrm{ctg}\; x\,dx$;

и) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$; к) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$;

л) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$; м) $\int \operatorname{sh}^2 x\, dx$;

н) $\int \operatorname{ch}^2 x\, dx$; о) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}$;

п) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{1-3x}}$; р) $\int x^3 \sqrt[3]{1+x^2}\, dx$;

с) $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

Применяя метод интегрирования по частям, найти:

153. $\int \operatorname{arctg} x\, dx$. **154.** $\int x e^{-x}\, dx$.

155. $\int x \operatorname{sh} x\, dx$. **156.** $\int x \sin x\, dx$.

157. $\int \arcsin x\, dx$. **158.** $\int x \cos x\, dx$.

159. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx$.

160. а) $\int x^2 \sin 2x\, dx$; б) $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$;
в) $\int x^2 e^{-2x}\, dx$; г) $\int x^3 e^{-x2}\, dx$;
д) $\int \ln x\, dx$; е) $\int x^n \ln x\, dx \quad (n \neq -1)$;
ж) $\int x^3 \operatorname{ch} 3x\, dx$; з) $\int x^2 \operatorname{sh} x\, dx$;
и) $\int \sin x \ln (\operatorname{tg} x)\, dx$.

Применяя метод неопределенных коэффициентов, найти интегралы от рациональных функций:

161. а) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$; б) $\int \frac{2x+1}{(x-2)^3 (x+5)} dx$.

162. а) $\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$; б) $\int \frac{dx}{x^2-2x+1}$;

в) $\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx$.

163. а) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$; б) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2(x+2)}$.

164. а) $\int \frac{dx}{(x+1)(1-x)^2}$; б) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

в) $\int \frac{x^{10}dx}{x^2+x-2}$; г) $\int \frac{dx}{x^3+1}$;

д) $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$; е) $\int \frac{dx}{x^4-1}$;

ж) $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

Интегрирование дробно-линейных иррациональностей:

165. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

166. а) $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^2\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}$; г) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$;

д) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}\cdot(x-b)^{n-1}}}$ (n — натуральное число).

Найти интегралы от квадратических иррациональностей:

167. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$. **168.** $\int \sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

Интегрирование тригонометрических функций:

169. *а*) $\int \sin^4 x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin 2x}$.

170. *а*) $\int \cos^3 x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{\cos 2x}$.

171. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x - 1}\left(t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.

172. *а*) $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$ $(t = \operatorname{tg}\ x)$;

б) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$; в) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$;

г) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$; д) $\int$ $[\operatorname{th}\ (2x+1) + \operatorname{cth}\ (2x-1)]\,dx$.

§ 2. Определенный интеграл
(см.[1], глава 6)

173. Доказать, что функция Дирихле

$$y = \begin{cases} 0, & x \text{ — иррационально,} \\ 1, & x \text{ — рационально.} \end{cases}$$

не интегрируема на любом промежутке $[a, b]$.

174. Не вычисляя интегралы, выяснить, какой из них больше:

а) $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$, $\int_0^{\pi/2} x\,dx$, $\int_0^{\pi/2} \frac{2x}{\pi}\,dx$; б) $\int_0^1 e^x dx$; $\int_0^1 (1+x)\,dx$.

Вычислить определенные интегралы при помощи формулы Ньютона-Лейбница:

175. а) $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int_0^{\pi/4} \sin 2x\,dx$;

в) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\, dx$;   г) $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\, dx$;

д) $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;   е) $\int\limits_{\operatorname{sh}1}^{\operatorname{sh}2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

ж) $\int\limits_0^2 |1-x|\, dx$;   з) $\int\limits_0^2 x \ln x\, dx$.

176. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$ $(a,\, b > 0)$.

177. $\int\limits_0^{\pi} x \sin x\, dx$.   **178.** $\int\limits_0^{\ln 2} x e^{-x}\, dx$.

179. $\int\limits_0^1 x f''(x)\, dx$.

180. Доказать, что при натуральных k и l:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \sin kx \sin lx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq l, \\ \pi, & \text{если } k = l; \end{cases}$

б) $\int\limits_0^{2\pi} \cos kx \cos lx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq l, \\ \pi, & \text{если } k = l; \end{cases}$

в) $\int\limits_0^{2\pi} \cos kx \sin lx\, dx = 0 \quad \forall k,\ l.$

Указание. Преобразовать подынтегральное выражение в сумму тригонометрических функций.

181. Найти производные от интегралов:

а) $\frac{d}{dx} \int\limits_a^x \sin t^2\, dt$;   б) $\frac{d}{da} \int\limits_a^b \sqrt{1+t^2}\, dt$;

в) $\frac{d}{dx} \int\limits_a^b \sin x^2\, dx$.

182. Проверить выполнение теоремы о среднем

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

для функции $f(x) = x^2$ на [0, 1].

183. Вычислить определенный интеграл от функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 4-2x, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

§ 3. Приложения определенного интеграла (см. [1], глава 7)

Вычислить площади фигур, ограниченных кривыми:

184. $y = x^2$, $y = 2 - x$.

185. $y = h\left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right)$, $y = 0$ ($h > 0$, $b > 0$) (рис. 8).

186. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

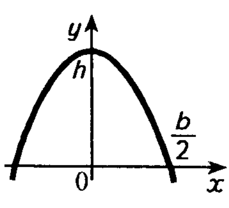


Рис. 8

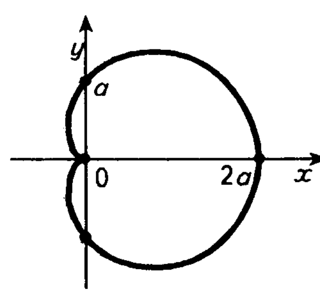


Рис. 9

187. $r = a\,(1 + \cos\varphi)$, r, φ — полярные координаты (рис. 9).

188. Вычислить длину дуги кривой

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x \qquad (1 \leqslant x \leqslant e).$$

189. Найти длину дуги астроиды (рис. 10)

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

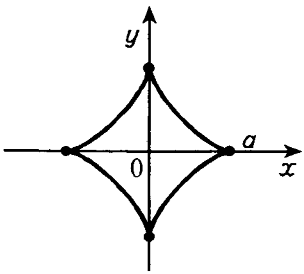


Рис. 10

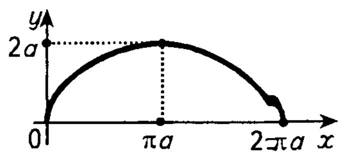


Рис. 11

190. Найти длину дуги одной арки циклоиды (рис. 11)
$x = a(t - \sin\ t)$, $y = a\ (1 - \cos\ t)$ $\quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

191. Вывести формулу длины дуги кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = f(\theta)$.

192. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением (рис. 12)

$$r = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$$

в полярных координатах.

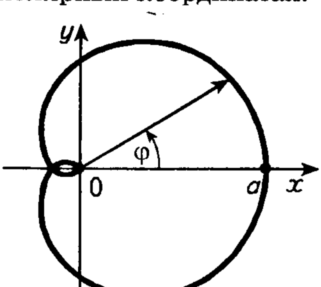


Рис. 12

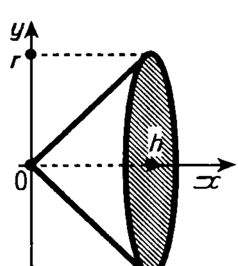


Рис. 13

193. Найти длину дуги кардиоиды (см. рис. 9)

$$r = a\,(1 + \cos\,\varphi).$$

194. Найти объем:

а) конуса (рис. 13) с образующей

$$y = \frac{r}{h}x \qquad (0 \leqslant x \leqslant h);$$

б) конической бочки с радиусами оснований r_1 и r_2 и высотой h (рис. 14);

в) тела, образованного вращением одной арки синусоиды $y = \sin\,x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$;

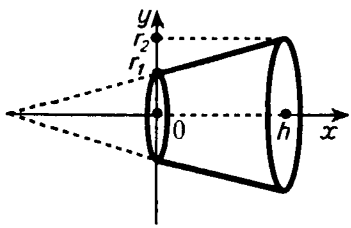


Рис. 14

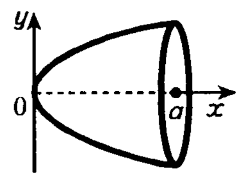


Рис. 15

г) тела, образованного вращением параболы $y^2 = 2px$ вокруг оси x $(0 \leqslant x \leqslant a)$ (рис. 15).

195. Вычислить площади поверхностей, образованных вращением кривых:

а) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ вокруг оси симметрии кривой;

б) $9y^2 = x(3 - x)^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 3)$ вокруг оси Ox;

в) $y = x^3$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ вокруг оси Ox,

г) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (астроида) вокруг оси Ox.

196. Вычислить интегралы по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона и оценить погрешность:

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ $(n = 8)$; б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ $(n = 12)$.

197. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа третьей степени для функции $f(x)$, если $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 0$.

§ 4. Несобственные интегралы
(см. [1], глава 6)

198. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^4}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x)^\alpha}$ $(\alpha > 0)$;

в) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln x}$.

199. Исследовать сходимость интегралов, применяя признак сравнения:

а) $\int\limits_a^\infty \exp\left(-x^2\right)dx$; б) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

в) $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx$; г) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$.

200. Вычислить интегралы, используя метод интегрирования по частям:

а) $\int\limits_0^\infty xe^{-x}dx$; б) $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$ $(a > 0)$;

в) $\int\limits_0^\pi e^x \sin x\,dx$.

201. Исследовать сходимость интегралов:

а) $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{1+x^p}$ $(p \geqslant 0)$; б) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x^p+x^q}$ $(p,\ q \geqslant 0)$;

в) $\int\limits_0^\infty \frac{x^m\,dx}{1+x^n}$ $(n \geqslant 0)$.

Глава 3

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

§ 1. Определители и матрицы (см. [2], § 1—3)

Вычислить определители:

202. $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$.

203. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

204. $\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$.

205. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

206. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

207. $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$.

208. $\begin{vmatrix} \dfrac{x}{1+x} & \dfrac{2x+1}{1+x} \\ \dfrac{-1}{1+x} & \dfrac{x}{1+x} \end{vmatrix}$.

209. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

210. $\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix}$.

211. Выяснить четность или нечетность перестановок:

а) 1, 2, 4, 3, 5; б) 5, 1, 2, 3, 4;

в) 1, 3, 2, 5, 4; г) 1, 4, 3, 2, 5.

212. Найти адьюнкты всех элементов определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$$

и проверить, что

$$\Delta = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} A_{1k}.$$

213. Вычислить определители путем накопления нулей в строке или столбце:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$.

214. Вычислить определители Вандермонда:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 \\ 1 & 6 & 6^2 & 6^3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

215. Перемножить определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \text{ и } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

всеми четырьмя возможными способами (т. е. умножением строк или столбцов Δ_1 на строки или столбцы Δ_2). Проверить, что во всех случаях произведение определителей $\Delta = \Delta_1\Delta_2$ равно 35.

216. Пусть даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}8 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C=\lambda A+\mu B$, если:

а) $\lambda=1$, $\mu=2$;

б) $\lambda=-5$, $\mu=2$.

217. Для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

найти сопряженную с ней матрицу A^* и определить ранг A.

§ 2. Системы линейных уравнений (см. [2], § 4)

Решить системы уравнений по правилу Крамера:

218. $\begin{cases}2x_1+3x_2=1,\\ 3x_1+5x_2=4.\end{cases}$

219. $\begin{cases}3x_1+x_2=4,\\ 2x_1+4x_2=1.\end{cases}$

220. $\begin{cases}x+y=1,\\ x-y=2.\end{cases}$

221. $\begin{cases}2x-y+3z=9,\\ 3x-5y+z=-4,\\ 4x-7y+z=5.\end{cases}$

222. $\begin{cases}x-y+3z=9,\\ 3x-5y+z=-4,\\ 4x-7y+z=5.\end{cases}$

223. Путем преобразования расширенной матрицы B выяснить, разрешима ли система

$$\begin{cases}2x+7y+3z+t=5,\\ x+3y+5z-2t=3,\\ x+5y-9z+8t=1,\\ 5x+18y+4z+5t=12.\end{cases}$$

224. Найти ранги матриц

$$A=\begin{pmatrix}2&1&4&5\\1&0&1&2\\1&2&4&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&2\\3&1&3&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}.$$

путем преобразования строк и столбцов матриц (накапливая нули).

§ 3. Векторы
(см. [2], § 5)

225. а) Найти проекцию вектора $\boldsymbol{a}=(1,4)$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{b}=(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$.

б) Вычислить проекции x, y, z вектора $\boldsymbol{a}$ на оси координат, если $|\boldsymbol{a}|=2, \alpha=\pi/4, \beta=\pi/3, \gamma=2\pi/3$, где α, β, γ — углы, которые составляет вектор $\boldsymbol{a}$ с осями x, y, z соответственно.

в) Найти проекции вектора $\boldsymbol{a}$ из пункта б) на направленную прямую L с единичным ортом $\boldsymbol{b}=(1/2,\ 1/2,\ 1/\sqrt{2})$.

226. Пусть даны векторы $\boldsymbol{a}=(1,\ 2,\ 2)$, $\boldsymbol{b}=(2,\ 1,\ -1)$. Найти модули этих векторов, расстояние между точками $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ отложены из начала координат) и скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$.

227. Найти косинус угла между векторами:

а) $\boldsymbol{a}=(2,\ -4,\ 4)$, $\boldsymbol{b}=(-3,\ 2,\ 6)$;

б) $\boldsymbol{a}=(\sqrt{2},\ 1,\ -1)$, $\boldsymbol{b}=(1,\ 0,\ 0)$;

в) $\boldsymbol{a}=(1,\ 3,\ \sqrt{6})$, $\boldsymbol{b}=(1,\ 1,\ 0)$.

228. Может ли вектор $\boldsymbol{a}=(x,\ y,\ z)$ составлять с осями координат углы $\alpha=\pi/6$, $\beta=\pi/4$?

229. Найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$, если $|\boldsymbol{a}|=3, \alpha=\beta=\gamma$.

230. Даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ такие, что $|\boldsymbol{a}|=13$, $|\boldsymbol{b}|=19$, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=24$. Найти $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

231. Даны векторы a и b такие, что $|a| = 11$, $|b| = 23$, $|a - b| = 30$. Найти $|a + b|$.

232. Найти угол между векторами $a = (1, 1, 1, 1)$, $b = (0, 1, 0, 1)$.

233. Пусть векторы a и $b \neq 0$ ортогональны. При каком значении параметра λ вектор $a + \lambda b$ ортогонален к вектору $a + b$?

§ 4. Деление отрезка в данном отношении (см. [2], § 7)

234. Найти на отрезке, соединяющем точки $O = (0, 0, 0)$ и $A = (1, 2, 2)$ трехмерного пространства R_3, точку $M = (x, y, z)$, делящую этот отрезок в отношении $2 : 3$.

235. Найти координаты центра масс $M = (x, y)$ системы двух материальных точек $A = (3, -5)$, $B = (-1, 1)$, в которых сконцентрированы массы $q = p = 1$.

236. В условиях задачи 235 пусть $q = 3$, $p = 5$. Найти координаты центра масс.

237. Отрезок с концами $A = (1, -5)$, $B = (4, 3)$ разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.

§ 5. Прямая линия (см. [2], § 8)

238. Выяснить, какие из точек $M_1 = (3, 1)$, $M_2 = (2, 3)$, $M_3 = (-2, 1)$ лежат на прямой $2x + 3y - 13 = 0$.

239. Записать уравнение прямой $2x + 3y - 13 = 0$ как уравнение прямой с угловым коэффициентом и как уравнение прямой, проходящей через некоторую точку в данном направлении.

240. Дана прямая $x + 2y + 1 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0 = (2, 1)$: а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно данной прямой.

241. Даны уравнения двух сторон прямоугольника

$$2x - 3y + 5 = 0, \quad 3x + 2y - 7 = 0$$

и одна из его вершин $O = (0, 0)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

242. Привести уравнения прямых: а) $2x + 5y + 4 = 0$; б) $x + y - 1 = 0$; в) $2x - y + 3 = 0$ к нормальному виду.

243. Найти расстояние от точки $A = (1, 2)$ до прямых:
а) $2x + 4y - 5 = 0$; б) $2x + 8y + 1 = 0$,
в) $x + y = 0$.

§ 6. Плоскость

(см.[2],§ 9)

244. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0 = (1, 2, -3)$ и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{\nu} = (1, -2, 3)$.

245. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: (1, 1, 1), (1, –1, 0), (2, 1, 3).

246. Написать уравнение плоскостей, проходящих через точку (1, 1, 1): а) перпендикулярно и б) параллельно плоскости

$$2x + 4y + z - 5 = 0.$$

247. Какие из плоскостей параллельны друг другу:
а) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, $2x + y - 2z - 1 = 0$;
б) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$;
в) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $4x - 6y + 10z - 14 = 0$;
г) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $4x - 3y + 10z - 14 = 0$.

248. Привести уравнения плоскостей:

а) $2x - 3y + 6z - 7 = 0$, б) $4x - y + 8z - 14 = 0$

к нормальному виду.

249. Найти расстояния от точки $A = (1, 2, 1)$ до плоскостей:

а) $2x - 3y + 6z - 7 = 0$,   б) $2x + y - 2z - 1 = 0$.

250. Найти угол между плоскостями задачи *248*.

251. Написать уравнение шаровой поверхности с центром в начале координат, касающейся плоскости

$$2x + 3y + 4z - 12 = 0.$$

252. Записать уравнение $2x + y - 5z - 6 = 0$ как уравнение плоскости в отрезках.

253. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $(2, -1, 1)$ перпендикулярно плоскостям:

$$2x - y + 3z - 1 = 0, \quad x + 2y + z = 0.$$

254. Определить углы α, β, γ, которые составляет нормаль к плоскостям с осями координат:

а) $x + y\sqrt{2} + z - 1 = 0$;   б) $x\sqrt{3} + y + 1 = 0$.

255. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями:

а) $x - 2y - 2z - 1 = 0$; $x - 2y - 2z - 6 = 0$;

б) $2x - 3y + 6z - 1 = 0$, $4x - 6y + 12z + 1 = 0$.

§ 7. Прямая в пространстве

(см. [2], § 10)

256. Найти точки пересечения прямой

$$\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

с координатными плоскостями.

257. Найти соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты прямой

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

для того чтобы она: а) пересекала ось абсцисс и б) совпадала с ней.

258. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $(1,\ 0,\ -1)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a}=(2,\ -3,\ 5)$.

259. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $(1,\ -1,\ -3)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a}=(2,\ 1,\ 5)$.

260. Составить канонические уравнения прямых:

а) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0. \end{cases}$

261. Найти угол φ между прямыми

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

262. Даны прямые

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}, \qquad \frac{x-3}{l}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}.$$

При каком значении l они пересекаются?

263. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(1,\ -1,\ 0)$ и перпендикулярной плоскости $2x-4y+z=3$.

§ 8. Ориентация системы векторов. Векторное и смешанное произведение векторов

(см. [2], § 10—13)

264. Заданы векторы:

а) $\boldsymbol{a}=(1,\ 2)$, $\boldsymbol{b}=(3,\ 5)$; б) $\boldsymbol{a}=(1,\ 2)$, $\boldsymbol{b}=(3\ ,\ 7)$.

Выяснить их ориентацию относительно системы xOy.

265. Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол $\omega = \pi/6$, кроме того, $|\boldsymbol{a}| = 7$, $|\boldsymbol{b}| = 6$. Найти $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$.

266. Выяснить, коллинеарны ли векторы $\boldsymbol{a} = (1, 0, 3)$ и $\boldsymbol{b} = (2, 0, 6)$.

267. Какому условию должны удовлетворять векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, чтобы векторы $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ были коллинеарны?

268. Доказать, что если $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, то

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$.

269. Вычислить синус угла, образованного векторами $\boldsymbol{a} = (-2, 2, 1)$ и $\boldsymbol{b} = (6, 3, 2)$.

270. Найти площадь S параллелограмма, построенного на плоских векторах $\boldsymbol{a} = (1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (3, 4)$.

З а м е ч а н и е 1. Если в плоскости xOy задан треугольник с вершинами $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, то площадь этого треугольника, очевидно, равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ и $\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$. Таким образом, площадь треугольника ABC равна

$$S = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right|.$$

Это равенство можно также записать в виде

$$S = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

Последний определитель третьего порядка равен определителю второго порядка, записанному выше. Чтобы убедиться в этом, достаточно умножить первую строку определителя третьего порядка на (-1) и сложить со второй и третьей строками и затем разложить определитель по элементам третьего столбца. В качестве примера вычислить площадь треугольника ABC с вершинами $A = (1, 2)$, $B = (2, -1)$, $C = (0, 1)$.

271. Проверить, компланарны ли векторы:

а) $\boldsymbol{a} = (2, 3, -1)$, $\boldsymbol{b} = (1, -1, 3)$, $\boldsymbol{c} = (1, 9, -11)$;

б) $\boldsymbol{a} = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{c} = (1, 1, 1)$.

272. Доказать, что четыре точки $A=(1, 2, -1)$, $B=(0, 1, 5)$, $C = (-1, 2, 1)$, $D = (2, 1, 3)$ лежат в одной плоскости.

Замечание 2. Взаимное расположение прямых.

Зададим две прямые L_1 и L_2:

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\beta_1} = \frac{z-z_1}{\gamma_1}, \qquad (L_1)$$

$$\frac{x-x_2}{\alpha_2} = \frac{y-y_2}{\beta_2} = \frac{z-z_2}{\gamma_2}, \qquad (L_2)$$

где $\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2 = 1$ $(i = 1, 2)$. Введем (единичные) векторы $\boldsymbol{a}^1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\boldsymbol{a}^2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, и точки $A_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $A_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

Расстоянием d между прямыми L_1 и L_2 называют минимум расстояний между произвольными точками $A \in L_1$ и $B \in L_2$.

Может быть три случая расположения прямых L_1 и L_2.

I. Прямые L_1 и L_2 пересекаются в некоторой точке. В этом случае, очевидно, $d = 0$.

II. Прямые L_1 и L_2 *скрещивающиеся*, т. е. они не пересекаются и не параллельны между собой. В этом случае векторы $\boldsymbol{a}^1$ и $\boldsymbol{a}^2$ не коллинеарны и расстояние d между L_1 и L_2 вычисляется по формуле

$$d = \left|\overrightarrow{A_1A_2}\frac{\left(\boldsymbol{a}^1\times\boldsymbol{a}^2\right)}{\left|\boldsymbol{a}^1\times\boldsymbol{a}^2\right|}\right| = \frac{1}{\left|\boldsymbol{a}^1\times\boldsymbol{a}^2\right|}\left\|\begin{matrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{matrix}\right\|. \qquad (1)$$

В самом деле, пусть Π_1 есть плоскость, проходящая через прямую L_1 параллельно прямой L_2, и Π_2 — плоскость, проходящая через L_2 параллельно L_1. Очевидно, что плоскости Π_1 и Π_2 параллельны между собой и перпендикулярны вектору $\boldsymbol{a}^1 \times \boldsymbol{a}^2$. Поэтому расстояние между прямыми L_1 и L_2 равно расстоянию между плоскостями Π_1 и Π_2. Так как точка $A_1 \in L_1 \subset \Pi_1$, а точка $A_2 \in L_2 \subset \Pi_2$, то расстояние d между Π_1 и Π_2, очевидно, равно абсолютной величине проекции вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ на вектор $a^1 \times a^2$:

$$d = \left| \text{пр}_{a^1 \times a^2} \overrightarrow{A_1A_2} \right|,$$

что равно правой части (1) (см. [2], § 5, с. 37).

III. Прямые L_1 и L_2 параллельны. В этом случае можно считать (изменив, если нужно, знак в уравнениях прямой L_2), что $a^1 = a^2$. Расстояние d между L_1 и L_2 вычисляется по формуле (рис. 16)

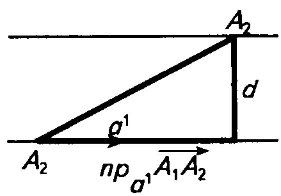


Рис. 16

$$d = \sqrt{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|^2 - \left(\text{пр}_{a^1}\overrightarrow{A_1A_2}\right)^2} = \sqrt{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|^2 - \left(\overrightarrow{A_1A_2}, a^1\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - [(x_2 - x_1)\alpha_1 + (y_2 - y_1)\beta_1 + (z_2 - z_2)\gamma_1]^2}$$

$$\left(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1\right).$$

Замечание 3. Принадлежность двух прямых к одной плоскости.

Покажем, что для того, чтобы две прямые L_1 и L_2 принадлежали к некоторой плоскости, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

В самом деле, это равенство можно записать в векторной форме следующим образом: $\overrightarrow{A_1A_2}\,(a^1 \times a^2) = 0$. Но это есть условие принадлежности трех векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, a^1, a^2 к одной плоскости (см. [2], § 13), а следовательно, и условие принадлежности прямых L_1 и L_2 к одной плоскости.

Замечание 4. В случаях I и III прямые L_1 и L_2, очевидно, находятся в одной плоскости. Поэтому для них выполняется равенство (2). В случае же II прямые L_1 и L_2 заведомо не принадлежат ни к какой одной плоскости, и поэтому для них в этом случае равенство (2) не выполняется.

В качестве упражнения найти расстояние между следующими прямыми:

а) $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-6}{4}$, $\quad \dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{z-6}{3}$;

б) $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-6}{4}$, $\quad \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$;

в) $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-1}{3}$, $\quad \dfrac{x-5}{8}=\dfrac{y-3}{10}=\dfrac{z+1}{6}$;

г) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$, $\quad \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z+1}{6}$;

д) $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z+2}{4}$, $\quad \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-6}{1}$;

е) $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$, $\quad \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{1}$

(ответы: *а*) 0; б) $3/\sqrt{2}$; в) $\sqrt{33/2}$; г) $\sqrt{3/14}$; д) $7/\sqrt{2}$; е) 0).

Приведем решение задачи б). В данном примере $A_1 = (1, 2, 6)$, $A_2 = (0, 1, 2)$. Векторы (4, 5, 4) и (1, 2, 1) не являются единичными. Умножая уравнения прямых на модули этих векторов, получим уравнения прямых в требуемом для нас виде:

$$\frac{x-1}{4/\sqrt{57}}=\frac{y-2}{5/\sqrt{57}}=\frac{z-6}{4/\sqrt{57}}, \quad \frac{x}{1/\sqrt{6}}=\frac{y-1}{2/\sqrt{6}}=\frac{z-2}{1/\sqrt{6}},$$

т. е. $\alpha_1 = 4/\sqrt{57}$, $\beta_1 = 5/\sqrt{57}$, $\gamma_1 = 4/\sqrt{57}$, $\alpha_2 = 1/\sqrt{6}$, $\beta_2 = 2/\sqrt{6}$, $\gamma_2 = 1/\sqrt{6}$. Легко проверить, что условие (2) не выполняется, т. е. наши прямые скрещивающиеся. Поэтому искомое расстояние будем находить по формуле (1). Найдем векторное произведение единичных векторов $a^1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $a^2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$:

$$a^1 \times a^2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6 \cdot 57}}[-3i + 3k].$$

Отсюда $|a^1 \times a^2| = 1/\sqrt{19}$. Теперь по формуле (1) получаем

$$d = \left| \sqrt{19} \begin{vmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{57 \cdot 6}} \right| = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Замечание 5. Объем тетраэдра.

Пусть в пространстве задан тетраэдр (треугольная пирамида) $ABCD$ с вершинами $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$, $D = (x_4, y_4, z_4)$. Требуется найти объем этого тетраэдра (рис. 17).

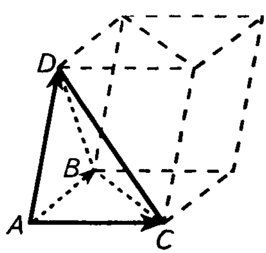


Рис. 17

Из рисунка видно, что объем тетраэдра $ABCD$ равен 1/6 объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Но нам известно (см. [2], § 13), что объем этого параллелепипеда равен абсолютной величине векторно-скалярного (смешанного) произведения векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. Поэтому объем V треугольной пирамиды $ABCD$ равен

$$V = \left| \frac{1}{6} (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{AD} \right| =$$

$$\left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

Задачи. Найти объем тетраэдра, заданного вершинами:

а) $A=(0, 0, 0)$, $B=(1, 1, 0)$, $C=(2, 1, 0)$, $D=(0, 0, 6)$;
б) $A=(0, 0, 0)$, $B=(4, 1, 1)$, $C=(1, 1, 0)$, $D=(0, 0, 8)$
(ответы: а) 1; б) 4).

§ 9. Зависимые и независимые системы векторов

(см. [2], § 14)

273. Выяснить, будут ли векторы:

а) $\boldsymbol{a}^1=(1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}^2=(1, 2, 1, 2)$, $\boldsymbol{a}^3=(3, 1, 3, 1)$, $\boldsymbol{a}^4=(0, 1, 1, 0)$;

б) $\boldsymbol{a}^1=(1, 0, 1)$, $\boldsymbol{a}^2=(1, 1, 2)$, $\boldsymbol{a}^3=(2, 1, 2)$
линейно зависимы или линейно независимы.

274. Доказать, что система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима.

275. Найти все значения λ, при которых вектор $\boldsymbol{b}=(7, -2, \lambda)$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}^1=(2, 3, 5)$, $\boldsymbol{a}^2=(3, 7, 8)$, $\boldsymbol{a}^3=(1, -6, 1)$.

§ 10. Линейные операторы. Базис

(см. [2], § 15—17)

276. Вычислить произведение матриц AB и BA:

а) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

277. Вычислить выражения:

а) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^3$;

в) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n$ $(n>3)$.

278. Найти все матрицы $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, перестановочные (коммутативные) с матрицей A:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

279. Найти матрицы, обратные данным:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

280. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix},\qquad \text{где } X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем матрицу, обратную к матрице $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$: $A_{11}=4$, $A_{12}=-3$, $A_{21}=-2$, $A_{22}=1$, $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2$;

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta}\\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Умножая слева обе части уравнения на A^{-1}, получаем ($A^{-1}A = E$)

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix}3 & 5\\5 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -1\\2 & 3\end{pmatrix}.$$

281. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix}3 & -2\\5 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 2\\-5 & 6\end{pmatrix}.$$

Чтобы найти матрицу A^{-1}, обратную к матрице A, можно решить систему $y = Ax$ относительно x. Пусть $x = By$. Тогда $A^{-1} = B$, потому что $ABy = Ax = y$, т. е. $AB = E$, $BAx = By = x$, т. е. $BA = E$, где E — единичная матрица, т. е. $AB = BA = E$.

Найдем этим способом обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$. Составим линейную систему

$$Ax = y \text{ или } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1, \\ 3x_1 + 4x_2 = y_2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$x_1 = -2y_1 + y_2,$$

$$x = \frac{3}{2}y_1 - 1/2y_2.$$

Отсюда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

282. Найти A^{-1} указанным способом для матриц:

а) $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

283. Выяснить, какие из преобразований (операторов) Ax являются линейными и для линейных операторов найти их матрицу:

а) $Ax = (x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3)$;

б) $Ax = (x_1,\ x_2 + 1,\ x_3 + 1)$.

284. Пусть в базисе i^1, i^2, i^3 заданы линейно независимые векторы a^1, a^2, a^3. Найти линейное преобразование, переводящее векторы a^1, a^2, a^3 соответственно в b^1, b^2, b^3, если

$a^1 = (2, 3, 5)$, $\quad a^2 = (0, 1, 2)$, $\quad a^3 = (1, 0, 0)$;

$b^1 = (1, 1, 1)$, $\quad b^2 = (1, 1, -1)$, $\quad b^3 = (2, 1, 2)$.

Указание (см. [2], § 16). Если заданы системы векторов

$a^1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $\quad a^2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$, $\quad a^3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$;

$b^1 = (b_{11}, b_{21}, b_{31})$, $\quad b^2 = (b_{12}, b_{22}, b_{32})$, $\quad b^3 = (b_{13}, b_{23}, b_{33})$,

то линейный оператор, порожденный матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

отображает базис i^1, i^2, i^3 соответственно в a^1, a^2, a^3. Следовательно, A^{-1} отображает a^1, a^2, a^3 соответственно в i^1, i^2, i^3. Далее, оператор B, порожденный матрицей

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

отображает базис i^1, i^2, i^3 соответственно в b^1, b^2, b^3. Следовательно, BA^{-1} отображает a^1, a^2, a^3 соответственно в b^1, b^2, b^3.

285. Найти линейное преобразование, переводящее векторы

$a^1 = (2, 0, 3)$, $\quad a^2 = (4, 1, 5)$, $\quad a^3 = (3, 1, 2)$

соответственно в векторы

$b^1 = (1, 2, -1)$, $\quad b^2 = (4, 5, -2)$, $\quad b^3 = (1, -1, 1)$.

286. Линейное преобразование A в базисе i^1, i^2, i^3, i^4 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого же преобразования в базисе:

а) $\boldsymbol{i}^1, \boldsymbol{i}^3, \boldsymbol{i}^2, \boldsymbol{i}^4$;

б) $\boldsymbol{i}^1, \boldsymbol{i}^1+\boldsymbol{i}^2, \boldsymbol{i}^1+\boldsymbol{i}^2+\boldsymbol{i}^3, \boldsymbol{i}^1+\boldsymbol{i}^2+\boldsymbol{i}^3+\boldsymbol{i}^4$.

287. Линейное преобразование A в базисе $\boldsymbol{a}^1=(1, 2)$, $\boldsymbol{a}^2=(-1, 1)$ имеет матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого преобразования в базисе $\boldsymbol{b}^1=(1, -2)$, $\boldsymbol{b}^2=(3, -1)$.

288. Пусть преобразование A в базисе $\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2$ (см. задачу *287*) имеет матрицу $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого преобразования в базисе $\boldsymbol{b}^1, \boldsymbol{b}^2$.

289. Проверить, какие из пар векторов ортогональны:

а) $\boldsymbol{x}=(1, 2, 3)$, $\boldsymbol{y}=(0, -3, 2)$;

б) $\boldsymbol{x}=(1, 2, 1)$, $\boldsymbol{y}=(0, 1, 2)$;

в) $\boldsymbol{x}=(1, 0, 1)$, $\boldsymbol{y}=(0, 2, 1)$.

290. Показать, что система векторов

$\boldsymbol{e}^1=(1, 2, 3)$, $\boldsymbol{e}^2=(0, -3, 2)$, $\boldsymbol{e}^3=(13, -2, -3)$

есть ортогональный базис в R_3. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}=(1, 0, 0)$ в этом базисе.

291. Пополнить ортонормированную систему векторов

$$\boldsymbol{x}=(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0), \quad \boldsymbol{y}=(0, -1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$$

до ортонормированного базиса в R_4 векторами $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{t}$.

292. Выяснить ориентацию ортогонального базиса по отношению к основному базису $\boldsymbol{i}^1=(1, 0, 0)$, $\boldsymbol{i}^2=(0, 1, 0)$, $\boldsymbol{i}^3=(0, 0, 1)$:

а) $\boldsymbol{a}^1=\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $\quad \boldsymbol{a}^2=\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\boldsymbol{a}^3=\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

б) $\boldsymbol{a}^1=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\boldsymbol{a}^2=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\boldsymbol{a}^3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

293. Пусть новый ортогональный базис b^1, b^2 задается ортогональной матрицей

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Записать формулы, связывающие координаты (x_1, x_2) вектора a в старом базисе с его координатами (x_1', x_2') в новом базисе.

294. Пусть базис a^1, a^2 задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записать формулы перехода от координат вектора a в старом базисе к координатам в новом базисе и наоборот.

§ 11. Линейные подпространства

(см. [2], § 20)

295. Является ли линейным подпространством совокупность векторов:

а) имеющих нечетные целые координаты;

б) имеющих четные целые координаты;

в) лежащих на прямой, проходящей через начало координат;

г) лежащих на оси x или оси y,

д) концы которых лежат в первой четверти системы координат (начало вектора предполагается совпадающим с началом координат);

е) концы которых лежат на данной прямой;

ж) концы и начало которых лежат на данной прямой;

з) являющихся всевозможными линейными комбинациями векторов x^1, x^2, ..., x^k в R_n $(k \leqslant n)$?

296. Перечислить все линейные подпространства R_2.

297. Пусть L — подпространство R_2 (т. е. совокупность векторов, лежащих на прямой $x_2 = kx_1$). Найти ортогональное к нему подпространство L'.

298. Найти размерность и базис линейных подпространств, являющихся линейными комбинациями векторов (или, как говорят, *натянутых на данную систему векторов*):

а) $a^1 = (1, 0, 0, -1)$, $a^2 = (2, 1, 1, 0)$, $a^3 = (1, 1, 1, 1)$, $a^4 = (1, 2, 3, 4)$, $a^5 = (0, 1, 2, 3)$;

б) $a^1 = (1, 0, 1)$, $a^2 = (1, 1, 1)$, $a^2 = (2, 1, 2)$, $a^4 = (3, 2, 3)$.

299. Пусть L — подпространство в R_4, натянутое на векторы

$$a^1 = (1, 0, 0, -1), \quad a^2 = (2, 1, 1, 0).$$

Найти подпространство L', ортогональное к L. Пусть вектор a ортогонален к L'. Доказать, что он есть линейная комбинация векторов a^1, a^2 ($a = \alpha a^1 + \beta a^2$).

300. Пусть e^1, e^2 — ортонормированный базис плоскости и линейный оператор A в базисе $f^1 = e^1$, $f^2 = e^1 + e^2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу сопряженного оператора A^* в том же базисе f^1, f^2.

Решение. В базисе e^1, e^2 матрица оператора A^* является сопряженной к матрице оператора A.

Найдем сначала матрицу оператора A в базисе e^1, e^2. Имеем

$A(e^1) = A(f^1) = f^1 + f^2 = 2e^1 + e^2$;

$A(e^2) = A(f^2 - f^1) = A(f^2) - A(f^1) = f^1 - 2f^2 = -e^1 - 2e^2$.

Таким образом, матрица оператора A в базисе e^1, e^2 имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь значение оператора A^* на векторах f^1, f^2:

$A^*f^1 = A^*e^1 = 2e^1 - e^2 = 3f^1 - f^2$;

$A^*f^2 = A^*(e^1 + e^2) = A^*e^1 + A^*e^2 = 3f^1 - f^2 + e^1 - 2e^2 = 6f^1 - 3f^2$.

Таким образом, матрица A^* в базисе f^1, f^2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

301. Пусть в задаче **300** матрица оператора A в базисе f^1, f^2 равна $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A^* в том же базисе.

302. Линейный оператор A в базисе

$$f^1 = (1, 2, 1), f^2 = (1, 1, 2), f^3 = (1, 1, 0)$$

задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу A^* в том же базисе, считая, что координаты векторов даны в некотором ортонормированном базисе (например, $f^1 = e^1 + 2e^2 + e^3$).

§ 12. Самосопряженные операторы. Квадратичные формы (см. [2], § 22, 23)

303. Найти наибольшее собственное значение самосопряженного оператора, определяемого матрицей:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

304. Пользуясь теоремой Сильвестра, выяснить, будет ли квадратичная форма строго положительной:

а) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

б) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$;

в) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

305. Находя собственные значения, выяснить тип квадратичной формы:

а) $f = x^2 + 4xy - y^2$; б) $f = x^2 + 26y^2 + 10xy$;

в) $f = x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{3}\, xy$.

306. Привести квадратичную форму к каноническому виду:

а) $3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$;

б) $7x_1^2+7x_2^2+7x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

307. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующие формы к каноническому виду, и написать этот канонический вид:

а) $6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$;

б) $17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$.

§ 13. Кривые второго порядка (см. [2], § 24)

Общее уравнение кривой второго порядка записывается:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{1}$$

где A, B, C одновременно не равны нулю.

Считаем, что $B \geqslant 0$. Иначе к этому можно свести уравнение (1), полагая $x = x'$, $y = -y'$. Соответствующее ортогональное преобразование приводит уравнение (1) к виду

$$\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2+2d\xi+2\varepsilon\eta+g=0, \tag{2}$$

где λ_1, λ_2 — собственные значения линейного самосопряженного оператора, порожденного квадратичной формой

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2 \tag{3}$$

и d, e, g — некоторые числа. При $B=0$ уравнение (1) имеет вид (2). Поэтому считаем далее $B>0$.

Координаты ξ, η рассматриваются в новой прямоугольной системе (новом ортонормированном базисе), единичными ортами которой являются собственные векторы указанного самосопряженного оператора. При этом, если первый собственный вектор x^1 (единичный), соответствующий собственному значению λ_1, имеет координаты (x_0, y_0), то за второй собственный вектор (при $B>0$) берем вектор $(-y_0, x_0)$ или $(y_0, -x_0)$. Отметим, что векторы (x_0, y_0), $(-y_0, x_0)$ ориентированы так же, как исходный базис $i=(1, 0)$, $j=(0, 1)$.

Векторы же (x_0, y_0), $(y_0, -x_0)$ ориентированы противоположным образом ($\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ y_0 & -x_0 \end{vmatrix} = -1 < 0$).

Итак, если $B > 0$, то преобразование координат имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0\xi \mp y_0\eta, \\ y = y_0\xi \pm x_0\eta. \end{cases}$$

В двумерном случае собственные значения и собственные векторы можно вычислять по формулам, которые были получены в [2], § 24:

$$\lambda_1 = \frac{A+C}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4B^2 + (A-C)^2},$$

$$\lambda_2 = \frac{A+C}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4B^2 + (A-C)^2};$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{A-C}{2\sqrt{4B^2 + (A-C)^2}}},$$

$$y_0 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{A-C}{2\sqrt{4B^2 + (A-C)^2}}}.$$

Конечно, можно каждый раз находить собственные числа как корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

а координаты собственного вектора x^1 как решение системы

$$\begin{cases} (A-\lambda_1)x_0 - By_0 = 0, \\ Bx_0 \quad\quad + (C-\lambda_1)y_0 = 0. \end{cases}$$

Уравнение (2), если оба числа λ_1 и λ_2 не равны нулю, можно записать так:

$$\lambda_1(\xi - \alpha)^2 + \lambda_2(\eta - \beta)^2 = \gamma, \quad \alpha = -\frac{d}{\lambda_1}, \quad \beta = -\frac{e}{\lambda_2}, \tag{4}$$

где γ — постоянная, откуда, полагая $u = \xi - \alpha$, $v = \eta - \beta$, получим

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = \gamma. \tag{5}$$

Если $AC - B^2 > 0$, то $\lambda_1\lambda_2 > 0$ и из (5) непосредственно получается каноническое уравнение эллипса (действительного или мнимого) или точки.

Если же $AC - B^2 < 0$, то $\lambda_1\lambda_2 < 0$ и из (5) легко получается каноническое уравнение гиперболы или пары пересекающихся прямых.

Если же $AC - B^2 = 0$, то $\lambda_1\lambda_2 = 0$. Однако одно из чисел λ_1 или λ_2, пусть, например λ_1, отлично от нуля. Тогда уравнение (2) записывается в виде

$$\lambda_1(\xi - \alpha)^2 + \delta\eta = \omega. \qquad (6)$$

Если $\delta = 0$, то уравнение (6) определяет пару прямых (действительных или мнимых). Если же $\delta \neq 0$, то, полагая $u = \xi - \alpha$, $v = \eta - \dfrac{\omega}{\delta}$ и, возможно, $v = - v'$, получим каноническое уравнение параболы.

308. Установить тип кривых и привести их уравнения к каноническому виду:

а) $3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + 3 = 0$;
б) $3x^2 + 2y^2 - 6x - 12y + 15 = 0$;
в) $x^2 - 2y^2 + 4y - 4 = 0$;
г) $3x^2 - 6x + 3y^2 - 12y + 15 = 0$;
д) $x^2 - 2y^2 + 4y - 2 = 0$,
е) $4x - 3y^2 + 12y - 12 = 0$;
ж) $3x^2 + 2y^2 - 6x - 12y + 22 = 0$.

309. Установить тип кривых и привести их уравнения к каноническому виду. Записать преобразования системы координат. Изобразить системы координат и кривые:

а) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;
б) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;
в) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$.

310. Дано уравнение кривой

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 1 = 0.$$

Определить, при каких значениях k прямая

$$y = kx$$

а) имеет одну общую точку с кривой;

б) пересекает кривую в двух точках;

в) не имеет общих точек с кривой.

311. Выяснить, при каких значениях k прямая $y = kx$ касается кривой

$$(x+y)^2 + 2 = \sqrt{2}(y - x).$$

312. Записать уравнение кривой второго порядка, проходящей через точки: (0, 0), (1, 0), (1, 1), (–2, 1), (0, 3).

§ 14. Поверхности второго порядка (см. [2], § 25)

Общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ + 2A_1x_1 + 2A_2x_2 + 2A_3x_3 + B = 0. \qquad (1)$$

Если в уравнении (1) отсутствуют смешанные произведения переменных (т. е. $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$), то приведение уравнения поверхности к каноническому виду осуществляется путем образования полных квадратов относительно переменных x_1, x_2, x_3 вида

$$a_{11}(x_1 - \alpha_1)^2 + a_{22}(x_2 - \alpha_2)^2 + a_{33}(x_3 - \alpha_3)^2$$

и параллельного переноса начала координат в точку $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Если же смешанные произведения присутствуют, то сначала приводим к каноническому виду симметрическую квадратичную форму

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} a_{kl}x_kx_l .$$

Собственные значения оператора, порожденного данной квадратичной формой, находим как корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

а координаты собственных векторов x^k ($k = 1, 2, 3$) находим из систем

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_k)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda_k)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda_k)x_3 = 0, \end{cases}$$

которые, как показано в [2], § 25, всегда имеют решения (три попарно ортогональных вектора x^1, x^2, x^3).

313. Привести к каноническому виду уравнение поверхности и указать ее название:

а) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 4 = 0$;
б) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2x + 4y - 1 = 0$;
в) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x + 4y - 1 = 0$;
г) $x^2 + 2y^2 + 2x + 4y - 2z + 3 = 0$;
д) $x^2 - 4y^2 - z^2 + 8y - 2z - 9 = 0$;
е) $x^2 + 2y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$.

314. Привести к каноническому виду уравнение поверхностей и указать соответствующие преобразования координат:

а) $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1 = 0$;

б) $3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 + 4x_1 + 1 = 0$.

315. Найти кривую пересечения плоскости $x = 2$ с эллипсоидом

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

316. Записать каноническое уравнение однополостного гиперболоида, проходящего через точки (1, 0, 0), (0, 4, 0), (1, 1, 1).

317. Найти уравнения проекций на координатные плоскости сечения эллиптического параболоида

$$y^2 + z^2 = x$$

плоскостью

$$x + 2y - z = 0.$$

318. Какая линия определяется уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 2z, \\ x^2 - 2y + 2 = 0? \end{cases}$$

319. Найти уравнение касательной плоскости к однополостному гиперболоиду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

в точке $(0, 0, c)$.

320. Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$$

вокруг оси x.

Решение. Возьмем произвольную точку $P = (\bar{x}, \bar{y}, 0)$ на указанном эллипсе. При вращении эллипса вокруг оси x точка P опишет окружность радиусом $\bar{y}$. Пусть $M = (x, y, z)$ — любая точка на этой окружности (а следовательно, и на искомой поверхности). Ясно, что (рис. 18) $CP = |\bar{y}| = CM = \sqrt{y^2 + z^2}$, $x = \bar{x}$. Так как точка P лежит на эллипсе, то

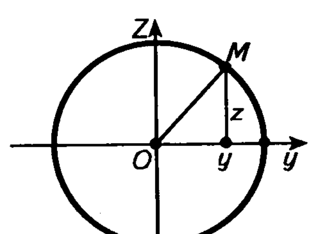


Рис. 18

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2}=1.$$

Подставляя в это уравнение вместо $\bar{y}$ и $\bar{x}$ их значения, получаем

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

Это и есть искомое уравнение поверхности.

Замечание 1. Кривую $f(x, y)=0$ мы вращали около оси x, тогда в уравнении кривой координата y заменяется на $\sqrt{y^2+z^2}$, в результате получается уравнение поверхности вращения около оси x:

$$f(x, \sqrt{y^2+z^2})=0.$$

Очевидно также, что уравнение

$$f(\sqrt{x^2+z^2}, y)=0$$

есть уравнение поверхности вращения вокруг оси y.

321. Составить уравнение поверхности, образованной вращением кривой:

а) $\begin{cases} x^2=2z, \\ y=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}$

вокруг оси z.

322. Найти точки пересечения поверхности и прямой:

а) $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{9}=1,\quad \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{-6}=\dfrac{z+2}{4};$

б) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=z,\quad \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}.$

323. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, образующие которого касаются сферы

$$(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9.$$

Решение. Данная сфера радиусом 3, ее центр имеет координаты $C=(-2, 1, 3)$. Таким образом, плоскость xOy касается шара в точке $P = (-2, 1, 0)$ (рис. 19). Луч OP является образующей. Направляющая конуса лежит на сфере и в плоскости, проходящей через точку P перпендикулярно прямой OC. Уравнение прямой OC

$$\frac{X}{-2} = \frac{Y}{1} = \frac{Z}{3}.$$

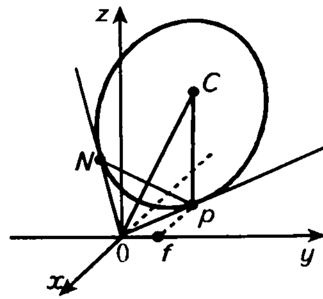


Рис. 19

Уравнение плоскости, проходящей через точку P, перпендикулярно OC:

$$-2(x + 2) + (y - 1) + 3z = 0.$$

Поэтому направляющую конуса можно задать в виде системы

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9, \\ -2x + y + 3z - 5 = 0. \end{cases}$$

Пусть теперь (x, y, z) — произвольная точка на направляющей и (X, Y, Z) — произвольная точка образующей (а следовательно, и точка конуса). Уравнение образующей можно записать как уравнение прямой, проходящей через точки $(0, 0, 0)$ и (x, y, z):

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

Исключая x, y, z из системы и последних трех уравнений, получим уравнение конуса. Зафиксируем $z = c$ и выразим x, y через X, Y, Z:

$$x = \frac{cX}{Z}, \quad y = \frac{cY}{Z}.$$

Подставляя эти значения в систему и исключая параметр c, получим после элементарных преобразований уравнение конуса

$$X^2 + 4Y^2 - 4Z^2 + 4XY + 12XZ - 6YZ = 0.$$

324. Составить уравнение конуса с вершиной $S = (5, 0, 0)$, образующие которого касаются сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Глава 4

Функции многих переменных

(см. [1], глава 8)

§ 1. Основные понятия

325. Найти и изобразить области существования функций:

а) $u=\sqrt{1-x^2-4y^2}$; б) $u=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}}$;

в) $u=\sqrt{y^2-4x}$; г) $u=\frac{1}{x^2+y^2}$;

д) $u=\ln\,(x+y)$; е) $u=\arcsin\frac{y}{x}$.

326. Найти и изобразить области существования функций трех переменных:

а) $u=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}$;

б) $u=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}$;

в) $u=\ln\,(-x^2-y^2+2z)$;

г) $u=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}$;

д) $u=\arcsin x+\arcsin y+\arcsin z$.

327. Найти частные значения функции

$$f(x, y) = x^2 + \frac{y}{x}$$

в точках (1, 0), (1, 1), (2, 1).

328. Найти $f(x, y)$, если $f(x + 2y, x - 2y) = xy$.

329. *Линией уровня* функции $u = f(x, y)$ называется множество точек области ее определения, в которых она принимает заданное постоянное значение: $f(x, y) = c$. Последнее равенство, таким образом, является уравнением линии уровня.

Геометрически это означает, что мы произвели сечение поверхности определяемой функцией (ее графика) плоскостью $u = c$ и полученную в сечении линию спроектировали на плоскость xOy. Эта проекция сечения и есть линия уровня.

Найти линии уровня функций:

а) $u = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$; б) $u = \frac{y}{x^2}$.

330. Найти расстояние ρ между точками (1, 0, 1) и (2, 1 , 0) пространства R_3.

331. Найти предел последовательности точек

$$M^k = \left(\frac{1}{1+k}, \frac{k^2}{k^2+1}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

332. Пусть множество $E = \{|x| < 1, \ |y| \leqslant 1\}$. Какие точки этого множества являются внутренними?

333. Будут ли связными множества:

а) $E = \{|x| + |y| \leqslant 1\}$;

б) $E = \left\{\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1\right\}$;

в) $E = \{x^2 + y^2 \neq 1\}$?

§ 2. Предел функции. Непрерывность (см. [1], § 8.2, 8.3)

Число A называется пределом функции f в точке x^0, если она определена на некоторой окрестности точки x^0, за исключением, быть может, ее самой, и если

$$\lim_{\substack{x^k \to x^0 \\ x^k \neq x^0}} f(x^k) = A,$$

какова бы ни была стремящаяся к x^0 последовательность точек x^k из указанной окрестности, отличных от x^0.

Однако бывают случаи, когда функция f определена не на всей окрестности, а только на некотором ее подмножестве E. В этом случае возникает понятие предела функции в точке x^0 по множеству E.

Число A называется *пределом функции f в точке* $x^0 \in \overline{E}$ ($\overline{E}$ — замыкание E, см. [1], § 8.11) *по множеству* E, если

$$\lim_{\substack{x^k \neq x^0 \\ x^k \in E,\, x^k \neq x^0}} f(x^k) = A,$$

какова бы ни была последовательность точек $x^k \in E$, сходящаяся к x^0. Это определение эквивалентно следующему: число A называется пределом функции f в точке $x^0 \in \overline{E}$ по множеству E, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon, x^0) > 0$ такое, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x \in E, \quad 0 < |x - x^0| < \delta.$$

Пример 1. Функция

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sin\frac{1}{x_1^2 + x_2^2},$$

определена на всей плоскости R_2, за исключением начала координат. Очевидно, что в любой окрестности начала координат функция f удовлетворяет неравенству

$$|f(x)| = \left|\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sin\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\right| \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |x| = |x - 0| < \varepsilon \ (x \neq 0)$$

при условии, что $|x| < \delta = \varepsilon$. Таким образом, обычный предел функции f в точке $\mathbf{0} = (0, 0)$ существует и равен нулю:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0.$$

Пример 2. Функция

$$f(x_1, x_2) = \left(x_1^2 + x_2^2\right) \sin \frac{1}{x_1 x_2}$$

определена на множестве E, представляющем собой плоскость R_2 без координатных осей. Обычного предела в точке $\mathbf{0} = (0, 0)$ функция f не имеет, но предел f в этой точке по множеству E существует и равен нулю:

$$\lim_{\substack{x_1 \to 0,\ x_2 \to 0 \\ (x_1, x_2) \in E}} f(x_1, x_2) = 0.$$

Задачи. Рассмотреть вопрос о существовании предела у функций:

а) $f(x, y) = \dfrac{\sin\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2}$ в точке $(0, 0)$;

б) $f(x, y) = \dfrac{1 - \cos\left(x^2 + y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right) x^2 y^2}$ в точке $(0, 0)$;

в) $f(x, y, z) = \exp(-1/(x^2 + y^2 + z^2))/(x^4 + y^4 + z^4)$ в точке $(0, 0, 0)$.

334. Найти пределы функции:

а) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \dfrac{\sin xy}{x}$ $(x \neq 0)$;

б) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

335. При каком значении c функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}, & x^2 + 4y^2 \leqslant 1, \\ c, & x^2 + 4y^2 > 1 \end{cases}$$

будет непрерывной на всей плоскости x, y?

336. Выяснить: а) будет ли непрерывной в точке (0, 0) функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0; \end{cases}$$

б) будет ли она непрерывной на луче в направлении любого вектора $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$, выходящего из начала координат.

337. Доказать, что множество точек (x, y), удовлетворяющих неравенству $1 - x^2 - y^2 > c$, открыто.

§ 3. Частные производные. Дифференциалы (см. [1], § 8.4, 8.5, 8.8)

Найти частные производные функций и их полные дифференциалы:

338. $u = x^3 + y^2 - 2xy$.

339. $u = x^2y^3$.

340. $u = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$.

341. *а*) $u = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$;

б) $u = xy + \dfrac{x}{y}$;

в) $u = x^y$;

г) $u = \operatorname{sh}(x + y)$;

д) $u = \operatorname{ch}(x^2y + \operatorname{sh} y)$.

342. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix},$$

если: *а*) $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$; б) $x = r^2 + \varphi$, $y = r + \varphi^2$.

343. Найти частные производные от сложных функций по переменным t и τ:

а) $u = \sqrt{x+y}$, где $x = e^{t+\tau}$, $y = \ln t$;

б) $u = xy$, где $x = \cos(t+\tau)$, $y = \sin(t - \tau)$.

344. Найти и построить градиент функций в точке $P = (1, 1)$:

а) $u = x^2y$; б) $u = 2x^2 - 3y^2$.

345. Найти в точке $P = (1, 1)$ производные функций u по направлению вектора $\boldsymbol{n} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$:

а) $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$; б) $u = 2x^2 - 3y^2$.

346. Найти производную от функции $u = 2x^2 - 3y^2$ в точке $P = (1, 1)$ в направлении градиента.

347. Найти углы, которые составляет градиент функции в точке $P = (1, 1)$ с осями координат:

а) $u = x^{\sqrt{3}} + y$; б) $u = x + y^{\sqrt{3}}$.

§ 4. Частные производные и дифференциалы высших порядков

(см. [1], § 8.4, 8.5, 8.9)

348. Найти частные производные и дифференциалы второго порядка от функций:

а) $u = \ln(x^2 + y)$; б) $u = \sqrt{2xy+y^2}$.

349. Показать, что функции

а) $u = \operatorname{arctg}(y/x)$; б) $u = -\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

удовлетворяют уравнению (Лапласа)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

350. Показать, что функция

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at),$$

где φ, ψ имеют производные до второго порядка, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

351. Найти производные и дифференциалы второго порядка от сложных функций (x, y — независимые переменные):

а) $u = f(\xi, \eta)$, $\xi = ax$, $\eta = by$;

б) $u = f(\xi, \eta)$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$.

Предполагается, что $f(\xi,\eta)$ имеет производные до второго порядка включительно по всем переменным.

§ 5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

(см. [1], § 8.7)

352. Написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхностям в указанных точках:

а) к параболоиду вращения $u = x^2 + y^2$ в точке (1, 2, 5);

б) к поверхности $u = \frac{x^2}{2} - y^2$ в точке (2, –1, 1).

§ 6. Формула Тейлора

(см. [1], § 8.10)

353. Найти приращение, получаемое функцией:

а) $u = x^2 - y^2 + xy$ при переходе от значений $x = 1$, $y = 2$ к значениям $x_1 = 1 + h$, $y_1 = 2 + k$;

б) $u = x^2y$ при переходе от $x = 1$, $y = 1$ к значениям $x_1 = 1 + h$, $y_1 = 1 + k$.

354. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки (0, 0) до членов третьего порядка включительно функцию

$$f(x, y) = e^x \sin\ y.$$

355. Разложить функцию $f(x, y) = \exp(x + y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки (1, –1) до членов третьего порядка включительно.

356. Найти значение параметра θ в формуле Лагранжа для функций двух переменных (см. [1], § 8.10):

$$f(x)-f(x^0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{x^0+\theta(x-x_0)}(x_1-x_1^0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{x^0+\theta(x-x_0)}(x_2-x_2^0)\quad (0<\theta<1);$$

а) $f(x)=x_1^2+x_2^2$ относительно точек $x^0=(0,\,0)$, $x=(1,\,1)$;

б) $f(x)=x_1^2+x_2^3$ относительно тех же точек.

§ 7. Экстремумы

(см. [1], § 8.13)

Исследовать на экстремум функции:

357. $z=(x-2)^2+2y^2$.

358. $z=(x-2)^2-2y^2$.

359. $z=x^4+4xy-2y^2$.

360. $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

361. $u=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$.

362. Выяснить, имеют ли функции наибольшее значение; если имеют, то найти его:

$$a)\ z=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 2(2-y), & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0<y\leqslant 2;\end{cases}$$

$$б)\ z=\frac{x^2+y}{x^2+y^2+1}\quad (|x|\leqslant 1,\quad |y|\leqslant 1).$$

§ 8. Неявные функции. Условный экстремум

(см. [1], § 8.15—8.17)

363. Найти производные y'_x, y''_{x^2} от неявной функции $y(x)$, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

364. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если

$x\cos y+y\cos z+z\cos x=1$.

365. $F(x, y, z) = 0$. Доказать, что

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y} = -1.$$

366. Функции u, v переменных x, y заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} x - \varphi(u, v) = 0, \\ y - \psi(u, v) = 0. \end{cases}$$

Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

367. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = cv$.

368. Написать уравнение касательной плоскости к поверхностям:

а) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ в точке $(\sqrt{3}, 0, 6)$;

б) к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в его точке (x_0, y_0, z_0).

369. К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $x + 4y + 6z = 0$.

370. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $3xyz - z^3 = a^3$ в ее точке $(0, a, -a)$.

371. Найти прямоугольник наибольшей площади, имеющий заданный периметр l.

372. Найти оси эллипса

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9.$$

373. Из всех треугольников данного периметра $2l$ найти тот, который имеет наибольшую площадь.

Глава 5

Ряды

(см. [1] глава 9)

§ 1. Числовые ряды (см. [1],§ 9.1—9.7)

374. Пользуясь определением, выяснить сходимость рядов и найти их суммы:

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots;$

б) $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\ldots;$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

375. Доказать расходимость гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

пользуясь интегральным признаком и критерием Коши.

376. Используя интегральный признак сходимости ряда, выяснить, при каких $\alpha > 0$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$.

Доказать, что

$$S_N^1 = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} = O(\ln\ (N+1)),\quad N \geqslant 2; \tag{1}$$

$$S_N^\alpha = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} = O\left[(N+1)^{1-\alpha}\right], \qquad 0 < \alpha < 1, \qquad N \geqslant 1; \tag{2}$$

$$R_N^\alpha = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = O\left(N^{1-\alpha}\right),\ \alpha > 1, \quad N \geqslant 1. \tag{3}$$

Решение. Так как функция $f(x) = x^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$) монотонно убывает к нулю на $(0, \infty)$ при $x \to \infty$, то ряд $\sum k^{-\alpha}$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty x^{-\alpha}\,dx$ одновременно сходятся или расходятся.

Как известно, этот несобственный интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$, следовательно, и ряд $\sum k^{-\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$.

Оценим теперь порядок роста S_N^α ($0 < \alpha \leqslant 1$). Пусть $\alpha = 1$. Тогда

$$\ln\,(N+1) = \int\limits_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = S_N^1$$

$$(N \geqslant 1);$$

$$\ln\,(N+1) = \int\limits_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_k^{k+1} \frac{dx}{x} \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} = S_N^1 - 1 + \frac{1}{N+1}.$$

Отсюда

$$\ln\,(N+1) \leqslant S_N^1 \leqslant 1 + \ln\,(N+1) \leqslant 2\ln\,(N+1), \quad N \geqslant 2.$$

Неравенство $|S_N^1| \leqslant 2\ln\,(N+1)$ и доказывает свойство (1).

Используя равенство ($0 < \alpha < 1$)

$$\frac{(N+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = \int\limits_1^{N+1} \frac{dx}{x^\alpha} = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_k^{k+1} \frac{dx}{x^\alpha},$$

аналогичным образом получим (2). Отметим, что постоянные, входящие в символ $O\,(N^{1-\alpha})$, зависят от α.

Оценим теперь остаточный член R_N^α ($\alpha > 1$):

$$\frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} = \int\limits_N^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \sum_{k=N}^{\infty} \int\limits_k^{k+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = R_N^\alpha;$$

$$\frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} \geqslant \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{\alpha}} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = R_N^{\alpha} - \frac{1}{N^{\alpha}},$$

$$R_N^{\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} + \frac{1}{N^{\alpha}} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1} N^{1-\alpha} \qquad (N \geqslant 1),$$

т. е. имеет место (3).

Отметим, что на самом деле мы доказали больше:

$$\frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} \leqslant R_N^{\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{N^{\alpha-1}}.$$

Исследовать сходимость рядов, применяя признаки сравнения и необходимый признак:

377. $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{n+1}{2n+1}+\ldots.$ **378.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}.$

379. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4+1}};$ б) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}.$

380. а) $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right);$ б) $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right);$

в) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\exp\left(-\frac{1}{k^2}\right)\right).$

С помощью признаков Даламбера или Коши исследовать сходимость рядов:

381. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{(\sqrt{2})^k}.$ **382.** $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\frac{n^2}{3^n}+\ldots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}.$

383. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{2(k+1)}\right)^k.$ **384.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}.$

Исследовать сходимость рядов с помощью интегрального признака:

385. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot \ln\ln n}.$ **386.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\varepsilon} k}$ $(\varepsilon > 0).$

387. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$.

388. Исследовать сходимость рядов с общим членом:

а) $u_n = \int\limits_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+1}$; б) $u_n = \int\limits_0^{1/n} \frac{\sin^3 x\,dx}{1+x^4}$.

Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

389. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \ldots$. **390.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

391. Показать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится абсолютно, если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k^2$ сходятся.

§ 2. Функциональные ряды

(см. [1], § 9.8, 9.9)

392. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x}$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-2}$.

393. Исследовать последовательности на равномерную сходимость:

а) $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$, $0 < x < \infty$;

б) $f_n(x) = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1/2$;

в) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;

г) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

394. Убедиться, что данные ряды равномерно сходятся на всей оси x:

а) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\sin kx}{k!}$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{2^k}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\left[1+(nx)^2\right]}$.

395. Применяя почленное дифференцирование и интегрирование, найти сумму рядов:

а) $x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$;

б) $1+2x+\ldots+(n+1)x^n+\ldots$;

в) $1-3x^2+5x^4-\ldots+(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}+\ldots$.

§ 3. Степенные ряды
(см. [1], § 9.11, 9.12)

396. Определить радиус и интервал сходимости рядов и исследовать сходимость в граничных точках интервала сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nx)^n$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n-1)3^{n-1}x^{n-1}$.

397. Написать два первых, отличных от нуля члена разложения в ряд по степеням x функций:

а) $\operatorname{tg} x$, б) $\operatorname{th} x$; в) $\exp(\cos x)$.

398. Выразить в виде рядов интегралы:

а) $\int\limits_0^x \exp(-t^2)\,dt$; б) $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} t\,dt}{t}$.

399. Вычислить с точностью до 0,001 интеграл

$$\int\limits_{0,1}^{0,2} e^{-x}\frac{dx}{x^3}.$$

400. Разложить функцию e^x по степеням $(x \pm 2)$.

Глава 6

Дифференциальные уравнения

(см. [3], глава 1)

§ 1. Общие понятия (см.[3],§ 1.1, 1.2)

401. Составить дифференциальные уравнения семейства кривых:

а) $y^2 = 2Cx$; б) $y = C_1x + C_2$; в) $y = Ce^x$;
г) $x^2 + y^2 = C^2$; д) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$.

402. Построить изоклины дифференциальных уравнений и нарисовать эскизы интегральных кривых:

а) $y' = x$; б) $y' = 1 + y^2$; в) $y' = -x$.

§ 2. Уравнения первого порядка (см. [3],§ 1.3)

Решить уравнения с разделяющимися переменными:

403. $xy\,dx + (x + 1)\,dy = 0$.

404. $\sqrt{y^2+1}\,dx - xy\,dy = 0$. **405.** $e^{-s}(1 + \frac{ds}{dt}) = 1$.

406. $y' - xy^2 = 2xy$. **407.** $y' = 3y^{2/3}$, $y(2) = 0$.

408. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$, $y(0) = 1$.

409. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, равную 2/3 абсциссы точки касания (рис. 20).

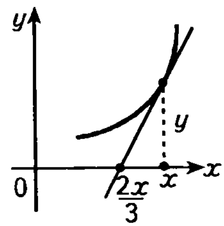


Рис. 20

410. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода (5 л в минуту), которая перемешивается с имеющейся жидкостью. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли в баке останется через один час?

411. Тело охлаждается за 10 минут от 100° до 60°. Температура окружающей среды поддерживается 20°. Когда тело остынет до 25°?

Решить уравнения, приводящиеся к виду

$$y' = x^{\alpha-1} f\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right) \qquad (1)$$

(при $\alpha = 1$ — однородное уравнение):

412. $(x + 2y)\,dx - x\,dy = 0$. Указание. Замена $y = tx$.

413. $(y^2 - 2xy)\,dx + x^2 dy = 0$. **414.** $y^2 + x^2 y' = xyy'$.

415. $x^4 dy = y^2 dx$. **416.** $x^4 dy = (y^2 + \frac{9}{4}x^6)\,dx$.

417. $x\,dy = (x^2 \cos^2 \frac{y}{x^2} + 2y)\,dx$.

418. Найти кривую, касательная к которой отстоит от начала координат на величину, равную модулю абсциссы точки касания.

Уравнение вида

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

называется *уравнением Риккати*, оно в общем случае не решается в квадратурах. Некоторые из них являются уравнениями типа (1).

Решить уравнения Риккати:

419. $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4$.

420. а) $3y' = -y^2 - \frac{2}{x^2}$; б) $y' = \sum_{i=1}^{N} a_i y^{\beta_i} x^{\alpha-1-\alpha\beta_i}$.

Решить линейные уравнения:

421. $y' + 2y = 4x$. **422.** $xy' - 2y = 2x^4$.

423. $x(y' - y) = e^x$. **424.** $xy' + y = e^x$, $y(1) = 1$.

425. $y = x(y' - x\cos x)$. **426.** $(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y)y' = 1$.

Решить уравнения Бернулли:

427. $y' = y^4\cos x + y\operatorname{tg}x$. **428.** $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{y}$.

429. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$. **430.** $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = -xy^2$.

§ 3. Метрические пространства. Сжимающие операторы. Теорема существования решения (см. [3], § 1.4—1.7)

431. Будет ли n-мерное пространство R_n метрическим пространством, если расстояние между точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ определить равенствами:

а) $\rho(x, y) = \max\limits_{i=1,\ldots,n}\{|x_i - y_i|\}$; б) $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y? \end{cases}$

432. Выяснить, будет ли множество всех непрерывных функций, заданных на $[a, b]$, метрическим пространством, если

$$\rho(f, g) = \left(\int_a^b [f(x) - g(x)]^2\,dx\right)^{1/2}.$$

433. Пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha, & 0 \leqslant x < 1/n,\ \alpha > 0, \\ 0, & 1/n \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

При каких α последовательность $f_n(x)$ сходится к нулю в смысле метрики задачи *432*?

434. Будет ли полным метрическое пространство $M = [2, 3)$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$?

435. Будет ли оператор (функция) $F(x) = x^2$ сжимающим:

а) на полном метрическом пространстве $M = [-1/3,\ 1/3]$;

б) на полном метрическом пространстве $M = [-1,\ 1]$?

В случаях а) и б) метрика $\rho(x,\ y) = |x - y|$.

436. Построить итерационную последовательность для оператора $F(x) = x^2$, если $x_0 = 1/2$.

437. а) Найти неподвижные точки оператора $F(x) = 1/(1 + x)$ на $[1/2,\ 1]$. Будет ли оператор $F(x)$ сжимающим на $[1/2,\ 1]$?

б) Пусть оператор $F(x)$ $(x = (x_1,\ x_2))$ действует в двумерном метрическом пространстве R_2 по закону

$$F(x) = (x_1,\ -x_2)$$

(зеркальное отображение относительно оси $x_2 = 0$. Какие точки являются неподвижными для этого оператора?

в) Пусть $F(x) = (x_1,\ x_2^2)$, $x \in R_2$ Какие точки плоскости R_2 являются неподвижными точками оператора F?

438. На основании теоремы существования решения дифференциального уравнения исследовать, в каком промежутке $[x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$ гарантируется существование решения уравнения

$$y' = f(x,\ y),$$

если:

а) $x_0 = 1$, $y_0 = y(1) = 2$, $f(x,\ y) = 2xy^2$ на множестве

$$D = \begin{Bmatrix} |x-1| \leqslant 1 = a \\ |y-2| \leqslant 1 = b \end{Bmatrix};$$

б) $x_0 = 1$, $y_0 = y(0) = 1$, $f(x,\ y) = 2xy^2$ на множестве

$$D = \begin{Bmatrix} |x| \leqslant \sqrt{2}/4 = a \\ |y-1| \leqslant 1 = b \end{Bmatrix}.$$

439. Для уравнения

$$y' = \frac{1}{2}xy,\ y(0) = 1,$$

найти приближенно $y(1)$, используя метод Эйлера. За шаг вычисления принять $h = 0{,}1$.

440. Методом Эйлера для уравнения $y' = x + y$ найти приближенно $y(2)$, если $y(1) = 1$. За шаг вычисления принять $h = 0{,}1$.

§ 4. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Особые решения (см. [3], § 1.8—1.10)

441. Найти все решения уравнений; выделить особые решения, если они есть; дать чертеж:

а) $y'^2 - y^2 = 0$; б) $y'^2 - 4y^3 = 0$;

в) $y^2(y'^2 + 1) = 1$; г) $y'^2 = 4y^3(1 - y)$;

д) $xy'^2 - 2yy' + x = 0$; е) $y(xy' - y)^2 = y - 2xy'$.

442. Решить уравнения методом введения параметра:

а) $x = y'^3 + y'$; б) $y = y'^2 + 2y'^3$; в) $x = y'\sqrt{1+y'^2}$.

443. Уравнение вида

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

где φ, ψ — некоторые функции, называется *уравнением Лагранжа*. В частности, если $\varphi(y') \equiv y'$, то уравнение называется *уравнением Клеро*. Эти уравнения также решаются введением параметра:

$$y' = p,\ dy = p\,dx;\ y = x\varphi(p) + \psi(p);$$

$$dy = \varphi(p)\,dx + x\varphi'(p)\,dp + \psi'(p)\,dp,$$

или, учитывая, что $dy = pdx$, получим

$$[p - \varphi(p)]\,dx = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\,dp.$$

Последнее уравнение является линейным относительно x. Решать его мы умеем (если $p \not\equiv \varphi(p)$):

$$x = Cf(p) + g(p),$$

где f, g — известные функции. Система

$$\begin{cases} x = Cf(p) + g(p), \\ y = x\varphi(p) + \psi(p) \end{cases}$$

дает параметрическое задание решения.

Если же $p \equiv \varphi(p)$ (в этом случае мы имеем уравнение Клеро), то

$$[x\varphi'(p) + \psi'(p)]\,dp = 0,$$

откуда:

1) $dp = 0$, $p = C$ и $y = x\varphi(C) + \psi(C) = xC + \psi(C)$ — общее решение уравнения Лагранжа (Клеро). Это семейство прямых. Формально общее решение получается заменой в уравнении y' на произвольную постоянную C;

2) $x\varphi'(p) + \psi(p) = 0$. Тогда из системы

$$\begin{cases} y = x\varphi(p) + \psi(p), \\ 0 = x\varphi'(p) + \psi'(p) \end{cases}$$

исключением параметра p получим $y = \chi(x)$. Если эта функция является решением уравнения Лагранжа и нарушена единственность решения, то она является особым решением уравнения Лагранжа (Клеро).

444. Решить уравнение Клеро

$$y = xy' - \frac{1}{4}y'^2.$$

445. Решить уравнение

$$y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}.$$

§ 5. Понижение порядка дифференциального уравнения

(см. [3], § 1.14)

446. Решить уравнения:

а) $y'' = \cos x$; б) $y''' = x$.

Решить уравнения:

447. $x^2 y'' = y'^2$.

448. $y''' = 2(y'' - 1)\operatorname{ctg} x$.

449. $y''' = y''^2$.

450. $y'' = 2yy'$.

451. $xy'' = 2yy' - y'$.

452. $yy'' + y'^2 = 1$.

453. $2yy'' = y'^2 + y^2$.

454. $yy'' = y'^3$.

455. $yy'' = y'^2 + y^2 y'$.

456. $xyy'' - xy'^2 - yy' = 0$.

457. $x^2 yy'' = (y - xy')^2$.

§ 6. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

(см. [3], § 1.16)

Решить уравнения:

458. $y'' - 2y' - 3y = 0$. **459.** $y''' - 5y'' + 6y' = 0$.

460. $y^{(4)} - y = 0$. **461.** $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$.

462. а) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$; б) $y'' + 3y' - 4y = 0$.

463. Доказать, что определитель Вронского

$$W(t) \equiv W[y_1, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \ldots & y_1'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

системы решений $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ уравнения

$$y^{(n)}(t) + p_1(t)\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + p_n(t)\, y(t) = 0,$$

с непрерывными на (a, b) коэффициентами $p_1(t), \ldots, p_n(t)$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{dW(t)}{dt} = -p_1(t)W(t).$$

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому, интегрируя это уравнение в пределах от x_0 до x, получаем

$$\ln |W(t)|\Big|_{t=x_0}^{x} = -\int_{x_0}^{x} p_1(t)\, dt,$$

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^{x} p_1(t)\, dt\right).$$

Последняя формула носит название *формулы Остроградского—Лиувилля*; из нее, между прочим, следует, что если $W(x_0) \neq 0$, то определитель Вронского не равен нулю во всех точках (a, b). В этом случае, как мы знаем, решения $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ линейно независимы на (a, b).

Указание. См. задачу *86*, б). Использовать тот факт, что

$$y_k^{(n)}(t) = -p_1(t)\, y_k^{(n-1)}(t) - \ldots - p_n(t)\, y_k(t) \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

464. Решить неоднородные уравнения

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = f(x),$$

где:

а) $f(x) = 2e^{3x}$; б) $f(x) = 4e^{x}$; в) $f(x) = 3e^{2x}$.

465. Найти частное решение уравнений

$$y^{(4)} + 2y'' + y = f(x),$$

где:

а) $f(x) = e^{x}$; б) $f(x) = \sin x$;

в) $f(x) = \sin x + \cos x$; г) $f(x) = \sin 2x$.

466. Решить уравнение $y'' + 2y' - 3y = \sin x$.

467. Написать форму частного решения неоднородных уравнений:

$$y''' - 5y'' + 6y' = f(x),$$

где

а) $f(x) = e^{x}$; б) $f(x) = xe^{2x}$;

в) $f(x) = \sin x$; г) $f(x) = x^4 e^{3x}$;

д) $f(x) = x^2 + x + 1$; е) $f(x) = xe^{x} \sin x$.

§ 7. Уравнение Эйлера. Уравнения с переменными коэффициентами

(см. [3], § 1.15, 1.16)

468. Выяснить, какие системы функций являются линейно независимыми на $[0, 1]$:

а) $1, \sin^2 x, \cos 2x$; б) $4 - x,\ 2x + 3,\ 6x + 8$;

в) $x + 2, (x + 2)^2$; г) x^2, x^3, x^4.

469. Решить уравнения Эйлера:

а) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$; б) $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$;

в) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$; г) $x^2y''' - 2y' = 0$.

470. Решить уравнение (частный случай уравнения Бесселя при $\nu = 1/4$, см. [3], § 1.24)

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0;$$

Р е ш е н и е . Введем замену $y = \alpha(x)z$ и подберем функцию $\alpha(x)$ так, чтобы исчез член с первой производной z'. Имеем

$$y' = \alpha' z + \alpha z',\ y'' = \alpha'' z + 2\alpha' z' + \alpha z'';$$

$$x^2\alpha z'' + z'[2\alpha' x^2 + \alpha x] + z[\alpha'' x^2 + \alpha' x + \alpha x^2 - \frac{\alpha}{4}] = 0;$$

$$2\alpha' + \frac{\alpha}{x} = 0,\quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{x}},\ \alpha' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}},$$

$$\alpha'' = \frac{3}{4x^2\sqrt{x}},$$

$$x^2\alpha'' + x\alpha' + x^2\alpha - \frac{\alpha}{4} = \frac{x^2}{\sqrt{x}}.$$

Окончательно получаем

$$\frac{x^2}{\sqrt{x}}z'' + \frac{x^2}{\sqrt{x}}z = 0,\quad z'' + z = 0.$$

Последнее уравнение с постоянными коэффициентами, его общее решение

$$z = C_1 \cos\ x + C_2 \sin\ x.$$

Общее решение исходного уравнения

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}(C_1 \cos\ x + C_2 \sin\ x).$$

471. Решить уравнение

$$y'' - 2xy' + x^2 y = 0.$$

У к а з а н и е . См. задачу *470*: $\alpha(x) = \exp(x^2/2)$.

472. Решить уравнение

$$x^2 y'' + xy' - y = f(x),$$

где:

а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = x^{10}$.

§ 8. Метод вариации постоянных (см. [3], § 1.17)

473. Решить уравнения;

а) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x},\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0;$

б) $y'' + 4y = 2\ \mathrm{tg}\ x;$ в) $y''' + y' = \dfrac{1}{\cos x};$

г) $y'' + 2y' + y = \dfrac{1}{x}e^{-x}.$

§ 9. Системы дифференциальных уравнений (см. [3], § 1.19—1.22)

474. Решить систему путем сведения ее к одному дифференциальному уравнению:

а) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2y + 4z = 4x, \\ \dfrac{dz}{dx} + y - z = x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z, \\ \dfrac{dz}{dx} = -y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - y - z = 0, \\ -x + \dfrac{dy}{dt} - z = 0, \\ -x - y + \dfrac{dz}{dt} = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - z = 1, \\ \dfrac{dz}{dx} + y = x. \end{cases}$

475. Решить однородные системы, не переходя к одному дифференциальному уравнению:

а) $\begin{cases} y_1 = 2y_1 + y_2, \\ y_2 = 3y_1 + 4y_2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + 5z, \\ \dfrac{dz}{dx} = -y - 3z; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = z(t), \\ \dot{z}(t) = x(t). \end{cases}$

476. Решить неоднородные системы:

а) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1, \\ \dot{y} = y - 4x + t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + e^t, \\ \dot{y} = x - 4y + e^{3t}. \end{cases}$

§ 10. Решение уравнений с помощью степенных рядов (см. [3], § 1.24)

477. $y'' + y' - xy^2 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

478. $y'' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Р е ш е н и е . Будем искать решение $y(x)$ в виде степенного ряда

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

Находя y', y'', xy и подставляя их в уравнение, мы получим ряд соотношений, связывающих коэффициенты a_i ($a_0 = 1$, $a_1 = 0$), из которых и находим значения этих коэффициентов.

Однако можно рассуждать и следующим образом. Степенной ряд является в то же время рядом Тейлора функции $y(x)$, поэтому мы можем записать:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Значения $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ известны по условию. Значение других производных от решения $y(x)$ в точке $x = 0$ мы можем найти, используя дифференциальное уравнение. Из уравнения *478* имеем $y''(0) = -0 \times y(0) = 0$. Дифференцируя уравнение, получаем

$$y''' + y + xy' = 0,$$

откуда

$$y'''(0) = -y(0) = -1.$$

Аналогично

$$\begin{array}{ll} y^{(4)} + 2y' + xy'' = 0, & y^{(4)}(0) = -2y'(0) = 0, \\ y^{(5)} + 3y'' + xy''' = 0, & y^{(5)}(0) = -3y''(0) = 0, \\ y^{(6)} + 4y'' + xy^4 = 0, & y^{(6)}(0) = -4y'''(0) = 4, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ y^{(n)} + (n-2)y^{(n-3)} + & y^{(n)}(0) = -(n-2)y^{(n-3)}(0), \\ \quad + xy^{(n-2)} = 0, & \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

Подставляя значение $y^n(0)$, получаем

$$y(x) = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1\cdot 4}{6!}x^6 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}x^9 + \dots$$

Полученный ряд сходится на всей оси равномерно и абсолютно.

479. $y'' + ye^x = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

480. $y' = y + xe^y$, $y(0) = 0$. Найти первые три члена ряда.

§ 11. Устойчивость по Ляпунову (см. [3], § 1.25, 1.26)

481. Исследовать на устойчивость с помощью функции Ляпунова нулевое решение системы:

а) $\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - y, \\ \dot{y} = x - y^3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5, \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y, \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases}$

З а м е ч а н и е. Если существует функция $v(x, y)$ такая, что в достаточно малой окрестности начала координат существует область, где $v > 0$, причем $v = 0$ на части границы области ($v > 0$) и $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} > 0$ в области $v > 0$, то точка покоя неустойчива (теорема Четаева).

482. Исследовать на устойчивость нулевое решение у систем с симметрической матрицей:

а) $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = x - y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = -2x + 4y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = 3x + 8y. \end{cases}$

483. Исследовать на устойчивость системы;

а) $\begin{cases} \dot{x} = 3x, \\ \dot{y} = 2x + y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -6x - 5y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y, \\ \dot{y} = 2x + 2y; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = y. \end{cases}$

Глава 7

Кратные интегралы

(см. [3], глава 2)

§ 1. Интегралы, зависящие от параметра (см. [3], § 2.4)

484. Найти область определения функции

$$F(x) = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin xy}{y}\, dy$$

(т. е. значений x, где интеграл существует).

Исследовать ее на непрерывность и дифференцируемость.

485. Исходя из равенства

$$\int_{0}^{b} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{b}{a},$$

вычислить интеграл

$$\int_{0}^{b} \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^2}.$$

486. Вычислить производную $F'(x)$, если

а) $F(x) = \int_{x}^{x^2} e^{-xy^2} dy$; б) $F(x) = \int_{0}^{x} \frac{\ln(1 + xy)}{y} dy$ $(x > 0)$;

в) $F(x)=\int\limits_0^x f(y+x,\ y-x)\,dy$,

где $f(u,\ v)$ непрерывна вместе со своей частной производной f'_u.

487. Найти интеграл от функции $F(x)$ на $[0,\ 1]$, если

а) $F(x)=\int\limits_{x^2}^{1}(y-2x)\,dy$; б) $F(x)=\int\limits_{x}^{1}(x+y)\,dy$.

§ 2. Кратные интегралы
(см. [3], § 2.1—2.5)

Вычислить двойные интегралы:

488. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}$, где $D=\{3\leqslant x\leqslant 4,\ 1\leqslant y\leqslant 2\}$.

489. $\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy$, где $D=\left\{\begin{matrix} y^2-4\leqslant x\leqslant 5 \\ -3\leqslant y\leqslant 3\end{matrix}\right\}$.

490. $\iint\limits_D r^2\sin^2\varphi\,dr d\varphi$, где $D=\left\{\begin{matrix} 0\leqslant r\leqslant 3\cos\varphi \\ -\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2\end{matrix}\right\}$.

Вычертить области интегрирования и изменить порядок интегрирования в следующих двойных интегралах:

491. $I=\int\limits_{-6}^{2}dy\int\limits_{(y^2-4)/4}^{2-y} f(x,\ y)\,dx$. **492.** $I=\int\limits_0^3 dx\int\limits_{x/3}^{2x} f(x,y)\,dy$.

493. $I=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{1/x}^{x} f(x,\ y)\,dy$. **494.** $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^4}^{x^2} f(x,y)\,dy$.

495. $I=\int\limits_0^{c\sqrt{2}} dy\int\limits_{y^2/2c^2}^{\sqrt{3-\frac{y^2}{c^2}}} f(x,\ y)\,dx$.

Переменить порядок интегрирования и найти двойной интеграл:

496. $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (x + y^2)\, dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} (x + y^2)\, dy.$

497. $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^x xy^2\, dy.$

Вычислить тройные интегралы:

498. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^b dy \int\limits_0^c (x + y + z)\, dz.$ **499.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^y xyz\, dz.$

500. $\int\limits_0^4 dz \iint\limits_D xyz\, dx\, dy,$ $D = \{x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x > 0,\ y > 0\}.$

501. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

где

а) V — общая часть параболоида $2az \geqslant x^2 + y^2$ и шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3a^2$ $(a > 0)$;

б) V — общая часть шаров $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz$.

§ 3. Замена переменных в кратном интеграле (см.[3],§ 2.6—2.10)

502. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

где $S = \{x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ y > 0\}$.

503. Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx\, dy\, dz,$$

где V — эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

504. Вычислить двойной интеграл

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy.$$

505. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_S \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy,$$

где S — эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$.

506. Переходя к сферическим координатам, вычислить

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz,$$

где V — шар радиусом R с центром в начале координат.

507. Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить интеграл

$$I=\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\, dz.$$

508. Вычислять двойной интеграл

$$\iint_S \left(x^2+y^2\right)\sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dx\, dy,$$

где S — круг радиусом R с центром в начале координат.

§ 4. Применение кратных интегралов (см. [3], § 2.11, 2.12)

509. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами

$$y^2=10x+25, \quad y^2=-6x+9,$$

и сделать рисунок.

510. Нарисовать тело, объем которого выражается двойным интегралом

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy,$$

и вычислить его объем V.

511. Найти объем V тела, ограниченного цилиндром $x^2+z^2=a^2$ и плоскостями $y=0$, $z=0$, $y=x$ и находящегося в первом октанте. Сделать рисунок.

512. Вычислить объем V части цилиндра $x^2+y^2=2ax$, содержащийся между параболоидом $x^2+y^2=2az$ и плоскостью $z=0$. Сделать рисунок.

513. Найти площадь части плоскости

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

находящейся в первом октанте ($x>0$, $y>0$, $z>0$).

514. Найти площадь части поверхности шара $x^2+y^2+z^2=$ $=a^2$, вырезанной эллиптическим цилиндром

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b<a).$$

515. Найти центр масс верхней половины эллипса

$$D=\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1, \quad y>0\right\},$$

заполненного массой с плотностью $\rho\equiv 1$.

516. Найти объем:

а) тела, образованного вращением половины эллипса D (см. задачу *515*) около оси x,

б) эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1.$$

517. В полушаре

$$\Omega=\{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,\ z\geqslant 0\}$$

плотность распределения масс пропорциональна расстоянию точки от центра шара: $\rho(x, y, z)=c\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Найти центр масс этого тела.

518. Найти центр масс однородной фигуры (рис. 21)

$$S=\{0\leqslant y\leqslant 4-x^2, -2\leqslant x\leqslant 2\}.$$

519. Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции S (см. задачу *518*) около оси x.

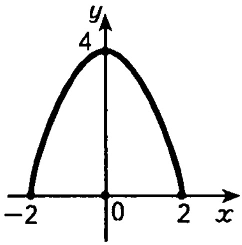


Рис. 21

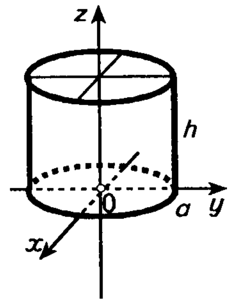


Рис. 22

520. Найти момент инерции однородного цилиндра, высота которого h и радиус основания a, относительно оси, служащей диаметром основания цилиндра.

Решение. Пусть ось z направлена по оси цилиндра, основание цилиндра находится на плоскости $z = 0$ и центр основания совпадает с началом координат. Момент инерции будем искать относительно оси y (т. е. относительно плоскостей $x = 0$, $z = 0$) (рис. 22):

$$I_{x,z}^{(2)} = \int\limits_G (x^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz,$$

где G — рассматриваемый цилиндр. Вычисляя интеграл, получаем

$$I_{x,z}^{(2)} = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2+x^2}} dy \int\limits_0^h (x^2+z^2)\, dz = 4h \int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\left(x^2+\frac{h^2}{3}\right) dx =$$

$$= (x = a\sin t) = 4a^2h \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\left(a^2\sin^2 t + \frac{h^2}{3}\right) dt =$$

$$= 4a^2h\left\{a^2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos^2 2t}{4}\, dt + \frac{h^2}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\, dt\right\} = \frac{a^2h\pi}{12}\left(3a^2+4h^2\right).$$

§ 5. Несобственные интегралы
(см. [3],§ 2.13)

521. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{dx\,dy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$; б) $\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}$;

в) $\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty xy \exp\left(-x^2-y^2\right) dx\,dy$.

Вычислить с помощью дифференцирования по параметру интегралы:

522. $\int\limits_0^\infty \frac{1-e^{-xy}}{xe^x}dx = F(y) \quad (y>-1)$.

523. $\int\limits_0^\infty \frac{1-e^{-yx^2}}{x^2}dx = F(y) \quad (y>0)$.

524. Используя равенство

$$\int\limits_0^1 x^y dx = \frac{1}{y+1} \qquad (y>-1),$$

вычислить

$$\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{\ln x}\,dx \qquad (\beta>-1,\ \alpha>-1).$$

525. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\iint\limits_S \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$$

где S — круг $x^2+y^2 \leqslant 1$.

526. Исследовать на равномерную сходимость интегралы:

а) $F(y)=\int\limits_0^\infty \frac{\cos xy}{1+x^2}\,dx \qquad (-\infty<y<\infty)$;

б) $F(y)=\int\limits_0^\infty \sqrt{y}\exp\left(-yx^2\right) dx \qquad (0\leqslant y<\infty)$.

Глава 8

Векторный анализ

(см. [3], глава 3)

§ 1. Криволинейные интегралы первого рода (см. [3], § 3.2)

Вычислить криволинейные интегралы:

527. $\int\limits_{\Gamma} \frac{ds}{x-y}$, где Г — отрезок прямой, соединяющей точки $A = (0, -2)$ и $B = (4, 0)$.

528. $\int\limits_{\Gamma} xy\, ds$, где Г — контур треугольника с вершинами $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$.

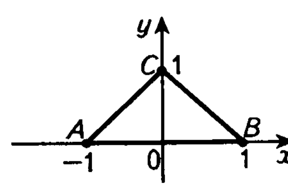


Рис. 23

Решение. Уравнение прямой AB: $y = 0$; прямой BC: $x + y = 1$; прямой AC: $y - x = 1$ (рис. 23).

$$\int\limits_{AB} xy\, ds = 0;$$

$$\int\limits_{BC} xy\, ds = \int\limits_{CB} xy\, ds =$$

$$= \int_0^1 x(1-x)\sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}/6;$$

$$\int_{CA} xy\,ds = \int_{AC} xy\,ds = \int_{-1}^{0} x(1+x)\sqrt{2}\,dx = -\sqrt{2}/6;$$

$$\int_{\Gamma} xy\,ds = \int_{AB} \ldots + \int_{BC} \ldots + \int_{CA} \ldots = 0 + \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{6} = 0.$$

529. $\int_{\Gamma} xy\,ds$, где Г — контур прямоугольника с вершинами $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (4, 2)$, $D = (0, 2)$.

530. $\int_{\Gamma} xy\,ds$, где Г — часть эллипса, находящаяся в первом квадранте: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

531. $\int_{\Gamma} y\,ds$, где Г — часть параболы $y = 2\sqrt{x}$, находящаяся в верхней полуплоскости $0 \leqslant x \leqslant 1$.

532. $\int_{\Gamma} (x-y)\,ds$, где Г — окружность $x^2 + y^2 = 2ax$.

533. Найти массу m части эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, расположенной в первой четверти, если плотность в каждой его точке равна ординате этой точки.

534. Найти площадь S боковой поверхности параболического цилиндра $y = \frac{3}{8}x^2$, ограниченной плоскостями $z = 0$, $x = 0$, $z = x$, $y = 6$.

Р е ш е н и е . С геометрической точки зрения криволинейный интеграл

$$\int_{\Gamma} f(x, y)\, ds,$$

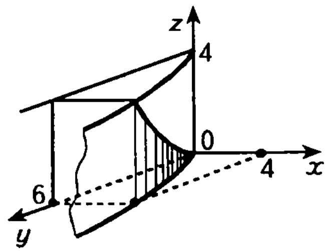


Рис. 24

где $f(x,y) \geqslant 0$, можно интерпретировать как площадь цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси z, основанием — контуром интегрирования Г и высотами, равными значению функции $f(x,y)$. Поэтому искомая площадь (рис.24)

$$S = \int_{\Gamma} x ds,$$

где Г — часть параболы $y = \dfrac{3}{8} x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$. Вычисляя, получаем

$$S = \int_0^4 x\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}x\right)^2}\, dx = \frac{1}{72}\int_0^4 \sqrt{16+9x^2}\, d\left(16+9x^2\right) =$$

$$= \frac{1}{108}\left(16+9x^2\right)^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{16}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

535. Найти площадь боковой поверхности кругового цилиндра, находящейся под первым витком винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ и выше плоскости $z = 0$.

536. Найти координаты центра масс однородной полуарки циклоиды

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

537. Найти момент инерции относительно оси z (относительно плоскостей $x = 0$, $y = 0$) первого витка Г винтовой линии

$$x = a \cos t,\ y = a \sin t,\ z = bt \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

§ 2. Интеграл от вектора вдоль кривой (см. [3], § 3.3)

538. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{\Gamma} (y^2\,dx + x^2\,dy),$$

где Г — верхняя половина эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, пробегаемая по часовой стрелке (рис. 25).

Решение. При движении точки по кривой Г в указанном направлении параметр t изменяется от π до 0.

Поэтому

$$\int_{\Gamma} (y^2\,dx + x^2\,dy) =$$

$$= \int_{\pi}^{0} [b^2 \sin^2 t\,(-a\sin t) + a^2\cos^2 t \cdot b\cos t]\,dt =$$

$$= ab\int_{0}^{\pi} [b\sin^3 t - a\cos^3 t]\,dt =$$

$$= ab\left[-\int_{0}^{\pi} b\,(1-\cos^2 t)\,d\cos t - \int_{0}^{\pi} a(1-\sin^2 t)\,d\sin t\right] =$$

$$= \frac{4}{3}ab^2.$$

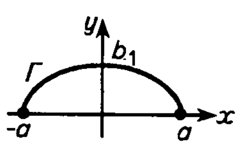


Рис. 25

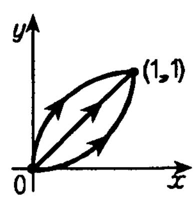


Рис. 26

539. Вычислить

$$\int_{\Gamma} x\,dy,$$

где Г — контур треугольника, образованного осями координат и прямой $x + y = 2$, проходимый в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки).

540. Вычислить

$$\int_{\Gamma} (y^2\,dx + x^2 dy),$$

где: а) Г — дуга параболы $y = 4 - x^2$, находящаяся в верхней полуплоскости и проходимая по часовой стрелке; б) Г — ломаная линия, соединяющая точки $(-2, 0)$, $(0, 4)$, $(2, 0)$; в) Г — отрезок $[-2, 2]$ оси x.

541. Вычислить

$$\int_{\Gamma} (x\,dy + y\,dx),$$

где а) Г — дуга параболы $y = \sqrt{x}$; б) Г — отрезок прямой; в) Г — дуга параболы $y = x^2$, соединяющие точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$ в направлении, указанном стрелками (рис. 26).

§ 3. Потенциал. Ротор вектора

(см. [3], § 3.4)

542. Найти градиент функции
$$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - 6z.$$

543. В каких точках пространства градиент поля
$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$
а) перпендикулярен оси z?
б) равен нулю?

544. Найти ротор вектора $\boldsymbol{a} = \{x, y, z)$, т. е. радиус-вектора, точки (x, y, z).

545. Найти ротор вектора $\boldsymbol{a} = \{z + y, x, y\}$.

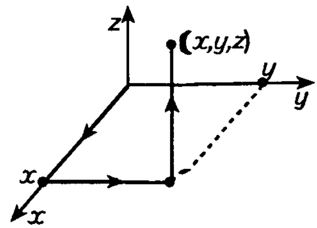
546. Выяснить, имеют ли векторы а) $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$; б) $\boldsymbol{a} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$; в) $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ потенциал во всем пространстве R_3.

547. Найти потенциальную функцию для вектора $\boldsymbol{a} = \{x^2, y^2, z^2\}$ в пространстве R_3.

Решение. Ротор вектора a равен нулю в R_3. Кроме того, пространство R_3 представляет собой односвязную область. Поэтому вектор a имеет потенциал, который находим по формуле

$$U(x, y, z) = \int_{\Gamma} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz),$$

где за кривую Г можно принять ломаную (рис. 27), соединяющую точки (0, 0, 0), (x, 0, 0), (x, y, 0), (x, y, z). Интеграл второго рода в данном случае не зависит от пути интегрирования. Вычисляя, находим



$$U(x, y, z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3).$$

Рис.27

§ 4. Дифференциальные уравнения первого порядка в полных дифференциалах (см. [3], § 3.5)

548. Какие из уравнений являются уравнениями в полных дифференциалах:

а) $(2x + 3y)\,dx + (3x - 4y)\,dy = 0$;

б) $\dfrac{dx}{y} - \dfrac{x\,dy}{y^2} = 0$; в) $(2 - y)\,dx + x\,dy = 0$?

Решить уравнения:

549. $(2x + 3x^2y)\,dx + (x^3 - 3y^2)\,dy = 0$.

550. $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$.

551. $e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0$.

552. $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}\,dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}\,dy = 0$.

553. $yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0.$

554. $(x + z)\,dy + (y + z)\,dx + (x + y)\,dz = 0.$

555. $2xy\,dx + (x^2 + z^2)\,dy + 2yz\,dz = 0.$

§ 5. Формула Грина
(см. [3], § 3.7)

Преобразовать криволинейные интегралы по замкнутым (положительно ориентированным) контурам Г в двойные по областям Ω, ограниченным этими контурами:

556. $\int\limits_{\Gamma} ((1 - x^2)y\,dx + x(1 + y^2)\,dy).$

557. $\int\limits_{\Gamma} ((e^{xy} + 2x\cos\ y)\,dx + (e^{xy} - x^2 \sin y)\,dy).$

558. Вычислить $\int\limits_{\Gamma} ((xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy),$

где Г — эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

559. Вычислить разность между интегралами

$$I_1 = \int\limits_{\Gamma_1} ((x + y)^2\,dx - (x - y)^2\,dy),$$

$$I_2 = \int\limits_{\Gamma_2} ((x + y)^2\,dx - (x - y)^2\,dy),$$

где Γ_1 — дуга параболы $y = x^2$, а Γ_2 — отрезок прямой, соединяющие точки (0, 0), (1, 1).

560. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (-x^2y\,dx + xy^2dy),$$

где Г — окружность

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

ориентированная положительно.

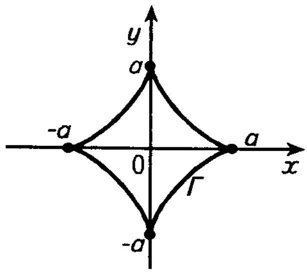


Рис. 28

561. Найти площадь фигуры Ω, ограниченной астроидой (рис. 28):

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t.$$

562. Показать, что работа силы $a = \{2xy,\ x^2\}$ при перемещении точки массой m зависит только от начального и конечного ее положения и не зависит от формы пути. Вычислить величину работы A при перемещении из точки $(1, 1)$ в точку $(2, 5)$.

§ 6. Интеграл по поверхности первого рода (см. [3], § 2.11, 3.8)

563. Если поверхность задана параметрически

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

или в векторной форме:

$$\boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\boldsymbol{i} + y(u, v)\boldsymbol{j} + z(u, v)\boldsymbol{k},$$

где $(u, v) \in \Omega$, функции x, y, z имеют непрерывные частные производные на замыкании Ω, то площадь S этой поверхности выражается двойным интегралом

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \iint_{\Omega} \sqrt{|\boldsymbol{r}_u|^2 |\boldsymbol{r}_v|^2 - (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)^2}\, du\, dv,$$

где

$$E = |\boldsymbol{r}_u|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = |\boldsymbol{r}_v|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

В самом деле, как мы знаем (см. [3], § 2.11),

$$S = \iint\limits_{\Omega} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du\, dv,$$

но

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

поэтому

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| = \sqrt{\left[\frac{D(y,\, z)}{D(u,\, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z,\, x)}{D(u,\, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x,\, y)}{D(u,\, v)}\right]^2}.$$

Раскрывая якобианы под знаком корня, возводя их в квадрат и проводя необходимые алгебраические преобразования, получим искомую формулу.

Данная формула для вычисления площади удобна в ряде случаев, особенно когда векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ ортогональны $((\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v) = 0)$.

В этом случае

$$S = \iint\limits_{\Omega} |\boldsymbol{r}_u| \cdot |\boldsymbol{r}_u|\, du\, dv.$$

Найти площадь поверхности

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin\ v, \quad z = 4v$$
$$(0 \leqslant u \leqslant 3,\ 0 \leqslant v \leqslant \pi).$$

В данном случае

$$\boldsymbol{r}_u = (\cos\ v,\ \sin\ v,\ 0),\ \boldsymbol{r}_v = (-u\sin\ v,\ u\cos\ v,\ 4);$$
$$(\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v) = 0, \quad |\boldsymbol{r}_u|^2 = 1,\ |\boldsymbol{r}_v| = 16 + u^2.$$

Поэтому

$$S = \iint\limits_{\Omega} 1\cdot\sqrt{16+u^2}\, du\, dv = \int_0^{\pi} dv \int_0^3 \sqrt{16+u^2}\, du = \pi\int_0^3 \sqrt{16+u^2}\, du =$$
$$= \pi\left[\frac{u}{2}\sqrt{16+u^2} + 8\ln\left(u+\sqrt{16+u^2}\right)\right]\Bigg|_0^3 = \frac{\pi}{2}\ (15 + 16\ln 2).$$

564. Вычислить $\int\limits_S (x^2 + y^2)\, ds$, где S — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

565. Найти массу части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, находящейся в первом октанте ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$), если плотность распределения масс на сфере равна $\sqrt{x^2 + y^2}$.

566. Вычислить $\int\limits_S z\, dS$, где S — часть поверхности геликоида:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v$$
$$(0 \leqslant u \leqslant a, \quad 0 \leqslant v \leqslant 2\pi).$$

§ 7. Поток вектора через ориентированную поверхность (поверхностный интеграл второго рода) (см. [3], § 3.12)

Поток вектора $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$ через ориентированную поверхность S^*

$$\int\limits_{S^*} (\boldsymbol{a}, dS^*) = \int\limits_S (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, dS =$$
$$= \int\limits_S (P \cos (\boldsymbol{n}, x) + Q \cos (\boldsymbol{n}, y) + R \cos (\boldsymbol{n}, z))\, dS$$

равен поверхностному интегралу первого рода от скалярного произведения $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})$, где $\boldsymbol{n}$ — единичная нормаль, определяющая ориентацию S^*.

Если поверхность задана уравнением

$$\boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\, \boldsymbol{i} + y(u, v)\, \boldsymbol{j} + z(u, v)\, \boldsymbol{k} \quad ((u, v) \in \Omega),$$

то

$$dS = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du\, dv, \quad \boldsymbol{n} = \pm \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|},$$

поэтому

$$\int\limits_{S^*} (\boldsymbol{a}, dS^*) = \pm \int\limits_\Omega (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\, du\, dv.$$

Отсюда видно, что разным сторонам поверхности S отвечают поверхностные интегралы второго рода вектора a, отличающиеся знаком.

Если поверхность S задана неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$, то направляющие косинусы нормали определяются по формулам

$$\cos\,(n,\,x) = \frac{\partial F}{\partial x}/D, \quad \cos\,(n,\,y) = \frac{\partial F}{\partial y}/D,$$

$$\cos\,(n,\,z) = \frac{\partial F}{\partial z}/D,$$

где

$$D = \pm\,|\mathrm{grad}\,F| = \pm\sqrt{F^2_x + F^2_y + F^2_z}\,.$$

Знак перед радикалом должен быть согласован со стороной поверхности S.

Поверхностный интеграл второго рода обозначают еще символом

$$\int\limits_{S^*}(a,\,dS^*) = \int\limits_{S^*}(P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy).$$

Эта запись удобна для случая явного задания поверхности. Если поверхность S одновременно определяется уравнениями

$$\begin{aligned} x &= f_1(y,\,z), \quad (y,\,z) \in \Omega_1;\\ y &= f_2(x,\,z), \quad (x,\,z) \in \Omega_2;\\ z &= f_3(x,\,y), \quad (x,\,y) \in \Omega_3, \end{aligned}$$

то

$$\int\limits_{S^*}(P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy) =$$

$$= \pm\iint\limits_{\Omega_1} P(f_1\,((y,\,z),\,y,\,z)\,dy\,dz \,\pm$$

$$\pm\iint\limits_{\Omega_2} Q(x,\,f_2\,(x,\,z),\,z)\,dx\,dz \pm \iint\limits_{\Omega_3} R\,(x,\,y,\,f_3\,(x,\,y))\,dx\,dy,$$

где знак берется в зависимости от ориентации поверхности (например, перед первым интегралом ставится знак + или — в зависимости от того, образует ли нормаль к S острый или тупой угол с осью x).

567. Вычислить $\int\limits_{S^*} z\,dx\,dy$, где S^* — внешняя сторона эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Р е ш е н и е. С п о с о б 1. Поверхность S задана явным уравнением

$$z=\pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Косинус острого угла внешней нормали с осью z для верхней половины эллипсоида определяется по формуле

$$\cos(n,\,z)=1/\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$$

(а для нижней надо взять знак минус). Поэтому берем знак + в соответствующей формуле для верхней половины S_1^* эллипсоида:

$$\int\limits_{S_1^*} z\,dx\,dy=\iint\limits_{\Omega} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy.$$

Аналогично для нижней половины эллипсоида S_2^*

$$\int\limits_{S_2^*} z\,dx\,dy=-\iint\limits_{\Omega} -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy=c\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{S^*} z\,dx\,dy=2c\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy,$$

где $\Omega=\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$. Вычисляя последний интеграл, получаем

$$\int\limits_{S^*} z\,dx\,dy=\frac{4}{3}\,\pi abc.$$

С п о с о б 2. Перейдем к параметрическому заданию эллипсоида:

$$\begin{cases} x = a\cos u\cos v, \\ y = b\cos u\sin v, \\ z = c\sin u, \end{cases} \quad \Delta = \begin{Bmatrix} 0 \leqslant v \leqslant 2\pi \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant u \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{Bmatrix}.$$

Здесь

$$r_u = \{-a\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, c\cos u\},$$
$$r_v = \{-a\cos u\sin v, b\cos u\cos v, 0\}.$$

В правой системе координат внешняя нормаль к эллипсоиду определяется равенством

$$n = -\frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}.$$

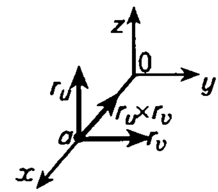


Рис. 29

Для примера возьмем точку $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ на эллипсоиде. Эта точка соответствует параметрам $u = v = 0$. В этой точке $r_u = \{0, 0, c\}$, $r_v = \{0, b, 0\}$ (рис. 29). Векторное произведение $r_u \times r_v$ совместно с векторами r_u и r_v должно образовывать правую тройку (быть ориентированным так же, как система координат), т. е. вектор $r_u \times r_v$ направлен в сторону отрицательной оси x (см. рис. 29).

Итак,

$$\int\limits_{S^*} z\,dxdy = -\iint\limits_{\Delta} (a, r_u \times r_v)\,du\,dv =$$

$$= -\iint\limits_{\Delta} z\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\,dudv = -\iint\limits_{\Delta} z\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv =$$

$$= abc\iint\limits_{\Delta} \sin^2 u\cos u\,dudv = 2\pi abc\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 u\cos u du =$$

$$= 4\pi abc\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 u\,d\sin u = \frac{4}{3}\pi abc.$$

568. Вычислить

$$\int\limits_{S^*} (x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy),$$

где S^* — внешняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(z \geqslant 0)$.

569. Вычислить

$$\int\limits_{S^*} (yz\,dy\,dz + xz\,dx\,dz + xy\,dx\,dy),$$

где S^* — внешняя сторона тетраэдра, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = $ а (рис. 30).

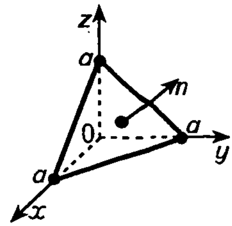


Рис. 30

§ 8. Формула Гаусса—Остроградского (см. [3], § 3.13)

570. Найти дивергенцию вектора $\boldsymbol{a} = (x^3, y^3, z^3)$.

571. Найти дивергенцию вектора $\boldsymbol{a} = f(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$, где $r = |\boldsymbol{r}|$, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, f — дифференцируемая функция.

572. Пусть $u = x^2 + y^2 + z^2$. Найти div (grad u).

573. Вычислить rot $\boldsymbol{a}$, если: а) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$; б) $\boldsymbol{a} = f(r)\boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$ — постоянный вектор, $r = |\boldsymbol{r}| = |x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}|$.

574. Пользуясь формулой Гаусса—Остроградского

$$\iiint\limits_G \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dG = \int\limits_S (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, dS,$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S, являющейся границей тела G, преобразовать поверхностные интегралы второго рода;

а) $\displaystyle\int\limits_S (xy\,dx\,dy + yz\,dy\,dz + xz\,dx\,dz)$;

б) $\displaystyle\int\limits_S (x^2\,dy\,dz + y^2\,dx\,dz + z^2\,dx\,dy)$;

в) $\int\limits_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS$

г) $\int\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) dS.$

С помощью формулы Гаусса—Остроградского вычислить поверхностные интегралы:

575. $\int\limits_S (x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy)$, где S — внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

576. $\int\limits_S z^2\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

577. $\int\limits_S z^4\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона эллипсоида из задачи *576*.

§ 9. Формула Стокса
(см. [3], § 3.15)

Формулу Стокса, устанавливающую связь между циркуляцией вектора $a = (P, Q, R)$ по контуру Г и потоком вектора rot a через ориентированную поверхность S^* (с краем Г), можно записать в следующем развернутом виде:

$$\int\limits_\Gamma (a\,dl) = \int\limits_\Gamma (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) =$$

$$= \int\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \int\limits_S (\boldsymbol{n}, \operatorname{rot} \boldsymbol{a})\,dS,$$

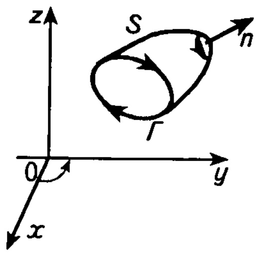


Рис. 31

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали n к поверхности S. Контур Г ориентирован соответственно ориентации S^* (рис. 31).

578. Вычислить по формуле Стокса криволинейный интеграл (циркуляцию)

$$\int_{\Gamma} (y\,dx + z\,dy + x\,dz),$$

где Г — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной оси x.

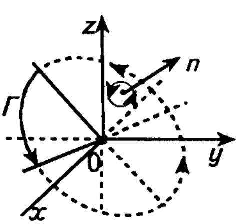


Рис. 32

Решение. Данный обход контура Г соответствует ориентации куска плоскости $x + y + z = 0$, лежащей внутри сферы $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, нормалью, направленной вправо вверх (рис. 32):

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 1/\sqrt{3}$$
$$(F(x, y, z) \equiv x + y + z = 0,$$
$$F'_x = F'_y = F'_z = 1, |\mathrm{grad}\ F| = \sqrt{3}).$$

Для вектора a в данном случае $P = y$, $Q = z$, $R = x$, поэтому

$$\int_{\Gamma} (y\,dx + z\,dy + x\,dz) = -\int_{S} (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\,dS =$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{3}}\int_{S} dS,$$

где S — круг радиуса b, лежащий в плоскости $x + y + z = 0$. Поверхностный интеграл первого рода от единичной функции, очевидно, равен площади поверхности, поэтому

$$\int\limits_{\Gamma}(y\,dx+z\,dy+x\,dz)=-\frac{3}{\sqrt{3}}\pi b^2=-\sqrt{3}\,\pi b^2.$$

579. Вычислить по формуле Стокса и непосредственно циркуляцию

$$\int\limits_{\Gamma}((y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz),$$

где Γ — эллипс $x^2+y^2=1$, $x+z=1$ (рис. 33), пробегаемый против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной оси z.

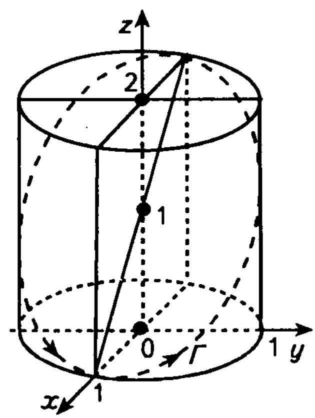


Рис. 33

580. Вычислить по формуле Стокса интеграл

$$\int\limits_{\Gamma}((y+z)\,dx+(x+z)\,dy+(x+y)\,dz),$$

где Γ — окружность $x^2+y^2+z^2=b^2$, $x+y+z=0$ (см. задачу *578*).

Глава 9

Ряды и интеграл Фурье
(см. [3], глава 4)

§ 1. Тригонометрические ряды
(см. [3], § 4.1, 4.2)

581. Построить графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_2(x)$ ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}.$$

582. Показать, что функция

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^3}.$$

непрерывна и имеет непрерывную производную на $(-\infty,\ \infty)$.

583. Выяснить, в каких точках периода сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^{\alpha}}\ (\alpha>0).$$

584. Сколько раз можно дифференцировать ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{2^k}?$$

585. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k!}.$$

§ 2. Ряд Фурье
(см. [3], § 4.3, 4.4, 4.6)

586. Разложить в ряд Фурье периода 2π функцию $f(x)$, если:

а) $f(x) = x$ на $(-\pi, \pi)$; б) $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ на $(0, 2\pi)$;

в) $f(x) = |x|$ на $(-\pi, \pi)$; г) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leqslant 0, \\ x, & 0 < x < \pi; \end{cases}$

д) $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x \leqslant 0, \\ 0, & 0 < x < \pi; \end{cases}$ е) $f(x) = \sin\, ax, \quad -\pi < x < \pi;$

ж) $f(x) = \operatorname{ch}\, ax, \quad -\pi < x < \pi.$

587. Исследовать сходимость ряда Фурье для периодической функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leqslant 0, \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases} \text{ (см. задачу } \textit{586}\text{, г)).}$$

Решение. Данная функция на $[0, 2\pi]$ ограничена, кусочно непрерывна и кусочно монотонна. В точке разрыва $x = \pi$ она неопределена (рис. 34), т. е. она не удовлетворяет условию Дирихле. Однако значение коэффициентов Фурье не зависит от того, какие значения функция $f(x)$ принимает в отдельной точке. Поэтому доопределим функцию $f(x)$ в точке $x = \pi$, полагая

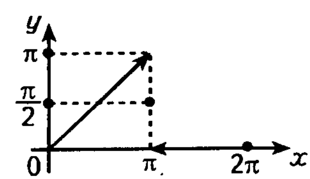


Рис. 34

$$f(\pi) = \frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда ряд Фурье этой функции (см. задачу *586*, г))

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}$$

сходится во всех точках $x \in [0, 2\pi]$ к доопределенной функции, в частности сходится к $\pi/2$ в точке $x = \pi$, т. е.

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2},$$

откуда

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

588. Разложить в ряд Фурье по синусам и по косинусам функции:

а) $f(x)=x$, $0<x<\pi$; б) $f(x)=\dfrac{\pi-2x}{4}$, $0<x<\pi$.

589. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода $2l$, заданную на $(-l, l)$ формулой $f(x)=|x|$.

§ 3. Ортогональные системы функций (см. [3], § 4.5, 4.8, 4.9)

590. Найти скалярное произведение функций:
а) $f(x)=x$, $\varphi(x)=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$;
б) $f(x)=\sin x$, $\varphi(x)=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\pi/2$.

591. Найти норму

$$\|f\|=\left(\int_b^a|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

функций $f(x)$ ($a\leqslant x\leqslant b$):
а) $f(x)=x^2$, $0\leqslant x\leqslant 1$; б) $f(x)=\cos x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$;
в) $f(x)=e^x$, $0\leqslant x\leqslant 1$; г) $f(x)=1-x$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

592. Пусть дана последовательность функций (рис. 35)

$$f_n(x)=\begin{cases}n^{\alpha}-n^{1+\alpha}x, & 0\leqslant x\leqslant 1/n,\\ 0, & 1/n<x\leqslant 1.\end{cases}$$

При каком $\alpha\geqslant 0$ эта последовательность сходится к нулю в смысле среднего квадратического?

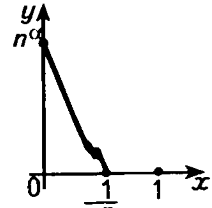


Рис. 35

593. Исследовать на равномерную и среднеквадратическую сходимость последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin \pi n^{\alpha} x, & 0 \leqslant x \leqslant n^{-\alpha}, \\ 0, & n^{-\alpha} < x < \pi. \end{cases}$$

594. Доказать, что многочлены Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

ортогональны между собой на $(-1, 1)$, т. е.

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = 0 \quad (m \neq n),$$

и удовлетворяют условию

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1} .$$

Р е ш е н и е . Отметим, что из определения многочлена Лежандра $P_n(x)$ следует, что его коэффициент при x^n равен $\dfrac{(n+1)\ldots(2n-1)2n}{2^n n!}$. Отсюда

$$\frac{d^n P_n(x)}{dx^n} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{2^n} .$$

Далее, очевидно, что если $k < n$, то

$$\frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^n = (x^2 - 1)^{n-k} A(x),$$

где $A(x)$ — некоторый многочлен. Поэтому при $k < n$

$$\frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^n \Big|_{x=\pm 1} = 0.$$

Пусть для определенности $m > n$. Интегрируя по частям n раз, имеем

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = c \int_{-1}^{1} P_n(x) \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m dx =$$

$$= cP_n(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^2-1)^m\Big|_{-1}^{1} - c\int_{-1}^{1}P_n'(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^2-1)^m dx =$$

$$= (-1)c\int_{-1}^{1}P_n'(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^2-1)^m dx = \ldots$$

$$\ldots = (-1)^n c\int_{-1}^{1}P_n^{(n)}(x)\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}(x^2-1)^m dx =$$

$$= (-1)^n c\,\frac{(n+1)\ldots 2n}{2^n}\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}(x^2-1)^m dx =$$

$$= c_1\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}(x^2-1)^m\Big|_{-1}^{1} = 0,$$

где

$$c = \frac{1}{2^m m!}, \quad c_1 = cP_n^{(n)}(x) = \frac{(n+1)\ldots 2n}{m!2^{m+n}}.$$

Совершенно аналогично получаем

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)\,P_n(x)\,dx = \frac{(-1)^n(n+1)\ldots 2n}{n!2^{2n}}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx =$$

$$= 2\frac{(n+1)\ldots 2n}{n!2^{2n}}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx.$$

Вычислим интеграл

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx\ (n = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Очевидно, $I_0 = 1$, $I_1 = 2/3$. Интегрируя по частям, получим следующую рекуррентную формулу:

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}\,I_{n-1}.$$

Отсюда

$$I_n = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)} = \frac{2^n\cdot n!}{3\cdot 5\ldots(2n+1)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\,(2n+1)}.$$

Таким образом,

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = 2\frac{(n+1)\dots(2n-1)2n}{2^{2n}n!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\,(2n+1)} = \frac{2}{2n+1}\,.$$

§ 4. Интеграл Фурье
(см. [3], § 4.12, 4.14)

595. Найти косинус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

596. Найти функцию, определенную на $(0, \infty)$, косинус-преобразование которой равно

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin as}{s}\,.$$

597. Найти косинус-преобразование функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

598. Найти синус-преобразование функции

$$f(x) = e^{-sx}/x.$$

599. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin xs\,dx}{x\left(a^2+x^2\right)}$ $(a > 0,\ s \geqslant 0)$;

б) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-4x}\sin 3x\cos 2x\,dx$;

в) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3x}\cos 3x\cos 4x\,dx$.

Глава 10

Уравнения математической физики

(см. [3], глава 5)

600. Пусть функция $f(\theta)$ периода 2π задана на $(-\pi, \pi)$ равенством $f(\theta) = |\theta|$. Построить гармоническую в единичном круге функцию, порожденную этими граничными значениями, и выяснить, с какой скоростью, в смысле среднего квадратического, функция $u(\rho, \theta)$ стремится к своим граничным значениям $f(\theta)$ при $\rho \to 1-0$.

601. Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad t > 0)$$

при начальном условии

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{\pi - 2x}{4} \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi),$$

и граничном условии

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

Оценить интеграл

$$\Lambda = \left(\int_0^\pi |u(x, t) - f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}$$

при $t \to +0$, т. е. выяснить характер средней квадратической сходимости решения $u(x, t)$ к $f(x)$ при $t \to +0$.

602. Найти решение уравнения колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных условиях

$$u(x,\,0)=f(x),\qquad \frac{\partial u(x,\,0)}{\partial t}=f(x)$$

$$\left(f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant \pi/2,\\ \pi-x, & \pi/2<x\leqslant\pi,\end{cases}\right)$$

и при краевых условиях

$$u(0,\,t)=u(\pi,\,t)=0.$$

603. Решить уравнение колебания бесконечной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных условиях

$$u\,(x,\,0)=u_t'(x,\,0)=\frac{1}{1+x^2}\ (-\infty<x<\infty).$$

604. Пусть $u(x,\,y)$ — гармоническая в верхней полуплоскости функция, принимающая значения $f(x)$ при $y=0$. Доказать, что если $\forall x$ $f(x)$ удовлетворяет условию

$$|f(x\;+t)-f(x)|\;\leqslant L|t|^{\alpha}\ (0<\alpha<1),$$

то

$$|u(x,\,y)-f(x)|\;\leqslant cy^{\alpha}\quad (y>0),$$

где c — некоторая постоянная, не зависящая от x и y.

605. Найти стационарное распределение температуры $u(x,\,y)$ в верхней полуплоскости и изотерму (линию уровня) $u=1/2$, если на оси x поддерживается температура

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant l,\\ 0, & |x|>l.\end{cases}$$

Указание. Функция $u(x,\,y)$ является гармонической в верхней полуплоскости.

606. Найти распределение температуры в бесконечном стержне, если начальное распределение температур было

$$f(x)=\exp\;(-x^2)$$

(в уравнении теплопроводности считать $a=1$).

607. Доказать, что многочлены Лежандра $y=P_n(x)$ (см. задачу *594*) удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0.$$

Глава 11

Функции комплексного переменного

(см. [3], глава 6; [1], глава 5)

§ 1. Общие понятия

(см. [1], § 5.3)

608. Найти модули комплексных чисел:

а) $z = 4 + 3i$; б) $z = \cos\ \alpha - i \sin\ \alpha$;

в) $z = -2 + 2\sqrt{3}\, i$.

609. Записать в тригонометрической форме следующие комплексные числа:

а) $z = -1 - i\sqrt{3}$; б) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

610. Представить в показательной форме комплексные числа:

а) $z = -2$; б) $z = i$;

в) $z = -1 - i\sqrt{3}$; г) $z = \sin\ \alpha - i \cos\alpha \quad (\pi/2 < \alpha < \pi)$.

611. Вычислить $(-1 + i\sqrt{3})^{60}$.

Решение. Представим число $z = -1 + i\sqrt{3}$ в показательной форме

$$-1 + i\sqrt{3} = 2 \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right).$$

Отсюда

$(-1 + i\sqrt{3})^{60} = 2^{60} \exp(40\pi i) = 2^{60}$.

612. Вычислить:

а) $(\sqrt{3} - 3i)^6$; б) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4$.

613. Найти все значения корней: а) $\sqrt[4]{1-i}$; б) $\sqrt[4]{1}$.

614. Пусть $\operatorname{Re} w = x$, $\operatorname{Im} w = y^2$ $(w \neq 0)$. Найти $\overline{w}$, $1/w$.

615. Доказать равенства:

а) $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$; б) $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$,

в) $|\overline{z}| = |z|$.

616. Какие кривые заданы уравнениями:

а) $|z - z_0| = r$, $r > 0$,

б) $|z + c| + |z - c| = 2a$, $a > c$ — действительные числа;

в) $\operatorname{Re}(1/w) = 1/2$, $\operatorname{Im}(1/w) = 1/4$, $w = x + 2yi$;

г) $\operatorname{Im} z^2 = 2$; д) $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{x^2}\right) = 1$?

617. Найти образы точек z_0 при указанных отображениях:

а) $w = z^2$, $z_0 = i$; б) $w = \overline{z}/z$, $z_0 = 2 + 3i$.

618. В какую кривую отображается окружность $|z| = \sqrt{2}$ с помощью функции $w = z^2$?

Р е ш е н и е . Имеем $\operatorname{Re} w = x^2 - y^2$, $\operatorname{Im} w = 2xy$. Исключая x и y из системы

$$\left.\begin{aligned} u &= x^2 - y^2, \\ v &= 2xy, \\ x^2 + y^2 &= 2, \end{aligned}\right\}$$

получаем

$$u^2 + v^2 = (x^2 + y^2)^2 = 4,$$

т. е. это окружность радиусом 2 с центром в начале координат в плоскости uOv (в плоскости w). Отметим, что окружность $|w| = 2$ описывается дважды, когда точка z пробегает полную окружность $|z| = \sqrt{2}$, так как

$$\operatorname{Arg} w = 2 \operatorname{Arg} z + 2k\pi.$$

Данную задачу можно решить и другим методом. Уравнение окружности $|z| = \sqrt{2}$ можно записать в виде

$$z = \sqrt{2}\, e^{i\varphi},$$

где $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Поэтому

$$w = z^2 = (\sqrt{2}\, e^{i\varphi})^2 = 2e^{i2\varphi}.$$

Отсюда следует, что окружность $|z| = \sqrt{2}$ при отображении $w = z^2$ переходит в окружность $|w| = 2$, причем окружность $|w| = 2$ описывается дважды, когда точка z пробегает окружность $|z| = \sqrt{2}$ один раз в положительном направлении (против часовой стрелки).

619. Установить, на какие линии плоскости w отображаются с помощью функции $w = 1/z$ следующие кривые в плоскости z:

а) $|z| = 1/2$; б) $\arg z = \pi/4$; в) $\operatorname{Re} z = 0$.

§ 2. Предел функции. Производная (см. [3], § 6.1, 6.2)

620. Найти предел функции $w = \bar{z}$ в точке $z = i$.

621. Выяснить, существует ли предел функции $w = \bar{z}/z$ в точке $O = (0, 0)$.

622. Будет ли непрерывной на плоскости z функция $w = \operatorname{Re} z$?

623. Выяснить, какие из функций имеют производную:

а) $w = z^2$; б) $w = \operatorname{Re} z$;

в) $w = \bar{z}$; г) $w = z \cdot \bar{z}$.

624. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w = \sin z$ в точке $z_0 = 0$.

625. В каких точках отображение $w = f(z)$ является конформным:

а) $w = z^3$; б) $w = \cos z$; в) $w = ze^{z}$?

§ 3. Условия Коши—Римана. Гармонические функции

(см. [3], § 6.3, 6.4)

626. Выяснить, какие функции являются аналитическими:

а) $w = ze^{z}$; б) $w = \bar{z}\, z^2$;

в) $w = \sin 3z$; г) $w = \operatorname{ch} 2z$.

627. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u + iv$ по известной ее действительной части $u(x, y)$:

а) $u = x^2 - y^2 + 2x$; б) $u = x^2 - y^2 + xy$,

в) $u = r\varphi \cos\varphi + r\ln r \sin\varphi$ $(z = re^{i\varphi})$.

628. Найти все гармонические функции вида $u = \varphi\,(x^2 + y^2)$.

Решение. Имеем

$$u''_{x^2} = 4x^2\,\varphi''(x^2 + y^2) + 2\varphi'(x^2 + y^2),$$

$$u''_{y^2} = 4y^2\,\varphi''(x^2 + y^2) + 2\varphi'(x^2 + y^2),$$

откуда

$$\Delta u = 4\,(x^2 + y^2)\,\varphi''(x^2 + y^2) + 4\varphi'(x^2 + y^2).$$

Таким образом, чтобы функция u была гармонической ($\Delta u = 0$), должно выполняться равенство

$$(x^2 + y^2)\,\varphi''(x^2 + y^2) + \varphi'(x^2 + y^2) = 0.$$

Полагая $x^2 + y^2 = t$, получаем

$$\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} = -\frac{1}{t}, \qquad \frac{d\ln\varphi'(t)}{dt} = -\frac{1}{t},$$

$$\varphi'(t) = C/t,\ \varphi(t) = C \ln t + C_1.$$

Итак, гармонические функции имеют вид

$$u = C \ln\ (x^2 + y^2) + C_1,$$

где C и C_1 — произвольные константы.

629. Найти все гармонические функции вида $u = \varphi(y/x)$.

§ 4. Простейшие конформные отображения (см. [3], § 6.2, 6.15)

630. Найти конформное отображение, переводящее верхнюю полуплоскость на себя.

631. Отобразить единичный круг $|z| \leqslant 1$ на верхнюю полуплоскость так, чтобы точки $z_1 = -i$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$ перешли соответственно в точки $w_1 = -1$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1$.

Решение. Данное отображение осуществляет дробно-линейная функция

$$\frac{w+1}{w-0} : \frac{1+1}{1-0} = \frac{z+i}{z-i} : \frac{i+i}{i-1} \quad \text{или } w = \frac{i(1-z)}{1+z}.$$

Обратная функция

$$z = \frac{i-w}{w+i}$$

отображает верхнюю полуплоскость на единичный круг так, что w_k переходят в z_k ($k = 1, 2, 3$).

632. Отобразить конформно угол $0 < \varphi < \pi/4$ на верхнюю полуплоскость (рис. 36).

Рис. 36

633. Отобразить конформно полосу $0 \leqslant y < \pi$: а) на верхнюю полуплоскость; б) на всю плоскость.

634. Отобразить вертикальную полосу $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$ на единичный круг $|w| \leqslant 1$ (рис. 37).

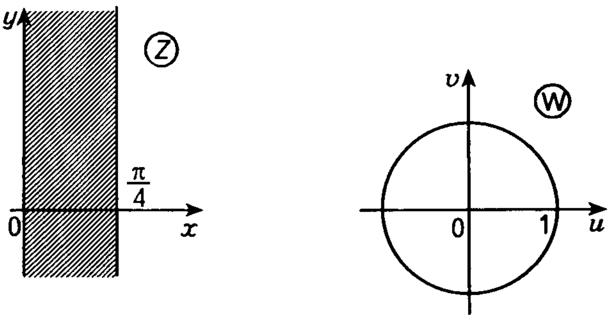


Рис. 37

Решение. Переведем вертикальную полосу в горизонтальную. Для этого сделаем поворот на $\pi/2$, который осуществляется функцией

$$z^* = z \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = iz.$$

В плоскости $z^* = x^* + iy^*$ мы получаем горизонтальную полосу $0 \leqslant y^* \leqslant \pi/4$. Расширим эту полосу в четыре раза:

$$z' = 4z^* = 4iz.$$

В плоскости z' мы получили горизонтальную полосу $0 \leqslant y' \leqslant \pi$. Эту полосу отображаем на верхнюю полуплоскость с помощью показательной функции

$$z'' = e^{z'} = e^{4iz}.$$

Теперь эту полуплоскость отображаем на единичный круг $|w| \leqslant 1$, например, с помощью функции из задачи ***631***:

$$w = \frac{i - z''}{z'' + i} = \frac{i - \exp(4iz)}{i + \exp(4iz)}.$$

635. Найти целую линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках 0, 1, i в плоскости z на треугольник соответственно с вершинами $1 + i$, 0, 2 в плоскости w.

636. Найти конформное отображение круга $|x| < 5$ на круг $|w| < 1$ так, чтобы точки 5, $4 + 3i$, -5 перешли в точки 1, i, -1.

§ 5. Интегрирование функций комплексного переменного

(см. [3], § 6.6);

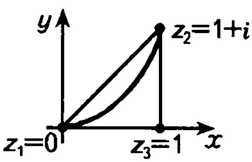


Рис. 38

637. Вычислить интеграл

$$\int\limits_C (1 + i - 2\bar{z})\, dz$$

по линиям, соединяющим точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$ а) по прямой; б) по параболе $y = x^2$; в) по ломаной $z_1 z_3 z_2$, где $z_3 = 1$ (рис. 38).

638. Вычислить $\int\limits_0^{\pi i} z \operatorname{ch} z\, dz$.

639. Вычислить $\int\limits_0^{\pi(1+i)} z \operatorname{ch} z dz$.

Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области D, то функция

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi$$

также является аналитической в D, причем

$$F'(z) = f(z).$$

В самом деле,

$$F'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int\limits_z^{z+h} f(\xi)\, d\xi =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int\limits_z^{z+h} [f(z) + \eta(\xi)] d\xi = f(z) + \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int\limits_z^{z+h} \eta(\xi)\, d\xi = f(z),$$

где $\eta(\xi) \to 0$ при $\xi \to z$, в силу непрерывности f в точке z. При малых $h|\eta(\xi)| < \varepsilon$, поэтому для таких h

$$\left|\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h}\eta(\xi)\,d\xi\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|h|}\left|\int_{z}^{z+h}d\xi\right| = \frac{\varepsilon}{|h|}\cdot|h| = \varepsilon.$$

Здесь мы считаем, что интегрирование производится по прямой, соединяющей точки z и $z+h$. Это можно делать, так как $f(z)$ аналитична, и, следовательно, интеграл не зависит от пути интегрирования.

Итак, мы доказали, что $F'(z) = f(z)$. Функцию $F(z)$ называют *первообразной* для $f(z)$.

Так же как в случае действительного переменного, можно установить, что две произвольные первообразные для функции $f(z)$ отличаются на постоянное слагаемое.

Отсюда вытекает, что если $\Phi(z)$ — первообразная для $f(z)$, то

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi = \Phi(z) - \Phi(z_0)$$

— формула Ньютона—Лейбница.

640. Используя формулу Ньютона—Лейбница, вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)\,dz$; б) $\displaystyle\int_{0}^{i} z\sin z dz$.

§ 6. Формула Коши
(см. [3], § 6.7, 6.8)

Как нам известно, если $f(z)$ аналитическая в области $\bar{D}$, ограниченной кусочно гладким контуром C, то имеет место интегральная формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} \qquad (1)$$

$(z \in D)$.

641. Вычислить интеграл

$$I=\int\limits_C \frac{\exp(z^2)\,dz}{z^2-6z},$$

если: а) C: $|z-2|=1$;

б) C: $|z|=1$; в) C: $|z-6|=1$ (рис. 39).

642. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=3/2} \frac{\exp(z^2)\,dz}{z(z+1)}$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1/2} \frac{\exp(z)\,dz}{z(z+1)}$.

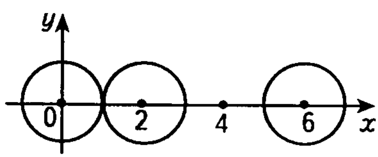


Рис. 39

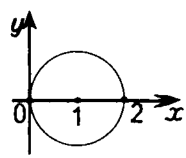


Рис. 40

643. Вычислить интеграл

$$I=\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}.$$

Решение. Функция $f(z)=\dfrac{\sin\pi z}{(z+1)^2}$ является аналитической на круге $|z-1|\leqslant 1$ (рис. 40). Поэтому, используя формулу

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} \tag{2}$$

при $n=1$, где C — окружность $|z-1|=1$, получаем

$$I=\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}\,\frac{dz}{(z-1)^2}=2\pi i\left(\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}\right)'\Bigg|_{z=1}=$$

$$=2\pi i\frac{\pi(z+1)\cos\pi z-2\sin\pi z}{(z+1)^2}\Bigg|_{z=1}=-2\pi i\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi^2 i}{2}.$$

644. Вычислить интеграл I вдоль окружности $|z|=2$

$$I = \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z\, dz}{(z+1)^3(z-1)}.$$

Указание. Построить контуры C_1 и C_2, включающие в себя соответственно точки $z = -1$ и $z = 1$ и лежащие внутри окружности $|z| = 2$. Тогда $\int\limits_{|z|=2} \ldots = \int\limits_{C_1} \ldots + \int\limits_{C_2} \ldots$, а затем применить формулы (1) и (2).

§ 7. Ряды в комплексной области (см. [3], § 6.9, 6.10)

Найти радиусы R сходимости рядов:

645. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$.

646. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k! z^k$.

647. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{k!}$.

648. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$.

649. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$.

650. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n$.

651. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+i) z^n$.

Разложить в ряд Тейлора в окрестности $z = 0$ следующие функции:

652. $\frac{1}{(1+z)^2}$.

653. $\frac{1}{(1+z)(z-2)}$.

654. Разложить по степеням $(z-3)$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{5+2z}.$$

Решение. Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$\frac{1}{5+2z}=\frac{1}{5+2(z-3+3)}=\frac{1}{11+2(z-3)}=\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{11}(z-3)}.$$

Заменяя в разложении

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\ldots+(-1)^n z^n+\ldots$$

z на $\frac{2}{11}(z-3)$, получаем

$$\frac{1}{5+2z}=\frac{1}{11}\left\{1-\frac{2}{11}(z-3)+\frac{2^2}{11^2}(z-3)^2-\ldots\right\}=$$

$$=\frac{1}{11}-\frac{2}{11^2}(z-3)+\frac{2^2}{11^3}(z-3)^2-\ldots$$

Последний ряд сходится при

$$\frac{2}{11}|z-3|<1 \text{ или } |z-3|<\frac{11}{2}.$$

Таким образом, радиус его сходимости $R = 11/2$.

655. Разложить по степеням $(z-3)$ функцию $f(z) = 1/(3-2z)$.

656. Определить область сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^n}{z^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n(z+1)^n}$.

657. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

в областях: а) $0<|z|<1$; б) $1<|z|<2$; в) $|z|>2$.

658. Разложить в ряд Лорана в кольце $0<|z-1|<2$ функцию

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-1)^2}.$$

Разложить в ряд Лорана в окрестности $z = 0$ следующие функции:

659. $\dfrac{\sin z}{z^2}$. **660.** $z^3 \exp(1/z)$.

§ 8. Изолированные особые точки. Вычеты (см. [3], § 6.11—6.13)

661. Определить характер особой точки $z = 0$ для функций:

а) $f(z) = (e^z - 1)/z$; б) $f(z) = 1/z^4$; в) $f(z) = \exp(1/z^2)$.

662. Найти все особые точки и определить их характер у следующих функций:

а) $\dfrac{z}{\sin z}$; б) $\cos\dfrac{1}{z}$; в) $z\sin\dfrac{1}{z}$; г) $\operatorname{th} z$.

663. Найти вычет функции

$$\frac{A}{z-a}$$

в точке $z = \infty$.

Решение. Имеем

$$\frac{A}{z-a} = \frac{A}{z\left(1-\frac{a}{z}\right)} = \frac{A}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^k = \frac{A}{z} + \frac{Aa}{z^2} + \ldots,$$

следовательно,

$$\operatorname*{Выч}_{z=\infty}\frac{A}{z-a} = -A.$$

664. Найти вычеты функции

$$f(z) = \frac{\sin z^2}{z^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}$$

в ее особых точках.

Решение. Легко видеть, что конечными особыми точками функции являются точки $z=0$, $z=\pi/4$.

Найдем пределы функции $f(z)$ в этих точках:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^2}\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-(\pi/4)} = -\frac{4}{\pi},$$

$$\lim_{z\to\pi/4} f(z) = \infty.$$

Таким образом, $z=0$ — устранимая особая точка и

$$\operatorname*{Выч}_{z=0} f(z) = 0.$$

Далее $z=\pi/4$ — полюс и

$$\operatorname*{Выч}_{z=\pi/4} f(z) = \lim_{z\to\pi/4} f(z)\left(z-\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{z\to\pi/4}\frac{\sin z^2}{z^2} = \frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}.$$

Точка $z=\infty$ также является особой, она существенно особая точка. Для нахождения вычета $f(z)$ в этой точке надо разложить функцию в ряд Лорана по степеням z:

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{4z}\right)^n\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2(2k+1)}}{(2k+1)!}.$$

Перемножая ряды и группируя члены с одинаковыми степенями z, получаем

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(1-\frac{\pi^4}{4^4 3!}+\frac{\pi^8}{4^8 5!}-\frac{\pi^{12}}{4^{12}7!}+\ldots\right)+\sum_{k\neq -1} c_k z^k,$$

т. е.

$$\operatorname*{Выч}_{z=\infty} f(z) = -\left(1-\frac{\pi^4}{4!3!}+\frac{\pi^8}{4^8 5!}-\ldots\right) =$$

$$= -\frac{4^2}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{4^2}-\frac{\pi^6}{4^6 3!}+\frac{\pi^{10}}{4^{10}5!}\ldots\right) = -\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}.$$

Этот же результат мы получим, если воспользуемся основной теоремой о вычетах, согласно которой вычет функции $f(z)$ относительно $z=\infty$ равен сумме вычетов относительно конечных особых точек, взятой со знаком минус (см. [3], § 6.13, теорема 1).

Укажем еще один способ нахождения вычета функции $f(z)$ в точке $z=\infty$. Функцию $\frac{1}{z^2}\sin z^2$ можно считать аналитической на плоскости z, если считать, что она равна 1 при

$z=0$. Поэтому она разлагается в степенной ряд по степеням $\left(z-\frac{\pi}{4}\right)$, сходящийся на всей плоскости z:

$$\frac{\sin z^2}{z^2}=\frac{\sin(\pi/4)^2}{(\pi/4)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^k.$$

Но тогда

$$f(z)=\frac{1}{z-\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\sin(\pi/4)^2}{(\pi/4)^2}+\psi(z)=\frac{1}{z-\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\sin(\pi/4)^2}{(\pi/4)^2}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k,$$

где степенной ряд справа сходится для всех z. Ведь $\psi(z)$ — аналитическая функция на плоскости z, и она разлагается в сходящийся на этой плоскости степенной ряд. Теперь, учитывая задачу ***663***, получим

$$\underset{z=\infty}{\text{Выч}}\, f(z)=\underset{z=\infty}{\text{Выч}}\frac{\sin(\pi/4)^2}{(\pi/4)^2}\cdot\frac{1}{z-\frac{\pi}{4}}=-\frac{\sin(\pi/4)^2}{(\pi/4)^2}.$$

665. Найти вычеты функций в их особых точках:

а) $f(z)=z^2\sin(1/z^2)$; б) $f(z)=z^2\exp\,(1/z)$;

в) $f(z)=\dfrac{\exp(z)}{(z+1)^3(z-2)}$; г) $f(z)=(z-2)\exp\left(\dfrac{1}{z-2}\right)$.

§ 9. Вычисление интегралов с помощью вычетов

(см.[3],§ 6.14)

Основной теореме о вычетах можно придать еще такой вид: интеграл от функции $f(z)$ по контуру Г, проходимому против часовой стрелки, равен сумме вычетов относительно всех особых точек $z_1, \ldots, z_n$, находящихся внутри Г, умноженной на $2\pi i$:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Выч}\, f(z_k). \qquad (1)$$

666. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z - 1}{z(z+1)} dz.$$

Решение. В области $|z| < 2$ функция $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z(z+1)}$ аналитична всюду, кроме точек $z = 0$, $z = -1$. Найдем вычеты $f(z)$ в этих точках. $z = 0$ — устранимая особая точка, поэтому $\underset{z=0}{\text{Выч}} f(z) = 0$. В точке $z = -1$ функция $f(z)$ имеет простой полюс, поэтому

$$\underset{z=-1}{\text{Выч}} f(z) = \lim_{z \to -1} (z+1) f(z) = \lim_{z \to -1} \frac{e^z - 1}{z} = 1 - e^{-1}.$$

Согласно (1) получаем

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z - 1}{z(z+1)} dz = 2\pi i \, (1 - e^{-1}).$$

667. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{z\,dz}{(1-z)^2(z-3)}$, где Γ: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$;

б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=5} \frac{e^{iz} dz}{(z-\pi)^3}$; в) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^4+1}$, где Γ: $x^2 + y^2 = 2x$;

г) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{z+1}{z^2+2z-3}$; где Γ: $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

668. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2} \quad (a > 0).$$

Решение. Введем функцию $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$ комплексного переменного z. Она удовлетворяет условию теоремы 1 § 6.14 [3] при $m = 4$ и имеет в верхней полуплоскости полюс второго порядка в точке $z = ai$:

$$\underset{z=ai}{\text{Выч}} f(z) = \lim_{z \to ai} \frac{d}{dz} (z - ai)^2 f(z) = \lim_{z \to ai} \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z+ai)^2} = \frac{1}{4ai}.$$

Тогда

$$I = 2\pi i \underset{z=ai}{\text{Выч}} f(z) = \frac{\pi}{2a}.$$

669. Вычислить интегралы;

а) $\int\limits_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a>0,\ b>0)$;

в) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^6}$; г) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$.

670. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx$ $(a>0)$; б) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^2\cos x}{(x^2+1)^2}dx$.

671. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}dx \quad (a>0).$$

У к а з а н и е . Рассмотреть функцию

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+a^2)}$$

и контур $\Gamma_{\varepsilon,R}$ (рис. 41). При малом ε и большом R функция $f(z)$ имеет один полюс внутри контура $\Gamma_{\varepsilon,R}$. Отметим, что $f(z)$ имеет особенность в точке $z=0$ на действительной оси. Затем перейти к пределу:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int\limits_{\Gamma\varepsilon,R} f(z)dz.$$

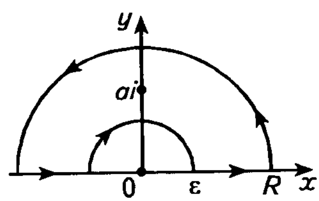


Рис. 41

672. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^\infty \exp\,(-ax^2)\cos\ bx\,dx \quad (a>0,\ b>0).$$

Р е ш е н и е . Как нам известно,

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \exp\,(-x^2)\,dx = \sqrt{\pi},$$

поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Введем в рассмотрение функцию $f(z) = \exp(-az^2)$ и контур Г в виде прямоугольника со сторонами $2R$ и $b/(2a)$ (рис. 42). Внутри контура Г функция $\exp(-az^2)$ аналитическая, поэтому

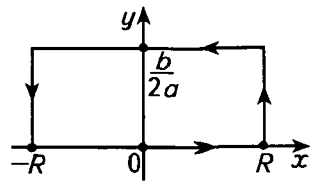


Рис. 42

$$\int_{\Gamma} \exp(-az^2)\, dz = 0,$$

т. е.

$$\int_{-R}^{R} \exp(-ax^2)\, dx + \int_{0}^{b/2a} i\exp[-a(R+iy)^2]\, dy +$$

$$+ \int_{-R}^{R} \exp\left[-a\left(x+i\frac{b}{2a}\right)^2\right] dx + \int_{b/2a}^{0} i\exp\left[-a(-R+iy)^2\right] dy = 0.$$

Второй и четвертый интегралы стремятся к нулю при $R \to \infty$ за счет множителя $\exp(-aR^2)$. Поэтому в пределе при $R \to \infty$ получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)\, dx + \int_{\infty}^{-\infty} \exp(-ax^2) \exp(-ibx) \exp\frac{b^2}{4a}\, dx = 0.$$

Отсюда, выделяя действительную часть во втором слагаемом, имеем

$$\exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) \cos bx\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

или

$$\int_{0}^{\infty} \exp(-ax^2) \cos bx dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right).$$

Глава 12

Операционное исчисление

(см. [3], глава 7)

§ 1. Изображения простейших функций (см. [3], § 7.1, 7.2)

673. Пользуясь определением, найти изображение Лапласа функций:

а) $f(t) = e^{2t}$, б) $f(t) = \sin 3t$.

674. Может ли функция $\varphi(p) = 1/\sin p$ быть изображением некоторого оригинала?

675. Используя свойство линейности изображения и свойство подобия, найти изображения функций:

а) $f(t) = t + 2$, б) $f(t) = 2\sin\ 3t + e^{-2t}$ $(t \geqslant 0)$.

676. Является ли функция

$$f(t) = \begin{cases} \exp\left(t^2\right), & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

оригиналом?

677. Найти изображение функции $f(t) = \cos mt \cos nt$.

678. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала

$$L[f';p] = pL[f;\ \mathrm{p}] - f(0),$$

найти изображения следующих функций:

а) $f(t) = \cos^2 3t$,   б) $f(t) = \cos^4 t$.

679. Найти изображение функций, пользуясь теоремой о дифференцировании изображения ($F'(p) \risingdotseq -tf(t)$):

а) $f(t) = t^2 \cos t$,   б) $f(t) = t \operatorname{sh} 3t$.

680. Используя теорему об интегрировании оригинала

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p},$$

найти изображения следующих функций:

а) $f(t) = \int_0^t \tau \operatorname{sh} 3\tau \, d\tau$;   б) $f(t) = \int_0^t \tau^2 \cos \tau \, d\tau$.

681. Используя теорему об интегрировании изображения

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty F(q)\, dq,$$

найти изображения функций:

а) $\frac{e^t - 1}{t}$;   б) $\frac{\sin^2 t}{t}$;   в) $\frac{\operatorname{sh} t}{t}$.

682. Пользуясь теоремой смещения изображения, найти изображения функций:

а) $e^{3t}\sin t$;   б) $e^t t^2 \cos t$.

683. Пользуясь теоремой запаздывания оригинала

$$f(t - t_0) \risingdotseq e^{-pt_0} F(\mathrm{p}),$$

найти изображения функций:

а) $\sin\ (t - b)\, \sigma_0(t - b)$;

б) $e^{t-3}\, \sigma_0(t - 3)$, где $\sigma_0\,(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

684. Найти изображения следующих функций:

а) $f(t)=\begin{cases} t, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 2-t, & 1\leqslant t\leqslant 2,\end{cases}$ $f(t+2)=f(t)\ \forall t\geqslant 0$;

б) $f(t)=|\sin\ t|$.

685. Найти изображение сверток:

а) $\int\limits_0^t e^{t-\tau}\sin\tau\, d\tau$; б) $\int\limits_0^t (t-\tau)^2\operatorname{ch}\tau d\tau$.

§ 2. Отыскание оригинала по изображению (см.[3], § 7.2)

686. Найти оригинал $f(t)$, если $F(p)=1-\cos\ (1/p)$.

687. Найти оригинал для функции

$$F(p)=\frac{1}{p(p-1)(p^2+1)}.$$

688. Найти оригинал для функций:

а) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+3}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$.

689. Найти оригинал для функции $F(p)=1/\sqrt{1+p^2}$.

Решение. Разложим функцию $F(p)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$F(p)=\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-1/2}=\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!\,p^4}-\ldots\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{(k!)^2 2^{2k}p^{2k+1}}.$$

На основании теоремы 11 (см. [3], § 7.2)

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}}\cdot t^{2k}\equiv J_0(t),$$

где $J_0(t)$ — функция Бесселя нулевого порядка (см. [3], § 1.25, 5.9).

690. Найти оригинал для рациональных функций $F(p)$, используя равенство

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Выч}_{p=p_k} [F(p)\, e^{pt}],$$

где $p_1, \ldots, p_m$ — полюсы функции $F(p)$:

а) $F(p) = \dfrac{1}{p^2+4p+5}$; б) $F(p) = \dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^3(p^2+2p+2)}$.

§ 3. Приложения операционного исчисления (см. [3], § 7.3)

691. Решить дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

а) $x' + x = e^{-t}$, $x(0) = 1$;

б) $x'' + x = 2\cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$;

в) $x'' + 2x' + 5x = 3$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

692. С помощью формулы Дюамеля решить уравнения:

а) $x'' = \dfrac{1}{1+t^2}$, $x(0) = x'(0) = 0$;

б) $y'' + y = \sin x$, $y(0) = y'(0) = 0$;

в) $y''' + y' = 10e^{2x}$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

693. Решить систему

$$\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1,\ y(0) = -1.$$

Решение. Пусть $X(p) \risingdotseq x(t)$, $Y(p) \risingdotseq y(t)$. Составим операторные уравнения

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) + Y(p) = 0, \\ X(p) + pY(p) - y(0) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} pX(p) + Y(p) = 1, \\ X(p) + pY(p) = -1. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно $X(p)$ и $Y(p)$, имеем

$$X(p)=\frac{1}{p-1},\ Y(p)=\frac{-1}{p-1}.$$

Отсюда

$$x(t)=e^t,\ y(t)=-e^t.$$

694. Решить системы:

а) $\begin{cases} x+x'=y+e^t, \\ y+y'=x+e^t, \end{cases}$ $x(0)=y(o)=1;$

б) $\begin{cases} x''=3(y-x+z), \\ y''=x-y, \\ z''=-z, \end{cases}$

$x(0)=x'(0)=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=-1,\quad z(0)=1,\quad z'(0)=0;$

в) $\begin{cases} y'=3z-y, \\ z'=y+z+e^x, \end{cases}$ $y(0)=z(0)=0.$

695. Вычислить интегралы:

а) $I(x)=\int\limits_0^\infty \frac{\cos xt}{a^2+t^2}\,dt;$ б) $I(x)=\int^\infty \frac{\sin xt\cos t}{t}\,dt.$

Приложение I

Глава 1

696. Доказать неравенство
$|x + x_1 + \ldots + x_n| \geqslant |x| - (|x_1| + \ldots + |x_n|)$.

697. Доказать *неравенство Бернулли*
$$(1 + x_1) \ldots (1 + x_n) \geqslant 1 + x_1 + \ldots + x_n,$$
где $x_j > -1$ ($j = 1, \ldots, n$) и все числа $x_1, \ldots, x_n$ одного знака.

698. Пусть $0 \leqslant x_j \leqslant \pi$ ($j = 1, \ldots, n$). Доказать, что
$$|\sin(x_1 + \ldots + x_n)| \leqslant \sin x_1 + \ldots + \sin x_n \equiv \sum_{j=1}^{n} \sin x_j.$$

699. Доказать равенство
$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

700. Решить неравенство $||x+a| - |x-a|| < 1$, где a — любое положительное действительное число.

701. Пусть Q — множество всех рациональных чисел, а I — множество всех иррациональных чисел. Найти $Q \cup I$, $Q \cap I$, $Q \setminus I$.

Доказать равенства:

702. $\lim\limits_{n\to\infty} n2^{-n} = 0$. **703.** $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$ ($|q| < 1$).

Найти пределы:

704. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \ldots + \frac{(n-1)^3}{n^4}\right)$.

705. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

706. Пользуясь теоремой существования предела монотонной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

Указание. Воспользоваться неравенством

$$\ln\ (1+x)\ \leqslant x\ (x>0).$$

707. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности

$$x_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}\ (\alpha\geqslant\ 2)$$

и расходимость последовательности

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

708. Последовательность $\{x_n\}$ называется *последовательностью с ограниченным изменением*, если $\exists M>0$ такое, что

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\ldots+|x_n-x_{n-1}|\ \leqslant M$$

при любом натуральном $n\geqslant 2$.

Доказать, что последовательность с ограниченным изменением обязательно сходится.

Решение. Обозначим $y_n=\sum\limits_{j=2}^{n}|x_j-x_{j-1}|$. Если последовательность $\{x_n\}$ с ограниченным изменением, то последовательность $\{y_n\}$ будет ограничена сверху числом M и не убывает. Поэтому последовательность $\{y_n\}$ сходится.

По критерию Коши $\forall\ \varepsilon>0\ |y_n-y_m|<\varepsilon$ при $n,\ m>n_0(\varepsilon)$. Далее,

$$|x_n-x_m|=\left|\sum_{j=m+1}^{n}\left(x_j-x_{j-1}\right)\right|\ \leqslant\sum_{j=m+1}^{n}|x_j-x_{j-1}|=|y_n-y_m|\ (n>m).$$

Отсюда снова по критерию Коши заключаем, что $\{x_n\}$ сходится.

Отметим, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она не обязательно является последовательностью с ограниченным изменением

$$\left(x_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0, \text{ но } \sum_{j=2}^{n} |x_j - x_{j-1}| \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\right).$$

709. Выяснить, существует ли предел последовательности $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$, если $\lim x_n = a$.

710. Что можно сказать о пределе последовательности $\{x_n y_n\}$, если $x_n \to 0$, а y_n — произвольная последовательность? Привести примеры.

711. Если $\{x_n y_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то следует ли отсюда, что одна из последовательностей $\{x_n\}$ или $\{y_n\}$ бесконечно малая? Рассмотреть пример $x_n = 1 + (-1)^n$, $y_n = 1 - (-1)^n$.

712. Если $x_n \to a$, то $\xi_n = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n) \to a$. Обратное утверждение неверно. Рассмотреть пример $x_n = (-1)^n$.

713. Привести пример последовательности:

а) имеющей в качестве своих частичных пределов данные числа a и b;

б) не имеющей конечных частичных пределов;

в) имеющей единственный конечный частичный предел, но не являющейся сходящейся;

г) имеющей в качестве своего частичного предела любое действительное число.

714. Доказать, что:

а) $\overline{\lim}\, (x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$;

б) $\underline{\lim}\, (x_n + y_n) \geqslant \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$.

Привести примеры, когда в этих соотношениях стоят знаки строгих неравенств.

Найти область E задания функции $y = f(x)$ и образ $E_1 = f(E)$ множества E при помощи функции f:

715. $y = x^2/(2 + x^2)$.

716. $y = \sqrt{4x^2 - x^4}$.

717. $y = \sqrt{\cos x^2}$.

718. $y = \arcsin\ (2 - x)$.

719. $y = \lg\ (1 - 2\cos\ x)$.

720. $y = (-1)^x$.

Найти образ $E_1 = f(E)$ множества E при помощи функции f, если:

721. $y = x^2$, $E = [-3,\ 2]$.

722. $y = 2|x|$, $E = (-1, 3]$.

723. $y = 2|x|$, $E = \{1 < |x| \leqslant 3\}$.

724. $y = \sqrt{x - x^2}$, $E = (0,\ 1)$.

725. Найти $f(1)$, $f(2)$, $f(x + 1)$, если:

а) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$; б) $f(x) = x - x^2$; в) $f(x) = \sin\ \dfrac{\pi}{x}$.

726. Найти $f(x)$, если:

а) $f(x + 1) = x^2 - 3x + 2$; б) $f\left(\dfrac{x}{x+2}\right) = x^2$.

Построить графики функций:

727. $y = x + \dfrac{1}{x}$ (гипербола).

728. $y = 1/(1 + x^2)$ (кривая Аньези).

729. $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$ (трезубец Ньютона).

730. $y = x + \dfrac{1}{x^2}$.

731. $y = \pm\, x\sqrt{x}$.

732. $y = \sin\ \alpha x$, $\alpha = 2, 3, \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

733. $y = \sin\ x^2$.

734. $y = \arcsin x$ $(|x| \leqslant 1, |y| \leqslant \pi/2)$.

735. $y = \arccos x$ $(|x| \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi)$.

736. $y = \mathrm{arctg} x$ $(-\infty < x < \infty, \quad |y| < \pi/2)$.

737. $y = \arcsin\frac{1}{x}$.

738. $y = \mathrm{arctg}\frac{1}{x}$.

Исследовать на равномерную непрерывность на заданных множествах следующие функции:

739. $f(x) = \frac{x}{3-x^2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

740. $f(x) = \frac{x}{3-x^2}$ $(-3 < x < 3)$.

741. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $(0 < x < \pi)$.

742. $f(x) = x\sin\ x$ $(0 \leqslant x < \infty)$.

743. $f(x) = x$ $(0 \leqslant x < \infty)$.

Найти производные функций:

744. $y = \frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$.

745. $y = \cos\ 3x - 3\sin\ x$.

746. $y = e^x\left(1 + \mathrm{ctg}\ \frac{x}{2}\right)$.

747. $y = \mathrm{arctg}\ \frac{x^2}{a}$.

748. $y = \log_x\ e$.

749. $y = \ln\ (\mathrm{ch}\ x) + \frac{1}{2\mathrm{ch}^2 x}$.

750. $y = \operatorname{arctg}\ (\operatorname{th} x)$. **751.** $y = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$.

752. $y = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$. **753.** $y = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 & x^4 \\ 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 2 & 6x & 12x^2 \end{vmatrix}$.

754. Найти $f'(a)$, если $f(x) = (x - a)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ непрерывна при $x = a$.

Решение. Так как по условию $\varphi(x)$ только непрерывна в точке $x = a$, то формально дифференцировать функцию $f(x)$ как произведение нельзя. Будем исходить из определения производной:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)\varphi(x) - 0}{x - a} = \lim_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a).$$

755. При каких натуральных n функция

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

а) непрерывна при $x = 0$;

б) дифференцируема при $x = 0$;

в) имеет непрерывную производную при $x = 0$?

756. Можно ли почленно дифференцировать неравенство между функциями?

757. При каких коэффициентах a, b, c парабола $y = ax^2 + bx + c$ касается оси Ox?

758. При каком значении a парабола $y = ax^2$ касается кривой $y = \ln x$?

Найти производную y'_x от функций, заданных параметрически:

759. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

760. $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$.

Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

761. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-\cos x}{x^2}$. **762.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

763. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$. **764.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{Arsh}x}{x}\right)^{1/x^2}$.

Замечание. Если $\lim\limits_{x\to a}\ln z(x)=k$, то $\lim\limits_{x\to a} z(x)=e^k$.

765. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^{1/x^2}$.

Найти производные и дифференциалы указанного порядка:

766. $y=x\sqrt{1+x^2}$, найти y''. **767.** $y=\operatorname{tg}x$, найти y'''.

768. $y=\ln f(x)$, найти y''. Здесь $f(x)>0$ — дважды дифференцируемая функция.

769. $y=x^2/(1-x)$, найти $y^{(8)}$.

770. $y=x^2/(1-x^2)$, найти y'''.

771. $y=e^x\cos x$, найти $y^{(4)}$.

772. $y=x^5$, найти d^5y.

773. $y=\operatorname{ch}\,x\cdot\cos\,x$, найти d^6y.

774. $y=[u(x)]^2$, найти d^3y, считая функцию $u(x)$ достаточное число раз дифференцируемой.

775. $y=\ln u(x)$, найти d^3y.

776. $y=f(x)$, где $x=\varphi(t)$. Найти d^2y.

777. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, найти $y^{(n)}$.

778. $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$, найти $y^{(n)}$.

Замечание. Представить функцию в виде $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x}$.

779. $f(x) = (x-a)^n\varphi(x)$, найти $f^{(n)}(a)$, где $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную $(n-1)$-го порядка в окрестности точки a.

780. Доказать, что многочлены Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^2 n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)$$

удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2)\,P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)\,P_n(x) = 0.$$

Указание. Если $u(x) = (x^2-1)^n$, то имеет место равенство

$$(x^2-1)\frac{du}{dx} = 2nxu.$$

Продифференцировать $n+1$ раз данное равенство.

781. Доказать, что многочлены Чебышева

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos\,(n\arccos\,x)\ (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2)\,T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

782. Проверить, что функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} \text{ и } g(x) = \operatorname{arctg}\,x$$

имеют одинаковые производные на множестве $E = \{-\infty < x < \infty,\ x \neq 1\}$. Установить связь между этими функциями.

783. Доказать тождество

$$3\arccos\,x - \arccos\,(3x-4x^3) = \pi \quad (|x| \leqslant 1/2).$$

Разложить в ряд Тейлора функции:

784. $y = \operatorname{sh}x$. **785.** $y = \operatorname{ch}x$.

786. При каких x справедливо, с точностью до 0,001, приближенное равенство

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}?$$

787. Используя разложения по формуле Тейлора, найти пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1 - x^2}}{x^5}$.

Определить участки строгой монотонности следующих функций:

788. $y = \frac{ax}{1 + x^2}$ $(a > 0)$. **789.** $y = \frac{x}{1 + b^2x^2}$ $(b > 0)$.

790. $y = a^2x - b^2\frac{x^3}{3}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

791. $y = xe^{ax^2 + bx + c}$, a, b, c — произвольные действительные числа.

Найти участки выпуклости и точки перегиба для функций:

792. $y = a^2x - b^2\frac{x^3}{3}$ $(a > 0,\ b > 0)$. **793.** $y = xe^{bx}$ $(b \neq 0)$.

Исследовать на экстремум функции:

794. $y = a^2x + \frac{1}{b^2x}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

795. $y = \frac{x}{1 + b^2x^2}$ $(b > 0)$.

796. $y = (x - a)^2\,(x - b)^3$ $(0 < a < b)$.

Построить графики функций:

797. $y = \frac{4 - x^2}{1 + x^2}$. **798.** $y = (x - a)e^{1/x}$ $(a > 0)$.

Глава 2

Найти интегралы:

799. $\int \frac{dx}{ax+b}$. **800.** $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}}$.

801. $\int \frac{dx}{a^2x^2+b^2}$. **802.** $\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2}$.

803. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2-a^2x^2}}$. **804.** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}}$.

805. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2+b^2}}$. **806.** $\int (e^{-x}+e^{-2x})\,dx$.

807. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$. **808.** $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$.

809. $\int \frac{ax^2+b}{a^2x^4+b^2}dx \quad (a \neq 0,\ b \neq 0)$.

Решение. $I \equiv \int \frac{ax^2+b}{a^2x^4+b^2}dx = \int \frac{a+\frac{b}{x^2}}{a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}}dx =$

$$= \int \frac{d\left(ax-\frac{b}{x}\right)}{a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}} = \left(ax-\frac{b}{x}=u\right) = \int \frac{du}{u^2+2ab}.$$

Если числа a и b одного знака, то

$$I = \frac{1}{\sqrt{2ab}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2ab}} = \frac{1}{\sqrt{2ab}}\operatorname{arctg}\frac{ax^2-b}{x\sqrt{2ab}}.$$

Если числа a и b разных знаков, то

$$I = \int \frac{du}{u^2-2|ab|} = \int \frac{du}{u^2-\left(\sqrt{2|ab|}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2|ab|}}\ln\left|\frac{u-x\sqrt{2|ab|}}{u+x\sqrt{2|ab|}}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2|ab|}}\ln\left|\frac{ax^2-x\sqrt{2|ab|}-b}{ax^2+x\sqrt{2|ab|}-b}\right|.$$

810. $\int x\sqrt{ax+b}\,dx$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$.

811. $\int \sin^2 x\,dx$. **812.** $\int \cos^2 x\,dx$.

813. $\int \cos^4 x\,dx$. **814.** $\int \mathrm{ch}^4 x\,dx$.

815. $\int \frac{dx}{\sqrt{(ax-b)(cx-d)}}$ ($ad - bc \neq 0$, a, c — положительные числа, b, d — произвольные действительные числа).

Решение. Применим подстановку $ax - b = fu^2$, где $f = (bc - ad)/c$.

Отсюда $x = \frac{b}{a} + \frac{f}{a}u^2$, $dx = 2\frac{1}{a}u\,du$, $cx - d = \frac{c}{a}f(1 + u^2)$.

Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(cx-d)}} = \frac{2f}{a}\int \frac{u\,du}{\sqrt{fu^2\frac{cf}{a}\left(1+u^2\right)}} =$$

$$= \frac{2}{a}\operatorname{sign} f\int \frac{du}{\sqrt{c/a}\sqrt{1+u^2}} = \frac{2}{\sqrt{ac}}\operatorname{sign} f\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{ac}}\operatorname{sign} f\,\mathrm{Arsh}\,u = \frac{2}{\sqrt{ac}}\operatorname{sign} f\,\mathrm{Arsh}\sqrt{\frac{ax-b}{f}}.$$

В качестве первообразной для функции $\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ можно также взять функцию $\ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right|$.

816. $\int x^2 \mathrm{sh}x\,dx$. **817.** $\int \arcsin x\,\frac{dx}{x^2}$.

818. $\int (\arcsin x)^2\,dx$. **819.** $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

820. $\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$. **821.** $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$.

822. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sin^2 x + 2\cos^2 x\right)^2}$ (замена $\operatorname{tg} x = t$).

Вычислить определенные интегралы:

823. $\displaystyle\int\limits_4^8 \sqrt{x-4}\,dx.$

824. $\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x\,dx.$

825. $\displaystyle\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2\alpha\,d\alpha.$

826. $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{x} \cos t\,dt.$

Найти предел суммы с помощью определенного интеграла:

827. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right).$

Р е ш е н и е . Указанную сумму представим в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}}.$$

Отсюда видно, что данная сумма является интегральной суммой для функции $y=\dfrac{1}{1+x}$ на [0, 1] при дроблении [0, 1] на равные части и при выборе точек $\xi_k=\dfrac{k}{n}$.

Функция $\dfrac{1}{1+x}$ на [0, 1] является непрерывной, а следовательно, она интегрируема по Риману. Но тогда любая интегральная сумма функции $\dfrac{1}{1+x}$ стремится к определенному интегралу от этой функции, т. е. к

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln\,(1+x)\Big|_0^1=\ln\,2.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln\,2.$$

828. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

829. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$.

830. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^p}{n^{p+1}}$.

831. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$, где $\varphi(x)$ — непрерывная (или просто интегрируемая) функция на $[a, b]$.

Вычислить несобственные интегралы:

832. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^3}$.

833. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

834. $\int\limits_a^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ $(a > 1,\ a > 0)$.

835. $\int\limits_0^{\infty}e^{-x}\cos\,ax\,dx$.

Исследовать сходимость несобственных интегралов.

836. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}\left(1+x^2\right)^{\beta}}$ $(a \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0)$.

837. $\int\limits_1^{\infty}\frac{x^{\alpha}\operatorname{arctg}x}{1+x^{\beta}}\,dx$ $(\beta \geqslant 0)$.

Глава 3

Вычислить определители:

838. $\begin{vmatrix} a^2 & 1 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & b^2 & 1 \end{vmatrix}$.

839. $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix}$.

840. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$.

841. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$.

842. $\begin{vmatrix} x+y & y & x \\ x & x+y & y \\ y & y & x+y \end{vmatrix}$.

843. Доказать равенство

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

844. Найти x из уравнения

$$\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 0.$$

Решить системы уравнений:

845. $\begin{cases} x+y+z=a, \\ x+(1+a)y+z=2a, \\ x+y+(1+a)z=0. \end{cases}$ **846.** $\begin{cases} 5x+4z+2t=3, \\ x-y+2z+t=1, \\ 4x+y+2z=1, \\ x+y+z+t=0. \end{cases}$

847. $\begin{cases} x-4y+2z=1, \\ 2x+3y-z=13, \\ 33x-77y-41z=88. \end{cases}$ **848.** $\begin{cases} x+2y+3z=5, \\ 2x-y-z=1, \\ x+3y+4z=6. \end{cases}$

849. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

850. Вычислить произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

851. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

852. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Глава 4

Определить области существования функций:

853. $u = 1\big/\sqrt{x^2+y^2-1}$. **854.** $u = \sqrt{\sin\left(x^2+y^2\right)}$.

855. $u = \ln\ (x + y^2)$. **856.** $u = 1\Big/\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1}$.

Найти линии уровня функций:

857. $z = x^2 + y^2$. **858.** $z = 1/(x^2 + 2y^2)$.

859. $z = y - 2x^2$.

860. Найти расстояние между точками плоскости (1, 7) и (4, 3).

861. Найти предел последовательности точек

$M^k = \left(\frac{k}{1+k},\ \left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

862. Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 1+x+y, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

Выяснить, по каким множествам существуют пределы в точках $(x_0, 0)$, где x_0 — любое действительное число.

863. По каким направлениям φ существует конечный предел $\lim\limits_{\rho\to+0}\exp\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$, если $x=\rho\cos\varphi$, $y==\rho\sin\varphi$?

864. По какому множеству E существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{y}{\sin y}$?

865. Исследовать на равномерную непрерывность в плоскости R_2 функцию $z=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$.

Найти частные производные первого и второго порядков от следующих функций:

866. $u=x^3+y^3-3x^2y^2$.

867. $u=x\sin(x+y^2)$.

868. Проверить равенство $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$, если:

а) $u=x^2-2xy-3y^2$;

б) $u=\arccos\sqrt{x/y}$.

869. Существует ли $f''_{xy}(0, 0)$, если

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0?\end{cases}$$

870. Функция $f(x, y, z)$ называется *однородной степени* (или *измерения*) m, если $\forall\ t>0$ $f(tx, ty, tz)=t^m f(x, y, z)$.

Доказать, что дифференцируемая функция f, удовлетворяющая уравнению

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=mf,$$

обязательно является однородной функцией степени m.

Найти дифференциалы первого и второго порядков от функций:

871. $u = xy + y^2$. **872.** $u = xy + yz + xz$.

873. Доказать, что если $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то $d^2u \geqslant 0$.

Написать уравнения касательной плоскости и нормали в указанных точках к следующим поверхностям:

874. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ в точке $M_0=(3, 4, 12)$.

875. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ в ее точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ (т. е. $ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 = 1$).

876. Данное положительное число p разложить на три положительных сомножителя так, чтобы сумма их обратных величин была наименьшей.

877. Разложить данное положительное число p на три положительных сомножителя ($p = xyz$) так, чтобы сумма $x^2 + y^2 + z^2$ была наименьшей.

878. Найти прямоугольный параллелепипед данного объема V, имеющий наименьшую площадь поверхности.

879. Пусть дан параболоид вращения

$$z = 4 - x^2 - y^2.$$

Вписать в параболоид (в первом октанте) прямоугольный параллелепипед наибольшего объема, если:

а) нижнее его основание находится на плоскости xOy с вершиной в начале координат;

б) грани параллелепипеда параллельны координатным плоскостям;

в) верхнее основание имеет одну вершину на поверхности данного параллелепипеда.

880. Пусть дан эллиптический параболоид

$$z = 6 - x^2 - \frac{1}{4}y^2.$$

Вписать в этот параболоид (в первом октанте) прямоугольный параллелепипед наибольшего объема. Расположение параллелепипеда такое же, как в задаче *879*.

881. Найти прямоугольник данного периметра $2p$, который вращением вокруг своего основания образует тело наибольшего объема.

882. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную осями координат и кривой

$$y = b^2 - a^2x^2 \ (0 \leqslant x \leqslant b/a).$$

Найти криволинейную трапецию указанного вида с $b^2 + \frac{b}{a} = p$ (p — заданное число), которая при вращении около оси Ox образует тело наибольшего объема.

883. Функцию x^2 на $[1, 3]$ приближенно заменить линейной функцией $ax + b$ так, чтобы абсолютное отклонение

$$\Delta = \max_{1 \leqslant x \leqslant 3}|x^2 - ax - b|$$

было наименьшим.

Решение. Найдем наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - ax - b$ на $[1, 3]$. Имеем $f(1) = 1 - a - b$, $f(3) = 9 - 3a - b$; $f'(x) = 2x - a = 0$ при $x = \frac{a}{2}$ $(2 \leqslant a \leqslant 6)$; $f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} - b$. Ясно, что $\Delta = \max\{|f(1)|, |f(3)|, |f(a/2)|\}$. Так как нам необходимо минимизировать величину Δ в зависимости от a и b, то подберем числа a и b так, чтобы $f(1) = f(3)$, т. е.

$$1 - a - b = 9 - 3a - b, \ a = 4.$$

Теперь

$$\Delta = \max\{|3 + b|, |4 + b|\}.$$

Отсюда видно, что минимальное значение Δ будет тогда, когда $|3 + b| = |4 + b|$, т. е. при $b = -3{,}5$ ($\Delta_{min} = 1/2$).

Итак, линейная функция $y = 4x - 3{,}5$ приближает функцию $y = x^2$ на $[1, 3]$ наилучшим образом среди всех линейных функций вида $y = ax + b$.

884. Решить задачу, подобную задаче *883*, для функции x^3 на $[1, 4]$.

885. Доказать, что переменная

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

имеет предел.

Решение. Вначале докажем неравенство

$$x + \ln\ (1 - x) \leqslant 0 \qquad (0 \leqslant x < 1).$$

В самом деле, функция $\varphi(x) = x + \ln\ (1 - x)$ имеет производную $\varphi'(x) = \dfrac{-x}{1-x} \leqslant 0 \quad (0 \leqslant x < 1\ )$. Поэтому функция $\varphi(x)$ убывает и так как $\varphi(0) = 0$, то $\varphi(x) \leqslant 0 \quad (0 \leqslant x < 1)$.

На основании доказанного неравенства последовательность $\{x_n\}$ не возрастающая:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} + \ln\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant 0$$

$$(n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Далее (см. задачу ***376***), последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу нулем:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \geqslant \ln\ (n+1) - \ln\ n = \ln\frac{n+1}{n} > 0\ \forall n.$$

Поэтому на основании теоремы о существовании предела монотонной ограниченной последовательности заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right] = C$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = C + \ln n + \alpha_n,$$

где $\alpha_n \to 0$.

Предел C называют *постоянной Эйлера* ($C = 0{,}577216\ldots$).

Найти суммы рядов:

886. $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \ldots$

887. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих рядов:

888. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos x^n}{n^2}$.

889. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$.

890. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость гармонического ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Решение. При всяком $n \geqslant 1$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\right|=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Поэтому на основании критерия Коши заключаем, что гармонический ряд расходится.

891. Доказать, что ряд $\sum_{k=2}^{\infty}k^{-\alpha}\ln^{-\beta}k$:

а) сходится при $\alpha > 1$ и любом β;

б) сходится при $\alpha = 1$ и $\beta > 1$;

в) расходится при $\alpha < 1$ и любом β;

г) расходится при $\alpha = 1$ и $\beta \leqslant 1$.

Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость рядов на указанных множествах:

892. $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$ $(-\infty < x < \infty)$.

893. $\sum_{1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ $(x \geqslant 0)$. Указание. $\frac{x}{1+n^4x^2}=$

$$=\frac{\sqrt{n^4x^2}}{n^2(1+n^4x^2)}\leqslant\frac{\sqrt{1+n^4x^2}}{n^2(1+n^4x^2)}\leqslant\frac{1}{n^2\sqrt{1+n^4x^2}}\leqslant\frac{1}{n^2}.$$

894. $\sum_{1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}x}{1+n^{\beta}x^2}$ $(|x| < \infty,\ \beta > 2(\alpha+1),\ \alpha \geqslant 0)$.

Указание. $n^{\alpha}x\left(1+n^{\beta}x^{2}\right)^{-1} \leqslant \left(n^{\beta}x^{2}\right)^{1/2} n^{\alpha}\left(1+n^{\beta}x^{2}\right)^{-1} \times n^{-\beta/2} \leqslant$

$\leqslant n^{\alpha-\frac{\beta}{2}}\left(1+n^{\beta}x^{2}\right)^{-1/2} \leqslant n^{\alpha-\frac{\beta}{2}}.$

895. $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}x^{q}}{1+n^{\beta}x^{p}}$ $(x \geqslant 0, \alpha \geqslant 0, \beta > 0, p > 0, q > 0, q \leqslant p,$ $\beta > \frac{p}{q}(1+\alpha))$.

Указание. $n^{\alpha}x^{q}\left(1+n^{\beta}x^{p}\right)^{-1} = \left(n^{\beta}x^{p}\right)^{\frac{q}{p}} n^{\alpha}\left(1+n^{\beta}x^{p}\right)^{-1} n^{-\beta\frac{q}{p}}$.

896. $\sum\limits_{1}^{\infty} x^{2}e^{-nx}$ $(0 \leqslant x < \infty)$.

Решение. Для того чтобы воспользоваться признаком Вейерштрасса, мы должны найти точную верхнюю границу функции $y(x) = x^{2}e^{-nx} \geqslant 0$ на $[0, \infty)$. Ясно, что $y(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Найдем стационарные точки функции $y(x)$. Имеем $y'(x) = (2x - nx^{2})e^{-nx} = 0$ при $x = 0$, $x = \frac{2}{n}$; $y\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^{2}}e^{-2}$.

Поэтому

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant\infty} y(x) = \frac{4}{n^{2}}e^{-2}.$$

Ряд $4\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}e^{-2}$ сходится, поэтому ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} x^{2}e^{-nx}$ сходится равномерно.

897. $\sum\limits_{1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{2x}{n^{3}+x^{2}}$ $(|x| < \infty)$.

Разложить в ряд Тейлора по степеням x следующие функции:

898. $\exp(-x^{2})$. **899.** $\exp(x^{2})$.

900. а) $\cos 2x$; б) $\cos x^{2}$; в) $\frac{x^{10}}{1-x}$.

Глава 6

Составить дифференциальное уравнение для семейства кривых:

901. а) $y = cx^2$, б) $y = cx^n$, n — натуральное.

902. $y = x^n + cx$.

903. $x^2 + ay^2 = 2cx$, где a — произвольное фиксированное число.

Найти частное решение дифференциальных уравнений при начальном условии $y(2) = 4$:

904. $xy' - y = 0$. **905.** $xy' + y = 0$.

906. $x^2y' + y = 0$. **907.** $2yx^2\,dy = (1 + x^2)\,dx$.

Решить уравнения Бернулли:

908. $y' = \frac{y^2}{x} - \frac{y}{x}$ при $y(-1) = 1$. **909.** $y' + xy = xy^3$.

910. Определить кривую $y = f(x)$, проходящую через точку $A = (a, a)$, если расстояние от начала координат до касательной к кривой в точке $(x, f(x))$ равно модулю абсциссы этой точки.

Пользуясь методом Ньютона (методом касательных), определить с указанной точностью корни следующих уравнений:

911. $f(x) \equiv x^2 + \frac{1}{x^2} - 10x = 0$ с точностью до 0,001.

912. $f(x) \equiv x + e^x = 0$ с точностью до 0,00001.

Решить уравнения:

913. $y^{(4)} - 3y'' - 4y = 0$. **914.** $y''' - 3y'' + 4y = 0$.

915. Найти интегральную кривую уравнения $y'' - y = 0$, касающуюся в точке (0, 1) прямой $y = 2x + 1$.

Решить неоднородные уравнения:

916. $y'' - y = e^x$. **917.** $y''' - 3y'' + 4y = 2e^{-x}$.

918. $y'' + 5y' + 6y = e^{-3x} + e^{-2x}$.

Решить методом вариации постоянных следующие уравнения:

919. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$. **920.** $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Решить системы уравнений:

921. $\begin{cases} \dot{x} + y = 0, \\ \dot{x} - \dot{y} - 3x - y = 0. \end{cases}$

922. $\begin{cases} \dot{x} + 3x + y = 0, \\ \dot{y} - x + y = 0. \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

923. $\begin{cases} x'' - 4x' + 4x - y = 0, \\ y'' + 4y' + 4y - a^2 x = 0, \end{cases}$ $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a > 0$.

Решение. Будем решать систему путем сведения ее к одному дифференциальному уравнению относительно одной из функций, скажем, $x(t)$. Дифференцируя первое уравнение системы два раза и подставляя значения y, y'', y''' во второе уравнение, получаем $x^{(4)} - 8x'' + (16 - a^2)x = 0$.

Характеристическое уравнение для данного уравнения имеет вид $r^4 - 8r^2 + 16 - a^2 = 0$. Решая это уравнение, находим $r_{1,2} = \pm\sqrt{4 + a}$, $r_{3,4} = \pm\sqrt{4 - a}$.

Если $0 < a < 4$, то все корни характеристического уравнения действительны и различны, поэтому общее решение $x(t) = c_1 e^{-t\sqrt{4+a}} + c_2 e^{t\sqrt{4+a}} + c_3 e^{-t\sqrt{4-a}} + c_4 e^{t\sqrt{4-a}}$.

Если $a = 4$, то $r_{1,2} = \pm\sqrt{8}$, $r_3 = r_4 = 0$ и $x(t) = c_1 e^{-\sqrt{8}t} + c_2 e^{\sqrt{8}t} + c_3 + c_4 t$.

При $a > 4$ корни $r_{3,4} = \pm\sqrt{4-a}$ комплексные, $r_3 = i\sqrt{a-4}$, $r_4 = -i\sqrt{a-4}$. В этом случае $x(t) = c_1 e^{\sqrt{4+a}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{4+a}\,t} + c_3 \cos t\sqrt{a-4} + c_4 \sin t\sqrt{a-4}$. Функцию $y(t)$ находим из первого уравнения системы:

$$y(t) = x'' - 4x' + 4x.$$

Глава 7

924. Исследовать на непрерывность функцию

$$F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)dx}{x^2+y^2},$$

где $f(x)$ непрерывна и положительна на $[0, 1]$.

925. Доказать, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)]\, dt = f(x) - f(a),$$

если $f(x)$ непрерывна на $[A, B]$, где $A < a < x < B$.

926. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл

$$F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(y \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\, dx.$$

Решение. Функция $f(x, y)$, стоящая под знаком интеграла, непрерывна на множестве $D = \{0 \leqslant x \leqslant \pi/2, -a \leqslant y \leqslant a\}$ при всяком конечном $a > 0$. Частная производная

$$f'_y = \frac{1}{1+y^2 \operatorname{tg}^2 x}$$

непрерывна в D. Поэтому законно дифференцирование под знаком интеграла:

$$F'(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+y^2 \operatorname{tg}^2 x}.$$

Вычислим последний интеграл. Полагая $u = \operatorname{tg} x$, имеем

$$F'(y) = \int_0^\infty \frac{du}{(1+y^2u^2)(1+u^2)} = \frac{1}{y^2-1}\int_0^\infty \left[\frac{y^2}{1+y^2u^2} - \frac{1}{1+u^2}\right]du =$$

$$= \frac{y^2}{y^2-1}\int_0^\infty \frac{du}{1+y^2u^2} - \frac{\pi}{2(y^2-1)}.$$

Пусть $y > 0$, тогда, полагая $u = \frac{v}{y}$, имеем

$$\int_0^\infty \frac{du}{1+y^2u^2} = \frac{1}{y}\int_0^\infty \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{y}\operatorname{arctg} v\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2y}.$$

Если $y < 0$, то

$$\int_0^\infty \frac{du}{1+y^2u^2} = \frac{1}{y}\int_0^{-\infty} \frac{du}{1+v^2} = -\frac{\pi}{2y}.$$

Итак,

$$F'(y) = \frac{\pi}{2(y+1)} \quad (y > 0), \qquad F'(y) = \frac{\pi}{2(y-1)} \quad (y < 0).$$

Учитывая, что $F(0) = 0$, после интегрирования получаем

$$F(y) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} y \ln(1 + |y|).$$

927. Пусть $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ — гамма-функция,

$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ — бета-функция.

Доказать, что

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \mathrm{B}(x, y).$$

Доказательство. Имеем

$$\Gamma(x)\,\Gamma(y) = \int_0^\infty\int_0^\infty t^{x-1}\tau^{y-1}e^{-t-\tau}\,dt\,d\tau.$$

Сделаем замену переменных

$$t = u(1-v),\ \tau = u\cdot v.$$

Якобиан данного преобразования $\frac{D(t,\tau)}{D(u,v)} = u > 0$.

Далее, $t+\tau = u$ $(0 < u < \infty)$, $v = \dfrac{\tau}{t+\tau}$ $(0 \leqslant v \leqslant 1)$.

Поэтому

$$\Gamma(x)\,\Gamma(y) = \int_0^\infty\int_0^1 u^{x-1}(1-v)^{x-1}\,u^{y-1}v^{y-1}e^{-u}\,u\,du\,dv =$$

$$= \int_0^\infty u^{x+y-1}\,e^{-u}\,du \int_0^1 v^{y-1}(1-v)^{x-1}\,dv = \Gamma(x+y)\,\mathrm{B}(y, x) =$$

$$= \Gamma(x+y)\,\mathrm{B}(x, y),$$

так как легко проверить, что $\mathrm{B}(x, y) = \mathrm{B}(y, x)$.

928. Доказать, что

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Доказательство. Для гамма-функции мы установили соотношение (см. [3], § 2.15)

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

Применяя это равенство, получаем

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) = \ldots = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(n-\frac{2n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Далее,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\,dt = (t = u^2) = \int_0^\infty 2e^{-u^2}du = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}\ .$$

Подставляя это значение, получаем требуемое равенство.

Вычислить интегралы:

929. $\iint\limits_D xy^2\,dx\,dy$, если область D ограничена параболой $y^2 = 4x$ и прямой $x = 1$.

930. $\iint\limits_D |xy|dx\,dy$, где D — круг радиусом 4 с центром в начале координат.

931. $\iiint\limits_D xyz\,dx\,dy\,dz$, где D — область, ограниченная поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x^2 + y^2 + + z^2 = a^2$.

932. $\iiint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}\, dx\,dy\,dz$, где D — внутренность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

933. Найти площадь, ограниченную кривыми $y^2 = p^2 + + 2px$, $y^2 = p^2 - 2px$ $(p > 0)$.

934. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = x^2 + y^2, \quad y = x^2, \quad y = 1, \quad z = 0.$$

935. Найти координаты x_0, y_0 центра масс однородной пластины, ограниченной кривыми $x^2 = ay$, $y - x = 2a$ $(a > 0)$.

Глава 8

Вычислить криволинейные интегралы:

936. $\int\limits_c (x^2 + y^2)\,ds$, где c — кривая $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

937. $\int\limits_c xy\,ds$, где c — дуга гиперболы $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = a\,\mathrm{sh}\,t$ $(0 \leqslant t \leqslant t_0)$.

938. $\int\limits_c (x^2 + a^2y^2)ds$, где c — окружность $x = \cos t$, $y = \sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

939. Найти длину дуги пространственной кривой Г

$$x = at,\ y = \sqrt{\frac{3}{2}ab}\,t^2,\ z = bt^3 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

от точки $(0, 0, 0)$ до точки $A = (a, \sqrt{\frac{3}{2}ab}, b)$.

Решение. Из определения криволинейного интеграла (см. [3], § 3.2) видно, что в случае, если подынтегральная функция равна 1, криволинейный интеграл равен длине дуги кривой, вдоль которой вычисляется этот криволинейный интеграл. Поэтому

$$|\Gamma| = \int_{\Gamma} ds = \int_0^1 \sqrt{a^2 + 6abt^2 + 9b^2t^4}\, dt = \int_0^1 (a + 3bt^2)\, dt = a + b.$$

940. Найти длину кривой $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$, $z = e^{-t}$ $(0 < t < \infty)$.

941. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{\Gamma} (x\, dy - y\, dx),$$

где: а) Γ — отрезок прямой, соединяющей точки $O = (0, 0)$ и $A = (2, 4)$; б) Γ — дуга параболы $y = x^2$, соединяющая точки O и A.

Вычислить криволинейные интегралы, предварительно убедившись, что подынтегральное выражение есть полный дифференциал:

942. $\displaystyle\int_{(-1,2)}^{(2,4)} (x\, dy + y\, dx)$. **943.** $\displaystyle\int_{(2,1)}^{(0,2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$.

944. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(dx+dy)$, где $f(t)$ — дифференцируемая функция.

945. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(a,\pi/4)} e^x (\cos y\, dx - \sin y\, dy)$.

946. Вывести формулы:

а) $\operatorname{grad}(c_1 f + c_2 g) = c_1 \operatorname{grad} f + c_2 \operatorname{grad} g$, где c_1, c_2 — постоянные;

б) $\operatorname{grad}\left(\dfrac{f}{\varphi}\right) = \dfrac{\varphi \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} \varphi}{\varphi^2}$ $(\varphi(x) \neq 0, x = (x_1, \ldots, x_n))$;

в) $\operatorname{grad} \psi[f] = \psi'(f) \operatorname{grad} f$, где $\psi(t)$ — дифференцируемая функция одного переменного.

947. Найти $grad\ U(x, y, z)$, если: а) $U = r$; б) $U = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, f — дифференцируемая функция.

948. Найти величину и направление градиента поля
$$U(x, y) = ax^2 + by^2 - d\,xy \quad (a > 0,\ b > 0,\ d > 0)$$
в точке $A = (2, 1)$.

Определить, в каких точках grad U равен нулю и в каких точках он перпендикулярен оси Oy.

949. Вывести формулы:

а) $div\ (c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2) = c_1\, div\boldsymbol{a}_1 + c_2\, div\boldsymbol{a}_2$, где c_1, c_2 — постоянные:

б) $div\ (f \cdot \boldsymbol{c}) = grad\ f \cdot \boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор.

950. Вычислить $div\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$.

951. Вывести формулы:

а) $\mathrm{rot}\ (c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2) = c_1\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{a}_1 + c_2\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{a}_2$, где c_1, c_2 — постоянные;

б) $\mathrm{rot}\ (U\boldsymbol{c}) = grad\ U \times \boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор.

952. Вычислить rot $\boldsymbol{r}$ и rot $r\boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ — постоянный вектор.

953. Выяснить, имеет ли данное векторное поле потенциал U, и найти U, если потенциал существует:

а) $\boldsymbol{a} = (5x^2y - 4xy)\boldsymbol{i} + (3x^2 - 2y)\boldsymbol{j}$;

б) $\boldsymbol{a} = (y + z,\ x + z,\ x + y)$.

954. Какие из уравнений являются уравнениями в полных дифференциалах:

а) $(2x^2 + y)\, dx + (3x + 4y)\, dy = 0$;

б) $(ax^2 + by^2)\, dx + (2cyx + y^2)\, dy = 0$?

Решить уравнения:

955. $(x + y)\, dx + (x + 3y)\, dy = 0$.

956. $(x^2 + y^2 + 4x)\, dx + 2xy\, dy = 0$.

957. $(y+z)\,dx+(x+2z)\,dy+(x+2y)\,dz=0.$

Применяя формулу Грина, вычислить криволинейные интегралы:

958. $\int\limits_{\Gamma}[(cx+y)\,dx-(x+dy)\,dy]$, где Γ — эллипс $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, c, d — произвольные числа.

959. $\int\limits_{\Gamma}[(x+cy)\,dx+(y+dx)\,dy]$, где Γ — эллипс (см. задачу *958*), c, d — произвольные числа.

960. Найти интеграл $\int\limits_{AmB}[y^2\,dx+(1+2xy)\,dy]$, если точки A и B лежат на оси Ox, а D — область, ограниченная путем интегрирования AmB и отрезком AB.

961. Найти площадь S фигуры, ограниченной кривой C: $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=1$ $(a>0,\ b>0,\ n>0)$ и осями координат.

Решение. Легко видеть, что $x=a\cos^{2/n}\varphi$, $y=b\sin^{2/n}\varphi$ $(0<\varphi<\pi/2)$ есть параметрические уравнения кривой C.

Поэтому

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}(x\,dy-y\,dx),$$

где Γ — контур, состоящий из кривой C и отрезков осей координат.

Далее,

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{C}(x\,dy-y\,dx)+\frac{1}{2}\int\limits_{b}^{0}(0dy-y\cdot 0)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{a}(x\cdot 0-0dx)=\frac{1}{2}\int\limits_{C}(x\,dy-ydx)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(2\frac{ab}{n}\cdot\cos^{\frac{2}{n}+1}\varphi\cdot\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi+\frac{2ab}{n}\sin^{\frac{2}{n}+1}\varphi\cdot\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{ab}{n}\int\limits_{0}^{\pi/2}[\cos\varphi\cdot\sin\varphi]^{\frac{2}{n}-1}d\varphi\,.$$

Сделаем замену переменного: $\sin\varphi = z$, $d\varphi = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$.

Тогда

$$S = \frac{ab}{n}\int_0^1 z^{\frac{2}{n}-1}\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{n}-1}dz = (z^2 = t) = \frac{ab}{2\cdot n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{n}-1}dt =$$

$$= \frac{ab}{2n}B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{ab}{2n}\frac{\Gamma^2(1/n)}{\Gamma(2/n)}$$

(см. задачи **927**, **928**).

Заметим, что при $n = 2$ мы получаем четвертую часть площади эллипса ($\pi ab/4$).

Глава 9

Разложить в ряды Фурье следующие функции:

962. $f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi < x \leqslant 0, \\ bx, & 0 \leqslant x < \pi, \end{cases}$ где a, b — постоянные.

963. $f(x) = x\sin x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

964. Периодическую функцию $f(x) = |\sin\ x|$. Найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots$

965. Периодическую функцию $f(x) = |\cos\ x|$.

966. Найти скалярное произведение функций

$$f(x) = \sin 2x,\ \varphi(x) = \cos x \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

967. Найти норму функции $f(x) = 1 - x^2$ $\quad(0 \leqslant x \leqslant 2)$.

Исследовать на равномерную и среднеквадратическую сходимость последовательности функций:

968. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ $\quad(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

969. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ $\quad(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

Решение. Легко видеть, что последовательность $f_n(x)$ сходится к функции

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1/2, & x = 1. \end{cases}$$

Сходимость будет неравномерная, так как

$$\sup_{0 \leqslant x < 1} f_n = \frac{1}{2} \not\to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Покажем, что данная последовательность сходится к функции $\psi(x)$ в смысле среднеквадратического. Так как значение интеграла не зависит от значения функции в одной точке, то достаточно показать, что $f_n(x)$ сходится к нулю в смысле среднеквадратического:

$$\|f_n(x) - 0\| = \left(\int_0^1 \left| \frac{x^n}{1+x^n} \right|^2 dx \right)^{1/2} = (x^n = z) =$$

$$= \left(\int_0^1 \frac{z^{\frac{1}{n}+1} dz}{n(1+z)^2} \right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int_0^1 \frac{dz}{(1+z)^2} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \to 0,\ n \to \infty.$$

970. Найти функцию $\varphi(x)$, если:

а) $\int_0^\infty \varphi(y) \cos xy\, dy = \frac{1}{1+x^2}$;

б) $\int_0^\infty \varphi(y) \cos xy\, dy = \exp(-x^2)$.

Глава 10

971. Решить методом Фурье уравнение поперечных колебаний балки

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l, \quad t > 0)$$

при условиях

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0,$$

которые выражают тот факт, что оба конца балки закреплены;

$$u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = F(x). \tag{1}$$

Решение. Будем искать решение в виде

$$u(x,\ t) = T(t) \cdot X(x).$$

Подставляя эту функцию в уравнение, получаем

$$\frac{X^{(4)}}{X} = -\frac{T^{(4)}}{T} = \lambda^4 > 0.$$

Таким образом, для функций $X(x)$ и $T(t)$ мы получили обыкновенные дифференциальные уравнения.

Для уравнения

$$X^{(4)} - l^4 X = 0 \tag{2}$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$r^4 = \lambda^4.$$

Решая это уравнение, получаем четыре различных корня $r_1 = -\lambda$, $r_2 = \lambda$, $r_3 = -i\lambda$ и $r_4 = i\lambda$. Поэтому общее решение уравнения (2) запишется в виде

$$X(x) = a_1 \operatorname{ch} \lambda x + a_2 \operatorname{sh} \lambda x + b_1 \cos \lambda x + b_2 \sin \lambda x.$$

Исходя из условий задачи, функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям

$$X(0) = X(l) = \frac{\partial X(0)}{\partial x} = \frac{\partial X(l)}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Используя (3) для $x = 0$, получим

$$b_1 = -a_1, \quad b_2 = -a_2.$$

Итак,

$$X(x) = a_1 (\operatorname{ch} \lambda x - \cos \lambda x) + a_2 (\operatorname{sh} \lambda x - \sin \lambda x).$$

Далее, используя (3) при $x = l$, получим

$$\left.\begin{aligned} a_1(\operatorname{ch}\lambda l - \cos\lambda l) + a_2(\operatorname{sh}\lambda l - \sin\lambda l) = 0,\\ \lambda a_1(\operatorname{sh}\lambda l + \sin\lambda l) + \lambda a_2(\operatorname{ch}\lambda l - \cos\lambda l) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Таким образом, для определения коэффициентов a_1, a_2 мы получили линейную однородную систему. Чтобы система (4) имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы определитель системы равнялся нулю:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch}\lambda l-\cos\lambda l & \operatorname{sh}\lambda l-\sin\lambda l \\ \lambda(\operatorname{sh}\lambda l+\sin\lambda l) & \lambda(\operatorname{ch}\lambda l-\cos\lambda l) \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\operatorname{ch}\lambda l \cdot \cos\ \lambda l = 1. \tag{5}$$

Уравнение (5) имеет счетное число положительных решений

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n,\ \ldots$$

Теперь для определения коэффициентов a_1, a_2 достаточно рассмотреть одно из уравнений системы (4). Считая a_1 произвольным, находим a_2 (при $\lambda = \lambda_n$). Тогда значению λ_n будет соответствовать функция

$$X_n(x) = (\operatorname{sh}\lambda_n l - \sin\ \lambda_n l)\,(\operatorname{ch}\lambda_n x - \cos\lambda_n x) - \\ - (\operatorname{ch}\lambda_n l - \cos\lambda_n l)\,(\operatorname{sh}\lambda_n x - \sin\lambda_n x). \tag{6}$$

Итак, числа λ_n являются собственными значениями, а $X_n(x)$ — собственными функциями (соответствующими λ_n) краевой задачи (2), (3). Функции $X_1(x)$, ..., $X_n(x)$, ... образуют ортогональную систему на $(0, l)$. В самом деле,

$$\left.\begin{aligned} X_n^{(4)} - \lambda_n^4 X_n = 0, \\ X_k^{(4)} - \lambda_k^4 X_n = 0. \end{aligned}\right\}$$

Умножая первое уравнение на X_k, а второе — на X_n и вычитая из первого уравнения второе, имеем

$$X_n^{(4)}X_k - X_k^{(4)}X_n + \left(\lambda_n^4 - \lambda_k^4\right)X_k X_n = 0$$

или

$$\frac{d}{dx}\left[X_k X_n^{(3)} - X_n X_k^{(3)}\right] - \frac{d}{dx}\left[X_k' X_n'' - X_n' X_k''\right] + \left(\lambda_n^4 - \lambda_k^4\right)X_k X_n = 0.$$

Интегрируя это уравнение на $[0, l]$, в силу условий (3) получим

$$\int_0^l X_k(x)\, X_n(x)\, dx = 0 \qquad (k \neq n).$$

Вычислим еще интеграл от квадрата функции $X_n(x)$:

$$\int_0^l X_n^2(x)dx = \lambda_n^{-4}\int_0^l X_n(x)X_n^{(4)}(x)dx =$$

$$= \lambda_n^{-4}\left[X_n(x)X'''(x)|_0^l - \int_0^l X_n'(x)X_n'''(x)dx\right] = -\lambda_n^{-4}\int_0^l X_n'\cdot X_n'''dx =$$

$$= -\lambda_n^{-4}\left[X_n'(x)X''(x)|_0^l - \int_0^l [X_n''(x)]^2dx\right] = \lambda_n^{-4}\int_0^l [X_n''(x)]^2dx.$$

Далее,

$$\int_0^l [X_n''(x)]^2dx = \left[x[X_n''(x)]^2|_0^l - 2\int_0^l xX_n''(x)X_n'''(x)dx\right] =$$

$$= l[X_n''(l)]^2 - 2\int_l^2 xX_n''(x)X_n'''(x)dx.$$

Вычислим интеграл:

$$\int_0^l xX_n''(x)X_n'''(x)dx =$$

$$= \int_0^l \left\{\frac{d}{dx}[xX_n'(x)X_n'''(x)] - X_n'(x)X_n'''(x) - xX_n'(x)X_n^{(4)}x\right\}dx =$$

$$= -\int_0^l X_n'X_n'''dx - \lambda_n^4\int_0^l xX_n'X_ndx =$$

$$= -\int_0^l\left\{\frac{d}{dx}[X_n'X_n''] - (X_n'')^2\right\}dx - \lambda_n^4\int_0^l xX_nX_n'dx =$$

$$= \int_0^l [X_n'']^2dx - \lambda_n^4\int_0^l xX_nX_n'dx.$$

Далее,

$$\int_0^l xX_nX_n'dx = x[X_n]^2|_0^l - \int_0^l X_n[X_n + xX_n']dx =$$

$$= -\int_0^l [X_n]^2dx - \int_0^l xX_nX_n'dx,$$

откуда

$$\int_0^l X_nX_n'dx = -\frac{1}{2}\int_0^l [X_n]^2dx.$$

Теперь

$$\int_0^l [X_n]^2 dx = l\lambda_n^{-4}[X_n''(l)]^2 - 2\lambda_n^{-4}\left[\int_0^l [X_n''(x)]^2 dx + \frac{1}{2}\lambda_n^4 \int_0^l [X_n]^2 dx\right] =$$

$$= l\lambda_n^{-4}[X_n''(l)]^2 - 3\int_0^l [X_n(x)]^2 dx.$$

Отсюда

$$\int_0^l [X_n(x)]^2 dx = \frac{l}{4}\lambda_n^{-4}[X_n''(l)]^2.$$

Продолжим решение исходной задачи. При данном $\lambda = \lambda_n$ решение уравнения

$$T''(t) = -\lambda_n^4 T(t)$$

запишется в виде

$$T_n(t) = c_n \cos\lambda_n^2 t + d_n \sin\lambda_n^2 t \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Общее решение исходной задачи можно теперь записать так:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \cos\lambda_n^2 t + d_n \sin\lambda_n^2 t\right) X_n(x).$$

Коэффициенты c_n и d_n находим из условий (1):

$$c_n = \frac{\int_0^l f(x)X_n(x)dx}{\int_0^l [X_n(x)]^2 dx} = \frac{4\lambda_n^4 \int_0^l f(x)X_n(x)dx}{l[X_n''(l)]^2},$$

$$d_n = \frac{\int_0^l F(x)X_n(x)dx}{\lambda_n^2 \int_0^l [X_n(x)]^2 dx} = \frac{4\lambda_n^2 \int_0^l F(x)X_n(x)dx}{l\cdot[X_n''(l)]^2}.$$

Естественно, мы предполагали, что функции $f(x)$ и $F(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Стеклова ([3], § 5.10).

Отметим, что

$$[X_n''(l)]^2 = 4\lambda_n^4(\operatorname{sh}\lambda_n l - \sin\lambda_n l)^2.$$

972. Решить задачу *971* при условии, что

$$f(x) = 2X_2(x) + 3X_3(x), \qquad F(x) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l).$$

973. Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi, \quad t>0)$$

при начальном условии

$$u(x,\,0)=f(x)=ax \quad (-\pi<x<\pi)$$

и граничном условии

$$u(\pm\pi,\,t)=0.$$

Глава 11

974. Найти действительную и мнимую части комплексных чисел:

а) $z=(2+3i)(3-2i)$; б) $z=(a+bi)(c+di)$;

в) $z=(a+bi)^3$; г) $z=\frac{2+3i}{1+2i}$.

975. Построить множество точек z, удовлетворяющих неравенствам:

а) $|z|<3$; б) $|z-i|<1$;

в) $|z|<3,\ \frac{\pi}{2}<\arg\ z<\pi$; г) $|z|=3$;

д) $2 \leqslant |z-i| \leqslant 3$.

976. Найти главное значение логарифма:

а) $\ln\ (-2)$; б) $\ln\ (1+i)$; в) $\ln\ (x+yi)$.

977. Найти суммы:

а) $\sin\ x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$;

б) $\frac{1}{2}+\cos\ x+\cos\ 2x+\ldots+\cos nx$;

в) $\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos\ (2n-1)x$;

г) $\sin x+\sin 3x+\ldots+\sin\ (2n-1)x$.

978. Пусть $f(z)=u(x,\,y)+iv(x,\,y)$ — аналитическая функция. Проверить, что имеет место равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2=4|f'(z)|^2.$$

979. Найти сумму ряда

$$S(z) = 1 + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{12}}{12!} + \ldots$$

Решение. Данный ряд сходится равномерно на всей комплексной плоскости. Этот ряд можно почленно дифференцировать сколько угодно раз, и все получающиеся ряды снова будут равномерно сходящимися.

Имеем:

$$S'(z) = \frac{z^3}{3!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^{11}}{11!} + \ldots,\ S'(0) = 0;$$

$$S''(z) = \frac{z^2}{2!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^{10}}{10!} + \ldots,\ S''(0) = 0;$$

$$S'''(z) = \frac{z}{1!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^9}{9!} + \ldots,\ S'''(0) = 0;$$

$$S^{(4)}(z) = 1 + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^8}{8!} + \ldots = S(z).$$

Таким образом, функция $S(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$S^{(4)}(z) = S(z)$$

и начальным условиям $S(0) = 1$, $S'(0) = S''(0) = S'''(0) = 0$. Решая это уравнение, получим

$$S(z) = \frac{1}{2}[\operatorname{ch} z + \cos z].$$

980. Найти сумму ряда

$$S(z) = 1 + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^9}{9!} + \ldots$$

981. Найти сумму рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}\ \ (0 < x < 2\pi).$$

Решение. Согласно формуле Эйлера

$$e^{inx} = \cos\ nx + i \sin\ nx,$$

поэтому достаточно исследовать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{inx}.$$

Так как

$$\frac{1}{n}=\int_0^1 t^{n-1}\,dt,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{inx}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 t^{n-1}e^{inx}\,dt=\lim_{N\to\infty}\sum_1^N\int_0^1 t^{n-1}e^{inx}\,dt=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_0^1\sum_1^N t^{n-1}e^{inx}\,dt=\lim_{N\to\infty}\int_0^1\sum_1^N\left(te^{ix}\right)^n\frac{dt}{t}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_0^1\frac{te^{ix}-\left(te^{ix}\right)^{N+1}}{1-te^{ix}}\frac{dt}{t}=\lim_{N\to\infty}\int_0^1\frac{e^{ix}-t^Ne^{i(N+1)x}}{1-te^{ix}}dt=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\lim_{N\to\infty}\int_0^{1-\delta}\frac{e^{ix}-t^Ne^{i(N+1)x}}{1-te^{ix}}dt=\lim_{\delta\to 0}\int_0^{1-\delta}\frac{e^{ix}\,dt}{1-te^{ix}}=\int_0^1\frac{e^{ix}\,dt}{1-te^{ix}}=$$

$$=-\ln\left(1-te^{ix}\right)\Big|_0^1=-\ln[1-\cos x-i\sin x]=$$

$$=-\ln|1-\cos x-i\sin x|-i\operatorname{arctg}\frac{-\sin x}{1-\cos x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln 4\sin^2\frac{x}{2}-i\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x-\pi}{2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln 4\sin^2\frac{x}{2}+i\frac{\pi-x}{2}\qquad(0<x<2\pi).$$

Выделяя действительную и мнимую части в ряде $\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}e^{inx}$, получим

$$\sum_1^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\frac{1}{2}\ln 4\sin^2\frac{x}{2},\ \sum_1^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}.$$

З а м е ч а н и е . Можно сразу выделить действительную и мнимую части из интеграла

$$\int_0^1\frac{e^{ix}\,dt}{1-te^{ix}}=\int_0^1\frac{dt}{e^{-ix}-t}=$$

$$=\int_0^1\frac{\cos x-t}{1-2t\cos x+t^2}dt+i\sin x\int_0^1\frac{dt}{1-2t\cos x+t^2}.$$

После вычисления интегралов получим прежний результат.

982. Найти суммы рядов

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2-1}, \; S_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2-1} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi).$$

Указание. $\dfrac{1}{n^2-1} = \dfrac{1}{(n+1)(n-1)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}\right] =$

$= \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 (t^{n-2} - t^n)\,dt$. Необходимо исследовать ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-1} e^{inx}$.

983. Найти суммы рядов

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n+\alpha)(n+\beta)}, \qquad S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{(n+\alpha)(n+\beta)}$$

$$(\alpha > -1,\ \beta > -1,\ \alpha \neq \beta).$$

Указание. $\dfrac{1}{(n+\alpha)(n+\beta)} = \dfrac{1}{\beta-\alpha}\left[\dfrac{1}{n+\alpha} - \dfrac{1}{n+\beta}\right] =$

$= \dfrac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_0^1 \left[t^{n+\alpha-1} - t^{n+\beta-1}\right] dt.$

984. Используя теорию вычетов, показать, что:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{e^x-1} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{e^x+1} = \frac{\pi^2}{12},$$

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \ln\,\sin\,x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln\,2, \quad I_4 = \int_0^{\pi/2} \ln\,\cos\,x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Решение. Рассмотрим интеграл от функции $f(z) = \dfrac{z}{e^z-1}$ по контуру Г, составленному из отрезка $[0, R]$ оси Ox; отрезка $z = R + iy$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$; отрезка $z = x + \pi i$, $0 \leqslant x \leqslant R$; отрезка $z = iy$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

Будем считать, что контур Г мы обходим против часовой стрелки. Функция $f(z)$ будет аналитической внутри Г, и поэтому

$$\int_{\Gamma} \frac{z\,dz}{e^z-1} = 0,$$

или

$$\int_0^R \frac{x\,dx}{e^x-1} + \int_0^{\pi} \frac{(R+iy)i\,dy}{e^{R+iy}-1} + \int_R^0 \frac{(x+\pi i)\,dx}{-(e^x+1)} + \int_{\pi}^0 \frac{iyi\,dy}{e^{iy}-1} = 0. \qquad (1)$$

Так как

$$\left|\frac{(R+iy)i}{e^{R+iy}-1}\right|^2=\frac{R^2+y^2}{\left(e^R\cos y-1\right)^2+e^{2R}\sin^2 y}=\frac{R^2+y^2}{e^{2R}-2e^R\cos y+1}=$$

$$=\frac{R^2+y^2}{e^R\left(e^R-2\cos y\right)+1}\to 0,\quad R\to\infty\ (0\leqslant y\leqslant\pi),$$

то

$$\int_0^\pi\frac{(R+iy)i\,dy}{e^{R+iy}-1}\to 0 \text{ при } R\to\infty.$$

Переходя в (1) к пределу при $R\to\infty$ и разделяя действительную и мнимую части, получаем

$$I_1+I_2+\int_0^\pi\frac{-y}{2}dy=0,\qquad \pi\int_0^\infty\frac{dx}{e^x+1}=\int_0^\pi\frac{y\sin y\,dy}{2(1-\cos y)}.$$

Отсюда

$$I_1+I_2=\pi^2/4,$$

$$\int_0^\pi\frac{y\sin y\,dy}{2(1-\cos y)}=\pi\int_0^\infty\frac{dx}{e^x+1}=\pi\int_1^\infty\frac{dz}{z(z+1)}=\pi\ln\frac{z}{z+1}\Big|_1^\infty=\pi\ln 2.$$

Очевидно, что

$$I_1-I_2=\int_0^\infty\frac{2x\,dx}{e^{2x}-1}=(2x=v)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{v\,dv}{e^v-1}=\frac{1}{2}I_1,$$

откуда

$$I_2=\frac{1}{2}I_1.$$

Из равенства $I_1+I_2=\pi^2/4$ находим, что $I_1=\pi^2/6$ и $I_2=\pi^2/12$. Далее,

$$\int_0^\pi\frac{y\sin y\,dy}{2(1-\cos y)}=\int_0^\pi y\frac{\cos\frac{y}{2}}{2\sin\frac{y}{2}}dy=$$

$$=2\int_0^\pi y\frac{\cos y}{\sin y}dy=(y=u,\ \operatorname{ctg}\,y\,dy=dv)=$$

$$=2\left[y\ln\sin y\,\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\ln\sin y\,dy\right]=-2\int_0^{\pi/2}\ln\sin y\,dy.$$

Итак, мы получили, что

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \ln\ \sin\ y\, dy = -\frac{\pi}{2}\ \ln\ 2.$$

Замена переменной $x = \frac{\pi}{2} - t$ в I_4 показывает, что $I_4 = I_3$.

985. Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15},\ \int_0^{\infty} \frac{x^3\, dx}{e^x + 1} = \frac{7}{120}\pi^4.$$

Глава 12

986. Найти изображение Лапласа функции $f(t) = t^{\alpha}$ $(\alpha > -1)$.

Решение. $\varphi(p) = L[f; p] = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{\alpha}\, dt$. Полагая $pt = y$, получаем

$$\varphi(p) = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha} dy = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1),$$

где $\Gamma(t)$ — гамма-функция.

В частности, если $\alpha = n$ — натуральное, то $\Gamma(n + 1) = n!$ и $\varphi(p) = L[t^n, p] = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

987. Пользуясь теоремой смещения и теоремой дифференцирования изображения, найти изображение функции $f(t) = t\ \mathrm{ch}\,at \cdot \cos bt$.

Пользуясь теоремой интегрирования изображения, найти изображения функций:

988. $f(x) = \frac{e^{-ax} \sin kx}{x}$.

Решение.

$$\sin kx \risingdotseq \frac{k}{p^2 + k^2},\ e^{-ax} \sin kx \risingdotseq \frac{k}{(p+a)^2 + k^2},$$

$$\frac{e^{-ax}\sin kx}{x} \risingdotseq \int_p^\infty \frac{k\,dq}{(q+a)^2+k^2} = \operatorname{arctg}\frac{q+a}{k}\Big|_p^\infty =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{p+a}{k} = \operatorname{arctg}\frac{k}{p+a}.$$

989. $f(x) = \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x}$.

Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющих начальным условиям:

990. $y' + ay = b$, $y(0) = 0$.

991. $y' + ay = f(x)$, $y(0) = A$.

Р е ш е н и е . Введем функцию $z(x) = y(x) - A$. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$z' + a(z + A) = f(x)$$

и начальному условию $z(0) = 0$.

Данное уравнение будем решать с помощью формулы Дюамеля.

Решаем сначала уравнение

$$z_1' + az_1 = 1, \quad z_1(0) = 0.$$

Пусть $\bar{z}_1(p)$ — изображение решения $z_1(x)$. Тогда

$$p\bar{z}_1(p) + a\bar{z}_1(p) = \frac{1}{p}, \quad \bar{z}_1(p) = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+a}\right], \quad z_1(x) = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax}).$$

Далее,

$$\bar{z}(p) = p\bar{z}_1(p)\left[F(p) - \frac{a}{p}A\right],$$

где $F(p)$ — изображение функции $f(x)$.

По формуле Дюамеля

$$\bar{z}(p) \equiv p\bar{z}_1(p)\left[F(p) - \frac{a}{p}A\right] \risingdotseq$$

$$\risingdotseq [f(x) - aA]\, z_1(0) + \int_0^x [f(\tau) - aA]\, z_1'(x-\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^x [f(\tau) - aA]e^{-a(x-\tau)}d\tau.$$

Отсюда $z(x)=\int\limits_0^x f(\tau)\,e^{-a(x-\tau)}\,d\tau - Ae^{-ax}(e^{ax}-1)$

и

$$y(x)=Ae^{-ax}+\int\limits_0^x e^{-a\tau}f(x-\tau)d\tau.$$

992. $y''+2y'+2y=0$, $y(0)=A$, $y'(0)=B$. Указание. Вспомогательное уравнение имеет вид $(p^2+2p+2)\bar{y}(p)=$ $=(A+B)p^2+2A$, $\bar{y}(p)=\dfrac{A(p+1)}{(p+1)^2+1}+\dfrac{A+B}{(p+1)^2+1}$.

993. Найти общее решение уравнения

$$y'''-3y'+2y=(4x^2+4x-10)e^{-x}.$$

Решение. Составим операторное уравнение:

$$p^3\bar{y}(p)-p^2y(0)-py'(0)-y''(0)-3p\bar{y}(p)+3y(0)+2\bar{y}(p)=$$

$$=\frac{8}{(p+1)^3}+\frac{4}{(p+1)^2}-\frac{10}{p+1}.$$

Отсюда

$$\bar{y}(p)=\frac{p^2y(0)+py'(0)+y''(0)-3y(0)}{(p-1)^2(p+2)}+\frac{2-16p-10p^2}{(p-1)^2(p+2)(p+1)^3}.$$

Так как у нас начальные условия отсутствуют, то $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$ — произвольные числа. Разлагая правую часть последнего равенства на простейшие дроби, получим

$$\bar{y}(p)=\frac{c_1}{p-1}+\frac{c_2}{(p-1)^2}+\frac{c_3}{p+2}+\frac{2}{(p+1)^3}+\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{p+1}.$$

Согласно таблице изображений находим

$$y(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3e^{-2x}+(x^2+x-1)e^{-x}.$$

994. Найти общее решение уравнения $y^{(4)}+y'''=\cos x$.

995. Показать, что сумма ряда

$$S=\sum_{n=m}^{\infty}(\pm1)^n\,\varphi(n)$$

равна

$$S=(\pm1)^m\int\limits_0^{\infty}\frac{f(x)e^{-mx}dx}{1\mp e^{-x}},$$

где $f(x)\risingdotseq\varphi(p)$.

Решение.

$$S=\sum_{n=m}^{\infty}(\pm 1)^n\,\varphi(n)=\sum_{n=m}^{\infty}(\pm 1)^n\int_0^{\infty}e^{-nx}f(x)\,dx=$$

$$=\int_0^{\infty}f(x)\sum_{n=m}^{\infty}(\pm 1)^n e^{-nx}\,dx=\int_0^{\infty}f(x)\frac{(\pm 1)^m e^{-mx}}{1\mp e^{-x}}dx.$$

Найти сумму рядов:

996. $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$.

Решение. Будем использовать задачу *995*. В данном случае $m=1$, $\varphi(n)=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$. Следовательно, $f(x)=1-e^{-x}$. На основании формулы из задачи *995* получаем

$$S=\int_0^{\infty}\left(1-e^{-x}\right)\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}dx=-e^{-x}\Big|_0^{\infty}=1.$$

997. $S=\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, $S_1=\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

998. $S=\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$, $S_1=\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^4}$.

Решить системы уравнений:

999. $\left.\begin{aligned}y'&=3z-y,\\ z'&=y+z+e^x,\end{aligned}\right\}$ $y(0)=z(0)=0$.

1000. $\left.\begin{aligned}y'-2y-4z&=\cos x,\\ z'-y+2z&=\sin x,\end{aligned}\right\}$ $y(0)=z(0)=0$.

1001. $\left.\begin{aligned}y'&=z-t,\\ z'&=t-2y,\\ t'&=2y-z,\end{aligned}\right\}$ $y(0)=1$, $z(0)=t(0)=0$.

1002. $\left.\begin{aligned}y''+2z&=0,\\ z'-2y&=0,\end{aligned}\right\}$ $y(0)=z(0)=0$, $y'(0)=1$, $z'(0)=0$.

Приложение II*)

Глава 1

Дифференциальное и интегральное исчисление

§ 1. Последовательности

Выяснить, является ли последовательность ограниченной:

1003. $x_n = \dfrac{n+(-1)^n}{3n-1}$. **1004.** $x_n = n^{(-1)^n}$.

1005. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$. **1006.** $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

1007. Найти $\sup x_n$, $\inf x_n$ для последовательностей, указанных в задачах *1005, 1006.*

1008. а) Для каждого ε ($\varepsilon = 1, \varepsilon = \frac{1}{5}, \varepsilon = \frac{1}{10}, \varepsilon = \frac{1}{10\,000}$) указать такое N, что $\left|\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} - 1\right| < \varepsilon$ для любого $n \geqslant N$.

б) Доказать, пользуясь только определением предела последовательности, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1.$$

---

* Автор приложения II — А. Ф. Кутасов.

Исследовать на сходимость последовательность:

1009. $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{\pi n}{2}$. **1010.** $x_n = n^{(-1)^n}$.

1011. $x_n = \frac{n+1}{n} \cos^2 \frac{\pi n}{4}$. **1012.** $x_n = q^n$, $|q| \leqslant 1$.

Найти пределы:

1013. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, $a > 0$. **1014.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$.

1015. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

Найти пределы:

1016. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$. **1017.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2+1}$.

Доказать, что последовательность имеет предел, и найти его:

1018. $x_1 = 13$, $x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}$.

1019. $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $a > 0$.

1020. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = 1 - x_n^2$.

1021. Верны ли утверждения:

а) Каждая бесконечно большая последовательность неограничена;

б) Каждая неограниченная последовательность является бесконечно большой.

Выяснить, является ли последовательность фундаментальной:

1022. $x_n = \frac{n+1}{3n+2}$. **1023.** $x_n = \frac{n\cos\pi n - 1}{2n}$.

1024. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

1025. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Найти $\overline{\lim}\, x_n$, $\underline{\lim}\, x_n$, $\sup x_n$, $\inf x_n$:

1026. $x_n = \dfrac{1+\left(1+(-1)^n\right)2^n}{3+2^n}$.

1027. $x_n = \dfrac{n+2}{n-1} \sin \dfrac{\pi n}{3}$, $n > 1$.

1028. Построить последовательность, множество частичных пределов которой:

а) состоит из трех чисел;

б) счетно.

§ 2. Функция. Предел функции. Непрерывность

Найти область задания функции:

1029. $y = \lg(1 - 2\cos x)$.

1030. $y = \arccos(2\sin x)$.

Найти множество значений функции:

1031. $y = \sqrt{\dfrac{9x^2+1}{x}}$.

1032. $y = \arccos \dfrac{x^2+1}{2x}$.

1033. Найти функции

а) $f(g)$, б) $g(f)$, в) $f(f)$, г) $g(g)$,

если $f = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x, & x > 0, \end{cases}$ $g = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ -x^2, & x > 0. \end{cases}$

Найти обратную функцию для функции $y = f(x)$:

1034. $y = \dfrac{2x}{1 - x + \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}$.

1035. $y = e^{\operatorname{tg} x}$, $x \in [2; 3]$.

Выяснить, является ли функция периодической; найти ее наименьший период (если он существует):

1036. $y(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{21} + \operatorname{tg}\frac{x}{35}$.

1037. $y(x) = \sin 4x + 5\cos 6x$.

1038. $y(x) = \sin\sqrt{|x|}$.

1039. $y(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$

Найти пределы:

1040. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{101}-101x+100}{x^2-2x+1}$.

1041. $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$.

1042. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^4+13x^2-7}-2x^2\right)$.

1043. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(3x^3)-1}{\sin^6(2x)}$.

1044. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{\cos x}-2x\operatorname{tg}x\right)$.

1045. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos 5x}{\ln\cos 4x}$.

1046. $\lim\limits_{x\to0}(\ln(e+x))^{\operatorname{ctg}x}$.

1047. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$.

1048. Найти $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, если

а) $f(x) = \operatorname{sign}\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

б) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2x^n-3}{x^n-1}$, $x_0 = 1$.

1049. При каких α и β функция

$$f(x) = \sqrt{4x^2+x-1} - \alpha x - \beta$$

является бесконечно малой при $x\to+\infty$?

1050. Найти $\overline{\lim\limits_{x\to0}}\, f(x)$ и $\underline{\lim\limits_{x\to0}}\, f(x)$, если

а) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$;

б) $f(x) = e^{\cos\frac{1}{x^2}}$.

Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ и определить характер точек разрыва:

1051. $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

1052. $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2 - x^3}$.

1053. $f(x) = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

1054. $f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$

1055. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число,} \\ \dfrac{1}{q} \text{ если } x = \dfrac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \dfrac{p}{q} \text{ — несократимая дробь.} \end{cases}$

1056. Функция $f(x)$ непрерывна на $[a; +\infty)$, существует конечный $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Доказать, что $f(x)$ ограничена на $[a; +\infty)$.

1057. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ -1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

на любом отрезке $[0; a]$ принимает все промежуточные значения между $f(0)$ и $f(a)$, но не является непрерывной на $[0; a]$.

1058. Функция $f(x)$ непрерывна и периодична с периодом T. Доказать, что существует точка x_0 такая, что

$$f\left(x_0 + \frac{T}{2}\right) = f(x_0).$$

§3. Производная

Указать область существования производной функции $y = y(x)$ и вычислить ее:

1059. $y = \dfrac{\arccos x}{\arcsin x}$. **1060.** $y = x^x$.

1061. Найти dy в точке x_0: $y = \operatorname{arctg} \dfrac{\ln x}{x}$.

а) $x_0 = \dfrac{1}{e}$. б) $x_0 = e$.

1062. Вычислить производную функции $y(x)$, если:

а) $y = x^{x^2}$. б) $y = x^{2^x}$. в) $y = 2^{x^x}$.

1063. Исследовать на дифференцируемость функцию $y(x)$, если:

а) $y = x|x|$, б) $\begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ — рациональное число}, \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число}. \end{cases}$

1064. Найти производную обратной функции $x(y)$, если

а) $y(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, $x < 0$, б) $y(x) = \operatorname{ch} x$, $x > 0$.

Указать область ее существования.

1065. Найти y'_x, если

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t, \quad 0 < t < \pi.$$

1066. Найти y'_x, если функция $y(x)$ задана неявно уравнением:

а) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $y > 0$. б) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$.

1067. Найти в точке $(1; 2)$ дифференциал функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $y^3 - y = 6x^2$.

1068. Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$y^4 - 4x^4 - 6xy = 0$$

в точке $(1; 2)$.

§ 4. Производные и дифференциалы высших порядков

1069. Найти производную второго порядка для функции

$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ в точке } x = 0.$$

1070. Найти второй дифференциал функции

$y = x\sqrt[3]{(x-5)^2}$ в точке $x = -3$.

1071. Найти в точке (0; 4) производную

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \text{если } x = \frac{2t-t^2}{t-1}, \quad y = \frac{t^2}{t-1}.$$

1072. Найти $\dfrac{d^2x}{dy^2}$, если $x = \ln \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}$, $y = \ln \operatorname{tg} t$.

1073. Найти в точке (0; 1) дифференциал d^2y, если

$$2 \ln(y - x) + \sin xy = 0.$$

Найти $y^{(n)}$:

1074. $y = \dfrac{x}{x^2-4x-12}$.

1075. $y = \ln(x-1)^{2x}$.

1076. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-5x}}$.

1077. $y = (x^2+x)\cos^2 x$.

1078. $y = e^{2x}\sin^2 x$.

1079. Найти $y^{(20)}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, если $y = 2(x - \operatorname{ctg} x)\sin^2 x$.

1080. Определить, какого порядка производными обладает в точке $x = 0$ функция

$$y(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} x - x, & \text{если } x < 0, \\ x - \sin x, & \text{если } x \geqslant 0 \end{cases}$$

и вычислить в этой точке все существующие производные.

1081. Найти кривизну кривой:

а) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; б) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin\dfrac{t}{2}$.

§ 5. Теоремы о среднем

1082. Записать формулу Лагранжа для функции:

а) $f(x) = \sqrt{3}\,x^3 + 3x$ на отрезке $[0;\ 1]$;

б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x}, & \text{если } x > 1 \end{cases}$ на отрезке $[0;\ 2]$, и найти соответствующее значение ξ.

1083. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема n раз на отрезке $[a;\ b]$ и обращается на нем в нуль в $(n+1)$ точках, то существует $\xi \in (a;\ b)$ такое, что $f^{(n)}(\xi) = 0$.

1084. Доказать, что если функция дифференцируема на интервале, а ее производная принимает значения разных знаков, то на этом интервале существует точка, в которой производная функции обращается в нуль.

Указание: используйте теорему Ферма.

1085. Пусть $f(x)$ — дифференцируемая на $[0;\ 1]$ функция, $f(0) = f(1)$. Доказать, что существует точка $\xi \in (0,1)$ такая, что $f(\xi) + \dfrac{\xi}{2}f'(\xi) = f(0)$.

Указание: примените теорему Ролля.

1086. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[0;\ 1]$, $f(0) = 0$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}|f(x)|$ для всех $x \in [0;\ 1]$. Доказать, что $f(x) \equiv 0$, $x \in [0;\ 1]$.

Указание: воспользуйтесь теоремой Лагранжа.

1087. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и дифференцируема на интервале $(a;\ b)$, где $a > 0$. Доказать, что существует точка $\xi \in (a;\ b)$ такая, что $\dfrac{af(b) - bf(a)}{a-b} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$.

Указание: запишите теорему Коши для функций $\dfrac{f(x)}{x}$ и $\dfrac{1}{x}$.

§ 6. Формула Тейлора

Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x = x_0$ до $o((x - x_0)^n)$ функцию:

1088. $y = \dfrac{1}{2x+3}$, $x_0 = 0$.

1089. $y = \dfrac{x^2-5x+7}{x^2-9x+20}$, $x_0 = 3$.

1090. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, $x_0 = 0$.

1091. $y = (x^2 + 4x + 2)e^{-2x}$, $x_0 = -2$.

1092. $y = \ln(2x^2 + 7x + 5)$, $x_0 = -3$.

Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x = x_0$ до $o((x - x_0)^{2n})$ функцию:

1093. $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}}$, $x_0 = 2$.

1094. $y = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0$.

Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 до $o((x - x_0)^{2n+1})$ функцию:

1095. $y = \sin^2 x \cos^2 x$, $x_0 = 0$.

1096. $y = (2x^2 + 4x - 1)e^{x^2+2x}$, $x_0 = -1$.

1097. С помощью формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа с точностью до 10^{-3} вычислить $\operatorname{arctg} 0{,}8$.

§ 7. Раскрытие неопределенностей

Применяя правило Лопиталя или формулу Тейлора, найти пределы:

1098. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-1}{2x^3-x-1}$. **1099.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1100. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{10}-10x+9}{x^5-5x+4}$. **1101.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}$, $\alpha>0$, $\beta>0$.

1102. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^\beta}$, $\alpha>0$, $\beta>0$.

1103. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\alpha}{1-x^\alpha}-\frac{\beta}{1-x^\beta}\right)$, $\alpha\beta\neq 0$.

1104. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$. **1105.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$.

1106. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$.

1107. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cos x+\arcsin x-3\sqrt[3]{1+x}}{\ln\left(1-x^2\right)}$.

1108. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\operatorname{ch}2x-2x}{\operatorname{tg}2x-2\sin x}$.

1109. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x^2}{2}}-\operatorname{ch}\left(x-\sqrt{1-x}\right)-\frac{x^3}{2}}{\ln(1+x\operatorname{arctg}x)-\sin^2 x}$.

1110. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{e^x-1-\frac{x^2}{2}}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1111. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sh}4x-\operatorname{tg}3x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln\cos 5x}}$.

§ 8. Исследование функций и построение их графиков. Построение кривых

Найти интервалы возрастания и убывания функции:

1112. $y = \frac{e^x}{x}$.   **1113.** $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+50}$.

Найти максимумы и минимумы функции:

1114. $y = \frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$.   **1115.** $y = \frac{\ln^2 x}{x}$.

1116. $y = x^x$.   **1117.** $y = \sqrt[3]{x^2|2-x|}$.

1118. Найти экстремумы, наименьшее m и наибольшее M значения функции

$$y(x) = (x-3)^3 e^{|x+1|},\ x \in [-2;\ 4].$$

1119. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции

$$y = \frac{x^3}{12+x^2}.$$

Исследовать функции и построить их графики:

1120. $y = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$.   **1121.** $y = \frac{\sin 2x}{(1-\cos x)^2}$.

1122. $y = \sqrt[3]{x^2+x^3}$.   **1123.** $y = \sqrt{|x(x+2)|}$.

Построить кривые:

1124. $x = \frac{(t-3)^2}{t-2}$, $y = t + \frac{1}{t}$.

1125. $x = 2t + \ln|t-1|$, $y = t + \ln|t-1|$.

1126. Найти наибольшую кривизну кривой

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}.$$

§ 9. Неопределенный интеграл

1127. Для функции $y = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}$, $x \in (-\infty; 0)$ найти первообразную, график которой проходит через точку $(-1; 1)$.

Найти интегралы:

1128. $\int \frac{x\,dx}{(1-x)^{12}}$.

1129. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

1130. $\int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^6 x}\,dx$.

1131. $\int e^{ax} \sin bx\,dx, \quad a^2 + b^2 \neq 0$.

1132. $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}\,dx$.

1133. $\int \frac{dx}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

1134. $\int \frac{x^4 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 5x^2}\,dx$.

1135. $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$.

1136. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}}$.

1137. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$.

1138. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$.

1139. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$.

1140. $\int \frac{dx}{4 - \sin x}$.

1141. Найти все первообразные функции $f = e^{|x|}$.

§ 10. Определенный интеграл

Вычислить интегралы:

1142. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$.

1143. $\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\,dx$.

1144. $\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$ **1145.** $\int\limits_0^1 \arcsin\sqrt{x}\,dx.$

1146. Вычислить $\dfrac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt.$

Доказать неравенства:

1147. $0 < \int\limits_0^{200}\dfrac{e^{-5x}dx}{x+20} < 0{,}01.$

1148. $0 < \int\limits_{100}^{400}\dfrac{\cos\pi x}{\sqrt{x}}dx < 0{,}02.$

1149. Найти площадь фигуры, ограниченной аркой циклоиды

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ t \in [0;\ 2\pi]$$

и отрезком $[0;\ 2\pi a]$ оси абсцисс.

1150. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

1151. Найти длину дуги кардиоиды

$$r = a(1 - \cos\varphi).$$

1152. Найти длину кривой

$$3x - \operatorname{ch} 3y = 0,\ y \in [0;\ \pi].$$

1153. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми

$$y = \sin^2 x,\ y = x\sin x,\ x \in [0;\ \pi].$$

1154. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры

$$\arcsin x^2 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2},\ x \in [-1;\ 1].$$

1155. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой

$$y = \sqrt{1-2x},\ x \in \left[-1;\ \frac{1}{2}\right]$$

вокруг оси Ox.

§ 11. Несобственные интегралы

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

1156. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$. **1157.** $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

1158. $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{tg} x\, dx$. **1159.** $\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

1160. Найти площадь фигуры, ограниченной петлей листа Декарта

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$

1161. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = \frac{1}{1+x^2}$ вокруг ее асимптоты.

Исследовать на сходимость интегралы:

1162. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\operatorname{arctg} x}$. **1163.** $\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln x\, dx}{\sqrt{\sin x}}$.

1164. $\int\limits_{-1,5}^{+\infty} \frac{(x+3)\,dx}{x^2\sqrt{2x+3}}$.

1165. Доказать неравенства

$$0,25 < \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^6+1}{x^{11}+1}\,dx < 0,35.$$

Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл:

1166. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}\,dx$. **1167.** $\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-101} \operatorname{arctg}^{\alpha} \frac{x}{1+x}\,dx$.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы:

1168. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \cos x \, dx.$ **1169.** $\int\limits_1^{1} \frac{\sin x}{x^\alpha} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx.$

1170. Может ли сходиться интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$, если $f(x)$ непрерывная и неограниченная на любом промежутке $[a; +\infty)$, $a > 0$ функция?

§ 12. Числовые ряды

Исследовать на сходимость ряд:

1171. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n.$ **1172.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!2^n}{n^n}.$

1173. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+4n+5}.$

1174. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\cos\frac{1}{n} - \cos\operatorname{ch}\frac{1}{n}\right)^\alpha.$

1175. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{n+2}}{n\ln^2(1+n)}.$ **1176.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[5]{n}}.$

1177. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{1+n^2}}.$ **1178.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}+\sin n}.$

Найти все значения α, при которых ряд сходится:
а) абсолютно,
б) условно:

1179. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}.$ **1180.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(\sqrt{n}-(-1)^n\right)^\alpha}.$

§ 13. Функциональные последовательности и ряды

1181. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности

$$f_n(x) = (x-1)\operatorname{arctg} x^n,\ x > 0.$$

Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности и исследовать ее на сходимость и равномерную сходимость на заданных множествах:

1182. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+n^2x^4}$, а) $[0;\ 1]$, б) $[1;\ +\infty)$.

1183. $f_n(x) = \dfrac{n\sin x}{nx+\sqrt{x}\sin x}$, $(0;\ 1)$.

1184. $f_n(x) = \dfrac{n\ln n}{n^2+\ln^2 x}$, $(1;\ +\infty)$.

1185. $f_n(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{n}-n^2\right)$, а) $(0;\ 1)$, б) $(1;\ +\infty)$.

1186. $f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & \text{если } x \in \left[0;\ \dfrac{1}{n}\right], \\ n^2\left(\dfrac{2}{n}-x\right), & \text{если } x \in \left(\dfrac{1}{n};\ \dfrac{2}{n}\right), \\ 0, & \text{если } x \in \left[\dfrac{2}{n};\ 1\right]. \end{cases}$

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд на заданных множествах:

1187. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx \sin x}{\sqrt[3]{n+x}}$, $x \geqslant 0$.

1188. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{n}\operatorname{arctg}\dfrac{\cos x}{n}$, а) $(0;\ 1)$, б) $(1;\ +\infty)$.

1189. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{n+x^2}\sin\dfrac{1}{n}$, а) $(0;\ 1)$, б) $(1;\ +\infty)$.

1190. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(nx)}{1+n^3\ln^2 x}$, а) $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$, б) $\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$.

1191. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt[3]{x+n^4}},\ x\in\mathbb{R}.$$

1192. Является ли функция

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3},\ x\in\mathbb{R}$$

непрерывно дифференцируемой?

1193. Можно ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$ почленно дифференцировать на $\mathbb{R}$?

1194. Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 nx}{n^2+n}\right)dx.$$

§ 14. Степенные ряды

Найти радиус сходимости R и интервал сходимости. Исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость в концах интервала сходимости:

1195. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2+(-1)^n\right)^n}{n}(x+1)^n.$

1196. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^{\alpha}}.$

Найти радиус сходимости R ряда:

1197. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{4^{n+2}}z^n.$

1198. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}(z-1)^{4n}.$

1199. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(1+i)^{3n}}{n^2+3n+2}z^n.$

Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)$ и найти радиус сходимости полученного ряда:

1200. $f(x) = \dfrac{5-2x}{x^2-5x+6}$.

1201. $f(x) = \cos^2 x$.

1202. $f(x) = x \ln(x^2 + \sqrt{9+x^4})$.

1203. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2-x}{1+2x}$.

1204. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{n}$.

1205. Вычислить с точностью до 10^{-3} интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx.$$

§ 15. Функции многих переменных

1206. В n-мерном евклидовом пространстве дан куб с ребром a. Найти:

а) длину диагонали куба,

б) число вершин куба.

1207. Является ли открытым в $\mathbb{R}_n$, $n > 1$ множество всех точек круга

$$x_1^2 + x_2^2 < 1,\ x_i = 0,\ i = 3, 4, \dots, n?$$

1208. Является ли множество, на котором определена функция

$$z = \arccos(2y + 2yx^2 - 1),$$

а) замкнутым, б) открытым в $\mathbb{R}_2$,

в) областью, г) связным?

1209. Найти линии уровня функции

$$z = \frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2}.$$

1210. Найти 1) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} z$, 2) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} z$, 3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z$,

если:

а) $z = x + y\sin\dfrac{1}{x}$, б) $z = x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}$,

в) $z = \dfrac{y}{x}\operatorname{tg}\dfrac{x}{x+y}$.

1211. Вычислить:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x)^{\frac{1}{x+x^2y}}$. б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} xy\sin\dfrac{\pi}{xy}$.

1212. Найти точки разрыва, указать точки устранимого разрыва функции

$$f(x;\, y) = \frac{1}{\ln\left|1-x^2-4y^2\right|}.$$

1213. Пусть функция f непрерывна и принимает как положительные, так и отрицательные значения на открытом множестве $E\subset\mathbb{R}_n$. Является ли множество точек $x\in E$, в которых $f(x)\neq 0$:

а) открытым в $\mathbb{R}_n$ множеством,

б) областью?

1214. Исследовать функцию на дифференцируемость в точке (0; 0), если

а) $z = \sqrt[3]{xy}$, б) $z = \cos\sqrt[3]{xy}$.

1215. Найти все значения α, при которых функция

$$z = \begin{cases} \dfrac{|x|^{3\alpha}+|y|^{7-\alpha}}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

дифференцируема в точке (0; 0).

1216. Найти дифференциал указанного порядка в заданной точке для функции $z(x,y)$, если:

а) $z = \frac{x}{y}e^{x^2}$, (0; 1), $n = 2$;

б) $z = x\cos y + y\sin x$, (0, 0), $n = 3$;

в) $z = \cos x \operatorname{ch} y$, ($\pi$; 0), $n = 6$.

1217. Найти dz и d^2z, если

$$\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y} + 1.$$

1218. Найти степень однородности m (см. задачу *870*) для функций:

а) $u = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_1}$, $x_1 > 0$; б) $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2}$;

в) $u = \sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}$.

§ 16. Формула Тейлора. Экстремумы функций многих переменных

1219. Разложить функцию $u = x\sqrt{1+y}$ по формуле Маклорена до $o(\rho^2)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; записать остаточный член 2-го порядка в форме Лагранжа.

1220. Разложить функцию $u = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1+y}$ по формуле Маклорена до $o(\rho^2)$,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1221. Разложить по формуле Тейлора в точке (0; 2) до $o(\rho^4)$, $\rho = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$, функцию $u = \sin x \ln y$.

Исследовать на экстремум функцию:

1222. $u = x^2y^2 - 2x^2y + 12xy$.

1223. $u = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x$.

1224. $u = xy\sqrt{12 - 4x^2 - y^2}$. **1225.** $u = (1 + e^y)\cos x - ye^y$.

1226. $u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$.

1227. Исследовать на экстремум непрерывно дифференцируемую функцию $u = u(x,y)$, заданную неявно

$$x^2 + 4y^2 + 9u^2 - 6x + 8y - 36u = 0, \quad u > 2.$$

Исследовать функции на условный экстремум при заданных уравнениях связи:

1228. $u = \ln(xy)$, $x^3 + xy + y^3 = 0$.

1229. $u = x - y + 2z$, $x^2 + y^2 + 2z^2 = 16$.

1230. $u = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 21$, $3x + 2y + z = 0$.

1231. Методом множителей Лагранжа найти экстремумы функции $u = 1 - 4x - 8y$ при уравнении связи $x^2 - 8y^2 = 8$.

1232. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$u = xy(6 - x - y)$$

на множестве

$$x + y \leqslant 12,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$$

Глава 2

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

§ 17. Кратные интегралы

1233. Выразить двумя способами двойной интеграл

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$$

через повторные интегралы, если D — трапеция с вершинами в точках (0; 0), (1; 0), (1; 2), (0; 1).

1234. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy.$$

1235. Вычислить интеграл

$$\iint_D y^2\,dx\,dy,$$

где D — область, ограниченная осью абсцисс и одной аркой циклоиды

$$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t.$$

1236. Найти якобиан $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$, если

$$u = \operatorname{ch} x \cos y,\ v = \operatorname{sh} x \sin x.$$

1237. Найти якобиан $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$, если

$$u = xyz,\ v = xy - xyz,\ w = y - xy.$$

Вычислить интегралы:

1238. $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, где D — область, ограниченная окружностями

$$x^2 + y^2 = \pi^2, \quad x^2 + y^2 = 4\pi^2.$$

1239. $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$, где D — область, ограниченная линиями

$$y^2 = 2x, \quad x + y = 4, \quad x + y = 12.$$

1240. Найти площадь области, ограниченной кривыми

$$y^2 = 4(x+1), \quad y^2 = 4(1-x).$$

1241. Найти площадь области, заданной неравенствами

$$\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{3}\right)^4 < \frac{x^2}{4} + y^2,\ x > 0,\ y > 0.$$

1242. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:
$$x^2+y^2=1,\ x+y=1,\ z=x^2+y^2-4xy-2x,$$
$$z=x^2+y^2-6xy-2x.$$

1243. Найти площадь части сферы
$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$
расположенной вне цилиндров
$$x^2+rx+y^2=0,\quad x^2-rx+y^2=0.$$

1244. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной кривой $r=a\sin 2\varphi$, расположенной в первом квадранте, и осями координат.

1245. Определить момент инерции однородного тела, ограниченного поверхностями
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2}{c}z,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$
относительно плоскости $z=0$.

1246. Перейти в интеграле
$$\int_0^1 dy\int_1^{2-y}dx\int_{-yx}^{yx^2} f\ (x,y,z)\,dz$$
к следующему порядку интегрирования: вначале по y, потом по z и затем по x.

Вычислить интегралы:

1247. $\iiint\limits_D \frac{dx\,dy\,dx}{(1+x+y+z)^3}$, область D ограничена плоскостями
$$x+y+z=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$$

1248. $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, область D ограничена сферой
$$x^2+y^2+z^2=z.$$

1249. $\iiint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, область D ограничена поверхностями

$$x^2 + y^2 = 2z,\ z = 2.$$

1250. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = x + y,\ z = xy,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0.$$

1251. Найти массу тела, ограниченного поверхностями:

$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2,\ z = 0,\ z = a,\ a > 0,$$

если плотность в каждой точке пропорциональна аппликате z и в плоскости $z = a$ равна γ_0.

1252. Найти объем:

а) четырехмерной пирамиды $x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{4} \leqslant 1$, $x_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

б) четырехмерного шара $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leqslant 1$.

§ 18. Криволинейные интегралы

1253. Вычислить интеграл

$$\int\limits_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}\,ds,\ \Gamma \text{ — окружность } x^2 + y^2 = ax.$$

1254. Вычислить криволинейные интегралы:

а) $\int\limits_\Gamma x^2 ds$, б) $\int\limits_\Gamma x^3 ds$,

Γ — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

1255. Найти массу, распределенную с плотностью $\rho = \sqrt{y^2+z^2}$ по кривой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = z$.

1256. Вычислить интеграл

$$\int\limits_\Gamma y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz,$$

Γ — кривая: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$, $z \geqslant 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной части ($x > a$) оси Ox.

1257. Вычислить интеграл

$$\int_\Gamma (3x^2y+y)\,dx + (x^3+x)\,dy,$$

Γ — простая кривая, идущая от точки $A(1;\ -2)$ к точке $B(2;\ 3)$.

1258. Вычислить интеграл

$$\int_\Gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2},$$

Γ — простая замкнутая кривая, не проходящая через точку $(0;\ 0)$.

1259. Определить силу, с которой масса M, равномерно распределенная по полуокружности $x^2+y^2=R^2$ $y \geqslant 0$, притягивает материальную точку $(0;\ 0)$ массы m.

§ 19. Поверхностные интегралы. Формулы Гаусса и Стокса

Вычислить поверхностный интеграл первого рода:

1260. $\iint\limits_Q \frac{ds}{(1+x+y)^2}$, Q — граница тетраэдра

$$x+y+z \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0.$$

1261. $\iint\limits_Q \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, Q — часть цилиндрической поверхности

$$x = r\cos u,\ y = r\sin u,\ z = v,\ u \in [0;\ 2\pi],\ v \in [0;\ 1].$$

1262. $\iint\limits_Q z^2\,ds$, Q — полная поверхность конуса

$$\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 2.$$

1263. Определить массу, распределенную по части эллиптического параболоида

$$x^2 + y^2 = 2z,\ z \leqslant 1$$

с плотностью $\rho = \rho_0 z$.

Вычислить поверхностные интегралы второго рода:

1264. $\iint\limits_{s^+} x^2\,dy\,dz$, s^+ — внешняя сторона сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

1265. $\iint\limits_{s^-} \left(x^5 + z\right)\,dy\,dz$, s^- — часть внутренней стороны сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \leqslant 0.$$

1266. $\iint\limits_{s} z\,dx\,dy + (5x + y)\,dy\,dz$, если

а) s — внешняя сторона полной поверхности конуса $x^2 + y^2 \leqslant z^2$, $0 \leqslant z \leqslant 4$;

б) s — внутренняя сторона эллипсоида $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$,

в) s — внешняя сторона границы области $1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4$.

1267. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_{s^+} yz\,dx\,dy + zx\,dy\,dz + xy\,dz\,dx,$$

s^+ — часть внешней стороны цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = R^2$, выделяемая условиями:

$$x \leqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant R.$$

1268. Используя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz, \quad \text{если:}$$

а) Г — кривая пересечения поверхности куба

$$0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a, \quad 0 \leqslant z \leqslant a$$

с плоскостью $x + y + z = \dfrac{3a}{2}$, ориентированная положительно относительно вектора (1; 0; 0);

б) Г — кривая пересечения параболоида $x^2 + y^2 + z = 3$ с плоскостью $x + y + z = 2$, ориентированная отрицательно относительно вектора (1; 0; 0).

§ 20. Скалярные и векторные поля

1269. Найти div grad $f(r)$, $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1270. Найти поток вектора $\vec{r}(x, y, z)$ через:
а) боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \leqslant z^2$, $z \in [0; h]$;
б) основание этого конуса.

1271. Найти циркуляцию поля $-y\vec{i} + x\vec{j} + c\vec{k}$, $c =$const, вдоль окружности:
а) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$;
б) $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

1272. Найти потенциал поля
$yz(2x + y + z)\vec{i} + xz(x + 2y + z)\vec{j} + xy(x + y + 2z)\vec{k}$.

1273. Найти работу поля

$$2(y+z)^{-\frac{1}{2}}\vec{i} - x(y+z)^{-\frac{3}{2}}\left(\vec{j} + \vec{k}\right)$$

вдоль пути от точки (1; 1; 3) к точке (2; 4; 5), расположенном в первом октанте.

1274. Найти:
а) rot $\vec{c}f(r)$;
б) rot$[\vec{c}, f(r)\vec{r}]$;
в) div$[\vec{r},[\vec{c}, \vec{r}]]$,
$\vec{c}$ — постоянный вектор.

Глава 3

Ряды Фурье. Интегралы, зависящие от параметра. Интеграл Фурье и преобразование Фурье

§21. Тригонометрические ряды Фурье

Разложить в ряд Фурье по тригонометрической системе, ортогональной на заданном промежутке, функции:

1275. $y = \operatorname{sign} x,\ x \in (-\pi; \pi)$.

1276. $y = \begin{cases} 2, \text{ если } x \in [-\pi; 0), \\ 5, \text{ если } x \in [0; \pi]. \end{cases}$

1277. $y = \cos^2 x, \quad x \in [-\pi, \pi]$.

1278. $y = x^2,\ x \in [-\pi, \pi]$.

1279. Найти сумму ряда Лейбница

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

используя разложение задачи *1275*.

1280. Разложить в ряд Фурье по системе $\{\sin\ nx,\ n \in N\}$ функцию

$$y = x(\pi - x),\ x \in [0; \pi].$$

1281. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 10$ функцию

$$y = \begin{cases} 10 - x, \text{ если } x \in (5; 15), \\ 0, \qquad\ \text{ если } x = 0. \end{cases}$$

1282. Разложить в ряд Фурье в комплексной форме функцию

$$y = e^x,\ x \in (-\pi; \pi).$$

Найти значение суммы $s(x)$ ряда при $x = \pi$.

1283. Используя разложение задачи *1278*, почленным интегрированием получить разложение в ряд Фурье функции
$$y = x^3,\ x \in [-\pi; \pi].$$

1284. Как следует продолжить заданную на интервале $(0; \frac{\pi}{2})$ интегрируемую функцию $f(x)$ на интервал $(-\pi; \pi)$, чтобы ее разложение в ряд Фурье имело вид
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos(2n-1)x, \quad x \in (-\pi; \pi)?$$

1285. Разложить в ряд Фурье функцию
$$y = \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|.$$

1286. Найти сумму ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in (0; 2\pi).$$

1287. Показать, что:

а) система функций $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots\}$ не является полной в пространстве функций, непрерывных на $[-\pi; \pi]$ и удовлетворяющих условию $f(-\pi) = f(\pi)$, с нормой
$$\|f\| = \sup_{x \in [-\pi; \pi]} |f(x)|.$$

б) система функций $\{\sin x, \sin 3x, \sin 5x, \ldots\}$ является полной в пространстве функций, непрерывных на $[0, \frac{\pi}{2}]$ и удовлетворяющих условию $f(0) = 0$, с нормой
$$\|f\| = \sup_{x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]} |f(x)|.$$

1288. Разложив функцию $y = x^2$ в ряд Фурье на $(-\pi; \pi)$, вычислить $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ с помощью равенства Парсеваля.

1289. Просуммировать методом средних арифметических ряд

$$1 + 1 - 2 + 1 + 1 - 2 + \ldots$$

§ 22. Интегралы, зависящие от параметра

1290. Доказать, что функция Бесселя целого индекса n

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi$$

удовлетворяет уравнению Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

Вычислить интегралы:

1291. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2\sin^2 x + \beta^2\cos^2 x)\,dx$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

1292. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}\,dx$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

1293. Доказать, что интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$$

сходится неравномерно на интервале $(0, +\infty)$ и сходится равномерно на промежутке $[\varepsilon; +\infty)$, $\varepsilon > 0$.

Исследовать на заданном множестве на равномерную сходимость интегралы:

1294. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x\sqrt[4]{x}}\,dx$, $\alpha \in [0; 2]$.

1295. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$ а) $\alpha \in [0; 1]$, б) $\alpha \in [1; +\infty)$.

1296. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx$, $\alpha \in (0; +\infty)$.

Вычислить интегралы:

1297. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx,\ \beta>0.$ **1298.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx.$

1299. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx.$ **1300.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\,dx.$

1301. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx.$

1302. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\,dx,\ \alpha>0,\ \beta>0.$

1303. Вычислить с помощью функций $\Gamma(p)$ и $B(p;\,q)$ интегралы:

а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$; б) $\int\limits_0^{1}\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}\,\frac{dx}{(x-2)^2}$.

1304. Выразить через функцию $B(p;\,q)$ интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x\,dx,\qquad m>-1,\ n>-1.$$

§ 23. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье:

1305. $f(x)=\begin{cases}1, \text{ если } |x|<a\\ 0, \text{ если } |x|>a.\end{cases}$

1306. $f(x)=\operatorname{sign}(x-1)-\operatorname{sign}(x-2).$

1307. $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, \text{ если } x>0,\\ 0, \quad \text{ если } x<0.\end{cases}$

1308. Продолжив функцию

$$f(x)=\begin{cases}2-3x, & x\in\left[0;\frac{2}{3}\right],\\ 0, & x>\frac{2}{3},\end{cases}$$

нечетным образом на интервал $(-\infty;\,0)$, представить ее интегралом Фурье.

Найти преобразование Фурье функций:

1309. $f(x)=e^{-\alpha|x|}$, $\alpha>0$.

1310. $f(x)=\begin{cases} h\left(1-\dfrac{|x|}{a}\right), & \text{если } |x|<a. \\ 0, & \text{если } |x|>a, a>0. \end{cases}$

1311. $f(x)=x^2e^{-|x|}$.

1312. $f(x)=\dfrac{d^3}{dx^3}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

Найти преобразование Фурье обобщенных функций:

1313. $(1,\varphi)$.

1314. $(\delta(x-a),\varphi)$.

1315. $\left(\dfrac{\delta(x-a)+\delta(x+a)}{1},\varphi\right)$.

1316. (δ',φ).

1317. (x,φ).

1318. (x^2,φ).

Глава 4

Функции комплексного переменного

§ 24. Комплексные числа. Элементарные функции

1319. Представить комплексное число

а) $z=\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$;

б) $z=\dfrac{2+5i}{2-5i}+\dfrac{2-5i}{2+5i}$

в алгебраической форме.

1320. Найти модуль и аргументы числа

$$z=\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)+i\left(1+\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right).$$

1321. Записать число z в тригонометрической форме:

а) $z=\dfrac{5i(\cos 100^\circ+i\sin 100^\circ)}{(\cos 40^\circ-i\sin 40^\circ)\pi}$, б) $1+\cos\dfrac{10\pi}{9}-i\sin\dfrac{10\pi}{9}$.

1322. Записать в алгебраической и в тригонометрической форме число

$$z=\left(\sqrt{3}-i\right)^{1996}.$$

1323. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием:

а) $\left|\dfrac{z}{4}-2i\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$, б) $|z-2|+|z+2|=4$,

в) $|z-2|^2+|z+2|^2=346$?

1324. Решить систему уравнений:

$$\left|\frac{z-4}{z-8}\right|=1,\qquad \left|\frac{z-12}{z-8i}\right|=\frac{5}{3}.$$

1325. Найти наибольшее значение площади треугольника с вершинами в точках $z_1=1$, $z_2=2$, $z_3=z$, если z удовлетворяет уравнению

$$|z-1|=2|z-2|.$$

Решить уравнение:

1326. $z^2+7+24i=0$.

1327. $z^4-(1+2i)z^2+2i=0$.

1328. $z^4+1+i\sqrt{3}=0$.

1329. $z^4-4z^3+7z^2-16z+12=0$.

1330. $|2+5iz-z^2|+z^2+3=0$.

1331. Представить многочлен

$$P(z)=z^7+z^6+64z+64$$

в виде произведения:

а) линейных множителей,

б) линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами.

1332. Определить кратность корня $z = 2$ многочлена

$$z^5 - 5z^4 + 7z^3 - 2z^2 + 4z - 8.$$

1333. Найти сумму коэффициентов многочлена

$$(4z^2 - 2z - 1)^{13}.$$

1334. Найти образ кривой Γ при заданном отображении:

а) Γ: $\operatorname{Im} z = 1$, $w = \dfrac{z-1}{z+1}$; б) $\Gamma: |z + 1| = 1$, $w = \dfrac{1}{z}$;

в) Γ: $\operatorname{Im} z = 1$, $w = z^2$; г) $\Gamma: |z| = 2$, $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

1335. Найти образ области D при заданном отображении:

а) D: $\operatorname{Re} z > 0$, $w = \dfrac{z+1}{z-1}$;

б) D: $\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{3\pi}{4}$, $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

1336. Решить уравнения:

а) $\operatorname{sh} z = 0$; б) $\sin z = \dfrac{5}{3}$.

§25. Условия Коши—Римана. Гармонические функции

1337. Исследовать на дифференцируемость функцию:
а) $w = z \operatorname{Re} z$. б) $w = |z|^2$.

1338. Выполняются ли для функции

$$w(z) = \sqrt{|xy|},\ z = x + iy,$$

в точке $z = 0$:

а) условия Коши—Римана,

б) дифференцируема ли функция в этой точке?

1339. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$, если:

а) $\operatorname{Re} f(z) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$, $f(0) = 0$;

б) $\operatorname{Im} f(z) = y \cos y \operatorname{ch} x + x \sin y \operatorname{sh} x$, $f(0) = 0$;

в) $\arg f(z) = xy$, $z = x + iy$, $f(0) = 1$.

1340. Найти все гармонические функции $u(x, y)$ вида:

а) $u = \varphi(x^2 - y^2)$; б) $u = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

§ 26. Ряды Лорана. Особые точки однозначных функций

Разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ (указать область сходимости полученного ряда):

1341. $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$, если:

а) $z_0 = 0$, б) $z_0 = \infty$, в) $z_0 = 2$.

1342. $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$, если а) $z_0 = 0$, б) $z_0 = \infty$.

1343. Выяснить, разлагается ли функция $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0, если:

а) $f(z) = \cos\dfrac{1}{z}$, $z_0 = 0$, $z_0 = \infty$;

б) $f(z) = \operatorname{ctg} z$, $z_0 = \infty$; в) $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}}$, $z_0 = 0$.

1344. Найти главную часть ряда Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки z_0, если:

а) $f(z) = \dfrac{z-1}{\sin^2 z}$, $z_0 = 0$; б) $f(z) = \dfrac{\left(z^2+1\right)^2}{z^2+4}$, $z_0 = \infty$.

Указание: Главной частью ряда Лорана в окрестности точки z_0 называется совокупность тех членов этого ряда, которые стремятся к бесконечности при $z \to z_0$.

1345. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию

$$f(z) = \frac{z^4+1}{z^2+z-2}, \qquad 1 < |z| < 2.$$

1346. Разложить функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2+2} - \frac{1}{z^2-2z}.$$

в ряд Лорана по степеням z, сходящийся в точке $z = \frac{3}{2}$. Указать границы кольца сходимости.

Найти и исследовать все особые точки функции $f(z)$:

1347. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+1}$.

1348. $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$.

1349. $f(z) = \dfrac{e^z}{z\left(1-e^{-z}\right)}$.

1350. $f(z) = \operatorname{ctg} z - \dfrac{1}{z}$.

1351. $f(z) = \sin\dfrac{1}{\cos\frac{1}{z}}$.

1352. $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{z}}{\cos\frac{\pi}{2}z}$.

§ 27. Вычеты и теорема Коши

Найти вычет функции $f(z)$ относительно точки z_0:

1353. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2\left(z^2+9\right)}$;

а) $z_0 = 0$, б) $z_0 = 3i$, в) $z_0 = -3i$,
г) $z_0 = \infty$, д) $z_0 = 1$.

1354. $f(z) = \sin\dfrac{z}{z+1}$.

а) $z_0 = -1$; б) $z_0 = \infty$.

1355. $f(z) = \operatorname{ctg}^{10} z$;

а) $z_0 = 2\pi$; б) $z_0 = \infty$.

1356. $f(z)=\frac{z}{z^2-1}e^{\frac{z}{z-1}}$, $z_0=\infty$.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

1357. $\int\limits_{|z|=2}\frac{z}{1+iz}\sin\frac{i}{z+i}dz$.

1358. $\int\limits_{|z-i|=3}\frac{1}{z-2i}e^{\frac{2z}{z+i}}dz$.

1359. $\int\limits_{|z|=1}\frac{z}{1+\sin\frac{1}{z}}dz$.

1360. $\int\limits_{|z|=3}\frac{dz}{(z-1)^2\left(1-e^{2z}\right)}$.

1361. $\int\limits_{|z|=2}\frac{z^2}{z-1}e^{\frac{1}{z-1}}dz$.

1362. $\int\limits_{|z-1|=1}\frac{z\,dz}{(2z-\pi)\cos z}$.

1363. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(6-x)\sin x}{x^2-2x+26}dx$.

1364. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+4)\cos 3x}{x^2+4x+20}dx$.

1365. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin x\,dx}{x^4+5x^2+4}$.

1366. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(5+4\cos x)^3}$. Указание: положить $e^{ix}=z$.

§ 28. Конформные отображения

1367. Найти конформное отображение $w=f(z)$ полосы $\{0<\operatorname{Im} z<\pi\}$ на круг $|w|<2$ такое, что $f\left(\frac{\pi}{2}i\right)=0$, $\arg f'\left(\frac{\pi}{2}i\right)=0$.

1368. Найти конформное отображение $w=f(z)$ полосы $|\operatorname{Re} z|<\frac{\pi}{2}$ на область $|w|<1$, переводящее точку $z=0$ в точку $w=0$, а точку $z=-\frac{\pi}{2}$ в точку $z=e^{-\frac{3\pi}{4}i}$.

1369. Найти дробно-линейное отображение области:
а) $|z-3|>9$, $|z-8|<16$;   б) $|z-5|>4$, $\operatorname{Re} z>0$
на некоторое кольцо вида $1<|w|<R$.

Глава 5

Дифференциальные уравнения

§ 29. Уравнения 1-го порядка

1370. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых:

а) синусоид $y = \sin(x + C)$;

б) окружностей радиуса 1, центры которых лежат на прямой $y = 2x$.

1371. Составить дифференциальное уравнение траекторий, пересекающих параболы $y = x^2 - Cx$ под прямым углом.

1372. Найти все решения уравнения:

а) $y' = xy^2 + 2xy$, б) $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$,
в) $y' = \cos(y - x)$.

1373. Найти решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию (решить задачу Коши):

а) $xy' + y = y^2$, $y(1) = 0{,}5$; б) $(x + 2y)y' = 1$, $y(0) = -1$.

1374. Найти решение уравнения

$$x^2y' - \cos 2y = 1,$$

удовлетворяющее условию $y(x) \to \dfrac{9\pi}{4}$ при $x \to +\infty$.

1375. Найти ортогональные траектории семейства парабол $y = Cx^2$.

1376. Скорость распада радия пропорциональна его количеству. В течение года из каждого грамма распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?

Решить уравнение:

1377. $(x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (y^2 + 2xy - x^2)\,dy = 0$.

1378. $(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0$.

1379. $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$. **1380.** $x(y' - y) = e^x$.

1381. $(x+y^2)\,dy = y\,dx$. **1382.** $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$.

1383. $(xy + x^2y^3)y' = 1$. **1384.** $x\,dx = (x^2 - 2y + 1)\,dy$.

1385. Найти интегральную кривую уравнения

$$xy' + y = y^2 \ln x,$$

проходящую через точку (1; 1).

1386. Решить уравнение Риккати $y' = -y^2 + 1 + x^2$.
Указание: Подобрать частное решение уравнения и свести его к уравнению Бернулли.

Решить уравнения:

1387. $(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0$.

1388. $2x\cos^2 y\,dx + (2y - x^2 \sin 2y)\,dy = 0$.

1389. $(x^2 + y^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$.

Найти общее и особые решения уравнения:

1390. $y' - \ln y' = y - x$. **1391.** $y'^2 + 4xy' = 5x^2 + 9y$.

1392. $y'^2 - 2yy' + 4e^{2x} = 0$.

1393. $(y+x)^2 + y'^3(3y'+5)^2 = 0$.

1394. Найти кривую, каждая касательная к которой образует с осями координат треугольник с площадью $2a^2$.

1395. Найти кривую, отрезок касательной к которой, заключенный между осями координат, имеет постоянную длину a.

§ 30. Уравнения, допускающие понижение порядка

Решить уравнение:

1396. $x^3y'' + x^2y' = 1$. **1397.** $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.

1398. $yy'' + y'^2 = x$. **1399.** $y''^2 = 4(y' - 1)$.

1400. $xyy'' = xy'^2 + yy'$. **1401.** $x^4y'' = (y - xy')^3$.

Решить задачу Коши:

1402. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$.

1403. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

1404. $xyy'' + x(2\ln x - 1)y'^2 = yy'$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$.

1405. $(1 - \sin x)yy'' + (\cos x)yy' = y'^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

1406. $y(y'' + y') = y'^2(xy^2 - 1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

§ 31. Линейные уравнения и системы уравнений с постоянными коэффициентами

Решить уравнение:

1407. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

1408. $y'' + 2y' + 2y = 0$.

1409. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

1410. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

1411. $y^{V} + 8y''' + 16y' = 0$.

1412. $y^{V} - y = 0$.

Решить неоднородное уравнение:

1413. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

1414. $y'' + 3y' + 2y = (6x - 1)e^{x}$.

1415. $y'' + y = x\sin x$.

1416. $y''' + 4y' = \operatorname{ch}^2 x$.

1417. $y'' + y' - 2y = 2xe^{-2x} + 5\sin x$.

1418. $y^{IV} + 2y'' + y = 9\sin 2x + x^2$.

1419. а) Составить линейное однородное уравнение наименьшего порядка $Ly = 0$ с постоянными действительными коэффициентами и коэффициентом при старшей производной равным единице, имеющее решения $\sin x$ и e^{-x}.

б) Решить уравнение $Ly = x + 2e^{-x}$.

Решить уравнение:

1420. $y'' + 2y' + y + \frac{1}{x^2}e^{-x} = 0$.

1421. $y'' + 2y' + 2y - \dfrac{e^{-x}}{\sin x} = 0.$

1422. $x^3(y'' - y) = x^2 - 2.$

Решить задачу Коши:

1423. $y'' - y = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$

1424. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

1425. $y'' + 4y = \sin 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

1426. $y^{\mathrm{IV}} - y = 8e^x, \; y(0) = -1, \; y'(0) = 0, \; y''(0) = 1, \; y'''(0) = 0.$

1427. Решить краевую задачу

$$y'' + \lambda y = 0, \; y(0) = y(\pi) = 0.$$

Решить систему уравнений:

1428. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x. \end{cases}$

1429. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$

1430. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$

1431. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

1432. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5 \sin t. \end{cases}$

1433. $\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$

1434. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 12x - 4y - 12z, \\ \dot{z} = -4x + y + 5z. \end{cases}$

1435. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = 2x + z, \\ \dot{z} = -2x + 2y - 2z. \end{cases}$

1436. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y - 2z, \\ \dot{y} = 4x + y, \\ \dot{z} = 4x + z \end{cases}$

1437. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 2x - y - 2z, \\ \dot{z} = -x + y + 2z. \end{cases}$

1438. $\begin{cases} \dot{x} = -9x + 3y + 7z + 2, \\ \dot{y} = x + y - z + 4, \\ \dot{z} = -11x + 3y + 9z. \end{cases}$

1439. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 3z + 2e^{2t}, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z - 2e^{2t}, \\ \dot{z} = x + y - 2z. \end{cases}$

1440. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = y - z, \\ \dot{y} = z - y, \\ \dot{z} = x - z, \; x(0) = y(0) = 0, \; z(0) = 1. \end{cases}$$

Решить операционным методом задачу Коши:

1441. $\ddot{x} + 4x = 2\cos 2t; \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 4.$

1442. $\dddot{x} + \dot{x} = 10e^{2t}; \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

1443. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = -3x + y - 2z, \quad x(0) = y(0) = 1, \quad z(0) = 0. \end{cases}$

§32. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Решить уравнение Эйлера:

1444. $x^3y''' + xy' - y = 0.$

1445. $(2x + 3)^3y''' + 3(2x + 3)y' - 6y = 0.$

1446. $x^2y'' - 6y = 12\ln x.$

Исследовать на линейную зависимость систему функций, вычислить вронскиан:

1447. $y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{2x}, \quad y_3 = e^{3x}.$

1448. $y_1 = \pi, \quad y_2 = \arcsin x, \quad y_3 = \arccos x.$

1449. $y_1 = x^2, \quad y_2 = x|x|.$

1450. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение наименьшего порядка, решениями которого являются функции

$$y_1 = \sin x, \quad y_2 = \cos x, \quad y_3 = e^{2x}.$$

Найти общее решение уравнения:

1451. $(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0.$

1452. $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0.$

1453. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$

1454. $(x^2 + x)y'' + (4x + 2)y' + 2y = 6(x + 1), \quad x > 0.$

1455. $xy'' - 2(x+1)y' + (x + 2)y = 3xe^x, \quad x > 0.$

1456. $x^2y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = x^3\cos x.$

1457. $(1 + x^2)y'' + xy' - y = \dfrac{x^2}{1+x^2}.$

1458. $(x \ln x)y'' - y' = \ln^2 x.$

§ 33. Элементы теории устойчивости

Исследовать на устойчивость решение уравнения с заданным начальным условием:

1459. $\dot{x} - tx = -t, \quad x(0) = 1.$

1460. $\dot{x} - ax = 0, a \in \mathbb{R}, x(0) = 1.$

Исследовать на устойчивость решение системы с заданными начальными условиями:

1461. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = x - y, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

1462. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = x + y, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

1463. $\begin{cases} \dot{x} = ax - y, \\ \dot{y} = ay - z, \\ \dot{z} = az - x, a \in \mathbb{R}, x(0) = y(0) = z(0) = 0. \end{cases}$

Определить характер точки покоя системы:

1464. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

1465. $\begin{cases} \dot{x} = x - 5y, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$

1466. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$

1467. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$

Исследовать на устойчивость точку покоя (0; 0) системы:

1468. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 3x^2, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4. \end{cases}$

1469. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + \sin^3 x - y^2, \\ \dot{y} = -2x + \sin y + e^y x^2. \end{cases}$

1470. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8 \sin y, \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$

Найти точки покоя системы и определить их характер:

1471. $\begin{cases} \dot{x} = 2(\sqrt{x} - y - 1), \\ \dot{y} = \operatorname{sh}(x + y - 1). \end{cases}$

1472. $\begin{cases} \dot{x} = \arcsin(x^2 - 2x - y), \\ \dot{y} = \ln\left(1 - x + \dfrac{x^2}{3}\right). \end{cases}$

Найти точки покоя и определить их характер:

1473. $\ddot{x} + \dot{x} = \ln(1 - 3x + x^2 - \dot{x})$.

1474. $\ddot{x} + \dot{x} + 1 = \sqrt[3]{1 + x + x^2 - \dot{x}}$.

Построив функцию Ляпунова, исследовать на устойчивость точку покоя (0; 0) системы:

1475. $\begin{cases} \dot{x} = y + x^3, \\ \dot{y} = -x + y^3. \end{cases}$

1476. $\begin{cases} \dot{x} = y + x^2 y^2 - \dfrac{x^5}{4}, \\ \dot{y} = -2x - 2x^3 y - \dfrac{y^3}{2}. \end{cases}$

Ответы

Глава 1

8. $a = 0,(1) = 1/9$. **9.** $a + b = 0,(25) = 25/99$. **10.** $A + B = [2, 6)$, $AB = (3, 5]$, $A \setminus B = [2, 3]$. **11.** а) $-3,1 < x < -2,9$; б) $x \leqslant -7$, $x \geqslant 13$; в) $x < -3/2$; г) $0 < x < 1/2$; д) $x \leqslant -3/2$, $x \geqslant 1/4$. **12.** $a > -a$, если $a > 0$, $-a > a$, если $a < 0$. **13.** а) $b \geqslant 0$, б) $b \leqslant 0$; в) $b < 0$; г) $b > 0$. **14.** а) 1; б) 1; в) $\sqrt{2}/2$. **16.** 0. **17.** 0. **18.** 1/2 (см. задачу 1). **19.** 1/3 (см. задачу 2). **22.** Не будет. Она просто неограничена. **27.** 9/8; 1/6. **28.** 2; –30. **29.** 0, 1, 1, 1; –1/6, 4/3, 1/3, 1. **30.** – 1, 0, 1. **32.** У к а з а н и е . Воспользоваться неравенством

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad (k \geqslant 2).$$

34. $E = (-\infty, \infty)$; $E_1 = (0, 1]$.

35. $E = \left[\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$, $E_1 = \left[0, \dfrac{\sqrt{17}}{2}\right]$.

36. $1, -\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+4x+5}, -f(x), 2/(1 + x^2), (1 + x^2)/(1 - x^2)$.

42. 0, 25; 2, ∞.

43. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2 \end{cases}$ (рис. 43);

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ \sin x, & \pi < x \leqslant 3\pi/2, \\ -1, & x > 3\pi/2 \end{cases} \text{(рис. 44).}$$

44. а) 1; б) 2/3; в) 1/2; г) 3; д) 4/3; е) 0; ж) –1/16; з) 1/144; и) $1/\sqrt{2a}$; к) 0. **45.** а) 3; б) 2; в) 4. **46.** ∞. **47.** а) e^4; б) e^3; в) 1. **48.** а) 4; б) $a^b\ln a$. **49.** Непрерывна всюду (рис. 45). **50.** Если $A = 2$, то $f(x)$ непрерывна всюду. Если $A \neq 2$, то $x = 1$ — устранимая точка разрыва (рис. 46). **51.** $x = -1$, $x = 3$ — точки разрыва первого рода (рис. 47). **52.** $x = -1$ — устранимая точка разрыва (рис. 48).

53. $x = -1$ — точка разрыва второго рода. **54.** $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$) — точки разрыва первого рода (рис. 49). **55.** $x = 1$ — точка разрыва первого рода (рис. 50). **56.** $x = 0$ — точка разрыва первого рода, если $a \neq 1$ (рис. 51). **57.** $\delta \leqslant \varepsilon/8$. **58.** $\delta \leqslant \varepsilon/12$. **59.** $(b - dy)/(cy - a)$. **60.** $3x$. **61.** x. **62.** $f' = 3x^2 - 2$, $f'(0) = -2$, $f'(2) = 10$.

63. $f'(x) = \arcsin\frac{x}{x+1} + \frac{x}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$ $\left(x > -\frac{1}{2}\right)$;

$f'(0) = 0$, $f'(1) = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$. **64.** $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ $(|x| \neq 1)$.

65. а) $1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x \neq 0)$; б) $-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$ $(x > 0)$;

в) $\frac{1 - x + 4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$ $(|x| \neq 1)$; г) $\frac{1+2x^2}{(1+x^2)^{1/2}}$; д) $\frac{a^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$ $(|x| < |a|)$;

е) $\frac{1 + 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ $(x > 0)$; ж) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$ $(x > 0)$;

з) $\frac{2}{\sin^2 x}$ $(x \neq k\pi,\ k = 0, \pm 1, \ldots)$; и) $\frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}$;

к) $\frac{n\sin x}{\cos^{n+1} x}$ $\left(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi,\ k\text{—целое}\right)$; л) $-2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{-2}\frac{\ln 2}{x^2}$;

м) $e^x e^{e^x}\left(1 + e^{e^{e^x}}\right)$; н) $a^a x^{a^a - 1} + a x^{a-1} a^{x^a}\ln a$;

о) $\frac{-2\operatorname{sign}x}{1+x^2}$ $(x \neq 0)$; п) $\frac{\operatorname{sign}x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0 < |x| < 1)$.

66. $\frac{1}{\cos^4 x}$ $\left(x \neq \frac{2k+1}{2}\pi,\ k = 0, \pm 1, \ldots\right)$. **67.** $-2x\exp(-x^2)$.

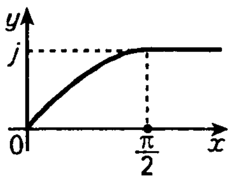


Рис. 43

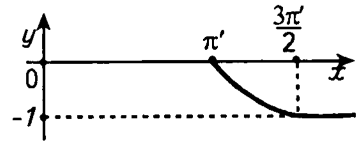


Рис. 44

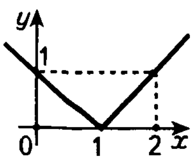


Рис. 45

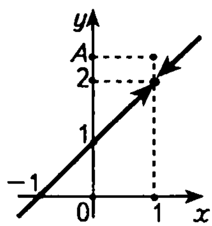


Рис. 46

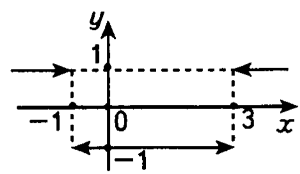


Рис. 47

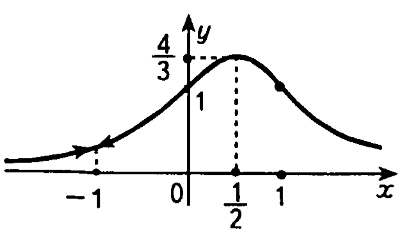


Рис. 48

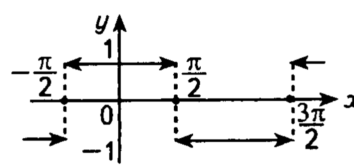


Рис. 49

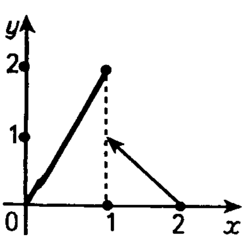


Рис. 50

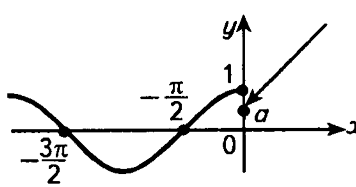


Рис. 51

68. а) $2x\cos x^2$ б) $\sin 2x$; в) $21x^6\cos x^7\sin^2 x^7$; г) $-\cos x\times$ $\times\sin(\sin x)$; д) $-2x\sin x^2$; е) $-4x^3\sin 2x^4$.

69. а) $1/\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$; б) $a/(a^2+x^2)$; в) $1/\sqrt{a^2+x^2}$; г) $\operatorname{sign}\cos x$, $x\neq\dfrac{2k+1}{2}\pi$, k — целое; д) $-1/\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$; е) $(3x^2+1)\,e^{x^3+x}$.

70. $\dfrac{1}{\sin x}$ $(0<x-2k\pi<\pi$, k — целое).

71. а) $\dfrac{x}{1+x^2}+\operatorname{arctg}x$; б) $\dfrac{6}{x}\ln^2 x^2$ $(x\neq 0)$;

в) $\dfrac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$ $(x>e)$; г) $\dfrac{x}{x^4-1}$ $(|x|>1)$;

д) $\dfrac{1}{2\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$ $(x>-1)$; е) $1/\cos x$ $(|x-2k\pi|<\pi/2$, k — целое);

ж) $-\dfrac{\ln^3 x}{x^2}$ $(x>0)$; з) $\dfrac{2x}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}$; и) $\dfrac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$ $(x\geqslant 0)$;

к) $\dfrac{1}{1+x^2}$ $(x\neq 1)$; л) $\dfrac{x^3}{x^6+1}\left(|x|\neq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; м) $\dfrac{12x^5}{\left(1+x^{12}\right)^2}$;

н) $\dfrac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\left(x\neq\dfrac{2k-1}{2}\pi,\ k\text{ — целое}\right)$; о) $\dfrac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg}x$;

п) $\dfrac{1}{2\left(1+x^2\right)}$.

72. $f'(x)=\begin{cases}-1, & -2<x<1,\\ 2x-3, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 1, & 2<x<4\end{cases}$ (рис. 52).

73. $f'(x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ \dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant 0\end{cases}$ (рис. 53).

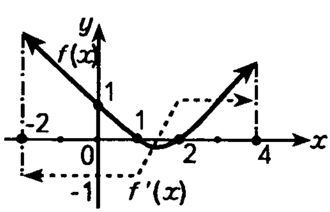


Рис. 52

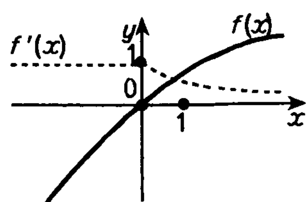


Рис. 53

74. $\frac{y'}{y}=\frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}$. **75.** $2\operatorname{th} x$.

76. а) $2x\operatorname{ch}(x^2+1)$; б) $18x^5\operatorname{ch}^2 x^6\operatorname{ch} x^6$.

77. $(2x+1)\operatorname{sh} 2(x^2+x+1)$.

78. а) $2\operatorname{th} x/\operatorname{ch}^2 x$; б) $2x/\operatorname{ch}^2 x^2$.

79. а) $\frac{1}{x\operatorname{ch}^2(1+\ln x)}$; б) $1/\sqrt{1+x^2}$; в) $\frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{2}\,(1+x^2)^{3/4}}$;

г) $\operatorname{cth} x$ $(x>0)$; д) $\frac{1}{x}\operatorname{sh}\ln x$ $(x>0)$; е) $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}e^{\operatorname{th} x}$;

ж) $(\operatorname{sh} x)^{\operatorname{ch} x}[\operatorname{sh} x\ln\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x\operatorname{cth} x]$; з) $-(3\operatorname{sh} x)/\operatorname{ch}^4 x$;

и) $2\operatorname{ch} x/\operatorname{sh}^2 x$ $(x\neq 0)$.

80. $df(x)=(2x+1)\Delta x$; $df(1)=3\Delta x$; $\Delta f(1)=3\Delta x+(\Delta x)^2$; при $\Delta x=0{,}1$ $df(1)=0{,}3$, $\Delta f(1)=0{,}31$.

81. $e^x(1+x)\,dx$. **82.** $\operatorname{ch} x\,dx$.

83. $-x\operatorname{sh} x\,dx$. **84.** $-\frac{2x\,dx}{1-x^2}$ $(|x|<1)$.

85. а) $(-2+4x^2)\,e^{-x^2}$; б) $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$.

87. $120x\,dx^4$. **88.** $e^x\left[\ln x+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right]dx^3$.

89. $y'=\frac{3-3t^2}{2-2t}=\frac{3}{2}(1+t)$, $y''=\frac{3}{4(1-t)}$ $(t\neq 1)$.

90. $y'=-\operatorname{ctg} t$, $y''=-1/(2\sin^3 t)$ ($t\neq k\pi$, k — целое).

91. $y'=t$, $y''=1/f''(f)$.

92. $y'=\frac{\sin t}{1-\cos t}$, $y''=\frac{-1}{4\sin^4(t/2)}$ ($t\neq 2k\pi$, k — целое).

93. а) $y+11x-18=0$, $11y-x+46=0$; б) не имеют.

94. $\varphi=\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$. **95.** $\varphi=\pi/4$. **96.** $\pi/6$.

98. а) $c=1/\sqrt{3}$; б) $c=\frac{-A\pm\sqrt{A^2+3A+3}}{3}$ $\forall B, C$;

в) $c=1/\sqrt{3}$ $\forall A, B, C$.

100. а) Функция возрастает на $(-\infty, 1/2)$ и убывает на $(1/2, -\infty)$; б) функция возрастает на $(-\infty, 1)$ и убывает на $(1, \infty)$.

103. a/b. **104.** 2. **105.** 1. **106.** 4. **107.** 1/4. **108.** 1.

109. а) $e^{-1/6}$; б) $e^{1/3}$; в) a/b; г) 3; д) $-1/3$; е) 2; ж) 1/3. з) 0; и) e^{-1}; к) 1; л) 1; м) e^{-1}; н) $a^a(-1+\ln a)$; о) $1/n$; п) $\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$; р) n/m; с) 1/2; т) $2/\pi$; у) 1/2.

111. $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$.

112. $f(x) = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$. Указание. Использовать разложение по формуле Тейлора для функции e^x.

113. $\ln\cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)$. **114.** $\sin(\sin x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$.

115. $-1/12$. **116.** 0. **117.** $-1/6$. **118.** $-1/2$.

119. а) 2,718281; б) 0,017453; в) 2,236. Указание. Представить число $\sqrt{5}$ в виде $\sqrt{5} = 2\sqrt{1+\frac{1}{4}}$ и воспользоваться формулой Тейлора для функции $(1+x)^m$ при $x = 1/4$, $m = 1/2$; г) $\ln 2 = 0{,}69315$, $\ln 3 = 1{,}09861$.

120. а) При $x = -1/2$ максимум, $y(-1/2) = 9{,}4$; б) при $x = 0$ минимум, $y(0) = 0$; в) при $x = 0$ минимум, $y(0) = 0$; при $x = \pm 1$ максимум, $y(\pm 1) = 1$; г) при $x = -1$ максимум, $y(-1) = -2$; при $x = 1$ минимум, $y(1) = 2$; д) при $x = 3\pi/4$ максимум, $y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}$; при $x = \frac{7\pi}{4}$ минимум, $y\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{7\pi/4}$; е) при $x = 0$ максимум, $y(0) = 1/4$; ж) при $x = 1/2$ максимум $y(1/2) = 1/4$; при $x = -1/2$ минимум, $y(-1/2) = -1/4$; з) при $x = 1$ максимум, $y(1) = 0$; при $x = 3$ минимум, $y(3) = -4$; и) при $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$) максимум, $y(k\pi) = (-1)^k + \frac{1}{2}$; при $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$) минимум, $y(\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi) = -\frac{3}{4}$; к) при $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$) максимум, $y\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$; при $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$) минимум, $y\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

121. а) 32; б) 10,1; 2.

122. $d = 7\sqrt{2}/8$. Указание. Исследовать на экстремум функцию $y = \frac{1}{\sqrt{2}}|x^2 - x + 2|$.

123. а) 2; 0; б) $(1 + \sqrt{2})/2 > 1$; 0.

124. а) $x = 1$ — точка перегиба; график направлен выпуклостью вниз на $(-\infty, 1)$; на $(1, \infty)$ график выпуклый кверху, б) $x = \pm 1/\sqrt{2}$ — точки перегиба: на $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ график выпуклый кверху: на интервалах $|x| > 1/\sqrt{2}$ график направлен выпуклостью вниз (рис. 54).

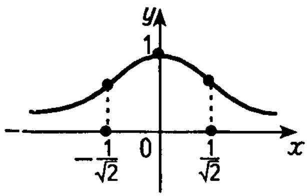


Рис. 54

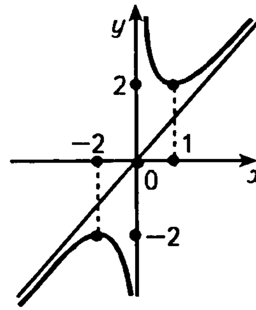


Рис. 55

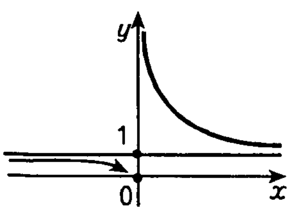


Рис. 56

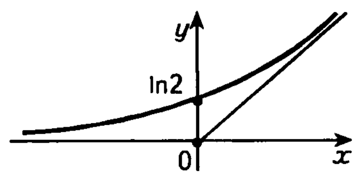


Рис. 57

125. а) Наклонная асимптота $y = x$; вертикальная — $x = 0$ (рис. 55); б) горизонтальная асимптота $y = 1$, вертикальная — $x = 0$ при $x \to +0$ (рис. 56); в) горизонтальная асимптота $y = 0$ (см. рис. 54); г) наклонная асимптота $y = x$ при $x \to \infty$; горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \to -\infty$ (рис. 57).

126. а) $x = -1/3$ — точка минимума, $y(-1/3) = -\sqrt{10}$; $x = -1$, $x = 1/2$ — точки перегиба; $y = -1$ — горизонтальная асимптота при $x \to -\infty$, а $y = 1$ — при $x \to +\infty$ (рис. 58); б) $x = 0$ — точка минимума; $x = -1$ — вертикальная асимптота: $y = 0$ — горизонтальная асимптота при $x \to -\infty$; график выпуклый вверх на $(-\infty, -1)$ и вниз на $(-1, \infty)$ (рис. 59).

127. а) См. рис. 60, Γ_1 $(t > 1)$, Γ_2 $(-1 < t < 1)$, Γ_3 $(t < -1)$; б) см. рис. 61, Γ_1 $(t > 0)$, Γ_2 $(t < 0)$.

128. а) Стороны прямоугольника $a\sqrt{2}$ и $b\sqrt{2}$; б) $x = a/6$; б) $PB = 12$ км; г) $a = d/\sqrt{3}$, $h = d\sqrt{2}/\sqrt{3}$.

129. Прямоугольник есть квадрат со стороной 2.

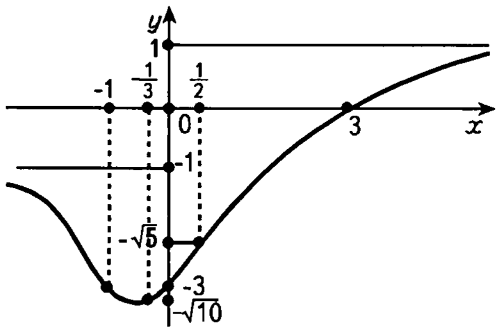


Рис. 58

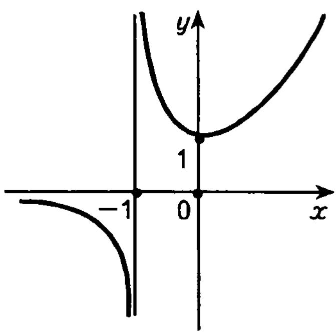


Рис. 59

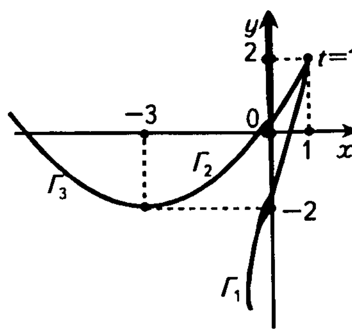


Рис. 60

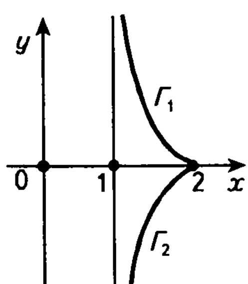


Рис. 61

130. $\dfrac{|av \pm ub| \sin\theta}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\theta}}$. Указание. Расстояние между кораблями (см. рис. 7) в произвольный момент времени t, согласно теореме косинусов, равно

$$r^2(t) = (a+ut)^2 + (\beta + vt)^2 - 2(a+ut)(b+vt)\cos\theta.$$

Момент времени, когда корабли были на расстоянии a и b от места встречи, считаем равным нулю. Далее исследуем функцию $r^2(t)$ на экстремум.

131. а) $p\left(1+\dfrac{2x}{p}\right)^{3/2}$; б) $\dfrac{(a^4-a^2x^2+b^2x^2)^{3/2}}{a^4b}$; в) $2\sqrt{y}$.

132. $\xi = a(t - 3\sin t)$, $\eta = 3a(1-\cos t)$.

Глава 2

Для краткости записи в ответах пропускается постоянная C.

133. $\dfrac{625}{3}x^3 - 125x^4 + 30x^5 - \dfrac{10}{3}x^6 + \dfrac{1}{7}x^7$.

134. $x - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5$. **135.** $x - \operatorname{arctg} x$.

136. $x - \cos x + \sin x$. **137.** $x + \ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$.

138. $-x + \operatorname{tg} x$. **139.** $x - \operatorname{th} x$.

140. $x - \operatorname{cth} x$. **141.** $\arcsin x + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|$.

142. $\dfrac{1}{200}(2x-3)^{100}$.

143. а) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3}{2}}x$; б) $x - 3x^2 + \dfrac{11}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^4$;

в) $a\ln|x| - \dfrac{a^2}{x} - \dfrac{a^3}{2x^2}$; г) $\dfrac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \dfrac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \dfrac{4}{3}x\sqrt[4]{x^3}$;

д) $-x + 3\ln|x| + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{2x^2}$; е) $\dfrac{2}{3}\sqrt{x}\,(x+6)$;

ж) $\dfrac{1}{4}\ln(1+x^4)$; з) $-x + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$;

и) $x + 2\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$; к) $\dfrac{4^x}{\ln 4} + 2\dfrac{6^x}{\ln 6} + \dfrac{9^x}{\ln 9}$;

л) $a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x$; м) $\dfrac{1}{22}(2x-9)^{11}$;

н) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$;   о) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2+3x^2}\right)$;

п) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2-2}\right|$;   р) $-\frac{1}{6}\left(3e^{-2x}+2e^{-3x}\right)$.

144. $-\sqrt{1-x^2}$.   **145.** $\ln(2+e^x)$.

146. $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x$.   **147.** $\frac{1}{3}\left[(x+1)^{3/2}-(x-1)^{3/2}\right]$.

148. $-\ln|\cos x|$.   **149.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

150. $-\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{3/2}$.

151. $\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}$. Указание. Разделить числитель и знаменатель на 2^x3^x и положить $t=(3/2)^x$.

152. а) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|$; б) $\frac{1}{4}(1+x^3)^{4/3}$; в) $\frac{-1}{2(1+x^2)}$;

г) $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|$; д) $\operatorname{arctg} e^x$; е) $x-\ln\left(1+\sqrt{e^{2x}+1}\right)$; ж) $\frac{1}{3}\ln^3 x$;

з) $\ln|\sin x|$; и) $\ln|\operatorname{th}(x/2)|$; к) $2\operatorname{arctg} e^x$; л) $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2$;

м) $-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x$; н) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x$; о) $-2\operatorname{cth} 2x$; п) $-\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{2/3}$;

р) $\frac{3}{56}(1+x^2)^{4/3}(4x^2-3)$; с) $x-\ln(1+e^x)$.

153. $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.   **154.** $-(x+1)e^{-x}$.

155. $x\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x$.   **156.** $-x\cos x+\sin x$.

157. $\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x$.   **158.** $x\sin x+\cos x$.

159. $-\sqrt{x}+(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

160. а) $\frac{x}{2}\sin 2x-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x$; б) $-\frac{x}{2}+\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg} x$;

в) $-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)$; г) $-\frac{1}{2}(1+x^2)e^{-x^2}$; д) $x(-1+\ln x)$;

е) $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{-1}{n+1}+\ln x\right)$; ж) $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x}{9}\right)\operatorname{sh} 3x-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{27}\right)\operatorname{ch} 3x$;

з) $x^2\operatorname{ch} x-2x\operatorname{sh} x+2\operatorname{ch} x$; и) $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\cos x\ln\operatorname{tg} x$.

161. а) $\ln|x-2|+\ln|x+5|$; б) $\frac{9}{343}\ln\left|\frac{x+5}{x-2}\right|-\frac{9}{49(x-2)}-\frac{5}{14(x-2)^2}$.

162. а) $\operatorname{arctg}(x-1)$; б) $1/(1-x)$; в) $\ln|x^2-2x+2|$.

163. а) $\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$;

б) $\frac{1}{50}\left[2\ln|x+2| - \ln(x^2+1) + 14\operatorname{arctg} x + \frac{5(2x+1)}{x^2+1}\right]$.

164. а) $\frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$; б) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|$;

в) $\frac{x^9}{9} - \frac{x^8}{8} + \frac{3x^7}{7} - \frac{5x^6}{6} + \frac{11x^5}{5} - \frac{21x^4}{4} + \frac{43x^3}{3} - \frac{85x^2}{2} + 171x +$

$+ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{(x+2)^{1024}}\right|$;

г) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

д) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$;

е) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$;

ж) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.

165. $2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x})$.

166. а) $\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}} + 4\ln(1+\sqrt[4]{x})$;

б) $\frac{3}{4}\ln\frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})^3} - \frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}$;

в) $\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} - \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}$; г) $\frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$;

д) $\frac{1}{2}\left[x+2\sqrt{x} - \sqrt{x(1+x)} - \ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})\right]$. Указание. Умножить числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{1+x} - 1 - \sqrt{x}$;

е) $\frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}$.

167. $\ln\left|1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}\right|$.

168. $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right|$.

169. а) $\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}$; б) $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x|$.

170. а) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{2}$; б) $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

171. $\frac{1}{2}\ln\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|$.

172. а) $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right)$; б) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; в) $-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; г) $-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$;

д) $\frac{1}{2}\ln[\operatorname{sh}(2x-1)\operatorname{ch}(2x+1)]$ $\left(x>\frac{1}{2}\right)$.

174. а) Так как $2x/\pi<\sin x<x$ $[0,\pi/2]$, то

$$\int_0^{\pi/2}\frac{2x}{\pi}\,dx<\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx<\int_0^{\pi/2}x\,dx;$$

б) так как $e^x>1+x$ $[0,1]$, то $\int_0^1 e^x\,dx\geqslant\int_0^1(1+x)\,dx$.

175. а) $\pi/6$; б) $1/2$; в) 1; г) $\ln\sqrt{2}$; д) $\pi/3$; е) 1; ж) 1;

з) $-\frac{3}{4}+\ln 4$.

176. $\pi/(2ab)$ (см. задачу **172**). **177.** π (см. задачу **156**).

178. $\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$ (см. задачу **154**). **179.** $f'(1)-f(1)+f(0)$.

181. а) $\sin x^2$; б) $-\sqrt{1+a^2}$; в) 0. **183.** 2. **184.** 4,5.
185. $2bh/3$. **186.** πab. **187.** $3\pi a^2/2$. **188.** $(e^2+1)/4$.
189. $6a$. **190.** $8a$.

191. Принимая θ за параметр, имеем $x=\rho\cos\theta=f(\theta)\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta=f(\theta)\sin\theta$,

$$|\Gamma|=\int_\alpha^\beta\sqrt{f^2(\theta)+(f'(\theta))^2}\,d\theta.$$

192. $3\pi a/2$. См. задачу **191**; одна половина кривой описывается при изменении φ в пределах от 0 до $3\pi/2$.

193. $8a$. Верхняя половина кардиоиды описывается при изменении φ от 0 до π.

194. а) $\frac{1}{3}\pi r^2 h$; б) $\frac{\pi h}{3}\left[r_1^2+r_2^2+r_1r_2\right]$; в) $\pi^2/2$; г) πpa^2.

195. а) $8\pi\left(\pi-\frac{4}{3}\right)a^2$; б) 3π; в) $\frac{\pi}{27}[10^{3/2}-1]$; г) $\frac{12}{5}\pi a^2$.

196. а) По методу прямоугольников искомый интеграл

$$I \approx \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}\frac{1}{1+\xi_k},$$

$$\xi_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2},\ x_k = \frac{k}{8}\ (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 8).$$

Подставляя значения ξ_k, получаем

$$I \approx 2\sum_{k=8}^{15}\frac{1}{2k+1} \approx 0{,}6927.$$

Остаток

$$R_8 \leqslant \frac{1}{8^2}\cdot\frac{2}{12} = \frac{1}{384} \leqslant 0{,}0027.$$

По методу трапеций

$$I \approx \frac{1}{16}\{f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_7) + f(x_8)\} \approx 0{,}6941$$

с такой же погрешностью, как и для метода прямоугольников. По методу Симпсона

$$I \approx \frac{1}{24}\{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 4f(x_7) + f(x_8)\} \approx$$

$$\approx 0{,}69315$$

с остатком квадратурной формулы

$$R_4 \leqslant \frac{M_4}{4^4\cdot 2880} \leqslant 5\cdot 10^{-5} \leqslant 10^{-4}.$$

Таким образом, метод Симпсона дает для значения интеграла первые три знака точные. Точное значение интеграла

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 0{,}693147\ \ldots$$

б) По методу прямоугольников $I \approx 0{,}8358$, а по методу трапеций $I \approx 0{,}8352$ с остатком $R_{12} \leqslant 0{,}004$. По методу Симпсона остаток $R_6 \leqslant \dfrac{10}{2880\cdot 6^4} \leqslant 10^{-5}$. Поэтому, вычисляя значение I по формуле Симпсона, получаем четыре точных знака: $I \approx 0{,}83565$.

197. $L_3(x) = -\dfrac{1}{2}(x-3)x^2$.

198. а) $\pi/4$; б) $\dfrac{1}{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$; ∞, $\alpha \geqslant 1$; в) $\pi/2$; г) ∞.

199. Все интегралы сходятся.

200. а) 1; б) $\frac{a}{a^2+b^2}$; в) $\frac{1}{2}$ $(e^{\pi}+1)$.

201. а) Сходится при $p > 0$, $a \neq 0$; при $a = 0$ сходится при $p > 1$; б) сходится, если p или q больше нуля; в) сходится при $m > -1$, $n - m > 1$.

Глава 3

202. 2. **203.** –2. **204.** 1. **205.** 1.
206. $\cos(\alpha + \beta)$. **207.** $4ab$. **208.** 1.
209. 4. **210.** 0.

211. а) Нечетная; б) четная; в) четная; г) нечетная.

212. $A_{11} = bc - x^2$, $A_{12} = x^2 - cx$, $A_{13} = x^2 - bx$, $A_{21} = x^2 - cx$, $A_{22} = ac - x^2$, $A_{23} = x^2 - ax$, $A_{31} = x^2 - bx$, $A_{32} = x^2 - ax$, $A_{33} = ab - x^2$, $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 2x^3 - x^2(a + b + c) + abc$.

213. а) 0; б) – 4. **214.** а) 72; б) $(c - a)(b - a)(c - b)$.

215. $\Delta = \Delta_1 \cdot \Delta_2$ = строки на столбцы:

$$\begin{vmatrix} 7 & 10 & 9 \\ 11 & 14 & 10 \\ 9 & 13 & 9 \end{vmatrix} = 35;$$

строки на строки:

$$\begin{vmatrix} 7 & 10 & 9 \\ 11 & 14 & 10 \\ 9 & 13 & 9 \end{vmatrix} = 35:$$

столбцы на строки:

$$\begin{vmatrix} 7 & 10 & 10 \\ 12 & 14 & 11 \\ 8 & 11 & 9 \end{vmatrix} = 35;$$

столбцы на столбцы:

$$\begin{vmatrix} 7 & 10 & 10 \\ 12 & 14 & 11 \\ 8 & 11 & 9 \end{vmatrix} = 35.$$

216. а) $C = \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$; б) $C = \begin{pmatrix} 1 & -18 \\ -21 & 1 \end{pmatrix}$.

217. Ранг $A = 2$, $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

218. $x_1 = -7$, $x_2 = 5$. **219.** $x_1 = 3/2$, $x_2 = -1/2$.

220. $x = 3/2$, $y = -1/2$. **221.** Система решений не имеет.

222. $x = -84$, $y = -93/2$, $z = 31/2$.

223. Система имеет бесконечное множество решений:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 26 & -17 & 6 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$x = 6 - 26z + 17t, \quad y = -1 + 7z - 5t,$$

где z, t — любые вещественные числа.

224. Ранг $A = 3$; ранг $B = 3$.

225. а) $5/\sqrt{2}$; б) $x = \sqrt{2}$, $y = 1$, $z = -1$; в) $1/2$.

226. 3, $\sqrt{6}$; $\sqrt{11}$; 2. **227.** а) $5/21$; б) $1/\sqrt{2}$; в) $1/\sqrt{2}$.

228. Не может, потому что в данном случае $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geqslant \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 5/4 > 1$, чего быть не может.

229. $x = y = z = \sqrt{3}$.

230. $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| = 22$. У к а з а н и е. $|\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}| = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 \pm 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}$.

231. $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = 20$. **232.** $\omega = \pi/4$.

233. $\lambda = -\dfrac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})} = -\left(\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\right)^2$. **234.** $x = 2/5$, $y = z = 4/5$.

235. $(1, -2)$. У к а з а н и е. Данная задача эквивалентна делению отрезка AB на две равные части.

236. $x = 1/2$, $y = -5/4$.

237. Пусть точки деления $M_1 = (z_1, z_2)$, $M_2 = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ (рис. 62). Определим числа μ и λ (см. [2], § 7) для точки M_1:

$$\mu = \frac{|M_1A|}{|AB|} = \frac{1}{3}, \qquad \lambda = \frac{|M_1B|}{|AB|} = \frac{2}{3}.$$

Поэтому

$$z_1 = 1 \cdot \lambda + 4\mu = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2,$$

$$z_2 = -5\lambda + 3\mu = -\frac{10}{3} + 1 = -\frac{7}{3},$$

$$M_1 = \left(2, -\frac{7}{3}\right).$$

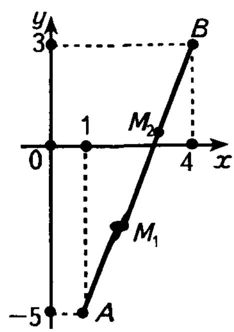


Рис. 62

Аналогично $\bar{z}_1 = 3$, $\bar{z}_2 = 1/3$ ($\mu = 2/3$, $\lambda = 1/3$), $M_2 = (3, 1/3)$.

238. M_1 и M_2 не лежат на данной прямой, M_2 лежит на этой прямой.

239. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$. Точка $M_2 = (2, 3)$ лежит на прямой, поэтому $y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 2)$. Если за точку, лежащую на прямой, взять другую точку, например $M_0 = (0, 13/3)$, то уравнение примет вид: $y - \frac{13}{3} = -\frac{2}{3}x$.

240. а) $-x - 2y + 4 = 0$; б) $-2x + y + 3 = 0$.

241. $2x - 3y = 0$, $3x + 2y = 0$.

242. а) $\frac{-2x}{\sqrt{29}} - \frac{5y}{\sqrt{29}} - \frac{4}{\sqrt{29}} = 0$; б) $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$; в) $-\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}} = 0$;

243. а) $d = \frac{|2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; б) $d = \frac{|-2 \cdot 1 - 8 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{68}} = \frac{19}{\sqrt{68}}$; в) $d = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

244. $(x - 1) - 2(y - 2) + 3(z + 3) = 0$.

245. $-4x - y + 2z + 3 = 0$.

246. а) $A(x - 1) + B(y - 1) + 2(A + 2B)(z - 1) = 0$, где A, B — произвольные числа, одновременно не равные нулю;

б) $2(x - 1) + 4(y - 1) + (z - 1) = 0$.

247. а), б), в) определяют параллельность плоскости. В случае в) мы даже имеем совпавшие плоскости. В случае г) плоскости не параллельны.

248. а) $\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - 1 = 0$; б) $\frac{4}{9}x - \frac{1}{9}y + \frac{8}{9}z - \frac{14}{9} = 0$.

249. а) $d = \frac{1}{7}|2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 - 7| = \frac{5}{7}$; б) $d = \frac{1}{3}|2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 1| = \frac{1}{3}$.

250. $\cos\varphi = 59/63$.

251. $x^2 + y^2 + z^2 = 144/29$. Указание. Радиус шара есть расстояние от начала координат до данной плоскости ($d = 12/\sqrt{29}$).

252. $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{-6/5} = 1$.

253. $-7(x-2) + (y+1) + 5(z-1) = 0$. Указание. Из условий ортогональности плоскостей найти отношения A/C, B/C, где A, B, C — коэффициенты искомой плоскости.

254. а) $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$, $\gamma = \pi/3$; б) $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/3$, $\gamma = 0$.

255. а) $5/3$; б) $3/14$. Указание. Взять точку на одной из плоскостей и найти ее расстояние до другой.

256. $(2, -1, 0)$; $(4/3, 0, -1/3)$; $(0, 2, -1)$.

257. а) $A_1D_2 = A_2D_1$; б) $A_1 = D_1 = 0$, $A_2 = D_2 = 0$.

258. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{-3} = \frac{z+1}{5}$.

259. $x = 1 + 2t$, $y = -1 + t$, $z = -3 + 5t$.

260. а) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$; б) $\frac{x}{-5} = \frac{y+1}{12} = \frac{z-1}{13}$. Указание. В случае а) разрешаем систему относительно x и y, а в случае б) относительно z и y.

261. $\cos\varphi = \frac{1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + \sqrt{2}\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

262. $l = 3$. Указание. Перейти к параметрическому заданию прямых. Предполагая, что прямые пересекаются в некоторой точке, получаем систему

$$\begin{cases} 2t_0 - lt_1 = 5, \\ 3t_0 - 4t_1 = -1, \\ 4t_0 - 2t_1 = 6, \end{cases}$$

из которой и находим значения l, t_0, t_1.

263. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-0}{1}$. Указание. Вектор $(2, -4, 1)$ коллинеарен вектору $a=(a_1, a_2, a_3)$, лежащему на прямой.

264. а) Векторы a и b ориентированы противоположно системе координат; б) векторы a и b ориентированы так же, как система координат (определитель из координат векторов $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{vmatrix}=1>0$).

265. $|a\times b|=21$.

266. Да ($a\times b=0$).

267. Векторы a и b должны быть коллинеарны.

269. $\sin\varphi=\frac{|a\times b|}{|a|\cdot|b|}=\frac{5\sqrt{17}}{21}$.

270. $S=\left\|\begin{matrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{matrix}\right\|=2$.

271. а) Компланарны; б) нет.

273. а) Линейно зависимы (см. задачу *224*, матрица B); б) линейно независимы, ранг матрицы из координат векторов равен трем.

275. $\lambda=15$.

276. а) $AB=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}29 & -22\\ 31 & -24\end{pmatrix}$; б) $AB=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 7\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; в) $AB=\begin{pmatrix}43 & 10\\ 49 & 11\\ 37 & 9\end{pmatrix}$; произведение BA не имеет смысла.

277. а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $(n>3)$.

278. а) $B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2a & 2b\\ 3b & 3b+2a\end{pmatrix}$; б) $B=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$.

279. а) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; б) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}$; в) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=A^*$.

281. $X=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$.

282. а) $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; б) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

283. а) Оператор A линейный. Его матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

У к а з а н и е . В столбцах A стоят координаты образов базисных векторов. Например, для $e^1 = (1,\ 0,\ 0)$. $Ae^{-1} = (0,\ 2,\ 3)$;
б) оператор A не является линейным:

$$A\,(x + y) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2 + 1,\ x_3 + y_3 + 1) \neq Ax + Ay =$$
$$= (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2 + 2,\ x_3 + y_3 + 2).$$

284. $BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **285.** $BA^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$.

286. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. У к а з а н и е . В старом базисе $Ai^1 =$ +поэтому первый столбец новой матрицы будет состоять из элементов 1, 2, 3, 1. Затем также преобразуем Ai^3, Ai^2, Ai^4;

б) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. У к а з а н и е . Преобразование Ai^1 к необходимому виду приводит нас к решению системы:

$$Ai^1 = i^1 + 3i^2 + 2i^3 + i^4 = \alpha i^1 + \beta(i^1 + i^2) +$$
$$+ \gamma(i^1 + i^2 + i^3) + \delta(i^1 + i^2 + i^3 + i^4).$$

Затем аналогично преобразуем $A(i^1 + i^2)$, $A(i^1 + i^2 + i^3)$, $A(i^1 + i^2 + i^3 + i^4)$.

287. $\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. У к а з а н и е . Имеем $a^1 = i^1 + 2i^2$, $a^2 = -i^1 + i^2$, $b^1 = i^1 - 2i^2$, $b^2 = 3i^1 - i^2$, где $(i^1,\ i^2)$ — исходный базис пространства. Выражение a^1 и a^2 через b^1, b^2: $a^1 = -\dfrac{7}{5}b^1 + \dfrac{4}{5}b^2$, $a^2 = -\dfrac{2}{5}b^1 - \dfrac{1}{5}b^2$. Далее находим Ab^1, Ab^2, выраженные через b^1, b^2.

Эту же задачу можно решать в матричной форме. Пусть $a = (a^1,\ a^2)$, $b = (b^1,\ b^2)$, T — матрица перехода от базиса b к базису

a, причем в столбцах T стоят координаты векторов a^1, a^2 в базисе b^1, b^2. Тогда в матричной форме можно записать

$$a = bT, \tag{1}$$

где в данном случае

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Теперь пусть линейное преобразование φ в базисе a задается матрицей A и в базисе b матрицей B:

$$\varphi(a) = aA,\ \varphi(b) = bB, \tag{2}$$

где в столбцах матриц A и B стоят координаты образов базисных векторов в соответствующем базисе, $\varphi(a) = (\varphi(a^1), (\varphi(a^2)), (\varphi(b) = (\varphi(b^1), (\varphi(b^2))$. Очевидно, что

$$\varphi(a) = \varphi(b)T. \tag{3}$$

Поэтому из (2) и (1) имеем

$$\varphi(b)T = bBT \text{ и } \varphi(a) = bTA,$$

откуда в силу (3) имеем $bBT = bTA$.

Таким образом, $BT = TA$,

$$B = TAT^{-1}. \tag{4}$$

Найдем теперь матрицу B по формуле (4). Легко подсчитать, что

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix},\quad AT^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{16}{3} \\ \frac{13}{3} & \frac{19}{3} \end{pmatrix},\quad B = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

288. $B = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{71}{15} & \frac{98}{15} \\ -\frac{32}{15} & -\frac{41}{15} \end{pmatrix}.$

289. а) Векторы ортогональны; б), в) не ортогональны.

290. Векторы e^1, e^2, e^3 образуют ортогональный базис в R_3, так как ранг матрицы из координат векторов равен трем (т. е. e^1, e^2, e^3 линейно независимы) и векторы попарно ортогональны; $x = \frac{1}{14}e^1 - \frac{1}{14}e^3$.

291. $z=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $t=\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

292. а) Базис ориентирован противоположно основному базису; б) базис ориентирован так же, как i^1, i^2, i^3 ($\Delta = 1$).

293. $x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}x_1'-\frac{1}{2}x_2'$, $x_2=\frac{1}{2}x_1'+\frac{\sqrt{3}}{2}x_2'$, т.е. переход от (x_1', x_2') к (x_1, x_2) осуществляется с помощью строк матрицы Λ^*.

294. Переход от координат (x_1, x_2) к координатам (x_1', x_2') в новом базисе производится с помощью строк матрицы $(A^*)^{-1}$, а переход от координат (x_1', x_2') к (x_1, x_2) совершается с помощью строк матрицы A^*. Имеем

$$A^*=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix},\qquad (A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

поэтому

$$\begin{cases}x_1=x_1'+2x_2',\\ x_2=x_1'+x_2',\end{cases}\qquad \begin{cases}x_1'=-x_1+2x_2,\\ x_2'=x_1-x_2.\end{cases}$$

295. а) Не является; б) не является; в) является; г) не является; д) не является; е) не является, если прямая не проходит через начало координат; ж) является; з) является.

296. Вся плоскость; векторы, лежащие на любой прямой, проходящей через начало координат; начало координат.

297. Совокупность векторов, лежащих на прямой $x_2=\frac{x_1}{k}$ $(k\neq 0)$; $x_1=0$ при $k=0$.

298. а) Размерность равна 3 (ранг матрицы из координат векторов равен 3). Базис образуют, например, векторы a^1, a^2, a^4; б) размерность равна 2. Базис образуют любые два вектора системы.

299. Подпространство L' состоит из векторов $v=(x_1, x_2, x_3, x_4)$, для которых $(v, a^1)=(v, a^2)=0$, т. е. координаты векторов v удовлетворяют условию $x_4=x_1$, $2x_1+x_2+x_3=0$. Вектор $a=(y_1, y_2, y_3, y_4)$ ортогонален ко всем векторам $v\in L'$, поэтому его координаты удовлетворяют условию

$$(y_1+y_4-2y_3)\,x_1+(y_2-y_3)\,x_2=0\quad \forall\ x_1, x_2.$$

Отсюда $y_2=y_3$, $y_1+y_4-2y_3=0$. Для чисел α и β получаем систему $\alpha+2\beta=y_1$, $\beta=y_2$, $\beta=y_3$, $-\alpha=y_4$. Эта система разрешима при указанных y_1, y_2, y_3, y_4, а именно, $\alpha = -y_4$, $\beta = y_2 = y_3$ (равенство $\alpha + 2\beta = y_1$ автоматически выполняется).

301. $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **302.** $A^*(f) = \begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}$.

303. а) $\lambda_1 = 2$. Указание. Исследовать на экстремум квадратичную форму $u = x^2 + y^2 + 2xy$ на единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$; б) $\lambda_1 = 3$.

304. а) Форма неопределенная по знаку, так как $\Delta_2 = -3 < 0$; б) форма неопределенная по знаку ($\Delta_2 = -1 < 0$); в) форма строго положительная ($\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 1 > 0$, $\Delta_3 = 2 > 0$).

305. а) $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left[a_{11} + a_{22} + \sqrt{4a_{12}^2 + (a_{11} - a_{22})^2}\right] =$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - 1 + \sqrt{4 \cdot 4 + 4}\right] = \sqrt{5},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left[a_{11} + a_{22} - \sqrt{4a_{12}^2 + (a_{11} - a_{22})^2}\right] = -\sqrt{5},$$

форма гиперболического типа; б) $\lambda_1 = \dfrac{27 + \sqrt{725}}{2} > 0$, $\lambda_2 = \dfrac{27 - \sqrt{725}}{2} > 0$, форма эллиптического типа; в) $\lambda_1 = 4 > 0$, $\lambda_2 = 0$, форма параболического типа.

306. а) Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корни уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$. Канонический вид формы: $4\xi_1^2 + 4\xi_2^2 - 2\xi_3^2$; б) $8\xi_1^2 + 8\xi_2^2 + 5\xi_3^2$ — канонический вид формы.

307. а) Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)(5 - \lambda)(7 - \lambda) - 4(5 - \lambda) - 4(7 - \lambda) = 0,$$

или

$$(6 - \lambda)(5 - \lambda)(7 - \lambda) - 8(6 - \lambda) = 0.$$

имеет корни $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 3$. Собственный вектор x^1 находим из системы

$$\left.\begin{aligned} -3x_1-2x_2+2x_3&=0,\\ -2x_1-4x_2\qquad &=0,\\ 2x_1\qquad -2x_3&=0.\end{aligned}\right\}$$

Отсюда $x_3 = x_1$, $-2x_2 = x_1$. Вектор $y^1 = \left(x_1, -\frac{x_1}{2}, x_1\right)$ является решением системы. Нормируя этот вектор, получаем

$$x^1 = \frac{y^1}{|y^1|} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Аналогично получаем

$$x^2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \qquad x^3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Канонический вид формы: $9\xi_1^2+6\xi_2^2+3\xi_3^2$. Ортогональное преобразование

$$x_1 = \frac{2}{3}\xi_1-\frac{1}{3}\xi_2+\frac{2}{3}\xi_3, \quad x_2 = -\frac{1}{3}\xi_1+\frac{2}{3}\xi_2+\frac{2}{3}\xi_3, \quad x_3 = \frac{2}{3}\xi_1+\frac{2}{3}\xi_2-\frac{1}{3}\xi_3.$$

б) $18\xi_1^2+18\xi_2^2+9\xi_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3}\xi_1-\frac{2}{3}\xi_2+\frac{1}{3}\xi_3$,

$$x_2 = -\frac{2}{3}\xi_1-\frac{1}{3}\xi_2+\frac{2}{3}\xi_3, \quad x_3 = \frac{1}{3}\xi_1+\frac{2}{3}\xi_2+\frac{2}{3}\xi_3.$$

308. а) $AC - B^2 = 9 > 0$ — кривая эллиптического типа; $3(x - 1)^2 + 3(y - 2)^2 = 12$; $\xi = x - 1$, $\eta = y - 2$; $3\xi^2 + 3\eta^2 = 12$ — окружность радиусом 2;

б) $AC - B^2 = 6 > 0$ — кривая эллиптического типа; $3\xi^2 + 2\eta^2 = 6$ — эллипс с полуосями $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$;

в) $AC-B^2 = -2<0$ — корни гиперболического типа: $\xi^2-2\eta^2 = 2$ — гипербола с полуосями $a = \sqrt{2}$, $b = 1$;

г) $AC - B^2 = 9 > 0$ — кривая эллиптического типа; $3\xi^2 + 3\eta^2 = 0$ — точка (0, 0);

д) $AC-B^2 = -2<0$ — кривая гиперболического типа; $\xi^2 - 2\eta^2 = 0$ — пара пересекающихся прямых $\xi - \sqrt{2}\eta = 0$, $\xi + \sqrt{2}\eta = 0$;

е) $AC - B^2 = 0$ — кривая параболического типа; $4\xi - 3\eta^2 = 0$ — парабола с осью симметрии ξ;

ж) $AC - B^2 = 6 > 0$ — кривая эллиптического типа; $3\xi^2 + 2\eta^2 = -1$ — мнимый эллипс.

309. а) $AC - B^2 = -16 < 0$ — кривая гиперболического типа; $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$;

$$x^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad x^2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \ (\xi - \eta), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ (\xi - \eta); \end{cases}$$

$$8\xi^2 - 2\eta^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) - \frac{14}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) - 13 = 0$$

— уравнение кривой в системе (ξ, η). Это уравнение можно записать так:

$$8\left(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\eta + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8.$$

Параллельный перенос

$$u = \xi - \frac{1}{\sqrt{2}}, \ v = \eta + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

приводит уравнение к виду

$$u^2 - \frac{v^2}{4} = 1.$$

Это гипербола (рис. 63) с действительной осью u. Общее преобразование координат имеет вид

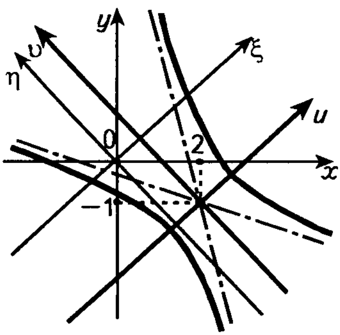


Рис. 63

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u - v + \frac{4}{\sqrt{2}}\right),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u + v - \frac{2}{\sqrt{2}}\right);$$

б) $AC - B^2 = 576 > 0$ — кривая эллиптического типа: $\lambda_1 = 32$, $\lambda_2 = 18$, $B < 0$;

$$x^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad x^2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ (\xi - \eta), \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \ (\xi + \eta); \end{cases}$$

$$32\xi^2 + 18\eta^2 + \frac{64}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) + \frac{64}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) - 224 = 0,$$

$$32(\xi + \sqrt{2})^2 + 18\eta^2 = 288.$$

$$\frac{(\xi + \sqrt{2})^2}{9} + \frac{\eta^2}{16} = 1; \quad u = \xi + \sqrt{2},\ v = \eta;$$

$\dfrac{u^2}{9} + \dfrac{v^2}{16} = 1$ — эллипс с полуосями $a = 3$, $b = 4$ (рис. 64);

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v - \sqrt{2}), \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(u + v - \sqrt{2});$$

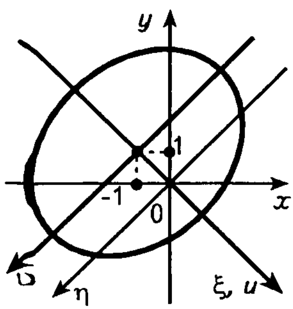


Рис. 64

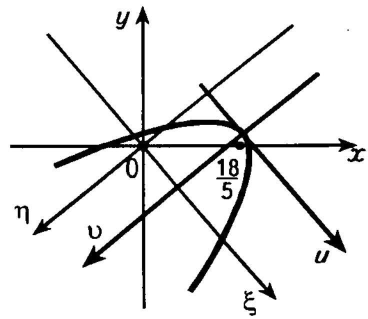


Рис. 65

в) $AC - B^2 = 0$ — кривая параболического типа; $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 0$, $B < 0$;

$$x^1 = \left(\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right),\ x^2 = \left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right);$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{5}\ (3\xi - 4\eta), \\ y = -\dfrac{1}{5}\ (4\xi + 3\eta); \end{cases}$$

$25\xi^2 - \dfrac{20}{5}(3\xi - 4\eta) - \dfrac{110}{5}(4\xi + 3\eta) - 50 = 0$, $(\xi - 2)^2 = 2(\eta + 3)$; $u = \xi - 2$, $v = \eta + 3$; $u^2 = 2v$ — парабола с осью симметрии v (рис. 65); $x = \dfrac{1}{5}(3u - 4v + 18)$, $y = -\dfrac{1}{5}(4u + 3v - 1)$.

310. $AC - B^2 = 0$ — кривая параболического типа; решая совместно уравнение прямой и кривой, получим уравнение

$$x^2(2 - k)^2 + 6x + 1 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения имеет вид

$$9-(2-k)^2=(1+k)(5-k)\quad (k\neq 2).$$

а) Поэтому при $k=-1$, $k=5$ прямая имеет по одной общей точке с кривой. При $k=2$ также будет одна общая точка у прямой $y=2x$ и нашей кривой; б) $-1<k<5$, $k\neq 2$; в) $k<-1$, $k>5$.

311. $k=-3$, $k=-1/3$.

312. $x^2+2xy+y^2-x-3y=0$ (парабола, $AC-B^2=0$).

313. а) $(x+1)^2+(y+2)^2+z^2=9$; $x+1=\xi$, $y+2=\eta$, $z=\zeta$; $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=9$ — поверхность шара радиусом 3;

б) $\dfrac{\xi^2}{4}+\dfrac{\eta^2}{2}+\dfrac{\zeta^2}{4}=1$ — эллипсоид с полуосями $a=2$, $b=\sqrt{2}$, $c=2$;

в) $\dfrac{\xi^2}{4}+\dfrac{\eta^2}{2}-\dfrac{\zeta^2}{4}=1$ — однополостный гиперболоид с полуосями $a=2$, $b=\sqrt{2}$, $c=2$;

г) $\xi^2+2\eta^2=2\zeta$ — эллиптический параболоид ($p=1$, $q=1/2$);

д) $\dfrac{\xi^2}{4}-\eta^2-\dfrac{\zeta^2}{4}=1$ — двуполостный гиперболоид с полуосями $a=2$, $b=1$, $c=2$;

е) $\dfrac{\xi^2}{4}+\dfrac{\eta^2}{4}=1$ — эллиптический цилиндр (уравнение не содержит переменной ζ).

314. а) Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 11-\lambda & 8 & 2\\ 8 & 5-\lambda & -10\\ 2 & -10 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+18\lambda^2+81\lambda-1458=$$

$$=\lambda^2(18-\lambda)+81(\lambda-18)=(\lambda^2-81)(18-\lambda)=0.$$

Его корни $\lambda_1=18$, $\lambda_2=9$, $\lambda_3=-9$. Найдем собственный вектор из системы

$$\begin{cases}(11-\lambda_1)x_1+8x_2+2x_3=0,\\ 8x_1+(5-\lambda_1)x_2-10x_3=0,\\ 2x_1-10x_2+(2-\lambda_1)x_3=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}-7x_1+8x_2+2x_3=0,\\ 8x_1-13x_2-10x_3=0,\\ 2x_1-10x_2-16x_3=0.\end{cases}$$

Ранг матрицы из коэффициентов системы равен двум (все три собственных числа различны). Поэтому решаем систему двух уравнений (в данном случае любых двух).

$$\begin{cases} -7x_1 + 8x_2 = -2x_3, \\ 8x_1 - 13x_2 = 10x_3, \end{cases} \quad x_1 = -2x_3,\ x_2 = -2x_3.$$

Вектор $v = (-2x_3, -2x_3, x_3)$ — решение системы; нормируя его, получаем собственный вектор

$$x^1 = (2/3,\ 2/3,\ -1/3).$$

Аналогично находим

$$x^2 = (2/3,\ -1/3,\ 2/3), \qquad x^3 = (-1/3,\ 2/3,\ 2/3).$$

Линейное ортогональное преобразование

$$x_1 = \frac{2}{3}\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2 - \frac{1}{3}\xi_3, \qquad x_2 = \frac{2}{3}\xi_1 - \frac{1}{3}\xi_2 + \frac{2}{3}\xi_3,$$

$$x_3 = -\frac{1}{3}\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2 + \frac{2}{3}\xi_3$$

приводит квадратичную форму к виду

$$\lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \lambda_3\xi_3^2 = 18\xi_1^2 + 9\xi_2^2 - 9\xi_3^2.$$

Уравнение поверхности относительно ξ_1, ξ_2, ξ_3 принимает вид

$$18\xi_1^2 + 9\xi_2^2 - 9\xi_3^2 + 2\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 + 1 = 0.$$

Канонический вид поверхности ($u_1 = \xi_1 + \frac{1}{18}$, $u_2 = \xi_2 + \frac{1}{9}$, $u_3 = \xi_3 - \frac{1}{9}$)

$$-18u_1^2 - 9u_2^2 + 9u_3^2 = 17/18$$

— двуполостный гиперболоид.

б) Характеристическое уравнение $-\lambda(\lambda - 4)(\lambda - 2) - 8(4 - \lambda) = 0$, или $(4 - \lambda)^2(\lambda + 2) = 0$ (разлагаем определитель по элементам первого столбца). Собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$; собственные векторы

$$x^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ 0,\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ x^2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{30}},\ -\frac{5}{\sqrt{30}},\ \frac{1}{\sqrt{30}}\right),$$

$$x^3 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Ортогональное преобразование

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\xi_1 - \frac{2}{\sqrt{30}}\xi_2 - \frac{2}{\sqrt{6}}\xi_3,$$

$$x_2 = 0 \cdot \xi_1 - \frac{5}{\sqrt{30}}\xi_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\xi_3,$$

$$x_3 = \frac{2}{\sqrt{5}}\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{30}}\xi_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\xi_3.$$

Каноническое уравнение поверхности

$$-2u_1^2 - 2u_2^2 + u_3^2 = 1$$

— двуполостный гиперболоид вращения.

315. Эллипс $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{3} = 1$ с полуосями $a = 3$, $b = \sqrt{3}$ в плоскости $x = 2$. Его вершины имеют координаты в пространстве: (2, 3, 0), (2, – 3, 0), (2, 0, $\sqrt{3}$), (2, 0, $-\sqrt{3}$).

316. $x^2 + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{16} = 1.$

317. а) $\begin{cases} y^2 + z^2 = 2y - z, \\ x = 0 \end{cases}$ — уравнение проекции на плоскость yOz. Это уравнение окружности.

б) $\begin{cases} x^2 - 2xz + 5z^2 - 4x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$ — уравнение проекции на плоскость xOz. Это уравнение эллипса ($AC - B^2 = 4 > 0$).

в) $\begin{cases} x^2 - 4xy + 5y^2 - x = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ — уравнение проекции на плоскость Oxy. Это также уравнение эллипса.

318. Парабола: $\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 3\left(z + \frac{1}{4}\right)$.

319. $z = c$. Указание. Рассматриваем уравнение поверхности как неявное:

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Тогда уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0.$$

321. а) $x^2 + y^2 = 2z$ — параболоид вращения или эллиптический параболоид; б) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ — эллипсоид вращения.

322. а) (3, 4, –2), (6, –2, 2). У к а з а н и е . Перейти к параметрическим уравнениям прямой.

б) Прямая и поверхность не имеют общих точек.

324. $9X^2 - 16Y^2 - 16Z^2 - 90X + 225 = 0$. У к а з а н и е . В силу симметрии ясно, что направляющая есть окружность, получающаяся в сечения сферы плоскостью $x = \alpha$. Значение α найти как абсциссу точки касания прямой, проходящей через точку S и касающейся большого круга $x^2 + y^2 = 9$ в плоскости xOz.

Глава 4

325. а) $x^2 + 4y^2 \leqslant 1$ — внутренность эллипса с полуосями $a = 1$, $b = 1/2$, включая его границу (рис. 66); б) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} \leqslant 1$ — область между ветвями гиперболы с полуосями $a = 3$, $b = 2$, включая сами ветви гиперболы (рис. 67); в) $y^2 \geqslant 4x$ — внешность параболы, включая саму параболу (рис. 68); г) вся плоскость, кроме начала координат (0, 0); д) $x + y > 0$ — полуплоскость выше прямой $y = -x$ (рис. 69); е) $|y/x| \leqslant 1$, $x \neq 0$. Часть плоскости, примы-

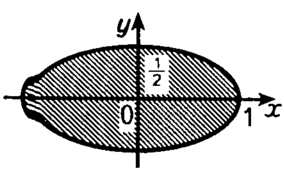


Рис. 66

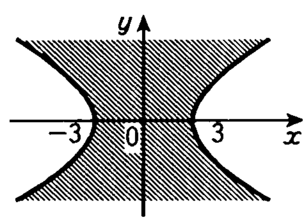


Рис. 67

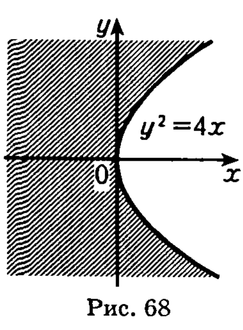


Рис. 68

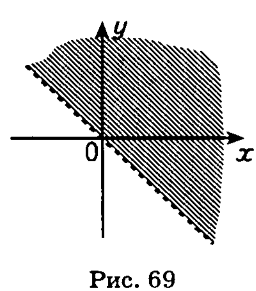


Рис. 69

кающая к оси x между прямыми $y = \pm x$, не включая начало координат (рис. 70).

326. а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$ — часть пространства внутри эллипсоида с полуосями a, b, c, включая саму поверхность эллипсоида (рис. 71);

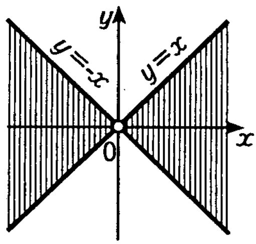


Рис. 70

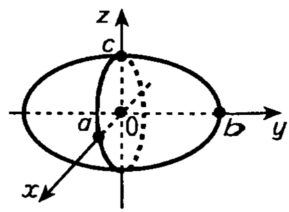


Рис. 71

б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$ — часть пространства, находящаяся внутри однополостного гиперболоида, включая его поверхность (рис. 72);

в) $x^2 + y^2 < 2z$ — часть пространства, находящаяся внутри параболоида вращения (рис. 73);

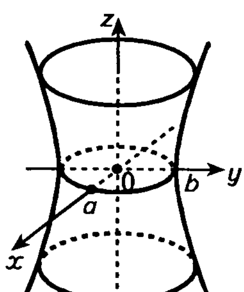


Рис. 72

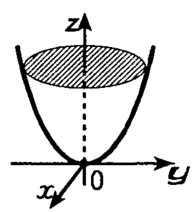


Рис. 73

г) $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ — часть пространства, находящаяся вне двуполостного гиперболоида, включая его поверхность (рис. 74);

д) $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 1$ — внутренность куба с центром в начале координат с ребром равным 2, включая его грани. Этот куб ограничен плоскостями $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$ (рис. 75).

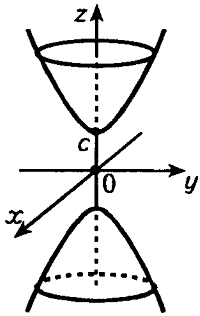


Рис. 74

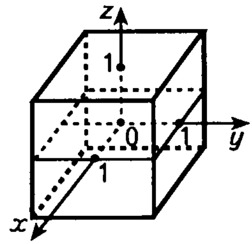


Рис. 75

327. $f(1, 0) = 1$; $f(1, 1) = 2$; $f(2, 1) = 9/2$.

328. $f(x, y) = (x^2 - y^2)/8$. Указание. Ввести новые переменные $u = x + 2y$, $v = x - 2y$.

329. а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - c$ — эллипсы ($c < 1$); при $c = 1$ — начало координат; при $c > 1$ — мнимые эллипсы, что означает, что плоскость $u = c$ не пересекает графика функции;

б) $y = cx^2$ — параболы с осью симметрии Oy. При $c > 0$ параболы находятся в верхней полуплоскости, а при $c < 0$ — в нижней. При $c = 0$ получаем ось x.

330. $\rho = \sqrt{(1-2)^2 + (0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}$.

331. Точка $M^0 = (0, 1)$; $\rho(M^k, M^0) = \sqrt{\frac{1}{(1+k)^2} + \frac{1}{(k^2+1)^2}} \to 0$, $k \to \infty$.

332. Все точки множества $E_1 = \{|x| < 1, |y| < 1\} \subset E$ внутренние.

333. а) Будет, E — внутренность квадрата, ограниченного прямыми $\pm y = \pm x + 1$; б) не будет; E — внутренность двуполостного гиперболоида. Поэтому нельзя соединить две точки, находящиеся в верхней и нижней частях гиперболоида, непрерывной кривой, принадлежащей к E; в) не будет.

334. а) 2; б) не существует; рассмотреть пути подхода к точке $(0, 0)$ $x = y$; $x \neq 0$, $y = 0$.

335. $c = 0$. Предел функции $\sqrt{1-x^2-4y^2}$, когда точка (x, y) стремится к границе эллипса $x^2+4y^2=1$, равен нулю.

336. а) Нет; б) предел функции в направлении вектора $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ равен $\frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1^2+\omega_2^2}$; поэтому функция будет непрерывной в $(0, 0)$ только в направлении векторов $\omega = (1, 0)$ и $\omega = (0, 1)$, т. е. в направлении осей координат. Таким образом, эта функция непрерывна в $(0, 0)$ по переменным x и y в отдельности и не является непрерывной по совокупности переменных.

337. Указание. Функция $u = 1 - x^2 - y^2$ непрерывна на всей плоскости.

338. $u'_x = 3x^2 - 2y,\ u'_y = 2y - 2x,\ du = (3x^2 - 2y)dx + 2(y - x)dy.$

339. $u'_x = 2xy^3,\ \ u'_y = 3x^2y^2,\ du = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy.$

340. $u'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad u'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)},$

$$du = \frac{du}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}.$$

341. а) $u'_x = \frac{-y}{x^2+y^2},\quad u'_y = \frac{x}{x^2+y^2},\ du = \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2};$

б) $u'_x = y + \frac{1}{y},\quad u'_y = x - \frac{x}{y^2},\quad du = \left(y+\frac{1}{y}\right)dx + x\left(1-\frac{1}{y^2}\right)dy;$

в) $u'_x = yx^{y-1},\quad u'_y = x^y\ln x,\quad du = yx^{y-1}\,dx + x^y\ln x\,dy;$

г) $u'_x = \operatorname{ch}(x+y),\ u'_y = \operatorname{ch}(x+y),\quad du = (dx+dy)\operatorname{ch}(x+y);$

д) $u'_x = \operatorname{sh}(x^2y + \operatorname{sh} y)\cdot 2xy,\ u'_y = (x^2 + \operatorname{ch} y)\operatorname{sh}(x^2y + \operatorname{sh} y),$
$du = [2xy\,dx + (x^2 + \operatorname{ch} y)\,dy]\operatorname{sh}(x^2y + \operatorname{sh} y).$

342. а) $\Delta = r$; б) $\Delta = 4r\varphi - 1$.

343. а) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{e^{t+\tau}}{2\sqrt{x+y}} + \frac{1}{2\sqrt{x+y}\cdot t} =$$

$$= \frac{e^{t+\tau}+t^{-1}}{2\sqrt{e^{t+\tau}+\ln t}};\ \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}e^{t+\tau} = \frac{e^{t+\tau}}{2\sqrt{e^{t+\tau}+\ln t}};$$

б) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -y \sin(t+\tau) + x\cos(t-\tau) = -\sin(t-\tau)\sin(t+\tau) +$

$+\cos(t+\tau)\cos(t-\tau) = \cos 2t, \quad \dfrac{\partial u}{\partial \tau} = -y\sin(t+\tau) - x\cos(t-\tau) = -\cos 2\tau.$

344. а) $\operatorname{grad} u = \{2, 1\}$ (рис. 76); б) $\operatorname{grad} u = \{4, -6\}$ (рис. 77).

345. а) $\dfrac{\partial u}{\partial n} = (\operatorname{grad} u, n) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$; б) $\dfrac{\partial u}{\partial n} = (\operatorname{grad} u, n) = 2\sqrt{3} - 3.$

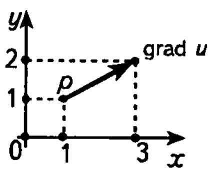


Рис. 76

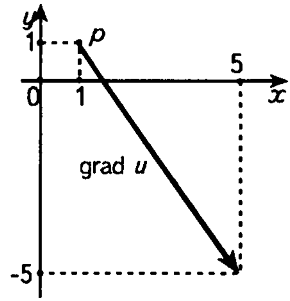


Рис. 77

346. $\operatorname{grad} u = \{4, -6\}$. Единичный вектор этого направления

$$n_0 = \left\{\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right\}, \quad \frac{\partial u}{\partial n_0} = 4\frac{2}{\sqrt{13}} - 6\cdot\frac{-3}{\sqrt{13}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}.$$

Можно сразу записать, что $\dfrac{\partial u}{\partial n_0} = |\operatorname{grad} u| = 2\sqrt{13}$ — это максимальная производная по направлению.

347. а) Пусть α и β — углы, которые составляет градиент функции с осями x и y соответственно.

$$\cos\alpha = \frac{u'_x(P)}{|\operatorname{grad} u(P)|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\beta = \frac{u'_y(P)}{|\operatorname{grad} u(P)|} = \frac{1}{2}; \quad \alpha = \pi/6,\ \beta = \pi/3;$$

б) $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/6$.

348. а) $u''_{x^2} = 2\dfrac{y-x^2}{(x^2+y)^2}$, $u''_{y^2} = \dfrac{-1}{(x^2+y)^2}$, $u''_{xy} = \dfrac{-2x}{(x^2+y)^2}$,

$d^2u = [2(y-x^2)\,dx^2 - 4x\,dx\,dy - dy^2]/(x^2+y)^2.$

б) $u''_{x^2} = \dfrac{-y^2}{(2xy+y^2)^{3/2}}$, $u''_{xy} = \dfrac{xy}{(2xy+y^2)^{3/2}}$, $u''_{y^2} = \dfrac{-x^2}{(2xy+y^2)^{3/2}}$,

$d^2u = -(y\,dx - x\,dy)^2/(2xy+y^2)^{3/2}.$

351. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}a^2$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=ab\dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi\,\partial \eta}$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=b^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$,
$d^2u = a^2 f''_{\xi^2}dx^2 + 2abf''_{\xi\eta}dx\,dy + b^2 f''_{\eta^2}dy^2$;

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+2\dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi\,\partial \eta}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}-$
$-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi\,\partial \eta}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$, $d^2u=\dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}(dx+dy)^2+2\dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi\,\partial \eta}(dx^2-dy^2)+$
$+\dfrac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}(dx-dy)^2$.

352. а) $u-5=2(x-1)+4(y-2)$, $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{u-5}{-1}$;

б) $u-1=2(x-2)+2(y+1)$, $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{u-1}{-1}$.

353. а) По формуле Тейлора $\Delta u = u(1+h, 2+k) - u(1, 2) =$
$= du + \dfrac{1}{2}d^2u = 4h - 3k + h^2 - k^2 + kh$ (производные порядка выше второго равны нулю);

б) $\Delta u = 2h + k + h^2 + 2hk + h^2k$.

354. $y + xy + \dfrac{1}{3!}(3x^2y - y^3)$. Замечание. Можно воспользоваться одномерными формулами Тейлора для функций

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\ldots,\ \sin y = \frac{y^3}{3!} + \ldots$$

355. $1+\dfrac{[(x-1)+(y+1)]}{1!}+\dfrac{[(x-1)^2+2(x-1)(y+1)+(y+1)^2]}{2!}+$
$+\dfrac{[(x-1)^3+3(x-1)^2(y+1)+3(x-1)(y+1)^2+(y+1)^3]}{3!}\equiv$
$\equiv 1+\dfrac{(x+y)}{1!}+\dfrac{(x+y)^2}{2!}+\dfrac{(x+y)^3}{3!}$.

356. а) $\theta = 1/2$; б) $3\theta^2 + 2\theta = 2$, $\theta = \left(\sqrt{7}-1\right)/3$.

357. $(2, 0)$ — стационарная точка; $z''_{x^2} = 2$, $z''_{y^2} = 4$, $z''_{xy} = 0$;
$a_{11} = z''_{x^2}(2, 0)$, $a_{22} = z''_{y^2}(2, 0)$, $a_{12} = z''_{xy}(2, 0)$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 8 > 0$,
$a_{11} = 2 > 0$, значит, в точке $(2, 0)$ функция имеет минимум, $z_{\min} = 0$.

358. Стационарная точка (2, 0); $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=-8$, экстремума нет.

359. Стационарная точка (0, 0); $a_{11}=0$, $a_{22}=-4$, $a_{12}=4$, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=-16<0$, экстремума нет.

360. Стационарные точки (0, 0), $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$; $z''_{x^2}=12x^2-4$, $z''_{y^2}=12y^2-4$, $z''_{xy}=4$; $z''_{x^2}(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})=20$, $z''_{y^2}(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})=20$, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=396>0$. В точках $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ локальный минимум. В точке (0, 0) $a_{11}=-4$, $a_{22}=-4$, $a_{12}=4$, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$. Вопрос об экстремуме открыт. Исследуя приращение функции на прямых $y=0$ и $y=x$, убеждаемся, что экстремума в точке (0, 0) нет.

361. $u_{min}=-4/3$ при $x=-2/3$, $y=-1/3$, $z=1$.

362. а) Функция не имеет наибольшего значения; $\sup z=2$. Функция разрывна;

б) имеет. Область задания $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$ замкнута и функция z непрерывна на этой области, поэтому она имеет наибольшее значение; $(0, \pm 1)$ — стационарная точка; $z(0, \pm 1)=\pm 1/2$; на границе квадрата в точках $x=\pm 1$, $y=\sqrt{3}-1$ функция достигает наибольшего значения, равного $(1+\sqrt{3})/4$.

363. $F(x, y)\equiv \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$, $F'_x=\dfrac{2x}{a^2}$, $F'_y=\dfrac{2y}{b^2}$, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$, $\dfrac{d^2y}{d^2x}=-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$.

364. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z\sin x-\cos y}{\cos x-y\sin z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x\sin y-\cos z}{\cos x-y\sin z}$.

366. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial\psi}{\partial v}\Big/\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\Big/\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$,

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\Big/\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\Big/\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$,

где $\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}=\begin{vmatrix}\varphi'_u & \varphi'_v\\ \psi'_u & \psi'_v\end{vmatrix}$.

367. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{c}{u}\sin v$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{c}{u}\cos v$. Указание. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=c\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Производную $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ находим из первых двух уравнений, рассматривая u, v как неявные функции от x и y.

368. а) $x + 6\sqrt{3}z - 37\sqrt{3} = 0$; б) $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$.

369. $x + 4y + 6z = \pm 21$.

370. $x + z + a = 0$, $\frac{x}{1} = \frac{y-a}{0} = \frac{z+a}{1}$.

371. Квадрат ($S = xy$, $2x + 2y = l$, функция Лагранжа $L = xy + \lambda(2x + 2y - l)$.

372. Способ 1. Привести уравнение эллипса к каноническому виду. Собственные значения $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 1$; $9\xi^2 + \eta^2 = 9$, $\xi^2 + \frac{\eta^2}{9} = 1$. Значит, полуоси эллипса $a = 1$, $b = 3$; $2a = 2$, $2b = 6$.

Способ 2. Данный эллипс расположен симметрично относительно начала координат, поэтому квадрат расстояния от начала координат до точки эллипса (x, y), равный $x^2 + y^2$, достигает наибольшего (наименьшего) значения, когда точка (x, y) попадает на большую (малую) ось эллипса. Поэтому необходимо исследовать функцию $u = x^2 + y^2$ на условный экстремум при связи

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9.$$

373. Равносторонний треугольник. Указание. $S = \sqrt{l(l-x)(l-y)(l-z)}$, $x + y + z = 2l$, x, y, z — стороны треугольника. Если в S подставить значение $l - z = x + y - l$, то полученную функцию исследуем на обычный экстремум. Можно также исследовать задачу, составляя функцию Лагранжа:

$$L(S, \lambda) = S + \lambda(x + y + z - 2l).$$

Глава 5

374. а) $S = 1$. Указание. $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$;

б) $S = \frac{13}{36}$. Указание. $\frac{1}{(n+1)(n+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+4}\right)$,

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)(n+4)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+4}\right];$$

в) $S = 1/4$. Указание. $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right]$.

375. Указание. При доказательстве расходимости гармонического ряда по признаку Коши рассмотреть

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

377. Расходится $\left(\frac{n+1}{2n+1} \to \frac{1}{2} \neq 0\right)$.

378. Расходится, $\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+2n^2}} = \frac{1}{n\sqrt{3}}$.

379. а) Сходится, $\sqrt{\frac{n}{n^4+1}} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$; б) сходится, $\frac{1}{k^2+1} \leqslant \frac{1}{k^2}$.

380. а) Расходится; б) и в) сходятся. Указание. Применить теорему 1 § 9.4 из [1].

381. Сходится. **382.** Сходится.

383. Сходится. **384.** Сходится.

385. Расходится.

386. Сходится при $\varepsilon > 1$; расходится при $0 < \varepsilon \leqslant 1$.

387. Сходится.

388. а) Сходится, $u_n \leqslant \frac{2}{3n^{3/2}}$; б) сходится, $u_n \leqslant \int\limits_0^{1/n} x^3\,dx = \frac{1}{4n^4}$.

389. Сходится условно. **390.** Сходится абсолютно.

391. Указание. $|a_k b_k| \leqslant \frac{a_k^2 + b_k^2}{2}$.

392. а) $x > 1$; б) $x > 0$; в) $-\infty < x < \infty$; г) $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$.

393. а) Сходится равномерно к нулю; б) сходится равномерно к нулю; б) сходится равномерно к нулю; г) сходится неравномерно к нулю $\left(\max\limits_{0<x<1} f_n(x) = \frac{1}{4} \not\to 0\right)$.

395. а) Данный ряд сходится при $-1 \leqslant x < 1$. Продифференцированный ряд $\sum\limits_1^{\infty} x^{n-1}$ сходится равномерно на множестве $[-\delta, \delta]$ при любом $\delta < 1$. Поэтому почленное дифференцирование законно на указанном множестве. Пусть $S(x) = \sum\limits_1^{\infty} x^n/n$, тогда $S'(x) = \sum\limits_1^{\infty} x^{n-1} = 1/(1-x)$. Интегрируя, получаем

$$S(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-t)\Big|_0^x = -\ln(1-x) \quad (-1 \leqslant x < 1);$$

б) данный ряд равномерно сходится для $|x| \leqslant \delta < 1$, что можно проверить по признаку Даламбера. Поэтому его можно почленно интегрировать:

$$\int_0^x S(t)\,dt = [t + t^2 + \ldots + t^{n+1} + \ldots]\Big|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \quad (|x| \leqslant \delta < 1).$$

Дифференцируя последнее равенство по x, получаем

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1);$$

в) $S(x) = \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$ $(|x| < 1)$.

396. а) $R = 1$, $(-1,\ 1)$, при $x = \pm 1$ ряд сходится; б) $R = 0$, $x = 0$; в) $R = 1/3$, $(-1/3,\ 1/3)$, при $x = \pm 1/3$ ряд расходится.

397. а) $x + \dfrac{x^3}{3} + \ldots$; б) $x - \dfrac{x^3}{3} + \ldots$; в) $e\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \ldots\right)$.

398. а) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$ $(-\infty < x < \infty)$;

б) $x - \dfrac{x^3}{3^2} + \dfrac{x^5}{5^2} - \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} + \ldots$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$. Указание. Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $\operatorname{arctg} x$.

399. 32,831.

400. $e^{\mp 2}\left[1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x \pm 2)^n}{n!}\right]$ $(|x| < \infty)$. Указание. $e^x = e^{\mp 2}e^{x \pm 2}$.

Глава 6

401. а) $y - 2xy' = 0$; б) $y'' = 0$; в) $y' = y$, г) $x + yy' = 0$; д) $y'' - y' - 2y = 0$.

402. а) Изоклинами являются прямые $x = k$ (прямые, параллельные оси y) (рис. 78). Точное решение уравнения $y = \dfrac{x^2}{2} + C$; б) $1 + y^2 = k$ — изоклины, $k \geqslant 1$. Это прямые, параллельные оси x (рис. 79); в) изоклины $x = -k$ (рис. 80).

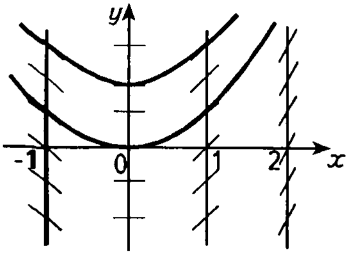


Рис. 78

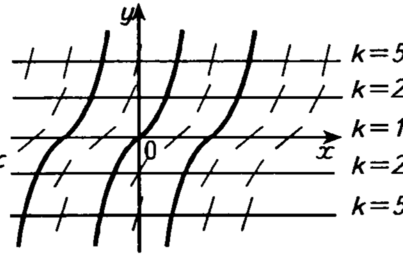


Рис. 79

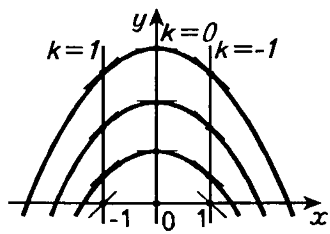


Рис. 80

403. $y = C(x + 1)e^{-x}$, $x = -1$. **404.** $\ln|x| = C + \sqrt{y^2+1}$.

405. $1 - e^{-s} = Ce^{t}$. **406.** $y = -2/(1 + C\exp(-x^2))$.

407. $y = (x - 2)^3$. **408.** $y = 2 - \cos x$.

409. $y = Cx^3$, $3y = xy'$ — дифференциальное уравнение семейства кривых.

410. 0,5 кг. Указание. Составим дифференциальное уравнение нашей задачи. Пусть $y(t)$ — количество соли в баке в момент времени t. Выясним, как изменится содержание соли за время Δt (от момента t до $t + \Delta t$). Так как по условию задачи в минуту поступает 5 л воды без соли, то за время Δt поступит $5\Delta t$ л воды, содержащей в себе $5\Delta t \cdot 0 = 0$ кг соли. В одном литре раствора содержится $\dfrac{y(t)}{100}$ кг соли, значит, в вытекающей смеси соли будет приблизительно (с точностью до бесконечно малой высшего порядка чем Δt)

$$5\,\Delta t \cdot \frac{y(t)}{100}\ \text{кг} = 0{,}05\,\Delta t\, y(t)\ \text{кг}.$$

Итак, в растворе, втекающем за время Δt, содержится 0 кг соли, а в вытекающем $0{,}05\,\Delta t\, y(t)$ кг. Приращение количества соли за это время

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx 0 - 0{,}05\,\Delta t\, y(t).$$

Деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$y'(t) = -\,0{,}05\, y(t).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $y = C\exp(-0{,}05t)$. По условиям задачи $y(0) = 10$ кг, значит, $C = 10$. Через $t = 1$ ч $=$ $= 60$ мин получаем (при выводе уравнения мы считали изменение времени в минутах)

$$y(60) = 10\exp(-3) \approx 1/2 \text{ кг}.$$

411. $t_0 = 40$ мин. Указание. Если $\theta(t)$ — температура тела в момент времени t, то дифференциальное уравнение задачи запишется:

$$\frac{d\theta}{dt} = -k\,[\theta(t) - 20].$$

Общее решение этого уравнения $\theta(t) = 20 + C\exp(-kt)$. Значение постоянной C и коэффициента пропорциональности k находим из условий: $\theta(0) = 100$, $\theta(10) = 60$, $C = 80$, $k = 0{,}1\ln 2$. Далее, $\theta(t_0) = 25$, т. е. $25 = 20 + 80\exp(-0{,}1t_0\ln 2)$.

412. $x^2 + C(y + x) = 0$; $x = 0$. **413.** $y = 0$; $x(y - x) = Cy$.

414. $y = C\exp(y/x)$.

415. Общее решение: $x^3(y + C) = Cy$.

416. $x = C\exp\left(\dfrac{2x^3}{3x^2 - 2y}\right)$.

417. Уравнение приводится к виду

$$y' = x\left(\cos^2\frac{y}{x^2} + \frac{2y}{x^2}\right),$$

т. е. $\alpha = 2$, $f(t) = \cos^2 t + 2t$. Решение проводится путем замены $y = tx^2$. Можно также воспользоваться готовой формулой, полученной в [3], § 1.3, (7):

$$x = C\exp\left[\int\frac{dt}{f(t) - 2t}\right] =$$

$$= C\exp\left[\int\frac{dt}{\cos^2 t}\right] = C\exp(\operatorname{tg} t) = C\exp\left(\operatorname{tg}\frac{y}{x^2}\right).$$

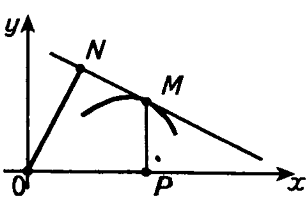


Рис. 81

418. Указание. Составим дифференциальное уравнение задачи (рис. 81). Пусть $M = (x, y)$ — точка касания; MN — касательная; $ON \perp MN$; по условию $ON = OP = |x|$. Если

$$Y - y = y'(X - x)$$

— уравнение касательной, то

$$ON = \frac{|-y + y'x|}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

— расстояние точки (0, 0) до прямой MN. Таким образом,

$$|x| = \frac{|xy' - y|}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

откуда

$$(x^2 - y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0.$$

Это однородное уравнение. Его общее решение $Cx = y^2 + x^2$.

419. Уравнение приводится к виду

$$y' = \frac{1}{x^2}(4 - xy - y^2x^2) = \frac{1}{x^2} f(xy),$$

т. е. $\alpha = -1$, $f(t) = 4 - t - t^2$. Общее решение $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{Cx^5 - x}$, $y = \dfrac{2}{x}$.

420. а) Уравнение приводится к виду

$$y' = \frac{-1}{3x^2}\ (2 + x^2y^2),$$

т. е. $\alpha = -1$, $f(t) = -\dfrac{1}{3}(2 + t^2)$. Уравнение можно решать заменой $xy = t$ или по формуле (7) § 1.3 [3]:

$$x = C \exp\left(\int \frac{dt}{f(t) + t}\right),\ x = C\left(\frac{t - 1}{t - 2}\right)^3 = C\left(\frac{xy - 1}{xy - 2}\right)^3$$

(положим $\bar{C}^3 C = 1$),

$$y = \frac{2\bar{C}x^{1/3} - 1}{x\left(\bar{C}x^{1/3} - 1\right)} = \frac{1}{x} + \frac{\bar{C}x^{1/3}}{x\left(\bar{C}x^{1/3} - 1\right)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\bar{C}x^{2/3} + x} \quad \left(C^* = -\frac{1}{\bar{C}}\right);$$

б) замена $yx^{-\alpha} = t$.

421. $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$. **422.** $y = Cx^2 + x^4$.

423. $y = e^x(\ln|x| + C)$. **424.** $y = \dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1-e}{x}$.

425. $y = x(C + \sin x)$.

426. $x = \sin y(C - \cos y)$. Уравнение линейное относительно функции $x = x(y)$:

$$\frac{dx}{dy} = \sin^2 y + x \operatorname{ctg} y.$$

427. $y = 0$, $y^3 = -1/[3\cos^3 x(C + \operatorname{tg} x)]$.

428. $y^2 = Cx^2 - 2x$. **429.** $y = 0$, $y = x^4 \ln^2 |Cx|)$.

430. $y = 0$, $y = 1/(x^2 + Cx)$.

431. а) Будет. Все аксиомы расстояния легко проверяются; б) будет. Первая и вторая аксиомы очевидны. Проверим неравенство треугольника: $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Если $x = y = z$, то $0 \leqslant 0 + 0$; если $x = y$, $z \neq x$, то $0 \leqslant 1 + 1 = 2$; если $x \neq y$, $x = z$, то $1 \leqslant 0 + 1 = 1$; если $x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$, то $1 \leqslant 1 + 1 = 2$.

432. Будет. Первая аксиома: если $f(x) = g(x)$, то $\rho(f, g) = 0$. Обратно, пусть $\rho(f, g) = 0$. Тогда

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx = 0.$$

Так как $[f(x) - g(x)]^2$ — неотрицательная непрерывная функция на $[a, b]$, то $[f(x) - g(x)]^2 \equiv 0$, т. е. $f(x) \equiv g(x)$ (см. [1]), § 6.2, теорема 8). Вторая аксиома: $\rho(f, g) = \rho(g, f)$ — очевидна. Третья аксиома: имеем

$$\int_a^b [f(x) + \lambda g(x)]^2 dx \geqslant 0$$

$\forall \lambda$, т. е. квадратный трехчлен относительно λ

$$\int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \lambda^2 \int_a^b g^2(x)dx \geqslant 0.$$

Последнее возможно, если дискриминант уравнения неположителен:

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \leqslant 0,$$

откуда

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{1/2}$$

(*неравенство Буняковского* для интегралов, см. также [3], § 4.8). Далее, применяя неравенство Буняковского, имеем

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx \leqslant \int_a^b |f(x)+g(x)|\,|f(x)|dx + \int_a^b |f(x)+g(x)|\,|\,g(x)\,dx| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,dx\right)^{1/2}\left[\left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{1/2}+\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{1/2}\right]$$

или

$$\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{1/2}+\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{1/2}$$

(*неравенство Минковского* для интегралов). Теперь по неравенству Минковского получаем

$$\rho(f,g) = \left(\int_a^b [f(x)-g(x)]^2\,dx\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_a^b \{[f(x)-\varphi(x)]+[\varphi(x)-g(x)]\}^2\,dx\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]^2\,dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b [\varphi(x)-g(x)]^2\,dx\right)^{1/2} = \rho(f,\varphi)+\rho(\varphi,g)$$

для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $\varphi(x)$.

433. $\alpha < 1/2$. Указание. $\rho(f_n, 0) = \left(\int_0^{1/n} n^{2\alpha}\,dx\right)^{1/2} = n^{\alpha-\frac{1}{2}}$.

434. Нет. Фундаментальная последовательность $\left\{3-\dfrac{1}{n}\right\}$ сходится к числу 3, которое не принадлежит М.

435. а) Будет. $\rho(F(x), F(y)) = |F(x) - F(y)| = |x^2 - y^2| = |x-y|\cdot|x+y| \leqslant |x-y|(|x|+|y|) \leqslant \dfrac{2}{3}|x-y| = \alpha\rho(x,y)$, где $\alpha = 2/3 < 1$;

б) не будет. Если $x = 1$, $y = 0$, то $|F(x) - F(y)| = 1 = 1\,|x-y|$ $(\alpha = 1)$.

436. $x_0 = 1/2$, $x_1 = F(x_0) = 1/2^2$, $x_2 = 1/2^4, \ldots, x_n = 1/2^{2n}, \ldots$

437. а) $\bar{x} = 2/(1+\sqrt{5})$. Будет, так как

$$\max_{1/2\leq x\leq 1}|F'(x)| = \max_{1/2\leq x\leq 1}\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{4}{9} < 1;$$

б) ось $x_2 = 0$; в) прямые $x_2 = 0$, $x_2 = 1$.

438. а) $\delta < 1/36$. Указание. Согласно теореме существования решения

$$\delta < \min\{a,\ 1/N,\ b/M\},$$

где

$$N = \sup_D\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|,\ M = \max_D|f(x,\ y)|.$$

В данном случае $M = 36$, $N = 24$. Решение данной задачи имеет вид $y = 2/(3-2x^2)$. Таким образом, при $x \to \sqrt{3/2}$ решение $y(x) \to \infty$. Значит, фактически решение существует в интервале $(0,\ \sqrt{3/2})$, который больше интервала $(1-\delta,\ 1+\delta)$ $(\delta < 1/36)$.

Отметим, что во всем интервале $(0,\ 2) = (1-a,\ 1+a)$ решение данной задачи (с указанными начальными условиями!) не существует;

б) $\delta < a = \sqrt{2}/4$. В данном случае $a = \dfrac{b}{M} = \dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{8a}$.

Таким образом, решение существует в предельно возможном промежутке $[-\delta,\ \delta]$ $(\delta < a)$, т. е. теорема существования дает неулучшаемый результат в смысле размера промежутка, где существует решение для данной правой части $f(x,\ y)$.

439. $y(1) \approx 1{,}248$. Указание. При приближенном решении уравнений всегда рекомендуется определять интервал $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, где существует решение $y(x)$. Число δ находится из теоремы существования. Если точка, в которой нас интересует значение решения, входит в указанный интервал, то можно применять метод Эйлера. Данный пример носит иллюстративный характер для метода Эйлера. Уравнение можно решить. Его решение, удовлетворяющее начальному условию, имеет вид $y = \exp(x^2/4)$, т. е. решение существует на всей действительной оси, и поэтому метод Эйлера можно применять без всяких ограничений. По методу Эйлера

$$y(1) \approx y_0 + h\sum_{k=0}^{9} f(x_k,\ y_k),$$

где $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1, \ldots, x_9 = 0{,}9$, $x_{10} = 1$; $y_0 = 1$; $y_1 = = y_0 + hf(x_0,\ y_0), \ldots,$

$y_9 = y_8 + hf(x_8, y_8)$, $y_{10} = y_9 + hf(x_9, y_9)$. Таким образом, $y(1) \approx y_{10}$. Все эти вычисления можно свести в таблицу:

k	x_k	y_k	$hf(x_k, y_k)$
0	0	1	0
1	0,1	1	0,005
2	0,2	1,005	0,010
3	0,3	1,015	0,015
4	0,4	1,030	0,021
5	0,5	1,051	0,026
6	0,6	1,077	0,032
7	0,7	1,109	0,039
8	0,8	1,148	0,046
9	0,9	1,194	0,054
10	1	1,248	—

Истинное значение решения $y(1) = \exp(1/4) \approx 1{,}284$, т. е. приближенное значение решения мы получили с точным первым десятичным знаком.

440. $y(2) \approx 4{,}781$ (точное значение $y(2) = 3(e - 1)$). Указание. Решение уравнения существует на всей оси. Общее решение уравнения $y = Ce^x - x - 1$.

441. а) $y = C \exp(\pm x)$ (рис. 82). Особых решений нет;

б) $y(x + C)^2 = 1$; $y = 0$ (рис. 83). Особых решений нет;

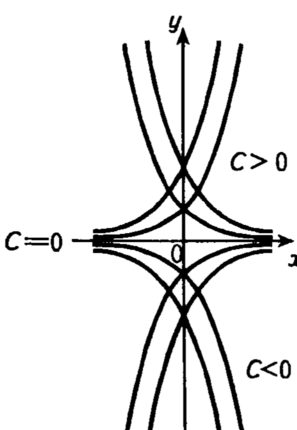


Рис. 82

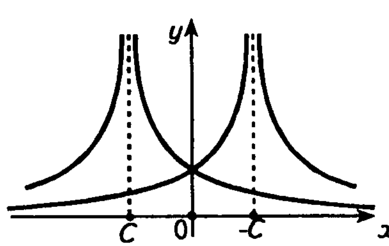


Рис. 83

в) $(x + C)^2 + y^2 = 1$; $y = \pm 1$ — особые решения (рис. 84). Интегральных кривых $y = \pm 1$ в каждой их точке касается еще одна интегральная кривая (окружность);

г) $y[1 + (x - C)^2] = 1$; $y = 0$; $y = 1$ — особое решение (рис. 85). Отметим, что $y = 0$ не является особым решением.

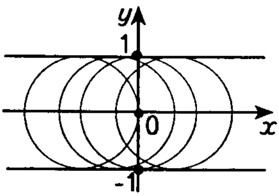


Рис. 84

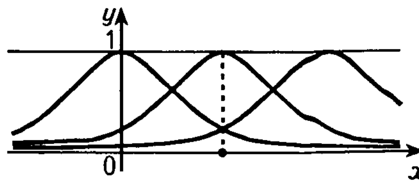


Рис. 85

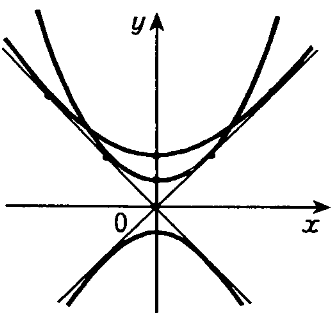


Рис. 86

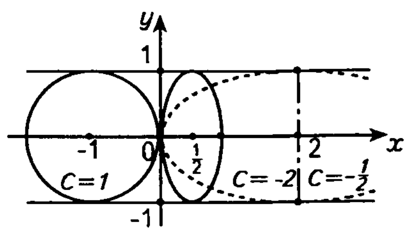


Рис. 87

Другие интегральные кривые не касаются этой интегральной кривой;

д) $x^2 + C^2 = 2Cy$ — параболы; $y = \pm x$ — особые решения (рис. 86);

е) $(Cx + 1)^2 = 1 - y^2$ — эллипсы; $y = \pm 1$ — особые решения (рис. 87). Указание. Особые решения можно искать различными способами. Например, в случае д), разрешив уравнение относительно y, получаем однородное уравнение $y' = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$ $(x \neq 0)$. Если частная производная по y от правой части последнего уравнения обращается в бесконечность вдоль гладкой кривой, то эта кривая может быть особым решением. В данном случае

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y\pm\sqrt{y^2+x^2}}{x}\right]=\frac{1}{x}\left[1\pm\frac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}\right]=\infty$$

при $y=\pm x$. Проверкой убеждаемся, что $y=\pm x$ — решения нашего уравнения. Легко установить, что этих прямых касается в каждой точке еще одна интегральная кривая семейства $x^2+C^2==2Cy$. Значит, $y=\pm x$ — особые решения.

Эти же решения можно находить из системы

$$\left.\begin{aligned} x^2+C^2-2Cy=0,\\ \frac{\partial}{\partial C}\left(x^2+C^2-2Cy\right)=0,\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned} x^2+C^2-2Cy=0,\\ C-y=0,\end{aligned}\right\}\qquad y=\pm x.$$

Дальнейшее исследование проводится, как и выше.

442. а) Данное уравнение не содержит явно переменной y. Вводим параметр $\frac{dy}{dx}=p$, $x=p^3+p$, $dy=p\,dx=p\,(3p^2+1)\,dp$;

$$\begin{cases} x=p^3+p,\\ y=\frac{3}{4}p^4+\frac{p^2}{2}+C\end{cases}$$

— параметрическое задание решения;

б) данное уравнение не содержит явно переменной x. Вводим параметр $\frac{dy}{dx}=p$, $y=p^2+2p^3$, $dx=\frac{dy}{p}=(2+6p)dp$,

$$\begin{cases} x=2p+3p^3+C,\\ y=p^2+2p^3\end{cases}$$

— параметрическое задание решения; $y=0$ — также решение уравнения;

в) данное уравнение также не содержит y. Параметр p можно ввести по формуле $\frac{dy}{dx}=p$. Тогда $x=p\sqrt{1+p^2}$, $dy=p\,dx=$ $=p\left(\sqrt{1+p^2}+\frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}\right)dp$, $3y=(2p^2-1)\sqrt{1+p^2}+C$. Здесь также можно ввести параметр по формуле $\frac{dy}{dx}=\operatorname{sh}p$,

$x=\operatorname{sh}p\sqrt{1+\operatorname{sh}^2p}=\frac{1}{2}\operatorname{sh}2p$, $dy=\operatorname{sh}p\cdot dx=\operatorname{sh}p\cdot\operatorname{ch}2p\,dp=$ $=(2\operatorname{ch}^2p-1)\,d\operatorname{ch}p$, $y=\frac{2}{3}\operatorname{ch}^3p-\operatorname{ch}p+C$.

$$\begin{cases} x = p\sqrt{1+p^2} \\ 3y = (2p^2-1)\sqrt{1+p^2} + C \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\operatorname{sh} 2p, \\ y = \dfrac{2}{3}\operatorname{sh}^3 p - \operatorname{sh} p + C \end{cases}$$

— параметрическое задание решения.

444. $y = xC - \frac{1}{4}C^2$ — общее решение; особое решение находим из системы

$$\left.\begin{aligned} y - xC + \frac{1}{4}C^2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial C}\left[y - xC + \frac{1}{4}C^2\right] = 0, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} y - xC + \frac{1}{4}C^2 = 0, \\ -x + \frac{C}{2} = 0, \end{aligned}\right\}$$

$$C = 2x,\ y = x^2.$$

Проверкой убеждаемся, что $y = x^2$ является решением уравнения Клеро, следовательно, это особое решение (рис. 88).

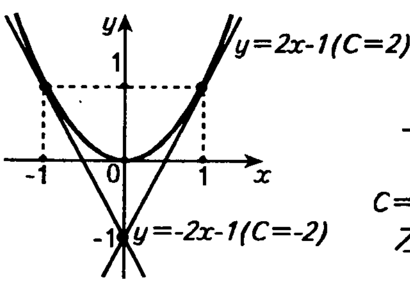


Рис. 88

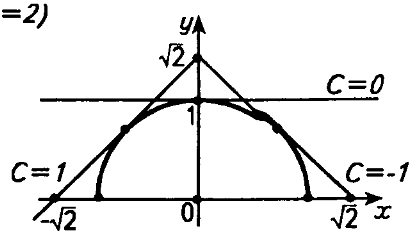


Рис. 89

Из рис. 88 видно, что парабола $y = x^2$ является огибающей для семейства прямых $y = xC - \frac{1}{4}C^2$.

445. $y = Cx + \sqrt{1+C^2}$ — общее решение. При $x = 0$ $y = \sqrt{1+C^2} \geqslant \geqslant 1$. Особое решение $x^2 + y^2 = 1$. Учитывая, что прямые $y = Cx +$

$+\sqrt{1+C^2}$ пересекают ось y в точках с ординатой $\geqslant 1$, то особым решением является верхняя половина окружности (рис. 89). Это огибающая семейства прямых.

446. а) $y = -\cos x + C_1x + C_2$;

б) $y = \dfrac{x^2}{24} + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

447. Данное уравнение не содержит явно искомую функцию y. Понижение порядка достигается введением новой функции $z(x) = y'$. Имеем $z'(x) = y''$; $x^2z' = z^2$. Таким образом, мы получили уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Легко видеть, что $z(x) \equiv 0$ является решением уравнения, тогда $y'(x) \equiv 0$, $y(x) = C$ — решение исходного уравнения.

Пусть $z \neq 0$; тогда, разделяя переменные, получаем

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}\ (x \neq 0),\ \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + C_1,\ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{x} + C_1,$$

$$y = \int \frac{x\,dx}{C_1x+1} = \frac{x}{C_1} - \frac{1}{C_1^2}\ \ln|C_1x + 1| + C_2 \quad (C_1 \neq 0).$$

Если $C_1 = 0$, то $z = x$, $y' = x$, $y = \dfrac{x^2}{2} + C$.

448. $2y = (1 + 2C_1)x^2 + C_1 \cos 2x + C_2x + C_3$. Указание. $z(x) = y''(x)$.

449. $y = -(x + C_1)\ln|C_2(x + C_1)| + x + C_3$; $\quad y = C_1x + C_2$.

450. Данное уравнение можно решить заменой $y'(x) = z(x)$. Однако легко видеть, что $2yy' = (y^2)'$, поэтому уравнение можно записать в виде

$$(y')' = (y^2)',$$

откуда $y' = y^2 + p$, $x = \int \dfrac{dy}{y^2+p}$.

Рассматривая случаи $p = 0$, $p < 0$, $p > 0$, получаем

$$x = -\frac{1}{y} + C_2;\ 2C_1x + C_2 = \ln\left|\frac{y-C_1}{y+C_1}\right| \quad \left(p = -C_1^2\right);$$

$$y = C_1 \operatorname{tg} C_1(x - C_2) \qquad \left(p = -C_1^2\right).$$

451. $y\ln|C_1x| = 1$; $y = C_1 \operatorname{tg}(C_1 \ln|C_2x|)$; $C_2x = \left|\dfrac{y-C_1}{y+C_1}\right|^{1/(2C_1)}$.

Указание. Уравнение сводится к виду $(xy')' = (y^2)'$.

452. $y^2 = (C_1 + x)^2 + C_2$. Указание. $yy'' + y'^2 = (yy')'$.

453. Данное уравнение не содержит явно аргумента x. Понижение порядка достигается введением новой функции $z(y) = y'(x)$. Отсюда

$$y''(x) = z'_y(y)\cdot y'_x = z'_y\cdot z.$$

Уравнение принимает вид

$$2y\,\frac{dz}{dy}\,z = z^2 + y^2.$$

Это однородное уравнение. Решая его, получаем ($y \neq 0$)

$$z = \pm\sqrt{y^2 + C_1y}.$$

Далее,

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{y^2+C_1y}, \qquad \frac{dy}{\sqrt{y^2+C_1y}} = \pm\, dx,$$

$$\pm x + C_2 = \ln\left|y + \frac{C_1}{2} + \sqrt{C_1y+y^2}\right|.$$

Функция $y(x) \equiv 0$ также является решением.

454. $y\ln|y| + x + C_1y + C_2 = 0$; $y = C$. Указание.

$$y'(x) = z(x).$$

455. $x = \dfrac{1}{C_1}\ln\left|\dfrac{y}{y+C_1}\right| + C_2$; $y = C$. Указание. После введения новой функции $z(y) = y'_x$ относительно $z(y)$ получим линейное уравнение.

456. Данное уравнение содержит x и y. Однако оно является однородным относительно y, y', y'' второй степени. Понижение порядка достигается введением новой функции $z(x)$ по формуле $y' = yz$ ($y \neq 0$). В этом случае $y'' = y(z^2 + z')$ и уравнение принимает вид $xz' = z$. Решая это уравнение, получаем $z = C_1x$. Заменяя z на y'/y, получаем дифференциальное уравнение первого порядка $y' = C_1 xy$. Интегрируя, получаем $y = C_2 \exp(C_1 x^2/2)$. Это решение включает в себя и решение $y = 0$.

457. $y = C_2 x \exp(-C_1/x)$. Указание. $y' = yz(x)$.

458. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$. **459.** $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$.

460. Характеристическое уравнение имеет вид $k^4 - 1 = 0$. Его корни можно найти, извлекая корень четвертой степени из единицы. Однако можно левую часть разложить на множители: $(k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0$, откуда $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, $k_3 = -i$, $k_4 = i$. Поэтому общее решение исходного уравнения будет

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

461. Корни характеристического уравнения $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 2$;

$$y = C_1 e^{x} + e^{2x}(C_2 + C_3 x).$$

462. а) Характеристическое уравнение $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$ легко приводится к виду $(k^2 + 1)^2 = 0$. Таким образом, оно имеет корни $k_1 = k_2 = i$, $k_3 = k_4 = -i$. Общее решение можно записать так:

$$y = e^{ix}(C_1 + C_2 x) + e^{-ix}(C_3 + C_4 x).$$

Если воспользоваться формулами Эйлера, то

$$y = (C_1 x + C_2)\cos x + (C_3 x + C_4)\sin x;$$

б) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x}$.

464. Общее решение однородного уравнения уже нам известно (см. задачу *461*). Остается найти частное решение неоднородного уравнения.

а) Правая часть $f(x) = 2e^{3x}$ имеет специальный вид (см. [3], § 1.1 б), где $k_0 = 3$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение

$$\bar{y} = Ae^{3x},$$

где

$$A = \frac{2}{R_3(3)} = 1, \quad R_3(k) = k^3 - 5k^2 + 8k - 4.$$

Значит, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{x} + e^{2x}(C_2 + C_3 x) + e^{3x};$$

б) $k_0 = 1$ является простым корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение нужно искать в форме

$\bar{y} = Axe^x$. Находя производные от $\bar{y}$ и подставляя их в уравнение, найдем, что $A = 4$. Вообще, можно доказать, что

$$A = a/R'_n(k_0),$$

если $f(x) = a \exp(k_0 x)$ и k_0 — простой корень характеристического уравнения. Общее решение неоднородного уравнения запишется

$$y = C_1 e^x + e^{2x}(C_2 + C_3 x) + 4xe^x;$$

в) $k_0 = 2$ — корень кратности 2 характеристического уравнения. Поэтому частное решение ищем в виде $\bar{y} = Ax^2 e^{2x}$. Находя необходимые производные от $\bar{y}$ и подставляя их в исходное уравнение, найдем $A = 3/2$. Вообще, можно доказать, что если $f(x) = a e^{k_0 x}$ и k_0 — корень кратности 2 характеристического уравнения, то

$$A = \frac{a}{R''_n(k_0)}.$$

В данном случае $R''_3(k) = 6k - 10$, $a = 3$. Итак,

$$y = C_1 e^x + e^{2x}(C_2 + C_3 x) + \frac{3}{2} x^2 e^{2x}.$$

465. См. задачу *462*. а) $y = \frac{1}{4} e^x$, б) перейти к функциям $e^{\pm ix}$ согласно формулам Эйлера; $k_0 = \pm i$ — корни кратности 2 характеристического уравнения; $\bar{y} = -\frac{1}{8} x^2 \sin x$; в) $\bar{y} = -\frac{x^2}{8} (\cos x + \sin x)$; г) $\bar{y} = -\frac{1}{9} \sin 2x$.

466. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - \frac{\cos x}{10} - \frac{\sin x}{5}$.

467. а) $\bar{y} = Ae^x$; б) $\bar{y} = (Ax^2 + Bx)e^{2x}$; в) $\bar{y} = A\cos x + B\sin x$; г) $\bar{y} = (A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5)e^{3x}$; д) $\bar{y} = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3$. Здесь правая часть $P(x)e^{k_0 x}$, $k_0 = 0$ является корнем характеристического уравнения; е) $\bar{y} = e^x [(A_1 + A_2 x)\sin x + (A_3 + A_4 x)\cos x]$.

468. а) Линейно зависимы: $\alpha \cdot 1 + \beta \sin^2 h + \gamma \cos 2x \equiv 0$ при $\alpha = -1, \beta = 2, \gamma = 1$; б) линейно зависимы; в) линейно независимы, так как их определитель Вронского не равен нулю; г) линейно независимы ($W[x^2, x^3, x^4] = 2x^6 \neq 0$, $x \neq 0$).

469. а) $y = C_1x^2 + C_2x^3$. Указание. Частные решения ищем в виде $y = x^k$. Функции x^2 и x^3 являются частными линейно независимыми решениями уравнения, поэтому их линейная комбинация дает общее решение уравнения; б) $y = C_1x + C_2x^3$; в) ищем решения в виде $y = x^k$, характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = (k-2)^2 = 0$ имеет двукратный корень $k_1 = k_2 = 2$; $y = x^2$ — частное решение уравнения. Второе решение ищем в форме $y = Ax^2 \ln x$. Легко убедиться, что при любых A это есть решение уравнения Эйлера. Итак, общее решение $y = (C_1 + C_2 \ln x)x^2$, г) уравнение переходит в уравнение Эйлера после умножения на x левой и правой частей уравнения; $y = C_1 + C_2x^3 + C_3 \ln x$.

471. $y = e^{x^2/2}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

472. а) $y = C_1x + \frac{C_2}{x} + \frac{x^2}{3}$; б) $y = C_1x + \frac{C_2}{x} + \frac{x^{10}}{99}$.

473. Правые части уравнений не имеют специального вида

$$e^{ax}(P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x).$$

Поэтому частное решение неоднородного уравнения надо искать методом вариации произвольных постоянных;

а) общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Считая $C_1(x)$, $C_2(x)$ функциями от x, найдем их так, чтобы функция $\bar{y}(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$ была частным решением неоднородного уравнения. Для этого надо решить систему (см. [3], § 1.17)

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Определитель этой системы есть определитель Вронского $W[\cos x, \sin x] = 1 \neq 0$. Решая систему, находим

$$C_1'(x) = -1, \; C_2'(x) = \operatorname{ctg} x.$$

Интегрируя, получаем

$$C_1(x) = -x, \; C_2(x) = \int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln |\sin x|.$$

Значит,

$$\bar{y} = -x \cos x + \sin x \ln |\sin x|.$$

и общее решение неоднородного уравнения запишется:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x\cos x + \sin x \ln|\sin x|.$$

Теперь находим постоянные C_1 и C_2 по начальным условиям:

$$y(\pi/2) = C_2 = 1,\ y'(\pi/2) = -C_1 + \pi/2 = 0,\ C_1 = \pi/2.$$

Итак, решение задачи Коши будет

$$y = \frac{\pi}{2}\cos x + \sin x - x\cos x + \sin x \ln|\sin x|;$$

б) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - x\cos 2x -$

$$- \frac{1}{2}\sin 2x + \sin 2x \ln|\cos x|;$$

в) $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| -$

$$- x\cos x + \sin x \ln|\cos x|;$$

г) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + (-x + x\ln|x|)e^{-x} = (a + bx)e^{-x} + xe^{-x}\ln|x|$.

474. а) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x - \frac{8}{27}$,

$$z = -C_1 e^{2x} + \frac{C_2}{4}e^{-3x} - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{9}x - \frac{2}{27}.$$

Указание. Дифференцируя первое уравнение, получаем

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 4\dot{z} = 4. \qquad (1)$$

Из первого уравнения находим функцию $z = x - \frac{1}{4}\dot{y} - \frac{1}{2}y$. Производную $\dot{z}$ находим из второго уравнения:

$$\dot{z} = z - y + x^2 = x + x^2 - \frac{1}{4}\dot{y} - \frac{3}{2}y.$$

Подставляя это значение $\dot{z}$ в (1), получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянным коэффициентом относительно функции $y(x)$:

$$\ddot{y} + \dot{y} - 6y = 4(1 - x - x^2);$$

б) данную систему можно решать так же, как и систему а). Однако можно применить теорию § 1.22 из [3]. Приведем систему к виду

$$\begin{cases} \left(0+\dfrac{d}{dx}\right)y - z = 0, \\ y + \left(0+\dfrac{d}{dy}\right)z = 0. \end{cases}$$

Это однородная система, поэтому она сводится к одному и тому же уравнению относительно любой из функций y или z. Составим определитель системы:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 0+\lambda & -1 \\ 1 & 0+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \quad \left(\lambda = \frac{d}{dx}\right).$$

Искомое уравнение относительно функции y имеет вид $D\left(\dfrac{d}{dx}\right)y = 0$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$. Общее решение этого уравнения —

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Функцию z находим из первого уравнения:

$$z = \frac{dy}{dx} = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Так как функция z удовлетворяет такому же дифференциальному уравнению, как и функция y, то сразу можно было написать, что

$$z = a \cos x + b \sin x$$

и затем подобрать числа a и b так, чтобы функции y и z удовлетворяли нашей системе (т.е. мы подставляем функции y и z в систему и выражаем постоянные a и b через C_1 и C_2 или наоборот);

в) $$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2.$$

Дифференциальное уравнение относительно функции $x(t)$ имеет вид

$$\left(\frac{d}{dt} - 2\right)\left(\frac{d}{dt} + 1\right)^2 x(t) = 0,$$

а его характеристическое уравнение будет

$$(k - 2)(k + 1)^2 = 0, \quad k_1 = k_2 = -1, \; k_3 = 2.$$

Общее решение дифференциального уравнения —

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + C_3 e^{2t}.$$

Функции $y(t)$ и $z(t)$ выражаются подобным образом:

$$y(t) = (a + bt)e^{-t} + d\, e^{2t},\ z(t) = (\alpha + \beta t)\, e^{-t} + \gamma e^{2t}.$$

Подставляя эти функции в систему, найдем, что $b = \beta = C_2 = 0$, $d = \gamma = C_3$, $a + \alpha = -C_1$, где a можно считать произвольным, тогда $\alpha = -C_1 - a$. Итак,

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_3 e^{2t},\ y(t) = ae^{-t} + C_3 e^{2t},$$

$$z(t) = -(C_1 + a)e^{-t} + C_3 e^{2t};$$

г) данная система неоднородная, поэтому для каждой функции y и z будет свое уравнение:

$$D\left(\frac{d}{dx}\right) y = \Phi_1(x),$$

где

$$\Phi_1(x) = M_{11}\left(\frac{d}{dx}\right) f_1(x) + M_{21}\left(\frac{d}{dx}\right) f_2(x) =$$

$$= M_{11}\left(\frac{d}{dx}\right) \cdot 1 + M_{21}\left(\frac{d}{dx}\right) x,$$

$M_{sj}\left(\frac{d}{dx}\right)$ — алгебраическое дополнение элемента b_{sj} определителя

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \qquad \left(\lambda = \frac{d}{dx}\right),$$

т. е.

$$M_{11}(\lambda) = \lambda,\ M_{21}(\lambda) = 1,\ M_{12}(\lambda) = -1,\ M_{22}(\lambda) = \lambda.$$

Таким образом,

$$\Phi_1(x) = \frac{d}{dx} \cdot 1 + 1 \cdot x = x.$$

Окончательно получаем следующее дифференциальное уравнение относительно функции $y(x)$: $\ddot{y} + y = x$ (функция z удовлетворяет уравнению $\ddot{z} + z = 0$). Решая эти уравнения, получаем

$$y = C_1 \cos x + C_3 \sin x + x,\ z = C_2 \cos x - C_1 \sin x.$$

475. а) Решение. Способ 1. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Найдем собственные векторы $\boldsymbol{\alpha}^1 = \left(\alpha_1^{(1)},\ \alpha_2^{(1)}\right)$ и $\boldsymbol{\alpha}^2 = \left(\alpha_1^{(2)},\ \alpha_2^{(2)}\right)$, соответствующие собственным числам $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 5$:

$$(2 - 1)\,\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = 0,\ \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = 0,\ \alpha_1^{(1)} = -\alpha_2^{(1)},$$

где $\alpha_2^{(1)}$ — произвольное число. Для простоты записи положим $\alpha_2^{(1)} = -1$, тогда $\alpha_1^{(1)} = 1$. Итак, $\boldsymbol{\alpha}^1 = (1, -1)$. Аналогично из уравнения

$$(2 - 5)\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} = 0$$

находим $\boldsymbol{\alpha}^2 = (1,\ 3)$. Решения системы запишутся следующим образом:

$$\boldsymbol{Y}^1(t) = \{e^t, -e^t\},\ \boldsymbol{Y}^2(t) = \{e^{5t},\ 3e^{5t}\}.$$

Общее решение —

$$\boldsymbol{Y}(t) = C_1\,\boldsymbol{Y}^1(t) + C_2\,\boldsymbol{Y}^2(t) = \{C_1e^t + C_2e^{5t} - C_1e^t + 3C_2e^{5t}\}.$$

В развернутом виде

$$y_1(t) = C_1e^t + C_2e^{5t},\ y_2(t) = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}.$$

Способ 2. После того как мы нашли корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$, можно сразу написать общее решение:

$$y_1(t) = C_1e^t + C_2e^{5t},\ y_2(t) = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}.$$

Подставляя эти функции в нашу систему, мы найдем a и b, выраженные через C_1 и C_2. Здесь мы минуем процесс нахождения собственных векторов $\boldsymbol{\alpha}^1$ и $\boldsymbol{\alpha}^2$;

б) $x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$, $y(t) = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}$;

в) $y = e^{-x}\,(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

$$z = \frac{1}{5}e^{-x}\,[(C_2 - 2C_1)\cos x - (C_1 + 2C_2)\sin x];$$

г) $D(\lambda) = -\lambda^3 + 1 = 0$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$ — корни характеристического уравнения;

$$x = C_1 e^t + e^{-t/2}\left(C_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+C_3\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right),$$

$$y = C_1 e^t + e^{-t/2}\left(\frac{C_3\sqrt{3}-C_2}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{C_2\sqrt{3}+C_3}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right),$$

$$z = C_1 e^t + e^{-t/2}\left(\frac{-C_3\sqrt{3}-C_2}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\frac{C_2\sqrt{3}-C_3}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$

476. Решение однородной системы нам уже известно (см. задачу ***475***, б)):

$$x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t},\ y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}.$$

а) Считая $C_1(t)$, $C_2(t)$ функциями от t, подберем их так, чтобы функции

$$\bar{x} = C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^{3t},\ \bar{y} = 2C_1(t)e^{-t} - 2C_2(t)e^{3t}$$

были решениями неоднородной системы (*метод Лагранжа вариации постоянных*). Дифференцируя эти функции и подставляя в систему, получаем

$$\begin{cases} C_1'(t)e^{-t} + C_2'(t)e^{3t} = 1, \\ 2C_1'(t)e^{-t} + 2C_2'(t)e^{3t} = t, \\ C_1'(t) = \dfrac{2+t}{4}e^{t}, \quad C_2'(t) = \dfrac{2-t}{4}e^{-3t}. \end{cases}$$

Интегрируя, получаем

$$C_1(t) = \frac{1}{4}(1 + t)e^t,\ C_2(t) = \frac{1}{36}(-5 + 3t)e^{-3t};$$

$$\bar{x} = \frac{1}{9} + \frac{t}{3},\ \bar{y} = \frac{7}{9} + \frac{t}{3}.$$

Общее решение неоднородной системы имеет вид

$$x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + \frac{1}{9} + \frac{t}{3},\ y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t} + \frac{7}{9} + \frac{t}{3};$$

б) $C_1(t) = \dfrac{1}{16}(4e^{2t} + e^{4t}),\ \ C_2(t) = -\dfrac{1}{4}(t + e^{-2t});$

$\bar{x} = \dfrac{1}{16}(1 - 4t)e^{3t},\ \ \bar{y} = e^t + \dfrac{1}{8}(1 + 4t)e^{3t},$

$$x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + \frac{1-4t}{16}e^{3t},$$

$$y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t} + e^t + \frac{1}{8}(1 + 4t)e^{3t}.$$

477. $y = 2 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 \ldots$ Указание. Решение ищем в виде ряда

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots,$$

где в силу начальных условий $a_0 = 2$, $a_1 = 1$.

479. $y = 2 + x - x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{12} + \ldots$

480. $y = \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + \ldots$

481. а) Функцию Ляпунова можно взять в виде $v = x^2 + y^2$;

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = -2x^4 - 2y^4 \leqslant 0.$$

Точка покоя устойчива;

б) функция Ляпунова в виде квадратичной положительно определенной формы не подходит для данного примера. Будем искать ее в виде

$$v = x^\alpha + y^\beta$$

с четными показателями α и β. Найдем полную производную от v (вдоль решения x, y):

$$\frac{dv}{dt} = \alpha x^{\alpha-1}(2y^3 - x^5) + \beta y^{\beta-1}(-x - y^3 + x^5).$$

Чтобы эта функция была $\leqslant 0$ в окрестности начала координат, нужно, чтобы отсутствовали члены вида $x^{\alpha-1}y^3$ и $y^{\beta-1}x$. Таким образом, должно быть $\alpha = 2$, $\beta = 4$, В этом случае

$$\frac{dv}{dt} = -2x^6 - 4y^6 + 4y^8 = -2[x^6 + 2y^6(1 - y^2)] \leqslant 0$$

в достаточно малой окрестности начала координат. Кроме того, $v = x^2 + y^4 \geqslant 0$ в окрестности начала и $v = 0$ только при $x = y = 0$. Поэтому по теореме Ляпунова решение $x(t) = y(t) \equiv 0$ устойчиво;

в) для функции $v = x^2 + y^2$

$$\frac{dv}{dt} = 2x(x^3 - y) + 2y(x + y^3) = 2x^4 + 2y^4 > 0$$

вне начала координат. Значит, нулевое решение неустойчиво по теореме Четаева.

482. а) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 1 > 0$, система эллиптическая; $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$; точка покоя — устойчивый узел;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, система параболическая; $\lambda_1 = a_{11} + a_{22} = 5 > 0$; точка покоя неустойчива;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$; $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -1 < 0$, система гиперболическая; точка покоя неустойчива.

483. а) Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

имеет положительные корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, поэтому точка покоя есть неустойчивый узел;

б) характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -2 - 3i$, $\lambda_2 = -2 + 3i$. Действительная часть этих корней отрицательна, поэтому нулевое решение — устойчивый фокус;

в) характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ разных знаков, значит, точка покоя — седло;

г) характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6 = 0$$

имеет комплексные корни $\lambda_1 = i\sqrt{6}$, $\lambda_2 = i\sqrt{6}$ с действительной частью $p = 0$, поэтому точка покоя — центр;

д) характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0$$

имеет кратный положительный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, значит, точка покоя — неустойчивый узел.

ГЛАВА 7

484. $-\infty < x < \infty$; $F(x)$ непрерывна и дифференцируема

$$F'(x) = \frac{1}{x}(\sin 2\pi x - \sin \pi x).$$

485. $\frac{b}{2a^2(a^2+b^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. Указание. Продифференцировать равенство по параметру a.

486. а) $F'(x) = 2x \exp(-x^5) - \exp(-x^2) - \int\limits_x^{x^2} y^2 \exp(-xy^2)\, dy$,

б) $F'(x) = \frac{2}{x}\ln(1 + x^2)$;

в) $F' = -f(x, -x) + 2\int\limits_0^x f'_u(u, v)\, dy$, где $u = y + x$, $v = y - x$.

Указание. В начале в интеграле сделать замену $z = y - x$.

487. а) $-1/10$; б) $1/2$.

488. $\ln(25/24)$.

489. 50,4.

490. 12/5.

491. $I = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{4x+4}}^{\sqrt{4x+4}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{0}^{8} dx \int\limits_{-\sqrt{4x+4}}^{2-x} f(x, y)\,dy$ (рис. 90).

492. $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y/2}^{3y} f(x, y)\,dx + \int\limits_1^6 dy \int\limits_{y/2}^{3} f(x, y)\,dx$ (рис. 91).

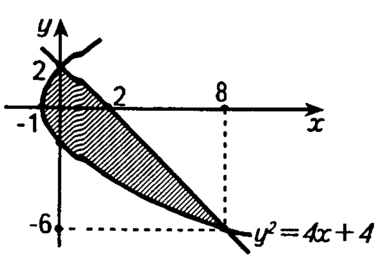


Рис. 90

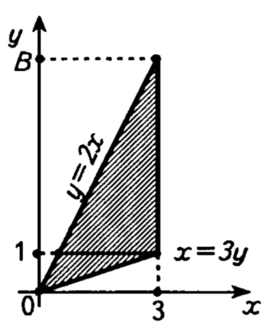


Рис. 91

493. $I = \int\limits_{1/2}^{1} dy \int\limits_{1/y}^{2} f(x,\, y)\,dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{y}^{2} f(x,\, y)\,dx$ (рис. 92).

494. $I = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[4]{y}} f(x,\, y)\,dx$ (рис. 93).

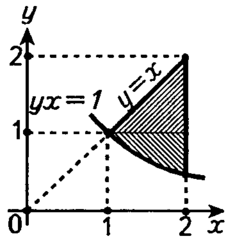


Рис. 92

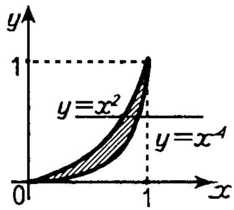


Рис. 93

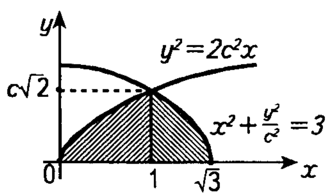


Рис. 94

495. $I = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{c\sqrt{2x}} f(x,\, y)\,dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{c\sqrt{3-x^2}} f(x,\, y)\,dy$ (рис. 94).

496. $I = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{2-y} (x+y^2)\,dx = \dfrac{7}{6}$. **497.** $I = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{y}} xy^2\,dx = \dfrac{1}{40}$.

498. $\dfrac{1}{2}abc\,(a+b+c)$. **499.** 1/48. **500.** 16.

501. а) $\int\limits_{-a\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2a^2-x^2}}^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy \int\limits_{\frac{x^2+y^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}} f(x,\, y,\, z)\,dz$;

б) $\int\limits_{-\frac{1}{2}R\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}R\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{\frac{3}{4}R^2-x^2}}^{\sqrt{\frac{3}{4}R^2-x^2}} dy \int\limits_{R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x,\, y,\, z)\,dz$.

502. $\frac{1}{3}\pi a^3$.

503. $I = \frac{4}{5}\pi abc$. Указание. В силу четности подынтегральной функции по всем переменным данный интеграл в восемь раз больше интеграла по части эллипсоида, находящейся в первом октанте. Вводим замену:

$$x = ar\cos t\cos\tau,\ y = 6z\cos t\sin\tau,\ z = cr\sin t$$

$$(0 < r \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant \tau \leqslant \pi/2).$$

Якобиан данного преобразования

$$\left|\frac{D(x, y, z)}{D(r, t, \tau)}\right| = abcr^2\cos t,$$

поэтому $I = 8abc\int\limits_0^1 r^4\,dr\int\limits_0^{\pi/2} d\tau\int\limits_0^{\pi/2}\cos t\,dt$.

504. $\pi a^3/6$.

505. $2\pi ab/3$. Указание. Учесть четность подынтегральной функции и ввести обобщенные полярные координаты:

$x = ar\cos t$, $y = br\sin t$ $(0 < r \leqslant 1,\ 0 < r \leqslant \pi/2)$.

Якобиан $\frac{D(x, y)}{D(r, t)} = abr$. **506.** πR^4.

507. $8a^2/9$. Указание. Область интегрирования есть половина цилиндра высоты a, в основании которого лежит полукруг $(x-1)^2 + y^2 \leqslant 1$ $(y > 0)$. Уравнение полуокружности $(x-1)^2 + y^2 = 1$ $(y > 0)$ в полярных координатах имеет вид $\rho = 2\cos\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$ (рис. 95). Поэтому

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2\,d\rho\int\limits_0^a z\,dz.$$

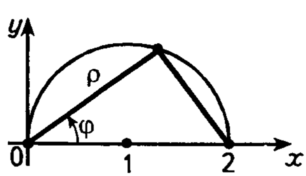


Рис. 95

508. $4\pi R^5/15$. Указание. Перейти к полярным координатам.

509. $\frac{16}{3}\sqrt{15}$ (рис. 96). **510.** $V = \frac{1}{6}$ (рис. 97).

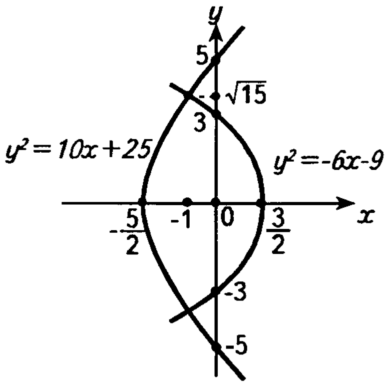


Рис. 96

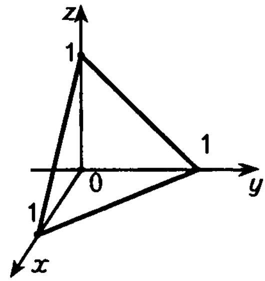


Рис. 97

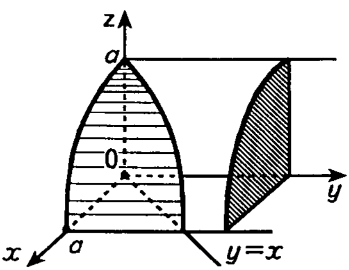


Рис. 98

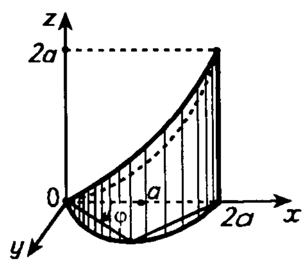


Рис. 99

511. $V = a^3/3$ (рис. 98). **512.** $V = 3\pi a^3/4$. Замечание. Для вычисления соответствующего интеграла удобно ввести полярные координаты (рис. 99). Уравнение полуокружности $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ $(y > 0)$ в полярных координатах будет $\rho = 2a\cos\varphi$ $(0 < \varphi \leqslant \pi/2)$.

513. $|S| = \iint\limits_D \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy = \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2}\,dx\,dy =$
$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$,

где D — треугольник

$$\begin{Bmatrix} 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 0 \leqslant y \leqslant (a-x)\dfrac{b}{a} \end{Bmatrix}.$$

514. $|S| = 8a^2 \arcsin(b/a)$. Указание. В силу симметрии искомая площадь равна восьми площадям, вырезанным на поверхности шара и находящимся в первом октанте.

$$|S| = 8a\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = 8a\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} =$$

$$= 8a\int\limits_0^a \arcsin\frac{b}{a}\,dx = 8a^2\arcsin\frac{b}{a},$$

где D — часть эллипса,

$$D = \left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,\ x>0,\ y>0\right\}.$$

515. Пусть (x_c, y_c) — центр масс. В силу симметрии ясно, что $x_c = 0$. Площадь D половины эллипса, равная $\pi ab/2$, численно равна массе фигуры, поэтому

$$y_c = \frac{2}{\pi ab}\iint\limits_D y\,dx\,dy = \frac{2}{\pi ab}\int\limits_{-a}^{a} dx\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy = \frac{4b}{3\pi}.$$

516. *а)* $\frac{4}{3}\pi ab^2$. Указание. Воспользоваться первой теоремой Гюльдина и задачей *515*; б) $\frac{4}{3}\pi abc$. Указание. $V = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz = 2c\iint\limits_S \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$, где S — эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$; далее см. задачу *505*.

517. $x_c = y_c = 0$, $z_c = \frac{2}{5}a$. Указание. См. задачу *506*. Вводя сферические координаты

$x = r\cos\psi\cos\varphi$,

$y = r\cos\psi\sin\varphi$, $(0 \leqslant r \leqslant a,\ 0 < \psi < \pi/2,\ 0 < \varphi < 2\pi)$,

$z = r\sin\psi$

получаем

$$z_c = \frac{2}{\pi a^4}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^a r^4\cos\psi\sin\psi\,d\psi\,d\varphi\,dr = \frac{4}{5}a\int\limits_0^{\pi/2}\sin\psi\,d\sin\psi.$$

518. $x_c = 0,\ y_c = 8/5$. Указание. Площадь фигуры $|S| = 32/3$;

$$y_c = \frac{3}{32}\iint\limits_D y\,dx\,dy = \frac{3}{32}\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_0^{4-x^2} y\,dy.$$

519. $\frac{512}{15}\pi$. Указание. См. задачу *518* и первую теорему Гюльдина.

521. а) $\pi/4$; б) ∞; в) $1/4$.

522. $F(y) = \ln(1 + y)$. Указание. Интеграл $F(y)$ сходится для любых $y > -1$.

$$F'(y) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x(y+1)}\,dx = \frac{1}{y+1}$$

равномерно сходится при любых $y \geqslant y_0 > -1$, поэтому дифференцирование под знаком интеграла по параметру y законно в указанном промежутке. Учитывая, что $F(0) = 0$, получаем $F(y) = \ln(y + 1)$.

523. $F(y) = \sqrt{\pi y}$ $(y > 0)$. Указание. Как нам известно:

$$\int\limits_0^{\infty} \exp(-t^2)\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$F'(y) = \int\limits_0^{\infty} \exp(-yx^2)\,dx = \frac{1}{\sqrt{y}}\int\limits_0^{\infty} \exp(-t^2)\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}.$$

Последний интеграл равномерно сходится при $y \geqslant y_0 > 0$.

524. Интегрируя $\int\limits_0^1 x^y\,dx = \frac{1}{y+1}$ по параметру y в пределах от β до α, получаем

$$\int\limits_\beta^\alpha\left[\int\limits_0^1 x^y\,dx\right]dy = \int\limits_0^1\left[\int\limits_\beta^\alpha x^y\,dy\right]dx = \int\limits_0^1 \frac{x^y}{\ln x}\Big|_\beta^\alpha\,dx = \int\limits_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{\ln x}\,dx,$$

$$\int\limits_\beta^\alpha \frac{dy}{y+1} = \ln(y+1)\Big|_\beta^\alpha = \ln\frac{\alpha+1}{\beta+1}.$$

Значит,

$$\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{\ln x}\,dx = \ln\frac{\alpha+1}{\beta+1}.$$

Отметим, что в области $0 < x < 1$, $-1 < \beta < y < \alpha$ исходный интеграл сходится равномерно.

525. Сходится. Указание. Рассмотреть круг с выброшенной из него ε-окрестностью начала координат $U_\varepsilon(0)$ и перейти к полярным координатам:

$$\iint\limits_{S\setminus U_\varepsilon(0)} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\varepsilon^1 r\ \ln r\,dr\,d\varphi = 2\pi\int\limits_\varepsilon^1 r\ \ln r\,dr =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\ln\varepsilon - \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \to -\frac{\pi}{2}\ (\varepsilon \to 0).$$

526. а) Сходится равномерно в силу признака Вейерштрасса

$$|\cos xy| \leqslant 1,\ \left|\int\limits_0^\infty \frac{\cos xy}{1+x^2}dx\right| \leqslant \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\,\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2};$$

б) сходится неравномерно. Замена $x\sqrt{y} = u$ показывает, что

$$\int\limits_0^\infty \sqrt{y}\ \exp(-yx^2)\,dx = \int\limits_0^\infty \exp(-u^2)\,du,$$

т. е. он не зависит от параметра y. При $y = 0$ интеграл равен нулю. Итак, интеграл $F(y)$ есть разрывная функция при $0 \leqslant y < \infty$. Значит, интеграл сходится неравномерно. Его сходимость будет равномерной, если $0 < y_0 \leqslant y < \infty$.

ГЛАВА 8

527. $\sqrt{5}\ln 2$; уравнение AB: $y = \frac{1}{2}(x-4)$. **529.** 24.

530. $\dfrac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$. Указание. Уравнение дуги эллипса $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$. Принимая x за параметр, получаем

$$\int\limits_\Gamma xy\,ds = \int\limits_0^a x\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{b}{a^2}\int\limits_0^a x\sqrt{a^4+\left(b^2-a^2\right)x^2}\,dx.$$

531. $\displaystyle\int\limits_\Gamma y\,ds = 2\int\limits_0^1\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx = \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$

532. Перейдем к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Уравнение окружности $x^2+y^2 = 2ax$ или $(x-a)^2+y^2 = a^2$ в полярных координатах имеет вид $\rho = 2a\cos\varphi$ $(-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$. Дифференциал дуги этой окружности будет

$$ds = \sqrt{f'(\varphi)^2+f(\varphi)^2}\,d\varphi = \sqrt{4a^2\sin^2\varphi+4a^2\cos^2\varphi}\,d\varphi = 2a\,d\varphi.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\Gamma}(x-y)\,ds=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(2a\cos^2\varphi-2a\cos\varphi\sin\varphi)\,2a\,d\varphi=$$

$$=4a^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi=2a^2\pi.$$

533. $m=\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{a^2b}{2\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ $(a>b)$.

535. $2\pi^2b\sqrt{a^2+b^2}$.

536. $x_c=\dfrac{4}{3}a$, $y_c=\dfrac{4}{3}a$. Указание. Длина дуги полуарки циклоиды

$$|\Gamma|=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=4a;$$

$$x_c=\frac{1}{|\Gamma|}\int\limits_0^{\pi}x\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=\frac{4}{3}a,$$

$$y_c=\frac{1}{|\Gamma|}y\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=\frac{4}{3}a.$$

537. $2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}$. Указание.

$$I^{(2)}_{x=0,\,y=0}=\int\limits_{\Gamma}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt.$$

539. 2. Указание. Воспользоваться свойством интеграла

$$\int\limits_{\Gamma}=\int\limits_{\Gamma_1}+\int\limits_{\Gamma_2},\ \Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2.$$

540. а) 512/15; б) 64/3; в) 0. **541.** а) 1; б) 1 ; в) 1.

542. $\operatorname{grad}u=\{2x+y,\ 4y+x,\ 6z-6\}$.

543. а) $z^2=xy$; б) $x=y=z$. **544.** $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\{0,\ 0,\ 0\}$.

545. $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\{1,\ 1,\ 0\}$.

546. а) Имеет, так как $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0$ и пространство R^3 — односвязная область; б) имеет, $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0$; в) не имеет, $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\{0,\ 1-y,\ z)\neq 0$ в R^3.

548. а) Является; б) является; в) не является ($\operatorname{rot}\{2-y,\ x\}\neq 0$ или $\dfrac{\partial}{\partial y}(2-y)\neq\dfrac{\partial}{\partial x}x$).

549. $x^2+x^3y-y^3=C$. **550.** $3x^2y-y^3=C$.

551. $xe^{-y} - y^2 = C$.

552. $x + \frac{x^3}{y^2} + \frac{5}{y} = C$. У к а з а н и е . Потенциальную функцию $U(x,y)$ для вектора $a = \left\{\frac{3x^2+y^2}{y^2}, -\frac{2x^3+5y}{y^3}\right\}$ находим как интеграл второго рода от вектора a. За путь интегрирования берем любую кривую, не пересекающую ось x. Например, можно взять ломаную (рис. 100), соединяющую точки (1, 1), (x, 1), (x, y) ($x > 0$, $y > 0$). Если точка (x, y) лежит в нижней полуплоскости, то за начальную точку берем любую точку ниже оси x, например точку (0, –1).

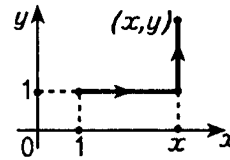


Рис. 100

553. rot $\{yz, xz, xy\} = \mathbf{0}$; $U(x, y, z) = xyz$. Общее решение $xyz = C$. Любую из переменных можно рассматривать как функцию от двух других независимых переменных.

554. $xy + xz + yz = C$. **555.** $y(x^2 + z^2) = C$.

556. $\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$. **557.** $\iint\limits_{\Omega} e^{xy} (y - x)\, dx\, dy$.

558. 0. **559.** – 1/3.

560. $\pi R^4/2$. У к а з а н и е . Применить формулу Грина и перейти к полярным координатам.

561. $m\Omega = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}(-y\, dx + x\, dy) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t \sin t +$

$+ a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t)\, dt = \frac{3}{8}\pi a^2$.

562. rot $a = \mathbf{0}$. Значит, на плоскости вектор a имеет потенциальную функцию. Работа вектора a есть криволинейный интеграл второго рода, который не зависит от пути интегрирования, следовательно, и работа не зависит от формы пути перемещения:

$$A = \int\limits_{\Gamma} (a\, ds) = \int\limits_{\Gamma} (2xy\, dx + x^2\, dy),$$

где Γ — любая кривая, соединяющая точки (1, 1) и (2, 5). Вычисляя интеграл по конкретной кривой, мы и получаем величину работы. Здесь лучше найти потенциальную функцию, решая уравнение в полных дифференциалах: $2xy\, dx + x^2\, dy = 0$, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Решая, получаем $U(x, y) = x^2y$. Теперь работа $A = U(2, 5) - U(1, 1) = 20 - 1 = 19$. **564.** $\frac{8}{3}\pi a^4$. **565.** $m = \int\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\, dS = \iint\limits_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dx\, dy$, где Ω — часть круга $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, находящаяся в первой четверти, $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $m = \frac{1}{8}\pi^2 a^3$.

566. $\pi^2\left[a\sqrt{1+a^2} + \ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right]$. Указание. Элемент площади геликоида $dS = |\boldsymbol{r}_u| \cdot |\boldsymbol{r}_v|\, du\, dv = \sqrt{1+u^2}\, du\, dv$.

568. $\pi a^4/2$. Указание. Каждое слагаемое сводить к двойному интегралу по соответствующей проекции на координатные плоскости.

569. 0. Указание. Вычисление провести для каждой из четырех граней отдельно. Например, на нижней грани S_1^*, (ориентированный треугольник) внешняя нормаль $\boldsymbol{n}(A) = -\boldsymbol{k}$, $z = 0$. Поэтому

$$\int\limits_{S_1^*} (yz\, dy\, dz + xz\, dx\, dz + xy\, dx\, dy) =$$

$$= \int\limits_{S_1^*} xy\, dx\, dy = -\int\limits_{\Delta_1} xy\, dx\, dy = -\frac{a^4}{24},$$

где

$$\Delta_1 = \left\{\begin{matrix} 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 0 \leqslant y \leqslant a - x \end{matrix}\right\}.$$

Аналогично для других граней, лежащих в координатных плоскостях. Для грани S_4^*, лежащей в плоскости $x + y + z = a$, косинус угла внешней нормали с осью z определяется равенством

$$\cos(\boldsymbol{n}, z) = 1\Big/\sqrt{1+z_x^2+z_y^2},$$

поэтому

$$\int\limits_{S_4^*} (yz\, dy\, dz + xz\, dx\, dz + xy\, dx\, dy) =$$

$$= \iint\limits_{\Delta_3} yz\, dy\, dz + \iint\limits_{\Delta_2} xz\, dx\, dz + \iint\limits_{\Delta_1} xy\, dx\, dy = \frac{1}{8}a^4.$$

Окончательно,

$$\int\limits_{S^*} \ldots = \int\limits_{S_1^*}\ldots + \int\limits_{S_2^*}\ldots + \int\limits_{S_3^*}\ldots + \int\limits_{S_4^*}\ldots = -\frac{a^4}{8} + \frac{a^4}{8} = 0.$$

570. $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 3\,\{x^2 + y^2 + z^2\}$. **571.** $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \dfrac{2}{r} f(r) + f'(r)$.

572. $\operatorname{div} (\operatorname{grad} u) = 6$.

573. *а*) $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$; б) $\operatorname{rot} (f(r) \cdot \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f(r)c_1 & f(r)c_2 & f(r)c_3 \end{vmatrix} =$

$= \dfrac{f'(r)}{r} \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}$.

574. а) 0. Вектор $\boldsymbol{a} = \{yz, zx, xy\}$, поэтому $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$;

б) $2\iiint\limits_G (x + y + z)\, dx\, dy\, dz$; здесь $\boldsymbol{a} = \{x^2, y^2, z^2\}$;

в) $2\iiint\limits_G \dfrac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; здесь $\boldsymbol{a} = \left\{\dfrac{x}{r}, \dfrac{y}{r}, \dfrac{z}{r}\right\}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

г) $\iiint\limits_G \Delta u\, dx\, dy\, dz$, здесь $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u$, $\operatorname{div} (\operatorname{grad} u) = \Delta u$, где

$\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

575. 1/2; $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 3$; $\iiint\limits_G 3\, dx\, dy\, dz = 3\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} dz$.

576. 0 (см. задачу *567*). **577.** 0.

579. -4π. Указание. $\boldsymbol{a} = \{y - z, z - x, x - y\}$,

$\boldsymbol{n} = \{1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\}$.

$$\int\limits_\Gamma ((y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz) = \int\limits_S -\frac{4}{\sqrt{2}}\, dS,$$

где S — эллипс, лежащий в плоскости $x + z = 1$. Из рис. 33 видно, что его большая полуось равна $\sqrt{2}$, а малая полуось равна 1. Площадь этого эллипса равна $\pi\sqrt{2}$. При непосредственном вычислении следует записать уравнение эллипса в параметрическом виде, принимая за параметр z ($0 \leqslant z \leqslant 2$): $x = 1 - z$, $y = \pm\sqrt{2z - z^2}$. Далее, интеграл по Γ разбиваем на две части для $y > 0$ и $y < 0$. Отметим, что в первом случае z изменяется от 0 до 2, а во втором случае — от 2 до 0.

580. 0.

ГЛАВА 9

583. $\forall\, x$, если $\alpha > 1$; $0 < x < 2\pi$, если $0 < \alpha \leqslant 1$. Указание. При $0 < \alpha \leqslant 1$ применить признак Дирихле ($\alpha_k = k^{-\alpha}$, $\beta_k(x) = \cos kx$).

584. Сколько угодно.

585. $-\infty < x < \infty$.

586. а) $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$;

в) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$; г) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} +$

$+\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{\sin kx}{k}$;

д) $-\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}$;

е) если a — целое, то $\sin ax$; если a — не целое, то

$$\frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{a^2-n^2};$$

ж) $\dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{sh}\,a\pi\left[\dfrac{1}{2a}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{a\cos nx}{a^2+n^2}\right]$.

588. а) $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}$, $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$.

Указание. При разложении в ряд по синусам мы продолжаем функцию $f(x)$ на $(-\pi, 0)$ нечетным образом и затем периодически на всю числовую ось (рис. 101). Далее см. задачу *586*, а). При разложении в ряд по косинусам мы продолжаем функцию $f(x)$ на $(-\pi, 0)$ четным образом (рис. 102). Затем см. задачу *586*, в). Отметим, что продолженная периодически функция в данном случае непрерывна на всей оси. Ряд Фурье сходится равномерно на всей оси;

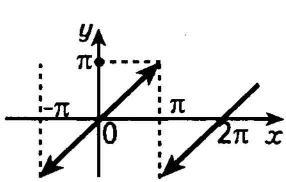


Рис. 101

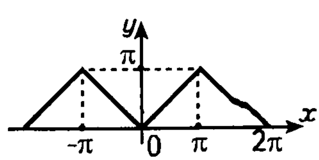


Рис. 102

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n}$ (рис. 103); $\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$ (рис. 104).

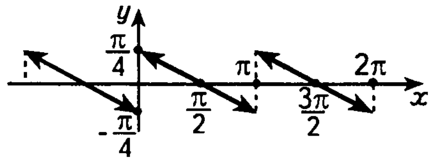


Рис. 103

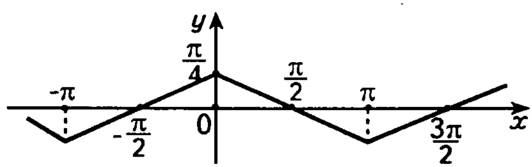


Рис. 104

589. $\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-2}\cos\left(\frac{2n+1}{l}\pi x\right).$

590. а) π; б) $\pi/4$.

591. а) $\|f\|=1/\sqrt{5}$; б) $\|f\|=1/\sqrt{\pi/2}$; в) $\|f\|=\sqrt{(e^2-1)/2}$; г) $\|f\|=1/\sqrt{3}$.

592. $0 \leqslant \alpha < 1/2$.

593. При любом $\alpha > 0$ сходится к нулю неравномерно ($\max\limits_{0<x<n} f_n(x) = 1$). При любом $\alpha > 0$ сходится к нулю в смысле среднего квадратического.

595. $F(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos ts\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{a}\cos ts\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin as}{s}.$

596. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<a, \\ 0 & x>a. \end{cases}$ Указание. Воспользоваться повторным интегралом Фурье

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\cos xs\,ds\int\limits_0^{\infty}f(t)\cos ts\,dt,$$

верным для функции $f(x)$ кусочно непрерывной и абсолютно интегрируемой на $(0, \infty)$ (см. задачу *595*).

597. $F(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(1+s)a}{1+s}+\frac{\sin(s-1)a}{s-1}\right].$

598. $Q(s,\ r)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-sx}\frac{\sin rx}{x}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{arctg}\frac{r}{s}.$

Указание. Дифференцируя по параметру r, получаем ([3], § 4.14, 4))

$$\frac{\partial Q}{\partial r}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-sx}\cos rx\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{s}{s^2+r^2}.$$

Отсюда

$$Q=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{arctg}\frac{r}{s}+C,\ Q\ (s,\ 0)=0,\ C=0.$$

599. а) $\frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-as})$ (см. задачу *598* и [3], § 4.14, 6));

б) 63/697; в) 51/290.

ГЛАВА 10

600. $\Lambda\equiv\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|u(\rho,\ \theta)-f(\theta)|^2\,d\theta\right)^{1/2}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{2}}(1-\rho)\to\ 0$ при $\rho\to 1-0.$

Указание. Ряд Фурье функции $f(\theta)$ имеет вид (см. задачу *586*, в))

$$f(\theta)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\Theta}{(2k+1)^2}.$$

Гармоническую функцию (в единичном круге), порожденную функцией $f(\theta)$, можно записать в виде ([3], § 5.3):

$$u(\rho,\ \theta)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{2k+1}\frac{\cos(2k+1)\theta}{(2k+1)^2}.$$

Отсюда на основании равенства Парсеваля получаем

$$\Lambda=\left(4\sum_0^\infty\left(1-\rho^{2k+1}\right)^2\frac{1}{(2k+1)^4}\right)^{1/2}=$$

$$=\left(4\sum_0^\infty(1-\rho)^2\left(1+\rho+\ldots+\rho^{2k}\right)^2\frac{1}{(2k+1)^4}\right)^{1/2}\leqslant\ (1-\rho)\left(4\sum_0^\infty\frac{1}{(2k+1)^2}\right)^{1/2}=$$

$$= (1-\rho)\left(4\cdot\frac{\pi^2}{8}\right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1-\rho) \text{ (см. задачу } \mathit{587}).$$

З а м е ч а н и е . Гармоническая функция $u(\rho, \theta)$ стремится к $f(\theta)$ вдоль каждого радиуса (рис. 105) при $\rho \to 1-0$, также в обычном смысле, но скорость сходимости будет немного хуже, чем $(1-\rho)$.

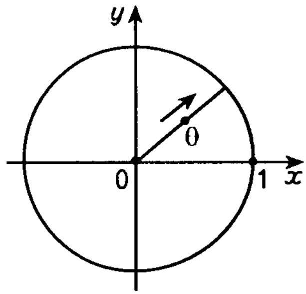


Рис. 105

В самом деле, при фиксированном ρ $(1/2 < \rho < 1)$ подберем натуральное число N так, чтобы $1/(N+1) < 1-\rho \leqslant 1/N$, тогда (см. задачу *376*)

$$u(\rho, \theta) - f(\theta)| \leqslant \frac{4}{\pi}\sum_0^\infty\left(1-\rho^{2k+1}\right)\frac{|\cos(2k+1)\theta|}{(2k+1)^2} \leqslant$$

$$\leqslant c\sum_0^N\frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^2} + c\sum_{N+1}^\infty\frac{1}{(2k+1)^2} \leqslant c(1-\rho)\sum_0^N\frac{1}{2k+1} + \frac{c}{N+1} \leqslant$$

$$\leqslant c(1-\rho)\ln N + \frac{c}{N+1} \leqslant c(1-\rho)\ln\frac{1}{1-\rho} + c(1-\rho) \leqslant$$

$$\leqslant c(1-\rho)\ln\frac{1}{1-\rho} \to 0, \rho \to 1-0,$$

где постоянные c в различных неравенствах, вообще говоря, различны.

601. Разложим функцию $f(x)$ в ряд по синусам (см. задачу *588*, б))

$$f(x) = \sum_1^\infty\frac{\sin 2nx}{2n}.$$

Решение поставленной задачи имеет вид (см. [3], § 5.5, (11))

$$u(x,\ t)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2n}\exp(-4n^2t)\sin 2nx.$$

Используя равенство Парсеваля, имеем

$$\Lambda=\left[\sum_{1}^{\infty}\frac{\pi}{4n^2}\left(1-\exp\left(-4n^2t\right)\right)^2\right]^{1/2}.$$

Зафиксируем t $(0 < t < 1)$ и подберем натуральное число N так, чтобы $1/(N+1)^2 \leqslant t < 1/N^2$. Тогда

$$\Lambda\leqslant\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\pi}{4n^2}\left(1-\exp\left(-4n^2t\right)\right)^2+\sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}\right)^{1/2}.$$

Применяя теорему Лагранжа и используя оценки задачи *376*, получаем

$$\Lambda\leqslant\left(\sum_{1}^{N}\frac{\pi}{4n^2}\left(4n^2t\exp\left(-4n^2\xi\right)\right)^2+\frac{c}{N+1}\right)^{1/2}\leqslant\ c\left(\sum_{1}^{N}t^2n^2+\frac{1}{N+1}\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant c\left(t^2N^3+\frac{1}{N+1}\right)^{1/2}\leqslant ct^{1/4}\to 0,\ t\to 0.$$

602. $u(x,\ t)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}+\frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)^3}\right]\cdot\sin(2n+1)x$ (см. [3], § 5.5, (8), (11)).

603. Используя формулу Даламбера, имеем

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+(x-t)^2}+\frac{1}{1+(x+t)^2}\right]+\frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}(x+t)-\operatorname{arctg}(x-t)\right].$$

605. $u(x,\ y)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(t)\,dt}{(x-t)^2+y^2}=\frac{y}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{dt}{(x-t)^2+y^2}=\frac{y}{\pi}\int_{-l-x}^{l-x}\frac{d\xi}{\xi^2+y^2}=$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{l-x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{l+x}{y}\right].$$

Если $u=1/2$, то $\operatorname{arctg}((l-x)/y)+\operatorname{arctg}(l+x)/y)=\pi/2$, т. е. $(l^2-x^2)/y^2=1$ — полуокружность $(y>0)$ радиусом l с центром в начале координат.

606. $u(x,\ t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+4t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{1+4t}\right).$

ГЛАВА 11

608. а) $|z| = 5$; б) $|z| = 1$; в) $|z| = 4$.

609. а) $z = 2[\cos(-2\pi/3) + i\sin(-2\pi/3)]$;

б) $2[\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)]$.

610. а) $2e^{i\pi}$; б) $1\cdot e^{i\pi/2}$; в) $2e^{-2\pi i/3}$; г) $1\cdot\exp\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)i$.

612. а) 1728; б) 1.

613. а) $\sqrt[8]{2}\exp\left(\dfrac{-\pi+8k\pi}{16}i\right)$ $(k = 0, 1, 2, 3)$; б) ±1, $\pm i$.

614. $\overline{w} = x - iy^2$, $\dfrac{1}{w} = \dfrac{\overline{w}}{w\overline{w}} = \dfrac{x-iy^2}{x^2+y^4}$.

616. а) Окружность радиусом r с центром в точке z_0;

б) эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $b^2 = a^2 - c^2$. Указание. $|z - c|$ — расстояние от точки $(c, 0)$ до $z = (x, y)$. По определению эллипс это геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных есть величина постоянная;

в) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{w}\right) = \dfrac{x}{x^2+4y^2} = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{w}\right) = \dfrac{-2y}{x^2+4y^2} = \dfrac{1}{4}$. Это эллипсы:

$(x-1)^2 + 4y^2 = 1$, $\dfrac{x^2}{4} + (y+1)^2 = 1$;

г) $xy = 1$ — гипербола; д) $y = x^2$ — парабола.

617. а) -1: б) $-(5 + 12i)/13$.

619. а) Окружность $|w| = 2$ или $u^2 + v^2 = 4$. При $z = \rho e^{i\varphi}$ $w=\dfrac{1}{\rho}c^{-i\varphi}$ и, следовательно, окружность $|w| = 2$ проходится по часовой стрелке, если z пробегает окружность $|z| = 1/2$ против часовой стрелки;

б) луч, идущий по биссектрисе четвертой четверти из ∞ в 0;

в) ось Ov за исключением точки $O = (0,0)$. Если точка z движется по оси y от $-\infty$ до $+\infty$, то точка w движется сначала от 0 до $+\infty$, затем от $-\infty$ до 0.

620. $\lim\limits_{x\to i}\overline{z} = -i$.

621. Не существует, так как $\operatorname{Re} w = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не имеет предела при $x \to 0$, $y \to 0$.

622. Будет.

623. а) $w' = 2z$; б) производная не существует ни в одной плоскости z; в) не имеет; г) имеет производную, равную нулю только в точке 0.

624. $f'(z) = \cos z$, $|f'(z)|_{z=0} = |\cos 0| = 1$, $|\arg f'(z)|_{z=0} = |\arg \cos 0| = 0$.

625. а) $z = 0$; $w' = 3z^2$; б) в точках z, не являющихся нулями функции $\sin z$, т. е. $z \neq (k\pi, 0)$ ($k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$); в) $z \neq -1$.

626. а) Является; б) не является; в) является; г) является.

627. а) $f(z) = z^2 + 2z + Ci$, где $\operatorname{Im} C = 0$; б) $f(z) = z^2(2 - i)/2 + Ci$, где $\operatorname{Im} C = 0$; в) $f(z) = u + iv = (C - z\ln z)i$, где $v = r\varphi \sin \varphi - r\ln\cos \varphi + C$, $\operatorname{Im} C = 0$ и $\ln z = \ln r + i\varphi$.

629. $u = C \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + C_1$.

630. $\dfrac{w-w_1}{w-w_2} : \dfrac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \dfrac{z-z_1}{z-z_2} : \dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$, где z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 — любые тройки действительных чисел, идущих в возрастающем порядке.

632. $w = z^4$.

633. а) $w = e^z$; б) $w = e^{2z}$.

635. $w = (1 + i)(1 - z)$.

636. $w = \dfrac{2z-5}{10-z}$.

637. Подынтегральную функцию можно записать в виде $1 + i - 2\bar{z} = (1 - 2x) + i(1 + 2y)$. а) $2(i - 1)$; б) $-2 + \dfrac{4}{3}i$; в) -2.

638. 2.

639. $1 + \operatorname{ch}\pi - \pi(1 + i)\operatorname{sh}\pi$. Указание. Функция $w = z\operatorname{ch} z$ аналитична на всей плоскости, поэтому можно интегрировать по любому пути, соединяющему точки 0 и $\pi(1 + i)$. Воспользоваться формулами $\operatorname{ch} iz = \cos z$, $\operatorname{sh} iz = i \sin z$.

640. а) $7 + 19i$; б) $-i/e$.

641. а) $I = 0$, так как подынтегральная функция аналитична в круге $|z - 2| \leqslant 1$; б) $I = -\dfrac{\pi}{3}i$; в) $I = \dfrac{\pi i}{3}e^{36}$.

642. а) $2\pi i$; б) $2\pi i(-e^{-1})$. Указание. $\int\limits_C \ldots = \int\limits_{C_1} \ldots + \int\limits_{C_2} \ldots$, где C_1 и C_2 — контуры, описанные вокруг особых точек $z = -1$ и $z = 0$, целиком лежащие внутри контура C и не пересекающиеся между собой.

644. $-\dfrac{\pi i}{2e}$. **645.** ∞. **646.** 0. **647.** ∞.

648. ∞. **649.** 1. **650.** 1. **651.** 1.

652. $\sum\limits_{0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n$ ($|z|<1$). Указание. Продифференцировать разложение

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{0}^{\infty}(-1)^n z^n \quad (|z|<1).$$

653. $\frac{1}{3}\sum\limits_{0}^{\infty}[(-1)^{n+1}-2^{-n-1}]\,z^n$ ($|z|<1$). Указание. Сначала разложить функцию на простейшие дроби.

655. $-\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}(z-3)-\frac{2^2}{3^3}(z-3)^2+\ldots\left(|z-3|<\frac{3}{2}\right)$.

656. а) $|z|>2$; б) $|z+1|>1/4$.

657. а) $-\frac{1}{2}\sum\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum\limits_{0}^{\infty}z^n=\sum\limits_{0}^{\infty}(1-2^{-n-1})z^n$; б) $-\sum\limits_{0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}-\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$; в) $\sum\limits_{0}^{\infty}(2^n-1)z^{-n-1}$.

658. $\frac{1}{4(z-1)^2}-\frac{1}{4(z-1)}+\frac{3}{16}-\frac{1}{8}(z-1)+\frac{5}{64}(z-1)^2-\ldots=$
$=\sum\limits_{n=-2}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{2^{n+4}}(z-1)^n$ ($0<|z-1|<2$). Указание. Можно воспользоваться формулой для коэффициентов ряда Лорана

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}f(z)\frac{dz}{(z-1)^{n+1}},$$

где γ — любая окружность с центром в точке $z_0=1$, лежащая в кольце $0<|z-1|<2$. Функция $f(z)=1/(z^2-1)^2$ аналитична в этом кольце.

Можно также использовать метод разложения $f(z)$ на простейшие дроби:

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4(z-1)^2}-\frac{1}{4(z-1)}+\frac{1}{4(z+1)}+\frac{1}{4(z+1)^2}.$$

При разложении функций $\frac{1}{z+1}$ и $\frac{1}{(z+1)^2}$ по степеням $(z-1)$ можно использовать прием задачи *654*.

659. $\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\frac{z^5}{7!}+\ldots$ ($|z|>0$).

660. $z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\ldots$ ($|z|>0$).

661. а) Устранимая особая точка; б) полюс четвертого порядка: в) существенно особая точка.

662. а) $z = 0$ — устранимая особая точка, $z = \infty$ — существенно особая точка; б) $z = 0$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — устранимая особая точка; в) $z = 0$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — устранимая особая точка: г) $z_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi i$ — простые полюсы ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Указание. Числа z_n являются нулями функции $w = \operatorname{ch} z$. Функцию $\operatorname{th} z$ в окрестности z_n можно представить в виде

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{ch}(z - z_n)}{(z - z_n)\dfrac{\operatorname{sh}(z - z_n)}{z - z_n}}.$$

$z = \infty$ — существенно особая точка, так как предел $\operatorname{th} z$ при $z \to \infty$ не существует: при $z = x$ $\operatorname{th} x \to 1$, $z \to \infty$; при $z = iy$ $\operatorname{th} z = = \dfrac{\operatorname{sh} iy}{\operatorname{ch} iy} = \dfrac{i \sin y}{\cos y} = i \operatorname{tg} y$ и при $y \to \infty$ предел не существует.

665. а) $\operatorname*{Выч}_{z=0} f(z) = 0$, $\operatorname*{Выч}_{z=\infty} f(z) = 0$

б) $\operatorname*{Выч}_{z=0} f(z) = \dfrac{1}{3!}$–, $\operatorname*{Выч}_{z=\infty} f(z) = -\dfrac{1}{3!}$;

в) $\operatorname*{Выч}_{z=-1} f(z) = -\dfrac{17}{54e}$, $\operatorname*{Выч}_{z=2} f(z) = \dfrac{e^2}{27}$, $\operatorname*{Выч}_{z=\infty} f(z) = \dfrac{17}{54e} - \dfrac{e^2}{27}$;

г) $\operatorname*{Выч}_{z=2} f(z) = 1/2$, $\operatorname*{Выч}_{z=\infty} f(z) = -1/2$. Здесь мы воспользовались основной теоремой о вычетах. Разложение функции $(z - 2) \exp(1/(z - 2))$ по степеням z — довольно громоздкая задача.

667. а) $-\dfrac{3}{2}\pi i$; б) πi; в) $-\pi i/\sqrt{2}$; г) πi.

669. а) $\pi/\sqrt{2}$; б) $\pi/ab\,(a + b)$; в) $2\pi/3$; г) $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}\pi = = \dfrac{\pi (2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

670. а) $\pi e^{-a}/2$; б) 0. Указание. Рассмотреть функцию

$$f(z) = \frac{z^2}{\left(z^2 + 1\right)^2} e^{iz}.$$

671. $I = \dfrac{\pi}{2a^2}(1 - e^{-a})$.

673. а) $\frac{1}{p-2}$; б) $\frac{3}{p^2+9}$.

674. Нет, так как $\varphi(p)$ — периодическая.

675. а) $\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p}$; б) $2\cdot\frac{3}{p^2+9}+\frac{1}{p+2}$.

676. Не является, так как порядок роста функции $\exp(t^2)$ выше любой показательной функции $\exp(s_0t)$ (при любом постоянном s_0) при $t\to\infty$.

677. $\frac{p\left(p^2+m^2+n^2\right)}{\left(p^2+m^2+n^2\right)^2-4m^2n^2}$.

678. а) $F(p)=\frac{p^2+18}{p\left(p^2+36\right)}$; б) $F(p)=\frac{p^4+16p^2+24}{p\left(p^2+4\right)\left(p^2+16\right)}$. Указание. $f(t)=\cos^4 t$, $f(0)=1$, $F(p)\risingdotseq f(t)$;
$f'(t)=-4\cos^3 t\sin t=-2\cos^2 t\sin 2t=-(1+\cos 2t)\sin 2t=$

$$=-\sin 2t-\frac{1}{2}\sin 4t;$$

$$f'(t)\fallingdotseq\frac{2}{p^2+4}-\frac{1}{2}\frac{4}{p^2+16}.$$

679. а) $\frac{2p^3-6p}{\left(p^2+1\right)^3}\left(\left(\frac{p}{p^2+1}\right)''\risingdotseq t^2\cos t\right)$; б) $\frac{6p}{\left(p^2-9\right)^2}$.

680. а) $\frac{6}{\left(p^2-9\right)^2}$; б) $\frac{2p^2-6}{\left(p^2+1\right)^3}$ (см. задачу *679*).

681. а) $\ln\frac{p}{p-1}$; б) $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{p^2+4}}{p}$; в) $\frac{1}{2}\ln\frac{p+1}{p-1}$.

682. а) $\sin t\fallingdotseq\frac{1}{p^2+1}$, $e^{3t}\sin t\fallingdotseq\frac{1}{(p-3)^2+1}$;

б) $\frac{2(p-1)^2-6(p-1)}{\left[(p-1)^2+1\right]^3}=\frac{2(p-1)(p-4)}{\left(p^2-2p+2\right)^3}$ (см. задачу *679*)

683. а) Для функции $f(t)=\sin t\cdot\sigma_0(t)$ имеем $f(t)\fallingdotseq\frac{1}{p^2+1}$, поэтому по теореме запаздывания $\sin(t-b)\,\sigma_0(t-b) \risingdotseq e^{-pb}\dfrac{1}{p^2+1}$;

б) $\dfrac{e^{-3t}}{p-1}$.

684. а) $\dfrac{1-e^{-p}}{p^2\left(1+e^{-p}\right)}$; б) $\dfrac{1}{p^2+1}\,\dfrac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}}$.

Указание.

$$L[|\sin t|;p]=\sum_0^\infty\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-pt}\,|\sin t|\,dt=$$

$$=\sum_0^\infty\left[\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-pt}\sin t\,dt-\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}e^{-pt}\sin t\,dt\right]=$$

$$=\sum_0^\infty\frac{1}{p^2+1}\,[e^{-(2k+1)p\pi}+e^{-2kp\pi}+e^{-2(k+1)p\pi}+e^{-p(2k+1)\pi}]=$$

$$=\frac{1}{p^2+1}\left[\sum_0^\infty e^{-pk\pi}+\sum_1^\infty e^{-pk\pi}\right].$$

685. а) $\dfrac{1}{p-1}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}$; б) $\dfrac{2}{p^3}\cdot\dfrac{p}{p^2-1}=\dfrac{2}{p^2\left(p^2-1\right)}$.

686. $f(t)=\dfrac{1}{2!}\dfrac{t}{1!}-\dfrac{1}{4!}\dfrac{t^3}{3!}+\dfrac{1}{6!}\dfrac{t^5}{5!}-\ldots$

687. $f(t)=-1+\dfrac{1}{2}e^t+\dfrac{1}{2}\cos t-\dfrac{1}{2}\sin t$. Указание. Разложить рациональную функцию $F(p)$ на простейшие дроби и воспользоваться таблицей изображений.

688. а) $f(t)=\dfrac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t})$; б) $f(t)=t-\sin t$.

690. а) $e^{-2t}\sin t$; б) $\dfrac{t^2}{2}+2e^{-t}\sin t$.

691. а) $x(t)=(t+1)\,e^{-t}$; б) $x(t)=(t-1)\sin t$; в) $x(t)=\dfrac{3}{5}+$ $+\dfrac{2}{5}e^{-t}\cos 2t+\dfrac{1}{5}e^{-t}\sin 2t$.

692. а) $x(t) = t\ \mathrm{arctg}\ t - \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)$. Указание. Рассматриваем сначала задачу $x'' = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$. Ее решение $x_1(t) = t^2/2$. По формуле Дюамеля

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{1+\tau^2}(t-\tau)\,d\tau;$$

б) $y = (\sin x - x\cos x)/2$; в) $y = e^{2x} + 4\cos x - 2\sin x - 5$.

694. а) $x(t) = e^t$, $y(t) = e^t$;

б) $x(t) = \dfrac{3}{4}(1-t) - \dfrac{3}{4}\cos 2t + \dfrac{3}{8}\sin 2t$,

$y(t) = \dfrac{3}{4}(1-t) + \dfrac{1}{4}\cos 2t - \dfrac{1}{8}\sin 2t - \cos t$,

$z(t) = \cos t$;

в) $y(x) = \dfrac{3}{4}e^{2x} + \dfrac{1}{4}e^{-2x} - e^x$, $z(x) = \dfrac{3}{4}e^{2x} - \dfrac{1}{12}e^{-2x} - \dfrac{2}{3}e^x$.

695. а) $\dfrac{\pi}{2a}e^{-ax}$. Указание.

$$L[I(x), p] = \int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-px}\cos xt\,dx\right)\frac{dt}{a^2+t^2} = \int_0^\infty \frac{p}{p^2+t^2}\cdot\frac{dt}{a^2+t^2} =$$

$$= \frac{p}{a^2-p^2}\cdot\int_0^\infty\left[\frac{1}{p^2+t^2} - \frac{1}{a^2+t^2}\right]dt = \frac{p}{a^2-p^2}\left[\frac{1}{p}\mathrm{arctg}\frac{t}{p} - \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{t}{a}\right]\Bigg|_0^\infty =$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{p}{a^2-p^2}\cdot\frac{a-p}{ap} = \frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{a+p}.$$

Отсюда $I(x) = \dfrac{\pi}{2a}\exp(-ax)$.

б) $$L[I(x); p] = \int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-px}\sin xt\ dx\right)\frac{\cos t}{t}dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{t}{p^2+t^2}\cdot\frac{\cos t}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\cos t\,dt}{p^2+t^2} = \frac{\pi}{2p}e^{-p}.$$

Согласно таблице изображений $I(x) = \dfrac{\pi}{2}\sigma_0(x-1)$, $x \neq 1$. Если $x = 1$, то $I(1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin 2t}{t}dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}du = \frac{\pi}{4}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ГЛАВА 1

700. Если $0 < a < 1/2$, то решением неравенства являются любые действительные числа x. Если $a \geqslant 1/2$, то решением неравенства являются числа $x \in (-1/2, 1/2)$.

701. $Q \cup I = R$ — множество всех действительных чисел:

$$Q \cap I = \varnothing; \quad Q \setminus I = Q.$$

702. Указание. $n \leqslant 2^{n/2}$ при $n \geqslant 4$. Поэтому $n2^{-n} \leqslant$ $\leqslant 2^{-n/2} < \varepsilon$ при $n > 2\log_2 \frac{1}{\varepsilon}$.

704. 1/4.

705. а) 1; б) 1/2. Указание. $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$.

707. Указание. $\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ $(\alpha \geqslant 2)$.

709. Если $a \neq 0$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{a} = 1$. Если $a = 0$, то предел последовательности $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ может не существовать, если же он существует, то он принадлежит $[-1, 1]$. Рассмотреть примеры: $x_n = 1/n$; $x_n = (-1)^n/n$;

$$x_n = \frac{2+(-1)^n}{n}; \; x_n = q^n \; (|q| < 1).$$

710. Предел может существовать, а может и не существовать:

$$x_n = 1/n, \; y_n = (-1)^n, \quad x_n = 1/n, \quad y_n = (-1)^n n.$$

713. а) $\left\{a+1,\ b+1,\ a+\frac{1}{2},\ b+\frac{1}{2},\ a+\frac{1}{3},\ b+\frac{1}{3},\ \ldots\right\}$;

б) $\{-1^2,\ 2,\ -2^2,\ 3,\ -3^2,\ \ldots,\ -n^2,\ n+1,\ \ldots\}$;

в) $\left\{1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ n,\ \frac{1}{n},\ \ldots\right\}$; г) множество всех рациональных чисел, мы знаем, счетно. Далее, любое действительное число c является пределом последовательности рациональных чисел ($c = \lim\limits_{n\to\infty} c^{(n)}$). Таким образом, искомая последовательность состоит из всех рациональных чисел $\{r_n\}$.

714. а) Обозначим $M_1 = \overline{\lim}\, x_n$, $M_2 = \overline{\lim}\, y_n$, $M = \overline{\lim}\,(x_n + y_n)$. Пусть подпоследовательность $\left\{x_{n_k} + y_{n_k}\right\}$ сходится и такова, что подпоследовательности $\left\{x_{n_k}\right\}$ и $\left\{y_{n_k}\right\}$ также сходятся и

$$M = \lim\left(x_{n_k} + y_{n_k}\right).$$

Тогда

$$M = \lim x_{n_k} + \lim y_{n_k} \leqslant M_1 + M_2.$$

Теперь рассмотрим случай, когда подпоследовательности $\left\{x_{n_k}\right\}$ и $\left\{y_{n_k}\right\}$ расходящиеся. Выберем сходящуюся подпоследовательность из $\left\{x_{n_k}\right\}$ и обозначим ее через $\left\{x_{n_{k_j}}\right\}$. Тогда, так как у нас последовательность $\left\{x_{n_{k_j}} + y_{n_{k_j}}\right\}$ сходится (к числу M), то подпоследовательность $\left\{y_{n_{k_j}}\right\}$ также будет сходящейся. Поэтому

$$M = \lim\left(x_{n_k} + y_{n_k}\right) = \lim\left(x_{n_{k_j}} + y_{n_{k_j}}\right) = \lim x_{n_{k_j}} + \lim y_{n_{k_j}} \leqslant M_1 + M_2.$$

В качестве примера можно рассмотреть последовательности $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$. В этом случае $M_1 = M_2 = 1$, $M = 0$.

б) Доказательство проводится так же, как в случае а).

715. $E = (-\infty,\ \infty)$, $E_1 = (0,\ 1)$.

716. $E = [-2,\ 2]$; $E_1 = [0,\ 2]$.

717. $E = \left\{|x| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ ;\ \sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \leqslant |x| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi},\ k = 1,\ 2,\ \ldots\right\}$.

718. $E = [1,\ 3]$, $E_1 = [-\pi/2,\ \pi/2]$.

719. $E = \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\}$, $E_1 = (-\infty, \lg 3]$.

720. $E = \{p/(2q+1)$, p, q — целые числа$\}$, $E_1 = \{\pm 1\}$.

721. $E_1 = [0, 9]$. **722.** $E_1 = [0, 6]$.

723. $E_1 = (1, 6]$. **724.** $E_1 = (0, 1/2]$.

725. а) $f(1) = 0$, $f(2) = -\frac{1}{3}$, $f(x+1) = \frac{x}{x+2}$; б) $f(1) = 0$, $f(2) = -2$, $f(x+1) = -x - x^2$; в) $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(x+1) = \sin\frac{\pi}{x+1}$.

726. а) $f(x) = x^2 - 5x + 6$; б) $f(x) = \frac{4x^2}{(1-x)^2}$.

739. Равномерно непрерывна. **740.** Не является равномерно непрерывной. **741.** Равномерно непрерывна. **742.** Не является равномерно непрерывной. **743.** Равномерно непрерывна.

744. $y' = \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2}[p - (q+1)x - (p+q-1)x^2] \qquad x \neq -1$.

745. $y' = -3(\cos x + \sin 3x)$.

746. $y' = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$ ($x \neq 2k\pi$, k — целое).

747. $y' = \frac{2ax}{x^4 + a^2}$ $(a \neq 0)$. **748.** $y' = -\frac{1}{x\ln^2 x}$ $(x > 0,\ x \neq 0)$.

749. $y' = \mathrm{th}^3 x$. **750.** $y' = 1/\mathrm{ch}\, 2x$.

751. $y' = 3x^2 + 15$. **752.** $y' = 6x^2$.

753. $y' = 12x^5$. **755.** а) $n > 0$; б) $n > 1$; в) $n > 2$.

756. Вообще нельзя ($\sin x < \cos x$ при $0 \leqslant x < \pi/4$, но $(\sin x)' > \cos x)'$).

757. $b^2 - 4ac = 0$. **758.** $a = \frac{1}{2e}$.

759. $y'_x = -\frac{b}{a}\,\mathrm{ctg}\, t$ $(0 < |t| < \pi)$. **760.** $y'_x = \frac{b}{a}\,\mathrm{cth}\, t$ $(|t| > 0)$.

761. 1. **762.** 1/6. **763.** 1/2. **764.** $e^{-1/6}$ **765.** $e^{-1/3}$.

766. $y'' = \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$. **767.** $y''' = \frac{-4\cos^2 x + 6}{\cos^4 x}$.

768. $y'' = \dfrac{f(x)f''(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)}$. **769.** $y^{(8)} = \dfrac{8!}{(1-x)^9}$.

770. $y''' = 24x\dfrac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^4}$. **771.** $y^{(4)} = -4e^x \cos x$.

772. $d^5y = 120\,dx^5$.

773. $d^6y = 8 \sin x \cdot \operatorname{sh} x\, dx^6$.

774. $d^3y = 2[3\,du \cdot d^2u + u\,d^3u]$.

775. $d^3y = \dfrac{2}{u^3}du^3 - \dfrac{3}{u^2}du\,d^2u + \dfrac{1}{u}d^3u$.

776. $d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x$.

777. $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}n!c^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$ $(ad - bc \neq 0)$.

778. $y^{(n)} = n!\left[\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]$.

779. $f^{(n)}(a) = n!\,\varphi(a)$.

782. Если функции имеют одинаковые производные, то они отличаются друг от друга на постоянную величину:

$$\forall x \;\; f(x) - g(x) = c.$$

Значение постоянной c можно найти, придавая x значения, для которых функции $f(x)$ и $g(x)$ известны.

Например, пусть $x < 1$. Полагая $x = 0$, получим

$$f(0) - g(0) = c, \quad \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = c, \quad \frac{\pi}{4} - 0 = c, \quad c = \frac{\pi}{4}.$$

Итак, для $x < 1$

$$\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} - \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}.$$

Для установления связи между функциями $f(x)$ и $g(x)$ при $x > 1$ перейдем в равенстве $f(x) - g(x) = c$ к пределу при $x \to +\infty$:

$$\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg}(+\infty) = c, \; -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = c, \; c = -\frac{3\pi}{4}.$$

Итак, для $x > 1$

$$\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} - \operatorname{arctg} x = -\frac{3\pi}{4}.$$

784. $\operatorname{sh} x = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. **785.** $\operatorname{ch} x = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$.

786. $|x| < 0{,}39$. Указание. Необходимо оценить остаточный член формулы Тейлора для функции $y = \cos x$ при $n = 4$.

787. а) 1/2; б) 19/90.

788. При $|x| < 1$ функция возрастает; при $|x| > 1$ функция убывает.

789. При $|x| < 1/b$ функция возрастает; при $|x| > 1/b$ функция убывает.

790. При $|x| < a/b$ функция возрастает; при $|x| > a/b$ функция убывает.

791. Если $a > 0$ и $b^2 \leqslant 8a$, то функция всюду возрастает. Если $a = 0$, то при $x > -1/b$ функция возрастает, а при $x < -1/b$ — убывает. Если $a > 0$ и $b^2 > 8a$, то при

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-8a}}{4a} < x < \frac{-b+\sqrt{b^2-8a}}{4a}$$

функция убывает, а при

$$x < \frac{-b-\sqrt{b^2-8a}}{4a} \text{ и } x > \frac{-b+\sqrt{b^2-8a}}{4a} \text{ —}$$

возрастает. Если $a < 0$, то $b^2 > 8a$, и в этом случае при

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-8a}}{4a} < x < \frac{-b-\sqrt{b^2-8a}}{4a}$$

функция возрастает, а при

$$x < \frac{-b+\sqrt{b^2-8a}}{4a} \text{ и } x > \frac{-b-\sqrt{b^2-8a}}{4a}$$

убывает.

792. $x = 0$ — точка перегиба; на $(-\infty, 0)$ кривая направлена выпуклостью вниз, а на $(0, \infty)$ — вверх.

793. $x = -2/b$ — точка перегиба; на $(-\infty, -2/b)$ кривая направлена выпуклостью вверх, а на $(-2/b, \infty)$ — вниз.

794. При $x = 1/(ab)$ — минимум, $y(1/(ab)) = 2a/b$; при $x = -1/(ab)$ — максимум, $y(-1/(ab)) = -2a/b$.

795. При $x = 1/b$ — максимум, $y(1/b) = 1/(2b)$; при $x = -1/b$ — минимум, $y(-1/b) = -1/(2b)$.

796. При $x = a$, $x = \dfrac{3a+2b}{5}$ — минимум, $y(a) = 0$,

$$y\left(\frac{3a+2b}{5}\right) = \frac{108}{3125}(a-b)^5.$$

797. $y(\pm 2) = 0$; при $x = 0$ — максимум, $y(0) = 4$; $x = \pm 1/\sqrt{3}$ — точки перегиба, $y(\pm 1/\sqrt{3}) = 11/4$; $y = -1$ — горизонтальная асимптота; на $(-\infty, 0)$ функция возрастает, а на $(0, \infty)$ — убывает; на $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ график выпуклый кверху, а на $(-\infty, -1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, \infty)$ — выпуклый книзу.

798. Если $0 < a < 1/4$, то $x = \dfrac{a}{1-a}$ — точка перегиба, $y\left(\dfrac{a}{1-a}\right) = \dfrac{2a^2}{1-2a}e^{\frac{1-2a}{a}}$; при $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$ — максимум, а при $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$ — минимум; на $(-\infty, 0)$ функция возрастает и выпукла кверху; на $\left(0, \dfrac{a}{1-2a}\right)$ кривая выпукла кверху, а на $\left(\dfrac{a}{1-2a}, \infty\right)$ — выпукла книзу; на $(0, x_1)$ функция возрастает, на (x_1, x_2) — убывает, на (x_2, ∞) — возрастает; прямая $y = x + 1 - a$ является наклонной асимптотой, если $a \geqslant 1/4$, то функция возрастает на $(-\infty, 0)$ и $(0,\infty)$; $x = \dfrac{a}{1-a}$ — точка перегиба; на $(0, \infty)$, $\left(0, \dfrac{a}{1-2a}\right)$ кривая выпукла кверху, а на $\left(\dfrac{a}{1-2a}, \infty\right)$ — выпукла книзу, $x = 0$, $y = x + 1 - a$ — асимптоты; $y(0 + 0) = -\infty$, $y(0 - 0) = 0$.

ГЛАВА 2

799. $\dfrac{1}{a}\ln|ax + b|$.

800. $\dfrac{2}{a}\sqrt{ax+b}$.

801. $\dfrac{1}{ab}\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}x$.

802. $\dfrac{1}{2ab}\ln\left|\dfrac{ax-b}{ax+b}\right|$.

803. $\dfrac{1}{a}\arcsin\dfrac{a}{b}x$.

804. $\dfrac{1}{a}\ln\left|ax+\sqrt{a^2b^2-b^2}\right|$.

805. $\dfrac{1}{a}\operatorname{Arsh}\dfrac{a}{b}x$.

806. $-e^{-x} - \dfrac{1}{2}e^{-2x}$.

807. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$. Указание. Разделить числитель и знаменатель на x^2 и сделать замену

$$u = x - \frac{1}{x},\ \left(x+\frac{1}{x^2}\right)dx = d\left(x-\frac{1}{x}\right).$$

808. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}-1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$ (см. задачу *807*).

810. $\frac{2}{15a^2}(ax+2b)$. Указание. $x\equiv\frac{1}{a}(ax+b)-\frac{b}{a}$.

811. $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}$.

812. $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}$.

813. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$.

814. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x+\frac{1}{32}\operatorname{sh}4x$.

816. $x^2\operatorname{ch}x-2x\operatorname{sh}x+2\operatorname{ch}x$.

817. $x-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$.

818. $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$.

819. $e^{\sqrt[3]{x}}\left[3x^{2/3}-6\sqrt[3]{x}+6\right]$.

820. $\frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}$.

821. $\frac{1}{4}(1-2x)\sqrt{1+x-x^2}-\frac{11}{8}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}}$.

822. $-\frac{\operatorname{tg}x}{4\left(2+\operatorname{tg}^2x\right)}+\frac{3}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}$.

823. 16/3.

824. 0.

825. $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$.

826. $-1+\sin x$.

828. 1/2.

829. $\pi/4$.

830. $\frac{1}{1+p}\quad(p\neq-1)$.

831. $\frac{1}{(b-a)}\int\limits_a^b\varphi(x)\,dx$.

832. 1/2.

833. $\pi/4$.

834. $\frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}$.

835. $\frac{1}{1+a^2}$.

836. Сходится при $2\beta+\alpha>1$.

837. Сходится при $\alpha>-2$, $\beta>1+\alpha$.

ГЛАВА 3

838. $(a-c)(ab+bc-ab^2c-1)$.

839. $a(z-x)(z-y)(y-x)$.

840. ab. **841.** $abcd+bcd+acd+abd+abc$.

842. $2(x^3+y^3)$.

844. $x=0$, $x=\dfrac{2-3a}{1+a}$, $a\neq-1$; если $a=-1$, то $x=0$ — единственный корень уравнения,

845. $x=a$, $y=1$, $z=-1$.

846. $x=1$, $y=-1$, $z=-1$, $t=1$.

847. $x=5-\dfrac{2}{11}z$, $\quad y=1+\dfrac{5}{11}z$, $\quad z$ — любое.

848. $x=1$, $y=-1$, $z=2$.

849. Ранг $A=4$, если $be-cd\neq\neq0$; ранг $A=2$, если $be-cd=0$.

850. $AB=\begin{pmatrix}8 & 12 & 7\\ 2 & 1 & 1\\ 8 & 7 & 6\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}3 & 9 & 5\\ 3 & 8 & 7\\ 2 & 8 & 4\end{pmatrix}$.

851. $A^{-1}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 23 & -5\\ 2 & 4 & -3\\ -3 & -20 & 8\end{pmatrix}$.

852. $X=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}42 & 9 & 20\\ 7 & -3 & 5\\ -35 & 1 & -18\end{pmatrix}$.

ГЛАВА 4

853. $x^2+y^2>1$.

854. $2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi$, $\quad k$ — целое.

855. $y^2>-x$ (часть плоскости, находящаяся вне параболы $y^2=-x$).

856. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}>1$ (внешность трехосного эллипсоида).

857. $x^2+y^2=c$ — окружности радиусом $\sqrt{c}$ $(c>0)$ при $c=0$ — начало координат; при $c<0$ — мнимые окружности, что означает, что плоскость $z=c$ не пересекает графика функции (ее поверхности).

858. $x^2 + 2y^2 = 1/c$ — эллипсы $(c > 0)$ с полуосями $a = \sqrt{1/c}$, $b = \sqrt{1/(2c)}$.

859. $y = c + 2x^2$ — параболы ($\forall\ c$) с осью симметрии Oy и вершинами в точках $(0, c)$. Ветви параболы направлены вверх.

860. $\rho = -\sqrt{(4-1)^2 + (3-7)^2} = 5$.

861. $\lim\limits_{k\to\infty} M^k = M^0 = (1, e)$.

862. Если $x_0 = 0$, то в точке $(0, 0)$ существует обычный предел (по всей плоскости, из которой выброшена точка $(0, 0)$) функции, равный единице:

$|f(x, y) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$, для $y > 0$ и $\forall\ \varepsilon > 0$;

$$|f(x, y) - 1| = |1 + x + y - 1| = |x + y| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$$

$$\forall (x, y),\ y \leqslant 0, \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon/2.$$

Если $x_0 \neq 0$, то предел функции $f(x, y)$ не существует при рассмотрении всех точек из окрестности точки $(x_0, 0)$. Однако очевидно, что $f(x, y)$ имеет предел по множеству $E = \{(x, y), y > 0\}$ в каждой точке $(x_0, 0)$, $x_0 \neq 0$, и этот предел равен 1.

Если рассматривать множество $E_1 = \{(x, y), y \leqslant 0\}$, то функция $f(x, y)$ имеет предел по E_1 в точках $(x_0, 0)$, равный $1 + x_0$. Более того, $f(x, y)$ непрерывна в точках $(x_0, 0)$ по множеству E_1.

863. $\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2$.

864. $E = R_2 \setminus \{\{x = 0\} + \{y = 0\}\}$, т. е. множество E есть плоскость, из которой выброшены оси координат. Соответствующий предел равен единице.

865. Будет равномерно непрерывной.

$$\left(\left|\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\right|\right) \leqslant \frac{|x_1 - y_1| \cdot (|x_1| + |y_1|) + |x_2 - y_2| (|x_2| + |y_2|)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leqslant$$

$$\leqslant |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \leqslant 2\sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} =$$

$$= 2\rho(x, y), \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2).$$

866. $u'_x = 3x^2 - 6xy^2, \quad u'_y = 3y^2 - 6x^2y;$

$$u''_{x^2} = 6x - 6y^2,\ u''_{y^2} = 6y - 6x^2,\ u''_{xy} = -12xy = u''_{yx}.$$

867. $u'_x = \sin(x + y^2) + x\cos(x + y^2)$,

$u'_y = 2xy\cos(x + y^2)$,

$u''_{x^2} = 2\cos(x + y^2) - x\sin(x + y^2)$,

$u''_{y^2} = 2x\cos(x + y^2) - 4xy^2\sin(x + y^2)$,

$u''_{xy} = u''_{xy} = 2y\cos(x + y^2) - 2xy\sin(x + y^2)$.

889. Не существует.

870. Рассмотреть функцию $F(t) = f(tx,\ ty,\ tz)$ и показать, что она постоянна.

871. $du = y\,dx + (x + 2y)dy$, $d^2u = 2dx\,dy + 2dy^2$.

872. $du = (y + z)\,dx + (x + z)\,dy + (x + y)\,dz$,
$d^2u = 2(dx\,dy) + dx\,dz + dy\,dz)$.

873. $d^2u = \dfrac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}[(y\,dx - x\,dy)^2 + (z\,dy - y\,dz)^2 + (z\,dx - x\,dz)^2]$.

874. $3x + 4y + 12z = 169$ — уравнение касательной плоскости; $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-4}{4} = \dfrac{z-12}{12}$ — уравнение нормали.

875. $axx_0 + byy_0 + czz_0 = 1$ — касательная плоскость $\dfrac{x-x_0}{ax_0} = \dfrac{y-y_0}{by_0} = \dfrac{z-z_0}{cz_0}$ — нормаль.

876. Все сомножители равны между собой.

877. $x = \sqrt{2p}$, $y = z = \sqrt[4]{\dfrac{p}{2}}$.

878. Куб.

879. $V = xyz = 2$, $z = 2$, $x = y = 1$ (рис. 106).

880. $V = xyz = 9$, $x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $y = \sqrt{6}$, $z = 3$.

881. $x = \dfrac{p}{3}$, $y = \dfrac{2}{3}p$, $V = \dfrac{4}{27}\pi p^3$ (рис. 107).

882. $b^2 = \dfrac{2}{3}p$, $a^2 = \dfrac{6}{p}$, $y = \dfrac{2p}{3} - \dfrac{6}{p}x^2$ (рис. 108).

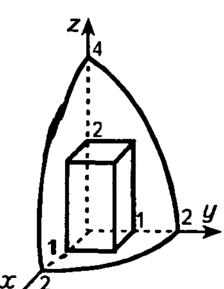


Рис. 106

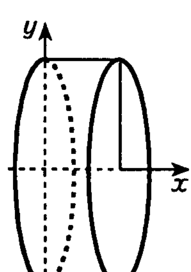


Рис. 107

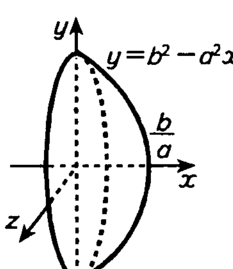


Рис. 108

884. $a = 21$, $b = -10 - 7\sqrt{7}$, $\Delta_{\min} = 7\sqrt{7} - 10$.

886. $\frac{2}{3}$; $\left(\frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2^{2k+1}}\right)$.

887. 3. Указание. $\frac{1}{2}S_n = S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{5}{2^2} - \frac{3}{2^2}\right) + \ldots + \left(\frac{2n-1}{2^n} - \frac{2n-3}{2^n}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$;

отсюда

$$S_n = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^n} = 1 + \frac{1 - 2^{1-n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}.$$

888. Указание. $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ $(n \geqslant 2)$.

889. Указание. $\frac{n+1}{2n-1} < \frac{2}{3}$ $(n > 5)$.

891. Применить интегральный признак.

898. $1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$ $(|x| < \infty)$.

899. $1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots$ $(|x| < \infty)$.

900. а) $1 - \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4x^4}{4!} - \ldots$ $(|x| < \infty)$;

б) $1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$ $(|x| < \infty)$. Указание. $\cos^2 x = \frac{1}{2}[1 + \cos 2x]$;

в) $\sum_{n=10}^{\infty} x^n$ $(|x| < 1)$.

ГЛАВА 6

901. а) $y'x = 2y$; б) $xy' = ny$. **902.** $xy' = y + (n-1)x^n$.
903. $ay^2 - x^2 = 2axyy'$. **904.** $y = 2x$.
905. $xy = 8$. **906.** $y = 4e^{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}$.

907. $y^2 = \dfrac{2x^2-2-29x}{2x}$.   **908.** $y = \dfrac{2x}{1-3x^2}$.

909. $y^2 = \dfrac{1}{1+cx^{x^2}}$.

910. $y^2 + (x-a)^2 = a^2$ — окружность радиусом a с центром в точке $(a, 0)$. Указание. Необходимо сначала составить дифференциальное уравнение, решением которого является искомая кривая $y = f(x)$.

Как нам известно, уравнение касательной к кривой в точке $(x,\ f(x))$ имеет вид

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x).$$

Приводя это уравнение к нормальному виду, получим, что расстояние от начала координат до этой касательной будет

$$d = \frac{|f(x) - f''(x)\,x|}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}.$$

Согласно условию задачи это расстояние должно равняться $|x|$. Поэтому получаем

$$y - xy' = \pm x\sqrt{1+y'^2}$$

— искомое дифференциальное уравнение. Возводя в квадрат обе части уравнения, будем иметь

$$2xy\,dy = (y^2 - x^2)\,dx.$$

Кроме того, по условию задачи кривая $y = f(x)$ проходит через точку $A(a, a)$, т. е. $y(a) = a$.

Решая однородное дифференциальное уравнение $2xy\,dy = (y^2 - x^2)\,dx$ при начальном условии $y(a) = a$, мы и получим ответ, который приведен выше.

911. $x_1 = 0{,}472$, $x_2 = 9{,}999$.

Итерационная последовательность метода Ньютона определяется равенством

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Оценка погрешности — на основании неравенств (9), (10) из учебника [3], § 1.5.

912. $x = -0{,}56715$. Замечание. Единственный корень функции находится на $[-1, 0]$.

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x + e^x}{(1+e^x)^2};$$

$$F'(x) = \frac{e^{2x} + xe^x}{(1+e^x)^2}, \ \max_{1<x<0} F'(x) = \frac{1}{4}.$$

913. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$.

914. $y = c_1 e^{-x} + (c_2 x + c_3) e^{2x}$.

915. $y = -\frac{1}{2} e^{-x} + \frac{3}{2} e^{x}$. У к а з а н и е. Из условий задачи ясно, что $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Это начальные условия.

916. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{x}{3} e^x$.

917. $y = \left(c_1 + \frac{2}{9} x\right) e^{-x} + (c_2 x + c_3)\, e^{2x}$.

918. $y = (c_1 + x) e^{-2x} + (c_2 - x) e^{-3x}$.

919. $y = \left(c_1 - \frac{x}{2}\right) \cos 2x + \left(c_2 + \frac{1}{4} \ln \sin 2x\right) \sin 2x$.

920. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

921. $x = c_1 e^t + c_2 e^{-3t}$, $y = -\frac{dx}{dt} = c_1 e^t - 3c_2 e^{-3t}$.

922. $x = (1 - 2t)\mathrm{e}^{-2t}$, $y = (1 + 2t) e^{-2t}$.

ГЛАВА 7

924. $F(y)$ имеет разрыв при $y = 0$.

925. Функция $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ является непрерывной и дифференцируемой ($F'(x) = f(x)$).

Далее,

$$\frac{1}{h} \int_a^x [f(t + h) - f(t)] dt = \frac{1}{h} \left[\int_{a+h}^{x+h} f(t)\, dt - F(x) \right] =$$

$$= \frac{1}{h} [F(x + h) - F(a + h) - F(x)].$$

Так как $F(a) = 0$, то последнее отношение представляет собой неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x [f(t+h) - f(t)]dt = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a+h)-F(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{F'(x+h)-F'(a+h)}{1} = \lim_{h\to 0}[f(x+h)-f(a+h)] = f(x) - f(a).$$

929. 1/21. **930.** 128. **931.** $\frac{1}{48}a^6$.

932. $\frac{\pi^2}{4}abc$ (см. задачу *503*). **933.** $\frac{4}{3}p^2$.

934. $V = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \left(x^2 + y^2\right) dx = \frac{88}{105}$. **935.** $x_0 = \frac{a}{2}$, $y_0 = \frac{8}{5}a$.

ГЛАВА 8

936. $2\pi^2 a^3 (1 + 2\pi^2)$. **937.** $\frac{a}{6}[(\text{ch } 2t_0)^{3/2} - 1]$.

938. $\pi(1 + a^2)$. **940.** $\sqrt{3}$.

941. а) 0; б) 8/3. **942.** 10.

943. 1/2. **944.** $\int_0^{a+b} f(t)\,dt$.

945. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^a - 1$.

947. а) $\text{grad } U = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$; б) $\text{grad } U = f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$, где $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$.

948. $\text{grad } U(A) = (4a - d, 2b - 2d) = (4a - d)\boldsymbol{i} + 2(b - d)\boldsymbol{j}$; $|\text{grad } U(A)| = \sqrt{(4a-d)^2 + 4(b-d)^2}$; $\text{grad } U = 0$ в точке (0, 0), если $d^2 \neq 4ab$; $\text{grad } U = 0$ на прямой $y = \sqrt{\frac{a}{b}}x$, если $d^2 = 4ab$. Градиент U перпендикулярен оси Oy в точках прямой $y = \frac{dx}{2b}$.

950. $2/r$. **952.** $\text{rot } \boldsymbol{r} = 0$; $\text{rot } r\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c}}{r}$.

953. а) Не имеет, rot $\boldsymbol{a} \neq 0$; $U = xy + xz + yz + c$.
954. а) Не является; б) является при $b = c$.

955. $x^2 + 2xy + 3y^2 = c$. **956.** $\dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + xy^2 = c$.

957. $xy + xz + 2yz = c$. **958.** $-2\pi ab \ \forall\ c, d$.
959. $\pi(d - c)\, ab$.

960. 0. Указание. $\int\limits_{AB} [y^2\, dx + (1 + 2xy)dy] = 0$.

ГЛАВА 9

962. $\dfrac{\pi}{4}(a - b) - \dfrac{2}{\pi}(a-b)\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)x}{2k+1} + (a+b)\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}$.

963. $1-\dfrac{1}{2}\cos x+2\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx$.

964. $|\sin x| = \dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{\cos 2kx}{4k^2-1}$. Полагая $x = 0$, получаем $0 = \dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1}{4k^2-1}$ или $\dfrac{1}{2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

965. $|\cos x| = \dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2kx$.

966. 4/3. **967.** $\sqrt{46/15}$.

968. Сходится в смысле среднеквадратического к нулю и сходится неравномерно к нулю (см. задачу *393*, г)).

970. а) $\varphi(x) = e^{-x}$ $(x \geqslant 0)$; б) $\varphi(x) = \dfrac{1}{\pi}\exp(-x^2/4)$ $(|x| < \infty)$.

ГЛАВА 10

972. $u(x, t) = 2\cos\lambda_2^2 t X_2(x)+3\cos\lambda_3^2 t X_3(x)$.

973. $u(x, t) = 2a\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\exp\left(-n^2 t\right)\dfrac{\sin nx}{n}$ (см. задачу *962*).

ГЛАВА 11

974. а) $\operatorname{Re} z = 12$, $\operatorname{Im} z = 5$; б) $\operatorname{Re} z = ac - bd$, $\operatorname{Im} z = bc + ad$; в) $\operatorname{Re} z = a^3 - 3ab$, $\operatorname{Im} z = 3a^2b - b^3$; г) $\operatorname{Re} z = 8/5$, $\operatorname{Im} z = -1/5$.

975. а) Открытый круг радиусом 3 с центром в начале координат; б) открытый круг на плоскости xOy с центром в точке (0, 1) и радиусом 1; в) открытая четвертая часть круга радиусом 3 с центром в точке (0, 0), находящаяся во второй четверти; г) окружность радиусом 3 с центром в начале координат; д) замкнутое кольцо, находящееся между концентрическими окружностями радиусами 2 и 3 с центром в точке (0, 1).

976. а) $\ln 2 + \pi i$;

б) $\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} i$;

в) $\ln\sqrt{x^2+y^2} + i\arg z = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ $\quad (z = x + iy)$.

977. а) $\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$;

б) $\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$. Указание. $\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \dfrac{e^{(n+1)xi} - e^{xi}}{e^{xi}-1}$. Выделить действительную и мнимые части, использовать формулу Эйлера $e^{xi} = \cos x + i\sin x$;

в) $\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$; г) $\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$. Указание. $\sum_{k=1}^{n} e^{(2k-1)xi} = \dfrac{e^{(2n+1)xi} - e^{xi}}{e^{2xi}-1} = \dfrac{\sin nx(\cos nx + i\sin nx)}{\sin x}$.

980. $S(z) = \dfrac{1}{3}\left[e^z + 2e^{-z/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}z\right]$.

982. $S(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos x}{4} - \dfrac{\pi - x}{2}\sin x$, $S_1(x) = \sin x\left(\dfrac{1}{4} - \log 2\sin\dfrac{x}{2}\right)$.

983. $S(x) = \dfrac{1}{\beta-\alpha}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{(t-\cos x)\left(t^\beta - t^\alpha\right)dt}{1-2t\cos x+t^2}$,

$$S_1(x) = \frac{\sin x}{\beta-\alpha}\int_0^1 \frac{\left(t^\alpha - t^\beta\right)dt}{1-2t\cos x+t^2}.$$

Отметим, что при целых неотрицательных α, β данные интегралы могут быть вычислены в элементарных функциях, как интегралы от рациональной функции.

ГЛАВА 12

987. $$L[f;\, p] = \frac{\left(p^2+a^2\right)\left[p^4+2p^2b^2+2a^2b^2+a^4+b^4-2p^2a^2\right]}{\left[p^4+\left(a^2+b^2\right)^2+2p^2\left(b^2-a^2\right)\right]^2} -$$
$$- \frac{b^2\left[p^4+4p^2a^2+2p^2b^2+2a^2b^2+a^4+b^4\right]}{\left[p^4+\left(a^2+b^2\right)^2+2p^2\left(b^2-a^2\right)\right]^2},$$

в частности, если $a = \beta$, то
$$L[f;\, p] = p^2(p^4 - 2a^4)/[p^4 + 4a^4]^2.$$

989. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2+a^2}{p^2+b^2}$. **990.** $y(x) = \dfrac{b}{a}\left(1-e^{-ax}\right)$.

992. $y(x) = e^{-x}[A\cos x + (A + B)\sin x]$.

994. $y(x)\ c_1x^2 + c_2x + c_3 + c_4e^{-x} + \dfrac{1}{2}(\cos x - \sin x)$.

997. $S = \pi^2/6$, $S_1 = \pi^2/12$ (см. задачу *984*).

998. $S = \pi^4/90$, $S_1 = \dfrac{7}{720}\pi^4$ (см. задачу *985*).

999. $y(x) = \dfrac{3}{4}e^{2x} + \dfrac{1}{4}e^{-2x} - e^x$, $z(x) = \dfrac{3}{4}e^{2x} - \dfrac{1}{12}e^{-2x} - \dfrac{2}{3}e^x$.

1000. $y = 4x + 2 - 2\cos x - 3\sin x$, $z = 2\sin x - 2x$.

1001. $y = \dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5}\cos x\sqrt{5}$,
$$z = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\cos x\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}\sin x\sqrt{5},$$
$$t = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\cos x\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin x\sqrt{5}.$$

1002. $y = \dfrac{1}{2}\cos x\,\mathrm{sh}\,x + \sin x\,\mathrm{ch}\,x$,
$$z = \frac{1}{2}\sin x\,\mathrm{ch}\,x - \cos x\,\mathrm{sh}\,x.$$

Приложение II

1003. Ограничена. **1004.** Неограничена.
1005. Ограничена. **1006.** Ограничена.
1007. $1; \frac{1}{2}$. **1008.** $N = 1$, $N = 2$, $N = 50$, $N = 5000$.
1009. Сходится. **1010.** Расходится.
1011. Расходится. **1012.** Сходится. **1013.** 1.
1014. 0. **1015.** 1. **1016.** 0.
1017. e. **1018.** 4. **1019.** $\sqrt{a}$.
1020. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **1021.** а) да, б) нет. **1022.** Да.
1023. Нет. **1024.** Да. **1025.** Нет.
1026. 2; 0; 2; 0. **1027.** $\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 2\sqrt{3}; -\sqrt{3}$.
1028. а) 1,2,3,1,2,3,1,2,3,1,... б) 1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,....
1029. $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
1030. $[\pi n - \frac{\pi}{6}; \pi + \frac{\pi}{6}]$, $n \in \mathbb{Z}$.
1031. $[\sqrt{6}; +\infty)$. **1032.** $\{0; \pi\}$.
1033. а) 0, б) g, в) f, г) 0. **1034.** $\frac{x}{1+x+x^2}$, $x \in [-1; 1]$.
1035. $\pi + \operatorname{arctg} \ln x$, $x \in [e^{\operatorname{tg} 2}; e^{\operatorname{tg} 3}]$.
1036. 105π. **1037.** π.
1038. Непериодическая.
1039. Каждое рациональное число является периодом, наименьший период не существует.

1040. 5050. **1041.** 3. **1042.** $\frac{13}{4}$.
1043. $-\frac{9}{128}$. **1044.** 2. **1045.** $\frac{25}{16}$.
1046. $e^{\frac{1}{e}}$. **1047.** -2.
1048. а) 1; -1; б) 3; 2. **1049.** $\alpha = 2$; $\beta = \frac{1}{4}$.

1050. а) 1; –1; б) e; $\frac{1}{e}$.

1051. $x = 0$, устранимый разрыв.

1052. $x = 0$ — точка разрыва II рода; $x = 1$ — точка разрыва I рода.

1053. $x = 1$ — точка разрыва I рода.

1054. $x \neq 0$ — точки разрыва II рода.

1055. Непрерывна в каждой иррациональной точке, разрывна в каждой рациональной, точки разрыва II рода.

1059. $-\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}$, $|x| < 1$, $x \neq 0$.

1060. $x^x(1 + \ln x)$, $x > 0$. **1061.** а) $\frac{2e^2}{e^2+1}dx$; б) 0.

1062. а) $x^{1+x^2}(1 + 2\ln x)$; б) $e^x x^{2^x}\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$; в) $(\ln 2)2^{2^x} x^x(1 + \ln x)$.

1063. а) дифференцируема всюду; б) дифференцируема только в точке $x = 0$.

1064. а) $x'(y) = \frac{x^3}{2y^2}$, $0 < y < 1$; б) $x'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$, $y > 1$.

1065. $-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$.

1066. а) $\frac{b^2x}{a^2y}$, $|x| > a$; б) $1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$, $0 < x < 4$.

1067. $\frac{12}{11}dx$.

1068. $14x - 13y + 12 = 0$, $13x + 14y - 41 = 0$.

1069. 0. **1070.** $-\frac{5}{8}dx^2$. **1071.** $\frac{1}{2}$.

1072. $-\sin^2 t \cos t$. **1073.** $-\frac{1}{4}dx^2$.

1074. $\frac{(-1)^n n!}{4}(3(x-6)^{-n-1} + (x+2)^{-n-1})$.

1075. $(-1)^n 2(n-2)!\,(x-n)(x-1)^{-n}$, $n > 1$.

1076. $\frac{5^{n-1}(2n-3)!!}{2^n}(2n-5x)\,(1-5x)^{-\frac{2n+1}{2}}$, $n > 1$.

1077. $2^{n-3}((4x^2+4x-n^2+n)\cos(2x+\frac{\pi n}{2}) + 2n(2x+1)\sin(2x +$
$+ \frac{\pi n}{2}))$, $n > 2$.

1078. $2^{n-1}e^{2x}\left(1 - 2^{\frac{n}{2}}\cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right)\right)$. **1079.** $\pi 2^{19}$.

1080. $y^n(0)=0$, $n=1, 2, 4$, $y'''(0)=1$; при $n>4$ не существует.

1081. а) $\dfrac{\sqrt[3]{a|xy|}}{3}$; б) $\dfrac{1}{4}\sqrt{1+\sin^2\dfrac{t}{2}}$.

1082. а) $\xi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\xi=\dfrac{1}{2}$, $\xi=\sqrt{2}$.

1088. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{2^k}{3^{k+1}}x^k+o(x^n)$.

1089. $\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(3-\dfrac{7}{2^{k+1}}\right)(x-3)^k+o((x-3)^n)$.

1090. $1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(2k-1)!!}{2^k k!}x^k+o(x^n)$.

1091. $-2e^4+4e^4(x+2)+\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{(-1)^k e^4 2^{k-2}}{(k-2)!}\left(1-\dfrac{8}{k(k-1)}\right)(x+2)^k+$
$+(o(x+2)^n)$.

1092. $\ln 2-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^k+2^{-k}}{k}(x+3)^k+o((x+3)^n)$.

1093. $\sum\limits_{k=0}^{n-1}C^k_{-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x-2}{2}\right)^{2k+1}+o((x-2)^{2n})$.

1094. $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n})$. **1095.** $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}2^{4k-3}}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

1096. $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{2k-3}{ek!}(x+1)^{2k}+o((x+1)^{2n+1})$.

1097. 0,765. **1098.** 1. **1099.** 0.

1100. $\dfrac{9}{2}$. **1101.** 0. **1102.** 0.

1103. $\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. **1104.** $e^{-\frac{2}{\pi}}$. **1105.** $\dfrac{1}{3}$.

1106. $\dfrac{1}{2}$. **1107.** $\dfrac{7}{6}$. **1108.** $\dfrac{4}{9}$.

1109. $-\dfrac{1}{6}$. **1100.** $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. **1111.** $e^{-\frac{2}{15}}$.

1112. $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ — инт. убывания; $(1; +\infty)$ — инт. возрастания.

1113. $(-\infty; -50)$, $(-50; 25)$ — инт. возрастания; $(25; +\infty)$ — инт. убывания.

1114. $y(0)=0$, $y(4)=\dfrac{32}{3}$ — минимумы; $y(-1)=\dfrac{1}{4}$ — максимум.

1115. $y(1)=0$ — минимум, $y(e^2)=\dfrac{4}{e^2}$ — максимум.

1116. $y\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}}$ — минимум.

1117. $y\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$ — максимум, $y(0) = y(2) = 0$ — минимумы.

1118. $y(0) = -27e$ — минимум, $y(-1) = -64$ — максимум, $m = -125e$, $M = e^5$.

1119. $(-\infty; -6)$, $(0; 6)$ — инт. выпуклости вниз; $(-6; 0)$, $(6; +\infty)$ — инт. выпуклости вверх; точки перегиба: О; –6; 6.

1120. Асимптоты: $y = x + 1$, $x = 2$.

$A\left(4; \frac{27}{4}\right)$ — минимум, $B(1; 0)$ — перегиб (рис. 109).

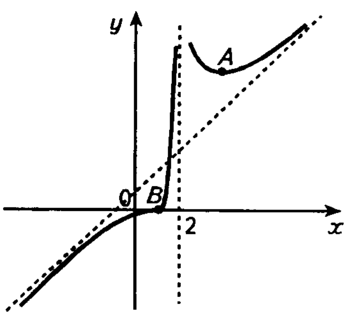


Рис. 109

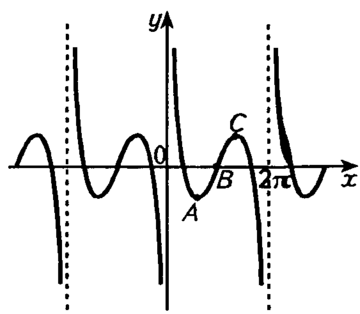


Рис. 110

1121. Асимптоты: $x = 2\pi n$, $(n \in \mathbb{Z})$.

$A\left(\frac{2\pi}{3}; -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ — минимум, $B(\pi; 0)$ — перегиб,

$C\left(\frac{4\pi}{3}; \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ — максимум.

Функция периодическая с периодом 2π (рис. 110).

1122. Асимптота $y = x + \frac{1}{3}$.

$A(-1; 0)$ — перегиб с вертикальной касательной,

$B\left(-\frac{2}{3}; \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$ — максимум,

$O(0; 0)$ — угловой минимум, касательная вертикальна (рис. 111).

1123. Асимптоты: $y = -x - 1$ $(x \to -\infty)$,

$y = x + 1$ $(x \to +\infty)$.

$A(-2;\ 0)$ — угловой минимум, касательная вертикальна,

$B(-1;\ 1)$ — максимум,

$O(0;\ 0)$ — угловой минимум, касательная вертикальна (рис. 112).

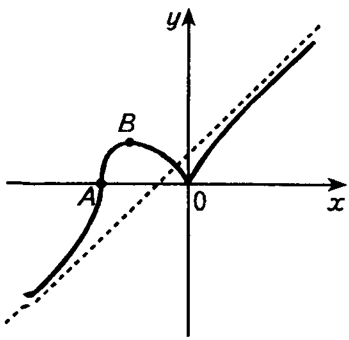


Рис. 111

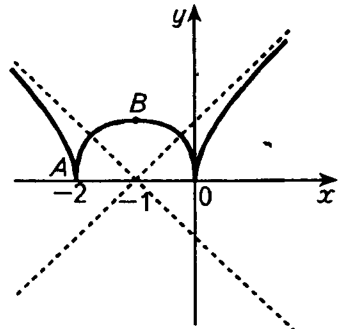


Рис. 112

1124. Асимптоты: $y = x + 4$;

$x = -\dfrac{9}{2}$; $y = \dfrac{5}{2}$. $A\left(-\dfrac{16}{3};\ -2\right)$ — максимум,

$B(-4;\ 2)$ — точка возврата, угловой коэффициент касательной -1.

$C\left(0;\ \dfrac{10}{3}\right)$ — касательная вертикальна (рис. 113).

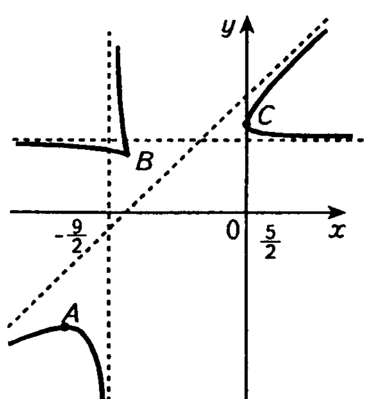


Рис. 113

1125. Асимптота $y = x - 1$;
$O(0;\ 0)$ — максимум;
$A\left(1 - \ln 2;\ \frac{1}{2} - \ln 2\right)$ — касательная вертикальна (рис. 114).

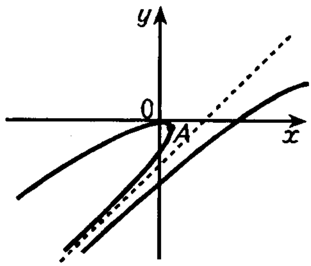


Рис. 114

1126. $\frac{5}{8}\sqrt[4]{135}$.

1127. $2\ln|x| + \frac{3}{x} + 4$.

1128. $\frac{(1-x)^{-11}}{11} - \frac{(1-x)^{-10}}{10} + C$.

1129. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$.

1130. $\frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{th}^5 x + C$.

1131. $\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C$.

1132. $\frac{x-2}{x+2} + C$.

1133. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{2(x-1)} + C$.

1134. $x - \frac{1}{x} + \ln(x^2 - 2x + 5) - 2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C$.

1135. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C$.

1136. $-3\sqrt[6]{\frac{x-5}{x-7}} + C$.

1137. $-\frac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2} + 4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$.

1138. $\frac{6}{7}u^{7/2} - \frac{18}{5}u^{5/2} + 6u^{3/2} - 6u^{1/2} + C$, где $u = 1 + \sqrt[3]{x}$.

1139. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x} + C$.

1140. $\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{15}}+C.$

1141. $F(x)=\begin{cases}2-e^{-x}+C, & x<0,\\ e^{x}+C, & x\geqslant 0.\end{cases}$

1142. $2-\frac{\pi}{2}$. **1143.** $200\sqrt{2}$. **1144.** $\frac{\pi a^2}{4}$.

1145. $\frac{\pi}{4}$. **1146.** $2x\sqrt{1+x^4}$. **1149.** $3\pi a^2$.

1150. $2a^2$. **1151.** $8a$. **1152.** $\frac{1}{3}\operatorname{sh}3\pi$.

1153. $\pi^2\frac{4\pi^2-15}{24}$. **1154.** π. **1155.** $\frac{14\pi}{3}$.

1156. $2\ln 3$. **1157.** $\frac{1}{\ln 2}$. **1158.** Расходится.

1159. $-\frac{\pi}{6}$. **1160.** $\frac{3a^2}{2}$. **1161.** $\frac{\pi^2}{2}$.

1162. Сходится. **1163.** Сходится. **1164.** Расходится.

1166. $\alpha>1$. **1167.** $\alpha\in(50;\,100)$.

1168. Сходится условно, абсолютно расходится.

1169. Абсолютно сходится при $\alpha<2$, условно при $2\leqslant\alpha<\frac{7}{3}$.

1170. Может, например $\int\limits_0^{+\infty}x\cos x^4\,dx$.

1171. Расходится. **1172.** Сходится. **1173.** Сходится.

1174. Сходится при $\alpha>\frac{1}{2}$. **1175.** Сходится.

1176. Сходится. **1177.** Расходится. **1178.** Расходится.

1179. а) $a>1$; б) $0<\alpha\leqslant 1$.

1180. а) $a>2$; б) $1<\alpha\leqslant 2$.

1181. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<1;\\ \frac{\pi}{2}(x-1), & \text{если } x\geqslant 1.\end{cases}$

1182. $f(x)=0$, а) неравномерно, б) равномерно.

1183. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, равномерно. **1184.** $f(x)=0$, неравномерно. **1185.** $f(x)=-\frac{\pi}{2}$, а) равномерно, б) неравномерно.

1186. $f(x)=0$, неравномерно. **1187.** Равномерно. **1188.** а) Равномерно, б) неравномерно. **1189.** а) Равномерно, б) неравномерно. **1190.** а) Равномерно, б) неравномерно. **1191.** Непрерывна. **1192.** Да. **1193.** Да. **1194.** π.

1195. $R=\frac{1}{3}$, в концах интервала сходимости $\left(-\frac{4}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$ — расходится.

1196. $R=1$; $(0;\ 2)$; при $x=0$ сходится абсолютно при $\alpha>1$ и условно при $0<\alpha\leqslant 1$; при $x=2$ сходится абсолютно при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leqslant 1$.

1197. $R=4$. **1198.** $R=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. **1199.** $R=\frac{1}{4\sqrt{2}}$.

1200. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n$, $R=2$.

1201. $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $R=\infty$.

1202. $(\ln 3)x+\frac{x^3}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{3^{2n+1}(2n+1)(2n)!!}x^{4n+3}$, $R=\sqrt{3}$.

1203. $\operatorname{arctg} 2+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$, $R=1$.

1204. $-\ln(1-x^2)$. **1205.** 0,946. **1206.** а) $\sqrt{n}\,a$; б) 2^n.

1207. Только в пространстве $\mathbb{R}_2$.

1208. а) да, б) нет, в) нет, г) да.

1209. Окружность радиуса $\frac{2\sqrt{C}}{|1-C|}$ с центром в точке $\left(\frac{1+C}{1-C};\ 0\right)$, если $C>0$, $C\neq 1$; ось y, если $C=1$; точка $(1;\ 0)$, если $C=0$; $\varnothing$, если $C<0$.

1210. 1) а) 0, б) не существует, в) 0;

2) а) не существует, б) не существует, в) 1;

3) а) 0, б) 0, в) не существует.

1211. а) e; б) π.

1212. Все точки эллипсов $x^2+4y^2=1$, $x^2+4y^2=2$ и точка $(0;\ 0)$; в точках эллипса $x^2+4y^2=1$ разрыв устранимый.

1213. а) да; б) нет.

1214. а) не дифференцируема, б) дифференцируема, $dz(0,\ 0)=0$.

1215. $\alpha\in(1;\ 4)$.

1216. а) $-2dxdy$; б) $-3dxdy^2$; в) $dx^6-15dx^4dy^2+15dx^2dy^4-dy^6$.

1217. $dz = \dfrac{yz\,dx + z^2 dy}{y(x+z)}$, $d^2z = -\dfrac{(yz\,dx - xz\,dy)^2}{y^2(x+z)^3}$.

1218. а) $m = 0$, б) $m = 1$, в) $m = 2$.

1219. $u = x + \dfrac{1}{2}xy + o(\rho^2)$; $r_2 = -\dfrac{1}{16}xy^2(2+\theta y)(1+\theta y)^{-\frac{5}{2}}$, $0<\theta<1$.

1220. $u = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x-y}{2} - \dfrac{x^2-y^2}{4} + o(\rho^2)$.

1221. $u = x\ln 2 + \dfrac{x(y-2)}{2} - \dfrac{\ln 2}{6}x^3 - \dfrac{x(y-2)^2}{8} - \dfrac{x^3(y-2)}{12} +$
$+ \dfrac{x(y-2)^3}{24} + o(\rho^4)$.

1222. Максимум $u(1; 3) = 9$. **1223.** Минимум $u(2; 4) = -8$.

1224. Два минимума $u(\pm1; \mp2) = -4$; два максимума $u(\pm1; \pm2) = 4$; нестрогий экстремум $u = 0$ в точках эллипса $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{12} = 1$, минимум при $xy > 0$, максимум при $xy < 0$.

1225. Максимумы $u(2\pi k; 0) = 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

1226. Минимум $u\left(\dfrac{1}{2}; 1; 1\right) = 4$; максимум $u\left(-\dfrac{1}{2}; -1; -1\right) = -4$.

1227. Максимум $u(3; -1) = \dfrac{13}{3}$.

1228. Максимум $u\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right) = -2\ln 2$.

1229. Минимум $u(-2; 2; -2) = -8$; максимум $u(2; -2; 2) = 8$.

1230. Минимум $u(-2; 1; 4) = 11$; максимум $u(2; -1; -4) = 59$.

1231. Максимум $u(4; -1) = -7$; минимум $u(-4; 1) = 9$.

1232. 8; -216.

1233. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{x+1} f\,dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f\,dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f\,dx$.

1234. $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\frac{y^2}{2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)\,dx \right) dy + \int_1^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{2} f(x,y)\,dx$.

1235. $\dfrac{35}{12}\pi$ **1236.** $\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - \cos 2y)$.

1237. xy^2. **1238.** $-6\pi^2$. **1239.** $\dfrac{8156}{15}$.

1240. $\frac{16}{3}$. **1241.** 26. **1242.** $\frac{1}{6}$.

1243. $8r^2$. **1244.** $x = y = \frac{128\,a}{105\,\pi}$.

1245. $\frac{7}{2}\pi abc^3$.

1246. $\int\limits_1^2 dx \left(\int\limits_0^{x^2(2-x)} dz \int\limits_{z/x^2}^{2-x} f dy + \int\limits_{x(x-2)}^{0} dz \int\limits_{-z/x}^{2-x} f dy \right)$.

1247. $\frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}$.

1248. $\frac{\pi}{10}$. Указание: перейти к сферическим координатам.

1249. $\frac{16\pi}{3}$. Указание: перейти к цилиндрическим координатам.

1250. $\frac{7}{24}$. **1251.** $\frac{3}{4}\pi\gamma_0 a^3$. **1252.** а) 1; б) $\frac{\pi^2}{2}$.

1253. $2a^2$. **1254.** а) $\frac{2}{3}\pi$, б) 0. **1255.** $4a^2$.

1256. $-\frac{\pi}{4}a^3$. **1257.** 34.

1258. 2π, если точка (0; 0) лежит внутри кривой; 0, если точка (0; 0) лежит вне кривой.

1259. $\frac{2\gamma mM}{\pi R^2}$. **1260.** $(\sqrt{3}-1)\left(\ln 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1261. $2\pi r \ln \frac{1+\sqrt{1+r^2}}{r}$.

1262. $8\pi(2+\sqrt{2})$. **1263.** $\frac{2\pi}{15}(1+6\sqrt{3})\rho_0$.

1264. 0. **1265.** $-\frac{2\pi}{7}R^7$.

1266. а) 128π, б) -48π, в) 56π.

1267. $\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}\right)R^4$. **1268.** а) $-\frac{9}{2}a^3$; б) 2π.

1269. $f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$. **1270.** а) 0; б) πh^3.

1271. а) 2π; б) 2π. **1272.** $xyz(x+y+z)+C$.

1273. $\frac{1}{3}$.

1274. а) $\frac{f''(r)}{r}[\vec{r}, \vec{c}]$; б) $2f(r)\vec{c} + \frac{f''(r)}{r}(\vec{c}(\vec{r}, \vec{r}) - \vec{r}(\vec{c}, \vec{r}))$;
в) $-2(\vec{r}, \vec{c})$.

1275. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$. **1276.** $\frac{7}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

1277. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$. **1278.** $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$.

1279. $\frac{\pi}{4}$. **1280.** $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$.

1281. $\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}$.

1282. $\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1-ik}e^{ikx}$, $s(\pi)=\operatorname{ch}\pi$.

1283. $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{6}{n^2}-\pi^2\right)\sin nx$.

1284. $f(-x)=f(x)$, $f(\pi-x)=-f(x)$.

1285. $-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$. **1287.** $\frac{\pi-x}{2}$.

1288. $\frac{\pi^4}{90}$. **1289.** 0.

1291. $\pi\ln\frac{\alpha+\beta}{2}$. **1292.** $\ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}$.

1294. Сходится равномерно.

1295. а) Сходится неравномерно, б) сходится равномерно.

1296. Сходится неравномерно.

1297. $\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$. **1298.** $\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha$.

1299. $\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$. **1300.** $\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha e^{-|\alpha|}$.

1301. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2}$. **1302.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{2}$.

1303. а) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, б) $\frac{\pi}{3\sqrt[6]{108}}$. **1304.** $\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2}; \frac{n+1}{2}\right)$.

1305. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin \alpha s}{s}\cos xs\,ds.$

1306. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin s(x-1)-\sin s(x-2)}{s}\,ds.$

1307. $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin(xs+\varphi)}{\sqrt{1+s^2}}\,ds,\ \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{s}.$

1308. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{2s-3\sin\frac{2s}{3}}{s^2}\sin x\,s\,ds.$

1309. $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{1+s^2}.$

1310. $h\dfrac{\sin^2\pi as}{\pi^2as^2},\ a>0.$

1311. $2\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1-3s^2}{\left(1+s^2\right)^3}.$

1312. $-i\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,s^3e^{-|s|}.$

1313. $\sqrt{2\pi}\,\delta.$

1314. $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos as.$

1315. $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin as.$

1316. $-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}is.$

1317. $\sqrt{2\pi}\,i\delta'.$

1318. $-\sqrt{2\pi}\,\delta''.$

1319. а) $\dfrac{22}{159}-\dfrac{5}{318}i$; б) $-\dfrac{42}{29}$.

1320. $|z|=-2\cos\dfrac{3\pi}{5}$, $\arg z=\dfrac{9\pi}{10}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

1321. а) $\dfrac{5}{\pi}(\cos 230^\circ+i\sin 230^\circ)$,

б) $-2\cos\dfrac{5\pi}{9}\left(\cos\dfrac{4\pi}{9}+i\sin\dfrac{4\pi}{9}\right)$.

1322. $-2^{1995}-i2^{1995}\sqrt{3}$; $2^{1996}\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

1323. а) Замкнутый круг радиуса 2 с центром в точке $8i$.
б) Отрезок $[-2;\ 2]$ действительной оси.
в) Окружность радиуса 13 с центром в точке $z=0$.

1324. $6+8i$, $6+17i$.

1325. $\dfrac{1}{3}$ кв. ед.

1326. $1+i$; $-1-i$.

1327. 1; -1; $1+i$; $-1-i$.

1328. $\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$,

$$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right),\ \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

1329. 1; 3; $2i$; $-2i$. **1330.** $\frac{5+\sqrt{33}}{4}i$.

1331. $P(z)=(z+1)(z-\sqrt{3}-i)(z-\sqrt{3}+i)(z+\sqrt{3}-i)(z+\sqrt{3}+i)\times$ $\times(z-2i)(z+2i)=(z+1)(z^2-2\sqrt{3}z+4)(z^2+2\sqrt{3}z+4)(z^2+4)$.

1332. 3. **1333.** 1.

1334. а) окружность $|w-1-i|=1$, б) прямая $\operatorname{Re} w=-\frac{1}{2}$; в) парабола $u=\frac{v^2}{4}-1$, $w=u+iv$; г) эллипс $\frac{u^2}{25}+\frac{v^2}{9}=\frac{1}{16}$, $w=u+iv$.

1335. а) $|w|<1$, б) область, заключенная между двумя ветвями гиперболы $u^2-v^2=\frac{1}{2}$.

1336. а) $z=k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $z=\frac{\pi}{2}+2k\pi\pm i\ln 3$, $k\in\mathbb{Z}$.

1337. а), б) дифференцируема только в точке $z=0$.

1338. а) да; б) нет.

1339. а) $f=(1-2i)z^3$; б) $f=z\operatorname{ch}z$; в) $e^{\frac{z^2}{2}}$.

1340. а) $C_1(x^2+y^2)+C_2$; б) $C_1\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C_2$.

1341. а) $f(z)=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k$, $|z|<2$; б) $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{z^{k+1}}$, $|z|>2$; в) $f(z)=\frac{1}{z-2}$, $z\neq 2$.

1342. а), б) $f(z)=\frac{1}{2}+z+z^2+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{-k}}{(k+2)!}$, $0<|z|<\infty$.

1343. а) да; б), в) нет.

1344. а) $\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}$; б) z^2.

1345. $f(x)=\frac{2}{3}\sum_{k=-\infty}^{-1}z^k+\frac{1}{6}+\frac{5}{12}z+\frac{7}{24}z^2-\frac{17}{6}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}z^k$.

1346. $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^k}{z^{2k+2}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{2^k}$; $|z|=\sqrt{2}$, $|z|=2$.

1347. $z=\pm i$ — полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ — существенно особая точка.

1348. $z=\infty$ — полюс 1-го порядка; $z=0$ — существенно особая точка.

1349. $z=0$ — полюс 2-го порядка;

$z_k=2k\pi i$ ($k=\pm1, \pm2, \pm3,\ldots$) — полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ — точка накопления полюсов, неизолированная особая точка.

1350. $z_k=k\pi$ ($k=\pm1, \pm2, \pm3,\ldots$) — полюсы 1-го порядка;

$z=0$ — устранимая особая точка;

$z=\infty$ — неизолированная особая точка, точка накопления полюсов.

1351. $z_k=\dfrac{2}{(2k+1)\pi}$, k — целое — существенно особые точки;

$z=0$ — неизолированная особая точка, точка накопления существенно особых точек;

$z=\infty$ — устранимая особая точка.

1352. $z=1$ — существенно особая точка;

$z_k=2k+1$, $k\neq0$ — полюсы 1-го порядка, если $z_k\neq(2l+1)^2$;

$z_l=(2l+1)^2$, $l\neq0$ — устранимые особые точки;

$z=\infty$ — неизолированная особая точка, точка накопления особых точек.

1353. а) $\dfrac{1}{9}$; б) $\dfrac{i\cos3-\sin3}{54}$; в) $\dfrac{-i\cos3-\sin3}{54}$; г) $\dfrac{\sin3-3}{27}$; д) 0.

1354. а) $-\cos 1$; б) $\cos 1$. **1355.** а) 0; б) не существует.

1356. $-e$. **1357.** $2\pi i$.

1358. $2\pi e^2 i$. **1359.** $2\pi i$.

1360. $i\pi\left(\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 1}-1\right)$. **1361.** $7\pi i$.

1362. $-i\pi$. **1363.** $\pi e^{-5}(\sin 1-\cos 1)$.

1364. $\dfrac{\pi}{2}e^{-12}(\cos 6+2\sin 6)$. **1365.** $\dfrac{\pi}{3}(4e^{-2}-e^{-1})$.

1366. $\dfrac{22}{81}\pi$. **1367.** $w=2\dfrac{e^z-i}{e^z+i}$.

1368. $w=e^{-\frac{\pi}{4}i}\dfrac{e^{iz}-1}{e^{iz}+1}$.

1369. а) $w=e^{i\alpha}\dfrac{3z}{z+24}$, $\alpha\in\mathbb{R}$; б) $w=2e^{i\alpha}\dfrac{z-3}{z+3}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

1370. а) $y^2+y'^2=1$; б) $(y-2x)^2(y'^2+1)=(2y'^2+1)^2$.

1371. $(y+x^2)y'+x=0$.

1372. а) $(Ce^{-x^2}-1)y=2$, $y=0$;

б) $\operatorname{arctg} y-\arcsin x=C$, $x=\pm1$;

в) $\operatorname{ctg}\dfrac{y-x}{2} = x + C$, $y = x + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

1373. а) $y(1 + x) = 1$; б) $x + 2y + 2 = 0$.

1374. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{x} + 2\pi$. **1375.** $x^2 + 2y^2 = C$.

1376. Через 1575 лет.

1377. $\left(x-\dfrac{C}{2}\right) + \left(y-\dfrac{C}{2}\right)^2 = \dfrac{C^2}{2}$.

1378. $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$.

1379. $1 - xy = Cx^3(2 + xy)$, $xy + 2 = 0$.

1380. $y = e^x(\ln|x| + C)$.

1381. $x = y^2 + Cy$, $y = 0$.

1382. $\dfrac{1}{y^3} = C\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x$, $y = 0$.

1383. $x = \left(2-y^2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}\right)^{-1}$. **1384.** $x^2 = Ce^{2y} + 2y$.

1385. $\dfrac{1}{y} = \ln x + 1$.

1386. $y = x + e^{-x^2}\left(C+\int e^{-x^2}dx\right)^{-1}$.

1387. $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$. **1388.** $x^2\cos^2 y + y^2 = C$.

1389. $x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = C$.

1390. $y = e^{x-C} + C$, $y = x + 1$ — особое.

1391. $y = \dfrac{5}{4}(x - C)^2 - \dfrac{5}{9}C^2$, $y = -x^2$ — особое.

1392. $y = Ce^{2x} + \dfrac{1}{C}$, $y = \pm 2e^x$ — особые.

1393. $y = C - 3\left(\dfrac{x+C}{5}\right)^{5/3}$, $y = -x \pm 2$ — особые.

1394. $xy = \pm a^2$. **1395.** $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

1396. $y = \dfrac{1}{x} + C_1\ln x + C_2$. **1397.** $e^y + C_1 = (x + C_2)^2$.

1398. $y^2 = \dfrac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$.

1399. $y = x + \dfrac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2$, $y = x + C$.

1400. $y = C_1 e^{C_2 x^2}$. **1401.** $x \sin\left(\frac{y}{x} - C_1\right) = C_2$.

1402. $y = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{2x} - \frac{16}{5}$.

1403. $y = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

1404. $y = 1 - 2 \ln x$. **1405.** $y = (1 + \cos x) e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

1406. $y = \sqrt{1 + \ln(x+1)^2}$. **1407.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

1408. $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

1409. $y = e^x(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$.

1410. $y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x$.

1411. $y = C_1 + (C_2 + C_3 x) \cos x + (C_4 + C_5 x) \sin x$.

1412. $y = C_1 e^x + e^{\cos\frac{2\pi x}{5}}\left(C_2 \cos \sin \frac{2\pi x}{5} + C_3 \sin \sin \frac{2\pi x}{5}\right) +$

$+ e^{-\cos\frac{2\pi x}{5}}\left(C_4 \cos \sin \frac{2\pi x}{5} + C_5 \sin \sin \frac{2\pi x}{5}\right)$.

1413. $C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{5} e^{4x}$.

1414. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (x - 1) e^x$.

1415. $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{x}{4}(\sin x - x \cos x)$.

1416. $y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32} \operatorname{sh} 2x$.

1417. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{9}\right) e^{-2x} - \frac{3 \sin x - \cos x}{2}$.

1418. $y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x + \sin 2x - x^2 - 4$.

1419. а) $y''' + y'' + y' + y = 0$, б) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{-x} + x - 1 + x e^{-x}$.

1420. $y = (C_1 + C_2 x + \ln |x|) e^{-x}$.

1421. $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x + (\sin x) \ln |\sin x| - x \cos x) e^{-x}$.

1422. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{x}$. **1423.** $y = \operatorname{ch} x - x$.

1424. $y = \frac{3}{2} x^2 e^{-x}$. **1425.** $y = \frac{\sin 2x}{8} - \frac{x \cos 2x}{4}$.

1426. $y = \cos x + 2 \sin x + e^{-x} - 3e^x + 2xe^x$.

1427. $y = 0$, λ — любое; $y = \sin nx$, если $\lambda = n^2$, n — целое.
1428. $x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$, $y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}$.
1429. $x = (C_1 \cos t + C_2 \sin t)e^{2t}$, $y = ((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t)e^{2t}$.
1430. $x = (C_1 + 2C_2t)e^{-t}$, $y = (C_1 + C_2 + 2C_2t)e^{-t}$.
1431. $x = C_1e^{t} + 2C_2e^{4t} + 3e^{5t}$, $y = -C_1e^{t} + C_2e^{4t} + e^{5t}$.
1432. $x = C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} - \cos t + 3 \sin t$,
$y = -C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + 2 \cos t - \sin t$.
1433. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \operatorname{tg} t$, $y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2$.

1434. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$

1435. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t + \cos t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} e^{t} +$

$+ C_3 \begin{pmatrix} 2\sin t \\ \sin t - 2\cos t \\ -\sin t - \cos t \end{pmatrix} e^{t}.$

1436. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} -t \\ 2t+1 \\ 2t+1 \end{pmatrix} e^{-t}.$

1437. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + C_3 \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -1-t \end{pmatrix} e^{t}.$

1438. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

1439. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$

1440. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{-t}.$

1441. $x = 2 \sin 2t + \dfrac{t}{2} \sin 2t.$

1442. $x = e^{2t} + 4\cos t - 2\sin t - 5$.
1443. $x = 2 - e^{-t}$, $y = 2 - e^{-t}$, $z = 2e^{-t}$.
1444. $y = x(C_1 + C_2 \ln |x| + C_3 \ln^2 |x|)$.
1445. $y = C_1 t + C_2\sqrt{|t|} + C_3\sqrt{|t|^3}$, где $t = 2x + 3$.
1446. $y = C_1 x^3 + C_2 x^{-2} - 2\ln x + \frac{1}{3}$.
1447. Линейно независимы, $W(x) = 2e^{6x}$.
1448. Линейно зависимы, $W(x) = 0$.
1449. Линейно независимы, $W(x) = 0$.
1450. $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$.
1451. $y = C_1 x + C_2 e^{-2x}$.
1452. $y = C_1 x + C_2 \ln x$.

1453. $y = C_1 x + C_2\left(\frac{1}{2}x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 1\right)$.

1454. $y = C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{1}{x+1} + x + 2$.

1455. $y = C_1 e^x + C_2 x^3 e^x - \frac{3}{2}x^2 e^x$.

1456. $y = C_1 x + C_2 x e^x - \frac{1}{2}x(\sin x + \cos x)$.

1457. $y = C_1 x + C_2\sqrt{1+x^2} - 2 - x \operatorname{arctg} x$.
1458. $y = C_1 + C_2 x(\ln x - 1) + x(\ln^2 x - 2\ln x + 2)$.
1459. Неустойчиво.

1460. Асимптотически устойчиво, если $a < 0$; устойчиво, но не асимптотически устойчиво, если $a = 0$; неустойчиво, если $a > 0$.

1461. Неустойчиво. **1462.** Асимптотически устойчиво.

1463. Асимптотически устойчиво, если $a < -0{,}5$; устойчиво, если $a = -0{,}5$; неустойчиво, если $a > -0{,}5$.

1464. Неустойчивый узел. **1465.** Устойчивый фокус. **1466.** Центр. **1467.** Седло. **1468.** Неустойчива. **1469.** Устойчива. **1470.** Асимптотически устойчива. **1471.** (1; 0) — неустойчивый фокус. **1472.** (0; 0) — седло; (3; 3) — неустойчивый узел. **1473.** (0; 0) — устойчивый фокус; (3; 0) — седло. **1474.** (0; 0) — седло; (–1; 0) — устойчивый узел. **1475.** Неустойчива, $v = x^2 + y^2$. **1476.** Устойчива, $v = 2x^2 + y^2$.

Оглавление

Яков Степанович Бугров
Сергей Михайлович Никольский
Высшая математика
СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Художник *Т. Неклюдова*
Корректоры: *О. Милованова*, *Н. Пустовойтова*

Лицензия ЛР № 065194 от 02 июня 1997 г.
Сдано в набор 04.12.97. Подписано в печать 12.12.97.
Формат 84×108/32. Бум. офсетная. Гарнитура *CG Times*.
Печать офсетная. Усл. п. л. 18,48. Тираж 5000 экз.
Зак. № 973.

Издательство «Феникс»
344007, г. Ростов-на-Дону, пер. Соборный, 17

Изготовлено с готовых диапозитивов в АПП «Джангар»
358000, г. Элиста, ул. Ленина, 245