А. У. УМИРБЕКОВ,
Ш. Ш. ШААБЗАЛОВ

МАТЕМАТИКАНИ ТАКРОРЛАНГ

Олий ўқув юртларига
кирувчилар учун қўлланма

ТОШКЕНТ „ЎҚИТУВЧИ“ 1989

Тақризчи — Тошкент Давлат педагогика институти доценти, педагогика фанлари кандидати А. Ғ. ҲИКМАТОВ

Махсус муҳаррир — Тошкент Давлат университети математика факультети умумий математика кафедраси катта ўқитувчиси Б. ХЎЖАЕВ

Ушбу қўлланма олий ўқув юртларига кириш учун тайёргарлик кўраётган абитуриентларга мўлжалланган бўлиб, ундан ҳар бир ўқувчи мустақил ёки коллектив тарзда (тайёрлов курслари бўлимларида) фойдаланиши мумкин

Қўлланма материали (такрорлаш учун мисол ва масалалари билан) олий ўқув юртларига кириш имтиҳонлари программаси саволларига жавоб тариқасида ёритилган. Шунингдек, қўлланмада кириш имтиҳонларида тушган вариантлардан намуналар ва улардаги мисол ва масалаларнинг ечиш усуллари берилган. Бундан ташқари, қўлланмада машқ учун етарлича мисол ва масалалар берилган бўлиб, улардан мактабла ва институтда, мактаб ўқувчилари учун уюштириладиган математик машғулотларда фойдаланиш мумкин.

У $\frac{1702000000-312}{353(04)89}$ 118—89

ISBN 5—645—00156—7

© „Ўқитувчи" нашриёти, Тошкент, 1989 й.

СЎЗ БОШИ

Маълумки, ҳозирги замон фан ва техникаси жадал суръатлар билан ривожланиб бормоқда Бу эса кадрларнинг малакали, фан асосларини чуқур ўрганган ва ижодкор бўлишини талаб этади. Шу мақсадда Совет олий мактаби олдига чинакам ижодкор мутахассисларни камол топтириш вазифаси қўйилган. Хусусан, олий техника ўқув юртлари ҳар қандай масалалар ечилишини тез топа оладиган, актуал проблемаларни таҳлил қила биладиган етук инженер ва техник кадрларни тайёрлаб чиқариши шарт. Бу эса кўп жиҳатдан табиий фанларнинг калити—математиканинг ўқувчи томонидан қанчалик пухта ўзлаштирилганига боғлиқ

Ана шу вазифаларни муваффақиятли ҳал қилиш мақсадида яратилган ушбу қўлланма мактабдаёқ илмий-техника фанларига лаёқатли бўлган ёшларга математикани пухта эгаллаш йўлида яхши хизмат қилади деб ўйлаймиз.

Бу қўлланма элементар математика курсини ўрта мактаб программаси ҳажмида ўзлаштириб, олий ўқув юртларига тайёрланувчи абитуриентлар учун мўлжалланган бўлиб, ундан, шунингдек, математикага қизиқувчи барча китобхонлар ҳам фойдаланиши мумкин.

Қўлланмада мактаб математика дарсликлари ва қўлланмаларидаги материаллар мазмунини **бир китоб ҳажмида** системали қилиб беришга, кўрилаётган предмет материалларини қисқа ва аниқ, уларга оид мисол ва саволларни эса оптимал сонда танлашга ҳаракат қилинди Қўлланманинг шу мазмундаги мавжуд адабиётлардан фарқи—унинг СССР Олий ва Ўрта махсус таълим министрлиги томонидан тасдиқланиб келинаётган **кириш имтиҳонларининг математика программаси саволларига жавоб тариқасида ёзилишидадир.** Шу билан бирга, қўлланмадан программага кирмай қолган ва математика курсини системали ёритишни таъминлаш учун зарур ҳисобланган саволларнинг жавоблари ва уларга оид топшириқлар ҳам ўрин олган. Қўлланмадан тўғри, унумли фойдаланиш учун ўқувчи унда келтирилган назарий материалларни такрорлаши, уларга боғлиқ бўлган мисол ва масалаларни таҳлил қилиб, мавжуд усул (метод)лар билан ечиши керак. Шуни алоҳида таъкид-

лаймизки, мисол ва масалаларни ечишни кўплаб машқ қилиш назарий материалларнинг пухта ўзлаштирилишига, ўқувчи учун зарур ҳисобланган малаканинг шаклланишига ва ўсишига сабаб бўлади. Шунинг учун ҳар бир пункт сўнгида машқ учун берилган мисолларнинг ҳамда унга мос кейинги II ва III бобдаги мисол ва масалаларнинг етарли миқдорда тўғри ҳал қилиниши лозим.

I бобда арифметика, алгебра ва анализ асослари ҳамда геометрия материаллари берилган.

II бобдаги вариантлар ўзига хос масалалар тўплами бўлими бўлиб, улар сўнгги йилларда республикамиз олий ўқув юртларида кириш имтиҳонларида тушган. Уларнинг баъзилари ечимлари билан берилган. Бу эса абитуриент ишини маълум маънода осонлаштиради деб ўйлаймиз. Улардан ҳар бир ўқувчи ўзи танлаган олий ўқув юрти кириш имтиҳонларида қўйдиган талаб даражасини билади ва тайёрланишга киришади.

Авторлар қўлланмани қунт билан синчиклаб ўрганиб, унинг сифатини оширишда ўз мулоҳазаларини аямаган В. И. Ленин номидаги ТошДУ математика факультети умумий математика кафедраси катта ўқитувчиси Б. Хўжаевга чин кўнгилдан миннатдорчилик билдиради.

Ҳурматли китобхонларнинг қўлланма ҳақидаги танқидий фикр ва мулоҳазаларини чуқур мамнуният билан қабул қиламиз.

Авторлар

I БОБ. ПРОГРАММА МАТЕРИАЛЛАРИ ВА УЛАРНИ ТАКРОРЛАШ

1-§. Программа материаллари

Бу ерда 1980 йилдан кейинги даврда СССР Олий ва ўрта махсус таълим министрлиги томонидан тасдиқлаб келинган ҳар йилги СССР Олий ўқув юртларига кирувчи абитуриентлар учун кириш имтиҳонлари программаларини умумлаштириб, ундаги барча назарий саволлар ҳамда программага киритилмаган баъзи зарур саволлар номерланган ҳолда берилган. Ана шу саволларнинг деярли барчасининг жавоби кейинги иккинчи параграфда ўша номерли пунктда ёритилади. (Алгебранинг 63, .. 68 пунктидаги саволлар жавоби эса охирги III бобда берилди.)

Арифметика, алгебра ва анализ асослари

1. Тўплам ва унинг элементлари. Қисм-тўплам (8)*. 2. Тўпламларнинг бирлашмаси, кесишмаси ва айирмаси (9). 3. Натурал, бутун, рационал ва ҳақиқий сонлар тўплами. Улар орасидаги муносабатлар (10). 4. Бўлувчи, бўлинувчи. Туб ва мураккаб сонлар (17). 5. Умумий бўлувчи ва бўлинувчи. Энг катта бўлувчи ва энг кичик бўлинувчи (18). 6. Натурал сонларнинг баъзи сонларга бўлиниш белгилари (19). 7. Ҳақиқий сонларнинг хоссалари, уларнинг ўнли каср ёрдамида берилиши. Ҳақиқий сонларни таққослаш. Ҳақиқий сонлар устида амаллар (20). 8. Ҳақиқий сонлар тўпламининг геометрик тасвири. Координаталар ўқи. Ҳақиқий сон модули, унинг геометрик маъноси. Сонли оралиқлар. Координаталар текислиги ва фазоси (24). 9. Сонли ифодалар. Ўзгарувчи қатнашган ифодалар. Айнан тенг ифодалар. Қисқа кўпайтириш формулалари (28, 38, 269). 10. Натурал кўрсаткичли даража. Арифметик илдиз таърифи (30). 11. Рационал кўрсаткичли даража. Иррационал кўрсаткичли даража ҳақида тушунча (34). 12. Бирҳад ва кўпҳад. Кўпҳаднинг стандарт кўриниши (35). 13. Бир ўзгарувчили кўпҳад ва унинг илдизи (36). 14. Акслантиришлар ҳақида қисқача тушунчалар (38). 15. Функция таърифи, унинг аниқ-

* Қавсларда назарий саволлар жавобининг ушбу қўлланмадаги бет номери кўрсатилган.

ланиш соҳаси ва қийматлар тўплами. Функциянинг берилиш усуллари. Мураккаб функция (39). 16. Берилган функцияга тескари функция тушунчаси (44). 17. Функциянинг графиги (46). 18. Функциянинг ўсиши ва камайиши, жуфт ва тоқлиги, даврийлиги (47). 19. Сонли функция экстремуми таърифи. Функциянинг оралиқдаги энг катта ва энг кичик қиймати (49). 20. $y = kx + b$ функциянинг хоссалари ва графиги (51). 21. $y = \frac{k}{x}$ функциянинг хоссалари ва графиги (53). 22. Даражали функциянинг таърифи, асосий хоссалари ва графиги (54). 23. Арифметик илдиз функцияси: $y = \sqrt[n]{x}\,(n \in \mathrm{N})$ (55). 24. $y = ax^2 + bx + c$ функциянинг хоссалари ва графиги (57). 25. Квадрат тенгламанинг илдизлари формулалари (59). 26. Виет теоремаси (61). 27. Квадрат учҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратиш (62). 28. Кўрсаткичли функция ва унинг хоссалари, графиги (62). 29. Логарифмик функция, унинг хоссалари ва графиги (63). 30. Бир хил асосли логарифмлар устида амаллар (65). 31. Бурчак. Сон аргументнинг синуси, косинуси, тангенси ва котангенси (66). 32. Икки аргумент йиғиндиси ва айирмасининг косинуси, синуси ва тангенси (69). 33. Иккиланган ва ярим аргументнинг тригонометрик формулалари (71) 34. Йиғиндини кўпайтмага келтириш формулалари (72). 35. Тригонометрик функцияларнинг хоссалари ва графиги (73). 36. $\sin x = a$, $\cos x = a$ ва $\mathrm{tg}\, x = a$ кўринишдаги тенгламаларни ечиш (79). 37. Тескари тригонометрик функцияларнинг хоссалари ва графиги (82). 38. Сонли кетма-кетликлар (93). 39. Арифметик прогрессия, унинг n-ҳади ва дастлабки n та ҳади йиғиндиси (94). 40. Геометрик прогрессия, n-ҳади ва дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси (96). 41. Чексиз камаювчи геометрик прогрессия ҳадлари йиғиндиси (97). 42. Сонли кетма-кетликнинг лимити (98). 43. Функциянинг лимити (101). 44. Функциянинг узлуксизлиги (103). 45. Функциянинг ҳосиласи (108). 46. Икки функция йиғиндисининг ҳосиласи (110). 47. Икки функция кўпайтмасининг ҳосиласи (111). 48. Бўлинманинг ҳосиласи (112). 49. Мураккаб функциянинг ҳосиласи (113). 50. Тескари функциянинг ҳосиласи (114). 51. $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, a^x, $\log_a x$ функциялар ҳосиласи, e сони ҳақида (116). 52. Ҳосиланинг қўлланилиши (118). 53. Функциянинг оралиқда ўсиши (камайиши) нинг етарли шарти (122). 54. Функция экстремуми мавжудлигининг зарурий шарти. Ферма теоремаси. (124). 55. Функция экстремуми мавжудлигининг етарли шарти (125). 56. Функцияларни текшириш схемаси (129). 57. Ҳосила устида амаллар. Баъзи элементар функциялар ҳосиласи (132). 58. Бошланғич функциянинг таърифи ва унинг умумий кўриниши (133). 59. Эгри чизиқли трапециянинг юзи (136). 60. Интеграл. Ньютон—Лейбниц формуласи (138). 61. Интегралнинг татбиқи (140). 62. Интегрални ҳисоблашнинг асосий қоидалари (143). 63. Тенг-

лама. Тенглама ечимлари тўплами (279-288, 302, 308-341). 64. Икки номаълумли тенглама графиги. Тенг кучли тенгламалар (279). 65. Сонли тенгсизлик ва унинг хоссалари (255). 66. Тенгсизлик ва унинг ечимлари тўплами. Тенг кучли тенгсизликлар (297-302, 305-333). 67. Тенгламалар ва тенгсизликлар системаси, уларнинг ечимлар тўплами (288-296, 371). 68. Параметрга боғлиқ тенглама ва тенгсизликлар (371-386).

Геометрия. Планиметрия

1. Кесма, нур, синиқ чизиқ (145). 2. Соҳа. Бурчак, бурчак ўлчами. Вертикал ва қўшни бурчаклар. Биссектриса (147). 3. Параллел тўғри чизиқлар 149. 4. Перпендикуляр тўғри чизиқлар. (149). 5. Силжитиш ва унинг турлари (буриш, марказий симметрия, ўққа нисбатан симметрия, параллел кўчириш) (150). 6. Вектор. Вектор устида амаллар. Коллениар ва компланар векторлар (154). 7. Қаварик фигуралар. Кўпбурчак, унинг учлари, томонлари, диагоналлари. Кўпбурчакнинг симметрия ўқи ва марказлари (162). 8. Учбурчак. Унинг медианаси, биссектрисаси, баландлиги (165). 9. Икки учбурчакнинг тенглик аломатлари. Тенг ёнли учбурчак хоссаси (169). 10. Кесма учларидан баравар масофада жойлашган нуқталар (170). 11. Тўғри чизиқларнинг параллеллик аломатлари (170) 12. Учбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси. Қаварик кўпбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси. (172). 13*. Текисликда (фазода) гомотетия (174). 14*. Текисликда ўхшашлик алмаштиришлари (177). 15. Учбурчак ўрта чизиғининг хоссалари (178). 16. Тўртбурчаклар. Трапеция, унинг ўрта чизиғи (179). 17. Параллелограмм ва унинг симметрия маркази (179). 18. Параллелограммнинг асосий белгилари (180). 19. Тўғри тўртбурчак томонининг ўрта перпендикуляри хоссаси (182) 20. Айлана ва доира (183). 21. Ички ва ташқи чизилган кўпбурчаклар. Учбурчакка ташқи чизилган айлана (184). 22. Учбурчакка ички чизилган айлананинг мавжудлиги (185). 23. Айланага ўтказилган уринма хоссалари (187). 24. Марказий бурчак ва айлана ёйи. Сектор. Сегмент (189). 25. Айланага ички ҳамда ташқи чизилган бурчак ва уларни ўлчаш (189). 26. Кўпбурчак ва учбурчакларнинг ўхшашлик аломатлари (192). 27. Пифагор теоремаси (196). 28. Косинуслар теоремаси (197). 29. Синуслар теоремаси (198). 30. Параллелограмм, учбурчак ва трапеция юзларини ҳисоблаш (199). 31. Мунтазам кўпбурчакнинг юзи (202). 32. Айлана ва айлана ёйи узунлиги. Доира ва сектор юзи (204).

Стереометрия

33. Фазода нуқта, тўғри чизиқ, текисликнинг ўзаро жойлашиши. Параллел тўғри чизиқлар (205). 34. Тўғри чизиқ билан текисликнинг параллеллиги (207). 35. Текисликларнинг ўзаро

параллеллиги (207) 36. Тўғри чизиқ билан текисликларнинг перпендикулярлиги (208). 37. Нуқтадан текисликкача бўлган масофа. Ортогонал проекция (209). 38. Уч перпендикуляр ҳақида теорема (211). 39. Тўғри чизиқ билан текислик ва текислик билан текислик орасидаги бурчак (211). 40. Икки текисликнинг ўзаро перпендикулярлиги (213). 41. Текислик тенгламаси (213). 42. Кўп ёқли бурчак (215). 43. Кўп ёқли сирт. Кўпёқ. Призма (216). 44. Параллелопипед диагоналлари ўртасининг хоссалари (217). 45. Тўғри бурчакли параллелопипед диагоналларининг хоссалари (218). 46*. Призма сиртининг юзи. Ҳажм тушунчаси ва призма ҳажмини топиш формуласи (219). 47. Пирамида сиртининг юзини ва ҳажмини топиш формулалари (223). 48. Айланиш фигураси. Цилиндр сиртининг юзи ва ҳажмини ҳисоблаш формулалари (226). 49. Айланиш фигурасининг ҳажми. Конус сиртининг юзи ва ҳажмини топиш формулалари (229). 50. Шар ва унинг ҳажми (231). 51. Сфера ва унинг сиртининг юзини ҳисоблаш формулалари (233). 52. Баъзи геометрик фигуралар (кесик пирамида, кесик конус, шар сегменти ва сектори) сиртининг юзи ва ҳажми (234, 256).

2-§. Программа материалларини такрорлаш

Арифметика, алгебра ва анализ асослари

1. Тўплам ва унинг элементлари. Қисм-тўплам. „Тўплам" тушунчаси математиканинг таърифсиз қабул қилинган асосий тушунчаларидан бири бўлиб, баъзи белгиларига асосан биргаликда қараладиган объектлар мажмуасидир. Тўпламни ташкил қилувчи ҳар бир объект унинг „*элементи*" дейилади. Бу элементлар фақат моддий объектгина бўлиб қолмай, абстракт объект (сон, геометрик фигура, символ...) лар ҳам бўлиши мумкин. Тўплам одатда латин алфавитининг бош ҳарфлари (A, B, C, ... ва ҳ. к.), унинг элементлари эса кичик ҳарфлари (a, b, c, ... ва ҳ. к.) орқали белгиланади.

Агар a элемент A тўплам таркибига кирса, бу $a \in A$ каби белгиланади ва „*a элемент A тўпламга тегишли*" деб ўқилади. Акс ҳолда, яъни a элемент A тўпламга тегишли бўлмаса, унда $a \overline{\in} A$ каби ёзилади ва „*a элемент A тўпламига тегишли эмас*" деб ўқилади. A тўплам элементлари сони чекли бўлса, уларнинг ҳар бирини ҳарфлар билан белгилаб чиқиш мумкин: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. У ҳолда тўпламни

$$A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n\}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Масалан, барча мунтазам кўпёқлар тўпламини $B = \{a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5\}$ каби белгилаш мумкин. Бу ифода мазмунан қуйидагини билдиради:

$B=\{$тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр, икосаэдр$\}$.

Баъзида тўплам элементларнинг хоссалари орқали берилади. Бу ҳолда у $A=\{x \mid \varphi(x)\}$ тарзида ифодаланиб, $\varphi(x)$ *хоссага эга бўлган x элементлар тўплами* деб ўқилади.

Мисол. Маълумки, **N**—натурал сонлар тўплами, **Z**— бутун сонлар тўплами. У ҳолда рационал сонлар тўпламини қисқача

$$Q=\left\{x \mid x=\frac{m}{n},\ n \in \mathbf{N},\ m \in \mathbf{Z}\right\}$$

деб ёзиш мумкин. Бунда ҳар бир x сон учун умумий хосса $\varphi(x)$, яъни $x=\frac{m}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{Z}$ бажарилиши кўрсатилган.

B тўпламнинг ҳамма элементлари A тўпламнинг ҳам элементлари бўлса, у ҳолда *B тўплам A нинг қисм тўплами* дейилади ва $B \subset A$ кўринишида белгиланади. Шу жумладан, ҳар қандай A тўплам ўзига ўзи қисм тўпламдир: $A \subset A$.

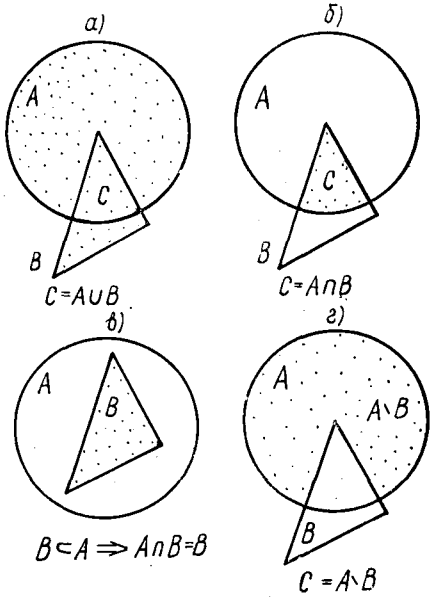
1-мисол. Синфдаги қизлар тўплами шу синф ўқувчилари тўпламининг қисмидир.

2-мисол. Натурал сонлар тўплами **N** бутун сонлар тўплами **Z** нинг қисми, **Z** эса ўз навбатида **Q** рационал сонлар тўпламининг қисми бўлгани учун $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ деб ёзиш мумкин. Буларни умумлаштириб, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ деб ёзса бўлади.

Агар бир вақтда $A \subset B$ ва $B \subset A$ муносабатлар бажарилса, у ҳолда A ва B тўпламлар *ўзаро тенг* дейилади ва $A=B$ деб ёзилади.

Ҳеч қандай элементи бўлмаган тўплам *бўш тўплам* деб айтилади ва $\varnothing$ билан белгиланади. Масалан, „учбурчакнинг диагоналлари тўплами", „$x^2+1<0$ тенгсизлик ечимлари тўплами", „бир-биридан фарқли икки параллел тўғри чизиқнинг умумий нуқталари тўплами" бўш тўпламдир. Бўш тўплам учун $\varnothing \subset A$ хосса ихтиёрий A тўплам учун ўринлидир.

2. Тўпламларнинг бирлашмаси, кесишмаси ва айирмаси. Бўш бўлмаган A ва B тўпламлар берилган бўлсин. 1-шаклда кўргазмалилик учун A ва B тўпламларни мос равишда доира ва учбурчак си-



1-шакл.

фатида олиб, уларнинг бирлашмаси, кесишмаси ҳамда айирмаси тасвирланган.

A ва B тўпламларнинг *бирлашмаси* деб шундай C тўпламга айтиладики, унинг ҳар бир элементи ё A тўпламга, ё B тўпламга тегишлидир (1-*а* шакл). Бу бирлашма-тўпламни қисқача $A \cup B = C$ белгилаш қабул қилинган.

A ва B тўпламларнинг *кесишмаси* деб шундай C тўпламга айтиладики, унинг ҳар бир элементи ҳам A тўпламга, ҳам B тўпламга тегишлидир (1-*б* шакл).

Бу кесишма-тўплам қисқача $A \cap B = C$ кўринишда ёзилади. Демак, C тўплам A ва B тўпламларнинг умумий элементларидан ташкил топар экан. Агар A ва B тўпламлар умумий элементга эга бўлмаса, табиийки, уларнинг кесишмаси бўш тўпламдир: $A \cap B = \varnothing$.

Натижа. Агар B тўплам A нинг қисм-тўплами бўлса, у ҳолда уларнинг кесишмаси яна B тўпламни беради (1-*в* шакл).

A ва B тўпламларнинг *айирмаси* деб шундай C тўпламга айтиладики, у A нинг B га тегишли бўлмаган барча элементларидан ташкил топади (1-*г* шакл) ва қисқача $A \setminus B = C$ деб белгиланади.

Мисоллар. 1) 3 га бўлинадиган барча натурал сонлар тўплами $A = \{a | a = 3n,\ n \in \mathbf{N}\}$, 5 га бўлинадиган барча натурал сонлар тўплами $B = \{b | b = 5k,\ k \in \mathbf{N}\}$ бўлсин. У ҳолда $A \cup B$ — бирлашма элементлари 3 га ёки 5 га, $A \cap B$ кесишма ҳам 3 га, ҳам 5 га, яъни 15 га бўлинадиган натурал сонлардан ташкил топади. $A \subset \mathbf{N}$ бўлгани учун $A \cap \mathbf{N} = A$ бажарилади. $A \cap B \neq \varnothing$ бўлгани учун $A \setminus B$ тўплам 5 га бўлинмайдиган барча 3 га каррали сонлардан иборатдир.

2) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ бўлсин. У ҳолда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A \cap B = \{3, 4, 5\}$, $A \setminus B = \{1, 2\}$, $B \setminus A = \{6, 7, 8, 9\}$.

3) Ушбу сон оралиқлари $A = [-2; 2]$, $B = [0; 8[$ учун $A \cup B = [-2; 8[$, $A \cap B = [0; 2]$, $A \setminus B = [-2; 0[$, $B \setminus A =]2; 8[$ эканлигини чизмада кўрсатинг.

Топшириқлар. 1. Агар A — барча жуфт сонлар тўплами, B — барча 3 га бўлинадиган сонлар тўплами бўлса, $A \cap B$ тўплам элементлари хоссасини айтиб беринг.

2. A тўплам 1, 2, 3, 4 ва 5 сонлардан тузилган барча икки хонали сонлардан иборат. Шу тўпламнинг қисм-тўплами A_1 — жуфт сонлардан, A_2 — эса 3 га бўлинадиган, A_3 — 4 га бўлинадиган, A_4 — 5 га бўлинадиган сонлардан ташкил топган. $A \cap A_1$, $A \cap A_2$, $A_1 \cap A_2$, $A_2 \cap A_4$, $A_2 \cup A_3$, $A_3 \cup A_4$ ларни тузинг. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = A$ тенглик тўғрими? $A_3 \setminus A_4 = \varnothing$ тенглик-чи?

3. Агар A — текисликдаги барча ташқи айланаси мавжуд тўртбурчаклар, B — квадратлар, C — ромблар, D — тўғри тўртбурчаклар тўплами бўлса, ушбу тўпламларнинг элементлари борми ва улар қандай: $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $B \setminus C$, $C \setminus B$, $A \cup D$, $A \cap D$, $C \cap D$, $B \cup C$, $A \setminus D$, $D \setminus A$, $C \cup D$, $C \setminus D$, $D \setminus C$?

3. Натурал, бутун, рационал ва ҳақиқий сонлар тўплами. Улар орасидаги муносабатлар.

Натурал сон деб саноқ учун

ишлатиладиган сонларга айтилади ва у қуйидагича белгиланади:

$$\mathbf{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ \ldots,\ n,\ \ldots\}.$$

Натурал сонлар тўпламида қўшиш ва кўпайтириш амаллари қуйидагича аниқланган: тўпламдан олинган ихтиёрий m ва n сонларнинг йиғиндиси деб $m+n$ билан белгиланадиган шундай $p \in \mathbf{N}$ сонга айтиладики, у m ва n сонлар биргаликда нечта бирлардан иборат бўлса, шунча бирдан иборат бўлади:

$$m,\ n \in \mathbf{N} \Longrightarrow p = m + n,\ p \in \mathbf{N}.$$

Шу *сонларнинг кўпайтмаси* деб $m \cdot n$ билан белгиланадиган шундай $q \in \mathbf{N}$ сонга айтиладики, у m марта олинган n та бирлар сонига тенг бўлади: $m,\ n \in \mathbf{N} \Longrightarrow q = m \cdot n,\ q \in \mathbf{N}$.

Бу амаллар коммутативлик, ассоциативлик ва дистрибутивлик хоссаларига эга:

1. $m + n = n + m,\ \ m \cdot n = n \cdot m;$
2. $(m + n) + k = m + (n + k),\ \ (m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k);$
3. $(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k.$

Натурал сонлар тўпламига *ноль* деб аталадиган 0 сонини ва *манфий ишора* билан олинадиган натурал сонларни бирлаштиришдан ҳосил бўладиган тўплам *бутун сонлар тўплами* деб аталади ва у $\mathbf{Z}$ билан белгиланади:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots,\ -n,\ \ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}.$$

Бу тўпламдаги 0 сони ихтиёрий $n \in \mathbf{N}$ учун $n + 0 = n$ ва $n + (-n) = 0$ тенгликларни қаноатлантиради. Бу ерда $-n$ ва n лар ўзаро *қарама-қарши сонлар* деб аталади.

Шундай қилиб, таърифга биноан $\mathbf{N}$ сонлар тўплами бутун сонлар тўпламининг қисм-тўплами экан: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$. Кўпинча, натурал сонлар *мусбат бутун сонлар тўплами* деб ҳам юритилади. Бутун сонлар тўплами тартибланган тўпламдир, яъни ҳар бир $m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{Z}$ элементлар учун, ё $m = n$ ё $m < n$, ё $m > n$ муносабат ўринлидир. Агар $m \in \mathbf{Z}$ бутун сон мусбат бўлса, бу $m > 0$ кўринишда ёзилади, манфий бўлса, $m < 0$ каби ёзилади. m бутун соннинг *абсолют қиймати* деб $|m|$ билан белгиланадиган ва қуйидаги

$$|m| = \begin{cases} m, \text{ агар } m > 0; \\ 0, \text{ агар } m = 0; \\ -m, \text{ агар } m < 0 \end{cases}$$

қоида билан аниқланадиган сонга айтилади.

Масалан, $4 > 0$, шунинг учун унинг абсолют қиймати ўзига тенг: $|4| = 4$. Лекин, $-7 < 0$. Таърифга биноан: $|-7| = -(-7) = +7$. Шунингдек, $|-10| = -(-10) = 10$, $|200| = 200$, $|-31| = 31$.

Бу қоидадан келиб чиқадики, $|m|$ нинг қиймати $m<0$ ва $m>0$ бўлганда ҳам мусбат, у $m=0$ бўлганда нолга тенг. $m \in \mathbf{Z}$ ва $n \in \mathbf{Z}$ *бутун сонларнинг йиғиндиси* деб, $m+n=c$ билан белгиланадиган ва ушбу қоида билан аниқланадиган c бутун сонга айтилади:

1) $m>0,\ n>0 \Rightarrow c=m+n$;
2) $m<0,\ n<0 \Rightarrow c=-(|m|+|n|)$;
3) $m>0,\ n<0$ ва $|m|>|n| \Rightarrow c=|m|-|n|$;
4) $m>0,\ n<0$ ва $|m|=|n| \Rightarrow c=0$;
5) $m>0,\ n<0$ ва $|m|<|n| \Rightarrow c=-(|n|-|m|)$;
6) $m<0,\ n>0$ ва $|m|>|n| \Rightarrow c=-(|m|-|n|)$;
7) $m<0,\ n>0$ ва $|m|=|n| \Rightarrow c=0$;
8) $m<0,\ n>0$ ва $|m|<|n| \Rightarrow c=|n|-|m|$;
9) $m=0 \Rightarrow c=n$;
10) $n=0 \Rightarrow c=m$.

Худди шунингдек, шу $m \in \mathbf{Z}$ ва $n \in \mathbf{Z}$ *бутун сонлар кўпайтмаси* $c=m \cdot n$ билан белгиланади ва ушбу қоида билан аниқланади:

1) $m>0,\ n>0 \Rightarrow c=m \cdot n$;
2) $m<0,\ n>0 \Rightarrow c=-|m| \cdot n$;
3) $m>0,\ n<0 \Rightarrow c=-m \cdot |n|$;
4) $m=0 \Rightarrow c=0$;
5) $n=0 \Rightarrow c=0$.

Бутун сонлар тўпламида аниқланган бу қўшиш ва кўпайтириш амаллари натурал сонлар тўпламидаги сингари коммутативлик, ассоциативлик ва дистрибутивлик хоссаларига эга:

1) $m+n=n+m$;
2) $(m+n)+k=m+(n+k)$;
3) $m \cdot n=n \cdot m$;
4) $(m \cdot n) \cdot k=m \cdot (n \cdot k)$;
5) $(m+n) \cdot k=mk+n$.

Оддий каср. $\frac{m}{n}$ (m — бутун, n — натурал сон) кўринишдаги ифода *оддий каср* дейилади, m — унинг *сурати*, n эса *махражи* дейилади. Масалан, $\frac{4}{5}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{-18}{3}$, $\frac{14}{21}$, $\frac{101}{7}$ лар оддий каср сонларидир. $\frac{m}{n}$ ва $\frac{k}{l}$ каср сонлар учун $ml=nk$ тенглик ўринли бўлса, улар *ўзаро тенг* дейилади. $\left(\frac{4}{5}\right.$ ва $\frac{8}{10}$, $\frac{-8}{3}$ ва $\left.\frac{-16}{6}\right.$ касрларнинг ўзаро тенглигини ўзингиз текширинг.)

Касрнинг сурат ва махражини уларнинг бирдан фарқли умумий бўлувчисига бўлиш *касрни қисқартириш* деб айтилади. Масалан,

$$\frac{9}{27}=\frac{9:9}{27:9}=\frac{1}{3};\quad \frac{45}{60}=\frac{45:15}{60:15}=\frac{3}{4};\quad \frac{150}{450}=\frac{15}{45}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

Берилган $\frac{m}{n}$ касрнинг ($m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$) сурати манфий бўлса, бу каср *манфий*, сурати мусбат бўлса, *мусбат каср* деб айтилади, агар сурати 0 бўлса, уни *0 га тенг* дейилади.

Масалан, $\frac{-3}{19}=-\frac{3}{19}<0$, $\frac{+8}{19}=+\frac{8}{19}>0$, $\frac{0}{19}=0$.

Агар $\frac{m}{n}$ касрнинг сурат ва махражини бирор p ($p \in \mathbf{N}$) сонга кўпайтириб, $\frac{mp}{np}$ каср ҳосил қилинса, бунга касрни *янги махражга келтириш* деб айтилади. Масалан, $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{75}{100}$.

Бир хил махражли икки касрни ўзаро таққослашда $\frac{m}{n}$ ва $\frac{k}{n}$ каср суратларининг қайси бири катта бўлса, ўша каср катта ҳисобланади.

Масалан, $\frac{3}{4}$ ва $\frac{9}{4}$ касрлар берилган бўлса, $3<9$ бўлгани учун $\frac{3}{4}<\frac{9}{4}$ дир. $\frac{-8}{17}$ ва $\frac{3}{17}$ учун $-8<3$ бўлганидан $-\frac{8}{17}<\frac{3}{17}$ дир. Ҳар хил махражли $\frac{m}{n}$ ва $\frac{k}{l}$ касрларни таққослашда $\frac{ml}{nl}$ ва $\frac{kn}{ln}$ касрларнинг суратлари ўзаро солиштирилади, сўнгра улардан каттаси (кичиги) аниқланади.

Масалан, $\frac{2}{3}$ ва $\frac{8}{21}$ касрларни солиштириш учун $\frac{2\cdot 21}{3\cdot 21}$ ва $\frac{8\cdot 3}{21\cdot 3}$ касрлар суратларида $42>24$ эканлигини топамиз ва $\frac{2}{3}>\frac{8}{21}$ деган хулосага келамиз.

Бир хил махражли касрларни қўшиш ёки айириш

$$\frac{m}{n}\pm\frac{k}{n}=\frac{m\pm k}{n} \qquad (1)$$

формула бўйича бажарилади.

Ҳар хил махражли касрларни қўшиш ёки айириш эса уларни бир хил махражга келтириш билан бажарилади, яъни

$$\frac{m}{n}\pm\frac{k}{l}=\frac{ml}{nl}\pm\frac{k\cdot n}{l\cdot n}=\frac{ml\pm kn}{nl}. \qquad (2)$$

Ҳар хил махражли касрларни бир хил махражга келтириш учун иккала каср махражларининг умумий бўлинувчисини топиш кифоя. Энг кичик умумий бўлинувчиси эса касрларнинг

энг кичик умумий махражи деб айтилади ва одатда қўшиш ёки айириш энг кичик умумий махражни аниқлаш орқали бажарилади. (Бу ҳақда 18-бетга қаранг.)

Мисол тариқасида $\frac{5}{12}$ ва $\frac{7}{18}$ ларни шу учала қоида асосида қўшайлик:

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 18+7\cdot 12}{12\cdot 18}=\frac{90+84}{216}=\frac{174}{216}=\frac{29}{36};$$

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 6}{12\cdot 6}+\frac{7\cdot 4}{18\cdot 4}=\frac{30+28}{72}=\frac{58}{72}=\frac{29}{36};$$

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 3}{12\cdot 3}+\frac{7\cdot 2}{18\cdot 2}=\frac{15+14}{36}=\frac{29}{36}.$$

Касрларни кўпайтириш ва бўлиш қуйидагича бажарилади:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{l}=\frac{mk}{nl};\quad \frac{m}{n}:\frac{k}{l}=\frac{m}{n}\cdot\frac{l}{k}=\frac{ml}{nk}. \qquad (3)$$

Масалан, $\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{8}=\frac{35}{96};\quad \frac{4}{3}:\frac{9}{5}=\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{9}=\frac{20}{27}.$

Касрларни кўпайтириш ва қўшиш коммутативлик, ассоциативлик ва дистрибутивлик хоссаларига эга:

1. а) $\frac{m}{n}+\frac{k}{l}=\frac{k}{l}+\frac{m}{n}$; б) $\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{l}=\frac{k}{l}\cdot\frac{m}{n}$;
2. а) $\left(\frac{m}{n}+\frac{k}{l}\right)+\frac{p}{q}=\frac{m}{n}+\left(\frac{k}{l}+\frac{p}{q}\right)$; б) $\frac{m}{n}\left(\frac{k}{l}\cdot\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{l}\right)\cdot\frac{p}{q}$;
3. $\left(\frac{m}{n}+\frac{k}{l}\right)\cdot\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}+\frac{k}{l}\cdot\frac{p}{q}$.

Агар $\frac{m}{n}$ мусбат каср сон учун $m<n$ бўлса, уни *тўғри каср*, $m>n$ бўлса *нотўғри каср* деб айтилади. Нотўғри каср $\frac{m}{n}$ нинг сурати $m=np+q$ ($p,\ q\in\mathbf{N},\ 0<q<n$) каби ифодаланса, уни $\frac{m}{n}=p+\frac{q}{n}$ кўринишда ёзиш мумкин. p ни $\frac{m}{n}$ касрнинг *бутун қисми*, $\frac{q}{n}$ ни *тўғри каср қисми* дейилиб, $p\frac{q}{n}$ ни шу касрнинг *аралаш каср шаклда ёзилиши* деб ўқилади.

Масалан, $\frac{23}{5}=4+\frac{3}{5}=4\frac{3}{5};\quad \frac{107}{20}=5+\frac{7}{20}=5\frac{7}{20}.$

Аксинча, $p\frac{q}{n}$ — аралаш касрни нотўғри касрга айлантириш деб, унинг $\frac{pn+q}{n}$ шаклда ёзилишига айтилади.

Масалан, $8\frac{2}{3}=\frac{8\cdot 3+2}{3}=\frac{24+2}{3}=\frac{26}{3}$; $5\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 4+3}{4}=\frac{23}{4}$.

Аралаш касрларни қўшиш ва айириш қоидаси қуйидагича аниқланади:

$$p\frac{q}{n}\pm m\frac{s}{k}=(p\pm m)+\left(\frac{q}{n}\pm\frac{s}{k}\right).$$

Масалан, $17\frac{3}{8}+20\frac{1}{4}=(17+20)+\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\right)=37+\frac{3+2}{8}=37\frac{5}{8}$;

$$-9\frac{7}{10}+4\frac{14}{15}=(-9+4)+\left(-\frac{7}{10}+\frac{14}{15}\right)=-5+\frac{28-21}{30}=$$
$$=-5+\frac{7}{30}=-4\frac{23}{30};$$

$$-9\frac{8}{15}-4\frac{9}{10}=(-9-4)+\left(-\frac{8}{15}-\frac{9}{10}\right)=-13+\frac{-16-27}{30}=-14\frac{13}{30}.$$

Натижалар. Аралаш каср устида ушбу амаллар ўринлидир:

1) $p\frac{q}{n}\cdot m\frac{s}{k}=\frac{pn+q}{n}\cdot\frac{mk+s}{k}$; 3) $p\cdot m\frac{s}{k}=\frac{p(mk+s)}{k}$;

2) $p\frac{q}{n}:m\frac{s}{k}=\frac{pn+q}{n}\cdot\frac{k}{mk+s}$; 4) $p:m\frac{s}{k}=\frac{pk}{mk+s}$.

Масалан,

$$4\frac{3}{5}\cdot 2\frac{2}{3}=\frac{23}{5},\quad \frac{8}{3}=\frac{184}{15}=12\frac{4}{12};$$
$$4\frac{3}{5}:2\frac{2}{3}=\frac{23}{5}:\frac{8}{3}=\frac{23}{5}\cdot\frac{3}{8}=\frac{69}{40}=1\frac{29}{40};$$
$$4\cdot 2\frac{2}{3}=4\cdot\frac{8}{3}=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}.$$

Топшириқлар. 1. $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{17}$, $\frac{25}{18}$, $\frac{-39}{41}$ касрларнинг ҳар бирининг сурат ва махражини 5 га кўпайтириб, ҳосил бўлган касрларни ёзинг. Уларни ўзаро таққослаб, ўсиш тартибида ёзиб чиқинг.

2. Ушбу касрларни 5 га кўпайтиринг (бўлинг):

$$\frac{15}{10};\ \frac{130}{35};\ \frac{-40}{60};\ \frac{65}{90}.$$

3. Касрларнинг энг кичик умумий махражини топинг:

$$\frac{5}{6}\text{ ва }\frac{7}{8};\ \frac{7}{10}\text{ ва }\frac{7}{12};\ \frac{8}{33}\text{ ва }\frac{19}{77};$$
$$\frac{5}{12}\text{ ва }\frac{5}{8};\ \frac{11}{30}\text{ ва }\frac{19}{45};\ \frac{11}{750}\text{ ва }\frac{17}{450}.$$

Шу касрларни ўзаро солиштиринг.

4. Амалларни бажаринг:

а) $\frac{3}{55}-\frac{21}{22}$; $\frac{11}{3}+\frac{8}{7}$; $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}$;

б) $\frac{3}{7}+\frac{11}{14}-\frac{2}{21}$; $\frac{1}{8}+\frac{13}{8}+\frac{11}{12}+\frac{14}{12}$;

в) $11\frac{4}{15}+3\frac{3}{20}$; $136\frac{5}{7}+112\frac{7}{8}$; $18\frac{7}{15}-3$;

д) $\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{8}-\frac{5}{6}\right)\left(1-\frac{5}{17}\right)$; $\left(\frac{4}{9}-\frac{2}{9}+\frac{5}{6}\right)\frac{4}{5}-\frac{1}{15}$;

е) $\left(3\frac{7}{9}-4\frac{13}{18}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{17}\right)-\frac{8}{7}\left(\frac{11}{14}-\frac{3}{28}\right)$;

ж) $3\frac{1}{2}:\frac{2}{3}+1\frac{2}{3}:1\frac{1}{10}+10\frac{1}{3}:2\frac{2}{3}+4\frac{3}{4}:3$;

з) $\left(\frac{2}{15}+\frac{7}{12}\right)\cdot\frac{30}{43}-\frac{2}{3}:(2:2{,}5)\cdot\frac{5}{32}$.

Рационал сон деб $\frac{m}{n}$ $(m\in \mathbf{Z},\ n\in \mathbf{N})$ кўринишдаги сонга айтилади. Барча рационал сонлар тўплами **Q** билан белгиланади:

$$\mathbf{Q}=\left\{x \mid x=\frac{m}{n},\quad m\in \mathbf{Z},\quad n\in \mathbf{N}\right\}.$$

Рационал сонлар тўплами таърифидан натурал сонлар тўплами (**N**) ва бутун сонлар тўплами (**Z**) унинг қисми экани келиб чиқади:

$$\mathbf{N}\subset \mathbf{Q},\quad \mathbf{Z}\subset \mathbf{Q}.$$

Масала. Катетларининг узунлиги 1 га тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси узунлигини топинг.

Ечилиши. Агар a ва b — учбурчакнинг катетлари узунлиги, c эса унинг гипотенузаси узунлиги бўлса, Пифагор теоремасига кўра $a^2+b^2=c^2$. Аммо $a=b=1$ бўлгани учун $c^2=2$, яъни $c=\sqrt{2}$.

Савол туғилади: $\sqrt{2}$ қандай сон, рационалми? Фараз қилайлик, $\sqrt{2}$ ни рационал $\frac{m}{n}$ кўринишда $\left(\frac{m}{n}\right.$ — қисқармайдиган каср$\left.\right)$ ифодалаш мумкин бўлсин, у ҳолда $m^2=2n^2$ бўлиб, $n^2\in \mathbf{N}$ дан m нинг жуфт сонлиги келиб чиқади: $m=2k$, $k\in \mathbf{N}$. Бундан, $n^2=2k^2$ ҳосил бўлиб, у n нинг жуфтлигини асослайди: $n=2l$, $l\in \mathbf{N}$. Натижада

$$\frac{m}{n}=\frac{2k}{2l}$$

тенглик $\frac{m}{n}$ касрнинг қисқарувчи каср эканлигини кўрсатади. Бу

эса юқоридаги фаразимизнинг нотўғри эканлигини, яъни $\sqrt{2}$ рационал сон бўла олмаслигини тасдиқлайди.

Рационал бўлмаган сонлар чексиз кўпдир. Масалан, $\sqrt{2}+n\ (n\in \mathbf{Z})$, $\lg 3$, π, $\operatorname{arctg} 4$, $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$, $\sqrt{\ln 3}$, e, $\frac{\pi}{e}$, $\sqrt{1+\pi}$, e^2 ... ва ҳ. к.

Иррационал сон деб $\frac{m}{n}$ $(m\in \mathbf{Z},\ n\in \mathbf{N})$ кўринишида ёзиб бўлмайдиган сонларга айтилади. Иррационал сонлар тўпламининг (уни $\mathbf{I}$ билан белгиласак) рационал сонлар тўплами билан бирлашмаси *ҳақиқий сонлар тўплами* дейилади ва у $\mathbf{R}=\mathbf{Q}\cup\mathbf{I}$ каби ифодаланади.

Топшириқлар. 1. $\sqrt{3}$ нинг иррационал эканини исбот қилинг.

2. $\lg 2$ ни $\frac{m}{n}$ шаклда ёзиш мумкин деб фараз қилиб, унинг иррационал сон эканини исботланг.

3. Ҳар қандай $r\in \mathbf{Q}$ рационал сон учун $\sqrt{2}+r$ иррационал эканини кўрсатинг.

4. Бўлувчи, бўлинувчи. Туб ва мураккаб сонлар. Агар n ва m натурал сонлар учун шундай l натурал сон топилсаки, улар учун $n=ml$ бажарилса, n ни m га (l га) *бўлинувчи сон* дейилади. m ни n га l *каррали* деб ҳам айтилади. Агар натурал сон фақат 1 га ва ўзигагина бўлинса, у *туб сон* дейилади. Агар натурал соннинг 1 ва ўзидан бошқа бўлувчилари мавжуд бўлса, у *мураккаб сон* дейилади. 1 сони туб сон эмас деб қабул қилинади.

Масалан, $12=4\cdot 3$ бўлгани учун у 4 га (3 га) бўлинувчи сондир. У мураккаб сон 17 эса 1 ва ўзидан бошқа сонга бўлинмагани учун туб сондир.

Агар мураккаб натурал сон n ни иккита k ва l натурал сон кўпайтмаси $k\cdot l$ тарзида ёзиш мумкин бўлса, у ҳолда n сони *кўпайтувчиларга ажратилган* деб айтилади: $n=k\cdot l\ (k\neq 1,\ l\neq 1)$. Агар k ва l туб бўлса, у ҳолда n *туб кўпайтувчилар ёйилмасида ифодаланган дейилади.* Аксинча k ва l ларнинг камида бири мураккаб бўлса, у ҳолда уни туб бўлувчилар кўпайтмасига яна ажратиш мумкин. Натижада n бир нечта туб кўпайтувчиларга ажралади ва бу жараён n сонини *туб кўпайтувчиларга ажратиш* деб айтилади.

Ҳар қандай мураккаб сон ягона усулда туб кўпайтувчиларга ажралади. Туб кўпайтувчилар ёйилмасидаги барча бир хил туб сонларни умумий асосли даражаларга келтирилса, ёйилма $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot\ \ldots\ \cdot p_r^{\alpha_r}$ кўринишга келади. Бу ерда кўпайтувчиларнинг ўрни алмашиши билан кўпайтма қиймати ўзгармаганлиги учун турли кўринишда ёзилган $n=p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2}\ p_3^{\alpha_3}\cdot\ \ldots\ \cdot p_r^{\alpha_r}$ ёйилма ягона ҳисобланади.

Мисоллар. 1) $450=2\cdot3^2\cdot5^2$; 2) $1360=2^4\cdot5\cdot17$; 3) $4224=2^3\cdot7^2\cdot11^2$; 4) $650=2\cdot5^2\cdot13$; 5) $13188=2^2\cdot3^3\cdot11^2$; 6) $600=2^2\cdot3\cdot5^2$; 7) $7260=2^2\cdot3\cdot5\cdot11^2$.

Масалан, охирги мисолда 7260 ни туб кўпайтувчиларга бундай ажратганмиз:

7260	3630	1815	605	121	11	1
2	2	3	5	11	11	

Топшириқ. Туб кўпайтувчиларга ажратинг: 1800, 6800, 2112, 1300, 3250, 5200, 422500, 65940, 64600, 899000.

5. Умумий бўлувчи ва бўлинувчи. Энг катта бўлувчи ва энг кичик бўлинувчи. Агар n ҳам, m ҳам l га бўлинса, l натурал сон n ва m натурал сонларнинг *умумий бўлувчиси* дейилади. n ва m ларнинг умумий бўлувчилари бир қанча бўлиши мумкин. Шуларнинг ичида энг каттаси, масалан, k n ва m сонларнинг *энг катта умумий бўлувчиси* дейилади ҳамда $D(n, m)=k$ каби ёзилади. Агар $k=1$ бўлса, n ва m лар *ўзаро туб сонлар* дейилади. Бир қанча сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини топиш учун уларнинг ҳар бири $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$ шаклда туб кўпайтувчиларга ажратиб ёзиб олинади. Сўнгра уларда иштирок этган барча умумий туб сонлар аниқланади. Улар ичидан энг кичик даражаларини танлаб кўпайтма тузилса, энг катта умумий бўлувчи аниқланган бўлади. Масалан, $756=2^2\cdot3^3\cdot7$ ва $360=2^3\cdot3^2\cdot5$ лардан $(756, 360)=2^2\cdot3^2$, яъни 756 ва 360 сонларнинг энг катта бўлувчиси $k=36$ экан. Демак, $D(756; 360)=36$. n ва m сонларга бирор l сони бўлинса, уни шу сонларнинг *умумий бўлинувчиси* дейилади. Шундай хоссали сонлар жуда кўп. Шулар ичида энг кичигини n ва m сонларнинг *энг кичик умумий бўлинувчиси* деб айтилади ва $K(n, m)=l$ деб белгиланади. Умуман олганда, бир қанча натурал сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчисини топиш учун уларнинг ҳар бирини $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$ шаклда туб кўпайтувчиларга ажратилади. Сўнгра уларнинг барчасида ҳеч бўлмаганда бир марта бўлса ҳам учрайдиган туб сонларни аниқлаб, берилган сонларда бу туб сонлар қандай даражада қатнашган бўлса, улар ичидан энг катта даражаларини танлаб олинади, сўнгра улардан кўпайтма тузилади. Бу кўпайтма шу сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчисидир. Масалан, $756=2^2\cdot3^2\cdot7$, $360=2^3\cdot3^2\cdot5$, $350=2\cdot5^2\cdot7$. У ҳолда шу сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси $l=2^3\cdot3^2\cdot5^2\cdot7=12600$ бўлади: $K(756, 360, 350)=12600$.

Топшириқ. Қуйидаги икки фикрнинг ўринлилигини тайин натурал сонлар учун текширинг:

n ва m ларнинг энг катта умумий бўлувчиси ва энг кичик умумий бўлинувчиси кўпайтмалари nm га тенгдир;

$$D(n, m) \cdot K(n, m) = m \cdot n.$$

n ва m ларнинг энг катта умумий бўлувчиси шу сонларнинг бошқа ҳар қандай умумий бўлувчисига бўлинади.

6. Натурал сонларнинг баъзи сонларга бўлиниш белгилари.

1-теорема. *Агар натурал соннинг охирги рақами 0 ёки жуфт бўлса, шу сон 2 га бўлинади.*

Бу содда теореманинг исботи ўқувчиларга ҳавола қилинади.

2-теорема. *Агар натурал соннинг охирги икки рақами ташкил қилган сон 4 га бўлинса, у ҳолда берилган сон 4 га бўлинади.*

Исбот. $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$ натурал сон берилган бўлсин. Уни қуйидагича ёйиб ёзиш мумкин:

$$n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{k-2}} \cdot 100 + \overline{a_{k-1} a_k}, \quad 0 \leqslant a_i \leqslant 9 \ (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Йиғиндининг биринчи қисми 100 га каррали бўлгани учун 4 га бўлинади, демак, охирги икки рақамни ҳосил қилган $\overline{a_{k-1} a_k}$ соннинг 4 га бўлиниш ёки бўлинмаслигига қараб, n сони 4 га бўлинади ёки бўлинмайди, деб хулоса чиқарамиз.

3-теорема. *Агар натурал сон рақамлари йиғиндиси 3 га (9 га) бўлинса, шу сон 3 га (9 га) ҳам бўлинади.*

Исбот. Агар $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$ натурал сон ушбу

$$n = a_1 \cdot 10^{k-1} + a_2 \cdot 10^{k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot 10 + a_k$$

йиғинди тарзида ифодалаб олинса, уни қуйидагича шакл алмаштириб ёзамиз:

$$n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) + \underbrace{99 \ldots 9}_{k-1} a_1 + \underbrace{99 \ldots 9}_{k-2} a_2 + \ldots + 9a_{k-1}.$$

Демак йиғиндида иштирок этган қавс ичидаги рақамлар йиғиндисининг 3 га (9 га ҳам) бўлиниши n нинг шу сонга бўлинишини билдирар экан.

Натижа. Агар жуфт натурал сон учга бўлиниш шартини қаноатлантирса, у 6 га ҳам бўлинади.

Қуйидаги теоремаларни исботсиз келтирамиз.

4-теорема. *Агар натурал сон рақамлари 0 ёки 5 билан тугаса, у 5 га бўлинади.*

5-теорема. *Охири 0 билан тугайдиган натурал сон 10 га бўлинади.*

6-теорема. *Охирги икки рақамидан тузилган сон 25 га бўлинса, берилган натурал соннинг ўзи ҳам 25 га бўлинади.*

7-теорема. *Агар натурал соннинг тоқ ўриндаги рақамлари йиғиндиси жуфт ўриндаги рақамлари йиғиндисига тенг бўлса ёки бир-биридан 11 га бўлинадиган сонга фарқ қилса, шу сон 11 га бўлинади.*

7. Ҳақиқий сонларнинг хоссалари, уларнинг ўнли каср ёрдамида берилиши. Ҳақиқий сонларни таққослаш. Ҳақиқий сонлар устида амаллар.

Чекли ва чексиз ўнли касрлар. $\frac{m}{n}$ кўринишдаги касрнинг махражи $n = 10^k (k \in \mathrm{N})$ бўлиб, сурати m да l та рақам иштирок этса, уни

а) $l > k$ бўлса, m сонининг ўнг томонидан k та (нечта ноль бўлса шунча) рақам олиб, вергуль билан ажратиш керак. Масалан,

$$\frac{48214}{100} = 482{,}14; \quad \frac{17284613}{10000} = 1728{,}4613.$$

б) $l \leqslant k$ бўлса, m сони олдига $k - l$ та ноль ёзиб, вергуль қўйиб, унинг олдига яна битта ноль ёзилади. Масалан,

$$\frac{41}{10000} = 0{,}0041; \quad \frac{2371}{10000000} = 0{,}0002371; \quad \frac{78}{100} = 0{,}78.$$

Мана шу кўрсатилган усулда ёзиладиган касрга *чекли ўнли каср* дейилади. 482,14; 0,0041; 0,78 лар ана шундай касрларга мисол бўла олади. Умуман, ҳар қандай чекли ўнли каср

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_k \qquad (1)$$

шаклда ёзилади, бунда $k \in \mathbf{N}$, $a_0 \in \mathbf{Z}$, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ лар эса 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 рақамлардан бири. Одатда, чекли ўнли каср терминида „чекли" сўзи ишлатилмайди.

Ҳар қандай ўнли каср оддий касрга келтирилади. Масалан,

$$0{,}48 = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}; \quad 3{,}41 = \frac{341}{100}.$$

Қуйидаги теоремаларни исботсиз келтирамиз.

1-теорема. *$\frac{m}{n}$ кўринишдаги қисқармайдиган каср чекли ўнли каср кўринишида ёзилиши учун махражнинг туб кўпайтувчилари фақат 2 ва 5 лардан иборат бўлиши ҳам зарур, ҳам етарлидир.*

Бу теоремадан келиб чиқадики, m ва n лар ўзаро қисқармайдиган бўлса, n эса 2 ва 5 дан фарқли туб кўпайтувчиларга эга бўлса, $\frac{m}{n}$ касрни чекли ўнли каср билан ифодалаб бўлмайди. Масалан, $\frac{9}{11}$, $\frac{20}{13}$, $\frac{141}{34}$ лар шундай касрлардир. Бундай касрлар чексиз даврий ўнли касрлар билан ифодаланади:

$$\frac{9}{11} = 0{,}818181\ldots; \quad \frac{20}{13} = 1{,}461461\ldots; \quad \frac{141}{34} = 4{,}14705888\ldots.$$

Таъриф. Чексиз ўнли каср $a_0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots$ учун шундай m ва p натурал сонлар мавжуд бўлсаки, барча $k > m$ лар учун $a_{k+p} = a_k$ бажарилса, уни *даврий ўнли каср* дейилади ва қисқача

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots = a_0, a_1 a_2 \ldots a_m (a_{m+1} a_{m+2} \ldots a_{m+p}) \qquad (2)$$

деб белгиланади ва $a_{m+1}a_{m+2}\ldots a_{m+p}$ га унинг *даври* дейилади. Масалан,

$$\frac{9}{11}=0,\ (81);\ \frac{20}{13}=1,\ (461);\ \frac{141}{34}=4,14705\ (8).$$

2-теорема. *Ҳар қандай* $\frac{m}{n}$ *кўринишдаги каср (бунда m ва n ўзаро қисқармайди) махражи 2 ва 5 дан фарқли туб кўпайтувчиларга эга бўлса, у ягона тарзда чексиз даврий ўнли каср орқали ифодаланади.*

Натижа. Ҳар қандай рационал сон фақат даврий ўнли каср билан ифодаланади, ва аксинча, ҳар қандай даврий ўнли каср рационал сондир.

Бу ерда чекли ўнли касрни ҳам чексиз даврий ўнли каср каби ёзиш мумкинлиги назарда тутилмоқда. Масалан,

$$4,2=4,20=4,200\ldots=4,2\,(0);\ 5,25=5,2500\ldots=5,25\,(0).$$

3-теорема. *Даврий ўнли касрни оддий касрга айлантириш учун суратида иккинчи давригача бўлган сондан биринчи давригача бўлган сонни айириш, махражида эса 9 ни даврда неча рақам бўлса, шунча ёзиб, уни вергулдан биринчи даврга нечта рақам бўлса шунча ноль билан тўлдириш керак:*

$$0,\ a_1a_2\ldots a_k(b_1b_2\ldots b_n)=\frac{a_1a_2\ldots a_kb_1b_2\ldots b_n-a_1a_2\ldots a_k}{\underbrace{99\ldots9}_{n}\ \underbrace{00\ldots0}_{k}}.\quad (3)$$

Масалан,

$$0,25\ (43)=\frac{2543-25}{9900}=\frac{2518}{9900}=\frac{1259}{4950};$$

$$4,27\ (23)=\frac{42723-427}{9900}=\frac{42296}{9900}=\frac{21158}{4950}.$$

Бу қоида билан ҳар қандай чекли ўнли касрни ҳам чексиз даврий ўнли каср орқали икки усулда ифодалаш мумкинлиги келиб чиқади. Масалан,

$$4,8132\ (9)=\frac{481329-48132}{90000}=\frac{48133\cdot9}{9\cdot10000}=4,8133;$$

$$4,8133\ (0)=\frac{481330-48133}{90000}=\frac{48133\cdot9}{9\cdot10000}=4,8133.$$

Биргина ўнли касрнинг икки хил тасвири бўлмаслиги учун 9 даврли чексиз ўнли касрлар умуман қаралмайди.

4-теорема. *Ҳар қандай иррационал сон даврий бўлмаган чексиз ўнли каср орқали ифодаланади.*

Масалан, $\sqrt{2}=1,41421356\ldots$; $\pi=3,141593\ldots$; $e=2,718281\ldots$.

Маълумки, ҳақиқий сонлар тўплами барча рационал ва иррационал сонлар тўпламидан иборат. Шунинг учун юқоридаги натижа ва 4-теорема тасдиғига кўра, барча чексиз ўнли касрлар тўплами ҳақиқий сонлар тўпламидир ва у **R** билан белгиланади. Унинг ҳар бир элементи

$$\alpha = a_0,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots$$

кўринишда ёзилади. Шу жумладан, $0 = 0,\ (0)$.

Ҳақиқий сонларни таққослаш. Ушбу

$$\alpha = a_0,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots;\ \beta = b_0,\ b_1\,b_2\ldots b_n\ldots$$

ҳақиқий сонлар берилган бўлсин. Шундай m номер топилсаки, барча $i < m$ сонлар учун $a_i = b_i$ тенглик бажарилса-ю, шу m сон учун $a_m < b_m$ бўлса, α сон β сондан *кичик* дейилади. Масалан, 4,81496112 сон 4,814961 (2) сондан кичик. Агар ушбу

$$a_0,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots \text{ ва } b_0,\ b_1b_2\ldots b_n\ldots$$

ҳақиқий сонлар учун барча $k \in \mathbf{Z}_0$ ларда $b_k = a_k$ тенглик бажарилса, улар ўзаро *қарама-қарши сонлар* дейилади. Икки манфий сондан қайси бирининг қарама-қаршиси кичик бўлса, ўша сон *катта ҳисобланади.* Мусбат сон нолдан ва ҳар қандай манфий сондан каттадир.

Чексиз ўнли касрнинг икки хил тақрибий қиймати бор. Масалан, $\alpha = a_0,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots$ ҳақиқий соннинг 10^{-n} *аниқликда ками билан* тақрибий қиймати

$$\alpha_n = a_0,\ a_1a_2\ldots a_n$$

бўлиб, унинг 10^{-n} *аниқликда ортиғи билан* тақрибий қиймати

$$\alpha_n' = a_0,\ a_1a_2\ldots a_n + 10^{-n}$$

дан иборат. Масалан, $\alpha = \sqrt{8}$ иррационал соннинг ками ва ортиғи билан қийматларини топайлик. Ҳақиқий сонларни таққослаш қоидасига кўра

$$\alpha_n < \alpha < \alpha_n'$$

бўлгани учун $\alpha = \sqrt{8} = 2{,}82842712\ldots$ ни $10^{-n} = 0,\underbrace{00\ldots0}_{n}1$ аниқликда ёзиб чиқамиз:

$$\begin{array}{llllll}
\alpha_0 = 2 & < \alpha < 2 & + 1 & = 3 & = \alpha_0'; \\
\alpha_1 = 2{,}8 & < \alpha < 2{,}8 & + 0{,}1 & = 2{,}9 & = \alpha_1'; \\
\alpha_2 = 2{,}82 & < \alpha < 2{,}82 & + 0{,}01 & = 2{,}83 & = \alpha_2'; \\
\alpha_3 = 2{,}828 & < \alpha < 2{,}828 & + 0{,}001 & = 2{,}829 & = \alpha_3'; \\
\alpha_4 = 2{,}8284 & < \alpha < 2{,}8284 & + 0{,}0001 & = 2{,}8285 & = \alpha_4'; \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Ҳақиқий сонлар устида амаллар.

Икки ҳақиқий α ва β соннинг *йиғиндиси* деб $\alpha+\beta$ билан белгиланадиган шундай сонга айтиладики, у берилган сонларнинг ҳар бирининг ихтиёрий аниқликдаги ками билан олинган қийматлари йиғиндисидан катта (ёки тенг) ва шу сонларнинг ихтиёрий аниқликдаги ортиғи билан олинган қийматлари йиғиндисидан кичик (ёки тенг) бўлади:

$$\alpha_n+\beta_n<\alpha+\beta<\alpha'_n+\beta'_n,\ n\in \mathbf{N}.$$

Бундай соннинг мавжудлиги ва ягоналигини бу ерда исботламаймиз.

Икки ҳақиқий α ва β соннинг *кўпайтмаси* деб $\alpha\beta$ билан белгиланадиган шундай сонга айтиладики, у берилган сонларнинг ҳар бирининг ихтиёрий аниқликда ками билан олинган қийматлари кўпайтмасидан катта (ёки тенг) ва ихтиёрий аниқликда ортиғи билан олинган қийматлари кўпайтмасидан кичик (ёки тенг) бўлади:

$$\alpha_n\beta_n<\alpha\beta<\alpha'_n\beta'_n,\ n\in \mathbf{N}.$$

Бундай кўпайтманинг мавжудлиги ва ягоналигини бу ерда исботламаймиз.

Ҳақиқий сонларни қўшиш ва кўпайтириш ушбу қонунларга бўйсунади:

а) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ (қўшиш коммутативдир);
б) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ (қўшиш ассоциативдир);
в) $\alpha\beta=\beta\alpha$ (кўпайтириш коммутативдир);
г) $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$ (кўпайтириш ассоциативдир);
д) $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$ (қўшиш кўпайтиришга нисбатан дистрибутивдир).

Қўшиш ва кўпайтириш амалларига тескари амаллар — айириш ва бўлиш қуйидагича киритилади:

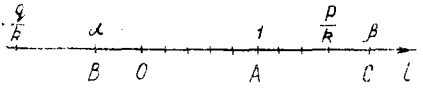
1) α ҳақиқий сондан β ҳақиқий сонни *айириш* деб шундай γ сонни топишга айтиладики, унинг учун $\beta+\gamma=\alpha$ тенглик ўринли бўлади, яъни $\gamma=\alpha-\beta$;

2) α ҳақиқий сонни нолдан фарқли β ҳақиқий сонга *бўлиш* деб, шундай γ сонни аниқлашга айтиладики, унинг учун $\beta\gamma=\alpha$ тенглик ўринли бўлади, яъни $\gamma=\frac{\alpha}{\beta}$.

Топшириқлар. 1. $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}+\sqrt{6}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; $\sqrt{7}-\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$ сонларни 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 аниқликда ками ва ортиғи билан ўнли касрлар орқали ифодаланг.

2. 3, 3(21) ва 4,01(52) сонларнинг йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмасини 10^{-5}, 10^{-10} аниқлик билан топинг.

3. Юқорида келтирилган π, e, $\sqrt{2}$ сонларнинг ўнли каср орқали ифодасидан фойдаланиб, πe; π^2; $\frac{1}{e}$; $e+\sqrt{2}$ сонларни 10^{-4} аниқликда ками ва ортиғи билан ҳисобланг.



2- шакл.

8. Ҳақиқий сонлар тўпламининг геометрик тасвири. Координаталар ўқи. Ҳақиқий сон модули, унинг геометрик маъноси. Сонли оралиқлар. Координаталар текислиги ва фазоси. Берилган l тўғри чизиқда ихтиёрий O нуқтани белгилайлик (2-*а* шакл). Қолган нуқталарни унга нисбатан чап ёки ўнг тарафда (юқорида ёки пастда) жойлашган деб айта оламиз. Шу тўғри чизиқда O нуқтадан фарқли бирор A нуқта танлаб, OA кесмани бирлик кесма ($|OA| = 1$) деб ҳисоблайлик. l тўғри чизиқнинг O нуқтага нисбатан A нуқта ётган қисмини *мусбат ярим ўқ*, иккинчи қисмини *манфий ярим ўқ* дейлик. Мусбат ярим ўқда ҳар бир $n \in \mathbf{N}$ натурал сон учун O нуқтадан $n \times |OA|$ масофа нарида n сонига мос нуқта аниқланади. Манфий ярим ўқда манфий m бутун сонга O нуқтадан $|m| \cdot |OA|$ масофа нарида m сонига мос нуқта аниқланади. Мос равишда бу нуқталар $N(n)$ ва $M(m)$ шаклида ифодаланиб, n сон N нуқта координатаси, m эса M нуқта *координатаси* деб ўқилади. Саноқ боши O нуқтага 0 (ноль) сони мос бўлиб, уни *координата боши* деб айтилади. Демак, барча бутун сонларнинг ҳар бирига аниқ мос келадиган тайин бир нуқтани l тўғри чизиқ устида кўрсатиш мумкин экан. Шу тўғри чизиқ устида барча рационал сонларнинг ҳар бирига мос келадиган алоҳида-алоҳида нуқталарни ҳам топиш мумкин. Бунинг учун OA кесмани тенг k бўлакка бўлиб, мусбат ярим ўқда O нуқтадан $\frac{|OA|}{k}$ бирлик нарида $\frac{1}{k}$ сонга мос нуқта, O нуқтадан $\frac{|OA|}{k}$ узунликда p марта нарида эса $\frac{p}{k}$ рационал сонга мос нуқта аниқланади. O нуқтадан манфий ярим ўқ бўйлаб $\frac{|OA|}{k}$ дан q марта нарида нуқта ясасак, $-\frac{q}{k}$ манфий рационал сонга мос нуқта аниқланади.

Савол: l тўғри чизиқда иррационал сонлар, масалан, $\sqrt{2}$; $\sqrt{10}$; π; $\log_2 10$ сонларга ҳам мос нуқталарни кўрсатиш мумкинми? Мисол тариқасида, $\sqrt{10}$ сон учун мос келувчи нуқтани l да кўрсатайлик. Бунинг учун $D(3)$ нуқтада l га перпендикуляр 1 бирлик узунликдаги кесма билан ODE учбурчак ясайлик. Унинг гипотенузаси $\sqrt{10}$ га тенг бўлгани учун мусбат ярим ўқда O нуқтадан $|OE| = \sqrt{10}$ масофада $\sqrt{10}$ сонга мос нуқта жойлашган. Энди l тўғри чизиқда ихтиёрий α иррационал сонга мос нуқтани топиш қоидасини келтирамиз. Айтайлик, $\alpha_n = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$ ва $\alpha_n' = \alpha_n + 10^{-n}$ $(n \in \mathbf{N})$ лар α ҳа-

қиқий соннинг ками ва ортиғи билан олинган тақрибий қийматлари бўлсин. n номер ортиб борган сари l тўғри чизиқдаги $N(\alpha_n)$ ва $M(\alpha_n')$ нуқталар кетма-кетлиги ягона битта B нуқтага интилади, чунки ҳар бир n учун $\alpha_n < \alpha < \alpha_n'$ тенгсизлиги ўринли бўлиб, n орттан сари α_n — ўсувчи, α_n' — камаювчи ва $\alpha_n' - \alpha_n$ айирма нолга интилувчидир. Шундай қилиб, ҳар бир $\alpha \in \mathbf{R}$ сонга берилган l тўғри чизиқ устида ягона бир B нуқта мос келяпти. Аксинча, шу тўғри чизиқ устида олинган ҳар бир B нуқтага унинг *координатаси* деб аталувчи битта $\alpha \in \mathbf{R}$ сон тўғри келади ва бу фикр қисқача $B(\alpha)$ каби ифодаланади. Барча ҳақиқий сонлар тўплами билан бирор l тўғри чизиқ нуқталари ўртасида юқоридагидек ўзаро бир қийматли мосликнинг ўрнатилиши тўғри чизиқда *координаталар системасини* аниқлайди. Бу ҳолда l тўғри чизиқни *координата ўқи* ёки *сонлар ўқи* деб айтилади ва баъзида $\mathbf{R}$ билан ҳам белгиланади. Одатда, координата ўқидаги сонларни тартиб билан ортиб бориши йўналиш билан кўрсатилади.

Координаталари билан берилган икки $B(\alpha)$ ва $C(\beta)$ нуқта орасидаги масофа қуйидагича аниқланади:

$$|BC| = \begin{cases} \beta - \alpha, & \text{агар } \alpha < \beta \text{ бўлса;} \\ 0, & \text{агар } \alpha = \beta \text{ бўлса;} \\ \alpha - \beta, & \text{агар } \alpha > \beta \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Борди-ю, C нуқта координата боши O билан устма-уст тушса, у ҳолда

$$|BO| = \begin{cases} -\alpha, & \text{агар } \alpha < 0 \text{ бўлса;} \\ 0, & \text{агар } \alpha = 0 \text{ бўлса;} \\ \alpha, & \text{агар } \alpha > 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Сўнгги ифода $|BO| = |\alpha|$ эканлигини ва унинг геометрик маъноси — координаталар боши O нуқтадан α координатали B нуқтагача бўлган масофани билдиради.

Агар $\alpha = x - 3$ бўлса, унинг модули:

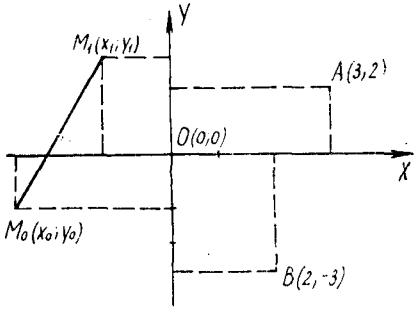
$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & \text{агар } x > 3 \text{ бўлса;} \\ 0, & \text{агар } x - 3 \text{ бўлса;} \\ 3 - x, & \text{агар } x < 3 \text{ бўлса} \end{cases}$$

Юқорида айтганимиздек, $\mathbf{R}$ белги бир вақтда ҳам ҳақиқий сонлар тўпламини, ҳам сонлар ўқини ифодалайди. Бу тўпламнинг *сонли оралиқлар* деб аталадиган бир қанча қисм-тўпламлари бор. Уларнинг ҳар бирининг номи, характерловчи алгебраик тенгсизлиги, белгиланиши ушбу жадвалда берилган:

Номи	Оралиқнинг тенгсизликда берилиши	Қисқача белгиланиши
a ва b чегарали кесма (ёпиқ соҳа)	$a \leqslant x \leqslant b$	$[a;\ b]$
a ва b чегарали интервал (очиқ соҳа)	$a < x < b$	$]a;\ b[$
Чапдан очиқ a ва b чегарали интервал (ярим очиқ соҳа)	$a < x \leqslant b$	$]a;\ b]$
Ўнгдан очиқ a ва b чегарали интервал (ярим ёпиқ соҳа)	$a \leqslant x < b$	$[a;\ b[$
a дан $+\infty$ гача бўлган сонли нур (ёпиқ ярим ўқ)	$a \leqslant x$	$[a;\ +\infty[$
a дан $+\infty$ гача бўлган очиқ нур (очиқ ярим ўқ)	$a < x$	$]a;\ +\infty[$. Агар $a = 0$ бўлса, $R_+ =]0;\ +\infty[$
$-\infty$ дан a гача сонли нур (ёпиқ ярим ўқ)	$x \leqslant a$	$]-\infty;\ a]$
$-\infty$ дан a гача очиқ нур (очиқ ярим ўқ)	$x < a$	$]-\infty;\ a[$. Агар $a = 0$ бўлса, $R_- =]-\infty;\ 0[$
a нуқтанинг δ-атрофи	$0 < \lvert x - a \rvert < \delta$, ёки $a - \delta < x < a + \delta$ $x \neq a$	$]a - \delta;\ a[\cup]a;\ a + \delta[$
a нуқтанинг ўнг тарафи	$a < x < a + \delta$	$]a,\ a + \delta[$
a нуқтанинг чап тарафи	$a - \delta < x < a$	$]a - \delta,\ a[$
Ҳақиқий сонлар ўқи	$-\infty < x < +\infty$	R ёки $]-\infty;\ +\infty[$

Координаталар текислиги. Ўлчов бирликлари бир хил, умумий координата бошида ўзаро перпендикуляр бўлган икки координата ўқи координаталар текислигини аниқлайди (2-*б* шакл). Одатда координата ўқлари бир-биридан фарқли тарзда Ox, Oy каби белгиланиб, уларнинг биринчиси горизонтал бўлиб, ўнгга йўналади, у *абсциссалар* ўқи, иккинчиси эса вертикал чизилиб, юқорига йўналади, у *ординаталар* ўқи дейилади. O нуқта эса *координата боши* деб аталади. Координата ўқлари ҳосил қилган текисликнинг чораклари мос равишда юқоридан ўнгдагиси *I чорак*, чапдагиси *II чорак*, пастдан чапдагиси *III чорак*, ўнгдагиси *IV чорак* деб ҳисобланади.

Бундай координата текислигида ихтиёрий нуқтанинг вазиятини аниқлаш учун унинг дастлаб абсциссалар ўқидаги проекциясининг координатаси аниқланиб, сўнгра ординаталар ўқидаги проекциясининг координатаси топилади ва улар шу тартиб билан (x; y) жуфтлик кўринишида ифодаланади. Бу жуфтлик шу *нуқтанинг координаталари* дейилиб, уларнинг биринчиси нуқтанинг *абсциссаси*, иккинчиси эса унинг *ординатаси* деб юритилади. Координаталари (x_0, y_0) бўлган M_0 нуқта $M_0(x_0; y_0)$ тарзида ёзилади.



2-*б* шакл.

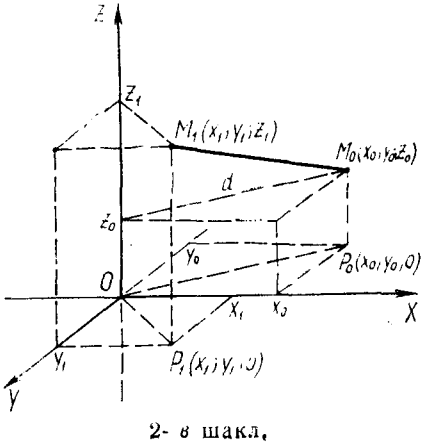
Демак, текисликдаги ҳар бир нуқтанинг вазиятини сонларнинг бирор тартибланган жуфтлиги орқали тўлиқ ифодалаш мумкин экан, ва аксинча, сонларнинг ҳар қандай жуфтлиги координата текислигида ягона нуқтани аниқлайди.

Текисликнинг барча нуқталари билан сонларнинг тартибланган жуфтликлари тўплами орасида ўрнатилган ўзаро бир қийматли бундай акслантириш тўғри бурчакли *Декарт координаталари системаси* дейилади.

Одатда, координаталар текислиги $\mathbf{R}^2$ билан ёки Oxy орқали белгиланиб, унинг элементлари сонларнинг тартибланган жуфтлигидан иборат бўлгани учун ҳам баъзида уни *сонли текислик* деб юритилади.

Координаталари билан берилган $M_0(x_0; y_0)$ ва $M_1(x_1; y_1)$ нуқталар орасидаги масофа юқоридаги тушунчалар асосида $d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$ формула ёрдамида аниқланади.

Координаталар фазоси. Улчов бирлиги Ox ва Oy ўқларидаги бирликлар сингари бўлган бирор Oz координата ўқи Oxy текислигига перпендикуляр бўлиб, уларнинг координата боши ҳам устма-уст тушсин (2-*в* шакл). Бу ҳолда *координаталар фазоси* аниқланган дейилади ва фазонинг ихтиёрий M нуқтасининг вазиятини сонларнинг тартибланган учлиги (x; y, z) орқали аниқ ифодалаш мумкин: учликнинг биринчи иккитаси M нуқтанинг Oxy текисликдаги



2-*в* шакл.

проекциясининг координатаси, учинчиси эса Oz ўқидаги проекциясининг координатасини билдиради. *Oz аппликаталар ўқи* дейилиб, учликдаги учинчи сон нуқтанинг *аппликатаси* дейилади.

Натижада фазонинг ихтиёрий нуқтасининг вазиятини тўлиқ ифодаловчи сонларнинг тартибланган учлиги доим топилади, ва аксинча, ҳар бир ихтиёрий учлик учун фазода ягона нуқта мос келади.

Элементлари сонларнинг барча тартибланган учликлари тўпламидан иборат бўлган координатали фазо баъзида $\mathbf{R}^3$ билан белгиланади.

Фазода координаталари билан берилган $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ ва $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқталар орасидаги масофа $d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$ орқали ҳисобланади.

Топшириқлар. 1. а) $C(a^2)$ ва $B(-a)$; б) $M(x)$ ва $M_1(x^2)$; в) $L(x)$ ва $N(x-a)$; г) $P(x)$ ва $Q(x^3)$; д) $H(|x|)$ ва $Q(x^4)$ нуқталарни бирор a ва x учун сонлар ўқида белгиланг.

2. $|x-2|=2$; $|1-x|=3$; $|4+x|=3$; $|5-3x|\leqslant 5$; $|7-7x|<10$; $|6x-5|\geqslant 6$. $|x^2-1|\geqslant 1$ ларни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини сонлар ўқидан кўрсатинг.

3. $N(x;\ |x|)$; $M(x^2;\ x)$; $H\left(x;\ \frac{2}{x}\right)$; $G(3^{|x|};\ -4)$ нуқталарни турли x лар учун координаталар текислигида ясанг $|ON|$, $|OM|$, $|NH|$, $|NM|$, $|OH|$, $|OG|$ масофаларни топинг. Улардан қайси бири 0 га ҳеч қачон тенг бўла олмайди? Қайси бир нуқта бирлик айлана ичига ҳеч тушмайди?

4. Координаталар фазосида $A(1;\ 1;\ 2)$; $B(4;\ 2;\ -1)$, $C(-2;\ 0;\ 0)$, $D(4;\ -1,\ 6)$ нуқталарни ясаб, улар орасидаги масофаларни топинг.

5. Координаталар фазосида томони a га тенг кубнинг бир учи координата боши билан, шу учидан чиққан қирралари координата ўқлари билан устма-уст тушган. Шу кубнинг ҳамма учлари координаталарини айтинг.

9. Сонли ифодалар. Ўзгарувчи қатнашган ифодалар. Айнан тенг ифодалар. Қисқа кўпайтириш формулалари. Сонлар, ҳисоблаш амаллари белгилари, қавслар қатнашиши мумкин бўлган ифодага *сонли ифода* деб аталади. Масалан, 1) 15; 2) $\frac{8}{9}-4{,}2$; 3) $\frac{16-3\left(4-\frac{1}{2}\right)}{4+1{,}5}$; 4) $\left(4-\frac{25}{4}\right)\frac{1}{2}+5{,}1$ лар сонли ифодалардир. Агар ифодада кўрсатилган амаллар бажарилиши мумкин бўлса ва бажарилиши натижасида бирор сон келиб чиқса, уни *сонли ифоданинг қиймати* деб айтилади. Келтирилган сонли ифодалардан биринчисининг қиймати 15, иккинчисиники $-\frac{19}{3}$, учинчисиники 1. Лекин тўртинчисиники мавжуд эмас, чунки унда ҳамма амал бажарилмайди. Сон қийматига эга бўлган ифода *маъноли* ҳисобланади, акс ҳолда у *маънога эга эмас* деб айтилади. Агар ифода таркибида бир ўзгарувчи иштирок этса-ю, унинг ҳар қандай қийматида у сонли ифодага айланса, у *бир ўзгарувчили ифода* дейилади. Масалан,

$a^2:(a-2)+5$ ифода a нинг ҳар бир қийматида сонли ифодани билдиради, бу ифода $a=2$ бўлганда маъносиз, a нинг бошқа қийматларида аниқ қийматга эга бўлгани учун маънога эга. Масалан, $a=4$ бўлганда ифода 13 га тенг бўлгани учун уни $a=4$ да маънога эга дея оламиз.

Ўзгарувчининг қабул қила оладиган барча қийматлари тўпламини шу ифоданинг *аниқланиш соҳаси* дейилади.

1-мисол. $\frac{4x+3}{x^2-9}-\frac{1}{x}+x$ ифоданинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечилиши. Бу ифода $x=\pm 3$ ва $x=0$ бўлгандагина ўз маъносини йўқотади. x нинг бошқа қийматларида ифода маъноли. Демак, ифоданинг аниқланиш соҳаси $D_1=\{x/x\in R,\ x\neq 0,\ |x|\neq 3\}$ дан иборат.

Агар икки ўзгарувчи иштирок этган бирор ифода берилса, унинг *аниқланиш соҳаси* деб иккала ўзгарувчининг ифода маънога эга бўлувчи қийматларининг барча жуфтликлари тўпламига айтилади.

2-мисол. $\frac{x+3y}{x(x^2-y^2)}$ ифода $D=\{(x;\ y)\mid x\neq 0,\ |x|\neq|y|\}$ каби жуфтликлар тўпламида аниқланган.

Ифодалар, умуман, жуда кўп параметрларга боғлиқ бўлиши ҳам мумкин.

Бир ўзгарувчили икки ифода D сонлар тўпламида берилган бўлсин. D тўпламнинг ҳар бир элементида шу ифодалар қийматларининг ўзаро тенглиги бажарилса, бу икки ифода шу *тўпламда айнан тенг* ифодалар деб айтилади.

3-мисол. $\frac{3x^2}{5}\cdot\frac{2}{x^2}+x^2+x+1$ ифода $D=]-\infty;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$ тўпламда $x^2+\frac{11}{5}x+1$ ифодага айнан тенг.

4-мисол. $|5x^3-x|$ ифода $4x^2$ ифодага $D=\left\{0;\ \frac{1}{5};\ 1\right\}$ тўпламда айнан тенг. Аммо улар, масалан, N тўпламда айнан тенг эмас.

Айтайлик, икки ўзгарувчили икки ифода D тўпламда аниқланган бўлсин. Агар икки ўзгарувчили икки ифода D тўпламнинг ҳар бир жуфтлик элементида ўзаро тенг бўлса, улар шу *тўпламда айнан тенг* ифодалар дейилади.

Мисоллар. Ҳамма қисқа кўпайтириш формулалари:

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,
2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$,
3) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,
4) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$,
5) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$,
6) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$,
7) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$,
8) $a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

ҳар бир $(a,\ b)\in R^2$ учун ўзаро айнан тенг ифодалардир.

Бир неча ўзгарувчили ифодаларнинг айнан тенглиги шунга ўхшаш қоида билан аниқланади.

10. Натурал кўрсаткичли даража. Арифметик илдиз таърифи.

1-таъриф a ҳақиқий соннинг 1 дан катта n *натурал кўрсаткичли даражаси* деб ҳар бири a га тенг бўлган n та кўпайтувчининг кўпайтмасига айтилади:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ марта}}$$

ва қисқача a^n каби белгиланади ва *a нинг n кўрсаткичли даражаси* деб ўқилади. Бу ерда a даражанинг асоси, n шу даражанинг *кўрсаткичи* деб айтилади. Шунингдек, a^n даражани $n=1$ бўлганда a га, $a \neq 0$ ва $n=0$ бўлганда 1 га, $n=-k$ ($k \in \mathbf{N}$) ва $a \neq 0$ бўлганда $\frac{1}{a^k}$ га тенглиги таърифга кўра деб тушунилади:

$$a^1 = a;\ a^0 = 1;\ a^{-k} = \frac{1}{a^k}.$$

0^0 эса аниқланмаган.

Даражанинг ушбу хоссаларини ўқувчининг ўзи мустақил исботлаб кўриши мумкин.

Даражанинг хоссалари:

1) *Мусбат соннинг ихтиёрий натурал даражаси яна мусбат сондир*:

$$a > 0 \Rightarrow a^n > 0,\ n \in \mathbf{N}.$$

2) *Манфий соннинг жуфт кўрсаткичли даражаси мусбат, тоқ кўрсаткичли даражаси манфийдир*:

$$a < 0 \Rightarrow a^{2n} > 0,\ n \in \mathbf{N};$$
$$a < 0 \Rightarrow a^{2n+1} < 0,\ n \in \mathbf{N}.$$

3) *Бир хил асосли даражаларни ўзаро кўпайтириш ва бўлиш ушбу қоидаларга бўйсунади* ($n, m, \ldots, l \in \mathbf{N}$):

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m};$$
$$a^n \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^l = a^{n+m+\ldots+l};$$
$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

4) *Кўпайтмани даражага кўтариш ҳар бир кўпайтувчини шу даражага кўтариб, сўнг ўзаро кўпайтирилганига тенг*:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

5) *Бўлинмани даражага кўтариш учун суратни шу кўрсаткичли даражага кўтариб, уни махражининг шу кўрсаткичли даражасига бўлиш керак:*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ b \neq 0, n \in \mathbf{Z}.$$

6) *Даражани яна даражага кўтариш учун даража асосини ўзгартирмай, кўрсаткичларини ўзаро кўпайтириш керак:*

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

Мисоллар. 1) $2^3 = 8$; 2) $(-3)^4 = 81$; 3) $(-4)^3 = -64$; 4) $(-1)^{100} = 1$; 5) $(4b)^2 = 64b^3$; 6) $\left(\frac{7}{a}\right)^2 = \frac{49}{a^2}$; 7) $2^2 \cdot 2^5 = 2^{10} = 1024$; 8) $(2^{2n})^2 = 2^{6n}$.

Натижа. 1) *Бўлинманинг манфий кўрсаткичли даражаси шу бўлинма тескарисининг мусбат бутун даражасига тенг:* $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

2) *Агар* $0 < a < b$ *бўлса, у ҳолда ҳар бир* $n \in N$ *учун* $a^n < b^n$ *бажарилади*;

3) Агар $0 < a < 1$ бўлса, $n < m$ тенгсизлиги бажарилишидан $a^n > a^m$ ўринлилиги келиб чиқади; $a > 1$ бўлса, аксинча, $a^n < a^m$ тенгсизлик ўринлидир.

2-таъриф. a мусбат сондан *n-даражали арифметик илдиз* деб шундай мусбат b сонига айтиладики, унинг учун $b^n = a$ бажарилади. Ана шу n-даражали илдиз $\sqrt[n]{a}$ ёки $a^{\frac{1}{n}}$ каби белгиланади ва $\sqrt[n]{\ }$ ни *n-даражали радикал* деб юритилади. $n = 2$ бўлганда 2-даражали илдизни (арифметик) *квадрат илдиз* деб айтилади ва оддийгина $\sqrt{a}$ деб ёзилади. Агар $a = 0$ бўлса, $\sqrt[n]{0} = 0$ деб ёзиш қабул қилинган. a манфий сон бўлганда, унинг n-даражали илдизи фақат тоқ n лар учун аниқланади: a соннинг тоқ *n-даражали (арифметик) илдизи* деб шундай манфий b сонга айтиладики, унинг учун $b^n = a$ ўринли бўлади. (Бу ерда ҳам b ни $b = \sqrt[n]{a}$ деб белгиланади.)

Арифметик илдиз хоссалари

1-хосса. Кўпайтманинг n-даражали илдизи ҳар бир кўпайтувчиларнинг n-даражали илдизлари (агар уларнинг ҳар бири мавжуд бўлса) нинг ўзаро кўпайтмасига тенг:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{abc\ldots d} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\ldots\sqrt[n]{d}.$$

2-хосса. Бўлинманинг n-даражали илдизи (агар шу бўлинманинг сурати ва махражларининг ҳар бирининг n-даражали илдизи мавжуд бўлса) суратнинг n-даражали илдизини махражнинг n-даражали илдизига бўлинганига тенг:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Мисоллар.

1) $\sqrt{25 \cdot 100} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{100} = 5 \cdot 10 = 50.$

2) $\sqrt[3]{27 \cdot 512000 \cdot (-64)} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{512}\sqrt[3]{1000}\sqrt[3]{-64} =$
$= 3 \cdot 8 \times 10 \quad (-4) = -960.$

3) $\dfrac{\sqrt[7]{12800}}{\sqrt[7]{-100}} = -\sqrt[7]{\dfrac{12800}{100}} = \sqrt[7]{-128} = -2.$

3-хосса. Мусбат соннинг n-даражали илдизини натурал m даражага ошириш учун радикал остидаги сонни шу даражага кўтариб, сўнг ундан n-даражали илдиз чиқариш керак:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Бу формула манфий соннинг тоқ n-даражали илдизи учун ҳам ўринлидир.

4-хосса. Мусбат соннинг m-даражасидан n-даражали илдиз чиқариш учун шу соннинг n-даражали илдизини m-даражага кўтариш керак:

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Бу формула манфий соннинг тоқ n-даражали илдизи учун ҳам тўғридир.

5-хосса. Мусбат a соннинг n-даражали илдизидан m-даражали илдиз чиқариш учун a дан nm даражали илдиз чиқариш керак:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Бу формула манфий a сон учун m ва n лар бир вақтда тоқ бўлганда ҳам ўринлидир.

6-хосса. Мусбат a соннинг m-даража кўрсаткичи, n-даражали илдиз кўрсаткичи бир хил натурал сонга кўпайтирилса (ёки умумий кўпайтувчига бўлинса), натижа ўзгармайди:

а) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$;

б) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[pk]{a^{qk}} = \sqrt[p]{a^q}$.

Мисоллар. 1) $(\sqrt[3]{-27})^2 = (\sqrt[3]{(-3)^3})^2 = (-3)^2 = 9$; 2) $\sqrt[6]{(5-\sqrt{2})^3} = \sqrt{5-\sqrt{2}}$; 3) $\sqrt[6]{(4-\sqrt{50})^2} = \sqrt[8]{(\sqrt{50}-4)^2} = \sqrt[4]{\sqrt{50}-4}$; 4) $\sqrt[12]{\sqrt{10}} = \sqrt[24]{10}$; 5) $\sqrt[3]{\sqrt[1]{\sqrt[5]{20}}} = \sqrt[60]{20}$, 6) $\sqrt[4]{6} = \sqrt[8]{36} = \sqrt[16]{1296}$.

Топшириқлар. Амалларни бажаринг: 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{3}{10}\right)^{2n} \left(\frac{25}{4}\right)^{3n}$; 2) $(7^5 a^{10})^3$; 3) $\left(-\frac{1}{3}\right)^k \left(-\frac{5}{6}\right)^{2k} \left(-\frac{9}{25}\right)^{3k}$; 4) $\left(\frac{a^5}{b^{10}}\right)^{20}$; 5) $\left(\frac{b^3}{c^4}\right)^{-3}$; 6) $c^m \cdot c^{-4m} (cd)^{3m}$; 7) $x^{10} \cdot x^{-4} \cdot x^2$; 8) $0{,}9 \cdot (10a^{-1})^{-2}$; 9) $(p^n)^{-n} + (p^{-2n})^0 - 1$; 10) $\dfrac{a^{-7} : a^5 + a^0}{(a^{-2})^2 + 1}$;

11) $\sqrt[24n]{p^{2n}q^{3n}}$; 12) $\sqrt[9]{-32}$; 13) $\sqrt[6n]{\frac{4c^6d^{-6}}{9c^{18}}}$; 14) $\sqrt[6]{\sqrt{128}}$; 15) $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{8}}$;
16) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{(5+\sqrt{30})^6}}$; 17) $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a^3\sqrt{a^4}}}$; 18) $\sqrt{100c^{-2}d^{-4}}$; 19) $\sqrt{9(c^2+4)^2}$;
20) $\sqrt[4]{(x^2+1)^4}$; 21) $\sqrt{(c^2-4)^2}$; 22) $\sqrt[4]{(x^2-1)^4}$.

9-хосса. n-даражали илдиз остига мусбат a сон n-даражага кўтарилиб олиб кирилиши мумкин, ва аксинча, мусбат a нинг n-даражаси n-даражали илдиз остидан a бўлиб радикал олдига чиқади:

а) $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$; б) $\sqrt[n]{a^nb}=a\sqrt[n]{b}$.

Масалан, 1) $\sqrt[3]{27a}=3\sqrt[3]{a}$; 2) $\sqrt{x^2c}=|x|\cdot\sqrt{c}$;
3) $\sqrt[4]{(x-1)^4ab}=(x-1)\sqrt[4]{ab}$; 4) $\sqrt{\frac{x^3}{x^2+1}}=x\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$.

Натижа. n- ва m-даражали илдизлар кўпайтмаси ва бўлинмаси учун қуйидаги тенгликлар (мусбат a ва b лар учун) доим тўғри:

а) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{a^mb^n}$;

б) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^n}}$.

Масалан, $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{72}$; $\sqrt[4]{5}:\sqrt{2}=\sqrt[8]{25:16}$.

1-хулоса. n-даражали арифметик илдизнинг таърифидаги $b^n=a$ тенглик n жуфт бўлганда фақат $b_1=\sqrt[n]{a}$ даражали арифметик илдиздагина ўринли бўлмай, яна у шу сонга қарама-қарши бўлган $b_2=-\sqrt[n]{a}$ ла ҳам ўринлидир.

2-хулоса. Таърифга кўра n жуфт бўлганда $\sqrt[n]{a}$ арифметик илдиз номанфий a лар учун аниқланган эди. Агар ҳар бир $a\in\mathbb{R}$ учун a^n (n — жуфт) даража ҳам номанфий эканлигини эътиборга олсак, $\sqrt[n]{a^n}=|a|$ бажарилади. Хусусий ҳолда: $\sqrt{a^2}=|a|$.

Масалан, $\sqrt{3^2}=\sqrt{(-3)^2}=3$; $\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$; $\sqrt[4]{a^4b}=$ $=|a|\sqrt[4]{b}$.

Савол: $b=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ радикалнинг қиймати $p=x\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ га тенгми ёки $q=|x|\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ гами?

Жавоб: Берилган b радикал $\frac{x^3}{x-1}\geqslant 0$ да, яъни $A=]-\infty;0[$

$U]1; \infty[$ оралиқда аниқланган. p қиймат учун $b^2 = p^2$ ўринли бўлса ҳам, p қиймат A оралиқда номанфий бўлмайди. Аммо q бу оралиқда номанфий. Шунинг учун b радикал қиймати арифметик илдиз маъносида тушунилаётгани учун ва $b^2 = q^2$ бажарилгани учун $b = q$ дир, демак $\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = |x| \sqrt{\frac{x}{x-1}}$.

Топшириқлар. Радикалларнинг қийматларини топинг:

1) $\sqrt{(-0{,}4)^2}$; 2) $\sqrt{y^2} + 3\sqrt{(1-y)^2}$; 3) $\sqrt{x^2+2x+1}$; 4) $\sqrt[4]{(x^2-1)^4}$; 5) $c \geqslant 10$ бўлганда $\sqrt{(10-c)^2}$; 6) $t \geqslant 3$ бўлганда $\sqrt{(3-t)^2} + \sqrt{t^2}$; 7) $\sqrt{(\sqrt{2}-4)^2}$; 8) $\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{8})^2}$; 9) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{10})^4}$; 10) $\sqrt[4]{\frac{x^4}{x-1}}$; 11) $y \geqslant 0$ бўлганда $\sqrt{y^6} + \sqrt[4]{y^4}$, $y < 0$ бўлганда $3\sqrt{y^2} - 5\sqrt[4]{y^4} + 1$.

11. Рационал кўрсаткичли даража. Иррационал кўрсаткичли даража ҳақида тушунча. a мусбат соннинг $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$) рационал кўрсаткичли даражаси унинг n-даражали арифметик илдизини m-даражага оширилганига тенг: $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$.

Манфий рационал кўрсаткичли даража таърифи қуйидаги формула билан берилади:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, \qquad m \in \mathbf{N},\ n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 2.$$

Рационал кўрсаткичли даража хоссалари.

1) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}$;

2) $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{k}{l}}$;

3) $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$;

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}}$;

5) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{mk}{nl}}$.

Бу келтирилган хоссалардан биринчисининг исботини бериб, қолганларини ўқувчиларга ҳавола қиламиз.

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[ln]{a^l})^m = (\sqrt[ln]{a})^{ml};$$

$$a^{\frac{k}{l}} = (\sqrt[l]{a})^k = (\sqrt[nl]{a^n})^k = (\sqrt[nl]{a})^{nk}$$

бўлгани учун

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = (\sqrt[nl]{a})^{ml+nk} = a^{\frac{ml+nk}{nl}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}.$$

Энди иррационал кўрсаткичли даражани таърифлаймиз. Фараз қилайлик, α бирор иррационал сон ва унинг $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ каби чексиз ўнли каср орқали ифодаси берилган бўлсин. Ушбу кетма-кетликни тузамиз:

$$\bar{\alpha}_1 = a_0, a_1; \quad \bar{\alpha}_2 = a_0, a_1 a_2; \quad \bar{\alpha}_3 = a_0, a_1 a_2 a_3; \ \ldots;$$
$$\bar{\alpha}_k = a_0, a_1 a_2 \ldots a_k; \ \ldots$$

Натижада ҳар қандай мусбат ҳақиқий $a\,(a > 1)$ сон учун ушбу кетма-кетликни тузиш мумкин ($\bar{\alpha}_k \in \mathbf{Q}$):

$$a^{\bar{\alpha}_1}, a^{\bar{\alpha}_2}, a^{\bar{\alpha}_3}, \ldots, a^{\bar{\alpha}_k}, \ldots. \qquad (1)$$

Бу кетма-кетлик ўсувчи ва чегараланган бўлгани учун у лимитга эга. Лимит ҳақиқий сон бўлиб, уни a^α билан белгиланади. ($0 < a < 1$ учун (1) кетма-кетлик камаювчи ва чегаралангган. Унда ҳам худди шу иш бажарилади.) Бу сон берилган *а соннинг иррационал кўрсаткичли* α *даражаси* дейилади.

Иррационал кўрсаткичли даража хоссалари:

1) $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta$;
2) $a^{\alpha-\beta} = a^\alpha : a^\beta$;
3) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$;
4) $(ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$.

Бу хоссаларни исботлашда α ва β иррационал сонларни шу сонларга яқинлашувчи рационал бўлган ўнли касрлар орқали ифодалаб олинади ва рационал кўрсаткичли даража хоссаларига асосан исботланади.

12. Бирҳад ва кўпҳад. Кўпҳаднинг стандарт кўриниши. *Бирҳад* деганда сон, ўзгарувчи ва ўзгарувчи даражалари кўпайтмасидан ташкил топган ифода тушунилади.

Мисоллар. $3x^2$, $4p^3y^5$; $0{,}75c^3z$; $-\frac{a^2}{n}$; $-5kx^3$; $\frac{2}{3}xy$.

Агар $4y \cdot 4p^2y^5$ ифодани $16p^2y^6$ билан солиштирсак, улар айнан тенг ифода эканлигини кўрамиз. Даража таърифига кўра, энг ихчам тарзда ёзилган бирҳад *стандарт шаклда ёзилган бирҳад* дейилади. Бу ерда $16p^2y^6$ стандарт бирҳаддир. Стандарт шаклда ёзилган бирҳаднинг сон кўпайтувчиси бирҳаднинг *коэффициенти* дейилади.

Кўпҳад деб бир неча бирҳадлар йиғиндисидан ташкил топган ўзгарувчили ифодага айтилади. Йиғиндида иштирок этаёг-

ган барча бирҳадлар бир хил ўзгарувчининг бирҳадлари бўлса, кўпҳадни *бир ўзгарувчили кўпҳад* дейилади, акс ҳолда *кўп ўзгарувчили кўпҳад* дейилади.

Бир ўзгарувчили кўпҳадда иштирок этаётган ўзгарувчининг энг юқори даражаси *кўпҳаднинг даражаси* дейилади. Агар кўпҳадда иштирок этаётган бир хил даражали бирҳадлар ихчамлаштирилса ва даражасининг ўсиши (камайиши) тартибида ёзилса, у қуйидаги кўринишни олади:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n, \ a_n \neq 0.$$

Бу n-даражали *стандарт* шаклдаги кўпҳад дейилади.

13. Бир ўзгарувчили кўпҳад ва унинг илдизи. n-даражали бир ўзгарувчили кўпҳад берилган бўлсин:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

бу ерда $a_0 \neq 0$ ва $a_i \in \mathbf{R}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Агар $n = 1$ бўлса *чизиқли*, $n = 2$ бўлса *квадрат учҳад* берилган дейилади. Бизга m-даражали $Q_m(x)$ кўпҳад берилган бўлсин:

$$Q_n = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m, \ b_m \neq 0.$$

1-таъриф. $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ кўпҳадларнинг *йиғиндиси* деб шундай k даражали $G_k(x)$ кўпҳадга айтиладики, унинг ҳар бир ҳади берилган кўпҳадларнинг бир хил даражали бирҳадлари йиғиндисидан ташкил топади:

$P_n(x) + Q_m(x) = G_k(x)$, бу ерда $G_k(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_kx^k$, $k = \max(n, m)$, $c_i = a_i + b_i$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$. (Агар $n < i$ бўлса, $i = n + 1, \ldots, m$ лар учун $a_i = 0$ ёки $m < i$ бўлса, $i = m + 1, \ldots, n$ лар учун $b_i = 0$.)

2-таъриф. $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ кўпҳадларнинг *кўпайтмаси* деб шундай s-даражали $H_s(x)$ кўпҳадга айтиладики, унинг учун ушбу тенглик ўринли бўлади:

$$P_n(x) \cdot Q_m(x) = H_s(x), \text{ бу ерда}$$
$$H_s(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \ldots + d_sx^s, \ s = n + m,$$

унинг ҳар бир ҳадининг d_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ коэффициенти қуйидагича аниқланади:

$$\begin{aligned}
d_0 &= a_0b_0, \\
d_1 &+ a_1b_0 + b_0 \cdot b_1, \\
d_2 &= a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
d_i &= a_ib_0 + a_{i-1}b_1 + \ldots + a_1b_{i-1} + a_0b_i \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
d_s &= a_nb_m
\end{aligned}$$

3-таъриф. Агар $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ кўпҳаллар учун яна шундай $L_k(x)$ кўпҳад топилсаки, $P_n(x) = Q_m(x) \cdot L_k(x)$ бажарилса,

$P_n(x)$ кўпҳад $Q_m(x)$ га *бўлинади* дейилади, $Q_m(x)$ кўпҳад *бўлувчи*, $L_k(x)$ кўпҳадни *бўлинма* деб айтилади. (Изоҳ. Бу ерда $n = m + k$ тенглик ўринли бўлади.)

Кўпҳад бўлувчиларининг асосий хоссалари.

1) $P_n(x)$ кўпҳад $Q_m(x)$ кўпҳадга, $Q_m(x)$ ўз навбатида $H_s(x)$ кўпҳадга бўлинса, у ҳолда $P_n(x)$ кўпҳад $H_s(x)$ га ҳам бўлинади:

2) $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ кўпҳадлар $H_s(x)$ кўпҳадга бўлинса, у ҳолда $P_n(x) \pm Q_m(x)$ кўпҳадлар ҳам $H_s(x)$ га бўлинади;

3) $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ кўпҳадлар бир-бирига бўлинса, у ҳолда шундай C сони топиладики, унинг учун $P_n(x) = C \cdot Q_m(x)$, $n = m$ бўлади;

4) $P_n(x)$ кўпҳад $Q_m(x)$ кўпҳадга бўлинсин:

$$P_n(x) = Q_m(x) L_k(x),$$

у ҳолда $L_k(x)$ кўпҳад ҳам $P_n(x)$ нинг бўлувчиси бўлади, шу билан бирга $L_k(x)$ кўпҳаднинг даражаси $k = n - m$ шартни қаноатлантиради.

Қолдиқли бўлиш. Фараз қилайлик, $P_n(x)$ кўпҳад $Q_m(x)$ кўпҳадга бўлинмасин. У ҳолда шундай $L_k(x)$ ва $R_s(x)$ кўпҳадлар топиладики, улар учун

$$P_n(x) = Q_m(x) L_k(x) + R_s(x)$$

тенглик бажарилади. Бу ерда $L_k(x)$ кўпҳад *бўлинма* $R_s(x)$ *қолдиқ кўпҳад* дейилади. Бу ерда $n = m + k$, $m > s$, $k \geqslant 1$ бажарилади. Улар бир қийматли тарзда топилади.

Мисол. $P_7(x) = 2x^7 + x^5 + 3x^3 + 5x^2 + 2x + 20$ кўпҳадни $Q_4(x) = 2x^4 + 1$ га бўлиб, бўлинма ва қолдиқларни топинг.

Ечилиши.

$$\begin{array}{l|l} -\underline{2x^7 + x^5 + 3x^3 + 5x^2 + 2x + 20} & 2x^4+1 \\ \quad \underline{2x^7 + x^3} & \overline{x^3 + \frac{1}{2}x} \\ \quad -\underline{x^5 + 2x^3 + 5x^2 + 2x + 20} & \\ \qquad \underline{x^5 + 0{,}5x} & \\ \qquad 2x^3 + 5x^2 + 1{,}5x + 20 & \end{array}$$

Шундай қилиб,

$$2x^7 + x^5 + 3x^3 + 5x^2 + 2x + 20 = (2x^4 + 1)(x^3 + 0{,}5x) + \\ + 2x^3 + 5x^2 + 1{,}5x + 20.$$

Жавоб. $L_3(x) = x^3 + 0{,}5x$; $R_3(x) = 2x^3 + 5x^2 + 1{,}5x + 20$.

Агар бирор $x = a$ сонда $P_n(x)$ кўпҳад қиймати нолга айланса, бу сон шу *кўпҳаднинг илдизи* дейилади. У ҳолда

$$P_n(x) = (x - a) Q_{n-1}(x)$$

кўринишдаги тенглик ўринлидир, яъни $P_n(x)$ кўпҳад $x - a$ ҳадга қолдиқсиз бўлинади Ҳатто шундай $k \in \mathbf{N}$ топилиши мумкинки, унинг учун

$$P_n(x) = (x - a)^k \cdot Q_{n-k}(x)$$

деб ёзиш мумкин. Кўпҳад энди $(x-a)^{k+1}$ кўпҳадга бўлинмаса, $x=a$ шу кўпҳаднинг *k-каррали илдизи* деб айтилади. Агар $k=1$ бўлса, бу илдиз кўпҳаднинг *оддий илдизи* дейилади (Безу теоремаси)

Натижалар. 1) x^n-a^n кўпҳад ҳар бир $n \in N$ учун $x-a$ га қолдиқсиз бўлинади:

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1}).$$

2) $x^{2n}-a^{2n}$ кўпҳад ҳар бир $n \in N$ учун $x+a$ га қолдиқсиз бўлинади:

$$x^{2n}-a^{2n}=(x+a)(x^{2n-1}-ax^{2n-2}+\ldots+a^{2n-2}x-a^{2n-1}).$$

3) $x^{2n+1}+a^{2n+1}$ кўпҳад ҳар бир $n \in N$ учун $x+a$ ҳадга қолдиқсиз бўлинади:

$$x^{2n+1}+a^{2n+1}=(x+a)(x^{2n}-ax^{2n-1}+\ldots-a^{2n-1}x+a^{2n}).$$

Топшириқ Ушбу кўпҳадларни $2x^2+3$ га бўлиб, бўлинмани ва қолдиқни топинг:

а) $P_4(x)=5x^4+3x^2+7x-1$; б) $P_7(x)=30x^7+5x^5+8x^2-9x-1$;

в) $P_2(x)=5x^2+3x-4$; г) $P_3(x)=2x^3+2x^2+3x+3$.

14. Акслантиришлар ҳақида қисқача тушунчалар. A ва B тўпламлар бўш бўлмасин. Агар A тўпламнинг ҳар бир a элементига B тўпламнинг ягона бирор b элементи мос қўйилса, A тўпламни B тўпламга *акслантирилиши* берилган дейилади. Одатда, акслантиришлар f, g, h, ... каби ҳарфлар билан белгиланиб, тўпламларни акслантириш $A \xrightarrow{f} B$, $C \xrightarrow{g} D$ ... ёки $f: A \to B$, $g: C \to D$ ... каби ёзилади.

Агар f акслантириш $a \in A$ элементни $b \in B$ элементга мос қўйса, у ҳолда b элемент a нинг *акси* (*образи*) ҳисобланиб, бу $b=f(a)$ тариқа белгиланади, a нинг ўзини b элементнинг *асли* (*прообрази*) деб айтилади. Барча $a \in A$ лар учун тузилган $f(a)$ элементлар тўпламини A тўпламнинг B даги *тасвири* дейилади ва $f(A)$ деб белгиланади:

$$f(A)=\{f(a) | a \in A\}.$$

Агар f акслантириш натижасида $f(A) \subset B$ бўлса, у ҳолда f акслантириш A ни B нинг *ичига акслантириш* деб айтилади; агар $f(A)=B$ бажарилса, у ҳолда f акслантириш A ни B *нинг устига акслантириш* дейилади.

Мисоллар. 1) $f: N \to N$ акслантириш ҳар бир $n \in N$ натурал сонига N дан $2n$ жуфт сонини мос қўйсин. Бунда f акслантириш N ни N нинг *ичига акслантириш* бўлади: $f(N) \subset N$.

2) A—текисликдаги барча учбурчаклар тўплами, B—барча турли радиусли айланалар тўплами бўлсин. У ҳолда ҳар бир учбурчакка битта ички чизилган айлана ясаш мумкин деган қоида билан берилган $g: A \to B$ акслантириш A ни B нинг устига акслантиришдир, яъни $g(A)=B$.

3) $y=\sqrt{x}$ нинг графиги координатлар текислигида берилган. Агар шу графикда ётган барча нуқталар тўплами G билан, абсциссалар ўқининг номанфий қисмидаги нуқталар тўплами H билан белгиланса, у ҳолда ҳар бир $(x, \sqrt{x}) \in G$ нуқтага $x \in H$ нуқтани мос қўйишни *проекциялаш* акслантирилиши дейилади ва $\pi: G \to H$ деб белгиланади. Бундай проекциялаш устига акслантиришдир: $\pi(G)=H$ (22-шакл).

Айтайлик, $f: A \to B$ акслантириш устига акслантириш бўлсин. Агар бу акслантиришда B нинг ҳар бир b элементига A дан ягона элемент мос қўйилган бўлса, у ҳолда f ни *ўзаро бир қийматли акслантириш* деб айтилади. Бу ҳолда B ни A тўпламга бир қийматли акслантириш мавжуд бўлиб, бу акслантириш f га *тескари акслантириш* деб айтилади ва f^{-1} билан белгиланади. Бу $B \xrightarrow{f^{-1}} A$ ёки $f^{-1}: B \to A$ каби белгиланади.

Юқорида келтирилган 2-мисолдаги акслантириш ўзаро бир қийматли бўлмагани учун тескариланувчи эмас. 3-мисолдаги акслантиришни тескариланувчи эканлигини текширинг.

Топшириқ. $f: \mathbf{N} \to \mathbf{Z}_0$ акслантириш ҳар бир $n \in \mathbf{N}$ га $n-1 \in \mathbf{Z}_0$ сонни мос қўяди. Бу акслантириш тескариланувчи эканлиги, f ва f^{-1} лар ўзаро бир қийматли акслантириш эканлигини кўрсатинг.

15. Функция таърифи, унинг аниқланиш соҳаси ва қийматлар тўплами. Функциянинг берилиш усуллари. Мураккаб функция. A ва B ҳақиқий сонлар тўпламлари берилган бўлсин. A тўплам элементларини x, B тўплам элементларини y билан белгилайлик.

Таъриф. A тўпламнинг ҳар бир элементига B тўпламнинг биттадан ортиқ бўлмаган элементининг мос қўйилиш қонунияти *функция* деб аталади.

Агар $X \subset A$ қисм-тўплам B тўпламга аксланувчи барча элементлар тўплами бўлса, бу таъриф қуйидагидек ифодаланиши мумкин: Агар X тўпламнинг ҳар бир x элементига B тўпламдан ягона бирор y элементи мос қўйилса, бу мослик қонунияти (*сонли*) *функция* деб айтилади ва у қисқача $y=f(x)$, $x \in X$ деб белгиланади. Баъзида $x \xrightarrow{f} y$; $f: x \to y$ каби ҳам ёзилади. Бу ерда x *эркли ўзгарувчи* (*ёки аргумент*), y эса *эрксиз ўзгарувчи* (*ёки функция*) деб юритилади. X ни эса шу функциянинг *аниқланиш соҳаси* деб айтилади ва уни $D(f)$ деб белгилаш мумкин. Шунингдек, ҳар бир $x \in X$ учун барча $f(x)$ функция қийматлари тўплами B тўпламда бирор Y қисм-тўпламни ташкил қилиши (ёки B билан устма-уст тушиши) мумкин. Y тўплам f функциянинг *ўзгариш соҳаси* ёки *қийматлар соҳаси* дейилади ва $E(f)$ деб белгиланади. Масалан, $A=\mathbf{R}$ тўпламнинг ҳар бир элементига $B=\mathbf{R}$ тўпламнинг биттадан ортиқ бўлмаган элементини мос қўяётган $y=\sqrt{x-10}$ функция $X=[10; +\infty[$ соҳада аниқланган, унинг қийматлари тўплами $Y=[0; +\infty[$ дан иборат ва $X \subset \mathbf{R}$, $Y \subset \mathbf{R}$.

Функция қуйидагича берилиши мумкин:

1) Жадвал кўринишида;
2) Нуқталарнинг тартибланган жуфтликлари орқали;
3) График тарзда;
4) Аналитик усулда.

1) *Функциянинг жадвал кўринишида берилиши.* Бу усулда бериладиган функцияга мисол келтирамиз:

1-мисол. Агар x — июнь ойининг биринчи декадаси (10 кунлиги) кунлари номери бўлса, $f(x)$ шу номерли куни соат 16⁰⁰ да Тошкентда кузатиладиган об-ҳаво температурасини билдирсин. Унда қуйидаги жадвални тузиш мумкин:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	30	31	35	29	31	32	36	33	32	40

Бу жадвал $D(f) = \{x | 1 \leqslant x \leqslant 10;\ x \in \mathbf{N}\}$ аниқланиш соҳасига эга бўлган бирор функцияни тўла аниқлайди.

Амалиётда мана шу усулда бериладиган функциялар жуда кўп учрайди. Масалан, троллейбус, метро поезди ва автобуслар ўз маршрутларида тайин жадвал бўйича юришади, яъни улар ҳар бир t_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ вақтда қайси бекатда бўлишлари лозимлигини билдирувчи йўлланма (жадвал) дан фойдаланадилар.

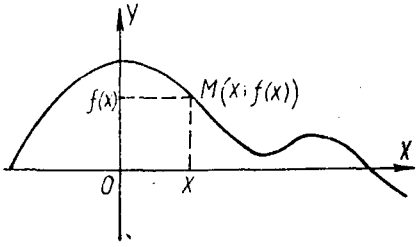
Шундай қилиб, агар f функциянинг аниқланиш соҳаси чекли x элементлардан иборат бўлиб, уларнинг ҳар бирига мос қўйилаётган $f(x)$ қийматлар жадвал шаклида бўлса, бизга *жадвал кўринишидаги функция* берилган дейилади.

2) *Баъзида функциялар нуқталарнинг тартибланган жуфтликлари орқали берилади.* Бу усул жадвал кўринишида беришнинг маълум маънода умумлашгани деб тушунтирилади.

$y = f(x)$ функция x ва унга мос функция қиймати $f(x)$ лардан тузилган шундай $(x;\ f(x))$ кўринишдаги тартибланган сонлар жуфтликлари билан бериладики, ҳар бир $(x_0;\ f(x_0))$ жуфтлик учун биринчи элементи x_0 бўлган бошқа $(x_0;\ y)$ каби кўринишдаги (бу ерда $y = f(x_0)$) жуфтлик учрамайди.

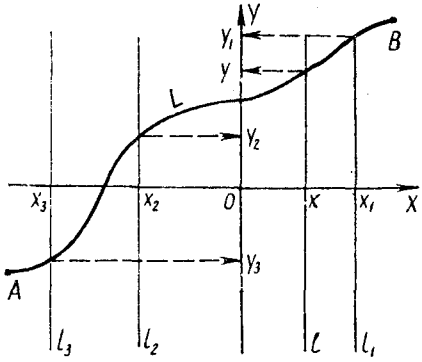
Масалан, $y = \frac{1}{x}$ функция барча $\left(x;\ \frac{1}{x}\right)$ кўринишдаги ҳақиқий сонлар жуфтлиги билан тўла аниқланади; $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ функция ҳар бир $x \in \mathbf{N}$ бутун сонга уни 5 га бўлинганда қолган қолдиғини мос қўяди. Демак, $\varphi(x)$ функция $\{(5n;\ 0), (5n+1;\ 1), (5n+2;\ 2), (5n+3;\ 3), (5n+4,\ 4)\ n \in \mathbf{N}$ каби бешта жуфтликлар тўплами билан тўла аниқланган.

Бу мисол кўрсатадики, жадвал кўринишида берилганга қараганда бу усул билан берилган функциянинг аниқланиш соҳаси чексиз кўп элементли бўлиши мумкин экан.



3- шакл.

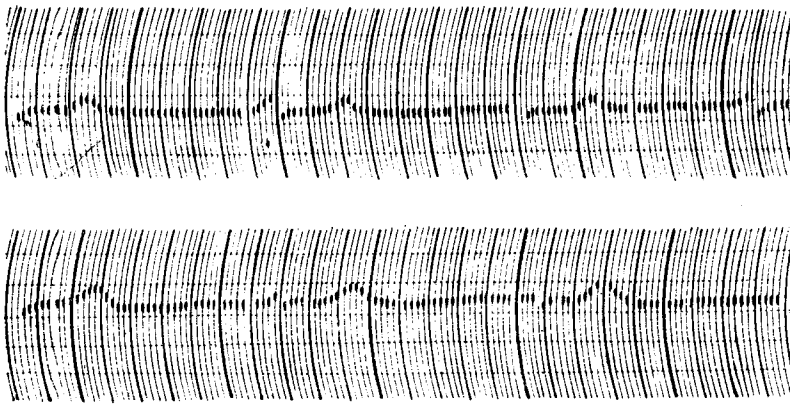
Агар x ва y ларни сонлар текислиги $\mathbf{R}^2$ даги нуқталарнинг координаталари деб қаралса, у ҳолда $y=f(x)$ дан фойдаланиб тузилган ҳар бир $(x;\ f(x))$ жуфтлик аниқлайдиган нуқталар тўплами $\mathbf{R}^2$ да функция графигини тузиш имконини беради (3-шакл).



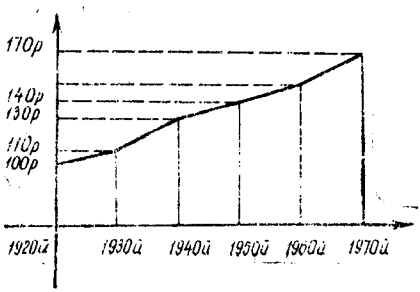
4- шакл.

Агар $F(x,\ y)=0$ тенглама x ва y ўзгарувчиларни шундай ўзаро боғласаки, уни қаноатлантирадиган барча $(x,\ y)$ ечимлар жуфтлиги тўплами ичида ҳар бир $(x_0,\ y_0)$ ечим учун биринчи элементи x_0 бўлган бошқа $(x_0,\ y)$ ечим учрамайди. Бундай усулда танланган жуфтликлар тўплами аниқ бирор $f: x \to y$, $F(x,\ y)=0$ функцияни аниқлайди. Масалан, $x-y^2-10=0$ тенглама ечимлари жуфтликлари тўплами ҳеч қандай функцияни аниқламайди, чунки (35; 5) ва (35; —5) каби икки ечимдаги биринчи элемент бир хил. Аммо $x+y-\sin y=0$ тенгламанинг ечимлари мавжудлигини ва барча $(x,\ y)$ ечим жуфтликлари тўпламида бу ҳол юз бермаслигини ўқувчи ўзи исботлай олади. (Кўрсатма. $F(x_0,\ y_0)$ дан $F(x_0,\ y)$ ни айиринг.) Демак, бу тенглама аниқ бирор $f: x \to y$, $F(x,\ y)=0$ кўринишдаги функцияни аниқлайди.

3) *Функциянинг график усулда берилиши.* Баъзида функция график тарзда берилиши мумкин. Айтайлик, Oxy текисликда олинган икки A ва B нуқтани узлуксиз шундай L эгри чизиқ билан туташтирганда (4-шакл) Oy ўқига параллел ҳар қандай l тўғри чизиқ уни кўпи билан битта жойида кесса, бу эгри чизиқ бирор f функциянинг графиги бўла олади. Ҳақиқатан, $x=l \cap Ox$ нуқтага эгри чизиқ устида ягона битта $M=L \cap l$ нуқта мос қўйилади. Бу нуқта координатаси $(x,\ y)$ бўлиб, l тўғри чизиқни Oy ўқига параллел силжита борганимиз сари ҳар бир x учун ягона тарзда яна $(x;\ y)$ жуфтликлар ҳосил бўлади: $x \to (x,\ y)$. Шундай қилиб, ҳар бир M нуқта координатаси $(x;\ y)$ бирор $x \xrightarrow{f} y$ каби мосликни аниқловчи



5- шакл.



6- шакл.

функция томонидан аниқланган жуфтликдир. Масалан, медицинада учрайдиган электрокардиограмма графиги — юрак мускулларидаги ток импульсларининг вақт бўйича ўзгаришини кўрсатади. Ҳақиқатан, врач ҳар бир $t=t_0$ вақт учун унга мос келадиган I_0 ток импульсларини ягона тарзда графикдан ҳамма вақт топа олади: $t_0 \xrightarrow{f} I_0$. Бу график аналитик тарзда ёзилиши шарт бўлмаган бирор f функциянинг графигидирки, у функциянинг формуласи врач учун унчалик қизиқарли эмас (5-*а*, *б* шакл). 6-шаклда келтирилган диаграмма ҳам бирор функция графиги эканлигини исботлаш ўқувчига қолдирилади. Бу диаграммада ривожланаётган бирор давлатнинг 50 йил давомида йиллик даромадининг ўсиши кўрсатилган.

4) *Функциянинг аналитик усулда берилиши.* Функциянинг бу усулда берилишидан унинг жадвал кўринишда берилишини, жуфтликлар тўплами орқали ва график тарзда берилишини ҳосил қилиш мумкин, лекин аксинчаси ҳар доим ҳам мумкин эмас.

Агар ҳар бир $x_0 \in D(f)$ учун чекли сонда амаллар кетма-кетлигини бажариш қоидасини кўрсатувчи формула кўрсатилса, f функция *аналитик усулда* берилган дейилади.

2- м и с о л. $y=x^2+\ln x-\sqrt{x-1}$ формула ҳар бир $x_0 \in D_y=[1;+\infty[$ учун ушбу амалларни бажаришни ифодалайди: x_0 соннинг квадратини, натурал логарифмини ва x_0-1 ни топиш; сўнгра x_0-1 айирманинг квадрат илдизини топиш; аввалги икки қиймат йиғиндисидан шу илдиз қиймати-

ни айириш лозим. Ҳаммаси бўлиб 6 та амал бажарилиб, функциянинг x_0 нуқтадаги $y_0 = x_0^2 + \ln x_0 - \sqrt{x_0 - 1}$ қиймати аниқланди.

Топшириқ. Қуйидаги функцияларнинг аналитик усулда берилганлигини аниқланг:

1) $y = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{агар } x > 1 \text{ бўлса;} \\ x - 1, & \text{агар } 0 < x \leqslant 1 \text{ бўлса;} \\ \sin x + \cos x, & \text{агар } x \leqslant 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

2) $y_n = \frac{n}{2}(n-3)$, $n \geqslant 3$, $n \in \mathbf{N}$ Бу ерда y_n функция n томонли қаварик кўпбурчак диагоналлари сонини беради.

Баъзан $y = f(x)$ функцияда x нинг y га мос қўйилиши *параметр* деб айтиладиган учинчи бир ўзгарувчи ёрдамида бажарилиши мумкин:

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \ \alpha < t < \beta. \end{cases}$$

Бу ерда φ ва ψ лар ҳам аналитик усулда берилган функциялар бўлиб, $D(\varphi) \cap D(\psi) \neq \varnothing$ деб назарда тутилади.

Масалан, $x = a\cos t$, $y = a|\sin t|$, $a > 0$, $t \in \mathbf{R}$ функциянинг аналитик берилиши $M(x, y)$ нуқтанинг a радиусли ярим айлана бўйлаб *тебранма ҳаракатини* ифодалайди. Ҳар бир $x_0 \in [-a; a]$ учун ягона равишда $y_0 = f(x_0)$ мос келишини $y_0 = \sqrt{a^2 - a^2\cos^2 t_0}$ формула орқали топиляпти.

Топшириқ. $x = t^3$, $y = t^{\frac{1}{2}}$, $t \in R$ функциянинг графигини чизинг.

Таъриф. f ва g функциялар аниқланиш соҳаларининг умумий қисми бўлган $K = D(f) \cap D(g)$ нинг ҳар бир x нуқтасида $f(x) = g(x)$ тенглик бажарилса, бу функциялар K соҳада *бир-бирига тенг* дейилади.

Аниқланиш соҳаси $D(f)$ ва $D(g)$ лардан иборат бўлган f ва g функцияларнинг *йиғиндиси* деб ҳар бир $x_0 \in D(f) \cap D(g)$ учун қиймати $f(x_0) + g(x_0)$ каби аниқланадиган функцияга айтилади ва уни қисқача $f + g$ деб белгиланади.

Худди шунга ўхшаш, f ва g функциялар орасида $f - g$, $f \cdot g$ ва $\frac{f}{g}$ каби *айириш, кўпайтириш ва бўлиш* амали аниқланадики, буни ўқувчига қолдирамиз. Ушбу

а) $D(f + g) = D(f) \cap D(g)$;

б) $D(f - g) = D(f) \cap D(g)$;

в) $D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$;

г) $D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) \setminus \{x | g(x) = 0\}$

тасдиқларни $f(x)=\sqrt{1-x}$ ва $g(x)=\sqrt{1+x}$ функциялар учун ҳам текширинг.

Мураккаб функциянинг берилиши. $y=f(x)$ ва $z=g(y)$ функциялар берилган бўлсин. f функциянинг қийматлари соҳаси $E(f)$ да ёки унинг қисм-тўпламида g функция аниқланган дейлик. Ҳар бир $x\in D(f)$ сонга мос келган $y\in E(f)$ сон учун $E(g)$ соҳадан бирор z соннинг ягона тарзда мос қўйилиш қонунияти берилса, у ҳолда $z=g(f(x))$ функция *мураккаб функция* дейилади. Баъзан у $z=g\circ f(x)$ деб ҳам ёзилади.

Умумийроқ қилиб айтганда, кетма-кет берилган қуйидаги

$$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$$

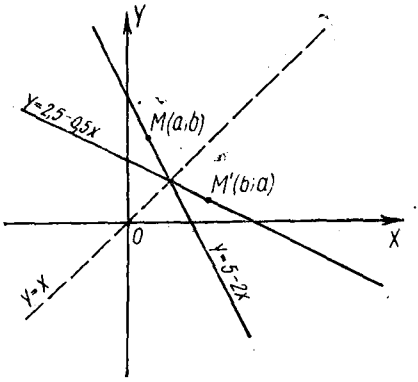
акслантиришлар *композиция* деб аталувчи $g\circ f$ акслантиришни (функцияни) билдиради, яъни g ни f *функциянинг композицияси* деб ўқилади. Бу таъриф билан $g\circ f$ функциянинг аниқланиш соҳаси A тўплам бўлган ҳамда қийматлар соҳаси C тўплам бўлган $z=g\circ f(x)$ мураккаб функция ифодаланди.

3- м и с о л. $z=\sin\sqrt{x-1}$ мураккаб функциядир, чунки $z=\sin y$ функцияда $y=\sqrt{x-1}$. Бу ерда $A=[1;\ +\infty[$, $B=[0;\ +\infty[$, $C=[-1;\ 1]$ эканлигини кўриш қийин эмас. Бу мураккаб функция $A\xrightarrow{\sqrt{1-x}}B\xrightarrow{\sin y}C$ каби кўринишга эга.

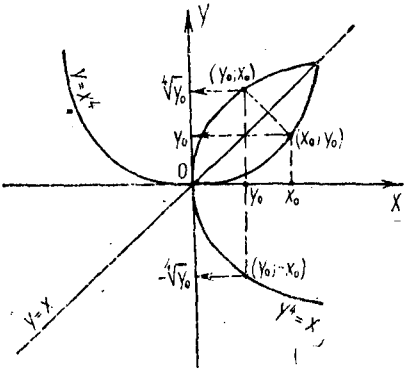
16. Берилган функцияга тескари функция тушунчаси. A ва B тўплам бўш бўлмасин ҳамда $f:A\to B$ акслантириш берилган бўлсин. У ҳолда ҳар бир $a\in A$ учун тузилган $(a;\ f(a))$ жуфтликлар тўплами f акслантиришни тўла аниқлайди. Энди f акслантириш учун $(f(a);\ a))$ кўринишда тартибланган барча жуфтликлар тўпламини қарайлик. Агар барча $(f(a);\ a)$, $a\in A$ жуфтликлар тўплами ичида ҳар бир $(f(a_0),\ a_0)$ элемент учун шу тўплам ичидан бошқа $(f(a_0);\ a_1)$, $(a_0\neq a_1)$ жуфтлик мавжуд бўлмаса, f ни A тўпламда *тескариланувчи акслантириш* деб айтилади. Барча $(f(a);\ a)$, $a\in A$ жуфтликлар аниқланаётган акслантиришни f^{-1} деб белгиланади.

1- м и с о л. $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ акслантириш ҳар бир n натурал сонга $2n$ жуфт сонни мос қўйиш қоидаси билан берилган бўлсин. У ҳолда f ичига акслантириш бўлиб, у барча $(n;\ 2n)$, $n\in\mathbf{N}$ жуфтликлар тўплами билан тўла берилади. $E(f)\subset\mathbf{N}$ бўлгани учун $(2n;\ n)$, $n\in\mathbf{N}$ жуфтликлари тўплами билан аниқланган f^{-1} тескари акслантириш $A=E(f)$ соҳада устига акслантиришдир: $f^{-1}:A\to\mathbf{N}$ Шундай қилиб, $D(f^{-1})=E(f)$ экан. $\mathbf{R}^2$ сонлар текислигида f ва f^{-1} ни аниқловчи жуфтликлар тўплами $y=x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик жойлашади

Т а ъ р и ф. A ва B ҳақиқий сонлар тўплами ва f: $A\to B$ функция берилган бўлиб, $A=D(f)$, $B=E(f)$ бўлсин. Агар ҳар бир $a\in A$ учун тузилган тескари тартибдаги $(f(a);a)$ жуфтлик-



7- шакл.



8- шакл.

лар тўплами ҳам бирор функцияни аниқласа, у ҳолда f ни A *сонлар тўпламида тескариланувчи* функция деб айтилади ва унга тескари функцияни f^{-1} билан белгиланади.

2-мисол. $A = B = \mathbf{R}$ да f функция $y = 5 - 2x$ формула билан берилган. У ҳолда барча $(a;\ 5-2a)$, $a \in A$ жуфтликлар шу f функцияни аниқлайди. $(5-2a,\ a)$ жуфтликлар эса барча $a \in A$ лар учун тўплам ҳосил қилиб, бирор f^{-1} тескари функцияни аниқлайди. Ҳақиқатан, $5-2a=b$ деб белгиласак, $a=\dfrac{5-b}{2}$ бўлгани учун $\left(b;\ \dfrac{5-b}{2}\right)$, $b \in B$ жуфтликлар тўплами ҳосил бўладики, у $y = \dfrac{5-x^3}{2}$ функцияни тўла аниқлайди. 7 шаклда шу ўзаро тескари функциялар графиги берилган.

Топшириқ 1. $A = B = [0;\ 1]$ да $f(x) = x^2$ функция берилган. Унинг шу соҳада тескариланувчи эканлигини аниқланг ва тескари функцияни топинг.

2. $A = [-1;\ 1]$ ни $B = [0;\ 1]$ га акслантираётган $y = x^4$ функция A кесмада тескариланувчи эмаслигини исботланг (8- шакл).

Ўзаро тескари функцияларнинг хоссалари.

1) Ўзаро тескари f ва f^{-1} функциялар учун $D(f) = E(f^{-1})$ ва $E(f) = D(f^{-1})$ шартлар ўринлидир;

2) Агар f функция f^{-1} учун тескари бўлса, у ҳолда f ҳам f^{-1} га тескаридир;

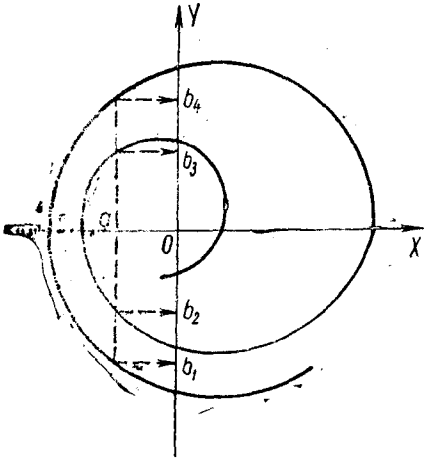
3) Агар $f: A \to A$ функция тескариланувчи бўлса, у ҳолда

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

тенглик ҳар бир $x \in A$ учун бажарилади, яъни $f \circ f^{-1}$ ва $f^{-1} \circ f$ акслантиришлар композицияси айний алмаштиришдир;

4) Ҳар қандай ўсувчи (камаювчи) функция тескариланувчидир;

5) Ўсувчи (камаювчи) функцияга тескари функция ҳам ўсувчи (камаювчи) дир;



9- шакл.

6) Ўзаро тескари $y=f(x)$ ва $y=f^{-1}(x)$ функциялар графиклари $y=x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрикдир.

1-теорема. *Агар $y=f(x)$ функция ўзининг ҳар бир қийматини бирор A соҳада фақат бир мартагина қабул қилса, у шу соҳада тескариланувчидир.*

2-теорема. *$f: A \to B$ функция тескариланувчи бўлсин. У ҳолда $x_1 \neq x_2$ эканлигидан $f(x_1) \neq f(x_2)$ тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади ва аксинча, $f(x_1) \neq f(x_2)$ шарт бажарилишидан $x_1 \neq x_2$ тенгсизлиги албатта ўринлидир**:

1) $\forall x_1 \in A, \ \forall x_2 \in A, \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;

2) $\forall f(x_1) \in B, \ \forall f(x_2) \in B, \ f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$.

17. Функция графиги. Маълумки, $f: A \to B$ функция барча $x \in A$ лар учун тузилган $(x;\ f(x))$ жуфтликлар гўплами билан тўла аниқланади. Агар f функция сонли функция бўлса, унинг *графиги* деб $\mathbf{R}^2$ сонлар текислигининг қисм-тўпламини ташкил қиладиган $\Gamma = \{(x;\ y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = f(x),\ x \in A,\ y \in B\}$ тўпламга айтилади.

Координата текислиги $\mathbf{R}^2$ да олинган ҳар қандай қисм-тўплам бирор функциянинг графиги бўлавермайди (41-бет). Масалан. 9-шаклдаги спиралсимон эгри чизиқ ҳеч қандай функцияни аниқламайди, бунинг сабаби шу эгри чизиқда ҳар бир нуқтаси абсциссаси a га, ординаталари b_1, b_2, . . . га тенг бўлган $(a;\ b_1)$, $(a;\ b_2)$, . . нуқталар чексиз кўп бўлишидир.

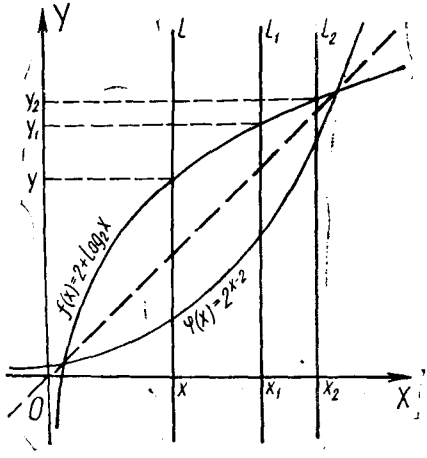
Координата текислигида олинган бирор қисм-тўплам ордината ўқига параллел ҳаракат қилаётган l тўғри чизиқнинг ҳар бир ҳолати билан биттадан ортиқ нуқтада кесишмасин. Шу кесишиш нуқталарининг барчасининг (Γ нинг) координаталарини ифодаловчи $(x;\ y)$ жуфтликлар тўплами бирор f функцияни аниқлайди. Бу ҳолда Γ шу аниқланаётган f функциянинг графиги бўлади.

Топшириқлар 1. Координаталари $(m;\ n)$, $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$ бўлган барча нуқталар тўплами Γ ҳеч қандай функция графиги эмаслигини кўрсатинг.

---

* $\forall$ белги „исталган" сўзини англатади. У шу китобда уч-тўрт жойда учрайди холос. Аслида бу белги ишлатилган қатордаги фикрни ўқишда тушириб қолдириш мумкин.

2. $y = 2^{x-2}$ функция графигини: а) $y = x$; б) $y=2x$; в) $y = \frac{x}{2}$ тўғри чизиқларига нисбатан симметрик қилиб ясанг. Ана шу усулда ясалган текислик нуқталари бирор функция графиги бўла оладими?



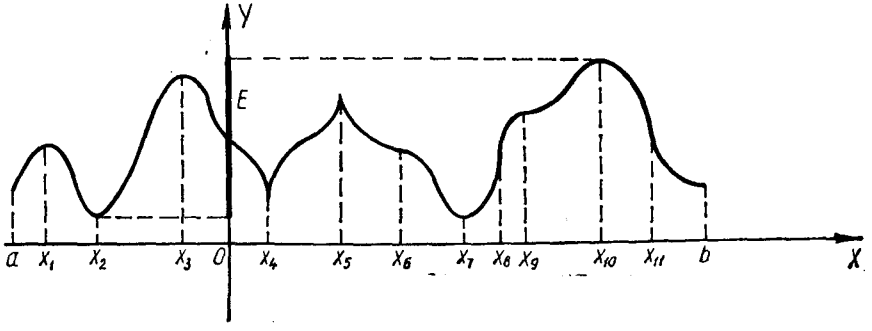
10- шакл.

18. Функциянинг ўсиши ва камайиши, жуфт ва тоқлиги, даврийлиги. $y = f(x)$ функция бирор $A =]a; b[$ соҳада аниқланган бўлсин. Агар шу соҳага тегишли ихтиёрий x_1 ва x_2 лар учун $x_1 < x_2$ бўлганда $f(x_1) < f(x_2)$ (ёки $f(x_1) \leqslant f(x_2)$) тенгсизлик ўринли бўлса, f функция A *соҳада ўсувчи (камаймайдиган)*, аксинча, $x_1 < x_2$ бўлганда $f(x_1) > f(x_2)$ (ёки $f(x_1) \geqslant f(x_2)$) тенгсизлик ўринли бўлса, f функция A соҳада *камаювчи* (*ўсмайдиган*) функция дейилади, A соҳа эса f функциянинг мос равишда *ўсиш ёки камайиш оралиғи* дейилади.

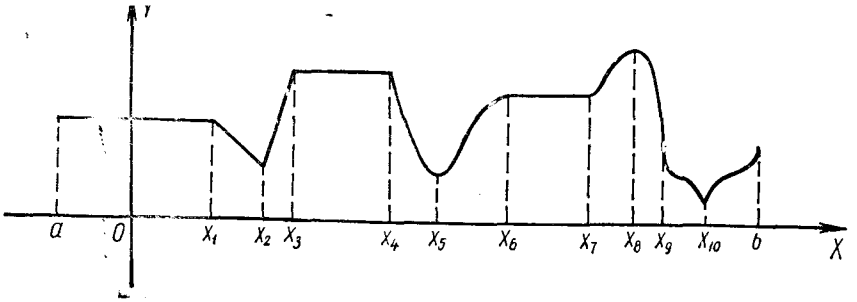
1-мисол. 10-шаклда $f(x) = 2 + \log_2 x$ ва $\varphi(x) = 2^{x-2}$ функциялар графиги Oy ўқига параллел l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар билан кесиштирилган, l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар $x_1 < x_2$ шарт билан графикнинг қаеридан кесмасин, $f(x_1) < f(x_2)$ тенгсизлик бажарилади. Шаклдан кўринадики, $f(x)$ функция R_+ да. $\varphi(x)$ функция R да ўсувчи экан.

Натижа. Агар $f(x)$ функция ўз аниқланиш соҳасида узлуксиз бўлса, бу соҳани шундай оралиқларга ажратиш мумкинки, уларнинг ҳар бирида f функция ё ўсувчи, ё камаювчи бўлади.

2-мисол. $f(x)$ функция $]a; b[$ соҳада 11-шаклдаги графиги билан берилган. Унда $]a; x_1[$, $]x_2; x_3[$, $]x_4; x_5[$, $]x_7; x_{10}[$ оралиқларда функция



11- шакл.



12- шакл.

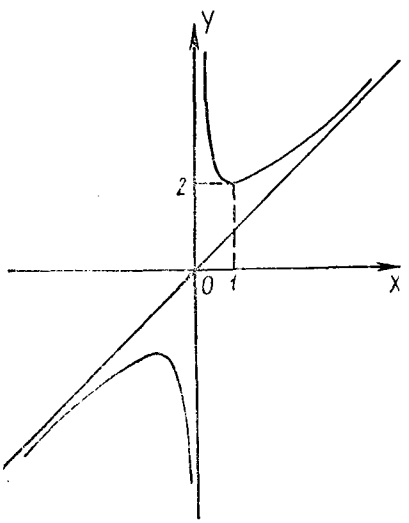
ўсувчи. $[x_1; x_2[$; $]x_3; x_4[$, $]x_5; x_7[$, $]x_{10}; b[$ ларда камаювчилиги тасвирланган.

Топшириқ. 12- шаклда тасвирланган функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг.

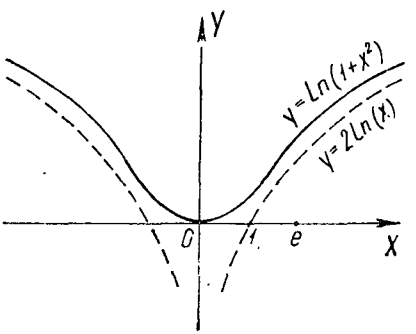
2- таъриф. Агар $y=f(x)$ сонли функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f)$ координаталар бошига нисбатан симметрик бўлса ва ҳар бир $x \in D(f)$ учун $f(-x)=f(x)$ тенглик бажарилса, у ҳолда функция *жуфт функция* дейилади.

3- таъриф. Агар $f(x)$ сонли функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f)$ координаталар бошига нисбатан симметрик бўлса ҳамда ҳар бир $x \in D(f)$ учун $f(-x)=-f(x)$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда функция *тоқ функция* дейилади.

3- мисол. $y=x+\frac{1}{x}$ функция $]0; 1]$ соҳада камаювчи, $[1; +\infty]$ соҳада ўсувчи эканлигини бевосита текшириб кўриш мумкин. Бу функция $D(y)=\mathbf{R}/\{0\}$ соҳада тоқ функция ҳамдир (13-шакл). $y=\ln(1+x^2)$ функция $\mathbf{R}$ соҳада жуфт (14-шакл). Бу функция $]0; \infty[$ соҳада ўсувчи, $]-\infty; 0[$ соҳада камаювчи, чунки $0<x_1<x_2 \Rightarrow 1+x_1^2<1+x_2^2 \Rightarrow \ln(1+x_1^2)<$



13- шакл.



14- шакл.

$< \ln(1+x_2^2$ тенгсизлик бажарилади. Худди шунга ўхшаш, $x_1 < x_2 < 0$ учун $\ln(1+x_1^2) > \ln(1+x_2^2)$ ўринлидир.

Натижа. Жуфт функция графиги ордината ўқига нисбатан; тоқ функция графиги координата бошига нисбатан симметрикдир.

Жуфт ва тоқ функция хоссалари.

а) Икки ва ундан ортиқ жуфт функцияларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмаси яна жуфт функциядир.

б) Икки ва ундан ортиқ тоқ функцияларнинг йиғиндиси ва айирмаси яна тоқ функциядир.

в) Икки тоқ функция кўпайтмаси ва бўлинмаси жуфт функциядир.

4-таъриф. Агар $y=f(x)$ сонли функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f)$ га тегишли ҳар бир x нуқта билан бир қаторда қандайдир бирор T сон учун $x-T$ ва $x+T$ нуқталар ҳам шу соҳага тегишли бўлса ва $f(x+T)=f(x)$ тенглик ҳамма $x \in D(f)$ нуқталар учун бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция *даврий функция* дейилади. Бундай хоссали сон, умуман олганда, бир қанча бўлиши мумкин. Агар уларнинг ичида энг кичик мусбати T_0 мавжуд бўлса, у ҳолда уни f *функциянинг даври* деб айтилади. f функция эса T_0 *даврли функция* дейилади.

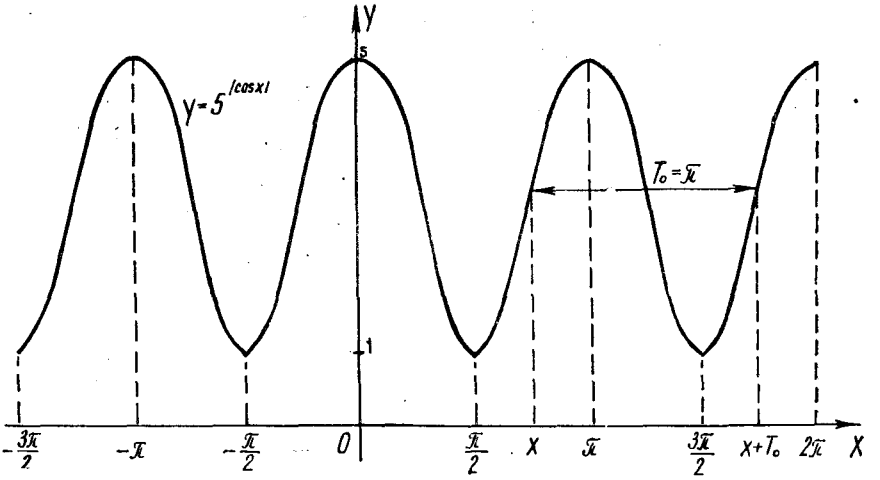
4-мисол. $y=5^{|\cos x|}$ функция $\mathbf{R}$ да берилган. Шу функциянинг даврини топинг ва графигини схематик чизинг.

Ечилиши. Ҳақиқатан ҳам, функциянинг даврийлик таърифига биноан $5^{|\cos x|} = 5^{|\cos(x+T)|}$ тенгламани тузиб, уни ечсак, иккита тенгламани ҳосил қиламиз: $\cos x = \pm\cos(x+T)$. T га нисбатан бу тенгламаларни бирма-бир ечганда ҳар бир $k \in \mathbf{Z}$ учун

1) $T_1=(2k-1)\pi-2x$;
2) $T_2=(2k+1)\pi$;
3) $T_3=2k\pi-2x$;
4) $T_4=2k\pi+2\pi$

ларни топамиз. T_1 ва T_3 лар x га боғлиқ, демак, улар давр бўла олмайдилар. $k=0$ бўлганда, $T_2=\pi$ ва $T_4=2\pi$ га эга бўламиз. Улардан кичиги, яъни π берилган функциянинг изланган давридир (15-шакл).

19. Сонли функция экстремуми таърифи. Функциянинг оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматлари. Агар $x_0 \in D(f)$ нуқтанинг шундай δ атрофи $]x_0-\delta;\ x_0[\cup]x_0;\ x_0+\delta[\subset D(f)$ мавжуд бўлсаки, шу атроф таркибидаги барча x нуқталар учун $f(x) \geqslant f(x_0)$ тенгсизлик бажарилса, x_0 нуқта f *функциянинг минимум нуқтаси*, аксинча $f(x) \leqslant f(x_0)$ тенгсизлик ўринли бўлса, x_0 нуқта *функциянинг максимум нуқтаси* дейилади. Функциянинг максимум ва минимумга эриштирадиган нуқталари шу функциянинг *экстремум нуқталари* дейи-



15- шакл.

лади. Функциянинг бу нуқталарда эришган қийматлари унинг *экстремум қийматлари* деб аталади. 11-шаклдаги x_1, x_3, x_5, x_{10} нуқталар функциянинг максимум нуқталари, x_2, x_7 лар эса функциянинг минимум нуқталаридир.

Масалан, $f(x)=x^4-2x^2+4$ функцияни $f(x)=(x^2-1)^2+3$ деб ёзиб олсак, унинг минимум қиймати $x_{1,2}=\pm 1$ нуқталарда бўлишини кўриш қийин эмас, чунки $f(x)-f(1)=(x^2-1)^2\geqslant 0$, $f(x)-f(-1)=(x^2-1)^2\geqslant 0$ бажариляпти. Аксинча, $f(x)-f(0)\leqslant 0$ тенгсизликнинг $x_0=0$ нуқтанинг етарлича кичик атрофида бажарилишини исбот этиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $f(x)-f(0)=x^2(x^2-2)\leqslant 0$ тенгсизлик $x\in\,]-\sqrt{2};+\sqrt{2}[$ ораликда ўринли. Демак, $x_0=0$ функциянинг максимум нуқтасидир.

f функциянинг *критик нуқтаси* деб, унинг аниқланиш соҳаси $D(f)=[a;\ b]$ нинг шундай нуқталарига айтиладики, у ерда ё функция ҳосиласи нолга тенг, ёки мавжуд эмас (12-шаклга қаранг)

Фараз қилайлик, f функция кесмада узлуксиз ва чекли сонда критик нуқталарга эга бўлсин. Ана шу ҳол учун $[a;\ b]$ кесмада функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини излаш қоидасини келтирамиз. Бунинг учун, аввало, функциянинг барча критик нуқталари излаб топилади. Сўнг функциянинг ҳар бир критик нуқтада эришган қийматларининг энг каттаси ва энг кичиги аниқланади, яъни x_1, x_2, . . . , x_m нуқталар $f(x)$ функциянинг критик нуқталари бўлса, у ҳолда $f(x_i)$ миқдорларнинг ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$) энг каттаси: $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} f(x_i)$ ва энг

кичиги $\min\limits_{1\leq i\leq m} f(x)$ миқдорлар аниқлаб олинади. Сўнгра бу қийматлар функциянинг $D(f)=[a;\ b]$ кесманинг чегара нуқталаридаги қийматлари $f(a)$ ва $f(b)$ билан таққосланилади-да, уларнинг каттаси ва кичиги мос равишда функциянинг $[a,\ b]$ оралиқдаги (кесмадаги) *энг катта ва энг кичик қийматлари* деб олинади. Улар мос равишда $\max\limits_{[a;\ b]} f$ ва $\min\limits_{[a;\ b]} f$ ($y_{\text{э. катта}}$ ёки $y_{\text{э. кичик}}$) деб белгиланади.

1-мисол. $y=x^3-3x$ функция $[-2;\ 3]$ оралиқда $x_1=-1$ ва $x_2=+1$ да критик нуқталарга эга. Шунинг учун $f(-2)=-2$, $f(-1)=2$, $f(1)=-2$, $f(3)=18$ ларни аниқлаб олиб ўзаро таққосласак, қуйидагилар топилади: $y_{\text{э. катта}}=f(3)=18$; $y_{\text{э. кичик}}=f(1)=f(-2)=-2$.

2-мисол.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}, & \text{агар } x\in[-a,\ a],\ x\neq 0;\\ 0, & \text{агар } x=0.\end{cases}$$

Бу функция $[-a;\ a]$ да берилган бўлиб, энг катта қиймати 1, энг кичиги—1 дир.

3-мисол 11-шаклда $y=f(x)$ функция график тарзда берилган бўлиб, $\min\limits_{[a,\ b]} f(x)=f(x_2)$ ва $\max\limits_{[a,\ b]} f(x)=f(x_1)$ эканлиги, $f(x)$ функциянинг барча қийматлари $f(x_2)$ дан катта ва $f(x_1)$ дан кичиклиги графикдан кўринади.

Топшириқ. 12-шаклда тасвирланган функциянинг критик нуқталарини, экстремум нуқталарини, $[a;\ b]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини аниқланг.

20. $y=kx+b$ функциянинг хоссалари ва графиги

$y=kx+b$, $(k,\ b\in\mathbf{R})$ кўринишидаги функция *чизиқли функция* дейилади.

Хоссалари. 1) Функциянинг аниқланиш соҳаси $D(y)=\mathbf{R}$ дан иборат.

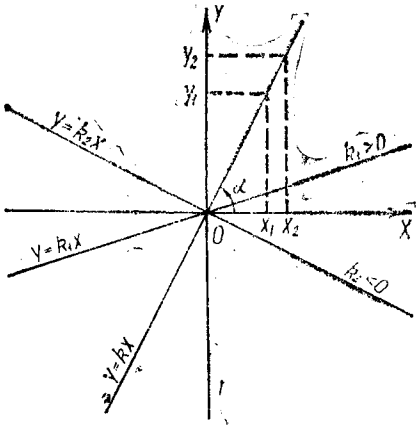
2) Агар $k\neq 0$ бўлса, чизиқли функциянинг қийматлар соҳаси барча ҳақиқий сонлардан иборат: $E(y)=\mathbf{R}$. Аксинча, $k=0$ бўлса: $E(y)=\{0\}$.

3) $k\neq 0$ бўлса, функция $x_0=-\dfrac{b}{k}$ илдизга эга. Агар $k>0$ бўлса, бу функция $]x_0;\ +\infty[$ да мусбат ишорали, соҳанинг қолган қисмида манфийдир. $k<0$ бўлса, аксинча $]x_0;\ +\infty[$ соҳада манфий, соҳанинг қолган қисмида мусбат; $k=0$ бўлган ҳолда бу функция $]-\infty;\ +\infty[$ соҳада b нинг ишораси каби ишорали бўлади.

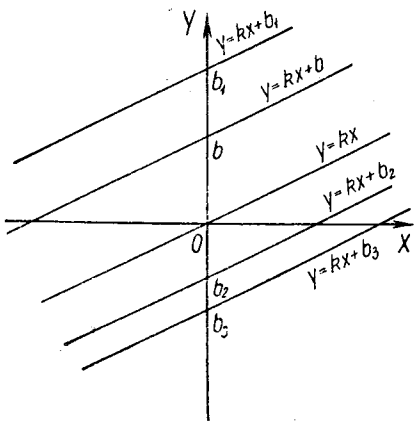
4) $k>0$ бўлса, функция $\mathbf{R}$ да ўсувчи, аксинча $k<0$ бўлганда камаювчидир; бу функция $k\neq 0$ бўлганда экстремумга эга эмас (чунки ихтиёрий x_1, x_2 учун $f(x_2)-f(x_1)=k(x_2-x_1)$).

5) $b\neq 0$ бўлганда бу чизиқли функция тоқ ҳам эмас, жуфт ҳам эмас; $b=0$ бўлган ҳолда эса тоқ функциядир.

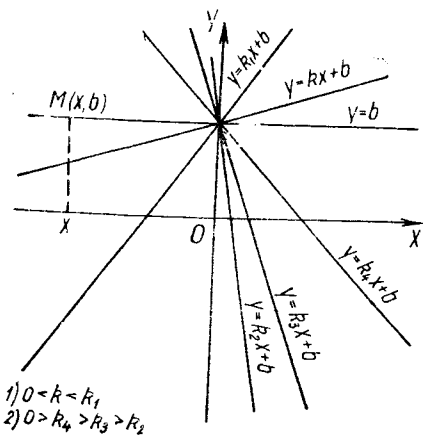
Бу функция графиги Oxy текислигида тўғри чизиқни ифодалайди, шунинг учун у *чизиқли функция* деб айтилади.



16- шакл.



17- шакл.



18- шакл.

Графикнинг координата текислигидаги вазияти k ва b нинг қийматларига боғлиқ.

а) $b=0$ бўлса, у ҳолда $y=kx$ функциядаги x ва y миқдорлар ўзаро *тўғри пропорционал* равишда боғланган дейилади. Бу функциянинг графиги координата бошидан ўтувчи тўғри чизиқдир (16-шакл). Турли k га координата бошидан ўтувчи турли тўғри чизиқлар мос келади. Унда x аргумент x_1 ва x_2 қийматларни қабул қилганда y функция ҳам турли y_1 ҳамда y_2 қийматларни қабул қилади. Бу ҳолда $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=k$ тенглик бажарилиб, k *пропорционаллик коэффициенти* деб айтилади. 16-шаклдан $\frac{y_1}{x_1}=\mathrm{tg}\alpha=k$ эканлиги маълум. $k=\mathrm{tg}\alpha$ *тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти* дейилади.

б) $y=kx+b$ функцияда $k\neq0$ ва $b\neq0$ бўлсин. Агар b га турли қийматлар берсак, бир хил бурчак коэффициентли турли чизиқли функциялар ҳосил бўлиб, уларнинг графиклари ўзаро параллел тўғри чизиқлардан иборат бўлади (17-шакл).

Аксинча, k га турли қийматлар бериб, бир хил b озод ҳадли чизиқли функциялар графикларига эътибор берсак, у ҳолда улар $M(0;\ b)$ нуқтадан ўтувчи ва абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан

$\alpha = \operatorname{arctg} k$ бурчак ташкил этадиган тўғри чизиқлар эканлигини кўрамиз (18-шакл).

в) Агар $y = kx + b$ функцияда $k = 0$ бўлса, у ҳолда x нинг ҳар қандай қийматида $y = b$ кўринишли функция ҳосил бўлади. Унинг графиги $M(0;\ b)$ нуқтадан ўтувчи, абсциссалар ўқига параллел тўғри чизиқ бўлади (18-шакл).

$y = 0$ нинг графиги абсциссалар ўқи билан устма-уст тушадиган тўғри чизиқдир.

Эслатма. $y = 0$ абсциссалар, $x = 0$ ординаталар ўқининг аналитик ифодасидир. $x = b$ ифода эса абсциссалар ўқининг b нуқтасидан шу ўққа перпендикуляр ўтган тўғри чизиқни билдиради.

Теорема. *Текисликда олинган ҳар қандай тўғри чизиқ доим $ax + by + c = 0$ ($a,\ b \in \mathbf{R}$) кўринишдаги тенглама билан ифодаланиши мумкин ва аксинча, $ax + by + c = 0$ кўринишдаги тенглама графиги шу текисликдаги бирор l тўғри чизиқдир.*

Бу теореманинг исботига кейин тўхтаб ўтамиз (161-бет).

21. $y = \frac{k}{x}$, ($k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$) функция хоссалари ва графиги.

Хоссалари:

1) Функциянинг аниқланиш соҳаси $D(y) =]-\infty;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$ дир;

2) унинг қийматлар соҳаси $E =]-\infty;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$ дан иборат;

3) агар $k > 0$ бўлса, бу функция $\mathbf{R}_+$ да мусбат, $\mathbf{R}_-$ да эса манфий ишоралидир; аксинча, $k < 0$ бўлганда $\mathbf{R}_-$ да мусбат, $\mathbf{R}_+$ да манфийдир;

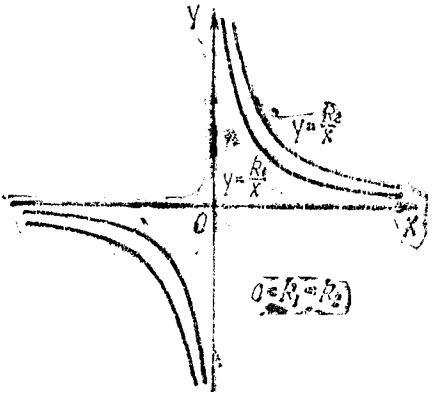
4) $f(x) = \frac{k}{x}$ функция $k > 0$ бўлганда $D(y)$ да камаювчи, аксинча $k < 0$ бўлганда ўсувчи функциядир (чунки ихтиёрий $x_1;\ x_2 \in D(y)$ учун $f(x_2) - f(x_1) = -k\frac{x_2 - x_1}{x_2 x_1}$ нинг ишораси фақат k га боғлиқ эканлиги осон текширилади);

5) функция экстремумга эга эмас;

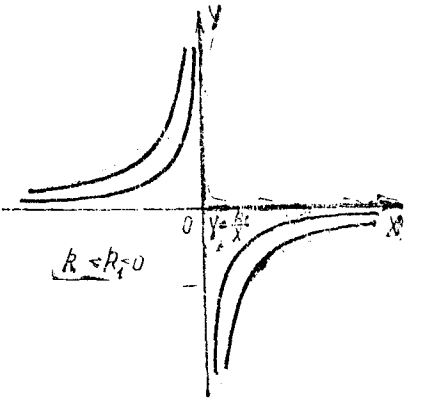
6) бу функция ҳамма вақт тоқдир.

Берилган $y = \frac{k}{x}$ функция графиги *гипербола* деб аталувчи эгри чизиқдир (19, 20-шакллар).

$y = \frac{k}{x}$ функцияда қатнашаётган ўзгарувчи x ва y миқдорларни *ўзаро тескари пропорционал боғланган* миқдорлар деб ҳам юритилади. $y = \frac{k}{x}$ функция аниқланган $(x_1;\ y_1)$ ва $(x_2;\ y_2)$ жуфтликлар учун $\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1} = k$ тенглик ўринлидир ва унда қатнашаётган ўзгарувчиларнинг ўзаро тескари пропорционал ра-



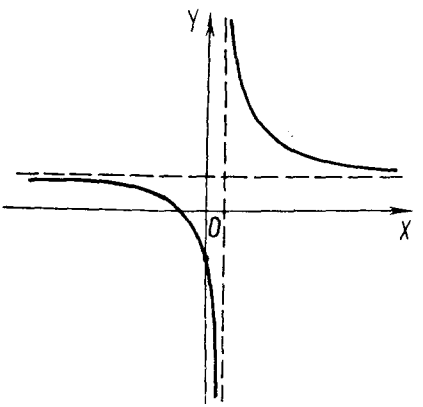
19- шакл.



20- шакл.

вишда боғлиқлигини кўрсатади. Бунда *k тескари пропорционаллик коэффициенти* деб айтилади.

Мисол. $y=\frac{2x+1}{x-1}$ функциянинг айний алмаштиришлардан сўнг ҳосил бўладиган $y-2=\frac{3}{x-1}$ кўринишдаги ифодаси шуни кўрсатадики, $Y=y-2$ ва $X=x-1$ миқдорлар бир-бирига тескари пропорционал бўлиб, $XY=3$ бажарилгани учун ёрдамчи OXY янги координаталар системасида $Y=\frac{3}{X}$ функция графиги чизилади. $k=3$ нинг мусбат эканлигини ҳисобга олсак, у ҳолда унинг графиги 21-шаклдагидек аввалги Oxy координаталар (системасида) текислигида ҳосил бўлади.



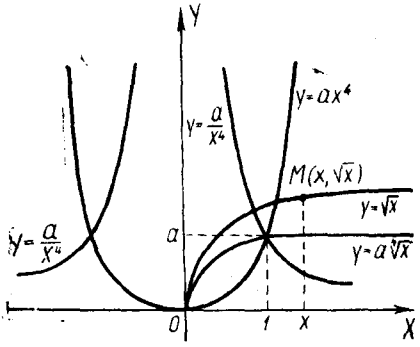
21- шакл.

Топшириқлар. 1. $y=\frac{-2x}{x+1}$; $y=\frac{6x+9}{x+2}$ функцияларнинг графигини ясанг.

2. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad \neq bc)$ функцияни $x+m=X$, $y+n=Y$ алмаштиришни бажариш билан $Y=\frac{k}{X}$ шаклга келтиринг, бунда m ва n лар a, b, c ва d лар орқали қандай ифодаланади?

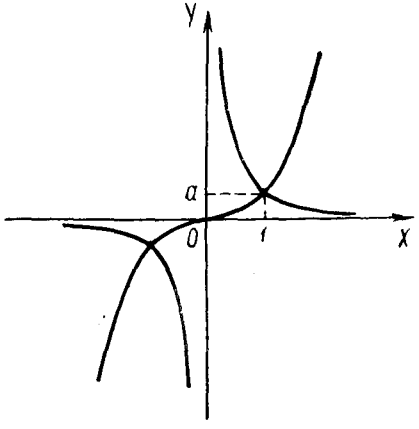
22. Даражали функциянинг таърифи, асосий хоссалари ва графиги. $y=ax^n$

($n \in \mathbf{Z}$) кўринишдаги функция *даража али функция* деб айтилади. $n = 2k - 1$; $n = 2k$; $n = 1 - 2k$; $n = -2k$ ($k \in \mathbf{N}$) ҳолларнинг ҳар бирида даражали функция турли хоссалар ва графикларга эга бўлганлиги учун уларнинг барча хоссаларини 56-бетдаги жадвалда баён этамиз, графиклари эса баъзи n лар учун 22, 23-шаклларда берилади.



22-шакл.

$f(x) = ax^n$ даражали функциянинг жадвалда кўрсатилган A оралиқда ўсувчи (камаювчи) лигини исботлаш ўқувчига топшириқ сифатида қолади. Бунда ихтиёрий $x_1 \in A$, $x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ лар учун $f(x_2) - f(x_1)$ айирманинг ишораси қуйидаги тенгликларга асосланилади.



23-шакл.

1) $n \in \mathbf{N}$ бўлганда $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2^n - x_1^n) = a(x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \ldots + x_1^{n-1})$,

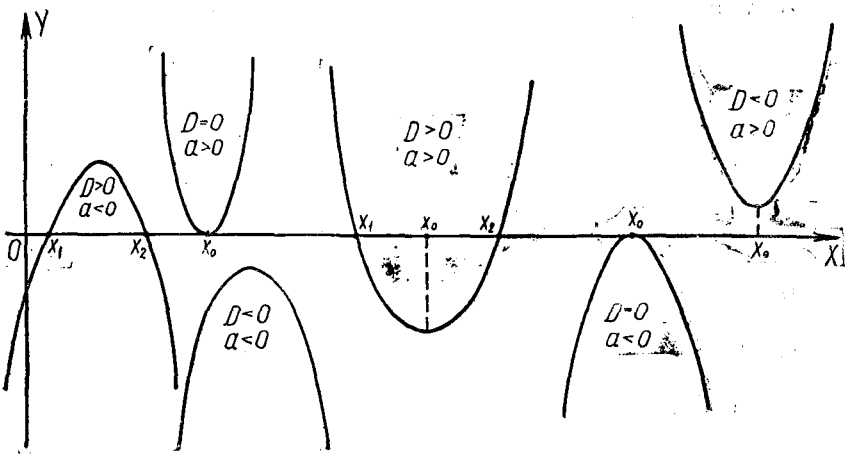
2) $n = -k$, $k \in \mathbf{N}$ бўлганда $f(x_2) - f(x_1) = -a\dfrac{x_2^k - x_1^k}{x_1^k\, x_2^k} =$

$$= -a\,\frac{(x_2 - x_1)(x_2^{k-1} + x_2^{k-2}\cdot x_1 + \ldots + x_1^{k-1})}{x_1^k \cdot x_2^k}.$$

23. Арифметик илдиз функцияси. Маълумки, $y = x^n \cdot (n \in \mathbf{N})$ даражали функция $[0; +\infty[$ соҳада ўсувчи. Демак, у шу соҳада тескариланувчи функция. *Арифметик илдиз функцияси* деб ҳар бир $n \in \mathbf{N}$. $n \geqslant 2$ лар учун $y = x^n$ функцияга $[0; +\infty[$ соҳада тескари бўлган функцияга айтилади ва $y = \sqrt[n]{x}$ деб белгиланади. Тескари функция хоссасига кўра бу функция ҳам $D(f) = [0; +\infty[$ да ўсувчи ва узлуксиздир. $E(f) = [0; +\infty[$ эканлиги маълум. У ўз аниқланиш соҳасида экстремумга эга эмас, чунки $y' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ ҳосила ҳеч қаерда 0 га айланмайди. Унинг графиги $y = x^n (n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 2)$ функция графигини $y = x$ га нисбатан симметрик акслантириб ҳосил этилади (22-шаклга

Даражали функция хоссалари

n, $k \in N$	Функция $f(x)=ax^n$	$A=D(f)$	$E(f)$	Функциянинг жуфт-тоқлиги	Функциянинг ишораси	Функциянинг ўсиши, камайиши	max, min
$2k-1$	ax^{2k-1}	R	R	тоқ, чунки $a(-x)^{2k-1}=-ax^{2k-1}$	1) $a>0$ бўлса, R_+ да мусбат, R_- да манфий 2) $a<0$ бўлса, R_+ да манфий, R_- да мусбат	1) $a>0$ бўлса, R да ўсувчи 2) $a<0$ бўлса, R да камаювчи	Экстремумлари йўқ
$2k$	ax^{2k}	R	1) $a>0$ бўлса, $[0;+\infty[$ 2) $a<0$ бўлса, $]-\infty;0]$	жуфт, чунки $a(-x)^{2k}=ax^{2k}$	1) $a>0$ бўлса, R да мусбат, 2) $a<0$ бўлса, R да манфий	1) $a>0$ бўлса, R_+ да ўсувчи, R_- да камаювчи 2) $a<0$ бўлса, R_+ да камаювчи R_- да ўсувчи,	1) $O(0;0)$ нуқтада min 2) $O(0;0)$ нуқтада max
$1-2k$	$\frac{a}{x^{2k-1}}$	$R\setminus\{0\}$	$R\setminus\{0\}$	тоқ, чунки $\frac{a}{(-x)^{2k-1}}=-\frac{a}{x^{2k-1}}$	1) $a>0$ бўлса, R_+ да мусбат R_- да манфий 2) $a<0$ бўлса, R_+ да манфий, R_- да мусбат	1) $a>0$ бўлса, R да камаювчи 2) $a<0$ бўлса, R да ўсувчи	экстремумлари йўқ
$-2k$	$\frac{a}{x^{2k}}$	$R\setminus\{0\}$	1) $a>0$ бўлса, $R_+=]0;+\infty[$ 2) $a<0$ бўлса, $R_-=]-\infty;0[$	жуфт, чунки $\frac{a}{(-x)^{2k}}=\frac{a}{x^{2k}}$	1) $a>0$ бўлса, $R\setminus\{0\}$ да мусбат, 2) $a<0$ бўлса $R\setminus\{0\}$ да манфий	1) $a>0$ бўлса, R_+ да камаювчи, R_- да ўсувчи 2) $a<0$ бўлса, R_+ да ўсувчи, R_- да камаювчи	экстремумлари йўқ



24- шакл.

қаранг) ва $n=2$ бўлганда график параболанинг, $n=3$ бўлганда кубик параболанинг бир тармоғидан ташкил топади.

24. $y=ax^2+bx+c$ функциянинг хоссалари ва графиги. $f(x)=ax^2+bx+c(a,\ b,\ c\in \mathbf{R},\ a\neq 0)$ кўринишдаги функцияни *квадратик функция* деб айтилади. Уни $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}$, $D=b^2-4ac$ шаклда ифодалаш мумкин. Ифодадаги D унинг *дискриминанти* дейилади. Бу функция графиги *парабола* деб аталувчи эгри чизиқдан иборат (24- шакл) ва у квадратик функциянинг ушбу хоссаларига кўра ясалади:

1) Функция барча ҳақиқий сонлар ўқида аниқланган.

2) Функция ҳар бир $x\in \mathbf{R}$ да узлуксиз ва ҳосилага эга: $f'(x)=2ax+b$.

3) Функция $x_0=-\frac{b}{2a}$ да биргина критик нуқтага эга. У ерда функция қиймати $y_0=-\frac{D}{4a}$ га тенг. $M(x_0,\ y_0)$ нуқта параболанинг *учи* деб айтилади.

4) Агар $a>0$ бўлса, $x_0=-\frac{b}{2a}$ нуқтада функция минимумга эга бўлиб, $]-\infty;\ x_0[$ да камаювчи, $]x_0;\ +\infty[$ да ўсувчидир.

5) Агар $a<0$ бўлса, $x_0=-\frac{b}{2a}$ нуқтада функция максимумга эга ва $]-\infty;\ x_0[$ да ўсувчи, $]x_0;\ +\infty[$ да камаювчидир.

6) Агар $a>0$ бўлса, $E(f)=\left]-\frac{D}{4a};\ +\infty\right[$ бўлади, аксинча, $a<0$ бўлса, у ҳолда $E(f)=\left]-\infty;\ -\frac{D}{4a}\right[$ дир.

7) $b\neq 0$ бўлса, квадратик функция тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас; $b=0$ бўлса, у жуфтдир.

8) Квадратик функция графиги ординаталар ўқини доимо $y(0)=c$ нуқтада кесиб ўтади, абсциссалар ўқини эса ҳамма вақт ҳам кесмайди, яъни

а) $D<0$ бўлса, кесиб ўтмайди;

б) $D=0$ бўлса, $x_0=-\frac{b}{2a}$ нуқтада унга уринади;

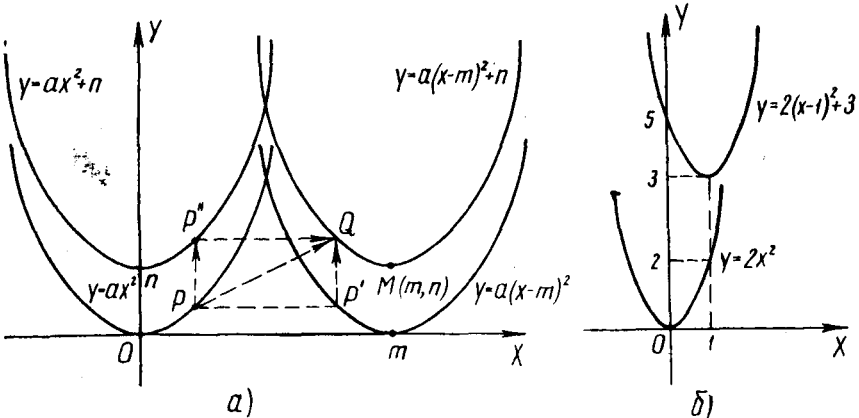
в) $D>0$ бўлса, $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ ларда кесиб ўтади.

9) Квадратик функцияни $y=x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)$ кўринишда ёзиш мумкин. Агар $x\to\infty$ да $\frac{b}{x}\to 0$, $\frac{c}{x^2}\to 0$ эканлигини эсласак, y функция қийматлари a нинг ишораси қандай бўлса, шу ишорали чексизликка интилади. Демак, парабола тармоқлари, $a>0$ бўлганда юқорига, $a<0$ бўлганда пастга йўналар экан.

Квадратик функциянинг графигини ясаш. Ушбу квадратик функциялар берилган бўлсин:

1) $y=ax^2$;
2) $y=ax^2+n$;
3) $y=a(x-m)^2$;
4) $y=a(x-m)^2+n$;
5) $y=ax^2+bnx+c$.

Буларнинг барчасининг графиги бир хил параболалардан иборат, чунки $y=ax^2$ нинг графиги маълум бўлса (25-*а* шакл), уни Oy ўқи бўйича n бирлик ($n>0$ бўлганда юқорига, $n<0$



25-*а, б* шакл.

бўлганда пастга) силжитиш билан $y = ax^2 + n$ нинг графиги ҳосил қилинади; $y = a(x - m)^2$ нинг графиги (1) функция графигини Ox ўқи бўйича m бирлик ($m > 0$ бўлса ўнгга, $m < 0$ бўлса чапга) силжитиш билан ҳосил қилинади; $y = a(x - m)^2 + n$ функция графиги $y = ax^2$ нинг графигини Ox ва Oy ўқлари бўйлаб мос равишда m ва n бирлик (уларнинг ишорасига қараб) силжитиш билан чизилади. Агар $y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$ эканлигини эсласак, $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{D}{4a}$ бўлгани учун учи $(m; n)$ нуқтада бўлган $y = ax^2$ нинг графиги (парабола) ясалса, 5) кўринишдаги квадратик функция графиги ҳосил бўлади.

Масалан, $y = 2x^2 - 4x + 5 = 2(x - 1)^2 + 3$ бўлгани учун унинг графигини ҳосил қилиш учун $y = 2x^2$ нинг графиги бўлган параболани параболанинг учини $O(0; 0)$ нуқтадан $M_0(1; 3)$ нуқтага ўтадиган қилиб $m = 1$ бирлик ўнгга ва $n = 3$ бирлик юқорига силжитиш кифоя (25-*б* шакл).

Топшириқ. $y = -2x^2 - 4x - 1$; $y = 3x^2 - 6x + 2$; $y = x^2 - 6x + 1$ ларнинг графигини кўрсатилган қоидалар асосида ясанг.

25. Квадрат тенглама илдизлари формулалари. Квадрат тенглама деб ушбу тенгламага айтилади:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0. \tag{1}$$

Маълумки,

$$(1) \Longleftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Longleftrightarrow \tag{2}$$

$$\Longleftrightarrow x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Агар $D = b^2 - 4ac$ деб белгиласак,

$$(1) \Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} = 0. \tag{3}$$

(3) тенгламадаги айрилувчи $\frac{D}{4a^2}$ ифоданинг ишораси фақат D га боғлиқ, чунки унинг махражи ҳар қандай $a \in \mathbf{R}(a \neq 0)$ учун мусбат.

1) $D < 0 \Longleftrightarrow \frac{D}{4a^2} < 0 \Longleftrightarrow -\frac{D}{4a^2} > 0.$

Демак, (3) даги тенгламанинг чап томони $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ ва $-\frac{D}{4a^2} > 0$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи икки ифода йиғиндисидан ташкил топганлиги учун бу тенглама, бинобарин, (1) тенглама ҳам илдизга эга эмас.

2) $D=0$ бўлсин. У ҳолда (3) тенглама $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ шаклни эгаллайди. Бу тенглама эса фақат $x_0=-\frac{b}{2a}$ кўринишдаги илдизга эга.

3) $D>0$ бўлсин. У ҳолда (3) тенгламада ушбу айний алмаштиришларни бажариш мумкин:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)=0.$$

Бу ерда ҳар бир қавсни алоҳида-алоҳида нолга тенглаб, (1) тенгламанинг иккита илдизини топамиз:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a};\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Кўпинча, бу илдизлар $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ шаклда умумлашган формула билан ёзилади.

1-хулоса. Квадрат тенгламанинг илдизини топиш формуласи $D=0$ учун ҳам ўринли.

2-хулоса. Квадрат тенгламани ечиш учун дискриминант ишораси текширилади: а) $D<0$ бўлса, унинг ечими йўқ; б) $D=0$ бўлса, унинг ягона ечими бор: $x_0=-\frac{b}{2a}$; в) $D>0$ бўлса, унинг иккита ечими бор: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

1-натижа. Квадрат тенгламанинг b ва c коэффициентларидан лоақал биттаси 0 бўлса, уни *чала квадрат тенглама* дейилади. Агар $D\geqslant 0$ бўлса, у ҳолда бундай квадрат тенгламалар илдизи ушбу формулалар билан топилади:

1) $ax^2+c=0 \Longrightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$;

2) $ax^2+bx=0 \Longrightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm b}{2a}$, яъни $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$.

2-натижа. Агар (2) тенгламада $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$ деб белгиланса, у ҳолда ҳосил бўлган $x^2+px+q=0$ тенглама *келтирилган квадрат тенглама* деб айтилади. Унинг илдизлари $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ формула бўйича аниқланади. Агар $p=2n(n\in\mathbf{Z})$ бўлса, у ҳолда:

$$x_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-q}.$$

3-натижа. Агар (1) тенгламада $b=2k(k\in\mathbf{R})$ бўлса, у ҳолда қуйидаги формуладан фойдаланиш мумкин:

$$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Топшириқлар. Тенгламаларни ечинг:

1) $3x^2+5x+8=0$;
2) $4x^2-5x+1=0$;
3) $x^2+3x-7=0$;
4) $-x^2=5x-14$;
5) $t-3=t^2-9$;
6) $4(y^2-1)=y+1$;
7) $(x+5)^2-30=6x$;
8) $(x-4)^2+9=2x$;
9) $y^2+8(y-1)=1$;
10) $\frac{8}{3}x^2+\frac{5}{3}x-1=0$;
11) $5x^2=9x+2$;
12) $4x^2+x-33=0$;
13) $4x^2+7x=0$;
14) $4x^2-16=0$;
15) $25p^2=24p+1$;
16) $4(x^2+x)=4x+1$;
17) $2(x^2-1)+12(x+1)^2=0$;
18) $3(x^2-4)+2(x+2)=0$.

26. Виет теоремаси. *Агар $ax^2+bx+c=0$ квадрат тенгламанинг илдизлари x_1 ва x_2 бўлса, у ҳолда қуйидаги ўринлидир:*

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}; \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, $x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ ва $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ сонлар берилган квадрат тенгламанинг илдизлари бўлса, у ҳолда

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a};$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{b^2-D}{4a^2}=\frac{c}{a}.\blacktriangleright$$

Натижа. *$x^2+px+q=0$ келтирилган квадрат тенглама илдизларининг йиғиндиси $-p$ га, кўпайтмаси q га тенг:* $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$

Тескари теорема. *Ихтиёрий икки x_1 ва x_2 сон йиғиндиси $-p$ га, кўпайтмаси q га тенг бўлса, улар $x^2+px+q=0$ тенгламанинг илдизларидир.*

Исбот. x_1 ва x_2 сонларнинг йиғиндиси $-p$ бўлганлигидан

$$x_1+x_2=-p \Longleftrightarrow x_2=-p-x_1$$

бўлади.

Бундан

$$x_1x_2=q \Longleftrightarrow x_1(-p-x_1)=q \Longleftrightarrow x_1^2+px_1+q=0.$$

Худди шу каби

$$x_2^2+px_2+q=0$$

сонли тенглик ҳам исботланади.

Демак, x_1 ва x_2 лар $x^2+px+q=0$ квадрат тенглама илдизларидир. ▶

Натижа. Агар $x^2+px+q=0$ квадрат тенглама x_1 ва x_2 илдизларга эга бўлса, у ҳолда қуйидаги тасдиқлар ўринлидир:

а) $q>0,\ p>0 \Longrightarrow$ унинг иккала илдизи манфий ишоралидир;

б) $q>0,\ p<0 \Longrightarrow$ унинг иккала илдизи мусбат ишоралидир;

в) $q<0,\ p>0 \Longrightarrow$ унинг илдизлари қарама-қарши ишоралидир, манфий ишорали илдизи бу вақтда модули жиҳатидан мусбат илдиздан катта бўлади.

г) $q<0,\ p<0 \Longrightarrow$ унинг илдизлари қарама-қарши ишорали, манфий ишорали илдиз модули жиҳатидан мусбат илдиздан кичик бўлади.

Топшириқ. Ушбу квадрат тенглама илдизларини (ишорасини) уни ечмасдан топинг: а) $x^2+x-2=0$, б) $x^2-3x-10=0$; в) $x^2+7x+10=0$; г) $x^2-9x+14=0$; д) $x^2-8x+15=0$, е) $x^2+x-90=0$; ж) $x^2-x-90=0$.

27. Квадрат учҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратиш.

Теорема. *Агар ax^2+bx+c квадрат учҳаднинг дискриминанти манфий булмаса, у ҳолда*

$$ax^2+bx+c=0 \Longleftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)$$

ўринлидир.

Исбот. $a(x-x_1)(x-x_2)=a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)=$ (Виет теоремасига кўра) $=a\left(x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}\right)=ax^2+bx+c.$

Аксинча, $D>0$ бўлганда

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right)=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right).$$

Бунда $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ эканлигини назарга олсак, у ҳолда

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

бўлади.

Топшириқ. Ушбу учҳадларни кўпайтувчиларга ажратинг:

а) x^2+5x+6; б) $7x^2+8x-15$; в) $x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}$;
г) $x^2-3\sqrt{2}x+4$; д) $x+\sqrt{x}-2$; е) $2x^4+x^2-3$;
ж) $x^2-10x+9$; з) $(x-1)^2+5x-7$; и) $(2x-1)^2+6x-7$.

28. Кўрсаткичли функция, унинг хоссалари ва графиги.

Таъриф. $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ кўринишдаги функцияга *кўрсаткичли функция* деб аталади.

Хоссалари. 1) Кўрсаткичли функциянинг аниқланиш соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат: $D(y)=\mathbf{R}$.

2) Кўрсаткичли функциянинг барча қийматлари соҳаси $]0; +\infty[$ дан иборат: $E(y) = \mathbf{R}_+$.

3) $a>1$ бўлганда a^x функция аниқланиш соҳасида ўсувчи, $0 < a < 1$ бўлганда камаювчидир.

Ҳақиқатан ҳам, $y' = a^x \ln a$ эканлигидан y' нинг ишораси $\ln a$ нинг ишорасига боғлиқ. $a > 1$ бўлганда $\ln a > 0 \Longrightarrow y' > 0$; $0 < a < 1$ бўлганда эса $\ln a < 0 \Longrightarrow y' < 0$. Демак, $y = a^x$ функция $a > 1$ бўлганда ўсувчи, $0 < a < 1$ бўлганда эса камаювчи (А. 51 п. 117-бетга қаранг).

4) $a > 1$ бўлсин. У ҳолда $x > 0$ бўлганда $a^x > 1$, $x < 0$ бўлганда $a^x < 1$ бўлади; $0 < a < 1$ бўлсин. У ҳолда $x > 0$ бўлганда $a^x < 1$, $x < 0$ бўлганда $a^x > 1$ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, x рационал сон $x = \frac{m}{n}$ кўринишда бўлса, у ҳолда $a^x = \sqrt[n]{a^m}$ бўлади, бундан $a > 1$ бўлганда $a^m > 1$ бўлиши келиб чиқади ва, демак, $\sqrt[n]{a^m}$ ҳам 1 дан каттадир. Аксинча, x иррационал сон бўлса, шундай α_n ва β_n рационал ўнли каср сонлар кетма-кетликлари топиладики, $\alpha_n < x < \beta_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\beta_n - \alpha_n) = 0$ бажарилади. a^x ўсувчи бўлганлиги учун $a^{\alpha_n} < a^x < a^{\beta_n}$ ўринлидир. Бунда $a^{\alpha_n} > 1$ бўлганлиги учун $a^x > 1$ тенгсизлик ўринлидир.

$0 < a < 1$ ҳол ҳам шу каби исботланади.

1-натижа. $a^0 = 1 (a \in \mathbf{R}_+)$ *эканлиги таърифга биноан деб қаралади.*

2-натижа. $a^x = a^z (a \in \mathbf{R}_+,\ a \neq 1)$ *бўлса, у ҳолда* $x = z$ *тенглик ўринлидир: аксинча* $x \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{R}$, $x < z$ *эканлигидан қуйидаги тасдиқлар келиб чиқади:*

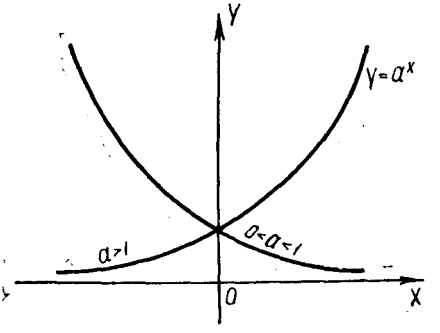
а) $a > 1$ *бўлса,* $a^x < a^z$ *бўлади;*

б) $0 < a < 1$ *бўлса,* $a^x > a^z$ *бўлади.*

3-натижа. $a > 1$ *бўлса, у ҳолда* $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, *яъни* $x \to +\infty$ *да* a^x *чексиз катта миқдордир;* $0 < a < 1$ *бўлса, у ҳолда* $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ *дир, яъни* $x \to +\infty$ *да* a^x *миқдор чексиз кичик миқдордир.*

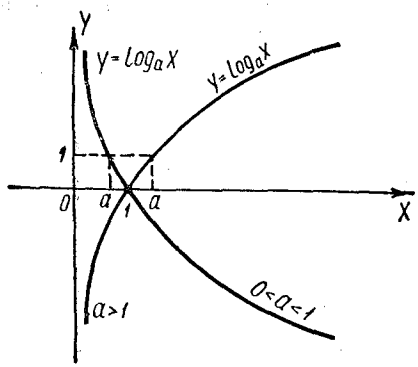
Бу функциянинг графиги 26-шаклда тасвирланган.

Топшириқ. $y = 2^x$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = (\sqrt{2})^x$; $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$; $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ функцияларнинг графигини чизинг.



26-шакл.

29. Логарифмик функция, унинг хоссалари ва графиги.



27- шакл.

Маълумки, $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$ кўрсаткичли функция $D(y)=\mathbf{R}$ аниқланиш соҳасида ўсувчи ёки камаювчидир. Демак, бундай хоссали функция тескариланувчидир.

Таъриф. $y=a^x$ кўрсаткичли функцияга тескари бўлган функция a асосли *логарифмик функция* дейилади ва $y=\log_a x$ кўринишда ёзилади.

Маълумки, $y=\log_a x \Longleftrightarrow a^y=x$ бўлиб, бундан

$$a^{\log_a x}=x.$$

Хоссалари. 1) Бу функциянинг аниқланиш соҳаси барча мусбат сонлар тўпламидан иборат: $D(\log_a)=\mathbf{R}_+$.

2) Бу функциянинг қийматлари соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат: $E(\log_a)=\mathbf{R}$.

3) $\log_a x$ функция $a>1$ бўлганда ўсувчи, $0<a<1$ бўлганда эса камаювчидир (А. 51п. 118- бет).

$y'=\frac{1}{x\ln a}$ ҳосила $y=\log_a x$ функциянинг ўсиш ва камайиш хоссалари ҳақида аниқ маълумот беради: $x>0$ бўлгани учун y' нинг ишораси фақат $\ln a$ нинг ишорасига боғлиқ. $a>1$ бўлса, $y'>0$ ва $0<a<1$ бўлса, $y'<0$ бўлади. Демак, $y=\log_a x$ функция $a>1$ бўлганда ўсувчи, $0<a<1$ бўлганда камаювчидир.

4) $a>1$ бўлсин. $x>1$ бўлганда $\log_a x>0$ тенгсизлик, $0<x<1$ бўлганда эса $\log_a x<0$ тенгсизлик ўринлидир (яъни $x>1$ бўлса, $\log_a x$ функциянинг графиги Ox ўқдан юқорида, $0<x<1$ бўлса, аксинча, Ox ўқ остидадир).

5) $0<a<1$ бўлсин. $x>1$ бўлганда $\log_a x<0$ тенгсизлик, $0<x<1$ бўлганда эса $\log_a x>0$ тенгсизлик ўринлидир (яъни $x>1$ бўлса, $\log_a x$ функциянинг графиги Ox ўқ остида, $0<x<1$ бўлса, аксинча Ox ўқдан юқорида жойлашади).

6) Агар $a>1$ бўлса, $x\to 0$ да (ёки $0<a<1$ бўлса, $x\to+\infty$ да) $\log_a x\to-\infty$ ўринлидир, яъни $\log_a x$ функция манфий чексизликкача камаяди (модули чексиз катта миқдордир). Аксинча, $0<a<1$ бўлса, $x\to 0$ да (ёки $a>1$ бўлса, $x\to+\infty$ да) $\log_a x\to+\infty$ ўринлидир, яъни у мусбат чексиз катта миқдордир (27- шакл).

1- натижа. 1 *нинг ҳар қандай асосга кўра логарифми нолга тенг*: $\log_a 1=0$.

2- натижа. *Агар* $a>1$ *бўлса, у ҳолда* $\log_a x_1<\log_a x_2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x_1 < x_2$, *агар* $0 < a < 1$ *бўлса. у ҳолда* $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow x_1 > x_2$ *бўлади.*

Изоҳ. Агар $a = 10$ бўлса, $\log_a x$ функция *ўнли логарифм* дейилади ва $\lg x$ каби ёзилади; $a = e$ бўлса, у ҳолда *натурал логарифм* ҳосил бўлади ва $\ln x$ деб ёзилади (e сони ҳақида А. 51 п. 117-бетга қаранг).

Топшириқлар. 1) $y = \lg x$, $y = \ln x$ функциялар графигини ясанг.
2) $y = \lg x^2$ функциянинг хоссаларини текширинг.
3) $\log_a x < \log_a x^2$ тенгсизлиги ечинг.

30. Бир хил асосли логарифмлар устида амаллар.

1-теорема. *Икки мусбат сон кўпайтмасининг бирор асосга кўра логарифми кўпайтувчиларнинг шу асосга кўра логарифмлари йиғиндисига тенг:*

$$\log_a (NQ) = \log_a N + \log_a Q, \qquad (1)$$

2-теорема. *Икки мусбат сон бўлинмасининг бирор асосга кўра логарифми шу асосга кўра биринчи сон логарифмидан иккинчи сон логарифмини айирилганига тенг:*

$$\log_a \left(\frac{N}{Q}\right) = \log_a N - \log_a Q. \qquad (2)$$

Исбот. Агар $x_1 = \log_a N$, $x_2 = \log_a Q$ деб белгиласак, у ҳолда $N = a^{x_1}$, $Q = a^{x_2}$ деб ёзиш мумкин. Даражанинг хоссасига кўра $NQ = a^{x_1 + x_2}$. Бу ердан: $x_1 + x_2 = \log_a (NQ)$. Сўнгра x_1 ва x_2 нинг ўрнига мос равишда $\log_a N$ ва $\log_a Q$ ни қўйсак, теореманинг исботи келиб чиқади.

2-теорема ҳам шу каби исботланади. ▶

1-натижа. $\frac{1}{N}$ $(N > 0)$ *соннинг бирор* a *асосга кўра логарифми манфий ишора билан олинган* $\log_a N$ *га тенг:* $\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$.

3-теорема. *Мусбат сон даражасининг логарифми шу даража кўрсаткичининг даража асоси логарифми билан кўпайтмасига тенг:*

$$\log_a N^\alpha = \alpha \log_a N, \ N > 0. \qquad (3)$$

Исботи. $a^{\log_a N^\alpha} = N^\alpha$, $a^{\alpha \log_a N} = (a^{\log_a N})^\alpha = N^\alpha$ бўлгани учун $a^{\log_a N^\alpha} = a^{\alpha \log_a N}$ ўринлидир. a^x функциянинг $a^x = a^z \Longleftrightarrow x = z$ хоссасига асосан $\log_a N^\alpha = \alpha \log_a N$ тенглик ўринлидир. ▶

2-натижа. *Мусбат сон илдизининг логарифми илдиз остидаги сон логарифмини илдиз кўрсаткичига бўлинганига тенг:* $\log_a \sqrt[n]{N} = \frac{1}{n} \log_a N$.

4-теорема. N *соннинг бирор* a *асосли логарифми* N *соннинг бошқа мусбат* c $(c \neq 1)$ *асосли логарифмини* a *соннинг* c *асосли логарифмига бўлинганига тенг:*

$$\log_a N = \frac{\log_c N}{\log_c a}. \qquad (4)$$

Исботи. $x = \log_a N$ бўлса, $N = a^x$ дир. Унинг иккала томонини c асосга кўра логарифмлаймиз: $\log_c N = x \log a$. Бу ердан (4) формула келиб чиқади ▶

3-натижа. *Агар $c = N$ бўлса, ушбу тенглик ўринлидир:*

$$\log_a N = \frac{1}{\log_N a} \qquad (N \neq 1).$$

4-натижа. *Агар логарифм даражаси билан берилса:* $\log_a^k N^\alpha (N>0)$, *у ҳолда* $\log_a^k N^\alpha = \alpha^k \log_a^k N$ *тенглик ўринлидир.*

Топшириқ. Ушбу тенгликларни исботланг:

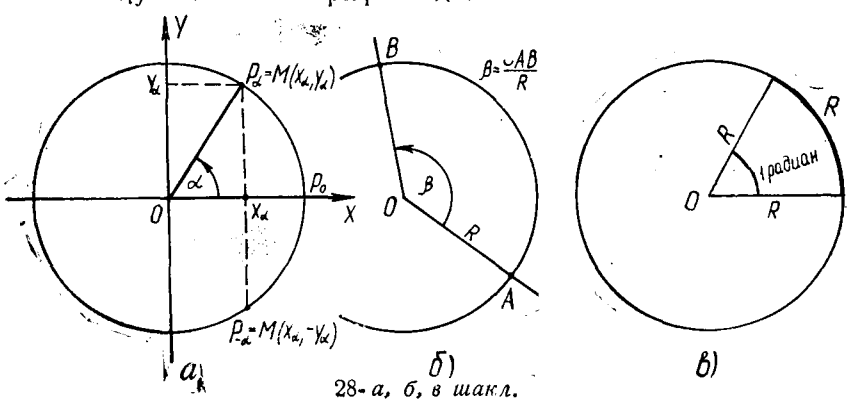
1) $\log_a N_1 N_2 \ldots N_k = \log_a N_1 + \log_a N_2 + \ldots + \log_a N_k$, бу ерда $N_1 > 0 \quad N_2 > 0, \ldots, N_k > 0$.

2) $\log_{a^k} N^k = \log_{|a|} |N|$, бунда k жуфт сон.

3) $\log_a N^k = k \log_a |N|$, бунда k жуфт сон.

4) $\log_a b \cdot \log_c a \cdot \log_b c = 1$.

31. Бурчак. Сон аргументнинг синуси, косинуси, тангенси ва котангенси. Маркази координаталар бошида бўлган, радиуси 1 га тенг айлана берилган бўлсин (28-*а* шакл). Координата боши атрофида текисликни соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда бирор бурчакка буриш $P_0 = M(1; 0)$ нуқтани $P_\alpha = M(x_\alpha; y_\alpha)$ нуқтага ўтказсин: $R_0^\alpha(P_0) = P_\alpha$. Бу *мусбат* йўналишли буриш ҳисобланади ва R^α акслантириш дейилади. Соат стрелкаси ҳаракати бўйлаб α бурчакка буриш *манфий* бурчакка буриш ҳисобланади ва (R^α га тескари бўлган) $R^{-\alpha}$ акслантириш дейилади. Бу ҳолда α ўзгариши билан P_α нуқтанинг координаталари x_α ва y_α лар ҳам турлича ўзгаради. Шунинг учун α билан x_α ҳамда α билан y_α лар орасидаги муносабат қуйидагича таърифланади.



28-*а, б, в* шакл.

1-таъриф. $P_0=M(1;\ 0)$ нуқтани R^{α} буриш билан ҳосил қилинган $P_\alpha=M(x_\alpha;\ y_\alpha)$ нуқтанинг абсциссаси α бурчакнинг *косинуси*, ординатаси эса унинг *синуси* деб айтилади ва мос равишда $x_\alpha=\cos\alpha$, $y_\alpha=\sin\alpha$ деб белгиланади.

1-натижа. *Ҳар қандай α учун* $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$; $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ *тенгликлар ўринлидир.*

Ҳақиқатан ҳам, $R^{-\alpha}(P_0)=P_{-\alpha}$ нуқтанинг координаталари $M(x_{-\alpha};\ y_{-\alpha})$ бўлгани учун ва $P_{-\alpha}$ нуқта P_α нуқтага абсциссалар ўқига нисбатан симметрик жойлашгани учун $x_{-\alpha}=x_\alpha$; $y_{-\alpha}=-y_\alpha$ бўлишидан $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$; $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ тенглик келиб чиқади.

2-натижа. *Ҳар қандай α учун*

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \qquad (1)$$

тенглик ўринлидир.

Ҳақиқатан ҳам, P_α нуқта бирлик айлана устида бўлгани учун унинг координаталари Пифагор теоремасига кўра $x_\alpha^2+y_\alpha^2=1$ тенгликни қаноатлантиради.

2-таъриф. α бурчакнинг *тангенси* деб бу бурчак синусининг унинг косинусига нисбатига айтилади ва $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ деб белгиланади, аксинча α бурчак косинусининг унинг синусига нисбати α бурчакнинг *котангенси* дейилади ва $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ деб белгиланади.

3-натижа. *Қуйидаги тенгликлар ўринлидир*:

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha;\qquad \operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

4-натижа. *Ҳар бир α ($\alpha\neq 180°n$, $\alpha\neq 90°+180°n$, $n\in\mathbf{Z}$) учун ушбу*

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1 \qquad (2)$$

тенглик бажарилади.

Энди кўпгина ҳолларда қулайликлар яратадиган бурчакнинг радиан ўлчовига тўхталамиз. AOB — берилган бурчак бўлсин, маркази O нуқтада бўлган R радиусли айлана бу бурчак томонларини A ва B нуқталарда кесиб ўтсин (28-*б*, *в* шакл). У ҳолда айлана AB ёйи узунлигининг радиусга нисбатига тенг сон бурчакнинг *радиан ўлчови* деб айтилади: $\beta=\frac{\smile AB}{R}$ радиан. Бурчакнинг радиан ўлчови бирлиги қилиб 1 *радиан* олинади. Узунлиги радиусга тенг бўлган айлана ёйига тиралувчи марказий бурчак 1 радиан деб ҳисобланади. 0,1 градус аниқликда 1 радиан $\frac{360°}{2\pi}\approx 57{,}3°$ дир. Шундай қилиб,

$30° = \frac{\pi}{6}$ радиан, $45° = \frac{\pi}{4}$ радиан, $90° = \frac{\pi}{2}$ радиан, $180° = \pi$ радиан ва ҳоказо.

Бурчакнинг радиан ўлчовига ўтишда β радиан $= \frac{\pi \cdot \beta°}{180°}$ формуладан фойдаланилади. Кўпинча, радиан сўзи ёзилмайди (ёки қисқача рад. деб ёзилади), аммо албатта радиан деб ўқилади. Агар 360° дан катта $\alpha°$ бурчак берилса, $\alpha° = 360°n + \beta$ $(0° < \beta° < 360°,\ n \in \mathbf{Z})$ ни $\alpha_{рад} = 2\pi n + \beta_{рад}$ билан алмаштириб ёзилади. Одатда, α аргумент $\alpha = a \in \mathbf{R}$ сон билан берилади; масалан, $\sin 2$, $\cos 10$, $\operatorname{tg}\frac{50}{3}$. Бу ҳолларда a радиан бурчакнинг тригонометрик ифодаси назарда тутилади.

Бундан кейин кўп ҳолларда сон аргументнинг тригонометрик ифодаси билан иш кўрамиз.

Топшириқлар. 1. 40°, 600°, 1330°, 1280° бурчакларнинг радиан ўлчовини топинг.

2. $\alpha = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\beta = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $\gamma = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $\delta = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ $(n \in Z)$ бурчакларга буриш натижасида $P_0 = M(1;\ 0)$ нуқта P_α; P_β; P_γ; P_δ нуқталарга ўтади. Шу нуқталарни ясанг.

3. 29-*а* шаклда P_0 нуқта P_α; P_β; P_γ; P_δ нуқталарга аксланган. Унда α I чоракда, β II чоракда, γ III чоракда, δ IV чоракда жойлашган. $N = (Oy) \cap (QL)$. Ушбу тасдиқларни исботланг:

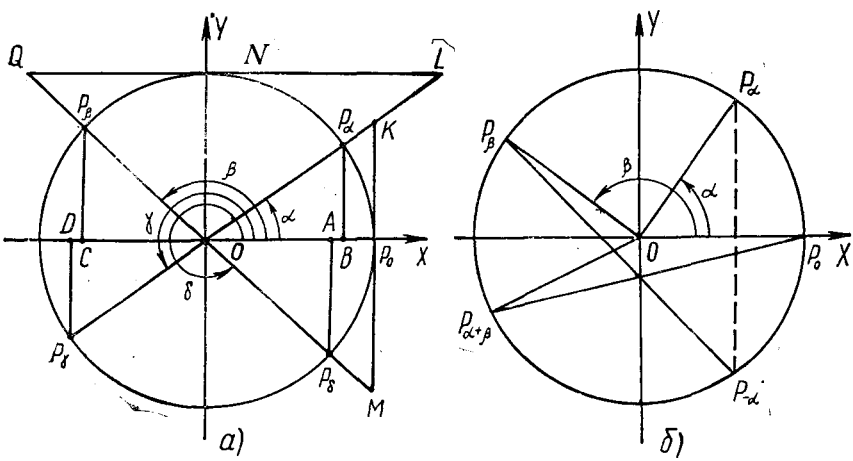
а) $|P_0K| = \operatorname{tg}\alpha$; $|NL| = \operatorname{ctg}\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha > 0$; $\operatorname{ctg}\alpha > 0$;

б) $|P_0M| = -\operatorname{tg}\beta$; $|NQ| = -\operatorname{ctg}\beta$; $\operatorname{tg}\beta < 0$; $\operatorname{ctg}\beta < 0$;

в) $|P_0K| = \operatorname{tg}\gamma$; $|NL| = \operatorname{ctg}\gamma$; $\operatorname{tg}\gamma > 0$; $\operatorname{ctg}\gamma > 0$;

г) $|P_0M| = -\operatorname{tg}\delta$; $|NQ| = -\operatorname{ctg}\delta$; $\operatorname{tg}\delta < 0$; $\operatorname{ctg}\delta < 0$.

4. ABC учбурчакда $\angle C = \frac{\pi}{2}$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ эканлиги маълум, қуйидаги муносабатларни исботланг:



29-*а*, *б* шакл.

а) $\cos\alpha = \frac{|AC|}{|AB|}$; б) $\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AB|}$; в) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{|BC|}{|AC|}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{|AC|}{|BC|}$;
д) $\cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{|BC|}{|AB|}$; е) $\sin\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{|AC|}{|AB|}$; ж) $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{|AC|}{|BC|}$.

5. Ушбу

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};\ 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (3)$$

тенгликларнинг ўринлилигини исботланг.

6. Координаталар текислиги чораклари да $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ ларнинг ҳар бирининг ишораси қуйидаги жадвалдагидек эканлигини текширинг:

Чорак	α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
I	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	+	+	+	+
II	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	−	+	−	−
III	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	−	−	+	+
IV	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$	+	−	−	−

7. α нинг турли қийматларида $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ифодалар қийматлари қуйидаги жадвалдагидек эканлигини 29-*а* шаклдан фойдаланиб исботланг:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0

32. Икки аргумент йиғиндиси ва айирмасининг косинуси, синуси, тангенси. R^α буриш бирлик айлана устидаги $P_{-\alpha}$ ва P_β нуқталарни мос равишда P_0 ва $P_{\alpha+\beta}$ нуқталарга ўтказсин (29-*б* шакл). Бунда $R^\alpha[P_{-\alpha}P_\beta] = [P_0P_{\alpha+\beta}]$ бўлади. Демак, $|P_{-\alpha}P_\beta| = |P_0P_{\alpha+\beta}|$. Иккита $P_{-\alpha} = M(\cos\alpha;\ -\sin\alpha)$ ва $P_\beta = M(\cos\beta;$

$\sin\beta$) нуқталар орасидаги масофа

$$d_1 = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2}$$

га тенг. Шунингдек, $P_0 = M(1;\ 0)$ дан $P_{\alpha+\beta} = M(\cos(\alpha+\beta);\ \sin(\alpha+\beta))$ гача бўлган масофа $d_2 = \sqrt{(1-(\cos(\alpha+\beta))^2 + \sin^2(\alpha+\beta)}$ га тенг. $d_1 = d_2$ бўлгани учун $\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = 1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta)$; $2 + 2\sin\alpha\sin\beta - 2\cos\alpha\cos\beta = 2 - 2\cos(\alpha+\beta)$ алмаштиришлар ёрдамида

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (1)$$

тенгликни келтириб чиқарамиз. Бу — икки аргумент йиғиндисининг косинуси формуласидир.

1- натижа. *Агар* β *ўрнига* $(-\beta)$ *ни қўйиб,* $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ *эканлигини ҳисобга олсак, икки аргумент айирмаси косинусининг формуласи ҳосил бўлади:*

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Топшириқ. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$ ва $\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right)$ ларнинг ҳар бирини (2) формула бўйича ҳисоблаб,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \sin\beta;\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \cos\beta \qquad (3)$$

тенгликларни ҳисобланг.

2- натижа. *Икки аргумент йиғиндиси ва айирмасининг синуси*

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \qquad (4)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \qquad (5)$$

кўринишда ифодаланиб, уларнинг тўғрилиги (3) ва (2) лардан фойдаланиб қуйидагича исботланади:

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \beta\right)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta =$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Демак, $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, бунда β ни $-\beta$ га алмаштириш билан $\cos\beta = \cos(-\beta)$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ эканлигини назарга олиб (5) формула ҳам ҳисобланади.

3- натижа. *Икки аргумент йиғиндиси ва айирмасининг тангенси* $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$; $\beta = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\alpha \pm \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$ $(k,\ n,\ m \in \mathbf{Z})$ *бўлганда*

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \tag{6}$$

кўринишда ифодаланади.

Исбот: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$. Бу ерда $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$ деб, сўнгги каср сурати ва махражини унга бўлсак

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

экани исботланади. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ формулани исботлаш ўқувчиларга қолдирилади. ▶

33. Иккиланган ва ярим аргументнинг тригонометрик формулалари. Ушбу

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

формулаларда $\alpha=\beta$ десак, у ҳолда

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha, \tag{1}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \tag{2}$$

формулалар ҳосил бўлади. Бу иккиланган аргументнинг косинуси ва синусидир.

Худди шунингдек, иккиланган аргумент тангенсини ушбу

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

дан $\alpha=\beta$ деб, $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ ни $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in\mathbf{Z}$ бўлганда ёза оламиз.

Натижа. (1) формуладан $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ ни ҳисобга олиб

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \tag{3}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \tag{4}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \tag{5}$$

ларни ёза оламиз. Бу формулаларда α ни $\frac{\alpha}{2}$ га алмаштириб,

ярим аргументнинг тригонометрик формулаларини ҳосил қиламиз:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad (6)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \qquad (7)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \qquad (8)$$

Бу ерда $\frac{\alpha}{2}$ бурчак қайси чоракка тегишли бўлса, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ функциялар ишораси ўша чоракда қанақа бўлишига қараб ҳар бир радикал олдидаги плюс ёки минус ишораларидан моси танланади.

Топшириқлар. 1. Ҳисобланг:

а) $\sin 25^\circ \cdot \cos 65^\circ - \cos 25^\circ \sin 65^\circ$; б) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, бунда α I чорак бурчаги, β III чорак бурчаги (мос равишда I ва II чорак бурчаклари) бўлганда $\cos(\alpha+\beta)$ ва $\sin(\alpha+\beta)$ ни топинг; в) $\cos\frac{13}{12}\pi$ ва $\sin\frac{13}{12}\pi$ ларни ҳисобланг.

2. Исботланг: $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$.

3. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{4}$ ва $\operatorname{tg}\beta = 3$ бўлганда $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ ва $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ларни топинг.

4. Иккиланган ва ярим аргументнинг тригонометрик формулаларини қўлланг:

а) $\sin\alpha > 0$ ва $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ бўлганда $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ ни топинг; б) α нинг қандай қийматларида $\sin 2\alpha < 2\sin\alpha$ ва $\sin 2\alpha < 2\cos\alpha$ тенгсизлик бажарилади? в) Жадвалсиз $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$, $\operatorname{tg} 15^\circ$ ларни ҳисобланг. г) $\cos = \frac{4}{5}$ ва $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ бўлганда $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ларни топинг.

34. Йиғиндини кўпайтмага келтириш формулалари. Аввало қўшиш формулаларини ёзайлик:

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha, & (1)\\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha, & (2)\\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, & (3)\\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. & (4)\end{cases}$$

Агар $\alpha+\beta = x$, $\alpha-\beta = y$ десак, $\alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2}$ ларга эга бўламиз. (1) ва (2) формулаларни ҳадма-ҳад қўшсак:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta.$$

Энди α ва β лар ўрнига уларнинг x ва y лар орқали ифодасини қўйсак, ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}. \qquad (5)$$

Худди шу сингари (1) дан (2) ни ҳадма-ҳад айириб, сўнг тегишли алмаштиришларни бажарсак:

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} \qquad (6)$$

ҳосил бўлади.

Агар (3) ва (4) тенгликларни бир гал ўзаро ҳадма-ҳад қўшиб, иккинчи гал (3) дан (4) ни айириб, ёзиб кўрсатилган алмаштиришларни бажарсак, у ҳолда

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad (7)$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2} \qquad (8)$$

келиб чиқади. ▶

Натижа. $x=0$ десак, (7) ва (8) дан ушбу формулалар келиб чиқади:

$$1+\cos y = 2\cos^2\frac{y}{2}; \quad 1-\cos y = 2\sin^2\frac{y}{2}. \qquad (9)$$

Топшириқ. Ушбу формулаларни исботланг:

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}. \qquad (10)$$

35. Тригонометрик функцияларнинг хоссалари ва графиги. Сон аргументининг синуси, косинуси, тангенси ва котангенси умуман *тригонометрик функциялар* дейилиб, улар мос равишда

$$y=\sin x, \quad y=\cos x, \quad y=\operatorname{tg} x, \quad y=\operatorname{ctg} x$$

кўринишда ёзилади.

1) а) $\sin x$ ва $\cos x$ функцияларининг аниқланиш соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат:

$$D(\sin)=D(\cos)=\mathbf{R}.$$

б) $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ функциясининг аниқланиш соҳаси:

$$D(\operatorname{tg})=\left\{x\in\mathbf{R} \mid x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

в) $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ нинг аниқланиш соҳаси:

$$D(\operatorname{ctg})=\{x\in\mathbf{R} \mid x\neq\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

2) Тригонометрик функцияларнинг таърифидан $|\sin x| \leqslant 1$ ва $|\cos x| \leqslant 1$ эканлиги, булардан $\sin x$ ҳамда $\cos x$ функциялар қийматлари соҳаси

$$E(\sin) = E(\cos) = [-1;\ 1]$$

дан $\operatorname{tg} x$ ва $\operatorname{ctg} x$ ларники эса:

$$E(\operatorname{tg}) = E(\operatorname{ctg}) = \mathbf{R},$$

яъни барча ҳақиқий сонлар тўпламидан иборатлиги маълум бўлади.

3) Тригонометрик функцияларнинг даврийлиги ва келтириш формулалари.

Теорема. *Синус ва косинус 2π, тангенс ва котангенс π даврли функциялардир.*

Теореманинг биринчи ярми исботланади.

Исбот. Ҳар қандай $\alpha \in \mathbf{R}$ учун P_α нуқта $R^{2\pi n}$ $(n \in \mathbf{Z})$ буриш орқали $P_{\alpha+2\pi n}$ нуқта билан устма-уст тушади, демак:

$$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha, \quad n \in \mathbf{Z}, \tag{1}$$

$$\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha, \quad n \in \mathbf{Z} \tag{2}$$

ўринлидир. Бу, функцияларнинг даври $2\pi n$ эканлигини билдиради (А.18 п. 49-бетга қаранг). Агар синуснинг энг кичик мусбат даврини T билан белгиласак:

$$\sin(\alpha + T) = \sin\alpha \tag{3}$$

бўлиб, $\alpha = 0$ да $\sin T = 0$ га эга бўламиз. Бу тенгламанинг энг кичик иккита мусбат ечими $T_1 = \pi$, $T_2 = 2\pi$ дан иборат. Лекин $T_1 = \pi$ да (3) ўринли бўлмаганлиги учун $T_2 = 2\pi$ синуснинг энг кичик мусбат даври эканлиги аниқланади. Худди шу каби, косинус ҳам 2π даврли эканлиги исботланади. ▶

Ҳар қандай $\alpha \in \mathbf{R}$ $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}\right)$ учун P_α нуқта P_β $(\beta = \alpha + \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z})$ нуқталар билан координата бошига нисбатан симметрик. Демак, ушбу нисбатлар мавжуд ва ўзаро тенг:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x_\alpha}{y_\alpha} = \frac{x_\beta}{y_\beta} = \operatorname{tg}\beta,$$

бундан

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}\alpha, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{4}$$

Худди шу сингари

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha, \ n \in \mathbf{Z} \tag{5}$$

эканлигини кўрсатиш мумкин.

Топшириқ. Тангенс ва котангенсларнинг π даврли эканлигини исботланг.

Хулоса. Ҳар қандай $x \in \mathbf{R}$ учун $x = \alpha + 2\pi n$, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ ва $x = \beta + \pi k$, $0 \leqslant \beta < \pi$, $k \in \mathbf{Z}$ деб ёзиш билан $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ қийматлар шу функцияларнинг $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ ва $0 \leqslant \beta < \pi$ оралиқлардаги қийматларини ҳисоблашга келтирилади. Бунга (1), (2), (4) ва (5) формулалар мос равишда қўлланилади

Келтириш формулалари эса ҳар қандай $x \in \mathbf{R}$ учун $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ ва $\operatorname{ctg} x$ лар қийматларини $x = \pm \varphi + \frac{\pi}{2} n$, $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ каби аргумент алмаштирилишидан сўнг $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$ оралиқда аниқланган $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi$ ва $\operatorname{ctg} \varphi$ лар қийматлари орқали ифодалашга хизмат қиладиган формулалардир. Масалан, $x = \frac{3\pi}{2} - \varphi \left(0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ бурчак учун $\cos x$ нинг қиймати $-\sin \varphi$ орқали ифодаланади: $\cos x = -\sin \varphi$. Бу ва шу каби қуйидаги яна учта тенгликнинг исботини келтирайлик:

$$\cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\frac{3\pi}{2}\cos\varphi + \sin\frac{3\pi}{2}\sin\varphi = -\sin\varphi;$$

$$\cos x_1 = \cos(\pi - \varphi) = \cos\pi\cos\varphi + \sin\pi\sin\varphi = -\cos\varphi;$$

$$\sin x_1 = \sin(\pi - \varphi) = \sin\pi\cos\varphi - \cos\pi\sin\varphi = \sin\varphi;$$

$$\operatorname{tg} x_1 = \operatorname{tg}(\pi - \varphi) = \frac{\sin(\pi - \varphi)}{\cos(\pi - \varphi)} = \frac{\sin\varphi}{-\cos\varphi} = -\operatorname{tg}\varphi.$$

Қуйида келтириш формулалари жадвали берилди, унда ҳар бир $x = \pm\varphi + \frac{\pi n}{2}$ аргумент учун мос тригонометрик функциянинг қиймати $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ бўлганда топилади. ($|n| > 4$ да $n = 2k + n_1$ ($n_1 = 1, 2, 3, 4$, $k \geqslant 2$) йиғинди ёрдамида тригонометрик функциялар даврийлигидан фойдаланилади.)

$x = \pm\varphi + \frac{\pi}{2} n$	$\frac{\pi}{2} - \varphi$	$\frac{\pi}{2} + \varphi$	$\pi - \varphi$	$\pi + \varphi$	$\frac{3\pi}{2} - \varphi$	$\frac{3\pi}{2} + \varphi$	$2\pi - \varphi$	$2\pi + \varphi$
$\sin x$	$\cos\varphi$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	$\sin\varphi$
$\cos x$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\cos\varphi$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$

Келтириш формуласини эсда сақлаш учун қуйидагиларга эътибор бериш керак $x = \pm \varphi + \frac{\pi}{2} n$ бурчак учун n тоқ бўлганда функцияларнинг номлари мос равишда sin дан cos га, cos дан sin га, tg дан ctg га, ctg дан tg га алмашади, n жуфт бўлганда функциялар номи ўзгармайди, натижанинг ишораси эса $x = \pm \varphi + \frac{\pi}{2} n$ қайси чоракда бўлса, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ ва $\operatorname{ctg} x$ ларнинг шу чоракдаги ишораси каби бўлади.

4) $\cos(-x) = \cos x$ бўлгани учун $\cos x$ жуфт функция, $\sin(-x) = -\sin x$, $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ бажарилгани учун $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ лар тоқ функциялардир.

5) $\sin x$ ва $\operatorname{tg} x$ функциялар $x = \pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$ нуқталарда, $\cos x$ ва $\operatorname{ctg} x$ функциялар $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ $(n \in \mathbf{Z})$ нуқталарда нолга айланади.

6) $\sin x$ функция $]0; \pi[$ да, $\cos x$ функция эса $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ да, $\operatorname{tg} x$ ва $\operatorname{ctg} x$ функциялар $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ оралиқда мусбат бўлгани учун уларнинг ҳар бири барча $n \in \mathbf{Z}$ лар учун ушбу оралиқларда мусбатдир:

а) $\sin x$ функция $]2\pi n; \pi(2n+1)[$ да;

б) $\cos x$ функция $\left]\frac{\pi}{2}(4n-1); \frac{\pi}{2}(4n+1)\right[$ да;

в) $\operatorname{tg} x$ функция $\left]\pi n; \frac{\pi}{2}(2n+1)\right[$ да;

г) $\operatorname{ctg} x$ функция $\left]\pi n; \frac{\pi}{2}(2n+1)\right[$ да.

$\mathbf{R}$ нинг қолган оралиқларида улар манфийдир.

7) а) $\sin x$ ва $\cos x$ функция $\mathbf{R}$ да узлуксиз ва ҳосилага эга: $\sin' x = \cos x$; $\cos' x = -\sin x$.

б) $\operatorname{tg} x$ функция $D(\operatorname{tg})$ соҳада узлуксиз ва ҳосилага эга:

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x};$$

в) $\operatorname{ctg} x$ функция $D(\operatorname{ctg})$ соҳада узлуксиз ва ҳосилага эга:

$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

(Тригонометрик функцияларнинг ҳосилаларига боғлиқ тушунчалар А. 51 п. 116-бетда муфассал берилади.)

8) а) $\sin x$ функция -1 дан 1 гача $\left]-\frac{\pi}{2}(4n-1); \frac{\pi}{2}(4n+1)\right[$ $(n \in \mathbf{Z})$ да ўсади. $\mathbf{R}$ нинг қолган қисмида 1 дан -1 гача камая-

ди. Бу функция $x_n = \frac{\pi}{2}(4n-1)$ $(n \in \mathbf{Z})$ нуқталарда энг кичик, $x'_n = \frac{\pi}{2}(4n+1)$ $(n \in \mathbf{Z})$ нуқталарда энг катта қийматга эришади.

б) $\cos x$ функция 1 дан -1 гача $]2\pi n;\ \pi(2n+1)[$ $(n \in \mathbf{Z})$ оралиқда камаяди. $\mathbf{R}$ нинг қолган қисмида -1 дан 1 гача ўсади, бу функция $x_n = 2\pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$ нуқталарда энг катта, $x'_n = \pi(2n+1)$ $(n \in \mathbf{Z})$ нуқталарда энг кичик қийматларни қабул қилади.

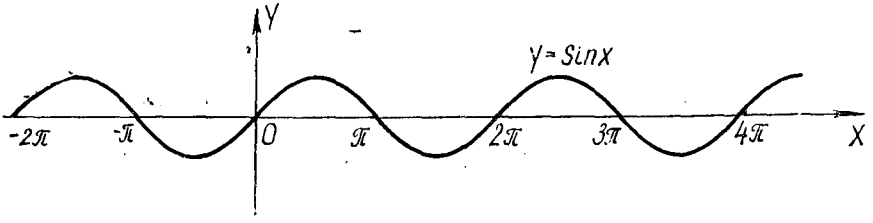
в) $\operatorname{tg} x$ функция ҳар бир $\left]-\frac{\pi}{2}(2n-1);\ \frac{\pi}{2}(2n+1)\right[$ $(n \in \mathbf{Z})$ оралиқда $-\infty$ дан $+\infty$ гача ўсади.

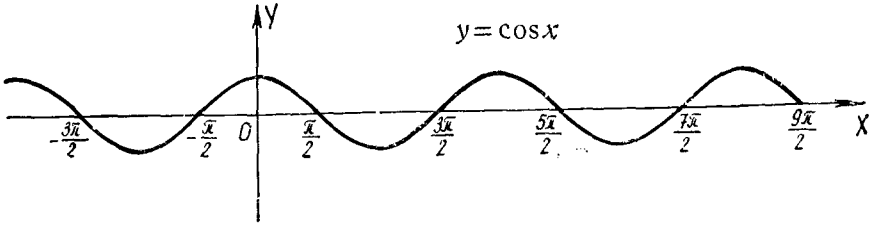
г) $\operatorname{ctg} x$ функция ҳар бир $[\pi n,\ \pi(n+1)[$ $(n \in \mathbf{Z})$ оралиқда $+\infty$ дан $-\infty$ гача камаяди.

Шу келтирилган хоссалар асосида $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ ва $\operatorname{ctg} x$ функцияларнинг графиги ясалади:

а) $\sin x$ ва $\cos x$ ларнинг графигини $[-\pi;\ \pi]$ оралиқда ясаб олиб, уларнинг даври 2π га тенг бўлганидан фойдаланиб, $\mathbf{R}$ даги графиги ясалади. Бунинг учун бу графикни Ox ўқи бўйлаб $2\pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$ га тенг масофага параллел кўчириш билан ҳар бир $D_n = [\pi(2n-1);\ \pi(2n+1)]$ $(n \in \mathbf{Z})$ оралиқдаги графиги ясалади (30-*а*, *б* шакллар).

$y = \sin x$ нинг $\mathbf{R}$ даги графиги *синусоида* деб аталади. $y = \cos x$ нинг графиги эса чапга $\frac{\pi}{2}$ масофага силжитилган синусоидадир.

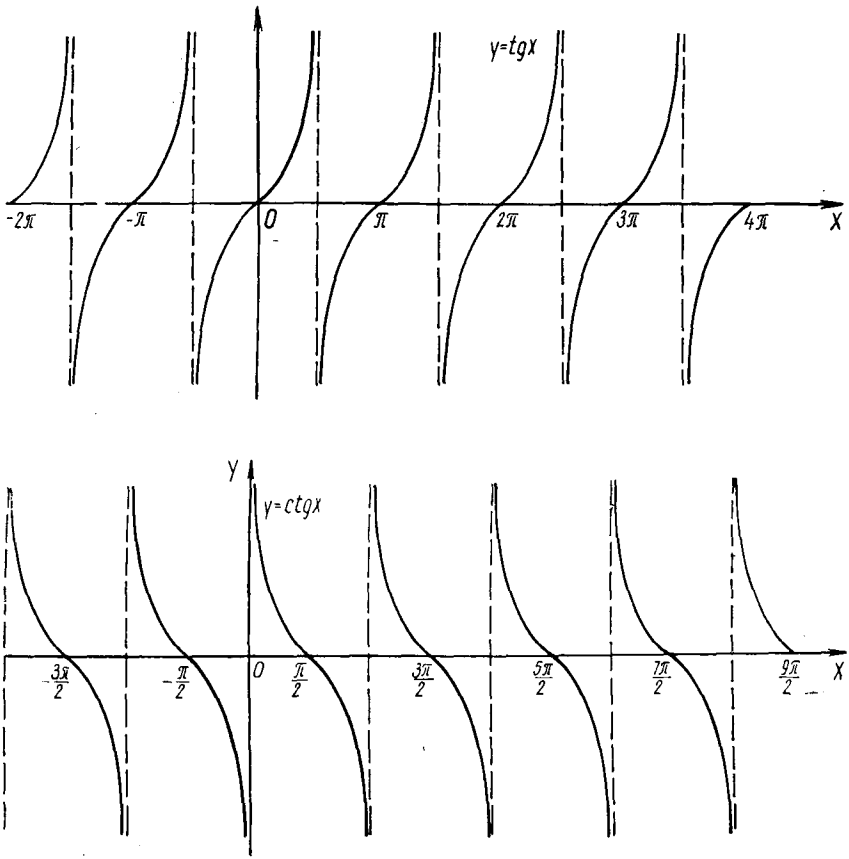




30-*а*, *б* шакл.

б) $\operatorname{tg} x$ нинг графигини $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ оралиқда, $\operatorname{ctg} x$ нинг графигини $]0; \pi[$ оралиқда ясаб олиниб, уларнинг даври π га тенг бўлганлигидан фойдаланиб, мос равишда уларнинг $D(\operatorname{tg})$ ва $D(\operatorname{ctg})$ оралиқдаги графиги ясалади.

$\operatorname{tg} x$ нинг графигини $D(\operatorname{tg})$ да ясаш учун Ox ўқи бўйлаб πn $(n \in \mathbf{Z})$ га тенг масофада унинг $\left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[$ оралиқдаги графигини параллел кўчириш билан ҳар бир $\left]\frac{\pi}{2}(2n-1); \frac{\pi}{2}(2n+1)\right[$ $(n \in \mathbf{Z})$ оралиқда ясаш керак (31-*а* шакл), унинг графиги *тангенсоида* деб аталади $\operatorname{ctg} x$ нинг графигини $D(\operatorname{ctg})$ да ясаш учун унинг $]0; \pi[$ оралиқдаги графигини Ox ўқи бўйлаб πn $(n \in \mathbf{Z})$ га тенг масофада параллел кўчириш билан ҳар бир $]\pi n; \pi(n+1)[$ $(n \in \mathbf{Z})$ оралиқда ясаш керак (31-*б* шакл).



31-*а, б* шакл.

Топшириқлар. 1. Қуйидаги функцияларнинг қайсилари даврий? Даврлиларининг даврини топинг: а) $\cos 2x$; б) $\operatorname{tg}\frac{x}{5}$; в) $\cos 2x + \sin 2x$; г) $\cos x - 2x$; д) $\cos^2 x$; е) $\operatorname{tg}(3x-1)$; ж) $\frac{x}{|x|}\sin x$; з) $\frac{1}{x}\sin x$; и) $e(x) = \{x\}$; к) $\operatorname{tg}^2 x$.

2. Биринчи чорак бурчагининг тригонометрик функциясига келтиринг:

а) $\sin\frac{3\pi}{4}$; б) $\operatorname{tg} 170°$; в) $\sin 1400°$; г) $\cos 1100°$; д) $\cos\frac{9\pi}{10}$; е) $\sin\frac{2\pi}{1{,}12}$.

3. Ҳисобланг:

а) $\cos 5880°$; б) $\operatorname{tg} 9480°$; в) $\sin 9570°$; г) $\operatorname{ctg}\frac{225}{4}\pi$; д) $\cos\frac{355}{6}\pi$; е) $\operatorname{tg}\frac{100}{3}\pi$.

36. $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ кўринишдаги тенгламаларни ечиш.

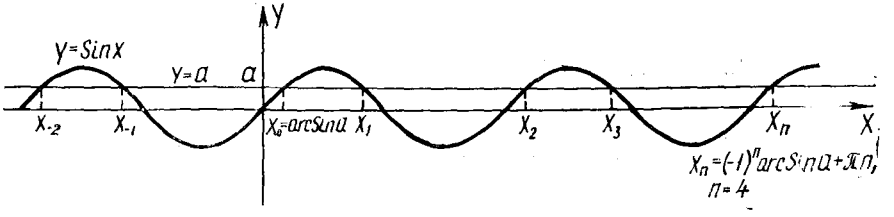
а) $\sin x = a$ *тенгламани ечиш.* Маълумки, $y = \sin x$ функция $D_0 = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ оралиқда ўзининг минимум қиймати (-1) дан то максимум қиймати $(+1)$ гача қатъий ўсиб боради. У бу оралиқда узлуксиз бўлгани сабабли унинг ҳар бир $y = a \in [-1; 1]$ қиймати учун аргументнинг шундай ягона $x_0 \in D_0$ қиймати топиладики, унинг учун $\sin x_0 = a$ тенглик бажарилади. Ана шу x_0 бурчакнинг қиймати a сонининг *арксинуси* дейилади ва $\arcsin a$ деб белгиланади: $x_0 = \arcsin a$.

Бу таърифдан келиб чиқадики, $|a| > 1$ бўлса, $\sin x = a$ тенглама ечимга эга эмас, $|a| \leqslant 1$ бўлганда эса $\mathbf{R}$ соҳада бу тенглама

$$x_k = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \tag{1}$$

кўринишдаги чексиз кўп ечимга эга. Ҳақиқатан ҳам, $\sin x = a$ тенгламани график усулда ечайлик (32-*а* шакл). $y = a$ ва $y = \sin x$ функциялар графиклари кесишиш нуқталарининг абсциссалари шу тенгламанинг ечимлари бўлиб, уларнинг ҳар бири $x_0 = \arcsin a$ орқали

$$D_n = \left[\frac{\pi}{2}(4n-1); \frac{\pi}{2}(4n+1)\right] \text{ да } \quad x_{2n} = 2\pi n + \arcsin a,$$



32-*а* шакл.

$D'_n = \left[\frac{\pi}{2}(4n+1);\ \frac{\pi}{2}(4n+3)\right]$ да $x_{2n+1} = \pi(2n+1) - \arcsin a$ $(n \in \mathbf{Z})$

шаклда ифодаланади. Бу эса (1) формулада умумлашган.

Натижа: 1) $\sin x = 1 \Longleftrightarrow x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z};$

2) $\sin x = -1 \Longleftrightarrow x_k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z},$

3) $\sin x = 0 \Longleftrightarrow x_k = \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$

б) $\cos x = a$ *тенгламани ечиш.* Маълумки, $y = \cos x$ функция $D_0 = [0;\ \pi]$ оралиқда ўзининг максимум қиймати $(+1)$ дан то минимум қиймати (-1) гача қатъий камайиб боради. У бу оралиқда узлуксиз бўлгани сабабли унинг ҳар бир $y = a \in [-1;1]$ қиймати учун аргументнинг шундай ягона $x_0 \in D$ қиймати топиладики, унинг учун $\cos x_0 = a$ тенглик бажарилади. Ана шу x_0 бурчакнинг қиймати a сонинг *арккосинуси* дейилади ва $\arccos a$ деб белгиланади: $x_0 = \arccos a$.

Шу таърифга кўра айтиш мумкинки, $|a| > 1$ бўлганда $\cos x = a$ тенглама ечимга эга эмас, $|a| \leqslant 1$ бўлганда эса $\mathbf{R}$ соҳада бу тенглама

$$x_k = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z} \qquad (2)$$

кўринишдаги чексиз кўп ечимга эга. Ҳақиқатан ҳам, $\cos x = a$ тенгламани график усулда ечайлик (32-*б* шакл). $y = a$ ва $y = \cos x$ функциялар графиклари кесишиш нуқталарининг абсциссалари шу тенгламанинг ечимлари бўлиб, уларнинг ҳар бири $x_0 = \arccos a$ орқали

$$D_n = [2\pi n,\ \pi(2n+1)] \text{ да } x_n = \arccos a + 2\pi n,$$

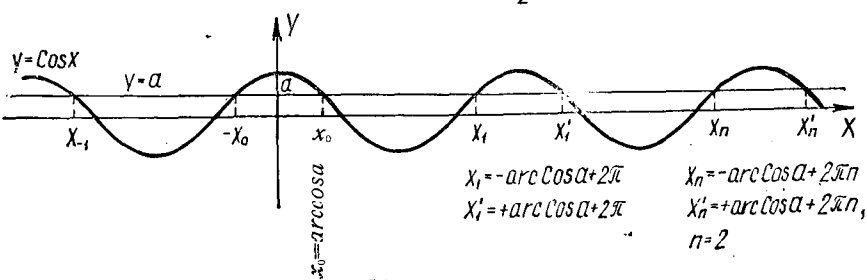
$$D'_n = [\pi(2n+1);\ 2\pi(n+1)] \text{ да } x'_n = -\arccos a + 2\pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$$

шаклда ифодаланади. Бу эса (2) формулада умумлашган.

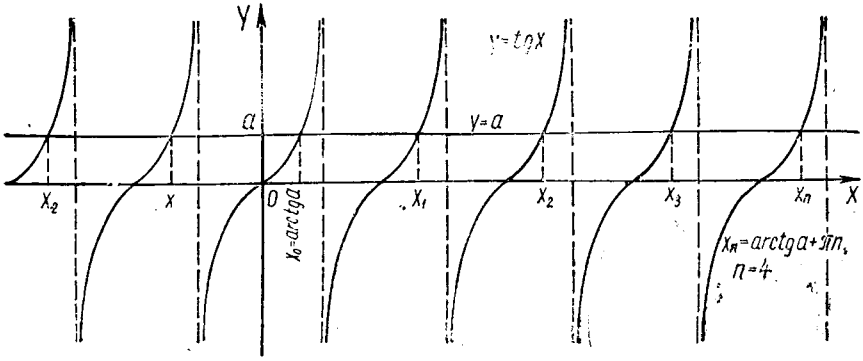
Натижа: 1) $\cos x = 1 \Longleftrightarrow x_k = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z};$

2) $\cos x = -1 \Longleftrightarrow x_k = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z};$

3) $\cos x = 0 \Longleftrightarrow x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$



32-*б* шакл.



33-*а* шакл.

в) $\operatorname{tg} x = a$ *тенгламани ечиш.* $y = \operatorname{tg} x$ функция $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[= D_0$ оралиқда ўсувчи ва ўзининг **R** даги барча қийматини бир мартадан қабул қилиб чиқади. Бу оралиқда функция узлуксиз бўлгани сабабли унинг ҳар бир $y = a \in \mathbf{R}$ қиймати учун D_0 дан шундай ягона x_0 топиладики, унинг учун $\operatorname{tg} x_0 = a$ тенглик бажарилади. Ана шу x_0 бурчакнинг қиймати a сонинг *арктангенси* деб айтилади ва $\operatorname{arctg} a$ деб белгиланади: $x_0 = \operatorname{arctg} a$.

Бу таърифдан кўринадики, $\operatorname{tg} x = a$ тенглама D_0 соҳада ҳар бир $a \in \mathbf{R}$ учун албатта ечимга эга. Унинг **R** соҳадаги барча ечимлари

$$x_k = \operatorname{arctg} a + \pi k, \ k \in \mathbf{Z} \qquad (3)$$

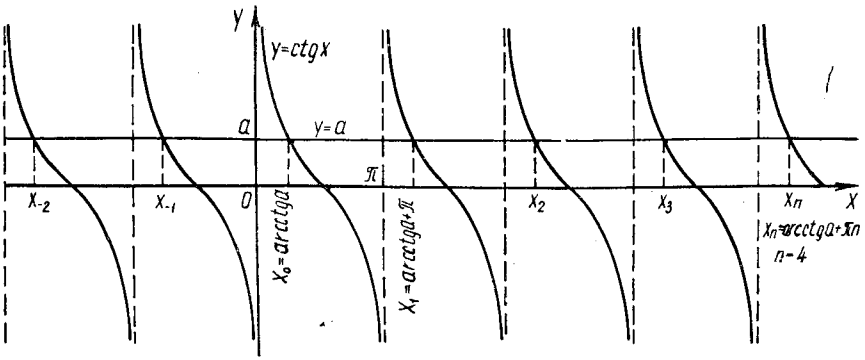
кўринишда бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $\operatorname{tg} x = a$ тенгламани график усулда ечайлик (33-*а* шакл). $y = a$ ва $y = \operatorname{tg} x$ функциялар графиклари кесишиш нуқталарининг абсциссалари шу тенгламанинг ечимлари бўлиб, уларнинг ҳар бири $x_0 = \operatorname{arctg} a$ орқали барча $\left]\frac{\pi}{2}(2n-1); \frac{\pi}{2}(2n+1)\right[$ $(n \in \mathbf{Z})$ оралиқда $x_n = \operatorname{arctg} a + \pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$ шаклда ифодаланади, яъни πn даврга фарқ қилади.

Натижа. 1) $\operatorname{tg} x = 1 \Longleftrightarrow x_k = \frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in \mathbf{Z}$;

2) $\operatorname{tg} x = -1 \Longleftrightarrow x_k = \pi k, \ k \in \mathbf{Z}$;

3) $\operatorname{tg} x = 0 \Longleftrightarrow x_k = \pi k, \ k \in \mathbf{Z}$.

Топшириқлар. 1) $\sin^2 x = a$, $\cos^2 x = a$, $\operatorname{tg}^2 x = a$ тенгламаларни ечинг. 2) $\operatorname{ctg} x = a$ тенгламанинг ечими $x_k = \operatorname{arcctg} a + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ шаклда бўлади. $y = \operatorname{ctg} x$ нинг $D_0 = [0; \pi]$ оралиқдаги графигини ясаб, шу ечиш усулини таърифлаб чиқинг (33-*б* шакл).



33-*б* шакл.

37. Тескари тригонометрик функцияларнинг хоссалари ва графиги.

а) $y = \arcsin x$ *функция*. $D_0 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ оралиқда $y = \sin x$ функция узлуксиз ва ўсувчи бўлиб, $E(\sin) = [-1; 1]$ қийматлар соҳасидаги ҳар бир қийматни бир мартадан қабул қилиб чиқади. D_0 оралиқнинг чап охирида функция ўзининг энг кичик қиймати (-1) га, ўнг охирида энг катта қиймати $(+1)$ га эришади. Демак, бу функция D_0 соҳада тескариланувчи функция бўлиб, унга тескари функция $x = \arcsin y$ деб белгиланади ва *арксинус игрек* деб ўқилади. Бу ерда y — аргумент, x эса унинг функцияси. Агар x ва y лар роли алмаштирилса, $y = \arcsin x$ тескари тригонометрик функция ҳосил бўлади. У қуйидаги хоссаларга эга:

1) $D(\arcsin) = [-1; 1]$.

2) $E(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

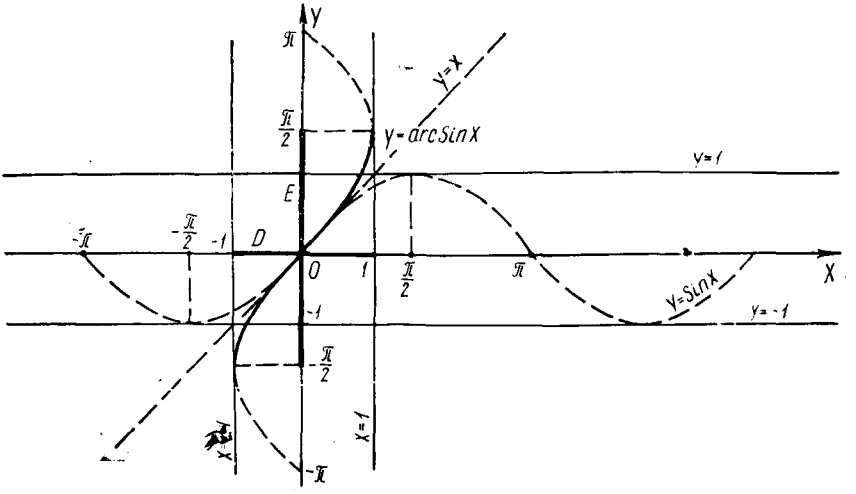
3) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ бажарилгани учун бу функция тоқдир.

4) $\arcsin x = 0$ тенглама битта илдизга эга: $x_0 = 0$. Шунингдек, $0 < x \leqslant 1$ оралиқда мусбат, $-1 \leqslant x < 0$ оралиқда манфий қийматлидир.

5) $\arcsin x$ функция $-1 \leqslant x \leqslant 1$ оралиқда узлуксиз бўлиб, унинг барча ички нуқталарида ҳосилага эга:

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

6) $\arcsin x$ функция $-1 \leqslant x \leqslant 1$ оралиқда ўсувчи бўлиб,



34- шакл.

бу оралиқнинг чап охирида ўзининг энг кичик $-\frac{\pi}{2}$ қиймати-га, ўнг охирида энг катта $+\frac{\pi}{2}$ қийматига эришади.

Унинг экстремум нуқталари йўқ.

Бу функциянинг графиги $y = \sin x$ нинг D_0 оралиқдаги графигини $y = x$ тўғри чизиғига нисбатан симметрик ясаш билан ҳосил қилинади (34- шакл).

б) $y = \arccos x$ *функция.* $D_0 = [0;\ \pi]$ оралиқда $y = \cos x$ функция узлуксиз ва камаювчи бўлиб, $E(\cos) = [-1;\ +1]$ қийматлар соҳасидаги ҳар бир қийматни бир мартадан қабул қилиб чиқади. D_0 оралиқнинг чап чеккасида функция ўзининг энг катта қиймати $(+1)$ га, ўнг чеккасида энг кичик қиймати (-1) га эришади.

Демак, бу функция D_0 оралиқда тескариланувчи бўлиб, унга тескари функция $x = \arccos y$ деб белгиланади ва *арккосинус игрек* деб ўқилади. Бу ерда y — аргумент, x эса унинг функцияси. Агар аргументни x, функцияни y билан алмаштирилса, $y = \arccos x$ каби ёзиладиган тескари тригонометрик функция ҳосил бўлади. У қуйидаги хоссаларга эга:

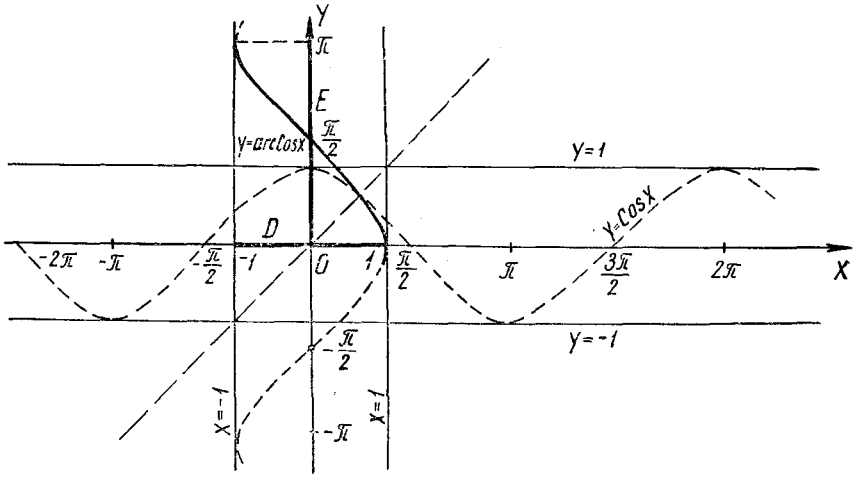
1) $D(\arccos) = [-1;\ +1]$.

2) $E(\arccos) = [0;\ \pi]$.

3) Бу функция тоқ ҳам эмас, жуфт ҳам эмас.

4) $\arccos x = 0$ тенгламанинг илдизи битта: $x_0 = 1$. Бу функция $-1 \leqslant x < 1$ оралиқда мусбат қийматлидир.

5) $\arccos x$ функция $-1 \leqslant x \leqslant 1$ оралиқда узлуксиз бўлиб, унинг барча ички нуқталарида ҳосилага эга:



35- шакл.

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6) Бу функция $-1 \leqslant x \leqslant 1$ оралиқда камаювчи бўлиб, у оралиқнинг чап охирида энг катта π қийматга, ўнг охирида энг кичик 0 қийматга эришади

Унинг экстремум нуқталари йўқ.

Бу функциянинг графиги $y = \cos x$ нинг D_0 оралиқдаги графигини $y = x$ тўғри чизиғига нисбатан симметрик ясаш билан ҳосил қилинади (35- шакл).

г) $y = \operatorname{arctg} x$ *функция*. $D_0 = \left|-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ оралиқда $y = \operatorname{tg} x$ функция узлуксиз ва ўсувчи бўлиб, $E(\operatorname{tg}) = \mathbf{R}$ қийматлар соҳасидаги ҳар бир қийматни бир маргадан қабул қилиб чиқади. x аргумент D_0 оралиқнинг чап чеккасига яқинлашса $\left(x \to -\frac{\pi}{2}\right)$, функциянинг $\operatorname{tg} x$ қиймати камайиб $-\infty$ га, ўнг чеккасига яқинлашса $\left(x \to +\frac{\pi}{2}\right)$, функциянинг қиймати ўсиб $+\infty$ га интилади. Демак, бу функция D_0 оралиқда тескариланувчи бўлиб, унга тескари функция $x = \operatorname{arctg} y$ деб белгиланади ва *арктангенс игрек* деб ўқилади. Бу ерда y—аргумент, x эса унинг функцияси. Агар бунда аргументни x, функцияни y билан алмаштирилса, $y = \operatorname{arctg} x$ каби ёзиладиган тескари тригонометрик функция ҳосил бўлади. У қуйидаги хоссаларга эга:

1) $D(\operatorname{arctg} x) = \mathbf{R}$.

2) $E(\operatorname{arctg}) = \left| -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right|$.

3) Бу функция тоқдир: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

4) $\operatorname{arctg} x = 0$ тенгламанинг илдизи битта: $x_0 = 0$. Бу функция $\mathbf{R}_+$ да мусбат, $\mathbf{R}_-$ да манфий қийматлидир.

5) $\operatorname{arctg} x$ функция $\mathbf{R}$ да узлуксиз ва ҳосилага эга:

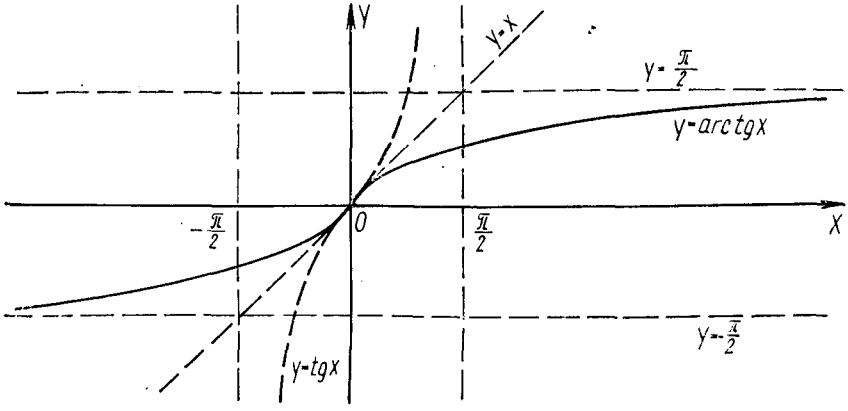
$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

6) $\operatorname{arctg} x$ функция $\mathbf{R}$ да ўсувчи бўлиб, x сонлар ўқининг чап охирига интилганда $(x \to -\infty)$ функциянинг қиймати $-\frac{\pi}{2}$ га, ўнг охирига интилганда $(x \to +\infty)$ функциянинг қиймати $+\frac{\pi}{2}$ га яқинлашади.

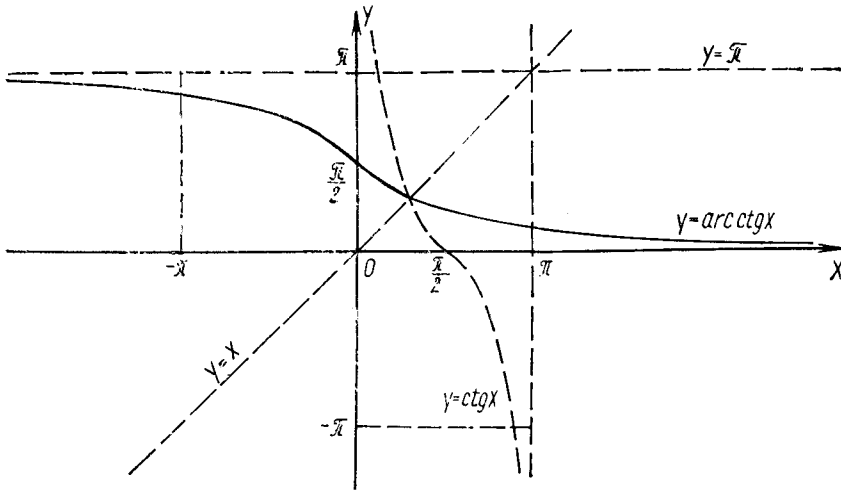
Унинг экстремумлари йўқ.

Бу функциянинг графиги $y = \operatorname{tg} x$ нинг D_0 оралиқда чизилган графигини $y = x$ тўғри чизиғига нисбатан симметрик ясаш билан ҳосил қилинади (36- шакл).

д) $y = \operatorname{arcctg} x$ *функция*. $D_0 = |0; \pi|$ оралиқда $y = \operatorname{ctg} x$ функция узлуксиз ва камаювчи бўлиб, $E(\operatorname{ctg}) = \mathbf{R}$ қийматлар соҳасида ҳар бир қийматни бир мартадан қабул қилиб чиқади. x аргумент D_0 оралиқнинг чап чеккасига яқинлашса $(x \to 0)$, функциянинг $\operatorname{ctg} x$ қиймати ўсиб $+\infty$ га, ўнг чеккасига яқинлашса $(x \to \pi)$, у камайиб $-\infty$ га интилади. Демак, бу функция D_0 оралиқда тескариланувчи бўлиб, унга тескари функция $x = \operatorname{arcctg} y$ деб белгиланади ва *арккотангенс игрек* деб ўқилади. Бу ерда y—аргумент, x эса унинг функцияси. Агар бунда аргументни x, функцияни y билан алмаштирилса, одат-



36- шакл.



37- шакл.

дагидек, $y = \operatorname{arcctg} x$ тескари тригонометрик функция ҳосил бўлади. У қуйидаги хоссаларга эга:

1) $D(\operatorname{arcctg}) = \mathbf{R}$.

2) $E(\operatorname{arcctg}) =]0;\ \pi[$.

3) Бу функция тоқ ҳам эмас, жуфт ҳам эмас.

4) $\operatorname{arcctg} x = 0$ тенглама илдизга эга эмас, яъни $\operatorname{arcctg} x$ функция $\mathbf{R}$ нинг ҳар бир нуқтасида мусбат қийматлидир.

5) $\operatorname{arcctg} x$ функция $\mathbf{R}$ да узлуксиз ва ҳосилага эга:

$$\operatorname{arcctg}' x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

6) $\operatorname{arcctg} x$ функция $\mathbf{R}$ да камаювчи бўлиб, x сонлар ўқининг чап охирига интилганда $(x \to -\infty)$ функциянинг қиймати π га, ўнг охирига интилганда $(x \to +\infty)$ функциянинг қиймати 0 га яқинлашади.

Унинг экстремумлари йўқ.

Бу функциянинг графиги $y = \operatorname{ctg} x$ нинг $D_0 =]0;\ \pi[$ оралиқда чизилган графигини $y = x$ тўғри чизиғига нисбатан симметрик ясаш билан ҳосил қилинади (37- шакл).

Натижалар: *Ўзаро тескари функция хоссаларига биноан қуйидаги муносабатлар ўринлидир*:

I. $\arcsin(\sin x) = x, \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]; \qquad (1)$

$\sin(\arcsin x) = x, \qquad x \in [-1;\ 1]. \qquad (2)$

II. $\arccos(\cos x) = x, \qquad x \in [0;\ \pi]; \qquad (3)$

$\cos(\arccos x) = x, \qquad x \in [-1;\ 1]. \qquad (4)$

III. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \qquad x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ (5)

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \qquad x \in \mathbf{R}.$ (6)

IV. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \qquad x \in]0; \pi[;$ (7)

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \qquad x \in \mathbf{R}.$ (8)

1-теорема. *Ушбу тенглик ўринлидир:*

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad x \in [-1; 1]. \tag{9}$$

Исбот: (4) муносабатга асосан ушбуга эгамиз:

$$\cos(\arccos(-x)) = -x;$$

$$\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x.$$

Шундай қилиб,

$$\cos(\arccos(-x)) = \cos(\pi - \arccos x), \quad x \in [-1; 1] \tag{10}$$

тенглик ўринли. Аммо (3) га биноан $0 \leqslant \arccos(-x) \leqslant \pi$ бажарилишини, шунингдек, $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$ эканлигидан

$$0 \leqslant \pi - \arccos x \leqslant \pi$$

ўринли эканини эсласак, у ҳолда (10) даги $\cos u = \cos v$ шаклдаги тенгликнинг $0 \leqslant u \leqslant \pi$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$ каби оралиқда бажарилиши кўриниб турибди. $\cos x$ функция $[0; \pi]$ соҳада қатъий камаювчи, шунинг учун $\cos u = \cos v$ эканлигидан $u = v$ тенгликнинг бажарилиши, яъни (9) тенгликнинг тўғрилиги келиб чиқади. ▶

2-теорема. *Ушбу тенглик ўринлидир:*

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{11}$$

Исбот. (11) тенгликнинг ҳар икки томони котангенсини алоҳида-алоҳида (8) га кўра ҳисобласак:

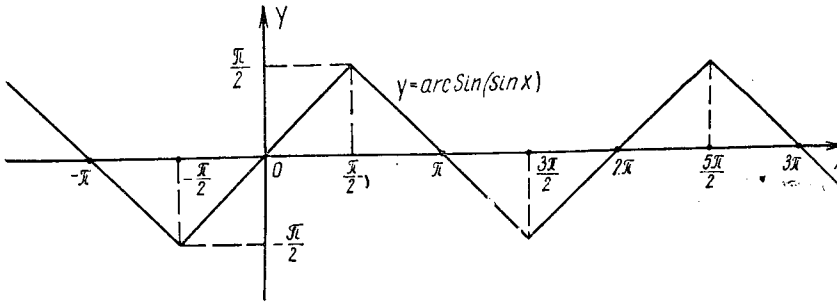
$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(-x)) = -x,$$

$$\operatorname{ctg}(\pi - \operatorname{arcctg} x) = -\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = -x.$$

Шундай қилиб,

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(-x)) = \operatorname{ctg}(\pi - \operatorname{arcctg} x), \quad x \in \mathbf{R}. \tag{12}$$

Агар $u = \operatorname{arcctg}(-x)$ ва $v = \pi - \operatorname{arcctg} x$ ларнинг ўзгариш соҳасини текширсак, у ҳолда $\operatorname{arcctg} x$ таърифига биноан $0 < \operatorname{arcctg}(-x) < \pi$ га эга бўламиз; шу билан бирга $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$ дан $0 < \pi - \operatorname{arcctg} x < \pi$ ҳам келиб чиқади. Демак, $0 < u < \pi$, $0 < v < \pi$ каби тенгсизлик ўринли бўлганда (12) даги муносабат ҳосил бўлаяпти. $\operatorname{ctg} x$ функция $[0; \pi]$ соҳада қатъий камаювчи, шунинг учун $\operatorname{ctg} u = \operatorname{ctg} v$ эканлигидан $u = v$ тенгликнинг бажарилиши, яъни (11) тенгликнинг тўғрилиги келиб чиқади. ▶



38- шакл.

3- теорема. *Ушбу тенглик ўринлидир*:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1;\ 1]. \tag{13}$$

Исбот. $\arccos x$ нинг таърифига биноан $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$ эканлиги $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \arccos x \leqslant \frac{\pi}{2}$ тенгсизлигини келтириб чиқаради. У ҳолда $u = \frac{\pi}{2} - \arccos x$, $v = \arcsin x$ десак, $-\frac{\pi}{2} \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}$ оралиқда ушбу тенгликларга эга бўламиз:

$$\sin v = \sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1;\ 1],$$

$$\sin u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x, \quad x \in [-1;\ 1].$$

Аммо $\sin x$ шу $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ оралиқда қатъий ўсувчи бўлганлиги учун $\sin u = \sin v$ эканлигидан $u = v$ тенгликнинг тўғрилиги келиб чиқади. Бу ердан $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ нинг бажарилиши, яъни теореманинг тўғри эканлиги келиб чиқади. ▶

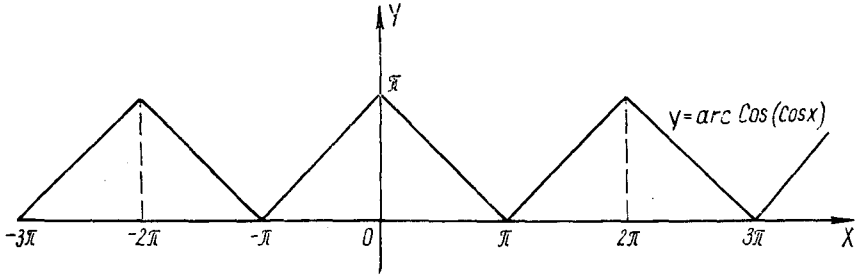
Қуйидаги теоремани мустақил исботланг.

4- теорема. *Ушбу тенглик тўғридир*:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} = \frac{\pi}{2}.$$

Натижалар (давоми). V. $y = \arcsin(\sin x)$ *функция* R *соҳада аниқланган ва даврийдир* (38- шакл). $n \in \mathbf{Z}$ бўлганда

$$y = \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2\pi n, & \text{агар } \frac{\pi}{2}(4n-1) \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}(4n+1), \\ (2n+1)\pi - x, & \text{агар } \frac{\pi}{2}(4n+1) \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}(4n+3). \end{cases}$$



39- шакл.

VI. $y = \arccos(\cos x)$ *функция* R *да аниқланган ва даврийдир* (39- шакл). $n \in Z$ бўлганда

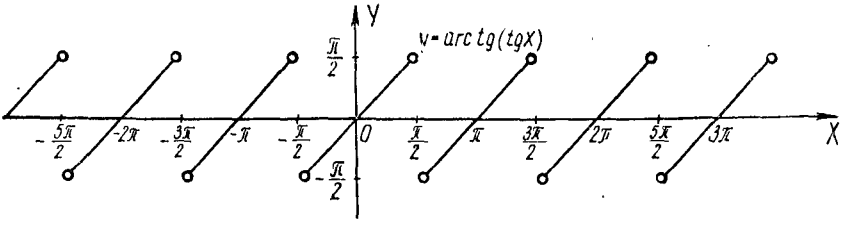
$$y = \arccos(\cos x) = \begin{cases} x - 2\pi n, & \text{агар } 2\pi n < x < \pi(2n+1), \\ 2\pi n - x, & \text{агар } \pi(2n-1) \leqslant x \leqslant 2\pi n. \end{cases}$$

VII. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ *функция* $D(\operatorname{tg})$ *да аниқланган ва даврийдир* (40- шакл). $n \in Z$ бўлганда

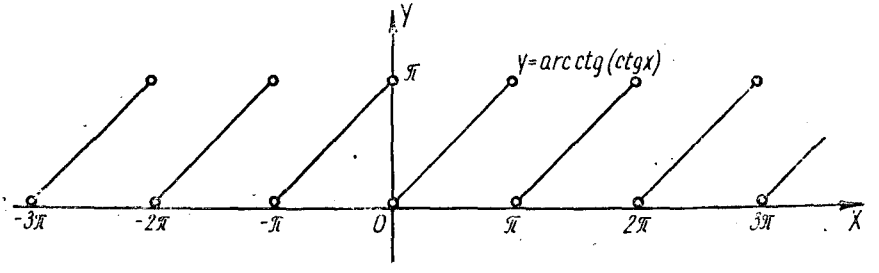
$$y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x - \pi n, \text{ агар } \frac{\pi}{2}(2n-1) < x < \frac{\pi}{2}(2n+1).$$

VIII. $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ функция $D(\operatorname{ctg})$ да аниқланган ва даврийдир (41- шакл). $n \in Z$ бўлганда

$$y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x - \pi n, \text{ агар } \pi n < x < \pi(n+1).$$



40- шакл.



41- шакл.

Энди келтирилган натижалар татбиқига доир мисоллар қараймиз:

1-мисол. $\sin(\arccos x)$, $\cos(\arcsin x)$, $\operatorname{tg}(\arcsin x)$ ларни ихтиёрий $x \in]-1; +1[$ учун ҳисобланг.

Ечилиши. а) $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1-\cos(\arccos x)} = +\sqrt{1-x^2}$, бу ерда $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$ бажарилгани учун $\alpha = \arccos x$ бурчакнинг синуси бу оралиқда (яъни I ва II чоракда) мусбатдир, шунинг учун радикал олдида + ишора олинди.

б) $\cos(\arcsin x) = +\sqrt{1-\sin(\arcsin x)} = +\sqrt{1-x^2}$. Бу ерда ҳам $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x < \frac{\pi}{2}$ бажарилгани учун $\alpha = \arcsin x$ бурчакнинг косинуси бу оралиқда (яъни IV ва I чоракда) мусбатдир, шунинг учун радикал олдида + ишора бўлади.

в) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, бу натижа $0 \leqslant x < 1$ бўлганда мусбат бўлиб, $\alpha = \arcsin x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ да $\operatorname{tg}\alpha > 0$ бўлишига мос келади, $-1 < x \leqslant 0$ бўлганда манфий бўлиб, $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$ да $\operatorname{tg}\alpha < 0$ бўлишига мос келади.

2-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{3}.$$

Ечилиши $\arcsin 2x$ учун $|2x| \leqslant 1$ бажарилиши лозим, шунинг учун x ўзгарувчи $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ га тегишли. Ана шу фикрни ҳисобга олсак, $\beta = \arcsin x$ нинг қиймати $\left[-\frac{\pi}{6}; +\frac{\pi}{6}\right]$ да ўзгара олади, $\alpha = \arcsin 2x$ эса арксинус таърифига кўра $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ да ўзгаради. Демак, тенглама шартига асосан $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ бўлгани учун α ва $\frac{\pi}{3} - \beta$ бурчаклар $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ оралиқда ўзгаради. Бу оралиқда $\sin x$ ўсувчи бўлгани учун берилган тенглама қуйидаги тенгламага эквивалент:

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) \Longleftrightarrow 2x = \sin\frac{\pi}{3}\cos\beta - \sin\beta\cos\frac{\pi}{3}.$$

Аммо $\cos\beta = \sqrt{1-x^2}$, $\sin\beta = x$ ни ҳисобга олсак,

$$2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{2} \Longleftrightarrow 5x = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} \Longleftrightarrow x = \sqrt{\frac{3}{28}}.$$

3-мисол. $f(x) = \arcsin\frac{x-1}{2} + \arccos\frac{0{,}5}{1-x}$ нинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечилиши. Бу ерда $\arcsin a$ ва $\arccos b$ лар учун $|a| \leqslant 1$, $|b| \leqslant 1$ нинг бажарилиши шу тескари тригонометрик функциялар таърифига кўра бўлгани учун

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x-1}{2}\right| \leqslant 1, \\ \left|\dfrac{0{,}5}{1-x}\right| \leqslant 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |x-1| \leqslant 2, \\ |x-1| \geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow x \in \left[-1,\ \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2};\ 3\right].$$

4-мисол. $t_1 = \arcsin\frac{3}{7}$ ва $t_2 = \arccos\frac{3}{7}$ сонларнинг қайси бири катта?

Ечилиши. Агар $\frac{3}{7} > 0$ эканлигини ҳисобга олсак, $0 < \arcsin\frac{3}{7} < \frac{\pi}{2}$ ва $0 < \arccos\frac{3}{7} < \pi$ эканлигини тушунтириш қийин эмас. $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ оралиқда синус, косинус, тангенс ва котангенсларнинг барчаси ёки ўсувчи, ёки камаювчидир. Агар шу солиштирилаётган сонларнинг, масалан, тангенсини ҳисобласак:

$$\operatorname{tg} t_1 = \frac{\sin t_1}{\cos t_1} = \frac{\frac{3}{7}}{\sqrt{1-\frac{9}{49}}} = \frac{3}{\sqrt{40}}; \quad \operatorname{tg} t_2 = \frac{\sin t_2}{\cos t_2} = \frac{\sqrt{1-\frac{9}{49}}}{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{40}}{3}.$$

Бу ерда келиб чиқадики, тангенс бу кесмада ўсувчи бўлгани учун $\operatorname{tg} t_1 < \operatorname{tg} t_2 \Longrightarrow t_1 < t_2$ бажарилади, яъни $\arcsin\frac{3}{7} < \arccos\frac{3}{7}$.

5-мисол. Ҳисобланг:

а) $A = \cos\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$; б) $B = \operatorname{tg}\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$; в) $C = \cos(\operatorname{arcctg}(-3))$.

Ечилиши

а) $A = \cos^2\left(\arcsin\frac{3}{2}\right) - \sin^2\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \left(\sqrt{1-\frac{9}{25}}\right)^2 - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$;

б) $B = \dfrac{\sin(\arccos {}^2/_3)}{\cos(\arccos {}^2/_3)} = \dfrac{3}{2} \cdot \sqrt{1-\dfrac{4}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$;

в) $C = \cos(\operatorname{arcctg}(-3)) = \cos(\pi - \operatorname{arcctg} 3) = -\cos(\operatorname{arcctg} 3) =$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 3)}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}\cdot(\operatorname{arcctg}^3)}} = \frac{-3}{\sqrt{1+3^2}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

6-мисол. Ҳисобланг:

а) $A = \arccos(\cos 15)$; $B = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 20)$; $C = \arcsin(\cos 10)$.

Ечилиши.

а) $\frac{9\pi}{2} < 15 < 5\pi \Longrightarrow 0 < \frac{\pi}{2} < 15 - 4\pi < \pi \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow A = \arccos(\cos(15-4\pi)) = 15 - 4\pi;$$

б) $6\pi < 20 < \frac{13\pi}{2} \Longrightarrow 0 < 20 - 6\pi < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow B = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(20-6\pi)) =$

$$= 20 - 6\pi.$$

в) $3\pi < 10 < \frac{7\pi}{2} \Longrightarrow 0 < 10 - 3\pi < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 0 < 10 - 3\pi < \pi \Longrightarrow C =$

$= \arccos(\cos(10 - 3\pi)) = 10 - 3\pi$. Демак, $C = \arcsin(\cos 10) =$
$= \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos 10) = \frac{\pi}{2} - (10 - 3\pi)$, яъни $C = \frac{7\pi}{2} - 10$.

Топшириқлар. 1. Ҳисобланг:

а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\sin(\arcsin 0{,}8)$

в) $\cos(\arccos(-0{,}4))$;

г) $\cos\left(10\pi - \arccos\frac{7}{15}\right)$;

д) $\operatorname{tg}(15\pi - \operatorname{arctg} 1{,}6)$;

е) $\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;

ж) $\sin(42\pi - \arcsin 0{,}3)$;

з) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$.

2. Ҳисобланг:

а) $\sin\left(3\pi - 2\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

б) $\cos(3\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \arcsin 1)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

г) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

д) $\sin\left(\arccos\frac{1}{2} - \arcsin\frac{1}{2}\right)$;

е) $\operatorname{ctg}(\operatorname{ctg} 0 - \operatorname{arcctg} 0)$;

ж) $\cos\left(2\operatorname{arctg}(-1) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$;

з) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. Тенгликларни текширинг:

а) $2\operatorname{arctg} 1 = 3\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $3\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \arccos 0$;

в) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arcctg}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$;

г) $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{arctg}(-1) =$
$= -\arcsin 1$.

4. Тенгламани ечинг:

а) $\arcsin(x - 1) = \frac{\pi}{3}$;

б) $\arccos(x^2 - 1) = \frac{\pi}{4}$;

в) $\operatorname{arctg}(x^2 - 2x + 1) = \pi$;

г) $\operatorname{arcctg}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4}$.

5. Қайси бири катта:

а) $\cos(\operatorname{arctg}(-2))$ ми ёки $\sin(\operatorname{arctg}(-2))$ ми;

б) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{5}\right)$ ми ёки $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{40}{41}\right)\right)$ ми;

в) $\sin(\operatorname{arcctg} 2{,}1)$ ми ёки $\operatorname{tg}(\arcsin(-20/101))$ ми?

6. x аргументнинг қабул қилиш мумкин бўлган қийматларида қуйидагиларни ҳисобланг: (а $\sin(\operatorname{arcctg} x)$; б) $\sin(\operatorname{arctg} x)$; в) $\cos(\operatorname{arctg} x)$; г) $\cos(\operatorname{arcctg} x)$, д) $\operatorname{tg}(\arccos x)$; е) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)$; ж) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$; з) $\operatorname{ctg}(\arcsin x)$; и) $\operatorname{ctg}(\arccos x)$; к) $\operatorname{tg}(\arcsin x)$.

7. Функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $y = \arcsin(x^2 - 2x)$; б) $y = \sqrt{\arccos x}$; в) $y = \arcsin(\lg x)$;

г) $y = \arcsin\dfrac{1-2^x}{1+2^x}$; д) $y = \arcsin\dfrac{1}{1+x^2}$; е) $y = \operatorname{arctg}(\ln x)$.

8. Тенгламани ечинг.

а) $\arcsin\dfrac{3x}{5} + \arcsin\dfrac{4x}{5} = \arcsin x$;

б) $\operatorname{arctg}(2+\cos x) - \dfrac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(1+\cos x)$;

в) $\arcsin\dfrac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin\dfrac{1}{3} = \arcsin\sqrt{1-x}$;

г) $\operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(x+1) = \operatorname{arctg} 3x$.

38. Сонли кетма-кетликлар. Натурал сонлар тўпламида аниқланган бирор функциянинг қийматлари соҳаси *сонли кетма-кетлик* дейилади. $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ функциянинг қийматлари соҳаси $E(f)$ барча $f(n)(n \in \mathbf{N})$ кўринишдаги сонлардан ташкил топади. $x_n = f(n)$ шу кетма-кетликнинг *умумий ҳади* дейилади. Кетма-кетлик кўпинча (x_n) ёки $(f(n))$ шаклида белгиланади.

Масалан, $\mathbf{N}$ тўпламида аниқланган $f(x) = \dfrac{3}{x}$ функциянинг қийматлар соҳаси ушбу (чексиз)

$$3;\ \frac{3}{2};\ 1;\ \frac{3}{4};\ \frac{3}{5};\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{7};\ \ldots;\ \frac{3}{n};\ \ldots$$

сонлар кетма-кетлигидан иборат.

Таъриф. (x_n) ва (y_n) кетма-кетликлар *йиғиндиси* деб, шундай (z_n) кетма-кетликка айтиладики, унинг ҳар бир ҳади (x_n) ва (y_n) кетма-кетликларнинг бир хил номерли ҳадлари йиғиндисидан ташкил топади:

$$z_n = x_n + y_n,\ n \in \mathbf{N}.$$

Таъриф. (x_n) ва (y_n) кетма-кетликлар *кўпайтмаси* ва *бўлинмаси* деб, мос равишда шундай (u_n) ва (v_n) кетма-кетликларга айтиладики, уларнинг ҳар бир ҳадлари мос равишда $u_n = x_n y_n$, $v_n = \dfrac{x_n}{y_n}$ $(n \in \mathbf{N})$ каби аниқланади. Бўлинмада барча y_n ҳадлар ҳар бир n номер учун нолга айланмайди деб фараз қилинади.

Агар кетма-кетлик унинг умумий ҳадини кўрсатиш билан берилган бўлса, у *аналитик тарзда* берилган дейилади. Агар кетма-кетликнинг дастлабки бир нечта ҳадлари берилиб, унинг умумий ҳадини шу ҳадлари орқали ҳисоблаш қоидаси кўрсатилса, у ҳолда у *рекуррент* усулда берилган дейилади.

Таъриф. (x_n) сонли кетма-кетликнинг иккинчи ҳадидан

бошлаб ҳар бир ҳади ўзидан аввалги ҳадидан катта (кичик) бўлса, у ҳолда у *ўсувчи (камаювчи)* кетма-кетлик дейилади:

$$\forall n \in \mathbf{N},\ x_n < x_{n+1} \Longleftrightarrow (x_n)\text{—кетма-кетлик ўсувчи;}$$

$$\forall n \in \mathbf{N},\ x_n > x_{n+1} \Longleftrightarrow (x_n)\text{—кетма-кетлик камаювчи.}$$

Агарда ҳамма $n \in \mathbf{N}$ лар учун $x_n \leqslant x_{n+1}$ бажарилса, у ҳолда бу кетма-кетликни *камаймайдиган*, аксинча, $x_n \geqslant x_{n+1}$ бўлса, уни *ўсмайдиган* кетма-кетлик дейилади.

Топшириқ. $x_n = 2n + 1 + (-1)^{n+1}$ ва $y_n = \dfrac{2^{(-1)^n - 1}}{4^{n-1}}$ кетма-кетликларнинг мос равишда камаймайдиган ва ўсмайдиган эканлигини кўрсатинг.

(x_n) сонли кетма-кетлик учун шундай l ва L сонлари топилсаки, барча $n \in \mathbf{N}$ лар учун $l \leqslant x_n \leqslant L$ тенгсизлиги ўринли бўлса, уни *чегараланган кетма-кетлик* дейилади. l сонни кетма-кетликнинг *қуйидан чегараловчи*, L сонни эса *юқоридан чегараловчи* сон деб айтилади. Агар (x_n) кетма-кетлик учун бирор l сони топилсаки, барча $n \in \mathbf{N}$ лар учун фақат $l \leqslant x_n$ тенгсизлиги бажарилиши маълум бўлса, у ҳолда уни *қуйидан чегараланган кетма-кетлик* дейилади. Аксинча, бу кетма-кетлик учун бирор L сони топилсаки, барча $n \in \mathbf{N}$ лар учун фақат $x_n \leqslant L$ тенгсизлиги ўринли эканлиги маълум бўлса, бу кетма-кетлик *юқоридан чегараланган кетма-кетлик* дейилади.

Топшириқлар. 1. $x_{n+1} = \sqrt{1981 + x_n}$, $x_0 = 0$, $n \in \mathbf{N}$ кетма-кетлигининг ўсувчи ва юқоридан чегаралганлигини кўрсатинг.

2. $\cos x = a$, $|a| \leqslant 1$ тенглама илдизларидан тузилган кетма-кетликнинг ўсувчи ва юқоридан (қуйидан) чегараланмаганлигини кўрсатинг.

3. а) $a_n = 0{,}\underbrace{111\ldots1}_{n}$; б) $b_n = 2^{1-n}$; в) $c_n = \cos n + \sin n$; г) $d_n = 2^n \sin^2 n$; д) $p_n = 1 + 2 + \ldots + n$; е) $q_n = (-1)^n n + n$; ж) $t_n = \operatorname{tg} n$ $(n \in \mathbf{N})$ кетма-кетликнинг хоссалари (ўсиш-камайиши, чегараланганлиги) ни текширинг.

39. Арифметик прогрессия, унинг n-ҳади ва дастлабки n та ҳади йиғиндиси. Иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳади ўзидан олдинги ҳадга бир хил сонни қўшилганига тенг бўлган сонлар кетма-кетлиги *арифметик прогрессия* дейилади. Демак, арифметик прогрессиянинг ҳар бир ҳади ўзидан аввалги ҳаддан *айирма* деб аталувчи d сонга фарқ қилар экан:

$$x_{n+1} - x_n = d,\ n \in \mathbf{N}.$$

Шундай қилиб, берилган a ва d ларга кўра арифметик прогрессия ушбу кетма-кетликдан иборатдир:

$$a;\ a + d;\ a + 2d;\ a + 3d;\ \ldots,\ a + (n-1)d;\ \ldots$$

Агар $d > 0$ бўлса, арифметик прогрессия *ўсувчи* бўлади. У юқоридан чегараланмаган кетма-кетликка мисол бўла олади. Агар $d < 0$ бўлса, аксинча *камаювчи*, қуйидан чегараланмаган бўлади. Унинг n-ҳади формуласи қуйидагича аниқланади:

$$x_n = a + (n-1)d, \ n \in \mathbf{N}.$$

1-хосса. (x_n) арифметик прогрессиянинг x_l, x_m, x_p ва $x_q (l, m, p, q \in \mathbf{N})$ ҳадлари учун $l + m = p + q$ бўлса, у ҳолда $x_l + x_m = x_p + x_q$ тенглигининг бажарилиши ўринлидир.

2-хосса. (x_n) арифметик прогрессиянинг x_n-ҳади унинг x_{n-k} ва x_{n+k} ҳадларининг ўрта арифметик қийматига тенг:

$$x_n = \frac{x_{n-k} + x_{n+k}}{2}, \ k \leqslant n, \ k \in \mathbf{N}, \ n \in \mathbf{N}.$$

Теорема. *Арифметик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси биринчи ва n-ҳадлари йиғиндисининг ярмисини ҳадлар сони n га кўпайтирилганига тенг:*

$$S_n = \frac{x_1 + x_n}{2} n, \ n \in \mathbf{N}.$$

Исбот. Арифметик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндисини топиш учун қуйидагидек йўл тутамиз:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = S_n \\ x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + \ldots + x_2 + x_1 = S_n \end{array}\right\} +$$

$$(x_1 + x_n) + (x_2 + x_{n-1}) + \ldots + (x_{n-1} + x_2) + (x_n + x_1) = 2S_n.$$

Лекин қавслардаги $x_{n-k+1} + x_k$ каби ҳадларининг ҳар бири $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ ўз қиймати жиҳатидан $x_n + x_1$ йиғиндига тенг (1-хоссага асосан). Бундай группаланган қавслар ҳаммаси бўлиб n та. Демак, бу ердан $2S_n = n(x_1 + x_n)$. Изланаётган формула бу ердан осон чиқиб келади.▶

Натижа. Арифметик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси қуйидагича аниқланади:

$$S_n = \frac{2x_1 + (n-1)d}{2} n$$

Топшириқлар. 1. Агар $x_3 + x_6 + x_9 + x_{12} + x_{15} + x_{18} = 60$ бўлса, у ҳолда (x_n) арифметик прогрессиянинг 20 та ҳади йиғиндисини топинг.

2. Бирор кетма-кетлик $x_m - x_n = d(m-n)$, $m, n \in \mathbf{N}$, $m > n$ шарт билан берилган. Унинг ҳадлари арифметик прогрессия ташкил қилишини исботланг.

3. Арифметик прогрессия $x_{n+1} = x_n + d$, $n \in \mathbf{N}$ каби рекуррент қоида билан берилишини исботланг.

4. $x_1 + x_5 = 60$; $x_2 x_3 = 60$ эканлигидан фойдаланиб (x_n) арифметик прогрессияни топинг.

5. $1+2+3\ldots+1000$ нинг йиғиндисини ҳисобланг.

6. $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ лар арифметик прогрессия ташкил қилса, a^2, b^2, c^2 лар ҳам арифметик прогрессия ташкил қилишини исботланг.

7. S_n, S_m, S_k лар арифметик прогрессиянинг n та, m та, k та ҳадлари йиғиндиси бўлса, $\frac{S_n}{n}(m-k)+\frac{S_m}{m}(k-n)+\frac{S_k}{k}(n-m)=0$ ни исботланг.

40. Геометрик прогрессия, n-ҳади ва дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси. Биринчи ҳади нолдан фарқли, иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳади аввалги ҳадини нолга тенг бўлмаган бир хил сонга кўпайтирилганига тенг бўлган сонлар кетма-кетлиги *геометрик прогрессия* дейилади. Демак, геометрик прогрессия шундай сонлар кетма-кетлиги эканки, унинг ҳар бир ҳадини ўзидан бир номер аввалги ҳадига нисбати *махраж* деб аталувчи q—ўзгармас сонга тенг бўлар экан:

$$x_{n+1}:\ x_n = q,\ n \in \mathbf{N}.$$

Берилган a ва q ларга асосан геометрик прогрессия ушбу кетма-кетликдан иборат:

$$a;\ aq;\ aq^2;\ aq^3;\ \ldots;\ aq^{n-1};\ \ldots \qquad (1)$$

Агар $|q| \leqslant 1$ бўлса, геометрик прогрессия чегараланган кетма-кетликдир. Аксинча, $|q| > 1$ бўлса, у чегараланмаган. Шунингдек, $q < 0$ бажарилса, геометрик прогрессия (ишораси галма-гал алмашадиган ҳадли) ўсувчи ҳам, камаювчи ҳам бўла олмайди. Масалан, $a = 2$, $q = -3$ бўлса, у ҳолда ушбу кетма-кетлик фикримизнинг далилидир: 2; -6; 18; -54; 162; ...

Агар $q > 0$, $\neq 1$ бўлса, у ҳолда геометрик прогрессия доим ё ўсувчи, ё камаювчи бўлади. Масалан, $a = -2$, $q = 3$ бўлса, у ҳолда -2; -6; -18; -54; -162; ... каби камаювчи кетма-кетлик ҳосил бўлади.

$0 < |q| < 1$ бўлган ҳолда, (1) *чексиз камаювчи геометрик прогрессия* дейилади. Геометрик прогрессиянинг n ҳади формуласи

$$x_n = aq^{n-1}$$

1-хосса. Мусбат ҳадли (x_n) — геометрик прогрессиянинг x_l, x_m, x_p ва x_q (l, m, p, $q \in \mathbf{N}$) ҳадлари учун $l+m=p+q$ тенглик бажарилса, у ҳолда $x_l x_m = x_p x_q$ шаклдаги тенглик ўринлидир.

2-хосса. Мусбат ҳадли (x_n) геометрик прогрессиянинг n-ҳади x_n унинг x_{n-k} ва x_{n+k} ҳадларининг ўрта геометрик қийматига тенг: $x_n = \sqrt{x_{n-k}\cdot x_{n+k}}$, $k<n$, k, $n \in \mathbf{N}$.

Теорема. *Геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси*

$$S_n = x_1\frac{q^n-1}{q-1},\ n \in \mathbf{N}$$

кўбидир.

Исбот. Геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндисини ушбу икки хил тартибда ёзайлик:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = S_n,$$
$$qx_1 + qx_2 + qx_3 + \ldots + qx_{n-1} + qx_n = qS_n.$$

Агар иккинчи йиғиндисидан биринчисини айириб, айирмада $x_k q = x_{k+1} (k = 1, 2, \ldots)$ эканлигидан фойдаланса к, натижа қуйидагича бўлади:

$$qx_n - x_1 = qS_n - S_n.$$

Лекин $x_n = x_1 q^{n-1}$ бўлгани учун

$$x_1(q^n - 1) = (q - 1)S_n.$$

Бундан $S_n = \frac{x_1(q^n - 1)}{q-1}$ формула келиб чиқади. ▶

Эслатма. Бу формула $|q| < 1$ бўлганда $S_n = x_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ шаклда ёзилиши қулайликлар туғдиради.

Топшириқлар. 1. Геометрик прогрессиянинг ҳадлари: a_1, a_2 ва a_4 лар арифметик прогрессия ташкил қилса, (a_n) геометрик прогрессияни тузинг.

2. Агар (x_n) геометрик прогрессия учун q унинг махражи бўлса, $\frac{x_p}{x_r} = q^{p-r}$ эканлигини исботланг.

3. $x_{n+1} = x_n q$, $n \in \mathbf{N}$ рекурренг қонда билан берилган кетма-кетлик геометрик прогрессия бўладими?

4. $a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}$ $(n \in \mathbf{N})$ йиғиндининг ҳадлари геометрик прогрессия ташкил қилади. Шу йиғиндини топинг.

5. Геометрик прогрессиянинг x_1, x_2 ва x_3 ҳадлари йиғиндиси 93 бўлиб, $x_1 - 48$, x_2, x_3 лар арифметик прогрессия ташкил қилади. Шу сонларни топинг.

6. (x_n) геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳади йиғиндиси S бўлса, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = \frac{S}{x_1 x_n}$ эканлигини исботланг.

7. $a_1, a_2, a_3, \ldots$; $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ва $c_1, c_2, c_3, \ldots$ кетма-кетликларнинг ҳар бири геометрик прогрессия ташкил қилса, $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, $a_3b_3c_3, \ldots$ лар ҳам геометрик прогрессия ташкил этишини исботланг.

41. Чексиз камаювчи геометрик прогрессия ҳадлари йиғиндиси. Ушбу геометрик прогрессия берилган бўлсин:

$$a,\ aq,\ aq^2, \ldots, aq^n, \ldots \qquad (1)$$

Агар $|q| < 1$ бўлса, бу кетма-кетлик ҳадлари модули жиҳатидан камаювчи бўлади: $|a| > |aq| > |aq^2| > \ldots > |aq^n| > \ldots$ Чунки n чексиз ортганда q^n чексиз кичик миқдордир: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Шунинг учун (1) кетма-кетлик *чексиз камаювчи геометрик прогрессия* дейилади. Ушбу йиғинди

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1},\ n \in \mathbf{N}$$

чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳади йиғиндисидан иборат. Агар ҳар бир $n \in N$ учун тузилган ушбу йиғиндилар кетма-кетлиги $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ чегаралланган ва $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ лимит мавжуд бўлса, у ҳолда уни *чексиз камаювчи геометрик прогрессия йиғиндиси* дейилади:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\,\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Лекин $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ бўлганлиги учун бу лимит доимо мавжуд:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S_\infty = \frac{a}{1-q}.$$

Шундай қилиб, $-1 < q < 1$ бўлганда:

$$\frac{b}{1-q} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$$

Мисол. (Чексиз камаювчи геометрик прогрессия йиғиндисининг татбиқи.) 6,28(18) рационал сон даврий ўнли каср орқали берилган. Уни $\frac{m}{n}$ кўринишдаги оддий касрга айлантиринг.

Ечилиши. Берилган сонни қуйидаги кўринишда чексиз камаювчи геометрик прогрессия йиғиндиси деб қараш мумкин:

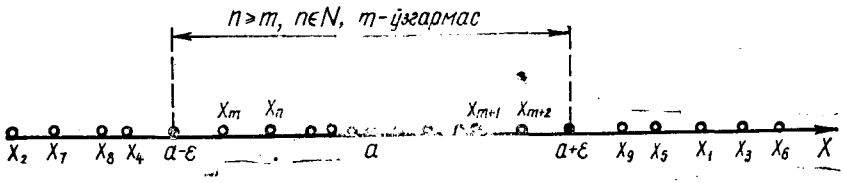
$$6{,}28181818\ldots = 6{,}28 + \frac{18}{10^4} + \frac{18}{10^6} + \ldots + \frac{18}{10^{2n+2}} + \ldots.$$

Бу ерда $a = \frac{18}{10000}$, $q = \frac{1}{100}$ десак, у ҳолда

$$6{,}28(18) = \frac{628}{100} + \frac{a}{1-q} = \frac{628}{100} + \frac{\frac{18}{10000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{691}{110}.$$

Топшириқ. Ушбу даврий ўнли касрларни оддий касрларга айлантиринг: а) 3,10 (12); б) 0, (1); в) 3, (3); г) 4, (4); д) 0, (25); е) 5,3 (13); ж) 5,5 (15); з) 4,78 (9); и) 51,14 (9).

42. Сонли кетма-кетликнинг лимити. (x_n) кетма-кетлиги берилган бўлсин. Ҳар қандай мусбат ε сони учун шундай ўзгармас натурал m сони топилсаки, барча $n > m$ номерлар учун $|x_n - a| < \varepsilon$ бажарилса, у ҳолда a сони (x_n) *кетма-кетликнинг лимити* дейилади ва қисқача $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ деб ёзилади. Баъзида $x_n \to a$ деб ҳам ёзилиши мумкин.



42- шакл.

Агар (x_n) бирор a лимитга эга бўлса, бу кетма-кетлик a га *яқинлашади* дейилади. Ҳеч қандай лимитга эга бўлмаган кетма-кетликни *узоқлашувчи кетма-кетлик* дейилади.

Координаталар тўғри чизиғида, сонли кетма-кетликнинг ҳар бир ҳадига мос келувчи нуқталарни кўрсатиш билан, у геометрик тасвирланади. a лимитга эга бўлган x_n кетма-кетликка Ox ўқида ихтиёрий олинган мусбат ε сони учун $]a-\varepsilon;\ a+\varepsilon[$ атроф мавжуд бўлиб, кетма-кетликнинг бирор m номердан катта бўлган номерли ҳадларининг барчаси:

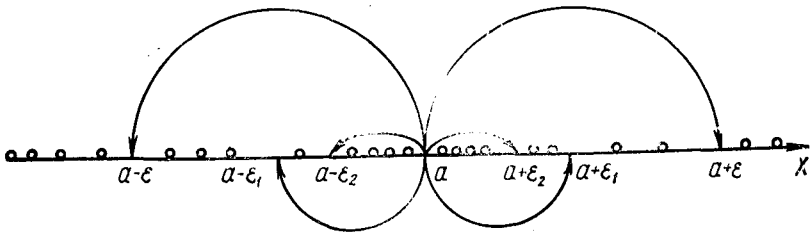
$$x_m x_{m+1},\ x_{m+2},\ x_{m+3},\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

шу атроф ичида бўлади (42- шакл). Лекин чекли сондаги x_1, $x_2, \ldots, x_{m-1}$ кетма-кетлик ҳадлари шу атрофга тушмай қолади. Агар ε нинг ихтиёрийлигидан фойдаланиб, энди уни яна ҳам кичикроқ ε_1 қилиб танлаб олсак, у ҳолда бу $\varepsilon_1 (0 < \varepsilon_1 < \varepsilon)$ учун $]a-\varepsilon_1;\ a+\varepsilon_1[$ каби торроқ атроф ҳосил бўладики (43- шакл), шу янги ε_1 учун топилган ўзгармас m_1 номердан катта номерли ушбу

$$x_{m_1} x_{m_1+1},\ x_{m_1+2},\ x_{m_1+3},\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

ҳадлар шу янги атроф ичига тушади. Бу атроф ташқарисида қолган $x_1, x_2, \ldots, x_{m_1-1}$ ҳадлар сони чеклидир. Лекин $m \leqslant m_1$ тенгсизлик бажарилади. Шундай қилиб, a нуқтанинг ε-атрофи қанчалик кичик бўлмасин, a нуқта атрофида *кетма-кетликнинг чексиз кўп ҳади* топилаверади.

Лимитлар назариясидан ўқувчилар учун зарур ҳисобланган баъзи тушунчалар исботсиз берилади.



43- шакл.

1-теорема (Лимитнинг ягоналиги ҳақида.) *Агар* (x_n) *кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у ҳолда унинг лимити ягонадир.*

Яқинлашувчи кетма-кетликлар лимитлари устида амаллар.

2-теорема. *Агар* (x_n) *ва* (y_n) *кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда* (x_n+y_n) *йиғинди кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва унинг лимити қўшилувчи кетма-кетликлар лимитлари йиғиндисига тенг:*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n.$$

3-теорема. *Агар* (x_n) *ва* (y_n) *кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда* (x_ny_n) *кўпайтма кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва унинг лимити ҳар бир кўпайтувчилар лимитларининг кўпайтмасига тенг:*

$$\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n.$$

4-теорема. *Агар* (x_n) *ва* (y_n) *кетма-кетликлар ҳам яқинлашувчи, шу билан бирга* (y_n) *кетма-кетлик нолдан фарқли лимитга эга бўлса, у ҳолда* $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ *кетма-кетлик яқинлашувчи бўлади ва унинг лимити сурат лимитининг махраж лимитига нисбатига тенг:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}.$$

1-натижа. *Ўзгармас сонни лимит белгисидан ташқарига чиқариш мумкин:*

$$\lim_{n\to\infty}cx_n=c\lim_{n\to\infty}x_n,\ c\in\mathbf{R}.$$

5-теорема. (x_n) *кетма-кетлик яқинлашиши учун унинг чегараланган бўлиши зарурдир.*

6-теорема (Вейерштрасс теоремаси.) *Агар кетма-кетлик ўсувчи (камаювчи) ва юқоридан (қуйидан) чегараланган бўлса, у ҳолда бу кетма-кетлик албатта яқинлашувчидир.*

Мисол. $x_1=0,\ x_{n+1}=\frac{1}{4}(2x_n+5),\ n\in\mathbf{N}$ рекуррент формула билан берилган (x_n) кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Ечилиши. Бу кетма-кетликнинг иккинчи номеридан бошлаб кейинги ҳадларининг барчаси мусбат эканлигига шубҳа йўқ. Агар умумий ҳадни $x_{n+1}=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}x_n$ каби алмаштириб ёзиб олсак, унинг ўсувчи эканлигини бевосита текшириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})=$ $=\frac{1}{2^2}(x_{n-1}-x_{n-2})=\ldots=\frac{1}{2^n}(x_1-x_0)>0$. Энди унинг юқоридан 3 билан

чегаралангaнини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, у 3 билан чегараланмаган бўлсин. У ҳолда бирор m номердан бошлаб барча n лар учун $x_{n+1}-3 \geqslant 0$ бўлиши керак. Яъни, бу $\frac{1}{4}(2x_n+5)-3=\frac{x_n-3{,}5}{2}$ деган сўз. Шундай қилиб, x_n ҳад барча $n>m$ лар учун 3,5 дан катта экан. Ҳосил бўлган бу фикр (x_n) нинг ўсувчи эканлигига зид мулоҳаза бўлди. Демак, бу зиддиятлик $x_{n+1}<3$ эканлигини исботлайди. Вейерштрасс теоремасига кўра (x_n) кетма-кетлик бирор a лимитга эга. У ҳолда $\lim x_n=a$. Лекин бу лимит иккинчи томондан кетма-кетликнинг рекуррент формуласини ҳам қаноатлантириши лозим:

$$a=\frac{1}{4}(2a+5) \Longrightarrow a=2{,}5$$

Бу ерда Вейерштрасс теоремаси лимитни ҳисоблаш усулини умуман кўрсатмаса ҳам, лекин кетма-кетлик лимитининг мавжудлигини мантиқий фикрлаб, унинг аввалдан борлигини билиб олишга имконият яратди.

Топшириқлар. 1. Ушбу умумий ҳади билан берилган кетма-кетликларнинг ўсиши (камайиши) ва чегаралангaнлигини текшириб, лимитларини ҳисобланг: а) $x_n=\frac{n^2}{2^n}$; б) $y_n=\sqrt{5+y_{n-1}}$; $y_0=\sqrt{5}$; в) $z_n=\frac{10n+9}{2n}$; г) $t_n=\frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+2}$; д) $p_n=\frac{2^n+1}{3^n}$; е) $q_n=\frac{2n-1}{n+1}$.

2. (b_n) кетма-кетлик $b_1=4$, $b_{n+1}=2b_n-1$, $n \in N$ рекуррент формула билан берилган. Унинг умумий ҳадини топинг. Унинг лимити борми?

3. Ҳисобланг: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n}{3^n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

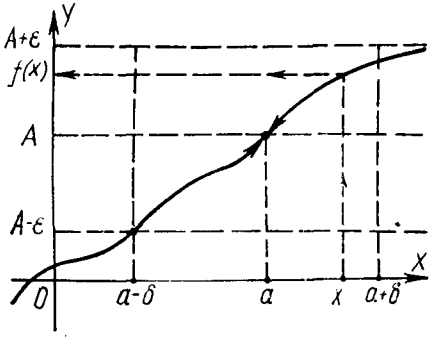
43. Функциянинг лимити. Фараз қилайлик, $y=f(x)$ функция бирор $D(f)$ аниқлаш соҳасига эга бўлсин. Аввал ихтиёрий танлаб олинган мусбат ε сони учун, шундай $\delta>0$ сони топилсаки, $0<|x-a|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ва функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f)$ га тегишли бўлган барча x лар учун $|f(x)-A|<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x аргумент a га интилганда A лимитга эга дейилади ва

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

каби ёзилади.

Таърифдан кўринадики, $x=a$ нуқта $D(f)$ соҳага тегишли бўлиши шарт эмас.

44- шаклда функция лимити таърифининг геометрик маъноси ёритилган. Яъни x аргументнинг қиймати f функциянинг аниқланиш соҳаси таркибидаги $]a-\delta;\ a[$



44- шакл.

$U]a;\ a+\delta[$ каби атроф ичида бўлганда, шу аргумент функцияси қиймати $f(x)$ нинг A сонидан айирмаси модули жиҳатидан ε дан кам қийматга фарқ қилади. x ўзгарувчи a сонига қанчалик яқин келтирилса, у ҳолда $|f(x)-A|$ фарқ ҳам шунчалик камаяди.

1-мисол. Ушбу функция берилган бўлсин: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$. У ҳолда бу функция $x_0=0$ нуқтадан бошқа ҳамма ерда аниқланган: $D(f)=]-\infty;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$. Лекин бу функция $x\to 0$ бўлганда 1 га тенг лимитга эга. (Бу қуйидаги А. 44 п. 107-бетда кўрсатилади.) Яъни ихтиёрий $\varepsilon<0$ учун шундай $\delta<0$ сони топиладики, барча $0<|x|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x лар учун

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринлидир.

Лимитга эга бўлган функциялар устида амалларга доир асосий теоремаларни исботсиз келтирамиз.

1-теорема. *Агар x аргумент a га интилганда $f(x)$ функция бирор A лимитга эга бўлса, у албатта ягонадир.*

2-теорема. *Агар x аргумент a га интилганда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири лимитга эга бўлса, у ҳолда уларнинг йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмасидан тузилган функциялар ҳам лимитга эга ва*

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x);$$

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x)$$

тенгликлар ўринлидир.

3-теорема. *Агар x аргумент a га интилганда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири лимитга эга бўлса ва $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$ бажарилса, у ҳолда $\frac{f(x)}{g(x)}$ функция ҳам лимитга эга ва у сурат лимитининг махраж лимитига нисбатига тенг:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}.$$

Таъриф. Агар x аргумент a га интилганда $f(x)$ функциянинг лимити нолга тенг бўлса, у ҳолда уни *$x\to a$ бўлганда чексиз кичик миқдор* дейилади.

Натижа. Агар x аргумент a га интилганда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири чексиз кичик миқдор бўлса, у ҳолда уларнинг йиғиндисидан, айирмасидан ва кўпайтмасидан тузилган функциялар ҳам $x\to a$ бўлганда чексиз кичик миқдорлардир.

Эслатма. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ лимитнинг сурат ва махражи чексиз кичик бўлса, у ҳолда натижа чексиз кичик миқдор бўлиши шарт эмас. Бу фикр тасдиғи қуйироқдаги 3-мисолда кўрилади.

2-мисол. x ўзгарувчи нолга интилганда қуйидаги функцияларга 2-теоремани татбиқ этиб, унинг тўғрилигини текширинг:

$$f(x)=\frac{\sin x}{x};\ g(x)=x\sqrt{1+x}.$$

Текширилиши. Берилган функциялар бир вақтда $D=[-1;\ 0[\cup]0;+\infty[$ оралиқда аниқланган ва бу функцияларнинг лимитлари мавжуд, яъни

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1;\ \lim_{x\to 0}g(x)=0.$$

У ҳолда улар кўпайтмаси функцияси чексиз кичик миқдордир:

$$\lim_{x\to 0}f(x)g(x)=\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x}\sin x=0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0}f(x)\lim_{x\to 0}g(x)=1\cdot 0=0.$$

Шунингдек,

$$\lim_{x\to 0}(f(x)\pm g(x))=1\pm 0=1 \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0}f(x)\pm\lim_{x\to 0}g(x)=1\pm 0=1.$$

Бу 2-теорема тасдиғининг тўғрилигидандир.

3-мисол. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x^2-12}{\sqrt{x+2}-2}$ ни ҳисобламоқчи бўлсак, унинг сурат ва махражи $x\to 2$ бўлганда чексиз кичик миқдорлигини кўрамиз. Икки чексиз кичик миқдорлар нисбати яна чексиз кичик миқдор бўлиши шарт эмаслигини шу мисолда текширинг.

Текширилиши.

$$x^3+x^2-12=(x-2)(x^2+3x+6),\ \sqrt{x+2}-2=\frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}$$

алмаштиришдан сўнг

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+3x+6)}{x-2}(\sqrt{x+2}+2)=\lim(x^2+3x+6)(\sqrt{x+2}+2)=64$$

Топшириқлар. 1. Ҳисобланг:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2+5x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt[3]{x^2-1}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x-\sin 3x}{27x^3}$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$; е) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2x}$.

2. Лимит таърифига кўра ушбу тенгликларни текширинг:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{x+1}=\dfrac{3}{2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-1}{x}=3$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{9}{4}$.

44. Функциянинг узлуксизлиги Айтайлик, $y=f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f)=]a;\ b[$ оралиқдан иборат бўлсин. Агар $x_0\in]a;\ b[$ бўлса, у ҳолда бу нуқтада f функциянинг аниқ $f(x_0)$ қиймати мавжуд. Лекин ушбу $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$

лимитнинг қиймати $f(x_0)$ га тенг бўлиши шарт эмас. Агар бу лимит мавжуд бўлиб, бирор A сонга тенг бўлса, у ҳолда ихтиёрий ε мусбат сон учун шундай мусбат δ сони топиладики, $0<|x-x_0|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x қийматлар учун $|f(x)-A|<\varepsilon$ ўринли бўлади. Бу вақтда A лимит $f(x_0)$ га тенг ёки тенг бўлмаслиги мумкин. Борди-ю, $A=f(x_0)$ тенглик бажарилса, бу f функциянинг $x=x_0$ нуқтада *узлуксизлик* хоссасини беради.

1-таъриф. Агар x аргумент x_0 га интилганда f функциянинг $f(x)$ қаймати ҳам $f(x_0)$ га интилса, у ҳолда f функцияни $x=x_0$ *нуқтада узлуксиз* дейилади; яъни

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} f \text{ функция} \\ x_0 \text{ нуқтада} \\ \text{узлуксиз} \end{array}}$$

Шундай қилиб, f функциянинг $x=x_0$ нуқтада узлуксиз эканлигини билиш учун аввал $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ни ҳисоблаймиз. Агар у мавжуд бўлса, чиққан A лимитнинг $f(x_0)$ га тенглигини текширамиз. Агар аксинча, бу тенглик бажарилмаган бўлса, яъни

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\neq f(x_0), \tag{1}$$

у ҳолда f функция x_0 *нуқтада узилишга эга* дейилади. Ўзўзидан маълумки, агар $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ лимитнинг ўзи мавжуд бўлмаса ҳам f функция $x=x_0$ нуқтада узилишга эга, чунки (1) нинг чап томони маъносиз, ўнг томони $f(x_0)$ га тенг.

Функциянинг $x=x_0$ нуқтада узлуксиз эканлигининг таърифини унга тенг кучли ушбу таъриф билан алмаштирса ҳам бўлади.

2-таъриф. Ихтиёрий олинган кичик мусбат ε сон учун шундай δ мусбат сони топилсаки, $|x-x_0|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар учун $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция $x=x_0$ *нуқтада узлуксиз* дейилади.

3-таъриф. Агар f функция $]a;\ b[$ оралиқда аниқланган ва ҳар бир $x_0\in\,]a;\ b[$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда f функция $]a;\ b[$ *оралиқда узлуксиз* функция деб аталади.

$]a;\ b[$ оралиқда f функция узлуксиз бўлса, функциянинг шу оралиқда узлуксизлик хоссасининг геометрик маъноси шуни билдирадики, унинг $]a;\ b[$ оралиқда чизиладиган графиги узилмайди. Борди-ю функция $]a;\ b[$ оралиқнинг бирор x_0 нуқтасида узилишга эга бўлса, у ҳолда унинг графиги худди шу нуқтага келганда узилади.

Функциянинг нуқтада узлуксизлигининг таърифи, 2-таърифда кўрсатилганидек, функциянинг лимити таърифи сингари берилиши мумкин бўлганлиги учун функция лимитининг А. 43 п. 102 -бетда келтирилган (1), (2) ва (3) теоремалари асосида ушбу муҳим натижаларни айтиш мумкин:

1 натижа. f ва g функциялар $]a; b[$ оралиқда аниқланган ва уларнинг ҳар бири бирор $x_0 \in]a; b[$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ ва $\frac{f}{g}$ функциялар ҳам $x=x_0$ нуқтада узлуксиздир. (Бу ерда $\frac{f}{g}$ бўлинма функция учун $g(x_0) \neq 0$ бўлиши шарт.)

2-натижа. f ва g функциялар $]a; b[$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ функциялар ҳам шу оралиқда узлуксиз (охирги $\frac{f}{g}$ бўлинма функцияда $g(x)$ функция $]a; b[$ оралиқнинг ҳеч қайси нуқтасида нолга айланмайди деган шартда) бўлади.

3-натижа. Агар f функция $x=x_0$ нуқтада узлуксиз бўлса ва g функция $y=y_0$ нуқтада узлуксиз бўлса (бу ерда $y_0 = f(x_0)$), у ҳолда $g \circ f$ мураккаб функция ҳам $x=x_0$ нуқтада узлуксиздир:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)).$$

4-натижа. Барча $y=ax^2+bx+c$, $y=ax^n (n \in \mathbf{Z})$, $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, $y=a^x$, $y=\log_a x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ каби функциялар ўз аниқланиш соҳаларининг ҳар бир нуқтасида узлуксиздир.

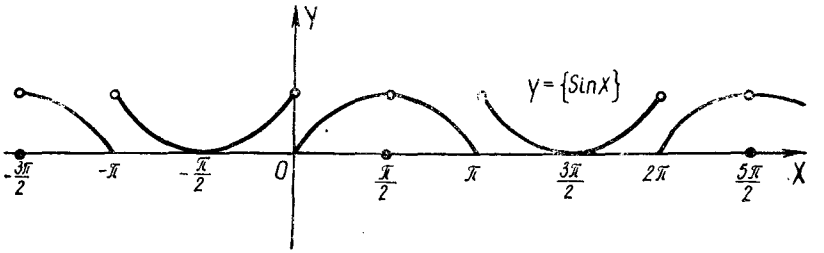
Мисол. $f(x)=\{\sin x\}$ функциянинг узлуксизлигини текширинг.

Бу ерда $\{\sin x\}$ нинг маъноси $\sin x$ қийматнинг тўғри каср қисмини билдиради:

$$\{\sin x\} = \begin{cases} \sin x, \text{ агар } 0 \leqslant \sin x < 1 \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } \sin x = 1 \text{ бўлса,} \\ 1+\sin x, \text{ агар } -1 < \sin x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Текширилиши. Функциянинг нуқтада узлуксиз бўлишининг ушбу $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ шартини $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ва $x_1 = \pi$ нуқталарда текшириб кўрайлик (45-*а* шаклга қаранг).

1) Дастлаб, $f(x)$ функциянинг $x_0 = \frac{\pi}{2}$ нуқтадаги киймати топилади: $f(x_0) = \left\{\sin \frac{\pi}{2}\right\} = 0$. Сўнг бу қиймат $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$ билан таққосланади. Натижада уларнинг ўзаро тенг эмаслиги маълум бўлади:



45-*а* шакл.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \{\sin x\} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1.$$

2) Шунингдек, $f(x_1)$ аниқ сонга тенг бўлса ҳам, яъни $f(x_1) = \{\sin\pi\} = \sin\pi = 0$, лекин ушбу лимит

$$\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi} \{\sin x\}$$

мавжуд эмас, чунки $x \to \pi$ каби интилиш π нуқтага чапдан бажарилса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to\pi} f(x) = \sin\pi = 0$, агар аксинча $x \to \pi$ интилиш π нуқтага ўнгдан бажарилса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to\pi} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi} (1 + \sin x) = 1 + \sin\pi = 1$. Демак, $\lim\limits_{x\to\pi} f(x) \neq f(\pi)$ экан.

Шундай қилиб, бу функция барча $x'_k = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x''_k = \pi k$ $(k \in Z)$ нуқталарда узилишга эга, бошқа ҳамма нуқталарда узлуксиздир.

Топшириқлар: 1. Ушбу $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларни $x_0 = 0$ нуқтада мос равишда узлуксиз ва узилишга эгалигини таърифга кўра текширинг:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0, \\ 0, & \text{агар } x = 0, \end{cases} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & \text{агар } x \neq 0, \\ 1, & \text{агар } x = 0. \end{cases}$$

2. $y = \arcsin(\sin x)$ ва $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ лар ўз аниқланиш соҳасида узлуксизми?

Масала. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{агар } x \neq 0, \\ 1, & \text{агар } x = 0 \end{cases}$

функциянинг узлуксизлигини текширинг.

Ечилиши. Бунинг учун ушбу лемма ва теорема исботи берилади. Масала ечими эса улардан хулоса тарзида чиқарилади.

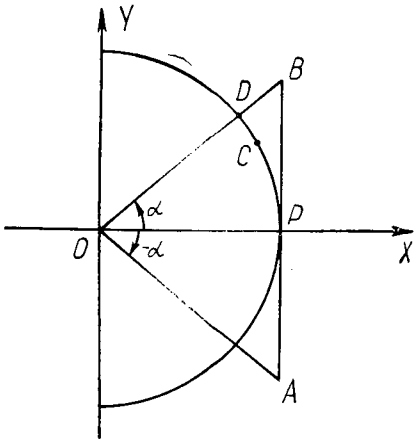
Лемма. Агар $\alpha \in D_0 = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ бўлса, у ҳолда ушбу

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$$

тенгсизлик ўринлидир.

Исбот. O марказли бирлик айлана билан OAB тенг ёнли учбурчак (45-*б* шаклдагидек) чизилган. Унда OPB тўғри бур-

чакли учбурчак ясасак, у O марказий бурчак ҳосил қилади ва $|OP|=1$. S_{OPD}, S_{OPB} (учбурчаклар юзалари) ва S_{OPCD} (секторнинг юзи) ни (Г. 32 п. 204-бетга қаранг) таққосласак, шаклдан $S_{OPD}<S_{OPCD}<$ $<S_{OPB}$ га эга бўламиз. $S_{OPD}=\frac{1}{2}|OP|\cdot|OD|\cdot\sin\alpha=$ $=\frac{1}{2}\sin\alpha$, $S_{OPCD}=\frac{1}{2}\alpha$, $S_{OPB}=$ $=\frac{1}{2}|OP||PB|=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$ эканлигидан ушбу қўш тенгсизлик



45-*б* шакл.

$$\frac{1}{2}\sin\alpha<\frac{1}{2}\alpha<\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha \Longrightarrow \sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha$$

келиб чиқади. ▶

Теорема. *Ушбу лимит ўринлидир*:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Исбот. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ учун лемма тенгсизлигидан

$$1<\frac{\alpha}{\sin\alpha}<\frac{1}{\cos\alpha} \quad \text{ёки} \quad 0<1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}<1-\cos\alpha$$

келиб чиқади. Аммо $y=\cos x$ функция $x=0$ нуқтада узлуксиз эди, яъни ҳар қандай $\varepsilon>0$ учун шундай $\delta>0$ топиладики, бунда

$$|0-\alpha|<\delta \Longrightarrow |\cos 0-\cos\alpha|<\varepsilon$$

ўринлидир. Шунга кўра, $0<\alpha<\delta$ учун

$$\left|1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right|<|\cos 0-\cos\alpha|<\varepsilon$$

бажарилади. Демак, $f(x)$ функция $\left|0;\frac{\pi}{2}\right[$ да узлуксиз экан. Аммо $f(-\alpha)=f(\alpha)$ каби жуфтлик шарти бажарилгани учун уни $\left|-\frac{\pi}{2};0\right[$ да ҳам узлуксиз дейиш мумкин. Демак, бу теорема тасдиғи ва $f(x)$ функциянинг $x_0=0$ нуқта атрофида узлуксизлиги тўла исбот бўлади. ▶

Хулоса. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{агар } x\neq 0,\\ 1, & \text{агар } x=0\end{cases}$ функция **R** да узлуксиздир.

Топшириқ. Лимитларни ҳисобланг:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 10x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{2\pi-2x}{\sin(\pi-x)}$.

45. Функциянинг ҳосиласи. Фараз қилайлик, $y=f(x)$ функция бирор $D(f)=]a;\ b[$ оралиқда аниқланган бўлсин. Шу оралиққа тегишли x нинг бирор x_0 қийматини аргументнинг ундан фарқли x қийматидан айириб ҳосил қилинган $x-x_0$ айирма x аргументнинг x_0 *нуқтадаги орттирмаси* деб айтилади ва $\Delta x=x-x_0$ деб белгиланади.

Демак, $x_0\in D(f)$, $x=x_0+\Delta x\in D(f)$ бўлгани учун бу ерда ушбу шарт бажарилади:

$$[x_0;\ x_0+\Delta x]\subset D(f),\ \Delta x>0;$$
$$[x_0+\Delta x;\ x_0]\subset D(f),\ \Delta x<0.$$

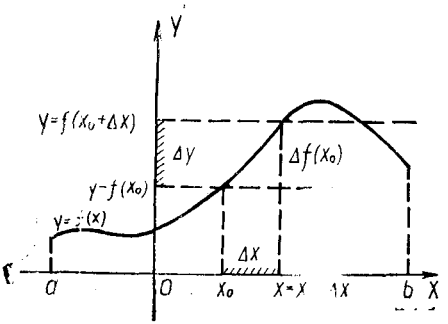
f функциянинг $x=x_0+\Delta x\in D(f)$ нуқтадаги қийматидан унинг x_0 нуқтадаги қийматининг айирмаси f функциянинг x_0 *нуқтадаги орттирмаси* дейилади ва бу айирма қисқача $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ ёки $\Delta y=y-y_0$ деб белгиланади (46- шакл). Функция орттирмаси $\Delta f(x_0)$ ни тайин x_0 нуқтадаги Δx аргумент орттирмасининг функцияси деб қараса бўлади.

Ушбу

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

ифода $]a;\ x_0[\cup]x_0;\ b[$ каби соҳанинг ҳар бир $x=x_0+\Delta x$ $(\Delta x\neq 0)$ нуқтасида аниқланган. Бу нисбатда x аргумент x_0 га интилганда, яъни Δx орттирма нолга интилганда қуйидаги лимит

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$



46- шакл.

мавжуд бўлса, бу лимит функциянинг x_0 *нуқтадаги ҳосиласи дейилади* ва $f'(x_0)$ деб белгиланади:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$
$$=f'(x_0).$$

Баъзида ҳосилани $y'(x_0)$, y'_{x_0}, $f'(x)\big|_{x=x_0}$ каби белгилашлар ҳам учраб туради. Функция бу вақтда $x=x_0$

нуқтада ҳосилага эга ёки x_0 *нуқтада дифференциалланувчи* деб ҳам аталади.

Агар f функция $D(f) =]a; b[$ оралиқнинг ҳар бир нуқтасида ҳосилага эга бўлса, у ҳолда f функция $]a; b[$ *оралиқда дифференциалланувчи* деб аталади. Ҳар бир $x_0 \in]a; b[$ сонга $f'(x_0)$ сонини мос қўйиб, $]a; b[$ да аниқланган функцияни ҳосил қилиш мумкин. Бу функция *f функциянинг (шу оралиқдаги) ҳосиласи* дейилади ва f' ёки $f'(x)$ каби белгиланади. Функциянинг ҳосиласини топиш, уни дифференциаллаш дейилади.

Мисол. Ҳосила таърифига асосан $y = \operatorname{tg}^2 x$ функциянинг $x_0 = \frac{\pi}{4}$ нуқтадаги ҳосиласини топинг.

Ечилиши. $y(x_0) = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} = 1$, $y(x_0 + \Delta x) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \Delta x\right)$ бўлганлиги учун $x_0 = \frac{\pi}{4}$ нуқтадаги функция орттирмаси

$$\Delta y(x_0) = \Delta y = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \Delta x\right) - 1$$

эканлигини топамиз. Унинг аргумент орттирмасига нисбати:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \Delta x\right) - 1}{\Delta x} = \frac{\sin 2\Delta x}{\Delta x \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \Delta x\right)}.$$

Энди Δx ни нолга интилтирамиз:

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\Delta x} = 2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin 2\Delta x}{2\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \Delta x\right)} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{0{,}5} = 4,$$

чунки $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ эди.

Жавоб: 4.

Теорема. *Агар f функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси $\Delta f(x_0)$ аргумент орттирмаси нолга интилганда чексиз кичик миқдор бўлади.*

Исбот. Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

яъни $\Delta x \to 0$ бўлганда $\Delta f(x_0) \to 0$ бажарилади. ▶

Натижа. Агар f функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда бу функция $x = x_0$ нуқтада узлуксиздир.

Исбот. Ушбу айниятни $x = x_0$ нуқтанинг етарлича кичик атрофида тузиб олайлик.

$$f(x) = f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x_0) + \Delta f(x_0).$$

Агар $\Delta x \to 0$ интилишнинг $x \to x_0$ эканлигига эквивалент мулоҳазалигини эсласак:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0) + \Delta f(x_0) = f(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = f(x_0). \blacktriangleright$$

Топшириқлар. 1. Ушбу функциялар орттирмасини топинг:

а) $y = x^3 + 2x$; б) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$; в) $y = \dfrac{1}{x^2} + 3x$; г) $y = \sqrt{1+x^2}$;
д) $y = \log_2(x+1)$.

2. Ҳосила таърифига кўра ушбу функциялир ҳосиласини топинг:

а) $y = x^2 + 2x^3$; б) $y = \dfrac{2x-1}{2x+1}$; в) $y = \dfrac{1}{x^3} - 2x$; г) $y = \sqrt[3]{x-1}$;
д) $y = \log_3(2x-1)$.

3. Ҳосила таърифига кўра $y = \arcsin(\sin x)$, $y = \arccos(\cos x)$, $x \in R$ функцияларнинг ҳосиласи x нинг қандай қийматлари учун мавжуд (шу ҳосила қийматини топинг) ҳамда x нинг қандай қийматлари учун мавжуд эмаслигини аниқланг. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ ва $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ учун ҳам шу саволни ҳал этинг.

46. Икки функция йиғиндисининг ҳосиласи. Айтайлик, $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар $]a; b[$ оралиқда дифференциалланувчи бўлсин. $f(x) = u(x) + v(x)$ йиғинди функцияни қарайлик.

Теорема. *Дифференциалланувчи $u(x)$ ва $v(x)$ функцияларнинг йиғиндиси $f(x)$ ҳам дифференциалланувчидир ва йиғиндининг ҳосиласи қўшилувчи функциялар ҳосилалари йиғиндисига тенг:*

$$f'(x) = (u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x).$$

Исбот: $f(x)$ функциянинг ихтиёрий $x \in]a; b[$ нуқтадаги орттирмасини тузайлик:

$$\Delta f(x) = u(x + \Delta x) - u(x) + v(x + \Delta x) - v(x), \quad x + \Delta x \in]a; b[.$$

Унинг ҳар икки томонини аргумент орттирмаси Δx га бўлайлик:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

Йиғиндининг лимити қўшилувчи функциялар лимити йиғиндисига тенглигидан:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x}$$

га эга бўламиз. Лекин ҳар бир қўшилувчининг Δx нолга интилгандаги лимити, яъни ҳосиласи, теорема шартига кўра мавжуд. Демак: $f'(x) = u'(x) + v'(x)$. $\blacktriangleright$

Натижа. Дифференциалланувчи бир қанча функциялар йиғиндисининг ҳосиласи ҳар бир қўшилувчи функциялар ҳосиласи йиғиндисига тенг:

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + u_3' + \ldots + u_n'.$$

47. Икки функция кўпайтмасининг ҳосиласи. Айтайлик, $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар $]a; b[$ оралиқда дифференциалланувчи бўлсин. $f(x) = u(x)\,v(x)$ кўпайтмадан тузилган функцияни қарайлик.

Теорема. *Дифференциалланувчи $u(x)$ ва $v(x)$ функцияларнинг кўпайтмаси $f(x)$ ҳам дифференциалланувчидир:*

$$f'(x) = (u(x)\,v(x))' = u'(x)\,v(x) + v'(x)\,u(x).$$

Исбот. f функциянинг ихтиёрий $x \in]a; b[$ нуқтасида $\Delta f(x)$ ортгирмасини тузамиз:

$$\Delta f(x) = u(x + \Delta x)\,v(x + \Delta x) - u(x)\,v(x), \quad x + \Delta x \in]a; b[.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонида $v(x + \Delta x)\,u(x)$ кўпайтмани айириб, ҳам қўшамиз:

$$\Delta f(x) = u(x + \Delta x)\,v(x + \Delta x) - v(x + \Delta x)\,u(x) + \\ + v(x + \Delta x)\,u(x) - u(x)\,v(x).$$

Сўнг уни ушбу шаклда группалаб олсак,

$$\Delta f(x) = (u(x + \Delta x) - u(x))\,v(x + \Delta x) + (v(x + \Delta x) - v(x))\,u(x).$$

Унда қавслар ичида $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар мос орттирмалари $\Delta u(x)$ ва $\Delta v(x)$ лар ҳосил бўлди. Демак,

$$\Delta f(x) = \Delta u(x)\,v(x + \Delta x) + \Delta v(x)\,u(x).$$

Унинг ҳар икки томонини аргумент орттирмаси Δx га бўлиб,

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta u(x)}{\Delta x}\,v(x + \Delta x) + \frac{\Delta u(x)}{\Delta x}\,u(x),$$

сўнг Δx ни нолга интилтириб, лимитга ўтамиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} v(x + \Delta x) + u(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x}.$$

Аммо $u(x)$ ва $v(x)$ лар дифференциалланувчи бўлгани учун ўнг томондаги ҳар бир лимит мавжуд, яъни

$$f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$

ёки қисқача $(uv)' = u'v + uv'$ эканлиги кўрсатилди. ▶

Натижа. Дифференциалланувчи функциянинг ўзгармас сонга кўпайтмаси яна дифференциалланувчидир:

$$(cu(x))' = c \cdot u'(x).$$

48. Бўлинманинг ҳосиласи. Айтайлик, $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар $]a; b[$ оралиқда дифференциалланувчи ва бу оралиқнинг ҳеч бир нуқтасида $v(x)$ нолга айланмасин. У ҳолда $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ бўлинма функция учун ушбу теорема ўринли.

Теорема. *Дифференциалланувчи $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар нисбатидан тузилган $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ $(v(x)\neq 0$ функция ҳам дифференциалланувчи ва бу бўлинманинг ҳосиласи*

$$f'(x)=\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\,v(x)-v'(x)\,u(x)}{v^2(x)}$$

га тенг.

Исбот. f функцияни ихтиёрий $x\in\,]a; b[$ нуқтада орттирмасини тузиб:

$$\Delta f(x)=\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u(x+\Delta x)\,v(x)-v(x+\Delta x)\,u(x)}{v(x)\,v(x+\Delta x)},$$

бу орттирманинг суратига $u(x)\,v(x)$ кўпайтмани қўшиб, ҳам айирсак, у ҳолда суратда қуйидаги группалашни бажарса бўлади:

$$\Delta f(x)=\frac{(u(x+\Delta x)-u(x))\,v(x)-(v(x+\Delta x)-v(x))\,u(x)}{v(x)\,v(x+\Delta x)}.$$

Яъни бундан

$$\Delta f(x)=\frac{v(x)\,\Delta u(x)-u(x)\,\Delta v(x)}{v(x)\,v(x+\Delta x)}$$

каби тенглик ҳосил қилинади. Унинг ҳар икки томонини аргумент орттирмаси Δx га бўлиб юборамиз:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{v(x)\,\frac{\Delta u}{\Delta x}-u(x)\,\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)\,v(x+\Delta x)}.$$

Теорема шартига кўра $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ ва $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ нисбатларнинг $\Delta x\to 0$ бўлганда лимити мавжуд, чунки $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар ихтиёрий $x\in\,]a; b[$ нуқтада ҳосилага эга дейилган эди. Шунингдек, $\Delta x\to 0$ бўлганда барча $x+\Delta x\in\,]a; b[$ нуқталарда $v(x+\Delta x)$ функция нолга айланмайди, деган шарт ҳам бор эди. Шунинг учун

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)}=\frac{vu'-uv'}{v^2}.$$

Бу қисқача

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

каби ифодаланади. ▶

49. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Фараз қилайлик, f функция $D(f) =]a; b[$ оралиқда дифференциалланувчи ва қийматлари тўплами $E(f) =]c; d[$ бўлсин. Ўз навбатида g функция $]c; d[$ оралиқда дифференциалланувчи бўлсин. Энди $h = g \circ f(x)$ мураккаб функцияни қарайлик.

Теорема. *Агар f функция $x_0 \in]a; b[$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага, g функция $y_0 \in]c; d[$ нуқтада $g'(y_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $h(x) = g \circ f(x)$ мураккаб функциянинг $x = x_0$ нуқтадаги ҳосиласи*

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

каби аниқланади. (Бу ерда y_0 деб $f(x_0)$ функциянинг қиймати тушунилади.)

Исбот. $h(x)$ функциянинг $x_0 \in]a; b[$ нуқтадаги $\Delta h(x_0)$ орттирмасини тузиб олайлик:

$$\Delta h(x_0) = g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0)), \quad x_0 + \Delta x = x \in]a; b[. \quad (1)$$

Лекин $y = f(x)$ функциянинг $x = x_0$ нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

бўлгани учун (1) да $f(x_0 + \Delta x)$ нинг ўрнига $f(x_0) + \Delta f(x_0)$ миқдорни қўйиш мумкин:

$$\Delta h(x_0) = g(f(x_0) + \Delta f(x_0)) - g(f(x_0)). \quad (2)$$

Мусбат δ сонини шунчалик кичик олиш мумкинки, $\Delta f(x_0)$ функция орттирмаси $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\cap D(f)$ оралиқда ҳеч нолга айланмайди. У ҳолда (2) тенгликнинг ўнг томонини $\Delta f(x_0)$ га ҳам бўлиб, ҳам кўпайтиришни шу оралиқда бажарамиз:

$$\Delta h(x_0) = \frac{g(f(x_0) + \Delta f(x_0)) - g(f(x_0))}{\Delta f(x_0)} \cdot \Delta f(x_0), \quad |\Delta x| < \delta.$$

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини Δx орттирмага бўлиб юборайлик:

$$\frac{\Delta h(x_0)}{\Delta x} = \frac{g(f(x_0) + \Delta f(x_0)) - g(f(x_0))}{\Delta f(x_0)} \cdot \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \quad (3)$$

Маълумки, А. 45 п. 109 - бетда айтилганидек, f функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлгани учун унинг $\Delta f(x_0)$ орттирмаси $\Delta x \to 0$ бўлганда чексиз кичик миқдордир: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$. Шундан фойдаланиб, (3) тенгликнинг ҳар икки томонида Δx

ни нолга интилтирсак, $\Delta f(x_0)$ орттирманинг ҳам нолга интилишини (қуйидаги биринчи лимитда) ёза оламиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta f(x_0) \to 0} \frac{g(f(x_0) + \Delta f(x_0)) - g(f(x_0))}{\Delta f(x_0)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Теорема шартига кўра g функция $y_0 = f(x_0)$ нуқтада, шунингдек, f функция x_0 нуқтада ҳосилага эга, демак, $h(x)$ функция x_0 нуқтада қуйидагидек

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \tag{4}$$

ҳосилага эга экан. ▶

Бу (4) формулани баъзида ихтиёрий $x \in]a; b[$ нуқтадаги ҳосила сифатида қисқача

$$h'_x = g'_y \cdot y'_x \tag{4 a}$$

кўринишда ёзилади ва мураккаб h функциядан x бўйича ҳосила g функциядан y бўйича ҳосилага y функциядан x бўйича ҳосиланинг кўпайтирилганига тенг, деб ўқилади.

Мисол. $z = \sqrt[3]{x^4 + 2\ln x + 2}$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Ечилиши: $z = \sqrt[3]{y}$, $y = x^4 + 2\ln x + 2$ деб, z ни x аргументнинг мураккаб функцияси десак, у ҳолда

$$z'_x = z'_y \cdot y'_x \tag{5}$$

кўринишдаги ҳосила формуласидан фойдаланамиз. Бу юқоридаги (4а) формуланинг шаклан ўзгартирилганидир:

$$z'_y = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}},\ y'_x = 4x^3 + \frac{2}{x} \Longrightarrow z'_x = \frac{4x^4 + 2}{3x\sqrt[3]{(x^4 + 2\ln x + 2)^2}},\ x > 0.$$

50. Тескари функциянинг ҳосиласи. Айтайлик, $y = f(x)$ функция бирор $]a; b[$ оралиқда аниқланган ва унда тескариланувчи бўлсин. Яна бу функция шу оралиқда дифференциалланувчи ва ҳеч қаерда унинг ҳосиласи нолга айланмасин. Қўйилган бу шартларда функция ушбу хоссаларга эга:

1) $f(x)$ функция $]a; b[$ оралиқда узлуксиз;

2) $f'(x)$ ҳосила $]a; b[$ да ишорасини ўзгартирмайди, демак, у шу оралиқда ё камаювчи ёки ўсувчи;

3) $f(x)$ функция қийматлари бирор $]c; d[$ оралиқни бир марта тўла қоплайди, яъни ихтиёрий ҳар хил $x_1 \in]a; b[$ ва $x_2 \in]a; b[$ нуқталар учун $]c; d[$ соҳадан албатта ҳар хил $y(x_1)$ ва $y(x_2)$ қийматлар мос қўйилади.

Теорема. *Агар $y = f(x)$ функция бирор $]a; b[$ оралиқда дифференциалланувчи, ҳосиласи нолга айланмайдиган бўлса, у ҳолда у тескариланувчидир ва $f^{-1}(y)$ тескари функциянинг $y_0 = f(x_0)$ нуқтадаги ҳосиласи*

$$(f^{-1}(y))'|_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{1}$$

каби аниқланади.

Исбот. Теорема шарти 2) да айтилган функция хоссасига асосан $f(x)$ функцияни $]a; b[$ оралиқда ё ўсувчи, ё камаювчилигини таъминлайди, ва демак, f функция шу оралиқда албатта тескариланувчи (А. 16 п. 45 - бетга қаранг). Аниқлик учун f шу оралиқда ўсувчи (камаювчи) бўлсин,

Энди ихтиёрий $x_0 \in]a; b[$ нуқтада $\Delta x = x - x_0$ орттирма тузсак, $x = f^{-1}(y)$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$ эканлигидан

$$\Delta x = f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)$$

ёки $\Delta x = \Delta f^{-1}(y_0)$ деб ёза оламиз. Худди шунингдек,

$$\Delta y = y - y_0 \Longleftrightarrow \Delta y = f(x) - f(x_0)$$

каби ёзув кўрсатадики, f функциянинг ўсувчи (камаювчи) лигига асосан $x \neq x_0$ ва $x \in]a; b[$ бўлганда $\Delta y \neq 0$ тенгсизлик шарти албатта бажарилади. Демак, ушбу нисбат маънога эга:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

x нуқтада ҳосилага эга бўлган f функция орттирмаси $\Delta x \to 0$ бўлганда $\Delta f(x_0) \to 0$ шартни, яъни $\Delta y \to 0$ шартни қаноатлантиради. Демак, уларни қўлланиб, ушбу тенгликни туза оламиз:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

яъни бу ердан

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}}.$$

Бунда ўнг томон махражининг лимити мавжуд ва нолдан фарқли бўлганлиги учун

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

эканлиги келиб чиқади. ▶

Бу формула кўпинча қисқа ёзиш мақсадида $x'(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)}$ ёки $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ кўринишда ҳам ёзилади.

Мисол. $y = \cos x$ функция $[0; \pi]$ кесмада камаювчи. Шунинг учун тескари функция мавжуд ва уни $x = \arccos y$ деб белгиланган эди (А. 37 п. 33 - бетга қаранг). Тескари функция ҳосиласига биноан ихтиёрий $x_0 \in [0; \pi[$ нуқтада

$$x'_y = \arccos' y = \frac{1}{\cos' x} = \frac{1}{-\sin x}$$

тенглик ўринли ёки бу ердан

$$x'_y = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Шундай қилиб, $\arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ эканлиги топилди.

51. $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, a^x, $\log_a x$ функцияларнинг ҳосилалари e сони ҳақида.

а) $y = \sin x$ нинг аниқланиш соҳаси $D(\sin) = \mathbf{R}$. Ихтиёрий $x \in \mathbf{R}$ нуқтада $\sin x$ функциянинг орттирмасини ҳисоблаймиз:

$$\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Сўнгра уни эркли ўзгарувчи x нинг Δx орттирмасига бўламиз:

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Энди $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ эканлигидан фойдаланса к,

$$\sin' x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

эканлиги келиб чиқади.

б) $y = \cos x$ функциянинг ҳосиласини топишда $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ каби алмаштирсак, ундан мураккаб функция сифатида ҳосила чиқади:

$$\cos' x = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\sin x.$$

Шундай қилиб, $\cos' x = -\sin x$ эканлиги топилади.

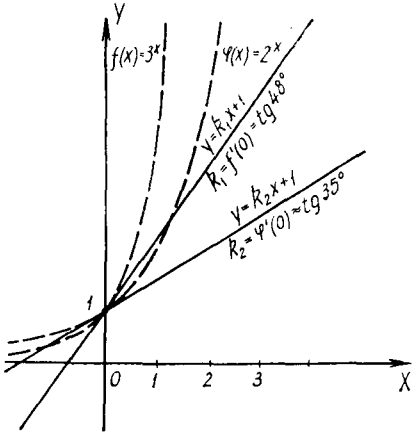
в) $y = \operatorname{tg} x$ функциянинг ҳосиласини топишда $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ тенгликка бўлинма ҳосиласининг теоремасини қўллаймиз:

$$\operatorname{tg}' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Шундай қилиб,

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1), \ k \in \mathbf{Z}.$$

г) $y=a^x$ кўрсаткичли функциянинг графиги турли $a\,(a>0,\ a\neq 1)$ лар учун турлича чизилиб, ҳаммаси $M_0(0;1)$ нуқтадан ўтади. Жумладан, $y=2^x$ ва $y=3^x$ функциялар графиги M_0 нуқтадан ўтади. Функцияларнинг бу нуқтадан ўтган уринмаларининг коэффициенти мос равишда $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{tg}\beta$ бўлсин десак, $\alpha\approx 35°$ ва $\beta\approx 48°$ лигини аниқлаш мумкин (47-шакл). $2<a<3$ шартни қаноатлантирувчи a учун шундай $a=e$ сон топиладики, $y=e^x$ нинг графиги шу функциялар графиги орасида ётади ва M_0 нуқтадан ўтган уринма бурчак коэффициенти $\operatorname{tg}\gamma$ бирга тенг: $\operatorname{tg}\gamma=1$. (Ана шу e сони иррационал, $e\approx$ $\approx 2.71828\ldots$, бунинг исботи берилмайди.)



47- шакл.

Шундай қилиб, қуйидаги татбиқ бевосита ҳосила таърифига кўра ва ҳосиланинг геометрик маъноси $f'(x_0)=k=\operatorname{tg}\gamma$ га кўра ўринлидир. (А. 52 п. 121 - betga қаранг.)

2 дан катта, 3 дан кичик шундай e сони мавжудки, $y=e^x$ кўрсаткичли функциянинг 0 нуқтадаги ҳосиласи 1 га тенг:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1.$$

1-теорема. *e^x кўрсаткичли функция ҳар бир $x_0\in\mathbf{R}$ нуқтада ҳосилага эга ва $(e^x)'=e^x$.*

Исбот: Аввало, $y=e^x$ нинг $\Delta y=e^{x_0+\Delta x}-e^{x_0}=e^{x_0}(e^{\Delta x}-1)$ каби орттирмасини тузиб, сўнг уни x_0 нуқтадаги Δx орттирмага бўлиб, ушбу ҳосиласини топамиз:

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0}(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=e^{x_0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^{x_0}.\ \blacktriangleright$$

Таъриф. e асосга кўра x соннинг логарифмини унинг *натурал логарифми* дейилади ва $\log_e x=\ln x$ деб белгиланади.

Шу таърифдан келиб чиқадики, e^x ва $\ln x$ ўзаро бир-бирига тескари функция экан: $e^{\ln x}=x,\ x>0$ ва $\ln e^x=x,\ x\in\mathbf{R}$.

2-теорема. *a^x кўрсаткичли функциянинг ҳар бир $x\in\mathbf{R}$ нуқтада ҳосиласи мавжуд ва у қуйидагича аниқланган:*

$$(a^x)'=a^x\ln a.$$

Исбот. Агар $a^x=e^{x\ln a}$ деб ёзилишини ва $f(x)=e^x$ функ-

циянинг $f(kx) = e^{kx}$, $k = \ln a$ каби мураккаб функция сифатида ифодаланишини эсласак, у ҳолда:

$$(a^x)' = (e^{kx})' = e^{kx} \cdot k = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a. \blacktriangleright$$

д) $y = \log_a x$ функция $D(\log_a x) = \mathbf{R}_+$ соҳада аниқланган. Шу соҳада бу функция кўрсаткичли $y = a^x$ функцияга тескари функциядир. У ҳолда тескари функция ҳосиласи формуласини қўллаш учун белгилаш киритиб оламиз:

$$f(x) = a^x, \quad f^{-1}(x) = \log_a x.$$

Ихтиёрий $x \in \mathbf{R}_+$ нуқтада логарифмик функция ҳосиласи (А. 50 п. 114 - бетдаги (1) формулага кўра)

$$\log_a' x = \frac{1}{(a^{\log_a x})'} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

каби топилади. Шундай қилиб, $\log_a' x = \frac{1}{x \ln a}$ экан $\blacktriangleright$

Мисоллар. Мураккаб функция ҳосиласидан фойдаланиб, ушбу функциялар ҳосиласини топинг:

а) $y = \cos^3 x^2$; б) $y = 5^{\operatorname{tg} 6x}$; в) $y = \log_3 (4 + \sin 3x)$.

Ечилиши. а) $y' = 3\cos^2 x^2 \cdot \cos' x^2 = 3\cos^2 x^2 (-\sin x^2)(x^2)' = -6x \cos^2 x^2 \sin x^2 = -3x \cos x^2 \sin 2x^2$; б) $y' = 5^{\operatorname{tg} 6x} \ln 5 \cdot (\operatorname{tg} 6x)' = 5^{\operatorname{tg} 6x} \cdot \ln 5 \cdot \frac{(6x)'}{\cos^2 6x} = \frac{5^{\operatorname{tg} 6x} \cdot 6 \ln 5}{\cos^2 6x}$; в) $y' = \log_3'(4 + \sin 3x) = \frac{(4 + \sin 3x)'}{(4 + \sin 3x) \ln 3} = \frac{3\cos 3x}{(4 + \sin 3x) \ln 3}$.

Топшириқлар. 1. Ҳосиласини топинг:

а) $y = (x^2 + 1)(2x + 1)^3$; б) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^4}$; в) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$;

г) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; д) $y = \cos(\cos(\cos x))$; е) $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

ж) $y = \cos(\sin^2(\operatorname{tg}^3 x))$; з) $y = (2^x - 1)(2^x - 2)^2$.

2. Нуқтадаги ҳосиласини топинг:

а) $y = (\sin^2 x + e^x)$; $y'(0) = ?$ б) $y = (x + 1)\sqrt[3]{x^2}$; $y'(1) = ?$

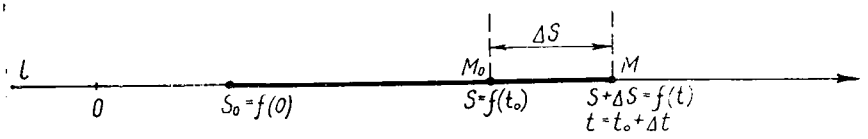
в) $y = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$; $y'(2) = ?$ г) $y = \sin 4x \cos 4x$; $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$

д) $y = \sin^2 x^2$, $y'(0) = ?$ е) $y = 2^{x - 2x^2 - 1}$, $y'(0) = ?$

3. $f(x) + f^2(x) + 3x^2 = 0$. Агар $f(0) = 1$ бўлса, $f'(0) = ?$

4. $f(x) + \frac{x}{f(x)} = x^2$. Агар $f(1) = 5$ бўлса, $f'(1) = ?$

52. Ҳосиланинг қўлланилиши. 1) Фараз қилайлик, M моддий нуқта l тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилганда t вақтда



48- шакл.

$s = f(t)$ масофани босиб ўтсин. $s_0 = f(0)$ эса M моддий нуқтанинг $t = 0$ бошланғич вақтдаги l ўқдаги ўрни бўлсин (48-шакл). Ихтиёрий t_0 вақтда унинг *оний тезлиги* қандай?

Бу саволга жавоб бериш учун M моддий нуқтанинг ихтиёрий t_0 вақтдан $t_0 + \Delta t$ вақтгача босиб ўтган $\Delta s = |M_0M|$ йўлини аниқлаб оламиз: $\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Сўнг $[t_0; t_0 + \Delta t]$ вақт оралиғида эришган *ўртача тезлигини* топиш учун Δt га бўлиб юборамиз:

$$V_{ўр} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Агар Δt қанчалик кичик бўлса, у ҳолда бу ҳақиқатан ҳам оний тезликка шунчалик яқин бўлган ўртача тезликдир. Энди Δt ни нолга интилтирсак ($\Delta t \to 0$), у ҳолда $V_{ўр}$ ҳам t_0 вақтдаги *оний тезлик* деб аталадиган тезликни аниқлайди:

$$V(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} V_{ўр} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Шундай қилиб, $V(t_0) = f'(t_0)$.

Мисол. M нукта l ўқ бўйлаб $s(t) = 2\sin 3\pi t$ қонуният билан (тебранма) ҳаракатда. Унинг $t_0 = 10$ с да эришган оний тезлиги топилсин. Қачон унинг оний тезлиги нолга тенг бўлади?

Ечилиши. Бу бўйлама тебранма ҳаракатдир. Босиб ўтган йўл функцияси ҳосиласи $s'(t) = 6\pi \cos 3\pi t$ берилган нуқтанинг ихтиёрий t вақтдаги оний тезлигидир. У ҳолда:

$$V(10) = s'(t_0) = 6\pi \cos 3\pi t_0 = 6\pi \cos 30\pi = 6\pi \text{ м/с}.$$

Энди унинг оний тезлиги қачон 0 га тенг бўлишини топамиз:

$$V(t) = 0 \iff 6\pi \cos 3\pi t = 0 \iff t_n = \frac{1 + 2n}{6}, \quad n \in Z_0.$$

Жавоб. $V(10) = 6\pi$ м/с, $T = \left\{ t_n = \frac{1 + 2n}{6}, \quad n \in Z_0 \right\}$.

2) Функция орттирмасининг бош қисми ва унинг қўлланиш формулалари. Маълумки, f функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда ҳосила таърифига биноан:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Агар Δx жуда кичик бўлса, у ҳолда $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ миқдор $f'(x_0)$ дан бирор $\alpha(\Delta x)$ чексиз кичик миқдорга фарқ қилади:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Шунинг учун бу ерда $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$ тақрибий тенглик ҳосил бўлади. Бу тақрибий тенгликнинг хатолиги

$$|\Delta f(x_0) - f'(x_0)\Delta x| \leqslant |\Delta x| \max|\alpha(\Delta x)|, \ (\Delta x \to 0)$$

тенгсизликни қаноатлантиради. Демак, $\Delta f(x_0)$ орттирмани $f(x_0+\Delta x_0) - f(x_0)$ га алмаштириб ёзсак, бу тақрибий тенглик

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

каби кўринишга келади. f функциянинг $x = x_0 + \Delta x$ нуқтадаги қийматини камида $|\Delta x| \max|\alpha(\Delta x)|$ хатоликда аниқлаш учун шу формула ишлатилади. Масалан, $f(x) = x^n$ функция учун $(x_0 + \Delta x)^n \approx x_0^n + nx_0^{n-1} \cdot \Delta x$ бўлади. Хусусий ҳолда: $(x_0 + \Delta x)^2 \approx x_0^2 + 2x_0\Delta x$; $(x_0 + \Delta x)^3 \approx x_0^3 + 3x^2\Delta x$, $(1 + \Delta x)^n \approx \approx 1 + n\Delta x$.

Мисол. 1) $(5{,}012)^2 \approx 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 0{,}012 = 25{,}12$. 2) $(1{,}02)^{10} \approx \approx 1 + 10 \times 0{,}02 = 1{,}2$.

Натижалар Муҳим тақрибий ҳисоблаш формулалари:

а) $\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\Delta x, \ x_0 \neq 0;$

б) $\sin(x_0 + \Delta x) \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot \Delta x;$

в) $\cos(x_0 + \Delta x) \approx \cos x_0 - \sin x_0 \cdot \Delta x;$

г) $a^{x_0+\Delta x} \approx a^{x_0}(1 + \Delta x \ln a);$

$e^{x_0+\Delta x} \approx e^{x_0}(1 + \Delta x);$

д) $\log_a(x_0 + \Delta x) \approx \log_a x_0 + \frac{\Delta x}{x_0 \ln a}, \ x_0 > 0;$

$\ln(x_0 + \Delta x) \approx \ln x_0 + \frac{\Delta x}{x_0}, \ x_0 > 0.$

Келтирилган бу формулалар $x = x_0$ нуқтанинг етарлича кичик атрофида ўринли. Масалан, $x_0 = 1$ бўлганда Δx нинг етарлича кичик қийматларида:

$$\ln(1 + \Delta x) \approx \Delta x, \ \sqrt[n]{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{\Delta x}{n}$$

деб олиш мумкин.

Мисол. $\sqrt{1{,}004} = \sqrt{1 + 0{,}004} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}004 = 1{,}002.$

Топшириқ. Ушбу ифодалар қийматларини тақриban ҳисоблаш:

а) $\ln 1{,}02$; б) $\sqrt[3]{1{,}08}$; в) $\log_5 5{,}25$; г) $\sqrt[3]{125{,}08}$; д) $\sin 182°$; е) $\cos 100°$; ж) $e^{1{,}05}$; з) $\sqrt[5]{33}$; и) $\cos 364°$; к) $\lg(1{,}015)$; л) $(9{,}95)^3$; м) $(0{,}975)^4$.

3) Функция графигига уринма тенгламаси. $y=f(x)$ функция $]a;\ b[$ оралиқда аниқланган ва дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда ҳар бир $x_0 \in\ ]a;\ b[$ нуқта учун $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ бажарилади. Бу ерда лимитни ташлаб юборсак, ушбу ҳосил бўлади:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(\Delta x),\quad x=x_0+\Delta x,$$

бунда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x)=0$.

Агар чексиз кичик миқдор $\alpha(\Delta x)$ ни ташлаб юборсак, у вақтда

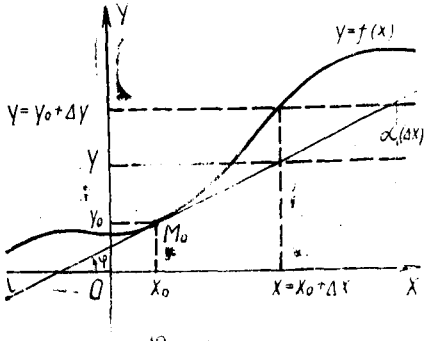
$$Y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \qquad (1)$$

каби янги чизиқли функция ҳосил бўлади. x_0 нуқтанинг етарлича кичик атрофида бу чизиқли функция аниқлаган график — l тўғри чизиқ берилган f функция графиги билан битта M_0 умумий нуқтага эга (49- шакл). У функция графигига $M_0(x_0;\ y_0)$ *нуқтада ўтказилган уринма* дейилади. $Y=kx+b$ кўринишда ҳосил қилинган тўғри чизиқнинг (1) тенгламасида $k=f'(x_0)$, $b=f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0$ бажарилган. Демак, $f'(x_0)$ ҳосила графикнинг $M_0(x_0;\ y_0)$ нуқтасидан ўтган уринманинг бурчак коэффициенти эканлиги аниқланади:

$$k=\operatorname{tg}\varphi=f'(x_0). \qquad (2)$$

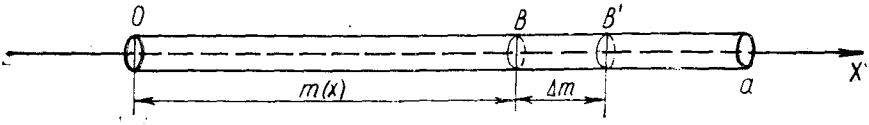
Шундай қилиб, f функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи функция графигининг M_0 нуқтасидан ўтувчи уринмасини ясашда қўлланилади.

Масалан, $y=2x^2$ параболага абсциссаси 1 га тенг бўлган нуқтадаги уринмаси: $y'=(2x^2)'=4x$, $y_0'=f'(x_0)=4\cdot 1=4$, $y_0=f(x_0)=2\cdot 1$ бўлгани учун (1) формулага биноан $y=2+4(x-1) \Rightarrow y=4x-2$ каби тенгламага эга.



49- шакл.

Топшириқ. а) $f(x)=-x^2+x$, $x_0=-2$; б) $y=x^3$, $x_0=-2$; в) $y=\ln x$, $x_0=1$; г) $y=\sin x$, $x_0=\dfrac{2\pi}{3}$ бўлса, x_0 нуқтадан ўтувчи уринма тенгламасини ёзинг.



50- шакл.

4) Айтайлик, бирор стержень Ox ўқининг $[0;\ a]$ кесмасида жойлашган бўлсин. У ҳолда ҳар бир $x \in [0;\ a]$ нуқтадаги стержень зичлиги $\rho(x)$ унинг $[0;\ x]$ кесмадаги массаси функцияси $f(x)$ нинг ҳосиласи орқали ифодаланишини кўрсатамиз (50-шакл). $[OA]$ кесмада олинган ихтиёрий x координатали B нуқта учун стерженнинг $[OB]$ қисми массасини x нинг бирор f функцияси деб қараш мумкин:

$$m = f(x),\ x \in [0;\ a].$$

Бу функция, ўз маъноси жиҳатидан қатъий ўсувчидир. Стерженнинг $[x;\ x + \Delta x]$ қисми массаси

$$\Delta m = f(x + \Delta x) - f(x)$$

каби масса орттирмаси билан ўлчанади. Унинг шу кесма бўлаги узунлигига нисбати стерженнинг $[x;\ \Delta x]$ қисмидаги „ўртача“ зичлиги

$$\rho_{ўр} = \frac{\Delta m}{\Delta x}$$

ни беради. Демак, Δx ни қанчалик кичик қилиб олсак, у ҳолда биз x нуқтадаги стержень зичлигини ҳосил қиламиз:

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ёки қисқача $\rho(x) = f'(x)$ эканлиги топилди. Бу кўпинча стерженнинг *чизиқли зичлиги* деб айтилади.

5) Фараз қилайлик, $Q = \varphi(t)$ билан t вақт давомида симнинг бирор кесим юзидан ўтган ток миқдори берилсин. $[t;\ t + \Delta t]$ вақт давомида шу кесимдан $Q = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$ миқдорли ток ўтади. $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ эса шу вақт оралиғидаги *ўртача ток кучини* аниқлайди. Δt вақт бўлаги қанчалик кичик бўлса, у ҳолда ток кучининг t сондаги қиймати топилади:

$$I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}$$

ёки бу ердан $I(t) = \varphi'(t)$.

53. Функциянинг оралиқда ўсиши (камайиши) нинг етарли шарти.

1-теорема. *Агар $f'(x_0) > 0$ бўлса, у ҳолда шундай $\delta > 0$ топиладики, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ оралиқнинг ҳар бир $x = x_0 + \Delta x$ нуқтасида ушбу муносабат бажарилади:*

а) $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$, *агар* $-\delta < \Delta x < 0$ *бўлса,*

б) $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$, *агар* $0 < \Delta x < \delta$ *бўлса.*

2-теорема. *Агар $f'(x_0) < 0$ бўлса, у ҳолда шундай $\delta > 0$ сони топиладики, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ оралиқнинг ҳар бир $x = x_0 + \Delta x$ нуқтасида ушбу муносабат ўринлидир:*

а) $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$, *агар* $-\delta < \Delta x < 0$ *бўлса,*

б) $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$, *агар* $0 < \Delta x < \delta$ *бўлса.*

1-теореманинг исботи. Теореманинг шарти бўйича

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} > 0$$

бўлганлиги учун лимитнинг таърифига кўра ҳар қандай мусбат ε сони учун шундай $\delta > 0$ топиладики, ушбу

$$\left| \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик $|x - x_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар учун ўринли. Бошқача айтганда, $|\Delta x| < \delta$ бўлганда

$$-\varepsilon < \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) < \varepsilon$$

бажарилади. Агар ε сифатида $\varepsilon = f'(x_0)$ миқдорни танласак, бу тенгсизлик қуйи томондан $-f'(x_0) < \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$ шаклда баҳоланади. Яъни $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} > 0$ тенгсизлиги ўринли бўлиб чиқади. Шундай қилиб, қуйидаги ўзаро эквивалент мулоҳазалар: $\left(|\Delta x| < \delta \text{ бўлганда } \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} > 0\right) \Longleftrightarrow (0 < \Delta x < \delta$ бўлганда $\Delta f(x_0) > 0$ ва $-\delta < \Delta x < 0$ бўлганда $\Delta f(x_0) < 0)$ ҳосил қилинади. Бунда $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ эканлигини эсласак, иккинчи қавсдаги мулоҳазалардан теорема тасдиғининг исботланганини кўрамиз. 2-теорема ҳам шу йўсинда исботланади. ▶

3-теорема. *Агар f функция $]a; b[$ оралиқнин ҳар бир нуқтасида мусбат ҳосилага эга бўлса, у шу оралиқда ўсувчидир. Аксинча, у шу оралиқнинг ҳар бир нуқтасида манфий ҳосилага эга бўлса, функция $]a; b[$ оралиқда камаювчидир.*

Мактаб программаси доирасида бу теорема исботланмайди, балки унинг баёни ҳамда татбиқ этилиши билан чегаралانилади.

1-мисол. $f(x)=\frac{4}{(x-1)^2}-x$ нинг ўсиш (камайиш) оралиғини топинг.

Ечилиши. Функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f)=]-\infty;\ 1[\cup]1;\ +\infty]$ бўлади. Шу соҳага тегишли f функциянинг критик нуқталари:

$$f'(x)=0 \Longleftrightarrow -\frac{8}{(x-1)^2}-1=0 \Longleftrightarrow (x-1)^3+8=0 \Longleftrightarrow x_0=-1.$$

$D(f)$ соҳа $x_0=-1$ нуқта билан $D(f)=]-\infty;\ -1]\cup]-1;\ 1[\cup]1;\ +\infty]$ каби оралиқларга бўлинадики, $D(f)$ ни ташкил этувчи шу учала оралиқнинг ҳар бирида f' ҳосила узлуксиз бўлгани учун f' ўз ишорасини сақлайди:

а) $]-\infty,\ -1]$ дан ихтиёрий олинган $x_1=-2$ да $f'(-2)=-\frac{9}{27}<0 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow f'(x)$, бу оралиқда манфий, демак, $f(x)$ функция $]-\infty,\ -1]$ да камаювчи;

б) $]-1;\ 1]$ дан ихтиёрий олинган $x_2=0$ да $f'(0)=7>0 \Longrightarrow f'(x)$, бу оралиқда мусбат, демак, $f(x)$ функция $]-1;\ 1[$ да ўсувчи;

в) $]1;\ \infty[$ дан ихтиёрий олинган $x_3=2$ да $f'(2)=-9<0 \Longrightarrow f'(x)$, бу оралиқда манфий, демак, $f(x)$ функция $]1;\ +\infty[$ да камаювчи.

2-мисол. $f(x)=\sqrt{|x|}$ функциянинг $D(f)=\mathbf{R}$ аниқланиш соҳасида биргина $x_0=0$ критик нуқтаси бор, чунки $f'(x)$ ҳосила $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ да

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{агар } x>0 \text{ бўлса,}\\ -\frac{1}{\sqrt{-x}}, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

каби аниқланиб, $x_0=0$ нуқтада аниқланмаган. Демак, $D(f)$ соҳа 0 нуқтада $\mathbf{R}_+$ ва $\mathbf{R}_-$ оралиқларга ажраляптики, уларнинг ҳар бирида $f'(x)$ узлуксиз ва ўз ишорасини сақлайди:

а) $\mathbf{R}_-$ да $f'(x)<0 \Longrightarrow f(x)$ функция $\mathbf{R}_-$ да камаювчи;

б) $\mathbf{R}_+$ да $f'(x)>0 \Longrightarrow f(x)$ функция $\mathbf{R}_+$ да ўсувчи.

Топшириқлар. Ушбу функцияларнинг ўсиш (камайиш) оралиқларини топинг:

а) $f(x)=4-2x$; б) $f(x)=\frac{4}{x-1}$; в) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$; г) $f(x)=x^3-x$; д) $f(x)=3|x+1|-x$; е) $f(x)=6|x-1|+4x$; ж) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$; к) $f(x)=$ $=\sqrt[3]{x^2-1}$; л) $f(x)=e^{x^2}$; м) $f(x)=\ln x-\ln^2 x$; н) $f(x)=2|x|+x^2$.

54. Функция экстремуми мавжудлигининг зарурий шарти. Ферма теоремаси.

Ферма теоремаси. *Агар $x=x_0$ нуқта $f(x)$ функциянинг экстремум нуқтаси бўлиб, бу нуқтада функциянинг ҳосиласи мавжуд бўлса, у ҳолда $f'(x_0)=0$ бажарилади.*

Исбот. Теоремани тескари фараз қилиш усулида, яъни $f'(x_0)\neq 0$ деб исботлайлик. Аниқлик учун x_0 нуқта функциянинг максимум нуқтаси бўлсин. $f'(x_0)=0$ деб олайлик. У ҳолда

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

бўлгани учун, лимит таърифига кўра $\varepsilon = f'(x_0)$ учун x_0 нуқтанинг шундай $]x_0 - \delta;\ x_0[\cup]x_0;\ x_0 + \delta[$ атрофи борки, шу атрофнинг ихтиёрий x нуқтаси учун ушбу тенгсизлик ўринли:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < f'(x_0).$$

Бу ердан $-f'(x_0) < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) < f'(x_0)$ келиб чиқади. Бундан $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ ва $x_0 < x < x_0 + \delta$ бўлганда $f(x) > f(x_0)$ эканлиги чиқади. Бу x_0 нинг максимум нуқта эканлигига зиддир. $f'(x_0) < 0$ бўлганда ҳам шу каби исботланади. Демак, $f'(x_0) \neq 0$ деб тескари фараз қилиш нотўғри, шунинг учун $f'(x_0) = 0$. x_0 функциянинг минимум нуқтаси бўлса, шунга ўхшаш усулда теорема исботланади. ▶

11-шаклда $]a;\ b[$ оралиқнинг x_1, x_2, x_3, x_7, x_{10} экстремум нуқталарида $f(x)$ функция ҳосилага эга бўлганлигидан, бу нуқталардаги функция ҳосилалари нолга тенг: $f'(x_k) = 0$, ($k = 1, 2, 3, 7, 10$). Бу нуқталарда графикка ўтказилган уринмалар абсцисса ўқига параллел. Аксинча, $f'(x) = 0$ шартни бажарувчи барча нуқталар экстремум нуқталари бўлавермайди, шу шаклдаги x_6 ва x_9 нуқталар худди шундай нуқталар. Бу кўрсатадики, Ферма теоремаси экстремум мавжудлигининг фақат зарурий шартини билдирар экан, яъни бу теорема шарти экстремум мавжуд бўлишининг етарли шартини бермайди.

11-шаклда яна x_4 ва x_5 нуқталар ҳам кўрсатилганки, у ерда функция экстремумга эга, аммо $f'(x)$ ҳосила бу нуқталарда мавжуд эмас ёки чексизликка айланади: $f'(x_5) = \infty$, $f(x_4) = \infty$. Ана шу нуқталарда функция графигига уринма ясаб бўлмайди, чунки у ерда график синган. Шундай қилиб, экстремум нуқталарни $f'(x)$ ҳосиланинг мавжуд бўлмаган ёки уни чексизга айлантирадиган нуқталардан излаш лозим. Аммо ҳосилани чексизликка айлантирадиган нуқталарнинг барчаси экстремум нуқталар бўлавермайди, ҳақиқатан ҳам, 11-шаклнинг x_8 ва x_{11} нуқталарида ҳосила чексизликка айланади, яъни графикка ўтказилган уринма ордината ўқига параллел бўлиб, функция бу нуқталарда экстремумга эришмайди.

Изоҳ. $f'(x) = 0$ шарти функция графигининг $x = x_0$ нуқтасидаги графикка ўтказилган уринманинг абсцисса ўқига параллел бўлиш шартини билдирса, $x_1 \in D(f)$ нуқтада $f'(x_1) = \infty$ бўлиши функция графигининг $x = x_1$ нуқтасидаги ўтказилган ўринманинг ордината ўқига параллел бўлиш шартини беради.

55. Функция экстремуми мавжудлигининг етарли шарти

1-теорема. *Агар $f(x)$ функция $]a,\ b[$ оралиқда аниқланган, $x = x_0$ нуқтада узлуксиз, $]a,\ x_0[$ да $f'(x) < 0$ ва $]x_0,\ b[$*

да $f'(x)>0$ бўлса, у ҳолда $x=x_0$ нуқта f функциянинг минимум нуқтасидир.

2-теорема. *Агар $f(x)$ функция $]a, b[$ оралиқда аниқланган, $x=x_0$ нуқтада узлуксиз, $]a, x_0[$ соҳада $f'(x)>0$ ва $]x_0, b[$ соҳада $f'(x)<0$ бўлса, у ҳолда $x=x_0$ нуқта f функциянинг максимум нуқтасидир.*

1-теореманинг исботи. Айтайлик, x_1 ва x_2 нуқталар $a<x_1<x_0<x_2<b$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқталар бўлсин. Юқоридаги 54-пунктнинг 3-теоремасига кўра f функция $]a; x_0[$ оралиқда камаювчи эканлиги ва барча $t\in[x_1, x_0]$ нуқталарда f нинг узлуксизлигидан ушбу тенгсизликнинг ўринлилиги келиб чиқади:

$$a<x_1<t<x_0 \Rightarrow f(x_1)>\lim_{t\to x} f(t)=f(x_0).$$

Худди шунингдек, $]x_0, b[$ оралиқда f нинг ўсувчилиги ва унинг $[x_0, x_2]$ кесмада узлуксизлиги ушбу тенгсизликни келтириб чиқаради:

$$x_0<t<x_2<b \Rightarrow f(x_0)=\lim_{t\to x_0} f(t)<f(x_2).$$

Демак, ихтиёрий $x_1\in]a; x_0[$ ва $x_2\in]x_0; b[$ қийматлар учун ушбу

$$f(x_0)<f(x_1),\ f(x_0)<f(x_2)$$

тенгсизликлар бажарилади. Шундай қилиб, ҳар қандай $x\in]a; x_0[\cup]x_0, b[$ нуқталар учун ушбу

$$f(x_0)<f(x)$$

тенгсизликнинг бажарилиши, теореманинг ўринли эканлигини исботлайди. ▶

2-теорема ҳам шу каби исботланади.

1-изоҳ. f функциянинг экстремумларига a ва b нуқталар кирмайди (11-шакл), чунки бу нуқталар ўз атрофи (ҳар икки атрофи) билан $D(f)$ га тегишли эмас (А. 19 п. 49-бетдаги таърифга қаранг).

2-изоҳ. Экстремум нуқталар функциянинг икки хил ўсиш ва камайиш соҳаларининг чегарасида ётади. 11-шаклда x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7 ва x_{10} экстремум нуқталар шу хоссага эгадир.

3-изоҳ. Келтирилган 1- ва 2-теорема татбиқ этилаётганда оддийгина қилиб, экстремум нуқталарда функция ҳосиласи ўз ишорасини (минусдан плюсга ёки плюсдан минусга) ўзгартиради, деб гапирилади.

4-изоҳ. Бу теоремалар Ферма теоремасига (А. 54 п. 124-бет) нисбатан маълум маънода тескари. Лекин бутунлай эмас. Ферма теоремаси фақат экстремум мавжудлигининг зарурий шартини берарди: „Агар $x=x_0$ нуқтада $f(x)$ функция экстремумга эга бўлиб, бу нуқтада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $f'(x_0)=0$ бўлади". Бу билан Ферма теоремаси татбиқи 11-шаклдаги функция графигида $x=x_4$ ва $x=x_5$ нуқталар экстремумини аниқлай олмайди, лекин 1- ва 2-теорема татбиқи билан бу нуқталарнинг экстремумлиги топилади. Шунинг учун ҳам бу теоремаларнинг шарти экстремум мавжудлигининг *етарли шарти* деб юритилади.

1-контрмисол. $y=\frac{1}{2x^2}$ функциянинг ҳосиласи $y'=-\frac{1}{x^3}$ бўлиб, унинг ишораси $]-\infty;\ 0[$ да мусбат, $]0;\ +\infty[$ да манфий. Шундай қилиб, $x_0=0$ нуқта $y=\frac{1}{2x^2}$ функциянинг ўсиш соҳасини камайиш соҳасидан ажратувчи чегара нуқтадир. Бошқача қилиб айтганда функциянинг $y'(x)$ ҳосиласи $x_0=0$ нуқтадан ўтганда ўз ишорасини ўзгартиради. Лекин бу нуқта функциянинг экстремум нуқтасигина эмас, хатто функция бу нуқтада аниқланмаган.

Демак, функциянинг ҳар бир ўсиш ёки камайиш соҳасининг барча нуқталарида шу функциянинг аниқланган бўлиши шарт деган теорема шарти муҳим талаб экан.

2-контрмисол. $f(x)=\{\sin x\}$ функция $[0,\ \pi]$ кесмада берилган бўлсин (А. 44 п. 105-бетга қаранг). Бу функция $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ оралиқда $f'(x)=\cos x$ каби ҳосилага эга бўлиб, унда $f'(x)$ мусбат. Шунингдек, $\left]\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ оралиқда бу функция ҳосиласи яна $f'(x)=\cos x$ бўлиб, унда $f'(x)$ манфий, яъни $f(x)$ функциянинг ҳосиласи $x_0=\frac{\pi}{2}$ нуқтада ўз ишорасини ўзгартирмоқда. Лекин $f(x_0)=0$. Бошқача айтганда, ушбу

$$1)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=1;\quad 2)\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;\quad 3)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)\neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

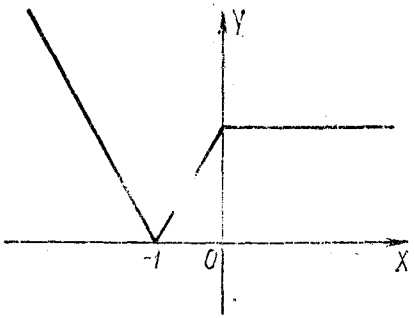
муносабатлар бажариладиб, $x_0=\frac{\pi}{2}$ нуқта f функциянинг узилиш нуқтаси бўляпти. Шунинг учун 2-теореманинг тасдиғи $f(x_0)>f(x)$ нинг ўринли эмаслиги бу функция учун келиб чиқяпти. Бу ерда аксинча, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(x)$ тенгсизлиги барча $x\in\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ нуқталар учун бажариляпти, бу $f(x)$ нинг шу оралиқда максимум нуқтаси бўлмаслигини, бошқача айтганда, функция ўзининг максимум қийматига эриша олмаслигини кўрсатади.

Демак, функциянинг ўсиш ва камайиш соҳалари чегараси — x_0 нуқтада аниқланган бўлишигина эмас, узлуксиз бўлиши ҳам шарт деган теорема талаби жуда муҳим экан.

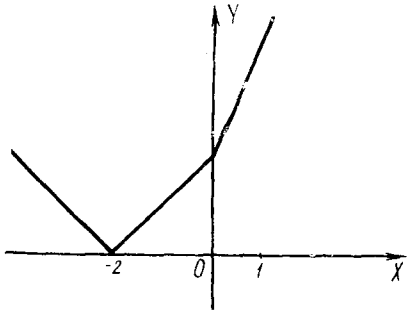
1-мисол.

$$y=\left||x|-x-2\right|=\begin{cases}-2x-2, & \text{агар } x\in D_1=]-\infty;\ -1[;\\ 2x+2, & \text{агар } x\in D_2=[-1;\ 0];\\ 2, & \text{агар } x\in D_3=\mathbf{R}_+\end{cases}$$

функциянинг экстремумларини аниқланг.



51- шакл.



52- шакл.

Ечилиши. Бу функция $D(y) = \mathbf{R}$ да аниқланган (51- шакл) бўлиб, у $x_1 = -1$ ва $x_2 = 0$ нуқталарда ҳосилага эга эмас, яъни улар критик нуқталардир. Аммо $y'(x)$ ҳосила D_1 ораликнинг ички нуқталарида мавжуд: $y'(x) = -2$; D_2 нинг ички нуқталарида ҳам мавжуд: $y'(x) = 2$, демак, $x_1 = -1$ нуқтада ҳосила ишорасини минусдан плюсга ўзгартиргани учун бу нуқта функциянинг минимум нуқтасидир: $y_{\min} = y(x_1) = 0$. Шу билан бирга D_3 нинг ички нуқталарида $y'(x) = 0$ бўлгани учун x_2 критик нуқта ҳам, D_3 нинг барча нуқталари ҳам (экстремумнинг таърифига кўра) максимум нуқталардир: $y_{\max} = y(x_2) = 2$.

2- м и с о л.

$$y = |2x + 2 + |x|| = \begin{cases} 3x + 2, \text{ агар } x \in D_1 = \mathbf{R}_+; \\ x + 2, \text{ агар } x \in D_2 =]-2;\ 0]; \\ -x - 2, \text{ агар } x \in D_3 =]-\infty;\ -2] \end{cases}$$

функциянинг критик нуқталарининг барчаси экстремум нуқталарми?

Ечилиши. Бу функция учун $x_1 = -2$ ва $x_2 = 0$ нуқталар критик нуқталардир. 52- шаклдан кўринадики, $x_1 = -2$ да функция минимумга эришади (чунки у ерда ҳосила ишорасини минусдан плюсга ўзгартиради ва $y_{\min} = y(-2) = 0$), аммо $x_2 = 0$ да экстремум йўқ, чунки ҳосила ишораси ўзгармаяпти.

3- м и с о л. $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$ нинг экстремумларини топинг.

Ечилиши. $D(y) = \mathbf{R}$ бу функциянинг ҳосиласи $y' = 3x^2 - 6x - 9$ ни нолга тенглаб, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ критик нуқталар топиладики, улар билан $D(y)$ аниқланиш соҳаси уч ораликка ажралиб кетади:

$$D(y) =]-\infty;\ -1] \cup]-1;\ 3] \cup]3;\ +\infty[.$$

а) $-\infty < x < -1$ да $y'(x) > 0$ ва $-1 < x < 3$ да $y'(x) < 0$ бўлгани, яъни плюс ишорадан минус ишорага ўтгани учун $x_1 = -1$ нуқта функциянинг максимум нуқтасидир: $y_{\max} = y(-1) = 5$.

б) $-1 < x < 3$ да $y'(x) < 0$ ва $3 < x < +\infty$ да $y'(x) > 0$ бўлгани, яъни минус ишорадан плюс ишорага ўтгани учун $x_2 = 3$ нуқта функциянинг минимум нуқтасидир: $y_{\min} = y(3) = -29$.

4- м и с о л. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 10$ нинг $D = \left[-\frac{3}{2};\ 3\right]$ ораликдаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

Ечилиши. Бу функциянинг $f'(x) = 4x^3 - 8x$ ҳосиласи барча $x \in D$ нуқталарда мавжуд. Унинг бу ораликда $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = 0$ ва $x_3 = +\sqrt{2}$ критик нуқталари бор. Функциянинг критик нуқталардаги қийматлари:

$$f(-\sqrt{2}) = 6;\ f(0) = 10;\ f(+\sqrt{2}) = 6.$$

Шунингдек, функциянинг $\left[-\frac{3}{2}, 3\right]$ оралиқнинг чеккаларидаги қиймати $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{97}{16}$; $f(3)=55$ кабидир. Шу топилган 5 та қийматларни таққосласак:

$$y_{\text{э. катта}}=\max_{x\in D} f(x)=f(3)=55,$$

$$y_{\text{э. кичик}}=\min_{x\in D} f(x)=f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})=6.$$

Топшириқлар. 1) Функцияларнинг экстремумларини топинг:

а) $f(x)=3x-\frac{x^2}{2}$; б) $g(x)=(x-1)^2-\frac{1}{2}(x-1)^4$;

в) $h(x)=\frac{x-1}{4}+\frac{4}{x-1}$; г) $\varphi(x)=\frac{1}{2+2x+x^2}$; д) $\psi(x)=||x|-2|$;

е) $l(x)=|2x+|x-1||$.

2) Функциянинг D оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

а) $f(x)=x^5-5x$, $D=[-2; 4]$;

б) $f(x)=\cos 2x+x$, $D=[-\pi, \pi]$;

в) $f(x)=2^{x^2-x}+x^2-x$, $D=[0; 1]$;

г) $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$, $D=\left[\frac{1}{2}; 2\right]$;

д) $f(x)=\sin 2x\cdot\cos 2x$, $D=[0; \pi]$

е) $f(x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$, $D=\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

56. Функцияларни текшириш схемаси. Одатда функциянинг қуйидаги хусусиятлари текширилади:

1) Функциянинг аниқланиш ва ўзгариш соҳаси;

2) Функциянинг жуфт-тоқлиги, даврийлиги, илдизлари, ишорасини сақлаш оралиқлари;

3) Функциянинг ҳосиласи ва критик нуқталарини аниқлаш;

4) Функциянинг критик нуқталардаги қиймаглари;

5) Ўсиш ва камайиш оралиқлари;

6) Экстремум қийматларини аниқлаш.

Текшириш натижаларига асосланиб функция графиги ясалади.

Шу келтирилган пунктларга жавоб излашда баъзилари, масалан $f(x)=0$ тенгламани ечиш, $E(f)$ ни аниқлаш қийинчилик туғдирса, уларни қолдириб, аксинча бир қанча $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ нуқталарда уларга мос $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ лар аниқланиб график ясашга аниқлик киритиш мумкин бўлади.

1-мисол. $y=x^4-2x^2+4$ нинг графигини ясанг.

Ечилиши. 1) $D(f)=\mathbf{R}$, чунки $y=f(x)$ кўпҳаддир;

$E(f)=[3; +\infty[$, чунки $f(x)=(x^2-1)^2+3$ ўринлидир.

2) $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2+4=x^4-2x^2+4=f(x)$, демак, $f(x)$ жуфт функция; $E(f)\subset\mathbf{R}_+$ бўлгани учун бу функция илдизларга эга эмас ва $\mathbf{R}$ да фақат мусбат қиймаглидир.

3) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$ нинг ечими $x_0 = -1$; $x_1 = 0$; $x_2 = +1$ лар шу функциянинг критик нуқталаридир.

4) Критик нуқталарда функция ушбу қийматларга эга:

$f(-1) = 3$; $f(0) = 4$; $f(+1) = 3$.

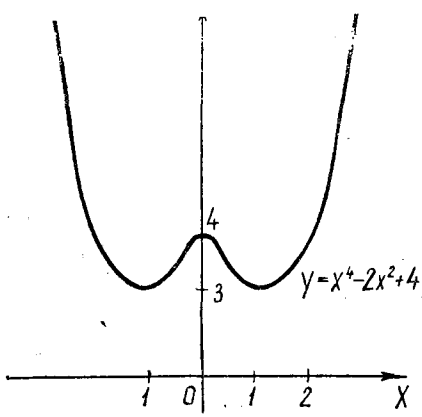
5) Энди жадвал тузамиз:

x	$-\infty < x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < \infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↘	3	↗	4	↘	3	↗
		min		max		min	

Бу жадвалнинг иккинчи сатрида ҳосиланинг ишораси биринчи сатридаги оралиқларга мос бўлиб, шу оралиқда функциянинг ўсиши ёки камайиши, унинг учинчи сатрида „↗“ ёки „↘“ каби йўналишлар орқали тасвирланган. Унда „↘↗“ каби белги функциянинг $x_0 = -1$, $x_2 = 1$ нуқталарида минимумга, „↗↘“ каби белги эса $x_1 = 0$ нуқтада максимумга эришишини билдиради. Агар аниқлик учун ушбу

x	-3	-2	$-0{,}5$	$0{,}5$	2	3
y	67	4	$3\frac{9}{16}$	$3\frac{9}{16}$	4	67

қўшимча маълумотни тузсак, функция графигини ясашга киришиш шу топилган нуқталардан бошланади. жадвалда кўрсатилган хулосага мослаб чизилади. 53-шаклда шу функция графиги келтирилди



53- шакл.

2- м и с о л. $y = 2x^5 - 5x^2$ нинг графигини ясанг.

Ечилиши. 1) $D(y) = R$, $E(y) = R$.

2) Бу функция тоқ ҳам, жуфт ҳам, даврий ҳам эмас. $y = 2x^2 \times (x^3 - 2{,}5)$ бўлгани учун $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt[3]{2{,}5}$ нуқтада илдизга эга; $\varphi(x) = x^3 - 2{,}5$ ифода $x > \sqrt[3]{2{,}5}$ бўлганда мусбат, $x < \sqrt[3]{2{,}5}$ да манфий қийматли. Шунинг учун $y(x)$ функция ҳам шу хоссаларга эга.

3) $f'(x) = 10x^4 - 10x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 1$ ларда критик нуқталар бор.

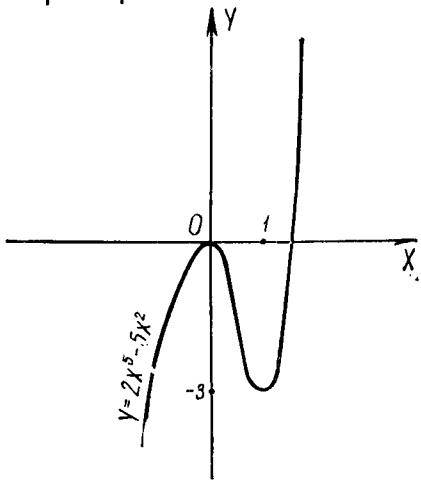
4) $f(0)=0$, $f(1)=-3$ — функциянинг критик нуқталардаги қийматлари.
5) Энди жадвал тузилади:

x	$-\infty<x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<\infty$
f'	+	0	—	0	+
f	↗	0	↘	-3	↗
		max		min	

Энди функция графигини ясашга яна қўшимча жадвал тузамиз.

x	-2	-1	$\sqrt[3]{2,5}$	2	3
y	-84	-7	0	44	441

График $M_1(-1;\ -7)$ нуқтадан бошлаб (54-шакл) жадвалда кўрсатилган қоида билан $M_2(\sqrt[3]{2,5};\ 0)$ гача чизилади, ундан у ёғига M_3 (2; 44) нуқтага томон шаклдагидек тиккароқ қилиб (у нуқтагача бўлмаса ҳам) ясалади. $M_0(-2;\ -84)$ ҳам шу шаклдан анча узоқда бўлгани учун, у томондан M_1 нуқтага ҳам шаклда кўрсатилганидек тикка чизиб келинади.



54- шакл.

3- мисол. $y=\sqrt[3]{x^2-2x+1}+2$ нинг графигини ясанг.

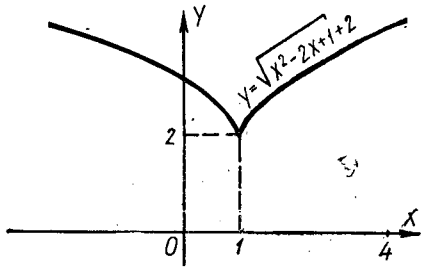
Ечилиши. 1) $D(y)=R$, $E(y)=[2;\ +\infty[$, чунки $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}+2$ деб ёзиб олсак, $(x-1)^2\geqslant 0$ бўлгани учун $y\geqslant 2$ бажарилади.

2) Бу функция тоқ ҳам, жуфт ҳам, даврий ҳам эмас.

3) $y'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}=\infty \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x_1=1$ критик нуқта.

4) Критик нуқтада функция $f(1)=2$ қийматга эга.



55-шакл.

5) Жадвал тузилади:

x	$-\infty < x < 1$	1	$1 < x < +\infty$
f'	$-$	∞	$+$
f	$\searrow$	2	$\nearrow$

x	y
4	≈ 4
2	3
0	3
-2	≈ 4

Энди шу хоссаларга яраша график ясалади (55-шакл).

Топшириқлар. 1. Ушбу функциялар графигини ясанг:

а) $y = x^2 + 6x + 5$; б) $y = x^3 - 3x + 2$; в) $y = \frac{2x}{1 + x^2}$; г) $y=(x-1)\sqrt{1-x}$;

д) $y = \sqrt[3]{|x|}$; е) $y = x^5 - 5x$; ж) $y = \frac{x}{x - 1}$; з) $y = x + \frac{4}{x}$.

2. Ушбу функцияларни текширинг ва графигини ясанг:

а) $y = kx^2 + b$; б) $y = \frac{k}{x^3}$; в) $y = \frac{a}{x_2}$; г) $y = \frac{k}{a^2 + x^2}$; д) $y = \sqrt{a^2 + x^2}$,

е) $y = A \sin kx$; ж) $y = A \cdot \operatorname{tg} kx$.

57. Ҳосила усулида амаллар. Баъзи элементар функциялар ҳосиласи:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2) $(uv)' = u'v + v'u$;

3) $(cu)' = c \cdot u'$, $c \in \mathbf{R}$;

4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$;

5) $(f \circ u)'_x = f'_x \cdot u'_x$;

6) $(f(kx + b))' = f'_u \cdot k$; $u = kx + b$,

7) $y'_x = \frac{1}{x'_y}$;

8) $\begin{cases} y = f(t) \\ x = \varphi(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$,

бунда $\alpha < t < \beta$.

---

1) $c' = 0$, $c \in \mathbf{R}$;

2) $(x^a)' = ax^{a-1}$, $a \in \mathbf{R}$;

3) $(a^x)' = a^x \ln a$; $a > 0$, $a \neq 1$;

4) $\log'_a x = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$;

5) $\sin' x = \cos x$;

6) $\cos' x = -\sin x$;

7) $\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$;

8) $\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

---

1) $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

2) $\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

3) $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1 + x^2}$;

4) $\operatorname{arcctg}' x = -\frac{1}{1 + x^2}$.

58. Бошланғич функциянинг таърифи ва унинг умумий кўриниши.

Берилган функциянинг ҳосиласига кўра шу функциянинг ўзини аниқлаш амали *интеграллаш амали* дейилади. Бу амал берилган функциянинг ҳосиласини топиш масаласи билан шуғулланадиган *дифференциаллаш амалига умуман олганда тескари амал* деб қаралади.

Таъриф. Агар $f(x)$ функция учун бирор $]a; b[$ оралиқда шундай дифференциалланувчи $F(x)$ функция мавжуд бўлсаки, ҳар бир $x \in]a; b[$ учун

$$F'(x) = f(x)$$

ўринли бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг $]a; b[$ оралиқдаги *бошланғич функцияси* дейилади.

1-мисол. $f(x) = x + 1$ нинг бошланғич функцияси $F(x) = \frac{x^2}{2} + x$, $\Phi(x) = \frac{(x+1)^2}{2}$, $G(x) = \frac{x^2+1}{2} + x$ лар бўлиши мумкин. Улар учун ҳар бир $x \in R$ да $F'(x) = \Phi'(x) = G'(x) = f(x)$ бажарилади.

2-мисол. $f(x) = \frac{1}{x}$ нинг $R \setminus \{0\}$ даги бошланғич функцияси $F(x) = \ln 2|x|$, $\Phi(x) = 10 + \ln|x|$, $G(x) = 1 + \frac{1}{2}\ln x^2$ лар бўлиши мумкин.

3-мисол. $F(x) = \sqrt[3]{x^2}$ функция R да $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ нинг бошланғич функцияси эмас, чунки $x_0 = 0$ да $f(x)$ аниқланмагани учун у ерда $F'(x_0) = f(x_0)$ бажарилмайди (аммо у $R \setminus \{0\}$ да бошланғич функциядир).

Бошланғич функциянинг ушбу асосий хоссаси бор:

Теорема. *$F(x)$ функция $]a; b[$ оралиқда $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлсин. У ҳолда*

а) *ҳар қандай ўзгармас C да $F(x) + C$ функция ҳам шу оралиқда $f(x)$ нинг бошланғич функциясидир;*

б) *$f(x)$ функциянинг шу оралиқдаги исталган бошланғич функцияси $F(x) + C$, $C \in R$ шаклдадир.*

Бу теоремани исботлаш учун аввал ушбу лемма исботланади.

Лемма. *Бирор f функциянинг $]a; b[$ оралиқда ўзгармас бўлиши учун f' ҳосиласининг ҳар бир $x \in]a; b[$ нуқтада нолга айланиши зарур ва етарлидир.*

Исбот. *Шартнинг зарурийлиги.* Фараз қилайлик, барча $x \in]a; b[$ учун $f(x) = C$ $(C \in R)$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $x \in]a; b[$ нуқтада $x + \Delta x \in [a; b[$ деб, функциянинг орттирмасини топсак, у

$$f(x) = C,\ f(x + \Delta x) = C \longrightarrow \Delta f(x) = f(+x\Delta x) - f(x) = C - C = 0$$

каби бўлади. Демак, $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ орттирмалар нисбати ҳам ноль. Энди $\Delta x \to 0$ да $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$ бўлишидан ҳар бир $x \in]a; b[$ нуқтада ҳосиланинг 0 га айлангани маълум бўлмоқда. Шартнинг зарурийлиги исботланди.

Шартнинг етарлилиги. Аксинча, барча $x \in]a; b[$ учун $f'(x) = 0$ бўлсин. Агар $f(x) \neq C (C \in \mathbf{R})$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция учун шундай турли $x_1 \in]a; b[$ ва $x_2 \in]a; b[$ нуқталар мавжудки, улар учун $f(x_1) \neq f(x_2)$. Энди $f(x)$ функцияга kx ни шундай танлаб қўшайликки, натижада $\varphi(x) = f(x) + kx$ функция учун $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ бажарилсин. У ҳолда

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Longrightarrow k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad k \neq 0.$$

Энди $\varphi(x)$ ёрдамчи функция ҳосиласини текширайлик:

$$\varphi'(x) = f'(x) + k = 0 + k \neq 0.$$

Бу кўрсатадики, $\varphi(x)$ функция $]a; b[$ оралиқда қатъий ўсувчи (агар $k > 0$ бўлса) ёки қатъий камаювчи (агар $k < 0$ бўлса), чунки $\varphi'(x)$ ўз ишорасини бу оралиқда ўзгартирмайди. Бу мулоҳаза $\varphi(x)$ ёрдамчи функцияни $x_1 \neq x_2$ бўлганда $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ шарт билан юқорида тузиб олинишига зид. Шундай қилиб, бу қарама-қаршилик доимо $k = 0$ эканлигини, яъни $f(x) = C$ $(C \in \mathbf{R})$ бўлишини исботлайди. Шартнинг етарлилиги исботланди. Демак:

$$\forall x \in]a, b[: f(x) = C, C \in \mathbf{R} \Longleftrightarrow \forall x \in]a, b[, \ f'(x) = 0. \ \blacktriangleright$$

Теореманинг исботи. $F(x)$ функция $f(x)$ нинг $]a; b[$ соҳада бошланғич функцияси бўлсин. Ихтиёрий $C \in \mathbf{R}$ учун $F(x) + C$ ҳам $f(x)$ нинг бошланғич функцияси эканлигини кўрсатайлик:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Демак, $f(x)$ функциянинг бошланғич функциялари $F(x)$ дан ташқари, яна чексиз кўп бўлиб, уларнинг ҳар бири $F(x) + C$ шаклда ифодаланади. Энди аксинча, $f(x)$ нинг бошланғич функцияларининг фақат $F(x) + C$, $(C \in \mathbf{R})$ шаклда ва фақат шу шаклдагина чексиз кўплигини кўрсатиш қолди. Айтайлик, $\Phi(x)$ ҳам $f(x)$ функциянинг $]a; b[$ даги бошланғич функцияси бўлсин:

$$\Phi'(x) = f(x).$$

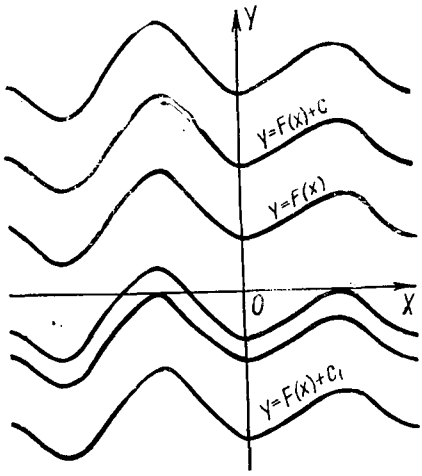
У ҳолда ҳар бир $x \in]a; b[$ учун:

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

эканлигини ёки юқоридаги леммага асосан $\Phi(x) - F(x) = C$ $(C \in \mathbf{R})$ лигини топамиз. Яъни $\Phi(x) = F(x) + C$. Шундай қилиб, $f(x)$ функциянинг барча бошланғич функциялари ўзаро

ўзгармас сонларгагина фарқ қиладиган функциялардан иборатлиги кўрсатилди.

Геометрик жиҳатдан шу нарса маълум бўлдики, f нинг ҳар қандай бошланғич функциясининг графиги $y = F(x)$ бошланғич функция графигини Oy ўқи бўйлаб C бирлик ($C < 0$ бўлса пастга, $C > 0$ бўлса юқорига) силжитишдан ҳосил қилинар экан (56- шакл).



56- шакл.

Баъзи элементар функциялар бошланғич функциялари:

1) $f(x) = 0, \quad F(x) = C;$

2) $f(x) = 1, \quad F(x) = x + C;$

3) $f(x) = x^a,$

$$F(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1;$$

4) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad F(x) = \ln|x| + C;$

5) $f(x) = a^x, \quad F(x) = \frac{a^x}{\ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$

6) $f(x) = e^x, \quad F(x) = e^x + C;$

7) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad F(x) = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1;$

8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad F(x) = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1;$

9) $f(x) = \sin x, \quad F(x) = -\cos x + C;$

10) $f(x) = \cos x, \quad F(x) = \sin x + C;$

11) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad F(x) = \operatorname{tg} x + C;$

12) $f(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad F(x) = \operatorname{ctg} x + C.$

Бошланғич функцияни топишнинг уч қоидаси:

а) F бирор f функциянинг, Φ бирор φ функциянинг $]a; b[$ оралиқдаги бошланғич функцияси бўлса, $F + \Phi$ функция $f + \varphi$ нинг шу оралиқдаги бошланғич функциясидир;

б) F бирор f функциянинг $]a; b[$ оралиқдаги бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда kF функция kf функциянинг шу оралиқдаги бошланғич функциясидир;

в) Агар $F(x)$ бирор $f(x)$ функциянинг $]a, b[$ оралиқдаги бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда $\frac{1}{n}F(nx+m)$ функция $f(nx+m)$ функциянинг $\left]\frac{m-a}{n}; \frac{m-b}{n}\right[$ оралиқдаги бошланғич функциясидир (n, m — ўзгармас сонлар ва $n \neq 0$).

Мисол. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ нинг графиги $T(-1; 2)$ нуқтадан ўтувчи бошланғич $F(x)$ функциясини топинг.

Ечилиши. Агар $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ десак, у ҳолда (4) формулага кўра $F(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$. Энди $F(x)$ нинг графиги $T(-1; 2)$ нуқтадан ўтиши учун $F(-1) = 2$ бажарилишини эътиборга оламиз:

$$2 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(-1)^2} + C \Rightarrow C_0 = \frac{1}{2}.$$

Демак, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ соҳада $f(x)$ функция графиги $T(-1; 2)$ нуқтадан ўтувчи $F(x) = \frac{3\sqrt[3]{x^2}+1}{2}$ каби бошланғич функцияга эга экан.

Топшириқлар. 1. F функция f нинг кўрсатилган оралиқдаги бошланғич функцияси эканини исботланг:

а) $F(x) = \sin x + \cos x$, $f(x) = \cos x - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$;

б) $F(x) = 10 + \frac{1}{x}$, $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

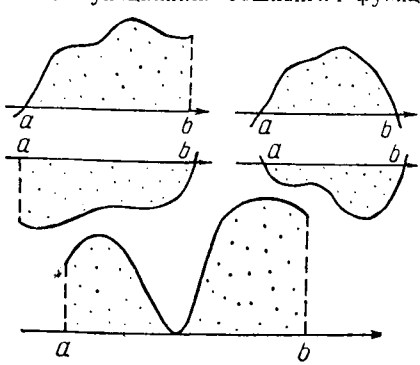
в) $F(x) = 3x + 5x^4$, $f(x) = 3 + 20x$, $x \in \mathbb{R}$.

2. f функциянинг графиги T нуқтадан ўтувчи бошланғич функциясини топинг:

а) $f(x) = x^4$, $T(-3; 4)$; б) $f(x) = \frac{3}{\cos^2 x}$, $T\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$;

в) $f(x) = \sin x + \cos x$, $T(\pi; 2)$; г) $f(x) = \sqrt[3]{x} + x$, $T(1; 3)$.

3. Функциянинг бошланғич функциясини топинг:



57- шакл.

а) $4x^2 + 5x + 1$; б) $\frac{4}{x^2} + 5x^{10}$;

в) $a\cos x + b\sin x$;

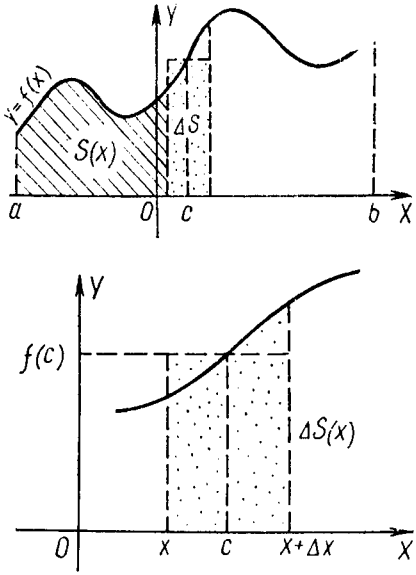
г) $\sin\frac{x}{3} + \frac{2}{\sin^2 x}$;

д) $\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{4x-1}}$.

59. Эгри чизиқли трапециянинг юзи. $[a; b]$ кесмада ўз ишорасини ўзгартирмайдиган узлуксиз f функция берилган бўлсин. У ҳолда Ox ўқи $x = a$, $x = b$ ва шу функ-

ция графиги билан чегараланган фигурага *эгри чизиқли трапеция* деб аталади. Унинг турли кўринишлари 57-шаклда берилган.

Теорема. *f функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз, номанфий бўлсин, S эса тегишли эгри чизиқли трапеция юзи бўлсин* (58-*а* шакл). *Агар F функция f нинг $[a, b]$ кесмада бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда $S = F(b) - F(a)$.*



58-*а, б* шакл.

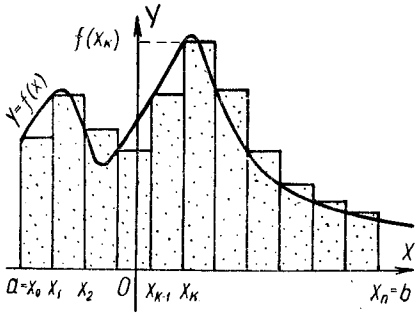
Исбот. 58-*а* шаклда кўрсатилганидек, $[a; x]$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ кесмага мос эгри чизиқли трапеция юзини $S(x)$ билан белгиласак, у функция сифатида $[a; b]$ да аниқланган ва $S(a) = 0$, $S(b) = S$ бажарилади. У хатто ҳосилага эга. Шуни кўрсатамиз: 58-*а* шаклда $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$ орттирма $[x; x + \Delta x]$ кесмадаги эгри чизиқли трапеция юзи сифатида алоҳида штрихланган. 58-*б* шаклда у катталаштирилган (аниқлик учун $\Delta x > 0$ деб олдик). Энди $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = S'(x)$ ни ҳисоблаймиз. $[x, x + \Delta x]$ кесмада шундай c нуқта топиладики, $\Delta S(x)$ — эгри чизиқли трапеция юзи $f(c)\Delta x$ га (яъни тўртбурчакнинг бўйи $f(c)$ ни, унинг эни Δx га кўпайтирилганига) тенг бўлади: $\Delta S(x) = f(c) \cdot \Delta x$, $x < c < x + \Delta x$. Демак, $S'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$, чунки, $\Delta x \to 0$ бўлганда $x < c < x + \Delta x$ бўлгани учун c ҳам x га интилади. Натижада $S'(x) = f(x)$ эканлиги ҳисобланди. Биз $S(x)$ ни худди теорема шартида берилган $F(x)$ сингари $f(x)$ нинг бошланғич функцияси эканлигини аниқладик. А, 58 п. теоремасига (133-бет) биноан $S(x) = F(x) + C$, $C \in \mathbf{R}$ тенглик ўринли. Агар $S(a) = 0$ дан фойдаланса:

$$F(a) + C = 0,$$

бундан $C = -F(a)$. Демак, $S(x) = F(x) - F(a)$.

Бу ердан келиб чиқадики, берилган эгри чизиқли трапециянинг юзи S ни топиш учун $x = b$ бўлиши керак:

$$S = F(b) - F(a). \blacktriangleright$$



59- шакл.

Изоҳ. Бу теоремадан $f(x)$ нинг $[a;\ b]$ кесмада ишорасини ўзгартмаган ҳол (масалан номусбат бўлганда) ҳам ўринли эканлигини тушуниш қийин эмас.

Мисол. $y = \cos x \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ функциянинг эгри чизиқли трапецияси юзи

$$S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Топшириқ. Ушбу эгри чизиқли трапеция юзларини топинг ва шаклини ясанг:

а) $y = 1 + x^2,\ -1 \leqslant x \leqslant 1$; б) $y = \frac{1}{x^2},\ 1 \leqslant x \leqslant 2$; в) $y = 4x - x^2,\ 0 \leqslant x \leqslant 4$;

г) $y = \sin x,\ \pi \leqslant x \leqslant 2\pi$; д) $y = \sqrt{x},\ 0 \leqslant x \leqslant 4$; е) $y = x^4,\ -2 \leqslant x \leqslant 2$.

60. Интеграл. Ньютон—Лейбниц формуласи. Аниқлик учун $f(x)$ функция $[a;\ b]$ кесмада узлуксиз ва номанфий дейлик (59-шакл). $[a;\ b]$ кесмани бир хил узунликдаги n та $[a;\ x_1]$, $[x_1;\ x_2]$, ... $[x_{n-1};\ b]$ каби бўлакларга бўламиз. $a = x_0$, $b = x_n$ десак, у ҳолда

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Энди ҳар бир $[x_{k-1};\ x_k]$ кесмада баландлиги $f(x_{k-1})$ га тенг тўғри тўртбурчак ясасак, унинг юзи

$$S_k = f(x_{k-1})\Delta x = \frac{b-a}{n} f(x_{k-1})$$

га тенг. Барча S_k тўртбурчаклар юзини қўшиб ёзсак:

$$\frac{b-a}{n}\left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right). \qquad (1)$$

Бу юз тақрибан $[a;\ b]$ кесмадаги эгри чизиқли трапеция юзига тенг. n катталашган сари улар орасидаги фарқ камайиб боради. Агар эгри чизиқли трапеция юзини S десак,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right) = S$$

бўлади. Биз бунинг қатъий исботини бермаймиз. Агар бу лимит мавжуд бўлса, у f функциянинг *a дан b гача олинган интеграли* дейилади ва қуйидагича белгиланади:

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

Бу ерда a ва b *интеграллаш чегаралари* (a—қуйи чегара, b—юқори чегара, $\int$ — *интеграл белгиси*) дейилади. $f(x)$ *интеграл остидаги функция* деб айтилади, x эса интеграл остидаги *ўзгарувчи* дейилади.

Агар $F(x)$ берилган $f(x)$ функциянинг $[a; b]$ даги бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда шу эгри чизиқли трапециянинг юзини икки усулда ҳисоблаш мумкин экан:

$$S=F(b)-F(a);\ S=\int_a^b f(x)dx.$$

Бундан:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \qquad (3)$$

тенглик ўринли. У *Ньютон—Лейбниц формуласи* деб аталади. Шунингдек, таърифга кўра $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ деб ёзиш ўринли. У ҳолда (2) формулани $a \geqslant b$ учун ҳам қўлланиш мумкин экани келиб чиқади, хусусан, $\int_a^a f(x)dx=0$ бўлади.

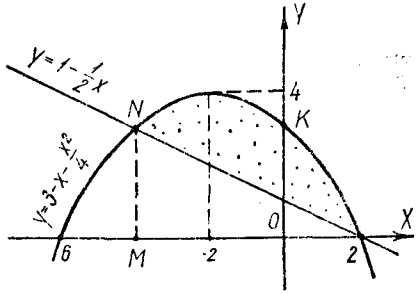
Қулайлик учун кўпинча $F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$ каби ҳам ифодаланади. Натижада (3) формула

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b \qquad (4)$$

кўринишга келади.

Масалан, $\int_1^4 \sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^4=\frac{2}{3}(4\sqrt{4}-1)=\frac{14}{3}$.

Контрмисол. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ интеграл юқорида келтирилган таърифга кўра маъносиз. Чунки $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ функция $[-1; 1]$ оралиқда узлуксиз эмас. Шуни алоҳида таъкидлаймизки, $F(x)=3\sqrt[3]{x}$ функция $f(x)$ нинг шу оралиқдаги бошланғич функцияси эмас, чунки $0\in D(F)$ бўлса ҳам, $0\overline{\in} D(f)$ дир.



60- шакл.

Мисол. $f(x)=1-\frac{x}{2}$, $g(x)=3-x-\frac{x^2}{4}$ чизиқлар билан чегараланган фигура юзини топинг.

Ечилиши. $y=f(x)$ ва $y=g(x)$ функция графиклари кесишиш нуқталари абсциссалари $f(x)=g(x)$ тенгламани қаноатлантиргани учун

$$1-\frac{x}{2}=3-x-\frac{x^2}{4}$$

ни ечиб $x_1=2$, $x_2=-4$ лар топилади (60-шакл). L нуқта $x=2$ ни билдирсин. Изланаётган фигуранинг юзи $MNKL$ эгри чизиқли трапеция юзидан MNL учбурчак юзини айириш билан топилади:

$$S=S_{MNKL}-S_{MNL}=\int_{-4}^{2}\left(3-x-\frac{x^2}{4}\right)dx-\int_{-4}^{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)dx=$$

$$=\left(3x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{12}\right)\Big|_{-4}^{2}-\left(x-\frac{x^2}{4}\right)\Big|_{-4}^{2}=18-9=9.$$

Топшириқлар. 1. Ҳисобланг:

а) $\int_2^3 x^3dx$; б) $\int_0^{2\pi}(\cos x+1)dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{3dx}{\cos^2 x}$; г) $\int_1^2\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^3}\right)dx$.

2. Ҳар қандай $c\in D(f)$ учун $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ ни исботланг.

3. Агар $f(x)$ функция $[a;\ b]$ да узлуксиз ва $[a;\ c_1]\cup[c_2;\ b]$ да номанфий, $]c_1;\ c_2[$ да манфий бўлса, у ҳолда $x=a$, $x=b$, Ox ўқи ва $f(x)$ функция графиги билан чегараланган фигура юзи қуйидагича эканлигини исботланг:

$$S=\int_a^{c_1}f(x)dx-\int_{c_1}^{c_2}f(x)dx+\int_{c_2}^{b}f(x)dx.$$

4. Фигуралар шаклини ясаб, юзини ҳисобланг:

а) $y=(x-1)^3$, $2\leqslant x\leqslant 4$;
б) $y=\sqrt{x-2}$, $2\leqslant x\leqslant 6$;
в) $y=8+2x-x^2$, $y=0$;
г) $y=1+\cos x$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$;
д) $y=x^2$, $y=2-x^2$;
е) $y=x^2-5x+6$, $y=3-x$;
ж) $y=2x^2+4x-6$, $y=2-2x$;
з) $y=x^2+2x-8$, $y=4-2x$.

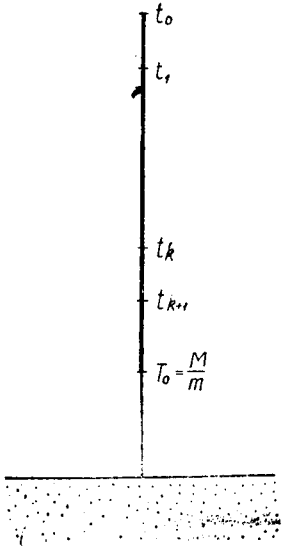
61. Интегралнинг татбиқи. 1) *Ўзгарувчи куч иши.*

Теорема. *М моддий нуқта Ox ўқи бўйлаб бирор ўзгарувчи куч таъсири остида $x=a$ нуқтадан $x=b$ нуқтага силжисин Агар $f(x)$ функция—F кучнинг Ox ўқига тушган проекцияси $[a;\ b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда F куч $]a;\ b]$ кесмада*

$$A = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

га тенг иш бажаради.

Бу теоремани исботлаш усули қуйидаги мисолнинг ечилишидан аниқланади.



61-шакл.

Мисол. Бошланғич массаси M бўлган сув томчиси ўз оғирлиги билан тушиб келар экан, бир текисда ҳар секундда унинг m га тенг массаси буғланиб боради. Шу томчи батамом буғланиб тамом бўлгунча, томчининг оғирлик кучи бажарган иш топилсин.

Ечилиши. Маълумки, t вақтда унинг массаси $M—tm$ миқдорда бўлиб, унинг оғирлиги бу вақтда $P = (M - mt)g$ (g — эркин тушиш тезланиши) га тенг. Бу вақтгача томчи бошланғич нуқтадан $s(t) = \frac{gt^2}{2}$ масофа босиб ўтади; томчи $T_0 = \frac{M}{m}$ вақтда йўқ бўлиб кетади. $[0; T_0]$ вақт оралиғини тенг n бўлакка бўлсак, ҳар бир $[t_k, t_{k+1}]$ вақт оралиғида томчи

$$\Delta s_k = \frac{t_{k+1}^2 - t_k^2}{2} g, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

га тенг масофа босиб ўтади (61-шакл). Шу масофа бўлагида оғирлик кучининг бажарган иши физикада киритилган иш таърифига биноан

$$A_k = P_k \cdot \Delta s_k = (M - t_k m)g \cdot \frac{g(t_{k+1}^2 - t_k^2)}{2}$$

га тенг бўлади. Агар T_0 вақтда томчи s_0 масофа босиб ўтса, у ҳолда шу иш бўлакларининг барчаси йиғиндиси

$$P_1 \cdot \Delta s_1 + P_2 \cdot \Delta s_2 + \ldots + P_n \cdot \Delta s_n$$

томчининг s_0 масофа босиб ўтгандаги ишига тақрибан тенг (А. 60 п. 138-бетда (1) га қаранг) Бу эса $n \to \infty$ бўлганда Ньютон—Лейбниц формуласи билан ҳисобланадиган ушбу ишга тенгдир:

$$A = \int_0^{s_0} P ds.$$

Аммо $ds = \frac{ds}{dt} \cdot dt = s'(t)dt = gtdt$ ни ҳисобга олсак, у ҳолда:

$$A = \int_0^{s_0} P ds = \int_0^{T_0} P(t)s'(t)dt = \int_0^{\frac{M}{m}} (M - tm)g \cdot gtdt = g^2 \frac{M^3}{Gm^2}.$$

2) ***Нуқта тезлиги функциясига қараб, унинг координатасини аниқлаш.***

Теорема. *М нуқта Ох ўқи бўйлаб ҳаракатда бўлсин. Агар М нуқта $v=\varphi(t)$ тезликка ҳар бир $t\in[t_0, T]$ вақтда эришса, у ҳолда у*

$$x(t)=x(t)_0+\int_{t_0}^{t}\varphi(t)dt \qquad (2)$$

координатали нуқтада шу тезликка эга.

Исбот. Маълумки, нуқтанинг тезлиги $x'(t)=\varphi(t)$ бўлганлигидан Ньютон—Лейбниц формуласига асосан

$$\int_{t_0}^{t}\varphi(t)dt=x(t)-x(t_0)$$

га эга бўламиз. Бу теореманинг тўғрилигини кўрсатади.▶

3) ***Фигура юзини ҳисоблаш.***

Теорема. *Агар $[a; b]$ кесмада узлуксиз $y=f(x)$ ва $y=\varphi(x)$ функциялар берилган бўлиб, уларнинг графиги c_1 ва c_2 $(a\leqslant c_1<c_2\leqslant b)$ нуқтада кесишса ва $f(a)\geqslant\varphi(a)$ бўлса, у ҳолда шу графиклар ҳамда $x=a$, $x=b$ чизиқлар билан чегаралланган фигуранинг юзи қуйидагича ҳисобланади:*

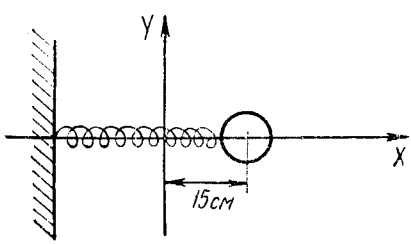
$$S=\int_{a}^{c_1}[f(x)-\varphi(x)]dx+\int_{c_1}^{c_2}[\varphi(x)-f(x)]dx+$$
$$+\int_{c_2}^{b}[f(x)-\varphi(x)]dx. \qquad (3)$$

Бу теоремани функцияларнинг кесишиш нуқталари $c_1, c_2,\ldots, c_n$ $(n>2)$ бўлган ҳол учун умумлаштириш мумкин. Бу ўқувчига қолдирилади.

1-мисол. 6 Н куч пружинани 15 см га чўзади. Шу кучнинг бажарган ишини ҳисобланг (62-шакл).

Ечилиши. Гук қонунига биноан, $F=kx$ куч (k—пропорционаллик коэффициенти) пружинани x масофага чўзади. O нуқта пружинанинг эркин ҳолатига мос нуқта бўлса, у ҳолда масала шартидан $6=k\cdot 0{,}15\Longrightarrow k=40$. Демак, (1) формулага кўра

$$A=\int_{0}^{0{,}15}40xdx=40\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{0{,}15}=0{,}45\text{ Ж}.$$



62- шакл.

2-мисол. Цилиндр шаклдаги бак уьинг остки асос текислигидаги тешигидан кираётган сув билан тўлдирилади. Бакнинг баландлиги H, асосинг радиуси R бўлса, сувни киритаётган босим кучи бажарган ишни топинг.

Ечилиши. Агар сув h баландликкача кирган бўлса, ундаги сув оғирлиги $P=\pi R^2h\rho g$ га тенг (ρ—сув

зичлиги). Сувни киритаётган куч шу кучга тенг. h — баландлик бўйича (1) формула интеграли қидирилаётган ишни беради:

$$A=\int_0^H Pdh=\int_0^H \pi R^2 h\rho g dh=\frac{1}{2}\pi R^2\rho g H.$$

3-мисол. $y=\cos x$ ва $y=\sin x$ функциялар графикларининг $0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ кесмадаги бўлаклари орасидаги фигура юзини топинг.

Ечилиши. Бу функциялар графиги $\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$ оралиқда $c_1=\frac{\pi}{4}$, $c_2=\frac{5\pi}{4}$ нуқтада кесишади ва $\cos 0>\sin 0$ бажарилади. У ҳолда изланаётган юз қуйидагича:

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx+$$

$$+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}(\cos x-\sin x)dx=(\sqrt{2}-1)+2\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)=4\sqrt{2}-2.$$

62. Интеграли ҳисоблашнинг асосий қоидалари. Айтайлик, f функция бирор $[a;\ b]$ кесмада интегралланувчи бўлсин. У ҳолда ушбу қоидалар ўринлидир:

1) Интеграллаш чизиқли амалдир:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx.$$

2) Интеграллашда ўзгармас сон интеграл белгиси олдига чиқарилади:

$$\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx,\ c\in\mathbf{R}.$$

3) Агар интегралда ўзгарувчи $t=nx+m$ (n ва m лар ўзгармас, $n\neq 0$) каби алмаштирилса, у ҳолда

$$\int_a^b f(nx+m)dx=\frac{1}{n}\int_{an+m}^{bn+m} f(t)dt.$$

4) Интеграллаш чегаралари ушбу хоссаларга эга:

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx;\ \int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+$$

$$+\int_c^b f(x)dx,\ c\in D(f).$$

5) Агар $f(x)$ функция $[a;\ b]$ соҳада манфий бўлмаса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0.$$

6) Агар $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ функция интегралнинг юқори чегараси функцияси деб қаралса, у ҳолда

$$\Phi'(x)=f(x).$$

Мисол Интегралларни ҳисобланг:

а) $\int_0^3 (1+2x)^9 dx$; б) $\int_{-4}^{4} \frac{dx}{\sqrt{3+0{,}5x}}$; в) $\int_0^{\pi} \sin^2\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)dx.$

Ечилиши.

а) $$\int_0^3 (1+2x)^9\, dx = \frac{1}{2}\int_{1+2\cdot 0}^{1+2\cdot 3} t^9 dt = \frac{t^{10}}{2\cdot 10}\Big|_1^7 = \frac{7^{10}-1}{20};$$

б) $$\int_{-4}^{4} \frac{dx}{\sqrt{3+0{,}5x}} = \frac{1}{0{,}5}\int_{3+0{,}5\cdot(-4)}^{3+0{,}5\cdot 4} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\cdot\int_1^5 t^{-\frac{1}{2}}dt = 4\sqrt{t}\Big|_1^5 = 4(\sqrt{5}-1);$$

в) $$\int_0^{\pi} \sin^2\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1-\cos\left(6x+\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{6\cdot 0+\frac{\pi}{3}}^{6\pi+\frac{\pi}{3}} \cos t dt = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\sin\frac{20\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Топшириқлар. 1. Агар $[a;\ b]$ да $f(x)\leqslant g(x)$ бўлса, $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$ эканлигини исботланг.

2. $[-a;\ a]$ да $f(x)$ жуфт, $\varphi(x)$ тоқ функция бўлса, қуйидагини исботланг:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx,\quad \int_{-a}^{a} \varphi(x)dx = 0.$$

3. $a<b$ бўлганда $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$ ни исботланг.

4. Нуқта $y=f(x)$ дифференциалланувчи функция графиги бўйлаб ҳаракатланади ва унинг абсцисса ўқидаги проекцияси тезлиги ўзгармас v_0 га тенг. Нуқтанинг ордината ўқидаги проекцияси тезлигини топинг.

5. Ox ўқининг O нуқтасида M массали жисм жойгашган бўлиб, у шу ўқнинг a нуқтасидаги m массали жисмга (бутун дунё тортишиш қонуни бўйича) таъсир қилиб, уни a нуқтадан b нуқтага кўчиради. Шу кучнинг бажарган ишини топинг.

ГЕОМЕТРИЯ

Планиметрия

Асосий геометрик тушунчалар нуқта, тўғри чизиқ ва текислик ҳисобланади. *Геометрик фигура* деб нуқталарнинг ҳар қандай тўпламига айтилади. Агар геометрик фигуранинг барча нуқталар тўплами бир текисликка тегишли бўлса, уни *текис геометрик фигура* дейилади. Одатда нуқталар латин алфавитининг бош ҳарфлари A, B, C, ... билан, тўғри чизиқлар эса кичик ҳарфлари a, b, c, ... билан белгиланади. Текисликлар эса α, β, γ, ... каби кичик грекча ҳарфлар билан ифодаланади.

а) Текисликда нуқталар ва тўғри чизиқларнинг тегишлилик хоссалари:

— ҳар қандай тўғри чизиқ учун унга тегишли ва тегишли бўлмаган нуқталар мавжуд;

— ҳар қандай икки нуқтадан тўғри чизиқ ўтказиш мумкин, ва фақат, битта;

— икки турли тўғри чизиқ ё кесишмайди, ё фақат битта нуқтада кесишади;

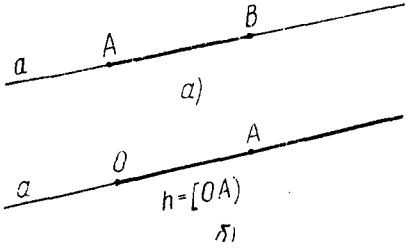
б) Нуқталарнинг тўғри чизиқда ва текисликда ўзаро жойлашиши хоссалари:

— тўғри чизиқдаги учта нуқтадан биттаси ва фақат биттаси қолган иккитаси орасида ётади;

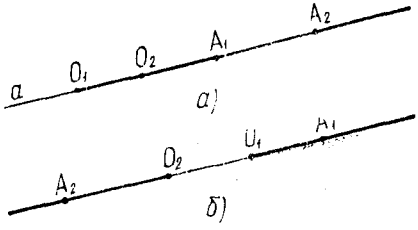
— тўғри чизиқ текисликни икки ярим текисликка ажратади.

1. Кесма, нур, синиқ чизиқ. Айтайлик, A ва B нуқталар a тўғри чизиқнинг турли нуқталари бўлсин. a тўғри чизиқнинг A ва B нуқталари билан бирга, шу нуқталар орасидаги a тўғри чизиқнинг барча нуқталари тўплами *кесма* дейилади ва $[AB]$ деб белгиланади (63-*а* шакл). A ва B шу кесманинг *охирлари* (A—боши, B—охири), кесманинг бошқа нуқталари унинг *ички нуқтаси* дейилади. AB кесманинг узунлиги $|AB|$ деб белгиланади. Икки кесма узунликлари тенг бўлса, улар *ўзаро тенг кесмалар* деб айтилади.

— ҳар бир кесма нолдан катта тайин узунликка эга. Кесманинг узунлиги шу кесманинг ҳар қандай нуқтаси ажратган қисмлари узунликлари йиғиндисига тенг: $|AB| = |AC| + |CB|$.



63-*а, б* шакл.



64-*а, б* шакл.

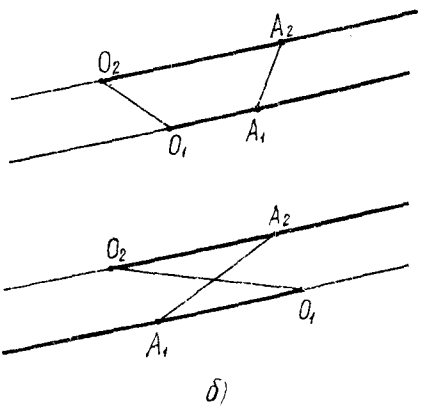
Тўғри чизиқнинг берилган O нуқтаси билан унинг бир томонида ётган нуқталардан иборат қисми *ярим тўғри чизиқ* ёки *нур* деб айтилади.

Тўғри чизиқни ташкил этувчи умумий бошга эга икки нурнинг бири иккинчисининг *тўлдирувчиси* дейилади. Агар A нуқта нурнинг бирор нуқтаси бўлса, бу нур $[OA)$ каби белгиланади. Бу ифодадаги биринчи ҳарф *нурнинг боши* дейилади (63-*б* шакл).

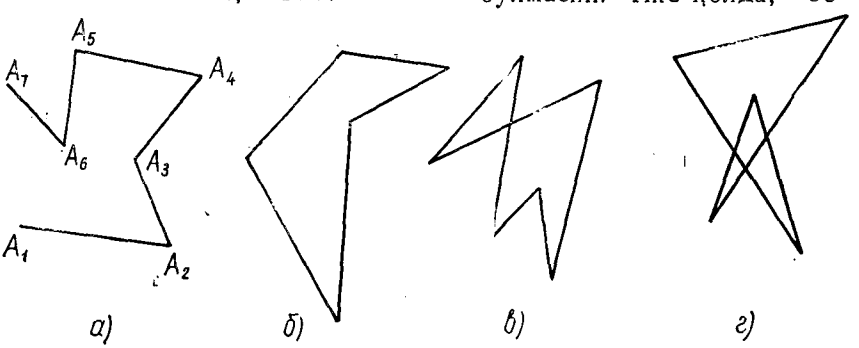
а) Агар икки нур a тўғри чизиқда жойлашган бўлиб, бири иккинчисининг қисми бўлса, улар *йўналишдош нурлар* дейилади (64-*а* шакл), аксинча уларнинг ҳеч бири иккинчисининг қисми бўлмаса, *қарама-қарши йўналган нурлар* дейилади (64-*б* шакл).

б) Агар бу нурлар параллел бўлган турли a ва b тўғри чизиқлар устида жойлашган бўлиб O_1O_2 кесма, A_1A_2 кесма билан кесишмаса, у ҳолда бу нурлар *йўналишдош* акс ҳолда эса, *қарама-қарши йўналган* дейилади (65-*а*, *б* шакл).

66-*а* шаклда $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ синиқ чизиқ тасвирланган бўлиб, у A_1A_2, A_2A_3, ..., A_6A_7 кесмалар бирлашмасидан иборат. Синиқ чизиқлар умуман икки хил бўлади: содда синиқ чизиқ, юлдузсимон синиқ чизиқ. $A_1A_2A_3 \dots A_n$ *содда синиқ чизиқ* деб, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., $A_{n-1}A_n$ кесмаларнинг шундай бирлашмасига айтиладики, бу тартибда ёзилган кесмаларнинг ҳар бир қўшни кесмалари бир тўғри чизиқда ётмасин ва қўшни бўлмаганлари умумий нуқтага эга бўлмасин. Акс ҳолда, бе-



65-*а*, *б* шакл.



66-*а*, *б*, *в*, *г* шакл.

рилган синиқ чизиқ *юлдузсимон синиқ чизиқ* дейилади. Синиқ чизиқни ташкил этувчи кесмалар унинг *бўғинлари* дейилади. A_1, A_2 ... A_n нуқталар синиқ чизиқнинг *учлари*, A_1 ва A_n нуқталар *охирлари* дейилади. Агар синиқ чизиқнинг A_1 ва A_n охирлари устма-уст тушса, бундай содда синиқ чизиқ *ёпиқ* деб айтилади.

Топшириқ. Текисликда A, B, C, D, E нуқталар белгиланг, бунда AB нур CD нурга йўналишдош, DE нурга қарама-қарши йўналган ҳамда AB, BC, CD, DE EA кесмалар содда синиқ чизиқ ташкил қилсин.

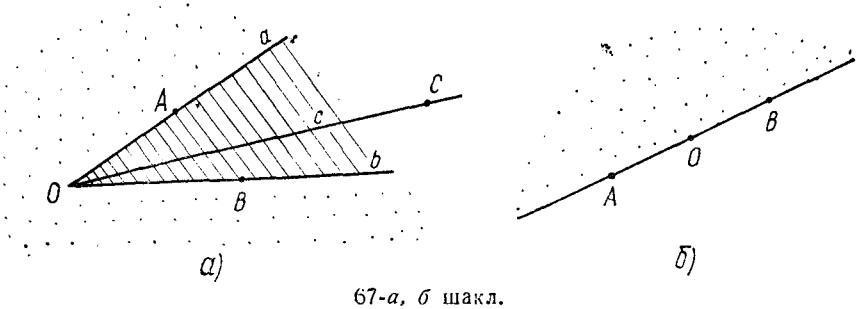
2. Соҳа. Бурчак, бурчак ўлчами. Вертикал ва қўшни бурчаклар. Биссектриса. *Соҳа* деб текисликнинг ушбу икки хоссага эга бўлган қисмини айтилади: а) ихтиёрий икки нуқтасини унда тўла ётадиган синиқ чизиқ билан туташтириш мумкин; б) ихтиёрий нуқтаси шу тўпламнинг қисми бўла оладиган бирор доира маркази бўла олади.

Масалан, айлана текисликни икки соҳага ажратади. Аммо айлананинг ўзи соҳа хоссаларига эга эмас, шунинг учун уни соҳа деб бўлмайди.

Таъриф. Умумий бошли икки нурнинг улар билан чегаралаган икки соҳадан бири билан бирлашмаси *бурчак* дейилади. Масалан, 67-*а* шаклда OA ва OB нурлар штрихланган тўплам билан биринчи, нуқталар қўйиб белгиланган тўплам билан иккинчи бурчакни ҳосил қилган. Уларнинг ҳар бири AOB бурчак (ёки BOA бурчак) деб аталади ва $\angle AOB$, $\angle O$ каби белгиланади. OA ва OB нурлар *бурчак томонлари*, O нуқта унинг *учи* дейилади.

Агар AO ва OB нурлар бир тўғри чизиқда ётмаса, улар бири *қаварик*, бири *ботиқ* бўлган иккита бурчак ҳосил қилади. Агар бу нурлар тўғри чизиқ ташкил этса, бунда *ёйиқ бурчаклар* ҳосил бўлади (67-*б* шакл).

Агар биринчи $A_1O_1B_1$ бурчакни иккинчи $A_2O_2B_2$ бурчак устига шундай қўйиш мумкин бўлсаки, уларнинг томонлари ва соҳалари мос равишда устма-уст тушса, бу бурчаклар *ўзаро тенг* дейилади ва $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$ каби ёзилади.



67-*а*, *б* шакл.

AOB бурчак берилган бўлсин. Агар C нуқта шу бурчак соҳасига тегишли бўлса, у ҳолда OC нурни шу бурчак *томонлари орасида ётади* дейилади. Бунда $\angle AOC$ ва $\angle COB$ бурчаклар ҳосил бўлиши 67-*а* шаклда кўрсатилган. Бу вақтда $\angle AOB$ ни шу иккала *бурчаклар йиғиндиси* деб аталади ва $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$ каби ёзилади. Агар $\angle AOC = \angle COB$ бўлса, OC нур шу *бурчак биссектрисаси* дейилади.

1 *градус* (1°) катталикдаги бурчак деб, шундай бурчакка айтиладики, унинг 180 тасининг йиғиндиси ёйиқ бурчакка тенг бўлади. 1° нинг $\frac{1}{60}$ бўлаги 1 *минут* (1′), $\frac{1}{360}$ бўлаги 1 *секунд* (1″) деб айтилади.

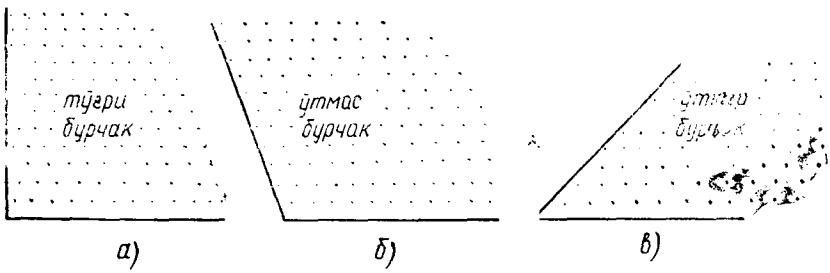
Бурчакнинг радиан ўлчови таърифи А. 31 п. 66-бетда берилган.

Бурчак хоссаси:

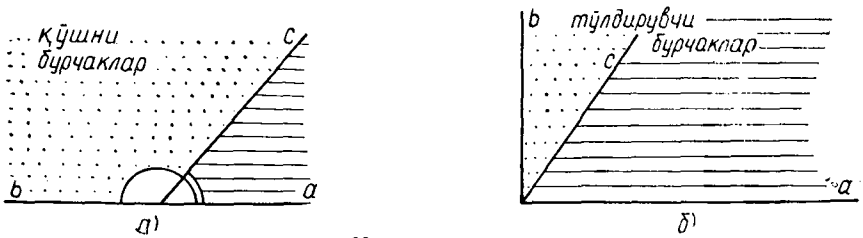
Ҳар бир бурчак нолдан катта тайин градус ўлчовга эга. Ёйиқ бурчак 180° га тенг. Бурчакнинг градус ўлчови ўзининг томонлари орасидан ўтувчи ҳар қандай нур ёрдамида ажратилишидан ҳосил қилинган бурчакларнинг градус ўлчовлари йиғиндисига тенг.

Агар бурчак 90° ли бўлса, у *тўғри бурчак* дейилади. 90° дан кичик бўлса, *ўткир бурчак*, 90° дан катта бўлиб, 180° дан кичик бўлган бурчак *ўтмас бурчак* дейилади (68-шакл),

Битта умумий томонли икки бурчакнинг бурчаклари йиғиндиси 180° бўлса, улар ўзаро *қўшни* бурчаклар, 90° бўлса, *тўлдирувчи* бурчаклар деб аталади (69-*а*, *б* шакл).

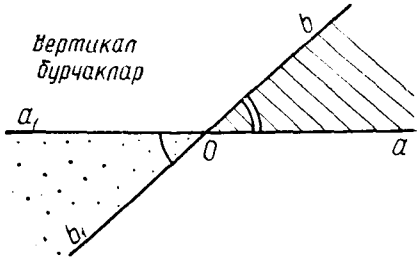


68-*а*, *б*, *в* шакл.



69-*а*, *б* шакл

Агар икки бурчаклан бирининг томонлари иккинчисининг томонларининг тўлдирувчи ярим тўғри чизиқлари бўлиб, улар фақат учларидагина умумий нуқтага эга бўлса, бу икки бурчак *вертикал бурчаклар* дейилади (70-шакл).

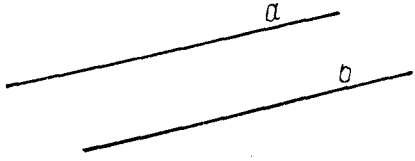


70- шакл.

Вертикал бурчакларнинг хоссалари:

— Вертикал бурчаклар бир-бириги тенгдир.

— Вертикал бурчакка қўшни иккала бурчак ҳам ўзаро вертикал бурчаклардир.



71-шакл.

Топшириқлар. 1. 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 150° бурчакларга қўшни ва вертикал бурчаклар ясанг.

2 Икки тўғри чизиқнинг кесишишидан ҳосил бўлган бурчакларнинг бири иккинчисидан 40° кичик бўлса, уларни топинг.

3. Бурчак биссектрисаси унинг томони билан 30°, 60°, 70°, 90° бурчак ҳосил қилса, шу бурчакнинг ўзини топинг.

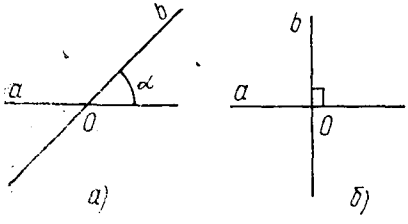
3. Параллел тўғри чизиқлар. Агар текисликда икки тўғри чизиқ ўзаро кесишмаса ёки устма-уст тушса, улар ўзаро *параллел* дейилади (71-шакл).

Параллел a ва b тўғри чизиқлар $a \nparallel b$, кесишувчи тўғри чизиқлар эса $a \parallel b$ ёки $a \cap b = M$ кўринишда (M—кесишиш нуқтаси) белгиланади.

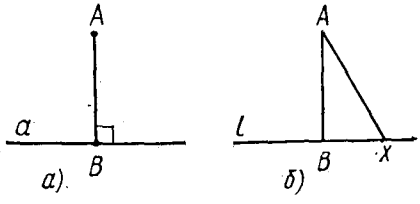
Параллел тўғри чизиқларнинг хоссаси:

— Берилган тўғри чизиқ ташқарисида олинган ихтиёрий нуқта орқали шу тўғри чизиққа параллел бўлган биттадан ортиқ тўғри чизиқ ўтказиш мумкин эмас.

4. Перпендикуляр тўғри чизиқлар. a ва b кесишувчи тўғри чизиқлар бўлсин (72-*а* шакл). Улар тўртта бурчак ҳосил этади, шулардан бирини α деб белгилайлик. У ҳолда қолган



72-*а*, *б* шакл.



73-*а*, *б* шакл.

бурчаклар α бурчакка ё қўшни, ё вертикал бурчаклар бўлади. Агар $\alpha = 90°$ бўлса, қолган бурчаклар ҳам тўғри бурчаклар бўлади. Бу ҳолда a ва b тўғри чизиқлар ўзаро *перпендикуляр тўғри чизиқлар* дейилади (72-*б* шакл) ва $a \perp b$ каби белгиланади.

Агар AB кесма B нуқтадан ўтувчи a тўғри чизиқ билан тўғри бурчак ташкил этса, бу кесма берилган тўғри чизиққа *перпендикуляр кесма* дейилади, B нуқта эса *перпендикуляр-нинг асоси* дейилади (73-*а* шакл).

Кесманинг ўрта нуқтасидан унга перпендикуляр бўлиб ўтадиган тўғри чизиқ бу кесманинг *ўрта перпендикуляри* дейилади.

1-теорема. *Тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтасидан унга ягона перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.*

Нуқтадан тўғри чизиққача масофа. A нуқта l тўғри чизиқдан ташқарида ётсин. Ундан шу тўғри чизиққа перпендикуляр кесма туширайлик (73-*б* шакл). Бу перпендикулярнинг асосини B билан белгиласак, у A нуқтанинг l тўғри чизиқдаги *проекцияси* дейилади. l тўғри чизиқда B дан бошқа ҳар қандай X нуқтани A нуқта билан туташтирувчи AX кесма A нуқтадан l тўғри чизиққа туширилган *оғма* деб айтилади.

2-теорема. *A нуқтадан l тўғри чизиққа туширилган перпендикуляр ҳар қандай оғмадан қисқадир*

A нуқтадан l тўғри чизиққача бўлган *масофа* деб унинг шу тўғри чизиқдаги B проекциясигача бўлган $|AB|$ узунликка айтилади.

Умуман, A нуқтадан Ф фигурагача бўлган *масофа* деб шундай $|AB|$ узунликка ($B \in$ Ф) айтиладики, у барча $B \in$ Ф нуқталар учун энг кичиги бўлади.

5. Силжитиш ва унинг турлари. Масофанинг асосий хоссалари:

— Бир-биридан фарқли икки нуқта орасидаги масофа мусбат, улар устма-уст тушгандагина бу масофа нолга тенг бўлади:

а) $A \neq B \Rightarrow |AB| > 0$; б) $A = B \Rightarrow |AB| = 0$.

— Ҳар қандай A ва B нуқталар учун $|AB| = |BA|$.

— Ҳар қандай A, B, C нуқталар учун $|AC| \leqslant |AB| + |BC|$ ва $|AC| \geqslant |AB| - |BC|$ бажарилади.

1-таъриф. Текисликни (фазони)[1] ўзини ўзига ўзаро бир қийматли акслантириш *текисликни (фазони) алмаштириш* деб аталади.

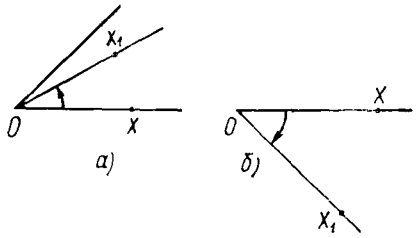
Текисликни (фазони) алмаштириш икки хил бўлиб, уларнинг бири натижасида ихтиёрий икки нуқта орасидаги масофа улар-

---

[1] Қисқартириш мақсадида стереометрия қисмига оид баъзи тушунчалар бу ерда ва 153, 154, 161, 174—175-бетларда бирлаштириб берилган.

нинг образлари орасидаги масофага тенг бўлади, иккинчиси натижасида масофа сақланмайди.

Жумладан, текислик (фазо) нинг ҳар бир нуқтасини ўзини ўзига акслантириш уни *айнан алмаштириш* деб айтилади ва E билан белгиланади.



74-*а, б* шакл.

Агар текисликни (фазони) алмаштириш натижасида унинг ихтиёрий X ва Y нуқталари орасидаги $|XY|$ масофа шу нуқталар образлари X_1 ва Y_1 нинг орасидаги $|X_1Y_1|$ масофага тенг бўлса, у ҳолда бу алмаштириш *силжитиш* деб айтилади.

Ўрта мактабда текисликни бирор нуқта атрофида *буриш, ўққа нисбатан симметрия, параллел кўчириш* ҳамда *буларнинг композицияси* тарзида ифодаланган силжитишлар ўрганилади.

Буриш

2-таъриф. Текисликни O нуқта атрофида α *бурчакка буриш* деб уни шундай силжитишга айтиладики, бунда

а) O нуқта ўзига ўзи аксланади,

б) Текисликнинг ихтиёрий X нуқтаси учун OX нур OX_1 нурга шундай алмашадики, бунда улар учун $\angle XOX_1 = \alpha$ ўринлидир.

Агар OX нур OX_1 нурга соат мили ҳаракатига қарама-қарши буриш билан алмашса, *мусбат буриш*, аксинча буриш билан силжиса, *манфий буриш* дейилади. Масалан, 74-*а, б* шаклда текисликни 30° ва —45° га O нуқта атрофида буриш кўрсатилган. Текисликни O нуқтаси атрофида α бурчакка буриш R_0^α билан белгиланади. $\alpha \in (-180°; 180°]$ ва $\beta = \alpha + 360° \times n (n \in \mathbf{Z})$ бўлса, у ҳолда α бурчакка ва β бурчакка буриш ўзаро тенгдир: $R_O^\alpha = R_O^\beta$.

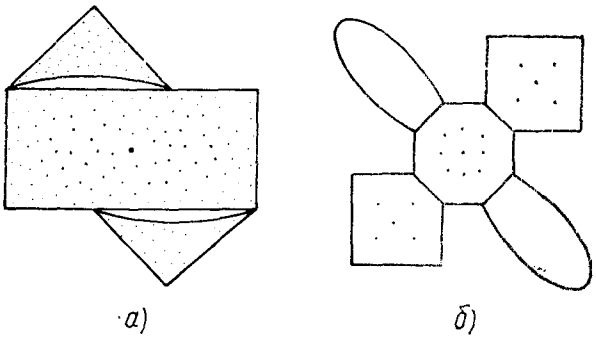
Текисликни O нуқтаси атрофида $O°$ га буриш эса текисликни айнан алмаштиришдир: $R_O^0 = E$.

Буриш хоссалари: 1) Текисликни O нуқтаси атрофида α бурчакка буриш R_O^α га шу текисликни O нуқтаси атрофида—α бурчакка буриш $R_O^{-\alpha}$ ўзаро тескари акслантиришдир: $R_O^\alpha \circ R_O^{-\alpha} = E$, $R_O^{-\alpha} \circ R_O^\alpha = E$.

2) Текисликни O нуқтаси атрофида α бурчакка, сўнг β бурчакка буриш бу уни $\alpha + \beta$ бурчакка буришдир: $R_O^\alpha \circ R_O^\beta = R_O^{\alpha+\beta}$. Агар $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ эканлигини эсласак, бу буришлар композицияси коммутативдир: $R_O^\alpha \circ R_O^\beta = R_O^\beta \circ R_O^\alpha$.

Марказий симметрия

3-таъриф. Текисликни O нуқтаси атрофида $\alpha = \pm 180°$



75-*а*, *б* шакл.

га буриш *O* марказли *марказий симметрия* дейилади ва Z_O билан белгиланади: $Z_O = R^{\pm 180°}$.

Агар текисликни бирор *O* нуқтаси атрофида 180° га буриш билан геометрик фигура ўзига аксланса, бундай фигура марказий *симметрик фигура, O* нуқта эса *симметрия маркази* дейилади (75-*а*, *б* шакл).

Марказий симметрия хоссаси:

— Марказий симметрияга тескари аксланиш ҳам марказий симметрик аксланишдир (марказий симметриядир): $Z_O = Z_O^{-1}$.

Мисол. Тўғри чизиқ ўзининг ихтиёрий нуқтасига нисбатан, квадрат унинг диоганаллари кесишган нуқтасига нисбатан, вертикал бурчаклар умумий учига нисбатан марказий симметрик фигуралардир.

Ўққа нисбатан симметрия

4-таъриф. *AB* кесманинг учлари, унинг ўрта перпендикуляри—*l тўғри чизиққа нисбатан симметрик, l эса симметрия ўқи* деб айтилади (76-*а* шакл).

Текисликда ихтиёрий олинган ҳар бир *A* нуқта учун *l* тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлган ягона *B* нуқта мос келади. Текислик барча нуқталарининг унинг бирор *l* тўғри чизиғига нисбатан симметрик алмаштирилиши текисликнинг *l ўқли симметрияси* дейилади ва S_l деб белгиланади.

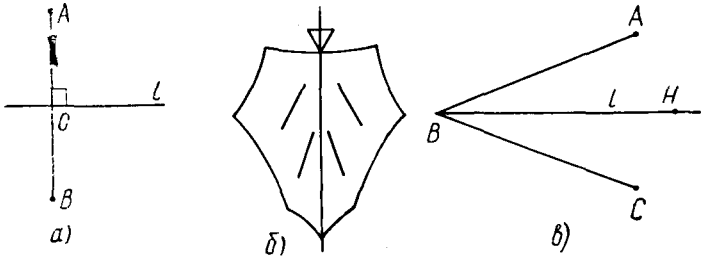
Ўққа нисбатан симметрия хоссалари:

— *l* ўқли симметрияга тескари алмаштириш ҳам *l* ўқли симметриядир: $S_l = S_l^{-1}$.

— Симметрия ўқига перпендикуляр ҳар қандай тўғри чизиқ, шу ўққа нисбатан симметрикдир.

— *l* ўқли симметрия шу ўқ билан чегараланган ярим текисликларни бир-бирига акслантиради.

Агар текислик бирор *l* ўққа нисбатан симметрик акслганда ундаги бирор геометрик фигура ўз-ўзига алмашса, бу фигура *l симметрия ўқига эга* дейилади (76-*б* шакл).



76-*а*, *б*, *в* шакл

Бурчак биссектрисаси хоссаси. *Бурчак биссектрисаси ётган тўғри чизиқ шу бурчакнинг симметрия ўқидир.*

Исбот. ABC бурчакнинг BH биссектрисаси ётган тўғри чизиқ l бўлсин (76-*в* шакл). l ўқли симметрия BH нурни ўзини ўзига акслантиради: $S_l[BH)=[BH)$. Шунингдек, $\angle ABH$ ҳам C нуқта ётган l чегарали ярим текисликка аксланганда, у шундай бурчакка аксланадики, унинг бир томони BH дир. Шартга кўра $\angle ABH=\angle CBH$ бўлганлигидан BA нурнинг образи BC дир: $S_l[BC)=[BC)$. Шундай қилиб, ABC бурчак S_l симметрияда ўз-ўзига аксланади. ▶

Параллел кўчириш

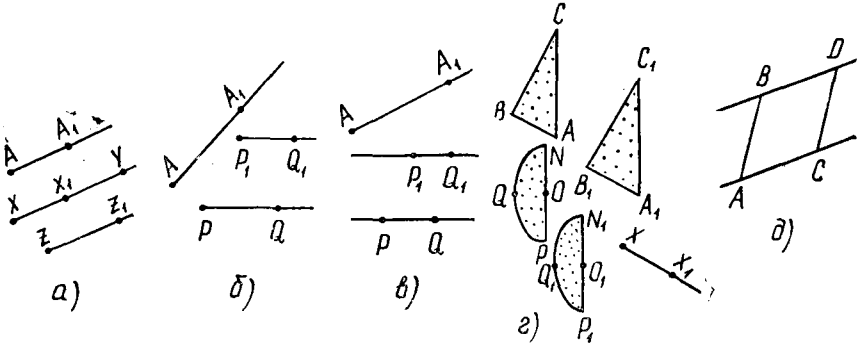
5-таъриф. Текисликни (фазони) AA_1 нур йўналишида $|AA_1|$ масофага *параллел кўчириш* деб, унинг шундай алмаштирилишига айтиладики, натижада унинг ҳар бир X нуқтаси ягона X_1 нуқтасига аксланганда XX_1 нур AA_1 нурга йўналишдош ҳамда $|XX_1|=|AA_1|$ шарт бажарилади (77-*а* шакл) ва бу T билан белгиланади: $T(X)=X_1$.

1-теорема. *Параллел кўчириш силжитишдир.*

Бу теорема исботи ўқувчига қолдирилади.

Параллел кўчириш хоссалари:

— Текисликни AA_1 йўналишда $|AA_1|$ масофага параллел



77-*а*, *б*, *в*, *г*, *д* шакл,

кўчириш уни A_1A нур йўналишида шу масофали параллел кўчиришга тескари алмаштиришдир:

$$T(X)=X_1 \Longleftrightarrow T^{-1}(X_1)=X.$$

а) Параллел кўчириш натижасида нур ўзига йўналишдош нурга (77-*б* шакл) алмашади: $T[PQ)=[P_1Q_1) \Longleftrightarrow [PQ) \uparrow\uparrow [P_1Q_1)$.

б) Тўғри чизиқ ўзига параллел тўғри чизиққа (77-*в* шакл) алмашади:

$$T(PQ)=(P_1Q_1) \Longrightarrow (PQ) \parallel (P_1Q_1).$$

Масалан, 77-*г* шаклда ABC учбурчак ва $OPQN$ фигуранинг бирор XX_1 нур бўйлаб, $|XX_1|$ масофага параллел кўчирилиши тасвирланган.

2-теорема. *Учлари турли параллел икки тўғри чизиқда ётувчи параллел кесмаларнинг узунликлари ўзаро тенг.*

Исбот. $(AB) \parallel (CD)$, $(AC) \parallel (BD)$ эканлиги маълум (77-*д* шакл). $|AB|=|CD|$ лигини кўрсатамиз. Агар $T(A)=C$ шартни бажарувчи параллел кўчиришни қарасак, у (AB) тўғри чизиқни унга параллел бўлган ва C нуқтадан ўтувчи тўғри чизиққа акслантиради. Демак, $T(AB)=(CD)$. Бу вақтда (BD) тўғри чизиқ ўзига ўзи аксланади ва $T(B)=D$. Шундай қилиб, $T[AB]=[CD]$. Бу ердан $|AB|=|CD|$ эканлиги келиб чиқади. ▶

Топшириқлар. 1. AB кесмани, ABC учбурчакни, AB нурни, $ABCD$ квадратни O нуқта атрофида $\alpha=-30°$, $\beta=-45°$ га буринг. O нуқта шу фигурага тегишли ва тегишли бўлмаган ҳолларни текширинг.

2. Симметрия марказига эга бўлган учбурчак, тўртбурчак, бешбурчак, олтибурчакларнинг хоссаларини айтинг. Кесма, тўғри чизиқ, нур, айлана симметрия марказига эгами? Бир неча симметрия марказига эга бўлган фигураларга мисоллар келтиринг.

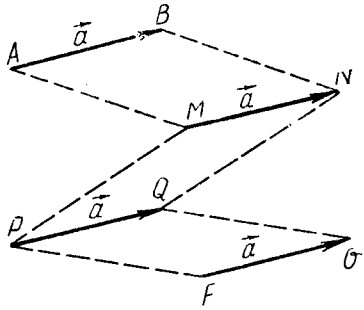
3. $ABCD$ тўртбурчак AC тўғри чизиққа нисбатан симметрик, а) $|CD|=2$, $|AB|=1$ бўлса, $|BC|$ ва $|AD|$ ни топинг. б) $\angle CBA$ ва $\angle BCA$ мос равишда 120° ва 30° бўлса, $\angle ADC$ ва $\angle BCD$ ни топинг.

6. Вектор. Векторлар устида амаллар. Коллинеар ва компланар векторлар. Текисликда (фазода) AB кесманинг A нуқтасини боши, B нуқтасини охири деб айтилиши орқали унга йўналиш берилиши *AB вектор* дейилади ва $\overrightarrow{AB}$ каби белгиланади. A дан B га йўналган вектор 78-шаклдагидек тасвирланади. Бунда AB кесманинг узунлиги *$\overrightarrow{AB}$ вектор узунлиги* дейилади ва $|\overrightarrow{AB}|$ орқали белгиланади. Боши билан охири устма-уст тушган вектор *ноль вектор* дейилади ва унинг узунлиги 0 ҳисобланади. Ноль векторнинг йўналиши аниқланмаган ҳисобланади.

78- шакл.

Векторлар тенглиги. Йўналишдош $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{MN}$ векторларнинг узунликлари

тенг ($|AB|=|MN|$) бўлса, бу икки вектор ўзаро *тенг векторлар* дейилади ва $\vec{AB}=\vec{MN}$ деб ёзилади. Бу эса текисликда (фазода) $\vec{AB}$ га тенг векторлар чексиз кўплигини билдиради (79-шакл). Баъзида векторлар кичик латин ҳарфлари орқали $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ... каби белгиланади. Ноль вектор $\vec{0}$ билан белгиланади. $\vec{a}=\vec{AB}$ ифода $\vec{a}$ вектор $\vec{AB}$ векторга тенг бўлган ихтиёрий векторнинг бирини билдиради, бу яна ҳар қандай векторни текисликнинг ихтиёрий нуқтасидан қўйиш мумкинлигини ҳам билдиради. Масалан, $\vec{a}=\vec{AB}$ векторни C нуқтадан қўйиш учун ундан $\vec{AB}$ векторга йўналишдош нур чизилади ва унда узунлиги $|\vec{AB}|$ га тенг бўлган CD кесма ажратилади. $\vec{AB}=\vec{CD}$ вектор $\vec{a}$ векторни C нуқтадан қўйилганини аниқлайди.



79- шакл.

Векторларни қўшиш. Ноль бўлмаган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларни бирининг охиридан иккинчиси қўйилганда боши биринчи векторнинг бошида, охири иккинчи вектор охирида бўлган вектор бу векторларнинг *йиғиндиси* дейилади ва $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ билан белгиланади (80-*а* шакл).

Қўшилувчи векторлар сони бир қанча бўлганда ҳам бу таъриф ўзгармайди (80-*б* шаклда $\vec{n}=\vec{a}_1+\vec{b}_1+\vec{c}_1+\vec{d}$).

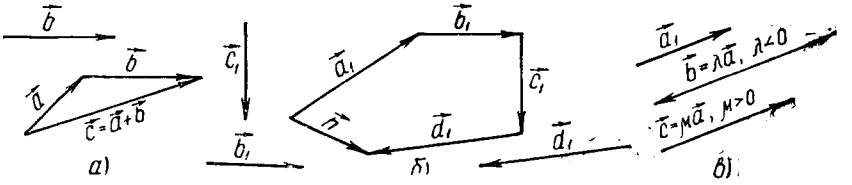
Қўшиш хоссалари:

1) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ — ноль вектор хоссаси;

2) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ — коммутативлиги;

3) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ — ассоциативлиги.

Йиғиндиси ноль вектор бўлган икки вектор ўзаро қарама-



80- шакл.

қарши вектор дейилади. $\vec{a}$ га қарама-қарши вектор $-\vec{a}$ каби белгиланади. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Агар A ва B турли нуқталар бўлса, $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{BA}$ ўзаро қарама қарши векторларни аниқлайди: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Векторни сонга кўпайтириш. Ноль бўлмаган $\vec{a}$ вектор билан λ соннинг *кўпайтмаси* деб, шундай $\lambda\vec{a}$ векторга айтиладики, унинг модули $|\lambda||\vec{a}|$ га тенг бўлиб, йўналиши эса $\lambda>0$ бўлганда $\vec{a}$ вектор йўналиши билан бир хил, $\lambda<0$ бўлганда унга қарама-қарши бўлади (80-*в* шакл).

Агар $\vec{a}=0$ ёки $\lambda=0$ бўлса, у ҳолда қуйидаги хоссалар ўринли:

а) $\lambda\cdot\vec{a}=\vec{0}$, $\lambda\in\mathbf{R}$, б) ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

Векторнинг сонга кўпайтмаси хоссалари (λ, $\mu\in\mathbf{R}$):

1) $\lambda\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\lambda$ – коммутативлиги;

2) $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ — ассоциативлиги;

3) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$, $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ дистрибутивлиги.

Векторларни айириш. $\vec{a}$ вектордан $\vec{b}$ векторни *айириш* деб, $\vec{a}$ га $-\vec{b}$ векторни қўшиш натижасига айтилади:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

Бу айириш қоидасини шаклда $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ ва $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$ векторлар учун мустақил ясаб кўринг.

Топшириқлар. 1. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ берилган. B нуқтадан $\vec{b}$ векторга, D нуқтадан $\vec{a}$ векторга параллел тўғри чизиқлар ўтказайлик. Уларнинг кесишиш нуқтасини C билан белгилайлик. $\overrightarrow{OC}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар йиғиндисига тенг эканлигини исботланг.

2. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ бўлсин. $-\vec{b}=\overrightarrow{BD}$ векторни ясанг ва $\overrightarrow{AD}$ вектор $\vec{a}$ дан $\vec{b}$ нинг айирмаси $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ га тенг эканлигини чизмада кўрсатинг.

Таъриф. Ноль бўлмаган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар йўналишдош ёки қарама-қарши йўналган бўлса, улар ўзаро *коллинеар* деб аталади.

Ноль бўлмаган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ўзаро $\vec{a}=\lambda\vec{b}(\lambda\neq0)$ тенглик билан боғланган бўлса, бу уларнинг ўзаро коллинеар бўлишларининг зарурий ва етарли шарти ҳисобланади.

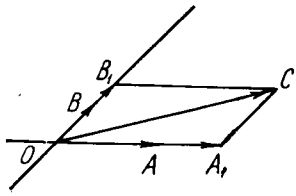
Таъриф. Ноль бўлмаган $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар бирор O нуқтага қўйилган вақтда $\vec{a}=\vec{OA}$, $\vec{b}=\vec{OB}$, $\vec{c}=\vec{OC}$ векторлар бир текисликда ётса, у ҳолда улар ўзаро *компланар векторлар* дейилади.

1-теорема. *Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ коллинеар бўлмаса, улар билан компланар бўлган ҳар қандай $\vec{c}$ вектор учун шундай λ ва μ(λ, $\mu \in$ **R**) сонлар топиладики, уни ягона тарзда $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ каби ёйиб ёзиш мумкин.*

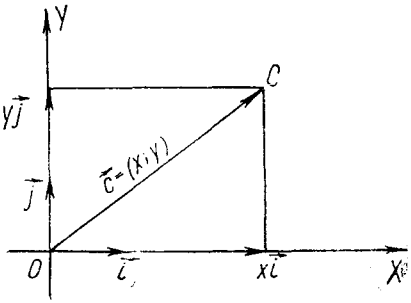
Исбот. Бу ерда уч ҳол бўлиши мумкин. $\vec{c}$ вектор ё $\vec{a}$ билан, ё $\vec{b}$ билан коллинеар бўлади, ё иккаласи билан ҳам коллинеар бўлмайди. Биринчи икки ҳолда коллинеарликнинг юқорида айтиб ўтилган шартига кўра ё $\vec{c}=\lambda\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}$ ёки $\vec{c}=0\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{b}$ каби ёзилиб, теорема тасдиғи тўғри бўлади. Энди учинчи ҳолда бу учала векторнинг бошини O нуқтага қўяйлик ва $\vec{a}=\vec{OA}$, $\vec{b}=\vec{OB}$, $\vec{c}=\vec{OC}$ бўлсин. Агар C нуқтадан $\vec{b}$ векторга параллел тўғри чизиқ ўтказсак, у OA тўғри чизиқни A_1 нуқтада, $\vec{a}$ векторга параллел тўғри чизиқ ўтказсак, у OB тўғри чизиқни B_1 нуқтада кесиб ўтади (81-шакл). Натижада $\vec{OA}$ вектор $\vec{OA_1}$ вектор билан, $\vec{OB}$ вектор $\vec{OB_1}$ вектор билан коллинеар бўлгани учун $\vec{OA_1}=\lambda\vec{a}$, $\vec{OB_1}=\mu\vec{b}$. 81-шаклдан кўриниб турибдики, $\vec{OC}=\vec{OA_1}+\vec{OB_1}$ тенгликдан $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ келиб чиқади. Агар $\vec{c}$ вектор $\lambda\neq\lambda$, $\mu\neq\mu$, шарт билан яна $\vec{c}=\lambda_1\vec{a}+\mu_1\vec{b}$ каби ёйилганда эди, $\vec{c}-\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}-\lambda_1\vec{a}-\mu_1\vec{b}=(\lambda-\lambda_1)\vec{a}+(\mu-\mu_1)\vec{b}$ тенглик ҳосил қилиш мумкин бўлар эди. Бундан

$$\vec{a}=\frac{\mu-\mu_1}{\lambda-\lambda_1}\vec{b}$$

келиб чиқиб, $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$ га коллинеар деган хулоса юзага келади. Бу теорема шартига зид. Демак, $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ каби ёйилма мавжуд ва ягона экан. ▶



81-шакл.



82- шакл.

Векторнинг координаталари. *Oxy* координаталар текислигида *O* нуқтадан *Ox* ва *Oy* ўқларида мос равишда бир бирлик узунликдаги $\vec{i}$ ва $\vec{j}$ векторлар берилган бўлсин (82-шакл). Бу ҳолда координаталар системаси $(\vec{i}; \vec{j})$ *векторлар базисига* эга дейилади. $\vec{i}$ ва $\vec{i}$ векторларга компланар ихтиёрий $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ векторни 1-теоремага биноан ягона тарзда $\vec{c}=x\vec{i}+y\vec{j}$ каби ($x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$) ифодалаш мумкин. Бунда x ва y лар $\vec{c}$ векторнинг $(\vec{i}; \vec{j})$ базисидаги *координаталари* дейилади ва $\vec{c}=(x; y)$ деб белгиланади.

Координаталари билан берилган $\vec{a}=(x_1; y_1)$, $\vec{b}=(x_2; y_2)$ векторларнинг хоссалари:

$$\begin{cases} 1)\ \vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2); \\ 2)\ \vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2;\ y_1-y_2); \\ 3)\ \lambda \in \mathbf{R} \Rightarrow \lambda\vec{a}=(\lambda x_1,\ \lambda y_1). \end{cases}$$

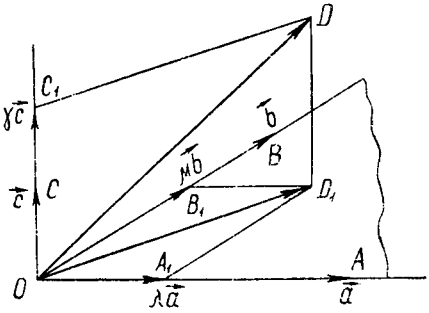
Топшириқлар. 1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб берилган, унинг қирраларида ётган векторлар ичида ўзаро коллинеар, компланар бўлган векторларни кўрсатинг.

2) *Oxy* координаталар системасида $A(x_1; y_1)$ ва $B(x_2; y_2)$ нуқталар берилган. $\overrightarrow{AB}$ вектор координаталари $(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$ эканлигини кўрсатинг.

2-теорема. *$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ноль бўлмаган нокомпланар векторлар бўлсин. Фазодаги ҳар қандай $\vec{d}$ вектор учун шундай λ, μ ва ν сонлар топиладики, уни ягона $\vec{d}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}$ шаклда ифодалаш мумкин.*

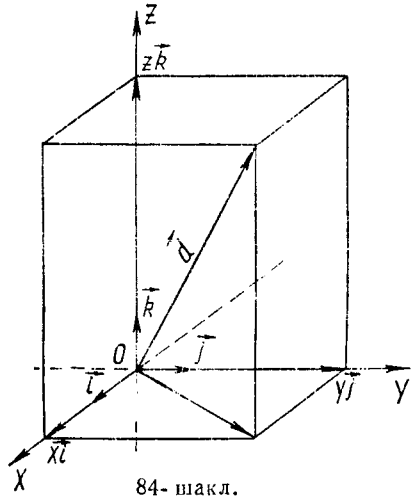
Исбот. Бу ерда икки ҳол: $\vec{d}$ вектор $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг бирор иккитаси билан компланар бўлиши ёки нокомпланар бўлиши мумкин. 1-ҳолда, айтайлик, $\vec{d}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ билан компланар бўлсин. У ҳолда 1-теоремага кўра $d=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+0\cdot\vec{c}$ каби ягона тарзда ифодаланиш мавжуд ва бу

билан теорема исботланади. 2-ҳолда, берилган $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ векторларни бир O нуқтага қўйиб, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$ ни ясаймиз (83-шакл). D нуқтадан $\vec{c}$ векторга параллел қилиб тўғри чизиқ ясасак, OAB текислик билан D_1 нуқтада, OD_1 тўғри чизиққа параллел қилиб тўғри чизиқ ясасак, OC тўғри чизиқда бирор C_1 нуқтада кесади. 1-теоремага кўра, $\overrightarrow{OD_1}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ га компланарлигидан $\overrightarrow{OD} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ каби ягона ёйилмага эгамиз. $\overrightarrow{OC_1}$ эса $\vec{c}$ векторга коллинеарлигидан $\overrightarrow{OC_1} = \nu \cdot \vec{c}$ ифодаланиши маълум. Булардан: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OC_1}$, яъни $\vec{d} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c}$. ▶



83-шакл.

Фазодаги вектор координаталари. $Oxyz$ координаталар фазосида боши O нуқтадан Ox, Oy ва Oz ўқлари бўйлаб, бир бирлик узунликдаги векторлар қўяйлик ва уларни мос равишда $\vec{i}$, $\vec{j}$ ва $\vec{k}$ билан белгилайлик (84-шакл). Бу билан координаталар системаси ($\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) *векторлар базисига* эга дейилади. 2-теоремага кўра, ихтиёрий d векторни O нуқтадан қўйсак, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$ вектор учун шундай $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{R}$ сонлар топиладики, $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ёйилма орқали ягона тарзда ифодаланади. x, y, z сонлар $\vec{d}$ векторнинг ($\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) *базисдаги координаталари* дейилади ва $\vec{d} = (x; y; z)$ каби белгиланади.



84-шакл.

Координаталари билан берилган $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ векторлар учун ушбу хоссалар ўринлидир:

1) $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2)$;

2) $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2;\ y_1-y_2;\ z_1-z_2)$;

3) $\lambda \in \mathbf{R} \Rightarrow \lambda\vec{a}=(\lambda x_1;\ \lambda y_1;\ \lambda z_1)$.

Топшириқ. Oxyz координаталар системасида боши $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтада, охири $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқтада бўлган вектор $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$ каби ифодаланишини исботланг.

Векторларнинг скаляр кўпайтмаси. Ноль бўлмаган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак деб, $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ ва $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ вектор ташкил қилган бурчаклардан кичигини айтилади ва $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ билан белгиланади (85- шакл).

Агар $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=90°$ бўлса, $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$ векторга *перпендикуляр* дейилади ва $\vec{a}\perp\vec{b}$ деб белгиланади.

Ноль бўлмаган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг *скаляр кўпайтмаси* деб $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a}\ \vec{b}})$ кўпайтмага тенг сонга айтилади ва $(\vec{a},\vec{b})$ ёки $\vec{a}\ \vec{b}$ билан белгиланади: $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\ \vec{b}})$.

Агар $\vec{a}$ ёки $\vec{b}$ дан бири ноль вектор бўлса, бу векторларнинг скаляр кўпайтмаси 0 га тенг деб ҳисобланади.

Скаляр кўпайтманинг хоссалари:

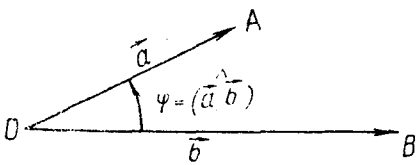
1) $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$ — коммутативлиги,

2) $(k\vec{a},\vec{b})=k(\vec{a},\vec{b})$ — сонга кўпайтиришга нисбатан ассоциативлиги,

3) $(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c})$ — дистрибутивлиги.

3-теорема. *Ноль бўлмаган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлиши учун уларнинг скаляр кўпайтмаси 0 га тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow (\vec{a},\vec{b})=0.$$



85- шакл.

Натижа. $(\vec{a},\vec{a})=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$, яъни $\vec{a}$ векторнинг ўзига ўзининг скаляр кўпайтмаси, унинг узунлиги квадратига тенг. Шу жум-

ладан, $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ ва $\vec{i}\,\vec{j} = \vec{j}\,\vec{k} = \vec{k}\,\vec{i} = 0$ келиб чиқади.

Топшириқлар. 1. $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ ва $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ векторлар учун ушбу формулаларни исботланг:

$$\text{а) } |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}; \quad \text{б) } (\vec{a},\ \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2;$$

$$\text{в) } \cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Кўрсатма. $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\cdot\vec{j}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ ифодаланишдан фойдаланинг ва $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = 1$, $\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$ ни ҳисобга олинг.

2. $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ векторлар учун ушбу формулаларни исботланг (олдинги топшириқдаги кўрсатмадан фойдаланинг):

$$\text{а) } |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}; \quad \text{б) } (\vec{a},\ \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2;$$

$$\text{в) } \cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

3. $A(2;\ -4)$, $B(4;\ 2)$, $C(-2;\ 0)$ нуқталар берилган. $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$ векторларнинг координаталарини топинг. Бу векторларнинг узунлигини, орасидаги бурчакларни топинг ва уларни ясанг. $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$ эканлигини текширинг. $2\vec{AB} - 2\vec{AC}$ ва $3\vec{BC}$ векторлар коллинеарми?

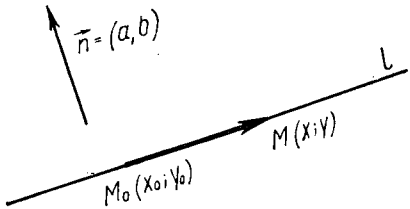
4. $A(-1;\ 1;\ 1)$, $B(1;\ 0;\ 0)$, $C(4;\ 2;\ -2)$ нуқталар берилган. Бу ерда ҳам 3 даги саволларга жавоб беринг.

5. $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$ вектор йўналишида $\vec{a^0} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ вектор бирлик вектордир: $|\vec{a^0}| = 1$. Бу векторнинг координаталари қуйидагича эканлигини исботланг:

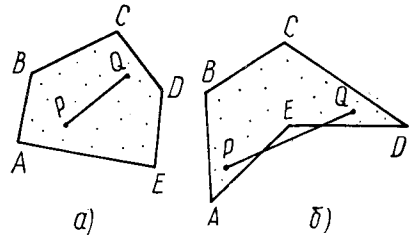
$$\vec{a^0} = (\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma) \text{ ва } \cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}.$$

Бу ерда $\alpha = (\widehat{\vec{i},\ \vec{a}})$, $\beta = (\widehat{\vec{j},\ \vec{b}})$, $\gamma = (\widehat{\vec{k},\ \vec{a}})$. Бунда $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ лар $\vec{a}$ векторнинг *йўналтирувчи конуслари* дейилади. $\vec{a} = (-1;\ 2;\ -2)$ векторнинг йўналтирувчи конусларини топинг.

Тўғри чизиқ тенгламаси. $F(x,\ y) = 0$ тенгламани қаноатлантирувчи ҳар бир $(x;\ y)$ жуфтлик текисликда бирор $M(x;\ y)$ нуқтани аниқлайди. Координаталари $F(x,\ y) = 0$ тенгламани қаноатлантирувчи барча нуқталар тўплами текисликда бирор Φ фигура бўлади. $F(x,\ y) = 0$ ни Φ фигуранинг *тенгламаси* дейилади.



86- шакл.



87-*а*, *б* шакл.

Теорема. *Ҳар қандай* $ax + by + c = 0$ *кўринишдаги тенглама текисликда* $\vec{n} = (a; b)$ *векторга перпендикуляр бўлган ягона тўғри чизиқни аниқлайди, ва аксинча, ҳар қандай тўғри чизиқ тенгламаси* $ax + by + c = 0$ *шаклдадир.*

Исбот. $M_0(x_0; y_0) \in l$ ва $l \perp \vec{n}$ бўлсин (86- шакл). Агар $M \in l$ бўлса, $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ вектор $\vec{n} = (a; b)$ га перпендикуляр бўлгани учун $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$ дир. Бундан $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Унда $-ax_0 - by_0 = c$ десак, бу тенглама $ax + by + c = 0$ кўринишга келади.

Аксинча, $ax + by + c = 0$ берилган бўлиб, $M_0(x_0; y_0)$ нуқта учун $ax_0 + by_0 + c = 0$ тенглик ўринли бўлсин. У ҳолда уни берилган тенгламадан айириб, $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ ни ҳосил қиламиз. Бу $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ векторнинг $\vec{n} = (a; b)$ га перпендикулярлигини билдиради. Бундай $M(x; y)$ нуқталар текисликда бирор ягона тўғри чизиқни аниқлайди. ▶

Масалан, $M_0(1; -2)$ нуқтанинг координаталари $2x + 3y + 4 = 0$ ни қаноатлантиргани учун M_0 шу тенглама билан аниқланган l тўғри чизиққа тегишлидир ва $l \perp \vec{n}$ ($\vec{n} = (2; 3)$) муносабат бажарилган.

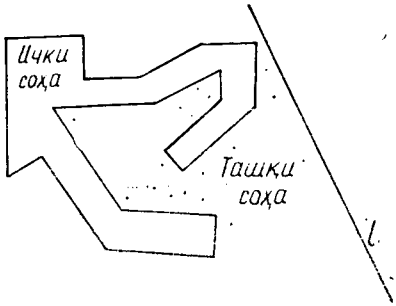
Топшириқлар. 1. $A(1; 2)$ нуқтадан ўтувчи ва $\vec{n} = (3; 4)$ га перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламасини топинг. $B(-4; 2)$ дан; $C(-2; -3)$ дан ўтувчи ва шу векторга перпендикуляр тўғри чизиқлар тенгламалари билан уни солиштиринг.

2. A, B ва C нуқталар бир тўғри чизиқда ётишининг зарурий ва етарли шарти $\overrightarrow{OC} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB}$ ($\lambda \in R$) нинг бажарилишидир. Исботланг.

7. Қаварик фигуралар. Кўпбурчак, унинг учлари, томонлари, диагоналлари. Кўпбурчакларнинг симметрия ўқи ва марказлари.

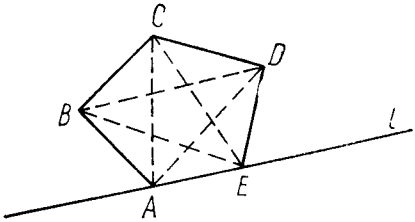
1-таъриф. Агар фигуранинг ихтиёрий икки нуқтасини туташтирувчи кесма шу фигурага тегишли нуқталардан иборат бўлса, у *қаварик фигура* (87-*а* шакл), акс ҳолда эса *ботиқ фигура* (*ноқаварик*) дейилади (87-*б* шакл).

Ёпиқ содда синиқ чизиқ текисликни икки соҳага ажратади: ички ва ташқи. Ташқи соҳанинг ички соҳадан фарқи шуки, унда тўла ётадиган бирор тўғри чизиқ доим топилади (88-шакл). Берилган синиқ чизиқ эса шу соҳаларнинг ҳар бирининг ҳам чегарасидир.

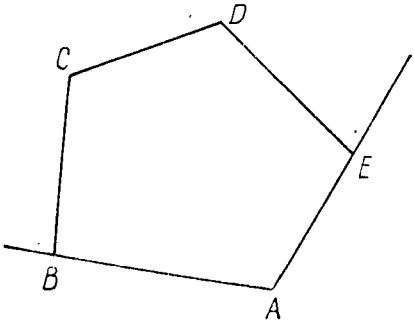


88- шакл.

2-таъриф. Ёпиқ содда синиқ чизиқ билан унинг ички соҳаси бирлашмаси *кўпбурчак* дейилади. Содда синиқ чизиқнинг ўзини эса шу кўпбурчакнинг *чегараси*, ички соҳа нуқталарини эса кўпбурчакнинг *ички нуқталари* деб айтилади. Синиқ чизиқ учлари *кўпбурчакнинг учлари*, унинг бўғинлари эса кўпбурчак *томонлари* деб аталади. Кўпбурчакнинг икки қўшни томони орасидаги бурчаги унинг *ички бурчаги* дейилади. Кўпбурчакнинг учлари, томонлари ва ички бурчаклари сони бир хил бўлиб, шуларга асосан унинг турлари: учбурчак, тўртбурчак, . . . , n-бурчак деб айтилиб, номларида ўша учлари (томонлари, бурчаклар) сони назарда тутилади. Кўпбурчакнинг барча томонлари узунлиги йиғиндиси унинг *периметри* деб айтилади.

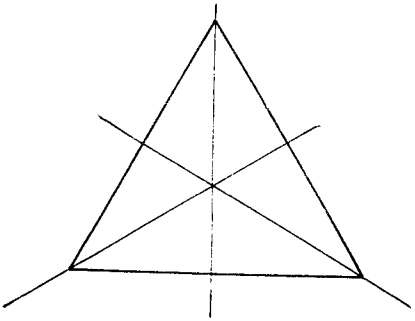


89- шакл.

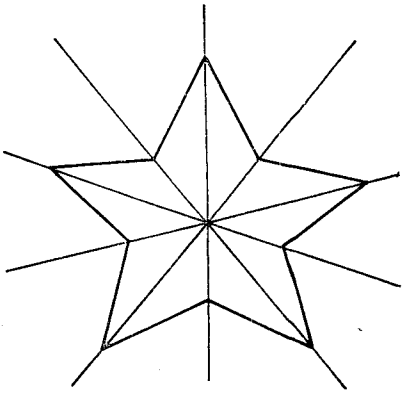


90- шакл.

Кўпбурчакни белгилашда уни синиқ чизиқни белгилагандек $A_1A_2A_3A_4$ ёки $ABCDE$ каби учларининг номи тартиб билан кўрсатилади. Кўпбурчакнинг қўшни бўлмаган икки учини туташтирувчи кесма унинг *диагонали* дейилади. 89-шаклда қаварик кўпбурчак $ABCDE$ нинг AC, BD, CE, BE ва AD диагоналлари кўрсатилган бўлиб, у шу кўпбурчакка тегишли. Ноқаварик $ABCD$ тўртбурчак диагоналлари эса бу хоссага эга эмас.



91- шакл.



92- шакл.

Қаварақ кўпбурчак хоссалари: а) Қаварақ фигура таърифига кўра, қаварақ кўпбурчакка тегишли ихтиёрий икки нуқтани туташтирувчи кесма кўпбурчак ичида ёгади; б) у ихтиёрий томонини ўз ичига олган тўғри чизиқдан бир томонда ётади (90- шакл).

3- таъриф. Ҳамма томонлари ва ҳамма бурчаклари ўзаро тенг қаварақ кўпбурчак *мунтазам кўпбурчак* дейилади.

Агар фигура O марказ атрофида $\frac{360^\circ}{n}$ $(n \in N)$ бурчакка бурилганда, ўзига аксланса, у ҳолда бу фигура *n- тартибли айланиш симметриясига* эга дейилади, O нуқта эса *n- тартибли айланиш маркази* деб айтилади.

Хулосалар:

— тенг томонли учбурчак учта симметрия ўқига эга, улар шу учбурчак томонларининг ўрта перпендикулярларидир. Ўрта перпендикулярлар кесишган нуқта 3- тартибли айланиш марказидир (91- шакл.)

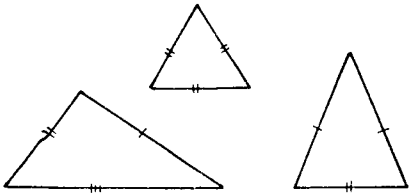
— Беш қиррали *учли* юлдуз (92- шакл) бешта симметрия ўқига эга, бу ўқлар кесишган нуқта 5- тартибли айланиш марказидир.

Топшириқлар. 1. Қаварақ n бурчакнинг диагоналлари сони $\frac{n(n-3)}{2}$ та эканлигини исботланг.

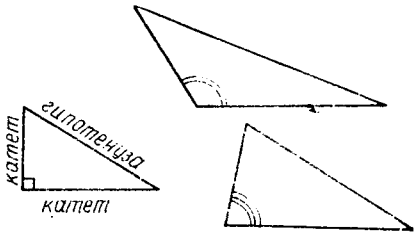
2. Диагоналлари сони 1430 (1000) та бўлган кўпбурчак мавжудми? Агар мавжуд бўлса, унинг томонлари сони нечта?

3. Ҳеч бир учтаси бир тўғри чизиқда ётмаган n та нуқта нечта кесмани аниқлайди?

4. Икки қаварақ фигура кесишмаси қаварақ фигура; қаварақ ва ноқаварақ фигуралар кесишмаси қаварақ фигура бўлиши шарт эмаслигини чизмада текширинг.



93- шакл.



94- шакл.

5. Икки бурчак кесишмаси қандай фигура? У мунтазам кўпбурчак бўлиши мумкинми? Қаварик (ёки ноқаварик) бўлиши мумкинми? Ёпиқ бўлмаган синиқ чизиқ бўлиши мумкинми?

6. Энг кам учли қаварик (ботиқ) кўпбурчак учлари сони нечта? Қаварик кўпбурчак n та учли бўлса, унинг учидан чиққан диагоналлар уни нечта учбурчакка ажратади?

7. Симметрия ўқига эга (эга бўлмаган) ва 6- тартибли айланиш марказига эга бўлган фигура ясанг.

8. Мунтазам 8 бурчакнинг симметрия ўқлари сони ва айланиш тартибини унинг шаклини ясаб, сўнг топинг

8. Учбурчак. Унинг медианаси, биссектрисаси, баландлиги. *Учбурчак* деб уч томонли кўпбурчакка айтилади. Учбурчак томонлари орасидаги муносабатга кўра *турли томонли*, *тенг ёнли*, *тенг томонли* (*мунтазам*) бўлади. Шу каби улар ички бурчакларига боғлиқ равишда *ўткир бурчакли*, *тўғри бурчакли* ва *ўтмас бурчакли* учбурчакларга ажратилади (93, 94- шакл).

Учбурчак томонлари ва бурчаклари орасидаги баъзи муносабатлар:

— учбурчакда катта томон қаршисида катта бурчак ётади;

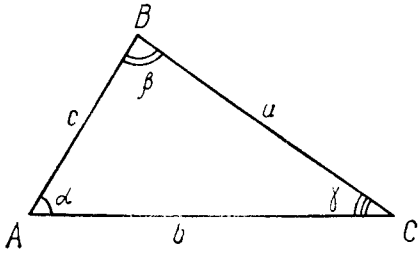
— катта бурчак қаршисида катта томон ётади;

— тенг томонлар қаршисида тенг бурчаклар ётади ва аксинча.

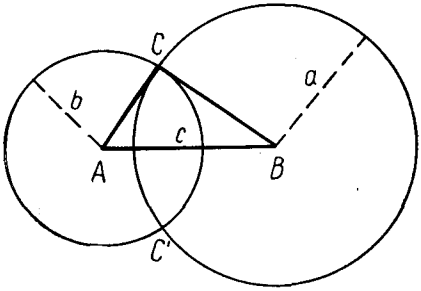
Тўғри бурчакли учбурчакда энг катта бурчак 90° га тенг, ўтмас бурчакли учбурчакда 90° дан катта, ўткир бурчакли учбурчакда 90° дан кичик бўлади.

Тўғри бурчакли учбурчакда ўткир бурчак қаршисидаги томонлар *катетлар*, тўғри бурчак қаршисидаги томон *гипотенуза* деб аталади (94- шакл).

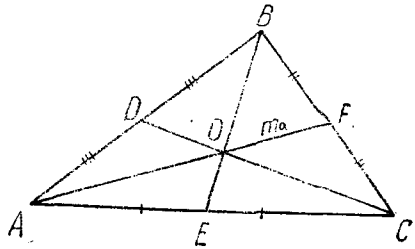
ABC учбурчакни чизмада тасвирлашда, одатда, *A* бурчак қаршисидаги томон *a*, *B* бурчак қаршисидаги томон *b*, *C* бурчак қаршиси-



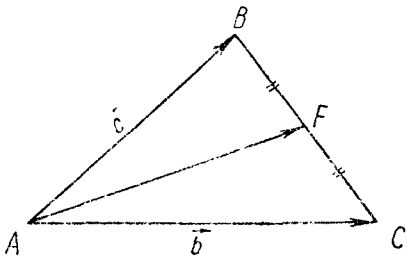
95 - шакл.



96- шакл.



97- шакл.



98- шакл.

даги томон c билан белгиланади (95- шакл). Учбурчакнинг томонлари ва бурчаклари унинг *асосий элементлари* деб айтилади. Учбурчак ўзининг асосий элементларидан учтаси (улардан камида биттаси томон бўлиши шарт) билан тўла аниқланади. Яъни умумий кўринишдаги учбурчакнинг учта элементи маълум бўлса, уни ясаш, қолган номаълум элементларини ҳисоблаш мумкин.

Масалан, уч томони бўйича учбурчак ясалиши талаб этилса, дастлаб бундай учбурчак мавжудлиги қуйидагича текширилади: a, b, c томонли учбурчакнинг томонлари орасида $a+b>c$, $a+c>b$, $b+c>a$ муносабатлар бажариладими ёки йўқми? Агар бу шартлар бажарилса, ихтиёрий тўғри чизиқ устида учбурчакнинг бирор томони, масалан, c узунлигига тенг AB кесма ажратиб, (A, b) ва (B, a) айланаларнинг кесишиш нуқтаси сифатида C нуқта топилади ва улар туташтирилиб, сўралган ABC учбурчак ҳосил қилинади (96- шакл). Аслида, бу айланалар иккита C ва C' нуқтада кесишади, уларнинг ҳар бири ҳам сўралган учбурчакнинг учи бўла олади. ABC ва ABC' учбурчаклар ўзаро тенг бўлгани учун масала ечими битта ҳисобланади.

Топшириқлар. 1. Икки томони ва улар орасидаги γ бурчаги бўйича учбурчак ясанг. Бунда $0°<\gamma<180°$ шартнинг бажарилиши зарурлигига асосланинг.

2. Бир томони ва унга ёпишган α ва β бурчаклари бўйича учбурчак ясанг. Бунда $0° < \alpha + \beta < 180°$ нинг бажарилиши шартлигини кўрсатинг.

Учбурчакнинг a томонига туширилган m_a *медианаси* деб, бу томоннинг ўртаси билан унинг қаршисидаги учини туташтирувчи кесмани айтилади (97- шаклда $m_a=|AF|$).

Медиананинг хоссалари.

1) Учбурчакнинг учала медианаси бир нуқтада кесишади;

2) Учбурчак медианалари (учбурчак учидан ҳисоблаганда) кесишиш нуқталарида 2 : 1 каби нисбатда бўлинади;

3) Учбурчак медианалари кесишиш нуқтаси унинг оғирлик марказидир;

4) Медиана учбурчакни икки тенгдош учбурчакка ажратади;

5) a томонга тушган медиананинг узунлиги қуйидагича ҳисобланади:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

5-хоссанинг исботи. ABC учбурчакда $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ десак (98-шакл), у ҳолда $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ эканлигидан $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$ келиб чиқади. $|\vec{c}^2| = \vec{c}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b}\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$ бўлгани учун $2\vec{a}\vec{b}\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - \vec{c}^2$ ўринлидир. 98-шаклда $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AC}$ бўлгани учун AF медиана билан устма-уст тушган $\overrightarrow{AF}$ вектор $\overrightarrow{AF} = \vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}$ каби аниқланади. Демак, $|\overrightarrow{AF}| = m_a^2 = \left(\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}\right)^2 = \vec{b}^2 - \vec{a}\vec{b}\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + \frac{\vec{a}^2}{2}$ ёки бу ердан $m_a^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$ келиб чиқади Уни соддалаштирсак,

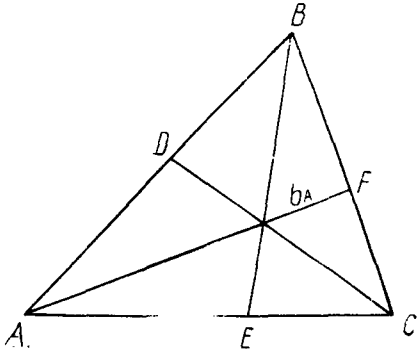
$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2), \text{ бундан: } m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Учбурчакнинг A бурчаги *биссектрисаси* b_A деб, унинг A бурчагини тенг иккига бўлиб, уни шу учининг қаршисидаги томони билан тугаштирувчи кесмага айтилади.

Биссектрисанинг хоссалари:

1) Учбурчакнинг учала биссектрисаси бир нуқтада кесишади (99-шакл, Г. 22 п. теорема (185-бет) га қаранг.)

2) Биссектрисаларнинг кесишиш нуқтаси шу учбурчак-



99-шакл.

ка ички чизилган айлана марказидир (Г. 22 п. теорема (186-бет) га қаранг).

3) Учбурчак биссектрисаси бурчак қаршисидаги томонни ён томонлари нисбати каби пропорционал кесмаларга ажратади (152-шакл, Г. 26 п. 195-бетдаги натижага қаранг).

4) Учбурчак биссектрисаси учбурчакни икки учбурчакка ажратганда уларнинг юзлари нисбати биссектрисаси кесган томон бўлаклари нисбати каби бўлади (99-шакл).

$$\frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta AFC}} = \frac{|BF|}{|FC|} = \frac{|AB|}{|BC|}.$$

5) Учбурчакнинг A бурчагининг b_A биссектрисаси узунлиги квадрати

$$b_A^2 = bc - \frac{bca^2}{(b+c)^2} \text{ ёки } b_A^2 = bc - a_1 a_2$$

каби ифодаланади. Исботланг. Бунда $a_1 = |BF|$, $a_2 = |FC|$ (99-шакл).

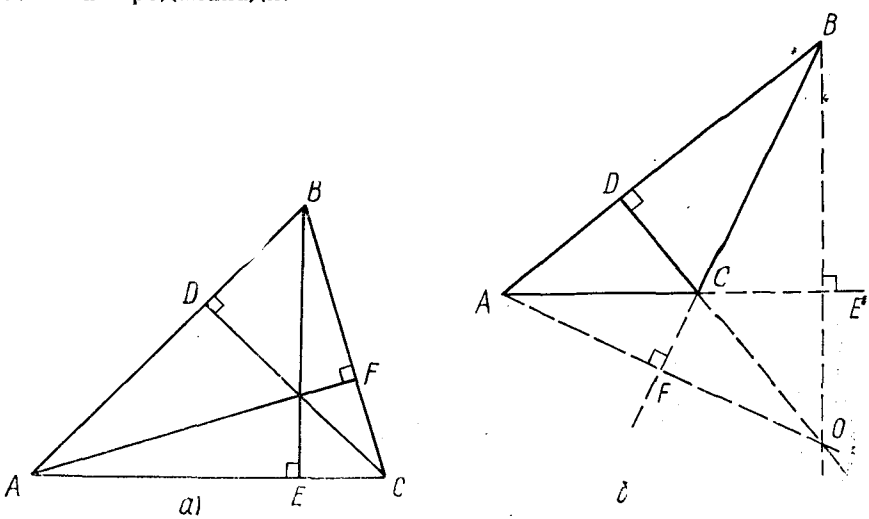
Учбурчакнинг берилган учидан туширилган *баландлиги* деб, унинг шу учидан қаршисидаги томонга туширилган перпендикулярга (кесмага) айтилади.

h_a, h_b, h_c лар билан учбурчакнинг мос равишда a, b, c томонига туширилган баландликлар белгиланади.

Баландликнинг хоссалари:

1) Учбурчакнинг учала h_a h_b, h_c баландлиги бир нуқтада кесишади (100-*а*, *б* шакл).

2) Учбурчакнинг a томонига туширилган баландлиги қуйидагича ифодаланади:



100-*а*, *б* шакл.

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$ бу ерда $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Топшириқлар. 1. Томонлари: а) 13, 2, 8; б) 1, 2, 3; в) 40, 40, 100; г) 5, 5, 10; д) 1, 10, 100; е) 4, 3, 2; ж) 4, 3, 6 бўлган учбурчаклар борми? Агар бор бўлса, уларни ясанг ҳамда медиана ва баландлигини ҳисобланг.

2. Ушбу асосий элементларига кўра учбурчакларни ясанг: а) 4, 3, 5; б) $b = 5$, $c = 4$, $\alpha = 72°$; в) $b = 4$, $c = 5$, $\alpha = 110°$; г) $c = 6$, $\alpha = 30°$, $\beta = 50°$.

3. $a = |BC|$, $\angle A = 30°$, $\angle C = 90°$ бўлса, $|CD|$ баландликни, $|AD|$, $|BD|$ ва $|AB|$ ларни топинг.

4. ABC учбурчакда BC энг катта томон. Бу учбурчакнинг қайси бурчаклари ўткир? $\angle A$ қандай бўлиши мумкин?

9. Икки учбурчакнинг тенглик аломатлари. Тенг ёнли учбурчак хоссаси.

Таъриф Агар ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларда $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $|AB| = |A_1B_1|$, $|BC| = |B_1C_1|$, $|CA| = |C_1A_1|$ бўлса, бу *учбурчаклар тенг* дейилади ва $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ каби ёзилади. Бу таъриф сўз билан қисқача бундай ифодаланади: агар учбурчакларнинг мос бурчаклари ва мос томонлари тенг бўлса, бу *учбурчаклар тенг* дейилади.

Учбурчакларнинг тенглик аломатлари (исботсиз):

1-теорема. *Бир учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчаги иккинчи учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчаги мос равишда тенг бўлса, улар ўзаро тенгдир.*

2-теорема. *Бир учбурчакнинг бир томони ва унга ёпишган икки бурчаги иккинчи учбурчакнинг бир томони ва унга ёпишган икки бурчагига мос равишда тенг бўлса, улар ўзаро тенгдир.*

3-теорема. *Агар бир учбурчакнинг учта томони иккинчи учбурчакнинг учта томонига мос равишда тенг бўлса, улар ўзаро тенгдир.*

1-натижа. Тўғри бурчакли учбурчакларнинг тенглик аломатлари:

— бирининг катетлари мос равишда иккинчисининг катетларига тенг бўлса;

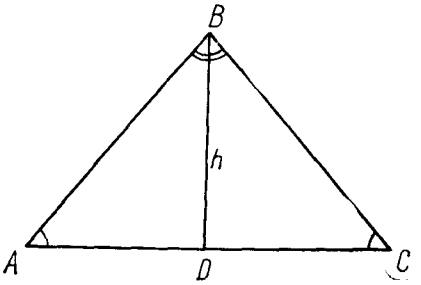
— бирининг бир катети (ёки гипотенузаси) ва унга ёпишган ўткир бурчаги иккинчисининг катети (ёки гипотенузаси) ва унга ёпишган бурчагига тенг бўлса;

— бирининг гипотенузаси ва катети мос равишда иккинчисининг гипотенузаси ва катетига тенг бўлса, у ҳолда бу учбурчаклар тенгдир.

Таъриф. Учбурчакнинг икки томони тенг бўлса, у *тенг ёнли учбурчак* дейилади Тенг томонлар учбурчакнинг *ён томонлари*, учинчи томон эса *асоси* деб айтилади.

1-хосса. Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчаклари ўзаро тенгдир.

2-хосса. Тенг ёнли учбурчакнинг учидан асосига туширилган баландлик ҳам биссектриса, ҳам медианадир.



101- шакл.

Исбот. ABC тенг ёнли учбурчакда $|AB| = |BC|$ бўлсин (101- шакл). B учдан туширилган $|BD|$ баландлик учбурчакни ABD ва CBD тўғри бурчакли учбурчакларга ажратади, у ҳолда улар бир катети ва гипотенузаси бўйича ўзаро тенг (юқоридаги 1- натижа тасдиғига биноан). Демак, бу ердан $|AD| = |DC|$, $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle BAC = \angle BCA$ деган хулосалар келиб чиқади. Хоссалар исботланди. ▶

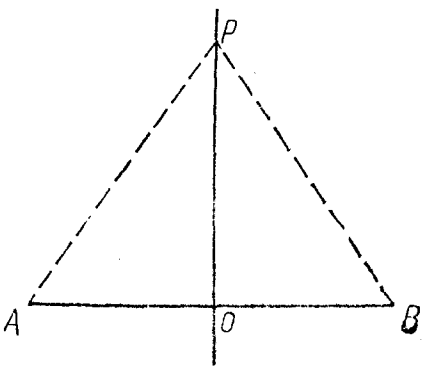
2- натижа Мунтазам учбурчакнинг ҳар бир учидан туширилган баландлик ҳам биссектриса, ҳам медианадир.

3- натижа. Мунтазам учбурчакнинг учта симметрия ўқи бор, уларда баландликлари ётади. Баландликлар кесишган нуқта унинг 3- тартибли айланиш симметрия марказидир.

10. Кесма учларидан баравар масофада жойлашган нуқталар.

Теорема. *Агар нуқта кесманинг учларидан баравар узоқликда ётган бўлса, у шу кесманинг ўрта перпендикуляри устида жойлашган бўлади. Аксинча, нуқта ўрта перпендикуляр устида ётган бўлса, у кесма учларидан баравар масофада жойлашгандир.*

Исбот. Айтайлик, P нуқта AB кесма учларидан баравар масофада бўлсин (102- шакл). У ҳолда APB учбурчак тенг ёнли учбурчакдир. Учбурчакда PO баландлик туширсак, у тенг ёнли учбурчак хоссасига кўра медианадир. $(PO) \perp (AB)$ ва $|AO| = |OB|$ бажарилгани учун P нуқта ўрта перпендикуляр устида ётади. Аксинча, P нуқта ўрта перпендикулярга тегишли нуқта бўлса, у ҳолда A ва B нуқталар (OP) чизиғига нисбатан симметрик. Демак, $|PA| = |PB|$ бажарилади. ▶

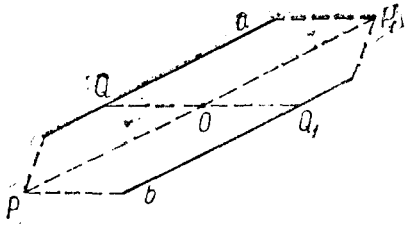


102- шакл.

Натижа. *Кесманинг учларидан баравар масофада ётган барча нуқталар тўплами шу кесманинг ўрта перпендикулярини ташкил этувчи нуқталардир.*

11. Тўғри чизиқларнинг параллеллик аломатлари.

1-теорема. *Икки тўғри чизиқ ўзаро марказий симметрик бўлса, у ҳолда улар ўзаро параллелдир.*



103- шакл.

Исбот. Турли a ва b тўғри чизиқлар O нуқтага нисбатан марказий симметрик бўлсин: $Z_O(a) = b$ (103-шакл). Фараз қилайлик, P нуқтада иккала тўғри чизиқ кесишишсин: $P = a \cap b$. У ҳолда марказий симметрия хоссаларига биноан шундай P_1 нуқта топиладики, у ҳам a га, ҳам b га тегишлидир. Бундан a ва b тўғри чизиқлар устма-уст тушиши келиб чиқади. Бу эса теорема шартида айтилган a ва b тўғри чизиқларнинг турли эканлигига зид ▶

Натижа. Берилган ҳар қандай тўғри чизиқ ташқарисида олинган нуқтадан шу тўғри чизиққа ягона параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.

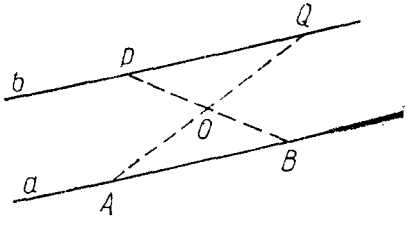
Исбот. Бирор P нуқта берилган a тўғри чизиққа тегишли бўлмасин (104-шакл), яъни $P \notin a$. Энди a тўғри чизиққа тегишли ихтиёрий икки A ва B нуқталар олайлик. BP кесма ясаб, унинг ўртасини O нуқта деб белгилайлик. Агар O нуқтага нисбатан A нуқтанинг симметрик акси Q нуқтани ясасак, ўз-ўзидан равшанки, ҳосил бўлган PQ кесма BA кесмага симметрик Шундай қилиб, PQ тўғри чизиқ берилган a тўғри чизиққа параллел чизиқдир. ▶

Параллеллик аксиомаси: тўғри чизиққа берилган нуқтадан ўтувчи параллел тўғри чизиқ биттадан кўп эмас.

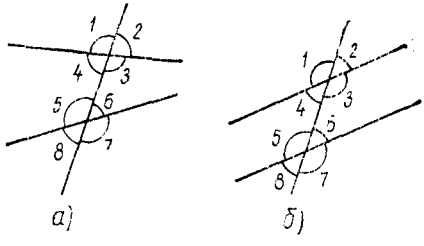
2-теорема. *Агар икки тўғри чизиқнинг ҳар бири берилган бирор тўғри чизиққа параллел бўлса, у холда улар ўзаро параллелдир*:

$$a \parallel b, \quad c \parallel b, \Rightarrow a \parallel c.$$

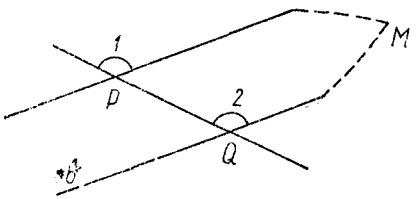
Таъриф. Икки тўғри чизиқ бирор учинчи тўғри чизиқ билан кесилса, у ҳолда ҳосил бўлган саккизта бурчакда (105-*а*, *б* шакл): а) $\angle 1$ ва $\angle 5$, $\angle 2$ ва $\angle 6$, $\angle 3$ ва $\angle 7$, $\angle 4$ ва



104- *а*, *б* шакл.



105- шакл.



106- шакл.

$\angle 8$ ларни *мос бурчаклар* дейилади; б) $\angle 3$ ва $\angle 5$, $\angle 4$ ва $\angle 6$ лар *ички алмашинувчи* бурчаклар дейилади; в) $\angle 1$ ва $\angle 7$, $\angle 2$ ва $\angle 8$ лар *ташқи алмашинувчи* бурчаклар дейилади; г) $\angle 4$ ва $\angle 5$, $\angle 3$ ва $\angle 6$ лар эса *бир томонли бурчаклар* дейилади

3-теорема. *Икки тўғри чизиқ бирор тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, улар параллелдир.*

4-теорема. *Икки тўғри чизиқ бирор учинчи тўғри чизиқ билан кесилганда ҳосил бўлган ички (ташқи) алмашинувчи бурчаклар тенг бўлса, у ҳолда бу икки тўғри чизиқ параллелдир.*

5-теорема. *Икки тўғри чизиқ учинчи тўғри чизиқ билан кесилганда ҳосил бўлган бир томонли бурчаклар йиғиндиси 180° бўлса, у ҳолда бу икки тўғри чизиқ параллелдир.*

Бу учала теоремани мустақил исботлаб кўринг.

6-теорема. *Икки тўғри чизиқни бирор тўғри чизиқ билан кесганда ҳосил бўлган мос бурчаклар тенг бўлса, у ҳолда бу икки тўғри чизиқ параллелдир.*

Исбот. Фараз қилайлик, теорема шарти бажарилганда унинг хулосаси нотўғри бўлсин дейлик. Яъни берилган a ва b тўғри чизиқларни (PQ) билан кесганда $\angle 1$ ва $\angle 2$ мос бурчаклар ўзаро тенг (106-шакл) лекин a ва b тўғри чизиқлар битта умумий нуқтага эга бўлсин: $a \cap b = M$. У ҳолда MPQ учбурчакда $\angle 2$ шу учбурчакнинг ички, $\angle 1$ ташқи бурчаги бўлади. Бу эса $\angle 1 > \angle 2$ деган сўз. Бу мулоҳаза теорема шартига зид, зиддиятлик a ва b ни M нуқтада кесишади деб нотўғри фаразлаш натижасида ҳосил бўлди. Шундай қилиб, $a \parallel b$ экан. ▶

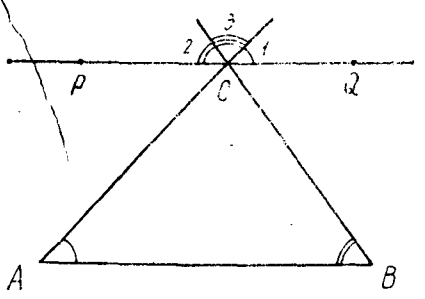
12. Учбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси. Қаварик кўпбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси.

1-теорема. *Учбурчак ички бурчаклари йиғиндиси 180° га тенг.*

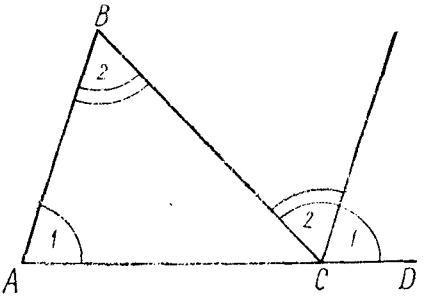
Исбот. Бунинг учун $\triangle ABC$ нинг C учидан (AB) га параллел қилиб (PQ) тўғри чизиқ ўтказамиз (107-шакл). Сўнг AC ва BC томонларни давом эттирсак, $\angle 1 = \angle A$, $\angle 2 = \angle B$ ва $\angle 3 = \angle C$ эканлигини тушуниш қийин эмас. $\angle PCQ = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ нинг ёйиқ бурчаклигидан $\angle A + \angle B + \angle C$ ҳам 180° га тенглиги келиб чиқади. ▶

1-натижа. Учбурчакда тўғри бурчак ёки ўтмас бурчаклар сони биттадан кўп бўлиши мумкин эмас.

Ҳақиқатан ҳам, агар биттадан кўп бўлганда эди, бу учбур-



107-шакл



108-шакл.

чак ички бурчаклари йиғиндиси 180° дан катта бўлар эди. Бу эса мумкин эмас.

2-натижа. Учбурчакнинг ташқи бурчаги унга қўшни бўлмаган ички бурчаклари йиғиндисига тенг.

Исбот. 108-шаклдан

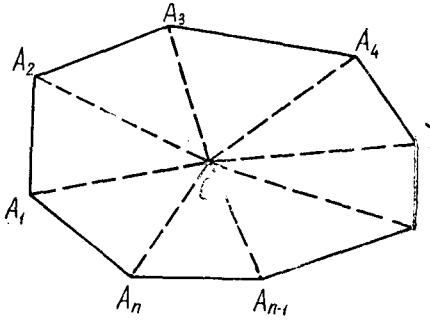
$$\left.\begin{array}{l}\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ\\ \angle BCD+\angle C=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \angle BCD=\angle A+\angle B.$$

2-теорема. *Қаварик n бурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси $2d(n-2)$ га тенг (бу ерда $2d=180^\circ$).*

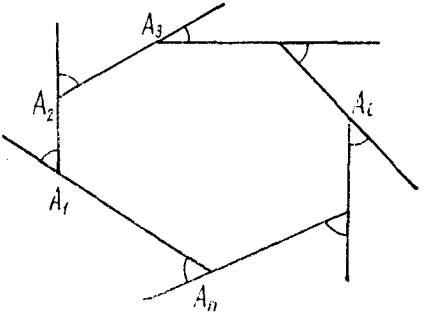
Исбот. $A_1A_2A_3\ldots A_n$ қаварик n бурчак ичида ихтиёрий O нуқта оламиз (109-шакл) ва A_1OA_2, A_2OA_3, ... A_nOA_1 учбурчакларни ясаймиз. Уларнинг сони n та. Шунинг учун бу учбурчаклар ички бурчаклари йиғиндиси $2dn$ га тенг. Аммо O нуқта атрофидаги барча бурчаклар йиғиндиси $4d$ бўлгани учун уни $2dn$ дан айирамиз.

$$A_1+\angle A_2+\ldots+\angle A_n=2dn-4d=2d(n-2). \qquad (1)$$

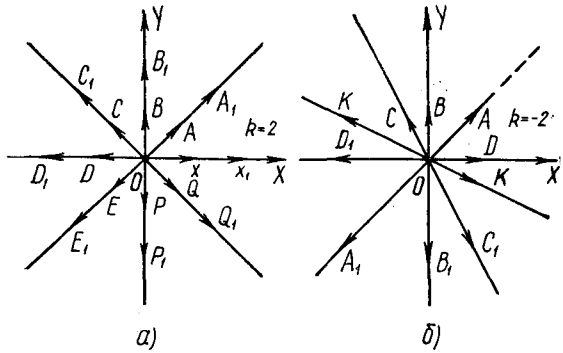
3-натижа. Қаварик n бурчакда ҳамма бир томонлама ташқи бурчаклар йиғиндиси $4d$ га тенг.



109-шакл.



110-шакл.



111- *а, б* шакл.

Исбот. Ҳар бир A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) учда (110- шакл) $\angle A_i$ бурчак билан унга қўшни бўлган $\angle A'_i$ бир томонлама ташқи бурчакларни ясаб олайлик. Шаклдан кўриниб турибдики, $\angle A_i + \angle A'_i = 2d$ тенглик бажарилади. Лекин бундай тенгликлар сони n та:

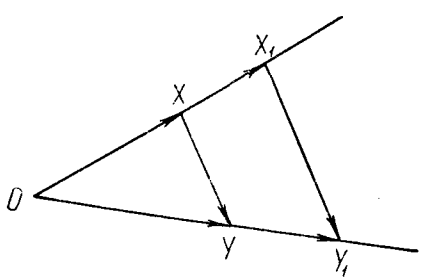
$$(\angle A_1 + \angle A'_1) + (\angle A_2 + \angle A'_2) + \ldots + (\angle A_n + \angle A'_n) = 2dn.$$

Демак, бу ерда (1) тенгликни ҳисобга олсак, ушбу тенглик ҳосил бўлади:

$$\angle A'_1 + \angle A'_2 + \ldots + \angle A'_n = 4d. \blacktriangleright$$

13*. Текисликда (фазода) гомотетия. Текисликнинг (фазонинг) ихтиёрий X нуқтасини унинг бирор O нуқтасига нисбатан $\overrightarrow{OX_1} = k \cdot \overrightarrow{OX}$ ($k \neq 0$) муносабатни қаноатлантирувчи X_1 нуқтаси билан алмаштирилишига, текисликнинг *O марказли* ва k коэффициентли гомотетияси берилган дейилади ва H_O^k деб белгиланади: $H_O^k(X) = X_1$.

Гомотетиянинг хоссалари:



112- шакл.

1) Гомотетия маркази ўзига аксланади: $H_O^k(O) = O$.

2) $X_1 = H_O^k(X)$ нуқта, агар $k > 0$ бўлса, OX нурга тегишли; $k < 0$ бўлганда эса OX нурнинг тўлдирувчисига тегишли бўлади (111- *а, б* шакл).

3) Агар X ва Y нуқталар образлари мос равишда X_1 ва Y_1 бўлса, у ҳолда $\overrightarrow{X_1Y_1} = k \cdot \overrightarrow{XY}$ бажарилади (112- шакл).

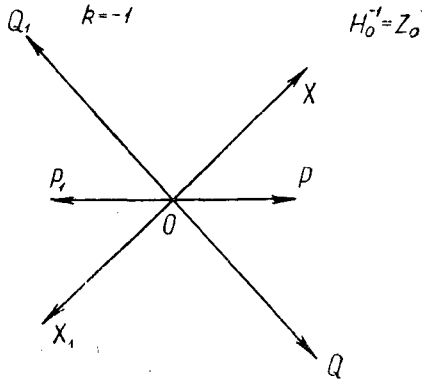
4) $k=1$ бўлса, у ҳолда H_O^1 гомотетия айнан алмаштиришдир:

$$H_O^1(X)=X.$$

Демак, текислик (фазо) нинг ҳар қандай ўзини ўзига айнан алмаштирилишини маркази ихтиёрий нуқтада бўлган ва коэффициенти 1 га тенг гомотетия дейиш мумкин.

5) Агар $k=-1$ бўлса, гомотетия O марказли симметриядир:

$$H_O^{-1}=Z_O.$$



113- шакл.

Ҳақиқатан ҳам, $\overrightarrow{OX_1}=-\overrightarrow{OX}$ тенгликни қаноатлантирадиган векторларнинг охирлари X ва X_1 лар O нуқтага нисбатан марказий симметрикдир (113- шакл).

6) H_O^k гомотетия учун $H_O^{\frac{1}{k}}$ гомотетия тескари аксланишдир:

$$H_O^k\circ H_O^{\frac{1}{k}}=H_O^{\frac{1}{k}}\circ H_O^k=H_O^1=E.$$

7) H_O^k гомотетик алмаштиришда X ва Y нуқталар орасидаги $|XY|$ масофа билан уларнинг образлари X_1 ва Y_1 орасидаги $|X_1Y_1|$ масофа орасида $|X_1Y_1|=|k|\cdot|XY|$ муносабат ўринли.

Фазо гомотетияси яна ушбу хоссаларга эга:

8) Фазо гомотетияси текисликни ё ўзига, ё унга параллел текисликка акслантиради (Г. 41 п. натижа (214- бет) га қаранг);

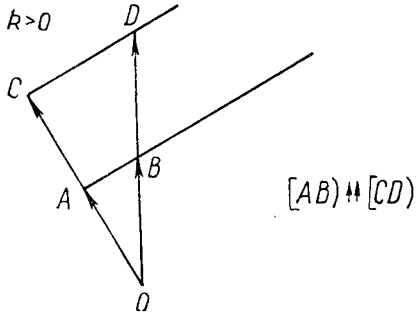
9) Сфера маркази билан гомотетия маркази устма- уст тушса, унинг образи яна сферадир (Г. 51 п. масала (234 .-бет) га қаранг).

Текислик (фазо) гомотетияси унинг маркази ва X, $X_1=H(X)$ каби икки нуқтаси билан (ёки $X_1=H(X)$ ва $Y_1=H(Y)$ каби аниқланган икки жуфтликлари (X; X_1) ва (Y; Y_1) билан) тўла аниқланади.

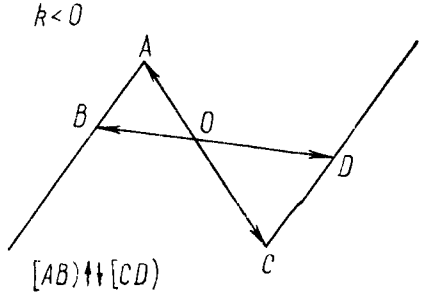
Таъриф. Φ фигураларнинг ҳар бир нуқтасига H_O^k гомотетия билан мос бўлган нуқталар тўпламидан иборат Φ_1 фигура Φ фигурага *гомотетик* деб айтилади ва $H^k(\Phi)=\Phi_1$ деб ёзилади.

Гомотетик фигураларнинг хоссалари:

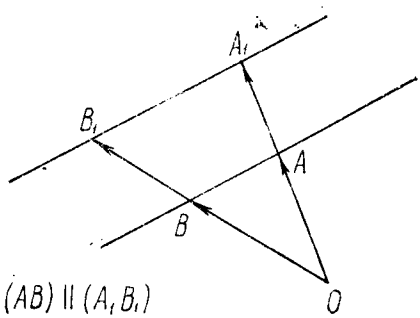
1) Гомотетик фигуралар ўхшашдир.



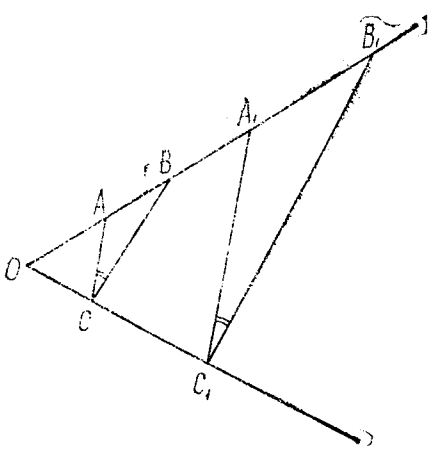
114- шакл.



115- шакл.



116- шакл.



117- шакл.

2) $k>0$ бўлса, нур гомотетияси унга йўналишдош нурдир:

$$H_O^k[AB) = [CD) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow [AB) \uparrow\uparrow [CD) \text{ (114- шакл).}$$

3) $k<0$ бўлса, нур қарама-қарши йўналган нурга аксланади:

$$H_O^k[AB) = [CD) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow [AB) \uparrow\downarrow [CD) \text{ (115- шакл).}$$

4) Агар O нуқта b тўғри чизиққа тегишли бўлса, у ҳолда:

$$H_O^k(b) = b.$$

5) $k \neq 1$ бўлганда, гомотетия марказидан ўтмайдиган тўғри чизиқ унга параллел тўғри чизиққа аксланади (116-шакл).

6) Бурчак ҳам H_O^k гомотетия натижасида унга тенг бурчакка аксланади (117-шакл).

Топшириқлар. 1. Текисликда $M(0; 1)$, $N(1; 1)$, $K(2; 1)$, $C(-4, 2)$, $D(4; -2)$ нуқталарни ясанг. Сўнг H_O^2 гомотетия билан M_1, N_1, K_1, C_1, D_1 нуқталарни топинг. H_O^3 гомотетия билан шу нуқталар образларини ясаб, ўзаро солиш-

тиринг. MN, NK, KC, CD кесмалар узунлигини M_1N_1, N_1K_1, K_1C_1, C_1D_1 кесма узунликлари билан солиштиринг. MNK учбурчак образи $M_1N_1K_1$ ни топинг. $\angle MNK$ бурчак $\angle M_1N_1K_1$ га тенгми?

2. Текисликда $x^2+y^2=1$ айлананинг H_O^4 гомотетияси образини топинг. H_A^{-1}, H_B^{-2}, H_C^2 гомотетия натижасини шаклини ясаш билан топинг, бу ерда $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, $C(-1;\ 0)$ нуқталар берилган.

14*. Текисликда ўхшашлик алмаштиришлари. Агар текисликни ўзини ўзига алмаштирганда унинг ҳар қандай X ва Y нуқталарининг образлари X_1 ва Y_1 орасидаги $|X_1Y_1|$ масофа $|XY|$ га нисбатан $k\,(k>0)$ марта ўзгарса, яъни

$$|X_1Y_1|=k\cdot|XY|$$

бўлса, у ҳолда бу алмаштириш *k коэффициентли ўхшашлик алмаштириши* деб айтилади, k эса *ўхшашлик коэффициенти* деб юритилади.

1) Агар f деб текисликнинг ўхшашлик алмаштиришини белгиласак, у ҳолда унинг коэффициенти k бундай топилади:

$$k=\frac{|f(X)f(Y)|}{|XY|}.$$

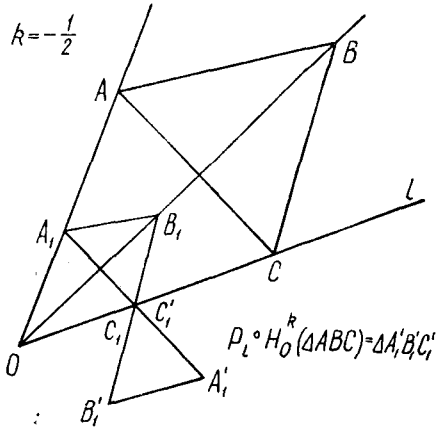
2) Агар f_1 ва f_2 текисликнинг k_1 ва k_2 коэффициентли ўхшашлик алмаштиришлари бўлса, у ҳолда $f_1\circ f_2$ композиция коэффициенти $k_1\cdot k_2$ га тенг бўлган ўхшашлик алмаштиришидир.

3) Текисликнинг ҳар қандай f ўхшашлик алмаштириши бирор H_O^k гомотетия билан бирор P силжитишнинг композициясидир: $f=H_O^k\circ P$ ёки $f=P\circ H_O^k$ $\left(118\text{-шаклда } f=P_l\circ H_O^k,\ k=\frac{1}{2}\right)$.

4) H_O^k гомотетия k коэффициентли f ўхшашлик алмаштиришидир.

5) P силжитиш коэффициенти 1 га тенг ўхшашлик алмаштиришидир.

Таъриф. Агар Φ фигурани Φ_1 фигурага улар ётган текисликда бирор k коэффициентли f ўхшашлик алмаштириши билан акслантириш мумкин бўлса, у ҳолда Φ_1 фигура Φ фигурага *k коэффициент билан ўхшаш* дейилади ва $\Phi_1\overset{k}{\sim}\Phi$ деб белгиланади (яъни X, $Y\in\Phi$ ва $X_1=f(x)$, $Y_1=f(Y)\in\Phi_1$ бўлса, $|X_1Y_1|=k\cdot|XY|$ тенглик бажарилади.



118-шакл.

Ўхшаш фигураларнинг хоссалари:

1) Ҳар бир Φ фигура ўз-ўзига $k=1$ коэффициент билан ўхшаш:

$$\Phi \overset{1}{\backsim} \Phi.$$

2) Агар Φ_1 фигурага Φ фигура k коэффициент билан ўхшаш бўлса, у ҳолда Φ фигура Φ_1 фигурага $\frac{1}{k}$ коэффициент билан ўхшашдир:

$$\Phi_1 \overset{k}{\backsim} \Phi \Longleftrightarrow \Phi \overset{\frac{1}{k}}{\backsim} \Phi_1.$$

3) Агар $\Phi_1 \overset{k}{\backsim} \Phi$, $\Phi_2 \overset{l}{\backsim} \Phi_1$ бўлса, у ҳолда $\Phi_2 \overset{kl}{\backsim} \Phi$ бўлади.

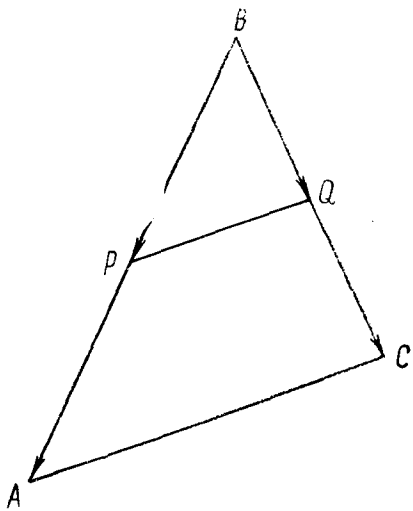
Топшириқлар. 1. Томонлари 3,5; 4; 8 га тенг бўлган учбурчак катта томони 6 га тенг бўлган учбурчакка ўхшаш. Унинг қолган томонларини топинг.

2. Тенг ёнли учбурчакнинг ўхшашлик аломатларини ўхшаш фигуралар таърифига асосланиб ифодаланг.

3. $M(6;\ 8;\ -4)$, $N(2a;\ a;\ 3a)$ нуқталарнинг H_O^2, H_O^3, $H_O^{\frac{1}{2}}$, H_O^{-1} гомотетиялари образини шаклда топинг.

15. Учбурчак ўрта чизиғининг хоссалари. Учбурчакнинг икки томони ўрталарини туташтирувчи кесма унинг *ўрта чизиғи* дейилади.

Теорема. *Учбурчакнинг ўрта чизиғи унинг учинчи томонига параллел, узунлиги эса шу учинчи томон ярмисига тенг.*



119- шакл.

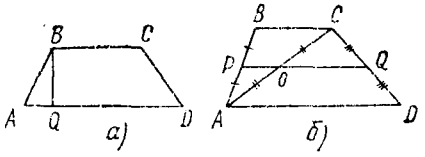
Исбот. ABC учбурчакда AB ва BC томонлар ўрталарини туташтирувчи PQ ўрта чизиқ ясайлик (119-шакл). У ҳолда теорема шартига кўра $|AP|=|PB|$ ва $|BQ|=|QC|$ эканлиги маълум. Демак, $\overrightarrow{BA}=2\cdot\overrightarrow{BP}$ ва $\overrightarrow{BC}=2\cdot\overrightarrow{BQ}$. Бу билан $k=2$ коэффициентли ва B марказли гомотетияга эгамиз:

$$A=H_B^2(P),\ C=H_B^2(Q).$$

Гомотетия хоссасига кўра $\overrightarrow{AC}=2\cdot\overrightarrow{PQ}$ эканлиги

келиб чиқади. Бундан $2|PQ| = |AC|$ ва $(PQ) \parallel (AC)$ бўлиши келиб чиқади. ▶

Натижа. Учбурчакнинг ўрта чизиғи шу учбурчакка ўхшаш учбурчак ажратади. Унинг юзи берилган учбурчак юзига 1 : 4 каби нисбатдадир.



120-*а*, *б* шакл.

16. Тўртбурчаклар. Трапеция, унинг ўрта чизиғи. Маълумки, томонлари сони тўртта бўлган кўпбурчак *тўртбурчак* дейилади. У қаварик ва ноқаварик бўлиши мумкин. (Г. 7. п. 162-бетга қаранг). Қуйида қаварик тўртбурчаклар ҳақида тўхталамиз.

1-таъриф. Икки томони параллел, қолган икки томони параллел бўлмаган тўртбурчак *трапеция* деб айтилади.

Трапециянинг параллел томонлари унинг *асослари*, қолган томонлари *ён томонлари* дейилади. 120-*а* шаклда $[BC]$ ва $[AD]$ — асослар, $|AB|$ ва $[CD]$ ён томонлар.

Учлари трапеция асосларида ётувчи ва шу асосларга перпендикуляр кесма трапециянинг *баландлиги* дейилади (120-*а* шаклда BQ кесма баландлик). Трапециянинг ён томонлари тенг ($|AB| = |CD|$) бўлса, у ҳолда у *тенг ёнли трапеция* деб айтилади.

Тенг ёнли трапеция асосларидаги бурчаклар ўзаро тенг:

$$\angle BAD = \angle ADC, \quad \angle ABC = \angle BCD.$$

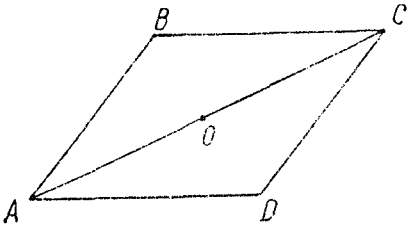
2-таъриф. Трапеция ён томонларининг ўрталарини туташтирувчи кесма унинг *ўрта чизиғи* дейилади.

Теорема. *Трапеция ўрта чизиғи унинг асосларига параллел, узунлиги эса асослар йиғиндисининг ярмига тенг.*

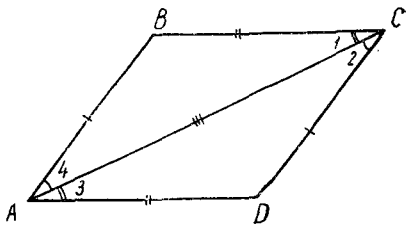
Исбот. Берилган $ABCD$ трапецияда $|BP| = |PA|$ ва $|CQ| \parallel |QD|$ эканлиги маълум (120-*б* шакл). AC диагональ PQ ўрта чизиқни бирор O нуқтада кесиб ўтади. У ҳолда $[PO] \parallel [BC]$ ва $[OQ] \parallel [DA]$ дир. Чунки PO кесма ABC учбурчак учун, OQ кесма ACD учбурчак учун ўрта чизиқ бўлиб, бу эса PQ кесма трапеция асосларига параллеллигини кўрсатади. Иккинчи томондан, $|PO| = \frac{1}{2}|BC|$, ва $|OQ| = \frac{1}{2}|AD|$ бўлганлиги учун $|PQ| = |PO| + |OQ| = \frac{|BC| + |AD|}{2}$ ни ҳосил қиламиз. ▶

Натижа. Трапециянинг ўрта чизиғи унинг баландлигини тенг иккига бўлади.

17. Параллелограмм ва унинг симметрия маркази. Қарама-қарши томонлари ўзаро параллел бўлган тўртбурчак *параллелограмм* деб аталади.



121- шакл.



122- шакл.

Теорема. *Параллелограмм диагоналининг ўртаси шу параллелограммнинг симметрия марказидир.*

Исбот. O нуқта $ABCD$ параллелограмм AC диагоналининг ўртаси бўлсин (121- шакл). У ҳолда O марказли симметрия AB кесмани унга параллел бўлган ва C нуқтадан ўтувчи тўғри чизиққа акслантиради. AB кесма CD га параллеллиги (параллелограмм таърифи) га кўра $Z_O[AB]=[CD]$. Шу билан бирга Z_O симметрия AB тўғри чизиқни CD тўғри чизиққа, CB тўғри чизиқни AD тўғри чизиққа акслантиради: $Z_O(AB)=(CD)$, $Z_O(CB)=(AD)$. Шунинг учун $B=(AB)\cap(CB)$ нуқта кесишиш нуқтаси образи $D=(CD)\cap(AD)$ нуқтага устма-уст тушади: $Z_O(B)=D$. Демак, B ва D лар O нуқтага нисбатан симметрик. Шундай қилиб, O марказли симметрия $A\to C$, $B\to D$, $C\to A$ ва $D\to B$ акслашишни ҳосил қилади. Натижада $ABCD$ параллелограмм O марказли симметрия билан ўзига аксланади: $Z_O(ABCD)=CDAB$. Бинобарин, диагонал ўртаси бўлган O нуқта параллелограммнинг симметрия марказидир. ▶

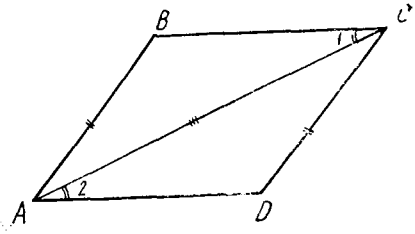
Параллелограммнинг хоссалари: а) қарама-қарши томонлари тенг; б) қарама-қарши бурчаклари тенг; в) диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади; г) параллелограммнинг ҳар бир диагонали уни тенг учбурчакларга ажратади.

18. Параллелограммнинг асосий белгилари.

1- теорема. *Агар тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари тенг бўлса, у ҳолда у параллелограммдир.*

Исбот. Қарама-қарши томонлари тенг $ABCD$ тўртбурчак берилсин (122- шакл). У ҳолда $|AB|=|CD|$ ва $|BC|=|DA|$ эканлиги маълум, $[AB]\parallel[CD]$ ва $[BC]\parallel[AD]$ эканлиги кўрсатилиши лозим. AC диагональ ўтказайлик. У ҳолда ABC ва CDA учбурчаклар ҳосил бўлади. Бу учбурчаклар уч томони бўйича ўзаро тенгдир. Бу ердан $\angle 1=\angle 3$ ва $\angle 2=\angle 4$ бўлиши келиб чиқади. Демак, AB ва CD тўғри чизиқларнинг AC тўғри чизиқ билан кесишиши натижасида ҳосил бўлган $\angle 1$ ва $\angle 3$, $\angle 2$ ва $\angle 4$ ички алмашувчи бурчаклар тенглиги туфайли (икки тўғри чизиқнинг параллеллик аломатига асосан, Г. 11. п. 170- бетга қаранг) AB ва CD тўғри чизиқлар параллел. Худди шу мулоҳазаларга асосан AD ва BC тўғри чизиқлар ҳам

ўзаро параллел. Демак, AB кесма CD кесмага, AD кесма эса BC кесмага параллел экан. ▶



123- шакл.

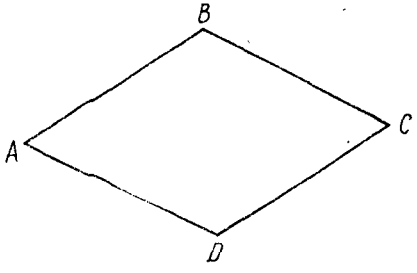
2-теорема. *Агар тўртбурчакнинг икки қарама-қарши томони ўзаро тенг ва параллел бўлса, у ҳолда бу тўртбурчак параллелограммдир.*

Исбот. AB ва CD томонлари ўзаро тенг ва параллел бўлган бирор $ABCD$ тўртбурчак берилсин (123- шакл). $[BC] \parallel [AD]$ эканлигини кўрсатсак, теорема исботланган ҳисобланади. $ABCD$ тўртбурчакда AC диагональ ясайлик, у ҳолда ABC ва CDA учбурчаклар икки томони ва бир бурчаги бўйича ўзаро тенг: $\triangle ABC = \triangle CDA$. Агар AB ва CD тўғри чизиқлар шарт бўйича ўзаро параллел ва улар учинчи AC тўғри чизиқ билан кесилган деб қаралса, $\angle 1 = \angle 2$ тенглик бажариляпти. AC тўғри чизиқ AD ва BC тўғри чизиқларни шундай кесаяптики, ички алмашинувчи $\angle 1$ ва $\angle 2$ бурчаклар ўзаро тенглигидан (171- бет) AD ва BC тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўляпти. Бу ердан $[BC] \parallel [AD]$ эканлиги келиб чиқади. ▶

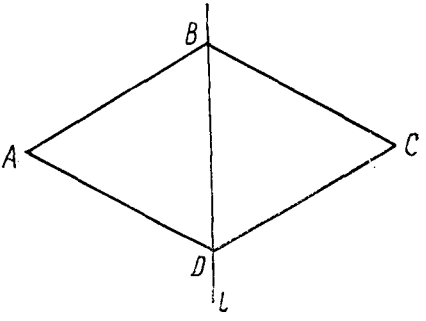
Ромб, унинг хоссалари. Ҳамма томони тенг бўлган параллелограмм *ромб* деб аталади (124- шакл). Шунинг учун ромб параллелограммнинг барча хоссаларига эга. У яна ушбу хоссаларга ҳам эга:

Ромбнинг диагонали жойлашган тўғри чизиқ унинг симметрия ўқидир; ромб диагоналлари ўзаро перпендикулярдир; ромб диагоналлари унинг бурчакларининг биссектрисаларидир.

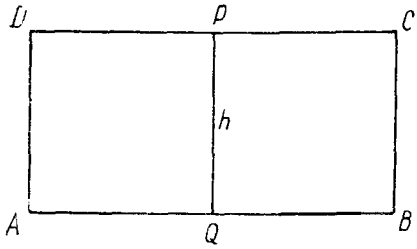
1- хоссанинг исботи. $ABCD$ ромбда BD диагонал ётган l тўғри чизиқ унинг симметрия ўқи эканлигини исботлаймиз (125- шакл). B ва D нуқталар AC кесманинг симметрия ўқида ётади, чунки улар A ва C нуқтадан баравар масофа нарида жойлашган: $S_l(B) = D$, $S_l(D) = B$. Демак, $S_l[BD] =$



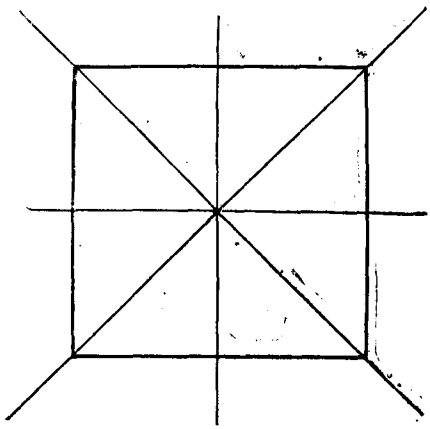
124- шакл.



125- шакл.



126- шакл.



127- шакл.

$=[DB]$. Бу эса BD диагональ ромбнинг симметрия ўқи эканини кўрсатади. ▶

19. Тўғри тўртбурчак томонининг ўрта перпендикуляри хоссаси. Ҳамма бурчаклари тўғри бурчак бўлган параллелограмм *тўғри тўртбурчак* дейилади.

Теорема. *Тўғри тўртбурчакнинг ихтиёрий бир томонига ўтказилган ўрта перпендикуляр шу тўртбурчакни тенг тўртбурчакларга бўлади ва у тўртбурчак учун симметрия ўқи бўлиб хизмат қилади.*

Исбот: $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг AB томони ўртасига PQ перпендикуляр ўтказилган бўлсин (126-шакл). У ҳолда $h=PQ$ перпендикуляр AB кесманинг симметрия ўқи эканлигини кўриш қийин эмас: $S_h[AQ]=[QB]$. Бундан: $S_h[AB]=[BA]$.

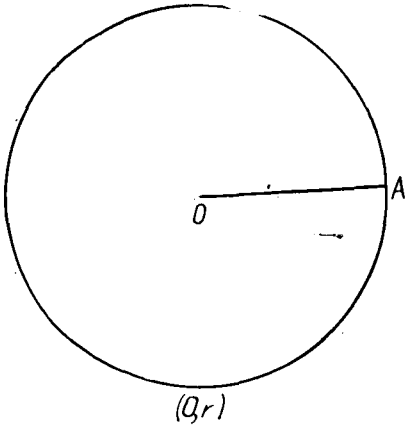
Шу билан бирга PQ тўғри чизиқ DC кесманинг ҳам симметрия ўқи. Чунки, $(AB) \parallel (DC)$ ва $|AB|=|CD|$ эканлиги теорема шартига кўра бажарилишидан $|AQ|=|DP|$ ва $|QB|=|PC|$ эканлиги Г. 5 п. 2-теоремасига асосан ўринлидир. Демак, D ва C нуқталар PQ ўққа нисбатан симметрик. Шундай қилиб, $A \to B$, $D \to C$, $C \to D$, $B \to A$ акслаиш PQ ўқли симметрия билан бажарилди. Демак, PQ ўқ $ABCD$ тўртбурчакнинг симметрия ўқи экан. ▶

Натижа. а) Тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари ўзаро тенг.

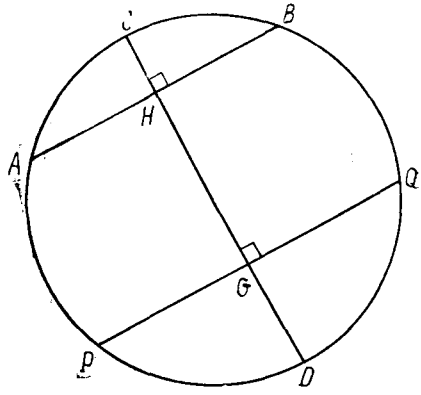
б) Умуман тўғри тўртбурчакнинг иккита симметрия ўқи мавжуд.

Квадрат. Ҳамма томонлари тенг бўлган тўғри тўртбурчак *квадрат* деб аталади.

У параллелограмм, тўғри тўртбурчак ва ромб хоссаларига эга. Унинг яна ушбу хоссалари мавжуд:



128- шакл.



129- шакл.

— Квадратнинг тўртта симметрия ўқи мавжуд (127- шакл).

— Квадрат 4- тартибли айланиш симметрия марказига эга.

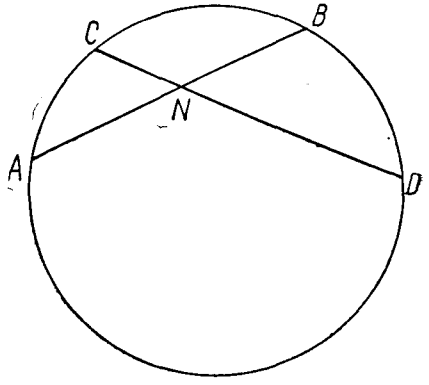
20. Айлана ва доира. *О марказли r радиусли айлана* деб, текисликнинг *О* нуқтадан *r* масофада жойлашган барча нуқталари тўпламига айтилади (128- шакл) ва қисқача (*O*; *r*) каби белгиланади.

Айлананинг ихтиёрий икки нуқтасини туташтирувчи кесма *ватар* деб аталади (129- шаклда *AB* кесма — ватар). Айлана марказидан ўтувчи ватар *диаметр* деб аталади (*CD* кесма — диаметр).

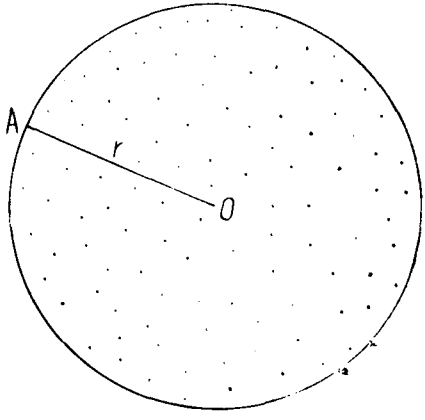
Айлана ватарининг хоссалари:

— Диаметр ўзидан кичик ватарни тенг иккига бўлса, у ҳолда улар ўзаро перпендикулярдир (129 - шакл: $CD \perp AB$);

— Айлананинг икки ватари ўзаро тенг бўлса, улар



130- шакл.



131- шакл.

айлана марказидан баравар узоқликдадир ва аксинча. ($|HO| = |OG|$);

— Икки ватардан қайси бири катта бўлса, у айлана марказига яқинроқ ҳисобланади ва аксинча;

— Агар AB ватар CD ватар билан N нуқтада кесишса, у ҳолда $|AN| \cdot |NB| = |CN| \cdot |ND|$ ўринлидир (130-шакл).

O марказли r радиусли *доира* деб, текисликнинг O нуқтадан r масофадан олисда ётмаган барча нуқталари тўпламига айтилади (131-шакл). Шу доиранинг чегараси O марказли r радиусли айланадир. Доиранинг радиуси, ватари, диаметри айлананикидек тушунилади.

Топшириқлар 1. (O; r) айлана H_O^k гомотетия билан қандай айланага ўтади? Турли k лар учун текширинг. R_O^α буриш билан-чи?

2. Икки (ва ундан ортиқ) доиралар кесишмаси қачон қаварик фигура бўлади? Доира ва бурчак кесишмаси-чи? Шаклларини чизинг.

3. Айлана ва доира ўзининг марказидан ўтувчи истаган тўғри чизиққа нисбатан симметрик фигурадир. Исботланг.

4. Бир хил радиусли кесишувчи икки айлана кесишиш нуқталаридан ўтувчи тўғри чизиққа нисбатан симметрикдир. Исботланг.

5. (O_1; r_1) ва (O_2; r_2) айлана марказлари орасидаги масофа $h = |O_1O_2|$ бўлсин. У ҳолда $|r_1 - r_2| < h < r_1 + r_2$ да улар кесишишини, $h > r_1 + r_2$ ва $|r_1 - r_2| > h$ да кесишмаслигини исботланг.

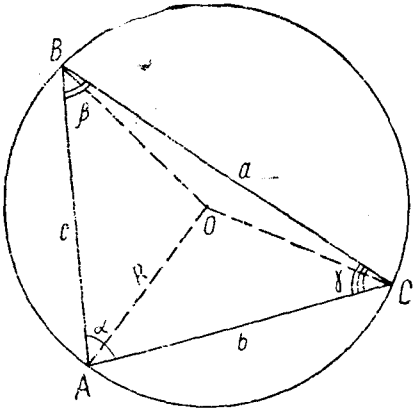
21. Ички ва ташқи чизилган кўпбурчаклар. Учбурчакка ташқи чизилган айлана. Ҳамма учлари айланада ётган кўпбурчак *айланага ички чизилган кўпбурчак* дейилади, айлана эса шу *кўпбурчакка ташқи чизилган айлана* дейилади.

Агар кўпбурчакнинг ҳар бир томони айланага уринган бўлса, у ҳолда кўпбурчак *айланага ташқи чизилган кўпбурчак* дейилади, айлана эса кўпбурчакка *ички чизилган айлана* дейилади.

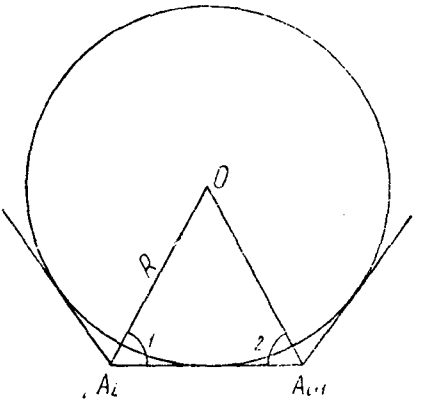
1-теорема. *Ҳар қандай учбурчакка ташқи чизилган айлана мавжуд ва у ягонадир.*

Исбот. Ташқи чизилгаи айлананинг O маркази унинг учала учидан баравар R масофада бўлади. Демак, $|OA| = |OB| = |OC| = R$. Бундан O марказ учала томоннинг ўрта перпендикулярига тегишли бўлиши кераклиги келиб чиқади (Г. 10 п. 170-бетга қаранг). (Амалда икки томон ўрта перпендикулярининг кесишиш нуқтасини топиш кифоялигини текширинг.) Учлари ўрта перпендикулярларнинг ягона кесишиш нуқтаси O дан баравар R масофада жойлашган, яъни ABC учбурчакка O марказли R радиусли (O; R) айлана ясалишига кўра мавжуд ва ягона. ▶

Хулоса. Ташқи чизилган айлананинг маркази тўғри бурчакли учбурчакда унинг гипотенузаси устида, ўткир бурчакли учбурчакда унинг ичида, ўтмас бурчакли учбурчакда унинг ташқарисида жойлашган бўлади. Шу хулосанинг исботи ўқувчига топширилади.



132-шакл.



133-шакл.

Ташқи чизилган айлана радиуси ушбу формулалардан топилади (132-шакл).

1) $R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{b}{2\sin\beta}=\frac{c}{2\sin\gamma}$ (Г. 29 п.198-бетда исботланган).

2) $R=\frac{abc}{4S}$, бу ерда $S=S_{ABC}$ берилган ABC учбурчакнинг юзи, a, b ва c—шу учбурчак томонлари узунлиги; α, β ва γ лар орқали $\hat{A}$, $\hat{B}$ ва $\hat{C}$ бурчаклар белгиланган.

2-теорема. *Ҳар қандай мунтазам кўпбурчакка ташқи чизилган айлана мавжуддир.*

Исбот. $A_1A_2\ldots A_n$ кўпбурчакнинг бир томонга ёпишган A_i, A_{i+1} бурчаклари биссектрисаси бирор O нуқтада кесишади, чунки $\angle A_i+\angle A_{i+1}<2d$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ (133-шакл). $\angle A_i=\angle A_{i+1}$ дан $\angle 1=\angle 2$ эканлиги 133-шаклдан маълум. Демак, A_iOA_{i+1} учбурчак тенг ёнли, бундан $|A_iO|=|A_{i+1}O|$. Бу ерда i номер $1\leqslant i\leqslant n-1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий номер эканлигидан

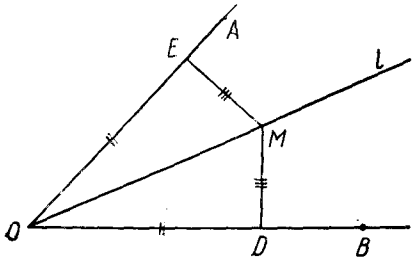
$$|A_1O|=|A_2O|=\ldots=|A_nO|=R$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, $(O;\ R)$ айланада берилган кўпбурчакнинг барча учлари ётади дея оламиз. ▶

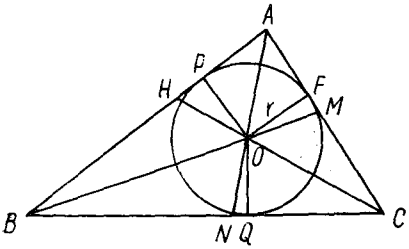
22. Учбурчакка ички чизилган айлананинг мавжудлиги.

Биссектрисанинг хоссаси. Қаварик бурчакнинг томонларидан тенг узоқликда ётган нуқталар тўплами шу бурчакнинг биссектрисасидир ва аксинча, биссектрисанинг ҳар бир нуқтаси бурчак томонларидан баравар узоқликда ётади.

Исбот. AOB бурчак биссектрисаси l да ётган ихтиёрий M нуқтанинг бурчак томонларига туширилган E ва D проек-



134-шакл.



135-шакл.

цияларини қарайлик (134-шакл). Бунда l биссектриса бурчакнинг симметрия ўқи (Г. 5 п. 152-бет) эканлигидан $S_l(M)=M$, $S_l(E)=D$ бўлганлиги учун силжитиш хоссасига кўра $|ME|=|MD|$ дир. Теореманинг иккинчи ярми исботланди. Аксинча, $|ME|=|MD|$ экани маълум бўлсин. У ҳолда MED учбурчак тенг ёнли (134-шакл). Демак, $\angle MED=\angle EDM$. E ва D проекция нуқталар бўлганлиги учун, $\angle OED=\angle ODE$ дир. Бундан, OED тенг ёнли учбурчаклиги келиб чиқади: $|OE|=|OD|$. Бу эса $S_l(E)=D$, яъни l ўққа симметриклигини билдиради. Бундан $\angle MOA=\angle MOB$. Демак, l—биссектриса экан. ▶

Теорема. *Ҳар қандай учбурчакда ички чизиладиган айлана ҳар доим мавжуд ва у ягонадир.*

Исбот. ABC учбурчакка (135-шакл) ички чизилган айлана маркази унинг томонларидан бир хил масофада ётишини назарда тутиб, учбурчак биссектрисалари кесишиш нуқтаси унга ички чизилган айлананинг маркази сифатида қабул қилинади. Бу нуқтанинг ягоналигини ва уни топишда иккита бурчак биссектрисасини чизиш етарлилигини асослаш ўқувчига қолдирилади. Демак, учбурчакнинг AB, BC, CA томонлари устида шундай P, Q ва F нуқталар топиладики, улар учун $|OP|=|OQ|=|OF|=r$ ўринли бўлиб, $(O;\ r)$ айлана шу нуқталарда учбурчакка уринади. ▶

Натижа. Учбурчакнинг юзи ички чизилган айлана радиуси билан учбурчак яримпериметри кўпайтмасига тенг (135-шакл):

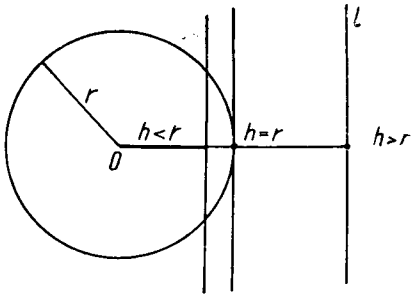
$$S=rp.$$

Бу ерда $p=\frac{1}{2}(|AB|+|BC|+|CA|)$, $r=|OF|$. Шаклдаги AOB учбурчакнинг юзи $\frac{1}{2}r\cdot|AB|$ га, BOC учбурчакнинг юзи $\frac{1}{2}r\cdot|BC|$ га, COA учбурчакнинг юзи $\frac{1}{2}r\cdot|CA|$ га тенг. Шу учала учбурчаклар юзлари йиғиндиси

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} r(|AB| + |BC| + |CA|) = rp$$

дан иборат. ▶

23. Айланага ўтказилган уринманинг хоссалари. Бирор l тўғри чизиқ ва $(O; r)$ айлана берилган бўлсин. h — шу тўғри чизиқ ва айлана маркази орасидаги масофа бўлсин (136-шакл). У ҳолда $h > r$ бўлса, айлана тўғри чизиқ билан умумий нуқтага эга бўлмайди, $h = r$ бўлганда *уриниш нуқтаси* деб айтиладиган битта, $h < r$ бўлганда эса, *кесишиш нуқтаси* деб айтиладиган иккита умумий нуқтаси мавжуд.



136- шакл.

1-теорема. *Айланага ўтказилган уринма уриниш нуқтасидан ўтган диаметрга перпендикулярдир.*

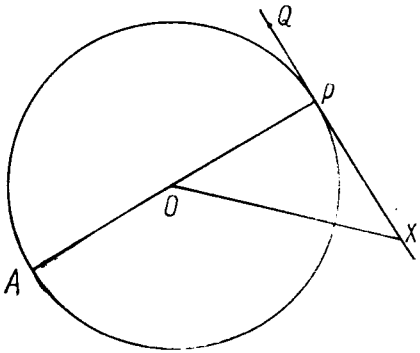
Исбот. $(O; r)$ айлана берилган бўлсин (137-шакл). Айтайлик, PQ уринма айланага P нуқтада уринсин. AP диаметрнинг PQ уринмага перпендикулярлигини кўрсатамиз. PQ уринма устида P нуқтадан фарқли ихтиёрий X нуқта танлаб олайлик. X нуқтанинг айлана ташқарисида ётиши равшан. У ҳолда OX кесма PQ уринмага оғма эканлиги $|OX| > |OP|$ тенгсизлигининг бажарилишидан келиб чиқади. Агар P дан фарқли ихтиёрий X нуқта учун шу тенгсизлик бажарилса, у ҳолда перпендикулярнинг ягоналиги ҳақидаги теоремага асосан $[OP]$ нинг XQ тўғри чизиққа перпендикулярлиги келиб чиқади. Чунки тўғри чизиқ ташқарисидаги нуқтадан унга туширилган оғмаларнинг барчаси шу нуқтадан тушган перпендикуляр узунлигидан катта. Шундай қилиб,

$$[OP] \perp (XQ) \Longrightarrow (PQ) \perp [AP]$$

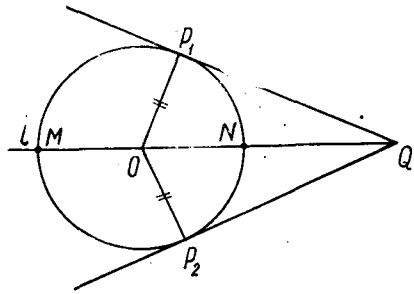
бажарилди. ▶ Бу теореманинг тескариси ҳам ўринли:

2-теорема. *Айлана диаметрининг охиридан унга перпендикуляр ўтган тўғри чизиқ шу айланага уринмадир.*

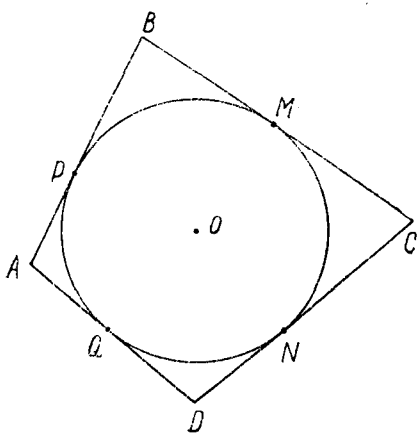
1-натижа. Айлана ташқарисида олинган ихтиёрий нуқтадан шу айланага кўпи билан иккита уринма ўтади.



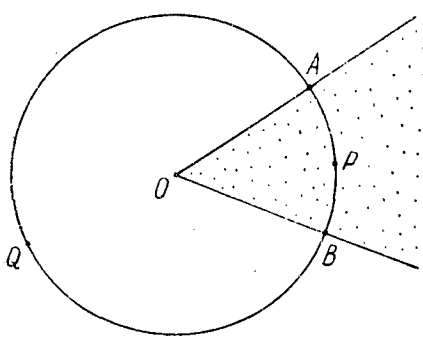
137- шакл.



138-шакл.



139-шакл.



140-шакл.

Хулоса. Бир нуқтадан айланага ўтказилган икки уринманинг айланагача бўлган бўлаги ўзаро тенг.

Исбот. Q нуқтадан $(O; r)$ айланага QP_1 ва QP_2 уринмалар ўтказайлик (138-шакл). OP_1 ва OP_2 кесмалар айлана радиуси бўлганлиги учун $OP_1 \perp QP_1$, $OP_2 \perp QP_2$ бўлади. $|OP_1| = |OP_2|$ дан $l = OQ$ нур $\angle P_1OP_2$ бурчакнинг биссектрисасидир, яъни у шу бурчакнинг симметрия ўқи экани равшан. У ҳолда ўқ симметрияси хоссасидан $S_l(P_1) = P_2 \Rightarrow |QP_1| = |QP_2| \Rightarrow |QP_1| = |QP_2|$ эканлиги келиб чиқади. ▶

2-натижа. Айланага ташқи нуқтадан ўтказилган уринмалар бурчаги $\angle P_1QP_2$ учун $[QO)$ нур биссектрисадир (138-шакл).

3-натижа. Тўртбурчакка ички чизилган айлананинг мавжудлигининг ҳам зарурий, ҳам етарли шарти шу тўртбурчак қарама-қарши томонлари йиғиндисининг ўзаро тенглигидир (139-шакл).

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|. \quad (1)$$

Ҳақиқатан ҳам, $ABCD$ тўртбурчакка айлана ички чизилган бўлсин. У ҳолда тўртбурчак томонлари мос равишда A, B, C ва D учлардан чиқарилган уринмалардир. Айлана шу томонларга P, Q, N, M нуқталарда уриниган бўлсин. Бу вақтда юқоридаги хулоса тасдиғига кўра тўртбурчак томонлари уринма сифати-

да ушбу $|MC| = |CN|$, $|ND| = |DQ|$, $|QD| = |DP|$, $|PB| = |BM|$ тенгликларни қаноатлантиради. Демак, бу ердан (1) да кўрсатилган шарт ўз-ўзидан келиб чиқади. Шу шарт масалан, барча параллелограммлар ичида фақат ромб (хусусан квадрат) ларда бажарилади. Аксинча, (1) тенглик бажарилса, $ABCD$ тўртбурчакка ички чизилган айлана мавжуд. Уни исботлаш ўқувчига қолдирилади. ▶

24. Марказий бурчак ва айлана ёйи. Сектор, сегмент. Учи айлана марказида ётган бурчак айлананинг *марказий бурчаги* деб айтилади (140-шакл). Айлана ва унинг марказий бурчагининг ўзаро кесишмаси, шу *айлананинг ёйи* дейилади (140-шакл). Айлана маркази O дан бошланган OA ва OB нур, унда ётган икки марказий бурчакни ва икки айлана ёйини ҳосил қилади. Агар A ва B нуқта айланага ҳам тегишли бўлса ва ҳар бир айлана ёйидан биттадан бирор P ва Q нуқта олинса, у ҳолда P ётган ёй $\overset{\frown}{APB}$, Q ётган ёй $\overset{\frown}{AQB}$ кўринишда белгиланади. Айлана ёйи унга мос марказий бурчак катталиги (градус, радиан) билан ўлчанади. 180° ли айлана ёйи *ярим айлана* дейилади.

Ёйнинг хоссалари:

— Бир хил радиусли икки айлана ёйининг ўзаро тенг бўлиши учун уларнинг марказий бурчакларининг ўзаро тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

— Бир айланада катта марказий бурчакка катта ёй мос келади;

— $\alpha°$ ли $\overset{\frown}{APB}$ айлана узунлиги $l = \frac{\pi r \alpha}{180}$ билан аниқланади (Г. 32 п. 204-бетга қаранг).

Доиранинг марказий бурчаги билан кесишмаси *сектор* деб айтилади. Унинг марказий бурчаги $\alpha°$ бўлса, секторнинг юзи $S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$ кўринишда ҳисобланади (Г. 32 п. 205-бетга қаранг).

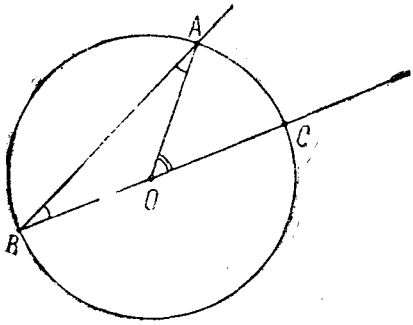
Доиранинг ватар ва ватарга тиралган ёй билан чегаралланган қисми *сегмент* деб айтилади. $\alpha°$ ли ёйга тиралган сегментнинг юзи

$$S = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right)$$

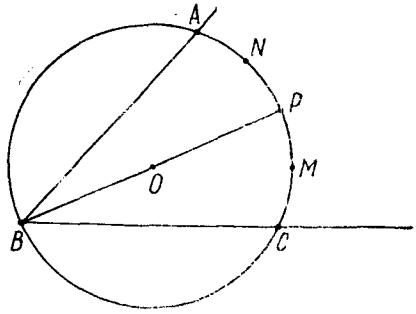
билан ўлчанади. Юзни ҳисоблашга доир юқорида келтирилган иккала формуланинг исботи ўқувчига қолдирилади.

25. Айланага ички ҳамда ташқи чизилган бурчак ва уларни ўлчаш. Учи айланада ётувчи бурчак томонлари шу айланани кесиб ўтган бўлса, у ҳолда бу бурчак айланага *ички чизилган бурчак* деб айтилади.

1-теорема. *Айланага ички чизилган қаварик бурчак катталиги шу бурчак тиралган ёй катталигининг ярми билан ўлчанади.*



141- шакл.



142- шакл.

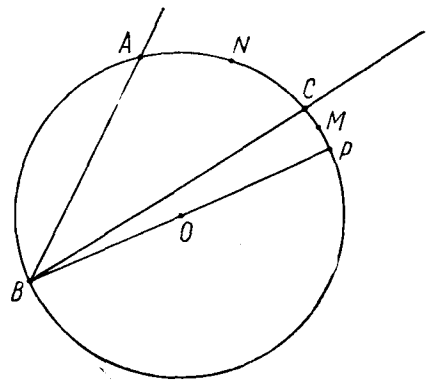
Исбот. Бу ерда учта ҳол бўлиши мумкин.

1- ҳол. Айлананинг O маркази ABC бурчакнинг BC томони устида ётсин. A нуқтани O билан туташтирамиз (141- шакл). Бунда AOC марказий бурчак AOB учбурчакнинг ташқи бурчаги бўлиб, у ўзига қўшни бўлмаган ($\angle BAO = \angle ABO$) бурчаклар йиғиндисига тенг: $\angle AOC = 2 \cdot \angle ABO$. Натижада ички чизилган бурчак ўзи тиралган ёйнинг ярмиси билан ўлчаниши келиб чиқди.

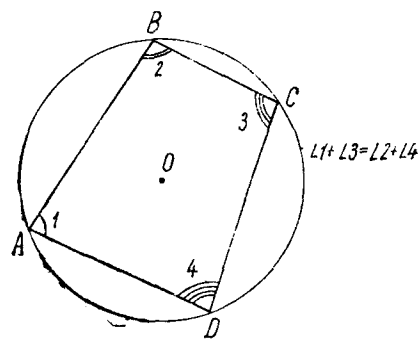
2- ҳол. Айлананинг O маркази ABC бурчакнинг ичида ётсин. Дастлаб $[BP]$ диаметр ўтказамиз (142- шакл). Бундан ҳар бир ABP ва PBC бурчак 1- ҳолда исботланганидек,

$$\angle ABP = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ANP}, \quad \angle PBC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{PMC}$$

каби ўлчаниши келиб чиқади. Демак, бу бурчаклар йиғиндиси $\angle ABC$ бурчакка тенг. Бундан:



143- шакл.



144- шакл.

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{ANP} + \overset{\frown}{PMC}) = \frac{\overset{\frown}{APC}}{2}.$$

Шундай қилиб, 2- ҳол исботланди.

3- ҳол. Айлананинг O маркази ABC бурчак ташқарисида ётсин. Дастлаб $[BP]$ диаметрни ўтказамиз (143- шакл). Бу шаклдан яққол кўринадики, $\angle ABC = \angle ABP - \angle CBP$ бажарилади. Унга мос равишда

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{ACP} - \overset{\frown}{CMP}) = \frac{1}{2}\ \overset{\frown}{ANC}$$

эканлиги келиб чиқади. ▶

Топшириқ. Ушбу натижаларни исботланг:

1- натижа Айлана диаметрига тиралган ички чизилган бурчак тўғри бурчакдир.

Айлананинг икки уринмаси ҳосил қилган қаварiқ бурчакка *ташқи чизилган бурчак* деб айтилади (138- шакл).

2- натижа. Айланага ташқи чизилган бурчак (138- шакл) унинг томонлари орасидаги икки ёй айирмасининг ярмиси билан ўлчанади:

$$\angle P_1QP_2 = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{P_1MP_2} - \overset{\frown}{P_1NP_2}).$$

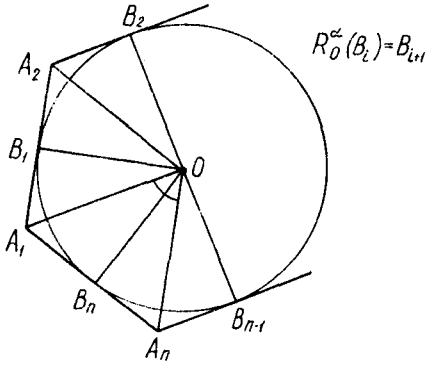
3- натижа. Тўртбурчакнинг қарама-қарши бурчаклари йиғиндиси 180° га теng бўлганда, унга ташқи айлана чизиш мумкин бўлади (144- шакл):

$\angle A + \angle C = 180°$, $\angle B + \angle D = 180° \Longleftrightarrow$ ($ABCD$ га ташқи айлана мавжуд).

Хулоса. Ҳамма параллелограммлар ичида фақат тўғри туртбурчаклар (хусусан, квадратлар) га ташқи айлана чизиш мумкин.

2- теорема. *Ҳар қандай мунтазам кўпбурчакка ички айлана чизиш мумкин.*

Исбот. $A_1A_2 \ldots A_n$ мунтазам кўпбурчакка ташқи чизилган айлананинг O марказидан кўпбурчак томонларига перпендикуляр ўтказамиз (145- шакл). Уларнинг асослари $B_1, B_2, \ldots, B_n$ бўлсин. O марказ атрофида $\alpha = \frac{360°}{n}$ га R_O^α буриш кўпбурчак ва айлана ўзини ўзига акслантиради. Натижада $R_O^\alpha(B_1) = B_2$, $R_O^\alpha(B_2) = B_3$, ..., $R_O^\alpha(B_{n-1}) = B_n$ ва $R_O^\alpha(O) = O$ нинг бажарилишидан R_O^α — силжитиш хоссасига кўра $|OB_1| = |OB_2| = \ldots = |OB_n| = r$ тенглик ўринли. Демак, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ нуқталар $(O; r)$ айланада ётади, яъни айлана $A_1A_2 \ldots A_n$ кўпбурчакка ички чизилгандир, чунки $OB_1 \perp A_1A_2$, $OB_2 \perp A_2A_3$, ..., $OB_n \perp A_nA_1$. ▶



145- шакл.

Топшириқлар. 1. Мунтазам n бурчак томони $a_n = 2R \sin \frac{180°}{n}$ каби ташқи чизилган айлана радиуси орқали ифодаланишини исботланг. a_3, a_4, a_6 ларни аниқланг.

2. Агар $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ лар мос равишда бундай берилса, $ABCD$ тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкинми: а) 90°, 90°, 60°, 120°; б) 70°, 110°, 50°, 130°; в) 105°, 45°, 135°, 75°; г) 50°, 60°, 70°, 80°?

3. Ушбу таслиқларни исботланг: айланага ички чизилган а) ҳар қандай трапеция—тенг ёнли; б) ҳар қандай параллелограмм — тўғри тўртбурчак; в) ҳар қандай ромб—квадратдир.

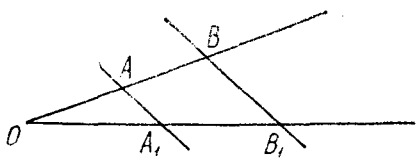
26. Кўпбурчак ва учбурчакларнинг ўхшашлик аломатлари.

Пропорционал кесмалар. AB ва CD ҳамда A_1B_1 ва C_1D_1 кесмалар узунликлари $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|}$ каби нисбатда бўлса, AB ва CD кесмалар A_1B_1 ва C_1D_1 кесмаларга *пропорционал кесмалар* деб айтилади.

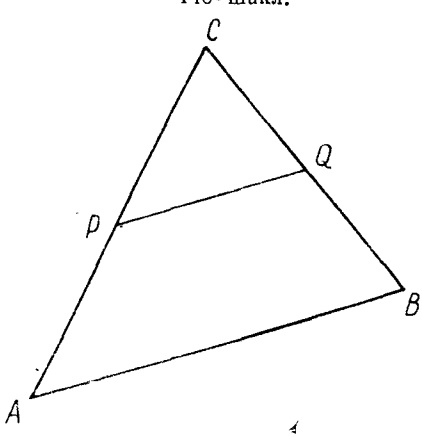
Теорема. *Бурчак томонларини кесган параллел тўғри чизиқлар уларда пропорционал кесмалар ажратади.*

Исбот. A нуқтани B нуқтага акслантирувчи H_O^k гомотетияда (146-шакл) AA_1 тўғри чизиқ BB_1 тўғри чизиққа аксланади: $H_O^k[AA_1] = [BB_1]$. Демак, $H_O^k(A_1) = B_1$. Шартга кўра $H_O^k(A) = B$. Гомотетия хоссасига биноан

$$|OB| = |k| \cdot |OA|, \ |OB_1| = |k| \cdot |OA_1|,$$



146-шакл.



147-шакл.

бу ердан $|OB| : |OA| = |OB_1| : |OA_1|$. ▶

Натижалар. 1) $|OA_1| : |OA| = |A_1B_1| : |AB|$ ҳам ўринлидир;

2) ABC учбурчакнинг AB асосига параллел бўлиб, қолган икки томонини кесувчи PQ кесма (147-шакл) учбурчакда пропорционал кесмалар ажратади: $|CA| : |CP| = |CB| : |CQ| = |AB| : |PQ|$.

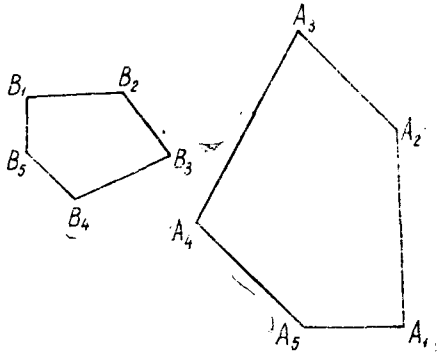
Кўпбурчаклар ўхшашлиги. Агар бир кўпбурчакнинг томонлари, иккинчи кўпбурчакнинг томонлари билан мос равишда пропорционал бўлса ва пропорционал томонлари орасидаги бурчаклар ўзаро тенг бўлса, у ҳолда бу кўпбурчаклар ўзаро ўх-

шашдир: Яъни $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ кўпбурчак $B_1B_2B_3 \ldots B_n$ кўпбурчакка ўхшаш бўлиши учун

$$\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|A_2A_3|}{|B_2B_3|} = \ldots = \ldots = \frac{|A_{n-1}A_n|}{|B_{n-1}B_n|}$$ ва $\angle A_1 = \angle B_1$, $\angle A_2 = \angle B_2, \ldots, \angle A_n = \angle B_n$

бажарилиши лозим.

Масалан, квадратлар доим ўзаро ўхшашдир; ромблар мос бурчаклари тенг бўлса, ўзаро ўхшашдир.



148- шакл.

148- шаклда $A_1A_2A_3A_4A_5$ кўпбурчак $B_1B_2B_3B_4B_5$ га $k=2$ коэффициент билан ўхшашлиги тасвирланган, чунки

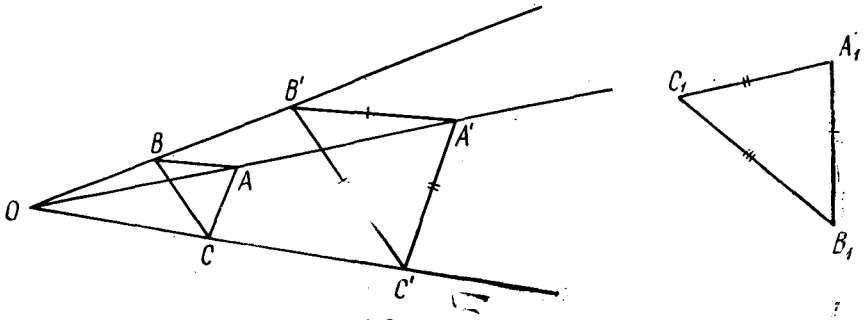
$$\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|A_2A_3|}{|B_2B_3|} = \frac{|A_3A_4|}{|B_3B_4|} = \frac{|A_4A_5|}{|B_4B_5|} = k = 2$$

бажарилиши шу фигураларнинг ўхшашлигига етарли шартдир.

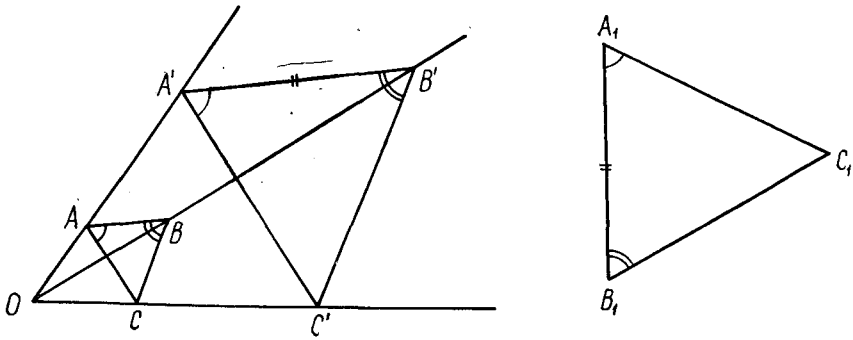
Худди шунингдек, икки тўртбурчак ўхшаш бўлиши учун уларнинг уч томонлари ўзаро пропорционал, улар орасидаги икки бурчак мос равишда бир-бирига тенг бўлиши шарти етарлидир.

1- теорема. *Агар бир учбурчакнинг учта томони иккинчи учбурчакнинг учта томони билан мос равишда пропорционал бўлса, у ҳолда бу учбурчаклар ўхшашдир.*

Исбот. $|A_1B_1| : |AB| = |B_1C_1| : |BC| = |A_1C_1| : |AC|$ экани маълум. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ экани исботланиши керак. $k = |A_1B_1| : |AB|$ коэффициентли, ихтиёрий O марказли H_O^k гомотетия ABC учбурчакни (149- шакл) унга ўхшаш $A'B'C'$ учбурчакка акслантиради:



149- шакл.



150- шакл.

$$H_O^k(\triangle ABC)=\triangle A'B'C' \Longrightarrow \triangle A'B'C' \overset{k}{\backsim} \triangle ABC.$$

Бунда $\frac{|A'B'|}{|AB|}=\frac{|B'C'|}{|BC|}=\frac{|A'C'|}{|AC|}=k$ бажарилади. Теорема шартини ҳисобга олсак, $|A_1B_1|=|A'B'|$, $|B_1C_1|=|B'C'|$, $|A_1C_1|=|A'C'|$ бажариляпти. Шунинг учун $\triangle A_1B_1C_1 \overset{1}{\backsim} \triangle A'B'C' \overset{k}{\backsim} \triangle ABC \Longrightarrow \triangle A_1B_1C_1 \overset{k\cdot 1}{\backsim} \triangle ABC$, бу охирги хулоса (Г. 9 п. 169-бетга ва Г. 14 п. 177-бетдаги) ўхшаш алмаштириш хоссасига асосланди. ▶

2- теорема. *Бир учбурчакнинг икки бурчаги иккинчи учбурчакнинг икки бурчагига тенг бўлса, у ҳолда бу учбурчаклар ўхшашдир.*

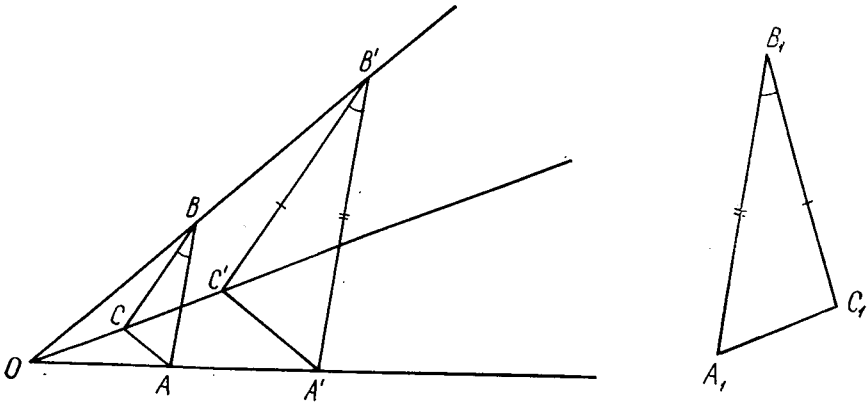
Исбот. 150- шаклда $\triangle A_1B_1C_1$ ва $\triangle ABC$ учбурчаклар берилганки, теорема шартига биноан

$$|A_1B_1|=k\cdot|AB|,\ \angle A_1=\angle A, \angle B_1=\angle B$$

бажарилган бўлсин. $\triangle A_1B_1C_1 \overset{k}{\backsim} \triangle ABC$ эканлигини кўрсатиш керак. Бирор H_O^k гомотетия олайлик. У ABC учбурчакни шундай $A'B'C'$ учбурчакка акслантирадики, $\triangle A'B'C' \overset{k}{\backsim} \triangle ABC$ бажарилади. Бундан $|A'B'|=k\cdot|AB|$ эканлиги ҳам келиб чиқади. Ундан ташқари $\angle A'=\angle A_1$ ва $\angle B'=\angle B_1$ ҳам бўлади. Икки бурчаги ва бир томони бўйича $\triangle A'B'C'$ учбурчак $\triangle A_1B_1C_1$ учбурчакка (Г. 9 ва 14- пунктларга асосан) тенг бўлади. Демак, юқоридаги натижа тасдиғига кўра $\triangle A'B'C' \backsim \triangle A_1B_1C_1$, у ҳолда

$$\triangle A_1B_1C_1 \overset{1}{\backsim} \triangle A'B'C' \overset{k}{\backsim} \triangle ABC \Longrightarrow \triangle A_1B_1C_1 \overset{k\cdot 1}{\backsim} \triangle ABC. ▶$$

3- теорема. *Бир учбурчакнинг икки томони иккинчи учбурчакнинг икки томони билан мос равишда ўзаро пропор-*



151- шакл.

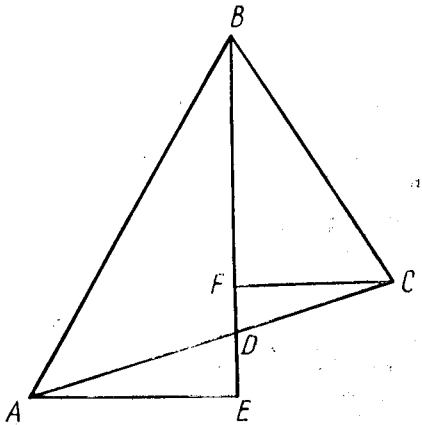
ционал ва шу томонлар орасидаги бурчаклари ўзаро тенг бўлса, у ҳолда бу учбурчаклар ўхшашдир.

Исбот. $|A_1B_1|:|AB|=|B_1C_1|:|BC|=k$, $\angle B_1=\angle B$ шартлар бажариладиган $A_1B_1C_1$ ва ABC учбурчаклар берилган (151-шакл). $\triangle A_1B_1C_1 \overset{k}{\backsim} ABC$ ни исботлаймиз. Ихтиёрий O марказли k коэффициентли гомотетия борки, $H_O^k(\triangle ABC)=\triangle A'B'C'$ каби учбурчак образи ҳосил қилади. Гомотетия хоссасига кўра $A'B'C'$ учбурчак ABC учбурчакка k коэффициент билан ўхшашдир: $|A'B'|=k|AB|$, $|B'C'|=k|BC|$, $\angle B'=\angle B$. Теорема шартини ҳисобга олсак, $|A_1B_1|=|A'B'|$, $|B_1C_1|=|B'C'|$, $\angle B_1=\angle B'$ экани келиб чиқади.

Демак,

$$\triangle A_1B_1C_1 \overset{k}{\backsim} \triangle A'B'C' \overset{k}{\backsim} \overset{k}{\backsim} \triangle ABC \Longrightarrow \triangle A_1B_1C_1 \overset{k\cdot 1}{\backsim} \overset{k\cdot 1}{\backsim} \triangle ABC. \blacktriangleright$$

Натижа. ABC учбурчак B бурчагининг биссектрисаси қаршисидаги томонни $\frac{|AD|}{|DC|}=\frac{|AB|}{|BC|}$ каби шартни қаноатлантирувчи бўлакларга ажратади (152- шакл).



152- шакл.

Исбот. A ва C нуқтада

BD тўғри чизиққа CF ва AE перпендикуляр туширамиз, $\angle E = \angle F = 90°$. D нуқтадаги бурчаклар вертикал бурчаклар бўлгани учун улар ўзаро тенг. У ҳолда

$$\triangle ABE \sim \triangle CBF \Longrightarrow \frac{|AE|}{|CF|} = \frac{|AB|}{|BC|}; \ \triangle AED \sim \triangle CFD \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{|AE|}{|CF|} = \frac{|AD|}{|DC|}.$$

Бу ердан натижа тасдиғи келиб чиқади. ▶

4-теорема. *Ўхшаш кўпбурчаклар юзларининг нисбати, ўхшашлик коэффициентининг квадратига тенг.*

Исбот. $\triangle A_1B_1C_1 \overset{k}{\sim} \triangle ABC$ бўлсин. Бунда ABC учбурчакни $A_1B_1C_1$ учбурчакка акслантирадиган шундай ўхшаш алмаштириш мавжудки, ABC нуқталар орасидаги масофа образида k марта ўзгаради. Демак,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} h_a \cdot |BC|, \quad S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} h'_a \cdot |B_1C_1| = \frac{1}{2} h \cdot h_a \cdot k\,|BC| =$$
$$= \frac{k^2}{2} h_a |BC|.$$

Бундан $S_{A_1B_1C_1} : S_{ABC} = k^2$ келиб чиқади.

Агар $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ кўпбурчак $B_1B_2B_3 \ldots B_n$ кўпбурчакка k коэффициентли ўхшаш бўлиб, A_1A_3; A_1A_4; . . . ;A_1A_{n-1} диагоналлар мос равишда B_1B_3; B_1B_4; . . . ;B_1B_{n-1} диагоналларга аксланса, у ҳолда иккала кўпбурчакда ҳосил бўлган учбурчаклар учун юқоридагидек исбот қўлланилади.

$$S_{B_1B_2 \ldots B_n} = S_{B_1B_2B_3} + S_{B_1B_3B_4} + \ldots + S_{B_1B_{n-1}B_n} =$$
$$= k^2(S_{A_1A_2A_3} + S_{A_1A_3A_4} + \ldots + S_{A_1A_{n-1}A_n}) = k^2 \cdot S_{A_1A_2 \ldots A_n}.$$

Демак, $S_{B_1B_2 \ldots B_n} : S_{A_1A_2 \ldots A_n} = k^2$.

Топшириқлар. 1. Томонлари а) 4, 5, 6 ва 8, 10, 12; б) 6, 8, 12 ва 9, 18, 15; в) 10, 20, 30 ва 10, 10, 5 бўлган икки учбурчак ўхшашми?

2. Иккита тенг ёнли (тўғри бурчакли) учбурчаклар учун ўхшашлик аломатлари қандай ифодаланади?

3. Ўхшаш учбурчакларда иккита мос томонлар нисбати иккита мос: а) баландликларнинг; б) биссектрисаларнинг; в) медианаларнинг нисбатига тенг эканини исботланг.

27. Пифагор теоремаси.

Таъриф. Агар узунлиги a, b ва c бўлган кесмалар учун

$$a : c = c : b$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда c ни a ва b ларнинг *ўрта геометрик қиймати* ёки *ўрта пропорционали* дейилади.

1-теорема. *ABC тўғри бурчакли учбурчакда a, b катетлар ($b > a$) ва c гипотенуза маълум бўлсин; a_c ва b_c лар a ва b катетларнинг c гипотенузадаги проекцияси бўлсин, h*

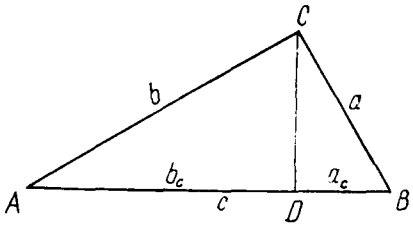
эса C бурчакдан туширилган баландлик (153- шакл). *У ҳолда ушбу ўрта пропорционаллик хоссалари ўринлидир.*

а) $b_c : b = b : c$; б) $c : a = a : a_c$; в) $b_c : h = h : a_c$.

Исбот. а) $\triangle ADC \backsim \triangle ACB \Longrightarrow b_c : b = b : c$;

б) $\triangle ACB \backsim \triangle CDB \Longrightarrow c : a = a : a_c$;

в) $\triangle ADC \backsim \triangle CDB \Longrightarrow b_c : h = h : d_c$.



153- шакл.

Пифагор теоремаси. *Тўғри бурчакли учбурчак гипотенузаси квадрати катетлари квадратларининг йиғиндисига тенг.*

Исбот. Ҳақиқатан ҳам тўғри бурчакли учбурчакнинг 1-теоремадаги а) ва б) хоссаларига биноан (153- шакл):

$$a^2 = a_c \cdot c; \quad b^2 = b_c \cdot c$$

деб ёза оламиз. Уларни ҳадма - ҳад қўшиб қуйидагини топамиз:

$$a^2 + b^2 = (a_c + b_c) \cdot c = c^2. \blacktriangleright$$

Топшириқлар. 1. $a = 9$, $b = 12$ га кўра, c, h, a_c, b_c ларни; $a = 12$, $c = 13$ га кўра b, h, a_c, b_c ларни топинг.

2. Учбурчакнинг томонлари 5, 12 ва 13 га пропорционал бўлса, унинг тўғри бурчакли учбурчаклигини исботланг.

28. Косинуслар теоремаси. *Учбурчакнинг исталган томонининг квадрати қолган икки томони квадратлари йиғиндисидан шу икки томон билан улар орасидаги бурчак косинусининг иккиланган кўпайтмасини айириш натижасига тенг* (154- шакл).

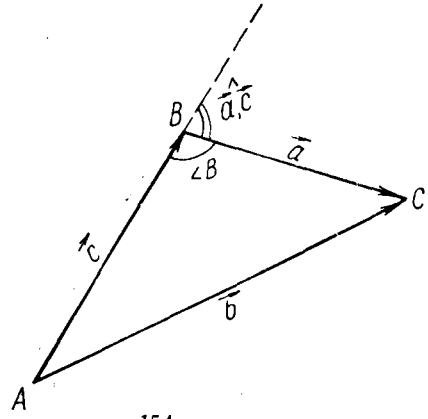
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \angle B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C.$$

Бу ерда $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ деб олинган.

Исбот. Узунлиги a, b, c бўлган $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ векторларни қарайлик (154- шакл). У ҳолда ABC учбурчакда $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ каби ифода



154- шакл.

ўринли, яъни $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$. Энди $\vec{b}$ векторни ўзини ўзига скаляр кўпайтирсак,

$$b^2 = |\vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{c})^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{c}})$$

ҳосил бўлади. 154-шаклдан кўринадики, $\widehat{\vec{a}, \vec{c}}$ бурчак $\angle B$ билан $\angle B = \pi - \widehat{\vec{a}, \vec{c}}$ каби боғланган. Демак, $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = -\cos\angle B$. Шундай қилиб, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B$. Бошқа томонлари учун ҳам бундай муносабатлар шу йўсинда исботланади. ▶

1-натижа. $\widehat{\vec{a}, \vec{c}} = 90°$ бўлганда бу теорема Пифагор теоремасини тасдиқлайди.

2-натижа. Учбурчакнинг учала a, b ва c томонларига кўра унинг $\angle A$, $\angle B$ ва $\angle C$ бурчаклари косинуслари ушбу формулалар орқали топилади:

$$\cos\angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos\angle B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad \cos\angle C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Топшириқлар. 1. а) 70, 80, 120; б) 5, 14, 8; в) 5, 5, 5; г) 16, 20, 24 томонли учбурчакнинг бурчагини аниқламай туриб, у қандай бурчакли учбурчак (ўткир, ўтмас, тўғри бурчакли) эканлигини топинг.

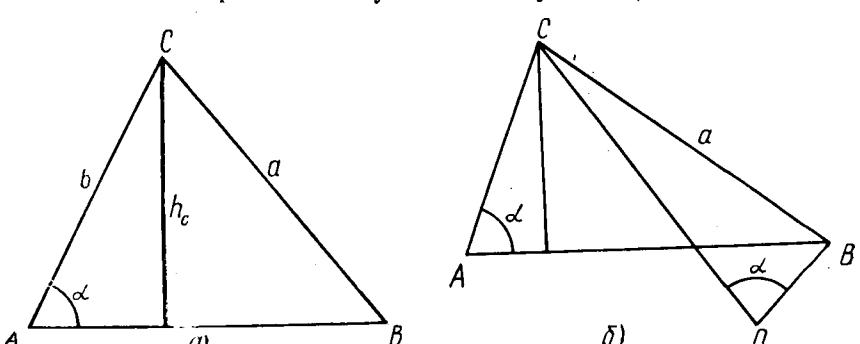
2. а) $a = 70$, $b = 100$, $\gamma = 60°$; б) $a = 4$, $c = 6$, $\beta = 120°$; в) $b = 4$, $c = 12$, $\alpha = 30°$ бўлган учбурчакларнинг қолган томонларини ҳисобланг.

3. а) 30, 40, 60, б) 80, 26, 74; в) 26, 10, 24; г) 19, 80, 63 бўлса, шу учбурчакнинг катта бурчагини топинг.

29. Синуслар теоремаси. *Учбурчакнинг томонлари ўз қаршиларидаги бурчак синусларига пропорционал:*

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R.$$

Исбот. Маълумки, берилган ABC учбурчакнинг юзи h_c баландлик билан шу баландлик туширилган $c = |AB|$ асос кўпайтмасининг ярми билан ўлчаниши мумкин (155-*а* шакл).



155-*а*, *б* шакл.

$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c.$$

Агар $\angle A$ ёки $\angle B$ маълум бўлса, у ҳолда $b = |AC|$ ёки $a = |CB|$ ларни берилган деб, h_c ни шу томонлар орқали топиш мумкин:

$$h_c = b \sin\angle A \text{ ёки } h_c = a \sin\angle B.$$

Демак,

$$S = \frac{1}{2} bc \sin\angle A, \quad S = \frac{1}{2} ac \sin\angle B.$$

Худди шу каби мулоҳазалар асосида $S = \frac{1}{2} ab \sin\angle C$ эканлигини кўрсатиш мумкин. Бу топилган юзлар бир-бирига тенглигидан ушбу

$$bc \sin\angle A = ac \sin\angle B = ab \sin\angle C$$

қўш тенгликни ҳосил қиламиз. Агар бу қўш тенгликнинг учала томонини abc га бўлиб, сўнг ҳосил бўлган ифоданинг ҳар биринини тескарисини ёзсак:

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C}.$$

Лекин 155-*б* шаклдан $\frac{a}{2R}$ нисбатнинг $\sin\angle A$ га тенглиги (бошқа $\frac{b}{2R}$, $\frac{c}{2R}$ нисбатларнинг мос равишда $\sin B$ ва $\sin C$ га тенглиги ҳам) кўриниб турибди. Демак, бу қўш тенгликнинг умумий натижаси $2R$ га тенг:

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R.$$

Топшириқлар. 1. а) $a = 100$, $\beta = 30°$, $\gamma = 60°$; б) $c = 20$, $\alpha = 135°$, $\beta = 30°$; в) $a = 130$, $b = 200$, $\alpha = 60°$; г) $a = 40$, $c = 60$, $\gamma = 30°$ бўлса, учбурчакнинг қолган томон ва бурчакларини топинг,

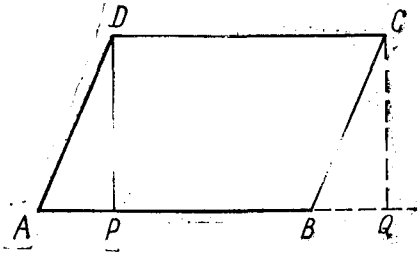
2. Параллелограмм диагонали m га тенг ва у томонлари билан α ва β бурчак ҳосил қилади. Унинг томонлари узунлигини топинг.

30. Параллелограмм, учбурчак ва трапеция юзларини ҳисоблаш.

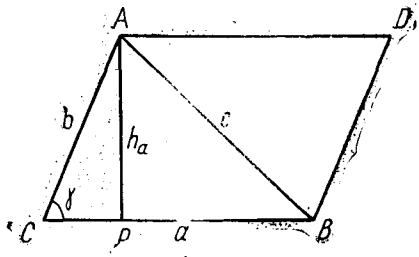
1-теорема. *Параллелограммнинг юзи унинг асоси билан баландлигининг кўпайтмасига тенг.*

Исбот. $ABCD$ параллелограммда D ва C учлардан AB томонга перпендикуляр DP ва CQ кесмалар туширилсин (156-шакл). DP кесма AB томонга туширилган *баландлик* деб айтилади. У ҳолда $\triangle ADP = \triangle BCQ$ бўлгани учун

$$S_{ABCD} + S_{CBQ} = S_{DCQP} + S_{ADP}$$



156- шакл.



157- шакл.

деб ёза оламиз, $S_{CBQ}=S_{ADP}$ бўлгани учун уларни тенгликнинг икки томонидан ташланади. Энди $S_{DCQP}=|DC||DP|$ эканлигидан $S_{ABCD}=|AB||DP|$ тенглик ҳосил бўлади. Агар $a=|AB|$, $h=|DP|$ деб белгилаш киритсак, у ҳолда $S_{ABCD}=ah$ формула келтириб чиқарилади. ▶

2- теорема. *Учбурчакнинг юзи унинг асоси билан баландлиги кўпайтмасининг ярмига тенг.*

Исбот. ABC учбурчакда AP баландлик ясайлик (157-шакл). A учидан CB га, B учидан CA га параллел тўғри чизиқ ўтказилса, улар бирор D нуқтада кесишади. Натижада $ACBD$ параллелограммни ҳосил қиламиз. Ўз-ўзидан равшанки $\triangle ABC=\triangle BAD$ бажарилади. Шунинг учун

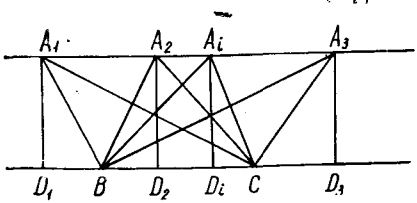
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}S_{ABCD},$$

у ҳолда юқоридаги 1-теоремага асосан $S_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot h_a$, бу ерда $a=|CB|$ учбурчакнинг асоси, $h_a=|AP|$ эса учбурчакнинг A учидан туширилган баландлиги. ▶

1-натижа. Умумий асосли, учинчи учи шу асосга параллел тўғри чизиқда ётган барча учбурчаклар тенгдошдир.

Исбот. 158-шаклда бундай учбурчаклардан бир қанчаси чизилган бўлиб, уларнинг баландликлари ўзаро тенг:

$$h=|A_iD_i|,\ i=1,\ 2,\ 3.\ 4,\ldots$$



158- шакл.

Ҳаммаси умумий $a=|CB|$ асосли бўлгани учун барча учбурчаклар ўзаро тенгдошдир. ▶

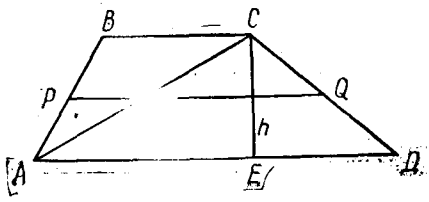
3- теорема. *Трапециянинг юзи унинг асослари йиғиндисининг ярми билан баландлиги кўпайтмасига тенг.*

Исбот. $ABCD$ трапецияда $a=|AD|$, $b=|BC|$ ва $h=|CE|$ бўлса (159-шакл),

$$S_{ABCD}=\frac{a+b}{2}h$$

формулани исботлаймиз. Агар AC диагонал ўтказсак, у ҳолда

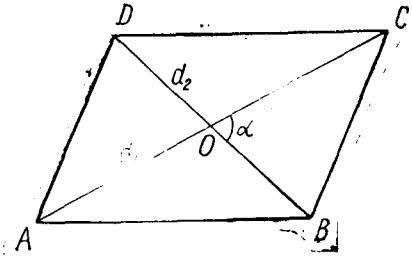
$$S_{ACD}=\frac{a}{2}h;\quad S_{ACB}=\frac{b}{2}h.$$



159-шакл.

Трапециянинг юзи шу учбурчаклар юзлари йиғиндисига тенг эканлигидан

$$S_{ABCD}=S_{ACD}+S_{ACB}=$$
$$=\frac{1}{2}(a+b)h.$$



160-шакл.

2-натижа. а) Трапециянинг юзи унинг ўрта чизиғи билан баландлиги кўпайтмасига тенг (159-шакл).

$$S_{ABCD}=|PQ|\cdot h.$$

б) Учбурчакнинг юзи унинг икки томони ва шу томонлар орасидаги бурчак синуси кўпайтмасининг ярмига тенг (157-шакл).

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,\ \gamma=\angle C.$$

Ҳақиқатан ҳам, $S_{ABC}=\frac{1}{2}ah_a$ каби чиқарилган формулада баландлик h_a нинг $h_a=b\sin\gamma$ эканлигини 157-шаклдан кўрса бўлади. ▶

Параллелограммнинг юзи унинг диагоналлари ва шу диагоналлари орасидаги бурчак синуси кўпайтмасининг ярмига тенг (160-шакл).

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha.$$

Ҳақиқатан ҳам, $d_1=|AC|$, $d_2=|BD|$ каби белгиласак, 160-шаклдан 2-натижа тасдиғига кўра ушбу тенгликларни ёзса бўлади:

$$2\cdot S_{OCB}=|OC|\cdot|OB|\sin\alpha,$$
$$2\cdot S_{OCD}=|OC|\cdot|OD|\cdot\sin(\pi-\alpha).$$

Бунда $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ эканлигини ҳисобга олиб, ҳадма-ҳад қўшсак:

$$S_{ABCD}=|OC|(|OB|+|OD|)\sin\alpha$$

ёки бу ердан

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha. \blacktriangleright$$

г) Учбурчакнинг томони a, b, c бўлса, унинг юзи

$$S_{\triangle}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ p=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

каби ҳисобланади.

Ҳақиқатан ҳам, косинуслар теоремасидан: $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ва учбурчак юзини топиш формуласи $S_{\triangle}=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ дан $\sin\alpha=\frac{2S_{\triangle}}{bc}$ десак, у ҳолда

$$\left(\frac{2S_{\triangle}}{bc}\right)^2+\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=1.$$

Бундан

$$S_{\triangle}^2=\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{16}=\frac{1}{16}((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2)=$$

$$=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}=p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Бу ердан Герон формуласи $S_{\triangle}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ келиб чиқади.

Топшириқлар. 1. а) $a=250$, $b=320$, $\gamma=60°$; б) $b=40$, $c=70$, $\alpha=75°$; в) $a=18$, $b=22$, $c=32$; г) $a=36$, $b=44$, $c=60$ га кўра ABC учбурчакнинг юзини топинг.

2. Берилган ушбу диагоналлари ва улар орасидаги бурчагига кўра параллелограммнинг юзини топинг: а) $d_1=5$, $d_2=15$, $\alpha=60°$; б) $d_1=12$, $d_2=40$, $\alpha=45°$: в) $d_1=10$, $d_2=20$, $\alpha=30°$.

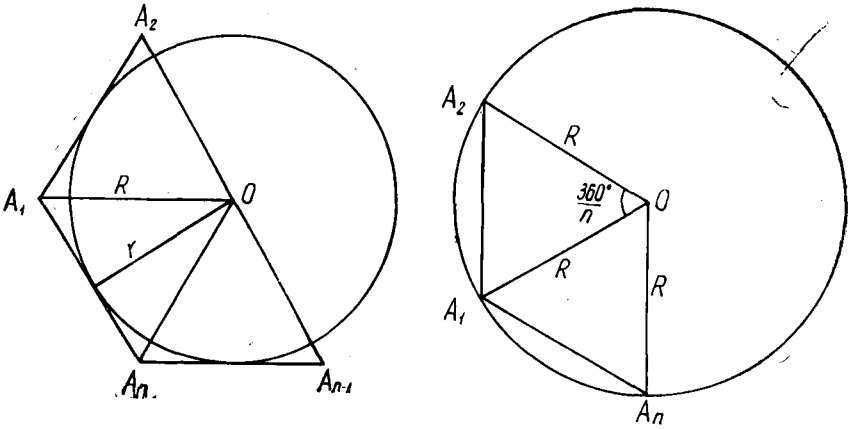
3. а) Ромбнинг томони 10, ўткир бурчаги 30°; б) ромбнинг диагонали $d=10$, шу диагонал каршисидаги бурчак 135° бўлса, ромбнинг юзини топинг.

31. Мунтазам кўпбурчакнинг юзи.

1-теорема. *Мунтазам кўпбурчакнинг юзи, унинг периметри билан апофемаси (ички чизилган айлана радиуси) кўпайтмасининг ярмига тенг:*

$$S=\frac{1}{2}P_n\cdot r.$$

Бу ерда P_n — периметр, r — ички чизилган айлана радиуси.



161-*а, б* шакл.

Исбот. Мунтазам n бурчак учларини, унга ички чизилган айлана маркази билан туташтириб, уни n та ўзаро тенг учбурчакларга ажратамиз (161-*а* шакл). a_n — мунгазам n бурчак томони узунлиги бўлса, бу учбурчакларнинг ҳар бирининг юзи $\frac{1}{2}a_n r$ га тенг. $a_n \cdot n = P_n$ деб кўпбурчак периметрини белгиласак, у ҳолда кўпбурчакнинг S юзи $\frac{1}{2}a_n n \cdot r$ га тенглигидан

$$S = \frac{1}{2}P_n \cdot r$$

келиб чиқади. ▶

2-теорема. *Мунтазам n бурчакнинг S_n юзи:*

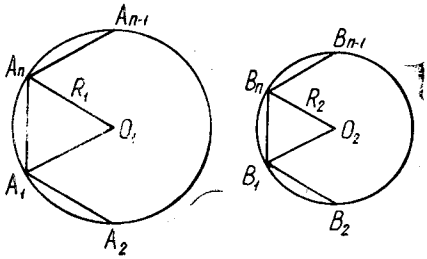
$$S_n = \frac{1}{2}nR^2 \sin\frac{360°}{n}$$

га тенг, бунда R — ташқи чизилган айлана радиуси.

Исбот. Мунтазам n бурчак учларини, унга ташқи чизилган айлана маркази билан гуташтирсак, у n та ўзаро тенг тенг ёнли учбурчакка ажралади (161-*б* шакл). Уларнинг ён томонлари R га тенг, шу ён томонлар орасидаги бурчак $\frac{360°}{n}$ дир. Демак, ҳар бир учбурчакнинг юзи $\frac{1}{2}R^2 \sin\frac{360°}{n}$ га тенг. Кўпбурчакнинг юзи эса шуларнинг n тасига тенг:

$$S_n = \frac{1}{2}nR^2 \sin\frac{360°}{n}. \ ▶$$

Топшириқлар. 1. Мунтазам n бурчакка ташқи чизилган айлана радиусини шу кўпбурчакнинг a_n томони орқали ифодаланг, сўнг S_n юзни топинг а) $n = 3$, б) $n = 4$, в) $n = 6$, г) $n = 8$.



162- шакл.

2. Мунтазам n бурчакнинг a_n томонини ва юзини r радиус орқали ифодалаш: а) $n=3$, б) $n=4$, в) $n=6$.

3. Учбурчак томонлари а) 3, 4, 5; б) 10, 6, 5 бўлса, унга ташқи ва ички айлана радиусларини топинг.

32. Айлана ва айлана ёйи узунлиги. Доира ва сектор юзи. *Айлананинг узунлиги* деб, айланага ички чизилган мунтазам кўпбурчак томонларининг чексиз кўп марта иккилантирилиши натижасида ҳосил бўладиган кўпбурчаклар периметридан тузилган кетма-кетликнинг лимитига айтилади. Бу кетма-кетлик ўсувчи ва юқоридан чегараланган, шунинг учун бу лимит мавжуд: $C=\lim\limits_{n\to\infty} P_n$.

1- теорема. *Икки айлана узунликлари нисбати, уларнинг радиуслари (диаметрлари) нисбати кабидир.*

Исбот. R_1 ва R_2 радиусли икки айлана узунликлари C_1 ва C_2 бўлса, уларга ички чизилган n томонли мунтазам кўпбурчак периметри қуйидагичадир (162- шакл):

$$P_n=2R_1\cdot n\cdot\sin\frac{180^\circ}{n},\quad Q_n=2R_2n\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Бундан $\frac{P_n}{Q_n}=\frac{R_1}{R_2}$. Айлана узунлиги таърифига биноан, $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=C_1$, $\lim\limits_{n\to\infty}Q_n=C_2$. Демак: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}P_n}{\lim\limits_{n\to\infty}Q_n}=\frac{C_1}{C_2}$ ва $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_1}{R_2}$ бўлганлиги учун $\frac{C_1}{C_2}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{D_1}{D_2}$ келиб чиқади. ▶

1- натижа. Ҳар қандай айлана учун $\frac{C}{D}$ нисбат ўзгармас сон.

Одатда, ана шу ўзгармас сон π билан белгиланади ва „пи“ деб ўқилади. У иррационал сон бўлиб, $\pi\approx3{,}1416$. Шундай қилиб, айлана узунлиги $C=\pi D$ ёки $C=2\pi R$.

2- натижа. Марказий бурчаги α° бўлган айлана ёйи $\frac{\pi R\alpha^\circ}{180^\circ}$ га тенг.

Ҳақиқатан ҳам, ярим ёйи πR га тенг, демак, 1° га тенг айлана ёйи катталиги $\frac{\pi R}{180}$ дир α° га тенг марказий бурчакли айлана ёйини топиш учун уни α га кўпайтириш керак:

$$l=\frac{\pi R\alpha^\circ}{180^\circ}.$$

Доиранинг юзи деб, ички чизилган мунтазам кўпбурчак томонларининг чексиз кўп марта иккилантирилиши натижасида ҳосил бўладиган кўпбурчаклар юзидан тузилган кетма-кетликнинг лимитига айтилади. Томонлар сони ортиши билан бу кетма-кетлик ўсувчи ва юқоридан чегараланган бўлади. Демак: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

2-теорема. *R радиусли доиранинг юзи πR^2 га тенг.*

Исбот. Ички чизилган мунтазам n бурчакнинг юзи: $S_n = \frac{1}{2} P_n R$. Лекин $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = C$ бажарилгани учун $S = \frac{1}{2} CR = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R^2 = \pi R^2$. ▶

3-натижа. 1° га мос секторнинг юзи доира юзининг $\frac{1}{360}$ қисмига тенг. Демак, $\alpha°$ ли секторнинг юзи $S = \frac{\pi R^2}{360°} \alpha°$ га тенг.

Топшириқлар. 1. Томони a га тенг квадратга ички ва ташқи айлана радиусини топинг. Бунда ҳосил бўлган ҳар бир ёй узунлигини, сектор юзини, доира юзини топинг.

2. Ички бурчаклари: а) 1080°; б) 1620°; в) $22d$ бўлган мунтазам кўпбурчак томонлари сонини топинг. Агар ички айлана радиуси r бўлса, унинг томонларини топинг.

Стереометрия

Стереометрияда асосан барча нуқталари бир текисликда жойлашмаган фигуралар ўрганилади. Планиметриянинг бошланғич тушунчалари: нуқта, тўғри чизиқ ва масофалар билан биргаликда текислик тушунчаси стереометриянинг асосий тушунчаларини ташкил қилади. Шунинг учун стереометриянинг мантиқий тузилишида планиметриянинг барча аксиомалари билан уларга қўшимча қуйидаги аксиомалар санаб ўтилади.

— Текислик қандай бўлмасин, шу текисликка тегишли бўлган ва тегишли бўлмаган нуқталар мавжуд.

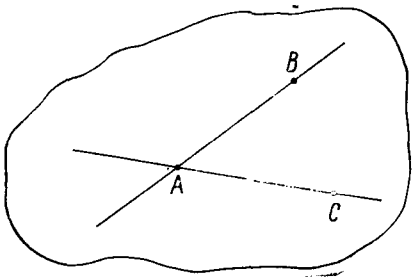
— Агар икки турли текислик битта умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда улар шу нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ бўйлаб кесишади.

— Агар икки турли тўғри чизиқ битта умумий нуқтага эга бўлса, улар орқали ягона текислик ўтказиш мумкин.

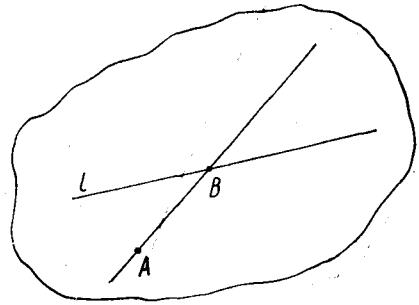
33. Фазода нуқта, тўғри чизиқ, текисликнинг ўзаро жойлашиши. Параллел тўғри чизиқлар.

1-теорема. *Фазода, бир тўғри чизиқда ётмаган уч нуқта орқали битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкин.*

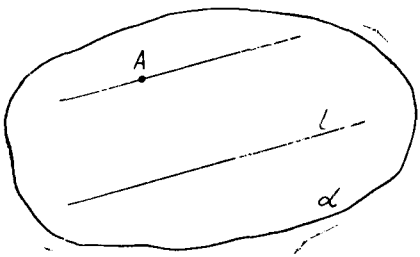
Исбот. A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётмаса, (AB) ва (AC) тўғри чизиқлар турли булиб, битта A нуқтада кеси-



163- шакл.



164- шакл.



165- шакл.

шади (163- шакл). Демак, юқоридаги 3- аксиомага кўра, шу нуқталар орқали ягона текислик ўтади. ▶

2- теорема. *Тўғри чизиқ ва унга тегишли бўлмаган нуқта орқали битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкин.*

Исбот. l тўғри чизиқ ташқарисида бирор A нуқта олиб, ундан l га тегишли бирор B нуқта орқали (AB) тўғри чизиқ ўтказайлик (164- шакл). l ва (AB) тўғри чизиқлар биргина умумий B нуқтага эга. Демак, 3- аксиомага кўра l ва (AB) орқали ягона текислик ўтгани учун теорема тасдиғи ҳам тўғри бўлиб чиқади. ▶

1- натижа. Тўғри чизиқнинг икки нуқтаси текисликка тегишли бўлса, у шу текисликда ётади.

2- натижа. Текислик билан унда ётмайдиган тўғри чизиқ ё кесишмайди, ё бир нуқтада кесишади.

Таъриф. Фазода икки a ва b тўғри чизиқ бир текисликда ётса ва кесишмаса ёки устма-уст тушса, улар *параллел тўғри чизиқлар* дейилади ва $a \parallel b$ деб белгиланади. Кесишмайдиган ва бир текисликда ётмайдиган тўғри чизиқлар *айқаш тўғри чизиқлар* дейилади.

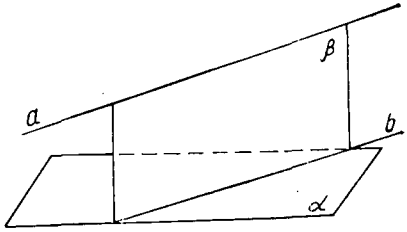
3- теорема. *Тўғри чизиқдан ташқаридаги нуқтадан унга параллел қилиб фақат биргина тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.*

Исбот. l тўғри чизиқ ташқарисида A нуқта олсак, шу l тўғри чизиқ ётган α текисликда A нуқтадан l га параллел ягона тўғри чизиқ ўтади (Г. Зп. 149-бет) (165- шакл). ▶

4- теорема. *Агар бир тўғри чизиққа икки тўғри чизиқнинг ҳар бири параллел бўлса, улар ўзаро ҳам параллелдир.*

Топшириқ. 4- теоремани мустақил исботланг.

34. Тўғри чизиқ билан текисликнинг параллеллиги. Агар a тўғри чизиқ α текислик билан кесишмаса ёки бу тўғри чизиқ шу текисликда ётса, улар *параллел дейилади* ва $a \parallel \alpha$ деб белгиланади.



166-шакл.

Теорема. *Агар* (a) *тўғри чизиқ* (α) *текисликдаги бирор* (b) *тўғри чизиққа параллел бўлса, у ҳолда у шу текисликка ҳам параллелдир*

Исбот. a ва b тўғри чизиқлар орқали β текислик ўтказайлик (166-шакл). Ясалган β текислик α билан b тўғри чизиқ бўйлаб кесишади. Шунингдек, a тўғри чизиқ α текислик билан кесишганда эди, кесишиш нуқтаси b га тегишли бўлар эди. Бу эса мумкин эмас, чунки $a \parallel b$. Шундай қилиб, a тўғри чизиқ α текисликни кесиб ўтмайди: $a \cap \alpha = \varnothing$. Демак, $a \parallel \alpha$. ▶

Топшириқ. Бу теоремага асосан ушбу натижалар тасдиғини исботланг.

1- натижа. Агар α текисликка параллел a тўғри чизиқ орқали шу текисликни кесувчи β текислик ўтказилса, бу текисликларнинг кесишиш чизиғи берилган a тўғри чизиққа параллелдир (166- шакл).

2- натижа. Агар a ва c тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлиб, уларнинг ҳар биридан ўтувчи α ва γ текисликлар ўзаро кесишса, уларнинг кесишиш чизиғи берилган чизиқларнинг ҳар бирига параллелдир.

35. Текисликларнинг ўзаро параллеллиги. Икки α ва β текисликлар умумий нуқтага эга бўлмаса ёки устма уст тушишса, бу *текисликлар ўзаро параллел* дейилади ва $\alpha \parallel \beta$ кўринишда белгиланади. Параллел текисликларнинг хоссалари:

а) Ҳар қандай α текислик ўзига-ўзи параллел.

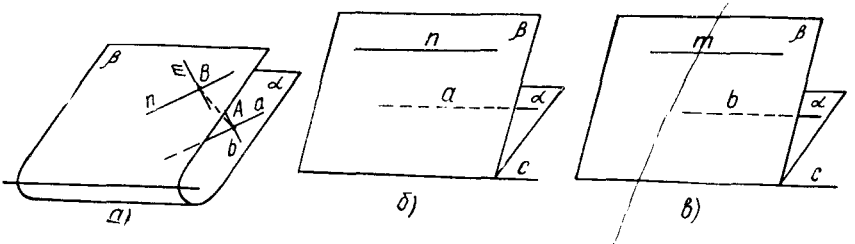
б) Агар $\alpha \parallel \beta$ бўлса, у ҳолда $\beta \parallel \alpha$ бўлади.

в) Агар $\alpha \parallel \beta$, $\beta \parallel \gamma$ бўлса, у ҳолда $\alpha \parallel \gamma$ бўлади.

Теорема. *α текисликда ётган ўзаро кесишувчи a ва b тўғри чизиқларнинг ҳар бири β текисликда ётган m ва n тўғри чизиқларнинг ҳар бирига мос равишда параллел бўлса, бу α ва β текисликлар ўзаро параллелдир.*

Исбот. Айтайлик, α текисликда ётган a ва b тўғри чизиқлар бирор A нуқтада кесишсин: $a \cap b = A$. Теорема шарти бўйича $n \parallel a$ ва $m \parallel b$ эканлиги маълум. У ҳолда $\alpha \parallel \beta$ бўлишини кўрсатиш керак. Тескарисини фараз қилайлик. Яъни шундай c тўғри чизиқ бор бўлсинки, α ва β текисликлар шу тўғри чизиқ бўйлаб кесишсин (167-a шакл). У ҳолда

$$a \parallel n,\ a \subset \alpha,\ n \subset \beta \Longrightarrow a \parallel c$$



167-*а, б, в* шакл.

каби хулоса ўринли (167-*б* шакл). Шунингдек,

$$b \parallel m,\ b \subset \alpha,\ m \subset \beta \Longrightarrow b \parallel c$$

ҳам ўринли (167-*в* шакл). Ҳосил бўлган бу икки фикр биргаликда $a \parallel b$ деган хулосага олиб келади. Бу теорема шартига зид. Демак, фараз нотўғри, $\alpha \parallel \beta$ экан. ▶

Топшириқ. Шу теорема асосида қуйидаги натижаларни исботланг.

Натижалар. 1) Агар икки (α ва β) текислик ўзаро параллел бўлиб, улар учинчи (γ) текислик билан кесилса ($a = \alpha \cap \gamma$ ва $b = \beta \cap \gamma$), кесишиш чизиқлари ҳам ўзаро параллелдир ($b \parallel a$).

2) Берилган α текислик ташқарисида олинган ихтиёрий M нуқтадан шу текисликка параллел қилиб битгагина текислик ўтказиш мумкин.

36. Тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлиги. Бирор a тўғри чизиқ α текисликда ётган ҳар қандай тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, у ҳолда *a тўғри чизиқ α текисликка перпендикуляр* дейилади ва $a \perp \alpha$ ёки $\alpha \perp a$ кўринишда белгиланади.

Теорема. *Агар бирор a тўғри чизиқ α текисликдаги ўзаро кесишувчи b ва c тўғри чизиқларнинг ҳар бирига перпендикуляр бўлса, у ҳолда текисликнинг ўзига ҳам перпендикулярдир.*

Исбот. b ва c тўғри чизиқлар O нуқтада кесишган бўлсин. Улардан $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ векторни олайлик (168-шакл). α текисликда ихтиёрий h тўғри чизиқ танлаб, унда нолга тенг бўлмаган бирор $\vec{HH_1}$ векторни олсак, унинг $\vec{OB}$ ва $\vec{OC}$ векторлар билан компланарлигидан шундай μ ва ν сони топиладики, $\vec{HH_1} = \mu \cdot \vec{OB} + \nu\vec{OC}$ ўринлидир. a тўғри чизиқда нолдан фарқли $\vec{AA_1}$ вектор олиб, уни HH_1 га скаляр кўпайтирамиз: $\vec{AA_1} \times \vec{HH_1} = \mu \cdot \vec{OB} \cdot \vec{AA_1} + \nu \cdot \vec{OC} \cdot \vec{AA_1}$. Бироқ $\vec{AA_1} \perp \vec{OB}$ ва $\vec{AA_1} \perp \vec{OC}$ эканидан $\vec{AA_1} \cdot \vec{OB}$ ва $\vec{OC} \cdot \vec{AA_1}$ скаляр кўпайтмалар нолга тенг. Демак, $\vec{AA_1} \cdot \vec{HH_1} = 0$. Бундан $\widehat{\vec{AA_1} \cdot \vec{HH_1}} = \frac{\pi}{2}$ келиб чиқади. Натижада $\alpha \perp a$. ▶

Топшириқ. Шу теорема асосида қуйидаги 1; 3; 4- натижаларни исботланг.

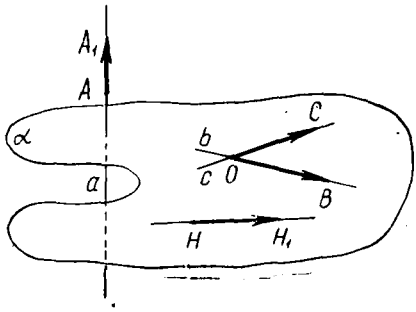
Натижалар. 1) Текисликка унда ётмаган нуқтадан ҳар доим ягона перпендикуляр туширилади.

2) Текисликка туширилган икки перпендикуляр ўзаро параллелдир.

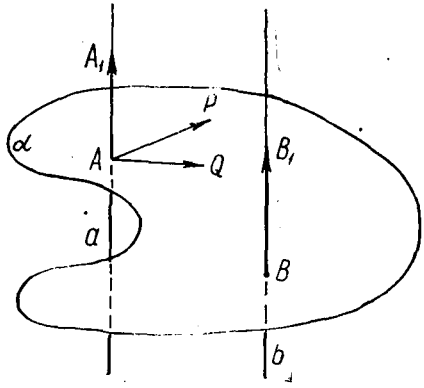
3) Икки параллел тўғри чизиқлардан бири бирор текисликка перпендикуляр бўлса, у ҳолда иккинчиси ҳам шу текисликка перпендикулярдир.

4) Бир тўғри чизиқ икки параллел текисликнинг бирига перпендикуляр бўлса, у ҳолда иккинчисига ҳам перпендикулярдир.

2-натижанинг исботи. a ва b тўғри чизиқлар α текисликка перпендикуляр бўлсин: $a \cap \alpha = A$ ва $b \cap \alpha = B$ (169 шакл). α текисликда P ва Q нуқталарни шундай танлайликки, $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}$ бўлсин. Энди a тўғри чизиқда бирор $\overrightarrow{AA_1}$ ва b тўғри чизиқда бирор $\overrightarrow{BB_1}$ векторни олайлик. Натижада $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AP}$ ва $\overrightarrow{AQ}$ векторлар ўзаро компланар бўлмаганлиги учун шундай λ, μ ва ν сонлари топиладики, ушбу ёйилма ўринлидир:



168- шакл.



169- шакл.

$$\overrightarrow{BB_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{AA_1} + \mu \cdot \overrightarrow{AP} + \nu \cdot \overrightarrow{AQ}. \qquad (1)$$

$\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ ва $\overrightarrow{BB_1}$ векторларнинг ҳар қайсиси ноль вектор бўлмагани учун

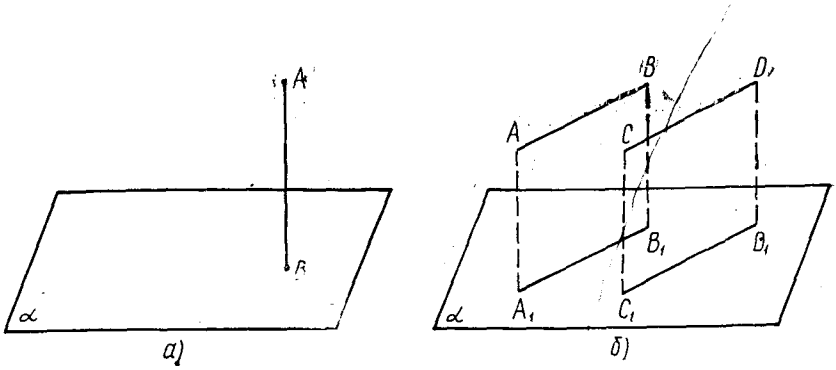
$$\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Longrightarrow 0 = \mu \cdot \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} \Longrightarrow \mu = 0;$$

$$\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0 \Longrightarrow 0 = \nu \cdot \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AQ} \Longrightarrow \nu = 0.$$

Демак, (1) чизиқли ифода аслида $\overrightarrow{BB_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{AA_1}$ кўринишда экан. Бу эса $\overrightarrow{BB_1}$ ва $\overrightarrow{AA_1}$ векторларнинг коллениарлик белгисидир, бундан $a \parallel b$ экани келиб чиқади. ▶

37. Нуқтадан текисликкача бўлган масофа. Ортогонал проекция. Фазонинг ихтиёрий A нуқтасидан бирор α текисликка перпендикуляр туширамиз (170- a шакл). Унинг асоси B нуқта A нинг α текисликдаги *ортогонал проекцияси* дейилади, $|AB|$ узунлик эса *A нуқтадан α текисликкача бўлган масофа* дейилади.

Φ фигуранинг α текисликка *проекцияси* деб, унинг ҳар бир A нуқтасининг α текисликдаги B ортогонал проекциялари тўп-



170- *а, б* шакл.

ламига айтилади, $|AB|$ узунликларнинг энг кичиги *Ф фигурадан α текисликкача бўлган масофа* дейилади.

Ортогонал проекциянинг хоссалари:

— проекция текислиги α га перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг проекцияси нуқтадир.

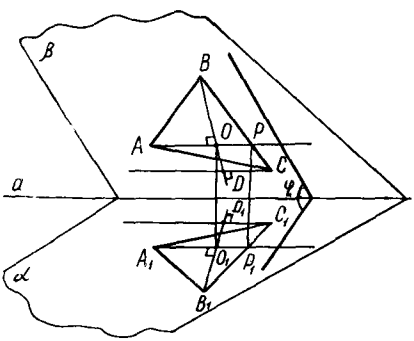
Кейинги хоссалар проекция текислигига перпендикуляр бўлмаган тўғри чизиқлар учун хос:

— параллел тўғри чизиқлар проекцияси параллелдир;

— икки параллел кесманинг нисбати ҳар бирининг проекциялари нисбати кабидир (170- *б* шакл): $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|}$.

A нуқтанинг α текисликка туширилган проекцияси *B* нуқта бўлсин. α текисликда олинган *B* дан фарқли ҳар қандай *X* нуқта билан туташтирилган *AX* тўғри чизиқ *A* нуқтадан α текисликка туширилган *оғма* деб айтилади.

Теорема. *Кўпбурчакнинг текисликдаги ортогонал проекциясининг юзи S_1 проекцияланаётган кўпбурчак юзи S нинг унинг проекцияланиш текислиги билан ҳосил қилган бурчак косинусига кўпайтирилганига тенг*: $S_1 = S\cos\varphi$.

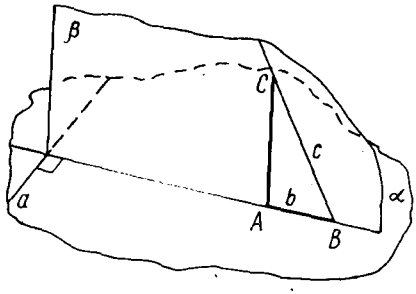


171- шакл.

Исбот. β текислигида ётувчи *ABC* учбурчакнинг α текисликка ортогонал проекцияси — $A_1B_1C_1$ учбурчакни кўрайлик. $\beta \cap \alpha = a$, $(\widehat{\beta, \alpha}) = \varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ бўлсин. *A*, *B*, *C* нуқталардан *a* га параллел тўғри чизиқ ўтказилса, улардан бири қарама-қарши томонни кесади. 171- шаклда *P* нуқта шундай топилган. Шакллан $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}|A_1P_1|\,|B_1D_1|$

эканлигидан ва $|A_1P_1|=|AP|$, $|B_1D_1|=|BD|\cos\varphi$ бўлганлигидан $S_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}|AP|\times\times|BD|\cos\varphi=S_{ABC}\cdot\cos\varphi$ дир.

Ҳар қандай n — бурчакни $n-2$ та учбурчакка ажратиш мумкин, шунинг учун бу теореманинг кўпбурчакка қўлланиши ўқувчига қолдирилади. ▶



172- шакл.

Топшириқ. AB кесма β текислигила ётади ва $a=\beta\cap\alpha$ кесишиш чизиғига перпендикуляр. Агар α ва β текисликларнинг икки ёқли чизиқли бурчаги φ бўлса, шу кесманинг α текисликдаги ортогонал проекцияси A_1B_1 нинг узунлиги $|A_1B_1|=|AB|\cos\varphi$ эканлигини исботланг.

38. Уч перпендикуляр ҳақида теорема. *α текислик устидаги a тўғри чизиқ бирор c оғма тўғри чизиғига перпендикуляр бўлиши учун, a тўғри чизиқ оғманинг проекциясига перпендикуляр бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исбот. c оғма α текислигида бирор b проекцияга эга бўлсин. У ҳолда оғма ўз проекцияси билан бирор B нуқтада кесишади (172- шакл).

а) *Шартнинг зарурлиги.* C нуқта c оғма устидаги нуқта бўлиб, ундан оғманинг b проекциясига перпендикуляр туширсак, CA тўғри чизиқ α текисликка ҳам перпендикуляр бўлади.

Энди c оғма ва CA тўғри чизиғи орқали β текислик ўтказиб, $a\subset\alpha$ ва $a\perp(CB)$ бўлсин дейлик. У ҳолда $(AC)\perp a$ бўлганлигидан (Г. 36 п. 208 - бет теоремасига кўра) $a\perp\beta$ эканлиги келиб чиқади. Бу деган сўз, a тўғри чизиқ β устидаги ҳар қандай тўғри чизиққа, шу жумладан оғманинг проекцияси b га ҳам перпендикуляр:

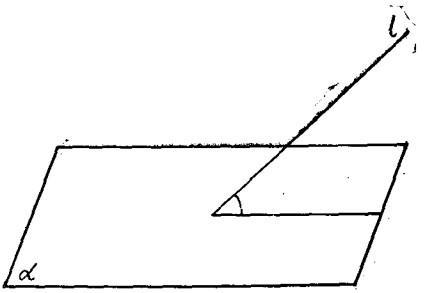
$$a\perp b.$$

б) *Шартнинг етарлилиги.* Фараз қилайлик, $a\subset\alpha$ ва $a\perp(AB)$ бўлсин. Тўғри чизиқнинг текисликка перпендикулярлик таърифига биноан $(AC)\perp\alpha\Longrightarrow(AC)\perp a$ хулоса ўринлидир. Бу иккала мулоҳазадан

$$a\perp(AB),\ a\perp(AC)\Longrightarrow a\perp\beta=(ABC)$$

каби тасдиқ ўринли бўлиб чиқади. Бу эса a тўғри чизиқнинг $\beta=(ABC)$ текислик устидаги (BC) тўғри чизиққа, яъни оғмага ҳам перпендикуляр эканлигини тасдиқлайди: $a\perp c$. ▶

39. Тўғри чизиқ билан текислик ва текислик билан текислик орасидаги бурчак. *Оғма тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак* деб, оғма ва унинг шу текисликдаги



173- шакл.

ортогонал проекцияси орасидаги бурчакка айтилади. l оғма билан α текислик орасидаги бурчак $\angle(l, \alpha)$ каби белгиланади (173-шакл).

α текислик фазони Φ_1 ва Φ_2 ярим фазоларга, β текислик эса F_1 ва F_2 ярим фазоларга ажратсин. Параллел бўлмаган α ва β текисликларнинг *икки ёқли бурчаги* деб улар ҳосил қилган Φ_i $(i = 1, 2)$ ва F_j $(j = 1, 2)$ ярим фазоларнинг бирор $\Phi_i \cap F_j$ кесишмасига айтилади.

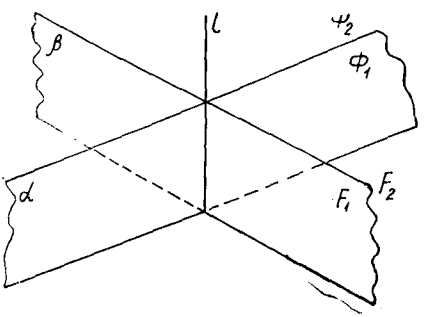
Агар α ва β текисликлар бирор l тўғри чизиқ бўйлаб кесишса (174- шакл), ҳосил бўлган икки ёқли бурчак $\angle\alpha l\beta$ ёки $\angle l$ каби белгиланади. Бунда α ва β текисликлар икки ёқли бурчак *ёқлари*, l ни эса унинг *қирраси* дейилади.

Агар икки ёқли бурчакнинг қиррасига перпендикуляр текислик ўтказилса, у ҳолда кесимда ҳосил бўлган бурчак икки ёқли бурчакнинг *чизиқли бурчаги* дейилади (175- шакл).

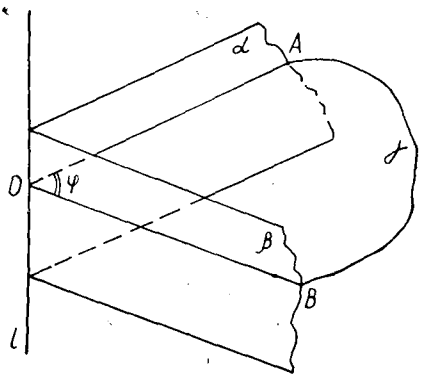
Икки ёқли бурчак ўзининг чизиқли бурчак катталиклари билан ўлчанади, яъни чизиқли бурчак неча градус (радиан) бўлса, икки ёқли бурчак ҳам шунча градус (радиан) лидир.

Икки ёқли бурчак тўғри, ўткир ва ўтмас бурчакли бўлиши унинг чизиқли бурчагига қараб айтилади. Иккита икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги ўзаро тенг бўлса, улар *ўзаро тенг* дейилади.

Кесишувчи икки текислик фазода тўртта икки ёқли бурчакни аниқлайди. Улар ҳар иккитаси ўзаро тенг бўлган умумий қиррали бурчаклар жуфтлигига ажралади. Шунингдек, йиғиндиси 180° га тенг умумий ёқли бурчаклар жуфтлигига ҳам

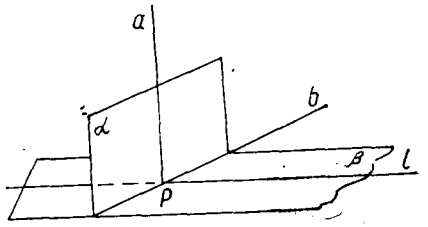


174- шакл.



175- шакл.

бўлиниши мумкин. Шу икки ёқли бурчаклардан кичиги берилган *икки текислик орасидаги бурчак* деб айтилади. α ва β текисликлар орасидаги бурчак $\angle(\alpha, \beta)$ каби белгиланади, у ҳолда $0 \leqslant \angle(\alpha, \beta) \leqslant 90^\circ$ деган хулоса ўринлидир. Агар икки текислик параллел бўлса, улар орасидаги бурчак 0° га тенг деб тушунилади.



176- шакл.

40. Икки текисликнинг ўзаро перпендикулярлиги.

Теорема. *Агар α текисликда бошқа бирор β текисликка перпендикуляр a тўғри чизиқ жойлашган бўлса, у ҳолда α текислик β текисликка перпендикулярдир.*

Исбот. $a \subset \alpha$, $a \perp \beta$ эканлигидан $\alpha \perp \beta$ бўлишини келтириб чиқарамиз. $P = a \cap \beta$, $b = \alpha \cap \beta$ бўлсин (176- шакл). P нуқтадан ўтувчи β текисликда b га перпендикуляр l тўғри чизиқни танлаймиз. $\angle \alpha b \beta$ икки ёқли бурчак P нуқтада кесишувчи a ва l тўғри чизиқ орасидаги $(\widehat{a, b})$ бурчак билан ўлчанади. $(\widehat{a, l}) = 90^\circ$ бўлгани учун $\alpha \perp \beta$ дир. ▶

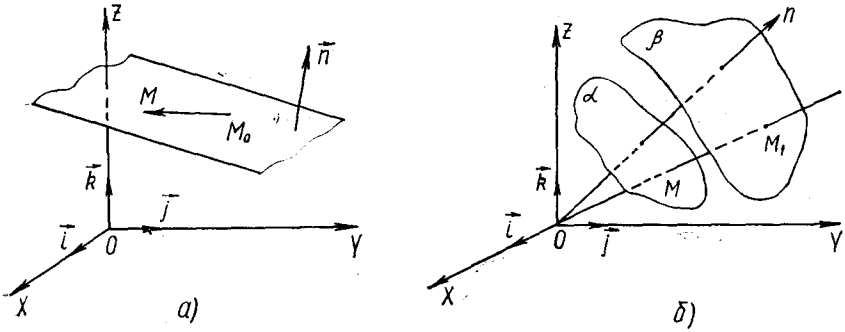
Тескари теорема. *Агар α ва β текисликлар ўзаро перпендикуляр бўлса ва α текисликдаги бирор a тўғри чизиқ шу икки текисликнинг кесишиш чизиғига перпендикуляр бўлса, у ҳолда бу тўғри чизиқ β текисликка перпендикуляр.*

Исбот. $a \subset \alpha$, $\alpha \perp \beta$ ва $a \perp b$ $(b = \beta \cap \alpha)$ дан $a \perp \beta$ ни исботлаш керак (176- шакл). $P = a \cap b$ дан β текисликдаги b га перпендикуляр l тўғри чизиқ ўтказсак, ҳосил бўлган икки чизиқ орасидаги $(\widehat{a, l})$ бурчакнинг 90° лиги $\alpha \perp \beta$ дан келиб чиқади. Демак, $(\widehat{a, l}) = 90^\circ$ эканлигидан ушбу хулоса тўғридир:

$$a \perp b,\ a \perp l \Longrightarrow a \perp \beta.$$

41. Текислик тенгламаси. Сонларнинг тартибланган ҳар бир (x, y, z) учлиги фазода бирор $M(x, y, z)$ нуқтани аниқлайди. Координаталари $F(x, y, z) = 0$ тенгламани қаноатлантирадиган барча нуқталар тўплами бирор Φ фигура бўлади ва $F(x, y, z) = 0$ шу *фигуранинг тенгламаси* дейилади.

Теорема. *Ҳар қандай $ax + by + cz + d = 0$ кўринишли тенглама фазода $\vec{n} = (a; b; c)$ векторга перпендикуляр бўлган ягона текисликни аниқлайди, ва аксинча, текислик ана шу кўринишдаги тенглама билан берилади.*



177-*а*, *б* шакл.

Исбот. α текислик $\vec{n}$ векторга перпендикуляр ва $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқта унга тегишли бўлсин (177-*а* шакл). $\vec{n}$ вектор $M(x;\ y;\ z)\in\alpha$ учун тузилган ҳар қандай $\overrightarrow{M_0M}$ векторга перпендикуляр, шунинг учун $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$. У ҳолда $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0)$ га $\vec{n}(a;\ b;\ c)$ векторни скаляр кўпайтириб

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

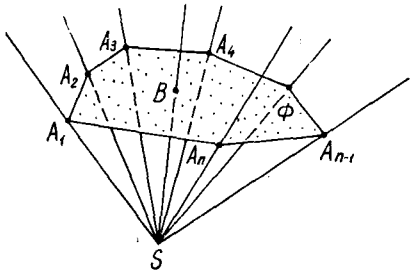
ни ҳосил қиламиз. Унда $-ax_0-by_0-cz_0=d$ деб белгиласак, α текислик тенгламаси $ax+by+cz+d=0$ бўлади. Агар α га тегишли бўлмаган ҳар қандай P нуқта олсак, у ҳолда $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0P}\neq 0$ бажарилади.

Аксинча, $ax+by+cz+d=0$ тенглама берилсин. Бу бирор текисликнинг тенгламаси эканлигини кўрсатиш учун уни қаноатлантирувчи бирор $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқта олайлик. У ҳолда $ax_0+by_0+cz_0+d=0$. Буни берилган тенгламадан айириб, $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ ни ҳосил қиламиз. Бу $\vec{n}=(a;\ b;\ c)$ векторга перпендикуляр бўлган M_0 нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси. Бундай текислик ягонадир. ▶

Натижа. Гомотетияда текислик ўзига параллел текисликка аксланади.

Исбот. Берилган H_O^k гомотетия маркази бирор $Oxyr$ координаталар фазоси боши билан устма-уст тушсин деб фараз қилайлик ва α текислик унда $ax+by+cz+d=0$ тенглама билан берилсин. Ихтиёрий олинган $M(x;\ y;\ z)\in\alpha$ нуқта $M_1=H_O^k(M)$ образининг координаталари $x_1=kx$, $y_1=ky$, $z_1=kz$ бўлади. Ундан x, y, z ларни топиб, $\frac{a}{k}x_1+\frac{b}{k}y_1+\frac{c}{k}z_1+d=0$ ни ҳосил қиламиз. Натижада барча $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ об-

разлар $ax_1 + by_1 + cz_1 + dk = 0$ кўринишдаги тенгламани (яъни бирор β текисликни ифодаловчи тенгламани) қаноатлантиради. Бу аниқлаган β текислик ҳам $\vec{n} = (a; b; c)$ га перпендикуляр (177-*б* шакл), шунинг учун $\alpha \parallel \beta$. ▶



178-шакл.

Топшириқлар. 1. $A(1; 4; -2)$ нуқтадан ўтувчи $\vec{n} = (-3; 4; 2)$ га перпендикуляр текислик тенгламасини тузинг. Унда $B(4; 8; 12)$, $C(-6; 4; 3)$, $D(-3; 16; -4)$ нуқта ётадими?

2. $A(x_0; y_0; z_0)$ нуқтадан ўтиб, Ox, Oy, Oz ўқларга перпендикуляр бўлган ҳар бир текислик тенгламасини тузинг.

3. $M_0(1; -3; 8)$ дан ўтувчи $3x - 4y + 8z - 24 = 0$ текисликка параллел текислик тенгламасини тузинг. Уларнинг ҳар бирининг H_O^2, $H_O^{\frac{1}{2}}$, H_O^{-2} гомотетияси образининг тенгламасини топинг.

4. A, B, C ва D нуқталарнинг бир текисликда ётишининг ҳам зарурий, ҳам етарли шарти $\vec{OD} = \lambda \cdot \vec{OC} + \mu \cdot \vec{OB} + (1 - \lambda - \mu) \cdot \vec{OA}$ нинг бажарилишидир. Исботланг.

42. Кўп ёқли бурчак. Бирор текисликда кўпбурчак $\Phi = A_1A_2 \ldots A_n$ ни олиб, унинг текислигида бўлмаган S нуқтадан бошланувчи барча $[SB)$ $(B \in \Phi)$ нурлар бирлашмасини тузайлик (178-шакл). Бу фигура S *учли кўп ёқли бурчак* дейилади. SA_1, SA_2, ..., SA_n кесмалар кўп ёқли бурчакнинг *қирралари* ҳисобланади. Кўпёқнинг умумий қиррали ҳар бир икки ёқлари икки ёқли бурчак ҳосил қилади. $\angle A_1SA_2$, $\angle A_2SA_3$, ..., $\angle A_nSA_1$ лар кўп ёқли бурчакнинг *текис бурчаклари* дейилади ва унинг *ёқларини* ҳосил қилади. Бу кўпёқ одатда $SA_1A_2 \ldots A_n$ каби белгиланади. Унинг текис бурчагининг хоссалари:

1) Кўп ёқли бурчакнинг ҳар бир текис бурчаги қолган текис бурчаклари йиғиндисидан кичик.

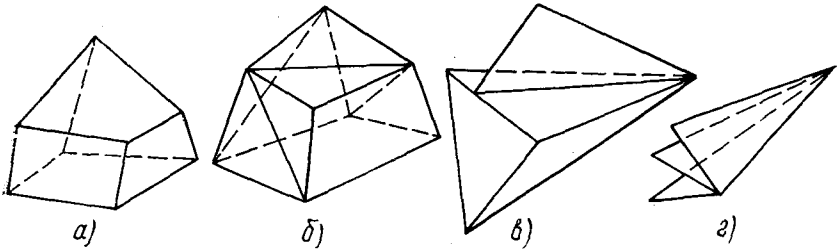
2) Кўп ёқли бурчакнинг ҳамма текис бурчаклари йиғиндиси 360° дан кичик.

Қуйидаги натижа ва теореманинг исботи ўқувчиларга қолдирилади.

Натижа. Уч ёқли бурчакнинг мавжуд бўлишининг ҳам зарурий, ҳам етарли шарти, унинг α, β ва γ текис бурчаклари учун қуйидаги тенгсизликларнинг бажарилишидир:

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma; \quad \alpha + \beta + \gamma < 360°.$$

Теорема. *Уч ёқли бурчакнинг α, β, γ текис бурчаги учун ушбу косинуслар теоремаси ўринли:* $\cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\gamma +$



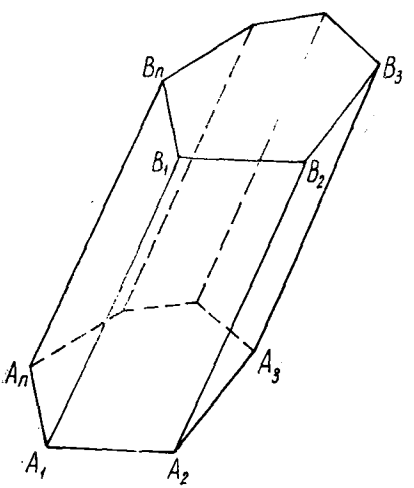
179-*а, б, в* шакл.

$+\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos\angle a$, бу ерда $\angle a$ деб β ва γ бурчаклар текислиги ҳосил этган икки ёқли бурчак олинган.

43. Кўп ёқли сирт. Кўпёқ. Призма. Икки ёқли бурчакни аниқловчи умумий томонли икки кўпбурчакни ўзаро *қўшни кўпбурчаклар* деймиз. Чекли сонда олинган кўпбурчаклар шундай бирлашсаки, ҳар бир кўпбурчакнинг исталган бир томони, унга қўшни бўлган бошқа битта ва фақат битта кўпбурчакнинг бирор томони бўлса, бундай фигура *кўп ёқли сирт* дейилади.

Кўп ёқли сиртни ташкил этувчи кўпбурчаклар унинг *ёқлари*, кўпбурчак томонлари унинг *қирралари*, кўпбурчак учлари эса унинг *учлари* дейилади. 179-*а, б* шаклда кўп ёқли сирт таърифини қаноатлантирувчи фигуралар — кўп ёқли сиртлар, 179-*в, г* шаклда эса шу таърифни қаноатлантирмайдиган фигуралар тасвирланган.

Кўп ёқли сирт фазони *ички* ва *ташқи* соҳаларга ажратади, бунда ташқи соҳа шундай хоссага эгаки, кўп ёқли сиртга уринмайдиган бирор текислик бу соҳада бутунлай жойлашади.

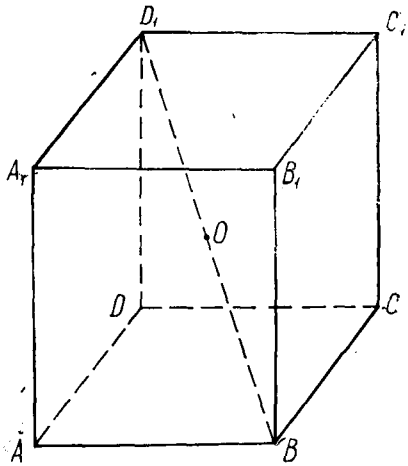


180-шакл.

Кўп ёқли сиртнинг унинг ички соҳаси нуқталари билан бирлашмаси *кўпёқ* дейилади. *Кўпёқнинг сирти* деб уни чегараловчи кўп ёқли сиртга айтилади. Кўп ёқли сиртнинг ёқлари, қирралари, учлари кўпёқнинг ҳам *ёқлари, қирралари, учлари* бўлади.

Кўпёқнинг ихтиёрий икки нуқтасини туташтирувчи кесма яна шу кўпёққа тегишли бўлса, у *қаварик кўпёқ* дейилади. Кўпёқнинг бир ёғига тегишли бўлмаган икки учини туташтирувчи кесмаси, унинг *диагонали* дейилади.

Кўпёқ одатда учларини ифодаловчи ҳарфларни маълум тартибда ёзиш ва ўзига хос хусусиятини билдирувчи номини айтиш билан берилади. Масалан: $SABCDE$ — пирамида (188-*а* шакл), $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — призма (181-шакл) ва ҳоказо.



181-шакл.

Призма. *n* бурчакли *призма* деб, икки ёғи ўзаро параллел *n* бурчакдан, қолган *n* та ёғи параллелограммдан ташкил топган кўпёққа айтилади (180-шакл). Унинг *n* бурчакли ёқлари *асоси*, қолганлари эса *ён ёқлари* дейилади. Ён ёқлар бирлашмаси *призманинг ён сирти* дейилади.

Призманинг ён ёқлари асос текислигига перпендикуляр бўлса, у *тўғри призма*, акс ҳолда *оғма призма* дейилади. Асослари орасидаги масофани ифодаловчи кесма *призманинг баландлиги* дейилади.

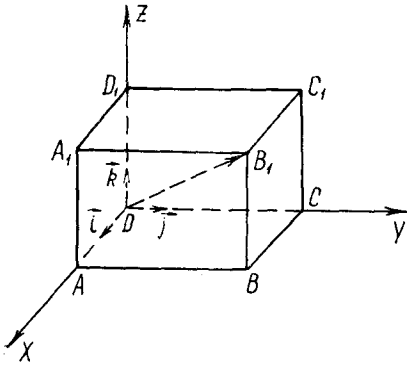
Агар тўғри призманинг асоси мунтазам *n* бурчак бўлса, у *мунтазам призма* деб айтилади.

44. Параллелопипед диагоналлари ўртасининг хоссалари. Асоси параллелограммдан иборат призмага *параллелопипед* дейилади. Унинг барча олтита ёқлари параллелограммдир. Параллелопипеднинг бир ёғида ётмаган учларини туташтирувчи кесмага, унинг *диагонали* дейилади.

Теорема. *Параллелопипед диагоналларининг ўртаси унинг симметрия марказидир.*

Исбот. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелопипед исталган диагоналининг ўртаси O нуқтага нисбатан Z_O марказий симметрияда AB нур C_1D_1 нурга аксланади: $Z_O[AB) = [C_1D_1)$ (181-шакл). Бундан $|AB| = |C_1D_1|$ бўлади. Демак, $Z_O(B) = D_1$ экан. $Z_O[DC) = [B_1A_1)$ эканлигидан $Z_O(D) = B_1$, $Z_O(C) = A_1$ ни исботлаш мумкин. Натижада $ABCD$ параллелограмм $C_1D_1A_1B_1$ га, ABB_1A_1 эса C_1D_1DC параллелограммга, BCC_1B_1 эса D_1A_1AD параллелограммга — қисқаси параллелопипед сирти ўз-ўзига аксланади. Шу тариқа фикрлаб, шуни айтиш мумкинки, унинг ички нуқталари ҳам O га нисбатан симметрик ички нуқталарга ўтади. Шундай қилиб, O марказий симметрия нуқтаси экан ▶

1-натижа. Параллелопипеднинг қарама-қарши ёқлари ўзаро тенг ва параллелдир.



182- шакл.

2- натижа. Параллелопипед диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади.

45. Тўғри бурчакли параллелопипед диагоналларининг хоссалари. Параллелопипеднинг ён қирралари унинг асосига перпендикуляр бўлса, у ҳолда уни *тўғри параллелопипед* дейилади. Тўғри параллелопипеднинг асоси тўғри тўртбурчакдан иборат бўлса, у ҳолда уни *тўғри бурчакли параллелопипед* дейилади. Тўғри бурчакли параллелопипеднинг бир учидан чиққан қирраларининг узунликлари унинг ўлчовлари дейилади.

Теорема. *Тўғри бурчакли параллелопипед диагоналининг квадрати унинг учала ўлчови квадратларининг йиғиндисига тенг:*

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Исбот. Фараз қилайлик, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелопипеднинг (182- шакл) бир учи координата бошида ётиб бу учидан чиқувчи учала қирраси координата ўқларининг мусбат йўналиши билан устма-уст тушган бўлсин: $D = O$, $a = |OA|$, $b = |OB|$, $c = |OD_1|$. У ҳолда $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ базисли координаталар системасида: $\vec{AO} = a\vec{i}$, $\vec{OC} = b\vec{j}$, $\vec{OD_1} = c\vec{k}$ бўлиб, $\vec{OB_1} = a\vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$ каби ифодаланса, $|\vec{OB_1}|^2 = \vec{OB_1} \cdot \vec{OB_1} = (a\vec{i} + b \cdot j + c\vec{k})\ (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$ да $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ ва $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$ ни эътиборга олиб соддалаштирсак:

$$|\vec{OB_1}|^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

ҳосил бўлади. Тўғри бурчакли параллелопипеднинг барча диагоналлари ўзаро тенг бўлгани учун уларни бирор d орқали ифодалаймиз: $d = |OB_1| = |D_1O| = |AC_1| = |A_1C|$. У ҳолда $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. ▶

Таъриф. Учала ўлчови ўзаро тенг бўлган тўғри бурчакли параллелопипед *куб* деб аталади.

Кубнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр эканлигини текшириш ўқувчига қолдирилади.

Топшириқлар 1. Параллелопипеднинг қарама-қарши ёқларининг ўзаро енглиги ва параллеллигини исботланг.

2. Куб қаварик кўпёқми? Унинг нечта ёғи, қирраси ва учи бор?

3. n бурчакли призманинг нечта қирраси, ёғи ва учи бор?

4. Агар қаварик кўпёқнинг барча учлари сонини У, ёқлари сонини Ё, қирралари сонини Қ билан белгиласак, у ҳолда улар орасида $У + Ё = Қ + 2$ муносабат ўринли бўлишини текширинг.

46. Призма сиртининг юзи. Ҳажм тушунчаси ва призма ҳажмини топиш формуласи. Маълумки, кўпёқ *сиртининг юзи* деб, унинг ҳамма ёқлари юзларининг йиғиндисига айтилади. Шу таърифга биноан призма сиртининг юзи

$$S = 2 \cdot S_{асос} + S_{ён}$$

формула билан аниқланади. Бу ерда $S_{асос}$ — призма асосининг юзи, $S_{ён}$ — призма ён ёқлари юзалари йиғиндисини билдиради.

1-теорема. *Призма ён сиртининг юзи унинг перпендикуляр кесими периметри билан ён қирраси узунлигининг кўпайтмасига тенг:*

$$S_{ён} = P \cdot l.$$

Исбот. Призмани бирор α текислик билан перпендикуляр равишда кесиш кесимда $A_0B_0C_0 \ldots D_0$ кўпбурчак ҳосил қилсин (183-шакл). Бу кўпбурчакнинг ҳар бир томони призманинг бирор ёғининг баландлигидир. У ҳолда призма ён сиртининг юзи:

$$S_{ён} = |AA_1| \cdot |A_0B_0| + |BB_1| \cdot |B_0C_0| + \ldots + |DD_1| \cdot |D_0A_0|$$

каби топилади. Бунда $|AA_1| = |BB_1| = \ldots = |DD_1| = l$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$S_{ён} = l(|A_0B_0| + |B_0C_0| + \ldots + |D_0A_0|) = Pl.$$

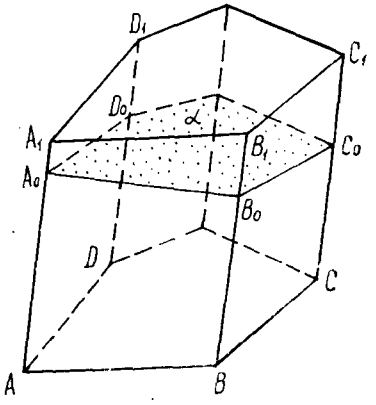
Бу ерда P билан $A_0B_0C_0 \ldots D_0$ кўпбурчакнинг периметри белгиланган.

Ҳажм тушунчаси

Таъриф. Ҳар бир Ф фигура учун шундай ягона манфий бўлмаган V(Ф) сони мос қўйилганда, у ушбу хоссаларга эга бўлса, уни шу *фигуранинг ҳажми* дейилади (ҳажм бирлиги сифатида бирлик куб олинади):

а) тенг фигуралар бир хил ҳажмга эга бўлади;

б) ички умумий нуқтага эга бўлмаган икки фигура битта яхлит фигура ташкил қилса, унинг ҳажми ҳар



183-шакл.

бир ташкил қилувчи фигуралар ҳажмлари йиғиндисига тенг.

Хулоса. Агар $\Phi_1 \subset \Phi_2$ муносабатли икки фигура берилса, у ҳолда $V(\Phi_1) \leqslant V(\Phi_2)$ тенгсизлик бажарилади.

2-теорема. *Тўғри бурчакли параллелопипеднинг ҳажми унинг учала ўлчовларининг кўпайтмасига тенг.*

Исбот. Агар параллелопипеднинг қирралари $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{k}{n}$, $c = \frac{l}{n}$ кўринишдаги рационал сонлар орқали ифодаланса, (n бу ерда a, b ва c рационал сонлар учун умумий махраж) бу параллелопипед ичига қирраси $\frac{1}{n}$ га тенг бўлган кублардан mkl та жойлашади. Қирраси $\frac{1}{n}$ га тенг бўлган 1 та кубнинг ҳажми $\frac{1}{n^3}$ бўлгани учун параллелопипед ҳажми $\frac{1}{n^3}mkl$ га тенг:

$$V = \frac{1}{n^3}mkl = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{l}{n} = a \cdot b \cdot c.$$

Энди параллелопипед қирраларидан лоақал бири иррационал сон орқали ифодаланган ҳолга тўхталамиз: У ҳолда бундай қиррага бирлик кесманинг ҳеч қандай бўлаги бутун сон марта жойлашмайди. Параллелопипеднинг a, b ва c ўлчамларининг ҳар бирини 10^{-n} аниқлик билан рационал сонлар орқали ифодалайлик ($n \in N$). Шу сонларни мос равишда α_n, β_n ва γ_n рационал сонлар 10^{-n} бирлик ками билан A_n, B_n ва C_n рационал сонлар эса 10^{-n} бирлик кўпи билан аниқлайдиган сонлар бўлсин ($n \in N$):

$$\alpha_n < a < A_n,$$
$$\beta_n < b < B_n,$$
$$\gamma_n < c < C_n.$$

У ҳолда α_n, β_n, γ_n ўлчовли параллелопипед ҳажми A_n, B_n, C_n ўлчовли параллелопипед ҳажмидан кичик. Берилган параллелопипед ҳажми V ушбу

$$\alpha_n\beta_n\gamma_n < V < A_nB_nC_n \qquad (1)$$

тенгсизликни қаноатлантиради. Худди шу тенгсизлик сингари қуйидаги

$$\alpha_n\beta_n\gamma_n < abc < A_nB_nC_n \qquad (2)$$

ҳам ўринли. (1) ва (2) тенгсизликлар ҳар қандай $n \in N$ учун ўринли бўлгани учун $n \to \infty$ бўлганда ҳам ўринли деб қаралиши мумкин. Демак, $V = abc$ экани келиб чиқади. ▶

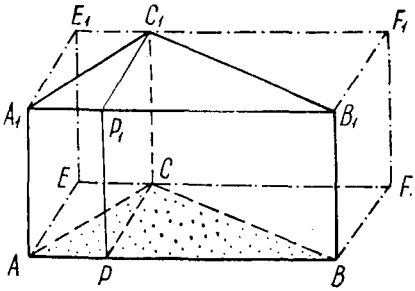
3- теорема. *Тўғри призманинг ҳажми унинг асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг.*

Исбот. 184- шаклда асоси ABC учбурчак бўлган тўғри призмани унинг C учидан AB қиррага туширилган CP баландлик ёрдамида қандай қилиб $ABFE$ асосли тўғри бурчакли параллелепипедга тўлдириб ясаш кўрсатилган. Унинг ҳажми $APCE$ ва $PBFC$ тўртбурчак асосли икки параллелопипед ҳажмига тенг. 2- теоремага кўра:

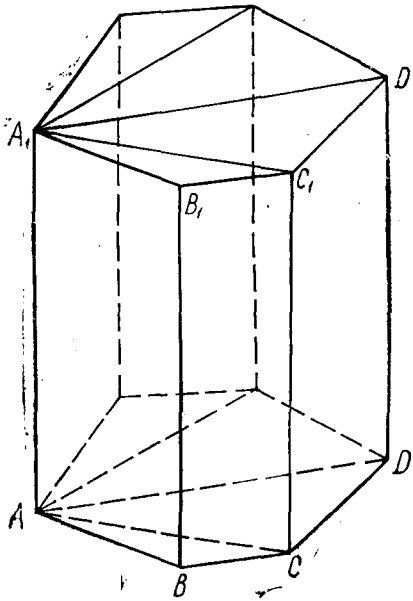
$$V_1 = S_{APCE} \cdot H;\ V_2 = S_{PBFC} \cdot H;\ H = |PP_1|.$$

У ҳолда изланаётган ABC асосли призма ҳажми шу ҳажмлар йиғиндиси ярмига тенг:

$$V = \frac{1}{2}(V_1 + V_2) = \frac{1}{2}(S_{APCE} + S_{PBFC}) \cdot H = S_{ABC} \cdot H.$$



184- шакл.



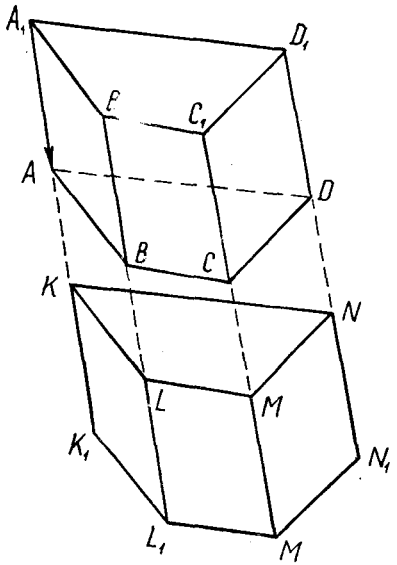
185- шакл.

Энди ихтиёрий n бурчакли тўғри призмани 185- шаклда кўрсатилгандек қилиб, иккала асосини бир хил учбурчакларга ажратиш орқали учбурчакли тўғри призма ҳажмини ҳисоблашга келтирилади. Юқоридаги ҳажм таърифининг (б) хоссасига кўра $ABCD\ldots EF$ асосли тўғри призманинг ҳажми

$$V = S_{ABC} \cdot H + S_{ACD} \cdot H + \ldots + S_{AEF} \cdot H$$

каби уч бурчакли тўғри призмалар ҳажмининг йиғиндисидан иборат бўлади. Демак,

$$V = (S_{ABC} + S_{ACD} + \ldots + S_{AEF}) \cdot H = S_{ABC\ldots EF} \cdot H. \blacktriangleright$$



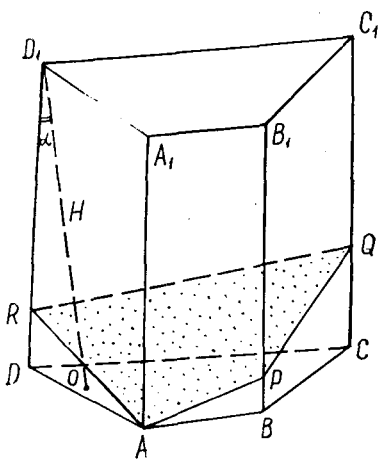
186- шакл.

4-теорема. *Оғма призманинг ҳажми унинг перпендикуляр кесими юзининг ён қирра узунлигига кўпайтмаси билан ўлчанади.*

Исбот. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ оғма призма Ф нинг A_1A қирраси давомида бирор K нуқта олиб, шу призманинг $KLMN$ перпендикуляр кесимини кўрайлик (186-шакл). Шу кесим асоси, ён қирралари Ф призма ён қирраларига тенг бўлган Ф′ призманинг ҳажмини ҳисоблайлик. Агар $\overrightarrow{A_1A}$ параллел кўчиришда Ф призманинг образи Ф′ эканлигини эсласак, $KLMNA_1B_1C_1D_1$ кўпёқнинг образи $ABCDK_1L_1M_1N_1$ бўладики, уларнинг ҳажмлари ўзаро тенг бўлган кўпёқлардир (бу кўпёқлар призма бўлиши шарт эмас):

$$V(KLMNA_1B_1C_1D_1) = V(KLMNABCD) + V(\Phi), \qquad (1)$$
$$V(ABCDK_1L_1M_1N_1) = V(\Phi') + V(KLMNABCD). \qquad (2)$$

Буларнинг чап томонлари тенг бўлгани учун ўнг томонларини тенглаштирсак. натижа $V(\Phi) = V(\Phi') = S_{KLMN} \cdot |KK_1|$ келиб чиқади. $|KK_1| = |AA_1|$ бўлганлигидан $V(\Phi) = S_{KLMN} \times \times |AA_1|$ бўлади. ▶



187- шакл.

5-теорема. *Оғма призманинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг.*

Исбот. Исботни енгиллаштириш учун призма асосини $ABCD$ тўртбурчакдан иборат деб Φ_{ABCD} оғма призмани қарайлик (187-шакл). У ҳолда призманинг A учидан ўтган перпендикуляр кесим $APQR$ нинг юзи Φ_{APQR} ни қирра узунлиги $|AA_1|$ га кўпайтирсак,

4-теоремага асосан $V(\Phi_{ABCD}) = S_{APQR} \cdot |AA_1|$ бўлади. Агар $|D_1O|$ призма баландлиги бўлса, у призма қиррасидан оғиш бурчаги α орқали қирра билан $|D_1O| = |AA_1| \cos\alpha$ каби боғланишдадир. Иккинчи томондан, $S_{APQR} = S_{ABCD} \cdot \cos\alpha$ эканлигини эсласак, у ҳолда

$$V = S_{APQR} \cdot |AA_1| = S_{ABCD} \cos\alpha \cdot \frac{|D_1O|}{\cos\alpha} = S_{ABCD} |D_1O|.$$

Бундан $V = S_{ABCD} \cdot H$ ёки $V = S_{асос} \cdot H$.

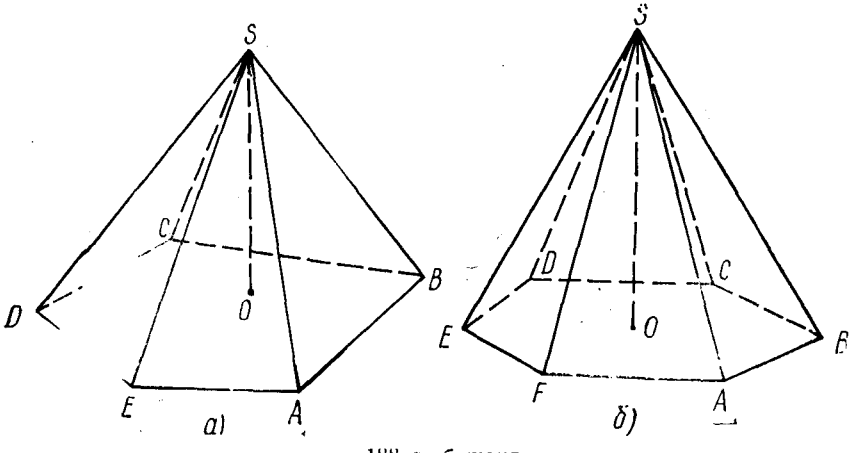
Оғма призманинг асоси ихтиёрий бўлган ҳолнинг исботи ўқувчига қолади.

Топшириқлар. 1. Тўғри параллелопипед асосининг томонлари 4 см ва 5 см, улар орасидаги бурчак 30°. Унинг барча қирраларини α текислик кесиб, асос текислиги билан 45° бурчак ҳосил этса, кесим юзини топинг.

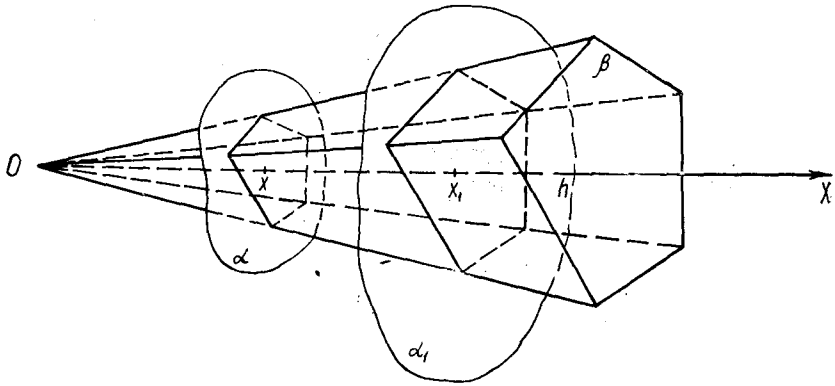
2. Учбурчакли оғма призманинг ҳар бир қирраси a, ён қирраларидан бири асосининг қўшни томонлари билан 60° ли бурчаклар ҳосил қилса, унинг тўла сирти юзи ва ҳажмини топинг.

3. Олти бурчакли мунтазам призма ён сиртининг юзи 648 см². Ён ёғи диагонали 15 см. Призма асосининг томони ва баландлигини топинг.

47. Пирамида сиртининг юзини ва ҳажмини топиш формулалари. Бир ёғи ихтиёрий кўпбурчак, қолган ёқлари умумий учга эга бўлган учбурчаклардан иборат кўпёқ *пирамида* дейилади. 188-*а* шаклда $ABCDE$ пирамида тасвирланган. *Пирамиданинг асоси* деб, унинг кўпбурчакли ёғи, *ён ёқлари* деб унинг қолган (учбурчакли) ёқларига айтилади. Ён ёқларининг умумий нуқтаси *пирамиданинг учи* дейилади. Пирамида учидан асосига тушган перпендикуляр унинг *баландлиги* дейилади. Агар пирамида асоси мунтазам кўпбурчак бўлиб, баландлиги асосининг марказига тушса, у ҳолда у *мунтазам пирамида* дейилади (188-*б* шакл). Пирамиданинг ён ёқларини



188-*а*, *б* шакл.



189- шакл.

ўзаро туташтирувчи кесмалар унинг *ён қирраси*, асос томонлари эса унинг *асос қирраси* деб аталади. Пирамида *ён сиртининг юзи* деб, унинг ён ёқлари юзаларининг йиғиндисига айтилади ва $S_{ён}$ деб белгиланади. Асос юзи эса $S_{ас.}$ деб белгиланади. Пирамида тўла сиртининг юзи қуйидагича аниқланади:

$$S_{пир} = S_{ён} + S_{ас}.$$

Мунтазам пирамиданинг ҳамма ёқлари тенг ёнли учбурчаклардан иборатдир. Шу учбурчаклар бир хил баландликка эгадир. Бу баландлик мунтазам пирамиданинг *апофемаси* дейилади. Мунтазам пирамида ён сиртининг юзи асос периметри P билан апофемаси a нинг кўпайтмаси ярмига тенг:

$$S_{ён} = \frac{1}{2}Pa.$$

Теорема. *Пирамиданинг ҳажми унинг асосининг юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг.*

Исбот. Ф пирамиданинг баландлиги h, асос юзи $S(h)$ бўлсин. Учи координата бошида, баландлиги абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан устма-уст тушган (189- шакл) пирамиданинг асос текислиги β абсцисса ўқини h нуқтасида кесиб ўтади.

Энди ихтиёрий $x \in [O;\ h]$ нуқтада β текислигига параллел қилиб пирамидани кесувчи α текислик ўтказайлик. У ҳолда кесим юзи $S(x)$ аргумент x нинг функциясидир:

$$S(x) = \Phi \cap \alpha,$$

кесувчи α_1 текислигини бошқа x_1 нуқтада β га параллел қилиб ўтказсак, худди шунга ўхшаш

$$S(x)_1 = \Phi \cap \alpha_1,\ x_1 \in [O;\ h]$$

каби кесим юзи ҳосил бўлади. $x=0$ нуқтадаги кесим юзи $S(0)=0$ дир.

Худди шунингдек, пирамиданинг $[0;\ x]$ кесмадаги бўлагининг ҳажми $V(x)$, $[0;\ x_1]$ кесмадаги бўлагининг ҳажми $V(x_1)$ бўлади. Яъни $V(x)$ ҳажм ҳам x аргументнинг функциясидир. Бунда ҳам $V(0)=0$ дейиш ўринли. Энди $[x;\ x_1]$ кесмадаги ҳажм орттирмасини тузайлик:

$$\Delta V = V(x+\Delta x) - V(x),\ x_1 = x + \Delta x.$$

Бу ҳажм бўлаги Г. 46. п. 220-бетдаги ҳажм таърифидаги хулосага асосан $S(x)$ асосли Δx баландликли призма ҳажмидан катта, $S(x+\Delta x)$ асосли Δx баландликли призма ҳажмидан кичик:

$$S(x)\cdot\Delta x < \Delta V < S(x+\Delta x)\cdot\Delta x.$$

Бундан

$$S(x) < \frac{\Delta V}{\Delta x} < S(x+\Delta x). \qquad (1)$$

Лекин $S(x)$ функциянинг аналитик кўринишини теорема шартига кўра тузиш мумкин. Бунинг учун пирамида асосидаги кўпбурчакнинг α текисликдаги кўпбурчак билан $k=\frac{h}{x}$ коэффициентли гомотетик мос эканлигидан фойдаланилади:

$$H_O^k(\Phi \cap \alpha) = \Phi \cap \beta.$$

Шу акслантириш хоссасига кўра (Г. 26. п. 196-бетдаги 4-теоремага қаранг)

$$\frac{S}{S(x)} = \frac{h^2}{x^2}.$$

Бу ердан $S(x)=\frac{x^2}{h^2}S$ эканлигини топамиз. Демак, $S(x)$ функция $[0;\ h]$ кесмада узлуксиз. Шунинг учун ҳам

$$\lim_{\Delta x\to 0} S(x+\Delta x) = S(x),\ x\in[0;\ h]$$

бажарилади. Бу лимитнинг мавжудлиги (1) қўш тенгсизликда $\Delta x\to 0$ бўлганда $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ нинг ҳам лимити мавжудлигини билдиради:

$$S(x) < \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x} < \lim_{\Delta x\to 0} S(x+\Delta x).$$

Яъни $V'(x)=S(x)$. Шундай қилиб, $V(x)$ функция $S(x)$ нинг $[0;\ h]$ кесмада бошланғич функцияси экан. Ньютон—Лейбниц формуласига биноан пирамиданинг ҳажми

$$V(h) = V(h) - V(0) = \int_0^h V'(x)\,dx$$

каби формуладан топилади. Чунки $V(0)=0$. Демак,

$$V(h)=\int_0^h S(x)\,dx=\frac{S(h)}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{h}{3}S(h).$$

Натижада пирамида ҳажми аниқланди: $V=\frac{1}{3}S_{ac}\cdot h$. ▶

Топшириқлар. 1. Учбурчакли мунтазам пирамиданинг кесишмайдиган қирралари ўзаро перпендикуляр. Исботланг.

2. Тўртбурчакли мунтазам пирамида асосининг томонлари a, ён қирраси асос текислиги билан φ бурчак ҳосил қилади Унинг диагонал кесимининг юзини, тўла сиртини, ҳажмини топинг.

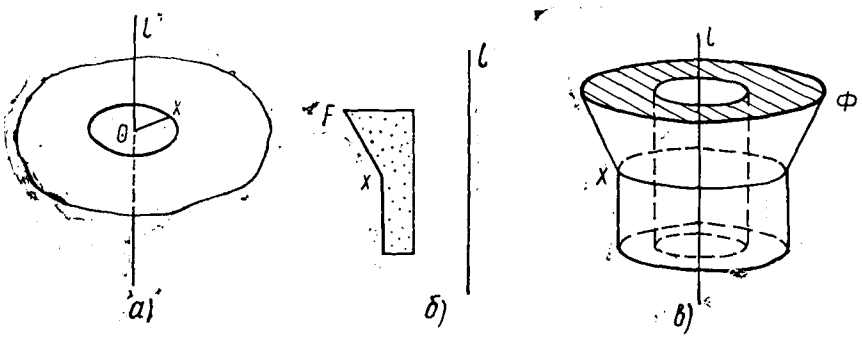
3. Олтибурчакли мунтазам пирамида асосининг томонлари a, баландлиги H бўлса, унинг диагонал кесимининг юзини, тўла сиртининг юзини ва ҳажмини топинг.

48. Айланиш фигураси. Цилиндр сиртининг юзини ва ҳажмини ҳисоблаш формулалари. Фазодаги l тўғри чизиқ, ундан $h\,(h>0)$ масофада ётган X нуқта орқали ўтувчи α текисликка перпендикуляр ва $O=\alpha\cap l$ бўлсин дейлик (190-*а* шакл). α текисликдаги X нуқтанинг l тўғри чизиқ атрофида айланишидан $(O;\ h)$ айлана ҳосил бўлади.

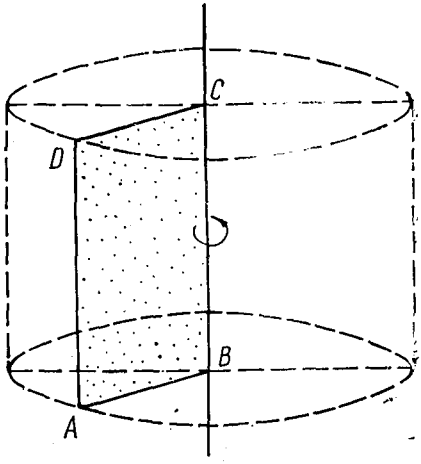
l ўқ ётган β текисликда бирор F фигура берилсин (190-*б* шакл). l тўғри чизиққа тегишли бўлмаган ҳар бир $X\in F$ нуқтанинг мос равишда l ўқ атрофида айланишдан ҳосил бўлган барча айланалар фазода бирор Ф фигурани ташкил қилади (190-*в* шакл).

Ф фигура F нинг l ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган *айланиш фигураси* деб аталади, l эса унинг *айланиш ўқи* дейилади, F фигура ўзининг Ф айланиш фигурасининг *ўқ кесимининг тасвири* дейилади.

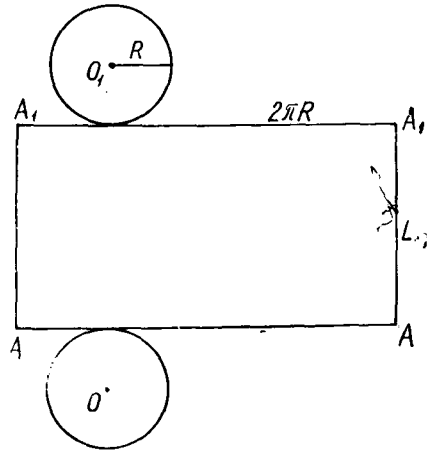
Цилиндр. Тўғри бурчакли тўртбурчакни унинг бирор томони атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўлган фигура



190-*а, б, в* шакл.



191-шакл.



192-шакл.

цилиндр деб аталади. 191-шаклда $ABCD$ тўғри тўртбурчак BC томони атрофида айлантирилган. AD томон цилиндрнинг *ён сиртини* ясайди ва у цилиндрнинг *ясовчиси*, DC ва AB кесма цилиндрнинг *радиуси* дейилади, улар ҳосил қилган доиралар эса унинг *асослари* дейилади.

1-теорема. *Цилиндр ён сиртининг юзи асос айланаси узунлиги билан баландлиги кўпайтмасига тенг:*

$$S_{ён} = 2\pi R L.$$

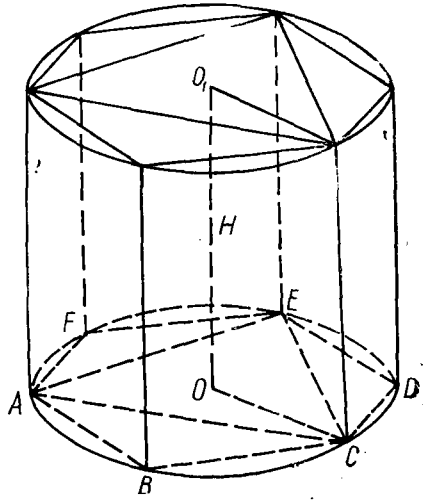
Исбот. Цилиндр ён сиртининг ёйилмаси томонлари $2\pi R$ $(R = |AB|)$ ҳамда $L\,(L = |AD|)$ бўлган тўғри тўртбурчак эканлигидан (192-шакл) унинг юзи $2\pi RL$ эканлиги келиб чиқади.▶

Тўла сирти эса, унинг ён сиртига иккала асос юзини қўшиш билан топилади:

$$S_{цил.} = 2\pi RL + 2\pi R^2.$$

2-теорема. *Цилиндрнинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг:*

Исбот. Асосининг радиуси R, баландлиги H бўл-



193-шакл.

ган цилиндрга ички чизилган мунтазам учбурчакли призманинг ҳажми $V_3 = S_3 \cdot H$ дейлик (193-шакл). $V_6 = S_6 \cdot H$ ички чизилган призма асосининг томонини иккилантириш натижасида ҳосил бўлган призма ҳажми бўлсин. Бундай иккилантиришни чексиз давом эттириб, ҳосил бўлган мунтазам призмалар ҳажмлари кетма-кетлиги ($k \in \mathbf{Z}_0$)

$$V_3,\ V_6,\ V_{12},\ \ldots,\ V_n,\ V_{2n},\ V_{4n},\ \ldots (n = 3 \cdot 2^k)$$

тузилади Маъносига кўра бу кетма-кетлик ўсувчидир (Бундай кетма-кетликни тузишда биринчи ички чизилган призма учбурчакли бўлиши шарт эмас эди.) Призмалар ҳажмлари кетма-кетлиги фақат асос юзининг ортиши ҳисобига ўсади:

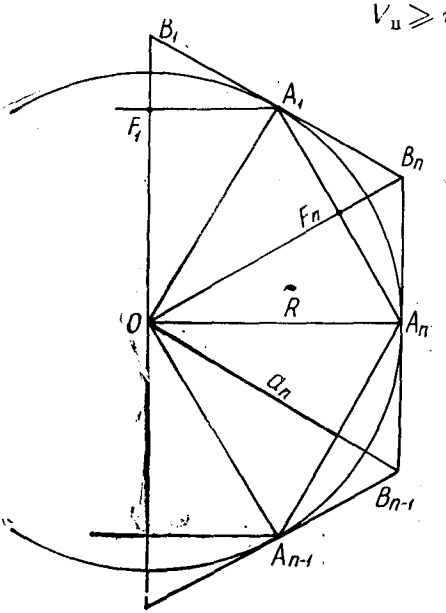
$$S_3 < S_6 < S_{12} < \ldots < S_n < S_{2n} < S_{4n} < \ldots$$

Кўпбурчакнинг юзи унинг периметри билан апофемаси кўпайтмасининг ярмисига тенг бўлгани учун (194-шакл):

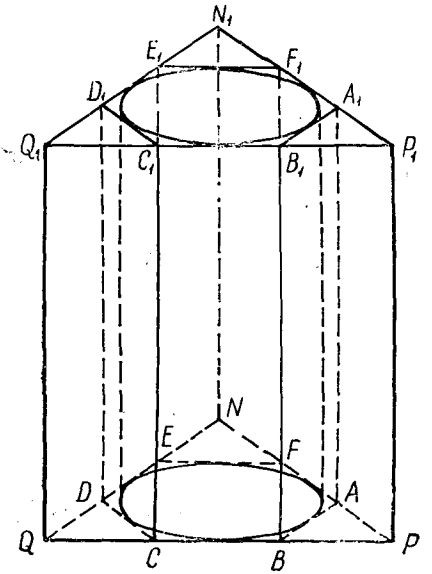
$$S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot a_n,\ n = 3 \cdot 2^k,\ k \in \mathbf{Z}_0.$$

Энди $\lim\limits_{n \to \infty} P_n = 2\pi R$ (Г. 32 п. 204-бетга қаранг) ва $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = k$ ларга асосан $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2} P_n a_n = \pi R^2$. Бундан $\lim\limits_{n \to \infty} V_n = \lim\limits_{n \to \infty} S_n H = \pi R^2 H$. ($H$ — ўзгармас.) Натижада цилиндрнинг $V_ц$ ҳажми $V_п$ нинг лимит қийматидан кичик бўлмайди:

$$V_ц \geqslant \pi R^2 H. \qquad (1)$$



194-шакл.



195-шакл.

Иккинчи томондан, цилиндр а ташқи чизилган мунтазам учбурчакли (умуман учбурчакли бўлиши шарт эмас) призманинг асоси томонлари сонини чексиз иккилантириш натижасида ҳосил бўлган мунтазам 6-бурчакли, мунтазам 12-бурчакли ва ҳоказо призмалар ҳажмлари камаювчи

$$V'_3,\ V'_6,\ V'_{12},\ \ldots,\ V'_n,\ V'_{2n},\ V'_{4n},\ \ldots\ (n = 2\cdot 3^k,\ k \in \mathbf{Z}_0)$$

кетма-кетлиги ҳосил қилинади (195-шакл). Юқоридагидек мулоҳазалар асосида

$$V_ц \leqslant \lim_{n\to\infty} V'_n = \pi R^2 H \qquad (2)$$

ни аниқлаймиз. (1) ва (2) тенгсизликлардан

$$V_ц = \pi R^2 H$$

эканлиги исбот бўлади. ▶

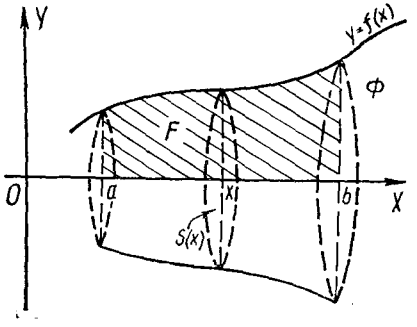
Топшириқлар. 1. Цилиндр ўқ кесимининг юзи Q га тенг. Ён сиртининг юзини топинг. Кесим юзи квадрат бўлса, унинг ҳажмини топинг.

2. Цилиндр асосидаги a га тенг ватар φ га тенг ёйга тиралади. Унинг баландлиги H бўлса, тўла сирти ва ҳажмини топинг.

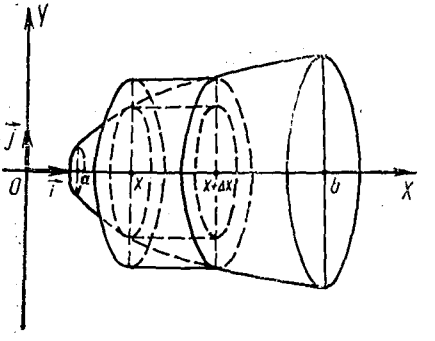
49. Айланиш фигурасининг ҳажми. Конус сиртининг юзи ва ҳажмини топиш формулалари. F фигура сифатида, Oxy декарт координаталар системасининг $a \leqslant x \leqslant b$ оралиғида аниқланган, узлуксиз, номанфий f функция графиги ҳосил қилган эгри чизиқли трапецияни олайлик (196-шакл). $l = Ox$ ўқ атрофида F нинг айланишидан ҳосил бўлган Ф фигуранинг ҳар бир $x \in [a, b]$ нуқтадаги перпендикуляр кесимининг юзи доира бўлиб, унинг юзи $S(x) = \pi f^2(x)$ дир.

1-теорема. Ф *айланиш фигурасининг ҳажми*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx \text{ га тенг.}$$



196-шакл.



197-шакл.

Исбот. Ф фигуранинг $[a; x]$ оралиқдаги ҳажми $V(x)$ бўлсин. Бунда $x \leqslant b$. x га $\Delta x\,(x+\Delta x \leqslant b)$ орттирма берсак, $V(x)$ ҳам ΔV орттирма олади (197-шакл). Ф фигуранинг $[x; x+\Delta x]$ оралиқдаги қисми баландлиги Δx бўлган $S(x)$ асосли ва $S(x+\Delta x)$ асосли цилиндрлар орасида жойлашади. Фигура ҳажмлари хоссаси (Г. 46. 220-бетдаги хулоса) га асосан:

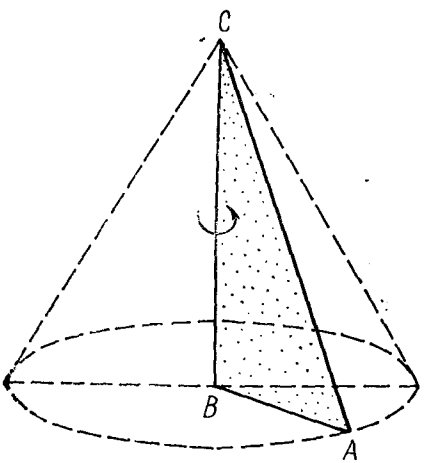
$$S(x)\Delta x \leqslant \Delta V \leqslant S(x+\Delta x)\Delta x \Rightarrow S(x) \leqslant \frac{\Delta V}{\Delta x} \leqslant S(x+\Delta x),$$

бундан $S(x)=\pi \cdot f^2(x)$ нинг узлуксизлигидан $\lim\limits_{\Delta x \to 0} S(x+\Delta x) = S(x)$ бажарилгани учун $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = S(x)$ нинг мавжудлиги келиб чиқади. Демак, $V'(x)=S(x)$. Агар $V(b)=V$, $V(a)=0$ ни назарга олсак, Ньютон–Лейбниц формуласига биноан:

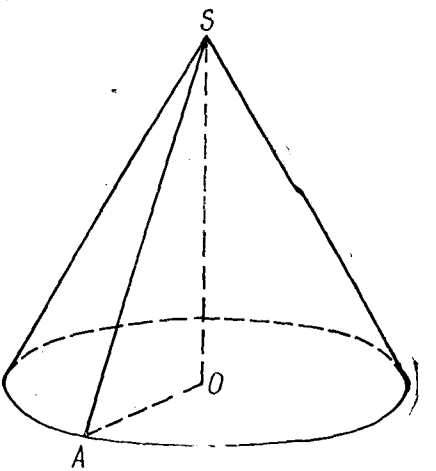
$$V=\int_a^b S(x)\,dx = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \blacktriangleright$$

Конус

Таъриф. Тўғри бурчакли учбурчакни бирор катети атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган фигура *конус* деб айтилади. Бунда учбурчакнинг гипотенузаси ва иккинчи катети *конус сиртини* ҳосил қилади. 198-шаклда AC гипотенуза – конуснинг *ён сиртини*, AB катет – конуснинг *асос сиртини* ҳосил қилган. AC гипотенуза кўпинча конуснинг *ясовчиси*, AB катет конуснинг *асос радиуси* дейилади. BC катет эса конуснинг *баландлиги* дейилади. 199-шаклда SAO конус тасвирланган. Конус ён сиртининг ёйилмаси доиравий сектор сифатида ҳосил бўлади (200-шакл). Унинг юзи конус *ён сиртининг юзи* деб қабул қилинади:



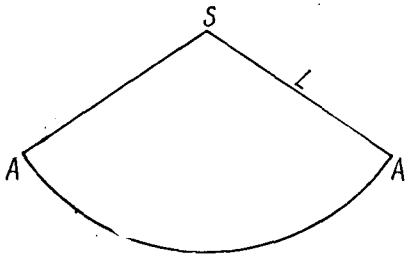
198-шакл.



199-шакл.

$$S_{ён} = \pi RL, \quad L = |AB|,$$
$$R = |OA|.$$

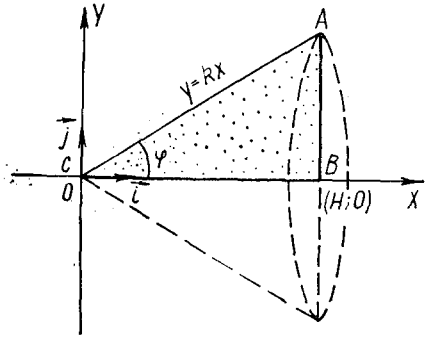
Демак, конуснинг тўла сирти $S_{конус} = S_{ён} + S_{ас.} \Rightarrow$ $\Rightarrow S_{конус} = \pi R(R + L)$ каби бўлади.



200- шакл.

2- теорема. *Конуснинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасининг учдан бирига тенг.*

Исбот. C учи координата бошида, CB катети абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан устма-уст тушган ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг CB катети атрофида айланишидан асосининг радиуси $|AB| = R$, баландлиги $|CB| = H$ бўлган конус ҳосил бўлади (201- шакл). Бурчак коэффициенти $k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{R}{H}$ бўлган AC тўғри чизиқнинг тенгламаси $y = \frac{R}{H}x$ кабидир. $y = \frac{R}{H}x$, $x = H$ ва $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган соҳанинг $[O; H]$ атрофида айлантирилишидан ҳосил бўлган фигура (конус) нинг ҳажми:



201-шакл.

$$V_{конус} = \pi \int_0^H y^2(x)\,dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Бунда $\pi R^2 = S_{ас.}$ конус асосининг юзи бўлгани учун

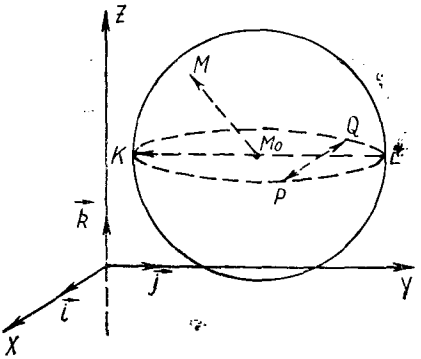
$$V_{конус} = \frac{1}{3} \cdot S_{ас.} \cdot H$$

бўлади ▶

Топшириқлар 1. Конуснинг ясовчиси l, ўқ кесими учидаги бурчаги α. Унинг асосининг юзи, тўла сиртини ва ҳажмини топинг.

2. R радиусли конуснинг ясовчиси асос текислиги билан α бурчак ҳосил этади. Унинг ўқ кесимининг юзи, ён сиртини ва ҳажмини топинг.

50. Шар ва унинг ҳажми. Фазонинг бирор M_0 нуқтасидан R масофадан узоқда бўлмаган барча нуқталари тўплами *шар* деб аталади (202- шакл). Бунда M_0 шарнинг *маркази*, узунлиги R га тенг бўлган M_0M кесма унинг *радиуси*, шарнинг



202 шакл.

чегарасига тегишли турли икки нуқтани туташтирувчи кесма унинг *ватари* дейилади Шарнинг марказидан ўтувчи ватар унинг *диаметри* деб айтилади. 202-шаклда PQ — ватар, KL — диаметридир. M_0K эса шар радиусларидан бири.

Маркази, $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ базисли координаталар фазосининг бирор $M_0(a; b; c)$ нуқтасида бўлган R радиусли шарнинг ихтиёрий $M(x; y; z)$ нуқтаси учун:

$$\overrightarrow{M_0M} = (x-a)\vec{i} + (y-b)\vec{j} + (z-c)\vec{k}$$

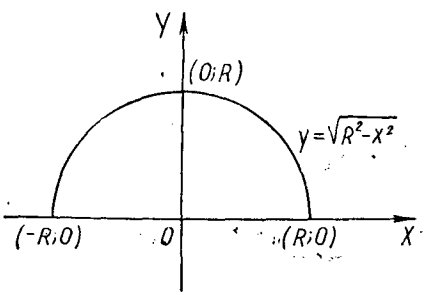
векторни тузамиз. Маълумки, $|M_0M| \leqslant R \Longrightarrow (\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M}) \leqslant R^2$, бундан $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leqslant R^2$. Координаталари шу ифодани қаноатлантирувчи барча нуқталар тўплами M_0 марказли R радиусли шарга тегишли ҳисобланади. Масалан $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 \leqslant 16$ тенгсизликни $M_1(2; 0; 3)$ нуқта координаталари қаноатлантиради, демак, у шу тенгсизлик аниқлаган шарга тегишлидир.

Теорема. *R радиусли шарнинг ҳажми $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ га тенг.*

Исбот. Маркази координата бошида бўлган R радиусли шарни қуйидагича

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$$

ифодалаш мумкин. Иккинчи томондан бу шарни Oxy координаталар текислигида $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leqslant x \leqslant R$ функция графиги билан чегараланган ярим доирани Ox ўқи атрофида айлантириб ҳосил қилиш мумкин (203-шакл). Айланиш фигурасининг ҳажмини топиш формуласидан $[-R; R]$ кесмада



203-шакл.

$$V_{\text{шар}} = \pi \int_{-R}^{R} y^2(x)\,dx =$$

$$= \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx$$

интегрални ҳисоблаб шар ҳажми топилади: $V_{шар} = \frac{4}{3}\pi R^3$. ▶

Топшириқ. $A(1;\ 2;\ 3)$; $B(2;\ -2;\ 1)$; $C(4;\ 5;\ 10)$; $D(0;\ 3;\ 0)$ нуқталар $M_0(1;\ 0;\ 1)$ марказли $R = 3$ радиусли шарга тегишлими?

51. Сфера ва унинг сиртининг юзини ҳисоблаш формуласи. Фазонинг бирор M_0 нуқтасидан R масофадаги барча нуқталари тўплами *сфера* деб аталади. Бундан $|M_0M| = R$ тенгликни қаноатлантирадиган барча M нуқталар тўплами—шарнинг сирти—сфера эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун сферанинг *маркази*, *радиуси*, *ватари* ва *диаметри* шарники каби таърифланади. Натижада координаталари

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \qquad (1)$$

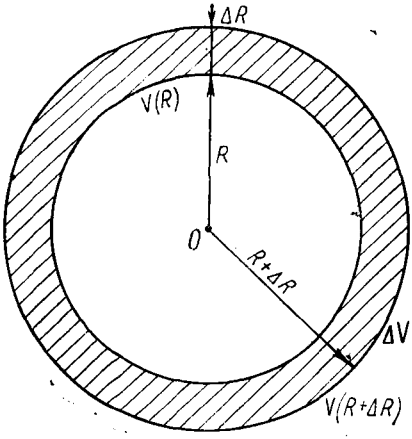
ни қаноатлантирувчи барча $M(x;\ y;\ z)$ нуқталар тўплами $M_0(a;\ b;\ c)$ марказли, R — радиусли сферани ташкил қилади. (1) ифода *унинг тенгламаси* дейилади.

1-таъриф. Сфера *сиртининг юзи* деб, шу сфера билан чегараланган шар ҳажмининг ΔR радиус орттирмасига мос келувчи ΔV ҳажм орттирмасининг радиус орттирмасига нисбатининг радиус орттирмаси нолга интилгандаги лимитига айтилади (204-шакл):

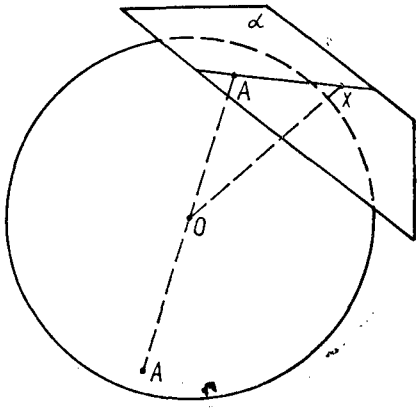
$$S_{сфера} = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta R} = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{V(R+\Delta R) - V(R)}{\Delta R}.$$

1-теорема. *Радиуси R бўлган сфера сиртининг юзи $4\pi R^2$ га тенг.*

Исбот Маълумки, R радиусли шарнинг ҳажми $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ бўлиб, у R радиуснинг функциясидир. Юқоридаги



204-шакл.



205-шакл.

таърифга асосан сфера сирти S нинг ҳажм функцияси $V(R)$ дан R бўйича ҳосила эканлигини билдиради:

$$S = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta R} = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)' = 4\pi R^2.$$

Шундай қилиб, сфера сиртининг юзи $S_{\text{сфера}} = 4\pi R^2$. ▶

2-таъриф. Текислик сфера билан битта умумий нуқтага эга бўлса, у сфера (шар) га *уринма текислик* дейилади. Нуқтанинг ўзи эса *уриниш нуқтаси* дейилади. 205-шаклда A нуқтасида шарга уринган α текислик тасвирланган

2-теорема. *Текислик сферага уринма текислик бўлиши учун текислик уриниш нуқтасида сфера диаметрига перпендикуляр бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исбот. Сферанинг AB диаметрининг A учи α текисликка тегишли бўлиб, $[AB] \perp \alpha$ бўлсин (205-шакл). $|OA| = R$ радиус сфера марказидан α текисликкача бўлган масофадир, чунки бошқа ҳар қандай $X \in \alpha$ нуқта учун $|OX| > |OA| = R$ бажарилади. Демак, сфера ва α текислик битта умумий A нуқтага эга экан, бу эса α нинг уринма текислигини кўрсатади.

Аксинча, A уриниш нуқтаси бўлсин. $[OA] \perp \alpha$ ни исботлаймиз. Агар OA кесма α га оғма бўлса эди, O дан α текисликкача бўлган масофа $|OA|$ дан кичик бўлиши келиб чиқар эди: $|OA| < R$. Бу эса мумкин эмас, чунки A — уриниш нуқтаси. Демак, $[OA] \perp \alpha$. ▶

Масала. *H_O^k гомотетия билан O марказли сфера яна O марказли сферага аксланишини исботланг.*

Ечилиши. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ тенглама билан берилган сферанинг ҳар бир $M(x; y; z)$ нуқтасининг образи $M_1(x_1; y_1; z_1)$ учун $x_1 = kx$, $y_1 = ky$, $z = kz$ ўринлидир. $x = \frac{x_1}{k}$, $y = \frac{y_1}{k}$; $z = \frac{z_1}{k}$ ни сфера тенгламасига қўйсак, барча $M_1(x_1; y_1; z_1)$ образ координаталари $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (kR)^2$ тенгламани қаноатлантиришини кўрамиз. Демак, образлар тўплами kR радиусли сферадир. ▶

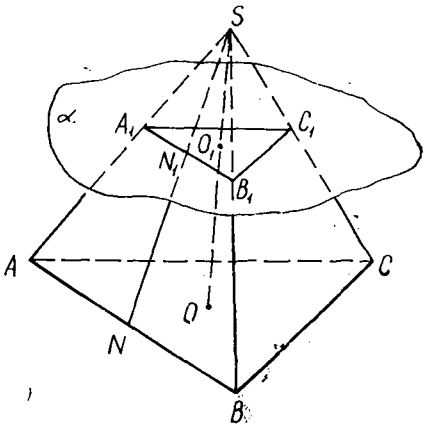
Топшириқлар. 1. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сферага $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтада уринувчи текислик тенгламаси $xx_0 + yy_0 + zz_0 = k^2$ эканлигини исботланг. (Кўрсатма: $\overrightarrow{OM_0}$ вектор уринма текисликка нормалдир.)

2. φ катталикдаги икки ёқли бурчак ёқларига R радиусли сфера уринади. Сфера марказидан шу бурчак қиррасигача бўлган масофани топинг.

52. Баъзи геометрик фигуралар сиртининг юзи ва ҳажми.

а) Кесик пирамида. Пирамидани унинг асосига параллел текислик билан кесганда иккита кўпёқ ҳосил бўлади. Улардан бири *кесик пирамида* деб аталади (206-шакл), иккинчиси пирамида бўлиб, у кесик пирамиданинг *тўлдирувчиси* дейилади. Кесимнинг юзи кесик пирамиданинг *кичик асоси*, унга параллел ёғи эса унинг *катта асоси* дейилади. Трапециялардан ташкил топган қолган ёқлари унинг *ён ёқлари* дейилиб,

уларнинг юзлари йиғиндиси кесик пирамиданинг *ён сиртини* беради. Ён сирти билан иккала асос юзалари йиғиндиси кесик пирамиданинг *тўла сирти* дейилади. Кесик пирамиданинг асослари ўзаро гомотетикдир. Гомотетия маркази тўлдирувчи пирамида учида жойлашган.



206- шакл.

Кесик пирамида мунтазам пирамиданинг қисми бўлса, у *мунтазам кесик пирамида* деб аталади. Унинг ён ёқлари тенг ёнли трапеция бўлиб, ён ёқларнинг баландлиги кесик пирамиданинг *апофемаси* дейилади. Мунтазам кесик пирамида *ён сиртининг юзи* $S_{ён} = \frac{1}{2}(P+p)a$ каби ҳисобланади, бунда P ва p лар катта ва кичик асос периметри, a — унинг апофемаси. Катта ва кичик асос юзлари билан кесик пирамиданинг ён ёқлари юзалари йиғиндиси, унинг *тўла сиртидир*. Масалан, 206- шаклда кўрсатилган мунтазам учбурчакли кесик пирамиданинг тўла сирти ушбу

$$S_{\text{кесик пир.}} = S_1 + S_2 + \frac{1}{2}(P+p)a$$

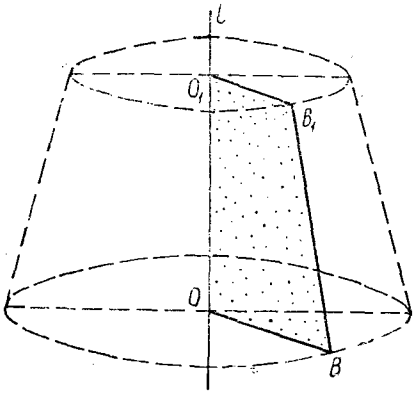
формула билан берилади. Бу ерда $S_1 = S_{ABC}$, $S_2 = S_{A_1B_1C_1}$, $P = 3|AB|$, $p = 3 \cdot |A_1B_1|$, $a = |NN_1|$. Кесик пирамиданинг ҳажми

$$V_{\text{кесик пир.}} = \frac{H}{3}(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$$

формула билан аниқланади. Бу ерда H кесик пирамиданинг баландлиги, S_1 ва S_2 асосларининг юзлари.

1- топшириқ. Кесик пирамида ҳажмининг формуласини Г. 47 п. теоремаси (224 - бет)га асосан чиқаринг

б) Кесик конус. Трапециянинг бир ёни унинг асосларига перпендикуляр бўлиб, у томон атрофида айланишидан ҳосил қилинган фигурага *кесик конус* дейилади. Трапециянинг асослари кесик конуснинг *асосларини*, ён томонлари эса унинг *ён сиртини* ҳосил қилади. Кесик конус асосларининг юзи ва ён сиртининг юзи йиғиндиси унинг *тўла сиртининг юзидир*. Трапециянинг ён томони кесик конуснинг *ясовчиси*, асослари



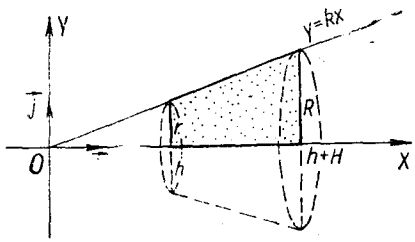
207 шакл.

унинг *радиуси* ҳисобланади. 207-шаклда OB, O_1B_1 кесмалар кесик конус асослари радиусини, BB_1 — ясовчисини, OO_1 — баландлигини ифодалайди. Кесик конус ён сиртининг юзи ва ҳажми

$$S_{ён} = \pi (R + r) L,$$

$$V_{кесик\ кон.} = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2)$$

каби аниқланади, бу ерда $R = |OB|$, $r = |O_1B_1|$, $H = |OO_1|$, $L = |BB_1|$.



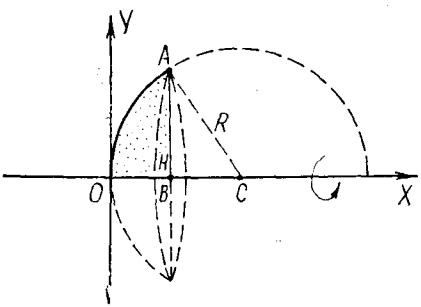
208-шакл.

2-топшириқ Ҳажмни ҳисоблаш формуласини исботланг.

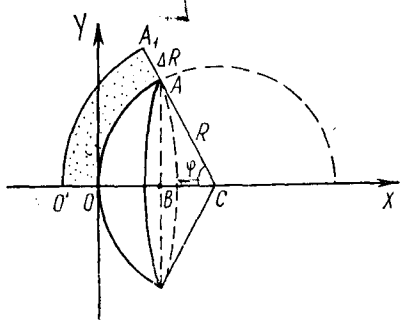
Кўрсатма. 208-шаклда $y = kx$ функция графигининг $[h;\ h + H]$ ораликда ҳосил қилган трапецияни Ox ўқи атрофида айлантириш натижасида $k = \frac{R - r}{H}$ ва $\frac{R}{r} = \frac{h + H}{h}$ бўлишидан фойдаланинг.

в) Шар сегментининг ҳажми. Доиравий сегментнинг ўз ватари ўртасидан ўтказилган перпендикуляр ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган фигура *шар сегменти* дейилади. 209-шаклда $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ тенглама билан берилган ярим доиранинг штрихланган OAB бўлаги Ox ўқи атрофида айланиб шар сегменти ҳосил қилади.

3-топшириқ Агар $R = |AC|$, $H = |OB|$ берилган бўлса, шар сегментининг ҳажми $V_{сегм.} = \frac{\pi H^2}{3}(3R - H)$ билан хисобланади. Исботланг.



209-шакл.



210-шакл.

г) Шар секторининг ҳажми. Доиравий секторнинг бирор радиуси ётган ўқи атрофида уни айлантирилишидан ҳосил бўлган фигура *шар сектори* деб аталади. 210- шаклда $OACBO$ доиравий сектор штрихланган ва у OC ўқ атрофида айлантирилиб шар сектори ясалган.

4- топшириқ. $R = |AC|$ ва $H = |OB|$ деб, шар сектори ҳажми $V_{сект.} = \frac{2\pi}{3} R^2H$ га тенглигини исботланг. (Кўрсатма: $|AB| = H(2R - H)$ нинг ўринли эканини кўрсатиб, $V_{сект.} = V_{сегм.} + V_{конус}$ лан фойдаланинг.)

д) Шар сегменти сиртининг юзи.

Таъриф. *Сегмент сиртининг юзи* деб, унга мос шар секторининг ҳажм орттирмасининг радиус орттирмасига нисбатининг радиус орттирмаси нолга интилгандаги лимитига айтилади:

$$\lim_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta R} = S, \quad S = V'.$$

Теорема. *Шар сегменти сиртининг юзи $S = 2\pi RH$ га тенг.*

Исбот. 210- шаклдан $H = |OB| = |OC| - |CB| = R - R\cos\varphi$ радиус ΔR орттирма олганда φ ўзгармайди. Шар секторининг ҳажми $V = \frac{2}{3}\pi R^2H$ да H ни R орқали ифодалаганда, у $V = \frac{2\pi}{3} R^3 (1 - \cos\varphi)$ кўринишга келиб, ундан R бўйича ҳосила олинса, сегмент сирти юзи таърифига кўра: $S_{сегмент} = V'_{сегмент} = 2\pi R^2 (1 - \cos\varphi) = 2\pi RH$. ▶

5- топшириқ. 1. Шар сектори сиртининг юзини $R = |AC|$ ва $H = |OB|$ (210- шакл) бўйича ҳисобланг.

2 Шар сегменти сиртининг юзи $S = \pi(r^2 + H^2)$ эканлигини исботланг, бунда r асос радиуси, H — баландлиги.

3 Шарни текислик билан кесганда ундаги бўлакларнинг юзалари $m : n$ нисбатда бўлади. Шу бўлакларнинг ҳажмлари $\frac{m^2(m + 3n)}{n^2(n + 3m)}$ каби нисбатда бўлишини исботланг.

4. Шар сектори сферик сиртининг юзи S, конус сиртининг юзи Q бўлса, унинг ҳажми $\frac{1}{6\sqrt{\pi}} \sqrt{S(4Q + S^2)}$ эканлигини исботланг.

II БОБ. МАТЕМАТИКАДАН ИМТИҲОН ҲАҚИДА

Математикадан кириш имтиҳонлари Олий ўқув юртларининг таълим жараёнида фан тушунчаларининг қанчалик зарурлигини назарда тутган ҳолда, ёзма ҳамда оғзаки ёки улардан бири тарзида бўлиши мумкин.

Математикадан имтиҳон топширувчи абитуриент:

1) оддий ва ўнли каср кўринишидаги сонларда арифметик амалларни бажара олиш;

2) ҳисоблашлар натижасидаги сонларни берилган аниқликда яхлитлай олиш ёки унга тақрибан яқин сонни топа олиш;

3) ҳисоблашда керакли жадваллардан фойдалана билиш;

4) кўпҳад, ўзгарувчили каср, даражали, кўрсаткичли, логарифмик ва тригонометрик функциялар иштирок этган ифодаларда айний алмаштиришлар бажара олиш;

5) чизиқли, квадратик, каср чизиқли, даражали, кўрсаткичли, логарифмик ва тригонометрик функциялар графикларини ясай олиш;

6) I ва II даражали тенглама (тенгсизлик) ҳамда уларга келадиган тенглама (тенгсизлик)ларни еча олиш;

7) I ва II даражали тенглама (тенгсизлик) лар системаси ҳамда уларга келадиган тенглама (тенгсизлик)лар системасини еча олиш;

8) даражали, кўрсаткичли, логарифмик ва тригонометрик тенглама, тенгламалар системаси, тенгсизлик ва тенгсизликлар системасини еча билиш;

9) тенглама ёки тенгламалар системаси тузиб ечиладиган масалаларни ҳал эта олиш;

10) геометрик фигураларни чизмада тасвирлай олиш ва содда ясашга доир масалалар бажара билиш;

11) алгебраик масала ечишда геометрик талқинидан фойдалана олиш, ва аксинча, алгебра ва тригонометрия усулларидан фойдаланиб, геометрик масалалар еча олиш;

12) векторлар устида амаллар (қўшиш ва айириш, сонга кўпайтириш, скаляр кўпайтириш) ни бажара олиш ва уларни татбиқ эта олиш;

13) элементар функциялар лимитларини ҳисоблай олиш;

14) функциянинг ўсиш (камайиш) ини текшириш, экстремуми ва графигини топишга ҳосила тушунчасини татбиқ эта олиш;

15) бошланғич функцияни топиш ва улар ёрдамида юзани ҳисоблай олиш каби билим ва малакаларга эга бўлиши лозим.

1-§ Ёзма имтиҳон

1. Ёзма имтиҳон ҳақида. Математикадан имтиҳон икки хил бўлади: ёзма ва оғзаки. Улар СССР Олий ва махсус ўрта таълим министрлиги томонидан тасдиқланган программа асосида ўтказилади. Ёзма имтиҳонда абитуриентнинг ўз билим ва малакаларини масала ва мисолларда қўллай олиши синалади. Бунинг учун 4 соат вақт берилиб, абитуриент шу вақт ичида берилган вариант мисол ва масалаларининг барчасини тўғри, аниқ ва тўлиқ ҳал қилишга ҳаракат қилиши лозим. Бунда имтиҳон вақтидан унумли фойдаланиш учун абитуриент вариантидаги мисол ва масалалар (одатда улар 4 та ёки 5 та бўлади) ни ўзи учун енгил туюлганидан бошлаб ечиши, бир неча усул билан ечилиши мумкин бўлганларини рационал усул билан ҳал эгиши лозим деб ўйлаймиз. Баъзи ўқувчилар вариантдаги

бирор масалага ортиқча вақт сарфлаб, еча олишлари мумкин бўлганларига улгуролмайдилар ёки шошма-шошарлик билан баъзи хато ва камчиликларга йўл қўйиб ишни топширадилар.

Вариант мисол-масалаларини еча оладиган кўпчилик абитуриентлар етарли даражада малакага эга бўлмаганликлари туфайли белгиланган вақт давомида ишни тўлиқ бажара олмайдилар. Шунинг учун ҳар бир абитуриент имтиҳонга тайёргарлик кўриш даврида кўп машқлар билан тажрибасини орттириб бориши керак.

Имтиҳон бошида абитуриент ўзига тушган ҳар бир мисол ва масалани қунт билан ўрганиб чиқиши, сўнгра ўзи танлаган тартибда уларни дастлаб хомаки иш варақасида ўринли термин ва символлар асосида ечишни бошлаши лозим. Бунда керакли чизмаларни сифатли чизиши, зарур ҳолларда қийин тушунча ва формулалардан фойдаланганлигини таъкидлаши, натижанинг тўғрилигини текшириши, мисол ва масалаларда мавжуд параметрларга қўйилган чекланишларни кўрсатиши лозим.

Иш якунида ишланган вариант оққа шошилмасдан, эътибор билан, равон фикр ва жумлалар билан, тартибли қилиб кўчирилиши керак.

2. Аъло баҳога ёзилган ёзма ишдан намуна

1-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$b^2(1-b^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1+(b(1-b^2)^{-\frac{1}{2}})^2} \cdot \frac{(1-b^2)^{\frac{1}{2}} + b^2(1-b^2)^{-\frac{1}{2}}}{1-b^2}.$$

2. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x^{y^2+2} = 125, \\ x^{2y^2-1} = 5. \end{cases}$$

3. Тенгсизликни ечинг: $\frac{2x}{(x-3)^2} \geqslant \frac{3x+2}{x(x-3)^2}$.

4. $y = x^3 + 3x^2 - 9x$ функциянинг $[-4; 3]$ кесмада энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

5. A шаҳардан B шаҳарга икки автомобиль v_1 ва v_2 тезликлар ($v_1 > v_2$) билан чиқди. Биринчи автомобиль B шаҳарга бориб орқага қайтди. Шунда улар учрашган жой A дан B гача бўлган масофанинг неча процентини ташкил қилади? (Хусусий ҳолда, $v_1 = 60$ км/соат, $v_2 = 40$ км/соат деб олинг).

Ечилиши.

1. Ифодани соддалаштириш. Берилган ифодани A билан белгилаймиз ва унинг аниқланиш соҳаси D ни топамиз:

$$1 - b^2 > 0 \Rightarrow b \in D =]-1; 1[.$$

Бунда ҳар бир $b \in D$ учун қуйидаги алгебраик алмаштиришлар маънога эга:

$$A = \frac{b^2}{\sqrt{1-b^2}} - \frac{1}{1+\frac{b^2}{1-b^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-b^2}+\frac{b^2}{\sqrt{1-b^2}}}{1-b^2} =$$

$$= \frac{b^2}{\sqrt{1-b^2}} - \frac{1-b^2}{1-b^2+b^2} \cdot \frac{1-b^2+b^2}{(1-b^2)\sqrt{1-b^2}} = \frac{b^2-1}{\sqrt{1-b^2}} = -\sqrt{1-b^2}.$$

Жавоб: $b \in D \Rightarrow A = -\sqrt{1-b^2}$.

2. *Тенгламалар системасининг ечилиши.*

$$\begin{cases} x^{y^2+2} = 125, \\ x^{2y^2-1} = 5 \end{cases} \qquad (S)$$

(S) системанинг ҳар бир тенгламасининг чап томони a^X кўрсаткичли функция кўринишида бўлиб, у $a>0$, $a \neq 1$, $X \in \mathbf{R}$ да аниқланганидан фойдаланиб ($a \equiv x$, $X \equiv y^2+2$ ёки $a \equiv x$, $X = 2y^2-1$ деб олиш мумкин), системанинг аниқланиш соҳаси D топилади: $D = \{(x;\ y) \mid x>0,\ x \neq 1,\ -\infty < y < \infty\}$.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x^{y^2+2} = 5^3, \\ x^{2y-1} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{y^2+2} = x^{3(2y^2-1)}, \\ x^{2y^2-1} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2+2 = 3(2y^2-1), \\ x^{2y^2-1} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1, \\ x^{2y^2-1} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y_1 = 1, \\ x_1 = 5, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} y_2 = -1, \\ x_2 = 5. \end{cases} & (2) \end{array} \right.$$

Натижада юзага келган (1) ва (2) ечимлар D га тегишли $M_1(x_1;\ y_1)$ ва $M_2(x_2;\ y_2)$ нуқталардир: $M_1(5;\ 1) \in D$, $M_2(5;\ -1) \in D$.

Жавоб: $\{(5;\ 1),\ (5;\ -1)\}$.

3. *Тенгсизликнинг ечилиши.* Тенгсизликни қуйидагидек дастлабки ҳолига эквивалент қилиб соддалаштирамиз:

$$\frac{2x}{(x-3)^2} - \frac{3x+2}{x(x-3)^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-3x-2}{x(x-3)^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+1)(x-2)}{x(x-3)^2} \geqslant 0. \quad (3)$$

Охирги тенгсизликнинг чап томонини $T(x)$ билан белгиласак, у каср-рационал функция. Унинг аниқланиш соҳаси:

$$D(T) =]-\infty;\ 0[\cup]0;\ 3[\cup]3;\ +\infty[.$$

Демак:

$$T(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x(2x+1)(x-2)}{x^2(x-3)^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D(T), \\ x\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2) \geqslant 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Ҳосил бўлган $T_1(x) = x\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2) \geqslant 0$ тенгсизлик $D(T)$ соҳада интерваллар усули билан ечилади $D(T)$ соҳа $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ нуқталар билан яна кичикроқ интервалларга майдаланади:

$$D(T) =]-\infty;\ -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2};\ 0[\cup]0;\ 2[\cup[2;\ 3[\cup]3;\ +\infty[.$$

Маълумки, $T_1(x)$ функция бу интерваллар нинг ҳар бирида узлуксиз бўлганлиги туфайли ўз ишорасини ўзгартмай бир интервалдан иккинчисига ўтгандагина ўзгартириши мумкин. Ҳар бир интервалда $T_1(x)$ функциянинг ишорасини аниқлаймиз (211-шаклга қаранг).

а) $x_0 = -1 \Rightarrow T_1(-1) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow]-\infty; -\frac{1}{2}[$ соҳада $T_1(x) < 0$;

б) $x_1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow T_1\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{64} > 0 \Rightarrow [-\frac{1}{2}; 0[$ соҳада $T_1(x) \geqslant 0$;

в) $x_2 = 1 \Rightarrow T_1(1) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow]0; 2[$ соҳада $T_1(x) < 0$;

г) $x_3 = \frac{5}{2} \Rightarrow T_1\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4} > 0 \Rightarrow [2; 3[$ соҳада $T_1(x) \geqslant 0$;

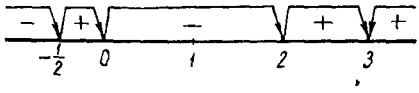
д) $x_4 = 4 \Rightarrow T_1(4) = 36 > 0 \Rightarrow]3; +\infty[$ соҳада $T_1(x) > 0$.

Шундай қилиб, бу ҳисоблашлар кўрсатадики:

$$x \in [-\frac{1}{2};\ 0[\cup]2;\ 3[\cup]3;\ +\infty[\Leftrightarrow T_1(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow T(x) \geqslant 0$$

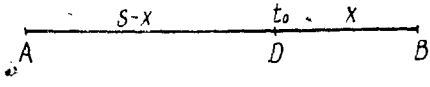
Жавоб: $x \in \left[-\frac{1}{2};\ 0[\cup]2;\ 3[\cup]3;\ +\infty\right[$.

4. $y = x^3 + 3x^2 - 9x$ *функциянинг* $[-4;\ 3]$ *оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш.*



211-шакл.

Функциянинг кесма чегараларидаги қийматларини шу соҳадаги критик нуқталаридаги қийматлари билан ўзаро таққослаб, функциянинг кесмадаги энг катта ва энг кичик қиймати топилади.



212-шакл.

(а) $y(-4) = -4^3 + 3 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 = 20,$
$y(3) = 3^3 + 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 = 27.$

(б) $[-4; 3]$ кесмадаги функциянинг критик нуқталари:
$y'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -3.$

(в) x_1 ва x_2 нуқталардаги функция қиймати:

$$y(1) = -5;\quad y(-3) = 27.$$

(г) (а) ва (в) даги функция қийматларини таққослаймиз:

$$y_{\text{э. катта}} = \max_{x \in [4;\ 3]} y(x) = y(-3) = y(3) = 27,$$

$$y_{\text{э.кичик}} = \min_{x \in [-4;\ 3]} y(x) = y(1) = -5.$$

Жавоб: $y_{\text{э. катта}} = 27;\quad y_{\text{э. кичик}} = -5.$

5. *Масаланинг ечилиши.* A шаҳардан B шаҳаргача бўлган йўлни схематик тасвирласак, (212-шакл) D нуқта биринчи автомобилнинг иккинчиси билан қайтишдаги t_0 вақтдаги учрашиш жойи. B дан D гача масофани x, A дан B гача масофани S билан белгиласак, t_0 — учрашиш вақтигача биринчиси $S + x$, иккинчиси $S - x$ масофа юрган. Демак, $t_0 = \frac{S+x}{v_1} = \frac{S-x}{v_2}$ ўринли, бу ердан $x = \frac{v_1 S - v_2 S}{v_1 + v_2}$. Яъни $\frac{x}{S} = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}$. Бу процент миқдорда $\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \cdot 100\%$ га тенг. Хусусан, $v_1 = 60$ км/соат, $v_2 = 40$ км/соат бўлса, у ҳолда $\frac{60-40}{60+40} \cdot 100\% = 20\%$ дир.

3. Ўзбекистон ССР олий ўқув юртларида турли йилларда тушган ёзма имтиҳон вариантларидан намуналар. Қуйида тартиб билан университет, педагогика институти, олий техника ўқув юртларида тушган вариантлар берилиб, алоҳида таъкидлаймаган институтларнинг вариантларидаги мисол ва масалалар ҳам шуларга ўхшашдир.

1-вариант (ТошДУ, матфак)

1. Тенгламани ечинг: $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x = 5 \cdot 10^x$.

2. Тенгламани ечинг: $\sqrt[3]{\cos^2 x} + \sqrt[3]{\sin^2 x} = \sqrt[3]{4}$.

3. Тенгсизликни ечинг: $\frac{x-2}{3x-1} \leqslant \frac{x+2}{2x+1}$.

4. Тенг ёнли учбурчакнинг периметри 12 см. Унинг асоси узунлиги қандай бўлганда юзи энг катта бўлади?

5. Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраси b см, у асос текислиги билан α бурчак ташкил қилса, пирамида ҳажмини топинг.

2-вариант (ТошДУ, матфак)

1. Тенгламани ечинг: $|4 + 3x - x^2| = x^2 - 3x - 4$.

2. Тенгламани ечинг: $\cos^3 x \cdot \sin 3x + \sin^3 x \cdot \cos 3x = \frac{3}{4}$.

3. Тенгсизликни ечинг: $\log_{0,5} \frac{x+7}{2x+3} < \log_{0,5}(5-x)$.

4. Тўртбурчакли мунтазам призма ён ёғининг периметри a см. Призманинг асоси томони қандай бўлганда унинг ҳажми энг катта бўлади?

5. Конуснинг баландлиги h, асосининг радиуси r. Шу конусга ички чизилган шар ҳажмини топинг.

3- вариант (ТошДУ, матфак)

1. Тенгсизликни ечинг: $\log_{2x+1}(x-1)^2 < 1$.

2. Тенгламани ечинг $\frac{\sqrt{5-x^2}}{x+1} = 1$.

3. Тенглик a нинг қандай қийматида камида битта ечимга эга:

$$2\cos 2x + 8a \sin x = a^2 + 2?$$

4. $y = -x(x-2)^2$ нинг ўсиш (камайиш) оралиғини топинг.

5. Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраси унинг баландлигидан 2 марта узун бўлса, унинг учидаги текис бурчагини топинг.

4- вариант (ТошДУ, матфак)

1. Тенгламани ечинг: $9^x + 6 \cdot 2^{2x} = 5 \cdot 6^x$.

2. Тенгламани ечинг: $2\cos^2 x + 5\sin x \cdot \cos x + 3\sin^2 x = 0$.

3. Тенгсизликни ечинг: $|\log_{1983} x - 2| + |\log_{1983} x - 4| < 4$.

4. $y_1 = x^2 + 3x + 3$ ва $y_2 = 2x$ функция графикларининг ўзаро энг яқин нуқталари орасидаги масофани топинг.

5. Конуснинг баландлиги 3, унга ташқи чизилган шарнинг радиуси 2 бўлса, конус сиртининг шар сиртига нисбатини топинг.

5- вариант (ТошДУ, ПММ)

1. Тенгламани ечинг: $\log_x 3 + \log_3 x = \frac{5}{2}$.

2. Тенгламани ечинг: $\cos^3 x - \sin^3 2x = 0$.

3. Тенгсизликни ечинг: $x^4 + \sqrt{|x| - \sqrt{1983}} \geqslant 1983^2$.

4. $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - x - \frac{7}{3}$ функция графигининг қайси нуқтасидаги уринма $y = 2x + 3$ га параллел бўлади?

5. Шарга ички чизилган конус ҳажми $9\pi \operatorname{tg}^3\alpha \operatorname{tg} 2\alpha$, бунда α — конуснинг ўқ кесими учидаги бурчак. Шар ҳажмини топинг.

6- вариант (ТошДУ, ПММ)

1. Тенгламани ечинг: $x^2 + 2cx = cx + 2c^2$.

2. Тенгсизликни ечинг: $2^{x+3} + 6 \cdot 2^{x-1} - 33 > 0$

3. $2 \cdot \sin 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2} + \sin 8x$ бўлса, $\operatorname{ctg} x$ ни топинг.

4. (0; 1) нуқтадан $y = 2x^2 + 2$ функция графигига ўтказилган уринманинг тенгламасини тузинг. (Шаклни ҳам чизинг.)

5. Тенг ёнли учбурчакда, унинг асоси билан ён томонига туширилган баландлиги орасидаги бурчак α га тенг. Асосининг ён томонига нисбатини топинг.

7- вариант (ТошДУ, физфак)

1. $y = x\cos^2 2x + \sqrt{x}$ функциянинг ҳосиласини топинг.

2. Тенгламани ечинг: $\log_4 x - \log_{0,25} x = 4$.

3. Тенгламани ечинг: $\cos 2x - 5 \cdot \sin x - 3 = 0$.

4. $y = 2x^2 + 1$ ва $y = 3x$ чизиқлари билан чегараланган фигура юзини топинг.

5. Олтибурчакли мунтазам пирамида асосининг томони $2p$ бўлиб унинг учидаги текис бурчаги -2α. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

8-вариант (ТошДУ, физфак)

1. Тенгламани ечинг: $\sin^2 2x = \frac{1}{4}$.

2. Тенгсизликни ечинг: $|x^2 - 6x + 8| \geqslant 1$.

3 Ён сирти Q бўлган тўртбурчакли пирамиданинг ён ёғи асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилса, унинг ҳажмини топинг.

4. $y = \frac{x}{x+1} - \sqrt{x^2+4}$ функциянинг $y'(0)$ ҳосиласини топинг.

5. $y(\alpha) = \int_0^\alpha (x+2)(2-x)\,dx$ интеграл α нинг қайси мусбат қийматида энг катта бўлади?

9-вариант (ТошДУ, биофак)

1. Тенгламани ечинг: $(1,4)^{2x} + 0,4 \cdot (1,4)^x - 1,4 = 0$.

2. Тенгламани ечинг: $\sin x + \sin 3x = -\sin 2x$.

3. Тенгсизликни ечинг: $x^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}x + 1 \leqslant 0$.

4. $y = -x^2 + (2+\sqrt{3})x$ функция графиги абсциссасининг $x_0 = 1$ нуқтасидан ўтган уринма тенгламаси Ox ўқи билан қандай бурчак ҳосил қилади?

5. Диагоналлари ўзаро перпендикуляр, асослари мос равишда a ва b, ён томонлари орасидаги бурчаги α бўлган трапеция юзини топинг.

10-вариант (ТошДУ, геол. фак)

1. Системани ечинг: $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 126, \\ x + y = 9. \end{cases}$ 21,6 , 12,6 } 4/5

2. Тенгламани ечинг: $\cos^2 x + 3\sin x = 3\operatorname{tg} 405°$.

3. Тенгсизликни ечинг: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}$.

4. Цилиндр ён сиртини ёйганда ҳосил бўлган тўртбурчак диагонали d га тенг, у асоси билан α бурчак ҳосил қилади Цилиндр ҳажмини топинг.

5. $y = \frac{x^2-2}{2x+3}$ нинг ўсиш (камайиш) соҳасини топинг.

11-вариант (ТошДУ, ФЭФ)

1. Тенгламани ечинг: $\log_{0,8}(x+1) = 16$.

2. Тенгсизликни ечинг: $(5-x)^2 > 5$.

3. Тенгламани ечинг: $\cos(3x - \pi) = -\sin 6x$.

4. $\vec{a} = (1;\ 1;\ 0)$ ва $\vec{b} = (0;\ 1;\ -1)$ векторлар орасидаги бурчакни топинг.

5. $y = x^2 + 2x$ нинг ўсиш (камайиш) соҳасини топинг.

12-вариант (ТошДУ, химфак)

1. Системани ечинг: $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$

2. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг; $y = \log_3(x^2 - 2x - 3)$.
3. Тенгламани ечинг: $3\cos^2 x - \sin^2 x - \sin^2 x = 0$.
4. Тўғри бурчакли учбурчакнинг периметри $2a$ бўлиб, ўткир бурчаги α бўлса, уни ўз гипотенузаси атрофида айлантирганда ҳосил бўлган айланиш фигурасининг ҳажмини топинг.
5. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ нинг ўсиш (камайиш) соҳаларини аниқланг.

13-вариант (СамДУ)

1. Пирамиданинг асоси томони a ва ўткир бурчаги β бўлган ромбдан иборат. Агар асосидаги икки ёқли бурчаги α бўлса, унинг ҳажмини топинг.
2. Ҳосила ёрдамида текшириб, графигини чизинг: $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.
3. Тенгламани ечинг: $\lg 10^{\lg x^2 - 21} - 2 = \lg x - \lg 25$.
4. Тенгламани ечинг: $\sin^2 x - 3\cos^2 x + 2\sin 2x = 1$.

14-вариант (СамДУ)

1. Учбурчакли мунтазам призманинг ҳажми V. Унинг бир учидан чиққан икки диагонали орасидаги бурчак α га тенг. Призма асоси томонини топинг.
2. Ҳосила ёрдамида текшириб, графигини чизинг: $y = x + \dfrac{4}{x^2}$.
3. Системани ечинг: $\begin{cases} 10^{3 - \lg(x-y)} = 250, \\ \sqrt{x-y} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x+y} = \dfrac{26-y}{\sqrt{x-y}}. \end{cases}$
4. Тенгламани ечинг: $\sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x = (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3$.

15-вариант (ТДПИ, матфак)

1. Соддалаштиринг: $\left[1 - \dfrac{a^2}{a^2+ab} + \dfrac{a^2-b^2}{a+b} - \dfrac{b^2}{ab+b^2}\right] \cdot \dfrac{ab}{a^2-b^2}$.
2. Тенгламани ечинг: $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.
3. Тенгламани ечинг: $\sin 2x + \sin 4x = 0$.
4. Системани ечинг: $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{2y}{3} = \dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{3}{2}x + 2y = 0. \end{cases}$
5. Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг баландлиги h га тенг. Ён ёғи асос текислиги билан β бурчак ҳосил қилади. Унинг ҳажми ва тўла сиртини ҳисобланг.

16-вариант (ТДПИ, факт. ОТД)

1. Соддалаштиринг: $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2x+2}{3x-3} + \dfrac{x-2}{1-x^2}$.
2. Тенгламанинг ечинг: $\dfrac{1}{5-\lg x} + \dfrac{2}{1+\lg x} = 1$.
3. Тенгсизликни ечинг: $3x - 4 - \dfrac{4(5x-9)}{15} > \dfrac{4}{5}\left(6 - \dfrac{x-2}{3}\right)$.
4. Тенгламани ечинг: $\sin x \sin 2x + \cos 3x = 0$.
5. Олтибурчакли мунтазам пирамиданинг баландлиги h, учидаги текис бурчаги 2α. Унинг ён сиртини топинг.

17-вариант (Сам ДПИ, матфак)

1. Қуйидаги ифодани соддалаштиринг:

$$\left(x-\frac{x+y}{x-y}+y\right):\left(1-\frac{2y+1}{x^2-y^2}\right).$$

2. Қуйидаги системани ечинг: $\begin{cases} x+10y=11, \\ x^2+4y^2=5 \end{cases}$

3. Қуйидаги тенгламани ечинг: $5^{x-2}-8\cdot 25^{x-4}+8=0.$

4. Қуйидаги айниятни исботлан : $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha.$

5. Тўртбурчакли мунтазам кесик пирамида катта асосининг томонлари a, кичик асосининг томонлари b га тенг. Асоси билан ён қирраси орасидаги ўткир бурчак α га тенг. Бу пирамиданинг ҳажмини ҳисобланг.

18-вариант (Сам ДПИ, матфак)

1. Қуйидаги $y=4x-\frac{x^3}{3}$ функцияни текширинг ва графигини чизинг.

2. Қуйидаги ифодани соддалаштиринг: $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$

3. Қуйидаги тенгламани ечинг: $\sqrt{\lg(1-x)}+5\cdot\lg(1-x)=6.$

4. $\sin 9x=2\sin 3x$ тенгламани ечинг.

5. Трапециянинг томонлари берилган. Трапециянинг бурчакларини топинг.

19-вариант (Фар ДПИ)

1. Электростанция қурилишида ғишт терувчилар бригадаси маълум вақтда 120 минг ғишт териши керак эди. Бригада ишни 4 кун илгари тугаллаган. Агар бригада норма бўйича 4 кунда қанча ғишт териши керак бўлса, 3 кунда шундан 5000 дона ортиқ тергани маълум бўлса, ҳар кунги ғишт териш нормаси қанча бўлган ва бригада ҳақиқатда кунига қанча ғишт терган?

2. Радиуси r бўлган доирага ташқи чизилган тўғри бурчакли трапециянинг энг кичик томони $\frac{3r}{2}$ га тенг, трапециянинг юзини топинг.

3. Тенгламани ечинг: $3\log_x a^2+\log_x x^3+\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x=2.$

4. Айниятни исботланг: $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\cdot\operatorname{ctg}2\alpha=-1.$

5. Соддалаштиринг: $\left[\frac{\sqrt{(z+2)^2-8z}}{z+2}+\frac{(z-1)^2+3}{z^3+8}\right]:\frac{z^3-3z+2}{z^3-2z^2-4z}.$

20-вариант (Фар ДПИ)

1. Тўғри призманинг асоси тенг ёнли учбурчак бўлиб, унинг асоси a га ва асосидаги бурчаги α га тенг. Агар призма ён сиртининг юзи призма асослари юзларининг йиғиндисига тенг бўлса, унинг ҳажмини топинг.

2. Теплоход дарё оқими томонига 48 км ва оқимга қарши шунча йўл босди. Ҳамма йўлга 5 соат вақт сарфлади. Дарё оқимининг тезлиги 5 км/соат бўлса, унинг турғун сувдаги тезлигини топинг.

3. Соддалаштиринг: $\left(\frac{x^{1/3}}{x^{2/3}-x^{1/3}+1}-\frac{3x^{1/3}-1}{x+1}\right)\cdot\frac{x+1}{x^{2/3}-1}+2(x^{1/3}+1)^{-1}.$

4. Тенгламани ечинг: $5^{\lg x}-3^{\lg x}=3^{\lg x+1}-5^{\lg x-1}.$

5. $y=0{,}5x^2+2x+2{,}5$ функцияни текшириб, графигини ясанг.

21-вариант (ЖДПИ)

1. Айниятни исботланг: $\dfrac{(1+\operatorname{tg}\alpha)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

2. Тенгсизликни ечинг: $0{,}81^x<\left(\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)^{x^2-45}$.

3. Тенгламани ечинг: $\dfrac{x-2}{x+3}+\dfrac{x-3}{x+2}+\dfrac{1+2x}{x^2+5x+6}=0$.

4. Ҳисобланг: $\int\limits_1^4(3-x)^3dx$.

5. Соддалаштиринг: $\dfrac{4\cdot\cos2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

22-вариант (ЖДПИ)

1. Айниятни исботланг. $\dfrac{(1-\operatorname{tg}\alpha)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

2. Тенгсизликни ечинг: $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^{2x^2-5x-3{,}5}>1{,}8$.

3. Тенгламани ечинг $\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x+2}{x+3}=\dfrac{3x+4}{6-x-x^2}$

4. Ҳисобланг: $\int\limits_{-3}^{0}\sqrt{1-x}dx$.

5. Соддалаштиринг: $(\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\sin2\alpha$.

23-вариант (Фар ДПИ)

1. Пирамиданинг асоси ўткир бурчаги α бўлган тўғри бурчакли учбурчак бўлиб, унинг b га тенг узунликлаги ҳамма қирралари β бурчак остида шу асос текислигига оғган Пирамиданинг ҳажмини топинг.

2. Соддалаштиринг: $\dfrac{1}{2(1+\sqrt{a})}+\dfrac{1}{2(1-\sqrt{a})}-\dfrac{a^2+2}{1-a^3}$.

3. Тенгламани ечинг: $0{,}125\cdot4^{2x-3}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.

4. Айниятни исботланг: $\left(\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sin\alpha+\cos\alpha}\right)^2=\dfrac{2}{\sin2\alpha}$.

5. Функциянинг критик нуқталарини топинг: $y=\ln(4x-x^2)$.

24-вариант (СамДАЙИ)

1. Тенгсизликни ечинг: $\log_8(x^2-4x+3)>1$.

2. Тенгламани ечинг: $5^{x-1}=10^x\cdot2^{-x}\cdot5^{x+1}$.

3. Тенгламани ечинг: $1-\sin5x=\left(\cos\dfrac{3x}{2}-\sin\dfrac{3x}{2}\right)^2$.

4. $y=x^5-x^3+x+2$ функциянинг $[-1;+1]$ даги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

5. Соддалаштиринг: $\dfrac{\sqrt{ab}\,\sqrt[4]{a}}{(a+2)\sqrt[4]{a^{-1}\cdot b^2}}-\dfrac{a^2+4}{a^2-4}$.

25-вариант (СамДАЙИ)

1. Тенгламани ечинг: $\lg 36 - \lg 4 + \lg 81 = \lg 3^{x^2 - 4x - 15}$.

2. Тенгламани ечинг: $1 + \sin x - \cos 5x - \sin 7x = 2\cos^2 \frac{3x}{2}$.

3. Тенгсизликни ечинг: $\log_{\frac{5-x^2}{16}}\left(\frac{24 - 2x - x^2}{14}\right) > 1$.

4. Функциянинг экстремумларини топинг: $y = x^2 - \ln(1 + 2x)$.

5. Соддалаштиринг: $\left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1}\right)^{-2} : (2 - x^2 - 2\sqrt{1-x^2})$.

26-вариант (ТИИМСХ)

1. $y = (x^2 - 2x)\ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$ функциянинг критик нуқталарини топинг.

2. Тенгламани ечинг: $x\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 4 = 0$.

3. Системани ечинг: $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50 \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 2 - \lg 5. \end{cases}$

4. Айниятни исботланг: $\frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{ctg}^3 3\alpha - 1} \cdot \frac{1 - \operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg} 3\alpha} = 1$.

5. Соддалаштиринг: $\frac{\left(4a^2 - \frac{1}{b^2}\right)^{2a}\left(b + \frac{1}{2a}\right)^{b-2a}}{\left(b^2 - \frac{1}{4a^2}\right)^{b}\left(2a - \frac{1}{b}\right)^{2a-b}}$.

27-вариант (ТИИМСХ)

1. R радиусли айланага ички чизилган тўғри бурчакли учбурчаклардан периметри энг катта бўлганининг ўткир бурчагини топинг.

2. Тенгламани ечинг: $\sqrt{3x + 7} - \sqrt{x + 1} = 2$.

3. Системани ечинг: $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 2, \\ \log_3(x + y) = 2. \end{cases}$

4. Тенгламани ечинг: $\sin 2x - \sin^2 x = 2\sin x - 4\cos x$.

5. Соддалаштиринг: $\left(\frac{1 + \sqrt{x+a}}{\sqrt{1+x+a}} - \frac{\sqrt{1+x+a}}{1 + \sqrt{x+a}}\right)^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{x+a}}{\sqrt{1+x+a}} - \frac{\sqrt{1+x+a}}{1 - \sqrt{x+a}}\right)^2$.

28-вариант (ТАЙИ)

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\left(\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1}\right)^{-1}\left(\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1}\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{a - 1}\,(\sqrt{a} + 1)^{-1}\right)^{-2} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1}.$$

2. Тенгламани ечинг: $\log_2 x \log_{2x} 4x = \frac{3}{2}$.

3 Айниятни исботланг: $\frac{\sin\alpha + \cos(2\beta - \alpha)}{\cos\alpha - \sin 2\beta - \alpha)} = \frac{1 + \sin 2\beta}{\cos 2\beta}$.

4. Тенгламани ечинг: $\sqrt{3x + 16} + \sqrt{x - 16} = 2\sqrt{x}$.

5. (0; —1) нуқтадан $y = x^2 + 1$ функция графигига ўтказилган уринманинг тенгламасини тузинг.

29-вариант (ТАЙИ)

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{a}{a-b} - \frac{a\sqrt{b}}{a+b}\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}+b} + \frac{\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}\right)\right) : \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

2. Тенгламани ечинг: $(x-2)\lg 25 = 5 - \frac{1}{2}\lg 5^{x-1}$.

3. Айниятни исботланг: $\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{ctg}2\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$.

4. Тенгламани ечинг: $x\sqrt{2x + 20} - x\sqrt{3x - 20} = 2x$.

5. Тенг ёнли учбурчакнинг учидаги бурчаги β га тенг. Унинг асосидаги бурчак биссектрисаси қарама-қарши томонни қандай нисбатда бўлади?

30-вариант (ТАЙИ)

1. Ифодани соддалаштиринг ($a > 1$):

$$\left(\frac{a-1}{\sqrt{a^2-1} - a + 1} + \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}\right)\left(1 - \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right).$$

2 Тенгламани ечинг: $\sin x + \sin 3x = 0$.

3. Тенгламани ечинг: $x^{\lg x} = 1000\,x^2$.

4. Дарё ёқасидаги A пунктдан сол оқизилди. 5 соат 20 мин дан сўнг ўша пунктдан моторли қайиқ жўнади ва 20 км йўл босгандан сўнг солга етиб олди. Агар қайиқ солдан соатига 12 км тез сузган бўлса, сол соатига неча километр юрган?

5. $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$ функциянинг $\left[-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right]$ даги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

31-вариант (ТАЙИ)

1. Ифодани соддалаштиринг: $\sqrt{\log_a b + \log_b a + 2} \cdot \log_{ab} a \cdot \sqrt{\log_a^3 b}$.

2. Тенгламани ечинг: $\cos 2x - 3 = 5\sin x$.

3. Тенгсизликни ечинг: $\sqrt{x} < x - 2$.

4. Қирраси b га тенг бўлган тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг асоси қандай бўлганда, унинг ҳажми энг катта бўлади?

5. $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{2x} + 2$ функциянинг $[-5; -1]$ оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

32-вариант (ТАЙИ)

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{9b}{(3-b)^2} - 1 : \left(\frac{b}{b-3} + \frac{12 \cdot b^2 - 9b}{27 - b^3} + \frac{9}{b^2 + 3b + 9}\right).$$

2. Тенгламалар системасини ечинг: $\begin{cases} 2^{\log_{\sqrt{2}} x} = y^4, \\ \log_2 x - \log_2 y = 1. \end{cases}$

3. Тенгламани ечинг: $\sin 3x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

4. $y = x^5 - x^3 + x + 2$ функциянинг $[-1; 1]$ оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

5. Бир-биридан a масофада бўлган A ва B пунктдан икки турист йўлга чиқди. Улар AB тўғри чизиқ бўйлаб бир-бирига томон юриб, c вақтдан сўнг учрашиши мумкин эди. Лекин улар шу тўғри чизиқ бўйлаб бир томонга юришди ва иккинчисини биринчиси b соатда қувиб етди. Уларнинг тезлигини топинг.

33-вариант (ТАЙИ)

1. Ифоданинг қийматини ҳисобланг:
$(5-2)\cdot 5 - 2\cdot(-4) - 5\cdot(+5)\cdot(-3) - 120\cdot(-2) - 3 - 2\cdot(4-10)$.

2. Ифоданинг қийматини ҳисобланг:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\cdot 5 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 0{,}001.$$

3. Ифоданинг қийматини ҳисобланг:

$$\left(8^{-\frac{1}{3}} + 4^{-\frac{1}{2}}\right) : 625^{-\frac{1}{4}}.$$

4. Тенгламани ечинг: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = \frac{x+4}{8} + 1$.

5. 90 сони 270 нинг неча процентини ташкил этади?

6. Тенгламани ечинг: $15x^2 - 4x - 11 = 0$.

7. Тенгсизликни ечинг: $\frac{2x-1}{x-1} < 0$.

8. $\cos x = \frac{1}{2}$ тенгламанинг $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ оралиқдаги илдизини топинг.

9. ABC тўғри бурчакли учбурчакда $|AB|$ гипотенуза узунлиги 5 га тенг. $\angle B = 30°$ бўлса, $|AC|$ ва $|BC|$ томонларни топинг.

10. $ABCD$ тўғри тўртбурчак, ABC мунгазам учбурчак ва R радиусли айлана берилган. $|AB| = 6$, $|AD| = 10$, $R = 3$ бўлса, шу фигуралар юзини топинг.

34-вариант (ТЭИС)

1. Тенгламани ечинг: $\sqrt{x^3+8} + \sqrt[4]{x^3+8} = 6$.

2. Тенгламани ечинг: $1 - \sin 15x = \left(\cos\frac{9x}{2} - \sin\frac{9x}{2}\right)^2$.

3. Айниятни исботланг: $4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{3\alpha}{2}$.

4. Тўғри тўртбурчак диагоналлари орасидаги бурчак α. Тўғри тўртбурчак қўшни томонларининг ҳар бирининг ўз атрофида айланишидан ҳосил бўлган фигуралар ҳажмлари нисбатини топинг.

5-я*. $f(x) = \sin 2x - x$ функциянинг $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ даги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

---

* Мактабда янги программа бўйича ўқиган абитуриентлар учун тузилган мисоллар.

5-э*. $q < 1$ каби махражли чексиз геометрик прогрессия ҳадлари йиғиндиси 9 га, квадратлари йиғиндиси 40,5 га тенг. Геометрик прогрессия биринчи ҳади ва маҳражини топинг.

35-вариант (ТЭИС)

1. Тенгламани ечинг: $2x^2 + x + \sqrt{2x^2+x+1} = 5$.
2. Тенгламани ечинг: $\cos 4x + \cos x = \cos 3x + \cos 2x$.
3. Ўқ кесими тенг томонли учбурчак бўлган конусга ички шар ясалган. Шарнинг ҳажми $\frac{32\pi}{3}$ см³ бўлса, конус ҳажмини топинг.
4. Тенгламани ечинг: $\log_x^2 \sqrt{5} - \log_x 5\sqrt{5} + 1{,}25 = 0$.

5-я. $s(t) = 2t^3 - 3t + 4$ каби ҳаракат тенгламасига эга бўлган моддий нуқтанинг $t = 3$ даги тезлиги ва тезланишини топинг. ([t]-мин, [s]-метр.)

5-э. Тенгсизликни ечинг: $\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3} > 0$.

36-вариант (ТИНХ)

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$2a + \sqrt{a^2-1}\cdot\left(\frac{a^2}{a^2-1}+1\right) - 1 : \frac{a + (a^2-1)^{\frac{1}{2}}}{a(a^2-1)^{-\frac{1}{2}}+1}.$$

2. Конусга шар ички чизилган. Конус ясовчиси l га тенг ва у асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилади. Шар ҳажмини ва сиртининг юзини топинг.
3. $y = \sqrt{\lg(x^2 - 6x + 6)}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.
4. Тенгламани ечинг: $(1 + \cos 4x)\sin 4x = \cos^2 2x$.
5. $y = x^4 - 2x^2 + 5$ функциянинг [0; 2] оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

37-вариант (ТИНХ)

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{(a-1)^{\frac{1}{2}} - (a+1)^{\frac{1}{2}}}{(a+1)^{-\frac{1}{2}} - (a-1)^{-\frac{1}{2}}} : \frac{(a+1)^{\frac{1}{2}}}{(a-1)(a+1)^{\frac{1}{2}} - (a+1)(a-1)^{\frac{1}{2}}} - (1-a^2).$$

2. Тенгламани ечинг: $1 - \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) = 0$.
3. Тенгсизликни ечинг: $\log_5(x^2 + x - 1) > 1$.
4. Юзи 16 дм² бўлган тўғри тўртбурчаклардан периметри энг кичигининг ўлчамларини топинг.
5. $\vec{a} = \left(6;\ -8;\ 7\frac{1}{2}\right)$ векторга коллениар бўлган $\vec{b}$ вектор Oz ўқи билан ўткир бурчак ташкил этади. $|\vec{b}| = 50$ бўлса, унинг координаталарини топинг.

---

* Мактабда эски программа бўйича ўқиган абитуриенглар учун тузилган мисоллар.

38-вариант (ТошТУ)

1. Тенгламани ечинг: $3\log_{xa^2} x + \frac{1}{2}\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x = 2.$

2. Тенгламани ечинг: $1 + \cos 2x - \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0.$

3. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг асос томони 2 га, баландлиги $\sqrt{2}$ га тенг. SA қиррадан асоснинг BD диагоналигача бўлган масофани топинг.

4. $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$ функцияни текшириб, графигини чизинг.

5. $y = \sqrt{\frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^2 - 5x + 4}}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

39-вариант (ТошТУ)

1. Системани ечинг: $\begin{cases} x + y + xy = -11, \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$

2. Айниятни исботланг: $\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta) + \operatorname{tg}^2(\alpha-\beta) = 2\frac{\sin^2 2\alpha + \sin^2 2\beta}{(\cos 2\alpha + \cos 2\beta)^2}.$

3. Ҳажми 320 м³ бўлган конуснинг баландлиги 15 м бўлса, унинг тўла сирти юзини топинг.

4. $f(x) = \sin x + \cos^2 x$ нинг $x_0 = \frac{\pi}{6}$ нуқтадаги ҳосиласини аниқланг.

5. $y = \sqrt{\log^2_{0,5}(x-3) - 1}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

40-вариант (ТИТЛП)

1. Колхоз ерининг $\frac{2}{3}$ қисмини икки хил қувватли трактор биргаликда 4 кунда ҳайдайди. Агар колхоз ерини биринчи тракторнинг ёлғиз ўзи иккинчи тракторга қараганда 5 кун тез ҳайдаб бўлиши маълум бўлса, шу ерни ҳар бир трактор неча кунда ҳайдаб бўларди?

2. Тенгламани ечинг: $\lg^2 x - \lg x^3 = \lg^2 5 - 4$

3. Тенгламани ечинг: $3\cos^2 x = 4\sin x\cos x - \sin^2 x.$

4. Конус ясовчиси l, ўқ кесимининг учидаги бурчак φ бўлса, унинг асоси юзини ва ҳажмини топинг.

5. $y = x^2 - \frac{x^3}{3}$ нинг [0; 3] даги энг катта (кичик) қийматини аниқланг.

41-вариант (ТИТЛП)

1. Лимитни ҳисобланг: $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}.$

2. $y = (x-1)^3 - 3(x-1)$ функцияни текширинг ва графигини ясанг.

3. Тенгламани ечинг: $2 \cdot 16^x - 2^{4x} - 4^{2x-2} = 15.$

4. Айниятни исботланг: $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}.$

5. Учбурчакли мунтазам пирамида асосининг томони a га, баландлиги H га тенг. Унинг ён қирраси ва асос текислиги орасидаги бурчакни аниқланг.

42-вариант (ТАШИИТ)

1. Ён томони a бўлган энг катта юзли тенг ёнли учбурчакнинг асоси узунлигини топинг.

2. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{a-4b}{a+(ab)^{\frac{1}{2}}-6b}-\frac{a-9b}{a+6(ab)^{\frac{1}{2}}+9b}\right)\cdot\frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-3b^{-\frac{1}{2}}}.$$

3. Тенгламани ечинг: $\left(\left(\sqrt[6]{27}\right)^{\frac{x}{4}}-\sqrt{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{4}+\sqrt{\frac{x}{3}}}=\sqrt[4]{3^7}.$

4. $y=\sqrt{\log_{0,2}\frac{x+2}{x-1}-1}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

5. Тенгламани ечинг: $\cos x-2\sin x+1=0.$

43-вариант (ТАШИИТ)

1. 36 сонини шундай икки мусбат қўшилувчиларга ажратингки, улар нинг квадратлари йиғиндиси энг кичик бўлсин

2. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(x^2-x-2y-\frac{y^2}{x}\right):\left(\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x+y}\right)\right):$$
$$:\left(\frac{x^3+x^2+xy+x^2y}{x^2-y^2}+\frac{y}{x-y}\right).$$

3. Тенгламани ечинг: $\log_4(x+12)\log_x 2=1.$

4. Тенгламани ечинг: $3\cos^2x-\sin^2x-\sin 2x=0.$

5. Ифодани кўпайтмага келтиринг: $1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}.$

44-вариант (ТАШИИТ)

1984 йилдан бошлаб Тошкент Темир Йўл Транспорти инженерлари институтининг кундузги бўлимига кирувчилар учун тузилган вариантлар ўнта масала ва мисолдан иборат бўлиб, унинг ечими электрон ҳисоблаш машинасида текширилиб, абитуриент билими баҳоланди. Вариантнинг нисбатан содда бўлган барча мисол ва масалаларини яхши тайёрланган абитуриент белгиланган вақтда бемалол ечиб улгуради.

1. Ифодани соддалаштиринг ва $x_0=\sqrt{5}$, $y_0=\sqrt{3}$ да ҳисобланг:

$$\frac{x^3-x^2y+xy^2}{x^3+y^3}+\left(\frac{x-y}{x}\right)^{-1}.$$

2. Соддалаштиринг ва натижани $x_0=\frac{\pi}{6}$ да ҳисобланг:

$$\frac{\cos x+\cos 5x}{\cos 3x}.$$

3. Тенгламани ечинг: $\log_{3+x}4=2.$

4. Ушбу системани ечиб, уни қаноатлантирувчи энг катта y ни аниқланг: $\begin{cases}2x+y=4,\\ x^2+3y=13,\end{cases}$

5. Қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг бутун қийматини изланг: $\frac{1}{x+3} < \frac{1}{x+5}$.

6 $d = 2$, $S_{10} = 120$ эканлиги маълум бўлган арифметик прогрессиянинг биринчи ҳадини топинг.

7. Тўғри бурчакли ABC учбурчакнинг бир катети $a = 12$ м ва $\sin\hat{A} = 0{,}8$ эканлиги маълум. Унинг b катетини топинг.

8. Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг $b_3 = 12$, $b_4 = 8$ ҳадларига кўра, унинг йиғиндисини ҳисобланг.

9. Радиуси 5 см, ҳажми 100 см³ бўлган конус ясовчисини аниқланг.

10. Тенгламани ечинг: $4\cos^2 x = 3 - \cos x$.

2-§. Оғзаки имтиҳон

1. Оғзаки имтиҳон ҳақида. Оғзаки имтиҳон билетлари ҳам олий ўқув юртларига кирувчилар учун СССР Олий ва махсус ўрта таълим министрлиги томонидан тасдиқланган математикадан кириш имтиҳонлари программаси асосида тузилади. Имтиҳон билетлари одатда 2 та назарий савол (битта алгебра ва анализ асосларидан, битта геометриядан) ва битта мисол (масала) дан ташкил топади. Имтиҳон даврида абитуриентнинг:

а) программа материалидан ўрин олган таъриф ва теоремаларни аниқ билиши, бу теоремаларни исботлай олиши;

б) оғзаки ва ёзма жавобларида математик фикрларини қисқа, тўғри ва аниқ ифодалай билиши ва унга хос символлардан фойдалана билиши;

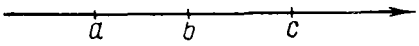
в) программа ҳажмидаги математик билим ва малакаларни пухта эгаллаган бўлиши ва улардан мисол ва масала ечишда фойдалана олиши синаб кўрилади.

Абитуриент билетдаги савол ва масалаларга жавоб тайёрлаши учун етарли вақт берилади. У бу вақтдан тўғри фойдаланиши, шошилмаслиги, ҳаттоки билетдаги бирорта савол ва масалага қониқарли жавоб эслай олмаганида ҳам ҳаяжонланмаслиги лозим. Чунки имтиҳон олувчилар бу вақтда ҳам қўшимча саволлар билан унинг билимини тўғри аниқлаб, аниқ баҳолай оладилар. Саволларга тўғри, аниқ, тартибли (тутилмасдан) жавоб бериш учун тайёргарлик соатида имтиҳон комиссияси берган варақага билетидаги барча савол ва мисоллар жавобини ёзиб олиш маъқул. Тайёрланган жавобда сўралаётган *таъриф ва тушунчалар ҳамда барча хоссалари*, *теоремалар* ва улар *натижаларини* тўғри баён қилишга интилиши, ўз фикрларини изоҳловчи *мисоллар келтириши*, зарур чизмаларни *аниқ чизиши*, мисол (ёки масала) ни *ўринли таҳлил* билан тўғри ҳал этиши керак.

Шуни яна таъкидлаш керакки, кимки кириш имтиҳонлари давригача назарий тайёрланиш чоғларидаёқ кўп мисол ва масала ечиб, билимини мустаҳкамлаган, малакасини оширган бўлса, имтиҳон вақтида юқори баҳоларга жавоб бера олади.

2. Аъло баҳога тайёрланган жавоб намунаси. Абитуриентнинг ушбу билетга тайёрлаган ёзма жавобни келтирамиз.

Билет 15



213-шакл

1. Сонли тенгсизликлар ва уларнинг хоссалари.

2. Шар бўлаклари ва уларнинг ҳажми.

3. ABC учбурчакда BD ва AE баландлик узунликлари 11,2 ва 12 см. E нуқта BC томонни $|BE|:|EC|=5:9$ нисбатда бўлади. $|AC|$ ни топинг.

Ёзма жавоб:

1. Сонли тенгсизликлар ва уларнинг хоссалари. Маълумки, сонлар ўқидаги ҳар бир b сон ўзидан олдин келувчи a сондан катта, кейин келувчи c сондан кичикдир (213-шакл). Сонлар орасидаги бундай муносабатлар қуйидагича ифодаланади:

$$a<b,\ b<c(b>a,\ c>b) \text{ ёки } a<b<c.$$

Бу тенгсизликлар *қатъий тенгсизликлар* деб аталиб, сўнггиси эса *қўш тенгсизлик* дейилади.

1-натижа. Ҳар қандай мусбат сон нолдан катта, манфий сон нолдан кичикдир.

Теорема. 1) *$a<b$ бўлса $a-b$ айирма манфийдир*: $a-b<0$;
2) *$a>b$ бўлса, $a-b$ айирма мусбатдир*: $a-b>0$.

Ҳақиқатан ҳам $a<b$ бўлса, шундай ягона манфий c сони топиладики, $a=b+c$ тенглик бажарилади, яъни $a-b=c<0$. Иккинчи тасдиқ ҳам шу каби исботланади.▶

Агар $a-b$ айирма манфий (мусбат) бўлмаса, у ҳолда $a\geqslant b(a\leqslant b)$ каби белгиланади ва бу ифода *ноқатъий тенгсизлик* деб аталади.

Тенгсизликнинг хоссалари

1) $a>b\Rightarrow b<a$;

2) $a<b,\ b<c\Rightarrow a<c$;

3) $a<b,\ c\in\mathbf{R}\Rightarrow a+c<b+c$;

3 а) $a+c<b\Rightarrow a<b-c$;

4) $a<b, c<d\Rightarrow a+c<b+d$;

5) $a<b,\ c>0\Rightarrow ac<bc,\ \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$;

6) $a<b, c<0\Rightarrow ac>bc,\ \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$;

7) $0<a<b,\ 0<c<d\Rightarrow ac<bd$;

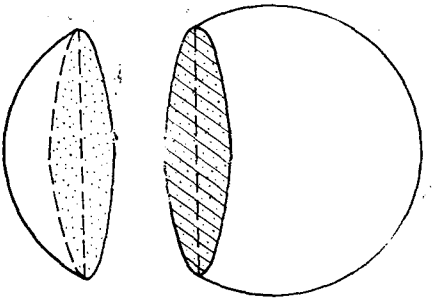
8) $0<a<b\Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$;

8 а) $0<a<1\Rightarrow \frac{1}{a}>1$.

9) $0<a<b\Rightarrow a^n<b^n,\ n\in\mathbf{N}$;

10) $0<a<b\Rightarrow \sqrt[n]{a}<\sqrt[b]{b},\ n\in\mathbf{N}$.

Шу хоссалардан ихтиёрий бирининг, масалан, 5-хоссанинг исботини келтирамиз: $a-b$ манфий, c мусбат, $(a-b)c=ac-bc$



214- шакл.

ҳам манфий, демак, $ac < bc$ экан. Шунингдек, $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$ ҳам манфий, демак, $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

2-натижа. Турли маъноли тенгсизликларни ҳадма-ҳад айирганда натижа биринчи тенгсизлик белгиси каби боғланади:

1) $$\begin{array}{r} -\ a < b \\ c > d \\ \hline a-c < b-d \end{array}$$ 2) $$\begin{array}{r} -\ c > d \\ a < b \\ \hline c-a > d-b \end{array}$$

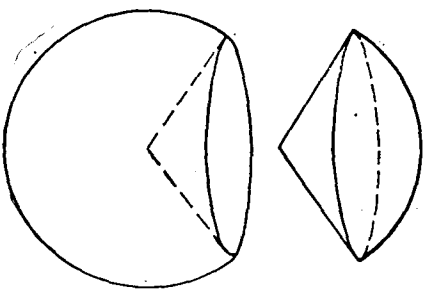
Ҳақиқатан ҳам, $a - b < 0$, $c - d > 0$ бўлгани учун, $a - b$ манфий сонга $-(c - d)$ манфий сон қўшилса, $a - b - (c - d)$ манфийдир:

$$a - b - (c - d) < 0 \Rightarrow a - c < b - d.$$

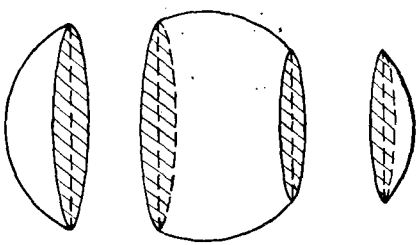
Иккинчи тасдиқ ҳам шундай исботланади.

2. *Шар бўлаклари ва уларнинг ҳажми.* Шарнинг текислик билан кесилган бўлаклари *шар сегменти*, кесим юзи унинг *асоси* деб айтилади (214-шакл). Ярим шардан кичик шар сегментини учи шар марказида бўлиб, асоси шу сегментнинг ҳам асоси бўлган конус билан тўлдирилса, натижада ҳосил бўлган фигура *шар секторн* деб аталади (215-шакл). Шарнинг уни кесиб ўтувчи икки параллел текислик орасидаги қисми *шар қатлами* дейилади (216-шакл).

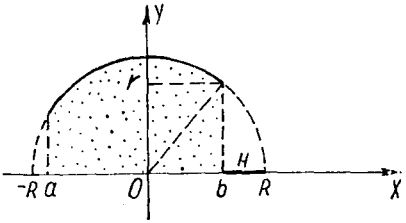
Шар маркази координата бошида бўлса, у Oxy текислиги билан тенгламаси $x^2 + y^2 = R^2$ бўлган айлана бўйлаб кесиша-



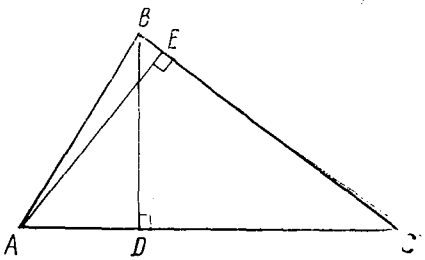
215- шакл.



216- шакл.



217- шакл.



218- шакл

ди. $x = a$, $x = b$ текисликлари билан кесишдан ҳосил бўлган шар қатлами ушбу

$$y = +\sqrt{R^2 - x^2}, \quad a \leqslant x \leqslant b$$

функциянинг графиги билан ҳосил қилинган эгри чизиқли трапециянинг Ox ўқи атрофида айлантирилишидан вужудга келадиган айланиш фигураси бўлиб, унинг ҳажми

$$V_{\text{шар қатл.}} = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b (R^2 - x^2) dx = \pi R^2 (b - a) - \pi \frac{b^3 - a^3}{3} \quad (1)$$

каби аниқланади (217-шакл). Шу жумладан $a = R - H$, $b = R$ деб олинса, H баландликка эга бўлган шар сегментининг ҳажмини топиш формуласи $V_{\text{сегм.}} = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right)$ келиб чиқади. Шар сектори ҳажмини топиш учун шар сегментига баландлиги $h = R - H$, радиуси $r = \sqrt{R^2 - (R - H)^2}$ бўлган конус ҳажмини қўшиш керак:

$$V_{\text{шар сект.}} = V_{\text{сегм}} + V_{\text{конус}} = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right) + \\ + \frac{1}{3} \pi h r^2 = \frac{2}{3} \pi H R^2. \quad (2)$$

Натижа. Агар $a = -R$, $b = R$ деб олинса, (1) дан шарнинг $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ каби ҳажмини топиш формуласи келиб чиқади.

3. Масалани ечиш. $|AC| = x$ бўлсин (218-шакл). $\triangle EAC$ дан Пифагор теоремасига кўра $|EC| = \sqrt{|AC|^2 - |AE|^2} = \sqrt{x^2 - 144}$. Масала шартидан $|BE| : |EC| = 5 : 9$ бўлгани учун $|BC| = |BE| + |EC| = \frac{14}{9} |EC| = \frac{14}{9} \sqrt{x^2 - 144}$. ABC учбурчакнинг юзи:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |BD| \cdot |AC| = \frac{1}{2} |AE| \cdot |BC|$$

бўлгани учун $|BD|\cdot|AC|=|AE|\cdot|BC|\Rightarrow 11{,}2x=$
$=12\cdot\frac{14}{9}\sqrt{x^2-144}\Rightarrow 3x=5\sqrt{x^2-144}\Rightarrow x=|AC|=15.$

Жавоб: 15 см.

3. Оғзаки имтиҳон билетларидан намуналар

1-билет. 1) Кўрсаткичли функция ва унинг хоссалари.
2) Косинуслар теоремаси.
3) $|\cos 2x|=\frac{1}{2}$ тенгламани ечинг.

2-билет. 1) Тригонометрик функциялар. $y=\cos x$ функциянинг хоссалари ва графиги.
2) Векторларнинг скаляр кўпайтмаси.
3) Тенг ёнли трапециянинг диагонали a см бўлиб, асос билан 45° бурчак ҳосил қилади. Унинг юзини топинг.

3-билет. 1) Виет теоремаси.
2) Текисликдаги тўғри чизиқларнинг параллеллик шартлари.
3) $y=\sqrt[3]{x^2}$ функция экстремумларини топинг.

4-билет 1) Кўпайтманинг логарифми.
2) Айланага ички чизилган бурчак.
3) $y=2-\frac{x}{2}-x^2$ функция графигининг Ox ўқи билан кесишган нуқтасидан ўтувчи уринма тенгламаси (чизмаси) ни топинг.

5-билет. 1) Иррационал сон ҳақида тушунча.
2) Конус сиртининг юзи ва ҳажми.
3) Лимитни ҳисобланг: $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

6-билет. 1) Сонли тенгсизликнинг хоссалари.
2) Тўғри чизиқ билан текисликнинг ва текислик билан текисликнинг ўзаро параллеллик белгилари.
3) $3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+4\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ ни ҳисобланг.

7-билет. 1) $y=kx+b$ функциянинг хоссалари ва графиги.
2) Синуслар теоремаси.
3) $\frac{2}{3^x-1}<1$ тенгсизликни ечинг.

8-билет 1) Арифметик прогрессия ва унинг n-ҳади. Биринчи n та ҳадлари йиғиндиси.
2) Учбурчакка ташқи чизилган айлана.
3) $A(1;\ 4;\ -3)$, $B(4;\ 2;\ 1)$ ва $C(0;\ -1;\ -2)$ учли учбурчакнинг $\varphi=\angle ACB$ бурчагини топинг.

9-билет. 1) $y=\log_a x$ функциянинг хоссалари ва графиги.
2) Айланага ўтказилган уринманинг хоссалари.
3) $\left|\frac{2}{x-4}\right|>1$ тенгсизликни ечинг.

10-билет. 1) $y=a^x$ функциянинг хоссалари, графиги ва ҳосиласи.
2) Уч перпендикуляр ҳақидаги теорема
3) $b_k=729$, $q=\frac{2}{3}$ бўлса, геометрик прогрессиянинг 8-ҳадини топинг.

Билет асосида бўлаётган савол-жавоб вақтида имтиҳон олувчи, лозим бўлганда, абитуриентга яна қўшимча савол ва мисоллар бериши мумкин.

4. Оғзаки имтиҳон қўшимча саволлари ва масалаларидан намуналар

Алгебра ва анализ асослари

1. Ҳақиқий соннинг модули деб нимага айтилади? $|-x|=\sqrt{x^2}$ тенглик ўринлими? $x=\sqrt{|-x|^2}$ тенглик-чи? $|x^{15}|=|x|^{15}$ тенглик-чи? $x>0$ (ёки $x<0$) бўлганда $x+2|x|$, $|x|-x$, $x|x|$, $\frac{x}{|x|}$ лар нимага тенг?

2. Сонлар ўқида $|x-2|<5$, $|x|=2$, $|x-3|>2$, $|x-4|<4$ каби муносабатларни қаноатлантирувчи x нуқталар тўпламини топинг.

3. Қуйидаги тенгсизликларни ечинг: $|x|>2$; $|x+1|\leqslant 5$; $|x-2|^3<27$; $|x-6|>6$; $|x|-x^2\leqslant 0$; $||x|-1|>1$; $5+|x-1|\geqslant 0$; $\left|\frac{1}{2}x^2-1\right|<2$; $|x-2|+x-2\geqslant 0$; $3|x|-x\leqslant 0$; $x+|x|+x^2\geqslant 0$.

4. Ҳисобланг: а) $(a^2b^3)^3$; б) $(3an^3)^3$; в) $(p^{10}q^{-20})^3$; г) $\frac{(a^2b^4)^5}{(a^3b^2)^3}$.

5. Ушбу касрларни қисқартиринг:

1) $\frac{10m^5n^{20}}{(m^2n^5)^2}$; 2) $\frac{4a^{n-m}\sqrt{b^n}}{\sqrt[3]{b^{n-m}a^m}}$; 3) $\left(\frac{abc}{m^2n}\right)^5:\left(\frac{a^2b^2}{m^3n^2}\right)^3$;

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^2:\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^2$; 5) $\sqrt{\frac{100^3n^{m+1}}{10^4n^{m-1}}}$; 6) $\frac{a^nb^{m+n}}{a^{n+1}b^{m-n}}$;

7) $\frac{a^7-a^{10}}{a^{10}-a^{13}}$; 8) $\frac{x^2-3x^7}{x^n-3x^{n+5}}$; 9) $\sqrt{\frac{27c^3d^5}{3c^{-2}d^{-3}}\sqrt{\frac{a^{40}\sqrt{a^{80}b^{40}}}{\sqrt[3]{a^{90}\sqrt{b^{360}}}}}}$;

10) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}m^{-3}:(8m^2)$; 11) $\left(\frac{a^{-2}}{b^{-2}}\right)^{-20}:\left(\frac{a^{20}}{b^{20}}\right)^2$; 12) $\left(-\left(-\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{nm}}\right)^{-3}\right)^{-1}$.

6. Ушбу кўпҳадни $x-2$ га бўлинг, бўлинмани ва қолдиқни топинг:

1) $x^4+5x^3-16x^2-8x-24$; 3) $x^5+5x^4-4x^3-16x^2-32x+48$;
2) $x^3+12x^2+9x+11$; 4) x^3+x^2+x+1.

7. $a<0$ эканлиги маълум бўлган ҳолда, ушбу ифодада илдиз белгиси олдига чиқариш амалини бажаринг:

а) $\sqrt[4]{32a^4x}$; б) $\sqrt[6]{16a^{18}x}$; в) $\sqrt{x^2a^2}$; г) $\sqrt[3]{xa^6}$.

8. Соддалаштиринг: а) $\sqrt[12]{x^8}$; б) $\sqrt[6]{a^4}$; в) $\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}$, г) $\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}$.

9. Касрнинг махражини рационаллаштиринг:

а) $\frac{15}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{ab}{\sqrt{ab}}$; в) $\frac{ab}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; г) $\frac{8-\sqrt{3}}{8+\sqrt{3}}$; д) $\frac{4-2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}$.

10. Таққосланг: а) $\sqrt{3}$ ва $\sqrt[4]{4}$; б) $\sqrt{3\sqrt{3}}$ ва $\sqrt[3]{5}$; в) $\sqrt[3]{10}$ ва $\sqrt[10]{3}$.

11. Қуйидаги икки тенглама ўзаро тенг кучлими?

1) $x^2-1=0$ ва $(x-1)(x+1)=0$; 2) $\frac{\sin x}{x}=0$ ва $\sin x=0$;

3) $(x-1)(x+5)=0$ ва $(2x-2)(x+5)^2=0$; 4) $x^2+2x-3=0$ ва $(x-1)^2=0$;

5) $x-5=10$ ва $x-2+\frac{1}{x-15}=\frac{1}{x-15}+13$;

6) $(x-3)^2=0$ ва $\frac{x^2-5x+6}{x-2}=0$.

12. Ҳар доим $ac>bc$ дан $a>b$ тенгсизлик келиб чиқадими? $a^2>b^2$ дан (ёки $a^3>b^3$ дан) $a>b$ тенгсизлиги келиб чиқиши тўғрими? $a^{2n}>b^{2n}$ дан-чи ($n\in N$)?

13. $a\cdot b>0$ бўлса, a ва b нинг ишораси ҳақида нима дейиш мумкин? $\frac{a}{b}>0$ бўлганда-чи?

14. Қачон иккита бир номаълумли чизиқли тенгсизликлар ўзаро тенг кучли дейилади? Тенгсизликларни ечинг:

1) $ax>10$; 2) $(m+2)x<10$; 3) $\frac{2x-4}{-3}<0$;

4) $\frac{x+7}{(x-1)^2}>0$; 5) $(x+2)^2(x-5)<0$; 6) $|x|-1>x$;

7) $|8x-3|>2$; 8) $(6x-1)^2\leqslant 1$; 9) $(10x-10)^2\geqslant 100$;

10) $||x|+1|+x>0$; 11) $(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+10)\geqslant 0$.

15. Ушбу система ечимини ёзинг (сонлар ўқида тасвирланг):

а) $\begin{cases} x>-2, \\ x>4, \\ x>3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x<-8, \\ x<-\sqrt{5}, \\ x<-7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x>-20, \\ x\leqslant 40; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x<1, \\ x>4; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x\leqslant -3, \\ -x<-5, \end{cases}$

16. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} \frac{x+2}{3}<x+4, \\ 3x-1>3+\frac{x}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x+4}{5}<\frac{x-1}{2}+1, \\ \frac{x}{2}+5<x-\frac{7}{8}(x-1); \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2+\frac{2x-1}{3}>\frac{x+1}{4}, \\ x>\frac{7}{8}+\frac{3x-4}{4}. \end{cases}$

17. Чизиқли тенгсизликлар системасини умумий кўринишда (ёки битта мисол) ёзиб беринг. Қуйидаги системаларни ечинг:

а) $\begin{cases} 3x>5x+7, \\ 5x+4<3x+2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-5>3x-1, \\ 5x-10>10x-7, \\ 9x+5>12x-8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{x+1}{2}<3x, \\ \frac{x-2}{3}<5, \\ -2<x<10. \end{cases}$

18. Ушбу тенгсизликларни ечинг:

а) $\frac{5-2x}{8+4x}>0$; б) $\frac{x^2(3-x)}{x+2}>0$; в) $\frac{7-x}{6-x}>1$; г) $\frac{4x-1}{x+6}>1$;

д) $1 < \frac{x+1}{x} < 2$; е) $1 < \left|\frac{1}{x}\right| < 2$; ж) $(|x|-2)(x-2) > 0$;

з) $(6+x)(4+x)x^2 > 0$; и) $\frac{2}{x+2} < 1$; к) $\frac{12}{x+3} < 0$.

19. Қандай функция даврий функция дейилади? Функциянинг даври деб нимага айтилади? Даврий функциялар графиги қандай характерли хоссага эга бўлади?

20. Ушбу функциялар даврийми? Агар даврий бўлса, уларнинг даврини топинг:

а) $y = 3^{|\sin x|}$; б) $y = \sqrt{\sin x |\cos x|}$; в) $y = |\sin x| + |\cos x|$;

г) $y = e^{x \sin x}$; д) $y = \sin x^2$; е) $y = 2$;

ж) $y = e^{\sin^2 x}$; з) $y = \frac{x}{|x|}$; и) $y = \sin^3 \omega x$;

к) $y = \sqrt{\lg(10 \sin x)}$; л) $y = \sqrt{\lg \cos \pi x}$; м) $y = 2^{1+\sqrt{\lg \sin \pi x}}$; н) $y = \operatorname{tg}^2 \omega x$.

21. Функциянинг илдизи деб нимага айтилади? Функциянинг илдизи графикда қандай тасвирланади?

22. Қандай функция жуфт (тоқ) функция деб айтилади? Жуфт (тоқ) функциялар графиги координаталар текислигида қандай жойлашади? Агар бирор жуфт f функцияга тоқ φ функцияни қўшсак (кўпайтирсак, бўлсак) натижа $f + \varphi \left(f \cdot \varphi, \frac{f}{\varphi}\right)$ функция яна жуфт (тоқ) бўладими? Агар ҳар иккиси жуфт (тоқ) бўлса-чи? Мисоллар келтиринг.

23. Қандай функция тескариланувчи функция дейилади? $y = f(x)$ функцияга тескари функцияни ҳосил қилиш учун қандай алмаштириш бажариш керак? Мисоллар келтиринг.

24. Қуйидаги функцияларга тескари функцияларни топинг: а) $y = kx + b$;

б) $y = x^2 - 1$; в) $y = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$; г) $y = \sin(3x - 1)$; д) $y = 5^{2x-1}$;

е) $y = \log_3 4x + 1$; ж) $y = \arcsin(2x - 1) + \pi$. з) $y = 2e^{\operatorname{tg} 3x}$.

25. Ушбу функциялар ичидан ўзаро бир-бирига тескари бўлган функцияларни кўрсатинг: а) $x^2 + (y-2)^2 = 4$; б) $6x^2 + 5y = 1$; в) $\sin^2 x + \frac{1}{y} = 0$; $xy + x + y = 0$.

26. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг: а) $y = x\sqrt{4 - x^2}$; б) $y = x^2 + \frac{1}{\sin 2x}$; в) $y = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$; г) $y = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$;

д) $y = \sqrt{x(1-x)}$; е) $y = \log_x^2(x+1)$.

27. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ функциянинг $f(0)$; $f(-1)$; $f(-3)$; $f\left(\frac{1}{a}\right)$; $\frac{1}{f(a)}$; $f(-a)$; $-f(a)$; $f(a^2)$; $f^2(a)$; $f^{-1}(0)$ қийматларини топинг. Қачон $f(x) = 0$ бўлади? Қачон $f^{-1}(x) = 0$ бўлади?

28. Ушбу функцияларнинг ўзгариш соҳасини топинг:

а) $y = \frac{x+4}{x-2}$; б) $y = x^2 - 5x + 6$. в) $y = |x - 1| - 1$; г) $y = \frac{-2}{\sqrt{x}}$.

29. Ушбу функцияларнинг жуфт-тоқлигини аниқланг: а) $y = 3x^3 + x^5$;

б) $y = 3^x + 3^{-x} + 3$; в) $y = \sqrt{20 - x + x^2} + \sqrt{20 + x + x^2}$; г) $y = \frac{x}{\sin x}$.

30. Қуйидаги функциялар графигини ясанг: а) $y = x^2 + 4x + 5$; б) $y = |x^2 + 4x - 5|$; в) $y = x^2 + 4|x| - 5$; г) $y = x^3 - 3x$.

31. Тенглама график усулда қандай ечилади? Ушбу тенгламаларни график усулда ечинг:

1) $x^2 = -4x + 5$; 2) $x^3 = 2x + 1$; 3) $x^4 = 2x^2 - 2$;
4) $x^{-2} = x^2$; 5) $x^{-1} = x^2 + 1$.

32. Тенгсизлик график усулда қандай ечилади? Қуйидаги тенгсизликларни график усулда ечинг:

1) $x^2 < 5x - 4$; 2) $x^3 < 2x - 1$; 3) $x^3 > 2x + 1$; 4) $x^2 < 6 - 5x$.

33. а) $ax^2+bx+c=0$; б) $ax^2+2kx+c = 0$; в) $ax^2+ bx = 0$; г) $ax^2 + c = 0$ тенгламалар a, b ва c нинг қандай қийматларида ечимга эга эканлигини таҳлил қилинг.

34. Келтирилган $x^2 + px + q = 0$ ва $x^2 + 2px + q = 0$ квадрат тенглама илдизларини ифодаланг.

35. Ушбу (параметрли) квадрат тенгламани ечинг:

1) $8ax + 20a^2 - x^2 = 0$; 2) $x^2 - 4|a|bx + 45a^2b^2 = 0$;
3) $x^2 + 6|a|x = 40a^2$; 4) $x^2 + 10ax = 11a^2$;
5) $ax - 20 = \frac{21}{xa}$; 6) $x^2 - 17a^4 = 16a^2x$.

36. Тенгламани ечинг:

1) $\frac{x-a}{a} = \frac{a}{x-a}$; 2) $\frac{x-b}{a-b} = \frac{x^2}{a^2}$;
3) $2x + \frac{1}{x} = 2a + \frac{1}{a}$; 4) $\frac{1}{x^2-9} - \frac{1}{x^2-6x+9} = \frac{6}{21-7x}$;
5) $\frac{ax^2+b}{ax^2-b} = \frac{mx^2+b}{mx^2-b}$; 6) $\frac{1}{x^2-10x+25} - \frac{1}{x^2-25} = \frac{1}{x+5}$.

37. Квадрат тенглама учун Виет теоремасини ва унга тескари теоремани айтинг. 1) $x^2 + 2ax - 3a^2 = 0$; 2) $x^2 + (m+n)x + mn = 0$; 3) $x^2 + \frac{2}{m}x + \frac{1}{m^2} = 0$ тенгламалар илдизларини аниқламасдан туриб, уларнинг йиғиндисини ва кўпайтмасини топинг.

38. Илдизлари 1) 5 ва 3; 2) 9 ва -2; 3) a ва a^2; 4) $\sqrt{2}$ ва $\sqrt{18}$; 5) $1+\sqrt{5}$ ва $1-\sqrt{5}$; 6) $\frac{a}{b}$ ва $\frac{b}{a}$; 7) $a - 2b$ ва $2a + b$; 8) $a + b$ ва $a - b$; 9) $a + 2b$ ва $a-2b$; 10) $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ бўлган квадрат тенгламаларни туэинг.

39. Тенгламаларни ечинг:

1) $x^4 + 10x^2 - 11 = 0$; 2) $x^4 - 15a^2x^2 + 14a^4 = 0$; 3) $x^4 - a^4 = 0$;
4) $x^4+(m+2n)x^2+2mn=0$; 5) $x^2 + \frac{a^4}{x^2} = 2a^2$; 6) $x^8 - a^8 = 0$;
7) $x^4 + (k - 3a)x^2 = 3ak$; 8) $(x^2-a^2)^2 + x^2a^2 = a^4$; 9) $x^2 + a^2x^4 = \frac{2}{a^2}$;
10) $(4x^2-a)^2+4x^2a = a^2$; 11) $\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2 + \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2 = 4{,}25$.

40. Иррационал тенглама деб қандай тенгламага айтилади?

41 Ушбу тенгламалар ечимга эгами:

а) $\sqrt{x+3} = -4$; б) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+5} + 3 = 0$; в) $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = 1$?

42. Тенгламани ечинг:

а) $\sqrt{x+6}=1$; б) $\sqrt{5-x}=x+1$; в) $\sqrt{x-2}=x-4$; г) $\sqrt{4x-4}+\sqrt{2x+5}=3$;
д) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{6x+1}$; е) $\sqrt{5x+4}+\sqrt{5x+9}=\sqrt{5x+25}$.

43. Системани ўрнига қўйиш усули билан ечинг:

а) $\begin{cases} x^2+y^2-3xy-x+y+9=0, \\ y-x=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-2xy+4y^2-x-4y-3=0, \\ x+2y=3. \end{cases}$

44. Системани алгебраик қўшиш усули билан ечинг:

а) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7, \\ x^2-xy+y^2=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2-5xy+3x-2y=10, \\ 2x^2-5xy-7x+8y=-10. \end{cases}$

45. Ҳисобланг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+8n+3}{n^2+3n-1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+5)(n+7)(n-2)}{n^3+n^2-1}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-7)(3n+4)^2}{(3n^2+8)n}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}-\dfrac{3}{n^2-1}\right)$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-1)^n n}{n+1}\cos\dfrac{1}{n}$.

46. Қандай кетма-кетлик арифметик прогрессия деб аталади? У қачон ўсувчи, камаювчи, чегараланган бўлади?

47. (a_n) арифметик прогрессия ҳадлари учун ушбу тасдиқларни исботланг:

1) $m, n, l, k \in \mathbb{N},\ n+m=l+k \Longrightarrow a_n+a_m=a_l+a_k$;

2) $n, k \in \mathbb{N},\ n>k \Longrightarrow a_n=\dfrac{1}{2}(a_{n-k}+a_{n+k})$.

48. Арифметик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндисини топиш формуласини ёзинг Ушбу тенгламани ечинг:

$$5^{2+4+6+\ldots+2x}=5^{72}.$$

49. Исботланг: $1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2,\ k\in\mathbb{N}$.

50. Қандай кетма-кетлик геометрик прогрессия дейилади? Қачон у ўсувчи (камаювчи), қуйидан (юқоридан) чегараланган бўлади?

51. Геометрик прогрессиянинг умумий ҳади формуласини ёзиб беринг. Ушбу тасдиқларни исботланг:

1) $m, n, l, k\in\mathbb{N},\ n+m=l+k \Longrightarrow a_m a_n=a_l a_k$;

2) $n, k\in\mathbb{N},\ n>k \Longrightarrow a_n=\sqrt{a_{n-k}a_{n+k}}$.

52. Геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндисини топиш формуласини ёзинг. $a_7-a_5=144$, $a_6-a_5=48$ бўлса, шу геометрик прогрессиянинг биринчи ҳади, махражи, n- ҳадини топинг.

53. Чексиз камаювчи геометрик прогрессия деб нимага айтилади? Унинг ҳамма ҳадлари йиғиндисини топиш формуласини ёзиб беринг. Ушбу

1) $x, x^3, x^5, \ldots, x^{2n+1}, \ldots$ 2) $x^2, x^4, x^6, \ldots, x^{2n}\ldots$

3) $10, 10^0, 10^{-1}, \ldots, 10^{-n}, \ldots$

чексиз камаювчи геометрик прогрессиялар йиғиндисини топинг ($n\in\mathbb{N}$).

54. Чексиз камаювчи геометрик прогрессия барча ҳадлари йиғиндисини топиш формуласи орқали ушбу даврий касрни оддий касрга айлантиринг:

1) 0,(5); 2) 0,(7); 3) 3,(17); 4) 2,83(1); 5) 1,31(3); 6) 4,2(9).

55. Периметри 8 бўлган ABC учбурчакнинг томони ўрталарини бирлаштириб, яна $A_1B_1C_1$ учбурчаги ҳосил қилинади. Бу ички чизилган учбурчак ичига яна шу усулда $A_2B_2C_2$ учбурчак чизилди ва ҳ. к. Шу бир-бирига ички чизилган учбурчаклар периметрлари кетма-кетлигининг йиғиндисини топинг.

56. Умумий ҳади билан берилган қуйидаги кетма-кетликларнинг ўсувчи камаювчи), чегараланган (чегараланмаган), лимитга эга (эга эмас) эканлигини аниқланг ($n \in N$):

1) $f(n) = \frac{\sin n}{n}$; 2) $f(n) = 2^{(-1)^n \cdot n}$; 3) $f(n) = \frac{3n-1}{3n+1}$;

4) $f(n) = \frac{2n+5}{2n-5}$; 5) $f(n) = (-1)^n 2^n$; 6) $f(n) = |\sin n|^n$.

57. Қандай шартларда A сони $f(x)$ функциянинг x аргументнинг a га интилгандаги лимити дейилади? Бу фикрни 1) $f(x) = 2^x$ $(x \to 2)$; 2) $f(x) = \sin x$ $\left(x \to \frac{\pi}{2}\right)$; 3) $f(x) = x^3$ $(x \to 1)$; 4) $f(x) = x^2 + 1$ $(x \to -1)$ ҳолларда графикда тасвирлаб тушунтиринг.

58. $f(x)$ функция графигининг $M(x_0; y_0)$ нуқтасида ўтказилган уринмасининг тенгламасини ёзинг.

59. $y = 3x^3 - x$ функциянинг 1) $x_0 = 1$; 2) $x_0 = 0$; 3) $x_0 = -1$; 4) $x_0 = -2$ нуқталаридаги уринмаси тенгламасини ёзинг.

60. Ўзгармас сон ҳосиласи нимага тенг? Жавобингизни ҳосила таърифи асосида исботланг.

61. Функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $y = x^2 + \cos x$, $y'(x) = ?$ $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$ $y'(0) = ?$

2) $y = x\sqrt{x^2+1}$, $y'(x) = ?$ $y'(0) = ?$ $y'(-1) = ?$

3) $y = 2^x - 10^{x^2}$, $y'(x) = ?$ $y'(1) = ?$ $y'(0) = ?$

62. Мураккаб функция ҳосиласининг формуласини ёзиб беринг.

63. Функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $y = x^2 \sin x$; 2) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; 3) $y = x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$;

4) $y = (3x - 2x^2)^{10}$; 5) $y = 3\lg(2x^2 - 1)$; 6) $y = 3^x + 2 \cdot 3^{2x - x^2}$.

64. Ушбу бурчакларни радиан ўлчов орқали ифодаланг: 180°, 90°, 370°; 300°, 1460°, 750°, 810°, 1000°. Аксинча, $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{6\pi}{5}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{10\pi}{3}$; 8π ларни градусларда ифодаланг.

65. $M(1; 0)$ нуқтани координаталар боши O га нисбатан α $\left(\alpha = 780°; 300°; 1040°; 13\pi; 14\frac{1}{2}\pi; \frac{18}{5}\pi\right)$ бурчакка буришдан ҳосил бўлган нуқтанинг координаталарини айтинг.

66. Координата текислигининг I, II, III ва IV чораклари да барча асосий тригонометрик функциялар ишорасини айтиб беринг. Агар α бурчак III чоракда бўлса, қуйидаги функциялар ишораси қандай бўлади:

1) $\sin\frac{\alpha}{3}$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 3) $\cos\frac{\alpha}{4}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{2\alpha}{3}$;

5) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 6) $\sin\alpha\cos\alpha$; 7) $\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 8) $\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{4}$?

67. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ функцияларни 0°; 30°; 45°; 60°; 90°; 180°; 270°; 360° ларда эришадиган қийматлари жадвалини ёзиб беринг. $\sin^2 15°$; $\cos 22{,}5°$; $\operatorname{tg} 15°$ ларни шу жадвалга кўра ҳисобласа бўладими?

68. $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ ва $\operatorname{ctg} x$ функциялар қандай даврли даврий функциялар ҳисобланади? Ушбу функциялар даврини айтиб беринг:

1) $y = \sin \omega x$; 2) $y = \cos kx$; 3) $y = \operatorname{tg}^2 \lambda x$; 4) $y = \sin^2 2x$;

5) $y = \cos\frac{x}{4}$; 6) $y = \operatorname{ctg} 5x$; 7) $y = \sin\frac{3x}{2}$; 8) $y = \cos^2\frac{x}{3}$.

69. Асосий тригонометрик функцияларнинг ва қуйидагиларнинг жуфт-тоқлигини айтиб беринг: а) $y = \frac{x^2 + \cos x}{\sin x}$; б) $y = x\cos x$; в) $y = \frac{\sin x}{\cos 2x}$; г) $y = \sin x + \cos 2x$; д) $y = e^{\cos 3x}$; е) $y = 2^{\sin x} + 2^{-\sin x}$.

70. Ҳисобланг:

1) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

2) $\cos(-420°) + \operatorname{tg}(-120°) + \operatorname{ctg}(-300°) + \sin(-330°)$;

3) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{17}{3}\pi\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{16}{3}\pi\right) + \sin\left(-\frac{7}{3}\pi\right)$.

71. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ асосий тригонометрик функциялар графиги асосида қуйидаги функциялар графигини ясанг:

1) $y = \sin 3x$, $y = 3\sin x$, $y = \sin\frac{x}{3}$; $y = -3\sin 3x$;

2) $y = \cos 4x$, $y = 4\cos x$, $y = 4 + \cos x$, $y = 4 - \cos x$;

3) $y = \operatorname{tg} 2x$, $y = \operatorname{tg}|x|$, $y = 2\operatorname{tg} x$, $y = -2\operatorname{tg} x$, $y = |\operatorname{tg} x|$.

72. Бир хил бурчак тригонометрик функциялари орасидаги боғланиш формулаларини ёзинг. Масалан, $\sin\alpha = 0{,}6$ ва $0 < \alpha < 90°$ эканлигидан фойдаланиб, $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{tg} 3\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\sin 3\alpha$, $\sin\frac{\alpha}{2}$ ни ҳисобланг.

73. Келтирилиш формулаларини айтиб беринг. Агар $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ лар ABC учбурчакнинг ички бурчаклари қийматлари бўлса, у ҳолда $\sin(\angle A + \angle B) = \sin\angle C$, $\cos(\angle A + \angle B) = -\cos(\angle C)$, $\sin\frac{\angle A + \angle B}{2} = \cos\frac{\angle C}{2}$ эканини кўрсатинг.

74. Ҳисобланг:

1) $\sin 1500°$; 2) $\cos 1200°$; 3) $\operatorname{tg} 3915°$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{8\pi}{3}$; 5) $\sin(-855°)$;

6) $\sin 2$; 7) $\cos 5{,}23$.

Ушбу тенгликларни текширинг:

а) $\cos 405° \cdot \sin 315° + \operatorname{tg} 1845° \cdot \operatorname{ctg} 585° + \cos 720° \cdot \sin 810° = 1{,}5$;

б) $\sin\frac{23}{10}\pi - \cos\frac{51}{5}\pi = 0$; в) $\cos\frac{77}{30}\pi + \cos\frac{167}{30}\pi = 0$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg}(11\pi - \alpha)\cos(3\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{13\pi}{2} + \alpha\right)\cos\left(\frac{43\pi}{2} + \alpha\right)} = -\operatorname{tg}\alpha$.

75. Тригонометрик тенгламаларни ечинг:

1) $3\sin^2 x - 2\sin x = 1$; 2) $\cos^2 x + 12\cos x = 13$;
3) $4\operatorname{tg} 2x + 5\operatorname{tg}^2 2x = 9$; 4) $\operatorname{ctg}^2 2x + 3 = 4\operatorname{ctg} 2x$;
5) $\cos^4 2x - \sin^4 2x = 2\sin x\cos x$; 6) $(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$.

76. Қуйидаги сонлар логарифмини ҳисобланг:

1) $\log_2 \sqrt[3]{2}$; 2) $\log_3 \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$; 3) $\log_5(\log_5 25 + 3)$;
4) $\log_2^2 4$; 5) $\log_3\log_3\log_3 27$; 6) $\log_3^2\log_3 27$.

77. Кўпайтма (бўлинма, даража) логарифмининг формуласини ёзинг. Қуйидаги ифодани a асосга кўра логарифмланг:

1) $x = \frac{1}{4}a^3b^{30}\sin 3\varphi\cos^2\varphi$; 2) $x = \frac{5m^2a^{10}}{32(2+a^2)}$; 3) $x = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{a\sqrt{b}}}{\sqrt{a\sqrt{b}}}}$.

78. $M = M_0e^{-pt}$ ифодада M_0, e, p маълум сонлар. t ни M орқали топинг.

79. Ҳисобланг:

1) $5^{\log_5 125}$; 2) $c^{\log_c N^2}$; 3) $8^{3\log_8 3}$; 4) $5^{-2\log_{25} 3}$;
5) $2^{\frac{1}{2}\log_4 5}$; 6) $4^{-\frac{1}{2}\log_{16} 8}$; 7) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 7}$; 8) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 10}$;
9) $4^{1+\log_4 10}$; 10) $6^{2-\log_6 8}$; 11) $k^{\log_k(\log_3 2)}$; 12) $5^{3-\log_{\sqrt{5}} 25}$;
13) $(\sqrt{3})^{\log_9 27+2}$; 14) $c^{\log_{\sqrt{c}} b + \log_c a}$.

80. Қуйидаги кўрсаткичли тенгламаларни ечинг:

1) $7^{x^2} - 7^{x^2-1} = 6$; 2) $3^x + 3^{x+1} = 324$; 3) $0{,}5^{6x^2-5x-1} = 1$;
4) $0{,}5^{8x^2+7x-1} = 16$; 5) $\frac{2}{10+2^x} = \frac{2^{x-2}}{18}$; 6) $4^x + 2^{x-1} = 18$.

81. Ушбу тенгламаларни ечинг:

1) $x^{\lg x} = 10\,000$; 2) $\log_2\log_3\log_4 2x = 1$; 3) $\log_{2x-1}(7+x) = 2$;
4) $\log_x^2(20+x) = 4$; 5) $x^{3-\frac{1}{3}\lg x} = 900$; 6) $\frac{1}{10-\lg x} + \frac{1}{\lg x} = 0{,}4$.

82. Кўрсаткичли тенгсизликларни ечинг:

1) $2^{x^2} > 16$; 2) $0{,}2^{x^2-1} < \log_2^3\sqrt[5]{2}$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} > 1{,}5^{10x-3}$;
4) $0{,}5^x > 0{,}25$; 5) $0{,}1 < 10^x < 100000$; 6) $2^{x^2+8x} > 1$.

83. Логарифмик тенгсизликларни ечинг:

1) $\log_{0,5}(2x+3) > 0$; 2) $\log_3(x^2 - 6x - 7) < 0$;
3) $\log_{2x}(4x+1) < 1$; 4) $\log_{0,2} x < \log_5(x-1)$.

84. Логарифмда бир асосдан бошқа асосга ўтиш формуласини ёзинг ва уни исботланг. Шунга доир ушбу тенгламаларни ечинг:

1) $\log_2 2x + \log_5 5x = \log_5 x$; 2) $\log_{3x} 10 - 2 = \lg \frac{1}{3x}$;

3) $\log_4 |2x + 12| \log_{2x} 2 = 1$; 4) $\log_4 2 + \log_2 x = 2{,}5 - \log_x 2$,

85. Тенгламаларни ечинг:

1) $2^{x^2-x-2} = 1$; 2) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} = 6 + 2{,}5 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}}$;

3) $5^{\sqrt{x}} = 0{,}2^{\sqrt{x}} + 4{,}8$; 4) $2^{2x-1} = 6 \log_2 32$.

Геометрия

1. Геометриянинг таърифсиз қабул қилинган тушунчаларини айтинг. Геометрик фигура нима?

2. $|AC| = 4$, $|CB| = 10$, $|AB| = 6$ бўлса, A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётадими?

3. Уч нуқта нечта тўғри чизиқни аниқлайди?

4. Айланани соҳа деб атаса бўладими? Доирани-чи? Икки соҳа кесишмаси (бирлашмаси) яна соҳа бўладими?

5. Қаварик тўртбурчак диагоналлари узунлигининг йиғиндиси доимо унинг периметридан кичик, ярим периметридан катта. Шуни исботланг.

6. 219-шаклдаги A тўпламни B тўпламга f акслантиришларнинг қайси бири: 1) тўпламни тўпламнинг ичига; 2) тўпламни тўпламнинг устига; 3) тескариланувчи акслантириш бўла олади?

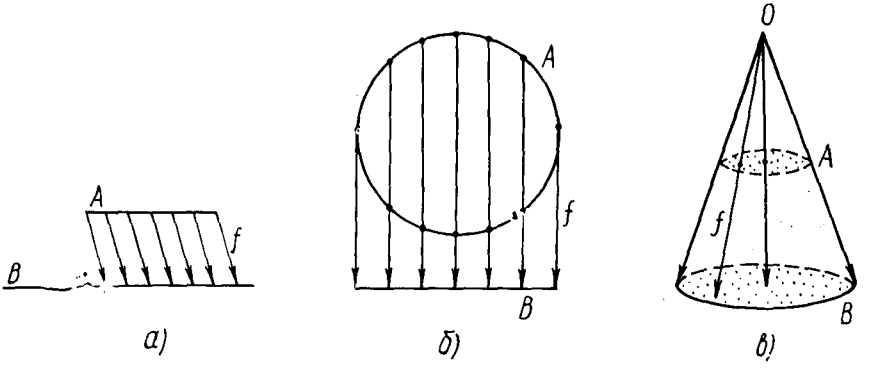
7. Қандай акслантириш айний акслантириш дейилади? Мисоллар келтиринг.

8 Квадратни қайси нуқтаси атрофида, қандай бурчакка буриш билан у ўзига ўтади?

9. $ABCD$ параллелограммда $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AD}$, $\vec{OA}$, $\vec{OC}$, $\vec{BO}$, $\vec{OD}$ векторларни ясанг (бунда O унинг диагоналлари кесишган нуқта). Бу векторлардан қайси бири ўзаро тенг, коллинеар, қарама-қарши?

10. Ҳар қандай $ABCD$ тўртбурчак учун $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC}$, $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DC} - \vec{BC}$ тенгликни исботланг.

11. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ўринлилигини исботланг.



219 шакл

12. $\vec{a} = \vec{AB}$ векторни чизиб олиб, $2\vec{a}$, $-3\vec{a}$, $-\frac{1}{4}\vec{a}$, $\frac{4}{5}\vec{a}$ векторларни ясанг.

13. $ABCD$ параллелограммда P ва Q нуқталар мос равишда AB ва AD томон ўртаси. $\vec{PC}$ ва $\vec{QC}$ векторни $\vec{AB}$ ва $\vec{BC}$ векторлар орқали ифодаланг.

14. Координаталар текислигида $O(0, 0)$, $A(-4; 5)$, $B(2; 6)$ нуқталар берилган бўлса $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OA}+\vec{OB}$, $2\cdot\vec{OA}$, $-3\cdot\vec{OB}$, $2\cdot\vec{OA}-3\cdot\vec{OB}$, $\vec{AB}$, $-2\cdot\vec{AB}+3\cdot\vec{OB}$ векторларни $\vec{i}$ ва $\vec{j}$ базис векторлари бўйича ёйиб ёзинг.

15. $2p$ периметрли учбурчакнинг ўрта чизиғи орқали ундан хосил қилинган учбурчак периметрини топинг.

16. Гипотенузага туширилган медиана унинг ярмига тенглигини исботланг.

17. Бир катети 30, унинг гипотенузага проекцияси 18 бўлса, учбурчакнинг гипотенузаси ва иккинчи катетни топинг.

18. Томонлари 9, 12, 15 бўлган учбурчакни қайси теоремага биноан тўғри бурчакли учбурчак дея оламиз?

19. Катетлари 5 ва 12 бўлган учбурчакнинг гипотенузасига тушган медиана узунлигини топинг.

20. a ва b томонли $(a > b)$ параллелограммнинг бир диагонали унинг томонига перпендикуляр. Диагоналлар узунлигини топинг.

21. Айланага ташқи чизилган трапеция асослари a ва b га тенг бўлса, айлана диаметрини топинг. (Жавоб: $\sqrt{ab}$).

22. Учбурчакнинг бир катети a ва унга ёпишган бурчаги β бўлса, тўғри бурчак биссектрисаси узунлигини топинг.

23. Тенг ёнли учбурчак асосидаги учидан чиққан биссектрисаси a га тенг бўлиб, у қарама-қарши томонини 135° бурчак остида кесади. Учбурчак асосини (ташқи айланаси радиусини) аниқланг.

24. Учбурчакнинг бир учидан чиққан медианаси (m), баландлиги (h) ҳамда биссектрисаси (b) лар орасида ушбу муносабат ўринлилигини исботланг: $h \leqslant b \leqslant m$

25. $ABCD$ параллелограммда B ва D учлар AC диагоналдан бир хил масофада ётишини исботланг.

26. $ABCD$ параллелограммнинг A учидан чиққан биссектриса унинг томонини узунлиги m ва n бўлган кесмаларга ажратади. Унинг периметрини топинг. (Жавоб: $2(2m+n)$ ёки $2(2n+m)$.

27. Кўп ёқли бурчак деб қандай фигурага айтилади? Уч ёқли бурчакнинг α, β, γ текис бурчаклари $\gamma = \alpha + \beta$ шартни бажариши мумкинми?

28. а) 120°, 80°, 50°; б) 100°, 40°, 70°; в) 110°, 150°, 30°; г) 30°, 40°, 50° ли текис бурчакли уч ёқли бурчаклар мавжудми?

29. а) 120°, 90°, 80°, 70°; б) 120°, 40°, 30°, 50°, 60°, в) 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°; г) 100°, 50°, 140°, 30°, 40°, 20° ли текис бурчакли кўп ёқли бурчак мавжудми?

30. Мунтазам бешбурчакли тўғри призма асосининг юзи Q бўлиб, уни α текислик 45° бурчак остида кесган. Кесим юзини топиш мумкинми?

III БОБ. МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР ЕЧИШ УСУЛЛАРИ ВА УЛАРГА ДОИР ТОПШИРИҚЛАР

Бу бобда алгебра ва геометрия мисол ва масалаларининг типлари ҳамда уларни ечиш усуллари ва зарур кўрсатмалар, лозим топилган ўринларда фойдали маслаҳатлар берилган. Бу боб материалларини ундаги топшириқларни қунт билан бажариб бориш билан пухта ўзлаштириш мумкин.

1-§. Алгебраик ифодаларни соддалаштириш

Алгебраик ифодалар иккига бўлинади: каср-рационал ифодалар; иррационал ифодалар.

I. Каср-рационал ифодалар. Бундай ифодалар касрлар устида амаллар билан ҳамда касрнинг сурати ва махражларини кўпайтувчиларга ажратиб, умумий кўпайтувчиларни қисқартириш, ўхшаш ҳадларини ихчамлаш каби ишлар билан соддалаштирилади.

Бундай соддалаштиришларда ҳар бир ифоданинг турли кўринишлари айнан тенг бўлмаслиги мумкин. Шунинг учун қисқарувчи умумий кўпайтувчиларни нолга айлантирувчи қийматларни каср-рационал ифоданинг аниқланиш соҳасидан чиқариб ташлаб, қолган соҳада соддалаштириш натижаси дастлабки ифодага эквиваленг эканлигини таъкидлаш керак.

1-мисол. Соддалаштиринг:

$$A=\left(\frac{a^2-ax}{a^2x+x^3}-\frac{2a^2}{x^3-ax^2+a^2x-a^3}\right)\left(1-\frac{x-1}{a}-\frac{x}{a^2}\right).$$

Ечилиши. Ифода $a\neq 0$, $x\neq a$ шартда аниқланган ва у $A=B\cdot C$ шаклда берилган. Ҳар бир B ва C ифода устида айний алмаштириш бажарамиз:

$$B=\frac{a^2-ax}{x(a^2+x^2)}-\frac{2a}{x^2(x-a)+a^2(x-a)}=\frac{a(a-x)}{x(a^2+x^2)}-\frac{2a}{(x-a)(x^2+a^2)}=$$

$$=a\,\frac{(a-x)(x-a)-2ax}{x(a^2+x^2)(x-a)}=\frac{-a}{x(x-a)};$$

$$A=B\cdot C=-\frac{a}{x(x-a)}\cdot\left(1-\frac{x-1}{a}-\frac{x}{a^2}\right)=\frac{-a}{x(x-a)}\cdot\frac{a^2-ax+a-x}{a^2}=$$

$$=-\frac{1}{x(x-a)}\cdot\frac{(a-x)(a+1)}{a}=\frac{a+1}{ax}.$$

Жавоб: $a\neq 0,\ x\neq a \Longrightarrow A=\dfrac{a+1}{ax}$.

Изоҳ. $a=0$ ёки $x=a$ бўлганда A ифода бу жавобга эга эмас.

2-мисол. Соддалаштиринг:

$$B=\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}.$$

Ечилиши Ифода $x\neq y$, $y\neq z$, $z\neq x$ да аниқланган. $y-z=(x-z)-(x-y)$ тенгликдан ифодага умумий махраж бергандан кейин фойдаланамиз:

$$B=\frac{x^2(y-z)-y^2(x-z)+z^2(x-y)}{(x-y)((y-z)(x-z)}=\frac{x^2(x-z)-x^2(x-y)-y^2(x-z)+z^2(x-y)}{(x-y)(y-z)(x-z)}=$$

$$=\frac{(x-z)(x^2-y^2)+(x-y)(z^2-x^2)}{(x-y)(y-z)(x-z)}=\frac{(x-y)(x-z)(x+y-z-x)}{(x-y)(y-z)(x-z)}=1.$$

Жавоб. $x\neq y,\ y\neq z,\ z\neq x \Longrightarrow B=1$.

3-мисол. Соддалаштиринг:

$$C=\frac{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}{yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)}.$$

Ечилиши. Агар C ифода $f(x, y, z)/\varphi(x, y, z)$ каби икки кўпҳад нисбати эканини ҳисобга олсак, Безу теоремаси (283-бет) га кўра:

$$\varphi(y, y, z) = 0 \Longrightarrow \varphi(x, y, z) = (x - y)\, g_1(x, y, z);$$
$$\varphi(x, z, z) = 0 \Longrightarrow \varphi(x, y, z) = (y - z)(x - y)\, g_2(x, y, z);$$
$$\varphi(x, y, x) = 0 \Longrightarrow \varphi(x, y, z) = (z - x)(y - z)(x - y)\, g_3(x, y, z).$$

Аммо $\varphi(x, y, z)$ ўзининг ҳар бир аргументига нисбатан 2-даражали кўпҳад, демак, $g_3(x, y, z)$ ўзгармас функция экан. Унинг қийматини топиш учун ихтиёрий $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадаги нолдан фарқли $\varphi(x_0, y_0, z_0)$ ни ҳисоблайлик, масалан: $\varphi(0; 1; -1) = -2$ Бундан $g_3(0; 1; -1) = -1$. Демак, $\varphi(x, y, z) = -(x - y)(y - z)(z - x)$ Худди шу каби $f(x, y, z)$ га шу усулни қўлласак,

$$f(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x)\, h(x, y, z).$$

$h(x, y, z)$ топиш учун берилган $f(x, y, z)$ кўпҳадни $(x-y)(z - x) = -x^2 + x(y + z) - yz$ га бўлиб оламиз:

$$\begin{array}{l|l}
-x^3(y-z)+x(z^3-y^3)+y^3z-z^3y & -x^2+(y+z)x-yz \\
\underline{x^3(y-z)-x^2(y^2-z^2)+xyz(y-z)} & \overline{-x(y-z)-(y^2-z^2)} \\
\quad -x^2(y^2-z^2)+x(z^3-y^3-y^2z+yz^2)+y^3z-z^3y & \\
\quad \underline{x^2(y^2-z^2)-x(y+z)(y^2-z^2)+yz(y^2-z^2)} & \\
\qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Бўлинмани $y - z$ га яна бўлсак, h ҳам чиқади: $h = -(x + y + z)$. Энди эса C ифоданинг қиймати $x \neq y$, $y \neq z$, $z \neq x$ бўлганда $C = \frac{f}{\varphi} = h = -(x + y + z)$ га тенглиги топилди.

Баъзида кўпҳадни кўпҳадга бўлиш амали рационал ифодаларни соддалаштиришда яхши натижа беради.

4-мисол. Соддалаштиринг:

$$A = \frac{p^3 + 4p^2 + 10p + 16}{p^3 - p^2 + 2p + 16} \cdot \frac{p^3 - 3p^2 + 8p}{p^2 + 2p + 6}.$$

Ечилиши. Агар $A = \frac{f(p)}{\varphi(p)} \cdot \frac{g(p)}{h(p)}$ деб қаралса, бунда $f(p) = p^3 + 4p^2 + 10p + 16$ ни $h(p) = p^2 + 2p + 6$ га бўлганда $\frac{f(p)}{h(p)} = p + 2$ эканлигини, сўнг $\varphi(p) = p^3 - p^2 + 2p + 16$ ни $p + 2$ га бўлиб, бўлинмада $p^2 - 3p + 8$ чиқишини ўқувчи текшира олади. Демак:

$$A = \frac{f(p)}{\varphi(p)} \cdot \frac{g(p)}{h(p)} = \frac{h(p)(p + 2)}{(p+2)(p^2 - 3p + 8)} \cdot \frac{p(p^2 - 3p + 8)}{h(p)} = p.$$

Жавоб: $p \neq -2 \Longrightarrow A = p$.

1-топшириқ. Ифодаларни соддалаштиринг:

а) $\frac{5x^2 - x - 4}{x^3 - 1}$; б) $\frac{x^4 + x^2 - 2}{x^6 + 8}$; в) $\frac{2x^2 - xy - 3y^2}{2x^2 - 5xy + 3y^2}$;

г) $\frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}$; д) $\frac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$; е) $\frac{x^4 - x^2 - 12}{x^4 + 8x^2 + 15}$;

ж) $\frac{2x^4 + 7x^2 + 6}{3x^4 + 3x^2 - 6}$; з) $\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^6 - y^6}$.

2. а) $\dfrac{\left(x^3-1-\dfrac{7-x^3}{3+x^3}\right)\cdot\dfrac{x^4}{x^5+3x^2}}{\dfrac{6x^6-24}{x^9+6x^6+9x^3}\cdot\dfrac{2x}{3x^3+6}}$; б) $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y+z}}\cdot\left(1+\dfrac{y^2+z^2+x^2}{2yz}\right)$;

в) $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2+\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\right)^2+\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\right)^2-\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\right)\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\right)$;

г) $\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$; д) $\dfrac{x^6-y^6}{x^2-y^2}-\dfrac{x^6+y^6}{x^2+y^2}$;

е) $\dfrac{1}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{1}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{1}{(z-x)(z-y)}$.

3. а) $\dfrac{1}{(x+y)^3}\left(\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{1}{y^4}\right)+\dfrac{2}{(x+y)^4}\left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{y^3}\right)+\dfrac{2}{(x+y)^5}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}\right)$;

б) $\dfrac{x-z}{x^2+xz+z^2}\cdot\dfrac{x^3-z^3}{x^2y-y^2z}\cdot\left(1+\dfrac{z}{x-z}-\dfrac{1+z}{z}\right):\left(\dfrac{z(1+z)-x}{yz}\right)$;

в) $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)((x-y)^2+xy)+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)((x+y)^2-xy)$;

г) $\dfrac{1}{13(m-n)}((2m-3n)(2m+3n)+(3m-2n)(3m+2n))$.

4. а) $\dfrac{x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)}{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}$;

б) $\dfrac{(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3}{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}$.

5. Исботланг: а) $\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{y-z}{y+z}+\dfrac{z-x}{z+x}+\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=0$;

б) $\dfrac{(x-y)^7-x^7+y^7}{(x-y)^5-x^5+y^5}=\dfrac{7}{5}(x^2-xy+y^2)$;

в) $\dfrac{a^3b-ab^3+b^3c-bc^3+c^3a-ca^3}{a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2}=a+b+c$;

г) $a^2\dfrac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\dfrac{(d-c)(d-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\dfrac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}=d^2$;

д) $\left(q^2\dfrac{n-p}{p-q}+n^2\dfrac{m-q}{m-n}\right):\left(p^2\dfrac{m-q}{p-q}+m^2\dfrac{n-p}{m-n}\right)=\dfrac{n-q}{m-p}$.

6. $a+b+c=0$ бўлганда қуйидагини исботланг:

$$\left(\frac{a-b}{c^2}+\frac{b-c}{a^2}+\frac{c-a}{b^2}\right)\left(\frac{c^2}{a-b}+\frac{a^2}{b-c}+\frac{b^2}{c-a}\right)=4abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3.$$

Кўрсатма. $a+b+c=0\Longrightarrow$ а) $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$; б) $a^3+b^3+c^3=3abc$; в) $a^4+b^4+c^4=2(ab+bc+ca)^2$.

II. ***Иррационал ифодалар.*** Иррационал ифода—радикаллардан ёки бутун сон бўлмаган рационал кўрсаткичли даражадан ташкил топган алгебраик ифодалардир.

Иррационал ифодаларни соддалаштиришда илдиз остидан чиқариладиган ифоданинг фақат арифметик қиймати олинишига алоҳида эътибор бериш керак. Бунга икки мисол келтирамиз.

5-мисол.

$$\sqrt{(\sqrt{3}x-2)^2}=|\sqrt{3}x-2|=\begin{cases}\sqrt{3}x-2, & \text{агар } x\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{3}};\\ 2-\sqrt{3}x, & \text{агар } x<\dfrac{2}{\sqrt{3}}.\end{cases}$$

6-мисол. $a>0$, $b>0$ деб соддалаштиринг:

$$A=\frac{\sqrt{a^2+6ab+9b^2}-\sqrt{a^2-6ab+9b^2}}{\sqrt{a^2-6ab+9b^2}+3b+a}.$$

Ечилиши. Ифоданинг сурати $a+3b-|a-3b|$ га, махражи эса $|a-3b|+a+3b$ га тенглигини кўриш қийин эмас. Бунинг жавоби икки хил бўлади:

а) $a\geqslant 3b \Longrightarrow A=\dfrac{a+3b-a+3b}{a-3b+a+3b}=3\dfrac{b}{a}$;

б) $a<3b \Longrightarrow A=\dfrac{a+3b+a-3b}{3b-a+a+3b}=\dfrac{a}{3b}$.

Баъзида $\sqrt{A+B\sqrt{C}}$ кўринишли, илдиз ости тўла квадрат бўладиган иррационал ифодаларни соддалаштириш учрайди.

7-мисол. Соддалаштиринг:

$$D=\sqrt{2x^2-9+2x\sqrt{x^2-9}}+\sqrt{x^2-9}.$$

Ечилиши. Ифода $x^2-9\geqslant 0$ шарт билан аниқланган соҳада маънога эга бўлиб, унда

$$2x^2-9+2x\sqrt{x^2-9}=x^2+2x\sqrt{x^2-9}+x^2-9=(x+\sqrt{x^2-9})^2$$

бўлгани учун $D=|x+\sqrt{x^2-9}|+\sqrt{x^2-9}$ ўринлидир. Демак,

а) $x\geqslant 3$ бўлганда $D=x+2\sqrt{x^2-9}$;

б) $x<-3$ бўлганда $D=-x-\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2-9}=-x$.

$\dfrac{A}{\sqrt[n]{B^k}}$, $\dfrac{A}{\sqrt{B}+C\sqrt{D}}$, $\dfrac{A}{\sqrt[3]{B}\pm\sqrt[3]{C}}$ *каби ифодаларни соддалаштириш.*

1) $\dfrac{A}{\sqrt[n]{B^k}}$ кўринишда бўлса, сурат ва махражи $\sqrt[n]{B^{n-k}}$ га кўпайтирилади:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{B^k}}=\frac{A}{B}\sqrt[n]{B^{n-k}}. \qquad (1)$$

2) $\frac{A}{B+C\sqrt{D}}$ ёки $\frac{A}{\sqrt{B}+C\sqrt{D}}$ касрларнинг ҳар бири уларнинг махражларининг қўшмаси

$$B-C\sqrt{D} \text{ ёки } \sqrt{B}-C\sqrt{D}$$

га кўпайтириб соддалаштирилади:

$$\frac{A}{B+C\sqrt{D}}=\frac{A(B-C\sqrt{D})}{B^2-C^2D}; \quad \frac{A}{\sqrt{B}+C\sqrt{D}}=\frac{A(\sqrt{B}-C\sqrt{D})}{B-C^2D}. \qquad (2)$$

3) $\frac{A}{B\pm C\sqrt[3]{D}}$ ёки $\frac{A}{\sqrt[3]{B}\pm\sqrt[3]{D}}$ шаклдаги ифодаларнинг сурати ва махражини $B^2\mp BC\sqrt[3]{D}+C^2\sqrt[3]{D^2}$; $\sqrt[3]{B^2}\mp\sqrt[3]{BD}+$ $+\sqrt[3]{D^2}$ га кўпайтириб:

$$\frac{A}{B\mp C\sqrt[3]{D}}=\frac{A(B^2\mp BC\sqrt[3]{D}+C^2\sqrt[3]{D^2})}{B^3\pm C^3\cdot D};$$

$$\frac{A}{\sqrt[3]{B}\pm\sqrt[3]{D}}=\frac{A(\sqrt[3]{B^2}\mp\sqrt[3]{BD}+\sqrt[3]{D^2})}{B\pm D} \qquad (3)$$

соддалаштирилади.

8-мисол. Соддалаштиринг: $A=\left(\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2y)^2}}+\frac{1}{\sqrt{x-2y}}\right)\times\right.$ $\left.\times(x-2y)-\sqrt{x-2y}\right)^3$.

Ечилиши. Ифода $x>2y$ шартда аниқланган ва у $A=(B\cdot C-D)^3$ шаклида бўлиб, уни соддалаштиришда (1) дан фойдаланиш қулай:

$$A=\left(\left(\frac{\sqrt[3]{x-2y}}{x-2y}+\frac{1}{x-2y}\right)(x-2y)-\sqrt{x-2y}\right)^3=x-2y.$$

Жавоб: $x>2y \Longrightarrow A=x-2y$.

9-мисол. Соддалаштиринг:

$$A=\left(\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}+\frac{\sqrt[3]{y^2}}{x+y}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y}}+\frac{\sqrt[3]{y^2}}{x-y}\right).$$

Ечилиши. Ифода $|x|\neq|y|$ да аниқланган ҳамда $A=B\cdot C$ кўринишда бўлиб (3) га асосан

$$B=\frac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}{(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{xy}+\sqrt[3]{y^2})}+\frac{\sqrt[3]{y^2}}{x+y}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}{x+y}+$$

$$+\frac{\sqrt[3]{y^2}}{x+y}=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+y}.$$

Худди шу усулда $C=\frac{\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$ эканлиги, сўнг $A=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{x^2-y^2}$ эканлиги аниқланади.

10- м и с о л. Соддалаштиринг:

$$A=\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b}\right):\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}. \qquad (4)$$

Ечилиши. I у с у л. $a>b>0$ шартда аниқланган бу ифода $A=B:C$ шаклда бўлиб, (2) га биноан

$$B=\frac{\sqrt{a-b}\,(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})}{(\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{a-b})^2}+\frac{(a-b)(\sqrt{a^2-b^2}+(a-b))}{(\sqrt{a^2-b^2})^2-(a-b)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-b^2}-(a-b)}{a+b-(a-b)}+\frac{(a-b)(\sqrt{a^2-b^2}+(a-b))}{a^2-b^2-a^2+2ab-b^2}=$$

$$=\frac{1}{2b}(\sqrt{a^2-b^2}-(a-b)+\sqrt{a^2-b^2}+a-b)=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

$$A=B:C=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}:\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}=1.$$

Ж а в о б: $a>b>0 \Longrightarrow A=1$.

II у с у л. ***(Умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқариш.)*** A ифода $a>b>0$ да аниқлангани учун $a-b>0$, демак, уни

$$(4) \Longrightarrow A=\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\frac{(\sqrt{a-b})^2}{\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}-(\sqrt{a-b})^2}\right):$$
$$:\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

шаклда ёзиб олиб, $\sqrt{a-b}$ ни катта қавс ташқарисига чиқариб ечамиз:

$$A=\sqrt{a-b}\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})}\right)\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}\right)\cdot\sqrt{a-b}\cdot\frac{b}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{a+b}}{a+b-(a-b)}\cdot\frac{b}{\sqrt{a+b}}=1.$$

11- м и с о л. Соддалаштиринг:

$$A=\left(\frac{ab^4}{\sqrt{(a+b)^7}}-\frac{2ab^2}{\sqrt{(a+b)^5}}+\frac{a}{\sqrt{(a+b)^3}}\right):\left(\frac{a^2}{\sqrt{(a+b)^5}}-\frac{a^2b}{\sqrt{(a+b)^7}}\right).$$

Ечилиши. Ифода $A=B:C$ шаклда бўлиб, у $a>-b$, $a\neq0$, $b\neq0$ шартларда аниқланган. Бунда

$$B=\frac{a}{\sqrt{(a+b)^3}}\left(\frac{b^4}{(a+b)^2}-\frac{2b^2}{a+b}+1\right)=\frac{a}{\sqrt{a+b}}\cdot\frac{(b^2-a-b)^2}{(a+b)^3};$$

$$C=\frac{a^2}{\sqrt{(a+b)^5}}\left(1-\frac{b}{a+b}\right)=\frac{a^3}{(a+b)^3\sqrt{a+b}}$$

$$A=B:C=\frac{a(b^2-a-b)^2}{\sqrt{a+b}(a+b)^3}\cdot\frac{(a+b)^3\sqrt{a+b}}{a^3}=\left(\frac{b^2-a-b}{a}\right)^2.$$

12- м и с о л: Соддалаштиринг:

$$A=\left((x-y)\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+x-y\right)\left((x-y)\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}-x+y\right).$$

Ечилиши. Ифода $x>y$, $x<-y$ шартда аниқланган бўлиб:

$$A=(x-y)\left(\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+1\right)(x-y)\left(\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}-1\right)=$$

$$=(x-y)^2\left(\frac{x+y}{x-y}-1\right)=2y(x-y).$$

Ж а в о б: $x>y,\ x<-y \Longrightarrow A=2y(x-y)$.

Баъзида иррационал ифодаларни белгилаш усули билан каср-рационал ифодага келтириб ечиш қулай бўлади.

13- м и с о л. Соддалаштиринг:

$$A=\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a}}{1-\sqrt{a}}+\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}\right)^2:\left(1+\frac{2}{\sqrt{a}}+\frac{1}{a}\right).$$

Ечилиши. Ифода $a>0$, $a\neq 1$ да аниқланган бўлиб, унда $t=\sqrt[4]{a}$ деб белгилаш киритилса, у

$$A=\left(\frac{t^3-t}{1-t^2}+\frac{1+t^2}{t}\right)^2:\left(1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)$$

каби кўринишдаги рационал ифодага келади. Бундан:

$$A=\left(\frac{t(t^2-1)}{-(t^2-1)}+\frac{1}{t}+t\right)^2:\frac{t^4+2t^2+1}{t^4}=$$

$$=\left(-t+\frac{1}{t}+t\right)^2\cdot\frac{t^4}{(1+t^2)^2}=\frac{t^2}{(1+t^2)^2}.$$

Бу ердан $a>0,\ a\neq 1 \Longrightarrow A=\dfrac{\sqrt{a}}{(1+\sqrt{a})^2}$.

14- м и с о л. Соддалаштиринг:

$$A=\left(\frac{\sqrt[3]{mn^2}+\sqrt[3]{m^2n}}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}}-2\sqrt[3]{n}+\frac{m-n}{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{n^2}}\right):\left(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}\right).$$

Ечилиши. Ифода $m\neq n$, $m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$ да аниқланган. Унда $x=\sqrt[3]{m}$, $y=\sqrt[3]{n}$ белгилаш киритсак:

$$A=\left(\frac{xy^2+yx^2}{x^2+2xy+y^2}-2y+\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}\right):(x+y)=$$

$$= \left(\frac{xy(x+y)}{(x+y)^2} - 2y + \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)}\right) : (x+y) =$$

$$= \left(\frac{xy+x^2+xy+y^2}{x+y} - 2y\right) : (x+y) = \left(\frac{(x+y)^2}{x+y} - 2y\right) : (x+y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

Ж а в о б: $m \neq n, \quad m \geqslant 0 \quad n \geqslant 0 \Longrightarrow A = \frac{\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}}.$

15- м и с о л. Соддалаштиринг:

$$A = \frac{\left((x+y)^{-\frac{1}{2}} + (x-y)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}}{\left((x+y)^{-\frac{1}{2}} - (x-y)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{y}.$$

Бу каби ифодаларни соддалаштиришда $\left(\frac{a^k}{b^k}\right)^{-n} = \frac{b^{kn}}{a^{kn}}$, $(a^k b^k)^{-n} = \frac{1}{a^{kn} b^{kn}}$ *эканлигини назарда тутиш лозим.*

Ечилиши. Ифода $x + y > 0$, $x - y > 0$, $y \neq 0$ шартлар билан аниқланадиган соҳада берилган бўлиб, у $A = \frac{B^{-1}}{C^{-1}} + D$ шаклдадир. Уни $A = \frac{C}{B} + D$ каби ўзгартира оламиз. $\sqrt{x+y} = u$, $\sqrt{x-y} = v$ деб белгилаш киритиб қўшмасига кўпайтириш усулини қўллаймиз:

$$\frac{C}{B} = \frac{u^{-1} - v^{-1}}{u^{-1} + v^{-1}} = \frac{v-u}{v+u} = \frac{(v-u)}{v^2 - u^2} = \frac{x - y - 2\sqrt{x^2 - y^2} + x - y}{x - y - (x+y)} =$$

$$= \frac{x - y - \sqrt{x^2 - y^2}}{-y}. \text{ Бу ердан } A = \frac{C}{B} + D = \frac{-x + y + \sqrt{x^2 - y^2}}{y} +$$

$$+ \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{y} = 1.$$

Ж а в о б. $x + y > 0, \quad x - y > 0, \quad y \neq 0 \Longrightarrow A = 1.$

16- м и с о л Соддалаштиринг:

$$A = \left(\frac{9 - 4a^{-2}}{3a^{-1/2} + 2a^{-3/2}} - \frac{1 + a^{-1} - 6a^{-2}}{a^{-1/2} + 3a^{-3/2}}\right)^4.$$

Ечилиши. Ифода $a > 0$ да аниқланган бўлиб, $3a^{-1/2} + 2a^{-3/2} = a^{-1/2}(3 - 2a^{-1})$,

$a^{-1/2} + 3a^{-3/2} = a^{-1/2}(1 + 3a^{-1})$, $9 - 4a^{-2} = (3 - 2a^{-1})(3 + 2a^{-1})$,

$1 - a^{-1} - 6a^{-2} = (1 - 3a^{-1})(1 - 2a^{-1})$, натижада

$$A = \left(\frac{(3 - 2a^{-1})(3 + 2a^{-1})}{a^{-1/2}(3 + 2a^{-1})} - \frac{(1 + 3a^{-1})(1 - 2a^{-1})}{a^{-1/2}(1 + 3a^{-1})}\right)^4 =$$

$$= \left(\frac{3 - 2a^{-1} - 1 + 2a^{-1}}{a^{-1/2}}\right)^4 = (2a^{1/2})^4 = 16a^2.$$

Ж а в о б. $a > 0 \Longrightarrow A = 16a^2.$

17- м и с о л. Соддалаштиринг:

$$A=\frac{\sqrt{a+2\sqrt{b}+\frac{b}{a}}\sqrt{2a-10\sqrt[6]{8a^3b^2}+25\sqrt[3]{b^2}}}{a\sqrt{2a}+\sqrt{2a^3}-5a\sqrt[3]{b}-5\cdot\sqrt[6]{b^5}}.$$

Ечилиши. Ифода $a>0$, $b\geqslant 0$ бўлган соҳада аниқланган. У ҳолда

$$A=\frac{\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^3}\sqrt{\left(\sqrt{2a}-5\sqrt[3]{b}\right)^2}}{(a+\sqrt{b})\left(\sqrt{2a}-5\sqrt[3]{b}\right)}=\frac{(a+\sqrt{b})\left|\sqrt{2a}-5\sqrt[3]{b}\right|}{\sqrt{a}(a+\sqrt{b})\left(\sqrt{2a}-5\sqrt[3]{b}\right)}.$$

Ж а в о б: 1) $\sqrt{2a}>5\sqrt[3]{b}\Longrightarrow A=\frac{1}{\sqrt{a}}$; 2) $\sqrt{2a}<5\sqrt[3]{b}\Longrightarrow A=-\frac{1}{\sqrt{a}}$

18- м и с о л. Соддалаштиринг:

$$A=\frac{\sqrt{16z^2+z^{-2}-8}}{(2z-1)(4z^3-2z^2+z)^{-1}}-(z^3+1).$$

Ечилиши. Ифоданинг $z\neq 0$, $z\neq\frac{1}{2}$ шартларда тўла аниқланганлигини текшириб олиш мумкин, чунки

$$A=\frac{|4z^2-1|}{|z|}\cdot\frac{z(4z^2-2z+1)}{2z-1}-z^3+1.$$

Ифодада модуль белгиси қатнашганлиги учун унинг таърифидан фойдаланса к, икки ҳол бўлади:

а) $z<-\frac{1}{2}$ ёки $0<z<\frac{1}{2}\Longrightarrow A=-(2z+1)(4z^2-2z+1)-z^3+1=$ $=-9z^3$;

б) $-\frac{1}{2}<z<0$ ёки $z>\frac{1}{2}\Longrightarrow A=(2z+1)(4z^2-2z+1)-z^3+1=$ $=7z^3+2$.

19- м и с о л. Соддалаштириб, $x_0=3$ да ҳисобланг:

$$A=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}}.$$

Ечилиши. $x^2\pm 4x\sqrt{2}+8=(x\pm 2\sqrt{2})^2$ бўлганлиги учун

$$A=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{|x-2\sqrt{2}|}+\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{|x+2\sqrt{2}|}$$

кўринишга келади. $x_0=3>2\sqrt{2}$ бўлганда $A=2$. Умуман, A ифода $x>2\sqrt{2}$ шарт билан ифодаланадиган $D(A)$ соҳада аниқланган, шунинг учун $|x-2\sqrt{2}|=x-2\sqrt{2}$. У ҳолда ҳар қандай $x\in D(A)$ учун $A=2$.

2-топшириқ. Махражини иррационалликдан қутқариш усули билан соддалаштиринг:

а) $\frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}-\frac{m}{n}$; б) $\frac{a+a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+b+\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a}{b}$;

в) $\dfrac{m^2+5}{\sqrt{m^2+5}-\sqrt{m^2-5}}-\dfrac{\sqrt{m^4-25}}{10}$; г) $\dfrac{a}{\sqrt[5]{(a-b)^4}}+\dfrac{b}{\sqrt[5]{(a-b)^2}}+\dfrac{b\sqrt[5]{(a-b)^3}}{b-a}$;

д) $\dfrac{2n}{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}+\sqrt{m-n}$;

е) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right):\left(1+\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}\right)$.

3-топшириқ. Қавсдан ташқарига чиқариб соддалаштиринг:

а) $\left(\dfrac{pq^3}{(p+q)^{5/2}}-\dfrac{2pq}{(p+q)^{3/2}}+\dfrac{pq}{\sqrt{p+q}}\right):\left(\dfrac{p^2}{(p+q)^{5/2}}-\dfrac{p^2q}{(p+q)^{7/2}}\right)$;

б) $\left(\sqrt{ab}-ab\left(a-\sqrt{ab}\right)^{-1}\right):\left(2(ab)^{\frac{1}{2}}-b\right)\cdot(a-b)^{-1}$);

в) $\left(\left(\sqrt{mn}-\dfrac{\sqrt{mn}}{m+\sqrt{mn}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}{m-n}-m\sqrt{n}\right)^2:\sqrt[3]{mn\sqrt{mn}}-$

$-\left(\dfrac{m}{\sqrt{m^4-1}}\right)^{-2}$;

г) $\left(\sqrt[4]{36mn^2p}+m\sqrt{\dfrac{3n}{m}}+\sqrt{3np}\right)\left(\sqrt[4]{36mn^2p}-\sqrt{3mn}-p\sqrt{\dfrac{3n}{p}}\right)$;

д) $\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{y^3}}{\sqrt[4]{y^5}+\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^5}}$;

е) $\dfrac{a^{7/3}-2a^{5/3}b^{2/3}+ab^{4/3}}{a^{5/3}-a^{4/3}b^{1/3}-ab^{2/3}+a^{2/3}b}:a^{1/3}$.

4-топшириқ. Белгилаш киритиб рационал ифодага келтириб, соддалаштиринг:

а) $\dfrac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{y^5}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)$;

б) $\dfrac{8-n}{2+\sqrt[3]{n}}:\left(2+\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{2+\sqrt[3]{n}}\right)-\left(\sqrt[3]{n}+\dfrac{2\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}-2}\right)\cdot\dfrac{4-\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2}+2\sqrt[3]{n}}$;

в) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$;

г) $\dfrac{(a-b)^3\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-3}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\dfrac{3\left(\sqrt{ab}-b\right)}{a-b}$;

д) $\dfrac{\left(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y}\right)^2+\left(\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{y}\right)^2}{x-\sqrt{xy}}:\dfrac{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{xy}+\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[8]{xy}+\sqrt[4]{y}\right)}{\sqrt{x^3y}-y}$;

е) $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-y}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}}-3\sqrt[12]{x^3y^4}\right)^{-1/2}\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}+y}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}-\sqrt[3]{y^2}\right)$;

ж) $\sqrt{\frac{p^2-q\sqrt{p}}{\sqrt{p}-\sqrt[3]{q}}+p\sqrt[3]{q}}\cdot\left(p+\sqrt[6]{p^3q^2}\right)^{-1/2}$;

з) $\left(\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{1/2}-\sqrt{a-1}\,(\sqrt{a}+1)^{-1}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{a^{2/3}+a^{1/3}+1}$.

5-топшириқ. Турли усуллар қўллаб соддалаштиринг:

а) $\frac{\sqrt{1+\frac{2x}{1+x^2}}-\sqrt{1-\frac{2x}{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{2x}{1+x^2}}+\sqrt{1-\frac{2x}{1+x^2}}}$; б) $\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$;

в) $\left(\frac{\sqrt{t^2-a^2}+\sqrt{t^2+a^2}}{\sqrt{t^2-a^2}-\sqrt{t^2+a^2}}\right)^3$, бунда $t=a\sqrt{\frac{x^2+1}{2x}}$, $a>0$, $x>0$;

г) $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}$, бунда $x=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}$;

д) $\frac{\sqrt[3]{2b\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right)}}{\sqrt[3]{\frac{a+b}{a-b}}+1}+\frac{\sqrt[3]{2a\left(\frac{a+b}{a-b}+1\right)}}{\sqrt[3]{\frac{a+b}{a-b}}-1}$, $a>b>0$.

2-§. Тенглама ва тенгламалар системаси

1. Бир ўзгарувчили тенглама. Ҳар қандай $f(x)$ ва $g(x)$ функция учун тузилган қуйидагидек

$$f(x)=g(x) \qquad (1)$$

кўринишдаги ифодага *бир ўзгарувчили* (*номаълумли*) *тенглама* деб айтилади. Бунда x *номаълум* ҳисобланади.

$x=x_0$ ҳақиқий сон учун (1) тенгламанинг чап ва ўнг томони аниқланган бўлиб, $f(x_0)$ ва $g(x_0)$ қийматлар ўзаро тенг бўлса, у ҳолда x_0 шу *тенгламанинг ечими (илдизи)* дейилади.

Тенгламанинг барча илдизлари тўпламини топиш уни *ечиш* дейилади. Агар бу тўплам бўш бўлса, тенглама *ечимга эга эмас* деб аталади.

Агар икки тенглама илдизлари тўплами айнан бир хил тўпламдан иборат бўлса, у ҳолда улар *ўзаро тенг кучли тенглама* дейилади. Масалан, $5x^2+2=7$ ва $3x^2=3$ тенгламалар тенг кучлидир, чунки уларнинг ҳар бири бир хил илдизлар тўпламига эга: $\{1;\ -1\}$.

Агар икки тенгламадан биринчисининг ҳар қандай илдизи иккинчисининг ҳам илдизи бўлса, у ҳолда иккинчи тенглама биринчисининг *натижаси* дейилади. Агар $f_1(x) = g_1(x)$ тенглама (1) тенгламанинг натижаси бўлса, бу қуйидагича ёзилади:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow f_1(x) = g_1(x). \qquad (2)$$

Аксинча, $f_1(x) = g_1(x)$ ва $f(x) = g(x)$ тенгламалар *ўзаро тенг кучли* бўлса, уларнинг ҳар бири иккинчисининг *натижаси* бўлади. У ҳолда бу бундай ёзилади:

$$f(x) = g(x) \Longleftrightarrow f_1(x) = g_1(x). \qquad (3)$$

Масалан, $x = x^2$ тенгламанинг барча илдизлари $x^2 = x^4$ тенгламанинг ҳам ечими бўлгани учун, иккинчи тенглама аввалгисининг натижасидир. $\sqrt{x} = -x$ тенглама ҳам $x = x^2$ тенглама каби натижага эга. Аммо $\sqrt{x} = x$ тенгламани $x = x^2$ га тенг кучли эканлигини текшириш қийин эмас. Демак:

а) $x = -\sqrt{x} \Longrightarrow x = x^2 \Longrightarrow x^2 = x^4$; б) $\sqrt{x} = x \Longrightarrow x = x^2$.

Берилган (1) тенгламанинг ўнг ва чап томонларидаги функциялар аниқланиш соҳаларининг кесишмаси $D_0 = D(f) \cap D(g)$ шу тенгламанинг *аниқланиш соҳаси* деб айтилади.

Агар $D_0 = \varnothing$ бўлса, (1) тенгламанинг ечими бўлмайди. Масалан, $\sqrt{2-x} + 2 = \sin\sqrt{x-3}$ тенглама учун $D(f) =]-\infty; 2,]$ $D(g) = [3; +\infty[$ бўлиб $D_0 = \varnothing$ эканлигидан у ечимга эга эмас.

Баъзи абитуриентлар

$$\lg x^2 = \lg^2(-x) + 4 \qquad (4)$$

каби тенгламаларни ечишда унинг аниқланиш соҳасига эътибор бермай, (4) тенгламани $2\lg x = \lg^2(-x) + 4$ га тенг кучли ҳисоблаб ечишга уринадилар. Аслида, (4) тенглама учун $D(f) =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, $D(g) =]-\infty; 0[$ ва $D_0 =]-\infty; 0[$ бўлиб, унда $\lg x^2 = 2\lg(-x)$ ўринлидир. Натижада (4) тенглама

$$\lg^2(-x) - 2\lg(-x) + 4 = 0$$

га тенг кучли эканлиги маълум бўлади ва у $u = \lg(-x)$ каби белгилаш билан осон ечилади.

Баъзида ечилиши содда бўлган тенгламаларнинг аниқланиш соҳасини топиш нисбатан қийин бўлади. Бундай ҳолларда тенглама дастлаб ечилиб, сўнгра текшириш йўли билан илдизлари тўлиқ аниқланади. Масалан, $\sqrt{x^3-3x^2+2x+1} = \sqrt{2-x}$ тенгламани ечишда дастлаб

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2x + 1 \geqslant 0, \\ 2 - x \geqslant 0 \end{cases}$$

система ечилиб, унинг аниқланиш соҳаси топилади. Нисбатан қийин бўлган бу ишни бажармай, юқорида айтилган йўл билан тенгламани ечиш маъқул:

$$\sqrt{x^3-3x^2+2x+1}=\sqrt{2-x} \Longleftrightarrow x^3-3x^2+2x+1=$$
$$=2-x \Longleftrightarrow (x-1)^3=0 \Longleftrightarrow x_0=1.$$

Бу топилган қийматни тенгламага қўйиб текширсак, у ечим эканлиги аниқланади.

Қуйида ўқувчига исботи осон бўлган бир нечта зарур тасдиқлар исботсиз келтирилади.

1) Агар $\varphi(x)$ функция $D_0=D(f)\cap D(g)$ да аниқланган бўлса, у ҳолда

$$f(x)=g(x) \Longleftrightarrow f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x).$$

Хусусан, $f(x)=g(x) \Longleftrightarrow f(x)-g(x)=0$.

2) Агар $\varphi(x)$ функция $D_0=D(f)\cap D(g)$ да аниқланган бўлса, у ҳолда

$$f(x)=g(x) \Longrightarrow f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x).$$

Шу билан бирга ҳар бир $x\in D_0$ учун $\varphi(x)\neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$f(x)=g(x) \Longleftrightarrow f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x).$$

Хусусан, $a\in R$ ва $a\neq 0$ бўлганда:

$$f(x)=g(x) \Longleftrightarrow a\,f(x)=a\,g(x).$$

3) Ҳар қандай $f(x)$, $g(x)$ ва $\varphi(x)$ лар учун

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=g(x) \Longrightarrow f(x)=g(x)\varphi(x).$$

Хусусан, $\varphi(x)$ ни нолга айлантирмайдиган тўпламда $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=g(x)$ тенглама билан $f(x)=g(x)\varphi(x)$ тенглама айнан бир хил ечимларга эга (яъни ўзаро тенг кучли):

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x)\varphi(x), \\ \varphi(x)\neq 0. \end{cases}$$

4) $f(x)g(x)=0$ тенгламанинг ҳар бир ечими $f(x)=0$ ёки $g(x)=0$ тенгламаларнинг камида биттасининг ечимидир:

$$f(x)g(x)=0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0. \end{array}\right.$$

Агар $f(x)$ функция $g(x)=0$ тенгламанинг ҳар бир илдизида ва $g(x)$ функция эса $f(x)=0$ тенгламанинг ҳар бир илдизида аниқланган (мавжуд) бўлса, у ҳолда

$$f(x)g(x)=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0,\ g(x)\text{ — мавжуд}, \\ g(x)=0,\ f(x)\text{ — мавжуд}. \end{array}\right.$$

5) Ҳар қандай $n \in N$ учун

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow (f(x))^n = (g(x))^n.$$

1-мисол. Тенгламани ечинг: $2\sqrt{3x+5} - 2 = 3x$.

Ечилиши. Юқоридаги тасдиқларга асосланиб ечамиз:

$$2\sqrt{3x+5} - 2 = 3x \Longleftrightarrow 2\sqrt{3x+5} = 3x + 2 \Longrightarrow 4(3x+5) = (3x+2)^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (3x^2) = 16 \Longleftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ ёки } x = -\frac{4}{3}.$$

Шундай қилиб, тенгламанинг ечими $x = \frac{4}{3}$ ва $x = -\frac{4}{3}$ лар бўлиши мумкин. Текшириш натижасида улардан фақат $x = \frac{4}{3}$ ечимлиги аниқланади.

Жавоб. $\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

2-мисол. Тенгламани ечинг: $(a^2 - x^2)\sqrt{x^2 - b^2} = 0$.

Ечилиши. $|a| \geqslant |b|$ бўлса, тенглама $D =]-\infty; -b] \cup [b; +\infty[$ да аниқланган бўлиб, бу тенглама (4) тасдиққа кўра:

$$(a^2 - x^2)\sqrt{x^2 - b^2} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 - x^2 = 0, \\ \sqrt{x^2 - b^2} = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \pm a, \\ x_{3,4} = \pm b \end{array}\right.$$

каби тўртта ечимга эга. Аксинча, $|a| < |b|$ бўлганда $a^2 - x^2 = 0$ тенгламанинг илдизларида $\sqrt{x^2 - b^2}$ функция аниқланмагани учун у фақат $x_{1,2} = \pm b$ ечимга эга холос.

Жавоб. $|a| \geqslant |b| \Longrightarrow \{\pm a; \pm b\}$; $|a| < |b| \Longrightarrow \{\pm b\}$.

6- топшириқ. **1.** Ушбу тенгламалар тенг кучлими:

а) $x - 3 = 0$ ва $x^2 - 3x = 0$; б) $x - 4 = 0$ ва $x\sqrt{x-4} = 0$;

в) $x^3 - 1 = 0$ ва $x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x}$;

г) $x^2 - 4 = 3$ ва $x^2 - 4 + \frac{1}{x^2 - 7} = 3 + \frac{1}{x^2 - 7}$;

д) $x^2 - 1 = 0$ ва $\sqrt[3]{1 - x^2}(x - 2) = 0$; е) $x^2 - 4 = 0$ ва $\sqrt{1 - x^2}(x^2 - 4) = 0$

ж) $x^2 - 4 = 0$ ва $\sqrt{(1 - x^2)(x^2 - 4)} = 0$?

2. Тенгламани ечинг:

а) $a^2x = 9x + a + 3$; б) $(a^2 - 4)x = 3a^2 + a - 10$;

в) $\frac{x}{a - 3} - \frac{1}{a} = \frac{6 + 4x}{a^2 - 3a}$.

3. Қуйидаги тасдиқларни исботланг:

а) $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{g(x)}{\varphi(x)} \Longrightarrow f(x) = g(x)$; б) $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{g(x)}{\varphi(x)} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ \varphi(x) \text{ функция } D_0 = D(f) \cap D(g) \text{ да аниқланган ва } \varphi(x) \neq 0, x \end{cases}$

4. Агар $\begin{cases} f(x)\,g(x)=0, \\ \varphi(x)\,\psi(x)=0 \end{cases}$

бўлса, ундан қандай хулоса чиқариш мумкин?

5. $\dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 1$ бўлса, қуйидагини исботланг:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \Longrightarrow \frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}=\frac{\varphi(x)+\psi(x)}{\varphi(x)-\psi(x)}.$$

2. Алгебраик ва каср-рационал тенгламалар. Агар $f(x)=$ $=g(x)$ тенгламанинг ҳар икки томони x номаълумга нисбатан кўпҳад (ёки каср-рационал функция) бўлса, бундай тенглама *алгебраик (каср-рационал) тенглама* деб аталади.

Ушбу

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0 \qquad (1)$$

тенглама *n-даражали (бутун рационал) тенглама* дейилади.

$n=2$ ҳолга тўхталмаймиз. $n \geqslant 3$ бўлганда алгебраик тенгламанинг илдизларини аниқлашнинг баъзи усуллари мисоллар ечиш орқали кўрсатилади.

Ушбу 1-теорема тенгламанинг рационал илдизи мавжудлигининг белгиси ҳисобланади.

1-теорема. *Агар коэффициентлари бутун сон бўлган (1) тенглама* $\frac{m}{n}$ $((m, n)=1)$ *каби рационал илдизга эга бўлса, у ҳолда* a_0 *сон* m *га,* a_n *эса* n *га қолдиқсиз бўлинади.*

2-теорема (Безу теоремаси). *Агар (1) тенглама* $x=a$ *илдизга эга бўлса, унинг чап томони* $x-a$ *га қолдиқсиз бўлинади.*

Мисол. Тенгламани ечинг:

$$x^4+2x^2-7x-10=0. \qquad (2)$$

Ечилиши. 1-усул. Бу тенгламада $a_n=1$, $a_0=-10$ бўлгани учун a_0 нинг ± 1, ± 2, ± 5, ± 10 бўлувчиларини аниқлаймиз. 1-теоремага кўра, тенгламада x нинг ўрнига шу қийматларни қўйиб кўрсак, унинг $x_1=-1$, $x_2=2$ илдизлари аниқланади. Безу теоремасига асосан, тенгламанинг чап томони $x+1$ ва $x-2$ га, шу жумладан $(x+1)(x-2)=x^2-x-2$ га бўлиниши келиб чиқади:

$$\begin{array}{r|l} x^4+2x^2-7x-10 & x^2-x-2 \\ \hline -\;x^4-x^3-2x^2 & x^2+x+5 \\ x^3+4x^2-7x & \\ -\;x^3-x^2-2x & \\ 5x^2-5x-10 & \\ -\;5x^2-5x-10 & \\ 0 & \end{array}$$

Ҳосил бўлган бўлинмадаги кўпҳад яна нолга тенгланганда унинг ҳақиқий ечими йўқлиги аниқланади. Шунинг учун уни ташлаб юборсак: $x^4+2x^2-7x-10=0 \Longleftrightarrow x^2-x-2=0 \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow (x+1)(x-2)=0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2}.$$

Жавоб. $\{-1;\ +2\}$.

2-усул. Баъзида кўпҳадни бир қанча $x^2+p_k x+q_k$ $(k=1, 2, \ldots)$ уч-

ҳадлар кўпайтмаси тарзида ифодалашга келтириб ечиш фойдали. (Бунда p_k, q_k лар излаб аниқланадиган коэффициентлар). Берилган (2) тенглама ҳам $n = 4$ даражали бўлгани учун

$$x^4 + 2x^2 - 7x - 10 = (x^2 + px + q)(x^2 + ax + b) \qquad (3)$$

деб, қавсларни очиб чиқиб, бир хил даражали x нинг коэффициентлари ўзаро тенглаштирилса, номаълум p, q, a, b лар аниқланади:

$$x^4 + 2x^2 - 7x - 10 = x^4 + (a + p)x^3 + (b + q + pa)x^2 + (pb + qa)x + qb,$$

яъни бу ердан изланаётган p, q, a, b лар учун ушбу шартлар ҳосил бўлди:

$$a + p = 0, \quad b + q + pa = 2, \quad pb + qa = -7, \quad qb = -10.$$

Бу тенгламалар системаси ечилиб, $p = -1$, $q = -2$, $a = 1$, $b = 5$ топилади. У ҳолда:

$$x^4 + 2x^2 - 7x - 10 = (x^2 - x - 2)(x^2 + x + 5).$$

Бундан ҳар бирини нолга тенглаб, 1-усулдаги сингари жавоб олинади.

Таъриф. Агар (1) тенгламада $a_n = a_0$, $a_{n-1} = a_1$, $a_{n-2} = a_2$, ... шарт бажарилса, у n-даражали *қайтма тенглама* дейилади

3-теорема. *Ҳар қандай $2k$ ($k \in N$) даражали қайтма тенглама $t = x + \frac{1}{x}$ га нисбатан k даражали алгебраик тенгламага тенг кучли алмашади:*

$$a_{2k}x^{2k} + a_{2k-1}x^{2k-1} + \ldots + a_1x + a_0 = x^k(a_{2k}t^k + a_{2k-1}t^{k-1} + \ldots) \qquad (4)$$

4-теорема. *Ҳар қандай $2k + 1$ ($k \in N$) даражали қайтма тенгламанинг чап томони $x + 1$ га қолдиқсиз бўлиниб, бўлинмада жуфт даражали тенглама ҳосил бўлади.*

Бу теоремаларни ўқувчилар машқ тариқасида мустақил исботлашлари мумкин. Бунда $t = x + \frac{1}{x}$ учун ушбу айниятлар қўлланилади:

$$1)\ x^2 - x^{-2} = t^2 - 2; \qquad 2)\ x^3 + x^{-3} = t^3 - 3t;$$
$$3)\ x^4 + x^{-4} = t^4 - 4t^2 + 2; \quad 4)\ x^5 + x^{-5} = t^5 - 5t^3 + 5t; \qquad (5)$$
$$5)\ x^6 + x^{-6} = t^6 - 6t^4 + 9t^2 - 2; \ \ldots$$

2-мисол. Тенгламани ечинг:

$$4x^{11} + 4x^{10} - 21x^9 - 21x^8 + 17x^7 + 17x^6 + 17x^5 + 17x^4 - 21x^3 - 21x^2 + 4x + 4 = 0. \qquad (6)$$

Ечилиши. Бу тоқ, яъни 11-даражали қайтма тенглама, демак, у $x + 1$ га бўлинади. Шу бўлишни бажариб, берилган (6) га тенг кучли ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$(x + 1)(4x^{10} - 21x^8 + 17x^6 + 17x^4 - 21x^2 + 4) = 0.$$

Иккинчи қавс жуфт даражали қайтма тенглама, демак, $t = x + x^{-1}$ деб юқоридаги (5) айниятларга кўра

$$4x^{10} - 21x^3 + 17x^6 + 17x^4 - 21x^2 + 4 = x^5(4t^5 - 4t^3 + 100t)$$

ни топамиз. $t \neq 0$ бўлгани учун

$$4t^4 - 4t^3 - 100t = 0 \Longleftrightarrow t_{1,2} = \pm 2{,}5;\ t_{3,4} = \pm 2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x_{1,2} = \pm 2,\ x_{3,4} = \pm 0{,}5,\quad x_{5,6} = 1,\ x_{7,8} = -1$$

тенглама илдизларининг каррали эканини ҳисобга олиб, жавоб ёзамиз.

Жавоб. $\left\{-2;\ -1;\ -1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 1;\ 1;\ 2\right\}$.

3-мисол. Тенгламани ечинг:

$$x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 10x + 1 = 0. \qquad (7)$$

Ечилиши. Бу 4-даражали қайтма тенглама бўлгани учун уни $x^2 (x \neq 0)$ га бўлиб, (5) даги айниятлардан фойдалансак:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 10\left(x + \frac{1}{x}\right) = 9 \Longleftrightarrow t^2 + 10t - 11 = 0 \Longleftrightarrow t_{1,2} = -5 \pm 6.$$

а) $x + \frac{1}{x} = t_1 \Longrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ бу тенглама ечимга эга эмас;

б) $x + \frac{1}{x} = t_2 \Longrightarrow x^2 + 11x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{117}}{2}$.

Жавоб. $\{-5{,}5 \pm \sqrt{29{,}25}\}$.

Баъзида алгебраик тенглама янги номаълум билан белгилаш усули орқали квадрат тенгламага келтирилиб ечилади.

4-мисол. Тенгламани ечинг:

$$3x^2 + 3x + 1 = (x^2 + x + 1)^2. \qquad (8)$$

Ечилиши. $t = x + x + 1$ деб олинса, бу тенглама бундай ёзилади:

$$(8) \Longleftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x + 1) + 2 = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} t = x^2 + x + 1, \\ t^2 - 3t + 2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x + 1 = t_1 = 1, \\ x^2 + x + 1 = t_2 = 2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x = 0, \\ x^2 + x^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0,\quad x_2 = -1, \\ x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}. \end{array}\right.$$

Жавоб. $\left\{0;\ -1;\ -\frac{1}{2} \pm \sqrt{1{,}25}\right\}$.

5-мисол. Тенгламани ечинг:

$$(2x^2 + x + 2)^2 + 16x(2x^2 + x + 2) + 15x^2 = 0. \qquad (9)$$

Ечилиши. $t = 2x^2 + x + 2$ десак, бунда $t^2 + 16xt + 15x^2 = 0$ каби t га нисбатан квадрат тенглама ҳосил бўлади. $t_1 = -3x$, $t_2 = -5x$ илдизлар аниқланади ва

$$(9) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 + x + 2 = -3x, \\ 2x^2 + x + 2 = -5x \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x + 1 = 0, \\ x^2 + 3x + 1 = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = -1, \\ x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Жавоб. $\left\{-1;\ -1;\ \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$.

Баъзида алгебраик тенглама бир қанча кўпҳадлар кўпайтмасига ажратилиб ечилади. Масалан (9) тенгламанинг чап томони қуйидагича:

$$(2x^2+x+2)^2+16x(2x^2+x+2)+16x^2-x^2=$$
$$=((2x^2+x+2)+4x)^2-x^2=(2x^2+5x+2+x)(2x^2+$$
$$+5x+2-x),$$

яъни (9) тенглама шу қавсларнинг ҳар бирини нолга тенгланиб ечилганига тенг кучли бўлади ва авсалги жавоблар ҳосил қилинади.

6-мисол. Тенгламани ечинг:

$$x^3-19x-30=0. \qquad (10)$$

Ечилиши. $x^3-19x-30=x^3-4x-15x-30=x(x^2-4)-15(x-2)=$ $=(x-2)(x^2+2x+15)$ бўлгани учун уларнинг ҳар иккисини нолга тенглаб ечилади:

$$(10) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0, \\ x^2+2x-15=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_{2,3}=-1\pm\sqrt{16} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=-5, \\ x_3=3. \end{array}\right.$$

Жавоб. $\{2;\ 3;\ -5\}$.

Каср-рационал тенгламалар, одатда, унинг ҳар икки томонини умумий махражга кўпайтириш усули билан соддалаштириш асосида алгебраик тенгламага келтирилиб ечилади. Баъзида бу амални бажариш ўрнига янги номаълум билан белгилаш усули қулай бўлади.

7-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0. \qquad (11)$$

Ечилиши. $y=\dfrac{x^2+x-5}{x}$ дейилса, бу тенглама $y+\dfrac{3}{y}+4=0$ шаклга келиб, $y_{1,2}=2\pm1$ аниқланади. Бундан қуйидагича ечимлар аниқланади:

$$(11) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-5=3x, \\ x^2+x-5=x \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=1\pm\sqrt{6}, \\ x_{3,4}=\pm\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Жавоб. $\{1\pm\sqrt{6};\ \pm\sqrt{5}\}$.

Кўпинча, абитуриент 7-мисолни ечишда белгилаш усулидан фойдаланиш ўрнига уни умумий махражга келтириб x^4+ $+6x^3-2x^2-30x-25=0$ кўринишда ечишга уринади. Бу усул эса ноқулайдир.

Баъзида тенгламани ёрдамчи (янги) номаълум киритиш билан тенгламалар системаси ҳосил қилиб ечиш қулай бўлади. Бу ҳақида 5 п. 297-бетга қаранг.

7- топшириқ. 1. Озод ҳад бўлувчилари ёрдамида (ёки кўпайтувчиларга ажратиш усулида) тенгламаларни ечинг:

а) $x^3 - 3x - 2 = 0$; б) $x^2 = 2x^3 - 1$; в) $x^2(x + 4) + 6x + 4 = 0$;
г) $x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 8x = 0$; д) $(x - 1)^3 + (2x + 1)^3 = 27x^3 + 8$;
е) $(x - 2)(x - 1)^2 + x^2 - x = 2x - 2$, ж) $6x^4 + 40x = 13x^3 + 27x^2 + 12$.

2. Белгилаш усули билан даражасини пасайтириб ечинг:
а) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$, б) $(x - 3)^6 = 216 + 19(x - 3)^3$; в) $x^8 - 13x^4 + 36 = 0$;
г) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 15$; д) $(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) = b^4$; е) $(4x^2 - 4x - 1)^2 - 12x^2 - 12x - 13 = 0$; ж) $(4x^2 - 10x - 7)^2 - (2x - 2)(2x - 3) = 1$.

3. Тенгламани белгилаш билан ечинг:

а) $\dfrac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^4 + 4x = 6$; б) $x^4 - \dfrac{50}{2x^4 - 7} = 14$;

в) $\dfrac{2x^2 - 1}{x} + \dfrac{4x}{2x^2 - 1} = 5$; г) $(x - \sqrt{3})^2 = 5 - \dfrac{4}{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3}$.

4. Тенгламани бутун рационал тенгламага келтириб ечинг:

а) $\dfrac{2x}{x + 2} - \dfrac{x + 2}{2 - x} = \dfrac{x^2 + 12}{x^2 - 4}$; б) $\dfrac{2x + 1}{4x + 6} - \dfrac{4x}{3 - 2x} = \dfrac{9(2x + 5)}{2(4x - 9)}$;

в) $\dfrac{2 - x}{x^3 + 1} + \dfrac{x}{x + 1} = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 1}$; г) $\dfrac{12(x + 2)}{x^2 - 9} + \dfrac{7 + x}{3 - x} = \dfrac{5x}{3 + x}$;

д) $\dfrac{3}{x + 2} - \dfrac{2x - 1}{x + 1} = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$; е) $1 + \dfrac{x - 1}{x + 2} = \dfrac{2 + 3x}{x(x + 2)} - \dfrac{1}{x}$;

ж) $\dfrac{y + 1}{2y + 1} + \dfrac{2y + 1}{y - 1} = \dfrac{5y + 4}{(y - 1)(2y + 1)}$; з) $(x + 2)^2 + \dfrac{24}{x^2 + 4x} = 18$.

5. $a \neq 0$ учун ушбу қайтма тенгламалар унга алмаштирилган тенгламага тенг кучлилигини исботланг:

(а) $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \Longleftrightarrow (x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a) = 0$;

б) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \Longleftrightarrow \left(x^2 + \dfrac{b}{2a}x + 1\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4a(c - 2a)}{4a^2}x^2 = 0$.

$D_1 = \dfrac{b^2 - 4a(c - 2a)}{4a^2}$ ифоданинг қандай ишорали қийматларида (б) тенглама ечимга эга эмас? Қачон у $x^2 + \dfrac{b}{2a}x + 1 = 0$ тенгламага тенг кучли? $D_1 > 0$ бўлганда (б) тенгламанинг қуйидагига тенг кучлилигини кўрсатинг:

$$(б) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + \dfrac{b + \sqrt{b^2 - 4a(c - 2a)}}{2a}x + 1 = 0; \\ x^2 + \dfrac{b - \sqrt{b^2 - 4a(c - 2a)}}{2a}x + 1 = 0. \end{array}\right.$$

6. $x^n - a = 0$ ($n > 2$, $n \in \mathbf{N}$) тенгламанинг

а) $a > 0$ ва n — тоқ бўлганда битта $x_1 = \sqrt[n]{a}$ илдизга;

б) $a > 0$ ва n — жуфт бўлганда иккита $x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{a}$ илдизга;

в) $a = 0$ бўлганда битта $x_1 = 0$ илдизга;

г) $a < 0$ ва n — тоқ бўлганда битта $x_1 = -\sqrt[n]{-a}$ илдизга;

д) $a < 0$ ва n — жуфт бўлса, ҳеч қандай илдизга эга эмаслигини исботланг.

7. $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ ($n \geqslant 2$) тенглама a, b, c ва n нинг қандай қийматларида ечимга эга? $n = 2k$ ($k \in \mathbf{N}$) ва $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbf{N}$) учун алоҳида-алоҳида жавоб беринг.

8. Қуйидаги тенгламани ечинг:

а) $2x^4 - 9x^3 + 9x + 2 = 0$; б) $30x^4 - 17x^3 - 288x^2 + 17x + 30 = 0$;

в) $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$; г) $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$;

д) $x^4 + x^3 - x^2 + x + 1 = 0$; е) $x^4 + 1 = x(x^2 - x + 1)$; ж) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$;

з) $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$; и) $12x^4 - 16x^3 - 11x^2 - 16x + 12 = 0$.

3. Тенгламалар системаси. Алгебраик ва каср-рационал тенгламалар системаси. Ҳар қандай икки ўзгарувчили $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функция учун тузилган қуйидаги

$$f(x, y) = g(x, y) \tag{1}$$

кўринишдаги ифода *икки номаълумли тенглама* дейилади

Агар $x = x_0$, $y = y_0$ сонлар учун $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар аниқланган бўлиб, $f(x_0, y_0)$ ва $g(x_0, y_0)$ қийматлар ўзаро тенг бўлса, у ҳолда тартибланган $(x_0; y_0)$ жуфтлик шу *тенгламанинг ечими (илдизи)* деб айтилади.

Координаталари (1) тенгламани қаноатлантирадиган координаталар текислигидаги барча $M(x; y)$ нуқталар тўплами, шу тенгламанинг *графиги* деб айтилади. Масалан, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R$ ($R > 0$) тенгламани қаноатлантирувчи барча $(x_0; y_0)$ нуқталар тўплами координаталар текислигида маркази $O(a; b)$ да бўлган R радиусли айланадир; $ax^2 + bx + c = y$ ($a \neq 0$) тенгламанинг графиги эса бирор параболадир.

Агар (1) тенгламанинг ҳар бир ечими бирор $f_1(x, y) = g_1(x, y)$ тенгламанинг ҳам ечими бўлса, у ҳолда бу тенглама (1) тенгламанинг *натижаси* деб аталади ва бундай ёзилади:

$$f(x, y) = g(x, y) \Longrightarrow f_1(x, y) = g_1(x, y). \tag{2}$$

Бунда (1) тенгламанинг графиги $f_1(x, y) = g_1(x, y)$ тенглама графигининг бир қисми бўлади (хусусан, улар устма-уст тушиши ҳам мумкин). Агар бу графиклар устма-уст тушса, бу тенгламалар ўзаро *тенг кучли* дейилади ва қисқача бундай ёзилади:

$$f(x, y) = g(x, y) \Longleftrightarrow f_1(x, y) = g_1(x, y) \tag{3}$$

Қуйидаги тасдиқларни исботлаш осон:

(1б) $f(x, y) = g(x, y) \Longleftrightarrow f(x, y) - g(x, y) = 0;$

(2б) $f(x, y) = g(x, y) \Longleftrightarrow a \cdot f(x, y) = a \cdot g(x, y),\ a \neq 0,\ a \in \mathbf{R};$

(3б) $\dfrac{f(x, y)}{\varphi(x, y)} = g(x, y) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x, y) = g(x, y) \cdot \varphi(x, y), \\ \varphi(x, y) \neq 0; \end{cases}$

(4б) $f(x, y)\, g(x, y) = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{array} \right.$

Хусусан, f ва g функциялар бир хил аниқланиш соҳасига эга бўлса, бу (4б) тасдиқ тескарисига ҳам ўринлидир.

1-мисол. $y^2 - 2xy - 3x^2 = 0$ нинг графигини чизинг.

Ечилиши. Бу тенгламани юқоридаги тасдиқларга асосан унга тенг кучли тенгламалар системасига олиб келамиз:

$$y^2 - 2xy - 3x^2 = 0 \Longleftrightarrow (y - x)^2 = 4x^2 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - x = 2x; \\ y - x = -2x \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3x; \\ y = -x. \end{array} \right.$$

Демак, 220-шаклдаги графикка тегишли барча нуқталарнинг координаталари тенгламанинг ечими бўлади.

Бир, икки номаълумли тенглама сингари n та номаълумли ($n \geqslant 3$) тенглама ҳам, бундан кейин мисолларда кўриб ўтилиши мумкин.

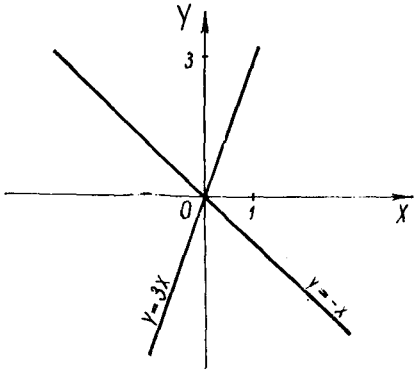
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ кўринишдаги n номаълумли тенгламанинг ҳар икки томони $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ каби тартибланган сонлар бирикмасида маънога эга бўлиб,

$$f(x_1^0, x_2^0 \ldots, x_n^0) = g(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \qquad (4)$$

сонли тенглик ўринли бўлса, $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ шу *тенгламанинг ечими* дейилади.

Бундай тенгламаларнинг чекли сондаги тўплами *тенгламалар системаси* дейилади. Одатда, системадаги тенгламалар сони номаълумлар сони билан бир хил бўлади. Акс ҳолда, система *аниқмас* дейилади ва улар қўшимча шартлар асосида ечилади.

n та номаълумли m та тенгламалар системаси



220-шакл.

$$f_1(x_1\ x_2, \ldots, x_n) = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

кўринишда бўлиб, бунда $m = n$, $m < n$, $m > n$ ҳоллар бўлиши мумкин. *Системанинг ечими* деб, ундаги барча тенгламаларни қаноатлантирувчи сонларнинг тартибланган бирикмаси $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ га айтилади.

Қуйидагидек шакл алмаштиришлар билан (5) тенгламалар системаси ўзига тенг кучли системага ўтади:

1) Системадаги бирор тенглама ўзига тенг кучли тенгламага алмаштирилиб, қолганлари ўзгаришсиз қолдирилса;

2) $f = g$ ва $\varphi = \psi$ системанинг икки тенгламаси бўлиб, $f = g$ тенглама $f + \varphi = g + \psi$ билан алмаштирилиб қолганлари ўзгаришсиз қолдирилса;

3) системада бирор тенглама $x_k = g(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ шаклда бўлиб, қолганларида x_k ўрнига $g(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ қўйиб чиқилса;

4) системанинг бирор тенгламаси $f \cdot g = 0$ шаклда бўлса, бу система шундай икки системага ажраладики, уларнинг бирида $f \cdot g = 0$ тенглама $f = 0$ билан, иккинчисида эса $g = 0$ билан алмашади.

Агар f ва g лар бир хил тўпламда аниқланган функция бўлса, у ҳолда ҳосил қилинган ҳар бир системанинг ечими берилган системанинг ҳам ечими бўлади. Бу вақтда берилган система ҳосил қилинган системалар бирлашмасига *тенг кучли* деб айтилади.

Натижа. Агар $f \circ \psi = g$ ва $\psi = a\ (a \in \mathbf{R})$ берилган (5) системанинг бирор икки тенгламаси бўлса, у ҳолда $f \circ \psi = g$ тенглама $f \circ a = g$ тенгламага алмаштирилиб, қолганлари ўзгаришсиз қолдирилса, система ўзига тенг кучли системага ўтади. (Бу ерда „$\circ$" белги асосий арифметик амаллардан бирини билдиради).

Алгебраик система. Агар (5) системадаги тенгламада ҳар бир f_i ва g_i функциялар $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ ҳар бир x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ўзгарувчига нисбатан кўпҳад бўлса, система *алгебраик система* деб айтилади.

Бу пунктда фақат алгебраик тенгламалар системаси берилиб, қолган кўринишлари кейинги пунктларга қолади.

1-мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x^2 + y^2 = 25 - 2xy. \end{cases} \tag{6}$$

Ечилиши. Системанинг иккинчи тенгламасига юқоридаги (2в), (4в) ва натижа тасдиқлари қўлланса, бундай ечилади:

$$(6) \Longleftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ (x + y)^2 = 25 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 35, \\ (x + y - 5)(x + y + 5) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-xy+y^2=7,\\ x+y=5\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-xy+y^2=-7,\\ x+y=-5\end{cases}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+y)^2=7+3xy,\\ x+y=5\end{cases}\\ \begin{cases}(x+y)^2=-7+3xy,\\ x+y=-5\end{cases}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3xy=18,\\ x+y=5\end{cases}\\ \begin{cases}3xy=32,\\ x+y=-5.\end{cases}\end{array}\right.$$

Охирги системанинг биринчисидан (3; 2) ва (2; 3) ечим топилади, иккинчиси эса ечимга эга эмас.

Жавоб. {(3; 2); (2; 3)}.

2-мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{10}{3}xy,\\ x+y=\dfrac{4}{3}xy.\end{cases} \qquad (7)$$

Ечилиши. Бу системанинг биринчи тенгламасини $\varphi(x, y)=xy\neq 0$ деб унга бўлиб юборсак, $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{10}{3}$ ҳосил бўлади. Бу ердан $t=\dfrac{x}{y}$ каби белгилаш билан t га нисбатан квадрат тенглама юзага келиб, $t_1=3$ ва $t_2=\dfrac{1}{3}$ ёрдамчи илдизлар топилади. Шундай қилиб, $\varphi(x, y)\neq 0$ шартни бажарувчи соҳада (7) система қуйидагидек икки системага ажратиб ечилади ва жавоб топилади:

$$(7) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x}{y}=3,\\ x+y=\dfrac{4}{3}xy\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{y}{x}=3,\\ x+y=\dfrac{4}{3}xy\end{cases}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3y,\\ 4y=4y^2\end{cases}\\ \begin{cases}y=3x,\\ 4x=4x^2\end{cases}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=1\end{cases}\\ \begin{cases}y_2=3,\\ x_2=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Худди шунингдек, $\varphi(x, y)=0$ бажарилса, берилган системадан $x_0=0$, $y_0=0$ ҳам унинг ечими эканлигини кўриш қийин эмас.

Жавоб. {(0; 0), (3; 1), (1; 3)}.

Баъзи абитуриентлар шу системани кўрсатилган усулда ечиб, $\varphi(x, y)=0$ бўлган ҳолни назардан четда қолдириб, системанинг бир ечимини йўқотиб қўядилар.

(7) системанинг биринчи тенгламаси $P(x, y)=Q(x, y)$ шаклдаги икки кўпҳаднинг тенглаштирилишидан тузилган бўлиб, унда $P(\lambda x, \lambda y)=\lambda^2 P(x, y)$, $Q(\lambda x, \lambda y)=\lambda^2 Q(x, y)$ хосса бажарилгани учун $\lambda=\dfrac{1}{y}$ деб олиниб, бу тенгламани $P\left(\dfrac{x}{y}, 1\right)=Q\left(\dfrac{x}{y}, 1\right)$ кўринишга келтиришда фойдаланилди ва $t=\dfrac{x}{y}$ деб олинса квадраг тенглама ҳосил бўлди. Умуман олганда

$$\begin{cases}P(x, y)=0,\\ Q(x, y)=0\end{cases} \qquad (8)$$

каби кўринишдаги алгебраик системанинг камида биттаси $P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n P(x, y)$ $(n \geqslant 2)$ шаклда бўлса, *n-даражали бир жинсли алгебраик тенглама* дейилади. Бундай тенгламанинг ҳар икки томони x^n га бўлиб юборилса, доимо $t = \frac{x}{y}$ га нисбатан n-даражали кўпҳад: $P\left(\frac{x}{y}, 1\right) = P_n(t) = 0$ ҳосил бўлади. Бу кўпҳад ҳаммаси бўлиб k та $t_1, t_2, \ldots, t_k$ ҳақиқий илдизга эга бўлса, (8) система k та ушбу системалар бирлашмасига тенг кучли бўлади:

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = t_1 x, \\ Q(x, y) = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} y = t_2 x, \\ Q(x, y) = 0; \end{cases} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \begin{cases} y = t_k x, \\ Q(x, y) = 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{9}$$

Бундай система баъзида (7) система сингари (0, 0) ечимга эга бўлиши мумкин. Бу эса фақат текшириб аниқланади.

Баъзида тенгламалар алгебраик қўшиш усули билан бир жинсли ҳолга келтирилади.

3-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy + 15 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Ечилиши. Биринчи тенгламани 5 га, иккинчисини 7 га кўпайтириб, бир-бирига қўшсак, $5x^2 - 19xy + 12y^2 = 0$ ҳосил бўлади. Бундан $x = 3y$ ва $x = \frac{4}{5}y$ экани топилиб,

$$(10) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 - 2xy + 15 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 5x = 4y, \\ y^2 - 2xy + 15 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_{1,2} = \pm 3\sqrt{3}, \\ y_{1,2} = \pm\sqrt{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x_{3,4} = \pm 4, \\ y_{3,4} = \pm 5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Жавоб. $\{(4; 5), (-4; -5), (3\sqrt{3}; \sqrt{3}), (-3\sqrt{3}; -\sqrt{3})\}$.

8-топшириқ. 1. Системаларни $t = \frac{y}{x}$ белгилаш билан ечинг:

а) $\begin{cases} 3(x^2 + y^2) = 5(x^2 - y^2), \\ 2(x^2 - y^2) = 3x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4{,}25xy, \\ 0{,}24(x + y) = xy; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^4 + 4y^4 = 5x^2y^2, \\ 2x + y = 2xy; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{5}{6}xy, \\ x^2 = 5 + y^2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2y^2 + xy - x^2 = 0, \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^3 + 2y^3 = 3x^2y, \\ x + y = 1. \end{cases}$

2. Алгебраик қўшиш усули билан ечинг:

а) $\begin{cases} 2x^2+y^2+3xy=12, \\ 2(x+y)^2-y^2=14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+xy=5, \\ x^2+y^2+xy=7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}, \\ x^2+y^2=160; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2-xy=28, \\ y^2-xy=-12; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3x^2+xy-2x+y-5=0, \\ 2x^2-xy-3x-y-5=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x^2+3y^2-4xy=3, \\ 2x^2-y^2=7; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3xy+2x^2+y^2=12, \\ (x+y)^2-\frac{1}{2}y^2=7; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 7x+2y-4z=19, \\ 5x+3y-3z=15, \\ 5x-3y+3z=15; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x^2+2y+3z=8, \\ 3x^2+y+z=6, \\ 2x^2+y+2z=6. \end{cases}$

Симметрик алгебраик система. Агар $P(x, y)=P(y, x)$ ва $Q(x, y)=Q(y, x)$ бажарилса, (8) система *симметрик система* деб аталади. $x+y$ ва xy лар энг *содда симметрик* ифодалар бўлиб, симметрик алгебраик системалар эквивалент алмаштиришлар натижасида шу содда симметрик ифодаларга келтирилади ва $u=x+y$, $v=xy$ каби белгилашлар билан қулай ечилади. Системада учрайдиган баъзи симметрик ифодаларни u ва v орқали ёзайлик:

$$x^2+y^2=u^2-2v; \quad x^3+y^3=u^3-3uv;$$
$$x^4+y^4=u^4-4u^2v+2v^2; \quad x^5+y^5=u^5-5u^3v+5uv^2, \qquad (11)$$
$$x^6+y^2=u^6-6u^4v+9u^2v^2-2v^3.$$

Умуман олганда, ушбу формула ўринли (исботланг):

$$\frac{x^k+y^k}{k}=\frac{u^k}{k}-\frac{(k-2)!}{1!(k-2)!}u^{k-2}v+\frac{(k-3)!}{2!\,(k-4)}u^{k-4}v^2-\frac{(k-4)!}{3!\,(k-6)}u^{k-6}v^3+\ldots$$

4-мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x+y=5. \end{cases}$$

Ечилиши. $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy\,(x+y)$ эканидан

$$\begin{cases} u^3-3uv=35, \\ u=5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} v=6 \\ u=5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} xy=6, \\ x+y=5 \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=2, \\ y_1=3; \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Жавоб. $\{(2;\ 3),\ (3;\ 2)\}$.

5-мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^3+y^3=8, \\ x^2+y^2=4. \end{cases} \qquad (12)$$

Ечилиши. $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ бўлгани учун

$$\begin{cases} u^3-3uv=8, \\ u^2-2v=4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} v=\frac{1}{2}(u^2-4), \\ u^3-12u+16=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2v=u^2-4, \\ (u-2)(u^2+2u-8)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2v=u^2-4, \\ (u-2)^2(u+4)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u_1=2, \\ v_1=0 \end{cases} \text{ёки } \begin{cases} u_2=4, \\ v_2=6. \end{cases} \end{array}\right.$$

Бу ердан (12) тен ламалар системасининг қуйидаги икки система бирлашмасига тенг кучли экани аниқланди:

$$\begin{cases} x+y=2, \\ xy=0 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x+y=-4, \\ xy=6. \end{cases}$$

Бу системаларнинг фақат биринчиси ечимга эгадир: (2; 0) ва (0; 2).
Жавоб. {(2; 0), (0; 2)}.

9-топшириқ 1. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} x+y=5, \\ x^2-xy+y^2=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=7, \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=2, \\ x^2+y^2=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=5, \\ x^3+y^3=65; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+y+x^2+y^2=26, \\ 4(x+y)=3xy; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2+y^2=32-x-y, \\ 12x+12y=7xy; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} xy=15, \\ x+y+x^2+y^2=42; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13; \end{cases}$ и) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=13; \end{cases}$ к) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18, \\ x+y=12; \end{cases}$

л) $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^2y+y^2x=-2; \end{cases}$ м) $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^3y^3=-8; \end{cases}$ н) $\begin{cases} (x^2+y^2)\,xy=78, \\ x^4+y^4=97; \end{cases}$

о) $\begin{cases} 15xy+5(x+y)=-175, \\ 5(x+y)+2xy=-19; \end{cases}$ п) $\begin{cases} x^2+y^2-xy=13, \\ x+y-\sqrt{xy}=3. \end{cases}$

2. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} x+y=a, \\ x^3+y^3=b(x^2+y^2); \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2y+y^2x=30, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^4-x^2y^2+y^4=1153, \\ x^2-xy+y^2=33; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 7(x^5+y^5)=31(x^3+y^3), \\ x^2+xy+y^2=3; \end{cases}$ д) $\begin{cases} xy(x+y)=30, \\ x^3+y^3=35; \end{cases}$ е) $\begin{cases} (x^3+y^3)(x^2+y^2)=2b^5, \\ x+y=b; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x+y=a, \\ x^4+y^4=14x^2y^2; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x^3+y^3=(x+y)^2 \\ x^2+y^2=x+y+a; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x+y=4, \\ x^4+y^4=82. \end{cases}$

Системани ёрдамчи номаълум киритиш усули билан ечиш. Баъзида тенгламалар системаси эквивалент алмаштириш натижасида симметрик алгебраик системага келтирилади. Масалан, қуйидаги система $z=-y$ деб ёрдамчи номаълум киритиб симметрик системага келтирилиб ечилади: ($u=x+z$, $V=xz$):

6-мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^3-y^3=5, \\ xy^2-x^2y=1. \end{cases} \tag{13}$$

Ечилиши.

$$(13) \Rightarrow \begin{cases} x^3+z^3=5, \\ xz^2+x^2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+z)(x^2-xz+z^2)=5, \\ xz(x+z)=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(u^2-3v)=5, \\ uv=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2, \\ v=0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=2, \\ xz=0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = 1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_{1,2} = 1 \mp \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = 1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ y_{1,2} = -1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Жавоб. $\left\{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2};\ -1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}; -1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.

Қуйидаги системада $\frac{x}{a} = z$, $\frac{y}{b} = t$ ёрдамчи номаълумлар киритилса, симметрик алгебраик система ҳосил бўлади:

7-мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1, \\ \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = 4. \end{cases} \tag{14}$$

Ечилиши.

$$(14) \Longleftrightarrow \begin{cases} z + t = 1, \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{t} = 4, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z + t = 1, \\ z + t = 4zt \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u = 1, \\ u = 4v \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} u = 1, \\ v = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{1}{2}, \\ t = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2}, \\ y = \dfrac{b}{2}. \end{cases}$$

Жавоб. $\left\{\left(\frac{a}{2};\ \frac{b}{2}\right)\right\}$.

10-топшириқ. Системани ёрдамчи ўзгарувчи киритиб ечинг:

а) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^3 - y^3 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y = 5, \\ x^6 + y^3 = 65; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \dfrac{5}{6}\sqrt{xy}, \\ x + y = 13; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{61}{\sqrt{xy}} + 1, \\ \sqrt[4]{x^3y} + \sqrt[4]{xy^3} = 78; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy}, \\ x + y = 20; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x + \sqrt{xy} + y = a, \\ x^3 + 2xy\sqrt{xy} + y^3 = a^3; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 133; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x + y = 72, \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x + xy + y = 12, \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y} = 0; \end{cases}$

к) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7; \end{cases}$ л) $\begin{cases} x^5 - y^5 = 3093, \\ x - y = 3; \end{cases}$ м) $\begin{cases} \sqrt[4]{y^3 - 1} + \sqrt{x} = 3, \\ x^2 + y^3 = 82. \end{cases}$

4. Чизиқли тенгламалар системаси. Ушбу

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{15}$$

система *икки номаълумли икки чизиқли тенгламалар системасидир*. Унинг ҳар бир тенгламаси ечимлари координаталар текислигида бирор тўғри чизиқ графигини аниқлайди. Улар ўзаро бир нуқтада кесишиши, устма-уст тушиши ёки кесишмаслиги мумкин. Агар тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишса, бу кесишиш нуқтасининг координаталари (15) системанинг ягона ечими ҳисобланиб, у бундай топилади:

$$x_0 = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y_0 = \frac{c_2a_1 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}. \qquad (16)$$

Система ягона ечимга эга бўлса, у *аниқ система*, чексиз кўп ечимга эга бўлса, *ноаниқ система* дейилади. Бу иккинчи ҳолда, (15) системанинг бир тенгламаси иккинчисининг натижаси бўлиб, чексиз ечимнинг ҳар бири (масалан, $b_2 \neq 0$ бўлганда):

$$\begin{cases} x = c, \ c \in \mathbf{R}, \\ y = -\dfrac{a_2}{b_2}c + \dfrac{c_2}{b_2} \end{cases} \qquad (17)$$

каби ифодаланиб топилади. Умуман, ечимга эга чизиқли тенгламалар системаси *биргаликдаги система*, акс ҳолда *биргаликда бўлмаган система* деб айтилади. Система ягона ечимга эга бўлганда $a_1b_2 \neq a_2b_1$ бўлишининг, чексиз кўп ечимга эга бўлганда $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ бўлишининг, биргаликда бўлмаганда $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ бўлишининг исботи ўқувчига машқ сифатида қолади. (Бу шартлар ҳам зарур, ҳам етарлидир.)

8-мисол. a ва b нинг қандай қийматида ушбу системага ягона (чексиз) ечимга эга:

$$\begin{cases} x + ay = b, \\ ax + y = 2a? \end{cases} \qquad (18)$$

Ечилиши. (16) га кўра $1 - a^2 \neq 0$ деб, бу системанинг ягона ечими

$$x_0 = \frac{b - 2a^2}{1 - a^2}, \quad y_0 = \frac{2a - ab}{1 - a^2}$$

каби аниқланади. $a = \pm 1$ бўлганда (18) система қуйидаги кўринишда бўлар эди:

$$\begin{cases} x + y = b, \\ x + y = 2 \end{cases} \text{ёки } \begin{cases} x - y = b, \\ -x + y = -2. \end{cases}$$

Бу системалар $b = 2$ бўлганда (17) га асосан, мос равишда $(c;\ 2-c)$ ёки $(c;\ c-2)$, $c \in \mathbf{R}$ каби чексиз кўп ечимга эга.

Жавоб. 1) $|a| \neq 1 \Rightarrow$ система ягона ечимга эга; 2) $|a| = 1$, $b = 2$ да система чексиз кўп ечимга эга.

11-топшириқ. 1. a нинг қандай қийматларида система ечимга эга:

а) $\begin{cases} (a+1)x - y = a + 1, \\ x + (a-1)y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} ax + y = a, \\ x + ay = a^2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + ay = 1, \\ ax + y = a^2? \end{cases}$

2. a нинг қандай қийматларида система чексиз кўп ечимга эга:

а) $\begin{cases} 3x + ay = 3, \\ ax + 3y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (a-2)x + 27y = \frac{9}{2}, \\ 2x + (a+1)y = -1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} ax + a^2y = 2, \\ a^2x + ay = 2? \end{cases}$

5. Баъзи алгебраик тенгламаларни ёрдамчи номаълум киритиш билан системага келтириб ечиш.

9-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\left(\frac{x+a}{2}\right)^6 + \left(\frac{x-a}{2}\right)^6 = a^6.$$

Ечилиши. $y = \frac{1}{2}(x+a)$, $z = -\frac{1}{2}(x-a)$ деб, бу тенгламанинг ушбу

$$\begin{cases} y + z = a, \\ y^6 + z^6 = a^6 \end{cases}$$

симметрик системаси ҳосил қилинади. Бунда $y + z = u$, $yz = v$ белгилаш киритсак:

$$y^6 + z^6 = u^6 - 6u^4v + 9u^2v^2 - 2v^3$$

эканидан v га нисбатан ушбу тенглама ҳосил бўлади:

$$a^6 = a^6 - 6a^4v - 9a^2v^2 - 2v^3 \Rightarrow v_1 = 0,\ v_{2,3} = a^2(2{,}25 \pm \sqrt{2{,}0625}).$$

а) $v_1 = 0 \Rightarrow yz = 0 \Rightarrow x^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm a$;

б) $v_{2,3} = yz$ учун ушбу

$$\begin{cases} y + z = a, \\ yz = a^2\frac{9+\sqrt{33}}{4} \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} y + z = a, \\ yz = a^2\frac{9-\sqrt{33}}{4} \end{cases}$$

системалар ечимга эга эмаслигини текшириш ўқувчига қолади.

Жавоб: $\{\pm a\}$.

12-топшириқ. Системага келтириб ечинг:

а) $(ax^2 + bx + c)^5 - (ax^2 + bx + d)^5 = e$; б) $(x^2+1)^7 - (x^2-1)^7 = 2^7$;
в) $(x+a+b)^5 = x^5 + a^5 + b^5$; г) $x^4 + (1 - x^4) = 1$; д) $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 4$;
е) $(2x + a + b)^3 = (x+a)^3 + (x+b)^3$; ж) $x^4 + (x-1)^4 = 97$;
з) $(x - 4{,}5)^4 + (x - 5{,}5)^4 = 1$; и) $(x-a)^3 - (x-b)^3 = b^3 - a^3$;
к) $(x+3)^3 - (x+1)^3 = 56$.

3-§. Тенгсизлик. Рационал тенгсизликлар

1. Бир ўзгарувчили тенгсизлик. Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ бирор X тўпламда берилган бўлсин. Баъзида шундай савол туғилади. X нинг қайси E қисм-тўпламида ҳар бир $x \in E$ учун

$$f(x) < g(x) \qquad (1)$$

тенгсизлик ўринли бўлади? Бундай ифода *бир ўзгарувчили (номаълумли) тенгсизлик* деб аталади. Бу тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар бир $x_0 \in X$ қиймат тенгсизликнинг *ечими*, улардан ташкил топган E тўплам *ечимлар тўплами* дейилади.

Тенгсизликни ечиш деб, ана шу ечимлар тўпламини аниқлашга айтилади, агар шу тўплам бўш бўлса, *тенгсизлик ечимга эга эмас* дейилади. $f(x) < g(x)$ тенгсизлик *қатъий*, $f(x) \leqslant g(x)$ каби тенгсизлик *ноқатъий тенгсизлик* деб аталади.

Агар бирор M тўпламда берилган $f_1(x) < g_1(x)$ ва $f_2(x) < g_2(x)$ тенгсизликларнинг ҳар бирининг M га тегишли ечими иккинчисининг ҳам ечими бўлса, у ҳолда улар M да *ўзаро тенг кучли* дейилади ва бундай белгиланади:

$$f_1(x) < g_1(x) \Longleftrightarrow f_2(x) < g_2(x).$$

M да ҳар иккала тенгсизлик ечимга эга бўлмаган ҳолда ҳам улар ўзаро тенг кучли деб қаралади.

Тенгсизликни ечишда кенг қўлланиладиган ушбу тасдиқларнинг исботи ўқувчига машқ сифатида қолдирилади.

(1.А) Ҳар қандай сонли тўпламда

$$f(x) < g(x) \Longleftrightarrow -f(x) > -g(x).$$

(2.А) Агар $f(x)$ ва $g(x)$ лар M да фақат мусбат қийматлар қабул қилса, ушбу тенгсизликлар шу тўпламда тенг кучли бўлади:

$$f(x) < g(x) \Longleftrightarrow \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{g(x)}.$$

(3.А) Агар $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ лар M тўпламда аниқланган бўлса, у ҳолда шу тўпламда:

$$f(x) < g(x) \Longleftrightarrow f(x) + \varphi(x) < g(x) + \varphi(x).$$

Бундан ушбу тенгсизликларнинг тенг кучлилиги ҳам келиб чиқади:

$$f(x) < g(x) + \varphi(x) \Longleftrightarrow f(x) - \varphi(x) < g(x).$$

(4.А) Агар $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ лар M да аниқланган бўлиб, шу тўпламда $\varphi(x) > 0$ бўлса, у ҳолда M тўпламда

$$f(x) < g(x) \Longleftrightarrow f(x)\varphi(x) < g(x)\varphi(x).$$

(5.А) Агар $f(x)$ ва $g(x)$ лар M да аниқланган ва унда фақат мусбат қийматлар қабул қилса, у ҳолда шу тўпламда:

$$f(x) < g(x) \Longleftrightarrow f^2(x) < g^2(x).$$

1- изоҳ. $D_0 = D(f) \cap D(g)$ тўплам (1) тенгсизликнинг *аниқланиш соҳаси* дейилади. Юқоридаги X ёки M тўпламлар хусусий ҳолда шу аниқланиш соҳаси билан устма-уст тушиши ҳам мумкин.

2- изоҳ. (1.А) — (5.А) тасдиқлар $<$, $>$, $\geqslant$ тенгсизликлар учун ҳам ўринли.

1- м и с о л. Қуйидаги тенгсизликлар $]0; +\infty[$ да тенг кучлими:

а) $4x^2 \leqslant 8x^3$ ва $1 \leqslant 2x$; б) $8x^3 + \sqrt[4]{x} < 4x^2 + \sqrt[4]{x}$ ва $8x^3 < 4x^2$; в) $\sqrt{3x} \leqslant 3x + 1$ ва $3x \leqslant (3x+1)^2$?

Ечилиши. а) $f(x)=4x^2$, $g(x)=8x^3$, $\varphi(x)=\frac{1}{4x^2}$ деб олинса, ноқатъий тенгсизликлар учун (4.А) тасдиқга кўра $]0;+\infty[$ да улар тенг кучли;

б) $f(x)=8x^3$, $g(x)=4x^2$, $\varphi(x)=\sqrt[4]{x}$ деб олинса, (3.А) тасдиқга кўра бу тенгсизликлар $]0;+\infty[$ да тенг кучли;

в) $f(x)=\sqrt{3x}$ ва $g(x)=3x+1$ деб олинса, (5А) га кўра бу тенгсизликлар $]0;+\infty[$ да тенг кучли.

$f_1(x)<g_1(x)$ ва $f_2(x)<g_2(x)$ тенгсизликларнинг M да тенг кучли бўлмаслигини кўрсатиш учун улардан бирининг M даги шундай x_0 ечимини топиш керакки, у иккинчисининг ечими бўлмасин.

2-мисол. Барча ҳақиқий сонлар тўпламида 1-мисолдаги а), б), в) тенгсизликлар ўзаро тенг кучлими?

Ечилиши. а) Бу тенгсизликлар R да тенг кучли эмас, чунки $x_0=0$ биринчисининг ечими, иккинчисининг эса ечими эмас; б) $x_0=-1$ фақат иккинчисининг ечими, шунинг учун улар R да тенг кучли эмас; в) $x_0=-2$ фақат иккинчисининг ечимлар тўпламига кириб, биринчисининг ечимлар тўпламига тегишли эмас, демак улар ҳам R да тенг кучли эмас.

13-топшириқ. Ушбу тенгсизликлар R да тенг кучлими:

а) $2x-1\leqslant\sqrt{2x}$ ва $(2x-1)^2\leqslant 2x$; б) $4x+1\leqslant 2x$ ва $(4x+1)^2\leqslant 4x$;
в) $\sqrt{x^3+x-2}>x$ ва $x^3+x-2>x^2$; г) $\sqrt{x^3+x-2}<x$ ва $x^3+x-2<x^2$;
д) $(2x+7)(4x+1)>(2x+7)^2$ ва $4x+1>2x+7$; е) $x^2+x+\sqrt{3x}<2+3x$ ва $x^2+x<2$; ж) $\sqrt{4x-7}\geqslant x$ ва $4x-7\geqslant x^2$; з) $\sqrt{1-2x^2}>0$ ва $1-\sqrt{2}x>0$?

2. Рационал тенгсизликлар. ***Интерваллар усули.*** Маълумки, каср-рационал функция деб

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m} \qquad (2)$$

га айтилади. Бунда $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ кўпҳадларнинг илдизи $R(x)$ каср-рационал функциянинг *критик нуқталари* деб аталади.

Фақат каср-рационал функциялардан ташкил топган тенгсизлик *рационал тенгсизлик* деб аталади.

Рационал тенгсизликларни, кўпинча, интерваллар усули билан ечиш қулай. Бу усул рационал функциянинг ушбу хоссасига асосланади:

Рационал функция ўзининг икки қўшни критик нуқтаси орасида, шунингдек, унинг энг ўнг (чап) критик нуқтасидан $+\infty$ гача ($-\infty$ гача) бўлган ораликда ўз ишорасини сақлайди.

Бу функциянинг хоссаси, унинг ораликдаги узлуксизлигига асосланган бўлиб, исботи бу ерда келтирилмайди.

Интерваллар усулининг моҳияти бундай: Рационал тенгсизлик аввало ушбу стандарт кўринишлардан бирига келтирилади:

$$\text{а) } \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0; \quad \text{б) } \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}<0; \quad \text{в) } \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\geqslant 0; \quad \text{г) } \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\leqslant 0. \qquad (3)$$

Сўнг рационал функциянинг барча критик нуқталари аниқланиб, улар сонлар ўқида белгилаб чиқилади. У ҳолда сонлар ўқи чекли сондаги интерваллларга ажралиб кетади. Уларнинг ҳар бирида рационал функция ўз ишорасини сақлайди. Шу ишорани топиш учун интервал ичидаги бирор x_0 нуқтада $\frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}$ нинг ишорасини билиш кифоя. Сўнг шу ишорага қараб интервалнинг нуқталари тенгсизликнинг ечими эканлигини аниқлаш қолади.

Агар $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0\ (< 0)$ кўринишдаги қатъий тенгсизлик ечилаётган бўлса, унда критик нуқталар бу тенгсизлик ечими тўпламига кирмайди, аксинча, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geqslant 0\ (\leqslant 0)$ кўринишда бўлса, у ҳолда $Q_m(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлмаган критик нуқталарнинг ҳар бири шу тенгсизлик ечими тўпламига тегишли бўлади.

Изоҳ Интерваллар усули рационал тенгламани ечишда доимо қўл келмаслиги, балки ундан рационал тенгламани ташкил этувчи $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ кўпҳадларнинг илдизлари маълум бўлгандагина фойдаланиш қулайлигини таъкидлаш керак. Уларнинг илдизларини топишнинг ўзи ҳам баъзан тенгсизликни ечишга нисбатан катта иш бўлиши мумкин.

2- теорема. *Ҳар қандай $P_n(x)$ кўпҳад*

$$P_n(x) = a(x - x_1)^{r_1}(x - x_2)^{r_2} \ldots (x - x_k)^{r_k}(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{s_2} \ldots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m} \quad (4)$$

шаклда ёйилиб, кўпайтувчиларга ажралади. Бунда $a \neq 0$, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ кўпҳаднинг илдизлари, $x^2 + p_ix + q_i\ (i = 1, 2, \ldots, m)$ лар эса, дискриминанти манфий бўлган учҳадлар, $r_1, r_2, \ldots r_k, s_1, s_2, \ldots s_k \in \mathbf{N}$.

Бу теореманинг исботи берилмайди. Уни қўллаш эса интерваллар усули билан ечишда зарурдир.

3- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$\frac{(x+2)(x^2-2x+1)}{4x+3x^2-x^3} \leqslant 0. \quad (5)$$

Ечилиши. $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, $4x + 3x^2 - x^3 = -x(x-4)(x+1)$ бўлгани учун

$$(5) \Longleftrightarrow \frac{(x+2)(x-1)^2}{x(x+1)(x-4)} \geqslant 0.$$

Унинг $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 4$ критик нуқталари аниқлаган интерваллардаги ишорасини назарий қисмда айтилгандек аниқлаймиз. Бунда баъзи критик нуқталар ечимдир.

Ж а в о б. $]-\infty; -2]\cup]-1; 0[\cup\{1\}\cup]4; +\infty[$.

4- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$\frac{2}{3-x} + \frac{1}{x} \geqslant 2. \quad (6)$$

Ечилиши. (6) $\Longleftrightarrow \dfrac{2x+3-x}{(3-x)x}-2\geqslant 0 \Longleftrightarrow \dfrac{(x-1)(x-1{,}5)}{x(x-3)}\leqslant 0.$

Бу ердан интерваллар усули билан $]0;\ 1]\cup[1,5;\ 3[$ ечимлар тўплами аниқланади.

Баъзи абитуриентлар бу каби тенгсизликларни ечишда тенгсизликнинг икки тарафини ишораси аниқ бўлмаган номаълумли $(3-x)x$ ифодага кўпайтириб

$$2x+3-x\geqslant 2x(3-x)$$

каби ечишга уринадилар. Бу эса қўпол хато ҳисобланади.

Баъзида тенгсизлик ўзига тенг кучли бир қанча содда тенгсизликлар системасига келтириб ечилиши мумкин. Масалан,

$$\text{а) } a\cdot b\geqslant 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\geqslant 0,\\ b\geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}a\leqslant 0,\\ b\leqslant 0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{б) } a\cdot b\leqslant 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\geqslant 0,\\ b\leqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}a\leqslant 0,\\ b\geqslant 0;\end{cases}\end{array}\right. \tag{7}$$

$$\text{в) } \frac{a}{b}\geqslant 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\geqslant 0,\\ b>0\end{cases}\\ \begin{cases}a\leqslant 0,\\ b<0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{г) } \frac{a}{b}\leqslant 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\geqslant 0,\\ b<0\end{cases}\\ \begin{cases}a\leqslant 0,\\ b>0.\end{cases}\end{array}\right. \tag{8}$$

Бу усулни қўллаш рационал бўлмаган тенгсизликлар учун ҳам анча қулайдир.

5-мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$\frac{x^2-1}{x^2-4}\geqslant 0. \tag{9}$$

Ечилиши.

$$(9) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-1\geqslant 0,\\ x^2-4>0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-1\leqslant 0,\\ x^2-4<0\end{cases}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|\geqslant 1,\\ |x|>4\end{cases}\\ \begin{cases}|x|\leqslant 1,\\ |x|<4\end{cases}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x|>4,\\ |x|\leqslant 1.\end{array}\right.$$

Жавоб. $]-\infty;\ -4[\cup[-1;\ 1]\cup]4;\ +\infty[$.

6-мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$x^6-x^4+x^2-1<0. \tag{10}$$

Ечилиши. Бунда (7) дан фойдаланилади:

$$(10) \Longleftrightarrow x^4(x^2-1)+x^2-1<0 \Longleftrightarrow (x^2-1)(x^4+1)<0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-1>0,\\ x^4+1<0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-1<0,\\ x^4+1>0\end{cases}\end{array}\right. \Longleftrightarrow x^2-1<0 \Longleftrightarrow |x|<1.$$

Жавоб. $]-1;\ 1[$.

14-топшириқ. Тенгсизликларни ечинг:

1. а) $2-x \geqslant x^2$; б) $x^2-14x > 15$; в) $x^2+5 > 3x$; г) $3x^2-7x+6 < 0$; д) $3x^2-7x+4 \leqslant 0$; е) $\frac{x-1}{x-1} \leqslant 0$; ж) $\frac{x+1}{4x-4} \geqslant 0$; з) $\frac{x^2-1}{x} \leqslant 0$.

2. а) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1} < 0$; б) $\frac{x^2+4x-5}{x^2+1} \leqslant 0$; в) $\frac{(x+1)(x-2)^2}{x-1} \leqslant 0$; г) $\frac{3}{x-2} < 1$; д) $\frac{1}{x-1} \leqslant 2$; е) $\frac{4x+3}{2x-5} < 6$; ж) $\frac{5x-6}{x+1} < 1$.

3. а) $\frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} \geqslant 0$; б) $2x^2 + \frac{1}{x} > 0$; в) $\frac{x-1}{x+1} < x$; г) $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$; д) $\frac{x^2-1}{2x+5} < 3$; е) $\frac{x^2+1}{4x-3} > 2$; ж) $\frac{3x-5}{x^2+4x-5} > \frac{1}{2}$; з) $\frac{4}{1+x} + \frac{2}{1-x} < 1$.

4. а) $\frac{2x-5}{x^2-6x-7} < \frac{1}{x-3}$; б) $\frac{x+1}{x} \leqslant \frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}$; в) $\frac{(x^2+3x-4)(x^2-16)}{x(x+1)} < 0$; г) $\frac{2}{x} - \frac{8-4x}{4x+x^2} \geqslant \frac{-3}{4+x}$; д) $(4x^2+12x+9)(3x^2-13x+4) < 0$; е) $\frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+1} < \frac{3}{(x-2)^2}$.

5. а) $\frac{2(x-3)}{x(x-6)} \leqslant \frac{1}{x-1}$; б) $\frac{2(x-4)}{(x-1)(x-7)} \geqslant \frac{1}{x-2}$; в) $\frac{2x}{x^2-9} \leqslant \frac{1}{x+2}$; г) $1 - \frac{7}{x} < -\frac{12}{x^2}$; д) $x - 17 \geqslant \frac{60}{x}$; е) $x \leqslant \frac{6}{x-5}$; ж) $1 \leqslant \frac{3x^2-7x+8}{x^2+1} \leqslant 2$; з) $\frac{4}{x+2} > 3 - x$.

4-§. Модуль белгиси қатнашган тенглама ва тенгсизлик

1. Модуль белгиси қатнашган тенглама

1-мисол. Тенгламани ечинг:

$$|4x+5| - |3x+6| = 0. \qquad (1)$$

Ечилиши. (1) $\Longleftrightarrow$ $|4x+5| = |3x+6|$.

Бу тенгламанинг ҳар икки томони номанфий бўлгани учун квадратга оширамиз:

$(4x+5)^2 = (3x+6)^2 \Longleftrightarrow 7x^2+4x-11=0 \Longleftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{11}{7}$.

Жавоб. $\left\{1;\ -\frac{11}{7}\right\}$.

2-мисол. Тенгламани ечинг:

$$|x+1| = |4x-8| - x + 1. \qquad (2)$$

Ечилиши. I усул. Бу ерда тенглама $F(x, |x-a|) = 0$ шаклда. Шунинг учун

$$F(x, |x-a|) = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} F(x, x-a) = 0, \text{ агар } x-a \geqslant 0, \\ F(x, a-x) = 0, \text{ агар } x-a < 0 \end{array}\right. \qquad (3)$$

ни назарда тутиб

$$(2) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ x+1 = |4x-8| - x + 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 < 0, \\ -x-1 = |4x-8| - x + 1 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -1, \\ 2x = |4x-8| \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1, \\ -2 = |4x-8| \end{cases} \end{array}\right.$$

ларни ёза оламиз. Лекин $-2 \neq |4x-8|$ бўлгани учун (2) тенглама фақат биринчи системага тенг кучли ҳисобланади:

$$(2) \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -1, \\ 2x = |4x-8| \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 2 \\ 2x = 4(x-2) \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2, \\ 2x = 4(2-x) \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x = 2x - 4 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \leqslant x < 2, \\ x = 4 - 2x \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Ж а в о б. $\left\{4;\ \dfrac{4}{3}\right\}$.

Интерваллар методи. Агар тенглама

$$F(x;\ |x-a_1|,\ |x-a_2|,\ \ldots,\ |x-a_n|) = 0$$

шаклда бўлса ($a_1 < a_2 < \ldots < a_n$), унинг аниқланиш соҳасидаги a_1, a_2, $\ldots$, a_n нуқталар билан аниқланган ўзаро кесишмандиган ҳар бир оралиқда $F = 0$ тенгламани ечамиз.

Шу усулда юқоридаги (2) тенгламани ечамиз.

II у с у л. $|x+1| = 0$ ва $|4x-8| = 0$ лардан $x_1 = 1$ ва $x_2 = 2$ ларни аниқлаймиз. Сўнг сонлар ўқини шу нуқталар билан $]-\infty;\ -1]$ U U $]-1; 2]$ U $]2; +\infty[$ оралиқларга ажратиб, уларнинг ҳар бирида модуль таърифига биноан тенгламани ечамиз:

1) $x \in]2; +\infty[$ бўлганда: (2) $\Longleftrightarrow x + 1 = 4x - 8 - x + 1 \Longleftrightarrow 2x = 8 \Longleftrightarrow x = 4$;

2) $x \in]-1; 2]$ бўлганда; (2) $\Longleftrightarrow x + 1 = 8 - 4x - x + 1 \Longleftrightarrow 6x = 8 \Longleftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$;

3) $x \in]-\infty; -1]$ бўлганда (2) $\Longleftrightarrow -x - 1 = 8 - x - x + 1 \Longleftrightarrow \Longleftrightarrow 4x = 10 \Longleftrightarrow x = \dfrac{5}{2} \overline{\in}]-\infty; -1]$, демак бу соҳада тенглама ечимга эга эмас.

Ж а в о б. $\left\{4;\ \dfrac{4}{3}\right\}$.

3- м и с о л. Тенгламани ечинг:

$$|x^2 - 1| = x(x-2). \tag{4}$$

Ечилиши. Тенгламани юқоридаги I ва II усуллар билан ҳам ечиш мумкин. Қуйида

$$|F(x)| = f(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} F(x) = f(x), \text{ агар } F(x) \geqslant 0, \\ F(x) = -f(x), \text{ агар } F(x) < 0 \end{cases} \tag{5}$$

ни назарда тутиб ечамиз.

III усул. а) $x^2-1\geqslant 0$ бўлсин, яъни $x\in]-\infty;\ -1[\cup]1;\ +\infty[=D_1$. Бу соҳада тенглама бундай ечилади:

$$(4)\iff x^2-1=x^2-2x\iff 2x=1\iff x=\frac{1}{2}\in D_1,$$

яъни бу соҳада тенглама ечимга эга эмас,

б) $x^2-1<0$ бўлсин, яъни $x\in]-1;\ +1[=D_2$. У ҳолда

$$(4)\iff 1-x^2=x^2-2x\iff 2x^2-2x-1=0\iff x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2},$$

бу илдизлардан фақат $x_1=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\in D_2$, иккинчиси эса тегишли эмас.

Жавоб. $\left\{\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Хулоса. Агар тенглама

$$F(x,\ |\varphi_1(x)|,\ |\varphi_2(x)|,\ \ldots,\ |\varphi_n(x)|)=0 \qquad (6)$$

каби берилса ($\varphi_i(x)$ — кўпҳадлар, $i=1,2,\ldots,n$), у ҳолда ҳам интервалар усули қўлланилади. Бунда ҳам барча

$$\varphi_1(x)=0,\ \varphi_2(x)=0,\ \ldots,\ \varphi_n(x)=0 \qquad (7)$$

тенгламаларнинг илдизлари топилиб, сонлар ўқида белгилаб олинади ва тенгламанинг аниқланиш соҳасида улар билан аниқланган ўзаро кесишмайдиган ҳар бир оралиқда юқоридаги III усул билан уни ечилади.

4- мисол. Тенгламани ечинг:

$$|x^2-4|-2|x|+4|x+3|=8x-24. \qquad (8)$$

Ечилиши. Тенгламани (7) га биноан модулли функцияларини нолга тенглаб, ҳар бирининг илдизлари тўпламини топамиз:

$$x^2-4=0,\ x=0,\ x+3=0\Rightarrow\{2;\ -2;\ 0;\ -3\}.$$

Илдизлар сонлар ўқини $]-\infty;\ -3[$, $[-3;\ -2[$, $[-2;\ 0[$, $[0;\ 2[$, $[2;\ +\infty[$ каби бешта оралиққа ажратади. Бу тенглама R да аниқланган. Шунинг учун уни шу оралиқларнинг ҳар бирида ечамиз:

а) $x\in]-\infty;\ -3[\Rightarrow(8)\iff x^2-4-2(-x)-4(x+3)=8x-24\iff$
$\iff x_{1,2}=5\pm\sqrt{17}$,

лекин бу илдизлар қаралаётган оралиққа тегишли эмас.

б) $x\in[-3;\ -1[\Rightarrow(8)\iff x^2-4-2(-x)+4(x+3)=8x-24$,

бунда ҳосил бўладиган квадрат тенгламанинг дискриминанти манфий.

в) $x\in[-1;\ 0[\Rightarrow(8)\iff-(x^2-4)-2(-x)+4(x+3)=8x-24\iff$
$\iff x_{3,4}=-1\pm\sqrt{41}$,

бу ҳам қаралаётган оралиққа тегишли бўлмаган илдизлардир.

г) $x\in[0;\ 1[\Rightarrow(8)\iff-(x^2-4)-2x+4(x+3)=8x-24\iff$
$\iff x_{5,6}=-3\pm 7$,

бу ердан топилган -10 ва 4 илдизлар ҳам шу оралиққа тегишли эмас,

д) $x\in[1;\ +\infty[\Rightarrow(8)\iff x^2-4x-2x+4(x+3)=8x-24$,

бундан тузилган квадрат тенглама ҳақиқий илдизга эга эмас.

Хулоса шуки, (8) тенглама R да ечимга эга эмас.

Шундай қилиб, бу пунктда модул белгиси қатнашган тенгламалардан энг кўп учрайдиганларини ечиш усули берилди. Логарифмик, кўрсаткичли,

иррационал ва бошқа тип тенгламаларда модуль белгиси иштирок этса, кўпинча, улар айний алмаштиришлар натижасида юқорида кўрсатилган усулда ечиладиган тенгламага келади.

15- топшириқ. Тенгламаларни ечинг:

1. а) $|2x+2|=2(3-2x)$; б) $|6x-2|=11-2x$; в) $|3x-2|+2=3|x|$; г) $|2-6x|-|5-4x|=0$; д) $|9-4x|-|4-6x|=|2x+5|$; е) $|3x+1|=2|3x-1|+3x$.

2. а) $4x^2=|1-8x^2|$; б) $\frac{x^2-1+|x+1|}{x-2}=2|x|$; в) $|x^2-9|+|x^2-4|=5$; г) $|x^2-3x+2|=4-x^2+|x|$; д) $\frac{|x^2-3x|+5}{x^2+|x+3|}=1$; е) $|3-|x+2||=4$.

2. Модуль белгиси қатнашган тенгсизлик. Модуль белгиси қатнашган тенгсизлик, кўпинча, интерваллар усули билан қулай ечилади. Масалан,

$$x^2-5|x+6|>0 \qquad (9)$$

тенгсизлиги сонлар ўқининг $]-\infty;\ -6[$ ва $[-6;\ +\infty[$ икки оралиғида алоҳида-алоҳида ечилади:

а) $\begin{cases} x\in\,]-\infty;\ -6[, \\ x^2-5(-x-6)>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\in\,]-\infty;\ -6[, \\ (x+2)(x+3)>0 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x\in\,]-\infty;\ -6[, \\ \left[\begin{array}{l} x<-3, \\ x>-2 \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow x\in\,]-\infty;\ -6[.$

б) $\begin{cases} x\in\,]-6;\ +\infty[, \\ x^2-5(x+6)>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\in\,]-6;\ +\infty[, \\ (x+1)(x-6)>0 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x\in\,]-6;\ +\infty[, \\ \left[\begin{array}{l} x<-1, \\ x>6 \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow x\in\,]6;\ +\infty[.$

Жавоб: $]-\infty;\ -6[\cup]6;\ +\infty[$.

Агар тенгсизлик

$$F(x,\ |\varphi_1(x)|,\ |\varphi_2(x)|,\ \ldots,\ |\varphi_n(x)|)<0 \qquad (10)$$

кўринишда ($\varphi_i(x)$ — кўпҳадлар, $i=1, 2, \ldots, n$) бўлса, барча $\varphi_i(x)$ ларнинг ҳамма илдизлари сонлар ўқида аниқлаган, ўзаро кесишмайдиган ҳар бир оралиқда ечилади, ечимлар умумлаштирилиб жавоб ёзилади.

5- мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$\frac{|4x-1|}{4x^2-2x-2}>\frac{1}{2}. \qquad (11)$$

Ечилиши. Бунда $\varphi(x)=4x-1=0$ бўлиб, $x_0=\frac{1}{4}$ ҳосил қилган $\left]-\infty;\ \frac{1}{4}\right[$ ва $\left]\frac{1}{4};\ +\infty\right[$ интервалларда берилган (11) тенгсизлик ечилади:

а) $x\in\left[\frac{1}{4}\ +\infty\right[$ бўлганда

$$(11) \Longleftrightarrow \frac{4x-1}{4x^2-2x-2} > \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{4x-1}{2x^2-x-1} - 1 > 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x(x-2{,}5)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)} < 0.$$

Буни интервал усулида ечиб $x \in \left]-\frac{1}{2};\ 0\right[\cup \left]1;\ \frac{5}{2}\right[$ топилади, аммо $x \geqslant \frac{1}{4}$ бўлгани учун жавоб $]1;\ 2{,}5[$ дан иборатдир;

б) $x \in \left]-\infty;\ \frac{1}{4}\right[$ бўлганда

$$(11) \Longleftrightarrow \frac{1-4x}{4x^2-2x-2} > \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)(x+2)}{\left(\frac{1}{2}+x\right)(x-1)} > 0.$$

Бу ердан $x \in \left]-2;\ -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};\ 1\right[$ ечим топилади, лекин $x < \frac{1}{4}$ бўлгани учун натижада жавоб $\left]-2;\ -\frac{1}{2}\right[$ бўлади.

Ж а в о б. Берилган тенгсизликнинг ечими $\left]-2;\ -\frac{1}{2}\right[\cup \left]1;\ 2{,}5\right[$.

6- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$|x-2| + |x+2| < 8. \qquad (12)$$

Ечилиши. $\varphi_1(x) = x-2$, $\varphi_2(x) = x+2$ десак, уларнинг илдизи $x_{1,2} = \pm 2$ лар топилиб, келтирилган қоидага асосан R сонлар ўқи $]-\infty;\ -2[$, $[-2;\ 2[$, $[2;\ +\infty[$ оралиқларга ажралади. Уларнинг ҳар бирида тенгсизлик ечилади:

а) $x \in [2;\ +\infty[\Longrightarrow (12) \Longleftrightarrow x-2+x+2 < 8 \Longleftrightarrow 2x < 8 \Longleftrightarrow x < 4$, бу ердан якуний ечим $x \in [2;\ 4[$.

б) $x \in [-2;\ 2[\Longrightarrow (12) \Longleftrightarrow -x+2+x+2 < 8 \Longleftrightarrow 4 < 8$. Бу тенгсизлик қаралаётган оралиқнинг ҳар бир қийматида ўринли, демак, бу ердан якуний ечим $[-2;\ +2[$ дан иборат.

в) $x \in]-\infty;\ -2[\Longrightarrow (12) \Longleftrightarrow 2-x-2-x < 8 \Longleftrightarrow -2x < 8 \Longleftrightarrow x > -4$, бу ердан якуний ечим $]-4;\ -2[$ дан иборатдир.

Ж а в о б: $]-4;\ -2[\cup [-2;\ 2[\cup [2;\ 4[=]-4;\ 4[$.

7- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \leqslant 1. \qquad (13)$$

Ечилиши. (I у с у л). Бу тенгсизлик $\left|\frac{a}{b}\right| \leqslant 1$ шаклда бўлиб, $|b| \neq 0$ бўлган ҳол учун тенгсизликни $|a| \leqslant |b|\ (b \neq 0)$ кўринишга келтирсак, у берилган (13) га тенг кучли бўлиб қолади:

$$(13) \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-4 \neq 0, \\ |x^2-5x+4| \leqslant |x^2-4| \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |x| \neq 2, \\ |(x+1)(x-4)| \leqslant |(x-2)(x+2)|. \end{cases}$$

Энди юқоридаги қоидага кўра сонлар ўқи -2; 1; 2; 4 ларда интерваллларга ажратилиб, ҳар бир оралиқда система ечилади ва ушбу жавоб топилади: $x \in \left[0;\ \frac{8}{5}\right] \cup \left]\frac{5}{2};\ +\infty\right[$.

II усул. Баъзида $a \geqslant 0$ сон учун $|x| \leqslant a \Longleftrightarrow a \leqslant x \leqslant a$ эквивалентликдан фойдаланиб ечилса, бу тенгсизлик ушбу қўштенгсизликка келтирилиб ечилади:

$$(13) \Longleftrightarrow -1 \leqslant \frac{x^2-5x+4}{x^2-4} \leqslant 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4} \geqslant 1, \\ \dfrac{x^2-5+4}{x^2-4} \leqslant -1 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-5x+8}{x^2-4} \leqslant 0, \\ \dfrac{x(x-2{,}5)}{x^2-4} \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-\frac{8}{5}}{(x+2)(x-2)} \geqslant 0, \\ \dfrac{x(x-2{,}5)}{(x+2)(x-2)} \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in \left]-2;\ \frac{8}{5}\right] \cup]2;\ +\infty[, \\ x \in]-\infty;\ -2[\cup [0;\ 2[\cup [2{,}5;\ +\infty[\end{cases} \Longleftrightarrow x \in \left[0;\ \frac{8}{5}\right] \cup \left[\frac{5}{2};\ +\infty\right[.$$

Модуль белгиси қатнашган тенгсизликларни ечишда $|x| \geqslant a \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant a, \\ x \leqslant -a \end{array}\right.$ ни назарда тутиш анча қулайликлар туғдиради:

8-мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$\left|\frac{x^2-4}{3x}\right| \geqslant 1. \qquad (14)$$

Ечилиши. Тенгсизликни юқоридаги эквивалентликка асосан ечсак:

$$(14) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-4}{3x} \geqslant 1, \\ \dfrac{x^2-4}{3x} \leqslant -1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{(x-4)(x+1)}{3x} \geqslant 0, \\ \dfrac{(x+4)(x-1)}{3x} \leqslant 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [-1;\ 0[\cup [4;\ +\infty[; \\ x \in]-\infty;\ -4] \cup]0,\ 1]. \end{array}\right.$$

Жавоб. $]-\infty;\ -4] \cup [-1;\ 0[\cup]0;\ 1] \cup [4;\ +\infty[$.

Юқоридаги 7- ва 8-мисолдаги ечиш усули ушбу тенгсизликни ечишда ҳам қўлланилган.

9-мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$x^2 - 5|x| + 6 < 0.$$

Ечилиши. Бунда $x^2 = |x|^2$ ни ҳисобга олсак:

$$|x|^2 - 5|x| + 6 < 0 \Longleftrightarrow (|x|-2)(|x|-3) < 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} |x| < 3, \\ |x| > 2 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x \in]-3;\ -2[\cup]2;\ 3[.$$

Жавоб. $]-3;\ -2[\cup]2;\ 3[$.

16-топшириқ. Тенгсизликни ечинг:

1. а) $2x^2 - 5|x| + 3 < 0$; б) $2x^2 - |x| - 1 \geqslant 0$; в) $4|x^2 - 2x| < 5$; г) $|4x^2 + 2x| - 5 < 0$; д) $|2x^2 - 5x| < 3$; е) $|2x^2 - 2x| < x$; ж) $x^2 - |5x - 3| < 2 + x$; з) $|x - 2| \leqslant 2x^2 - 9x + 9$; и) $|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|$.

2. а) $(|2x-1| - 3)(2|x+1| - 5) < 0$; б) $|9x^2 - 6x - 8| > 6x$; в) $|8x^2 - 1| > 1 - 2x$; г) $\dfrac{2x^2 - 5x + 3}{2|x| + 7} < 0$; д) $\dfrac{4x^2 + 12x - 7}{|x+2|} < 0$.

3. а) $\left|\frac{2}{3x-4}\right|>1$; б) $\left|\frac{4x-1}{2x-1}\right|>2$; в) $\left|\frac{4x^2-6x+1}{4x^2+2x+1}\right|<3$;
г) $\frac{|2x+3|+2x}{x+1}>2$; д) $\frac{|2x-1|}{x+1}<2$; е) $\frac{|3x+2|-3x}{x}<6$;
ж) $\frac{1}{|2x|-3}<\frac{1}{2}$; з) $\left|\frac{3x}{2x^2-2}\right|\leqslant 1$; и) $\frac{2x-3}{4x^3+6-10x}\geqslant 2$; к) $|x|<\frac{a}{x}$.

4. а) $|x+7|-|1{,}5x+5|>0$; б) $|4x+5|-|6x-7|<0$;
в) $|x-1|+|2x-6|<3$; г) $|x-3|+|x-1|>2$; д) $|2x-1|+2|x+1|-|2x-3|>4$; е) $|2x+1|+2|x+1|>9-2|x-2|$; ж) $|x-1|-|x-2|+|x-3|-|x-4|+|x-5|\leqslant 3$; з) $|x^2-x-6|>3+x$;
и) $|x^2-6x+8|<5x-x^2$; к) $|x^2+6x+5|>x^2-8x+16$;
л) $\frac{2x^2-|x|-3}{x-1}\geqslant 4x$; м) $\frac{8x-1}{|2x-1|}\geqslant|2x+1|$.

5-§. Иррационал тенглама ва тенгсизликлар

Агар тенглама (тенгсизлик) номаълумлари радикал ишораси остида келса, у *иррационал тенглама (тенгсизлик)* деб аталади. Масалан,

$$b+\sqrt{x-12}=5;\quad ax+\sqrt{4x+5}=\sqrt{x^2-1};\quad \sqrt{x+\sqrt{x-a}}\leqslant 2+x.$$

Одатда, радикаллардан ташкил топган алгебраик ифода *иррационал ифода* дейилади.

1. Иррационал тенглама. Иррационал тенгламаларни ечишда, асосан ундаги иррационал ифодалар хоссаларидан ва улар устида айний шакл алмаштиришлардан фойдаланилади. Бунда:

(а) Иррационал ифодаларнинг ўзгариш ва аниқланиш соҳалари улардан тузилган тенгламанинг илдизлари қандай шартларга бўйсунишини (тенгламани ечмасдан) билиш имконини беради.

(б) Айний шакл алмаштириш натижасида берилган иррационал тенглама ўзига тенг кучли тенгламага (ёки тенглама ва тенгсизликлар системасига) келтирилади. Масалан: ($n\in\mathbf{N}$):

1. $\sqrt[2n]{\varphi(x)}=\sqrt[2n]{\psi(x)}\Longleftrightarrow\begin{cases}\varphi(x)=\psi(x),\\ \psi(x)\geqslant 0.\end{cases}$ (1)

2. $\sqrt[2n]{\varphi(x)}=\psi(x)=\begin{cases}\varphi(x)=(\psi(x))^{2n},\\ \psi(x)\geqslant 0.\end{cases}$ (2)

3. $\sqrt{\varphi(x)}-\sqrt{\psi(x)}=a\ (a\geqslant 0)\Longleftrightarrow\varphi(x)=(a+\sqrt{\psi(x)})^2$. (3)

4. $\sqrt{\varphi(x)}+\sqrt{\psi(x)}=b\ (b\geqslant 0)\Longleftrightarrow\begin{cases}\varphi(x)=(b-\sqrt{\psi(x)})^2,\\ b-\sqrt{\psi(x)}\geqslant 0.\end{cases}$ (4)

Демак, тенгламанинг икки тарафининг ишораси мусбат бўлгандагина уни жуфт кўрсаткичли даражага кўтариб, ўзига тенг кучли тенгламага алмаштириш мумкин экан. Баъзи абитуриентлар бу муҳим шартга эътибор бермайдилар.

Иррационал тенгламани ечишнинг асосий у с у л л а р и:

— Аниқланиш ёки ўзгариш соҳасини текшириш билан ечими бор ёки йўқлигини аниқлаш (қуйида 1, 2-мисоллар);

— юқоридаги (1) ÷ (4) эквивалентликдан фойдаланиш;

— ёрдамчи номаълум киритиш усули (қуйида 7, 8 мисолларга қаранг);

— радикалларни яккалаш (бир-биридан ажратиб, тенгликнинг икки томонига ўтказиб, сўнг даражага ошириш; 3, 4, 6, 9-мисоллар);

— тенгламанинг иккала томонини унинг бир томонида турган ифодага қўшма бўлган ифодага кўпайтириш.

1-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{x-4}-\sqrt{x+10}=\sqrt{x-2}. \qquad (5)$$

Ечилиши. Маълумки, ҳар қандай x учун $x-4<x+10 \Rightarrow \sqrt{x-4}<$ $<\sqrt{x+10} \Rightarrow \sqrt{x-4}-\sqrt{x+10}<0 \Rightarrow \sqrt{x-4}-\sqrt{x+10}\neq\sqrt{x-2}$, чунки $\sqrt{x-2}\geqslant 0$ дир.

Жавоб. Ечими йўқ.

2-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}=x-5. \qquad (6)$$

Ечилиши. Тенгламанинг аниқланиш соҳаси

$$\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ 4-x\geqslant 0 \end{cases}$$

системага асосан [1; 4] бўлиб, унинг чап тарафи номанфий функциялар йиғиндисидан ташкил топгани учун $x-5\geqslant 0$ дир. Бу эса тенгламанинг ечими йўқлигини билдиради.

Жавоб. Ечими йўқ.

3-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{2x+4}+\sqrt{6x-2}=6. \qquad (7)$$

Ечилиши. (4) формулага кўра:

$$(7) \Leftrightarrow \sqrt{2x+4}=6-\sqrt{6x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4=(6-\sqrt{6x-2})^2, \\ 6-\sqrt{6x-2}\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+15=6\sqrt{6x-2}, \\ \sqrt{6x-2}\leqslant 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+15)^2=36(6x-2), \\ 2x+15\geqslant 0, \\ 6x-2\leqslant 36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+39x+74{,}25=0, \\ -7{,}5\leqslant x\leqslant 6\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x_1=\frac{1}{2}(39-\sqrt{1224}).$$

Жавоб. $\left\{\frac{1}{2}(39-\sqrt{1224})\right\}$.

4-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{x^2+10x+4}=2x-2. \qquad (8)$$

Ечилиши. (4) га биноан

$$(8) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+10x+4=(2x-2)^2, \\ 2x-2\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-6)=0, \\ x\geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

Жавоб. $\{6\}$.

5-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{4+x+2\sqrt{6x-12}}+\sqrt{4+x-2\sqrt{6x-12}}=2\sqrt{6}. \qquad (9)$$

Ечилиши. Юқоридагиларга асосан:

$$(9) \Longleftrightarrow \begin{cases} 6x-12 \geqslant 0, \\ 4+x+2\sqrt{6x-12} \geqslant 0, \\ 4+x-2\sqrt{6x-12} \geqslant 0. \\ 8+2x+2\sqrt{(4+x)^2-4(6x-12)}=24 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ 4+x \geqslant 2\sqrt{6x-12}, \\ 8-x=\sqrt{64-16x+x^2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ (4+x)^2 \geqslant 4(6x-12), \\ ((8-x)^2=8-x \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ (8-x)^2 \geqslant 0, \\ (8-x)^2=8-x \end{cases} \Longleftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant 8.$$

Жавоб. [2; 8].

6-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{\frac{x+8}{2}}+\sqrt{x-6}=5. \qquad (10)$$

Ечилиши. Ҳар икки томонини икки марта квадратга ошириб ечамиз:

$$(10) \Longrightarrow \frac{x+8}{2}+\sqrt{2(x+8)(x-6)}+x-6=5 \Longrightarrow 2(x+8)(x-6)=$$

$$=\left(7-\frac{3}{2}x\right)^2 \Longleftrightarrow x_1=10,\ x_2=330.$$

Текшириш. (10) тенгламага илдизларни қўямиз.

(а) $x_1=10 \Longrightarrow \sqrt{\frac{10+8}{2}}+\sqrt{10-6}=5 \Longleftrightarrow \sqrt{9}+\sqrt{4}=5$ ўринли, демак, $x=10$ тенгламанинг илдизи:

(б) $x_2=330 \Longrightarrow \sqrt{169}+\sqrt{324} \neq 5$, демак, $x_2=330$ чет илдиз.

Жавоб. {10}.

1-изоҳ. Ҳар икки томонини квадратга кўтариб ечиш усулида тенгламанинг илдизлари йўқолмайди, балки чет илдиз пайдо бўлиши мумкин. Чет илдизлар текшириш йўли билан аниқланиб, қолганлари ечимлар тўпламини ташкил этади.

2-изоҳ. Бу ерда (б) даги текширишни бошқача усулда бажариш ҳам мумкин эди, масалан, $f(x)=\sqrt{\frac{8+x}{2}}$ доимо қатъий ўсувчи, $g(x)=5-\sqrt{x-6}$ доимо камаювчи функциялар бўлиб, уларнинг графиги фақат бир марта кесиша олади (яъни $x_1=10$ нуқтада кесишди). $x_2=330$ шу фикрга кўра илдиз бўла олмайди.

7-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt[4]{98-2x}+\sqrt[4]{2x-1}=5. \qquad (11)$$

Ечилиши. (Белгилаш усули билан ечиш.) $\sqrt[4]{98-2x}=y$, $\sqrt[4]{2x-1}=z$ десак, у ҳолда симметрик алгебраик система ҳосил бўлади:

$$(11) \Longleftrightarrow \begin{cases} y+z=5, \\ y^4+z^4=97 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u=y+z,\ v=yz, \\ u=5, \\ u^4-4u^2v-2v^2=97 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u=y+z,\ v=yz. \\ u=5, \\ v_{1,2}=25 \pm 19. \end{cases}$$

У ҳолда

$$\begin{cases} y+z=5, \\ y^4+z^4=97 \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y+z=5, \\ yz=6, \end{cases} \\ \begin{cases} y+z=5, \\ yz=44, \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y_1=2. \\ z_1=3 \end{cases} \\ \begin{cases} y_2=3, \\ z_2=2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Лекин $z=\sqrt[4]{2x-1}$ дан $x_1=41$, $x_2=8{,}5$ жавоблар келиб чиқади.

8-мисол. Тенгламани ечинг:

$$x\sqrt[3]{35-x^3}\,(x+\sqrt[3]{35-x^3})=30. \qquad (12)$$

Ечилиши $y=\sqrt[3]{35-x^3}$ десак, $x^3+y^3=35$ ҳосил бўлади. Демак,

$$(12) \Longleftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=35, \\ xy(x+y)=30 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3-3xy(x+y)=35, \\ (x+y)\,xy=30 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3=125, \\ (x+y)\,xy=30 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=3, \\ y_1=2 \end{cases} \text{ёки } \begin{cases} x_2=2, \\ y_2=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Жавоб. $\{x_1=2;\ x_2=3\}$.

9-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}. \qquad (13)$$

Ечилиши. (Даражага ошириш усули.) Тенглама $D_0=]-\infty;\ -1]\cup[1;+\infty[$ аниқланиш соҳасига эга бўлиб, унда ўнг томони сингари, чап томони ҳам $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}>0$ (чунки $x+1>x-1 \Longleftrightarrow \sqrt[3]{x+1}>\sqrt[3]{x-1}$) бўлгани учун $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab\,(a-b)$ формулани қўллаш учун унинг ҳар икки томонини кубга оширамиз:

$$x+1-(x-1)+3\sqrt[3]{x+1}\,\sqrt[3]{x-1}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)=\sqrt{x^2-1},$$

бу ерда қавс ичидаги айирма ўрнига берилган тенгламадан $\sqrt[6]{x^2-1}$ ни қўйсак:

$$2+3\sqrt[3]{x^2-1}\,\sqrt[6]{x^2-1}=\sqrt{x^2-1} \Longleftrightarrow 2\sqrt{x^2-1}=-2 \Longleftrightarrow \text{Ечим йўқ.}$$

Жавоб. Ечим йўқ.

10-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{3x-1}-\sqrt{9x-2}-\sqrt{15x-1}=0.$$

Ечилиши. Радикалларни шундай группалаймизки, натижада тенгламанинг ҳар икки томонида фақат номанфий функциялар ҳосил бўлсин:

$$\sqrt{9x+2}+\sqrt{15x-1}=\sqrt{3x-1}. \qquad (14)$$

Радикаллар остида чизиқли функциялар иштирок этгани учун $D=\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$ — тенгламанинг аниқланиш соҳаси осон топилади. Шу соҳада квадратга оширамиз.

$$(14) \Longleftrightarrow 2\sqrt{135x^2-39x+2}=2-21x \Longleftrightarrow \begin{cases} 4\,(135x^2-39x+2)=(2-21x)^2, \\ 2-21x\geqslant 0. \end{cases}$$

лекин $2-21x \geqslant 0$ ни қаноатлантирувчи x лар тенгламанинг аниқланиш соҳасига кирмайди. Демак, у ечимга эга эмас.

11-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}. \qquad (15)$$

Ечилиши. Тенгламанинг чап қисмини ($5-\sqrt[3]{x}>0$ шартни қаноатлантирувчи x лар тўпламида аниқланган) қўшмасига кўпайтириб, ифодани ихчамласак

$$\left(\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}\right)\left(\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}\right)=$$
$$=\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}\right).$$

Натижада

$$2\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}\right)$$

ҳосил бўлади. Бунда $x=0$(15) нинг ечими бўлмагани учун бу тенгламанинг ҳар икки томонини $\sqrt[3]{x}\neq 0$ га бўлсак:

$$(15) \Longleftrightarrow \sqrt{5+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=2 \Longleftrightarrow \sqrt{5+\sqrt[3]{x}}=$$
$$=2+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}} \Longleftrightarrow 2\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}-2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases}4(5-\sqrt[3]{x})=(\sqrt[3]{x}-2)^2,\\ \sqrt[3]{x}-2\geqslant 0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\sqrt[3]{x^2}=16,\\ \sqrt[3]{x}\geqslant 2\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\sqrt[3]{x_{1,2}}=\pm 4,\\ x\geqslant 8\end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow x=64.$$

Бу илдиз (15) тенгламанинг аниқланиш соҳасига киргани учун ечимдир.

Жавоб. {64}.

12-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1. \qquad (16)$$

Ечилиши. $x+1\geqslant 0$ бўлгани учун $\sqrt{x+1-2\cdot 2\sqrt{x+1}+4}=$ $=\sqrt{(\sqrt{x+1}-2)^2}$ ва $\sqrt{x+1-2\sqrt{x+1}+1}=\sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2}$ ва $\sqrt{a^2}=|a|$ ни ҳисобга олиб (16) тенгламага тенг кучли

$$|\sqrt{x+1}-2|+|\sqrt{x+1}-1|=1$$

ни ҳосил қиламиз, $y=\sqrt{x+1}\geqslant 0$ деб белгиласак, бу тенгламани $|y-2|+$ $+|y-1|=1$ кўринишга келтирамиз ва интерваллар усули билан $y_1=2$, $y_2=1$ ечимларни топамиз:

$$(16) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=2,\\ \sqrt{x+1}=1\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=3,\\ x_2=0.\end{array}\right.$$

Жавоб. {0; 3}.

17-топшириқ. Тенгламаларни ечинг:

1. а) $\sqrt{x-10}+\sqrt[4]{2-x}=1$; б) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{-x}=\sqrt[6]{x}$; в) $\sqrt{\lg\sin x}=$ $=x-\frac{\pi}{2}$.

2. а) $\sqrt{0{,}5+x}+\sqrt[5]{0{,}5-x}=1$; б) $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$; в) $2x\sqrt[3]{35-8x^3}\,(2x+\sqrt[3]{35-8x^3})=30$; г) $\sqrt[4]{629-2x}+\sqrt[4]{77+2x}=8$; д) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x-1}}=2-\sqrt[3]{1-\sqrt{x-1}}$; е) $\sqrt[3]{9+x}+\sqrt[3]{7-x}=1$; ж) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{35}{12}$; з) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$.

3. а) $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{18}$; б) $\sqrt[3]{10-x^2}-\sqrt[3]{3-x^2}=1$; в) $\sqrt[4]{41+2x}+\sqrt[4]{41-2x}=2$; г) $\sqrt{4x^2+9}-\sqrt{4x^2-7}=2$; д) $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$; е) $\sqrt{5x+4}=\sqrt{15x+16}-2\sqrt{x-3}$; ж) $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=x$; з) $\sqrt{(2x-1)(2x-2)}+\sqrt{(2x-3)(2x-4)}=\sqrt{2}$.

4. Қуйидаги тенгламаларда $\sqrt{x^2}=|x|$ эканлигини ҳисобга олиб ечинг: а) $2\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(2x+1)^2}=2\sqrt{(x+1)^2}$; б) $\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2-2x+1}$; в) $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}}=1$; г) $\sqrt{7+x+4\sqrt{x+3}}=2+\sqrt{x+3}$; д) $\sqrt{x+5+2\sqrt{x+4}}+\sqrt{x+5-2\sqrt{x+4}}=2$.

5. а) $\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}}+3\sqrt{\dfrac{2+x}{3-x}}=4$; б) $\dfrac{8}{\sqrt{10-2x}}-\sqrt{10-2x}=2$; в) $\sqrt{6x-x^2-5}=2x-6$; г) $\dfrac{\sqrt{5-x^2}}{x+1}=1$; д) $\dfrac{\sqrt{13-x^2}}{x+1}=1$; е) $x^2-4x+6=\sqrt{2x^2-8x+12}$; ж) $\sqrt{9-5x}=\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}$.

6. а) $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\dfrac{3}{x}$; б) $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}=\dfrac{\sqrt{3}}{x}$; в) $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x$; г) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$; д) $\sqrt{\dfrac{20+x}{x}}+\sqrt{\dfrac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$; е) $\sqrt{x-\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=3$; ж) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$; з) $\dfrac{2+x}{\sqrt{2}+\sqrt{2+x}}+\dfrac{2-x}{\sqrt{2}-\sqrt{2+x}}=2\sqrt{2}$; и) $\sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}-\sqrt{\dfrac{2(x+1)}{x}}=1$; к) $\dfrac{x}{x+1}-\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=3$.

7. а) $(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0$; б) $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$; в) $(9-x^2)\sqrt{2-x}=0$; г) $(16-x^2)\sqrt{3-x}=0$; д) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$; е) $\sqrt{2x+5}=8-\sqrt{x-1}$; ж) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$; з) $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$; и) $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$.

2. Иррационал тенгсизлик. Иррационал тенгсизликларни умумий ҳолда қуйидагича эквивалент алмаштириш билан ечиш мумкин ($n \in \mathbf{N}$):

$$1.\ \sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) < (g(x))^{2n}, \\ f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \tag{1}$$

$$2.\ \sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, f(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^{2n}. \end{cases} \end{array}\right. \tag{2}$$

$$3.\ \frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} > 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > (g(x))^{2n}. \end{cases} \tag{3}$$

$$4.\ \frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} < 1 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < (g(x))^{2n}. \end{cases} \end{array}\right. \tag{4}$$

$$5.\ g(x) < \sqrt{f(x)} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, f(x) \geqslant 0, \\ g^2(x) < f(x). \end{cases} \end{array}\right. \tag{5}$$

$$6.\ \sqrt{f(x)} < g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x), \end{cases} \tag{6}$$

$$7.\ \sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \tag{7}$$

Баъзи абитуриентлар тенгсизликдаги иррационалликдан қутилиш учун юқоридагиларни назарда тутмаган ҳолда тўғридан тўғри даражага ошириш билан уни ечишга ҳаракат қиладилар. Бу эса ҳар доим тўғри эмас.

1-мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$x < \sqrt{2 - x}. \tag{8}$$

Ечилиши. (5) га асосан

$$(8) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ 2 - x \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 0, \ 2 - x \geqslant 0, \\ x^2 < 2 - x \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ x \leqslant 2, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ (x + 2)(x - 1) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ -2 < x < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ечимларни умумлаштирсак:
Ж а в о б. $]-\infty; 1[$.

2- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$\sqrt{x+18} < 2 - x. \qquad (9)$$

Ечилиши. (6) га асосан

$$(9) \Longleftrightarrow \begin{cases} 18 + x \geqslant 0, \\ 2 - x > 0, \\ 18 + x < (2-x)^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -18 \leqslant x < 2, \\ x^2 - 5x + 14 > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -18 \leqslant x < 2, \\ -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Сўнгги системани қаноатлантирувчи x лар тўплами $[-18; 2[$ дан иборат.
Ж а в о б. $[-18; 2[$.

3- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$\sqrt{x-20} + \sqrt{2x+4} > \sqrt{3x-16}. \qquad (10)$$

Ечилиши. (1) формулага кўра: $g(x) = \sqrt{x-20} + \sqrt{2x+4} > 0$ эканидан қуйидагини ёза оламиз:

$$(10) \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x - 16 < \left(\sqrt{x-20} + \sqrt{2x+4}\right)^2, \\ 3x - 16 > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2 < \sqrt{(x-20)(2x+4)}, \\ 3x > 16 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-20)(2x+4)} > 0, \\ x > \dfrac{16}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ ёки } x > 20, \\ x > 5\dfrac{1}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow x > 20.$$

Ж а в о б: $]20; +\infty[$.

4- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$\sqrt{x^2 - 8x + 12} \geqslant 4 - x. \qquad (11)$$

Ечилиши. (4) га биноан

$$(11) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4 - x \leqslant 0, \\ x^2 - 8x + 12 \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4 - x \geqslant 0, \ x^2 - 8x + 12 \geqslant 0, \\ x^2 - 8x + 12 \geqslant (4-x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\text{A}) \begin{cases} x \geqslant 4, \\ (x-2)(x-6) \geqslant 0, \end{cases} \\ (\text{B}) \begin{cases} x \leqslant 4, \\ (x-2)(x-6) \geqslant 0, \\ x^2 - 8x + 12 \geqslant 16 - 8x + x^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Сўнгги (В) система ечимга эга бўлмай (текширинг), берилган тенгсизликнинг жавоби (А) системанинг жавоби кабидир.

$$(11) \Longleftrightarrow (A) \begin{cases} x \geqslant 4, \\ x \leqslant 2 \text{ ёки } x \geqslant 6 \end{cases} \Longleftrightarrow x \geqslant 6.$$

Ж а в о б. $[6; +\infty[$.

5-м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$\frac{2 - 2\sqrt{1 - 4x^2}}{x} > 3. \qquad (12)$$

Ечилиши. Тенгсизликнинг чап томони $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ ва $x \neq 0$ бўлганда маънога эга. Агар $-\frac{1}{2} \leqslant x < 0$ бўлса, тенгсизликнинг чап томони манфий (чунки $2 \geqslant 2\sqrt{1 - 4x^2}$ ёки $4 \geqslant 4(1 - 4x^2) \Longleftrightarrow 0 \geqslant -16x^2$ эканлигидан тенгсизлик чап томонининг сурати номанфий). Шунинг учун (12) тенгсизликни фақат $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$ оралиқда ечиш керак. У ҳолда

$$(12) \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1 - 4x^2} < 1 - \frac{3}{2}x, \\ 0 < x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 - 4x^2 < \left(1 - \frac{3}{2}x\right)^2, \\ 1 - 1{,}5x > 0, \\ 0 < x \leqslant 0{,}5 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{25}{4}x^2 - 3x > 0, \\ 0 < x < 0{,}5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x > \frac{12}{25}, \\ 0 < x \leqslant 0{,}5 \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{12}{25} < x \leqslant 0{,}5.$$

Ж а в о б. $\left]\frac{12}{25}; \frac{1}{2}\right]$.

18-топшириқ. Тенгсизликларни ечинг:

1. а) $(x - 2)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \geqslant 0$; б) $(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \geqslant 0$; в) $\sqrt{\frac{x - 4}{2 - 2x}} > -1$; г) $\sqrt{\frac{3 - 2x}{4 - x}} > 1$.

2. а) $\sqrt{2x + 1} < \sqrt{x + 5}$; б) $\sqrt{3x - 20} > \sqrt{12 - x}$; в) $\sqrt{x^2 + 4x - 12} < 2$; г) $2\sqrt{x^2} < 2x + 1$.

3. а) $4\sqrt{x - 4} < x$; б) $\sqrt{2x + 18} < 2 - 2x$; в) $2x > \sqrt{24 - 10x}$; г) $\sqrt{18x - 20} < 2x$; д) $\sqrt{2x + 7} < 2x$; е) $\sqrt{4x - 1} < 2x - 2$.

4. а) $\sqrt{2x + 78} < 2x + 6$; б) $\sqrt{5 - 4x} < 12x - 1$; в) $2\sqrt{x - x^2} < 5 - 2x$; г) $x + 2 > 2\sqrt{1 - x^2}$.

5. а) $\sqrt{6x - 4x^2} < 4 - 2x$; б) $3 - 2x > 3\sqrt{1 - 4x^2}$; в) $x + 4 > 2\sqrt{4 - x^2}$; г) $\sqrt{1 + x^2} > x - 1$.

6. а) $\sqrt{(x + 8)(x + 6)} > 12 - x$; б) $\sqrt{(x + 6)(x - 16)} > 4 + x$; в) $1 - x < \sqrt{x^2 - 2x}$; г) $\sqrt{5 - 4x^2} > 2x - 1$; д) $x - \sqrt{1 - |x|} < 0$; е) $2 - x < \sqrt{x^2 - 1}$.

7. а) $4 - x < \sqrt{2x - x^2}$; б) $x - 3 < \sqrt{x^2 + 4x - 5}$; в) $2x + 3 < \sqrt{x^2 + 5x + 6}$; г) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > 2x - 5$; д) $\sqrt{8 + 2x - x^2} > 6 - 3x$; е) $x^2 > x(2 + \sqrt{12 - 2x - x^2})$.

8. а) $\sqrt{\frac{1}{x^2}-3}>\frac{1}{x}-1$; б) $\sqrt{4-x^2}+\frac{|x|}{x}\geqslant 0$; в) $\sqrt{1-x^2}<$ $<\sqrt{3-x^2}-1$; г) $2-\sqrt{1-x^2}>\sqrt{4-x^2}$; д) $\sqrt{3x^2+5x+7}-$ $-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$; е) $\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\frac{1}{x^2}}>\frac{2}{x}$; ж) $\sqrt{4-\sqrt{1-2x}}-$ $-\sqrt{2-2x}>0$; з) $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}>x-2$; и) $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}}>\frac{1}{x}-\frac{1}{4}$; к) $||x|-1|\geqslant\sqrt{x^2-1}$.

6-§. Кўрсаткичли ва логарифмик тенглама, тенгламалар системаси ва тенгсизлик

1. ***Кўрсаткичли тенглама*** деб, номаълуми даража кўрсаткичида қатнашган тенгламаларга айтилади. Уларни ечишда кўрсаткичли функциянинг барча хоссаларидан ҳамда логарифмлаш амали ва унинг қоидаларидан фойдаланилади.

Кўрсаткичли тенгламаларни ечишда қўлланиладиган асосий эквивалент алмаштиришлар:

1. $a>0$, $a\neq 1$ ва $b>0$ бўлганда

$$a^x=b \Longleftrightarrow x=\log_a b. \tag{1}$$

2. $c>0$, $c\neq 1$ бўлганда, $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$ лар учун

$$a^{f(x)}=b^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)\log_c a=g(x)\log_c b. \tag{2}$$

Хусусий ҳолда

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)=g(x). \tag{3}$$

3. $a>0$, $a\neq 1$ бўлганда

$$a^{f(x)}=b(b>0) \Longleftrightarrow f(x)=\log_a b. \tag{4}$$

Хусусий ҳолда: $b=1$ бўлганда

$$a^{f(x)}=1 \Longleftrightarrow f(x)=0. \tag{5}$$

4. $a>0$, $a=1$ бўлганда,

$$a^{\varphi(x)}=f(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0, \\ \varphi(x)=\log_a f(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\leqslant 0, \\ \text{ечими йўқ.} \end{cases} \end{array}\right. \tag{6}$$

5. $b>0$ бўлганда, ҳар қандай $a>0$ ва $a\neq 1$ лар учун

$$(f(x)^{\varphi(x)}=b \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b\neq 1,\ f(x)>0, \\ \varphi(x)\cdot \log_a f(x)=\log_a b, \end{cases} \\ \begin{cases} b=1,\ f(x)>0,\ f(x)\neq 1, \\ \varphi(x)=0, \end{cases} \\ \begin{cases} b=1,\ f(x)=1, \\ |\varphi(x)|\leqslant c,\ c\in \mathbf{R}. \end{cases} \end{array}\right. \tag{7}$$

6. Бирор $f(t)=0$ тенгламанинг барча мусбат илдизлари $t_1, t_2, \ldots t_n$ дан иборат бўлса, у ҳолда $a>0$, $a\neq 1$ лар учун

$$f(a^x)=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^x=t_k, \\ k=1,\ 2,\ \ldots, n. \end{array}\right. \tag{8}$$

Хусусий ҳолда, $f(t|=At^2+Bt+C$ квадрат тенглама t_1 ва t_2 мусбат илдизларга эга бўлса, $a>0$, $a\neq 1$ лар учун:

$$Aa^{2x}+Ba^x+C=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^x=t_1, \\ a^x=t_2. \end{array}\right. \tag{8a}$$

Кўрсаткичли тенгламаларнинг типларига қараб уларни ечишда қуйидаги усуллар қўлланилади:

I. Тенгламанинг икки тарафини бир хил асосга келтириш;
II. Тенгламанинг икки тарафини логарифмлаш;
III. Ёрдамчи номаълум киритиш;
IV. Сунъий усуллар танлаш.

I тип. Бир хил асосга келтириш билан ечиладиган тенгламалар

1-мисол. Тенгламани ечинг:

$$(0,\ 6)^x\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3 \tag{9}$$

Ечилиши. $0{,}6=\frac{3}{5}$ бўлгани учун бошқа қавслар ҳам шу асосга келтирилишига ҳаракат қилинади:

$$(9) \Longleftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x\cdot\left(\frac{5^2}{3^2}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{3^3}{5^3}\right)^3 \Longleftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{-2(x^2-12)}=\left(\frac{3}{5}\right)^9 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x-2x^2+24}=\left(\frac{3}{5}\right)^9 \Longleftrightarrow -2x^2+x+24=9 \Longleftrightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm 11}{4}.$$

Жавоб. $\left\{3;\ -\frac{5}{2}\right\}$.

2-мисол. Тенгламани ечинг:

$$3^{x^2-5}\cdot\frac{1}{81^x}=1. \tag{10}$$

Ечилиши. $\frac{1}{81^x}=\frac{1}{3^{4x}}=3^{-4x}$ бўлгани учун

$$(10) \Longleftrightarrow 3^{x^2-5}\cdot 3^{-4x}=1 \Longleftrightarrow 3^{x^2-4x-5}=3^0 \Longleftrightarrow x^2-4x-5=$$
$$=0 \Longleftrightarrow x=2\pm 3.$$

Жавоб. $\{-1;\ 5\}$.

Машқ учун мисоллар:

а) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+3}\cdot(0{,}2)^4=\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{x-3}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{9}{4}\right)^x\cdot\frac{27}{8}$; в) $4^{x^2+x6}=1$.

г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2x}}=\left(\frac{16}{9}\right)^{-1}$; д) $4^{x^2}\cdot 25^{x^2}=0{,}0001\cdot(100^{3-x})^2$; е) $\frac{2^{x^2+6}}{32^x}=1$.

II тип. Логарифмлаш билан ечиладиган тенгламалар

3-мисол. Тенгламани ечинг:

$$4\cdot 9^{x-3}=3\cdot\sqrt{2^{2x-3}}. \qquad (11)$$

Ечилиши. Тенгламанинг чап ва ўнг тарафи бир хил ё 2 асосга, ё 3 асосга келмагани учун улардан бири бўйича, масалан, 2 асос бўйича логарифмлаймиз:

$$(11) \Longleftrightarrow 2+(x-3)\log_2 9=\log_2 3+\frac{1}{2}(2x-3) \Longleftrightarrow x(\log_2 9-1)=$$
$$=7\log_2 3-3{,}5 \Longleftrightarrow x=\frac{3{,}5(2\log_2 3-1)}{\log_2 9-1}=3{,}5.$$

Жавоб: $\{3,\ 5\}$

4-мисол. Тенгламани ечинг:

$$7^{2x+5}=8^{2x^2+3x-5}. \qquad (12)$$

Ечилиши. Асослардан бири бўйича, масалан, 7 асос бўйича логарифмласак, у ҳолда

$$(12) \Longleftrightarrow 2x+5=(2x^2+3x-5)\log_7 8 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 2x+5=(2x+5)(x-1)\log_7 8 \Longleftrightarrow x_1=-2{,}5;\ x_2=1+\log_8 7.$$

Жавоб: $\{-2,\ 5;\ \log_8 56\}$.

Машқ учун мисоллар:

а) $3^{x^2-4}=5^{2x}$; б) $9^x\cdot 64^{\frac{x}{2x+2}}=6$; в) $5^{2x-2}=8^{-\frac{2x}{2x+1}}\cdot 4$;

г) $5^x\cdot 2^{\frac{2x-1}{2x+1}}=50$; д) $15^{x-1}=3^{4x^2+5x-9}$; е) $7^{x^3-x}=2^{x-1}$.

Логарифмлаш усули билан (6) ва (7) кўринишдаги тенгламалар ҳам ечилади.

5-мисол. Тенгламани ечинг:

$$x^{1-\frac{1}{3}\lg x^3}=\frac{1}{\sqrt[3]{100}}. \qquad (13)$$

Ечилиши. Чап тарафи кўрсаткичида $\lg x$ иштирок этгани учун тенгламанинг ҳар икки томонини 10 асосга кўра логарифмлаган маъқул:

$$(13) \Longleftrightarrow \left(1-\frac{1}{3}\lg x^2\right)\lg x = -\lg\sqrt[3]{100} \Longleftrightarrow 2\lg^2 x - 3\lg x - 2 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \lg x_{1,2} = \frac{3\pm 5}{4} \Longleftrightarrow x_1 = 100,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Жавоб $\left\{100;\ \frac{1}{\sqrt{10}}\right\}$.

6-мисол. Тенгламани ечинг:

$$x^{8(x^2-x)} = 1. \qquad (14)$$

Ечилиши. (1-усул) $x > 0$ десак,

$$(14) \Longleftrightarrow x^{8(x^2-x)} = x^0 \Longleftrightarrow 8(x^2-x) = 0 \Longleftrightarrow x \neq 0,\ x = 1.$$

Жавоб. $\{1\}$.

2-усул. $x > 0$ деб, бирор $a (a > 0)$ асосга кўра логарифмласак:

$$(14) \Longleftrightarrow 8(x^2-x)\log_a x = \log_a 1 \Longleftrightarrow x(x-1)\log_a x = 0 \Longleftrightarrow x = 1.$$

Жавоб. $\{1\}$.

Машқ. Логарифмлаш усули билан ечинг:

а) $x^{9\lg x} = 1000x^6$; б) $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}} = 10$; в) $x^{\log_2 x + 4} = 32$; г) $x^{\log_x (x-2)^2} = 9$;
д) $x^{\log_x x^3 - \log_x^2 x + 4} = 1$; е) $x^{\operatorname{tg} 2x} = 1$; ж) $x^{\sqrt{x+1}-2} = 1$; з) $x^{2\log_x 10} = 10x$;
и) $0{,}1 \times x^{\lg x - 2} = 100$.

III тип. Ёрдамчи номаълум киритиб ечиладиган тенгламалар

7-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{5^{2x-2}} + 5^{x+1}\cdot 0{,}04^{x-1} = 26. \qquad (15)$$

Ечилиши. $0{,}04 = 5^{-2}$; $0{,}04^{x-1} = 5^{2-2x}$ бўлгани учун

$$(15) \Longleftrightarrow 5^{\frac{2x-2}{2}} + 5\cdot\frac{5^2}{5^x} = 26 \Longleftrightarrow \frac{1}{5}\cdot 5^x + \frac{125}{5^x} = 26$$

бўлади. $t = 5x$ деб $t^2 - 130t + 625 = 0 \Longleftrightarrow t_{1,2} = 65 \pm 60$ ни аниқлаймиз.

$$(15) \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} 5^x = 125, \\ 5^x = 5 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 = 3, \\ x_2 = 1. \end{array}\right.$$

Жавоб. $\{3;\ 1\}$.

8-мисол. Тенгламани ечинг:

$$2^{2x+2\sqrt{x^2-1}} - 6 = 5\cdot 2^{x-1\sqrt{x^2-2}}. \qquad (16)$$

Ечилиши $y = 2^{x+\sqrt{x^2-2}}$ деб номаълум киритсак:

$$(16) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y^2 - 2{,}5 - 6 = 0, \\ y = 2^{x+\sqrt{x^2-2}} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 = 4,\ y_2 \neq -3{,}5 \\ 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = y_1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - 2 > 0 \\ 2^{x+\sqrt{x-2}} = 2^2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - 2 > 0,\ x - 2 > 0, \\ x^2 - 2 = (2-x)^2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow x = 1{,}5.$$

Жавоб. $\{1,\ 5\}$.

a^x, b^x ларга нисбатан бир жинсли $Aa^{2x}+Ba^xb^x+Cb^{2x}=0$ тенгламани $t=\frac{a^x}{b^x}$ ёки $t=\frac{b^x}{a^x}$ алмаштириш билан квадрат тенгламага келтириб ечиш қулай.

9-мисол. Тенгламани ечинг:

$$3\cdot 9^x+4\cdot 25^x=7\cdot 15^x. \qquad (17)$$

Ечилиши. $9^x=3^{2x}$, $25^x=5^{2x}$, $15^x=3^x\cdot 5^x$ бўлгани учун 3^x ва 5^x га нисбатан берилган тенглама $3\cdot 3^{2x}-7\cdot 3^x\cdot 5^x+4\cdot 5^{2x}=0$ бир жинсли тенгламадир. Бунда унинг ҳар икки тарафини 5^{2x} (ёки 3^{2x}) га бўлсак, $t=\left(\frac{3}{5}\right)^x$ га нисбатан (ёки $t=\left(\frac{5}{3}\right)^x$ га нисбатан) квадрат тенглама ҳосил бўлади ва унинг мусбат илдизлари топилади:

$$(17)\Longleftrightarrow 3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{2x}-7\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x+4=0\Longleftrightarrow\begin{cases} t=\left(\frac{3}{5}\right)^x \\ 3t^2-7t+4=0\end{cases}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} t=\left(\frac{3}{5}\right)^x, \\ t_{1,2}=\frac{7\pm 1}{6}.\end{cases}$$

У ҳолда:

$$(17)\Longleftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{5}\right)^x=1, \\ \left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{4}{3}\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=0, \\ x_2=\log_{0,6}\left(\frac{4}{3}\right).\end{array}\right.$$

Жавоб. $\left\{0;\ \log_{0,6}\frac{4}{3}\right\}$.

10-мисол. Тенгламани ечинг:

$$7\cdot 9^{x^2}=12\cdot 4^{x^2}-5\cdot 6^{x^2}. \qquad (18)$$

Ечилиши. $(18)\Longleftrightarrow 7\cdot 3^{2x^2}+5\cdot 2^{x^2}\cdot 3^{x^2}-12\cdot 2^{2x^2}=0\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow 7\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2}+5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2}-12=0\Longleftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2}=1, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2}\neq-\frac{12}{7}\end{array}\right.\Longleftrightarrow x=0.$$

Жавоб. $\{0\}$.

Машқ учун мисоллар:

а) $4^x+2^{x+1}=24$; б) $3\cdot 5^{4x-1}=2\cdot 5^{2x-1}+0,2$; в) $\frac{4^x+10}{4}=\frac{9}{4^{x-1}}$; г) $4^x+6^x=2\cdot 9^x$; д) $16^x+36^x=2\cdot 81^x$; е) $3\cdot 4^{-\frac{1}{x}}+6^{-\frac{1}{x}}=2\cdot 9^{-\frac{1}{x}}$; ж) $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$; з) $4^x+6^x=9^x$; и) $9^x-5\cdot 6^x+6\cdot 4^x=0$; к) $3^{2x+1}-20^x-4^{2x+1}=0$.

IV тип. Сунъий усул билан ечиладиган тенгламалар

11-мисол Тенгламани ечинг:

$$15^x - 2\cdot 5^{x+2} + 300 = 2\cdot 3^{x+1}. \qquad (19)$$

Ечилиши. Кўпайтувчиларга ажратилади:

$$5^x\cdot 3^x - 50\cdot 5^x - 6\cdot 3^x + 300 = 5^x(3^x - 50) - 6\cdot(3^x - 50).$$

Демак,

$$(19) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x - 6 = 0 \\ 3^x - 50 = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \log_5 6, \\ x_2 = \log_3 50. \end{array}\right.$$

Жавоб. $\{\log_5 6, \log_3 50\}$.

12-мисол. Тенгламани ечинг:

$$6^x + 3^x + 2^x = 3. \qquad (20)$$

Ечилиши. 1-усул. $(20) \Longleftrightarrow 6^x = 3 - 3^x - 2^x$. Маълумки, $y_1 = 6^x$ ўсувчи, $y_2 = 3 - 3^x - 2^x$ камаювчи функция. Шунинг учун уларнинг графиклари абсциссаси $x_0 = 0$ бўлган ягона нуқтада кесишади.

Жавоб. $\{0\}$.

2-усул. $6^x + 3^x + 2^x - 3 = 2^x\cdot 3^x + 3 + 2^x + 1 - 4 = 3^x(2^x + 1) + (2^x + 1) - 4 = 0$.

У ҳолда:

$$(20) \Longleftrightarrow (2^x + 1)(3^x + 1) = 4.$$

$y_1 = 2^x + 1$ ва $y_2 = 3^x + 1$ қатъий ўсувчи функциялар $]-\infty;\ +\infty[$ соҳанинг фақат $x_0 = 0$ нуқтасида бир хил қиймат 2га тенг бўлгани учун $x_0 = 0$ тенгламанинг ягона ечимидир.

13-мисол. Тенгламани ечинг:

$$12^x + 5^x = 13^x. \qquad (21)$$

Ечилиши. $(21) \Longleftrightarrow \left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x = 1$. Бу ерда $0 < \frac{12}{13} < 1$ бўлгани учун $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ десак, $\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \pm\frac{5}{13}$. У ҳолда (21) тенгламадан $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ учун $(\cos\alpha)^x + (\sin\alpha)^x = 1$ эканлиги исботланади. Бу тенгламадан $x = 2$ ечим аниқланади. Бу ечимнинг ягоналигини исботлаш ўқувчига қолади.

Жавоб: $\{2\}$.

Машқ. Ушбу мисолларни ечинг:

а) $\left(\sqrt{4 - \sqrt{15}}\right)^x + (4 + \sqrt{15})^x = 8$; б) $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$:

в) $\left(\frac{13}{25}\right)^x + \frac{87}{25} = 4^x$; г) $5^{2+2x} - 150 = 5\cdot 150^x - 5\cdot 6^{1+x}$; д) $2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}}\right) = 1$.

19-топшириқ. Кўрсаткичли тенгламаларни ечинг:

1. а) $2^{-4x} = (0{,}25)^{5x-1}$; б) $(0{,}125)^{3-4x} = \frac{1}{32}$; в) $64^{-\sqrt{x+2}} = 0{,}5$;

г) $9^x = 27^{x-1}$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-2} = 81^{4x+1}$; е) $\sqrt[3]{4^x} = \sqrt{2^{3x+1}}$; ж) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2x} = 3\frac{3}{8}$; з) $\sqrt[5]{0{,}5^{x-3{,}5}}\cdot\sqrt[x]{4} = \sqrt[8x]{16}$; и) $5^{\sqrt[x]{x+2}}\cdot 0{,}2^{\sqrt[4]{x+2}} = 125^{x-4}\cdot 0{,}04^{x-2}$.

2. а) $16^{\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{2x-1}{2x+1}-\frac{10}{3}}=1$; б) $3^{\frac{7-6x}{2}}\cdot 3^{\frac{2x+1}{3}}\cdot 3^{\frac{10x-4}{4}}\cdot 3^{\frac{7-4x}{5}}=1$;

в) $\dfrac{3^{\sqrt[3]{4x^2}}}{4\cdot 3^{\sqrt[3]{2x}+1}}=0{,}75$; г) $16^{2x-0{,}5}=\dfrac{4}{0{,}25^{3x+23}}$; д) $\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{3^{3x-1}}}=$

$=\dfrac{1}{\sqrt[3x-7]{27^{3-x}}}$; е) $\left(\dfrac{9}{25}\right)^{x+1}\left(\dfrac{125}{27}\right)^{2x-\frac{2}{3}}=\dfrac{5}{3}$.

3. а) $\dfrac{2^{2x^2-1}\cdot 4^{x^2}}{8^{x^2-1}}=16$; б) $\dfrac{5^{-x-\frac{1}{2}}}{5\sqrt{5}}=5^{-3}\cdot(0{,}04)^x$; в) $16^{|3x-1|}=$

$=4^{8x-2}$; г) $4^{\frac{2}{x}}=5\cdot 4^{\frac{1}{x}}-4$; д) $25^x-24=\dfrac{25}{25x}$; е) $4^{2x}-24=10\cdot 2^{2x-1}$;

ж) $7^{x+2}-\dfrac{1}{49}\cdot 7^{x+2}-14\cdot 7^{x-1}+98\cdot 7^{x-2}=48$; з) $5^{2x}-7^x=5^{2x}\cdot 35-7^x\cdot 35$.

4. а) $2^{x+1}=200\cdot 5^{-x}$; б) $5^{2x-1}=10^{2x}\cdot 4^{-x}\cdot 5^{2x+1}$; в) $7\cdot 3^{2x+1}-$

$-5^{2x+2}=3^{2x+4}-5^{2x+3}$; г) $2^{4x}-2^{4x-1}=3^{2x-\frac{1}{2}}+3^{2x+\frac{1}{2}}$; д) $2^{4x-3}=$

$=4^{4x^2-6x-1}$; е) $9^x+3^{2x-1}=2^{x+\frac{1}{2}}+2^{x+\frac{7}{2}}$.

5. а) $7^{\lg x}-5^{\lg x+1}=\dfrac{3}{5}5^{\lg x}-\dfrac{13}{7}\cdot 7^{\lg x}$; б) $\sqrt{7^{8x^2-10x-6}}=\sqrt{2}^{3\log_2 49}$;

в) $2\cdot 2^{x^2}-4\cdot 3^{x^2}=\dfrac{4}{9}\cdot 3^{x^2+1}-2^{x^2+4}$; г) $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$;

д) $5^x\sqrt[x]{8^{x-1}}=500$; е) $32^{\frac{2x+5}{2x-7}}=\dfrac{1}{4}\cdot 128^{\frac{2x+17}{2x-3}}$; ж) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\sqrt{x-1}}=$

$=(2{,}25)^{4-\sqrt{x-1}}$; з) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\dfrac{27}{8}\right)^{x-1}=\dfrac{\lg 4}{\lg 8}$.

6. а) $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$; б) $x^{3-3\lg x^2}=100^{-\frac{1}{3}\lg^{\frac{1}{3}}10}$; в) $(\sqrt{3x})^{\log_3 x}=$

$=3$; г) $x^{\lg x}=1000x^2$; д) $x^{\frac{4\lg x+5}{3}}=10^{5+2\lg x}$; е) $2^{\log_3 4x^2}=400\cdot 5^{-\log_3 2x}$;

ж) $x^{\frac{7\lg x+5}{3}}=10\cdot 10^{4+3\lg x}$.

7. а) $3\cdot 16^x+36^x=2\cdot 81^x$; б) $x^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{x}}(x^2-x)}=3^{\log_3 4}$; в) $4^{\lg_3(1-x)}=$

$=(2x^2+2x-5)^{\log_3 2}$; г) $4^{\cos 2x}+4^{\cos^2 x}=3$; д) $2^{\sin^2 x}+5\cdot 2^{\cos^2 x}=7$;

е) $5^{\operatorname{ctg}^2 x}\left(26-5^{\frac{1}{\sin^2 x}}\right)=5$.

8. а) $2^{x-1}+2^{x-4}+2^{x-2}=6{,}5+3{,}25+1{,}625+\ldots$ б) $3^{x-5}+3^{x-7}+$ $+3^{x-9}=45{,}5+22{,}5+11{,}375+\ldots$ в) $4^{2x}\cdot 81^{x}-2\cdot 6^{6x-1}+4^{4x-1}9^{4x-1}=0$; г) $56\cdot 4^{2x-1}+2\cdot 49^{2x+\frac{1}{2}}=53\cdot 196^{x}$; д) $4^{x}-2\cdot(0{,}25)^{2x}-(0{,}25)^{x}+1=0$; е) $9\cdot 4^{x}-4^{3x}=8+27\cdot 4^{-x}-27\cdot 4^{-3x}$; ж) $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1}+$ $+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}=\frac{4}{2-\sqrt{3}}$.

9. а) $3^{x}+4^{x}=5^{x}$; б) $8-x\cdot 2^{x}+2^{3-x}-x=0$; в) $3^{x}\cdot 8^{\frac{x}{x+2}}=6$; г) $5^{x-2}\cdot 2^{\frac{3x}{x+1}}=4$; д) $4\cdot 9^{\log_3(1-x)}=5x^2-20$.

10. а) $4^{3x}\cdot 9^{x}-9^{x+\frac{1}{2}}\cdot 4^{3x-\frac{1}{2}}=-288$; б) $4^{\frac{x-2}{2x}}-7\cdot 10^{-\frac{1}{x}}+25^{\frac{x-2}{x}}=0$; в) $3^{2+4+6+\ldots+2x}=(0{,}(1))^{-6}$.

2. Логарифмик тенглама (тенгсизлик) деб, номаълуми логарифм белгиси остида қатнашган тенглама (тенгсизлик) ларга айтилади. Уларни ечишда логарифмик функциянинг барча хоссаларидан, ва шунингдек, потенцирлаш амали қоидаларидан фойдаланилади.

$c>0$, $c\neq 1$ бўлганда $\log_c A=\log_c B$ ифодадан $A=B$ тенгликка ўтиш амалига c асосга кўра *потенцирлаш* деб аталади:

$$\log_c A=\log_c B \Rightarrow A=B. \tag{22}$$

Логарифмик тенгламаларни ечишда қўлланиладиган асосий эквивалент алмаштиришлар:

1. $a>0$, $a\neq 1$ бўлганда $\log_a x=b \Leftrightarrow x=a^b$. (23)
2. $a>0$, $a\neq 1$, $b\in\mathbf{R}$ бўлганда $\log_a f(x)=b \Leftrightarrow f(x)=a^b$. (23а)
3. $a>0$, $a\neq 1$, $b\in\mathbf{R}$ бўлганда:

а) $$\log_{\varphi(x)} f(x)=b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=(\varphi(x))^b, \\ f(x)>0,\ \varphi(x)>0,\ \varphi(x)\neq 1. \end{cases} \tag{24}$$

б) $$\log_a f(x)=\varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a^{\varphi(x)} \\ f(x)>0. \end{cases} \tag{24а}$$

4. Бирор $f(t)=0$ тенгламанинг илдизлари t_1, t_2, ... t_n дан иборат бўлса, у ҳолда $a>0$, $a\neq 1$ лар учун

$$f(\log_a x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_a x=t_k, \\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{array}\right. \tag{25}$$

Хусусий ҳолда, $f(t)=At^2+Bt+C=0 (D=B^2-4AC>0)$ квадрат тенгламанинг t_1 ва t_2 илдизлари учун:

$$A\log_a^2 x+B\log_a x+C=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_a x=t_1, \\ \log_a x=t_2. \end{array}\right. \tag{25а}$$

5. $a > 0$, $a \neq 1$ бўлганда

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \ g(x) > 0 \end{cases} \tag{26}$$

6. $a > 0$, $a \neq 1$ бўлганда

а) $f(x) = a^{\log_a f(x)} \Longleftrightarrow f(x) > 0,$ (27)

б) $g(x) = a^{\log_a f(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) = f(x), \\ f(x) > 0, \ g(x) > 0. \end{cases}$ (27а)

7. $a > 0$, $a \neq 1$, $n \in \mathrm{N}$ бўлганда

$$\log_a |f(x)|^{2n} = 2n \log_a |f(x)| =$$

$$= \begin{cases} 2n \log_a f(x), \text{ агар } f(x) > 0 \text{ бўлса}, & (28) \\ 2n \log_a (-f(x)), \text{ агар } f(x) < 0 \text{ бўлса}. & (28а) \end{cases}$$

8. $a > 0$, $a \neq 1$ бўлганда

$$\log_a (f(x) g(x)) =$$

$$= \begin{cases} \log_a f(x) + \log_a g(x), \text{ агар } f(x) > 0, \ g(x) > 0 \text{ бўлса}, & (29) \\ \log_a (-f(x)) + \log_a (-g(x)), \text{ агар } f(x) < 0 \ g(x) < 0 \text{ бўлса}. & (29а) \end{cases}$$

9. $a > 0$, $a \neq 1$ бўлганда

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$= \begin{cases} \log_a f(x) - \log_a g(x), \text{ агар } f(x) > 0, \ g(x) > 0 \text{ бўлса}. & (30) \\ \log_a (-f(x)) - \log_a (f-(x)), \text{ агар } f(x) < 0, \ g(x) < 0 \text{ бўлса}, & (30а) \end{cases}$$

Баъзи абитуриентлар юқоридаги формулалардан тўғри фойдалана билмай, турли хатоликларга йўл қўядилар.

Логарифмик тенгламаларни ечишда уларнинг типларига қараб қуйидаги усуллар қўлланилади:

I. Потенцирлаш усули;

II Янги номаълумлар киритиш усули;

III. Бир хил асосга кўра логарифмлаш усули;

IV. Сунъий усул билан ечиладиган тенгламалар.

I тип. Потенцирлаш билан ечиладиган тенгламалар

14- м и с о л. Тенгламани ечинг:

$$\log_3 (x + 14)^2 = \log_3 \log_2 512. \tag{31}$$

Ечилиши. $\log_2 512 = 9$ бўлгани учун, $x + 14 \neq 0$ шарт асосида

$$(31) \Longleftrightarrow \log_3 (x+14)^2 = \log_3 3^2 \Longleftrightarrow (x+14)^2 = 3^2 \Longleftrightarrow x + 14 = \pm 3.$$

Ж а в о б. $\{-9; -17\}$.

Баъзи абитуриентлар шунга ўхшаш мисолларни бундай ечиб хатога йўл қўядилар:

$(31) \Longleftrightarrow 2\log_3 (x + 14) = 2 \Longleftrightarrow x + 14 = 3 \Longleftrightarrow x_1 = -9$, яъни бунда

тенгламанинг бир илдизи $\log_3(x+14)^2 = 2\log_3|x+14|$ эканлигини назарга олмаслик оқибатида йўқотилган.

15-мисол. Тенгламани ечинг:

$$-\log_{0,2}(x^2-5x+6)=\log_5(x-2). \qquad (32)$$

Ечилиши. $x^2-5x+6>0$, $x-2>0$ шартлар асосида

$$(32)\Longleftrightarrow \log_5(x^2-5x+6)=\log_5(x-2)\Longleftrightarrow x^2-5x+6=x-2\Longleftrightarrow x_1\neq 2,\ x_2=4.$$

Текшириш кўрсатадики, $x_1=2$ чет илдиз, $x_2=4$ ечим.

Жавоб. $\{4\}$.

Логарифмик тенгламани ечишда чет илдиз пайдо бўлмаслиги ёки илдизлар йўқотилмаслиги учун ушбу қоидага риоя қилиб ечиш мумкин:

1) тенгламанинг аниқланиш соҳаси D ни топиш;

2) уни M_1 ва $M_2=D/M_1$ каби шундай икки соҳага ажратиш керакки, M_1 да (ёки M_2 да) берилган тенгламага (23÷(30а) алмаштиришларни бажарганда, шу соҳада тенглама ўзига тенг кучли тенгламага алмашсин;

3) M_1 ва M_2 соҳаларда уни алоҳида-алоҳида ечиш;

4) M_1 ва M_2 соҳаларда аниқланган ечимлар умумлаштирилиб, берилган тенглама жавоби ёзилади.

Масалан, (31) тенглама $M_1=]-\infty;\ -14[$ ва $M_2=;\ ]-14;\ +\infty[$ соҳада (28) ва (28а) ларни қўллаб бундай ечилади:

а) $x\in M_1\Longrightarrow(31)\Longleftrightarrow 2\log_3(x+14)=2\Longleftrightarrow x+14=3\Longleftrightarrow x=-9$. Бу илдиз M_1 га тегишли бўлгани учун ечим;

б) $x\in M_2\Longrightarrow(31)\Longleftrightarrow 2\log_3(-x-14)=2\Longleftrightarrow -x-14=3\Longleftrightarrow x=-17$. Бу илдиз M_2 га тегишли. Демак, чет илдиз эмас.

Жавоб. $\{-9;\ -17\}$.

16-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\log_3(x+3)(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x^2-9)=2\log_9(x+10). \qquad (33)$$

Ечилиши. Тенгламанинг аниқланиш соҳаси D қуйидаги система билан аниқланади:

$$D:\begin{cases}(x+3)(x-1)>0,\\ x^2-9>0;\\ x+10>0.\end{cases} \qquad (34)$$

Энди $x\in D$ деб, (33) тенгламани шу соҳада потенцирлаб ечамиз:

$$(33)\Longleftrightarrow\begin{cases}x\in D,\\ \log_3(x+3)(x-1)\log_3(x^2-9)(x+10)\end{cases}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}(x+3)(x-1)=(x^2-9)(x+10),\\ x\in D.\end{cases}$$

Аммо $x+3\neq 0$, чунки $x=-3$ бўлганда $x\in D$ бўлар эди (яъни D ни аниқловчи (34) даги икки тенгсизликни қаноатлантирмас эди). Демак, охирги тенгламани $x+3$ га бўлсак:

$$(33)\Longleftrightarrow\begin{cases}x-1=(x-3)(x+10),\\ x\in D\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x^2+6x-29=0,\\ x\in D.\end{cases}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}x_1=-3+\sqrt{38},\\ x_2=-3-\sqrt{38}.\end{cases}$$

Текшириш: 1) $x_1+3=\sqrt{38}$, $x_1-3=\sqrt{38}-6$ бўлгани учун $x_1^2-9=(\sqrt{38})^2-6\sqrt{38}=\sqrt{38^2}-\sqrt{36\cdot 38}>0$ дир. x_1 илдиз (34) нинг қолган тенгсизликларини қаноатлантиради. 2) $x_2+3=-\sqrt{38}$, $x_2-3=-\sqrt{38}-6$ учун ҳам $x_2^2-9=\sqrt{38^2}-\sqrt{36\cdot 38}>0$, $(x_2+3)(x_2-1)=-\sqrt{38}(-4-\sqrt{38})>0$ бажарилган. Демак, $x_1\in D$, $x_2\in D$.

Жавоб. $\{-3\pm\sqrt{38}\}$.

Бу ерда D ни (34) дан ечиб топсак, $D=]-10;\ -3[\cup]3;\ +\infty[$ бўлиб, уни излашга вақт кетказмасдан, топилган илдизлар ечим ёки ечим эмаслигини D ни аниқловчи (34) шартларга қўйиб билдик

17-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\lg\frac{1}{x+1}-\log_{\sqrt{10}}(5-x)=\frac{1}{\log_2 10}-\log_{0,1}(x+3). \qquad (35)$$

Ечилиши. Тенгламанинг аниқланиш соҳаси $x+1>0, 5-x>0, x+3>0$ шартларни бажарувчи x лар бўлиб, у $D=]-1;\ 5[$ ораликдир:

$x\in D\Longrightarrow(35)\Longleftrightarrow 2\lg(5-x)=\lg(x+3)+\lg(x+1)+\lg 2\Longleftrightarrow\lg(5-x)^2=\lg(2x+6)(x+1)\Longleftrightarrow x^2+18x-19=0\Longleftrightarrow x_1=1,\ x_2\neq-19.$

Жавоб: $\{1\}$.

Машқ учун ушбу тенгламаларни ечинг:

а) $\lg(3x+4)+\lg(9x+3)=\lg(1-6x)$; б) $\log_3(x^2-1)=\log_{1/3}(x-1)$;

в) $\log_3(x^2-3x-5)+\log_{1/3}(7-2x)$; г) $\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=-\log_{1/3}(x^2-1)$;

д) $\lg(x-2)+\lg x=\lg 8$; е) $\lg(x+3)-2\lg(x-2)=\lg 0,4$; ж) $\lg(x+1)+\lg(1-x)=\lg(2x+3)$.

II тип. Янги номаълум киритиш билан ечиладиган тенгламалар

18-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\log_2^2 2x+\log_2 2x+1=\frac{1}{\log_2 x}. \qquad (36)$$

Ечилиши. $\log_2 2x=1+\log_2 x\Longrightarrow\log_2^2 x=1+2\log_2 x+\log_2^2 x$, бунда $t=\log_2 x$ десак,

$$(36)\Longrightarrow t^2+3t+2=\frac{6}{t}\Longleftrightarrow t^3+3t^2+2t-6=0\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow(t-1)(t^2+4t+6)=0\Longleftrightarrow t_1=1.$$

Бундан $\log_2 x=t_1\Longleftrightarrow\log_2 x=1\Longleftrightarrow x_1=2$.

Жавоб. $\{2\}$.

19-мисол. Тенгламани ечинг:

$$2\cdot x^{\lg^2 x+3\lg x-4}=\log_{\sqrt{10}}(\log_{\sqrt{10}}1000+4) \qquad (37)$$

Ечилиши. Бу тенгламанинг ўнг томони 2 га тенг. Икки томонини 2 га бўлиб, сўнг 10 асосга кўра логарифмласак,

$$(37)\Longleftrightarrow(\lg^2 x+3\lg x-4)\lg x=0\Longleftrightarrow\begin{cases}t=\lg x,\\(t^2+3t-4)t=0\end{cases}\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\begin{cases}t=\lg x,\\t_1=0,\ t_2=1,\ t_3=-4\end{cases}\Longleftrightarrow x_1=1;\ x_2=10;\ x_3=10^{-4}$$

Жавоб. $\{1;\ 10;\ 10^{-4}\}$.

Машқ учун мисоллар:

а) $2\lg x+1=\dfrac{1}{3\lg x+1}$; б) $3\lg x+1=\dfrac{4}{\lg\dfrac{x^2}{10}}$; в) $x^{\log_4 x}=x\cdot 16^{\log_4 x}$

г) $\lg 1000x^2\cdot\lg 10000x=25$; д) $2^{\log_3 9x^2}\cdot 5^{\log_3 3x}=400$.

Баъзида абитуриентлар $\log_a^k nb^m=\left(\dfrac{m}{n}\right)^k\log_a^k b$ формуладан тўғри фойдаланмасликлари оқибатида айрим хатоликларга йўл қўядилар. Қуйидаги мисолларнинг ечимида шу формула татбиқ этилади.

20-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\lg^4(x-1)^2+\lg^2(x-1)^3=24. \qquad (38)$$

Ечилиши. (38) $\Longleftrightarrow 2^4\cdot\lg^4(x-1)+3^2\lg^2(x-1)=24\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}\lg^2(x-1)=t,\\ 2t^2+t-3=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}\lg^3(x-1)=t,\\ t_1=1;\ t_2\neq-\dfrac{3}{2}.\end{cases}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\lg(x-1)=\pm 1.$$

Жавоб. $\{11;\ 1{,}1\}$.

21-мисол Тенгламани ечинг:

$$\lg^2(100x)+\lg^2 10x=14+\lg\frac{1}{x}. \qquad (39)$$

Ечилиши. $x>0$ бўлган шарт асосида ёчамиз:

$$\begin{array}{r}+\ \lg^2 100x=(\lg 100+\lg x)^2\\ \lg^2 10x=(\lg 10+\lg x)^2\\ \hline 14-\lg x=5+6\lg x+2\lg^2 x\end{array}$$

$$(39)\Longleftrightarrow 2\lg^2 x+7\lg x-9=0\Longleftrightarrow x_1=10,\ x_2=10^{-4,5}.$$

22-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\log_9^4 x^2-5\log_3^2 x=-\log_{\frac{1}{3}}^2 9. \qquad (40)$$

Ечилиши. $x>0$ бўлгани учун $\log_9^4 x^2=\dfrac{2^4}{2^4}\log_3^4 x=\log_3^4 x$ ҳамда

$\log_{\frac{1}{3}}^2 9=\dfrac{2^2}{(-1)^2}\log_3 3=4$ эканлигидан $t=\log_3^2 x\geqslant 0$ деб белгиласак,

$$(40)\Longrightarrow t^2-5t+4=0\Longleftrightarrow t_1=1,\ t_2=4.$$

Демак, $(40)\Longleftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3^2 x=1,\\ \log_3^2 x=4\end{array}\right.\Longleftrightarrow x_1=3,\ x_2=\dfrac{1}{3},\ x_3=9,\ x_4=\dfrac{1}{9}.$

Жавоб. $\left\{3;\ \dfrac{1}{3};\ 9;\ \dfrac{1}{9}\right\}$.

Логарифмик тенгламаларнинг баъзиларини ечишда

$$a^{\log_c b}=b^{\log_c a}\ (a>0,\ b>0,\ c>0,\ c\neq 1) \qquad (41)$$

формуладан фойдаланиш анча қулайлик туғдиради.

23- м и с о л. Тенгламани ечинг:

$$2^{2^{\log(x-2)}} = 5 + 4(x-2)^{\lg 5}. \qquad (42)$$

Ечилиши. (41) га кўра $(x-2)^{\lg 5} = 5^{\lg(x-2)}$ бўлиб, унда

$$(42) \Longleftrightarrow 5^{2\lg(x-2)} - 4 \cdot 5^{\lg(x-2)} - 5 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t = 5^{\lg(x-2)},\ t>0, \\ t^2 - 4t - 5 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t = 5^{\lg(x-2)},\ t>0, \\ t_1 = 5,\ t_2 \neq -1 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 5^{\lg(x-2)} = 5 \Longleftrightarrow \lg(x-2) = 1 \Longleftrightarrow x = 12.$$

Ж а в о б. {12}.

Ушбу мисолда кетма-кет белгилаш киритиш қулайлик туғдиради:

24- м и с о л. Тенгламани ечинг:

$$\log_3(3^x - 1) \cdot \log_3(3^{x+1} - 3) = 6. \qquad (43)$$

Ечилиши. $3^x = t$ деб, $\log_3(3^{x+1} - 3) = 1 + \log_3(t-1)$ ни назарга олсак,

$$(43) \Longrightarrow \log_3(t-1)(1 + \log_3(t-1)) = 6 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z^2 = \log_3(t-1), \\ z^2 + z - 6 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = \log_3(t-1), \\ z_1 = 2,\ z_2 = -3 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(t-1) = 2, \\ \log_3(t-1) = -3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \begin{cases} t_1 = 10, \\ t_2 = \dfrac{28}{27} \end{cases} \Longrightarrow (43) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \log_3 10, \\ x_2 = \log_3 \dfrac{28}{27}. \end{array}\right.$$

Ж а в о б. $\{\log_3 10;\ \log_3 28 - \log_3 77\}$.

III тип. Бир хил асос танлаб логарифмлаш билан ечиладиган тенгламалар

25- м и с о л. Тенгламани ечинг:

$$2\log_{25x^2} x^3 + 3\log_{5x^3} x^2 = 0. \qquad (44)$$

Ечилиши. $x_0 = 1$ ни тенгламага қўйиб, унинг илдиз эканини аниқлаймиз. Энди $x \neq 1$ ва $x > 0$ бўлсин деб, x асосга кўра логарифмга ўтсак,

$$(44) \Longleftrightarrow 2\frac{2\log_x x^3}{\log_x 25x^2} + 3\frac{\log_x x^2}{\log_x 5x^3} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{6}{\log_x 25 + 2} + \frac{6}{\log_x 5 + 3} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} t = \log_x 5, \\ \dfrac{1}{t+1} + \dfrac{2}{t+3} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t_1 = -\dfrac{5}{3}, \\ \log_x 5 = t_1. \end{cases}$$

Ж а в о б. $\left\{1;\ \dfrac{1}{5 \cdot \sqrt[3]{25}}\right\}$.

Бу ерда x асосга кўра логарифмлашган аввал $x=1$ тенгламанинг илдизи эканлиги аниқланганига эътибор беринг. Акс ҳолда ечим йўқолиши мумкин эди. Умуман тенгламани 1 дан фарқли ихтиёрий мусбат сон асосга кўра логарифмлаб ечиш илдиз йўқолишининг олдини олади. Ҳақиқатан ҳам (44) тенгламада 5 асосли логарифмга ўтсак, илдизлар йўқолмайди:

$$(44) \Longleftrightarrow \frac{6\log_5 x}{2+2\log_5 x}+\frac{6\log_5 x}{1+3\log_5 x} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x=0, \\ \dfrac{1}{2+2\log_5 x}+\dfrac{1}{1+3\log_5 x}=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1, \\ x_2=\dfrac{1}{5\cdot\sqrt[3]{25}}. \end{array}\right.$$

26-мисол. Тенгламани ечинг:

$$x^{\log_3 x}=3^{2\log_3^2 x-4\log_3 x+3}. \qquad (45)$$

Ечилиши. $x>0$, $x\neq 1$ да аниқланган бу тенгламанинг ҳар икки томони мусбат, шунинг учун 3 асосни танлаб, унга кўра логарифмласак,

$$(45) \Longleftrightarrow \log_3 x^{\log_3 x}=(2\log_3^2 x-4\log_3 x+3)\log_3 3 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \log_3^2 x-4\log_3 x+3=0 \Longleftrightarrow \log_3 x_{1,2}=2\pm 1 \Longleftrightarrow x_1=3,\ x_2=27.$$

Жавоб. $\{3;\ 27\}$.

27-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\log_4^2 4x\log_{4x}256x^2=12. \qquad (46)$$

Ечилиши. 4 асосли логарифмга ўтар эканмиз, $4x\neq 1$ десак,

$$(46) \Longleftrightarrow (1+\log_4 x)^2\,\frac{\log_4 256+\log_4 x^2}{1+\log_4 x}=12 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (1+\log_4 x)(2+\log_4 x)=6 \Longleftrightarrow \log_4^2 x+3\log_4 x-4=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \log_4 x_{1,2}=\frac{-3\pm 5}{2} \Longleftrightarrow x_1=4,\ x_2=\frac{1}{256}.$$

Жавоб. $\left\{4;\ \dfrac{1}{256}\right\}$.

Машқ учун мисоллар:

а) $\log_{4x}2\cdot\log_{\frac{x}{4}}=\log_{\frac{x}{16}}2$; б) $\log_{2x}\dfrac{2}{x}\cdot\log_2^2 x+\log_2^4 x=1$;

в) $\log_5^3 x+\log_{5x}\dfrac{5}{x}=1$; г) $\log_2^{\log_2 x}x=2$; д) $2^{\log_8(x^2-3x+9)}=3^{2\log_x\sqrt{x}-1}$;

е) $\log_4(x+12)\log_x 2=1$; ж) $2\log_x 3+\log_{3x}3+3\log_{9x}3=0$;

з) $1+\log_x\dfrac{4-x}{10}=(\lg x^2-1)^2\log_x 10$; и) $\log_x(125x)\cdot\log_{25}^2 x=1$.

IV тип. Сунъий усул билан ечиладиган тенгламалар. Юқоридаги усуллар билан ечиш мумкин бўлмаган баъзи тенгламалар тенгламада қатнашаётган функцияларнинг хоссалари-

га асосан танланган сунъий усул ёки мантиқий фикрлаш билан ечилиши мумкин.

28-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\lg\log_2(9-2^x)=\lg(3-x). \qquad (47)$$

Ечилиши. $f(x)=3-x$, $\varphi(x)=\lg\log_2(9-2^x)$ деб, (21 а) формулага биноан қуйидагига эга бўламиз:

$$(47) \Longleftrightarrow \begin{cases} 3-x>0, \\ 3-x=10 \end{cases} \lg\log_2(9-2^x) \Longleftrightarrow \begin{cases} 3-x>0, \\ 3-x=\log_2(9-2^x) \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3-x>0,\ 9-2^x>0, \\ 9-2^x=2^{3-x} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3-x>0,\ 9-2^x>0, \\ 2^{2x}-9\cdot 2^x+8=0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x<3,\ 2^x<9, \\ 2^x=1,\ 2^x\neq 8. \end{cases}$$

Жавоб $\{0\}$.

29-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\log_{\sqrt{2x+1}}(4x^2+2x-6)^2=12. \qquad (48)$$

Ечилиши. (24) даги эквивалентликка асосан

$$(48) \Longleftrightarrow \log_{(2x+1)}(4x^2+2x-6)^2=4 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+1>0,\ 2x+1\neq 1, \\ (4x^2+2x-6)^2=(2x+1)^4 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+1>0,\quad x\neq 0, \\ (4x^2+2x-6-(2x+1)^2)(4x^2+2x-6+(2x+1)^2)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+1>0,\quad x\neq 0, \\ (8x^2+6x-5)(2x+7)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Жавоб: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

30-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\log_{\sin x}\cos x+\log_{\cos x}\sin x=2{,}5. \qquad (49)$$

Ечилиши. Тенглама $\sin x>0$, $\cos x>0$, $\sin x\neq 1$, $\cos x\neq 1$ шартлар асосида ечилади. $t=\log_{\sin x}\cos x$ деб белгиласак,

$$(49) \Longrightarrow t+\frac{1}{t}=2{,}5 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=\frac{1}{2}, \\ t_2=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{l} \log_{\sin x}\cos x=\frac{1}{2}, \\ \log_{\cos x}\sin x=2. \end{array}$$

Шундай қилиб ($k,\ n\in \mathbf{Z}$):

$$(49) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 x=\sin x, \\ \sin^2 x=\cos x \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \\ \sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_k=\pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi k, \\ x_n=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi n. \end{array}\right.$$

Жавоб. $\left\{\pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi k;\ (-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi n;\ k,\ n\in \mathbf{Z}\right\}$

31- м и с о л. Тенгламани ечинг:

$$\lg(20-10x)=(\lg x+1)^3. \qquad (50)$$

Ечилиши. Тенглама $D=]0;\ 10[$ соҳада аниқланган бўлиб, $x_0=1$ унинг илдизи эканини текширса бўлади. Бу тенгламани илгари кўрсатилган усулларда ечиб бўлмас эди. Энди бу ечимнинг ягоналигини кўрсатамиз (50) тенгламанинг чап томонидаги функция D соҳада камаювчи, ўнг томондагиси ўсувчи; бундай функциялар биттадан ортиқ жойда кесиша олмайди.

Ж а в о б. $\{1\}$.

Машқ учун мисоллар:

а) $\log_2(4^x+4)-\log_2 2^x=\log_2(2^{x+1}-3)$; б) $\lg(x-1)=x-2$;

в) $\log_{3-4x^2}(9-16x^4)=2+\dfrac{1}{\log_2(3-4x^2)}$; г) $\lg(-x)=2^x$;

д) $\log_{\sin x}2\cdot\log_{\sin^2 x}a+1=0$.

20- топшириқ. Тенгламани ечинг.

1. а) $2\log_9^2 x=\log_3 x\cdot\log_3(\sqrt{2x+1}-1)$; б) $\left(1+\log_x\dfrac{4-x}{10}\right)\lg x=$ $=\lg\lg 10^3-1$; в) $3\lg_x 4+2\lg_{4x}4+3\log_{16x}4=0$; г) $4^{\log_{16}x}-3^{\log_{16}x-\frac{1}{2}}=$ $=3^{\log_{16}x+\frac{1}{2}}-2^{\log_{16}x-1}$; д) $\log_{x+1}(x^3-9x+8)\log_{x-1}(x+1)=8$;

е) $\log_k x+\log_{\sqrt{k}}x+\ldots+\log_{\sqrt[k]{k}}x=\dfrac{k+1}{2}$.

2. а) $\log_3(3^x-8)=2-x$; б) $\log_{5-2x}(4x^2-4x+65)=2$;

в) $\log_3(\log_9 2x+\dfrac{1}{2}+81^x)=4x$; г) $\log_3(2x+1)=1-\log_3(2x+3)$;

д) $\log_7(4^x-1)+\log_7(4^x-7)=1$; е) $\lg\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{x-1}{2}=$ $=\lg\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{4x+1}{8}$;

3. а) $(x+2)^{\lg^2(x+2)+\lg(x+2)^5-12}=10^{2\lg(x+2)}$; б) $4^{\log_2(1-2x)}=5x^2-5$; в) $x^{1+\lg x}=10x$; г) $x^{2\lg x}=10x^2$; д) $x^{4\log_3 x}=9$; е) $(\sqrt{x})^{\log_5 x-1}=5$; ж) $x^{\frac{5\lg x+7}{4}}=10^{\lg^2 x+\lg x+1}$; з) $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)}=9$.

4. а) $\lg^2 2x=3\lg 2x+\lg 4x^2-4$; б) $\log_2^2 3x+2\log_2\sqrt{3x}=2$; в) $(a^{\log_b x})^2-5x^{\log_b a}+6=0$; г) $2\log_4(4-2x)=4-\log_2(-2-2x)$; д) $3+$ $+2\log_{(2x+1)}3=2\log_3(2x+1)$; е) $\log_{2x}36x^2\cdot\log_3^2 2x=4$; ж) $\log_{0,5}^2 8x+$ $+\log^2\dfrac{x^2}{2}=8$; з) $1+2\log_{(2x+2)}5=\log_5(2x+2)$.

5. а) $\log_3(4^x-3)+\log_3(4^x-1)=1$; б) $\log_2(4\cdot 3^x-6)-\log_2(9^x-$ $-6)=1$; в) $\log_6 4^{x+1,5}-\log_6(9^x-2)=2x$; г) $\lg(3^x-2^{4-x})=2+$ $+\dfrac{1}{4}\lg 16-\dfrac{x\lg 4}{2}$; д) $\log_3(81^x+9)=2x+\log_3(28-2\cdot 9^x)$; е) $\log_2(25^{x+5}-$ $-1)=2+\log_2(5^{x+3}+1)$.

6. а) $\lg^2(100x)-\lg^2(10x)+\lg^2 x=6$; б) $\log_2(8x^2)\log_2(32x)=$

$= \frac{9}{2}\log_2^2 2x$; в) $\sqrt{\log_9 9x^8 \cdot \log_3 3x} = \log_3 x^3$; г) $9^{\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)} = 5^{\log_{1/5}(8x^2+1)}$;

д) $\sqrt{\log_2 2x} = 0{,}5 + \log_2 \sqrt{2x}$; е) $\log_{16} 2x + \log_2 2x = 7 - \log_4 2x$; ж) $\log_{2x} 3 - \log_3 \sqrt{2x} = \log_{\sqrt{2x}} 3 - \log_3 2x + \frac{1}{2}$; з) $\log_5 x + \log_{25} x = \log_{1/5}\sqrt{3}$.

7. а) $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$; б) $x^{3\lg x - \frac{1}{\lg x}} = \sqrt[3]{10}$; в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg^2 x - \lg x} = \frac{1}{125}\cdot 5^{\lg x - 1}$; г) $|2x-1|^{\lg^2 2x - \lg 4x^2} = |2x-1|^3$; д) $\log_x(125x)\log_{25}^2 x = 1$;

е) $\log_{2-2x^2}(2 - 2x^2 - x^4) = 2 - \frac{1}{\log_{4/3}(2-2x^2)}$.

8. а) $\log_a x \cdot \log_b c\,(1 + \log_c a) = \log_b x \cdot \log_c x \cdot \log_a c$;

б) $\log_8 x + (\log_8 x)^2 + (\log_8 x)^3 + \ldots = \frac{1}{2}$; в) $27^{\lg x} + 12^{\lg x} = 2\cdot 8^{\lg x}$;

г) $\sqrt{\log_x \sqrt{3x}} \cdot \log_3 x = -1$; д) $\sqrt[\lg x]{x} = 10^{x^4}$; е) $\lg\lg x = \sqrt{\frac{(m+n)^{\lg(m-n)}}{(m-n)^{\lg(m+n)}}}$; ж) $\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{a}{x}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a$; з) $\frac{\lg x^2}{(\lg x)^2} + \frac{\lg x^3}{(\lg x)^3} + \frac{\lg x^4}{(\lg x)^4} + \ldots = 8$;

и) $\log_a x = p$, $\log_b x = q$, $\log_{abc} x = r$ бўлса, $\log_c x$ ни топинг.

3. Кўрсаткичли ва логарифмик тенгламалар системаси

Тенгламалар системаси: а) ўрнига қўйиш усули; б) алгебраик системага келтириб ечиш усули; в) белгилаш усули ҳамда; г) системада қатнашаётган функция хоссаларига биноан бирор сунъий усул танлаш билан ечилади. Ечишда ундаги тенгламаларнинг аниқланиш соҳасига эътибор бериш лозим.

32-мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} \log_{2y}(x-2) - \log_2 4y^2 = 1, \\ \log_4(x-2) - \log_4 2y = 1. \end{cases} \qquad (51)$$

Ечилиши. Системанинг иккинчи тенгламасидан $\log_4 \frac{x-2}{2y} = 1$ бўлиб, ундан $x - 2 = 8y$ келиб чиқади. Бунда $x - 2 > 0$, $y > 0$ ва $2y \neq 1$ эканини назарда тутсак,

$$\log_{2y} 8y - \log_2 4y^2 = 1 \Longleftrightarrow 1 + \log_{2y} 4 - 2\log_2 2y = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \log_2^2 2y = 1 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 2y = 1, \\ \log_2 2y = -1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = 1, \\ y_2 = \frac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Бу ердан $x_1 - 2 = 8y_1 \Longrightarrow x_1 = 10$; $x_2 - 2 = 8y_2 \Longrightarrow x_2 = 4$. Аниқланган илдизлар системани қаноатлантиришини текшириш осон.

Жавоб. $\left\{(10;\ 1);\ \left(4;\ \frac{1}{4}\right)\right\}$.

33-мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^{x-y} = y^{x+y}, \\ \sqrt{x}\,y = 1. \end{cases} \tag{52}$$

Ечилиши. Иккинчи тенгламадан $y = x^{-0,5}$ $(x > 0)$ ни топиб, биринчисига қўйсак,

$$(52) \Longrightarrow x^{x-x^{-0,5}} = x^{-0,5x-0,5x^{-0,5}}$$

бўлади. Унинг икки томонини ўнг томонидаги ифодага бўлсак,

$$x^{1,5x-0,5x^{-0,5}} = 1 \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1, \\ 1,5x - 0,5x^{-0,5} = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = 9^{-1/3}. \end{array} \right.$$

Бу ердан $y_1 = 1$, $y_2 = \sqrt[3]{3}$ ҳам аниқланади.

Жавоб. $\left\{(1,\ 1);\ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}};\ \sqrt[3]{3}\right)\right\}$.

34-мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} \log_2 2x - \log_4 (4 - 2x) = \log_4 y, \\ \log_3 2x - \log_3 (2x + y) = \log_3 y. \end{cases} \tag{53}$$

Ечилиши. Бу система $x > 0$, $y > 0$, $4 - 2x > 0$, $2x + y > 0$ шартларда аниқланган бўлиб, системанинг барча илдизлари шу тенгсизликларни қаноатлантириши керак. Ушбу

$$\begin{cases} 4x^2 = y(4-2x), \\ (2x + y)y = 2x \end{cases} \tag{54}$$

система (53) ни потенцирлаш билан ҳосил қилинган. Бу системанинг ўзи юқоридаги шартлар билан ечилмаса, унда чет илдизлар пайдо бўлиши мумкин, чунки потенцирлаганда доимо системанинг (тенгламаникига ўхшаб) аниқланиш соҳаси кенгаяди. Масалан, (0; 0) (54) ечими, лекин унда берилган (53) система аниқланмаган. Шарт бўйича $x > 0$, $y > 0$ бўлгани учун

$$(53) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x(2x + y) = 4y, \\ y(2x + y) = 2x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2, \\ y(2x + y) = 2x \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ 3y^2 = 2y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ y = 2/3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{2}{3}, \\ y_0 = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Жавоб. $\left\{\left(\frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)\right\}$.

35-мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} \log_3 (x^2 y) = 6 \log_3 x \log_3 y, \\ 2 \log_3 \dfrac{x^2}{y} = \log_y x. \end{cases} \tag{55}$$

Ечилиши. Системани $x > 0$, $y > 0$, $y \neq 1$ шартлар асосида

$$(55) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2 \log_3 x + \log_3 y = 6 \log_3 x \log_3 y, \\ 2(2 \log_3 x - \log_3 y) = \dfrac{\log_3 x}{\log_3 y} \end{cases} \tag{56}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда $z = \log_3 x, t = \log_3 y$ каби белгилаш киритсак,

$$(56) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2z + t = 6zt, \\ 2(2z - t) = \dfrac{z}{t} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2(4z^2 - t^2) = 6z^2, \\ 2(2z - t) = \dfrac{z}{t} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z^2 = t^2, \\ 2(2z - t) = \dfrac{z}{t} \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} z = t, \\ 4z - 2t = \dfrac{z}{t} \end{cases} \\ \begin{cases} z = -t, \\ 4z - 2t = \dfrac{z}{t} \end{cases} \end{array} \right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} z = t, \\ 2t = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} z = -t, \\ 2t = -1 \end{cases} \end{array} \right.$$

ҳосил бўлади. Демак, $\log_3 x_1 = 1$, $\log_3 y = \dfrac{1}{2}$ дан $x_1 = 3$, $y_1 = \sqrt{3}$ ва $\log_3 x_2 = \dfrac{1}{2}$, $\log_3 y_2 = -\dfrac{1}{2}$ дан $x_2 = \sqrt{3}$, $y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ лар аниқланади.

Ж а в о б. $\left\{ 3;\ \sqrt{3}); \left(\sqrt{3};\ \dfrac{1}{3}\right) \right\}$.

36- м и с о л. Системани ечинг:

$$\begin{cases} \lg \sqrt{(x + y)^2} = 1, \\ \lg^2 \dfrac{y}{x} = 4. \end{cases} \qquad (57)$$

Ечилиши. Бу система $x + y \neq 0$, $\dfrac{y}{x} > 0$ шартда қуйидагига эквивалент. Уни ечамиз:

$$(57) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x + y| = 10, \\ \lg \dfrac{y}{x} = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} |x + y| = 10, \\ \lg \dfrac{y}{x} = -2 \end{cases} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x + y| = 10, \\ y = 100x \end{cases} \\ \begin{cases} |x + y| = 10, \\ y = 0{,}01x \end{cases} \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} (A) \begin{cases} 101\,|x| = 10, \\ y = 100x \end{cases} \\ (B) \begin{cases} 1{,}01\,|x| = 10, \\ y = 0{,}01x. \end{cases} \end{array} \right.$$

(A) системанинг ечимлари $\left(\dfrac{10}{101}; -\dfrac{1000}{101}\right)$, $\left(-\dfrac{10}{101}, -\dfrac{1000}{101}\right)$, (B) ники эса $\left(\dfrac{1000}{101}; \dfrac{10}{101}\right)$, $\left(-\dfrac{1000}{101}; -\dfrac{10}{101}\right)$ дир.

Ж а в о б: $\left\{ \left(\dfrac{10}{101}; \dfrac{1000}{101}\right), \left(-\dfrac{10}{101}; -\dfrac{1000}{101}\right), \left(-\dfrac{1000}{101}, -\dfrac{10}{101}\right), \left(\dfrac{1000}{101}; \dfrac{10}{101}\right) \right\}$.

21-топшириқ. Системаларни ечинг:

1. а) $\begin{cases} 16^{x+y} = 128, \\ 5^{6x-4y-3} = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^{(x-y)^2-1} = 1, \\ 3^{x+y} = 27. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^y = 2{,}75, \\ 4^x - 9^y = -0{,}75. \end{cases}$

г) $\begin{cases} \log_{\sqrt{3}} (2x - 2y) = 2, \\ 9^x \cdot 4^y = 972. \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 y = 20, \\ x^{\lg y^2} = 2. \end{cases}$ е) $\begin{cases} 4^{\log_9(x-4y)} = 1, \\ 4^{x-2y} - 7 \cdot 2^{x-2y} = 8. \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} \lg \sqrt{(x+y)^2} = 1, \\ \lg y - \lg |x| = \lg 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_5 x^2 + 4^{\log_4 y} = 7, \\ x^{2y} = 625^3. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3^{\log_x 2} = y^{\log_5 y}, \\ 2^{\log_y 3} = x^{\log_7 x}. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 10 \log_2 3x = \log_2 y^6 - \log_{\sqrt{2}} 4; \\ 3 \log_2 y = 24 - \log_{\sqrt{2}} x^3 - \log_{\sqrt{2}} 27. \end{cases}$

д) $\begin{cases} \lg (x^2 + y^2) - 1 = \lg 13, \\ \lg(x + y) - \lg(x - y) = 3 \lg 2. \end{cases}$ е) $\begin{cases} \log_2 (x - y) = 5 - \log_2(x + y), \\ \dfrac{\lg x - \lg 4}{\lg x - \lg 3} = -1. \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = -2 \log_{1/2} 4, \\ \log_4 x + \log_2 y = 5 \lg 10. \end{cases}$ з) $\begin{cases} \log_x (xy) = \log_y x^2, \\ y^{2 \log_y x} = 4y + 3. \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2{,}5, \\ xy = 27. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4^{x+y} = 27 + 9^{x-y}, \\ 8^{x+y} - 21 \cdot 2^{x+y} = 27^{x-y} + 7 \cdot 3^{x-y+1}. \end{cases}$

в) $\begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2 xy, \\ \lg^2 (x + y) = \lg x \lg y. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^y = y^x, \\ x^x = y^{9y}. \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3 \cdot x^{2y-1} = 4, \\ x^{y+1} = 6. \end{cases}$

е) $\begin{cases} \lg x \lg (x + y) = \lg y \lg (x - y), \\ \lg y \lg (x + y) = \lg x \lg (x - y). \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x^{\log_3 y} = 27y, \\ y^{\log_3 x} = 81x. \end{cases}$ з) $\begin{cases} 5^{\lg x} = 3^{\lg y}, \\ (3x)^{\lg 3} = (5y)^{\lg 5}. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} (ax)^{\lg a} = (by)^{\lg b}, \\ b^{\lg x} = a^{\lg y}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} a^x b^y = m, \\ x + y = n, \ a > 0, \ b > 0, \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^y = y^x, \\ x^m = y^n. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^y = y^x, \\ a^x = b^y, \ a > 0, \ b > 0, \ a \neq b, \ a \neq 1, \ b \neq 1. \end{cases}$

д) $\begin{cases} 64^{2x} + 6^{2y} = 12, \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}. \end{cases}$ е) $\begin{cases} (mx)^{\lg m} = (ny)^{\lg n}, \\ n^{\lg x} = m^{\lg y}. \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \log x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2, \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2. \end{cases}$ з) $\begin{cases} x^m = y^n, \\ \log_p \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_p x}{\log_p y}, \end{cases}$

и) $\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7. \end{cases}$ к) $\begin{cases} \left(\left(\sqrt[9]{6}\right)^{2x}\right)^{3y} = 6^8; \\ \left(8888^{x-y-1}\right)^{x^2+6y^2-60} = 1. \end{cases}$

4. Кўрсаткичли ва логарифмик тенгсизликлар. Бундай тенгсизликларни ечишда қуйидаги эквивалентликлардан фойдаланиш лозим:

$$1.\ a^{f(x)} < a^{g(x)} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \end{array}\right. \tag{58}$$

$$2.\ f(x)^{g(x)} > 1 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{59}$$

$$2.\ \text{a.}\ (f(x))^{g(x)} < 1 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{59a}$$

$$3.\ \log_a f(x) < \log_a g(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1,\ f(x) > 0,\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1,\ f(x) > 0,\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \end{array}\right. \tag{60}$$

$$4.\ \log_{f(x)} g(x) < a \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) > (f(x))^a; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) < (f(x))^a. \end{cases} \end{array}\right. \tag{61}$$

Натижа. $f(t) = At^2 + Bt + C$ $(A > 0,\ D = B^2 - AC \geqslant 0)$ функциянинг: 1) $t_1,\ t_2 \in \mathbf{R},\ t_1 \leqslant t_2,\ t_1 > 0$ илдизлари учун

$$f(a^x) < 0 \Longleftrightarrow t_1 < a^x < t_2. \tag{62}$$

2) $t_1,\ t_2 \in \mathbf{R},\ t_1 \leqslant t_2$ илдизлари учун

$$f(\log_a x) < 0 \Longleftrightarrow t_1 < \log_a x < t_2. \tag{63}$$

Бордию, $D < 0$ бўлса, бу тенгсизликлар ечимга эга эмас

Машқ. $f(a^x) > 0$ ва $f(\log_a x) > 0$ тенгсизликларнинг ҳар бири қандай тенгсизликлар системасига тенг кучли (299—301-бет)?

37-мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} \geqslant 3^{-2}. \tag{64}$$

Ечилиши. (58) га кўра:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \Longleftrightarrow \frac{1}{x} \leqslant 2 \Longleftrightarrow \frac{x - \frac{1}{2}}{x} \geqslant 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x \in \left]-\infty;\ 0\right[\cup \left[\frac{1}{2};\ +\infty\right[.$$

Жавоб. $\left]-\infty;\ 0\right[\cup \left[\frac{1}{2};\ +\infty\right[.$

38- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$4^{x^2+5x} \leqslant 2^{5+x} \qquad (65)$$

Ечилиши. (58) га биноан

$$(65) \Longleftrightarrow 2^{2(x^2+5x)} \leqslant 2^{5+x} \Longleftrightarrow 2x^2 + 10x \leqslant 5 + x \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (x+5)\left(x - \frac{1}{2}\right) \leqslant 0.$$

Ж а в о б. $\left[-5;\ \frac{1}{2}\right]$.

39- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{2-\frac{2x-3}{2+2x}} < \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2-2x}{1+2x}}. \qquad (66)$$

Ечилиши

$$(66) \Longleftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{2-\frac{2x-3}{2+2x}} < \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{-\frac{2-2x}{1+2x}} \Longleftrightarrow \frac{16x+11}{(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} > 0.$$

Ундан $\left]-1,\ \frac{11}{16}\right[\cup \left]-\frac{1}{2};\ -\infty\right[$ ечим топилади.

Ж а в о б. $\left]-1;\ \frac{11}{16}\right[\cup \left]-\frac{1}{2};\ +\infty\right[$.

40- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$5^{2x} + 5^x \leqslant -2 \cdot 5^x + 10 \qquad (67)$$

Ечилиши. $t = 5^x$ деб, (67) ни $f(t) = t^2 + 3t - 10 \leqslant 0$ кўринишга олиб келиб ечсак, $t \in [-5;\ 2]$ ечим топилади. У ҳолда (62) га асосан:

$$(67) \Longleftrightarrow -5 \leqslant 5^x \leqslant 2 \Longleftrightarrow 0 < 5^x \leqslant 2 \Longleftrightarrow -\infty < x \leqslant \log_5 2.$$

Ж а в о б. $]-\infty;\ \log_5 2[$.

М а ш қ. (67) тенгсизликда $\leqslant$ ўрнига $>$ ни қўйиб ечинг.

41- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$(4x^2 - 5x + 1)^{2x+1} < 1. \qquad (68)$$

Ечилиши. Бу система (59а) даги эквивалентликка кўра икки системага тенг кучлидир:

$$(68) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x^2 - 5x + 1 \geqslant 1, \\ 2x + 1 \leqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 4x^2 - 5x + 1 < 1, \\ 2x + 1 \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x\left(x - \frac{5}{4}\right) \geqslant 0, \\ x \leqslant -\frac{1}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} -1 < 4x\left(x - \frac{5}{4}\right) < 0, \\ x \geqslant -\frac{1}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Уларнинг биринчиси $\left]-\infty;\ -\frac{1}{2}\right]$ ечимга, иккинчиси эса $\left[0;\ \frac{1}{4}\right[\ \cup\ \left]1;\ \frac{5}{4}\right]$ ечимга эга.

Ж а в о б. $\left]-\infty;\ -\frac{1}{2}\right] \cup \left[0;\ \frac{1}{4}\right[\ \cup\ \left]1;\ \frac{5}{4}\right]$.

42- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$(4x^2-3)^{3,5x-1,5} < (4x^2-3)^{x^2}. \qquad (69)$$

Ечилиши. (58) даги формулага асосан:

$$(69) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x^2-3>1, \\ 3,5x-1,5<1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<4x^2-3<1, \\ 3,5x-1,5>x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} (A)\begin{cases} |x|>1, \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)>0; \end{cases} \\ (B)\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}<|x|<1, \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)<0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Бу ердан $(A) \Longleftrightarrow x\in\,]3;\ +\infty[$ ва $(B) \Longleftrightarrow x\in\left]\frac{\sqrt{3}}{2};\ 1\right[$ бўлади.

Ж а в о б. $\left]\frac{\sqrt{3}}{2};\ 1\right[\ \cup\ ]3;\ +\infty[$.

43- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$\log_{0,5}\frac{5x-8}{x+1} > 1. \qquad (70)$$

Ечилиши. (60) га кўра (70) $\Longleftrightarrow \log_{0,5}\frac{5x+8}{x+1} > \log_{0,5}0,5 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow 0<\frac{5x-8}{x+1}<0,5 \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{9x-17}{x+1}<0, \\ \frac{5x-8}{x+1}>0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -1<x<\frac{17}{9}, \\ x\in\,]-\infty;\ -1[\ \cup\ \left]\frac{8}{5};\ +\infty\right[. \end{cases}$$

Ж а в о б. $\left]\frac{8}{5};\ \frac{17}{9}\right[$.

44- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$6^{\log_{x-1}\frac{20-12x}{x-7}} > 36. \qquad (71)$$

Ечилиши. (61) га кўра

$$(71) \Longleftrightarrow \log_{x-1}\frac{20-12x}{x-7} > 2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1>1, \\ \dfrac{20-12x}{x-7}>(x-1)^2; \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x-1<1, \\ 0<\dfrac{20-12x}{x-7}<(x-1)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2, \\ \dfrac{(x-3)^3}{x-7}<0, \end{cases} \Longleftrightarrow 3<x<7, \\ \begin{cases} 1<x<2, \\ \dfrac{5-3x}{x-7}>0, \\ \dfrac{x-3}{x-7}>0, \end{cases} \Longleftrightarrow \dfrac{5}{3}<x<2. \end{array}\right.$$

Ж а в о б $\left]\frac{5}{3};\ 2\right[\ \cup\ ]3,\ 7[$.

45- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$\log_{0,3}(x^2+2x-8)<\log_{0,3}(x-5). \tag{72}$$

Ечилиши. Асос 1 дан кичик бўлгани учун (60) га кўра

$$(72) \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-8>0,\ x-5>0, \\ x^2+2x-8>x-5 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (x+4)(x-2)>0, \\ x-5>0, \\ (x+1,5)(x-0,5)>0 \end{cases} \Longleftrightarrow x\in\,]5,\ +\infty[.$$

Ж а в о б. $]5;\ +\infty[$.

46- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$\log_2^2 2x+6<10\log_2 x. \tag{73}$$

Ечилиши. Агар $\log_2^2 2x=1+2\log_2 x+\log_2^2 x$ ни ҳисобга олсак, (63) га кўра:

$$(73) \Longleftrightarrow \log_2^2 x-8\log_2 x+7<0 \Longleftrightarrow 1<\log_2 x<7 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x\in\,]2;\ 128[.$$

Ж а в о б. $]2;\ 128[$.

М а ш қ. (73) тенгсизликда $<$ ўрнига $>$ ни қўйиб ечинг.

22- топшириқ. Тенгсизликларни ечинг:

1. а) $\dfrac{7}{81^x-2}\geqslant\dfrac{2}{9^x-1}$; б) $\log_3 2+\log_3(x+1)>\log_{2x+2}81$; в) $3^{\frac{6x-3}{x}}<\sqrt[4]{27^{2x-1}}$; г) $4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x(x+3)}<\left(\dfrac{1}{4}\right)^{2x}$; д) $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{6x-1}{2x+2}<1$; е) $\log_{2,25}\left(3x-\dfrac{1}{3x}\right)<\dfrac{1}{2}$; ж) $\log_x 7>\log_x 3$; з) $\log_{30}\log_{\frac{9}{16}}(4x^2-8x+3)\leqslant 0$.

2. а) $\left|\log_5\dfrac{2x+3}{2x-4}\right|>1$; б) $\dfrac{4^x}{4^x-3^x}<4$; в) $5\cdot 4^x+2\cdot 25^x\leqslant 7\cdot 10^x$; г) $0,8^x>1,25^{x+1}+0,25$; д) $2\cdot 9^x+9\cdot 16^x\geqslant 144^x+18$; е) $0,4^{\lg^2 x+1}\leqslant 6,25^{2-\lg x^3}$; ж) $\log_3(9^x-1)\log_3(9^{x+1}-9)>3$; з) $25^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}\leqslant 30$; и) $\log_{x-1}(x^2-4x)^2\leqslant 4$; к) $\sqrt{\log_2 x}+2\sqrt{\log_x 2}\geqslant 3$; л) $\log_x(1+x^2)<\log_{x^2}(16-x^2)$.

3. а) $\log_3|3-4x|>2$; б) $|\log_3 x|-\log_3 x-3<0$; в) $\log_2 x \leqslant \frac{2}{\log_2 x-1}$; г) $\log_3 \frac{1-2x}{x}<0$.

4. а) $\log_3(x+1)>\log_3(2-x)$; б) $\log_{\frac{1}{3}} x>\log_x 3-\frac{5}{2}$; в) $\log_2(2x-1)>-\log_{\sqrt{2}} 2$; г) $\log_2(2^x-1)\log_{0,5}(2^{x+1}-2)>-2$; д) $\frac{\log(3\cdot 2^{x-1}-1)}{x}\geqslant 1$; е) $\frac{(x-0,5)(3-x)}{\log_2|x-1|}<0$.

5. а) $\log_{30}\frac{3}{2x-1}>\log_{30}(5-2x)$; б) $\log_{0,3}(2-2x)>\log_{0,3}\frac{2}{2x+1}$; в) $\log_x\sqrt{21-4x}>1$; г) $\log_x\frac{x+3}{x-1}>1$; д) $\log_x(16-6x-x^2)\leqslant 1$; е) $\log_x(x+1)<\log_{\frac{1}{x}}(2-x)$; ж) $\log_{|x-4|}(2x^2-9x+4)>1$; з) $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_4 x}<\frac{1}{2}$.

6. а) $0,35^{\log_{1/3}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}}>1$; б) $\log_3(\log_2(2-\log_4 x)-1)<1$, в) $\log_5\log_3\log_2(2^{2x}-3\cdot 2^x+10)>0$, г) $\log_3\log_{x^2}\log_{x^2}x^4>0$; д) $\log_x\log_2(4^x-12)\leqslant 1$, е) $\log_{\frac{1}{2}}\log_2\log_{x-1}9>0$.

7-§. Тригонометрик айниятлар ва тенгламалар

1. Тригонометрик айният. Агар $A(x)=B(x)$ каби ифоданинг чап ва ўнг томони тригонометрик функцияларга нисбатан алгебраик ифода бўлса ва бу тенглик шу функциялар аргументининг бирор D соҳадаги ҳар бир x қиймати учун бажарилса, у *D соҳадаги тригонометрик айният* деб аталади. Масалан, ушбу айният $x\in\mathbf{R}$ да ўринлидир:

1-мисол. Айниятни исботланг:

$$\cos^2 x-\cos^4 x+\sin^4 x=\sin^2 x.$$

Исботи. $\cos^2 x-\cos^4 x+\sin^4 x=\cos^2 x(1-\cos^2 x)+\sin^4 x=\cos^2 x\sin^2 x+\sin^4 x=\sin^2 x(\cos^2 x+\sin^2 x)=\sin^2 x.$

Ушбу айният эса $\mathbf{R}$ нинг $x\neq\pi n$, $x\neq\frac{\pi}{2}k$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$ шартларни қаноатлантирувчи нуқталари тўпламида ўринлидир.

2-мисол. Айниятни исботланг:

$$\frac{\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}=\operatorname{ctg}^6 x.$$

Исботи. $\frac{\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{\cos^2 x-\cos^2 x/\sin^2 x}{\sin^2 x-\sin^2 x/\cos^2 x}=$

$$=\frac{\cos^2 x\cdot\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x-\sin^2 x}\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{-\cos^4 x(1-\sin^2 x)}{-\sin^4 x(1-\cos^2 x)}=\operatorname{cog}^6 x.$$

Одатда, айниятни исботлашнинг уч усули қўлланилади:

1) $A(x) \Longrightarrow B(x)$, 2) $B(x) \Longrightarrow A(x)$, 3) $A(x) \Longrightarrow C(x)$, $B(x) \Longrightarrow C(x)$, масалан, юқорида кўрсатилган айниятларнинг ўнг тарафи чап тарафидан $A \Longrightarrow B$ каби айний алмаштириш билан келтириб чиқарилди. Ушбу мисолда $B \Longrightarrow A$ усули қўлланилади.

3-мисол. Айниятни исботланг: $\dfrac{3-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Исботи. Бу ифодаларнинг $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$, $1 \neq 3\operatorname{tg}^2\alpha$, $3\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$ шартлар асосида аниқланган D соҳада ўзаро тенглиги кўрсатилади:

$$B=\frac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}(2\alpha+\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha(1-\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha)}=$$

$$=\frac{\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\left(1-\operatorname{tg}\alpha\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\right)}=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha(1-3\operatorname{tg}^2\alpha)}=\frac{3-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}=A.$$

Энди учинчи усул ($A \Longrightarrow C$, $B \Longrightarrow C$) га мисол келтирамиз.

4-мисол. Айниятни исботланг:

$$\frac{1-2\sin^2 2\alpha}{1-4\sin 4\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}2\alpha}.$$

Исботи. $1 \neq 4\sin 4\alpha$, $1 \neq \operatorname{tg}2\alpha$, $2\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$ шартлар асосида айниятнинг тўғрилиги кўрсатилади:

$$A=\frac{1-2\sin^2 2\alpha}{1-4\sin 4\alpha}=\frac{\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha-2\sin^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha-2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=\frac{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}{(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)^2}=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}=C;\quad B=\frac{1+\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}2\alpha}=\frac{1+\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}}{1-\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}}=\frac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}=C,$$

яъни $A \Longrightarrow C$, $B \Longrightarrow C$ бажарилди, демак $A=B$.

Баъзида тригонометрик ифодаларни соддалаштиришда ёки уларнинг қийматларини ҳисоблашда $A \Longrightarrow B$ қоидадан фойдаланиш мумкин.

5-мисол. Соддалаштиринг:

$$\cos^2 2\alpha+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+2\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right).$$

Ечилиши. $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$ бўлгани учун, берилган шу ифодани A деб белгиласак,

$$A=\frac{1}{2}\left(1+\cos 4\alpha+1+\cos\left(\frac{4\pi}{3}+4\alpha\right)+1+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-4\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\alpha+\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}+4\alpha\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-4\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\alpha+\cos\frac{4\pi}{3}\cos 4\alpha=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\alpha-\frac{1}{2}\cos 4\alpha=\frac{3}{2}.$$

6-мисол. Жадвалдан фойдаланмай ҳисобланг:

$$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}.$$

Ҳисобланиши. $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}\left(2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}-\right.$

$$\left.-2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}\left(\sin\frac{2\pi}{5}-\sin\frac{3\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}\left(\sin\frac{2\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}.$$

Хато излашнинг баъзи усуллари

Юқорида айтилган тарзда мантиқий фикрлаб, мисолларни ечишда қўлланилаётган зарур формулалардан ўринли ва тўғри фойдаланила олинганини доим текшириб кўриш мумкин. Масалан, бир абитуриент ушбу

$$A=A(\alpha,\ \beta)=\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\beta.$$

ифодани соддалаштиришда $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow A_4$ схемада мантиқий фикрлаб

$$A_1(\alpha,\ \beta)=\frac{1}{2}(1-\cos(\alpha+\beta))+\frac{1}{2}(1-\cos(\alpha-\beta))-(\cos\alpha+$$
$$+\cos\beta)\cos\beta,$$

$$A_2(\alpha,\ \beta)=1-\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))-\cos\alpha\cos\beta-\cos^2\beta,$$

$$A_3(\alpha,\ \beta)=1-\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta-\cos^2\beta,$$

$$A_4(\alpha,\ \beta)=\sin^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta$$

ларни ҳосил қилиб, A ва A_4 ни айнан тенг деб ҳисоблаган. Аммо $\alpha=0$, $\beta=0$ қийматларда $A(0;\ 0)=0$, $A_4(0,\ 0)=2$ эканлигини аниқлаб ўз хатосини топиши мумкин эди. Бунда хато $A_1(\alpha,\beta)$ ни ҳосил қилишдаёқ йўл қўйилган, у

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

„формула“дан фойдаланиш натижасида вужудга келган.

Масалан, бошқа бир абитуриент

$$A=A(\alpha,\ \beta)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^4\alpha-\cos^4\beta$$

ифодани соддалаштириб, ундан

$$A_1=A_1(\alpha,\ \beta)=\cos^2\alpha\sin^2\alpha-\cos^2\beta\sin^2\beta$$

ни ҳосил қилган. Бу ерда берилган ифоданинг $A(\alpha,\beta)=A(\beta,\alpha)$

каби симметриклик хоссаси натижадаги $A_1(\alpha, \beta)$ ифодада бажарилмаяпти:

$$A_1(\alpha, \beta) = -A_1(\beta, \alpha).$$

Демак, абитуриент A дан A_1 чиқаришда қаердадир хатоликка йўл қўйган.

23-топшириқ. Айниятларни исботланг:

1. а) $\frac{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \sin 2\alpha$; б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha = \sin\alpha$;

в) $\frac{\sin^2 2\beta - 4\sin^2\beta}{\sin^2 2\beta - 4 + 4\sin^4\beta} = 2\operatorname{ctg} 4\beta$; г) $2\sin^2\beta + \cos 2\beta = 1$;

д) $\frac{\cos 4\alpha \cos 2\alpha + 2\sin 4\alpha \sin\alpha \cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = 2\operatorname{ctg} 2\alpha$; е) $\frac{\cos 2\alpha \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha}{\cos 3\alpha} = 1$;

ж) $\frac{\sin(\alpha+\beta) - \cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta) + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\beta} = \operatorname{tg}\alpha$; з) $\frac{2\sin\alpha\cos^2\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha}{2\sin\frac{3}{2}\alpha\cos\frac{3}{2}\alpha} = 1$.

2. а) $\sin\alpha(\sin\alpha + \sin\beta) + \cos\alpha(\cos\alpha + \cos\beta) = 2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;

б) $\sin\alpha(\sin\alpha - \sin\beta) + \cos\alpha(\cos\alpha - \cos\beta) = 2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$; в) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$; г) $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 = 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

24-топшириқ. Соддалаштиринг:

1. а) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$; б) $\frac{2\sin 3\alpha\cos 3\alpha}{\cos^2 3\alpha - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right)}$; в) $\frac{\sin 4\alpha}{2\sin^2 2\alpha}$;

г) $2\sin\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)$; д) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$; е) $\sin 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha$;

ж) $\frac{4\sin^4\alpha + \sin^2 2\alpha}{\sin\alpha}$; з) $\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$; и) $\frac{2\operatorname{ctg}\alpha\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$.

2. а) $\frac{2}{\sin 4\alpha} - \operatorname{ctg} 2\alpha$; б) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha}$;

г) $\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin(\pi - \alpha)}$; д) $\frac{\operatorname{tg}^2(45^\circ + \alpha) - 1}{\operatorname{tg}^2(45^\circ + \alpha) + 1}$;

е) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{\cos(\pi-\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)}-\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(2\pi-\beta)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}$; ж) $\cos 4\alpha+$

$+4\cos 2\alpha+3$; з) $\dfrac{\sqrt{2}-\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$; и) $\dfrac{\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}$;

к) $\dfrac{\sin(60^\circ+\alpha)}{4\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(75^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}$; л) $\dfrac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}\cdot\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

3. а) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$; б) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}$;

в) $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos 2\alpha\cos 2\beta$.

25-топшириқ. Тўғрилигини текширинг:

а) $\operatorname{tg}55^\circ-\operatorname{tg}35^\circ=2\operatorname{tg}20^\circ$; б) $\cos 10^\circ\cdot\cos 50^\circ\cdot\cos 70^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$;

в) $\cos\dfrac{\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{7}=\dfrac{1}{8}$; г) $\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1}{4}$; д) $\cos\dfrac{\pi}{5}+$

$+\cos\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{1}{2}$; е) $8\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ=\operatorname{ctg}10^\circ$; ж) $\operatorname{ctg}70^\circ+4\cos 70^\circ=\sqrt{3}$;

з) $\cos 20^\circ\cdot\cos 30^\circ=\cos^2 10^\circ\cdot\operatorname{tg}40^\circ$; и) $\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}=\dfrac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}+\dfrac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}$;

к) $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}$; л) $\sin^2\dfrac{\pi}{7}\sin^2\dfrac{2\pi}{7}\sin^2\dfrac{3\pi}{7}=\dfrac{7}{64}$.

26-топшириқ. Айниятларни исботланг:

1. а) $\dfrac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha-1}\cdot\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg}3\alpha}=1$; б) $\dfrac{\sin\alpha+\cos(2\beta-\alpha)}{\cos\alpha-\sin(2\beta-\alpha)}=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta\right)$;

в) $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\frac{1}{\cos^2 2\alpha}-1}+\dfrac{1+\cos 4\alpha}{\frac{1}{\sin^2 2\alpha}-1}=2$; г) $\dfrac{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^6\alpha$;

д) $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$; е) $\dfrac{3\operatorname{tg}^2\alpha+10\operatorname{tg}\alpha+3}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=3+5\sin 2\alpha$.

2. а) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma}+\dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha}=0$; б) $3(\cos^4\alpha+$

$+\sin^4\alpha)-2(\cos^6\alpha+\sin^6\alpha)=1$; в) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; г) $\cos\alpha+$

$+\cos(120^\circ-\alpha)+\cos(120^\circ+\alpha)=0$; д) $\dfrac{\sin^2 3\alpha}{\sin^2\alpha}-\dfrac{\cos^2 3\alpha}{\cos^2\alpha}=8\cos 2\alpha$;

е) $4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=4\sin^2\alpha-3$; ж) $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=$ $=2\sin\frac{\alpha}{2}$, $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

3. а) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4\alpha$; б) $1-\sin 8\alpha=2\cos^2(45^\circ+4\alpha)$;

в) $\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=1$;

г) $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)(1+\sin 2\alpha)=\cos 2\alpha$; д) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha=8\operatorname{ctg}8\alpha$;

е) $\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos 3\alpha-\frac{1}{2}\cos 5\alpha=8\sin^2\alpha\cos^3\alpha$; ж) $\frac{1-2\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}=\operatorname{tg}\alpha-$ $-\operatorname{ctg}\beta$; з) $2\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}+\operatorname{ctg}2\alpha\right)=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; и) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$;

к) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$; л) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}$;

м) $\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{1}{\cos 2\alpha}-\operatorname{tg}2\alpha$.

2. ***Тригонометрик тенглама*** деб, номаълумнинг тригонометрик функцияларига нисбатан алгебраик бўлган тенгламаларга айтилади.

Ҳар қандай тригонометрик тенглама соддалаштирилиб, ушбу тўрт ҳолдан бирига келтирилиб ечилади:

$$\sin x=a\ (|a|\leqslant 1)\iff x_n=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ n\in\mathbf{Z} \qquad (1)$$

$$\cos x=b\ (|b|\leqslant 1)\iff x_k=\pm\arccos b+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}; \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg}x=c\ (c\in\mathbf{R})\iff x_l=\operatorname{arctg}c+\pi l,\ l\in\mathbf{Z} \qquad (3)$$

$$\operatorname{ctg}x=d\ (d\in\mathbf{R})\iff x_m=\operatorname{arcctg}d+\pi m,\ m\in\mathbf{Z} \qquad (4)$$

Шуни таъкидлаймизки, (1) ÷ (4) формулалар умумий бўлиб, қуйидаги хусусий тенгламаларнинг ечими бундай ифодаланган маъқул ($n\in\mathbf{Z}$):

$\sin x=1\iff x_n=\frac{\pi}{2}+2\pi n$;

$\cos x=1\iff x_n=2\pi n$;

$\operatorname{tg}x=1\iff\operatorname{ctg}x=1\iff$ $\iff x_n=\frac{\pi}{4}+\pi n$;

$\cos x=0\iff\operatorname{ctg}x=0\iff$ $\iff x_n=\frac{\pi}{2}+\pi n$;

$\operatorname{tg}x=-1\iff\operatorname{ctg}x=-1\iff$ $\iff x_n=-\frac{\pi}{4}+\pi n$;

$\sin x=-1\iff x_n=-\frac{\pi}{2}+$ $+2\pi n$:

$$\sin x = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \Longleftrightarrow \Longleftrightarrow x_n = \pi n; \quad \Big| \quad \cos x = -1 \Longleftrightarrow x_n = \pi + 2\pi n. \tag{5}$$

Баъзи абитуриентлар (5) даги бирор формула билан аниқлаб топиладиган ечимларни ҳам (1) ÷ (4) даги умумий формулалар орқали ифодалаб, камчиликка йўл қўядилар. Агар a, b, c, d лар 0 ёки ± 1 га тенг бўлса, албатта (5) даги формулалардан фойдаланиш зарур. Баъзида қуйидаги муносабатларни қўллаш керак бўлади.

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a; \ \operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a; \tag{6}$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a; \ \operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a. \tag{7}$$

Натижалар: a, b, c, $d \in \mathbf{R}$ бўлганда

1) $\sin x = \sin a \Longleftrightarrow x_n = (-1)^n a + \pi n, \ n \in \mathbf{Z};$ (1 а)

2) $\cos x = \cos b \Longleftrightarrow x_k = \pm b + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z};$ (2 а)

3) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} c \Longleftrightarrow x_l = c + \pi l, \ l \in \mathbf{Z};$ (3 а)

4) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} d \Longleftrightarrow x_m = d + \pi m, \ m \in \mathbf{Z}.$ (4 а)

Тригонометрик тенгламаларнинг ечимларини қуйидаги уч ҳолдаги ишлар бажарилганда текшириб олиш керак:

а) агар баъзи тригонометрик алмаштиришлар (махраждан қутулиш, касрларни қисқартириш, ўхшаш ҳадларини ихчамлаш) натижасида тенгламанинг аниқланиш соҳаси кенгайган бўлса;

б) агар тенгламанинг ҳар икки томонини жуфт даражага ошириб ечилса;

г) ўнг ва чап томони турлича аниқланиш соҳасига эга бўлган тригонометрик айниятлар ёрдамида алмаштиришлардан фойдаланиб ечилган бўлса. Масалан, $\alpha \neq \pi + 2\pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$ бўлганда

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \sin\alpha; \quad \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \cos\alpha; \quad \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Шунингдек, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} n$, $\beta \neq \pi n$, $\gamma + \delta = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $\gamma \neq \frac{\pi}{2}(2n + 1) \neq \delta$ бажарилганда $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$; $\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$; $\operatorname{tg}(\gamma+\delta) = \frac{\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta}{1 - \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\delta}$ ва бошқ.

Шу айниятлардан фойдаланишда тенгламанинг аниқланиш соҳаси кенгайиши (чет илдиз пайдо бўлиши) ёки торайиши (илдизларининг йўқолиши) рўй бериши мумкин.

1- м и с о л. Тенгламаларни ечинг:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=2\operatorname{ctg}x-1,$ (8а)

б) $(1+\operatorname{tg}x)(1-\sin 2x)=1-\operatorname{tg}x.$ (8б)

Ечилиши. а) Агар $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}$, $\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$ десак,

$$(8а) \Longrightarrow \frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=\frac{2}{\operatorname{tg}x}-1 \Longleftrightarrow \begin{cases} y=\operatorname{tg}x, \\ \frac{1+y}{1-y}=\frac{2-y}{y} \end{cases} \Longleftrightarrow \operatorname{tg}x=\frac{1}{2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x_n=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

Топилган бу ечимлар (8а) тенгламани қаноатлантиради. Лекин бу тенгламанинг яна $x=\frac{\pi}{2}+\pi k (k\in \mathbf{Z})$ ечимлари борки, улар бу ечиш усулида „йўқолиб" қолди. Чунки кўрсатилган айний алмаштиришлар натижасида тенгламанинг аниқланиш соҳаси торайиб, шу илдизлар ҳосил бўлган тенгламанинг аниқланиш соҳасига кирмай қолган эди.

б) Берилган (8б) тенгламани $1-\operatorname{tg}x$ га бўлиб, $\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ дан фойдаланса,

$$(8б) \Longrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)(1-\sin 2x)=1 \Longleftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1 \Longleftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=1 \Longleftrightarrow$$

$$x_n=\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

Бу ерда ҳам $x_n=\pi n\ (n\in \mathbf{Z})$ лар (8б) нинг ечими бўлиб, ундан ташқари $x_k=\frac{\pi}{4}+\pi k\ (k\in \mathbf{Z})$ лар ҳам унинг ечимидир, чунки у тенгламанинг ҳар икки томонини $1-\operatorname{tg}x$ га бўлиб юборганда йўқотилган.

Аксинча, қуйидаги

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;\ \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha);$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

ва бошқа синус ва косинуслар учун чиқарилган иккиланган бурчак, ярим бурчак, йиғиндини кўпайтмага келтириш ёки кўпайт-

мани йиғиндига алмаштириш каби формулалар борки, у формулаларни қўллаш тенгламани доимо ўзига тенг кучли тенгламага алмаштиради.

Тригонометрик тенгламаларни ечишда *асосан уч усул* қўлланилади.

1) ***Кўпайтувчиларга ажратиш усули.*** $f(x)=0$ тенглама учун

$$f(x)=f_1(x)f_2(x) \text{ бўлса, } f(x)=0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0. \end{array}\right. \qquad (9)$$

Агар $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ нинг барча илдизларида $f(x)$ аниқланган бўлса,

$$f(x)=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0. \end{array}\right. \qquad (9а)$$

(9) ва (9а) даги тасдиқларни $\frac{\cos 2x}{1+\operatorname{tg}x}=0$ тенгламани ечиб тушунтирмоқчи бўлсак, бу тенгламанинг чап томони $\cos 2x=0$ тенгламанинг илдизларининг барчасида маънога эга эмас:

$$\frac{\cos 2x}{1+\operatorname{tg}x}=0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos 2x=0, \\ 1+\operatorname{tg}x\neq 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}(1+2n),\ n\in \mathbf{Z} \\ x\neq \frac{\pi}{4}(4k-1),\ k\in \mathbf{Z} \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_n=\frac{\pi}{4}(1+2n), \\ n\neq 2k-1,\ k,\ n\in \mathbf{Z} \end{array}\right.$$

яъни бу тенгламанинг жавоби $\left\{x_k=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in \mathbf{Z}\right\}$ дан иборат.

2) ***Ёрдамчи номаълум киритиш усули.*** Бу вақтда $f(x)=0$ тенгламада бирор тригонометрик функция ёрдамчи номаълум билан белгиланиб, қолган функциялар у орқали ифодаланади. Лекин ёрдамчи номаълум билан қайси функцияни белгилаш муҳим аҳамиятга эга. Бир хилида тенглама рационал тенгламага, иккинчи хилида иррационал тенгламага келтирилиб ечилади. Биз учун рационал тенгламага келтириб ечиш қулай. Масалан, $\sin^2 x+\sin x\cos^2 x=1$ тенгламада $y=\sin x$ деб белгиланса, унда $y^2+y(1-y^2)=1$ каби рационал тенглама ҳосил бўлади, аксинча, $y=\cos x$ деб олинса, у ушбу икки иррационал тенгламалар бирлашмасига эквивалент:

а) $1-y^2+y^2\sqrt{1-y^2}=1$; б) $1-y^2-y^2\sqrt{1-y^2}=1$.

3) ***Сунъий усул танлаб ечиладиган тенгламалар.*** Тригонометрик тенгламаларни ечишда уларнинг типларини тўғри

аниқлай олиш, шу кўрсатилган усулларни тўғри танлаш имконини беради. Уларни асосан қуйидаги типларга бўлиш мумкин:

I. Бир хил аргументли битта тригонометрик функция қатнашган тригонометрик тенгламалар, масалан:

а) $3\sin^2 2x + 4\sin 2x - 7 = 0$;

б) $\operatorname{tg} x + \frac{3}{\operatorname{tg} x} = 4$;

в) $\cos^2 3x = 2\cos 3x - \frac{1}{\cos 3x}$;

г) $\operatorname{ctg}^3 x = \frac{1}{1 + 5\operatorname{ctg} x}$.

II. Бир хил аргументли бир тригонометрик функцияга айний тригонометрик алмаштириш билан келтирилиши мумкин бўлган тригонометрик тенгламалар, масалан:

а) $5\cos x + 4\sin^2 x = 4$;

б) $(3\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x)^2 = 2 - \operatorname{ctg}^2 x$;

в) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos x$;

г) $4\sin^2 x = \sqrt{3}\cos x$.

III. $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан бир жинсли тригонометрик тенгламалар, масалан:

а) $a\cos x + b\sin x = 0$;

б) $a\cos x + b\sin x = c$;

в) $a\cdot\cos^3 x + b\cdot\cos x\sin x + c\cdot\sin^2 x = 0$

г) $a\cos^2 x + b\cos x\sin x + c\sin^2 x = d$;

д) $a\cdot\cos^3 x + b\cos^2 x\sin x + c\cdot\cos x\sin^2 x + d\sin^3 x = 0$... ва ҳ.к.

Бу ерда $a, b, c, d, \ldots \in \mathbf{R}$.

IV. Ўнг томони ноль, чап томони кўпайтувчиларга ажраладиган тригонометрик тенгламалар, масалан:

а) $3\sin 2x - \sin 4x = 0$;

б) $\sin^2 x\cos x - 2\sin^2 x + 2 - \cos x = 0$;

в) $2\cos^2 3x - \cos 3x = 0$;

г) $\operatorname{tg} 3x + \sin 3x\cos 3x = 0$.

V. Ҳар хил аргументли тригонометрик функцияларни бир хил аргументлига келтириш мумкин бўлган тенгламалар, масалан:

а) $2\sin^2(\pi - x) + 3\cos(\pi + x) = 0$;

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 + \sin 2x$

в) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 8\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 0$;

г) $\cos 3x + 4\cos x\sin^2 x = \sin x$.

VI. Кўпайтма шаклда берилган тригонометрик тенгламани йиғиндига келтириб ечиш мумкин бўлган тенгламалар, масалан:

а) $\sin 4x\cos 6x = \cos 3x\sin 7x$;

б) $\sin 2x\sin 8x + \cos 6x\cos 4x = 0$;

в) $\sin^2 2x\cos^2 3x - \sin^2 5x = 0$;

д) $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = \sin 5x$.

VII. Йиғинди шаклидан кўпайтма шаклига ўтказиш йўли билан ечиладиган тригонометрик тенгламалар, масалан:

а) $\sin 3x + \cos 6x = \sin 9x$;

б) $1 + \cos 2x = \sin 3x - \sin 2x$;

в) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;

г) $\sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$.

VIII. Жуфт даражасини пасайтириш усули билан ечиладиган тригонометрик тенгламалар, масалан:

а) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$;

б) $\sin^4 2x + \cos^4 2x = 1$;

в) $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \frac{1 + \sin 8x}{2}$;

г) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2$.

IX. Юқоридаги 8 хил тригонометрик тенгламаларнинг бирига бирор алмаштириш билан келтириш мумкин бўлган тенгламалар.

Энди юқоридаги I — IX тип тенгламаларидан мисоллар ечиб кўрсатамиз. Уларнинг барчаси ўзига хос бирор йўл танлангандан сўнг юқорида айтилган уч асосий усуллардан бири билан ечилади.

2-мисол. (I тип.) Тенгламани ечинг:

$$2\operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 3 = 0. \qquad (10)$$

Ечилиши. $u = \operatorname{tg} x$ деб белгиласак,

$$(10) \Longrightarrow 2u^3 - 2u^2 + 3u - 3 = 0 \Longleftrightarrow 2u^2(u-1) + 3(u-1) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (u-1)(2u^2+3) = 0 \Longleftrightarrow u_1 = 1.$$

Демак, $\operatorname{tg} x = u_1 \Longleftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Longleftrightarrow x_k = \frac{\pi}{4}(4k+1),\ k \in Z.$

Жавоб. $\left\{ \frac{\pi}{4}(4k-1),\ k \in Z \right\}$.

3-мисол. (II тип.) Тенгламани ечинг:

$$2\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 2. \qquad (11)$$

Ечилиши. Агар $\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$ ва $u = \sin^2 x$ десак, $0 < u < 1$ эканлигини назарда тутиб, (11) дан

$$(11) \Longrightarrow 2u + \frac{u}{1-u} = 2 \Longleftrightarrow 2u^2 - 5u + 2 = 0 \Longleftrightarrow u_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}.$$

Шундай қилиб, $u_1 \neq 2$, $u_2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

а) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow x_k = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$;

б) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow x_n = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

Жавоб. $\left\{ \frac{\pi}{4}(2n+1),\ n \in Z \right\}$.

4-мисол. (III тип.) Тенгламани ечинг:

$$4\cos^2 x + 4\sin x\cos x - 7\sin^2 x - 2 = 0. \qquad (12)$$

Ечилиши. (12) тенглама $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан 2-даражали бир жинсли тенглама, чунки $f(t\cos x, t\sin x) = t^2 f(\cos x, \sin x)$ шарт тенгламанинг чап томонида $2 = 2(\cos^2 x + \sin^2 x)$ деб ҳисоблаганда бажариляпти. У ҳолда тенгламанинг икки томонини $\cos^2 x(\neq 0)$ га (ёки $\sin^2 x(\neq 0)$ га) бўлиб юбориш мумкин:

$$(12) \Longleftrightarrow 7 + 4\operatorname{tg} x - 7\operatorname{tg}^2 x - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 9\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 5 = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{tg} x = 1,\ \operatorname{tg} x = -\frac{5}{9}.$$

Бу ердан $x_k = \frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_n = -\operatorname{arctg}\frac{5}{9} + \pi n$; $k, n \in Z$.

Жавоб. $\left\{\frac{\pi}{4}(4k+1),\ \pi n - \operatorname{arctg}\frac{5}{9}\right\}$.

5-мисол. (III тип.) Тенгламани ечинг:

$$4\sin^3 x - \cos^2 x\sin x = 0. \qquad (13)$$

Ечилиши. Бу $n=3$ даражали бир жинсли тенглама бўлгани учун уни $\cos^3 x(\neq 0)$ га бўлиб (13) $\Longleftrightarrow 4\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{4}\right) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{tg} x = 0,\ \operatorname{tg} x = \pm\frac{1}{2}$ ни ҳосил қиламиз. Бундан жавобни умумлаштириб биратўла ёзамиз:

Жавоб. $\left\{\pi n,\ \pi k \pm \operatorname{arctg}\frac{1}{2};\ n, k \in Z.\right\}$

Бу тенгламанинг ҳар икки томонини $\sin^3 x$ га бўлганда эса,

$$(13) \Longrightarrow 4 - \operatorname{ctg}^2 x = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{ctg} x = \pm 2$$

ҳосил бўлиб, у берилганга тенг кучли эмас, яъни бу усулда ечилганда $\sin x = 0$ нинг ечимлари йўқоляпти. (Берилган (13) тенглама $\sin x = 0$ нинг ечимларида қаноатлангани учун унга бўлиб ечиш мумкин эмас.) Абитуриентларнинг баъзилари мана шунга ўхшаш тенгламани ечишда шу каби хатога йўл қўядилар.

Ушбу теоремалар III тип тенгламаларни ечишни умумлаштиради.

1-теорема. *n-тартибли бир жинсли ушбу*

$$a\sin^n x + b\sin^{n-1} x\cos x + c\sin^{n-2} x\cos^2 x + \ldots + d\cos^n x = 0,\ a \neq 0 \qquad (14)$$

тенглама $u = \operatorname{tg} x$ алмаштириш билан

$$au^n + bu^{n-1} + cu^{n-2} + \ldots + d = 0 \qquad (15)$$

шаклга эквивалент алмашади.

Ҳақиқатан ҳам, $a \neq 0$ бўлгани учун $\cos x = 0$ шартни бажарувчи x лар (14) нинг илдизи эмас, шунинг учун (14) нинг ҳар икки томонини $\cos^n x(\neq 0)$ га бўлиб юборсак, (15) келиб чиқади. ▶

2-теорема. *2n-тартибли бир жинсли ушбу тенглама* $(a \neq 0,\ a \neq d)$

$$a\sin^{2n}x + b\sin^{2n-1}x\cos x + \ldots + c\cos^{2n}x = d \qquad (16)$$

ҳам $u = \operatorname{tg}x$ *алмаштириш билан 2n-тартибли бирор*

$$Au^{2n} + Bu^{2n-1} + \ldots + Cu + D = 0 \qquad (17)$$

бутун рационал тенгламага келади: (16) $\Longleftrightarrow$ (17).

Ҳақиқатан ҳам, $d = d(\sin^2x + \cos^2x)^n$ деб (16) тенгламанинг ҳар икки томонини $\cos^{2n}x(\neq 0)$ га бўлиш кифоя. ▶

1-натижа. $a\cos x + b\sin x = c$ тенглама $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$ ва $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ орқали

$$-a\sin^2\frac{x}{2} + 2b\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + a\cos^2\frac{x}{2} = c \qquad (18)$$

шаклга келгани учун $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ билан (17) кўринишдаги 2-даражали бутун рационал тенгламага келади. $(a + c \neq 0)$.

2-натижа. $a\cos x + b\sin x = c$ тенглама $\cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\left(\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right.$ каби ёрдамчи бурчак) га келтириб ечилиши мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, берилган тенгламанинг ҳар икки томонини $\sqrt{a^2+b^2} = \rho$ га бўлиб юборсак, шундай φ бурчак топиладики, $\cos\varphi = \frac{a}{\rho}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\rho}$ бажарилишидан

$$\frac{a}{\rho}\cos x + \frac{b}{\rho}\sin x = \frac{c}{\rho} \Longleftrightarrow \cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x = \frac{c}{\rho}$$

келиб чиқиб, натижа тасдиғи исботланади. ▶

Тенглама фақат $c^2 \leqslant a^2 + b^2$ бўлганда ечимга эгалигини текширинг.

3-натижа. $a\sin^2x + b\sin x\cos x + c\cos^2x = d(a \neq 0,\ a \neq d)$ тенглама

$$(a - d)\operatorname{tg}^2x + b\operatorname{tg}x + c - d = 0 \qquad (19)$$

каби квадрат тенгламага келтириб ечилади.

6-мисол. (III тип.) Тенгламани ечинг:

$$7\sin x - 5\cos x = 5. \qquad (20)$$

1-*ечилиши.* 1-натижадан фойдаланиб тенгламани (18) кўринишга олиб келиб, сўнг $u = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ $(x \neq 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z})$ алмаштириш бажарсак,

$$(20) \Longleftrightarrow 5\sin^2\frac{x}{2}+14\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-5\cos^2\frac{x}{2}=5\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 10\cos^2\frac{x}{2}-14\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0 \Longleftrightarrow 10\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-14\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\left(5\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-7\right)=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=0,\\ \operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{7}{5}.\end{array}\right.$$

Текшириб, шуни аниқлаш мумкинки, $x_n=2\pi n$ (20) нинг ечими эмас.

Ж а в о б. $\{\pi(2n+1);\ \pi k+\operatorname{arcctg}\frac{7}{5};\ n,\ k\in Z\}$.

2-ечилиши. (20) тенгламани $\rho=\sqrt{7^2+5^2}=\sqrt{74}$ га бўлсак,

$$(20) \Longleftrightarrow \frac{7}{\sqrt{74}}\sin x-\frac{5}{\sqrt{74}}\cos x=\frac{5}{\sqrt{74}}. \qquad (21)$$

Лекин $\left(\frac{7}{\sqrt{74}}\right)^2+\left(\frac{5}{\sqrt{74}}\right)^2=1$ бўлгани учун шундай φ бурчак мавжудки, $\frac{7}{\sqrt{74}}=\sin\varphi$, $\frac{5}{\sqrt{74}}=\cos\varphi$ бажарилади ($\varphi=\arcsin\frac{7}{\sqrt{74}}$ каби ёрдамчи бурчак). У ҳолда

$$(21) \Longleftrightarrow \sin\varphi\sin x-\cos\varphi\cos x=\frac{5}{\sqrt{74}} \Longleftrightarrow \cos(x+\varphi)=-\frac{5}{\sqrt{74}},$$ бу ердан $x=-\varphi\pm\pi\mp\arccos\frac{5}{\sqrt{74}}+2\pi n,\ n\in Z$ деб ечимнинг иккинчи хил шакли ҳосил қилинади.

Ж а в о б. $\left\{\arcsin\frac{7}{\sqrt{74}}\mp\arccos\frac{5}{\sqrt{74}}+\pi(2n\pm1),\ n\in Z\right\}$.

Шу мисолнинг 3-ечилиши 359-бетда берилган.

7. м и с о л. (IV тип.) Тенгламани ечинг:

$$\operatorname{tg}^2 2x\operatorname{tg}x-\sin^2 2x\operatorname{ctg}x=\sin^2 2x\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{tg}^2 2x \qquad (22)$$

Ечилиши. Тенгламани кўпайтувчиларга ажратиш учун

$$(\operatorname{tg}^2 2x\operatorname{tg}x-\sin^2 2x\operatorname{tg}x)+(\operatorname{tg}^2 2x\operatorname{ctg}x-\sin^2 2x\operatorname{ctg}x)=0$$

каби группаласак,

$$(22) \Longleftrightarrow (\operatorname{tg}^2 2x-\sin^2 2x)\operatorname{tg}x+(\operatorname{tg}^2 2x-\sin^2 2x)\operatorname{ctg}x=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\operatorname{tg}^2 2x-\sin^2 2x)(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)=0 \Longleftrightarrow \frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{tg}x}\cdot(\operatorname{tg}2x-\sin 2x)\times$$

$$\times(\operatorname{tg}2x+\sin 2x)=0 \Longleftrightarrow \frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\sin 2x\cdot\frac{1-\cos 2x}{\cos 2x}\cdot\sin 2x\cdot\frac{1+\cos 2x}{\cos 2x}=$$

$$=0 \Longleftrightarrow \frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}\cdot(1-\cos^2 2x)=0 \Longleftrightarrow \frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{2\sin x\cos x}{\cos 2x}=0.$$

Бу охирги тенгламада $\frac{1}{\operatorname{tg} x} \neq 0$, $\operatorname{tg} x \neq 0 \Longrightarrow \sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$ бажарилади. Тенглама ечимга эга эмас.

Жавоб. Ечими йўқ.

Бу (22) тенглама (9) ва (10) даги қоидага амал қилиб ечилди.

8-мисол. (IV тип.) Тенгламани ечинг:

$$\sin 2x - 1 = \sin 2x \cos 2x - \cos 2x \tag{23}$$

Ечилиши. (23) $\Longleftrightarrow \sin 2x - \sin 2x \cos 2x - (1 - \cos 2x) = 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \sin 2x\,(1 - \cos 2x) - (1 - \cos 2x) = 0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - \cos 2x = 0, \\ \sin 2x - 1 = 0. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_k = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}, \\ 2x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Жавоб. $\left\{\pi k,\ \frac{\pi}{4}(4n+1);\ k,\ n \in \mathbf{Z}\right\}$.

9-мисол. (V тип.) Тенгламани ечинг:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \cos x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}. \tag{24}$$

1-ечилиши.

$$(24) \Longleftrightarrow \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} - 1 \Longleftrightarrow \frac{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0; \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_k = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}, \\ x_n = \frac{\pi}{2}(4n+1),\ n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Жавоб. $\left\{2\pi k;\ \frac{\pi}{2}(4n+1);\ k,\ n \in \mathbf{Z}\right\}$.

2-ечилиши. Бу тенгламани III тип тенгламасига келтириб ҳам ечиш мумкин ($k,\ n \in \mathbf{Z}$).

$$(24) \Longleftrightarrow \frac{\sin x}{1 + \cos x} + 1 = \frac{1}{1 + \cos x} \Longleftrightarrow \cos x + \sin x = 1 \Longleftrightarrow \cos^2 \frac{x}{2} -$$

$$- \sin^2 \frac{x}{2} + 2\cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \Longleftrightarrow 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2\sin^2 \frac{x}{2} =$$

$$= 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin \frac{x}{2} = 0, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_k = 2\pi k, \\ x_n = \frac{\pi}{4} + \pi n. \end{array}\right.$$

10-мисол. (VI тип.) Тенгламани ечинг.

$$\cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x. \qquad (25)$$

Ечилиши. $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$ формула бўйича

$$(25) \Longleftrightarrow \cos 3x+\cos 9x = \cos 3x + \cos 11x \Longleftrightarrow \cos 9x - \cos 11x = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2\sin 10x \cdot \sin x = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 10x = 0, \\ \sin x = 0. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_k = \frac{\pi}{10}k,\ k \in Z, \\ x_n = \pi n,\ n \in Z. \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x_k = \frac{\pi}{10}k,\ k \in Z.$$

Жавоб. $\left\{\frac{\pi}{10}k,\ k \in Z\right\}$.

Бу ерда $k = 10n (n \in Z)$ бўлганда x_k илдиз x_n кўринишини олгани учун жавоб фақат x_k илдизлардан ташкил топди.

11-мисол. (IV тип.) Тенгламани ечинг:

$$\cos\frac{7}{2}x \cos\frac{3}{2}x + \sin\frac{x}{2}\cos\frac{5}{2}x + \sin 2x \cos 7x = 0. \qquad (26)$$

Ечилиши. Агар $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$ ни қўлласак, у ҳолда

$$(26) \Longleftrightarrow \sin 5x + \sin 2x + \sin 3x - \sin 2x + \sin 9x - \sin 5x = 0 \Longleftrightarrow \sin 3x +$$
$$+ \sin 9x = 0 \Longleftrightarrow 2\sin 6x \cos 3x = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 6x = 0, \\ \cos 3x = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x_n = \pi n,\ n \in Z; \\ 3x_k = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in Z \end{array}\right. \Longleftrightarrow x_n = \frac{\pi}{6}n,\ n \in Z.$$

Жавоб. $\left\{\frac{\pi}{6}n,\ n \in Z\right\}$.

Бу ерда x_n илдиз $n = 2k+1$ бўлганда x_k илдиз шаклини олгани учун биринчи тенгламанинг ечими умумий ечим бўла олади.

12-мисол. (VII тип.) Тенгламани ечинг:

$$\cos 9x + \cos 8x + \cos 7x = \cos 3x + \cos 2x + \cos x. \qquad (27)$$

Ечилиши. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ дан фойдалансак,

$$(27) \Longleftrightarrow \cos 9x - \cos x + \cos 8x - \cos 2x + \cos 7x - \cos 3x = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow -2\sin 5x \sin 4x - 2\sin 5x \sin 3x - 2\sin 5x \sin 2x = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow -2\sin 5x(\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x) = 0 \Longleftrightarrow$$

Энди бу ерда $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ дан фойдалансак,

$$\Longleftrightarrow 2\sin 5x(2\sin 3x \cos x + \sin 3x) = 0 \Longleftrightarrow 2\sin 5x \sin 3x(2\cos x + 1) = 0.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 5x = 0, \\ \sin 3x = 0, \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_k = \dfrac{\pi}{5}k, \ k \in \mathbf{Z}; \\ x_n = \dfrac{\pi}{3}n, \ n \in \mathbf{Z}; \\ x_m = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m, \ m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Бу ерда $n = 2(3m \pm 2)$ дейилса, x_n дан x_m илдиз ҳосил бўлади.

Жавоб. $\left\{\dfrac{\pi}{3}n, \ \dfrac{\pi}{5}k; \ n, \ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

13 мисол. (VIII тип.) Тенгламани ечинг:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x - \cos^2 3x - \cos^2 4x = 0. \qquad (28)$$

Ечилиши. $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$, $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$ ларни қўллаб, тенгламадаги функциялар даражаси пасайтирилади:

$$(28) \Longleftrightarrow 2\cos^2 x + 2\cos^2 2x - 2\cos^2 3x - 2\cos^2 4x = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 1 + \cos 2x + 1 + \cos 4x - 1 - \cos 6x - 1 - \cos 8x = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\cos 2x - \cos 8x) + (\cos 4x - \cos 6x) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 2\sin 5x \sin 3x + 2\sin 5x \sin x = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 2\sin 5x(\sin 3x + \sin x) = 0 \Longleftrightarrow 4\sin 5x \sin 2x \cos x = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 5x = 0, \\ \sin 2x = 0, \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_n = \dfrac{\pi}{5}n, \ n \in \mathbf{Z}; \\ x_k = \dfrac{\pi}{2}k, \ k \in \mathbf{Z}; \\ x_m = \dfrac{\pi}{2}(2m+1), \ m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Бу ерда $k = 2m + 1$ бўлса, x_k илдиз x_m илдиз кўринишига келади.

Жавоб. $\left\{\dfrac{\pi}{5}n, \ \dfrac{\pi}{2}k; \ n, \ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Изоҳ. 12 ва 13 мисолларда йиғиндини кўпайтмага алмаштириш билан $a \cdot b \cdot c = 0$ шаклга келтирилиб, уларнинг ҳар бири нолга тенглаб ечилди. Баъзида (1а), (2а), (3а), (4а) формулалар яна ҳам қулайроқ ҳисобланади. Масалан:

$$\sin 3x + \sin x = 0 \Longleftrightarrow \sin x = \sin(-3x) \Longleftrightarrow x = (-1)^k(-3x) + \pi k, \ k \in \mathbf{Z}.$$

$$\Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} k = 2n (n \in \mathbf{Z}) \Longrightarrow x = -3x + 2\pi n, \\ k = 2n+1 (n \in \mathbf{Z}) \Longrightarrow x = 3x + \pi(2n-1) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2}n, \\ x = \dfrac{\pi}{2} - \pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Бу топилган ечимлар аввалги усулда топилган ечимлар билан бир хилдир.

Яна бир мисол:

$$\cos 3x = \sin 5x \Longleftrightarrow \cos 3x = \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right) \Longleftrightarrow 5x - \frac{\pi}{2} = \pm 3x + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = \frac{\pi}{2} + 3x + 2\pi k, \\ 5x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4} k,\ k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

14-мисол. (IX тип.) Тенгламани ечинг:

$$2\cos 2x = (1+\sqrt{3})(\cos x + \sin x). \qquad (29)$$

Ечилиши. $\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$ каби айниятдан фойдаланак,

$$(29) \Longleftrightarrow (\cos x + \sin x)\left(\cos x - \sin x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\operatorname{tg} x + 1)\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{3} - \sin x - \sin\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\operatorname{tg} x + 1)\left(-2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \right.$$

$$\left. -2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\operatorname{tg} x + 1)\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\left(\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1; \\ \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 0; \\ \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4}(4n-1),\ n \in \mathbf{Z}; \\ x = \frac{\pi}{3}(6k-1),\ k \in \mathbf{Z}; \\ x = \frac{\pi}{6}(12m-1),\ m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Бу тенглама икки қавсга ажралиб, биринчиси 1-даражали бир жинсли тенглама сингари, иккинчиси эса, йиғиндини кўпайтмага келтириш тенгламаси сифатида ечилди.

Универсал алмаштириш усули. Ҳар қандай $R(\cos x, \sin x) = 0$ кўринишдаги, $\cos x$ ва $\sin x$ функцияларга нисбатан рационал бўлган тригонометрик тенглама $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ алмаштириш билан

$$R\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right) = 0 \qquad (30)$$

каби u га нисбатан рационал тенгламага келади. Бунда $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ ва $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ формула $x \neq \pi + 2\pi k$, $(k \in \mathbf{Z})$ шарт билан қўлланилади.

Шунинг учун $R(\cos x, \sin x)=0$ тенгламани $x=\pi+2\pi k$, $(k \in Z)$ да ҳам текшириб кўриш керак, у баъзида ечим ҳам бўлиб қолиши мумкин. Юқоридаги 6-мисолни шу усулда ечайлик:

3-ечилиши. (30) га асосан

$$7\sin x-5\cos x=5 \Longrightarrow 7\cdot\frac{2u}{1+u^2}-5\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}=5 \Longleftrightarrow 14u=10 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow u_1=\frac{5}{7} \Longrightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{5}{7} \Longleftrightarrow x_1=2\operatorname{arctg}\frac{5}{7}+2\pi n (n \in Z).$$

Энди $x=\pi+2\pi k$, $(k \in Z)$ ни (20) га қўйсак, унинг ҳам ечим экани аниқланади.

Ж а в о б. $\left\{\pi(1+2k),\ 2\pi n+2\operatorname{arctg}\frac{5}{7};\ k,\ n \in Z\right\}$.

Энди ***бошқа ёрдамчи номаълумлар киритишга*** мисоллар берамиз.

15-м и с о л. Тенгламани ечинг:

$$\sin 4x+5\sin 2x+5\cos 2x+1=0. \qquad (31)$$

Ечилиши. $u=\sin 2x+\cos 2x \Longrightarrow u^2=1+\sin 4x$. У ҳолда

$$(31) \Longrightarrow u^2+5u=0 \Longleftrightarrow u_1=0,\ u_2=-5.$$

а) $\sin x+\cos x=0 \Longleftrightarrow \operatorname{tg} x=-1 \Longleftrightarrow x_k=\frac{\pi}{4}(4k-1),\ k \ni Z$.

б) $\sin x+\cos x=-5$. Бу ечимга эга эмас, чунки $|\sin x|\leqslant 1$, $|\cos x|\leqslant 1$ бўлгани учун $\sin x+\cos x$ йиғинди -5 га тенг бўла олмайди.

16-м и с о л. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{1+\sin 4x}=\sqrt{2}\cos 4x. \qquad (32)$$

Ечилиши. $1+\sin 4x \geqslant 0$ бўлгани учун тенглама R да аниқланган, лекин унинг чап томони номанфийлиги учун $\cos 4x \geqslant 0$ бажариладиган ечимлар изланиши керак:

$$(32) \Longleftrightarrow \begin{cases}\cos 4x \geqslant 0,\\ 1+\sin 4x=2\cos^2 4x\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}u=\sin 4x,\\ \cos 4x \geqslant 0,\\ 1+u=2(1-u^2)\end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}(A)\ \begin{cases}\sin 4x=-1,\\ \cos 4x \geqslant 0;\end{cases}\\ (B)\ \begin{cases}\sin 4x=\frac{1}{2},\\ \cos 4x \geqslant 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

а) (A) системанинг ечимини топиш учун $\sin 4x=-1$ нинг $x_k=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k (k \in Z)$ илдизларининг $\cos 4x \geqslant 0$ шартни қаноатлантириши текширилади:

$$\cos 4x_k=\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=0 \Longrightarrow x_k=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k (k \in Z)$$

илдизлар кўрсатилган шартни қаноатлантирмаги учун ечим бўлади;

б) (В) системани ечамиз: $\sin 4x = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x_n = (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4}$ $n\,(n \in Z)$.

$$\cos 4x_n = \cos((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}, & n \text{ жуфт бўлса;} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}, & n \text{ тоқ бўлса.} \end{cases}$$

Шундай қилиб, $n = 2m (m \in Z)$ бўлганда x_n ечим бўла олади.

Ж а в о б. $\left\{ \frac{\pi}{8}(4k-1),\ \frac{\pi}{24}(12m+1);\ k,\ m \in Z \right\}$.

17- м и с о л. Тенгламани ечинг:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1. \qquad (33)$$

Ечилиши. $y = \sin x$, $t = \cos x$ десак, у ҳолда тенглама ушбу симметрик алгебраик система ёрдамида ечилади ($u = y + t$, $v = yt$):

$$(33) \Longrightarrow \begin{cases} y^3 + t^3 = 1, \\ y^2 + t^2 = 1. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (y+t)(y^2 - yt + t^2) = 1, \\ y^2 + t^2 = 1. \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} u(1-v) = 1, \\ u^2 - 2uv = 1. \end{cases} \qquad (34)$$

(34) системадан $u^2 - 2u + 1 = 0 \Longleftrightarrow u_1 = 1$ топилиб, $v_1 = 0$ ҳам аниқланди. Бундан

$$(A) \begin{cases} \sin x + \cos x = 1, \\ \sin x \cdot \cos x = 0. \end{cases}$$

(А) системадан $\left\{ 2\pi k,\ \frac{\pi}{2}(4n+1);\ k, n \in Z \right\}$ ечим топилади.

Ж а в о б. $\left\{ 2\pi k,\ \frac{\pi}{2}(4n+1);\ k,\ n \in Z \right\}$.

18- м и с о л. Тенгламани ечинг:

$$\cos 2x \sin 8x + \cos 2x \sin 9x = \cos 5x \sin 8x + \cos 5x \sin 9x. \qquad (34)$$

Ечилиши. Бу ерда кўпайтмани йиғиндига келтириш формулалари қўл келмайди, чунки ҳар бир кўпайтмадаги аргументлар йиғиндиси ва айирмасининг ярми ҳеч қайси кўпайтмада бир хил эмас, яъни бу (VI) типга мансуб эмас. (34) ни кўпайтувчиларга бундай ажратамиз:

$$(34) \Longleftrightarrow \cos 2x(\sin 8x + \sin 9x) = \cos 5x(\sin 8x + \sin 9x) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} \cos 2x = \cos 5x, \\ \sin 8x = -\sin 9x \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = \pm 2x + 2\pi n,\ n \in Z; \\ 9x = (-1)^{k+1}\, 8x + \pi k,\ k \in Z \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left| \ x_n = \frac{2\pi n}{7},\ x_m = \frac{2\pi m}{3},\ x_k = \frac{2\pi k}{17},\ x_l = \pi(2l+1);\ n,\ m,\ k,\ l \in Z: \right.$$

Ж а в о б. $\left\{ \frac{2\pi}{7} n,\ \frac{2\pi}{3} m,\ \frac{2\pi}{17} k,\ \pi(2l+1);\ n,\ m,\ k,\ l \in Z \right\}$

19-мисол. Тенгламани ечинг:

$$2\cos 5x + 3\cos x = 5 \qquad (35)$$

Ечилиши Тригонометрик функция хоссаларига кўра ечиладиган бу тенглама фақат $\cos x = 1$ ва $\cos 5x = 1$ шартларини баравар бажарувчи x лар учун илдизга эга, чунки $|\cos x| \leqslant 1$, $|\cos 5x| \leqslant 1$. Шундай қилиб (m, $n \in Z$):

$$(35) \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 5x = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi m, \\ 5x = 2\pi n \end{cases} \Longleftrightarrow x_n = \frac{2\pi n}{5}.$$

Жавоб. $\left\{ \frac{2\pi}{5} n,\ n \in Z \right\}$.

20-мисол. Тенгламани ечинг.

$$\cos^2 x - 2\cos x = 4\sin x - \sin 2x. \qquad (36)$$

1-ечилиши. (36) $\Longleftrightarrow$ $\cos^2 x - 2(1 - \sin x)\cos x - 4\sin x = 0$. Бу $\cos x$ га нисбатан квадрат тенглама деб қаралса,

$$(\cos x)_{1,2} = 1 - \sin x \pm \sqrt{(1-\sin x)^2 + 4\sin x} = 1 - \sin x \pm (1 + \sin x).$$

а) $\cos x = 1 - \sin x + (1 + \sin x) \Longleftrightarrow \cos x = 2$, бу ечимга эга эмас;
б) $\cos x = 1 - \sin x - (1 + \sin x) \Longleftrightarrow \cos x = -2\sin x \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow x_n = \pi n - \operatorname{arctg} \frac{1}{2},\ n \in Z.$$

Жавоб. $\left\{ \pi n - \operatorname{arctg} \frac{1}{2},\ n \in Z \right\}$.

2-ечилиши. $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ($x \neq x_n = \pi(2n + 1)$; $n \in Z$) алмаштириш бажарилса,

$$(36) \Longrightarrow (u^2 - 4u - 1)(3u^2 + 1) = 0 \Longleftrightarrow u_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Агар $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u_1$ ва $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u_2$ ни ечсак, $x_k = 2\operatorname{arctg}(2 \pm \sqrt{5}) + 2\pi k$, $k \in Z$ каби ечимларнинг иккинчи хил шакли ҳосил этилади. (x_n лар эса илдиз эмас.)

21-мисол. Тенгламани ечинг:

$$81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30. \qquad (37)$$

Ечилиши. $81^{\sin^2 x} = y \Longrightarrow 81^{\cos^2 x} = 81^{1-\sin^2 x} = \frac{81}{y}$. У ҳолда (37) $\Longrightarrow y^2 - 30y + 81 = 0 \Longleftrightarrow y_1 = 3$, $y_2 = 27$. Энди $n \in Z$, $k \in Z$ лар учун

а) $81^{\sin^2 x} = 3 \Longleftrightarrow 4\sin^2 x = 1 \Longleftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x_n = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$,

б) $81^{\sin^2 x} = 27 \Longleftrightarrow 4\sin^2 x = 3 \Longleftrightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Longleftrightarrow x_k = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$.

Жавоб. $\left\{ \frac{\pi}{60}(30n + 15 \pm 5),\ n \in Z \right\}$.

22- м и с о л. Тенгламани ечинг:

$$\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2 x=0. \qquad (38)$$

1- ечилиши. Икки номанфий функциялар йиғиндиси нолга тенг. Демак,

$$(38) \Longleftrightarrow \begin{cases}\cos\frac{x}{2}=0,\\ \sin x=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x_k=(2k+1)\pi,\ k\in Z;\\ x_n=\pi n,\ n\in Z\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow x_k=(2k+1),\pi\ \ k\in Z.$$

2- ечилиши. Бу тенглама даражасини пасайтириш типига мансуб деб қаралганда ҳам, фақат мантиқан ечиш билан охирига етади:

$$(38) \Longleftrightarrow 1+\cos x+1-\cos 2x=0 \Longleftrightarrow \cos x-\cos 2x=-2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}\cos 2x=1,\\ \cos x=-1.\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}2x_n=2\pi n,\ n\in Z,\\ x_k=\pi(1+2k),\ k\in Z\end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x_k=\pi(1+2k),\ k\in Z.$$

Машқ. Ушбу тенгламанинг ечими йўқлигини исботланг:

$$\sin^2 x+\cos^2 5x=0$$

27- топшириқ. Тенгламаларни типига эътибор бериб ечинг:

1. а) $\sqrt{2}\cos^2 7x-\cos 7x=0$; б) $\sin^2 3x-5\sin 3x+4=0$; в) $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x=3$; г) $8\cos^4 x-8\cos^2 x-\cos x+1=0$; д) $\sin x+\sin^3 x=0$; е) $\operatorname{tg}^6 x+\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^2 x=0$.

2. а) $3\sin^2 2x+7\cos 2x=3$; б) $2\cos^2 x+\sin x=2$; в) $\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x=0$; г) $2\cos^2 x+5\sin x-4=0$; д) $6\cos^2 x+5\sin x-7=0$; е) $2\cos^2 x+4\cos x=3\sin^2 x$; ж) $4\sin^4 x+12\cos^2 x=7$; з) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2$; и) $5\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{\cos^4 x}=29$; к) $\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x=1{,}5$.

3. а) $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$; б) $\cos^4 x=1-\sin^4 x$; в) $3\sin x=2\cos x$; г) $2\cos^2 x-3\sin x\cos x+5\sin^2 x=3$; д) $3\sin^2 x+38\sin x\cos x=6\cos^2 x$; е) $3\sin^2 x+2\sin x\cos x=2$; ж) $\sin^2 x+3\cos^2 x=4\sin x\cos x$; з) $\sin^6 x+\sin^4 x\cos^2 x=\sin^3 x\times\cos^3 x+\sin x\cos^5 x$; и) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$; к) $\sin^2 x\cos^2 x=10\sin x\cos^3 x-21\cos^4 x$; л) $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{7}{16}$.

4. а) $\cos x\cdot\operatorname{tg}3x=0$; б) $\sin 4x\cdot\cos x\cdot\operatorname{tg}2x=0$; в) $(1+\cos x)\left(\frac{1}{\sin x}-1\right)=0$; г) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos x=0$; д) $\cos^3 x+4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\cos x=0$; е) $\sin^3 x+2\sin\cdot\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$; ж) $\sin^2 x\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin 2x\sin\frac{x}{2}=0$;

з) $2\operatorname{tg}2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\sin x+\operatorname{tg}2x=0$; и) $4\sin x+\sin 2x=0$;

к) $\frac{\cos x}{1+\cos 2x}=0$; л) $\frac{\sin x+\cos x}{\cos 2x}=0$.

5. а) $\sin^2 x+\sin^2 2x=1$; б) $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=2$; в) $\cos\frac{x}{4}-4\sin\frac{x}{2}=$ $=2\cos^3\frac{x}{4}$; г) $(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x)^2=5+\cos\left(\frac{13\pi}{6}-2x\right)$. д) $1+\cos 6x=32\cos^6 x$;

е) $\operatorname{tg}(x+30^\circ)\cdot\operatorname{tg}(x-60^\circ)=1$; ж) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\operatorname{ctg}^2 x+\frac{1+\cos 2x}{\sin^2 x}$;

з) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=3\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

и) $4\sin x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4\sin(\pi+x)\cos x+2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos(\pi+x)=1$;

к) $2\sin x\cos\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)\cos x=3\sin(5\pi-x)\cos(2\pi+x)$;

л) $\sin\frac{3x-7\pi}{2}+\cos\frac{\pi-3x}{2}=-\frac{1}{\cos\frac{3}{2}x}$; м) $\sin(5\pi-x)+\operatorname{tg}(11\pi+x)=\frac{\sin x}{2\cos x}$.

6. а) $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}-\sin x\sin 3x=\sin 2x\sin 3x$; б) $\sin x\cdot\sin 3x+\sin 4x\times$ $\times\sin 8x=0$; в) $\sqrt{2}\sin 3x\cos 8x+\cos 2x\cos 6x=\sin 2x\sin 6x$; г) $\sin 2x\sin 6x=$ $=\cos x\cos 3x$; д) $\sin 2x\sin 6x\cos 4x+\frac{1}{4}\cos 12x=0$; е) $\cos z\cos 2z\sin 3z=0{,}25\sin 2z$.

7. а) $\sin x+\sin\frac{1}{\pi}=\sin\left(x+\frac{1}{\pi}\right)$; б) $\sin x-\sin 3x-\sin 5x+\sin 7x=0$; в) $\sin 3x+\sin 5x=\sin 4x$; г) $\cos 7x+\sin 8x=\cos 3x-\sin 2x$; д) $\sin 2x-\sin 3x+$ $+\sin 8x=\cos\left(7x+\frac{3\pi}{2}\right)$; е) $\cos 9x-\cos 7x+\cos 3x=\cos x$.

8. а) $\sin^2 2z+\sin^2 3z+\sin^2 4z+\sin^2 5z=2$; б) $\sin^2 3x+\sin^2 4x=\sin^2 5x+\sin^2 6x$; в) $\cos^2 x+\cos^2 2x-\cos^2 3x-\cos^2 4x=0$; г) $\sin^4 3z+\sin^4\left(\frac{\pi}{4}+3z\right)=\frac{1}{4}$; д) $\cos^6 x+\sin^6 x-\cos^2 2x=\frac{1}{16}$; е) $\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{3x}{2}=\sin^2 2x+\sin^2 4x$.

9. а) $2(\cos 4x-\sin x\cos 3x)=\sin 4x+\sin 2x$; б) $\sin^2 z+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 z=1$; в) $\sin 7x+\sin 9x=2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)$; г) $\sin 3x+\sin 5x=$ $=2(\cos^2 2x-\sin^2 3x)$. д) $\sin 3x-4\sin x\cos 2x=0$; е) $\frac{\sin z}{1+\cos z}=2-\operatorname{ctg} z$

10. а) $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=4$; б) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\frac{\cos\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)}{1+\cos x}=2$; в) $4\sin^4 x+\cos 4x=1+12\cos^4 x$; г) $\sin^8 x+\cos^8 2x=\frac{41}{128}$; д) $\operatorname{ctg} 2\pi t^2+\operatorname{ctg} 4\pi t^2=0$; е) $\frac{1-\operatorname{tg} x+\ldots+(-1)^n\operatorname{tg}^n x+\ldots}{1+\operatorname{tg} x+\ldots+\operatorname{tg}^n x+\ldots}=1+\sin 2x$.

8-§. Тригонометрик тенгсизлик, тенгламалар системаси

1. ***Тригонометрик тенгсизлик.*** Ушбу тасдиқлар $k \in Z$ учун ўринлидир:

$$\sin x > a,\ |a| < 1 \Longleftrightarrow 2\pi k + \arcsin a < x < 2\pi k + \pi - \arcsin a, \quad (1)$$

$$\sin x < a,\ |a| < 1 \Longleftrightarrow 2\pi k - \pi - \arcsin a < x < 2\pi k + \arcsin a, \quad (2)$$

$$\cos x > a,\ |a| < 1 \Longleftrightarrow 2\pi k - \arccos a < x < 2\pi k + \arccos a, \quad (3)$$

$$\cos x < a,\ |a| < 1 \Longleftrightarrow 2\pi k + \arccos a < x < 2\pi k + 2\pi - \arccos a, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} x > a \Longleftrightarrow \pi k + \operatorname{arctg} a < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} x < a \Longleftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi k + \operatorname{arctg} a, \quad (6)$$

$$\operatorname{ctg} x > a \Longleftrightarrow \pi k < x < \operatorname{arcctg} a + \pi k, \quad (7)$$

$$\operatorname{ctg} x < a \Longleftrightarrow \pi k + \operatorname{arcctg} a < x < \pi + \pi k. \quad (8)$$

Юқорида энг содда тригонометрик тенгсизликлар ва уларнинг ечими кўрсатилди. Кўпинча тригонометрик тенгсизликлар юқоридаги тасдиқлардан бирига келтириб ечилади.

1-мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$4\cos^2 x - 8\cos x + 3 \geqslant 0. \quad (9)$$

Ечилиши. $t = \cos x$ десак,

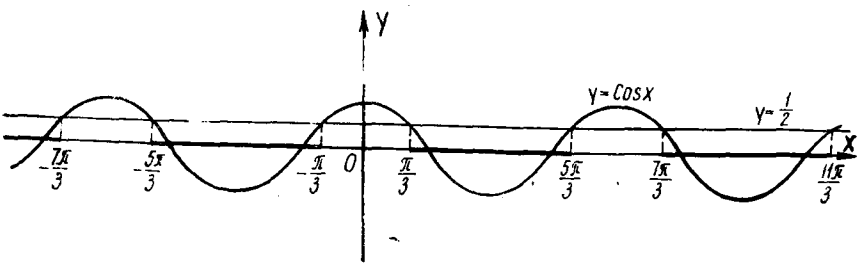
$$(9) \Longrightarrow 4t^2 - 8t + 3 \geqslant 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leqslant \frac{1}{2}, \\ t \geqslant \frac{3}{2}. \end{array}\right.$$

У ҳолда: а) $\cos x \leqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 2\pi k + \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant 2(k+1)\pi - \frac{\pi}{3},\ k \in Z.$

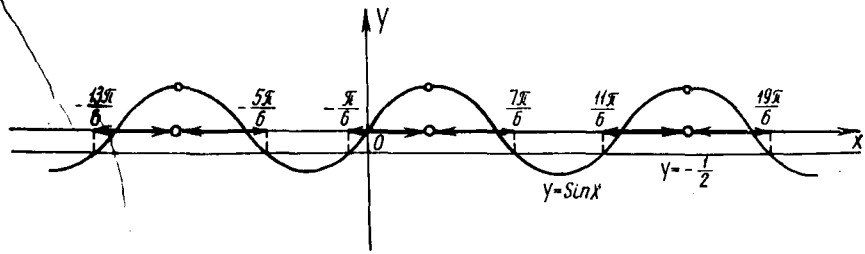
Бу ечим 221-шаклда график равишда тасвирланган.

б) $\cos x \geqslant \frac{3}{2}$ — бу ечимга эга эмас.

Жавоб. $\left\{\left[\frac{\pi}{3}(6k+1),\ \frac{\pi}{3}(6k+5)\right],\ k \in Z\right\}.$



221-шакл.



222- шакл.

2- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 < 0. \qquad (10)$$

Ечилиши. (10) $\Longleftrightarrow (\sin x - 1)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) < 0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{2} < \sin x < 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 2\pi k - \frac{\pi}{6} < x < 2\pi k + \frac{7\pi}{6}, \ k \in Z. \end{cases}$$

Бу ечим 222- шаклда график равишда тасвирланган.

Ж а в о б. $\left\{\left]2\pi k - \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right[\cup \left]2\pi k + \frac{\pi}{2};\ 2\pi k + \frac{7\pi}{6}\right[,\ k \in Z\right\}$.

3- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$\mathrm{tg}^2 x + (\sqrt{3} - 1)\mathrm{tg}\, x - \sqrt{3} \leqslant 0. \qquad (11)$$

Ечилиши. (11) $\Longleftrightarrow (\mathrm{tg}\, x - 1)(\mathrm{tg}\, x + \sqrt{3}) \leqslant 0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}\, x \leqslant 1, \\ \mathrm{tg} x \geqslant -\sqrt{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + \pi k < x \leqslant \pi k + \frac{\pi}{4}, \\ \pi k - \frac{\pi}{3} \leqslant x < \pi k + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \pi k - \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \pi k + \frac{\pi}{4}, \\ k \in Z. \end{cases}$$

Бу ечим 223- шаклда график равишда тасвирланган.

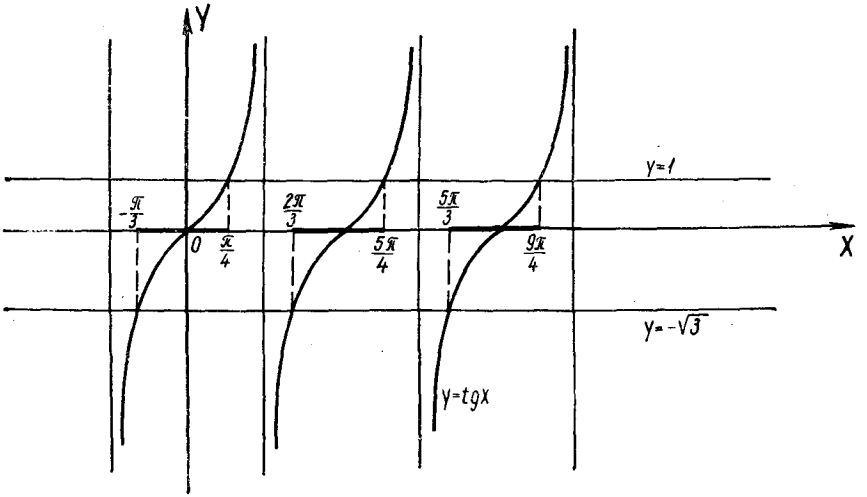
Ж а в о б. $\left\{\left[\pi k - \frac{\pi}{3};\ \pi k + \frac{\pi}{4}\right],\ k \in Z\right\}$.

4- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$\sin x + \cos 2x > 1. \qquad (12)$$

Ечилиши. (12) $\Longleftrightarrow \sin x + 1 - 2\sin^2 x > 1 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \sin x(1 - 2\sin x) > 0 \Longleftrightarrow 0 < \sin x < \frac{1}{2}.$$



223- шакл.

Узунлиги 2π га тенг бўлган $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оралиқда бу қўш тенгсизликни ечсак, $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ва $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$ шартлар билан аниқланган ечимни топамиз. Бунда $\sin x$ нинг даврини ҳисобга оламиз (224- шакл).

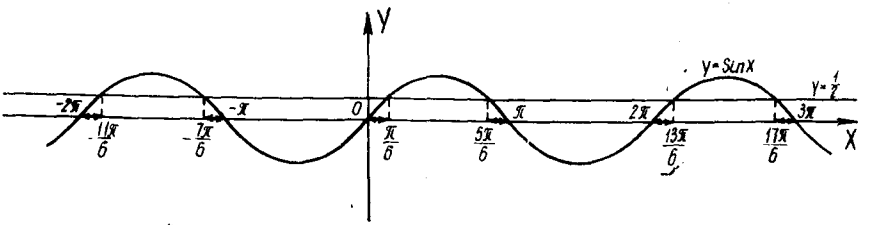
Ж а в о б. $2\pi k < x < 2\pi k + \frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < 2\pi k + \pi$, $k \in Z$.

2. *Тенгламалар системаси.*

I. *Ҳар бир тенгламаси тригонометрик функцияларга нисбатан тенглама бўлган системалар.*

5- м и с о л. Системани ечинг:

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{4}, \\ 3 \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases} \qquad (13)$$



224- шакл.

Ечилиши. $y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x \neq \pi + \pi n$ $(k, n \in Z)$ лар шартида аниқланган бу система бундай ечилади $(k, n \in Z)$:

$$(13) \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{4}, \\ 3\cos x \cos y = \sin x \sin y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = \frac{3}{4} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos(x - y) = 1, \\ \cos(x+y) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = 2\pi n, \\ x + y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi(n + k), \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + \pi(n - k). \end{cases}$$

Ж а в о б. $\left\{\left(\frac{\pi}{3}(3n+3k \pm 1);\ \frac{\pi}{3}(3n-3k \pm 1)\right),\ n,\ k \in Z\right\}$.

6-м и с о л. Системани ечинг:

$$\begin{cases} \sin x - \cos y = 1, \\ \cos 2x - \cos 2y = 1. \end{cases} \tag{14}$$

Ечилиши. $u = \sin x$, $v = \cos y$ десак,

$$(14) \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u - v = 1, \\ u^2 + v^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2}, \\ v = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Бу ердан $(n.\ k \in Z)$:

$$(14) \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \\ y_k = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k. \end{cases}$$

Ж а в о б. $\{(x_n;\ y_k),\ n \in Z,\ k \in Z\}$.

7-м и с о л. Системани ечинг:

$$\begin{cases} \sin 2x + \sin 2y = 1, \\ \cos 2x - \cos 2y = \sqrt{3}. \end{cases} \tag{15}$$

Ечилиши. Йиғиндини кўпайтмага келтириш формуласидан:

$$(15) \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin(x + y)\cos(x - y) = \frac{1}{2}, \\ \sin(x + y)\sin(x - y) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Агар $u = x + y$, $v = x - y$ деб белгилаб, сўнг системанинг иккинчи тенгламасини биринчисига бўлсак ($n, k \in Z$):

$$(15) \Longrightarrow \begin{cases} \sin u \cos v = \dfrac{1}{2}, \\ \sin u \sin v = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} v = -\sqrt{3}, \\ \sin u = (-1)^n \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} v = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n, \\ u = (-1)^n \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k. \end{cases}$$

Демак,

$$(15) \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = (-1)^n \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x - y = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}(2k + n), \\ y = (-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}(2k - n). \end{cases} \qquad (15\text{ а})$$

Ж а в о б. Ҳамма ечимлар тўплами (15 а) даги формулалар билан аниқланади.

II. *Бир тенгламаси бурчаклар орасидаги боғланишни, иккинчиси уларнинг тригонометрик функциялари орасидаги боғланишни ифодаловчи тенгламалар системаси.*

8-м и с о л. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x + 2y = \dfrac{3\pi}{2}, \\ \cos^2 \dfrac{x}{2} + \sin^2 y = 1. \end{cases} \qquad (16)$$

Ечилиши. Қуйида $n \in Z$ лар учун

$$(16) \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{x}{2}, \\ \cos^2 \dfrac{x}{2} + \sin^2\left(\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{x}{2}, \\ 1 + \cos x + 1 - \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = 2. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{x}{2}, \\ \sin x = -\cos x \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{x}{2}, \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_n = \dfrac{\pi}{4}(4n - 1), \\ y_n = \dfrac{\pi}{8}(7 - 4n). \end{cases}$$

Ж а в о б. $\left\{\left(\frac{\pi}{4}(4n-1);\ \frac{\pi}{8}(7-4n)\right),\ n\in Z\right\}$.

9- м и с о л. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{12}, \\ \frac{1-\operatorname{tg}2x}{1+\operatorname{tg}2x}=\operatorname{tg}2y. \end{cases} \qquad (17)$$

Ечилиши. Система $x\neq\frac{\pi}{4}(1+2k)$, $y\neq\frac{\pi}{4}(1+2l)$, $x\neq\frac{\pi}{8}(8m-1)$; $k,\ l,\ m\in Z$ шартда аниқланган бўлиб, унда ($n\in Z$):

$$(17)\Longleftrightarrow\begin{cases} y=x-\frac{\pi}{12}, \\ \frac{1-\operatorname{tg}2x}{1+\operatorname{tg}2x}=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases} y=x-\frac{\pi}{12}, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} y=x-\frac{\pi}{12}, \\ x=\frac{5\pi}{48}-\frac{\pi}{4}n \end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases} x_n=\frac{5\pi}{48}-\frac{\pi}{4}n, \\ y_n=\frac{\pi}{48}-\frac{\pi}{4}n. \end{cases} \qquad (17\text{ а})$$

Ж а в о б. Ўзгарувчиларнинг (17 а) даги қийматлари системанинг аниқланиш соҳасига киргани учун у ечим бўлади.

10- м и с о л. Системани ечинг:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}y=3, \\ |x-y|=\frac{\pi}{3}. \end{cases} \qquad (18)$$

Ечилиши. $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$ ($m\in Z$), $y\neq\pi+\pi n$ ($n\in Z$) шартлар асосида

$$(18)\Longleftrightarrow\begin{cases} \cos(x-y)=3\cos x\sin y, \\ |x-y|=\frac{\pi}{3} \end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases} 2\cos x\sin y=\frac{1}{3}, \\ |x-y|=\frac{\pi}{3}, \end{cases}\Longleftrightarrow$$

бу ерда $\cos(x-y)=\cos|x-y|=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ экани ҳисобга олинди.

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} \sin(y+x)+\sin(y-x)=\frac{1}{3}, \\ |x-y|=\frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

а) $x>y$ бўлса, $x-y=\frac{\pi}{3}\Longrightarrow\sin(y-x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Longrightarrow\sin(y+x)=$ $=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}>1$ бу ҳолда система ечимга эга эмас.

б) $x < y$ бўлса, $x - y = -\frac{\pi}{3} \Longrightarrow \sin(y + x) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Демак:

$$(18) \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = -\frac{\pi}{3}, \\ x + y = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi k \quad k \in Z. \end{cases}$$

Бу ердан ($k \in Z$):

$$\begin{cases} x_k = -\frac{\pi}{6} + (-1)^k \cdot \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi k}{2}, \\ y_k = \frac{\pi}{6} + (-1)^k \cdot \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi k}{2}, \end{cases} \qquad (19)$$

Ж а в о б. Барча (19) лар билан аниқланган (x_k; y_k) лар ечимдир.

М а ш қ. (1) ÷ (8) даги тенгсизликлар ечимини график равишда тасвирланг.

28- топшириқ. Тенгсизликларни ечинг:

1. а) $\sin x > -\frac{1}{2}$; б) $\cos x > \frac{1}{4}$; в) $\operatorname{tg} x > 2$; г) $\sin\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$;
д) $\sin x > \frac{1}{3}$; е) $\cos x > -\frac{1}{2}$; ж) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$; з) $\operatorname{ctg} x > -\sqrt{3}$;
и) $\cos 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. а) $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0$; б) $6\cos^2 x - 11\cos x + 4 > 0$; в) $\sin^2 2x > \sin^2 x$;
г) $\cos 4x < -\cos 2x$; д) $\sin x + \cos x > -\sqrt{2}$; е) $12\cos^2 x + 7\sin x < 13$.

3. а) $\cos 2x \sin x < 0$, $-\pi < x < \pi$; б) $2\operatorname{tg} 2x \leqslant 3\operatorname{tg} x$; в) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x < -3$;
г) $\cos x \cos 3x < \cos 5x \cos 7x$; д) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x < 0$; е) $2\cos 2x + \sin 2x > \operatorname{tg} x$,
ж) $\sin x\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) \leqslant 0$.

29- топшириқ. Системаларни ечинг:

1. а) $\begin{cases} \sin x \sin y = -\frac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x \sin y = -\frac{3}{4}, \\ 3\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg} y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2y = 1, \\ \operatorname{tg}(x - 2y) = \frac{4}{3}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sin x - \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x + \cos 2y = \frac{1}{2}; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2\sin x = -\sin y, \\ 2\cos x = \sqrt{3}\cos y; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \sin 2y = \sin 2x, \\ 2\sin y \cos(x - y) = \sin x; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = 5; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \cos(x + y) = 2\cos(x - y), \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4}; \end{cases}$ и) $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x = \sin y, \\ \sqrt{2}\cos x = \sqrt{5}\cos y. \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos\frac{x}{2} + \cos\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \cos x - \sin x = 1 + \cos y - \sin y, \\ 3\sin 2x - 2\sin 2y = \frac{3}{4}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \cos x \sin y = \frac{1}{2}, \\ \sin 2x + \sin 2y = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2y = 1, \\ \sqrt{3}\sin 2x - 3\cos 2y = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 2\sin(x+y), \\ \cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} = \frac{3}{4}; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \operatorname{tg}2(x+y) = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2y, \\ 2\sin(2x+y).\cos y + \cos 2y + 1 = 0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 4\sin x - 2\sin y = 3, \\ 2\cos x - \cos y = 0; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \sin x + \cos x = 2\sin y, \\ \sin 2x - \sqrt{3}\sin 2y = -3\cos 2y. \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} 2\sin x \cos y = 2\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y, \\ 2\sin y \cos x = \operatorname{ctg} x + 2\operatorname{ctg} y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin(x+y), \\ |x| + |y| = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - y = 2\pi, \\ 2\sin x = -\sin y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 12(x+y) = -5\pi, \\ 3\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \sqrt{3}; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{6}, \\ 4\sin x \cos y = -1; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x = y + \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x = -3\operatorname{tg} y; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{2}; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{12}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4}; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \sin x \cos y = b, \\ x - y = \beta; \end{cases}$ к) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2}, \\ 2\cos^2 x - 3\cos^2 y = \frac{-1}{2}. \end{cases}$

9-§. Параметрли тенглама ва тенгсизликлар

1. ***Параметрли тенглама.*** Агар бир номаълумли тенглама

$$f(x, a, b, \ldots, c) = 0 \quad (a, b, \ldots, c \in \mathbf{R})$$

шаклда берилса, у *параметрли тенглама* дейилиб, унинг аниқланиш соҳаси, илдизлари сони $a, b, \ldots, c$ параметрларга боғлиқ равишда ўзгариб туради. Параметрли рационал тенгламага мисоллар келтирамиз.

1-мисол. Тенгламани ечинг:

$$ax^2 - (a-b)x - b = 0. \qquad (1)$$

Ечилиши. Агар $a=0$ бўлса, бу тенглама чизиқлидир:

$$(1) \Longleftrightarrow bx - b = 0 \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} b \neq 0 \Longrightarrow x = 1, \\ b = 0 \Longrightarrow x = c, \end{array} \right.$$

c—ихтиёрий чекли сон, аксинча, $a \neq 0$ бўлса, (1) тенглама квадратикдир:

$$(1) \Longleftrightarrow x_{1,2} = \frac{a - b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4ab}}{2a} = \frac{a - b \pm |a+b|}{2a}.$$

а) $a+b \geqslant 0$ бўлса, $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{b}{a}$ илдизлар ечимдир;

б) $a+b<0$ бўлса, $x_1 = -\frac{b}{a}$, $x_2 = 1$ ечим келиб чиқади.

Жавоб. $a \neq 0 \Longrightarrow \left\{1;\ -\frac{b}{a}\right\}$; $a=0,\ b \neq 0 \Longrightarrow \{1\}$; $a=0,\ b=0 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \{c,\ c \in R\}$.

2-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\frac{2x+a}{2x-a} + \frac{2x+b}{2x-b} = 2. \qquad (2)$$

Ечилиши. Тенгламанинг аниқланиш соҳаси a ва b га боғлиқ:

$$(2) \Longleftrightarrow \begin{cases} (2x-a)^2 + (2x-b)^2 \neq 0, \\ (2x+a)(2x-b)+(2x+b)(2x-a) = 2(2x-a)(2x-b) \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{a}{2},\ x \neq \frac{b}{2}, \\ (a+b)x = ab \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b \neq 0, \\ \frac{a}{2} \neq x \neq \frac{b}{2}, \\ x = \frac{ab}{a+b}; \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=0,\ a=b=0, \\ x=c,\ c \in R,\ c \neq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=0,\ a=-b \neq 0, \\ \text{ечими йўқ.} \end{cases} \end{array}\right.$$

Жавоб. 1) $a \neq \pm b \Longrightarrow x = \frac{ab}{a+b}$; 2) $a=b=0 \Longrightarrow x \in]-\infty;\ 0[\cup$ $]0;\ +\infty[$; 3) $a = \pm b \Longrightarrow$ тенгламанинг ечими йўқ.

3-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\frac{4a}{x^2-a^2} + \frac{x-a}{x(x+a)} = \frac{1}{x(x-a)}. \qquad (3)$$

Ечилиши. Тенгламанинг аниқланиш соҳаси шарти билан система тузамиз:

$$(3) \Longleftrightarrow \begin{cases} x \neq 0,\ x \neq \pm a, \\ x^2 + (2a-1)x + a^2 - a = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \neq 0,\ x \neq \pm a, \\ x_1 = 1-a,\ x_2 = -a \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \neq 0,\ x \neq \pm a, \\ x = 1-a \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a \neq 1,\ a \neq \frac{1}{2}, \\ x = 1-a. \end{cases}$$

Жавоб. 1) $a \neq 1,\ a \neq \frac{1}{2} \Longrightarrow x = 1-a$; 2) $a=1,\ a=\frac{1}{2} \Longrightarrow$ ечими йўқ.

30-топшириқ. Тенгламаларни ечинг:

1. а) $2a^2x = a(x+2) - 1$; б) $2a(2a+1)x^2 - x - 2a(2a-1) = 0$; в) $(4a^2 - b)x^2 - 4ax + 1 = 0$; г) $\frac{2ax^2}{x-1} - 4a = 4a^2 + 1$.

2. а) $\frac{8a}{x^2-4a^2}+\frac{x-2a}{x(x+2a)}=\frac{1}{x(x-2a)}$; б) $\frac{x}{x-2b}+\frac{x}{x+2b}=\frac{7}{4b^2-x^2}$;

в) $\frac{2a}{2ax-1}+\frac{b}{bx-1}=\frac{2a+b}{(2a+b)x-1}$; г) $\frac{1}{p+q-x}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{x}$, $p\neq 0$, $q\neq 0$;

д) $\frac{m}{x+1}-\frac{ax-1}{1-x}=\frac{a(x^2+1)}{x^2-1}$; е) $\frac{m}{x+m}-\frac{n}{n-x}=\frac{m+n}{x+m}-\frac{n-m}{n-x}$;

ж) $\frac{2a-b}{x-a}+\frac{2a+b}{a+x}=\frac{2a}{b}$, $b\neq 0$; з) $a^2+\frac{b^2(x+2)}{2-x}=\frac{a^2-b^2}{2x-x^2}$; и) $\frac{a+x}{x+b}+$

$+\frac{x-b}{x-a}=2$; к) $\frac{1}{b(c-x)}-\frac{1}{a(c-x)}=\frac{2}{b(b-x)}-\frac{2}{a(b-x)}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

3. а) $\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-ac}{a+c}+\frac{x-bc}{b+c}=a+b+c$, $a\neq -b$, $a\neq -c$, $b\neq -c$;

б) $\frac{x-a}{bc}+\frac{x-b}{ac}+\frac{x-c}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$;

в) $\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{4x}{a+b+c}=1$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $a+b+c\neq 0$.

2. *Параметрли тенгсизлик.* Агар бир номаълумли тенгсизлик

$$f(x,\ a,\ b,\ldots,c)<0,\ (a,\ b,\ldots,c\in \mathrm{R})$$

кўринишда бўлса, у *параметрли тенгсизлик* дейилади, бунда $a, b, \ldots, c$ лар *параметрлар* дейилиб, тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси, ечимлар тўплами шу параметрларга боғлиқ равишда ўзгаради.

Параметрли рационал тенгсизликка мисоллар келтирайлик.

4-мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$a(2a-1)x^4(x-4a)(4a^2-x^2)(x^2+8a^2+1)>0. \qquad (4)$$

Ечилиши. (4) тенгсизликдаги охирги қавс қатъий мусбат бўлгани учун

$$(4) \Longleftrightarrow a(2a-1)x^4(x-4a)(x-2a)(x+2a)<0. \qquad (5)$$

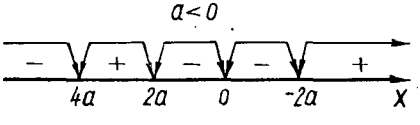
Бу тенгсизликнинг критик нуқталари: $\{0;\ 4a;\ 2a;\ -2a\}$.

1-ҳол. $a(2a-1)<0 \Longleftrightarrow \left(a<0 \text{ ёки } a>\frac{1}{2}\right)$, у ҳолда

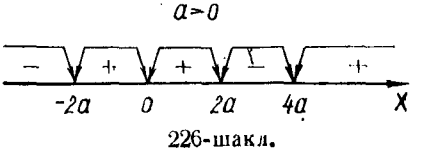
$$(5) \Longleftrightarrow x^4(x-4a)(x-2a)(x+2a)<0.$$

а) $a<0$ бўлсин. У ҳолда $4a<2a<0<-2a$ (225-шакл). Интервал усули билан $x\in\,]-\infty;\ 4a[\cup]2a;\ 0[\cup]0;\ -2a[\,=D_1$ ечим аниқланади;

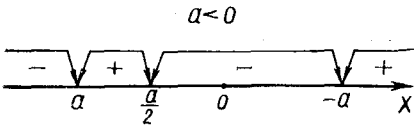
б) $a>\frac{1}{2}$ бўлсин. У ҳолда $-2a<0<2a<4a$ (226-шакл). Интервал усули билан $x\in\,]-\infty,\ -2a[\cup]2a;\ 4a[\,=D_2$ ечим топилади.



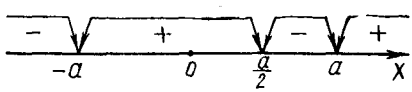
225-шакл.



226-шакл.



227-шакл.



228-шакл.

2-ҳол. $a(2a-1)<0 \Longleftrightarrow \left(0<a<\frac{1}{2}\right)$. У ҳолда

(5) $\Longleftrightarrow x^4(x-4a)\cdot(x-2a)(x+2a)>0$.

Шунингдек, $-2a<0<2a<4a$ бўлгани учун (226-шакл) интервал усули билан ушбу ечим аниқланади:

$$x\in\,]-2a;\ 0[\cup]0;\ 2a[\cup]4a;\ +\infty[\,=D_3.$$

3-ҳол. $a(2a-1)=0 \Longleftrightarrow \left(a=0 \text{ ёки } a=\frac{1}{2}\right)$. У ҳолда

$$(4) \Longleftrightarrow (5) \Longleftrightarrow 0<0.$$

Бу эса мумкин эмас. Демак, бу ҳолда тенгсизлик ечимга эга эмас.

Жавоб. $a<0 \Longrightarrow x\in D_1$; $0<a<\frac{1}{2} \Longrightarrow x\in D_2$; $a>\frac{1}{2} \Longrightarrow x\in D_3$; $a=0$ ёки $a=\frac{1}{2} \Longrightarrow$ бу ҳолда ечими йўқ.

5-мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$\frac{2}{x+a}-\frac{x}{x^2-a^2}<\frac{1}{a-x}. \qquad (6)$$

Ечилиши. $(6) \Longleftrightarrow \frac{2x-a}{x^2-a^2}<0 \Longleftrightarrow (x-a)\left(x-\frac{a}{2}\right)(x+a)<0.$ (7)

1-ҳол. $a<0$. У ҳолда $a<\frac{a}{2}<-a$ бажарилади. Энди (7) га интервал усулини қўлласак (227-шакл): $x\in\,]-\infty;\ a[\cup\left]\frac{a}{2};\ -a\right[=D_1$ ечим келиб чиқади.

2-ҳол. $a>0$. У ҳолда $-a<\frac{a}{2}<a$. Энди (7) га интервал усулини қўллаб (228-шакл), $x\in\,]-\infty;\ -a[\cup\left]\frac{a}{2};\ a\right[=D_2$ ечим топилади.

3-ҳол. $a=0$. У ҳолда (7) $\Longleftrightarrow x^3<0$. Бундан $x\in\,]-\infty;\ 0[$ ечим чиқади.

Жавоб. $a<0 \Longrightarrow x\in D_1$; $a>0 \Longrightarrow x\in D_2$; $a=0 \Longrightarrow x\in\,]-\infty;\ 0[$.

6-мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$\frac{4ax+3}{10x-4a}<3. \qquad (8)$$

Ечилиши. $(8) \Longleftrightarrow \frac{2(a-15)x+3+12a}{10x-4a}<0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \left[(A):\begin{cases}2(a-15)x+3+12a>0,\\ 10x-4a<0\end{cases}\right.$ ёки $(B):\begin{cases}2(a-15)x+3+12a<0,\\ 10x-4a>0\end{cases}$

бажарилади. Бунда ҳар бир системани алоҳида ечиб чиқишга тўғри келади.

1) $a - 15 > 0$ бўлсин.

$$(8) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} (A)\begin{cases} 2(a-15)x > -3-12a, \\ 10x < 4a; \end{cases} \\ (B)\begin{cases} 2(a-15)x < -3-12a, \\ 10x > 4a \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} (A)\left\{ \dfrac{3+12a}{2(15-a)} < x < \dfrac{2a}{5} \Longleftrightarrow x \in \left]\dfrac{3+12a}{2(15-a)};\ \dfrac{2a}{5}\right[= D_1 \right. \\ (B)\left\{ \dfrac{2a}{5} < x < \dfrac{3+12a}{2(15-a)} \Longrightarrow \right. \text{ечими йўқ.} \end{array}\right.$$

2) $a = 15$ бўлсин.

$$(8) \Longleftrightarrow (A): \begin{cases} 3 + 12 \cdot 15 > 0, \\ 10x - 60 < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x \in]-\infty;\ 6[= D_2.$$

3) $a - 15 < 0$ бўлсин.

$$(8) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} (A)\begin{cases} 2(a-15)x > -3-12a, \\ 10x - 4a < 0; \end{cases} \\ (B)\begin{cases} 2(a-15)x < -3-12a, \\ 10x - 4a > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} (A)\begin{cases} x < -\dfrac{3+12a}{2(a-15)}, \\ x < \dfrac{2a}{5}; \end{cases} \\ (B)\begin{cases} x > -\dfrac{3+12a}{2(a-15)}, \\ x > \dfrac{2a}{5}; \end{cases} \end{array}\right.$$

Энди белгилаш киритайлик: $\dfrac{3+12a}{2(15-a)}$ ва $\dfrac{2a}{5}$ сонларнинг каттасини α, кичигини β деб олсак, у ҳолда $x \in]-\infty;\ \beta[\cup]\alpha;\ +\infty[= D_3$ изланаётган ечимдир.

Ж а в о б. $a > 15 \Longrightarrow x \in D_1$, $a = 15 \Longrightarrow x \in D_2$, $a < 15 \Longrightarrow x \in D_3$.

31-топшириқ. Тенгсизликларни ечинг:

1. а) $ax + 2 > x + 2a^2$; б) $a(6x - 1) > 6x - 2$; в) $3(2b - 2x) < 2bx - 1$; г) $2x - \dfrac{1}{3} > \dfrac{(b+2)x}{b-1}$; д) $\dfrac{x}{x-2} < \dfrac{2m+1}{(m-3)(x-2)}$; е) $\dfrac{kx-3}{x-3} < \dfrac{3k}{2} - 1$.

2. а) $4x^2 + 6ax - a > 0$; б) $x^2 - 8ax < -15a^2$; в) $\dfrac{x^2}{m} - 2x > \dfrac{x}{m} - m - 1$

3 а) $\dfrac{2n}{x-2n} + \dfrac{2n}{x+2n} < 0$; б) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2a} < \dfrac{3}{x+6a}$; в) $\dfrac{x-2a}{x-4a} - \dfrac{x-4a}{x-2a} - \dfrac{8}{3} < 0$; г) $\dfrac{x}{x-3} < \dfrac{2a}{x+a} + \dfrac{18a^2}{x^2-a^2}$; д) $\dfrac{2a}{x-3} + \dfrac{x}{x+3} < \dfrac{18}{x^2-9}$; е) $\dfrac{1}{x-2a} + \dfrac{9}{4a} < \dfrac{1}{x}$, $a \neq 0$; ж) $\dfrac{2}{x+2m} - \dfrac{x}{x^2-4m^2} < \dfrac{1}{2m-x}$; з) $\dfrac{x-n}{x-m} + \dfrac{x-m}{x-n} + 2 > 0$.

3. *Модуль белгиси қатнашган параметрли тенглама ва тенгсизликлар.*

7-мисол. Тенгламани ечинг:

$$2x - \frac{9a^2}{2x} + \frac{6a\,|2x+3a|}{2x} = 0. \qquad (9)$$

Ечилиши, $x \neq 0$ бўлсин. У ҳолда шуни ҳисобга олсак,

$$(9) \Longleftrightarrow 4x^2+6a\,|2x+3a| = 9a^2 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\mathrm{A})\begin{cases} 2x+3a \geqslant 0, \\ 4x^2+12ax+9a^2=0; \end{cases} \\ (\mathrm{B})\begin{cases} 2x+3a \leqslant 0, \\ 4x^2-12ax-27a^2=0 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\mathrm{A})\begin{cases} x \geqslant -\frac{3}{2}a, \\ (2x+3a)^2=0; \end{cases} \\ (\mathrm{B})\begin{cases} x \leqslant -\frac{3}{2}a, \\ \left(x+\frac{3}{2}a\right)(x-4a)=0 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\mathrm{A})\begin{cases} x \geqslant -\frac{3}{2}a, \\ x_1=-\frac{3}{2}a \neq 0; \end{cases} \\ (\mathrm{B})\begin{cases} x \leqslant -\frac{3}{2}a, \\ x_1=-\frac{3}{2}a \neq 0, \\ x_2=4a \neq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Жавоб. $a>0 \Longrightarrow \left\{-\frac{3}{2}a\right\}$; $a=0 \Longrightarrow$ ечими йўқ; $a<0 \Longrightarrow \left\{-\frac{3}{2}a;\ 4a\right\}$.

8-мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$|x-6a| - |x-2a| < 4a \qquad (10)$$

Ечилиши. Учта ҳолни қараймиз: $a=0$, $a>0$, $a<0$.

1-ҳол. $a=0 \Longrightarrow (10) \Longleftrightarrow 0<0$. Демак, ечими йўқ.

2-ҳол. $a>0$ Бу вақтда интервал усули қўлланиши учун $-2a<6a$ ни ҳисобга олинади. Демак,

$$(10) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-2a, \\ -x+6a+x+2a<4a; \end{cases} \\ \begin{cases} -2a<x<6a, \\ -x+6a-(x+2a)<4a; \end{cases} \\ \begin{cases} 6a \leqslant x, \\ x-6a-(x+2a)<4a \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-2a, \\ 8a<4a; \end{cases} \\ \begin{cases} -2a<x<6a, \\ x>0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 6a, \\ -8x<4a \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \text{ечими} \\ \text{йўқ}, \end{cases} \\ \{\ 0<x<6a, \\ \{\ x \geqslant 6a. \end{array}\right.$$

3-ҳол. $a<0$ бўлсин. Унда интервал усули қўлланиши учун $6a<-2a$ ни ҳисобга олиш керак. Демак,

$$(10) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 6a, \\ -x + 6a + x + 2a < 4a; \end{cases} \\ \begin{cases} 6a \leqslant x < -2a, \\ x - 6a + x + 2a < 4a; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant -2a, \\ x - 6a - (x + 2a) < 4a \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 6a, \\ 8a < 4a; \end{cases} \\ \begin{cases} 6a \leqslant x < -2a, \\ x < 4a; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant -2a, \\ -8a < 4a \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{x < 6a; \\ \{6a \leqslant x < 4a; \\ \begin{cases} \text{ечими} \\ \text{йўқ.} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ж а в о б. $a < 0 \Longrightarrow x \in]-\infty;\ 4a[$, $a > 0 \Longrightarrow x \in]0;\ +\infty[$; $a = 0 \Longrightarrow$ ечими йўқ.

9- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$|x - a| + |x + a| < b \ (a > 0). \qquad (11)$$

Ечилиши. (Г р а ф и к у с у л.) $f(x) = |x - a| + |x + a|$ ва $g(x) = b$ функцияларнинг графигини ясайлик. 229- шаклдан кўринадики:

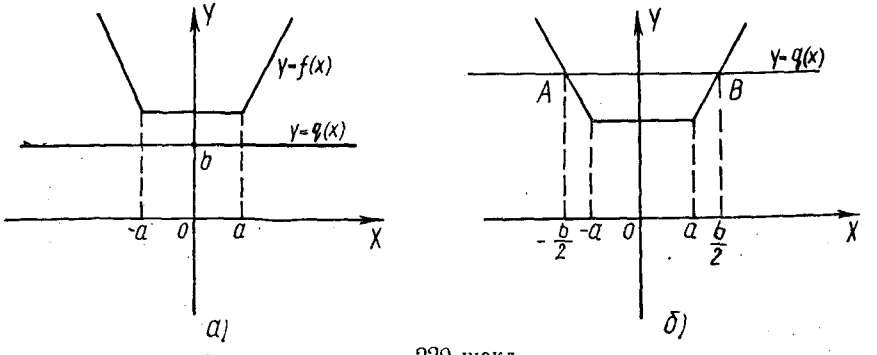
$$f(x) = \begin{cases} -2x, \text{ агар } x < -a, \\ 2a, \text{ агар } -a \leqslant x \leqslant a, \\ 2x, \text{ агар } x > a \end{cases}$$

Демак, $b \leqslant 2a$ бўлганда $g(x) = b$ функция графиги $f(x)$ функция графигининг горизонтал қисмининг юқорисидан ўтмайди (229- *а* шакл). Бу вақтда тенгсизлик ечимга эга эмас. $b > 2a$ бўлганда у функциялар графиги $A\left(-\frac{b}{2};\ b\right)$ ва $B\left(\frac{b}{2};\ b\right)$ нуқтада кесишади (229- *б* шакл). Демак, (11) тенгсизлик $\left]-\frac{b}{2};\ \frac{b}{2}\right[$ соҳада ўринли.

Ж а в о б. а) $b \leqslant 2a \Longrightarrow$ ечими йўқ; б) $b > 2a \Longrightarrow x \in \left]-\frac{b}{2};\ \frac{b}{2}\right[$.

32- топшириқ. Модулли тенгламаларни ечинг:

1. а) $|2x + m| - |x - m| = \frac{3}{2}m$; б) $b - \frac{2b^2}{|3x + b|} = 0$; в) $|x^2 - a^2| =$



229-шакл,

$= (x+3a)^2$; г) $2|x-4n|+x=2|x-2n|$; д) $|x+6b|-|x-2b|=4b$;

е) $x-1+\frac{2|x+a|}{x-1}=\frac{a+1}{x-1}$; ж) $2x+\frac{|2x+a|}{x}=\frac{a}{2x}$.

2. а) $x-\frac{a^2}{x}+\frac{2a}{x}|x+a|=0$; б) $|x-a|+|x+a|=2b$.

33- топшириқ. Модулли тенгсизликларни ечинг:

а) $2|x+a|>3a+|x-2a|$; б) $|2x-3a|<|2x-a|-2a$;

в) $|x+4b|+|x-2b|<3x$; г) $|x^2-4a^2|>8a^2$; д) $|x|<\frac{a}{x}$;

е) $|x+4b|<\frac{16b^2}{|x-4b|}$; ж) $n+\frac{4n^2}{|x-2n|}\geqslant 0$; з) $|x-2a|<\frac{8a^2}{|x+2a|}$.

4. *Параметрли иррационал тенглама.* Бу ерда шу боб 5-§, 1 п. даги (1)÷(4) формулаларни қўллашга доир мисоллардан намуналар келтирамиз.

10-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{4x^2+ax-10a}=2x+1. \qquad (12)$$

Ечилиши. 308-бет (2) даги формулага биноан:

$$(12)\Longleftrightarrow\begin{cases}4x^2+ax-10a=(2x+1)^2,\\ 2x+1\geqslant 0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}(a-4)x=10a+1,\\ x\geqslant-\frac{1}{2},\end{cases}\Longleftrightarrow$$

бу ердан $a=4$ бўлганда (12) тенглама ечимга эга эмас, демак, $a\neq 4$ деб ечишни давом эттирамиз:

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}x=\frac{10a+1}{a-4},\\ x\geqslant-\frac{1}{2}\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x=\frac{10a+1}{a-4},\\ \frac{10a+1}{a-4}\geqslant-\frac{1}{2}\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x=\frac{10a+1}{a-4},\\ a\in\left]-\infty;\frac{2}{21}\right]\cup]4;+\infty[=D.\end{cases}$$

Жавоб. $a\overline{\in}D\Longrightarrow x=\frac{10a+1}{a-4}$, $a\overline{\in}D\Longrightarrow$ ечими йўқ.

11-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{a^2-x\sqrt{x^2+a^2}}=a-x. \qquad (13)$$

Ечилиши. Яна 308-бет (2) даги формулага биноан

$$(13)\Longleftrightarrow\begin{cases}a^2-x\sqrt{x^2+a^2}=(a-x)^2;\\ a-x\geqslant 0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x\sqrt{x^2+a^2}=x(2a-x), & (14)\\ x\leqslant a. & (15)\end{cases}$$

Агар $a=0$ бўлса, у ҳолда (15) дан $-\infty<x\leqslant 0$ бажарилгани келиб чиқиб, (14) дан бу соҳада $\sqrt{x^2}=-x$ тенглик ўринли эканлиги ҳосил бўлади. Демак, $a=0$ бўлганда (13) тенглама $]-\infty;0]$ тўпламли ечимга эга. Энди $a\neq 0$ бўлсин. У ҳолда

$$(13) \Longleftrightarrow \begin{cases} x\left(\sqrt{x^2+a^2}+x-2a\right)=0, \\ x \leqslant a \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0; \\ \begin{cases} x^2+a^2=(2a-x)^2, \\ 2a-x \geqslant 0; \end{cases} \end{array}\right. \\ x \leqslant a \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1=0, \\ x_2=\dfrac{3}{4}a, \\ x \leqslant 2a, \\ x \leqslant a. \end{cases}$$

Агар $a>0$ бўлса, у ҳолда $x_1=0$ ва $x_2=\frac{3}{4}a$ илдизлар a дан (демак, $2a$ дан ҳам) кичик, шунинг учун улар тенглама ечими; аксинча, $a<0$ бўлса, улар a дан (демак, $2a$ дан ҳам) катта, шунинг учун улар чет илдизлардир

Ж а в о б. $a<0 \Longrightarrow$ ечими йўқ; $a=0 \Longrightarrow]-\infty; 0]$; $a>0 \Longrightarrow \left\{0; \frac{3}{4}a\right\}$

12- м и с о л. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt[5]{a+x}+\sqrt[5]{a-x}=\sqrt[5]{2a}. \qquad (16)$$

Ечилиши. Бу ерда $a+x=y^5$, $a-x=t^5$ деб тенгламани симметрик алгебраик системага келтириб ечиш маъқул:

$$(16) \Longrightarrow \begin{cases} y^5+t^5=2a, \\ y+t=\sqrt[5]{2a} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (y+t)^5-5yt(y+t)^3+5y^2t^2(y+t)=2a \\ y+t=\sqrt[5]{2a} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -\sqrt[5]{(2a)^3}\,yt+\sqrt[5]{2a}\cdot y^2t^2=0, \\ y+t=\sqrt[5]{2a}. \end{cases} \qquad (17)$$

Бу ерда $a=0$ ва $a\neq 0$ ҳоллар ҳосил бўлади:

а) $a=0 \Longrightarrow (17) \Longleftrightarrow \begin{cases} y=-t, \\ y^5=x, \\ t^5=-x \end{cases} \Longleftrightarrow \sqrt[5]{x}=-\sqrt[5]{-x} \Longleftrightarrow x \in \mathbf{R}$;

б) $a\neq 0 \Longrightarrow (17) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\mathrm{A}) \begin{cases} yt=\sqrt[5]{4a^2}, \\ y+t=\sqrt[5]{2a} \end{cases} \text{ёки } (\mathrm{B}) \begin{cases} yt=0, \\ y+t=\sqrt[5]{2a}. \end{cases} \end{array}\right.$

Бунда (А) система ҳақиқий ечимга эга эмас. (В) эса ечимга эга; демак:

$$a\neq 0 \Longrightarrow (16) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0, \\ y^5=a+x; \end{cases} \\ \begin{cases} t=0, \\ t^5=a-x \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-a, \\ x_2=a. \end{array}\right.$$

Ж а в о б. $a=0 \Longrightarrow x \in \mathbf{R}$; $a\neq 0 \Longrightarrow \{\pm a\}$.

13- м и с о л. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}. \qquad (18)$$

Ечилиши. Тенгламанинг аниқланиш соҳасида $a \geqslant x$, $b \geqslant x$ шартлар бажарилган деб фараз қилсак, икки ҳол: $a \geqslant b$ ёки $b<a$ бўлиши мумкин.

1-ҳол. $a \geqslant b$. Бу вақтда тенглама $]-\infty; b]$ да аниқланган бўлиб, $a-x$ айирма бу соҳада нолга айланмайди (мусбат). У ҳолда $u^2=a-x$ ва $v^2=b-x$ деб белгиласак, $u>0$ ва $v \geqslant 0$ дир. Натижада

$$(18) \Longleftrightarrow \begin{cases} u^2-v^2=a-b \\ u+v=\sqrt{u^2+v^2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u^2-v^2=a-b, \\ uv=0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} u^2=a-b, \\ v=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a-x=a-b, \\ b-x=0 \end{cases} \Longleftrightarrow x=b.$$

2-ҳол. $a<b$. Бу вақтда тенглама $]-\infty; a]$ да аниқланган бўлиб, $b-x$ айирма бу соҳада нолга айланмайди (мусбат). Юқоридаги усулни такрорлаб, бу ҳолда ҳам $x=a$ ечим топилади.

Жавоб. $a \geqslant b \Longrightarrow \{b\}$; $a<b \Longrightarrow \{a\}$.

34-топшириқ. Иррационал тенгламаларни ечинг:

а) $\sqrt{x^2+ax-2a}=x+1$; б) $\sqrt{2x-1}-x+a=0$; в) $\sqrt{a-x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{a+b}\,(a+b \geqslant 0)$; г) $\sqrt{a-x}=a-\sqrt{-x}$; д) $\sqrt{x+4a}=\sqrt{x}+2\sqrt{b}$, $(b \geqslant 0)$; е) $2x+2ax+\sqrt{x}=0$; ж) $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=\sqrt[4]{x^2-a^2}$; з) $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x}=a+b$; и) $\sqrt{1{,}5x-a}=a-x$; к) $\sqrt[7]{a-x}+\sqrt[7]{x}=\sqrt[7]{a}$; л) $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a-x}=\sqrt[4]{b}$; м) $(a-y)^2=\sqrt[3]{a^6-y^6}$.

5. ***Параметрли иррационал тенгсизлик.*** Бу ерда 5-§ 2 п. 314-бетдаги (1)÷(7а) формулаларни қўллаб ечишга доир мисоллардан намуналар кўрсатамиз.

14-мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$\sqrt{x+2b}<2\sqrt{\frac{b^2}{x+2b}}+\sqrt{x+4b}. \qquad (19)$$

Ечилиши. $x+2b>0$; $x+4b \geqslant 0$, $\sqrt{b^2}=|b|$ бўлсин деб, тенгсизликнинг аниқланиш соҳасида:

$$(19) \Longleftrightarrow x+2b-2|b|<\sqrt{(x+2b)(x+4b)}$$

га эга бўламиз. Бу ерда уч ҳол бўлади:

1-ҳол $b>0$. Унда (19) $\Longleftrightarrow x<\sqrt{(x+2b)(x+4b)}$ бўлиб, 314-бетдаги (5) формулага биноан

$$(19) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0, \\ (x+2b)(x+4b) \geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 0, \ (x+2b)(x+4b) \geqslant 0, \\ x^2<x^2+6bx+8b^2 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2b \leqslant x<0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \geqslant -\frac{4}{3}b \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow x \geqslant -2b.$$

2-ҳол. $b=0$. Унда (19) $\Longleftrightarrow \sqrt{x}<\sqrt{x} \Longrightarrow$ ечими йўқ.

3-ҳол. $b<0$. Унда (19) $\Longleftrightarrow x+4b<\sqrt{(x+2b)(x+4b)}$. Тенгсизликнинг аниқланиш соҳасида $x+4b \geqslant 0$ шарти бор бўлгани учун бу тенгсизликнинг икки томонини $\sqrt{x+4b}>0$ га бўлиб юборсак,

$$(19) \Longleftrightarrow \sqrt{x+4b}<\sqrt{x+2b} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+4b \geqslant 0, \\ x+2b>0, \\ x+4b<x+2b \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -4b, \\ x>-2b, \\ 4b<2b \end{cases} \Longleftrightarrow x>-4b.$$

Ж а в о б. $b<0 \Longrightarrow [-4b;\ +\infty[$; $b=0 \Longrightarrow$ ечими йўқ; $b>0 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow [-2b;\ +\infty[$.

15- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$\sqrt{p+x}+\sqrt{p-x}>p. \qquad (20)$$

Ечилиши. Тенгсизликнинг D аниқланиш соҳаси $p+x\geqslant 0$, $p-x\geqslant 0$ шартларнинг бажарилиши билан ҳосил бўладиган тўпламдир. $p<0$ бўлганда $D=\varnothing$ бўлиб, тенгсизлик бу вақтда ечимга эга эмас. $p=0$ бўлганда $D=\{0\}$ бўлиб, тенгсизлик $x=0$ да қаноатланмайди. $p>0$ бўлса, $D=[-p;\ p]$ бўлиб, тенгсизликни шу соҳада ечамиз:

$$(20) \Longleftrightarrow (\sqrt{p+x}+\sqrt{p-x})^2>p^2 \Longleftrightarrow 2\sqrt{p^2-x^2}>p^2-2p. \qquad (21)$$

Бунда уч ҳол бўлади:

1- ҳ о л. $p^2-2p<0 \Longleftrightarrow 0<p<2$. Бу вақтда (21) тенгсизликнинг чап томони манфий, ўнг томони мусбат. Демак, $D=[-p;\ p]$ шу тенгсизликнинг ечимидир.

2- ҳ о л. $p^2-2p=0 \Longrightarrow p=2$. Бу вақтда тенгсизлик $2\sqrt{4-x^2}>0$ кўринишни олади. Демак, у $]-2;\ +2[$ каби ечимга эга.

3- ҳ о л. $p^2-2p>0$, яъни $p>2$. Унда (20) тенгсизликни яна квадратга оширамиз:

$$(20) \Longleftrightarrow 4(p^2-x^2)>p^4-4p^3+4p^2 \Longleftrightarrow x^2<\frac{1}{4}p^3(4-p). \qquad (22)$$

Бу ердан чиқадики, $p\geqslant 4$ да тенгсизликнинг ечими йўқ. $0<p<4$ бўлганда (22) дан ушбу ечим келиб чиқади:

$$(20) \Longleftrightarrow -\frac{1}{2}p\sqrt{p(4-p)}<x<\frac{1}{2}p\sqrt{p(4-p)}.$$

Бу ечим $D=[-p;\ +p]$ соҳага қисм-тўпламдир, чунки

$$\frac{1}{2}p\sqrt{p(4-p)}\leqslant p \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{4p-p^2}\leqslant 1 \Longleftrightarrow 4p-p^2\leqslant 4 \Longleftrightarrow (p-2)^2\geqslant 0.$$

Ж а в о б. $p\leqslant 0$ да ечими йўқ; $0<p<2 \Longrightarrow [-p;\ p]$; $p=2 \Longrightarrow]-2;\ 2[$; $2<p<4 \Longrightarrow \left]-\frac{1}{2}p\sqrt{p(4-p)};\ \frac{1}{2}p\sqrt{p(4-p)}\right[$; $p\geqslant 4 \Longrightarrow$ ечими йўқ.

16- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$\sqrt{a-x}+\sqrt{2a-x}>\sqrt{3a-2x}. \qquad (23)$$

Ечилиши. Тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси $a-x\geqslant 0$, $2a-x\geqslant 0$, $3a-2x\geqslant 0$ шартлари билан аниқланадиган x лар тўпламидан иборат. $a\geqslant 0$ бўлса, $a<\frac{3}{2}a<2a$ бажарилиб, $D_1=]-\infty;\ a]$ да (23) тенгсизлик аниқланган. $a<0$ бўлса, $2a<\frac{3}{2}a<a$ бажарилиб, (23) тенгсизлик $D_2=]-\infty;\ 2a[$ да аниқланган. 1) $a\geqslant 0$ бўлсин. У ҳолда

$$(23) \Longleftrightarrow \begin{cases}(\sqrt{a-x}+\sqrt{2a-x})^2>3a-2x,\\ x\in D_1\end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}2\sqrt{(a-x)(2a-x)}>x,\\ x\leqslant a\end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ x\leqslant a;\end{cases}\\ \begin{cases}x\geqslant 0,\ x\leqslant a,\\ 4(a-x)(2a-x)>x^2\end{cases}\end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{ x < 0; \\ \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 3x^2 - 3ax + 2a^2 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{ x < 0; \\ \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a, \\ x \in \mathbf{R}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Охирги икки системадан якуний жавоб $]-\infty;\ a]$ эканлиги чиқади. 2) $a < 0$ бўлсин. У ҳолда

$$(23) \Longleftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{a-x} + \sqrt{2a-x})^2 > 3a - x \\ x \in D_2 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(a-x)(2a-x)} > x, \\ x \leqslant 2a \end{cases} \Longleftrightarrow x \leqslant 2a,$$

яъни $x \in D_2$ бўлганда x доим манфий, шунинг учун охирги $2\sqrt{(a-x)(2a-x)} > x$ тенгсизлик доим бажарилади.

Жавоб. $a \geqslant 0 \Longrightarrow\ ]-\infty;\ a]$; $a < 0 \Longrightarrow\ ]-\infty;\ 2a]$.

35-топшириқ. Иррационал тенгсизликларни ечинг:

а) $\sqrt{2a+x} < a - \sqrt{x}$; б) $\sqrt{x+2a} > \sqrt{x} + \sqrt{a}$, $a \geqslant 0$; в) $\sqrt{2x} + \sqrt{2x+a} < a$; г) $2\sqrt{x^2 - ax} < 3a - 2x$; д) $\sqrt{-3x} > 6x + 3ax$; е) $\sqrt{a^2 - 4x} > 4x$; ж) $\sqrt{m-2x} + \sqrt{3m-2x} > 2\sqrt{m}$, $m \geqslant 0$; з) $\sqrt{x+p} + \sqrt{x-p} > 2$, $p \geqslant 0$; и) $\sqrt{n^2 - 4x^2} + 2\sqrt{nx - x^2} > n$; к) $\sqrt{n^2 + 3x} + \sqrt{m^2 + 3x} > n + m$, $m > n > 0$; л) $\sqrt{10x - p} \geqslant 5x$; м) $\sqrt{8x^2 + 3} < 2x - a$; н) $\sqrt{x-a} + \sqrt{-x-a} > -a$; о) $\sqrt{\dfrac{x+n}{n-x}} + \sqrt{\dfrac{n-x}{x+n}} \geqslant 2$.

6. *Параметрли логарифмик ва кўрсаткичли тенгламалар.*

IV боб, 6-§, I ва II пунктда кўрсатилган (1) ÷ (8а) ва (22) ÷ (30а) қоидалар асосида ечиладиган мисоллардан намуналар кўрсатамиз.

17-мисол. Тенгламани ечинг:

$$x^{\log_a x} = a^2 x. \tag{24}$$

Ечилиши. Тенглама $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ да маънога эга. a асосга кўра логарифмласак,

$$(24) \Longleftrightarrow \log_a^2 x = 2 + \log_a x \Longleftrightarrow (\log_a x + 1)(\log_a x - 2) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \{ x_1 = a^2,\ \ x_2 = a^{-1} \}.$$

Жавоб. $a > 0$, $a \neq 1 \Longrightarrow \left\{ a^2;\ \dfrac{1}{a} \right\}$; $a \leqslant 0$ ёки $a = 1 \Longrightarrow$ ечими йўқ.

18-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\frac{\log_x(2a - x)}{\log_x 2} + \frac{\log_a x}{\log_a 2} = \frac{1}{\log_{(a^2-1)} 2}. \tag{25}$$

Ечилиши. Тенглама $x > 0$, $x \neq 1$, $a > 0$, $a \neq 1$, $a^2 > 1$ ва $a^2 - 1 \neq 1$ да маънога эга. a лар учун қўйилган шартдан $a > 1$ ва $a \neq \sqrt{2}$ экани келиб чиқади. $2a - x > 0$ шартидан $x < 2a$ деган хулоса, яъни $D = \{0 < x < 2a,\ x \neq 1\}$ каби аниқланиш соҳаси топилади. $a > 1$, $a \neq \sqrt{2}$, $0 < x < 2a$, $x \neq 1$ лар учун

$$(25) \Longleftrightarrow \log_2(2a-x)+\log_2 x=\log_2(a^2-1) \Longleftrightarrow (2a-x)x=a^2-1 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (x-a)^2=1 \Longleftrightarrow x_{1,2}=a\pm 1.$$

a га қўйилган шартлар $x_1=a+1$ нинг ечим эканлигини. $x_2=a-1$ нинг эса $a=2$ дан ташқари ҳолда ечимлигини кўрсатади. Шуларни умумлаштириб жавоб ёзамиз.

Ж а в о б. $a\in\,]1;\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2};2[\cup]2;+\infty[\Longrightarrow\{a\pm 1\}$; $a=2\Longrightarrow\{3\}$; $a=\sqrt{2}$ ёки $a\leqslant 1\Longrightarrow$ ечими йўқ.

19- м и с о л. Тенгламани ечинг:

$$\log_{ax}(a-x)=1. \qquad (26)$$

Ечилиши. $a-x>0$, $ax>0$, $ax\neq 1$ шартларга кўра

$$(26)\Longleftrightarrow\begin{cases}x<a,\ x\neq\dfrac{1}{a},\\ ax>0,\\ a-x=ax\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a}{a+1},\\ ax=\dfrac{a^2}{a+1}>0,\\ ax=\dfrac{a^2}{a+1}\neq 1\end{cases}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a}{a+1},\\ a>-1,\ a\neq 0,\\ a^2-a-1\neq 0\end{cases}\Longleftrightarrow x=\frac{a}{a+1},\ a>-1,\ a\neq\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};\ a\neq 0.$$

36-топшириқ. Тенгламаларни ечинг:

а) $3\cdot 16^{x-1}+27=a+a\cdot 16^{x-1}$; б) $a^{2\lg x-\lg(6-x)}=1$; в) $a^{1+\log_3 x}+a^{1-\log_3 x}=a^2+1$; г) $\log_a(1-\sqrt{1-x})=\log_{a^2}(3-\sqrt{1+x})$; д) $\log_{\frac{x^3}{a}}a+\log_{a^3}x=1$; е) $2-\log_{a^2}(1+x)=3\log_a\sqrt{x-1}-\log_{a^2}(x^2-1)^2$; ж) $\log_a x+\log_9\dfrac{2-x}{2}=\log_9\log_9 a$; з) $\log_a x+\log_{\sqrt{a}}x+\log_{\sqrt[3]{a}}x=27$.

7. *Параметрли логарифмик ва кўрсаткичли тенгсизликлар.*

20- м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$\log_{a+x}x<\log_a x^2,\ a>0,\ a\neq 1. \qquad (27)$$

Ечилиши. Тенгсизликдан кўринадики, у $x>0$ да маънога эга, демак, $\log_a x^2=2\log_a x$ эканлигидан

$$(27)\Longleftrightarrow\log_a x\cdot\frac{1-2\log_a(x+a)}{\log_a(x+a)}<0. \qquad (27а)$$

1- ҳ о л. $a>1$ бўлсин. $x>0$ бўлгани учун $a>1\Longrightarrow x+a>a>1\Longrightarrow\Longrightarrow\log_a(x+a)>1>0$ ва $1-2\log_a(x+a)<0$. Демак,

$$(27а)\Longleftrightarrow\log_a x\geqslant 0\Longleftrightarrow x\geqslant 1.$$

2- ҳ о л. $0<a<1$ бўлсин. а) $x>1$ бўлганда $\log_a x<0$, $\log_a(x+a)<0$ ва $1-2\log_a(x+a)>0$ бажарилиб, (27а) тенгсизлик ноўрин бўлади; б) $x=1$ эса (27 а) тенгсизликнинг ечимидир; в) $0<x<1$ бўлганда $\log_a x>0$ бажарилади ва

$$(27\text{ а})\iff \frac{1-2\log_a(x+a)}{\log_a(x+a)}\leqslant 0 \iff \left[\begin{array}{l}\log_a(x+a)<0,\\ \log_a(x+a)\geqslant -\frac{1}{2}\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}x>1-a,\\ x\leqslant\sqrt{a}-a.\end{array}\right.$$

Энди $0<x<1$ эканлигидан $]0;\ \sqrt{a}-a[\cup]1-a;\ 1[$ ечим иккинчи ҳол учун аниқланди.

Ж а в о б. $0<a<1 \Longrightarrow\ ]0;\ \sqrt{a}-a[\cup]1-a;\ 1];\ a>1 \Longrightarrow [1;\ +\infty[$.

21-м и с о л. Тенгсизликни ечинг:

$$\frac{2a^x-1}{a^x-1}>\frac{1-a^{-x}}{1-2a^{-x}},\ a>0,\ a\neq 1. \qquad (28)$$

Ечилиши. $y=a^x$ деб (28) дан ушбу рационал тенгсизликни ёза оламиз:

$$(28)\Longrightarrow \frac{y-0{,}5}{(y-1)(y-2)}<0.$$

Унинг y га нисбатан $\left]0;\ \frac{1}{2}\right[\cup]1;\ 2[$ каби ечими интерваллар усули билан топилади. Энди x га нисбатан ечамиз:

$$\text{а) } 0<a<1 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l}0<y<\frac{1}{2},\\ 1<y<2\end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l}0<a^x<\frac{1}{2},\\ 1<a^x<2\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}-\log_a 2<x<\infty,\\ \log_a 2<x<0;\end{array}\right.$$

$$\text{б) } a>1 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l}0<y<\frac{1}{2},\\ 1<y<2\end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l}0<a^x<\frac{1}{2},\\ 1<a^x<2\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}-\infty<x<-\log_a 2,\\ 0<x<\log_a 2.\end{array}\right.$$

Ж а в о б. $0<a<1 \Longrightarrow\ ]\log_a 2;\ 0[\cup]-\log_a 2;\ +\infty[;\ a>1 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow\ ]-\infty;\ -\log_a 2[\cup]0;\ \log_a 2[$.

37-топшириқ. Қуйидаги тенгсизликларни ечинг:

1. а) $\log_a(x-1)+\log_a x>2,\ a>0,\ a\neq 1$; б) $3\log_a^2 x+\log_a x>0,\ a>0,\ a\neq 1$; в) $a^{x^2-x}<a^2,\ a>0,\ a\neq 1$; г) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+a)>-3$;

д) $\log_x(x-a)>2$; е) $4\log_a x+1<3\log_x a,\ a>0,\ a\neq 1$; ж) $\frac{1+a^{-x}}{1+2a^{-x}}-$ $-\frac{a^x}{a^x-1}<0$; з) $\log_{\frac{x}{a}} a>\log_{a^2x} a^2$.

2. а) $x^{\log_a x+1}>a^2x,\ a>0,\ a\neq 1$; б) $\log_{ax}(x-2a)<-1$; в) $4+$ $+\frac{1}{\log_x a}>\frac{16}{\log_a x-2},\ a>0,\ a\neq 1$; г) $\log_a\frac{1+\log_a^2 x}{1-\log_a x}<0,\ a>0,\ a\neq 1$; д) $\log_{\sqrt{a}}(a+2x-x^2)<2$; е) $6\log_x a<1+\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$;

ж) $\log_{a^2x} x^3 + \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} \sqrt{x} < 2$, $a > 0$, $a \neq 1$; з) $3\log_{a^2} x + 2 > \log_x a^2$, $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$; и) $x^{\log_a x} < a^2$, $a > 0$, $a \neq 1$; к) $\log_{b^2}(x - 3b) > -1$.

8. *Параметрли тригонометрик тенгламалар*

22 мисол. Тенгламани ечинг:

$$a^2 + a - \sin^2 x + 2a\cos x = 1. \qquad (29)$$

Ечилиши. (29) $\Longleftrightarrow \cos^2 x - 2a\cos x + a^2 + a - 2 = 0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = a + \sqrt{2-a},\\ \cos x = a - \sqrt{2-a}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_n = \pm\arccos(a + \sqrt{2-a}) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z};\\ x_k = \pm\arccos(a - \sqrt{2-a}) + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}\end{array}\right.$$

Бунда x_n илдизлар учун $|a + \sqrt{2-a}| \leqslant 1$, x_k илдизлар учун $|a - \sqrt{2-a}| \leqslant 1$ бажарилувчи a лар назарда тутилади.

а) $|a + \sqrt{2-a}| \leqslant 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} a + \sqrt{2-a} \leqslant 1,\\ a + \sqrt{2-a} \geqslant -1\end{cases} \Longleftrightarrow a \in \left[\frac{-3-\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] = D_1$;

б) $|a - \sqrt{2-a}| \leqslant 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} a - 1 \leqslant \sqrt{2-a},\\ a + 1 \geqslant \sqrt{2-a}\end{cases} \Longleftrightarrow a \in \left[\frac{-3+\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] = D_2$.

Жавоб: $a \in D_1 \Longrightarrow x_n = \pm\arccos(a + \sqrt{2-a}) + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;
$a \in D_2 \Longrightarrow x_k = \pm\arccos(a - \sqrt{2-a}) + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

23 мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sin(a + x) - \frac{\cos a}{\sin x} = 0. \qquad (30)$$

Ечилиши. $\sin x \neq 0$ десак,

(30) $\Longleftrightarrow \sin x \sin(a + x) - \cos a = 0 \Longleftrightarrow \cos(2x + a) = -\cos a \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \cos(2x + a) = \cos(\pi - a) \Longleftrightarrow 2x + a = \pm(\pi - a) + 2\pi k \quad k \in \mathbf{Z}$.

а) $2x + a = -\pi + a + 2\pi k \Longrightarrow x_k = -\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Бу тенгламанинг ечими бўла олади, чунки $\sin x_k \neq 0$.

б) $2x + a = \pi - a + 2\pi n \Longrightarrow x_n = -a + \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Агар $\sin x_n$ ни текширсак, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n - a\right) \neq 0$ бўлиши учун $a \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$ $(m \in \mathbf{Z})$ бўлиши керак.

Жавоб. 1) $a = \frac{\pi}{2} + \pi m$ $(m \in \mathbf{Z}) \Longrightarrow \left\{-\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$; 2) $a \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$ $(m \in \mathbf{Z}) \Longrightarrow \left\{-a + \frac{\pi}{2} + \pi n,\ -\frac{\pi}{2} + \pi k;\ n, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

38-топшириқ. Тенгламаларни ечинг.

1. а) $\sin^2 2x + a\sin 4x = \frac{1}{2}$; б) $(3-a)\mathrm{tg}^2 x - 2\cdot \mathrm{tg}\, x - (a+3) = 0$; в) $\sin^4 x + \cos^4 x = a$; г) $\cos 2x - \cos 4x = a\sin x$; д) $1 + \sin^2 ax = \cos x$; е) $\sin^6 x + \cos^6 x = a$; ж) $4\cos^2 x + 2\cos x + a - 1 = 0$; з) $\sin(x-a) = \sin x + \sin a$; и) $a(\sin x + \cos x)^2 = b\cos 2x$.

2. а) $\cos(a+x) = \frac{\cos a}{\cos x}$; б) $\sin 3x = a\sin x$; в) $\cos 3x = a\cos x$; г) $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, a + 1 = \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, a$; д) $\sin(a+x) + \sin x = \cos\frac{a}{2}$; е) $2\cos(a+x) = \frac{\cos a}{\cos x}$; ж) $\mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\, a\, \mathrm{tg}\, x + 1 = 0$; з) $\frac{a+\sin x}{a\cos x + 1} = \frac{a+\cos x}{a\sin x + 1}$; и) $\frac{\mathrm{tg}\, ax}{\sin bx} = 0$; к) $\sin 3x + \sin 2x = a\sin x$; л) $\sin^4 x - 2\cos^2 x + a^2 = 0$.

10-§. Геометрия масалалари

1. Масала ва уни ечиш. *Масала* деб, маълум шартларга кўра қўйилган саволга жавоб беришни талаб этувчи ҳар қандай жумлага айтилади.

Масалани ечиш ушбу босқичларни бажаришдир:

— масалани таҳлил қилиш;

— масалани схематик ёзиб олиш;

— ечиш усулини излаш;

— маъқул топилган бирор усулда ечиб чиқиш;

— ечимларнинг масала шартларини қаноатлантиришини синаб кўриш;

— текшириш (мазкур шартлар асосида масала ечимга эга ёки ечимга эга эмаслиги текширилади);

— масала ечимининг баёнини бериш;

— ечиш усулини таҳлил қилиш (рационал ёки умумий ечиш усули бор-йўқлиги ҳақида хулосалар).

Бу босқичлар умумий бўлиб, унинг баъзилари ечиш жараёнида бажарилмаслиги мумкин.

Шуни ҳам таъкидлаймизки, бир масала бир неча усул билан ечилса, уни бажарган киши, унда қўлланилаётган турли фактларнинг ўзаро алоқадор эканлигини кўриш имкониятига эга бўлади. (Қуйида 395-бетдаги 16-масалага қаранг.)

Масалалар *стандарт* ёки *ностандарт* бўлади*. *Стандарт масалалар* деб, шундай масалаларга айтиладики, уларнинг ҳар бирининг ечиш тартиби бирор бир математик қоида ёки тасдиқлар билан аниқ берилади.

Ностандарт масалаларни умумий ечиш усули мавжуд бўлмай, балки:

---

* Бу ерда масала сифатида мисолларни ҳам тушуниш мумкин.

— бирор эквивалент алмаштириш билан стандарт масалага келтирилади.

— мантиқий таҳлил билан у бир нечта стандарт масалаларга ажратилади (322-бетдаги 11—12-мисоллар).

Ностандарт масалани бундай ечиш йўли, одатда, сунъий усул (ёки „эврик“ қоида) деб аталади. Кўп машқ қилиб, етарли тажриба орттирган киши ностандарт масалаларни ечишда зарур усулни осон аниқлай олади.

2. Геометрик масалаларнинг типлари. Геометрик масалалар қўйилган талабига асосан уч типга бўлинади:

1) ясашга доир масалалар;

2) ҳисоблашга доир масалалар;

3) исботлашга доир масалалар.

I. Ясашга доир масалалар. Бу типдаги масалаларда маълум элементларига кўра фигурани ясаш талаб этилади. Одатда, бундай масалалар циркуль ва чизғич ёрдамида ҳал этилиши лозим. Бунда чизғич ва циркульнинг ушбу асосий имкониятлари назарда тутилади:

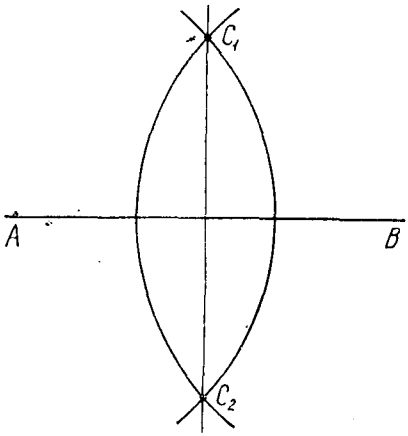
Чизғич билан: (а) икки нуқтани кесма билан туташтириш; (б) икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқни ясаш. (в) нуқтадан чиқувчи ва берилган нуқтадан ўтувчи нурни чизиш;

Циркуль билан: (г) берилган марказ ва радиус (кесма) га кўра айлана ясаш; (д) марказ ва айлана ёйига кўра айлананинг ўзини ясаш.

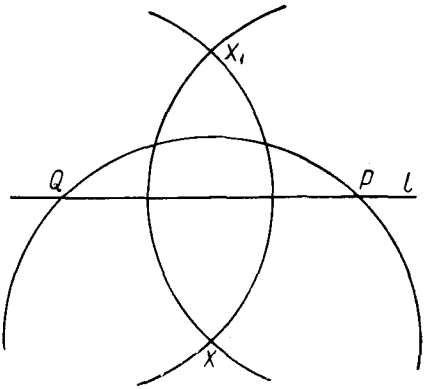
Шунингдек: (е) икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасини ясаш; (ж) айлана ва тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасини ясаш; (з) икки айлананинг кесишиш нуқталарини ясаш; (и) тўғри чизиқ ёки айлана ташқарисида ихтиёрий нуқтани белгилай олиш; (к) текисликда ихтиёрий тўғри чизиқни ясаш.

Ҳар қандай ясашга доир масалани ечиш (а), . . . , (к) лар асосида амалга оширилади.

Қуйида ясашга доир содда масалалар келтирамиз.



230-шакл.



231-шакл.

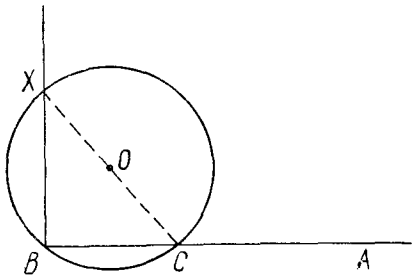
1-масала. AB кесманинг ўртасидан унга перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказинг.

Ясаш. Маркази A ва B да бўлган $r > \frac{|AB|}{2}$ радиусли икки айлана $-(A, r)$ ва (B, r) ни ясаймиз. Улар C_1 ва C_2 нуқталарда кесишади (230-шакл). C_1C_2 изланган тўғри чизиқдир.

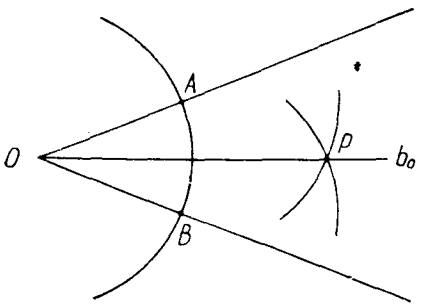
2-масала. l тўғри чизиққа нисбатан берилган X нуқтага $(X \overline{\in} l)$ симметрик нуқта ясанг.

Ясаш. R радиуси X нуқтадан l гача бўлган p масофадан катта бўлган (X, R) айлана ясаймиз (231-шакл). P ва Q шу айлананинг l тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтаси. (P, R) ва (Q, R) айланаларнинг иккинчи кесишиши нуқтаси $X_1 = S_l(X)$ изланган нуқтадир.

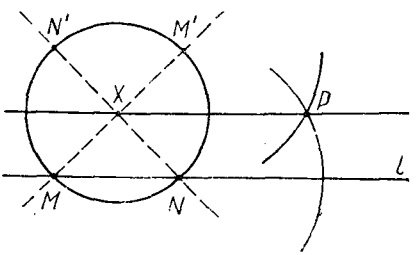
Натижа. $(XX_1) \perp l$ дир, шунинг учун l тўғри чизиқ ташқарисидаги X нуқтадан унга перпендикуляр тўғри чизиқ шу усулда ясалади.



232-шакл.



233-шакл.



234-шакл.

3-масала. Берилган нур учидан, уни давом эттирмай перпендикуляр ясанг.

Ясаш. BA нур ташқарисидаги ихтиёрий O нуқтадан $(O, |OB|)$ айлана чизсак, у нур билан яна бирор C нуқтада кесишади (232-шакл). Сўнг CO тўғри чизиқни ясаб, уни шу айлана билан X нуқтада кесишишини аниқлаймиз. BX тўғри чизиқ—изланган перпендикулярдир, чунки $\angle CBX$ бурчак CX диаметрга тиралган.

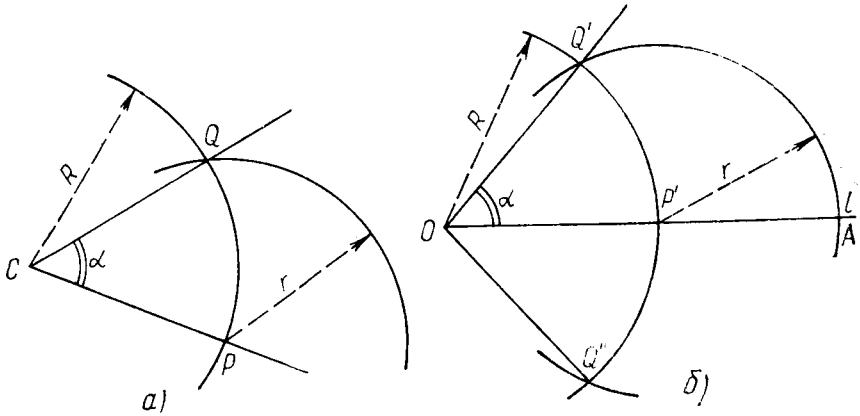
4-масала. Берилган $\angle AOB$ бурчак биссектрисасини ясанг.

Ясаш. Берилган $\angle AOB$ бурчакда $(O; |OB|)$ айлана ясаб, унинг бурчак томонлари билан кесишиш нуқталарини A ва B билан, $(A, |OB|)$ ва $(B, |OB|)$ айланаларнинг бурчак ичидаги кесишиш нуқтасини P билан белгилайлик (233-шакл). OP нур бурчакнинг изланган биссектрисасидир, чунки $|OA| = |OB|$ бажарилган.

5-масала. l тўғри чизиққа ундан ташқаридаги X нуқтадан параллел тўғри чизиқ ўтказинг.

Ясаш. R радиуси X нуқтадан l гача бўлган масофадан катта бўлган (X, R) айлана l тўғри чизиқ билан M ва N нуқтада кесишади (234-шакл) XM ва XN тўғри чизиқлар шу айлана билан M' ва N' нуқталарда кесишади. NXM' бурчакнинг биссектрисаси (4-масала) аниқлаган XP тўғри чизиқ изланган тўғри чизиқдир.

6-масала. OA нурда учи O нуқтада бўлган, бир томони шу нурда ётган ва қиймати берилган $\angle QCP = \alpha$ бурчакка тенг бўлган бурчак ясанг.

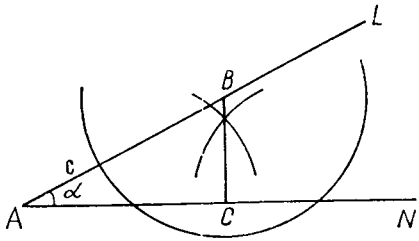


235-шакл.

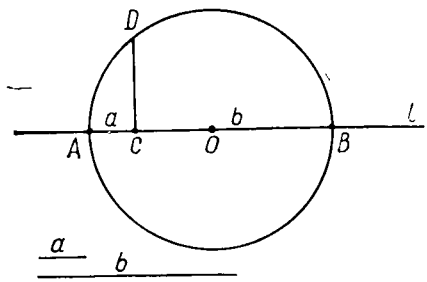
Ясаш Маркази C нуқтада бўлган (C. R) айлананинг PQ ёйини ясайлик (235-*а* шакл). Сўнг (O, R) айлана чизиб, OA нурда P' нуқтани белгилайлик. (235-*б* шакл). $r = |PQ|$ деб, (P', r) айланани чизсак, у (O, R) айлана билан Q' ва Q'' нуқталарда кесишади. Натижада ҳосил бўлган $\angle P'OQ'$ ва $\angle P'OQ''$ бурчаклар изланган бурчаклардир.

7-масала. Гипотенузаси ва бир ўткир бурчаги берилган тўғри бурчакли учбурчак ясанг.

Ясаш. Берилган α бурчакка тенг NAL бурчак ясаб (6-масала) бу бурчакнинг бир томонига, масалан, AL га гипотенузага тенг $|AB| = c$ кесма қўямиз (236-шакл). AB кесманинг B учидан AN тўғри чизиққа BC перпендикуляр туширамиз (2-масала натижаси). Шу перпендикулярнинг AN даги асосини C десак, ҳосил бўлган ABC учбурчак изланган учбурчакдир, чунки $\angle A = \alpha$, $|AB| = c$.



236-шакл.

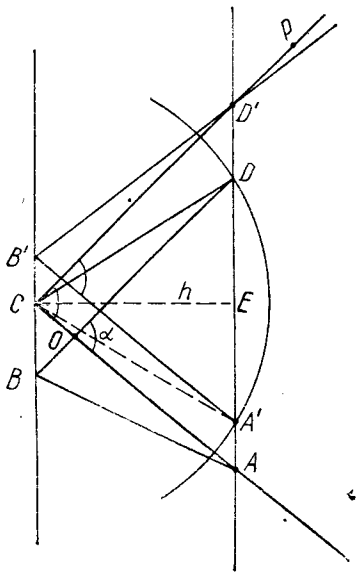


237-шакл.

8-масала. a ва b узунликдаги икки кесмага кўра, узунлиги $\sqrt{ab}$ га тенг кесма ясанг.

Ясаш. Бирор l тўғри чизиқда AC ($|AC| = a$) ва CB ($|CB| = b$) кесмаларни қўйиб (237-шакл), AB диаметрли айлана чизамиз. Сўнг AB га перпендикуляр қилиб CD кесмани ясасак, $|CD| = \sqrt{ab}$ дир. (196-бетдаги 1-теорема).

9-масала. Икки диагонали (d_1 ва d_2) ҳамда улар орасидаги бурчаги (α), бир ён томони (a) бўйича трапеция ясанг.



238-шакл.

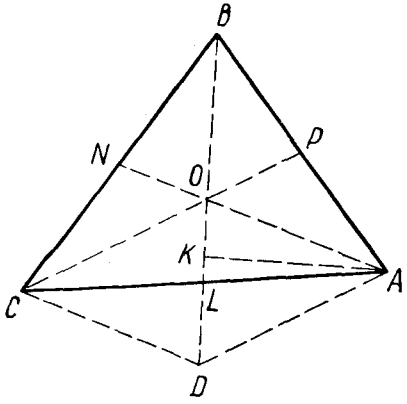
Ясаш. $ABCD$ трапеция ясаш учун бирор C нуқта олайлик ва $|AC| = d_1$ шарт билан CA нурда AC кесма олайлик (238-шакл). Сўнг берилган α бурчак остида ACP бурчагини ясайлик (6-масала). Унинг CP томонида $|CD'| = d_2$ шарт билан узунлиги иккинчи диагонал узунлигига тенг CD' кесма ажратиб, ACD' учбурчак чизайлик. AD' тўғри чизиқ устида D нуқтани шундай оламизки, $|CD| = a$ бўлсин. Сўнг C нуқтадан AD' га параллел қилиб, D нуқтадан CP га параллел қилиб тўғри чизиқлар ўтказсак, улар бирор B нуқтада кесишади. Натижада AB, BC, CD ва DA кесмалар изланган $ABCD$ трапецияни ҳосил қилади, чунки $|AC| = d_1$, $|BD| = |CP| = d_2$, $CD = a$ ва $\angle AOD = \angle ACP = \alpha$.

Текшириш. 238-шаклдан кўринадики, $a > h$ ($|CE| = h$ трапеция баландлиги) бўлганда масала икки, $a = h$ да бир ечимга эга, $a < h$ да ечимга эга эмас. (Шунингдек бу масаланинг иккинчи ечими ҳам бор, унинг учун $A'C'B'D'$ трапеция ҳам масала шартини қаноатлантиришини кўрсатинг.)

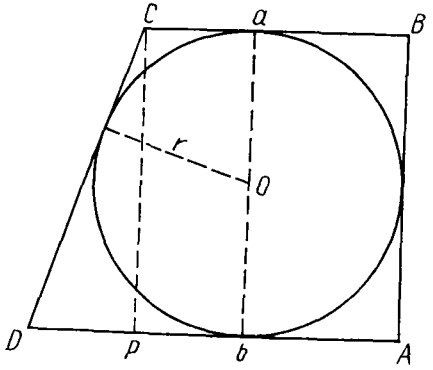
39-топшириқ. Ушбу содда ясашларни бажаринг:

1. Берилган кесмани бир неча тенг бўлакка бўлинг (масалан, 3 га).
2. Уч томонига кўра учбурчакни ясанг (165 — 166-бетлар).
3. Икки томони ва улар орасидаги бурчагига кўра учбурчак ясанг.
4. Бир томони ва унга ёпишган икки бурчагига кўра учбурчак ясанг.
5. Тўғри бурчакли учбурчакни: а) икки катетига кўра; б) катети ва гипотенузасига кўра; в) катети ва ўткир бурчагига кўра ясанг.
6. Икки томони ва баландлиги бўйича учбурчак ясанг.
7. b асоси ва h_a баландлигига кўра тенг ёнли учбурчак ясанг.
8. Катети ва гипотенузасига туширилган медианаси бўйича тўғри бурчакли учбурчак ясанг.
9. Икки томони ва улардан бирининг қаршисидаги бурчагига кўра учбурчак ясанг.
10. Айланага ундан ташқарида олинган нуқтадан уринма ўтказинг.
11. Икки нуқтадан ўтувчи маълум радиусли айлана ясанг.
12. Берилган A ва B нуқтадан ўтиб, маълум l тўғри чизиққа уринувчи айлана ясанг.
13. Берилган айланага уриниб, берилган тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ ясанг.
14. Берилган икки айланага умумий уринма ўтказинг.
15. $ABCD$ параллелограммни AB томони, A ўткир бурчаги, $h = |BH|$ баландлигига кўра ясанг.
16. Бир томони ва диагонали бўйича тўғри тўртбурчак ясанг.
17. Ўткир бурчаги ва кичик диагонали бўйича ромб ясанг.
18. Икки асоси ва катта асосидаги бурчагига кўра трапеция ясанг.

II. *Ҳисоблашга доир масалалар.* Бу типдаги масалаларда маълумлар асосида номаълумни ҳисоблаш талаб этилади. Бу каби масалаларни (ва умуман геометрик масалаларни) ечишда масала шартига ва талабига мос келувчи зарур чизма аниқ



239-шакл.



240-шакл.

чизилиб, сўнгра масалада берилган ва сўралганлар орасидаги муносабатларга мос келувчи назарий тушунчалардан ўринли фойдаланиш лозим.

10-масала. ABC учбурчакнинг m_a, m_b, m_c медианасига кўра унинг юзини ҳисобланг.

Ечилиши. $\triangle ABC$ да $|AN| = m_a$, $|BL| = m_b$, $|CP| = m_c$ (239-шакл). BL ни BD гача $|LD| = |LO|$ шарт билан давом эттирайлик ва $AOCD$ параллелограммни ясайлик. $|OD| = |OB| \Rightarrow S_{AOD} = S_{AOB}$, чунки улар умумий AK баландликка эга. У ҳолда $S_{ABC} = 3 \cdot S_{AOD}$ эканлигини кўриш қийин эмас. $|OA| = \frac{2}{3} m_a$, $|OD| = |OB| = \frac{2}{3} m_b$, $|AD| = |OC| = \frac{2}{3} m_c$ бўлгани учун AOD учбурчакнинг ярим периметри $p = \frac{1}{2}(|OA| + |OD| + |AD|) = \frac{1}{3}(m_a + m_b + m_c)$. Герон формуласига кўра:

$$S_{ABC} = 3 \cdot S_{AOD} = 3\sqrt{p\left(p - \frac{2}{3} m_a\right)\left(p - \frac{2}{3} m_b\right)\left(p - \frac{2}{3} m_c\right)} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_a + m_b - m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_c + m_a - m_b)}.$$

11-масала. Томонлари узунлиги арифметик прогрессияни ташкил қилувчи учбурчакнинг бурчаклари катталиги ҳам арифметик прогрессия ҳосил қилади. Бундай хоссали учбурчаклар қандай типга мансуб?

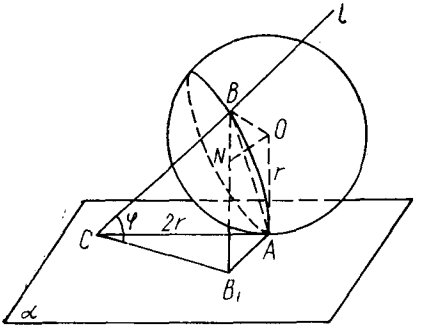
Ечилиши. Учбурчакнинг томонлари a, $a + d$, $a + 2d$ каби муносабатда бўлиб, бурчаклари ҳам A, $A + \gamma$, $A + 2\gamma$ $(\gamma \geqslant 0)$ шартни қаноатлантиради. $A + A + \gamma + A + 2\gamma = \pi \Rightarrow A + \gamma = \frac{\pi}{3}$. Косинуслар теоремасига кўра:

$(a + d)^2 = a^2 + (a + 2d)^2 - 2a(a + 2d)\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow d = 0$. Демак, $\gamma = 0$.

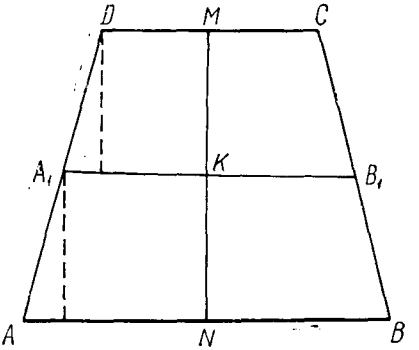
Жавоб. Учбурчак тенг томонли экан

12-масала. Асослари a ва b бўлган тўғри бурчакли трапеция айланага ташқи чизилган Айлана радиусини топинг.

Ечилиши. Айтайлик, r радиусли айланага $ABCD$ тўғри бурчакли трапеция ташқи чизилган (240-шакл). Шаклдан $|AB| = 2r$. Агар $|BC| = a$, $|AD| = b$ десак, трапециянинг айланага ташқи чизилгани учун $|BC| + |AD| =$



241-шакл.



242-шакл.

$= |AB| + |CD|$. Демак, $|CD| = a + b - 2r$. AD га CP перпендикуляр туширсак, $|PD| = b - a$ ва $|CP| = |AB| = 2r$ бажарилади. Бу ерда $|CD|^2 = CP^2 + PD^2 \Rightarrow (a + b - 2r)^2 = 4r^2 + (b - a)^2$. Демак, $r = \dfrac{ab}{a + b}$.

13-масала. r радиусли шар α текисликка A нуқтада уринади. Шу текисликни C нуқтада кесувчи l тўғри чизиқ у билан φ бурчак ҳосил қилади ва шарга B нуқтада уринади. $|AC| = 2r$ бўлса, AB кесма узунлигини топинг.

Ечилиши. $|AO| = |BO| = r$, $|CB| = |CA| = 2r$, $\angle BCB_1 = \varphi$, бунда B_1 нуқта B нинг α текисликдаги проекцияси (241-шакл). $|AB|$ аниқланиши керак. $\triangle ABB_1$ тўғри бурчакли учбурчак бўлгани учун $|AB| = \sqrt{|AB_1|^2 + |BB_1|^2}$ $\triangle CBB_1$ ҳам тўғри бурчакли, демак, $|BB_1| = |CB| \cdot \sin\varphi \Rightarrow |BB_1| = 2r \cdot \sin\varphi$. $|AB_1|$ ни топиш учун $[OA] \parallel [BB_1]$ эканлигидан BB_1 кесманинг шар билан кесишиш нуқтаси N ни аниқлаб, $|AB_1| = |ON|$ нинг бажарилишидан фойдаланамиз. l тўғри чизиқ шарга уч ҳолатда уринади.

1-ҳол. N нуқта BB_1 кесманинг учидан фарқли нуқтаси бўлсин, у ҳолда $|NB| = |BB_1| - |NB_1| = 2r\sin\varphi - r \Rightarrow |ON|^2 = |OB|^2 - |NB|^2 = 4r^2\sin\varphi\,(1 - \sin\varphi)$.

2-ҳол. N нуқта BB_1 кесма давомида бўлсин. У ҳолда

$$|NB| = |NB_1| - |BB_1| = r - 2r\sin\varphi \Rightarrow |ON|^2 = 4r^2\sin\varphi\,(1 - \sin\varphi).$$

3-ҳол. B ва N нуқта устма-уст тушса $\varphi = 30°$ бўлиб, шу муносабат сақланишини кўрсатиш қийин эмас.

Натижада $|AB|^2 = |AB_1|^2 + |BB_1|^2 = |ON|^2 + |BB_1|^2 = 4r^2\sin\varphi$ келиб чиқади.

Жавоб. $2r\sqrt{\sin\varphi}$.

14-масала. Кесик конуснинг катта асос радиуси кичик асос радиусидан уч марта катта. У баландлигининг ўртасидан асосига параллел текислик билан кесилса, ҳосил бўлган кесик конуслар ҳажмлари нисбатини ҳисобланг.

Ечилиши. $ABCD$ трапеция унинг ўқ қисми бўлсин (242-шакл). Масала шартидан $|MD| = x$, $|NA| = 3x$, $|MN| = h$, $|NK| = |KM| = \frac{1}{2}h$ деб белгилаб оламиз, у ҳолда $V_1 : V_2$ нисбатни топиш керак. Бунда V_1 ва V_2 кесилишдан ҳосил бўлган катта ва кичик кесик конуслар ҳажми.

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot |NK| \cdot (|NA|^2 + |NA| \cdot |KA_1| + |KA_1|^2),$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot |KM| (|KA_1|^2 + |KA_1| \cdot |DM| + |DM|^2)$$

бўлгани учун ва $|KA_1| = \frac{1}{2}(|AN| + |DM|) = \frac{x+3x}{2} = 2x$ эканлигидан

$$V_1 = \frac{2\pi h}{3}(9x^2 + 3x \cdot 2x + 4x^2) = \frac{38\pi h}{3}x^2; \quad V_2 = \frac{2 \cdot h}{3}(4x^2 + 2x \cdot x + x^2) = \frac{14\pi h}{3}x^2.$$

Бу ердан $V_1 : V_2 = 19 : 7$.

40- топшириқ. Ҳисоблашга доир масалаларни ечинг.

Планиметрия

1. Юзи 314 дм² бўлган доира айланасини 2:3:5:8 нисбатда бўлувчи нуқталарни кетма-кет бирлаштириб ҳосил қилинган тўртбурчак юзини топинг.

2. Асосидаги бурчаги α, ташқи айланаси радиуси R бўлган тенг ёнли учбурчакнинг томонлари ва юзини топинг.

3. Периметри 36 см бўлган тўғри бурчакли учбурчакка ички чизилган айлана гипотенузани 2:3 нисбатда бўлиб уринади. Учбурчакнинг томонларини топинг.

4. r радиусли айланага тўғри бурчакли трапеция ташқи чизилган бўлиб, унинг томонларидан энг кичиги $\frac{3r}{2}$ га тенг. Трапециянинг юзини топинг.

5. Тўғри бурчакли учбурчакка ташқи ва ички чизилган айлана радиуслари R ва r бўлса, учбурчак юзини топинг.

6. Радиуси 13 см ли айлана томони 18 см ли квадратнинг икки қўшни томонига уринади. У қолган томонларини қандай узунликларда бўлади?

7. Катетлари 12 ва 5 бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг ички ва ташқи айлана марказлари орасидаги масофани топинг.

8. Асослари 24 см, 8 см ва баландлиги 12 см бўлган тўғри бурчакли трапецияга ички чизилган энг катта юзли тўғри тўртбурчакнинг периметрини топинг.

9. Периметри 56 см бўлган тўғри тўртбурчаклардан юзи энг каттаси айланага ички чизилган. Шу айлананинг радиусини топинг.

10. R радиусли айланага ички чизилган тўғри бурчакли тўртбурчаклар ичидан энг каттасининг юзини топинг.

Стереометрия

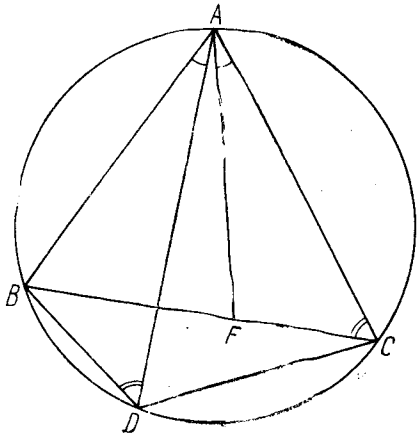
11. a томонли мунтазам учбурчак марказига у ётган текислик ташқарисидаги N нуқта проекциялланган. N дан учбурчак учларигача масофани топинг.

12. Орасидаги масофаси a бўлган текисликдаги икки нуқтадан шу текисликка φ бурчак остида ўзаро параллел оғма тўғри чизиқлар ўтган. Агар уларнинг текисликдаги проекциялари орасидаги масофа b га тенг бўлса, шу оғма тўғри чизиқлар ораларидаги масофани топинг.

13. Учбурчакли мунтазам призманинг баландлиги h, асос томони a. Унинг асосидаги бир қирраси ва бошқа асосидаги унга қарама-қарши жойлашган учдан ўтувчи текислик кесими юзини топинг.

14. Бешбурчакли мунтазам призманинг асоси a бўлиб, призма диагонали асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилса, унинг ён сирти юзини топинг.

15. Баландлиги h бўлган пирамидани асос текислигига параллел кесган текислик, унинг учидан a масофада бўлиб, кесим юзи Q га тенг. Асос юзини топинг.



243-шакл.

16. Қирралари a га тенг мунтазам тетраэдрни ўзаро кесишмайдиган қирраларидан $p\left(0 \leqslant p \leqslant \frac{a\sqrt{2}}{4}\right)$ масофада ўтувчи текислик кесиб ўтади. Кесимнинг томонлари, периметри ва юзини топинг.

17. Учбурчакли мунтазам пирамиданинг асоси a, учидаги текис бурчаги α; унинг ҳажмини топинг.

18. Кесик пирамида асосининг юзлари S_1 ва S_2. Уни ана шу асослардан баравар узоқликда кесиб ўтган текисликнинг ҳосил қилган кесим юзини топинг.

19. V ҳажмли конуса остки асоси тенг ёнли учбурчак бўлган пирамида ички чизилган. Учбурчак учидаги бурчак α. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

20. R радиусли шар асос текислиги ва ясовчиси орасидаги бурчаги α га тенг бўлган конусга ички чизилган. Конус тўла сиртининг юзи ва ҳажмини топинг.

III. ***Исботлашга доир масалалар.*** Бу типдаги масалаларда масала шартлари асосида унда қўйилаётган тасдиқни исботлаш талаб этилади. Агар **A** масаланинг шартини, **B** унинг тасдиғини билдирса, масаланинг тузилиши **A** $\Rightarrow$ **B** шаклда бўлиб, уни исботлаш учун масала шартига мос шундай математик тасдиқлар (таъриф, теорема ва хоссалар) нинг кетма-кетлигини тузиш керакки, **B** тасдиқ уларнинг натижаси бўлиб чиқсин.

15-масала (Птолемей теоремаси). Айланага ички чизилган тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари узунликлари кўпайтмасининг йиғиндиси диагоналлари кўпайтмасига тенг.

Исбот. Масаланинг **A** шарти: $ABCD$ тўртбурчак айланага ички чизилган (243-шакл). Масаланинг **B** тасдиғи: $|AC| \cdot |BD| + |AB| \cdot |DC| = |BC| \cdot |AD|$. Энди **A** $\Rightarrow$ **B** ни кўрсатамиз. BC диагоналда $\angle CAF = \angle BAD$ шарт билан F нуқтани оламиз. Шунингдек, $\angle BDA = BCA \Rightarrow \triangle ABC \backsim \triangle AFC$ эканини шаклдан кўриш қийин эмас. Бу ердан

$$\frac{|BD|}{|FC|} = \frac{|AD|}{|AC|} \Rightarrow |BD| \cdot |AC| = |FC| \cdot |AD|. \qquad (1)$$

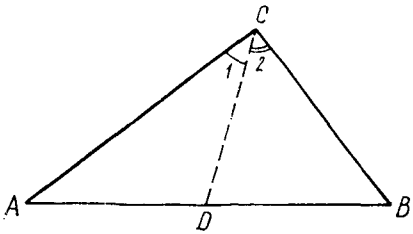
Шунингдек, $\angle BAF = \angle DAC$, $\angle ABC = \angle ADC$, демак:

$$\frac{|BF|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AD|} \Rightarrow |DC| \cdot |AB| = |BF| \cdot |AD|. \qquad (2)$$

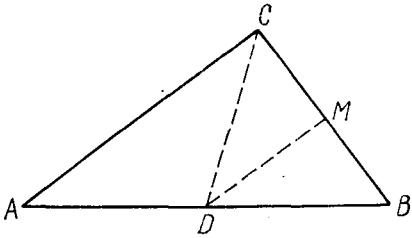
Энди (1) ва (2) даги натижаларни ҳадма-ҳад қўшсак:

$$|AC| \cdot |BD| + |AB| \cdot |DC| = (|BF| + |FC|) \cdot |AD| = |BC| \cdot |AD|.$$

Шундай қилиб, **A** $\Rightarrow$ **B** кўрсатилди.



244-шакл.



245-шакл.

16-масала Учбурчакнинг медианаси ўзи тушган томонининг ярмисига тенг бўлса, у ҳолда бу учбурчак тўғри бурчаклидир.

Исбот. $\triangle ABC$ да CD медиана, $|CD| = \frac{1}{2}|AB|$. У ҳолда $\angle C = \frac{\pi}{2}$ эканлигини кўрсатиш керак.

1-усул. $\triangle ABC$ да (244-шакл) $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$ ёки $\angle A + \angle B + \angle 1 + \angle 2 = \pi$. Бундан $\angle A = \angle 1$, $\angle B = \angle 2 \Rightarrow 2(\angle 1 + \angle 2) = \pi$. $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle C = \frac{\pi}{2}$. ▶

2-усул. $\triangle ADC$ да (244-шакл) учбурчак ташқи бурчагининг хоссасига кўра $\angle BDC = \angle A + \angle 1$. Шунингдек, $\triangle BDC$ да ҳам: $\angle ADC = \angle B + \angle 2$;

$$\angle BDC + \angle ADC = (\angle A + \angle 1) + (\angle B + \angle 2) = 2(\angle 1 + \angle 2) = \pi \Rightarrow \angle C = \frac{\pi}{2}. ▶$$

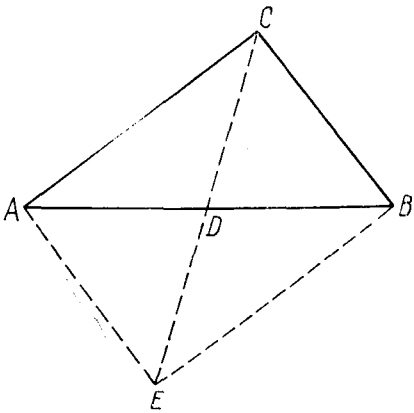
3-усул. AC га параллел DM кесма чизайлик (245-шакл). DM учбурчакнинг ўрта чизиғи, демак, $|CM| = |MB|$. У ҳолда $\triangle BDC$ тенг ёнли учбурчакда DM медиана унинг баланлиги ҳамдир:

$$[DM] \perp [CB].$$

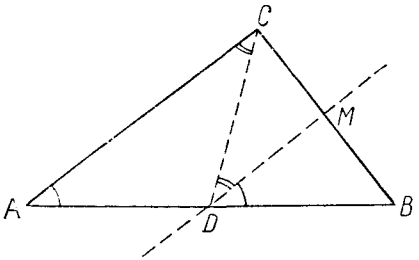
Натижада, $\angle DMB = \angle ACB = \frac{\pi}{2}$. ▶

4-усул. CD нинг давомида $|DE| = |CD|$ шарт билан E нуқтани ясаб, уни A ва B лар билан туташтирамиз (246-шакл). Шартга кўра $|AD| = |DB|$ ва ясашга кўра $|CD| = |DE|$ бўлгани учун $ACBE$ тўртбурчак тўғри бурчаклидир. Демак, $\angle C = \frac{\pi}{2}$. ▶

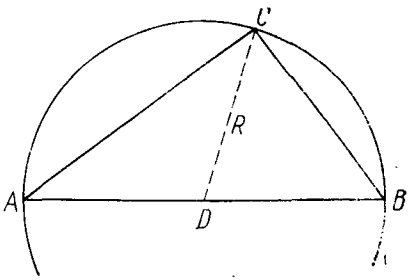
5-усул. AC га параллел қилиб, DM ўтказайлик (247-шакл). У ҳолда $DM \parallel AC$ да DC — кесувчи $\Rightarrow \angle ACD = \angle CDM$ ва AB — кесувчи $\Rightarrow \angle A = \angle BDM$. Масала шартига кўра $\triangle ADC$ тенг ёнли, демак, $\angle A = \angle ACD$ ва бундан $\angle A = \angle CDM$. Бу иккала хулосадан $\angle BDM = \angle CDM$, яъни DM — бис-



246-шакл.



247-шакл.



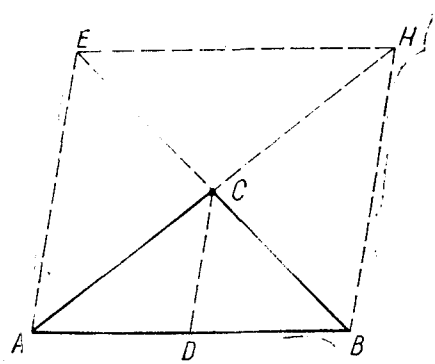
248-шакл.

секириса. $\triangle CDM$ тенг ёнли учбурчакда DM биссектриса — баландликдир: $[DM] \perp [CB]$. Демак: $\angle DMB = \angle ACB = \frac{\pi}{2}$. ▶

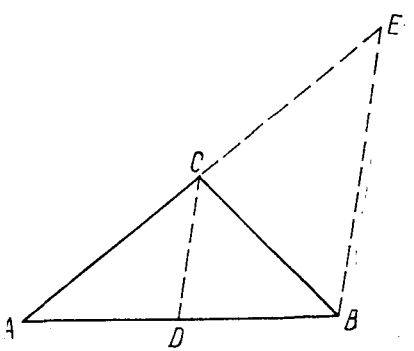
6-усул. Агар $R = |CD|$ деб, (D, R) айлана чизсак (248-шакл), айлана A, B ва C нуқталардан ўтади. Демак, AB диаметрга тиралган ички бурчак хоссасига кўра $\angle C = \frac{\pi}{2}$. ▶

7-усул. AC ва BC томонларни давом эттириб, $[BH] \parallel [CD]$ ва $[AE] \parallel [CD]$ тўғри чизиқларни ясаб, сўнг EH кесма билан $AEHB$ тўртбурчакни ҳосил қилайлик (249-шакл). $\triangle AEB$ ва $\triangle BAH$ да CD ўрта чизиқ $\Rightarrow$ $|CD| = \frac{1}{2}|AE|$. Шартга кўра, $|CD| = \frac{1}{2}|AB|$. Демак, $AEHB$ — ромб. Ромбнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр: $\angle C = \frac{\pi}{2}$. ▶

8-усул. B дан CD га параллел қилиб, тўғри чизиқ чиқариб (AC) билан кесиштирсак, E нуқта ҳосил бўлади (250-шакл) $[CD] \parallel [EB]$ ва $|AD| = |DB|$ эканидан $|CD| = \frac{1}{2}|E, B|$, яъни $|AC| = |CE|$. Шунингдек, $|AB| = |BE| \Rightarrow [BC] \perp [AE]$, яъни $\angle C = \frac{\pi}{2}$. ▶



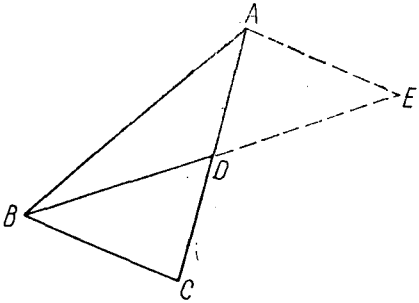
249-шакл.



250-шакл.

Юқорида кўрсатилганларга ўхшаш бўлмаган усулда исботлашларни яна давом эттириш мумкин. Бу масалада **A** ⟹ **B** услубда исботланиш кўрсатилди. **B** ⟹ **A** да ҳам бу масала тасдиғи ўринлидир.

Одатда исботлашга доир масалаларни кичик теорема деб юритса бўлади, шунинг учун теоремаларнинг ушбу хос саларидан фойдаланган яхши:



251-шакл.

1) тўғри (**A** ⟹ **B**) ва қарама-қарши ($\bar{\mathbf{B}}$ ⟹ $\bar{\mathbf{A}}$) теоремалар тенг кучли*;

2) тескари (**B** ⟹ **A**) ва тескарисига қарама-қарши ($\bar{\mathbf{A}}$ ⟹ $\bar{\mathbf{B}}$) теоремалар ҳам ўзаро тенг кучли.

17 *масала. Учбурчакнинг медианаси бу медиана тушмаган томонлар йиғиндисининг ярмидан кичик, ундан учинчи томоннинг ярмини айирилганидан катталигини исботланг.*

Исбот. $\triangle ABC$ да $|BD| = |DE|$ шарт билан BD — медиана давомида E нуқта аниқлаб, сўнг $\triangle ADE$ ни ясаймиз (251-шакл). У $\triangle BCD$ га тенг, чунки $\angle BDC = \angle ADE$; $\triangle ABE$ да $|BD| + |DE| < |AB| + |AE| = |AB| + |BC| \Rightarrow 2 \cdot |BD| < |AB| + |BC| \Rightarrow |BD| < \frac{|AB| + |BC|}{2}$.

Тасдиқнинг биринчи ярми исботланди, энди иккинчи ярмини исботлаймиз.

$\triangle ABD$ да $|BD| > |AB| - |AD|$ ва $\triangle BCD$ да $|BD| > |BC| - |DC|$. Буларни ҳадлаб қўшсак: $2|BD| > |AB| - |AD| + |BC| - |DC| \Rightarrow |BD| > \frac{1}{2}(|AB| + |BC| - |AC|)$.

41-топшириқ. *Ушбу масалалар тасдиғини исботланг.*

1. Учбурчак медианалари йиғиндиси унинг периметридан кичик, ярим периметридан катта. Исботланг.

2. Тенг томонли ABC учбурчак томонларида бир-бирига тенг AD, CF, BE кесмалар ажратилган ва D, E, F нуқталардан DEF учбурчак ҳосил қилинган. Унинг тенг томонлилигини исботланг.

3 Бурчакнинг биссектрисасига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ шу бурчакнинг томонларидан тенг кесмалар ажратишини исботланг.

4. Учбурчак асосидаги ички бурчаклар биссектрисаларининг кесишиш нуқтасидан унинг асосига параллел тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиқнинг учбурчак ён томонлари орасидаги қисми учбурчак ён томонларининг бу тўғри чизиқ билан асос орасидаги қисмларининг йиғиндисига тенг эканлигини исботланг.

5. Агар учбурчакнинг бурчаклари 1:2:3 нисбатда бўлса, у ҳолда бундай учбурчак тўғри бурчакли эканини исботланг.

6. Учбурчакнинг учидан асосига туширилган биссектриса ва баландлик орасида ҳосил бўлган бурчак, унинг асосига ёпишган бурчаклари айирмасининг ярмига тенг бўлишини исботланг.

7. Тўғри бурчакли учбурчак тўғри бурчагининг биссектрисаси гипотенузага туширилган медиана билан баландлик орасидаги бурчакни тенг иккига бўлишини исботланг.

---

* $\bar{\mathbf{A}}$ деб **A** фикрнинг инкори белгиланган.

8. Қаварик тўртбурчакнинг: а) ҳар бир диагонали периметрининг ярмидан кичик; б) диагоналлари йиғиндиси ҳар бир қарама-қарши томонлар йиғиндисидан катта; в) диагоналлар йиғиндиси периметридан кичик ва ярим периметридан каттадир. Исботланг.

9. Учбурчакнинг икки томони тўғри чизиқ билан кесилган. Ҳосил бўлган тўртбурчакнинг периметри учбурчак периметридан кичик бўлишини исботланг.

10. Параллелограммнинг: а) бир томонига ёпишган бурчаклари биссектрисалари ўзаро перпендикуляр; б) қарама-қарши бурчаклари биссектрисалари эса параллелдир. Исботланг.

11. Параллелограммнинг биссектрисаси ундан тенг ёнли учбурчак ажратишини исботланг.

12. Параллелограммда: а) диагоналлар йиғиндиси унинг бир учидан чиққан баландликлар йиғиндисидан каттадир; б) бир учидан чиққан баландликлар йиғиндиси ярим периметридан кичик. Исботланг.

13. Параллелограмм бурчакларининг биссектрисалари унинг томонларини кесганда ҳосил бўлган нуқталари бирор параллелограмм учларидир. Исботланг.

14. $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг D учидан AC диагоналига DE перпендикуляр туширилган. Бу перпендикуляр билан иккинчи диагонал орасида ҳосил бўлган бурчак AC диагоналнинг тўғри тўртбурчакнинг қўшни томонлари билан ҳосил қилган бурчаклари айирмасига тенглигини исботланг:

$$\angle BDE = \angle BAC - \angle DAC.$$

15. Трапециянинг: а) ўрта чизиғи ярим диагоналлари йиғиндисидан кичик; б) асосларининг айирмаси ён томонлар йиғиндисидан кичик. (*Кўрсатма*: $ABCD$ трапецияда $[BE] \parallel [CD]$ тўғри чизиқ ясанг); в) диагоналлари йиғиндиси асослари йиғиндисидан каттадир. Исботланг.

16. Айлананинг ўзаро параллел уч ватари ўрталари бир диаметрда ётишини исботланг.

17. Айлананинг умумий учга эга бўлмаган ўзаро тенг ватарлари учлари тенг ёнли трапеция учлари бўлишини исботланг.

11-§. Алгебрадан текстли масалалар

Алгебраик масалаларни ечишда асосан қуйидаги қоидаларга эътибор қилиш керак:

а) Масалани анализ (таҳлил) қилиш чоғида ундаги номаълум миқдорларни аниқлаш ва $x, y, z, \ldots, t$ каби белгилаш киритиш (лозим бўлса маъноси ва ўлчов бирлигининг ифодаси бир чеккада берилиши керак);

б) масалани схематик ёзиб ёки чизмасини чизиб олиш;

в) масаладаги маълум ва номаълум миқдорлар орасидаги боғланишни аниқловчи (тенгламалар системаси, тенгсизлик) ни тузиб олиш;

г) сўнг уларни ечиб чиқиш;

д) топилган ечимлардан масала маъносига мосларини ажратиб олиш керак.

Бунда б) қоида ҳар доим бажарилмаслиги мумкин.

Қуйидаги типдаги алгебраик масалаларни ечиш усули кўриб чиқилади:

I. Натурал сонларга доир масалалар;
II. Прогрессияга доир масалалар;
III. Процент миқдорли масалалар;
IV. „Ҳаракат“ га доир масалалар;

V. Биргаликда бажарилган ишга доир масалалар;

VI. Аниқмас тенглама, тенгламалар системаси тузиб ечиладиган масалалар;

VII. Тенгсизлик тузиб ечиладиган масалалар.

I. Натурал сонларга доир масалалар. Бунда масалаларни ечишда қуйидагиларни назарда тутиш керак:

а) a натурал сонининг ўнг томонида n хонали b сон турган бўлса, унда у $10^n a + b$ сонга тенгдир;

б) $a > b$ ва a сони b га бўлинмаса, у ҳолда шундай q ва r натурал сонлари топиладики, улар учун $a = bq + r\ (r < b)$ тенглик ягона тарзда бажарилади.

1-масала. Икки хонали соннинг рақамлари квадратлари йиғиндиси 10 га тенг. У сондан 18 айирилса, натижада ҳосил бўлган сон шу рақамларнинг ўрнини алмаштириб тузилган сонга тенг бўлади. У қандай сон?

Ечилиши. $\overline{xy} = 10x + y$ изланаётган сон. Масала шартига кўра $x^2 + y^2 = 10$ ва $\overline{xy} - 18 = \overline{yx}$ бўлганидан

$$10x + y - 18 = y \cdot 10 + x.$$

Энди ушбу система ҳосил бўлади ва ечилади:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ 9x - 9y = 18 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x = y + 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = 1 \pm 2, \\ y_{1,2} = -1 \pm 2. \end{cases}$$

Жавоб. $x = 3$, $y = 1$, яъни 31, иккинчи илдизлар масала шартига мос эмас (чунки $x > 0$, $y \geqslant 0$).

2-масала. Қандай икки хонали сон ўз рақамлари йиғиндисидан 4 марта, кўпайтмасидан 3 марта катта?

Ечилиши. Изланаётган $\overline{xy} = 10x + y$ сон масала шартига кўра ушбу хоссаларга эга:

$$\begin{cases} 10x + y = 4(x + y), \\ 10x + y = 3xy, \ x > 0, \ y > 0. \end{cases}$$

Системани ечамиз ($x > 0$, $y > 0$):

$$\begin{cases} 6x = 3y, \\ 10x + y = 3xy \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 2x, \\ 12x = 6x^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 4. \end{cases}$$

Жавоб. 24.

II. Прогрессияга доир масалалар. Прогрессияга доир масалалар асосан система ҳосил бўлишига олиб келади. (Арифметик ва геометрик прогрессиянинг 94—98-бетлардаги хоссалари қўлланилади.)

3-масала. Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндиси 4, унинг ҳадлари кублари йиғиндиси 192. Унинг биринчи ҳади ва махражини топинг.

Ечилиши. $a_1 \neq 0$, $0 < |q| < 1$ деб, масала шартига кўра ушбу системани ёзамиз:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{1-q} = 4, \\ \dfrac{a_1^3}{1-q^3} = 192 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4(1-q), \\ a_1^3 = 192(1-q)(1+q+q^2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4(1-q), \\ 2q^2+5q+2=0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4(1-q), \\ (q+2)\left(q+\dfrac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4(1-q), \\ q_1 = -2, \ q_2 = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Демак, бу ердан $q_2 = -\dfrac{1}{2}$ масала шартини қаноатлантиришидан $a_1 = 6$ топилади.

Ж а в о б. $a_1 = 6$, $q = -\dfrac{1}{2}$.

4- м а с а л а. Шундай уч хонали сон топингки, унинг рақамлари арифметик прогрессияни ҳосил қилиб, унинг ўзи 45 га бўлинсин.

Ечилиши. $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$ сонни қидирамиз. x, y ва z лар арифметик прогрессия ҳосил қилгани учун $y = \dfrac{x+z}{2}$. У сон 45 га бўлингани учун унинг 5 га ва 9 га бўлиниши келиб чиқади. Демак, z – охирги рақам ё 5, ё 0 бўлади, иккинчидан $x + y + z = 9k$ $(k \in \mathrm{N})$ бажарилади. Демак, масала шартини ушбу икки система қаноатлантиради $(k \in \mathrm{N})$:

$$\begin{cases} z = 0, \\ 2y = x + z, \\ x + y + z = 9k \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} z = 5, \\ 2y = x + z, \\ x + y + z = 9k. \end{cases}$$

Биринчи системадан ҳосил бўлган

$$\begin{cases} x = 2y, \\ x + y = 9k \end{cases}$$

ни ечишда y учун 1, 2, ... , 9 ларни танлаб текширсак, уни фақат (6; 3) қаноатлантириши келиб чиқади. Иккинчи системадан

$$\begin{cases} 2y = x + 5, \\ x + y + 5 = 9k \end{cases}$$

ни ҳосил қилиб, унда ҳам текшириш бажарсак, уни (1; 3) ва (7; 6) ечимлар қаноатлантириши келиб чиқади. Бундан ушбу ечим топилади:

Ж а в о б: 630; 135; 765.

42- топшириқ. Ушбу масалаларни ечинг:

1. Йиғиндиси 1244 га тенг бўлган шундай икки сон топингки, биринчисининг ўнг томонига 3 рақамини ёзиб, иккинчисининг охирги иккита рақами тушириб ёзилса, улар ўзаро тенг бўлади.

2. Уч хонали сон 3 билан тугайди. Агар 3 ни шу соннинг бошига ўтказиб қўйилса, аввалги соннинг учланганига бирни қўшиш натижасига тенг сон ҳосил бўлади. Аввалги сон нечага тенг эди?

3. Олти хонали сон 2 дан бошланади. 2 ни шу соннинг охирига ўтказилса, ҳосил бўлган сон аввалгисидан 3 марта катта бўлади. Аввалги сон нечага тенг бўлган?

4. Агар икки хонали сонни унинг рақамлари йиғиндисига бўлсак, бўлинмада 7, қолдиқда 6 чиқади, аксинча, уни рақамлари кўпайтмасига бўлсак, бўлинмада 3, қолдиқда дастлабки сон рақамлари йиғиндисига тенг сон қолади. Дастлабки сон нечага тенг бўлган?

5. 1 дан бошланадиган олти хонали сон шундайки, 1 ни бошидан олиб охирига ёзилса, натижада қидирилаётган сондан 3 марта катта сон ҳосил бўлади. Уни топинг.

6. Ўзаро пропорционал шундай тўртта сонни топингки, уларнинг четки ҳадлари йиғиндиси 14 га, ўрта ҳадлари йиғиндиси 11 га, квадратлари йиғиндиси 221 га тенг бўлсин.

7. Учта икки хонали натурал сонлар берилган: ҳар бир сон ўзининг рақамлари квадратлари йиғиндисидан улар кўпайтмасини айирилганига тенг. Агар иккинчиси биринчисидан 50 га ортиқ бўлса, улардан иккитасини топинг.

8. Биринчи n та ҳади йиғиндиси $S_n = 2n^2+3n$ бўлган кетма-кетликнинг арифметик прогрессия эканлигини исботланг.

9 Арифметик прогрессиянинг n та ҳади йиғиндиси $S_n = 4n^2-3n$ бўлса, унинг биринчи учта ҳадини топинг.

10. Шундай тўртта сонни топингки, дастлабки учтаси арифметик прогрессия, кейинги учтаси геометрик прогрессия ташкил қилувчи бу сонларнинг четки иккитасининг йиғиндиси 66 га, икки ўртадагисининг йиғиндиси 60 га тенг.

11. Геометрик прогрессиянинг биринчи учта ҳадлари йиғиндиси 91 Уларнинг ҳар бирига мос равишда 25, 27, 1 қўшилса, арифметик прогрессия ҳосил бўлади. Геометрик прогрессиянинг 7-ҳадини топинг.

12. 225 га бўлинадиган тўрт хонали соннинг биринчи уч рақами ўсувчи арифметик прогрессия ҳосил қилса, уни топинг.

13. Учта ўғилнинг ёшлари геометрик прогрессия ташкил қилиб, улар ўртадаги пулни ёшларига пропорционал қилиб бўлиб олмоқчи. Агар уч йилдан кейин шу пулни бўлиб олишганда эди, катта ўғил ҳозиргисидан 105 сўм, ўртанчиси 15 сўм кўп оларди. Энг катта ва энг кичик ўғиллар ёшларининг айирмаси 15 бўлса, уларнинг ёшини топинг.

14. Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндиси $\frac{16}{3}$ га тенг бўлиб, унинг $\frac{1}{6}$ га тенг ҳади бор. Ундан аввалги барча ҳадлар йиғиндисининг ундан кейинги ҳадлар йиғиндисига нисбати 30 га тенг. $\frac{1}{6}$ унинг нечанчи ҳади?

III. Процент миқдорли масалалар кўп ҳолда эритма (аралашма, қотишма ва ҳоказо) моддалар ҳақида бўлиб, ундаги ечиш усули умуман бошқа типдаги алгебраик масалаларда ҳам татбиқ этилиши мумкин.

Бу ерда эритма (бошқа моддаларга ҳам тааллуқли) физик ва химик қонуниятлар бўйича ҳар доим тўғри бўлмаса ҳам ушбу хоссаларга эга деб ҳисобланади:

а) Барча ҳосил бўлган эритмалар бир жинсли бўлади;

б) V_1 ҳажмли (m_1 массали ёки P_1 оғирликдаги) бир эритма иккинчи V_2 ҳажмли (m_2 массали ёки P_2 оғирликдаги) эритмага қўшилса, натижада $V_0 = V_1 + V_2$ ҳажмли ($m_0 = m_1 + m_2$ массали ёки $P_0 = P_1 + P_2$ оғирликдаги) эритма ҳосил бўлади.

$$k_1 = \frac{V_1}{V_0}, \quad k_2 = \frac{V_2}{V_0}$$

миқдорлар биринчи ва иккинчи эритма умумий эритманинг қанча қисмини ташкил этишини билдиради ва бунда $k_1 + k_2 = 1$ бажарилади. k_1 ва k_2 лар биринчи ва иккинчи эритманинг

умумий эритмадаги *концентрациясы* деб аталади. $p_1 = k_1 \cdot 100\%$ ва $p_2 = k_2 \cdot 100\%$ лар шу эритмаларнинг ҳар бирининг *концентрациясининг процент миқдорини* беради. Бунда

$$V_0 = k_1 V_0 + k_2 V_0, \quad p_1 + p_2 = 100\%$$

тенгликлар ўринлидир.

Бу фикрларни n та эритма учун умумлаштирса ҳам бўлади:

$$V_0 = V_1 + V_2 + \ldots + V_n, \; k_i = \frac{V_i}{V_0} \; (i = 1, 2, \ldots, n), \; k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 1;$$

$$p_i = k_i \cdot 100\% (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ ва } p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 100\%.$$

5-масала. 20 кг ли мис қотишмада мис 40% ни ташкил этади. Унга неча килограмм қўрғошин қўшилса, қотишманинг 20% ини мис ташкил этади?

Ечилиши. x кг деб сўралаётган қўрғошин миқдорини белгиласак, $(20 + x)$ кг қотишманинг 20%и мис бўлиши талаб қилинади. Унда $\frac{20 + x}{100} \cdot 20$ кг мис бор. Дастлабки 20 кг ли қотишманинг 40% и мис эди, демак, унинг таркибида $\frac{20}{100} \cdot 40$ кг мис бор. Лекин ҳосил қилиниши керак бўлган ва берилган қотишмадаги оғирликда миснинг массаси бир хил бўлади:

$$\frac{20 + x}{100} \cdot 20 = \frac{20}{100} \cdot 40 \Longrightarrow x = 20 \text{ кг}.$$

Демак, берилган қотишмага 20 кг қўрғошин қўшиш лозим.

Жавоб. 20 кг

6-масала. Икки бўлак қотишманинг ҳар бири мис ва никелдан тайёрланган бўлиб, бирида 20%, иккинчисида 40% мис бор. Таркибида 35% мис бўлган қотишма тайёрлаш учун уларнинг ҳар биридан қанчадан (кг) олиш керак?

Ечилиши. Биринчи қотишмада $k_1 = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$, иккинчисида $n_1 = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ концентрацияда мис бўлиб, таркибида 35% мис бўлган қотишма тайёрлаш учун уларнинг биридан x кг, иккинчисидан y кг қотишма олиш керак бўлсин. У ҳолда

$$x = k_1 x \text{ (кг мис)} + k_2 x \text{(кг никель)},$$
$$y = n_1 y \text{ (кг мис)} + n_2 y \text{ (кг никель)}$$

бўлиб, тайёрланаётган $x + y$ кг ли қотишмада $k_1 x + n_1 y$ кг мис бор. Унда $\frac{k_1 x + n_1 y}{x + y}$ га тенг концентрацияли мис бор бўлиб, у 35% ли бўлиши керак:

$$\frac{k_1 x + n_1 y}{x + y} = \frac{35}{100}.$$

Буни $\frac{x}{y}$ га нисбатан ечсак: $x : y = 7 : 3$ ни ҳосил қиламиз.

Жавоб. Биридан $7a$, иккинчисидан $3a$ кг олиниши керак ($a > 0$).

7-масала. Икки хил металлдан тайёрланган биринчи қотишма 3 : 4, иккинчиси 4 : 1 нисбатдадир. Бу қотишмалардан қанчадан бўлак олинса янги қотишмада металлар 3 : 1 нисбатда бўлади?

Ечилиши. Биринчисидан x, иккинчисидан y бўлак олинса, металларнинг биринчиси $\frac{3}{7}x+\frac{4}{5}y$, иккинчиси $\frac{4}{7}x+\frac{1}{5}y$ бўлак олинган. Ана шу бўлаклар нисбати $\left(\frac{3}{7}x+\frac{4}{5}y\right):\left(\frac{4}{7}x+\frac{1}{5}y\right)=3:1$ каби бўлиши керак. Уни $\frac{x}{y}$ га нисбатан ечсак: $x:y=7:45$ ни топамиз.

Жавоб. $x=7a$, $y=4a$ кг ($a>0$) дан олинади.

8-масала. 18 л ҳажмли азот ва гелий аралашмасининг 20% ини азот ташкил этади. Бу аралашмадан бирор қисми олиниб, ўрнига шунча миқдорда гелий солинди. Ҳосил бўлган бу аралашмадан яна шунча миқдорда аралашма олиниб, яна ўрнига гелий тўлдирилди. Натижада 10% азотли аралашма ҳосил бўлади. Ҳар сафар неча литр аралашма олинган?

Ечилиши. Аралашмада 0,20 концентрацияли азот бўлиб, ундан x литр олиниб, ўрнига шунча литр гелий солинган. Биринчи тажрибадаёқ $(18-x)\cdot 0{,}20$ литр азот қолган. Гелий солингандан кейин унинг концентрацияси $\frac{(18-x)\cdot 0{,}20}{18}$ га тенг. Иккинчи тажрибада $(18-x)\cdot\frac{(18-x)\cdot 0{,}20}{18}$ га тенг азот қолган. Унинг процент миқдори 10% бўлган:

$$(18-x)\frac{(18-x)\,0{,}20}{18}\cdot 100\%=10\%.$$

Бу ердан $x_1=15$ л, $x_2=21$ л. Масала маъносига фақат $x_1=15$ л мос келади.

Жавоб 15 л.

Изоҳ. *Умуман олганда, V_0 литр аралашмада k концентрацияли модда булсин ва ундан a литр олиниб, ўрни бошқа турдаги модда билан тўлдирилсин. Бу иш тартиби n марта такрорланса, у ҳолда шу модда концентрацияси*

$$k_n=k\cdot\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^n$$

га тенгдир.

9-масала. Уч эритмадаги спиртларнинг оғирлик бўйича процент миқдорлари геометрик прогрессияни ташкил қилади. Агар биринчи, иккинчи ва учинчи эритмаларни 2:3:4 нисбатда ўзаро қўшсак, натижада 32% ли эритма, 3:2:1 нисбатда қўшсак, 22% ли эритма ҳосил бўлади. Биринчи эритманинг неча процентли эканлигини топинг.

Ечилиши. $x\%$, $y\%$, $z\%$ деб эритмаларнинг мос равишда процентларини белгиласак, $x:y=y:z$ дан $y^2=xz$ ни топамиз. 1 грамм биринчи эритмада $\frac{x}{100}$ г, иккинчисида $\frac{y}{100}$ г, учинчисида $\frac{z}{100}$ г спирт бор, у ҳолда масала шартига кўра:

$$2\cdot\frac{x}{100}+3\cdot\frac{y}{100}+4\cdot\frac{z}{100}=9\frac{32}{100};\quad 3\frac{x}{100}+2\frac{y}{100}+1\frac{z}{100}=6\frac{22}{100}.$$

Тузилган бу учала тенгламалардан ушбу система ҳосил қилинади:

$$\begin{cases}2x+3y+4z=288,\\3x+2y+z=132,\\y^2=xz\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}y=48-2x,\\z=36+x,\\x^2-76x+768=0.\end{cases}$$

Система ечилиб, масала маъносига мос $x_1=12$, $y_1=24$, $z_1=48$ ечим топилади. Биринчи эритма 12% ли экан.

43-топшириқ. Ушбу масалаларни ечинг:

1. 6 литрли идишда 4 литр 70% ли олтингугурт кислота эритмаси бор. Худди шундай иккинчи идишда 3 литр 90% ли олтингугурт кислота эритмаси бор. Биринчига иккинчидан неча литр қуйилса r% ли эритма ҳосил бўлади? r қандай бўлганда масала ечимга эга?

2. a модданинг ҳажми b ва c моддалар ҳажмлари йиғиндисининг ярмини, b модданинг ҳажми эса a ва b моддалар ҳажмлари йиғиндисининг 20% ини ташкил қилади. c модда ҳажмининг a ва b моддалар ҳажмлари йиғиндисига нисбатини топинг.

3. 40% ли кислота эритмасини 10% ли кислота эритмасига аралаштириб, 20% ли эритма ҳосил қилинди. Эритманинг оғирлиги 800 г. Ҳар бир эритмадан қанчадан олинган?

4. Икки хил пўлат: бири 5%, иккинчиси 10% никелли бўлиб, иккинчисиникида биринчисига қараганда 4 тонна никель кўп. 8% қотишма тайёрлаш учун ҳар биридан қанчадан олиш керак?

5. 735 грамм спиртда 16% йод бор, унга қанча спирт қўшса, 10% ли йод ҳосил бўлади?

6. 500 килограмм рудада темир бор. Ундан 12,5% ли темири бўлган аралашмани ажратиб олинганда, қолгани 300 кг ни ташкил қилди. Натижада қолган руданинг темири концентрацияси 20% га кўпайди. Рудада неча килограмм темир қолган?

7. Руданинг 40% и аралашма бўлиб, ундан олинган металлда эса 4% аралашма бор. 24 тонна рудадан неча тонна металл тушади?

8. Зичлиги 2 г/см³ ва 3 г/см³ бўлган суюқликлардан аралашма ҳосил қилинади. 4 см³ аралашманинг массаси биринчи суюқлик массасидан 10 марта енгил, 50 см³ аралашма эса иккинчи суюқлик массасага тенг массада. Аралашманинг зичлигини ва уни ҳосил қилишга кетган ҳар бир суюқликлар массасини топинг.

9. Институтда 3 йил давомида йилига бир хил процентдан студентлар сони ошиб борди ва шу даврда 5000 дан 6665 кишига етди. Студентлар сони йилига неча процент (неча студент) дан ортиб борган?

10. Хизматчининг бир хил процентдан икки марта ойлик маоши ошиб, 100 сўмдан 125 сўм 44 тийинга етди. Ойлик маош ҳар сафар неча процентдан ошган?

11. Икки қотишма берилган: бирида металлар 1:2, иккинчисида эса шу металлар 3:2 нисбатда аралашган. 8:7 нисбатли қотишма ҳосил қилиш учун қотишмаларни қандай нисбатда олиш керак?

12. A, B, C элементлардан ташкил этилган уч аралашма берилиб, бирида массалари бўйича A ва B лар 3:5, иккинчисида B ва C лар 1:2, учинчисида A ва C лар 2:3 нисбатда. A, B ва C элементлар массалари бўйича 3:5:2 нисбатли аралашма ҳосил қилиш учун, бу аралашмаларни массалари бўйича қандай нисбатда олиш керак?

IV. „Ҳаракат“ га доир масалалар. Бу типдаги масалаларда:

а) жисм ҳаракати соҳасининг ҳар бир қисмида текис ҳаракатланади деб қаралиб, унинг босиб ўтган йўли $S = Vt$ (V — жисм тезлиги, t—вақт) билан ўлчанади;

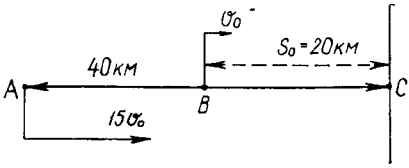
б) тезлик мусбат катталик деб олинади;

в) бурилиш (ёки янги режимли ҳаракатга ўтиш) учун вақт кетмайди деб ҳисобланади;

г) агар жисм ҳаракати сувда (ҳаракатдаги поезд ичида ва ҳоказо) унинг оқими бўйлаб ёки оқимга қарши ҳаракати бўйлаб ёки унга қарши бўлса, уларнинг ҳар бирининг ўз тезликлари йиғиндиси ёки айирмаси натижадаги тезликни беради.

Ҳаракатга доир масалаларда ушбу тасдиқлар ўринлидир:

— V_1 ва V_2 тезликка эга бўлган икки жисм орасидаги масофа S бўлган икки нуқтадан бир-бирига қараб тўғри чизиқ бўйлаб бир вақтда чиқса, улар $T = \frac{S}{V_1 + V_2}$ вақтдан сўнг учрашади;



252- шакл.

— бир нуқтадан чиққан V_1 ва V_2 тезликдаги икки жисм, узунлиги S бўлган йўлда айлана бўйлаб қарама-қарши йўналишда ҳаракат қилса, $T = \frac{S}{V_1 + V_2}$ вақтдан сўнг учрашади;

— бир йўналишда ҳаракатланаётган V_1 ва V_2 тезликдаги икки жисм ($V_2 > V_1$) лар орасидаги масофа S бўлса, орқада келаётган иккинчиси биринчисини $T = \frac{S}{V_2 - V_1}$ вақтда қувиб етади;

— ҳалқасимон (ёпиқ) йўлда V_1 ва V_2 тезликдаги икки жисмлар орасидаги масофа S бўлса, улар қарама-қарши ҳаракатланса, $T = \frac{S}{V_1 + V_2}$ вақтда учрашади; аксинча бир томонга ҳаракатланса, иккинчиси биринчисини $T = \frac{S}{V_2 - V_1}$ ($V_2 > V_1$) вақт ичида қувиб етади;

— агар жисм S масофани V_1 тезликда ўтиши керак бўлса-ю, лекин у бу масофани V_2 тезликда ($V_1 > V_2$) ўтса, у $\Delta t = \frac{S}{V_2} - \frac{S}{V_1}$ вақтга кечикади.

Шунингдек, ҳаракатга доир масалаларни ечишда аниқ чизилган схематик чизма баъзи қулайликлар яратади.

10-масала. Ораларидаги масофа 40 км бўлган A ва C пунктлар ўртасидаги B пунктдан C га турист пиёда, A дан C га эса тезлиги унинг тезлигидан 15 марта катта бўлган автомобиль йўлга чиққан. Туристнинг тезлиги 4 км/соат бўлиб, автомобиль ундан 4 соат кейин йўлга тушган бўлса, C га қайси бири аввал етиб келади?

Ечилиши. 1) t_0 турист сарфлаган вақт (252-шакл):

$$t_0 = \frac{S}{V_0} = \frac{20 \text{ км}}{4 \text{ км/с}} = 5 \text{ соат.}$$

2) t_1 автомобилнинг йўлга сарфлаган вақти:

$$t_1 = \frac{2S}{15 \cdot V_0} = \frac{40 \text{ км}}{60 \text{ км/с}} = \frac{2}{3} \text{ соат.}$$

3) Автомобиль 4 соат кейин чиққан, демак: $t_1 + 4 < t_0$.

Жавоб. Автомобиль олдин етиб келган.

11-масала. 40 км ли масофага дирижабль шамолга қарши учиб бориб, сўнг орқага қайтиб келишга 2,5 соат вақт сарфлади. Шамолнинг тезлиги 30 км/с бўлса, дирижаблнинг тинч ҳаводаги тезлигини топинг.

Ечилиши Дирижаблнинг тинч ҳаводаги тезлигини V деб олсак, у боришда $(V+30)$ км/соат тезликда, қайтишда $(V-30)$ км/соат тезликда ҳаракат қилган. Боришга $\frac{40}{V+30}$ соат, қайтишга $\frac{40}{V-30}$ соат вақт сарфлаган. Масала шартига мувофиқ $\frac{40}{V+30}+\frac{40}{V-30}=\frac{5}{2}$ каби тенглама ўринлидир. Бундан $V^2-32V-900=0 \Rightarrow V_1=50,\ V_2=-18.$ V_2—чет илдиз.

Жавоб: $V_1=50$ км/соат.

12-масала. Уйидан автостанцияга пиёда бораётган киши 1 соат ичида 3 км юргач, билдики, қолган масофани шу тезликда ўтса, автобусга 40 минут кечикади. Шунинг учун у 4 км/соат тезлик билан юриб, манзилга 45 минут вақтли етиб борди. Уйдан автостанциягача бўлган масофа қанча?

Ечилиши. Автобус, киши йўлга тушган вақтдан ҳисоблаганда, T_0 вақтдан кейин жўнайди. Агар x деб сўралаётган масофани белгиласак, киши $V_1=3$ км/соат тезликда масофани $\frac{x}{V_1}=T_0+\frac{2}{3}$ соатда босиб ўтади. $V_2=$ $=4$ км/соат бўлганда $x-3$ км масофани $\frac{x-3}{V_2}=T_0-\frac{3}{4}$ вақтда босиб ўтди. У ҳолда

$$\frac{x}{V_1}-\frac{x-3}{V_2}=\frac{2}{3}+\frac{3}{4} \Rightarrow x=14 \text{ км.}$$

13-масала. A шаҳардан B шаҳарга эрталаб 9 да ёғоч оқизилган. бўлиб, худди шу вақтда B дан A га моторли қайиқ йўлга чиққан. У оқизилган ёғоч билан 5 соатдан кейин учрашди ва ўз йўлида давом этиб A га етиб бориб, орқага қайтди. У оқизилган ёғоч билан бирга B га бир вақтда етиб келди. Улар ўша куни кеч соат 9 га етиб кела олганми?

Ечилиши. Ёғочнинг тезлиги V_1, қайиқники V_2 бўлсин $(V_2>V_1)$ S орқали A ва B шаҳарлар орасидаги масофани белгиласак, улар $\frac{S}{V_1+(V_2-V_1)}=5$ соатдан кейин учрашган. Қайиқ оқизилган ёғоч билан бир вақтда етиб келган: $\frac{S}{V_1}=\frac{S}{V_2-V_1}+\frac{S}{V_2+V_1}$. Ҳосил бўлган системани ечамиз:

$$\begin{cases} \frac{S}{V_2}=5, \\ \frac{S}{V_1}=\frac{S}{V_2-V_1}+\frac{S}{V_2+V_1}. \end{cases}$$

Бу система $\frac{S}{V_2}$ ва $\frac{V_1}{V_2}$ га нисбатан икки номаълумли икки тенгламалар системасидир. Агар $\frac{V_1}{V_2}$ га нисбатан иккинчи тенгламани ечсак: $\frac{V_1}{V^2}=$ $=\sqrt{2}-1.$

$\frac{S}{V_1}=\frac{S}{V_2}:\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{\sqrt{2}-1}=5(\sqrt{2}+1)>12.$ Шундай қилиб, улар кеч соат 9 га етиб кела олмаган.

14-масала. A дан B га томон уч машина баравар вақт оралиғида бирин-кетин йўлга тушди. B га эса бир вақтда етиб келиб, ундан 120 км наридаги C га қараб кетишди. Биринчиси иккинчисидан 1 соат кейин етиб

борди, учинчиси эса C га бора қайтиб, ундан 40 км нарида биринчи машина билан учрашди. Биринчи машинанинг тезлигини топинг.

Ечилиши. V_1, V_2, V_3 лар мос равишда ҳар бир машиналар тезлиги бўлса, $S = |AB|$ масофани билдирса (253-шакл), у ҳолда $\frac{S}{V_1} - \frac{S}{V_2}$ вақт оралиғи $\frac{S}{V_2} - \frac{S}{V_1}$ вақт оралиғига тенгдир:

$$\frac{S}{V_1} - \frac{S}{V_2} = \frac{S}{V_2} - \frac{S}{V_3}.$$

Иккинчи машина биринчидан C пунктга 1 соат олдин етиб келишидан $\frac{120}{V_1} - \frac{120}{V_2} = 1$ ни ҳосил қиламиз. Масаланинг шартидан учинчи машина 120 км + 40 км = 160 км йўлни босиб ўтгандан сўнг, 120 км — 40 км = 80 км масофани босиб келган биринчи машинани кўрди: $\frac{160}{V_3} = \frac{80}{V_1}$. Ҳосил бўлган шу учала тенгламадан

$$\begin{cases} \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} = \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_3}, \\ \frac{120}{V_1} - \frac{120}{V_2} = 1, \\ 160V_1 = 80V_3 \end{cases}$$

системани тузиб ечсак, $V_1 = 30$ км/соат келиб чиқади.

15- м а с а л а. Икки жисм a метрли айлана бўйлаб ўзгармас тезлик билан ҳаракат қилади. Агар улар бир йўналишда ҳаракатланса, ҳар 60 секундда, ҳар хил йўналишда ҳаракатланса, ҳар 15 секундда учрашади. Шу жисмларнинг тезлигини топинг.

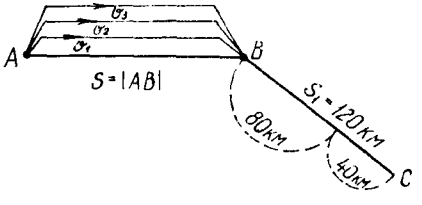
Ечилиши. Агар V_1 ва V_2 $(V_1 > V_2)$ орқали жисмлар тезлигини белгиласак, у ҳолда масала шартидан:

$$60 = \frac{a}{V_1 - V_2}; \qquad 15 = \frac{a}{V_1 + V_2}$$

бажарилади. Уларни система қилиб ечсак: $V_1 = \frac{a}{24}$ м/с, $V_2 = \frac{a}{40}$ м/с бўлади.

16- м а с а л а. Турли ўзгармас тезликдаги икки спортчи ҳалқасимон йўл бўйлаб югуриб, уни бир марта тўла айланиб чиқишга, биринчиси иккинчисидан 5 секунд кам вақт сарфлайди. Агар стартдан сўнг, бир йўналишда чопишса, улар 30 секундан кейин яна ёнма-ён бўлишади. Аксинча, улар турли йўналишда чопишса, неча секунддан сўнг учрашади?

Ечилиши. V_1 ва V_2 $((V_1 > V_2)$ орқали спортсменлар тезлигини, S орқали чопиш йўли узунлигини белгиласак, у ҳолда $\frac{S}{V_2} - \frac{S}{V_1} = 5$. Бир йўналишда чопганларида улар 30 секунддан кейин ёнма-ён бўлишган: $30 = \frac{S}{V_1 - V_2}$. Бунда $\frac{S}{V_1}$ ва $\frac{S}{V_2}$ га нисбатан икки номаълумли икки тенгламалар системаси ҳосил бўлди ва уларни ечиб топамиз: $\frac{S}{V_1} = 10$, $\frac{S}{V_2} = 15$. Турли йўналишда чопганларида



253- шакл.

$$T=\frac{S}{V_1+V_2}=\frac{1}{\frac{V_1}{S}+\frac{V_2}{S}}=\frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}=6\text{ с}$$

дан сўнг учрашар эдилар

44- топшириқ. Масалаларни ечинг:

1. A ва B пунктлар орасидаги масофа 105 км. A дан B гача V км/соат тезликда автобус кетгандан 30 минутдан сўнг 40 км/соат билан автомобиль йўлга чиқди. У автобусга етиб бора орқага қайтади. V нинг қандай қийматларида автобус B га, автомобиль A га етишига қадар етиб бора олади?

2. A ва B пунктлардан бир-бирига қараб, уларни бирлаштирувчи тўғри чизиқ (27 км) бўйлаб, икки турист йўлга чиқди ва 3 соатдан кейин учрашди. Агар бир йўналишда йўлга чиққанларида эди, бири иккинчисини 9 соатда қувиб етарди. Ҳар бирининг тезлигини аниқланг.

3. Пароход манзилгача 72 км йўл юрди, у йўлнинг биринчи 24 километрини бир хил тезликда, қолган қисмини ундан 6 км/соат тезроқ босиб ўтди Агар у бошиданоқ биринчи тезлигидан 1,5 марта катта тезлик билан юрганда эди, манзилга 40 минут илгари етиб келарди. Унинг биринчи тезлигини топинг.

4 A ва B дан бир-бирига қараб икки поезд йўлга чиқди. Улар йўлнинг ўртасида учрашиши учун B дан чиққан поезд 1 соат 45 мин. аввалроқ чиқиши керак эди. Агар улар бир вақтда йўлга чиққанларида эди, 7 соатдан кейин улар орасидаги масофа $|AB|$ масофанинг 0,1 қисмини ташкил этарди. Ҳар бир поезд $|AB|$ ни қанча вақтда босиб ўтади?

5. Бир пунктдан бир хил йўналишда 50 км/соат ва 40 км/соат тезлик билан икки машина бир вақтда йўлга чиқди. Ярим соатдан кейин учинчи машина шу йўналишда йўлга чиқиб иккинчи машинани, ундан 1,5 соатдан кейин биринчи машинани ҳам қувиб етди. Учинчи машинанинг тезлигини топинг

6. 60 метрли айлана бўйлаб бир йўналишда икки жисм ҳаракат қилади. Бири иккинчисидан 5 с вақтлироқ айланани тўла ўтишга улгуради ва ҳар 1 минутда иккинчисини қувиб ўтади. Уларнинг тезлигини топинг.

7. Самолёт отдинига 220 км/соат тезликда учиб, сўнг учиб ўтган масофага қараганда 385 км кам масофа қолганда, уни 330 км/соат тезликда учиб ўтди. Агар самолёт ҳамма масофани 250 км/соат ўртача тезликда босган бўлса, унда шу масофани топинг.

8. A ва B дан бир-бирига қараб велосипедчилар йўлга чиқишди. Улар учрашгандан сўнг A дан чиққан велосипедчи B га боргунча 4 соат, B дан чиққан велосипедчи A га боргунча 9 соат вақт сарфлади Уларнинг ҳар бири йўлда қанча вақт бўлган?

9. Мотоциклчи маълум тезлик билан 8 км юрди, сўнг тезлигини соатига 8 км ошириб, яна 8 км юрди. Агар у ҳамма йўлни кейинги тезлик билан юрса, мўлжалдан 5 минут олдин етиб келар эди. Мотоциклчининг аввалги тезлигини топинг.

10. Узунлиги d км бўлган солдатлар колоннаси тош йўлдан соатига V км тезлик билан бормоқда. Мотоциклдаги хабарчи колоннанинг орқасидан олдига қараб йўлга чиқди. У буйруқни олиб бориб берди-ю, орқасига қайтди. Бориб-келишга t минут кетган бўлса, хабарчининг тезлигини аниқланг.

V. Биргаликда бажарилган иш масалалари. Бу тип масалаларига асосан юқорида кўрсатилган „ҳаракат“ га доир масалаларни ечиш усулини қўллаш мумкин бўлган бошқа ҳар қандай алгебраик масалалар киради.

Маълумки, ҳаракатга доир масалаларни ечиш усули $S=Vt$ (V—ўзгармас) формулага асосланади. Алгебраик масалаларнинг бошқача мазмундаги баъзи масалалари ҳам, худди

шунга ўхшаш $y = kx$ (k — ўзгармас) формула асосида ечилиши мумкин. Масалан,

а) n та деталь t вақт ичида тайёрланса, бир бирлик вақт ичида тайёрланган N та деталь (ишчи ёки механизмнинг) иш унумдорлиги бўлиб, унинг учун $n = Nt$ (N — ўзгармас) боғланиш ўринлидир.

б) W сиғимли ҳовуз (резервуар, бак, бассейн) бирор қувурдан бир вақт бирлигида V куб бирлик сув билан тўлдирилса, $W = Vt$ (V — ўзгармас) боғланиш ўринлидир.

в) Бирор A иш t вақт ичида тўла бажарилиб, a бир бирлик вақт ичида бажарилган иш бўлса (a — иш унумдорлиги), у ҳолда $A = at$ дир, бунда a — ўзгармас ҳисобланади.

Лекин бундай типдаги мисолларни кўплаб келтириш мумкин. Энди шу учала кўрсатилган ҳолларга мос масалаларни кўрайлик.

17-масала. Биринчи ишчи бир детални тайёрлаш учун иккинчисидан 3 минут кам вақт сарфлайди. Агар 7 соат ичида биринчи ишчи иккинчи ишчидан 16 та кўп деталь ясай олса, уларнинг ҳар бири шу вақт ичида қанчадан деталь ясай олади?

Ечилиши Биринчи ишчининг 7 соатда тайёрлаган деталлари сонини n десак, у битта деталга $\frac{7}{n}$ га тенг вақт сарфлайди. Иккинчи ишчи 7 соатда $n-16$ та деталь тайёрласа, битта деталга $\frac{7}{n-16}$ бирлик вақт сарфлайди. Битта деталга биринчи ишчи иккинчисидан 3 минут кам вақт сарфлайди:

$$\frac{7}{n-16} - \frac{7}{n} = 3 \text{ мин.} \Longrightarrow \frac{7}{n-16} - \frac{7}{n} = \frac{1}{20} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow n^2 - 16n - 2240 = 0 \Longrightarrow n_{1,2} = 8 \pm 48.$$

Масала жавобига $n_1 = 56$ мос келади. Демак, 7 соатда биринчи ишчи 56 та, иккинчиси 40 та деталь тайёрлар экан.

18-масала. Резервуарга ҳар хил диаметрли икки қувурдан сув келади. Биринчи куни иккала қувур баравар ишлаб, 14 м³ сув берди. Иккинчи куни фақат иккинчи кичик қувур ишлаб, шунча сув етказиб берди, лекин у 5 соат кўп вақт сарфлади. Учинчи куни эса, иккинчи кунга кетган вақтчалик даврда иш бўлиб, бунда олдинига иккала қувур 21 м³ берди, сўнг фақат катта қувур 20 м³ сув берди. Ҳар бир қувур соатига қанчадан сув беради?

Ечилиши. V_1 ва V_2 ($V_1 > V_2$) бир соатда ҳар бир қувурнинг неча м³ сув беришини, t эса биринчи кунги иш вақтини билдирса, у ҳолда $V_1t + V_2t = 14$ м³ ўринлидир. Иккинчи куни $t+5$ соат ишлаган кичик қувур учун $V_2(t+5) = 14$ м³ бажарилади. Учинчи куни иккала қувур 21 м³ сув берганда $\frac{21}{V_1+V_2}$ га тенг вақт ишлашган, сўнг катта қувурнинг ўзи 20 м³ сув бериш учун $\frac{20}{V_1}$ вақт сарфлаган, демак, $\frac{21}{V_1+V_2} + \frac{20}{V_1} = t+5$. Натижада

$$\begin{cases} (V_1 + V_2)t = 14, \\ V_2(t+5) = 14, \\ \frac{21}{V_1+V_2} + \frac{20}{V_1} = t+5 \end{cases}$$

система тузилиб, ундан $t+5=\frac{14}{V_2}$ ни топиб, уни бошқа тенгламаларга қўйиб соддалаштирсак:

$$\begin{cases} 5V_1V_2+5V_2^2=14V_1, \\ 14V_1^2-27V_1V_2=20V_2^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5V_1V_2+5V_2^2=14V_1, \\ \frac{V_1}{V_2}=2{,}5;\ \frac{V_1}{V_2}=-\frac{7}{4} \end{cases}$$

каби ечилади. $\frac{V_1}{V_2}<0$ бўла олмайди, демак, $V_1=2{,}5V_2$ деб системани ечсак, $V_1=5$ м³, $V_2=2$ м³ лар аниқланиб, жавоб топилади.

Энди ***ишга доир масалаларга*** тўхталамиз. Одатда ишга доир масалаларда бажарилаётган иш ҳажми кўрсатилмайди ва у қидирилмайди (масалан, бассейнни тўлдириш, берилган ер участкасини трактор билан ҳайдаш, деталь тайёрлаш, қазиш ишлари ва ҳоказо), бу ишлар ишловчи (механизм ёки одамлар) томонидан бир текисда бажарилади. Бундай масалаларни ечишда иш ҳажми 1 га тенг деб олиниб, ишлаб чиқариш унумдорлиги a нинг t вақт билан $a=\frac{1}{t}$ каби боғланиши ҳисобга олинади.

19-масала. Икки кран бассейнни 12 соатда тўлдиради. Бассейнни биринчиси иккинчисига қараганда 10 соат вақтли тўлдира олса, иккинчи кран уни қанча вақтда тўлдиради?

Ечилиши. Иккинчи кран бассейнни t соатда, биринчиси $t-10$ соатда тўлдира олади. Агар иш ҳажмини 1 га тенг десак, 1 соатда улар бассейннинг мос равишда $\frac{1}{t}$ ва $\frac{1}{t-10}$ қисмини тўлдира олади (бу шу кранлар „иш унумдорлиги" дир). Агар улар биргаликда ишласа, 1 соатда бассейннинг $\frac{1}{12}$ қисмини тўлдирарди, демак:

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{t-10}=\frac{1}{12}.$$

Бу ердан, $t=30$, яъни иккинчи кран бассейнни шунча вақтда тўлдиради.

20-масала. Бассейнни икки крандан келадиган сув билан тўлдириш мўлжалланди. Аввал иккинчисининг тўлдира олиш вақтининг $\frac{1}{3}$ қисмига тенг вақт давомида фақат биринчи кран сув берди, кейин аксинча, биринчисининг тўлдира олиш вақтининг $\frac{1}{3}$ қисмига тенг вақт давомида фақат иккинчи кран сув берди. Натижада, унинг $\frac{13}{18}$ қисми тўлди. Агар иккалови баравар ишлаганда бассейн 3 соат 36 минутда тўлиши маълум бўлса, уларнинг ҳар бири қанча вақтда бассейнни тўлдирар эди?

Ечилиши. x ва y лар ҳар бир краннинг бассейнни тўлдира олиш соати бўлса, улар 1 соатда унинг $\frac{1}{x}$ ва $\frac{1}{y}$ қисмини тўлдира олар эди. Масала

шарти бўйича биринчи кран $\frac{y}{3}$ соат ишлаб, унинг $\frac{y}{3x}$ қисмини, сўнг аксинча $\frac{x}{3}$ соат ишлаган иккинчи кран унинг $\frac{x}{3y}$ қисмини тўлдирган: $\frac{x}{3y} + \frac{y}{3x} = \frac{13}{18}$.

Масаланинг иккинчи шартидан $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3 \text{ соат, } 36 \text{ мин.}}$ келиб чиқади.

Демак: $\begin{cases} \frac{y}{3x} + \frac{x}{3y} = \frac{13}{18}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{18} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + 6y^2 = 13\,xy. \\ 18x + 18y = 5xy \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{15 \pm 3}{2}, \\ y_{1,2} = \frac{15 \mp 3}{2}. \end{cases}$

Жавоб. Бассейнни биринчи кран 9 (ёки 6) соатда, иккинчиси 6 (ёки 9) соатда тўлдира олади.

21-масала. Биринчи трактор ерни иккинчисига қараганда 2 соат кам вақтда, учинчисига қараганда 1 соат кўп вақтда ҳайдаб бўла олади. Биринчи ва учинчи тракторлар биргаликда 1 соат 12 мин да ерни ҳайдаб бўла олади. Учалови ерни биргаликда ҳайдаса, қанча вақт сарфланади?

Ечилиши. x, y ва z лар ҳар бир тракторнинг мос равишда ҳайдаб бўла олиш соатлари бўлсин. Иш ҳажмини (бу ерда ер майдоннинг юзи) 1 деб олсак, 1 соатда тракторлар мос равишда $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ ва $\frac{1}{z}$ миқдор ер ҳайдаяди (бу иш унумдорлиги) Масала шарти бўйича, $y - x = 2$ ва $x - z = 1$. Шунингдек, биринчи ва учинчи тракторлар биргаликда 1 соатда $\frac{1}{1 \text{ соат } 12 \text{ мин}}$ иш қисмини бажаришади, демак: $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{5}{6}$.

Энди шу кўрсатилган барча тенгламалардан тузилган ушбу

$$\begin{cases} y - x = 2, \\ x - z = 1, \\ 6x + 6z = 5xz \end{cases}$$

системанинг (3; 5; 2) ва (— 0,4; — 0,6; 2,4) ечимларидан фақат биринчиси масала маъносига мос ечимдир. Учала тракторнинг иш унумдорлиги $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{31}{30}$ каби бўлиб, уларнинг ерни $\frac{30}{31}$ соатда ҳайдаб бўла олиши ҳам аниқланади.

45- топшириқ. Масалаларни ечинг:

1. Бир ишни бир ишчининг ёлғиз ўзи a кунда, иккинчи ишчи шу ишни n кун кечроқ, учинчиси эса n кун тезроқ бажара олади. Шу ишни учалови бирга ишласа, неча кунда бажара олади?

2. Ҳовузга 3 та қувур ўтказилган бўлиб, биринчи ва иккинчиси уни тўлдиради, учинчиси бўшатади. Биринчи қувур ёлгиз ўзи ҳовузни 5 соатда, иккинчиси ёлгиз ўзи 3 соатда тўлдира олади, учинчиси тўла ҳовузни 2 соатда бўшатади. Учала қувур бирга ишласа, бўш ҳовуз неча соатда тўлади?

3. Бир ишни биринчи машинистканинг ёлғиз ўзи 18 соатда, иккинчиси ёлғиз ўзи 24 соатда тамомлайди. Иккалови шу ишни бажаришга киришди. Лекин маълум вақтдан сўнг иккинчисига бошқа иш топширилди. Қолган

ишни биринчи машинистка 4 соатда тамомлади. Биринчи машинистка ҳаммаси бўлиб неча соат ишлаган?

4. Резервуарга икки жўмрак орқали сув оқиб киради. Агар ҳар икки жўмрак орқали 10 минут сув оқиб киргач, иккинчиси ёпиб қўйилса, резервуар 3 минутдан сўнг тўлади. Агар ҳар икки жўмракдан 8 минут сув оқиб киргач, биринчиси ёпиб қўйилса, резервуар 12 минутдан сўнг тўлади. Ҳар бир жўмрак ёлғиз ўзи резервуарни қанча вақтда тўлдира олади?

5. 6 кг қуруқ ўтин ва 8 кг кокс ёқилса, 74800 ккал, агар 20 кг кўпроқ ўтин 7 кг кокс билан ёқилса, 109700 ккал иссиқлик чиқади. 1 кг ўтин ва 1 кг кокс қанчадан иссиқлик чиқаради?

6. Колхоз ерининг $\frac{2}{3}$ қисмини икки трактор 4 кунда ҳайдайди. Ҳамма ерни биринчи тракторнинг ёлғиз ўзи иккинчисидан 5 кун тез ҳайдай олади. Ҳамма ерни уларнинг ҳар бири неча кунда ҳайдай олади?

7. Кинозалдаги томошабинлар икки эшикдан $3\frac{3}{4}$ минутда чиқиб кета олади. Агар биринчи эшикнинг ўзи очилса, фақат иккинчи эшикнинг ўзидан чиқарилганга қараганда 4 минут кам вақт кетади. Ҳар бир эшикнинг ўзидан томошабинлар неча минутда чиқиб кета олади?

8. Бир ишни бир бригада 3,5 кун ишлагандан сўнг, қолган ишни бошқа бригада 6 кунда тамомлади. Ҳамма ишни иккинчи бригаданинг ёлғиз ўзи биринчисининг ўзига қараганда 5 кун кейин тамомларди. Ҳар қайси бригада шу ишни неча кунда тамомлай оларди?

9. Бригада соатига 8 метр сим тортиб топшириқни соат 16 да тамомлаши мумкин эди; топшириқнинг ярми бажарилгандан сўнг, бир киши кетиб қолди, натижада бригада соатига 6 метр сим торта бошлади ва ишни соат 18 да тугатди. Бригада неча метр сим тортган ва ишни неча соатда тугатган?

10. Ҳовуз икки қувур билан p соатда тўлади. Агар унинг $\frac{1}{n}$ қисмини биринчиси, қолган қисмини иккинчиси тўлдирганда эди, a соат кетарди. Қувурларнинг ҳар бири ҳовузни қанча вақтда тўлдира олади?

11. Темир йўл шпалини икки бригада ётқизди. Бунда иккинчи бригада ишга тушгунча биринчиси t кун ишлаб, темир йўлнинг S км қисмига шпаль ётқизиб бўлганди. Иккинчи бригада ишлаган вақтда биринчисига қараганда кунига m километр кўп шпаль ётқизди ва бутун иш вақтида биринчидан n км кам шпаль ётқизди. Ҳар бири кунига неча километр шпаль ётқизган?

12. Трактор a метр юргандан сўнг унинг олд ғилдираги орқасидагидан b та ортиқ айланиб чиқади. Орқа ғилдирак айланаси олдидагининг айланасидан c метр узун бўлса, ҳар бирининг узунлигини топинг.

VI. Аниқмас тенглама, тенгламалар системаси тузиб ечиладиган масалалар. Умуман олганда, алгебраик масала таркибидаги маълум ва номаълум миқдорни ўзаро боғловчи тенгламалар сони номаълумлар сонидан кам бўлиши, лекин масалада қўйилган савол жавоби бир қийматли аниқланиши мумкин.

22-масала. Бакни биринчи ва олтинчи най 40 минутда тўлдира олади. Агар иккинчи, учинчи ва тўртинчи най бирга ишлашса, 10 минутда тўлдиради. Иккинчи, учинчи ва бешинчи найлар 20 минутда, бешинчи ва тўртинчи найлар 30 минутда тўлдира олади. Улар ҳаммаси бирга ишлашса, найни қанча вақтда тўлдирар эди.

Ечилиши. x_1, x_2 x_3, x_4, x_5, x_6 лар найларнинг иш унумдорлигини, V_0 бак ҳажмини билдирса, у ҳолда масала шартидан

$$x_1+x_6=\frac{V_0}{40},\ x_2+x_3+x_4=\frac{V_0}{10},\ x_2+x_3+x_5=\frac{V_0}{20},\ x_4+x_5=\frac{V_0}{30}$$

тенгламаларни тузиш мумкин. Бу ерда 7 номаълумли 4 та тенгламалар системаси бўлиб, барча найларнинг биргаликда ишлагандаги иш унумдорлигини аниқлаш бизни кўпроқ қизиқтиради. Биринчи тенгламанинг икки томонини 2 га кўпайтириб, сўнг барчасини ҳадлаб қўшиб чиқсак:

$$2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)=\frac{7V_0}{30},$$

бу ердан бакни тўлдириш учун кетган вақт $T=\dfrac{V_0}{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}=$ $=\dfrac{V_0}{7V_0}\cdot 60=\dfrac{60}{7}$ минут келиб чиқиб, масаланинг жавоби топилди.

23- м а с а л а. Мис ва рухдан ташкил топган икки хил қотишма берилган. Ҳар биридан 1 кг қотишма олиб янги қотишма тайёрланса, унинг таркибида 75% мис бўлди. Йиғиндиси 8 кг бўлган ҳар бир қотишмадан мос равишда x ва y кг қотишма бўлаги олиниб, қайта қуйиб тайёрланганда, таркибида 50% мис бўлган қотишма ҳосил бўлди. Агар ҳар бир қотишмадан, аксинча, мос равишда y ва x кг қотишма бўлаги олиниб, қайта қуйилса, янги қотишма таркибида неча процент мис бўлади?

Ечилиши. 1- ва 2-қотишма таркибида мос равишда p% ва q% мис бор, демак, $1\cdot\dfrac{p}{100}+1\cdot\dfrac{q}{100}=2\cdot\dfrac{75}{100}$; $x+y=8$; $x\cdot\dfrac{p}{100}+y\cdot\dfrac{q}{100}=(x+y)\dfrac{50}{100}$.
Бу учала тенгламадан

$$\begin{cases} p+q=150, & (1)\\ x+y=8, & (2)\\ px+qy=400 & (3)\end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу тўрт номаълумли 3 та тенгламалар системаси бўлиб, номаълумлар бир қийматли топилмаяпти. Аммо масала саволига бир қийматли жавоб бор, у ушбу

$$z=\frac{py}{100}+\frac{qx}{100}=\frac{py+qx}{100}$$

қийматни топишни сўраяпти. Бунинг учун (1) ва (2) тенгламани ўзаро кўпайтириб, ундан (3) ни айирилса:

$(p+q)(x+y)-(px+qy)=qx+py=150\cdot 8-400=800$. Демак, $z=$ $=8{,}0$ кг экан.

24- м а с а л а. Беш киши бир ишни бажаряпти. Биринчи, иккинчи ва учинчи ишчи бирга ишлашганда эди, ҳамма иш 7,5 соатда бажарилади. Биринчи, учинчи ва бешинчи ишчи бирга ишлаганда 5 соатда; биринчи, учинчи ва тўртинчи ишчи бирга ишлаганда 6 соатда; иккинчи, тўртинчи ва бешинчи ишчи бирга ишлаганда 4 соатда бажара оларди. Агар ҳамма ишчилар бирга ишлашса, шу ишни қанча вақтда тугатар эди?

Ечилиши. Ишни ҳар бир киши ўзича мос равишда x, y, z, t, v вақтда тугата олса, у ҳолда 1 соатда уларнинг ҳар бири мос равишда ишнинг $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{1}{z}$, $\dfrac{1}{t}$ ва $\dfrac{1}{v}$ қисмини (иш унумдорлиги) бажара олади. Энди масала шартидан ушбуларни ёза оламиз:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{7{,}5};\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{v}=\frac{1}{5};\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{6};$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{t}+\frac{1}{v}=\frac{1}{4}.$$

Бу ерда 5 номаълумли 4 та тенгламалар системаси ҳосил бўлди. Лекин ҳамма номаълумни эмас, балки $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{v}=A$ ни аниқлаш керак. Бу ифоданинг қийматини топиш усули кўп, масалан: тўртинчи тенгламанинг икки тарафини 2 га кўпайтириб, сўнг барча тенгламаларнинг чап ва ўнг томонларини ўзаро мос равишда қўшиб чиқамиз: $3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\right.$ $\left.+\frac{1}{t}+\frac{1}{v}\right)=1 \Rightarrow A=\frac{1}{3}$. Энди барча ишни ишчилар бирга бажаришларига сарфланадиган вақтини топиш учун шу биргаликдаги иш унумдорлигининг тескарисини олиниши керак: $t=\frac{1}{A}=3$ соат.

46-топшириқ. Масалаларни ечинг:

1. Уч бўлак газлама сотиляпти. Биринчисининг ярми, иккинчисининг $\frac{2}{3}$ бўлаги, учинчининг ҳаммаси сотилди. Агар учинчиси ҳамма газламанинг $\frac{1}{3}$ қисмини ташкил этиши, шунингдек, қолган газламалар иккинчи бўлакдаги газламаларнинг ярмини ташкил этиши маълум бўлса, ҳамма газламанинг неча проценти сотилган?

2. 300 м³ ли ҳовузга икки қувурдан сув қуйилиб, учинчисидан чиқиб кетади. Агар учала қувур очиқ бўлса, ҳовуз минутига 20 м³ сув билан тўлади. Уни биринчи ва учинчи қувурни очиб тўлдира бошлашди, 12 минутдан сўнг ҳовузда 100 м³ сув бор эди. Шу вақтдан бошлаб энди фақат иккинчи қувур очилиб, бошқалари ёпилди ва уни тўлдирди. Ҳовуз 30 минутда тўлди. Фақат иккинчи қувурнинг ўзи ҳовузни қанча вақтда тўлдирарди?

3. Олтин ва кумушдан қилинган уч бўлак қотишма бор эди. Учинчи бўлакнинг 2 грамидаги олтин миқдори, биринчи ва иккинчи бўлаклардан 1 граммдан бирга олиб қаралгандагисига тенг. Биринчи бўлакнинг 10 грамм олтини бор қисми массасини иккинчи бўлакнинг 80 грамм олтини бор қисмига қўшсак, учинчи бўлак массаси чиқади. Биринчи бўлакдан 4 марта катта массали учинчи бўлакда 75 грамм олтин бор. Биринчи бўлакда қанча олтин бор?

4. Совхозда *А, Б, В* ва *Г* маркали тракторлар бор. *Б, Б, В* ва *Г* маркали тракторлари бор бригада совхоз ерини 2 кунда, *А, А, В* маркали тракторлари бор бригада 3 кунда, *А, Б, В* маркали тракторлари бор бригада 4 кунда ҳайдаб бўларди. *А, Б, В, Г* маркали тўрт тракторлари бор бригада совхоз ерини неча кунда ҳайдаб бўлади?

5. Уч ишчи 80 та деталь ясаши керак. Учалови 1 соатда 20 та деталь ясайди. Дастлаб ишга биринчи ишчи киришиб, 20 та ясади ва унга 3 соатдан кўп вақт сарфлади. Қолган ишни иккинчи ва учинчи ишчи 8 соатда бажарди. Агар биринчи ишчи ишни бошидан охиригача ёлғиз ўзи бажарганда қанча вақти кетар эди?

VII. Тенгсизлик тузиб ечиладиган масалалар. Баъзи масалаларни ечишда рационал тенгсизлик (тенгсизликлар системаси) тузиш билан мулоҳаза юритилади.

25-масала. *А* ва *В* пунктлари орасидаги масофа 100 км га тенг. *А* пунктдан *В* га бир вақтда икки автомобиль жўнайди Биринчи автомобиль иккинчидан соатига 20 км ортиқ тезликка эга. Лекин у йўлда 100 мин. тўхтаб қолади. Биринчи автомобиль иккинчисидан *В* га вақтлироқ етиб бориши учун унинг тезлиги қандай бўла олади?

Ечилиши. Биринчи автомобилнинг тезлиги v км/соат бўлса, иккинчисиники $(v-20)$ км/соат, демак, $v>20$ км/соат. Биринчи автомобиль 100 км йўлни $\left(\frac{100}{v}+\frac{100}{60}\right)$ соатда, иккинчиси $\frac{100}{v-20}$ соатда ўтади. Масала шартидан $\frac{100}{v}+\frac{100}{60}\leqslant\frac{100}{v-20}$. Лекин $v>0$, $v-20>0$ ни эътиборга олсак, бу тенгсизлик $v^2-20v-1200\leqslant 0$ га тенг кучли. Бундан $20<v\leqslant 10+10\sqrt{26}$ келиб чиқади. $\sqrt{26}\approx 5$ десак, биринчи автомобиль $20<v<50$ тезликда бўлса, B га олдин етиб келади.

26- м а с а л а. Саёҳатчи кунига босиб ўтиши мумкин бўлган мўлжалдаги йўлидан 25 км ортиқ юра олса, у 10 кунда 1000 км дан кам юради, 15 км дан кам юрса, 15 кунда 1000 км дан кўп юради. Унинг мўлжаллаб қўйган кунлик тезлиги қандай оралиқда ўзгаради?

Ечилиши. Саёҳатчининг кунлик тезлигини v км/соат десак:

$$\begin{cases}(v+25)\cdot 10<1000,\\(v-15)\cdot 15>1000\end{cases}$$

системани ечиб, 7,5 км/соат $<v<81\frac{2}{3}$ км/соат топилади.

27- м а с а л а. C пунктдан A пункт ва B пунктга икки катер бориб қайтди. $|AC|$ ва $|BC|$ масофалар тенг бўлиб, AC оралиқдаги сув оқими тезлиги BC никидан катта бўлса, турғун сувдаги тезлиги бир хил бўлган бу катерларнинг қайси бири C га олдин келади?

Ечилиши. V_1 ва V_2 лар мос равишда A га ва B га боришдаги сув оқими тезлиги бўлсин $(V_1>V_2)$. V — катерларнинг турғун сувдаги тезлиги, у ҳолда $t_1=\frac{|AC|}{V+V_1}+\frac{|AC|}{V-V_1}=\frac{2S\cdot V}{V-V_1^2}$; $t_2=\frac{|BC|}{V+V_2}+\frac{|BC|}{V-V_2}=$ $=\frac{2SV}{V^2-V_2^2}$ вақтда катерлар C га қайтиб келишган. $V_1>V_2\Rightarrow$ $V_1^2>V_2^2\Rightarrow V^2-V_1^2<V_1^2-V_2^2$ бўлгани учун $\frac{2SV}{V^2-V_1^2}>\frac{2SV}{V^2-V_2^2}\Rightarrow$ $\Rightarrow t_1>t_2$ дир. Сув оқими тезлиги секин бўлган сувдаги катер вақтли қайтиб келган.

28- м а с а л а. Сотувчидаги тарози елкалари ҳар хил бўлиб, у 1 кг товарни бир томонида тортиб берди, яна 1 кг ни иккинчи томонида тортиб берди ва шу билан у қилаётган хатосини йўқотдим деб ҳисоблади. Шу тўғрими?

Ечилиши. Агар x ва y лар тортиб берилган товар, a ва b лар эса тарози елкалари бўлса, у ҳолда биринчи ва иккинчи тортганда мос равишда $x\cdot a=1\cdot b$ ва $y\cdot b=1\cdot a$ тенгликлар ўринлидир. Бу ердан $y=\frac{1}{x}$ келиб чиқади. Шундай қилиб, $x+\frac{1}{x}$ кг товар берилган. $a\neq b$ бўлгани учун $x\neq 1$, демак, $x+\frac{1}{x}>2$. Демак, хатолик йўқотилмаган.

И з о ҳ. Тарози елкалари эмас, паллалари турлича бўлганда эди, бу хатолик йўқотилган бўларди.

47- топшириқ. Масалаларни ечинг:

1. Космик кема тўғри чизиқ бўйлаб ўзгармас V тезликда боряпти. Агар у тезлигини 3 м/с га оширса, 630 метр масофани ўтишда аввалги тезликда

ўтган вақтга нисбатан 1 секунддан кам бўлмаган ва 280 секунддан кўп бўлмаган вақт ютади. V тезлик қандай қийматлар қабул қила олади?

2. Қайиқ оқим бўйлаб a км юриб, сўнг орқага b км сузди. Оқим тезлиги V га тенг. Қайиқнинг турғун сувдаги тезлиги қандай бўлганда унинг шу бориб қайтишига t соатдан кўп вақт кетмайди?

3. Икки турист A пунктдан B пунктга йўлга чиқди. Иккинчи турист йўлнинг ярмини V_1, қолган ярмини V_2 тезликда ўтди. Биринчиси эса кетган вақтнинг ярмини V_1, қолган вақтини V_2 тезликда ўтди. Улардан қайси бири кўп вақт сарфлаган?

4. Ҳовузга икки қувурдан сув келди. Уларнинг кичигидан 1 секундда 1 м³ сув келади. Учинчи қувурдан 1 секундда 1 м³ сув чиқиб кетади. Катта қувурнинг 1 секундда сув келиши (қуввати) қандай бўлганда унга 3 с дан 4 с гача 16 м³ сув кела олади, бунинг 10 м³ суви иккала қувур ишлаб, учинчиси ёпиқ бўлганда, 6 м³ суви эса фақат каттаси ва учинчиси очиқ турганда келади деб ҳисоблансин.

ЖАВОБЛАР

Вариантлар жавоби

1-в. 1. $\{0;\ \log_{2.5} 1{,}5\}$. 2. $\left\{\frac{\pi}{4}(1+2k);\ k\in Z\right\}$. 3. $]-\infty;\ -8]\ U\ ]-\frac{1}{2};\ 0[\ U\ U\ ]\frac{1}{3};\ +\infty[$. 4. $4\sqrt{3}$ см. 5. $\frac{1}{3}b^3\sin\alpha$ см³. *2-в.* 1. $]-\infty;\ -1]\ U\ [4;\ +\infty[$. 2. $\left\{\frac{\pi}{8}(1+4k),\ k\in Z\right\}$. 3. $\left]-\frac{3}{2};\ -1\right[\ U\ ]4;\ 5[$. 4. $\frac{a}{3}$ см. 5. $\frac{4\pi r^3 h^3}{3(r+\sqrt{r^2+h^2})}$. *3-в.* 1. $\left]-\frac{1}{2};\ 0\right[\ U\ \left]0;\ 4\right[$. 2. $\{1\}$. 3. $|a|\leqslant\frac{2}{2-\sqrt{3}}$. 4. $\left]\frac{2}{3};\ 2\right[$ да ўсади. 5. $2\arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}$. *4-в.* 1. $\{\log_{4,5}2;\ \log_{1,5}3\}$. 2. $\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi;\ \pi n-\right.$ $\left.-\operatorname{arctg}\frac{2}{3};\ n\in Z\right\}$. 3. $]1983;\ 1983^5[$. 4. $\frac{11\sqrt{5}}{4}$. 5. $\frac{9}{16}$. *5-в.* 1. $\{9;\ \sqrt{3}\}$. 2. $\left\{\frac{\pi}{12}+\pi k,\ (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n;\ k,\ n\in Z\right\}$. 3. $]-\infty;\ -\sqrt{1983}[\ U\ [\sqrt{1983};\ +\infty[$. 4. $\left(-3;\ \frac{2}{3}\right)$, $(1;\ -2)$. 5. 36π. *6-в.* 1. $\left\{-\frac{5c}{2};\ \frac{3c}{2}\right\}$. 2. $[\log_2 3;\ +\infty[$. 3. $\operatorname{ctg}x=$ $=-2\pm\sqrt{3}$. 4. $y-3=\pm 2\sqrt{2}\left(x\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 5. $2\arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}$. *7-в.* 1. $y'=\cos^2 2x-x\sin 4x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 2. $\{16\}$. 3. $\left\{\frac{\pi}{6}(6k+(-1)^k),\ k\in Z\right\}$. 4. $S=$ $=\frac{1}{3}$ кв. б. 5. $\frac{\sqrt{3}p^2}{\cos\alpha}\sqrt{1-4\cos^2\alpha}$. *8-в.* 1. $\left\{\frac{\pi}{12}(6k\pm(-1)^k),\ k\in Z\right\}$. 2. $\{3\pm\sqrt{2}\}$. 3. $\frac{1}{12}\sqrt{2Q^3\sin\alpha\sin 2\alpha}$. 4. $y'(0)=1$. 5. $\alpha=2$, чунки $\alpha\in[0;\ 2[\Longrightarrow y'(\alpha)>0$; $\alpha\in]2;\ +\infty[\Longrightarrow y'(\alpha)<0$. *9-в.* 1. $\{0\}$, 2. $\left\{\frac{\pi k}{2},\ \pm\frac{\pi}{3}(4n\pm 1);\ k, n,\in Z\right\}$. 3. $\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\ \sqrt{3}\right]$. 4. $\varphi=60°$. 5. $\frac{a^2-b^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. *10-в.* 1. $\{(2;\ 7);\ (7;\ 2)\}$. 2. $\left\{\frac{\pi}{2}(1+4k),\ k\in Z\right\}$. 3. $]-4;\ -2[\ U\ ]0;\ +\infty[$. 4. $\frac{d^3}{4\pi}\cos^2\alpha\sin\alpha$. 5. $]-\infty;\ -2]\ U\ ]-1;\ \infty]$ да ўсувчи, $\left]-2;\ -\frac{3}{2}\right[\ U\ \left]-\frac{3}{2};\ -1\right[$ да камаювчи. *11-в.* 1. $\{2^{3,2}-1\}$. 2. $]-\infty;\ 5-\sqrt{5}\ [U]\ 5+\sqrt{5};\ +\infty[$. 3. $\left\{\frac{\pi}{6}\cdot(1+2k),\frac{\pi}{18}(6n+\right.$ $\left.+(-1)^n)\right.$;

$k, n \in \mathbf{Z}\}$. 5. $]1; +\infty[$ да ўсувчи, $]-\infty, 1[$ да камаювчи. *12-в.* 1. $\{(2; 3), (3; 2)\}$. 2. $]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$. 3. $\left\{\frac{\pi}{4}(1+4k),\ \pi n - \operatorname{arctg} 3;\ k, n \in \mathbf{Z}\right\}$.

4. $\dfrac{\pi a^3 \sin^2 2\alpha}{24\sqrt{2}\cos^3\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$. *13-в.* 1. $\frac{a^3}{3}\sin^2\beta\operatorname{tg}\alpha$. 2. $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ да ўсувчи, $[-1; 1]$ да камаювчи. $y_{\min} = y(-1) = -1$, $y_{\max} = y(1) = 1.3.4\cdot 10^{22}$.

4. $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \operatorname{arctg} 2+\pi n;\ k, n \in \mathbf{Z}\right\}$. *14-в.* 1. $\sqrt[3]{\dfrac{12\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}}$. 2. $]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$ да камаювчи, $]0; 2[$ да ўсувчи. 3. $\{(20; 16)\}$. 4. $\left\{\frac{\pi k}{2}, \frac{2\pi n}{5}, \frac{2\pi l}{3}, \pi(1+2m);\ k, n, l, m \in \mathbf{Z}\right\}$. *15-в.* 1. $\frac{ab}{a+b}$. 2. $\{1; 2\}$. 3. $\left\{\frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{3}(3n\pm 1);\ k, n \in \mathbf{Z}\right\}$. 4. $\{(4; -3)\}$. 5. $V = \frac{4}{3}h^3\operatorname{ctg}\beta$, $S = \frac{4h^2}{\cos^2\beta}(\cos\beta + \sin^2\beta)$. *16-в.* 1. $\frac{x^2-10x+4}{3(x^2-1)}$. 2. $\{10^2; 10^3\}$. 3. $\left]\frac{104}{29}; +\infty\right[$. 4. $\left\{\frac{\pi}{2}(1+2k);\ \frac{\pi}{4}(1+2n);\ k, n \in \mathbf{Z}\right\}$. 5. $\frac{6h^2\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3\operatorname{tg}^2\alpha+1}}$. *17-в.* 1. $\frac{(x+y)^2}{x-y-1}$. 2. $\left\{(1; 1);\ \left(-\frac{58}{21}; \frac{29}{21}\right)\right\}$. 3. $\left\{\log_5\frac{90}{16}\right\}$. 5. $\frac{b-a}{6}(b^2+\sqrt{ab}+a^2)\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-1}$. *18-в.* 1. $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ да қамаювчи, $[-2; 2]$ да ўсувчи. $y_{\min} = -\frac{32}{3}$, $y_{\max} = \frac{16}{3}$. 3. $\{-9\}$. 4. $\left\{\frac{\pi k}{3};\ \frac{\pi}{18}(6n\pm 1);\ k, n \in \mathbf{Z}\right\}$. 5. a, b — асослари, cd — ён томонлари, α, β — катта асосидаги бурчаклар бўлса; $c\cos\alpha + d\cos\beta = b - a$, $c\sin\alpha = d\sin\beta$. Бу системани ечиб, $\cos\beta = \frac{d^2-c^2}{2d(b-a)}$; $\cos\alpha = \frac{c^2-d^2}{2c(b-a)}$. *19-в.* 1. 1 кунда 1000 дона. 2. $S = 4{,}5r^2$. 3. $\{a^{4/3}\}$. 5. $z - 2$. *20-в.* 1. $a^3\sin^2 2\alpha/4(1+\cos\alpha)$. 2. $\frac{1}{5}(48+\sqrt{2929}) \approx 20{,}4$ км/соат. 3. 1. 4. $\{100\}$. 5. $]-\infty; 2[$ да ўсувчи. $]2; +\infty[$ да камаювчи; парабола. *21-в.* 2. $]-\infty; -5[\cup]9; +\infty[$. 3. $\{-3; 2\}$. 4. $\frac{15}{4}$. 5. $\sin^2 2\alpha$. *22-в.* 2. $]a_1; a_2[$, бунда $a_{1,2} = \frac{5\mp\sqrt{37}}{4}$. 3. $\left\{-3; \frac{3}{2}\right\}$. 4. $\frac{14}{3}$. 5. $4\operatorname{ctg} 2\alpha$. *23-в.* 1. $\frac{b^3}{3}\cos^2\beta\sin\beta\sin 2\alpha$. 2. $-a^2-a-1$. 3. $\{6\}$. 5. $y_{\max}(2) = \ln 4$. *24-в.* 1. $]-\infty; -1[\cup]5; +\infty[$. 2. $\{-2\}$. 3. $\left\{\pi k, \frac{\pi}{8}(1+2n);\right.$

$k, n \in Z\}$ 4. $y_{min}(-1) = 1$, $y_{max}(1) = 3$. 5. $\frac{2}{2-a}$. *25-в.* 1. $\{7; -3\}$. 2. $\left\{\frac{\pi}{2}(1+2n), \frac{\pi}{4}(1+4k); \frac{\pi}{8}(1+4l); n, k, l \in Z\right\}$. 3. $]-3; 1] \cup]3; 5[$. 4. $y_{min}(1) = 1 - \ln 3$. 5. $(1-x^2)/(2-x^2-\sqrt{1-x^2})$. *26-в.* 1. $\{1; e\}$. 2. $\{\pm 2\sqrt{2}\}$. 3. $\{(4{,}5; 0{,}5)\}$. 5. $\left(\frac{2a}{b}\right)^{2a+b}$. *27-в.* 1. 45°. 2. $\{-1; 3\}$. 3. $\{(6; 3); (3; 6)\}$. 4. $\{\pi n - \operatorname{arctg} 2, n \in Z\}$. 5. $\frac{4(x+a)}{(x+a)^2-1}$. *28-в.* 1. $\frac{1}{4}(\sqrt[3]{a}-1)$. 2. $\left\{2; 2^{-\frac{1}{3}}\right\}$. 4. $\{16\}$. 5. $y = \pm\sqrt{8}x - 3$. *29-в.* 1. $\sqrt{a}/(\sqrt{a}+\sqrt{b})$. 2. $\{3 + \frac{10}{3}\log_5 10\}$. 4. $\{60 - 4\sqrt{124}\}$. 5. $1/2 \sin\frac{\beta}{2}$. *30-в.* 1. -2. 2. $\left\{\frac{\pi k}{2}, k \in Z\right\}$. 3. $\{10^{-1}; 10^3\}$. 4. 3 км/соат. 5. $y_{max}(-2) = -4$, $y_{min}(-2{,}5) = -5$. *31-в.* 4. $\log_a b$. 2. $\left\{\pi k - (-1)^k \frac{\pi}{6}, k \in Z\right\}$. 3. $[4; +\infty[$. 4. $|AB| = a = \frac{2b}{\sqrt{3}}$. 5. $y_{э.кич}(-1) = -\frac{4}{3}$; $y_{э.кат}(-3) = 0$. *32-в.* 1. -1. 2. $\{(4; 2)\}$. 3. $\left\{\pi k, \frac{\pi}{6} \times (6n \pm 1); k, n \in Z\right\}$. 4. $y_{э.кат}(1) = 3$, $y_{э.кич.}(-1) = 1$. 5. $V_{1,2} = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{c} \pm \frac{1}{b}\right)$. *34-в.* 1. $\{2\}$. 2 $\left\{\pi n, \frac{\pi}{8}(1+2k); n, k \in Z\right\}$. 4. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. 5-я. $y_{э.кич.}\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 1{,}57$; $y_{э.кат.}\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx -0{,}6$. 5-э. $a_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$. *35-в.* 1. $\{2; -3\}$. 2. $\left\{2\pi k \times \frac{\pi}{5}(1+2n); k, n \in Z\right\}$; 3. 24π см³. 4. $\{5; \sqrt[5]{5}\}$. 5-я. $V = 51$ м/мин, $W = 36$ м/мин². 5-э. $]-\infty; -1[\cup [4; +\infty[$. *36-в.* 1. $|a| > 1 \Longrightarrow 2(a+\sqrt{a^2-1})$. 2. $V = \frac{4}{3}\pi l^3 \cos\alpha \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$, $S = 2\pi l^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha$. 3. $]-\infty; 1] \cup [5; +\infty[$. 4. $\left\{\frac{\pi}{4}(1+2n), \frac{\pi}{24}(6k+(-1)^k); n, k \in Z\right\}$. 5. $y_{э.кич.}(1) = 4$, $y_{э.кат.}(2) = 13$. *37-в.* 1. $a > 1 \Longrightarrow \sqrt{a^2-1}$. 2. $\left\{\pi(1+2k), \frac{4\pi}{3}(3n \pm 1); k, n \in Z\right\}$. 3. $]-\infty; -3[\cup [2; +\infty[$. 4. Томони 4 га тенг квадрат. 5. $\vec{b} = -24, 32; 30)$. *38-в.* 1. $\{a; a\sqrt[3]{a}\}$, бу ерда $a \neq 1$, $a > 0$. 2. $\left\{\frac{\pi}{2}(1+2k), \pi(1+2n); k, n \in Z\right\}$. 3. 1. 5. $]-\infty. -2] \cup]1; 2] \cup]4; +\infty[$. *39-в.* 1. $\{(-3; 4), (4, -3), (-1 \mp \sqrt{10}; -1 \pm \sqrt{10})\}$; 3 200πм²; 4. 0. 5. $\left[3; 3\frac{1}{2}\right] \cup [5; +\infty[$. *40-в.* 1. 15 ва 10 кун. 2. $\{20; 500\}$. 3. $\left\{\frac{\pi}{4}(1+4k), \operatorname{arctg} 3 + \pi n; k, n \in Z\right\}$. 4. $S_{ac} = \pi l^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}$,

$V = \frac{\pi l^3}{3} \cos\frac{\varphi}{2} \sin^2\frac{\varphi}{2}$. 5. $y_{э\ кич.}(0) = 0$, $y_{э,\ кич.}(3) = 0$, $y_{э.\ кат.}(2) = \frac{4}{3}$. *41-в.* 1. 0. 2. $]0; 2[$ да камаювчи, ташқарисида ўсувчи, $y_{max}(0) = 2$, $y_{min}(2) = -2$. 3. $\{1\}$. 5. $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}H}{a}$. *42-в.* 1. $a\sqrt{2}$. 2. $a > 0$, $b > 0$, $4 \neq \frac{a}{b} \neq 9 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow 5/(a - 9b)$. 3. $\{10\}$. 4. $\left[-\frac{11}{4}; -2\right[$ 5. $\left\{\pi(2n+1), 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi k;\right.$ $\left. k, n \in Z\right\}$. *43-в.* 1. $x = y = 18$. 2. $|x| \neq |y|$, $x \neq 0$, $x + y > 0 \Longrightarrow x - y$. 3. $\{4\}$. 4. $\left\{\pi n - \operatorname{arctg} 3, \frac{\pi}{4}(1 + 4k);\ k, n \in Z\right\}$. *44-в.* 1. $2x_0^2/(x_0^2 - y_0^2) = 5$. 2. $2\cos 2x_0 = 1$. 3. $\{-1\}$. 4. $y = 2$. 5. $x = -4$. 6. 3. 7. $b = 9$. 8. $S = 81$. 9. 13 см. 10. $x = 60°$.

III боб топшириқлари жавоби

1-топшириқ. 1а) $\frac{5x+4}{x^2+x+1}$; 1б) $\frac{x^2-1}{x^4-2x^2+4}$; 1в) $x \neq y$, $3y \neq 2x \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \frac{x+y}{x-y}$; 1г) $x \neq y$, $y \neq z$, $z \neq x \Longrightarrow \frac{x+y+z}{2}$; 1д) $x \neq -1 \Longrightarrow \frac{x^4+1}{x+1}$. 1е) $\frac{x^2-4}{x^2+5}$; 1ж) $\frac{2x^2+3}{3x^2-3}$; 1з) $|x| \neq |y| \Longrightarrow \frac{1}{x^2-y^2}$. 2а) $x \neq 0$, $\neq -\sqrt[3]{3}$, $\neq \pm\sqrt[3]{2} \Longrightarrow x^2 + 5$; 2б) $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, $|z + y| \neq x$, $|z + y| = 0 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \frac{(x+y+z)^2}{2yz}$; 2в) $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0 \Longrightarrow 4$; 2г) $x \neq -y \Longrightarrow -3xy/(x^3+y^3)$; 2д) $|x| \neq |y| \Longrightarrow 2x^2y^2$; 2е) $x \neq y \neq z \neq x \Longrightarrow 0$. 3а) $x \neq 0 \neq y$, $y \neq -x \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \frac{y-x}{x^4y^4}$; 3б) $y \neq 0$, $z \neq 0$, $|x| \neq |z| \Longrightarrow \frac{1}{x+z}$; 3в) $x \neq 0 \neq y \Longrightarrow \frac{2y^2}{x}$; 3г) $m \neq n \Longrightarrow m + n$. 4а) $x \neq y \neq z \neq x$, $x + y + z \neq 0 \Longrightarrow \frac{yx + zy + xz}{x+y+z}$; 4б) $x \neq y \neq z \neq x \Longrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)$.

2-топшириқ. а) $m > n$, $n \neq 0 \Longrightarrow \frac{\sqrt{m^2-n^2}}{n}$; б) $|a| > |b| \neq 0 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow -\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$; в) $|m| > \sqrt{5} \Longrightarrow \frac{m^2+5}{10}$; г) $a \neq \pm b \Longrightarrow \frac{a\sqrt[5]{a+b}}{a+b}$; д) $m \pm n > 0 \Longrightarrow \sqrt{m+n}$; е) $a > 1 \Longrightarrow \sqrt{a-1}$.

3-топшириқ. а) $p + q > 0 \Longrightarrow q(p+q)$; б) $a \neq b$, $ab > 0 \Longrightarrow \frac{a}{2}$; в) $m \neq n$, $m > 0$, $n > 0$, $m \neq 1 \Longrightarrow \frac{1}{m^2}$; г) $mn > 0$, $np > 0 \Longrightarrow -3n(m+p)$; д) $y \neq x$, $x > 0$, $y > 0 \Longrightarrow -\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}$; е) $a \neq b$, $a > 0 \Longrightarrow a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}$.

4-топшириқ. а) $x \neq y$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0 \Longrightarrow x + y$; б) $|n| \neq 8$, $n \neq 0 \Longrightarrow 2$;

в) $a \neq b$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0 \Longrightarrow 1$; г) $a \neq b$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0 \Longrightarrow 3$; д) $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y \Longrightarrow 2\sqrt[4]{\frac{y}{x}}$; е) $\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} > 0 \Longrightarrow \sqrt[4]{x}$; $\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} < 0 \Longrightarrow -\sqrt[4]{x}$; ж) $p > 0$, $p \neq q$, $\sqrt{p} + \sqrt[3]{q} \geqslant 0 \Longrightarrow \sqrt{\sqrt{p} + \sqrt[3]{b}}$; з) $\frac{\sqrt[3]{a} - 1}{4}$.

5- топшириқ. а) $|x| \leqslant 1 \Longrightarrow x$; $|x| > 1 \Longrightarrow \frac{1}{x}$; б) $0 \leqslant x < 1$ ёки $x > 1 \Longrightarrow \sqrt[3]{x^2} + 2$; в) $0 < a < b < 2a \Longrightarrow 1$; $2a < b < 0$ бўлганда эса $a > b \Longrightarrow 1$; $a < b \Longrightarrow -1$; д) $(a + b)\sqrt[3]{\frac{2}{ab}}$.

6- топшириқ. 1а) Йўқ; 1б) ҳа; 1в) ҳа; 1г) йўқ; 1д) йўқ; 1е) йўқ; 1ж) йўқ; 1з) ҳа. 2а) $|a| \neq 3 \Longrightarrow x = \frac{1}{a-3}$; $a = 3$ да ечими йўқ, $a = -3$ да эса чексиз кўп ечимга эга: $x \in R$; 2б) $|a| \neq 2 \Longrightarrow x = \frac{3a-5}{a-2}$; $a = 2$ да ечими йўқ; $a = -2$ да эса чексиз кўп ечимга эга: $x \in R$; 2в) $a \neq 0$, $a \neq 3$, $a \neq 4 \Longrightarrow x = \frac{3+a}{a-4}$; акс ҳолда ечимга эга эмас. 4) Бу система ушбу тўрт система бирлашмасига тенг кучли:

$$\begin{cases} f(x) = 0, \ \varphi(x) = 0, \\ g(x), \ \psi(x) \text{ лар мавжуд;} \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = 0, \ \psi(x) = 0, \\ g(x), \ \varphi(x) \text{ лар мавжуд;} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = 0, \ \varphi(x) = 0, \\ f(x), \ \psi(x) \text{ лар мавжуд;} \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) = 0, \ \psi(x) = 0, \\ f(x), \ \varphi(x) \text{ лар мавжуд.} \end{cases}$$

7- топшириқ. 1а) $\{-1; 2; -1\}$; 1б) $\{1\}$; 1в) $\{-2; -1\}$; 1г) $\{0; 2; 4\}$; 1д) $\left\{-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; 3\right\}$; 1е) $\{0; 1; 2\}$; 1ж) $\left\{-2; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; 3\right\}$. 2а) $\{\pm 2; \pm 3\}$; 2б) $\{1; 6\}$; 2в) $\{\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{3}\}$; 2г) $\{2{,}5 \pm \sqrt{5{,}25}\}$; 2д) $|a|\sqrt{3} > 2|b| \Longrightarrow \{-2{,}5a \pm \sqrt{2{,}5a^2 \pm \sqrt{a^4 + b^4}}\}$, $\sqrt{3}|a| < 2|b| \Longrightarrow \{-2{,}5a \pm \sqrt{2{,}5a^2 + \sqrt{a^4 + b^4}}\}$; 2е) $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$; 2ж) $\left\{1; \frac{3}{2}\right\}$. 3а) $\{1; 3\}$; 3б) $\{\pm 2; \sqrt{6}; \sqrt{6}\}$; 3г) $\{\sqrt{3} \pm 2; \sqrt{3} \pm 1\}$. 4а) ечими йўқ; 4б) $\left\{-\frac{3}{2}; 1\right\}$; 4в) $\left\{\frac{1}{4}\right\}$; 4г) $\left\{-\frac{1}{6}\right\}$; 4е) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; 4ж) $\{-0{,}8\}$; 4з) $\{-6; 2; -2 \pm \sqrt{6}\}$. 8а) $\{2; \pm 5; \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}\}$; 8б) $\left\{\frac{-5}{2}; \frac{2}{3}; 3\right\}$; 8в) $\left\{-2; \frac{1}{2}; \pm 1\right\}$; 8г) $\{1{,}5 \pm \sqrt{1{,}25}; 2 \pm \sqrt{3}\}$; 8д) $\{\alpha \pm \beta\}$, бу ерда $\alpha = -\frac{1}{4}(\sqrt{13} + 1)$ $\beta = \frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{13} - 2}$, 8з) $\{-1; -1{,}5\sqrt{1{,}25}\}$.

8-топшириқ. 1а) $\{(0;\ 0),\ (2,\ 1),\ (2;\ -1)\}$; 1б) $\{(0;\ 0),\ (0{,}3;\ 1{,}2),\ (1{,}2;\ 0{,}3)\}$; 1в) $\left\{\left(\frac{5}{2};\ \frac{5}{4}\right),\ \left(\frac{3}{2};\ \frac{3}{4}\right),\ \left(\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right),\ (0;\ 0),\ \left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)\right\}$; 1г) $\{(-3;\ 2),\ (3;\ -2)\}$; 1д) $\left\{(3;\ -3),\ (1;\ -1),\ \left(\alpha_1;\ \frac{\alpha_1}{2}\right),\ \left(\alpha_2;\ \frac{\alpha_2}{2}\right)\right\}$, бу ерда $\alpha_{1,2}=-13\pm\sqrt{57}$; 1е) $\left\{\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)\right\}$. 2а) $\{(\pm 1;\ \pm 2),\ (\pm\sqrt{2};\ \pm\sqrt{2})\}$; 2б) $\{(1;\ 2),\ (2;\ 1)\}$; 2в) $\{(4;\ 12),\ (12;\ 4),\ (\alpha_1;\ \alpha_2),\ (\alpha_2;\ \alpha_1)\}$, бу ерда $\alpha_{1,2}=-5\pm\sqrt{55}$; 2г) $\{(\pm 7;\ \pm 3)\}$; 2д) $\{(2;\ -1),\ (-1;\ c)\}$, $c\in R$; 2е) $\left\{(\pm 2;\ \pm 1),\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2};\ \pm\sqrt{2}\right)\right\}$; 2ж) $\{(\pm 1;\ \pm 2),\ (\pm\sqrt{2};\ \pm\sqrt{2})\}$; 2з) $\{(3;\ 1;\ 1)\}$; 2и) $\{(1;\ 2;\ 1),\ (-1;\ 2;\ 1)\}$.

9-топшириқ. 1а) $\{(2;\ 3),\ (3;\ 2)\}$; 1б) $\{(3;\ 4),\ (4;\ 3)\}$; 1в) $\{(1;\ 1)\}$; 1г) $\{(1;\ 4),\ (4;\ 1)\}$; 1д) $\{(2;\ 4),\ (4;\ 2),\ (\alpha_1;\ \alpha_2),\ (\alpha_2;\ \alpha_1)\}$, бу ерда $\alpha_{1,2}=\frac{1}{6}(-13\pm\pm\sqrt{377})$; 1е) $\{(3;\ 4),\ (4;\ 3),\ (\alpha_1;\ \alpha_2),\ (\alpha_2;\ \alpha_1)\}$, бу ерда $\alpha_{1,2}=\frac{1}{7}(-16\pm\pm 8\sqrt{10})$; 1ж) $\{(3;\ 5),\ (5;\ 3),\ (\alpha_1;\ \alpha_2),\ (\alpha_2;\ \alpha_1)$, бу ерда $\alpha_{1,2}=-4{,}5\pm\sqrt{5{,}25}$; 1з) $\{(1;\ 3),\ (3;\ 1)\}$, 1и) $\{(6;\ 6),\ (6;\ 6),\ (\alpha_1;\ \alpha_2),\ (\alpha_2;\ \alpha_1)\}$, бунда $\alpha_{1,2}=-1{,}5\times\times(1\pm\sqrt{5})$; 1л) $\{(-1;\ 2),\ (2;\ -1)\}$; 1м) $\{(2;\ -1),\ (-1;\ 2)\}$; 1н) $\{(\pm 3;\ \pm 2),\ (\pm 2;\ \pm 3)\}$; 1о) $\{(-3;\ 4),\ (4;\ -3)\}$; 1п) $\{(1;\ 4),\ (4;\ 1),\ (2\mp\sqrt{3};\ 2\pm\sqrt{3})\}$.

10а) $3a\neq 2b \Longrightarrow \{(\alpha_1;\ \alpha_2),\ (\alpha_2;\ \alpha_1)\}$, $\alpha_{1,2}=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{2a^2b-a^3}{4(3a-2b)}}$; $3a=2b$, $a^3\neq a^2b \Longrightarrow$ ечими йўқ; $3a=2b$, $a^3=a^2b \Longrightarrow \{(c,\ -c)\}$, $c\in R$; 2б) $\{(2;\ 3),\ (3;\ 2),\ (-6;\ 1),\ (1;\ -6)$; 2в) $\{(\alpha_1;\ \alpha_2),\ (\alpha_2;\ \alpha_1),\ (-\alpha_1;\ -\alpha_2),\ (-\alpha_2;\ -\alpha_1),\ (\gamma_1;\ \gamma_2),\ (\gamma_2;\ \gamma_1),\ (-\gamma_1;\ -\gamma_2),\ (-\gamma_2;\ -\gamma_1)\}$, $\alpha_{1,2}=3\pm\sqrt{8}$, $\gamma_{1,2}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{129})$; 1г) $\{(\pm 2;\ \mp 1),\ (\mp 1;\ \pm 2)\}$; 1д) $\{(2;\ 3),\ (3;\ 2)\}$; 1е) $\{(\alpha_1;\ \alpha_2),\ (\alpha_2;\ \alpha_1)\}$, $\alpha_{1,2}=\frac{b}{2}\left(1\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$; 1ж) $\{(\alpha_1;\ \alpha_2),\ (\alpha_2;\ \alpha_1),\ (\beta_1;\ \beta_2),\ (\beta_2;\ \beta_1)\}$, бунда $\alpha_{1,2}=\frac{a}{2}\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\beta_{1,2}=\frac{a}{2}(1\pm\sqrt{3})$; 1з) $\{(\alpha_1;\ \alpha_2),\ (\alpha_2;\ \alpha_1),\ (\beta_1;\ \beta_2),\ (\beta_2;\ \beta_1),\ (\gamma_1;\ \gamma_2),\ (\gamma_2;\ \gamma_1)\}$, бунда $\alpha_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$; $\beta_{1,2}=\frac{1}{4}(1+\sqrt{12a+1}\pm\pm\sqrt{2-4a+2\sqrt{12a+1}})$, $\gamma_{1,2}=\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{12a+1}\pm\sqrt{2-4a-2\sqrt{12a+1}}\right)$, 1и) $\{(3;\ 1),\ (1;\ 3)\}$.

10-топшириқ. а) $\{(2;\ 0),\ (0;\ -2)\}$; б) $\{(1;\ 4),\ (-1;\ 4),\ (2;\ 1),\ (-2;\ 1)\}$, в) $\{(4;\ 9),\ (9;\ 4)\}$; г) $\{(\pm 16;\ \pm 81);\ (\pm 81;\ \pm 16)\}$; д) $\{(10+\pm 4\sqrt{6};\ 10-4\sqrt{6})\}$; е) $\{(0,\ a),\ (a;\ 0),\ (\alpha_1;\ \alpha_2),\ (\alpha_2;\ \alpha_1)\}$, $\alpha_{1,2}=0{,}25a\times\times(2+\sqrt{3}\pm\sqrt{4\sqrt{3}-5})$; ж) $\{(4;\ 9),\ (9;\ 4)\}$; з) $\{(8;\ 64),\ (64;\ 8)\}$;

и) $\{(\alpha_1;\ \alpha_2),\ (\alpha_2;\ \alpha_1)\}$, $\alpha_{1,2} = 10 \pm 6\sqrt{3}$; к) $\{(-1;\ -2),\ (2;\ 1)\}$; л) $\{(5;2),\ (-2;\ -5)\}$; м) $\{(9;\ 1),(0;\ \sqrt[3]{82})\}$.

11-топшириқ. 1а) $a \neq 0 \Longrightarrow \left\{\left(\frac{a^2+1}{a^2};\ \frac{a+1}{a^2}\right)\right\}$; 1б) $|a| \neq 1 \Longrightarrow \{(0,\ a)\}$; $a = -1 \Longrightarrow \{(c+1;\ c)\}$, $c \in R$; $a = 1 \Longrightarrow \{(c,\ 1-c)\}$; $c \in R$; 1в) $|a| \neq 1 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \left\{\left(\frac{1+a+a^2}{1+a};\ \frac{-a}{1+a}\right)\right\}$; $a = 1 \Longrightarrow \{(c;\ 1-c)\}$, $c \in R$; $a = -1 \Longrightarrow$ ечими йўқ. 2а) $a = 3$; 2б) $a = -7$; 2в) $a = 1$.

12-топшириқ а) $u = ax^2 + bx + c$, $v = -ax^2 - bx - d \Longrightarrow u_{1,2} = A \pm$ $\pm \sqrt{-A^2+B}, u_{3,4} = A \pm \sqrt{-A^2-B}$ лар аниқланади. Сўнг $ax^2 + bx + c = u_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ тенглама ечилса, ушбу 8 та ечим ҳосил бўлади:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 2a(c+d) \pm 2a\sqrt{-(c-d)^2 \pm \sqrt{\frac{(c-d)^2-4e}{5(c-d)}}}},$$

бу ерда $A = \frac{c-d}{2}$, $B = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(c-d)^2-4e}{5(c-d)}}$; б) $\{\pm 1\}$; в) $u = x + a + b$, $v = -x \Longrightarrow v_{1,2,3,4} = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{-\frac{(a+b)^2}{4} \pm \frac{1}{2}(a^2+b^2)}$. Бу ердан $a +$ $+ b \neq 0 \Longrightarrow \{-a;\ -b\}$, $a + b = 0 \Longrightarrow \{c,\ c \in R\}$; г) $\{1;\ 0\}$; д) $\{-30 \pm$ $\pm \sqrt{319\frac{1}{3}}\}$; ж) $\{-2;\ 3\}$; з) $\{4{,}5;\ 5{,}5\}$; и) $a = b \Longrightarrow \{c,\ c \in R\}$; $a \neq b \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \{0;\ a+b\}$; к) $\{1;\ -5\}$.

13-топшириқ. а) Йўқ; б) ҳа; в) ҳа; г) йўқ; д) йўқ; е) йўқ; ж) ҳа; з) йўқ.

14-топшириқ. 1а) $[-2;\ 1]$; 1б) $]-\infty,\ -1[\cup]5;\ +\infty[$; 1в) $]-\infty;\ +\infty[$; 1г) ечими йўқ; 1д) $\left[1;\ \frac{4}{3}\right]$; 1е) $]-1;\ 1]$; 1ж) $]-\infty;\ -1]\cup]1;\ +\infty[$; 1з) $]-\infty;$ $-1]\cup]0;\ 1]$. 2а) $]2;\ 3[$; 2б) $[-5;\ 1]$; 2в) $[-1;\ 1[\cup\{2\}$; 2г) $]-\infty;\ 2[\cup]5;\ +\infty[)$; 2д) $]-\infty;\ 1[\cup\left[\frac{3}{2};\ +\infty\right[$; 2е) $\left]-\infty;\ \frac{5}{2}\right[\cup\left]\frac{33}{8};\ +\infty\right[$; 2ж) $]-6;\ 3[$. 3а) $[1;$ $3[\cup[5;\ +\infty[$; 3б) $]-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left[\cup\right]0;\ +\infty[$; 3в) $]-1;\ +\infty[$; 3г) $\left]-\frac{9}{2};\right.$ $-2[\cup]3;+\infty[$; 3д) $\left]-\infty;\ -\frac{5}{2}\right[$; 3е) $\left]\frac{3}{4};\ 1\right[\cup]7;+\infty[$ 4а) $]-\infty;\ -1[\cup]3;\ 7[$; 4б) $]-\infty;\ -3[\cup]-2;\ 0[$; 4в) $]-1;\ 0[\cup]1;\ 4[$; 4г) $]-4;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$; 4д) $\left]\frac{1}{3};\right.$ $4[$; 4е) $]-1,\ 2[\cup]2;\ 5[$. 5а) $]-\infty;\ 0[\cup]1;\ 6[$; 5б) $]1;\ 2[\cup]7;\ 8[$; 5в) $]-\infty;$ $-3[\cup]-2;\ 3[$; 5г) $]3;\ 4[$; 5д) $[-3;\ 0[\cup]20;\ +\infty[$; 5е) $]-\infty;\ -1]\cup]5;\ 6[$; 5ж) $]-2;\ -1[\cup]2;\ +\infty[$.

15-топшириқ. 1а) $\left\{\frac{2}{3}\right\}$; 1б) $\left\{-\frac{9}{4};\ \frac{13}{8}\right\}$; 1в) $\left[\frac{2}{3};\ +\infty\right[$; 1г) $\{0{,}7;\ -1{,}5\}$;

1д) $\left[-\frac{5}{2}; \frac{2}{3}\right]$; 1е) $\left\{\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right\}$. 2а) $\left\{\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{6}\right\}$; 2б) $\{5\}$; 2в) $\{\pm 3, \pm 2\}$; 2г) $\left\{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}); 1+\sqrt{2}\right\}$; 2д) $\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$; 2е) $\{-9; 5\}$.

16-топшириқ. 1а) $\left]-\frac{3}{2}; -1\right[\cup\left]1; \frac{3}{2}\right[$; 1б) $]-\infty; -1]\cup[1; +\infty[$; 1в) $\left]-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right[$; 1г) $\left]-\frac{\sqrt{21}+1}{4}; \frac{\sqrt{21}-1}{4}\right[$; 1д) $\left]-\frac{1}{2}; 1\right[\cup\left]\frac{3}{2}; 3\right[$; 1е) $\left]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right[$. 2а) $\left]-\frac{7}{2}; -1\right[\cup\left]\frac{3}{2}; 2\right[$; 2б) $\left]-\infty; \frac{2}{3}\sqrt{2}\right[\cup\left]\frac{2+2\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$; 2в) $]-\infty; -\frac{1}{3}[\cup[0; +\infty[$; 2г) $]1; \frac{3}{2}[$; 2д) $\left]-\frac{7}{2}; -2\right[\cup]-2; 1[$. 3а) $\left]\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right[\cup\left]\frac{4}{3}; 2\right[$; 3б) $\left]\frac{3}{8}; \frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$; 3в) $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$; 3г) $\left]-\frac{5}{2}; -1\right[\cup\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$; 3д) $]-\infty; -1[\cup\left]-\frac{1}{4}; +\infty\right[$; 3е) $]-\infty; 0[\cup$ $\cup\left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$; 3ж) $\left]-\infty; -\frac{5}{2}\right[\cup\left]-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$; 3з) $]-\infty; -2]\cup[-1; 1]\cup[2; +\infty[$; 3и) $\left[\frac{3}{4}; 1\right[$; 3к) $a<0 \Longrightarrow]-\sqrt{-a}; 0[$; $a>0 \Longrightarrow]0; \sqrt{a}[$; $a=0 \Longrightarrow$ ечими йўқ. 4а) $]-4{,}8; 4[$; 4б) $\left]-\infty; \frac{1}{5}\right[\cup]6; +\infty[$; 4в) $\left]2; \frac{10}{3}\right[$; 4г) $]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$; 4д) $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$; 4е) $\left]-\infty; -\frac{4}{3}\right[\cup]1; +\infty[$; 4ж) $]0; 6[$; 4з) $]-\infty; 1-\sqrt{10}[\cup]-\sqrt{3}; +\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{10}; +\infty[$; 4и) $]2{,}75-\alpha; 2{,}75+\alpha[$, бунда $\alpha=\sqrt{3{,}50625}$; 4к) $\left]\frac{11}{14}; +\infty\right[$; 4л) $]-\infty; 1]$; 4м) $\left]-1+\sqrt{1{,}5}; 1\right[\cup]0{,}5; 2[$.

17-топшириқ. 1а) ечими йўқ; 1б) $\{0\}$; 1в) $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. 2а) $\{\pm 0{,}5\}$; 2б) $\{1; 4\}$; 2в) $\{1; 1{,}5\}$; 2г) $\{2; 274\}$; 2д) $\{1\}$; 2е) $\{-1\pm 3\sqrt{21}\}$; 2ж) $\left\{\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; -\frac{5}{14}; -\frac{\sqrt{73}}{14}\right\}$. Кўрсатма: $y=\sqrt{1-x^2}$; 2з) $\left\{\frac{5}{4}; \frac{5}{3}\right\}$. Кўрсатма: $\frac{1}{x}=u$, $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=v$. 3а) $\left\{2920\frac{7}{27}\right\}$. Кўрсатма: $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}=u$, $\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}=v$; 3б) $\{\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{11}\}$; 3в) ечими йўқ; 3г) $\{\pm 2\}$; 3д) $\left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$; 3е) $\{12\}$; 3ж) $\{4\}$; 3з) $\{1; 1{,}5\}$. 4а) $\{3; 1\}$; 4б) ечими йўқ; 4в) $\{2; 1\}$; 4г) $[-3; +\infty[$; 4д) $[-4; -3]$. 5а) $\{-1{,}5; 0{,}5\}$; 5б) $\{3\}$; 5в) $\left\{3+\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$; 5г) $\{1\}$; 5д) $\{2\}$;

5е) $\{2\}$; 5ж) $\{-3\}$. 6а) $\{-1;\ 9/16\}$; 6б) $\{1/4\}$: 6в) $\{7\}$; 6г) $\{4\}$; 6д) $\{12\}$; 6е) $\left\{\frac{73}{32}\right\}$; 6ж) $[2;+\infty[$; 6з) $\{-2;\ 1+\sqrt{5}\}$; 6и) $\{-2\}$; 6к) $\left\{-\frac{4}{3}\right\}$. 7а) $\left\{\frac{1}{2};\ 1\right\}$; 7б) $\{-1;\ 2\}$; 7в) $\{-3;\ 2\}$; 7г) $\{-4;\ 3\}$; 7д) $\{20\}$; 7е) $\{10\}$; 7ж) $\{6\}$; 7з) $\{-1;3\}$; 7и) $\{-5;\ 4\}$.

18-топшириқ. 1а) $[4;\ \infty[$; 1б) $]-\infty,\ -2]\cup[4;\ +\infty[$; 1в) $]1;\ 4]$; 1г) $\left]\frac{3}{2};\ 4\right[$. 2а) $\left[-\frac{1}{2};\ 4\right[$; 2б) $]8;\ 12]$; 2в) $]-2\ -2\sqrt{5};\ -6]\cup[2;\ 2\sqrt{5}-2[$; 2г) $\left]-\frac{1}{4};\ +\infty\right[$. 3а) $[4;\ 8[\cup]8;\ +\infty[$; 3б) $]-9;\ -1[$; 3в) $\left]\frac{3}{2};\ \frac{12}{5}\right]$; 3г) $\left[\frac{10}{9};\ 2\right[\cup\left]\frac{5}{2};\ +\infty\right[$; 3д) $\left]\frac{1}{4}(1+\sqrt{29});\ +\infty\right[$; 3е) $\left]\frac{5}{2};\ +\infty\right[$. 4а) $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$; 4б) $\left]\frac{1}{4};\ \frac{5}{4}\right[$; 4в) $[0;\ 1]$; 4г) $\left]-1;\ -\frac{4}{5}\right[\cup]0;\ 1]$. 5а) $\left[0;\ \frac{3}{2}\right]$; 5б) $\left[-\frac{1}{2};\ 0\right[\cup\left]\frac{3}{5};\ \frac{1}{2}\right[$; 5в) $\left[-2;\ -\frac{8}{5}\right[\cup]0;\ 2[$; 5г) $]-\infty;\ +\infty[$. 6а) $\left]-\frac{48}{19};+\infty\right[$; 6б) $]-\infty;\ -6[$; 6в) $[2;\ +\infty[$; 6г) $\left]-\frac{\sqrt{5}}{2};\ 1\right[$; 6д) $\left[-1;\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right[$; 6е) $\left]\frac{4}{3};\ +\infty\right[$. 7а) $\left[\frac{8}{3};\ +\infty\right[$; 7б) $]-\infty;\ -5]\cup[1;\ +\infty[$; 7в) $]-\infty;\ -3]\cup$ $\cup\left]-2;\ \frac{\sqrt{13}-7}{6}\right[$; 7г) $]-\infty;\ 1]\cup\left[2;\ \frac{1}{16}(17+\sqrt{13})\right[$; 7д) $]1;\ 4]$; 7е) $[-1-\sqrt{13};\ 0]\cup[(1+\sqrt{17})/2;\ \sqrt{13}-1]$. 8а) $\left]\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$; 8б) $]-\sqrt{3};\ 0[\cup$ $\cup]0;\ 2]$; 8в) $\left[-1;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\cup\left]\frac{\sqrt{3}}{2};\ 1\right[$; 8г) $\left[-1;\ -\frac{\sqrt{15}}{4}\right[\cup\left]\frac{\sqrt{15}}{4};\ 1\right]$; 8д) $]-2;\ -1]\cup\left[-\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right[$. Кўрсатма. $t=3x^2+5x-\frac{9}{2}$; 8е) $\left[-\sqrt[3]{5/4};+\infty\right[$; 8ж) $\left]\frac{1}{2}(\sqrt{13}-5);\ 1\right]$; 8з) $\left]\frac{2}{3};\ \frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};\ 4\right[$; 8и) $[-2;\ 0[\cup]0;\ \frac{8}{5}\left[\right.$; 8к) $\{-1;\ 1\}$.

19-топшириқ. 1а) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$; 1б) $\{2\}$; 1в) $\left\{-\frac{71}{36}\right\}$; 1г) $\{3\}$; 1д) $\left\{-\frac{2}{19}\right\}$; 1е) $\left\{-\frac{3}{7}\right\}$; 1ж) $\{-1{,}5\}$; 1з) $\left\{5;\ -\frac{3}{2}\right\}$; 1и) $\{9\}$, 2а) $\{\pm 1\}$; 2б) $\left\{\frac{127}{19}\right\}$; 2в) $\left\{-\frac{1}{2};\ +2\right\}$; 2г) $\{-3\}$; 2д) $\left\{\frac{5}{3}\right\}$; 2е) $\left\{\frac{5}{4}\right\}$. 3а) $\{\pm\sqrt{2}\}$; 3б) $\{-1\}$; 3в) $\left\{\frac{2}{7}\right\}$; 3г) $\{1\}$; 3д) $\{1\}$; 3е) $\{1{,}5\}$; 3ж) $\{0\}$; 3з) $\{0\}$. 4а) $\{2\}$; 4б) $\{-2\}$; 4в) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; 4г) $\left\{\frac{3}{4}\right\}$; 4д) $\left\{1\pm\frac{1}{2}\sqrt{3{,}5}\right\}$; 4е) $\{3/2\}$. 5а) $\{100\}$; 5б) $\left\{-\frac{3}{4};\ 2\right\}$;

5в) $\{\pm\sqrt{3}\}$; 5г) $\{\pm 1;\ \pm\sqrt{2}\}$; 5д) $\sqrt[x]{8^{x-1}}$ ифода тенгламада иштирок этгани учун $x \in \mathbf{N} \Rightarrow \{3\}$; 5е) $\{5\}$; 5ж) $\{5\}$; 5з) $\{2\}$. 6а) $\left\{9;\ \frac{1}{9}\right\}$; 6б) $\left\{10^{-\frac{1}{6}};\ 10^{\frac{2}{3}}\right\}$; 6в) $\left\{\frac{1}{9};\ 3\right\}$; 6г) $\left\{\frac{1}{10};\ 1000\right\}$; 6д) $\{10^{-5};\ 10^{3}\}$; 6е) $\left\{\frac{9}{2}\right\}$; 6ж) $\left\{10^{-5};\ 10^{3}\right\}$. 7а) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; 7б) $\{2\}$; 7в) $\{-2-\sqrt{10}\}$; 7г) $\left\{\frac{\pi}{4}(2n+1)\right\}$; 7д) $\left\{\frac{\pi}{2}(2n+1)\right\}$; 7е) $\left\{\frac{\pi}{4}(2n+1)\right\}$. 8а) $\{4\}$; 8б) $\{9\}$; 8в) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; 8г) $\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$; 8д) $\{0\}$; 8е) $\{0\}$; 8ж) $\{1;\ 1\pm\sqrt{2}\}$. 9а) $\{2\}$; 9б) $\{2\}$; 9в) $\{1;\ -2(1+\log_3 2)\}$; 9г) $\{2;\ -1-\log_5 2\}$. 10а) $\{1\}$; 10б) $\{1\}$; 10в) $\{3\}$.

20-топшириқ. 1а) $\{1;\ 4\}$; 1б) $\{3\}$; 1в) $\{1/2;\ 1/8\}$; 1г) $\{64\}$; 1д) $\{3\}$; 1е) $\left\{k^{\frac{1}{k}},\ k \geqslant 2\right\}$. 2а) $\{2\}$; 2б) $\{-2{,}5\}$; 2в) $\left\{\frac{1}{6}\right\}$; 2г) $\{0\}$; 2д) $\{1{,}5\}$ 2е) $\{2\}$. 3а) $\{10^{-7};\ 1;\ 100\}$; 3б) $\{-2-\sqrt{10}\}$; 3в) $\{10^{-1};\ 10\}$; 3г) $\left\{\sqrt{10^{1-\sqrt{3}}};\ \sqrt{10^{1+\sqrt{3}}}\right\}$; 3д) $\left\{3^{\pm\frac{\sqrt{2}}{3}}\right\}$; 3е) $\left\{\frac{1}{5};\ 25\right\}$; 3ж) $\{10^{-4};\ 10\}$; 3з) $\{5\}$. 4а) $\{5;\ 5000\}$; 4б) $\left\{\frac{1}{12};\ \frac{2}{3}\right\}$; 4в) $\{2^{\log_a b};\ 3^{\log_a b}\}$, $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$; 4г) $\{-2\}$; 4д) $\left\{4;\ -\frac{1}{6}(3-\sqrt{3})\right\}$; 4е) $\left\{\frac{1}{18};\ \frac{3}{2}\right\}$; 4ж) $\{2^{-8};\ 1\}$; 4з) $\{-0{,}9;\ 11{,}5\}$. 5а) $\{1\}$; 5б) $\{1\}$, 5в) $\{\log_3 2\}$; 5г) $\{3\}$; 5д) $\left\{-\frac{1}{2};\ 1\right\}$; 5е) $\{-2\}$. 6а) $\{10^{-3};\ 10\}$; 6б) $\left\{2^{-\frac{7}{5}};\ 8\right\}$; 6в) $\{3^{(5+3\sqrt{5})/10}\}$; 6г) $\{0;\ 1\}$; 6д) $\{1\}$; 6е) $\{8\}$; 6ж) $\left\{\frac{1}{6};\ \frac{9}{2}\right\}$; 6з) $\{1/\sqrt[3]{3}\}$; 7а) $\{100\}$; 7б) $\left\{10^{-\frac{2}{3}};\ 10^{\frac{2}{3}}\right\}$; 7в) $\{10^{-2};\ 10^{2}\}$; 7г) $\left\{\frac{1}{20};\ 1;\ 500\right\}$; 7д) $\{5^{-4};\ 5\}$; 7е) $\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$. 8а) $\{1;\ ac\}$: 8б) $\{2\}$; 8в) $\{1\}$; 8г) $\left\{\frac{1}{9}\right\}$; 8д) ечими йўқ; 8е) $\{10^{10}\}$; 8ж) $\left\{a^{a^2};\ a^{\frac{1}{a^2}}\right\}$; 8з) $\{10\sqrt{10}\}$, 8и) $\log_c x = \dfrac{rpq}{pq-r(p+q)}$.

21-топшириқ. 1а) $\left\{\left(1;\ \frac{3}{4}\right)\right\}$; 1б) $\{(1;\ 2);\ (2;\ 1)\}$; 1в) $\{(-1;\ 0)\}$ 1г) $\left\{\left(\frac{5}{2};\ 1\right)\right\}$; 1д) $\{(\sqrt{2};\ 10);\ (\sqrt{10};\ 2)\}$; 1е) $\{(5;\ 1)\}$. 2а) $\left\{\left(\frac{10}{3};\ \frac{20}{3}\right)\right\}$; $(-10;\ 20)\}$; 2б) $\{(25;\ 3);\ (5\sqrt{5};\ 4)\}$; 2в) $\left\{\left(2^{\sqrt[3]{\log_2^2 7/\log_3 5}};\ 3^{\sqrt[3]{\log_3 5/\log_2 7}}\right)\right\}$; 2г)

$\left\{\left(\frac{4}{3};\ 16\right)\right\}$; 2д) $\{(9;\ 7)\}$; 2е) $\{(6;\ 2)\}$; 2ж) $\{(4;\ 16)\}$; 2з) $\left\{\left(2;\ \frac{1}{4}\right);\ (2+\sqrt{7};\ 2+\sqrt{7})\right\}$. 3а) $\{(3;\ 9);\ (9,\ 3)\}$; 3б) $\{(\log_4 12;\ \log_4 3)\}$; 3в) $\left\{\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{5}\right)\right\}$; 3г) $\{(1;\ 1);\ (3\sqrt{3};\ \sqrt{3})\}$; 3д) $\left\{\left(\sqrt{2};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right);\ (2;\ 1)\right\}$; 3е) $\{(3;\ \log_3 2)\}$; 3ж) $\left\{\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}};\ \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)\right\}$; 3з) $\left\{(9;\ 27);\ \left(\frac{1}{9};\ \frac{1}{3}\right)\right\}$. 4а) $\left\{\left(\frac{1}{a};\ \frac{1}{b}\right)\right\}$, бунда $a \neq b^{\pm 1}$, $a \neq 1$, $b \neq 1$; 4б) $\left\{\left(\log_{\frac{a}{b}} \frac{m}{b^n};\ \log_{\frac{a}{b}} \frac{n}{b^m}\right)\right\}$; 4в) $\left\{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n-m}};\ \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m-n}}\right)\right\}$; 4г) Агар $\log_a b > 0 \Longrightarrow \left\{\left((\log_a b)^{\frac{\log_b b}{a}};\ (\log_a b)^{\frac{\log_b a}{a}}\right)\right\}$, агар $\log_a b < 0 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow$ ечими йўқ; 4д) $\left\{\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{6}\right);\ \left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{4}\right)\right\}$; 4е) $\left\{\left(\frac{1}{m};\ \frac{1}{n}\right)\right\}$; 4ж) $\left\{\left(\frac{2}{3};\ \frac{27}{8};\ \frac{32}{3}\right)\right\}$; 4з) $\left\{\left(p^{\frac{n^2}{m(n-m)}};\ p^{\frac{n}{n-m}}\right)\right\}$; 4и) $\{(4;\ \sqrt{2}),\ (4;\ -\sqrt{2})\}$; 4к) $\{(\pm 6;\ \pm 2);\ (-3;\ -4);\ (4;\ 3);\ (\pm 2\sqrt{6};\ \pm\sqrt{6})\}$.

22-топшириқ. 1а) $\left[-\log_9 2;\ 0\right[\cup\left]\frac{1}{2}\log_9 2;\ \frac{1}{2}\right]$; 1б) $\left]-\frac{17}{18};\ -\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{7}{2}+\infty\right[$; 1в) $]0;\ \frac{1}{2}[\cup]4;\ +\infty[$; 1г) $]-\infty;\ -1[\cup]2;\ +\infty[$; 1д) $]-\infty;\ -1[\cup]\frac{5}{16};\ +\infty[$; 1е) $\left[-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{6}\right[\cup\left]\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right[$; 1ж) $]1;\ +\infty[$; 1з) $\left]\frac{2-\sqrt{2}}{2};\ \frac{3}{8}\right]\cup\left[\frac{13}{8};\ \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right[$, 2а) $\left]-\frac{19}{8};\ -\frac{3}{2}\right[\cup\left]2;\ \frac{28}{8}\right[$; 2б) $]-\infty;\ 0[\cup]1;\ +\infty[$; 2в) $[0;\ 1]$; 2г) $]-\infty;\ -1[$; 2д) $\left[\frac{1}{4};\ 1\right]$; 2е) $]0;\ 10]\cup]10^5;\ +\infty[$; 2ж) $]0;\ \log_3\sqrt{28}-\frac{3}{2}[\cup]\log_3 2;\ +\infty[$; 2з) $[0{,}2;\ 5]$; 2к) $\left]3;\ \frac{5+\sqrt{7}}{2}\right]\cup]4;\ \frac{9}{2}]$; 2л) $]1;\ 2]\cup[16;\ +\infty[$; 2м) $\left]1;\ \sqrt{\frac{\sqrt{69}-3}{2}}\right[$. 3а) $]-\infty;\ -\frac{3}{2}[\cup]3;\ +\infty[$; 3б) $\left]\frac{1}{\sqrt{27}};\ +\infty\right[$; 3в) $\left]0;\ \frac{1}{2}\right]\cup]2;\ 4]$; 3г) $\left[\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right[$. 4а) $]-1;\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}[\cup\left]\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ 2\right[$; 4б) $]0;\ 1[\cup]\sqrt{3};\ 9[$; 4в) $\left]\frac{5}{8};\ +\infty\right[$; 4г) $]\log_2\frac{5}{4};\ \log_2 3[$; 4д) $]\log_2\frac{2}{3};\ 0[\cup]0;\ +\infty[$; 4е) $]0;\ \frac{1}{2}[\cup]2;\ 3[$. 5а) $\left]\frac{1}{2};\ 1[\cup]2;\ \frac{5}{2}\right[$;

5б) $\left]-\frac{1}{2};\right.$ 0[U] $\left.\frac{1}{2}\right[$; 1[; 5в)]1; 3[; 5г)]1; 3[; 5д)]0, 1[U] $\frac{\sqrt{113}-7}{2}$; 2[; 5е)]0; 1[U] $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; 2[; 5ж)]$-\infty$; 0[U]5;$+\infty$[; 5з)]0; $\frac{1}{2}$[U]2$\sqrt{3}$; $+\infty$[.

6а)] 0,5; 2[; 6б) $\left]\frac{1}{3};\right.$ 3 $\left[\right.$; 6в)]2^{-28}; 1[; 6г)]$-2\sqrt{2}$; -1[U]1; $\sqrt{2}$[; 6д)]$\log_2\sqrt{13}$; 2]; 6е)]4; 10[.

27-топшириқ. Бу ва 28, 29-топшириқда n, k, l, m, ... лар Z га тегишли ҳисобланади: 1а) $\{\pi(8n \pm 1)/28,\ \pi(2k+1)/14\}$; 1б) $\{\pi(1+4k)/6\}$; 1в) $\{\pi(3k \pm 1)/3;\ \pi(4n-1)/4\}$; 1г) $\{2\pi k/3;\ \pm\arccos\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}+2\pi n\}$; 1д) $\{\pi(2n-1)/2\}$; 1е) $\{\pi n\}$. 2а) $\{\pi(2k+1)/4\}$; 2б) $\{\pi k,\ ((-1)^n+6n)\pi\}$; 2в) $\left\{\frac{\pi}{4}(8k\pm 3)\right\}$; 2г) $\left\{\frac{\pi}{6}\left(6k+(-1)^k\right)\right\}$; 2д) $\left\{\frac{\pi}{6}(6k+(-1)^k)(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n\right\}$; 2е) $\left\{\pm\arccos\frac{\sqrt{19}-2}{5}+2\pi n\right\}$; 2ж) $\left\{\frac{\pi}{4}(2n+1)\right\}$; 2з) $\left\{\frac{\pi}{3}(3n\pm 1)\right\}$; 2и) $\left\{\frac{\pi}{4}(4n+1)\right\}$; 2к) $\left\{\pi n\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. 3а) $\left\{\frac{\pi}{6}(12n+1),\ \frac{\pi}{3}(6n+1)\right\}$; 3б) $\left\{\frac{\pi n}{2}\right\}$; 3в) $\left\{\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi k\right\}$; 3г) $\left\{\operatorname{arctg}\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}+\pi k\right\}$; 3д) $\left\{\frac{\pi}{4}(1+4k),\ \pi n-\operatorname{arctg}2\right\}$; 3е) $\{\pi k+\operatorname{arctg}(-1\pm\sqrt{3})\}$; 3ж) $\left\{\frac{\pi}{4}(1+4k),\ \pi n+\operatorname{arctg}3\right\}$; 3з) $\left\{\pi k,\ \frac{\pi}{4}(1+4n)\right\}$; 3к) $\left\{\frac{\pi}{2}(1+2k)\right\}$; 3л) $\left\{\frac{\pi}{6}(3k\pm 1)\right\}$. 4а) $\left\{\frac{\pi k}{3}\right\}$; 4б) $\left\{\frac{\pi k}{2}\right\}$; 4в) $\left\{\frac{\pi}{2}(1+4k)\right\}$; 4г) $\{2\pi k\}$; 4д) $\left\{\frac{\pi}{2}(1+4k)\right\}$; 4е) $\{\pi k\}$; 4ж) $\{\pi k\}$; 4з) $\left\{\frac{\pi k}{2}\right\}$; 4и) $\{\pi k\}$; 4к) Ечими йўқ; 4л) ечими йўқ. 5а) $\left\{\frac{\pi}{2}(2k+1),\ \frac{\pi}{6}(6n\pm 1)\right\}$; 5б) $\{\pi k+\operatorname{arctg}(2\pm\sqrt{3})\}$; 5в) $\{2\pi(1+2k),\ \frac{2\pi}{3}(6n+(-1)^n)\}$; 5г) $\left\{\frac{\pi}{12}(7+12k)\right\}$; 5д) $\left\{\frac{\pi}{2}(1+2k);\ \pi n\pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}$; 5е) ечими йўқ; 5ж) $\left\{\frac{\pi}{4}(4k+3)\right\}$; 5з) $\left\{\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)\right\}$; 5и) $\left\{\frac{\pi}{4}(1+4k),\ \pi n+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right\}$; 5к) $\left\{\frac{\pi}{4}(4k+1),\ \pi n+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\right\}$; 5л) $\left\{\frac{2\pi k}{3},\ \frac{\pi}{6}(4k+1)\right\}$; 5м) $\left\{\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1)\right\}$. 6а) $\left\{\frac{\pi}{9}(2k+1)\right\}$; 6б) $\left\{\frac{\pi k}{5},\ \frac{\pi n}{7}\right\}$; 6в) $\left\{\frac{\pi}{16}(2k+1);\ \frac{\pi}{12}(4k-(-1)^k)\right\}$; 6г) $\left\{\frac{\pi}{10}(2k+1),\ \frac{\pi}{6}(2n+1)\right\}$; 6д) $\left\{\frac{\pi}{8}(2k+1);\ \frac{\pi}{12}(6n\pm 1)\right\}$; 6е) $\left\{\frac{\pi k}{5},\ \frac{\pi}{2}(2n+1)\right\}$. 7а) $\left\{2\pi k,\ 2\pi n-\frac{1}{\pi}\right\}$; 7б) $\left\{\frac{\pi k}{4}\right\}$;

7в) $\left\{\frac{\pi k}{4}, \frac{\pi}{3}(6n \pm 1)\right\}$; 7г) $\left\{\frac{\pi k}{5}, \frac{\pi}{2}(4k-1)\right\}$; 7д) $\left\{\frac{\pi k}{5}\right\}$; 7е) $\left\{\frac{\pi k}{5}; \frac{\pi}{6}(2n+1)\right\}$.

8а) $\left\{\frac{\pi}{4}(2k+1), \frac{\pi}{14}(2n+1)\right\}$; 8б) $\left\{\frac{\pi k}{2}, \frac{\pi n}{9}\right\}$; 8в) $\left\{\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi n}{5}\right\}$; 8г) $\left\{\frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{12}(4n-1)\right\}$; 8д) $\left\{\frac{\pi}{12}(6k \pm 1)\right\}$; 8е) $\left\{\frac{\pi}{4}(2k+1), \frac{\pi}{5}(2n+1), \frac{\pi}{7}(2m+1)\right\}$.

9а) $\left\{\frac{\pi}{16}(4k+1)\right\}$; 9б) $\left\{\frac{\pi}{4}(2k+1)\right\}$; 9в) $\left\{\frac{\pi}{2}(2n+1), \frac{2\pi n}{5}, \frac{\pi}{11}(2m+1)\right\}$;

9г) $\left\{\frac{\pi}{2}(2k+1), \frac{\pi}{18}(4n+1)\right\}$; 9д) $\left\{\pi k, \frac{\pi}{6}(6n \pm 1)\right\}$; 9е) $\left\{\frac{\pi}{6}(6k+(-1)^k)\right\}$.

10а) $\left\{\frac{\pi}{4}(2k+1)\right\}$; 10б) $\left\{\frac{\pi}{6}(6k+(-1)^k)\right\}$; 10в) $\left\{\frac{\pi}{3}(3k \pm 1)\right\}$; 10г) $\left\{\frac{\pi}{12}(3k \pm \pm 1)\right\}$; 10д) $\left\{-1 \pm \sqrt{1+\frac{k}{2}}, k \geqslant 1, k \neq 2(l^2-1)\right.$; 10е) $\{\pi k\}$.

28- топшириқ. 1а) $\left\{\frac{\pi}{6}(12n-1) < x < \frac{\pi}{6}(12n+7)\right\}$; 1б) $\left\{-\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n < x < \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n\right\}$; 1в) $\left\{\pi n + \operatorname{arctg} 2 < x < \frac{\pi}{2} + \pi n\right\}$; 1г) $\{\pi n < x < \pi n + \operatorname{arcctg}(-3)\}$; 1д) $\left\{\frac{4\pi}{3} + 4\pi n < x < \frac{14\pi}{3} + 4\pi n\right\}$; 1е) $\{2\pi n + \arcsin\frac{1}{3} < x < \pi + 2\pi n - \arcsin\frac{1}{3}\}$; 1ж) $\left\{2\pi n - \frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right\}$; 1з) $\left\{n\pi - \frac{1}{3} < x < \frac{\pi}{2} + \pi n\right\}$; 1и) $\left\{\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + \pi n\right\}$. 2а) $\left\{2\pi n - \frac{7\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right\}$;

2б) $\left\{2\pi n + \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right\}$; 2в) $\left\{\frac{2n+1}{2}\pi + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{2n+1}{2}\pi + \frac{\pi}{12}\right\} \cup \left\{(n+1)\pi - \frac{\pi}{12} < x \leqslant (n+1)\pi - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}\right\}$; 2г) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} + \pi n, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right\}$; 2д) $R \setminus \left\{\frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right\}$; 2е) $\left\{\pi(2n-1) - \arcsin\frac{1}{4} < x < \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n\right\} \cup \left\{2\pi n + \arcsin\frac{1}{3} < x < 2\pi n + \pi - \arcsin\frac{1}{3}\right\}$. 3а) $]-\pi; -\frac{3\pi}{4}[\cup]-\frac{\pi}{4}; 0[\cup]\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}[$; 3б) $\left\{\pi n - \frac{\pi}{4} < x < \pi n\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n\right\}$; 3в) $\left\{\pi n - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3} < x < \pi n\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}\right\}$;

3г) $\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right\}$; 3д) $\left\{\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right\}$; 3е) $\left\{\pi n - \frac{\pi}{2} < x < \pi n - \operatorname{arctg} 2\right\} \cup \left\{\pi n - \frac{\pi}{4} < x < \pi n + \frac{\pi}{4}\right\}$; 3ж) $\{2\pi(3n+1)/3 \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi n\} \cup \{2\pi(3n-1)/3 \leqslant x \leqslant 2\pi n\}$.

29-*топшириқ*. 1а) $\left\{\left(-\frac{\pi}{6}+\pi(k+n);\ \frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right)\right\} \cup \left\{\left(\frac{\pi}{6}(6k+6n+1);\ \frac{\pi}{6}(6k-6n-1)\right)\right\}$ 1б) $\left\{\left(\frac{\pi}{3}(3k+3n-1);\ \frac{\pi}{3}(3k-3n+1)\right)\right\} \cup \left\{\left(\frac{\pi}{3}(3k+3n+1);\ \frac{\pi}{3}(3k-3n-1)\right)\right\}$; 1в) $\left\{\left(\pi n+\operatorname{arctg}\frac{1}{2};\ \frac{\pi k}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\right\}$; 1г) $\left\{\left(\frac{2\pi}{3}(3n+1);\ \pi k\right)\right\} \cup \left\{\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{3}(3k-1)\right)\right\}$; 1д) Ечими йўқ; 1е) $\left\{\left(\pi k;\ \frac{\pi n}{2}\right)\right\} \cup \left\{\left(\frac{2\pi}{3}(3k+1);\ \frac{\pi}{3}(3n+1)\right)\right\}$; 1ж) $\{(\pi m+\operatorname{arctg}(2\pm 0{,}8\sqrt{5});\ \pi m+\operatorname{arctg}(2\mp 0{,}8\sqrt{5}))\}$, 1з) $\left\{\left(\frac{\pi}{6}(6n+6k+1);\ \frac{\pi}{6}(6n-6k-1)\right)\right\} \cup \left\{\left(\frac{\pi}{6}(6n+6k-1);\ \frac{\pi}{6}(6n-6k+1)\right)\right\}$; 1и) $\left\{\left(\frac{\pi}{4}(4n+4k+1);\ \pi(k-n)\right)\right\} \cup \left\{\left(\pi(k+n);\ \frac{\pi}{4}(4k-4n-1)\right)\right\}$; 2а) $\left\{\left(\frac{\pi}{4}(4k+4n+1);\ \pi(k-n)\right)\right\} \cup \{(\pi(k+n);\ \frac{\pi}{4}(4k-4n-1))\}$; 2б) $\left\{\left(\frac{\pi}{2}(8m\pm 1);\ 2\pi(2n+1)\right)\right\} \cup \left\{\left(2\pi(2m+1);\ \frac{\pi}{2}(8n\pm 1)\right)\right\}$; 2в) $\left\{\left(2\pi m-\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}};\ 2\pi n-\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right)\right\}$; 2г) $\left\{\left(\frac{\pi}{4}(2k-1);\ \frac{\pi}{4}(2k+8n+1)\right)\right\}$; 2д) $\left\{\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\pi k;\ (-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\right)\right\}$; 2е) $\left\{\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi(k+n);\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi(k-n)\right)\right\}$ — бу ерда ишоралар ихтиёрий олинади; 2ж) $x\neq\frac{\pi}{4}(1+2k)$ ва $x\in R \Longrightarrow \{(x;\ y_n)$, бунда $y_n=\frac{\pi}{2}(1+2n)\}$; 2з) $\left\{\left((-1)^n\arcsin\frac{7}{8}+\pi(n+2k);\ (-1)^n\arcsin\frac{1}{4}+\pi n\right)\right\}$; 2и) $\{(\pi(2k+n);\ \frac{\pi}{6}(1+6n))\} \cup \left\{\left(\frac{\pi}{2}\cdot(4k+2n+1);\ \frac{\pi}{6}(6n+1)\right)\right\}$. 3а) $\left\{\left(\frac{\pi}{2}(1+2k);\ \frac{\pi}{2}(1+2n)\right)\right\} \cup \left\{\left(\frac{\pi}{4}(1+2k);\ \frac{\pi}{4}(-1-2k+8n)\right)\right\}$; 3б) $\left\{\left(\pm\frac{1}{2};\ \mp\frac{1}{2}\right);\ (\pm 1;\ 0);\ (0;\ \pm 1)\right\}$; 3в) $\left\{\left(\frac{\pi}{4}(1+2k);\ \frac{\pi}{4}(2k-1)\right)\right\}$; 3г) $\left\{\left(\frac{\pi}{4}(4n-1);\ -\frac{\pi}{6}(6n+1)\right)\right\}$; 3д) $\left\{\left(\frac{\pi}{6}(1+6n);\ \frac{2\pi}{3}(1-3n)\right)\right\}$; 3е) $\left\{\left(A+\pi k;\ A-\frac{\pi}{4}+\pi k\right)\right\} \cup \left\{\left(B+\pi k;\ B-\frac{\pi}{4}+\pi k\right)\right\}$. $A=\operatorname{arctg}(\sqrt{7}-2)$, $B=-\operatorname{arctg}(\sqrt{7}+2)$; 3ж) $\left\{\left(\frac{\pi}{6}(1+6k);\ (6k-1)\frac{\pi}{6}\right)\right\}$; 3з) $\left\{\left(\frac{\pi}{4}(1+4n),\ \frac{\pi}{6}(1-6n)\right)\right\} \cup \left\{\left((1+6n)\frac{\pi}{6};\ (1-4n)\frac{\pi}{4}\right)\right\}$;

3и) $\left\{\left(\frac{1}{2}(A+\beta+k\pi);\ \frac{1}{2}\ (A-\beta+\pi k)\right)\right.$, бунда $A=(-1)^k\arcsin(2b-\sin\beta)$ ва $|2b-\sin\beta|<1$; 3к) $\left\{\left(\frac{\pi}{4}\ (1+2k);\ \frac{\pi}{4}\ (2k-1)\right)\right\}$.

30-*топшириқ*. 1а) $a\neq 0,\ a\neq\frac{1}{2}\Longrightarrow\left\{\frac{1}{a}\right\}$; $a=\frac{1}{2}\Longrightarrow\{c,\ c\in R\}$; $a=0\Longrightarrow$ ечими йўқ; 1б) $a\neq-\frac{1}{2},\ a\neq 0\Longrightarrow\left\{\frac{2a-1}{2a};\ \frac{2a}{2a+1}\right\}$; $a=-\frac{1}{2}\Longrightarrow\{2\}$; $a=0\Longrightarrow\{0\}$; 1в) $b^2\neq 4a^2\Longrightarrow\left\{\frac{1}{2a-b};\ \frac{1}{2a+b}\right\}$; $2a=\pm b\neq 0\Longrightarrow\left\{\frac{1}{4a}\right\}$; $a=b=0\Longrightarrow$ ечими йўқ; 1г) $a\neq 0\Longrightarrow\left\{2a+1;\ \frac{1}{2a}+1\right\}$; $a=0\Longrightarrow$ ечими йўқ. 2а) $a\neq\frac{1}{2};\ \neq\frac{1}{4}\Longrightarrow\{1-2a\}$; $a=\frac{1}{2}$ ёки $a=\frac{1}{4}$ ечими йўқ; 2б) $b\leq-4{,}5$ ёки $1{,}5\leq b<\frac{7}{4}\Longrightarrow\{-b\pm\sqrt{4b^2+12b-27}\}$; $b=\frac{7}{4}\Longrightarrow\{-1\}$; $-4{,}5<b<1{,}5\Longrightarrow$ ечими йўқ; 2в) $ab\neq 0,\ b^2\neq 2a^2\Longrightarrow\left\{0;\ \frac{2}{2a+b}\right\}$; $a=0$ ва $b\neq 0\Longrightarrow R\setminus\left\{\frac{1}{b}\right\}$; $a\neq 0$ ва $b=0\Longrightarrow R\setminus\left\{\frac{1}{2a}\right\}$; $a=b=0\Longrightarrow R$; $b=\pm 2a\neq 0\Longrightarrow\{0\}$; 2г) $p+q\neq 0\Longrightarrow\{p,\ q\}$; $p+q=0\Longrightarrow R\setminus\{0\}$; 2д) $a+m\neq 0,\ a+m\neq 1\Longrightarrow\left\{\frac{a+m+1}{a+m-1}\right\}$; $a+m=0$ ёки $a+m=1$ ечими йўқ; 2е) $n^2\neq m^2$ ва $mn\neq 0\Longrightarrow\left\{\frac{m^2+n^2}{n-m}\right\}$; $n=m=0\Longrightarrow R\setminus\{0\}$, қолган ҳолларда ечими йўқ; 2ж) $a\neq 0$ ва $b^2\neq 4a^2\Longrightarrow\{b-a,\ b+a\}$; $a=0\Longrightarrow R\setminus\{0\}$; $b=2a\neq 0\Longrightarrow\{3a\}$; $b=-2a\neq 0\Longrightarrow\{-3a\}$; 2з) $a^2\neq b^2$ ва $a^2\neq 9b^2\Longrightarrow\left\{\frac{a+b}{a-b};\ \frac{a-b}{a+b}\right\}$; $a=b=0\Longrightarrow R\setminus\{0;\ 2\}$, $a=\pm 3b\neq 0\Longrightarrow\left\{\frac{1}{2}\right\}$; $a^2=b^2\neq 0\Longrightarrow$ ечими йўқ; 2и) $b=\pm a\Longrightarrow\left\{\frac{a-b}{2}\right\}$; $b=a\Longrightarrow R\setminus\{\pm a\}$; $b=-a\neq 0\Longrightarrow$ ечими йўқ, 2к) $a\neq b$ ва $b\neq c\Longrightarrow\{2c-b\}$; $a\neq b$ ва $b\neq c\Longrightarrow$ ечими йўқ; $a=b\Longrightarrow R\setminus\{b,\ c\}$. 3а) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\neq 0\Longrightarrow\{ab+bc+ca\}$; акс ҳолда: R; 3б) $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}\neq 0\Longrightarrow\{a+b+c\}$; 3в) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\neq\frac{4}{a+b+c}\Longrightarrow\{a+b+c\}$.

31-*топшириқ*. 1а) $a<1\Longrightarrow]-\infty;\ 2a+2[$; $a=1\Longrightarrow$ ечими йўқ; $a>1\Longrightarrow]2a+2;\ +\infty[$; 1б) $a<1\Longrightarrow]-\infty;\ \frac{a-2}{3(a-1)}[$; $a=1\Longrightarrow R$; $a>1\Longrightarrow\frac{a-2}{3(a-1)};\ +\infty[$; 1в) $b=-3\Longrightarrow R$; $b<-3\Longrightarrow]-\infty;\ \frac{6b-1}{2(b+3)}[$; $b>-3\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \left]\frac{6b-1}{2(b+3)}; +\infty\right[$; 1г) $b<1$ ёки $b>4 \Longrightarrow \left]\frac{b-1}{3(b-4)}; +\infty\right[$; $1<b<$ $<4 \Longrightarrow \left]-\infty; \frac{b-1}{3(b-4)}\right[$; $b=4$ ёки $b=1$ ечими йўқ; 1д) $m>3 \Longrightarrow \left]2; \frac{2m+1}{m-3}\right[$; $m<3 \Longrightarrow \frac{2m+1}{m-3}, 2\Big[$; $m=3 \Longrightarrow$ ечими йўқ; 1е) $k<1 \Longrightarrow \left]3; \frac{9k-12}{k-2}\right[$; $k=1 \Longrightarrow$ ечими йўқ; $1<k<2 \Longrightarrow \left]\frac{9k-12}{k-2}; 3\right[$; $k=2 \Longrightarrow]3; +\infty[$; $k>$ $>2 \Longrightarrow]3; +\infty[$ ёки $\left]\frac{9k-12}{k-2}; +\infty\right[$. 2а) $a<-\frac{4}{9}$ ёки $a>0 \Longrightarrow]-\infty;$ $\frac{1}{4}(3a+\sqrt{9a^2+4a})[\cup]\frac{1}{4}(-3a+\sqrt{9a^2+4a}); +\infty[$; $a=-\frac{4}{9} \Longrightarrow R\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$; $a=0 \Longrightarrow R\setminus\{0\}$; $-\frac{4}{9}<a<0 \Longrightarrow x\in R$ .2б) $a<0 \Longrightarrow]5a, 3a[$; $a>0 \Longrightarrow]3a,$ $5a[$; $a=0 \Longrightarrow$ ечими йўқ; 2в) $m>0 \Longrightarrow]-\infty;$ $m[\cup]m+1; +\infty[$; $m<$ $<0 \Longrightarrow]m; m+1[$. 3а) $n<0 \Longrightarrow]2n;$ $0[\cup]-2n; +\infty[$; $n=0 \Longrightarrow$ ечими йўқ; $n>0 \Longrightarrow]-\infty; -2n[\cup]0; 2n[$; 3б) $a<0 \Longrightarrow]-\infty;$ $0[\cup]-2a; -4a[\cup$ $\cup]-6a; +\infty[$; $a>0 \Longrightarrow]-6a; -2a[\cup]-2a; 0[$. 3в) $a<0 \Longrightarrow]-\infty; 5a[\cup]4a;$ $\frac{5a}{2}[\cup]2a; +\infty[$; $a=0 \Longrightarrow R\setminus\{0\}$; $a>0 \Longrightarrow]-\infty; +2a[\cup]\frac{5a}{2}; 4a[\cup]5a; +$ $+\infty[$. 3г) $a<0 \Longrightarrow]-3a; a[\cup]a; -2a[$; $a=0 \Longrightarrow$ ечими йўқ $a>0 \Longrightarrow]-2a;$ $-a[\cup]a; 3a[$; 3д) $a\leqslant\frac{3}{2} \Longrightarrow]-\infty; -3[\cup]-3; +3[\cup]6-2a; +\infty[$; $1,5<$ $<a<4,5 \Longrightarrow]-\infty; -3[\cup]-3; 6-2a[\cup]3; +\infty[$; $a\geqslant 4,5 \Longrightarrow]-\infty;$ $6-2a[\cup]3; +\infty[$; 3е) $a<0 \Longrightarrow]-\infty; 2a[\cup]\frac{4a}{3}; \frac{2a}{3}[\cup]0; +\infty[$; $a>0 \Longrightarrow]0;$ $\frac{2a}{3}[\cup]\frac{4a}{3}; 2a[$; 3ж) $m<0 \Longrightarrow]-\infty; 2m[\cup]m; -2m[$; $m=0 \Longrightarrow]-\infty; 0[$; $m>0 \Longrightarrow]-\infty; -2m[\cup]m; 2m[$; 3з) $n\leqslant m \Longrightarrow]-\infty, n[\cup]m; +\infty[$; $n>m \Longrightarrow$ $\Longrightarrow]-\infty; m[\cup]n; +\infty[$.

32-*топшириқ*. 1а) $m\leqslant 0 \Longrightarrow \left\{-\frac{m}{2}\right\}$; $m>0 \Longrightarrow \{-3,5m; 0,5m\}$; 1б) $b>$ $>0 \Longrightarrow \left\{-b; \frac{b}{3}\right\}$; $b=0 \Longrightarrow R\setminus\{0\}$; $b<0 \Longrightarrow$ ечими йўқ; 1в) $a\neq 0 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \left\{-\frac{5}{3}a\right\}$; $a=0 \Longrightarrow R$; 1г) $n\leqslant 0 \Longrightarrow \left\{\frac{12n}{5}\right\}$; $n>0 \Longrightarrow \{\pm 4n\}$; 1д) $a<0 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \{-4a\}$; $a=0 \Longrightarrow R$; $a>0 \Longrightarrow \{0\}$; 1е) $-1<a<0 \Longrightarrow \{\sqrt{2-a};$ $2-\sqrt{3a-2}\}$; $a=0 \Longrightarrow \{0\}$; $a\leqslant -1$ ёки $a>0 \Longrightarrow$ ечими йўқ; 1ж) $0<a<1 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \left\{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-a}-1); \frac{1}{2}(1-\sqrt{3a+1})\right\}$; $a=1 \Longrightarrow \{0\}$; $a\leqslant 0$ ёки $a>1 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow$ ечими йўқ. 2а) $a\leqslant 0 \Longrightarrow \{-a; 3a\}$; $a>0 \Longrightarrow \{-a\}$; $a=0 \Longrightarrow$ ечими йўқ. 2б) $b\leqslant |a| \Longrightarrow$ ечими йўқ; $b>|a|=\{\pm b\}$.

33-*топшириқ*. а) $a\leqslant 0 \Longrightarrow R\setminus\{-a;\}$ $a>0 \Longrightarrow]-\infty, -7a[\cup]a; +\infty[$

б) $a<0 \Longrightarrow]-\infty; \frac{a}{2}[$; $a \geqslant 0 \Longrightarrow$ ечими йўқ; в) $b<0 \Longrightarrow]-2b; +\infty[$; $b \geqslant 0 \Longrightarrow]2b; +\infty[$; г) $a<0 \Longrightarrow]-\infty; 2a\sqrt{3}[\cup]-2a\sqrt{3}; +\infty[$; $a \geqslant 0 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow]-\infty; -2a\sqrt{3}[\cup]2a\sqrt{3}; +\infty[$; д) $a<0 \Longrightarrow]-\sqrt{-a}; 0[$; $a>0 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow]0; \sqrt{a}[$; $a=0 \Longrightarrow$ ечими йўқ; е) $b<0 \Longrightarrow]4b\sqrt{3}; 4b[\cup]4b; -4b\sqrt{3}[$, $b>0 \Longrightarrow]-4b\sqrt{3}; 4b[\cup]4b; 4b\sqrt{3}[$; $b=0 \Longrightarrow$ ечими йўқ; ж) $n<0 \Longrightarrow [6n; 2n[\cup]2n; -2n]$; $n \geqslant 0 \Longrightarrow R\setminus\{2n\}$; 3) $a<0 \Longrightarrow]2a\sqrt{3}; 2a[\cup]2a; -2a\sqrt{3}[$; $a>0 \Longrightarrow]-2a\sqrt{3}; 2a[\cup]2a; 2a\sqrt{3}[$; $a=0 \Longrightarrow$ ечими йўқ.

34-топшириқ. а) $a \in]-\infty \frac{1}{3}[\cup]2; +\infty[\Longrightarrow \left\{\frac{2a+1}{a-2}\right.$; қолган ҳолда ечими йўқ б) $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\Longrightarrow \{a+1 \pm \sqrt{2a}\}$; $a \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[\Longrightarrow \{a+1+$ $+\sqrt{2a}\}$; $a>0 \Longrightarrow$ ечими йўқ; в) $\{a; -b\}$; г) $a \geqslant 1 \Longrightarrow \left\{-\frac{1}{4}(a-1)^2\right\}$; $a=$ $=0 \Longrightarrow \{0\}$; $a<1$ ва $a \neq 0 \Longrightarrow$ ечими йўқ; д) $a \geqslant b > 0 \Longrightarrow \left\{\frac{1}{b}(a-b)^2\right\}$; $a=$ $=b=0 \Longrightarrow [0; +\infty[$; бошқа ҳолларда ечими йўқ; е) $a<-1 \Longrightarrow \left\{0; \frac{1}{4(a+1)^2}\right\}$; $a \geqslant -1 \Longrightarrow \{0\}$; ж) $a=0 \Longrightarrow \{0\}$, $a \neq 0$ ечими йўқ; и) $a \geqslant 0 \Longrightarrow \left\{\frac{1}{4}(4a+3-\sqrt{8a-9})\right\}$, $a<0 \Longrightarrow$ ечими йўқ; к) $a \neq 0 \Longrightarrow \{0; a\}$; $a=0 \Longrightarrow R$; л) $b \geqslant a \geqslant \frac{b}{8} \geqslant 0 \Longrightarrow \left\{\frac{a}{2} \pm \sqrt[4]{b}(\sqrt{2(a+b)}-\right.$ $\left.-\sqrt{b})\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt{b}+\sqrt{\frac{a+b}{2}}}\right\}$; бошқа ҳолларда ечими йўқ; м) $a=0 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \{0\}$; $a \neq 0 \Longrightarrow \{0; a\}$.

35-топшириқ. а) $a>2 \Longrightarrow \left[0; \frac{1}{4}(a-2)^2\right[$; $a \leqslant 2 \Longrightarrow$ ечими йўқ; б) $a>$ $>0 \Longrightarrow \left[0; \frac{a}{4}\right]$; $a=0 \Longrightarrow$ ечими йўқ; в) $a>\frac{1}{2} \Longrightarrow \left[0; \frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\right[$; $a \leqslant \frac{1}{2} \Longrightarrow$ ечими йўқ; г) $a>0 \Longrightarrow]-\infty; 0[\cup]a; \frac{9}{8}a[$; $a \leqslant 0 \Longrightarrow$ ечими йўқ; 3д) $a<-2 \Longrightarrow \left]-\frac{1}{3(a+2)^2}; 0\right[$; $a \geqslant -2 \Longrightarrow]-\infty; 0[$; е) $a \neq 0 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \left[-\frac{|a|}{2}; \frac{|a|}{2\sqrt{5}}\right[$; $a=0 \Longrightarrow$ ечими йўқ; ж) $m \geqslant 0 \Longrightarrow \left]-\infty; \frac{3}{8}a\right[$; з) $0 \leqslant p \leqslant 2 \Longrightarrow \left]\frac{1}{4}(p^2+4); +\infty\right[$; $p>2 \Longrightarrow [p; +\infty[$; и) $n<0 \Longrightarrow \left[\frac{n}{2}; 0\right]$; $n>0 \Longrightarrow \left]0; \frac{n}{2}\right]$; $n=0 \Longrightarrow$ ечими йўқ; к) $]0; +\infty[$; л) $0<p<1 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \left[\frac{1}{5}(1-\sqrt{1-p}); \frac{1}{5}(1+\sqrt{1-p})\right]$; $p \leqslant 0 \Longrightarrow \left[\frac{1}{20}p; \frac{1}{5}(1+\sqrt{1-p})\right]$;

$p=1 \Rightarrow \left\{\frac{1}{5}\right\}$; м) $a < -\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow]\alpha-\beta;\ \alpha+\beta[$, бу ерда $\alpha = -\frac{a}{2}$ $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2-3}$; $a \geqslant -\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow$ ечими йўқ; н) $-4 < a < -2 \Rightarrow]\alpha;\ -\alpha[$, бунда $\alpha = \frac{a}{2}\sqrt{-a^2-4a}$; $-2 < a < 0 \Rightarrow [a;\ -a[$; о) $n > 0 \Rightarrow]-n;\ n[$, $n < 0 \Rightarrow]n;\ -n[$; $n = 0 \Rightarrow R\setminus\{0\}$.

36-топшириқ. а) $a \leqslant 3$ ёки $a \geqslant 27 \Rightarrow$ ечими йўқ, $3 < a < 27 \Rightarrow \left\{\log_4 \frac{a-27}{3-a}\right\}$, б) $a = 1 \Rightarrow]0;\ 6[$; $a \neq 0$, $a \neq 1 \Rightarrow \{2\}$; $a = 0 \Rightarrow$ ечими йўқ; в) $a = 1 \Rightarrow]0;\ +\infty[$; $a = -1 \Rightarrow \{3^n,\ n \in Z\}$; $a=0 \Rightarrow$ ечими йўқ; $a \neq 0$, $a \neq \pm 1 \Rightarrow x_{1,2} = 3^{\pm 1}$, г) $a \in R \Rightarrow$ ечими йўқ; д) $a \leqslant 0$, $a = 1 \Rightarrow$ ечими йўқ; $a > 0$; $a \neq 1 \Rightarrow \{a^{\frac{4}{3}}\}$; е) $a \leqslant 0$ ёки $a \geqslant 1 \Rightarrow$ ечими йўқ $0 < a < 1 \Rightarrow \left\{\frac{1+a^2}{1-a^2}\right\}$; ж) $a \leqslant 0$ ёки $a > 3 \Rightarrow$ ечими йўқ $0 < a \leqslant 3 \Rightarrow \{1 \pm \sqrt{1-2\log_9 a}\}$; з) $a \leqslant 0$ ёки $a = 1 \Rightarrow$ ечими йўқ, $a > 0$ ва $a \neq 1 \Rightarrow \{a^6\}$.

37-топшириқ. 1а) $0 < a < 1 \Rightarrow]1;\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a^2})\ [$; $a > 1 \Rightarrow]\frac{1}{2} \times (1+\sqrt{1+4a^2});\ +\infty[$: 1б) $0 < a < 1 \Rightarrow]4;\ +\infty[$, $a > 1 \Rightarrow]1;\ 4[$; 1в) $0 < a < 1 \Rightarrow]-\infty;\ -1[\cup]2;\ +\infty[$, $a > 1 \Rightarrow]-1;\ 2[$; 1г) $a < 1 \Rightarrow]1-\sqrt{9-a};\ 1-\sqrt{1-a}[\cup]1+\sqrt{1-a};\ 1+\sqrt{9-a}[$; $1 < a < 9 \Rightarrow]1-\sqrt{9-a};\ 1+\sqrt{9-a}[$; $a \geqslant 9 \Rightarrow$ ечими йўқ; 1д) $a < 0 \Rightarrow]1;\ \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\Big[$, $0 < a \leqslant \frac{1}{4} \Rightarrow \Big]a;\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4a})[\cup]\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4a};\ 1[$, $a = 0$ ёки $a \geqslant 1 \Rightarrow$ ечими йўқ, $\frac{1}{4} < a < 1 \Rightarrow]a;\ 1[$; е) $0 < a < 1 \Rightarrow]\sqrt[4]{a^3},\ 1[\cup]\frac{1}{a};\ +\infty[$; $a > 1 \Rightarrow]0;\ \frac{1}{a}[\cup]1;\sqrt[4]{a^3}[$; 1ж) $0 < a < 1 \Rightarrow]\log_a 2;\ 0[\cup]\log_a 0.5;\ +\infty[$, $a > 1 \Rightarrow]-\infty;\ \log_a 0{,}5[\cup]0;\ \log_a 2[$; 1з) $0 < a < 1 \Rightarrow]a^4;\ a[\cup]\frac{1}{a^2};\ +\infty[$. $a > 1 \Rightarrow]0;\ \frac{1}{a^2}[\cup]a;\ a^4[$. 2а) $0 < a < 1 \Rightarrow]a^{\sqrt{2}};\ a^{-\sqrt{2}}[$; $a > 1 \Rightarrow]0;\ a^{-\sqrt{2}}[\cup]a^{\sqrt{2}};\ +\infty[$; 2в) $0 < a < 1 \Rightarrow]0;\ a^4[\cup]a^2;\ a^{-6}[\setminus\{1\}$; $a > 1 \Rightarrow]a^{-6};\ a^2[\cup]-a^{-1};\ 0[/\{1\}$; 2г) $0 < a < 1 \Rightarrow]a;\ 1[\cup]\frac{1}{a};\ +\infty[$; $a > 1 \Rightarrow]\frac{1}{a};\ 1[$; 2д) $a \leqslant 0$ ёки $a = \frac{1}{2} \Rightarrow$ ечими йўқ; $0 < a < \frac{1}{2} \Rightarrow]\alpha_1;\ \alpha_2[$; $\frac{1}{2} < a < 1 \Rightarrow]\beta_1;\ \alpha_1[\cup]\alpha_2;\ \beta_2[$, бу ерда $\alpha_{1,2} = 1 \mp \sqrt{1-a}$; $\beta_{1,2} = 1 \mp \sqrt{1+a}$; 2е) $0 < a < 1 \Rightarrow]0;\ a^2[\cup]1;\ a^{-3}[$; $a > 1 \Rightarrow]a^{-3};\ 1[\cup]a^2;\ +\infty[$; 1ж) $0 < a < 1 \Rightarrow (a\sqrt[3]{a};\ a[\cup]\sqrt{a};\ a^{-2}[$; $a > 1 \Rightarrow]a^{-2};\ \sqrt{a}]\cup]a;\ \sqrt[3]{a^4}[$; 1з) $0 < |a| < 1 \Rightarrow]0;\ \sqrt[3]{a^2}[\cup]1\ a^{-2}[$; $|a| > 1 \Rightarrow]a^{-2},\ 1[\cup]\sqrt[3]{a^2},\ +\infty[$.

38-топшириқ. Бу топшириқда $k, m, n, l, \ldots \in Z$ дир. 1а) $a \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \left\{\pm \frac{1}{4} \arccos \frac{1}{4}(\sqrt{1+16a^2}-1)+2\pi k,\ a=0 \Rightarrow \left\{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4} n\right\}\right.$; 1б) $|a| \leqslant$ $\leqslant \sqrt{10}$ ва $a \neq 3 \Rightarrow \left\{\operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{10-a^2}}{3-a}+\pi k\right\}$; $a=3 \Rightarrow \{-\operatorname{arctg} 3+\pi n\}$; $|a|>\sqrt{10} \Rightarrow$ ечими йўқ; 1в) $a<\frac{1}{2}$ ёки $a>1 \Rightarrow$ ечими йўқ; $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant$ $\leqslant 1 \Rightarrow \left\{\pm \arccos(4a-3)+\frac{\pi k}{2}\right\}$; 1г) $|a|>2 \Rightarrow \{\pi k\}$; $|a| \leqslant 2 \Rightarrow \left\{\pi k;\ \frac{1}{3} \times\right.$ $\times (-1)^n \arcsin \frac{a}{2}+\frac{\pi n}{3}\Big\}$; 1д) a – рационал $\Rightarrow \{2\pi k\}$; a – иррационал $\Rightarrow \{0\}$; 1е) $a<\frac{1}{4}$ ёки $a>1 \Rightarrow$ ечими йўқ; $\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 1 \Rightarrow \left\{\pm \frac{1}{4} \arccos \frac{8a-5}{8}+\right.$ $+\left.\frac{\pi k}{2}\right\}$; 1ж) $-5 \leqslant a<-1 \Rightarrow \left\{2\pi k \pm \arccos \frac{1}{4}(\sqrt{5-4a}-1)\right\}$; $-1 \leqslant a \leqslant$ $\leqslant \frac{5}{4} \Rightarrow \left\{2\pi k \pm \frac{1}{4} \arccos(-1 \pm \sqrt{5-4a})\right\}$, $a<-5$ ёки $a>\frac{5}{4} \Rightarrow$ ечими йўқ; 1з) $a=2\pi k \Rightarrow R$; $a \neq 2\pi k \Rightarrow \{\pi+2\pi k;\ a+\pi+2\pi k\}$; 1и) $b \neq a$ ва $|a| \leqslant |b-a| \Rightarrow \left\{\frac{1}{2}(-1)^n \arcsin \frac{a}{b-a}+\frac{\pi n}{2}\right\}$, $b=a=0 \Rightarrow R$, қолган ҳолларда ечими йўқ. 2а) $a \neq \frac{\pi}{2}(2k-1) \Rightarrow \{\pi m,\ -a+\pi n\}$; $a=\frac{\pi}{2}(2k-1) \Rightarrow \{\pi n\}$; 2б) $a<-1$ ёки $a \geqslant 3 \Rightarrow \{\pi k\}$; $-1<a<3 \Rightarrow \left\{\pi k;\ \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{a-1}{2}+\pi m\right\}$; 2в) $a \leqslant -3$ ёки $a>1 \Rightarrow \left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\right\}$; $-3<a \leqslant 1 \Rightarrow \left\{\frac{\pi}{2}+\pi k;\right.$ $\left.\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{a+1}{2}+\pi m\right\}$; 2г) $a=\frac{\pi}{2}+\pi k$ ёки $a=\frac{\pi}{4}+\pi n \Rightarrow$ ечими йўқ, қолган ҳолларда $\left\{-\frac{\pi}{4}-a+\pi m\right\}$; 2д) $a=\pi+2\pi k \Rightarrow R$; $a \neq \pi+2\pi k \Rightarrow \left\{-\frac{a}{2}+\right.$ $\left.+(-1)^k \frac{\pi}{6}+\pi k\right\}$; 2е) $a=\frac{\pi}{2}(2k-4n-1) \Rightarrow$ ечими йўқ, $a \neq \frac{\pi}{2}(2k-4n-$ $-1) \Rightarrow \left\{-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}(2k+1)\right\}$; 2ж) $a=\frac{\pi}{2}+\pi n$ ёки $\frac{3\pi}{4}+\pi n<a<\frac{5\pi}{4}+\pi n \Rightarrow$ $\Rightarrow$ ечими йўқ, $\frac{\pi}{4}+\pi n \leqslant a<\frac{\pi}{2}+\pi n$ ёки $\frac{\pi}{2}+\pi n<a<\frac{3\pi}{4}+\pi n \Rightarrow$ $\Rightarrow \{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} a \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 a-1})+\pi k$; 2з) $a=\sqrt{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4}+2\pi k$, $a=-\sqrt{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{5\pi}{4}+2\pi k$, $|a| \neq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4}+\pi k$; 2и) $b=0$ ва $a \in R \Rightarrow$ ечими йўқ; $a=0$ ва $b \neq 0 \Rightarrow \{x \in R, x \neq \frac{\pi}{b} k\}$; $a \neq 0$, $b \in R \Rightarrow \left\{\frac{\pi k}{a},\ k \in Z \text{ ва } k \neq \frac{na}{b}\right\}$;

2к) $a < -\frac{5}{4}$ ёки $a > 5 \Rightarrow \{\pi k\}$; $-\frac{5}{4} \leqslant a < 1 \Rightarrow \{\pi k,\ 2\pi m \pm \pm \arccos \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{4a+5})\}$, $1 < a \leqslant 5 \Rightarrow \{\pi k,\ \pm \arccos \frac{1}{4}(-1 + + \sqrt{4a+5})\}$; 2л) $|a| > \sqrt{2} \Rightarrow$ ечими йўқ; $|a| < \sqrt{2} \Rightarrow \left\{\pm \arccos(3 - - 2\sqrt{3-a^2}) + \pi k\right\}$.

40-топшириқ 1) 141,6 дм²; 2) $2R\sin\alpha$; $2R\sin\alpha$; $2R^2\sin^2\alpha\sin2\alpha$; 3) 9; 12; 15 см; 4) $\frac{9}{2}r^2$; 5) $2Rr + r^2$; 6) 1 см; 17 см; 7) $\frac{1}{2}\sqrt{65}$; 8) 42 см; 9) $7\sqrt{2}$ см; 10) $S_{\max} = 2R^2$ — юзли квадрат; 11) $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$; 12) $\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos\varphi^2}$; 13) $\frac{a}{4}\sqrt{4h^2 + 3a^2}$, 14) $10a^2\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos36°$; 15) $\frac{mh^2}{a^2}$; 16) $2a$; $\frac{a}{2} \pm p\sqrt{2}$; $\frac{1}{4}(a^2 - 8p^2)$.

Кўрсатма: Масала шартидаги қирралар ўрталарини туташтирувчи кесма $\left(\text{узунлиги } \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ ясалиб, унинг кесим текислигига перпендикулярлиги ҳисобга олинади. а) $p = 0 \Rightarrow$ кесим томони $\frac{a}{\sqrt{2}}$ га тенг квадрат, $p = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$ кесим—кесмадан иборат. $0 < p < \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$ кесим — тўғри тўртбурчак; 17) $\frac{1}{24}a^3\sqrt{3\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1}\left(\alpha < \frac{2\pi}{3}\right)$; 18) $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2/4$; 19) $\frac{2V}{\pi}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha$; 20) $S_{\text{ён}} = \pi R^2\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}$, $V = \frac{\pi}{3}R^3\mathrm{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\alpha$.

42-топшириқ. 1) 12, 1232 2) 103, 3) 288 714; 4) 83; 5) 142,857; 6) 12; 8; 3; 2; 7) 13, 63; 9) 1; 9; 17; 10) 12; 24; 36; 54 ёки 52,5; 37,5; 22,5; 13,5; 11) 5103 ёки $\frac{7}{81}$; 12) 1350, 13) 12; 18; 27; 14) $n = 5$.

43-топшириқ. 1) $\frac{4r - 280}{90 - r}$, $70 \leqslant r \leqslant 76\frac{2}{3}$; 2) 1; 3) 300 г; 500 г; 4) 40 т; 60 т; 3) 441 г; 6) 187,5 кг; 7) 15 т; 8) $\frac{1080}{11}$ г/см³, $\frac{27}{11}$ г/см³, $\frac{1350}{11}$ г/см³; 9) 10%; 10) 12%; 11) 1:3; 12) 20:6:3.

44-топшириқ. 1) $30 < V < 40$; 2) 3 км/соат, 6 км/соат, 3) 12 км/соат ёки 18 км/соат; 4) 14 соат ва 17,5 соат; 5) 60 км/соат, 6) 4 м/с, 3 м/с; 7) 1375 км; 8) 10 соат ва 15 соат; 9) $V = 24$ км/соат; 10) $(60d + + \sqrt{3600d^2 + v^2t^2}) : t$.

45 топшириқ. 1) $\frac{a(a^2 - n^2)}{3a^2 - n^2}$; 2) 30 с; 3) 12 с; 4) 18 с; 36 с; 5) 3000 ккал, 7100 ккал; 6) 10 кун, 15 кун; 7) 6 мин, 10 мин; 8) 7 кун, 12 кун;

10) $\frac{1}{n}:\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{x}\right)+\frac{n-1}{n}:\frac{1}{x}=a$ нинг ечими x_0 — иккинчи, $1:\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{x_0}\right)$ эса биринчи кран вақти; 11) $\frac{S}{x}-\frac{S-n}{x+m}=t \Longrightarrow x_0$ — биринчи, x_0+m иккинчи бригада кунлик нормаси; 12) $\frac{a}{x}-\frac{a}{x+c}=b \Longrightarrow x_0$ — олдинги, x_0+c — кейин.и ғилдирак узунлиги.

46-топшириқ. 1) 75%; 2) 22,5 мин; 3) 12,5 грамм; 4) $1\frac{5}{7}$ кун; 5) 16 соат.

47-топшириқ. 1) $\frac{630}{v}-280 \leqslant \frac{630}{v+3} \leqslant \frac{630}{v}-1 \Longleftrightarrow 1{,}5$ м/с $\leqslant v \leqslant$ $\leqslant 42$ м/с; 2) u—қайиқ тезлиги: $\frac{a}{u+v}+\frac{b}{u-v} \leqslant t \Longrightarrow u \geqslant \frac{1}{2t}\Big(a+b+$ $+\sqrt{(a+b)^2-4vt(a-b)+4t^2v^2}\Big)$; 3) $|AB|=a$, биринчи турист t вақтда ўтса: $\frac{t}{2}v_1+\frac{t}{2}v_2=a \Longrightarrow t=\frac{2a}{v_1+v_2}$, иккинчи турист: $T=\frac{a}{2v_1}+\frac{v}{2v_2} \Longrightarrow T-t=$ $=\frac{a(v_1-v_2)^2}{2v_1v_2(v_1+v_2)} \geqslant 0 \Longrightarrow T>t$; 4) x—катта қувур қуввати; икки қувур очиқ бўлиб, учинчиси ёпиқ бўлса $(x+1)$ м³ сув келади; фақат катта қувур очиқ, ҳамда учинчиси очиқ бўлса, у ҳолда $(x-1)$ м³ сув келади, демак:

$$3 \leqslant \frac{10}{x+1}+\frac{6}{x-1} \leqslant 4 \text{ ва } x>1 \Longrightarrow 4 \leqslant x \leqslant \frac{8+\sqrt{61}}{3} \approx 5{,}3.$$

АДАБИЁТ

1. Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, И. Х. Розов. Пособие по математике для поступающих в вузы. „Наука“, М., 1972.

2. В. Г. Болтянский, Н. Я. Виленкин. Симметрия в алгебре, „Наука“, М. , 1967.

3. М. Сахаев. Элементар математика масалалари тўплами, I, II қисмлар. „Ўқитувчи“, Т. , 1970, 1972.

4. М. Сахаев. Алгебра ва элеменгар функциялар, „Ўқитувчи“, Т., 1972.

5. Ж. Икромов. Геометрик исботлаш методлари, „Ўқитувчи“, Т., 1970.

6. Р. К. Отажонов. Геометрик ясаш методлари, „Ўқитувчи“, Т, 1965.

7. В. М. Говоров, П. Г. Дыбов. и др. Сборник конкурсных задач по математике. „Наука“ М. , 1983.

8. М. И. Абрамович, М. Т. Стародубцев. Математика. „Высшая школа“, М. , 1976.

9. П. Т. Дыбов, А. И. Забоев и др. (под редак. Прилепко). Сборник задач по математике, „Высшая школа“, М. , 1982.

10. Л. М. Фридман, Е. Н. Турецкий. Как научиться решать задачи, „Просвещение“, М. , 1984.

11. Э. Н. Куценко, Н. Н. Мельников. Математикадан масалалар ечиш бўйича қўлланма, I қисм, „Ўқитувчи“, Т., 1983

12. Сборник конкурсных задач по математике (под редак. М. И. Сканави), „Высшая школа“, М. 1978.

13. В. М. Браилов, Г. И. Макаренко и др. Сборник экзаменационных задач по элементарной математике, г. Дубна, 1968.

14. Т. Тўлаганов. Масалалар ечиш бўйича практикум (Алгебра), „Ўқитувчи“, Т., 1981.

15. В. В. Зорин, Т. Т. Фискович. Пособие по математике для поступающих в вузы, „Высшая школа“, М., 1980,

16. Пособие по математике для поступающих в вузы (под редак. Г. Н. Яковлева). Главная редакция физико-математической литературы, М. , 1982.

17. Кирувчилар учун қуйидаги институтларнинг 1980 – 1987 йиллардаги методик қўлланмалари, кўргазмаларида келтирилган вариантларидан фойдаланилди: ТошДУ, СамДУ, ТошДПИ, СамДПИ, ЖПИ, ФарДПИ, СамДАСИ, ФарПИ, ТИИИМСХ, ТАДИ, ТошПИ, ТИНХ, ТИТЛП, ТЭИС, ТошИИТ.

МУНДАРИЖА

Сўз боши 3

I БОБ. ПРОГРАММА МАТЕРИАЛЛАРИ ВА УЛАРНИ ТАКРОРЛАШ 5

1-§. Программа материаллари 5
2-§. Программа материалларини такрорлаш 8
Арифметика, алгебра ва анализ асослари (8). Геометрия (145).

II БОБ. МАТЕМАТИКАДАН ИМТИҲОН ҲАҚИДА 237

1-§. Ёзма имтиҳон 238
1. Ёзма имтиҳон ҳақида (238). 2. Аъло баҳога ёзилган ёзма ишдан намуна (239). 3, ЎзССР Олий ўқув юртларида турли йилларда тушган ёзма имтиҳон вариантларидан намуналар (242).
2-§. Оғзаки имтиҳон 254
1. Оғзаки имтиҳон ҳақида (254). 2. Аъло баҳога тайёрланган жавоб намунаси (254). 3. Оғзаки имтиҳон билетларидан намуналар (25') 4. Оғзаки имтиҳон қўшимча саволлари ва масалаларидан намуналар (259). Алгебра ва анализ асослари (259). Геометрия (267).

III. БОБ. МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР ЕЧИШ УСУЛЛАРИ ВА УЛАРГА ДОИР МАШҚЛАР 268

1-§. Алгебраик ифолаларни содлалаштириш 269
2-§. Тенглама ва тенгламалар системаси 279
3-§. Тенгсизлик. Рационал тенгсизликлар 297
4-§ Модуль белгиси қатнашган тенглама ва тенгсизлик 302
5-§. Иррационал тенглама ва тенгсизликлар 308
6-§. Кўрсаткичли ва логарифмик тенглама, тенгламалар системаси ва тенгсизлик 317
7-§. Тригонометрик айниятлар ва тенгламалар 341
8-§. Тригонометрик тенгсизлик ва тенгламалар системаси 364
9-§. Параметрли тенглама ва тенгсизликлар 371
10-§. Геометрия масалалари 386
11-§. Алгебрадан текстли масалалар 398
Жавоблар 417

22. 1
У48

Умирбеков А. У., Шаабзалов Ш. Ш.
Математикани такрорланг: Олий ўқув юрт. кирувчилар учун қўлланма.—Т.: Ўқитувчи, 1989. 440 б.
I. Автордош.

Умирбеков А. У., Шаабзалов Ш. Ш.
Повторим математику: Пособие для поступающих в вузы.

ББК 22. 1

На узбекском языке

АБДУ УМИРБЕКОВИЧ УМИРБЕКОВ
ШОРАСУЛ ШОАЗИЗОВИЧ ШААБЗАЛОВ

ПОВТОРИМ МАТЕМАТИКУ

Пособие для поступающих в вузы

Тошкент „Ўқитувчи" 1989

Редактор *Н. Ғоипов*
Расмлар редактори *С. Соин*
Техредакторлар *Д. Габдурахманова, Т. Скиба*
Корректор *Д. Насриддинова*

ИБ № 4176

Теришга берилди 27. 06. 88. Босишга рухсат этилди 21. 10. 88. Формати 60×90/16. Тип. қоғози № 2. Кегли 10 шриф. Юқори босма усулида босилди. Гарнитура литературная. Шартли б. л. 27,5. Шартли кр.-отт. 27,69. Нашр. л. 23,93. Тиражи 50000. Зак. № 4320. Баҳоси 1 с.

„Ўқитувчи" нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 9—221—84.

Область газеталарининг М. В. Морозов номидаги бирлашган нашриёти ва босмахонаси. Самарқанд ш, У. Турсунов кўчаси, 82. 1989.

Объединенное издательство и типография областных газет имени М. В. Морозова. Самарканд, ул. У. Турсунова, 82. 1989