Дискретная математика

том 15 выпуск 2 * 2003

УДК 519.95

Независимые системы автоматов в лабиринтах

© 2003 г. Г. Килибарда, В. Б. Кудрявцев, Ш. Ушчумлич

Анализируется развитие сравнительно нового направления теории автоматов — поведение автоматов в лабиринтах, по тематике которого имеется уже более ста публикаций. Выделяются основные понятия, проблематика, достижения, методы решения задач и открытые проблемы по важному разделу этой области — поведению независимых систем автоматов в лабиринтах. Основные утверждения в ряде случаев приводятся в более сильном виде, чем у авторов соответствующих статей. В обзоре содержатся и новые результаты, расширяется и уточняется ситуация, описанная авторами ранее.

1. Введение

В последние десятилетия все большее внимание привлекает тематика, связанная с автоматным анализом геометрических сред, изображений, графов, формальных языков и других дискретных структур. В этом направлении уже опубликовано более ста научных статей.

Одна из основных проблем этого направления теории автоматов — нахождение выхода из лабиринта — уходит своими корнями в античность и связана с общеизвестным мифом о Тезее, который решает аналогичную задачу по отношению к Кносскому лабиринту. Эта основная задача постепенно усложнялась, появлялись новые, тесно связанные с ней проблемы, а вместе с ними и новые понятия, возникали новые вопросы, расширялись сферы применимости. Интерес к этому кругу проблем особенно усилился с развитием кибернетики.

Важную роль в становлении этого направления сыграла работа К. Шеннона [27]. В ней рассматривается модель мыши в виде автомата, которая должна найти определенную цель в лабиринте. Это в значительной мере определило тематику исследований на многие годы.

Другим источником направления можно считать рассмотрение вычислительных систем с внешней памятью в виде дискретной плоскости или дискретного пространства Фишера [16].

Однако идеи, предложенные в этих работах, довольно долго не получали дальнейшего развития. Это было связано с рядом причин. В первом случае автомат-мышь действовал в геометрической среде, в то время как еще не вполне было ясно, как автомат преобразует свою входную полугруппу слов, не имеющих никакой интерпретации. Выяснению этого и были посвящены основные усилия исследователей в области теории автоматов.

Во втором случае внимание специалистов быстро было переключено на многоленточные вычислители, что и вытеснило модель Фишера.

Активное изучение поведения автоматов в лабиринтах и на графах началось после появления работ [14, 15]. В них была уточнена модель К. Шеннона: в качестве лабиринта рассматривалась подобная шахматной доске конфигурация клеток на плоскости или аналогичных кубиков в пространстве (шахматные лабиринты), а в качестве автоматов — конечные автоматы, которые, обозревая некоторую окрестность клетки, в которой они находятся, могут перемещаться в соседнюю клетку в одном из координатных направлений. В [14, 15] получены некоторые результаты по задаче обхода таких лабиринтов автоматами, и как актуальный выделен вопрос о существовании автомата, обходящего все лабиринты; приведены соображения в пользу того, что в случае пространственного лабиринта для автомата можно построить лабиринт-ловушку. В [24] удалось построить для заданного автомата плоскую ловушку в виде 3-графа, а в [8] был решен более сложный случай этой проблемы — построение шахматной ловушки для любого заданного конечного автомата, однако его обоснование оказалось слишком громоздким. А. С. Подколзин [44, 45] значительно упростил доказательство этого факта, а Г. Килибарда [21, 40] дал другое, методически более наглядное решение этой проблемы, техника которого позволила решить и некоторые другие задачи типа задач обхода. В [2] оценена сложность такой ловушки по числу клеток в ней, а в [25] показано, что всегда в качестве ловушки можно выбрать r-связный лабиринт, причем $r \leqslant 3$. Затем в [1] была построена конечная ловушка для конечной системы автоматов и бесконечная ловушка сразу для всех конечных систем автоматов.

Характеризацию специальных типов графов-лабиринтов, правильно укладывающихся в плоскость, которые появляются в упомянутых выше работах, была дана в [20], независимо подобная характеризация была получена в [30].

Достаточно общий результат по построению бесконечных ловушек получил Г. Килибарда; им, в частности, приведен пример ловушки, для которой по данному конечному множеству автоматов и их расположению в ней оценивается радиус области, в которой они зацикливаются (которую они не покидают). Им также показано, что для любой конечной независимой системы автоматов можно построить так называемую однородную ловушку: это такой лабиринт, при помещении в любую точку которого автомат данной системы не покидает область, диаметр которой зависит только от автомата, а не от его местоположения. Также показано, что для множества всех конечных автоматов такого лабиринта не существует.

Наряду с этими результатами, указывающими на ограниченность возможностей автоматов, были построены примеры классов лабиринтов, которые обходятся одним автоматом (см. [3, 13–15, 37, 39, 42]). А. Н. Зыричев [35] установил, что класс всех плоских шахматных лабиринтов, имеющих дыры ограниченного диаметра, обходится одним автоматом. А. А. Золотых [34] расширил этот класс, показав, что можно рассматривать ограниченность дыр лишь по фиксированному направлению. В работах [34, 35, 39, 42] содержатся также оценки времени обхода этих лабиринтов и числа состояний для автоматов.

Невозможность обхода всех плоских шахматных лабиринтов одним автоматом выдвинула вопрос об изучении возможных усилений модели автомата, уже решающей задачу обхода. Исследовано несколько вариантов таких усилений. Главным из них является система взаимодействующих автоматов, называемая коллективом. В отличие от системы независимых автоматов коллектив анализирует лабиринты с учетом положения его членов в них. Другое усиление возможностей одного автомата восходит к Р. Фишеру и состоит в разрешении автомату делать метки в лабиринте. В случае, когда такие метки могут ставиться и стираться, получаем машину Тьюринга общего типа и потому рассматриваемые здесь задачи легко решаемы. Значит, надо ограничивать право автомата на метки. Здесь возникли случаи нестираемых, иерархичных, а также мерцающих и других меток, [32, 33, 49, 51]. Содержательно, возможность делать такие метки означает, что автомат обладает внешней неограниченной памятью. Таким образом, как и следовало ожидать, возможности автоматов резко усилились.

Оказалось, например, что для заданной размерности пространства n и k меток существует автомат с k нестираемыми метками, который обходит любой n-мерный прямоугольный лабиринт [50].

Кроме задачи обхода рассматривалась и другая, тесно связанная с ней проблема, — проблема остановки автомата в лабиринте. Она состоит в следующем: существует ли для некоторых содержательно интересных классов лабиринтов, имеющих хотя бы один универсальный обходчик, автомат, который после обхода любого лабиринта из этого класса останавливается в нем. В [12] показано, что при решении проблемы остановки автоматы являются еще более бессильными моделями, чем при решении проблемы обхода.

Эта статья является развитием основных положений предыдущей работы авторов [22, 46]. Здесь нашли отражение как новые результаты, так и уточнение ситуаций, описанных ранее.

В следующих двух разделах даются основные понятия, связанные с данной тематикой и с приводимыми здесь результатами. В последнем разделе подробно рассматривается случай поведения независимых систем конечных автоматов в указанных классах лабиринтов и в некоторых их обобщениях.

2. Лабиринты. Основные классы лабиринтов

Как обычно, будем обозначать множество всех натуральных чисел через $\mathbf{N}$, целых чисел через $\mathbf{Z}$, действительных чисел через $\mathbf{R}$, множество $\mathbf{N} \cup \{0\}$ через $\mathbf{N}_0$. Через $\mathbf{Z}^+$ и $\mathbf{R}^+$ обозначим, соответственно, множества положительных целых чисел и положительных действительных чисел. Также для любого $n \in \mathbf{N}$ положим, что $\bar{n} = \{1, 2, \dots, n\}$.

Пусть X — некоторое множество. Через $|X|$ обозначим мощность множества X, через $\mathfrak{B}(X)$ — булеан множества X, то есть совокупность всех подмножеств множества X, а через $\mathfrak{B}_0(X)$ — совокупность всех непустых подмножеств множества X. Также для любого $m \in \mathbf{N}$ через $\mathfrak{B}^{\leqslant m}(X)$ $(\mathfrak{B}_0^{\leqslant m}(X))$ обозначим совокупность всех (непустых) подмножеств Y множества X таких, что $|Y| \leqslant m$, а через $\mathfrak{B}^{=m}(X)$ — совокупность всех подмножеств Y множества X таких, что $|Y| = m$.

Пусть $\{X_a \colon a \in A\}$ — некоторое индексированное семейство множеств X_a. Тогда для любого $a_0 \in A$ через $\mathbf{p}_{a_0}$ обозначим отображение проектирования произведения $\prod_{a \in A} X_a$ на сомножитель X_{a_0}.

Пусть A — конечный алфавит. Множество всех слов в алфавите A обозначим через A^*, а множество всех непустых слов из A^* — через A^+. Если α — некоторое слово в A, то через $|\alpha|$ обозначим его длину; длина пустого слова Λ равна 0.

Поскольку лабиринт, по существу, является графом определенного вида, ниже мы дадим некоторые необходимые сведения из теории графов. Кроме того, поскольку в литературе по теории графов одни и те же термины определяются по-разному, необходимо определить, что именно мы будем иметь в виду под некоторыми понятиями. Определения всех остальных понятий теории графов, которые упоминаются в тексте, но не определяются здесь, можно найти, например, в [36, 52].

Пусть V и E, $V \cap E = \varnothing$, — некоторые конечные или счетные множества, $\iota_1: E \to V$ и $\iota_2: E \to V$ — два произвольных отображения множества E в множество V такие, что $(\iota_1)^{-1}(v)$ и $(\iota_2)^{-1}(v)$ — конечные множества для любого $v \in V$. Тот факт, что $\iota_1(e) = v_1$ и $\iota_2(e) = v_2$ для некоторого $e \in E$, будем записывать более кратко через $e = (v_1, v_2)$. Пусть также $\bar{\cdot}: E \to E$ — некоторое частичное отображение множества E в себя (если определено значение этой функции для некоторого $e \in E$, то будем обозначать его через $\bar{e}$), которое удовлетворяет следующим условиям:

- если $\bar{e} = (v_2, v_1)$ и $v_1 \neq v_2$, то $e = (v_1, v_2)$;
- если $e = (v, v)$ и существует $\bar{e}$, то $\bar{e} = (v, v)$ и $e \neq \bar{e}$;
- если $\bar{\cdot}$ определено на дуге e, то оно определено и на дуге $\bar{e}$ и $\bar{\bar{e}} = e$.

Тогда набор $G = (V, E, \iota_1, \iota_2, \bar{\cdot})$ называется ориентированным графом или орграфом. Элементы из V назовем вершинами, а элементы из E — дугами орграфа G. Дуга $e \in E$, у которой $\iota_1(e) = \iota_2(e)$, называется (ориентированной) петлей. Вершина v и дуга e инцидентны, если $\iota_1(e) = v$ или $\iota_2(e) = v$. Если для дуги e определено $\bar{e}$, то множество $\langle e \rangle = \{e, \bar{e}\}$ называется ребром; про пару дуг e и $\bar{e}$ говорим также, что она является парой противоположных дуг. Если e — петля, то $\langle e \rangle$ называется (неориентированной) петлей. Через $\langle E \rangle$ обозначим множество всех ребер орграфа G.

В дальнейшем вместо $(V, E, \iota_1, \iota_2, \bar{\cdot})$ пишем (V, E), если, конечно, специально не оговаривается, о каких именно функциях ι_1, ι_1 и $\bar{\cdot}$ идет речь. В любом случае, несмотря на то, что из-за краткости в обозначениях будем опускать обозначения функций ι_1, ι_1 и $\bar{\cdot}$, мы предполагаем, что они существуют и заданы каким-то способом. Часто в последующем множество вершин орграфа G будем обозначать через $V(G)$, а множество его дуг — через $E(G)$.

Если существует $\bar{e}$ для любой $e \in E(G)$, то орграф G называется симметрическим орграфом.

Пусть $G = (V, E)$ — некоторый орграф. Для любых $v_1, v_2 \in V$ введем обозначение $E_{v_1,v_2} = \{e \in E \mid e = (v_1, v_2)\}$. В случае, когда $v_1 = v_2 = v$, вместо E_{v_1,v_2} пишем также E_v°. Обозначим через E_v множество $\{e \in E \mid \iota_1(e) = v\}$. Орграф $G = (V, E)$ называется орграфом без петель, если $E_v^\circ = \varnothing$ для любого $v \in V$. Орграф $G = (V, E)$ называется орграфом без кратных дуг если $|E_{v_1,v_2}| \leqslant 1$ для любых различных $v_1, v_2 \in V$ и $|E_v^\circ| \leqslant 2$ для любого $v \in V$, причем если $|E_v^\circ| = 2$, то множество E_v° состоит из пары противоположных петель.

Если заменить используемое выше для множества дуг обозначение E на обозначение $E(G)$, то тогда вместо обозначений E_{v_1,v_2}, E_v° и E_v будем писать, соответственно, $E_{v_1,v_2}(G)$, $E_v^\circ(G)$ и $E_v(G)$.

В орграфе G без кратных дуг и без петель дуги будем отождествлять с соответствующими парами точек, то есть пишем $e = (\iota_1(e), \iota_2(e))$ для любой $e \in E(G)$.

Пусть V и E, $V \cap E = \varnothing$, — некоторые конечные или счетные множества, $\iota: E \to \mathfrak{B}_0^{\leqslant 2}(V)$ — произвольное отображение множества E в множество $\mathfrak{B}_0^{\leqslant 2}(V)$ такое, что множество $E_v = \{e \in E : v \in \iota(e)\}$ конечно для любого $v \in V$. Тогда набор $G = (V, E, \iota)$ называется графом. Элементы множества V называем вершинами, а элементы множества E ребрами графа G. Тот факт, что $\iota(e) = b$, $b \in \mathfrak{B}_0^{\leqslant 2}(V)$, будем записывать более кратко как $e = b$. Ребро вида $e = \{v\}$ для некоторого $v \in V$ называется петлей. Вершина v и ребро e инцидентны, если $v \in \iota(e)$.

В дальнейшем вместо (V, E, ι) пишем (V, E), если, конечно, специально не оговаривается, о какой именно функции ι идет речь. В любом случае, несмотря на то, что из-за краткости в обозначениях будем опускать обозначение функции ι, мы предполагаем, что она существует и задана каким-то способом. Часто в последующем множество вершин графа G будем обозначать через $V(G)$, а множество его дуг — через $E(G)$.

Аналогичным способом, как и в случае орграфа, можно определить граф без петель и граф без кратных ребер.

Последовательность вида $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$, где $v_0, v_1, \ldots, v_n$ — вершины, а $e_1, \ldots, e_n$ — (ребра) дуги данного (графа) орграфа G, такая, что $(v_{i-1}, v_i \in \iota(e_i))$ $v_{i-1} = \iota_1(e_i)$ и $v_i = \iota_2(e_i)$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$, называется (маршрутом) путем или ориентированным маршрутом в G.

Каждому симметрическому орграфу $G = (V, E)$ можно вполне естественным образом сопоставить соответствующий граф $\bar{G}$: каждую пару противоположных дуг надо заменить ребром. И, наоборот, если G — граф и если каждое его ребро заменить парой противоположных дуг, то можно получить симметрический орграф $\vec{G}$.

Пусть $G' = (V', E', \iota'_1, \iota'_2, \bar{\cdot})$ и $G'' = (V'', E'', \iota''_1, \iota''_2, \bar{\cdot})$ — два орграфа. Они называются изоморфными, если существует биекция $\vartheta\colon V' \cup E' \to V'' \cup E''$ такая, что

$$\vartheta(V') = V'', \quad \vartheta(E') = E'', \quad \overline{\vartheta(e)} = \vartheta(\bar{e})$$

и $\vartheta(\iota_i(e)) = \iota_i(\vartheta(e))$ для любого $i = 1, 2$; функция ϑ в таком случае называется изоморфизмом орграфа G' на орграф G''. Аналогичным образом можно ввести понятие изоморфизма графов.

Пусть G — орграф и X и Y — некоторые множества. Если заданы некоторые функции $f\colon V(G) \to X$ и $g\colon E(G) \to Y$, то тройка (G, f, g) называется нагруженным орграфом, множества X и Y называются, соответственно, множествами меток вершин и меток дуг орграфа G, g — разметкой вершин и f — разметкой дуг орграфа G. Для любых $u \in V(G)$ и $e \in E(G)$ значения $f(u)$ и $g(e)$ функций f и g называются соответственно меткой вершины u и меткой дуги e в нагруженном орграфе (G, f, g). Через $\mathcal{G}(X, Y)$ обозначим класс всех нагруженных орграфов с множеством X в качестве множества меток вершин и Y в качестве множества меток дуг этих орграфов. Если ясно, о каких функциях f и g идет речь, то для любых $u \in V(G)$ и $e \in E(G)$ вместо $f(u)$ и $g(e)$ пишем, соответственно, $|u|$ и $|e|$, а если хотим подчеркнуть, о каком именно орграфе идет речь, то пишем, соответственно, $|u|_G$ и $|e|_G$. Для любого $v \in V(G)$ введем обозначение $[v]_G = \{|e| \mid e \in E_v(G)\}$; если из контекста ясно, о каком орграфе идет речь, то пользуемся обозначением $[v]$ вместо $[v]_G$.

Нагруженный орграф $(G_1, f_1, g_1) \in \mathcal{G}(X, Y)$ называется частью нагруженного орграфа $(G, f, g) \in \mathcal{G}(X, Y)$, если выполнены следующие условия:

- $V(G_1) \subseteq V(G)$ и $E(G_1) \subseteq E(G)$;
- $f_1(u) = f(u)$ и $g_1(e) = g(e)$ для любых $u \in V(G_1)$ и $e \in E(G_1)$.

Часть (G_1, f_1, g_1) нагруженного орграфа (G, f, g) называется подорграфом (подорграфом, порожденным множеством вершин $V(G_1)$), если из $u, v \in V(G_1)$ следует, что $E_{u,v}(G) \subseteq E(G_1)$.

Нагруженные орграфы $(G_1, f_1, g_1) \in \mathcal{G}(X_1, Y_1)$ и $(G_2, f_2, g_2) \in \mathcal{G}(X_2, Y_2)$ называются изоморфными, $(G_1, f_1, g_1) \simeq (G_2, f_2, g_2)$, если существует изоморфизм ϑ орграфа G_1 на орграф G_2 такой, что

$$(\forall v', v'' \in V(G_1)) \quad f_1(v') = f_1(v'') \iff f_2[\vartheta(v')] = f_2[\vartheta(v'')],$$
$$(\forall e', e'' \in E(G_1)) \quad g_1(e') = g_1(e'') \iff g_2[\vartheta(e')] = g_2[\vartheta(e'')].$$

Пусть I — замкнутый единичный интервал (со стандартной топологией, определенной на нем) и X — некоторое хаусдорфовое топологическое пространство. Непрерывное отображение $f\colon I \to X$ отрезка I в пространство X называется путем в X; точка $f(0)$ называется начальной точкой пути f, точка $f(1)$ — конечной точкой пути f, а обе эти точки — концевыми точками пути f.

Пусть Θ — конечное или счетное множество путей в X таких, что выполнены следующие условия:

- для любого $f \in \Theta$ и любых $0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant 1$, если $f(r_1) = f(r_2)$, то $r_1 = 0$ и $r_2 = 1$ (f является путем в X без самопересечения, но может быть замкнутым — начальная и конечные точки могут совпадать);
- множество $\{f \in \Theta \mid f(0) = x$ или $f(1) = x\}$ конечно для любого $x \in X$;
- для любых $f, g \in \Theta$, если $f(I) \neq g(I)$, то $f[(0,1)] \cap g[(0,1)] = \varnothing$ (если образы двух путей из Θ не тождественны, то кроме, может быть, концевых, у них нет других общих точек);
- для любой $f \in \Theta$ существует не более одной $g \in \Theta$, $g \neq f$, такой, что $f(I) = g(I)$, причем, если такое g существует, то f и g являются путями противоположной ориентации, то есть существует строго убывающая функция $\alpha\colon I \to I$ такая, что $f = g \circ \alpha$.

Орграф $G(\Theta) = (V(\Theta), E(\Theta))$ такой, что

$$V(\Theta) = \{f(0) \mid f \in \Theta\} \cup \{f(1) \mid f \in \Theta\}, \quad E(\Theta) = \Theta, \quad \iota_1(f) = f(0), \quad \iota_2(f) = f(1);$$

и для любого $f \in \Theta$ имеет место равенство $\bar{f} = g$, если существует $g \in \Theta$, $g \neq f$, такое, что $g(I) = f(I)$; в противном случае $\bar{f}$ не определено, называется X-орграфом. Если $X = \mathbf{R}^2$, то этот орграф также называется плоским орграфом. Носителем X-орграфа $G(\Theta)$ называется множество $\bigcup_{f\in\Theta} f(I)$, а помеченным носителем — пара $(V(\Theta), \bigcup_{f\in\Theta} f(I))$. Часто в последующем, если ясно из контекста или если мы не хотим подчеркивать, о каком именно множестве Θ идет речь, обозначение этого множества опускается в обозначении X-орграфа.

Пусть G — некоторый орграф. Множество Θ (а также и соответствующий X-орграф $G(\Theta)$) называется X-реализацией орграфа G или укладкой орграфа G в пространстве X, если X-орграф $G(\Theta)$ изоморфен G. Если $X = \mathbf{R}^2$, то X-реализацию называют плоской реализацией или плоской укладкой орграфа G. Орграф называется планарным, если существует его плоская реализация.

Пусть G — некоторый конечный симметрический орграф и $G(\Theta)$ — некоторая его X-реализация. Тогда ясно, что помеченный носитель этой реализации определяет единственным способом орграф G (определяет его функции инциденции ι_1 и ι_2). Следовательно, в дальнейшем конечный планарный симметрический орграф будем изображать в виде помеченного носителя некоторой его плоской реализации.

Если в (графе) орграфе для любых двух его вершин существует (маршрут) путь, связывающий эти точки, то он называется (связным графом) сильно связным орграфом.

Система следования η в орграфе $G = (V, E)$ есть множество $\eta = \{\eta_v \mid v \in V\}$, где η_v — бинарное отношение в $E_v(G)$ для любого $v \in V$. Если η_v — всюду определенное функциональное отношение при любом $v \in V$, то есть

$$|\eta_v(\{e\})| = |\{e' \in E_v(G) \mid (e, e') \in \eta_v\}| = 1$$

для любых $v \in V$ и $e \in E$, то для любого $v \in V$ можно определить функцию $\tilde{\eta}_v\colon E_v(G) \to E_v(G)$ так, что $\tilde{\eta}_v(e) = e'$, где e' — такая дуга, что $(e, e') \in \eta_v$. Если $\tilde{\eta}_v$ определено и является циклической подстановкой для любого $v \in V$, то η называется системой вращения. Исходя из вышесказанного, систему вращения будем задавать не множеством отношений, но множеством циклических подстановок, то есть под системой вращения будем понимать семейство $\eta = \{\eta_v \mid v \in V\}$ такое, что η_v является циклической подстановкой множества $E_v(G)$ для любого $v \in V$. Пару (G, η) назовем орграфом G с системой следования η, а если η — система вращения, то — орграфом G с системой вращения η. Аналогичным способом можно и для графов ввести понятие системы следования и системы вращения. Если (G, η) — симметрический орграф G с системой следования (системой вращения) η, то через $\bar{\eta}$ обозначим соответствующую систему следования (систему вращения) для графа $\bar{G}$. И наоборот, если (G, η) — граф G с системой следования (системой вращения) η, то через $\vec{\eta}$ обозначим соответствующую систему следования (систему вращения) для орграфа $\vec{G}$.

Пусть Ω, Ω_1, Σ и Σ_1 — конечные множества такие, что любое из этих множеств содержит пустой символ Λ, и (G, η) — некоторый сильно связный орграф G с системой следования η. Даны отображения $f\colon V(G) \to \Omega$, $g\colon E(G) \to \Sigma$. Набор $L = (G, f, g, \eta, \Omega_1, \Sigma_1)$ называется (Ω_1, Σ_1)-лабиринтом с множеством меток вершин Ω и множеством меток дуг Σ. Множество Ω называем также множеством ориентиров, а множество Σ — системой направлений. Если $\Omega_1 = \{\Lambda\}$, $\Sigma_1 = \{\Lambda\}$, то вместо $(\{\Lambda\}, \{\Lambda\})$-лабиринт говорим просто лабиринт и вместо $L = (G, f, g, \eta, \{\Lambda\}, \{\Lambda\})$ пишем $L = (G, f, g, \eta)$, то есть рассматриваем лабиринт просто как нагруженный орграф с системой следования. Под состоянием (Ω_1, Σ_1)-лабиринта подразумеваем любую пару вида (f_1, g_1), где $f_1\colon V(G) \to \Omega_1$ и $g_1\colon E(G) \to \Sigma_1$. Обозначим через $\mathscr{L}(\Omega, \Omega_1; \Sigma, \Sigma_1)$ класс всех (Ω_1, Σ_1)-лабиринтов, а через $\mathscr{L}(\Omega; \Sigma)$ — класс всех лабиринтов с множеством ориентиров Ω и системой направлений Σ. Если дан лабиринт $L = (G, f, g, \eta, \Omega_1, \Sigma_1)$, то G, $V = V(G)$, $E = E(G)$, f, g и η обозначаем, соответственно, через $G(L)$, $V(L)$, $E(L)$, f_L, g_L и η_L. Если специально не оговариваем, о каких f, g и η идет речь, то вместо $(G, f, g, \eta, \Omega_1, \Sigma_1)$ пишем (G, Ω_1, Σ_1), а если еще $\Omega_1 = \{\Lambda\}$ и $\Sigma_1 = \{\Lambda\}$, то пишем просто $L = (V(L), E(L))$. Как и в случае нагруженных орграфов, вместо $f(u)$, $f_1(u)$, $g(e)$ и $g_1(e)$ мы будем часто писать, соответственно, $|u|$, $\|u\|$, $|e|$ и $\|e\|$; $u \in V(L)$, $e \in E(L)$. Для любого $v \in V(L)$ введем обозначение $[v] = [v]_L = \{|e| \mid e \in E_v(L)\}$.

Приписывание (дуге) вершине пустого символа можно интерпретировать как отсутствие метки (дуги) вершины вообще, то есть функции f, f_1, g и g_1 можно рассматривать как частичные функции.

Поскольку множества Ω, Ω_1, Σ и Σ_1 конечные, в качестве этих множеств можно брать множества $\overline{m} \cup \{0\}$, $\overline{m}_1 \cup \{0\}$, $\bar{n} \cup \{0\}$ и $\bar{n}_1 \cup \{0\}$, и, следовательно, выше вместо (Ω_1, Σ_1)-лабиринта можем писать $(\overline{m}_1 \cup \{0\}, \bar{n}_1 \cup \{0\})$-лабиринт, и даже (m_1, n_1)-лабиринт (роль пустого символа играет число 0).

В лабиринте L могут быть выделены два непересекающиеся множества вершин V_1 и V_2 (второе или оба эти множества могут быть и пустыми). Вершины множества V_1 называем начальными (входами), а вершины V_2 — конечными (выходами). Лабиринт L в таком случае обозначаем $L_{V_1}^{V_2}$ или $(L;\, V_1, V_2)$. Если множества V_1 и V_2 одноэлементные, то вместо $L_{\{v_1\}}^{\{v_2\}}$ и $L_{\{v_1\}}$ пишем, соответственно, $L_{v_1}^{v_2}$ и L_{v_1}, то есть $(L;\, v_1, v_2)$ и $(L;\, v_1)$. Лабиринт, у которого выделено множество начальных вершин, называется инициальным. Под 1-инициальным лабиринтом подразумеваем инициальный лабиринт, у которого множество начальных вершин состоит из одной единственной точки. Если из контекста ясно, о чем идет речь, вместо 1-инициальный лабиринт часто говорят инициальный лабиринт.

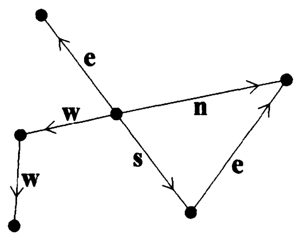


Рис. 1.

Лабиринт $L_1 \in \mathscr{L}(\Omega, \Omega_1; \Sigma, \Sigma_1)$ называется частью (подлабиринтом) лабиринта $L \in \mathscr{L}(\Omega, \Omega_1; \Sigma, \Sigma_1)$, если

- нагруженный орграф $(G(L_1), f_{L_1}, g_{L_1})$ является частью (подорграфом) нагруженного орграфа $(G(L), f_L, g_L)$ и если
- $\|v\|_{L_1} = \|v\|_L$ и $\|e\|_{L_1} = \|e\|_L$ для любых $v \in V(L_1)$ и $e \in E(L_1)$
- и $(e_1, e_2) \in (\eta_{L_1})_v$ $(v \in V(L_1), e_1, e_2 \in E(L_1))$ тогда и только тогда, когда существует последовательность дуг $e'_1 = e_1, e'_2, \ldots, e'_m = e_2$ из $E_v(L)$ такая, что $e_i \notin E_v(L_1)$, $2 \leqslant i \leqslant m-1$, и $(e'_j, e'_{j+1}) \in (\eta_L)_v$ для любого $1 \leqslant j \leqslant m-1$.

Пусть L — некоторый (Ω_1, Σ_1)-лабиринт из $\mathscr{L}(\Omega, \Omega_1; \Sigma, \Sigma_1)$, удовлетворяющий условию, что $|e_1| \neq |e_2|$ для любых $e_1, e_2 \in E_v(L)$, $e_1 \neq e_2$, и $v \in V(L)$. Пусть также $u \in V(L)$ и $\alpha \in \Sigma^*$. Если в L существует путь $u = u_0, e_1, u_1, \ldots, u_{n-1}, e_n, u_n$ такой, что $|e_1| \ldots |e_n| = \alpha$, то вершину u_n обозначим через $v_L(u; \alpha)$; если такого пути не существует, то $v_L(u; \alpha)$ не определено. В случае, когда $\alpha = \Lambda$, полагаем, что $v_L(u; \alpha) = u$. Если ясно из контекста, о каком лабиринте L идет речь, то часто вместо $v_L(u; \alpha)$ будем просто писать $u\alpha$.

Лабиринты $(L_1; V_1^1, V_2^1) \in \mathscr{L}(\Omega, \Omega_1; \Sigma, \Sigma_1)$ и $(L_2; V_1^2, V_2^2) \in \mathscr{L}(\Omega', \Omega'_1; \Sigma', \Sigma'_1)$ называют изоморфными и пишут $(L_1; V_1^1, V_2^1) \simeq (L_2; V_1^2, V_2^2)$, если для нагруженных орграфов $(G(L_1), f_{L_1}, g_{L_1})$ и $(G(L_2), f_{L_2}, g_{L_2})$ существует изоморфизм ϑ такой, что

- $|\Omega_1| = |\Omega'_1|$, $|\Sigma_1| = |\Sigma'_1|$, $\vartheta(V_1^1) = V_1^2$ и $\vartheta(V_2^1) = V_2^2$,
- для любой вершины $v \in V(L_1)$ и любых дуг $e_1, e_2 \in E_v(L_1)$ имеет место включение $(e_1, e_2) \in (\eta_L)_v$ тогда и только тогда, когда $(\vartheta(e_1), \vartheta(e_2)) \in (\eta_{L_1})_{\vartheta(v)}$.

Определим класс n-мерных лабиринтов, поскольку большая часть работ касается лабиринтов именно этого класса или некоторых его подклассов.

Пусть $\varepsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \varepsilon_n = (0, 0, \ldots, 1)$ — единичные векторы евклидова пространства $\mathbf{R}^n$. Пусть $\mathbf{D}_n = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, -\varepsilon_1, \ldots, -\varepsilon_n\}$. В случае $n = 2$ и $n = 3$ вместо стандартных обозначений для единичных векторов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ и векторов $-\mathbf{i}, -\mathbf{j}, -\mathbf{k}$ будем, соответственно, пользоваться обозначениями **e**, **n**, **u**, **w**, **s** и **d**.

Лабиринт $L = (G, f, g, \eta) \in \mathscr{L}(\Omega, \Sigma)$ называется n-мерным евклидовым лабиринтом или просто n-мерным лабиринтом, $n \geqslant 2$, если он обладает следующими свойствами:

- $\Omega = \{\Lambda\}$ и $\Sigma = \mathbf{D}_n \cup \{\Lambda\}$;

- G является симметрическим орграфом без кратных дуг и петель;
- для любого $e \in E(L)$ имеет место включение $|e| \in \mathbf{D}_n$ и $|\bar{e}| = -|e|$;
- при любом $v \in V(L)$ для любых $e_1, e_2 \in E_v(L)$, $e_1 \neq e_2$, выполнено условие $|e_1| \neq |e_2|$;
- $\eta_v = \varnothing$ для любого $v \in V(L)$.

В последующем в обозначении (G, f, g, η) n-мерного лабиринта L будем опускать g, считая, конечно, что в любом конкретном случае функция g задана, а также будем опускать f и η, поскольку $f(v) = \Lambda$ и $\eta_v = \varnothing$ для любого $v \in V(L)$, и будем писать $L = (V, E)$, где $V = V(L) = V(G)$ и $E = E(L) = E(G)$. Например, лабиринт на рис. 1 является примером 2-мерного лабиринта (чтобы не перегружать рисунок, на нем изображено только по одной дуге любого ребра с ее направлением, при этом подразумевается существование противоположных дуг с соответствующими метками).

В последующем нам будет нужен один специальный класс n-мерных лабиринтов — класс змеевидных n-мерных лабиринтов. Змеевидным n-мерным лабиринтом называется n-мерный лабиринт L, у которого $\overline{G(L)}$ является связным графом, неизоморфным простому циклу, и у всех вершин степень меньше или равна 2. Ясно, что если лабиринт L конечный (множество $V(L)$ является конечным), то у него точно две концевые вершины, а если бесконечный, то у него есть одна концевая вершина или вообще нет концевых вершин.

Пусть M и N, $M \neq N$, — некоторые точки в $\mathbf{R}^n$. Говорим, что вектор $\overrightarrow{MN}$ является ω-вектором ($\omega \in \mathbf{D}_n$), если $\overrightarrow{MN} = \alpha\omega$ для некоторого $\alpha \in \mathbf{R}^+$; в таком случае говорим также, что вектор $\overrightarrow{MN}$ идет в направлении ω. Множество T отрезков в $\mathbf{R}^n$ называется регулярной конфигурацией отрезков (в $\mathbf{R}^n$), если любые два разных отрезка из этого множества могут иметь не больше одной общей точки, причем, если она у них есть, то она обязательно является концевой для обоих отрезков.

Назовем n-мерный лабиринт $L = (V, E)$, где $V \subseteq \mathbf{R}^n$, прямоугольным n-мерным лабиринтом, если

- для любых $u, v \in V$ из $(u, v) \in E$ следует, что $\overrightarrow{uv}$ идет в направлении $|(u, v)|$;
- $T = \{\overline{uv} \mid (u, v) \in E\}$ — регулярная конфигурация отрезков.

Для любой дуги (u, v) n-мерного прямоугольного лабиринта L, где $u = (x_1, \dots, x_n)$, $v = (y_1, \dots, y_n)$ — точки в $\mathbf{R}^n$, определим функцию $f_{u,v}\colon I \to \mathbf{R}^n$ такую, что

$$f_{u,v}(t) = (x_1 + (y_1 - x_1)t, \dots, x_n + (y_n - x_n)t).$$

Ясно, что семейство $\{f_{u,v} \mid (u, v) \in E(L)\}$ является $\mathbf{R}^n$-реализацией орграфа $G(L)$; назовем ее линейной или стандартной реализацией данного прямоугольного лабиринта L. Через $\bar{L}$ обозначим носитель этой реализации лабиринта L. Ясно, что помеченный носитель стандартной реализации лабиринта L определяет L полностью. Если некоторый прямоугольный n-мерный лабиринт задается через помеченный носитель его стандартной реализации, то говорим, что он задан стандартным способом. Например, на рис. 2 дается стандартное представление одного прямоугольного 2-мерного лабиринта.

В дальнейшем, прямоугольный 2-мерный лабиринт будем называть также и прямоугольным плоским лабиринтом.

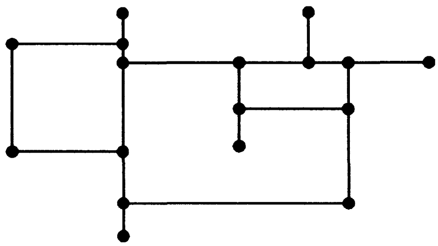


Рис. 2.

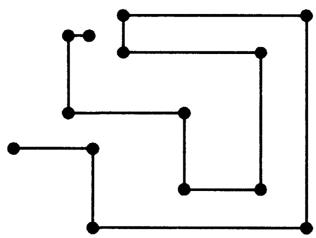
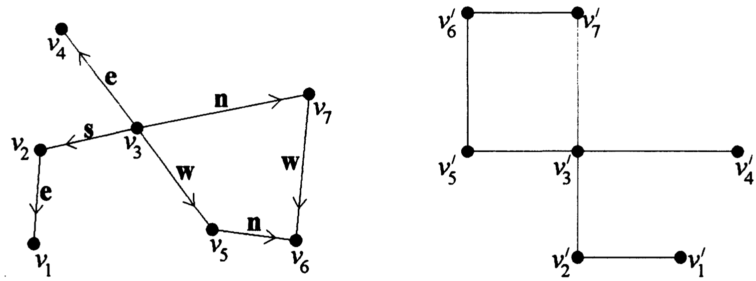


Рис. 3.

Говорим, что n-мерный лабиринт L является квазипрямоугольным, если L изоморфен некоторому прямоугольному n-мерному лабиринту и дуги, которые при этом соответствуют друг другу, несут одинаковые метки. Примером квазипрямоугольных лабиринтов являются все змеевидные лабиринты (на рис. 3 изображен пример прямоугольного плоского змеевидного лабиринта). Изображенный на рис. 4а 2-мерный лабиринт также является таковым, поскольку он изоморфен прямоугольному плоскому лабиринту, приведенному на рис. 4б (соответствующий изоморфизм отображает вершину v_i в вершину v_i' для любого $i \in \overline{7}$). С другой стороны, лабиринт, изображенный на рис. 1, очевидно, не является квазипрямоугольным.

Пусть $L = (V, E)$ — некоторый прямоугольный плоский лабиринт. Множество $\mathbf{R}^2 \setminus \bar{L}$



(а) (б)

Рис. 4.

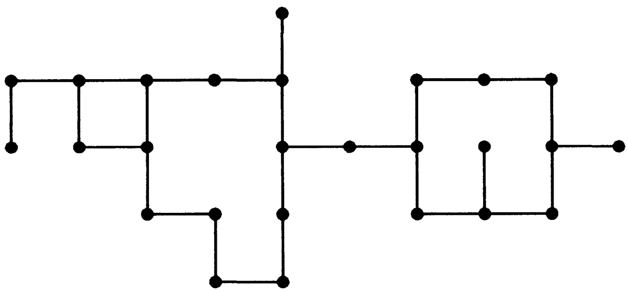


Рис. 5.

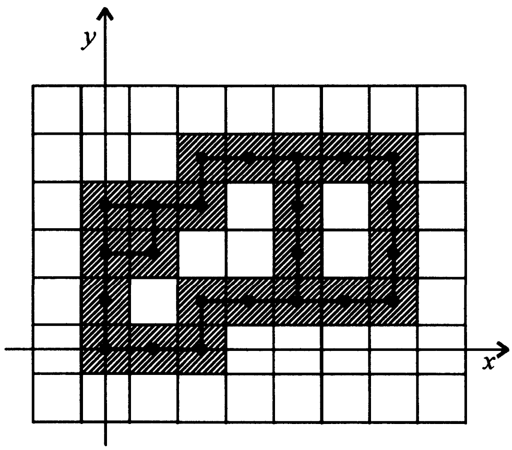


Рис. 6.

является открытым и в общем случае, если L, то есть $\overline{G(L)}$, не является деревом, несвязным; каждую из компонент связности этого множества назовем дырой (преградой) лабиринта L. Дыра может быть ограниченной или неограниченной. Лабиринт L назовем $(k+1)$-связным, если у него k ограниченных дыр, $k \in \mathbf{N}_0$. Например, лабиринт, изображенный на рис. 4б, является двусвязным, а на рис. 5 — 4-связным.

Прямоугольный n-мерный лабиринт $L = (V, E)$ назовем целочисленным n-мерным лабиринтом, если $V \subseteq \mathbf{Z}^n$. Целочисленный n-мерный лабиринт $L = (V, E)$ назовем m-мозаичным n-мерным лабиринтом ($m \in \mathbf{N}$), если длина отрезка $\overline{uv}$ равна m для любого $(u, v) \in E$. Вместо 1-мозаичный будем говорить просто мозаичный (см. рис. 5).

Конечный m-мозаичный n-мерный лабиринт $(L; u, v)$ называется m-правильным n-мерным лабиринтом, если существует бесконечный змеевидный m-мозаичный n-мерный лабиринт $(L_1; v)$ такой, что $\bar{L} \cap \bar{L}_1 = \{v\}$. Вместо 1-правильный будем говорить правильный.

Пусть L — некоторый целочисленный плоский лабиринт. Любое непустое множество вида $\Delta \cap \mathbf{Z}^2$, где Δ — дыра лабиринта L, назовем $\mathbf{Z}$-дырой или целочисленной дырой данного лабиринта; если при этом множество $\Delta \cap \mathbf{Z}^2$ (бесконечно) конечно, то его назовем (неограниченной) ограниченной целочисленной дырой. Например, у лабиринта, изображенного на рис. 6, три $\mathbf{Z}$-дыры — две конечные и одна бесконечная, а у лабиринта на рис. 5 две $\mathbf{Z}$-дыры. Целочисленный плоский лабиринт L назовем целочисленно $(k+1)$-связным лабиринтом ($k \in \mathbf{N}_0$), если у него точно k ограниченных $\mathbf{Z}$-дыр (вместо целочисленно 1-связный лабиринт обычно говорим целочисленно односвязный или $\mathbf{Z}$-односвязный лабиринт).

Проведем через вершины $\mathbf{Z}^n$ все прямые, параллельные осям координат. Обозначим также через $\mathbf{Z}^n$ мозаичный n-мерный лабиринт, у которого $\mathbf{Z}^n$ — множество вершин, а полученная фигура является носителем его линейной $\mathbf{R}^n$-реализации. Очевидно, что этот лабиринт является максимальным среди всех мозаичных n-мерных лабиринтов, так как любой мозаичный n-мерный лабиринт является связной симметрической частью лабиринта $\mathbf{Z}^n$. Любой связный подлабиринт лабиринта $\mathbf{Z}^n$ называется шахматным n-мерным лабиринтом. Иными словами, шахматный лабиринт — это мозаичный лабиринт, у которого любые две вершины, расстояние между которыми равно единице, являются смежными. На рис. 6 дается пример шахматного 2-мерного (плоского) лабиринта.

Остановимся на случае плоских шахматных лабиринтов. Построим единичный квадрат с центром в любой целочисленной точке из $\mathbf{Z}^2$ (см. рис. 6). Полученное покрытие плоскости квадратами напоминает бесконечную (нераскрашенную) шахматную доску; квадраты, элементы этого покрытия, представляют поля этой доски. Пусть теперь L — некоторый шахматный лабиринт. Поля, которые отвечают вершинам, принадлежащим лабиринту L, окрасим в черный цвет, остальные — в белый цвет. Ясно, что соседним вершинам в L отвечают соседние черные поля, то есть поля, у которых есть общая сторона; пусть $P(L)$ — множество всех черных полей. Ясно, что множество $P(L)$ удовлетворяет следующему условию: для любых двух полей $p_1, p_2 \in P(L)$ существует последовательность черных полей $p'_1 = p_1, p'_2, \ldots, p'_m = p_2$ такая, что поля p'_i и p'_{i+1}, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, являются соседними. Имеет место и обратное утверждение: если конфигурация черных полей удовлетворяет выше данному условию, то соответствующий прямоугольный плоский лабиринт (его ребра определены центрами соседних полей конфигурации) является шахматным.

Поскольку в дальнейшем мы будем часто иметь дело с некоторыми классами прямоугольных лабиринтов, введем следующие обозначения. Обозначим через $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{п}}$, $\mathfrak{L}^{\text{б}}_{\text{п}}$ и $\mathfrak{L}_{\text{п}}$, соответственно, классы всех конечных, всех бесконечных и всех (конечных и бесконечных) прямоугольных плоских лабиринтов; соответствующие классы мозаичных и шахматных лабиринтов обозначим через $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}$, $\mathfrak{L}^{\text{б}}_{\text{м}}$, $\mathfrak{L}_{\text{м}}$, $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{ш}}$, $\mathfrak{L}^{\text{б}}_{\text{ш}}$ и $\mathfrak{L}_{\text{ш}}$.

Пусть $(G, f, g, \eta, \Omega_1, \Sigma_1)$ — некоторый (Ω_1, Σ_1)-лабиринт. Этот лабиринт является (прямоугольным, целочисленным, мозаичным, ...) n-мерным лабиринтом, если соответствующий лабиринт (G, f, g, η) является таким же. Конечный плоский мозаичный $(\{\Lambda\}, \overline{m} \cup \{\Lambda\})$-лабиринт ($m \in \mathbf{N}$), назовем m-лабиринтом; m-лабиринт L называется m-деревом, если граф $\overline{G(L)}$ является деревом.

3. Поведение монстров в лабиринтах

В лабиринты всевозможных типов будем помещать разного рода математические машины. Самыми простыми из них являются конечные автоматы.

Под конечным автоматом $\mathfrak{A}$ понимаем пятерку (A, Q, B, φ, ψ), где A, B и Q суть конечные алфавиты: входной, выходной и состояний, соответственно; $\varphi\colon Q \times A \to Q$ и $\psi\colon Q\times A \to B$ суть функции переходов и выходов, соответственно. При фиксации начального состояния $q_0 \in Q$ имеем инициальный автомат $\mathfrak{A}_{q_0}$. Пусть A^* и B^* — множества всех слов $\alpha = \alpha(1)\dots\alpha(n)$ и $\beta = \beta(1)\dots\beta(n)$ над алфавитами A и B, соответственно. Под функционированием автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ понимаем отображение $f_{\mathfrak{A}_{q_0}}\colon A^* \to B^*$, определяемое рекуррентно

$$q(1) = q_0, \quad q(t+1) = \varphi(q(t),\alpha(t)), \quad \beta(t) = \psi(q(t),\alpha(t)).$$

В дальнейшем, в выражении конечный автомат часто будем опускать слово конечный. Множество входов, множество выходов, множество состояний, функцию переходов и функцию выходов для автомата $\mathfrak{A}$ часто будем обозначать, соответственно, через $A_{\mathfrak{A}}$, $B_{\mathfrak{A}}$, $Q_{\mathfrak{A}}$, $\varphi_{\mathfrak{A}}$ и $\psi_{\mathfrak{A}}$.

Ограниченность объема памяти конечного автомата накладывает ряд существенных ограничений на вычислительные возможности этого устройства. Поэтому мы также будем рассматривать конечные автоматы, снабженные бесконечной внешней памятью, организованной разными способами. В сущности, эти машины представляют собою разные модификации машины Тьюринга. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть имеется не ограниченная справа лента M, разбитая на ячейки, пронумерованные последовательно числами $0, 1, 2, \dots$. В ее ячейке с номером 0 записан один специальный символ a_M, который никогда не стирается и не может быть записан ни в какую другую ячейку. Далее, предположим наличие конечного алфавита A_M ($a_M \notin A_M$), содержащего пустой символ Λ. Символы алфавита A_M могут быть записаны в любой ячейке, кроме ячейки с номером 0. Лента M в таком случае называется магазином.

Под автоматом с магазинной памятью будем понимать конечный автомат, снабженный одним или несколькими магазинами. Опишем работу автомата с одним магазином.

За работой такого устройства можно следить в дискретные моменты времени $t \in \mathbf{N}_0$. В начале работы (в момент $t = 0$) автомат обозревает ячейку магазина с номером 0; во всех остальных ячейках записан пустой символ Λ. В моменты времени $t \in \mathbf{N}$ это устройство детерминированно меняет свое внутреннее состояние и содержимое магазина. Допустим, что в момент времени t, когда автомат находится в каком-то состоянии q_t, на входе у него появляется буква a'_t и в качестве самого правого непустого символа лента M имеет символ a_t в ячейке с номером m_t, где $a_t \in A_M$, если $m_t \neq 0$, и $a_t = a_M$, если $m_t = 0$; говорят также, что в этот момент автомат обозревает ячейку с номером m_t, то есть головка автомата находится напротив клетки с номером m_t. В следующий момент устройство

(а) переходит во внутреннее состояние q_{t+1}, которое зависит от q_t, a'_t и a_t;

(б) если $m_t = 0$, то, начиная с ячейки с номером 1, оно записывает слово $\alpha_{t+1} = \alpha(q, a'_t, a_t)$; если $m_t \neq 0$, то уничтожает символ в ячейке m_t и, начиная с ячейки с номером m_t, записывает слово α_{t+1} (таким образом, если $\alpha_{t+1} = \Lambda$ и $m_t \neq 0$, то действие автомата состоит только в стирании символа, оказавшегося в ячейке m_t);

(в) на выходе появляется символ $b_t = b_t(q_t, a'_t, a_t)$;

(г) автомат переходит к обозреванию ячейки $m_t + |\alpha_{t+1}| - 1$, если $m_t > 0$, и ячейки с номером $m_t + |\alpha_{t+1}|$, если $m_t = 0$.

Таким образом, автомат с одним магазином всегда обозревает ячейку магазинной ленты с наибольшим номером среди тех, в которых записан непустой символ, и все изменения в магазине происходят только в окрестности обозреваемой ячейки.

В качестве автомата с одним магазином будем рассматривать ту его разновидность, у которой слово α_{t+1} является пустым, однобуквенным или содержащим две буквы, первая из которых обязательно является буквой a_t; ясно, что в таком случае $|m_{t+1} - m_t| \leqslant 1$. Здесь следует отметить, что в связи с проблемами, которые рассматривались и касались поведения таких машин в лабиринтах, это условие не накладывает никаких существенных ограничений.

Работа автомата с несколькими магазинами определяется аналогично. Она детерминированным образом зависит от внутреннего состояния устройства, от входной буквы и от содержимого всех обозреваемых ячеек магазинов.

Магазин M, алфавит которого A_M содержит только один непустой символ, называется счетчиком. Содержательно, в счетчике может храниться любое число из множества $\mathbf{N}_0$. Автомат с таким магазином (с такими магазинами) называем автоматом со счетчиком (со счетчиками).

Под стеком мы будем понимать такую разновидность магазина, которая позволяет автомату углубляться в массив заполненных ею ячеек (содержащих непустой символ), причем автомат может читать записанные в них символы, не стирая при этом содержимое ячеек магазина с большими номерами, но может изменять только или содержимое ячейки с наибольшим номером среди заполненных (если обозревает эту ячейку и если, конечно, она не является нулевой), или содержимое первой незаполненной ячейки (переходя к обозреванию этой ячейки). Устройство такого рода назовем автоматом со стеком (допускаем и случай, когда автомат снабжен и несколькими такими магазинами).

Наконец, вместо ленты, разбитой на клетки, которая бесконечна в одну сторону, можно снабдить автомат лентой бесконечной в обе стороны, или лентой, которая в любой момент конечна, но ее размер, например, есть некоторая функция от числа вершин лабиринта, в который такой автомат помещается. Могут допускаться разные сочетания таких лент, у автомата может быть одна или больше головок, с помощью которых он обозревает содержимое этих лент, могут накладываться разные ограничения на записывание и стирание символов в клетках этих лент. Все эти машины являются разновидностями машины Тьюринга или разновидностями ее многоголовочного или многоленточного варианта.

Если теперь какую-то из выше данных машин поместить в некоторый лабиринт и добавить к уже приведенным ее возможностям и некоторые другие, которые касаются возможности изменения меток ребер и вершин лабиринта, то получим целый спектр лабиринтных машин. По аналогии с некоторыми очень распространенными на сегодняшний день компьютерными играми эти машины будем называть лабиринтными монстрами или просто монстрами. Конечно, чтобы они были способны передвигаться в лабиринтах (то есть, чтобы для них лабиринты были средой обитания), они должны удовлетворять некоторым требованиям, касающимся входного алфавита, выходного алфавита и функции выходов. Если эти требования будут удовлетворены по отношению к какому-то классу лабиринтов, мы будем говорить, что данный монстр является допустимым для данного класса лабиринтов. Дадим сейчас одну достаточно общую схему, которая охватывает всевозможные частные случаи, изложенные ниже. Эту схему можно формализовать, но здесь мы не будем делать это. Схема будет описывать монстров через некоторые свойства, которыми (или, может быть, частью которых, но не всеми) желательно было бы наделить их.

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс лабиринтов из $\mathscr{L}(\Omega, \Omega_1, \Sigma, \Sigma_1)$. Автомат (автоматически функционирующее устройство, работающее в дискретном времени) $\mathscr{A}$ называется $\mathfrak{L}$-монстром, если он обладает следующими свойствами.

(a) У него есть конечная внутренняя память, которая может сочетаться с бесконечной внешней памятью, организованной разными способами (в виде одного или нескольких магазинов, счетчиков, стеков, в виде одной или нескольких бесконечных лент таких, как у машины Тьюринга и т. п.). Обозначим множество его состояний через $Q_{\mathcal{A}}$. В случае, когда у $\mathcal{A}$ есть внешняя память, можно предположить, что элементы множества $Q_{\mathcal{A}}$ имеют вид (q, α), где q — состояние его внутренней памяти, а через α кодируется состояние его внешней памяти, то есть информация о значениях содержимого всех обозреваемых клеток всех его внешних лент.

(б) Автомат может быть помещен в произвольный лабиринт $L \in \mathfrak{L}$, и если он помещен в L, то он может сразу оказаться в нескольких вершинах этого лабиринта одновременно, так как у него есть конечное множество $\mathcal{H}$ лабиринтных головок (эти головки не надо путать с головками его внешней памяти), которые могут находиться, в общем случае, в $|\mathcal{H}|$ различных вершинах лабиринта L.

(в) При помещении в некоторый лабиринт $L \in \mathfrak{L}$ автомат может передвигаться в нем (менять расположение своих головок в L), исходя из локальной информации, доступной ему (см. ниже), и его состояния, и при этом может передвигать, брать с собою или оставлять в вершинах лабиринта L или на его дугах камни (флажки, маркеры). Камни представляют своего рода конечную внешнюю память. Их количество не увеличивается и не уменьшается, и они сами по себе не передвигаются по лабиринту. Оставляя их в вершинах или на дугах, монстр отмечает таким способом некоторые из этих вершин и дуг. Можем предположить существование у монстра камней двух сортов: первыми монстр отмечает только вершины (вершинные камни), вторыми — только дуги или ребра (реберные камни). Каждый из камней может быть или в лабиринте (отмечая таким способом некоторую дугу или вершину) или на руках у любой из головок, или на общем складе, так что каждая из головок имеет доступ к нему. Также предполагается, что каждая головка по-своему видит камни, они для нее окрашены, причем те, у которых одинаковый цвет, она не различает.

(г) Автомат $\mathcal{A}$ в вершинах из L, в которых оказалась любая из его головок, собирает локальную информацию, находящуюся в поле зрения любой из этих головок (здесь под полем зрения некоторой его головки, оказавшейся в вершине $v \in V(L)$, понимается некоторая конечная слабо связанная часть лабиринта L, содержащая вершину v, причем каждая головка имеет свое поле зрения), и эта информация представляет собою в общем случае часть полной информации о метках вершин и дуг, лежащих внутри этих полей зрения, и о распределении камней и других головок внутри них. При этом каждая из головок по-своему различает как другие головки, так и камни; другими словами, камни, как выше отмечалось, а также и головки, окрашены в разные цвета, причем раскраска зависит от данной головки, так что камни (головки), окрашенные в один цвет, головка не различает. Форма поля зрения конкретной головки, оказавшейся в некоторой вершине, зависит от множества факторов, среди которых может быть состояние монстра, относительное распределение головок, форма лабиринта в окрестности данной вершины, присутствие камней в этой вершине и ее окрестности и т. п.

(д) Автомат в любом лабиринте $L \in \mathfrak{L}$, в зависимости от собранной локальной информации и от состояния его памяти (внешней и внутренней) в некоторый момент t, выбирает для любой своей лабиринтной головки $\mathfrak{h}$, оказавшейся в вершине $v_t(\mathfrak{h})$, вершину $v_{t+1}(\mathfrak{h})$ из поля зрения этой головки и передвигает головку так, что ее местоположением в момент $t+1$ будет уже вершина $v_{t+1}(\mathfrak{h})$, причем любой автоморфизм поля зрения этой головки в момент t, который оставляет на месте вершину $v_t(\mathfrak{h})$, оставляет на месте и вершину $v_{t+1}(\mathfrak{h})$ (автоморфизм учитывает не только отметки ребер и дуг, но и распределение камней и головок).

(е) Автомат $\mathcal{A}$ может менять состояние лабиринта $L \in \mathfrak{L}$, в который он помещен, то есть автомат, двигаясь по лабиринту L, может менять метки из (Σ_1) Ω_1 (дуг) вершин, принадлежащих полю зрения некоторой из головок, на другие метки из (Σ_1) Ω_1, причем все (дуги) вершины, у которых изменена метка, при вышеописанных автоморфизмах должны оставаться на месте.

(ж) У $\mathfrak{L}$-монстра $\mathcal{A}$ некоторые состояния выделены в качестве финальных. Если монстр при движении в каком-то лабиринте $L \in \mathfrak{L}$ в некоторый момент t оказывается в одном из таких состояний, например, q, то в любой последующий момент, не меняя местоположения своих головок, он сохраняет состояние q (в таком случае будем говорить, что монстр $\mathcal{A}$ останавливается в состоянии q).

Чтобы избежать множество конфликтных ситуаций (например, две головки в одно и то же время забирают один и тот же камень, машина пытается поменять метки вершин или дуг в одно и то же время на разные метки) предположим, что $\mathcal{A}$ удовлетворяет обязательно следующему условию:

(з) $\mathfrak{L}$-монстр $\mathcal{A}$ является допустимым монстром для класса $\mathcal{L}$, то есть бесконфликтным автоматом, который может бесконечно (работать) двигаться в любом лабиринте из данного класса.

Поясним это последнее требование подробнее.

Пусть $\mathcal{A}$ — некоторый $\mathfrak{L}$-монстр, $\mathcal{H}$ — множество его лабиринтных головок, $\mathcal{K}_V$ — множество его вершинных камней, $\mathcal{K}_E$ — множество его реберных камней, и пусть L — некоторый лабиринт из $\mathfrak{L}$. Под погружением $\mathcal{A}$ в лабиринт L подразумеваем любой набор вида $(q, l_{\mathcal{H}}, l_{\mathcal{K}_V}, l_{\mathcal{K}_E}, (f, g))$, где функцией $l_{\mathcal{H}}\colon \mathcal{H} \to V(L)$ дана расстановка лабиринтных головок, функциями $l_{\mathcal{K}_V}\colon \mathcal{K}_V \to V(L) \cup \mathcal{H} \cup \{\mu\}$, $l_{\mathcal{K}_E}\colon \mathcal{K}_E \to E(L) \cup \mathcal{H} \cup \{\mu\}$ ($\mu \notin V(L) \cup E(L) \cup \mathcal{H}$) задано распределение, соответственно, вершинных и реберных камней, при этом, если для некоторого $\kappa \in \mathcal{K}_V$ ($\kappa \in \mathcal{K}_E$) имеет место включение $l_{\mathcal{K}_V}(\kappa) \in \mathcal{H}$ ($l_{\mathcal{K}_E}(\kappa) \in \mathcal{H}$), то камень κ на руках у головки $l_{\mathcal{K}_V}(\kappa)$ ($l_{\mathcal{K}_E}(\kappa)$), если имеет место равенство $l_{\mathcal{K}_V}(\kappa) = \mu$ ($l_{\mathcal{K}_E}(\kappa) = \mu$), то камень κ находится на общем складе, q — некоторое состояние монстра и (f, g) — некоторое состояние лабиринта L. Любое погружение определяет некоторую лабиринтную ситуацию для $\mathcal{A}$, оно описывает местоположение этого монстра (его головок и камней) в лабиринте, а также его состояние и состояние лабиринта.

Пусть $(q, l_{\mathcal{H}}, l_{\mathcal{K}_V}, l_{\mathcal{K}_E}, (f, g))$ и $(q', l'_{\mathcal{H}}, l'_{\mathcal{K}_V}, l'_{\mathcal{K}_E}, (f', g'))$ — некоторые два погружения данного $\mathfrak{L}$-монстра $\mathcal{A}$ в L. Говорим, что погружение $(q, l_{\mathcal{H}}, l_{\mathcal{K}_V}, l_{\mathcal{K}_E}, (f, g))$ $\mathcal{A}$-влечет погружение $(q', l'_{\mathcal{H}}, l'_{\mathcal{K}_V}, l'_{\mathcal{K}_E}, (f', g'))$, и пишем

$$(q, l_{\mathcal{H}}, l_{\mathcal{K}_V}, l_{\mathcal{K}_E}, (f, g)) \to_{\mathcal{A}} (q', l'_{\mathcal{H}}, l'_{\mathcal{K}_V}, l'_{\mathcal{K}_E}, (f', g')),$$

если $\mathcal{A}$, оказавшись в момент t дискретного времени в лабиринтной ситуации, определенной первым погружением, переводит ее в следующий момент $t+1$ в лабиринтную ситуацию, определенную вторым погружением.

Пусть $(q, l_{\mathcal{H}}, l_{\mathcal{K}_V}, l_{\mathcal{K}_E}, (f, g))$ — некоторое погружение $\mathcal{A}$ в L. Под поведением $\mathfrak{L}$-монстра $\mathcal{A}$ с начальным погружением $(q, l_{\mathcal{H}}, l_{\mathcal{K}_V}, l_{\mathcal{K}_E}, (f, g))$ в лабиринте L назовем бесконечную последовательность погружений

$$(q^{(0)}, l_{\mathcal{H}}^{(0)}, l_{\mathcal{H}_V}^{(0)}, l_{\mathcal{H}_E}^{(0)}, (f^{(0)}, g^{(0)})), (q^{(1)}, l_{\mathcal{H}}^{(1)}, l_{\mathcal{H}_V}^{(1)}, l_{\mathcal{H}_E}^{(1)}, (f^{(1)}, g^{(1)})), \ldots$$

такую, что

$$(q^{(0)}, l_{\mathcal{H}}^{(0)}, l_{\mathcal{H}_V}^{(0)}, l_{\mathcal{H}_E}^{(0)}, (f^{(0)}, g^{(0)})) = (q, l_{\mathcal{H}}, l_{\mathcal{H}_V}, l_{\mathcal{H}_E}, (f, g))$$

и

$$(q^{(i)}, l_{\mathcal{H}}^{(i)}, l_{\mathcal{H}_V}^{(i)}, l_{\mathcal{H}_E}^{(i)}, (f^{(i)}, g^{(i)})) \to_{\mathcal{A}} (q^{(i+1)}, l_{\mathcal{H}}^{(i+1)}, l_{\mathcal{H}_V}^{(i+1)}, l_{\mathcal{H}_E}^{(i+1)}, (f^{(i+1)}, g^{(i+1)}))$$

для любого $i \in \mathbf{N}_0$. Монстр $\mathcal{A}$ является допустимым для L, если для любого его погружения существует соответствующее поведение. Монстр $\mathcal{A}$ является допустимым для класса $\mathfrak{L}$, если $\mathcal{A}$ допустим для любого $L \in \mathfrak{L}$.

Говорим, что $\mathcal{A}$ с начальным погружением $(q, l_{\mathcal{H}}, l_{\mathcal{H}_V}, l_{\mathcal{H}_E}, (f, g))$ обходит лабиринт L, если

$$\operatorname{Int}(\mathcal{A}, L) = \bigcup_{i=1}^{\infty} l_{\mathcal{H}}^{(i)}(\mathcal{H}) = V(L).$$

Некоторый лабиринт $L \in \mathfrak{L}$ является ловушкой для $\mathcal{A}$ с начальным погружением $(q, l_{\mathcal{H}}, l_{\mathcal{H}_V}, l_{\mathcal{H}_E}, (f, g))$, если $\mathcal{A}$ с начальным погружением $(q, l_{\mathcal{H}}, l_{\mathcal{H}_V}, l_{\mathcal{H}_E}, (f, g))$ не обходит L, то есть, если $\operatorname{Int}(\mathcal{A}, L) \neq V(L)$.

В качестве лабиринтного $\mathfrak{L}$-монстра могут выступать конечные автоматы, автоматы с одним или несколькими магазинами, счетчиками или стеками, машина Тьюринга. В качестве монстра могут выступать также и коллективы таких машин, то есть коллективы монстров. Коллектив монстров — это система монстров, которые могут друг с другом взаимодействовать, то есть могут общаться между собой. Легко убедиться, что такие коллективы также являются монстрами; эти монстры условно можем назвать сверхмонстрами.

В качестве примеров $\mathfrak{L}$-монстров рассмотрим здесь конечные (Ω, Σ)-автоматы и независимые системы таких автоматов. Эти монстры являются допустимыми для класса лабиринтов $\widetilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$. Класс $\widetilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$, где Ω и Σ — некоторые конечные множества, определяется так: некоторый лабиринт L из $\mathcal{L}(\Omega \cup \{\Lambda\}, \Sigma \cup \{\Lambda\})$ принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$ тогда и только тогда, когда

(1) $|e_1| \neq |e_2|$ для любых $v \in V(L)$ и $e_1, e_2 \in E_v(L)$, $e_1 \neq e_2$;

(2) $|v| \in \Omega$ и $|e| \in \Sigma$ для любых $v \in V(L)$ и $e \in E(L)$.

Например, любой n-мерный лабиринт принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{L}}(\{\Lambda\}, \mathbf{D}_n)$.

Пусть Ω и Σ — некоторые конечные множества. Под конечным (Ω, Σ)-автоматом $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ подразумеваем автомат, у которого входной алфавит A состоит из букв a вида $(\omega, \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\})$, где $\omega \in \Omega$ и $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\} \subseteq \Sigma$, выходной алфавит B есть множество $\Sigma \cup \{\theta\}$, где $\theta \notin \Sigma$ — некоторый фиксированный символ, смысл которого поясним ниже, а функция выходов ψ удовлетворяет условию

$$\psi(q, a) \in \mathbf{p}_2(a) \cup \{\theta\}$$

для всех $q \in Q$ и $a \in A$.

Пусть $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ — некоторый конечный (Ω, Σ)-автомат. Определим лабиринтный монстр $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$, допустимый для класса $\widetilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$ следующим образом. Множеством состояний монстра $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ является множество Q. У монстра $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ отсутствуют камни, множество его головок состоит из одной-единственной головки, поле зрения этой головки всегда имеет следующий вид: если монстр находится в вершине v лабиринта $L \in \tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$, то полем зрения его головки является нагруженный орграф $(W_v, E_v(L), f_v, g_v)$, где

$$W_v = \{v\} \cup \{\iota_2(e) \mid e \in E_v(L)\},$$

$f_v(u) = f_L(u) = |u| \in \Omega$ для всех $u \in W_v$ и $g_v(e) = g_L(e) = |e| \in \Sigma$ для любой дуги $e \in E_v(L)$. Монстр $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ будет лабиринтным монстром без печати, то есть он не будет менять метки ни вершин, ни дуг лабиринта L. Локальная информация, которая в таком случае предоставляется монстру, состоит из метки $|v| \in \Omega$ вершины v и меток $|e|$, $e \in E_v(L)$, то есть является парой вида $(|v|, [v])$ и, следовательно, имеет вид входных букв для $\mathfrak{A}$. Закон движения монстра $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ будет следующим: если он оказался в вершине v лабиринта $L \in \tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$ и его состояние есть q, то в случае, когда $\psi(q, a) = \theta$, где $a = (|v|, [v])$, монстр остается на месте (в вершине v), а в случае, когда $\psi(q, a) \in \mathbf{p}_2(a)$ монстр переходит в вершину $v' \in W_v \setminus \{v\}$ такую, что $|(v, v')| = \psi(q, a)$. Ясно, что условие $\psi(q, a) \in \mathbf{p}_2(a) \cup \{\theta\}$ обеспечивает то, что такая вершина v' всегда существует, то есть это условие обеспечивает допустимость монстра $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ для класса $\tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$. Поскольку автомат $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \psi, \varphi)$ полностью определяет монстр $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$, то, когда будем говорить о конечном (Ω, Σ)-автомате $\mathfrak{A}$, допустимом для $\tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$, мы, на самом деле, будем иметь в виду монстр $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$. В дальнейшем вместо конечный (Ω, Σ)-автомат $\mathfrak{A}$, допустимый для $\tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$, будем говорить автомат $\mathfrak{A}$, допустимый для $\tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$. Класс всех допустимых автоматов для $\tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$ обозначим через $\mathrm{Aut}(\Omega, \Sigma)$.

В случае, когда в качестве монстра выступает конечный (Ω, Σ)-автомат $\mathfrak{A}$, мы немного изменим терминологию. Поскольку у $\mathfrak{A}$ одна головка, то ясно, что любое его погружение в некоторый лабиринт $L \in \tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$ можно описать парой вида (q, v), где $q \in Q_{\mathfrak{A}}$ и $v \in V(L)$. Теперь вместо того, чтобы говорить о поведении автомата $\mathfrak{A}$ с некоторым начальным погружением (q_0, v_0) в лабиринте L, будем говорить о поведении инициального автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте L_{v_0} (автомат $\mathfrak{A}_{q_0}$ называем инициальным допустимым автоматом для класса $\tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$). Таким образом, последовательность пар

$$\pi(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0}) = (q_0, v_0), (q_1, v_1), \ldots$$

называется поведением автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте L_{v_0}, если v_{i+1} есть вершина лабиринта L_{v_0}, в которую автомат, находясь в состоянии q_i, переходит из вершины v_i, а q_{i+1} есть состояние автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$, которое при этом автомат принимает; пару (q_i, v_i) из поведения $\pi(\mathfrak{A}_{q_0}, L)$ будем обозначать через $\pi_i(\mathfrak{A}_{q_0}, L)$. Слово $\psi(q_0, a_0)\psi(q_1, a_1)\psi(q_2, a_2)\ldots$, где a_i — входная буква для автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в момент i, назовем Σ-траекторией автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте L_{v_0} и обозначим его через $\mathrm{Tr}_\Sigma(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0})$. Заменим в $\mathrm{Tr}_\Sigma(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0})$ все вхождения однобуквенного слова θ на пустое слово Λ, и пусть $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots$ — таким способом полученное слово. Последовательность дуг $e_1, e_2, \ldots$ лабиринта L_{v_0} такая, что $|e_i| = \sigma_i$ для всех $i \in \mathbf{N}$, называется E-траекторией автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте L_{v_0}; обозначим ее через $\mathrm{Tr}_E(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0})$. Наконец, последовательность вершин $v_0, v_1, v_2, \ldots$, называется V-траекторией автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте L_{v_0} и обозначается через $\mathrm{Tr}_V(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0})$. Говорим, что $\mathfrak{A}_{q_0}$ обходит некоторую вершину u лабиринта L_{v_0}, если $u = v_i$ для некоторого $i \in \mathbf{N}$. Обозначим множество всех вершин, которые обходит $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте L_{v_0}, через $\mathrm{Int}(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0})$, а которые обходит $\mathfrak{A}_{q_0}$ до момента t включительно — через $\mathrm{Int}_t^{\leqslant}(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0})$. Если $\mathrm{Int}(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0}) = V(L_{v_0})$, то говорим, что $\mathfrak{A}_{q_0}$ обходит L_{v_0}; в противном случае L_{v_0} является ловушкой для $\mathfrak{A}_{q_0}$.

Если рассматривается поведение автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте $L = (V, E; v'; v'')$, то в случае, когда $v'' \in \mathrm{Int}(\mathfrak{A}_{q_0}, L)$, говорим, что $\mathfrak{A}_{q_0}$ выходит из лабиринта L; в противном случае говорим, что L — ловушка для $\mathfrak{A}_{q_0}$.

В случае инициального автомата $\mathfrak{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, допустимого для класса $\widetilde{\mathcal{L}}(\{\Lambda\}, \mathbf{D}_n)$, можно предположить, что $A = \mathfrak{B}(\mathbf{D}_n)$, $B = \mathbf{D}_n \cup \{\mathbf{0}\}$ и $\psi(q, a) \in a \cup \{\mathbf{0}\}$ для всех $q \in Q$ и $a \in A$. Тогда поведение автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в n-мерном лабиринте L_{v_0} задается последовательностью

$$\pi(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0}): \quad (q_0, v_0), (q_1, v_1), \dots ,$$

где $q_{i+1} = \varphi(q_i, [v_i]_L)$ и $v_{i+1} = v_i + \psi(q_i, [v_i]_L)$ для любого $i \in \mathbf{N}_0$.

Вышеприведенные понятия можно расширить до любых сочетаний инициальных или неинициальных автоматов и лабиринтов. Чтобы описать все эти случаи, поступим так. Пусть $L \in \widetilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$ и $\mathfrak{A} \in \mathrm{Aut}(\Omega, \Sigma)$, причем и L и $\mathfrak{A}$ могут быть как инициальными, так и неинициальными. Введем понятия "$\alpha\beta$-обходит" и "$\beta\alpha$-ловушка", где $\alpha, \beta \in \{\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{E}\}$. Если $\alpha = \mathrm{I}$, ($\alpha \neq \mathrm{I}$), то $\mathfrak{A}$ является инициальным (неинициальным) автоматом, а если $\beta = \mathrm{I}$ ($\beta \neq \mathrm{I}$), то L является инициальным (неинициальным) лабиринтом. Слово А указывает на то, что понятия "обходит" и "ловушка" относятся ко всем вершинам данного неинициального лабиринта L или ко всем состояниям данного неинициального автомата $\mathfrak{A}$, а слово E — на то, что они относятся только к некоторым вершинам данного неинициального лабиринта L или к некоторым состояниям данного автомата $\mathfrak{A}$. Так, например, $L_{v_0} \in \widetilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$ является IA-ловушкой для $\mathfrak{A} \in \mathrm{Aut}(\Omega, \Sigma)$, если для всех $q \in Q_{\mathfrak{A}}$ лабиринт L_{v_0} является ловушкой для $\mathfrak{A}_q$. Автомат $\mathfrak{A} \in \mathrm{Aut}(\Omega, \Sigma)$ AA-обходит лабиринт $L \in \widetilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$, если для всех $q \in Q_{\mathfrak{A}}$ и всех $v \in V(L)$ автомат $\mathfrak{A}_q$ обходит лабиринт L_v. Для более короткой записи примем следующее соглашение: букву E всегда будем писать, букву I всегда будем пропускать, букву A пропускаем, если она одна или в сочетании с еще одной буквой A. Ясно, что при таком соглашении из того, как заданы автомат и лабиринт, следует, какие значения принимают буквы α и β. Так, например, если $\alpha, \beta \in \{\mathrm{I}, \mathrm{A}\}$, то вместо $\alpha\beta$-обходит и $\beta\alpha$-ловушка говорим обходит и ловушка.

Говорим, что (неинициальный) инициальный автомат $\mathfrak{A}$ является универсальным обходчиком класса $\mathfrak{L}$ инициальных лабиринтов, если $\mathfrak{A}$ (AI-обходит) II-обходит любой лабиринт $L \in \mathfrak{L}$.

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс неинициальных лабиринтов. Множество

$$[\mathfrak{L}] = \{L_v \mid L \in \mathfrak{L} \text{ и } v \in V(L)\}$$

называется инициальным замыканием множества $\mathfrak{L}$. Говорим, что инициальный (или неинициальный) автомат $\mathfrak{A}$ является универсальным обходчиком класса $\mathfrak{L}$, если $\mathfrak{A}$ является универсальным по отношению к классу $[\mathfrak{L}]$. Другими словами, (неинициальный) инициальный автомат $\mathfrak{A}$ является универсальным обходчиком класса $\mathfrak{L}$, если (AA-обходит) IA-обходит любой лабиринт $L \in \mathfrak{L}$.

Наряду с поведением автомата в лабиринте можно также рассмотреть поведение системы автоматов в лабиринте. Под системой автоматов будем понимать любое конечное индексированное семейство автоматов (следовательно, среди этих автоматов может быть и несколько копий одного и того же автомата). Пусть J — некоторое конечное множество индексов. Семейство вида $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}^j, j \in J)$, где $\mathfrak{A}^j = (A_j, Q_j, B_j, \varphi_j, \psi_j)$ — конечный автомат, допустимый для класса лабиринтов $\widetilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$, называется J-системой автоматов (или просто системой автоматов, если специально не оговаривается множество индексов J), допустимой для $\widetilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$. J-система автоматов является (инициальной) неинициальной, если $\mathfrak{A}^j$ является (инициальным) неинициальным автоматом для любого $j \in J$. Пусть $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}^j, j \in J)$ — неинициальная система автоматов. Если $\vec{q} = (q_j, j \in J)$ — семейство состояний q_j из множества $\bigcup_{j \in J} Q_{\mathfrak{A}^j}$ такое, что $q_j \in Q_{\mathfrak{A}^j}$ для любого $j \in J$, то через $\mathcal{A}_{\vec{q}}$ обозначим инициальную систему автоматов $(\mathfrak{A}^j_{q_j}, j \in J)$. Две системы автоматов $\mathscr{A} = (\mathfrak{A}^j, j \in J)$ и $\mathscr{A}' = (\widehat{\mathfrak{A}}^{j'}, j' \in J')$ считаем изоморфными, если существует взаимно однозначное отображение $\overset{*}{j}\colon J \to J'$ такое, что $\mathfrak{A}^j = \widehat{\mathfrak{A}}^{\overset{*}{j}(j)}$ для любого $j \in J$.

Поскольку множество J конечно, в качестве множества индексов можно взять множество $\bar{n}$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$. Учитывая стандартное отношение порядка среди натуральных чисел, можем теперь систему автоматов писать в виде упорядоченного набора длины n, у которого на i-м месте находится автомат с индексом i. Порядок автоматов в наборе несуществен, им только отмечается то, что автомат на i-м месте в этом наборе имеет индекс i. Чтобы иметь это в виду, вместо круглых скобок будем использовать угловые. Таким образом, будем писать

$$\mathscr{A} = \langle \mathfrak{A}^1_{q_1}, \dots, \mathfrak{A}^n_{q_n} \rangle.$$

В данном случае вместо выражения J-система будем употреблять выражение n-система.

Пусть $L \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \Sigma)$, и пусть $f\colon J \to V(L)$ — любое отображение множества J в множество $V(L)$. Пару вида (L, f) будем называть, J-лабиринтом; вместо (L, f) часто в последующем будем писать L_f. Как и в случае системы автоматов, можем вместо L_f писать $L_{\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle}$ или даже $L_{v_1, \dots, v_n}$, где $v_i = f(i)$ для любого $i \in \bar{n}$. Если $f(j) = v_0$ для некоторого $v_0 \in V(L)$ и для всех $j \in J$, то вместо L_f пишем L_{v_0}, и данный J-лабиринт отождествляем с соответствующим 1-инициальным лабиринтом.

Пусть $\mathscr{A}_{\vec{q}} = (\mathfrak{A}^j_{q_j}, j \in J)$ — некоторая инициальная J-система автоматов, допустимая для класса $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \Sigma)$, и пусть $L_f \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \Sigma)$ — некоторый J-лабиринт. Если под поведением системы $\mathscr{A}_{\vec{q}}$ в L_f понимаем семейство поведений $(\pi(\mathfrak{A}^j_{q_j}, L_{f(j)}), j \in J)$, то эту систему называем независимой, а само поведение — поведением независимой системы. Если независимую систему записываем в виде $\langle \mathfrak{A}^1_{q_1}, \dots, \mathfrak{A}^n_{q_n} \rangle$, J-лабиринт — в виде $L_{v_1, \dots, v_n}$, то соответствующее поведение записываем в виде набора $\langle \pi(\mathfrak{A}^1_{q_1}, L_{v_1}), \dots, \pi(\mathfrak{A}^n_{q_n}, L_{v_n}) \rangle$.

Другими словами, система $\mathscr{A}$ является независимой системой, если любой из ее автоматов, двигаясь по лабиринту, не осознает факт существования ни одного из остальных автоматов. Поскольку понятие независимости можно очевидным способом распространить и на системы неинициальных автоматов, соответствующее определение здесь не приводим.

Если

$$\mathrm{Int}(\mathfrak{A}^i_{q_i}, L_{v_i}) = V$$

для некоторого $i \in \bar{n}$, то говорим, что $\mathscr{A}_{\vec{q}}$ обходит $L_{v_1, \dots, v_n}$, а если

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Int}(\mathfrak{A}^i_{q_i}, L_{v_i}) = V,$$

то говорим, что $\mathscr{A}_{\vec{q}}$ слабо обходит $L_{v_1, \dots, v_n}$. Если

$$\mathrm{Int}(\mathfrak{A}^i_{q_i}, L_{v_i}) \neq V$$

для всех $i \in \bar{n}$, то говорим, что $L_{v_1, \dots, v_n}$ является слабой ловушкой, а если

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Int}(\mathfrak{A}^i_{q_i}, L_{v_i}) \neq V,$$

то лабиринт $L_{v_1, \dots, v_n}$ назовем ловушкой для независимой системы $\mathscr{A}_{\vec{q}}$. Очевидно, что система $\mathscr{A}_{\vec{q}}$ обходит лабиринт $L_{v_1, \dots, v_n}$, если при некотором $i_0 \in \bar{n}$ автомат $\mathfrak{A}^{i_0}_{q_{i_0}}$ обходит лабиринт $L_{v_{i_0}}$, и что лабиринт L_v является слабой ловушкой для системы $\mathcal{A}_{\vec{q}}$, если этот лабиринт является ловушкой для любого автомата данной системы.

Как и в случае одного автомата, мы можем ввести аналогичным способом понятия $\alpha\beta$-обходит и $\beta\alpha$-ловушка (слабо $\alpha\beta$-обходит и слабая $\beta\alpha$-ловушка), где $\alpha \in \{\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{E}\}$ и $\beta \in \{\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{E}, \mathrm{I}_0, \mathrm{A}_0, \mathrm{E}_0\}$ (если $\beta \in \{\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{E}\}$, то идет речь о J-лабиринте, а если $\beta \in \{\mathrm{I}_0, \mathrm{A}_0, \mathrm{E}_0\}$, то, по существу, имеется в виду 1-инициальный лабиринт). Так, например, независимая система $\mathcal{A}_{\vec{q}} = \langle \mathfrak{A}^1_{q_1}, \ldots, \mathfrak{A}^n_{q_n} \rangle$ слабо IE-обходит лабиринт L, если существует отображение $f = \langle v_1, \ldots, v_2 \rangle$ такое, что для системы $\mathcal{A}_{\vec{q}}$ в лабиринте L_f

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Int}(\mathfrak{A}^i_{q_i}, L_{v_i}) = V(L);$$

лабиринт L является слабой AE-ловушкой для системы $\mathcal{A}$, если существует $\vec{q}$ такое, что при любом $f = \langle v_1, \ldots, v_2 \rangle$ для системы $\mathcal{A}_{\vec{q}}$ в лабиринте L_f

$$\mathrm{Int}(\mathfrak{A}^i_{q_i}, L_{v_i}) \neq V(L)$$

для всех $i \in \bar{n}$; лабиринт L является $\mathrm{A}_0\mathrm{A}$-ловушкой для системы $\mathcal{A}$, если для всех $\vec{q}$ и для всех $v \in V(L)$ для системы $\mathcal{A}_{\vec{q}}$ в лабиринте L_v

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Int}(\mathfrak{A}^i_{q_i}, L_v) \neq V(L).$$

Как и в случае одного автомата, возможны некоторые соглашения, которые упрощают данную выше терминологию. Поскольку далее в случае, когда α и β явно не указаны, всегда из контекста будет ясно, какие значения они принимают, то не будем приводить здесь эти соглашения.

Легко удостовериться, что независимая система автоматов является примером лабиринтного монстра.

Введем здесь одно обозначение, которое потребуется в следующем разделе. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторый класс автоматов. Для любого автомата $\mathfrak{A}$ из класса $\mathcal{A}$ возьмем всевозможные инициальные автоматы, которые получаются варьированием его начальной вершины; если автомат $\mathfrak{A}$ уже инициальный, то возьмем его и все те автоматы, которые получаются из него, когда его начальное состояние заменяем на его любое другое состояние. Класс всех таким способом полученных инициальных автоматов обозначим через $[\mathcal{A}]$ и назовем инициальным замыканием класса $\mathcal{A}$.

4. Поведение независимой системы автоматов в лабиринте

Рассмотрим задачу синтеза для независимых систем автоматов в плоских мозаичных лабиринтах; слово независимый в этом параграфе для краткости будем иногда опускать. Также будем предполагать в дальнейшем, что все автоматы (независимые системы автоматов) будут допустимыми для классов лабиринтов, о которых идет речь в каждом конкретном случае.

Теорема 1. *Не существует конечного инициального автомата, обходящего все конечные плоские мозаичные лабиринты, то есть такого, который бы был универсальным обходчиком для класса* $\mathfrak{L}^{\mathrm{K}}_{\mathrm{M}}$.

Это утверждение для конечных плоских шахматных лабиринтов фактически установлено в [8] с весьма громоздким обоснованием, использующим среди прочего и язык теории категорий. Элементарное и короткое доказательство теоремы 1 дается в [44, 45] (формальное отличие мозаичных и шахматных лабиринтов не является здесь существенным). Методически более наглядное доказательство этой теоремы содержится в [21, 38], техника которого позволила решить некоторые другие и упростить уже решенные задачи типа задач обхода [21, 40], о чем будет сказано ниже. После того, как доказана теорема 1, сразу ставится вопрос о том, что происходит, если вместо одного конечного автомата взять независимую систему автоматов. Оказывается, что с точки зрения ее вычислительной силы по отношению к проблеме обхода независимая система автоматов представляет лишь небольшой шаг вперед. Как и можно было ожидать, справедливо следующее аналогичное утверждение.

Теорема 2. *Не существует конечной независимой системы $\mathcal{A}$ инициальных автоматов, слабо обходящей все* 1*-инициальные лабиринты класса* $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}$.

Эта теорема формально обобщает теорему 1. Однако при доказательстве утверждения теоремы 2 ключевым фактом является справедливость теоремы 1 [1, 18, 19, 37]. Основной идеей доказательства этих двух теорем является построение соответствующих ловушек. В [8, 44, 45] проблема построения соответствующих плоских мозаичных ловушек сводится к построению 2-мерных квазипрямоугольных ловушек. В связи с этим возникает проблема точной характеризации 2-мерных квазипрямоугольных лабиринтов. Приведем одну такую характеризацию, установленную в [20]. Сначала дадим некоторые необходимые сведения.

Пусть (G, η) — некоторый (симметрический орграф) граф G вместе с системой вращения η. Пусть $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n$ — (контур) простой цикл такой, что $(e_{k+1} = \eta_{v_k}(\bar{e}_k))$ $e_{k+1} = \eta_{v_k}(e_k)$ для всех $k \in \overline{n-1}$, и $(e_1 = \eta_{v_0}(\bar{e}_n))$ $e_1 = \eta_{v_0}(e_n)$. Циклическую перестановку $f = (e_1, \ldots, e_n)$ (дуг) ребер данного (орграфа) графа G назовем гранью (G, η).

Эйлеровой характеристикой конечного графа (G, η) без петель и кратных ребер назовем число
$$\varepsilon(G, \eta) = |V(G)| - |E(G)| + |F(G)|,$$
где $F(G)$ — множество всех граней графа (G, η). Эйлерова характеристика конечного симметрического орграфа (G, η) без петель и кратных дуг есть число $\varepsilon(\bar{G}, \eta)$. Известно [28], что конечный (симметрический орграф) граф является планарным тогда и только тогда, когда $\varepsilon(G, \eta) = 2$.

Пусть τ — циклическая подстановка $(\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{w}, \mathbf{s})$ множества $\mathbf{D} = \{\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{w}, \mathbf{s}\}$. Определим функцию $\nu\colon \mathbf{D}^+ \to \mathbf{N}_0$ следующим образом:

(а) $\nu(\sigma) = 0$, если $\sigma \in \mathbf{D}$;

(б) $\nu(\sigma\sigma') = i \in \{1, 0, -1, -2\}$, где i таково, что $\sigma' = \tau^i(\sigma)$;

(в) $\nu(\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{k-1} \nu(\sigma_i\sigma_{i+1})$ для любого $\alpha = \sigma_1 \ldots \sigma_k \in \mathbf{D}^+$, $k \geqslant 2$.

Пусть $L = (V, E)$ — некоторый 2-мерный лабиринт. Введем каноническое вращение η_L^+ лабиринта L следующим образом. Пусть $D \subseteq \mathbf{D}$. Обозначим для любого $\sigma \in \mathbf{D}$ через $\tau_D(\sigma)$ значение $\tau^{k_0}(\sigma)$, где $k_0 = \min\{n \in \bar{4} \mid \tau^n(\sigma) \in D\}$. Тогда для любого $v \in V$ определим $(\eta_L^+)_v$ так, что для любой дуги $e \in E_v$ дуга $(\eta_L^+)_v(e)$ есть та дуга из E_v, у которой метка $\tau_{[v]}(|e|)$. Другими словами, дуга из E_v, которая в каноническом вращении η_L^+ следует за дугой e, есть дуга, направление которой по отношению к направлениям всех других дуг из E_v, является первым следующим за $|e|$ в циклической перестановке $(\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{w}, \mathbf{s})$. Пусть $f = (e_0, \dots, e_{n-1})$ — некоторая грань лабиринта (L, η_L^+). Пусть $\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1}$ — направления дуг $e_0, \dots, e_{n-1}$, соответственно. Очевидно, что

$$\nu(\sigma_0 \dots \sigma_{n-1}\sigma_0) = \nu(\sigma_{0+_n k} \dots \sigma_{(n-1)+_n k}\sigma_{0+_n k})$$

для любого $k \in \mathbf{N}$, где $+_n$ — операция сложения по модулю n. Обозначим через $\bar{\nu}(f)$ значение $\nu(\sigma_0 \dots \sigma_{n-1}\sigma_0)$. Имеет место следующая теорема (см. [20]).

Теорема 3. *Если (L, η_L^+) — конечный 2-мерный лабиринт с канонической системой вращения η_L^+ и $f_1, \dots, f_n$ — все грани лабиринта (L, η_L^+), то лабиринт L квазипрямоугольный тогда и только тогда, когда $\varepsilon(L, \eta_L^+) = 2$ и существует такое $i_0 \in \bar{n}$, что $\bar{\nu}(f_{i_0}) = -4$ и $\bar{\nu}(f_i) = 4$ для всех $i \in \bar{n}$, $i \neq i_0$.*

Достаточно близкая к описанной характеризация получена в работе [30], в которой отправной задачей являлась проблема описания плоских графов, возникающих при проектировании больших интегральных схем; в ней предложен алгоритм, проверяющий за $O(n)$ шагов свойство квазипрямоугольности 2-мерного лабиринта, у которого n вершин, а также алгоритм для прямоугольной укладки такого лабиринта за $O(n^2)$ шагов.

Отметим, что при доказательстве теорем 1 и 2 в [1, 8, 37, 44, 45] строились соответствующие конечные плоские правильные ловушки. Правильный n-мерный лабиринт $(L; v_0, v_1)$ называется n-мерной правильной ловушкой для системы $\mathscr{A}$, если ни один автомат системы $\mathscr{A}$, начиная свое движение с точки v_0, не обходит вершину v_1. Некоторые свойства этих ловушек описываются следующими утверждениями.

Теорема 4 ([2]). *Для любого инициального автомата с n состояниями существует конечная плоская правильная ловушка с не более чем $Ce^{\sqrt{2n\log_2 2n}}$ вершинами.*

Теорема 5 ([25]). *Для любого инициального автомата существует конечная плоская правильная r-связная ловушка такая, что $r \leqslant 3$.*

Достаточно грубые оценки, подобные оценкам, содержащимся в этих двух утверждениях, могут быть получены и в случае системы автоматов, и в случае некоторых других типов ловушек (см. ниже). Остается открытым вопрос о понижении указанных оценок и получении соответствующих нижних оценок.

Так, например, известно, что множество всех конечных плоских $\mathbf{Z}$-односвязных шахматных лабиринтов может быть обойдено инициальным автоматом с некоторым фиксированным числом состояний ([5, 14, 15]). Например, если у автомата поле зрения всегда имеет форму квадрата 3×3 с центром в текущей вершине (то есть оно получается в пересечении такого квадрата с данным лабиринтом), то может быть построен (неинициальный) автомат, универсальный для упомянутого класса лабиринтов, то есть АА-обходящий (начиная с любого своего состояния) любой конечный плоский односвязный шахматный лабиринт, у которого всего 4 состояния [37]. На основании этого автомата легко построить автомат, у которого 17 состояний и $\mathbf{D}$-образное (стандартное крестообразное) поле зрения и который является универсальным не только для класса всех конечных плоских $\mathbf{Z}$-односвязных шахматных лабиринтов, но и для класса всех конечных плоских односвязных мозаичных лабиринтов. Этот результат с учетом оценки из теоремы 5 оставляет открытым вопрос о возможности понижения этой оценки до двух.

Теорема 2, по сути дела, доказана в [1]. Для ее доказательства строится соответствующая слабая I_0I-ловушка (инициальный лабиринт, который является ловушкой для каждого автомата данной конечной независимой системы инициальных автоматов в отдельности). Интересно отметить, что теорема 2 в том виде, в каком она приводится здесь, дает ответ на проблему, которая, на первый взгляд, отличается от проблемы, исследуемой в [1]. Но это отличие только кажущееся. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Будем считать, что $\mathbf{R}^n$ — евклидовое n-мерное пространство, наделенное стандартной метрикой, где расстояние $d(x, y)$ между произвольными точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ определено формулой

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}.$$

Под n-мерным (открытым) шаром (кругом, если $n = 2$) с центром в точке $x \in \mathbf{R}^n$ и радиусом $r \in \mathbf{R}^+$ понимается, как обычно, множество

$$\mathrm{Bl}_n(x, r) = \{y \in \mathbf{R}^n \mid d(x, y) < r\}.$$

Тогда, как принято, множество $V \in \mathbf{R}^n$ считается ограниченным, если $V \subseteq \mathrm{Bl}_n(x, r)$ для некоторых $x \in \mathbf{R}^n$ и $r \in \mathbf{R}^+$, или если

$$\operatorname{diam} V = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in V\} < r'$$

для некоторого $r' \in \mathbf{R}^+$, что эквивалентно предыдущему.

Говорим, что данный инициальный автомат $\mathfrak{A}$ не справляется с данным инициальным бесконечным мозаичным лабиринтом, если он, начиная свое движение с его начальной вершины, не покидает в нем какую-то ограниченную область, то есть не покидает какой-то круг в $\mathbf{R}^2$. Ясно, что из-за мозаичности лабиринта это условие эквивалентно требованию, чтобы множество вершин, посещаемых автоматом, было конечно. Легко заметить, что в случае конечного множества автоматов (в том числе и в случае, когда рассматривается только один автомат) существование такой ловушки для них — инициального бесконечного мозаичного лабиринта, с которым любой автомат из данного множества автоматов не справляется — эквивалентно существованию правильной ловушки для них. В случае бесконечной независимой системы автоматов (см. ниже) любой лабиринт, с которым не справляется ни один автомат системы, является бесконечной мозаичной слабой ловушкой для этой системы, но обратное утверждение, очевидно, не имеет места. В [37] дано простое доказательство теоремы 2, причем соответствующая ловушка, построенная там, является правильной. При этом понятие ловушки для данной независимой системы автоматов можно понимать в нескольких различных смыслах. Обсудим коротко эти случаи.

Пусть дана независимая система автоматов $\mathcal{A}$. Как уже сказано в предыдущем разделе, некоторый лабиринт L является слабой ловушкой для $\mathcal{A}$, если он является ловушкой для каждого автомата данной системы в отдельности. Лабиринт L считаем ловушкой для $\mathcal{A}$, если он является ловушкой для всех автоматов данной системы в совокупности, то есть если существует вершина v лабиринта L, которую не посещает ни один автомат системы $\mathcal{A}$. Эти два основных типа ловушек можно, в случае неинициального лабиринта, сочетать еще и с требованием, чтобы в начальный момент все автоматы данной системы были помещены в одно (произвольное) поле лабиринта, или чтобы в начальный момент были разбросаны произвольным способом по лабиринту. При этом предполагается, что в случае неинициальной системы автоматы начинают работу с своего произвольного состояния. Если все это рассматривать еще и через призму несправляемости, а не невозможности обхода, то получаем целый спектр ловушек.

Интересно отметить, что, несмотря на кажущееся разнообразие, случаи всех этих ловушек легко разбираются с помощью ловушки основного типа. Так, например, легко удостовериться, что если надлежащим способом связывать в конгломерат определенное количество копий обычной конечной ловушки для системы $[\mathcal{A}]$, то можно получить конечную ловушку любого имеющего смысл типа для $\mathcal{A}$ (в качестве числа копий можно взять число $n = |[\mathcal{A}]| + 1$). Одна конструкция такого типа дана в [37]. При этом часто мы должны отказываться (из-за понятных соображений) от правильности ловушки. Замечание такого рода имеет место даже в случае, если требуется решить следующую проблему: найти лабиринт $L \in \mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}$, удовлетворяющий условию, что при любых $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$ и $v \in V(L)$ существует $v' \in V(L)$ такое, что лабиринт $(L; v, v')$ является правильной ловушкой для $\mathfrak{A}$. Ясно, что для некоторых конкретных $\mathcal{A}$ лабиринт, удовлетворяющий этому условию, не существует.

Проблема построения бесконечной плоской мозаичной ловушки для всех конечных независимых систем автоматов изучалась в [1]. Достаточно общий результат, касающийся этой проблемы, может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 6. *Существует бесконечный плоский мозаичный лабиринт L такой, что для любой независимой системы $\mathcal{A} = \langle \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n \rangle$ инициальных автоматов и любых $v_1, \dots, v_n \in V(L)$ множество*

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Int}(\mathfrak{A}_i, L_{v_i})$$

является ограниченным (при любом n).

В связи с теоремой 6 заметим, что сначала был построен инициальный бесконечный плоский мозаичный лабиринт L_v, с которым не справляется ни один конечный инициальный автомат [1]. Если заменить любой $\mathfrak{A}_i \in \mathcal{A}$ автоматом $\mathfrak{A}'_i$ таким, что $\mathfrak{A}'_i$ сначала из v по некоторому произвольному пути идет в v_i, а потом себя ведет как $\mathfrak{A}_i$, то из существования лабиринта L_v следует утверждение теоремы. Следовательно, данное рассуждение эквивалентно утверждению, что существует инициальный лабиринт, с которым не справляется ни один конечный инициальный автомат. С другой стороны из теоремы 6 следует, что существует бесконечный плоский мозаичный лабиринт такой, что при любом выборе его начальной точки возникает инициальный лабиринт, с которым не справляется ни один конечный инициальный автомат. Отсюда получаем, что если некоторый лабиринт хотя бы для одной своей вершины, взятой в качестве начальной, является таким, что ни один инициальный автомат не справляется с ним, то он таким является по отношению к любой вершине.

Отметим также, что для класса всех конечных инициальных автоматов (допустимых для $\widetilde{\mathfrak{L}}(\{\Lambda\}, \mathbf{D}_2)$) легко построить бесконечную слабую плоскую мозаичную ловушку — такой, например, является, лабиринт $\mathbf{Z}^2$, но нельзя построить ловушку, поскольку независимая система, состоящая из всех автоматов, слабо обходит любой лабиринт (здесь мы должны были бы обобщить понятие конечной независимой системы автоматов до соответствующей бесконечной, а также ввести понятие ловушки для такой системы, но поскольку это делается очевидным способом, мы не будем развивать это далее в подробностях).

Кроме того, в связи с теоремой 6 возникает вопрос о существовании бесконечной ловушки следующего типа. Бесконечный плоский мозаичный лабиринт L назовем плоской однородной ловушкой для некоторого класса $\mathcal{A}$ автоматов, если для любого $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$

существует $r = r(\mathfrak{A})$ такое, что для любого $v \in V(L)$

$$\mathrm{Int}(\mathfrak{A}, L_v) \subseteq \mathrm{Bl}_2(v, r).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 7. *Для любого конечного класса автоматов существует однородная ловушка и не существует такой ловушки для класса всех конечных автоматов.*

Изложенные результаты показывают ограниченность аналитических возможностей автоматов, то есть в определенном смысле характеризуют их негативно. Вместе с тем интересно выяснить, какие вопросы могут быть решены с их помощью, точнее, для каких содержательно интересных классов лабиринтов существуют автоматы или системы, обходящие их. Случай, когда в качестве независимой системы выступает только один автомат, рассматривался в [3, 31, 34, 35, 39, 42]. Приведем здесь некоторые результаты из этих работ.

Пусть L — конечный плоский мозаичный лабиринт. Для любой грани $f = (e_1, \dots, e_n)$ лабиринта L (грани берутся по отношению к каноническому вращению) обозначим через $[f]$ множество всех вершин лабиринта, инцидентных некоторой из дуг $e_1, \dots, e_n$. Число

$$\partial_F(L) = \max\{\mathrm{diam}[f] \mid f \in F_0(L)\},$$

где $F_0(L)$ — класс всех граней лабиринта L, очерчивающих его конечные дыры, назовем пограневой крупностью лабиринта L.

Определим расстояние $d_1(x, y)$ между произвольными точками $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ формулой

$$d_1(x, y) = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\}.$$

Обозначим через $\mathrm{diam}_1 V$ диаметр множества $V \in \mathbf{R}^2$ по отношению к метрике d_1, то есть

$$\mathrm{diam}_1 V = \sup\{d_1(x, y) \mid x, y \in V\}.$$

Пусть h — произвольная $\mathbf{Z}$-дыра конечного плоского шахматного лабиринта L (то есть лабиринта из класса $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{ш}}$). Границей $\mathrm{Nb}(h)$ дыры h называется множество всех точек из $\mathbf{Z}^2 \setminus h$, которые находятся на расстоянии, не превосходящем $\sqrt{2}$ от хотя бы одной точки дыры h.

Через $H_0(L)$ обозначим множество всех конечных $\mathbf{Z}$-дыр лабиринта $L \in \mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{ш}}$. Число

$$\partial_H(L) = \max\{\mathrm{diam}_1 \mathrm{Nb}(h) \mid h \in H_0(L)\}$$

назовем целочисленной крупностью или $\mathbf{Z}$-крупностью лабиринта L. Заметим, что из $\partial_H(L) \leqslant r$ следует, что $\partial_F(L) \leqslant r\sqrt{2}$, а из $\partial_F(L) \leqslant r$ следует, что $\partial_H(L) \leqslant r$, $r \in \mathbf{R}^+$.

Пусть L — некоторый лабиринт, и пусть $\mathfrak{A}$ — автомат, обходящий его. Тогда через $T(L, \mathfrak{A})$ обозначим время, за которое $\mathfrak{A}$ обходит L.

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс лабиринтов. Обозначим через ($\overline{\mathrm{Un}}(\mathfrak{L})$) $\mathrm{Un}(\mathfrak{L})$ множество всех универсальных (неинициальных) инициальных обходчиков для $\mathfrak{L}$. Через $\mathrm{St}(\mathfrak{L})$ обозначим число $\min\{Q_{\mathfrak{A}} \mid \mathfrak{A} \in \mathrm{Un}(\mathfrak{L})\}$, если $\mathrm{Un}(\mathfrak{L}) \neq \varnothing$, или ∞, если $\mathrm{Un}(\mathfrak{L}) = \varnothing$; если здесь вместо $\mathrm{Un}(\mathfrak{L})$ взять $\overline{\mathrm{Un}}(\mathfrak{L})$, то получаем число $\overline{\mathrm{St}}(\mathfrak{L})$. Под (неинициальной) инициальной Q-сложностью обхода класса лабиринтов $\mathfrak{L}$ подразумеваем число ($\overline{\mathrm{St}}(\mathfrak{L})$) $\mathrm{St}(\mathfrak{L})$; если из контекста ясно, о чем идет речь, то часто опускаем слово (неинициальный) инициальный.

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс лабиринтов, и пусть $\mathcal{A}$ — некоторый класс конечных автоматов. Введем для любого $n \in \mathbf{N}$ обозначения

$$\mathfrak{L}|_n = \{L \in \mathfrak{L} \mid |V(L)| = n\}, \qquad \mathcal{A}|_n = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{A} \mid |Q_{\mathfrak{A}}| = n\}.$$

Теперь, пусть

$$T(\mathfrak{L}, n; \mathfrak{A}) = \max T(L, \mathfrak{A}) \mid L \in \mathfrak{L}|_n\}$$

для любого $\mathfrak{A} \in \mathrm{Un}(\mathfrak{L})$. Аналогично введем число

$$\overline{T}(\mathfrak{L}, n; \mathfrak{A}) = \max\{T(L, \mathfrak{A}_q) \mid L \in \mathfrak{L}|_n, q \in Q_{\mathfrak{A}}\}$$

для любого $\mathfrak{A} \in \overline{\mathrm{Un}}(\mathfrak{L})$. Также введем обозначения

$$T(\mathfrak{L}, n; m) = \min\{T(\mathfrak{L}, n; \mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in \mathrm{Un}(\mathfrak{L})|_m\},$$
$$T(\mathfrak{L}, n) = \min\{T(\mathfrak{L}, n; \mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in \mathrm{Un}(\mathfrak{L})\}.$$

Аналогичным образом определяем числа $\overline{T}(\mathfrak{L}, n; m)$ и $\overline{T}(\mathfrak{L}, n)$. Если какое-то из введенных чисел не определено, то формально приравниваем его символу ∞. Функцию ($\overline{T}(\mathfrak{L}, n)$) $T(\mathfrak{L}, n)$ назовем (неинициальной) инициальной T-сложностью обхода класса $\mathfrak{L}$; если из контекста ясно о чем идет речь, то в данном выражении часто опускаем слово (неинициальный) инициальный.

Через $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}(m)$ обозначим класс всех конечных плоских мозаичных лабиринтов, пограневая крупность которых ограничена числом $m \in \mathbf{N}$.

Теорема 8 ([42]). *Для любого $m \in \mathbf{N}$ имеют место неравенства*

$$\mathrm{St}(\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}(m)) \leqslant 48m + 52,$$
$$T(\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}(m), n) \leqslant (3m^2 + 2)n - 2.$$

Первоначально подобный результат был получен в [35], где оценка для Q-сложности обхода была Cm^2 (C — константа, не зависящая от m) и где рассматривались конечные плоские шахматные лабиринты с ограничением на $\mathbf{Z}$-крупность, но это и то, что вместо мозаичных рассматривались шахматные лабиринты, как легко видеть, не является существенным. Этот результат был усилен в [39], а самые лучшие оценки для Q- и T-сложности обхода, полученные до сих пор, изложены в [42] и приведены в теореме 8. Отметим, что результаты из приведенных работ, в том числе и из работы [42], касаются только универсальных инициальных автоматов. Значение $\overline{\mathrm{St}}(\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}(m))$ для любого $m \in \mathbf{N}$ пока удается оценить сверху только числом Cm^3, где C — постоянная, не зависящая от m. Отметим также, что в качестве m можно было бы взять любое положительное действительное число, что несущественным образом повлияло бы на данные оценки.

Следующий результат в определенном смысле усиливает теорему 8. Пусть γ — некоторый ненулевой целочисленный вектор (рациональное направление), и $d \in \mathbf{R}^+$. Лабиринт $L \in \mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{ш}}$ назовем (d, γ)-ограниченным, если для любой его конечной дыры $h \in H_0(L)$ множество $\mathrm{Nb}(h)$ лежит в некоторой полосе ширины d, параллельной вектору γ (такие полосы назовем (d, γ)-полосами); класс всех таких лабиринтов обозначим через $\mathfrak{L}(d, \gamma)$. Следующая теорема по существу доказана в [34].

Теорема 9 ([34]). *Для любого $d \in \mathbf{R}^+$ и любого рационального направления γ Q-сложность обхода класса $\mathfrak{L}(d, \gamma)$ меньше $Cd + C'$, где C и C' — постоянные, не зависящие от d.*

Тот факт, что в теореме 8 рассматриваются шахматные лабиринты, как и выше, не существен. Можно рассматривать конечные плоские мозаичные лабиринты и требовать, чтобы для любой $f \in F_0(L)$ множество $[f]$ лежало в некоторой (d, γ)-полосе [42]. В [42] получена также оценка вида Cn^2 сложности обхода по времени для таких лабиринтов. В [34] рассматриваются также конечные плоские шахматные лабиринты, удовлетворяющие следующему условию. Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ — конечный набор рациональных направлений и $d \in \mathbf{R}^+$. Лабиринт $L \in \mathfrak{L}_{\text{ш}}^{\text{к}}$ назовем $(d; \gamma_1, \dots, \gamma_m)$-ограниченным, если для любой его конечной дыры $h \in H_0(L)$ множество $\mathrm{Nb}(h)$ лежит в (d, γ_i)-полосе для некоторого $i \in \overline{m}$. Множество $V \subseteq \mathbf{Z}^2$ называется горизонтально-выпуклым, если не существует чисел $a_1, a_2, a_3, b \in \mathbf{Z}$, $a_1 < a_2 < a_3$, таких, что $(a_1, b), (a_3, b) \in V$ и $(a_2, b) \notin V$. Горизонтально-выпуклая оболочка множества $V \subseteq \mathbf{Z}^2$ — это минимальное горизонтально-выпуклое множество, содержащее V. Две конечные дыры $h_1, h_2 \in H_0(L)$ лабиринта $L \in \mathfrak{L}_{\text{ш}}^{\text{к}}$ переплетаются, если горизонтально-выпуклая оболочка дыры h_1 пересекается с границей $\mathrm{Nb}(h_2)$ дыры h_2. Рассмотрим класс всех $(d; \gamma_1, \dots, \gamma_m)$-ограниченных лабиринтов, у которых нет пары переплетающихся дыр. В [34] показано, что Q-сложность обхода этого класса меньше $Cd^3 + C'$, где C и C' — действительные постоянные, не зависящие от d.

Остаются открытыми вопросы понижения оценок в этих теоремах. Отметим, что автоматы в них, обходя соответствующие лабиринты, не фиксируют совершение обхода их переходом в состояние остановки. Как показывает следующее утверждение, этот факт не является случайным.

Теорема 10 ([12]). *Не существует инициального автомата, который обходит и останавливается после обхода каждого лабиринта из*

(1) *класса всех конечных плоских прямоугольных лабиринтов, являющихся деревьями;*

(2) *класса всех конечных плоских мозаичных лабиринтов, являющихся деревьями;*

(3) *класса всех односвязных конечных плоских шахматных лабиринтов.*

Здесь прямоугольный лабиринт L является деревом (является древовидным), если граф $\overline{G(L)}$ является деревом.

В [12] проблема остановки рассматривается прежде всего по отношению к так называемым квазирегулярным R-деревьям. Предположим здесь, без существенного ограничения общности, что в следующих определениях мы имеем дело с конечными графами без петель и без кратных ребер (если позволить петли и кратные ребра, то надо исходить из определения графоида, как это делается в [12]). Сделаем также следующее важное замечание: всюду в последующем, где графы выступают в роли лабиринтов, мы на самом деле имеем в виду соответствующие симметрические орграфы.

Граф, у которого степень любой вершины не больше $d \in \mathbf{N}$, называется графом с ограничением d на степень вершин. Граф G называется квазирегулярным степени $d \geqslant 2$, если степень любой его вершины или 1, или d. Граф G называется квазирегулярным, если существует $d' \geqslant 2$ такое, что G является квазирегулярным степени d'.

Граф с вращением называется R-графом. R-граф, являющийся деревом, называется R-деревом. Обозначим через $\mathfrak{G}_R(d)$, $d \geqslant 2$, класс всех R-графов с ограничением d на степень вершин.

Основной класс лабиринтов, который рассматривается в [12], есть класс $\mathfrak{G}_R(d)$. Допустимыми автоматами для лабиринтов этого класса будут так называемые R-автоматы, то есть автоматы, у которых один реберный камень-указатель. Если такой автомат поместить в некоторый лабиринт этого класса, то этот камень служит для временного указания на ребро, по которому автомат пришел в некоторую вершину данного лабиринта (текущая вершина), то есть на ребро, начиная с которого, согласно системе вращения, считаются остальные ребра, инцидентные текущей вершине. Одно из этих ребер автомат выбирает в качестве ребра, по которому продолжает в следующий момент свое движение по лабиринту, причем это ребро становится на следующем шаге маркированным. Как отмечено в [12], легко построить R-автомат, универсальный для класса всех R-деревьев, с ограничением $d \geqslant 2$ на степень вершин. Можно также тривиальным способом построить R-автомат, универсальный по отношению к классу всех квазирегулярных R-деревьев степени 2, который фиксирует факт обхода. Основным результатом в [12], из которого вытекают все остальные, надо считать следующее: показано, что последнее утверждение не имеет места для квазирегулярных R-деревьев степени $d \geqslant 3$ (d считается фиксированным), то есть, что для любого R-автомата, универсального для класса всех квазирегулярных R-деревьев степени $d \geqslant 3$, существует квазирегулярное R-дерево степени d, которое он обходит, но не останавливается после этого. Непосредственно из этого следует и тот факт, что для класса квазирегулярных прямоугольных деревьев степени 4 нет универсального автомата, который бы останавливался после обхода.

Ранее в [26] показано, что не существует автомата, который обходит любой лабиринт из класса всех конечных плоских 2-связных мозаичных (шахматных) лабиринтов и останавливается после обхода.

С R-графами также связано исследование, проведенное в [33]. Здесь рассматриваются лабиринты в виде графов класса $\mathfrak{G}_R(d)$ (то есть в виде соответствующих симметрических орграфов) с помеченными (окрашенными) вершинами, причем метки (краски) принадлежат конечному множеству $\Omega \cup \{\omega_0\}$, где ω_0, $\omega_0 \notin \Omega$, — начальный цвет вершин (в качестве него можно взять пустой символ, считая, что все вершины, у которых такая метка, по существу, не окрашены). Конечно, для удобства можно в качестве Ω взять множество $\bar{n}$, а в качестве ω_0 символ 0, как это делалось в [33]. Если L — некоторый лабиринт такого вида, то его раскраска задается функцией $c_L\colon V(L) \to \Omega \cup \{\omega_0\}$, где $c_L(v)$ — значение метки (цвет) вершины $v \in V(L)$. Таким образом, в данной работе рассматриваются лабиринты, которые представляют собою пары вида (L, c_L), где L и c_L имеют данное выше значение. Автоматы, допустимые для этого класса лабиринтов, являются R-автоматами с печатью. Такой автомат, продвигаясь по некоторому лабиринту из данного класса, читает метку текущей вершины и заменяет или не заменяет ее некоторым другим символом из Ω (иными словами, автомат может изменить цвет текущей вершины), но с одним достаточно сильным ограничением: только при условии, что он раньше не изменял метку этой вершины (не красил ее). Из-за этого условия эти автоматы называются автоматами с нестираемыми красками (с ($|\Omega|$ нестираемыми красками). Обозначим класс всех таких автоматов через $\mathfrak{M}_d^R(\Omega)$, а через $\widehat{\mathfrak{M}}_d^R(\Omega)$ — класс всех автоматов из $\mathfrak{M}_d^R(\Omega)$, которые на самом деле ничего не пишут по вершинам (не красят их), а только читают их метки.

В [33] рассмотрены следующие три вопроса, касающиеся поведения таких автоматов в лабиринтах данного класса.

(1) Существует ли автомат $\mathfrak{A} \in \widehat{\mathfrak{M}}_d^R(\Omega)$ (следовательно, без печати) такой, что для любого $L \in \mathfrak{G}_R(d)$ существует его раскраска c_L такая, что $\mathfrak{A}$ обходит (L, c_L)?

(2) Существует ли автомат $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_d^R(\Omega)$, обходящий любой лабиринт (L, c_L) ($L \in \mathfrak{G}_R(d)$), у которого $c_L(v) = \omega_0$ для любой вершины $v \in V(L)$?

(3) Существуют ли автоматы $\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{M}_d^R(\Omega)$ и $\mathfrak{A}_2 \in \widehat{\mathfrak{M}}_d^R(\Omega)$ такие, что $\mathfrak{A}_1$ способен раскрасить (и, конечно, обойти) любой лабиринт (L, c_L) $(L \in \mathfrak{G}_R(d))$, у которого $c_L(v) = \omega_0$ для любого $v \in V(L)$, и перейти в заключительное состояние, чтобы затем $\mathfrak{A}_2$ уже мог обойти таким образом раскрашенный лабиринт? Иными словами, существует ли автоматный (реализуемый универсальным автоматом с нестираемыми красками) способ раскраски лабиринтов такой, что для класса таким способом раскрашенных лабиринтов уже существует универсальный некрасящий автомат?

Кроме вопроса о существовании таких автоматов, рассматривается вопрос о минимальном числе цветов, необходимом для решения этих задач.

В [33] показано что для решения поставленных задач достаточно только одной нестираемой краски ($|\Omega| = 1$), то есть построена пара автоматов $\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{M}_d^R(\Omega)$ и $\mathfrak{A}_2 \in \widehat{\mathfrak{M}}_d^R(\Omega)$ такая, что если взять любой лабиринт (L, c_L) $(L \in \mathfrak{G}_R(d))$, у которого $c_L(v) = \omega_0$ для любого $v \in V(L)$, то

(1) автомат $\mathfrak{A}_1$ обходит (L, c_L), начиная свое движение с произвольной его вершины и с своим камнем, расположенным на произвольном ребре, инцидентном этой вершине (то есть, начиная с произвольной конфигурации), после обхода останавливается и раскрашивает лабиринт, переводя его в пару (L, c'_L);

(2) автомат $\mathfrak{A}_2$ обходит (L, c'_L), начиная свое движение с произвольной конфигурации.

Поскольку n-мерный прямоугольный лабиринт стандартным способом превращается в R-граф (для этого достаточно фиксировать некоторую циклическую подстановку на $\mathbf{D}_n$), то все вышеприведенные результаты имеют место и в случае класса всех конечных n-мерных прямоугольных лабиринтов, раскрашенных по вершинам, и соответствующих допустимых автоматов с нестираемыми красками. Напомним, что в работе [49], предшествующей по существу работе [33], построен автомат, решающий задачу 2 для случая конечных плоских прямоугольных лабиринтов с помощью одной нестираемой краски. Затем независимо от исследований, проведенных в [33], этот результат обобщен в [50] на случай конечных n-мерных прямоугольных лабиринтов ($n > 2$): построен автомат с одной нестираемой краской, который может обойти любой, заранее не окрашенный конечный n-мерный прямоугольный лабиринт и остановиться после обхода. Этот результат, следующий из работы [33], и независимо полученный в [49], показывает, что автоматы с нестираемыми красками в каком-то смысле сильнее коллективов автоматов, являющихся более сильной разновидностью монстров, чем независимые системы автоматов. На самом деле, для любого коллектива автоматов уже в классе конечных трехмерных мозаичных лабиринтов существует ловушка (см., например, [4, 17, 41]).

Еще один тип красящих автоматов рассмотрен в [32]. Они являются допустимыми автоматами для плоских прямоугольных лабиринтов. В отличие от автоматов, описанных выше, они должны обязательно красить вершины, которые посещают: они обязательно оставляют в вершинах след о своем пребывании в них. Рассматривается случай, когда у автомата $m \geqslant 1$ красок, то есть его след в любой точке может быть одного из m цветов. Еще одно ограничение накладывается на употребление красок: если автомат пользовался какой-то краской ω в момент t, а в момент $t + 1$ пользовался другой краской ω', $\omega' \neq \omega$, то он больше никогда не может повторно пользоваться краской ω. Так что можно считать, что запасы всех красок, кроме той, которую он использует последней, являются ограниченными. Заметим еще раз, что в любой момент t автомат обязательно окрашивает текущую вершину текущей краской (которая может оказаться такой же, как и та краска, которой вершина уже была окрашена). Такой автомат называется автоматом, оставляющим m-след, а если $m = 1$, то просто автоматом, оставляющим след. Основной результат работы [32] содержится в следующей теореме.

Теорема 11. *Для любого $k \in \mathbf{N}$ существует автомат $\mathfrak{A}$, оставляющий m-след, $m = m(k)$, такой, что $\mathfrak{A}$ обходит любой заранее полностью неокрашенный k-связный прямоугольный лабиринт, причем $m < 198k$.*

В то же время в [51] показано, что при любом $m \in \mathbf{N}$ для любого автомата, оставляющего m-след, можно построить бесконечную плоскую прямоугольную ловушку.

Наконец, в работе [43] рассматриваются красящие автоматы с так называемыми исчезающими красками. Изучаются два типа таких автоматов, допустимых для класса всех плоских прямоугольных лабиринтов.

Автомат первого типа имеет одну τ-исчезающую краску, $\tau \geqslant 2$. Под τ-исчезающей краской понимается краска, удовлетворяющая следующему условию: если автомат пользовался этой краской в момент t, окрашивая текущую вершину v, то эта вершина, начиная с момента $t+1$ по момент $t+\tau$ включительно, является окрашенной; после этого момента краска исчезает с вершины v и она становится неокрашенной, то есть получает первоначальный цвет, если, конечно, автомат не побывал за это время повторно в вершине v и заново ее не окрасил (ясно, что в таком случае счетчик краски устанавливается на начало). Автомат с такой краской называется автомат с τ-исчезающей краской. В [43] показано, что возможности автомата с τ-исчезающей краской (по обходу лабиринтов), ненамного превышают возможности автомата без красок (конечного автомата, допустимого для всех плоских прямоугольных лабиринтов, который ничего не красит).

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс лабиринтов и $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — два произвольных конечных автомата (один из них или оба могут быть с краской или без нее). Говорим, что автомат $\mathfrak{A}_2$ сильно моделирует автомат $\mathfrak{A}_1$ на множестве $\mathfrak{L}$, если

$$\mathrm{Tr}_V(\mathfrak{A}_2, L_v) = \mathrm{Tr}_V(\mathfrak{A}_1, L_v)$$

для любых $L \in \mathfrak{L}$ и $v \in V(L)$ (иными словами, если на эту пару автоматов смотреть как на независимую систему автоматов в L_v, то они должны все время шагать вместе).

Автомат $\mathfrak{A}_2$ слабо моделирует автомат $\mathfrak{A}_1$ в некотором инициальном лабиринте L_v, если для любого $t_1 \in \mathbf{N}_0$ существует $t_2 \geqslant t_1$ такое, что

$$\mathrm{Int}_{t_2}^{\leqslant}(\mathfrak{A}_2; L_v) = \mathrm{Int}_{t_1}^{\leqslant}(\mathfrak{A}_1; L_v)$$

и

$$\mathrm{Int}_{t}^{\leqslant}(\mathfrak{A}_2; L_v) \subseteq \mathrm{Int}_{t_1}^{\leqslant}(\mathfrak{A}_1; L_v)$$

для любого t, $0 \leqslant t < t_2$. Автомат $\mathfrak{A}_2$ слабо моделирует автомат $\mathfrak{A}_1$ на множестве лабиринтов $\mathfrak{L}$, если автомат $\mathfrak{A}_2$ слабо моделирует автомат $\mathfrak{A}_1$ в любом лабиринте L множества $[\mathfrak{L}]$.

Обозначим через $\mathfrak{L}_{\text{п}}^{\text{ц}}(n)$ класс всех плоских прямоугольных лабиринтов, у которых любой простой цикл имеет длину больше, чем $n \in \mathbf{N}$ (у которых обхват больше, чем n). Ясно, что $\mathfrak{L}_{\text{п}}^{\text{ц}}(n) = \mathfrak{L}_{\text{п}}$ для любого $n \leqslant 3$.

В [43] показано, что для автомата с τ-исчезающей краской всегда существует автомат без краски, который его сильно моделирует на множестве $\mathfrak{L}_{\text{п}}^{\text{ц}}(\tau)$. Поскольку для любого автомата без краски некоторая из его конечных ловушек обязательно принадлежит множеству $\mathfrak{L}_{\text{п}}^{\text{ц}}(\tau)$, из предыдущего следует, как отмечается в [43], что для автомата с τ-исчезающей краской всегда существует конечная ловушка из множества $\mathfrak{L}_{\text{п}}^{\text{ц}}(\tau)$.

Указаны некоторые случаи, когда автомат с τ-исчезающей краской все-таки оказывается сильнее обычного автомата.

Второй тип автоматов — это автоматы с γ-периодической краской: если такой автомат окрашивает некоторую вершину такой краской в момент t_0, то эта вершина является окрашенной в любой момент вида $t = t_0+1+k\gamma, k \in \mathbf{N}_0$, а все остальное время она должна считаться неокрашенной (иными словами, краска периодически, на один момент времени, появляется); вершина, окрашенная такой краской, называется мерцающей. Возможно и повторное окрашивание вершин, но если некоторую мерцающую вершину автомат красит повторно, то счетчик краски, который ее включает и выключает, сбрасывается на начало.

В [43] показано, что автомат с γ-периодической краской, у которого есть возможность задержки на один такт времени в вершинах лабиринта, в каком-то смысле не хуже автомата с одной нестираемой краской. Точнее, для любого автомата $\mathfrak{A}$ с одной нестираемой краской и любого $\gamma \in \mathbf{N}$ существует автомат с γ-периодической краской и с возможностью задержки на один такт времени в вершинах лабиринта, который слабо моделирует $\mathfrak{A}$ на множестве $\mathfrak{L}_{\text{п}}$ всех плоских прямоугольных лабиринтов.

Поскольку существует универсальный автомат с одной нестираемой краской для класса $\mathfrak{L}_{\text{п}}^{\text{к}}$ ([49]), из предыдущего, как отмечается в [43], следует, что для любого $\gamma \in \mathbf{N}$ существует автомат с γ-периодической краской и с возможностью задержки на один такт времени в вершинах лабиринта, который является универсальным для класса $\mathfrak{L}_{\text{п}}^{\text{к}}$.

Наконец, в [43] показано, что в классе автоматов без задержки с γ-периодической краской существует универсальный автомат для $\mathfrak{L}_{\text{п}}^{\text{к}}$ тогда и только тогда, когда γ нечетно.

В алгоритмическом плане интерес представляет задача синтеза, когда по заданному классу лабиринтов требуется установить, существует ли алгоритм, который по произвольному автомату устанавливает, обходит ли автомат все лабиринты из этого класса. Здесь нет достаточно общих результатов, имеются лишь отдельные примеры разрешимых и неразрешимых случаев. Приведем их здесь.

Пусть $\mathfrak{L}_1^{=}(k)$ — класс всех конечных плоских мозаичных лабиринтов, лежащих в полосе ширины k, $k \in \mathbf{N}$, параллельной оси x-ов. Тогда, пусть $\mathfrak{L}_2^{=}(k)$ — подкласс всех древовидных лабиринтов из $\mathfrak{L}_1^{=}(k)$, $\mathfrak{L}_3^{=}(k)$ — подкласс всех петель (лабиринтов, не являющихся древовидными) из $\mathfrak{L}_1^{=}(k)$, $\mathfrak{L}_4^{=}(k)$ — подкласс всех лабиринтов L из $\mathfrak{L}_1^{=}(k)$ таких, что у графов $\overline{G(L)}$ степень любой вершины не более двух (то есть подкласс всех конечных змеевидных лабиринтов из $\mathfrak{L}_1^{=}(k)$ вместе с подклассом всех лабиринтов из $\mathfrak{L}_1^{=}(k)$, имеющих вид простого цикла).

Теорема 12 ([13]). *Справедливы следующие утверждения:*

(а) *для любых $1 \leqslant i \leqslant 4$ и $k \in \mathbf{N}$ существует алгоритм, который по любому автомату устанавливает, обходит он или нет все лабиринты из класса $\mathfrak{L}_i^{=}(k)$;*

(б) *существует алгоритм, устанавливающий по заданному автомату, обходит он или нет любой (древовидный) змееобразный лабиринт из класса всех конечных плоских прямоугольных лабиринтов;*

(в) *не существует алгоритма, устанавливающего по заданному автомату, обходит он или нет любой (древовидный) змееобразный лабиринт из класса всех конечных плоских мозаичных лабиринтов.*

Например, в случае конечных змееобразных плоских прямоугольных лабиринтов (утверждение (б)) показывается, что если по отношению к этому классу лабиринтов данный автомат, у которого m состояний, является не универсальным, то обязательно найдется лабиринт из этого класса, имеющий меньше $n(m) = 2^{5+(m+1)^2}$ вершин, который данный автомат не обходит. Поскольку множество змееобразных плоских прямоугольных лабиринтов, имеющих меньше $n(m)$ вершин, конечно, то и проверку универсальности автомата можно осуществить за конечное время (надо просто запустить автомат в каждом лабиринте из этого множества, и если он обходит их все, что проверяется за конечное время, то этот автомат является универсальным; в противном случае он таковым не является). В случае конечных древовидных плоских прямоугольных лабиринтов в качестве $n(m)$ можно взять число $4^{2^{7+(m+1)^2}}$.

В [29] исследуется специальный лабиринт, который строится следующим образом. Берется лабиринт, образованный первым октантом лабиринта $\mathbf{Z}^2$, то есть множество его вершин есть множество $\{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 \mid x \geqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant x\}$. Затем склеиваются (отождествляются) его вершины вида $(x, 0)$ и (x, x). Получаем как бы коническую поверхность с соответствующей координатной сеткой. Линию склейки (содержащую вершины, полученные отождествлением вершин $(x, 0)$ и (x, x)) будем считать выделенной. Таким образом, получаем лабиринт, которому в соответствии с терминологией, принятой в [11], практически соответствует среда Cone. В качестве входа в этом лабиринте выбирается вершина $(0, 0)$. Рассматриваются автоматы, которые при помещении в этот лабиринт ведут себя следующим образом: двигаются только вправо или вверх; в качестве направления своего первого хода всегда выбирают $\mathbf{e}$ (направление восток); их состояния сменяют друг друга циклическим способом (то есть слово состояний их поведения имеет вид $q_1q_2 \dots q_nq_1q_2 \dots$, где $q_1, q_2, \dots, q_n$ — все состояния такого автомата). Таким образом, если автомат такого типа оказался в некоторый момент в вершине (x, y) и выбирает направление ω, то в следующий момент он окажется в вершине (x', y'), где

$$(x', y') = \begin{cases} (x+1, y), & \text{если } \omega = \mathbf{e}, \\ (x, y+1), & \text{если } \omega = \mathbf{n} \text{ и } y+1 < x, \\ (x, 0), & \text{если } \omega = \mathbf{n} \text{ и } y+1 = x. \end{cases}$$

Задача состоит в том, чтобы выяснить, существует ли алгоритм, который для любого такого автомата устанавливает возможность его выхода в выделенном состоянии на линию склейки. Эта задача решена лишь в частных случаях.

Отличие между дискретной конической поверхностью, определенной в предыдущем абзаце, и лабиринтом, который является главным объектом исследования в [11], состоит в том, что в [11] выделение линии склейки осуществляется явным способом — вершины, которые принадлежат ей, отмечаются меткой 0, остальные меткой 1, и в том, что точка $(0, 0)$ исключена из лабиринта. Обозначим полученный лабиринт через Cone. В этом лабиринте рассматриваются, как и выше, автоматы, которые могут двигаться только вправо или вверх, и при этом вершина (x', y'), в которую они попадают из вершины (x, y), определяется как и выше. Обозначим класс всех таких автоматов через Aut(Cone). Автоматы из этого класса начинают свое движение в Cone с произвольной его вершины, и при этом учитывают метки вершин. Для лабиринта Cone и автоматов множества Aut(Cone) исследовались следующие две проблемы ([11]):

(1) является ли проблема остановки для $\mathfrak{A}$ в лабиринте Cone разрешимой, то есть существует ли эффективная процедура, которая для любого автомата $\mathfrak{A} \in$ Aut(Cone) и для любой его стартовой точки $(x, y) \in V(\text{Cone})$ определяет, остановится ли автомат в Cone?

(2) является ли проблема пустоты в лабиринте Cone разрешимой, то есть существует

ли эффективная процедура, которая по данному автомату $\mathfrak{A} \in \mathrm{Aut(Cone)}$ определяет, существует или нет такая вершина $(x, y) \in V(\mathrm{Cone})$, что, выходя из нее, автомат $\mathfrak{A}$, спустя некоторое время, остановится?

Главным результатом в [11] является следующий: проблема пустоты и проблема остановки являются неразрешимыми.

Отметим здесь, что первое построение конечной шахматной ловушки для конечного автомата было осуществлено в [14, 15], где допускалось рассмотрение трехмерных лабиринтов. Условие трехмерности было существенным для простоты построения такой ловушки. Более трудной оказалась задача построения ловушки для автомата на плоскости. В [24] строится такая ловушка, которая не является мозаичным лабиринтом, но оказывается плоской. Ловушка, построенная в [24], является плоским квазирегулярным R-графом степени 3, у которого вращение — каноническое (это вращение определяется стандартным образом положительной ориентацией на плоскости). Построить такую ловушку было существенно проще, чем доказать теорему 1, справедливость которой была установлена позже.

В [48] изучалась проблема синтеза оптимальных по количеству состояний автоматов с заданной траекторией. Проблема ставится следующим образом. Задается произвольный путь в некотором плоском мозаичном (прямоугольном) лабиринте. Надо построить автомат с минимальным количеством состояний, у которого траектория, очерченная им в течение некоторого начального отрезка времени, есть именно этот заданный путь. Ясно, что методом полного перебора такой оптимальный автомат можно всегда построить. Автор работы [48] считает, что эта задача принадлежит к классу трудно решаемых проблем (NP-проблем), и предлагает несколько полиномиальных методов для ее приближенного решения. По мнению автора, эта задача тесно связана с проблемами раскраски графов. Предложенные в статье методы представляют собою методы раскраски, приспособленные к этой автоматной задаче.

В [47] моделируется поведение автоматов в лабиринтах, точнее автоматов в m-лабиринтах, на компьютере. Для этой цели разработан специальный, небольшой по размерам, язык программирования с помощью которого соответствующим способом описываются автоматы и лабиринты. Поведение таким образом данных автоматов в данных лабиринтах наглядно представляется на мониторе. Разработанный пакет программ может служить для экспериментирования с автоматами в лабиринтах при поиске универсальных автоматов, ловушек определенного типа, оптимальных по определенным параметрам лабиринтных автоматов и тому подобного.

Наконец, отметим что в работах [7, 9, 10] предпринята попытка обоснования более общей теории, чем та, которая исследует поведение конечных автоматов в прямоугольных лабиринтах. Понятие мозаичного лабиринта обобщается до понятия среды (интерпретациями которой являются прямоугольные лабиринты, лабиринты Савича, и т. п.), а понятие автомата, допустимого для класса прямоугольных лабиринтов, обобщается до понятия автомата, допустимого для класса сред и имеющего возможность остановиться в каком-то финальном состоянии и подать последний сигнал (такие автоматы названы распознающими автоматами или распознающими роботами). Функционирование таких автоматов интерпретируется движением в средах. Вводится также специальный класс сред — R-среды и рассматриваются соответствующие R-роботы. Рассматриваются некоторые общие проблемы, касающиеся этих моделей. Приведенные работы имеют сугубо алгебраический характер. Отметим, что понятия лабиринта и лабиринтного монстра, которые даны в предыдущих разделах, охватывают понятия среды и роботов. В работах [7, 9, 10] также отмечена важность лабиринтов в том смысле, что любая среда, с точки зрения функционирования автоматов в ней, может быть заменена соответствующим лабиринтом. В [23] доказано, что для такой редукции достаточен класс плоских лабиринтов.

Список литературы

1. Antelmann H., Budach L., Rollik H. A., On universal traps. *Elektron. Inform.-verarb. Kybernetik* (1979) **15**, 123–131.
2. Antelmann H., An application of the prime number theorem in automata theory. *ICS PAS Rep.* (1980) **411**, 9–11.
3. Asser G., Bemerkungen zum labyrinth-problem. *Elektron. Inform.-verarb. Kybernetik* (1977) **13**, 203–216.
4. Blum M., Sakoda W., On the capability of finite automata in 2 and 3 dimensional space. *Proc. 18th Annual Symp. Found. Computer Sci.* 1977, pp. 147–161.
5. Blum M., Kozen D., On the power of the compass. *Proc. 19th Annual Symp. Found. Computer Sci.* 1978, pp. 132–142.
6. Budach L., On the solution of the labyrinth problem for finite automata. *Elektron. Inform.-verarb. Kybernetik* (1975) **11**, 661–672.
7. Budach L., Environments, labyrinths and automata. *Lect. Notes Comp. Sci.* (1977) **56**, 54–64.
8. Budach L., Automata and labyrinths. *Math. Nachrichten* (1978) **86**, 195–282.
9. Budach L., Meinel Ch., Umwelten und Automaten in Umwelten. *Seminarber., Humboldt-Univ. Berlin, Sekt. Math.* **23**, 1980.
10. Budach L., Meinel Ch., Environments and automata. *Elektron. Inform.-verarb. Kybernetik* (1982) **18**, 3–40, 115–139.
11. Budach L., Waack S., On the halting problem for automata in cones. *Elektron. Inform.-verarb. Kybernetik* (1982) **18**, 489–499.
12. Bull M., Hemmerling A., Finite embedded trees and simply connected mazes cannot be searched by halting finite automata. *J. Inf. Process. Cybern.* (1990) **26**, 65–73.
13. Danecki R., Karpinski M., Decidability results on plane automata searching mazes. *Proc. 2nd Int. FCT'79 Berlin Conf.,* 1979, pp. 84–91.
14. Döpp K., Automaten in Labyrinthen. I. *Elektron. Inform.-verarb. Kybernetik* (1971) **7**, 79–94.
15. Döpp K., Automaten in Labyrinthen. II. *Elektron. Inform.-verarb. Kybernetik* (1971) **7**, 167–190.
16. Fischer P. C., Multi-tape and infinite-state automata: A survey. *Comm. ACM* (1965) **8**, 799–805.
17. Hemmerling A., Normed two-plane traps for finite systems of cooperating compass automata. *J. Inf. Process. Cybern.* (1987) **28**, 453–470.
18. Hoffmann F., One pebble does not suffice to search plane labyrinths. *Lect. Notes Computer Sci.* (1981) **117**, 433–444.
19. Hoffman F., *1-Kiesel-Automaten in Labyrinthen.* Report R-Math-06/82, 1982, AdW der DDR, Berlin.
20. Hoffman F., Kriegel K., *Quasiplane labyrinths.* Preprint P-Math-20/83, 1983, AdW der DDR, Berlin.
21. Kilibarda G., On the minimum universal collectives of automata for plane labyrinths. *Discrete Math. Appl.* (1993) **3**, 555–586.
22. Kudryavtsev V. B., Ushchumlich Sh., Kilibarda G., The behaviour of automata in labyrinths. *Discrete Math. Appl.* (1993) **3**, 1–28.
23. Meinel C., The importance of plane labyrinths. *Elektron. Inform.-verarb. Kybernetik* (1982) **18**, 419–422.

24. Müller H., Endliche Automaten und Labyrinthe. *Elektron. Inform.-verarb. Kybernetik* (1971) **7**, 261–264.
25. Müller H., Automata catching labyrinths with at most three components. *Elektron. Inform.-verarb. Kybernetik* (1979) **15**, 3–9.
26. Mylopoulos J., On the recognition of topological invariants by 4-way finite automata. *Computer Graphics and Image Processing* (1972) **1**, 308–316.
27. Shannon C. E., Presentation of a maze-solving machine. *Cybern. Trans. 8th Conf. Josiah Macy Jr. Found.*, 1951, 173–180.
28. Stahl S., The embeddings of a graph: A survey. *J. Graph Theory* (1978) **2**, 275–298.
29. Pultr A., Úlehla J., On two problems of mice. *Rend. Circ. Mat. di Palermo* (1982) **31**, 249–262.
30. Vijayan G., Wigderson A., Rectilinear graphs and their embeddings. *SIAM J. Comput.* (1985) **14**, 355–372.
31. Богомолов С. А., Золотых А. А., Зыричев А. Н., *Автоматы и графы*. Изд-во Саратовского унив., Саратов, 1992.
32. Голованов А. В., Об обходе лабиринтов автоматами, оставляющими след в вершинах лабиринта. *Интеллектуальные системы* (1998) **3**, 193–212.
33. Голубев Д. В., Об обходе графов автоматами с одной нестираемой краской. *Интеллектуальные системы* (1999) **4**, 243–272.
34. Золотых А. А., Обход лабиринтов с ограниченными в фиксированных направлениях дырами. *Дискретная математика* (1993) **5**, №1, 59–69.
35. Зыричев А. Н., О синтезе автомата, обходящего плоские лабиринты с ограниченными дырами. *Дискретная математика* (1991) **3**, №1, 105–113.
36. Зыков А. А., *Основы теории графов*. Наука, Москва, 1987.
37. Килибарда Г., Об универсальных лабиринтах-ловушках для конечных множеств автоматов. *Дискретная математика* (1990) **2**, №1, 72–79.
38. Килибарда Г., Новое доказательство теоремы Будаха–Подколзина. *Дискретная математика* (1991) **3**, №3, 135–146.
39. Килибарда Г., О сложности автоматного обхода лабиринтов. *Дискретная математика* (1993) **5**, №3, 116–124.
40. Килибарда Г., О минимальных универсальных коллективах автоматов для плоских лабиринтов. *Дискретная математика* (1994) **6**, №4, 133–153.
41. Килибарда Г., Ушчумлич Ш., О лабиринтах-ловушках для коллективов автоматов. *Дискретная математика* (1993) **5**, №2, 29–50.
42. Килибарда Г., Ушчумлич Ш., О задаче синтеза для автоматов в одном классе лабиринтов. *FILO-MAT* (1995), 743-751.
43. Климов И. В., Поведение в лабиринтах некоторых автоматов с краской. *Интеллектуальные системы* (1998) **3**, №3–4, 251–268.
44. Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Ушчумлич Ш., *Введение в теорию абстрактных автоматов*. Изд-во МГУ, Москва, 1985.
45. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
46. Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Ш., Килибарда Г., О поведении автоматов в лабиринтах. *Дискретная математика* (1992) **5**, №3, 3–28.
47. Курепа Й.-А., *Моделирование поведения автомата в одном классе лабиринтов*. Магистр. диссертация, Матем. факультет, Белград, 2000.

48. Максимович З., *О синтезе оптимальных автоматов в некотором классе лабиринтов.* Магистр. диссертация, Матем. факультет, Белград, 2001.

49. Насыров А. З., Об обходе лабиринтов автоматами, оставляющими нестираемые отметки. *Дискретная математика* (1997) **9**, №1, 123–133.

50. Насыров А. З., Об обходе автоматами лабиринтов в n-мерном пространстве. *Дискретная математика* (2000) **12**, №4, 121–137.

51. Насыров А. З., О бесконечной ловушке для автоматов со следом. *Интеллектуальные системы* (2000) **5**, №1–2.

52. Харари Ф., *Теория графов.* Мир, Москва, 1973.

Статья поступила 08.01.2003.