# 产业升级、宏观政策与区域一体化的溢出效应

——基于国际贸易网络的视角

黄蒙

*2019-11-13*

## 目录

# 1 导言

## 1.1 研究背景

## 1.2 文献综述

## 1.3 创新之处

1. 设法将投入产出关系融入 EK 模型。
2. 观察各种冲击对贸易网络结构的影响。

## 1.4 全文结构

# 2 理论模型

加入多部门投入产出关系[1] 的 EK 模型 (Eaton and Kortum, 2002)。所有部门的生产都需要劳动力和其他部门的中间产品。投入系数通过投入产出表获得。

## 2.1 偏好：D-S Lite 型

设各国代表性消费者的偏好相同，以 C-D 形式消费 $M$ 个部门的产品，形如：

$$U \equiv \prod_{s=1}^{M} \left\{ \left[ \int_0^1 \left(Q^s(\omega)\right)^{\frac{\sigma^s-1}{\sigma^s}} d\omega \right]^{\frac{\sigma^s}{\sigma^s-1}} \right\}^{\alpha^s} \text{，其中} \sum_{s=1}^{M} \alpha^s = 1$$

则每个国家的最优化问题都是：

$$\begin{cases} \max\limits_{Q^s(\omega)} \prod\limits_{s=1}^{M} \left\{ \left[ \int_0^1 \left(Q^s(\omega)\right)^{\frac{\sigma^s-1}{\sigma^s}} d\omega \right]^{\frac{\sigma^s}{\sigma^s-1}} \right\}^{\alpha^s} \\ \text{s.t.} \sum\limits_{s=1}^{M} \int_0^1 P^s(\omega) Q^s(\omega) d\omega = I \end{cases}$$

[1]投入产出表中的数十个产业，各产业技术不同。但直观上，作为较大的国家，要素密集度相似的产业应该有相似的技术水平。

均衡时可解得[2]

$$Q^s(\omega)=\frac{\alpha^s I}{p^s}\left[\frac{p^s}{P^s(\omega)}\right]^{\sigma^s}$$

其中价格指数

$$p^s=\left[\int_0^1\left(P^s(\omega)\right)^{1-\sigma^s}d\omega\right]^{\frac{1}{1-\sigma^s}}$$

数量指数

$$q^s=\left[\int_0^1\left(Q^s(\omega)\right)^{\frac{\sigma^s-1}{\sigma^s}}d\omega\right]^{\frac{\sigma^s}{\sigma^s-1}}$$

且有

$$p^s q^s=\int_0^1 P^s(\omega)Q^s(\omega)d\omega=\alpha^s I$$

## 2.2 生产函数：规模收益不变

设生产 $s$ 部门某种产品 $\omega$ 的生产函数为：

$$y^s(\omega)\equiv\frac{z^s(\omega)}{(\beta^s)^{\beta^s}(1-\beta^s)^{1-\beta^s}}L^{\beta^s}\prod_{t=1}^{M}\left\{\left[\int_0^1\left(Q^t(\omega)\right)^{\frac{\sigma^t-1}{\sigma^t}}d\omega\right]^{\frac{\sigma^t}{\sigma^t-1}}\right\}^{\beta^{st}}$$

其中 $\sum_{t=1}^{M}\beta^{st}=1-\beta^s$

可以证明，$s$ 部门单位投入的成本为[3]

$$c^s=w^{\beta^s}\prod_{t=1}^{M}(p^t)^{\beta^{st}} \tag{1}$$

## 2.3 市场结构：完全竞争

在一国内部，企业获得零利润，产品价格等于平均成本。在国家之间，货物的跨境存在冰山型贸易成本，表示为：

$$\begin{cases} d_{ii}=1 \\ d_{ji}>1,\forall j\neq i \end{cases}$$

[2]详见附录 A.1.1。

[3]详见附录 A.1.2。

则 $i$ 国 $s$ 部门的产品 $\omega$ 在 $j$ 国的价格为：

$$P_{ji}^s(\omega) = P_{ii}^s(\omega)d_{ji} = \frac{c_i^s}{z_i^s(\omega)}d_{ji}$$

$j$ 国在全世界范围内挑选最低价，$s$ 部门 $\omega$ 产品在 $j$ 国的最终价格为：

$$P_j(\omega) = \min\left\{P_{ji}^s(\omega); i = 1, \cdots, N\right\}$$

## 2.4 技术：Fréchet 分布

设 $i$ 国 $s$ 部门的技术参数 $z_i^s(\omega)$ 为一个随机变量 $Z_i^s$，服从 Fréchet 分布，即 $Z_i^s \sim F_i^s(z) \equiv \exp(-T_i^s z^{-\theta^s})$。可得价格的分布函数：

$$P_{ji}^s(\omega) \sim G_{ji}^s(p) = 1 - \exp\left[-T_i^s(c_i^s d_{ji})^{-\theta^s} p^{\theta^s}\right]$$

和

$$P_j^s(\omega) \sim G_j^s(p) = 1 - \exp\left\{-\left[\sum_1^N T_i^s(c_i^s d_{ni})^{-\theta^s}\right] p^{\theta^s}\right\}$$

其中，$G_j^s(p)$ 可以改写为

$$\begin{cases} G_j^s(p) = 1 - \exp(-\Phi_j^s p^{\theta^s}) \\ \Phi_j^s \equiv \sum_1^N T_i^s(c_i^s d_{ji})^{-\theta^s} \end{cases}$$

继而可证价格指数满足

$$p_j^s = \gamma^s(\Phi_j^s)^{-\frac{1}{\theta^s}} \tag{2}$$

其中 $\gamma^s \equiv \left[\Gamma(\frac{\theta^s+1-\sigma^s}{\theta^s})\right]^{\frac{1}{1-\sigma^s}} = \text{constant}$

## 2.5 外生工资下的均衡

$j$ 国从 $i$ 国进口 $s$ 部门产品的支出占 $j$ 国 $s$ 部门产品总支出的比例 $\pi_{ji}^s$ 满足

$$\pi_{ji}^s \equiv \frac{X_{ji}^s}{X_j^s} = \frac{T_i^s\left(c_i^s d_{ji}\right)^{-\theta^s}}{\Phi_j^s}$$

将(2)代入，得

$$\pi_{ji}^s = T_i^s \left( \frac{\gamma^s d_{ji} c_i^s}{p_j^s} \right)^{-\theta^s} \tag{3}$$

因 $\sum_{i=1}^N \pi_{ji}^s = 1$，代入(3)可推出

$$p_j^s = \gamma^s \left[ \sum_{i=1}^N T_i^s \left( d_{ji} c_i^s \right)^{-\theta^s} \right]^{-1/\theta^s}$$

将(1)代入该式，得

$$p_j^s = \gamma^s \left\{ \sum_{i=1}^N T_i^s \left[ d_{ji} w_i^{\beta_i^s} \prod_{t=1}^M (p_i^t)^{\beta_i^{st}} \right]^{-\theta^s} \right\}^{-1/\theta^s} \tag{4}$$

若 $N$ 个工资变量均为外生变量，则(4)包含 $N \times M$ 个方程和相同数量的未知数，可以把各国的价格指数完全解出。但要使工资内生化，还需要额外 $N$ 个方程。

### 2.6 工资内生化：贸易平衡条件

给定各国规模 $L$，则有 $N$ 个贸易平衡方程：

$$\begin{aligned} w_i L_i &= \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^M \pi_{ji}^s \alpha_j^s w_j L_j \\ &= \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{s=1}^M T_i^s \left[ \frac{\gamma^s d_{ji} w_i^{\beta_i^s} \prod_{t=1}^M (p_i^t)^{\beta_i^{st}}}{p_j^s} \right]^{-\theta^s} \alpha_j^s \right\} w_j L_j \end{aligned} \tag{5}$$

(5)与(4)联立，理论上即可获得模型完整的解。

### 2.7 对数线性化

为了得到解析解，对方程组(4)、(5)进行对数线性化，求解外生冲击发生后，各变量相对于均衡值的变动比例。为此，令 $\hat{x} \equiv dx/x$，表示变量 $x$ 对外生冲击的反应。

原方程组经过对数线性化后成为以下方程组[4] ：

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{M}\pi_{ji}^{s}\beta_{i}^{st}\hat{p}_{i}^{t}-\hat{p}_{j}^{s}+\sum_{i=1}^{N}\pi_{ji}^{s}\beta_{i}^{s}\hat{w}_{i}=\frac{1}{\theta^{s}}\sum_{i=1}^{N}\pi_{ji}^{s}\hat{T}_{i}^{s}-\sum_{i=1}^{N}\pi_{ji}^{s}\hat{d}_{ji} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&\theta^{s}\sum_{t=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{M}\pi_{ji}^{s}\alpha_{j}^{s}w_{j}L_{j}\beta_{i}^{st}\hat{p}_{i}^{t}-\theta^{s}\sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{M}\pi_{ji}^{s}\alpha_{j}^{s}w_{j}L_{j}\hat{p}_{j}^{s}\\&+(w_{i}L_{i}+\theta^{s}\sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{M}\pi_{ji}^{s}\alpha_{j}^{s}w_{j}L_{j}\beta_{i}^{s})\hat{w}_{i}-\sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{M}\pi_{ji}^{s}\alpha_{j}^{s}w_{j}L_{j}\hat{w}_{j}\\&=w_{i}L_{i}\hat{T}_{i}^{s}-\theta^{s}\sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{M}\pi_{ji}^{s}\alpha_{j}^{s}w_{j}L_{j}\hat{d}_{ji}-w_{i}L_{i}\hat{L}_{i}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{M}\pi_{ji}^{s}\alpha_{j}^{s}w_{j}L_{j}\hat{L}_{j}\end{aligned} \tag{7}$$

## 2.8 求解线性方程组

于是，我们可以将对数线性化的方程组(6)、(7)写为 $AX=B$ 的形式，并求得 $X=A^{-1}B$。其中：

1. $X$ 为 $(M\times N+N)$ 维向量：

$$X\equiv(\hat{p}_{1}^{1},\hat{p}_{1}^{2},\cdots,\hat{p}_{1}^{M},\hat{p}_{2}^{1},\cdots,\hat{p}_{2}^{M},\cdots,\hat{p}_{N}^{1},\cdots,\hat{p}_{N}^{M},\hat{w}_{1},\hat{w}_{2},\cdots,\hat{w}_{N})'$$

2. $B$ 也是 $(M\times N+N)$ 维向量：

$$B\equiv\left(\hat{b}_{1}^{1},\hat{b}_{1}^{2},\cdots,\hat{b}_{1}^{M},\hat{b}_{2}^{1},\cdots,\hat{b}_{2}^{M},\cdots,\hat{b}_{N}^{1},\cdots,\hat{b}_{N}^{M},\hat{b}_{1},\hat{b}_{2},\cdots,\hat{b}_{N}\right)'$$

其中

$$\begin{cases}\hat{b}_{j}^{s}\equiv\dfrac{1}{\theta^{s}}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\pi_{ji}^{s}\hat{T}_{i}^{s}-\sum_{i=1}^{N}\pi_{ji}^{s}\hat{d}_{ji}\\ \hat{b}_{i}\equiv w_{i}L_{i}\hat{T}_{i}^{s}-\theta^{s}\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{M}\pi_{ji}^{s}\alpha_{j}^{s}w_{j}L_{j}\hat{d}_{ji}-w_{i}L_{i}\hat{L}_{i}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{M}\pi_{ji}^{s}\alpha_{j}^{s}w_{j}L_{j}\hat{L}_{j}\end{cases}$$

3. 系数矩阵 $A$ 为 $(M\times N+N)$ 阶方阵[5]

[4]详见附录 A.1.3。

[5]详见附录 A.1.4。

$A =$

$$\begin{pmatrix} t_{1111}-1 & \cdots & t_{111M} & \cdots & t_{11N1} & \cdots & t_{11NM} & t_{111} & \cdots & t_{11N} \\ t_{1211} & \cdots & t_{121M} & \cdots & t_{12N1} & \cdots & t_{12NM} & t_{121} & \cdots & t_{12N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{NM11} & \cdots & t_{NM1M} & \cdots & t_{NMN1} & \cdots & t_{NMNM}-1 & t_{NM1} & \cdots & t_{NMN} \\ l_{11}-m_{111} & \cdots & l_{1M}-m_{11M} & \cdots & -m_{1N1} & \cdots & -m_{1NM} & l_1-m11 & \cdots & -m_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -m_{N11} & \cdots & -m_{N1M} & \cdots & l_{N1}-m_{NN1} & \cdots & l_{NM}-m_{NNM} & -m_{N1} & \cdots & l_N-m_{NN} \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{cases} t_{jsit} = \pi_{ji}^s \beta_i^{st} \\ t_{jsi} = \pi_{ji}^s \beta_i^s \\ l_{it} = \theta^s \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=1}^{M} \pi_{ji}^s \alpha_j^s w_j L_j \beta_i^{st} \\ l_i = w_i L_i + \theta^s \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=1}^{M} \pi_{ji}^s \alpha_j^s w_j L_j \beta_i^s \\ m_{ijs} = \theta^s \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=1}^{M} \pi_{ji}^s \alpha_j^s w_j L_j \\ m_{ij} = \sum_{s=1}^{M} \pi_{ji}^s \alpha_j^s w_j L_j \end{cases}$$

由 $X = A^{-1}B$，便可以研究三种外生冲击对内生变量的影响。这三种外生冲击分别是技术 $\hat{T}_i^s$、贸易成本 $\hat{d}_{ji}$ 和国家规模 $\hat{L}_i$。当然，根据具体需要，也可以将 $\alpha$、$\beta$ 作为外生变量，研究偏好和投入产出关系变化对内生变量的影响。

# 3 参数估计和反事实模拟

## 3.1 参数估计

## 3.2 反事实模拟：产业缺失对福利的影响

通过实证研究论证德国、日本 $T^s$ 高的部门明显偏少。如果德国技术水平较高的部门像法国一样齐全，会发生什么。

日本相对于法德。

# 4 国际贸易网络

## 4.1 国际贸易网络演变的特征事实

## 4.2 理论推导

影响国际贸易网络结构的三要素：技术 $T^s$、规模 $\bar{L}$、地理 $d_{ij}$

## 4.3 贸易网络的国际政治经济学

社会网络分析（SNA）方法

# 5 产业升级（技术）的溢出效应

产业升级的本质是一个部门的技术进步，$T_i^B \uparrow$；产业革命中抢占新产业是在新产业中本国的 $T_i^B$ 一枝独秀得大

### 5.1 福利

### 5.2 贸易网络

### 5.3 小结

- 新一轮科技革命和产业革命方兴未艾
- 新兴国家实现“弯道超车”的绝佳机会
- 抢占新兴产业具有最重大的经济意义和国际政治意义

## 6 宏观政策（规模）的溢出效应

在全球有效需求不足的大背景下，刺激性宏观政策可以大致视为劳动力增加

进一步的研究可以考虑货币政策和财政政策的区别

### 6.1 福利

德国保守的经济政策造成欧洲国家增长率的分化。美中刺激经济，拉动德国出口。德国出口扩张的程度，大于消费扩张的程度。因此，产业链处于德国上游的国家（向德国出口中间产品）被拉动，经济增长率比较高；而主要向德国出口最终消费品的国家，受到的拉动作用比较弱，经济增长率就比较低。——在欧盟内部，这有政治影响。

### 6.2 对产业的刺激

欧盟近年启动了欧洲防务基金项目，该项目资金雄厚，有望在数年后达到相当大的规模。该项目鼓励并资助欧盟国家展开军备研发上的合作，对当前普遍缺乏军费的欧洲国家具有相当大的吸引力。http://kns.cnki.net//KXReader/Detail?TIMESTAMP=637089024206192500&DBCODE=

CCND&TABLEName=CCNDPREP&FileName=JFJB201911070113&RESULT=1&SIGN=rV4DA34x5hk0IYrp%2btItZKBKz44%3d

### 6.3 贸易网络

## 7 区域一体化（地理）的溢出效应

### 7.1 福利

### 7.2 贸易网络

## 8 结论

## 附录

### A.1 模型推导

#### A.1.1 偏好

进行两阶段最优化。

1. 第一阶段最优化

令数量指数 $q^s \equiv \left[\int_0^1 \left(Q^s(\omega)\right)^{\frac{\sigma^s-1}{\sigma^s}} d\omega\right]^{\frac{\sigma^s}{\sigma^s-1}}$，价格指数 $p^s \equiv \int_0^1 P^s(\omega)Q^s(\omega)d\omega/q^s$，则第一阶段最优化问题为：

$$\begin{cases} \max\limits_{q^s} \prod\limits_{s=1}^{M} (q^s)^{\alpha^s} \\ \text{s.t.} \sum\limits_{s=1}^{M} p^s q^s = I \end{cases}$$

显然，这是一个 C-D 型偏好最优化问题。于是有 $p^s q^s = \alpha^s I$

2. 第二阶段最优化

$$\begin{cases} \max\limits_{Q^s(\omega)} \left[\int_0^1 \left(Q^s(\omega)\right)^{\frac{\sigma^s-1}{\sigma^s}} d\omega\right]^{\frac{\sigma^s}{\sigma^s-1}} \\ \text{s.t.} \int_0^1 P^s(\omega)Q^s(\omega)d\omega = \alpha^s I \end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases} p^s = \left[\int_0^1 \left(P^s(\omega)\right)^{1-\sigma^s} d\omega\right]^{\frac{1}{1-\sigma^s}} \\ Q^s(\omega) = \dfrac{\alpha^s I}{p^s}\left[\dfrac{p^s}{P^s(\omega)}\right]^{\sigma^s} \end{cases}$$

### A.1.2 生产

生产 $s$ 部门某种产品 $\omega$ 的成本最小化问题为

$$\begin{cases} \min\limits_{L,Q^t(\omega)} wL + \sum\limits_{t=1}^{M}\int_0^1 P^t(\omega)Q^t(\omega)d\omega \\ \text{s.t. } \dfrac{z^s(\omega)}{(\beta^s)^{\beta^s}\prod_{t=1}^{2}(\beta^{st})^{\beta^{st}}} L^{\beta^s}\prod\limits_{t=1}^{M}\left\{\left[\int_0^1 \left(Q^t(\omega)\right)^{\frac{\sigma^t-1}{\sigma^t}} d\omega\right]^{\frac{\sigma^t}{\sigma^t-1}}\right\}^{\beta^{st}} \end{cases}$$

为便于求解，将其对偶化为产量最大化问题，并进行三个换元

- 令效率指数 $k^s(\omega) \equiv \frac{z^s(\omega)}{(\beta^s)^{\beta^s}\prod_{t=1}^{2}(\beta^{st})^{\beta^{st}}}$，与 $L, K^t$ 无关
- 令 $t$ 部门中间品的数量指数 $K^t \equiv \left[\int_0^1 \left(Q^t(\omega)\right)^{\frac{\sigma^t-1}{\sigma^t}} d\omega\right]^{\frac{\sigma^t}{\sigma^t-1}}$
- 令 $t$ 部门中间品的价格指数 $p^t \equiv \left[\int_0^1 \left(P^t(\omega)\right)^{1-\sigma^t} d\omega\right]^{\frac{1}{1-\sigma^t}}$，且有 $p^tK^t = \int_0^1 P^t(\omega)Q^t(\omega)d\omega$

于是最优化问题变为

$$\begin{cases} \max\limits_{L,K^t} k^s(\omega)L^{\beta^s}\prod\limits_{t=1}^{M}(K^t)^{\beta^{st}} \\ \text{s.t. } wL + \sum\limits_{t=1}^{M} p^tK^t = C \end{cases}$$

易知均衡时有 $L=\beta^s C/w, K^t=\beta^{st}C/p^t$，因此生产 $s$ 部门 $\omega$ 产品的单价为

$$\frac{C}{y^s(\omega)}=\frac{w^{\beta^s}\prod_{t=1}^{M}(p^t)^{\beta^{st}}}{z^s(\omega)}$$

单价与效率 $z^s(\omega)$ 成反比，与单位投入的成本成正比，故 $s$ 部门单位投入的成本为

$$c^s=w^{\beta^s}\prod_{t=1}^{M}(p^t)^{\beta^{st}}$$

### A.1.3 对数线性化

原方程组中包含两类方程，(4)代表的一类为 $\sum_{i=1}^{N}\pi_{ji}^s=1$，(5)代表的一类为 $w_iL_i=\sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{M}\pi_{ji}^s\alpha_j^s w_jL_j$。

第一类方程可以化为

$$\sum_{i=1}^{N}\pi_{ji}^s\hat{\pi}_{ji}^s=0$$

而

$$\hat{\pi}_{ji}^s=\hat{T}_i^s+\theta^s\left[\hat{p}_j^s-\hat{d}_{ji}-\beta_i^s\hat{w}_i-\sum_{t=1}^{M}\beta_i^{st}\hat{p}_i^t\right]$$

代入上式得

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{M}\pi_{ji}^s\beta_i^{st}\hat{p}_i^t-\hat{p}_j^s+\sum_{i=1}^{N}\pi_{ji}^s\beta_i^s\hat{w}_i=\frac{1}{\theta^s}\sum_{i=1}^{N}\pi_{ji}^s\hat{T}_i^s-\sum_{i=1}^{N}\pi_{ji}^s\hat{d}_{ji}$$

第二类方程可以化为

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{M}\frac{\pi_{ji}^s\alpha_j^s w_jL_j}{w_iL_i}(\hat{\pi}_{ji}^s+\hat{w}_j+\hat{L}_j)=\hat{w}_i+\hat{L}_i$$

将 $\hat{\pi}_{ji}^s$ 的表达式代入得

$$\begin{aligned}
&\theta^s\sum_{t=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{M}\pi_{ji}^s\alpha_j^s w_jL_j\beta_i^{st}\hat{p}_i^t-\theta^s\sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{M}\pi_{ji}^s\alpha_j^s w_jL_j\hat{p}_j^s\\
&+(w_iL_i+\theta^s\sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{M}\pi_{ji}^s\alpha_j^s w_jL_j\beta_i^s)\hat{w}_i-\sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{M}\pi_{ji}^s\alpha_j^s w_jL_j\hat{w}_j\\
&=w_iL_i\hat{T}_i^s-\theta^s\sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{M}\pi_{ji}^s\alpha_j^s w_jL_j\hat{d}_{ji}-w_iL_i\hat{L}_i+\sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{M}\pi_{ji}^s\alpha_j^s w_jL_j\hat{L}_j
\end{aligned}$$

### A.1.4 矩阵分解

为了便于表示，对 $A$ 进行拆分

$$A \equiv T + L + M$$

其中，矩阵 $T$ 代表前 $M \times N$ 个方程的系数，$L_1$ 和 $L_2$ 代表最后 $N$ 个方程的系数。

1. $T$

$$T = \begin{pmatrix} t_{1111} & t_{1112} & \cdots & t_{11NM} & t_{111} & \cdots & t_{11N} \\ t_{1211} & t_{1212} & \cdots & t_{12NM} & t_{121} & \cdots & t_{12N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ t_{NM11} & t_{NM12} & \cdots & t_{NMNM} & t_{NM1} & \cdots & t_{NMN} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

其中[6]

$$t_{jsit} = \pi^s_{ji}\beta^{st}_i$$
$$t_{jsi} = \pi^s_{ji}\beta^s_i$$

也就是说，$A_1$ 的前 $M \times N$ 行为

$$(\pi^s_{j1}\beta^{s1}_1, \cdots, \pi^s_{j1}\beta^{sM}_1, \cdots, \pi^s_{jj}\beta^{ss}_j - 1, \cdots, \pi^s_{jN}\beta^{s1}_N, \cdots, \pi^s_{jN}\beta^{sM}_N, \pi^s_{j1}\beta^s_1, \cdots, \pi^s_{jN}\beta^s_N)$$

[6]编程时可以用四重循环填充这个矩阵。

一行内依次遍历 $t$ 和 $i$，行间依次遍历 $s$ 和 $j$；当 $(j,s)=(i,t)$ 时，矩阵元素要减一。最后 $N$ 行为零行。

2. $L$

$$
L = \begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
l_{11} & \cdots & l_{1M} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & l_1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & l_{N1} & \cdots & l_{NM} & 0 & \cdots & l_N
\end{pmatrix}
$$

其中

$$
l_{it} = \theta^s \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=1}^{M} \pi_{ji}^s \alpha_j^s w_j L_j \beta_i^{st}
$$

$$
l_i = w_i L_i + \theta^s \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=1}^{M} \pi_{ji}^s \alpha_j^s w_j L_j \beta_i^s
$$

3. $M$

$$
M = -\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
m_{111} & m_{112} & \cdots & m_{1NM} & m_{11} & \cdots & m_{1N} \\
m_{211} & m_{212} & \cdots & m_{2NM} & m_{21} & \cdots & m_{2N} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
m_{N11} & m_{N12} & \cdots & m_{NNM} & m_{N1} & \cdots & m_{NN}
\end{pmatrix}
$$

其中

$$
m_{ijs} = \theta^s \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=1}^{M} \pi_{ji}^s \alpha_j^s w_j L_j
$$

$$
m_{ij} = \sum_{s=1}^{M} \pi_{ji}^s \alpha_j^s w_j L_j
$$

将 $T, L, M$ 三部分加总，即可得 $A$.

### A.2 数据和代码

## References


Eaton, J. and Kortum, S. (2002). Technology, geography, and trade. *Econometrica*, 70(5):1741–1779.